

WURZEL 71



JUGENDOBJEKT

*Wir wünschen allen
Lesern ein gesundes
und erfolgreiches
Jahr 1971*

1

71

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
FDJ-Aktiv der
Sektion Mathematik
an der
Friedrich-Schiller-
Universität Jena

Die Schülerzeitschrift „Wurzel“ – Träger des Jugendobjektes „Studienwerbung – Studienvorbereitung“

Zielgerichtete Orientierung, Studienwerbung und Studienvorbereitung sind die Grundlagen für den erfolgreichen Beginn eines Studiums an einer Universität, Hoch- oder Fachschule in unserer Republik. Dieser erfolgreiche Beginn bildet aber die Grundlage für den weiteren Verlauf des Studiums.

An unserer Sektion wurde im Jahre 1967 die "Wurzel" geschaffen, ein Publikationsorgan, welches vor allem auf die Hebung des mathematischen Niveaus an unseren Schulen gerichtet war, nicht aber direkt auf die organische Verbindung von Studienwerbung und Studienvorbereitung.

Es ist auch kein Geheimnis, daß sich die Zahl der an unserer Sektion immatrikulierten Studenten jährlich vergrößert hat und sich auch in Zukunft vergrößern wird, um den ständig wachsenden Anforderungen der gesellschaftlichen Entwicklung gerecht zu werden. Deshalb wurde es notwendig, der Studienwerbung und Studienvorbereitung größere Bedeutung beizumessen.

So stellt sich ab Januar 1971 die "Wurzel" als Träger des Jugendobjektes "Studienwerbung-Studienvorbereitung" vor.

Dieses Jugendobjekt wurde der Redaktion unserer Zeitschrift zur Wahlversammlung der FDJ-Grundorganisation unserer Sektion am 11. 11. 1970 vom Sektionsdirektor Prof. Dr. Pietsch übergeben. Im Rahmen dieses Jugendobjektes werden schrittweise alle Formen der Studienwerbung und Studienvorbereitung und der Bestenförderung auf Bezirksebene in Zusammenarbeit mit der Abteilung Volksbildung des Rates des Bezirkes Gera koordiniert.

Der "Wurzel" kommen in diesem Zusammenhang folgende Aufgaben zu:

1. Mit der "Wurzel" wollen wir bei den Schülern der 11. und 12. Klassen das Interesse an der Mathematik wecken und begabte Schüler dazu anregen, sich mehr mit Mathematik zu beschäftigen.
2. Die "Wurzel" dient der Studienwerbung und der Vorbereitung auf ein Mathematikstudium.

Damit ist unsere Tätigkeit in eine neue Etappe eingetreten.

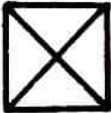
Die Redaktion

Mengen, Relationen, Funktionen III

Die Potenzmenge einer Menge

Wir betrachten die Menge $M = \{0, \{0\}, \{1,2,3\}\}$. M hat die Eigenschaft, daß als Elemente von M auch Mengen auftreten.

Frage: Welche der folgenden Aussagen sind wahr:

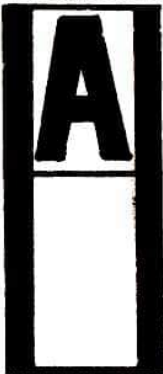


$0 \in M$, $\{0\} \subseteq M$, $\{0\} \in M$, $\{0,1,2\} \subseteq M$, $\{1,2,3\} \in M$
 $1 \in M$?

Antwort: Die vierte und die letzte Aussage sind falsch, alle anderen sind wahr.

Denn $1 \notin M$, weil die einzigen Elemente von M durch 0 , $\{0\}$, und $\{1,2,3\}$ gegeben sind. Wäre $\{0,1,2\} \subseteq M$, so müßte nach Definition 1 z.B. $1 \in M$ sein, was eben als falsch erkannt wurde.

Aufgaben: 1. Es sei $A = \{x: 3x = 6\}$. Ist $A = 2$?



Antwort: nein ! Begründung!

2. Welche der folgenden Mengen sind gleich:

$\{0\}, \emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, 0\}$?

Antwort: Keine zwei sind einander gleich, Begründung!

3. Es sei $A = \{2,4,\{4,5\}\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\{4,5\} \subset A$, $\{4,5\} \in A$, $\{\{4,5\}\} \subseteq A$, $5 \in A$, $\{5\} \in A$
 $\{5\} \subset A$?

Antwort: Nur die 2. und 3. Aussage sind wahr. Begr.!

Wir haben jetzt genügend Erfahrung, um folgende Definition als sinnvoll anzusehen.

Definition:



$\mathcal{P}(A) \stackrel{\text{Df}}{=} \{X: X \subseteq A\}$

$\mathcal{P}(A)$ heißt Potenzmenge von A .

In Worten:

Die Potenzmenge der Menge A enthält genau alle Untermengen von A .

Beispiele: 1. Es sei $A = \{1,2,3\}$. Dann hat $\mathcal{P}(A)$ folgende Elemente:

$\emptyset$
 $\{1\}, \{2\}, \{3\}$

(Einergengen)

$\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$
 $\{1,2,3\}$

(Zweiermengen)

2. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Die Potenzmenge der leeren Menge enthält also genau ein Element, nämlich die leere Menge! Das Beispiel 1 deutet bereits einen Beweis für folgenden Satz an:

Satz:4: Wenn A n Elemente enthält, so enthält $\mathcal{P}(A)$ 2^n Elemente.

Beweis: Es gibt $n = \binom{n}{1}$ Einermengen, $\binom{n}{2}$ Zweiermengen, $\binom{n}{3}$ Dreiermengen, ..., $\binom{n}{k}$ Mengen mit k Elementen, ..., $\binom{n}{n}$ Mengen mit n Elementen in $\mathcal{P}(A)$. Dazu kommt die leere Menge. Insgesamt enthält also

$$\mathcal{P}(A) \quad 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

Elemente (hierbei ist $\binom{n}{0} = 1$ benutzt worden).

Nach dem binomischen Lehrsatz ist andererseits

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

Also gibt es 2^n Elemente in $\mathcal{P}(A)$.

Ein anderer Beweis für Satz 4 ohne Benutzung des binomischen Lehrsatzes:

Wir ordnen die Elemente von M in folgender Weise $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Nun bilden wir dadurch eine Untermenge von M, daß wir einige Elemente unterstreichen und danach die unterstrichenen Elemente zu einer Untermenge zusammenfassen. Offenbar kann jede Untermenge von M auf diese Weise erzeugt werden und je zwei verschiedene Unterstreichungen liefern verschiedene Untermengen. Um eine solche Unterstreichung herzustellen, hat man für jedes Element x_i zu entscheiden, ob es unterstrichen wird oder nicht. Insgesamt hat man also n voneinander unabhängige Zweierentscheidungen zu treffen und daher gibt es 2^n verschiedene Mög-

lichkeiten, also 2^n Untermengen.

Die Bedeutung des Satzes 4 liegt darin, daß man durch den Übergang von einer Menge zu ihrer Potenzmenge zu einer Menge gelangt, die mehr Elemente als die Ausgangsmenge enthält. Dabei hat man keine andere Menge zu Hilfe nehmen müssen.

Eine andere wichtige Eigenschaft der Potenzmenge besteht darin, daß sie abgeschlossen ist bezüglich Vereinigungs-, Durchschnitts- und Differenzbildung. Das bedeutet, daß für beliebige $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ auch $X \cap Y$, $X \cup Y$ und $X \setminus Y$ zu $\mathcal{P}(A)$ gehören.

Geordnete Paare und Mengenprodukte

Da für eine Zweiermenge $\{x, y\}$ die Beziehung $\{x, y\} = \{y, x\}$ gilt, hat es keinen Sinn, von einem ersten und einem zweiten Element einer solchen Menge zu sprechen. Es besteht aber die Notwendigkeit, neben solchen ungeordneten Paaren auch sogenannte geordnete Paare zu besitzen. Das sollen Gebilde sein, die von 2 Elementen abhängen, wobei ein wohlbestimmtes erstes und ein wohlbestimmtes zweites Element dieses Paares existiert, d.h. im Gegensatz zu einer Paarmenge sollen die Elemente eines geordneten Paares hinsichtlich ihrer Stellung und Zugehörigkeit wohlunterscheidbar sein.

Wir bezeichnen die Menge $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ mit $[x, y]$. In dieser Bezeichnung kommt zum Ausdruck, daß diese Menge eigentlich nur von x und y abhängt.

Beispiele: $[1, 2] = \{1, \{1, 2\}\}$, $[a, b] = \{a, \{a, b\}\}$ usw.

Die Art, wie x und y in die Menge $[x, y]$ eingehen, ist aber unterschiedlich. Während $\{x\} \in [x, y]$ ist, ist $\{y\} \notin [x, y]$. Diese Tatsache ist ausschlaggebend für den folgenden

Satz 5: $[x, y] = [u, v]$ hat $x = u$ und $y = v$ zur Folge.

Beweis: $[x, y] = [u, v]$ bedeutet $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$.

Also muß jedes Element der linken Menge auch Element der rechten Menge sein und umgekehrt. Es gibt zwei Fälle:

1. Fall $\{x\} = \{u\}$ und $\{x, y\} = \{u, v\}$

Hieraus folgt, daß $x = u$ und $y = v$. Wäre nämlich $y \neq v$, so müßte $y = u$ und $v = x$ sein, woraus wegen $x = u$ ebenfalls $y = v$ folgte. Widerspruch!

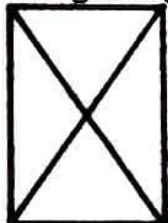


2. Fall: $\{x\} = \{u, v\}$, $\{x, y\} = \{u\}$

Hieraus folgt $x = u = v$ und $u = x = y$.

Also $x = u = y = v$.

Folgerung: Ist $x \neq y$, so ist $[x, y] \neq [y, x]$.



Damit besitzen diese Mengen genau die Eigenschaften, die wir von geordneten Paaren gern haben wollen. Da wir bisher noch nichts weiter über geordnete Paare wissen, können wir diese Mengen zu geordneten Paaren erklären.

Definition 8 :



$[x, y] =_{\text{Df}} \{\{x\}, \{x, y\}\}$ nennen wir geordnetes Paar von x und y . x heißt erste, y zweite Komponente des Paares.

Der Vorteil dieses Vorgehens besteht darin, daß wir neben Mengen nicht noch den Begriff des geordneten Paares als weiteren Grundbegriff in die Mengenlehre einführen müssen. Geordnete Paare sind einfach ganz bestimmte Mengen. Für das folgende ist es aber gänzlich unwichtig zu wissen, wie diese Menge aussieht. Ausschlaggebend für das Arbeiten mit geordneten Paaren ist nur ihre in Satz 5 angesprochene wichtige Eigenschaft.

Definition 9 :



$A \times B =_{\text{Df}} \{[a, b] : a \in A \wedge b \in B\}$

$A \times B$ heißt das Produkt von A und B .

In Worten: Das Produkt von A und B besteht aus allen geordneten Paaren, deren erste Komponente in A und zweite Komponente in B liegt.

Beispiele: 1. $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$

$A \times B = \{[1, a], [1, b], [1, c], [2, a], [2, b], [2, c]\}$

$B \times A = \{[a, 1], [a, 2], [b, 1], [b, 2], [c, 1], [c, 2]\}$

2. $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

Folgerungen: 1. Im allgemeinen ist $A \times B \neq B \times A$



2. Hat A n Elemente und B m Elemente, so hat $A \times B$ $n \cdot m$ Elemente. Daraus erklärt sich die Bezeichnung Produktmenge.

Aufgaben:

1. Man beweise, daß $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ gilt!
2. Man beweise, daß $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ gilt!
3. Ist $A \subseteq B$, so gilt für beliebige C auch $A \times C \subseteq B \times C$.

Relationen

Im täglichen Leben und in der Mathematik kommen häufig Beziehungen zwischen verschiedenen Objekten vor. Beispiele solcher Beziehungen (oder, wie man auch sagt, Relationen):

a ist mit b verheiratet,
a steht mit b im Briefwechsel,
der Mensch a kennt die Stadt b,
der Punkt P liegt auf der Geraden g,
die Geraden g und h sind zueinander orthogonal,
die Murmeln a und b haben die gleiche Farbe,
die natürliche Zahl n teilt die natürliche Zahl m,
die reelle Zahl x ist größer als die reelle Zahl y,
x ist Element der Menge X
usw.

Wir greifen nun eine dieser Beziehungen heraus, etwa die letzte, und studieren sie genauer.

Dazu setzen wir $A = \{1, 2\}$, $B =_{\text{Def}} \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

und lassen nur Elemente aus A und Mengen aus B zu.

Um einen Überblick über diese Beziehungen zu bekommen, stellen wir alle diejenigen Paare [Element, Menge] zusammen, für die diese Beziehung zutrifft. Damit erhalten wir die Menge

$$E =_{\text{Def}} \{ [x, X] : x \in A \wedge X \in B \wedge x \in X \},$$

durch die unsere Relation vollständig beschrieben wird.

Es gilt nämlich - und so haben wir E gerade definiert -

$$[x, X] \in E \iff x \in X \wedge x \in A \wedge X \in B,$$

d.h. $[x, X] \in E$ genau dann, wenn x und X in der betrachteten Beziehung stehen.

In unserem Beispiel ist

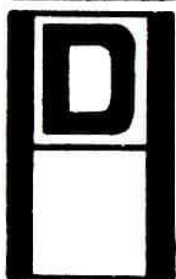
$$E = \{ [1, \{1\}] , [1, \{1, 2\}] , [2, \{2\}] , [2, \{1, 2\}] \}.$$

Wir fassen das Ergebnis dieser Betrachtung nochmals zusammen: Unsere Beziehung zwischen Elementen von A und Elementen von B hat in eindeutiger Weise zu einer Untermenge E von $A \times B$ geführt, die diese Beziehung genau beschreibt.

Dieses Resultat läßt sich sofort verallgemeinern: Jede Beziehung (Relation) zwischen Elementen einer Menge A und Elementen einer Menge B legt eine eindeutig bestimmte Untermenge von $A \times B$ fest.

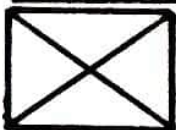
Auf Grund dieser Bemerkung haben wir keine Veranlassung mehr, zwischen Untermengen von $A \times B$ und Relationen zwischen A und B zu unterscheiden. Daher ist folgende Definition berechtigt:

Definition 10:



1. S heißt Relation zwischen A und B $\stackrel{\text{Def}}{=} S \subseteq A \times B$
2. Ist $A = B$, so sprechen wir von einer zweistelligen Relation auf A.
3. Ist $[x, y] \in S$, so sagen wir auch "x steht in der Relation S zu y" und schreiben dafür abkürzend auch $x S y$.

Folgerung: Die Menge der Relationen zwischen A und B stimmt genau mit $\mathcal{P}(A \times B)$ überein. Also gibt es $2^{n \cdot m}$ verschiedene Relationen zwischen A und B.



Beispiele: 1. Es sei $A = \{1, 2, 3\}$. Wir betrachten die Relation $U \stackrel{\text{Def}}{=} \{[1, 2], [1, 3], [2, 3]\} \subseteq A \times A$ und stellen z.B. fest: 1 steht mit 2 in der Relation U, aber nicht 2 mit 1. Man sieht, daß U genau die $<$ -Beziehung auf A darstellt.

2. Es sei $A = \{1, 2, 3\}$. $V \stackrel{\text{Def}}{=} \{[1, 2], [2, 1], [1, 3], [3, 2], [3, 3]\}$

In diesem Beispiel ist es im Gegensatz zum vorigen nicht leicht, irgendeine natürliche Deutung zu finden.

Aufgabe: Es sind alle $2^4 = 16$ 2-stelligen Relationen auf der Zweiermenge $A = \{a, b\}$ wirklich anzugeben.



Dr. G. Wechsung

Dozent an der Sektion Mathematik der

Friedr.-Schiller-Universität Jena

Preisaufgaben Serie 1/71

(C 1) Man bestimme die Menge

$$M = [0, 1 + \frac{1}{1}) \cap [0, 1 + \frac{1}{2}) \cap [0, 1 + \frac{1}{3}) \cap \dots \cap [0, 1 + \frac{1}{n}) \cap \dots$$

wobei $[a, b) = \{x: x \text{ reelle Zahl } a \leq x < b\}$ sein soll.

(C 2) Man löse das folgende Gleichungssystem:

$$x(x + y + z) = a - yz$$

$$y(x + y + z) = b - xz$$

$$z(x + y + z) = c - xy$$

wobei a, b, c gegebene reelle Zahlen sein sollen.

(C 3) In der Ebene seien fünf Punkte gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Man zeige, daß man vier Punkte davon so auswählen kann, daß diese die Eckpunkte eines konvexen Vierecks sind.

(C 4) Aus einer Menge M seien die Wahrheitsfunktionen $\text{non} (-)$, $\text{et} (.)$ und $\text{vel} (+)$ definiert und es muß für alle $x, y, z \in M$ gelten:

$$\text{Aus } x \cdot y = x \cdot z \text{ und } x + y = x + z \text{ folgt } x = z.$$

Dabei gelten die Rechenregeln (1) bis (9') für das Rechnen mit normierten Booleschen Ausdrücken.

(siehe dazu Wurzel 9/10/70 S.141).

(C 5) Es seien n und p natürliche Zahlen mit $n, p \geq 1$.

Man zeige, daß dann gilt:

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}$$

(C 6) Man stelle den Durchschnitt zweier Mengen A, B durch das Komplement und die Vereinigung dieser Mengen und der daraus entstehenden Mengen dar.

Für jeden vollständigen Lösungsweg einer Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für zehn Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender

zehn Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).

Falls ein Besitzer von zehn Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum 10. des folgenden Monats (Datum des Poststempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgaben" an unsere Adresse einzuschicken.

Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden. - Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

Lösungen

(B55): g_1 und g_2 seien die beiden gegebenen Geraden.

Voraussetzung: $g_1 \cap g_2 = \emptyset$

Behauptung: Es gibt eine Ebene e , in der g_1 liegt und zu der g_2 parallel verläuft.

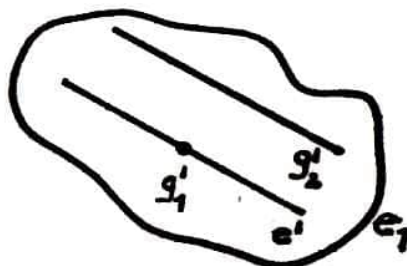
($g_1 \in e$ und $g_2 \cap e = \emptyset$).

Beweis:

Bildet man g_1 und g_2 in senkrechter Parallelprojektion auf eine Ebene e_1 ab, die senkrecht zu g_1 liegt, so erhält man folgendes Bild:

Die Projektion von g_1 ist ein Punkt, die Projektion von g_2 ist a) der Punkt g_2'

b) die Gerade g_2' .



Nach Voraussetzung gilt:

$g_1 \cap g_2 = \emptyset$, daraus folgt: $g_1' \cap g_2' = \emptyset$

a) Durch g_1' gibt es unendlich viele Geraden e' mit

$e' \cap g_2' = \emptyset$.

b) Durch g_1' gibt es genau eine Gerade e' mit $e' \cap g_2' = \emptyset$.

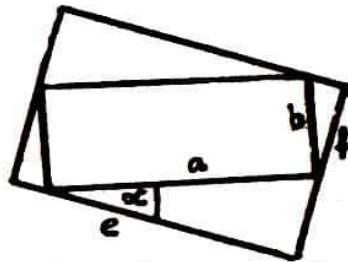
Diese Gerade e' wird als Bild einer Ebene e aufgefaßt, wobei $e \perp e_1$ gelten muß.

Aus $g_1' \in e'$ folgt $g_1 \in e$ und

aus $g_2' \cap e' = \emptyset$ folgt $g_2 \cap e = \emptyset$.

Somit ist e die gesuchte Ebene. Im Falle a) gibt es unendlich viele solcher Ebenen.

(B54):



Es gelten für die neuen Rechteckseiten die Gleichungen

$$e = a \cos \alpha + b \sin \alpha$$

$$f = a \sin \alpha + b \cos \alpha$$

Damit ergibt sich der Flächeninhalt des umschriebenen Rechtecks zu

$$\begin{aligned} e \cdot f &= (a \cos \alpha + b \sin \alpha)(a \sin \alpha + b \cos \alpha) \\ &= a^2 \sin \alpha \cos \alpha + b^2 \sin \alpha \cos \alpha + ab(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \sin 2\alpha + ab$$

$$\text{da } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Nach Voraussetzung sollte gelten

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \sin 2\alpha + ab = m^2 \quad \text{oder}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2(m^2 - ab)}{a^2 + b^2}$$

Da gilt $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, folgt $0 \leq \sin 2\alpha \leq 1$

$$\text{Damit ergibt sich} \quad 0 \leq \frac{2(m^2 - ab)}{a^2 + b^2}$$

$$0 \leq m^2 - ab$$

$$\sqrt{ab} \leq m$$

und

$$\frac{2(m^2 - ab)}{a^2 + b^2} \leq 1$$

$$2m^2 - 2ab \leq a^2 + b^2$$

$$2m^2 \leq (a + b)^2$$

$$m \leq \frac{a + b}{2} \sqrt{2}$$

Die Aufgabe ist also für alle m mit

$$\sqrt{ab} \leq m \leq \frac{a + b}{2} \sqrt{2} \quad \text{lösbar.}$$

Pädagogik und Mathematik

von Roswitha Köhler, Assistentin der Sektion
Erziehungswissenschaft

Sie haben sicher schon oft von der Mathematisierung der Naturwissenschaften gelesen, und Ihnen ist die Bedeutung mathematischer Methoden für die naturwissenschaftliche Forschung klar geworden. Wie sieht es aber in den Gesellschaftswissenschaften, speziell in der Pädagogik, mit der Anwendung der Mathematik aus? Um diese Frage beantworten zu können, müssen wir uns etwas mit den Grundzügen der pädagogischen Forschung und ihren Besonderheiten gegenüber der naturwissenschaftlichen Forschung vertraut machen.

Wenn die Wissenschaften Erscheinungen nicht nur beschreiben, sondern auch erklären und voraussagen wollen, benötigen sie Gesetzmäßigkeiten, die sowohl die qualitative wie auch die quantitative Seite der Erscheinungen widerspiegeln. Diese Gesetzmäßigkeiten werden aus der Untersuchung der Praxis abgeleitet und müssen an ihr überprüft werden. Für diese beiden grundlegenden Prozesse (Ableitung und Überprüfung) liefert die Mathematik Hilfsmittel, ohne die beide nicht möglich wären.

Welche Besonderheiten weist nun die pädagogische Forschung auf? Ich möchte zwei nennen:

Während ein Naturwissenschaftler seine Untersuchungsobjekte "präparieren", von der Umwelt isolieren kann und damit die Möglichkeit hat, Störfaktoren weitgehend auszuschließen, hat es der Pädagoge mit lebendigen Menschen zu tun, die er nicht aus ihrer natürlichen gesellschaftlichen Umwelt herauslösen kann. Er darf den pädagogischen Prozeß nicht einmal zu sehr beeinflussen, (ein Naturwissenschaftler kann den zu untersuchenden Prozeß oft in ganz bestimmte Bahnen zwingen), weil damit das Schicksal von Menschen verknüpft ist.

Zweitens ist jeder pädagogische Prozeß einmalig, da er von sehr vielen Faktoren abhängt, subjektiven und objektiven, die - wie wir bereits sahen - nicht ausgeschlossen werden können. Charakteristisch ist dabei, daß im pädagogischen Prozeß der Zufall eine große Rolle spielt. Dadurch wird bewirkt, daß ein solcher Prozeß nicht eindeutig verläuft. Sie haben selbst schon oft

feststellen können, wie unterschiedlich eine Unterrichtsstunde (Pädagogischer Prozeß) auf verschiedene Schüler wirkt, obwohl doch eigentlich alle dasselbe gehört und gesehen haben. Und man kann nicht einmal sagen, daß alle guten Schüler das gleiche in der Stunde gelernt haben. So ist vielleicht einem ganz zufällig ein Versäumnis eingefallen, und darüber hat er einen wichtigen Gedanken des Lehrers verpaßt. Sie könnten hier sicherlich noch viele andere Beispiele nennen. Wir sehen aus ihnen, daß der Zufall in pädagogischen Prozessen wirklich ein wesentlicher Faktor ist. Aber selbst zur Beschreibung zufälliger Prozesse hat die Mathematik Mittel gefunden: die Wahrscheinlichkeitstheorie und die Methoden der mathematischen Statistik. Aus dem Charakter der pädagogischen Prozesse folgt, daß diese beiden Disziplinen den Schwerpunkt bei der Mathematisierung der Pädagogik bilden.

An dieser Stelle müssen wir uns vor Augen halten, daß die Mathematik nicht die einzige "Fremdwissenschaft" ist, die in die Pädagogik eindringt. Kybernetik, Informations- und Kommunikationstheorie und Operationsforschung helfen mit ihren Methoden bei der Entdeckung neuer Gesetzmäßigkeiten im Prozeß der Bildung und Erziehung mit. Sie können dies, weil ihre Gesetzmäßigkeiten auch im Bereich der pädagogischen Wissenschaften gelten und weil sie sozusagen Denkformen bereitstellen, die einzelne Aspekte der Wissenschaft besonders deutlich hervortreten lassen.

Wir wollen uns nun der Frage zuwenden: Wie lassen sich Ergebnisse pädagogischer Prozesse messen, d.h. zahlenmäßig ausdrücken? Die einfache Möglichkeit kennen Sie bereits: Die Leistungen einer Klasse in einer Kontrollarbeit kann man durch den Leistungsdurchschnitt ausdrücken. Dieser Durchschnitt stellt das arithmetische Mittel aus den Noten der einzelnen Schüler dar. Wir haben uns damit eine Maßzahl geschaffen, mit deren Hilfe wir die Leistungen verschiedener Klassen in dieser Kontrollarbeit vergleichen können. Die Verhältnisse innerhalb einer Klasse werden aber damit nicht differenziert widerspiegelt. Man kann zum Beispiel nicht sagen, ob alle Noten dicht um den Mittelwert gruppiert sind oder ob sie stark streuen. Das wäre jedoch wichtig, um Aussagen über die Anzahl der leistungsstarken bzw. der leistungsschwachen Schüler und das "Mittelfeld" der Klasse

machen zu können. Hierfür ist folgendes Verfahren besser geeignet: Wir tragen über den einzelnen Noten Häufigkeiten (H) auf, mit der sie vorkommen. Damit erhalten wir eine Verteilungskurve. In der Abb. 1 haben wir einige Möglichkeiten in idealisierter Form zusammengestellt.

