DEM VII. PARTEITAG DER SED GEWIDMET

1/67

WURZEL

schülerzeitung für mathematik

1. Jahrgang
1. 1. 1967

Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik
an der Friedrich - Schiller - Universität Jena

Liebe Leser!
Sie halten heute zum ersten Mal diese Zeitung in der Hand. Vielleicht werden Sie im weiteren zu unseren ständigen Lesern zählen und Freude daran finden, aufgeworfene mathematische Probleme zu lösen und selbst welche zu stellen.
Unser Anliegen, das wir mit dem Herausgeben dieser Zeitung verbinden, ist, das mathematische Klima an den Schulen weiter zu verbessern und Sie zur Beschäftigung mit der Mathematik zu anregen beziehungsweise Sie beim Erarbeiten mathematischer Theorien zu unterstützen.

Wir hoffen damit einen Teil dazu beizutragen, den Beschluß zur Verbesserung und weiteren Entwicklung des Mathematikunterrichts in den allgemeinbilden polytechnischen Oberschulen der Deutschen Demokratischen Republik durchzusetzen, in dem es unter anderem heißt:
"Zur Verbesserung der mathematischen Bildung und Erziehung ist eine vielseitige Betätigung der Jugend auf mathematischem Gebiet mit Unterstützung der breiten demokratischen Öffentlich-

keit zu entwickeln. Die außerunterrichtliche Arbeit auf dem Gebiet der Mathematik muß zum festen Bestandteil der mathematischen Ausbildung der Schüler werden."
"Die Leitungen der Freien Deutschen Jugend und der Pionierorganisation "Ernst Thälmann" haben dafür Sorge zu tragen, daß das Interesse der Schüler an der Beschäftigung mit der Mathematik entwickelt wird und eine breite Bewegung zur Aneignung sicheren mathematischen Wissens und Könnens unter den Schülern entsteht."

Nachdem wir 1964 im Stadtgebiet Jena begonnen hatten, durch die Gründung von Schülerzirkeln die außerunterrichtliche Beschäftigung der Schüler mit der Mathematik zu fördern, waren wir bestrebt, auch über den örtlichen Bereich hinaus wirksam zu werden. Ein Ausdruck dessen sind die seit 1965 für Schüler des gesamten Bezirks Gera regelmäßig durchgeführten Mathematik-Spezialistenlager. Da die Zeitdauer und die Teilnehmerzahl dieser Lager beschränkt sind, wollen wir mit der Herausgabe dieser Zeitung eine kontinuierliche Anleitung für einen großen Interessentenkreis erreichen.

In unserer gesamten bisherigen Arbeit, insbesondere bei der Herausgabe dieser Zeitung, wurden wir von der SED-Grundorganisation der Friedrich-Schiller-Universität Jena tatkräftig unterstützt. Aus diesem Grunde legen wir die erste Nummer unserer Zeitung den Delegierten der Wahlversammlung der SED-Grundorganisation der Friedrich-Schiller-Universität Jena vor.

Vielleicht werden Sie, liebe Leser, sogar soviel Freude an der Mathematik gewinnen, daß Sie sich entschließen, sich später weiter dieser schönen Wissenschaft zu widmen.
Wir werden regelmäßig kleine Gebiete der Mathematik abhandeln. Es soll Ihnen dadurch ermöglicht werden, die eine oder die andere Aufgabe besonders geschickt zu lösen, aber es soll auch dazu dienen, Ihnen einen größeren Überblick über die verschiedenen Gebiete der Mathematik und ihrer Anwendungsbereiche zu geben.

Weiter werden wir Ihnen regelmäßig eine Vielzahl von Aufgaben vorlegen und Ihre Lösungen veröffentlichen. Darüber hinaus bietet Ihnen unsere monatliche Preisaufgabe Gelegenheit, Ihre Bibliothek um einige wertvolle Fachbücher zu bereichern.
Außerdem werden wir Sie mit neuen Forschungsergebnissen, die in Beziehung zur Mathematik stehen, sowie mit aktuellen Problemen der Entwicklung der Mathematik vertraut machen.
Sie haben die Möglichkeit, Fragen, die Sie beschäftigen, uns zu übermitteln. Wir werden bemüht sein, zufriedenstellende Auskünfte zu erteilen.
Wir hoffen, mit Ihnen in ein reges und sicher für beide Seiten anregendes Gespräch zu kommen.

AUFGABEN: (1.Serie)

9.Klasse: (9.1) Sei a ungerade und nicht durch 3 teilbar. Es ist zu beweisen, daß dann a^2-1 durch 12 teilbar ist.

(9.2) In ein Dreieck ist ein Kreis einbeschrieben, der die Seiten des Dreiecks in den Punkten L, M, N berührt. Zu beweisen ist, daß das Dreieck Δ LMN stets spitzwinklig ist.

10.Klasse: (10.1) Folgendes Gleichungssystem ist zu lösen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ &\vdots \\ x_{99} + x_{100} + x_1 &= 0 \\ x_{100} + x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

(10.2) Zu beweisen ist folgender Satz:
Wenn $|x|<1$ und $|y|<1$, so ist

$$\left|\frac{x-y}{1-xy}\right| < 1.$$

11./12.Klasse: (11.12.1) Es sind alle Paare (x,y) der positiven ganzen Zahlen zu bestimmen, für die

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50}$$ ist.

(11.12.2) Es ist zu beweisen, daß für alle ganzen n $(n \geq 2)$ mit $|x|<1$ die Ungleichung

$$2^n > (1-x)^n + (1+x)^n$$

erfüllt ist.

Selbstverständlich kann jeder Schüler die Aufgaben jeder Klassenstufe lösen. Die Lösungen (ausführliche Lösungswege) bitten wir mit Angabe der Verfasser oder des Verfassers (Name, Alter, Schule, Klasse) einzusenden an:

Sektion Mathematik
an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
69 Jena
Helmholtzweg 1
Kennwort: "Die WURZEL"

PREISAUFGABE:

(P.1) Gegeben seien in der Ebene zwei sich schneidende Geraden und ein nicht auf den Geraden liegender Punkt P. Zu konstruieren ist der Kreis, der durch P geht und die Geraden berührt. (Eindeutigkeit?)

Für jeden vollständigen Lösungsweg der Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte besitzen, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges). Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der folgenden Auslosung teil.
Die Lösungen sind unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgabe" bis zum 20. des jeweiligen Erscheinungsmonats (Datum des Poststempels) an obige Adresse einzusenden.

Wir behalten uns vor, auch für besonders gute Lösungen der übrigen Aufgaben sowie für besonders interessante eingesandte Aufgaben (mit Lösung) Wertpunkte zu verteilen.

LASERSTRAHL ALS LOT

Ein Gas-Laser-Gerät ist beim Bau des Moskauer Fernsehturms eingesetzt worden. Das Gerät ist auf der Grundfläche des Turms installiert und sendet zur Nachtzeit einen Strahl vertikal genau in den Himmel, eine leuchtendrote Achslinie des Turms. Die Messungen gestatten die genaue Überprüfung der gegossenen Betonwände. Sie müssen nachts vorgenommen werden, weil sich der Turm am Tage unter Einwirkung der Sonnenstrahlen leicht von der Sonne wegneigt.

*

TISCHRECHNER

Das Mustergerät eines elektronischen Tischrechners wurde in der Volksrepublik Bulgarien fertiggestellt. Der fast ausschließlich mit Halbleiterbauelementen bestückte Rechner kann insgesamt 22 Funktionen ausführen. Er läßt sich an elektrische Schreibmaschinen anschließen, um die Rechenergebnisse auszudrucken.

*

MATHEMATISCHES MODELL

Ein Modell der lebenden Lunge ist von Wissenschaftlern der Columbia-Universität und Mathematikern der Internationalen Büromaschinen Gesellschaft entwickelt worden. Das Lungenmodell besteht aus drei komplizierten mathematischen Gleichungen, die gleichzeitig auf dem Elektronenrechner aufeinander abgestimmt laufen und zusammen sämtliche Lungenfunktionen ergeben.

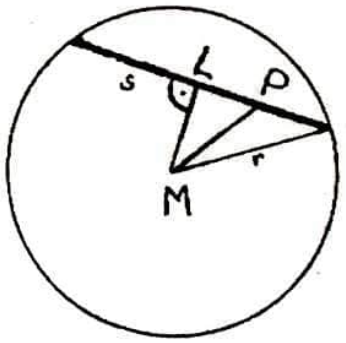
*

KLEINFORMRECHNER VON IBM

Mit den Maßen 29×26×8,8 cm stellte die Firma IBM ihren kleinsten Elektronenrechner her. Die mit Dünnfilmkreisen ausgerüstete Maschine hat ein Speicherungsvermögen von 2340 bit und kann in einer Sekunde 56000 Additionen ausführen.

Im Dezember lief in allen Kreisen die 2. Stufe der Olympiade Junger Mathematiker der DDR. Wir möchten in dieser ersten Nummer unserer Zeitung die Lösungen von zwei Aufgaben veröffentlichen, die wir aus den richtigen Lösungen des Kreises Jena herausgegriffen haben.
Weitere Berichte von den Olympiaden werden folgen.

Klasse 9, 2. Aufgabe:
Innerhalb des Kreises k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius von der Länge r liege der vom Mittelpunkt verschiedene Punkt P. Konstruieren Sie unter allen Sehnen durch P die kürzeste!
Lösung: (von Manfred Fischer, Kl. 9, Spezialoberschule des VEB Carl Zeiss)



$$r^2 = \left(\frac{s}{2}\right) + \overline{ML}^2$$

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = r^2 - \overline{ML}^2$$

$$\frac{s}{2} = \sqrt{r^2 - \overline{ML}^2}$$

$$s = 2\sqrt{r^2 - \overline{ML}^2}$$

Der Wurzelwert ist am kleinsten, wenn ML am größten ist.

$\curvearrowright s_{min} = 2\sqrt{r^2 - (\overline{ML}_{max})^2}$. $\overline{ML}$ ist Kathete im rechtwinkligen Dreieck Δ MLP, d. h. $\overline{ML}$ ist dann am größten, wenn $\overline{ML} = \overline{MP}$
$\curvearrowright s_{min} = 2\sqrt{r^2 - \overline{MP}^2}$.

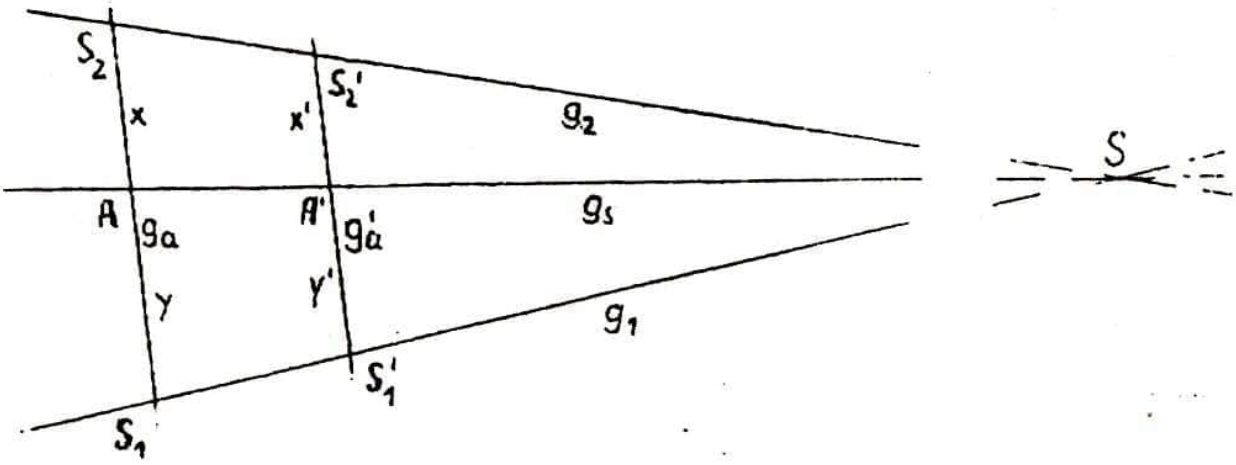
$\overline{ML} \perp s \curvearrowright s_{min} \perp \overline{MP}$.

Konstruktionsbeschreibung:
Man zeichne die Strecke MP ein und errichte auf ihr im Punkt P die Senkrechte. Diese Senkrechte schneidet den Kreis in S_1 und S_2. Die Strecke $\overline{S_1S_2}$ ist die kürzeste Sehne im Kreis K, die durch den Punkt P verläuft.

Klasse 10, 3. Aufgabe:

Auf einem (ebenen) Zeichenblatt sind ein Punkt A und zwei nicht parallele Geraden g_1 und g_2 gegeben, die nicht durch A gehen und deren Schnittpunkt S außerhalb des Zeichenblattes liegt. Konstruieren Sie die Verbindungsgerade durch A und S so, daß die gesamte Konstruktion auf dem Zeichenblatt erfolgt.

Lösung: (von Elisabeth Martin, Kl. 10, EOS Grete Unrein)



Konstruktionsbeschreibung:

Seien der Punkt A und die Geraden g_1 und g_2 gezeichnet. Man zeichne durch A eine beliebige Gerade g_a, die g_1 bzw. g_2 in S_1 bzw. S_2 schneidet. Zur Geraden g_a zeichne man eine beliebige Parallele g_a', die g_1 bzw. g_2 in S_1' bzw. S_2' schneidet. Durch Nebenkonstruktion findet man auf g_a' den Punkt A', der die Strecke $\overline{S_1'S_2'}$ im gleichen Verhältnis teilt wie der Punkt A die Strecke $\overline{S_1S_2}$. Die Gerade g_s durch A und A' schneidet g_1 und g_2 in S.

Begründung:

Nach Konstruktion ist

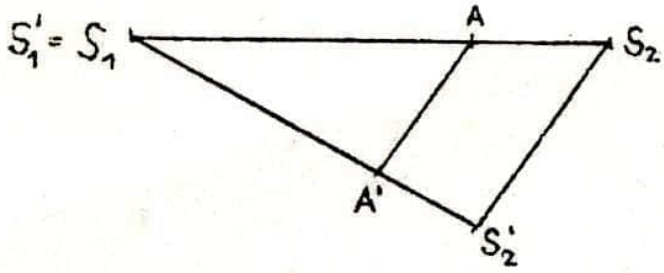
$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} .$$

Dann ist aber die gesamte Figur eine Strahlensatzfigur und g_s schneidet g_1 und g_2 in S.

Nebenkonstruktion:

Teilung der Geraden g_a' im vorgegebenen Verhältnis $\frac{x}{y}$:

Sei $\overline{S_1S_2}$ gezeichnet. In S_1 trage man in beliebigem Winkel ($\neq 180^\circ$) die Strecke $\overline{S_1'S_2'}$ an und verbinde zum Dreieck (siehe Skizze). Die Strecke $\overline{S_2S_2'}$ verschiebe man parallel in A.



Diese Parallele durch A schneide $\overline{S_1'S_2'}$ in A'. Dann teilt A' $\overline{S_1'S_2'}$ im gewünschten Verhältnis (Strahlensatz).

Eine Methode zur Lösung linearer Gleichungssysteme
(von Hannes Peuker, wiss. Mitarbeiter)

Bei zahlreichen Problemen aus dem wirtschaftlichen, technischen und wissenschaftlichen Leben spielen Systeme von linearen Gleichungen eine wichtige Rolle. So erfordern zum Beispiel die Projektierung einer Brückenkonstruktion oder die Erstellung eines Wetterberichtes bereits die Lösung von mehreren hundert linearen Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten.
Daher ist es verständlich, daß die Mathematiker seit langer Zeit der Entwicklung von Lösungsmethoden für lineare Gleichungssysteme besondere Aufmerksamkeit gewidmet haben. Heute existieren eine stattliche Anzahl verschiedener Lösungsverfahren, so daß bei der Bearbeitung eines linearen Gleichungssystems unter Berücksichtigung der Aufgabenstellung und der vorhandenen Rechenhilfsmittel die günstigste Methode ausgewählt werden kann. Es soll im folgenden eine sehr schöne Lösungsmethode für lineare Gleichungssysteme beschrieben werden, die trotz ihrer Einfachheit häufig benutzt wird, um Gleichungssysteme mit Hilfe von elektronischen Rechenautomaten zu behandeln.

Die Grundidee des Verfahrens wird bereits am folgenden einfachen Beispiel deutlich.
AUFGABE 1: Man löse das lineare Gleichungssystem

$$(1)\quad \begin{aligned} 2x - y &= 7 \\ x - 2y &= -4 \end{aligned}$$

(Natürlich findet man die Lösung sehr schnell durch Probieren oder durch die herkömmlichen Lösungsverfahren. Unser Ziel ist es aber, am einfachen Beispiel die Methode zu studieren)

Die Aufgabe 1 ist gleichwertig mit folgender Aufgabe 1':

AUFGABE 1':

$$(2)\quad \begin{aligned} F_1 &= 2x - y - 7 \\ F_2 &= x - 2y + 4 \end{aligned}$$

Man bestimme ein solches Wertepaar (x,y), für das die Größen F_1 und F_2, die Fehlergrößen heißen sollen, den Wert Null annehmen.

Setzt man in (2) beliebige Werte x_o, y_o für x und y ein, so kann man nicht erwarten, daß F_1 und F_2 verschwinden; es werden wirkliche Fehler auftreten. Man kann aber versuchen, in mehreren Schritten an den angenommenen Werten x_o und y_o solche Korrekturen Δx und Δy anzubringen, daß die Absolutwerte der Fehlergrößen F_1 und F_2 von Schritt zu Schritt kleiner werden und schließlich ganz verschwinden. Auf diese Weise nähert man sich bei jedem Schritt der gesuchten Lösung (x,y) von (1). Natürlich muß man wissen, wie sich eine Veränderung der Werte x und y auf die Fehlergrößen F_1 und F_2 auswirkt. Dieser Zusammenhang wird durch die Koeffizienten des Gleichungssystems (1) geliefert.

Die kleine Tabelle zeigt, daß zum Beispiel eine Korrektur $\Delta x = +1$ am x-Wert den Wert F_1 um 1 und den Wert F_2 um 1 erhöht. Analog bewirkt eine Korrektur $\Delta y = +1$ am y-Wert eine Erniedrigung des Wertes von F_1 um 1 und des Wertes von F_2 um 2.

	$\Delta x = +1$	$\Delta y = +1$
ΔF_1	+2	-1
ΔF_2	+1	-2

Wir beginnen das Lösungsverfahren mit den Werten $x_o = y_o = 0$. Wie man sich leicht an (2) überzeugt, folgt $F_1 = -7$, $F_2 = +4$. (Vergleiche die folgende Tabelle!) Durch eine Korrektur Δx soll $F_1 = 0$ erzwungen werden. Die Korrektur $\Delta x = +3,5$ leistet das Gewünschte. Aber F_2 hat sich durch diese Korrektur auf $F_2 = +4 + 3,5 = +7,5$ erhöht. Nun wird y korrigiert, so daß $F_2 = 0$ wird. Für die Korrektur Δy folgt $\Delta y = +3,75$. Nun hat sich F_1 aber wieder auf $0 - 3,75 = -3,75$ verändert. Die Absolutbeträge der Fehlergrößen sind aber bereits kleiner geworden. Man korrigiert in einem nächsten Schritt x wieder so, daß F_1 wieder Null wird. Die abwechselnde Korrektur von x und y wird solange fortgesetzt, bis die Fehlergrößen F_1 und F_2 verschwunden sind, oder aber eine vorgegebene Genauigkeitsschranke unterschritten haben. Dann bricht das Verfahren ab. Das Schema zeigt die weiteren Schritte bis zum Abbruch. Zum Schluß werden alle Korrekturen Δx bzw. Δy aufaddiert und zum Ausgangswert x_o bzw. y_o addiert.

		F_1	F_2	
$x_o = 0{,}00$	$y_o = 0{,}00$	-7,00	+4,00	0. Schritt
$\Delta x = +3{,}50$	-	0,00	+7,50	1. Schritt
-	$\Delta y = +3{,}75$	-3,75	-	2. Schritt
$\Delta x = +1{,}88$	-	0,00	+1,88	3. Schritt
-	$\Delta y = +0{,}94$	-0,94	0,00	4. Schritt
$\Delta x = +0{,}47$	-	0,00	+0,47	5. Schritt
-	$\Delta y = +0{,}24$	-0,24	0,00	6. Schritt
$\Delta x = +0{,}12$		0,00	+0,12	7. Schritt
	$\Delta y = +0{,}06$	-0,06	0,00	8. Schritt
$\Delta x = +0{,}03$		0,00	0,03	9. Schritt
	$\Delta y = 0{,}02$	-0,02	0,00	10. Schritt
$\Delta x = 0{,}01$		0,00	0,01	11. Schritt
6,01	5,01			

(Sämtliche Werte von Δx und Δy sind auf zwei Dezimalen gerundet. Daraus erklärt sich der kleine Endfehler).

Die so erhaltenen Werte $x = 6$ und $y = 5$ lösen das Gleichungssystem (1). Natürlich wären auch andere Ausgangswerte (x_o, y_o) möglich gewesen. Auch hätte man mit der Korrektur von y beginnen können. Es ist zu bemerken, daß das beschriebene Verfahren eine sehr einfache grafische Deutung gestattet, die wir jedoch in der nächsten Nummer beschreiben wollen.

Interessenten können nach der genannten Methode das lineare Gleichungssystem

$$x + y = 5{,}5$$
$$x - 2y = -5$$

lösen.

Die beschriebene Methode zeichnet sich dadurch aus, daß sie ohne weiteres auf Systeme mit sehr vielen linearen Gleichungen übertragen werden kann. Sie ist unter dem Namen "Relaxationsmethode" in der Fachliteratur dargestellt. Entsprechende Literaturhinweise können von der Schriftleitung gegeben werden.

Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena.
Schriftleitung: Klaus Fischer, Hansgeorg Meißner
Mitarbeiter: N. Kuse, H. Peuker, H. Schirrmeister, J. Schwarz
L. Staiger, R. Wackernagel.
Die Zeitung erscheint monatlich zum Preis von 0,10 MDN.
Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS und SOS zu richten.

DEM VII. PARTEITAG DER SED GEWIDMET

2/67

1. Jahrgang
1.2.1967

WURZEL

schülerzeitung für mathematik

Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik an der Friedrich - Schiller - Universität Jena

Mathematik-Spezialistenlager des Bezirkes Gera - Februar 1967

In der Zeit vom 6. 2. 1967 bis 13. 2. 1967 findet in Lobenstein das 5. Mathematik-Spezialistenlager des Bezirkes Gera statt. Hier werden sich die erfolgreichsten Teilnehmer der "Bezirksolympiade Junger Mathematiker" treffen, um ihre mathematischen Kenntnisse zu erweitern und sich für die DDR-Olympiade vorzubereiten.

Die fachliche Betreuung liegt wieder in den Händen von Mitarbeitern und Studenten der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Einige Probleme der Zahlentheorie, Geometrie, Algebra, Vektorrechnung, Ungleichungen und Abschätzungen werden Inhalt der Seminare sein. Um den Schülern einen kleinen Einblick in die vielfältigen Anwendungsgebiete der modernen Mathematik zu geben, werden außerdem noch Vorträge mit den folgenden Themen gehalten:

1. Perspektive und Arbeitsmöglichkeiten eines Mathematikers
2. Einige einfache ungelöste Probleme der Mathematik
3. Lernen von Automaten
4. Einfache Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung
5. Probleme und Schwierigkeiten bei der automatischen Übersetzung
6. Anwendung der komplexen Zahlen

Trotz dieses umfangreichen Programms wird die Erholung bei Sport und Spiel nicht zu kurz kommen.

Wir hoffen, daß auch das 5. Mathematik-Spezialistenlager für alle Beteiligten ein schöner Erfolg wird.

Das Entstehen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

(von Harald Schirrmeister, wiss. Assistent)

Der französische Mathematiker Blaise Pascal (1623-1662) erhielt von dem Edelmann Chevalier de Meré, der wie viele seines Standes ein leidenschaftlicher Spieler war, Aufgaben vorgelegt, die ihn brennend interessierten. Eine dieser Aufgaben war die folgende:
Zwei Personen A und B wollen mehrmals hintereinander ein Spiel durchführen, bei dem beide die gleichen Gewinnchancen haben (z. B. Werfen einer Münze, wobei "Zahl" Gewinn bzw. "Wappen" Verlust bedeutet). Wer zuerst p-mal gewonnen hat, soll den ganzen Einsatz erhalten. Aus unvorhergesehenen Gründen muß das Spiel zu einem Zeitpunkt abgebrochen werden, zu dem der Spieler A m-mal ($m < p$) und der Spieler B n-mal ($n < p$) gewonnen hat. Wie ist der Einsatz unter die Spieler aufzuteilen?
Dazu ist zu sagen, daß eine proportionale Aufteilung nach der Anzahl der gewonnenen Partien, also A erhält m und B erhält n-Teile, nicht in Frage kommt, da dabei die noch zu spielenden Partien vollständig unberücksichtigt bleiben. Pascal teilte seinem Landsmann Pierre de Fermat (1601-1665) dieses Problem mit und beide gelangten für einen Spezialfall ($p = 3$, $m = 2$, $n = 1$) auf verschiedenen Wegen zu demselben Ergebnis.

Zuerst wollen wir das Verfahren Pascals beschreiben: das erste Spiel, das durch den Abbruch nicht zustande gekommen ist, hätte mit gleicher Wahrscheinlichkeit entweder A oder B gewinnen können. Falls A gewonnen hätte, würde er den gesamten Einsatz erhalten. Im Falle eines Sieges von B haben beide zwei Spiele gewonnen und in diesem Fall kann jeder nur die Hälfte des Einsatzes beanspruchen. Beide Möglichkeiten sind gleichwahrscheinlich.

Wollen wir den Einsatz auf die Spieler verteilen, ist folgendes Vorgehen richtig; A kann im ersten Fall das gesamte Geld und im zweiten Fall die Hälfte des Geldes für sich beanspruchen, da man für die zwei möglichen Fälle den Einsatz E halbieren muß, erhält A $\frac{E}{2} + \frac{E}{4}$. Insgesamt erhält A also $\frac{3}{4}$ und B $\frac{1}{4}$ des Einsatzes.

Fermat löste das Problem auf folgende Weise. Er ging von der Tatsache aus, daß zur Beendigung des Spieles insgesamt höchstens p-m+p-n-1 Partien notwendig sind, was ja leicht einzusehen ist; in dem betrachteten Spezialfall also höchstens 2. Ferner untersuchte man alle Möglichkeiten für den Ausgang zweier Spiele. Wir wollen das mit Hilfe einer Tabelle tun. Die Buchstaben geben immer an, wer gewonnen hat.

Mögl. / Partien	I	II	III	IV
1	A	A	B	B
2	A	B	A	B

Die Möglichkeiten sind alle gleichwahrscheinlich. A gewinnt in 3 von den 4 Fällen (I, II, III) und B in einem. Demzufolge kann A $\frac{3}{4}$ und B $\frac{1}{4}$ des Einsatzes beanspruchen.
Bemerkenswert ist vor allem, daß I und II als verschiedene Fälle geführt werden, obwohl das gesamte Spiel bereits beendet ist, nachdem A die erste Partie gewonnen hat. Ein anderes Vorgehen ist aber falsch, denn würde man I und II in einem Fall vereinigen, so wäre dieser nicht gleichwahrscheinlich mit III oder IV. Das Verfahren Fermats läßt sich leicht verallgemeinern. Die Möglichkeiten wachsen jedoch rasch mit zunehmenden Differenzen p-n und p-m.
Durch solche Anregungen und Untersuchungen ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung entstanden und die Theorie der Glücksspiele sowie die Beschäftigung mit dem Versicherungs- und dem Gerichtswesen (Indizienbeweis u. ä.) boten zu Beginn auch auf Grund des relativ niedrigen Entwicklungsstandes der Wissenschaft die einzigen Anwendungsmöglichkeiten dieser neuen mathematischen Disziplin. Trotzdem waren die damaligen Mathematiker überzeugt, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung in Zukunft bei der Untersuchung von Massenerscheinungen eine große Rolle spielen wird.

Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie bekommt man Möglichkeiten in die Hand, im Einzelnen unbestimmte Vorgänge in der Gesamtheit zu beschreiben.

(Literatur: Jaglom, Jaglom: "Wahrscheinlichkeit und Information")

AUFGABEN: (2. Serie)

9. Klasse: (9.3) Welche der beiden Zahlen ist größer

$$\frac{10^{1965}+1}{10^{1966}+1} \quad \text{oder} \quad \frac{10^{1966}+1}{10^{1967}+1} \quad ?$$

(9.4) [a] ist die größte ganze Zahl, die nicht größer ist als a.

Man löse: $\left[\frac{x+1}{3}\right] = \frac{x-1}{2}$

10. Klasse: (10.3) Es ist zu beweisen:
Wenn die Summe der Quadrate zweier ganzer Zahlen durch 7 teilbar ist, so ist jede der Zahlen durch 7 teilbar.

(10.4) Der Winkel von 19° ist mit Hilfe von Zirkel und Lineal in 19 gleiche Teile zu teilen!

11./12.Klasse: (11.12.3) Drei Freunde wollen von A nach B. Ihnen steht dabei ein Motorrad mit Sozius zur Verfügung, das mit der Geschwindigkeit v_1 fährt. Ein Fußgänger läuft mit der Geschwindigkeit v_2.
Welches ist die kürzest mögliche Zeit, in der die Freunde von A nach B gelangen können?

(11.12.4) Innerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkt O ist ein Punkt A gegeben. Man finde den Punkt M auf der Peripherie so, daß der Winkel $\sphericalangle$ AMO maximal wird.

Achtung! Achtung! Achtung! Achtung! Achtung! Achtung! Achtung!

Auf Grund der alle unsere Erwartungen übertreffenden Nachfrage sahen wir uns genötigt, die erste Nummer unserer Zeitung nachzudrucken. Die Auslieferung dieser Nachdrucke erfolgt mit der Versendung der Februarnummer. Wir verlängern deshalb den Einsendetermin für die Lösung der ersten Preisaufgabe bis zum 20. Februar 1967 (Datum des Poststempels). Die Lösungen (ausführliche Lösungswege) bitten wir mit Angabe der Verfasser oder des Verfassers (Name, Alter, Schule, Klasse) einzusenden an:

Sektion Mathematik
an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
69 Jena, Helmholtzweg 1
Kennwort: "Die Wurzel"

PREISAUFGABE: (1. Aufgabe der VIII. IMO 1966 in Sofia)

(P.2) Bei einem mathematischen Schülerwettbewerb wurden insgesamt drei Aufgaben A, B, C gestellt. Unter allen Teilnehmern gab es (genau) 25 Schüler, von denen jeder wenigstens eine Aufgabe gelöst hatte. Unter den Schülern, die die Aufgabe A nicht gelöst hatten, war die Anzahl derjenigen, die die Aufgabe B gelöst hatten zweimal so groß wie die Anzahl der Schüler, welche die Aufgabe C gelöst hatten. Die Anzahl der Schüler, die nur die Aufgabe A gelöst hatten war um 1 größer als die Anzahl der übrigen Schüler, welche die Aufgabe A gelöst hatten. Von den Schülern, die nur eine Aufgabe gelöst hatten, hatte die Hälfte die Aufgabe A nicht gelöst.
Wieviel Schüler hatten nur die Aufgabe B gelöst?

Für jeden vollständigen Lösungsweg der Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf

Wertpunkte besitzen, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges). Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der folgenden Auslosung teil.
Die Lösungen sind unter den Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" bis zum 20. des jeweiligen Erscheinungsmonats (Datum des Poststempels) an obige Adresse einzusenden.
Wir behalten uns vor, auch für besonders gute Lösungen der übrigen Aufgaben sowie für besonders interessante eingesandte Aufgaben (mit Lösung) Wertpunkte zu verteilen.

Innerhalb von zwei Minuten errechnete in der Kasachischen SSR die elektronische Rechenmaschine "Minsk 2" die optimale Verteilung der Anbauflächen verschiedener Nutzpflanzen auf einer Fläche von 30 000 ha.

*

Vom Fahrstand des von einer französischen Werft gebauten Tankschiffes "Dollabella" aus können Kessel, Turbinen und Getriebe sowohl durch verschiedene Anzeigegeräte als auch durch Fernsehkameras und durch akustische Stationen überwacht und kontrolliert werden. Ein Computer mit Schreibgerät liefert ein ausgedrucktes Maschinentagebuch.

*

CELLATRON SER 2c

Die Friedrich-Schiller-Universität Jena erwarb einen elektronischen digitalen Kleinrechenautomaten vom Typ SER 2c. Der Rechner wird an der Sektion Mathematik, Abteilung Rechenzentrum, aufgestellt und soll der Ausbildung aller Mathematikstudenten in der Spezialrichtung Rechentechnik und Datenverarbeitung dienen.
Der CELLATRON SER 2c ist ein 4 Spezi-Dezimalrechner. Er besitzt einen Magnettrommelspeicher mit einer Speicherkapazität von 381 Befehlen und 127 Zahlen. Als externer Informationsträger dient 5-Kanal- bzw. 8-Kanal-Lochband. Resultate können wahlweise über eine Schreibmaschine in beliebigem Formulardruck oder über einen Streifenlocher auf Lochband zur weiteren Verarbeitung im Rechner ausgeliefert werden.

LÖSUNGEN

zu den Aufgaben der 1. Serie

(von Werner Nagel, SpS Zeiss, Kl. 9 A)

(9.1) Eine nicht durch 2 und nicht durch 3 teilbare Zahl läßt sich in folgender Form darstellen: $a = 6n \pm 1$

Begründung: Eine nicht durch 2 und nicht durch 3 teilbare Zahl ist nicht durch 6 teilbar.
Eine nicht durch 6 teilbare Zahl läßt sich in einer der drei Formen darstellen:

$$a_1 = 6n \pm 1, \qquad a_2 = 6n \pm 2, \qquad a_3 = 6n \pm 3$$

a_2 und a_3 fallen heraus, da sie durch 2 bzw. 3 teilbar sind.

Also: $a^2 - 1 = (36n^2 \pm 12n + 1) - 1$
$= 36n^2 \pm 12n = 12(3n^2 \pm n)$

Dieser Ausdruck ist durch 12 teilbar.

