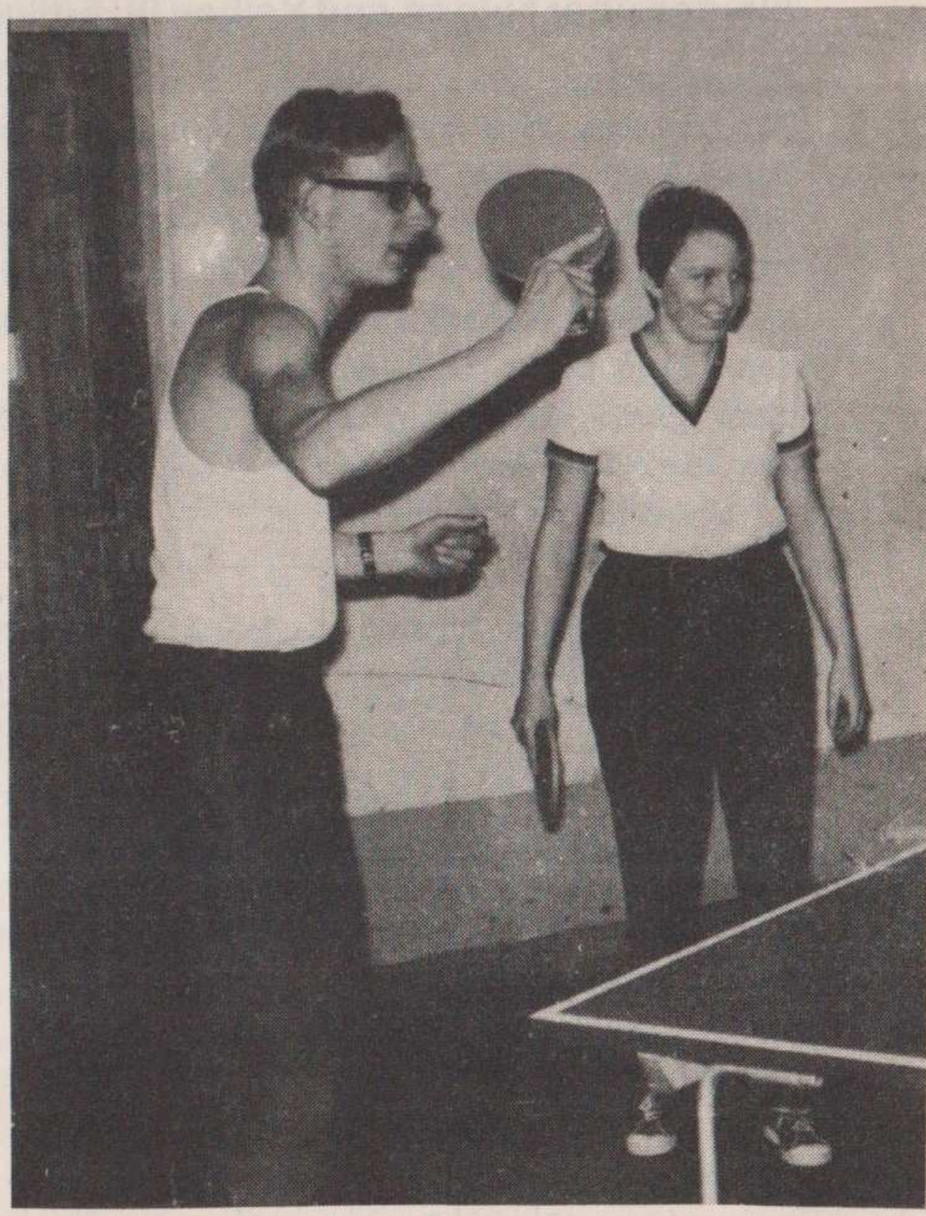


WURZEL

1

70

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

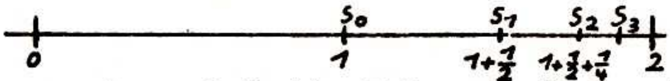
Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Einiges über Folgen und Reihen III (Schluß)

3. Reihen

Ein uraltes Tier kriecht fortwährend immer in einer Richtung. Dabei legt es pro Zeiteinheit immer die Hälfte der vorher bewältigten Strecke zurück. Wie weit wird es kommen?

Wir können davon ausgehen, daß das Tier in der Anfangszeiteinheit gerade eine Längeneinheit (LE) zurücklegt, in der folgenden dann eine halbe Längeneinheit, also insgesamt schon $(1 + \frac{1}{2})$LE; dann kommt $\frac{1}{4}$LE hinzu, also $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4})$LE usw. Schließlich gelangt das Tier bis zum "Ort" $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}$, den wir mit s_n bezeichnen.



Die Skizze läßt vermuten, daß die Folge (s_n) der Aufenthaltsorte s_n gegen 2 konvergiert. Um dies zu beweisen, suchen wir zunächst eine geeignete Darstellung von s_n. Wir subtrahieren zu diesem Zweck von s_n die Zahl $\frac{1}{2}s_n$

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2}s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

Hieraus folgt:

$$s_n - \frac{1}{2}s_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{und somit}$$

$$s_n = 2 - \frac{1}{2^n}$$

Nun berechnen wir

$$|s_n - 2| = \left|2 - \frac{1}{2^n} - 2\right| = \left|-\frac{1}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

Die letzte Ungleichung ist erfüllt, wenn $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$ gilt. Das ist aber für fast alle n richtig (davon überzeugt man sich durch Logarithmieren dieser Ungleichung), und somit konvergiert s_n gegen 2. Wir erhalten also

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = 2 \,.$$

Man muß allerdings bemerken, daß die obige Skizze hinreichend gut Auskunft gibt über das anfangs formulierte Problem, zumal das Tier nach einer gewissen (endlichen) Zeit kleinere "Schritte" machen müßte, als es in der Lage ist, d.h. es wird bereits nach einer endlichen Zeit (annähernd) 2LE zurückgelegt haben und dann dort verharren müssen. Unsere detaillierten Überlegungen dienten vielmehr der Vorbereitung auf die folgende allgemeine Fragestellung. Dazu zunächst eine

D e f i n i t i o n:

Gegeben sei eine Folge (a_n).
Der Ausdruck $a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ heißt <u>Reihe</u>,
a_n heißt das <u>n-te Glied</u> der Reihe und
$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = s_n$ heißt <u>n-te Partialsumme</u> der Reihe.

Die Frage besteht nun darin, ob bei einer solchen fortlaufenden Summierung, wie es in einer Reihe geschieht, etwas sinnvolles entsteht, d.h., ob "zum Schluß" etwa eine Zahl herauskommt.
Im einführenden Beispiel hatten wir speziell die Reihe

B14: $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$

betrachtet und stellten fest, daß die Folge der Partialsummen $(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n})$ gegen 2 konvergiert. Wenn wir hingegen die Reihe

B15: $1 + (-1) + 1 + \ldots + (-1)^n + \ldots$

betrachten, so ist $s_0 = a_0 = 1$, $s_1 = a_0 + a_1 = 0$, $s_2 = 1$, $s_3 = 0$ usw. Bei der fortlaufenden Summierung entsteht immer abwechselnd 1 und 0, die Folge (s_n) der Partialsummen konvergiert also nicht (vergleiche auch Teil II, B13).
Aus diesen beiden Beispielen ersehen wir, daß die fortlaufende Summierung durch das Verhalten der Folge (s_n) der Partialsummen beschrieben werden kann. Deshalb treffen wir die folgende

D e f i n i t i o n:

Konvergiert die Folge (s_n) der Partialsummen der Reihe $a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ gegen eine Zahl s, so heißt die Reihe <u>konvergent</u>, s heißt <u>Summe</u> dieser Reihe, und wir schreiben $a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots = s$.

Jetzt können wir also sagen, daß die Reihe B14 die Summe 2 hat:

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 2.$$

Abschließend beweisen wir eine notwendige Bedingung dafür, daß eine Reihe konvergent ist.

S a t z: Ist die Reihe $a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ konvergent, so gilt $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Beweis: Wir setzen voraus, daß die Reihe $a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ konvergent ist und s ihre Summe ist.

a_n ist sozusagen der Zuwachs der Partialsumme im n-ten Schritt: $a_n = s_n - s_{n-1} \quad (n > 0)$.

Deshalb gilt
$$|a_n - 0| = |s_n - s_{n-1}| =$$
$$= |s_n - s - (s_{n-1} - s)|$$
$$\leq |s_n - s| + |s_{n-1} - s|.$$

Die Folge (s_n) der Partialsummen konvergiert aber nach Voraussetzung gegen s. Somit gilt zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ für fast alle n die Beziehung $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dadurch gilt auch für fast alle n $|s_{n-1} - s| < \frac{\varepsilon}{2}$ und folglich für fast alle n $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Also konvergiert (a_n) gegen Null, und der Beweis ist beendet.

Aus diesem Satz folgt direkt, daß die Reihe B15 nicht konvergent ist, denn für sie ist $a_n = (-1)^n$, und (a_n) konvergiert nicht gegen Null.

K. Fleischmann

Assistent
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Preisaufgaben (Serie 1/70)

(B1) In einem Dreieck sei im Inneren ein Punkt P gegeben. Zieht man durch P Parallelen zu den drei Seiten, so wird das Dreieck in 6 Teile geteilt, wovon drei Teile Dreiecke sind. Man bestimme aus den Flächeninhalten dieser Dreiecke den Flächeninhalt des ursprünglich vorgegebenen Dreiecks.

(B2) Man zeige, daß die Menge aller komplexen Zahlen a mit $a = e^{i \cdot k \cdot \frac{\pi}{4}}$ (k ganz) eine endliche Gruppe bezüglich der Multiplikation bildet.

(B3) Man ermittle ohne Benutzung der Differentialrechnung den kleinsten Wert der Funktion
$$f(x) = \frac{1 + x^2}{1 + x} \quad (x \geq 0).$$

(B4) a) Man bestimme die Summe der Reihe
$$7 + \frac{7}{3} + \frac{7}{3^2} + \dots + \frac{7}{3^n} + \dots$$

b) Man entscheide, ob die Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{n}{n+1} + \ldots$$

konvergiert.

(B5) Man bestimme die Summe der Reihe

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2^1} + \frac{\sin 2\frac{\pi}{2}}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{2^n} + \ldots$$

(B6) Wieviel Lösungen besitzt die Gleichung

$$\sin x = \frac{x}{100} \quad ?$$

Für jeden vollständigen Lösungsweg einer Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).
Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum 10. des folgenden Monats (Datum des Poststempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" an unsere Adresse einzuschicken. Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs-bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden.

Achtung: Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

Buntes Allerlei

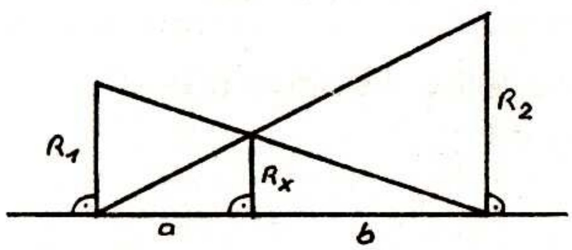
Auflösung aus Nr. 11/69

Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion zur Bestimmung des Gesamtwiderstandes bei der Parallelschaltung von Widerständen:

Nach dem Strahlensatz gilt

$$\frac{a+b}{R_1} = \frac{b}{R_x}$$

$$\frac{a+b}{R_2} = \frac{a}{R_x}$$



Daraus folgt $$\frac{a+b}{R_1} + \frac{a+b}{R_2} = \frac{a}{R_x} + \frac{b}{R_x}$$

und $$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_x}$$

Onkel Fritz besitzt einen sehr wertvollen Kalender aus dem vorigen Jahrhundert. Nach wieviel Jahren stimmen Daten und Wochentage dieses Kalenders mit denen des betreffenden späteren Jahres überein?

Die drei Zahlen 12 5 2 wurden nach einer bestimmten Rechenvorschrift gebildet. Nach der gleichen Vorschrift wurden die Zahlen 27 x 11 gebildet. Wie lautet dann x?

Wir stellen vor: Dozent Dr. habil. Walter Wallisch

Dr. habil. Walter Wallisch ist Dozent an der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena, gleichzeitig Leiter des Bereichs Numerische Mathematik und stellvertretender Direktor für Forschung. Am 5.März 1922 wurde er geboren. Er besuchte in Aussig die Oberschule und legte dort 1941 sein Abitur ab.

Von 1948 bis 1954 studierte er in Jena. Anschließend arbeitete er als wissenschaftlicher Assistent am damaligen Institut für Angewandte Mathematik und Mechanik, seit 1962 als Oberassistent am Institut für Mathematik. Hier promovierte er 1965 mit der Arbeit "Ein Abbildungsprinzip der Elastomechanik und seine Anwendung auf prismatische Stäbe". Zwei Jahre später habilitierte Dr. Wallisch. Seit 1968 ist er Dozent an der Sektion Mathematik.

Numerische Mathematik II

2. Absoluter und relativer Fehler:

Es sei X der exakte oder "wahre" Wert einer Zahl, und x ein (z.B. durch Messung oder ungenaue Rechnung gefundener) Näherungswert für diese Zahl. Die Differenz

$$\Delta = x - X \qquad (1)$$

wird dann als **absoluter Fehler** bezeichnet zum Unterschied zu dem noch zu besprechenden relativen Fehler.

Es liegt in der Natur der praktischen Problemstellungen, daß der absolute Fehler eines Näherungswertes nicht genau bekannt oder zumindest nicht durch einen endlichen Dezimalbruch darstellbar ist. Damit überhaupt eine quantitative Fehleranalyse möglich ist, muß wenigstens eine Schranke s für den Betrag $|\Delta|$ des absoluten Fehlers (positiv gerechneter Wert der Differenz x - X) bekannt sein:

$$|\Delta| \leq s, \text{ d.h. } |\Delta| \text{ nicht größer als } s. \qquad (2)$$

Schreibt man (1) in der Form $X = x - \Delta$ und beachtet (2), so erkennt man, daß der exakte Wert X zwischen $x - s$ und $x + s$ liegen muß:

$$x - s \leq X \leq x + s,$$

wofür man insbesondere in der physikalischen Literatur abkürzend schreibt $X = x \pm s$.

So könnte man für die Zahl π z.B. schreiben $\pi = 3{,}14 \pm 0{,}002$, da der unendliche Dezimalbruch für π mit 3,141... beginnt.

Bei den Näherungswerten von irrationalen Zahlen, die durch die übliche Rundung gewonnen worden sind, weiß man jedoch von vornherein, daß eine halbe Einheit derjenigen Dezimalstelle, auf der die letzte mitgeführte Ziffer steht, eine Fehlerschranke s darstellt. Z.B. steht die letzte Ziffer von 3,14 auf der Dezimalstelle 10^{-2}, und es ist daher $\frac{1}{2}\cdot 10^{-2} = 0{,}005$ eine Schranke für den absoluten Fehler des Näherungswertes.

Da diese Fehlerschranke allein schon aus der Dezimalbruch-Darstellung des gerundeten Näherungswertes hervorgeht, ist es eine allgemeine Übereinkunft, diese Schranke nicht noch einmal explizit anzugeben. Die Angabe $\pi = 3{,}14$ wird vielmehr als gleichbedeutend mit $\pi = 3{,}14 \pm 0{,}005$ angesehen.

Bei gerundeten Zahlen ist es demnach nicht einerlei, ob man hinter die letzte Ziffer eines Dezimalbruches noch Nullen anhängt oder nicht. So ist die Angabe $\pi = 3{,}140$ falsch, weil π eben nicht zwischen $3{,}140 - 0{,}0005$ und $3{,}14 + 0{,}0005$ liegt.

Ebenso ist die Angabe $1000\pi = 3140$ falsch. Richtig wäre z.B. $1000\pi = 3{,}14\cdot 10^3$ oder $31{,}4\cdot 10^2$ oder irgend eine andere Darstellung, bei der 4 die letzte mitgeführte Ziffer in einem Dezimalbruch ist.

Beim Rechnen mit Näherungswerten ist die Gleichheit also anders zu verstehen, als man es sonst gewohnt ist. Dieser Sachverhalt wird oft nicht beachtet. So folgt z.B. aus $\pi = 3{,}14$ und $\sqrt{2} = 1{,}41$

n i c h t $\pi \cdot \sqrt{2} = 4{,}4274$, sondern das Ergebnis wird erst richtig, wenn man auf e i n e Stelle nach dem Komma rundet:

$$\pi \cdot \sqrt{2} = 4{,}4.$$

(Der unendliche Dezimalbruch der irrationalen Zahl $\pi \cdot \sqrt{2}$ beginnt mit 4,4428...).

Ebenso wird oft nicht daran gedacht, daß die U m f o r m u n g eines Rechenausdruckes, der irrationale Zahlen enthält, für die numerische Auswertung schwerwiegende Folgen haben kann. Die Umformung kann vorteilhaft, aber auch nachteilig für die Genauigkeit des Resultats sein.

Betrachten wir z.B. den Ausdruck $X = (\sqrt{2} - 1)^6$, so können wir ihn durch "Auspotenzieren" umformen in $X = 99 - 70 \cdot \sqrt{2}$. Beim Einsetzen des Näherungswertes 1,41 für $\sqrt{2}$ erhält man jedoch zwei stark voneinander abweichende Werte, nämlich auf vier Stellen nach dem Komma gerundet:

$$x_1 = (1{,}41 - 1)^6 = 0{,}0048$$
$$x_2 = 99 - 70 \cdot 1{,}41 = 0{,}3000.$$

Die Frage, welcher der beiden Werte x_1 und x_2 der bessere Näherungswert für X ist, und ebenso die Frage, auf wieviel Stellen ein numerisches Resultat zu runden ist, um "richtig" im Sinne des Rechnens mit Näherungswerten zu sein, führt auf das Problem der Fehlerfortpflanzung bei den Grundrechenoperationen.

Zur Analyse dieses Problems ist es zweckmäßig, vom Begriff des r e l a t i v e n Fehlers auszugehen. Dieser Fehler - weiterhin mit δ bezeichnet - mißt die "Güte" eines Näherungswertes oder einer Messung, indem er den absoluten Fehler auf die Größe des anzunähernden Wertes X bezieht:

$$\delta = \frac{\Delta}{X} = \frac{x - X}{X} . \qquad (3)$$

Wir wollen den absoluten und relativen Fehler in einem Beispiel einander gegenüberstellen.

Wird eine Strecke von 1 km auf einen Meter genau ausgemessen, so ist der a b s o l u t e Fehler wesentlich größer als bei der Messung einer Strecke von 10 m auf einen Zentimeter genau. Trotzdem sind beide Messungen von gleicher Güte, denn der r e l a t i v e Fehler beträgt in beiden Fällen $\delta = \pm\, 0{,}001$ oder in Prozenten ausgedrückt $100\delta\% = \pm\, 0{,}1\%$.

Dozent Dr. habil. W.Wallisch

Aus der Sektion Mathematik

Wir wollen an dieser Stelle über die FDJ-Arbeit an unserer Sektion schreiben. Es soll versucht werden, die vielseitigen Aufgaben der FDJ-Studenten darzulegen. Um nicht abstrakt über diese Aufgaben zu schreiben, wollen wir eine FDJ-Gruppe zu Wort kommen lassen. Wir stellen vor die

FDJ-Gruppe Mathematik-Diplom, 4. Studienjahr (Abt. Numerik)

Unsere FDJ-Gruppe besteht aus 7 Studentinnen bzw. Studenten und wurde Anfang des 6.Semesters, also im März 1969 gebildet. Zu dieser Zeit fand die Aufteilung unseres Studienjahres auf die einzelnen Abteilungen statt. Aus den vormals zwei Seminargruppen wurden entsprechend den Abteilungen 4 Gruppen gebildet. Mit der Aufteilung begann auch die Fachausbildung, d.h. für uns die verstärkte Ausbildung in Numerischer Mathematik.

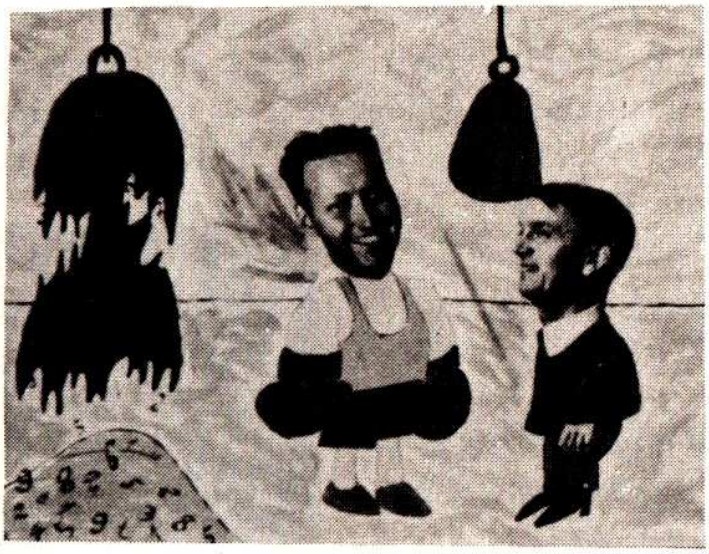
Soviel vielleicht zum Entstehen unserer FDJ-Gruppe. Jetzt wollen wir auf unsere Aufgaben als FDJ-ler eingehen.
Im Studium kann man keine Trennung zwischen rein fachlicher Ausbildung (d.h. nur dem Studium der Mathematik) einerseits, sowie der Ausbildung in anderen Fächern, insbesondere der in Marxismus-Leninismus durchführen. Erfüllung des vor jedem Studenten stehenden Studienauftrages kann auch nicht nur bedeuten, gute bzw. sehr gute Leistungen in allen Fächern zu erreichen. Eine wesentliche Seite unseres Studienauftrages bildet die FDJ-Arbeit. Die wichtigste Aufgabe dabei ist natürlich wiederum die Erzielung hoher Studienleistungen. Zur FDJ-Arbeit gehört aber noch einiges mehr. Über dieses "noch einiges mehr" sollen einige Punkte unseres diesjährigen Arbeitsplanes Auskunft geben.
Nach Abschluß des 4.Studienjahres findet für alle Studenten die Staatsexamensprüfung im Fach Marxismus-Leninismus statt. Unsere

Gruppe wird eine schriftliche Arbeit anfertigen unter dem Thema "Stand der Verwirklichung der dritten Hochschulreform an der Sektion Mathematik". Das ist eine sehr umfangreiche Arbeit und sie setzt ein gutes Wissen in Marxismus-Leninismus und die Fähigkeit zur schöpferischen Anwendung dieses Wissens voraus. Für uns sehen wir dabei etwa folgende Aufgaben: Gründliches Studium der Materialien zur dritten Hochschulreform und der zu ihrer Verwirklichung herausgegebenen Bestimmungen bzw. gefaßten Beschlüsse und Vereinbarungen. Es stehen dabei Probleme wie

- Notwendigkeit des Vierjahresstudiums, damit verbunden eine inhaltliche Neukonzeption der Ausbildung in allen Phasen, Wissenschaftlich-technische Revolution und reale Basis in der DDR,
- Praxisbezogenheit des Studiums,
- Stellung der Studenten und Wissenschaftler zur Ausbildung in Marxismus-Leninismus.

Diese genannten Punkte können natürlich nicht von uns allen erschöpfend behandelt werden. Unsere Aufgabe kann es dabei nur sein, an einzelnen Problemen mitzuarbeiten und ansonsten die reichen Erfahrungen bzw. Arbeitsergebnisse der letzten Zeit unter diesen Gesichtspunkten auszuwerten. An unserer Sektion beschäftigen sich Arbeitsgruppen z.B. mit der Ausarbeitung einer Praktikumsordnung für das Berufspraktikum, mit der Neukonzipierung der Fachausbildung, mit der Studienwerbung (dazu gehört unter anderem die "Wurzel"). Diese Arbeitsgruppen zeigen, daß sich Wissenschaftler und Studenten gleichermaßen verantwortlich fühlen für die vor uns stehenden Aufgaben. Für unsere Gruppe besonders aktuell ist dabei die exakte Erarbeitung eines Fachstudienplanes für die Ausbildung in Numerischer Mathematik und die Durchführung des Berufspraktikums im Februar 1970.
Diese Staatsexamensarbeit ist gleichzeitig unser Beitrag zum III.Karl-Marx-Seminar im Mai 1970 an der Friedrich-Schiller-Universität.
Als einen konkreten Beitrag zum Leninaufgebot werden wir die zum 100.Geburtstag Lenins erscheinende Sondernummer der "Wurzel" inhaltlich gestalten. In den Artikeln der Sondernummer wird auf Zusammenhänge zwischen Philosophie und Mathematik, auf die Zusammenarbeit unserer Mathematiker mit der Sowjetunion und even-

tuell auf mathematische Arbeiten Lenins eingegangen.
Zu einen inhaltsreichen und vielseitigen Gruppenleben gehören natürlich auch kulturelle und sportliche Veranstaltungen. Die wichtigste Aufgabe auf kulturellem Gebiet war für das gesamte 4.Studienjahr und damit auch für unsere Gruppe die Vorbereitung und Durchführung des Mathematikerballes. Dazu gehörten die rein organisatorischen Fragen, die Ausgestaltung



(unser Bild zeigt eine **Karikatur** mit Mitarbeitern der Abteilung Numerik), eine Ballzeitung und ein Ballprogramm.
Wanderungen (Das Bild auf Seite 9 ist bei einer Wanderung auf den Jenaer Jenzig aufgenommen) und Sport (Tischtennisspielen an unserer Sektion, siehe Titelbild) bilden einen erholsamen Ausgleich zum Vorlesungsbetrieb. Gemeinsam besuchen wir Veranstaltungen (z.B. am 24.11.1969 Gisela May im Nationaltheater Weimar). Diese kulturelle und sportliche Betätigung trägt auch zum gegenseitigen Verständnis in der Gruppe bei. Der Kollektivgeist in einer Gruppe

ist wesentlich höher, als wenn sich die Gruppenmitglieder nur aus der fachlichen Arbeit kennen. FDJ-Versammlungen unter entsprechenden Verhältnissen durchgeführt (Bild oben) werden von keinem Studenten als "notwendiges Übel" angesehen.

FDJ-Gruppe Mathematik-Diplom 4 (Abt. Numerik)

In eigener Sache

Der Arbeitsbereich "Aufgabenteil"

Für den Aufgabenteil der "Wurzel" sind die Studenten Hartwig Eckner (1.Studienjahr, Mathematik-Diplom), Wolfgang Kiefer (2.Studienjahr, Mathematik-Physik-Lehrer), Reinhard Lorenz (2.Studienjahr, Mathematik-Diplom) - auf unserem Bild v.r.n.l. - und Sigrid Müller (3.Studienjahr Mathematik-Physik-Lehrer) verantwortlich. Sie erarbeiten gemeinsam die Serienaufgaben, wobei sie interessante Probleme aus dem Vorlesungsstoff aufgreifen oder sich aus zahlreichen sowjetischen Sammlungen geeignete Aufgaben heraussuchen. Die eingesandten Lösungen dieser Aufgaben werden dann korrigiert und gute Lösungen in der "Wurzel" veröffentlicht. Gehen jedoch zu einer Aufgabe keine Lösungen ein, so muß der Arbeitsbereich selbst eine veröffentlichungswürdige Lösung finden.

Zu den Serienaufgaben werden seit einigen Monaten von diesem Arbeitsbereich auch Scherzaufgaben veröffentlicht, die zur Auflockerung der Zeitschrift beitragen sollen.

Im Zusammenhang mit der Korrektur der eingesandten Lösungen führt die Arbeitsgruppe eine Wertpunkt-Kartei. Erreicht ein Schüler 5 Wertpunkte, so bekommt er eine Nachricht davon, und darf sich einen Buchpreis aussuchen, der ihm dann zugesandt wird. Übrigens brauchte noch kein Preisträger ausgelost zu werden, d.h., in keinem Monat gab es mehr als drei Einsender mit fünf Wertpunkten.

In diesem Zusammenhang weisen wir unsere Leser darauf hin, daß auch für eingesandte Aufgaben (wenn sie in der "Wurzel" als Preisaufgaben veröffentlicht werden) Wertpunkte vergeben werden. Diese Aufgaben müssen mit ausführlicher Lösung eingesandt werden.

Lösungen

(A67): (Lösung von P.Kannemann, EOS Schleusingen)

Die gesuchte Zahl sei z und bestehe aus n Einsen.

$$z = 111\ldots1$$

$$z = 10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10^1 + 10^0$$

$$z = 1\cdot\frac{10^n - 1}{10 - 1} = \frac{10^n - 1}{9}$$

Nun soll gelten

$$z \equiv 0 \pmod{173}$$

$$\frac{10^n - 1}{9} \equiv 0 \pmod{173}$$

$$10^n - 1 \equiv 0 \pmod{173}$$

Da 10 und 173 teilerfremd sind, gilt der kleine Satz von Fermat $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$; wenn a und p teilerfremd sind.

Somit gilt also

$$10^{172} - 1 \equiv 0 \pmod{173}.$$

Da auch 9 und 173 teilerfremde Zahlen sind, muß eine Zahl z, die aus 172 Einsen besteht, durch 173 teilbar sein.

(A68): Es gilt die Ähnlichkeit folgender Dreiecke

$\Delta EBF \sim \Delta ABC$

$\Delta HGD \sim \Delta ACD$,

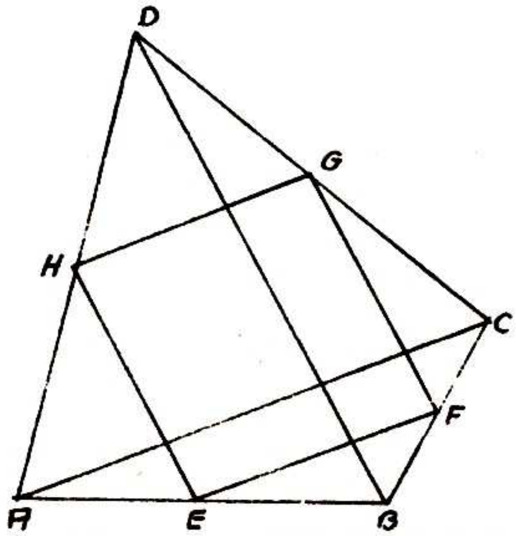
da diese in den drei Winkeln übereinstimmen. Aus der Ähnlichkeit folgt jetzt

$\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ und $\overline{HG} \parallel \overline{AC}$

und somit $\overline{EF} \parallel \overline{HG}$.

Analog dazu beweist man, daß auch $\overline{EH} \parallel \overline{FG}$ gelten muß.

Damit ist bewiesen, daß das ▱EFGH ein Parallelogramm ist.



(A69): Ist $\alpha + \beta + \gamma = 0$, dann gilt

$$A = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \tfrac{2}{3}(\alpha + \beta + \gamma) \geq 0$$

und auch

$$A + \frac{1}{3} = (\alpha^2 + \tfrac{2}{3}\alpha + \tfrac{1}{9}) + (\beta^2 + \tfrac{2}{3}\beta + \tfrac{1}{9}) + (\gamma^2 + \tfrac{2}{3}\gamma + \tfrac{1}{9}) =$$

$$= (\alpha + \tfrac{1}{3})^2 + (\beta + \tfrac{1}{3})^2 + (\gamma + \tfrac{1}{3})^2 \geq \tfrac{1}{3}$$

Mit der Sbustitution $a = \alpha + \frac{1}{3}$, $b = \beta + \frac{1}{3}$, $c = \gamma + \frac{1}{3}$

ergibt sich $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$, wenn gilt

$$a + b + c = \alpha + \tfrac{1}{3} + \beta + \tfrac{1}{3} + \gamma + \tfrac{1}{3} = 1$$

(A70): (Nach einer Einsendung von Roland Engelmann, EOS Saalfeld)
Um einen geeigneten Erweiterungsfaktor zu finden, erweitert man mit einem Trinom der Form

$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$$

und bestimmt a, b und c durch ein Gleichungssystem:

$$\frac{59}{1 + 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}}{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}} =$$

$$= \frac{59(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4})}{(a - 4b + 6c) + \sqrt[3]{2}(3a + b - 4c) + \sqrt[3]{4}(-2a + 3b + c)}$$

Damit der Nenner rational wird, muß gelten:

(1) $3a + b - 4c = 0$

(2) $-2a + 3b + c = 0$

(3) $a - 4b + 6c = p$ (p beliebig, rational)

Dieses Gleichungssystem hat folgende Lösungen:

$$a = \frac{13}{59}\cdot p, \quad b = \frac{5}{59}\cdot p, \quad c = \frac{11}{59}\cdot p.$$

Setzt man $p = 59$, so erhält man

$$a = 13, \quad b = 5, \quad c = 11.$$

Der Erweiterungsfaktor lautet also

$$13 + 5\sqrt[3]{2} + 11\sqrt[3]{4}.$$

Man erhält

$$\frac{59}{1 + 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}} = \frac{59(13 + 5\sqrt[3]{2} + 11\sqrt[3]{4})}{59} =$$

$$= 13 + 5\sqrt[3]{2} + 11\sqrt[3]{4}$$

(A79): Der Spieler A kann entweder 0 Streichhölzer oder 1 Streichholz in die Hand nehmen und unabhängig davon die Zahlen 0, 1 oder 2 nehmen. Er besitzt also $2\cdot 3 = 6$ Strategien und zwar (es bedeutet $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ A nimmt a Hölzer in die Hand und nennt die Zahl b):

$s_1 = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, $s_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, $s_3 = \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$, $s_4 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $s_5 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $s_6 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$.

Der Spieler B kann ebenfalls 0 Streichhölzer oder 1 Streichholz in die Hand nehmen. Da er jedoch eine Zahl nennen muß, die von der von A genannten Zahl verschieden ist, genügt es nicht, nur eine der drei Zahlen 0, 1, 2 anzugeben, sondern B hat zu jeder Zahl eine von zwei möglichen Ersatzzahlen zu nennen, falls A schon diese Zahl geraten hat. Damit besitzt B $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ verscheidene Strategien:

$t_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, $t_2 \quad \begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}$, $t_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $t_4 = \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$, $t_5 = \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$, $t_6 = \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$,

$t_7 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $t_8 = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$, $t_9 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $t_{10} = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$, $t_{11} = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$, $t_{12} = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$

($\begin{bmatrix}m\\n\\p\end{bmatrix}$ bedeutet: B nimmt m Streichhölzer und nennt die Zahl n, wenn A nicht n genannt hat, und p, wenn A n angegeben hat).

Die Gewinnmatrix für A sieht dann so aus:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wie man leicht sieht, ist das kleinste Element in jeder Zeile -1, das größte Element einer Spalte jedoch immer 1, so daß die Gewinnmatrix A keinen Sattelpunkt besitzen kann.

(A72): In der gesuchten Permutationsgruppe $[G, \cdot]$ muß das Einselement enthalten sein, nämlich $\binom{1234}{1234}$. Weiterhin müssen die Produkte

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix} \quad \text{sowie}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$$

Elemente von $[G, \cdot]$ sein.

Diese 6 Elemente, die mindestens in $[G, \cdot]$ enthalten sein müssen, bilden nun gerade eine Gruppe. Diese Gruppe ist sogar isomorph zu $[\Pi_3, \cdot]$, wie man leicht zeigen kann, da in allen Permutationen von $[G, \cdot]$ die Eins in sich abgebildet wird und die Gruppe als Permutationsgruppe von drei Elementen aufgefaßt werden kann.

(A82): Es muß gezeigt werden, daß für alle $\varepsilon > 0$ und fast alle n gilt

$$|a_n| < \varepsilon$$

Es ist nun $|a_n| = \left|\frac{2}{3n-4}\cdot(-1)^{5n+1}\right| = \left|\frac{2}{3n-4}\right|\cdot\left|(-1)^{5n+1}\right| =$

$$= \frac{2}{3n-4} \quad \text{für } n > 1$$

Damit bleibt zu zeigen, daß für fast alle n gilt:

$$\frac{2}{3n-4} < \varepsilon$$

Es gilt aber dann für $n > 1$

$$2 < \varepsilon(3n-4)$$

$$n > \frac{4\varepsilon + 2}{3\varepsilon}$$

$$n > \frac{4}{3} + \frac{2}{3\varepsilon}$$

Für jedes beliebige ε gibt es aber nur endlich viele n, die die Ungleichung nicht erfüllen.
Damit ist gezeigt, daß (a_n) eine Nullfolge ist.

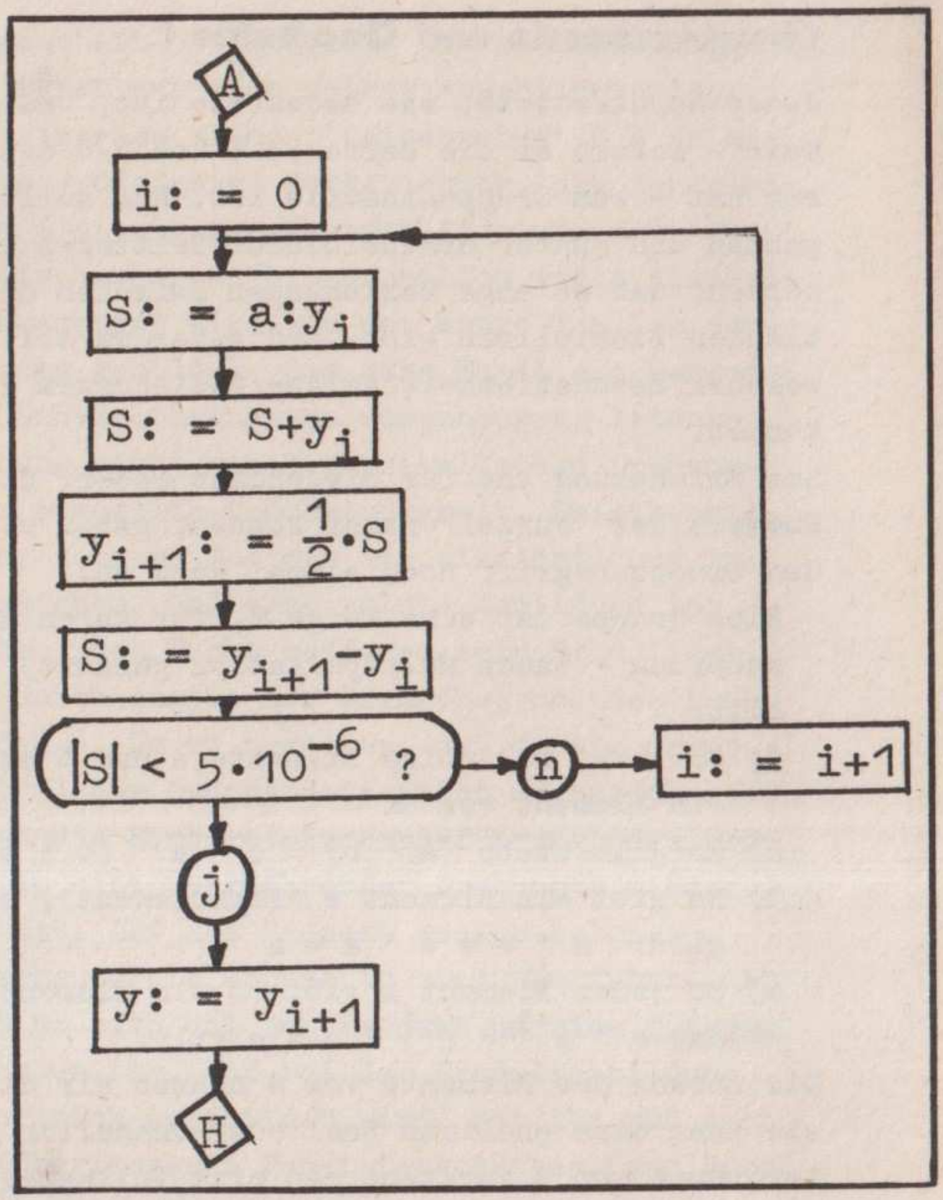
Zum Titelbild:
Eine Erläuterung zum Titelbild finden Sie im Artikel "Aus der Sektion Mathematik", Seite 11.

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS und SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Harald Fischer, Rainer Wackernagel
Mitarbeiter: H.Eckner, R.Großmann, W.Kiefer, N.Kuse, R.Lorenz, S.Müller, P.Pradel, E.Taubald, I.Zenner

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
DDR 69 Jena
Helmholtzweg 1
"Wurzel"-Redaktion

V-14-6 7 4803 M 175-69



2

70

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Gruppentheorie und Geometrie I

Jeder Schüler weiß, was Geometrie ist, und jeder "Wurzel"-Leser weiß - sofern er die Hefte 5, 6 und 7/8 des Jahrgangs 1969 gelesen hat - was Gruppentheorie ist. Nun soll in dem hier vorliegenden und später erscheinenden Beiträgen an Beispielen gezeigt werden, daß es enge Beziehungen zwischen diesen beiden mathematischen Disziplinen gibt, und außerdem soll deutlich werden, von welcher Beschaffenheit solche Beziehungen im konkreten Fall sein können.

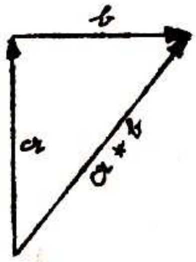
Zur Erinnerung und für diejenigen Leser, die die obengenannten Nummern der "Wurzel" nicht kennen, geben wir die Definition für den Gruppenbegriff noch einmal kurz an:

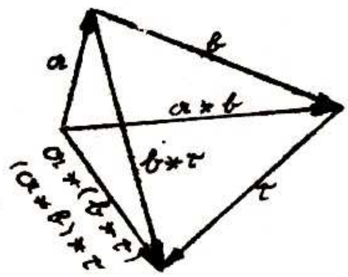
Eine Gruppe ist eine Menge $\mathfrak{G}$, für deren Elemente eine Verknüpfung $*$ (auch Multiplikation genannt) erklärt ist, so daß gilt:

1) Für zwei beliebige Elemente a und b aus $\mathfrak{G}$ ist $a * b$ wieder ein Element von $\mathfrak{G}$
2) Es gilt stets $(a * b) * c = a * (b * c)$
3) Es gibt ein Element e (Einselement), so daß für alle a gilt: $a * e = e * a = a$
4) Zu jedem Element a gibt es ein Element a^{-1} (Inverses), so daß $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ gilt.

Die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{G}$ nennen wir die Ordnung der Gruppe, sie kann eine endliche Zahl oder unendlich sein. Unter einer Untergruppe von $\mathfrak{G}$ versteht man eine Teilmenge von $\mathfrak{G}$, die für sich eine Gruppe bildet.

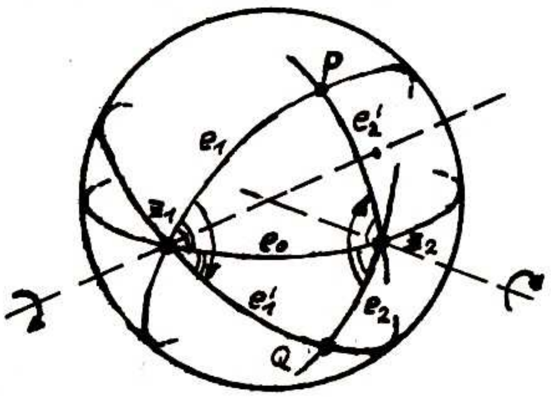
Für die Geometrie sind besonders sogenannte A b b i l d u n g s g r u p p e n wichtig, das sind Gruppen von Abbildungen (Transformationen) der Ebene oder des Raumes, bei denen als Verknüpfung die Hintereinanderausführung der Abbildungen genommen wird. So bilden zum Beispiel alle Parallelverschiebungen eine Abbildungsgruppe, denn führt man zwei Parallelverschiebungen hintereinander aus, so ergibt sich wieder eine Parallelverschiebung, womit Eigenschaft 1) bewiesen ist; das in 2) formulierte Assoziativgesetz ist bei Abbildungen immer richtig (vgl. auch Figur),





als Einselement e (Eigenschaft 3)) fungiert die identische Abbildung, bei der jeder Punkt auf sich selbst abgebildet wird, und schließlich ist das inverse Element (Eigenschaft 4)) zu einer Parallelverschiebung r diejenige Verschiebung, die den gleichen Betrag wie r, aber die entgegengesetzte Richtung hat. Die Gruppe aller Parallelverschiebungen hat unendlich viele Elemente.

Eine andere Abbildungsgruppe wird von der Menge ϑ aller derjenigen Drehungen im Raume gebildet, die eine Kugel als Ganzes in sich überführen (Um Mißverständnissen vorzubeugen, betonen wir, daß wir unter Drehung nicht einen physikalischen Drehvorgang verstehen, bei dem womöglich Geschwindigkeit, Zwischenstadien u.ä. interessieren, sondern daß wir sie als Abbildung im mathematischen Sinn verstehen, und eine solche Abbildung ist festgelegt, wenn man für jeden Punkt weiß, wo sein Bild liegt. Eine Drehung kann also durch Angabe der Drehachse und des Drehwinkels vorgegeben werden.). Um zu beweisen, daß ϑ eine Gruppe ist, ist zunächst Punkt 1) der Gruppendefinition zu berücksichtigen und zu zeigen, daß die Hintereinanderausführung (das Produkt) zweier die Kugel in sich überführender Drehungen wieder eine derartige Drehung ist. Daß das Produkt zweier solcher Drehungen die Kugel überhaupt als Ganzes in sich überführt, ist klar. Um zu zeigen, daß es sich bei dem Produkt um eine Drehung handelt, genügt es nachzuweisen, daß bei der Produktabbildung mindestens ein Punkt auf sich abgebildet wird, mit ihm muß auch der ihm diametral gegenüberliegende Punkt festbleiben, und durch beide geht dann die Drehachse. Nun ist es aber nicht allzu schwer, einen Punkt zu finden, der beim Produkt zweier Drehungen auf sich abgebildet wird, wir gehen folgendermaßen vor: Die beiden Drehungen mögen Drehachsen haben (diese gehen selbstverständlich durch den Kugelmittelpunkt), die in z_1 und z_2 und ihren diametral gegenüberliegenden Punkten die Kugeloberfläche durchstoßen. Ist $z_1 = z_2$, so stimmen die Achsen überein, und diese Achse ist zugleich Drehachse der Produktabbildung.



Ist $z_1 \neq z_2$, so legen wir durch z_1, z_2 und den Kugelmittelpunkt eine Ebene e_0. Ferner legen wir durch z_1 und den Kugelmittelpunkt (also durch die erste Drehachse) zwei Ebenen e_1 und e_1' derart, daß sie miteinander den Drehwinkel der ersten Drehung einschließen und symmetrisch zur Ebene e_0 liegen. Ebenso legen wir durch z_2 und den Kugelmittelpunkt zwei Ebenen e_2 und e_2' so, daß sie miteinander den Drehwinkel der zweiten Drehung einschließen und symmetrisch zur Ebene e_0 liegen (siehe Figur). Alle fünf Ebenen e_0, e_1, e_1', e_2, e_2' gehen durch den Kugelmittelpunkt, daher schneiden sich je zwei von ihnen in Geraden, die durch den Kugelmittelpunkt gehen. Wir interessieren uns für einige Durchstoßpunkte dieser Geraden mit der Kugel:
e_1 und e_2' schneiden sich auf der Kugeloberfläche in P, e_1' und e_2 in Q. Da e_1, e_1' bzw. e_2, e_2' symmetrisch zu e_0 liegen, ist das Bild von P bei der ersten Drehung Q, und das Bild von Q bei der zweiten Drehung P. Also ist das Bild von P bei der Hintereinanderausführung der beiden Drehungen wieder P, die Gerade durch P und den Kugelmittelpunkt kann somit als Drehachse für das Produkt der beiden Drehungen genommen werden.
Um den Beweis dafür zu beenden, daß ϑ eine Gruppe ist, müssen wir noch die Punkte 2) bis 4) der Gruppendefinition untersuchen. 2) ist sicher erfüllt, 3) auch, da ja die identische Abbildung, als Drehung mit dem Drehwinkel 0° aufgefaßt, die Kugel festläßt und somit zu ϑ gehört, und für den Nachweis von 4) braucht man nur zu bedenken, daß mit jeder die Kugel festlassenden Drehung auch die Drehung mit derselben Achse, aber entgegengesetztem Drehwinkel die Kugel festläßt und mit der ersten zusammen als Produkt die identische Abbildung ergibt.
Die soeben charakterisierte Gruppe ϑ hat sicher unendlich viele Elemente, denn es gibt ja unendlich viele Drehachsen und -winkel. Eine interessante Frage ist nun diese: Hat ϑ Untergruppen, die aus nur endlich vielen Elementen bestehen, und wenn ja, welche geometrische Bedeutung haben diese endlichen Untergruppen? Bei der Lösung dieses Problems kommt die Gruppentheorie entscheidend zu Wort, das Ergebnis führt u.a. auf die regelmäßigen Polyeder. Auf Einzelheiten dieser Fragestellung soll in einer Fortsetzung dieses Beitrags eingegangen werden.

Dr. W. Börner
wiss. Mitarbeiter an der Sektion Mathematik der FSU Jena

Preisaufgaben (Serie 2/70)

(B7) Man zeige, daß für alle natürlichen Zahlen n gilt:
19 ist Teiler von $(5^{2n+3} + 3^{n+3} \cdot 2^n)$.

(B8) Man beweise, daß in einem beliebigen Dreieck die Schnittpunkte der Höhen, der Seitenhalbierenden und der Mittelsenkrechten auf einer Geraden, der sogenannten Eulerschen Geraden, liegen.

(B9) Man bestimme Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl

$$z = \sqrt{a + bi}.$$

(B10) Man untersuche die Konvergenz der Zahlenfolge (a_n) mit den Gliedern

$$a_n = \frac{\sin n + (\cos n)^3}{n}.$$

(B11) Man zeige, daß sich $(\sqrt{2} - 1)^n$ für alle natürlichen Zahlen n in der Form $\sqrt{m + 1} - \sqrt{m}$, wobei m eine natürliche Zahl ist, darstellen läßt.
Hinweis: Vollständige Induktion.

(B12) Für welches a hat folgende Ungleichung genau eine Lösung x:

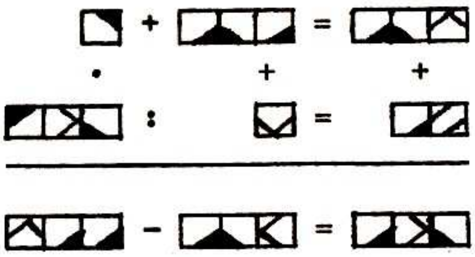
$$\sqrt{|ax - 3| + 6} \leq a\ ?$$

Für jeden vollständigen Lösungsweg einer Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).
Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum 10. des folgenden Monats (Datum des Poststempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" an unsere Adresse einzuschicken. Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden. Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

Buntes Allerlei

In einer alten Zeitung war folgende Meldung zu lesen: "M.H. aus der 43.Straße hatte in der letzten Nacht einen folgenschweren Traum. Er träumte, er würde von einem Löwen verfolgt, sprang aus dem Bett, riß das Fenster auf und sprang in Todesangst aus dem 6.Stock auf die Straße. Er war sofort tot". Was ist falsch an dieser Notiz?

Raten und Rechnen (jedes Kästchen bedeutet eine Ziffer, gleiche Kästchen bedeuten gleiche Ziffern):



Peter, Klaus und Frank trainieren gemeinsam auf der 100-m-Strecke. Nach jedem Lauf notieren sie sich den Einlauf und stellen am Ende der Saison fest, daß Peter doppelt so oft vor Klaus im Ziel war wie Klaus vor Peter, daß Klaus Frank doppelt so oft geschlagen hat, wie Frank Klaus und schließlich, daß Frank doppelt so oft besser war als Peter wie Peter besser als Frank war.
Ist das überhaupt möglich?

Numerische Mathematik III (Schluß)

3. Fehlerfortpflanzung bei den Grundrecheoperationen

Wir betrachten zunächst die Multiplikation und Division. x sei ein Näherungswert von X mit dem relativen Fehler δ_1 und y ein Näherungswert von Y mit dem relativen Fehler δ_2. Wie aus (3) folgt, gilt dann

$$x = X(1 + \delta_1) \qquad y = Y(1 + \delta_2). \tag{4}$$

Bezeichnen wir den durch δ_1 und δ_2 hervorgerufenen relativen Fehler des Produkts xy mit δ_3 und den relativen Fehler des Quotienten x/y mit δ_4, d.h. setzen wir

$$xy = XY(1 + \delta_3) \qquad x/y = (X/Y)(1 + \delta_4), \tag{5}$$

so folgt aus (4) und (5)

$$\delta_3 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_1 \cdot \delta_2 \quad \delta_4 = (\delta_1 - \delta_2)/(1 + \delta_2). \tag{6}$$

Ist demnach r_1 bzw. r_2 eine obere Schranke für den Betrag von δ_1 bzw. δ_2, so stellt

$$r_3 = r_1 + r_2 + r_1 \cdot r_2 \quad r_4 = (r_1 + r_2)/(1 - r_2) \tag{7}$$

eine obere Schranke für den Betrag von δ_3 bzw. δ_4 dar.
Hierbei mußten wir in $(7)_2$ voraussetzen, daß r_2 kleiner als 1 ist, d.h. daß der relative Fehler von y weniger als 100% beträgt. Diese Forderung ist beim praktischen Rechnen so gut wie immer erfüllt. Bei physikalisch-technischen Rechnungen sind die in die

Rechnung eingehenden Meßdaten mit Fehlern von höchstens einigen Prozenten behaftet, so daß man in der Praxis keinen großen Fehler begeht, wenn man die Formeln (7) ersetzt durch

$$\underline{r_3 \approx r_1 + r_2} \qquad \underline{r_4 \approx r_1 + r_2} \;. \tag{8}$$

Wir merken uns daher die Faustregel: "Bei der Multiplikation und Division addieren sich die Schranken der relativen Fehler". In unserem Beispiel (Numerische Mathematik II, Abschnitt 2) $X = \pi$, $Y = \sqrt{2}$, $x = 3{,}14$; $y = 1{,}41$ beträgt der relative Fehler von x und y weniger als ein halbes Prozent, also der Fehler von xy überschlagsmäßig ein Prozent. Hierdurch wird die Angabe $\pi \cdot \sqrt{2} = 4{,}4$ gerechtfertigt:

$$\pi \cdot \sqrt{2} = 4{,}4(1 \pm 0{,}01) \text{ bzw. } \pi \cdot \sqrt{2} = 4{,}4 \pm 0{,}05.$$

Bei der <u>Addition</u> und <u>Subtraktion</u> sind die Verhältnisse jedoch anders. Setzen wir anstelle von (5)

$$x + y = (X + Y)(1 + \delta_5) \qquad x - y = (X - Y)(1 + \delta_6), \tag{9}$$

so ergibt sich aus (4) und (9)

$$\delta_5 = p_1\delta_1 + p_2\delta_2 \qquad \delta_6 = q_1\delta_1 - q_2\delta_2 \tag{10}$$

mit

$$\begin{aligned} p_1 &= X/(X + Y) & q_1 &= X/(X - Y) \\ p_2 &= Y/(X + Y)' & q_2 &= Y/(X - Y) \end{aligned} \tag{11}$$

Nehmen wir an, daß $X > Y > 0$ ist, so lauten die (8) entsprechenden Formeln für die Fehlerschranken

$$\underline{r_5 = p_1r_1 + p_2r_2} \qquad \underline{r_6 = q_1r_1 + q_2r_2} \tag{12}$$

Bei der Addition und Subtraktion addieren sich nicht einfach die Fehlerschranken, sondern sie sind noch mit "Gewichts"-Faktoren behaftet. Da p_1 und p_2 für positive X und Y kleiner als 1 ausfallen, wirkt die Addition "fehlerdämpfend". Die Subtraktion dagegen kann den Fehler stark "anfachen", nämlich dann, wenn X und Y nahezu gleichgroße Zahlen sind. Wie man sich leicht überlegt, können q_1 und q_2 bei entsprechender Wahl von X und Y sogar beliebig groß ausfallen. Da hierbei die führenden Ziffern von Minuend und Subtrahend gleich sein müssen, und sich daher gegenseitig wegheben, spricht man von <u>"Auslöschung"</u>. Diese ist besonders beim automatischen Rechnen, wo man den Rechenvorgang selbst nicht beobachten kann, eine der gefürchtetsten Erscheinungen, da sie zu vollkommen falschen Rechenergebnissen führen kann.