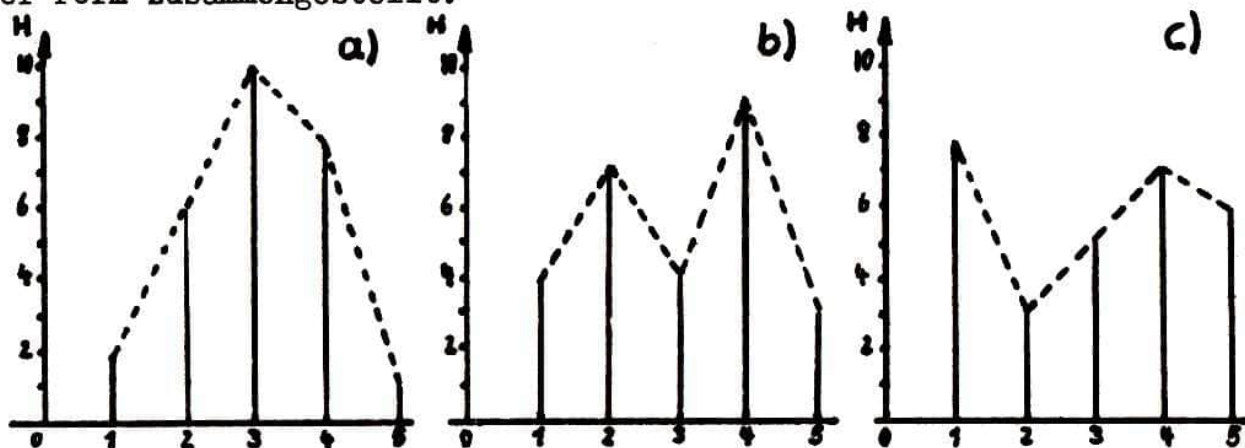


Abb. 1: Leistungsprofile dreier Klassen in einer Kontrollarbeit

Der Mittelwert (Leistungsdurchschnitt beträgt in allen Fällen 3, aber auf den ersten Blick ist zu sehen, wie unterschiedlich die Leistungsprofile der Klassen sind: im Fall a) ist ein starkes Mittelfeld ohne ausgeprägte Leistungsspitze vorhanden, im Fall b) gruppieren sich die Leistungen besonders um die Noten 2 und 4, während im Fall c) eine Leistungsspitze einem breiten Feld mittlerer bis schlechter Leistungen gegenübersteht. In diesem Beispiel haben wir ein Verfahren der beschreibenden Statistik kennengelernt. Mit ihm kann sich der Lehrer einen detaillierteren Überblick über die Leistungen seiner Schüler verschaffen. Das genügt aber noch nicht, um gezielte Erziehungs- und Bildungsmaßnahmen einzuleiten. Wie wir bereits gesehen haben, sind die Ergebnisse pädagogischer Messungen immer mit dem Wirken des Zufalls behaftet, und dieser Einfluß muß als erstes eliminiert werden. Dazu muß der Lehrer weitere Messungen (Leistungskontrollen, weitere Kontrollarbeiten, Beobachtungen, usw.) durchführen. Die Mathematik gibt ihm in Form der Prüfstatistik Methoden in die Hand, um festzustellen, ob eine bestimmte Einschätzung (z.B. "Hans hat die schlechtesten Noten") wirklich gerechtfertigt und nicht zufallsbedingt ist. Der Lehrer weiß dann,

wo er in seiner Erziehungsarbeit ansetzen soll. Was er damit aber noch nicht weiß, ist das Wie. Dazu muß er erkennen, warum z.B. Hans die schlechtesten Noten hat und wie er am besten beeinflußt werden kann. Das ist der schwierigere Teil der Arbeit des Lehrers, und dabei kann ihm die Statistik nicht weiterhelfen.

Noch etwas komplizierter liegen die Verhältnisse in der pädagogischen Forschung. Wir unterscheiden hier drei Phasen:

- a) Aufstellen einer Hypothese
- b) Messungen und Auswertung (Entscheidung über die Gültigkeit der Hypothese)
- c) Interpretation der Ergebnisse

In der ersten Phase besteht das Hauptproblem darin, geeignete Größen zu finden, die die zu untersuchenden Seiten des pädagogischen Prozesses meßbar widerspiegeln. Diese Größen können nur durch eine psychologisch-pädagogische Analyse des entsprechenden Prozesses bzw. der entsprechenden Erscheinung gewonnen werden. So kann uns die Mathematik z.B. nicht sagen, wodurch man die Lerneinstellung der Schüler messen kann. Ist der zu untersuchende Prozeß auf diese Weise modelliert worden, so beginnt die zweite Phase, in der durch Versuche die tatsächlichen Werte der Meßgrößen bestimmt werden. Anschließend muß der Einfluß des Zufalls aus den Meßwerten eliminiert werden und es ist zu prüfen, ob die erhaltenen Erlebnisse eine Bestätigung oder eine Ablehnung der anfangs aufgestellten Hypothese bedeuten. Bei all diesen Operationen in der zweiten Phase ist die Anwendung mathematischer Methoden unerläßlich, um die Aussagekraft der pädagogischen Messungen zu sichern. In der dritten Phase kommt es darauf an, Schlußfolgerungen für die weitere pädagogische Arbeit abzuleiten. Auch hierbei treten wieder die inhaltlichen Fragen in den Vordergrund.

Mit diesem Exkurs in die pädagogische Forschung sollte noch einmal deutlich werden, daß sich die beiden Methoden der Untersuchungen pädagogischer Erscheinungen - die logisch-mathematische Analyse und individuell-inhaltliche Untersuchung - sinnvoll ergänzen. Während auf dem Gebiet der inhaltlichen Untersuchung bereits langjährige Erfahrungen vorliegen, steht die pädagogische Forschung noch am Anfang ihrer Mathematisierung.

Inhaltsverzeichnis der „Wurzel“ (Jahrgang 1970)

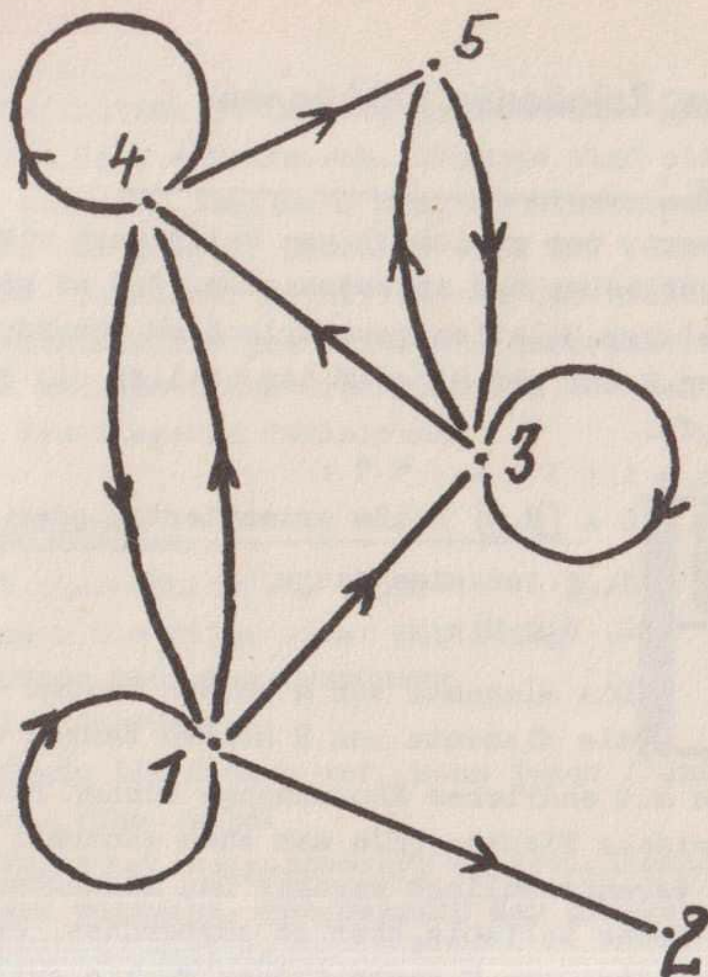
Seite

Einiges über Folgen und Reihen III.....	2
Numerische Mathematik II.....	6
Aus der Sektion Mathematik.....	9
Gruppentheorie und Geometrie I.....	18
Numerische Mathematik III.....	22
Gruppentheorie und Geometrie II	34
Die Programmierung des Kleinrechners Cellatron SER 2 c (I)...	43
Gruppentheorie und Geometrie III	50
Das Mathematik-Spezialistenlager Februar 1970	65
Die Programmierung des Kleinrechners Cellatron SER 2 c (II)...	58
Die Programmierung des Kleinrechners Cellatron SER 2 c (III)...	74
Über Lehrprogramme I	80
Aus der Sektion Mathematik	83
Die Programmierung des Kleinrechners Cellatron SER 2 c (IV)...	90
Wissenschaftliche Studentenkonferenz der Sektion Mathematik...	97
Die Programmierung des Kleinrechners Cellatron SER 2 c (V) ..	106
Über Lehrprogramme II	112
Aus der Sektion Mathematik	118
Kombinatorik	121
Aus unserer Lehrerausbildung	128
Einführung in die Schaltalgebra	136
Mathematik-Spezialistenlager	148
Mengen, Relationen, Funktionen I	162
Elementare Einführung in die Graphentheorie.....	166
Studienwerbung - Studienvorbereitung	171
Mengen, Relationen, Funktionen II	178
Die FDJ-Arbeit an unserer Sektion	186

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS und SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Karola Schimmel, Volker Kögel
Mitarbeiter: H. Fischer (Versandleiter)
R. Lorenz (Ltr. d. Aufgabenteils)
M. Wolf (Manuskript)

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
DDR 69 Jena
Helmholtzweg 1 "Wurzel-Redaktion"



Man gebe die Menge M und die über M definierte Relation R des oben dargestellten Graphen $[M, R]$ an!

2

71

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

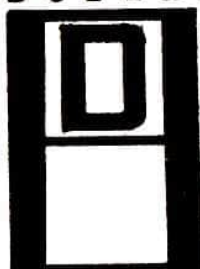
Herausgegeben vom
FDJ-Aktiv der
Sektion Mathematik
an der
Friedrich-Schiller-
Universität Jena

Mengen, Relationen, Funktionen

Graphen

Die Theorie der zweistelligen Relationen wird dadurch sehr viel übersichtlicher und interessanter, daß es gelingt, jede endliche zweistellige Relation geometrisch zu veranschaulichen. Mit jeder Relation R auf der Menge M ist nämlich ein sogenannter Graph eng verknüpft.

Definition 11:



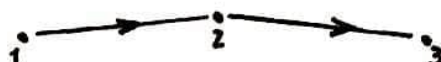
$G = [M, R]$ heißt orientierter oder gerichteter Graph Df

1. M ist eine Menge
2. $R \subseteq M \times M$

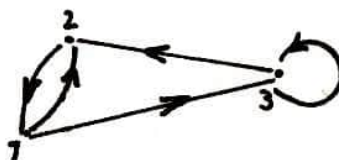
Die Elemente von M heißen Knoten oder Ecken von G ,
die Elemente von R heißen Kanten oder Bögen von G .

Graphen mit endlicher Knotenmenge können folgendermaßen durch geometrische Figuren (die man auch manchmal einfach Graphen nennt) veranschaulicht werden: Den Elementen von M werden Punkte der Ebene beliebig, aber so zugeordnet, daß zwei verschiedenen Elementen von M verschiedene Punkte entsprechen. Der dem Element x zugeordnete Punkt wird ebenfalls mit x bezeichnet. Zwei dieser Punkte, x und y , werden genau dann durch einen von x nach y verlaufenden Pfeil verbunden, wenn $[x, y] \in R$ gilt.

Beispiel: 1. Der Graph $[A, U]$, der der Relation des vorletzten Beispiels des vorigen Abschnitts entspricht, hat das Diagramm



2. Das letzte Beispiel des vorigen Abschnitts liefert den Graphen $[A, V]$, der durch folgendes Bild dargestellt wird.



Bemerkung: In der Definition 11 ist die Schreibweise $[M, R]$ als geordnetes Paar aufzufassen. Graphen sind also nichts anderes als ganz bestimmte Mengen! Relationen sind ebenfalls nur Mengen. Dasselbe wird auf Funktionen zutreffen. Damit werden wir das in der Einleitung zu dieser Artikelserie gestellte Ziel erreicht haben, wichtige mathematische Grundbegriffe auf mengentheoretischer Grundlage zu definieren.

Abbildungen und Funktionen

In Prüfungen spielt sich häufig ein Gespräch folgender Art ab:

Prüfer: Was verstehen Sie unter einer Abbildung?

Student: Eine Abbildung ist eine Zuordnung.

Prüfer: Was ist eine Zuordnung?

Student: Eine Zuordnung liegt dann vor, wenn jedem Element ein anderes zugeordnet wird.

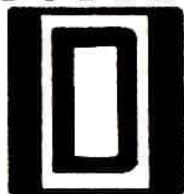
(Diese Antwort ist ausgesprochen unbefriedigend, weil der Student versucht, den Begriff der Zuordnung durch sich selbst zu erklären.)

Prüfer: Können Sie genau präzisieren, was Sie unter "zuordnen" verstehen wollen? Wenn dieses Wort undefiniert bleibt, muß man sich darauf verlassen, daß alle Menschen sich genau dasselbe darunter vorstellen. Auf einer solchen vagen Grundlage kann man jedoch keine Mathematik betreiben.

Wir wollen nun annehmen, daß der Student, der anfangs nicht gerade erfreulich reagiert hat, nun doch die Antwort findet, die der Prüfende bereits nach der ersten Frage erwartet hat. Sie könnte etwa so lauten:

Wir gehen vom Begriff der Relation zwischen zwei Mengen aus (vgl. Definition 10) und führen einfach folgende neue Sprechweise ein:

D e f i n i t i o n 12 :



1. F heißt Abbildung aus A in B $\stackrel{\text{Def}}{=}$

$F \subseteq A \times B$ (d.h. F ist Relation zwischen A und B)



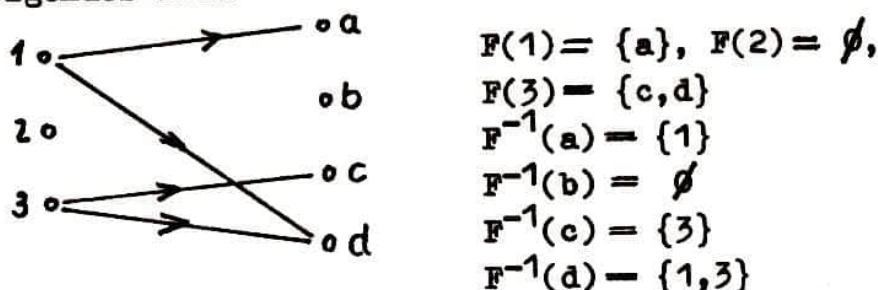
2. Ist $[a, b] \in F$, so sagen wir, daß F dem Element a das Element b zuordnet, oder auch, daß a durch F auf b abgebildet wird.
3. $F(a) =_{\text{Df}} \{y: [a, y] \in F\}$ heißt Bildmenge von a .
4. $F^{-1}(b) =_{\text{Df}} \{x: [x, b] \in F\}$ heißt Urbildmenge von b .

Man beachte, daß das Wort "zuordnen" durch Punkt 2 der Definition 12 einen ganz präzisen mengentheoretischen Sinn erhalten hat.

Beispiel: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$

$F = \{[1, a], [1, d], [3, c], [3, d]\}$

Eine Veranschaulichung des Graphen $[A \cup B, F]$ liefert folgendes Bild:



Wir führen nun noch ganz wichtige Sorten von Abbildungen ein:

Definition 13:



Eine Abbildung F aus A in B heißt eindeutig $=_{\text{Df}}$

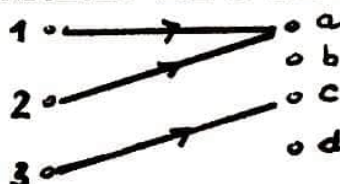
$$\forall x \forall y \forall y' ([x, y] \in F \wedge [x, y'] \in F \rightarrow y = y')$$

Eindeutige Abbildungen heißen auch Funktionen.

In Worten: Eine Abbildung aus A in B heißt Funktion, wenn jedem Element aus A höchstens ein Element zugeordnet wird. Es gilt also der

Satz 6: F ist genau dann eine Funktion aus A in B , wenn für jedes $x \in A$ die Bildmenge $F(x)$ höchstens ein Element enthält.

Beispiel: Das $F = \{[1, a], [2, a], [3, c]\}$ ist Funktion aus $A = \{1, 2, 3\}$ in $B = \{a, b, c, d\}$. Das sieht man auch am Bild, weil von jedem Element von A höchstens ein Pfeil ausgeht:



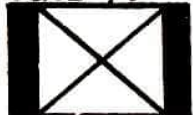
Definition 14:



Eine Abbildung F aus A in B heißt eindeutig umkehrbar
 $\text{Df } \forall x \forall x' \forall y ([x, y] \in F \wedge [x', y] \in F \rightarrow x = x')$

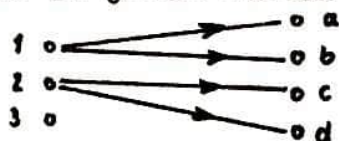
In Worten: Eine Abbildung F aus A in B heißt genau dann eindeutig umkehrbar, wenn niemals verschiedene Elemente aus A dem gleichen Element aus B entsprechen. Offenbar gilt:

Satz 7:



F ist genau dann eine eindeutig umkehrbare Abbildung aus A in B , wenn für jedes $y \in B$ die Urbildmenge $F^{-1}(y)$ höchstens ein Element enthält.

Beispiel: $F = \{ [1, a], [1, b], [2, c], [2, d] \}$ ist eindeutig umkehrbare Abbildung aus A in B . Im Bild wird das dadurch deutlich, daß in jedem Knoten aus B höchstens ein Pfeil einläuft:



Diese Abbildung ist jedoch nicht eindeutig.

Definiert man

Definition 15:



$F^{-1} \text{Df } \{ [x, y] : [y, x] \in F \}$ heißt inverse Abbildung von F oder Umkehrabbildung von F ,

so gilt der

Satz 8:



F ist genau dann eindeutig umkehrbar, wenn F^{-1} eindeutig ist.

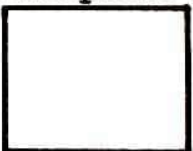
Eindeutige Umkehrbarkeit bedeutet also, daß die Umkehrabbildung eindeutig ist.

Definition 16:



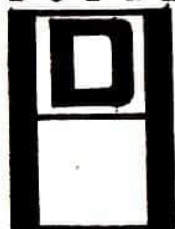
Eine Abbildung, die eindeutig und zugleich eindeutig umkehrbar ist, heißt eineindeutig oder umkehrbar eindeutig.

Beispiel: $F = \{ [1, a], [2, c], [3, b] \}$ ist eineindeutig.



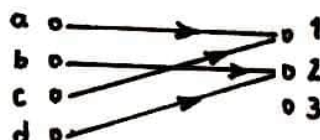
Schließlich führen wir noch folgende Sprechweise ein:

Definition 17 :



1. F heißt Abbildung von A in $B =_{\text{Df}} D_F = A$
 $(D_F =_{\text{Df}} \{x: \exists y([x,y] \in F))$ (Definitionsbereich von F))
2. F heißt Abbildung aus A auf $B =_{\text{Df}} B_F = B$
 $(B_F =_{\text{Df}} \{y: \exists x([x,y] \in F))$ (Bildbereich von F))

Beispiel: 1. $F = \{[a,1], [b,2], [c,1], [d,2]\}$ ist Abbildung von B in A



2. $G = \{[a,3], [b,2], [c,1], [d,2]\}$ ist Abbildung von B auf A



3. $H = \{[a,3], [c,1], [d,2]\}$ ist Abbildung aus B auf A



Im Falle einer eindeutigen Abbildung F wollen wir an Stelle von $F(x) = \{y\}$ kürzer $F(x) = y$ schreiben.

Man kann solche Funktionen selbstverständlich auch in Form von Wertetabellen aufschreiben.

Beispiel: $F = \{[1,a], [2,c], [3,b], [4,c]\}$ hat die Wertetabelle

x	1	2	3	4
$F(x)$	a	c	b	c

Die im Schulunterricht behandelten Funktionen sind sämtlich Beispiele für den hier dargelegten Funktionsbegriff.

Kritik der naiven Mengenlehre

Wir haben gesehen, wie wichtige Grundbegriffe der Mathematik bei näherem Zusehen sich als mengentheoretisch streng definierbar erweisen. Wenn damit der Mengenbegriff eine zentrale Stellung in der Mathematik einnimmt, so ist die Frage berechtigt,

was eigentlich eine Menge ist. Georg Cantor (1845-1918), der als der Schöpfer der Mengenlehre angesehen werden kann und der ganz bedeutende Leistungen auf diesem Gebiet vollbracht hat, hat folgende Festlegung des Mengenbegriffs vorgeschlagen:

"Eine Menge ist die Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens, die wir die Elemente der Menge nennen wollen, zu einem Ganzen."

Wie B. Russell bemerkt hat, könnte man danach auch die Menge R aller Mengen bilden, die sich nicht selbst als Element enthalten (z.B. ist die Menge aller natürlicher Zahlen selbst keine natürliche Zahl und daher nicht in sich selbst als Element enthalten.). Für R gilt also

$$R = \{x: x \notin x\}, \text{ d.h.}$$

$$1. x \in R \iff x \notin x$$

Wir fragen nun, ob $R \in R$ gilt. Aus 1. folgt sofort der Widerspruch

$$R \in R \iff R \notin R,$$

der als Russellsche Antinomie bekannt ist.

Muß angesichts dieses Widerspruchs die Mengenlehre und damit die Mathematik über Bord geworfen werden? Wenn es nicht gelingen würde, diesen oder andere Widersprüche durch einen korrekten Aufbau der Mengenlehre auszuschalten, stände die Mathematik in der Tat vor einem ernststen Problem. Es gibt aber bisher schon mehrere verschiedene Möglichkeiten einer sogenannten axiomatischen Begründung der Mengenlehre bei denen diese Widersprüche vermeidbar sind, von denen allerdings bis heute noch nicht feststeht, ob sie nicht vielleicht andere Widersprüche enthalten. Auf die Darlegung dieser interessanten Probleme muß hier jedoch verzichtet werden.

Dr. G. Wechsung

Dozent

an der Sektion Mathematik der

Friedr.-Schiller-Universität Jena

Preisaufgaben (Serie 2/71)

(C 7) Es sei die Menge M durch
 $M = \{z: z = x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5,$
 $x, y \text{ ganze Zahlen}\}$ gegeben.
Man beweise, daß gilt $33 \nmid M$.

(C 8) Durch einen gegebenen Eckpunkt A eines konvexen Vierecks $\square ABCD$ ist eine Gerade so zu konstruieren, daß sie den Flächeninhalt F des Vierecks halbiert.

(C 9) Es sei φ mit $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ so gewählt, daß $\sin \varphi = \frac{3}{5}$.

Man beweise, daß gilt: $\sin 25\varphi = \frac{p}{5^{25}}$, wobei p eine ganze Zahl ist, die zu 5^{25} teilerfremd ist.

(C10) Die unendliche Summe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ (n natürlich) wächst über alle Grenzen. Man zeige, daß dagegen die unendliche Summe der Reziproken aller natürlichen Zahlen, die keine Ziffer 9 enthalten, nicht größer als 28 ist.

(C11) Gegeben sei ein Rechteck $\square ABCD$ mit $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$, in dessen Innern n Parallelen zu AB und m Parallelen zu BC liegen. Wie viele Möglichkeiten gibt es dann, auf den Kanten der entstandenen Rechtecke von A nach C zu gelangen, wenn der Gesamtweg nicht größer als $a + b$ sein soll?

(C12) Gegeben sei eine reelle Zahl $r = 0,100\ 000\ 000\ 100\ \dots$ (die Einsen stehen an 1., 10., 100., ..., 10^n ., ...Stelle nach dem Komma).
Man beweise, daß sowohl die Zahl r als auch r^2 nichtperiodische Dezimalbrüche sind.

Für jeden vollständigen Lösungsweg einer Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für zehn Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender zehn Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des

Rechtsweges).

Falls ein Besitzer von zehn Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum 10. des folgenden Monats (Datum des Poststempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgaben" an unsere Adresse einzuschicken.

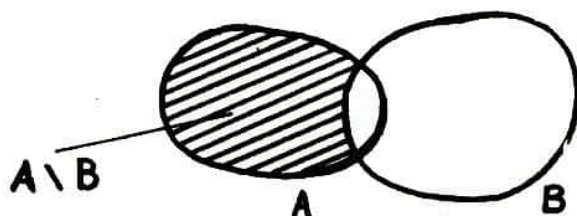
Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden.

Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

Berichtigung zur Nr. 12/70

Leider unterliefen uns bei der Anfertigung der "Wurzel" Nr. 12/70 einige Fehler, die der aufmerksame Leser sicher schon gefunden hat:

Die Definition 5 auf S. 179 ist in Definition 4a umzubenennen. Auf Seite 180 unten muß es heißen $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$ (Der gleiche Sachverhalt tritt uns nochmals in der Zusammenfassung auf S. 183 entgegen). Man verdeutliche sich dies an folgenden Punktmengen:



Der Fall $(A \setminus B) \cup B = A$ tritt genau dann ein, wenn $B \subseteq A$. Im Beweis zum Satz 1 auf S. 181 lautet die Aussage richtig:

$$\forall x(x \in \emptyset \rightarrow x \in A).$$

Wir bitten alle Leser um Verständnis.

Die Redaktion

Wissenschaftlich-produktives Studium in der Diskussion

Die Verwirklichung der 3. Hochschulreform erfordert von Lehrkörper und Studenten, daß neue Wege der Ausbildung gesucht und gefunden werden. Dabei arbeiten wir alle an einem Hauptziel:

Durchsetzung des wissenschaftlich-produktiven Studiums an unseren Universitäten und Hochschulen. Dazu veranstalteten wir, die Lehrerstudenten des 3. Studienjahres unserer Sektion, eine Studienjahreskonferenz. Vertreter aller an der Ausbildung beteiligten Sektionen und Bereiche, der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands und der Freien Deutschen Jugend sprachen gemeinsam mit den Studenten auf dieser Versammlung über folgende Themen:

1. Theoretische Aspekte des wissenschaftlich-produktiven Studiums
2. Das System der Wissensvermittlung für unser Studienjahr
3. Die Verbesserung der Zusammenarbeit zwischen Studenten und Lehrkörper

Die Veranstaltung wurde von den Sekretären für WPS (jede Seminargruppe hat in ihrer Leitung einen Sekretär für WPS) organisiert. In der Vorbereitung erfolgte eine Analyse des Systems der Wissensvermittlung für unser Studienjahr. In einer aufgeschlossenen und freimütigen Atmosphäre diskutierten Studenten und Lehrkörper gemeinsam Fragen des wissenschaftlich-produktiven Studiums und seiner Durchsetzung in unserer Ausbildung. Auf jeden unserer Ausbildungsbereiche, das sind Mathematik-, Physik-, Marxismus-Leninismus- und Methodikausbildung, gingen wir einzeln ein. Dabei wurden Mängel in der Einstellung zum Studium, Mängel in der Ausbildung und Vorschläge zur Verbesserung diskutiert. Es ist vor allem die große Zahl der Vorschläge und Anregungen hervorzuheben, die im Ergebnis dieser Konferenz zu verzeichnen ist. Eine Arbeitsgruppe wird die Anregungen bearbeiten und an die Kommission für Lehrerbildung zur Prüfung und Beratung weiterleiten. So gesehen war diese Studienjahreskonferenz ein wirkungsvoller Bestandteil der Gesamtbemühungen um die Durchsetzung des wissenschaftlich-produktiven Studiums.

B. Wächter

Student im 3. Studienjahr Ma/Ph

Lösungen

(B44): Es geht um das Problem der absoluten Permutationen, (absolute Permutationen sind eindeutige Abbildungen endlicher Mengen auf sich selbst).