(11.12.1) (1) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50}$
$= \sqrt{2 \cdot 5^2}$

(2) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \cdot \sqrt{2}$

Da sich 2 nicht weiter zerlegen läßt, muß die Gleichung folgende Form haben:

$$(3) \qquad m\sqrt{2} + n\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$
$$m + n = 5 \qquad m, n \text{ nat.}$$

Da die Aussage in x und y symmetrisch ist:

n	m
1	4
2	3

Hieraus ergeben sich folgende Paare (x, y): (32, 2), (18, 8)

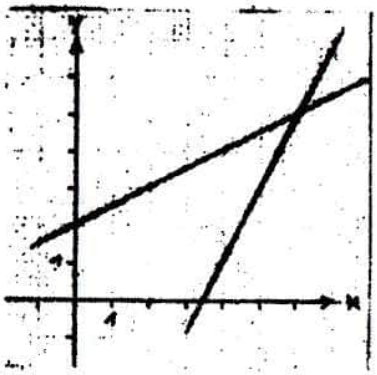
Relaxationsmethode (II)

(von Hannes Peuker, wiss. Mitarbeiter)

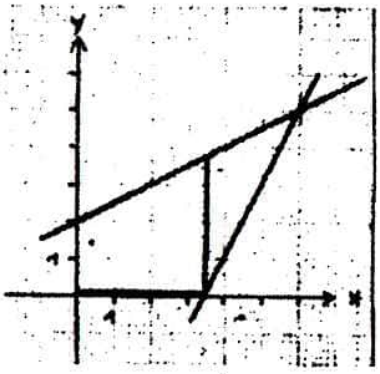
Das in Nummer 1 dargestellte Relaxationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme läßt sich geometrisch einfach interpretieren. Die folgenden Überlegungen werden für den Spezialfall: "2 Gleichungen mit 2 Unbekannten" angestellt.
Wie bekannt stellt die Menge aller Wertepaare (x, y), die eine Gleichung erfüllen, als Punkte in einem Kartesischen Koordinatensystem gedeutet, eine Gerade dar. Die Lösung des Gleichungssystems ergibt sich dann als Schnittpunkt der den beiden Gleichungen entsprechenden Geraden.
Für das Beispiel

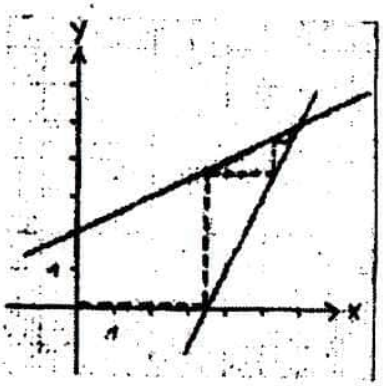
$$2x - y = 7$$
$$x - 2y = -4$$

aus Nummer 1 ergibt sich das Bild 1.



Deutet man die Korrekturgrößen Δx bzw. Δy geometrisch als "Korrekturschritte" in Richtung der x- bzw. y-Achse des Koordinatensystems, so ergibt sich beim Zusammensetzen der einzelnen Korrekturschritte (Auswertung der Tabelle in Nummer 1) ein treppenartiger Streckenzug (Bilder 2 und 3).





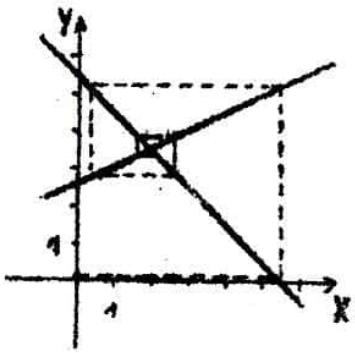
Die Relaxation erzeugt in der geometrischen Darstellung einen Streckenzug, der, vom Anfangspunkt (x_0, y_0) ausgehend, sich dem Lösungspunkt (x, y) beliebig weit nähert. Die Gestalt des Streckenzuges hängt von der Form der Gleichungen und vom Anfangswert ab. Beispielsweise liefert die geometrische Darstellung der Relaxation, angewendet

auf das Gleichungssystem

$x + y = 5{,}5$

$x - 2y = -5$

aus Nummer 1 das folgende Bild 4.



Bei Verallgemeinerung der Überlegungen auf Gleichungssysteme höherer Ordnung übertragen sich die Begriffe Ebene, Gerade, Streckenzug usw. auf analoge Begriffe des mehrdimensionalen Euklidischen Raumes.

Unser Literaturhinweis

N. N. Worobjow: Die Fibonaccischen Zahlen

(Verlag der Wissenschaften, Berlin 1954, erschien als erster Band der Serie: "Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik).

Der berühmte italienische Mathematiker LEONARDO VON PISA, der bekannter ist unter seinem Beinamen FIBONACCI (Fibonacci: Abkürzung von filius Bonacci, d. h. Sohn des Bonacci) veröffentlichte im Jahre 1202 folgende Aufgabe:

"Jemand sperrt ein Kaninchenpaar in ein allseitig ummauertes Gehege, um zu erfahren, wieviel Nachkommen dieses eine Paar im Laufe eines Jahres haben werde. Es wird dabei vorausgesetzt, jedes Kaninchenpaar bringe monatlich ein neues Paar zur Welt, und die Kaninchen würden vom zweiten Monat nach ihrer Geburt an gebären."

Monat	Anzahl der Paare
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21

Die Anzahl der vorhandenen Paare ist aus nebenstehender Tabelle ersichtlich. Bezeichnen wir die Anzahl der vorhandenen Kaninchenpaare im n-ten Monat mit u_n, so gilt offenbar

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

In dem sehr interessanten Heftchen von N. N. Worobjow werden nun verschiedene Untersuchungen über diese als Fibonaccische Zahlenfolge in die Literatur eingegangene Folge angestellt. Neben be-

stimmter zahlentheoretischen Untersuchungen werden auch Zusammenhänge zwischen der Fibonaccischen Zahlenfolge und den geometrischen Objekten, wie z. B. "harmonischen Rechtecken" angestellt. Der Verfasser setzt dabei kaum Kenntnisse, die über die 9. Klasse hinausgehen, voraus.

Für Schüler der 11. und 12. Klasse empfehlen wir

J. S. Wentzel: Elemente der Spieltheorie

(erschienen 1964 bei Teubner Leipzig, in Zusammenarbeit mit der Akademischen Verlagsgesellschaft Geest & Portig K. G. Leipzig, in der Reihe Kleine Naturwissenschaftliche Bibliothek, Reihe Mathematik, Bd. 1)

Die Theorie der Spiele ist ein noch sehr junges Teilgebiet der Mathematik. Ihre Entwicklung verdankt sie dem amerikanischen Mathematiker J. von Neumann. Anwendung findet die Theorie der Spiele bei der Lösung solcher praktischer Aufgaben (in Ökonomie, Militärwissenschaft usw.), bei denen Situationen zu analysieren sind, in denen sich zwei oder mehrere Seiten gegenüberstehen, die entgegengesetzte Ziele verfolgen. Hierbei sind die Auswirkungen jeder Maßnahme davon abhängig, welche Handlungsweise der Gegner auswählt. Der Verfasser erläutert an einfachen Beispielen die grundsätzlichen Begriffsbildungen der Spieltheorie. Unter der Lösung eines Spieles versteht man die nützlichste Strategie.
Es werden im Buch allgemeine Lösungsmethoden angegeben.
Wir empfehlen, beim Durcharbeiten ein bekanntes Spiel (Würfelspiel o. ä.) zu verwenden, um Schritt für Schritt die allgemeinen Begriffe und Ergebnisse, die im Buch behandelt werden, auf den konkreten Fall zu übertragen.

Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena.
Schriftleitung: Klaus Fischer, Hansgeorg Meißner
Mitarbeiter: R. Kuse, H. Peuker, H. Schirrmeister, J. Schwarz, L. Steiger, R. Wackernagel.
Die Zeitung erscheint monatlich zum Preis von 0,10 MDN.
Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS und EpS zu richten.

DEM VII. PARTEITAG DER SED GEWIDMET

3/67

WURZEL

schülerzeitung für mathematik

1. Jahrgang
1.7.1967

Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik an der Friedrich - Schiller - Universität Jena

Vom 6. bis zum 13. Februar fand in Lobenstein das 5. Mathematikspezialistenlager des Bezirkes Gera statt. 57 Schüler der Klassen 7 bis 12 nahmen daran teil. Die Teilnehmer des Lagers wurden auf Grund ihrer Platzierung bei der Bezirksolympiade delegiert. Diese Auswahlmethode erwies sich aus folgenden Gründen als unzureichend:

1. Die Olympiadenatmosphäre ist in vielen Fällen für eine exakte Bewertung nicht geeignet.
2. Es gibt viele Schüler, die die fachliche und gesellschaftliche Qualifikation haben, ein Mathematik/Diplom- oder ein Mathematik/Lehrer-Studium aufzunehmen, deren Platzierung bei der Bezirksolympiade jedoch für eine Delegierung zum Spezialistenlager nicht ausreicht.

Hieraus ergibt sich, daß es zweckmäßig ist, den Teilnehmerkreis auf etwa 90 Schüler zu erweitern und nach anderen Gesichtspunkten auszuwählen.

Über die Themen der fachlichen Arbeit berichteten wir bereits in "Die Wurzel" Nr.2. Darüber hinaus wurden in Sonderveranstaltungen und persönlichen Gesprächen Fragen und Probleme neuer, moderner Wissenschaftsrichtungen, wie Bionik, Deontik, Genetik, mathematische Linguistik usw., die sich mit Mitteln der mathematischen

Kybernetik betrachten lassen, aufgeworfen und zum Teil geklärt. Auch ist es uns in diesem Lager besser als in den vorangegangenen gelungen, Schüler für ein Mathematikstudium zu gewinnen.

Traditionsgemäß wurde auch dieses Lager mit einer Lagerolympiade abgeschlossen. Von 40 möglichen Punkten erreichten als beste Schüler:

7.Klasse	1. Vogts, Matthias	37 Punkte
	2. Schrocko, Winfried	33 Punkte
8.Klasse	1. Gulbins, Matthias	24 Punkte
	2. Uhl, Gerd	22 Punkte
9.Klasse	1. Leopold, Hans-Gerd	38 Punkte
	2. Waltenberger, Udo	30 Punkte
10.Klasse	1. Nauber, Walter	37 Punkte
	2. Eckner, Hartwig	31 Punkte
11./12.Klasse	1. Kiefer, Wolfgang	23 Punkte
	2. Taubald, Elke	16 Punkte

Es ist zu erwähnen, daß alle anwesenden 5 Mädchen gute Plätze belegten.

Wir sprechen allen Teilnehmern, insbesondere den Preisträgern der Lagerolympiade, nochmals unsere Anerkennung für ihre gezeigten fachlichen Leistungen aus und wünschen allen Teilnehmern an der Republikolympiade viel Erfolg.

Wir glauben, im Namen aller Teilnehmer des Spezialistenlagers zu sprechen, wenn wir Gen. Martin Holzapfel, der trotz vieler Schwierigkeiten dieses Lager zu unserer aller Zufriedenheit organisierte, auf diesem Wege noch einmal recht herzlich danken.

In den folgenden Jahren wird das Bezirksspezialistenlager immer mehr zu einem Lager werden, in dem den besten Schülern des Bezirkes von einem hohen Niveau aus mathematische Kenntnisse vermittelt werden, die sie befähigen, mathematische Probleme zu erkennen und zu lösen. Die Werbung für das Mathematikstudium, insbesondere für das Lehrerstudium, wird durch Veranstaltungen über Ausbildungsmöglichkeiten, aber vor allem durch persönliche Gespräche, weiter ausgebaut werden. Um ein hohes mathematisches Niveau im Lager zu gewährleisten, ist es notwendig, die in Frage kommenden Schüler intensiv auf das Lager vorzubereiten. Zur Lösung aller dieser Aufgaben wurde in einer Beratung mit Vertretern des Rates des Bezirkes, Abt. Volksbildung, folgendes festgelegt:

1. Die einzelnen Kreise führen Kreislager für Schüler der

In den folgenden Jahren wird das Bezirks-Spezialistenlager immer mehr zu einem Lager werden, in dem den besten Schülern des Bezirkes von einem hohen Niveau aus mathematische Kenntnisse vermittelt werden, die sie befähigen, mathematische Probleme zu erkennen und zu lösen. Die Werbung für das Mathematikstudium, insbesondere das Lehrerstudium, wird durch Veranstaltungen über Ausbildungsmöglichkeiten, aber vor allem durch persönliche Gespräche, weiter ausgebaut werden. Um ein hohes mathematisches Niveau der Veranstaltungen im Lager zu gewährleisten, ist es notwendig, die in Frage kommenden Schüler intensiv auf das Lager vorzubereiten.

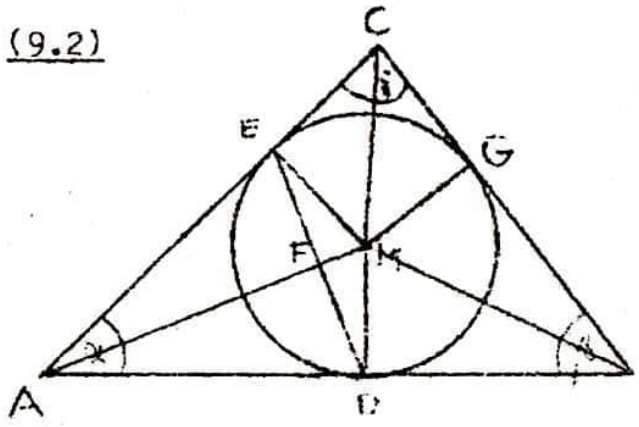
Zur Lösung aller dieser Aufgaben wurde in einer Beratung mit Vertretern des Rates des Bezirkes, Abt. Volksbildung, folgendes festgelegt:

1. Die einzelnen Kreise führen Kreislager für Schüler der sechsten bis achten Klassen durch. Diese Kreislager dienen unter anderem zur Auswahl der Schüler, die zum Bezirkslager delegiert werden. Die fachliche Betreuung der Schüler obliegt Studenten der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena und Lehrern der einzelnen Kreise. Diese Lehrer haben die Möglichkeit, Vorschläge für fachliche Pläne sowie Literaturhinweise usw. von uns zu beziehen.
2. Das Bezirkslager wird mit einer Kapazität von 80 bis 90 Schülern der achten bis zwölften Klassen durchgeführt. Die fachliche Betreuung wird durch Mitarbeiter der Universität und Lehrer gewährleistet. Um die Schüler entsprechend ihrem individuellen Bildungsstand optimal anzuleiten, ist eine genügend große Anzahl von Betreuern (etwa 12) erforderlich.
3. Um ein einheitliches Mindestniveau zu erreichen, werden wir in der "Wurzel" fachliche Beiträge, Literaturhinweise und Übungsaufgaben veröffentlichen. Damit wollen wir den Schülern eine kontinuierliche Vorbereitung auf die Lager ermöglichen.
4. Vom Rat des Bezirkes, Abt. Volksbildung, werden Verträge für feste Sommer- und Winterlager, die gegebenenfalls anderen Bezirken als Tauschobjekt angeboten werden können, abgeschlossen.

Wir werden in der Mai-Nummer über die organisatorischen Vorbereitungen des Sommerlagers 1967 informieren.

Im folgenden geben wir Kurzfassungen der noch fehlenden Lösungen der Aufgaben aus "Wurzel" Nr.1 an:

(9.2)



$\triangle DMA \sim \triangle MDF$

$\sphericalangle MDA = \sphericalangle FDM = \sphericalangle MEF = \frac{\alpha}{2}$

Analog folgt für die anderen Winkel:

$\sphericalangle MDG = \sphericalangle DGM = \frac{\beta}{2}$

$\sphericalangle MGE = \sphericalangle MEG = \frac{\gamma}{2}$

Hieraus ergeben sich die Innenwinkel im Dreieck DEG zu:

$$\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \frac{\beta+\gamma}{2}, \quad \frac{\gamma+\alpha}{2}$$

Da $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$ jeweils kleiner als 180° ist, folgt $\triangle$ DEG ist spitzwinklig.

(10.1)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad (1)$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt $x_1 = x_4$ (3)

und succeassive $x_1 = x_4 = x_7 = \ldots = x_{100}$ (4)

Analog folgt $x_2 = x_5 = x_8 = \ldots = x_{98}$ (5)

$x_3 = x_6 = x_9 = \ldots = x_{99}$ (6)

Aus $x_{99} + x_{100} + x_1 = 0$
folgt durch Einsetzen
von (4) und (6) $x_3 + 2x_1 = 0$ (7)

Analog folgt aus
$x_{100} + x_1 + x_2 = 0$ $2x_1 + x_2 = 0$ (8)

und aus (7) und (8) $x_2 = x_3$ (9)

Aus (9) und (1) folgt $x_1 + 2x_2 = 0$ (10)

und aus (8) und (10) $x_1 = x_2$

Daher gilt wegen (9) $x_1 = x_2 = x_3$

Aus (1), (4), (5) und (6) folgt die Lösung:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{100} = 0 .$$

(10.2)

$$\left|\frac{x-y}{1-xy}\right| < 1 \qquad (*)$$

$$|x-y| < |1-xy|$$

Diese Aussage ist in x,y symmetrisch, also gilt o.B.d.A. $x \geq y$.

$$x - y < |1 - xy|$$

1. Fall: $y \geq 0$ (bzw. $x \leq 0$) (in beiden Fällen haben x und y gleiches Vorzeichen)

$$x - y < 1 - xy$$
$$x + xy < 1 + y$$
$$x(1+y) < 1 + y \text{ klar, da } |x| < 1$$

2. Fall: $x > 0 > y$ Wir setzen: $y = -y'$

$$x + y' < 1 + xy'$$
$$x - xy' < 1 - y'$$
$$x(1-y') < 1 - y' \text{ klar, da } |x| < 1$$

Da alle Schlüsse umkehrbar sind, ist die Aussage (*) richtig.

(11./12.2) Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $n = 2$ $\quad 4 > (1-x)^2 + (1+x)^2$

$$4 > 1-2x+x^2+1+2x+x^2$$
$$2 > x^2 \quad \text{richtig, da } |x| < 1.$$

Induktionsschritt:

Induktionsannahme: $2^n > (1-x)^n+(1+x)^n$ gilt.

Induktionsbehauptung: $2^{n+1} > (1-x)^{n+1}+(x+1)^{n+1}$

Beweis: $2^{n+1} > (1-x)^n(1-x) + (1+x)^n(1+x)$

$$2^n+2^n > (1-x)^n+(1+x)^n - x(1+x)^n + x(1+x)^n$$
$$2^n > (1-x)^n + (1+x)^n \quad \text{ist laut Annahme richtig}$$

o.B.d.A.: $x > 0$

$$2^n > x((x+1)^n-(1-x)^n)$$

da $1-x > 0$ $\quad 2^n > x(1-x)^n > x((x+1)^n-(1-x)^n)$

Da $x < 1$, ist diese Aussage richtig.

Somit ist die Behauptung für alle natürlichen n bewiesen.

"DACCIC 1" lernt Russisch

Die rumänische elektronische Rechenmaschine "DACCIC" wird jetzt zum Studium des Russischen und anderer Fremdsprachen vorbereitet. Sie dekliniert bereits Substantive fehlerlos. Bis 1967 soll sie reif für Übersetzungsarbeiten sein. Der Rechner leistet 2000 Operationen je Sekunde. Bisher löste er schwierige Produktionsprobleme von 40 Industriebetrieben, errechnete Eisenbahnfahrpläne, bestimmte die wirtschaftlichsten Hochofenchargen und erwies sich im bekannten Streichholzknobelspiel mit drei Partnern als unbesiegbar.

*

Kybernetische Ampel

In Leningrad wird mit Hilfe einer kybernetischen Verkehrsampel die Durchlaßfähigkeit einer verkehrsreichen Straßenkreuzung auf das Vierfache erhöht.

Um unsere Leser mit den Anforderungen auf der Internationalen Olympiade Junger Mathematiker (IMO) bekanntzumachen, veröffentlichen wir auch in dieser Nummer zwei Aufgaben der VIII IMO 1966 in Sofia. Lösungen dieser Aufgaben können an uns eingesandt werden und werden wie Lösungen von Preisaufgaben bewertet.

Einsendeschluß für die folgenden Aufgaben 2 und 3 der IMO: 20.4.67

2.Aufgabe der VIII. IMO 1966 Sofia

Beweisen Sie folgenden Satz:

Falls die Längen a, b, c der Seiten und die Maße α, β, γ der ihnen jeweils gegenüberliegenden Winkel eines Dreiecks die Gleichung

$$a + b = \tan\frac{\gamma}{2} \cdot (a \tan\alpha + b \tan\beta)$$

erfüllen, so ist das Dreieck gleichschenklig.

3.Aufgabe der VIII. IMO 1966 Sofia

Es ist zu beweisen, daß die Summe der Abstände zwischen dem Mittelpunkt der einem regelmäßigen Tetraeder umbeschriebenen Kugel und den vier Eckpunkten des Tetraeders kleiner ist als die Summe der Abstände zwischen jedem anderen Punkt des Raumes und den Eckpunkten des Tetraeders.

Die Lösungen (ausführliche Lösungswege) bitten wir mit Angabe der Verfasser (oder des Verfassers)(Name, Alter, Schule, Klasse) einzusenden an: Schriftleitung "Wurzel"

69 Jena

Helmholtzweg 1

PREISAUFGABE

(P.3) Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1x_2x_3\cdots x_{1967} &= 1 \\ x_1 - x_2x_3\cdots x_{1967} &= 1 \\ \vdots \qquad\quad \ddots & \\ x_1x_2\cdots x_{1966} - x_{1967} &= 1 \end{aligned}$$

Es sind alle möglichen Werte für x_{47} zu berechnen!

Für jeden vollständigen Lösungsweg der Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte besitzen, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges). Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der folgenden Auslosung teil.
Die Lösungen sind unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" bis zum 20. des jeweiligen Erscheinungsmonats (Datum des Poststempels) an obige Adresse einzusenden.

AUFGABEN:(3.Serie)

9.Klasse: (9.5) Es sind die positiven ganzen Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{100}$ gegeben. Weiter ist bekannt, daß

$$\begin{aligned} a_1 &> a_0 \\ a_2 &= 3a_1 - 2a_0 \\ a_3 &= 3a_2 - 2a_1 \\ &\vdots \\ a_{100} &= 3a_{99} - 2a_{98} \end{aligned}$$

ist.
Man beweise, daß $a_{100} > 2^{99}$ ist.

(9.6) Man bestimme den Radius eines Kreises, der 3 gegebene Kreise, die sich untereinander von außen berühren und die Radien

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 \text{ LE} \\ v_2 &= 2 \text{ LE} \\ v_3 &= 3 \text{ LE} \end{aligned}$$

besitzen, umschließt.

10.Klasse: (10.5) Seien die Seiten a und b eines Dreiecks gegeben. Man konstruiere ein Dreieck so, daß sich die Seitenhalbierenden von a und b unter einem rechten Winkel schneiden.

(10.6) Ein Schwimmer schwimmt gegen die Strömung der Newa. In der Nähe der "Republikanischen Brücke" verliert er eine leere Flasche. Nachdem er noch 20 Minuten gegen die Strömung geschwommen ist, bemerkt er seinen Verlust und kehrt um, um die Flasche einzuholen. Er holt sie in der Nähe der "Leutnant-Schmitt-Brücke" ein.

Wie groß ist die Srömungsgeschwindigkeit der Newa, wenn die Entfernung zwischen den beiden Brücken zwei Kilometer beträgt?

11.12.Klasse:

(11./12.5)

Welche Lage muß ein Quader im Raum haben, damit der Flächeninhalt seiner Projektion auf eine horizontale Ebene möglichst groß ist?

(11./12.6)

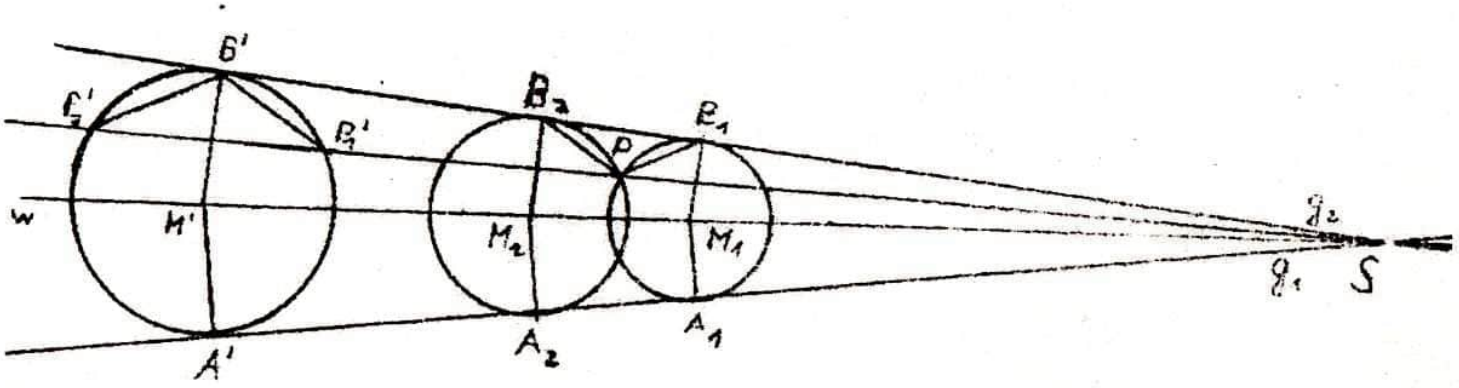
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, für welche die Ungleichung

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \geq \frac{8}{\pi} \quad \text{gilt.}$$

Lösung der Preisaufgabe (P1)

(eingesandt von Joachim Pegler, 9.Klasse, Greiz)

Konstruktion:



Konstruktionsbeschreibung:

Ich konstruiere zuerst die Winkelhalbierende w. Auf dieser lege ich einen beliebigen Punkt M' fest. Durch M' konstruiere ich das Lot auf g_1 und g_2 und erhalte die Punkte A' und B'. Um M' schlage ich einen Kreisbogen mit $r = \overline{M'B'} = \overline{M'A'}$. Ich verbinde S mit P über P hinaus und erhalte die Schnittpunkte dieses Strahles mit dem Kreisbogen (P_2' und P_1'). Ich verschiebe $B'P_1'$ und $A'P_1'$ parallel durch P und erhalte B_1 bzw. A_1. In A_1 und B_1 errichte ich die Senkrechten und erhalte als Schnittpunkt M_1, der auf der Winkelhalbierenden liegt. Um M_1 zeichne ich den Kreisbogen mit $r = \overline{M_1B_1} = \overline{M_1A_1}$. Dies ist der erste Kreisbogen, der die beiden Geraden berührt und durch den Punkt P geht.

Den zweiten Kreis konstruiere ich folgendermaßen:

$B'P_2'$ parallelverschoben durch P. (Ich erhalte den Punkt B_2);

AP_2 verschiebe ich parallel durch P und erhalte A_2. Ich errichte die Senkrechten in A_2 und B_2 und erhalte als Schnittpunkt M_2.

Um M_2 schlage ich einen Kreisbogen mit $r = \overline{M_2A_2} = \overline{M_2B_2}$. Dies ist der zweite Kreisbogen, der die Geraden berührt und durch den Punkt P geht.

Zusatz: Da es zwei Kreise gibt, die die verlangten Bedingungen erfüllen, ist die Aufgabe nicht eindeutig.

Bemerkung der Redaktion:

Die Lösung der Preisaufgabe wurde originalgetreu abgedruckt. Da die Lösung jedoch einige Unkorrektheiten enthält, möchten wir unsere Leser bitten, diese Lösung kritisch zu durchdenken. In Zukunft werden wir einigen eingesandten Lösungen exakte Lösungen gegenüberstellen. Wir weisen hier darauf hin, daß zur exakten Lösung noch die Begründung der Konstruktion gehört:

Die Konstruktion beruht auf der Ähnlichkeit der Dreiecke:

$$\Delta\, M'P_1'B' \sim \Delta\, M_2PB_1$$

$$\Delta\, M'P_2'B' \sim \Delta\, M_1PB_2$$

M_1 und M_2 wurden auf der Winkelhalbierenden festgelegt. B_1 und B_2 wurden auf g_2 festgelegt. Da die ähnlichen Dreiecke parallel liegen, müssen somit M_1 und M_2 die Mittelpunkte der gesuchten Kreise sein.

Lösung zur "Wurzel" Nr. 2:

(10.4) (Roland Engelmann, SpS Zeiss Jena, Kl. 8)

Da $19^\circ \cdot 19 = 361^\circ$ sind, muß ich den Winkel von 19° 19mal abtragen und erhalte einen Winkel von 1°. Diesen Winkel kann ich jetzt immer wieder abtragen.

(9.3) (eingesandt von Roland Engelmann, SpS Zeiss Jena, Kl. 8)

$$\frac{10^{1965}+1}{10^{1966}+1} \gtreqless \frac{10^{1966}+1}{10^{1967}+1} \quad \Big| \cdot (10^{1967}+1)(10^{1966}+1)$$

$$(10^{1965}+1)(10^{1967}+1) \gtreqless (10^{1966}+1)^2$$

$$10^{3932} + 10^{1965} + 10^{1967} + 1 \gtreqless 10^{3932} + 2 \cdot 10^{1966} + 1 \quad \Big| \quad -1-10^{3932}$$

$$10^{1965} + 10^{1967} \gtreqless 2 \cdot 10^{1966} \quad \Big| \quad : 10^{1965}$$

$$1 + 100 \gtreqless 20$$

$$101 \gtreqless 20$$

$$\underline{101 > 20}$$

$$\curvearrowright \quad \frac{10^{1965}+1}{10^{1966}+1} > \frac{10^{1966}+1}{10^{1967}+1}$$

Berichtigung

In "Wurzel" Nr. 2 ist uns bedauerlicherweise ein Druckfehler unterlaufen. In der Lösung der Aufgabe (11.12.1) auf Seite 7 über dem Term

$$2 \cdot 5^2$$

wurde das Quadratwurzelzeichen nicht ausgedruckt.

Richtig muß es heißen:

(11.12.1) (1) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50}$

$= \sqrt{2 \cdot 5^2}$

usw.

Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena.
Schriftleitung: Klaus Fischer, Hansgeorg Meißner
Mitarbeiter: N. Kuse, H. Peuker, H. Schirrmeister, J. Schwarz, L. Staiger, R. Wackernagel.
Die Zeitung erscheint monatlich zum Preis von 0,10 MDN.
Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS und SpS zu richten.

DEM VII. PARTEITAG DER SED GEWIDMET

4/67

1. Jahrgang
1.4.1967

WURZEL

schülerzeitung für mathematik

Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik an der Friedrich - Schiller - Universität Jena

Olympiade Junger Mathematiker (Republikausscheid)

Vom 29.3. bis zum 1.4.1967 fand in der Jugendhochschule "Wilhelm Pieck" in Berlin/Bogensee die Republikolympiade Junger Mathematiker statt. Die Delegation des Bezirkes Gera wurde vom Genossen Rödel, Lehrer an der Spezialoberschule des VEB Carl Zeiss Jena, geleitet. Folgende Schüler vertraten unseren Bezirk:

M. Fischer	SpS VEB Carl Zeiss Jena
H. Fischer	SpS VEB Carl Zeiss Jena
C. Wetzker	SpS VEB Carl Zeiss Jena
H. Göpel	SpS VEB Carl Zeiss Jena
E. Martin	EOS "H.Heine" Jena
G. Veit	EOS "H.Heine" Jena
W. Nauber	EOS I Gera
H. Eckner	EOS Schleiz
W. Kiefer	EOS Pößneck
B. Engelmannn	POS Stadtroda
M. Heynisch	POS Zeulenroda

N. Schmidt BBS VEB Carl Zeiss Jena
H. Hackbarth BBS VEB Carl Zeiss Jena

Wir beglückwünschen alle Teilnehmer des Republikausscheides zu ihrer Delegierung.
Das Spezialistenlager Junger Mathematiker des Bezirkes Gera (Sommerlager) wird vom 6. 7. - 19. 7. 1967 in Bad Köstritz stattfinden. An diesem Lager werden ca. 95 Schüler teilnehmen. Die fachliche Betreuung wird wieder von Mitarbeitern und Studenten der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena übernommen.

J. Schwarz

M i c h a e l S t i f e l

Das Schicksal eines Mathematikers vor 400 Jahren

Man schrieb den 18. Oktober des Jahres 1533. In Lochau, einem Dorf in der Nähe Wittenbergs, versammelte sich bereits in früher Morgenstunde die Gemeinde, um den Weltuntergang zu erwarten. Auf diesen Tag und zwar auf die 10. Morgenstunde hatte der dortige Pfarrer Michael Stifel die Katastrophe angesetzt. Die Zeit verstrich unter Bangen, es wurde gebetet, bereut und gejammert, aber das große Ereignis blieb aus. Zwar bewölkte sich der Himmel, ein Unwetter zog herauf und entlud sich, aber das war alles. Als schließlich in den Nachbardörfern die Mittagsglocken läuteten, erkannten auch die letzten, daß sie einem falschen Propheten aufgesessen waren. Die Spannung war viel zu stark, um darüber eine Erleichterung aufkommen zu lassen. Viele hatten Hab und Gut verkauft, Felder und Vieh waren vernachlässigt worden, Bettler und menschliche Aasgeier hatten ihren Vorteil weidlich wahrgenommen. Aus den Gutgläubigen wurden Verdammende. Die erregten Bauern drangen auf den falschen Wahrsager ein, verprügelten ihn und setzten ihn als Pfarrer ab.