Die Wirkung der Auslöschung können wir an einem der Beispiele in Numerische Mathematik, Abschnitt 2, studieren. Dort hatten wir die Identität

$$(\sqrt{2} - 1)^6 = 99 - 70 \cdot \sqrt{2}$$

und die Näherungswerte

$$x_1 = (1{,}41 - 1)^6 = 0{,}0048$$

$$x_2 = 99 - 70 \cdot 1{,}41 = 0{,}3000 \quad \text{betrachtet.}$$

Der relative Fehler von x_1 beträgt nach der Faustregel (8) etwa das 6-fache des relativen Fehlers, der entsteht, wenn man $\sqrt{2} - 1$ durch 0,41 annähert. Da dieser letztgenannte Fehler etwa 1% beträgt, erhält man für den relativen Fehler von x_1 überschlagsmäßig 6%; in Wirklichkeit beträgt dieser relative Fehler weniger als 4%.

Dagegen ergibt sich aus $(12)_2$ mit $X = x = 99$; $r_1 = 0$; $Y = 70 \cdot \sqrt{2}$; $y = 70 \cdot 1{,}41$; $r_2 = 1 - 1{,}41/\sqrt{2} \approx 0{,}003$; $q_2 = 70 \cdot \sqrt{2}/(99 - 70 \cdot \sqrt{2}) \approx 2 \cdot 10^4$ eine Abschätzung für den relativen Fehler von x_2 in der Größe von 6000%!

Man erkennt hieraus, daß identische Umformungen auf vollkommen veränderte numerische Verhältnisse und damit eventuell auf vollkommen falsche Rechenergebnisse führen können.

4. Die Methode der Iteration

Die Untersuchung der Fortpflanzung von Fehlern bzw. deren Abschätzung ist nur eine der Aufgaben der Numerischen Mathematik. Eine weitere wichtige Aufgabe besteht – wie schon früher bemerkt – darin, gangbare Wege, d.h. praktische Verfahren und Algorithmen zur zahlenmäßigen Lösung mathematischer Probleme zu entwickeln.

Viele dieser Algorithmen der Numerischen Mathematik weisen die Struktur einer "Iteration" auf (iterum iterumgue, lat., immer wieder (dasselbe)).

Es wird eine Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ von Werten berechnet, wobei immer wieder – unabhängig von der laufenden Nummer n – dieselbe Rechenvorschrift angewandt wird, um aus dem vorhergehenden Wert x_n den folgenden Wert x_{n+1} zu ermitteln. Diese algorithmische Struktur ist für den Einsatz von Rechenautomaten besonders zweckmäßig, ja sie macht deren Einsatz überhaupt erst lohnend. In der "Wurzel"-Nr.11/68 ("Einführung in die Rechentechnik IV") wurde bereits das aus einem einzigen Zyklus bestehende

Flußbild für eine solche Iteration angegeben. Hieraus ist ersichtlich, wie der Rechenautomat mit Hilfe weniger Befehle veranlaßt wird, eine große Zahl sich ständig wiederholender Serien von Rechenschritten auszuführen.

Die Methode der Iteration kann man auch als eine Methode des "systematischen Probierens" ansehen. Das "Probieren" ist hier selbstverständlich nicht im Sinne des Sprichworts "Probieren geht über Studieren" gemeint, sondern es handelt sich grob gesprochen darum, mit Hilfe von fortwährend durchgeführten Einsetzproben zu immer besseren Näherungswerten für eine gesuchte Zahl vorzudringen.

Wir wollen diese Methode an einem einfachen - aber für das praktische Rechnen durchaus wichtigen - Beispiel studieren, nämlich an der Berechnung der positiven Quadratwurzel aus einer positiven Zahl a. Hierzu denken wir uns irgendeinen positiven Näherungswert z für $\sqrt{a}$ gegeben. Dieser kann z.B. durch eine Überschlagsrechnung oder durch Ablesen vom Rechenstab gefunden sein; er kann aber auch völlig aus der Luft gegriffen sein (nur erfordert dann die nachfolgende Verbesserung umso mehr Arbeit).

Diesen Wert z wird man selbstverständlich erst einmal "ausprobieren", indem man sein Quadrat mit a vergleicht. Hierbei können 3 Fälle eintreten:

A: $z^2 > a$ B: $z^2 < a$ C: $z^2 = a$.

Im Fall C ist man am Ziel, so daß dieser Fall im weiteren uninteressant ist.

Den Fall B können wir folgendermaßen auf A zurückführen. Setzen wir $z' = a/z$, so folgt aus $z < \sqrt{a}$ die Ungleichung $a/z' < \sqrt{a}$ oder $z' > \sqrt{a}$, so daß wir z' an die Stelle von z treten lassen können und damit den Fall A herbeigeführt haben.

Wir können also den Fall A mit $z^2 > a$ voraussetzen. Es zeigt sich, daß wir dann immer sofort einen besseren Näherungswert angeben können, der sogar die Eigenschaft hat, daß er zusammen mit z die gesuchte Zahl $\sqrt{a}$ einschließt. Ein derartiges Einschließen ist beim numerischen Rechnen stets anzustreben, leider aber nicht immer erreichbar. Im vorliegenden Fall ergibt sich die Einschließung aus der Voraussetzung $z^2 > a$, wofür wir auch $z > \sqrt{a}$ oder $1/z < 1/\sqrt{a}$ schreiben können. Multipliziert man die beiden Seiten der letzten Ungleichung mit a, so folgt $a/z < \sqrt{a}$

und damit insgesamt $\qquad a/z < \sqrt{a} < z.$

$\sqrt{a}$ liegt also im Intervall $(a/z,\ z)$.

Daß a/z näher an $\sqrt{a}$ liegt als z selbst, folgt aus der Schlußkette $\qquad 0 < (z - \sqrt{a})^2$, folglich $0 < z^2 - 2z\sqrt{a} + a$,

also $z\sqrt{a} - a < z^2 - z\sqrt{a}$, somit $\sqrt{a} - a/z < z - \sqrt{a}$.

Wählt man daher als nächsten Näherungswert die Intervallmitte

$$y = \tfrac{1}{2}(z + a/z),$$

so liegt y näher bei $\sqrt{a}$ als der ursprüngliche Wert z, wie aus Abb. 1 zu ersehen ist.

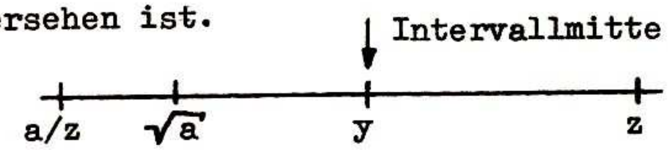


Abb. 1

Damit haben wir ein Prinzip gefunden, das es uns gestattet, ausgehend von einem beliebigen Näherungswert sukzessive immer bessere Näherungswerte zu konstruieren. Bezeichnen wir den ursprünglichen Näherungswert mit x_0, die Intervallmitte von $(a/x_0,\ x_0)$ mit x_1, die Intervallmitte von $(a/x_1,\ x_1)$ mit x_2 u.s.w., so erhalten wir die Zahlenfolge

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}5(x_0 + a/x_0)\\
x_2 &= 0{,}5(x_1 + a/x_1)\\
&\ldots\\
x_{n+1} &= 0{,}5(x_n + a/x_n)\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Ihre Bildungsvorschrift besitzt die eingangs beschriebenen Eigenschaften einer Iteration.

Sollte x_0 gleich $\sqrt{a}$ sein, so wiederholt sich dieser Wert ständig. In allen anderen Fällen, also gleichgültig ob x_0 größer oder kleiner als $\sqrt{a}$ ist, fällt x_1 <u>größer</u> als $\sqrt{a}$ aus. In dem oben erwähnten "Wurzel"-Artikel findet man das Zahlenbeispiel

$$a = 2 \qquad x_0 = 1$$

$x_1 = 1{,}500000$; $x_2 = 1{,}416667$; $x_3 = 1{,}414216$; $x_4 = 1{,}414214$.

x_4 gibt die Quadratwurzel aus 2 bereits auf 6 Stellen hinter dem Komma genau an.

Das Bild der Iteration auf der Zahlengeraden hat qualitativ folgendes Aussehen:

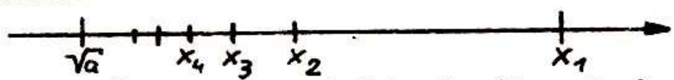


Abb. 2

Jeder folgende Näherungswert liegt näher bei a als der vorhergehende. Hieraus darf man jedoch <u>nicht ohne weiteres</u> schließen, daß

die Näherungswerte mit wachsender Nummer n dem Wert $\sqrt{a}$ <u>beliebig</u> nahekommen. Es könnte sein, daß sie einen gewissen Mindestabstand von $\sqrt{a}$ nicht überschreiten (siehe hierzu auch den "Wurzel"-Artikel über Folgen und Reihen!). Bei unserer Iteration ist jedoch garantiert (was hier nicht gezeigt werden soll), daß sich die Zahlen x_n mit wachsendem n dem Wert $\sqrt{a}$ <u>unbeschränkt</u> annähern. Man sagt dann, $\sqrt{a}$ sei der Grenzwert oder Limes der Zahlenfolge oder die Zahlenfolge konvergiert gegen $\sqrt{a}$.
Hierbei ist aber zu beachten, daß der Wert $\sqrt{a}$ niemals selbst unter den Zahlen der Iterationsfolge vorkommt, sofern $x_0 \neq \sqrt{a}$ ist. $\sqrt{a}$ liegt nämlich nach unseren obigen Überlegungen stets <u>links</u> von den Intervallmitten! Dieser schwer vorstellbare Sachverhalt, daß man sich einer Zahl immer mehr nähern kann, ohne sie selbst jemals zu erreichen, hat schon vor unserer Zeitrechnung die Gemüter bewegt. Inbesondere waren es die auf der genannten Schwäche unseres Vorstellungsvermögens aufbauenden Paradoxien griechischer Philosophen, welche ein solches Aufsehen erregten, daß man die Auswirkungen noch heute beobachten kann. Wir werden weiter unten das Paradoxon "Achilles und die Schildkröte", das man dem griechischen Philosophen Zeno von Elea (um 450 v.u.Z.) zuschreibt, näher betrachten.
Vorerst wollen wir jedoch die Methode der Iteration noch von einem anderen Gesichtspunkt aus beleuchten.
Wenn wir den Grenzwert der Zahlenfolge $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + a/x_n)$ einmal als gesuchte Größe mit x bezeichnen, so muß er offenbar der Gleichung

$$x = \frac{1}{2}(x + a/x) \qquad (13)$$

genügen. Multipliziert man mit x durch, so folgt $x^2 = x^2/2 + a/2$ oder einfach

$$x^2 = a \qquad (14)$$

Die Gleichung (13) ist also für $x \neq 0$ inhaltlich gleichbedeutend mit (14). Man sagt, (13) ist eine <u>iterierfähige</u> Form von (14).

Die Gleichung (13) kann man nun folgendermaßen geometrisch interpretieren: Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = \frac{1}{2}(x + a/x)$; gesucht ist der Schnittpunkt der zugehörigen Kurven. Dann lassen sich ausgehend von irgendeinem Punkt x_0 auf der positiven x-Achse die Punkte x_1, x_2, ... mit Hlife eines achsenparallelen Streckenzuges wie in Abb. 3 angegeben konstruieren. Man sieht hier anschaulich vor sich, wie die Iterationsfolge gegen $\sqrt{a}$ strebt. Allerdings muß man sich davor hüten, der

Anschauung allzusehr zu vertrauen.

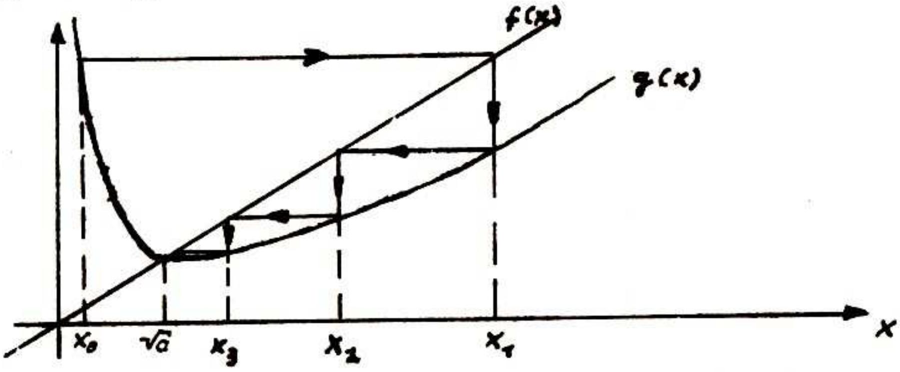


Abb. 3

Z. B. könnte man auf die Idee kommen, die Gleichung (14) einfach durch Division durch x auf die iterierfähige Gestalt $x = a/x$ zu bringen und mit Hilfe der Iteration

$$x_{n+1} = a/x_n$$

zum Wert $\sqrt{a}$ zu gelangen. Aus der zugehörigen Figur mit $f(x) = x$ und $g(x) = a/x$ könnte man nur bei sehr genauer Zeichnung entnehmen, daß die Folge nicht gegen $\sqrt{a}$ konvergiert, sondern daß gilt $x_1 = a/x_0$, $x_2 = x_0$, $x_3 = x_1$, ... u.s.w. (Man möge die Zeichnung selbst anfertigen!).

Selbstverständlich kann man auch höhere Wurzeln iterativ berechnen. Eine Iterationsformel für die k-te positive Wurzel aus der positiven Zahl a lautet

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}((k - 1)x_n + a/x_n^{k-1}).$$

Abschließend wollen wir nun das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte untersuchen. Es lautet (nach Dirk J.Struik, "Abrissse der Geschichte der Mathematik" Seite 40):

> Achilles und eine Schildkröte bewegen sich geradlinig in derselben Richtung. Achilles läuft viel schneller als die Schildkröte; aber um sie einzuholen, muß er zuerst denjenigen Punkt P_0 erreichen, von dem aus die Schildkröte gestartet ist. Wenn er nach P_0 gelangt ist, hat sich die Schildkröte nach einen Punkt P_1 vorwärtsbewegt. Achilles kann sie nicht einholen, ehe er nicht P_1 passiert hat, aber die Schildkröte hat inzwischen einen neuen Punkt P_2 erreicht. Wenn Achilles in P_2 angelangt ist, hat die Schildkröte wieder einen neuen Punkt P_3 erreicht, usw. Folglich kann Achilles die Schildkröte niemals einholen

Wir nehmen an, daß sowohl Achilles als auch die Schildkröte mit konstanter Geschwindigkeit laufen, sagen wir Achilles mit der Geschwindigkeit v_1, die Schildkröte mit der Geschwindigkeit v_0. Bezeichnet x die Zeit, und c den Vorsprung, den die Schildkröte zur Zeit $x = 0$ hat, so ist der in der Zeit x zurückgelegte Weg von Achilles durch $f(x) = v_1 x$, der Weg der Schildkröte (gemessen vom Standpunkt des Achilles) durch $g(x) = a + v_0 x$ gegeben. Bezeichnen wir ferner die Zeitpunkte, zu denen Achilles die Punkte $P_0, P_1, P_2, \ldots$ erreicht, mit $x_0, x_1, x_2, \ldots$, so können diese Zeitpunkte geometrisch an Hand der Figur von Abb. 4 konstruiert werden:

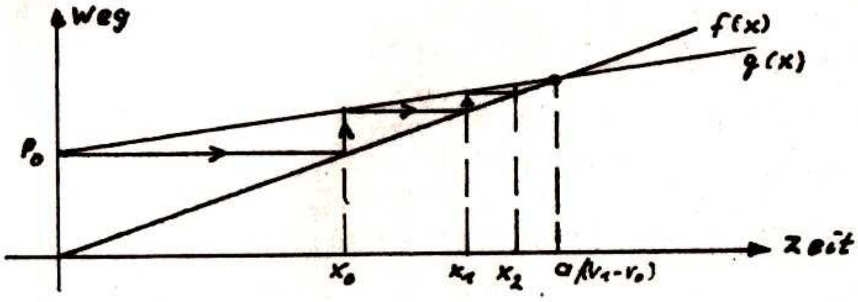


Abb. 4

Man erkennt, daß der von Zeno beschriebene Vorgang gedeutet werden kann als iterative Berechnung des Überholzeitpunktes $a/(v_1 - v_0)$. Die Paradoxie steckt in der Tatsache, daß der Grenzwert der Folge der Zeitpunkte in dieser Folge selbst niemals auftritt.

Dozent Dr. habil. W.Wallisch
Leiter des Bereichs Numerische Mathem.
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Lösungen

(A80): Jede komplexe Zahl a läßt sich bekanntlich in der Form $a = |a| \cdot e^{i\varphi}$ darstellen.

Es gilt: $a = |a| \cdot e^{i\varphi} = |a| \cdot e^{i(\varphi + 2k\pi)}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

(weil $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi = \cos(\varphi + 2k\pi) + i \cdot \sin(\varphi + 2k\pi)$)

Falls $a_0 = |a_0| \cdot e^{i\varphi_0}$ eine Lösung der Gleichung $a^n = b$ ist, ist somit auch $a_k = |a_0| \cdot e^{i(\varphi_0 + 2k\pi/n)}$ eine Lösung dieser Gleichung, weil

$$a_k^n = |a_0|^n \cdot (e^{i(\varphi_0 + 2k\pi/n)})^n = |a_0|^n \cdot e^{i(n\varphi_0 + 2k\pi)} = |a_0|^n \cdot e^{i(n\varphi_0)} = |a_0|^n \cdot (e^{i\varphi_0})^n = a_0^n$$ ist.

a) Aus $a^2 = 1$ folgt $a_0 = 1 = e^{i \cdot 0}$ $(\varphi_0 = 0)$.

Man erhält $a_k = e^{i(2k\pi/2)} = e^{ik\pi}$

und somit $a_0 = 1$, $a_1 = -1$

b) Aus $a^2 = -1$ folgt $a_0 = i = e^{i\pi/2}$

Man erhält $a_k = e^{i(\pi/2 + k\pi)}$

und somit $a_0 = i$, $a_1 = -i$

a) Aus $a^n = 1$ folgt $a_0 = 1 = e^{i \cdot 0}$

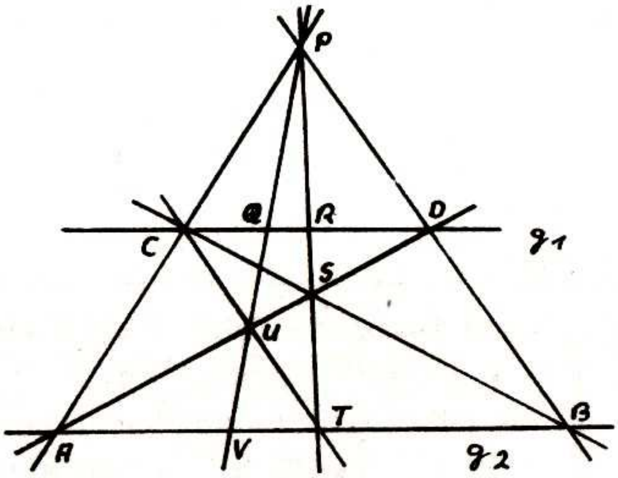
Man erhält $a_k = e^{i(0 + 2k\pi/n)}$ $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Die n Lösungen der Gleichung lauten also

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{n}, \ldots,$$
$$a_{n-1} = \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{2(n-1)\pi}{n}$$

(A82): Gegeben seien die Parallelen g_1 und g_2 und auf g_2 die Strecke $\overline{AB}$.

Es sei P solch ein Punkt der Ebene, daß die Strecken $\overline{AP}$ und $\overline{BP}$ die Gerade g_1 in den Punkten C und D schneiden. Die Gerade AD schneide nun die Gerade BC im Punkt S, die Gerade PS schneide g_2 in T und g_1 in R.



Die Gerade durch die Punkte C und T schneide AD im Punkt U und schließlich schneide die Gerade PU g_2 in V und g_1 in Q. Dann gilt

$$\overline{AV} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AB}$$

Beweis:

Wegen $\dfrac{\overline{AT}}{\overline{CR}} = \dfrac{\overline{TB}}{\overline{RD}}$ und $\dfrac{\overline{AT}}{\overline{RD}} = \dfrac{\overline{TB}}{\overline{CR}}$ (Strahlensatz!)

muß $\overline{AT} = \overline{TB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$ gelten.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke

ΔUQC und ΔVTU

sowie ΔUDC und ΔATU

folgt $\frac{\overline{CQ}}{\overline{VT}} = \frac{\overline{CU}}{\overline{TU}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AT}}$ (1)

Weiter gilt $\frac{\overline{CQ}}{\overline{AV}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{2\overline{AT}}$

und durch Umstellung $\frac{2\overline{CQ}}{\overline{AV}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AT}}$ (2)

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$\frac{2\overline{CQ}}{\overline{AV}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{AT} - \overline{AV}}$$

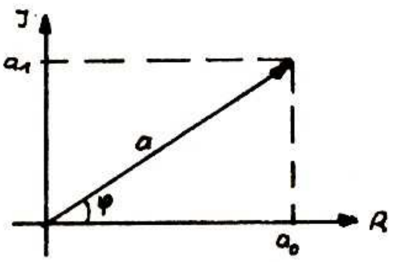
und daraus $\frac{\overline{AV}}{2} = \overline{AT} - \overline{AV}$.

Durch Umstellung erhält man

$3\overline{AV} = 2\overline{AT}$, $3\overline{AV} = \overline{AB}$ und somit

$$\overline{AV} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AB}$$

(A83): a sei geometrisch wie folgt dargestellt:



Für a erhält man $\tan\varphi = \frac{a_1}{a_0}$ (1)

Für $\bar{a}$ erhält man dann

$\tan\varphi' = -\frac{a_1}{a_0}$ (2)

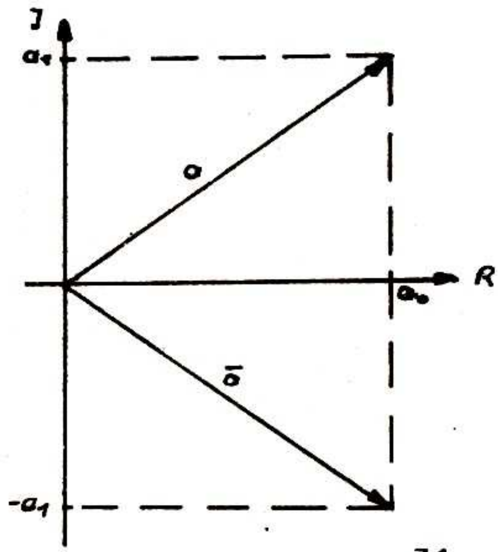
Aus (1) und (2) ergibt sich

$\tan\varphi = -\tan\varphi'$.

Da jedoch auch gilt $\tan\varphi = -\tan(360^\circ - \varphi)$ wird φ' somit bestimmt zu $\varphi' = (360^\circ - \varphi)$.

Für $\bar{a}$ kann man daraus folgende geometrische Darstellung ableiten: Siehe Skizze!

Daraus ist ersichtlich, daß man $\bar{a}$ durch eine Spiegelung um a an der reellen Achse erhält.



Nun gilt noch zu zeigen:

$a \cdot \bar{a} = |a|^2$ wobei

$a = a_0 + a_1 i$

$\bar{a} = a_0 - a_1 i$

$a \cdot \bar{a} = (a_0 + a_1 i)(a_0 - a_1 i)$

$a \cdot \bar{a} = a_0^2 + a_1^2$

$(a_0^2 + a_1^2)$ ist jedoch das Quadrat des Betrages von a, wie leicht aus der Zeichnung abzulesen ist (Satz des Pythagoras).

Wir erhalten somit unsere Behauptung $a \cdot \bar{a} = a^2$

(A84): (Eingesandt von E.Broßmann, EOS Schleiz)

Nach dem binomischen Satz gilt:

$$(\sqrt{2} - 1)^n = \binom{n}{0}(\sqrt{2})^n - \binom{n}{1}(\sqrt{2})^{n-1} + \binom{n}{2}(\sqrt{2})^{n-2} \pm \ldots$$
$$\ldots \pm \binom{n}{n}(\sqrt{2})^0$$

Alle Binomialkoeffizienten sind ganze Zahlen. Da die Potenzen von $\sqrt{2}$ ebenfalls entweder ganze Zahlen (für geraden Exponenten) oder ganzahlige Vielfache von $\sqrt{2}$ sind (für ungeraden Exponenten) läßt sich immer eine Darstellung der gesuchten Art finden;

$$(\sqrt{2} - 1)^n = a + b\sqrt{2}$$

mit ganzzahligen a und b und natürlicher Zahl n.

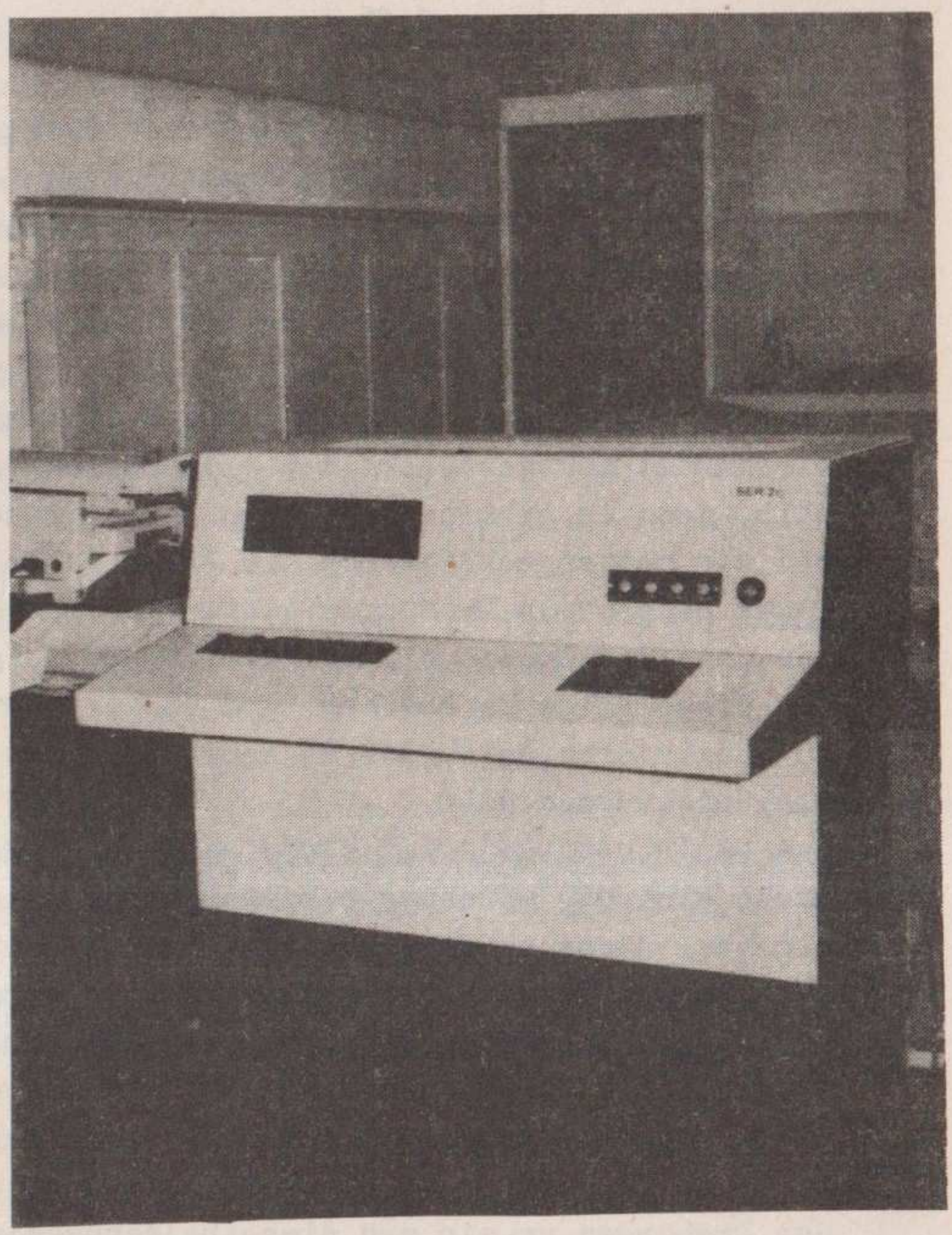
Zum Titelbild:

Unser Titelbild zeigt das Flußbild zur Berechnung eines Näherungswertes y für $\sqrt{a}$, $a > 0$, mit 5-stelliger Genauigkeit (siehe Seite 25 dieses Heftes). Das Flußbild wurde aus "Wurzel"-Nr.11/68 "Einführung in die Rechentechnik IV" entnommen. Wir empfehlen unseren Lesern zum besseren Verständnis des Flußbildes und auch der im März 1970 beginnenden Artikelserie "Programmierung des Kleinrechners Cellatron SER 2c" die "Einführung in die Rechentechnik" ("Wurzel"-Nr.6/68 bis 12/68) nochmals zu studieren. Interessenten können die betreffenden "Wurzeln" noch in beschränktem Umfang erwerben.

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS und SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Harald Fischer, Rainer Wackernagel
Mitarbeiter: H.Eckner, R.Großmann, W.Kiefer, N.Kuse, R.Lorenz, S.Müller, P.Pradel, E.Taubald, I.Zenner

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
DDR 69 Jena
Helmholtzweg 1
"Wurzel"-Redaktion



3

70

WURZEL

zeitschrift für mathematik an

ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
FDJ-Aktiv der
Sektion Mathematik
an der
Friedrich-Schiller-
Universität Jena

Gruppentheorie und Geometrie II

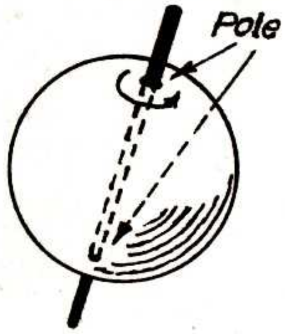
Im vorangegangenen Artikel zu diesem Thema ("Wurzel" 1/70) wurde dargelegt, daß die Menge ϑ aller Drehungen, die eine Kugel in sich überführen, eine Gruppe bilden. Das bedeutet - wie Sie sich erinnern werden -, daß die Hintereinanderausführung (gruppentheoretisch gesprochen: das Produkt $\alpha_1 * \alpha_2$) zweier Drehungen α_1 und α_2 aus ϑ wieder eine Drehung aus ϑ ist und daß die Umkehrabbildung α^{-1} einer Drehung α aus ϑ ebenfalls zur Menge ϑ gehört. Wir hatten festgestellt, daß ϑ unendlich viele Drehungen enthält, denn es gibt ja unendlich viele Drehachsen und -winkel, und wir hatten schließlich die Frage gestellt, ob es auch <u>endliche</u> Mengen von Drehungen gibt, die eine Kugel in sich überführen und eine Gruppe bilden. Wie wir im folgenden sehen werden, ist diese Frage zu bejahen, und die Antwort wird dahingehend zu präzisieren sein, daß es fünf Typen von solchen endlichen Drehungsgruppen gibt.

Das einfachste Beispiel einer endlichen Drehungsgruppe wird durch eine 180°-Drehung zusammen mit der identischen Abbildung gegeben, diese beiden Abbildungen bilden eine Gruppe der Ordnung zwei. (Unter Ordnung einer Gruppe verstehen wir die Anzahl ihrer Elemente.) In ähnlicher Weise bilden eine 120°-Drehung, eine 240°-Drehung um dieselbe Achse und die identische Abbildung eine Gruppe der Ordnung drei. Allgemein gibt es für beliebiges $n \geq 2$ eine Gruppe der Ordnung n, sie wird gebildet von den Drehungen um ein und dieselbe Achse mit den Drehwinkeln $i \cdot \frac{360^\circ}{n}$ $(i=1,2,...,n)$. Weitere Beispiele wollen wir jetzt nicht angeben, sondern gleich <u>alle</u> Typen von solchen endlichen Gruppen zu bestimmen suchen.

Die Bestimmung aller endlichen Drehungsgruppen kann man als ein Kabinettstück des zwischen Gruppentheorie und Geometrie stehenden Teiles der Mathematik ansehen. Wir werden es im folgenden dem Leser auszugsweise näherbringen.

Wir müssen zunächst eine längere Analyse machen, indem wir annehmen, wir hätten eine endliche Gruppe von Drehungen gegeben, und aus dieser Annahme werden Folgerungen gezogen.

Es sei G eine endliche Gruppe von Drehungen, die eine Kugel in sich überführen. Ihre Ordnung sei N. Unter einem <u>Pol</u> verstehen wir einen Schnittpunkt der Drehachse einer Drehung aus G mit der Kugeloberfläche (vgl. Nord- und Südpol der Erdkugel!).



Ein Punkt P ist also genau dann Pol, wenn es eine von der identischen Abbildung verschiedene Drehung d_o gibt, für die $d_o(P)=P$ gilt (mit d(P) bezeichnen wir das Bild von P bei der Drehung d). Da G endlich ist, gibt es nur endlich viele Pole $P_1,\dots,P_n$. Nun ist folgender Sachverhalt sehr wichtig:
Ist P_i ein Pol und d eine <u>beliebige</u> Drehung aus der Gruppe G, so ist auch sein Bild $d(P_i)$ wieder ein Pol. Zum Beweis muß gezeigt werden, daß es eine von der identischen Abbildung verschiedene Drehung d_1 gibt, für die $d_1(d(P_i)) = d(P_i)$ gilt, d.h. $d_1 * d(P_i) = d(P_i)$. Nun ist aber P_i ein Pol, d.h. es gibt eine Drehung d_o mit $d_o(P_i) = P_i$, und setzt man $d_1 = d*d_o*d^{-1}$, so gilt tatsächlich $d_1(d(P_i)) = d(P_i)$, denn es ist $d_1*d(P_i) = d*d_o*d^{-1}*d(P_i) = d*d_o(P_i) = d(P_i)$, und da d_1 nicht die identische Abbildung sein kann (es müßte dann auch entgegen der Voraussetzung d_o die identische Abbildung sein), ist $d(P_i)$ als Pol nachgewiesen.
Wir nennen nun zwei Pole <u>zusammengehörig</u>, wenn es mindestens eine Drehung aus G gibt, bei der der eine Pol auf den anderen abgebildet wird. Wenn man alle mit einem bestimmten Pol P_m zusammengehörigen Pole zu einer Menge K_m zusammenfaßt, so sind irgend zwei dieser Pole P_i und P_j aus K_m auch zusammengehörig, denn es gibt eine Drehung d_1 mit $d_1(P_m) = P_i$, und eine Drehung d_2 mit $d_2(P_m) = P_j$, und wegen der Gruppeneigenschaft von G ist auch $d_2 * d_1^{-1}$ aus G, und es gilt $d_2 * d_1^{-1}(P_i) = P_j$, d.h. P_i und P_j sind zusammengehörig. Wir denken uns nun sämtliche Pole in <u>Klassen zusammengehöriger Pole</u> aufgeteilt, die Anzahl der Klassen sei k ($k \geq 1$), die Anzahl der in den einzelnen Klassen liegenden Pole bezeichnen wir mit $p_1, p_2, \dots, p_k$ ($p_i \geq 1$).
Wir betrachten einen bestimmten Pol P_i und alle Drehungen aus G, deren Drehachse durch P_i geht. Diese Drehungen bilden - zusammen mit der identischen Abbildung - eine Untergruppe G_{P_i} von G, denn die Hintereinanderausführung zweier Drehungen um ein und dieselbe Achse ergibt wieder eine Drehung um diese Achse, und jede Drehung hat dieselbe Achse wie ihre Inverse. Die Unter-

gruppe G_{P_i} hat eine bestimmte Drehung n_i (≥ 2), die wir dem Pol P_i zuordnen und seine Ordnungszahl nennen wollen. Wir behaupten nun: Sind zwei Pole zusammengehörig, so sind ihre Ordnungszahlen gleich. Beweis: Ist P_i mit P_j zusammengehörig, so gibt es eine Drehung d mit $d(P_i) = P_j$. Die Ordnungszahl von P_j ergibt sich als die Gesamtzahl der Drehungen x aus G, für die $x(P_i) = P_j$ gilt. Schreibt man diese Gleichung in der Form $x(d(P_i)) = d(P_i)$ und wendet auf beiden Seiten d^{-1} an, so hat man $d^{-1} * x * d(P_i) = P_i$. Diese Gleichung wird aber genau dann gelöst, wenn $d^{-1} * x * d$ ein Element der zu P_i gehörenden Untergruppe G_{P_i} ist. Es gibt also n_i Lösungen und demnach, wie man leicht sieht, genau n_i Drehungen x aus G, für die $x(P_j) = P_j$ gilt. Die Ordnungszahlen zusammengehöriger Pole sind also gleich, man kann somit auch jeder Klasse zusammengehöriger Pole eine Ordnungszahl geben.
Zwischen der Anzahl p_i der Pole einer Klasse, ihrer Ordnungszahl n_i und der Ordnung N der gesamten Gruppe besteht eine wichtige Beziehung, die sich folgendermaßen ergibt: Bei einer beliebigen Drehung aus G wird der Pol P_i auf einen Pol P_j aus derselben Klasse abgebildet. Also kann jede Drehung aus G zusammengesetzt werden aus einer ersten Drehung, die P_i auf P_j abbildet und einer zweiten Drehung, die nunmehr den Pol P_j festläßt. Da die Klasse p_i Pole enthält, hat man für die Wahl der ersten Drehung p_i Möglichkeiten, und da jeder Pol die Ordnungszahl n_i hat, gibt es für die Wahl der zweiten Drehung n_i Möglichkeiten. Man kann auf diese Weise jede Drehung aus G erfassen und zwar jede genau einmal. G hat demnach $p_i \cdot n_i$ Elemente, d.h. es ist $N = p_i \cdot n_i$. Diese Gleichung gilt für alle $i=1,\ldots,k$.
Nun stellen wir die Anzahl aller von der identischen Abbildung verschiedenen Drehungen aus G fest, indem wir berücksichtigen, daß zu jedem Pol P_i eine Untergruppe von soviel Drehungen gehört, wie die Ordnungszahl n_i des Pols angibt. Läßt man die identische Abbildung weg, sind es $n_i - 1$ Stück. Jede Klasse von Polen führt demnach auf $p_i(n_i - 1)$ Drehungen. Die Summierung über alle Klassen ergibt dann alle Drehungen, und zwar jede zweimal, denn jede Drehung hat genau zwei Pole. Es gilt also die Gleichung

$$2(N - 1) = p_1(n_1 - 1) + p_2(n_2 - 1) + \ldots + p_k(n_k - 1)$$

Ersetzt man hierin p_i durch $\frac{N}{n_i}$, dividiert beiderseits durch N und ordnet etwas um, so ergibt sich

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\ldots+\frac{1}{n_k} = k - 2 + \frac{2}{N} \qquad (*)$$

Dies ist eine Gleichung für die Unbekannten $N, k, n_1, \ldots, n_k$, die Lösungen müssen ganzzahlig sein und den Ungleichungen $N \geq n_i \geq 2$ mit $k \geq 1$ genügen. Obwohl hier sogar die Anzahl der Unbekannten unbekannt ist, ist die Auflösung gar nicht schwierig, der Leser kann sie mit ein wenig Überlegung selbst durchführen. Wir weisen nur darauf hin, daß auf der linken Seite von (*) eine Summe von k Stammbrüchen steht, die wegen $n_i \geq 2$ nicht größer als $\frac{k}{2}$ werden kann, andererseits ist aber die rechte Seite sicher größer als $k - 2$. Das gibt eine erhebliche Einschränkung für k. Man behandele dann die Gleichung für jeden möglichen Wert von k getrennt. Das Ergebnis ist in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

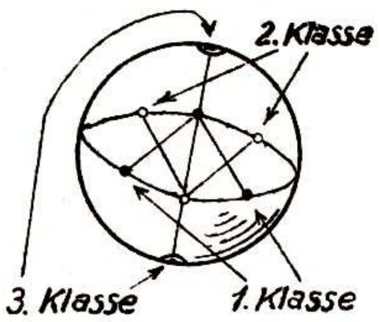
	1.Lös.-schar	2.Lös.-schar	3.Lös.-schar	4.Lös.-schar	5.Lös.-schar
k (=Anzahl der Polklassen)	2	3	3	3	3
n_1 (=Ordnungszahl der Pole der 1. Klasse)	i	2	2	2	2
n_2 (=Ordnungszahl der Pole der 2. Klasse)	i	2	3	3	3
n_3 (=Ordnungszahl der Pole der 3. Klasse)	-	i	3	4	5
N (=Ordnung der Drehgruppe)	i	2i	12	24	60

i=2, 3, 4, ...

Mit der Auflösung der Gleichung (*) können wir die Analyse beenden und sagen: wenn es endliche Drehungsgruppen gibt, dann müssen ihre Ordnungen N, ihre Zahlen k von Polklassen und die zugehörigen Ordnungszahlen n_i einer der fünf in den Spalten der Tabelle notierten Lösungen entsprechen. Es ist nun tatsächlich so, daß es zu jeder in der Tabelle enthaltenen Lösung der Gleichung (*) eine Drehungsgruppe gibt, deren Struktur sogar jeweils eindeutig bestimmt ist. Wir geben die geometrischen Realisierungen der einzelnen Gruppen an.

1. Lösungsschar: Dieser Typ von Drehungsgruppen wurde am Beginn dieses Artikels als Beispiel bereits beschrieben. Man spricht hier von "zyklischen Gruppen".

2. Lösungsschar: Es gibt i Pole der ersten, i Pole der zweiten und zwei Pole der dritten Klasse. Die Drehachsen müssen so angeordnet werden, daß die Pole der ersten und zweiten Klasse je ein regelmäßiges i-Eck, die Pole beider Klassen aber ein regelmäßiges 2i-Eck bilden, das - geographisch gesprochen - auf dem Äquatorkreis liegt; die beiden Pole der dritten Klasse bilden dann Nord- und Südpol. Der Fachausdruck für derartige Drehungsgruppen heißt "Diedergruppe". Die Figur zeigt den Fall i = 3.

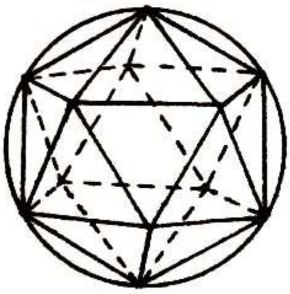


3. Lösung: Die vier Pole der dritten Klasse bilden die Eckpunkte eines der Kugel einbeschriebenen regelmäßigen Tetraeders (das ist ein von vier gleichseitigen Dreiecken begrenztes regelmäßiges Polyeder), die zugehörigen Drehachsen gehen durch die Mittelpunkte der dem jeweiligen Pol gegenüberliegenden Tetraederflächen und sie durchstoßen die Kugel in den Polen der zweiten Klasse. Die Pole zweiter Ordnung aus der ersten Klasse rühren von Drehachsen her, die durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten gehen. Da die Drehungsgruppe genau aus sämtlichen Drehungen besteht, die das Tetraeder in sich überführen, spricht man von der „Tetraedergruppe".

4. Lösung: Diese Gruppe besteht aus den 24 Drehungen, die einen der Kugel einbeschriebenen Würfel in sich überführen. Die acht Pole dritter Ordnung sind die Eckpunkte dieses Würfels, die Achsen sind die Raumdiagonalen. Die drei Achsen, die die sechs Pole vierter Ordnung tragen, gehen durch die Mittelpunkte der Würfelflächen, diese Pole sind Eckpunkte eines von acht gleichseitigen Dreiecken begrenzten regelmäßigen Polyeders, eines Oktaeders, weshalb man hier von der "Oktaedergruppe" spricht. (Diese Gruppe wurde überdies bereits in einem Artikel der "Wurzel" im Heft 2/1969 behandelt.).

5. Lösung: Hier handelt es sich um die Drehungen, die ein der Kugel einbeschriebenes Ikosaeder in sich überführen, sie bilden die "Ikosaedergruppe". Das Ikosaeder wird von 20 gleichseitigen Dreiecken begrenzt, durch deren Mittelpunkte die die 20 Pole der Ordnungszahl 3 tragenden Drehachsen hindurchgehen. Die Eckpunkte - zwölf Stück - sind die Pole fünfter Ordnung aus

der dritten Klasse (siehe Figur). Nimmt man die 20 Pole der



Ordnungszahl drei als Ecken eines Polyeders, so erhält man das von zwölf regelmäßigen Fünfecken begrenzte Dodekaeder, auch dieses wird durch die Drehungen der Ikosaedergruppe in sich überführt.

Dr. W. Börner

wiss. Mitarbeiter an der Sektion Mathematik der FSU Jena

Preisaufgaben (Serie 3/70)

(B13) Es sind alle Drehungen zu bestimmen (Drehachsen und -winkel angeben), die das System zweier aufeinander senkrecht stehender Großkreise (d.h. Kreise, deren Mittelpunkte gleichzeitig Kugelmittelpunkte sind) einer Kugel in sich überführen. Welcher der fünf Typen von endlichen Drehgruppen ergibt sich ?

(B14) Für welche reellen Werte von x gilt die Ungleichung

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3 \quad ?$$

(B15) Bei welchen Dreiecken liegen die Mittelpunkte der Höhen auf einer Geraden ?

(B16) Man bestimme alle ganzzahligen Lösungen $k, N, n_1, \ldots, n_k$ der Gleichung

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_k} = k - 2 + \frac{2}{N}$$

mit den Bedingungen $N \geq n_i \geq 2$, $k \geq 1$

Hinweis: Man lese im Artikel "Gruppentheorie und Geometrie II" nach !

(B17) (4. Aufgabe der VI. IMO 1964)

Jeder von 17 Wissenschaftlern steht im Briefwechsel mit allen anderen. Sie behandeln in ihrem Briefwechsel nur drei Themen, und je zwei Wissenschaftler behandeln ein und nur ein Thema. Zu beweisen ist, daß es mindestens drei Wissenschaftler gibt, die untereinander ein und dasselbe Thema behandeln.

(B18) Wieviel ganzzahlige Lösungen besitzt die Gleichung

$$x^2 - y^2 = n \quad ?$$

Für jeden vollständigen Lösungsweg einer Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertungspunkt. Für fünf Wertungspunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertungspunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).
Falls ein Besitzer von fünf Wertungspunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis 10. des folgenden Monats (Datum des Poststempels) unter dem Kennwort "WURZEL-PREISAUFGABE" an unsere Adresse einzuschicken. Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungen mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden. Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

Buntes Allerlei

In Verbindung mit dem letzten Jahreswechsel wurde vielfach vom Beginn eines neuen Jahrzehnts gesprochen. Ist dies wirklich der Fall ?

Ein Student besucht seine Eltern in jedem Jahr genau einmal. Trotzdem sieht er sie bei solchen Besuchen zweimal im Jahr. Wie ist das möglich ?

Jeden Tag mittags fährt von Le Havre nach New York ein Dampfer ab und zur gleichen Zeit ein Dampfer derselben Schiffahrtslinie von New York nach Le Havre. Die Ueberfahrt dauert in der einen wie in der anderen Richtung 7 Tage. Wieviel Schiffen dieser Linie, die in entgegengesetzter Richtung fahren, begegnet ein Dampfer, der heute mittag in Le Havre abfährt ?

Jemand beweist in folgender Weise, daß zwei gleich drei ist:

$$4 - 10 = 9 - 15$$

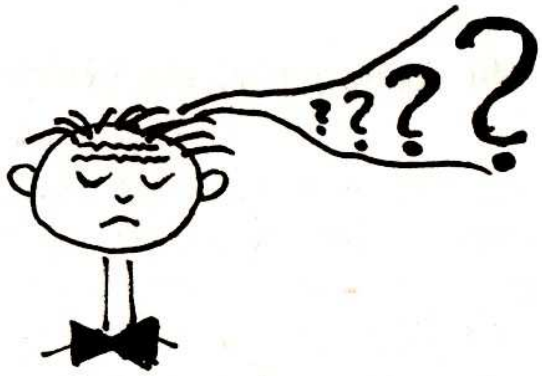
$$4 - 10 + 6\tfrac{1}{4} = 9 - 15 + 6\tfrac{1}{4}$$

$$4 - \frac{20}{2} + \frac{25}{4} = 9 - \frac{30}{2} + \frac{25}{4}$$

$$(2-\tfrac{5}{2})^2 = (3-\tfrac{5}{2})^2$$

$$2-\tfrac{5}{2} = 3-\tfrac{5}{2}$$

$$2 = 3$$



Wo steckt der Fehler ?

Konferenz zum Thema:

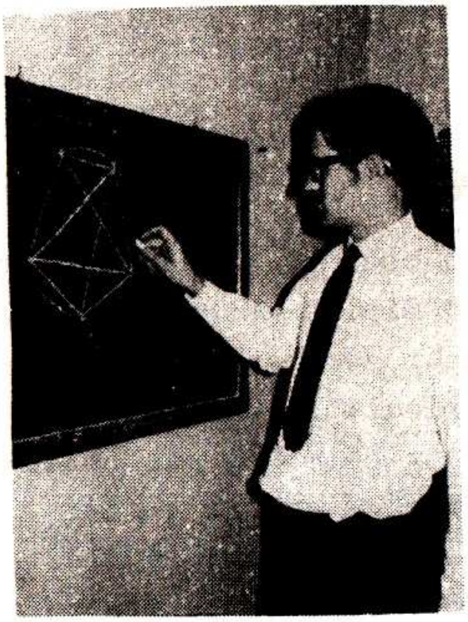
Studienvorbereitung und Studienwerbung

Die wissenschaftlich-technische Revolution bedingt einen ständig steigenden Bedarf an Mathematiklehrern und Diplom-Mathematikern, dem die jetzigen Studentenzahlen nur in sehr geringem Maße Rechnung tragen. Die Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena und die Abteilung Volksbildung beim Rat des Bezirkes Gera arbeiten deshalb schon einige Jahre gemeinsam an der Lösung dieses Problems. Die Mathematik-Spezialistenlager, die zweimal im Jahr stattfinden, und die Schülerzeitschrift "Wurzel" waren bisher die wesentlichsten Bestandteile der gemeinsamen Bemühungen. Die Verwirklichung der 3. Hochschulreform erfordert jedoch eine höhere Qualität in dieser Zusammenarbeit. Deshalb wurde am 17.12.1969 in Jena eine Konferenz durchgeführt mit dem Ziel, ein System zur Verbesserung der Studienvorbereitung und Studienwerbung im Bereich Mathematik zu erarbeiten. Die Teilnehmer, Vertreter der Sektion Mathematik, der FDJ-Bezirksleitung, des Rektorates der Universität und Vertreter der Abteilung Volksbildung beschlossen erste Maßnahmen, deren Verwirklichung schon im laufenden Schul- bzw. Studienjahr in Angriff genommen werden soll. Die Weiterführung der Lösung dieser Probleme wurde inzwischen den FDJ-Studenten der Sektion Mathematik als Jugendobjekt übergeben.

"Wurzel" wird regelmäßig über den Stand der Arbeit an diesem Jugendobjekt berichten.

Wir stellen vor: Dr. Walter Börner

Dr. Walter Börner ist Lektor an der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Er wurde 1937 in Lobenstein geboren. Dort besuchte er auch die Oberschule und legte 1956 sein Abitur ab. Anschließend studierte er in Jena bis 1961 Lehrer für Mathematik und Physik. Nach Abschluß des Studiums wurde er Assistent am damaligen Institut für Mathematik. 1963 erwarb er das Diplom mit einer Arbeit über die nichteuklidische Geometrie, und 1969 promovierte er mit der Arbeit "Polynomdarstellungen von Funktionen der endlichwertigen Logik". Zur Zeit arbeitet er wieder an geometrischen Problemen.



Seit dem Winterlager 1968 nimmt Dr. Börner regelmäßig an den Mathematiklagern teil. Auch dort ist er Spezialist für Geometrie, und die von ihm gestalteten Unterrichtsstunden finden bei allen Schülern großen Anklang.