Wir bezeichnen die Anzahl der absoluten Permutationen von n Elementen mit a_n .

Eine absolute Permutation von n Elementen erhält man, indem man an eine absolute Permutation von $(n-1)$ Elementen ein weiteres Element anfügt und dieses nacheinander mit den $(n-1)$ Elementen vertauscht. Es ergeben sich $(n-1)a_{n-1}$ absolute Permutationen. Außerdem kann man aus den $(n-1)a_{n-2}$ Permutationen von $(n-1)$ Elementen, bei denen genau ein Element e auf sich selbst abgebildet wird, absolute Permutationen von n Elementen erzeugen, indem man das n -te Element mit dem einen Element e vertauscht. Damit sind alle Möglichkeiten zur Bildung von absoluten Permutationen erfaßt.

Also $a_n = (n-1)a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$ bzw.

$$a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}).$$

Die Anfangsglieder $a_1 = 0$ und $a_2 = 1$ sind leicht bestimmbar, so daß sich durch Rekursion jedes beliebige a_n berechnen läßt.

(B53): a) Die Wahrheitwerttabelle hat folgendes Aussehen:

x	y	$\bar{y}$	$x \cdot \bar{y}$	$(x \cdot \bar{y}) + y$	$x + y$
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1

$$\begin{aligned}
 \text{b) Es ist } (x \cdot \bar{y}) + y &= (x+y) \cdot (\bar{y}+y) && \text{nach (7')} \\
 &= (x+y) \cdot (y+\bar{y}) && \text{nach (5)} \\
 &= (x+y) \cdot (1) && \text{nach (4)} \\
 &= x+y && \text{nach (1')}
 \end{aligned}$$

(B59): Die gesuchte Zahl sei n . Da n^6 9-stellig ist, muß gelten:

$$\begin{aligned}
 10^8 \leq n^6 < 10^9 \\
 \text{daraus folgt: } 10^2 \leq \left(\frac{n}{10}\right)^6 < 10^3 \\
 \text{sowie } 10 \leq \left(\frac{n}{10}\right)^3 ; \left(\frac{n}{10}\right)^2 < 10
 \end{aligned}$$

Folglich muß gelten: $20 < n < 40$ (1)

Die Quersumme von n^6 ist 45.

Somit gilt $9/n^6$ und $3/n^3$. Daraus folgt: $3/n$ (2)

Aus (1) und (2) folgt: $n \in \{21; 24; 27; 30; 33; 36; 39\}$

Da n^6 die Ziffern 1; 5; 6 nicht enthält, gilt

$$n^6 \not\equiv \begin{cases} 1 \\ 5 \\ 6 \end{cases} \pmod{10} \quad . \text{Außerdem kann } n^6 \equiv 0 \pmod{10} \text{ nicht}$$

gelten. Dann würde nämlich n^6 sechs Nullen enthalten.)

Aus der folgenden Tabelle entnimmt man:

$$\begin{array}{lcl}
 n \not\equiv \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{cases} \pmod{10} & & \begin{array}{l} n \equiv 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \pmod{10} \\ \hline n^6 \equiv 0 \ 1 \ 4 \ 9 \ 6 \ 5 \ 6 \ 9 \ 4 \ 1 \end{array}
 \end{array}$$

Somit kann nur gelten: $n \in \{27; 33\}$

Nun wird noch der Fall $n \neq 33$ ausgeschlossen:

$$33^2 \equiv 89 \pmod{100}$$

$$89^2 \equiv 21 \pmod{100}$$

$$89^3 \equiv 69 \pmod{100}$$

$$33^6 \equiv 69 \pmod{100}$$

Somit würde n^6 die Ziffer 6 enthalten.

Ergebnis: Die gesuchte Zahl kann nur 27 lauten.

Man prüft leicht, daß $27^6 = 387420489$ den Bedingungen der Aufgabe genügt.

(B56): Es ist $\cos^6 x = (1 - \sin^2 x)^3$

$$= 1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x$$

Damit wird $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$

$$= -3\sin^2 x(1 - \sin^2 x) + 1$$

$$= -3(\sin x \cdot \cos x)^2 + 1$$

Wegen $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x$ gilt

$$f(x) = -\frac{3}{4} \cdot \sin^2 2x + 1$$

Für alle reellen Zahlen x ist nun

$$0 \leq \sin^2 2x \leq 1, \text{ wobei } \sin^2 0 = 0 \text{ und } \sin^2 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 1$$

Daraus ergibt sich

$$1 = -\frac{3}{4} \cdot 0 + 1 \geq f(x) \geq -\frac{3}{4} \cdot 1 + 1 = \frac{1}{4}$$

Der maximale und der minimale Wert von $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$ ergibt sich also zu $f(0) = 1$ und $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$

(B57): Erhebt man die Gleichung

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{x}} = \sqrt[3]{b}$$

in die dritte Potenz, so ergibt sich

$$a + \sqrt{x} + 3(\sqrt[3]{a + \sqrt{x}})^2 \sqrt[3]{a - \sqrt{x}} + 3\sqrt[3]{a + \sqrt{x}} (\sqrt[3]{a - \sqrt{x}})^2 + a - \sqrt{x} = b$$

$$\text{oder } 2a + 3\sqrt[3]{a + \sqrt{x}} \sqrt[3]{a - \sqrt{x}} (\sqrt[3]{a + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{x}}) = b$$

Nach Voraussetzung gilt dann

$$2a + 3\sqrt[3]{a^2 - x} \sqrt[3]{b} = b$$

$$\sqrt[3]{a^2 - x} = \frac{b - 2a}{3 \sqrt[3]{b}}$$

$$a^2 - x = \frac{(b - 2a)^3}{27b}$$

$$x = a^2 - \frac{(b - 2a)^3}{27b}$$

Damit die Ausgangsgleichung eine Lösung besitzt, muß

$$a^2 - \frac{(b - 2a)^3}{27b} \geq 0 \text{ sein,}$$

da $\sqrt{x}$ nur für $x \geq 0$ einen Sinn hat.

(B58): Zu zeigen ist:

Wenn (a_1) arithmetische Folge und (b_1) geometrische Folge mit $a_1 = b_1 > 0$ und $a_2 = b_2$ und beide Folgen streng monoton wachsend sind, dann gilt für alle natürlichen Zahlen $n > 2$: $a_n < b_n$.

Lösung:

Nach Voraussetzung ist

$$a_n = a_1 + (n - 1)(a_2 - a_1), \text{ mit } a_2 - a_1 > 0$$

$$\text{und } b_n = a_1 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{n-1}, \text{ mit } \frac{a_2}{a_1} > 1$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $n = 3$

zu zeigen ist $a_3 < b_3$, d.h.

$$a_1 + 2(a_2 - a_1) < a_1 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2$$

dann muß gelten:

$$2a_2 - a_1 < \frac{a_2^2}{a_1}$$

$$2a_1a_2 - a_1^2 < a_2^2$$

$$0 < a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 = (a_1 - a_2)^2$$

Da $a_1 \neq a_2$ und Quadrate immer positiv sind, ist diese Bedingung erfüllt. Daraus folgt $a_3 < b_3$.

Induktionsschritt:

Zu zeigen: Wenn $a_n < b_n$, dann ist auch $a_{n+1} < b_{n+1}$.

Beweis: Es ist $a_{n+1} = a_n + (a_2 - a_1)$

$$\text{und } b_{n+1} = b_n \cdot \left(\frac{a_2}{a_1} \right)$$

Wegen $a_n < b_n$ gilt: $a_{n+1} < b_n + (a_2 - a_1)$.

Es genügt also zu zeigen: $b_n + (a_2 - a_1) < b_n \left(\frac{a_2}{a_1} \right)$

Falls das erfüllt ist, muß auch gelten

$$a_1b_n + a_1(a_2 - a_1) < a_2b_n$$

$$\text{bzw.: } 0 < b_n(a_2 - a_1) - a_1(a_2 - a_1)$$

$$0 < (b_n - a_1)(a_2 - a_1)$$

Wegen der strengen Monotonie der Folgen ist jeder der beiden Faktoren positiv, also auch das Produkt.

Daraus folgt:

Falls $a_n < b_n$, dann ist auch $a_{n+1} < b_{n+1}$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt damit die Richtigkeit der Behauptung.

(B60): Es seien $A_1, \dots, A_6$ die Eckpunkte des regelmäßigen Sechsecks, M Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{A_1A_4}$, $\overline{A_2A_5}$, $\overline{A_3A_6}$ und $R = \overline{MA_1}$.

Die Konstruktionsbeschreibung lautet dann folgendermaßen:

Man verbinde A_1 mit A_3 und erhält auf $\overline{MA_2}$ den Schnittpunkt P_2 . Die Strecke $\overline{MP_2}$ hat die Länge $\frac{R}{2}$.

Verbindet man nun P_2 mit A_4 , so erhält man auf $\overline{MA_3}$ den Punkt P_3 , mit der Eigenschaft $\overline{MP_3} = \frac{R}{3}$ (Der Beweis wird anschließend geführt.).

Die Konstruktion verläuft analog weiter. Der jeweilige Punkt P_i wird mit dem Eckpunkt A_{i+2} (falls $i+2 > 6$, so ist unter A_{i+2} der Eckpunkt A_{i+2-6n} zu verstehen, $1 \leq i+2-6n \leq 6$, n natürlich) verbunden. Auf dem Radius $\overline{MA_{i+1}}$, der von dieser Strecke geschnitten wird, erhält man den Schnittpunkt P_{i+1} und es gilt

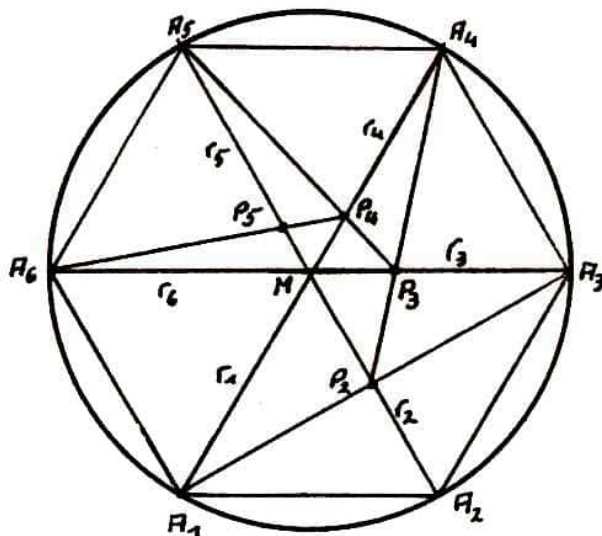
$$\overline{MP_{i+1}} = \frac{R}{i+1}$$

Beweis der Richtigkeit dieser Konstruktion:

Dieser Beweis wird durch vollständige Induktion geführt.

Induktionsanfang: Es gilt $\overline{MP_2} = \frac{R}{2}$

Der Beweis ist trivial, da P_2 nach Konstruktion Schnittpunkt der Diagonalen im Parallelogramm $A_1A_2A_3M$ ist.



Induktionsschritt:

Es sei $\overline{MP_i} = \frac{R}{i}$

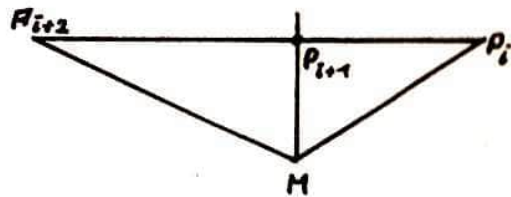
Dann ist zu zeigen $\overline{MP_{i+1}} = \frac{R}{i+1}$

Es ist

$\angle P_i M A_{i+2} = 120^\circ$

$\angle P_i M P_{i+1} = 60^\circ$

$\angle P_{i+1} M A_{i+2} = 60^\circ$



Für die Flächeninhalte

F_1, F_2, F_3 der Dreiecke $\Delta P_i M A_{i+2}, \Delta P_i M P_{i+1}, \Delta P_{i+1} M A_{i+2}$ gilt

$$F_1 = F_2 + F_3$$

$$\overline{MA_{i+2}} \cdot \overline{MP_i} \cdot \sin 120^\circ = \overline{MP_{i+1}} \cdot \overline{MP_i} \cdot \sin 60^\circ + \overline{MA_{i+2}} \cdot \overline{MP_{i+1}} \cdot \sin 60^\circ$$

oder, da $\sin 60^\circ = \sin 120^\circ$,

$$\overline{MA_{i+2}} \cdot \overline{MP_i} = \overline{MP_{i+1}} \cdot \overline{MP_i} + \overline{MA_{i+2}} \cdot \overline{MP_{i+1}}$$

$$R \cdot \frac{R}{i} = \overline{MP_{i+1}} \cdot \frac{R}{i} + R \cdot \overline{MP_{i+1}}$$

$$R \cdot \frac{R}{i} = \overline{MP_{i+1}} \left(\frac{R}{i} + R \right)$$

$$\frac{R \cdot \frac{R}{i}}{\frac{R(i+1)}{i}} = \overline{MP_{i+1}}$$

$$\frac{R}{i+1} = \overline{MP_{i+1}}$$

Damit gilt für alle $i = 1, 2, \dots$

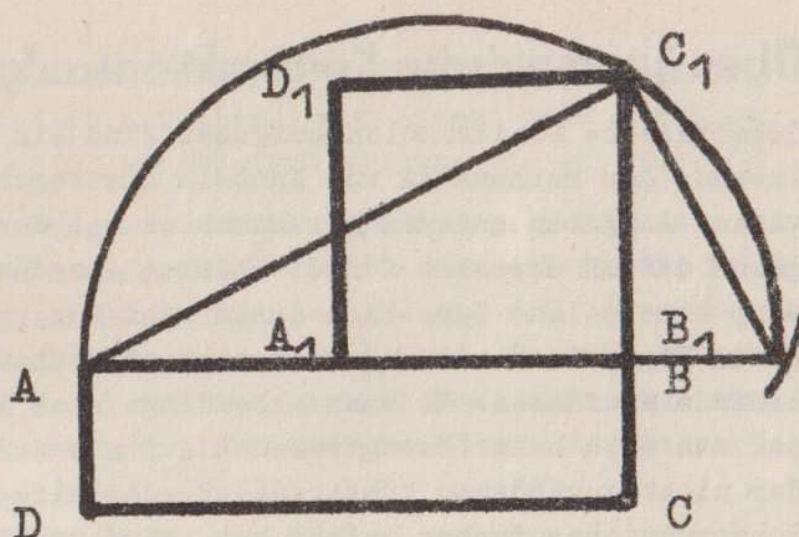
$$\overline{MP_i} = \frac{R}{i}$$

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS und SpS zu richten. Einzelbestellungen können auch direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Karola Schimmel, Volker Kögel
Mitarbeiter: H. Fischer (Versandleiter),
R. Lorenz (Leiter des Aufgabenteils),
M. Wolf (Manuskript)

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
DDR 69 Jena Helmholtzweg 1
"Wurzelredaktion"

V-14-6 4 5271 M 175-71



Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$. Die Skizze zeigt die konstruktive Ermittlung eines flächengleichen Quadrates nach dem Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck und dem Satz des Thales.

3

71

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
FDJ-Aktiv der
Sektion Mathematik
an der
Friedrich-Schiller-
Universität Jena

Über geometrische Konstruktionsaufgaben

Geometrische Konstruktionsaufgaben sind ein beliebtes Mittel, Freunde der Mathematik zum Knobeln anzuregen. Mehr als bei vielen Aufgaben anderer Art kommt es bei den geometrischen Aufgaben darauf an, eine für die Lösung entscheidende Idee zu haben; eine solche Idee kann darin bestehen, geeignete Teile einer Figur in Beziehung zu setzen oder aber eine günstige Hilfslinie einzuführen. Es kann allerdings auch leicht geschehen, daß man sich beim Lösungsversuch auf einem Gedankenweg verirrt, der nicht zur Lösung führt. Jeder, der sich mit geometrischen Konstruktionsaufgaben befaßt hat, wird wohl eine solche Situation kennen, man kann sich aus ihr meist nur durch Beginn eines neuen Lösungsversuches retten.

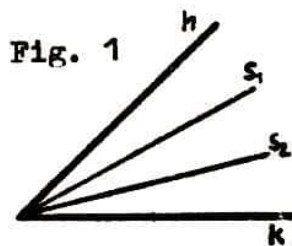
Es entsteht daher die Frage, ob man einen allgemeinen Weg zur Lösung geometrischer Konstruktionsaufgaben angeben kann, der bei jeder Aufgabe zum Ziel führt und bei dem es nicht darauf ankommt, ob man eine günstige Lösungsidee hat oder nicht. Bevor zu dieser Frage etwas gesagt wird, muß auf folgendes geachtet werden:

Es gibt auch Konstruktionsaufgaben, bei denen jeder Lösungsversuch in die Irre geht. Das sind Aufgaben, die mit den im jeweiligen Aufgabentext angegebenen Konstruktionsmitteln (meist sind es Zirkel und Lineal) nicht lösbar sind. Es handelt sich hierbei um eine besondere Art von "Unlösbarkeit". Zur Verdeutlichung seien zwei nicht-geometrische unlösbare Aufgaben genannt:

1. Die Gleichung $1 + x(a - 1) = 0$ soll für $a = 1$ nach x aufgelöst werden.
2. Mit einem Zwei-Liter-Gefäß sollen 17 Liter Wasser abgemessen werden.

Die erste Aufgabe ist deshalb unlösbar, weil keine Zahl x existiert, die der Gleichung $1 + x \cdot 0 = 0$ genügt.

Die zweite Aufgabe ist deshalb unlösbar, weil man mit einem Zwei-Liter-Gefäß nur Wassermengen geradzahliger Literzahl abmessen kann; sie ist nicht deshalb unlösbar, weil es keine Wassermengen von 17 Litern gäbe. Diese zweite Art der Unlösbarkeit liegt nur bei manchen geometrischen Konstruktionsaufgaben vor. Ein berühmtes Beispiel ist folgendes:



Gegeben ist ein beliebiger Winkel $\angle (h,k)$. Es sollen mit Zirkel und Lineal zwei Strahlen s_1 und s_2 konstruiert werden, die $\angle (h,k)$ in drei kongruente Winkel zerlegen. Dieser so leicht zu formulierenden Aufgabe über die Dreiteilung eines Winkels sieht man nicht sofort an, daß sie unlösbar ist! (Für spezielle Winkel, z.B. rechte Winkel, ist die Aufgabe allerdings lösbar). In der Tat haben sich Mathematiker bis gegen Ende des 18. Jahrhunderts vergeblich um eine Lösung der Aufgabe bemüht, bis man schließlich die Unlösbarkeit erkannte.

Es bleiben also zwei Fragen:

1. Wie kann man von einer Konstruktionsaufgabe entscheiden, ob sie lösbar ist oder nicht?
2. Wie kann man im Falle einer lösbaren Aufgabe in einfacher Weise einen Weg zur Lösung finden?

Eine ausführliche und erschöpfende Beantwortung dieser Fragen kann im Rahmen dieses Artikels nicht gegeben werden, weil die entsprechenden Untersuchungen hier zu weit führen würden. Manches wird nur angedeutet werden können, zur zweiten Frage aber werden wir dem Leser etwas praktisch Brauchbares bieten können.

Zur Beantwortung der ersten Frage betrachten wir nochmals die oben formulierte zweite unlösbare Aufgabe. Beim Beweis ihrer Unlösbarkeit wurde genau angegeben, welche Wassermengen mit einem Zwei-Liter-Gefäß abgemessen werden können: nur solche mit geradzahlig vielen Litern. Da 17 ungerade ist, können 17 Liter nicht abgemessen werden. Im Prinzip ebenso erfolgt nun die Beantwortung der Frage nach der Lösbarkeit einer geometrischen Konstruktionsaufgabe: Man gibt in allgemeiner Form genau an, welche Punkte mit den betreffenden Konstruktionsmitteln konstruiert werden können, indem man charakteristische Eigenschaften dieser Punkte nennt, und man untersucht, ob die auf Grund der Aufgabenstellung zu konstruierenden Punkte diese Eigenschaften haben. Haben die Punkte diese Eigenschaften, so ist die Aufgabe lösbar, haben sie sie nicht, dann ist die Aufgabe unlösbar. Die Eigenschaften, mit denen die konstruierbaren Punkte charakterisiert werden, sind von rechnerischer Art. Um hierin einen Einblick zu bekommen, betrachten wir jetzt Konstruktionen mit Zirkel und

Lineal und legen uns eine Reihe von Grundaufgaben vor, deren Lösungen einfach sind, die aber trotzdem eine Antwort auf Frage 2 hinsichtlich Zirkel-Lineal-Konstruktionen geben werden.

Grundaufgabe 1: Gegeben sind zwei Strecken der Länge s und t .

Zu konstruieren ist eine Strecke

- a) der Länge $s + t$,
- b) der Länge $s - t$,
- c) der Länge $s \cdot t$,
- d) der Länge $\frac{s}{t}$.

Grundaufgabe 2: Gegeben ist eine Strecke der Länge s .

Zu konstruieren ist eine Strecke

- a) der Länge $r \cdot s$, wobei r eine beliebig vorgegebene positive rationale Zahl ist,
- b) der Länge $\sqrt{s}$.

Lösungen: Die Länge der zu konstruierenden Strecke werde mit x bezeichnet.

Zu 1a) und b) Die Aufgaben werden einfach durch An- bzw. Ineinanderlegen der Strecken gelöst; eine Lösung für b) existiert selbstverständlich nur für $s > t$.

Zu 1c) Es gilt $x = s \cdot t$. Diese Gleichung kann in der Form $\frac{x}{s} = \frac{t}{1}$ geschrieben werden, und man erkennt, daß eine Lösung mit Hilfe des Strahlensatzes möglich ist, indem man aus den gegebenen Stücken (eine Strecke der Länge 1 ist immer als gegeben anzusehen) die Figur 2 aufbaut:

Fig. 2

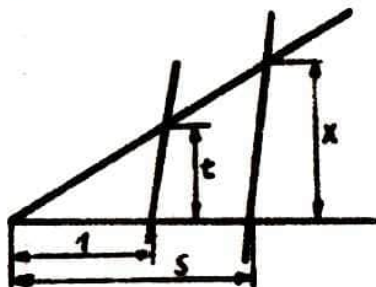
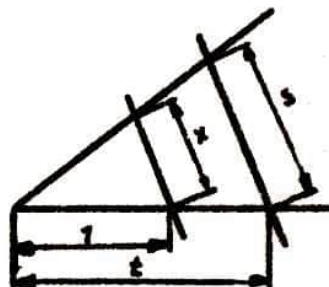


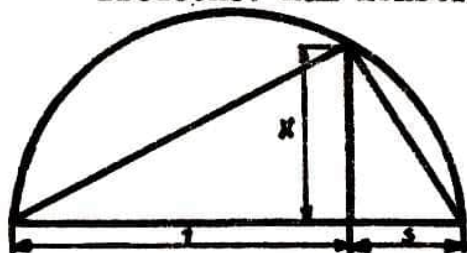
Fig. 3



Zu 1d) Es gilt $x = \frac{s}{t}$, also $\frac{x}{1} = \frac{s}{t}$, die Konstruktion kann durch Aufbau von Figur 3 erfolgen.

Zu 2a) Ist r eine natürliche Zahl, so legt man die gegebene Strecke entsprechend oft aneinander. Hat r die Form $\frac{1}{n}$, wobei n eine natürliche Zahl ist, so handelt es sich um die Teilung einer Strecke in n kongruente Teile, die bekanntlich auf Grund des Strahlensatzes leicht ausführbar ist. Durch Kombination dieser Spezialfälle ergibt sich der allgemeine Fall, denn jede rationale Zahl $r > 0$ läßt sich in der Form $\frac{n}{m}$ darstellen, wobei m und n natürliche Zahlen sind.

Zu 2b) Es gilt $x = \sqrt{s}$, also $x^2 = s$ oder auch $x^2 = 1 \cdot s$. Die Lösung ergibt sich aus dem Höhensatz für rechtwinklige Dreiecke. Man konstruiert unter Verwendung des Satzes



von Thales ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenusenabschnitten der Länge 1 und s , seine Höhe hat die gesuchte Länge x .

Fig. 4

Die Grundaufgaben sind also alle mit Zirkel und Lineal lösbar. Daraus folgt nun unmittelbar folgender Satz:

Eine Konstruktionsaufgabe, bei der sich die Längen der zu konstruierenden Strecken aus den Längen gegebener Strecken durch Anwendung der Rechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Quadratwurzelnziehen sowie Multiplikation mit rationalen Zahlen ergeben, ist mit Zirkel und Lineal lösbar (falls überhaupt die zu konstruierenden Strecken existieren).

Ein möglicher Lösungsweg besteht darin, entsprechend den Rechenausdrücken für die Längen der gesuchten Strecken die angegebenen Lösungen der Grundaufgaben heranzuziehen.

Daß in diesem Satz nur von zu konstruierenden Strecken gesprochen wird, ist keine große Einschränkung der Allgemeinheit, denn wenn z.B. nur ein bestimmter Punkt zu konstruieren ist, dann kann dieser Punkt durch Strecken festgelegt werden (z.B. Verbindungsstrecken zu gegebenen Punkten), und wenn eine bestimmte Figur konstruiert werden soll, so kann sie aus einzelnen Punkten auf-

gebaut werden. Der Satz gibt also eine Antwort auf die Frage 2.

Es empfiehlt sich, konkrete Konstruktionsaufgaben auf die geschilderte Weise zu lösen, um die Methode kennenzulernen. Der Leser möge folgende Aufgaben lösen:

- a) Gegeben sind ein Kreis und ein Punkt außerhalb des Kreises.
Zu konstruieren ist eine Tangente durch den Punkt an den Kreis.
- b) Gegeben sind drei Strecken. Es ist ein Dreieck zu konstruieren, dessen Höhen so lang wie die gegebenen Strecken sind.

Dr. Walter Börner

Wiss. Mitarbeiter an der Sektion Mathematik
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Die Gründung des „Bezirksklubs Junger Mathematiker“ des Bezirkes Gera

Am Sonntag, dem 3. Januar 1971, fand im Institut für Lehrerbildung in Krossen nach der Beendigung eines Wochenendlehrganges für mathematische Talente der 8.-12. Klasse die Gründung des "Bezirksklubs Junger Mathematiker" (BKJM) statt. Der "Bezirksklub Junger Mathematiker" bildet eine neue, höhere Stufe der Zusammenarbeit der Abteilung Volksbildung des Rates des Bezirkes Gera und der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena.

Der BKJM wird vom Klubrat geleitet, dessen Vorsitzender der Genosse Rödel, Fachlehrer an der Spezialschule des VEB Carl Zeiß Jena, ist. Zum Klubrat gehören weiterhin ein Kreisfachberater für Mathematik, ein pädagogischer Mitarbeiter des Bezirkskabinetts für außerunterrichtliche Tätigkeit, dem auch die organisatorische Vorbereitung der Wochenendlehrgänge und der Sommer- bzw. Winterlager untersteht, zwei Schüler der 8.-12.

Klasse , die von den Mitgliedern des BKJM gewählt wurden, ein wissenschaftlicher Mitarbeiter der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität, ein Mitglied der FDJ-Bezirksleitung und ein Vertreter der Studenten. Die Mitglieder des BKJM werden vorwiegend von Studenten der Sektion Mathematik betreut, die auch für die inhaltliche Gestaltung der 3 oder 4 Wochenendkurse pro Schuljahr, des Winterlagers und des Sommerlagers verantwortlich sind.