Wer war nun dieser Stifel? Ein Narr? Ein Betrüger? Nein, weder das eine noch das andere. Er war ein Gelehrter, ein Mathematiker, sogar einer der bedeutendsten jener Zeit. Aber er war ein Kind seiner Zeit, angefüllt mit den Gedanken der Renaissance und der Mystik, in der man sich mit Vorliebe mit Eschatologie, mit Gedanken über das Endschicksal der Welt, beschäftigte. Er war eine kraftvolle Persönlichkeit, mit Bekennermut, ein Freund Luthers, gebannt von dessen

zu dieser Zeit kühnen revolutionierenden Gedanken. In Eßlingen geboren, trat er in die dortige Niederlassung der Augustiner ein. Als Luthers Gedanken in sein Kloster Eingang fanden, verschrieb er sich ihnen bald mit Feuereifer und mußte fliehen. Es folgen Jahre unsteten Wanderlebens als Geistlicher der neuen Glaubensrichtung im Mansfeldischen, in Österreich, in Sachsen und in Preußen. Von Ort zu Ort verschlagen, meist von den Nöten der Bauern bedrängt, treibt er in wenigen freien Stunden seine Studien. Er studiert eingehend den sprichwörtlich gewordenen Adam Ries, Schriften von Albrecht Dürer, die "Elemente" des Euklid und schließlich die "Coss" des Rudolff. "Cossisten" nannten sich damals die Mathematiker. (Dieses Wort, das sich aus dem lateinischen "Cosa" herleitet, wäre sinngemäß mit"die Unbekannte" zu übersetzen). Verglichen mit den Mathematikern des alten Griechenland sind ihre Leistungen bescheiden. Sie bewegen sich suchend und tastend vorwärts, ungewohnt des Lichts, das sie überflutet. Oft plagen sie sich mit Fragen ab, die ein Schüler heute mit einem Blick übersieht. Erst im Mannesalter lernen sie den Gebrauch der arabischen Ziffern und unsere heutige dezimale Schreibweise kennen. Die Kenntnis des Einmaleins grenzt an Zauberei, kein Wunder, daß ihre durchaus wissenschaftlich gedachten Werke mit der Schilderung verschiedener Vorstufen unserer Rechnungsarten beginnen. So auch die Bücher von Stifel.

Sein bekanntestes Werk ist die "Arithmetica integra", das nach mehrjähriger Verzögerung 1544 erschien. Es umfaßt 3 Teile. Im ersten und wichtigsten erschaut Stifel mit dem Weitblick des Genies Wesen und Bedeutung der Logarithmen, ohne allerdings den Namen zu prägen. Damit überspringt er ein halbes Jahrhundert der Entwicklung. Für gewöhnlich schreibt man die Entdeckung der Logarithmen dem schottischen Edelmann Neper zu. Stifel gibt in dem genannten Werk die Logarithmen zur Basis 2 an. Er erkennt auch klar die " ... wunderbaren Eigenschaften der Logarithmen, über die man ein ganz neues Buch schreiben könnte, aber er müßte sich bescheiden und mit geschlossenen Augen vorübergehen."[1] Später kam er auf diesen Gegenstand nicht mehr zurück. Er beschäftigt sich weiter mit der Lösung von Gleichungssystemen, auch mit quadratischen Gleichungen. Auch auf dem Gebiet der Zahlentheorie leistet er hervorragendes.
Die Leistung Stifels ist umso höher zu werten, als er Autodidakt war, der sein Wissen aus den damaligen Lehrbüchern gewonnen hatte.

Um seine Leistung richtig einschätzen zu können, vergleicht man ihn am besten mit seinen unmittelbaren Vorgängern, z. B. mit Adam Ries. Vergeblich sucht man bei diesem "berühmten Rechenmeister und Verfasser des ersten methodischen Rechenbuches", wie die goldenen Lettern am Rathaus zu Staffelstein bei Bamberg stolz verkünden, nach eigenen Einfällen. Er verstand nur, Überliefertes übersichtlicher zu ordnen. Stifels schon genanntes Werk dagegen enthält eine ganze Reihe von eigenen Gedanken.

Den Lebensabend verbrachte Stifel in Jena. Bereits in den Jahren 1547-1550 weilte er hier und unterrichtete Mathematik am "Pädagogium", einer Art Vorstudienanstalt. 1558 kam er ganz nach Jena, diesmal als Professor der Mathematik. 1564 trat er in den Ruhestand und am 19. 4. 1567 starb er hier, auf den Tag genau 80 Jahre alt. Über sein Wirken in Jena kursieren verschiedene Anekdoten. So soll er auf der Straße vor seinen Studenten höflich das Käppchen gezogen haben. Sicherlich scheinen seine finanziellen Sorgen die Ursache für diese Höflichkeit gewesen zu sein; denn er erhielt jährlich ganze 60 Taler Gehalt und war auf die Hörergebühren angewiesen. Die gleiche Veranlassung mag ihn auch bewogen haben, am Ende jeder Vorlesung die anwesenden Studenten zu fragen, wer von ihnen auch am nächsten Tag zu erwarten wäre. Eine Respektperson scheint er in Jena nicht mehr gewesen zu sein, man hat ihn wegen seiner Prophezeihung immer etwas über die Schulter angesehen. Jenaer Studenten waren auch die Schöpfer des seither bekannten Liedes:

"Stifel, du mußt sterben, bist noch so jung, jung, jung,
Stifel, du mußt sterben, bist noch so jung.
Wenn das der Absatz wüßt, daß Stifel sterben muß,
er tät sich grämen bis in den Tod."

1) (Nach "Eingefangenes Unendlich" von Franz von Krbek)

Zwei Kostproben aus der "Arithmetica integra":

1) Drei Freunde wollen 455 Gulden teilen. Wenn der erste 2 Gulden empfangen hat, dann soll der zweite 3 Gulden erhalten. Und wenn der zweite 4 Gulden bekommen hat, sollen dem dritten 5 Gulden zugeteilt sein. Es wird gefragt, wieviel Gulden jeder von der zu verteilenden Summe erhält?

2) Eine rechteckige Fläche, deren Diagonale $\sqrt{180}$ ausmacht, hat zwei Seiten, von denen die größere dreimal so groß wie die kleinere ist. Wie groß ist der Inhalt?

KLEINE MESSE-INFORMATION

Auf der diesjährigen Frühjahrs-Messe wurden auf dem Sektor "Rechentechnik und elektronische Datenverarbeitung" interessante Exponate vorgestellt. Unter anderem zeigten:

Mercedes-Büromaschinen AG i.V. Zella-Mehlis:
Elektronischer Kleinrechenautomat D4a

Technische Daten: Einadreß-Maschine mit sehr einfacher logischer Struktur. Magnettrommelspeicher mit einer Kapazität von 4096 Worten zu je 33 Bit.
Eingabemedium: 5-Kanal-Lochband
Ausgabe über Schreibmaschine

Die Recheneinheit des D4a ist volltransistoriert und räumlich auf die Größe eines Tisch-Fernsehgerätes reduziert. Als formalisierte Programmierungssprache ist COBOL vorgesehen.

Control Data Corporation:
Elektronischer Rechenautomat Control Data 2200

Technische Daten: Offensichtlich Einadreß-Maschine
Magnetkernspeicher mit einer Kapazität von 8192 Worten zu je 24 Bit in der Grundausstattung. Als zusätzliche Speicher können Magnetplatten- und Magnetbandeinheiten angeschlossen werden.
Eingabemedium: Lochkarten und Lochband.
Ausgabe über Schnelldrucker, Lochkarten- bzw. Lochbandstanzer.

Die Baueinheiten sind transistoriert. Die Grundausstattung kann im Baukastenprinzip durch Zusatzeinrichtungen erweitert werden. Als formalisierte Programmierungssprachen sind unter anderen ALGOL, FORTRAN und COBOL zugelassen.

PREISAUFGABE:

(P.4) Wenn man eine vierstellige Zahl mit derjenigen vierstelligen Zahl multipliziert, die dieselben Ziffern, jedoch in umgekehrter Reihenfolge, enthält, erhält man eine achtstellige Zahl, deren drei letzte Ziffern Nullen sind. Man finde alle diejenigen Zahlen, die diese Bedingung erfüllen!

Für jeden vollständigen Lösungsweg der Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte besitzen, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges). Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der folgenden Auslosung teil. Die Lösungen sind unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" bis zum 20. des jeweiligen Erscheinungsmonats (Datum des Poststempels) an unsere Adresse einzusenden:
Schriftleitung "Wurzel", 69 Jena, Helmholtzweg 1

AUFGABEN: (4.Serie)

9.Klasse: (9.7) Ein Fahrgast der Straßenbahn entdeckt seinen Freund der die Straße entgegengesetzt zur Fahrtrichtung entlanggeht. Nach einer Minute steigt er aus und läuft zurück, um den Freund zu treffen. Er läuft doppelt so schnell wie der Freund, aber nur mit dem vierten Teil der Geschwindigkeit der Straßenbahn. Nach insgesamt wieviel Minuten holt er den Freund ein?

(9.8) Die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks seien a. Um den Mittelpunkt dieses Dreiecks ist mit dem Radius $\frac{a}{3}$ ein Kreis zu schlagen. Wie groß ist der Teil der Dreiecksfläche, der außerhalb des Kreises liegt?

10.Klasse: (10.7) Gegeben sei eine Gerade g und zwei Punkte A und B, die auf der gleichen Halbebene von g liegen (siehe Skizze). Auf g ist ein Punkt C so zu konstruieren, daß $\overline{AC} + \overline{CB}$ ein Minimum ergibt.

(10.8) Beweisen Sie, daß die Zahl $53^{103} + 103^{53}$ durch 78 teilbar ist!

11./12.Klasse: (11./12.7) Es ist zu beweisen, daß der Ausdruck

$$n^7 - 14n^5 + 49n^3 - 36n$$

für beliebige natürliche n durch 5040 teilbar ist.

(11./12.8) In 10m Entfernung von einer senkrechten Hauswand ist ein Strahlrohr installiert. Unter welchen Winkel muß das Strahlrohr gehalten werden, wenn das Haus in maximaler Höhe bespritzt werden soll ? ($v_{Wasser} \approx 25\ ms^{-1}$)

Lösung der PREISAUFGABE P.2 (eingesandt von Andreas Grimm, EOS "Johannes R. Becher", Jena)

Die Schüler auf dem mathematischen Wettstreit lassen sich in folgende Gruppen einteilen: (in den Klammern stehen Symbole, die in der späteren Rechnung für die jeweiligen Gruppen benutzt werden)

1) Schüler, die keine Aufgabe gelöst haben	(O)
2) Schüler, die nur A gelöst haben	(A)
3) Schüler, die nur B gelöst haben	(B)
4) Schüler, die nur C gelöst haben	(C)
5) Schüler, die nur A und B gelöst haben	(AB)
6) Schüler, die nur A und C gelöst haben	(AC)
7) Schüler, die nur B und C gelöst haben	(BC)
8) Schüler, die A, B und C gelöst haben	(ABC)

Es gelten laut Aufgabenstellung folgende Beziehungen:

(A)+(B)+(C)+(AB)+(BC)+(AC)+(ABC) = 25

Zu den Schülern, die A gelöst hatten, gehören folgende Gruppen:

(A), (AB), (AC), (ABC)

Es gilt folgende Beziehung:

(A) = (AB)+(AC)+(ABC)+1

Die letzte Gleichung wird wie folgt umgestellt und in die erste eingesetzt:

(A) = (AB)+(AC)+(ABC)+1

(AB) = (A)-(AC)-(ABC)-1

Man setzt in folgende Gleichung ein:

$(A)+(B)+(C)+(AB)+(AC)+(BC)+(ABC) = 25$

$(A)+(B)+(C)+(A)-(AC)-(ABC)-1+(BC)+(AC)+(ABC) = 25$

$2(A)+(B)+(C)+(BC) = 26$

Zu den Schülern, die nur eine Aufgabe gelöst haben, gehören folgende Gruppen:

$(A), (B), (C).$

Dabei soll folgendes gelten: Die Hälfte hat die Aufgabe A nicht gelöst. Daraus folgt folgende Gleichung:

$(A) = (B)+(C)$

Diese Beziehung wird in die Gleichung $2(A)+(B)+(C)+(BC) = 26$ eingesetzt:

$2(A)+(A)+(BC) = 26$

$3(A)+(BC) = 26$

Wenn man für (A) bestimmte Werte einsetzt, erhält man auch für (BC) bestimmte Werte. Daraus entsteht folgende Tabelle:

$(A) = (B)+(C)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$26-3(A) = (BC)$	26	23	20	17	14	11	8	5	2	-1

Aus der Aussage, daß unter den Schülern, die die Aufgabe A nicht gelöst hatten, die Anzahl derjenigen, die die Aufgabe B gelöst hatten, doppelt so groß gewesen sei wie die Anzahl derer, die C gelöst hatten, kann man folgende Beziehung zusammenstellen:

$(B)+(BC) = 2((C)+(BC))$

(B), (C) und (BC) sind die einzigen Gruppen von Schülern, die A nicht gelöst hatten, aber dafür B oder C.

Aus der Tabelle kann man die Werte für (BC) und für (B)+(C) entnehmen.

Umgestellt sieht die oben genannte Gleichung wie folgt aus:

$$\frac{(B)+(BC)}{(C)+(BC)} = 2$$

Da (BC) bei der Betrachtung eines bestimmten Falles in der Tabelle gleichgroß ist, muß man sehen, daß man die Summe (B)+(C) so aufspaltet, daß die obengenannte Gleichung erfüllt wird. Ich nehme an, daß in der Summe (B)+(C) das Glied (C) gleich Null ist. Daraus entsteht folgende Tabelle:

$(B)+(BC)$	26	24	22	20	18	16	14	12	10
$(C)+(BC)$	26	23	20	17	14	11	8	5	2
$\frac{(B)+(BC)}{(C)+(BC)}$	1	<2	<2	<2	<2	<2	<2	>2	>2

Nur die beiden Fälle, bei denen (BC) = 5 und (BC) = 2 ist, können weiter betrachtet werden, weil bei den anderen $\frac{(B)+(BC)}{(C)+(BC)} < 2$ ist.

Die Gleichung (B)+(BC) = 2(C)+2(BC) wird wie folgt umgestellt:

$$(B) = 2(C)+(BC)$$
$$(B)+(C) = 3(C)+(BC)$$

Mit dieser Gleichung werden die beiden Fälle untersucht:

1.Fall: $(B)+(C) = 7$
$(BC) = 5$
$7 = 3(C)+5$
$3(C) = 2$
$(C) = \frac{2}{3}$

Dieser Fall scheidet aus, weil (C) eine nicht-ganze Zahl ist und somit auch (B), weil (B)+(C) ganzzahlig ist; aber eine gebrochene Anzahl von Schülern ist nicht möglich.

2.Fall: $(B)+(C) = 8$
$(BC) = 2$
$(B)+(C) = 3(C)+2$
$8 = 3(C)+2$
$3(C) = 6$
$(C) = 2$

Aus (B)+(C) = 8 und (C) = 2 folgt:

$(B) + 2 = 8$
$(B) = 6$

Die Anzahl der Schüler auf dem Wettstreit, die nur B gelöst haben, beträgt 6.

Wir haben die uns eingesandte Lösung absichtlich wörtlich übernommen, um sie ausführlich zu diskutieren. (An dieser Stelle ein Wort in eigener Sache: Wir bitten, die uns eingesandten Lösungen im Interesse der Korrektur möglichst kurz, übersichtlich und dabei doch so ausführlich wie nötig darzustellen.)

Betrachten wir zuerst den Teil bis zur ersten Tabelle:
Die Bezeichnung der Unbekannten ist sehr günstig und eindeutig gewählt, so daß eine ausführliche Erläuterung nahezu überflüssig ist.
Aus dem Text der Aufgabe wurden folgerichtig Gleichungen aufgestellt allerdings mit zuviel Zwischentext. Die anfängliche Bemerkung: "Es gelten..." hätte vollkommen ausgereicht.

Zur Kennzeichnung der Gleichungen und der Umformungen nummeriert man die Gleichungen zweckmäßig durch und kann dann die Umformungen kurz kennzeichnen (z.B. in folgender Form: aus (1) und (3) folgt X = Z + A (5)).
Hierbei sollte man jedoch darauf achten, daß man keine zu großen Gedankensprünge vollführt, so daß der Lösungsweg unübersichtlich wird.
Dann folgt eine Tabelle! Warum?
Eine so umfangreiche Tabelle trägt wesentlich zur Unübersichtlichkeit bei; außerdem hat der Schüler die Aussagen der Aufgabe noch nicht vollkommen ausgeschöpft, so daß er vielleicht später mit einer wesentlich kürzeren Tabelle, evtl. ganz ohne, wie der nachstehend angegebene Lösungsweg zeigt, auskommt.
Jetzt erst, nach der ersten Tabelle, wird die vierte Aussage des Textes zu Hilfe genommen. Sie wird wieder mit zuviel Text angeschlossen und die Aussage: "(B), (C) und (BC) sind die einzigen..." ist hier überflüssig, da dies ohnehin klar ist.
Die nun folgende Auswertung ist ein guter Einfall. Vielleicht wäre man hier ohne die zweite Tabelle, die wieder nichts zur Übersichtlichkeit beiträgt, auch ausgekommen.
Die abschließende Betrachtung der zwei Fälle ist gut und übersichtlich. Bei Nummerierung der Gleichungen hätte man die Umformungen jedoch, wie schon oben gezeigt, kürzer fassen können. Auch "...die gebrochene Anzahl..." hätte man durch eine geeignete Bemerkung zu Anfang umgehen können.
Diese dargestellte Lösung, die der Korrekteur erst nach mehrmaligem Hinsehen vollkommen erkennen kann, ist ein Beispiel für Lösungen, die wir wegen zu großer Unübersichtlichkeit in Zukunft, selbst wenn sie sachlich richtig sind, nicht voll werten können.

Nachfolgend sei eine Lösung angegeben, die derjenigen nahekommt, die von L. Staiger, Jena, zur IMO eingereicht wurde:
Man beachte hierbei, daß die Aussagen des Textes zuerst in Gleichungen überführt werden (1),...,(4).
Danach wird der Lösungsbereich eingeschränkt, sowohl hinsichtlich der Größe, als auch der Anzahl der Unbekannten, so daß die Lösung mit einem Minimum an notwendigem Aufwand auskommt.

Lösung: Aus dem Text ergeben sich folgende vier Gleichungen, die im Bereich der ganzen Zahlen zu lösen sind:

$$(A)+(B)+(C)+(AB)+(BC)+(AC)+(ABC) = 25 \qquad (1)$$

$$(B)+(BC) = 2((C)+(BC)) \qquad (2)$$

$$(A)-1 = (AB)+(AC)+(ABC) \qquad (3)$$

$$(A) = (B)+(C) \qquad (4)$$

aus (1) und (3) $2(A)+(B)+(C)+(BC) = 26$ (5)

aus (4) und (5) $3(A)+(BC) = 26$

$(A) \leq 8$

aus (4) $(B) \leq (A)$

es ergibt sich $(B) \leq (A) \leq 8$ (5')

aus (5) und (2) $2(A)+2(B)-(C) = 26$ (6)

aus (6) und (4) $(A)+3(B) = 26$

$$(B) = \frac{26-(A)}{3} \qquad (7)$$

Wegen (5') und (7) ergibt sich als einzige Lösung (B) = 6.

Um unsere Leser mit den Anforderungen der Internationalen Olympiade Junger Mathematiker (IMO) bekanntzumachen, veröffentlichen wir auch in dieser Nummer eine Aufgabe der VIII IMO 1966 in Sofia. Lösungen dieser Aufgaben können an uns eingesendet werden und werden wie Lösungen von Preisaufgaben bewertet.
Einsendeschluß für die folgende Aufgabe 5 der IMO: 20.5.67

Man löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
&|a_1-a_2|x_2 + |a_1-a_3|x_3 + |a_1-a_4|x_4 = 1\\
|a_2-a_1|x_1 + &\quad |a_2-a_3|x_3 + |a_2-a_4|x_4 = 1\\
|a_3-a_1|x_1 + |a_3-a_2|x_2 + &\quad |a_3-a_4|x_4 = 1\\
|a_4-a_1|x_1 + |a_4-a_2|x_2 + |a_4-a_3|x_3 &\quad = 1\ ,
\end{aligned}$$

wobei a_1, a_2, a_3 und a_4 gegebene, paarweise verschiedene reelle Zahlen sind.

K. A. Rupassow: Mathematische Denkaufgaben

(Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1965, 1,60 MDN)
Dieses Heftchen enthält 78 Aufgaben, die fast alle ohne rechnerischen Aufwand nur durch logische Überlegungen gelöst werden

können. Wie die folgenden Beispiele zeigen, kann die eine oder andere Aufgabe sicherlich auch bei einem mathematischen Quiz oder Schülerwettstreit Verwendung finden.

(Aufgabe 12) DIE DREI WEISEN

Drei Philosophen aus dem alten Griechenland, die vom Streiten und der sommerlichen Hitze müde geworden waren, legten sich unter einen Baum im Garten der Akademie, um ein wenig auszuruhen. Sie schliefen ein. Währenddessen beschmutzten ein paar Spaßvögel ihre Stirnen mit Kohle. Als sie erwachten und einander ansahen, gerieten sie in eine heitere Stimmung und begannen zu lachen. Keiner war beunruhigt, da er selbstverständlich annahm, daß die beiden anderen sich gegenseitig auslachten.

Plötzlich hörte einer der Weisen auf zu lachen, weil er begriffen hatte, daß seine eigene Stirn ebenfalls schwarz war. Wie kam er darauf?

(Aufgabe 56) Die Einwohner der Stadt A sagen immer die Wahrheit, die Einwohner der Stadt B immer die Unwahrheit und die Einwohner der Stadt C beantworten die Fragen abwechselnd wahr und unwahr. Ein Reisender möchte wissen, in welcher Stadt er sich befindet und in welcher Stadt der erste Passant, der ihm begegnet, wohnt. Wieviel Fragen muß er diesem stellen, wenn der Gesprächspartner nur mit "ja" oder mit "nein" antwortet?

(Aufgabe 38) Aus einer Gruppe von Leuten begrüßen sich einige durch Handschlag. Es ist zu beweisen, daß die Anzahl derjenigen, die einer ungeraden Anzahl von Leuten die Hand geben, gerade ist.

Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena.
Schriftleitung: Klaus Fischer, Hansgeorg Meißner
Mitarbeiter: N. Kuse, H. Peuker, H. Schirrmeister, J. Schwarz, L. Staiger, R. Wackernagel.
Die Zeitung erscheint monatlich zum Preis von 0,10 MDN.
Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS und SpS zu richten.

WURZEL

5
67

schülerzeitung für
mathematik

WURZEL - Schülerzeitung für Mathematik
Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik
an der Friedrich - Schiller - Universität Jena

Schriftleitung: Klaus Fischer, Hansgeorg Meißner
Mitarbeiter: N. Kuse, H. Peuker, H. Schirrmeister, J. Schwarz, L. Staiger, W. Ulbrich, R. Wackernagel.

Anschrift der Schriftleitung: Sektion Mathematik
69 Jena
Helmholtzweg 1
Kennwort "Wurzel"

Die Zeitung erscheint monatlich zum Preis von 0,20 MDN.
Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS und SpS zu richten.
Einzelbestellungen können direkt an die obige Adresse eingesandt werden.

Liebe Leser!

Unsere Zeitung erscheint ab Mai in einer neuen äußeren Form. Das neue Druckverfahren macht die Zeitung handlicher und ermöglicht neben einer Auflagenerhöhung auch eine bessere inhaltliche Gestaltung.

Unseren neuen Lesern möchten wir das Anliegen unserer Zeitung noch einmal kurz darlegen. Es ist unser Ziel, Sie durch die einzelnen Beiträge mit Problemen aus interessanten mathematischen Disziplinen bekanntzumachen. Die Aufgaben sollen dazu dienen, Ihr Interesse auf eine schöpferische Betätigung mit der Mathematik zu lenken. Wir sind sehr daran interessiert, mit Ihnen in engen fachlichen Kontakt zu treten, indem Sie uns möglichst viele Lösungen zu den veröffentlichten Aufgaben einsenden und uns Anregungen für die Gestaltung unserer Zeitung mitteilen.

Wir werden weiterhin die Auswahl der in unserer Zeitung abgehandelten Probleme und Aufgaben so treffen, daß besonders die Schüler der Klassenstufen 9 bis 12 angesprochen werden.

Holger Göpel (Spezialschule des VEB Carl Zeiss Jena)

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Nun ist die große Aufregung vorbei, die VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR, an der auch ich teilnehmen durfte.
Der Austragungsort hieß Bogensee, genauer die dort befindliche Jugendhochschule "Wilhelm Pieck". Dieser kleine, von Wald umgebene Ort mit seiner fast idyllischen Ruhe ließ nichts von der nahen Hauptstadt Berlin ahnen. Helle und geräumige Zimmer boten den einzelnen Delegationen nicht besser zu denkende Unterkünfte. Auch die reichliche und sehr gute Verpflegung übertraf alle unsere Erwartungen.
Doch nun zum eigentlichen Zweck unserer Reise. Am 30. März war es soweit. Verstreut in die verschiedensten Klassenräume bekam die Delegation aus dem Bezirk Gera neben allen anderen die ersten drei Aufgaben vorgesetzt. Die der Klassenstufe 10 schienen beim erstmaligen Überblicken gar nicht allzu schwierig, und doch hatten sie es in sich. In der vorgegebenen Zeit war es nämlich kaum möglich, jede Aufgabe bis ins Detail exakt zu lösen, was stets Punktabzug bedeutet. Ähnlich verlief der zweite Tag, auch die Aufgaben hatten etwa den gleichen Schwierigkeitsgrad. Damit war unsere Arbeit zu Ende. Doch jetzt erreichte die Spannung erst ihren Höhepunkt. Angesichts der vielen Teilnehmer (in der Klassenstufe 10 waren es 79) sanken die Hoffnungen auf eine gute Plazierung immer mehr.
Einen gelungenen Abschluß bildete der 1. April, den wir in der Hauptstadt verbrachten. Mittag- und Abendessen im "Lindencorso", ein Theaterbesuch und natürlich die Siegerehrung mit festlichem Kulturprogramm erfreuten wohl jeden Teilnehmer. Hier wurde bekannt, daß Schüler unserer Delegation einen zweiten und zwei dritte Preise errungen hatten und auch wir anderen recht gut abgeschnitten hatten.

Für das gute Gelingen diese Wettstreites können wir nur unserem Staat danken, der uns das ermöglicht hat unter der Führung unserer Arbeiterpartei. Deshalb sollen auch unsere erzielten Leistungen ein kleiner Beitrag zu Ehren des VII. Parteitages der S E D sein.

Die Delegation des Bezirkes Gera erreichte folgende Ergebnisse:

2.Preis:	Hartwig Eckner	EOS Schleiz
3.Preis:	Wolfgang Kiefer	EOS Pößneck
3.Preis:	Harald Fischer	SpS VEB Carl Zeiss Jena

Eine Anerkennungsurkunde erhielten:

Holger Göpel	SpS VEB Carl Zeiss Jena
Manfred Fischer	SpS VEB Carl Zeiss Jena
Gerhard Veit	EOS "Grete Unrein" Jena

Harald Schirrmeister

Angenäherte Bestimmung der Zahl π durch Nadelwürfe

Eine interessante Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist das sogenannte "Nadelproblem", das zuerst von dem französischen Mathematiker Buffon (1701-1788) gelöst wurde und das auch seinen Namen trägt.
Die Aufgabe lautet: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein möglichst schmaler Gegenstand (Nadel), der auf eine mit parallelen Geraden gleichen Abstandes a überzogene Ebene geworfen wird, eine Gerade kreuzt? Die Länge der Nadel sei D ($D < a$).

Das gesuchte Ereignis können wir vollständig mit dem Winkel x, den die Nadel mit den Geraden einschließt und durch den Abstand y ihres Mittelpunktes von der nächstgelegenen Geraden beschreiben (s.Abb.1). Die Nadel schneidet genau dann, wenn $p \geq y$ ist.
Aus der Abbildung erkennen wir weiterhin, daß

$$p = \frac{D}{2} \sin x$$

ist und erhalten damit endgültig das Kriterium für das gesuchte Ereignis:

$$y \leq \frac{D}{2} \sin x.$$

Auf Grund der Definition von y ist $0 \leq y < \frac{a}{2}$. Außerdem genügt es, Winkel x mit $0 \leq x < \pi$ zu untersuchen.

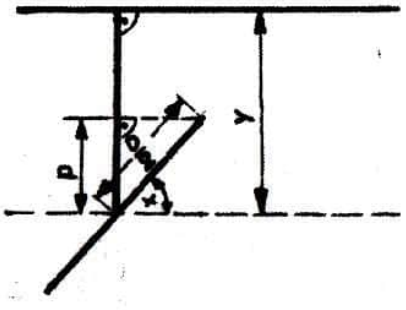


Abb. 1

Die Lagen der Nadel für alle anderen Winkel lassen sich bis auf eventuelle Vertauschung auf diesen Fall zurückführen. Wir zeichnen uns diesen Sachverhalt in ein Koordinatensystem ein (Abb.2):

Alle möglichen Lagen der Nadel werden hier als Punkte des Rechteckes R dargestellt. Die Nadel kreuzt eine Gerade dann, wenn ihre Lage durch Punkte der Fläche S beschrieben wird. Es liegt nahe, als Wahrscheinlichkeit P des gesuchten Ereignisses den Quotienten der beiden Flächen zu verwenden:

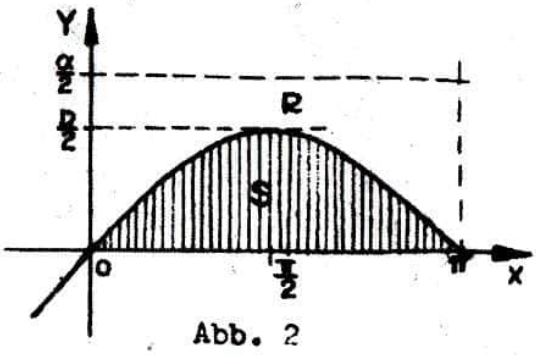


Abb. 2

$$P = \frac{S}{R}$$

Wir erhalten für die eine Fläche

$$R = \frac{a}{2} \cdot \pi$$

und S wird mit Hilfe der Integralrechnung bestimmt

$$S = \int_0^{\pi} \frac{D}{2} \sin x \, dx = D \, .$$

Somit ergibt sich

$$(*) \qquad P = 2 \, \frac{D}{a} \cdot \frac{1}{\pi}$$

Für das Verständnis des folgenden Abschnittes ist die Kenntnis des sogenannten Gesetzes der großen Zahlen, einem der grundlegendsten Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, notwendig. Dieser Satz besagt etwa, daß die Abweichung der sogenannten relativen Häufigkeit des Auftretens eines Ereignisses von dessen Wahrscheinlichkeit bei einer genügend großen Anzahl von Versuchen beliebig klein gemacht werden kann. Unter der relativen Häufigkeit eines Ereignisses A bei n gleichartigen Versuchen verstehen wir den Quotienten $\frac{\mu}{n}$, wobei μ die Anzahl des Auftretens von A in diesen n Versuchen ist.

Damit können wir π nun näherungsweise aus (*) errechnen, wenn für P die relative Häufigkeit des zugehörigen Ereignisses eingesetzt wird. Wir beschaffen uns diese relative Häufigkeit, indem wir eine Nadel möglichst oft auf ein Blatt Papier fallen lassen, das gemäß der Aufgabenstellung präpariert wurde und das so groß ist, daß es gewährleistet, daß die Nadel auch ohne Zielen immer darauf fällt.

Zielen ist nämlich verboten, weil alle Würfe zufällig sein müssen, wenn wir brauchbare Ergebnisse erhalten wollen. Man kann sich die Arbeit wesentlich vereinfachen, indem man mehrere Nadeln verwendet, also beispielsweise nicht eine Nadel 200 mal, sondern 10 Nadeln 20 mal wirft und jeweils die Fälle, in denen eine Nadel eine Gerade kreuzt, auszählt.
Weiterhin ist es zweckmäßig, a doppelt so groß zu wählen wie D. In diesem Fall vereinfacht sich (*) zu

$$P = \frac{1}{\pi}$$

und daraus ergibt sich

$$\pi = \frac{1}{P}.$$

Wenn wir P durch $\frac{\mu}{n}$ annähern, erhalten wir schließlich

$$\pi = \frac{n}{\mu}.$$

Dieser Zusammenhang zwischen Nadelwerfen und einem Näherungswert für die Zahl π ist immer wieder frappierend, auch wenn auf Grund dessen, daß ein Einzelner nicht genügend Versuche ausführen kann, die Näherung sehr ungenau wird.
Um für π einen Wert zu erhalten, der mit großer Wahrscheinlichkeit auf zwei Stellen genau ist, müßte man etwa 10 000 mal werfen. Diese Zahl kann man praktisch nur dann realisieren, wenn mehrere ihre Ergebnisse zusammen verwerten.

AUFGABEN (5. Serie)

9. Klasse: (9.9) Es ist ein Kreis zu konstruieren, der durch zwei gegebene Punkte A und B verläuft und eine gegebene Gerade g berührt.

(9.10) Es ist zu beweisen, daß $12^{2n} - 5^{3n}$ für alle natürlichen n durch 19 teilbar ist.

10. Klasse: (10.9) Man beweise, daß die Summe der Seitenhalbierenden im Dreieck kleiner ist als der Umfang.

(10.10) Beweisen Sie, daß das Produkt aus drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, wobei die mittlere Zahl die Kubikzahl einer natürlichen Zahl ist, stets durch 504 teilbar ist.

11./12.Klasse: (11./12.9) Von einer quadratischen Funktion sind die Wertepaare (0;-14) und (2;0) bekannt. Die erste Ableitung an der Stelle $x_T=-\frac{1}{3}$ beträgt $y'=-1$.
Wie lautet die Funktion?

(11./12.10) Für welche natürlichen Zahlen n ist der Ausdruck $20^n+16^n-3^n-1$ durch 323 teilbar?

PREISAUFGABE (P5):

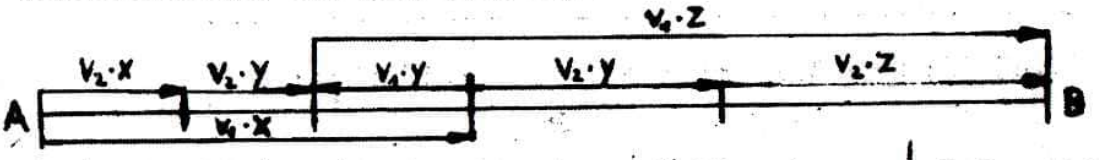
Es ist ein Kreis zu konstruieren, der einen zweiten Kreis in einem gegebenen Punkt S und eine gegebene Gerade berührt.

