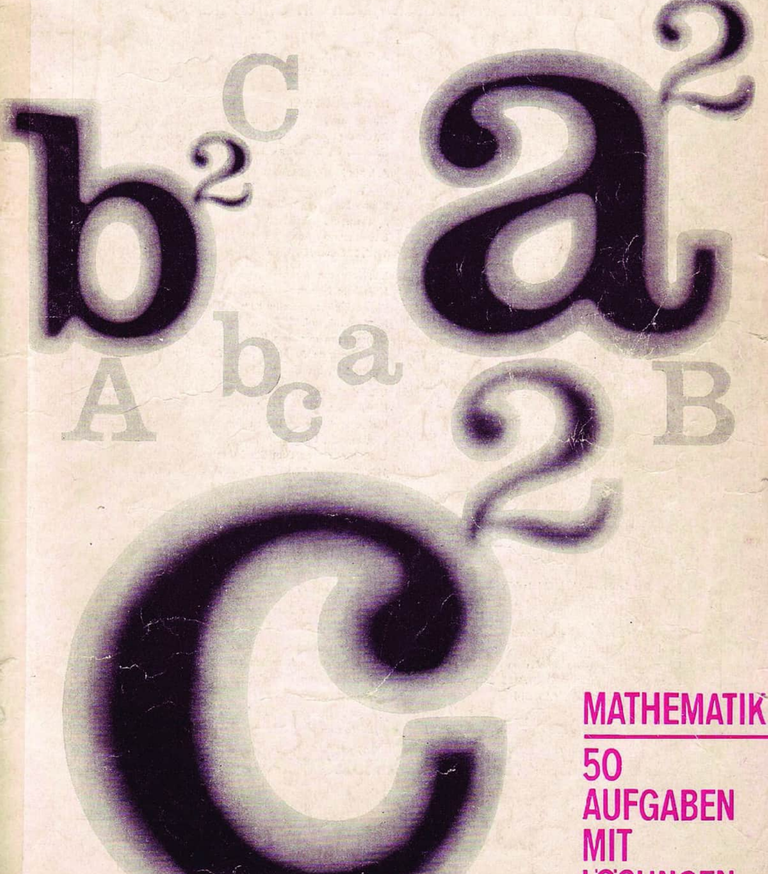
wissenschaft und fortschritt



MATHEMATIK

50 AUFGABEN MIT LÖSUNGEN

Aufgabe 1 ERICH SCHIFFNER, Roßleben

Als „magisches Quadrat" bezeichnet man eine quadratische Anordnung von Zahlen, bei der die Summe aller in einer Zeile bzw. Spalte (oft auch Diagonalen) stehenden Zahlen konstant ist.
Manche magischen Quadrate sind zentralsymmetrisch, d. h., die Summe je zweier zum Mittelpunkt des Quadrats symmetrisch gelegener Zahlen ist konstant. Man beweise, daß in diesem Fall zwei Zeilen bzw. Spalten, die zu einer Mittellinie des Quadrats symmetrisch liegen, die gleiche Quadratsumme ergeben.

Beispiele:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

1. Lösung (Erich Schiffner):

Es seien

$$a_1;\ a_2;\ a_3 \ldots;\ a_n \quad \text{und} \quad b_1;\ b_2;\ b_3;\ \ldots;\ b_n$$

die beiden gewählten Zeilen (bzw. Spalten). Dann gilt

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = s \tag{1}$$

und

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = s. \tag{2}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} a_1 + b_n &= t \\ a_2 + b_{n-1} &= t \\ a_3 + b_{n-2} &= t \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_n + b_1 &= t \end{aligned} \tag{3}$$

oder

$$\begin{aligned} a_1 &= t - b_n \\ a_2 &= t - b_{n-1} \\ a_3 &= t - b_{n-2} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_n &= t - b_1. \end{aligned} \tag{4}$$

Addiert man die Gleichungen (3), so ergibt sich wegen (1) und (2)

$$s + s = n \cdot t = 2s. \tag{5}$$

Quadriert man die Gleichungen (4), so folgt

$$\begin{aligned} a_1^2 &= (t - b_n)^2 &&= t^2 - 2tb_n + b_n^2 \\ a_2^2 &= (t - b_{n-1})^2 &&= t^2 - 2tb_{n-1} + b_{n-1}^2 \\ a_3^2 &= (t - b_{n-2})^2 &&= t^2 - 2tb_{n-2} + b_{n-2}^2 \\ &\vdots && \vdots \\ a_n^2 &= (t - b_1)^2 &&= t^2 - 2tb_1 + b_1^2, \end{aligned} \tag{6}$$

und durch Addition erhält man daraus

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 &= n \cdot t^2 - 2t(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n) \\ &\quad + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots + b_n^2 \\ &= nt^2 - 2ts + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots + b_n^2 \\ &= t(nt - 2s) + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots + b_n^2. \end{aligned}$$

Wegen (5) ist aber $nt - 2s = 0$, und damit ist die Behauptung bewiesen.

2. Lösung (Reinhard Neumann):

Symbolische Darstellung des magischen Quadrates:

$$\begin{matrix} a_{11};\ a_{12};\ \ldots\ a_{1i};\ \ldots\ a_{1n} \\ a_{21};\ a_{22};\ \ldots\ a_{2i};\ \ldots\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{i1};\ a_{i2};\ \ldots\ a_{ii};\ \ldots\ a_{in} \\ \vdots \\ a_{n1};\ a_{n2};\ \ldots\ a_{ni};\ \ldots\ a_{nn} \end{matrix}$$

Die Summe einer Zeile (bzw. Spalte) sei s: $s = \sum_{m=1}^{n} a_{im}$.

Die Summe zweier symmetrisch zum Mittelpunkt liegender Zahlen sei d: $d = a_{im} + a_{(n+1-i)(n+1-m)}$.

Es gilt außerdem

$$nd = \sum_m (a_{im} + a_{(n+1-i)(n+1-m)}) = 2s,$$

also $nd = 2s$.
Es ist zu beweisen, daß

$$\sum_{m=1}^{n} a_{im}^2 = \sum_{m=1}^{n} a_{(n+1-i)(n+1-m)}^2$$

ist. Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n} a_{(n+1-i)(n+1-m)}^2 &= \sum_{m=1}^{n} (d - a_{im})^2 \\ &= \sum_{m=1}^{n} (d^2 - 2da_{im} + a_{im}^2) \\ &= \sum_{m=1}^{n} d(d - 2a_{im}) + \sum_{m=1}^{n} a_{im}^2 \\ &= d\left[\sum_{m=1}^{n} d - 2\sum_{m=1}^{n} a_{im}\right] + \sum_{m=1}^{n} a_{im}^2 \\ &= d(nd - 2s) + \sum_{m=1}^{n} a_{im}^2 \\ &= d \cdot 0 + \sum_{m=1}^{n} a_{im}^2. \end{aligned}$$

3. Lösung (Gerhard Franz):

Zwei Spalten (Zeilen), die zur Mittellinie symmetrisch liegen, müssen nach Voraussetzung die folgende Form haben:

$$\begin{matrix} x_1 & A - x_n \\ x_2 & A - x_{n-1} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & A - x_2 \\ x_n & A - x_1 \end{matrix}$$

Die Quadratsumme der rechts stehenden Spalte ist

$$\sum_{m=1}^{n}(A-x_m)^2 = \sum_{m=1}^{n}(A^2 - 2x_m A + x_m^2)$$

$$= n\cdot A^2 - 2A\sum_{m=1}^{n} x_m + \sum_{m=1}^{n} x_m^2$$

$$= \sum_{m=1}^{n} x_m^2 + R.$$

Nun ist aber

$$R = n\cdot A^2 - 2A\sum_{m=1}^{n} x_m = n\cdot A^2 - 2A\sum_{m=1}^{n}(A-x_m)$$

(wegen der Konstanz der Spaltensumme)

$$= n\cdot A^2 - 2n\cdot A^2 + 2A\sum_{m=1}^{n} x_m = -n\cdot A^2 + 2A\sum_{m=1}^{n} x_m$$
$$= -R.$$

Aus $R = -R$ folgt $R = 0$, d. h.

$$\sum_{m=1}^{n}(A-x_m)^2 = \sum_{m=1}^{n} x_m^2.$$

Aufgabe 2 Dr. GERHARD HESSE, Dresden

Ein Quadrat ist in $3\cdot 3 = 9$ quadratische Felder geteilt. In diese 9 Felder sind 9 verschiedene Zahlen aus der Folge 1; 2; 3; ...; 30 so einzutragen, daß das Produkt aus den drei Zahlen einer jeden Zeile und einer jeden Spalte stets gleich 270 ist.

Lösung (Dr. Gerhard Hesse):

Es wird zunächst untersucht, welche von den Zahlen 1; 2; 3; ...; 30 für die Lösung in Frage kommen. Zu diesem Zweck wird das Produkt 270 in Primfaktoren zerlegt:

$$270 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5 = 2^1\cdot 3^3\cdot 5^1.$$

Die einzusetzenden Zahlen dürfen demnach nur die Faktoren 2, 3, 3^2, 3^3 und 5 enthalten. Das sind die 10 Zahlen

$$2;\ 3;\ 5;\ 6 = 2\cdot 3;\ 9 = 3^2;\ 10 = 2\cdot 5;\ 15 = 3\cdot 5;$$
$$18 = 2\cdot 3^2;\ 27 = 3^3;\ 30 = 2\cdot 3\cdot 5$$

und außerdem die Zahl 1. Von diesen 11 Zahlen müssen 2 ausgeschieden werden. Das Produkt aller 11 Zahlen ist $2^5\cdot 3^{11}\cdot 5^4$, während das Produkt der 9 in das Quadrat einzusetzenden Zahlen $270^3 = 2^3\cdot 3^9\cdot 5^3$ ergibt. Das Produkt aller 11 Zahlen enthält also gegenüber dem Produkt der 9 Zahlen im Quadrat den Faktor $2^2\cdot 3^2\cdot 5 = 180$ zuviel. Das Produkt der beiden auszuscheidenden Zahlen ist demnach 180. Es sind zwei Fälle möglich:

$$180 = 6\cdot 30 = 10\cdot 18.$$

Nunmehr prüfen wir, welche Anordnungsmöglichkeiten für die Primfaktoren bestehen. Da jeder der Primfaktoren 2, 3 und 5 in jeder Zeile und in jeder Spalte in derselben Anzahl auftreten muß, wenn die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sein sollen, sind folgende Anordnungen möglich:

I)	II)	III)	IV)	V)	VI)
x . .	x . .	. x .	. x .	. . x	. . x
. x .	. . x	x . .	. . x	x . .	. x .
. . x	. x .	. . x	x . .	. x .	x . .

Die einzelnen Anordnungen können ineinander übergeführt werden

a) durch Vertauschung von Spalten,
b) durch Vertauschung von Zeilen;

z. B. wird II in IV durch Vertauschen der 1. und der 2. Spalte oder durch Vertauschen der 1. und der 3. Zeile übergeführt. Wegen dieser Gleichwertigkeit der Anordnungen ist es gleichgültig, in welches Feld man die 1 einsetzt. Nimmt man das linke obere Feld, so entfallen für das Einsetzen der übrigen Faktoren die Schemata I und II. Da für die Aufteilung der 5 Primfaktoren 2, 3, 3, 3, 5 nur 4 Schemata (III bis VI) zur Verfügung stehen, faßt man 2 Faktoren zusammen: $3\cdot 3 = 9$. Man verteilt also 2, 3, 5, 9. Dabei muß man beachten, daß die Faktoren 5 und 9 so verteilt werden müssen, daß sie nicht in einem gemeinsamen Feld zusammentreffen; denn das Produkt $5\cdot 9 = 45$ liegt außerhalb der zugelassenen Zahlen. Also setzen wir die Zahlen 5 und 9 nach Schema III und VI (oder IV und V) ein:

1	5	9	
5	9	.	Teillösung *x*)
9	.	5;	

nunmehr sind noch die Faktoren 2 und 3 nach Schema IV und V einzusetzen. Man erhält:

1	5 · 2	9 · 3		1	10	27
5 · 3	9	2	oder	15	9	2
9 · 2	3	5		18	3	5.

Die Zahlen 6 und 30 kommen nicht vor. Die Zahlen 10 und 18 auszulassen ist nicht möglich. Versucht man nämlich in die Teillösung *x*) die 2 einzusetzen, so stößt sie auf jeden Fall an einer Stelle auf eine 5 oder eine 9, was 10 oder 18 ergeben würde, also gerade die Zahl, die man nicht in das Schema einordnen will.
Zum Schluß soll untersucht werden, wieviel verschiedene Anordnungen der Zahlen aus der oben gefundenen Lösung durch Vertauschen der Zeilen oder der Spalten entstehen. Im folgenden Schema

11	12	13	
21	22	23	*xx*)
31	32	33	

bedeutet die erste Ziffer jeder Zahl die Zeilennummer und die zweite die Spaltennummer. 3 Elemente, hier die Zahlen 1, 2, 3, kann man in 6 verschiedenen Anordnungen (Permutationen) niederschreiben:

1, 2, 3; 1, 3, 2; 2, 1, 3; 2, 3, 1- 3, 1, 2; 3, 2, 1.

Diese Vertauschungen kann man sowohl mit den Zeilennummern als auch mit den Spaltennummern durchführen. Man findet so $6\cdot 6 = 36$ verschiedene Umstellungen des Schemas *xx*). Als Beispiel führen wir für die Zeilennummern die Permutation 2, 1, 3 und für die Spaltennummern 3, 1, 2 durch; wir erhalten damit das Schema (1).
Vertauscht man in diesem Sinn die Zahlen unserer Lösung, so erhält man eine zweite von den 36 Lösungen (Schema 2).

23	21	22		2	15	9	
13	11	12	(1)	27	1	10	(2)
33	31	32.		5	18	3.	

Weitere 36 neue Anordnungen, welche die gestellten Bedingungen erfüllen, erhält man, indem man in jeder der bisher gefundenen 36 Lösungen die Zeilen und die Spalten miteinander vertauscht, also die 1., 2., 3. Zeile zur 1., 2., 3. Spalte macht und umgekehrt, Dadurch entsteht z. B. aus der zuerst gefundenen Lösung

				die neue Lösung		
1	10	27		1	15	18
15	9	2		10	9	3
18	3	5		27	2	2.

Diese Lösungen hätte man bei Aufstellung des Schemas erhalten, wenn man am Anfang die Zahlen 5 und 9 nicht nach Schema III und IV, sondern nach Schema V und VI eingesetzt hätte.
Es gibt demnach 72 verschiedene Anordnungen als Lösung der gestellten Aufgabe.

Aufgabe 3 KLAUS MÜLLER, Arnstadt

Auf einer Feier stößt jeder Anwesende mit jedem anderen an; die Gläser erklingen 120mal. Als es zum Tanzen geht, sagt jemand: „Wenn jeder Herr mit jeder Dame tanzt, so können wir insgesamt 60 verschiedene Paare bilden." Wieviel Damen und wieviel Herren waren anwesend? Die Herren waren in der Überzahl.

1. Lösung (Klaus Müller):

Zunächst ermitteln wir die Gesamtzahl n der Anwesenden. Dazu stellen wir die folgende Überlegung an: Jede der anwesenden Personen stößt mit $(n-1)$ anderen Personen an. Das wären $n \cdot (n-1)$ „Anstöße"; dabei ist aber jedes Anstoßen doppelt gezählt: einmal z. B. als Anstoßen der Person A mit der Person B, zum anderen als Anstoßen der Person B mit der Person A. Die Gläser erklingen daher $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1)$ mal.

Nun ist $\quad \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1) = 120$

und mithin $\quad n^2 - n - 240 = 0.$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichungen sind

$$n_1 = 16 \qquad \text{und} \qquad n_2 = -15.$$

Die Lösung $n_2 = -15$ scheidet als unbrauchbar aus, da eine negative Anzahl von Personen sinnlos ist. Es sind also 16 Personen anwesend.
Es seien nun d Damen und h Herren anwesend. Dann gilt

$$d + h = 16. \tag{1}$$

Tanzt jeder Herr mit jeder Dame, so können

$$h \cdot d = 60 \tag{2}$$

Paare gebildet werden.

Aus (1) und (2) folgt nun nach entsprechender Rechnung wieder eine quadratische Gleichung:

$$h^2 - 16h + 60 = 0.$$

Die Lösungen sind $\quad h_1 = 10 \quad$ und $\quad h_2 = 6.$

Aus (1) folgt dann $\quad d_1 = 6 \quad$ und $\quad d_2 = 10.$

Da mehr Herren als Damen anwesend sind, scheidet die Lösung $h_2 = 6$, $d_2 = 10$ aus. Es sind also zehn Herren und sechs Damen anwesend.

2. Lösung (B. Vetters):

(Teillösung unter Vermeidung des Lösungsverfahrens für Gleichungen zweiten Grades)

Die Zahl der anwesenden Personen kann auch ohne Lösung einer Gleichung zweiten Grades ermittelt werden. Die Gleichung

$$z(z-1) = 240$$

bedeutet, daß das Produkt zweier benachbarter ganzer Zahlen gleich 240 ist. Man bilde also alle möglichen Produkte aus ganzen Zahlen, die den Wert 240 haben: $2 \cdot 120$, $3 \cdot 80$, $4 \cdot 60$, $5 \cdot 48$, $6 \cdot 40$ usw., wobei man feststellt, daß sich die Differenz der Werte der beiden Faktoren immer mehr der Null nähert. Schließlich kommt man zu dem Paar, dessen Differenz gleich 1 ist, nämlich zu $15 \cdot 16 = 240$. Also ist $z = 16$.

Man kann an den Gedanken zwei weitere Überlegungen anschließen:

1. Es ist nicht notwendig, daß man alle Produkte mit dem Wert 240 ausprobiert. Aus der Gleichung erkennt man, daß der Wert für z nur wenig von $\sqrt{240}$ differieren kann. Er muß also in der Nähe von 15 liegen.

2. Das Verfahren läßt sich — etwas abgewandelt — auch auf den zweiten Teil der Aufgabe anwenden. Hier gilt

$$x(16-x) = 60 \qquad \text{und} \qquad x > 16 - x.$$

Die Ungleichung führt auf

$$2x > 16 \qquad \text{oder} \qquad x > 8.$$

Also kommen für die Lösung nur die folgenden Werte in Frage:

$$x = 10, \qquad 16 - x = 6,$$
$$x = 12, \qquad 16 - x = 4,$$
$$x = 15, \qquad 16 - x = 1.$$

Die rechte Spalte ermöglicht sofort die Auswahl von $x = 10$, $16 - x = y = 6$ als einzige Lösung.

3. Lösung (J. Schell):

(Hilfsmittel: Kombinatorik)

Da jeder mit jedem anstoßen soll, ist die Anzahl der Kombinationen von je 2 aus der unbekannten Personenzahl x zu ermitteln.

Aus n Elementen kann man k Elemente auf $\binom{n}{k}$ verschiedene Weisen auswählen. Es ist also

$$\binom{x}{2} = 120 \qquad \text{oder} \qquad \frac{x \cdot (x-1)}{1 \cdot 2} = 120,$$

also

$$x^2 - x = 240.$$

Daraus folgt $x_1 = +16$, $x_2 = -15$.

Die Anzahl der anwesenden Personen ist 16, da $x_2 = -15$ als negative Lösung keinen Sinn ergibt und daher als unbrauchbar auszuscheiden ist.

Nun sollen 60 Tanzpaare gebildet werden. Es seien x Herren (und demnach $16 - x$ Damen) anwesend, und es ist $x > 16 - x$.

16 Personen kann man auf $\binom{16}{2}$ verschiedene Weisen zu Paaren gruppieren. Von dieser Zahl ist aber sowohl die Zahl der nur aus Herren bestehenden Paare als auch die Zahl der nur aus Damen bestehenden Paare zu subtrahieren. Die erste ist $\binom{x}{2}$, die zweite $\binom{16-x}{2}$. Also gilt

$$\binom{16}{2} - \binom{x}{2} - \binom{16-x}{2} = 60,$$

$$\frac{16 \cdot 15}{1 \cdot 2} - \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} - \frac{(16-x)(15-x)}{1 \cdot 2} = 60,$$

$$x^2 - 16x + 60 = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$x_1 = 10, \qquad x_2 = 6.$$

Wegen $x > 16 - x$ scheidet der Wert $x_2 = 6$ als unbrauchbar aus.

Daraus folgt, daß 10 Herren und $16 - 10 = 6$ Damen anwesend sind.

Aufgabe 4 K.-J. PANZKE, Dresden

Der kleine Zeiger der Uhr wird während eines Umlaufs mehrmals vom großen Zeiger überrundet.

a) Es sind die Winkel zu berechnen, die beide Zeiger beim Überrunden mit der Zeigerstellung um 0^h bilden.

b) Es ist die Gleichung anzugeben, aus der man die Zeit (in min) errechnen kann, die der große Zeiger von einer beliebigen vollen Stunde bis zum Erreichen des kleinen Zeigers benötigt.

Lösung (K.-J. Panzke):

a) Die Winkel, die die Zeiger mit der Zeigerstellung um 0^h bilden, sind Funktionen der Zeit. Wir bezeichnen mit

α_k den Winkel des kleinen Zeigers mit der 0^h-Stellung,

α_g den Winkel des großen Zeigers mit der 0^h-Stellung,

$\omega_k = \frac{360°}{12\,h} = 30°/h$ die Winkelgeschwindigkeit des kleinen Zeigers,

$\omega_g = \frac{360°}{1\,h} = 360°/h$ die Winkelgeschwindigkeit des großen Zeigers,

t die Zeit (in h).

Dann gelten die Gleichungen

$$\alpha_k = \omega_k \cdot t \tag{1}$$

und

$$\alpha_g = \omega_g \cdot t. \tag{2}$$

Wenn beide Zeiger sich decken, ist

$$\alpha_k = \alpha_g - n \cdot 360° \tag{3}$$

mit $n = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots$ (ganzzahlige Umläufe des großen Zeigers werden subtrahiert!).

Aus (1), (2) und (3) ergibt sich

$$\omega_k \cdot t = \omega_g \cdot t - n \cdot 360°$$

oder — nach t aufgelöst —

$$t = \frac{n \cdot 360°}{\omega_g - \omega_k} = \frac{n \cdot 360°}{330°/h} = \frac{12}{11} n\,h. \tag{4}$$

Setzt man (4) in (1) ein, so erhält man für α_k den Winkel α_{kn}, bei dem sich beide Zeiger decken:

$$\alpha_{kn} = 30°/h \cdot \frac{12}{11} n\,h = \frac{360 n°}{11}. \tag{5}$$

b) Wir bezeichnen mit $\triangle t$ die Zeitdifferenz zwischen dem Überrunden und der vorausgegangenen vollen Stunde, also

$$\triangle t = t - n\,h.$$

Wegen (4) ergibt sich daraus

$$\triangle t = \left(\frac{12}{11} n - n\right) h = \frac{1}{11} n\,h.$$

Mit 1 h = 60 min erhält man schließlich

$$\triangle t = \frac{60n}{11}\,\text{min}. \tag{6}$$

Aus den beiden Gleichungen (5) und (6) kann man eine Tabelle für $n = 0; 1; 2; \ldots 11$, α_{kn} und $\triangle t$ zusammenstellen.

Aufgabe 5 KLAUS MÜLLER, Arnstadt

Drei Damen, alle unter 50 Jahre alt, treffen sich zur Geburtstagsfeier der jüngsten. „Ich habe ein seltsames Alter erreicht", sagt das Geburtstagskind, „ich bin $5\frac{1}{2}$ mal so alt wie meine Tochter und 11mal so alt wie mein Sohn. Wenn mein Sohn so alt sein wird, wie meine Tochter jetzt ist, dann werde ich 6mal so alt sein wie er und 4mal so alt wie meine Tochter." „Merkwürdig", erwiderte die zweite, „mit mir und meinen zwei Kindern steht es ebenso!" „Das ist doch aber ein Zufall!" sagte die dritte nach einigem Nachdenken, „die gleiche Rechnung stimmt bei mir und meinen zwei Kindern! Und dabei sind wir drei Frauen doch verschieden alt!"
Wie alt sind die Mütter und ihre Kinder?

Lösung (Klaus Müller):

Es scheint sich um ein diophantisches Problem zu handeln. Die Lösungen sind aber im vorliegenden Fall durch eine einfache Überlegung zu finden:
Da die Mütter 11mal so alt sind wie ihre jüngsten Kinder, kommen bei ganzzahligen Altersangaben nur durch 11 teilbare Zahlen für das Alter der Mütter in Frage, also die Zahlen 11; 22; 33; 44; 55; 66; 77; 88; 99. Die Zahl 11 und die Zahlen 55; 66; 77; 88; 99 kann man sofort als unbrauchbar ausschließen. Da die drei Mütter unterschiedlich alt sind, kommt nur die Lösung

1. Mutter 22 Jahre alt,
2. Mutter 33 Jahre alt,
3. Mutter 44 Jahre alt

in Betracht. Man prüft leicht nach, daß diese Zahlen auch die übrigen Bedingungen erfüllen. Aus ihnen errechnet man das Alter der Kinder.

Alter der Mutter	22	33	44
Alter des älteren Kindes	4	6	8
Alter des jüngeren Kindes	2	3	4

Aufgabe 6 JOACHIM NOACK, Dresden

Jörg kann „zaubern".
Gestern kam Jörg mit einer Sensation in die Schule; er könne mathematisch zaubern! Wir waren natürlich alle sehr gespannt, wie er das wohl fertigbringen wolle, und gleich in der ersten Pause mußte er mit der Zauberei beginnen.
Nachdem er mit dem Gesicht zur Wand gestellt worden war, damit er ja nicht sähe, was ich schrieb, forderte er mich auf, eine dreistellige Zahl zu wählen, deren Ziffer in der Hunderterstelle um 2 höher sein müsse als die Einerstelle; die Zehnerstelle könne eine beliebige Zahl sein.

Ich schrieb 5 1 3 und sollte nun die Zahl „umgedreht"
daruntersetzen 3 1 5 und von der ersten abziehen,

der Differenz 1 9 8 (die Jörg nicht kannte!)
1 2 hinzuzählen

und die Summe 2 1 0 : 7 0 teilen;

der Quotient 3 mußte mit 12 multipliziert werden, was 36 ergab. Jetzt glänzte Jörg noch mit dem neuesten Wissen, das wir seit der letzten Mathematikstunde hatten, und verlangte, aus dem Produkt die Quadratwurzel zu ziehen:

$$\sqrt{36} = 6.$$

Damit war das Kunststück zu Ende, und er verkündete, daß wir 6 erhalten hätten.
Unser Erstaunen war groß! Er wurde bestürmt zu sagen, wie er das mache, und er möchte vor allem noch einmal seine Kunst unter Beweis stellen, was er auch gern tat.
Mir ließ die Sache den ganzen Tag keine Ruhe, und am Nachmittag setzte ich mich hin und grübelte so lange, bis ich die mathematische Gesetzmäßigkeit entdeckt und algebraisch bewiesen hatte, die Jörg dieses „Rechenkunststück" ermöglichte.
Wie muß man das wohl anstellen?
Unsere Aufgabe lautet also:
Man schreibe eine beliebige dreistellige Zahl, deren Hunderterstelle um zwei größer ist als die Einerstelle. Von ihr subtrahiere man die Zahl, die man erhält, wenn man in der ursprünglichen Zahl die Reihenfolge der Ziffern umkehrt. Zum Ergebnis addiere man 12; der Reihe nach sind dann mit den jeweiligen Ergebnissen folgende weitere Rechenoperationen auszuführen:

1. Division durch 70; 2. Multiplikation mit 12; 3. man ziehe die Wurzel! Das Ergebnis ist 6.

1. Wie ist es möglich, daß bei einer beliebigen Zahl als Ausgangsgröße das Ergebnis der Rechenoperationen vorausgesagt werden kann?

2. Ist eine allgemeine Lösung möglich, bei der die Hunderterstelle um n größer ist als die Einerstelle? ($n = 1; 2; 3; \ldots 9.$)

1. Lösung (Joachim Noack):

1. Ist $a = 100x + 10y + z$ die beliebige dreistellige Zahl, so gilt nach der in der Aufgabe gestellten Bedingung $x = z + 2$, also

$$a = 100(z+2) + 10y + z = 100z + 200 + 10y + z.$$

Für die Zahl mit vertauschter Ziffernfolge gilt dann

$$b = 100z + \quad 10y + x = 100z + \quad 10y + z + 2.$$

Subtrahiert man b von a, so folgt

$$\begin{array}{rlll} & a = 100z + 200 + 10y + z & & + \\ & b = 100z \qquad + 10y + z + 2 & & - \\ \hline a - b = & \qquad 200 \qquad\qquad - 2 & & \\ = & \qquad 198. & & \end{array}$$

Man sieht, daß durch die Subtraktion die Ziffern der Zahl a sämtlich aus der Rechnung herausfallen und das Ergebnis unabhängig von der Wahl der Zahl a den Wert 198 ergibt. Die weiteren Rechnungen dienen nur zur Verschleierung dieses Sachverhalts.

2. Allgemein gilt, wenn $x = z + n$ mit $n = 1; 2; 3; \ldots; 9$ ist,

$$\begin{array}{rlll} & a = 100z + 100n + 10y + z & & + \\ & b = 100z \qquad + 10y + z + n & & - \\ \hline a - b = & \qquad 100n \qquad\qquad - n & & \\ = & \qquad 99n. & & \end{array}$$

Das Ergebnis $99n$ schließt natürlich den speziellen Fall 1 ($n = 2$; $99n = 198$) ein. Auf dieser Grundlage läßt sich ein mathematisches „Zauberkunststück" ohne große Gedächtnisleistung aufbauen.

2. Lösung (Ernst Hennig):

Die Einerziffer sei x, die Zehnerziffer y; die Hunderterziffer ist dann $x + n$ mit $n = 1, 2, 3 \ldots (9 - x)$. Die Zahl heißt damit

$$100(x + n) + 10y + x,$$

die Zahl mit umgekehrter Ziffernfolge

$$100x + 10y + (x + n).$$

Die Differenz der beiden Zahlen ist

$$D = 100n - n = 99n.$$

Diese Differenz hat also einen konstanten, von der Ziffernwahl unabhängigen Wert $99n$, der nur von dem Betrag n abhängt.
Von hier ab kann Jörg zwei Wege wählen. Der einfachere ist folgender:

1. Jörg läßt zu der von ihm nicht genannten Differenz die Zahl $10 + n$ addieren (also 11, 12, 13 . . .). Es ergibt sich $99n + 10 + n = 100n + 10 = 10\,(10n + 1)$; das ergibt 110, 210, 310 . . . Diese Zahl läßt er durch $10n + 1$ teilen, d. h. durch 11, 21, 31 . . . Das Ergebnis ist immer 10!

2. Etwas schwieriger für den „mathematischen Zauberkünstler" ist der zweite Weg, der die volle Verallgemeinerung des Zahlenspiels darstellt (sie hat aber nur für $n \geqq 2$ einen Sinn).

1. Forderung: Zu der Differenz D die Zahl $100(n-2)+10(n-1)+n$ addieren (also 012, 123, 234, ...). Ergebnis: $210(n-1)$.

2. Forderung: Das Ergebnis durch 70 dividieren! Resultat: $3(n-1)$, d. h. 3, 6, 9, ...

3. Forderung: Das letzte Resultat mit $12(n-1)$ multiplizieren! Es entsteht die Zahl $36(n-1)^2$.

4. Forderung: Aus dem letzten Ergebnis ist noch die Quadratwurzel zu ziehen! Schlußergebnis: $6(n-1)$, d. h. 6, 12, 18 ...

Aufgabe 7 JOHANNES RIEDEL, Berlin

Auf einer 22,5 km langen Straßenbahnstrecke sollen während der Zeit von 8^h bis 16^h die Wagenzüge in beiden Richtungen in 10-min-Folge verkehren. Die ersten Züge dieser Betriebszeit verlassen 8^h die beiden Endhaltestellen. Ihre Durchschnittsgeschwindigkeit (einschließlich der Haltzeiten) beträgt 18 km/h. Das Fahrpersonal soll an den Endhaltestellen eine Pause von mindestens 10 und höchstens 20 min haben.

a) Wann verläßt der erste von Endhaltestelle A abfahrende Wagenzug diese Endhaltestelle zum zweitenmal?

b) Wieviel Wagenzüge müssen auf dieser Strecke in der Betriebszeit von 8^h bis 16^h eingesetzt werden? Dabei sollen Züge, die aus dem Berufsverkehr vor 8^h noch auf der Strecke sind und aussetzen, sowie Züge, die für den 16^h beginnenden Berufsverkehr bereits vorher zusätzlich auf die Strecke gehen, nicht mitgerechnet werden.

c) In welchen Zeitabständen begegnen sich die Wagenzüge?

1. Lösung (Johannes Riedel):

a) Aus der Formel $s = v \cdot t$ (in der mit s der Weg, mit v die Geschwindigkeit und mit t die Zeit bezeichnet wird) folgt

$$t = \frac{s}{v}.$$

In unserem Fall sind $s = 22{,}5$ km und $v = 18$ km/h. Also gilt

$$t = \frac{22{,}5}{28}\,\text{h} = 1{,}25\,\text{h} = 1\,\text{h}\ 15\,\text{min}.$$

Der erste Wagenzug ist demnach $9^h 15^m$ an der Endhaltestelle B. Wegen der vorgeschriebenen Pause verläßt er diese $9^h 30^m$. Da für die Rückfahrt gleiche Bedingungen gelten, tritt er von Endhaltestelle A aus seine zweite Fahrt $11^h 00^m$ an.

b) Der erste von A abfahrende Wagenzug beginnt die Rückfahrt von B aus 90 min nach seiner Abfahrt. In dieser Zeit sind sowohl von A aus als auch von B aus je neun Züge auf die Strecke gegangen, insgesamt also 18 Züge.

c) Die Zeitabstände betragen 5 min. Das Ergebnis kann man aus mehreren Überlegungen erhalten, z. B. aus folgender: Wir betrachten die Begegnungen eines Wagenzuges a, der von A nach B führt, mit zwei aufeinanderfolgenden Wagenzügen b_1 und b_2, die von B nach A fahren. Im Zeitpunkt der Begegnung von a und b_1 befindet sich b_2 in einem Fahrabstand von 10 min vom Treffpunkt von a und b_1. Da a und b_2 die gleiche Geschwindigkeit haben, muß jeder dieser beiden Wagenzüge bis zu ihrem Treffpunkt die Hälfte der Strecke zurücklegen, die diesem Fahrabstand entspricht. Dazu sind aber 5 min erforderlich.

2. Lösung (Walter Rulff):

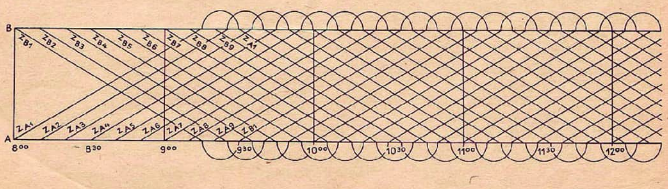
Graphische Lösung: Wir stellen die Fahrt der Straßenbahnzüge in einem rechtwinkligen Zeit-Weg-Diagramm (graphischer Fahrplan — Abb. 1) dar. Aus der Angabe der Geschwindigkeit $v = 18$ km/h folgt, daß sich jeder Wagenzug eine Stunde nach Abfahrt in der Entfernung 18 km vom Abfahrtsort befindet. Damit sind die Weg-Zeit-Kurven festgelegt (wenigstens näherungsweise, da die Haltezeiten und Schwankungen der Geschwindigkeit unberücksichtigt bleiben). Aus dem Diagramm kann man die Ergebnisse unmittelbar ablesen.