Dr. Walter Börner stellt die Aufgabe des Monats

Es sei bekannt, daß die Polizei der Stadt Y ihren Streifendienst nach folgendem System organisiert hat: Es sind gewisse Kontrollstellen festgelegt worden sowie bestimmte Streifenfahrtlinien, die durch diese Kontrollstellen führen, so daß gilt:

1. Zu je zwei Kontrollstellen gibt es genau eine Linie, die die beiden Stellen passiert,
2. Zu je zwei Linien gibt es genau eine Stelle, die von den beiden Linien passiert wird,
3. Jede Linie passiert genau drei Kontrollstellen,
4. Jede Linie wird ständig von genau zwei Polizisten befahren.

Wieviel Polizisten müssen gleichzeitig unterwegs sein?

Die Programmierung des Kleinrechners Cellatron SER 2c (I)

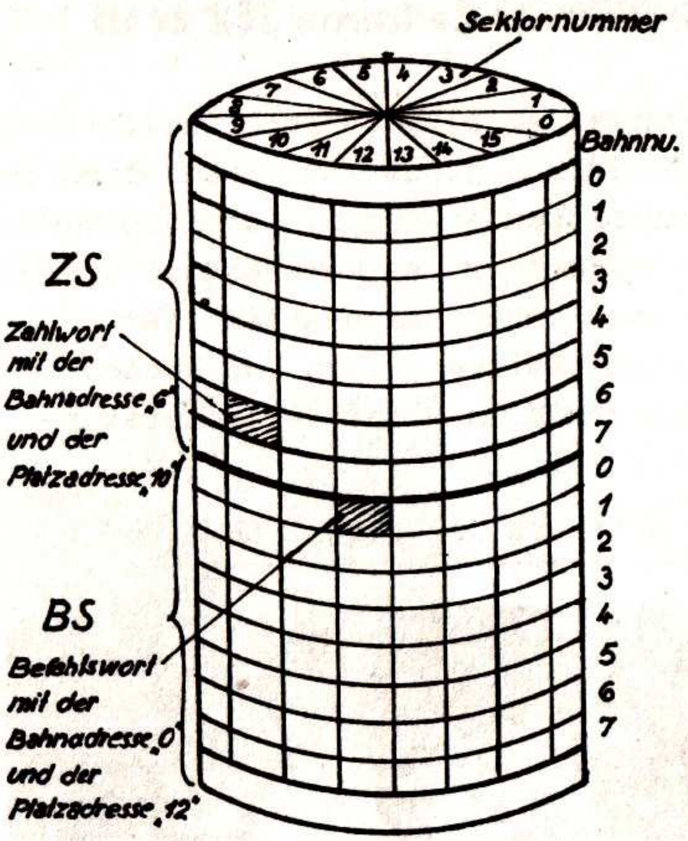
Nachdem 1968 in der "Wurzel" bereits eine Einführung in die Rechentechnik [1] erfolgte, wollen wir uns jetzt mit einem speziellen programmgesteuerten Rechenautomaten befassen und die Grundlagen seiner Programmierung erlernen. Für das Verständnis des folgenden ist die Kenntnis der oben angeführten Artikelserie oder der Abschnitte über den prinzipiellen Aufbau von Rechenautomaten und über die Flußbildtechnik in einer der Literaturangaben [2] Voraussetzung.

1. Der strukturelle Aufbau des Rechners Cellatron SER 2c

Der SER 2c kann für wissenschaftlich-technische und kommerzielle Rechnungen verwendet werden. Wegen seiner sehr geringen Rechengeschwindigkeit und Speicherkapazität zählt er zu den Kleinstrechnern, trotzdem oder gerade deswegen ist er ein geeignetes Demonstrationsobjekt für eine erste Einführung in die Praxis der Rechentechnik.

Bei jedem Rechner unterscheidet man zwischen ZENTRALEINHEIT (ZE) und PERIPHERIE. Die ZE beinhaltet alle für die Rechnung und ihren automatischen Ablauf notwendigen Bauelemente, während die Teile, die dem Kontakt des Rechners mit dem Menschen dienen (Ein- und Ausgabegeräte), die Peripherie bilden.

Ein Teil der ZE ist der HAUPTSPEICHER (HS), das "Gedächtnis" unseres Rechners. Er ist in der Lage, Zahlen (Eingangsdaten und Zwischenergebnisse) und auch den abzuarbeitenden Algorithmus zu speichern. (Der Algorithmus muß in einer Form dargestellt sein, die der Rechner "versteht". Man bezeichnet ihn dann als MASCHINENPROGRAMM. Dieses ist aus einzelnen Befehlen zusammengesetzt. Ein Befehl ist eine elementare Anweisung, die der Automat aus-



Prinzipieller Aufbau des HS des SER 2c

führen kann. Programmieren bedeutet dementsprechend Zerlegung eines Algorithmus in solche elementaren Anweisungen.)

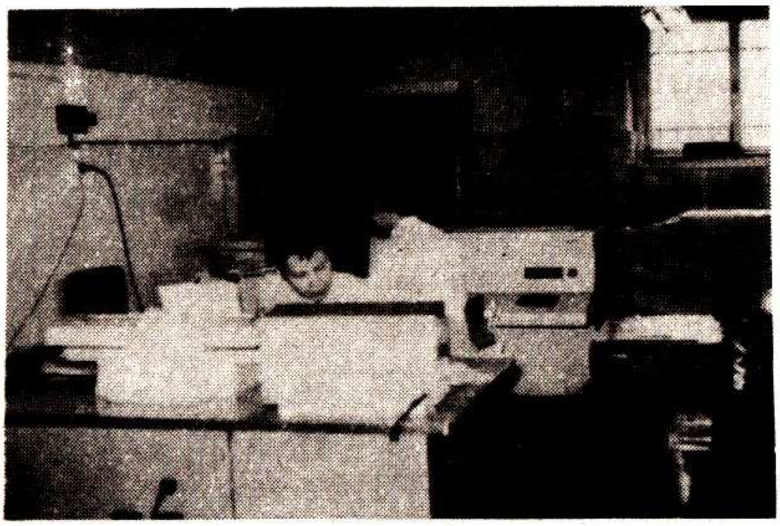
Der Speicher des SER 2c ist ein sogenannter MAGNETTROMMELSPEICHER, ein mit einer magnetisierbaren Schicht bedeckter, schnell rotierender Zylinder. Die Magnetschicht dient als Träger der Information, sie wird in ähnlicher Weise wie ein Tonband "beschrieben" und "gelesen". Die Trommel ist in ZAHLENSPEICHER (ZS) und BEFEHLSSPEICHER (BS) unterteilt, d.h. die Zahlen und das Programm werden auf getrennten Teilen der Trommel gespeichert. Jeder dieser beiden Speicherteile ist weiter in 8 Bahnen zu je 16 Sektoren unterteilt. Diese Speichereinheiten heißen Wörter und je nach dem Speicherteil, auf dem sie sich befinden, unterscheidet man zwischen ZAHLWORT (ZW) und BEFEHLSWORT (BW). Genauere Angaben zur Wortstruktur werden wir an späterer Stelle machen. Somit hat der HS eine Kapazität von 256 Wörtern, von denen 128 zum Zahlenspeicher und 128 zum Befehlsspeicher gehören. Um die Wörter voneinander unterscheiden zu können, wird jedes mit einer Adresse versehen. Diese Adresse besteht aus zwei Teilen, der Bahnadresse (das ist die Nummer der Bahn) und der Platzadresse (Nummer des Sektors)(siehe Skizze). Wir werden im nächsten Abschnitt nochmals auf die Adressierung zurückkommen.

Ein weiterer Bestandteil der ZE ist das RECHENWERK (RW), mit dem die arithmetischen Operationen - Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division - ausgeführt werden. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß uns die technische Realisierung der Bauelemente nur so weit interessiert, wie es für das ge-

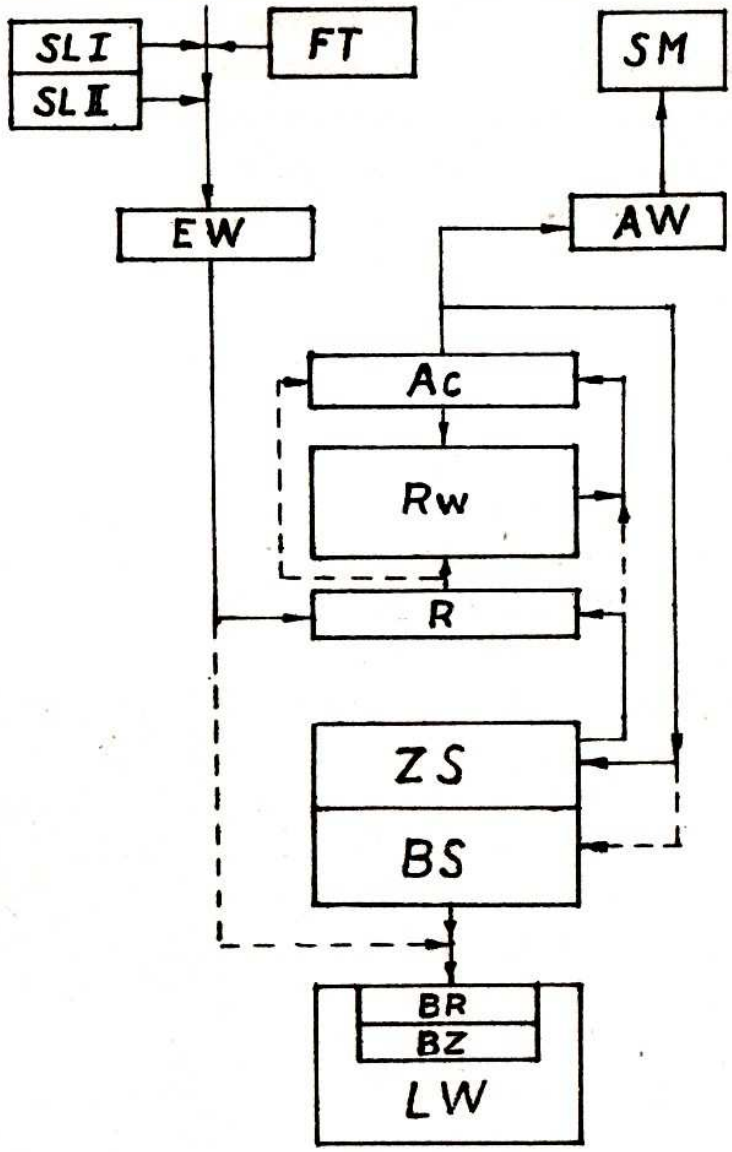
steckte Ziel, das Erlernen der Grundlagen der Programmierung, notwendig ist. Wer sich mehr für diese Seite der Rechentechnik interessiert, der sei auf die entsprechende Literatur verwiesen.
Die Durchführung einer Rechenoperation verlangt im wesentlichen drei Schritte:

1. Bereitstellung der beiden zu verknüpfenden Operanden
2. Ausführung der Rechenoperation
3. Aufbewahrung des Ergebnisses

Die Bereitstellung und Aufbewahrung des Ergebnisses erfolgt in zwei nicht zum HS gehörenden Speicherelementen, Die das RW direkt und in extrem kurzer Zeit erreichen kann. Beim SER 2c sind das das REGISTER (R) und der AKKUMULATOR (Ac), der diesen Namen trägt, weil er das Ergebnis aufbewahrt (akkumuliert). Nach Ausführen einer Rechenoperation ist also der Operand, der in Ac bereitgestellt wurde, nicht mehr direkt vom RW zu erreichen und muß erneut bereitgestellt werden, falls er wieder gebraucht wird.
Der wichtigste Teil eines programmgesteuerten Rechenautomaten ist das LEITWERK (LW), weil es einen automatischen Ablauf gemäß dem vorhandenen Programm erst ermöglicht. Das LW entnimmt die Befehle nacheinander dem BS, entschlüsselt sie und löst dann die Ausführung der entsprechenden Anweisungen aus. Zwei wichtige Teile des LW sind der BEFEHLSZÄHLER (BZ) und das BEFEHLSREGISTER (BR). Im BZ steht die Adresse des Befehls, der dem Speicher entnommen und zur Entschlüsselung in das BR gebracht wird. Normalerweise wird der BZ automatisch so gestellt, daß die Befehle in der programmierten Reihenfolge abgearbeitet werden. Es gibt jedoch Befehle, die in den BZ eine beliebige Adresse eintragen können, so daß Sprünge im Programm realisiert werden, d.h., daß eine Änderung in der Reihenfolge der Befehlsabarbeitung vorgenommen wird.



Jetzt sollen noch einige Bemerkungen zur Peripherie folgen.
Beim SER 2c besteht sie aus einer elektrischen Schreibmaschine (SM), zwei Lochstreifenlesern (SL I und SL II), einem Lochstreifenstanzer und der Funktionstastatur (FT), die dem Bediener ermöglicht, durch manuelle Eingriffe das LW zu beeinflussen, Zahlen nach R, Ac oder ZS und Befehle in den BS zu transportieren.
Die Eingabegeräte, hier SL I, SL II und ein Teil der FT, sind an das EINGABEWERK (EW) des Automaten angeschlossen. Das EW übersetzt die ankommenden Informationen in eine dem Automaten angepaßte Form (Stromimpulse).
Zur Ausgabe laufen die Zahlen über das AUSGABEWERK (AW), das die internen Informationen wieder entschlüsselt, so daß sie auf der SM oder dem Lochstreifenstanzer ausgegeben werden können. In den folgenden Betrachtungen werden wir den Stanzer der Einfachheit halber außer acht lassen.
Der SER 2c kann nur Zahlen verarbeiten und deshalb sind nur die Schreibmaschinentasten mit den Ziffern, dem Komma und dem Minus an das AW angeschlossen, da diese Zeichen ausreichen, um alle Zahlen darzustellen (positives Vorzeichen wird weggelassen).
Der Vollständigkeit halber sei hier erwähnt, daß es möglich ist, Befehle direkt vom Lochstreifen (ex-



Vereinfachtes Blockschaltbild des SER 2c

terner Befehlsspeicher) abzuarbeiten. Dadurch wird das Abarbeiten längerer Programme, die die Kapazität des BS überschreiten, ermöglicht.
Das Blockschaltbild zeigt die wichtigsten Transportleitungen zwischen den beschriebenen Bauteilen über die der Datenfluß erfolgt. Das LW besitzt auf Grund seiner Funktion natürlich Steuerleitungen zu allen Baugruppen, die jedoch weggelassen wurden, um die Übersichtlichkeit nicht zu stark zu beeinträchtigen. Die gestrichelten Linien deuten Transportleitungen an, die für unsere Belange unwesentlich sind. Die direkte Verbindung von R und Ac sowie von Ac zum BS werden nur für die Programmeingabe gebraucht. Die Verbindung ZS - Ac wird durch einen Befehl realisiert, auf den wir nicht näher eingehen werden. Die Verbindung EW - LW dient der Befehlsabarbeitung vom Lochstreifen. All diese Dinge interessieren also nicht für das Erlernen der Grundlagen der Programmierung.
Noch ein Beispiel, das zeigt, welche Informationen man dem Blockschaltbild entnehmen kann: Wenn man mit einem Programm eine Zahl vom Lochstreifen lesen und in den ZS transportieren will, so muß diese den Weg über R, das RW und Ac nehmen. Wir werden im noch zu behandelnden Befehlssystem des Rechners die Konsequenzen aus dem Blockschaltbild wiederfinden.

Harald Schirrmeister

wiss. Ass. im Rechenzentrum
Friedrich-Schiller-Universität Jena

<u>Anmerkungen:</u>

1) siehe "Wurzel" 6 bis 8 und 10 bis 12 /1968
2) Götzke: Programmgesteuerte Rechenautomaten. (Fachbuchverlag Leipzig 1968)
   Kitow, Krinitzki: Wie arbeitet eine elektronische Rechenmaschine? (Fachbuchverlag Leipzig 1960).

Wußten Sie schon, daß ab Herbstsemester 1970/71 in der Sektion Mathematik vollautomatische Bild-Ton-Vorlesungen mit Verständnis-Rückkopplung stattfinden? Bei Nichtverstehen einer bestimmten Prozentzahl der Hörer schaltet der Automat Zusatzprogramme ein. **!**

Lösungen

Lieber Leser! Aus technischen Gründen können wir diesmal nur eine Lösung veröffentlichen. Die noch ausstehenden Lösungen folgen im Heft 4/7o.

A 85: (Lösung eingesandt von M. Gulbius, TH Karl-Marx-Stadt, Spezialklasse 11)

$a_n = \frac{2}{3} - \frac{n-1}{2n+1}$ wird wie folgt umgeformt:

$$\frac{2}{3} - \frac{n-1}{2n+1} = \frac{2}{3} - \frac{n+\frac{1}{2}}{2n+1} + \frac{3}{2(n+1)} = \frac{1}{6} + \frac{3}{4n+2}$$

Vermutung: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{4n+2}\right) = \frac{1}{6}$

Beweis: $\left|a_n - \frac{1}{6}\right| = \left|\frac{3}{4n+2}\right| = \frac{3}{4n+2} < \frac{3}{4n} < \frac{1}{n}$

Also existiert zu jedem positiven ε ein n_o mit $n_o > \frac{1}{\varepsilon}$, d.h. es gibt nur endlich viele n, die diese Ungleichung nicht erfüllen. Für alle $n > n_o$ gilt also

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

und somit $\left|a_n - \frac{1}{6}\right| < \varepsilon$.

Unser Titelbild zeigt den elektronischen Kleinstrechner Cellatron SER 2c (siehe auch Seite 43 - 47 dieses Heftes!).

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS und SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Harald Fischer, Rainer Wackernagel
Mitarbeiter: H.Eckner, R.Großmann, W.Kiefer, N.Kuse, R.Lorenz, S.Müller, P.Pradel, E.Taubald, I.Zenner

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
DDR 69 Jena
Helmholtzweg 1
"Wurzel-Redaktion"

V-14-6 7 4846 M 175-70

4

70

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Gruppentheorie und Geometrie III (Schluß)

ORNAMENTGRUPPEN

1. Beispiel einer Ornamentgruppe

Sicher haben Sie als Verzierung von Textilien, Gebrauchsgegenständen oder Gebäuden Ornamentfiguren der folgenden Art schon gesehen (Abb.1):

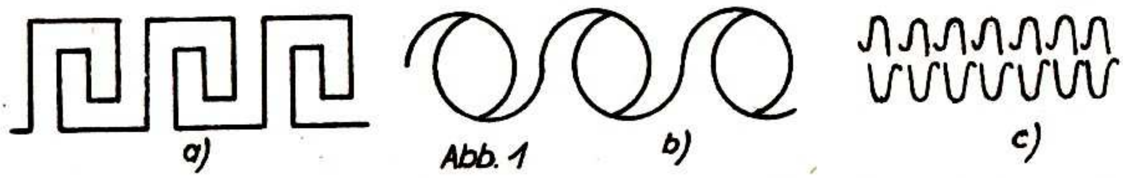


Abb. 1

Bei der Untersuchung der ihnen innewohnenden Gesetzmäßigkeiten werden wir auf eine gewisse Menge von Kongruenztransformationen geführt, die eine Gruppe bilden. Wir wollen diese Untersuchungen durchführen. Dabei werden wir Gesichtspunkte zur Herstellung weiterer derartiger Ornamente aufdecken.

Da die Figuren in Abb.1 nur als Ausschnitte aus längeren Ornamentbändern anzusehen sind, wollen wir dahingehend idealisieren, daß wir uns die Bänder nach beiden Seiten hin unbegrenzt fortgesetzt denken. Die augenfälligen Regelmäßigkeiten eines jeden der Ornamente in Abb.1 kommen in folgenden beiden Sachverhalten zum Ausdruck:

1. Das Ornament kann durch Parallelverschiebungen um gewisse Längen nach rechts und links mit sich selbst zur Deckung gebracht werden; es gibt eine kleinste Verschiebungslänge, so daß alle anderen möglichen Verschiebungslängen Vielfache dieser kleinstmöglichen sind.
2. Dreht man das Blatt mit dem Ornament um 180°, so sieht man die Figur so, als wäre sie nicht gedreht worden, d.h. das Ornament kann durch 180°-Drehungen um gewisse Drehzentren mit sich zur Deckung gebracht werden.

Eine genauere Betrachtung der Figuren lehrt, daß die Drehzentren alle auf einer Geraden liegen, die dieselbe Richtung wie die genannten Parallelverschiebungen hat, und daß der Abstand zweier benachbarter Zentren stets gleich der Hälfte der kleinstmöglichen Verschiebungslänge ist. Abb.2 zeigt die Lage der Drehzentren und die kleinstmögliche Verschiebungslänge für das Ornament a) aus Abb.1. Der Leser kann für die Ornamente b) und c)

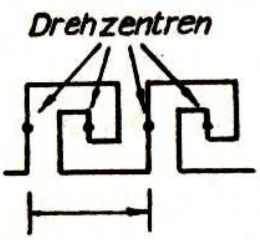


Abb.2

die entsprechenden Größen selbst suchen. Wir haben also für jedes der Ornamente a), b) und c) folgende Menge von Kongruenztransformationen, die die Figur in sich selbst überführen (Abb.3): 180°-Drehungen um die auf einer Gera-

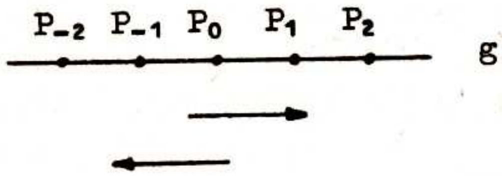


Abb.3

den g liegenden Punkte ..., P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, ..., die konstanten Abstand haben sowie Parallelverschiebungen in Richtung von g um Verschiebungslängen, die ganzzahlige Vielfache der Länge $\overline{P_0P_2}$ sind. Es ist nicht schwierig nachzuweisen, daß diese Menge von Kongruenztransformationen eine Gruppe $\mathfrak{G}$ ist. Es handelt sich hier um eine spezielle Ornamentgruppe. Die Menge der jedes der Ornamente von Abb.1 in sich überführenden Bewegungen ist $\mathfrak{G}$. Man bezeichnet daher diese Ornamente als zur Gruppe $\mathfrak{G}$ gehörig.

2. Der Begriff Fundamentalbereich

Wir beachten nun folgenden Umstand (Abb.4): Wenn man in zwei Drehzentren, zwischen denen genau ein weiteres liegt, senkrecht zur Geraden g zwei Strahlen nach derselben Seite von g hin zieht, so erhält man zwischen diesen Strahlen ein Gebiet F (schraffierter Halbstreifen) mit folgender Eigenschaft:

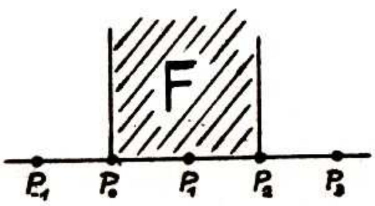


Abb.4

Wendet man auf F alle Transformationen aus der Ornamentgruppe an, so wird von den so erhaltenen Bildgebieten die ganze Ebene lückenlos bedeckt, und zwar (von den Randlinien abgesehen) ohne Überlappungen.

Denn wenn man auf F nacheinander die Parallelverschiebungen aus $\mathfrak{G}$ anwendet, so wird die Halbebene, in der F liegt, mit den Halbstreifen ausgepflastert (Abb.5), und wenn man F um eines der Drehzentren dreht, bekommt man einen Halbstreifen F' in der anderen Halbebene; die Anwendung der Parallelverschiebungen auf F' (das bedeutet Anwendung der Gruppenprodukte von Drehung und Parallelverschiebung auf F, diese Produkte liegen ja in $\mathfrak{G}$) bewirkt die Auspflasterung der anderen Halb-

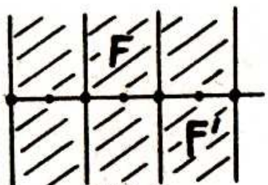


Abb.5

ebene. Da wir alle Transformationen aus $\mathfrak{G}$ verwendet haben, kann nirgens eine mehrfache Überdeckung mit Bildern des Bereichs F stattfinden. Man nennt F einen Fundamentalbereich der Gruppe $\mathfrak{G}$.

Der Aufbau der Ornamente erscheint nun in einem anderen Licht: Es ist auf Grund der Eigenschaft des Fundamentalbereichs klar, daß das Ornament eindeutig festgelegt ist, wenn man von ihm denjenigen Teil kennt, der in einem Fundamentalbereich liegt. In Abb.6 sind solche Teilstücke aufgezeichnet, die die drei Ornamente von Abb.1 festlegen.

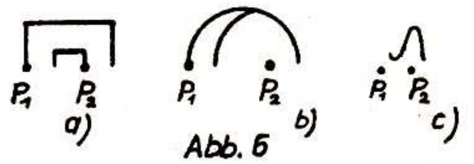


Abb. 6

Sie sind durchaus nicht von großer künstlerischer Wirkung, und man erkennt nun, daß das ästhetisch Ansprechende der Ornamente von ihrer Eigenschaft herrührt, eine ziemlich umfangreiche Gruppe von Transformationen zu haben, die sie mit sich zur Deckung bringen.

Aus dem Bisherigen folgt ein Verfahren zur Gewinnung von Ornamentbändern: Man zeichnet in einem Fundamentalbereich irgendeine Figur und wendet auf sie alle (zumindest soviele, wie der zur Verfügung stehende Platz erlaubt) Transformationen der Ornamentgruppe $\mathfrak{G}$ an. Wenn das Ornament geschlossene Linienzüge haben soll (Beispiel a), b)), so muß man die Figur im Fundamentalbereich durch Paare solcher Randpunkte des Fundamentalbereichs legen, die durch Transformationen aus $\mathfrak{G}$ auseinander hervorgehen. Der Leser kann sich nun im Entwerfen von Ornamenten nach diesem Verfahren betätigen.

3. Weitere Ornamentgruppen

Die wesentliche Eigenschaft der anfangs beschriebenen Ornamentgruppe ist offenbar, daß sie einen Fundamentalbereich hat. Man definiert daher eine Ornamentgruppe ganz allgemein als eine Gruppe von Kongruenztransformationen, für die ein Fundamentalbereich existiert.

Wir bestimmen jetzt alle Ornamentgruppen, die nur aus Drehungen bestehen. $\mathfrak{D}$ sei eine solche Gruppe. Alle Drehungen haben dasselbe Drehzentrum Z, andernfalls gäbe es Parallelverschiebungen (Beweis als Aufgabe). Ist A ein Punkt ungleich Z, so liegen seine Bilder bei den Drehungen aus $\mathfrak{D}$ alle auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt Z. Da $\mathfrak{D}$ einen Fundamentalbereich haben soll, muß zwischen Original- und Bildpunkt immer ein gewisser Mindestabstand eingehalten werden. Es kann also nur endlich viele Bilder von A geben, z.B. n Stück. Die Gruppe kann dann nur aus den n Drehungen mit dem Zentrum Z und den Drehwinkeln $\frac{k}{n} \cdot 360^{\circ}$ ($k = 1, \ldots, n$) bestehen. Als Fundamentalbereich kann ein Winkelbereich mit dem Scheitel Z und und dem Öffnungswinkel $\frac{1}{n} \cdot 360^{\circ}$ dienen.

Jede dieser Gruppen kann erweitert werden, indem man noch Spiegelungen an n Geraden hinzunimmt, die durch Z gehen und sich unter $\frac{k}{n} \cdot 180^{\circ}$ schneiden. Der Fundamentalbereich wird dadurch halbiert. Abb.7 zeigt den Fall n = 3. Die zu diesen Gruppen gehörende Art der Herstellung von Ornamenten ist genau die, die man in den als Kinderspielzeug bekannten Kaleidoskopen findet: Eine Menge von bunten Steinchen liegt willkürlich angeordnet in einem Fundamentalbereich und bildet dort eine regellos aufgebaute Figur; die im Kaleidoskop eingebauten Spiegel bewirken die Transformationen der Gruppe und zaubern so aus der Figur des Fundamentalbereichs ein Ornament.

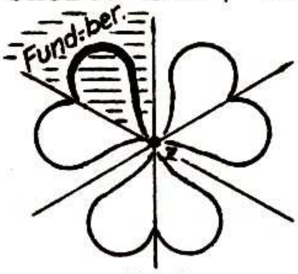


Abb.7

Am interessantesten wird es, wenn man alle möglichen Sorten von Kongruenztransformationen - also Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen und deren Produkte - als Elemente der Ornamentgruppe zulässt. Man kann z.B. beweisen, daß als Drehwinkel bei Ornamentgruppen, in denen auch Parallelverschiebungen vorkommen, nur die Werte 60°, 90°, 120°, 180°, 240°, 270°, 300° in Frage kommen und daß als Fundamentalbereiche nicht nur wie in den hier betrachteten Beispielen unendlich große Gebiete, sondern auch endliche auftreten können (Parallelogramme, Dreiecke). Außer den oben genannten Drehungs- bzw. Drehspiegelungsgruppen gibt es nur 24 weitere Ornamentgruppen von verschiedener Struktur, eine davon (fast die einfachste) wurde im ersten Beispiel hier beschrieben. Je mannigfaltiger und unterschiedlicher aber die in einer Ornamentgruppe enthaltenen Kongruenztransformationen sind, desto interessanter sehen die zugehörigen Ornamente aus. Schließlich sei noch erwähnt, daß man entsprechende Untersuchungen auch für den Raum anstellen kann. Die gewonnenen Aussagen haben grundlegende Bedeutung für die Lehre von den Kristallen.

Dr. W.Börner, wiss. Mitarbeiter an der
Sektion Mathematik der FSU Jena

Preisaufgaben (Serie 4/70)

(B19) Es ist auf geometrischem Wege nachzuweisen, daß die Oktaedergruppe eine zur Tetraedergruppe isomorphe Untergruppe besitzt (isomorph: von gleicher Struktur, siehe "Wurzel"-Nr.6/69).

(B20) (4. Aufgabe der IV. IMO 1962)
Es sind sämtliche Lösungen der Gleichung

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$$

zu bestimmen.

(B21) Nur mit Hlife eines Zirkels ermittle man den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises.

(B22) Eine Folge sei durch $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = 2a_n + 1$ gegeben. Man bestimme die independente Darstellung für a_n, d.h. man drücke a_n nur durch n aus.

(B23) Können drei Zahlen gleichzeitig eine geometrische und arithmetische Folge bilden?

(B24) Man löse das Gleichungssystem

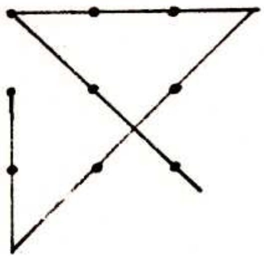
$$3x^2 - 2xy + 5y^2 - 35 = 0$$
$$x^2 - 2y^2 - 1 = 0$$

Für jeden vollständigen Lösungsweg einer Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).
Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis 10. des folgenden Monats (Datum des Poststempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" an unsere Adresse einzuschicken. Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden.
Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

Buntes Allerlei

Wie oft kann in drei aufeinanderfolgenden Jahren der Dreizehnte eines Monats auf einen Freitag fallen?

Lösungen von Scherzaufgaben aus den "Wurzeln" 12/69 und 1/70:
Der Polygonzug hat folgendes Aussehen:



Der gesuchte Ausdruck lautet

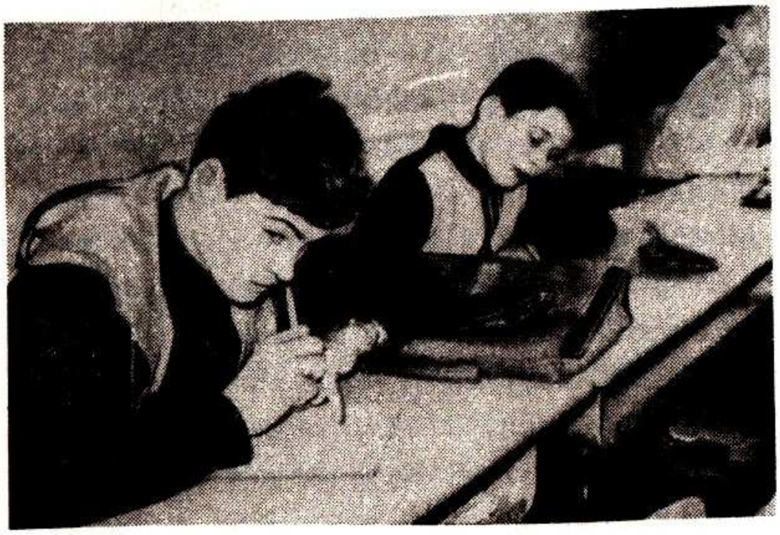
$$3 \cdot 19 - 5 = 52.$$

Die Vorschrift zur Bestimmung der drei Zahlen lautet allgemein wie folgt: $a \quad \frac{a-b}{2} \quad b$.

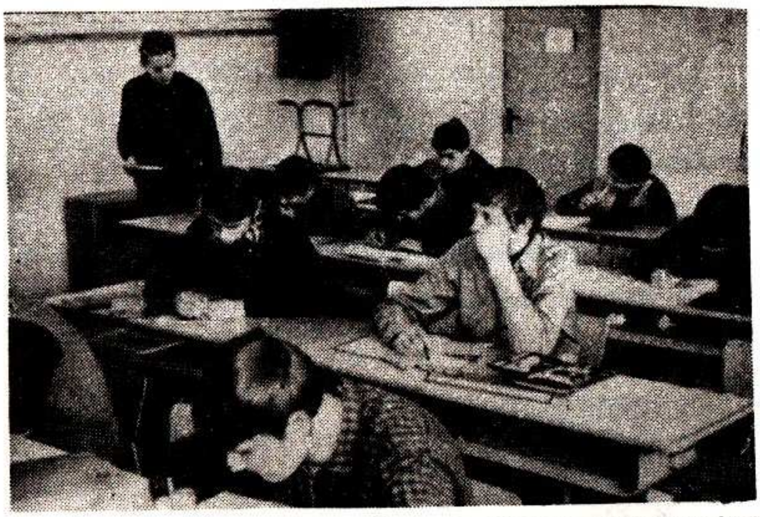
Damit ergibt sich x zu 8.

Das Mathematik-Spezialistenlager

In der Zeit vom 10.2. bis 21.2.1970 fand in Saalfeld-Gorndorf das Winterlager der besten jungen Mathematiker des Bezirkes Gera statt. Das Lager wurde in Zusammenarbeit des Rates des Bezirkes Gera und der Redaktion der "Wurzel" durchgeführt. Während der Rat des Bezirkes für den organisatorischen Teil verantwortlich zeichnete, sorgten die Betreuer, die zum großen Teil von der "Wurzel" gestellt wurden, für den inhaltlich-fachlichen Teil. An sieben Tagen wurden die Schüler der 8. bis 12. Klasse in Gebiete der Mathematik eingeführt, die außerhalb des obligatorischen Schulunterrichts liegen. So erhielten die Schüler der 8. Klasse Unterricht in Mengenlehre, Relationen, Zahlensystemen, Geometrie und Graphentheorie, die Schüler der 9. Klasse hörten einiges über Mengenlehre, Relationen, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Relationen, und Schaltalgebra. Die 10. Klasse wurde unterrichtet in Zahlen-



theorie, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Graphentheorie und Ungleichungen. Die 11. Klasse hörte auch einiges über Zahlentheorie und Ungleichungen und außerdem noch über Schaltalgebra und rekursive Folgen, während sich die 12. Klasse mit Schaltalgebra, rekursiven Folgen, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Differentialgleichungen beschäftigte.
Die 8. Klasse beispielsweise erhielt durch ihren Unterricht in "Zahlensystemen" einen tiefen Einblick in das Zahlensystem, das gewöhnlich auf einem Zehnersystem beruht. Sie lernten das Dualsystem kennen, das in Rechenautomaten Anwendung findet und bildeten analog dazu Zahlen in anderen Systemen. Eine interessante Aufgabe war dabei: Eine dreistellige Zahl wird "Schnapszahl" genannt, wenn ihre Ziffern alle gleich sind. In welchem Zahlensystem ist die Zahl 172 (Dezimalzahl) eine solche? Ein anderes Gebiet, mit dem sich die Schüler beschäftigten, war die Graphentheorie. Graphen sind abstrakte mathematische Gebilde,



die man durch ein System von Punkten und Linien (Knoten und Kanten) veranschaulichen kann. Ein Beispiel für einen Graphen ist ein Busfahrplan, dabei symbolisieren in einem sogenannten Streckennetz die schwarzen Punkte die Haltestellten (Knoten) und die mehr oder weniger verzweigten Linien die Wege (Kanten). Ein solches System dient zum Lösen von Transportproblemen. Auch in der Operationsforschung und dem sehr bekannten Gebiet der Netzwerktechnik finden Graphen vorteilhaft Anwendung.
In der Schaltalgebra, einem sehr interessanten Teilgebiet der Mathematik, versuchten die Schüler bestimmte Verhaltensweisen von Schaltungen oder ähnlichen Systemen, in denen nur zwei Zustände auftreten können,(z.B. Strom fließt oder Strom fließt nicht), mathematisch zu beschreiben, um dann bestimmte Aussagen über den Aufbau der Schaltungen machen zu können. Eine charakteristische Aufgabe .hierzu ist beispielsweise folgende: Man

"konstruiere" (mathematisch) eine Schaltung für eine Flurbeleuchtung, wobei eine Lampe von n verschiedenen Stellen ein- und ausschaltbar sein soll.
In der Wahrscheinlichkeitsrechnung (siehe dazu auch "Wurzel"-Nr.6/68 und 7/8/68) lösten die Schüler u.a. folgende Aufgabe:
Ein Spieler würfelt viermal hintereinander mit dem gleichen Würfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei den vier Würfen mindestens eine 6 vorkommt?
Ein weiteres interessantes Gebiet ist die Untersuchung der rekursiven Folgen. Es handelt sich dabei um Folgen, deren einzelne Glieder durch eine Funktion gewisser vorhergehender Elemente berechnet werden können: $a_{n+1} = F(a_n, \dots, a_{n-k})$ (k fest). Ein einfaches Beispiel dafür sei die geometrische Folge $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

Diese wenigen Beispiele sollen zeigen, wie vielfältig und doch mathematisch tiefgreifend die behandelten Themen waren, die hohe Anforderungen an das logische Denken und das Abstraktionsvermögen der Schüler stellten. Das fachliche Programm wurde ergänzt durch einen Vortrag eines Dozenten der Sektion Mathematik.
Der Unterricht füllte den Vormittag aus, die Nachmittage bzw. Abende blieben der Beschäftigung in den Gruppen vorbehalten. Eine Stadtführung durch Saalfeld, ein Vortrag im Militärpolitischen Kabinett, zwei Buchlesungen und Besuche der Feengrotten, des Naturkundemuseums, des Hallenbades in Pößneck, des Kinos in Unterwellenborn waren einige Seiten der kulturellen Betätigung während der Lagerzeit. Einen Höhepunkt bildete der Besuch im VEB "WEMA" Saalfeld. Nach einer Führung durch den Betrieb, bei der alle Maschinen und ihre Funktionsweise erklärt wurden, erläuterte ein Mitarbeiter des Betriebes den Teilnehmern des Mathematiklagers die Grundbegriffe der Programmierung. Anschließend versuchten sich die Schüler selbst an einem Programm für eine numerisch gesteuerte Bohrmaschine.
Zusammenfassend kann man feststellen, daß das Lager für die Schüler eine sehr sinnvolle Form der Feriengestaltung bot, da es wirkliche Erholung, mathematische Weiterbildung und kulturelle Betätigung miteinander verband.

Das Betreuerkollektiv

Die Programmierung des Kleinrechners Cellatron SER 2c II

II) Informationsdarstellung im SER 2c

Alle elektronischen Rechenautomaten arbeiten mit Bauelementen, bei denen nur zwei verschiedene Zustände (z.B.: eingeschaltet-ausgeschaltet, leitend-nichtleitend, Magnetisierung in zwei verschiedenen Richtungen usw.) interessieren. Nur damit ist zu erreichen, daß der Automat bei vertretbarem Aufwand schnell und zuverlässig arbeitet. Das hat für alle Informationen zur Konsequenz, daß sie im Rechner (intern) als Folge von Zeichen aus einer zweielementigen Menge dargestellt werden müssen, denn ein Zeichen wird jeweils durch einen Zustand eines Bauelements realisiert. Die zwei möglichen Zeichen (ihre übliche Schreibweise ist "O" und "L") werden als Dualziffern bezeichnet (in Analogie zu den zehn Dezimalziffern).
Wir werden uns in diesem Abschnitt mit der internen Verschlüsselung der verschiedenen Informationsarten unseres Rechners, das sind Zahlen, Befehle und Adressen, beschäftigen.
Zuerst zu den Zahlen: Jeder Dezimalziffer werden folgendermaßen vier Dualziffern (eine TETRADE) zugeordnet:

Dezimalziffer	Tetrade	Dezimalziffer	Tetrade
0	OOOO	5	OLOL
1	OOOL	6	OLLO
2	OOLO	7	OLLL
3	OOLL	8	LOOO
4	OLOO	9	LOOL

Diese Verschlüsselung beruht darauf, daß man sich die Stellen einer Tetrade von rechts nach links mit den Wertigkeiten 1,2,4,8 versehen denkt und die Wertigkeit der Stellen an denen sich ein L befindet, addiert.
Beispiele: OOLL ≙ 2+1 = 3 , LOOL ≙ 8+1 = 9
Zur Darstellung einer n-stelligen Zahl wird jede Ziffer für sich verschlüsselt und die entstehenden n Tetraden in derselben Reihenfolge wie die Ziffern in der Zahl hintereinandergeschrieben.
Beispiel: 15209 ≙ OOOL OLOL OOLO OOOO LOOL
Eine Zahl besitzt nun im allgemeinen aber auch ein Vorzeichen und Komma. Außerdem muß die Länge einer Zahl im Rechner be-

grenzt sein, damit sie in den Wörtern des Speichers Platz findet und damit sie im RW verarbeitet werden kann. Um die genaue Darstellung einer Zahl kennenzulernen, müssen wir etwas näher auf den Aufbau des Speichers eingehen. Im ersten Abschnitt unseres Beitrages haben wir die Einteilung des Speichers in Wörter kennengelernt. Jedes dieser Speicherworte ist nun in der Lage, 12 Tetraden zu speichern. Wir wollen die Tetraden von rechts nach links durchnumerieren, um Erklärungen zu vereinfachen.

Von den 12 Tetraden eines Zahlwortes werden 10 für die Ziffernfolge benutzt, die 11. Tetrade enthält grundsätzlich die Kombination 0000 und die 12. Tetrade die Verschlüsselung des Vorzeichens und der Kommastellung. Für das Vorzeichen wird die vorderste Dualstelle mit den Vereinbarungen "0 für +" und "L für -" verwendet. Der Wert der restlichen drei Dualstellen, den man erhält, wenn man die Wertigkeit der Stellen, die mit L besetzt sind, addiert, gibt die Anzahl der Stellen nach dem Komma an.

Beispiele:

Tetrade \ Zahl	15209	-1234631	0,02761	-7682,134	-854,3421951
12 Vorz., Komma	0000	L000	0L0L	L0LL	LLLL
11	0000	0000	0000	0000	0000
10	0000	0000	0000	0000	L000
9	0000	0000	0000	0000	0L0L
8	0000	0000	0000	0000	0L00
7	0000	000L	0000	0LLL	00LL
6	0000	00L0	0000	0LL0	0L00
5	000L	00LL	0000	L000	00L0
4	0L0L	0L00	00L0	00L0	000L
3	00L0	0LL0	0LLL	000L	L00L
2	0000	00LL	0LL0	00LL	0L0L
1	L00L	000L	000L	0L00	000L

Eine im SER 2c darzustellende Zahl darf also nicht mehr als 10

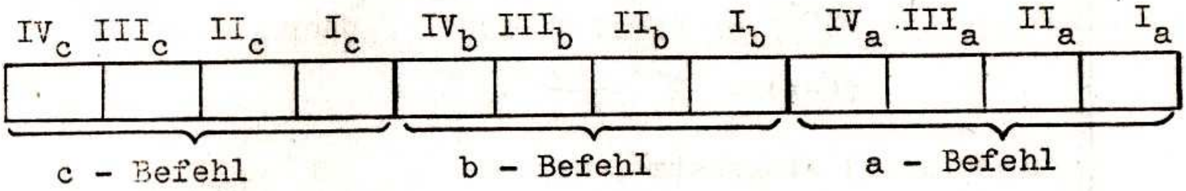
Ziffern besitzen und die Anzahl der Ziffern nach dem Komma kann 7 nicht übersteigen.
Beim Durchmustern der 12. Tetraden der Beispiele erkennt man Kombinationen, die in der Verschlüsselungstabelle nicht vorkommen. Man kann sich auch leicht überlegen, daß sich mit vier Dualziffern nicht nur 10 sondern 16 Kombinationen erzeugen lassen. Die restlichen Kombinationen bilden die sogenannten PSEUDOTETRADEN.

Bezeichnung	Schlüssel
P2	LOLO
P3	LOLL
P4	LLOO
P5	LLOL
P6	LLLO
P7	LLLL

Wenn man das P in der Bezeichnung als Summanden 8 deutet, kann man auch hier mit dem System der Stellenwertigkeiten arbeiten.
Z.B.: LLOL ≙ 8+4+1 ≙ P5
Allerdings ist das nur richtig, wenn die Gesamtsumme der Stellenwertigkeiten zweistellig ist, d.h. LOOL als P1 zu interpredieren wäre falsch.
Die Pseudotetraden finden nicht nur in der 12. Tetrade eines Zahlwortes, sondern auch in den Adressen und Befehlen Verwendung.
Wir erinnern uns, daß die Adresse aus Bahn- und Platzadresse besteht. Die Bahnen jedes Speicherteils sind von 0 bis 7 durchnumeriert und die Nummer einer Bahn in Tetradendarstellung bildet die Bahnadresse. Für die Platzadresse muß es 16 Möglichkeiten geben, da ja jede Bahn in 16 Wörter unterteilt ist. Dafür reicht auch eine Tetrade aus, allerdings mit Verwendung der Pseudotetraden. Eine Adresse besteht also aus 2 Tetraden.
Beispiele: Die Adressen aller Wörter der Bahn 0 sind:
00,01,02,03,04,05,06,07,08,09,OP2,OP3,OP4,OP5,OP6 und OP7.
Die Reihenfolge der Platzadresse im Beispiel entspricht der Reihenfolge der Wörter auf einer Bahn. Es ist noch zu bemer-

ken, daß die Wörter mit der Adresse 00 nicht zum Schreiben und Lesen von Informationen verwendet werden können. Im Abschnitt über Programmierung werden wir die Gründe dafür kennenlernen.

In einem Befehlswort finden 3 Einzelbefehle Platz, von denen jeder 4 Tetraden beansprucht. Die in den folgenden Abschnitten verwendete Bezeichnung der Einzelbefehle und Tetraden ist aus der untenstehenden Skizze ersichtlich.



Befehlswort des SER 2c

Genaueres zur Verschlüsselung der Befehle wird im nächsten Abschnitt gesagt.

H.Schirrmeister

wiss. Ass. im Rechenzentrum
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Lösungen

(A86): Man zeigt zuerst das die einzige Lösung der FGL

$$f(x)\cdot f(x+y) = (f(y))^2\cdot(f(x-y))^2\cdot 2^{y+4}, \qquad (1)$$

die eine Nullstelle besitzt, die Funktion $f(x)\equiv 0$ ist. Dazu nimmt man an, x_o sei Nullstelle von $f(x)$, d.h. $f(x_o)=0$. Dann gilt für $x=x_o$:

$$f(x_o)\cdot f(x_o+y)=0 = (f(y))^2\cdot(f(x_o-y))^2\cdot 2^{y+4} .$$

Da 2^{y+4} nicht Null werden kann, muß $f(y)=0$ oder $f(x_o-y)=0$ für alle y gelten. Das bedeutet aber $f(y)\equiv 0$ und entsprechend $f(x)\equiv 0$.

Außerdem ist mit $f(x)$ auch $-f(x)$ Lösung von (1), denn

$$(-f(x))(-f(x+y)) = (-f(y))^2(-f(x-y))^2\cdot 2^{y+4} .$$

O.B.d.A. kann man nun $f(x)>0$ annehmen.

Dann gilt für $y=0$:

$$f(x)\cdot f(x) = (f(0))^2\cdot(f(x))^2\cdot 2^4 \qquad \text{oder}$$

$$f(0) = 2^{-2} . \qquad (2)$$

Für x=0 erhält man:

$$f(0)\cdot f(y) = (f(y))^2\cdot(f(-y))^2\cdot 2^{y+4}$$

$$2^{-y-6} = f(y)\cdot(f(-y))^2 \qquad (3)$$

Setzt man hier y = -y, so erhält man:

$$2^{y-6} = f(-y)\cdot(f(y))^2 \,. \qquad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt:

$$2^{-12} = (f(y)\cdot f(-y))^3 \quad \text{oder}$$

$$f(-y) = 2^{-4}\cdot\frac{1}{f(y)} \,. \qquad (5)$$

Dies in (4) eingesetzt, ergibt:

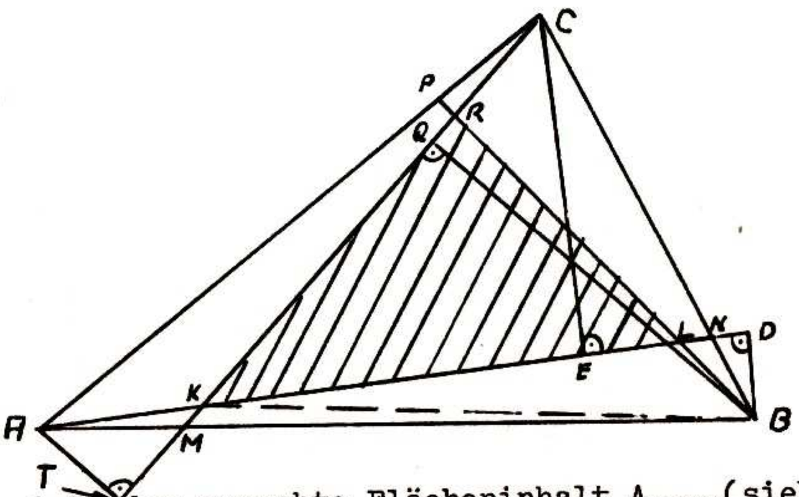
$$2^{y-6} = 2^{-4}\cdot\frac{1}{f(y)}\cdot(f(y))^2$$

$$2^{y-2} = f(y) \,.$$

Damit ist auch $f(y) = -2^{y-2}$ eine Lösung von (1).
Das sind zugleich alle Lösungen der Funktionalgleichung:

$$f(x) \equiv 0 \quad , \quad f(x) = 2^{x-2} \quad , \quad f(x) = -2^{x-2}.$$

(A87):



Es sei S_1 der gesuchte Flächeninhalt $A_{\Delta KLR}$ (siehe Skizze!). Man kann nun eine Beziehung zwischen den Flächeninhalten $S_2=A_{\Delta CKB}$ und $S_3=A_{\Delta AKC}$ aufstellen.

Es gilt: $$\frac{S_2}{S_3} = \frac{\frac{1}{2}\overline{KC}\cdot\overline{BQ}}{\frac{1}{2}\overline{KC}\cdot\overline{AT}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{AT}} \,.$$

Da die Dreiecke ΔBQM und ΔATM ähnlich sind, gilt:

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} = 4$$

Daraus folgt $\quad \frac{S_2}{S_3} = 4.$

Bezeichnet man den Flächeninhalt $A_{\Delta AKB}$ mit S_4, so gilt

$$\frac{S_4}{S_3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{AK}}{\frac{1}{2}\cdot\overline{CE}\cdot\overline{AK}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CE}}$$

Da hier die Dreiecke ΔBDN und ΔENC ähnlich sind, gilt

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} = \frac{1}{4}$$

und damit $\frac{S_4}{S_3} = \frac{1}{4}$.

Daraus erhält man $\quad \frac{S}{S_3} = \frac{S_2 + S_3 + S_4}{S_3} = 4 + 1 + \frac{1}{4} = \frac{21}{4}$

$$S_3 = \frac{4}{21}\cdot S.$$

Analog kann man beweisen, daß die Flächeninhalte der Dreiecke ΔBCR und ΔABL auch gleich $\frac{4}{21}\cdot S$ sind.

Daraus ergibt sich

$$S_1 = S - 3\cdot\frac{4}{21}\cdot S = \frac{3}{7}\cdot S.$$

(A88): (Eingesandt von Roland Engelmann, EOS Saalfeld, Kl. 11)

Es werden zunächst die Bezeichnungen der Strategien vereinbart:

s_n soll bedeuten: A wählt den Punkt n,

t_m soll bedeuten: B wählt den Punkt m.

a_{ik} ist dann der Gewinn des Spielers A wenn er die Strategie s_i und B die Strategie t_k wählt.

a) Jetzt kann man die Gewinnmatrix für A aufstellen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Dieses Spiel hat einen Sattelpunkt, da a_{55} gleichzeitig Minimum der Zeile und Maximum der Spalte ist. Nach Definition ist a_{55} deshalb Sattelpunkt.

c) Die optimale Strategie für A ist s_5 und für B t_5, da sie ihnen einen Mindestgewinn (nämlich 0) sichert, den sie nicht vergrößern können, wenn der Gegner die optimale Strategie anwendet.

(A90): Man stellt z im x-y-Koordinatensystem dar:

$$z = x + iy$$
$$|x + iy - 3 + 2i| \leq 3$$
$$|x - 3 + (y + 2)i| \leq 3$$
$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 \leq 3^2$$

Das heißt, der geometrische Ort aller Punkte (x,y), die diese Ungleichung erfüllen, ist eine Kreisfläche (einschließlich Peripherie) mit dem Radius r = 3 und dem Mittelpunkt M(3; -2).