Für jeden vollständigen Lösungsweg der Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte besitzen, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges). Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der folgenden Auslosung teil. Die Lösungen sind unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" bis zum 20. des jeweiligen Erscheinungsmonats (Datum des Poststempels) an unsere Adresse einzusenden.

LÖSUNG DER AUFGABE (11./12.3)

(eingesandt von Roland Engelmann, SpS Zeiss, Klasse 8A)
Für diese Lösung erhielt der Einsender einen Wertungspunkt.

Die kürzeste Zeit erreichen sie dann, wenn der Fußgänger und der Motorradfahrer zur gleichen Zeit in B eintreffen.



$$v_2 x + v_2 y + v_1 z = v_1 x + v_2 y + v_2 z \qquad \left| -v_2 y - v_2 z - v_2 x \right.$$

$$v_1 z - v_2 z = v_1 x - v_2 x$$

$$(v_1 - v_2) z = (v_1 - v_2) x \qquad \left| : (v_1 - v_2) \right.$$

$$\underline{z = x}$$

$$v_1x - v_2x = v_2y + v_1y$$

$$x(v_1 - v_2) = y(v_1 + v_2)$$

$$y = x\,\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}$$

$$AB = v_2x + v_2y + v_1z$$

$$AB = v_2x + v_2x\,\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} + v_1x$$

$$AB = x\left(v_1 + v_2 + v_2\,\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\right)$$

$$x = \frac{AB}{v_1 + v_2 + v_2\,\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}}$$

$$x + y + z = \left(2 + \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\right)\left(\frac{AB}{v_1 + v_2 + v_2\,\frac{(v_1 - v_2)}{v_1 + v_2}}\right)$$

nach Umformen erhält man:

$$x + y + z = \frac{3v_1 + v_2}{v_1(v_1 + 3v_2)}\,AB$$

==========

Dies ist die kürzeste Zeit, in der die drei Freunde von A nach P gelangen können.

(11./12.4) Lösung: Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: $\overline{OA} \geq \overline{OM}$

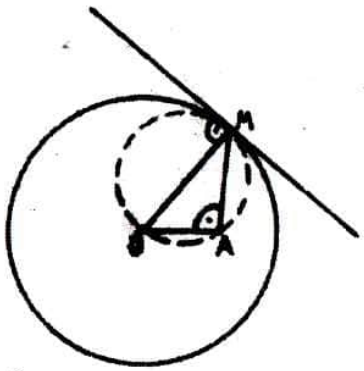
In diesem Falle ist der gesuchte Punkt M gleich dem Schnittpunkt von $\overline{OA}$ mit der Peripherie des Kreises, denn hierbei wird der Winkel $\sphericalangle$ AMO = 180 und somit im (entarteten) Dreieck maximal.

2. Fall: $\overline{OA} < \overline{OM}$

Zur Behandlung dieses Falles benötigen wir folgende, leicht zu beweisende Aussage:
Wenn s Sehne und $b_1, \ldots, b_n$ Bögen über s sind, so ist der Peripheriewinkel über s des kürzesten Bogens am größten.

↷ $\sphericalangle$ OMA ist maximal, wenn $\overset{\frown}{OA}$ minimal ist.

Da M auf dem Kreis liegt
↷ $\overset{\frown}{OA}$ wird minimal, wenn $\overset{\frown}{OA}$ den Kreis von innen berührt. (Sonst könnte man $\overset{\frown}{OA}$ noch verkleinern, ohne daß der Schnitt- bzw. Berührungspunkt von $\overset{\frown}{OA}$ mit dem Kreis verloren ginge.)
↷ $\overset{\frown}{OA}$ berührt den Kreis im gesuchten Punkt M.
↷ Der dem Dreieck $\triangle$ OMA umbeschriebene Kreis (dieser enthält ja den Bogen $\overset{\frown}{OA}$) besitzt im Punkt M mit dem gegebenen Kreis eine gemeinsame Tangente.



↷ $\overline{OM}$ ist Durchmesser des Kreises um $\triangle$ OMA. Da $\sphericalangle$ OAM Peripheriewinkel dieses Kreises ist, folgt nach Satz des Thales:

$$\sphericalangle OAM = 90^\circ$$

Rechenautomaten spielen Schach

In den letzten Jahren wurden in verschiedenen Ländern Programme für die automatische Lösung von Schachaufgaben mit Hilfe von elektronischen Ziffernrechenautomaten aufgestellt.
Ein erster größerer Vergleich zweier solcher Programme wurde durch einen Vergleichskampf zwischen dem sowjetischen Rechenautomaten M 20 und dem amerikanischen Ziffernrechner IBM 7090 begonnen.
Die erste von 4 geplanten Partien wurde in der Zeit von Nov. 1966 bis März 1967 ausgetragen und endete mit einem Sieg für die sowjetische M 20.
Die Spielaufzeichnung läßt vermuten, daß beide Programme ohne gespeicherte Eröffnungsvarianten arbeiten.

Dr. E.Krätzel

Die Methode der vollständigen Induktion I

Zur Erläuterung der Methode der vollständigen Induktion beginnen wir mit einem Beispiel:

Man bestimme die Summe der ersten n natürlichen Zahlen

$$S_n = 1+2+.....+n.$$

Ohne Schwierigkeiten können wir die ersten Werte S_n ausrechnen:

$$S_1 = 1,\ S_2 = 3,\ S_3 = 6,\ S_4 = 10,\ S_5 = 15,.....$$

Wie lautet aber das allgemeine Bildungsgesetz für Sn, d.h. wie können wir S_n für beliebiges n darstellen? Wir können die Werte S_n zwar für beliebig großes n ausrechnen, jedoch in dieser Weise nicht für jedes n. Nun sehen wir, daß wir die ersten fünf Werte folgendermaßen aufschreiben können:

$$S_1 = \frac{1\cdot 2}{2},\ S_2 = \frac{2\cdot 3}{2},\ S_3 = \frac{3\cdot 4}{2},\ S_4 = \frac{4\cdot 5}{2},\ S_5 = \frac{5\cdot 6}{2}$$

Wir schließen jetzt von diesen speziellen Aussagen über S_n (n = 1,2,3,4,5) auf eine allgemeine Aussage über S_n. Wir vermuten, daß sich S_n für beliebiges n in der Form

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (1)$$

darstellen läßt. Diesen Übergang, den Schluß von speziellen Aussagen zu allgemeinen Aussagen, nennt man "Induktion". Es steht noch die Bestätigung der Richtigkeit von (1) für jedes n aus. Dazu überlegen wir uns folgendes:

Die Richtigkeit von (1) ist ja für einige Anfangswerte (n=1,2,3,4,5) festgestellt worden. Wir nehmen an, wir hätten die Richtigkeit für alle n = 1,2,....,k überprüft.

Es gilt also insbesondere

$$S_k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Ist dann (1) auch für k+1 richtig, gilt also

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \ ?$$

Das können wir aber leicht bestätigen:

Es ist

$$S_{k+1} = (1+2+.....+k)+(k+1)$$
$$= S_k+k+1.$$

S_k ist uns bekannt, also ist

$$S_{k+1} = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$$
$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Nun können wir schließen, daß die Formel (1) für alle Werte von n richtig ist. Für n = 1, 2, 3, 4, 5 ist sie ja nach unserer Rechnung richtig, und da aus der Richtigkeit für ein gewisses n die Richtigkeit für n + 1 folgt, so folgt für die Richtigkeit schließlich für alle n, denn wir haben ja jetzt die Möglichkeit, weiter v n + 1 auf n + 2, von n + 2 auf n + 3 usw. zu schließen. - Das ist die Methode der vollständigen Induktion. Noch ein Wort zur Überprüfung der Anfangswerte von (1): Mußten wir wirklich mehrere Werte - hier n = 1, 2, 3, 4, 5 - überprüfen? Offensichtlich nicht! Es genügt zu zeigen, daß

$$S_1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

ist. Wir hatten doch gezeigt, daß wir von n auf n + 1 schließen können, und das können wir dann auch sofort auf n = 1 anwenden. Jetzt sind wir in der Lage, die Methode allgemein zu formulieren.

Das Prinzip der vollständigen Induktion:
Für jede natürliche Zahl n ist die Aussage A richtig, wenn
1) A für n = 1 richtig ist,
2) aus der Richtigkeit von A für eine beliebige natürliche Zahl n = k die Richtigkeit von A für n = k + 1 folgt.

Das müssen wir natürlich beweisen.
Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, A sei nicht für jede natürliche Zahl n richtig. Dann müßte es aber in der Folge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... eine kleinste Zahl m geben, für die A falsch ist. m muß größer als 1 sein, denn für n = 1 ist A laut Voraussetzung richtig. Folglich ist m - 1 = 1, und für m - 1 ist A richtig, da ja m die kleinste Zahl ist, für die A falsch sein soll. Das widerspricht der zweiten Voraussetzung, aus der die Richtigkeit von A für die auf m - 1 folgende Zahl m folgt. Demnach war aber unsere Annahme falsch und A gilt für alle natürlichen Zahlen.

Die Methode der vollständigen Induktion besteht im einzelnen aus den Schritten:

1) Aufstellung der Aussage A (Aufstellung der Behauptung).
2) Die Induktionsvoraussetzung: Überprüfung von A für n = 1.
3) Die Induktionsannahme: A sei für eine natürliche Zahl k richtig.
4) Der Induktionsschluß: Schluß von k auf k + 1 .

Wollen wir noch ein Beispiel nach diesem Schema durchrechnen.

Aufgabe: Man beweise die Gleichung

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

für beliebige n .

Induktionsvoraussetzung: n = 1

$$1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$$

Damit ist für n = 1 die behauptete Gleichung sicher richtig.

Induktionsannahme: Für die natürliche Zahl k sei

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

richtig.

Induktionsschluß: Wir haben zu zeigen, daß auf Grund der Induktionsannahme auch

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

richtig ist.

$$1^3 + 2^3 + \dots + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3$$

$$= \frac{(k+1)^2\left(k^2+4(k+1)\right)}{4}$$

$$= \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

Übungsaufgaben:

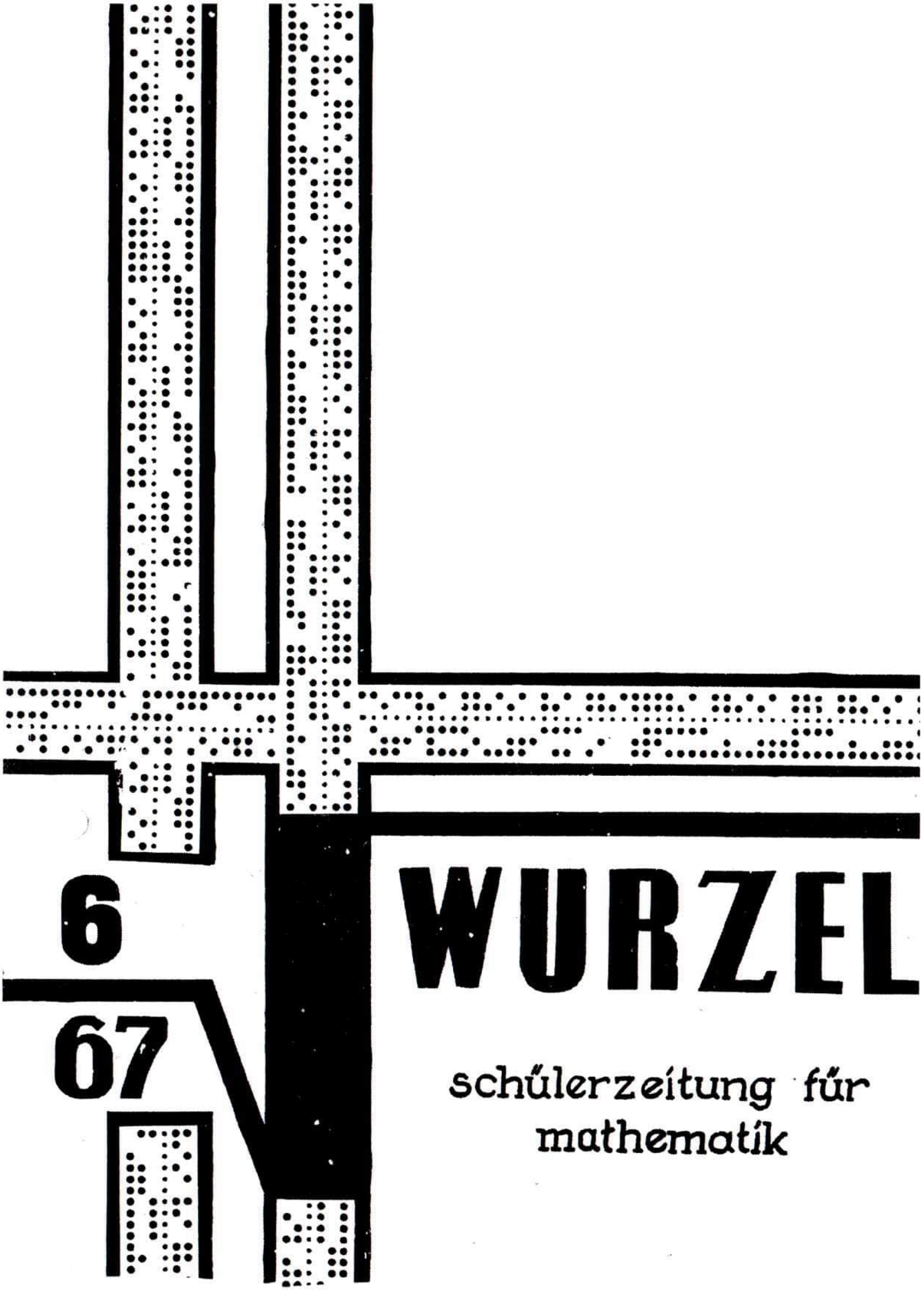
Man beweise:

1) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

2) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.

3) $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \quad (x \neq 1)$

4) $\cos \alpha \cos 2\alpha \dots \cos 2^n \alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1} \sin \alpha}$.



WURZEL

6

67

schülerzeitung für mathematik

WURZEL - Schülerzeitung für Mathematik
Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik
an der Friedrich - Schiller - Universität Jena

Schriftleitung: Klaus Fischer, Hansgeorg Meißner
Mitarbeiter: E. Kuse, H. Peuker, H. Schirrmeister, J. Schwarz, I. Staiger, W. Ulbrich, R. Wackernagel.

Anschrift der Schriftleitung: Sektion Mathematik
69 Jena
Helmholtzweg 1
Kennwort "Wurzel"

Die Zeitung erscheint monatlich zum Preis von 0,20 MDN.
Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BPS und SpS zu richten.
Einzelbestellungen können direkt an die obige Adresse eingesandt werden.

V-14-6 6 1099 M 472-67

Dr. E. Krätzel, Dozent an der Sektion Mathematik

Die Methode der vollständigen Induktion II

Behandeln wir zunächst noch ein Beispiel:

Aufgabe: Man beweise die binomische Formel

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1}b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \binom{n}{n-2} \cdot a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} \cdot ab^{n-1} + b^n.$$

Hierin bedeutet:

$$\binom{n}{m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots\ldots \cdot (n-(m-1))}{1 \cdot 2 \cdot \ldots\ldots \cdot m} \qquad \text{(lies: "n über m")}$$

Induktionsvoraussetzung: $n = 1$

$$(a+b)^1 = a^1 + b^1.$$

Induktionsannahme:

$$(a+b)^k = a^k + \binom{k}{1} a^{k-1}b + \ldots\ldots + \binom{k}{k-1} ab^{k-1} + b^k.$$

Induktionsschluß:

Wir müssen zeigen, daß aus der Induktionsannahme folgt, daß auch

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b + \ldots + \binom{k+1}{k} ab^k + b^{k+1}$$

richtig ist.

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} &= (a+b)^k \cdot (a+b) \\ &= \left[a^k + \binom{k}{1} a^{k-1}b + \ldots + \binom{k}{k-1} ab^{k-1} + b^k\right] \cdot (a+b) \\ &\quad a^{k+1} + \left[1+\binom{k}{1}\right] a^k b + \left[\binom{k}{1}+\binom{k}{2}\right] a^{k-1}b^2 + \ldots \\ &\quad \ldots + \left[\binom{k}{m} + \binom{k}{m+1}\right] a^{k-m} \cdot b^{m+1} + \ldots + b^{k+1}.\end{aligned}$$

Wir sind also fertig, wenn wir

$$\binom{k}{m} + \binom{k}{m+1} = \binom{k+1}{m+1}$$

zeigen können. Das ist ganz leicht:

$$\begin{aligned}\binom{k}{m} + \binom{k}{m+1} &= \frac{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-(m-1))}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m} + \frac{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-(m-1))(k-m)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m\cdot(m+1)} \\ &= \frac{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-(m-1))\cdot\{(m+1)+(k-m)\}}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(m+1)} \\ &= \frac{(k+1)\cdot k\cdot\ldots\cdot(k+1-m)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(m+1)} = \binom{k+1}{m+1}\end{aligned}$$

Lehrreich ist das folgende Problem:
Für welche natürliche Zahlen n gilt $2^n > 2n + 1$?
Überprüfen wir einige Anfangswerte:

n=1: $2^1 < 2\cdot 1 + 1$
n=2: $2^2 = 4 < 2\cdot 2+1 = 5$
n=3: $2^3 = 8 > 2\cdot 3+1 = 7$
n=4: $2^4 = 16 > 2\cdot 4+1 = 9$

Wir sehen also, daß für n = 1, 2 obige Ungleichung nicht richtig ist. Für n = 3, 4 ist die Ungleichung dagegen richtig und es sieht so aus, daß auch die Ungleichung wohl für größere Werte von n richtig sein wird. Das ist in der Tat der Fall, und wir können auch hier die Methode der vollständigen Induktion benutzen, nur müssen wir den Induktionsbeginn von n=1 auf n=3 verlegen.

Induktionsvoraussetzung: n = 3

$2^3 > 2\cdot 3 + 1$

Induktionsannahme:

$2^k > 2 \cdot k + 1 \qquad (k \geq 3)$

Induktionsschluß:

$2^{k+1} = 2^k + 2^k$

Es ist für $k \geq 3$ stets $2^k > 2$ und nach der Induktionsannahme $2^k > 2 \cdot k + 1$.

Verwenden wir beide Ergebnisse, so folgt

$$2^{k+1} > (2 \cdot k + 1) + 2,$$

also $$2^{k+1} > 2(k+1) + 1,$$

was zu beweisen war.

Wir sehen also, daß eine Aussage für einige Anfangswerte $n = 1,2,\ldots,n_o-1$ falsch, dann aber für alle Werte $n \geq n_o$ richtig sein kann. Und auch hier kann die Methode der vollständigen Induktion angewandt werden, wenn der Induktionsbeginn erst bei n_o eingesetzt wird.

Formulieren wir anhand dieses allgemeinen Falles abschließend noch einmal das Prinzip der vollständigen Induktion:

Für jede natürliche Zahl $n \geq n_o$ ist die Aussage A richtig, wenn

1. A für $n = n_o$ richtig ist,
2. aus der Richtigkeit von A für eine beliebige natürliche Zahl $n = k \geq n_o$ die Richtigkeit von A für $n = k+1$ folgt.

Übungsaufgabe:

Für welche natürlichen Zahlen n gilt die Ungleichung $2^n > n^2$?

Aufgaben (6. Serie)

9. Klasse: (9.11) Es ist zu zeigen, daß die Summe zweier beliebiger aufeinanderfolgender ungerader Zahlen durch 4 teilbar ist. Gilt das gleiche für gerade Zahlen?

(9.12) Es ist zu beweisen, daß ein Dreieck gleichschenklig ist, wenn zwei seiner Seitenhalbierenden gleich sind.

10. Klasse: (10.11) Man löse folgende Gleichung:

$$|1-x| + |1+x| = x \ .$$

(10.12)

a) a, b seien Seiten eines Dreiecks. Es ist zu zeigen, daß die Fläche des Dreiecks nicht größer ist als

$$\frac{a \cdot b}{2}.$$

b) a, b, c, d seien die Seiten eines Vierecks, wobei a der Seite c und b der Seite d gegenüberliegen. Man beweise, daß die Fläche des Vierecks

$$\frac{(a\ c) \cdot (b\ d)}{4}$$

nicht überschreitet.

11./12. Klasse: (11./12.11) Man berechne folgende Summe:

$$1^2-2^2+3^2 \pm \ldots +99^2-100^2 = \ ?$$

(11./12.12) In einem Kreis seien zwei Radien gegeben. Wie ist eine Sehne zu legen, damit sie von diesen Radien in drei gleiche Abschnitte geteilt wird?

PREISAUFGABE (P6)

Es ist ein Dreieck Δ ABC zu konstruieren, von dem gegeben sind:

1) die Seiten a und b,
2) $\beta = 3\alpha$

Für jeden vollständigen Lösungsweg der Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte besitzen, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges). Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der folgenden Auslosung teil. Die Lösungen sind unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" bis zum 30. Juni 1967 (Datum des Poststempels) an unsere Adresse einzusenden.

(9.4) Wegen $[a] \leq a < [a] + 1$ ergibt sich folgende Ungleichung:

$$\frac{x-1}{2} \leq \frac{x+1}{3} < \frac{x-1}{2} + 1 = \frac{x+1}{2} \qquad |\cdot 6$$

$$3x - 3 \leq 2x + 2 < 3x + 3 \qquad |-3x-2$$

$$-5 \leq -x < 1 \qquad |\cdot(-1)$$

$$5 \geq x > -1 ,$$

da $\frac{x-1}{2}$ ganzzahlig ist, ergeben sich folgende Lösungen:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 5.$$

(10.3) Es gelte: $a^2 + b^2$ ist durch 7 teilbar. (Im folgenden schreiben wir dafür: $7/\ a^2 + b^2$).

Es sei nun: $a = 7p+q$, $b = 7k+m$ $\qquad 0 \leq q,\ m < 7$

$7/\ 49p^2+14pq+q^2+49k^2+14km+m^2$.

Da aber

$$7/\ 49p^2+14pq+49k^2+14km ,$$

gilt auch

$$7/\ q^2 + m^2,$$

also

$$q^2 + m^2 = 7s .$$

Dann ist

$$s = \frac{q^2}{7} + \frac{m^2}{7} \quad \text{ganzzahlig.}$$

Wir betrachten nun die bei der Teilung von Quadratzahlen durch 7 möglichen Reste, hier bezeichnet als $R(a^2)$.
Es gilt:

$R(a)$	0	1	2	3	4	5	6
$(R(a))^2$	0	1	4	2	2	4	1

$\{(R(a))^2 = R(a^2)\}$

Diese Werte setzt man nun für q^2 und m^2 ein und sieht, daß $q^2 + m^2$ nur dann durch 7 teilbar ist, wenn $q=m=0$.

(9.5) Nach Voraussetzung ist $a_1 - a_0 > 0$

$$a_2 - a_1 = 2(a_1-a_0)$$

$$\vdots$$

$$a_{100} - a_{99} = 2(a_{99}-a_{98}).$$

also sind alle Differenzen

$$a_2-a_1,\ldots,a_{100}-a_{99}$$

positiv, und es gilt:

$$\frac{a_2-a_1}{a_1-a_0} = \cdots\cdots = \frac{a_{100}-a_{99}}{a_{99}-a_{98}} = 2$$

Werden diese 99 Brüche miteinander multipliziert, so erhalten wir:

$$\frac{a_{100}-a_{99}}{a_1-a_0} = 2^{99} \quad \text{und damit}$$

$$a_{100} = a_{99} + 2^{99}\cdot(a_1-a_0).$$

Es gilt aber $a_{99} > 0$ und damit wegen $a_1-a_0 \geq 1$ die Ungleichung

$$a_{100} > 2^{99}.$$

(10.5) Im Δ ABC mit $\overline{AC} = a$ und $\overline{BC} = b$ mögen die Seitenhalbierenden $\overline{AD}$ und $\overline{BE}$ aufeinander senkrecht stehen. Ihr Schnittpunkt sei M. Wir ziehen $\overline{DF} \| \overline{BE}$ (F liegt auf $\overline{AC}$). Dann ist $\sphericalangle ADF = \sphericalangle AME = 90^\circ$ und

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MD}} = 2, \text{ d.h., } \overline{AF} = \frac{3}{4}\cdot\overline{AC} = \frac{3}{4}\cdot a.$$

Hieraus ergibt sich folgende Konstruktion:
Wir tragen auf einer Geraden die Strecke $\overline{AC} = a$ ab und konstruieren den Punkt F, der $\overline{AC}$ im Verhältnis 3:1 teilt. Wir konstruieren die Kreislinie mit der Srecke $\overline{AF}$ als Durchmesser. Sie schneidet den Kreis um C mit dem Radius $\frac{b}{2}$ im Punkt D. ($\overline{CD} = \frac{b}{2}$, $\sphericalangle ADF = 90^\circ$). Wir verlängern die Strecke $\overline{CD}$ über D hinaus um $\overline{DB} = \frac{b}{2}$. Dann ist das Dreieck Δ ABC das gesuchte.
Die Aufgabe hat eine Lösung, wenn $\frac{a}{4} \leq \frac{b}{2} \leq a$, d.h., wenn $\frac{1}{2} \leq \frac{b}{a} \leq 2$ ist. In diesem Fall ist die Lösung sogar eindeutig bestimmt.

(10.6) (eingesandt von W.Nagel, SpS Zeiss Jena, Klasse 9A)

Es sei: v_n – Strömungsgeschwindigkeit
v_s – Geschwindigkeit des Schwimmers bei stehendem Wasser
s – Abstand der Brücken (2 km)
t – Zeit vom Verlust der Flasche bis zum Einholen
t_s – Zeit, die der Schwimmer noch weiterschwamm (20 min)

Dann gilt:

$$t = t_s + \frac{(v_s - v_n)\cdot t_s}{v_s + v_n} + \frac{s}{v_s + v_n} = \frac{s}{v_n}$$

$$s\cdot(v_s+v_n) = t_s v_n\cdot(v_s+v_n) + t_s v_n\cdot(v_s-v_n) + s v_n$$

$$s = 2t_s v_n$$

Also ist

$$v_n = \frac{s}{2t_s} = 3 \text{ km/h}.$$

(11/12.6)

Aus der Ungleichung folgt sofort $x \neq n\cdot 90^\circ$.
Dann gilt $3\cdot\sin^2 x \cos^2 x > 0$. Durch Multiplikation der Ungleichung mit diesem Term erhalten wir:

$$3\cdot(\cos^2 x - \sin^2 x) \geq 8\cdot(\cos^2 x \sin^2 x),$$

also

$$8\cdot\cos^4 x - 2\cdot\cos^2 x - 3 \geq 0$$

oder

$$\left[\cos^2 x - \frac{3}{4}\right]\cdot\left[\cos^2 x + \frac{1}{2}\right] \geq 0,$$

Da

$$\left[\cos^2 x + \frac{1}{2}\right] \geq 0,$$

gilt auch:

$$\cos^2 x - \frac{3}{4} \geq 0,$$

d.h.,

$$|\cos x| \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}\ .$$

Da

$$\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\ ,$$

gilt

$$k\cdot 180^\circ < x \leq 30^\circ + k\cdot 180^\circ \qquad \text{(kbeliebig ganz)}$$

LÖSUNG der Preisaufgabe (P.3) von W.Nagel

(Für unsere neuen Leser geben wir die Aufgabe noch einmal mit an:

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1x_2x_3\cdots x_{1967} &= 1 \\ x_1 - x_2x_3\cdots x_{1967} &= 1 \\ &\vdots \\ x_1x_2\cdots x_{1966} - x_{1967} &= 1 . \end{aligned}$$

Es sind alle möglichen Werte für x_{47} zu berechnen!)

Lösung:

Wir setzen:

$$\prod_{i=1}^{47} x_i = a \quad \text{und} \quad \prod_{i=48}^{1967} x_i = b .$$

1. Gleichung: $a \cdot b = 1$, also $a - \frac{1}{b} = 0$ (I)

48.Gleichung: $a - b = 1$ (II).

Aus (I) und (II) folgt

$$b + 1 = \frac{1}{b} \quad \text{und damit} \quad b^2 + b - 1 = 0.$$

Also ist

$$b_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$$

$$b_1 = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$b_2 = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2} .$$

47.Gleichung: $a \cdot \frac{1}{x_{47}} - b \cdot x_{47} = 1$, also nach Umformung

$$x_{47}^2 + \frac{1}{b} \cdot x_{47} - \frac{a}{b} = 0.$$

Als Lösungen ergeben sich:

$$x_{47_1} = -\frac{1 + \sqrt{1+4ab}}{2b}$$

und

$$x_{47_2} = -\frac{1 - \sqrt{1-4ab}}{2b}$$

Setzen wir $a_1 = \frac{1}{b_1}$ und $a_2 = \frac{1}{b_2}$, und setzen wir für b_1 und für b_2 die errechneten Lösungen ein, so erhalten wir

$$x_{47_1} = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$x_{47_2} = -\frac{1+\sqrt{5}}{-1-\sqrt{5}} = 1$$

$$x_{47_3} = 1$$

$$x_{47_4} = -\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Also kann x_{47} die Werte 1, $-\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ und $-\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ annehmen.

Die Lösung von W.Nagel ist übersichtlich dargestellt. Er geht ohne große Umwege darauf hin, x_{47} zu bestimmen.
Den zweiten Teil der Lösung hätte er sich ersparen können, wenn er

$$\prod_{i=1}^{46} x_i = a' \quad \text{und} \quad \prod_{i=47}^{1967} x_i = b'$$

noch angegeben hätte.
b_1' und b_2' bestimmen sich genauso wie b_1 und b_2. Dann gilt:

$$\frac{b_i'}{b_j'} = x_{47_k} \qquad i,j = 1,2, \qquad k = 1,2,3,4.$$

Werner wählte einen etwas umständlicheren Weg. Er benötigte relativ viele Umrechnungen. Besonders dann, als er konkrete Zahlenwerte eingesetzt hat, ergibt sich in den beiden trivialen Fällen ($x_{47}=1$) unnötig viel Arbeit, was bei der hier angegebenen Variante wegfällt.

LÖSUNG DER PREISAUFGABE (P.4)

(eingesandt von Reinhard Lorenz, EOS J.R.Becher Jena)

(Auch diese Aufgabe geben wir für unsere neuen Leser noch einmal an:

Wenn man eine vierstellige Zahl mit derjenigen vierstelligen

Zahl multipliziert, die dieselben Ziffern, jedoch in umgekehrter Reihenfolge, enthält, erhält man eine achtstellige Zahl, deren drei letzte Ziffern Nullen sind. Man finde alle diejenigen Zahlen, die diese Bedingung erfüllen!)

Lösung:
Das Produkt der beiden vierstelligen Zahlen soll drei Nullen als letzte Ziffern besitzen, d.h. durch $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ teilbar sein.
Diese Primfaktoren müssen in beiden Zahlen vorkommen, es dürfen jedoch nicht die 2 oder 5 gleichzeitig in einer Zahl als Faktoren vorkommen, da diese dann auf Null enden würde, die andere aber nur dreistellig wäre. In einer Zahl muß also 5^3 als Faktor enthalten sein. Alle Zahlen, die durch 5^3, aber nicht durch 2 teilbar sind, enden auf 125, 375, 625 oder 875. Die anderen Zahlen können also nur mit 521, 573, 526 oder 578 beginnen. Da sie durch $2^3=8$ teilbar sein müssen, finde ich die Zahlen 5216, 5736, 5264, 5784 und durch Umkehrung 6125, 6375, 4625, 4875.

Kleine Knobeleien

"Er" ist doppelt so alt wie "sie" war, als er so alt war wie sie jetzt ist. Beide zusammen sind 49 Jahre. Wie alt ist jeder von beiden?

*

Essen und Trinken des Herrn SEBASTIAN AMBROSIUS sind streng geregelt. Wenn er Kaffee trinkt, nimmt er keine Milch zu sich. Brötchen ißt er nur dann, wenn er Milch trinkt. Herr SEBASTIAN AMBROSIUS ißt keine Suppe, wenn er nicht Brötchen ißt. Heute zum Mittag, so erzählt Herr AMBROSIUS, leistete er sich eine Tasse Kaffee.
Nahm Herr AMBROSIUS heute Mittag Suppe zu sich?

Diese Aufgabe läßt sich rein formal mit Mitteln der mathematischen Logik lösen. (Wir werden in einer der nächsten Nummern ausführlicher darauf eingehen.)

Mit n! bezeichnen wir das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.
Warum hat die Zahl 100! am Ende 24 Nullen?

*

Der Dorfbarbier. Jemand definiert: Der Dorfbarbier ist derjenige Mann im Dorf, der alle männlichen Dorfbewohner, die sich nicht selbst rasieren, rasiert. Rasiert sich der Dorfbarbier selbst?