Aufgabe 8 WALTER RULFF, Coswig

Auf einer Eisenbahnstrecke begegnen sich ein D-Zug und ein Schnelltriebwagen. Der D-Zug hat eine Länge von $l_d = 260$ m und eine Geschwindigkeit von $v_d = 90$ km h^{-1}, der Schnelltriebwagen ist $l_s = 30$ m lang und hat eine Geschwindigkeit von $v_s = 144$ km h^{-1}.

Wie lange dauert für einen Reisenden im D-Zug die Vorbeifahrt des Triebwagens und für einen Reisenden im Triebwagen die Vorbeifahrt des D-Zuges?

Abb. 1



Lösung (Walter Rulff):

Es ist

$$v_d = 90\ \mathrm{km\,h^{-1}} = 25\ \mathrm{m\,s^{-1}}, \qquad l_d = 260\ \mathrm{m}$$

$$v_s = 144\ \mathrm{km\,h^{-1}} = 40\ \mathrm{m\,s^{-1}}, \qquad l_s = 30\ \mathrm{m}.$$

Man findet die Lösung durch die folgende Überlegung: Wenn der D-Zug sich nicht bewegte, der Triebwagen aber die Geschwindigkeit $v_r = v_s + v_d$ hätte (oder umgekehrt), so wäre die Relativgeschwindigkeit von D-Zug und Schnelltriebwagen zueinander dieselbe. Es muß also, wenn mit t_d und t_s die entsprechenden Zeiten bezeichnet werden, gelten

$$(v_d + v_s) \cdot t_s = l_s \quad \text{und} \quad (v_d + v_s) \cdot t_d = l_d,$$

also

$$t_s = \frac{l_s}{v_d + v_s} = \frac{30}{65}\,\mathrm{s} = \frac{6}{13}\,\mathrm{s} \approx 0{,}5\ \mathrm{s}$$

und

$$t_d = \frac{l_d}{v_d + v_s} = \frac{260}{65}\,\mathrm{s} = 4\ \mathrm{s}.$$

Die Zeit t_s für die Vorbeifahrt des Schnelltriebwagens am Reisenden im D-Zug beträgt also

$$t_s \approx 0{,}5\ \mathrm{s}$$

und die Zeit t_d für die Vorbeifahrt des D-Zuges am Reisenden im Triebwagen ist

$$t_d = 4\ \mathrm{s}.$$

Aufgabe 9 ERICH SCHIFFNER, Roßleben

Eine Gesellschaft von 12 Personen wollte nach einem 20 km entfernten Ort gelangen. Ihr stand jedoch nur eine Taxe zur Verfügung, die außer dem Fahrer drei Personen befördern kann. Man arbeitete einen „Transportplan“ aus, der garantierte, daß bei gleichzeitigem Aufbruch aller Personen auch alle gleichzeitig am Ziel anlangten. Dabei wurde eine Durchschnittsgeschwindigkeit der Taxe von 65 km/h und der Fußgänger von 5 km/h vorausgesetzt.

Wie sah der „Transportplan“ aus?

Lösung (Erich Schiffner):

Wenn alle Personen die Strecke in der gleichen Zeit zurücklegen sollen, müssen sie die gleiche Durchschnittsgeschwindigkeit haben. Das wird dadurch erreicht, daß jeder von ihnen gleich weit zu Fuß geht und gleich weit fährt. Demnach muß die Taxe, um jede Person ein Stück des Weges zu befördern, vier Mal in Richtung des Ziels und dreimal zurückfahren. Es bieten sich nun zwei Lösungswege an:

a) Berechnung

Es sei x die Strecke, die jede Person in der Taxe zurücklegt, und y die Rückfahrstrecke. Dann gilt

$$4x - 3y = 20. \tag{1}$$

Während der Zeit, in der die Taxe einmal hin- und zurückfährt, legt ein Fußgänger die Strecke $x - y$ zurück. In der gleichen Zeit zurückgelegte Wege verhalten sich aber wie die Geschwindigkeiten. Also gilt

$$(x + y) : (x - y) = 65 : 5 = 13 : 1.$$

Man hat damit ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten gefunden; die Lösungen sind

$$x = 14 \quad \text{und} \quad y = 12.$$

Das heißt, daß die Taxe 14 km in Richtung des Ziels fährt und 12 km zurück. Zu Fuß sind also 6 km zu gehen. Man rechnet ferner leicht aus, daß die Gesellschaft etwa 1 h 25 min benötigt, um an das Ziel zu gelangen.

b) Graphische Lösung

Man legt zunächst ein Weg-Zeit-Koordinatensystem mit zweckmäßig geteilten Achsen fest (vgl. Abb. 2). Am Abgangspunkt A starten gleichzeitig drei Fußgängergruppen und das Taxi; die Zeit-Weg-Kurven sind Geraden durch den Nullpunkt mit den Anstiegen $\frac{1}{5}$ bzw. $\frac{1}{65}$. Nach einer zunächst beliebig gewählten Fahrstrecke (z. B. nach 10 km) verlassen die Taxifahrer das Taxi und gehen zu Fuß weiter (neue Gerade mit dem Anstieg $\frac{1}{5}$), während das Taxi zu den übrigen Fußgängern zurückfährt (Gerade mit dem Anstieg $-\frac{1}{65}$). Dies wiederholt sich, bis alle Personen wieder beisammen sind (Abb. 3).

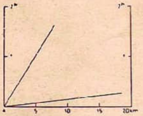


Abb. 2

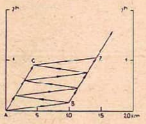


Abb. 3

Man erkennt, daß damit zwar alle Personen gleichzeitig am Ziel ankommen, daß aber die Kapazität des Taxi noch nicht voll ausgenutzt wird. Das ist dann der Fall, wenn die letzte Fahrt des Taxis am Ziel endet. Um dies zu erreichen, vergrößert man das Parallelogramm $ABZC$ in Abbildung 2 so, daß alle Streckenverhältnisse gleich bleiben und Punkt Z am Ziel liegt. Am einfachsten geschieht dies, indem man die Diagonale AZ über Z hinaus bis zum Schnitt mit der Ordinate am Zielpunkt verlängert. Dieser Schnittpunkt ist der gesuchte Eckpunkt und gibt die Ankunftszeit an. Alle Strecken werden nun entsprechend gedehnt (Abb. 4).

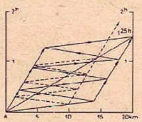


Abb. 4

Aufgabe 10 JOHANNES RIEDEL, Berlin

Das Passagierflugzeug IL 14 P der Deutschen Lufthansa wiegt einschließlich voller Nutzlast etwa 18000 kp. Es benötigt beim Start vom Beginn des Rollens bis zum Abheben vom Boden ungefähr 30 s und hat im Augenblick des Abhebens eine Geschwindigkeit von rd. 160 km/h.

Bei den folgenden Berechnungen werde von der Reibung und vom Luftwiderstand abgesehen und die Bewegung des Flugzeugs als gleichförmig beschleunigt betrachtet.

a) Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit beim Rollen?

b) Wie groß ist die Rollstrecke?

c) Wie groß ist die Beschleunigung des Flugzeugs?

d) Welche Kraft ist notwendig, um diese Beschleunigung hervorzurufen?

e) Welche Arbeit wird von den beiden Motoren während des Rollens für die Beschleunigung vollbracht?

f) Welche Leistung (in PS) muß jeder der beiden Motoren dazu abgeben?

Lösung (Johannes Riedel):

a) Wir bezeichnen mit v_a die Anfangsgeschwindigkeit, mit v_e die Endgeschwindigkeit und mit v_d die Durchschnittsgeschwindigkeit des Flugzeugs beim Rollen. Ferner sei l die Rollstrecke und t die benötigte Zeit. Es gilt

$$\frac{v_a + v_e}{2} = v_d.$$

Wegen $v_a = 0$ km/h $= 0$ m/s, $v_e \approx 160$ km/h $\approx 44{,}4$ m/s ergibt sich

$$v_d = \frac{44{,}4}{2}\ \text{m/s} = 22{,}2\ \text{m/s}.$$

b) Für die Rollstrecke l gilt

$$l = v_d \cdot t = 22{,}2\ \text{m/s} \cdot 30\ \text{s} = 666\ \text{m} \approx \frac{2}{3}\ \text{km}.$$

c) Für die Beschleunigung b gilt

$$b = \frac{v_e - v_a}{t} = \frac{44{,}4\ \text{m/s}}{30\ \text{s}} = 1{,}48\ \text{m/s}^2.$$

d) Nach dem Grundgesetz der Dynamik berechnet sich die für die Beschleunigung b einer Masse m erforderliche Kraft P aus

$$P = m \cdot b.$$

Für die Masse m gilt $m = \frac{G}{g}$,

wenn G das Gewicht und $g \approx 9{,}81$ m/s² die Fallbeschleunigung sind. Also erhält man für die Kraft P

$$P = \frac{G \cdot b}{g} = \frac{18000\ \text{kp} \cdot 1{,}48\ \text{m/s}^2}{9{,}81\ \text{m/s}^2} \approx 2720\ \text{kp}.$$

e) Die Arbeit A ist das Produkt aus Kraft und Weg (genauer: aus in Richtung des Weges wirkender Kraftkomponente):

$$A = P \cdot l = 2720\ \text{kp} \cdot 666\ \text{m} \approx 1810000\ \text{mkp}.$$

f) Die Leistung N ist der Quotient aus Arbeit A und Zeit t:

$$N = \frac{A}{t} = \frac{1810000\ \text{mkp}}{30\ \text{s}} \approx 60000\ \text{mkp/s}.$$

Da 75 mkp/s = 1 PS ist, ergibt sich daraus

$$N = 800\ \text{PS}.$$

Für jeden der beiden Motoren bedeuten das 400 PS.

II. DIOPHANTISCHE GLEICHUNGEN

Aufgabe 11 JOHANNES RIEDEL, Berlin

Es sind alle vierziffrigen Zahlen zu ermitteln, die folgende Eigenschaften haben:

1. Die Summe aus der ersten und der zweiten Stelle ist gleich dem Quadrat der ersten Stelle.
2. Die Differenz aus der zweiten und der dritten Stelle ist gleich der ersten Stelle.
3. Die Summe aus der dritten und der vierten Stelle ist gleich der zweiten Stelle.

Wie kann man diese Zahlen allgemein darstellen?

Lösung (Johannes Riedel):

Die Aufgabe enthält vier unbekannte Zahlen, nämlich die vier Stellen der gesuchten vierstelligen Zahlen. Wir bezeichnen die erste Stelle mit x, die zweite mit y, die dritte mit z und die vierte mit u.

Aus den drei Bedingungen lassen sich drei Gleichungen aufstellen:

(1) $x + y = x^2$ (1. Bedingung),
(2) $y - z = x$ (2. Bedingung),
(3) $z + u = y$ (3. Bedingung).

Da mehr Unbekannte auftreten als Gleichungen vorhanden sind, hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen, deren Anzahl jedoch durch die Aufgabenstellung stark eingeschränkt wird: Die Lösungen x, y, z und u sind Stellen einer vierziffrigen Zahl, also müssen sie eine der ganzen Zahlen zwischen 0 und 9 (beide Werte einschließlich) sein.

Es gilt also:

$$0 \leqq x, y, z, u \leqq 9, \qquad x, y, z, u \text{ ganzzahlig.}$$

Ein solches Problem heißt nach dem griechischen Mathematiker DIOPHANT, der um 250 u. Z. lebte und als erster solche Aufgaben untersuchte, ein diophantisches Problem.

Zur Lösung formen wir zunächst die Gleichung (1) um:

(1 a) $y = x^2 - x$,
(1 b) $y = x(x - 1)$.

An der Gleichung (1 b) erkennt man, daß für x nur die vier Werte $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ in Frage kommen; denn wollte man $x_5 = 4$ setzen, so ergäbe sich $y = x(x-1) = 12$, ein Wert, der größer als 9 ist. Entsprechendes gilt für alle x-Werte, die größer als 4 sind.
Aus der Gleichung (1 b) erhält man auch die zugehörigen y-Werte:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1(x_1 - 1) = 0 \cdot (0 - 1) = 0,\\ y_2 &= x_2(x_2 - 1) = 1 \cdot (1 - 0) = 0,\\ y_3 &= x_3(x_3 - 1) = 2 \cdot (2 - 1) = 2,\\ y_4 &- x_4(x_4 - 1) = 3 \cdot (3 - 2) = 6,\end{aligned}$$

Löst man nun die Gleichung (2) nach z auf, so kann man daraus die zugehörigen z-Werte ermitteln:

$$
\begin{aligned}
(2a)\quad z &= y - x,\\
z_1 &= y_1 - x_1 = 0 - 0 = 0,\\
z_2 &= y_2 - x_2 = 0 - 1 = -1,\\
z_3 &= y_3 - x_3 = 2 - 2 = 0,\\
z_4 &= y_4 - x_4 = 6 - 3 = 3.
\end{aligned}
$$

Man sieht, daß $x_2 = 1$, $y_2 = 0$ als Möglichkeit ausscheiden, da diese Werte ein negatives z zur Folge haben, was im Widerspruch zur Bedingung $0 \leqq x, y, z, u \leqq 9$ steht. Schließlich löst man die Gleichung (3) nach u auf und erhält daraus die u-Werte:

$$
\begin{aligned}
(3a)\quad u &= y - z,\\
u_1 &= y_1 - z_1 = 0 - 0 = 0,\\
u_3 &= y_3 - z_3 = 2 - 0 = 2,\\
u_4 &= y_4 - z_4 = 6 - 3 = 3.
\end{aligned}
$$

Damit hat man die drei Lösungen 0000 (wenn man dies als vierziffrige Zahl gelten lassen will), 2202 und 3633 gefunden. Um diese Zahlen durch einen allgemeinen Ausdruck darzustellen, schreibt man sie zunächst in der Form

$$1000x + 100y + 10z + u.$$

Setzt man nun $u = y - z$ (3a), so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&1000x + 100y + 10z + y - z\\
&\qquad = 1000x + 101y + 9z.
\end{aligned}
$$

Durch Verwendung von (2a) ergibt sich daraus

$$1000x + 101y + 9(y - x) = 991x + 110y.$$

Schließlich ersetzt man $y = x^2 - x$ (1a), so daß man

$$991x + 110(x^2 - x) = 881x + 110x^2$$

erhält. Dieser Ausdruck liefert für $x = 2$ die Zahl 2202 und für $x = 3$ die Zahl 3633, die die gestellten Bedingungen erfüllen. Daß es keine weiteren Zahlen mit den geforderten Eigenschaften geben kann, folgt aus dem Lösungsweg, bei dem alle Möglichkeiten ausgeschöpft wurden.

Aufgabe 12 JOHANNES RIEDEL, Berlin

Ein Schüler kürzt den Bruch $\frac{16}{64}$ fälschlicherweise, indem er in Zähler und Nenner je die Ziffer 6 streicht. Er erhält damit das richtige Ergebnis $\frac{1}{4}$.

Es ist festzustellen, für welche Brüche mit zweiziffrigem Zähler und zweiziffrigem Nenner dieses fehlerhafte Verfahren ebenfalls zum richtigen Ergebnis führt.

Lösung (Johannes Riedel):

Bedingung für die Durchführbarkeit des Verfahrens ist, daß die letzte Stelle des Zählers mit der ersten Stelle des Nenners übereinstimmt. Man kann daher die Brüche allgemein in folgender Form schreiben:

$$\frac{10x + y}{10y + z}.$$

Streicht man im Zähler die letzte und im Nenner die erste Stelle, so erhält man daraus den Bruch $\frac{x}{z}$.

Beide Brüche sollen einander gleich sein:

$$\frac{10x + y}{10y + z} = \frac{x}{z}.$$

Dies ist eine Gleichung in drei Unbekannten, für die nur ganzzahlige Lösungen zwischen 1 und 9 (beide Werte einschließlich) in Frage kommen. Es handelt sich also um ein diophantisches Problem. Zur Lösung geht man folgendermaßen vor: Man faßt die Gleichung als Proportion auf und formt sie zur Produktgleichung um:

$$
\begin{aligned}
(10x + y) \cdot z &= (10y + z) \cdot x,\\
9xz &= (10x - z) \cdot y.
\end{aligned}
$$

Die linke Seite der Gleichung ist durch 9 teilbar, also muß auch die rechte Seite durch 9 teilbar sein. Das ist sicher dann der Fall, wenn entweder y oder $10x - z$ durch 9 teilbar sind, ferner dann, wenn y und $10x - z$ beide durch 3 teilbar sind. Damit kommen aber für y zunächst die Werte 3; 6; 9 in Frage; den Fall, daß $10x - z$ durch 9 teilbar ist, behandeln wir anschließend.

Aus $\quad y = 3,$

folgt

$$
\begin{aligned}
9xz &= (10x - z) \cdot 3,\\
3xz &= 10x - z,\\
3xz + z &= 10x,\\
z(3x + 1) &= 10x,\\
z &= \frac{10x}{3x + 1},\\
z &= \frac{10}{3 + \frac{1}{x}}.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung liefert nur für $x = 3$ ein ganzzahliges z: $z = 3$. Es wäre demnach $\frac{33}{33}$ mit $x = 3$, $y = 3$, $z = 3$ ein Bruch, der der gestellten Bedingung genügt. Wir wollen aber Fälle mit $x = y = z$ als trivial ansehen und nur solche Lösungen gelten lassen, für die mindestens $x \neq y$ oder $y \neq z$ gilt. (Man kann zeigen, daß aus $x \neq y$ zwangsläufig $y \neq z$ folgt, und umgekehrt folgt aus $y \neq z$ auch $x \neq y$).

Setzt man $\quad y = 6,$

so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
9xz &= (10x - z) \cdot 6,\\
3xz &= (10x - z) \cdot 2,\\
3xz + 2z &= 20x,\\
z(3x + 2) &= 20x,\\
z &= \frac{20x}{3x + 2},\\
z &= \frac{20}{3 + \frac{2}{x}}.
\end{aligned}
$$

Für $x = 1$ erhält man daraus $z = 4$, für $x = 2$ ergibt sich $z = 5$. Weitere ganzzahlige Lösungen hat diese Gleichung nicht. (Die Lösung $x = 6$, $z = 6$ scheidet wegen $x = y = z$ als trivial aus.) Man hat also zwei Lösungen

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4} \quad \text{mit } x_1 = 1,\ y_1 = 6,\ z_1 = 4$$

und

$$\frac{26}{65} = \frac{2}{5} \quad \text{mit } x_2 = 2,\ y_2 = 6,\ z_2 = 5$$

ermittelt.

Aus $y = 9$

erhält man

$$9xz = (10x - z) \cdot 9,$$

$$xz = 10x - z,$$

$$xz + z = 10x,$$

$$z(x+1) = 10x,$$

$$z = \frac{10x}{x+1},$$

$$z = \frac{10}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Man erkennt, daß diese Gleichung ebenfalls zwei Lösungen liefert: Für $x = 1$ ergibt sich $z = 5$, und für $x = 4$ folgt $z = 8$ (die „Lösung" $x = 9$, $z = 9$ ist trivial!).

Tatsächlich erfüllen die Brüche

$$\frac{19}{95} = \frac{1}{5} \quad \text{mit } x_3 = 1,\ y_3 = 9,\ z_3 = 5$$

und

$$\frac{49}{98} = \frac{4}{8} \quad \text{mit } x_4 = 4,\ y_4 = 9,\ z_4 = 8$$

die gestellte Forderung.

Es bleibt nun noch der Fall zu untersuchen, daß $10x - z$ durch 9 teilbar ist. Für $10x - z$ kommen dann nur die Werte

9; 18; 27; 36; 45; 54; 63; 72; 81

in Frage; man sieht, daß in jedem Fall $x = z$ ist. Aus der Gleichung $9xz = (10x - z) \cdot y$

folgt damit $x = y$.

Man erhält demnach nur triviale Lösungen mit $x = y = z$.

Es gibt also insgesamt vier Brüche mit der geforderten Eigenschaft:

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}; \quad \frac{26}{65} = \frac{2}{5}; \quad \frac{19}{95} = \frac{1}{5}; \quad \frac{49}{98} = \frac{4}{8}.$$

Aufgabe 13 KLAUS MÜLLER, Arnstadt

Elli und Gerda erhalten das gleiche Monatsgehalt. „Als ich noch mein Anfängergehalt bekam, wurden mir einmal 13 Geldscheine ausgezahlt, und zwar doppelt soviel 50-DM-Scheine wie 1-DM-Scheine, dazu noch einige 10-DM-Scheine; heute kann ich dasselbe sagen", erklärt Elli. Da erwidert Gerda: „Ich bekam 5mal soviel 20-DM-Scheine wie 1-DM-Scheine, dazu noch 5-DM-Scheine, im ganzen doppelt so viele wie du. Wenn ich erst über 400 DM verdienen werde, spare ich doppelt soviel wie jetzt."

Wieviel Gehalt wurde jeder gezahlt, und wieviel Scheine jeder Sorte erhielten sie?

Lösung (Klaus Müller):

Wir bezeichnen die unbekannten Anzahlen folgendermaßen:

- x Anzahl der Fünfzig-DM-Scheine,
- y Anzahl der Zwanzig-DM-Scheine,
- z Anzahl der Zehn-DM-Scheine,
- u Anzahl der Fünf-DM-Scheine,
- v Anzahl der Eine-DM-Scheine.

Dann gelten auf Grund der Angaben von Elli und Gerda folgende Gleichungen:

$$x + z + v = 13, \quad (1)$$

$$x - 2v = 0, \quad (2)$$

$$y + u + v = 26, \quad (3)$$

$$y - 5v = 0. \quad (4)$$

Es handelt sich also um ein Gleichungssystem von vier Gleichungen mit fünf Unbekannten; da die Lösungen Anzahlen darstellen, kommen für sie nur positive ganze Zahlen in Frage (diophantisches Problem).

Aus der Gleichung (4) erkennt man, daß y durch 5 teilbar ist. Damit kommen vier Lösungen in Betracht:

1. $y = 5$ mit $v = 1$, $u = 20$, $x = 2$, $z = 10$;
2. $y = 10$ mit $v = 2$, $u = 14$, $x = 4$, $z = 7$;
3. $y = 15$ mit $v = 3$, $u = 8$, $x = 6$, $z = 4$;
4. $y = 20$ mit $v = 4$, $u = 2$, $x = 8$, $z = 1$.

Werte $y \geqq 25$ kommen nicht in Frage, da sonst andere der gesuchten Werte negativ werden.

Damit ergeben sich zunächst folgende vier Möglichkeiten:

	Elli	Gerda
1.	2·50,00 DM = 100,00 DM	5·20,00 DM = 100,00 DM
	10·10,00 DM = 100,00 DM	20·5,00 DM = 100,00 DM
	1·1,00 DM = 1,00 DM	1·1,00 DM = 1,00 DM
	201,00 DM	201,00 DM
2.	4·50,00 DM = 200,00 DM	10·20,00 DM = 200,00 DM
	7·10,00 DM = 70,00 DM	14·5,00 DM = 70,00 DM
	2·1,00 DM = 2,00 DM	2·1,00 DM = 2,00 DM
	272,00 DM	272,00 DM
3.	6·50,00 DM = 300,00 DM	15·20,00 DM = 300,00 DM
	4·10,00 DM = 40,00 DM	8·5,00 DM = 40,00 DM
	3·1,00 DM = 3,00 DM	3·1,00 DM = 3,00 DM
	343,00 DM	343,00 DM
4.	8·50,00 DM = 400,00 DM	20·20,00 DM = 400,00 DM
	1·10,00 DM = 10,00 DM	2·5,00 DM = 10,00 DM
	4·1,00 DM = 4,00 DM	4·1,00 DM = 4,00 DM
	414,00 DM	414,00 DM

Aus den weiteren Angaben von Gerda und Elli läßt sich nun folgendes schließen:

a) Mindestens die Lösung 1 scheidet aus, da Elli als Anfängerin (bei niedrigerem Gehalt als heute!) eine gleiche Verteilung der Scheine erhielt.

b) Die Lösung 4 scheidet aus, da Gerda nicht über 400,00 DM verdient.

c) Es verbleiben daher die Lösungen 2 und 3 als Möglichkeiten. Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit kann man aus Gerdas Bemerkung vermuten, daß sie bereits über 300,00 DM verdient (Lösung 3); jedoch ist dieser Schluß nicht zwingend. Die Aufgabe ist also nicht eindeutig lösbar.

Aufgabe 14 JOHANNES RIEDEL, Berlin

Eine Türöffnung von 90 cm Breite soll mit Brettern zugenagelt werden. Zur Verfügung stehen Bretter passender Länge von 8 cm, 10 cm und 12 cm Breite.
Welche Möglichkeiten gibt es, wenn kein Brett der Länge nach durchgesägt werden soll?

Lösung (Johannes Riedel):

Bezeichnet man mit x die Anzahl der Bretter von 8 cm Breite, mit y die von 10 cm und mit z die von 12 cm Breite, so gilt

$$8x + 10y + 12z = 90$$

oder — wenn man beide Seiten der Gleichung durch 2 dividiert —

$$4x + 5y + 6z = 45.$$

Es handelt sich also um eine Gleichung mit drei Unbekannten. Eine solche Gleichung hat zunächst unendlich viele Lösungen. Die Anzahl der Lösungen wird aber durch die Bedingungen der Aufgabe stark eingeschränkt:

1. Es sind nur positive Lösungen möglich, da eine negative Anzahl von Brettern sinnlos ist. Das heißt, es muß gelten

$$0 \leq 4x \leq 45, \quad 0 \leq 5y \leq 45, \quad 0 \leq 6z \leq 45,$$

also

$$0 \leq x \leq 11\tfrac{1}{4}, \quad 0 \leq y \leq 9, \quad 0 \leq z \leq 6\tfrac{1}{2}.$$

2. Es sind nur ganzzahlige Lösungen möglich, da kein Brett der Länge nach durchgesägt werden soll.

Man löst dieses diophantische Problem folgendermaßen: Aus

$$4x + 5y + 6z = 45$$

folgt durch Subtraktion von $5y$ auf beiden Seiten der Gleichung

$$4x + 6z = 45 - 5y.$$

Die linke Seite der Gleichung ist durch 2 teilbar, also muß auch die rechte Seite durch 2 teilbar sein. Da 45 eine ungerade Zahl ist, muß auch $5y$ und damit auch y eine ungerade Zahl sein. Wegen der Bedingungen 1 ergeben sich damit fünf Möglichkeiten für y:

$$y = 1, \quad y = 3, \quad y = 5, \quad y = 7, \quad y = 9.$$

Setzt man diese fünf Werte der Reihe nach in die Gleichung ein, so erhält man fünf Gleichungen, die jede nur noch zwei Unbekannte enthalten:

1. $y = 1$:
$$4x + 6z = 45 - 5,\quad 4x + 6z = 40,\quad 2x + 3z = 20;$$

2. $y = 3$:
$$4x + 6z = 45 - 15,\quad 4x + 6z = 30,\quad 2x + 3z = 15;$$

3. $y = 5$:
$$4x + 6z = 45 - 25,\quad 4x + 6z = 20,\quad 2x + 3z = 10;$$

4. $y = 7$:
$$4x + 6z = 45 - 35,\quad 4x + 6z = 10,\quad 2x + 3z = 5;$$

5. $y = 9$: $4x + 6z = 45 - 45$, $4x + 6z = 0$, $2x + 3z = 0$.

Diese fünf Gleichungen behandelt man auf dieselbe Weise weiter. Dabei sieht man aber im Fall 5 ($y = 9$) sofort, daß $x = 0$ und $z = 0$ folgt, d. h., eine Möglichkeit besteht darin, die Türöffnung mit neun Brettern der Breite 10 cm auszufüllen. Es ist also

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 9, \quad z_1 = 0.$$

Im Fall 1 ($y = 1$) folgt aus $2x + 3z = 20$, daß $2x = 20 - 3z$ ist. Da $2x$ durch 2 teilbar ist, muß auch $20 - 3z$ und damit auch z durch 2 teilbar sein. Mithin gelten für z folgende vier Möglichkeiten:

$$z_2 = 0, \quad z_3 = 2, \quad z_4 = 4, \quad z_5 = 6$$

(für $z \geq 8$ würde folgen $x < 0$ im Widerspruch zur Bedingung 1); für x erhält man daraus:

$$x_2 = 10, \quad x_3 = 7, \quad x_4 = 4, \quad x_5 = 1.$$

In den Fällen 2, 3 und 4 geht man entsprechend vor:

2. $y = 3$: $2x + 3z = 15$, $2x = 15 - 3z$.
Die Unbekannte z muß ungerade sein:
$z_6 = 1$, $z_7 = 3$, $z_8 = 5$
($z \geq 7$ bedeutet $x < 0$!); daraus ergibt sich
$x_6 = 6$, $x_7 = 3$, $x_8 = 0$.

3. $y = 5$: $2x + 3z = 10$, $2x = 10 - 3z$.
Die Unbekannte z muß gerade sein:
$z_9 = 0$, $z_{10} = 2$ ($z \geq 4$ bedeutet $x < 0$!);
für x erhält man
$x_9 = 5$, $x_{10} = 2$.

4. $y = 7$: $2x + 3z = 5$, $2x = 5 - 3z$.
Die Unbekannte z muß ungerade sein:
$z_{11} = 1$ ($z \geq 3$ bedeutet $x < 0$!);
$x_{11} = 1$.

Damit hat man insgesamt elf Lösungen des Problems gefunden. Aus dem Lösungsweg geht außerdem hervor, daß es keine weiteren Lösungen geben kann.
Die elf Lösungen sind

$$\begin{array}{lll}
x_1 = 0, & y_1 = 9, & z_1 = 0,\\
x_2 = 10, & y_2 = 1, & z_2 = 0,\\
x_3 = 7, & y_3 = 1, & z_3 = 2,\\
x_4 = 4, & y_4 = 1, & z_4 = 4,\\
x_5 = 1, & y_5 = 1, & z_5 = 6,\\
x_6 = 6, & y_6 = 3, & z_6 = 1,\\
x_7 = 3, & y_7 = 3, & z_7 = 3,\\
x_8 = 0, & y_8 = 3, & z_8 = 5,\\
x_9 = 5, & y_9 = 5, & z_9 = 0,\\
x_{10} = 2, & y_{10} = 5, & z_{10} = 2,\\
x_{11} = 1, & y_{11} = 7, & z_{11} = 1.
\end{array}$$

III. ZAHLENFOLGEN

Aufgabe 15 DIETER SOCHER, Potsdam

Fünf Hausfrauen wollen Schrippen kaufen. Als der Bäcker die vorrätigen gezählt hatte, erlaubt er sich einen Scherz: „Wenn jede von Ihnen die Hälfte der jeweils vorhandenen Schrippen und eine halbe dazu kauft, bleibt keine übrig!" Wieviel Schrippen hatte der Bäcker, und wieviel hätten nach diesem Vorschlag die einzelnen Kundinnen erhalten?

Lösung (Dieter Socher):

Es sei x_n die Anzahl der Schrippen, die vorhanden sind, ehe die n-te Kundin gekauft hat. Die n-te Kundin erhält dann

$$y_n = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x_n + 1}{2}$$

Schrippen. Die Differenz $x_n - y_n$ ist die Anzahl Schrippen, die nach dem Kauf der n-ten Kundin, also vor dem Kauf der $(n + 1)$ten Käuferin vorhanden sind:

$$x_{n+1} = x_n - y_n = x_n - \frac{x_n + 1}{2} = \frac{x_n - 1}{2}.$$

Da nach der fünften Käuferin keine Schrippen mehr vorhanden sind, gilt $x_6 = 0$, also

$$\frac{x_5 - 1}{2} = 0,$$

mithin $x_5 = 1$ und $y_5 = \frac{2}{2} = 1$.

Weiter folgt:

$$\frac{x_4 - 1}{2} = 1, \quad x_4 = 3, \quad y_4 = \frac{4}{2} = 2;$$

$$\frac{x_3 - 1}{2} = 3, \quad x_3 = 7, \quad y_3 = \frac{8}{2} = 4;$$

$$\frac{x_2 - 1}{2} = 7, \quad x_2 = 15, \quad y_2 = \frac{16}{2} = 8;$$

$$\frac{x_1 - 1}{2} = 15, \quad x_1 = 31, \quad y_1 = \frac{32}{2} = 16.$$

Es waren also anfangs 31 Schrippen vorhanden. Die erste Kundin erhält 16, die zweite 8, die dritte 4, die vierte 2 und die fünfte 1 Schrippe. „Halbe" Schrippen tauchen im Ergebnis nicht auf!

Aufgabe 16 JOHANNES RIEDEL, Berlin

In einem Konstruktionsbüro sollen die Konstruktionsunterlagen für die Spezialanfertigung einer Laboratoriumszentrifuge ausgearbeitet werden. Zwischen Antriebsmotor und Zentrifuge wird ein Stufengetriebe eingebaut, das folgenden Anforderungen genügen soll:

1. Die erste Stufe ist Direktkupplung der Zentrifuge an den Motor, der eine Drehzahl $a_1 = 6400\ \text{min}^{-1}$ hat.
2. Das Getriebe soll insgesamt fünf verschiedene Drehzahlen ermöglichen.
3. Die Drehzahl a_2 soll 75% der Drehzahl a_1 betragen, ebenso die Drehzahl a_3 75% von a_2 und so fort.

Das Getriebe erhält den in der Abb. 5 schematisch dargestellten Aufbau.

a) Es ist die Folge a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 der Drehzahlen aufzustellen.

b) Welche Übersetzungen müssen die Räderpaare (3, 4), (5, 6), (7, 8) erhalten, wenn das Räderpaar (1, 2) im Verhältnis 1 : 1 übersetzt?

c) Wie groß müssen die Radien der Räder 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 gewählt werden? Der Abstand der Vorgelegewelle von der Antriebs- beziehungsweise Abtriebswelle beträgt 175 mm (von Wellenmitte zu Wellenmitte gemessen).

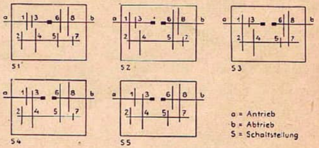


Abb. 5

Lösung (Johannes Riedel)

a) Es ist $a_1 = 6400\ \text{min}^{-1}$ (Direktgang) die erste Stufe (Bedingung 1). Da $75\,\% = 0{,}75 = \frac{3}{4}$ ist, ergeben sich die folgenden Stufen durch Multiplikation der jeweils vorhergehenden Stufe mit $\frac{3}{4}$:

$$a_1 = 6400\ \text{min}^{-1} = 6400\ \text{min}^{-1};$$

$$a_2 = a_1 \cdot \frac{3}{4} = 6400\ \text{min}^{-1} \cdot \frac{3}{4} = 4800\ \text{min}^{-1};$$

$$a_3 = a_2 \cdot \frac{3}{4} = a_1 \cdot \frac{9}{16} = 6400\ \text{min}^{-1} \cdot \frac{9}{16} = 3600\ \text{min}^{-1};$$

$$a_4 = a_3 \cdot \frac{3}{4} = a_1 \cdot \frac{27}{64} = 6400\ \text{min}^{-1} \cdot \frac{27}{64} = 2700\ \text{min}^{-1};$$

$$a_5 = a_4 \cdot \frac{3}{4} = a_1 \cdot \frac{81}{256} = 6400\ \text{min}^{-1} \cdot \frac{81}{256} = 2025\ \text{min}^{-1}.$$

Eine solche Folge, bei der jedes folgende Glied aus dem vorhergehenden durch Multiplikation mit ein und demselben Faktor errechnet wird (oder, was dasselbe besagt, bei der der Quotient aus zwei aufeinanderfolgenden Gliedern konstant ist), heißt eine geometrische Folge.

b) Bei der Schaltstellung 2 sind die Räderpaare (1; 2) und (5; 6) in Eingriff. Wird mit a_v die Drehzahl der Vorgelegewelle bezeichnet, so gilt

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1}{a_v} \cdot \frac{a_v}{a_2} = \frac{6400}{4800} = \frac{4}{3} = 4 : 3.$$

Nun ist bei Schaltstellung 2

$$\frac{a_1}{a_v} = \text{Ü}\,(1; 2) = \frac{1}{1} = 1,$$

wenn mit Ü(1; 2) das Übersetzungsverhältnis des Räderpaares (1; 2) bezeichnet wird. Damit folgt

$$\frac{a_r}{a_2} = \text{Ü}(5;6) = 4:3.$$

Das Räderpaar (5; 6) muß also im Verhältnis Ü(5; 6) = 4:3 übersetzen.
Bei der Schaltstellung 3 sind die Räderpaare (1; 2) und (7; 8) in Eingriff. Analog erhält man

$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{a_1}{a_r} \cdot \frac{a_r}{a_3} = \frac{6400}{3600} = \frac{16}{9} = 16:9,$$

also Ü(7; 8) = 16 : 9.