(B2): Wegen $e^{i(k+8)\frac{\pi}{4}} = e^{ik\frac{\pi}{4}} \cdot e^{2\pi i} = e^{ik\frac{\pi}{4}}$

und $e^{ik\frac{\pi}{4}} \neq e^{il\frac{\pi}{4}}$ für $k \not\equiv l \pmod 8$ besteht die Menge $\{a\}$ aus genau 8 Elementen, ist also endlich.

Weiter gilt $e^{ik\frac{\pi}{4}} \cdot e^{il\frac{\pi}{4}} = e^{i(k+l)\frac{\pi}{4}}$,

wobei mit k und l auch k + l eine ganze Zahl ist.

Die Multiplikation komplexer Zahlen ist assoziativ, damit auch innerhalb der Menge $\{a\}$. Es gibt ein Einselement $e^{i\cdot 0} = 1$ mit $e^{i\cdot 0} \cdot e^{ik\frac{\pi}{4}} = e^{ik\frac{\pi}{4}}$ und zu jeder Zahl $e^{ik\frac{\pi}{4}}$ gibt es eine Zahl $e^{i(-k)\frac{\pi}{4}}$ mit $e^{ik\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i(-k)\frac{\pi}{4}} = e^{i\cdot 0}$.

Damit ist gezeigt, daß $\{a\}$ bezüglich der Multiplikation eine Gruppe bildet.

Unser Titelbild wurde im Mathematik-Spezialistenlager des Bezirkes Gera (Winterlager) aufgenommen (siehe dazu auch Seite 55 - 57 dieses Heftes!).

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS und SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Harald Fischer, Rainer Wackernagel
Mitarbeiter: H.Eckner, R.Großmann, W.Kiefer, N.Kuse, R.Lorenz, S.Müller, P.Pradel, E.Taubald, I.Zenner

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
DDR 69 Jena
Helmholtzweg 1
"Wurzel-Redaktion"

V-14-6 6 4955 M 175-70

5

70

WURZEL

zeitschrift für mathematik an

ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
FDJ-Aktiv der
Sektion Mathematik
an der
Friedrich-Schiller-
Universität Jena

Die Programmierung des Kleinrechners Cellatron SER 2c III

Programmieren heißt Zerlegen eines Algorithmus in solche Einzelschritte, die der Automat ausführen kann. Diese Tätigkeit erfordert gründliche Denkarbeit und ein hohes Maß an Sorgfalt, denn jede Nachlässigkeit führt unweigerlich zu Fehlern.
Voraussetzung für das Programmieren ist natürlich ein fertiger Algorithmus. Wir wollen immer annehmen, daß die Algorithmen als Flußbild vorliegen. Uns interessieren in diesem Zusammenhang nicht die Etappen von der Problemstellung bis zum fertigen Algorithmus. Die Tätigkeit des Programmierers besteht darin, den gelieferten Algorithmus so zu konkretisieren, daß die spezifischen Eigenschaften des Automaten, für den programmiert werden soll, Berücksichtigung finden. Aus dem Grobflußbild entsteht so ein bis in's Detail gehendes Flußbild, der sogenannte PROGRAMMABLAUFPLAN (PAP). Davon ausgehend wird dann die Anordnung der einzelnen Befehle festgelegt, d.h. der Algorithmus wird in eine dem Automaten verständliche Form gebracht. An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, daß Programmieren keinesfalls eine stumpfsinnige Tätigkeit darstellt. Um ein wirklich gutes, d.h. wenig Speicherplatz beanspruchendes und schnell arbeitendes Programm herzustellen, benötigt man sehr gute Kenntnisse über die Eigenschaften und Fähigkeiten des Automaten, einen großen Erfahrungsschatz und gute Einfälle. Der Leser kann natürlich nicht hoffen, durch das Studieren dieses Beitrages ein perfekter Programmierer zu werden. Hier werden wir nur die einfachsten Grundkenntnisse für einen speziellen Automaten vermitteln. Um tiefer in die Problematik einzudringen, ist weiteres Selbststudium unbedingt erforderlich.
Nach diesen allgemeinen Darlegungen nun zurück zum SER 2c. Die Kenntnis der Befehle ist erste Voraussetzung für das Programmieren. Wir werden uns deshalb jetzt mit dem Befehlssystem des SER 2c befassen. Seine Befehle lassen sich in vier Gruppen einteilen:

Befehlsgruppe	Charakteristika
Rechenbefehle	Ausführung der Grundrechenoperation
Transportbefehle	Realisierung des Datentransportes innerhalb des Rechners
Sprungbefehle	Änderung der normalen Reihenfolge der Befehlsabarbeitung (normalerweise werden die Befehle

	entsprechend ihrer geometrischen Anordnung auf dem Speicher nacheinander abgearbeitet)
Wagenbewegungen der Schreibmaschine	Befehle dieser Gruppe führen nur zu einer Bewegung des Wagens der SM. So ist es möglich, die Daten in einer übersichtlichen Form zu Papier zu bringen.

Wie im vorhergehenden Abschnitt schon erläutert, werden zur internen Darstellung eines Einzelbefehls vier Tetraden benötigt. Somit finden in einem Befehlswort drei Befehle Platz, die in der Reihenfolge a-, b-, c-Befehl nacheinander abgearbeitet werden.

Die folgende Übersicht gibt Auskunft darüber, welche Informationen in den einzelnen Tetraden des Befehls untergebracht sind, wobei die Zählung der Tetraden der das letzte Mal angegebenen Zählung im Befehlswort entspricht.

Tetrade	IV	III	II	I
Information	Bahnadresse	Platzadresse	Zusatzinformation für die Ausführung des Befehls	Befehlsart

In der Tetrade I lassen sich ja prinzipiell 16 verschiedene Informationen unterbringen, von denen jedoch nur 10 von uns genutzt werden (Wir behandeln ein vereinfachtes Befehlssystem, denn es fehlt ein Befehl, mit dem der SER 2c normalerweise ausgerüstet ist. Allerdings werden auch einige Befehle dazugenommen, die der Rechner erst nach kleineren Umbauten ausführt.).
Die Dualstelle mit der Wertigkeit 1 in der Tetrade II trägt grundsätzlich die Information, ob die automatische Programmabarbeitung vor der Abarbeitung des betreffenden Befehls gestoppt werden soll. Der Automat stoppt, wenn diese Stelle mit L besetzt ist. Es ist üblich, dann zu sagen, daß der Befehl mit einem WARTEINDEX versehen ist. Durch Betätigen der Starttaste des Rechners wird in diesem Fall die Programmabarbeitung fortgesetzt.
Die restlichen drei Dualstellen dieser Tetrade haben, wie die folgende Tabelle zeigt, für die unterschiedlichen Befehlstypen auch verschiedene Bedeutung:

Befehlstyp	Information in den vorderen Dualstellen der Tetrade II
Rechenbefehle	Anzahl der Kommastellen des Ergebnisses
Sprungbefehle	Art des Sprunges

Befehlstyp	Information in den vorderen Dualstellen der Tetrade II
Ausgabe	Anzahl der Kommastellen, mit denen die Zahl ausgegeben wird
Eingabe	Unterscheidung zwischen Eingabe nach R oder Ac
Restliche Befehle	ohne Bedeutung

Unter Ausgabe versteht man dabei immer einen Datentransport aus Ac und unter einer Eingabe einen Datentransport nach einem Register.

Bevor wir die Befehlsliste unseres Rechners behandeln, noch einige Bemerkungen, wie die Kommastellung der Operanden bei Rechenoperationen berücksichtigt wird und die gewünschte Anzahl der Kommastellen des Ergebnisses realisiert wird. Da sich die Angabe über die Kommastellen des Ergebnisses in den vorderen drei Dualstellen der Tetrade II befindet, ist der Tetradenwert das Doppelte der Kommastellenanzahl, falls der betreffende Befehl nicht mit einem Warteindex versehen ist. Allerdings handelt es sich dabei um eine besondere Art der Verdoppelung, da ein zweistelliges Ergebnis in Pseudotetraden umgewandelt werden muß, wie das in Abschnitt II erläutert wurde. Die folgenden Beispiele sollen das eben gesagte verdeutlichen:

Kommastelle	Tetrade II	
	Dualstellen	Wert
1	00L 0	2
4	L00 0	8
6	LL0 0	P4

Der Leser kann sich leicht überlegen, wie bei Vorliegen eines Warteindex zu verfahren ist.

Vor Ausführung der Operationen Addition, Subtraktion und Division muß die Anzahl der Kommastellen der beiden Operanden angeglichen werden. Das wird erreicht, indem die Zahl in Ac solange nach links oder nach rechts verschoben wird, bis die Kommastellung von R erreicht ist. Wenn die Zahl in Ac nach rechts verschoben werden muß, d.h. wenn die Zahl in R weniger Kommastellen als die in Ac hat, so gehen die Stellen der Zahl in Ac verloren. Das bedeutet einen Verlust an Genauigkeit und deshalb ist man immer gut beraten, die Zahl mit der größeren Anzahl von Kommastellen nach R zu transportieren. Beim Verschieben nach rechts wird gerundet, d.h. die Ziffer, die nach dem Verschieben am weitesten rechts steht wird um 1 erhöht, wenn die ursprünglich rechts daneben stehende Ziffer größer oder gleich 5 ist. Wir wollen uns an einem Beispiel ansehen, wie sich bei gleichen Operanden ein Austausch der Registerbelegungen vor Ausführung der Operation auf das Ergebnis auswirken kann:

Inhalt der Register		Möglichkeit I	Möglichkeit II
- vor der Operation	R Ac	5,21792 91,74	91,74 5,21792
- nach der Angleichung der Kommastellen	R Ac	5,21792 91,74000	91,74 5,22
- nach Ausführung der Addition	R Ac	5,21792 96,95792	91,74 96,96
- nach Verschieben in Ac, um die gewünschte Anzahl von Kommastellen zu erreichen (hier 5)	R Ac	5,21792 96,95792	91,74 96,96000

Der vorliegende Ablauf entspricht dem des Befehls "Addiere mit 5 Kommastellen". Der Genauigkeitsverlust im Ergebnis bei Möglichkeit II ist klar erkennbar.
Da Subtraktion und Division nicht kommutativ sind, kann man in diesen Fällen die Belegung der Register nicht beliebig wählen. Aus diesem Grund ist es am günstigsten, wenn alle im Programm verwendeten Zahlen die gleiche Anzahl von Kommastellen besitzen.

Bei Multiplikationen werden die Kommastellen nicht vorher angeglichen. Die vorläufige Anzahl der Kommastellen des Ergebnisses ist gleich der Summe der Kommastellenzahl der beiden Operanden. Danach erfolgt dann noch eine Verschiebung des Ergebnisses, um die im Befehl verankerte Kommastellenanzahl zu erreichen.
Die notwendigen Verschiebungen lassen sich natürlich nur realisieren, wenn die Register länger sind, als die normalen Speicherplätze. R und Ac besitzen deshalb eine Speicherkapazität von je 24 Tetraden. Diese Kapazität darf aber nur während der Abarbeitung eines Befehls ausgenutzt werden. Wenn das entgültige Ergebnis einer Rechenoperation in Ac mehr als 10 gültige Ziffern besitzt, so stoppt der Automat mit Fehleranzeige (ÜBERLAUF).

Der Programmierer muß sich also immer überlegen, ob für den für ein Programm zugelassenen Zahlenbereich auch kein Überlauf eintreten kann. Wenn man z.B. die Zahlen 1354,62 und 35,173218 mit 7 Kommastellen addieren will, so führt das zum Überlauf, während das bei Addition mit 6 Kommastellen nicht der Fall ist.
Vor der Ausführung von Multiplikation und Division wird der in R stehende Operand aus rechnerinternen Gründen in die vorderen Tetraden des Registers R verschoben und bleibt auch nach der Ausführung des Befehls dort so erhalten. Das hat zur Konsequenz, daß nach Multiplikation und Division der in R befindliche Operand nicht für eine Addition oder Subtraktion verwendet werden darf, da sonst Überlauf eintritt. Zur Division ist noch zu sagen, daß sie von unserem Rechner nur ganzzahlig ausgeführt wird, d.h. es es wird der größte ganze Teil des Quotienten der in R und Ac stehenden Operanden berechnet. Deshalb ist es auch sinnvol, in einem Divisionsbefehl immer 0 Kommastellen zu programmieren. Wir werden an Beispielen sehen, wie man Quotienten auch genauer berechnen kann. Natürlich sind dazu dann mehrere Einzelbefehle notwendig.
Der Leser wird sicher erkannt haben, daß vom Programmierer viele Dinge zu beachten sind. Um zu vermeiden, daß Fehler im Programm nur bei Tests am Automaten gefunden und behoben werden können (dazu wäre viel teure Rechenzeit notwendig), muß jedes erstellte Programm mit einem Testbeispiel überprüft werden. Das Beispiel ist so zu wählen, daß auch jeder Befehl des Programms mindestens einmal durchlaufen wird. Die Durchrechnung des Testbeispiels wird in Analogie zum Trockenschwimmen auch "Trockentest" genannt. Der Mensch simuliert die Befehle des Automaten. Die Ergebnisse des Trockentests lassen sich auch gut beim Einfahren des Programms am Automaten verwenden, denn man erkennt dann sofort, wo die eigene Rechnung nicht mehr mit der des Rechners übereinstimmt und findet so schneller Fehler, die trotz Testrechnung noch übrig geblieben sind.
Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen werden wir dann in der nächsten Nummer der "Wurzel" die Befehlsliste des Cellatron SER 2c$^+$ (das "+" soll andeuten, daß das Befehlssystem etwas abgeändert wurde) kennenlernen und den Ablauf jedes Befehls genauer unter die Lupe nehmen.

H.Schirrmeister
wiss. Ass. im Rechenzentrum der FSU Jena

Preisaufgaben (Serie 5/70)

(B25) Man löse das Gleichungssystem

$$x_1 = \frac{2x_2^2}{1+x_3^2} \qquad (1)$$

$$x_2 = \frac{2x_3^2}{1+x_4^2} \qquad (2)$$

$$\vdots$$

$$x_{99} = \frac{2x_{100}^2}{1+x_1^2} \qquad (99)$$

$$x_{100} = \frac{2x_1^2}{1+x_2^2} \qquad (100)$$

(B26) (4. Aufgabe der III. IMO 1961)
Es seien ein Dreieck $P_1P_2P_3$ und ein beliebiger Punkt P im Inneren des Dreiecks gegeben. Die Schnittpunkte der Geraden P_1P, P_2P bzw. P_3P mit den gegenüberliegenden Seiten seien Q_1, Q_2, Q_3. Es ist zu beweisen, daß unter den Verhältnissen

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PQ_1}}, \quad \frac{\overline{P_2P}}{\overline{PQ_2}} \text{ und } \frac{\overline{P_3P}}{\overline{PQ_3}}$$

wenigstens eines nicht größer als 2 und eines nicht kleiner als 2 ist.

(B27) Es ist zu beweisen: Enthält eine Gruppe von Konkruenztransformationen Drehungen um zwei verschiedene Drehzentren, dann enthält sie auch Parallelverschiebungen.

(B28) Für welche natürlichen Zahlen a und b besitzt die Gleichung

$$x^2 - abx + a + b = 0$$

zwei ganzzahlige Lösungen?

(B29) Von den folgenden sechs Ornamentgruppen gehören genau zwei zur gleichen Ornamentgruppe. Welche sind es?
Aus welchen Konkruenztransformationen besteht die betreffende Gruppe?

1. ...HHHHH...	4. ...EEEEE...
2. ...FFFFF...	5. ...VTVTVT...
3. ...TTTTT...	6. ...NNNNN...

(B30) Man zeige, daß kein Polyeder existiert, der nur aus Flächen mit einer ungeraden Seitenzahl besteht und eine ungerade Anzahl Flächen besitzt.

Für jeden vollständigen Lösungsweg einer Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).
Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum 10. des folgenden Monats (Datum des Poststempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" an unsere Adresse einzuschicken.
Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden.
Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

Über Lehrprogramme I

In der Nr.12/69 der "Wurzel" berichtete Dr. Lemnitzer über neue Lehrmethoden an der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Es ging vor allem um den Einsatz von programmiertem Lehrmaterial in Form programmierter Lehrbücher im Rahmen des mathematischen Grundstudiums.
Auch an verschiedenen Jenaer Schulen wurden im "programmierten Unterricht" Lehrprogramme eingesetzt, die an unserer Sektion entwickelt wurden. Dazu gehören z.B. die Programme "Rechnen mit dem Rechenstab", "Rechnen mit Variablen", "Potenzrechnung" und "Einführung in das Rechnen mit Dualzahlen".
Sicher werden Sie früher oder später ebenfalls mit programmiertem Lehrmaterial arbeiten. Wir möchten Ihnen deshalb kurz den Aufbau eines Lehrprogramms erläutern.
Ein Lehrprogramm besteht aus einer Folge von Informationen oder Mitteilungen (I bzw. M), Fragen, Aufgaben oder Aufträgen (A) und den dazugehörigen Lösungen (L). In der Information wird dem Lernenden der Lehrstoff in relativ kleinen Abschnitten mitgeteilt. Als Information kann z.B. ein Lehrsatz, eine Definition, die Erklärung eines bestimmten mathematischen Sachverhalts oder ein Beispiel, oft durch Zeichnungen oder Skizzen erläutert, angeboten werden.
Zu den sich aus der Information ergebenden Fragen oder Aufgaben muß sich der Lernende schriftlich äußern. Entscheidend ist, daß er sein Arbeitsergebnis sofort mit der richtigen Lösung vergleichen kann, die auf der nächsten Programmseite abgedruckt, also

zunächst nicht sichtbar ist. Jeder Lernende erfährt demnach unmittelbar, ob seine Anstrengungen erfolgreich waren oder nicht. Ebenso kann sich der Lehrer jederzeit über den Aneignungsprozeß und das Lernergebnis eines jeden informieren. Man spricht davon, daß das Prinzip der ständigen Rückmeldung realisiert ist. Natürlich freut sich jeder, wenn er z.B. eine Aufgabe richtig gelöst hat. Er darf zur nächsten Information übergehen. Stimmen Arbeitsergebnis und Lösung nicht überein, arbeitet der Lernende zumindest die letzte Information nochmals durch. Oftmals erhält der Lernende im Falle einer falschen oder unvollständigen Lösung Hinweise, worin sein Fehler besteht und wie er diesen in Zukunft vermeiden kann.

Die Tatsache, daß die richtigen Lösungen bzw. Ergebnisse im Lehrprogramm abgedruckt sind, setzt voraus, daß der Lernende ehrlich arbeitet, d.h. erst dann vergleicht, wenn er die geforderte Aufgabe vorher wirklich selbständig gelöst hat.

Das Lehrprogramm enthält alle nötigen Impulse für die Steuerung eines kontinuierlichen und erfolgreichen Lernprozesses. Natürlich muß jeder Lernende ständig aktiv tätig sein.

Im programmierten Unterricht, so wird die Arbeit mit einem Lehrprogramm gewöhnlich bezeichnet, tritt also das programmierte Lehrmaterial an die Stelle des Lehrers. Dieser wird aber keineswegs überflüssig. Er kann sich verstärkt dem einzelnen Schüler und dessen individuellen Besonderheiten widmen.

Nach der Struktur werden zwei Grundtypen von Lehrprogrammen unterschieden, das "lineare" und das "verzweigte". Ein lineares Programm hat im Prinzip folgenden Aufbau:

$$I_1 \rightarrow A_1 \rightarrow L_1 \rightarrow I_2 \rightarrow A_2 \rightarrow L_2 \rightarrow \ldots \rightarrow I_n \rightarrow A_n \rightarrow L_n$$

Durch den folgenden Ausschnitt aus dem Lehrprogramm "Einführung in das Rechnen mit Dualzahlen" soll Ihnen die Arbeit mit einem linearen Programm etwas näher gebracht werden.

Auf einer Seite finden wir:

I_{20}

Die Lösung einer Additionsaufgabe im Zweiersystem (Dualsystem) verläuft genau so wie die Lösung einer Aufgabe im Zehnersystem (Dezimalsystem).

Man muß nur beachten, daß
L (Eins) plus L (Eins) Zwei ergibt.
Da es im Zweiersystem kein Zeichen für Zwei gibt, schreibt man **beim Addieren an der** entsprechenden Stelle eine 0 und merkt für **die nächsthöhere Stelle L (Eins).**
An einem Beispiel wird dies klar.

Beispiel:

	e	d	c	b	a
	L	O	O	L	L
+		L	O	O	L
			L	L	
	L	L	L	O	O

Bemerkung: Die Bezeichnung der Stellen mit a, b, c, ... dient nur dazu, den Rechenweg besser beschreiben zu können. Bei der Lösung von Aufgaben werden diese Bezeichnungen nicht mitgeschrieben.

Man rechnet:

a) **L plus L gleich Zwei;** schreibe 0, merke L!
b) **L (gemerkt) plus** 0 **gleich** L
   L plus L gleich Zwei; schreibe 0, merke L!
c) **L (gemerkt) plus** 0 **gleich** L
   L plus 0 **gleich L;** schreibe L, **merke** 0!
d) **L plus** 0 **gleich L;** schreibe L, **merke** 0!
e) 0 **plus** L **gleich L;** schreibe L!

A_{20}

a) Lösen Sie das Beispiel aus I_{20} noch einmal selbständig!
   Überlegen Sie jeden Schritt!
   Notieren Sie auch die zu merkende Zahl!

b) Folgende Aufgaben sind in entsprechender Form niederzuschreiben und zu lösen:

   aa) LOOOLO + LOLOLOL =
   bb) LOLLOL + LOLOL =

Bemerkung:
Bei der Lösung braucht kein Text mitgeschrieben zu werden!

Auf der nächsten Seite, die vom Lernenden zunächst nicht eingesehen werden kann, sind die Lösungen von A_{20} abgedruckt.

L_{20}

a) Die Lösung und der Gang der Rechnung sind in I_{20} niedergeschrieben. Vergleichen Sie dort!

b) aa) LOOOLO + LOLOLOLO =
ist zunächst in der für eine Additionsaufgabe üblichen Form niederzuschreiben.
Dann wird addiert.

```
    LOOOLO
+  LOLOLOL
   LLLOLLL
```

__Hinweis:__ Es genügt, wenn die Aufgabe in dieser Form niedergeschrieben wird.

bb)

```
    LOLLOL
+    LOLOL
    LLL L
   LOOOOOLO
```

Den Lösungen von A_{20} folgen auf der gleichen Seite I_{21} und A_{21}.
Es gibt auch lineare Programme, die anders aufgebaut sind. So kann als Aufgabe z.B. gefordert werden, daß Textlücken ausgefüllt oder Zeichnungen bzw. mathematische Ausdrücke ergänzt werden müssen. Das oben genannte Aufbauprinzip bleibt aber im wesentlichen bestehen.
Über den Aufbau eines verzweigten Lehrprogramms und über Vor- und Nachteile der Arbeit mit einem Lehrprogramm berichten wir in der folgenden Nummer der "Wurzel".

R.Mattasch
wiss. Ass. an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität Jena

Aus der Sektion Mathematik

Am 11. und 12.4.1970 arbeiteten 200 Studenten der Sektion Mathematik auf verschiedenen Großbaustellen. Vom VEB Ingenieur-Hochbaukombinat wurden die meisten Arbeitsplätze zur Verfügung gestellt. Es handelte sich dabei um Erdarbeiten an den Großbaustellen Universitätsneubau Jena-Lobeda, Verkehrshof Jena-Burgau und Großbäckerei Jena-Zwätzen. Ungefähr 40 Studenten arbeiteten im Wohngebiet Leninstraße und nahmen dort Verschönerungsarbeiten

vor. Mit der Teilnahme an diesem Subotnik demonstrierten wir unsere Verbundenheit mit den Ideen des Führers der Internationalen Arbeiterklasse und setzten das Wort: "Wir ehren Lenin, indem wir uns nützen" in die Tat um.
Im Rahmen der Kommunalwahlen wurden insbesondere die Wohnraumprobleme der Studenten erörtert und viel diskutiert. Wir blie-

ben aber in unseren Diskussionen nicht beim Nörgeln stehen, sondern ergriffen die Initiative und schlugen der Universitätsleitung vor, zusätzlich Wohnheimplätze zu schaffen, indem wir uns aktiv an der Aufstellung eines Montageleichtbaus beteiligen. Dieses Objekt ist von der staatlichen Leitung vorbereitet worden. Alle Studenten, die am 11.4.70 ihren Subotnik nicht durchgeführt haben, werden an diesem Objekt den Subotnik durchführen. Dieser Montageleicht-

bau wird den Studenten der Sektionen Mathematik und Physik für den wissenschaftlichen Gerätebau als Jugendobjekt übergeben. Die Jugendfreunde Peter Lang und Wolfgang Geilich, Mathematik-Physik-Lehrerstudenten des 2.Studienjahres, sind von Fachveranstaltungen befreit worden, um aktiv an der Organisation und Vorbereitung der Arbeiten mitzuwirken.

E.Girlich

Sekretär der FDJ-Grundorganisation
der Sektion Mathematik der FSU
Jena

Lösungen

(A89): $z^3 = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i)^3 = -\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\sqrt{3}\cdot i + \frac{9}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot i = 1$

Daraus folgt: $z^{3m+n} = (z^3)^m \cdot z^n = 1^m \cdot z^n = z^n$

$Z = \{z^1, z^2, z^3\}$ ist Untermenge der komplexen Zahlen. Deshalb gelten das Assoziativgesetz (A) und das Kommutativgesetz (K) der Multiplikation. Es ergibt sich folgende Multiplikationstafel:

	z^1	z^2	z^3
z^1	z^2	z^3	z^1
z^2	z^3	z^1	z^2
z^3	z^1	z^2	z^3

Anhand dieser Tafel sieht man:

(O) Das Produkt zweier Elemente der Menge Z liegt wieder in Z.

(N) In dieser Menge existiert ein neutrales Element e bezüglich der Multiplikation, für das gilt: $z\cdot e = e\cdot z = z$.

$e = z^3$, denn $z^1\cdot z^3 = z^1$
$z^2\cdot z^3 = z^2$
$z^3\cdot z^3 = z^3$.

(I) Zu jedem Element z aus Z existiert ein inverses Element z^{-1}, das ebenfalls in dieser Menge liegt, und für das gilt: $z^{-1}\cdot z = z\cdot z^{-1} = e$.

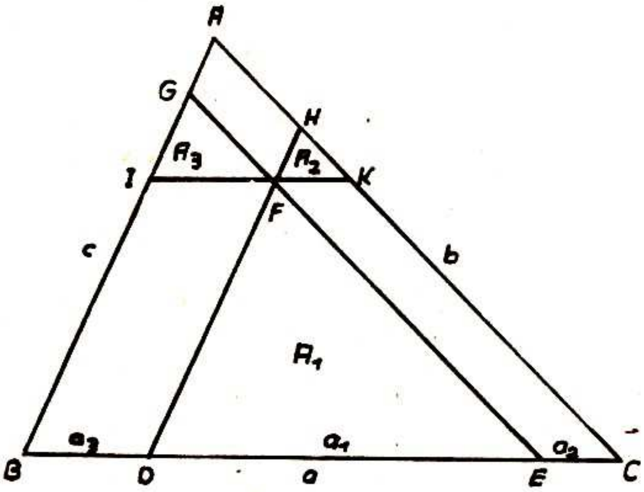
$(z^1)^{-1} = z^2$, denn $z^1\cdot z^2 = z^3$,
$(z^2)^{-1} = z^1$, denn $z^2\cdot z^1 = z^3$,
$(z^3)^{-1} = z^3$, denn $z^3\cdot z^3 = z^3$.

Aus der Gültigkeit der Axiome (A), (K), (O), (N) und (I) folgt, daß die Menge Z eine abelsche Gruppe bezüglich der gewöhnlichen Multiplikation mit komplexen Zahlen bildet.

(B1): (eingesandt von Rolf Schmidt, SpS Jena)

Es gilt
$$A_1 : A_{ges} = a_1^2 : a^2$$
$$A_3 : A_{ges} = a_2^2 : a^2$$
$$A_3 : A_{ges} = a_3^2 : a^2,$$

da die Dreiecke $\triangle$DEF, $\triangle$FKH, $\triangle$IFG dem ursprünglichen Dreieck $\triangle$ABC ähnlich sind und weiter die Strecken $\overline{BD} = \overline{CF}$ und $\overline{EC} = \overline{FK}$ der Parallelogramme ▱BDFC bzw. ▱ECKF übereinstimmen.



Daraus folgt:

$$\frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_{ges}}} + \frac{\sqrt{A_2}}{\sqrt{A_{ges}}} + \frac{\sqrt{A_3}}{\sqrt{A_{ges}}} = \frac{a_1}{a} + \frac{a_2}{a} + \frac{a_3}{a}$$

oder

$$\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2} + \sqrt{A_3} = \sqrt{A_{ges}}$$

und damit $$A_{ges} = (\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2} + \sqrt{A_3})^2$$

(B3): (eingesandt von A.Pomp, Spezialklasse der TH K.-M.-Stadt)

Erste Lösung

Aus $x \geq 0$ folgt, daß $y = f(x) = \frac{1 + x^2}{1 + x} > 0$.

Es gilt $(1 + x)y = 1 + x^2$

$$x^2 - xy - y + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} + y - 1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(y \pm \sqrt{y^2 + 4y - 4}\right)$$

Für $-2 - \sqrt{8} < y < -2 + \sqrt{8}$ existiert kein reelles x, dem ein Funktionswert y zugeordnet ist. Somit ist aber $-2 + \sqrt{8} = 2(\sqrt{2} - 1)$ der kleinste positive Wert, den f(x) für irgendein reelles $x \geq 0$ annehmen kann.

Zweite Lösung

Es gilt $$\frac{1 + x^2}{1 + x} = x - 1 + \frac{2}{1 + x}$$

$$= -2 + x + 1 + \frac{2}{x + 1}$$

Da für $a,b \geq 0$ immer gilt $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, folgt

$$x + 1 + \frac{2}{x+1} \geq 2\sqrt{(x+1)\left(\frac{2}{x+1}\right)} = 2\sqrt{2}.$$

Daraus folgt weiter

$$\frac{1+x^2}{1+x} \geq -2 + 2\sqrt{2} = 2(\sqrt{2}-1).$$

(B4): (eingesandt von H.-G.Leopold, EOS J.R.Becher, Jena)

a) $7 + \frac{7}{3} + \frac{7}{9} + \ldots$

ist eine unendliche geometrische Reihe mit dem Anfangsglied $a_1 = 7$ und dem Quotienten $q = \frac{1}{3}$. Die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe ist

$$s = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{für} \quad |q| < 1$$

(Dies ergibt sich aus $s_k = a_1 \cdot \frac{1-q^k}{1-q}$

$$\text{und} \lim_{k\to\infty} s_k = \frac{a_1}{1-q} \cdot \lim_{k\to\infty}(1-q^k) = \frac{a_1}{1-q}).$$

Daraus folgt für die gegebene Reihe

$$s = \frac{7}{1-\frac{1}{3}} = \frac{21}{2}$$

b) Damit eine Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert, ist es notwendig, daß ihre Glieder eine Nullfolge bilden. In diesem Falle ist jedoch $\lim_{k\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$. Da die notwendige Bedingung nicht erfüllt ist, kann die Reihe nicht konvergieren.

(B5): (eingesandt von Arnulf Möbius, Spezialklasse der MLU Halle)

Es ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu\frac{\pi}{2}}{2^\nu} =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 4k\frac{\pi}{2}}{2^{4k}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin (4k+1)\frac{\pi}{2}}{2^{4k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin (4k+2)\frac{\pi}{2}}{2^{4k+2}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin (4k+3)\frac{\pi}{2}}{2^{4k+3}}$$

Da aber gilt $\sin 4k\frac{\pi}{2} = \sin (4k+2)\frac{\pi}{2} = 0$

$$\sin (4k+1)\frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{und} \quad \sin (4k+3)\frac{\pi}{2} = -1,$$

folgt $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu\frac{\pi}{2}}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{4k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{2^{4k+3}} =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{4k}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) =$$

$$= \frac{3}{8}\cdot\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16^k} = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{2}{5}$$

(B6): (eingesandt von G.Pradel, EOS J.-R.-Becher, Jena)

Nur im Bereich $-100 \le x \le +100$ sind Lösungen möglich, da $\sin x$ nicht größer als 1 und nicht kleiner als -1 sein kann. Im Bereich $0 \le x \le 100$ $(0\pi \le x \le 31{,}9\pi)$ werden 16 positive Sinuskurvenabschnitte geschnitten, und zwar jeder genau zweimal. Also gibt es dort $16\cdot 2 = 32$ Lösungen. Im negativen Bereich $(-100 \le x \le 0)$ gibt es analog 32 Lösungen, wobei die Lösung $x = 0$ schon im positiven Bereich auftrat. Deshalb hat die Gleichung $\sin x = \frac{x}{100}$ 63 Lösungen.

(B7): (eingesandt von R.Engelmann, EOS Saalfeld)

Es gilt für $n = 0$

$$5^3 + 3^3 = 152 = 8\cdot 19$$

und für $n \ge 1$

$$5^{2n+3} + 3^{n+3}\cdot 2^n =$$

$$= 125\cdot 25^n + 27\cdot 6^n = 125\cdot(19+6)^n + 27\cdot 6^n =$$

$$= 125\left(19^n + \binom{n}{1}19^{n-1}\cdot 6 + \ldots + \binom{n}{n-1}19\cdot 6^{n-1} + 6^n\right) + 27\cdot 6^n =$$

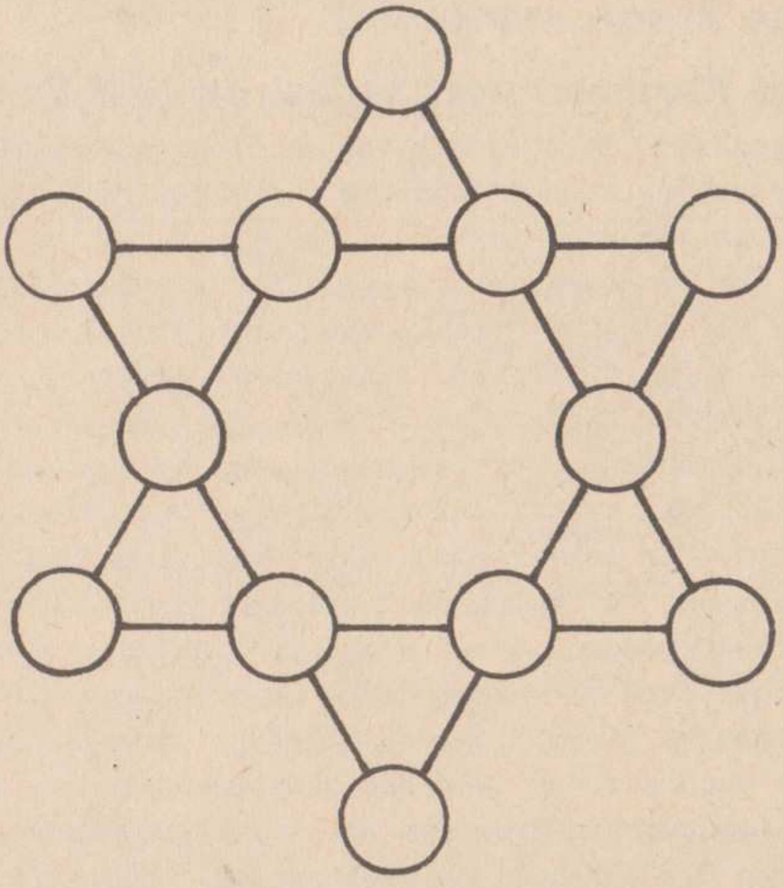
$$= 19\left(125\cdot 19^{n-1} + \binom{n}{1}\cdot 19^{n-2}\cdot 6\cdot 125 + \ldots + 125\binom{n}{n-1}6^{n-1}\right) + 125\cdot 6^n + 27\cdot 6^n =$$

$$= 19\left(125\cdot 19^{n-1} + 125\binom{n}{1}19^{n-2}\cdot 6 + \ldots + 125\binom{n}{n-1}6^{n-1} + 8\cdot 6^n\right)$$

Da in der Klammer eine ganze Zahl steht, ist der gegebene Ausdruck durch 19 teilbar.

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS und SpS zu richten. Einzelbestellungen können auch direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik, DDR 69 Jena
Helmholtzweg 1, "Wurzel-Redaktion"



Man belege die Kreise so mit den Ziffern 1 bis 12, daß sich auf allen Geraden die Summe 26 ergibt! Gibt es nur eine solche Möglichkeit?

6
70

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Die Programmierung des Kleinrechners Cellatron SER 2c (IV)

Nachdem im letzten Beitrag die Voraussetzungen dafür geschaffen wurden, wollen wir nun die einzelnen Befehle des Cellatron näher in Augenschein nehmen.

Um dem Programmierer die Arbeit zu erleichtern, gibt es für jeden Befehl eine symbolische Darstellung. Diese Befehlssymbole sind suggestiver und lassen sich leichter merken als die interne Verschlüsselung der Befehle. Ein Programm wird normalerweise mit Symbolen geschrieben und danach, eventuell durch eine zweite Person, in die interne Darstellung (Maschinenprogramm) überführt. Die so verschlüsselten Informationen können dann abgelocht und mit Hilfe des entstehenden Lochstreifens auf den Befehlsspeicher unseres Rechners tranportiert werden.

Bisher sind wir nicht darauf eingegangen, daß die meisten Programme bei ihrer Abarbeitung fest vorgegebene Zahlen benötigen, die auch auf den HS gebracht werden müssen. Wenn beisspielsweise irgendwo im Programm mit 0,5 multipliziert werden soll, muß diese 0,5 auf dem ZS bereitstehen. Solche fest vorzugebenden Zahlen bezeichnet man als KONSTANTEN. Ein fest vorgegebenes Programm besteht also im allgemeinen aus Befehlen und Konstanten.

Wie aus der untenstehenden Befehlsliste ersichtlich, sind für die Befehlssymbole jeweils vier Spalten vorgesehen, die jedoch nie alle gleichzeitig benutzt werden.

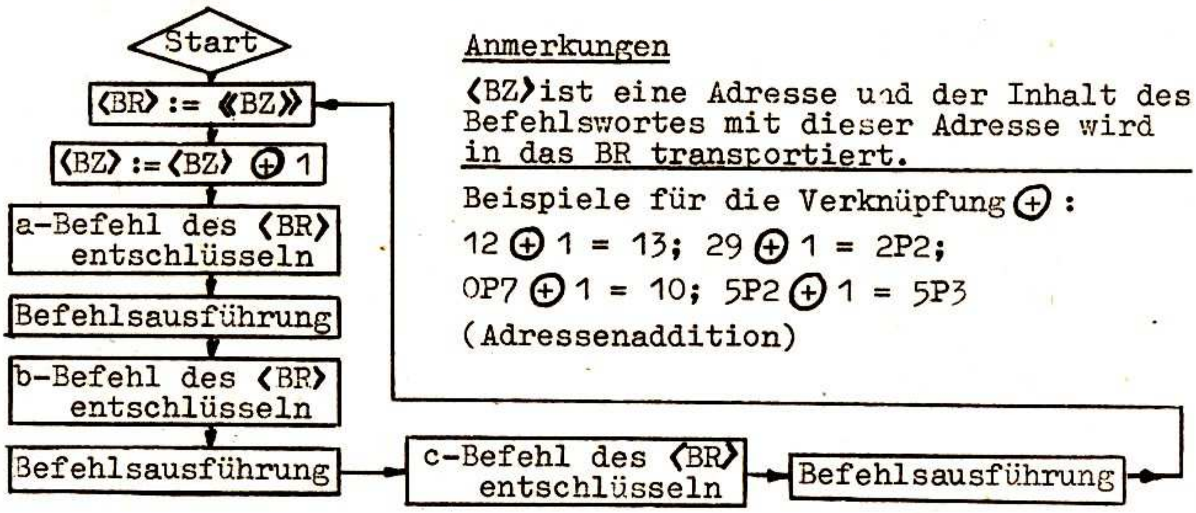
Mit BP wird im folgenden immer die Adresse eines Hauptspeicherplatzes bezeichnet (BP $\neq$ 00); je nach Art des Befehls, in dem die Adresse verwendet wird, ist damit eine BS-Adresse (Sprungbefehle) oder eine ZS-Adresse (sonstige Befehle) gemeint. Die Adresse 00 wird jeweils ausgeschlossen, da Befehle mit dieser Adresse anders abgearbeitet werden, d.h. in gewisser Hinsicht ist nicht nur der Operationsteil eines Befehls, sondern auch die Information des Adressteils für dessen Ablauf verantwortlich. Die HS-Plätze mit der Adresse 00 können demzufolge nicht als Speicher verwendet werden, so daß die Kapazität der beiden Speicherteile nur jeweils 127 Plätze beträgt.

Befehlsliste des Cellatron SER 2c+

Symbol				Interne Verschlüsselung				Bedeutung		
				Tetrade						
Adresse	Operat.	Adresse	Komma	IV	III	II	I			
	+		k	0	0	2k	1	Addition	ohne Adresse	mit k bzw. 0 Kommastellen
	–		k	0	0	2k	2	Subtraktion		
	×		k	0	0	2k	3	Multiplikat.		
	:		0	0	0	0	4	Division		
	+	BP	k	B	P	2k	1	Addition	mit Adresse	
	–	BP	k	B	P	2k	2	Subtraktion		
	×	BP	k	B	P	2k	3	Multiplikat.		
	:	BP	0	B	P	0	4	Division		
!	/		–	0	0	1	5	Eingabe über die FT		
BP	/		–	B	P	0	5	Transport nach R	("Lesen")	
BP	/Ac		–	B	P	2	5	Transport nach Ac		
SL I	/		–	0	0	4	P4	Eingabe über SL I		
SL II	/		–	0	0	8	P4	Eingabe über SL II		
	/	BP	k	B	P	2k	6	Transport in den ZS	("Schreiben")	
	/	Druck	k	0	0	2k	6	Ausgabe über SM		
	SU	BP	–	B	P	0	7	Unbedingter Sprung		
	S–	BP	–	B	P	2	7	Negativsprung		
	So	BP	–	B	P	8	7	Nullsprung		
	S+	BP	–	B	P	P2	7	Positivsprung		
	L		–	0	0	0	P5	Leerschritt		
	T		–	0	0	0	P6	Tabulator		
	W		–	0	0	0	P7	Wagenrücklauf mit Zeilenvorschub (WRZL)		

Natürlich bedarf diese Liste noch einiger Erläuterungen:
k kann nur ganzzahlige Werte von 0 bis 7 annehmen, da, wie wir wissen, eine im Rechner zu speichernde Zahl nie mehr als 7 Stellen nach dem Komma besitzen darf. Im Kommateil der internen Darstellung erscheint die Kommaangabe verdoppelt, allerdings handelt es sich dabei um die besondere Art der Verdoppelung, die das letzte Mal schon erläutert wurde.
Bei Transporten nach einem Register steht die Adresse links, während sie bei Rechenbefehlen und bei Transporten aus dem Ac rechts steht. An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen,

daß Eingaben grundsätzlich nach R und Ausgaben und Transporte in den HS grundsätzlich aus Ac erfolgen (siehe Abschnitt I).
Jeder Befehl kann selbstverständlich mit einem Warteindex versehen werden, der symbolisch durch ein Ausrufezeichen dargestellt wird. Die Tetrade II in der internen Darstellung muß man dann entsprechend ändern. Im Befehl "Eingabe über die Tastatur" ist der Warteindex unbedingt notwendig. Während der Wartezeit kann die einzugebende Zahl eingetastet werden.
Negativ-, Null- und Positivsprünge werden als "bedingte Sprünge" bezeichnet, da der Sprung nur unter der Bedingung ausgeführt wird, daß der Akkumulatorinhalt je nach Art des Sprunges negativ oder 0 oder positiv ist (Der Negativsprung wird also nur ausgeführt, wenn die Dualstelle für das Vorzeichen im Ac mit L besetzt ist.). Bei nichterfüllter Sprungbedingung wirkt so ein Befehl, als wenn er nicht vorhanden wäre, nur ein eventuell vorhandener Warteindex wird beachtet.
Sprungbefehle ohne Adresse werden in diesem Beitrag nicht behandelt.
Um uns weitere lange Erklärungen zu sparen werden wir den Ablauf der Befehle in Form von Flußbildern darstellen. Für den Inhalt eines Speicherplatzes mit der Adresse S oder eines Registers S verwenden wir dabei die Kurzbezeichnung ‹ S ›.
Beispiele: ‹ 1P4 › - Inhalt des HS-Wortes mit der Adresse 1P4
‹ BZ › - Inhalt des Befehlszählers
Im Abschnitt I dieses Beitrages haben wir im Groben die Schritte bei der Abarbeitung eines Befehls kennengelernt. Diese "Befehlsschleife" läßt sich folgendermaßen als Flußbild darstellen:

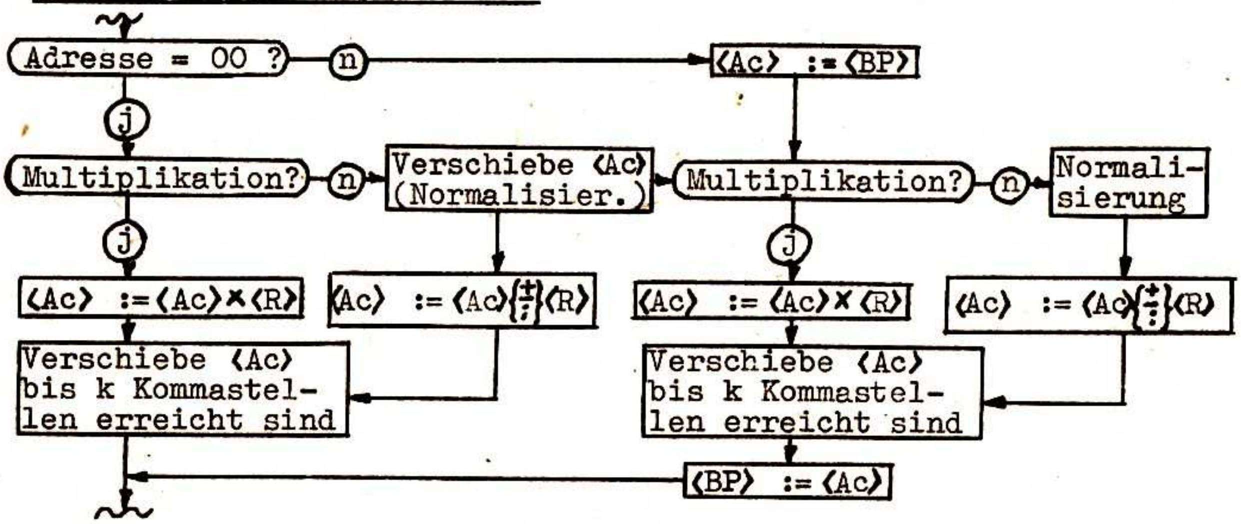


Anmerkungen
⟨BZ⟩ ist eine Adresse und der Inhalt des Befehlswortes mit dieser Adresse wird in das BR transportiert.

Beispiele für die Verknüpfung ⊕ :
12 ⊕ 1 = 13; 29 ⊕ 1 = 2P2;
0P7 ⊕ 1 = 10; 5P2 ⊕ 1 = 5P3
(Adressenaddition)

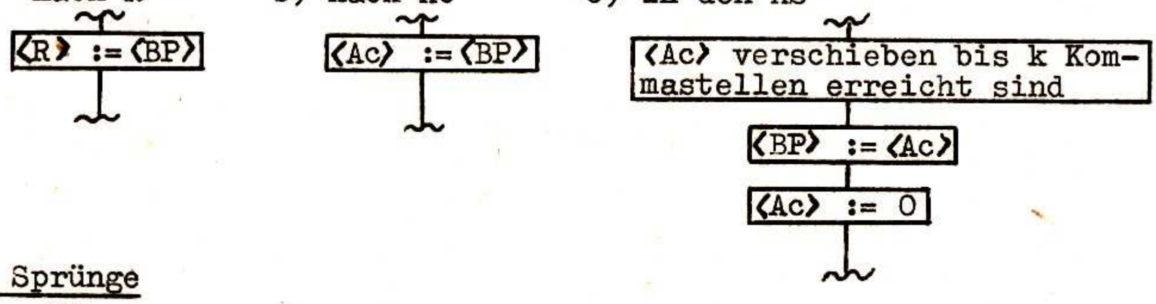
Uns interessiert nun die Befehlsausführung genauer. Die folgenden detaillierten Flußbilder sind Teile der "Befehlsschleife" und deshalb ohne Anfang und Ende gezeichnet.

1. Arithmetische Operationen

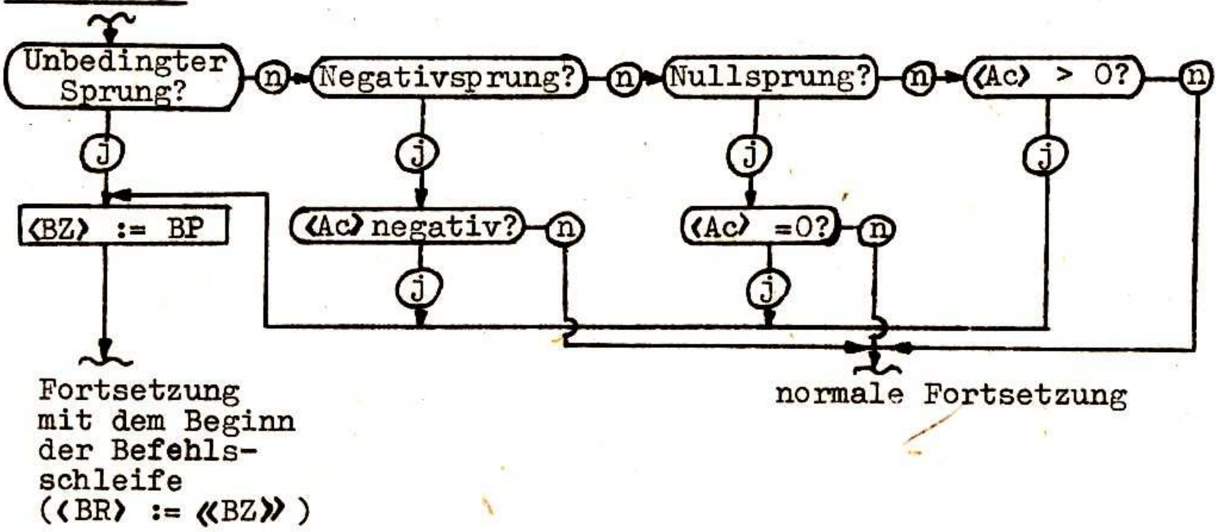


2. Transporte

a) nach R b) nach Ac c) in den HS



3. Sprünge



Erläuterung: Nach Ausführung eines Sprungbefehls mit erfüllter Sprungbedingung wird der a-Befehl des Befehlswortes mit der Adresse BP abgearbeitet.

Die anderen Befehle benötigen nur noch kurzer Erklärungen:
Zu den Ein- und Ausgabebefehlen wurde vorhin schon etwas gesagt. Mit den jetzt vorhandenen Kenntnissen können wir die Wirkung dieser Befehle noch weiter verdeutlichen: Bei Eingaben wird die am betreffenden Eingabegerät anliegende Zahl nach R transportiert und die Ausgabe bewirkt den Ausdruck der in Ac stehenden Zahl mit k Kommastellen, d.h. die Zahl wird eventuell vor der Ausgabe solange verschoben bis sie die gewünschte Anzahl von Stellen nach dem Komma besitzt. Danach wird Ac <u>nicht</u> gelöscht, d.h. nicht 0 gesetzt.

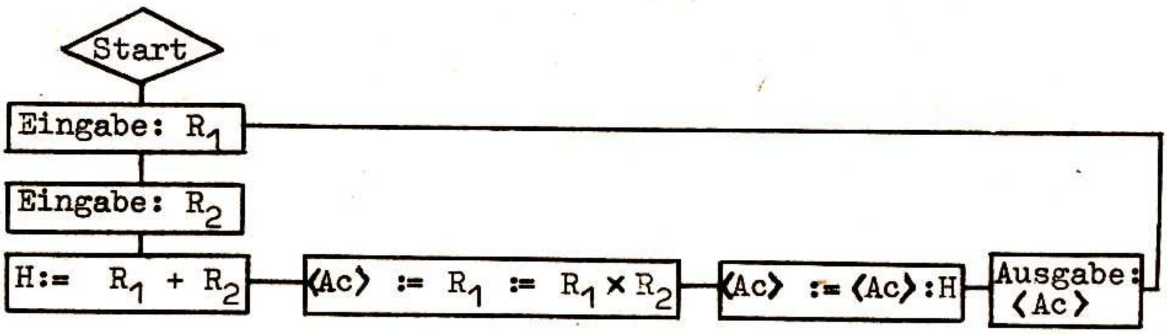
Die Befehle für die Schreibmaschinenbewegungen bewirken nur, daß sich der Wagen so bewegt, wie beim Betätigen der entsprechenden Tasten oder Hebel einer Schreibmaschine (Leertaste, Tabulator, Führungshebel). Zu beachten ist nur, daß der Befehl "WRZL" die Programmabarbeitung stoppt, wenn der Wagen bereits am linken Rand steht. Das hat zur Folge, daß nach einem Befehl "WRZL" erst mindestens ein Befehl durchlaufen werden muß, der den Wagen der Schreibmaschine vorwärtsbewegt, ehe eine neuer "WRZL" abgearbeitet werden kann.

Wir wollen nun die erworbenen Kenntnisse anwenden und ein einfaches Programmbeispiel behandeln.

Das Programm soll folgendes leisten: Zwei Zahlen R_1 und R_2 werden über die Funktionstastatur (FT) eingegeben. Damit wird der Wert

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

berechnet und von der Schreibmaschine mit einer Stelle nach dem Komma ausgedruckt. Danach können dann zwei neue Zahlen eingegeben werden usw.. Der erste Befehl des Programms soll im Befehlswort mit der Adresse 01 stehen.



Wie man sieht, wird für das Ergebnis kein ZS-Wort benötigt. Für die Speicherung der Ausgangsgrößen und Zwischenergebnisse verwenden wir die folgenden ZS-Wörter:

⟨01⟩ – R_1, ⟨02⟩ – R_2, ⟨03⟩ – H.