Das Ziel der Arbeit des BKJM ist es, Talente mit ausgezeichneten Leistungen im Fach Mathematik auf Bezirksebene zu fördern und zu entwickeln. Darin eingeschlossen ist die besondere Förderung von Talenten, die den Bezirk Gera in der Mathematikolympiade auf Republikebene und darüber hinaus vertreten sollen. Außerdem fällt dem BKJM die Aufgabe zu, die Orientierung auf ein Hochschulstudium für Schüler der EOS vor allem in den Richtungen Mathematik und Kybernetik zu unterstützen. Die Vertreter der Sektion Mathematik im BKJM sind in das Jugendobjekt "Studienwerbung - Studienvorbereitung" integriert, so daß sich hier eine organische Verbindung der Interessen der Universität mit denen der Volksbildung gewährleisten läßt.

In den BKJM werden Schüler der 8. bis 10. Klassen der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen, der 11. und 12. Klassen der Erweiterten Oberschulen sowie aller Lehrjahre der Einrichtungen der Berufsausbildung aufgenommen. Insgesamt sind es ungefähr 40 Schüler. Der Maßstab für die Aufnahme in den BKJM ist dadurch festgelegt, daß die entsprechenden Schüler überdurchschnittliche Leistungen im Fach Mathematik und mindestens gute Leistungen in allen anderen Fächern aufweisen, daß sie aktiv an der Arbeit des Jugendverbandes teilnehmen und sich durch vorbildliches Verhalten in Schule und in Öffentlichkeit auszeichnen.

Die Schüler werden durch die Kreisschulräte der entsprechenden Kreise delegiert. Der Klubrat entscheidet über die Aufnahme in den BKJM. Außerdem schätzt der Klubrat die Leistungen und das Verhalten der Schüler am Ende des Schuljahres ein. Diese Einschätzung geht in die Beurteilung auf dem Zeugnis ein. Bei sehr guten Leistungen wird der entsprechende Schüler für eine Auszeichnung durch den Bezirksschulrat vorgeschlagen. Werden die

an ein Mitglied gestellten Anforderungen nicht erfüllt, kann der Klubrat eine zeitweilige Beurlaubung oder einen Ausschluß aus dem BKJM aussprechen. Als äußeres Zeichen der Zugehörigkeit zum BKJM erhalten alle Schüler einen Mitgliedsausweis, in den alle Teilnahmen an Lagern und Wochenendkursen eingetragen werden. Die Mitglieder des Bezirksklubs werden bevorzugt bei zentralen Mathematikwettbewerben berücksichtigt.

Durch den "Bezirksklub Junger Mathematiker" wird eine noch gezieltere und intensivere Förderung der besten jungen Mathematiker des Bezirkes Gera erfolgen. Wir wünschen allen Mitgliedern des BKJM viel Erfolg bei ihrer Tätigkeit.

Wolfgang Freybote

Student im 3. Stdj. Lehrer Ma/Ph

Mitglied des Klubrates des BKJM

Preisaufgaben (Serie 3/71)

(C 13) Es sei $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ und $x_i > 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$)

Für welche Werte der x_i nimmt das Produkt

$x_1^5 x_2^2 x_3 x_4^4$ einen maximalen Wert an?

(C 14) Es seien S_1, S_2 zweistellige Relationen auf einer nicht-leeren Menge M , die beide die Eigenschaften (S) und (T) erfüllen:

(S) : $\forall x \forall y (xSy \rightarrow ySx)$

(T) : $\forall x \forall y \forall z ((xSy \wedge ySz) \rightarrow xSz)$

Man zeige, daß dann auch $S_1 \cap S_2$ diese Eigenschaften besitzt, jedoch $S_1 \cup S_2$ im allgemeinen nicht.

(C 15) Zu jeder Folge reeller Zahlen $a_1, \dots, a_{15}$ kann man eine neue Folge $b_1, \dots, b_{15}$ konstruieren, so daß b_j ($j = 1, \dots, 15$) gerade gleich der Anzahl der a_i ist, die kleiner als a_j

sind. Gibt es eine Folge reeller Zahlen $a_1, \dots, a_{15}$, für die $b_1, \dots, b_{15}$ die Form
 $1, 0, 3, 6, 9, 4, 7, 2, 5, 8, 8, 5, 10, 13, 13$
 besitzt?

(C 16) Es sei bekannt, daß zwei Winkel β, α mit $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi$ die folgenden Gleichungen erfüllen

$$3\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta = 1$$

$$3\sin 2\alpha - 2\sin 2\beta = 0$$

Man zeige, daß dann gilt: $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$

(C17) Auf dem Schenkel $\overline{OA}$ eines Winkels $\angle BOA$ finde man den Punkt P, der von dem anderen Schenkel $\overline{OB}$ und einem gegebenen Punkt M innerhalb des Winkels den gleichen Abstand besitzt. (Konstruktion mit Zirkel und Lineal!)

(C 18) Man bestimme alle Polynome vom Grad 2 (quadratische Polynome), die die Funktionalgleichung

$$f(x) + f(x+1) = 2x^2 + 5 \quad \text{erfüllen.}$$

Für jeden vollständigen Lösungsweg einer Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für zehn Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender zehn Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).

Falls ein Besitzer von zehn Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum 10. des folgenden Monats (Datum des Poststempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgaben" an unsere Adresse einzuschicken.

Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden. - Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

(Berichtigung der Nummer 2/1971)

Auf Seite 23 (Mitte) muß es richtig heißen: $R = \{X: X \notin X\}$.

Lösungen

(C 1): Die Menge $M = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n \cap \dots$ war zu bestimmen, wobei $M_n = [0, 1 + \frac{1}{n})$ ist und n alle natürlichen Zahlen durchläuft.

Behauptung: $M = [0, 1] = \{x: x \text{ reelle Zahl} \wedge 0 \leq x \leq 1\}$

Beweis:

Für alle $x \in [0, 1]$ gilt laut Definition $0 \leq x \leq 1$.

Für alle natürlichen Zahlen n gilt $1 < 1 + \frac{1}{n}$.

Daraus folgt $0 \leq x < 1 + \frac{1}{n}$ für alle natürlichen Zahlen und $x \in M_n$ für alle natürlichen Zahlen.

Damit folgt:

$$x \in M \text{ bzw. } [0, 1] \subseteq M \quad (1)$$

Es bleibt jetzt bloß noch zu zeigen, daß $M \subseteq [0, 1]$.

Diesen Beweis führen wir indirekt.

Annahme: Es existiert ein $x \in M$ mit $x \notin [0, 1]$.

Wir unterscheiden folgende zwei Fälle:

a) $x < 0$

Daraus folgt $x \notin M_1$, da in M_1 genau alle die x liegen, die die Ungleichung $0 \leq x < 2$ erfüllen.

Daraus folgt als Widerspruch zur Annahme $x \notin M$.

b) $x > 1$

Man kann also x in der Form $x = 1 + r$ darstellen, wobei $r > 0$.

x muß laut Annahme in allen M_n liegen, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist. Also muß auch gelten

$x \in M_k$ mit $k = \left[\frac{1}{r} \right] + 1$, wobei wir $\left[\frac{1}{r} \right]$ als größten ganzzahligen Anteil von $\frac{1}{r}$ definieren, d. h. $\frac{1}{r} - 1 < \left[\frac{1}{r} \right] \leq \frac{1}{r}$.

Es muß also gelten:

$$0 \leq x < 1 + \frac{1}{1 + \left[\frac{1}{r} \right]}$$

$0 \leq x$ gilt, da $x < 1$.

Die rechte Seite der Ungleichung ergibt

$$1 + r = x < 1 + \frac{1}{1 + \left[\frac{1}{r}\right]}.$$

Daraus folgt $r < \frac{1}{1 + \left[\frac{1}{r}\right]}$, was ein Widerspruch

zur Definition des größten ganzzahligen Anteils ist.

Somit ergibt sich als Widerspruch zur Annahme

$$x \notin M_k \text{ bzw. } x \notin M.$$

Die Annahme ist also falsch und es gilt

$$M \subseteq [0, 1] \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt aber die Behauptung $M = [0, 1]$.

(C 2): Das gegebene Gleichungssystem läßt sich umformen zu

$$x(x + y + z) + yz = (x + y)(x + z) = a$$

$$y(x + y + z) + xz = (x + y)(y + z) = b$$

$$z(x + y + z) + xy = (x + z)(y + z) = c.$$

Vertauscht man in diesem Gleichungssystem zwei Variable, so vertauschen sich auch zwei der Zahlen a, b, c . Somit kann man vier Fälle unterscheiden:

1. Fall Genau eine der beiden Zahlen a, b, c ist gleich Null.

Es sei o. B. d. A. $a = 0$.

Dann gilt $(x + y)(x + z) = 0$, woraus

$x + y = 0$ oder $x + z = 0$ folgt. Daraus würde wiederum $b = 0$ oder $c = 0$ folgen, was im Widerspruch zur Annahme steht. In diesem Fall ist das Gleichungssystem unlösbar.

2. Fall Genau zwei der Zahlen a, b, c sind gleich Null.

Es sei o. B. d. A. $a = b = 0$.

Da dann $c \neq 0$, muß gelten $x + y = 0$ bzw. $-x = y$.

Damit erhält man $(x + z)(-x + z) = z^2 - x^2 = c$.
 Es gibt dann unendlich viele Lösungstriplets
 (x, y, z) , nämlich $(p, -p, \sqrt{c + p^2})$, wobei
 p eine beliebige reelle Zahl mit $p^2 \geq -c$ ist.

3. Fall Alle drei Zahlen sind gleich Null.

In diesem Fall müssen zwei der drei Summen
 $x + y, x + z, y + z$ verschwinden. Die Lösungsmenge ergibt sich zu

$$\begin{aligned} & (c, -c, -c) \\ & (-c, c, -c) \\ & (-c, -c, c), \end{aligned}$$

wobei c eine beliebige reelle Zahl ist.

4. Fall Alle drei Zahlen sind ungleich Null.

Man erhält durch Multiplikation der drei Gleichungen

$$(x + y)^2(x + z)^2(y + z)^2 = abc.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} x + y &= \pm \frac{\sqrt{abc}}{c} \\ x + z &= \pm \frac{\sqrt{abc}}{b} \\ y + z &= \pm \frac{\sqrt{abc}}{a} \end{aligned}$$

und

$$x + y + z = \pm \frac{\sqrt{abc}}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} x &= \pm \frac{\sqrt{abc}}{2} \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \\ y &= \pm \frac{\sqrt{abc}}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \\ z &= \pm \frac{\sqrt{abc}}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right). \end{aligned}$$

(C 6): Die Darstellung des Durchschnitts zweier Mengen A, B durch das Komplement und die Vereinigung dieser Mengen und der daraus entstehenden Mengen sieht folgendermaßen aus:

$$A \cap B = (A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$$

Wenn $x \in A \cap B$ ist, so ist $x \in A$ und $x \in B$ und damit $x \in A \cup B$. Nach Definition ist aber dann auch $x \notin A \setminus B$ und $x \notin B \setminus A$.

Daraus folgt, daß $x \in (A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$. Es gilt also:

$$A \cap B \subseteq (A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \quad (1)$$

Wenn $x \in ((A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)))$ ist, so gilt $x \in A \cup B$ und $x \notin ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$. Hieraus kann man schließen, daß $x \notin (A \setminus B)$ und $x \notin (B \setminus A)$.

Es gilt nun $x \notin (A \setminus B)$ genau dann, wenn

$$x \notin A \text{ oder } x \in A \cap B \quad (2)$$

und es gilt $x \notin (B \setminus A)$ genau dann, wenn

$$x \notin B \text{ oder } x \in A \cap B \quad (3)$$

Bei der weiteren Betrachtung der Aufgabe unterscheiden sich drei Fälle:

1. Fall: Aus $x \notin A$ folgt, daß $x \notin (A \cap B)$ ist, dann muß aber nach (3) $x \notin B$ sein. Da aber $x \in (A \cup B)$ ist, kann dieser Fall nicht eintreten.

2. Fall: Aus $x \notin B$ folgt, daß $x \notin (A \cap B)$ ist. Dann folgt aber nach (2) $x \notin A$. Das ist ebenfalls ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß $x \in (A \cup B)$.

3. Fall: $x \in (A \cap B)$.

Damit ist (s. o.) $x \in (A \cup B)$.

Somit ergibt sich:

Wenn $x \in ((A \cup B) \setminus (A \setminus B) \cup (B \setminus A))$, dann muß $x \in A \cap B$ sein.

Daraus folgt:

$$(A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \subseteq A \cap B \quad (4)$$

Aus $M = N$ genau dann, wenn $N \subseteq M$ und $M \subseteq N$, folgt nach (1) und (4) unsere Behauptung:

$$A \cap B = (A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)).$$

Wußten Sie schon, daß...

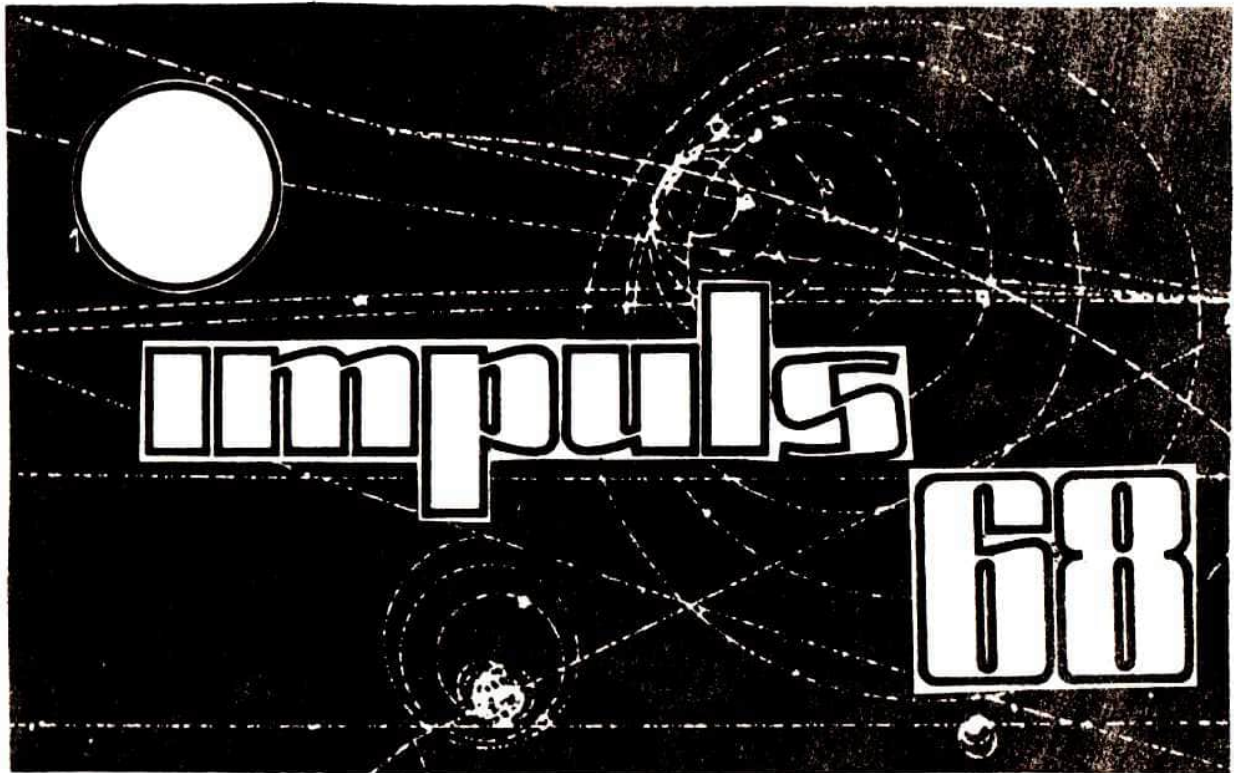
... die Mitarbeiter der "Wurzel" am 5. 1. 1971 die Druckerei "Werner John" in Rudolstadt besuchten, wo in jedem Monat unsere "Wurzel" gedruckt wird? Übrigens folgt in einer der nächsten Nummern ein umfassender Artikel über den "Werdegang" einer "Wurzel"-Ausgabe.

... sich im Rahmen der Erweiterung der "Wurzel" zum Träger des Jugendobjektes "Studienwerbung-Studienvorbereitung" die Anzahl der Mitarbeiter verdoppelt hat?

... sämtliche Mitarbeiter der "Wurzel" ehrenamtlich arbeiten?

... das "Wurzel"-Kollektiv ein Sozialistisches Studentenkollektiv der Friedrich-Schiller-Universität ist?

... jeder Leser die Möglichkeit hat, "Wurzel"-Mitarbeiter zu werden, indem er entweder als Korrespondent unserer Zeitschrift arbeitet (Artikel über mathematische Schülerzirkel, FDJ-Arbeit an den Schulen sowie interessante mathematische Aufgaben und Probleme und dgl. mehr) oder, wenn er noch Schüler ist, zum Studium an unsere Sektion kommt?



...ist die Schülerzeitschrift für die Wissenschaftsgebiete Physik, Chemie und Biologie.

Als mathematisch interessierter Leser der "Wurzel" werden Ihnen auch naturwissenschaftliche Probleme nicht fernstehen, denn diese sind ja auf vielfältige Weise mit der Mathematik verflochten.

"impuls68" vermittelt ein von der Forschung geprägtes Bild der drei Wissenschaften und stellt insbesondere ihre Beziehungen zu Philosophie, Ökonomie, Politik und unserer Gesellschaft dar. Es wird über das Studium der drei Fachrichtungen sowie über Anforderungen an den Studienbewerber informiert. Die Redaktion liegt in den Händen eines Studentenkollektivs der Sektionen Physik, Chemie und Biologie der Friedrich-Schiller-Universität Jena, das 1970 mit dem Staats-titel "Hervorragendes Jugendkollektiv der DDR" ausgezeichnet wurde.

Durch die Mitarbeit prominenter Jenaer Wissenschaftler, wie Prof. Dr. M. Schubert, wird der Leser mit den aktuellsten Erkenntnissen und Theorien der Physik, Biologie und Chemie in-

formiert. Besonders wird Sie eine im Jahrgang 70/71 vorgesehene Artikelserie über die Grundlagen der EDV interessieren, die über die rein mathematische Seite dieses Komplexes hinausgeht.

Die zehn Hefte eines Jahrganges erscheinen von September bis Juni, zu einem Gesamtpreis von 4,--M, der Bezug ist nur im Abonnement des gesamten laufenden Jahrganges möglich. Bestellungen können für den Jahrgang 70/71 noch gerichtet werden an:

"impuls 68"

69 JENA

Max-Wien-Platz 1

Anmerkung der Redaktion:

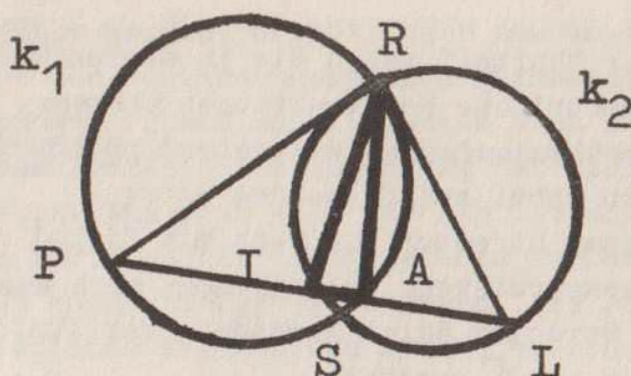
Wir möchten Sie nochmals daran erinnern, daß am 15. Januar 71 die Abonnementgebühren für das Jahr 1970/71 in Höhe von 2,50 M fällig waren. Säumige Leser bitten wir, mittels beigefügter Zahlkarte diesen Betrag an uns zu überweisen.

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS und SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Karola Schimmel, Volker Kögel
Mitarbeiter: H. Fischer (Versandleiter)
R. Lorenz (Ltr. d. Aufgabenteils)
M. Wolf (Manuskript)

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
DDR 69 Jena
Helmholtzweg 1
"Wurzelredaktion"

Sonderpreisaufgabe



Aufgabe: Man konstruiere ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln!

Lösung: Kreise k_1 und k_2 beliebig durch R und S, RP und RL seien Durchmesser. Nach Thalesatz ist $\angle RAP = \angle RIL = 90^\circ$

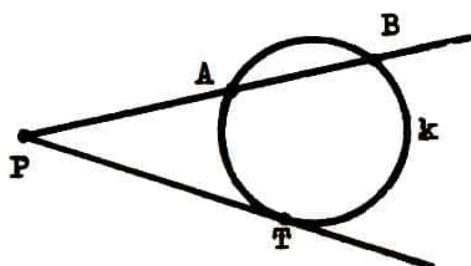
Über geometrische Konstruktionsaufgaben II

Beispiel einer unlösbaren Aufgabe

Im Märzheft der "Wurzel" haben Sie im ersten Teil der Artikelserie über geometrische Konstruktionen gelesen, wie man Zirkel-Lineal-Konstruktionsaufgaben weitgehend rechnerisch lösen kann. Man stützt sich dabei auf folgenden Satz:

 Aus gegebenen Strecken kann man mit Zirkel und Lineal neue Strecken konstruieren, deren Längen sich aus den Längen der gegebenen Strecken durch Anwendung der fünf Rechenoperationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\sqrt{}$ ergeben.

Zur "rechnerischen" Lösung einer Konstruktionsaufgabe berechnet man die Längen der gesuchten Strecken aus denen der gegebenen, und entsprechend den erhaltenen Rechenausdrücken führt man einzelne Konstruktionsschritte (es sind immer die im genannten "Wurzel"-Artikel aufgeführten Grundaufgaben) durch. Als Beispiel diene die Aufgabe, durch einen gegebenen Punkt P an einen Kreis k eine Tangente zu konstruieren: Man verbindet P mit einem be-



liebigen Punkt A des Kreises; die Gerade AP schneide k noch in B . Nach Grundaufgabe 2a) konstruiere man eine Strecke der Länge $x = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$ und nach Grundaufgabe 2b) eine solche der Länge $y = \sqrt{x}$. Auf Grund des Sekantensatzes ist y die gesuchte Länge $\overline{PT}$.

Übrigens gilt von dem oben angeführten Satz - wenn eine Länge sich aus gegebenen Längen durch Anwendung der fünf Operationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\sqrt{}$ ergibt, dann ist sie mit Zirkel und Lineal konstruierbar - auch die Umkehrung:

 Die Länge einer jeden mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Strecke ist aus den Längen gegebener Strecken mit Hilfe der fünf Operationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\sqrt{}$ berechenbar.

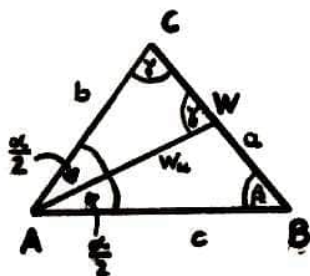
Der Beweis dieses Satzes kann leicht mit Mitteln der analytischen Geometrie geführt werden; er soll hier nur angedeutet werden. Die Gleichungen von Verbindungsgeraden gegebener Punkte sind lineare Gleichungen, deren Koeffizienten sich aus den Koordinaten der gegebenen Punkte durch Anwendung der vier Operationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$ ergeben. Analoges gilt für die Gleichungen von Kreisen um gegebene Mittelpunkte mit gegebenen Radien, nur handelt es sich hier um quadratische Gleichungen. Die Bestimmung von Schnittpunkten solcher Geraden und Kreise erfordert die Auflösung linearer und quadratischer Gleichungen. Hierfür benötigt man keine anderen als die fünf im Satz genannten Operationen.

Dieser Satz gestattet es auch, auf rechnerischem Wege über die Lösbarkeit von Konstruktionsaufgaben zu entscheiden. Das geometrische Problem wird dabei völlig in ein algebraisches verwandelt. Das wird bei dem folgenden Beispiel, in dem die Unlösbarkeit einer speziellen Aufgabe gezeigt wird, besonders deutlich werden.

Wir stellen folgende Aufgabe:

Mit Zirkel und Lineal soll ein gleichschenkliges Dreieck konstruiert werden, in dem eine Basiswinkelhalbierende so lang wie die beiden kongruenten Schenkel ist ($a = b = w_a$). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sollen die beiden Schenkel und die Winkelhalbierende die Länge 1 haben.

Eine Analyse der Winkel zeigt, daß ein solches Dreieck wirklich existiert: Es muß ja gelten:



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

(Winkelsumme des Dreiecks),

$$\alpha = \beta$$

(Gleichschenkligkeit)

$$\frac{\alpha}{2} + \beta = \gamma$$

(Außenwinkelsatz für das Teildreieck ABW).

Dies ist ein Gleichungssystem für α , β , γ . Aus der zweiten und dritten Gleichung folgt $\frac{3}{2}\beta = \gamma$; hieraus folgt mit Hilfe der zweiten Gleichung aus der ersten:

$$\beta + \beta + \frac{3}{2}\beta = 180^\circ, \text{ also } \beta = \alpha = \frac{360^\circ}{7} \approx 51,4^\circ;$$

$$\gamma = \frac{3}{2} \cdot \frac{360^\circ}{7} = \frac{540^\circ}{7} \approx 77,2^\circ.$$

Diese Werte α , β , γ sind tatsächlich Lösungen des Gleichungssystems, und zwar die einzigen. Das zu konstruierende Dreieck existiert also und ist, da die Längen $a = b = w_a = 1$ gegeben sind, bis auf seine Lage eindeutig bestimmt.

Die Aufgabe ist offenbar genau dann als gelöst anzusehen, wenn die Seite c konstruiert ist. Wir bestimmen deshalb einen Rechenausdruck für c . Setzen wir $\frac{c}{2} = x$, so haben wir wegen der Gleichschenkligkeit des Dreiecks ABC und $a = 1$ die Beziehung $x = \cos \beta$, also $x = \cos \frac{360^\circ}{7}$. Dies ist eine Bestimmungsgleichung für x , die aber für den Zweck der Konstruktion noch nicht brauchbar ist, weil der Winkel $\frac{360^\circ}{7}$ nicht gegeben ist. Wir müssen daher den Winkel $\frac{360^\circ}{7}$ eliminieren. Das ist auf folgende Weise möglich:

Es ist $\cos 7\beta = \cos 360^\circ = 1$, andererseits erhält man durch wiederholte Anwendung des Additionstheorems für den Kosinus:

$$\cos 7\beta = \cos^7 \beta - 21 \cos^5 \beta \sin^2 \beta + 35 \cos^3 \beta \sin^4 \beta - 7 \cos \beta \sin^6 \beta.$$

Mit $x = \cos \beta$ und $\sin^2 \beta = 1 - x^2$ ergibt sich durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen:

$$\cos 7\beta = 1 = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

Also lautet die Bestimmungsgleichung für x :

$$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x - 1 = 0$$

Das ist eine Gleichung siebenten Grades für x . Die linke Seite kann auch als Produkt geschrieben werden (der Leser mag es durch Ausquadrieren und -multiplizieren bestätigen):

$$(x-1) \cdot (8x^3 + 4x^2 - 4x - 1)^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat die Lösung $x = 1$, die aber für unsere Aufgabe unbrauchbar ist, denn es ist $\cos \frac{360^\circ}{7} \neq 1$. Die brauchbare Lösung muß also eine Lösung der Gleichung

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0 \quad (*)$$

sein.