*

Wo steckt der Fehler?
(Aus dem gleichnamigen Buch von W. Lietzmann, B.G.Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1966, 4,80 MDN)

Es ist $n^2-n(2n+1) = (n+1)^2-(n+1)(2n+1)$ (Davon überzeugt man sich leicht durch Ausmultiplizieren.) Daraus folgt:

$$n^2-n(2n+1)+\left[\frac{2n+1}{2}\right]^2 = (n+1)^2-(n+1)(2n+1)+\left[\frac{2n+1}{2}\right]^2 ,$$

$$\left[n-\frac{2n+1}{2}\right]^2 = \left[(n+1)-\frac{2n+1}{2}\right]^2 ,$$

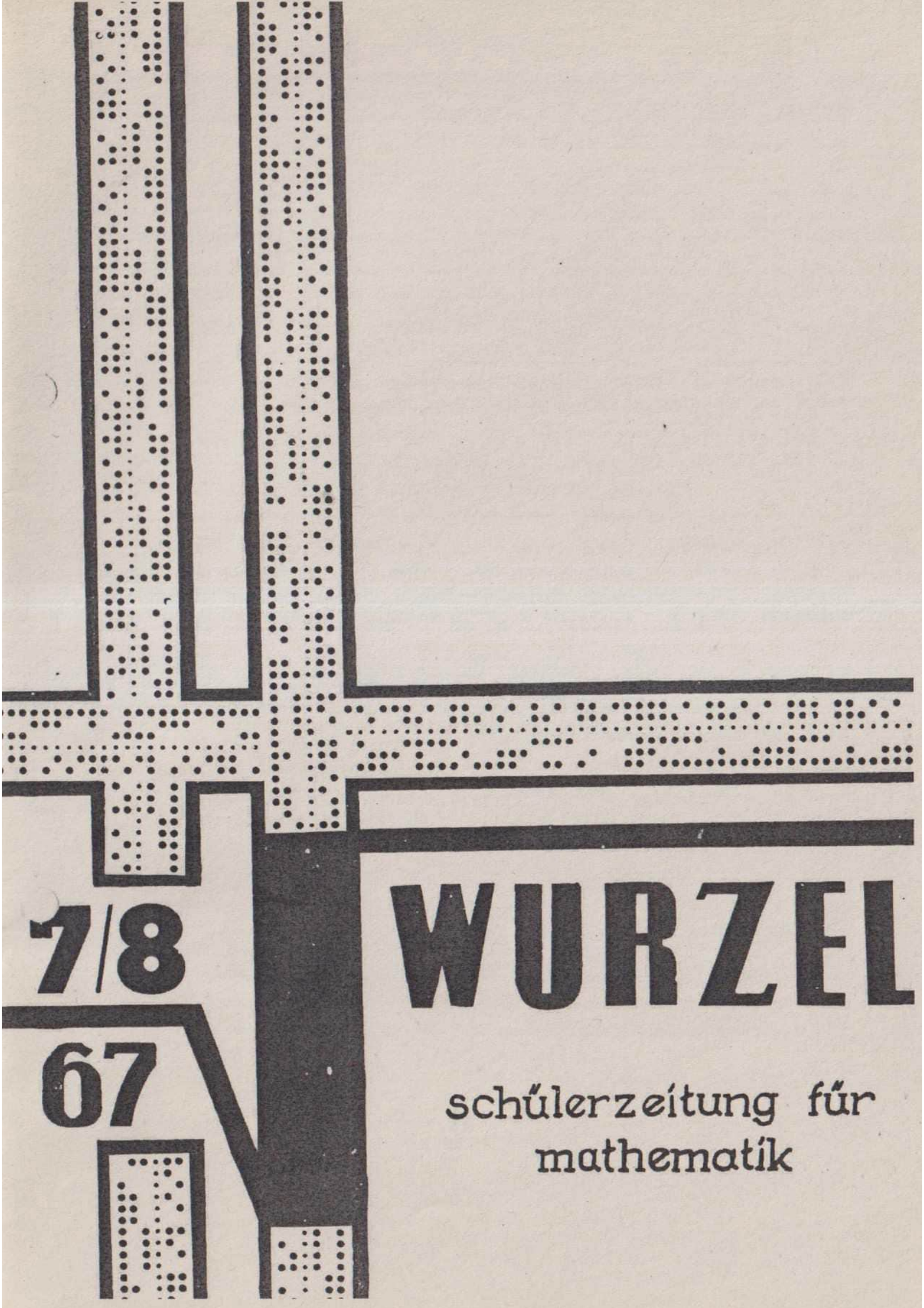
$$n-\frac{2n+1}{2} = n+1-\frac{2n+1}{2} ,$$

also ist $n = n+1$. (Eine beliebige Zahl ändert ihren Wert nicht, wenn man 1 dazuaddiert.)

Berichtigung

In "WURZEL" Nr. 5 ist uns ein bedauerlicher Druckfehler unterlaufen. Auf Seite 9, sechste Zeile von unten, muß es richtig heißen: "Folglich ist $m - 1 \geq 1$, und...". Wir bitten das Versehen zu entschuldigen.

Liebe Leser!
Schreiben Sie uns bitte, wie Ihnen die neue Form der "WURZEL" gefällt und welche inhaltlichen Verbesserungen Sie sich wünschen. Wir sind für jeden Hinweis dankbar!



WURZEL

schülerzeitung für mathematik

7/8

67

WURZEL - Schülerzeitung für Mathematik
Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik
an der Friedrich - Schiller - Universität Jena

Schriftleitung: Klaus Fischer, Hansgeorg Meißner
Mitarbeiter: N. Kuse, H. Peuker, E. Schirrmeister, J. Schwarz, L. Staiger, W. Ulbrich, R. Wackernagel.

Anschrift der Schriftleitung: Sektion Mathematik
69 Jena
Helmholtzweg 1
Kennwort "Wurzel"

Die Zeitung erscheint monatlich zum Preis von 0,20 MDN.
Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS und SpS zu richten.
Einzelbestellungen können direkt an die obige Adresse eingesandt werden.

Preis dieser Doppelnummer: 0,40 MDN

V-14-6 6 1178 M 490-67

Liebe Leser!

Beim Durchblättern dieser Doppelnummer werden Sie merken, daß wir Sie heute einmal mit einigen allgemeinen Fragen des Studiums in Jena, insbesondere des Studiums an der Sektion Mathematik, bekannt machen wollen. Wenn Sie im September die Nr.9 der "Wurzel" in den Händen halten, wird an einige von Ihnen die Frage herangetreten sein, wo und was Sie studieren werden. Mögen Ihnen die folgenden Bemerkungen helfen, sich ein Bild über ein Mathematikstudium an der Friedrich-Schiller-Universität Jena zu verschaffen und Sie in Ihrem Entschluß, eventuell ein solches Studium bei uns aufzunehmen, bestärken.

Für Ihre Sommerferien wünschen wir Ihnen eine gute Erholung und hoffen, daß Sie auch im neuen Schuljahr der Mathematik und unserer "Wurzel" treu bleiben.

Ihre "Wurzel"-Redaktion

Liebe Leser der „Wurzel"!

Der VII. Parteitag der SED hat für unser Volk große und schöne Perspektiven eröffnet. Wie schnell wir die gestellten Ziele erreichen, hängt im entscheidenden Maße von der Durchführung der wissenschaftlich-technischen Revolution ab. Die wissenschaftlich-technische Revolution ist verbunden mit einer raschen Entwicklung und breiten Anwendung der Mathematik und solcher mit ihr eng verwandten Disziplinen wie Rechentechnik, Datenverarbeitung, Kybernetik, Ökonometrie u.a.. Bereits bis 1970 entsteht in unserer Republik im Zuge der Realisierung des Datenverarbeitungsprogramms ein dichtes Netz von etwa 100 Rechenzentren. Die Mathematik dringt heute in alle Bereiche der Wirtschaft, Technik und Wissenschaft ein. Künftig wird man sich bei allen wichtigen Entscheidungen in der Volkswirtschaft auf exakte mathematische Berechnungen stützen, die Zeit der reinen Empirie [1] ist vorbei. Der Mathematiker wird somit ein unersetzbarer Partner für den Ökonomen, den Landwirt, den Ingenieur und den Wissenschaftler. Daraus ergeben sich höhere Anforderungen an das Niveau der mathematischen Forschung und an ihre Beziehungen zur Praxis. Die Kapazität der mathematischen Forschungseinrichtungen wird stark anwachsen.

Obwohl wir erst am Anfang dieser Entwicklung stehen, besteht in der Volkswirtschaft bereits jetzt ein spürbarer Mangel an Diplom-Mathematikern, die, ausgerüstet mit hohem fachlichen Können und Verantwortungsbewußtsein unserer sozialistischen Heimat gegenüber, auf Jahre hinaus in der Lage sind, die komplizierten Aufgaben der wissenschaftlich-technischen Revolution zu meistern.

Eine entscheidende Bedeutung kommt heute einer guten mathematischen Ausbildung der Schüler zu, die in naher Zukunft mit den Problemen der wissenschaftlich-technischen Revolution konfrontiert werden. Unsere Gesellschaft benötigt in den nächsten Jahren eine große Anzahl von Mathematik-Lehrern, die

---

1) Empirie, die : Erfahrung (griech)

bereit und fähig sind, den Schülern gute mathematische Kenntnisse zu vermitteln, bei ihnen Liebe zur Mathematik zu wecken und sie gleichzeitig zu bewußten Mitgestaltern unserer Entwicklung zu erziehen. Diese Lehrer müssen in der Lage sein, noch über das Jahr 2000 hinaus einen zeitgemäßen Mathematikunterricht halten zu können.

Dem ständig wachsenden Bedarf an Mathematikern in der Volkswirtschaft und in der Volksbildung wird in unserem Staat dadurch Rechnung getragen, daß an allen Hochschulen immer mehr Studienplätze für Mathematiker zur Verfügung gestellt werden. So hat sich an unserer Sektion, um nur ein Beispiel zu nennen, die Anzahl der immatrikulierten [2] Diplom-Studenten von 20 im Jahre 1962 auf 65 im Jahre 1967 erhöht.

An unserer Sektion werden Diplom-Mathematiker und Mathematik-Lehrer für Allgemeinbildende Polytechnische und Erweiterte Oberschulen ausgebildet.

Die Ausbildung der Diplom-Mathematiker zerfällt in zwei Abschnitte. Während des zweijährigen Grundstudiums werden unsere Studenten nach modernsten Gesichtspunkten mit Grundlagen der höheren Mathematik vertraut gemacht. Danach beginnt das Spezialstudium. Wie bereits der Name sagt, erhält hier jeder Student die Möglichkeit, sich zu spezialisieren. Er wählt eine mathematische Disziplin aus, der er in den letzten drei Jahren des Studiums die größere Aufmerksamkeit widmet. Es bestehen in unserer Sektion vorwiegend folgende Spezialisierungsmöglichkeiten: Numerische Mathematik und Rechentechnik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, Funktionalanalysis, mathematische Kybernetik.[3] Die Studenten werden während des Spezialstudiums von den entsprechenden Fachabteilungen betreut und allmählich an selbständige wissenschaftliche Arbeit herangeführt. Im letzten Studienjahr schreibt der Student seine Diplomarbeit, deren Problemstellung sich

---

2) immatrikulieren: in die Matrikel (Namenverzeichnis der Studierenden) einer Hochschule einschreiben.

3) Interessenten teilen wir gern genaueres über die einzelnen Spezialrichtungen mit.

aus der Forschungsarbeit der Abteilung ergibt und die in der Regel einen kleinen Beitrag zur Weiterentwicklung der entsprechenden Fachdisziplin darstellt. Um eine erforderliche Breite der Ausbildung zu sichern, sind für alle Studenten obligatorische Lehrveranstaltungen in den oben angeführten Fächern vorgesehen. Neben der Ausbildung in Mathematik erhalten die Studenten eine recht umfangreiche Ausbildung in Physik und in den Gesellschaftswissenschaften. Die gesamte Ausbildungsdauer beträgt 5 Jahre. Für besonders begabte Studenten besteht in Zukunft die Möglichkeit, nach Abschluß eines zusätzlichen zweijährigen Forschungsstudiums und Verteidigung der Dissertation unserer Sektion mit dem wissenschaftlichen Grad "Dr. rer. nat." zu verlassen. Aber auch für die in der Praxis tätigen Mathematiker steht der Weg zur Weiterqualifizierung und Promotion offen.

Die Ausbildung der Mathematik-Lehrer dauert in der Regel 4 Jahre. Sie schließt mit dem Staatsexamen ab. Darüber hinaus besteht für besonders befähigte Studenten die Möglichkeit eines einjährigen Zusatzstudiums. Die Ausbildung in Mathematik ist mit einem zweiten Fach gekoppelt. Dafür kommen an unserer Universität Physik, Geographie oder Chemie in Frage. Unsere Absolventen erhalten dadurch die Berechtigung, auch in diesen Fächern zu unterrichten. Neben den Vorlesungen, Übungen, Praktika und Seminaren in den beiden Ausbildungsfächern bekommen die Lehrerstudenten eine solide Ausbidung in Pädagogik, Psychologie, Methodik des Fachunterrichts und in den Gesellschaftswissenschaften. Auch für Lehrer bestehen weitreichende Möglichkeiten der wissenschaftlichen Weiterqualifizierung bis zur Promotion auf dem Gebiet der Mathematik oder der Methodik des Mathematikunterrichtes.

Wir bemühen uns darum, unsere Studenten schon während der Ausbildung mit ihren künftigen Berufsaufgaben vertraut zu machen. So führen die Diplomstudenten ein mehrwöchiges Praktikum in Rechenzentren oder großen Betrieben durch, wobei sie die Fähigkeit erwerben, praktische Problemstellungen in mathe-

matische umzuwandeln. Nicht selten ergibt sich daraus das Thema ihrer Diplomarbeit. Die Lehrerstudenten absolvieren zahlreiche schulpraktische Übungen, bei denen sie sich die notwendigen methodischen Kenntnisse aneignen. Unsere besten Studenten leiten Zirkel für mathematisch interessierte Schüler und spielen eine aktive Rolle bei der Vorbereitung und Durchführung von Mathematiklagern. Seit Beginn des Jahres gibt das FDJ-Aktiv unserer Sektion die Schülerzeitung für Mathematik "Wurzel" heraus, deren Anliegen es ist, den Schülern Anleitung zur selbständigen Beschäftigung mit der Mathematik zu geben und sie für ein Mathematikstudium zu interessieren.

Unsere Sektion steht heute vor der verantwortungsvollen Aufgabe, immer mehr gute Mathematiker auszubilden. Wir können diese Aufgabe jedoch nicht allein lösen. Deshalb wenden wir uns mit der Bitte an Sie, liebe Lehrer, uns bei der Werbung von Abiturienten für ein Mathematikstudium zu unterstützen. Wir wenden uns aber auch direkt an Sie, liebe mathematik-interessierte Schüler. Entscheiden Sie sich für unseren schönen und interessanten Beruf, der Ihnen große Perspektiven bietet, und kommen Sie zu uns. Wir werden keine Mühe scheuen, Sie so auszubilden, daß Sie den Anforderungen der Praxis später stets gerecht werden.

H. Thiele

Prof. Dr. H. Thiele
Vorsitzender der Sektion
Leiter der Abt. mathematische Kybernetik

Prof. Dr. K. Matthes
Dekan der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät

Dr. K. Nawrotzki
Parteisekretär

Dr. E. Krätzel
Vorsitzender der AGL

H. Meißner
FDJ-Sekretär

Prof. Dr. O. Stamfort

Prof. Dr. J. Kerstan

Prof. Dr. A. Pietsch

Prof. Dr. J. Böhm

Dr. W. Wallisch

Sieben gleiche Semmeln sollen zu gleichen Teilen unter 12 Personen verteilt werden. Wie geschieht dies, ohne das auch nur eine einzige Semmel in 12 Teile geteilt werden muß ?

✳

Ein Balken wurde in drei Minuten in Stücke zu je 0,5 m Länge zersägt, wobei jeder Schnitt genau eine Minute dauerte. Wie lang war der Balken ?

Wie lange hätte es gedauert, einen Balken doppelter Länge zu zersägen ?

✳

Die Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 sollen unter Verwendung mathematischer Zeichen ohne Veränderung der Reihenfolge so zusammengestellt werden, daß sich 100 ergibt !

✳

Wieviel sind eineinhalb Drittel von 100 ?

✳

In einer Familie sind 5 Söhne. Jeder von ihnen hat genau eine Schwester. Wieviel Kinder sind im ganzen in der Familie ?

✳

Löse das folgende Gleichungssystem !

$$ax + by = a$$
$$bx + ay = b$$

SOZIALVERSICHERUNG

Die Studierenden unterliegen der Sozialversicherungspflicht auf Grund der Verordnung über die Sozialversicherung der Studenten, Hoch- und Fachschüler vom 2. Februar 1950. Die Studierenden sind beitragsfrei versichert.

FAHRPREIS

Studierende erhalten bei der Reichsbahn Fahrpreisermäßigungen von 75 % bei Fahrten zwischen dem Hochschulort und dem Wohnort der Eltern bzw. des Ehegatten. Die Ausgabe der Anträge erfolgt an den Fahrkartenschaltern der Deutschen Reichsbahn.

MAHLZEITEN

An jedem Wochentag kann in der Mensa mittags und abends warm gegessen werden. Am Mittag gibt es zwei Wahlgerichte (für 0,60 MDN bzw. 0,80 MDN). Am Abend stehen zirka 12 Speisen (0,40 MDN bis 2,50 MDN) zur Wahl.

WOHNHEIME

Für angehende Mathematiker und angehende Mathematiklehrer gibt es in Jena ein schön gelegenes Wohnheim, das Erich-Weinert-Wohnheim. Die Miete schwankt je nach Zimmerbelegung zwischen 6 und 10 MDN. Bettwäsche wird gestellt.

Mädchen wohnen in einem der modernsten Wohnheime, dem Anna-Seghers-Wohnheim. Geschmackvoll eingerichtete Zwei- bis Vier-Bett-Zimmer, Duschräume, Fernsehräume, Küchen, Waschmaschinen sorgen für optimale Nutzung der Zeit und ermöglichen sinnvolle Erholung.

STUDENTENKELLER

Für eine sinnvolle und lehrreiche Freizeitgestaltung bauten die Jenaer Studenten alte, 15 m tiefe Gewölbe als Studentenkeller aus. Hier kann man bei Bier oder Wein diskutieren, singen und musizieren. Regelmäßige Veranstaltungen (Literaturabende, Lichtbildervorträge, Diskussionen mit prominenten Wissenschaftlern über politische Fragen usw.) sorgen für abwechslungsreiche und bildende Abende.

VORLESUNGSBETRIEB

Im folgenden möchten wir unseren Lesern einen kleinen Einblick in den Vorlesungsbetrieb an unserer Sektion geben. (Als Beispiel führen wir das erste Semester Mathematik-Diplom auf.)

VORLESUNGSPLAN Mathematik-Diplom, 1.Studienjahr
(Herbstsemester 1966/67)

Zeit	Mo	Die	Mi	Do	Fr	Sa
7- 8		Anal.-				Anal.I
8- 9		Übg.	Gewi			"
9-10	Ex.-Ph.	Ex.-Ph.	"		Ex.-Ph.	
10-11		"			Anal.-	
11-12	Anal.I	Anal.I		Anal.I	Übg.	
12-13	"	"		"		

Sprachen: 2 Doppelstunden (nach Vereinbarung)
Gewi-Seminar: 1 Stunde (nach Vereinbar.)
Sport: 1 Doppelstunde (wahlweise)

ERLÄUTERUNGEN:

Analysis I: Im ersten Semester wird in Analysis eine Einführungsvorlesung gehalten. Dazu gehören Grundlagen der Mengenlehre, Gruppentheorie, Vektorräume, Betrachtungen über den Körper der reellen Zahlen und über metrische Räume.

Übungen zur Analysis: In den Übungen werden die in der Vorlesung bzw. beim Nacharbeiten aufgetauchten Fragen geklärt. Zum besseren Verständnis der Vorlesung werden Aufgaben durchgerechnet.

Gewi: In der Grundvorlesung Gesellschaftswissenschaften werden im ersten Semester Vorlesungen über die Grundlagen des Marxismus-Leninismus gehalten. Sie sollen den Studenten bei der Aneignung einer wissenschaftlich begründeten Weltanschauung helfen. Ein guter Student sein heißt nicht nur ein gutes Fachwissen zu haben, sondern heißt auch ein gutes gesellschaftliches Wissen zu besitzen und dieses ständig anzuwenden. Diese Vorlesungen sind deshalb von großem Wert.

Gewi-Seminar: Im Seminar zu den Vorlesungen in Gewi werden von Studenten Vorträge über einzelne Themen der Vorlesung gehalten. Anhand von Studienmaterial werden über die in den Vorlesungen angeschnittenen Fragen Diskussionen geführt.

Ex.-Physik: In der Experimental-Physik werden im ersten Semester Vorlesungen über Mechanik, Akustik und elektromagnetische Felder gehalten. Zahlreiche Versuche ergänzen diese Vorlesung sehr wirkungsvoll.

Sprachen: Nach Abschluß des zweiten Studienjahres soll der Student in der Lage sein, mit fremdsprachigen Fachbüchern arbeiten zu können. Bei dem heutigen Stand von Wissenschaft und Technik ist es unumgänglich, Fachliteratur aus anderen Ländern lesen zu können, ohne auf Übersetzungen in die deutsche Sprache angewiesen zu sein. Jeder Student muß deshalb an einer obligatorischen Ausbildung in Russisch und in einer zweiten Fremdsprache nach Wahl teilnehmen.

Sport: Zum Studium gehören (mindestens im ersten und zweiten Studienjahr) wöchentlich 2 Std. Sport. Die Sportart kann, je nach Neigung, vom Studenten selbst gewählt werden (z.B. Basketball, Fußball, Volleyball, Leichtathletik, Judo, Schwimmen oder Fechten).

AUFGABEN (7. Serie)

9.Klasse: (9.13) Man teile einen Winkel von 54° mit Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile.

(9.14) **[a]** ist die größte ganze Zahl, die a nicht überschreitet. Man bestimme alle x, für die gilt:

$$\left[\frac{5+6x}{8}\right] = \left[\frac{15x-7}{5}\right]$$

10.Klasse: (10.13) Zwei Kreise schneiden sich in den Punkten A und B. Durch A und B sei je eine Gerade gezogen. Diese Geraden schneiden den Kreis k_1 in den Punkten C und D, den Kreis k_2 in den Punkten E und F.
Es ist zu zeigen, daß $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$ gilt!

(10.14) Die Zanl

$$a + \frac{1}{a}$$

sei ganz. Man beweise, daß dann gilt:
Für beliebiges, natürliches n ist

$$a^n + \frac{1}{a^n}$$

ganz.

11./12.Klasse:

(11./12.13) Man beweise: Sind bei den Zahlen a und b die letzten m Ziffern gleich, so sind auch bei den Potenzen a^n und b^n (n nat.) die letzten m Ziffern gleich.

(11./12.14) Wie groß ist die maximale Fläche des Dreiecks, für dessen Seiten folgende Beziehung gilt:

$$0 < a \leq 1 \leq b \leq 2 \leq c \leq 3$$

PREISAUFGABE (P. 7)

Man löse folgende Gleichung:

$$|x - 1| - 2\cdot|x - 2| + 3\cdot|x - 3| = 4$$

PREISAUFGABE (P. 8)

Man gebe alle Tripel (a,b,c) natürlicher Zahlen an, die folgenden Bedingungen genügen:
b, c teilerfremd, $1 \leq a \leq 6$ und es gilt:

$$\sqrt{a + \frac{b}{c}} = a\sqrt{\frac{b}{c}} \quad .$$

LÖSUNGEN

(9.10): Für natürliche n gilt immer

$$x - y \;/\; x^n - y^n \quad .$$

Also ist $144 - 125 \;/\; 144^n - 125^n$,
da außerdem

$$144^n - 125^n = 12^{2n} - 5^{3n} \quad ,$$

folgt

$$19 \;/\; 12^{2n} - 5^{3n}.$$

(10.8): Es gilt: $103 = 78 + 25$
$53 = 78 - 25.$
Dann folgt nach dem binomischen Satz:

$$103^{53} = (78+25)^{53} = 78 \cdot k + 25^{53}$$
$$53^{103} = (78-25)^{103} = 78 \cdot n - 25^{103}.$$

Es ergibt sich als Summe:

$$103^{53} + 53^{103} = 78 \cdot (k+n) + 25^{53} - 25^{103}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} 25^{53} - 25^{103} &= 25^{53} \cdot (1-25^{50}) \\ &= 25^{53} \cdot (1-25^2) \cdot (25^{48}+25^{46}+\ldots+25^2+1) \\ &= 25^{53} \cdot (1-25) \cdot (1+25) \cdot (25^{48}+\ldots+1) \\ &= 25^{53} \cdot (-24) \cdot 26 \cdot (25^{48}+\ldots+1). \end{aligned}$$

Da 3/24 und $3 \cdot 26 = 78$ gilt, ist auch dieser Ausdruck durch 78 teilbar. Somit ist auch

$$103^{53} + 53^{103}$$

durch 78 teilbar.

(11./12.7): Da $5040 = 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 16$ ist, muß man zeigen, daß der gegebene Ausdruck durch 5,7,9 und 16 teilbar ist. Es gilt aber:

$n^7 - 14n^5 + 49n^3 - 36n = (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$.

Von sieben aufeinanderfolgenden Zahlen sind mindestens 3 durch 2 teilbar, davon mindestens eine durch 4, weiterhin sind zwei Zahlen durch 3 und je eine durch 5 bzw. 7 teilbar. Somit ist ihr Produkt durch 5040 teilbar.

(11./12.9): (eingesandt von Ed. Martin, 11.Kl., EOS Heiligenstadt)

Für jede in x quadratische Funktion kann man schreiben:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Die Wertepaare (0,-14) und (2,0) erfüllen die gesuchte Funktion, d.h.:

$$c = -14$$
$$4a + 2b - 14 = 0$$
$$b = 7 - 2a.$$

Wir erhalten die Funktion

$$y = f(x) = ax^2 + (7-2a)x - 14.$$

Ferner ist bekannt, daß die erste Ableitung an der Stelle

$$x_T = -\frac{1}{3}$$

den Wert $y' = -1$ annimmt.

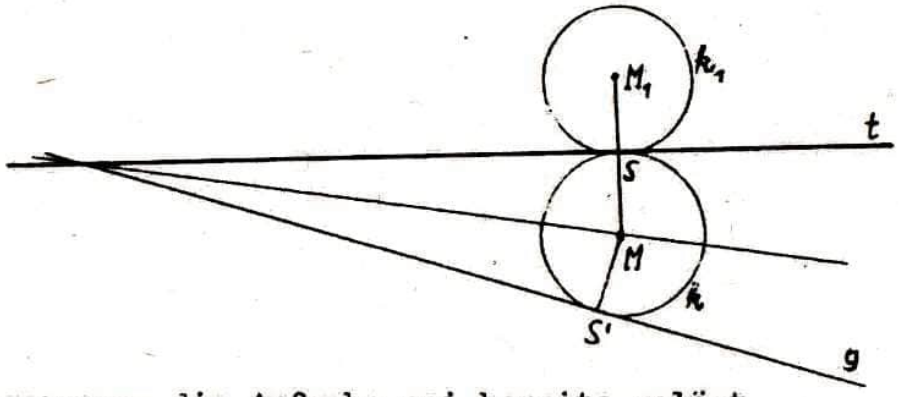
$$y' = 2ax + 7 - 2a = 2a \cdot (x-1) + 7$$
$$-1 = 2a\left(-\frac{1}{3} - 1\right) + 7$$
$$a = 3$$
$$b = 1.$$

Die gesuchte Funktion lautet also

$$y = f(x) = 3x^2 + x - 14.$$

LÖSUNG DER PREISAUFGABE (P. 5)

(eingesandt von Hugo Reinhardt, Martinfeld/Kr.Heiligenstadt)



Angenommen, die Aufgabe sei bereits gelöst.

$\overline{MS} \perp t$

$\overline{MS'} \perp g$

M_1 - Mittelpunkt des gegebenen Kreises,
M - Mittelpunkt des gesuchten Kreises,
S - gegebener Punkt,
S' - Berührungspunkt des gesuchten Kreises mit der gegebenen Geraden.

Da der gesuchte Kreis die gegebene Kreislinie k_1 in S berühren soll, muß M auf der Verlängerung von $\overline{M_1S}$ liegen. Weiterhin muß der Abstand des Punktes M von g und der gemeinsamen Tangente t gleich groß sein, d.h., M liegt auf der Winkelhalbierenden des Schnittwinkels von g und t. Daraus folgt unmittelbar die Konstruktion.

Zusatz der Redaktion:
Obwohl es nicht angegeben wurde, ist die eingesandte Lösung auch in extremen Fällen richtig, d.h. wenn einer der folgenden Fälle auftritt:
1. $g \parallel t$, 2. $g = t$, 3. g schneidet den Kreis im Punkt S.

Die Richtigkeit der Lösung in diesen Fällen möge der Leser selbst einmal überlegen, wobei man beachte:
1. im Fall 1 existieren zwei Lösungen (für beide Winkel zwischen g und t)
2. unendliche viele Lösungen
3. keine Lösung

Elementare Einführung in die Graphentheorie I

(von Hannes Peuker, wiss. Mitarbeiter an der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena)

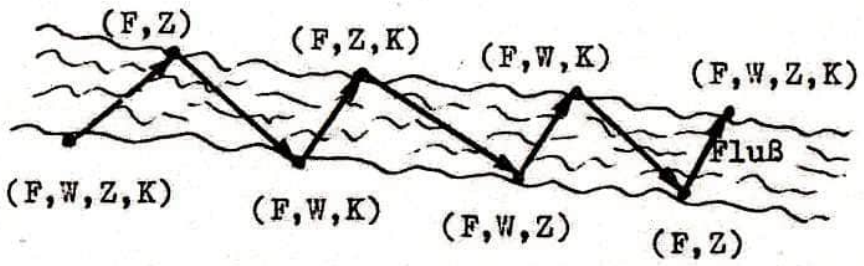
Die Theorie der Graphen stellt eine moderne mathematische Disziplin dar, die es gestattet, sowohl eine Reihe von Aufgaben der klassischen Mathematik elegant zu lösen, als auch komplizierte Probleme aus verschiedenen Bereichen der Mathematik und anderer Wissenschaften erfolgreich zu bearbeiten. Es kann nicht Aufgabe dieses Beitrages sein, die Graphentheorie umfassend darzustellen, vielmehr sollen einige einfache Prinzipien für die Anwendung von Graphen aufgezeigt werden.

Bevor der Begriff "Graph" näher erläutert wird, sei ein bekanntes und einfaches Problem betrachtet.

"Einem Fährmann wird die Aufgabe gestellt, einen Wolf, eine Ziege und einen Kohlkopf über einen Fluß zu setzen. Das Fährboot faßt aber außer dem Fährmann nur eines der drei überzusetzenden Objekte. Der Fährmann soll außerdem verhindern, daß in seiner Abwesenheit der Wolf die Ziege oder die Ziege den Kohlkopf frißt. Wie ist die Überfahrt mit einem Minimum an Fahrten zu realisieren?"

Die Lösung der Aufgabe bedarf natürlich nur einer kurzen Überlegung. Eine geschickte graphische Darstellung des Problems liefert die Lösungen, denn es gibt deren zwei, übersichtlich und macht jeden Kommentar überflüssig.

F - Fährmann
W - Wolf
Z - Ziege
K - Kohlkopf



Jede der gerichteten Strecken symbolisiert eine Fahrt. (Anstelle der gerichteten Strecken hätten auch schlingenfreie orientierte Linien benutzt werden können). Jeder der bezeichneten Punkte symbolisiert die sich am jeweiligen Ufer befindlichen Objekte nach einer Fahrt. Die zweite existierende Lösung fällt an, indem die gerichteten Strecken entgegengesetzt orientiert werden.

Wird die obige Skizze durch Weglassen der Konturen des Flusses vereinfacht, so entsteht eine Struktur, die aus einer Menge von Punkten und einer Menge von gerichteten Linien zwischen den Punkten besteht. Eine solche Struktur soll gerichteter Graph heißen.

Diese "heuristische" [1] Definition des Graphen als eine Menge von Punkten und eine Menge von gerichteten Bögen zwischen den Punkten erweist sich naturgemäß bei einer kritischen Überprüfung als zu eng und mathematisch nicht präzise. Eine sachgemäßere Definition ist etwa die folgende:

Definition. $G = (X,\Gamma)$ heißt gerichteter Graph genau dann, wenn gilt: X ist eine nichtleere Menge und Γ ist eine Abbildung (nicht notwendig eindeutig!) der Menge X in sich.

Die Interpretation der Elemente von X als Punkte der Ebene und der Abbildungsvorschrift als gerichtete Bögen zwischen Originalpunkten und den zugehörigen Bildpunkten läßt die Beziehung zu der oben genannten heuristischen Definition des Graphen deutlich werden.

Für die folgenden Überlegungen reicht reicht die heuristische Definition des Graphen aus. Zunächst werden noch einige Bezeichnungen vereinbart, die für die weiteren Betrachtungen zweckmäßig sind.

Ungerichteter Graph: Graph, dessen Bögen nicht orientiert sind.

Endpunkt eines Graphen: Punkt eines Graphen, der mit genau einem Bogen koinzidiert [2].

Kreuzungspunkt r-ter Ordnung: Punkt eines Graphen, in dem genau r+2 Bögen zusammenstoßen ($r \geq 1$).

Geschlossener Graph: Graph ohne Endpunkte.

Baumgraph: Ungerichteter Graph, der durch Fortnahme eines beliebigen Bogens in zwei Teile zerfällt, die selbst wieder ungerichtete

---

1) heuristisch - vorläufig, versuchsweise

2) koinzidieren - zusammentreffen

ungerichtete Graphen sind. Ein einzelner Punkt kann dabei als ungerichteter Graph gedeutet werden.

kleinstes umschlossenes Gebiet: Flächenstück, das von Bögen eines ungerichteten Graphen umschlossen wird und durch keine weiteren Bögen des Graphen zerteilt wird.

Mit Hilfe dieser Begriffe ist es möglich, einige Eigenschaften ungerichteter Graphen, deren Punkte Kreuzungspunkte sind, einfach zu formulieren.

SATZ 1. Ein Graph besitze K_1 Kreuzungspunkte erster Ordnung, K_2 Kreuzungspunkte zweiter Ordnung, usw., K_r Kreuzungspunkte r-ter Ordnung. Dann gilt für die Gesamtzahl der

a) Bögen des Graphen:

$$n = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{r} (s+2)\cdot K_s$$

b) Kreuzungspunkte des Graphen:

$$m = \sum_{s=1}^{r} K_s$$

Ein Beweis erübrigt sich.

SATZ 2. Ein Graph mit m Kreuzungspunkten und n Bögen kann durch Fortnahme von n-m+1 Bögen in einen Baumgraphen überführt werden.
Um einen Graphen mit m Kreuzungspunkten und n Bögen in einen Baumgraphen zu überführen, müssen genau n-m+1 Bögen entfernt werden.

Die Beweisidee wird nur kurz skizziert. Es ist leicht einzusehen, daß ein Baumgraph mit m Punkten genau m-1 Bögen besitzt. Andernfalls wäre die Bedingung nicht erfüllt, daß ein Baumgraph durch Wegnahme eines beliebigen Bogens zerfällt. Die Differenz zwischen den n Bögen des gegebenen Graphen und den m-1 Bögen des entsprechenden Baumgraphen beträgt genau n-m+1 Bögen.