Außerdem werden noch zwei Konstanten für die Durchführung der Division mit einer Kommastelle benötigt:

⟨04⟩ – 10, ⟨05⟩ – 0,1.

Symbol				⟨R⟩	⟨Ac⟩	interne Verschlüsselung c- Befehl	b- Befehl	a- Befehl	Adresse
	/	01	0	beliebig	0	0021	0015	0106	01
!	/		–	R_1	0				
	+		1	R_1	R_1				
	/	01	1	R_1	0	0021	0015	0126	02
!	/		–	R_2	0				
	+		1	R_2	R_2				
	/	02	1	R_2	0	0021	0125	0226	03
01	/Ac		–	R_2	R_1				
	+		1	R_2	$R_1 + R_2$				
	/	03	1	R_2	0	0425	0123	0326	04
	×	01	1	R_2	$R_1 \times R_2$				
04	/		–	10	$R_1 \times R_2$				
	×		0	10	$10 \times (R_1 \times R_2)$	0004	0325	0003	05
03	/		–	H	$10 \times (R_1 \times R_2)$				
	:		0	H	$10 \times (R_1 \times R_2):H$				
05	/		–	0,1	$10 \times (R_1 \times R_2):H$	0026	0023	0505	06
	×		1	0,1	Ergebnis				
	/	Druck	1	0,1	Ergebnis				
	W		–	0,1	Ergebnis	0000	0107	000P7	07
	SU	01	–	0,1	Ergebnis				

Der Leser möge mit einigen Zahlenbeispielen die Programmabarbeitung des Automaten simulieren, d.h. einen sogenannten Trockentest ausführen (z.B. $R_1 = 10{,}7$; $R_2 = 3{,}4$).
Insbesondere gilt es die Ausführung der Division zu durchdenken und Überlegungen anzustellen, wie Quotienten mit k Kommastellen

($0 \leq k \leq 7$) berechnet werden können.
Zum Abschluß dieses Beitrages werden wir in der nächsten Fortsetzung zwei kompliziertere Programmbeispiele kennenlernen, ohne allerdings noch einmal auf die interne Darstellung der Befehle einzugehen.

H. Schirrmeister
wiss. Ass. im Rechenzentrum
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Preisaufgaben (Serie 6/70)

(B31) Man bestimme alle komplexen Zahlen $z = |z| \cdot e^{i\vartheta}$, $|\vartheta| \leq \pi$, für die gilt $|z - 1| \leq \big||z| - 1\big| + |z|\,|\vartheta|$

Welcher geometrische Sachverhalt wird durch die gegebene Ungleichung ausgedrückt?

(B32) Man zeige, daß die Zahl

$$1\underbrace{0 \ldots 0}_{1961 \text{ Nullen}}1$$ keine Primzahl ist.

(B33) Es ist zu beweisen, daß für ungerades n die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ keine Lösung in ganzen Zahlen besitzt, falls $x + y$ eine Primzahl ist.

(B34) Man gebe alle Polynome P(x) an, für die gilt

$$x \cdot P(x - 1) \equiv (x - 26) \cdot P(x).$$

(B35) Vom Mittelpunkt eines regelmäßigen 25-Ecks wurden Vektoren in jeden Eckpunkt gezeichnet. Man wähle eine Anzahl Vektoren aus diesen 25 so aus, daß ihre Summe betragsmäßig maximal wird.

(B36) In einem quadratischen Schema 9 x 9 sind alle ganzen Zahlen von 1 bis 81 eingetragen. Man zeige, daß es zwei benachbarte Zahlen gibt, deren Differenz nicht kleiner als 6 ist.

Für jeden vollständigen Lösungsweg einer Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).
Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum 10. des folgenden Monats (Datum des Poststempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" an unsere

Adresse einzuschicken.
Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden.
Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

Achtung: Die Fortsetzung des Artikels "Über Lehrprogramme" erscheint erst in der "Wurzel"-Nr.7/8/70.

Aus der Sektion Mathematik

Mittwoch, 29. April 1970 - Die Sektion Mathematik führt eine wissenschaftliche Studentenkonferenz zu Ehren W.I.Lenins durch. "Sozialismus und Wissenschaften bilden eine Einheit" ist das Leitmotiv dieser Arbeitstagung.
"DIE ZUKUNFT DER MENSCHHEIT IST DER SOZIALISMUS-KOMMUNISMUS" - mit diesen Worten wird die Studentenkonferenz eröffnet.
Herr Prof. Dr. A. Pietsch, Direktor der Sektion Mathematik, spricht in seinem Eröffnungsvortrag vom System des wissenschaftlich-produktiven Studiums.
Studenten des zweiten und vierten Studienjahres tragen Kurzreferate vor. Diese Kurzreferate sind Auszüge aus Arbeiten der Studenten zum III. Karl-Marx-Seminar der Friedrich-Schiller-Universität. Dieser theoretische Teil der Konferenz wird mit einem Kurzreferat über "Das Verhältnis von wissenschaftlich-technischem und sozialem Fortschritt" eröffnet.
"Die führende Rolle der Partei der Arbeiterklasse beim ökonomischen Aufbau des Sozialismus","Eine kritische Analyse der bürgerlichen Futurologie" und "Lenin und die Organisation und Leitung der Wissenschaften" sind einige der zu den drei Schwerpunkten vorgetragenen Referate.
Diese Schwerpunkte sind:

A. Lenin über das Verhältnis von Weltanschauung und Naturwissenschaft
B. Lenins Werk und die gegenwärtigen Aufgaben der Wissenschaftsorganisation
C. Die III. Hochschulreform und das Leninaufgebot.

Mit dem Vortrag "Merkmal der sozialistischen Universität - Verbundenheit mit der Praxis" zu Punkt C wird der Konferenzvormittag beendet.

14.oo Uhr - Arbeitsgruppen zu den genannten Schwerpunkten tagen. Eine Arbeitsgruppe diskutiert über den Fachstudienplan, der von der Sektionsleitung unter aktiver Beteiligung der Studenten höherer Studienjahre und aller Wissenschaftler erarbeitet wurde. In anderen Arbeitsgruppen werden die verschiedensten Fragen diskutiert: Was ist eine Weltanschauung? Wann versagt sie? Was ist das Ziel der Wissenschaft? Wie durchdringen sich Natur- und Gesellschaftswissenschaften? Gibt es eine allgemeine Mathematisierung der Wissenschaften? Was bedeutet sozialistische Wissenschaftsorganisation? Wie geht es weiter?
Das sind nur einige Fragen. Viele werden beantwortet, andere müssen weiter diskutiert werden.
Die Konferenz wird am späten Nachmittag beendet.
Die Konferenz hat gezeigt:

> Sozialismus und Naturwissenschaften müssen eine Einheit bilden. Nur dadurch wird Gewaltiges geleistet.
> Die sozialistische Großforschung ist die modernste Form der Wissenschaftsorganisation.
> Die III. Hochschulreform und das Leninaufgebot sind nicht beendet.

Die Konferenz fordert:

> Klarheit bei allen Studenten über die weiteren Aufgaben.
> Aus dieser Klarheit geschöpfte Kraft muß sichtbar werden.
> Das Prinzip des demokratischen Zentralismus muß weiter durchgesetzt werden.

DEM BÜNDNIS VON WISSENSCHAFT, TECHNIK UND PROLETARIAT WIRD KEINE NOCH SO FINSTERE MACHT WIDERSTEHEN KÖNNEN.
Lenin 192o

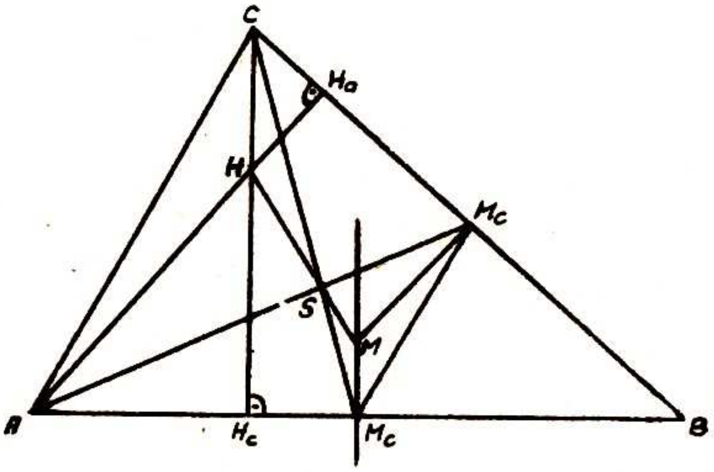
H.G.Koch
III.Stj.

Achtung - Achtung - Achtung - Achtung - Achtung - Achtung - Ach

---

Die lang ersehnten Lehrprogramme werden in den nächsten Tagen an alle Interessenten verschickt!

(B8): (eingesandt von M.Schulze, Spezialklasse 11 der TH Karl-Marx-Stadt)



Es seien A, B, C die Eckpunkte des Dreiecks, H_a, H_c die Fußpunkte der Höhen h_a, h_c, M_a, M_c die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AB}$, H bzw. M die Schnittpunkte der Höhen bzw. der Mittelsenkrechten.

Dann gilt

$CH_c \parallel M_cM$ (Höhe und Mittelsenkrechte)
$AH_a \parallel M_aM$ (Höhe und Mittelsenkrechte)
$AC \parallel M_aM_c$ (Mittellinie und entsprechende Seite)

Damit sind die Dreiecke ΔAHC und ΔMM_aM_c ähnlich und befinden sich sogar in Ähnlichkeitslage. Bei einer solchen Lage schneiden sich die Verbindungslinien homologer (d.h. entsprechender) Punkte in einem Punkt S. Da jedoch die Verbindungslinien der homologen Punkte A und M_a sowie C und M_c zugleich Seitenhalbierende des Dreiecks ΔABC sind, ist S also Schnittpunkt der Seitenhalbierenden. S liegt aber auf einer Geraden mit H und M, da diese homologe Punkte sind. Damit ist der Satz bewiesen.

(B9): (eingesandt von S.Wolf, EOS H.Hertz, Berlin)

$$z = \sqrt{a + bi} = a_1 + b_1 i$$

$$a + bi = a_1^2 - b_1^2 + 2a_1b_1 i$$

Man erhält folgendes Gleichungssystem:

$$a_1^2 - b_1^2 = a \qquad (1)$$
$$2a_1 b_1 = b \qquad (2)$$

(2) in (1) eingesetzt:

$$a_1^2 - \left(\frac{b}{2a_1}\right)^2 = a$$
$$4a_1^4 - 4a_1^2 a - b^2 = 0$$

Als Lösung dieser biquadratischen Gleichung in a_1 erhält man:

$$a_1 = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}$$

Durch Einsetzen in (1) erhält man:

$$b_1 = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß a_1 und b_1 wirklich reell sind.

Aus (2) folgert man:

Wenn $b > 0$, haben a_1 und b_1 gleiches Vorzeichen,
wenn $b < 0$, haben a_1 und b_1 verschiedenes Vorzeichen.

Der Realteil von z heißt also

$$a_1 = \pm \operatorname{sgn} b \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}\,,$$

der Imaginärteil von z heißt

$$b_1 = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}\,.$$

(B10): Es gilt

$$-1 \le \sin n \le 1$$
$$-1 \le \cos n \le 1 \qquad -1 \le \cos^3 n \le 1$$
$$-2 \le \sin n + \cos^3 n \le 2$$
$$(1) \qquad \frac{-2}{n} \le \frac{\sin n + \cos^3 n}{n} \le \frac{2}{n}$$

Ferner gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-2}{n} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0.$$

Damit folgt aus (1):

Auch $a_n = \dfrac{\sin n + \cos^3 n}{n}$ konvergiert gegen 0.

(B11): Die Behauptung ist bewiesen, wenn man folgendes zeigen kann: (1) Für ungerades n gilt $(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{2p^2} - \sqrt{q^2}$
$= p\sqrt{2} - q$

mit natürlichen Zahlen p und q
und $2p^2 = q^2 + 1$.

(2) Für gerades n gilt $(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{r^2} - \sqrt{2s^2}$
$= r - 2\sqrt{2}$
mit natürlichen Zahlen r, s und $r^2 = 2s^2 + 1$.

(1) und (2) werden mit Hilfe der Methode der vollständigen Induktion bewiesen. Wegen der Analogie der Beweise soll hier nur (1) bewiesen werden:

I. Für $n = 1$ gilt $(\sqrt{2} - 1)^1 = 1\sqrt{2} - 1$ mit $2 \cdot 1^2 = 1^2 + 1$

II. Es sei die Behauptung für $n = 2k - 1$ wahr, also $(\sqrt{2} - 1)^{2k-1} = p\sqrt{2} - q$ und $2p^2 = q^2 + 1$.
Dann ist

$$(\sqrt{2} - 1)^{2k+1} = (\sqrt{2} - 1)^{2k-1}(\sqrt{2} - 1)^2 = (p\sqrt{2} - q)(3 - 2\sqrt{2}) = (3p + 2q)\sqrt{2} - (4p + 3q)$$

und es gilt

$$\begin{aligned} 2(3p + 2q)^2 &= \\ &= 18p^2 + 24pq + 8q^2 = \\ &= 16p^2 + q^2 + 1 + 24pq + 8q^2 = \\ &= 16p^2 + 24pq + 9q^2 + 1 = \\ &= (4p + 3q)^2 + 1 \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle ungeraden n bewiesen.

(B12): $\sqrt{|ax - 3| + 6} \leq a$

Beide Seiten der Ungleichung sind nicht negativ

$$|ax - 3| + 6 \leq a^2$$
$$|ax - 3| \leq a^2 - 6$$

Daraus folgt $a \geq \sqrt{6}$

$$-(a^2 - 6) \leq ax - 3 \leq a^2 - 6$$
$$-a^2 + 9 \leq ax \leq a^2 - 3$$
$$-a + \frac{9}{a} \leq x \leq a - \frac{3}{a}$$

Eine eindeutige Lösung existiert nur für

$$-a + \frac{9}{a} = a - \frac{3}{a}$$
$$a = \sqrt{6}.$$

(B14): Der Ausdruck hat nur für $|x| \leq \frac{1}{2}$ (wegen $\sqrt{1 - 4x^2}$) und $x \neq 0$ einen Sinn.

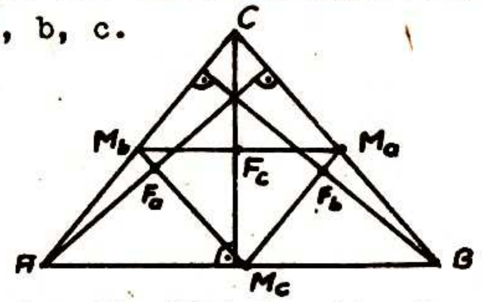
Nun gilt

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{x} = \frac{(1 - \sqrt{1 - 4x^2})(1 + \sqrt{1 - 4x^2})}{x(1 + \sqrt{1 - 4x^2})} = \frac{1 - 1 + 4x^2}{x(1 + \sqrt{1 - 4x^2})} = \frac{4x}{1 + \sqrt{1 - 4x^2}}$$

Der Nenner dieses Bruches ist größer oder gleich 1. Für $|x| \leq \frac{1}{2}$ folgt also $\frac{4x}{1+\sqrt{1-4x^2}} \leq 4x \leq 2 < 3$, d.h. die Ungleichung ist im gesamten Definitionsbereich

$$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \text{ und } 0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ erfüllt.}$$

(B15): Analysis: ABC sei ein beliebiges Dreieck mit den Seiten a, b, c.



M_a, M_b, M_c seien die Mittelpunkte der entsprechenden Seiten. Dann gilt nach dem Strahlensatz:

$$\left.\begin{array}{l} M_aM_c \parallel AC \\ M_bM_c \parallel BC \\ M_aM_b \parallel AB \end{array}\right\} \quad (I)$$

Bezeichnet man die Mittelpunkte der Höhen mit F_a, F_b, F_c, so folgt aus (I) mit dem Strahlensatz:

$$\left.\begin{array}{l} F_a \in M_bM_c \\ F_b \in M_aM_c \\ F_c \in M_aM_b \end{array}\right\} \quad (II)$$

Offensichtlich liegen die Mittelpunkte der Höhen (F_a, F_b und F_c) genau dann auf einer Geraden, wenn sie auf einer der Dreieckseiten M_aM_b, M_aM_c oder M_bM_c liegen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte:

$F_a, F_b, F_c \in M_aM_b$.

Mit (II) folgt sofort: $F_a = M_b$ und $F_b = M_a$.

Das heißt: $AM_b \perp BC$ (oder $AC \perp BC$).

Daraus folgt: Die Mittelpunkte der Höhen eines Dreiecks liegen genau dann auf einer Geraden, wenn das Dreieck rechtwinklig ist.

(B17): (eingesandt von G. Thieme, Spezialklasse 11 der TH Karl-Marx-Stadt). Der Beweis wird indirekt geführt.

Annahme: Es gibt keine drei Wissenschaftler, die untereinander das gleiche Thema behandeln.

Dann gilt: Ein Wissenschaftler steht mit 16 Wissenschaftlern über höchstens drei Themen in Briefwechsel. Nach dem Schubfachschluß von Dirichlet muß er mindestens ein Thema mit mindestens sechs Wissenschaftlern behandeln.
Diese Wissenschaftler können nur die beiden anderen Themen zur Grundlage ihrer Korrespondenz untereinander gemacht haben, sonst würde ein Widerspruch zur Annahme auftreten.

Ein Wissenschaftler von diesen sechs steht mit den 5 anderen in Briefwechsel und behandelt (nach Dirichlet) mit mindestens drei Wissenschaftlern ein und dasselbe Thema.
Diese drei Wissenschaftler können also untereinander weder über das erste Thema noch über das zweite Thema korrespondieren (Widerspruch zur Annahme).
Daraus folgt: Sie korrespondieren über das dritte Thema.
Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme, und deshalb gibt es stets drei Wissenschaftler, die über das gleiche Thema in Korrespondenz stehen.

(B18): Es soll die Anzahl der Lösungspaare (x,y) der Gleichung $x^2 - y^2 = n$ bestimmt werden. Man formt um:

$$(x - y)(x + y) = n.$$

Der Einfachheit halber sei $x \geq 0$ und $y \geq 0$.
Daraus folgt: $x + y \geq x - y$.
Es sei $n = d_1 \cdot \overline{d}_1$ eine beliebige Faktorenzerlegung von n mit $d_1 \leq \overline{d}_1$. Dann hat das Gleichungssystem

$$x - y = d_1$$
$$x + y = \overline{d}_1$$

stets genau eine Lösung: $x = \dfrac{d_1 + \overline{d}_1}{2}$, $y = \dfrac{\overline{d}_1 - d_1}{2}$
und es gilt $(x - y)(x + y) = d_1 \cdot \overline{d}_1 = n$
und entsprechend $x^2 - y^2 = n$.
Da für x und y nur ganze Zahlen zugelassen sind, muß entweder d_1 gerade und $\overline{d}_1$ gerade
oder d_1 ungerade und $\overline{d}_1$ ungerade sein.
Man hat also zu unterscheiden, wieviel verschiedene Zerlegungen in zwei gerade bzw. zwei ungerade Faktoren die Zahl n besitzt.
1. Fall: n sei ungerade.

$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\nu_i}$ sei die Primfaktorzerlegung von n, mit

$p_i \neq p_j$ für $i \neq j$. Dann besitzt n genau $\prod_{i=1}^{k}(\nu_i + 1)$ verschiedene Teiler.

Beweis: Wenn zwei teilerfremde Zahlen n_1, n_2 l_1 bzw. l_2 Teiler besitzen, dann besitzt das Produkt $l_1 \cdot l_2$ Teiler, denn man kann jeden Teiler von n_1 mit jedem Teiler von n_2 multiplizieren und erhält stets einen Teiler von $n_1 \cdot n_2$. Umgekehrt läßt sich jeder Teiler von $n_1 \cdot n_2$ so in zwei Faktoren zerlegen, daß der eine Faktor Teiler von n_1 und der zweite Teiler von n_2 ist.

Da verschiedene Primzahlen teilerfremd sind, gilt somit die Behauptung.

Zu jedem Teiler d von n gibt es einen zugehörigen Teiler $\overline{d}$ mit $\overline{d} = \frac{n}{d}$. Wenn die Zahl n l Teiler besitzt, gibt es demnach $\left[\frac{l+1}{2}\right]$ Paare zugehöriger Teiler.

Ergebnis: Für $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\nu_i}$, $p_i \neq 2$, p_i Primzahl, $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$ gibt es

$$\left[\frac{\prod_{i=1}^{k}(\nu_i + 1) + 1}{2}\right]$$ Lösungen der Gleichung $x^2 - y^2 = n$.

2. Fall: n gerade, d.h.

$n = 2^{\alpha} \cdot \prod_{i=1}^{k} p_i^{\nu_i}$, $p_i \neq 2$, p_i Primzahl $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$

Aus dem vorhergehenden folgt:

1. n besitzt $(\alpha + 1) \cdot \prod_{i=1}^{k}(\nu_i + 1)$ Teiler
2. n besitzt $\prod_{i=1}^{k}(\nu_i + 1)$ ungerade Teiler und ebensoviele zugehörige (d.h. solche, die durch 2^{α} teilbar sind).

Man erhält $$\left[\frac{(\alpha - 1) \cdot \prod_{i=1}^{k}(\nu_i + 1) + 1}{2}\right]$$ Paare zusammengehöriger Teiler, von denen jeder gerade ist. Folglich gibt es ebensoviele Lösungen der Gleichung $x^2 - y^2 = n$.

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS und SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
DDR 69 Jena, Helmholtzweg 1
"Wurzel-Redaktion"

7/8

70

WURZEL

zeitschrift für mathematik an

ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
FDJ-Aktiv der
Sektion Mathematik
an der
Friedrich-Schiller-
Universität Jena

Die Programmierung des Kleinrechners Cellatron SER 2c (V)

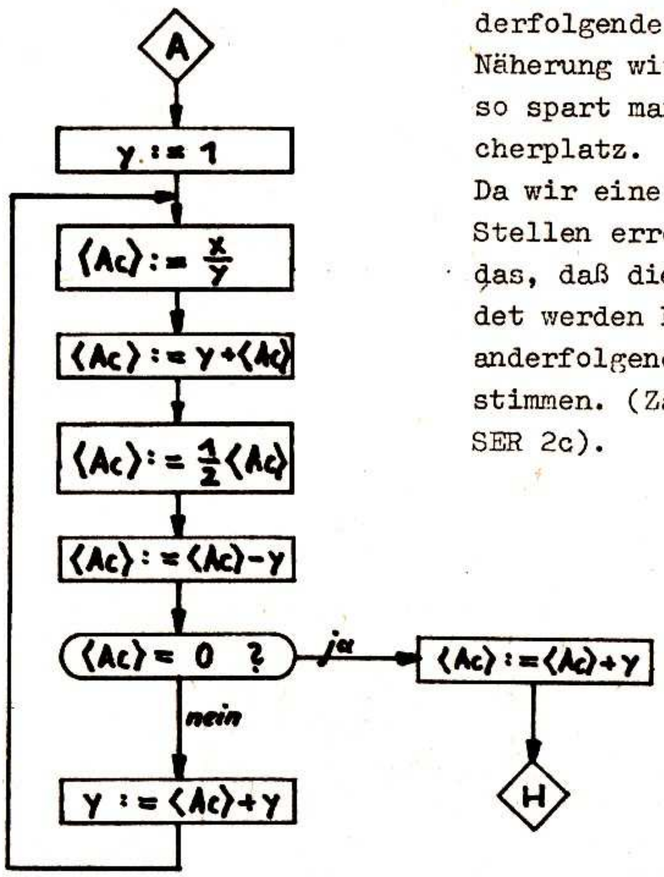
IV) Programmbeispiel

Wie in der letzten Fortsetzung bereits erwähnt, wollen wir uns als Abschluß des Beitrages zwei Programmbeispiele ansehen. Zuerst werden wir uns mit der Berechnung der Wurzel einer positiven Zahl beschäftigen. Dazu verwenden wir den Algorithmus, der bereits zweimal in der WURZEL (11/68, 2/70) erwähnt wurde.

Aufgabe:
- Das Programm soll bei Adresse 01 beginnen.
- Der Radikand x wird in Ac bereitgestellt.
- Das Ergebnis y soll nach Durchlauf des Programms ebenfalls in Ac stehen.
- y soll auf 7 Stellen nach dem Komma genau sein.

Das bekannte Flußbild wird für unsere Zwecke etwas abgeändert: Die einzelnen Näherungen werden nicht alle gleichzeitig benötigt, sondern immer zwei aufeinanderfolgende. Für die zu berechnende Näherung wird nur der Ac verwendet, so spart man Rechenzeit und Speicherplatz.

Da wir eine Genauigkeit von sieben Stellen erreichen wollen, heißt das, daß die Berechnung erst beendet werden kann, wenn zwei aufeinanderfolgende Näherungen übereinstimmen. (Zahlendarstellung im SER 2c).



Das Programm benötigt folgende Konstanten:

Adresse	7P2	7P3	7P4	7P5
Inhalt	0,5	10^{-7}	10^{7}	1

Selbstverständlich können diese Zahlen auch auf beliebigen anderen Plätzen des ZS bereitgestellt werden. Die interne Verschlüsselung der Zahlen wie auch dann der Befehle wird hier nicht mehr angegeben. Ich empfehle dem Leser, das zur Übung selbständig zu besorgen. Vom Programm werden weiterhin noch die Plätze 7P6 für y und 7P7 gebraucht. Auf das Wort mit der Adresse 7P7 wird aus programmtechnischen Gründen 10^7x gespeichert.

Programm: (symbolisch)

Befehlssymbol				$\langle R\rangle$	$\langle Ac\rangle$	Adr.	Bemerkungen
7P4	$\mid$		–	10^7	x	01	
	x		0	10^7	10^7x		
	$\mid$	7P7	0	10^7	0		
7P5	$\mid_{Ac}$		–	10^7	1	02	
	$\mid$	7P6	0	10^7	0		$y:=1$
7P6	$\mid$		–	y	0		
7P7	$\mid_{Ac}$		–	y	10^7x	03	
	:		0	y	$10^7\cdot\frac{x}{y}$		
7P3	$\mid$		–	10^{-7}	$10^7\cdot\frac{x}{y}$		$\langle Ac\rangle := \frac{x}{y}$
	x		7	10^{-7}	$\frac{x}{y}$	04	
7P6	$\mid$		–	y	$\frac{x}{y}$		
	+		7	y	$y+\frac{x}{y}$		
7P2	$\mid$		–	0,5	$y+\frac{x}{y}$	05	
	x		7	0,5	$\frac{1}{2}(y+\frac{x}{y})$		$\langle Ac\rangle := \frac{1}{2}(y+\frac{x}{y})=y_{neu}$
7P6	$\mid$		–	y	y_{neu}		
	–		7	y	$y_{neu}-y$	06	
	S_0	08	–	y	$y_{neu}-y$		
	+		7	y	y_{neu}		
	$\mid$	7P6	7	y	0	07	$y:= y_{neu}$
	SU	03	–	y	0		

Befehlssymbol				⟨R⟩	⟨Ac⟩	Adr.	Bemerkungen
	+		7	y	y_{neu}	08	⟨Ac⟩:= y_{neu}
!	SU	01	-	y	y_{neu}		stopp

Hinweis:
x muß kleiner als 1000 sein, damit bei der Multiplikation mit 10^7 kein Überlauf eintritt. Diese Forderung ist auch sinnvoll, wenn man davon ausgeht, daß der Radikand auch 7 Stellen nach dem Komma besitzt.

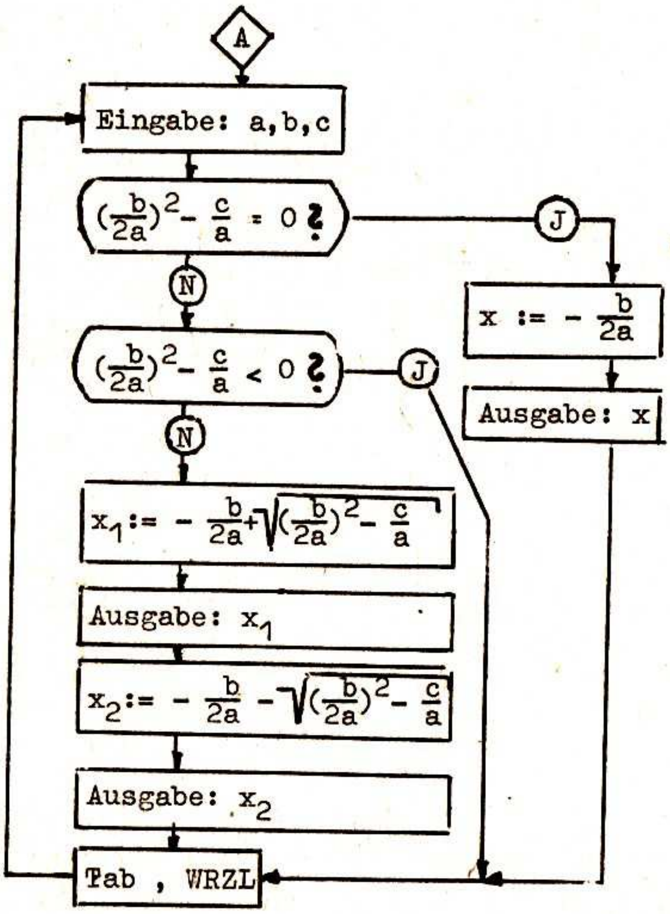
Aus diesem Programm ist u.a. ersichtlich, wie die Division so ausgeführt wird, daß die Genauigkeit des Ergebnisses 7 Stellen nach dem Komma beträgt.

Wurzelberechnungen werden in den verschiedensten Programmen gebraucht. Im folgenden Beispiel werden wir das eben geschriebene Wurzelprogramm verwenden.

Aufgabe: Berechne die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2+bx+c=0$!

- a,b,c werden durch Handeingabe eingegeben.
- Ausgabe auf SM:
  - a) x_1,x_2 in einer Zeile und danach WRZL, wenn zwei reelle Lösungen existieren.
  - b) x_1 in einer Zeile und danach WRZL, wenn eine reelle Doppellösung existiert.
  - c) WRZL, wenn keine reelle Lösung existiert.
- Nach Beendigung der Rechnung soll der Automat zur nächsten Rechnung bereit sein, d.h. das Programm hat kein Ende.
- Das Programm soll bei 09 beginnen.

Das Flußbild wird diesmal nicht so detailiert angegeben:



Um das Wurzelprogramm verwenden zu können, muß der letzte Einzelbefehl dieses Programms in einen unbedingten Sprung zur Adresse 12 umgewandelt werden. (Sprung zur Fortsetzung nach der Wurzelberechnung).
Das Programm benötigt neben den Konstanten und den restlichen beiden Speicherplätzen des Wurzelprogramms noch die Wörter mit Adressen 6P6 und 6P7.
Das Programm ist wieder so angelegt, daß möglichst wenig Speicherplatz benötigt wird.

Programm: (symbolisch)

Befehlssymbol				⟨R⟩	⟨Ac⟩	Adr.	Bemerkungen
	|	6P7	0	beliebig	0	09	⟨Ac⟩ löschen
!	|		–	c	0		
	+		7	c	c		

Befehlssymbol				⟨R⟩	⟨Ac⟩	Adr.	Bemerkungen
7P4	|		–	10^7	c	OP2	Reihenfolge der Eingabe: c, b, a.
	x		0	10^7	10^7c		
	|	6P7	0	10^7	0		
!	|		–	b	0	OP3	
	–		7	b	$-b$		
7P4	|		–	10^7	$-b$		
	x		0	10^7	-10^7b	OP4	
!	|		–	a	-10^7b		
	:		0	a	$-10^7\frac{b}{a}$		
	|	6P6	0	a	0	OP5	
	:	6P7	0	a	$10^7\cdot\frac{c}{a}$		
7P3	|		–	10^{-7}	$10^7\cdot\frac{c}{a}$		
	x	6P6	7	10^{-7}	$-\frac{b}{a}$	OP6	
	x	6P7	7	10^{-7}	$\frac{c}{a}$		
7P2	|		–	0,5	$\frac{c}{a}=q$		
	x	6P6	7	0,5	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}=p$	OP7	
6P6	|		–	p	p		
	x		7	p	p^2		
6P7	|		–	q	p^2	10	
	–		7	q	p^2-q		
	S_0	15	–	q	p^2-q		Sprung, wenn $p^2-q=0$
	S–	16	–	q	p^2-q	11	Sprung, wenn $p^2-q<0$
	SU	01	–	q	p^2-q		Sprung zur Wurzelberechnung
6P6	|		–	p	$\sqrt{p^2-q}$	12	Fortsetzung nach Wurzelberechnung
	+		7	p	x_1		
	|	Druck	7	p	x_1		Druck: x_1
	–		7	p	$\sqrt{p^2-q}$	13	
	|	6P7	7	p	0		
6P7	|		–	$\sqrt{p^2-q}$	0		

Befehlssymbol				$\langle R \rangle$	$\langle Ac \rangle$	Adr.	Bemerkungen
	–	6P6	7	p^2-q	x_2	14	
	|	Druck	7	p^2-q	x_2		Druck x_2
	SU	16	–	p^2-q	x_2		
6P6	$\|_{Ac}$		–	q	p	15	
	|	Druck	7	q	p		Druck x
	SU	16	–	q	p		
	T		–			16	
	W		–				
	SU	09	–				

Zum Abschluß möchte ich noch einmal darauf hinweisen, daß für das volle Verständnis des gesamten Beitrages selbständiges Üben notwendig ist.

Harald Schirrmeister
wissenschaftlicher Assistent
im Rechenzentrum der
Friedrich-Schiller-Universität
Jena

Harald Schirrmeister studierte von 1962 bis 1967 an der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Er gehört zu den Initiatoren von Schülerzirkeln, Mathematiklagern und unserer WURZEL. Nachdem er sein Studium mit sehr guten Ergebnissen vorfristig abgeschlossen hatte, leistete er seinen Ehrendienst in der NVA. Nach Beendigung seines Wehrdienstes wurde er wissenschaftlicher Assistent im Rechenzentrum der Universität Jena, in dem er jetzt als Problemanalytiker arbeitet.

ACHTUNG - ACHTUNG - ACHTUNG - ACHTUNG - ACHTUNG - ACHTUNG - ACHT

Aus technischen Gründen können wir in den WURZEL-Nummern 6/70 und 7/8/70 keine Bilder veröffentlichen (Terminverzögerung). Wir bitten unsere Leser um Verständnis!

Die Redaktion

Über Lehrprogramme II

In WURZEL 5/70 war über das Grundprinzip von Lehrprogrammen berichtet worden. Am Beispiel eines an der Sektion Mathematik entwickelten linearen Programmes war gezeigt worden, wie man mit Hilfe eines solchen programmierten Lehrbuchs lernen kann. Als zweiter Grundtyp von Lehrprogrammen wurde das *verzweigte Programm* genannt. Auch hier werden Informationen (I) oder Mitteilungen (M) geboten, aus denen sich Aufgaben (A) verschiedener Art ergeben. Auch beim Lernen mit einem verzweigten Programm müssen Fragen beantwortet, Beispiele gerechnet oder Aufträge erfüllt werden. Das verzweigte Programm hält ebenso wie das lineare Lösungen (L) bereit.
Nachdem der Lernende die Information gründlich durchgearbeitet und gegebenenfalls eine Aufgabe schriftlich gelöst hat, werden ihm mehrere fertige Lösungen (meist 3 bis 5) zur Auswahl angeboten. Er wählt aus dem Angebot diejenige Antwort aus, die seiner Meinung nach richtig ist (Auswahl-Antwort-Prinzip). Wählt der Lernende die richtige, wird er im Programm weitergeführt. Wählt er eine falsche Antwort, werden ihm entsprechend dem Grad seiner Fehlentscheidung Hilfen angeboten, die ihn schließlich - die nötigen Anstrengungen vorausgesetzt - die richtige Lösung finden lassen. Die Hilfen können in Inhalt und Umfang sehr unterschiedlich sein und reichen von einem erläuternden Satz oder einer Skizze über Hilfsinformationen (HI), Hilfsaufgaben (HA) und deren Lösungen (HL) bis zu vollständigen Unterprogrammen.
Ein Ausschnitt aus einem Auswahl-Antwort-Programm, das sich ebenfalls mit dem Dualsystem befasst, soll Ihnen einen kleinen Einblick in die Arbeit mit einem verzweigten Lehrprogramm geben. Es muß betont werden, daß hier nur eine aus der großen Zahl der Möglichkeiten angeführt werden kann.
Das Beispiel schließt sich an I_{20} und A_{20} des ersten Teils unseres Artikels über Lehrprogramme an.
Es geht um die Addition von Dualzahlen.

I21

In einigen Additionsaufgaben treten zusätzliche Schwierigkeiten auf.

Verfolgen Sie den in Worten angegebenen Rechenweg langsam und sorgfältig !

Beispiel:

	e	d	c	b	a
		L	L	L	L
+			L	L	L
	~~L~~	~~L~~	~~L~~	~~L~~	
	L	O	L	L	O

a) L plus L gleich Zwei, schreibe O, merke L !

b) L plus L gleich Zwei,
Zwei plus L gleich Drei, schreibe L, merke L !

c) L plus L gleich Zwei,
Zwei plus L gleich Drei, schreibe L, merke L !

d) L plus L gleich Zwei, schreibe O, merke L !

e) O plus L gleich L, schreibe L !

A21

Lösen Sie die folgende Aufgabe in ihrem Heft! Kreuzen Sie dann diejenige Lösung an, die Ihrer Meinung nach richtig ist.
Vergleichen Sie bitte erst danach mit den Lösungen auf der nächsten Seite!

Aufgabe: LLLLLL + LLLLO

Welche der folgenden Lösungen ist richtig?

1) LLLLOLL
2) LOOOOOL
3) LOLLLOL

Auf der nächsten Seite steht dann:

L21

1) Die Aufgabe ist falsch gelöst.
Möglicherweise haben Sie die Summanden falsch untereinandergeschrieben.

a) Vergleichen Sie, ob die Aufgabe wirklich folgendermaßen in Ihrem Heft steht:

```
   LLLLLL
 +  LLLLO
 --------
```

b) Arbeiten Sie die Aufgabe in I_{21} ~~zu~~nächst noch einmal gründlich durch!

c) Lösen Sie die Aufgabe aus A_{21} noch einmal!

---

2) Falsch!

Offensichtlich haben Sie nicht beachtet, daß mehrmals nächsthöhere Zweierpotenzen zu merken sind.

a) Arbeiten Sie I_{20} nochmals durch. (Die Aufgaben aus A_{20} brauchen Sie nicht zu lösen!)

b) Arbeiten Sie I_{21} noch einmal durch!

Beachten Sie jeden Hinweis in der Erklärung unter dem Beispiel! Durchdenken Sie insbesondere die Zeilen b) und c) !

c) Lösen Sie A_{21} noch einmal !

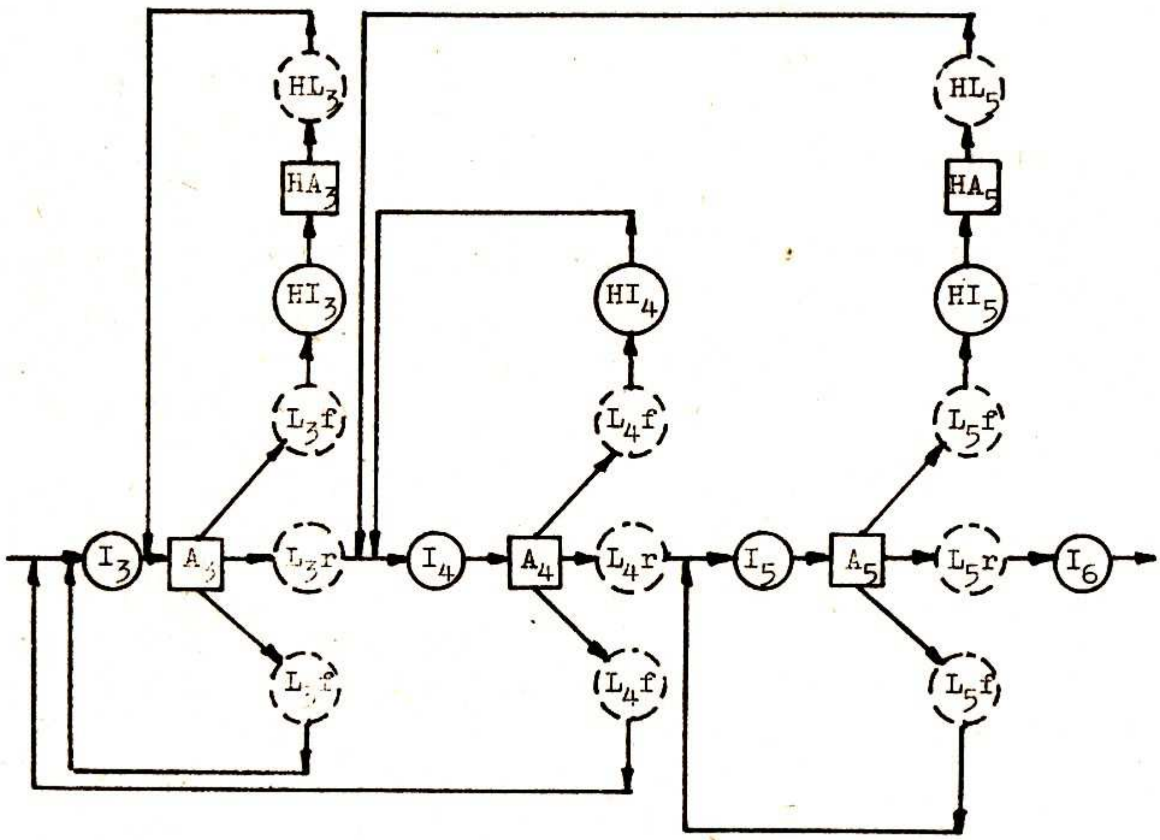
---

3) Sie haben diese relativ schwierige Aufgabe richtig gelöst.

Sie dürfen zur Multiplikation von Dualzahlen (I_{22}) übergehen.

Die mögliche Struktur eines verzweigten Programmes soll am folgenden Schema dargestellt werden. Verfolgen Sie einmal die möglichen Lernwege! Sie werden bald erkennen, daß jeder entsprechend seinen individuellen Gegebenheiten lernen kann. Wer Hilfen braucht, erhält sie. Wer die Information sofort verstanden hat und demnach die richtige Antwort geben konnte, wird im Programm weitergeführt, unter Umständen darf er eine oder mehrere Informationen überspringen, zum Beispiel dann, wenn er bereits drei oder vier Fragen sofort richtig beantwortet hat.

Über programmiertes Lehrmaterial und programmierten Unterricht könnte man noch sehr viel berichten. Es gibt auch noch sehr viele ungelöste Probleme.
Aber bereits aus den bisherigen Ausführungen haben Sie sicher



erkannt, daß die Arbeit mit Lehrprogrammen, ob diese an Hand eines programmierten Lehrbuches oder mit Hilfe einer Lehrmaschine erfolgt, Vorteile bietet. Dazu gehören: Jeder Lernende kann entsprechend seinen individuellen Besonderheiten arbeiten. Er kann das Lerntempo selbst bestimmen, braucht sich nicht nach der Klasse zu richten und kann jeden Gedanken in Ruhe zu Ende denken. Jeder Lernende erfährt sofort sein Lernresultat. Er hat häufig Erfolgserlebnisse und wird dadurch zu neuen Anstrengungen angeregt. Jeder muß ständig aktiv tätig sein. Dabei hat er bei gewissenhafter Arbeit die Chance, das Lernziel sicher zu erreichen. Das Lernen erfolgt gesteuert. Unnötige Umwege werden vermieden. Es besteht die Möglichkeit, Lücken jederzeit durch Nachlesen auszufüllen. Durch das Lernen mit programmiertem Lehrmaterial wird der Einzelne besser in die Lage versetzt, erfolgreich mit einem Lehrbuch zu arbeiten, Wesentliches von Un-

wesentlichem zu unterscheiden u. a. m.
Der Lehrer kann sich ständig über den Verlauf des Lernprozesses bei jedem Einzelnen überzeugen und ihm entsprechend seiner individuellen Lage Hilfen geben.
Ein Nachteil der Arbeit mit programmiertem Lehrmaterial besteht zum Beispiel darin, daß der Kontakt zum Kollektiv eingeschränkt ist und die sprachliche Entwicklung etwas in den Hintergrund tritt.
Es ist keineswegs daran gedacht, den gesamten Unterricht oder das gesamte Studium mit Hilfe von Lehrprogrammen durchzuführen. Programmiertes Lehrmaterial kann aber eine wertvolle Hilfe bei der raschen und sicheren Aneignung von Wissen und Können sein, wie unsere zahlreichen Versuche gezeigt haben.

Oberlehrer Reinhold Mattasch
wissenschaftlicher Assistent
an der Sektion Mathematik
der Friedrich-Schiller-Universität
Jena

Oberlehrer Reinhold Mattasch gehört zu den Wissenschaftlern, die nach langjähriger Schulpraxis an unsere Sektion kamen und in der Lehrerausbildung tätig sind.
1925 geboren, besuchte er nach dem Abitur 1946 einen Kurs für Neulehrer. Danach half er im Kreis Altenburg in den schweren Jahren des Neubeginns als Lehrer, Schulleiter und in zahlreichen gesellschaftlichen Funktionen beim Aufbau unserer demokratischen Schule.
Selbst ständig lernend, war er an der Ausbildung von Lehrern beteiligt. Im Fernstudium erwarb er die Qualifikation eines Oberstufenlehrers in Mathematik. Vielen Jenaern ist er seit 1952 als Lehrer, Klassenleiter und Schuldirektor bekannt. 1962 kam Reinhold Mattasch als wissenschaftlicher Assistent an die Abteilung Methodik des Mathematikunterrichts der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Seit 1965 beschäftigt er sich mit Problemen des programmierten Unterrichts. Dabei untersuchte er besonders den Aneignungsprozeß bei leistungsschwachen Schülern. Bei seiner gegenwärtigen Promotion wünscht ihm WURZEL viel Erfolg!

Preisaufgaben (Serie 7/8/70)

(B37) Man zeige

$$[x] + \left[x+\frac{1}{n}\right] + \left[x+\frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x+\frac{n-1}{n}\right] = [nx] \; ,$$

wobei $[x]$ die größte ganze Zahl ist, die x nicht übertrifft.

(B38) Es seien x_1, x_2 und x_3 Lösungen der Gleichung

$$x^3 - x^2 - 1 = 0 \, .$$

Man stelle eine Gleichung auf, deren Lösungen x_1+x_2, x_2+x_3, x_1+x_3 sind!

(B39) Ein Polynom $P(x)$ lasse bei der Division durch $x-a$, $x-b$, $x-c$ die Reste A, B bzw. C. Wie groß ist der Rest, den $P(x)$ bei der Division durch $(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c)$ läßt?

(B40) Innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks ΔABC befinde sich ein Punkt P, von dem aus die Senkrechten $\overline{PD}$, $\overline{PE}$ bzw. $\overline{PF}$ auf $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ bzw. $\overline{AB}$ gezogen seien. Wie groß ist

$$\frac{\overline{PD} + \overline{PE} + \overline{PF}}{\overline{BD} + \overline{CE} + \overline{AF}} \quad ?$$

(B41) Man beweise: Ist die Zahl abc (a,b,c sind die Ziffern dieser Zahl im Dezimalsystem) durch 37 teilbar, so sind auch die Zahlen bca und cab durch 37 teilbar.

(B42) Welchen maximalen Wert kann der Betrag einer komplexen Zahl z annehmen, wenn gelten soll

$$\left|z + \frac{1}{z}\right| = 1 \; ?$$

Für jeden vollständigen Lösungsweg einer Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).
Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen der Serie 7/8 sind bis 20.8. (Datum des Poststempels) unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgabe" an unsere Adresse einzuschicken. Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten

Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden.
Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

Aus der Sektion Mathematik

Im April war der stellverstretende Direktor des statistischen Laboratoriums der Universität Moskau, Prof. J.K.Beljajew, Gast der Sektion Mathematik. Vor den Mitarbeitern und Studenten des Bereichs Wahrscheinlichkeitsrechnung gab er in einem Vortrag einen Überblick über die wichtigsten Probleme, die gegenwärtig in seinem Institut bearbeitet werden. In einem weiteren Vortrag berichtete er über seine eigenen Forschungen auf dem Gebiet der zufälligen Punktfolgen. Eingehend ließ sich Prof. Beljajew über das geplante Forschungsprofil des Bereiches Wahrscheinlichkeitsrechnung berichten und erteilte wertvolle Ratschläge. Es wurde vereinbart, im nächsten Jahr einen Aspiranten zu Prof. Beljajew nach Moskau zu entsenden.

* *

In einem Klubabend der Sektion Mathematik berichtete Dr. Linde (Hochschulbereich Medizin) über seine Eindrücke bei einer 8-wöchigen Studienreise durch die DRV. Unterstützt von Farblichtbildern vermittelte er ein lebendiges und eindrucksvolles Bild vom um seine Freiheit kämpfenden vietnamesischen Volk.

* *

Beim internationalen Subbotnik am 11./12.4 waren 190 FDJ-ler der Sektion Mathematik im Einsatz. Sie arbeiteten an verschiedenen Objekten des VEB IHK Gera und im Wohngebiet Leninstraße. Im Rahmen unserer Initiative zur Aufstellung eines Montageleichtbaus (vergl. S. 120) werden alle anderen FDJ-Studenten einen solchen Arbeitseinsatz ableisten.

* *

Im April veranstaltete der Bereich Numerische Mathematik in Georgenthal seinen diesjährigen Seminaraufenthalt mit 16 Studenten des IV. und V. Studienjahres. In Vorträgen wurden spe-

zielle Probleme der mathematischen Verfahrenstechnik behandelt, die von besonders aktueller Bedeutung für den künftigen Einsatz der Studenten in der Praxis sind. Hierzu gehören vor allem die Intervall-Rechentechnik und die Anwendung von Monte-Carlo-Methoden auf Rechenautomaten.
Kultureller Höhepunkt neben einem Ausflug und einem geselligen Abend war eine von Studenten gestaltete Lenin-Feier. Rezitationen und Schilderungen aus dem Leben Lenins wurden umrahmt von russischer Volksmusik und Lenin gewidmeter sowjetischer Musik, so daß ein lebendiger Eindruck von der Größe des Menschen Lenin und seines Werkes vermittelt wurde.

* *

Die Studenten der Friedrich-Schiller-Universität Jena kämpfen, wie an allen Universitäten und Hochschulen der DDR, um die Durchsetzung des wissenschaftlich-produktiven Studiums. Aus der Notwendigkeit, die Zahl der wissenschaftlichen Kader auf allen Gebieten der Volkswirtschaft zu erhöhen und die entsprechenden Plangrößen von 1980 bereits 1975 zu erreichen, also die Studentenzahlen bereits jetzt erheblich zu erhöhen, folgte unter anderem das Problem: "Wie werden unsere Studenten im kommenden Studienjahr wohnen?" Die Studenten des II. Studienjahres Mathematik/Physik-Lehrer fanden einen Ausweg: "Im Rahmen unserer Studentenbrigaden bauen wir Unterkünfte für die Studenten!"
Diese Initiative wurde von staatlicher Leitung der Sektion und der Universitätsparteileitung sehr unterstützt. Es war unter anderem notwendig, Material zu beschaffen, organisatorische Vorbereitungen zu treffen, Vorlesungen umzulegen. Jetzt wurde den Studenten der Sektionen Mathematik und Physik für den wissenschaftlichen Gerätebau die Erstellung eines Montageleichtbaus als Jugendobjekt übergeben. So leisten unsere Studenten auch in dieser ungewöhnlichen Form einen wesentlichen Beitrag zur Durchsetzung des wissenschaftlich-produktiven Studiums.

* *

Lieber Leser!

Bitte helfen Sie uns, die WURZEL noch interessanter zu gestalten! Wenn Sie dieses Formular ausfüllen und uns bis zum 10. August 1970 zusenden, nehmen Sie an unserer Ferien-Buch-Verlosung teil.

Folgende Preise sind zu gewinnen:

1. Preis:	Buchscheck über 4o.- M.
2. Preis:	Buchscheck über 2o.- M.
3. - 16. Preis:	Buchscheck über 1o.- M.
17. - 5o. Preis:	WURZEL-Abonnement für das Schuljahr 197o/71.

h i e r   a u s s c h n e i d e n !

HIER ABTRENNEN!

1. Sind Ihnen unsere Aufgaben

zu leicht	zu schwer	gerade richtig

(zutreffendes ankreuzen!)

2. Aus welchen Gebieten wünschen Sie in Zukunft Artikel?

1. . . . .
2. . . . .
3. . . . .

3. Wünschen Sie weiterhin Artikel und Mitteilungen über das Leben und die Ausbildung an unserer Sektion Mathematik?

ja	nein	ist mir gleich

4. Wünschen Sie die WURZEL weiterhin mit Bildern?

ja	nein	ist mir gleich

5. Sind Sie bereit, als WURZEL-Korrespondent über die mathematische Atmosphäre an Ihrer Schule zu berichten?

ja	nein

6. Welche sonstigen Forderungen oder Hinweise haben Sie?

WURZEL-Leser seit	....

. . . .

Name, Vorname   Alter/Beruf

. . . .

Anschrift / Schule

Kombinatorik

1. Überblick

Die Kombinatorik ist ein Teilgebiet der Mathematik, welches sich nur schwer mit wenigen Worten bestimmen läßt. Um zunächst einen gewissen Eindruck von den in der Kombinatorik behandelten Problemen zu gewinnen, wollen wir einige Aufgaben aufzählen, deren Lösung in den Bereich der Kombinatorik fällt:

[redacted] (A) Ein Wirt verspricht den 7 Gästen eines Stammtisches, an jedem Abend eine Runde Freibier zu spendieren, an dem die Gäste eine neue Sitzordnung (Reihenfolge) am Tisch einnehmen können. Wieviel Gläser Bier muß der Wirt insgesamt kostenlos ausschenken?