Nun behaupten wir, daß diese Gleichung keine Lösung hat, die sich mit Hilfe der Rechenoperationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\sqrt{}$ aus den gegebenen Größen (das ist hier die Zahl 1 als Länge von a) gewinnen läßt. Den Beweis führen wir in mehreren Schritten (Induktion nach der Anzahl der Anwendung der Operation $\sqrt{}$):

1. Wir zeigen, daß die Gleichung $(*)$ keine Lösung hat, die sich aus der 1 durch Anwendung der vier Operationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$ ergibt, d.h., daß die Gleichung keine rationale Zahl als Lösung hat. Der Beweis wird indirekt geführt.

Annahme: $x = \frac{m}{n}$ (m, n ganzzahlig und teilerfremd) sei eine Lösung. Dann gilt:

$$\frac{8m^3}{n^3} + \frac{4m^2}{n^2} - \frac{4m}{n} = 1,$$

$$\text{d.h. } m(8m^2 + 4mn - 4n^2) = n^3. \quad (**)$$

Wir unterscheiden drei Fälle:

a) $n = \pm 1$. Es folgt $m = \pm 1$, denn ein Produkt ganzer Zahlen ist nur ± 1 wenn beide Faktoren gleich ± 1 sind. $x = \pm 1$ ist aber keine Lösung von $(*)$.

b) $n \neq \pm 1, m = \pm 1$. Dann lautet die Gleichung

$$\pm 8 + 4n \pm 4n^2 - n^3 = 0,$$

d.h. $n(n^2 \pm 4n - 4) = \pm 8$. Dies ist in ganzen Zahlen für $n = \pm 2, \pm 4, \pm 8$ möglich. Diese ergeben aber keine Lösung.

c) $n \neq \pm 1, m \neq \pm 1$. Die Gleichung $(**)$ zeigt, daß n und m einen gemeinsamen Teiler $\neq \pm 1$ haben, das ist aber ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung.

2. Wir zeigen, daß die Gleichung $(*)$ keine Lösung im Bereich $\mathbb{M}_1$ derjenigen Zahlen hat, die sich aus 1 durch beliebige Anwendung der vier Operationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$ und einmaliger Anwendung von $\sqrt{}$ ergeben. Alle diese Zahlen lassen sich in der Form $r + s\sqrt{a}$ darstellen, wobei r, s beliebige rationale Zahlen sind und a eine feste rationale Zahl ist, die nicht Quadrat einer anderen rationalen Zahl ist. Durch Verknüpfung von $\sqrt{a}$ mit rationalen Zahlen durch die Operationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$ entstehen immer Ausdrücke dieser Form.

Verknüpft man Ausdrücke dieser Form durch die vier

Operationen, so entstehen wieder solche Ausdrücke (beim Dividieren muß der Nenner durch Erweitern rational gemacht werden).
Es sei nun $x_0 = r + s\sqrt{a}$ ($s \neq 0$) Lösung der Gleichung (*).

Dann gilt: $8(r + s\sqrt{a})^3 + 4(r + s\sqrt{a})^2 - 4(r + s\sqrt{a}) - 1 = 0$

Ausmultiplizieren und Zusammenfassen ergibt

$$\underbrace{8r^3 + 24rs^2a + 4r^2 + 4s^2a - 4r - 1}_R + \underbrace{s(24r^2 + 8s^2a + 8r - 4)\sqrt{a}}_S = 0$$

kurz: $R + sS\sqrt{a} = 0$

Hier muß nun S und folglich R Null sein, denn für $S \neq 0$ hätte man $\sqrt{a} = -\frac{R}{sS}$, d.h. $\sqrt{a}$ wäre rational, im Widerspruch zur Voraussetzung. Es folgt, daß auch $x_1 = r - s\sqrt{a}$ Lösung der Gleichung (*) ist, denn Einsetzen von x_1 in die linke Seite von (*) ergibt $R - sS\sqrt{a}$ (denn ersetzt man in R und S die Größe s durch -s, so bleiben R und S unverändert), und dies ist gleich Null wegen $R = S = 0$. Da nun (*) die beiden Lösungen x_0 und x_1 hat, kann man von der linken Seite von (*) die Faktoren $(x - x_0)$ und $(x - x_1)$ abspalten, man erhält

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = (x - x_0)(x - x_1)(Ax + B).$$

Eine dritte Lösung von (*) ist dann die Zahl $x_2 = -\frac{B}{A}$.

Ausmultiplizieren und Einsetzen der Ausdrücke für x_0 und x_1 ergibt

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = (x^2 - 2rx + r^2 - s^2a)(Ax + B).$$

Ein Koeffizientenvergleich zeigt, daß A und B rational sein müssen, daß also (*) eine rationale Zahl als dritte Lösung x_2 hat.

Wir haben damit gezeigt: Wenn die Gleichung (*) im Zahlbereich $\mathcal{M}_1$ eine Lösung hat, dann hat sie schon im Bereich der rationalen Zahlen eine Lösung. Da aber das letztere nicht der Fall ist, hat (*) auch im Bereich $\mathcal{M}_1$ keine Lösung.

3. Es sei $\mathcal{M}_2$ der Bereich derjenigen Zahlen, die sich aus Zahlen von $\mathcal{M}_1$ durch Anwendung der Operationen +, -, ·, : und einmaliger Anwendung von $\sqrt{}$ ergeben. Die Zahlen von $\mathcal{M}_2$ lassen sich in der Form $u + v\sqrt{w}$ darstellen, wobei u, v beliebig aus $\mathcal{M}_1$ sind und w eine feste Zahl aus $\mathcal{M}_1$ ist, die nicht Quadrat einer

anderen Zahl aus m_1 ist. Völlig analog zu 2. schließt man: Wenn (*) in m_2 eine Lösung hat, dann auch in m_1 . Da aber in m_1 keine Lösung vorliegt, kann es auch in m_2 keine geben.

4. Durch wiederholte Anwendung des letztgenannten Schlusses (vollständige Induktion) ergibt sich:

Die Lösungen der Gleichung (*) können aus der Zahl 1 nicht mit Hilfe der fünf Rechenoperationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\sqrt{}$ berechnet werden.

Damit ist gezeigt worden, daß die auf Seite 51 gestellte Konstruktionsaufgabe mit Zirkel und Lineal nicht gelöst werden kann.

Hieraus folgt zum Beispiel auch, daß man nicht mit Zirkel und Lineal ein regelmäßiges Siebeneck konstruieren kann, denn ein regelmäßiges Siebeneck besteht aus sieben kongruenten gleichschenkligen Teildreiecken, die einen Winkel von $\frac{360^\circ}{7}$ an der Spitze haben.

Der hier geführte Unmöglichkeitbeweis ist sinngemäß auch auf andere Probleme übertragbar. Dem Leser, der den Ausführungen bis hierher gefolgt ist, wird es nicht sehr schwerfallen zu beweisen, daß es mit Zirkel und Lineal nicht möglich ist, ein regelmäßiges Neuneck zu konstruieren oder, was auf dasselbe hinausläuft, einen Winkel von 40° zu konstruieren.

Abschließend sei bemerkt, daß die hier deutlich gewordene, begrenzte "Leistungsfähigkeit" von Zirkel und Lineal (d.h. die Tatsache, daß es einfach formulierbare unlösbare Konstruktionsaufgaben ergibt) für das praktische Zeichnen gar nicht so bedeutungsvoll ist, wie es vielleicht beim ersten Kennenlernen dieses Sachverhaltes erscheinen könnte, **dennerstens** bedient man sich beim praktischen Zeichnen weiterer Hilfsmittel (z.B. eines Winkelmessers) und zweitens gibt es für unlösbare Konstruktionsaufgaben gut funktionierende Näherungsverfahren, die die gesuchten Punkte mit einer theoretischen Genauigkeit zu zeichnen gestatten, die größer als die physikalisch mögliche Genauigkeit ist, d.h. die Punkte werden praktisch genau ermittelt.

Dr. Walter Börner

Wiss. Mitarbeiter an der Sektion Mathematik
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Preisaufgaben Serie 4/71

(C 19) Für welche reellen Werte von x gilt

$$|\sin x| > |\cos x| \quad ?$$

(C 20) Man zeige: Stehen in einem Trapez die Diagonalen senkrecht aufeinander, so ist die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich dem Quadrat der Summe der parallelen Seiten.

(C 21) Man bestimme die Koeffizienten von x^{17} und x^{18} des Polynoms $P(x) = (1 + x^5 + x^7)^{20}$.

(C 22) Man löse die Gleichung

$$(x + a)(x + 2a)(x + 3a)(x + 4a) = b^4$$

(C 23) Man zeige, daß ein Winkel von 20° nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. (Siehe "Übergeometrische Konstruktionen II"!)

(C 24) Man bestimme den Wert der Summe

$$S_n = \frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{n-1}{n!} \quad .$$

Für jeden vollständigen Lösungsweg einer Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für zehn Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender zehn Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).

Falls ein Besitzer von zehn Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum 10. des folgenden Monats (Datum des Poststempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgaben" an unsere Adresse einzuschicken.

Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angabe fehlen, können nicht berücksichtigt werden.

Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

Mathematik-Winterlager des Bezirkes

Gera 1971

Wie immer war auch in diesem Jahr am ersten Tag der Winterferien große Anreise zum Mathematiklager. In Bad Köstritz trafen sich die 50 besten Schüler im Fach Mathematik unseres Bezirkes; unter ihnen die 40 Mitglieder des neugegründeten "Bezirkssklubs Junger Mathematiker" (BKJM). Die meisten von ihnen waren an den vorangegangenen Tagen Teilnehmer der Bezirksolympiade gewesen und hatten dort Spitzenleistungen erreicht.

In den folgenden eineinhalb Wochen wurde dann täglich vier Stunden lang intensiver Unterricht durchgeführt, der durch die Lagerolympiade Höhepunkt und Abschluß fand.

Durch die Gründung des BKJM und der damit verbundenen Festlegung eines Schülerstammes ist es möglich, nach einem kontinuierlichen Lehrplan zu unterrichten. Das bedeutet, daß in den Lagern (Winter- und Sommerlager) und Wochenendlehrgängen (Oktober, Januar, Mai) während eines Jahres eine feste Auswahl von Schülern fortlaufend unterrichtet wird. Außerdem erhalten die Klubmitglieder innerhalb von fünf Jahren eine systematische Ausbildung: In der 8. und 9. Klasse werden vor allem Grundlagen der Mathematik und wichtige mathematische Denkweisen vermittelt (Mengenlehre, Kombinatorik, Logik, Beweistheorie), die dann in den oberen Klassen durch direkte Studienvorbereitung auf speziellen interessanten Gebieten ergänzt werden wie Operationsforschung, Analysis, Programmierung oder Zahlentheorie. Nicht zuletzt werden die Schüler des BKJM auch auf die Mathematikolympiaden vorbereitet, um dort möglichst gute Ergebnisse erreichen zu können. Dazu findet ein zum Stundenplan gehörendes Aufgabentraining in allen Klassen statt.

Der Lehrplan ist so ausgearbeitet, daß nach jedem einzelnen Jahr neue Schüler ohne Schwierigkeiten in den Klub aufgenommen werden können, wie es ja dem Statut des BKJM entspricht.

Doch zurück zum Ablauf des Lagers: Bei der Lagerolympiade am letzten Tage zeigte sich, wer täglich die recht anstrengenden vier Stunden des Vormittags gut genutzt hatte. Die 8., 9.

und 10. Klassen hatten sich schon im Unterricht durch gute Mitarbeit ausgezeichnet und konnten so auch lobenswerte Ergebnisse erreichen.

Trotz einiger organisatorischer Mängel bei der Vorbereitung des Lagers wurde auch das Freizeitprogramm noch gut gestaltet. Drei Buchbesprechungen und ein Schallplattennachmittag boten Interessenten einen Ausgleich zur "trockenen" Mathematik. Die Schüler organisierten ein Schach- und Skatturnier mit großer Beteiligung. Außerdem wurde viel Sport getrieben und gewandert. Am Sonntag besuchten wir in Gera das Hallenbad und nachmittags eine Vorstellung im "Panorama"-Palast.

Zu den angenehmsten Ereignissen des Lagers zählen wohl für die meisten Schüler ein geselliges Beisammensein als "Bergfest" und der turbulente Faschings-Abschlußabend. An diesem letzten Abend erhielten die erfolgreichsten "Lagerolympioniken", Schach- und Skatspieler Buchpreise. In einem umfangreichen Programm der Schüler fand eine heitere Auswertung des Lagers statt. Wir hatten auch Besuch vom Chefredakteur der "Wurzel", der bei dieser Gelegenheit die besten Lagerteilnehmer auszeichnete.

Am nächsten Morgen verabschiedete man sich - bis zum nächsten Lehrgang im Mai.

Werner Nagel

Student im 1. Studienjahr
an der Sektion Mathematik

Ergebnisse der Bezirksmathematikolympiade

Gera 1971

In den einzelnen Klassenstufen gab es folgende Sieger:

Olympiadeklasse 8 : Thomas Wolf

28 Punkte



Thomas wurde am 28. Februar 1957 in Schleiz geboren. Er besucht die Neue Schule in Schleiz. Nach Besuch der EOS möchte er ein Mathematik- oder Physikstudium aufnehmen.

Olympiadeklasse 9	(POS)	Karin Schuster	25 Punkte
		OS Pausa	
"	9	Vorbereitungsklasse	
		Reinhard Illge	34 Punkte
		Er wurde am 3. April 1956 in Jena geboren. Seit 1962 besucht er die 2. POS in Hermsdorf. Auch er möchte später ein Mathematik- oder Physikstudium beginnen.	
Olympiadeklasse 10	(POS)	Wolfgang Liebisch	24 Punkte
		POS Krossen	
"	10	Vorbereitungsklasse	
		Gerald Teutschbein	36 Punkte
		EOS Schleiz	
"	10	(BBS)	Manfred Töpel
		BBS Maxhütte	27 Punkte
"	11	(EOS)	H.-Dieter Sparing
		Er wurde am 5. Mai 1954 in Halle geboren. Er lernt zur Zeit in der 11. Klasse der EOS II in Gera. Nach dem Abitur möchte er in Halle ein Mathematik- oder Physikstudium aufnehmen.	27 Punkte
"	12	(EOS)	Roland Engelmann
		Roland wurde am 23. 2. 1952 in Langenschade geboren. Er legt in diesem Jahr sein Abitur ab an der EOS in Saalfeld. Ab September 1971 nimmt er dann in Jena ein Mathematik-Diplom-Studium auf.	34 Punkte

Die von uns näher vorgestellten Sieger befragten wir in Bad Köstritz, wo wir zum Abschlußabend des Winterlagers zusammen mit den Schülern einige gesellige Stunden verbrachten.

Volker Kögel

Lösungen

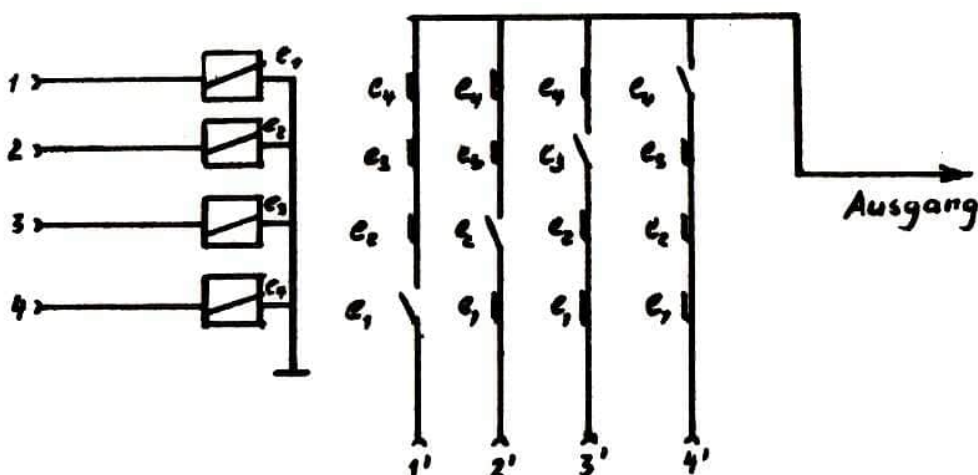
(B 48) a) Bedingung 1

Am Ausgang kann nur ein Signal liegen, wenn auf genau einem der Eingänge 1,2,3,4 ein Signal liegt. Diese Aufgabe wird durch folgende Schaltung realisiert:

$$e_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3 \bar{e}_4 \vee \bar{e}_1 e_2 \bar{e}_3 \bar{e}_4 \vee \bar{e}_1 \bar{e}_2 e_3 \bar{e}_4 \vee \bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3 e_4$$

b) Bedingung 2

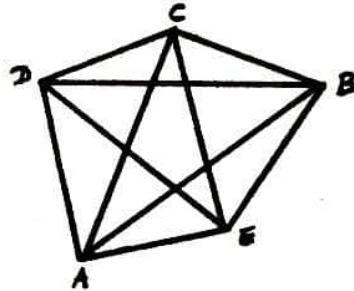
Am Ausgang liegt genau dann ein Signal, wenn Bedingung 1 erfüllt ist und wenn am dazugehörigen Eingang i' ein Signal liegt. Das kann man mit folgender Schaltung realisieren:



Diese Schaltung erfüllt die Bedingungen 1 und 2 und die Bedingung, daß höchstens 4 Relais mit 4 Kontaktpaaren verwendet werden dürfen.

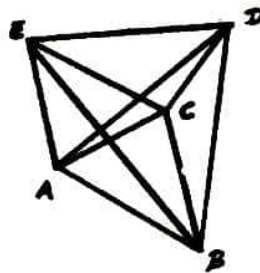
(C 3) Verbindet man alle fünf gegebenen Punkte paarweise miteinander, so erhält man ein konvexes Vieleck mit der Eigenschaft, daß die fünf Punkte entweder Eckpunkte dieses Polygons sind oder aber im Inneren desselben liegen. Man unterscheidet nun drei Fälle:

1. Fall: Das konvexe Vieleck ist ein Fünfeck



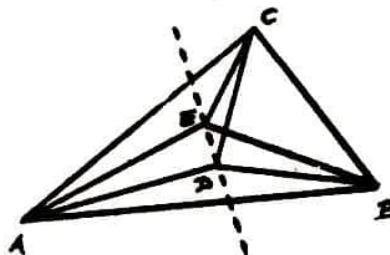
Dann bilden je vier Punkte ein konvexes Viereck.

2. Fall: Das konvexe Vieleck ist ein Viereck



Dieses Viereck hat die gesuchte Eigenschaft

3. Fall: Das konvexe Vieleck ist ein Dreieck



Verlängert man die Verbindung der beiden inneren Punkte nach beiden Seiten, so schneiden diese zwei Dreiecksseiten. Mit den Eckpunkten der dritten Dreiecksseite bilden die inneren Punkte ein konvexes Viereck.

(C 5) Für jede natürliche Zahl $m > 0$ gilt

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} = \frac{(m+1)-m}{m(m+1)} = \frac{1}{m(m+1)}$$

Speziell erhält man für $m = n+k$ und $m = n+k-1$ ($k > 0$)

$$\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} = \frac{1}{(n+k)(n+k+1)} \quad (1)$$

$$\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k} = \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} \quad (2)$$

Weiter folgt aus $(n+k+1)(n+k) > (n+k)^2 > (n+k-1)(n+k)$

$$\frac{1}{(n+k+1)(n+k)} < \frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{(n+k-1)(n+k)}$$

Wegen (1) und (2) ergibt sich

$$\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} < \frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}$$

Summiert man jetzt diese Ungleichungskette über k von 1 bis p , so ergibt sich

$$\sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} \right) < \sum_{k=1}^p \frac{1}{(n+k)^2} < \sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k} \right)$$

Da $\sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} \right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1}$

und $\sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}$

(es fallen bei der Summenbildung alle inneren Glieder weg),

gilt somit

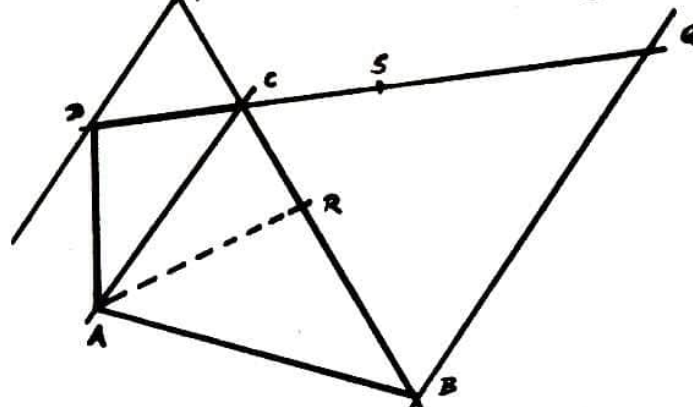
$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}$$

(C 8) Die Konstruktion verläuft wie folgt:

Man konstruiert durch die Eckpunkte D und B Parallelen g_1 und g_2 zu der Diagonalen AC, die Schnittpunkte der Geraden g_1 und g_2 mit der Verlängerung der Seite BC bzw. CD seien P und Q. Man konstruiert nun die Mittelpunkte R, S der Strecken $\overline{BP}$ und $\overline{DQ}$. Einer dieser beiden Punkte liegt auf einer Viereckseite. Dieser wird mit dem Punkt A verbunden. Diese Strecke halbiert dann den Flächeninhalt des Vierecks.

Beweis: Es liege R auf der Seite BC.

Dann gilt $F_{\triangle ACD} = F_{\triangle ACP}$ (Grundseite AC, gleiche dazugehorige Hohe)



Weiter ist $F_{\triangle ABR} = F_{\triangle ARP}$

($\overline{BR} = \overline{RP}$, gleiche dazugehorige Hohe)

Nun ergibt sich aber

$$\begin{aligned} F_{\triangle ARP} &= F_{\triangle ARC} + F_{\triangle ACP} \\ &= F_{\triangle ARC} + F_{\triangle ACD} \\ &= F_{\triangle ARCD} \end{aligned}$$

und damit $\frac{1}{2} F_{\square ABCD} = F_{\triangle ARCD} = F_{\triangle ABR}$

Es muß noch gezeigt werden, daß, falls R außerhalb des Vierecks liegt, S innerhalb liegt.

Es folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle BQC$ und $\triangle CPD$

$$\overline{BC} : \overline{CP} = \overline{CQ} : \overline{CD}$$

Liegt R nicht auf $\overline{BC}$, so ist $\overline{CP} > \overline{BC}$.

Daraus folgt dann:

$\overline{CQ} < \overline{CD}$, was aber nichts anderes bedeutet, als daß S auf $\overline{CD}$ liegt.

Der Beweis, daß $\overline{AS}$ das Viereck halbiert, verläuft analog zu dem angegebenen für $\overline{AR}$.

(C 7) Es ist $z = x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5$

$$= x^5 - 5x^3y^2 + 4xy^4 + 3x^4y - 15x^2y^3 + 12y^5$$

$$= x(x^2 - y^2)(x^2 - 4y^2) + (x^2 - y^2)(x^2 - 4y^2)3y$$

$$= (x - 2y)(x - y)(x + y)(x + 2y)(x + 3y) \quad (*)$$

Es sei $z = 33$. Da für ganzzahlige x nicht $33 = x^5$ gelten kann, ist $y \neq 0$. Die fünf Faktoren, in die z (s. $(*)$) zerlegt wurde, sind alle paarweise voneinander verschieden, denn wäre $x + ky = x + hy$, so wäre $(k - h)y = 0$, also $y = 0$. Eine Darstellung von 33 als Produkt von fünf verschiedenen ganzen Zahlen ist aber unmöglich, denn die Faktoren jeder Produktdarstellung von 33 sind Elemente der Menge $\{\pm 33, \pm 11, \pm 3, \pm 1\}$, wobei aus $\{\pm 33, \pm 11, \pm 3\}$ höchstens zwei Faktoren und aus $\{\pm 1, -1\}$ höchstens zwei Faktoren kommen können.

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind zu richten : An die Mathematiklehrer der EOS, BBS und SpS oder bei Einzelbestellungen direkt an unsere Adresse.

Redaktion: Leitung: Karola Schimmel, Volker Kögel

Mitarbeiter: H. Fischer (Versandleiter)

R. Lorenz (Aufgabenteil)

M. Wolf (Manuskript)

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik

69 Jena DDR

Helmholtzweg 1

-Wurzelredaktion-



Hier sehen Sie unseren lang-
jaehrigen Leser Winnibald Wurz
bei der Loesung der Sonderpreis-
aufgabe des Monats April

5

71

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
FDJ-Aktiv der
Sektion Mathematik
an der
Friedrich-Schiller-
Universität Jena

Über geometrische Konstruktionsaufgaben III

Lösung von Konstruktionsaufgaben mit Hilfe von geometrischen Abbildungen

Neuerdings werden im Schulunterricht in stärkerem Maße als früher geometrische Abbildungen behandelt, und zwar einerseits Kongruenzabbildungen wie Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen, andererseits die Ähnlichkeitsabbildungen, von denen besonders die zentrische Streckung untersucht wird. Diese geometrischen Abbildungen können auch bei der Lösung vieler Konstruktionsaufgaben gute Dienste leisten. Inwiefern das der Fall ist, soll in diesem Artikel an einigen Beispielen gezeigt werden.

Zunächst aber stellen wir die wichtigsten Tatsachen über die zu verwendenden geometrischen Abbildungen zusammen.

Bei jeder der hier besprochenen Abbildungen wird jedem Punkt der Ebene ein Bildpunkt zugeordnet, dabei hat jeder Bildpunkt genau einen Originalpunkt. Die Menge der Bilder von Punkten einer Geraden bildet wieder eine Gerade.

Verschiebung: Eine Verschiebung wird durch Angabe einer Verschiebungslänge und eines Verschiebungs-Richtungssinnes festgelegt. Das Bild eines beliebigen Punktes P ist derjenige Punkt P' , für den die Länge $\overline{PP'}$ gleich der gegebenen Länge und der Richtungssinn $\overrightarrow{PP'}$ gleich dem gegebenen Richtungssinn ist.

Drehung: Eine Drehung wird durch ein Drehzentrum Z und einen orientierten Drehwinkel festgelegt. Das Bild eines beliebigen Punktes P ist derjenige Punkt P' , der dieselbe Entfernung von Z hat wie P und für den $\angle PZP'$ gleich dem gegebenen Winkel ist.

Spiegelung: Eine Geradenspiegelung wird durch eine Spiegelgerade festgelegt. Das Bild eines Punktes P ist derjenige Punkt P' , der von g dieselbe Entfernung wie P hat, für den $PP' \perp g$ gilt, der nicht mit P auf derselben Seite von g liegt.

Zentrische Streckung: Eine zentrische Streckung wird durch ein Streckungszentrum Z und einen Streckungsfaktor $k > 0$ festgelegt. Das Bild eines beliebigen Punktes P ist derjeni-

ge Punkt P' , der auf dem Strahl ZP liegt (wobei Z Anfangspunkt ist) und für den die Längenbeziehung $\overline{ZP'} = k \cdot \overline{ZP}$ gilt. Bei zentrischen Streckungen sind Original- und Bildgerade stets parallel, Winkelgrößen ändern sich nicht, ebenso Längenverhältnisse. Es gibt ein festes Längenveränderungsverhältnis (die Zahl k).