Bei Schaltstellung 4 greifen die Räderpaare (3; 4) und (5; 6) ineinander. Daher gilt

$$\frac{a_1}{a_4} = \frac{a_1}{a_r} \cdot \frac{a_r}{a_4} = \frac{6400}{2700} = \frac{64}{27} = 64:27.$$

Nun ist

$$\frac{a_r}{a_4} = \text{Ü}(5;6) = 4:3 = \frac{4}{3},$$

also gilt

$$\frac{a_1}{a_4} = \frac{a_1}{a_r} \cdot \frac{4}{3} = \frac{64}{27}.$$

Daraus ergibt sich $\frac{a_1}{a_r} = \text{Ü}(3;4) = \frac{16}{9} = 16:9.$

Die Schaltstellung 5 liefert die Probe: Es sind die Räderpaare (3; 4) und (7; 8) in Eingriff, also muß gelten

$$\text{Ü}(3;4) \cdot \text{Ü}(7;8) = \frac{a_1}{a_5} = \frac{6400}{2025} = \frac{256}{81}.$$

Tatsächlich ist $\text{Ü}(3;4) = \frac{16}{9}$ und $\text{Ü}(7;8) = \frac{16}{9}$, also

$$\text{Ü}(3;4) \cdot \text{Ü}(7;8) = \frac{16}{9} \cdot \frac{16}{9} = \frac{256}{81}.$$

c) Die Umfänge eines Räderpaares stehen zueinander im umgekehrten Verhältnis der Übersetzung. Gilt beispielsweise für das Räderpaar (3; 4) das Übersetzungsverhältnis $\text{Ü}(3;4) = \frac{16}{9}$, so gilt (mit U_k wird der Umfang, mit r_k der Radius des Rades k bezeichnet):

$$\frac{U_4}{U_3} = \frac{16}{9}, \quad \frac{2\pi r_4}{2\pi r_3} = \frac{16}{9}, \quad \frac{r_4}{r_3} = \frac{16}{9}.$$

Ferner gilt $r_3 + r_4 = 175$ mm.

Es liegt also ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten vor:

$$\frac{r_4}{r_3} = \frac{16}{9}, \qquad r_3 + r_4 = 175 \text{ mm}.$$

Löst man es auf, so erhält man

$$r_3 = 63 \text{ mm}, \qquad r_4 = 112 \text{ mm}.$$

Analog ergibt sich

$$r_1 = 87{,}5 \text{ mm}, \qquad r_2 = 87{,}5 \text{ mm},$$
$$r_5 = 75 \text{ mm}, \qquad r_6 = 100 \text{ mm},$$
$$r_7 = 63 \text{ mm}, \qquad r_8 = 112 \text{ mm}.$$

Aufgabe 17 THEODOR KASPER, Meißen

Die Zahlenfolgen $(s_n) = \frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots$ und $(t_n) = \frac{0}{1}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \ldots$ haben die Bildungsgesetze

$$s_n = \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad t_n = \frac{n-1}{n}.$$

Welches Bildungsgesetz hat die aus beiden zusammengesetzte Folge

$$(u_n) = \frac{1}{1}; \frac{0}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{5}; \frac{4}{5}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}; \ldots?$$

(Anmerkung: Oft wird angegeben: Es ist $u_{2n} = t_n$ und $u_{2n-1} = s_n$. Das ist nicht die gewünschte Lösung. Gesucht wird vielmehr ein einheitliches Bildungsgesetz u_n, das für $n = 1; 2; 3; \ldots$ die Glieder der zusammengesetzten Folge ergibt.)

1. Lösung (Theodor Kasper):

Die Nennerfolge $(N_n) = 1; 1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; \ldots$ geht aus der natürlichen Zahlenfolge $(n) = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; \ldots$ hervor, wenn man zu dieser die Folge $(a_n) = 1; 0; 1; 0; \ldots$ gliedweise addiert und die Glieder der Summenfolge halbiert:

$$(N_n) = (\tfrac{1}{2}[n + a_n]).$$

Wie lautet aber das allgemeine Glied der Folge (a_n)? Eine Folge, deren Glieder nur zwei Werte annehmen können, ist die Folge

$$(b_n) = ([-1]^{n-1}) = +1; -1; +1; -1; +1; -1; \ldots;$$

zu ihr braucht man nur die Folge $(c_n) = 1; 1; 1; \ldots = (1)$ gliedweise zu addieren und die Summenfolge gliedweise zu halbieren. Es folgt dann

$$(a_n) = (\tfrac{1}{2}[b_n + c_n]) = (\tfrac{1}{2}\{[-1]^{n-1} + 1\}).$$

Damit wird das gesuchte allgemeine Glied der Nennerfolge

$$(N_n) = (\tfrac{1}{2}[n + \tfrac{1}{2}\{(-1)^{n-1} + 1\}]).$$

In der Zählerfolge (Z_n) ist $Z_n = 1$, wenn n ungerade ist. Subtrahiert man 1 von jedem Glied dieser Folge, so geht sie in die Folge

$$(Z_n - 1) = 0; -1; 0; 0; 0; 1; 0; 2; 0; 3; 0; 4; 0; \ldots$$

über. Wir fassen nun die Glieder dieser Folge als Produkte aus den Gliedern einer noch zu bestimmenden Folge (c_n) und den entsprechenden Gliedern der Folge $(b_n) = 0; 1; 0; 1; 0; 1; \ldots$ auf; für (b_n) gilt offenbar $b_n = \frac{1}{2}[1 + (-1)]$. Dann ist

$$(Z_n - 1) = (c_n b_n).$$

Von der Folge (c_n) interessieren nur die Glieder mit geradem Index, da die übrigen Glieder durch die Multiplikation annulliert werden, falls sie endlich sind [was wir von den Gliedern der Folge (c_n) fordern müssen]. Wegen $b_n = 1$ für gerades n muß

für $n = \quad 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ \ldots$

gelten $c_n = -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots$

Addiert man zu c_n jeweils 2, so erhält man $\frac{n}{2}$; es ist also

$$c_n = \frac{n}{2} - 2.$$

Man erkennt, daß c_n auch für ungerades n endlich bleibt. Damit wird

$$(Z_n - 1) = \left(\left[\frac{n}{2} - 2\right] \cdot \frac{1}{2}\,[1 + (-1)^n]\right).$$

also

$$(Z_n) = (1 + \tfrac{1}{4}\,[n - 4]\,[1 + (-1)^n]).$$

Aus Z_n und N_n erhält man schließlich u_n:

$$u_n = \frac{Z_n}{N_n} = \frac{1 + 0{,}25(n-4)\,(1 + (-1)^n)}{0{,}5[n + 0{,}5((-1)^{n-1} + 1)]}$$

$$= \frac{n + (n-4)\,(-1)^n}{2n + 1 + (-1)^{n-1}}.$$

Probe: Setzt man einmal $n = 2m - 1$, dann $n = 2m$, so ergeben sich die trivialen allgemeinen Glieder der Teilfolgen, aus denen die Folge (u_n) zusammengesetzt ist, und zwar

$$\frac{1}{m} \quad \text{und} \quad \frac{m-1}{m}.$$

2. Lösung (Hans-Joachim Pollok):

Methodisch ist es am zweckmäßigsten, die Bildungsgesetze der Zählerfolge und der Nennerfolge von (u_n) gesondert aufzustellen. Es werde mit der Nennerfolge begonnen:

$$(a_n) = 1;\ 1;\ 2;\ 2;\ 3;\ 3;\ 4;\ 4;\ \ldots$$

Die geradzahligen Glieder folgen dem Bildungsgesetz $(c_n) = \frac{n}{2}$. Da die vorangehenden ungeradzahligen Glieder wertmäßig den folgenden geradzahligen Gliedern gleichen, muß eine Funktion von n gefunden werden, deren Betrag, zu $\frac{n}{2}$ addiert, den folgenden Bedingungen genügt: Ist n gerade, so ist der Funktionswert gleich Null; ist n ungerade, so ist der Funktionswert gleich $+\frac{1}{2}$. Auf Grund dieses periodischen Verhaltens liegt es nahe, sich beim Aufbau der Funktion einer trigonometrischen Funktion zu bedienen. Nun ist

$$(d_n) = \left(\sin\frac{n\pi}{2}\right) = +1;\ 0;\ -1;\ 0;\ +1;\ 0;\ -1;\ 0;\ \ldots,$$

$$(d_n^2) = \left(\sin^2\frac{n\pi}{2}\right) = +1;\ 0;\ +1;\ 0;\ +1;\ 0;\ +1;\ 0;\ \ldots,$$

$$\left(\frac{1}{2}\,d_n^2\right) = \left(\frac{1}{2}\sin^2\frac{n\pi}{2}\right) = +\frac{1}{2};\ 0;\ +\frac{1}{2};\ 0;\ +\frac{1}{2};\ 0;\ \ldots$$

Damit ist $(a_n) = \left(c_n + \frac{1}{2}\,d_n^2\right) = \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sin^2\frac{n\pi}{2}\right)$.

Die Zählerfolge lautet

$$(b_n) = 1;\ 0;\ 1;\ 1;\ 1;\ 2;\ 1;\ 3;\ 1;\ 4;\ \ldots$$

Die ungeradzahligen Glieder sind alle gleich 1, die geradzahligen durchlaufen — die Zahl Null mit eingeschlossen — die Folge der natürlichen Zahlen. Es muß also eine Funktion von n gefunden werden, deren Betrag, zu 1 addiert, den folgenden Bedingungen genügt: Ist n geradzahlig, so ist der Funktionswert in der Weise von n linear abhängig, daß er die Folge der ganzen Zahlen — bei der Zahl -1 beginnend — durchläuft, ist n ungeradzahlig, so ist der Funktionswert gleich Null. Nun ist

$$(e_n) = \left(\cos\frac{n\pi}{2}\right) = 0;\ -1;\ 0;\ +1;\ 0;\ -1;\ 0;\ +1;\ 0;\ \ldots$$

$$(e_n^2) = \left(\cos^2\frac{n\pi}{2}\right) = 0;\ +1;\ 0;\ +1;\ 0;\ +1;\ 0;\ +1;\ 0;\ \ldots,$$

$$\left[\frac{1}{2}\,(n-4)\,e_n^2\right] = \left[\frac{1}{2}\,(n-4)\cos^2\frac{n\pi}{2}\right]$$
$$= 0;\ -1;\ 0;\ 0;\ 0;\ 1;\ 0;\ 2;\ 0;\ 3;\ 0;\ \ldots$$

und damit

$$(b_n) = \left(1 + \frac{1}{2}\,(n-4)\cos^2\frac{n\pi}{2}\right).$$

Das Bildungsgesetz der zusammengesetzten Folge lautet mithin

$$u_n = \frac{b_n}{a_n} = \frac{1 + 0{,}5(n-4)\cos^2\frac{n\pi}{2}}{\frac{n}{2} + 0{,}5\sin^2\frac{n\pi}{2}}.$$

3. Lösung (Hans-Joachim Pollok):

Die Überlegungen hierzu decken sich im wesentlichen mit denen der 2. Lösung. Die Periodizität der Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ werden ebenfalls benutzt, darüber hinaus aber auch das periodische Verhalten der Funktion i^n. Damit kann man das Bildungsgesetz abwandeln in

$$u_n = \frac{1 + 0{,}5(n-4)\,i^n\cos\frac{n\pi}{2}}{\frac{n}{2} + 0{,}5\,i^{n-1}\sin\frac{n\pi}{2}}.$$

4. Lösung (Hans-Joachim Pollok):

Aus der Lösung 3 läßt sich mit Hilfe der Eulerschen Identität $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ eine weitere Lösung entwickeln. Aus der Eulerschen Identität folgt

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad i = e^{\frac{\pi}{2}i}.$$

Durch Einsetzen in die entsprechenden Ausdrücke des allgemeinen Gliedes u_n ergibt sich:

$$\cos\frac{n\pi}{2} = \frac{e^{\frac{in\pi}{2}} + e^{-\frac{in\pi}{2}}}{2}, \quad \sin\frac{n\pi}{2} = \frac{e^{\frac{in\pi}{2}} - e^{-\frac{in\pi}{2}}}{2i},$$

$$i^n = e^{\frac{in\pi}{2}}, \qquad i^{n-1} = \frac{1}{i}\, e^{\frac{in\pi}{2}},$$

$$i^n \cos\frac{n\pi}{2} = \frac{1}{2}(e^{in\pi}+1), \quad i^{n-1}\sin\frac{n\pi}{2} = -\frac{1}{2}(e^{in\pi}-1),$$

$$u_n = \frac{4+(n-4)(e^{in\pi}+1)}{2n-(e^{in\pi}-1)}.$$

5. Lösung (Jürgen Berndt):

In der Folge (u_n) bilden die s_n das 1., 3., 5., ... Glied, die t_n das 2., 4., 6., ... Glied. Demzufolge ergibt sich für (u_n) unter Einführung der mod-Funktion:

$$(u_n) = \frac{2}{n+1}(n \bmod 2) + \frac{n-2}{n}[(n-1) \bmod 2]$$

(dabei bedeutet n mod a den Rest, den n beim Teilen durch a läßt).

6. Lösung (F. Götze):

Wir führen die Funktion „größtes Ganzes einer reellen Zahl" ein und drücken dies durch eine eckige Klammer aus; zum Beispiel ist

$$\left[\frac{5}{2}\right] = 2, \quad \left[\frac{11}{3}\right] = 3, \quad [1{,}999] = 1.$$

Mit dieser Symbolik ergibt sich für den Nenner der Folge (u_n) die Darstellung

$$\left[\frac{n+1}{2}\right], \quad n = 1; 2; 3; \ldots$$

Berücksichtigt man noch, daß für die geraden n jedes einzelne Glied der Folge (u_n) einen um 1 kleineren Zähler hat als der Nenner und daß für ungerade n der Zähler stets den Wert 1 besitzt, so läßt sich das Bildungsgesetz wie folgt angeben:

$$u_n = \frac{\frac{1+(-1)^n}{2}\left\{\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right\} + \frac{1-(-1)^n}{2}}{\left[\frac{n+1}{2}\right]}.$$

Durch eine einfache Umformung erhält man

$$u_n = \frac{1+(-1)^n}{2} - \frac{(-1)^n}{\left[\frac{n+1}{2}\right]}.$$

Aufgabe 18 THEODOR KASPER, Meißen

Wie lautet das Bildungsgesetz (das allgemeine Glied) der Zahlenfolge

$$(v_n) = 0; 2; 2; 3; 5; 5; 6; 8; 8; 9; 11; 11 \ldots ?$$

1. Lösung (Theodor Kasper):

Vermindert man in der Folge (v_n) das 2., 5., 8., ... Glied um 1, so geht sie in die Folge

$$(w_n) = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; \ldots$$

über. Deren Bildungsgesetz ist leicht erkennbar:

$$w_n = n - 1.$$

Zur Folge (w_n) muß man die Folge

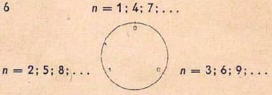
$$(a_n) = 0, 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; \ldots$$

gliedweise addieren, wenn man die Folge (v_n) erhalten will:

$$(v_n) = (w_n + a_n).$$

Das Bildungsgesetz für (a_n) muß für $n = 1; 2; 3$ dieselben Werte ergeben wie für $n = 4; 5; 6$ oder für $n = 7; 8; 9$; usw. Man kann eine solche Folge „zyklisch" (oder „periodisch") nennen und sie entsprechend darstellen (Abb. 6).

Abb. 6



Es liegt nahe, für das Bildungsgesetz von (a_n) trigonometrische Funktionen zu verwenden. In der Tat ist

$$(b_n) = \left(\cos\frac{2\pi n}{3}\right) = -0{,}5; -0{,}5; +1; -0{,}5; -0{,}5; +1; \ldots$$

Ersetzt man darin n durch $n+1$, so folgt

$$(c_n) = \left(\cos\frac{2\pi(n+1)}{3}\right) = -0{,}5; +1; -0{,}5; -0{,}5; +1; -0{,}5; \ldots,$$

$$(0{,}5 + c_n) = 0; +1{,}5; 0; 0; +1{,}5; 0; 0; \ldots$$

und

$$\left(\frac{2}{3}(0{,}5 + c_n)\right) = 0; +1; 0; 0; +1; 0; 0; \ldots = (a_n).$$

Damit sind wir am Ziel:

$$(v_n) = (w_n + a_n) = \left(w_n + \frac{2}{3}(0{,}5 + c_n)\right),$$

$$(v_n) = \left(n - 1 + \frac{2}{3}\left[0{,}5 + \cos\frac{2\pi(n-1)}{3}\right]\right),$$

$$v_n = n - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\cos\frac{2\pi(n+1)}{3}.$$

2. Lösung (Ulrich Richter):

Für das Bildungsgesetz der Zahlenfolge $(v_n) = 0; 2; 2; 3; 5; 5; 6; 8; 8; 9; 11; 11; \ldots$ lassen sich beliebig viele allgemeine Glieder finden. Die Folge läßt sich auch als

$$(v_n) = 1-1; 2-0; 3-1; 4-1; 5-0; 6-1; 7-1; 8-0; 9-1; 10-1; 11-0; 12-1; \ldots$$

schreiben. Die Folge $(x_n) = 1;\ 0;\ 1;\ 1;\ 0;\ 1;\ 1;\ 0;\ 1;\ 1;\ 0;\ \ldots$ ist periodisch und kann durch jede periodische Funktion mit folgenden drei Eigenschaften beschrieben werden:

1. $f(3\lambda) = f(3n\lambda) = 0,$
2. $f(\lambda) = f(\lambda + 3n\lambda) = 1,$
3. $f(2\lambda) = f(2\lambda + 3n\lambda) = 1.$

Wie sich die Funktion an anderen Stellen verhält, ist völlig unwesentlich.

Als Beispiel einer Folge (x_n) seien angegeben

$$(x_n) = \left(\left|\frac{2}{3}\sqrt{3}\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{3}\right]\right|\right)$$

oder

$$(x_n) = \left(\frac{4}{3}\sin^2\left[(n+1)\frac{\pi}{3}\right]\right),$$

so daß das Bildungsgesetz der Folge (v_n) geschrieben werden kann als

$$v_n = n - \left|\frac{2}{3}\sqrt{3}\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{3}\right]\right|$$

oder

$$v_n = n - \frac{4}{3}\sin^2\left[(n+1)\frac{\pi}{3}\right]$$

(wobei stets $n = 1;\ 2;\ 3;\ \ldots$ gilt).

3. Lösung (Erich Schiffner):

Versteht man unter $[a]$ die größte ganze Zahl x, für die gilt $x \leqq a$, so ist das allgemeine Glied der Folge

$$(v_n) = n - \left(\left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n-2}{3}\right]\right).$$

Beweis: Man bilde

$$\begin{aligned} &v_{n+1} - v_n \\ &= n + 1 - \left(\left[\frac{n+1}{3}\right] - \left[\frac{n-1}{3}\right]\right) \\ &\qquad - n + \left(\left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n-2}{3}\right]\right) \\ &= 1 - \left(\left[\frac{n+1}{3}\right] - \left[\frac{n-1}{3}\right]\right) + \left(\left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n-2}{3}\right]\right). \end{aligned}$$

Nun wird die erste Klammer für $n = 3k$ gleich 1, ebenso die zweite, also ist

$$v_{n+1} - v_n = 1 \qquad \text{für} \qquad n = 3k.$$

Für $n = 3k + 1$ ergibt sich

$$v_{n+1} - v_n = 1 - 0 + 1 = 2$$

und für $n = 3k + 2$

$$v_{n+1} - v_n = 1 - 1 + 0 = 0,$$

womit alles bewiesen ist.

IV. EXTREMWERTAUFGABEN

Aufgabe 19 KLAUS GÖLDNER, Dresden

Zu untersuchen sind Kreiskegelstümpfe mit gleicher Höhe und flächengleichen Achsschnitten. Wie groß muß der Deckkreisradius sein, damit das Volumen möglichst groß wird? Lösung a mit Hilfe, b ohne Verwendung der Differentialrechnung.

Lösung (Klaus Göldner):

Für das Volumen R eines Kreiskegelstumpfes gilt

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2). \tag{I}$$

Als Nebenbedingungen treten im vorliegenden Fall auf:

$$h = \text{constans} \quad \text{(gleiche Höhen)},$$
$$\frac{R+r}{2}\cdot h = \text{constans} \quad \text{(flächengleiche Achsschnitte)}.$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$R + r = \text{constans} = a$$

oder

$$R = a - r = a - x \tag{II}$$

mit $r = x$. Setzt man (II) in (I) ein, so ergibt sich

$$V = \frac{\pi}{3}h(a^2 - 2ax + x^2 + ax - x^2 + x^2)$$

oder

$$V = \frac{\pi}{3}h(x^2 - ax + a^2). \tag{III}$$

Lösung a

Man erhält die Extremwerte von V, indem man $V' = 0$ setzt und V'' auf seinen Wert hin überprüft:

$$V' = \frac{\pi}{3}h(2x - a), \quad V'' = \frac{\pi}{3}h\cdot 2.$$

Man erkennt, daß $V'' > 0$ für jedes x gilt, das heißt, die Funktion V hat keine relativen Maxima im Innern des in Frage kommenden Intervalls. Wenn überhaupt Maxima existieren, müssen sie an den Intervallgrenzen liegen. Wegen $R \geqq 0$ und $r \geqq 0$ folgt aus (II)

$$0 \leqq x \leqq a \qquad \text{und} \qquad a \geqq 0.$$

Für $x_1 = 0$ und für $x_2 = a$ ergibt sich $V = \frac{\pi}{3}h\cdot a^2$.

Für $0 < x < a$ ist $x^2 < ax$, also $x^2 - ax < 0$ und folglich $x^2 - ax + a^2 < a^2$, d. h., daß tatsächlich an den Intervallgrenzen maximale Werte liegen.

Lösung b

Aus (III) ergibt sich durch einfache Umformung

$$V = \frac{\pi}{3}hx^2 - \frac{\pi}{3}hax + \frac{\pi}{3}ha^2.$$

Man erkennt, daß es sich bei V um eine ganze rationale Funktion zweiten Grades handelt. Wegen des positiven Koeffizienten beim quadratischen Glied verläuft die die Funktion darstellende Parabel so, daß sie nach positiven V-Werten hin offen ist. Daher können Maximalwerte nur an den in Frage kommenden Intervallgrenzen auftreten. Wegen $R \geqq 0$ und $r \geqq 0$ folgt aus (II)

$$0 \leqq x \leqq a,$$

so daß $x_1 = 0$ und $x_2 = a$ ein maximales V ergeben:

$$V_{\max} = \frac{\pi}{3}\, h a^2.$$

Schlußfolgerung 1:

Aus (II) folgt mit $\quad x_1 = 0 \quad R = a$

und mit $\quad x_2 = a \quad R = 0.$

Das heißt, das Volumen ist dann ein Maximum, wenn der Kegelstumpf zum Kegel wird.

Schlußfolgerung 2:

Nicht immer bietet bei Extremwertberechnungen die Differentialrechnung einen Lösungsweg!

Aufgabe 20 KLAUS MÜLLER, Arnstadt

Welchen Neigungswinkel α muß eine schiefe Ebene mit der Basis c haben, wenn eine Kugel auf ihr in kürzester Zeit herabrollen soll? Die Reibung und das Drehmoment werden vernachlässigt.

Lösung (Klaus Müller):

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein (vgl. Abb. 7)

Länge der schiefen Ebene (Weg)	s,	Masse der Kugel	m,
		Gewicht der Kugel	G,
Beschleunigung	b,	Kraft	P,
benötigte Zeit	t,	Fallbeschleunigung	g.

Zweckmäßig stellt man die zum Herabrollen erforderliche Zeit als Funktion des Neigungswinkels dar. Es ist

$$s = \frac{b}{2} t^2 \quad \text{und} \quad s = \frac{c}{\cos\alpha},$$

also $\dfrac{c}{\cos\alpha} = \dfrac{b}{2} t^2$

oder $t = \sqrt{\dfrac{2c}{b \cdot \cos\alpha}}$.

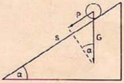


Abb. 7

Aus der letzten Gleichung ist noch die Beschleunigung b zu eliminieren. Aus $P = mb$ folgt $b = \dfrac{P}{m}$ und wegen $P = G \cdot \sin\alpha$ (vgl. Abb. 7) sowie $G = gm$ ergibt sich $b = g \cdot \sin\alpha$. Demnach ist

$$t = \sqrt{\frac{2c}{g \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}}.$$

Nach einem Additionstheorem gilt aber $2 \sin\alpha \cos\alpha = \sin 2\alpha$; damit ergibt sich

$$t = \sqrt{\frac{4c}{g \cdot \sin 2\alpha}}.$$

Die Zeit t soll einen Minimalwert annehmen; das ist genau dann der Fall, wenn der Nenner des unter der Wurzel stehenden Bruchs einen Maximalwert annimmt, d. h. also, wenn $\sin 2\alpha = 1$ ist. Daraus folgt unmittelbar

$$\alpha = 45^\circ, \qquad t_{\min} = \sqrt{\frac{4c}{g}} = 2\sqrt{\frac{c}{g}}.$$

Schlußfolgerung: Nicht jede Extremwertaufgabe erfordert zur Lösung die Anwendung der Differentialrechnung!

Aufgabe 21 RUDOLF SCHMINDER, Collm

Ein Lichtstrahl werde in einem kugelförmigen Flüssigkeitstropfen einmal partiell reflektiert. Der Brechungsindex Luft-Flüssigkeit sei n_{LF}.

a) Welchen Winkel können einfallender und ausfallender Strahl maximal miteinander bilden (vgl. Abb. 8)?

b) Welche Werte ergeben sich, wenn die Flüssigkeit Wasser ist? Für den Brechungsindex Luft-Wasser gilt $n_{LW} = \frac{4}{3}$.

c) Welche Folgerung läßt das Ergebnis auf den Regenbogen zu?

1. Lösung (Rudolf Schminder):

a) Aus Abbildung 8 geht hervor:

Es ist $\sphericalangle MCA = \alpha_2$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck MCA), also ist $\beta_1 + 2\alpha_2 + 90^\circ = 180^\circ$ oder $\beta_1 + 2\alpha_2 = 90^\circ$, $\beta_1 = 90^\circ - 2\alpha_2$. Ferner ist $\sphericalangle MAD = \alpha_1$ (Scheitelwinkel), also gilt

$$\frac{\beta_2}{2} + \alpha_1 + \beta_1 + 90^\circ = 180^\circ$$

oder

$$\frac{\beta_2}{2} + \alpha_1 + \beta_1 = 90^\circ.$$

Daraus folgt

$$\beta_2 = 4\alpha_2 - 2\alpha_1.$$

Nun ist $\quad n_{LF} = \sin\alpha_1 : \sin\alpha_2$,

also $\quad \sin\alpha_1 = n_{LF} \cdot \sin\alpha_2$

oder

$$\alpha_1 = \arcsin(n_{LF} \cdot \sin\alpha_2).$$

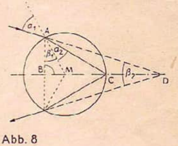


Abb. 8

Demnach folgt

$$\beta_2 = 4\alpha_2 - 2 \arcsin(n_{LF} \cdot \sin\alpha_2).$$

Man hat damit β_2 als Funktion von α_2 ausgedrückt. Setzt man $\dfrac{d\beta_2}{d\alpha_2} = 0$, so liefern die Lösungen dieser Gleichung die Extremwerte der Funktion (sofern an diesen Stellen $\dfrac{d^2\beta_2}{d\alpha_2^2} \neq 0$ ist). Nun ist

$$\frac{d\beta_2}{d\alpha_2} = 4 - \frac{2}{\sqrt{1 - n^2_{LF} \cdot \sin^2\alpha_2}} \cdot n_{LF} \cdot \cos\alpha_2,$$

aus

$$4 - \frac{2}{\sqrt{1 - n^2_{LF} \cdot \sin^2\alpha_2}} \cdot n_{LF} \cdot \cos\alpha_2 = 0$$

folgt

$$\cos\alpha_2 = 2\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{3n^2_{LF}}}.$$

Damit kann man auch β_1, α_1 und β_2 bestimmen. Es wäre noch nachzuprüfen, ob β_2 für $\alpha_2 = \operatorname{arc\,cos} 2\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{3\,n^2_{LF}}}$ tatsächlich ein Maximum annimmt.

Wir wollen auf diese Prüfung verzichten, da die Bildung von $\frac{d^2\beta_2}{d\,\alpha_2^2}$ recht umständlich ist. In der Tat nimmt β_2 ein Maximum an.

Aus $n_{LF} = \sin\alpha_1 : \sin\alpha_2$ folgt $\alpha_1 = \operatorname{arc\,sin}(n_{LF}\cdot\sin\alpha_2)$, und damit erhält man aus $\beta_2 = 4\alpha_2 - 2\alpha_1$

$$\beta_2 = 4\operatorname{arc\,cos} 2\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{3\,n^2_{LF}}}$$

$$- 2\operatorname{arc\,sin}\left(n_{LF}\cdot\sin\operatorname{arc\,cos} 2\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{3\,n^2_{LF}}}\right).$$

b) Für $n_{LF} = \frac{4}{3}$ ist $\alpha_2 = \operatorname{arc\,cos} 2\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{3}{16}}$

$$= \operatorname{arc\,cos} 0{,}764(17) = 40^\circ 10' \approx 40^\circ.$$

Damit ergibt sich

$$\alpha_1 \approx \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{4}{3}\cdot 0{,}643\right) \approx 59^\circ$$

$$\text{und } \beta_2 = 4\alpha_2 - 2\alpha_1$$
$$\approx 4\cdot 40^\circ - 2\cdot 59^\circ$$
$$= 160^\circ - 118^\circ = 42^\circ.$$

c) Der Winkel β_2 ist der Sehwinkel, unter dem der Radius des Hauptregenbogens gesehen wird. Da der Mittelpunkt des Regenbogens der Sonne gerade gegenüberliegt, bedeutet das u. a., daß ein Regenbogen nur dann sichtbar ist, wenn die Sonne nicht höher als 42° über dem Horizont steht.

Bemerkung: Bei der Rechnung wurde von Dispersions- und Interferenzerscheinungen, die das wirkliche Bild des Regenbogens formen, abgesehen.

2. Lösung (Rüdiger Thiele):

Betrachtet man im Dreieck ACD den Außenwinkel bei C (vgl. Abb. 8), so erkennt man, daß gilt

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \alpha_2 + \tfrac{1}{2}\beta_2, \quad \beta_2 = 4\alpha_2 - 2\alpha_1,$$

denn das Lot geht durch den Mittelpunkt. Demzufolge ist das Dreieck ACM gleichschenklig. Dann ist

$$\beta_2' = \frac{d\beta_2}{d\alpha_1} = 4\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} - 2, \quad \beta'' > 0.$$

Ist $\beta_2' = 0$, so ergibt sich $\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = \frac{1}{2}$ also $2\,d\alpha_2 = d\alpha_1$.

Aus dem Brechungsgesetz von SNELLIUS folgt

$$\frac{\cos\alpha_1\, d\alpha_1}{\cos\alpha_2\, d\alpha_2} = n \quad \text{oder} \quad n\cdot\cos\alpha_2 = 2\cos\alpha_1$$

(aus $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = n$ folgt $\sin\alpha_1 = n\cdot\sin\alpha_2$,

$$\frac{d\sin\alpha_1}{d\alpha_1} = n\cdot\frac{d\sin\alpha_2}{d\alpha_1} = n\cdot\frac{d\sin\alpha_2\, d\alpha_2}{d\alpha_2\, d\alpha_1},$$

also $\frac{\cos\alpha_1\, d\alpha_1}{\cos\alpha_2\, d\alpha_2} = n$).

Daraus findet man $\sin^2\alpha_2 = \frac{4(-1 + \sin^2\alpha_1) + n^2}{n^2}$.

Setzt man diesen Ausdruck in das Brechungsgesetz ein, so ergibt sich

$$\sin\alpha_1 = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}, \quad \sin\alpha_2 = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}.$$

Bei $n_{LW} = \frac{4}{3}$ ist $\beta_2 \approx 41^\circ$. Man müßte beachten, daß für verschiedene Frequenzen des Lichtes der Brechungskoeffizient etwas variiert.

Aufgabe 22 JOHANNES RIEDEL, Berlin

Zur Umsetzung von Drehbewegungen in geradlinige Bewegungen gibt es verschiedene Möglichkeiten. Bei Werkzeugmaschinen werden häufig die Kreuzschleife (Konstruktionsprinzip siehe Abb. 9) und die schwingende Kurbelschleife (Konstruktionsprinzip siehe Abb. 10) angewendet.

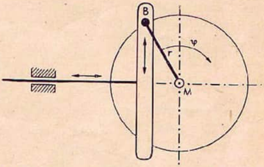


Abb. 9 Der Radius r der Drehbewegung ist der Abstand vom Drehpunkt M zum Mittelpunkt des Bolzens B

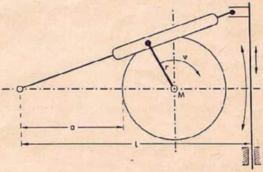


Abb. 10

a) Es ist die Auslenkung s des schwingenden Maschinenteils (Werkzeug oder Werkstück) in Abhängigkeit vom Drehwinkel φ anzugeben und die Funktion $s = f(\varphi)$ in einem rechtwinkligen cartesischen Koordinatensystem mit $r = 1$, $a = 0{,}5$ und $l = 3$ darzustellen. Welcher wesentliche Unterschied besteht hinsichtlich der Bewegung des schwingenden Maschinenteils zwischen den beiden Antriebsarten?

b) Für die Kreuzschleife sind die Geschwindigkeit $v = v(t)$ und die Beschleunigung $b = b(t)$ des schwingenden Maschinenteils zu ermitteln; die Winkelgeschwindigkeit ω sei konstant: $\omega = \frac{\varphi}{t}$ = constans.

c) Wie groß ist der absolute Extremwert der Beschleunigung bei der Kreuzschleife? Welchen Durchmesser d muß der Bolzen B mindestens haben, wenn τ die Scherfestigkeit des Bolzenwerkstoffes und m die Masse des schwingenden Maschinenteils ist? Es gilt $\tau = \frac{P}{F}$, wobei F der Querschnitt des Materials und P die zum Abscheren (gegenseitiges Verschieben zweier „benachbarter“ Querschnitte) erforderliche Kraft ist. Die Reibung werde vernachlässigt.

d) Für die schwingende Kurbelschleife ist aus der graphischen Darstellung der Weg-Zeit-Funktion der annähernde Verlauf der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion und der Beschleunigung-Zeit-Funktion abzulesen und graphisch darzustellen. Auch dabei gelte

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \text{constans}.$$

e) Für welche Arten von Maschinen kommen diese beiden Antriebsarten auf Grund ihrer Eigenschaften vorwiegend in Frage?