[redacted] (B) In einem "Spezialwörterbuch" werden sämtliche 5-buchstabigen (auch die sinnlosen) Wörter verzeichnet, die aus den 5 Buchstaben A, M, R, T, U gebildet werden können. An wievielter Stelle erscheint in diesem Wörterbuch das Wort TRAUM bei der üblichen "lexikographischen " Anordnung der Wörter?

[redacted] (C) Wieviel verschiedene "Spiele" (Verteilungen von 1o Karten) kann ein Skatspieler erhalten?

[redacted] (D) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln einen Pasch (zwei gleiche Würfe) zu erhalten?

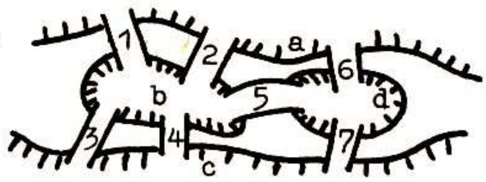
[redacted] (E) Von welcher Art sind die Summanden bei der Berechnung der Potenz $(a+b)^n$, wobei n eine natürliche Zahl ist?

[redacted] (F) Wieviel Stellen benötigt man, wenn man alle Buchstaben des lateinischen Alphabets durch zwei Symbole (•,-) in linearer Anordnung charakterisieren will (Morse-Alphabet)?

Schließlich erwähnen wir noch 2 klassische Aufgaben von Leonherd Euler (17o7 - 1783):

[redacted] (G) "Eine Abordnung von 36 Offizieren aus 6 Regimentern und mit 6 verschiedenen Dienstgraden soll sich quadratisch zu 6 Gliedern und 6 Kolonnen so aufstellen, daß in jedem Glied und jeder Kolonne jedes Regiment und jeder Dienstgrad genau einmal auftritt."

[redacted] (H) Königsberger Brückenproblem: "Wie kann man die vier Stadtteile (a,b,c,d) von Königsberg so durch-



wandern, daß man dabei jede der 7 Brücken genau einmal benutzt?"

Die hier aufgeführten Probleme scheinen auf den ersten Blick nur sehr wenig mit Mathematik zu tun zu haben. Und doch sagen sie etwas über das Wesen der Kombinatorik aus. Allen Problemen ist nämlich gemeinsam, daß es sich um Fragen über e n d - l i c h e Mengen handelt. Die Kombinatorik gehört also zur sogenannten finiten Mathematik. Andererseits zeigen die genannten Aufgaben, daß die Kombinatorik Fragen behandelt, die zu den verschiedensten mathematischen Disziplinen gehören: Wahrscheinlichkeitsrechnung (D)(siehe WURZEL 6/68), Informationstheorie (D), Graphentheorie (H)(siehe WURZEL 7/8/67), aber auch in der Analysis, Topologie, Spieltheorie, linearen Optimierung und in der Algebra spielt die Kombinatorik eine wesentliche Rolle bei allen endlichen Problemen. Und schließlich ist die Kombinatorik auch für die (endliche) Geometrie von Bedeutung, so führt zum Beispiel die (übrigens unlösbare) Aufgabe (G) auf das Problem der magischen oder lateinischen Quadrate, deren Kenntnis Aussagen über gewisse Inzidenzstrukturen erlauben.
Die Kombinatorik spielt heute, wie die finite Mathematik überhaupt, eine immer größere Rolle für die Praxis. Sie verdankt diese steigende Bedeutung nicht zuletzt der elektronischen Rechentechnik, durch deren Entwicklung viele Probleme der Kombinatorik erst mit Erfolg behandelt werden können.
Wir wollen nun einige Grundbegriffe und Sätze der Kombinatorik kennenlernen.

2. Permutationen

Im folgenden wollen wir (im Gegensatz zu der früheren Auffassung in WURZEL 7/8/69, S.81) unter einer Permutation einer endlichen Menge irgendeine (lineare) Anordnung der Elemente dieser Menge verstehen, z.B. ist TAFEL eine Permutation der Menge {A, E, F, L, T}. Dabei sind zwei Permutationen als gleich anzusehen, wenn sie nicht nur die gleichen Elemente enthalten, sondern sich außerdem auch nicht in der Stellung dieser Elemente unterscheiden. Also sind zum Beispiel die Permutationen TAFEL und FALTE verschieden!
Es ergeben sich nun zwei grundsätzliche Fragen:

1. Wieviel verschiedene Permutationen gibt es zu einer gegebenen endlichen Menge?
2. Wie kann man alle diese Permutationen gewinnen?

Zur Beantwortung dieser Fragen betrachten wir zunächst einige Beispiele. Mit P_n wollen wir dabei die Anzahl der verschiedenen Permutationen einer Menge M von n Elementen bezeichnen; die möglichen Permutationen werden alle aufgeschrieben.

n=1:	$M = \{a\}$,	a				$P_1 = 1$
n=2:	$M = \{a,b\}$,	ab, ba				$P_2 = 2$
n=3:	$M = \{1,2,3\}$,	123, 132, 213, 231, 312, 321				$P_3 = 6$
n=4:	$M = \{a,b,c,d\}$,	abcd	bacd	cabd	dabc	
		abdc	badc	ca..	d....	
		acbd	bcad	cb..	d...	
		acdb	bcda	cb..	d...	
		adbc	bdac	cd..	d...	
		adcb	bdca	cdba	dcba	$P_4 = 24$

(Der Leser versuche, die Lücken selbst auszufüllen, wenn er glaubt, ein Anordnungssystem erkannt zu haben!)

Wir wenden uns nun der ersten Frage zu. Die angegebenen Beispiele liefern folgende Vermutung:

$$P_1 = 1, \quad P_2 = P_1 \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2, \quad P_3 = P_2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$$

....

$$P_n = P_{n-1} \cdot n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n. \qquad (1)$$

Wir wollen zunächst den ersten Teil der Formel (1) beweisen, d.h. die Rekursionsformel

$$P_n = P_{n-1} \cdot n \ . \qquad (2)$$

Dazu denken wir uns alle Permutationen von n-1 Elementen irgendwie aufgeschrieben. Die Anzahl dieser Permutationen ist P_{n-1}. Fügt man nun zur Ausgangsmenge ein neues (n-tes) Element hinzu, so kann man dieses in die bisherigen Permutationen von n-1 Elementen einfügen und zwar an 1., 2., 3., ..., letzter (n-ter) Stelle! Aus jeder vorhandenen Permutation von n-1 Elementen entstehen dadurch n neue, also insgesamt $P_{n-1} \cdot n$ Permutationen von n Elementen, und diese sind alle untereinander verschieden. Andererseits haben wir damit alle nur möglichen Permutationen von n Elementen erfaßt, womit (2) bewiesen ist.

Um den zweiten Teil der Formel (1) zu beweisen, schreiben wir die Rekursionsformel (2) für alle natürlichen Zahlen, die kleiner als n+1 sind, auf:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= 1 \\
P_2 &= 2 \cdot P_1 \\
P_3 &= 3 \cdot P_2 \\
&\vdots \\
P_{n-1} &= (n-1) \cdot P_{n-2} \\
P_n &= n \cdot P_{n-1} \, .
\end{aligned}
$$

Bilden wir das Produkt der linken und rechten Seiten dieser Seiten dieser Gleichungen, so ergibt sich

$$P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \ldots \cdot P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \ldots \cdot P_{n-1}$$

und nach Division durch $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \ldots \cdot P_{n-1}$ schließlich

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n. \tag{3}$$

Für die rechte Seite der Gleichung (3) schreibt man abkürzend $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$ (lies: "n Fakultät"), so ist zum Beispiel
$1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$, usw.

Mit $P_n = n!$ ist eine e x p l i z i t e Formel für die Anzahl aller Permutationen von n Elementen gefunden und damit die Frage 1. beantwortet.

Jetzt sind wir in der Lage, die zu Beginn gestellte Aufgabe (A) zu lösen:

Die 7 Stammgäste können $P_7 = 7! = 5040$ verschiedene Sitzordnungen einnehmen, der Wirt müßte also insgesamt $7 \cdot 5040 = 35280$ Gläser Bier kostenlos ausschenken.

Wir wenden uns nun der Beantwortung der zweiten Frage zu. Auch dabei weisen uns die oben angeführten Beispiele einen Weg. Um alle Permutationen von n Elementen in einfacher Weise aufzuschreiben, notiert man als erste Permutation die n Elemente in ihrer natürlichen Anordnung, d.h. zum Beispiel im Fall von Zahlen nach ihrer Größe geordnet, im Fall von Buchstaben nach der Reihenfolge ihres Auftretens im Alphabet: 12345 bzw. abcde. Aus dieser Ausgangspermutation gewinnt man alle weiteren durch das folgende allgemeine Verfahren:

Wir nennen ein Element t einer Permutation höher als s, wenn

t in der natürlichen Anordnung rechts von s steht. Dann wird in einer gegebenen Permutation das von rechts erste Element s, auf welches höhere Elemente folgen, so wenig wie möglich erhöht (d.h. durch das nächsthöhere Element rechts von s ersetzt.).
Die Anordnung der Elemente links von s wird beibehalten, die Elemente rechts von s folgen in natürlicher Ordnung.
In der Permutation 31254 ist 2 von rechts das erste Element, auf welches höhere folgen, also wird 2 durch das nächsthöhere rechts stehende Element 4 ersetzt, 31 bleibt fest, also beginnt die neue Permutation mit 314 und die restlichen Elemente 2 und 5 folgen in natürlicher Anordnung, aus 31254 wird 31425. Analog folgen auf 12345 die Permutationen 12354, 12435, 12453, 12534, 12543, 13245, 13254 usw.
Eine solche Anordnung der Permutationen heißt lexikographische Anordnung, weil sie der Ordnung der Wörter in einem Lexikon entspricht. Damit ist auch das zweite Problem gelöst.
Mit diesen Kenntnissen können wir nun die Aufgabe (B) behandeln:
Erstes Wort in unserem Wörterbuch ist AMRTU (natürliche Reihenfolge). 4! Wörter beginnen zunächst mit A (A fest und M, R, T, U permutieren), dann folgen 4! Wörter, die mit M beginnen und 4! Wörter, die mit R beginnen, dann folgen 3! Wörter, die mit TA und 3! Wörter, die mit TM beginnen, dann folgt das Wort TRAMU und darauf schließlich TRAUM. Dieses Wort steht also an $(3 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 2 =)$ 86. Stelle.

3. Kombinationen

Wir denken uns irgendeine Menge von n Elementen gegeben. Eine Auswahl von k Elementen dieser Menge in beliebiger Anordnung nennen wir Kombination der n Elemente zur k-ten Klasse ($k \leq n$). Zwei Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse sind also nur dann verschieden, wenn in der einen wenigstens ein Element vorkommt, das in der anderen nicht auftritt, d.h. auf die Anordnung kommt es jetzt nicht mehr an.
Wie bei den Permutationen ergeben sich wieder zwei Fragen:
1. Wie groß ist die Anzahl C_k^n der verschiedenen Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse?

2. Wie kann man alle Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse gewinnen?

Zunächst wieder ein Beispiel: Die Kombinationen der Elemente 1, 2, 3, 4 zur zweiten Klasse sind: 12, 13, 14, 23, 24, 34, also ist $C_2^4 = 6$.

Zur Beantwortung der ersten Frage benutzen wir unsere Kenntnisse über Permutationen. Wir betrachten irgendeine Kombination von n Elementen (1, 2, 3, ..., n) zur k-ten Klasse, z.B. 123...k ($k \leq n$). Wir ergänzen nun in der Idee diese Kombination durch die restlichen n-k Elemente zu einer Permutation

$$123\ldots k a_1 a_2 \ldots a_{n-k} \tag{4}$$

der gegebenen n Elemente und stellen fest, daß es insgesamt P_{n-k} verschiedene Permutationen der Art (4) gibt, wo also $a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-k}$ jeweils Permutationen der Elemente k+1, k+2,.... ..., n sind. Aus jeder Permutation (4) gewinnt man durch Permutieren der ersten k Elemente 1, 2, ..., k jeweils P_k verschiedene Permutationen der n Ausgangselemente. Nun gibt es insgesamt C_k^n verschiedene Kombinationen, aus denen durch Anwendung dieses Verfahrens sämtliche Permutationen der n gegebenen Elemente hervorgehen. Die Gesamtzahl P_n dieser Permutationen kann also dargestellt werden durch

$$P_n = C_k^n \cdot P_k \cdot P_{n-k}.$$

Daraus folgt $n! = C_k^n \cdot k! \cdot (n-k)!$ bzw. $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Für diesen Ausdruck wird wieder ein neues Symbol eingeführt, nämlich

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad \text{(lies: "n über k").}$$

Mit der Beziehung $C_k^n = \binom{n}{k}$ ist die erste Frage beantwortet.

Mit der Definition $0! =_{Df} 1$ ergibt sich z.B.

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{n!}{n!} = 1, \quad \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)} = n,$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot1\cdot2} = 6, \quad \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2} = 10 \quad \text{usw.}$$

Auch das zweite Problem läßt sich durch Angabe eines eindeutigen Verfahrens lösen, das wir aber nur durch ein Beispiel charakterisieren wollen: Man gebe sämtliche Kombinationen der Elemente 1, 2, 3, 4, 5 zur dritten Klasse an!

123, 124, 125, 134, 135, 145,
234, 235, 245,
345.

Wir sind nun in der Lage, die Aufgabe (E) zu lösen.

Um die n-te Potenz $(a+b)^n$ des Binoms $(a+b)$ zu berechnen, muß $(a+b)$ n-mal mit sich selbst multipliziert werden:

$$(a+b)^n = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)\ . \qquad (5)$$

Beim Ausmultiplizieren dieser Klammerausdrücke entsteht eine Summe von Potenzausdrücken der Form $a^s b^t$, wobei die Exponentensumme $s+t=n$ sein muß. Wir können also für $a^s b^t$ besser $a^{n-k}b^k$ schreiben $(k=0,1,2,\ldots,n)$. Wir fragen nun nach der Anzahl der Summanden $a^{n-k}b^k$ mit festem k. Diese Frage ist gleichbedeutend mit der Frage: Auf wieviel Arten kann man aus n verschiedenen Klammern in (5) das b gerade k-mal (oder a gerade (n-k)-mal) auswählen? Es handelt sich also um die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse, die gleich $C_k^n = \binom{n}{k}$ ist.
Damit wird

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

Aus diesem Grunde heißen die Zahlenwerte $\binom{n}{k}$ auch Binomialkoeffizienten.

Beispiel: $(a+b)^3 = \binom{3}{0}\cdot a^3 b^0 + \binom{3}{1}\cdot a^2 b^1 + \binom{3}{2}\cdot a^1 b^2 + \binom{3}{3}\cdot a^0 b^3$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 .$

Schließlich handelt es sich bei der Lösung der Aufgabe (C) um die Anzahl der Kombinationen von 32 Elementen zur 10. Klasse. Ein Skatspieler kann also $\binom{32}{10} = \frac{32!}{10!\,22!} =$ $= 64512240$ verschiedene "Spiele" bekommen.

Aus der Fülle der zum großen Teil sehr reizvollen und interessanten Probleme der Kombinatorik konnte hier nur ein ganz geringer Teil erwähnt werden. Diejenigen Leser, die sich genauer über die Kombinatorik informieren wollen, verweisen wir auf das leicht verständliche Buch von J. Flachsmeyer "Kombinatorik", Berlin 1969. Für Kenner der russischen Sprache erwähnen wir schließlich noch das sehr unterhaltsame Buch "Kombinatorik" von N.J. Wilenkin, Moskau 1969.

Dr. E. Hertel
wissenschaftlicher Oberassistent
an der Sektion Mathematik
der Friedrich-Schiller-Universität
Jena

Übungsaufgaben zu unserem Artikel „Kombinatorik"

1. Man beweise $P_n = n!$ durch vollständige Induktion! (P_n ist die Anzahl der Permutationen von n Elementen)
2. Wieviel Geld müsste man beim Zahlenlotto (5 aus 90) ausgeben, um garantiert auf einem Schein einen "Fünfer" zu haben?
3. An wievielter Stelle erscheint das Wort ARMUT bei lexikographischer Anordnung der entsprechenden Permutationen?
4. Wieviel verschiedene 9-stellige Zahlen gibt es, in denen keine Ziffer mehr als einmal und die Ziffer 0 überhaupt nicht vorkommt?
5. Wieviel Diagonalen hat ein n-Eck?
6. Wieviel verschiedene Teiler hat die Zahl 2310 ?
7. In wievielen Permutationen der Zahlen 1,2,3,4,5,6,7,8 stehen die Elemente 2,4,6,8 (in beliebiger Reihenfolge) unmittelbar nebeneinander?
8. Wieviel 9-stellige Zahlen gibt es, in denen keine Ziffer mehr als einmal vorkommt?
9. Wie heißt die 302395-te Permutation der Buchstaben A,D,E,H, L,N,S,T,U in der lexikographischen Anordnung?

Aus unserer Lehrerausbildung

Die schulpraktischen Übungen im 3. Studienjahr sind ein wichtiges Element bei der Verwirklichung des wissenschaftlich-produktiven Studiums. Hier erhalten die Studenten die Gelegenheit, ihre im Fach und in den erziehungswissenschaftlichen Disziplinen erworbenen theoretischen Kenntnisse auf die konkrete Klassensituation anzuwenden.

Jeder Student erhält während der schulpraktischen Übungen 5 bis 6 mal die Möglichkeit, selbständig eine Stunde zu halten. Dabei wird jede einzelne Stunde fachlich und methodisch mit einem Vertreter des Bereichs Methodik vorbereitet, wobei im Interesse einer immer stärkeren Betonung der wissenschaftlich-produktiven Seite des Studiums die Eigenverantwortlichkeit der Studenten bei der Vorbereitung systematisch erhöht wird.
Die Auswertung der Unterrichtsstunden erfolgt unter verschiedenen Gesichtspunkten. Nach Ablauf des Studienjahres hat so der Student einen Überblick über die verschiedenen Stundentypen gewonnen und Möglichkeiten einer rationellen Unterrichtsgestaltung kennengelernt. Besonderes Gewicht wird dabei auf die dem Mathematik- bzw. Physikunterricht innewohnenden erzieherischen Potenzen, vor allem im Hinblick auf die staatsbürgerliche Erziehung, gelegt.

* *

Im Rahmen der physikalischen Schulversuche führt jeder Student 3o bis 35 Versuche durch. Es handelt sich ausschließlich um solche Experimente, die im Schulunterricht Anwendung finden. Dabei werden den Studenten von den Mitarbeitern des verantwortlichen Bereichs Physikmethodik auch Hinweise für den späteren Einsatz im Unterricht gegeben. (Charakteristik des Versuchs, seine Stellung im Methodengefüge der Unterrichtsstunde und des Stoffgebiets). Die Anleitung zu den Versuchen erfolgt zum Teil in programmierter Form. Insgesamt kann man sagen, daß durch die physikalischen Schulversuche zwei Praxisaspekte miteinander verknüpft sind: Die Praxis des experimentierenden Physikers und die Schulpraxis.

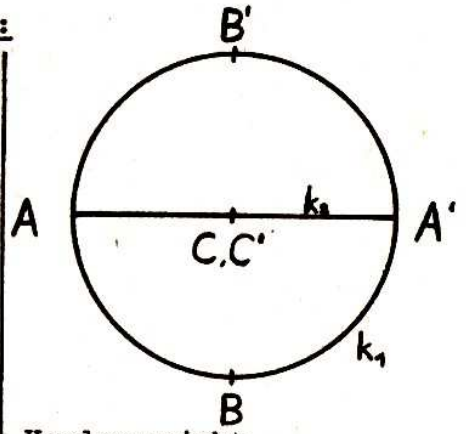
* *

Das schulpraktische Semester ist ein entscheidender Abschnitt in der Ausbildung unserer Lehrerstudenten und wichtigster Teil der Praxisbeziehungen. Es bildet den Höhepunkt und zugleich die größte Bewährungsprobe während des Studiums. Der Student hat erstmals die Gelegenheit, über einen längeren Zeitraum hin den Erziehungs- und Ausbildungsprozeß zu leiten und sich als sozialistische Lehrerpersönlichkeit zu entfalten.

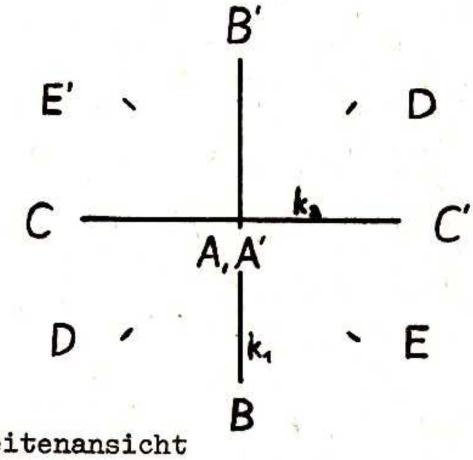
* *

Lösungen

(B13):



Vorderansicht



Seitenansicht

In der Zeichnung ist das System zweier aufeinander senkrecht stehender Großkreise K_1, K_2 dargestellt.
Um das System K_1, K_2 in sich zu überführen, muß die gemeinsame Achse AB auf sich abgebildet werden.
Es gibt zwei Möglichkeiten:

a) d(A)=A und d(A')=A' (A und A' sind Pole)

b) d(A) A' und d(A') A (Die Pole müssen in der Ebene von B,B',C,C' liegen.)

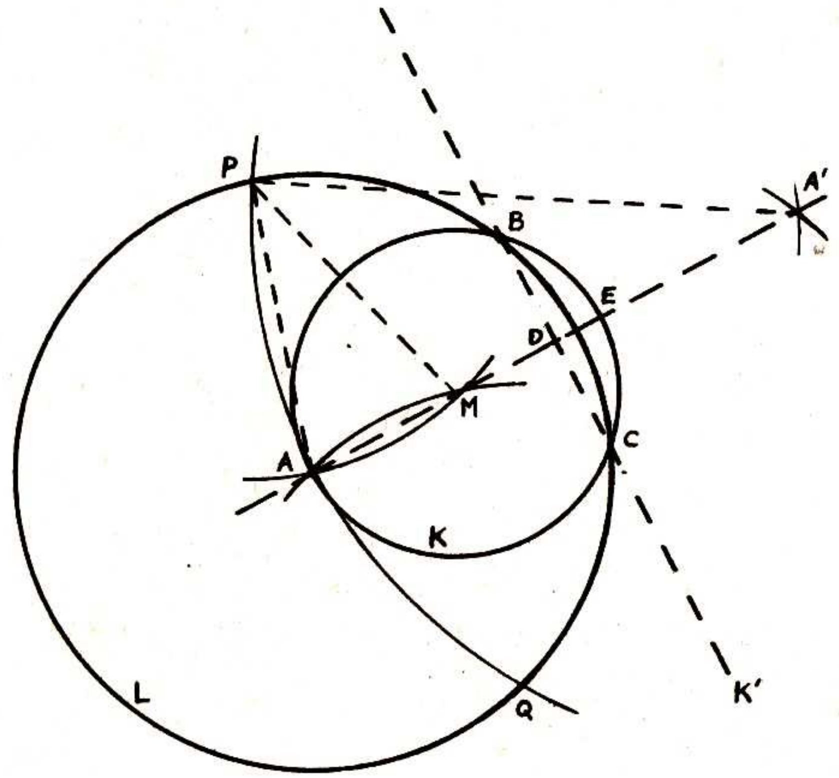
Weiterhin muß B auf B',C,C' oder B abgebildet werden.
Damit ergeben sich als weitere Pole:
B,B'; C,C'; D,D'; E,E'.
Man erhält die Drehungen:

Pole	Drehwinkel
A,A'	$0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$
B,B'	$0^\circ, 180^\circ$
C,C'	$0^\circ, 180^\circ$
D,D'	$0^\circ, 180^\circ$
E,E'	$0^\circ, 180^\circ$

Dabei sind {A,A'},{B,C,C',B'} und {D,E,E',D'} die drei Klassen zusammengehöriger Pole mit den Ordnungszahlen 4,2,2. Die Ordnung der Drehgruppe ist 8. Es handelt sich also um eine "Diedergruppe".

I n f o r m a t i o n: Weitere Lösungen zu den Aufgaben des Jahrgangs 1969/70 werden in einer im August 1970 erscheinenden Sondernummer der "Wurzel" veröffentlicht.
In dieser Sondernummer wollen wir Sie auch mit unseren Plänen für das Schuljahr 1970/71 bekannt machen.

(B21):



Gegeben: Kreis K

1. Wählen beliebig $A,B \in K$
2. Kreis L um A mit dem Radius AB $\rightsquigarrow$ 2.Schnittpunkt $C \in K \cap L$
3. Gerade K' durch B und C ist das Bild des Kreises K bei Inversion an L.
4. A': {Kreis um C mit dem Radius CA}$\cap${Kreis um B mit Radius BA $\equiv$ CA}
   $\rightsquigarrow$ A' bezüglich K' symmetrisch zu A, d.h.
   (*) $AD \equiv DA' \wedge g(A,A') \perp g(B,C)$
5. Konstruieren Punkt M als Bild von A' bei Inversion an L:

a) Kreis um A' mit Radius A'A geschnitten mit L
$\rightsquigarrow$ P,Q.

b) Kreis um P mit Radius PA geschnitten mit Kreis
um Q mit dem Radius QA $\equiv$ PA $\rightsquigarrow$ 2.Schnittpunkt M.

6. Beh.: M - Bild von A' bei Inversion an L

Bew.: (1) $AM \cdot AA' = r^2$ (denn $D \in K'$ ist Bild von $E \in K$

(2) $AD \cdot AE = r^2$ bei Inversion an L)

(1) $\wedge$ (2) (3) $AM \cdot AA' = AD \cdot AE$

(*) (4) $AA' = 2AD$

(3) $\wedge$ (4) $AM = \frac{1}{2}AE$ und AE ist Durchmesser von K

M Mittelpunkt von K (w.z.b.w.)

(B22): $a_1 = 2$

$a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 2^2 + 1$

$a_3 = 2 \cdot (2 \cdot 2+1)+1 = 2^3 + 2 + 1$

$a_4 = 2 \cdot (2^3+2+1)+1 = 2^4 + 2^2 + 2 + 1$

Vermutung:

$$a_n = 2^n + \sum_{k=0}^{n-2} 2^k$$

$$a_n = 2^n + 2^{n-1} - 1$$

Beweis der Vermutung durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $a_1 = 2^1 + 2^0 - 1 = 2$

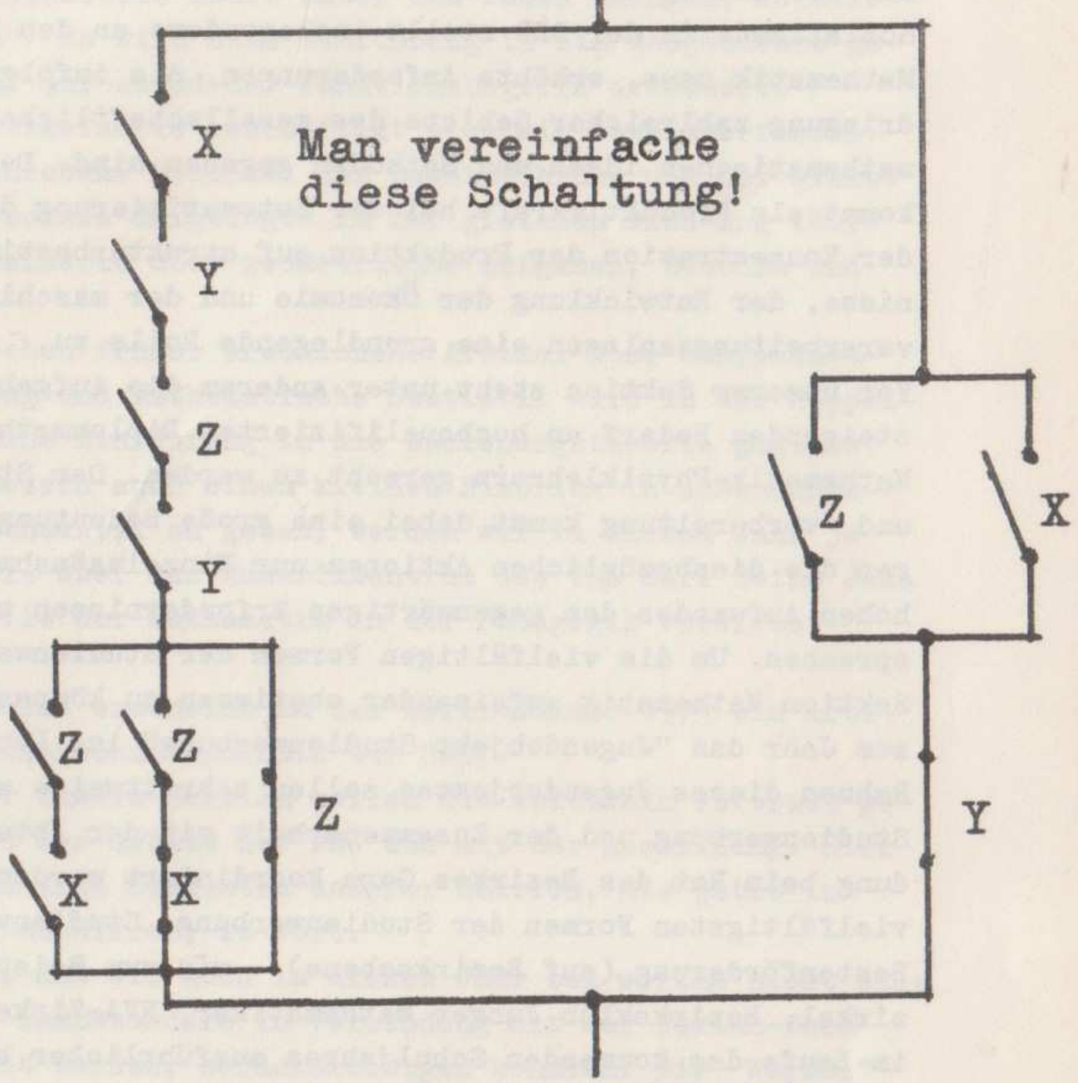
Induktionsannahme: $a_k = 2^k + 2^{k-1} - 1$

Beweis: $a_{k+1} = 2a_k + 1$

$$a_{k+1} = 2(2^k+2^{k-1}-1) + 1$$
$$= 2 \cdot 2^k + 2 \cdot 2^{k-1} - 2 + 1$$
$$= \underline{2^{k+1} + 2^k - 1}$$

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS und SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.
Redaktion: Leitung: Harald Fischer, Rainer Wackernagel
Mitarbeiter: H.Eckner, R.Großmann, W.Kiefer, N.Kuse, R.Lorenz, S.Müller, P.Pradel, E.Taubald, I.Zenner
Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
DDR 69 Jena Helmholtzweg 1
"Wurzel-Redaktion"

Man vereinfache diese Schaltung!



(siehe dazu S. 136 ff)

9/10 70

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Liebe Leser!
Die Gestaltung des entwickelten gesellschaftlichen Systems des Sozialismus in der DDR stellt insbesondere an den Fachbereich Mathematik neue, erhöhte Anforderungen, die infolge der Durchdringung zahlreicher Gebiete des gesellschaftlichen Lebens mit mathematischen Ideen und Methoden gegeben sind. Der Mathematik kommt als Produktivkraft bei der Automatisierung der Produktion, der Konzentration der Produktion auf strukturbestimmende Erzeugnisse, der Entwicklung der Ökonomie und der maschinellen Datenverarbeitungsanlagen eine grundlegende Rolle zu.
Vor unserer Sektion steht unter anderem die Aufgabe, dem ständig steigenden Bedarf an hochqualifizierten Diplommathematikern und Mathematik-Physiklehrern gerecht zu werden. Der Studienwerbung und -vorbereitung kommt dabei eine große Bedeutung zu. Bisher waren die diesbezüglichen Aktionen nur Einzelmaßnahmen, die trotz hohen Aufwandes den gegenwärtigen Erfordernissen nicht mehr entsprechen. Um die vielfältigen Formen der Studienwerbung an der Sektion Mathematik aufeinander abstimmen zu können, wird in diesem Jahr das "Jugendobjekt Studienwerbung" ins Leben gerufen. Im Rahmen dieses Jugendobjektes sollen schrittweise alle Formen der Studienwerbung und der Zusammenarbeit mit der Abteilung Volksbildung beim Rat des Bezirkes Gera koordiniert werden. Über die vielfältigsten Formen der Studienwerbung, Studienvorbereitung und Bestenförderung (auf Bezirksebene) - wie zum Beispiel Mathematikzirkel, Bezirksklub Junger Mathematiker, NVA-Zirkel - werden wir im Laufe des kommenden Schuljahres ausführlicher berichten. Die "Wurzel" wird in diesem Projekt eine zentrale Stellung einnehmen.

In diesem Zusammenhang möchten wir darauf hinweisen, daß in Zukunft zu speziellen Problemen (wie z.B. Arbeit des NVA-Zirkels, Mathematiklager) Sondernummern der "Wurzel" erscheinen, die nicht mehr generell an alle Abonnenten verschickt werden. Diese Sondernummern werden etwa 3 Monate vorher angekündigt und dann nur auf besondere Bestellung hin verschickt.
Zur Information über unsere Pläne für das kommende Schuljahr gehört auch der Plan der erscheinenden Artikel. In der vorliegenden Doppelnummer wird eine Einführung in die Schaltalgebra gegeben. Wir werden, aufbauend auf diesen Artikel, eine Anleitung für mathematisch-physikalische Zirkel für den Bau eines Dualädders

veröffentlichen.
Die nächste Artikelserie läuft unter dem Thema "Mengen, Relationen, Funktionen". Es wird eine Einführung in die Mengenlehre gegeben und darauf aufbauend der Funktionsbegriff erläutert.
Eine weitere Artikelserie beschäftigt sich mit Beweisverfahren. Es werden verschiedene Methoden der Beweisführung und der exakte Aufbau eines Beweises dargelegt. In der gleichen Richtung läuft auch eine Artikelserie über geometrische Aufgaben, Beweise und Konstruktionen.
Aufbauend auf schon früher erschienene Artikel über Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik wird in der Doppelnummer 7/8/71 eine Einführung in die Bedienungstheorie gegeben.

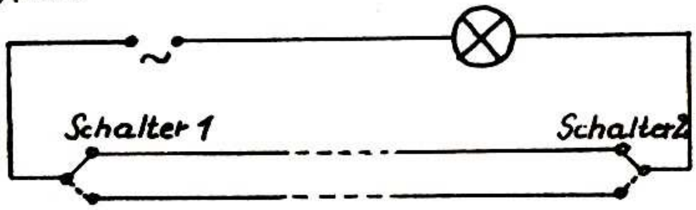
Um unseren Lesern auch einen kleinen Einblick in Anwendungsbereiche der Mathematik zu geben, werden wir in diesem Jahr je eine Artikelserie über das Numerikzentrum des VEB Carl Zeiss Jena und über die Rolle der Mathematik in der Pädagogik veröffentlichen.
Aus aktuellem Anlaß erscheint in der April-Nummer 1971 ein Artikel über die Wissenschaftspolitik der SED.
In Artikeln über unsere Sektion sollen Sie weiterhin vertraut gemacht werden mit der Arbeit der FDJ und mit der Ausbildung. Hier kommen auch ehemalige Studenten unserer Sektion, die jetzt in der Sowjetunion studieren, zu Wort.
Es ist uns klar, daß wir auch in diesem Jahr bei weitem nicht alle Vorschläge, die insbesondere in Verbindung mit der Ferien-Buch-Verlosung gemacht wurden, berücksichtigen konnten. Die "Wurzel" soll Anregung zur Beschäftigung mit speziellen Problemen der Mathematik und ihrer Anwendung geben, kann aber bei ihrem Umfang nur wenige Gebiete näher beleuchten. Wir müssen auch auf schon früher erschienene Artikel (wie z.B. Spieltheorie, Kybernetische Probleme, Kombinatorik, Funktionentheorie) verweisen. Die entsprechenden Nummern der "Wurzel" sind zumeist noch lieferbar.

Die Redaktion

Einführung in die Schaltalgebra

Will man irgendwo eine Wechselschaltung installieren (d.h. eine Schaltung, bei der beispielsweise eine Lampe von zwei Schaltern aus an- und ausgeschaltet werden kann), so benutzt man gewöhnlich eine Schaltung, wie sie auf Abb. 1 gezeigt ist.

Abb. 1



Verfügt man nicht über Wechselschalter, dagegen über Relais, wie sie in modernen Neubauten installiert sind, könnte man eine Schaltung verwenden, wie sie auf Abb. 2 gezeigt wird.

Wir wollen nun versuchen, eine solche sogenannte "Relais-Kontakt-Schaltung" zu entwerfen, die eine Wechselschaltung nicht nur für zwei, sondern sogar für drei Schalter beschreibt. Dazu sind zunächst einige Voruntersuchungen notwendig.

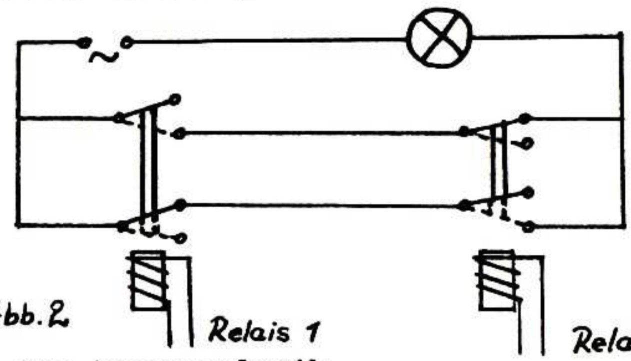


Abb. 2

1. Einige Grundbegriffe aus der Aussagenlogik

Unsere langjährigen Leser erinnern sich sicher an den Speiseplan des Sebastian Ambrosius und die in diesem Zusammenhang abgehandelte Einführung in die Aussagenlogik (vergl. "Wurzel" 12/67, 1/68 und 2/68). Wir wollen die wesentlichsten Begriffe noch einmal kurz zusammenstellen.[1)]

1. Aussagen sind Sätze (zum Beispiel der deutschen Sprache), in denen etwas über die objektive Realität ausgesagt wird.
2. Jede in diesem Sinne sinnvolle Aussage ist entweder wahr oder falsch. Wir bezeichnen diese Wahrheitswerte mit "1" (für "Wahr") und "0" (für "Falsch"). "Schnee ist weiß" bekommt so den Wahrheitswert 1 zugeordnet; "Cäsar ist eine Primzahl" den Wert 0.
3. Mittels Verknüpfungen wie "und", "oder", "genau dann, wenn" usw. können die Aussagen zu neuen Aussagen ver-

1) Interessiertere Leser seien auf das kleine Büchlein von M. Hasse "Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik", B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Lpz. 1967, (Preis 3,30 M), verwiese

knüpft werden. (z.B. "Der Schnee ist weiß <u>oder</u> Cäsar ist eine Primzahl").

4. Uns interessieren die Wahrheitswerte solcher Aussagenverbindungen. Es genügt für unsere Zwecke, drei der "klassischen" Wahrheitswertfunktionen zu definieren:

a) Verneinung (Negation):

$$\text{non}\ (x) =_{Df} \begin{cases} 1, \text{ falls } x = 0 \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$ [2]

b) "Und"-Verknüpfung (Konjunktion):

$$\text{et}\ (x,y) =_{Df} \begin{cases} 1, \text{ falls } x = 1 \text{ und } y = 1 \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

c) "Oder"-Verknüpfung (Alternative) [3]:

$$\text{vel}\ (x,y) =_{Df} \begin{cases} 0, \text{ falls } x = 0 \text{ und } y = 0 \\ 1, \text{ sonst} \end{cases}$$

Zur besseren Übersicht fassen wir die Funktionen non, et und vel noch einmal in einer "Wahrheitswerttabelle" zusammen:

x	y	non (x)	non (y)	et (x,y)	vel (x,y)
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1

5. Mit Hilfe solcher Wahrheitswerttabellen können wir nun be-

---

2) x und y sind hierbei Variable für die Wahrheitswerte von Aussagen.

3) Wir bemerken, daß die Funktion vel das nicht-ausschließende "oder" repräsentiert (zur Unterscheidung von "entweder-oder"), daß also die Verknüpfung durch "oder" von zwei wahren Aussagen wahr ist.

reits einfache Sätze beweisen. Dazu definieren wir:

Zwei Ausdrücke (Verknüpfungen von Aussagen) heißen logisch gleichwertig $=_{Df}$ Ihre Wahrheitswerte stimmen für jede mögliche Belegung der in beiden Ausdrücken vorkommenden Aussagen mit Wahrheitswerten überein.

Zum Verständnis betrachten wir ein einfaches Beispiel: Wir wollen prüfen, ob die Ausdrücke

non (et (x,y))

und vel (non (x), non (y))

logisch gleichwertig sind.

x	y	et(x,y)	non(et(x,y)	non(x)	non(y)	vel(non(x), non(y))
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

beide Spalten stimmen überein, damit haben wir den

<u>Satz:</u> Die Ausdrücke "non(et(x,y))" und "vel(non(x), non(y))" sind logisch gleichwertig.

Aufgabe für den Leser:
Man beweise den Satz: "Die Ausdrücke et(non(x),y) und non(vel(x, non(y))) sind logisch gleichwertig."

6. Wir vereinbaren nun folgende Schreibweisen:

$$\bar{x} =_{Df} \text{non}(x)$$
$$x \cdot y =_{Df} \text{et}(x,y)$$
$$x+y =_{Df} \text{vel}(x,y)$$

Da x, y nur die Werte 0 oder 1 annehmen können, haben wir folgende Rechenregeln:

$0 \cdot 0 = 0$	$0+0 = 0$	Wir bemerken, daß diese
$0 \cdot 1 = 0$	$0+1 = 1$	Rechenregeln bis auf eine
$1 \cdot 0 = 0$	$1+0 = 1$	Ausnahme mit den Regeln
$1 \cdot 1 = 1$	$1+1 = 1$	der Arithmetik überein-
		stimmen.

Einen Ausdruck, in dem nur "Produkte" und "Summen" von Variablen oder verneinten ("gequerten") Variablen vorkommen, nennen wir normierten BOOLEschen Ausdruck.[4]

Jeder normierte BOOLEsche Ausdruck über n Variablen legt genau eine eindeutige Abbildung von

$$\overset{n}{\times}\{0,1\} \text{ in } \{0,1\}$$

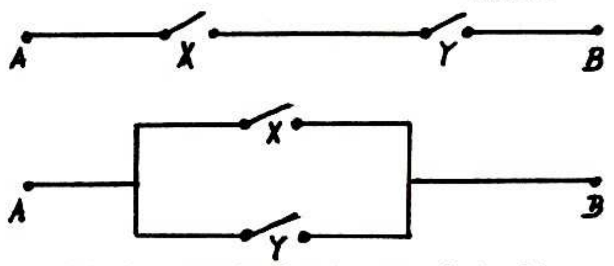
fest [5] (eine sogenannte BOOLEsche Funktion).

Nach diesen notwendigen Vorbemerkungen können wir nun die Beziehungen zwischen BOOLEschen Funktionen und damit der Aussagenlogik zu Reihen-Parallel-Schaltungen untersuchen.

2. Reihen-Parallel-Schaltungen und ihre Beschreibung

Wir erinnern an den folgenden Sachverhalt:

Abb. 3



Sind zwei Schalter X und Y hintereinandergeschaltet, so ist die Verbindung der Pole A und B nur dann leitend, wenn sowohl X als auch Y geschlossen sind (siehe Abb. 3). Sind X und Y parallel geschaltet, so ist diese Schaltung genau dann leitend, wenn X oder Y oder beide geschlossen sind. Jeder Schalter hat zwei Schaltstellungen: "1" (geschlossen) und "0" (geöffnet). Wenn wir die Eigenschaft einer Schaltung, leitend zu sein, mit "1" bezeichnen, die Eigenschaft, nicht-leitend zu sein, mit "0", können wir also eine Reihenschaltung der Schalter X und Y einem BOOLEschen Produkt und eine Parallelschaltung von X und Y einer BOOLEschen Summe zuordnen. Wir wollen noch vereinbaren, daß die Variable x bedeutet, daß der Schalter X geöffnet ist, und die Variable $\bar{x}$ bedeutet, daß der Schalter X geschlossen ist.

---

4) George BOOLE (englischer Mathematiker, 1815-1864)

5) Mit $\overset{n}{\times}\{0,1\}$ bezeichnen wir das n-fache Kreuzprodukt der Menge $\{0,1\}$. Eine BOOLEsche Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ ordnet also jedem geordneten n-Tupel von Nullen und Einsen Null oder Eins zu.

Zur Illustration betrachten wir die folgenden Beispiele:

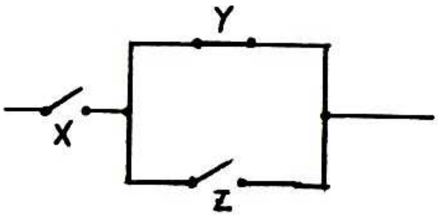
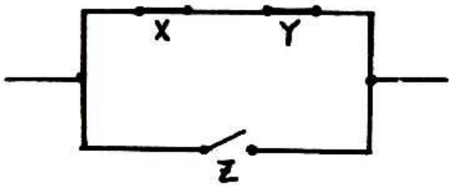
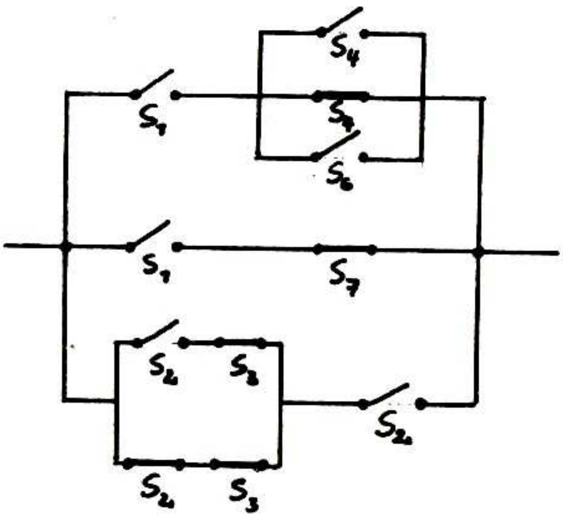
Schaltung		beschreibender Ausdruck
a)		$x \cdot (\bar{y} + z)$
b)		$(\bar{x} \cdot \bar{y}) + z$
c)		$(s_1(s_4 + \bar{s}_4 + s_6)) +$ $+ s_1\bar{s}_7 + (s_2(s_2\bar{s}_3 + \bar{s}_2\bar{s}_3))$

Abb. 4

Es soll uns nicht stören, daß in der Schaltung c) gleiche Schalter mehrmals an verschiedenen Stellen vorkommen. Wir denken uns dazu, daß alle Schalter von Relais betätigt werden, gleiche Schalter an verschiedenen Stellen durch gleiche Relais. Sofort fällt uns ein interessanter Sachverhalt auf:

Der Schaltung

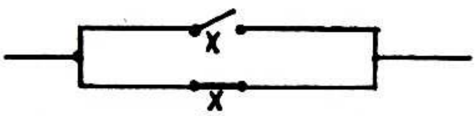


Abb. 5

entspricht der Ausdruck $x + \bar{x}$. Da beide Schalter vereinbarungsgemäß durch das gleiche Relais betätigt werden, ist also immer ein Schalter geschlossen, d.h., obige Schaltung läßt sich durch ein (immer leitendes) Stück Draht ersetzen. Also ist

$x + \bar{x} = 1$ für alle Belegungen von x. Das wiederum wissen wir aber schon aus der Logik.
Es erhebt sich nun die Frage, ob und wie sich kompliziertere Schaltungen wie etwa die unter c) dargestellte vereinfachen lassen, etwa in dem Sinne, daß wir mit weniger Schaltern bzw. mit weniger Kontaktpaaren bei Relais auskommen. Wir können diese Frage beantworten, wenn wir den zugehörigen BOOLEschen Ausdruck vereinfachen können. Dazu benötigen wir gewisse Rechenregeln, die es uns gestatten, BOOLEsche Ausdrücke umzuformen.
Wir haben festgestellt, daß wir jeder Reihen-Parallel-Schaltung einen normierten BOOLEschen Ausdruck zuordnen können und nehmen uns nun vor, über die Umformung normierter BOOLEscher Ausdrücke zu einfacheren Schaltungen zu gelangen, die jedoch genau das gleiche Leit-Verhalten zeigen.

3. Rechnen mit normierten BOOLEschen Ausdrücken

Auf Grund der Definitionen der Funktionen non, et und vel können wir die folgenden Sätze mit Hilfe von Wahrheitswerttabellen beweisen:

(1)	$x + 0 = x$	(1')	$x \cdot 1 = x$
(2)	$x + 1 = 1$	(2')	$x \cdot 0 = 0$
(3)	$x + x = x$	(3')	$x \cdot x = x$
(4)	$x + \bar{x} = 1$	(4')	$x \cdot \bar{x} = 0$
(5)	$x + y = y + x$	Kommutativität von "+"	
(5')	$x \cdot y = y \cdot x$	Kommutativität von "·"	
(6)	$(x+y)+z = x+(y+z)$	Assoziativität von "+"	
(6')	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	Assoziativität von "·"	
(7)	$(x+y) \cdot z = (x \cdot z)+(y \cdot z)$	Distributivität bzgl. "+"	
(7')	$(x \cdot y)+z = (x+z) \cdot (y+z)$	Distributivität bzgl. "·"	
(8)	$x + (x \cdot y) = x$	Verschmelzungssätze	
(8')	$x \cdot (x + y) = x$		
(9)	$(x + \bar{y}) \cdot y = x \cdot y$		
(9')	$(x \cdot \bar{y}) + y = x + y$		

Als Beispiel beweisen wir den gegenüber der herkömmlichen Arithmetik ungewöhnlichen Satz (7'):

x	y	z	xy	xy+z	x+z	y+z	(x+z)·(y+z)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

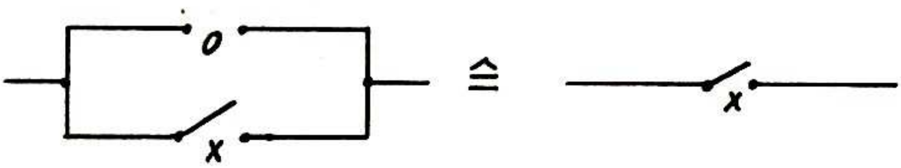
Selbstverständlich können wir beim Beweisen umfangreicherer Sätze auch deduktiv, ohne Wahrheitswerttabellen zu verwenden, schließen. Wir nehmen zum Beispiel an, wir hätten (7), (5'), (4') und (1) bereits bewiesen und beweisen nun (9) deduktiv:

$$(x+\bar{y})\cdot y \overset{\text{wegen (7)}}{=} (xy)+(\bar{y}y) \overset{\text{wegen (4')}}{=} (xy)+0 \overset{\text{wegen (1)}}{=} xy$$

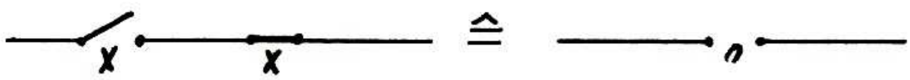
Frage an den Leser: Wo wurde (5') verwendet?

Zu jedem der angegebenen Sätze können wir nun die entsprechende Gleichheit von Schaltungen angeben. Dazu erinnern wir uns, daß wir vereinbart hatten, daß "1" ein ständig geschlossener und "0" ein ständig geöffneter Schalter bedeuten sollen. Wir geben (1), (4'), (7') und (9') an und überlassen den Rest dem Leser:

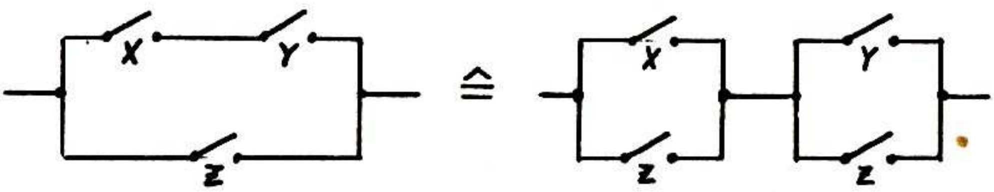
(1)



(4')



(7')



(9')

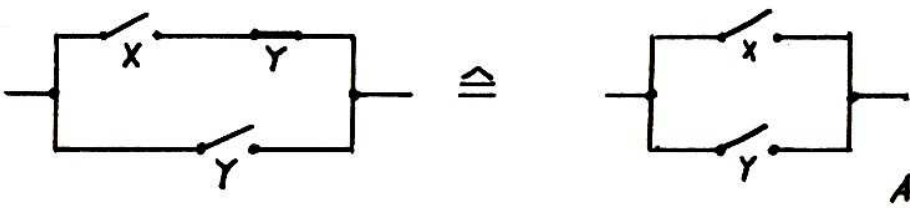


Abb. 6

Wir werden nun versuchen, die unter c) angegebene Schaltung mit Hilfe der angegebenen Sätze zu vereinfachen.
Das Leit-Verhalten S der Schaltung war bereits angegeben worden mit

$$S = s_1\cdot(s_4 + \bar{s}_4 + s_6) + s_1\cdot\bar{s}_7 + s_2\cdot(s_2\cdot\bar{s}_3 + \bar{s}_2\cdot\bar{s}_3)$$

Wegen $s_4 + \bar{s}_4 = 1$ (4), $1 + s_6 = 1$ (2) und

$s_1\cdot 1 = s_1$ (1') folgt:

$$S = s_1 + s_1\cdot\bar{s}_7 + s_2\cdot(s_2\cdot\bar{s}_3 + \bar{s}_2\cdot\bar{s}_3)$$

Wegen $s_2\cdot\bar{s}_3 + \bar{s}_2\cdot\bar{s}_3 \overset{(7)}{=} (s_2 + \bar{s}_2)\cdot\bar{s}_3 \overset{(4)}{=} 1\cdot\bar{s}_3 \overset{(1')}{=} \bar{s}_3$

folgt $S = s_1 + s_1\cdot\bar{s}_7 + \bar{s}_3\cdot s_2$

Diese Schaltung (siehe Abb.7a) ist bereits recht einfach, läßt sich aber immer noch weiter vereinfachen.