Es ist nicht schwer einzusehen, daß bei den angeführten Abbildungen das Bild eines beliebigen Punktes mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann, wenn die jeweilige Abbildung durch gewisse Punkte vorgegeben ist, eine Verschiebung z. B. durch einen Original- und zugehörigen Bildpunkt, eine Drehung oder eine zentrische Streckung durch Zentrum sowie einen Original- und zugehörigen Bildpunkt (bei einer Drehung bilden diese drei Punkte ein gleichschenkliges Dreieck, bei einer Streckung liegen die drei Punkte auf einer Geraden).

Um zu zeigen, wie solche Abbildungen bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben eingesetzt werden können, diskutieren wir ausführlich die Lösung folgender Aufgabe:

Gegeben seien zwei Geraden g und h , sowie ein Punkt P .
Gesucht ist ein gleichseitiges Dreieck, dessen einer Eckpunkt P ist und dessen andere Eckpunkte auf g bzw. auf h liegen.

Um zu einer Lösung zu kommen, nehmen wir im Sinne einer Analyse an, PGH sei ein gleichseitiges Dreieck mit der gewünschten Eigenschaft, d.h. $G \in g$ und $H \in h$. Würde man eine Lösung

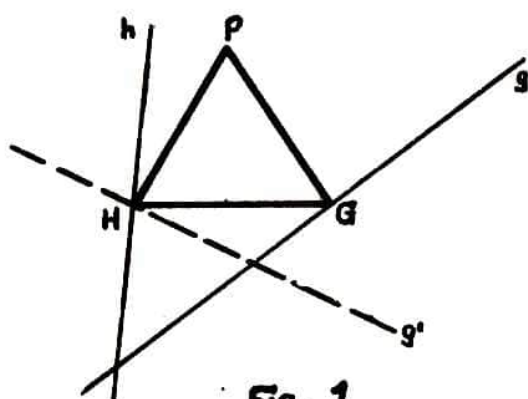


Fig. 1

der Aufgabe ohne wesentliche Verwendung von geometrischen Abbildungen anstreben, so würde man in einer Überlegungsfigur vielleicht Hilfslinien (Lote u.a.) einzeichnen und nach kongruenten Dreiecken suchen. Für eine abbildungsgeometrische Lösung ist

es zweckmäßiger, zunächst ohne Benutzung zusätzlicher Linien Aussagen über Abbildungen zusammenzutragen, bei denen bestimmte Teile der Figur in bestimmte andere übergehen. Eine

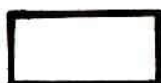
solche Aussage ist z.B. die folgende (bei ihr wird ausgenutzt, daß alle Winkel eines gleichseitigen Dreiecks 60° betragen): Bezeichnet δ die Drehung mit dem Zentrum P und dem Winkel 60° (im Uhrzeigersinn, siehe Fig. 1), so gilt: Das Bild von G bei δ ist der Punkt H. Wendet man auf die Beziehung " $G \in g$ " die Abbildung δ an, so ergibt sich: Das Bild von G bei δ liegt auf dem Bild von g bei δ . Hieraus folgt: H liegt auf dem Bild von g bei δ , zusammen mit $H \in h$ liefert das i.a. eine eindeutige Bestimmung von H als dem Schnittpunkt von h mit derjenigen Geraden g' , die sich aus g durch die genannte 60° -Drehung δ ergibt. Somit lautet die Lösung der Aufgabe folgendermaßen: Man konstruiere das Bild g' der Geraden g bei der Drehung um P um 60° . Der Schnittpunkt von g' mit h ist ein weiterer Eckpunkt des gesuchten gleichseitigen Dreiecks.

Die folgende Aufgabe kann ebenfalls mit Hilfe einer Drehung gelöst werden: Gegeben sind drei Punkte A, B, C. Gesucht ist ein Quadrat mit dem Eckpunkt A, dessen nicht durch A gehende Seiten oder deren Verlängerungen B bzw. C enthalten.

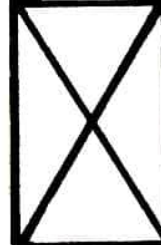
Zur Lösung berücksichtigt man: Dreht man ein Quadrat um einen Eckpunkt um 90° , so geht eine der diesem Eckpunkt gegenüberliegende Seite in eine Verlängerung der anderen über. Die Lösung lautet also: Man wende auf B eine Drehung um A um 90° an. Der Bildpunkt liefert mit C zusammen zwei Punkte der durch C verlaufenden Quadratseite, das übrige kann leicht ergänzt werden.

Die folgenden Aufgaben zeigen je eine Anwendung einer Verschiebung bzw. einer Spiegelung.

A Aufgabe: Es seien zwei Geraden a und b, eine Winkelgröße α und eine Länge s gegeben. Es soll eine Gerade g konstruiert werden, die mit a den Winkel α einschließt und auf der a und b eine Strecke der Länge s ab-



Lösung:



schneiden.

Eine Analyse (Fig. 2) zeigt: Ist v die Verschie-

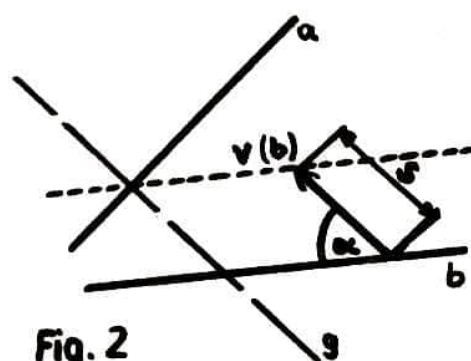


Fig. 2

bung, deren Richtung mit der Geraden b den Winkel α einschließt und die die Länge s hat, so schneidet das Bild von b bei v die Gerade a in einem Punkt der gesuchten Geraden.

Aufgabe:



Lösung:



Gegeben sind eine Gerade g und zwei Kreise k_1 und k_2 . Es ist ein Quadrat zu konstruieren, von dem zwei gegenüberliegende Eckpunkte auf g liegen und dessen übrige Eckpunkte je auf k_1 bzw. k_2 liegen.

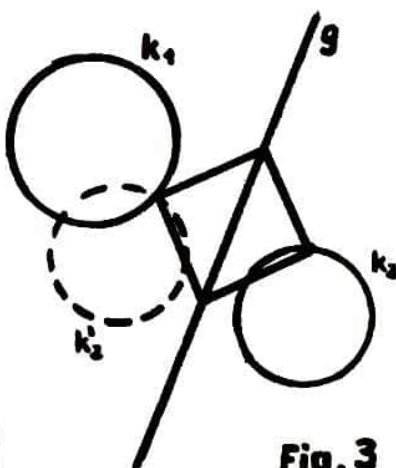


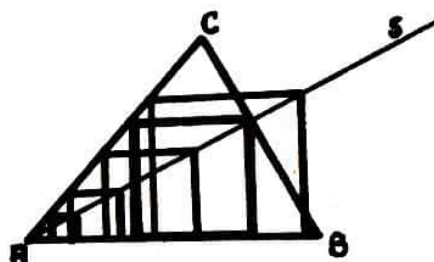
Fig. 3

Man berücksichtige, daß ein Quadrat durch Spiegelung an einer seiner Diagonalen auf sich selbst abgebildet wird. Die Lösung kann demnach so erfolgen, daß man k_2 an g spiegelt. Ein Schnittpunkt des Bildes k_2' von k_2 ist Eckpunkt des gesuchten Quadrates.

Bei der folgenden Aufgabe wird eine zentrische Streckung angewendet. Gleichzeitig wird ein Prinzip gezeigt, das manchmal bei Aufgaben zum Ziele führt, in denen die zu konstruierenden Punkte oder Figuren durch mehrere Bedingungen festgelegt sind: Man läßt zunächst eine dieser Bedingungen weg, erhält dadurch eine im allgemeinen unendliche Menge von Punkten oder Figuren, die als Lösung in Frage kommen. Unter Benutzung spezieller Eigenschaften dieser Punkt- oder Figurenmenge und unter Berücksichtigung der verbleibenden Bedingung wird dann die Lösung der Aufgabe ausgesondert.

A Aufgabe: Gegeben ist ein Dreieck ABC. Es ist ein Quadrat zu konstruieren, dessen eine Seite auf der Dreiecksseite AB liegt und dessen andere Eckpunkte auf AC bzw. auf BC liegen.

L Lösung: Man läßt zunächst die Bedingung "ein Eckpunkt auf BC" unberücksichtigt. Den übrigen Bedingungen genügt eine unendliche Menge von Quadraten, die aus irgendeinem Quadrat dieser Menge durch zentrische Streckung mit dem Zentrum A hervorgehen. Die nicht auf AB oder AC liegenden Eckpunkte liegen demzufolge auf einem



von A ausgehenden Strahl s, den man durch Konstruktion eines beliebigen Quadrates der genannten Menge ermitteln kann. Das gesuchte Quadrat ergibt sich durch den Schnittpunkt von s mit der Seite BC.

Dr. Walter Börner

Wiss. Mitarbeiter an der Sektion Mathematik
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Preisaufgaben Serie 5/71

(C 25) Es sei
$$K(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{a_5}}}}$$

Für welche Permutationen $a_1', a_2', a_3', a_4', a_5'$ der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 nimmt $K(a_1', a_2', a_3', a_4', a_5')$ einen maximalen Wert an?

(C 26) Gegeben sind vier Punkte. Es ist ein Quadrat zu konstruieren, dessen Seiten oder deren Verlängerungen durch die gegebenen Punkte gehen, so daß auf jeder Seite (oder deren Verlängerung) genau einer der gegebenen Punkte liegt.

(C 27) Für welche Werte a und b wird

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1$$

ein volles Quadrat, d.h. wird für jedes ganzzahlige x $P(x)$ Quadrat einer ganzen Zahl?

(C 28) In einer arithmetischen Folge $\{a_1, a_2, \dots\}$ sei

$$a_p = q \text{ und } a_q = p, \quad (p \neq q).$$

Man drücke das Glied a_n durch n , p , q aus.

(C 29) Man löse das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 = \frac{5}{2}xy$$

$$x - y = \frac{1}{4}xy$$

(C 30) In einem Dreieck ΔABC seien b, c die Längen der Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{AB}$ und der Flächeninhalt $F_{\Delta ABC} = \frac{2}{5}bc$. Wie groß ist die Seite BC des Dreiecks?

Für jeden vollständigen Lösungsweg einer Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für zehn Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender zehn Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).

Falls ein Besitzer von zehn Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum 10. des folgenden Monats (Datum des Poststempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgaben" an unsere Adresse einzuschicken.

Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden.

Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

Aus unserer Korrespondentenmappe

Schon mehrfach haben wir unsere Leser aufgefordert, als Korrespondenten unserer Zeitschrift zu wirken. Das heißt, daß uns Artikel über das mathematische Leben in den Schulen, interessante Aufgaben und Berichte über die mathematischen Klubs zur Veröffentlichung zugesandt werden, damit wir unseren breiten Leserkreis mit dieser Problematik und mit den Erfahrungen aller bekannt machen können.

In diesem Sinne ist der Beitrag von Herrn Studienrat Kerber aus Neubrandenburg zu verstehen, dem wir an dieser Stelle für seine Bemühungen danken wollen:

Der Bezirksklub Junger Mathematiker des Bezirkes Neubrandenburg

Als wir Betreuer mit unserer Bezirksdelegation im Jahre 1964 von der III. DDR-Olympiade aus Berlin zurückkehrten, waren wir sehr bedrückt. Weder ein Preis noch eine Anerkennungsurkunde konnte von unseren Teilnehmern errungen werden. Unser Bezirk bildete das Schlußlicht in der Republik.

Das war die Geburtsstunde des Bezirksklubs Junger Mathematiker! Inzwischen sind bereits viele Bezirke unserem Beispiel gefolgt. Sie geben auch ihren Bezirksförderereinrichtungen diese Bezeichnung, übernehmen teilweise oder ganz unsere "Statuten" oder konsultieren uns zu Fragen des Aufbaus und der Durchführung dieser Einrichtung.

Nach jeder Bezirksolympiade werden ca. 40 Teilnehmer der Klassen 7 bis 10 in den Klub aufgenommen. Die Mitgliedschaft gilt für ein Jahr und muß durch entsprechende Leistungen auf der Bezirksolympiade jährlich neu erworben werden. Es ist eine besondere Auszeichnung, Mitglied dieses Klubs zu sein. Es werden im Klub Schüler der Klassen 7 bis 12 betreut.

Sechs- bis siebenmal im Jahr treffen sich die Mitglieder zu ein- oder mehrtägigen Veranstaltungen. Zentraler Treffpunkt ist die romantisch gelegene Jugendherberge in Burg Stargard bei Neubrandenburg. In den Sommerlehrgängen findet man unsere

Mitglieder in der Gegend des schönen Plauer Sees.

Bis zur 10. Klasse werden die verschiedensten Themenkomplexe systematisch behandelt. Immer spielt dabei die selbständig-schöpferische Tätigkeit eine besondere Rolle.

In den Klassenstufen 11 und 12 werden dann Probleme aus allen Gebieten der Mathematik behandelt, ähnlich den Preisaufgaben in der "Wurzel". Ein fester Stamm von Fachlehrern betreut unsere Mitglieder bei den Veranstaltungen. Das ist die eine Seite unserer Arbeit. Darüber hinaus betreut ein "Persönlicher Mentor" jeweils drei Mitglieder in Form von Korrespondenzbriefen. Aufträge, die sich im Laufe der Zeit im Schwierigkeitsgrad steigern, werden termingemäß von den Mitgliedern bearbeitet und eingehend von diesen Mentoren begutachtet und mit der neuen Aufgabenstellung zurückgesandt. Alle Schüler der Klassen 9 bis 12 beziehen die "Wurzel", so daß auch häufig Materialien dieser Zeitschrift für Aufgabenstellungen verwandt werden.

Neuerdings sind wir dazu übergegangen, daß Abiturienten, die vier und mehr Jahre Mitglied des Klubs sind und sich bei den DDR-Olympiaden bewährt haben, als Mentoren bei den Veranstaltungen tätig sind. Sie kennen unsere Arbeitsform und besitzen ein umfassendes Übungsmaterial. Selbstverständlich werden sie vom Leiter des Bezirksklubs angeleitet. Sind diese Schüler dann ein Jahr später Mathematikstudenten, so geben sie ihre Erfahrungen und Kenntnisse als "Persönliche Mentoren" weiter. Für jeden Preisträger oder Frühstarter bei der DDR-Olympiade winkt dem Mentor einer solchen Dreiergruppe eine Zielprämie. Ein Ergebnis der kontinuierlichen Arbeit des Bezirksklubs Junger Mathematiker ist sicher auch das quantitative Anwachsen unserer Mannschaft zur DDR-Olympiade, deren Stärke nach der Gründung des Bezirksklubs stets bei 14 bis 19 Teilnehmern lag.

Seither konnten acht II. Preise, fünf III. Preise und sieben Anerkennungsurkunden unseren Teilnehmern überreicht werden.

Nachdem im Bezirk Neubrandenburg im Jahre 1964 der Bezirksklub Junger Mathematiker seine Arbeit aufgenommen hatte, kam es im Laufe des nächsten Jahres zur Bildung von Kreisklubs

Junger Mathematiker in den Kreisen unseres Bezirkes. Die Entwicklung war anfangs in den Kreisen unterschiedlich. Oftmals wurden die Besten aus zwei Klassenstufen zusammengefaßt. Die Zusammenkünfte waren monatlich oder 14-tägig in der Kreisstadt. Es wurde ein Rahmenarbeitsprogramm durch die Leitung des Bezirksklubs ausgearbeitet, damit in den Bezirksklub aufsteigende Schüler später einheitliche Fähigkeiten besitzen sollten. Dies klappte vorerst noch nicht recht, so daß 1967/68 durch ein Arbeitskollektiv über die Zeitschrift "Mathematik in der Schule" eine "Anleitung für die Leiter der Kreisklubs J.M. und der Arbeitsgemeinschaften" mit konkretem Arbeitsmaterial herausgegeben wurde.

In einigen Kreisen, in denen die Entwicklung der Kreisklubs schleppend war, stellte sich bald heraus, daß diese Kreise - abgesehen von Einzelfällen - kaum noch bei den Olympiaden "einen Blumentopf gewinnen" konnten. Die Notwendigkeit einer zielgerichteten Förderung junger Talente wurde offensichtlich. Man hatte erkannt, daß allein die Förderung der Spitzen auch noch nicht ausreicht, denn rechtzeitig muß man für den Nachwuchs sorgen. Und den Nachwuchs kann man nicht erst in der 7., 8. Klasse oder gar noch später entwickeln. Daher war es nötig, bereits in der Schule, d.h. im Unterricht neben der Förderung zurückbleibender Schüler auch die Förderung der Besten der Klasse systematisch zu betreiben. Warum sollten nicht der Beste oder die Besten der Klasse während der Unterrichtsarbeit Sonderaufträge erhalten, warum nicht ab und an Befreiung von den Hausaufgaben und dafür Bearbeitung von Problemen aus der zahlreich zur Verfügung stehenden Literatur?

In drei Kreisen ist man, um den Entwicklungsstand an den Schulen zu überprüfen, dazu übergegangen, zweimal im Schuljahr einen Wettbewerb aller Schulen zu veranstalten. Die Kreisleitungen der FDJ stifteten einen Wanderpokal. Jede Schule ist berechtigt, für jede Klassenstufe der Klassen 5 bis 10 eine Zweier-Mannschaft zu stellen. Noch weitere Schüler können sich beteiligen. Die Durchführung liegt in der wettbewerbsarmen Zeit zwischen Mai und Oktober. Die

Leistungsergebnisse der Schüler werden vom Olympiade-Kreis-komitee für die Festlegung der Teilnehmer zur nächsten Kreisolympiade genutzt. Damit wird immer mehr und mehr gesichert, daß die Anzahl der "Versager" sehr gering bleibt. Die Anzahl der Teilnehmer bei den Kreisolympiaden liegt - wegen dieser Vorauswahl - zwischen 60 und 90 Teilnehmern.

Über die generelle Auswahl zu den Kreisolympiaden und über eine spezielle Maßnahme zur Vorbereitung aller Teilnehmer auf die 3. Stufe möchte ich im nächsten Bericht sprechen.

StR. H.-Joachim Kerber
 Leiter des Bezirksklubs
 Junger Mathematiker, Neubrandenburg

Lösungen

(C 9) Nach der Moivreschen Formel für komplexe Zahler

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

(Siehe "Wurzel" 9/70 und 10/70!)

ergibt sich

$$\begin{aligned}(\cos 25\varphi + i\sin 25\varphi) &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{25} \\ &= \cos^{25}\varphi + \binom{25}{1}\cos^{24}\varphi \cdot i\sin\varphi + \dots \\ &\quad \dots + i^{25}\sin^{25}\varphi\end{aligned}$$

Für $\sin 25\varphi$ erhält man durch Vergleich der Imaginärteile

$$\sin 25\varphi = \binom{25}{1}\cos^{24}\varphi\sin\varphi - \binom{25}{3}\cos^{22}\varphi\sin^3\varphi + \dots + \sin^{25}\varphi$$

Da $\sin\varphi = \frac{3}{5}$ gilt und weiterhin

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \text{ folgt } \cos\varphi = \frac{4}{5}$$

Also ist

$$\begin{aligned}\sin 25\varphi &= \binom{25}{1} \frac{4^{24} \cdot 3}{5^{25}} - \binom{25}{3} \frac{4^{22} \cdot 3^3}{5^{25}} \pm \dots + \frac{3^{25}}{5^{25}} \\ &= \frac{1}{5^{25}} \left[\binom{25}{1} \cdot 4^{24} \cdot 3 - \binom{25}{3} \cdot 4^{22} \cdot 3^3 \pm \dots + 3^{25} \right]\end{aligned}$$

Die ersten zwölf Summanden in der Klammer sind durch 5 teilbar, da $\binom{25}{n}$ für $n < 25$ ein Vielfaches von 5 ist.

Daraus erhält man

$$\sin 25\varphi = \frac{1}{5^{25}} (5q + 3^{25}) \quad (q \text{ ganze Zahl})$$

woraus folgt

$$\sin 25\varphi = \frac{p}{5^{25}} \quad (p \text{ teilerfremd zu } 5 \text{ und damit auch zu } 5^{25})$$

(C 11) Die Schnittpunkte der Parallelen untereinander und mit den Seiten des Rechtecks werden mit Zahlen bewertet, die angeben, wieviele Möglichkeiten es gibt, auf kürzestem Weg von A zu dem betreffenden Punkt zu gelangen.

A erhält die Bewertung 1. Da immer nur der kürzeste Weg (Gesamtweg = $a + b$) zulässig ist, kann nur nach rechts oder nach oben vorgegangen werden.

Folglich ergibt sich die Bewertung eines beliebigen Punktes als Summe der Bewertungen des links von ihm und des unterhalb liegenden Punktes. Diese Summation entspricht der Bildungsvorschrift des Pascalschen Dreiecks, d.h. man kann die Bewertungen auch durch Binomialkoeffizienten ausdrücken.

Durch fortlaufende einfache Überlegungen erkennt man, daß C mit dem $(n + 2)$ -ten Glied der $(m + n + 3)$ -ten Zeile des Pascalschen Dreiecks zu bewerten ist.

Es gibt also $\binom{m+n+2}{n+1}$ Möglichkeiten, von A nach C zu gelangen, ohne daß der Weg größer als $a + b$ wird.

(C12) Man führt den Beweis indirekt:

Annahme: r ist periodisch und besitzt die Periodenlänge t . Dann muß gelten:

1. In jeder Periode t kommt die Ziffer 1 mindestens einmal vor (Bestände die Periode t nur aus Nullen, so wäre r endliche Dezimalzahl).
2. Es ist $10^t > t$, $t \in \mathbb{N}$
($\mathbb{N}$ sei die Menge der natürlichen Zahlen)

$$10^{t+1} - 10^t = 9 \cdot 10^t > 9t$$

Das bedeutet: Zwischen den beiden benachbarten Einsen an der 10^t -ten und 10^{t+1} -ten Stelle stehen auf mehr als $9 \cdot t$ Stellen hintereinander Nullen.

Daraus folgt: Es existiert ein Abschnitt der Länge $t' > t$, der nur aus Nullen besteht. Widerspruch zu 1.! Also ist r nicht periodisch.

Die Zahl r^2 ergibt sich zu:

1 an allen Stellen $2 \cdot 10^k$ $k \in \mathbb{N}$

2 an allen Stellen $10^{k_1} + 10^{k_2}$, $k_1 \neq k_2$

$k_1, k_2 \in \mathbb{N}$

0 sonst

Diese Angabe ergibt sich aus der Multiplikation von r mit 10^{-1} , 10^{-10} , 10^{-100} , ..., 10^{-10^n} , ...

und anschließender Addition. (Kombinationen zweier verschiedener Zehnerpotenzen treten genau zweimal, zweier gleicher Zehnerpotenzen genau einmal auf.)

Beweis analog zu oben:

1. In jeder Periode t muß mindestens eine 1 enthalten sein.
2. $2 \cdot 10^{t+1} - 2 \cdot 10^t = 18 \cdot 10^t > 18t$

Zwischen den benachbarten Einsen taucht mindestens an 18. t aufeinanderfolgenden Stellen keine 1 auf.
 Hieraus folgt der Widerspruch zur Periodizität von r^2 .

(C 15) Zuerst zeigen wir:

$b_k < b_n$ genau dann, wenn $a_k < a_n$

1. $a_k < a_n$

$\forall a_1 (a_1 < a_k \rightarrow a_1 < a_n$ Transitivität von " $\leq$ ")

Es existieren also mindestens $b_k + 1$ Folgenglieder a_1 mit $a_1 < a_n$

Daraus folgt: $b_k + 1 \leq b_n$
 $b_k < b_n$

2. $b_k < b_n$

Annahme: $a_n \leq a_k$

$\forall a_1 (a_1 < a_n \rightarrow a_1 < a_k)$

Es existieren mindestens b_n Folgenglieder a_1 mit $a_1 < a_k$

Daraus folgt: $b_n \leq b_k$

Widerspruch zur Voraussetzung!

Daraus folgt: $a_k < a_n$

In der zu untersuchenden Folge gilt:

$b_{14} = b_{15} = 13$, laut Hilfssatz folgt $a_{14} = a_{15}$

$b_{13} = 10 > b_1$ $\forall b_i, i = 1, 2, \dots, 12$

Daraus folgt: $a_{13} > a_1$ $\forall a_i, i = 1, 2, \dots, 12$

d.h. $b_{13} = 12$ (Anzahl der a_i mit $a_i < a_{13}$)

Widerspruch zur Angabe $b_{13} = 10$

Daraus folgt, es gibt keine Folge reeller Zahlen, aus der auf die angegebene Weise die gegebene Folge $b_1, \dots, b_{15}$ konstruiert werden kann.

(C16) Mit Hilfe der Additionstheoreme bringt man die gegebenen Gleichungen in die Form

$$(1) \quad 3\sin^2\alpha = \cos 2\beta$$

$$(2) \quad 3\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\beta$$

Quadriert man beide Gleichungen und addiert sie, so erhält man

$$9\sin^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 1$$

und daraus ergibt sich

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{9}$$

Diesen Wert setzen wir in Gleichung (1), es folgt

$$\cos 2\beta = \frac{1}{3}$$

Daraus erhalten wir $0 < 2\beta < \frac{\pi}{2}$

Dividiert man Gleichung (1) durch Gleichung (2), so erhält man $\tan\alpha = \cot 2\beta$, d.h.

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, sonst würde die Vorzeichengleichheit verletzt, also

$$0 < \frac{\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Aus } \sin^2\alpha = \frac{1}{9} \text{ folgt } \sin\alpha = \frac{1}{3},$$

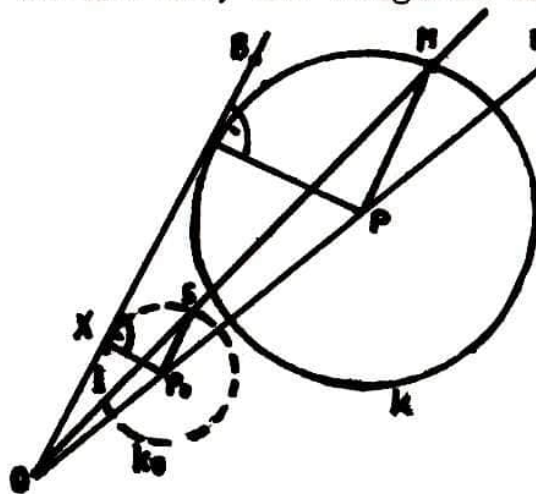
der Wert $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$ geht wegen $0 < \alpha < \pi$ verloren.

$$\text{Aus } \sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{3}$$

$$\text{und } \cos 2\beta = \frac{1}{3}$$

folgt $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\beta$ weil beide Argumente zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen, d.h. $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$.

(C 17) Zur Lösung dieser Aufgabe kann die auf Seite 69 dieses Heftes angegebene Methode benutzt werden.
Die Aufgabe ist gelöst, wenn ein Kreis k gefunden worden ist, der folgende Eigenschaften hat:



- a) er berührt OB ,
- b) sein Mittelpunkt liegt auf OA ,
- c) er geht durch M .