SATZ 3. Die Gesamtzahl der kleinsten umschlossenen Gebiete eines Graphen mit m Kreuzungspunkten und n Bögen beträgt n-m+1.

Auch hier wird die Beweisidee nur angedeutet. Es ist klar, daß sich die Anzahl der kleinsten umschlossenen Gebiete bei Fortnahme eines Bogens um 1 verringert, solange der Graph nicht zerfällt. Die Anzahl der kleinsten umschlossenen Gebiete in einem Baumgraph ist Null. Daraus folgt Satz 3 (unter Benutzung von Satz 2).

Zur Anwendung der gewonnenen Erkenntnisse über Graphen bietet sich der Eulersche Polyedersatz an. Dieser klassische Satz besagt:

"In jedem konvexen Polyeder ist die Anzahl der Flächen und Ecken zusammen um 2 größer als die Anzahl der Kanten."

$F + E = K + 2$

F - Anzahl der Flächen
E - Anzahl der Ecken
K - Anzahl der Kanten.

Der Beweis dieses Satzes kann folgendermaßen geführt werden:

Die Ecken bzw. Kanten des konvexen Polyeders werden als Kreuzungspunkte bzw. Bögen eines ungerichteten Graphen gedeutet. Jede Ecke des Polyeders, in der r+2 Kanten zusammenstoßen, stellt im Graphen einen Kreuzungspunkt r-ter Ordnung dar ($r \geq 1$). Die Flächen des Polyeders finden sich im Graphen als kleinste umschlossene Gebiete wieder, wobei genau eine Polyederfläche durch das den gesamten Graphen umschließende Gebiet realisiert wird (wegen der Darstellung des d r e i dimensionalen Polyeders als z w e i dimensionaler Graph).

Dann gilt unter Benutzung der früher angestellten Überlegungen:

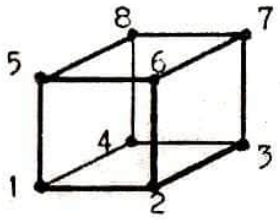
$F - 1 = n - m + 1$ (Satz 3)

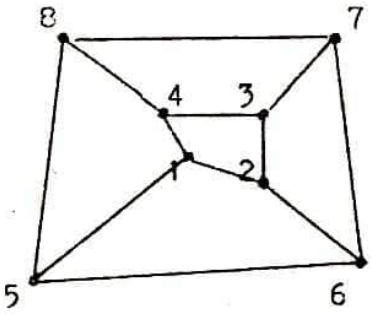
$E = m$
$K = n$ } (Satz 1)

Daraus folgt $F + E = n+2$ und $K + 2 = n+2$.
Damit ist aber

$$F + E = K + 2.$$

Betrachten wir als Beispiel den Würfel:





Jeder Kreuzungspunkt ist von der Ordnung 1.

$K = n = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 = 12$, $E = m = 8$

$F - 1 = n - m + 1 = 5$, also $F = 6$

INFORMATION - INFORMATION - INFORMATION - INFORMA

Das Mathematik-Spezialistenlager des Bezirkes Gera findet in der Zeit vom 5.7. bis zum 19.7.67 in Bad Köstritz statt. Zur Teilnahme wurden etwa hundert Schüler der Klassenstufen 8 - 12 sowie einige Studienbewerber für Mathematik ausgewählt. Die Einladungen werden rechtzeitig vom Rat des Bezirkes, Abt. Volksbildung, ausgesprochen. Mitarbeiter und Studenten der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena übernehmen wieder die Betreuung.

INFORMATION - INFORMATION - INFORMATION - INFORMA

Das "Wurzel"-Kollektiv wurde auf der II. Zentralen Leistungsschau der Studenten und jungen Wissenschaftler in Berlin mit einem Diplom des Staatssekretärs und vom Zentralrat der FDJ mit der

A R T U R - B E C K E R - M E D A I L L E

in GOLD ausgezeichnet.

Verteilung der Wertungspunkte

(Stand vom 27.5.67)

Für richtig gelöste Preisaufgaben und sehr gut gelöste Aufgaben der laufenden Serien erhielten folgende Leser insgesamt mehr als zwei Wertungspunkte:

Kiefer, Wolfgang	EOS Pößneck (11.Klasse)	6 Pkt.
Engelmann, Roland	SpS Zeiss Jena (8.Klasse)	4 Pkt.
Nagel, Werner	SpS Zeiss Jena (9.Klasse)	3 Pkt.
Grimm, Andreas	EOS Becher Jena (11.Klasse)	3 Pkt.

Weiterhin haben viele Leser einen bzw. zwei Wertungspunkte erhalten. Nach dem jetzigen Stand wird also W. Kiefer mit einer Buchprämie ausgezeichnet. Diese und eventuell noch hinzukommende Auszeichnungen werden im Mathematik-Spezialistenlager in Bad Köstritz vorgenommen. Herzlichen Glückwunsch!

INHALT

Zum Geleit 1
Über die Rolle der Mathematik bei der Errichtung des ENTWICKELTEN GESELLSCHAFTLICHEN SYSTEMS des Sozialismus 2
Leichte Kost für die Ferien 6
Interessantes für künftige Studenten. 7
Aufgaben (7.Serie) 10
Lösungen 11
Hannes Peuker: Elementare Einführung in die Graphentheorie 14
Informationen. 18
Verteilung der Wertungspunkte. 19

EXKLUSIVBEITRAG

Stefan Heinrich,
Preisträger IX. IMO:

„Unser Aufenthalt in Jugoslawien"

EXKLUSIVBEITRAG

9
67

WURZEL

schülerzeitung für mathematik

WURZEL - Schülerzeitung für Mathematik
Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik
an der Friedrich - Schiller - Universität Jena

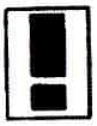
Schriftleitung: Klaus Fischer, Hansgeorg Meißner
Mitarbeiter: N. Kuse, H. Peuker, H. Schirrmeister, J. Schwarz, L. Staiger, W. Ulbrich, R. Wackernagel.

Anschrift der Schriftleitung: Sektion Mathematik
69 Jena
Helmholtzweg 1
Kennwort "Wurzel"

Die Zeitung erscheint monatlich zum Preis von 0,20 MDN.
Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS und SpS zu richten.
Einzelbestellungen können direkt an die obige Adresse eingesandt werden.

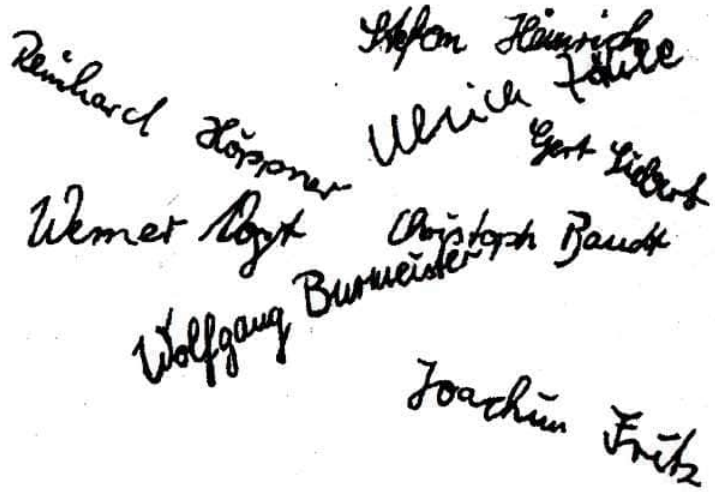
V-4-6 6 1501 M 175

Grußbotschaft der DDR-Delegation der IX. Internationalen Mathematikolympiade in Cetinje/Jugoslawien



"Wir grüßen alle Leser der "WURZEL" und wünschen ihnen alles Gute und viel Erfolg bei ihrer mathematischen Arbeit !"

Die Teilnehmer aus der DDR



Stefan Heinrich: Die IX. IOM

Mit einer herzlichen Verabschiedung auf dem Flughafen Schönefeld durch Schüler der Heinrich-Hertz-Oberschule begann unsere Reise. Die IMO-Mannschaft war vollzählig versammelt. Ein bißchen Reisefieber hatte sich eingestellt, aber schon eine Stunde später erfreuten wir uns an der herrlichen Vogelperspektive.

Nach einer Zwischenlandung in Zagreb erreichten wir Belgrad. Am Flugplatz warteten schon Mitarbeiter der DDR-Botschaft und es folgte eine dreistündige Stadtbesichtigung. Abends saßen wir erneut im Flugzeug. Um neun Uhr kamen wir in Dubrovnik an. Die Lichter dieser Stadt hatten uns schon zehn Minuten früher, in der Luft also, begrüßt. Unsere Gastgeber warteten schon. Auf gings in die montenegrinischen Berge. Der Fahrer bezwang die Serpentinen wie bequeme Kurven in einer Großstadt. Oft trennte uns nur eine Schrittlänge von dem 100 m fast senkrecht abfallenden Berghang. Nachdem wir genügend Angst ausgestanden hatten, lag Cetinje, der Ort der IX. IMO, vor uns. Nicht lange, so lagen wir in den Betten eines komfortablen Hotels und schliefen fest...

...und zwar bis in den späten Vormittag. Zwischen Frühstück und Mittagessen gab es ein herzliches Wiedersehen mit Teilnehmern der letzten IMO. Und am Nachmittag...schliefen wir wieder, denn schließlich standen die Klausuren unmittelbar bevor und etwas Erholung war angebracht. Ein abendlicher Spaziergang in der reizvollen Sommernacht war ebenfalls ausgezeichnet dazu geeignet.

Der Mittwoch ließ uns die Träumerei und Romantik vergessen. Nun sollte sich zeigen, daß die harte Vorbereitung und das Training in den Monaten vor der Olympiade nicht umsonst gewesen war. Es ging an den Start, die ersten drei Wettkampfaufgaben wollten gelöst werden. Ein bißchen aufgeregt waren wir alle, auch wir als "alte Hasen" - Teilnehmer der IMO des Vorjahres. Doch wir sprachen uns gegenseitig Mut zu und begaben uns nach einer Eröffnungsansprache von Frau Prof. Dajovič für vier Stunden in das Reich der Zahlen, Punkte und Kreise.

In dem großen Saal des Rathauses von Cetinje herrschte eine Ruhe, wie sie selten bei fast 100 anwesenden Jugendlichen zu finden ist. Jeder hatte seinen Aufgabenzettel, Unstimmigkeiten in den Übersetzungen (immerhin in 13 Sprachen) waren geklärt und die Köpfe wurden heißer und heißer. Glücklicherweise war es in dem Rathaussaal angenehm kühl.

Nach den vier Stunden trafen wir uns wieder, sofort begann ein reges Aufgabengeplauder. Wir waren eigentlich mit dem ersten Teil des Wettkampfes durchaus zufrieden. Auch diesen Nachmittag verschliefen wir.

So wieder frisch und ausgeruht erwarteten wir am nächsten Vormittag weitere drei heiße Eisen. Und sie kamen auch: Die Aufgaben waren diesmal noch schwieriger als am ersten Tag. Wir mußten alle Kräfte einsetzen, doch schließlich verlief auch der zweite Tag nach unseren Wünschen.

Damit hatten wir alles überstanden, während jetzt die Korrekturen begannen. Die Arbeiten wurden bewertet und die Punktzahlen im internationalen Maßstab verglichen.

Für uns fingen Exkursionen in das schöne Jugoslawien an. Mit dem Bus ging es an zwei Tagen an den Strand der Adria. Diese Tage werden uns immer in Erinnerung bleiben. Wir badeten und tauchten in der warmen Adria, lagen in der Sonne, gingen unter Palmen und Zypressen auf reizvollen Wegen spazieren und fühlten uns ausgezeichnet in dieser südlichen Gegend. Erst spätabends kehrten wir in unser Hotel zurück. Doch obwohl wir ziemlich müde waren, wollte keiner schlafen gehen. So nahmen wir uns ein paar kleine Geschenke unter den Arm und besuchten die sowjetische Mannschaft. Nach einem freudigen Empfang ging ein munteres Geplauder los. Nicht lange, da waren wir bei der Mathematik angelangt. Unsere sowjetischen "Kollegen" lösten unsere Aufgaben meist auf Anhieb, während wir einige ungeknackte Nüsse mit nach Hause nehmen müssen.

Der nächste Tag führte uns durch mächtige Berge und an bildschönen Flußtälern entlang zum Biograder See, der inmitten des jugoslawischen Nationalparkes liegt. Schließlich besuchten wir am folgenden Tag die Küstenstadt Dubrovnik mit ihren alten venezianischen Gäßchen und Häusern. Von der Stadtmauer

aus konnte man Dubrovnik mit einem großen Kastell vergleichen. Jedenfalls wird diese Stadt nicht umsonst als die schönste Jugoslawiens bezeichnet.

Nun ging die Olympiade dem Ende zu. Ein letzter Tag in Cetinje gab uns noch Möglichkeiten für Einkäufe. Die restliche Zeit verbrachten wir mit der englischen und der schwedischen Mannschaft. Es ging um politische Fragen und es gab einige heiße Diskussionen. Die Gespräche waren sehr aufschlußreich für uns und es gelang uns auch, den Engländern und Schweden unseren Standpunkt etwas zu erläutern.

Einen schönen Abschluß bildete die feierliche Siegerehrung. Die Preisträger erhielten ihre Urkunden; jeder wurde durch Applaus belohnt. Ein kleiner Beifallssturm brach aus, als der mongolische Schüler, der als erster einen Preis für sein Land eroberte, vorn stand. Wir hoffen alle, daß damit das Eis gebrochen ist und viele weitere Preise an die Mongolische VR gehen werden.

Eine Busfahrt mit zeit- und damit nervenraubenden Unterbrechungen, so daß wir beinahe das Flugzeug verpaßten, hingegen ein bequemer Flug und eine herzliche Begrüßung auf dem Flugplatz bildeten den Abschluß unserer Reise. Mit einem Empfang, gegeben vom Ministerium für Volksbildung, auf dem die IMO-Teilnehmer ausgezeichnet wurden, endete die erlebnisreiche IX. Internationale Mathematikolympiade.

Hier noch ein paar Zahlen:

Es nahmen 13 Länder teil. (Teilnehmer des Vorjahres plus Schweden, Frankreich, England, Italien). 99 Schüler (alle Mannschaften außer Frankreich (5) und Italien (6) waren mit 8 Schülern vertreten), darunter ein Mädchen (Bulgarien), gingen an den Start.

Die Preisträger aus der DDR:

1. Preis: Christoph Bandt, Stefan Heinrich, Reinhard Höppner.
2. Preis: Wolfgang Burmeister (8.Klasse), Gert Siebert, Ulrich Zähle.
3. Preis: Joachim Fritz.

Inoffizielle Länderwertung (nach Gesamtpunktzahlen)

	1.Preise	2.Preise	3.Preise	Gesamtpunktzahl
Sowjetunion	3	3	2	275
DDR	3	3	1	257
Ungarn	2	3	3	251
Großbritannien	1	2	4	231
Rumänien	1	1	4	214
CSSR	0	1	3	159
Bulgarien	1	0	1	159
Jugoslawien	0	0	3	136
Schweden	0	0	2	135
Italien	0	1	1	110
Polen	0	0	1	101
Mongolische VR	0	0	1	87
	11	14	26	

Fünf Preisträger erreichten volle Punktzahl:

Ungarn 1, UdSSR 1, Bulgarien 1, DDR 2 (Bandt und Heinrich)

Preisaufgaben (P. 9/1 ... 6)

Als Preisaufgaben stellen wir heute alle Aufgaben der IX. IMO. Wie üblich erhält der Einsender für jeden vollständigen Lösungsweg einen Wertpunkt. Als Einsendeschluß gilt die Veröffentlichung der Lösungen (in irgendwelchen Zeitungen oder Zeitschriften), spätestens aber der 30. September 1967. Die Lösungen sind unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" an unsere Adresse

WURZEL-Redaktion
69 Jena
Helmholtzweg 1

einzusenden.

IX. Internationale Mathematik-Olympiade

Erste Klausur 5.7.67

1. In einem Parallelogramm ABCD sei $\overline{AB} = a$ die Länge der Seite AB, $\overline{AD} = 1$ (eins) die Länge der Seite AD und α das Maß des Winkels $\sphericalangle$ DAB. Das Dreieck ABD sei spitzwinklig.
Man beweise: Die vier Kreise K_a, K_b, K_c, K_d vom Radius 1 (eins), deren Mittelpunkte die Eckpunkte A,B,C,D sind, überdecken das Parallelogramm dann und nur dann, wenn $a \leq \cos\alpha + \sqrt{3} \cdot \sin\alpha$ gilt.

2. In einem Tetraeder habe genau eine Kante eine Länge, die größer als 1 (eins) ist. Man zeige, daß dann für das Volumen V des Tetraeders $V \leq \frac{1}{8}$ gilt.

3. Es seien k, m und n positive ganze Zahlen, wobei m+k+1 eine Primzahl größer als n+1 ist. Wir führen die Bezeichnung $c_s = s(s+1)$ ein. Man beweise, daß das Produkt
$$(c_{m+1}-c_k)(c_{m+2}-c_k)\cdot\ldots\cdot(c_{m+n}-c_k)$$
durch das Produkt $c_1 c_2 \cdot\ldots\cdot c_n$ teilbar ist.

Zweite Klausur 6.7.67

4. Es seien zwei spitzwinklige Dreiecke $A_oB_oC_o$ und A'B'C' gegeben. Man konstruiere ein Dreieck ABC, welches dem Dreieck A'B'C' ähnlich (wobei die Punkte A,B,C den Punkten A',B',C' in der angegebenen Reihenfolge entsprechen) und dem Dreieck $A_oB_oC_o$ umbeschrieben (wobei AB durch C_o, BC durch A_o und CA durch B_o verläuft) ist. Anschließend konstruiere man von allen Dreiecken dieser Art dasjenige mit dem größten Flächeninhalt.

5. Man betrachte die Folge c_n:
$$c_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_s$$
$$c_2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_s^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_n = a_1^n + a_2^n + a_3^n + \ldots + a_s^n$$
wobei $a_1, \ldots, a_s$ reelle Zahlen sind, von denen wenigstens

eine verschieden von 0 ist. Es sei bekannt, daß unendlich viele Glieder c_n dieser Folge gleich 0 sind. Unter dieser Voraussetzung bestimme man alle n, für die $c_n = 0$ gilt.

6. Bei einem Sportwettkampf wurden m Medaillen im Laufe von n Tagen ($n > 1$) verliehen. Am 1. Tage wurden 1 Medaille und $\frac{1}{7}$ der übrigen m-1, am 2. Tage 2 Medaillen und $\frac{1}{7}$ des nun verbliebenen Restes verliehen usw. Schließlich wurden am n-ten Tage gerade n Medaillen vergeben, ohne daß noch welche übrig blieben. Wieviel Tage dauerte der Wettkampf und wieviel Medaillen wurden insgesamt verliehen ?

AUFGABEN (8. Serie)

9. Klasse:

(9.15) Beweisen Sie, daß das Produkt der Ziffern einer mehrstelligen Zahl immer kleiner als die Zahl selbst ist.

(9.16) Es seien $x,y > 0$ und $x+y = 5$. Man bestimme den kleinsten Wert für $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$!

10.Klasse:

(10.15) Im Viereck ABCD sei M der Mittelpunkt der Diagonale $\overline{AC}$ und N der Mittelpunkt der Diagonale $\overline{BD}$. Die Gerade, die durch M und N verläuft, schneide die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ in den Punkten M' und N'. Man beweise:
Wenn $\overline{MM'} = \overline{NN'}$, dann gilt $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$!

(10.16) Man löse folgende Gleichung:
$|1-x| + (x-1) = x$

11./12.Klasse:

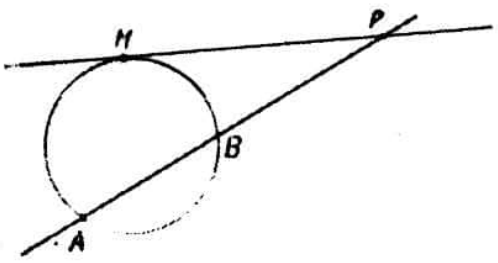
(11./12.15) Man beweise ohne Tafel, daß

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2 \text{ gilt.}$$

(11./12.16) Auf der Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks ABO mit den gegebenen Seiten $\overline{AO} = a$ und $\overline{OB} = b$ konstruiere man das gleichseitige Dreieck ABC. Bei welcher Größe des Winkels $\sphericalangle AOB$ hat der Abschnitt $\overline{OC}$ die größte Länge ?

LÖSUNGEN

(9.9) Nehmen wir an, wir hätten den Kreis schon konstruiert. Dann berührt der Kreis die Gerade g im Punkt M. Wir unterscheiden zwei Fälle:



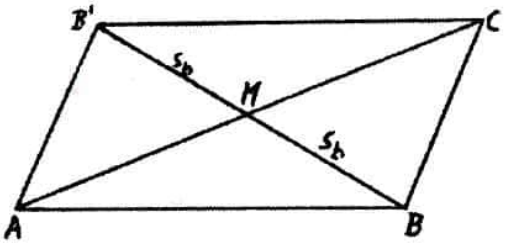
I. $\overline{AB} \parallel g$
In diesem Fall ist das Dreieck ABM gleichschenklig. Es ergibt sich daraus unmittelbar die Konstruktion, d.h. man konstruiert ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{AB}$ und dem dritten Eckpunkt auf g.

II. $\overline{AB} \not\parallel g$: Die Gerade, die von A und B bestimmt wird, schneide g im Punkt P. Dann gilt nach dem Sekanten-Tangentensatz:

$$\overline{MP}^2 = \overline{AP} \cdot \overline{BP}$$

Nach dieser Vorschrift kann man nun unter Zuhilfenahme des Höhensatzes die Länge der Strecke $\overline{MP}$ konstruieren.

(10.9) ABC sei ein beliebiges Dreieck. Wenn man dieses Dreieck zum Parallelogramm ABCB' ergänzt, indem man es um $\overline{AC}$ klappt, so gilt:



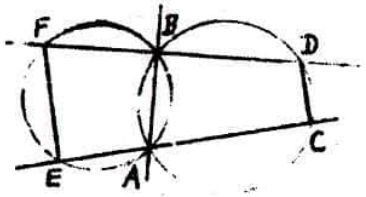
BMB' halbiert die Diagonale $\overline{AC}$ des Parallelogramms ABCB' und wird von dieser halbiert. $\overline{BB'} = 2s_b$ ist Diagonale im Parallelogramm ABCB'.

Also gilt: $2s_b \leq a+c$. Analog erhält man (durch zyklische Vertauschung): $2s_a \leq b+c$ und $2s_c \leq a+b$.

Nach Addition dieser drei Ungleichungen erhält man

$$s_a + s_b + s_c \leq a + b + c.$$

(10.13)



ABDC und ABFE sind Sehnenvierecke,
also gilt:

$$\sphericalangle FEA + \sphericalangle ABF = 180^\circ \quad (1)$$
$$\sphericalangle ABD + \sphericalangle ACD = 180^\circ \quad (2)$$
$$\sphericalangle ABF + \sphericalangle ABD = 180^\circ \quad (3)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\sphericalangle FEA + \sphericalangle ABF + \sphericalangle ABD + \sphericalangle ACD = 360^\circ \quad (4)$$

Aus (4) und (3) folgt

$$\sphericalangle FEA + \sphericalangle ACD = 180^\circ.$$

Man überlegt sich leicht, daß daraus die Behauptung folgt.

(11./12.11)

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + 99^2 - 100^2$$
$$= (1+2)(1-2) + (3+4)(3-4) + \ldots + (99+100)(99-100)$$
$$= -1 \cdot (1+2+3+4+\ldots+100)$$
$$= -5050.$$

(11./12.10)

Es gilt: $323 = 17 \cdot 19$

Ferner ist $20^n + 16^n - 3^n - 1 = (19+1)^n + (19-3)^n - 3^n - 1$

Nach dem binomischen Satz ergibt sich:

$$= 19m + 1 + 19k + (-3)^n - 3^n - 1$$
$$= 19(m+k) - 3^n(1 - (-1)^n)$$

mit m,k ganz. Wie man leicht sieht, ist dieser Ausdruck dann und nur dann durch 19 teilbar, wenn $(-1)^n = 1$, d.h. wenn n gerade ist.

Man zeigt nun, daß der Ausdruck für gerades n auch durch 17 teilbar ist:

$$20^n + 16^n - 3^n - 1 = (17+3)^n + (17-1)^n - 3^n - 1$$
$$= 17p + 3^n - 3^n + 17q + 1 - 1$$
$$= 17(p+q) \quad (p, q \text{ ganz})$$

somit ist der gegebene Ausdruck dann und nur dann durch 323 teilbar, wenn n gerade ist.

A C H T U N G ! A C H T U N G ! A C H T U N G !

H i n w e i s d e r S c h r i f t l e i t u n g !

Zur Vereinfachung unserer "WURZEL"-Abrechnung [1] beginnen wir mit der Nr. 9/67 mit einem neuen Verfahren. Wir geben für das laufende Schuljahr (d.h. für Nr. 9/67 bis Nr. 8/68 sowie die in diesem Zeitraum erscheinenden Sondernummern) Abonnements aus. Der Preis beträgt pro Abonnement 2.50 MDN. Wir sind der Meinung, daß dieses neue Verfahren nicht nur uns die Arbeit erleichtert, sondern auch Ihnen Vorteile bringt.

Vielen Dank für Ihr Verständnis!
Ihre Schriftleitung

1) Für diejenigen unserer Leser, die bereits ein Abonnement besitzen, trifft der Hinweis der Schriftleitung nicht zu!

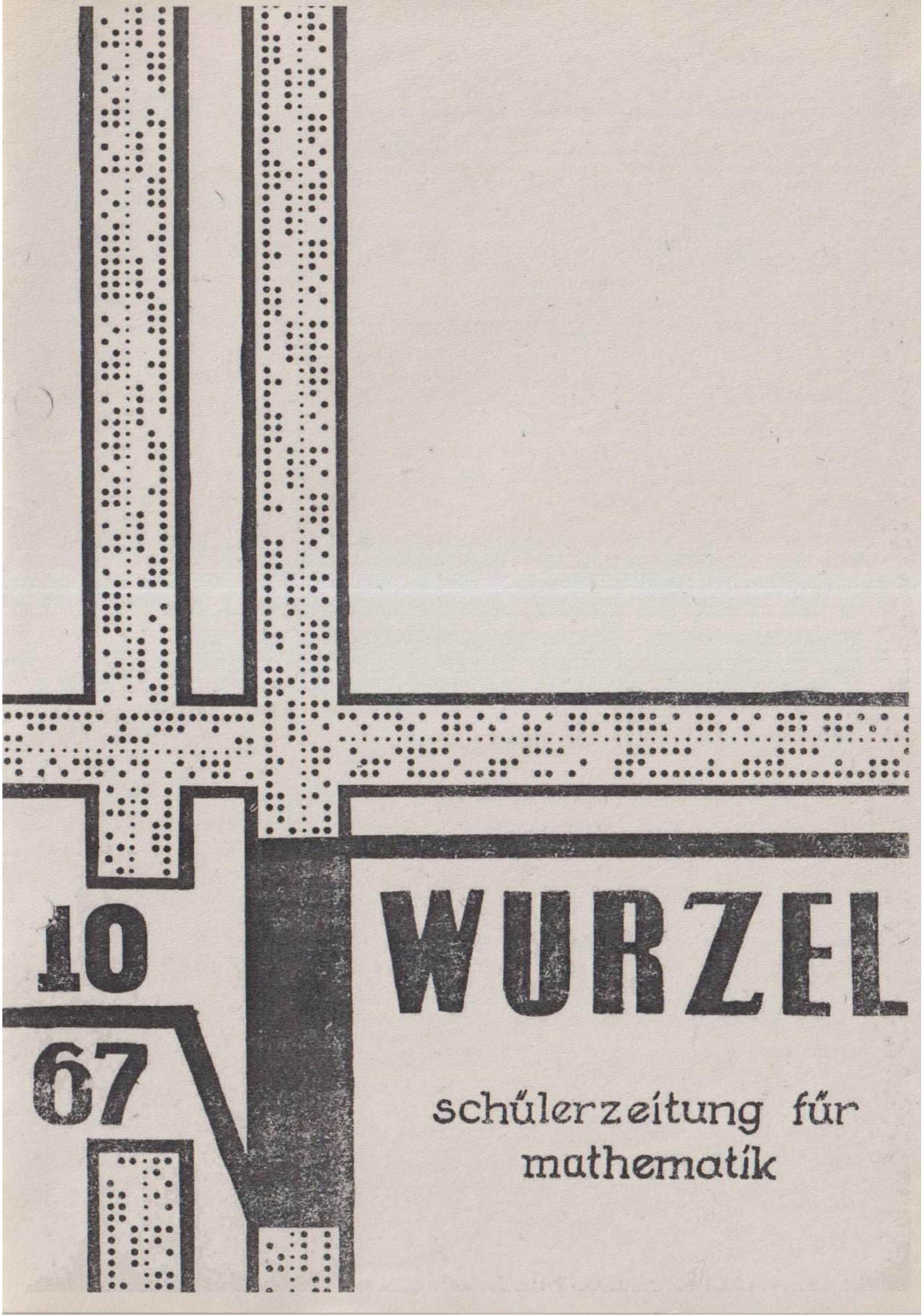
VI. Mathematik-Spezialistenlager des Bezirkes Gera

Vom 6.-19.7.67 fand in Bad Köstritz das VI. Mathematik-Spezialistenlager des Bezirkes Gera statt. Wie bereits angekündigt, wurden Organisation und Durchführung von Mitarbeitern und Studenten der Sektion Mathematik der Fr.-Schiller-Universität Jena und vom Rat des Bezirkes Gera, Abt. Volksbildung, getragen.
70 Schüler aus den Klassenstufen 7 bis 12 waren ins Mathe-Lager delegiert worden. Es ist bedauerlich, daß die Kapazität des Lagers (100-110 Schüler) von den Kreisfachberatern nicht voll ausgeschöpft wurde.
Die Betreuer vermittelten den Teilnehmern in den Seminaren neue Kenntnisse aus solchen wichtigen mathematischen Disziplinen wie Mengenlehre, Aussagen- und Prädikatenlogik, Geometrie, Rechentechnik, Analysis u.a. Dabei wurde bereits vorhandenes Wissen vertieft und erweitert, aber auch viele neue Kenntnisse wurden erarbeitet.
Die Lager-Teilnehmer brachten zum Ausdruck, daß ihnen die Art der Darstellung des Stoffes als in sich abgeschlossene Themenkomplexe sowie die Breite der ausgewählten Themen gut gefallen und einen tieferen Einblick in die Anwendungsgebiete der Mathematik ver-

mittelt haben. Für die Zukunft wäre zu wünschen, daß in den kommenden Lagern die Schüler durch noch aktivere Mitarbeit im fachlichen Gespräch zum Gelingen dieser Veranstaltungen beitragen. Über unsere Vorstellungen zur Gestaltung der nächsten Spezialistenlager wird noch berichtet werden.
Für eine interessante Freizeitgestaltung war ebenfalls gesorgt. Es bestand die Möglichkeit, sich an Wettbewerben in Schach und Luftgewehrschießen zu beteiligen. Das herrliche Sommerwetter wurde intensiv genutzt, im wunderschönen Freibad von Bad Köstritz Körper und Geist zu erfrischen.
Als weitere Veranstaltungen seien nur das Leichtathletiksportfest, der heimatkundliche Vortrag und die Tages-Wanderung genannt. Wir möchten die Gelegenheit nutzen, den Rat des Bezirkes zu bitten, durch eine angemessene finanzielle und materielle Unterstützung mitzuhelfen, den Lagerteilnehmern eine vielseitige und anspruchsvolle Freizeitgestaltung zu bieten. Im vergangenen Lager mußten leider Vorhaben wie Schallplattenabend, Tischtennisturnier usw. Wunschträume bleiben, weil die notwendigen Materialien nicht besorgt werden konnten.
Höhepunkt des Spezialistenlagers war ein gelungener Abschlußabend, an dem die Sieger der Mathematik-Lagerolympiade und die besten Sportler mit Buchprämien und Urkunden ausgezeichnet wurden.
Abschließend möchten wir Gen. Johannes Brauer aus Krossen danken, der als Lagerleiter sein möglichstes tat, trotz der relativ bescheidenen Mittel, die zur Verfügung standen, allen Lagerteilnehmern einen angenehmen Aufenthalt in Bad Köstritz zu bieten.

INHALT

Grußbotschaft von der IX. IMO 2
Stefan Heinrich: Die IX. IMO 3
IMO - Aufgaben 7
Aufgaben (8. Serie) 8
Lösungen 9
Hinweis der Schriftleitung 11
VI. Mathematik-Spezialistenlager des Bezirkes Gera . . .11


10
67
WURZEL
schülerzeitung für
mathematik

WURZEL - Schülerzeitung für Mathematik

Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Die Zeitung erscheint monatlich zum Preis von 0,20 MDN. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS oder SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Klaus Fischer, Hansgeorg Meißner
Mitarbeiter: N.Kuse, H.Peuker, H.Schirrmeister, J.Schwarz, L.Staiger, W.Ulbrich, R.Wackernagel.

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
69 Jena
Helmholtzweg 1
"WURZEL"-Redaktion

V-14-6 6 1603 M 175-67

Mitteilungen der Redaktion

Zu unserem Artikel "Über die Rolle der Mathematik bei der Errichtung des Entwickelten Gesellschaftlichen Systems des Sozialismus" in der Nr.7/8/67 erhielten wir eine große Anzahl von Zuschriften, in denen die Frage nach genaueren Ausbildungsplänen an der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität sowie nach Einsatzmöglichkeiten der Absolventen gestellt wurde. Wir sind dabei, eine Publikation zu erarbeiten, in der diese Fragen weitgehend geklärt werden. Allen Interessenten werden wir diese Publikation demnächst zuschicken.