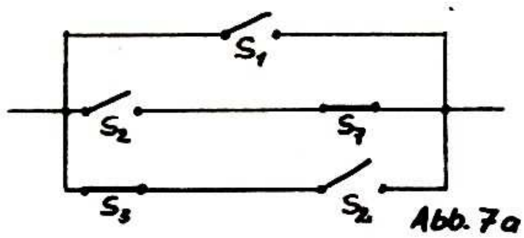


Abb. 7a

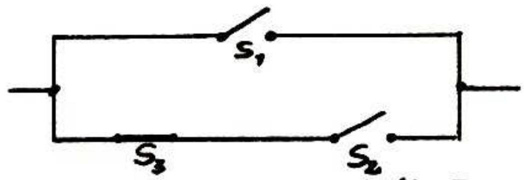


Abb. 7b

Wegen $s_1 = s_1\cdot 1$ (1'), $s_1\cdot 1 + s_1\cdot\bar{s}_7 = s_1\cdot(1 + \bar{s}_7)$ (7),

$1 + \bar{s}_7 = 1$ (2) und $s_1\cdot 1 = s_1$ (1') folgt

$$S = s_1 + \bar{s}_3\cdot s_2$$

Dieser Schaltung (Abb.7b) sieht man nicht mehr ohne weiteres an, daß sie das gleiche Leit-Verhalten hat wie die ursprüngliche Schaltung c).
Während wir für die Realisierung der Schaltung c)

2 Relais mit je einem Kontaktpaar (S_6 und S_7)
3 Relais mit je zwei Kontaktpaaren (S_1, S_4 und S_3)
und 1 Relais mit drei Kontaktpaaren (S_2)

benötigten, brauchen wir für die (ihr äquivalente) in Abb. 7b dargestellte Schaltung nur noch drei Relais mit je einem Kontaktpaar.
Demjenigen Leser, der sich mit der Minimisierung von Reihen-Parallel-Schaltungen weiter beschäftigen will, empfehlen wir

die Lektüre von

KÄMMERER: Ziffernrechenautomaten, Akad.Verlag Bln. 1963

AISERMAN u.a.: Logik, Automaten, Algorithmen. Akad.Verlag Bln. 1967.

Als letztes wenden wir uns nun der eingangs gestellten Aufgabe zu, eine Wechselschaltung für drei Schalter zu entwerfen. Dazu betrachten wir die folgende Tabelle:

Schalter 1	Schalter 2	Schalter 3	Lampe
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Die Zeilen dieser Tabelle entsprechen den verschiedenen Möglichkeiten der Schaltstellungen 0 oder 1 der Schalter 1, 2 und 3. So ist in Zeile 4 der Schalter 1 geöffnet, Schalter 2 und 3 sind geschlossen. Die Spalte für "Lampe" ist wie folgt entstanden: Sind alle drei Schalter geöffnet (Zeile 1), so soll die Lampe nicht leuchten ("0"). Wird nun genau ein Schalter betätigt (in unserem Fall beim Übergang von Zeile 1 zu Zeile 2 der Schalter 3), so soll die Lampe leuchten. Beim Übergang von Zeile 2 zu Zeile 3 wurden zwei Schalter (2 und 3) gleichzeitig betätigt, dabei soll sich aber der Zustand der Lampe nicht ändern usw.
Somit leuchtet die Lampe bei den auf Zeile 2, 3, 5 und 8 dargestellten Schalterzuständen; sie leuchtet also, wenn

$$
\begin{array}{ll}
 & (S_1 = 0 \text{ und } S_2 = 0 \text{ und } S_3 = 1) \\
\text{oder} & (S_1 = 0 \text{ und } S_2 = 1 \text{ und } S_3 = 0) \\
\text{oder} & (S_1 = 1 \text{ und } S_2 = 0 \text{ und } S_3 = 0) \\
\text{oder} & (S_1 = 1 \text{ und } S_2 = 1 \text{ und } S_3 = 1).
\end{array}
$$

Denken wir an die Entsprechung

"und" - "et" - "." und "oder" - "vel" - "+" ,

so lautet der normierte BOOLEsche Ausdruck für das Leuchten der Lampe

$$s_1 \cdot s_2 \cdot \bar{s}_3 + s_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot s_3 + \bar{s}_1 \cdot s_2 \cdot s_3 + \bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot \bar{s}_3$$

Diesem Ausdruck entspricht die auf Abb. 8 dargestellte Schaltung:

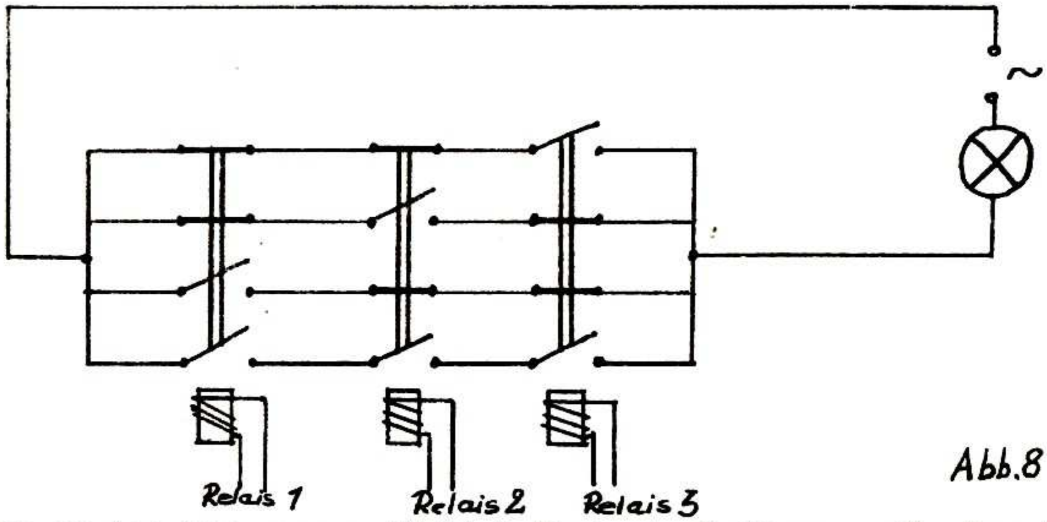


Abb.8

Ganz analog kann man natürlich Wechselschaltungen für 4 und mehr Schalter entwerfen.
Die Vereinfachung der in Abb. 8 angegebenen Schaltung überlassen wir dem Leser. Vereinfacht man die Schaltung über normierte BOOLEsche Ausdrücke, wird man bemerken, daß man zwischen den einzelnen Schaltern nur noch zweiadrige Kabel benötigt (nicht wie in Abb. 8 vieradrige). Das ist natürlich eine weitere Einsparung. Gleichfalls kann man sich überlegen, daß man statt Relais handelsübliche Wechselschalter verwenden kann. Dazu vergleichen wir die leicht abgeänderten Abb. 2 und Abb. 1:

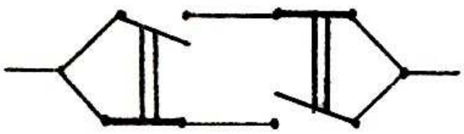


Abb. 1'

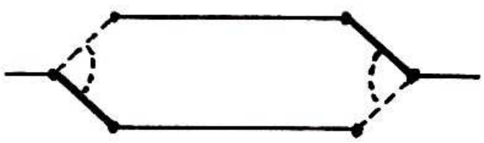


Abb. 2'

Viele Probleme der Schaltalgebra mußten hier unerwähnt bleiben oder konnten nur angedeutet werden. Der Beitrag hat seinen Zweck erfüllt, wenn das Interesse des Lesers geweckt wurde.

K. Fischer
Assistent
an der Sektion Mathematik der
Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Preisaufgaben (Serie 9/10/70)

(B43) Man bestimme den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen 11111111 und $\underbrace{11\ldots11}_{100 \text{ Einsen}}$

(B44) Wieviel Zusammenstellungen der Zahlen 1,2,...,n gibt es, bei denen nicht eine Zahl k ($k = 1,2,\ldots,n$) an der k-ten Stelle steht.

(B45) Man konstruiere eine Relais-Kontakt-Schaltung, die die duale Addition mit Übertrag realisiert.
(Hinweis: Für die Anzeige des zweistelligen Ergebnisses benutze man zwei Lämpchen!)
Man vereinfache die Schaltung!

(B46) Man zeige, daß es eine Potenz von 2 gibt, die mit der Ziffernfolge 999 beginnt.

(B47) Man zeige, daß in einem Sehnenviereck$\square$ ABCD die folgende Gleichung besteht:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

(B48) Für den Bau einer Lehrmaschine wird eine Schaltung benötigt, die folgendes leistet:

a) Auf genau einem der 4 Eingänge 1) bis 4) liegt eine 1.
b) Der Ausgang A wird genau dann mit 1 belegt, wenn i' und i mit 1 belegt sind ($1' \leq i' \leq 4'$) und ($1 \leq i \leq 4$).

Es stehen 4 Relais mit je 4 Kontaktpaaren zur Verfügung.
Man konstruiere eine solche Schaltung.

Für jeden vollständigen Lösungsweg einer Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für <u>zehn</u> Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender zehn Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).
Falls ein Besitzer von zehn Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum 10. des folgenden Monats (Datum des Post-

stempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" an unsere Adresse einzuschicken.
Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden.
Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

Gewinner der Ferien-Buch-Verlosung

Aus den uns eingesandten Formularen der Umfrage aus "Wurzel"-Nummer 7/8/70 haben wir die Gewinner ermittelt. Aus Platzgründen veröffentlichen wir hier nur die Gewinner des ersten und zweiten Preises. Alle anderen Gewinner wurden von uns schon benachrichtigt.

1. Preis: Buchscheck über 40.- M
   Soyka, Dietmar; 402 Halle, Landrain 47
2. Preis: Buchscheck über 20.- M
   Gulbins, Matthias; 682 Rudolstadt, Naumannstraße 10

Wir stellen vor: Klaus Fischer

Klaus Fischer ist seit 1969 als Assistent im Bereich Kybernetik der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena tätig. Er wurde 1943 in Gera geboren. In Gera besuchte er die EOS I und legte dort 1962 sein Abitur ab.
Von 1962 bis 1967 war er Lehrerstudent der Fachrichtung Mathematik-Physik. Klaus Fischer gehört mit zu den Initiatoren von Schülerzirkeln und war 1967 als Chefredakteur der "Wurzel" tätig. Nach Beendigung des Studiums leistete er seinen Ehrendienst in den Reihen der NVA ab.

In eigener Sache

Wir bitten die verspätete Auslieferung der "Wurzel" zu entschuldigen. Es war uns nicht möglich, die Nr. 9/70 rechtzeitig zum Druck zu geben und so entschlossen wir uns, ausnahmsweise die Nr.9/70 und Nr.10/70 als Doppelnummer herauszugeben.

Mathematik-Spezialistenlager

Die Teilnahme an Mathematik-Spezialistenlagern steht schon seit mehreren Jahren auf dem Ferienplan vieler Mathe-Asse unseres Bezirkes. Das diesjährige Sommerlager in Lobenstein wurde wie immer gemeinsam vom Kabinett für außerunterrichtliche Arbeit beim Rat des Bezirkes Gera und der Redaktion der "Wurzel" organisiert. Der Rat des Bezirkes war dabei für die organisatorischen Belange verantwortlich und dem Betreuerkollektiv, zum großen Teil aus Mitarbeitern der "Wurzel" bestehend, oblag die inhaltlich-fachliche Betreuung der Schüler. Auf Grund einer notwendigen Umlegung des Lagers von Greiz nach Lobenstein und unverantwortlicher organisatorischer Mängel in einigen Kreisen, wurden nur wenige zur Teilnahme vorgesehenen Schüler ordnungsgemäß über ihre Delegierung sowie Ort und Termin des Lagers informiert. So ist es zu erklären, daß insgesamt nur 34 Schüler (vorgesehen waren 60) anreisten. Fast hätte das diesjährige Sommerlager überhaupt nicht stattfinden können. Zum Glück gelang es unserem Kollektiv noch rechtzeitig, fehlende Betten mit Zubehör aus 4 verschiedenen Studentenwohnheimen Jenas zu organisieren. Wir möchten uns an dieser Stelle nochmals für die großzügige Unterstützung durch die ökonomische Direktion der FSU Jena, insbesondere der Mensa-Verwaltung und der Fahrbereitschaft, bedanken, ohne die das Lager undurchführbar gewesen wäre. Im Rahmen unseres Jugendobjekts "Studienwerbung und Studienvorbereitung" werden nun endlich vertragliche Vereinbarungen mit dem Rat des Bezirkes getroffen, die die wiederholten organisatorischen Mängel bei der Durchführung des Lagers beseitigen helfen sollen. Über diesen Vertrag werden wir in einer der nächsten Nummern der "Wurzel" berichten.
Doch zurück zum Sommerlager 1970. Neben dem 4-stündigen Unterricht am Vormittag hatten die Schüler bei zahlreichen anderen Veranstaltungen Gelegenheit, ihr Wissen zu erweitern und die Freizeit sinnvoll zu gestalten. Die gesamte Arbeit stand dabei im Zeichen des Lenin-Aufgebots der FDJ.
Als prominente Gäste konnten wir Herrn Dr. Schlosser, Dozent im Bereich Methodik und Parteisekretär der Sektion Mathematik, und Herrn Mattasch, Assistent im gleichen Bereich, zu einem Fachvortrag über programmiertes Lehrmaterial begrüßen. Anschließend an diesen Vortrag hatten die Schüler Gelegenheit, selbst mit pro-

grammierten Materialien zu arbeiten.
Ein zweiter Fachvortrag, gehalten von einem Forschungsstudenten aus dem Betreuerkollektiv, gab einen Überblick über einige Gebiete der Mathematik und ihre Anwendung.
Weiterhin trugen ein Lichtbildervortrag über den Klassenkampf der Neger in Amerika, erarbeitet von Studenten im Lenin-Aufgebot, zwei Literaturnachmittage über Dedektivgeschichten der Weltliteratur, ein Leichtathletik-Sportfest, ein Kinobesuch, eine mathematische Rätselstunde, Volleyball- und Fußballspiele usw. dazu bei, nie Langeweile aufkommen zu lassen.
In einer FDJ-Versammlung am ersten Tag wählten die Schüler eine GOL aus ihren Reihen, die in allen Belangen des Lagers mitentscheiden konnte, die Interessen der Schüler vertrat und das Betreuerkollektiv bei seiner Arbeit unterstützte. Innerhalb der einzelnen Klassenstufen wurde ebenfalls ein FDJ-Sekretär gewählt. Die Gestaltung der noch verbliebenen Freizeit erfolgte unter dessen Leitung mit Hilfe des Klassengruppenbetreuers aus dem Betreuerkollektiv.
Erstmalig diente ein Teil des Unterrichts am Vormittag ausschließlich dem Rechnen von Olympiadeaufgaben. Ziel dieser Übungen war es, die Schüler im Herangehen an solche Aufgaben, im Finden eines richtigen, möglichst einfachen, logisch aufgebauten Lösungsweges und im exakten Aufschreiben desselben zu schulen. Es wurden mehrere Varianten eines Lösungsweges besprochen, jeder Schritt logisch und zwingend aus gegebenen Fakten und bereits gemachten Schritten abgeleitet.
Außer diesem Training wurden die Schüler wieder mit ihrer Altersstufe angemessenen Gebieten der Mathematik, die außerhalb des Lehrstoffes der Schulen liegen, bekannt gemacht. So erhielten die Schüler der 8. Klassenstufe Unterricht in Mengenlehre, einem fundamentalen Bestandteil der Mathematik, wo sie aufbauend auf der Cantorschen Mengendefinition die Eigenschaften von Mengen und die Operationen mit ihnen kennenlernten. Weiterhin beschäftigten sie sich mit Geometrie (Drehungen, Spiegelungen usw. in der Ebene und deren Zusammensetzungen) und erstmals mit Zahlentheorie (ausgehend von Teilbarkeitsuntersuchungen und dem Primzahlbegriff bis zu diophantischen Gleichungen).
In Klasse 9 standen Kongruenztransformationen, formale Aussagen-

logik und Folgen auf dem Programm. In der Lagerolympiade wurde dazu z.B. folgende Aufgabe gestellt:

Von welcher Ordnung ist die Folge $\{a_n = n^3\}$?

Man berechne $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Für die Klassen 10 und 11 konnten wir Herrn Fleischmann, Assistent im Bereich Wahrscheinlichkeitsrechnung der Sektion Mathematik, gewinnen, der ein interessantes Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung schmackhaft aufzubereiten verstand. Außerdem erwarben die Schüler der Klasse 10 Kenntnisse und Fertigkeiten im Anwenden des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion und in der Matrizenrechnung. Neben der Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde die Klasse 11 noch mit numerischen Optimierungsverfahren, die in der Volkswirtschaft eine große Rolle spielen, und mit der Flußbildtechnik, einer Darstellungsmethode für Algorithmen, vertraut gemacht. In der Lagerolympiade sollte zum Beispiel ein Flußbild zur näherungsweisen Berechnung von sin x durch Potenzreihendarstellung

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm \dots$$

auf 5 Stellen genau angegeben werden, wenn der Einfachheit halber angenommen werden kann, daß Unterprogramme zur Berechnung von x^n und $n!$ zur Verfügung stehen.

Für die Schüler der Klassenstufe 12 waren schon stark auf den Hochschulstoff orientierte Fachgebiete ausgewählt worden. Sie wurden mit numerischen Optimierungsmethoden, ausgewählten Bereichen der Zahlentheorie und mit der komplexen Funktionentheorie bekannt gemacht.

Den Abschluß bildete wie immer ein gemütlicher Abend mit Bekanntgabe der Gewinner aus Olympiade und Sportfest und Prämierung derselben. Die sehr hohen Punktzahlen bei der Lagerolympiade bestätigten, daß ein Großteil der Schüler den mitunter recht schwierigen Stoff gut verstand.

Die Vorbereitungen für das nächste Mathematiklager im Winter 1971 sind bereits in vollem Gange, und wir hoffen, dann mehr Schüler des Bezirkes Gera begrüßen zu können.

Das Betreuerkollektiv

Lösungen

Für unsere Leser, die erst ab September 1970 die "Wurzel" abonnieren, veröffentlichen wir noch einmal zu den jeweiligen Lösungen die Aufgaben.

(B24): Man löse das Gleichungssystem

$$3x^2 - 2xy + 5y^2 - 35 = 0$$
$$x^2 - 2y^2 - 1 = 0$$

Lösung: Man überprüft leicht, daß $y = 0$ keine Lösung des Gleichungssystems liefert. Deshalb kann man im weiteren $y \neq 0$ voraussetzen.

Subtrahiert man das 35-fache der 2. Gleichung von der ersten Gleichung, so erhält man

$$-32x^2 - 2xy + 75y^2 = 0$$

oder $$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{1}{16}\cdot\frac{x}{y} - \frac{75}{32} = 0$$

Die quadratische Gleichung in $\frac{x}{y}$ hat die Lösungen

$$\left(\frac{x}{y}\right)_1 = -\frac{1}{32} + \sqrt{\frac{1 + 75\cdot 32}{32^2}} = \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)_2 = -\frac{1}{32} - \sqrt{\frac{1 + 75\cdot 32}{32^2}} = -\frac{25}{16}$$

Damit erhält man $x = \frac{3}{2}y$ oder $x = -\frac{25}{16}y$

I. $x = \frac{3}{2}y$

Aus der zweiten Gleichung folgt dann

$$\frac{9}{4}y^2 - 2y^2 - 1 = 0$$
$$y^2 = 4$$
$$y_{1,2} = \pm 2$$

Für x ergibt sich $x_{1,2} = \pm 3$

II. $x = -\frac{25}{16}y$

Aus der zweiten Gleichung folgt jetzt

$$\frac{625}{256}y^2 - 2y^2 - 1 = 0$$
$$y^2 = \frac{256}{113}$$
$$y_{3,4} = \pm\frac{16}{\sqrt{113}}$$

und für x ergibt sich $x_{3,4} = \mp\frac{25}{\sqrt{113}}$

Damit lauten die Lösungen des Gleichungssystems
(3, 2), (-3, -2), $(-\frac{25}{\sqrt{113}}, -\frac{16}{\sqrt{113}})$, $(\frac{25}{\sqrt{113}}, -\frac{16}{\sqrt{113}})$,
wie man durch Einsetzen bestätigt.

(B25): Man löse das Gleichungssystem

$$x_1 = \frac{2x_2^2}{1+x_3^2} \qquad (1)$$

$$x_2 = \frac{2x_3^2}{1+x_4^2} \qquad (2)$$

$$\cdots$$

$$x_{99} = \frac{2x_{100}^2}{1+x_1^2} \qquad (99)$$

$$x_{100} = \frac{2x_1^2}{1+x_2^2} \qquad (100)$$

Lösung: (eingesandt von M. Schulze, TH K.-M.-Stadt, der uns auch die Aufgabe einsandte)

Es sei $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Lösung des Gleichungssystems. Wie leicht zu sehen ist, gilt dann

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \qquad (1')$$

1.Fall: Es sei mindestens ein $x_i = 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x_1 = 0$. Dann folgt aus (2), (3), ..., (n-1) schrittweise

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0.$$

Durch Einsetzen zeigt man, daß dieses n-Tupel Lösung dieses Gleichungssystems ist.

2.Fall: Es sei kein x_i gleich Null. Durch Multiplikation von (1), (2), ..., (n) erhalten wir

$$x_1x_2x_3\cdot\ldots\cdot x_n = (x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n)^2\cdot 2^n\cdot$$
$$\cdot\frac{1}{1+x_1^2}\cdot\frac{1}{1+x_2^2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1+x_n^2}$$

Eine Umformung ergibt

$$\frac{1+x_1^2}{2}\cdot\frac{1+x_2^2}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1+x_n^2}{2} = x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n \qquad (2')$$

Wegen (1') ist der Satz über das arithmetische und geometrische Mittel anwendbar:

Ist $a, b \geq 0$, so gilt $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (Gleichheit für $a = b$). Auf unser Problem angewandt, ergibt dies: $\frac{1+x_1^2}{2} \geq x_1$

$\frac{1+x_2^2}{2} \geq x_2$

...

$\frac{1+x_n^2}{2} \geq x_n$

Durch Multiplikation dieser Ungleichungen erhalten wir

$$\frac{1+x_1^2}{2} \cdot \frac{1+x_2^2}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1+x_n^2}{2} \geq x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$$

Da auch (2') erfüllt sein muß, erhält man die Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 1$

Durch Einsetzen zeigt man, daß auch dieses n-Tupel Lösung ist.

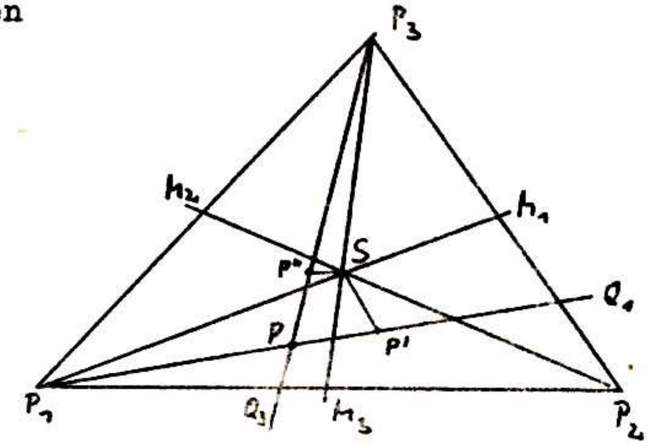
Die Aufgabe wurde etwas allgemeiner gelöst, als gefordert war. Wir erhalten also als Lösungen (relle) für die gestellte Aufgabe

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{100} = 0$$
$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{100} = 1.$$

(B26): (4. Aufgabe der IMO 1961)

Es seien ein Dreieck $P_1P_2P_3$ und ein beliebiger Punkt P im Inneren des Dreiecks gegeben. Die Schnittpunkte der Geraden P_1P, P_2P bzw. P_3P mit den gegenüberliegenden Seiten seien Q_1, Q_2, Q_3. Es ist zu beweisen, daß unter den Verhältnissen $\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PQ_1}}$, $\frac{\overline{P_2P}}{\overline{PQ_2}}$ und $\frac{\overline{P_3P}}{\overline{PQ_3}}$ wenigstens eines nicht größer als 2 und eines nicht kleiner als 2 ist.

Lösung: Es sei S der Schwerpunkt des Dreiecks $P_1P_2P_3$. Die drei Seitenhalbierenden schneiden die gegenüberliegenden Seiten in M_1, M_2 und M_3, wobei M_i auf der Seitenhalbierenden P_iS liegen soll (siehe Skizze). Ist P ein beliebiger Punkt im Inneren



von $\Delta P_1P_2P_3$, so gilt entweder

1. $P = S$

oder 2. Es gibt ein Dreieck P_iM_jS, in dem P liegt und es gibt ein Dreieck P_kM_lS, in dessen Inneren P nicht liegt.

Zum 1.Fall: Aus $P = S$ folgt $M_1 = Q_1$. In beliebigen Dreiecken gilt: Der Schwerpunkt S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 (vom jeweiligen Eckpunkt aus gerechnet). Daraus folgt

$$\overline{P_1S} : \overline{SM_1} = \overline{P_1P} : \overline{PQ_1} = 2$$

Zum 2.Fall: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $P \in \Delta P_1M_3S$. Alle anderen Fälle führt man durch Änderung der Bezeichnungen auf diesen Fall zurück.
Man zeichne durch S die Parallele zu P_2P_3. Der Schnittpunkt mit PQ_1 sei P'.
Nach dem Strahlensatz gilt:

$$\overline{P_1S} : \overline{SM_1} = \overline{P_1P'} : \overline{P'Q_1} = 2 : 1$$

Aus $\overline{P_1P} < \overline{P_1P'}$ und $\overline{PQ_1} > \overline{P'Q_1}$ folgt $\overline{P_1P} : \overline{PQ_1} < 2$.
Man zeichne durch S die Parallele zu P_1P_2. Der Schnittpunkt mit PP_3 sei P''.
Nach dem Strahlensatz gilt:

$$\overline{P_3S} : \overline{SM_3} = \overline{P_3P''} : \overline{P''Q_3} = 2 : 1.$$

Aus $\overline{P_3P} > \overline{P_3P''}$ und $\overline{PQ_3} < \overline{P''Q_3}$ folgt $\overline{P_3P} : \overline{PQ_3} > 2$.
Damit ist die Behauptung bewiesen.

<u>(B28)</u>: Für welche natürlichen Zahlen a und b besitzt die Gleichung $x^2 - abx + a + b = 0$
zwei ganzzahlige Lösungen?

<u>Lösung:</u> x_1, x_2 seien die beiden Lösungen der Gleichung und es gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_1 \leq x_2$.
Nach dem Vietaschen Wurzelsatz gilt:

$$x_1 + x_2 = a \cdot b \qquad (1)$$
$$x_1 \cdot x_2 = a + b \qquad (2)$$

Da a und b nicht negativ sind, können nach (1) und (2) auch x_1, x_2 nur nichtnegative Werte annehmen. Ist $x_1 = 0$, so folgt sogar $a = b = x_2 = 0$. Desgleichen folgt aus $a = 0$ oder $b = 0$, $x_1 = x_2 = b = 0$ bzw. $x_1 = x_2 = a = 0$.

Deshalb kann man für die weiteren Betrachtungen $x_1 \neq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ annehmen.
Dividiert man Gleichung (2) durch Gleichung (1) so erhält man

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{a \cdot b}{a+b}$$

oder

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Wegen $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 1$, $a \geq 1$, $b \geq 1$ folgt

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq 2$$

Da $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}$ nur für $a = b = 1$ möglich ist, dieser Fall jedoch keine Lösung ergibt, erhält man sogar

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > \frac{1}{2}.$$

Daraus folgt jetzt wegen $x_1 \leq x_2$ $x_1 \leq 3$.
Durch Einsetzen der Gleichungen (1) und (2) ineinander erhält man

$$a \cdot b = \frac{a + b}{x_1} + x_1$$

$$x_1^2 ab - x_1 a - x_1 b = x_1^3$$

$$(x_1 a - 1)(x_1 b - 1) = x_1^3 + 1.$$

Für $x_1 = 1, 2, 3$ ergeben sich die Gleichungen

$$(a - 1)(b - 1) = 2$$

$$(2a - 1)(2b - 1) = 9$$

und

$$(3a - 1)(3b - 1) = 28$$

Durch Faktorenzerlegung der rechten Seiten erhält man schnell die möglichen Lösungen

$a = 2$, $b = 3$
$a = 3$, $b = 2$
$a = 1$, $b = 5$
$a = 5$, $b = 1$
$a = 2$, $b = 2$

und bestätigt durch Einsetzen, daß diese Zahlen den Forderungen genügen. Damit sind alle gesuchten Paare (a,b) die folgenden Paare: $(0,0)$, $(1,5)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(5,1)$.

(B30): Man zeige, daß kein Polyeder existiert, das nur aus Flächen mit einer ungeraden Seitenzahl besteht und eine ungerade Anzahl Flächen besitzt.

Lösung: (nach R. Engelmann, EOS Saalfeld)
Jede Kante eines Polyeders wird aus genau zwei Seitenlinien zweier Flächen gebildet.
Daraus folgt, daß die Gesamtzahl der Kanten des Polyeders genau halb so groß wie die Gesamtzahl der Seiten aller Flächen ist. Damit muß diese Gesamtzahl eine gerade Zahl sein.
Existierte ein Polyeder, das nur aus Flächen mit ungerader Seitenzahl und einer ungeraden Zahl Seitenflächen besteht, so besäße dieses eine ungerade Gesamtzahl der Seiten aller Flächen, denn diese ergäbe sich aus der Summe einer ungeraden Anzahl ungerader Zahlen. Das aber ist ein Widerspruch zur obigen Festlegung, d.h. es kann kein Polyeder mit den geforderten Eigenschaften geben.

(B32): Man zeige, daß die Zahl

$$1\underbrace{0 \;\ldots\; 0}_{1961 \text{ Nullen}}1 \quad \text{keine Primzahl ist.}$$

Lösung: Um dies zu zeigen, muß man die Zahl in ein Produkt zweier Zahlen größer als 1 zerlegen. Das gelingt mit Hilfe der Gleichung

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$

denn es gilt

$$10^{1962} + 1 = (10^{654})^3 + 1^3 =$$

$$= (10^{654}+1)(10^{1308}-10^{654}+1).$$

Wegen $10^{1308} > 10^{654} > 0$ sind beide Faktoren größer 1 und somit ist die angegebene Zahl eine zusammengesetzte Zahl.

(B34): Man gebe alle Polynome P(x) an, für die gilt

$$x \cdot P(x - 1) \equiv (x - 26) \cdot P(x).$$

Lösung: Hat ein gesuchtes Polynom eine Nullstelle $x = x_0$, so hat es für $x_0 \neq 0$ auch die Nullstelle $x_0 - 1$ wegen

$$x_0 \cdot P(x_0 - 1) = (x_0 - 26) \cdot P(x_0) = 0.$$

Außerdem hat es für $x_0 \neq 25$ auch die Nullstelle $x_0 + 1$ wegen $0 = (x_0 + 1) \cdot P(x_0) = (x_0 - 25) \cdot P(x_0 + 1)$.
Ein gesuchtes Polynom muß die Nullstelle $x_0 = 0$ besitzen.
Damit hat es auch $x = 1, 2, 3, \ldots, 25$ als Nullstellen.

Besitzt es darüber hinaus noch andere Nullstellen, so muß es unendlich viele Nullstellen besitzen, d.h. $P(x) \equiv 0$. Im anderen Fall läßt sich $P(x)$ als

$$P(x) = c(x)\cdot x\cdot(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-25) \quad \text{darstellen.}$$

Dies in die Gleichung eingesetzt, ergibt

$$x\cdot c(x-1)\cdot(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-26) \equiv (x-26)\cdot c(x)\cdot x\cdot\ldots\cdot(x-25),$$

d.h. es muß gelten $c(x) \equiv c(x-1)$.

Das ist aber nur möglich, wenn $c(x) = \text{const.}$ ist.

Damit ergeben sich alle Lösungen zu

$$P(x) = c\cdot x\cdot(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-25),$$

wobei c eine beliebige reelle Zahl ist.

(B37): Man zeige

$$[x] + \left[x+\frac{1}{n}\right] + \left[x+\frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x+\frac{n-1}{n}\right] = [nx],$$

wobei $[x]$ die größte ganze Zahl ist, die x nicht übertrifft.

Lösung: (M. Schulze, TH K.-M.-Stadt, Spezialklasse 11)

Sei g eine natürliche Zahl derart, daß für festes n gilt:

(1) $\frac{g}{n} \le x - [x] < \frac{g+1}{n}$, also $g \le nx - n[x] < g + 1$.

Offenbar existiert stets eine solche Zahl.

Dann gilt (2) $[x] + \frac{g}{n} \le x < [x] + \frac{g+1}{n}$ und daraus

$$[x] + \frac{g+i}{n} \le x + \frac{i}{n} < [x] + \frac{g+i+1}{n} \quad \text{mit } i = 0,1,2,\ldots,n-1.$$

Nun ist aber für alle i mit $\frac{g+i}{n} < 1$, d.h. $i < n - g$:

$$\left[x + \frac{i}{n}\right] = [x]$$

und für alle i mit $1 \le \frac{g+i}{n}$, d.h. $i \ge n - g$:

$$\left[x + \frac{i}{n}\right] = [x] + 1.$$

(3) $\sum_{i=0}^{n-1}\left[x + \frac{i}{n}\right] = (n-g)[x] + g([x] + 1) = n[x] + g$

Aus (2) folgt $n[x] + g \le nx < n[x] + g + 1$ und daraus

(4) $[nx] = n[x] + g$.

Durch Gleichsetzen von (3) und (4) folgt

(5) $\sum_{i=0}^{n-1}\left[x + \frac{i}{n}\right] = [nx]$, was zu beweisen war.

(B38): Es seien x_1, x_2 und x_3 die Lösungen der Gleichung

$$x^3 - x^2 - 1 = 0.$$

Man stelle eine Gleichung auf, deren Lösungen x_1+x_2, x_2+x_3, x_1+x_3 sind.

Lösung: (A. Möbius, MLU Halle, Spezialklasse 11)

Die Gleichung

$$x^3 - x^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

hat die Lösungen x_1, x_2 und x_3.

Dann folgt nach dem Vietaschen Wurzelsatz aus (1):

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \tag{2}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0 \tag{3}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1 \tag{4}$$

Die Gleichung

$$A(x^3 + ax^2 + bx + c) = 0 \tag{5}$$

habe die Lösungen x_1+x_2, x_1+x_3 und x_2+x_3.

Dann folgt nach dem Vietaschen Wurzelsatz aus (5):

$$x_1+x_2 + x_1+x_3 + x_2+x_3 = - a \tag{6}$$

$$(x_1+x_2)(x_1+x_3) + (x_1+x_2)(x_2+x_3) + + (x_1+x_3)(x_2+x_3) = b \tag{7}$$

$$(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3) = - c \tag{8}$$

Aus (2) und (6) folgt

$$2\cdot(x_1 + x_2 + x_3) = 2\cdot 1 = -(-2)$$

und damit $\quad a = - 2 \qquad (9)$

Aus (2), (3) und (7) folgt

$$(x_1+x_2+x_3)^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 =$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) =$$
$$= (x_1+x_2)(x_1+x_3) + (x_1+x_2)(x_2+x_3) + (x_1+x_3)(x_2+x_3) =$$
$$= 1^2 + 0 = 1 \quad \text{und damit} \quad b = 1 \tag{10}$$

Aus (2), (3), (4) und (8) folgt

$$(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - x_1x_2x_3 =$$
$$= x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + 2x_1x_2x_3 +$$
$$+ x_2^2x_3 + x_2x_3^2 =$$
$$= (x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3) = 1\cdot 0 - 1 = - 1$$

und damit $\quad c = 1 \qquad (11)$

Aus (5), (9), (10) und (11) folgt

$$A(x^3 - 2x^2 + x + 1) = 0 \tag{12}$$

(12) ist die gesuchte Gleichung, wobei A eine beliebige reelle Zahl ist.

(B39): Ein Polynom $P(x)$ lasse bei der Division durch $x-a$, $x-b$, $x-c$ die Reste A, B bzw. C. Wie groß ist der Rest, den $P(x)$ bei der Division durch $(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c)$ läßt?

Lösung: (F. Müller, ABF Halle)

Offenbar gilt
$$P(x) = q_1(x)(x-a) + A = q_2(x)(x-b) + B = q_3(x)(x-c) + C,$$
damit folgt $P(a) = A$, $P(b) = B$, $P(c) = C$. (1)

Nun sei $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)p(x) + q(x)$, (2)

wobei $q(x)$ der Rest nach der Division von $P(x)$ durch $(x-a)(x-b)(x-c)$ sein soll, d.h. $q(x) = rx^2 + sx + t$.

Unter Verwendung von (1) und (2) kommt nun für $x = a$, $x = b$, $x = c$ das Gleichungssystem
$$ra^2 + sa + t = A$$
$$rb^2 + sb + t = B$$
$$rc^2 + sc + t = C$$
zustande, dessen Lösungen
$$r = \frac{(A-B)(b-c) - (B-C)(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$
$$s = \frac{(A-B)(b^2-c^2) - (B-C)(a^2-b^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$
$$t = \frac{a^2(Bc - Cb) + a(Cb^2 - Bc^2) + A(Bc^2 - Cb^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$
sind. Damit erhält man den gesuchten Rest $q(x)$ nach Vereinfachung mit
$$q(x) = A\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + B\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + C\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)},$$
woraus sofort eine Symmetrie ersichtlich ist.

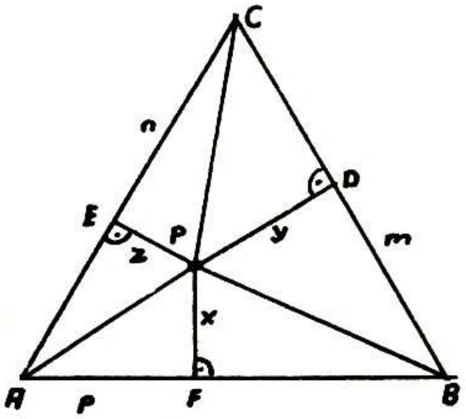
(B40): Innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks $\triangle ABC$ befinde sich ein Punkt P, von dem aus die Senkrechten $\overline{PD}$, $\overline{PE}$ bzw. $\overline{PF}$ auf $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ bzw. $\overline{AB}$ gezogen seien. Wie groß ist
$$\frac{\overline{PD} + \overline{PE} + \overline{PF}}{\overline{BD} + \overline{CE} + \overline{AF}} \;?$$

Lösung: (F. Müller, ABF Halle)

Gesucht ist das Verhältnis $t = \dfrac{x+y+z}{m+n+p}$.

Es sei $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a$. Nun gilt:
$$F_{\Delta ABC} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = F_{\Delta ABP} + F_{\Delta PBC} + F_{\Delta PCA} =$$
$$= \frac{ax}{2} + \frac{ay}{2} + \frac{az}{2}\,, \quad \underline{x+y+z = \frac{a}{2}\sqrt{3}} \qquad (1)$$

Unter Verwendung des Satzes des Pythagoras ergibt sich



$p^2 + x^2 = z^2 + (a - n)^2$

$m^2 + y^2 = x^2 + (a - p)^2$

$n^2 + z^2 = y^2 + (a - m)^2$,

nach Addition und Vereinfachung erhält man

$m^2+n^2+p^2+x^2+y^2+z^2 =$
$= x^2+y^2+z^2+3a^2+m^2+n^2+$
$+p^2-2an-2am-2ap$ und

$m + n + p = \frac{3}{2}a$ (2).

Mit (1) und (2) folgt für $t = \frac{a\sqrt{3}\cdot 2}{2\cdot 3a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
womit die Aufgabe gelöst ist.

(B41): Man beweise: Ist die Zahl abc (a,b,c sind die Ziffern dieser Zahl im Dezimalsystem) durch 37 teilbar, so sind auch die Zahlen bca und cab durch 37 teilbar.

Lösung: (M. Schulze, TH K.-M.-Stadt, Spezialklasse 11)

Wenn die Zahl abc durch 37 teilbar ist, dann gilt

$$100a + 10b + c \equiv 0 \pmod{37}$$
$$10(100a + 10b + c) \equiv 0 \pmod{37}$$
$$1000a + 100b + 10c \equiv 0 \pmod{37}$$
$$27a \cdot 37 \equiv 0 \pmod{37}$$
$$999a \equiv 0 \pmod{37}$$
$$100b + 10c + a \equiv 0 \pmod{37}$$

Also ist auch die Zahl bca durch 37 teilbar. Es wurde gezeigt: Aus $37|abc$ folgt $37|bca$ (1)

Durch zyklische Vertauschung von a, b und c erhält man:

Aus $37|bca$ folgt $37|cab$ (2)

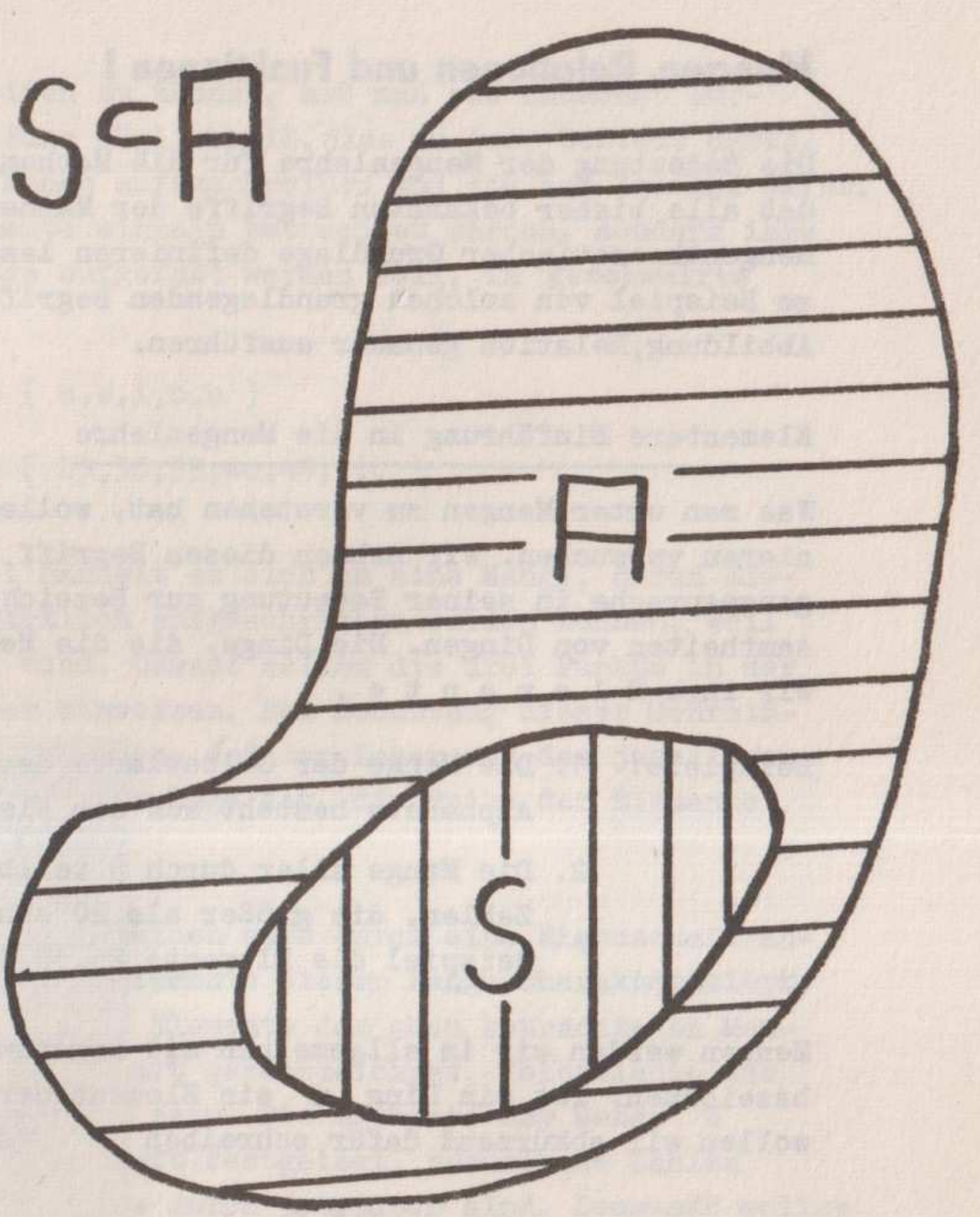
Demnach gilt die Behauptung.

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS und SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Carola Schimmel, Volker Kögel
Mitarbeiter: H. Fischer (Versandleiter), R. Lorenz (Leiter des Aufgabenteils), M. Wolf (Manuskript)

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
DDR 69 Jena Helmholtzweg 1 "Wurzel-Redaktion"

 V-14-6 4 5193 M 175-70



11
70

WURZEL

zeitschrift für mathematik an

ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
FDJ-Aktiv der
Sektion Mathematik
an der
Friedrich-Schiller-
Universität Jena

Mengen, Relationen und Funktionen I

Die Bedeutung der Mengenlehre für die Mathematik besteht darin, daß alle bisher bekannten Begriffe der Mathematik sich auf mengentheoretischer Grundlage definieren lassen. Wir werden dies am Beispiel von solchen grundlegenden Begriffen wie Funktion, Abbildung,Relation genauer ausführen.

Elementare Einführung in die Mengenlehre

Was man unter Mengen zu verstehen hat, wollen wir nicht zu definieren versuchen. Wir nehmen diesen Begriff vielmehr aus der Umgangssprache in seiner Bedeutung zur Bezeichnung gewisser Gesamtheiten von Dingen. Die Dinge, die die Menge bilden, nennen wir ihre E l e m e n t e .

Beispiele:
1. Die Menge der Selbstlaute des lateinischen Alphabets besteht aus den Elementen a,e,i,o,u.
2. Die Menge aller durch 5 teilbaren natürlichen Zahlen, die größer als 20 sind, besitzt zum Beispiel die Elemente 25,30,35,40.

Mengen werden wir im allgemeinen mit irgendwelchen Buchstaben bezeichnen. Ist ein Ding x ein Element der Menge M , so wollen wir abkürzend dafür schreiben

$$x \in M$$

Im anderen Fall benutzen wir die Schreibweise

$$x \notin M$$

Beispiele:

3. Die Menge der Selbstlaute des lateinischen Alphabets werde mit S bezeichnet. Dann gilt zum Beispiel
   $a \in S$, $i \in S$, $k \notin S$, $s \notin S$.
4. Bezeichnet man die Menge aller durch 5 teilbaren natürlichen Zahlen, die größer als 20 sind, mit Z , so gilt
   $0 \notin Z$, $15 \notin Z$, $18 \notin Z$, $25 \in Z$,...

Um mit Mengen arbeiten zu können, muß man sie zunächst aufschreiben können. Eine Möglichkeit, dies zu tun, besteht darin, alle Elemente der Menge aufzuschreiben und sie zum Zeichen dafür, daß nicht die Elemente einzeln betrachtet werden, sondern ihre Gesamtheit als Menge aufgefaßt werden soll, in geschweifte Klammern setzt.

Beispiele: $S = \{ a,e,i,o,u \}$

$$Z = \{ 25,30,35,40,45,\dots \}$$

Im zweiten Beispiel handelt es sich um eine Menge, deren Elemente nicht alle wirklich aufgeschrieben werden können, weil es unendlich viele sind. Darauf sollen die drei Punkte in der geschweiften Klammer hinweisen. Bei Benutzung dieser Schreibweise wird immer angenommen, daß der Leser aus dem jeweiligen Zusammenhang heraus in der Lage ist, die Reihe der Elemente richtig fortzusetzen.

Eine Menge kann im allgemeinen auch durch eine Eigenschaft angegeben werden, die die Elemente dieser Menge charakterisiert. Beispielsweise werden die Elemente der oben betrachteten Menge S durch die Eigenschaft gekennzeichnet, Selbstlaute des lateinischen Alphabets zu sein. Die Elemente der Menge Z werden durch die Eigenschaft festgelegt, natürliche Zahlen größer als 20 zu sein, die durch 5 teilbar sind. Demgemäß wollen wir schreiben

$$Z = \{x: x \text{ natürliche Zahl und } x > 20 \text{ und } x \text{ teilbar durch } 5\}$$

gelesen:
" Z ist die Menge aller derjenigen Elemente, die durch 5 teilbare natürliche Zahlen größer als 20 sind."
Mit anderen Worten:
Ein Element (bei uns mit x bezeichnet) gehört genau dann zur Menge Z , wenn es die rechts vom Doppelpunkt aufgeführte Eigenschaft besitzt.

Hieraus ergibt sich sofort, daß das x durch ein beliebiges an-

deres Symbol ersetzt werden kann, ohne daß sich an der aufgeschriebenen Menge etwas ändert.
Die Menge S kann so aufgeschrieben werden:

$$S = \{ x: x \text{ ist Selbstlaut des lateinischen Alphabets} \}$$

Weitere Beispiele: 5. $E = \{ x: x^2 - 3x + 2 = 0 \}$
E besteht also aus allen denjenigen x, die die Bedingung $x^2 - 3x + 2 = 0$ erfüllen. Das heißt aber, $E = \{1,2\}$, denn $x = 1$ und $x = 2$ sind die einzigen Zahlen, die diese Gleichung lösen.

6. $F = \{ x: x = 0 \text{ oder } x = 3 \text{ oder } x = 7 \}$
Es ist offenabr $F = \{ 0,3,7\}$.

Untermengen

Verschiedene Mengen können hinsichtlich ihrer Elemente miteinander verglichen werden. Es kann vorkommen, daß alle Elemente einer Menge A auch Elemente der Menge B sind. In diesem Fall wollen wir A eine Teilmenge (oder Untermenge) von B nennen und schreiben

$$A \subseteq B$$

Wir nennen A eine echte Teilmenge von B, wenn es in B wenigstens ein Element gibt, das nicht zu A gehört und schreiben .in diesem Fall

$$A \subset B$$

Beispiele: 7. Für jede Menge M gilt $M \subseteq M$.
M ist jedoch keine echte Teilmenge von M.

8. Ist A die Menge aller Buchstaben des lateinischen Alphabets, so gilt

$S \subseteq A$ und sogar $S \subset A$.

9. Ist N die Menge aller natürlichen Zahlen, so ist
$Z \subseteq N$ und sogar $Z \subset N$.

Wir sind nun in der Lage zu definieren, wann zwei Mengen gleich sein sollen.

D e f i n i t i o n :

D $A = B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

Wenn man an die Definition von $\subseteq$ denkt, bedeutet diese Definition folgendes:
Die Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn jedes Element von A auch Element von B und jedes Element von B auch Element von A ist.
(Es ist interessant, daß diese Vorstellung über die Gleichheit von Mengen, die jeder vernünftige Mensch gefühlsmäßig sofort anerkennt, durch obige Definition auf die Elementbeziehung allein zurückgeführt ist.)

Beispiel: 10. Die Mengen $U = \{x: x^2 = 4\}$ und $V = \{x: 1 < |x| < 3 \text{ und } x \text{ ganze Zahl}\}$ sind gleich. Es gilt $U = V$.

Dr. G. Wechsung
Dozent
an der Sektion Mathematik der
Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Preisaufgaben (Serie 11/70)

(B49) Man löse das Gleichungssystem

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10 \qquad (1)$$
$$(x + y)(xy - 1) = 3 \qquad (2)$$

(B50) Man beweise, daß die Ungleichung

$$\frac{\sin x - 1}{\sin x - 2} + \frac{1}{2} \geq \frac{2 - \sin x}{3 - \sin x}$$

für alle reellen Werte von x gültig ist. Für welche x tritt Gleichheit ein?

(B51) Man bestimme die kleinste natürliche Zahl, die genau 20 Teiler besitzt.

(B52) Es sei bekannt, daß die Beträge aller Wurzeln der quadratischen Gleichungen

$$x^2 + Ax + B = 0$$

und

$$x^2 + Cx + D = 0$$

kleiner als 1 sind. Man zeige, daß dann auch die Beträge der Wurzeln von

$$x^2 + \frac{A + C}{2} \cdot x + \frac{B + D}{2} = 0$$

kleiner als 1 sind.

(B53) Man beweise: $(x \cdot \bar{y}) + y = x + y$

a) mit Hilfe einer Wahrheitswerttabelle

b) deduktiv unter Verwendung von (5), (4) und (1').

(siehe dazu Wurzel-Nr. 9/10/70).

(B54) Um ein gegebenes Rechteck mit den Seitenlängen a und b sei ein Rechteck mit dem Flächeninhalt m^2 zu umschreiben. Für welche Werte von m ist die Aufgabe lösbar?

Für jeden vollständigen Lösungsweg einer Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für zehn Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender zehn Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).
Falls ein Besitzer von zehn Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum 10. des folgenden Monats (Datum des Poststempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" an unsere Adresse einzuschicken.
Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden.
Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

Elementare Einführung in die Graphentheorie

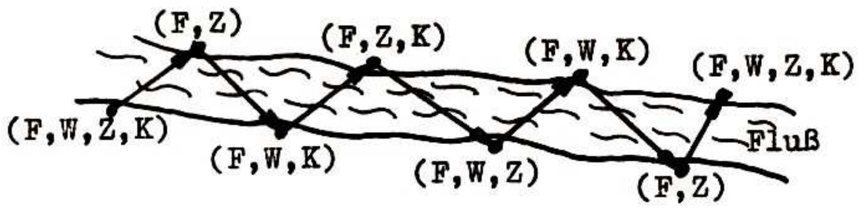
Die Theorie der Graphen stellt eine moderne mathematische Disziplin dar, die es gestattet, sowohl eine Reihe von Aufgaben der klassischen Mathematik elegant zu lösen als auch komplizierte Probleme aus verschiedenen Bereichen der Mathematik und anderer Wissenschaften erfolgreich zu bearbeiten. Es kann nicht Aufgabe dieses Beitrages sein, die Graphentheorie umfassend darzustellen, vielmehr sollen einige einfache Prinzipien für die Anwendung von Graphen aufgezeigt werden.