Der Mittelpunkt dieses Kreises ist der gesuchte Punkt P . Um den Kreis zu finden, läßt man zunächst die Bedingung c) unberücksichtigt. Man konstruiert

einen beliebigen Kreis k_0 , der a) und b) erfüllt. Der gesuchte Kreis k ergibt sich aus k_0 durch eine geeignete zentrische Streckung mit dem Zentrum O .

Auf Grund der Eigenschaften von zentrischen Streckungen kann P so konstruiert werden:

Man konstruiert k_0 (X beliebig auf OB , Schnitt der Senkrechten auf OB in X mit OA liefert den Mittelpunkt P_0 von k_0 , der Radius ist $\overline{P_0X}$) und bringt k_0 mit OM zum Schnitt (Punkt S). Die Parallele zu SP_0 durch M schneidet OA im gesuchten Punkt P .

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienwerbung-Studienvorbereitung“ der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Redaktion: Dipl.-Math. Karola Schimmel (Chefredakteur); V. Kögel, M. Wolf, R. Lorenz, H. Fischer

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

Anschrift: WURZEL
69 Jena
Helmholtzweg 1

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45

X.



Olympiade Junger Mathematiker der DDR

6

71

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
FDJ-Aktiv der
Sektion Mathematik
an der
Friedrich-Schiller-
Universität Jena

Einführung in die Bedienungstheorie I

In **Ökonomie** und **Technik** treten vielfältige Situationen auf, die man als **Bedienungssituation** interpretieren kann. Man denke zum Beispiel an einen **Schalter** oder an eine **Kasse**, wo in gewissen Zeitabständen Kunden eintreffen, deren **Forderungen** dort während einer bestimmten Zeit bedient werden. Eine ähnliche Situation herrscht in einer **Telefonvermittlungszentrale**. In bestimmten Zeitpunkten treffen **Anrufe** ein mit der Forderung nach **Weitervermittlung**. Diese Forderungen werden vom **Bedienungspersonal** in der Weise erfüllt, daß die gewünschte Verbindung hergestellt wird, wodurch eine gewisse Zeit lang, nämlich während des **Gespräches**, eine vorher freie Leitung besetzt wird. Nach **Beendigung** des **Gespräches** wird diese Leitung wieder frei.

Man kann offenbar noch viele weitere Beispiele aus dem **Dienstleistungsbereich** finden, in denen eine **analoge Situation** vorliegt: Das aus einer gewissen Anzahl von **Mitgliedern** bestehende **Bedienungspersonal** bedient nach einem gewissen System die im Laufe der Zeit an sie **herangetragenen Forderungen**. Die Art und Weise der **Bedienungsorganisation**, das **Bedienungsregime**, kann je nach der konkreten Situation sehr mannigfaltig sein. Es ist denkbar, daß ein **Mitglied** des **Bedienungspersonals** zur Zeit jeweils nur eine **Forderung** bedient, unabhängig von allen anderen **Mitgliedern**, zum Beispiel an einer **Kasse**.

Es ist aber auch möglich, daß zur vollständigen Erfüllung einer **Forderung** mehrere **Mitglieder** des **Bedienungspersonals** notwendig sind. Wir stellen uns hierzu etwa eine **Reparaturbrigade** vor, die **Defekte** an **Maschinen** beseitigen soll.

Der **Ausfall** einer **Maschine** bzw. das **Auftreten** eines **Defektes** bedeutet hierbei das **Herantragen** einer **Bedienungsforderung** an die **Reparaturbrigade**, das **Bedienungspersonal**.

Die **Reparaturzeit** ist hier die **Bedienungszeit**. Wenn wir nun noch die Möglichkeit offen lassen, daß gewisse **Maschinen** vorrangig wieder in **Gang** gesetzt werden müssen, so erhalten

wir eine weitere Modifikation des Bedienungsregimes, die Bedienung mit Vorrang. Diese tritt zum Beispiel auch im Telefonverkehr auf, wenn Eilgespräche vermittelt werden.

Wir wissen natürlich auch, daß es Bedienungssituationen gibt, bei denen nicht alle Forderungen vollständig bedient werden können, zumindest nicht gleich oder in angemessener Zeit.

Es können zum Beispiel in einem Friseursalon alle Schalter besetzt sein. Für einen neu eintreffenden Kunden gibt es dann die Möglichkeit zu warten, bis die Bedienung an einem Schalter beendet ist oder aber das Geschäft sofort wieder ohne Bedienung zu verlassen. Auch eine beschränkte Wartezeit wäre denkbar. Es können also Warteschlangen oder Kundenverluste auftreten. Schließlich gibt es auch Fälle, in denen nicht alle Mitglieder des Bedienungspersonals gleichberechtigt sind, d.h. manche Mitglieder können nur gewisse Arten von Forderungen erfüllen, etwa auf Grund unterschiedlicher Qualifikation. Außerdem können Abhängigkeiten zwischen der Arbeit der einzelnen Mitglieder bestehen. Solche und ähnliche Beispiele lassen sich noch beliebig fortsetzen.

Für die Praxis können nun verschiedene Parameter einer solchen Bedienungseinrichtung wichtig werden. Für den Projektanten eines Telefonnetzes ist es nützlich zu wissen, wie hoch die Beanspruchung des Fernamtes durch die Fernsprechteilnehmer sein wird, um so zu planen, daß möglichst alle Anrufe ohne oder nur mit erträglichen Wartezeiten vermittelt werden können, damit aber andererseits auch die Zentrale ausgelastet ist. Dieser Gesichtspunkt, die Ermittlung der optimalen Größe des Bedienungsapparates, spielt offenbar in vielen Bereichen eine große Rolle, sowohl für die Gestaltung der einzelnen Bedienungseinrichtungen als auch für ihre territoriale Verteilung, für die Standortplanung.

Für eine Brigade, die in einer Werkhalle Maschinen bedient, kann die Frage nach der besten Arbeitsorganisation entstehen:

Wenn zum Beispiel eine Maschine die Aufmerksamkeit eines Arbeiters nur in bestimmten Augenblicken erfordert, kann die Brigade im Prinzip mehr Maschinen überwachen, als sie Mitglieder hat. Diese Mehrmaschinenbedienung muß aber so zweckmäßig organisiert sein, daß möglichst immer, wenn ein Eingriff erforderlich ist, auch ein Arbeiter frei ist. Man kann hier zum Beispiel fragen: Wie muß die Arbeit organisiert werden, damit die möglichen Stillstandszeiten minimal werden? Was ist günstiger: Zwei Arbeiter überwachen einen Komplex von drei Maschinen oder vier Arbeiter sind insgesamt für sechs Maschinen verantwortlich?

Aus solchen und ähnlichen Fragestellungen heraus hat sich seit der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts eine mathematische Theorie entwickelt, die sich als vielseitig anwendbar und nützlich erwiesen hat, die sogenannte Bedienungstheorie oder auch die Theorie der Massenbedienung. Ihre Aufgabe ist es, durch Analyse der konkreten Bedienungssituationen, durch Abstraktion und Beschränkung auf ihre wesentlichen und typischen Seiten mathematische Modelle dieser konkreten Bedienungsvorgänge zu erarbeiten, die die wirklichen Prozesse hinreichend gut widerspiegeln. Sodann sind durch mathematische Verarbeitung die gewünschten Parameter des Bedienungsprozesses zu ermitteln, die dann zum Beispiel wieder zur Optimierung von **Bedienungseinrichtungen** benutzt werden können.

Versuchen wir, einige typische und wesentliche Gesichtspunkte aus den obigen Beispielen herauszukristallisieren. Es handelt sich bei den geschilderten Bedienungsvorgängen offenbar um Prozesse mit Massencharakter. Die Anzahl der im Laufe der Zeit auftretenden Forderungen ist sehr **groß**. Die zweite Gemeinsamkeit ist die Zufälligkeit beim Ablauf dieser Vorgänge mit Massencharakter.

Zunächst ist es meist möglich und auch notwendig, die Zeitpunkte des Eintreffens von Forderungen als zufällig anzusehen. Im Beispiel der Telefonzentrale etwa werden diese Zeitpunkte von so vielen, dem Bedienungspersonal unbekannten

Effekten beeinflusst, daß sich eine deterministische Behandlung von selbst verbietet.

Zum anderen betrachten wir aber auch die Bedienungszeiten als zufällig, denn auch hier treten Schwankungen auf, die verursacht werden durch den Einfluß sehr vieler, quantitativ nicht ganz bestimmbarer Größen (zum Beispiel Verschiedenartigkeit der Schwierigkeiten bei Reparaturen, Kondition des Bedienungspersonals). Diese Betrachtungen legen es nahe, bei der mathematischen Behandlung von Problemen der Massenbedienung den Apparat der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu benutzen. Die Bedienungstheorie ist ein Teil der angewandten Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Wir gehen im nächsten Heft dazu über, ein einfaches Modell der Bedienungstheorie zu betrachten, das auch historisch gesehen am Anfang der Entwicklung stand.

Volker Stabenow

Forschungsstudent des Bereiches
Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik
Sektion Mathematik der FSU

Preisaufgaben (Serie 6/71)

(C 31) Es sei $a_1, a_2, \dots, a_n$ eine geometrische Folge.

Aus den Werten $s_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

und $s_2 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$

bestimme man den Wert $P = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$

(C 32) Man beweise, daß sich jede natürliche Zahl $n > 27$ in der Form $5k + 8m$ darstellen läßt, wobei k und m nichtnegative ganze Zahlen sind.

(C 33) Man zeige, daß für vier Punkte A, B, C, D in der Ebene $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ gilt, falls $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ und $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ gilt.

(C 34) Die Entfernung zwischen zwei Städten A und B betrage 999 km. Auf der Staße zwischen beiden Orten stehen Kilometersteine $\boxed{0\,999}$, $\boxed{1\,998}$, $\boxed{2\,997}$, ..., $\boxed{999\,0}$, die die Entfernung zu beiden Orten angeben. Wieviel Steine gibt es, auf denen nur zwei Ziffern stehen?

(C 35) Man bestimme alle natürlichen Zahlen n , für die $n+4$ ein Teiler der Zahl $n^2 + 8n + 15$ ist.

(C 36) Mit Hilfe von Zirkel und Lineal teile man einen Winkel von 70° in sieben gleiche Teile.

Für jeden vollständigen Lösungsweg einer Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für zehn Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender zehn Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).

Falls ein Besitzer von zehn Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum 10. des folgenden Monats (Datum des Poststempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preis-aufgaben" an unsere Adresse einzuschicken.

Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungen bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden.

Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Zum zehnten Male trafen sich die besten jungen Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik in der Jugendhochschule am Bogensee bei Berlin, um ihre Besten zu ermitteln.

Am 5. 4. und am 6. 4. 1971 stellten sie in je vierstündigen Klausuren ihr Wissen und Können unter Beweis.

Rund 200 FDJ-ler und FDJ-lerinnen starteten in den Klassenstufen 10 und 11/12. Neu war bei dieser Olympiade, daß zum erstenmal in je einer Klausur zwei Wahlaufgaben zur Verfügung standen, von denen eine gelöst werden mußte.

Obwohl die Aufgaben wieder ein hohes Niveau hatten (wovon sich der Wurzelleser überzeugen kann), wurden von den Schülern hervorragende Ergebnisse erzielt. Herauszustreichen sind hierbei natürlich die Leistungen der Schüler, die einen

1. Preis erringen konnten:

Oberschule Klasse 10: Bernd Z a d d a c h
Schüler der 8. Klasse der
10. Oberschule Cottbus - 39 Pkt.

EOS Klasse 12: Wolfgang B u r m e i s t e r
Schüler der 12. Klasse der
EOS Dresden-Süd - 40 Pkt.

EOS Klasse 12: Thomas J e n t s c h
(Spezialklassen) Schüler der Spezialklasse der
Martin-Luther-Universität Halle
- 38 Pkt.

Das Diplom für die ausgezeichnete Lösung einer Aufgabe erhielt:

Albrecht H e B von der EOS Dresden-Süd.

Von der Jury wurden aufgrund der Klausurergebnisse die elf Kandidaten zur XIII. Internationalen Mathematikolympiade im Juli dieses Jahres in der CSSR ausgewählt. In einem Vorbereitungslehrgang werden dann von diesen elf FDJ-lern die

acht ausgewählt, die die Deutsche Demokratische Republik vertreten werden. Die Kandidaten sind:

Wolfgang Burmeister	Dresden
Thomas Jentsch	Halle
Reinhard Wobst	Karl-Marx-Stadt
Harald Englisch	Leipzig
Rainer Siegmund-Schultze	Berlin
Stefan Ladmann	Leipzig
Hans-Jürgen Fischer	Karl-Marx-Stadt
Gerhard Spens	Erfurt
Arnulf Möbius	Halle
Ludwig Schäfer	Erfurt
Olaf Böhme	Dresden

Neben den Klausuren standen während der vier Tage am Bogen-see und in Berlin aber auch noch eine Reihe anderer Veranstaltungen auf dem Plan, die für die Teilnehmer ebenso zum Erlebnis wurden wie ihr mathematischer Wettbewerb.

So fand am Abend des ersten Tages ein Singabend mit der Singegruppe der EOS "Edgar Andre" Berlin statt. Auf dieser Veranstaltung wurde die Idee geboren, eine Spendenaktion für die kämpfenden Völker Indochinas durchzuführen.

Am letzten Tag konnten dann rund 400 M auf das Spendenkonto überwiesen werden.

Reges Interesse fanden auch ein militärpolitisches Forum und ein Forum "25 Jahre FDJ".

In der Freizeit standen Tischtennis, Volleyball, Fußball sowie die schon zur Tradition gewordenen Simultan-Schachveranstaltungen auf dem Programm. Interessant für alle Teilnehmer waren auch die Treffen mit ehemaligen Teilnehmern an Mathematikolympiaden. Zu einem besonderen Höhepunkt gestaltete sich auch der Besuch im Deutschen Theater. Die Teilnehmer an der Mathematikolympiade sahen hier "Die Aula" von Hermann Kant.

Das rege Interesse, das die besten jungen Mathematiker der DDR an diesen sportlichen und kulturellen Veranstaltungen

sowie an den politischen Foren zeigten, läßt erkennen, daß sich hier nicht nur gute Mathematiker, sondern allseitig entwickelte sozialistische Persönlichkeiten herausbilden.

Unser Mitarbeiter Bernd Wächter, der auf Anforderung des Zentralrates der Freien Deutschen Jugend als Arbeitsbereichsleiter für die politische und kulturelle Betreuung an der X. Olympiade Junger Mathematiker teilnahm, hatte die Gelegenheit, unmittelbar nach der Siegerehrung mit den Jugendfreunden Wolfgang B u r m e i s t e r und Bernd Z a d d a c h ein Gespräch zu führen.

- B. Wächter:** Die Siegerehrung ist nun beendet. Wie fühlt man sich, wenn man soeben als bester Junger Mathematiker der DDR geehrt wurde?
- W. Burmeister:** Natürlich ist die Freude groß, aber da ich zu den Kandidaten für die DDR-Mannschaft zur XIII. IMO gehöre, richtet sich die ganze Aufmerksamkeit jetzt nach der DDR-Olympiade auf die kommenden Ereignisse.
- B. Zaddach:** Ich freue mich mächtig über meinen ersten Platz.
- B. Wächter:** Bernd, hattest Du als Schüler der 8. Klasse nicht ein wenig Lampenfieber, hier, als einer der Jüngsten unter den älteren FDJlern, zu starten?
- B. Zaddach:** Ein wenig schon, aber ich startete ja schon bei der Bezirksolympiade in der Klassenstufe 10, und außerdem war ich gut vorbereitet.
- B. Wächter:** Wieviel Punkte hast Du bei der X. erreicht?
- B. Zaddach:** Ich erreichte 39 Punkte von 40.
- B. Wächter:** Und Du, Wolfgang?
- W. Burmeister:** Ich schaffte es, die volle Punktzahl zu erreichen.

- B. Wächter:** Das sind natürlich großartige Ergebnisse. Aus welchen Schulen kommt Ihr und wie sehen Eure Zukunftspläne aus?
- W. Burmeister:** Ich komme von der EOS Dresden-Süd und besuche dort die 12. Klasse. Im September beginne ich mein Studium an der TU Dresden. Dort möchte ich vier Jahre studieren und anschließend noch drei Jahre als Forschungsstudent arbeiten.
- B. Zaddach:** Nach Beendigung des 10. Schuljahres möchte ich in einer Spezialklasse für Mathematik mein Abitur ablegen und anschließend ein Mathematikstudium aufnehmen. Genaues kann ich noch nicht sagen.
- B. Wächter:** Bernd, welche Vorstellungen hast Du über Deine zukünftige Teilnahme an Mathematikolympiaden?
- B. Zaddach:** Ich werde mir natürlich Mühe geben, und außerdem ist es mein Ziel, auch einmal oder mehrmals an der Internationalen Mathematikolympiade teilzunehmen.
- B. Wächter:** Wolfgang ist ja schon ein "alter Hase" internationaler Mathematikolympiaden. Du warst Bester der 12. IMO 1970 in der Ungarischen Volksrepublik. Wie schätzt Du die Chancen unserer Mannschaft in diesem Jahr ein?
- W. Burmeister:** Dazu möchte ich keine Voraussage abgeben. Wir werden uns Mühe geben, die Erfolge der letzten Jahre zu wiederholen bzw. uns noch zu verbessern.
- B. Wächter:** Lest Ihr die "Wurzel"?
- W. Burmeister:** Ja, aber leider noch nicht sehr lange.
- B. Zaddach:** Schon seit einigen Jahren.
- B. Wächter:** Wie ist Eure Meinung zu unserer Zeitschrift?

- B. Zaddach:** Ich finde die "Wurzel" prima. Einem Schüler, der sich für Mathematik interessiert, gibt Eure Zeitschrift sehr viel. Auch Nachrichten über das Mathematikstudium und die Sondernummer interessieren mich sehr.
- W. Burmeister:** Ich schließe mich dieser Meinung an.
- B. Wächter:** Was meint Ihr zu den Aufgaben der X. OJM?
- W. Burmeister:** Sie waren wieder recht schwierig. Die Neuerung, Wahlaufgaben zu stellen, finde ich sehr gut.
- B. Wächter:** Ich danke Euch für dieses Gespräch und wünsche Euch im Namen der "Wurzel" weiterhin viel Erfolg.
-

Nachfolgend veröffentlichen wir einen Auszug aus der Aufgabenstellung der X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR.

Leser, die an den vollständigen Aufgabenstellungen interessiert sind, bitten wir, sich direkt an unsere Redaktion zu wenden.

Wir wünschen allen Lesern viel Spaß beim Knobeln und werden die Lösungen in unserer Sommernummer teilweise veröffentlichen.

Aufgaben der Klassenstufe 10

1. Bilden Sie alle Mengen von fünf ein- oder zweistelligen Primzahlen derart, daß in jeder dieser Mengen jede der Ziffern 1 bis 9 genau einmal auftritt!

2. Von einem Quaderkörper mit den Eckpunkten $A, B, C, D, A', B', C', D'$ (siehe Abb. 1) und den Kantenlängen $AB = a, AD = b, AA' = c$ seien mit Hilfe der ebenen Schnitte durch die Eckpunkte B', A, D' bzw. A', B, C' , bzw. B', C, D' bzw. A', D, C' diejenigen Teile abgetrennt, die jeweils den Eckpunkt A' bzw. B' bzw. C' bzw. D' enthalten.

Das Volumen des verbleibenden Restkörpers sei V_R , das des ursprünglichen Quaders V_Q .

- a) Man gebe sämtliche Punkte des Quaderkörpers an, die Eckpunkte des Restkörpers sind, und stelle diesen in einem Schrägbild ($\alpha = 60^\circ, q = \frac{1}{3}$) dar.

(Das Schrägbild ist für den Fall $a = 5 \text{ cm}, b = 2 \text{ cm}, c = 2,5 \text{ cm}$ zu zeichnen)

- b) Man berechne $V_R : V_Q$!

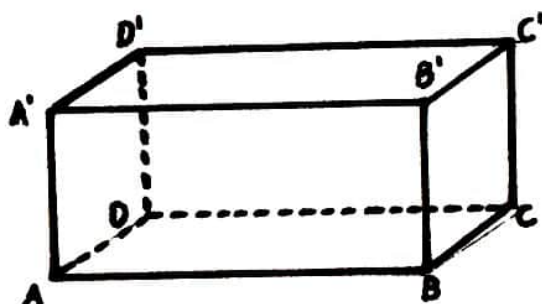


Abb. 1

3. Man gebe alle quadratischen Funktionen $f(x)$ an, die für alle reellen x die Gleichung

$$f(x+1) = f(-x)$$

erfüllen.

4. Es sei r eine von Null verschiedene reelle Zahl. Man ermittle alle reellen Zahlen $x \neq 0$, die die Ungleichung

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{r} > \frac{1}{2} \quad \text{erfüllen.}$$

Dabei sind folgende Fälle zu untersuchen:

- a) Es sei $r < -6$.
- b) Es sei $r = -6$.
- c) Es sei $-6 < r < 0$.
- d) Es sei $r > 0$.

5. Die Fläche eines Dreiecks ΔABC soll folgendermaßen in drei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt werden:

Zwischen den Eckpunkten A und B des Dreiecks liegen auf AB zwei Punkte E und F so, daß E zwischen A und F liegt.

Außerdem sei D derjenige Punkt im Inneren des Dreiecks ΔABC , für den $\overline{ED} \parallel \overline{AC}$ und $\overline{FD} \parallel \overline{BC}$ gilt.

Die Flächen der Trapeze AEDC und FBCD und die des Dreiecks ΔEFD sollen dann untereinander inhaltsgleich sein. Konstruieren Sie Punkte E, F, D, für die diese Forderung erfüllt ist! Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

Aufgaben der Klassenstufe 11/12

1. Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, zu denen es reelle Zahlen x gibt, so daß $\sqrt{a+x}$ und $\sqrt{a-x}$ reell sind und die Ungleichung

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a \text{ erfüllt ist.}$$

Wie lauten die Werte von x in Abhängigkeit von a?

2. Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Wenn h eine reelle Zahl ist und wenn eine ganzrationale Funktion f vom Grade n mit reellen Koeffizienten keine reellen Nullstellen besitzt, so gilt dasselbe von der ganzrationalen Funktion F, die durch

$$F(x) = f(x) + h f'(x) + h^2 f''(x) + \dots + h^n f^{(n)}(x)$$

definiert ist.

3. Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Haben je drei von vier in der gleichen Ebene liegenden konvexen Vielecksflächen jeweils einen Punkt gemeinsam, so gibt es einen Punkt, der jeder der vier Vielecksflächen angehört.

4. Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:

In dem Gleichungssystem

$$x + a_1 y = b_1 \quad (1)$$

$$a_2 y + b_2 z = a_3 \quad (2)$$

$$b_3 x + a_4 z = b_4 \quad (3)$$

wählt zunächst A für den Koeffizienten a_1 , dann B für den Koeffizienten b_1 , dann wieder A für a_2 , dann B für b_2 usw., zum Schluß B für b_4 je eine beliebige ganze Zahl.

A hat genau dann gewonnen, wenn das System (1), (2), (3) genau eine ganzzahlige Lösung (x, y, z) hat.

a) Kann A so spielen, d.h., kann er die Koeffizienten

$a_1, \dots, a_4$ jeweils nach der Wahl von $b_1, \dots, b_3$ durch B so auswählen, daß er gewinnt?

b) Kann A von vornherein für die Koeffizienten

$a_1, \dots, a_4$ solche Werte angeben, daß er unabhängig von der Wahl der Koeffizienten durch B (in jedem Falle) gewinnt ?

5. Es sei $A_0 A_1 \dots A_n$ ($n \geq 2$) ein ebener konvexer Polygonzug der Länge s mit $A_0 \neq A_n$. Die Punkte $A_1, \dots, A_{n-1}$ mögen auf ein und derselben Seite der Gerade g durch A_0 und A_n liegen.

(Ein ebener Polygonzug $A_0 A_1 \dots A_n$ heiße konvex, wenn der durch die Strecke $A_0 A_n$ geschlossene Polygonzug eine konvexe Fläche begrenzt.)

Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt F der bei Rotation des Polygonzuges um g entstehenden Fläche nicht größer als

$$\pi \frac{s^2}{2} \text{ ist, daß also}$$

$$F \leq \pi \frac{s^2}{2} \text{ gilt.}$$

Bei den Internationalen Mathematik-Olympiaden von Schülern der DDR errungene Preise

	1959 I. IMO	1960 II. IMO	1961 III. IMO	1962 IV. IMO	1963 V. IMO
1. Preis	-	-	-	-	-
2. Preis	-	-	-	1	-
3. Preis	-	-	1	-	3

	1964 VI. IMO	1965 VII. IMO	1966 VIII. IMO	1967 IX. IMO	1968 X. IMO
1. Preis	-	-	3	3	5
2. Preis	1	2	3	3	3
3. Preis	2	3	-	1	-

	1969 XI. IMO	1970 XII. IMO	insgesamt
1. Preis	-	1	12
2. Preis	4	2	19
3. Preis	4	4	18

Neubestellungen der »Wurzel« für das Schuljahr 1971/72

Bezieher von drei und weniger Exemplaren:

Falls bis zum 10. September 1971 keine Nachricht bei uns vorliegt, wird automatisch das alte Abonnement verlängert.

Bezieher von mehr als drei Exemplaren:

Falls bis zum 25. September 1971 keine Bestellung erfolgt, betrachten wir das Abonnement als verlängert.

Wir bitten unsere Leser, die Termine einzuhalten, damit wir auch im Schuljahr 1971/72 die "Wurzel" pünktlich zustellen können.

Sonderheft

Im September erscheint ein Sonderheft der "Wurzel", in dem über das Mathematikstudium an unserer Sektion und das Berufsbild eines Diplommathematikers berichtet wird. Der Umfang beträgt etwa 32 Seiten und der Preis etwa 0,50 M.

Wir bitten alle Interessenten dieser Broschüre um umgehende Mitteilung (bis 30. Juni 1971), da dieses Sonderheft nur nach Anforderung versandt wird.

Die Redaktion

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienwerbung-Studienvorbereitung“ der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Redaktion: Dipl.-Math. Karola Schimmel (Chefredakteur); V. Kögel, M. Wolf, R. Lorenz, H. Fischer

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

Anschrift: WURZEL
69 Jena
Helmholtzweg 1

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45

Wir wünschen allen Schülern einen erfolgreichen Abschluß des Schuljahres 1970/71, allen Lesern einen erholsamen Sommerurlaub 1971.

Wir sind bemüht, auch im nächsten Schuljahr die „WURZEL“ pünktlich und in guter Qualität zur Verfügung zu stellen und hoffen auf einen regen Erfahrungsaustausch mit unserem Leserkreis.

7/8

71

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
FDJ-Aktiv der
Sektion Mathematik
an der
Friedrich-Schiller-
Universität Jena

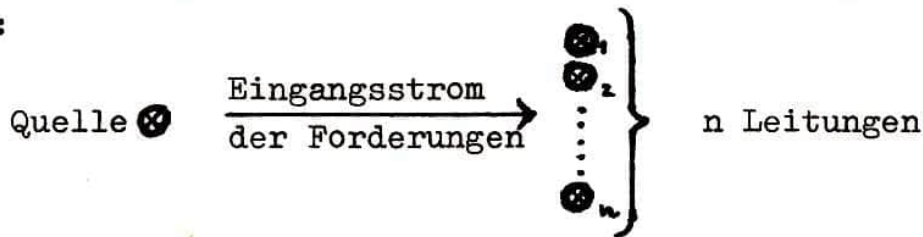
Einführung in die Bedienungstheorie II (Schluß)

Nachdem wir im Heft 6/71 eine kurze Einführung in die Bedienungstheorie gegeben haben, betrachten wir jetzt das sogenannte Erlang-Modell.