Lösung (Johannes Riedel):

a) Kreuzschleife: Es ist (Abb. 11) $s = MS$. Bezeichnet man als Drehwinkel φ den Winkel, den die Kurbel $MB = r$ bei Drehung im Uhrzeigersinn von MO aus überstreicht, so gilt

$$\frac{MS}{r} = \frac{s}{r} = \cos(90^\circ - \varphi).$$

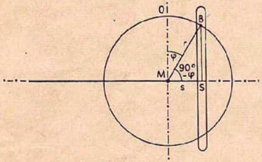


Abb. 11

Wegen $\cos(90^\circ - \varphi) = \sin\varphi$ ergibt sich daraus

$$\frac{s}{r} = \sin\varphi$$

und damit

$$s = r \sin\varphi$$

(graphische Darstellung siehe Abb. 12).

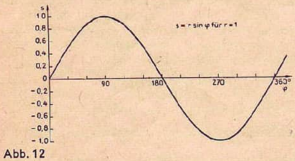


Abb. 12

Schwingende Kurbelschleife: Bezeichnet man als Drehwinkel φ den Winkel, den die Kurbel $MB = r$ bei Drehung im Uhrzeigersinn von MO aus überstreicht (Abb. 13), und als Schwingwinkel ψ den Winkel zwischen PS und PO (ebenfalls im Uhrzeigersinn gemessen), so ergibt sich folgende Rechnung: Es ist

$$\frac{OS}{PO} = \frac{s}{l} = \tan\psi,$$

also

$$s = l \tan\psi.$$

Nun gilt aber

$$\tan\psi = \frac{TB}{PT} = \frac{TB}{PQ + QM + MT} = \frac{TB}{a + r + MT}.$$

Aus $\quad \frac{TB}{r} = \sin\varphi \quad$ und $\quad \frac{MT}{r} = \cos\varphi$

folgt $\quad TB = r \sin\varphi \quad$ und $\quad MT = r \cos\varphi,$

so daß man erhält

$$\tan\psi = \frac{r\sin\varphi}{a + r + r\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\frac{a}{r} + 1 + \cos\varphi}.$$

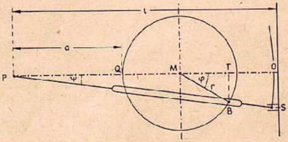


Abb. 13

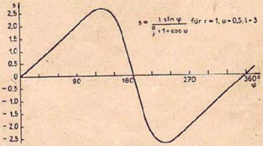


Abb. 14

Damit hat man die gesuchte Funktion gefunden:

$$s = l \frac{\sin\varphi}{\frac{a}{r} + 1 + \cos\varphi}$$

(graphische Darstellung siehe Abb. 14).

Bei der Kreuzschleife schwingt der Maschinenteil harmonisch, bei der schwingenden Kurbelschleife dagegen nicht. Bei der Kreuzschleife dauern Vor- und Rücklauf gleich lang, bei der schwingenden Kurbelschleife geht der Vorlauf langsam, der Rücklauf dagegen schnell vor sich.

b) Die Geschwindigkeit $v = v(t)$ erhält man durch Differentiation des Weges nach der Zeit:

$$v = v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d(r\sin\varphi)}{dt} = \frac{d(r\sin\omega t)}{dt}$$

(wegen $\omega = \frac{\varphi}{t}$ ist $\varphi = \omega t$). Nach der Kettenregel ergibt sich

$$\frac{d(r \sin \omega t)}{dt} = \frac{d(r \sin \varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{d\,\omega t}{dt} = \omega r \cos \omega t = \omega r \cos \varphi.$$

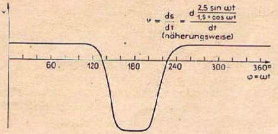


Abb. 15

Die Beschleunigung $b = b(t)$ ist die Ableitung der Geschwindigkeit v nach der Zeit t:

$$b = b(t) = \frac{d\,v(t)}{dt} = \frac{d(\omega r \cos \varphi)}{dt} = \frac{d(\omega r \cos \omega t)}{dt}.$$

Ebenfalls nach der Kettenregel folgt daraus

$$\frac{d(\omega r \cos \omega t)}{dt} = \frac{d(\omega r \cos \varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{d\omega t}{dt}$$
$$= -\omega^2 r \sin \omega t = -\omega^2 r \sin \varphi.$$

Damit ist

$$v = \omega r \cos \omega t = \omega r \cos \varphi$$

und

$$b = -\omega^2 r \sin \omega t = -\omega^2 r \sin \varphi.$$

c) Extremwerte von $b = b(t)$ liegen an den Nullstellen der ersten Abteilung von b, an denen die zweite Ableitung von Null verschieden ist:

$$\frac{d\,b(t)}{dt} = \frac{d(-\omega^2 r \sin \omega t)}{dt} = -\omega^3 r \cos \omega t = -\omega^3 r \cos \varphi.$$

Aus $-\omega^3 r \cos \varphi = 0$ folgt wegen $\omega^3 r \neq 0$, daß $\cos \varphi = 0$ ist. Das ist für $\varphi = 90° + k \cdot 180°$, $k = 0; 1; 2; 3; \ldots$ der Fall. Nun ist

$$\frac{d^2 b(t)}{dt} = \frac{d(-\omega^3 r \cos \omega t)}{dt} = \omega^4 r \sin \omega t = \omega^4 r \sin \varphi.$$

Für $\varphi = 90° + (2k + 1) \cdot 180°$, $k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots$ ist $\sin \varphi = -1$, wegen $\omega^4 r > 0$ ist $\omega^4 r \sin \varphi < 0$; also liegen hier Maximalwerte vor. Für $\varphi = 90° + 2k \cdot 180°$, $k = 0; 1; 2; 3; \ldots$ ist $\sin \varphi = 1$, mithin $\omega^4 r \sin \varphi > 0$; also liegen hier Minimalwerte. In jedem Fall folgt allerdings

$$|b_{\text{extrem}}| = \omega^2 r.$$

Nun folgt aus dem Grundgesetz der Dynamik $P = mb$ für die Extremwerte von b:

$$|P_{\text{extrem}}| = m\,|b_{\text{extrem}}| = m\omega^2 r.$$

Weiter ist bei Bruch des Bolzens $P = \tau F$.

Setzt man $P > |P_{\text{extrem}}|$, so folgt $\tau F > m\omega^2 r$,

mithin wegen $F = \frac{d^2}{4}\pi$ auch

$$\frac{d^2}{4}\pi\tau > m\omega^2 r.$$

Daraus errechnet man schließlich den Durchmesser d zu

$$d \geq 2\omega \sqrt{\frac{m r}{\pi \tau}}.$$

d) Im Bereich $0° \leq \varphi \leq 105°$ steigt die Weg-Zeit-Funktion fast geradlinig an, die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion ist daher in diesem Intervall annähernd konstant, größer als Null. Von $\varphi \approx 105°$ bis $\varphi \approx 133°$ geht die Geschwindigkeit auf Null zurück (Maximum des Weges), sie wird von $\varphi \approx 133°$ bis $\varphi \approx 227°$ negativ, wobei sie ihren kleinsten Wert offenbar zwischen $\varphi \approx 165°$ und $\varphi \approx 195°$ hat; in diesem Intervall ist sie konstant, ihr absoluter Betrag etwa das Fünffache des Wertes zwischen 0° und 105°. Von $\varphi \approx 227°$ an wird die Geschwindigkeit wieder positiv, von $\varphi = 255°$ bleibt sie wieder annähernd konstant von gleicher Größe wie zwischen 0° und 105°. Der Kurvenverlauf der Geschwindigkeit v wird demnach ungefähr dem der Abb. 15 entsprechen.
Für die Beschleunigung b ergibt die entsprechende Betrachtung: Soweit v konstant ist, gilt $b = 0$. Zwischen $\varphi \approx 105°$ und $\varphi \approx 165°$ fällt v, also ist b negativ; der kleinste Wert liegt bei $\varphi \approx 140°$. Zwischen $\varphi \approx 195°$ und $\varphi \approx 255°$ steigt die Geschwindigkeit, ist b positiv und hat seinen größten Wert etwa bei $\varphi \approx 220°$. Daraus folgt, daß der Kurvenverlauf der Beschleunigung b ungefähr dem der Abb. 16 entspricht.

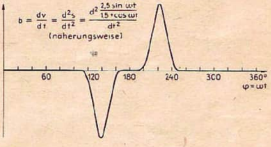


Abb. 16

Die Maßstäbe der Ordinatenachsen wurden absichtlich weggelassen, da die Angaben nur qualitativer und nicht quantitativer Art sind.

e) Kreuzschleifen wird man vorwiegend bei solchen Maschinen verwenden, bei denen sowohl der Vorhub als auch der Rückhub Arbeitshübe sind (z. B. Maschinenfeilen und Maschinensägen). Schwingende Kurbelschleifen werden dagegen hauptsächlich in solchen Maschinen verwendet, die nur im Vorhub Arbeit vollbringen, im Rückhub aber leer laufen (z. B. Langhobelmaschinen). Durch den schnelleren Rückhub wird die Zeit des Leerlaufs verkürzt und dadurch die Maschine besser ausgenutzt. Außerdem ist die während des Arbeitshubes konstante Geschwindigkeit vorteilhaft.

V. PLANIMETRIE, STEREOMETRIE

Aufgabe 23 G. GRUBER, Gotha

Der Durchmesser d eines Kreises wird von einer Sehne unter einem Winkel von 30° so geschnitten, daß er im

Verhältnis $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$ geteilt wird.

a) Wie lang ist die Sehne?

b) Welchen Abstand hat die Sehne vom Mittelpunkt des Kreises?

Lösung (G. Gruber):

Da die Länge d des Durchmessers in der Aufgabe nicht angegeben ist, wird er willkürlich mit $d = 2r = 2$ (Längeneinheiten) angenommen. Wenn a und b die beiden Teilstrecken des Durchmessers sind, gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad a + b = d = 2.$$

Daraus folgt $b = 3a = 1{,}5$ und $a = 0{,}5$.
Wir führen weiter die Bezeichnungen der Abb. 17 ein.

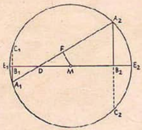


Abb. 17

Dabei sei FM das Lot von M auf A_1A_2.
Aus der Abbildung erkennt man:

1. Da der Winkel $MDF = 30°$ beträgt, gilt für den Winkel DMF wegen der Rechtwinkligkeit des Dreiecks, daß $\sphericalangle DMF = 60°$ ist. Spiegelt man das Dreieck MDF an A_1A_2, so entsteht demnach ein gleichseitiges Dreieck MDM', in dem $M'F = MF$ und $M'D = DM = 0{,}5$ ist. Damit ist $MF = 0{,}5\, DM = 0{,}25$ der Abstand der Sehne A_1A_2 vom Mittelpunkt M des Kreises.

2. Aus der Rechtwinkligkeit des Dreiecks MFA_2 folgt

$$\begin{aligned} FA_2^2 &= MA_2^2 - MF^2 = r^2 - 0{,}25^2 \\ &= 1 - 0{,}0625 = 1 - \frac{1}{16} \\ &= 0{,}9375 \quad = \frac{15}{16} \end{aligned}$$

oder

$$FA_2 = \sqrt{0{,}9375} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{15}.$$

Dann ist aber

$$A_1A_2 = 2FA_2 = \frac{1}{2}\sqrt{15} \approx 1{,}936.$$

Aufgabe 24 Dr. GERHARD HESSE, Radebeul

a) In eine Hohlkugel mit dem Durchmesser $D = 2R$ sollen sechs kleinere, gleich große Kugeln so eingelagert werden, daß jede von ihnen die Hohlkugel von innen und vier der kleineren Kugel berührt. Wie groß muß der Durchmesser $d = 2r$ der kleineren Kugeln gewählt werden?

b) In eine Hohlkugel mit dem Durchmesser $D = 2R$ sollen acht kleinere, gleich große Kugeln so eingelagert werden, daß jede von ihnen die Hohlkugeln von innen und drei der kleineren Kugeln berührt. Es ist der Durchmesser $d = 2r$ der kleineren Kugeln zu bestimmen.

c) Der Hohlkugel sind vier einander gleiche Kugeln so einzulagern, daß jede Kugel jede andere Kugel berührt. Wie groß ist ihr Durchmesser $d = 2r$?

Lösung (Dr. Gerhard Hesse):

a) Die Mittelpunkte der eingelagerten Kugeln müssen in den Endpunkten eines Oktaeders liegen, dessen Seitenlänge $s = 2r = d$ ist. Der Oktaedermittelpunkt fällt mit dem Mittelpunkt der Hohlkugel zusammen. Legt man durch vier (beliebige) Oktaederecken einen ebenen Schnitt, so erhält man Abb. 18. Der Durchmesser D setzt sich danach aus drei Teilstrecken zusammen:

$$BB' = BM + MM' + M'B'.$$

Nun ist MM' Diagonale im Quadrat mit der Seitenlänge $s = d$. Also ist

$$D = r + d\sqrt{2} + r = d + d\sqrt{2} = d(1 + \sqrt{2}),$$

$$d = \frac{D}{\sqrt{2} + 1}.$$

Man erweitert den rechts stehenden Bruch mit $\sqrt{2} - 1$, um den Nenner rational zu machen:

$$d = D(\sqrt{2} - 1) \approx 0{,}414\, D.$$

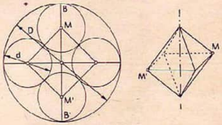


Abb. 18

b) Die Mittelpunkte der eingelagerten Kugeln liegen in den Endpunkten eines Würfels, dessen Mittelpunkt mit dem der Hohlkugel zusammenfällt. Legt man durch den Würfel einen Diagonalschnitt, so erhält man die Abb. 19 als Schnittfigur. Die Seiten des Rechtecks, das der Würfeldiagonalschnitt ergibt, sind d und $d\sqrt{2}$. Die Rechteckdiagonalen sind die Körperdiagonalen des Würfels und haben die Länge $d\sqrt{3}$. Es gilt hier für die Zusammensetzung des Durchmessers D der Hohlkugel:

$$D = r + d\sqrt{3} + r = d + d\sqrt{3} = d(1 + \sqrt{3});$$

diese Gleichung, nach d aufgelöst, ergibt

$$d = \frac{D}{\sqrt{3} + 1} = D \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \approx 0{,}366\, D.$$

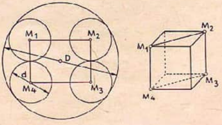


Abb. 19

c) Die Mittelpunkte der vier eingelagerten Kugeln bilden ein Tetraeder mit der Kantenlänge d. Der Schnittpunkt der vier Körperhöhen des Tetraeders fällt mit dem Mittelpunkt der Hohlkugel zusammen. Die Körperhöhe ist $\frac{d\sqrt{6}}{3}$. Die Höhen teilen einander im Verhältnis 3 : 1, von den Ecken aus gerechnet. Legt man einen Symmetrieschnitt durch Tetraeder und Hohlkugel, so erhält man die Abb. 20, aus der man erkennt, daß

$$OB_1 = OM_1 + M_1B_1$$

ist, also

$$R = \frac{3}{4} \cdot \frac{d\sqrt{6}}{3} + \frac{d}{2} = \frac{d}{4}\left(\sqrt{6} + 2\right).$$

oder

$$D = \frac{d}{2}\left(\sqrt{6} + 2\right).$$

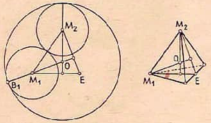


Abb. 20

Nach d aufgelöst, ergibt sich

$$d = \frac{2D}{\sqrt{6} + 2} = D\left(\sqrt{6} - 2\right) \approx 0{,}449\,D.$$

Aufgabe 25 Dr. GERHARD HESSE, Radebeul

a) Ein Zahnrad K_2 mit dem Teilkreisdurchmesser $d = 2r$ rollt auf einem feststehenden Zahnrad K_1 mit dem gleichen Teilkreisdurchmesser ab. Wie oft dreht sich K_2 bei einem vollen Umlauf um K_1 um seine Achse?

b) Ein Zahnrad K_2 mit dem Teilkreisdurchmesser $d_2 = 2r_2$ rollt auf einem feststehenden Zahnrad K_1 mit einem Teilkreisdurchmesser $d_1 = 2r_1 = 3d_2$ ab. Wie oft dreht sich K_2 bei einem vollen Umlauf um K_1 um seine Achse?

c) Ein Zahnrad K_2 mit dem Teilkreisdurchmesser $d_2 = 2r_2$ rollt auf einem feststehenden Zahnrad K_1 mit dem Teilkreisdurchmesser $d_1 = 2r_1 = \frac{1}{3}d_2$ ab. Wie oft muß es umlaufen, bis es sich genau einmal um seine eigene Achse gedreht hat?

Lösung (Dr. Gerhard Hesse):

Zur Lösung der Aufgabe abstrahieren wir vom technischen Inhalt und stellen das mathematische Problem heraus: Ein Kreis K rollt, ohne zu gleiten, auf einem feststehenden Kreis K_1 ab.
Zunächst bringen wir eine anschauliche Lösung: Wir denken uns den Umfang U_1 des feststehenden Kreises K_1 zu einer geraden Strecke aufgebogen und lassen darauf den beweglichen Kreis K abrollen. In Frage a ist U_1 gleich dem Umfang U des Rollkreises K, also dreht sich dieser genau einmal um seinen Mittelpunkt. In Frage b ist U_1 das Dreifache von U, also dreht sich K dreimal um seinen Mittelpunkt. Wird nach dem Abrollen von K die gerade Strecke zum Kreis zusammengebogen, wobei der Anfangspunkt festgehalten wird und K mit dem Endpunkt fest verbunden bleibt, so beschreibt K in beiden Fällen noch eine zusätzliche Drehung (Abb. 21 a, b, c, d). Demnach dreht sich der Rollkreis K bei einem vollen Umlauf um den

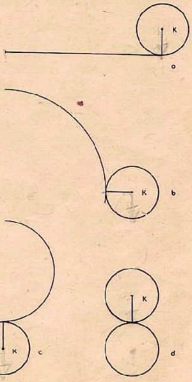


Abb. 21

Kreis K_1 gemäß Frage a zweimal, gemäß Frage b viermal um seinen Mittelpunkt.
Nunmehr bringen wir eine strenge, allgemeingültige Herleitung: Der feststehende Kreis K_1 hat den Durchmesser $d_1 = 2r_1$, der Rollkreis K hat den Durchmesser $d = 2r$. Aus der Ausgangslage A (Abb. 22) rolle der Kreis K bis zum Umfangspunkt B. Der Berührungspunkt $\bar{A}$ des Umfangs

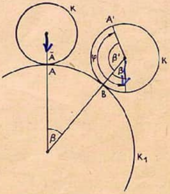


Abb. 22

von K in der Ausgangslage bewegt sich dabei in die Lage A'. Die beiden Kreisbögen AB und $A'B$ haben wegen der Bedingung des Nichtgleitens die gleiche Länge. Die zu diesen Bögen gehörenden Mittelpunktswinkel bezeichnen wir mit β und β'. Dann ist die Gesamtdrehung φ des Rollkreises K

$$\varphi = \beta + \beta'.$$

Mißt man die Winkel im Bogenmaß, so ist

$$\widehat{AB} = r_1\hat{\beta} \quad \text{und} \quad \widehat{A'B} = r\hat{\beta}'.$$

Aus $\widehat{AB} = \widehat{A'B}$ folgt $r_1\hat{\beta} = r\hat{\beta}'$ oder $\hat{\beta}' = \frac{r_1\hat{\beta}}{r} = \frac{d_1\hat{\beta}}{d}$.

Somit ist die resultierende Drehung

$$\hat{\varphi} = \hat{\beta} + \hat{\beta}' = \hat{\beta} + \frac{d_1\hat{\beta}}{d} = \hat{\beta}\left(1 + \frac{d_1}{d}\right).$$

Mißt man die Winkel aber im Gradmaß, so gilt entsprechend

$$\widehat{AB} = \frac{\pi\, d_1 \beta}{360^\circ} \quad \text{und} \quad \widehat{A'B} = \frac{\pi\, d\beta'}{360^\circ}.$$

Wegen $\widehat{AB} = \widehat{A'B}$ gilt

$$\frac{\pi\, d_1\beta}{360^\circ} = \frac{\pi\, d\beta'}{360^\circ} \quad \text{oder} \quad d_1\beta = d\beta',$$

also

$$\beta' = \frac{d_1\,\beta}{d}.$$

Somit ist

$$\varphi = \beta + \beta' = \beta + \frac{d_1\beta}{d} = \beta\left(1 + \frac{d_1}{d}\right).$$

In diese allgemeinen Formeln setzen wir ein:

Frage a: $d_1 = d$, $\hat{\beta} = 2\pi$ bzw. $\beta = 360^\circ$ ergibt
$\varphi = 2\pi \cdot 2$ bzw. $\varphi = 360^\circ \cdot 2$;

Frage b: $d_1 = 3d$, $\hat{\beta} = 2\pi$ bzw. $\beta = 360^\circ$ ergibt
$\varphi = 2\pi \cdot 4$ bzw. $\varphi = 360^\circ \cdot 4$;

Frage c: $d = 3d_1$, $\hat{\varphi} = 2\pi$ bzw. $\varphi = 360^\circ$; gesucht ist $\hat{\beta}$ bzw. β; es gilt

$$2\pi = \hat{\beta}\left(1 + \frac{1}{3}\right), \quad \hat{\beta} = 2\pi \cdot \frac{3}{4}$$

bzw.

$$360^\circ = \beta\left(1 + \frac{1}{3}\right), \quad \beta = 360^\circ \cdot \frac{3}{4}.$$

Antwort: Im Fall a dreht sich der Rollkreis zweimal, im Fall b viermal um seinen Mittelpunkt, im Fall c muß er drei Viertel des Festkreises umlaufen.

Aufgabe 26 JOHANNES RIEDEL, Berlin

Für das Kraftwerk Klingenberg in Berlin-Rummelsburg wurden zwei neue Schornsteine gebaut. Jeder von ihnen besteht aus einem Betonmantel, der die Form eines hohlen Kreiskegelstumpfes mit den folgenden Maßen hat:

Unterer lichter Durchmesser	$d_u =$	10,00 m,
oberer lichter Durchmesser	$d_0 =$	7,50 m,
unterer äußerer Durchmesser	$D_u =$	11,20 m,
oberer äußerer Durchmesser	$D_0 =$	7,80 m,
Höhe	$H =$	140,00 m.

Dieser Mantel erhielt eine Auskleidung von Glaswolle, Kieselgur und Klinkersteinen.

a) Wieviel Kubikmeter Beton wurden für jeden der beiden Schornsteinmäntel benötigt?

b) Wie groß ist das Gewicht G jedes der beiden Schornsteinmäntel? Die Wichte γ des verwendeten Betons werde mit $\gamma = 2{,}4\ \mathrm{Mp/m^3}$ angenommen.

c) Welchen Druck übt der Schornsteinmantel auf das Fundament aus?

Lösung (Johannes Riedel):

a) Man erhält das Mauerwerksvolumen als Differenz aus dem Gesamtvolumen des Bauwerkes und dem umbauten Hohlraum. Beides sind im vorliegenden Fall Kegelstümpfe (Abb. 23). Die Formel für das Volumen eines Kegelstumpfes ist

$$V = \frac{h\pi}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right),$$

wobei h die Höhe des Kegelstumpfes, r_1 und r_2 die Radien von Grund- und Deckkreis sind.

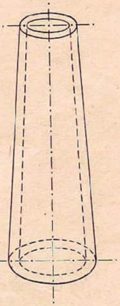


Abb. 23

Wer diese Formel nicht gegenwärtig hat, kann sie sich gemäß Abb. 24 auf folgende Weise aus der Differenz zweier Kegel herleiten:

Es ist

$$V = \frac{r_2^2\pi(h + x)}{3} - \frac{r_1^2\pi x}{3}.$$

Aus einem Strahlensatz folgt

$$\frac{x}{h + x} = \frac{r_1}{r_2},$$

also

$$x r_2 = x r_1 + h r_1,$$
$$x(r_2 - r_1) = h r_1,$$
$$x = \frac{h r_1}{r_2 - r_1}.$$

Damit ergibt sich

$$V = \frac{r_2^2\pi\left(h + \frac{h r_1}{r_2 - r_1}\right)}{3} - \frac{r_1^2\pi \frac{h r_1}{r_2 - r_1}}{3}$$

$$V = \frac{h\pi}{3}\left(r_2^2\left[1 + \frac{r_1}{r_2 - r_1}\right] - r_1^2\,\frac{r_1}{r_2 - r_1}\right)$$

$$= \frac{h\pi}{3}\,\frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2 - r_1}$$

$$= \frac{h\pi}{3}\,(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

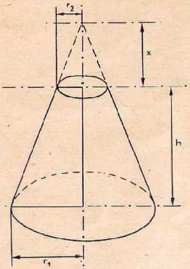


Abb. 24

Für das Mauerwerksvolumen ergibt sich damit

$$V = \frac{h\pi}{3}\,(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2) - \frac{h\pi}{3}\,(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$$

$$= \frac{h\pi}{3}\,((R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2) - (r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2))$$

mit $R_1 = \frac{D_u}{2} = 5{,}60\ \text{m}, \quad R_2 = \frac{D_0}{2} = 3{,}90\ \text{m}$

$$r_1 = \frac{d_u}{2} = 5{,}00\ \text{m}, \quad r_2 = \frac{d_0}{2} = 3{,}75\ \text{m}, \quad \pi \approx \frac{22}{7}.$$

Daraus erhält man

$$V = \frac{140 \cdot 22}{3 \cdot 7}\,((5{,}60^2 + 5{,}60 \cdot 3{,}90 + 3{,}90^2) - (5{,}00^2 + 5{,}00 \cdot 3{,}75 + 3{,}75^2))\ \text{m}^3$$

$$= \frac{20 \cdot 22}{3}\,((31{,}36 + 21{,}84 + 15{,}21) - (25{,}00 + 18{,}75 + 14{,}06))\ \text{m}^3$$

$$= \frac{440}{3}\,(68{,}41 - 57{,}81)\ \text{m}^3 = \frac{440 \cdot 10{,}6}{3}\ \text{m}^3$$

$$= \frac{4664}{3}\ \text{m}^3 \approx 1555\ \text{m}^3.$$

b) Das Gewicht G eines Körpers ergibt sich wegen

$$\gamma = \frac{G}{V} \quad \text{zu} \quad G = V \cdot \gamma.$$

Im vorliegenden Fall ist $V = 1555\ \text{m}^3$, $\gamma = 2{,}4\ \text{Mp/m}^3$. Also ist

$$G = 1555 \cdot 2{,}4\ \text{Mp} = 3732\ \text{Mp}.$$

c) Den Druck p errechnet man als Quotient aus der wirkenden Kraft (in unserem Fall dem Gewicht G) und der Fläche, auf die die Kraft wirkt:

$$p = \frac{G}{F}.$$

Die Fläche F (der Grundriß des Schornsteinmantels) ist ein Kreisring mit dem äußeren Radius $R_a = R_1 = 5{,}60$ m und dem inneren Radius $R_i = r_1 = 5{,}00$ m. Die Kreisringfläche F ergibt sich als Differenz zweier Kreisflächen:

$$F = R_1^2\pi - r_1^2\pi = \pi(R_1^2 - r_1^2) = \pi(R_1 + r_1)\cdot(R_1 - r_1)$$

$$= \frac{22}{7}\,(5{,}60 + 5{,}00)\,(5{,}60 - 5{,}00)\ \text{m}^2$$

$$= \frac{22}{7}\cdot 10{,}60 \cdot 0{,}60\ \text{m}^2 = \frac{22}{7}\cdot 6{,}36\ \text{m}^2 \approx 20\ \text{m}^2.$$

Also folgt für p:

$$p = \frac{3732\ \text{Mp}}{20\ \text{m}^2} = 186{,}6\ \text{Mp/m}^2 = 18{,}66\ \text{kp/cm}^2$$

(Bei dieser Rechnung wurde allerdings vorausgesetzt, daß sich die gesamte Last des Schornsteinmantels gleichmäßig auf den Querschnitt verteilt.)

Aufgabe 27 JOHANNES RIEDEL, Berlin

Auf ihrem Flug um den Mond näherte sich die sowjetische Raumstation Lunik 3 dem Erdtrabanten bis auf etwa 7000 km. Für die folgenden Berechnungen werde der Mondradius r mit $r \approx 1750$ km angenommen, der Flächeninhalt F einer Kugelkappe mit dem Kugelradius r und der Kappenhöhe h ist $F = 2r\pi h$, wobei $\pi \approx \frac{22}{7}$ gesetzt werde.

a) Wie groß ist das Gebiet des Mondes, das aus dieser Entfernung übersehen werden könnte?

b) Wieviel Prozent der Mondoberfläche sind dies?

c) Unter welchem Sehwinkel φ wäre der Mond aus dieser Entfernung zu beobachten?

d) Wie breit muß ein Gegenstand sein, der aus 100 m Entfernung unter demselben Sehwinkel gesehen werden soll?

Lösung (Johannes Riedel):

a) Das zu übersehende Mondgebiet ist die Fläche einer Kugelkappe (Abb. 25) Der Radius r der Kugelkappe ist bekannt; er ist gleich dem Radius r des Mondes. Zur Berechnung des Flächeninhalts F wird daher nur noch die Höhe h der Kugelkappe benötigt. Man errechnet sie durch mehrmalige Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes oder mit Hilfe des Höhensatzes oder mit Hilfe des Satzes des EUKLID.

1. Berechnung nur mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes: Die Dreiecke ST_1M, T_1QM und SQT_1 sind rechtwinklig (Abb. 25). Also gilt

$$u^2 + r^2 = (H + r)^2, \qquad (1)$$

$$s^2 + (r - h)^2 = r^2 \qquad (2)$$

und

$$(H + h)^2 + s^2 = u^2. \qquad (3)$$

Daraus folgt, wenn man (3) in (1) einsetzt und (2) nach s^2 auflöst,

$$(H+h)^2 + s^2 + r^2 = (H+r)^2 \tag{4}$$

und

$$s^2 = r^2 - (r-h)^2. \tag{5}$$

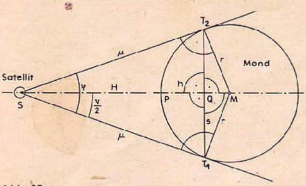


Abb. 25

Setzt man schließlich (5) in (4) ein, so ergibt sich

$$(H+h)^2 + r^2 - (r-h)^2 + r^2 = (H+r)^2. \tag{6}$$

Diese Gleichung enthält als einzige Unbekannte die Höhe h der Kugelkappe. Man löst nach h auf:

$$(H+h)^2 + 2r^2 - (r-h)^2 = (H+r)^2,$$

$$H^2 + 2Hh + h^2 + 2r^2 - r^2 + 2rh - h^2 = H^2 + 2Hr + r^2$$

$$2Hh + 2rh = 2Hr,$$

$$Hh + rh = Hr, \tag{7}$$

$$h(H+r) = Hr,$$

$$h = \frac{Hr}{H+r}.$$

2. Berechnung mit Hilfe des Höhensatzes:

Der Höhensatz besagt: „Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Höhe auf der Hypotenuse gleich dem Produkt aus den beiden Hypotenusenabschnitten". Demnach ist im rechtwinkligen Dreieck ST_1M:

$$s^2 = (H+h)(r-h) = rH + rh - hH - h^2. \tag{1}$$

Ferner gilt nach dem pythagoreischen Lehrsatz:

$$s^2 = r^2 - (r-h)^2 = 2rh - h^2. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt durch Gleichsetzen:

$$2rh - h^2 = rH + rh - hH - h^2, \tag{3}$$

also

$$rh = rH - hH. \tag{4}$$

Aus dieser Gleichung folgt ebenso wie bei 1.:

$$h = \frac{rH}{r+H}.$$

3. Berechnung mit Hilfe des Satzes des EUKLID:

Der Satz des EUKLID besagt: „Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat einer Kathete gleich dem Produkt aus der Projektion dieser Kathete auf die Hypotenuse und der Hypotenuse." Also ist im Dreieck ST_1M:

$$r^2 = MQ(r+H), \qquad MQ = \frac{r^2}{r+H}.$$

Wegen $h = r - MQ$ folgt daraus

$$h = r - \frac{r^2}{r+H} = \frac{r(r+H) - r^2}{r+H} = \frac{rH}{r+H}.$$

Damit ergibt sich der Flächeninhalt F der Kugelkappe zu

$$F = 2r\pi h = \frac{2r\pi \cdot rH}{r+H} = \frac{2r^2\pi H}{r+H}.$$

Da in unserem Fall $H = 2r$ ist, wird die Berechnung numerisch besonders einfach:

$$F = \frac{2r^2\pi H}{r+H} = \frac{2r^2\pi \cdot 2r}{r+2r} = \frac{4r^3\pi}{3r} = \frac{4r^2\pi}{3}.$$

Mit $r = 1750$ km, $\pi = \frac{22}{7}$ ergibt sich

$$F = \frac{4 \cdot 1750^2 \cdot 22}{3 \cdot 7}\,\text{km}^2 = \frac{38\,500\,000}{3}\,\text{km}^2 \approx 13\,000\,000\,\text{km}^2.$$

b) Man erhält den prozentualen Anteil p der zu überschauenden Mondoberfläche F an der gesamten Mondoberfläche O, indem man F durch O dividiert und mit 100% multipliziert:

$$p = \frac{F}{O} \cdot 100\%.$$

Wegen $F = \frac{2r^2\pi H}{r+H}$ und $O = 4r^2\pi$ folgt daraus:

$$p = \frac{2r^2\pi H \cdot 100}{4r^2\pi(r+H)}\,\% = \frac{50H}{r+H}\,\%.$$

Nun ist in unserem Fall $H = 2r$, so daß folgt

$$p = \frac{100r}{3r}\,\% = \frac{100}{3}\,\% = 33\frac{1}{3}\,\%.$$

Man erkennt, daß der Prozentsatz p unabhängig ist vom Radius r, wenn die Höhe H des Beobachtungspunktes in Vielfachen von r ausgedrückt wird: $H = kr$. Dann kürzt sich nämlich die Größe r aus dem Bruch weg.

c) Es ist, wie man aus Abb. 25 erkennt,

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{r}{r+H}.$$

Wegen $H = 2r$ folgt daraus

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{r}{r+2r} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}.$$

Aus der Tabelle erhält man damit

$$\frac{\varphi}{2} \approx 19{,}47° \quad \text{und folglich} \quad \varphi \approx 39{,}94°.$$

d) Ist b die Breite des Gegenstands, a der Abstand des Beobachters, so muß gelten (Abb. 26):

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{CD} = \frac{\frac{b}{2}}{a} = \frac{b}{2a} = \tan\frac{\varphi}{2},$$

also

$$b = 2a \tan\frac{\varphi}{2}.$$

Wegen $a = 100$ m, $\varphi \approx 39{,}94°$ ergibt sich daraus

$$b \approx 200 \cdot \tan 19{,}47°\ \text{m} = 200 \cdot 0{,}3535\ \text{m} = 70{,}70\ \text{m}.$$

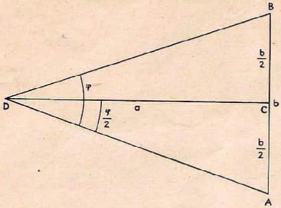


Abb. 26

Ergänzung (Erich Schiffner):

Die Frage nach der relativen Größe der aus dem Abstand a von der Oberfläche übersehbaren Fläche wird am besten allgemein gelöst. Es sei $a = k \cdot r$. Dann wird

$$(r - h)(k + 1)r = r^2; \text{ daraus folgt } h = \frac{k}{k+1}\,r$$

$$\text{und } F = 2\pi r^2 \frac{k}{k+1}.$$

Für das Verhältnis von F zu H (H = Halbkugeloberfläche) gilt daher

$$\frac{F}{H} = \frac{k}{k+1}.$$

Für $k = 2$ (siehe Aufgabe) wird $\frac{F}{H} = \frac{2}{3}$, für $k = 1$ wird $\frac{F}{H} = \frac{1}{2}$. Ist $k = \frac{1}{n} < 1$, so erhält man

$$\frac{F}{H} = \frac{1}{n+1}.$$

Für $k \approx \frac{1}{30}$, d. h. $n = 30$ (Wostok I und II), erhält man z. B. $\frac{F}{H} = \frac{1}{31} \approx 0{,}032$. Die beiden Kosmonauten konnten also von jedem Punkt der Raumbahn rd. 3% der Oberfläche der Erdhalbkugel überblicken.