Bevor der Begriff "Graph" näher erläutert wird, sei ein bekanntes und einfaches Problem betrachtet.

"Einem Fährmann wird die Aufgabe gestellt, einen Wolf, eine Ziege und einen Kohlkopf über einen Fluß zu setzen. Das Fährboot faßt aber außer dem Fährmann nur eines der drei überzusetzenden Objekte. Der Fährmann soll außerdem verhindern, daß in seiner Abwesenheit der Wolf die Ziege oder die Ziege den Kohlkopf frißt. Wie ist die Überfahrt mit einem Minimum an Fahrten zu realisieren?"

Die Lösung der Aufgabe bedarf natürlich nur einer kurzen Überlegung. Eine geschickte graphische Darstellung des Problems liefert die Lösungen, denn es gibt deren zwei, übersichtlich und macht jeden Kommentar überflüssig.

F - Fährmann
W - Wolf
Z - Ziege
K - Kohlkopf



Jede der gerichteten Strecken symbolisiert eine Fahrt. (Anstelle der gerichteten Strecken hätten auch schlingenfreie orientierte Linien benutzt werden können.). Jeder der bezeichneten Punkte symbolisiert die sich am jeweiligen Ufer befindlichen Objekte nach einer Fahrt. Die zweite existierende Lösung fällt an, indem die gerichteten Strecken entgegengesetzt orientiert werden.

Wird die obige Skizze durch Weglassen der Konturen des Flusses vereinfacht, so entsteht eine Struktur, die aus einer Menge von Punkten und einer Menge von gerichteten Linien zwischen den Punkten besteht. Eine solche Struktur soll gerichteter Graph heißen.

Diese heuristische [1] Definition des Graphen als eine Menge von Punkten und eine Menge von gerichteten Bögen zwischen den Punkten erweist sich naturgemäß bei einer kritischen Betrachtung als zu eng und mathematisch nicht präzise. Eine sachgemäße Definition ist etwa die folgende:

---

1) heuristisch - vorläufig, versuchsweise

D e f i n i t i o n :

$G = (X,\Gamma)$ heißt gerichteter Graph genau dann, wenn gilt: X ist eine nichtleere Menge und Γ ist eine Abbildung (nicht notwendig eindeutig!) der Menge X in sich.

Die Interpretation der Elemente von X als Punkte der Ebene und der Abbildungsvorschrift als gerichtete Bögen zwischen Originalpunkten und den zugehörigen Bildpunkten läßt die Beziehung zu der oben genannten heuristischen Definition des Graphen deutlich werden.

Für die folgenden Überlegungen reicht die heuristische Definition des Graphen aus. Zunächst werden noch einige Bezeichnungen vereinbart, die für die weiteren Betrachtungen zweckmäßig sind:

<u>Ungerichteter Graph:</u> Graph, dessen Bögen nicht orientiert sind.

<u>Endpunkt eines Graphen:</u> Punkt eines Graphen, der mit genau einem Bogen koinzidiert [2].

<u>Kreuzungspunkt r-ter Ordnung:</u> Punkt eines Graphen, in dem genau $r+2$ Bögen zusammenstoßen ($r \geq 1$).

<u>Geschlossener Graph:</u> Graph ohne Endpunkte.

<u>Baumgraph:</u> Ungerichteter Graph, der durch Fortnahme eines beliebigen Bogens in zwei Teile zerfällt, die selbst wieder ungerichtete Graphen sind. Ein einzelner Punkt kann dabei als ungerichteter Graph gedeutet werden.

<u>kleinstes umschlossenes Gebiet:</u> Flächenstück, das von Bögen eines ungerichteten Graphen umschlossen wird und durch keine weiteren Bögen des Graphen zerteilt wird.

Mit Hilfe dieser Begriffe ist es möglich, einige Eigenschaften ungerichteter Graphen, deren Punkte Kreuzungspunkte sind, einfach zu formulieren.

Satz 1: Ein Graph besitze K_1 Kreuzungspunkte erster Ordnung, K_2 Kreuzungspunkte zweiter Ordnung, usw., K_r Kreuzungspunkte r-ter Ordnung. Dann gilt für die Gesamtzahl der

a) Bögen des Graphen:

$$n = \frac{1}{2}\cdot\sum_{s=1}^{r}(s+2)\cdot K_s$$

2) koinzidieren - zusammentreffen

b) Kreuzungspunkte des Graphen:

$$m = \sum_{s=1}^{r} K_s$$

Ein Beweis erübrigt sich.

Satz 2: Ein Graph mit m Kreuzungspunkten und n Bögen kann durch Fortnahme von n-m+1 Bögen in einen Baumgraphen überführt werden.
Um einen Graphen mit m Kreuzungspunkten und n Bögen in einen Baumgraphen zu überführen, müssen genau n-m+1 Bögen entfernt werden.

Die Beweisidee wird nur kurz skizziert. Es ist leicht einzusehen, daß ein Baumgraph mit m Punkten genau m-1 Bögen besitzt. Andernfalls wäre die Bedingung nicht erfüllt, daß ein Baumgraph durch Wegnahme eines beliebigen Bogens zerfällt. Die Differenz zwischen den n Bögen des gegebenen Graphen und den m-1 Bögen des entsprechenden Baumgraphen beträgt genau n-m+1 Bögen.

Satz 3: Die Gesamtzahl der kleinsten umschlossenen Gebiete eines Graphen mit m Kreuzungspunkten und n Bögen beträgt n-m+1.

Auch hier wird die Beweisidee nur angedeutet. Es ist klar, daß sich die Anzahl der kleinsten umschlossenen Gebiete bei Fortnahme eines Bogens um 1 verringert, solange der Graph nicht zerfällt. Die Anzahl der kleinsten umschlossenen Gebiete in einem Baumgraph ist Null. Daraus folgt Satz 3 (unter Benutzung von Satz 2).
Zur Anwendung der gewonnenen Erkenntnisse über Graphen bietet sich der Eulersche Polyedersatz an. Dieser klassische Satz besagt:

> "In jedem konvexen Polyeder ist die Anzahl der Flächen und Ecken zusammen um 2 größer als die Anzahl der Kanten."

$$F + E = K + 2$$

F - Anzahl der Flächen
E - Anzahl der Ecken
K - Anzahl der Kanten

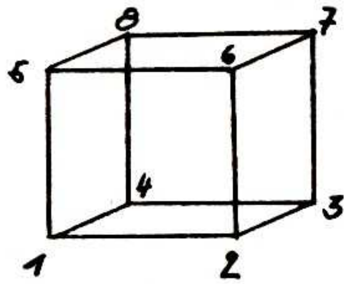
Der Beweis dieses Satzes kann folgendermaßen geführt werden:
Die Ecken bzw. Kanten des konvexen Polyeders werden als Kreuzungspunkte bzw. Bögen eines ungerichteten Graphen ge-

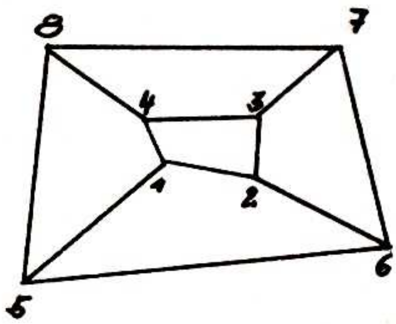
deutet. Jede Ecke des Polyeders, in der r+2 Kanten zusammenstoßen, stellt im Graphen einen Kreuzungspunkt r-ter Ordnung dar ($r \geq 1$). Die Flächen des Polyeders finden sich im Graphen als kleinste umschlossene Gebiete wieder, wobei genau eine Polyederfläche durch das den gesamten Graphen umschließende Gebiet realisiert wird (wegen der Darstellung des dreidimensionalen Polyeders als zweidimensionaler Graph).
Dann gilt unter Benutzung der früher angestellten Überlegungen:

$$F - 1 = n - m + 1 \qquad \text{(Satz 3)}$$
$$E = m \qquad \text{(Satz 1)}$$
$$K = n$$

Daraus folgt $F + E = n + 2$ und $K + 2 = n + 2$.
Damit ist aber $F + E = K + 2$.

Betrachten wir als Beispiel den Würfel:





Jeder Kreuzungspunkt ist von der Ordnung 1.

$$K = n = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 = 12, \qquad E = m = 8$$
$$F - 1 = n - m + 1 = 5, \qquad \text{also } F = 6$$

H. Peuker
Leiter des Rechenzentrums an der Friedr.-Schiller-Universität Jena

Raten und Rechnen
(Jeder Buchstabe bedeutet eine Ziffer, gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern)

$$\begin{array}{ccccc} abc & - & ef & = & cbg \\ : & & + & & - \\ dc & \cdot & dc & = & dhe \\ \hline cd & + & dbg & = & dce \end{array}$$

Studienwerbung – Studienvorbereitung

"Überholen ohne einzuholen" - diese drei Worte charakterisieren in knapper Form unseren Weg zu Pionier- und Spitzenleistungen. Dieses Prinzip allseitig durchzusetzen ist,wie Ihr sicherlich bereits in Diskussionen an Eurer Schule erfahren habt, ein dringend zu lösendes Problem nicht nur für Arbeiter und Genossenschaftsbauern. Auch von allen Angehörigen der Universitäten und Hochschulen, d.h. sowohl von den Angehörigen des Lehrkörpers als auch von den Studenten, ist diese Aufgabe in ihrem Wirkungsbereich zu bewältigen. Dieser Wirkungsbereich läßt sich einteilen in die eng miteinander gekoppelten zwei Bereiche: Forschung und Entwicklung sowie Erziehung und Ausbildung.
Die Fragen der marxistisch-leninistisch durchdrungenen Erziehung und Ausbildung beziehen sich nicht nur auf die bereits an unserer Sektion immatrikulierten Studenten, sondern auch auf Schüler mit besonderem Interesse an der Mathematik. In diesem Zusammenhang ist Euch bekannt, daß das Kollektiv der "Wurzel" das Mathematik-Lager des Bezirkes Gera durchführt und die Zeitschrift "Wurzel" für Euch gestaltet.
Auch ich wurde zu Beginn des vergangenen Studienjahres vom Direktor unserer Sektion, Herrn Prof.Dr.Pietsch, mit einer Aufgabe dieses Bereiches betraut, von der ich Euch jetzt berichten möchte.
Die Schüler der 11. und 12. Klassen der beiden Jenaer erweiterten Oberschulen erhalten im Rahmen des UTP eine jeweils auf ihr späteres Studium orientierte Ausbildung. Von der EOS "Johannes-R.-Becher" entschieden sich fünf Schülerinnen, während ihres UTP zu uns an die Sektion Mathematik zu kommen, weil sie besonderes Interesse für Mathematik und Pädagogik besitzen. Mit ihnen traf ich mich alle 14 Tage für jeweils 3 Stunden in einem Seminarraum unserer Sektion. Aussagenlogik und Mengenlehre waren die Stoffkomplexe, die wir uns erarbeiteten. Zu diesem Zweck trug ich jeweils ein bis eineinhalb Stunden von dieser Theorie vor. Der für die Mathematik typische hohe Abstraktionsgrad, höher als er im bisher gelehrten Schulstoff im Fach Mathematik erreicht wird, durfte auf keinen Fall dazu führen, daß die dargelegten Begriffe und Probleme als graue Theorie an den Schülern vorbeirauschten. In der sich jeweils

an den Vortrag anschließenden Übungsstunde bemühten wir uns gemeinsam, die Theorie mit Leben zu erfüllen. Wie es der hohe Abstraktionsgrad in der Mathematik ermöglicht, Aufgaben aus den verschiedensten Gebieten mit den Mitteln der Aussagenlogik und Mengenlehre sehr prägnant zu beschreiben, verdeutlichten die vielen von uns durchdachten Beispiele. Diese vielen Übungen führten andererseits dazu, Anfangsgründe der so exakten mathematischen Beweisführung zu erlernen. Diese erlernte Fähigkeit übten die Schülerinnen auch im praktischen Teil der Ausbildung an unserer Sektion, indem sie für Schüler der Klassenstufe 5 abwechselnd einen Mathematik-Zirkel leiteten. Hierbei machten sie sich unter Leitung eines Lehrerstudenten der Fachrichtung Mathematik/Physik des 4.Studienjahres außerdem vertraut mit Fragen der Pädagogik.

Trotz der vielen positiven Ergebnisse dieser Ausbildungsform zeigten sich auch Mängel, die einer Effektivitätssteigerung unserer Arbeit entgegenwirkten.

1. Da wir nur alle 14 Tage zusammen arbeiteten, verloren wir jeweils viel Zeit, um das Gelernte des vergangenen Ausbildungstages aufzufrischen.
2. Wir fanden nur wenig Zeit, allgemeine und spezielle Probleme eines Mathematikstudiums zu diskutieren.

Diese Hemmnisse veranlaßten mich, die Ausbildung im Frühjahrssemester in einem anderen Rahmen durchzuführen. In Absprache mit der EOS organisierten wir für die letzte Unterrichtswoche vor den Sommerferien einen fünftägigen Intensivkursus in Weimar. Ein umfangreichss Programm hatten wir uns für diese Arbeits- und Freizeit zusammengestellt:

1. Täglich 4 Stunden Vorlesungs-Übungs-Betrieb zu Problemen der Vektorrechnung(nach einem programmierten Lehrmaterial) und der komplexen Zahlen,
2. Täglich 2-3 Stunden Selbststudium zu den bereits behandelten mathematischen Problemen bzw. als Vorbereitung eines Kurzvortrages durch eine Schülerin (verschiedene Hochschullehrbücher standen zur Verfügung),
3. Gemeinsame Besuche des Deutschen Nationaltheaters und berühmter Weimarer Gedenkstätten der Klassik,

4. Sportlicher Ausgleich beim täglichen Tischtennis- und Federballspielen, eine kleine Wanderung in die Umgebung von Weimar,
5. Auch übten wir uns als Meister des Bratens der begehrten Thüringer Bratwürste und besuchten die bekannte Thüringer Spezialitätengaststätte "Elephantenkeller".

Durch unser Zusammenleben fünf Tage lang ergaben sich viel Zeit und manche Anlässe zum Diskutieren über interessante Fragen nach Ziel und Durchführung eines Universitätsstudiums, speziell eines Mathematikstudiums.
Nach diesen fünf Tagen urteilten die Schülerinnen einstimmig, es sei für sie eine sehr wertvolle Zeit gewesen.

Wie wird an Eurer Schule das Problem UTP-Vorbereitung auf ein Studium gelöst?
Bitte schreibt uns Eure Erfahrungen.

Irmhild Fischer
Forschungsstudentin des Bereichs Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik an der Sektion Mathematik der FSU Jena

Lösungen

(B42): Welchen maximalen Wert kann der Betrag einer komplexen Zahl z annehmen, wenn gelten soll

$$\left|z + \frac{1}{z}\right| = 1 \ ?$$

Lösung: Setzt man $z = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$,

so gilt $$|z^2 + 1| = \sqrt{(r^2\cos 2\varphi + 1)^2 + (r^2\sin 2\varphi)^2}$$
$$= \sqrt{r^4 + 2r^2\cos 2\varphi + 1} \qquad (1)$$

Es ist nun $\left|z + \frac{1}{z}\right| = \frac{|z^2 + 1|}{r} = 1$,
was in Verbindung mit Gleichung (1)

$$r^4 + r^2(2\cos 2\varphi - 1) + 1 = 0$$ liefert.

Setzt man $r^2 = t$, so nimmt $|z| = r$ genau dann den größten Wert an, wenn auch t maximal wird. Für t ergibt sich

$$t_{1,2} = \frac{1 - 2\cos 2\varphi \pm \sqrt{(1 - 2\cos 2\varphi)^2 - 4}}{2}$$

Da der maximale Wert von t gesucht wird, betrachtet man nur das Pluszeichen. Für $\cos 2\varphi = -1$ wird der größtmögliche Wert erreicht, wie man leicht sieht. Damit wird

$$t_{max} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

und für $|z|_{max} = t_{max}$ ergibt sich

$$|z|_{max} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

(B43): Zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers wird zweckmäßig der Euklidische Algorithmus verwendet.

Dazu formt man um:

$$\underbrace{11\ldots11}_{100 \text{ Einsen}} = \sum_{k=1}^{100} 10^{100-k}$$

$$11111111 = \sum_{k=1}^{8} 10^{8-k}$$

Es gilt $\sum_{k=1}^{100} 10^{100-k} =$

$$= \sum_{k=97}^{100} 10^{100-k} + \sum_{k=1}^{96} 10^{100-k} =$$

$$= 1111 + 10^4 \sum_{k=1}^{96} 10^{96-k} =$$

$$= 1111 + 10^4 \sum_{n=0}^{11} \sum_{k=1}^{8} 10^{8n + (8-k)} =$$

$$= 1111 + 10^4 \sum_{n=0}^{11} 10^{8n} \cdot \sum_{k=1}^{8} 10^{8-k}$$

Damit ergibt sich

$$\left(\sum_{k=1}^{100} 10^{100-k}\right) : \left(\sum_{k=1}^{8} 10^{8-k}\right) = 10^4 \sum_{n=0}^{11} 10^{8n} \quad \text{Rest } 1111$$

$$\left(\sum_{k=1}^{8} 10^{8-k}\right) : 1111 = 10001 \quad \text{Rest } C$$

Man erhält als größten gemeinsamen Teiler der Zahlen

$$\sum_{k=1}^{100} 10^{100-k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{8} 10^{8-k}$$

die Zahl 1111.

(B46): Es ist zu zeigen, daß es natürliche Zahlen k und n gibt, so daß $999 \cdot 10^n \leq 2^k < 10^{n+3}$ gilt.

Durch Logarithmieren zur Basis 10 erhält man

$$n + \lg 999 \leq k \cdot \lg 2 < n + 3$$

oder $$\lg \frac{999}{100} \leq k \cdot \lg 2 - n - 2 < 1$$

d.h., es muß gezeigt werden, daß es eine Zahl k gibt, so daß der gebrochene Teil

$$\{k \cdot \lg 2\} =_{Df} k \cdot \lg 2 - [k \cdot \lg 2]$$

im offenen Intervall $(\lg \frac{999}{100}, 1)$ liegt.

Um dies zu beweisen, teilt man das Intervall $[0, 1]$ in

$$\left[\frac{1}{3 - \lg 999}\right] + 1 =_{Df} p$$

Teile und bildet die Folge

$$\{\lg 2\}, \{2 \cdot \lg 2\}, \ldots, \{(p + 1) \cdot \lg 2\}.$$

Von diesen p+1 Zahlen, die alle zwischen 0 und 1 liegen, müssen zwei in einem der p offenen Intervalle $(\frac{r}{p}, \frac{r+1}{p})$ liegen. In einem offenen Intervall liegen sie deshalb, weil alle Zahlen $\frac{r}{p}$ rational sind, während die Vielfachen von lg 2 irrationale Zahlen darstellen.

Es gilt also $$\frac{r}{p} < \{u \cdot \lg 2\} < \frac{r+1}{p}$$

$$\frac{r}{p} < \{(u+v) \cdot \lg 2\} < \frac{r+1}{p}$$

und damit auch $\left|\{u \cdot \lg 2\} - \{(u+v) \cdot \lg 2\}\right| < \frac{1}{p}$.

Bildet man jetzt eine weitere Folge

$$\{u \cdot \lg 2\}, \{(u+v) \cdot \lg 2\}, \ldots, \{(u+vm)\lg 2\}, \ldots$$

in der der Abstand zweier benachbarter Glieder kleiner als $\frac{1}{p}$ ist und deren Glieder paarweise voneinander verschieden sind, so muß ein Glied der Folge im Intervall $(\frac{p-1}{p}, 1)$ liegen.

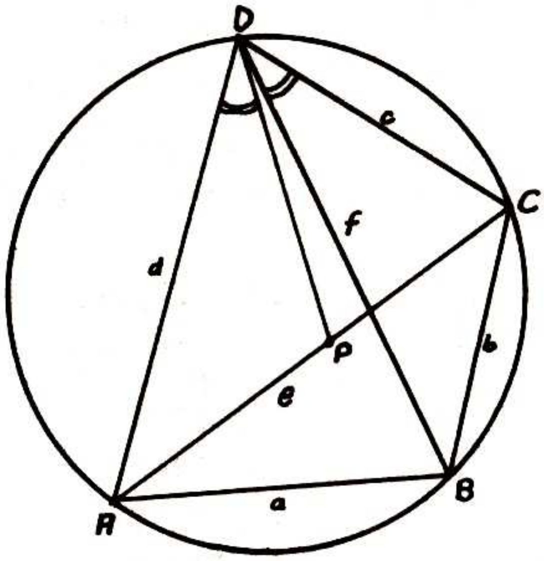
Da $$\frac{p-1}{p} = 1 - \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{\left[\frac{1}{3 - \lg 999}\right] + 1} > \lg 999 - 2 = \lg \frac{999}{100}$$

gilt, liegt diese Zahl $\{(u + m_0 v) \cdot \lg 2\}$ auch im Intervall $(\lg \frac{999}{100}, 1)$.

(B47): Es muß gezeigt werden, daß $a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$ gilt.

Dazu wird auf der Diagonalen $\overline{AC}$ ein Punkt P so gewählt, daß gilt $\sphericalangle ADP = \sphericalangle BCD$.

Dann gilt auch $\sphericalangle$ PAD = $\sphericalangle$ CBD (Peripheriewinkel über dem Bogen $\overset{\frown}{CD}$) und $\sphericalangle$ DBA = $\sphericalangle$ DCA (Peripheriewinkel über dem Bogen $\overset{\frown}{AD}$).



Daraus folgt

Δ ADP ~ Δ BDC (1)

und Δ ADB ~ Δ PDC (2)

da jeweils zwei Winkel übereinstimmen.

Aus (1) ergibt sich

$$\frac{d}{\overline{AP}} = \frac{f}{b}$$

oder $\overline{AP} \cdot f = b \cdot d$.

Aus (2) erhält man

$$\frac{c}{\overline{PC}} = \frac{f}{a}$$

oder $\overline{PC} \cdot f = a \cdot c$.

Die Addition der letzten Gleichungen liefert

$$(\overline{AP} + \overline{PC}) \cdot f = a \cdot c + b \cdot d$$

oder $$e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d$$

In eigener Sache

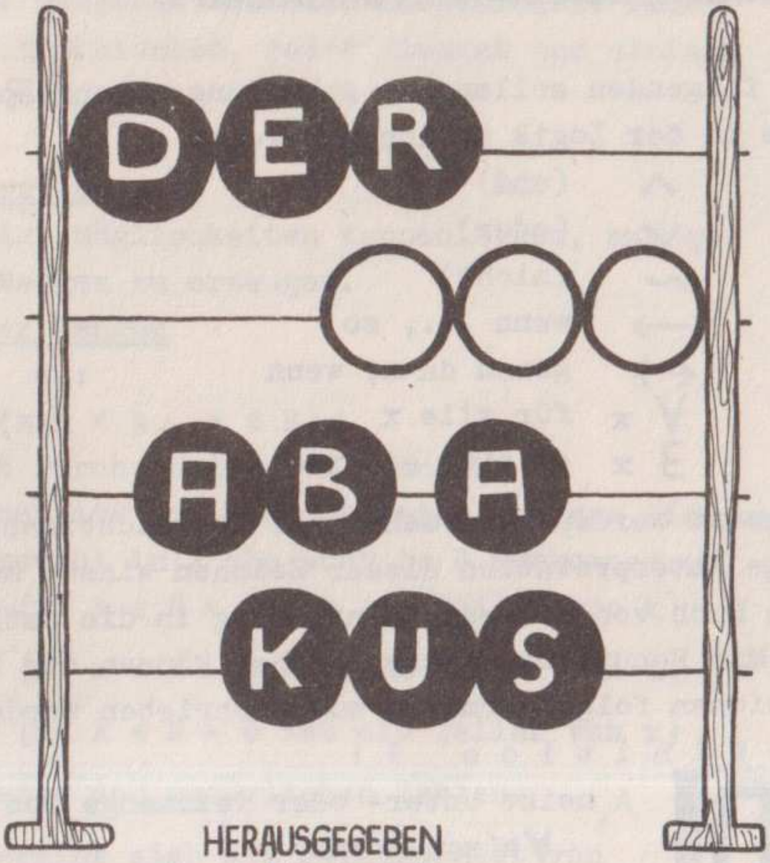
Mit dieser Nummer erhalten Sie die Zahlkarten zur Bezahlung des Jahresabonnements 1970/71. Wir bitten die Sammel- und Einzelbesteller, den entsprechenden Betrag (ein Jahresabonnement kostet 2,50 M) bis zum 15. Januar 1971 auf unser Postscheckkonto (Erfurt 180 45) zu überweisen.

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS und SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Karola Schimmel, Volker Kögel
Mitarbeiter: H. Fischer (Versandleiter), R. Lorenz (Leiter des Aufgabenteils), M. Wolf (Manuskript)

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
DDR 69 Jena
Helmholtzweg 1
"Wurzel-Redaktion"

V-14-6 4 5214 M 175-70



HERAUSGEGEBEN
ANLÄSSLICH DES
mb70
VON DER FDJ-GRUPPE DES 4. STUDIENJAHRES MATHEMATIK-DIPLOM

12
70

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Mengen, Relationen, Funktionen II

Im folgenden sollen zur Abkürzung umgangssprachlicher Aussagen die in der Logik üblichen Zeichen

$\wedge$	(und)
$\vee$	(oder)
$\sim$	(nicht)
$\rightarrow$	wenn ..., so
$\leftrightarrow$	genau dann, wenn
$\forall x$	für alle x
$\exists x$	es gibt ein x

benutzt werden. Wer mehr über den richtigen Gebrauch und die richtige Interpretation dieser Zeichen wissen möchte, greife etwa zu dem Buch von G. Asser "Einführung in die mathematische Logik I".

Mit Benutzung dieser Zeichen können die bisher gegebenen Definitionen folgendermaßen aufgeschrieben werden:

Definition 1:

A heißt Unter- oder Teilmenge von B (in Zeichen $A \subseteq B$)
$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$ [1]

Definition 2:

A heißt echte Teilmenge von B ($A \subset B$)
$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$

Definition 3:

$A = B =_{Df} A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

Aufgabe:

1. Mit Hilfe von Definition 1 und Definition 3 beweise man:
$\{1,2,3,4,5\} = \{3,1,5,4,2\}$.
2. Man überlege sich im Anschluß, daß sich eine Menge nicht ändert, wenn man ihre Elemente in anderer Reihenfolge aufschreibt.
3. Man beweise wie in Aufgabe 1
$\{1,2,3\} = \{1,2,1,1,3,2,3,3\}$
4. Man überlege sich allgemein, daß sich eine Menge nicht

ändert, wenn man ihre Elemente mehrfach aufschreibt. Daher kann man sich darauf beschränken, jedes Element nur einfach zu notieren.

Elementare Mengenoperationen

Jetzt wollen wir einige Möglichkeiten kennenlernen, aus gegebenen Mengen neue Mengen zu erzeugen.

1. Durchschnitt zweier Mengen

D e f i n i t i o n 4 :

$A \cap B =_{Df} \{x: x \in A \wedge x \in B\}$

$A \cap B$ heißt Durchschnitt von A und B.

In Worten: Der Durchschnitt von A und B enthält genau diejenigen Elemente, die sowohl in A als auch in B vorkommen.

Beispiel1: Ist $A =_{Df} \{x: x \in N \wedge 2$ ist ein Teiler von $x\}$

$B =_{Df} \{x: x \in N \wedge 3$ ist ein Teiler von $x\}$

so ist $A \cap B =_{Df} \{x: x \in N \wedge 6$ ist ein Teiler von $x\}$

N ist dabei die Menge der natürlichen Zahlen.

Frage: Welche Menge ergibt sich als Durchschnitt von

$K =_{Df} \{x: x \in N \wedge 0 \leqq x \leqq 5\}$ und

$L =_{Df} \{x: x \in N \wedge x$ Teiler von $6\}$

Es kann vorkommen, daß zwei Mengen A und B kein einziges gemeinsames Element besitzen, z. B. $S = \{a, e, i, o, u\}$ und $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Man nennt solche Mengen durchschnittsfremd oder disjunkt. Wir formulieren die präzise

D e f i n i t i o n 5 :

A und B heißen **durchschnittsfremd** (oder disjunkt) $=_{Df} \sim \exists x (x \in A \wedge x \in B)$

Auch bei disjunkten Mengen spricht man von einem Durchschnitt gemäß Definition 4. Sind A und B disjunkt, so gibt es kein Element x, das die Bedingung $x \in A \wedge x \in B$ erfüllt. Deshalb nennt man den Durchschnitt disjunkter Mengen die leere Menge. Für die leere Menge gibt es die feste Bezeichnung $\emptyset$. Die leere Menge ist diejenige Menge, die überhaupt kein Element enthält. Daß wir von der leeren Menge sprechen, ist berechtigt, weil man auf Grund von Definition 3 und Definition 1 beweisen kann, daß es nur <u>eine</u> leere Menge geben kann.

2. Vereinigung von Mengen

D e f i n i t i o n   5 :

$$A \cup B =_{Df} \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

$A \cup B$ heißt die Vereinigung von A und B.

In Worten: Die Vereinigung von A und B enthält genau diejenigen Elemente, die in wenigstens einer der Mengen A und B vorkommen.

Beispiel: $A = \{a,b,c\}$, $B = \{b,c,d\}$

$A \cup B = \{a,b,c,d\}$

Aufgaben:

1. Was ist $A \cup \emptyset$?
2. Man beweise: $A \cap A = A \cup A = A$
3. Welches ist die Vereinigungsmenge der Menge aller durch 4 teilbaren natürlichen Zahlen mit der Menge aller durch 6 teilbaren natürlichen Zahlen?

3. Relatives Komplement (oder Differenz) zweier Mengen

D e f i n i t i o n   6 :

$$A \setminus B =_{Df} \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

$A \setminus B$ heißt Komplement von B bezüglich A oder Differenz von A und B.

In Worten: Das Komplement von B bezüglich A ist die Menge aller Elemente von A, die außerhalb von B liegen.

Beispiel: $A = \{0,1,2,3\}$, $B = \{0,3\}$

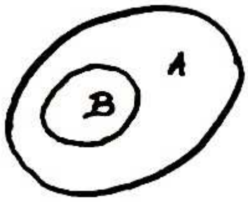
$A \setminus B = \{1,2\}$

Aufgaben:

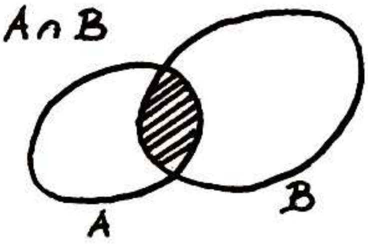
1. Man bestimme für eine beliebige Menge A die Differenz $A \setminus A$!
2. Wann ist $A \setminus B = A$?
3. Es ist $(A \setminus B) \cup B = A$ Beweis?
   Hinweis: Ein stichhaltiger Beweis muß unbedingt auf die Definitionen 6,5,3 und 1 zurückgreifen, weil uns die Begriffe Gleichheit, Vereinigung u. Differenz von Mengen nur über diese Definitionen zugänglich sind.

Besonders anschaulich werden die eingeführten Begriffe, wenn wir mit Mengen von Punkten der Ebene arbeiten:

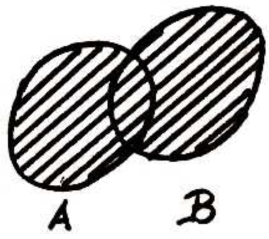
$B \subseteq A$



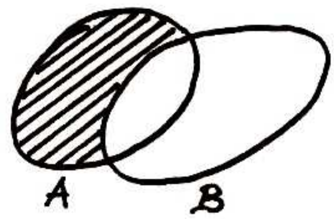
$A \cap B$



$A \cup B$



$A \setminus B$



Elementare Gesetzmäßigkeiten der Mengenlehre

Wir sind jetzt in der Lage, einige einfache Sätze der Mengenlehre zu beweisen.

S a t z 1 : Für jede beliebige Menge A gilt $\emptyset \subseteq A$

1.Beweis: Nach Definition 1 ist zu zeigen

$$x(x \in \emptyset \rightarrow x \in A)$$

Da aberdie leere Menge kein Element enthält, ist die Aussage $x \in \emptyset$ immer falsch. Daher ist die Aussage $x \in \emptyset \rightarrow x \in A$ bei jeder Wahl von x wahr. Daher ist (1) wahr.

Bemerkung: Hierbei ist benutzt worden, daß eine "Implikation" $p \rightarrow q$ der Aussagen p und q stets dann wahr ist, wenn die Aussage p falsch ist.

Wer nicht so weit mit der Aussagenlogik vertraut ist, kann einen anderen Beweis führen.

2.Beweis: Wir nehmen an, daß eine Menge A vorhanden ist, die die leere Menge nicht als Untermenge enthält, und wollen zeigen, daß diese Annahme auf einen Widerspruch führen muß, so daß also Satz 1 doch gelten muß. Es müßte dann wenigstens ein x geben mit $x \in \emptyset \wedge x \in A$.

Diese Aussage muß aber immer falsch sein, weil $x \in \emptyset$ immer falsch ist.

S a t z 2 : Folgende Aussagen sind gleichwertig:

(1) $A \subseteq B$

(2) $A \cap B = A$

(3) $A \cup B = B$

Beweis: Wir haben zu beweisen: Aus jeder der Aussagen (1), (2) und (3) folgt jede dieser Aussagen. Es reicht zu zeigen: Aus (1) folgt (2), aus (2) folgt (3) und aus (3) folgt (1).

1. Aus (1) folgt (2)

Wir nehmen also $A \subseteq B$ an. Das heißt: $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$. Unter dieser Voraussetzung ist $A = A \cap B$ zu beweisen. Nach Definition 3 ist dazu zu zeigen:

$A \subseteq A \cap B$ und $A \cap B \subseteq A$.

a) Ist $x \in A$, so ist nach Voraussetzung (1) auch $x \in B$. Damit ist auch $x \in A \cap B$ (nach Def. 4). Also ist unter der Voraussetzung (1) auch $A \subseteq A \cup B$.

b) Nach Definition 4 ist jedes Element von $A \cap B$ auch Element von A. Also ist nach Definition 1 $A \cap B \subseteq A$.

2. Aus (2) folgt (3)

Wir nehmen an, daß $A \cap B = A$ gilt. Dann ist zu beweisen: $A \cup B = B$, d.h. nach Definition 3 ist dazu zu zeigen:

$A \cup B \supseteq B$ und $A \cup B \subseteq B$.

a) Ist $x \in B$, so nach Definition 5 auch $x \in A \cup B$. Daher ist nach Definition 1 $A \cup B \supseteq B$.

b) Es sei $x \in A \cup B$. Nach Definition 5 gibt es dann zwei Fälle:

1. Fall: $x \in B$

2. Fall: $x \in A$

Nach Voraussetzung (2) ist dann $x \in A \cap B$. Nach Definition 4 ist dann $x \in B$.

Wir haben damit gezeigt: Jedes Element von $A \cup B$ ist unter der Voraussetzung (2) auch Element von B. Nach Definition 3 ist daher gezeigt: $A \cup B \subseteq B$.

3. Aus (3) folgt (1)

Wir setzen voraus, daß $A \cup B = B$ gilt. Wir müssen zeigen, daß dann jedes Element von A auch in B liegt. Es sei also $x \in A$. Dann ist nach Definition 5 auch $x \in A \cup B$. Aber weil nach (3) $A \cup B = B$ ist, ist damit $x \in B$. Damit ist alles bewiesen.

Damit sind Vorbilder für Beweise einfacher mengentheoretischer Sätze geliefert, und der Leser kann nun versuchen, die folgenden grundlegenden Gesetze der Mengenlehre selbst zu beweisen.

S a t z 3 : Für beliebige Mengen A,B,C gelten folgende Gesetze

Kommutationsgesetze

$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$

Assoziativitätsgesetze

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Verschmelzungsgesetze

$A \cup (B \cap A) = A \qquad A \cap (B \cup A) = A$

Distributivgesetze

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Gesetz über den Gebrauch des relativen Komplements

$A \setminus (A \setminus B) = B$

$B \cup (A \setminus B) = A$

$B \cap (A \setminus B) = \emptyset$

Die De Morganschen Gesetze

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Der Leser möge sich diese Gesetze auch an Hand ebener Punktmengen veranschaulichen.

Dr. G. Wechsung

Dozent

an der Sektion Mathematik

der Friedr.-Schiller-Universität

Jena

---

1) Wir vereinbaren, das Zeichen $=_{Df}$ in folgender Weise zu verwenden: $\alpha =_{Df} \beta$ soll bedeuten, daß α durch β definiert wird, d.h. daß α und β nach Definition vollständig gleichbedeutend sein sollen.

Wir stellen vor: Dr. Gerd Wechsung

Dr. Gerd Wechsung, der Autor unseres Artikels "Mengen, Relationen, Funktionen", ist Leiter des Bereiches Kybernetik der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena.
Er wurde 1939 in Berka bei Sondershausen geboren.
In Sondershausen besuchte er die Oberschule und legte 1957 sein Abitur ab.
Von 1957 bis 1962 studierte er in Jena. Im Jahre 1966 promovierte er mit der Arbeit "Zur Theorie der Logarithmen".
Seit September 1970 ist Dr. Gerd Wechsung Dozent an unserer Sektion.

Preisaufgaben (Serie 12/70)

(B55) Man beweise, daß man durch eine beliebige Gerade im dreidimensionalen euklidischen Raum eine Ebene so konstruieren kann, daß diese parallel zu einer gegebenen Gerade liegt, falls sich die beiden Geraden nicht schneiden.

(B56) Man bestimme den größten und kleinsten Wert, den die Funktion $\varphi(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$ im gesamten Definitionsbereich annimmt.

(B57) Man löse die Gleichung:

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{b}$$

(B58) Es seien eine arithmetische Folge $\{a_i\}$ und eine geometrische Folge $\{b_i\}$ $(i = 1,2,\ldots)$ mit $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$ gegeben. Außerdem seien beide Folgen streng monoton wachsend. Man zeige, daß dann für alle $n > 2$ $a_n < b_n$ gilt.

(B59) Die 6. Potenz einer natürlichen Zahl besteht aus genau den Ziffern 0,2,3,4,4,7,8,8,9. Wie lautet diese Zahl?

(B60) Einem Kreis mit dem Radius R sei ein regelmäßiges Sechseck einbeschrieben. Unter ausschließlicher Verwendung eines Lineals konstruiere man $\frac{R}{n}$ mit $n = 2,3,4,\ldots$

Für jeden vollständigen Lösungsweg einer Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für zehn Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender zehn Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).
Falls ein Besitzer von zehn Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum 1o. des folgenden Monats (Datum des Poststempels) unter dem Kennwort "Wurzel Preisaufgaben" an unsere Adresse einzuschicken.
Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden.
Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

Zur Beachtung:

Wir machen unsere Leser darauf aufmerksam, daß Einsendungen, die als Kollektivlösungen bei uns eingehen, nicht mit Punkten bewertet werden, d.h. jedes Lösungsblatt darf nur mit genau einem Namen versehen sein.

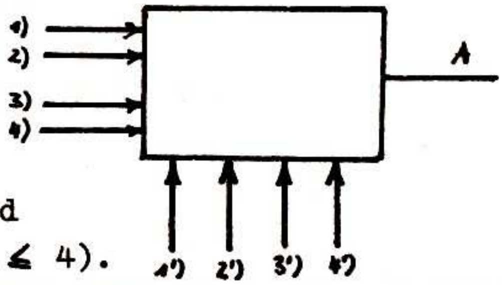
Berichtigung

Leider unterlief uns bei der Preisaufgabe B48 ein Fehler. Die vollständige Aufgabe lautet so:

(B48) Für den Bau einer Lehrmaschine wird eine Schaltung benötigt, die folgendes leistet:

a) Auf genau einem der 4 Eingänge 1) bis 4) liegt eine 1.

b) Der Ausgang A wird genau dann mit 1 belegt, wenn i' und i mit 1 belegt sind ($1' \leq i' \leq 4'$) und ($1 \leq i \leq 4$).



Es stehen 4 Relais mit je 4 Kontaktpaaren zur Verfügung. Man konstruiere eine solche Schaltung!

Die Lösung der Aufgabe ist natürlich erst bis zum 1o. 1. 1971 einzusenden.

Die Redaktion

Die FDJ-Arbeit - echter Bestandteil des Studiums an unserer Sektion

Ausgehend vom sozialistischen Absolventenbild gilt es zu erreichen, daß bei jedem Absolventen unserer Sektion die folgenden Grundeinstellungen und Verhaltensweisen während seines Studiums ausgebildet werden:

- Der Student soll in seinem gesellschaftlichen Handeln und Wirken konsequent vom Marxismus-Leninismus ausgehen.
- Er soll ein hohes Verantwortungsbewußtsein gegenüber unserer sozialistischen Gesellschaft, große Einsatzbereitschaft und Streben nach hohen Leistungen besitzen und bereit sein, unsere sozialistischen Errungenschaften jederzeit zu schützen.
- Er soll eine allseitig gebildete sozialistische Persönlichkeit sein, die im umfassenden Sinne aktiv und schöpferisch an der Gestaltung des entwickelten gesellschaftlichen Systems des Sozialismus mitarbeitet.

Bei der Herausbildung dieser genannten Eigenschaften kommt der FDJ eine immer größere Eigenverantwortung zu. Da der Sektion Mathematik heute schon über 700 FDJ-ler angehören, spielen somit die Leistungsfragen eine immer größere Rolle.
Ein wichtiges Problem besteht in der Unterstützung der FDJ-Arbeit an unserer Sektion von Seiten der Leitung. Zur Unterstützung der Arbeit der FDJ-Sekretäre und ihrer Stellvertreter finden monatliche Anleitungen statt.
Das Grundanliegen der Anleitung der Sekretäre ist die inhaltliche Vorbereitung auf die Probleme, die in der Mitgliederversammlung diskutiert werden sollen. Als Konsequenz ergibt sich dann für jeden Sekretär die Aufgabe, die Probleme der Gruppe eng mit dem Thema zu verbinden und somit die FDJ-Arbeit zu einem echten Bestandteil des Studiums werden lassen.
Um auch die organisatorischen Probleme zu bearbeiten, finden für die Stellvertreter monatliche Anleitungen statt. Im Mittelpunkt dieser Anleitung steht die Auswertung der Mitgliederversammlung. Es werden somit wichtige politisch-ideologische Fragen ausgewertet, die in die inhaltliche Anleitung der Sekretäre

wieder einfließen.
Ziehen wir die diesjährige Vorbereitung der Verbandswahlen heran, so hat sich dieses als sehr zweckmäßig erwiesen. Es wurden wichtige Fragestellungen, wie die des persönlichen Plans, geklärt. Die Diskussion über den persönlichen Plan wurde in jede Gruppe hineingetragen. Das Ergebnis war, daß sich die Mehrheit für den persönlichen Plan ausgesprochen hat.
Bei den **Überlegungen zu** dem persönlichen Plan waren wir davon ausgegangen, welchem Zweck dieser Plan dient. Wir wollen eine Planmäßigkeit in unserer FDJ-Arbeit, eine Verteilung der Aufgaben auf jeden und hohe Leistungen im Grundstudium des Marxismus-Leninismus und des Faches Mathematik erreichen.
Im persönlichen Plan sollen enthalten sein:

1. Aufgaben, die das **einzelne** Mitglied in der Bewußtseinsentwicklung fördern.
2. Zielstellungen, die mit einer Leistungsverbesserung in Marxismus-Leninismus und im Fach **Math**ematik verbunden sind (Zensuren).
3. Aufgaben, die jeder Student vor der Gruppe abrechnet.

Auf der Grundlage der Erfüllung des persönlichen Planes kann man dann am Jahresende jeden einzelnen einschätzen und bei **Nichterfüllung** zur Rechenschaft ziehen.
Dieses sollte nur ein kleiner Ausblick in unsere Arbeit sein. Ihr werdet dann, wenn Ihr bei uns mit dem Studium beginnt, näher mit der konkreten Aufgabenstellung vertraut gemacht. Wir wünschen Euch bis dahin viel Erfolg!

Gerald Schweinefleisch
FDJ-Sekretär der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität Jena

Anmerkung der Redaktion

Auf wiederholte Anfragen unserer Leser teilen wir mit, daß wir noch Wurzel-Exemplare der Jahrgänge 1968, 1969 und die Nummern 5/67 bis 12/67 zur Verfügung haben.

Bestellungen können bis Ende dieses Jahres noch berücksichtigt werden.

Lösungen

(B49): Das gegebene Gleichungssystem wird zuerst durch die Substitution $a = xy$, $b = x + y$ umgeformt. Es ergibt sich

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1)$$
$$= x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1$$
$$= x^2y^2 + (x + y)^2 - 2xy + 1$$

also $\quad a^2 - 2a + b^2 = 9 \qquad (1')$

und $\quad b(a - 1) = 3 \qquad (2')$

Aus (2') folgt $\quad a = \frac{3}{b} + 1$

Dies in (1') eingesetzt, liefert

$$\left(\frac{3}{b} + 1\right)^2 + b^2 - 2\left(\frac{3}{b} + 1\right) = 9$$

$$\frac{9}{b^2} + \frac{6}{b} + 1 + b^2 - \frac{6}{b} - 2 = 9$$

$$b^2 - 10 + \frac{9}{b^2} = 0$$

$$b^4 - 10b^2 + 9 = 0$$

Diese biquadratische Gleichung hat die Lösungen

$$b_{1,2} = \pm\sqrt{5 + \quad 25 - 9}$$
$$b_{3,4} = \pm\sqrt{5 - \quad 25 - 9}$$

Damit ergeben sich vier Lösungen, nämlich

$a_1 = 2 \quad b_1 = 3$; $a_2 = 0 \quad b_2 = -3$; $a_3 = 4 \quad b_3 = 1$;

$a_4 = -2 \quad b_1 = -1$ für das Gleichungssystem (1'), (2').

Jetzt muß noch das Gleichungssystem in x und y

$$xy = a$$
$$x + y = b$$

gelöst werden.

Hier gilt $\quad y = b - x$

und damit $\quad x(b - x) = a$

$$x^2 - bx + a = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}$$

woraus sich für $y_{1,2}$ ergibt

$$y_{1,2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}$$

Setzt man jetzt nacheinander die gefundenen Werte für a und b in diese Gleichungen ein, erhält man die sechs Lösungen des Ausgangsgleichungssystems (1), (2) :

$x_1 = 2 \quad y_1 = 1$; $x_2 = 1 \quad y_2 = 2$; $x_3 = 0 \quad y_3 = -3$;

$x_4 = -3 \quad y_4 = 0$; $x_5 = 1 \quad y_5 = -2$; $x_6 = -2 \quad y_6 = 1$.

(B50): Für alle Argumente x gilt:

$$\sin x \leq 1$$
$$-\sin x \geq -1$$
$$3 - \sin x \geq 2 \quad (1)$$
$$2 - \sin x \geq 1 \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$(3 - \sin x)(2 - \sin x) \geq 2 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{(3 - \sin x)(2 - \sin x)}$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{(2-\sin x)^2 - (1-\sin x)(3-\sin x)}{(3-\sin x)(2-\sin x)}$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{2 - \sin x}{3 - \sin x} - \frac{1 - \sin x}{2 - \sin x}$$

$$\frac{\sin x-1}{\sin x-2} + \frac{1}{2} \geq \frac{2-\sin x}{3-\sin x} \quad (4)$$

Für welche Argumente x gilt das Gleichheitszeichen?

Aus (4') $\frac{\sin x-1}{\sin x-2} + \frac{1}{2} = \frac{2-\sin x}{3-\sin x}$

folgt (3') $(3-\sin x)(2-\sin x) = 2$

$$4 - 5\sin x + \sin^2 x = 0$$

Substitution: $\sin x = z$

$$z^2 - 5z + 4 = 0$$
$$z_1 = 4$$
$$z_2 = 1$$

Die Lösung z_1 entfällt, da $\sin x \leq 1$ ist.

Daraus folgt: $\sin x = 1$

und $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k = \{1,2,\ldots\}$

(B51): Hat eine natürliche Zahl $n > 1$ die kanonische Darstellung (I) $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t}$ $\quad p_i$ Primzahlen $\alpha_i \in \{1,2,\ldots\}$ $i = 1,2,\ldots,t$

wobei o.B.d.A. $\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_t$ angenommen werden kann, so ist jede Zahl $m = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_t^{\beta_t}$ mit ganzzahligen β_i und $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ ein Teiler von n. Dabei entspricht jedem geordneten t-Tupel $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$, dessen β_i die obigen Bedingungen erfüllen, genau ein Teiler m von n und umgekehrt. Die Anzahl aller Teiler einer natürlichen Zahl n ist demnach gleich der Anzahl der geordneten t-Tupel $\beta_1, \ldots, \beta_t$. Da es für jedes i ($i = 1,2,\ldots t$) gerade $\alpha_i + 1$ Werte für die β_i gibt, erhält man für die Anzahl der Teiler einer Zahl n mit der kanonischen Darstellung (I) $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_t + 1) = \prod_{i=1}^{t} (\alpha_i + 1)$

In dieser Aufgabe wird eine Zahl n mit der kanonischen Darstellung (I) gesucht, für die $\prod_{i=1} (\alpha_i + 1) = 20$ gilt.

Für jede Zerlegung von 20 in ein Produkt natürlicher Zahlen größer als 1 ergibt sich ein t-Tupel $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$

1. $20 = 20$ $\quad$ daraus folgt $\alpha_1 = 19$
2. $20 = 2 \cdot 10$ $\quad$ daraus folgt $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 9$
3. $20 = 4 \cdot 5$ $\quad$ daraus folgt $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 4$
4. $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$ $\quad$ daraus folgt $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 4$

Damit sind alle natürlichen Zahlen, die genau 20 Teiler besitzen, die Zahlen p_1^{19} , $p_1 p_2^9$, $p_1^3 p_2^4$, $p_1 p_2 p_3^4$, wobei p_1, p_2, p_3 Primzahlen sind.

Die kleinsten Zahlen dieser vier Formen sind 2^{19} , $3 \cdot 2^9$, $3^3 \cdot 2^4$ und $5 \cdot 3 \cdot 2^4$. Unter diesen ist $5 \cdot 3 \cdot 2^4 = 240$ die kleinste natürliche Zahl mit 20 Teilern.

(B52): Man beweise zuerst den folgenden Sachverhalt:

Falls $A^2 - 4B \geq 0$ ist, so gilt $\left| -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B} \right| < 1$ genau dann wenn $|A| < 2$ und $B + 1 > |A|$.

Beweis: Aus $\left| -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B} \right| < 1$ folgt $|A| < 2$ und

(1) $B + 1 > |A|$

Es ist $|A| = |-A|$

$$= \left| -\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B} - \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B} \right|$$

$$\leq \left| -\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B} \right| + \left| -\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B} \right|$$

$$< \quad 1 \quad + \quad 1 \quad = 2$$

Es bedeutet $\left| -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B} \right| < 1$

$$-1 < -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B} < 1$$

oder $-1 + \frac{A}{2} < \pm\sqrt{\frac{A^2}{4} - B} < 1 + \frac{A}{2}$

Daraus folgen wegen $-2 < A < 2$ die beiden Ungleichungen $0 \leq \sqrt{\frac{A^2}{4} - B} < 1 + \frac{A}{2}$

und $0 \leq \sqrt{\frac{A^2}{4} - B} < 1 - \frac{A}{2}$

(was sich aus $0 \geq -\sqrt{\frac{A^2}{4} - B} > -1 + \frac{A}{2}$ ergibt).

Die Ungleichungen können quadriert werden, ohne daß sich die Relationszeichen ändern:

$$\frac{A^2}{4} - B < 1 + A + \frac{A^2}{4}$$

das heißt $B + 1 > -A$

$$\frac{A^2}{4} - B < 1 - A + \frac{A^2}{4}$$

das heißt $B + 1 > A$

Das ergibt aber $B + 1 > |A|$

(2) Die Umkehrung von (1) beweist man einfach durch Umkehrung der Beweisschritte von (1).

Nach Voraussetzung sollen die Beträge der Wurzeln der Gleichungen

$$x^2 + Ax + B = 0$$
$$x^2 + Cx + D = 0$$

kleiner als 1 sein, d.h. es soll gelten

$$\left| -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}\, \right| < 1$$

und

$$\left| -\frac{C}{2} \pm \sqrt{\frac{C^2}{4} - D}\, \right| < 1$$

sowie $A^2 - 4B > 0$ und $C^2 - 4D > 0$, da die Wurzeln ja überhaupt existieren sollen.

Damit muß gelten $|A| < 2 \quad , \quad B + 1 > |A|$

$|C| < 2 \quad , \quad D + 1 > |C|$

Es ist nun $\left|\frac{A+C}{2}\right| = \frac{1}{2}|A + C| \leq \frac{1}{2}|A| + \frac{1}{2}|C| < 1 + 1 = 2$

$$\frac{B+D}{2} + 1 > \frac{1}{2}|A| + \frac{1}{2}|C| \geq \left|\frac{A+C}{2}\right|$$

und $(A + C)^2 - 4(B + D) \geq A^2 - 4B + C^2 - 4D > 0$

was die zu beweisende Aussage

$$\left| -\frac{A+C}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A+C}{2}\right)^2 - (B + D)}\, \right| < 1$$

liefert: die Wurzeln der Gleichung $x^2 + \frac{A+C}{2}x + \frac{B+D}{2} = 0$

sind betragsmäßig kleiner als 1.

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS und SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Karola Schimmel, Volker Kögel
Mitarbeiter: H. Fischer (Versandleiter),
R. Lorenz (Leiter des Aufgabenteils)
M. Wolf (Manuskript)

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
DDR 69 JENA
Helmholtzweg 1
"Wurzelredaktion"

V-14-6 4 5245 M 175-70