*

Anläßlich des 50. Jahrestages der Großen Sozialistischen Oktoberrevolution erscheint im Oktober eine "WURZEL"-Sondernummer, die sich mit der Entwicklung der Mathematik in der UdSSR und ihren Erfolgen beschäftigt.

*

Wegen drucktechnischer Schwierigkeiten verzögerte sich die Auslieferung der Nr. 9/67. Wir bitten unsere Leser, dies zu entschuldigen. Wir sind weiterhin bemüht, Ihnen die "WURZEL" in den ersten Tagen des Monats vorzulegen.

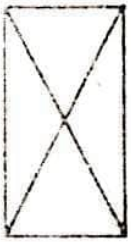
Ihre "WURZEL"-Redaktion

PERT - eine Anwendung der Graphentheorie bei der Planung von Projekten

In der einführenden Betrachtung zur Graphentheorie wurde ein klassischer mathematischer Satz, der Eulersche Polyedersatz, mit graphentheoretischen Mitteln bewiesen. (Nr. 7/8)
Der folgende Beitrag soll zeigen, daß einige mathematische Methoden der Feinplanung von komplizierten Projekten - sie tauchen unter Bezeichnungen wie Netzwerkplanung, Zyklogramme, Methode des kritischen Weges, PERT u.a. in den verschiedensten Publikationsorganen häufig auf - sehr eng mit der Graphentheorie verwandt sind.

Die Planungsmethode PERT soll etwas näher beleuchtet werden. PERT ist die Abkürzung für Program Evaluation and Review Technique und stellt eine Methode zur Beurteilung und Prüfung von Plänen dar. Es sei vorausgeschickt, daß die folgenden Betrachtungen zu PERT nur grob und stark vereinfacht angestellt werden können.
Bevor die Methode PERT beschrieben wird, soll ein konkretes Beispiel den Anwendungsbereich von PERT andeuten.

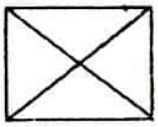
Die Realisierung eines komplizierten und umfangreichen Bauvorhabens soll geplant werden. Für die Ausführung der einzelnen Bauvorhaben sind Aufwendungen an Baumaterialien, Arbeitskräften und Zeit notwendig. Wie sind diese Aufwendungen zu koordinieren, damit das Gesamtprojekt in einem vorgesehenen Zeitraum fertiggestellt werden kann?
Zunächst erscheint es sinnvoll, die Realisierung des Gesamtprojekts in eine Anzahl von Etappen zu zergliedern, die zum Beispiel durch die Termine für die Fertigstellung einzelner Bauabschnitte voneinander abgegrenzt sind. Solche "Etappenziele" sollen Ereignisse im Sinne von PERT heißen. Etwas präziser formuliert, soll ein PERT - Ereignis folgenden Bedingungen genügen:



1. Ein PERT - Ereignis stellt einen wesentlichen Moment bei der Realisierung des Gesamtprojekts dar.
2. Ein PERT - Ereignis charakterisiert den Beginn oder den Abschluß irgendeiner Tätigkeit.
3. Ein PERT - Ereignis benötigt keine Aufwendungen an Zeit, Arbeitskraft, Material u. a.

Der Zeitpunkt der Fertigstellung des Fundaments des Gebäudes ist ein Beispiel für ein PERT - Ereignis, die Ausführung der Fundamentarbeiten dagegen ist kein PERT - Ereignis.

Natürlich reicht die Fixierung von PERT - Ereignissen für eine sinnvolle Projektplanung nicht aus. Es macht sich noch eine Begriffsbildung erforderlich, in der die zeitlichen und materiellen Aufwendungen ihren Niederschlag finden. Unter einer Operation im Sinne von PERT soll die Ausführung irgendeiner Tätigkeit verstanden werden. Präziser:



Eine PERT - Operation ist die Realisierung eines Teilprozesses im Gesamtprozeß des Projekts, die mit Aufwand an Zeit, Arbeitskraft, Materialien u. a. verbunden ist. Beispielsweise stellt die Ausführung der Installationsarbeiten in einem Gebäude eine PERT -Operation dar.

Werden nun für ein Projekt die PERT - Ereignisse durch Knoten eines Graphen und die PERT - Operationen als gerichtete Bögen eines Graphen dargestellt, so kann das Gesamtprojekt in Gestalt eines gerichteten Graphen veranschaulicht werden. Zur Unterscheidung sollen die Knoten nummeriert und die Bögen mit lateinischen Buchstaben gekennzeichnet werden.

Beispiel: Planung für die Errichtung eines Gebäudes

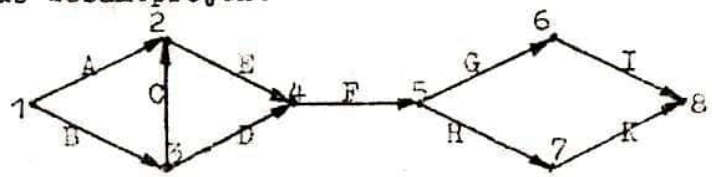
PERT - Ereignisse:

1) Beginn der Ausschachtungsarbeiten
2) Beginn des Fundamentbaus
3) Abschluß der Materialanfuhr
4) Beginn des Rohbaus
5) Richtfest
6) Abschluß der Dacharbeiten
7) Beginn für die Innenputz - und Malerarbeiten
8) Schlüsselübergabe

PERT - Operationen:

A) Erdarbeiten
B) Anfuhr des Baumaterials
C) Beschaffung von Betonierern
D) Beschaffung von Maurern
E) Fundamentbau
F) Ausführung des Rohbaus
G) Dachdeckerarbeiten
H) Installationsarbeiten (Innenausbau)
I) Ausführung der Außenputzarbeiten
K) Ausführung der Innenputz - und Malerarbeiten

Graph für das Gesamtprojekt

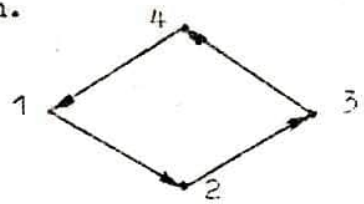


Das Beispiel zeigt, daß die PERT -Ereignisse in einer logischen Anordnung aufeinanderfolgen müssen. Das Ereignis 4 kann natürlich erst dann eintreten, wenn die Ereignisse 2 und 3 eingetreten sind. Andererseits muß das Ereignis 5 vor den Ereignissen 6 und 7 eintreten. Es besteht also ein echter Anlaß, die PERT - Ereignisse folgendermaßen zu klassifizieren:

Ein PERT - Ereignis i heißt Vorläufer für ein PERT - Ereignis k, wenn es zeitlich vor dem Ereignis k eintreten muß. $i, k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$

Ein PERT - Ereignis m heißt Nachfolger eines PERT - Ereignisses l, wenn es zeitlich erst nach dem Ereignis l eintreten kann. $l, m \in \{1, 2, 3, \ldots\}$

Daraus folgt, daß nicht jeder gerichtete Graph ein sinnvoller PERT - Plan sein kann.



Der obige Graph kann keinen PERT - Plan darstellen, da jedes der 4 Ereignisse sein eigener Vorläufer und Nachfolger ist.
Zunächst ist noch nicht ersichtlich, wie der gerichtete Graph als Schaubild für ein Gesamtprojekt zur Planung benutzt werden kann. In der nächsten Nummer wird diesem Problem besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden.

Hannes Peuker
wissenschaftlicher Mitarbeiter
an der Sektion Mathematik
der Friedrich - Schiller -
Universität Jena

AUFGABEN (10. Serie)

9.Klasse: (9.17) Man zeige, daß $n^2(n^4 - 1)(n^4 - 16)$ durch 1800 teilbar ist.

(9.18) Man löse die Gleichung:

$$x^2 + 3|x| - 4 = 0$$

10.Klasse: (10.17) Auf der Seite AB des Dreiecks Δ ABO mit gegebenen Seiten $\overline{AO} = a$ und $\overline{BO} = b$ konstruiere man das gleichseitige Dreieck Δ ABC. Bei welcher Größe des Winkels $\sphericalangle$ AOB hat die Strecke $\overline{OC}$ die größte Länge?

(10.18) Man löse im Bereich der ganzen Zahlen folgende Gleichung:

$$x \cdot y = x + y$$

11./12.Klasse:

(11./12.17) a) Man löse die Gleichung

$$|x^2 - 4| = |2x|$$

b) Man löse die Ungleichung

$$|x^2 - 4| > |2x|$$

(11./12.18) Man zeige, daß in der Zahlenfolge

$a_0 = a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 2)$

jede vierte Zahl durch 3 teilbar ist.

PREISAUFGABEN (P. 10)

Innerhalb eines gegebenen Dreiecks Δ ABC ist der Punkt O so zu finden, daß sich die Flächeninhalte der Dreiecke Δ AOB, Δ AOC und Δ BOC wie 1 : 2 : 3 verhalten.

Für jeden vollständigen Lösungsweg der Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender mehr als fünf Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).
Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" bis zum 30. des jeweiligen Erscheinungsmonats (Datum des Poststempels) an unsere Adresse einzuschicken.

INFORMATIONEN - INFORMATIONEN - INFORMATIONEN - INFORMATI

Datenverarbeitung - immer besser

Die elektronische Datenverarbeitungsanlage BESM - 6 aus der UdSSR schafft 1 Mio. Operationen pro sec. Sie kann mit Hilfe von Zusatzgeräten mehrere Aufgaben gleichzeitig lösen. Besonders vorteilhaft ist ihre Anwendung für die Klärung theoretischer Fragen auf den Gebieten der Physik, Chemie usw.

INFORMATIONEN - INFORMATIONEN - INFORMATIONEN - INFORMATI

Elektronischer "Prüfer"

Im Polytechnischen Institut in Lwow wird der Elektronenrechner "Alpha 5" verwendet zur Überprüfung des Wissens der Studenten und zur Wiederholung des Studienstoffes. Die Maschine kann nicht nur Fragen stellen und die Antworten zensieren, sondern auch nach einem vorgegebenen Text Wiederholungsaufgaben stellen. Bei unzureichenden Antworten werden die gestellten Fragen erläutert, bevor die nächste Frage gestellt wird.

Ausbildungszentrum für Datenverarbeitung

In Rostock entstand die erste zentrale Ausbildungsstätte für Datenverarbeitung. In zwei Jahren theoretischer und praktischer Ausbildung kann dort der Beruf eines Datenverarbeiters erlernt werden.

LÖSUNGEN

Zu den Preisaufgaben P.6 bis P.8 erhielten wir eine größere Anzahl von Einsendungen. Die angegebene Lösung der Aufgabe P6 fand keiner der Einsender, während P7 und P8 von mehreren ähnlich der Veröffentlichung gelöst wurden.
Für unsere neuen Leser geben wir die Aufgaben noch einmal an:

(P.6) Es ist ein Dreieck Δ ABC zu konstruieren, von dem gegeben sind:

1) die Seiten a und b,
2) $\beta = 3\alpha$

(P.7) Man löse folgende Gleichung:

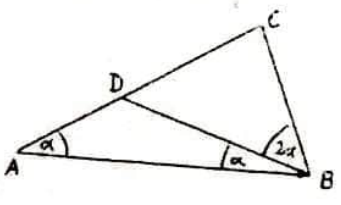
$$|x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| = 4$$

(P.8) Man gebe alle Tripel (a,b,c) natürlicher Zahlen an, die folgenden Bedingungen genügen:
b, c teilerfremd, $1 \leq a \leq 6$ und es gilt:

$$\sqrt{a + \frac{b}{c}} = a\sqrt{\frac{b}{c}}$$

Lösungen:

(P.6): Nehmen wir an, wir hätten das Dreieck schon konstruiert. Dann teilen wir den Winkel β wie in der Skizze angegeben. Wir erhalten zwei gleichschenklige Dreiecke. Δ ABD ist gleichschenklig, da beide Basiswinkel gleich α sind. Δ BDC ist gleichschenklig, da ∢ CBD = ∢ BDC = 2α ist (Satz vom Außenwinkel).



Es gilt nun: $\overline{BC} = a$ nach Voraussetzung und $\overline{DC} = a$ nach dem oben Gesagten. Also gilt $\overline{AD} = b - a$ und nach oben auch $\overline{BD} = b - a$. Aus $\overline{BC}$, $\overline{DC}$ und $\overline{BD}$ können wir das Dreieck Δ BDC konstruieren, und wir erhalten durch Verlängerung von $\overline{CD}$ um $\overline{AD}$ das Dreieck Δ ABC. Die Konstruktion ist nur dann möglich, wenn $a < b$.

(P.7): Wir untersuchen folgende Fälle:

1. $3 \leq x$

$$x - 1 - 2(x - 2) + 3(x - 3) = 4$$

ergibt: $x = 5$

2. $2 \leq x \leq 3$

$$x - 1 - 2(x - 2) - 3(x - 3) = 4$$

ergibt sich nach Auflösung der Beträge unter Beachtung des Vorzeichenwechsels

$x = 2$

3. $1 \leq x \leq 2$

$$x - 1 + 2(x - 2) - 3(x - 3) = 4$$

$$0 \cdot x + 4 = 4$$

(gilt für alle x)

4. $x \leq 1$

$$-(x - 1) + 2(x - 2) - 3(x - 3) = 4$$

$x = 1$

Fassen wir zusammen:

Falls $3 \leq x$, ist $x = 5$ Lösung der Gleichung.
Falls $2 \leq x \leq 3$, ist $x = 2$ Lösung der Gleichung.
Falls $1 \leq x \leq 2$, ist jedes x, d.h. jedes x mit $1 \leq x \leq 2$ Lösung der Gleichung.
Falls $x \leq 1$, ist $x = 1$ Lösung der Gleichung.
Also sind alle x mit $1 \leq x \leq 2$ oder $x = 5$ Lösungen der Gleichung.

(P.8): $\sqrt{a + \frac{b}{c}} = a\sqrt{\frac{b}{c}}$

$$a + \frac{b}{c} = \frac{a^2 b}{c}$$

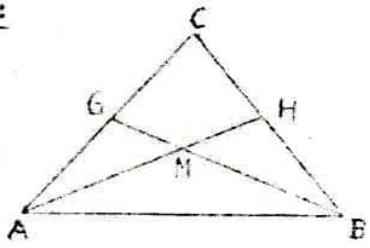
$$\frac{a}{a^2 - 1} = \frac{b}{c}$$

Da b und c teilerfremde Zahlen sind (lt. Aufgabenstellung) ergeben sich folgende Lösungen:

a = b	1	2	3	4	5	6
$a^2 - 1 = c$	0	3	8	15	24	35

Der Fall a = 1 ist nicht möglich, da $\frac{1}{0}$ nicht erklärt ist. Folgende Tripel erfüllen daher die Gleichung:
(2,2,3), (3,3,8), (4,4,15), (5,5,24), (6,6,35).

(9.12):



$\overline{AH}$ und $\overline{BG}$ seien die Seitenhalbierenden. $\overline{AH} = \overline{BG}$ lt. Voraussetzung.
Hieraus folgt: $\overline{AM} = \overline{BM} = \frac{2}{3}\overline{AH}$
und $\overline{GM} = \overline{HM} = \frac{1}{3}\overline{AH}$.
(Da sich die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1 : 2 schneiden)

Außerdem gilt: $\sphericalangle GMA = \sphericalangle BMH$

folglich: $\Delta AMG \cong \Delta BMH$ (sws)

$$\overline{AG} = \overline{BH}$$
$$\overline{AC} = \overline{BC}$$

(9.13): Die Konstruktion erfolgt nach:

$$\frac{90^\circ - 54^\circ}{2} = 18^\circ$$

oder $\quad 180^\circ - 3 \cdot 54^\circ = 18^\circ$

(9.14): Man betrachte die Funktion $f(x) = \frac{5 + 6x}{8}$ und die

Funktion $g(x) = \frac{15x - 7}{5}$

Es gilt $[f(x)] = [g(x)]$ höchstens dann, wenn $|f(x) - g(x)| < 1$. Man überzeugt sich leicht, daß $f(\frac{9}{10}) = g(\frac{9}{10})$ gilt.

Außerdem ist $|f(x) - g(x)| = 1$ genau dann, wenn

$$x = \frac{41}{90} \quad \text{oder} \quad x = \frac{121}{90} .$$

Also liegen die Lösungswerte im offenen Intervall

$$(\frac{41}{90} ; \frac{121}{90}).$$

Es gilt:

Für $-\frac{5}{6} \leq x < \frac{1}{2}$ ist $[f(x)] = 0$

und für $\frac{1}{2} \leq x < \frac{11}{6}$ ist $[f(x)] = 1$.

Außerdem ist

für $\frac{7}{15} \leq x < \frac{4}{5}$ $[g(x)] = 0$

und für $\frac{4}{5} \leq x < \frac{17}{15}$ ist $[g(x)] = 1$.

Alle x mit $\frac{7}{15} \leq x < \frac{1}{2}$ oder $\frac{4}{5} \leq x < \frac{17}{15}$ erfüllen die Gleichung.

(10.11): Die Gleichung ist nicht lösbar, da immer gilt:

$$|1 + x| > x$$

und $$|1 - x| \geq 0 .$$

(10.14) Wir benutzen die Methode der vollständigen Induktion.
Hier nur der letzte Schritt:
Die Behauptung gelte bis n.
z.z.: Sie gilt auch für n+1
d.h. $a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}}$ ist ganz.
Dazu zerlegen wir wie folgt:

$$a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}} = [(a^n + \frac{1}{a^n}) \cdot (a + \frac{1}{a})] - (a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}})$$

Die Ausdrücke auf der rechten Seite sind laut Induktionsvoraussetzung ganz und damit ist die gesamte rechte Seite ganz.

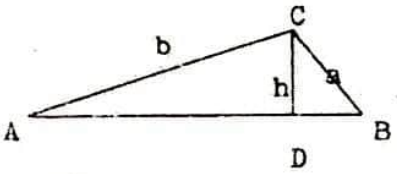
(11/12.13) a - b endet auf m Nullen.

Es ist $a^n - b^n = (a - b) \cdot x$ (x ganz)
Das Produkt $(a - b) \cdot x$ hat als letzte Ziffern mindestens m Nullen.

Aber a^n-b^n endet nur dann auf m Nullen, wenn die m letzten Ziffern von a^n und b^n gleich sind.

Die folgende Lösung sandte uns unser Jugoslawien-Korrespondent und Teilnehmer der VIII. IMO (in Sofia) Georg Dugošija ein.

(11./12.14): Der Punkt D ist immer zwischen den Punkten A und B, weil $\overline{AB} = c$ die größte Seite des Dreiecks ΔABC ist. Dann gilt:



$$F = \frac{1}{2}\cdot c\cdot h = \frac{1}{2}\, h\cdot\left(\sqrt{a^2-h^2}+\sqrt{b^2-h^2}\right) \le$$
$$\le \frac{h}{2}\cdot\left(\sqrt{1-h^2}+\sqrt{4-h^2}\right) = f(h).$$

Weiter ist $f'(h) = 0$ genau dann, wenn $h = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

und $f''\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) < 0$;

also $f_{max}(h) = f\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 1$ und $F \le 1$, d.h. $F_{max} = 1$.

Dieser Fall tritt ein, wenn $a = 1$, $b = 2$ und $\sphericalangle ACB = \frac{\pi}{2}$ $(c = \sqrt{5})$ sind.

ZUM KNOBELN - ZUM KNOBELN - ZUM KNOBELN - ZUM KNOBELN - ZUM KNOB

Die zu einem Freundschaftsbesuch in Jena weilende Delegation der Staatlichen Georgischen Universität Tbilissi teilte uns das folgende Spiel mit: Man lege 16 Streichhölzer in die in der Skizze gezeigte Anordnung. Die beiden Spielpartner dürfen nun abwechselnd aus einer beliebigen Reihe (aber bei jedem Zug nur aus genau einer) eine beliebige Anzahl von Hölzchen entfernen. Verloren hat derjenige, der das letzte Streichholz nimmt. Unsere Frage: Ist dieses Spiel etwa schon mit dem ersten Zug entschieden, falls beide Partner es genau kennen ? Wie muß man spielen, um zu gewinnen ?

11
67
WURZEL
schülerzeitung für
mathematik

WURZEL - Schülerzeitung für Mathematik

Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Die Zeitung erscheint monatlich zum Preis von 0,20 MDN. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS oder SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Klaus Fischer, Hansgeorg Meißner
Mitarbeiter: N.Kuse, H.Peuker, H.Schirrmeister, J.Schwarz, L.Staiger, W.Ulbrich, R.Wackernagel.

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
69 Jena
Helmholtzweg 1
"WURZEL"-Redaktion

V-14-6 8 17 8 M 175

INFORMATIONEN - INFORMATIONEN - INFORMATIONEN - INFORMATIO

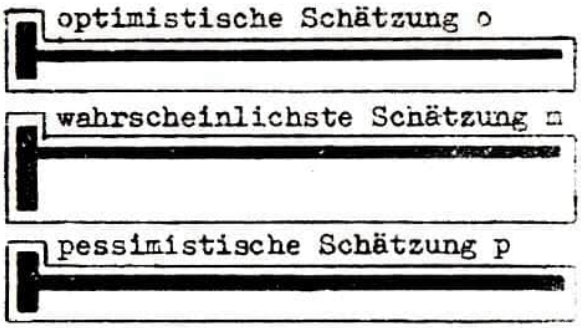
Maschine zensiert

Sechs Kilometer dünnsten Leitungsdrahtes, sowie Halbleiterelemente sind in einem nicht sehr großen Gerät enthalten, das in der Lage ist, hunderttausend Fragen zu behalten und die gleiche Zahl an Antworten richtig zu bewerten. Dieser mechanische Examinator "AST-66" wurde von Studenten für die die Klasse eines programmierten Studiums am Moskauer Technikum für Architektur und Bauwesen konstruiert. An der Schreibbank jedes Studenten befindet sich eine Telefonwählscheibe, ein Knopf und eine winzige Ruflampe. Die Antworten auf die im Examensbillet enthaltenen Fragen wählt der Student an. Die Lampen auf dem Steuerpult des Gerätes zeigen an, wer zur Antwort aufgerufen ist und geben, nachdem die Intikatoren die Antwort in Ziffern übertragen haben, die Zensur. Am Ende zieht die Maschine das Fazit. Nur Sekunden vergehen - schon ist die Gesamteinschätzung des Studenten fertig. Eine Tafel zeigt die Zensur an.

PERT - eine Anwendung der Graphentheorie bei der Planung von Projekten (Teil II)

Ein zu planendes Gesamtprojekt kann bei beliebigem Feinheitsgrad der Einzelprojekte durch einen gerichteten Graphen dargestellt werden. Die Knoten des Graphen entsprechen dabei den PERT-Ereignissen, die Bögen den PERT-Operationen. Um den gerichteten Graphen zur Planung benutzen zu können, ist es notwendig, jeden Bogen zusätzlich mit Informationen über die Aufwendungen an Zeit, Arbeitskräften und Materialien zu versehen, die zur Realisierung der jedem Bogen zugeordneten PERT-Operation erforderlich sind. Im folgenden werden die Betrachtungen auf die Aufwendungen an Zeit beschränkt. Für die anderen Aufwendungen verlaufen die Überlegungen analog.

Die Zeitdauer für die Erledigung einer PERT-Operation ist meistens eine Größe, die von stochastischen [1] Einflüssen (z.B. Wetter, Zuverlässigkeit der Technik usw) abhängt. Deshalb läßt sich die Zeitdauer für eine PERT-Operation nur schätzen. Bei PERT werden drei Typen von Zeitschätzungen angewendet:



- minimale Zeitdauer für die PERT-Operation (unter den günstigsten Bedingungen)
- wahrscheinlichste Zeitdauer für die PERT-Operation (unter den gegebenen Bedingungen Erfahrungswerte)
- maximale Zeitdauer für die PERT-Operation (unter den ungünstigsten Bedingungen)

Aus diesen drei Schätzungen o, m und p kann die mittlere Zeitdauer t_e nach folgender Formel bestimmt werden:

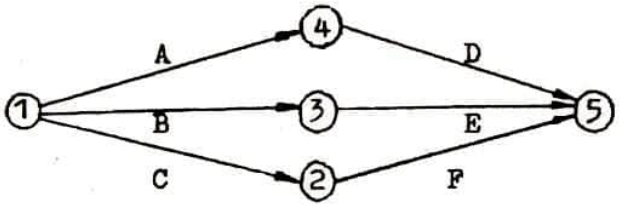
$$t_e = \frac{o + 4m + p}{6} .$$

Die Dispersion

$$\sigma_t^2 = \left[\frac{p - o}{6}\right]^2$$

ist ein Maß dafür, wieweit die angeführten Zeitschätzungen streuen. [2]
Es ist klar, daß alle Zeitangaben mit der gleichen Zeiteinheit zu treffen sind.

BEISPIEL:



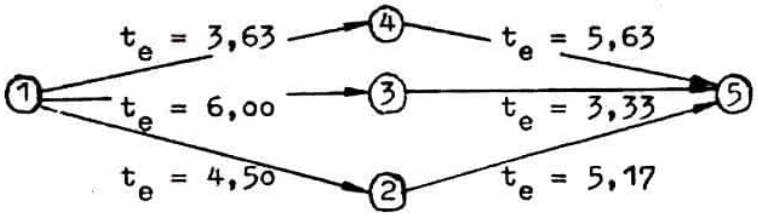
In Tabelle 1 sind die einzelnen Schätzungen für die Zeitdauer der PERT-Operationen angegeben und die Werte von t_e und σ_t^2 berechnet. (Maßeinheit für die Zeit: Woche)

Tabelle 1

Operation	o	m	p	t_e	σ_t^2
A	2	4	5	3,63	0,25
B	5	6	7	6,00	0,11
C	1	5	6	4,50	0,69
D	3	6	8	5,63	0,69
E	2	3	6	3,33	0,44
F	4	5	7	5,17	0,25

Die Ergebnisse sind auf 2 Stellen gerundet.

Der vervollständigte Graph hat dann folgende Gestalt:



Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird im weiteren auf die Kennzeichnung der PERT-Operationen durch lateinische Buchstaben verzichtet. Es ist klar, daß eine PERT-Operation eindeutig durch die Angabe der beiden koinzidierenden [3] PERT-Ereignisse in der Reihenfolge [Vorläufer; Nachfolger] darstellbar ist.

BEISPIEL: PERT-Operation D ~ [4;5] .

Mit Hilfe der t_e-Information für jede PERT-Operation ist es möglich, den Zeitpunkt T_e für das frühestmögliche Eintreten eines jeden PERT-Ereignisses zu berechnen.

Ein Pert-Ereignis kann frühestens dann eintreten, wenn alle seine Vorläufer eingetreten sind. Das Anfangsereignis (PERT-Ereignis ohne Vorläufer) bekommt den Wert $T_e = 0$ zugeordnet.

Die Rechenvorschrift ist sehr einfach:

Der T_E-Wert für ein PERT-Ereignis ergibt sich durch Summation aller t_e-Werte auf dem Weg vom Anfangsereignis bis zum betrachteten PERT-Ereignis. Gibt es mehrere Wege, d.h. existieren für ein PERT-Ereignis mehrere Summenwerte, so ist der maximale Summenwert zu nehmen.

BEISPIEL:

$T_E(1) = 0$ Wochen

$T_E(2) = T_E(1) + t_e[1;2] = 4,50$ Wochen

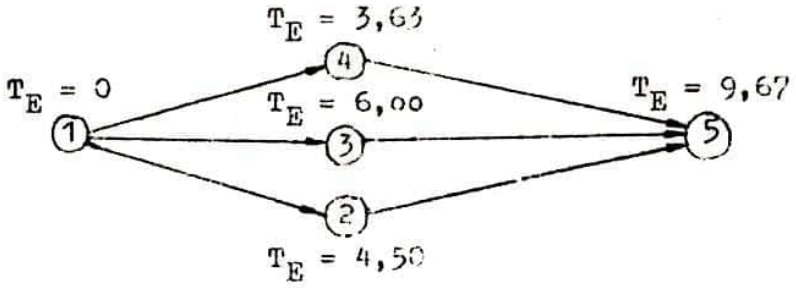
$T_E(3) = T_E(1) + t_e[1;3] = 6,00$ Wochen

$T_E(4) = T_E(1) + t_e[1;4] = 3,63$ Wochen

$T_E(5) = \max\{T_E(2)+t_e[2;5], T_E(3)+t_e[3;5], T_E(4)+t_e[4;5]\}$

$= \max\{9,26 \ , \ 9,33 \ , \ 9,67\}$

$= 9,67$ Wochen



Der T_E-Wert für das Endereignis (PERT-Ereignis ohne Nachfolger) repräsentiert die minimale Frist für die Realisierung des Gesamtprojektes.

Durch den Auftraggeber für das Gesamtprojekt oder durch übergeordnete Planorgane kann eine Auflage erteilt werden, in welcher Frist das Gesamtprojekt realisiert werden muß. Diese Frist wird mit T_S bezeichnet. T_S gibt an, wann das Endereignis spätestens eingetreten sein muß. Natürlich ist es nicht sinnvoll, T_S kleiner als den T_E-Wert für das Endereignis zu wählen. ($T_S < T_E$(Endereignis) würde aber für den Rechenformalismus kein Hindernis darstellen.) Im weiteren soll stets $T_S = T_E$(Endereignis) gelten.

Es ist offensichtlich nützlich, auch Zeitpunkte T_L für das spätestzulässige Eintreten eines jeden PERT-Ereignisses zu berechnen, weil die Differenz zwischen T_L und T_E Hinweise auf eventuell vorhandene Zeitreserven bis zum Eintreten eines PERT-Ereignisses vermittelt.

Ein PERT-Ereignis muß spätestens zu einem solchen Zeitpunkt T_L eintreten, für das das Endereignis noch zum Zeitpunkt T_S eintreten kann.

Das Endereignis bekommt den Wert $T_L = T_S$ zugeordnet. Die Methode zur Berechnung der T_L ist ähnlich wie bei der Berechnung der T_E, allerdings wird vom Endereignis ausgegangen. (Rückspulen des gerichteten Graphen).

Der T_L-Wert für ein PERT-Ereignis kann berechnet werden durch Subtraktion aller t_e-Werte für PERT-Operationen, die den Weg zwischem dem betrachteten PERT-Ereignis und dem Endereignis festlegen, vom Wert T_S. Gibt es mehrere Wege, so ist der minimale Wert der Differenz als T_L-Wert zu nehmen.

BEISPIEL:

$T_L(5) = T_S = 9{,}67$ Wochen

$T_L(4) = T_L(5) - t_e[4;5] = 4{,}04$ Wochen

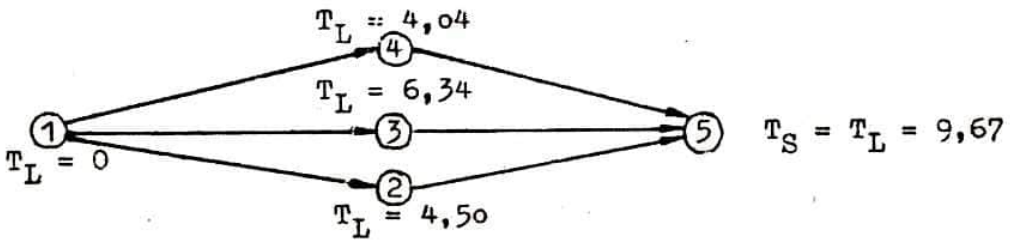
$T_L(3) = T_L(5) - t_e[3;5] = 6{,}34$ Wochen

$T_L(2) = T_L(5) - t_e[2;5] = 4{,}50$ Wochen

$T_L(1) = \min\{T_L(2)-t_e[1;2], T_L(3)-t_e[1;3], T_L(4)-t_e[1;4]\}$

$= \min\{0,\ 0{,}34\ ,\ 0{,}41\}$

$= 0.$



Die getroffene Voraussetzung über $T_S = T_L$(Endereignis) hat stets T_L(Anfangsereignis) = 0 zur Folge. Aus den T_E- und T_L-Werten für jedes PERT-Ereignis können die Zeitreserven berechnet werden. Es ist für jedes PERT-Ereignis die Differenz $R = T_L - T_E$ zu bilden. R ist die Zeitspanne zwischen frühestmöglichem und spätestzulässigem Eintreten eines PERT-Ereignisses, also die Zeitreserve für das Eintreten des betrachteten PERT-Ereignisses. Diese Zeitreserven können für andere Zwecke genutzt werden.

BEISPIEL:

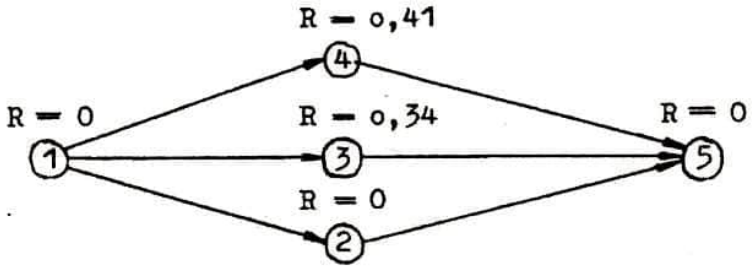
$R(5) = 0$ Wochen

$R(4) = T_L(4) - T_E(4) = 0{,}41$ Wochen

$R(3) = T_L(3) - T_E(3) = 0{,}34$ Wochen

$R(2) = T_L(2) - T_E(2) = 0$ Wochen

$R(1) = T_L(1) - T_E(1) = 0$ Wochen



Abschließend sollen alle Daten für T_E, T_L und R des Beispiels in einer Tabelle 2 zusammengefaßt werden.

Tabelle 2

Ereignis	T_E	T_L	$R = T_L - T_E$
1	0,00	0,00	0,00
2	4,50	4,50	0,00
3	6,00	6,34	0,34
4	3,63	4,04	0,41
5	9,67	9,67	0,00

Der Weg vom Anfangsereignis zum Endereignis mit den minimalem Zeitreserven heißt kritischer Weg.

Der kritische Weg zeigt den "dünnsten Faden" im Gesamtprojekt und weist den Planer darauf hin, der Realisierung der durch den kritischen Weg dargestellten PERT-Operationen besondere Aufmerksamkeit zu widmen. Der Plan ist auf dem kritischen Weg am empfindlichsten gegenüber Störungen.(Zeitverzug). Das Finden des kritischen Weges und das Aufdecken vorhandener Zeitreserven ist das Hauptziel der Planungsmethode PERT. Es erübrigt sich, zu bemerken, daß komplizierte und umfangreiche PERT-Pläne mit Hilfe elektronischer Rechenautomaten analysiert werden können.