Aufgabe 28 HELMUT KELLER, Schleiz

Der geometrische Mittelpunkt der kreiszylinderförmigen Ausfräsung (Abb. 27) sei nicht bekannt. Zur Ermittlung des Durchmessers $D = 2R$ werden in die Ausfräsung genau geschliffene Bolzen mit dem Durchmesser $d = 2r = 30$ mm gelegt und a zu $a = 12$ mm bestimmt.

Welchen Durchmesser D hat die Ausfräsung?

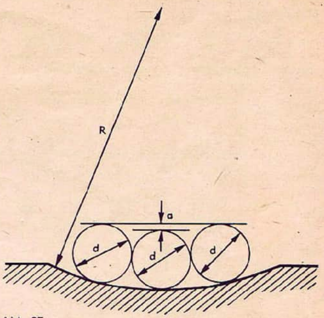


Abb. 27

1. Lösung (Helmut Keller):

Es sei M der unbekannte Mittelpunkt. Dann gilt (Abb. 28)

$$R = GM = HM = BM + r = AM + r.$$

Ferner ist $BC = EF = a$, $AB = d$,

folglich $(AC)^2 = d^2 - a^2$.

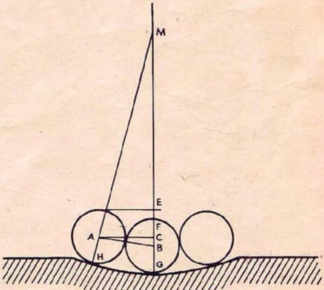


Abb. 28

Da $\sphericalangle ACM = 90°$ ist, folgt $(CM)^2 + (AC)^2 = (AM)^2$ und wegen $AM = BM$ und $CM = BM - a$

$$\begin{aligned}
(BM - a)^2 \qquad\qquad &+ d^2 - a^2 = (BM)^2,\\
(BM)^2 - 2BMa + a^2 &+ d^2 - a^2 = (BM)^2,\\
-\,2BMa \qquad\qquad &+ d^2 \qquad = 0,\\
BM \qquad\qquad & \qquad\quad = \frac{d^2}{2a}.
\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$R = \frac{d^2}{2a} + r, \qquad D = \frac{d^2}{a} + d.$$

Setzt man die gegebenen Werte ein, so ergibt sich

$$D = \left(\frac{30^2}{12} + 30\right) \text{mm} = 105 \text{ mm}.$$

2. Lösung (W. Koch):

(Hilfsmittel: Strahlensatz und Trigonometrie)

a) Berechnung des Winkels β (Abb. 29):

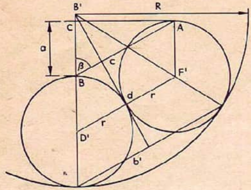


Abb. 29

$\cos\beta = \frac{a}{d}$ (Da $ABD'F'$ ein Parallelogramm ist, gilt $c = d$).

b) Berechnung von b':

$$b' = R \cdot \cos\beta = R \cdot \frac{a}{d}.$$

c) Berechnung von R:

$$R : b' = (R - r) : r, \quad R : \frac{Ra}{d} = (R - r) : r.$$

Wegen $d = 2r$ erhält man daraus $R : \frac{Ra}{2r} = (R - r) : r.$

Löst man diese Gleichung nach R auf, so ergibt sich

$$R = r + \frac{2r^2}{a}.$$

3. Lösung (W. Koch):

(Hilfsmittel: Trigonometrie)

a) Berechnung des Winkels β (Abb. 30):

$\cos\beta = \frac{a}{d}$ (Da $ABD'A'$ ein Parallelogramm ist, gilt $c = d$).

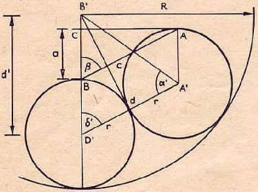


Abb. 30

b) Berechnung des Winkels α:

Es ist $\beta = \delta'$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen) und $\delta' = \alpha'$ (wegen $B'D' = B'A'$, $A'B'D'$ ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze bei B'). Daraus folgt

$$\alpha' = \beta.$$

c) Berechnung von d':

$$d' = \frac{r}{\cos\alpha'} = \frac{r}{\cos\beta} = \frac{r}{\frac{a}{d}} = \frac{rd}{a} = \frac{2r^2}{a}.$$

d) Berechnung von R:

$$R = d' + r = \frac{2r^2}{a} + r.$$

4. Lösung (W. Koch):

(Hilfsmittel: Strahlensatz und Trigonometrie)

a) Berechnung des Winkels β (Abb. 31):

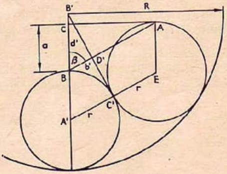


Abb. 31

$\cos\beta = \frac{a}{d}$ (da $ABA'E$ ein Parallelogramm ist, gilt $c = d$).

b) Berechnung von b':

$$b' = d' \cdot \cos\beta = (R - d) \cdot \cos\beta = (R - 2r) \cdot \cos\beta$$

$$= \frac{(R - 2r)a}{2r}.$$

c) Berechnung von R:

$$(R - 2r) : (R - r) = b' : r,$$

$$(R - 2r) : (R - r) = \frac{(R - 2r)a}{2r} : r,$$

$$1 : (R - r) = \frac{a}{2r} : r.$$

Löst man diese Gleichung nach R auf, so ergibt sich

$$R = r + \frac{2r^2}{a}.$$

5. Lösung (W. Koch):

(Hilfsmittel: Analytische Geometrie)

Man legt ein rechtwinklig-cartesisches Koordinatensystem so fest, daß der Mittelpunkt des mittleren Bolzens im Nullpunkt und die Figur symmetrisch zur y-Achse liegt (Abb. 32). Darin ist $R - r = b$, wenn mit b das absolute Glied der Geraden g_2 bezeichnet wird.

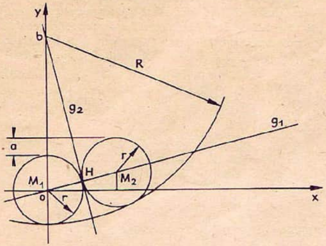


Abb. 32.

Die Gleichung der Geraden g_2 erhält man durch die folgende Überlegung: Die Gerade g_2 steht senkrecht auf der Geraden g_1; sind m_2 und m_1 die entsprechenden Anstiege, so gilt also $m_2 = -\frac{1}{m_1}$. Außerdem geht die Gerade g_2 durch den Halbierungspunkt der Strecke M_1M_2. Es gilt also zunächst, die Gleichung der Geraden g_1 und die Koordinaten des Halbierungspunktes H zu ermitteln. Dazu benötigt man die Koordinaten von M_1 und M_2.
Die Koordinaten von M_1 sind offensichtlich $x_1 = 0$ und $y_1 = 0$, die von M_2 sind $x_2 = \sqrt{d^2 - a^2}$ und $y_2 = a$. Damit erhält man als Zweipunktegleichung der Geraden g_1

$$\frac{a}{\sqrt{d^2 - a^2}} = \frac{y}{x} \quad \text{oder} \quad y = \frac{a}{\sqrt{d^2 - a^2}} x.$$

Die Koordinaten von H ergeben sich zu $x_3 = \frac{\sqrt{d^2 - a^2}}{2}$ und $y_3 = \frac{a}{2}$. Damit erhält man als Punkt-Richtungsgleichung für g_2:

$$y = -\frac{\sqrt{d^2 - a^2}}{a} x + \frac{d^2}{2a}.$$

Demnach ist $R - r = \frac{d^2}{2a} = \frac{4r^2}{2a} = \frac{2r^2}{a}$ und mithin

$$R = \frac{2r^2}{a} + r.$$

In allen fünf Fällen ergibt sich wegen $r = 15$ mm, $a = 12$ mm:

$$R = \frac{2 \cdot 15^2}{12} \text{ mm} + 15 \text{ mm} = 52{,}5 \text{ mm}, \quad D = 105 \text{ mm}.$$

6. Lösung (Manfred Frost):

(Hilfsmittel: Ähnlichkeitslehre)

Gegeben ist (Abb. 33): $ED = r = 15$ mm,
$BC = a = 12$ mm.

Gesucht ist: $OF = R$.

Lösung:

Es ist $AB \perp OD$ und $OE \perp AC \parallel GD$, mithin auch $\sphericalangle EDC = \sphericalangle ACB$. Folglich ist $\triangle ABC \sim \triangle OED$. Daraus folgt

$$\frac{OD}{AC} = \frac{ED}{BC}.$$

Nun ist $OD = R - r$, $AC = 2r$, $BC = a$ und $ED = r$.

Damit ergibt sich

$$\frac{R - r}{2r} = \frac{r}{a} \quad \text{oder} \quad R = \frac{2r^2}{a} + r.$$

Setzt man die gegebenen Werte ein, so erhält man

$$R = 52{,}5 \text{ mm}, \qquad D = 2R = 105 \text{ mm}.$$

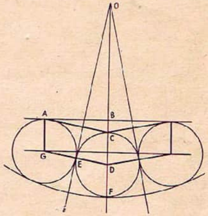


Abb. 33

7. Lösung (Johannes Riedel):

(Hilfsmittel: Analytische Geometrie)

Legt man das Koordinatensystem wie in Abb. 34, so ist $R = \varrho + r$, und für die Koordinaten des Kreismittelpunktes M gilt

$$x_M = 0, \qquad y_M = \varrho$$

sowie für die Koordinaten des Punktes A

$$x_A = \sqrt{d^2 - a^2}, \qquad y_A = a.$$

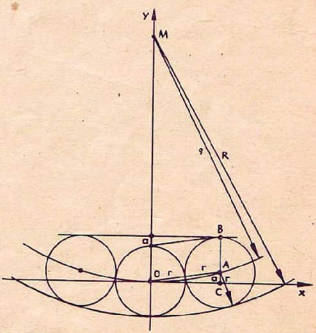


Abb. 34

Es ist nämlich $AC = DE = a$ wegen $AB \parallel OD$ und $AB = OD$, und nach dem Lehrsatz des Pythagoras gilt wegen $OA = d$

$$OC = \sqrt{d^2 - a^2}.$$

Die Gleichung des Kreises K um M ist mithin

$$x^2 + (y - \varrho)^2 = \varrho^2$$

oder — vereinfacht —

$$x^2 + y^2 - 2y\varrho = 0.$$

Die Koordinaten von A müssen diese Gleichung befriedigen:

$$d^2 - a^2 + a^2 - 2a\varrho = 0,$$

$$\varrho = \frac{d^2}{2a}, \quad R = \frac{d^2}{2a} + r.$$

Legt man jedoch das Koordinatensystem wie in Abb. 35, so gilt entsprechend

$$x_M = 0, \qquad y_M = \varrho - a,$$

$$x_A = \sqrt{d^2 - a^2}, \qquad y_A = 0,$$

$$x^2 + (y - \varrho + a)^2 = \varrho^2.$$

Daraus folgt $\varrho = \dfrac{d^2}{2a}$ und $R = \dfrac{d^2}{2a} + r$.

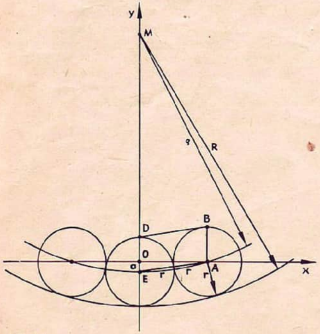


Abb. 35

Setzt man die Werte $d = 30$ mm, $a = 12$ mm ein, so erhält man

$$R = 52{,}5 \text{ mm}, \; D = 2R = 105 \text{ mm}.$$

8. Lösung (Rüdiger Thiele):

(Hilfsmittel: Analytische Geometrie)

Man denke sich den unbekannten Mittelpunkt der kreisförmigen Ausfräsung als Ursprung des rechtwinkligen cartesischen Koordinatensystems, den Berührungspunkt G des mittleren Bolzens mit der Ausfräsung auf der positiven x-Achse liegend (vgl. Abb. 36). Man ermittelt dann die Länge des Radius R als Länge der Strecke MH aus den Koordinaten von H, die man erhält, wenn man die Gerade $y = f(x)$ mit dem Kreis um M, Radius R, zum Schnitt bringt.

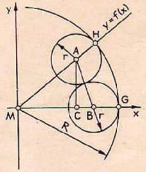


Abb. 36

1. Für die Gerade $y = f(x)$ gilt, da sie durch den Ursprung verläuft, $y = mx = \dfrac{AC}{MC}x$.

Nun ist $MC = MG - CB - BG = R - a - r$

und $AC^2 = AB^2 - CB^2 = (2r)^2 - a^2 = 4r^2 - a^2$,

mithin

$$y = f(x) = \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{R - a - r}x.$$

2. Nach dem Strahlensatz gilt für die Koordinate x_h des Schnittpunktes H von Gerade und Kreis

$$\frac{x_h}{R} = \frac{R - a - r}{R - r}, \text{ also } x_h = \frac{(R - a - r)R}{R - r},$$

und damit folgt durch Einsetzen in die Geradengleichung

$$y_h = \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{R - r}R.$$

3. Die Kreisgleichung lautet $x^2 + y^2 = R^2$. Da H auf dem Kreis liegt, müssen x_h und y_h dieselbe befriedigen:

$$\frac{(R - a - r)^2 R^2 + (4r^2 - a^2) R^2}{(R - r)^2} = R^2$$

oder

$$(R - a - r)^2 + (4r^2 - a^2) = (R - r)^2,$$

$$4r^2 + 2ar - 2Ra = 0,$$

folglich

$$R = \frac{2r^2}{a} + r, \quad D = 2R = \frac{d^2}{a} + d.$$

Aufgabe 29 WOLFGANG KÖRPER, Annaberg-Buchholz

Ein Lehrling soll in einer Kugellagerfabrik 1000 Kugeln mit einem Durchmesser von 1 cm abzählen. Um diese Arbeit zu beschleunigen, nimmt er ein Gefäß mit den Innenmaßen 10 cm × 10 cm × 10 cm; er legt die erste Schicht sauber ein und füllt dann weiter auf. Zum Schluß stellt er fest, daß entgegen seinen Erwartungen der

Innenraum des Gefäßes nicht völlig gefüllt wird. Er zählt deshalb die Kugeln ab. Überraschenderweise sind es mehr als tausend. Wie viele waren es, und wieviel Zentimeter fehlten von der obersten Kugelschicht bis zum Rand des Gefäßes?

Lösung (Wolfgang Körper):

Die 2., 4., 6., ... Kugelschicht besteht nur aus je 81 Kugeln, da sich jede Kugel dieser Schicht in die Vertiefung zwischen jeweils 4 Kugeln der vorhergehenden Schicht legt. Die 1., 3., 5., ... Schicht besteht dagegen — entsprechend den Innenmaßen des Gefäßes — aus 100 Kugeln. Den Abstand zweier benachbarter Ebenen durch die Kugelmittelpunkte erhält man durch eine an Hand der Abb. 37 durchgeführte Überlegung zu $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ cm. Damit haben n Schichten die Gesamtdicke $\left(1 + \frac{n-1}{2}\sqrt{2}\right)$ cm. Es ist nun die größte (natürliche) Zahl n zu finden, für die gilt

$$1 + \frac{n-1}{2}\sqrt{2} \leqq 10$$

oder — was dasselbe besagt —

$$n \leqq 9\sqrt{2} + 1 \approx 13{,}73.$$

Das heißt also, es sind 13 Schichten im Gefäß, 7 zu je 100 und 6 zu je 81 Kugeln, insgesamt demnach

$$7 \cdot 100 + 6 \cdot 81 = 1186.$$

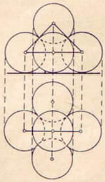


Abb. 37

Die Gesamthöhe dieser 13 Schichten ist $\left(1 + \frac{12}{2}\sqrt{2}\right)$ cm $= \left(1 + 6\sqrt{2}\right)$ cm $\approx 9{,}48$ cm. Von der obersten Kugelschicht bis zum Rand des Gefäßes fehlen also noch ungefähr 0,52 cm.

Aufgabe 30 JOHANNES RIEDEL, Berlin

Es sind die Maße eines Aräometers zu bestimmen, an das folgende Forderungen gestellt werden (Abb. 38):

1. Meßbereich von $\varrho_1 = 1{,}00\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ bis $\varrho_2 = 2{,}00\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$;
2. $d = 2r = 1$ cm;
3. $D = 2R = 2$ cm;
4. Die Skalenteilung soll so eingerichtet werden, daß im Mittel 2 mm Skalenlänge einer Differenz von $0{,}01\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ entsprechen.

Wie sind die Werte für h, H, L und für die Masse m des Aräometers zu wählen?

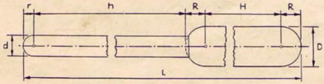


Abb. 38

Lösung (Johannes Riedel):

Aus 1. und 4. folgt für die Skalenlänge s:

$$s = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{0{,}01\,\mathrm{g\,cm^{-3}}} \cdot 2\,\mathrm{mm} = \frac{1{,}00}{0{,}01} \cdot 2\,\mathrm{mm} = 200\,\mathrm{mm} = 20\,\mathrm{cm}.$$

Offenbar ist $h \geqq s$; ein genauerer Wert wird später ermittelt. In eine Flüssigkeit der Dichte ϱ_1 taucht das Aräometer bis zum obersten Skalenpunkt ein, das verdrängte Volumen V_1 ist

$$V_1 = \frac{m}{\varrho_1}.$$

In eine Flüssigkeit der Dichte ϱ_2 taucht es bis zum untersten Skalenpunkt ein, das verdrängte Volumen V_2 ist

$$V_2 = \frac{m}{\varrho_2}.$$

Es gilt

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\varrho_2} : \frac{m}{\varrho_1} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{1}{2}, \quad \text{also} \quad V_1 = 2V_2, \quad \text{mithin auch}$$

$$V_1 - V_2 = V_2.$$

Es ist aber $V_1 - V_2$ gleich dem Volumen der Skalenröhre mit der Länge s, also

$$V_1 - V_2 = V_2 = \frac{1}{4} d^2 \pi s,$$

und V_2 gleich dem Volumen des Tauchkörpers bis zum Skalenpunkt für ϱ_2, also der Summe aus zwei Halbkugeln mit dem Durchmesser D, dem Zylinder mit dem Durchmesser D und der Höhe H sowie dem Zylinder mit dem Durchmesser d und der Höhe x (Stück der Skalenröhre zwischen dem Ansatz am Tauchkörper und dem Skalenpunkt für ϱ_2); dabei kann, wie sich später zeigen wird, der Kugelabschnitt am Ansatz der Skalenröhre vernachlässigt werden. Es gilt also:

$$V_2 = \frac{1}{6} D^3 \pi + \frac{1}{4} D^2 \pi H + \frac{1}{4} d^2 \pi x = \frac{1}{4} d^2 \pi s;$$

daraus folgt

$$\frac{2}{3} D^3 + D^2 H + d^2 x = d^2 s$$

oder

$$H = \frac{d^2}{D^2}(s - x) - \frac{2}{3} D.$$

Setzt man zunächst einmal $x = 0$, so ergibt sich

$$H = \frac{d^2}{D^2} s - \frac{2}{3} D$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 20\,\mathrm{cm} - \frac{2}{3} \cdot 2\,\mathrm{cm}$$

$$= 5\,\mathrm{cm} - 1{,}33\,\mathrm{cm}$$

$$= 3{,}67\,\mathrm{cm}.$$

Man wird nun H mit $H = 3{,}5$ cm ansetzen; dann ergibt sich x zu

$$x = s - \frac{D^2}{d^2} H - \frac{2D^3}{3d^2}$$

$$= 20 \text{ cm} - 14 \text{ cm} - 5{,}3 \text{ cm} = 0{,}7 \text{ cm}.$$

Damit ergibt sich für h:

$$h \geqq s + x = 20 \text{ cm} + 0{,}7 \text{ cm} = 20{,}7 \text{ cm}.$$

Da die Skalenröhre auch beim Eintauchen bis zum obersten Skalenpunkt noch aus der Flüssigkeit herausragen muß, damit man sie anfassen kann, wird man h mit $h \approx 22$ cm festsetzen.

(Bemerkung: In der Praxis wird man die genaue Stellung der Skala, also die Lage des unteren Skalenpunktes für ϱ_2, durch Eintauchen in eine Probeflüssigkeit der Dichte ϱ_2 ermitteln. Dabei gleicht man gleichzeitig die kleine Ungenauigkeit aus, die sich durch die Vernachlässigung des Kugelabschnitts ergibt.)

Die Gesamtlänge L ergibt sich dann zu

$$L = 2R + H + h + r$$

$$\approx 2 \text{ cm} + 3{,}5 \text{ cm} + 22 \text{ cm} + 0{,}5 \text{ cm} = 28 \text{ cm}.$$

Die erforderliche Masse m erhält man aus folgender Rechnung: Es ist

$$\frac{m}{V_1} = \varrho_1 \qquad \text{und} \qquad \frac{m}{V_2} = \varrho_2,$$

folglich

$$m = \varrho_1 V_1 = 2\varrho_1 V_2 = \varrho_2 V_2 = \varrho_2 V_x = \varrho_2 \cdot \frac{1}{4} d^2 \pi h$$

$$= 2 \text{ g cm}^{-3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 \text{ cm}^2 \cdot 3{,}14 \cdot 20 \text{ cm} = 31{,}4 \text{ g}.$$

VI. KONSTRUKTIONSAUFGABEN

Aufgabe 31 ULRICH RICHTER, Löbau

Gegeben sind a und b mit $a > b$. Es ist $\frac{ab}{a-b}$ zu konstruieren.

1. Lösung (Ulrich Richter):

Das Produkt ab kann man als den Flächeninhalt F eines Rechtecks $ABCD$ mit den Seiten a und b auffassen. Bezeichnet man die gesuchte Größe mit x, so gilt $\frac{ab}{a-b} = x$ oder $x(a-b) = ab$. Damit ergibt sich x als Seite eines Rechtecks $A'B'C'D'$ mit dem Flächeninhalt F und den Seiten x und $a - b$. Das Problem stellt also konstruktiv eine Flächenverwandlung dar: Es ist das Rechteck $ABCD$ mit den Seiten a und b in ein flächengleiches Rechteck $A'B'C'D'$ mit den Seiten x und $a - b$ zu verwandeln. Dazu bieten sich mehrere Konstruktionsmöglichkeiten an. Als einfachste erscheint die folgende (Abb. 39):

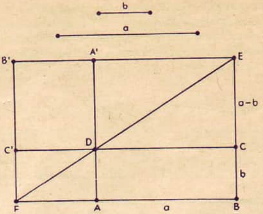


Abb. 39

1. Man konstruiert das Rechteck $ABCD$ mit $AB = a$ und $BC = b$.
2. Man verlängert BC über C hinaus um $a - b$ bis E.
3. Man bringt die Geraden durch A und B sowie durch E und D zum Schnitt; dieser sei F.
4. Man errichtet in F auf AF und in E auf CE die Senkrechten; deren Schnitt sei B'.
5. Man verlängert AD bis zum Schnitt A' mit EB' und CD bis zum Schnitt C' mit FB'.

Das Rechteck $A'B'C'D'$ ist das gesuchte.

Beweis:

Es ist zu beweisen:

1. $ABCD = A'B'C'D'$, 2. $A'D = a - b$ oder $C'D = a - b$.

1. $\triangle BEF \cong \triangle B'FE$ wegen $EF = EF$, $\sphericalangle BFE = \sphericalangle B'EF$, $\sphericalangle BEF = \sphericalangle B'FE$
(Beide sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.)

$\triangle AFD \cong \triangle C'DF$ wegen $DF = DF$, $\sphericalangle AFD = \sphericalangle C'DF$, $\sphericalangle ADF = \sphericalangle C'FD$
(Beide sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.)

$\triangle CDE \cong \triangle A'ED$ wegen $DE = DE$, $\sphericalangle CDE = \sphericalangle A'ED$, $\sphericalangle CED = \sphericalangle A'DE$
(Beide sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.)

Daraus folgt:

$$\square ABCD = \triangle BEF - \triangle AFD - \triangle CDE$$
$$= \triangle B'FE - \triangle C'DF - \triangle A'ED$$
$$= \square A'B'C'D.$$

2. $A'D \parallel EC$, $A'E \parallel DC$, daraus folgt $A'D = EC = a - b$ (nach Konstruktion).

2. Lösung (Klaus Müller):

Konstruktionsbeschreibung: Die Strecke $AB = b$ wird über B hinaus um a verlängert bis zum Punkt C. Auf AC wird in B die Senkrechte errichtet, die den Thaleskreis über AC in D schneidet. Auf $BC = a$ wird von C aus die Strecke $b = CE$ abgetragen. Die Mittelsenkrechte auf DE schneidet die Gerade durch A und C in F. Der Kreisbogen um F mit dem Radius EF schneidet die Gerade durch A und C in G. Die Strecke GB ist die gesuchte.

Beweis: $ab = DB^2$ (Höhensatz),
$GB \cdot BE = DB^2$ (Höhensatz),
$BE = a - b$ (nach Konstruktion),

also $GB \cdot (a-b) = ab$,

$$GB = \frac{ab}{a-b}.$$

3. Lösung (Klaus Müller):

Konstruktionsbeschreibung: Man zeichne unter beliebigem Winkel zwei von einem Punkt S ausgehende Strahlen und trage auf dem einen von ihnen die Strecke $SA = a$, auf dem anderen die Strecke $SB = a$ ab. Auf AS trage man von A aus die Strecke $AC = b$ ab. Die Parallele zu CB durch A schneidet den Strahl SB in D. Die Strecke BD ist die gesuchte.

Beweis: Nach dem ersten Strahlensatz gilt

$$BD : AC = BS : CS,$$

$$BD = \frac{BS \cdot AC}{CS},$$

$$BD = \frac{ab}{a-b}.$$

4. Lösung (Klaus Müller):

Man zeichne die Strecke $AC = a$ und trage auf ihr von C aus die Strecke $CB = b$ ab. An AB trage man in A einen beliebigen Winkel an. Um B schlage man den Kreisbogen mit dem Radius b. Er schneidet den freien Schenkel des Winkels in D. Die Parallele zu BD durch C schneidet den freien Schenkel in E. Die Strecke CE ist die gesuchte.

Beweis: Nach dem zweiten Strahlensatz gilt

$$AC : AB = CE : BD,$$

$$CE = \frac{AC \cdot BD}{AB},$$

$$CE = \frac{ab}{a-b}.$$

5. Lösung (Klaus Müller):

Konstruktionsbeschreibung: Man zeichne die Strecke $AC = a$ und trage auf ihr von C aus die Strecke $CB = b$ ab. An AC trage man in C einen beliebigen Winkel an; auf dem freien Schenkel trage man die Strecke $CD = a - b$ ab. Nun ziehe man die Mittelsenkrechten der Strecken AB und BD. Sie schneiden einander in E. Um E schlage man den Kreis mit dem Radius AE. Er schneidet die Gerade durch C und D in D und F. Die Strecke CF ist die gesuchte.

Beweis: Nach dem Sekantensatz gilt

$$CD \cdot CF = AC \cdot CB,$$

$$CF = \frac{AC \cdot CB}{CD},$$

$$CF = \frac{ab}{a-b}.$$

6. Lösung (Klaus Müller):

Konstruktionsbeschreibung: Man zeichne die Strecke $AB = a$ und trage auf ihr von A aus die Strecke $AC = b$ ab. Über AB schlage man den Thaleskreis und errichte auf AB in C die Senkrechte. Sie schneidet den Thaleskreis in D. Um A schlage man mit BC einen Kreisbogen. Er schneidet den Thaleskreis über AD in E. Auf AD errichte man in D die Senkrechte. Sie schneidet die Verlängerung von AE in F. Die Strecke AF ist die gesuchte.

Beweis:
$$ab = AD^2 \quad \text{(Kathetensatz)},$$
$$AF \cdot AE = AD^2 \quad \text{(Kathetensatz)},$$
$$AE = a - b \quad \text{(nach Konstruktion)},$$

also $AF \cdot (a-b) = ab$,

$$AF = \frac{ab}{a-b}.$$

7. Lösung (Klaus Müller):

Konstruktionsbeschreibung: Man zeichne die Strecke $AB = a$ und verlängere sie über B hinaus um $BC = b$. An AB trage man unter beliebigem Winkel die Strecke $BD = a - b$ an. Man zeichne die Mittelsenkrechten auf AC und CD. Sie schneiden einander in F. Um F schlage man den Kreis mit dem Radius AF. Er schneidet die Gerade durch B und D in D und E. Die Strecke BE ist die gesuchte.

Beweis: Nach dem Sehnensatz gilt

$$EB \cdot BD = AB \cdot BC,$$

$$EB = \frac{AB \cdot BC}{BD},$$

$$EB = \frac{ab}{a-b}.$$

8. Lösung (Klaus Müller):

Konstruktionsbeschreibung: Man zeichne eine beliebige Strecke AB und teile sie harmonisch im Verhältnis $b : (a - b)$. Die Teilpunkte seien F und G. Über FG schlage man den Thaleskreis. Dieser wird von dem Kreis, den man um B mit dem Radius a schlägt, in H geschnitten. Die Strecke AH ist die gesuchte.

Beweis: Die Strecke AB ist im Verhältnis $b : (a - b)$ harmonisch geteilt. Dann liegen auf dem Thaleskreis über den Teilpunkten die Spitzen H aller Dreiecke ABH mit AB als Grundlinie, deren Seiten im Verhältnis der harmonischen Teilung stehen. Mithin gilt

$$AH : BH = b : (a-b),$$

$$BH = a,$$

$$AH = \frac{ab}{a-b}.$$

9. Lösung (Klaus Müller):

Konstruktionsbeschreibung: Man zeichne die Strecke $AB = a$ und schlage darüber den Thaleskreis. Um A schlage man den Kreis mit $a - b$ als Radius. Er schneidet den Thaleskreis in C. Zu AB zeichne man im Abstand b in der Halbebene, in der C liegt, eine Parallele. Die Verlängerung von BC schneidet die Parallele in D. Die Strecke BD ist die gesuchte.

Beweis: Zum Beweis fälle man das Lot von D auf AB. Der Fußpunkt sei E. Dann gilt nach dem Satz „Zwei Höhen im Dreieck verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Seiten" für das Dreieck ABD

$$BD : AB = DE : AC,$$

$$BD = \frac{AB \cdot DE}{AC},$$

$$BD = \frac{ab}{a-b}.$$

10. Lösung (Klaus Müller):

Konstruktionsbeschreibung: Man zeichne die Strecke $AB = a$ und trage auf ihr von B aus die Strecke $BC = b$ ab. In B errichte man auf AB die Senkrechte $BD = a - b$. Man verbinde A mit D und fälle von C aus das Lot auf AD. Die Verlängerung dieses Lotes schneidet die Gerade durch B und D in E. Die Strecke BE ist die gesuchte.

Beweis: Im Dreieck ADE gilt nach dem Satz „In einem Dreieck ist das Produkt aus einer Höhe und ihrem unteren Abschnitt gleich dem Produkt aus den Abschnitten der zugehörigen Seite"

$$BD \cdot BE = AB \cdot BC,$$

$$BE = \frac{AB \cdot BC}{BD},$$

$$BE = \frac{ab}{a-b}.$$

11. Lösung (Klaus Müller):

Konstruktionsbeschreibung: Man zeichne die Strecke $AB = a$ und verlängere sie über B hinaus um $BC = b$. Über AB schlage man den Thaleskreis und um B den Kreis mit dem Radius $(a - b)$. Die Kreise schneiden einander in D. Auf AC errichte man in C die Senkrechte. Sie schneidet die Gerade durch B und D in E. Die Strecke BE ist die gesuchte.

Beweis: Zum Beweis verlängere man die Strecke AD bis zum Schnittpunkt F mit der Geraden durch C und E. Dann sind AC und DE zwei Höhen im Dreieck AEF, und nach dem Satz „In einem Dreieck sind die Produkte aus den Abschnitten je einer Höhe einander gleich" gilt

$$BE \cdot BD = AB \cdot BC,$$

$$BE = \frac{AB \cdot BC}{BD},$$

$$BE = \frac{ab}{a-b}.$$

12. Lösung (Klaus Müller):

Konstruktionsbeschreibung: Man zeichne die Strecke $AB = a$ und trage auf ihr von A aus die Strecke $AC = b$ ab. Über AB schlage man den Thaleskreis. Um A schlage man den Kreis mit dem Radius $(a - b)$. Er schneidet den Thaleskreis in D. Auf AB errichte man in C die Senkrechte. Sie schneidet die Gerade durch A und D in E. Die Strecke AE ist die gesuchte.

Beweis: Nach dem Satz „Im Dreieck verhalten sich zwei Seiten wie ihre Projektionen aufeinander" gilt im Dreieck ABE

$$AE : AB = AC : AD,$$

$$AE = \frac{AB \cdot AC}{AD},$$

$$AE = \frac{ab}{a-b}.$$

13. Lösung (Hans-Jürgen Weiß):

Die Aufgabe ist gelöst, wenn es gelingt, aus einem Rechteck mit den Seiten a und b ein flächengleiches Parallelogramm mit der Höhe $a - b$ zu konstruieren.
In dem Rechteck $ABCD$ sei $AB = a$, $BC = b$ $(a > b)$. Man schlage mit b als Radius einen Kreisbogen um B, der AB in E schneidet. Nach Konstruktion ist $AE = a - b$. Nun schlage man über AB den Thaleskreis und um A mit AE als Radius einen Kreisbogen, der den Thaleskreis in F schneidet. Es ist $AF = a - b$ nach Konstruktion und $AF \perp FB$. Die Gerade durch B und F schneidet die Gerade durch C und D in C', die Parallele durch A zu BC' die Gerade durch C und D in D'. Das Parallelogramm $ABC'D'$ hat mit dem Rechteck die Seite AB und die Höhe $BC = AD$ gemeinsam, beide sind also flächengleich. Ferner hat das Parallelogramm $ABC'D'$ andererseits die Höhe $AF = a - b$ auf der Seite BC'. Demnach ist $BC' = AD' = \frac{ab}{a-b}$ die gesuchte Strecke.