In der Einleitung wurde darauf hingewiesen, daß alle unsere Überlegungen zu PERT stark vereinfacht geführt wurden. Es wurde

darauf verzichtet, die in jedem Falle notwendige statistische Absicherung der berechneten Werte näher zu beleuchten. Das Ziel des Beitrags kann als erreicht betrachtet werden, wenn dem Leser das Grundprinzip der Planungsmethode PERT klar geworden ist.

ANMERKUNGEN:

1) Eine stochastische Größe ist eine Größe, deren Wert zufällig ist, sich aber durch Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschreiben läßt.
2) Die Formeln resultieren aus wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen, auf die hier nicht näher eingegangen werden kann.
3) Koinzidierende PERT-Ereignisse sind solche, die durch eine PERT-Operation verbunden sind.

Hannes Peuker

wissenschaftlicher Mitarbeiter
an der Sektion Mathematik
der Friedrich-Schiller-
Universität Jena

ACHTUNG - ACHTUNG - ACHTUNG - ACHTUNG - ACHTUNG - ACHTUNG

Auf Grund des späten Erscheinungstermins der "Wurzel" Nr.9. wird der Einsendeschluß der Preisaufgaben P.9/1 bis P.9/6 bis zum 31.12.67 verlängert (falls die Lösungen nicht vorher in anderen Zeitungen erscheinen).

LÖSUNGEN

(10.12): Es gilt:

a) $F_\Delta = \frac{ab}{2} \cdot \sin(a,b) \leq \frac{ab}{2}$

b) Wenn man das Viereck in 2 Dreiecke teilt, gilt

einerseits: $F \leq \frac{ab}{2} + \frac{cd}{2}$

und andererseits: $F \leq \frac{ad}{2} + \frac{bc}{2}$.

Durch Zusammenfassen erhält man:

$$F \leq \frac{\frac{ab}{2} + \frac{ad}{2} + \frac{cd}{2} + \frac{cb}{2}}{2} = \frac{(a+c)\cdot(b+d)}{4} .$$

(9.15): Wir nehmen an, die Zahl x besitze n Ziffern $(a_1, \ldots a_n)$, und ihre erste Ziffer sei a_1.
Dann gilt: $x \geq a_1 \cdot 10^{n-1}$
Es ist aber $a_2 \ldots a_n < 10^{n-1}$, da $0 \leq a_i < 10$ $(i = 1, \ldots, n)$
Man erhält also $x > a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$. q.e.d.

(9.16): Es ist $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{x \cdot y} = \frac{5}{x \cdot y} = \frac{5}{x(5-x)}$.
Wir setzen $x - 2{,}5 = d$.
Es ergibt sich $\frac{5}{x(5-x)} = \frac{5}{(2{,}5+d)(2{,}5-d)} = \frac{5}{6{,}25-d^2}$.
Dieser Bruch nimmt seinen kleinsten Wert offensichtlich dann an, wenn $d = 0$ (d.h. für $x = y = 2{,}5$) gilt.
Somit erhalten wir als Lösung:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{5} .$$

(10.16): 1.Fall: $x \geq 1$ $\qquad 2x - 1 = x$

$$x = 1$$

2.Fall: $x \leq 1$ $\qquad x = 0$

(11./12.15): Es gilt: $10 > \pi^2$
Da die Logarithmusfunktion streng monoton ist, erhält man durch Logarithmieren:

$$\log_2 10 > \log_2 \pi^2 = 2 \cdot \log_2 \pi$$

$$\frac{\log_2 10}{\log_2 \pi} > 2$$

$$2 < \frac{\log_2 10}{\log_2 \pi} = \frac{1 + \log_2 5}{\log_2 \pi} = \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi}$$

(10.10): Es gilt: $z = (n^3 - 1)(n^3)(n^3 + 1)$
Zu zeigen ist: $z = 504 \cdot k = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot k$ (k ganz)
Dazu ist zu zeigen:
I. $z = 8 \cdot p$
1.Fall: $2 | n^3$ hierraus folgt $2 | n$ und $8 | n^3$
2.Fall: $2 \nmid n^3$ dann gilt entweder $2 | n^3 - 1$ und $4 | n^3 + 1$
oder $4 | n^3 - 1$ und $2 | n^3 + 1$,
da von zwei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen eine mindestens durch vier teilbar ist.

II. $z = 9 \cdot q$

1.Fall: $3 \mid n^3$, also $3 \mid n$ und $9 \mid n^3$

2.Fall: $3 \nmid n^3$, folglich $3 \nmid n$

Ich betrachte nun die Reste aller nicht durch drei teilbaren n bei der Teilung durch 9:

$R_9(n)$:	1	2	4	5	7	8

Für die Reste von n^3 ergibt sich:

$R_9(n^3) = R_9((R_9(n))^3)$:	1	8	1	8	1	8

Hieraus ergibt sich, daß

entweder $9 \mid n^3 - 1$ oder $9 \mid n^3 + 1$ gilt.

III. $z = 7 \cdot r$

1.Fall: $7 \mid n^3$

2.Fall: $7 \nmid n^3$

Ich betrachte:

$R_7(n)$:	1	2	3	4	5	6
nun folgt $R_7(n^3)$:	1	1	6	1	6	6

Somit ergibt sich $7 \mid n^3 - 1$ oder $7 \mid n^3 + 1$

Mithin ist durch die Betrachtung aller möglichen Fälle bewiesen, daß $(n^3 - 1)(n^3)(n^3 + 1)$ immer durch 504 teilbar ist.

(11./12.17): a) Wir quadrieren die Gleichung und erhalten

$$x^4 - 8x^2 + 16 = 4x^2$$
$$x^4 - 12x^2 + 16 = 0$$
$$x^2 = 6 \pm 2\sqrt{5}$$
$$= (1 \pm \sqrt{5})^2$$

Es ergibt sich für x: $x = \pm(1 \pm \sqrt{5})$

Die Gleichung hat also folgende Lösungen:

$$x_1 = -1 - \sqrt{5}$$
$$x_2 = 1 - \sqrt{5}$$
$$x_3 = -1 + \sqrt{5}$$
$$x_4 = 1 + \sqrt{5}$$

b) Da beide Seiten der Ungleichung positiv sind, erhält man durch Quadrieren der Ungleichung

$$x^4 - 8x^2 + 16 > 4x^2$$
$$x^4 - 12x^2 + 16 > 0$$

Wegen a) kann ich die linke Seite folgendermaßen darstellen:

$$(x - 1 - \sqrt{5})(x + 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5})(x + 1 + \sqrt{5}) > 0$$

Dieses Produkt ist dann und nur dann positiv, wenn jeweils zwei seiner Faktoren gleiches Vorzeichen haben, und nur dann ungleich Null, wenn alle Faktoren ungleich Null sind, d.h. in folgenden Fällen:

I. $x < -1-\sqrt{5}$ (alle Faktoren sind negativ)

II. $1-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}-1$ (die ersten beiden Faktoren sind negativ, die anderen positiv)

III. $1+\sqrt{5} < x$ (alle Faktoren sind positiv)

Hiermit erhält man auch sämtliche Lösungen der Ungleichung, da alle zu Anfang durchgeführten Umformungen äquivalent sind.

(11./12.12): $\overline{MP}$ und $\overline{MR}$ seien die gegebenen Radien.

I. Analysis: In der angegebenen Figur gelte

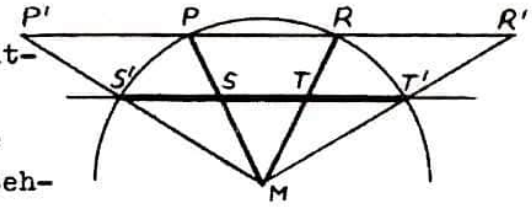
$$\overline{PP'} = \overline{PR} = \overline{RR'}$$

Nach dem Strahlensatz ist dann auch

$$\overline{SS'} = \overline{ST} = \overline{TT'}, \text{ da } \overline{S'T'} \parallel \overline{P'R'} .$$

Somit ist $\overline{S'T'}$ die gesuchte Sehne.

II. Konstruktion: Folgt unmittelbar aus I. und der Skizze.



III. Beweis: Folgt unmittelbar aus I.

IV. Determination: Die Konstruktion der Sehne ist dann und nur dann möglich, wenn der Winkel $\sphericalangle PMR \neq 180^\circ$ ist.

AUFGABEN (11. Serie)

9.Klasse:

(9.19) Es ist zu beweisen, daß

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \text{ ist, wenn } ab > 0 \text{ gilt.}$$

(9.20) Gegeben seien 5 Blatt Papier. Davon werden einige in 5 Teile zerrissen. Von diesen werden wieder einige in 5 Teile zerrissen usw. Ist es möglich, daß man auf diese Weise 1967 Teile Papier erhält?

10.Klasse: (10.19) Man konstruiere ein Dreieck aus h_c, s_c und dem Umkreisradius r.

(10.20) Man bestimme alle Funktionen f, die folgenden Bedingungen genügen:

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y)$$
$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$f(x) \not\equiv 0$$

11./12.Klasse:

(11./12.19) Man beweise, daß für alle natürlichen n $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)!-1$ gilt.

(11./12.20) Dem Einheitskreis sei ein regelmäßiges 10-Eck einbeschrieben. Man bestimme die Summe der Quadrate der Entfernungen eines beliebigen Punktes der Peripherie zu den Eckpunkten des 10-Ecks.

PREISAUFGABE (P. 11)

Man berechne

$$N = \frac{X}{XY+X+1} + \frac{Y}{YZ+Y+1} + \frac{Z}{XZ+Z+1}, \text{ wenn } XYZ = 1 \text{ ist.}$$

Für jeden vollständigen Lösungsweg der Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für 5 Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender 5 Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).

Falls ein Besitzer von 5 Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil.

Die Lösungen sind unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgabe" bis zum 3o. des jeweiligen Erscheinungsmonats (Datum des Poststempels) an unsere Adresse einzuschicken.

WURZEL

12/67

schülerzeitung für mathematik

WURZEL - Schülerzeitung für Mathematik

Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Die Zeitung erscheint monatlich zum Preis von 0,20 MDN. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS oder SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Klaus Fischer, Hansgeorg Meißner
Mitarbeiter: N.Kuse, H.Peuker, H.Schirrmeister, J.Schwarz, L.Staiger, W.Ulbrich, R.Wackernagel.

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
69 Jena
Helmholtzweg 1
"WURZEL"-Redaktion

V-14-6 8 1842 M 175

Herr Ambrosius und die BOOLEschen Funktionen ctionen

Die Art und Weise, wie uns Herr Ambrosius im Heft 6 der "Wurzel" seinen Speiseplan verrät, ist schon ein wenig ungewöhnlich. Dennoch machte es wohl keinem Leser Mühe, nach kurzem "logischen" Nachdenken festzustellen:"Herr Ambrosius beliebten, heute keine Suppe zu essen."

Wie vollzieht sich aber dieses natürliche logische Schließen? Hat es seine eigenen Gesetze? - Gewiß! Aber welche? Lassen sich vielleicht Teile dieses Regelgebäudes mit mathematischen Methoden behandeln?

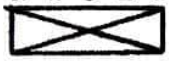
Antworten auf diese und ähnliche Fragen gibt uns die Mathematische Logik, eine Disziplin, deren Entwicklung mit Leibniz begann und die aus der modernen Wissenschaft nicht mehr wegzudenken ist.

Nehmen wir also die Schrullen des Herrn Ambrosius zum Anlaß, einen Teil der Mathematischen Logik - die Aussagenlogik - in seinen Anfängen kennenzulernen.

Die erwähnte Scherzaufgabe besteht aus einer Reihe sinnvoller Gebilde unserer Sprache, z.B. (in präziser Fassung) aus folgendem Satz:"Sebastian Ambrosius, ausgewiesen durch DPA-Nr.XV000000,

trinkt am 27. 6. 1967 um 12 Uhr MEZ in seiner Wohnung eine Tasse PRESTO-Kaffee." Mit diesem Satz machen wir eine Aussage über die objektive Realität. Für derartige Aussagen postulieren wir auf Grund unserer Erfahrung die sogenannte

Z w e i w e r t i g k e i t:



Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch.

Folglich können wir die Menge $\mathfrak{A}$ aller Aussagen vermittels einer Abbildung ω eindeutig auf die Menge $\{0, 1\}$ der Wahrheitswerte 0 - falsch, 1 - wahr abbilden, $\omega(A)$ heißt in diesem Zusammenhang Wahrheitswert von A [1].

Unsere Erfahrung lehrt ferner, daß wir mit Hilfe n - stelliger aussagenlogischer Verknüpfungen (Aussagenfunktionen) α^n die Menge $\underbrace{\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \times \ldots \times \mathfrak{A}}_{n\text{-mal}}$ in die Menge $\mathfrak{A}$ abbilden können. So entsteht z. B. aus den Aussagen

M - "Ambrosius trinkt Milch" und

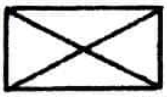
B - "Ambrosius ißt Brötchen" $(M, B \in \mathfrak{A})$

unter Verwendung der zweistelligen Aussagenfunktion "wenn - so" (Implikation, hier kurz α) die Aussage $\alpha(B, M)$, d. h. "Wenn B, so M" aus $\mathfrak{A}$, also:

"Wenn Ambrosius Brötchen ißt, so trinkt er Milch".

Wie ist es nun um den Wahrheitswert dieser zusammengesetzten Aussage bestellt? Im ungünstigen Falle kann er von B, M und von den Wahrheitswerten $\omega(B)$ und $\omega(M)$ abhängen. Hier fordern wir sinnvoll die

E x t e n s i o n a l i t ä t: [2]



$\omega(\alpha^n(A_1, \ldots, A_n))$ hängt nur von den $\omega(A_\nu)$, nicht aber von den A_ν selbst ab $(1 \leq \nu \leq n)$.

D. h., die Aussage $\alpha(B', M')$, wobei B'- "Ambrosius liebt Mozart" und M' - "Der Sonnabend ist arbeitsfrei", hat den gleichen Wahrheitswert wie $\alpha(B, M)$, wenn die Wahrheitswerte von B und B' sowie M und M' übereinstimmen. In der Sprache der Mathematik heißt dies: Zu jedem α^n gibt es genau eine eindeutige Abbildung [3] f^n von $\underbrace{\{0, 1\} \times \ldots \times \{0, 1\}}_{n\text{-mal}}$ in $\{0, 1\}$, so daß für jedes $A_1, \ldots, A_n$ aus $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\omega(\alpha^n(A_1, \ldots, A_n)) = f^n(\omega(A_1), \ldots, \omega(A_n)).$$

Die den klassischen Aussagenfunktionen "nicht" (Negation), hier kurz β genannt, "und" (Konjunktion), "oder" (Alternative), "wenn - so", "genau dann, wenn" (Äquivalenz) auf diese Weise

zugeordneten einstelligen bzw. zweistelligen BOOLEschen Funktionen werden gewöhnlich mit „non", „et", „vel", „seq", „äq" bezeichnet und sind - das lehrt uns der Umgang mit den Aussagenfunktionen - wie folgt zu definieren:

D

$$\text{non}(x) \underset{\text{Def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{et}(x,y) \underset{\text{Def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 1 \text{ und } y = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{vel}(x,y) \underset{\text{Def}}{=} \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0 \text{ und } y = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{seq}(x,y) \underset{\text{Def}}{=} \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 1 \text{ und } y = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{äq}(x,y) \underset{\text{Def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Einer formalen Lösung unserer Scherzaufgabe steht nun nichts mehr im Wege.

Wir haben $\omega(K) = 1$[4], ferner $\omega(\alpha(K, \beta(M))) = 1$.[5] (I)

S a t z 1. (Abtrennungsregel)

S Voraussetzung: $\omega(A_1) = 1$ und $\omega(\alpha(A_1, A_2)) = 1$.
Behauptung: $\omega(A_2) = 1$.

Mit Satz 1 folgt aus (I) nun $\omega(\beta(M)) = 1$. (II)

Aus unserer Aufgabe wissen wir, daß $\omega(\alpha(B,M)) = 1$. (III)

Eine zweite Hilfestellung gibt

S a t z 2. (Kontrapositionsregel)

S Voraussetzung: $\omega(\alpha(A_1, A_2)) = 1$.
Behauptung: $\omega(\alpha(\beta(A_2), \beta(A_1))) = 1$.

B e w e i s (???)

Aus Satz 2 und (III) folgt nun $\omega(\alpha(\beta(M), \beta(B))) = 1$

Mit (II) und Satz 1 haben wir daher $\omega(\beta(B)) = 1$. (IV)

Schließlich besagt unsere Aufgabe, daß $\omega(\alpha(\beta(B), \beta(S))) = 1$. (V)
Aus (IV), (V) und Satz 1 folgt $\omega(\beta(S)) = 1$, d.h. non $(\omega(S)) = 1$, was mit $\omega(S) = 0$ gleichwertig ist.

Herr Ambrosius ißt also keine Suppe! Überlassen wir ihn weiter seinen Eigenarten, denn uns interessiert $\omega(S)$ schon längst mehr als die Aussage S. Doch darüber mehr im nächsten Heft.

---

1) Falls also der Wahrheitswert $\omega(A)$ einer Aussage A gleich 1 ist, sagen wir, A ist wahr.
2) Extension - Wahrheitswert einer Aussage
3) Wahrheitswertfunktion oder nach George Boole (engl. Mathematiker, 1815-1864) BOOLEsche Funktion genannt.
4) Im weiteren bezeichnen wir, wie bereits teilweise eingeführt, mit K, M, B bzw. S die Aussage: "Ambrosius trinkt Kaffee", "Ambrosius trinkt Milch", "Ambrosius ißt Brötchen" bzw. "Ambrosius ißt Suppe".
5) Wir erinnern, daß wir mit α die Implikation und mit β die Negation bezeichnen.

(???) Überlegen Sie sich diese Beweise!

Rolf Lindner
wiss. Aspirant
an der Sektion Math.
der Friedr.-Schiller-Univers.
Jena

WEIHNACHTSAUFGABE - WEIHNACHTSAUFGABE - WEIHNACHTSAUFGABE

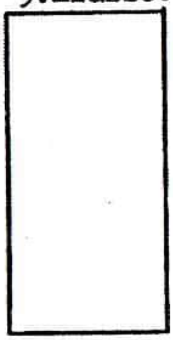
Wenn zum 4.Advent die letzte Kerze des Adventkranzes angezündet wird, ist es meist so, daß nicht alle 4 Kerzen gleichzeitig abbrennen. Ist der gleichzeitige Brennschluß unter folgenden Bedingungen möglich:

1. Die 4 Kerzen sind zylindrisch, haben gleichen Durchmesser, gleiche Länge, sind aus dem gleichen Material (d. h. sie haben gleiche Brenndauer).
2. Die Brennzeit zu allen 4 Adventen ist gleich.
3. Es dürfen innerhalb der Brennzeit keine Kerzen gelöscht bzw. andere angebrannt werden.

Man gebe eine allgemeine Lösung für n Advente (n Kerzen) an.

Aufgaben (12. Serie)

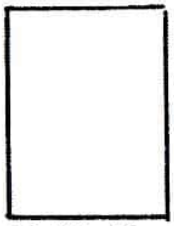
9.Klasse:



(9.21) Der Punkt A des Parallelogramms ABCD sei mit den Mitten E und F der Seiten BC und CD verbunden. Man zeige, daß die Diagonale BD durch $\overline{AE}$ und $\overline{AF}$ in drei gleiche Teile geteilt wird.

(9.22) Es seien a, b ganze Zahlen. Es ist zu zeigen, daß die kleinste positive Zahl der Form $ax + by = d$ (x,y ganz) gleich dem größten gemeinsamen Teiler von a und b ist.

10.Klasse:



(10.21) Man zeige, daß

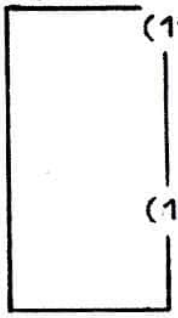
$$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

(10.22) Man löse das Gleichungssystem

$$x - y = 90 \qquad (1)$$

$$\lg x + \lg y = 3 \qquad (2)$$

11/12.Klasse:



(11/12.21) Man beweise folgenden Satz: In einem regelmäßigen Tetraeder ist die Summe der Entfernungen eines beliebigen inneren Punktes zu den Seitenflächen konstant.

(11/12.22) Man zeige, daß man unter n+1 ganzen Zahlen zwei finden kann, deren Differenz durch n teilbar ist.

PREISAUFGABE (P.12)

Es ist zu zeigen, daß innerhalb eines beliebigen spitzwinkligen Dreiecks ΔABC ein und nur ein Punkt P mit folgenden Eigenschaften existiert:

a) $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPA = 120^\circ$

b) Die Geraden, die durch die Punkte A,B und C senkrecht zu $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ verlaufen, bilden ein gleichseitiges Dreieck.

c) Die Summe der Entfernungen von P zu den Punkten A,B,C ist minimal.

Für jeden vollständigen Lösungsweg der Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).
Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil.
Die Lösungen sind unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" bis zum 30. des jeweiligen Erscheinungsmonats (Datum des Poststempels) an unsere Adresse einzuschicken.

INFORMATIONEN - INFORMATIONEN - INFORMATIONEN - INFORMATIONEN

Sowjetische Ingenieure entwickelten die Universal-Rechenanlagen "WNIIEM-1" und "WNIIEM-3". Je nach ihrer Bestimmung können diese Anlagen von außen durch zusätzliche Vorrichtungen ergänzt werden.
Das Speicherwerk besteht aus Magnetbändern. Eine Kassette, die 700 Meter Magnetband faßt, enthält bis zu zwei Millionen Wörter. Die Eingabe der Informationen - bis zu 1000 Silben pro Sekunde - erfolgt über Lochkarten. Die Rechengeschwindigkeit beträgt 40 000 bis 75 000 Operationen je Sekunde.
Die Maschinen "WNIIEM" können nicht nur bei Lenksystemen, sondern auch bei automatischen Vorrichtungen für Planung und Statistik der Produktion eingesetzt werden.

ACHTUNG - ACHTUNG - ACHTUNG - ACHTUNG - ACHTUNG - ACH

Das diesjährige Mathematikspezialistenlager des Bezirkes Gera (Winterlager) findet vom 19.2. bis zum 29.2.1968 in Ebersdorf (Kreis Lobenstein) statt. An diesem Lager werden etwa 70 Schüler der 7.-12.Klassen teilnehmen. Die Betreuung der Schüler wird wie schon in den vergangenen Lagern von Mitarbeitern und Studenten der Friedrich-Schiller-Universität übernommen. In diesem Lager erfolgt auch die Vorbereitung der voraussichtlichen Teilnehmer der DDR-Olympiade der jungen Mathematiker aus dem Bezirk Gera.

(9.17): Es ist $n^2 (n^4 - 1)(n^4 - 16) =$
$= (n - 2)(n - 1)n^2(n + 1)(n + 2)(n^2 + 1)(n^2 + 4)$
und $1800 = 8 \cdot 9 \cdot 25$
Man zeigt jetzt leicht, daß das Produkt
$(n - 2)(n - 1)n^2(n + 1)(n + 2)$
durch $8 \cdot 9 \cdot 5$ teilbar ist. Für den Fall, daß n^2 nicht durch 5 teilbar ist, zeigt man durch Restklassenbetrachtung, daß dann $(n^2 + 1)$ oder $(n^2 + 4)$ durch 5 teilbar ist.
Damit ist die Aufgabe bewiesen.

(9.18): Es gilt: $x^2 + 3|x| - 4 = |x|^2 + 3|x| - 4$
$(|x| - 1)(|x| + 3) = 0$
Aus der letzten Gleichung folgt unmittelbar, da $|x| = -3$ nicht möglich ist, $|x| = 1$.
Das Ergebnis ist also $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$.

(10.18): Es gelte $x \cdot y = x + y$
Durch Umformen erhält man: $x \cdot y - x - y + 1 = 1$
Daraus ergibt sich $(x - 1)(y - 1) = 1$
Aus dieser Gleichung ergeben sich sofort die folgenden Lösungen: $x_1 = y_1 = 2$
und $x_2 = y_2 = 0$

(11/12.18): Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion

I. $3 | a_4$ ist klar, da $a_4 = 3$

II. Wir nehmen jetzt an, daß $3 | a_{n-4}$ und zeigen, daß dann auch $3 | a_n$ $(n \geq 8)$ gilt:
Es ist $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
$= a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-3} + a_{n-4}$
$= 3a_{n-3} + 2a_{n-4}$

III. Da a_{n-4} laut Annahme durch 3 teilbar war, ist somit auch a_n durch 3 teilbar.
Somit ist durch vollständige Induktion bewiesen, daß die in der Aufgabe aufgestellte Behauptung richtig ist.
(Siehe auch Heft 5/67 und 6/67 "Die Methode der vollständigen Induktion").

Lösungsbesprechung zur Preisaufgabe (P.10)

Nachdem wir zu den Preisaufgaben (P.9/1....6) leider keine Einsendungen erhalten hatten, möchten wir von den uns eingesandten Lösungen der Preisaufgabe (P.10) verschiedene Lösungswege vorstellen:

Die erste Lösung wurde uns von E. Schön aus Schulpforte eingesandt: "Teilt man ein beliebiges Dreieck ΔABC in drei Dreiecke ΔAOB, ΔAOC, ΔBOC, so daß die Strecken $\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\overline{CO}$ durch die Seitenhalbierenden der Seiten des Dreiecks ABC gebildet werden, so sind die Dreiecke ΔAOB, ΔAOC, ΔBOC flächengleich."

Die bis zu dieser Stelle erfolgte Betrachtung ist zur Lösung der gestellten Aufgabe nicht notwendig. Erst jetzt beginnt die eigentliche Lösung der Aufgabe.

"Will man jetzt erreichen, daß sich die Flächeninhalte wie 1 : 2 : 3 verhalten, so muß man, da die Grundseiten der Dreiecke ΔAOB, ΔAOC, ΔBOC gleichbleiben, die Höhen h_a, h_b, h_c dieser Dreiecke verändern, und zwar im Verhältnis 1 : 2 : 3".

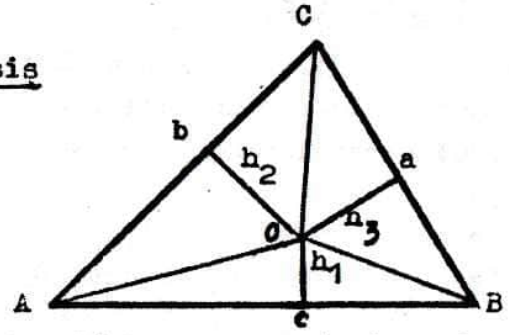
Der wichtigste Teil der Lösung ist hier zu kurz gekommen. Für eine ordentliche Ausführung der Lösung ist es nötig, den oben angegebenen Sachverhalt genauer herzuleiten. Dann hätte der Einsender nämlich auch bemerkt, daß er die Höhen nicht im Verhältnis 1 : 2 : 3, sondern im Verhältnis 1 : 2, 1 : 3, 1 : 6 verändern und zwar verkürzen muß. So aber setzt er seinen Fehlschluß fort:

"Man teilt die Höhe h_c in der Hälfte, h_b beläßt man und h_a wird um die Hälfte verlängert. Durch diese Teilungspunkte werden Parallelen zu den entsprechenden Seiten gezogen. Auf diesen Parallelen muß der Punkt O liegen, und zwar im Schnittpunkt der drei Parallelen. Verbindet man jetzt den Punkt O mit A, B und C, so erhält man die Dreiecke ΔAOB, ΔAOC, ΔBOC, deren Flächeninhalte sich wie 1 : 2 : 3 verhalten!"

Hätte der Einsender seine Lösung nur einmal skizziert, so würde er sofort bemerkt haben, daß sie falsch ist. Man erhält nämlich nicht nur einen, sondern im allgemeinen drei Schnittpunkte, die sämtlich außerhalb des Dreiecks liegen.

Anders dagegen verfährt Erwin Eiselt aus Großbodungen. Er beginnt mit einer ausführlichen analytischen Betrachtung, die Bestandteil jeder geometrischen Konstruktion sein sollte:

a) Analysis



Da sich die Flächen der Dreiecke ΔAOB, ΔAOC und ΔBOC wie 1:2:3 verhalten sollen, gilt:

$A_{\Delta AOB} = 1$

$A_{\Delta AOC} = 2$ jeweils Flächeninhalt bezogen auf

$A_{\Delta BOC} = 3$ $A_{\Delta AOB} = 1$

$A_{\Delta ABC} = 6$

Es gilt aber auch für ΔABC

(1) $A_{\Delta ABC} = \frac{ch_c}{2} = 6$ daraus folgt: $c = \frac{12}{h_c}$, analog $b = \frac{12}{h_b}$,

$a = \frac{12}{h_a}$

(2) Für die Flächen der Teildreiecke gilt:

$\frac{ch_1}{2} = 1$ daraus folgt: $c = \frac{2}{h_1}$

$\frac{bh_2}{2} = 2$ daraus folgt: $b = \frac{4}{h_2}$

$\frac{ah_3}{2} = 3$ daraus folgt: $a = \frac{6}{h_3}$

Setzt man die entsprechenden Werte von (1) und (2) gleich, erhält man nach Vereinfachung:

$h_1 = \frac{h_c}{6}$, $h_2 = \frac{h_b}{3}$, $h_3 = \frac{h_a}{2}$

Diese Werte sind elementar konstruierbar, also kann der gesuchte Punkt konstruiert werden.

b) Konstruktion

Man zeichnet zu c eine Parallele im Abstand von h_1, welche innerhalb der Dreiecksfläche verläuft. Ebenso eine zu b im Abstand von h_2. Der Schnittpunkt beider ist der gesuchte Punkt.

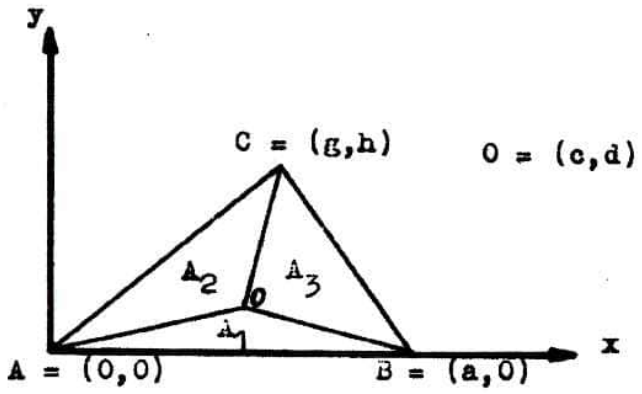
Die Konstruktion folgt bei dieser Lösung unmittelbar aus der Analysis. Trotzdem ist eine kurze Konstruktionsbeschreibung notwendig, ebenso wie der Beweis der Konstruktion, der hier leider fehlt. Bei dieser Aufgabe hätte es sogar ausgereicht, zu sagen, daß der Beweis der Konstruktion aus der Analysis folgt. Den Schluß jeder Konstruktion bildet eine Determination, in der die Bedingungen für die Konstruierbarkeit angegeben werden und eine eventuelle Mehrdeutigkeit der Konstruktion erörtert wird.

c) Determination

Es gibt stets eine und nur eine Lösung der Aufgabe, da sich O nach Voraussetzung im Inneren der Dreiecksfläche befinden soll.

Daß man eine Konstruktion auch anders lösen kann, zeigt Peter Kannemann aus der 10.Klasse der EOS Schleusingen. Er gibt einen grundsätzlich möglichen Weg zur Konstruktion an, indem er den gesuchten Punkt, d.h. seine Koordinaten mit Hilfe der analytischen Geometrie bestimmt. Hierzu gehört aber der Nachweis, daß sich die errechneten Koordinaten elementargeometrisch konstruieren lassen.

ΔABC liege wie angegeben in der x y - Ebene des kartesischen Koordinatensystems.



$$A_1 = \frac{1}{2} ad$$

$$A_2 = \frac{1}{2} (ch - gd)$$

$$A_3 = \frac{1}{2} (h(a - c) + d(g - a))$$

wegen $A_1 : A_2 : A_3 = 1 : 2 : 3$

gilt:

$$\frac{1}{2}\,ad = \frac{1}{4}\,(ch - gd)$$

$$d = \frac{ch}{2a + g}$$

$$\frac{1}{2}\,ad = \frac{1}{6}\,(h(a - c) + d(g - a))$$

$$\frac{2}{3}\,ad - \frac{1}{6}\,dg = \frac{1}{6}\,h(a - c)$$

$$d = \frac{h(a - c)}{4a - g}$$

$$\frac{ch}{2a + g} = \frac{h(a - c)}{4a - g}$$

$$ch(4a - g) = h(a - c)\,(2a + g)$$

$$ch\,((4a - g) + (2a + g)) = ha(2a + g)$$

$$6\,ach = ha(2a + g)$$

$$c = \frac{2a + g}{6}$$

$$d = \frac{h(2a + g)}{6(2a + g)}$$

$$d = \frac{h}{6}$$

Somit ist $O = \left(\frac{2a + g}{6},\ \frac{h}{6}\right)$

Peter hat neben dieser Lösung auch noch eine elementargeometrische, ähnlich der von Erwin Eiselt, eingesandt.
Daraufhin hat er für eine Preisaufgabe zwei Wertpunkte erhalten, da er zwei vollständige und im wesentlichen verschiedene Lösungswege angegeben hat.
Wir möchten an dieser Stelle nochmals darauf hinweisen, daß wir uns vorbehalten nicht nur für Lösungen der Preisaufgabe, sondern auch für sehr gute Lösungen der anderen gestellten Aufgaben, sowie für interessante Problemstellungen (mit Lösung) Wertpunkte zu verteilen.

Druckfehlerberichtigung

In der Sondernummer zum 50.Jahrestag der Oktoberrevolution ist uns ein bedauerlicher Druckfehler unterlaufen:
Bei der Aufgabe (S.2) muß die Rekursionsformel für x_{n+1} wie folgt lauten: $x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 1}{5x_n}$

Wir bitten dieses Versehen zu entschuldigen.