14. Lösung (Wilfried Braunschreiber):

Es sei $a > b$, dann ist $a - b > 0$. Man setze $AB = 2a - b$ mit $AD = a - b$ und $BD = a$. In B errichte man auf AB die Senkrechte und trage auf ihr $BL = b$ ab. AB werde nach beiden Seiten um die beliebige Strecke $AE = BH$ verlängert. Die Diagonale BK des Rechtecks $BHKL$ werde so weit verlängert, daß sie sich in einem Punkt C mit der Senkrechten auf AB in D schneidet. Die Senkrechte in E auf AE schneidet die Gerade durch A und C im Punkt F. Die Strecke EF ist die gesuchte.

Beweis: Es ist $\triangle AEF \sim \triangle ADC$, $\triangle BHK \sim \triangle BDC$ (nach dem Hauptähnlichkeitssatz für Dreiecke). Damit gilt

$$AE : EF = AD : DC \quad \text{oder} \quad AE \cdot DC = EF \cdot AD$$

sowie

$$BH : HK = BD : DC \quad \text{oder} \quad BH \cdot DC = HK \cdot BD.$$

Da $AE = BH$ ist, folgt

$$EF \cdot AD = HK \cdot BD,$$

$$EF = \frac{HK \cdot BD}{AD},$$

$$EF = \frac{ab}{a-b}.$$

15. Lösung (Jürgen Berndt):

Der Ausdruck $\frac{ab}{a-b}$ kann umgeformt werden in $\frac{1}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$.

Die Transformation $w = \frac{1}{z}$ ist eine Spiegelung am Einheitskreis. Aus der Abb. 40 ist das Verfahren der Kon-

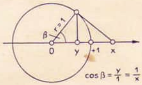


Abb. 40

struktion von $\frac{1}{x}$ bei gegebenem x klar ersichtlich (der Beweis ist leicht einzusehen, wenn man $\cos\beta$ im großen und im kleinen rechtwinkligen Dreieck betrachtet). Damit kann man $\frac{1}{b}$ und $\frac{1}{a}$ konstruieren. Die Differenz zu konstruieren bereitet ebenfalls keine Schwierigkeiten. Diese ist dann nochmals am Einheitskreis zu spiegeln.

16. Lösung (Theodor Kasper):

Man zeichne einen Winkel von 120° und seine Halbierende. Auf dieser trägt man vom Scheitelpunkt aus die Strecke b und auf einem der Schenkel die Strecke a ab. Die Verbindungsgerade der Endpunkte von a und b schneidet auf dem anderen Schenkel die Strecke $x = \frac{ab}{a-b}$ ab.

Beweis: Man berechne die beiden entstandenen Dreiecke und das aus beiden zusammengesetzte Dreieck nach der Formel

$$D = \frac{1}{2} ab \sin\gamma;$$

man findet

$$\frac{1}{2} ab \sin 60^\circ + \frac{1}{2} bx \sin 60^\circ = \frac{1}{2} ax\, 2 \sin 60^\circ \cos 60^\circ,$$

$$ab + bx = ax$$

(wegen $2\cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$),

$$x = \frac{ab}{a-b}.$$

(Der Konstruktion liegt das Dreistrahlnomogramm für die Addition von Kehrwerten zugrunde.)

17. Lösung (Ludwig Puchta):

Zunächst setzen wir $a = x_1$, $b = y_1$, $x = a$. Dann ist die Beziehung $x = \frac{ab}{a-b}$ in der Form $a = \frac{x_1 y_1}{x_1 - y_1}$ gegeben. Man formt sie um in $xy - ax + ay = 0$.

Diese Gleichung stellt nach den Gesetzen der analytischen Geometrie eine gleichseitige Hyperbel dar, die im kartesischen Koordinatensystem gedreht und verschoben wurde. Ihre allgemeine Gleichung in der Hauptachsenform ist

$$x^2 - y^2 = c^2.$$

Diese Hyperbel hat für den Punkt $P_1(x_1; y_1)$ die Normale

$$\eta \equiv y = -\frac{y_1}{x_1} x + 2y_1$$

und die Asymptoten

$$\mathfrak{a}_1 \equiv y = x \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}_2 \equiv y = -x.$$

Die Normale η schneidet die x-Achse im Punkt $N(2x_1; 0)$ und die Asymptote $\mathfrak{a}_2$ in $P_2\left(-2\frac{x_1 y_1}{x_1 - y_1}; 2\frac{x_1 y_1}{x_1 - y_1}\right)$. Damit ergibt sich folgende Konstruktion:

In ein kartesisches Koordinatensystem zeichne man ein

1. die Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $N(2x_1; 0)$,
2. die Gerade η durch P_1 und N,
3. die Gerade (Asymptote) $\mathfrak{a}_2 \equiv y = -x$ (Winkelhalbierende des 2. und 4. Quadranten),
4. die Ordinate des Schnittpunktes $P_2\left(-2\frac{x_1 y_1}{x_1 - y_1}; 2\frac{x_1 y_1}{x_1 - y_1}\right)$ von η und $\mathfrak{a}_2$.

Halbiert man diese Ordinate, so erhält man die gesuchte Strecke.

18. Lösung (Dietmar Schwartz, Manfred Heyder):

Die Strecken a und b werden als Beträge komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt (Realteil und Imaginärteil beliebig so, daß $a^2 = R(a)^2 + I(a)^2$ bzw. $b^2 = R(b)^2 + I(b)^2$ gilt; Abb. 41). Die komplexen Zahlen werden multipliziert:

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)\, r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$
$$= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Anschließend wird die Division entsprechend durchgeführt.

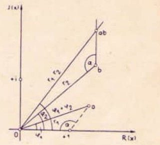


Abb. 41

Konstruktion: Man legt in der Gaußschen Zahlenebene die komplexen Zahlen A und B mit den Beträgen a bzw. b fest und verbindet ihre Punkte mit dem 0-Punkt. Nun konstruiert man ein Dreieck COB, das die Seite OB und den ihr anliegenden Winkel $AO1$ enthält und das dem Dreieck $AO1$ ähnlich ist. Es ist $OC = ab$. Ferner konstruiert man ein Parallelogramm $OBAD$; es ist nach Konstruktion $OD = a - b$. Nunmehr wird ein Dreieck $OX1$ konstruiert derart, daß es dem Dreieck OCD ähnlich ist. Dann ist OX die gesuchte Strecke x.

Aufgabe 31 — WALTER RULFF, Coswig

Gegeben ist ein Trapez mit den parallelen Seiten a und c, der Höhe h und dem Winkel α (Abb. 42). Gesucht ist die Parallele zu a und c, die die Fläche des Trapezes halbiert. (Lösung 1. durch Berechnung, 2. durch Konstruktion.)

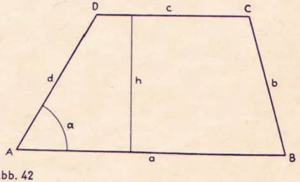


Abb. 42

Lösung (Walter Rulff):

1. Berechnung: Da die Fläche eines Trapezes ausschließlich von der Länge der parallelen Seiten und der Höhe,

nicht aber von den Winkeln abhängt, spielt der Winkel α für das vorliegende Problem keine Rolle, und die Betrachtungen können ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit an einem rechtwinkligen Trapez durchgeführt werden (Abb. 43).

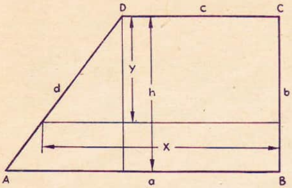


Abb. 43

Die teilende Parallele habe die Länge x, ihr Abstand von c sei y. Dann gilt

$$\frac{x+c}{2}\cdot y=\frac{a+c}{4}\cdot h.$$

Nach dem Strahlensatz gilt

$$\frac{y}{h}=\frac{x-c}{a-c},\quad \text{also}\quad y=\frac{x-c}{a-c}\cdot h.$$

Daraus folgt nach Umrechnung

$$x^2-c^2=\frac{a^2-c^2}{2},$$

$$x=\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}.$$

Man erkennt, daß die Länge der Parallelen unabhängig ist von der Höhe h. Ihr Abstand y von c ist dann

$$y=\frac{x-c}{a-c}\cdot h,$$

$$y=\frac{\sqrt{\frac{a^2-c^2}{2}}-c}{a-c}\cdot h.$$

2. Konstruktion: Die Berechnung liefert den Schlüssel zur Konstruktion. Aus

$$x=\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$$

folgt

$$x=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\sqrt{2}\right)^2}.$$

Das heißt aber, man erhält x als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ und $\frac{c}{2}\sqrt{2}$ sind. Diese Katheten sind aber die halben Diagonalen aus den Quadraten der beiden parallelen Trapezseiten.

Konstruktionsbeschreibung (Abb. 44):

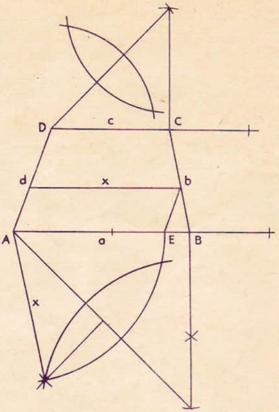


Abb. 44

1. Man konstruiert die Quadrate über den parallelen Trapezseiten, zieht in ihnen je eine Diagonale und halbiert diese.
2. Man konstruiert ein rechtwinkliges Dreieck mit den halbierten Diagonalen als Katheten. Die Hypotenuse hat die Länge x der gesuchten Parallelen.
3. Man trägt die Strecke x von A aus auf $a = AB$ ab; der Endpunkt sei E. Dann zieht man durch E eine Parallele zu $d = DA$; ihr Schnitt mit $b = BC$ sei F. Die Parallele zu $a = AB$ und $c = CD$ durch F ist die gesuchte Parallele.

Determination: Sämtliche Konstruktionen sind stets ausführbar und eindeutig.

Aufgabe 33 WALTER RULFF, Coswig

Gegeben sind drei zueinander parallele Geraden. Es ist ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, dessen Endpunkte je auf einer der gegebenen Geraden liegen.

1. Lösung (Walter Rulff):

Analysis: Die allgemeine Lösung findet man, indem man von einem leicht lösbaren Spezialfall ausgeht: Es werde zunächst angenommen, der Abstand der gegebenen Parallelen g_1 und g_2 sei gleich dem Abstand der Parallelen g_2 und g_3. Dann liegt das gesuchte Dreieck ABC symmetrisch zu g_2 (Abb. 45), die Länge der Dreieckseite $AB = BC = CA$ ist gleich dem Abstand der Parallelen g_1 und g_3, das Dreieck ABC ist ohne weiteres konstruierbar.
Betrachtet man nun die Analysisfigur Abb. 46, so erkennt man: Ist PD die Höhe im Dreieck PQR, so ist

$\sphericalangle PDC = \sphericalangle BDR$, da die Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen. Da ferner $\sphericalangle CDB = \sphericalangle PDR = 90°$ ist, ist das Dreieck CDP ähnlich dem Dreieck BDR. Folglich gilt

$$PD : RD = CD : BD.$$

Wegen $$CD : BD = \sqrt{3} : 1$$

gilt dann aber auch $PD : RD = \sqrt{3} : 1$,

Konstruktionsbeschreibung: Man konstruiert die Mittelparallele g_4 zu g_1 und g_3 und errichtet in einem beliebigen Punkt D von g_4 die Senkrechte, die g_1 im Punkt A und g_3 im Punkt B schneidet. Sodann schlägt man um A und B zwei Kreisbögen mit AB als Radius, die sich in C auf g_4 schneiden. In C errichtet man die Senkrechte auf g_4; sie schneidet g_2 in P. Man verbindet P mit D und errichtet in D auf PD die Senkrechte. Deren Schnitt mit g_1 sei Q, mit g_3 sei R. Das Dreieck PQR ist das gesuchte.

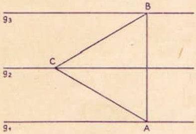


Abb. 45

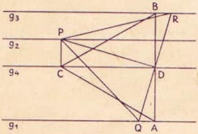


Abb. 46

Determination: Da die Kreisbögen um A und B einander in zwei Punkten C und C' schneiden, ist das gesuchte Dreieck PQR nur bis auf Symmetrie bestimmt. Alle anderen Konstruktionen sind stets und eindeutig ausführbar.

2. Lösung (Willi Dörfler, Werner Knieß):

Wir gehen von dem Spezialfall aus, daß die Parallelen zwei gleiche Abstände haben (Abb. 47). Die weitere Konstruktion verläuft folgendermaßen (Abb. 48):

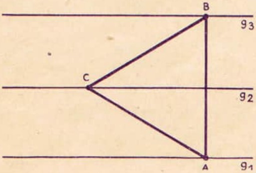


Abb. 47

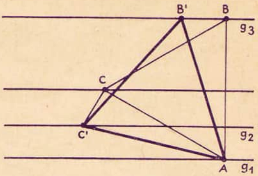


Abb. 48

In C wird auf AC die Senkrechte errichtet. Ihr Schnitt mit g_2 sei C'. Von B aus trägt man auf g_3 die Strecke $CC' = BB'$ so ab, daß $\triangle ABB'$ und $\triangle ACC'$ gleichen Umlaufsinn haben. Dann ist

$AB = AC$ (nach Konstruktion; $\triangle ABC$ ist gleichseitig),

$\sphericalangle ABB' = \sphericalangle ACC'$ (nach Konstruktion rechte Winkel),

$CC' = BB'$ (nach Konstruktion).

Also ist $\triangle ABB' \cong \triangle ACC'$. Daraus folgt

$AB' = AC'$,

$\sphericalangle CAC' = \sphericalangle BAB'$, also auch

$\sphericalangle C'AB' = \sphericalangle CAB = 60°$ (nach Konstruktion).

Im Dreieck $AB'C'$ sind demnach zwei Seiten einander gleich, und der von ihnen eingeschlossene Winkel beträgt 60°. Folglich ist das Dreieck gleichseitig.

3. Lösung (Peter Kühn):

Analysis:

Es seien g_1, g_2 und g_3 die gegebenen Parallelen (Abb. 49). Man ziehe eine Gerade g_4, die g_1, g_2 und g_3 unter einem Winkel von 60° schneidet, und im Abstand $g_1 g_2$ dazu eine Parallele g_5. Die Schnittpunkte seien beziehungsweise P_{14}, P_{24}, P_{34}, P_{15}, P_{25} und P_{35}. Dann ist die kürzere der beiden Strecken $P_{14}P_{35}$ und $P_{15}P_{34}$ die gesuchte Dreieckseite.
Auf Beweis, Konstruktion und Determination wollen wir hier verzichten. In Abb. 49 geben diejenigen Konstruktionselemente einen Hinweis, die für das Verständnis der Analysis nicht erforderlich waren.

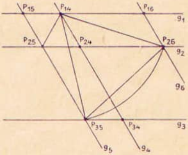


Abb. 49

4. Lö ung (Dr. B. Basedow):

Man verlängere (vgl. Abb. 50) AH über H hinaus um sich selbst bis zum Punkt A' und errichte über AA' ein gleichseitiges Dreieck mit dem dritten Eckpunkt B'. Dann fälle man von A' aus das Lot auf AB', dessen Verlängerung die

Gerade g_1 in C schneidet. Man schlage mit AC in der Zirkelspanne um A einen Kreis, der HB' in B schneidet. Das Dreieck ABC ist das gesuchte.
Beweis: Es ist

$$AC = AB \text{ nach Konstruktion,}$$
$$AD = AH \text{ nach Konstruktion,}$$
$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle AHB = 1\,R \text{ nach Konstruktion,}$$

also

$\triangle ADC \cong \triangle AHB$ nach *ssw* (der größere Winkel liegt der größeren Seite gegenüber).
Ferner ist

$$\begin{aligned}\sphericalangle CAB &= \sphericalangle CAB' + \sphericalangle B'AB\\ &= HAB' + \sphericalangle B'AB\\ &= \sphericalangle HAB' + \sphericalangle B'AB \text{ nach Kongruenz}\\ &= \sphericalangle A'AB'\\ &= 60^\circ \text{ nach Konstruktion.}\end{aligned}$$

Das Dreieck ABC ist also nach Konstruktion gleichschenklig mit einem Winkel von 60° an der Spitze. Damit ist es aber auch gleichseitig.

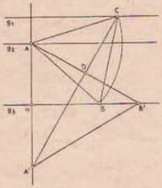


Abb. 50

5. Lösung (Walter Uffrecht):

Die Lösung beruht auf dem Satz: „Der geometrische Ort aller Eckpunkte P_3 von gleichseitigen Dreiecken mit festem Eckpunkt P_1 und auf einer Geraden beweglichem Eckpunkt P_2 ist eine Gerade".
Beweis: Bekanntlich lautet die Gleichung einer Geraden in einem r-φ-Polarkoordinatensystem

$$r = \frac{d}{\cos(\beta - \varphi)},$$

wobei d die Länge des Lotes vom Koordinatenursprung auf die Gerade und β der Winkel zwischen diesem Lot und der Achse des Systems ist (Abb. 51). Wir wählen

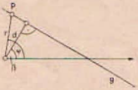


Abb. 51

nun für P_1 den Koordinatenursprung und für P_2 einen Punkt auf der Geraden. Dann gilt

$$P_1P_2 = r_2 = \frac{d}{\cos(\beta - \varphi_2)}.$$

Es ist nun eine Gleichung zu finden, die folgende Bedingungen erfüllt: Für $\varphi_3 = \varphi_2 - \frac{\pi}{3}$ ist $P_1P_3 = r_3 = r_2$.
Diese Bedingung wird aber offensichtlich von der Gleichung

$$P_1P_3 = r_3 = \frac{d}{\cos\left(\beta - \frac{\pi}{3} - \varphi_3\right)}$$

erfüllt. Setzt man nämlich darin $\varphi_3 = \varphi_2 - \frac{\pi}{3}$, so ergibt sich

$$r_3 = \frac{d}{\cos(\beta - \varphi_2)} = r_2.$$

Das ist aber wieder die Gleichung einer Geraden (die vom Ursprung denselben Abstand d hat, aber gegenüber der ursprünglichen Geraden um $-\frac{\pi}{3}$ gedreht ist).
Damit ergeben sich folgende vereinfachte Konstruktionen:

1. Man wählt auf g_1 einen beliebigen Punkt P_1 und konstruiert zwei gleichseitige Dreiecke $P_1P_2P_3$ und $P_1'P_2'P_3'$ derart, daß P_1 und P_1' zusammenfallen und P_2 sowie P_2' auf g_3 liegen. Dann zieht man die Verbindungsgerade P_3P_3', die g_2 in Q schneidet. P_1Q ist die Seite des gesuchten gleichseitigen Dreiecks (dessen weitere Konstruktion klar sein dürfte).

2. Man wählt auf g_1 einen beliebigen Punkt P und errichtet in ihm die Senkrechte auf g_1, die g_3 in Q' schneidet. Über PQ' konstruiert man ein gleichseitiges Dreieck mit dem dritten Eckpunkt R'. Ferner verlängert man PQ' über Q' hinaus um sich selbst bis Q''. Die Verbindungsgerade $Q''R'$ schneidet g_2 in R. Die Strecke PR ist die Seite des gesuchten Dreiecks (weitere Konstruktion ist klar).
Determination: Alle Konstruktionen sind — bis auf Symmetrie — eindeutig und stets ausführbar.

Aufgabe 34 JOHANNES RIEDEL, Berlin

Konstruiere ein Dreieck aus *

$$s_a = 6\text{ cm},\ h_b = 5\text{ cm},\ h_c = 7\text{ cm!}$$

Lösung (Johannes Riedel):

Vorüberlegung: Die Analysisfigur (Abb. 52) zeigt, daß kein Teilstück des Dreiecks ABC unmittelbar konstruierbar ist. Durch Festlegen jedes der drei gegebenen Stücke wird für einen weiteren Punkt des Dreiecks ABC höchstens ein geometrischer Ort bestimmt.
Die Situation ändert sich jedoch sofort, wenn man die Höhen h_b und h_c in Richtung b bzw. c parallel zu sich selbst verschiebt, so daß sie durch D verlaufen (Abb. 53). Dann gilt $\triangle DBF' \cong \triangle DCF''$ wegen $DB = DC = \frac{a}{2}$, $\sphericalangle BDF' = \sphericalangle CDF''$ (Scheitelwinkel), $\sphericalangle DF'B = \sphericalangle DF''C$ (rechte Winkel nach Konstruktion). Also ist $DF' = DF'' = \frac{h_c}{2}$.
Entsprechend gilt $\triangle DCE' \cong \triangle DBE''$ wegen $DB = DC = \frac{a}{2}$, $\sphericalangle E'DC = \sphericalangle E''DB$ (Scheitelwinkel), $\sphericalangle CE'D = \sphericalangle BE''D$ (rechte Winkel nach Konstruktion). Damit

ergibt sich die Möglichkeit, $\triangle AF'D$ aus $AD = s_a$, $DF' = \frac{h_c}{2}$, $\sphericalangle AF'D = 90°$, und $\triangle AED$ aus $AD = s_a$, $DE' = \frac{h_b}{2}$, $\sphericalangle AE'D = 90°$ zu konstruieren. Man erhält daraus B und C auf folgende Weise: B liegt 1. auf der Geraden durch A und F' und 2. auf der Parallelen zur Geraden durch A und E' im Abstand h_c, die in derselben Halbebene liegt wie D. C liegt 1. auf der Geraden durch A und E' und 2. auf der Parallelen zur Geraden durch A und F' im Abstand h_b, die in derselben Halbebene liegt wie D.
Nach Festlegung von B (C) auf die beschriebene Weise ergeben sich für C (B) auch folgende geometrische Örter: C (B) liegt 1. auf der Geraden durch A und E' (F') und 2. auf der Verlängerung von BD (CD) über D hinaus. Oder: C (B) liegt auf der Verlängerung von BD (CD) über D hinaus im Abstand BD (CD) $= \frac{a}{2}$ von D.

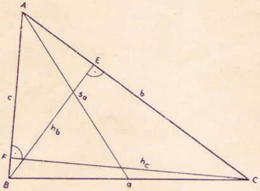


Abb. 52

Konstruktionsbeschreibung (Abb. 54): Man legt $AD = s_a = 6$ cm fest und schlägt über AD nach beiden Seiten den Thaleskreis. Um D schlägt man mit $\frac{h_b}{2}$ in der Zirkelspanne einen Kreisbogen, dessen Schnitt mit dem einen Thaleshalbkreis den Punkt E' liefert, und mit $\frac{h_c}{2}$ in der Zirkelspanne einen Kreisbogen, dessen Schnitt mit dem anderen Thaleshalbkreis den Punkt F' ergibt. Sodann zieht man zu AE' die Parallele im Abstand h_b in der Halbebene, in der D liegt. Ihr Schnittpunkt mit der Geraden durch A und F' ist B. Ferner zieht man zu AF' die Parallele im Abstand h_c in der Halbebene, in der D liegt. Ihr Schnittpunkt mit der Geraden durch A und E' ist C. Man kann C (B) auch nach Konstruktion von B (C) erhalten, indem man BD (CD) über D hinaus bis zum Schnitt mit der Geraden durch A und E' (F') bzw. um sich selbst verlängert.

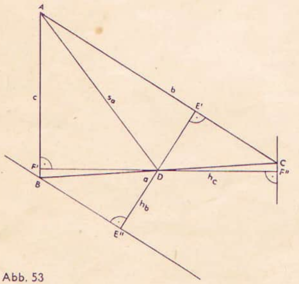


Abb. 53

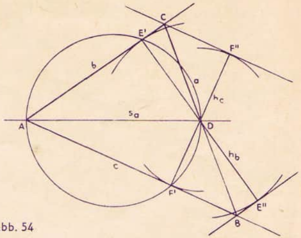


Abb. 54

Diskussion: Die Aufgabe ist (bis auf Symmetrie) eindeutig lösbar, wenn $\frac{h_c}{2} < s_a$ und $\frac{h_b}{2} < s_a$ ist. In diesem Fall ergeben die Kreisbögen um D je genau einen Schnittpunkt mit einem Thaleshalbkreis. Die weitere Konstruktion ist eindeutig. Wenn dagegen $\frac{h_b}{2} \geq s_a$ oder $\frac{h_c}{2} \geq s_a$ ist, so existiert kein entsprechender Schnittpunkt mit dem Thaleshalbkreis, und die Aufgabe ist unlösbar.

Im vorliegenden Fall ist die Aufgabe wegen $\frac{h_b}{2} = 2{,}5$ cm < 6 cm $= s_a$ und $\frac{h_c}{2} = 3{,}5$ cm < 6 cm $= s_a$ eindeutig lösbar.

Aufgabe 35 JÜRGEN BERNDT, Burkersdorf

Gegeben sind zwei Punkte A und B. Man konstruiere unter ausschließlicher Verwendung des Zirkels (also ohne Verwendung eines Lineals) ein Quadrat, in dem A und B benachbarte Eckpunkte sind.

1. Lösung (Jürgen Berndt):

a) Analysis (Abb. 55):

Der Punkt C liegt

1. auf dem Kreis um B mit $AB = a$ als Radius,
2. auf dem Kreis um A mit $AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$ als Radius.

Der Punkt D liegt

1. auf dem Kreis um A mit $AB = a$ als Radius,
2. auf dem Kreis um B mit $AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$ als Radius.

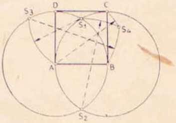


Abb. 55

Es kommt also darauf an, die Strecke $AC = BD = a\sqrt{2}$ zu konstruieren.

Dazu verhilft die folgende Überlegung:

Die direkte Konstruktion als Diagonale eines Quadrats mit der Seitenlänge a ist nicht möglich, da es nicht gelingt, nur mit dem Zirkel die Lage des dritten Eckpunktes unmittelbar zu finden. Aus der Gleichung $3a^2 - a^2 = 2a^2$ oder $a\sqrt{2} = \sqrt{3a^2 - a^2}$ folgt aber, daß man $a\sqrt{2}$ erhält, wenn es gelingt, ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $a\sqrt{3}$ und einer Kathete a zu konstruieren. Die Hypotenuse $a\sqrt{3}$ erhält man als doppelte Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a bzw. (da der Fußpunkt der Höhe nicht ermittelt werden kann) als längere Diagonale eines Rhombus mit der Seitenlänge a und der kürzeren Diagonale a. Die Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks erfolgt über die Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Basis $2a$ und den Schenkeln $a\sqrt{3}$.

b) Konstruktion:

Man schlägt um A und um B Kreise mit dem Radius $a = AB$. Ihre Schnittpunkte seien S_1 und S_2. Weiter schlägt man um S_1 einen Kreis mit dem Radius a, der den Kreis um A außer in B in S_3 schneidet. Um S_2 und S_3 schlägt man Kreise mit dem Radius $S_3B = S_1S_2$, die sich in S_4 schneiden (bzw. in S_4'). Die Strecke $AS_4 = AS_4'$ hat die Länge der Diagonalen $AC = BD$ im Quadrat $ABCD$.
Der Kreis um A mit dem Radius AS_4 schneidet den Kreis um B mit dem Radius AB in C, und der Kreis um B mit dem Radius AS_4 schneidet den Kreis um A mit dem Radius AB in D.

c) Determination:

Alle Konstruktionen sind (bis auf Symmetrie) stets eindeutig.

2. Lösung (Gerhard Fuhrmann):

Die Kreise mit AB als Radius um A und B liefern als Schnittpunkt den Punkt H_1 (der spiegelbildliche Schnittpunkt ergibt keine andere Lösung). Die Kreise um B und H_1 mit demselben Radius liefern als neuen Schnittpunkt den Punkt H_2, die um H_2 und B den Punkt H_3. Setzt man die Konstruktion gemäß Abb. 56 in der gleichen Weise fort,

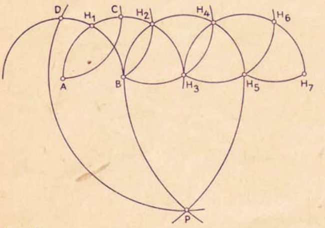


Abb. 56

so erhält man die Punkte H_4, H_5, H_6 und H_7. Die Kreise mit AH_5 als Radius um A und H_7 liefern als Schnittpunkt den Punkt P derart, daß AH_7P ein gleichschenkliges Dreieck mit den Seiten $AH_7 = 4AB$, $AP = H_7P = 3AB$ ist. Die Höhe in diesem Dreieck ist $H_3P = AB\sqrt{5}$, also gleich der Diagonalen in einem Rechteck mit den Seiten $a = AB$ und $b = 2AB$.
Demzufolge liefern die Kreise um H_3 mit H_3P als Radius und um A mit AB als Radius den gesuchten dritten Eckpunkt D des Quadrates $ABCD$ als Schnittpunkt.
Den vierten Eckpunkt C erhält man als Schnittpunkt der Kreise um B und D mit AB als Radius.

VII. BEWEISAUFGABEN

Aufgabe 36 Dr. GERHARD HESSE, Radebeul

Das Dreieck ABC sei bei C rechtwinklig. Es sei $CD = h_c$ die Höhe der Hypotenuse; ferner seien ϱ der Radius des Inkreises im Dreieck ABC, ϱ_1 und ϱ_2 die Radien der Inkreise in den Teildreiecken ADC und BDC.
Man beweise, daß die Summe σ der Inkreisradien ϱ, ϱ_1 und ϱ_2 gleich der Höhe h_c ist!

1. Lösung (Dr. Gerhard Hesse):

Es ist (Abb. 57)

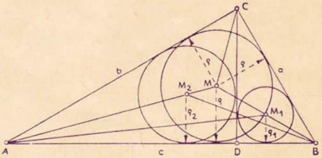


Abb. 57

$\sphericalangle CAD = \sphericalangle BCD$ (Schenkel stehen paarweise senkrecht aufeinander),

$\sphericalangle ACD = \sphericalangle CBD$ (desgl.),

$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADC = \sphericalangle BDC$ (rechte Winkel);

d. h., die Dreiecke ABC, ACD und BCD haben gleiche Winkel und sind damit einander ähnlich. In ähnlichen Dreiecken sind die Verhältnisse gleichliegender Stücke einander gleich. Also gilt

$$\varrho : c = \varrho_1 : b = \varrho_2 : a.$$

Daraus folgt

$$\varrho_1 = \frac{\varrho b}{c} \quad \text{und} \quad \varrho_2 = \frac{\varrho a}{c}$$

und demnach

$$\sigma = \varrho + \varrho_1 + \varrho_2 = \varrho\left(1 + \frac{b}{c} + \frac{a}{c}\right) = \varrho\left(\frac{a+b+c}{c}\right)$$

oder

$$\sigma c = \varrho(a + b + c), \quad \frac{\sigma c}{2} = \frac{\varrho(a + b + c)}{2}.$$

Es ist aber

$$\frac{\varrho(a + b + c)}{2} = F = \frac{h_c c}{2},$$

also auch $\quad \frac{\sigma c}{2} = \frac{h_c c}{2},$

und damit ergibt sich $\sigma = h_c$.

2. Lösung (Erich Schiffner):

Wendet man die bekannte Dreiecksformel

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s - c} = \frac{2\varrho}{a + b + c} \quad \text{mit} \quad s = \frac{a + b + c}{2}$$

auf ein rechtwinkliges Dreieck an ($\gamma = 90^\circ$), so ergibt sich wegen $\tan 45^\circ = 1$ der Satz:
Der Inkreisdurchmesser eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der beiden Katheten vermindert um die Hypotenuse. Daraus folgen für die rechtwinkligen Dreiecke ABC, CAD und BCD die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2\varrho &= a + b - c, \\ 2\varrho_1 &= q + h_c - b, \\ 2\varrho_2 &= p + h_c - a. \end{aligned}$$

Durch Addition dieser Gleichungen ergibt sich wegen $p + q = c$

$$\begin{aligned} 2(\varrho + \varrho_1 + \varrho_2) &= 2h_c, \\ \varrho + \varrho_1 + \varrho_2 &= h_c. \end{aligned}$$

3. Lösung (Hans-Günter Schütze):

Für den Beweis werden nur Sätze der elementaren Planimetrie benutzt.

1. Grundlagen (Abb. 58):

Kathetensatz: $\quad a^2 = pc, \; p = \frac{a^2}{c^2} \qquad (1)$

$$b^2 = qc, \; q = \frac{b^2}{c} \qquad (2)$$

Flächenformeln: $\quad F = \frac{ab}{2} = \frac{hc}{2} \qquad (3)$

$$F = \frac{\varrho}{2}(a + b + c) \qquad (4)$$

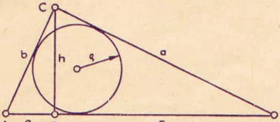


Abb. 58

2. Folgerungen:

Aus (3) folgt $\quad h = \frac{ab}{c}, \qquad (5)$

aus (3) und (4) folgt $\quad hc = \varrho(a + b + c)$

oder für das Dreieck ABC $\quad \varrho = \frac{hc}{a + b + c}, \qquad (6)$

für das Dreieck ADC $\quad \varrho_1 = \frac{hq}{b + q + h} \qquad (7)$

und für das Dreieck CBD $\quad \varrho_2 = \frac{hp}{a + p + h}. \qquad (8)$

3. Beweis:

Es ist nach (6), (7) und (8)

$$\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 = \frac{hc}{a + b + c} + \frac{hq}{b + q + h} + \frac{hp}{a + p + h}.$$

Substituiert man nach (1), (2) und (5), so folgt nach entsprechender Rechnung

$$\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 = h.$$

4. Lösung (Hansjoachim Müller):

Die Behauptung ist bewiesen, wenn bewiesen ist (vgl. Abb. 59), daß

$$F_{\triangle ABC} = F_{\triangle ABM} + F_{\triangle ABM_1} + F_{\triangle ABM_2} \qquad (1)$$

ist. Diese Gleichung ist nämlich wegen

$$F_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ch_c, \; F_{\triangle ABM} = \frac{1}{2}c\varrho, \; F_{\triangle ABM_1} = \frac{1}{2}c\varrho_1$$

und $F_{\triangle ABM_2} = \frac{1}{2}c\varrho_2$ gleichbedeutend mit der Gleichung

$$\frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}c\varrho + \frac{1}{2}c\varrho_1 + \frac{1}{2}c\varrho_2,$$

und aus ihr ergibt sich nach Division durch $\frac{1}{2}c$ die Behauptung

$$h_c = \varrho + \varrho_1 + \varrho_2. \qquad (2)$$

Beweis der Gleichung (1):
Es gilt offensichtlich die Gleichung

$$F_{\triangle ABC} = F_{\triangle ABM} + F_{\triangle BCM} + F_{\triangle CAM}.$$

Wird nachgewiesen, daß

$$F_{\triangle ABM_1} = F_{\triangle BCM} \qquad (3)$$

und

$$F_{\triangle ABM_2} = F_{\triangle CAM} \qquad (4)$$

ist, so ist die Behauptung bewiesen.

Zu (3): Da $\triangle ABC \sim \triangle BCD$ ist, gilt $\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{c}{a}$ oder $\varrho = \frac{\varrho_1 c}{a}$.

Setzt man dies in die Gleichung $F_{\triangle BCM} = \frac{1}{2}a\varrho$ ein, so ergibt sich $F_{\triangle BCM} = \frac{1}{2}c\varrho_1 = F_{\triangle ABM_1}$.

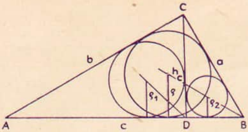


Abb. 59

Damit ist (3) bewiesen.

Zu (4): Wegen $\triangle ABC \sim \triangle ADC$ gilt $\frac{\varrho}{\varrho_2} = \frac{c}{h}$ oder $\varrho = \frac{\varrho_2 c}{b}$. Damit ergibt sich

$$F_{\triangle CAM} = \frac{1}{2} b\varrho = \frac{1}{2} c\varrho_3 = F_{\triangle ABM_3}.$$

5. Lösung (Hubertus-Günter Endtricht):

Da das Dreieck CRM (Abb. 60) rechtwinklig-gleichschenklig ist, gilt

$$\varrho = s - c \text{ mit } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Beweis: Es ist $AS = AT$, $BT = BR$, $CR = CS = \varrho$.
Ferner ist $CR + BR = a$, $AS + CS = b$, $AT + BT = c$, also $CR + BR + AS + CS + AT + BT = a + b + c$.

Daraus folgt

$$CR + BR + AS + CS = a + b,$$
$$CR + CS = a + b - (BR + AS),$$
$$2\,CR = a + b - (BT + AT),$$
$$2\varrho = a + b - c,$$
$$\varrho = \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c}{2} - c.$$

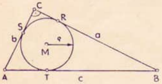


Abb. 60

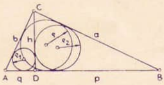


Abb. 61

Also gilt im rechtwinkligen Dreieck ABC (Abb. 61)

$$\varrho = \frac{a+b-c}{2},$$

im rechtwinkligen Dreieck ADC

$$\varrho_1 = \frac{h+q-b}{2}$$

und im rechtwinkligen Dreieck BDC

$$\varrho_2 = \frac{h+p-a}{2}.$$

Addiert man ϱ, ϱ_1 und ϱ_2, so ergibt sich

$$\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 =$$
$$\sigma = \frac{1}{2}(a + b - c + h + q - b + h + p - a)$$
$$= \frac{1}{2}(2h - c + p + q) = h.$$

Aufgabe 37 ULRICH RICHTER, Löbau

Es sei $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Beweisen Sie, daß dann auch gilt

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}\,! \text{ (Voraussetzung: } a, b, c, d > 0).$$

1. Lösung (Ulrich Richter):

Die Ungleichung $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ist gleichbedeutend mit der Ungleichung $ad < bc$. Addiert man auf beiden Seiten dieser Ungleichung die Größe ab, so folgt $ab + ad < ab + bc$. Damit gilt auch $a(b + d) < b(a + c)$. Dividiert man beide Seiten durch b und durch $(b + d)$, so ergibt sich $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$ und der erste Teil der Behauptung ist bewiesen. Addiert man auf beiden Seiten der Ungleichung $ad < bc$ dagegen die Größe cd, so folgt

$$ad + cd < bc + cd \quad \text{oder} \quad (a + c)d < (b + d)c.$$

Daraus ergibt sich durch Division mit $(b + d)$ und d die Ungleichung $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$, und der zweite Teil der Behauptung ist bewiesen.

2. Lösung (Jürgen Rößler):

Aus $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

und $a + c = b \cdot \frac{a}{b} + d \cdot \frac{c}{d}$

folgt $b \cdot \frac{a}{b} + d \cdot \frac{a}{b} < b \cdot \frac{a}{b} + d \cdot \frac{c}{d} < b \cdot \frac{c}{d} + d \cdot \frac{c}{d}$,

also $\frac{a}{b} \cdot (b + d) < a + c < \frac{c}{d} \cdot (b + d)$.

Dividiert man diese Ungleichungskette durch $(b + d) > 0$, so ergibt sich

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d},$$

was zu beweisen war.

3. Lösung (Carl-Heinz Damm):

Voraussetzung: $a, b, c, d > 0$ und $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ bzw. $ad < bc$.

Folgerung

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{ab+bc}{b(b+d)} = \frac{ab+ad+bc-ad}{b(b+d)}$$
$$= \frac{ab+ad}{b(b+d)} + \frac{bc-ad}{b(b+d)} = \frac{a}{b} + \frac{bc-ad}{b(b+d)} > \frac{a}{b}$$

(wegen $ad < bc$) und

$$\frac{c+a}{d+b} = \frac{cd+ad}{d(d+b)} = \frac{cd+cb+ad-cb}{d(d+b)}$$

$$= \frac{cd+cb}{d(d+b)} + \frac{ad-bc}{d(d+b)} = \frac{c}{d} + \frac{ad-bc}{d(d+b)} > \frac{c}{d}$$

(wegen $ad < bc$). Also gilt

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

4. Lösung (D. Opitz):

Angenommen, es sei $\frac{a}{b} \geqq \frac{a+c}{b+d} \geqq \frac{c}{d}$, so folgt

$$ab + ad \geqq ab + bc \quad \text{bzw.} \quad ad + cd \geqq bc + cd$$

und damit

$$ad \geqq bc \qquad \text{bzw.} \qquad ad \geqq bc,$$

$$\frac{a}{b} \geqq \frac{c}{d} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{a}{b} \geqq \frac{c}{d}$$

Im Widerspruch zur Voraussetzung $\frac{a}{b} \leqq \frac{c}{d}$. Somit gilt die behauptete Ungleichung.

5. Lösung (Wolfgang Lehmann):

Aus $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ folgt $\frac{c}{d} = \frac{a}{b} + x$ mit $x > 0$, also

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b} + x = \frac{a+bx}{b} = \frac{y(a+bx)}{yb}$$

mit $y = \frac{d}{b}$ oder $d = yb$. Demnach ist

$$\frac{a+b}{b+d} = \frac{a+ay+bxy}{b+by} = \frac{a(1+y)}{b(1+y)} + \frac{bxy}{b(1+y)}$$

$$= \frac{a}{b} + \frac{xy}{(1+y)} > \frac{a}{b},$$

wegen $x > 0$ und $y = \frac{d}{b} > 0$.

Ferner folgt aus $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, daß

$$\frac{a}{b} = \frac{c-vd}{d} = \frac{w(c-vd)}{wd}$$

mit $v > 0$, $w = \frac{b}{d}$ oder $b = wd$. Demnach ist

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{cw-dvw+c}{wd+d} = \frac{c}{d} - \frac{vw}{1+w} < \frac{c}{d},$$

wegen $v; w > 0$. Also gilt

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

6. Lösung (Alois Liem):

Voraussetzung: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $a; b; c; d > 0$, also auch $ad < bc$.

Behauptung: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Indirekter Beweis:

1. Annahme, es sei $\frac{a+c}{b+d} \geqq \frac{c}{d}$. Dann folgt

$$ad + cd \geqq bc + cd.$$

Ersetzt man bc durch das (nach Voraussetzung) echt kleinere ad, so kann die Ungleichung nur verschärft werden. Es folgt

$$ad + cd > ad + cd.$$

Diese Ungleichung ist aber falsch, denn es handelt sich um eine Gleichheit. Also führt die Annahme zu einer falschen Folgerung, d. h., die Annahme ist falsch. Demnach gilt

$$\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

2. Annahme, es sei $\frac{a}{b} \geqq \frac{a+c}{b+d}$. Man folgert in gleicher Weise:

$$ab + ad \geqq ab + bc.$$

Man ersetzt bc durch das (nach Voraussetzung) echt kleinere ad:

$$ab + ad > ab + ad$$

und erhält damit den Widerspruch wie oben. Also gilt

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}.$$

Damit gilt aber auch

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

7. Lösung (Jürgen Pilling):

Es ist nach Voraussetzung $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$. Daraus folgt

$$cb > da, \qquad ad < bc,$$

$$\frac{c}{a} > \frac{d}{b}, \qquad \frac{a}{c} < \frac{b}{d},$$

$$1 + \frac{c}{a} > 1 + \frac{d}{b}, \qquad \frac{a}{c} + 1 < \frac{b}{d} + 1,$$

$$\frac{1+\frac{c}{a}}{1+\frac{d}{b}} > 1, \qquad \frac{\frac{a}{c}+1}{\frac{b}{d}+1} < 1,$$

$$\frac{a\left(1+\frac{c}{a}\right)}{b\left(1+\frac{d}{b}\right)} > \frac{a}{b}, \qquad \frac{c\left(\frac{a}{c}+1\right)}{d\left(\frac{b}{d}+1\right)} < 1,$$

$$\frac{a+c}{b+d} > \frac{a}{b}, \qquad \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Demnach gilt auch

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

8. Lösung (Hans-Jürgen Weiß):

Vorausgesetzt wird $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $a, b, c, d > 0$. Wir setzen

$$d = kb \text{ mit } k = \frac{d}{b} > 0$$

und

$$c = ka + p \text{ mit } p = c - \frac{ad}{b} > 0.$$

Dann gilt

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a+ka+p}{b+kb} = \frac{a+ka}{b+kb} + \frac{p}{b+kb}$$

$$= \frac{a(1+k)}{b(1+k)} + \frac{p}{b(1+k)} = \frac{a}{b} + \frac{p}{b(1+k)} > \frac{a}{b}.$$

Ferner folgt aus $c = ka + p$, daß $a = \frac{c-p}{k}$ ist, und aus $d = kb$ ergibt sich $b = \frac{d}{k}$. Damit ist

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{\frac{c-p}{k}+c}{\frac{d}{k}+d} = \frac{c-p+kc}{d+kd}$$

$$= \frac{c+kc}{d+kd} - \frac{p}{d+kd} = \frac{c(1+k)}{d(1+k)} - \frac{p}{d(1+k)}$$

$$= \frac{c}{d} - \frac{p}{d(1+k)} < \frac{c}{d}.$$

Zusammengefaßt ist

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Aufgabe 38 GERHARD CASPAR, Potsdam

Es sei K_1 ein Halbkreis mit dem Radius r_1, K_2 ein Kreis mit dem Radius $r_2 = 0{,}5\, r_1$, der den Durchmesser und die Peripherie von K_1 berührt, und K_3 ein Kreis mit dem Radius r_3, der sowohl den Durchmesser und die Peripherie von K_1 als auch die Peripherie von K_2 berührt. Es ist zu beweisen, daß unter diesen Voraussetzungen für r_3 gilt $4r_3 = r_1$!

Lösung (Gerhard Caspar):

Analysis (vgl. Abb. 62):

Wenn K_3 die Peripherie von K_1 im Punkt B berührt, ist die Tangente t in B an K_1 gleichzeitig auch Tangente in B an

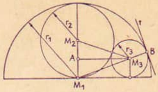


Abb. 62

K_3. Folglich bilden die Berührungsradien von K_1 und K_3 eine Gerade, und da M_1 und M_3 auf derselben Seite der Peripherie von K_1 liegen, fällt M_3 auf M_1B. Es ist aber $M_1B = r_1 = 2r_2 = M_1M_3 + r_3$, also $M_1M_3 = 2r_2 - r_3$. Ferner kann M_1M_3 nach dem Lehrsatz des Pythagoras aus $M_1A = r_3$ und AM_3 berechnet werden; AM_3 ist nach demselben Satz aus $AM_2 = r_2 - r_3$ und $M_2M_3 = r_2 + r_3$ darstellbar. Mithin kann eine Gleichung mit r_3 als einziger Unbekannter aufgestellt werden.

Beweis:

$$M_1M_3^2 = (2r_2 - r_3)^2$$
$$= 4r_2^2 - 4r_2r_3 + r_3^2$$

und

$$M_1M_3^2 = r_3^2 + (r_2 + r_3)^2 - (r_2 - r_3)^2$$
$$= r_3^2 + 4r_2r_3,$$

also

$$r_3^2 + 4r_2r_3 = 4r_2^2 - 4r_2r_3 + r_3^2,$$
$$8r_2r_3 = 4r_2^2,$$
$$2r_3 = r_2.$$

Wegen $\quad 2r_2 = r_1$

folgt $\quad 4r_3 = r_1.$

Aufgabe 39 VIKTOR ZIEGLER, Leipzig

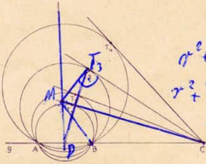
Gegeben ist eine Gerade g und auf ihr zwei Punkte A und B. Man beweise: Die Länge CT einer Tangente von einem auf g liegenden Punkt C an einen durch A und B gehenden Kreis (T ist der Berührungspunkt) ist nur von der Lage von C, nicht aber vom Radius r des Kreises abhängig.

Lösung (Viktor Ziegler):

Nach dem Sehnentangentensatz ist das Produkt der Streckenlängen $\overline{CA} \cdot \overline{CB}$ gleich dem Quadrat $\overline{CT}^2$ des Tangentenabschnitts (Abb. 63). Es gilt also für jeden durch A und B gehenden Kreis

$$\overline{CT}^2 = \overline{CA} \cdot \overline{CB} \quad \text{oder} \quad CT = \left|\sqrt{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}\right|.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen; denn in dieser Gleichung tritt der Radius r nicht auf, sondern nur zwei Strecken, deren Länge von der Lage des Endpunktes C abhängt.



$r^2 + \overline{T_3C}^2 = \overline{MD}^2 + \overline{D}$

$r^2 + \overline{T_3C}^2 = r^2 - \overline{DB}^2$

$\overline{T_3C}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{}$

Abb. 63

Aufgabe 40 ERICH SCHIFFNER, Roßleben

Warum kann eine Quadratzahl oberhalb von 9 niemals aus lauter ungeraden Ziffern bestehen?

1. Lösung (Erich Schiffner):

Es sei $n = 10a + b$, wobei a eine natürliche Zahl mit beliebig vielen Stellen und b eine einstellige natürliche Zahl sei. Dann gilt

$$n^2 = (10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2.$$

Ist nun b gerade, so ist auch b^2 gerade und mithin auch die Schlußziffer von n^2. Ist aber b ungerade, so sind die Fälle $b = 1$; $b = 3$; $b = 5$; $b = 7$; $b = 9$ möglich. In diesen Fällen ergibt sich

$$n^2 = 100a^2 + 20a + 1,$$
$$n^2 = 100a^2 + 60a + 9,$$
$$n^2 = 100a^2 + 100a + 25,$$
$$n^2 = 100a^2 + 140a + 49,$$
$$n^2 = 100a^2 + 180a + 81.$$

Man sieht, daß in diesen Fällen die Zehnerziffer gerade ist. Also enthält jede Quadratzahl oberhalb von 9 mindestens eine gerade Ziffer.

2. Lösung (Hubertus-Günter Endtricht):

a) Das Quadrat einer geraden Zahl ist stets gerade; in diesem Fall ist die Behauptung also trivialerweise richtig.

b) Jede ungerade Zahl n mit $n \geqq 5$ kann man in genau einer der drei Formen

$$n = 10a - 5, \quad n = 10a \pm 3, \quad n = 10a \pm 1$$

mit $a = 1; 2; 3; \ldots$ schreiben. Damit ergibt sich das Quadrat n^2 von n zu

$$n^2 = (10a - 5)^2 = 100a^2 - 100a + 25,$$
$$n^2 = (10a \pm 3)^2 = 100a^2 \pm 60a + 9,$$
$$n^2 = (10a \pm 1)^2 = 100a^2 \pm 20a + 1.$$

In jedem dieser drei Fälle ist mindestens die Zehnerziffer gerade.

3. Lösung (Gerhard Franz):

MD = r² − DB²

Zunächst zwei einfache Überlegungen:

a) Wenn es eine Quadratzahl gibt, die nur aus ungeraden Ziffern besteht, so ist sie das Quadrat einer ungeraden Zahl; denn das Quadrat einer geraden Zahl ist gerade und hat demzufolge mindestens in der letzten Stelle eine gerade Ziffer.

b) Eine Quadratzahl kann in der letzten Stelle nicht die Ziffern 3 oder 7 haben, da die Einerstelle einer Quadratzahl ausschließlich von der Einerstelle der Basis bestimmt wird und $1^2 = 1$, $3^2 = 9$, $5^2 = 25$, $7^2 = 49$ und $9^2 = 81$ ist (gerade Einerziffern kommen nach a) nicht in Frage und ergeben zudem ebenfalls nicht 3 oder 7).

Gibt es also eine Quadratzahl, die nur aus ungeraden Ziffern besteht, so muß sie wegen a) die Form

$$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n + 1) + 1$$

haben. Daraus erkennt man, daß eine Quadratzahl mit der geforderten Eigenschaft nur unter solchen Zahlen zu suchen wäre, die bei der Division durch 4 den Rest 1 lassen. Eine bekannte Teilbarkeitsregel besagt nun, daß eine Zahl bei der Division durch 4 denselben Rest läßt wie die aus den letzten beiden Ziffern bestehende Zahl. Damit wird die Menge der zulässigen Zahlen weiter eingeschränkt: Die gesuchte Zahl kann sich nur unter den Zahlen befinden, die am Ende die Ziffern 05, 09, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37 ... 89, 93, 97 haben. Streicht man in dieser Folge nach b alle die Zahlen, die die Einerziffer 3 oder 7 haben, so bleiben nur Zahlen übrig, die mindestens eine gerade Ziffer enthalten.

Natürlich brauchen nicht alle übrigbleibenden Zahlen dieser Folge am Ende einer Quadratzahl tatsächlich aufzutreten.

Damit ist aber gesagt, daß das Quadrat einer ungeraden Zahl mindestens unter den letzten beiden Ziffern eine gerade Ziffer besitzt.

Aufgabe 41 ERICH SCHIFFNER, Roßleben

Zwei Primzahlen, deren Differenz dem absoluten Betrag nach gleich 2 ist, nennt man Primzahlzwillinge.

Man beweise, daß oberhalb von 3 die Summe zweier Primzahlzwillinge stets durch 12 teilbar ist!

1. Lösung (Erich Schiffner):

Jede Primzahl oberhalb von 3 ist entweder in der Form $6n - 1$ oder in der Form $6n + 1$ mit $n = 1; 2; 3; \ldots$ darstellbar. Beweis: Jede natürliche Zahl läßt sich in einer der folgenden Formen darstellen: $6n$; $6n + 1$; $6n + 2$; $6n + 3$; $6n + 4$; $6n + 5$ mit $n = 0; 1; 2; 3; \ldots$ Von diesen Zahlen sind sicherlich die Zahlen $6n$; $6n + 2$ und $6n + 4$ durch 2 und die Zahlen $6n$; $6n + 3$ durch 3 teilbar und mithin keine Primzahlen. Wenn also eine natürliche Zahl oberhalb 3 eine Primzahl ist, so ist sie entweder in der Form $6n + 1$ oder in der Form $6n + 5$ darstellbar. Für $6n + 5$ kann man aber auch schreiben $6\bar{n} - 1$ mit $\bar{n} = n + 1$.

Daraus folgt: Primzahlzwillinge p_1 und p_2 haben stets die Form

$$p_1 = 6n - 1 \qquad \text{und} \qquad p_2 = 6n + 1$$

mit gleichem n. Beweis: Angenommen, es sei $p_1 = 6n \mp 1$ und $p_2 = 6m \pm 1$ mit $n \neq m$, so gälte

$$|p_1 - p_2| = |(6n \mp 1) - (6m \pm 1)| \neq 2.$$

Damit ist aber

$$p_1 + p_2 = (6n - 1) + (6n + 1) = 12n,$$

d. h., die Summe zweier Primzahlzwillinge oberhalb 3 ist durch 12 teilbar.

2. Lösung (Walter Kühne):

a) Primzahlzwillinge sind nach Voraussetzung zwei aufeinanderfolgende ungerade Zahlen und demzufolge durch $2n - 1$ und $2n + 1$ mit $n + 1; 2; 3; \ldots$ darstellbar. Dazwischen liegt die gerade Zahl $2n$.

b) Die Summe von Primzahlzwillingen ist

$$(2n - 1) + (2n + 1) = 4n.$$

Sie ist also durch 4 teilbar.

c) Von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets genau eine durch 3 teilbar. Oberhalb von 3, d. h. für $n > 3$, muß dies wegen der Primzahleigenschaft von $2n-1$ und $2n+1$ die Zahl $2n$ sein. Damit ist aber auch die Summe $4n$ der Primzahlzwillinge durch 3 teilbar.

d) Zahlen, die sowohl durch 3 als auch durch 4 teilbar sind, sind auch durch das Produkt $3 \cdot 4 = 12$ teilbar.

Damit ist bewiesen, daß die Summe von Primzahlzwillingen oberhalb von 3 stets durch 12 teilbar ist.

Aufgabe 42 JOHANNES RIEDEL, Berlin

Welchen Rest läßt die Zahl 2^n beim Teilen durch 3?

1. Lösung (Johannes Riedel):

Die Zahl 2^n ist nicht durch 3 teilbar, da sie nur den Primfaktor 2 enthält. Also kann $2n$ beim Teilen durch 3 nicht den Rest Null lassen. Es kommen nur die Reste 1 und 2 in Frage.

Für $n = 0$ ist $2^n : 3 = 2^0 : 3 = 1 : 3 = 0$ Rest 1;
für $n = 1$ ist $2^n : 3 = 2^1 : 3 = 2 : 3 = 0$ Rest 2;
für $n = 2$ ist $2^n : 3 = 2^2 : 3 = 4 : 3 = 1$ Rest 1;
für $n = 3$ ist $2^n : 3 = 2^3 : 3 = 8 : 3 = 2$ Rest 2;
für $n = 4$ ist $2^n : 3 = 2^4 : 3 = 16 : 3 = 5$ Rest 1.

Es taucht die Vermutung auf, daß 2^n beim Teilen durch 3 den Rest 1 läßt, wenn n gerade, und den Rest 2 läßt, wenn n ungerade ist. Zumindest gilt dies für $n = 0$ bis $n = 4$. Um einen allgemeinen Beweis zu führen, schließen wir folgendermaßen:
Wenn 2^n beim Teilen durch 3 den Rest 1 läßt, so kann man schreiben $2^n = 3k + 1$. Dann gilt für 2^{n+1}:

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 = (3k+1) \cdot 2 = 6k + 2.$$

Man sieht, daß dann 2^{n+1} beim Teilen durch 3 den Rest 2 läßt. Läßt dagegen 2^n beim Teilen durch 3 den Rest 2, so kann man schreiben $2^n = 3k + 2$. Dann gilt entsprechend für 2^{n+1}:

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 = (3k+2) \cdot 2 = 6k + 4 = 6k + 3 + 1.$$

Man sieht, daß in diesem Fall 2^{n+1} beim Teilen durch 3 den Rest 1 läßt. Damit ist bewiesen, daß sich beim Teilen der Zahl 2^n durch 3 die Reste 1 und 2 regelmäßig abwechseln, wenn n die Folge 0; 1; 2; 3; 4; ... durchläuft. Es gilt also für jedes n:
Die Zahl 2^n läßt beim Teilen durch 3 den Rest 1, wenn n gerade, und den Rest 2, wenn n ungerade ist.
Mit Hilfe von Sätzen der Zahlentheorie bzw. der Gruppentheorie läßt sich diese Behauptung nach eleganter beweisen.

2. Lösung (Harald Fritzsch):

Es ist

$$2^n = (3-1)^n.$$

Entwickelt man die rechte Seite dieser Gleichung nach dem binomischen Lehrsatz, so ergibt sich

$$2^n = 3^n + \binom{n}{1} 3^{n-1}(-1) + \binom{n}{2} 3^{n-2}(-1)^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} 3(-1)^{n-1} + (-1)^n.$$

Man erkennt, daß alle Glieder der rechten Seite bis auf das letzte den Faktor 3 enthalten, also durch 3 teilbar sind. Das letzte Glied $(-1)^n$ gibt also unmittelbar den Rest an: Die Potenz 2^n läßt beim Teilen durch 3 den Rest $(-1)^n$; ist n gerade, so ist der Rest $+1$, ist n ungerade, so ist der Rest -1. Der Rest -1 ist aber für den Teiler 3 gleichbedeutend mit dem Rest $+2$. Damit ergibt sich:
Die Potenz 2^n läßt beim Teilen durch 3 den Rest $+1$, wenn n gerade, und den Rest $+2$, wenn n ungerade ist.

Aufgabe 43 ERNST HENNIG, Dahme

Bei zentrisch-zylindrischer Durchbohrung einer Kugel verbleibt ein ringförmiger Restkörper R. Es soll nachgewiesen werden, daß der Rauminhalt V_R dieses Restkörpers gleich dem Rauminhalt V_k einer Kugel mit dem Durchmesser l ist, wenn l die Länge der zylindrischen Bohrung ist (Abb. 64).

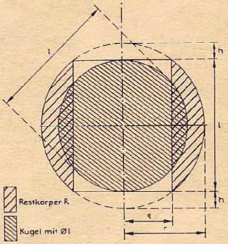


Abb. 64

1. Lösung (Ernst Hennig):

Es sei r der Radius der durchbohrten Kugel, ϱ der Radius und l die Länge der zylindrischen Bohrung, ferner sei h die Höhe der Kugelkappen, die durch die Bohrung erfaßt werden.

Lösungsweg 1: Vom Volumen $V_K = \frac{4\,r^3\pi}{3}$ der Kugel sind abzuziehen a) das Volumen $V_Z = \varrho^2 l \pi$ des Zylinders und b) zweimal das Volumen $V_a = \frac{h^2(3r-h)\pi}{3}$ des Kugelabschnitts (Abb. 65). Es gilt also

$$\begin{aligned} V_R &= V_K - V_Z - 2V_a \\ &= \frac{4}{3} r^3\pi - \varrho^2 l\pi - 2\frac{h^2(3r-h)}{3}\pi \\ &= \frac{\pi}{6}[8r^3 - 6\varrho^2 l - 4h^2(3r-h)]. \end{aligned}$$

Nun ist aber nach dem Lehrsatz des Pythagoras $\varrho^2 = r^2 - \frac{l^2}{4}$, ferner ist $2h = 2r - l$, also $h = \frac{2r-l}{2}$, $h^2 = r^2 - rl + \frac{l^2}{4}$. Damit ergibt sich

$$V_R = \frac{\pi}{6}\left[8r^3 - 6\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right) l - (4r^2 - 4rl + l^2)\,\frac{4r+l}{2}\right]$$

$$= \frac{\pi}{6}\, l^3.$$

Es ist aber $\frac{\pi}{6}\, l^3 = V_k$, was zu beweisen war.

Lösungsweg 2: Man geht von dem Gedanken aus, daß der Restkörper R zusammen mit dem ausgebohrten Zylinder eine Kugelschicht bildet. Für das Volumen V_S einer Kugelschicht gilt

$$V_S = \frac{\pi}{6}\,(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + l^2)\,l,$$

wobei l die Höhe, ϱ_1 und ϱ_2 die Radien von Grund- und Deckkreis sind. Damit ergibt sich V_R zu

$$V_R = V_S - V_Z.$$

Da in unserem Fall $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$ ist, folgt

$$V_S = \frac{\pi}{6}\,(6\varrho^2 + l^2)\,l = \pi\varrho^2 l + \frac{\pi}{6}\, l^3,$$

also

$$V_R = \pi\varrho^2 l + \frac{\pi}{6}\, l^3 - \pi\varrho^2 l = \frac{\pi}{6}\, l^3 = V_k.$$

Lösungsweg 3: Man benutzt die Integralrechnung. Legt man die Schnittfigur so in ein rechtwinklig-cartesisches Koordinatensystem, daß die Achse des Zylinders mit der Abszissenachse und der Mittelpunkt der Kugel mit dem Nullpunkt zusammenfallen (Abb. 66), so ergeben sich folgende Gleichungen:

Der erzeugende Kreis der großen Kugel hat die Gleichung

$$y_1 = \sqrt{r^2 - x^2}\,;$$

die erzeugende Mantellinie des Zylinders hat die Gleichung

$$y_2 = \sqrt{r - \frac{l^2}{4}} = \varrho\,;$$

der erzeugende Kreis der kleinen Kugel hat die Gleichung

$$y_3 = \sqrt{\frac{l^2}{4} - x^2}\,.$$

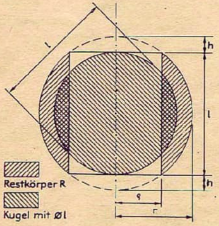


Abb. 65

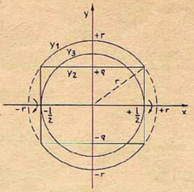


Abb. 66

Für das Volumen V eines Rotationskörpers gilt, wenn $y = f(x)$ die Gleichung der erzeugenden Kurve ist,

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx.$$

Für den Restkörper R gilt also

$$V_R = \pi \int_{-l/2}^{+l/2} (r^2 - x^2)\,dx - \pi \int_{-l/2}^{+l/2} \left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right) dx$$

$$= \pi \int_{-l/2}^{+l/2} \left[(r^2 - x^2) - \left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)\right] dx$$

$$= \pi \int_{-l/2}^{+l/2} \left(\frac{l^2}{4} - x^2\right) dx.$$

Das letzte Integral stellt aber gerade V_k dar:

$$V_k = \pi \int_{-l/2}^{+l/2} y_3^2\,dx = \pi \int_{-l/2}^{+l/2} \left(\frac{l^2}{4} - x^2\right) dx = V_R.$$

Es ist nicht notwendig, das Integral numerisch auszuwerten, da sowohl die Integranden als auch die Integrationsgrenzen von V_k und V_R übereinstimmen. Die numerische Auswertung liefert jedoch die Bestätigung für die Richtigkeit der Rechnungen.

2. Lösung (Reinhard Neumann):

Das Prinzip von CAVALIERI besagt: „Alle Körper von gleicher Grundfläche und Höhe, bei denen Parallelschnitte im Abstand ε von der Grundfläche gleichen Flächeninhalt haben, haben gleiches Volumen."

I. Restkörper: Der Schnitt ist ein Kreisring (Abb. 67).

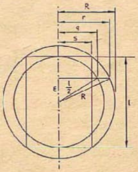


Abb. 67

$F_R = \pi(r^2 - s^2) = \pi(R^2 - \varepsilon^2 - s^2)$ wegen $r^2 = R^2 - \varepsilon^2$

II. Kleine Kugel: Der Schnitt ist ein Kreis.

$$F_K = \pi\varrho^2 = \pi\left(\frac{l^2}{4} - \varepsilon^2\right) = \pi(R^2 - s^2 - \varepsilon^2)$$

wegen $\frac{l^2}{4} = R^2 - s^2$

Also ist $F_R = F_K$ für jedes ε, und damit gilt nach dem Cavalierischen Prinzip

$$V_R = V_K,$$

das Volumen des Restkörpers ist gleich dem Volumen der kleinen Kugel mit dem Durchmesser der zylindrischen Bohrung.

VIII. VERSCHIEDENES

Aufgabe 44 JOHANNES RIEDEL, Berlin

Es ist $a^2 \geqq 0$.

Beweis: Ist $a = 0$, so ist auch $a^2 = 0$, und die Behauptung richtig. Ist $a \neq 0$, so ist a^2 das Produkt zweier Zahlen mit gleichen Vorzeichen, also positiv, und die Behauptung ist ebenfalls richtig.

Dann ist auch $a^2 - 2a + 1 \geqq -2a + 1$.

Beweis: Es wurde auf beiden Seiten der Ungleichung Gleiches subtrahiert beziehungsweise addiert.

Durch Radizieren erhält man

$$a - 1 \geqq \pm\sqrt{-2a + 1}.$$

Setzt man nunmehr $a = \frac{1}{2}$, so ergibt sich

$$\frac{1}{2} - 1 \geqq \pm\sqrt{-1 + 1},$$

$$-\frac{1}{2} \geqq 0.$$

Das bedeutet, daß eine negative Zahl größer als oder gleich Null sein soll. Wo steckt der Fehler?

Lösung (Johannes Riedel):

Sicherlich wird mancher Leser zur Probe für a den Wert $\frac{1}{2}$ gleich in die erste Ungleichung eingesetzt und folgendermaßen gerechnet haben:

$$a = \frac{1}{2}, \qquad a^2 = \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{4} \geqq 0.$$

Nun ist aber bekanntlich die Quadratwurzel doppeldeutig:

$$x = \pm\sqrt{x^2}.$$

Beim Ausziehen der Quadratwurzel auf beiden Seiten der Ungleichung hätte man also schreiben müssen:

$$\pm(a - 1) \quad \text{und} \quad \pm\sqrt{-2a + 1}$$

(absichtlich wurde hier das Zeichen $\geqq$ nicht gesetzt, da, wie sich anschließend zeigt, sonst ein weiterer Fehler entsteht). Auf der rechten Seite der Ungleichung war die Doppeldeutigkeit zwar berücksichtigt, dort wirkt sie sich aber nicht aus, da sich für $a = \frac{1}{2}$ der Wert ± 0 ergibt. Die linke Seite dagegen liefert für $a = \frac{1}{2}$ gerade den negativen Wurzelwert, wenn die Doppeldeutigkeit nicht berücksichtigt wird.

Das Entscheidende ist nun, daß aus

$$x^2 \geqq y \text{ nicht etwa folgt } \pm x \geqq \pm\sqrt{y}.$$

Das kann man sofort an Beispielen nachweisen: Aus

$$4 \geqq 1 \text{ folgt nicht } +2 \geqq +1.$$

Zwar ist die Beziehung $+2 \geqq +1$ richtig,

aber die Beziehung $-2 \geqq -1$ ist falsch;

es gilt vielmehr $-2 \leqq -1$.

Weitere Beispiele kann der Leser selbst bilden.

Als Schlußfolgerung ergibt sich, daß man bei Ungleichungen Vorsicht walten lassen muß: Ungleichungen sind keine Gleichungen, und für sie gilt deshalb auch nicht das Grundgesetz der Gleichungslehre, das man wie folgt formulieren kann:

„Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung mit gleichen Zahlen gleiche Rechenoperationen ausführt."

Aufgabe 45 JOHANNES RIEDEL, Berlin

Beweis für die Behauptung, daß weniger mehr ist:

Es ist

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n > \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Durch Logarithmieren ergibt sich daraus

$$\lg\left(\frac{1}{2}\right)^n > \lg\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Nach einem Logarithmengesetz ist $\lg a^m = m \cdot \lg a$; also folgt

$$n \cdot \lg\frac{1}{2} > (n + 1) \cdot \lg\frac{1}{2}.$$

Dividiert man beide Seiten der Ungleichung durch $\lg\frac{1}{2}$, so erhält man

$$n > n + 1.$$

Wo steckt der Fehler?

Lösung (Johannes Riedel):

Der Fehler ist im letzten Schritt enthalten, in der Division durch $\lg\frac{1}{2}$. Bekanntlich ist der Logarithmus einer Zahl, die kleiner ist als 1, eine negative Zahl. Man kann jedoch Ungleichungen nicht wie Gleichungen behandeln, sondern vor allem beim Rechnen mit negativen Zahlen ist bei Ungleichungen Vorsicht am Platz. Multipliziert oder dividiert man beide Seiten einer Ungleichung mit einer negativen Zahl, so muß man das Ungleichheitszeichen umkehren. Es folgt dann aus

$$n \cdot \lg \frac{1}{2} > (n+1) \cdot \lg \frac{1}{2}$$

durch die Division richtig

$$n < n + 1 .$$

Aufgabe 46 RÜDIGER THIELE, Halle

Gesucht sind die Ellipse und die Hyperbel mit den folgenden Eigenschaften: 1. Die lineare Exzentrizität ist $e = 20$. 2. Die senkrecht aufeinanderstehenden Brennstrahlen l_1 und l_2 stehen zueinander im Verhältnis $l_1 : l_2 = 4 : 3$.
Es sind a) die Längen der Brennstrahlen l_1 und l_2 zu bestimmen und b) die Gleichungen der Kegelschnitte aufzustellen.

Lösung (Rüdiger Thiele):

a) Es seien P_1 und P_2 die Brennpunkte der beiden Kegelschnitte (wegen der Gleichheit der linearen Exzentrizität fallen bei Übereinstimmung der Achsen auch die Brennpunkte zusammen) und P_s einer der Punkte, in denen die Brennstrahlen senkrecht aufeinanderstehen. Die Punkte P_1, P_2 und P_s bilden ein rechtwinkliges Dreieck, P_s liegt daher auf dem Thaleskreis über P_1P_2. Man erkennt sofort, daß es (bis auf Symmetrie an den Kegelschnittachsen) genau einen Punkt P_s gibt, d. h., Ellipse und Hyperbel schneiden einander in P_s.
Es gelten nun die folgenden Gleichungen:

$$l_1 : l_2 = 4 : 3 \tag{1}$$

und

$$P_1P_2^2 = 4e^2 = l_1^2 + l_2^2. \tag{2}$$

Durch Einsetzen von (1) in (2) folgt

$$4e^2 = \frac{25}{16} l_1 \tag{3a}$$

und

$$4e^2 = \frac{25}{9} l_2 . \tag{3b}$$

Mit $e = 20$ ergibt sich daraus

$$l_1 = 32 \quad \text{und} \quad l_2 = 24.$$

b) Die Ellipsengleichung kann man in der folgenden Form schreiben:

$$x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2. \tag{4}$$

Wir ersetzen b^2 durch die Relation $b^2 = a^2 - e^2$ und erhalten damit

$$x^2(a^2 - e^2) + y^2a^2 = a^2(a^2 - e^2). \tag{4a}$$

Um a zu ermitteln, errechnen wir die Koordinaten von P_s und setzen diese nebst $e = 20$ in (4a) ein.
Durch y_s zerlegen wir das Dreieck $P_1P_2P_s$ in zwei rechtwinklige Teildreiecke. Dann gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$l_1^2 = y_s^2 + (e + x_s)^2 \tag{5a}$$

und

$$l_2^2 = y_s^2 + (e - x_s)^2. \tag{5b}$$

Durch Subtraktion einer dieser beiden Gleichungen von der anderen und Auflösung nach x^2 folgt daraus

$$x_s = +5{,}6$$

und damit

$$y_s = \pm 19{,}2.$$

Setzt man diese Werte in (4a) ein, so ergibt sich nach Auflösung der entstehenden biquadratischen Gleichung

$$a^4 - 800a^2 + 12544 = 0,$$

$$a_1^2 = 784, \text{ also } a_1 = 28,$$

und

$$a_2^2 = 16, \text{ also } a_2 = 4.$$

Aus $b^2 = a^2 - e^2$ folgt weiter $b_1^2 = 384$, also $b_1 \approx 19{,}6$ und $b_2^2 = -384$, also $b_2 \approx 19{,}6\,\mathrm{i}$.
Offenbar scheiden a_2 und b_2 als (im Reellen) unbrauchbar aus, so daß die Gleichung der Ellipse lautet

$$384x^2 + 784y^2 = 301\,056 \tag{6a}$$

oder — in anderer Form —

$$\frac{x^2}{784} + \frac{y^2}{384} = 1. \tag{6b}$$

Analog erhält man aus der Hyperbelgleichung

$$x^2b^2 - y^2a^2 = a^2b^2 \tag{7}$$

mit $b^2 = e^2 - a^2$ die Werte

$$a_1^2 = 784, \text{ also } a_1 = 28, \text{ und } a_2^2 = 16, \text{ also } a_2 = 4$$

sowie $b_1^2 = -384$, also $b_1 \approx 19{,}6\,\mathrm{i}$,

und $b_2^2 = 384$, also $b_2 \approx 19{,}6$.

Man erkennt, daß in diesem Fall die Werte a_1 und b_1 als unbrauchbar ausgeschieden werden müssen. Die Hyperbelgleichung nimmt damit die Form

$384x^2 - 16y^2 - 6\,144$ (8a) bzw. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{384} = 1$ (8b) an.

Aufgabe 47 PAUL KANTHER, Schmalkalden

In eine Welle sollen zwei Längsnuten eingefräst werden (Querschnittzeichnung siehe Abb. 68). Ein Verdrehen der

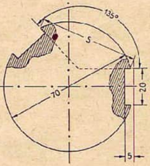


Abb. 68

Welle um 135° ist mit den vorhandenen technischen Mitteln nicht zu erreichen. Daher ist die Einstellung mittels eines Sehnenmaßes erforderlich. Wie groß ist das Sehnenmaß s? Die erforderlichen Maße sind der Abbildung zu entnehmen.

1. Lösung (Paul Kanther):

Bekannt sind (Abb. 69) $\omega = 135°$, $a = 20$ mm, $t = 5$ mm, $d = 70$ mm. Gesucht ist das Seitenmaß s.

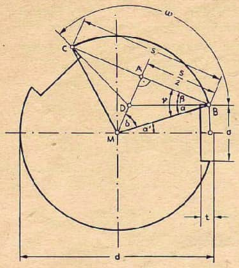


Abb. 69

Im Dreieck ABM gilt $\sin\delta = \frac{s}{2} : \frac{d}{2} = \frac{s}{d}$, folglich ist $s = d \cdot \sin\delta$. Ferner gilt $\delta = 90° - \gamma = 90° - (\alpha + \beta)$. Nun ist $\alpha = \alpha'$ (Winkel an geschnittenen Parallelen), und für $\sin\alpha' = \sin\alpha$ gilt

$$\sin\alpha' = \sin\alpha = \frac{a}{2} : \frac{d}{2} = \frac{a}{d} = \frac{20\text{ mm}}{70\text{ mm}} = 0{,}286,$$

also $\alpha = 16°40'$. Für β folgt aus dem Dreieck ABD: $\beta = 90° - \frac{\omega}{2} = 90° - 67°30' = 22°30'$. Damit ergibt sich für δ der Wert $\delta = 90° - (16°40' + 22°30') = 90° - 39°10' = 50°50'$. Es ist also

$$s = d \cdot \sin\delta = 70 \cdot \sin 50°50' \text{ (mm)}$$
$$= 70 \cdot 0{,}774 \text{ (mm)} = 54{,}2 \text{ (mm)}.$$

2. Lösung (Walter Kühne):

Legt man die Figur so wie in Abb. 70 in das Koordinatensystem, so lauten die Gleichungen für

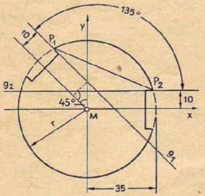


Abb. 70

a) den Kreis $\quad x^2 + y^2 = r^2 = 1225,$

b) die Gerade g_1 $\quad y = mx + b = -x + 10\sqrt{2},$

c) die Gerade g_2 $\quad y = \text{constans} = 10.$

Gesucht ist die Länge der Strecke P_1P_2.

1. Berechnung der Koordinaten von P_1:

$$x^2 + y^2 = 1225,$$
$$y = -x + 10\sqrt{2}$$

liefern durch Einsetzen

$$x_1 = 5\sqrt{2} \pm 7{,}5\sqrt{10},$$
$$y_1 = 5\sqrt{2} \mp 7{,}5\sqrt{10}.$$

Der positive Wert von x_1 und der negative Wert von y_1 kommen nach Abb. 70 nicht in Frage. Damit sind die Koordinaten von P_1:

$$x_1 = 5\sqrt{2} - 7{,}5\sqrt{10} = -16{,}65,$$
$$y_1 = 5\sqrt{2} + 7{,}5\sqrt{10} = +30{,}79.$$

2. Berechnung der Koordinaten von P_2:

$$x_2 + y_2 = 1225,$$
$$y = 10$$

liefern durch Einsetzen

$$x_2 = \pm\sqrt{1125},$$
$$y_2 = 10.$$

Der negative Wert von x_2 kommt nach Abb. 70 nicht in Frage. Damit sind die Koordinaten von P_2:

$$x_2 = +\sqrt{1125} = +33{,}54,$$
$$y_2 = +10.$$

3. Berechnung der Strecke P_1P_2:

$$s = P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(33{,}54 + 16{,}65)^2 + (10 - 30{,}79)^2}$$
$$= \sqrt{2951}$$
$$= 54{,}3.$$

Aufgabe 48 JOHANNES RIEDEL, Berlin

In einer Abteilung eines volkseigenen Betriebes sollen Massenbedarfsartikel hergestellt werden. Eine Vorkalkulation ergibt, daß die Produktion insgesamt $b = 1650{,}00$ DM fixe Kosten im Monat (Pflege, Wartung und Amortisation der Produktionsanlagen, Verwaltungskosten usw.) und $m_1 = 6{,}50$ DM variable Kosten (je gefertigtes Stück, Materialkosten, Arbeitslöhne usw.) verursacht. Der Werkabgabepreis (zuzüglich Produktionsabgabe) beträgt auf Grund preisrechtlicher Bestimmungen $m_2 = 11{,}50$ DM je Stück.

a) Es sind die Gesamtkosten y_1 der Produktion und der Gesamterlös y_2 (unter der Voraussetzung, daß die Produktion restlos abgesetzt wird) in Abhängigkeit vom Produktionsausstoß x rechnerisch und graphisch darzustellen.

b) Von welchem Produktionsausstoß x_r an wird die Produktion rentabel?

c) Durch welche Maßnahmen kann die Rentabilität erhöht werden?

d) Welche Schlußfolgerungen ergeben sich, wenn die variablen Kosten m_1 den Werkabgabepreis m_2 übersteigen?

Lösung (Johannes Riedel):

a) Die Gesamtkosten y_1 der Produktion stellen sich als die Summe aus den fixen Kosten b und den mit dem Produktionsaustoß x multiplizierten variablen Kosten m_1 dar:

$$y_1 = m_1 x + b = 6{,}50\,x + 1650{,}00.$$

Der Gesamterlös y_2 ergibt sich als Produkt des Abgabepreises m_2 mit dem Produktionsausstoß x:

$$y_2 = m_2 x = 11{,}50 x.$$

Gesamtkosten und Gesamterlös stellen demnach lineare Funktionen des Produktionsausstoßes x dar, die nur für nicht negative x-Werte definiert sind (ein negativer Produktionsausstoß ist bei der Fragestellung sinnlos). Vergleiche dazu Abb. 71.

b) Die Produktion wird rentabel, wenn der Gesamterlös y_2 nicht kleiner als die Gesamtkosten y_1 ist:

$$y_2 \geqq y_1, \text{ also } m_2 x \geqq m_1 x + b.$$

Daraus folgt:

$$m_2 x - m_1 x \geqq b,$$
$$x(m_2 - m_1) \geqq b,$$
$$x \geqq \frac{b}{m_2 - m_1},$$

(wenn $m_2 + m_1 > 0$ oder, was dasselbe ist, $m_2 > m_1$ ist). Also ist die Produktion rentabel für

$$x \geqq x_r = \frac{b}{m_2 - m_1} = \frac{1650{,}00}{11{,}50 - 6{,}50} = \frac{1650}{5} = 330.$$

Dabei ist x_r die Abszisse des Schnittpunktes beider Geraden.

c) Es gibt vier Möglichkeiten, den Gewinn $G = y_2 - y_1$ und damit die Rentabilität zu erhöhen; diese Möglichkeiten sind aus der graphischen Darstellung erkennbar:

1. Erhöhung des Werkabgabepreises m_2. Das bedeutet in der graphischen Darstellung eine Drehung der Geraden y_2 um den Nullpunkt entgegen dem Uhrzeigersinn. Diese Möglichkeit kommt aber aus preisrechtlichen Gründen nicht in Frage.

2. Erhöhung des Produktionsausstoßes x. Diese Möglichkeit findet eine obere Grenze bei vollständiger Deckung des Bedarfs und in der Produktionskapazität.

3. Senkung der fixen Kosten b. Das bedeutet graphisch eine Verschiebung der Geraden y_1 parallel zu sich selbst in Richtung auf den Nullpunkt. Sie trägt verhältnismäßig viel zur Rentabilitätserhöhung bei, wenn m_1 klein ist.

4. Senkung der variablen Kosten m_1 — graphisch eine Drehung der Geraden y_1 um den Schnittpunkt mit der y-Achse im Uhrzeigersinn.

d) Wenn die variablen Kosten m_1 den Abgabepreis m_2 übersteigen, wenn also $m_1 > m_2$ ist, kann unter den gegebenen Bedingungen eine Rentabilität durch Erhöhung des Produktionsausstoßes nicht erreicht werden. In der graphischen Darstellung laufen in diesem Fall die Geraden y_1 und y_2 auseinander und haben keinen Schnittpunkt, so daß es auch kein x_r gibt, von dem an Rentabilität besteht. Rechnerisch erhält man aus

$$x_r = \frac{b}{m_2 - m_1}$$

wegen $m_1 > m_2$, $b > 0$, daß $x_r < 0$ ist. (Das würde einen negativen Produktionsausstoß bedeuten und ist sinnlos.) Auch durch Senkung der fixen Kosten b allein ist dieser Zustand nicht zu ändern. Einzige Möglichkeit bleibt demnach die Senkung der variablen Kosten m_1, d. h. Einsparung von Material, Ausmerzung der Verlustzeiten, schonender Einsatz des Werkzeugs, Steigerung der Arbeitsproduktivität. Die Bedeutung des Satzes „Spare mit jedem Gramm, mit jedem Millimeter, mit jeder Minute!" wird hieran deutlich.

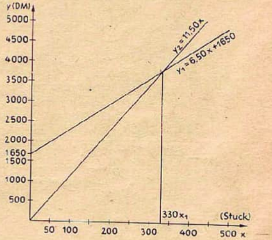


Abb. 71

Aufgabe 49 Dr. GERHARD HESSE, Radebeul

In dem linearen Gleichungssystem

$$0{,}9x - 3{,}2y + 10{,}1 = 0$$
$$1{,}1x - 1{,}0y + 0{,}7 = 0$$

sind für die Koeffizienten der Unbekannten und für die absoluten Glieder Abweichungen von $\pm 0{,}05$ zulässig. Man bestimme für die Lösungen $x = 3$ und $y = 4$ die größtmöglichen Abweichungen nach oben und nach unten!

1. Lösung (Dr. Gerhard Hesse):

Für jeden Koeffizienten und für jedes absolute Glied kann man drei Zahlenwerte für die Untersuchung verwenden: den gegebenen, den maximalen und den minimalen Wert. Das ergibt $3^6 = 729$ verschiedene Kombinationen, also ebenso viele Gleichungssysteme. Eines davon ist das gegebene System. Aus den Lösungen dieser 729 Systeme kann man die mit den maximalen Abweichungen aussuchen.
Rascher kommt man zum Ziel, wenn man das graphische Lösungsverfahren anwendet. Wir betrachten jede der beiden Gleichungen für sich als Funktionsgleichung. Das

graphische Bild einer linearen Funktion ist eine Gerade. Zweckmäßig stellen wir die Normalform der Geradengleichung her: $y = mx + b$, wobei m den Anstieg und b die Ordinate des Schnittpunktes der Geraden mit der Ordinatenachse bedeuten. Es ergibt sich dann:

$$\text{Gerade } g_1\text{:} \quad y = \frac{0{,}9}{3{,}2}x + \frac{10{,}1}{3{,}2} \qquad m_1 = \frac{0{,}9}{3{,}2} \qquad b_1 = \frac{10{,}1}{3{,}2}$$

$$\text{Gerade } g_2\text{:} \quad y = \frac{1{,}1}{1{,}0}x + \frac{0{,}7}{1{,}0} \qquad m_2 = \frac{1{,}1}{1{,}0} \qquad b_2 = \frac{0{,}7}{1{,}0}$$

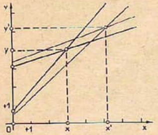


Abb. 72a

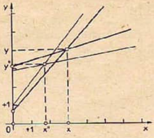


Abb. 72b

Aus der graphischen Darstellung (Abb. 72a und b) erkennt man, daß der Schnittpunkt der Geraden nach rechts und nach oben rückt, wenn g_1 nach oben verschoben wird und einen größeren Anstieg erhält und wenn g_2 nach unten verschoben wird und einen kleineren Anstieg erhält; d. h., m_1 und b_1 müssen vergrößert, m_2 und b_2 dagegen verkleinert werden. Das geschieht maximal, wenn die Zähler von m_1 und b_1 sowie die Nenner von m_2 und b_2 vergrößert und die Nenner von m_1 und b_1 sowie die Zähler von m_2 und b_2 verkleinert werden, und zwar um die zulässige Abweichung 0,05. Demnach wird

$$m_1 = \frac{0{,}95}{3{,}15}, \quad b_1 = \frac{0{,}15}{3{,}15}, \quad m_2 = \frac{1{,}05}{1{,}05}, \quad b_2 = \frac{0{,}65}{1{,}05}.$$

Zur Bestimmung der neuen Schnittpunktkoordinaten besteht nun das folgende Gleichungssystem:

$$0{,}95x - 3{,}15y + 10{,}15 = 0$$
$$1{,}05x - 1{,}05y + \ \ 0{,}65 = 0$$

mit den Lösung $x' \approx 3{,}73$, $y' \approx 4{,}35$.
Analoge Überlegungen zur Bestimmung der unteren Grenzen führen auf das Gleichungssystem

$$0{,}85x - 3{,}25y + 10{,}05 = 0$$
$$1{,}15x - 0{,}95y + \ \ 0{,}75 = 0$$

mit den Lösungen $x'' \approx 2{,}34$, $y'' \approx 3{,}73$.
Die Lösung des gegebenen Gleichungssystems ist unter den gegebenen Bedingungen demnach

$$2{,}43 < x < 3{,}73, \quad 3{,}73 < y < 4{,}35.$$

Die zunächst naheliegende Annahme, daß man die Lösungen $x = 3{,}0$ und $y = 4{,}0$ schreiben könnte, um dadurch anzudeuten, daß auch hier Abweichungen von $\pm 0{,}05$ auftreten können, ist demnach falsch.

2. Lösung (Helmut Grabowski):
Ein Gleichungssystem der Form

$$ax - by + c = 0$$
$$dx - ey + f = 0$$

hat die Lösungen

$$x = \frac{ec - bf}{bd - ae}, \qquad y = \frac{cd - af}{bd - ae}.$$

Dabei sind die Vorzeichen so gewählt, daß Zähler und Nenner je positiv werden.
Die Werte x und y werden maximal, wenn die Zähler maximal und die Nenner minimal sind; sie werden minimal, wenn die Zähler minimal und die Nenner maximal sind.
Demnach ist x maximal, wenn a, e und c maximal, b, d und f aber minimal sind:

$$x_{\max} = \frac{1{,}05 \cdot 10{,}15 - 3{,}15 \cdot 0{,}65}{3{,}15 \cdot 1{,}05 - 0{,}95 \cdot 1{,}05} = 3{,}73,$$

und minimal, wenn a, e und c minimal, b, d und f dagegen maximal sind:

$$x_{\min} = \frac{0{,}95 \cdot 10{,}05 - 3{,}25 \cdot 0{,}75}{3{,}25 \cdot 1{,}15 - 0{,}85 \cdot 0{,}95} = 2{,}43.$$

Bei y ist eine zusätzliche Überlegung notwendig, da die Zähler- und die Nennerbedingung nicht gleichzeitig erfüllbar sind: Wenn c und e maximal, b und f minimal sind, wird y maximal. Die Werte d und a beeinflussen Zähler und Nenner jeweils in gleicher Richtung; d beeinflußt den Nenner jedoch stärker als den Zähler, wird also minimal gewählt; auch a beeinflußt den Nenner stärker als den Zähler, wird also maximal gewählt:

$$y_{\max} = \frac{10{,}15 \cdot 1{,}05 - 0{,}95 \cdot 0{,}65}{3{,}15 \cdot 1{,}05 - 0{,}95 \cdot 1{,}05} = 4{,}35.$$

Analog schließt man: y ist minimal, wenn a, e und c minimal, b, d und f maximal sind.

$$y_{\min} = \frac{10{,}15 \cdot 1{,}15 - 0{,}85 \cdot 0{,}75}{3{,}25 \cdot 1{,}15 - 0{,}85 \cdot 0{,}95} = 3{,}73.$$

Ergebnis: $2{,}43 \leqq x \leqq 3{,}73$, maximale Abweichungen $-0{,}57$ und $+0{,}73$

$3{,}73 \leqq y \leqq 4{,}35$, maximale Abweichungen $-0{,}27$ und $+0{,}35$.

Aufgabe 50 B. VETTERS, Oebisfelde

Bei einem schlüssellosen Vorhängeschloß wird der Riegelteil mit vier einseitig gelegenen, gleichen und gleichabständigen Zähnen in eine Hülse mit vier gleichen, unabhängig voneinander um die Riegelachse drehbaren Ringen eingeführt (Abb. 73). Das ist aber nur bei einer bestimmten Stellung der Ringe möglich, ebenso das Öffnen des Schlosses.

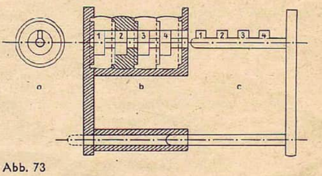


Abb. 73

Auf den Ringen sind je sechs Buchstaben eingeprägt; vier davon (je Ring einer) geben bei der Öffnungsstellung das dem Besitzer bekannte Schlüsselwort.

a) Wieviel verschiedene Schlüsselwörter sind bei dieser Konstruktion an jedem Schloß möglich? Als „Schlüsselwort" gilt jede (auch sinnlose) Zusammenstellung von vier Buchstaben.

b) Es ist die Sicherheit dieses Schlosses mit der eines nach demselben Prinzip gebauten zu vergleichen, das aber sechs Ringe mit je vier Buchstaben aufweist.

c) Wieviel verschiedene Ringe mit je sechs verschiedenen aus den 26 Buchstaben des Alphabets kann der Herstellerbetrieb anfertigen? Dabei gelten Ringe dann als gleich, wenn sie — ohne Rücksicht auf die Reihenfolge — nur gleiche Buchstaben aufweisen und der Einschnitt unter demselben Buchstaben ist.

d) Wieviel Schlösser mit verschiedenen Schlüsselwörtern kann man aus diesen Ringen herstellen?

Lösung (B. Vetters):

a) Man kann zunächst den ersten Ring in sechs verschiedene Stellungen bringen. Dann sind bei jeder dieser Stellungen sechs Stellungen des zweiten Ringes möglich. Also ergeben sich für die Stellungen der ersten beiden Ringe bereits $6 \cdot 6 = 36$ verschiedene Möglichkeiten. Bei jeder davon kann man wieder auf sechs verschiedene Weisen den dritten Ring einstellen, so daß sich damit $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ Stellungen ergeben. Schließlich multipliziert sich diese Zahl wieder mit sechs, wenn man nun noch den letzten Ring einstellt, so daß sich insgesamt $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$ verschiedene Einstellmöglichkeiten ergeben.
Allgemein kann man zeigen, daß sich bei n Ringen mit je m Zahlen m^n verschiedene Schlüsselwörter bilden lassen.

b) Aus der Lösung von a) ergibt sich sofort:

1. Schloß mit vier Ringen zu je sechs Buchstaben enthält

$$6^4 = 1296 \text{ Schlüsselwörter,}$$

2. Schloß mit sechs Ringen zu je vier Buchstaben enthält

$$4^6 = 4096 \text{ Schlüsselwörter.}$$

Die Sicherheit des zweiten Schlosses verhält sich also zu der des ersten wie

$$4096 : 1296 = 256 : 81 \approx 3 : 1,$$

d. h., das zweite Schloß ist etwa dreimal so sicher wie das erste.

c) Es ist festzustellen, wieviel Möglichkeiten es gibt, aus n (in unserem Fall $n = 26$) verschiedenen Elementen k (in unserem Fall $k = 6$) verschiedene auszuwählen.
Zunächst kann man aus den 26 Buchstaben auf 26 verschiedene Weisen einen Buchstaben auswählen. Bei jeder dieser 26 Möglichkeiten gibt es jetzt 25 Möglichkeiten zur Wahl eines zweiten Buchstaben, im ganzen also $26 \cdot 25$. Dabei überlegt man sich aber leicht, daß nun jede Buchstabenzusammenstellung doppelt vorkommt: einmal wurde z. B. zu c der Buchstabe d gewählt und einmal zu d der Buchstabe c. Demnach muß man das Produkt $26 \cdot 25$ noch durch zwei teilen, um die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten zu erhalten: $\frac{26 \cdot 25}{2}$. Bei jeder dieser Möglichkeiten hat man wiederum 24 neue Auswahlmöglichkeiten für den dritten Buchstaben, wobei sich aber wieder jede Buchstabenkombination mehrfach ergibt: Einmal wird z. B. zu (ab) der Buchstabe c, ein andermal zu (bc) der Buchstabe a und zum dritten zu (ac) der Buchstabe b hinzugefügt. Andere Zusammenstellungen der drei Elemente a, b und c gibt es nicht. Also ist die Anzahl der Kombinationen nunmehr auf $\frac{26 \cdot 25 \cdot 24}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2600$ angewachsen. Man erkennt, wie die Entwicklung weitergeht: Allgemein gilt für die Anzahl der Kombinationen von k Elementen aus n Elementen

$$x = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot k},$$

in unserem Fall also

$$x = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 230230$$

Da aber jeder der Ringe den Einschnitt unter jedem Buchstaben haben kann, muß diese Anzahl noch mit sechs multipliziert werden: $230230 \cdot 6 = 1381380$. Es gibt also 1381380 verschiedene Ringe.

d) Da jeder der 26 Buchstaben auf jedem der vier Ringe eines Schlosses auftreten kann, läuft die Aufgabe darauf hinaus, festzustellen, wieviel verschiedene Zusammenstellungen von 4 aus 26 Buchstaben es gibt, wenn es dabei wohl auf die Reihenfolge ankommt, aber jeder Buchstabe sich bis zu viermal wiederholen kann. Zunächst kann man 26 Buchstaben auswählen; bei jeder dieser 26 Möglichkeiten kann man wieder auf 26 verschiedene Weisen einen zweiten Buchstaben wählen, so daß man damit schon $26 \cdot 26 = 26^2$ Möglichkeiten hat. Man überlegt sich nun weiter, daß bei der Wahl des dritten Buchstabens sich diese Zahl wieder mit 26 multipliziert: 26^3. Bei der Wahl des vierten ergeben sich dann $26^4 = 456976$ verschiedene Möglichkeiten. Offensichtlich gilt allgemein dieselbe Formel wie bei a).

AUFGABEN DER INTERNATIONALEN MATHEMATISCHEN SCHÜLEROLYMPIADEN

I. Internationale Mathematische Schülerolympiade

1. Zeige, daß der Bruch $\frac{21n+4}{14n+3}$ für keine natürliche Zahl n zu kürzen ist!

2. Für welche reellen Werte von x gelten die Gleichungen

a) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = 2$,

b) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = 1$,

c) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = 2$,

wobei die Wurzeln nur positiv aufzufassen sind?

3. Es sei x ein Winkel (d. h. eine reelle Zahl). Weiter seien a, b und c beliebige reelle Zahlen. Die vier reellen Zahlen a, b, c und $\cos x$ mögen die quadratische Gleichung

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$$

erfüllen. Man gebe eine quadratische Gleichung an, der die Zahlen a, b, c und $\cos 2x$ genügen. Im Falle $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$ vergleiche man diese Gleichungen!

4. Es ist ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, von dem die Hypotenuse c gegeben ist und von dem man weiß, daß die zu c gehörende Seitenhalbierende das geometrische Mittel der beiden Katheten ist.

5. Auf einer Strecke $\overline{AB}$ wird ein zwischen A und B liegender Punkt M angenommen, und über den Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{MB}$ als Seiten werden die Quadrate $AMCD$ und $MBEF$ errichtet, die auf derselben Seite von $\overline{AB}$ liegen sollen. Die den Quadraten umschriebenen Kreise mit den Mittelpunkten P und Q schneiden einander außer in M noch in dem Punkt N. Die durch AF und durch BC gegebenen Geraden mögen einander im Punkt N' schneiden.

   a) Man zeige, daß N und N' zusammenfallen.

   b) Wie auch der Punkt M immer angenommen sein mag, stets gehen die Geraden MN durch einen festen Punkt S. Man beweise dies. (Eine Gerade durch P und Q werde mit PQ bezeichnet, mit $\overline{PQ}$ ist die Strecke von P bis Q gemeint.)

   c) Man bestimme den geometrischen Ort der Mittelpunkte der Strecken $\overline{PQ}$, wenn M zwischen A und B variiert.

6. Es sind zwei einander in einer Geraden g schneidende Ebenen P und Q gegeben. Weiterhin ist in der Ebene P ein Punkt A und in der Ebene Q ein Punkt C gegeben; keiner dieser Punkte liegt auf der Geraden g.

   Es ist ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ (mit $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$), dem man einen Inkreis einbeschreiben kann, so zu konstruieren, daß der Punkt B in der Ebene P und der Punkt D in der Ebene Q liegt.

II. Internationale Mathematische Schülerolympiade

Aufgabe 1:

Bestimme alle dreiziffrigen Zahlen, die, durch 11 geteilt, eine Zahl ergeben, die gleich ist der Summe der Quadrate der Ziffern der ursprünglichen Zahl!

Aufgabe 2:

Für welche Werte der Veränderlichen x besteht die Ungleichung

$$\frac{4x^2}{\left(1 - \sqrt{1 + 2x}\right)^2} < 2x + 9?$$

Aufgabe 3:

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Hypotenuse BC in n gleiche Teile geteilt wird (n eine ungerade Zahl). Ist α der Winkel, unter dem die Teilstrecke, die den Mittelpunkt der Hypotenuse enthält, von A aus gesehen wird, h die Höhe und a die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks, so zeige, daß gilt

$$\tan \alpha = \frac{4nh}{(n^2 - 1)a}!$$

Aufgabe 4:

Konstruiere ein Dreieck ABC, wenn h_a, h_b und s_a bekannt sind! (h_a ist die auf der Seite a errichtete Höhe, h_b die auf der Seite b, und s_a ist die Seitenhalbierende der Seite a).

Aufgabe 5:

Gegeben ist der Würfel $ABCDA'B'C'D'$.

a) Bestimme den geometrischen Ort der Mittelpunkte der Strecke XY, wobei X ein beliebiger Punkt der Strecke AC und Y ein beliebiger Punkt der Strecke $B'D'$ ist!

b) Bestimme den geometrischen Ort der Punkte Z der Strecke XY, die die Beziehung

$$ZY = 2XZ$$

erfüllen!

Aufgabe 6:

Gegeben ist ein Kegel, die dem Kegel eingeschriebene Kugel und der der Kugel umschriebene Zylinder, dessen Grundfläche mit der Grundfläche des Kegels in einer Ebene liegt. V_1 ist der Rauminhalt des Kegels und V_2 der Rauminhalt des Zylinders.

a) Beweise, daß die Gleichung $V_1 = V_2$ nicht bestehen kann!

b) Bestimme die kleinste Zahl k, für die $V_1 = kV_2$ gilt, und konstruiere für diesen Fall den Winkel an der Spitze des Kegels!

Aufgabe 7:

Gegeben ist ein gleichschenkliges Trapez mit den Grundlinien a und b und der Höhe h.

a) Konstruiere den Punkt P auf der Symmetrieachse, von dem aus die beiden Schenkel unter einem rechten Winkel erscheinen!

b) Bestimme die Entfernung des Punktes P von einer der beiden Grundlinien rechnerisch!

c) Unter welchen Bedingungen ist die Konstruktion des Punktes P möglich? (Diskussion der möglichen Fälle.)

III. Internationale Mathematische Schülerolympiade

Aufgabe 1:

Man löse das Gleichungssystem

$$x + y + z = a$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2$$
$$xy = z^2,$$

wo a und b gegebene Zahlen sind!
Bei welcher Bedingung für a und b sind x, y, z sämtlich positiv und verschieden?

Aufgabe 2:

Gegeben sind a, b, c als die Längen der Seiten eines Dreiecks. S sei die Größe der Fläche desselben Dreiecks. Man beweise, daß stets

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq 4S\sqrt{3} \quad \text{ist!}$$

Unter welchen Bedingungen tritt Gleichheit ein?

Aufgabe 3:

Man löse die Gleichung

$$\cos^n x - \sin^n x = 1,$$

wo n eine beliebig gegebene natürliche Zahl ist!

Aufgabe 4:

Es seien ein Dreieck $P_1P_2P_3$ und ein beliebiger Punkt P im Inneren des Dreiecks gegeben. Die Schnittpunkte der Geraden P_1P, P_2P bzw. P_3P mit den gegenüberliegenden Seiten seien Q_1, Q_2, Q_3.

Es ist zu beweisen, daß unter den Verhältnissen

$$\frac{P_1P}{PQ_1}, \quad \frac{P_2P}{PQ_2}, \quad \frac{P_3P}{PQ_3}$$

wenigstens eines nicht größer als 2 und wenigstens eines nicht kleiner als 2 ist.

Aufgabe 5:

Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren aus $AC = b$, $AB = c$ und $\sphericalangle AMB = \omega$, wobei M die Mitte der Strecke BC ist. Es sei $\omega < 90°$.
Man beweise, daß die Aufgabe dann und nur dann lösbar ist, wenn

$$b \cdot \tan\frac{\omega}{2} \leqq c < b \quad \text{ist!}$$

In welchem Fall tritt Gleichheit auf?

Aufgabe 6:

Es sind eine Ebene (ε) und drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte A, B, C gegeben, so daß die Punkte auf derselben Seite von (ε) liegen und die von ihnen gebildete Ebene nicht parallel mit (ε) ist. A', B', C' seien drei beliebige Punkte von (ε). Die Mittelpunkte der Strecken AA', BB', CC' seien L, M bzw. N, und der Schwerpunkt des Dreiecks LMN sei G. (Die Punkte A', B', C', für die LMN kein echtes Dreieck bilden, lassen wir außer acht.)
Man bestimme den geometrischen Ort des Punktes G, wenn A', B', C' unabhängig voneinander die Ebene (ε) durchlaufen!

IV. Internationale Mathematische Schülerolympiade

1. Aufgabe: Es ist die kleinste natürliche Zahl n zu bestimmen, welche folgende Eigenschaften besitzt:
   a) Ihre dekadische Darstellung hat als letzte Ziffer die Ziffer 6.
   b) Wenn man diese letzte Ziffer 6 streicht und sie als erste Ziffer vor die anderen unveränderten Ziffern schreibt, so bekommt man das Vierfache der Zahl n.

2. Aufgabe: Es sind alle reellen Zahlen x zu bestimmen, welche die Ungleichung

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2} \quad \text{erfüllen!}$$

3. Aufgabe: Es ist ein Würfel $ABCDA'B'C'D'$ (mit den Gegenseitenflächen $ABCD$, $A'B'C'D'$, wobei $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$) gegeben. Der Punkt X durchläuft mit einer konstanten Geschwindigkeit den Umfang des Quadrats $ABCD$ in dieser Reihenfolge, und der Punkt Y durchläuft mit derselben Geschwindigkeit den Umfang des Quadrats $B'C'CB$ in dieser Reihenfolge; die Punkte X und Y beginnen ihre Bewegungen im gleichen Augenblick von den Anfangspunkten A und B' aus. Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Mittelpunkte Z der Strecken XY!

4. Aufgabe: Es sind sämtliche Lösungen der Gleichung

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$$

zu bestimmen!

5. Aufgabe: Auf einer Kreislinie k sind drei verschiedene Punkte A, B, C gegeben. Auf derselben Kreislinie ist ein weiterer Punkt D so zu konstruieren, daß $ABCD$ ein Tangentenviereck ist! (Es dürfen nur Zirkel und Lineal benutzt werden.)

6. Aufgabe: Es ist ein gleichschenkliges Dreieck gegeben. Sein Umkreis habe den Radius r, sein Inkreis den Radius ϱ.
Man beweise, daß der Abstand d der Mittelpunkte beider Kreise

$$d = \sqrt{r(r - 2\varrho)}$$

ist!

7. Aufgabe: Es ist ein Tetraeder $SABC$ mit folgender Eigenschaft gegeben:
Es gibt 5 Kugelflächen, von denen jede die Kanten SA, SB, SC, AB, BC, CA bzw. deren Verlängerungen berührt.
Beweisen Sie, daß
   a) das Tetraeder regelmäßig ist;
   b) umgekehrt für jedes regelmäßige Tetraeder fünf solche Kugelflächen existieren!