Erlang-Modell

Dieses Modell wurde von dem dänischen Mathematiker Erlang im Zusammenhang mit der Projektierung eines Telefonnetzes in Kopenhagen entwickelt. Es lassen sich aber auch andere konkrete Bedienungsprozesse durch dieses Modell beschreiben. Natürlich ist vor der Anwendung dieses wie aller anderen Modelle zu prüfen, ob die zum Teil sehr speziellen Voraussetzungen und Annahmen auch annähernd erfüllt sind. Die verwendete Terminologie ist aus der Nachrichtentechnik entlehnt.

Wir stellen einer Quelle die Gesamtheit von n Leitungen gegenüber:



$$n \geq 1$$

n ganz

Die Quelle repräsentiert uns den Ursprung der Anrufe (Forderungen), die in zufälligen Abständen eintreffen und in zufälligen Zeiten bedient werden. Die n Leitungen (Bediener, Servicer) stellen den eigentlichen Bedienungsapparat dar (zum Beispiel Kassen, Schalter).

Die folgenden Annahmen legen unser Modell näher fest. Wir beginnen mit den Forderungen an das Bedienungsregime.

- (a) Ein Servicer kann zur Zeit nur eine Forderung bedienen.
- (b) Eine Forderung beansprucht zur Bedienung nur einen Servicer.

- (c) Die Bedienung einer Forderung, die neu in das Bedienungssystem eintritt, wird sofort (ohne Zeitverzug) durch einen der freien Servicer begonnen, falls noch ein solcher vorhanden ist.
(Man sagt auch: Ein neuer Anruf belegt sofort eine der freien Leitungen.)
- (d) Nach beendeter Bedienung verläßt die Forderung (bzw. der Kunde) sofort wieder das Bedienungssystem.
- (e) Eine Forderung, deren Bedienung von einem Servicer begonnen wurde, wird von diesem Servicer bis zu Ende bedient; es gibt keinen Abbruch von "laufenden" Bedienungen und keinen Wechsel der Kunden zu anderen Servicern während der Bedienung.
- (f) Die einzelnen Servicer bedienen unabhängig voneinander, d.h. zum Beispiel: Die Bedienungsdauer auf einer Leitung hängt nicht davon ab, ob oder wieviele andere Leitungen besetzt sind oder wie lange die Bedienung auf den anderen Leitungen dauert.
- (g) Die Bedienungszeiten auf jeder Leitung sind unabhängig davon, wieviele Forderungen auf dieser Leitung schon früher bedient wurden (zum Beispiel keine Ermüdungseffekte), wieviele Pausen auftreten auf dieser Leitung und wie die Bedienungen und Pausen verteilt sind, sowie von den entsprechenden Längen von Pausen und Bedienungszeiten in der Vergangenheit, d.h. die Bedienungszeiten sind unabhängig vom Geschehen auf dieser Leitung in der Vergangenheit.
- (h) Die Bedienungszeiten auf jeder Leitung sind unabhängig davon, wieviele Forderungen während der laufenden Bedienung neu eintreffen (d.h. zum Beispiel keine Beeilung).
- (i) Falls schon alle Leitungen besetzt sind, geht ein neu eintreffender Anruf verloren. Er verläßt ohne Bedienung sofort wieder das Bedienungssystem, ohne irgendwelchen Einfluß auf das System zu nehmen.
Durch diese Bedingung (i) wird das Erlang-Modell als ein sogenanntes Verlustsystem charakterisiert.

- (j) Falls noch mehrere Leitungen frei sind, belegt ein neuer Anruf "auf gut Glück" irgendeine der freien Leitungen. (D.h. insbesondere: Falls noch eine Leitung frei ist, so wird diese mit Sicherheit durch einen neuen Anruf belegt).

Hiermit ist zunächst das Bedienungsregime des Erlang-Modells festgelegt. Auf die mathematischen Konsequenzen obiger Annahmen gehen wir weiter unten ein.

Der Eingangsstrom der Forderungen

Wir wollen jetzt den zufälligen Eingangsstrom der Forderungen charakterisieren. Es sind sehr mannigfaltige Typen von Eingangsströmen denkbar. Wir stellen im folgenden einen der einfachsten, aber auch einen sehr wichtigen Typ eines solchen Eingangsstromes dar.

Zunächst erinnern wir daran, daß die Zeitpunkte des Eintreffens von Forderungen zufällig sind. Man kann das auch so ausdrücken:

Die Anzahl der in einem festen Zeitintervall (T_1, T_1+t) , $T_1, t > 0$ der Länge t auftretenden Forderungen ist zufällig, sie unterliegt zufälligen Schwankungen.

Definition 1:

D Wir definieren deshalb das zufällige Ereignis $E_{(T, T+t)}^k$ als das Ereignis: "Im Zeitintervall $(T, T+t)$ treffen genau k Forderungen ein", $T, t \geq 0$, $k \geq 0$ ganz.

Betrachten wir jetzt wieder unser Beispiel, den Bedienungsvorgang in einer Telefonzentrale, während der Zeitdauer eines Tages. Wir wählen das Zeitintervall $(T, T+t)$ beliebig, aber fest im Rahmen dieser Zeitdauer (etwa in der Zeitspanne von 8 - 9 Uhr). Nun verschieben wir dieses Zeitintervall (ohne seine Länge zu verändern im Rahmen der Zeitdauer eines Tages und vergleichen zum Beispiel die Wahrscheinlichkeiten

$$P(E_{(8,9)}^{50}), P(E_{(9,10)}^{50}), \dots, P(E_{(22,23)}^{50}),$$

für das Auftreten von 50 Forderungen in der Zeit von 8 bis 9, 9 bis 10, ..., 22 bis 23 Uhr. Dann kann es natürlich sein, daß diese Wahrscheinlichkeiten voneinander verschieden sind wegen der unterschiedlichen Belastungen während des Tages.

Wir wollen uns hier jedoch auf Eingangsströme beschränken, bei denen die Wahrscheinlichkeit $P(E_{(T, T+t)}^k)$ unverändert

bleibt, wenn wir das Zeitintervall $(T, T+t)$ beliebig verschieben, ohne seine Länge t zu verändern, d.h. wir fordern die Eigenschaft

$$(a) \quad P(E_{(T_1, T_1+t)}^k) = P(E_{(T_2, T_2+t)}^k)$$

$$T_1, T_2, t > 0, \quad k \geq 0, \quad k \text{ ganz}$$

Wir können das auch so formulieren:

Die Wahrscheinlichkeit $P(E_{(T, T+t)}^k)$ hängt bei festem k nur von der Länge t des Intervalls $(T, T+t)$ ab, aber nicht davon, wo dieses Intervall auf der Zeitachse liegt.

Deshalb können wir zur Abkürzung auch schreiben:

$$P(E_{(T, T+t)}^k) =: P_k(t)$$

Bemerkung: Natürlich bedeutet die Tatsache, daß obige Wahrscheinlichkeiten für zwei gleichlange Intervalle gleich sind, nicht, daß auch die Anzahl der Anrufe in diesen Intervallen gleich ist.

$P_k(t)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in irgendeinem Intervall der Länge t genau k Forderungen eintreffen.

Wir stellen noch einige weitere Forderungen an den Eingangsstrom:

(b) Es soll gelten:

Die Wahrscheinlichkeit $P_k(t) = P(E_{(T, T+t)}^k)$ (wobei T beliebig ist) hängt nicht davon ab, wieviele Forderungen vor diesem Zeitintervall $(T, T+t)$ eintrafen und wie (in welcher Aufeinanderfolge) das geschah.

Also fordern wir:

Die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(E_{(T_2, T_2+t_2)}^k / E_{(T_1, T_1+t_1)}^n)$$

des Auftretens von k Forderungen im Zeitintervall (T_2, T_2+t_2) unter der Bedingung, daß im Intervall (T_1, T_1+t_1) in irgendeiner Aufeinanderfolge n ($n \geq 0$, n ganz) Forderungen eintrafen, ist gleich der unbedingten Wahrscheinlichkeit $P(E_{(T_2, T_2+t_2)}^k)$, wenn nur das gesamte Intervall (T_1, T_1+t_1) vor dem Intervall (T_2, T_2+t_2) liegt.

In Formeln:

$$P(E_{(T_2, T_2+t_2)}^k / E_{(T_1, T_1+t_1)}^n) = P(E_{(T_2, T_2+t_2)}^k) \quad (*)$$

$$T_1, T_2, t_1 > 0 \text{ mit } T_1+t_1 \leq T_2$$

Noch anders ausgedrückt: Eine beliebige Bedingung über die Vergangenheit des Eingangsstromes läßt $P_k(t)$ unbeeinflusst.

Insbesondere heißt diese Bedingung (b) auch:

Die zufälligen Ereignisse $E_{(T_1, T_1+t_1)}^k$ und $E_{(T_2, T_2+t_2)}^n$ sind stochastisch unabhängig für beliebige disjunkte Intervalle.

Also gilt: (**)

$$P(E_{(T_1, T_1+t_1)}^k \wedge E_{(T_2, T_2+t_2)}^n) = P(E_{(T_1, T_1+t_1)}^k) P(E_{(T_2, T_2+t_2)}^n)$$

für Intervalle mit leerem Durchschnitt.

Wie aus Gleichung (*) die Gleichung (**) folgt, sieht der Leser sicher selbst ein.

- (c) Schließlich stellen wir in einem 3. Komplex noch Bedingungen über die Wahrscheinlichkeiten des Auftretens von Forderungen in sehr kleinen Intervallen der Länge Δt :

Dazu machen wir uns zunächst mit dem auch in anderen Gebieten der Mathematik benutzten Begriff der Landauschen Ordnungsgrößen o bekannt.

Definition 2:

Die Funktion $f(x)$ ist "ein klein-o" der Funktion $g(x)$ für $x \rightarrow c$ genau dann, wenn gilt:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

In Zeichen: $f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow c$

Das bedeutet inhaltlich folgendes: Die Funktion $f(x)$ konvergiert (für $x \rightarrow c$) "schneller" gegen Null als $g(x)$ gegen Null geht.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad g(x) = \frac{1}{x}$

Es gilt: $f(x) = o(g(x))$ für $x \rightarrow \infty$, da

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Die Konvergenz der Nennerfunktion $g(x)$ gegen Null würde bei konstantem Zähler die Divergenz des Bruches $\frac{f}{g}$ gegen Unendlich zur Folge haben. Die Zählerfunktion $f(x)$ geht aber so schnell gegen Null, daß der ganze Bruch ebenfalls noch gegen Null konvergiert, trotz der Konvergenz gegen Null im Nenner.

Insbesondere heißt also $f(\Delta t) = o(\Delta t)$ für $\Delta t \rightarrow 0$, daß

$\frac{f(\Delta t)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$, daß also $f(\Delta t)$ eine "Restfunktion" ist, die für $\Delta t \rightarrow 0$ "schneller" gegen Null konvergiert als Δt selbst.

Wir stellen uns an den Eingangsstrom die folgenden zwei Bedingungen:

$$P(E_{\Delta t}^1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t) \quad (\text{d.h. } \frac{P(E_{\Delta t}^1)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \lambda) \quad (c_1)$$

mit einem gewissen $\lambda > 0$.

$$P(E_{\Delta t}^{>1}) = o(\Delta t) \quad (\text{d.h. } \frac{P(E_{\Delta t}^{>1})}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0) \quad (c_2)$$

(Auch im folgenden ist das Symbol $o(\Delta t)$ immer bzgl. $\Delta t \rightarrow 0$ zu verstehen; zur Abkürzung steht $E_{\Delta t}^1$ statt

$$E_{(T, T + \Delta t)}^1.$$

Bedingung (c_1) kann man so interpretieren: Die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von genau einer Forderung in einem sehr kleinen Zeitintervall ist annähernd proportional zur Länge Δt dieses Zeitintervalls. Der Proportionalitätsfaktor $\lambda > 0$ ist ein Maß für die Intensität des Eingangstromes. Annähernd proportional bedeutet hierbei:

Proportional bis auf einen additiven Fehler $f(\Delta t) = o(\Delta t)$, eine Restfunktion $o(\Delta t)$, die schneller gegen Null konvergiert als Δt selbst.

$$(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\Delta t)}{\Delta t} = 0)$$

Bedingung (c_2) besagt: Die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von mehr als einer Forderung in einem sehr kleinen Zeitintervall ist vernachlässigbar klein und strebt schneller gegen Null als Δt selbst. Insbesondere ist also die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zwei Forderungen zur gleichen Zeit eintreffen, gleich Null.

Aus Bedingung (c_1) und (c_2) ergibt sich sofort die Folgerung:

$$P(E_{\Delta t}^0) = 1 - \lambda \Delta t - o(\Delta t)$$

$$\text{d.h. } \frac{P(E_{\Delta t}^0)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 1 - \lambda$$

Der Leser überzeuge sich hiervon selbst. Zum Beweis muß man sich klarmachen, daß die (endliche) Summe von "Restfunktionen" $o(\Delta t)$ wieder eine solche Funktion ist, die schneller gegen Null geht als Δt .

Im folgenden wollen wir immer einen solchen einfachen Eingangsstrom mit den Bedingungen (a), (b) und (c) voraussetzen.

Wir müssen jetzt noch die zufällige Bedienungszeiten auf jeder Leitung charakterisieren. Dazu betrachten wir den zeitlichen Verlauf von Bedienung und Pausen stellvertretend auf einer Leitung. Es ergibt sich auf der Zeitachse folgende schematische Darstellung:



Wir beschreiben die Bedienungszeiten, indem wir die Wahrscheinlichkeiten dafür angeben, daß eine Bedienung, die bis zum Augenblick T gedauert hat, im darauffolgenden Zeitintervall $(T, T + t)$ der Länge Δt beendet wird.

Definition 3:



$A_{(T, T+\Delta t)}$ ist das zufällige Ereignis: "Eine zur Zeit T 'laufende' Bedienung wird im darauffolgenden Intervall der Länge Δt beendet".

Es soll gelten: $P(A_{(T, T+\Delta t)}) = \mu \Delta t + o(\Delta t)$, wobei μ eine bestimmte, reelle Zahl größer Null ist (Proportionalitätsfaktor).

$P(A_{(T, T+\Delta t)})$ ist also bei festem μ nur von Δt abhängig und unabhängig von T . Diese Unabhängigkeit von T bedeutet anschaulich:

Die Wahrscheinlichkeit der Beendigung einer Bedienung vergrößert sich nicht mit gewachsener Bedienungszeit.

Als Folgerung erhalten wir sofort:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A_{\Delta t}) = 1 - \mu \Delta t - o(\Delta t), \text{ wobei } \bar{A}_{\Delta t} \text{ das zufällige}$$

lige Ereignis bedeutet: "Eine 'laufende' Bedienung wird während der Zeitspanne Δt nicht beendet, die Bedienung überdauert auch noch die Zeitdauer Δt ".

(Es steht hier wieder $A_{\Delta t}$ für $A_{(T, T + t)}$).

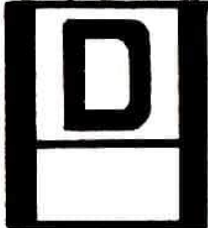
Mit Hilfe der Unabhängigkeitsvoraussetzung ergibt sich weiter:

$P(\text{"auf } k \text{ Leitungen überdauern laufende Bedienungen die Zeitspanne } t") = 1 - k\mu\Delta t - o(\Delta t).$

Die Werte, die die Intensitäten λ und μ im konkreten Fall haben, müssen mit statistischen Methoden festgestellt werden.

Damit haben wir die Gesamtheit der Voraussetzungen, die das Erlang-Modell festlegen, aufgeführt. Wir wollen nun daran gehen, einen wichtigen Parameter dieses Systems zu berechnen.

Definition 4:



C_t^k ist zufälliges Ereignis: "Zum Zeitpunkt t befinden sich genau k Forderungen (Kunden) im System, d.h. es werden genau k Kunden bedient zu diesem Zeitpunkt".

Man sagt dann auch: Das System befindet sich im Zustand C_t^k .

Wir wollen die Wahrscheinlichkeit $P(C_t^k)$ bestimmen. Aus dieser Funktion kann man Schlüsse über den Grad der Auslastung des Systems ziehen; zum Beispiel ermitteln, ob die Wahrscheinlichkeit, daß alle Leitungen besetzt sind, nahe bei Eins liegt. In diesem Fall müssen wir sehr häufig mit dem Eintreten dieses Ereignisses rechnen.

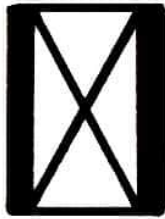
Zur Durchführung der Rechnung erinnern wir kurz an den Satz über die totale Wahrscheinlichkeit:

Voraussetzung: Seien C und D_i $i = 0, 1, \dots, n$ zufällige Er-



eignisse

$\{D_i\}_{i=0, \dots, n}$ bilde ein vollständiges Ereignissystem, d.h. es gelte:



$$(1) P\left(\bigcup_{i=0}^n D_i\right) = 1$$

$$(2) P(D_i \wedge D_j) = 0 \quad \text{für } i \neq j$$

Behauptung:

Dann gilt:

$$P(C) = \sum_{i=0}^n P(C/D_i)P(D_i)$$

Man überlege sich an Hand der Gleichungen (1) und (2), daß man ein vollständiges Ereignissystem auch so charakterisieren kann: Es muß mindestens eines der D_i eintreten, es kann andererseits aber auch höchstens eines der D_i eintreten, d.h. es tritt genau eines der D_i ein.

Diesen Satz wenden wir im folgenden an. Unser Ziel ist es, eine Gleichung für $P(C_t^k)$ abzuleiten und wir vergleichen dazu auf der Zeitachse die Momente t und $t+\Delta t$.

$$P(C_{t+\Delta t}^k) = \sum_{i=0}^n P(C_{t+\Delta t}^k / C_t^i) P(C_t^i) \quad \text{Gl.(1)}$$

Wir beschränken uns hier auf den Fall $k < n$.

Wir analysieren jetzt die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(C_{t+\Delta t}^k / C_t^i)$ unter Benutzung der Voraussetzungen über Eingangsstrom, Bedienungszeit und-regime. Das sind gerade die "Übergangswahrscheinlichkeiten" für die Systemübergänge

$C_t^i \rightarrow C_{t+\Delta t}^k$ in einem sehr kleinen Zeitintervall der Länge Δt . Ein solcher Übergang $C_t^i \rightarrow C_{t+\Delta t}^k$ kann aus mehreren Änderungen im System "zusammengesetzt" sein, die alle während der Zeitspanne Δt eintreten.

Beispiele:

1. Der Übergang $C_t^{k-2} \rightarrow C_{t+\Delta t}^k$ läßt sich aus zwei Änderungen während Δt "zusammensetzen": Es treffen zwei neue Forderungen ein während Δt , während die schon im System

befindlichen Forderungen während Δt dort auch verbleiben. Dieser Übergang findet aber zum Beispiel auch statt, wenn während Δt zehn neue Forderungen eintreffen, aber acht Bedienungen während Δt beendet werden usw.

2. Auch der Übergang $C_t^{k-1} \rightarrow C_{t+\Delta t}^k$ läßt sich nicht nur dadurch realisieren, daß eine neue Forderung während Δt eintrifft und die Bedienungen Δt überdauern, sondern zum Beispiel auch durch das Eintreffen von fünf neuen Forderungen und das Beenden von vier Bedienungen während Δt usw., d.h. durch mehrere Änderungen während Δt .

Nun beinhalten aber die Voraussetzungen über Eingangsstrom, Bedienungszeit und Bedienungsregime, etwas grob formuliert, die Aussage, daß die Wahrscheinlichkeit für Systemübergänge $C_t^i \rightarrow C_{t+\Delta t}^k$, die im obigen Sinne aus mehreren Änderungen "zusammengesetzt" sind (Eintreffen mehr als einer neuen Forderung während Δt bzw. mehrere Bedienungen beendet während Δt oder beides) lediglich eine Restfunktion $o(\Delta t)$ ist, die wir am Ende hinzufügen werden, ohne diese mannigfaltigen Übergangsmöglichkeiten noch zu berücksichtigen.

Damit reduziert sich die Anzahl der in Gleichung (1) auftretenden Summanden beträchtlich.

Wir brauchen nur folgende Übergangsmöglichkeiten zu berücksichtigen:

$$\begin{array}{ll} C_t^k \longrightarrow C_{t+\Delta t}^k & (\text{d.h. } i = k) \\ C_t^{k-1} \longrightarrow C_{t+\Delta t}^k & (\text{d.h. } i = k-1) \\ C_t^{k+1} \longrightarrow C_{t+\Delta t}^k & (\text{d.h. } i = k+1) \end{array}$$

und Gleichung (1) vereinfacht sich zu:

$$P(C_{t+\Delta t}^k) = P(C_{t+\Delta t}^k / C_t^k) P(C_t^k) + P(C_{t+\Delta t}^k / C_t^{k+1}) P(C_t^{k+1}) + \\ + P(C_{t+\Delta t}^k / C_t^{k-1}) P(C_t^{k-1}) + o(\Delta t) \quad \text{Gl. (2)}$$

Wir berechnen die auftretenden bedingten Wahrscheinlichkeiten: (1) $C_t^k \rightarrow C_{t+\Delta t}^k$ tritt ein, wenn während Δt im System keine Änderung erfolgt, d. h. wenn während Δt weder eine neue Forderung ankommt noch irgendeine der k laufenden Bedienungen beendet wird.

(Die anderen "zusammengesetzten" Möglichkeiten zur Realisierung dieses Übergangs $C_t^k \rightarrow C_{t+\Delta t}^k$ haben insgesamt nur die Wahrscheinlichkeit $o(\Delta t)$).

Daraus folgt:

$$P(C_{t+\Delta t}^k / C_t^k) = 1 - \lambda \Delta t - k \mu \Delta t - o(\Delta t)$$

(Welche Unabhängigkeitsaussagen ermöglichen diese Darstellung?)

(2) $C_t^{k+1} \rightarrow C_{t+\Delta t}^k$ erfolgt dann, wenn irgendeine der laufenden $k+1$ Bedienungen während Δt beendet wird (entweder die erste, oder die zweite, usw.).

Deshalb erhalten wir:

$$P(C_{t+\Delta t}^k / C_t^{k+1}) = P(1. \text{Bedienung während } \Delta t \text{ beendet}) + \\ + \dots + ((k+1). \text{Bedienung während } \Delta t \text{ beendet}) \\ = (k+1) P(\text{auf irgendeiner Leitung wird während } \Delta t \text{ Bedienung beendet}) \\ = (k+1)(\mu \Delta t + o(\Delta t))$$

(Man lege sich auch Rechenschaft über die benutzten Voraussetzungen bzgl. des Bedienungsregimes ab)

(3) $C_t^{k-1} \rightarrow C_{t+\Delta t}^k$ erfolgt dann, wenn während Δt eine

neue Forderung eintrifft. Deshalb gilt:

$$P(C_{t+\Delta t}^k / C_t^{k-1}) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

und wir erhalten durch Einsetzen in Gl.(2)

$$\begin{aligned} P(C_{t+\Delta t}^k) &= (1 - \lambda \Delta t - k\mu \Delta t)P(C_t^k) + (k+1)\mu \Delta t P(C_t^{k+1}) + \\ &\quad + \lambda \Delta t P(C_t^{k-1}) + o(\Delta t) \end{aligned} \quad \text{Gl.(3)}$$

Wir betrachten jetzt diese Wahrscheinlichkeiten als Funktion von t (k ist ein Parameter), und das wird betont durch die Schreibweise:

$$Q_k(t) := P(C_t^k)$$

Mit dieser Vereinbarung ergibt sich unter Benutzung von Gl.(3) folgender Ausdruck für den "Differenzenquotienten" von $Q_k(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{Q_k(t+\Delta t) - Q_k(t)}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} \{ Q_k(t)(-\Delta t - k\mu \Delta t) + Q_{k+1}(t)(k+1)\mu \Delta t \\ &\quad + Q_{k-1}(t)\lambda \Delta t + o(\Delta t) \} \\ &= (-\lambda - k\mu)Q_k(t) + (k+1)\mu Q_{k+1}(t) + \\ &\quad + \lambda Q_{k-1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \end{aligned} \quad \text{Gl.(4)}$$

Da wir wissen, daß nach Definition $\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$ gilt, können wir schließlich auf beiden Seiten der Gl.(4) den Grenzwert für $\Delta t \rightarrow 0$ bilden:

$$\begin{aligned} Q'_k(t) &= (-\lambda - k\mu)Q_k(t) + (k+1)\mu Q_{k+1}(t) + \lambda Q_{k-1}(t) \\ 0 &< k < n \end{aligned} \quad \text{Gl. (5)}$$

Analog leitet man für $k = n$ ab:

$$Q'_n(t) = -n\mu Q_n(t) + \lambda Q_{n-1}(t) \quad \text{Gl.(6)}$$

Das sind die gesuchten Bestimmungsgleichungen für

$Q_k(t)$. Es handelt sich um gewöhnliche Differentialgleichungen. Ihre Lösungen $Q_k(t)$ beschreiben die zeitliche Veränderung der gesuchten Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Systemzustände.

Viele technische und ökonomische Systeme (bzw. ihre mathematischen Modelle), die Zufallseinflüssen unterliegen, arbeiten nach folgendem Schema:

Der Inbetriebnahme schließt sich eine relativ kurze Zeit an, in der sich die Wahrscheinlichkeiten für die Systemzustände zeitlich ändern. Das ist die sogenannte Einschwingzeit. Nach dieser Periode jedoch erfolgt keine zeitliche Änderung dieser Wahrscheinlichkeiten mehr. Man sagt, das System hat sich in einen stationären Zustand eingeschwungen.

Diese Situation liegt auch bei uns vor. Deshalb beschränken wir uns auf die Diskussion dieses stationären Zustandes nach der Einschwingzeit. (Wir nehmen praktisch an, daß unser System schon so lange arbeitet, daß die Einschwingzeit vorüber ist.) Dann sind aber die Funktionen $Q_k(t)$ Konstanten Q_k und demzufolge $Q'_k(t) = 0$

$Q_k = P(\text{Im System befinden sich genau } k \text{ Forderungen zu irgendeinem beliebigen Zeitpunkt nach der Einschwingzeit})$

Damit erhalten wir aus Gl.(5) und Gl.(6) die Gl.(7) und Gl.(8)

$$0 = (-\lambda - k\mu)Q_k + (k+1)\mu Q_{k+1} + \lambda Q_{k-1} \quad \text{Gl.(7)}$$

$$0 < k < n$$

$$0 = -n\mu Q_n + \lambda Q_{n-1} \quad \text{Gl.(8)}$$

Dieses System linearer, algebraischer Gleichungen lösen wir durch Einführen einer neuen Unbekannten z_k :

$$z_k := \lambda Q_{k-1} - k\mu Q_k \quad (0 < k < n)$$

und Gleichung (7) geht über in Gleichung (9):

$$z_k - z_{k+1} = 0 \quad 0 < k < n \quad \text{Gl. (9)}$$

Die einzige Lösung, die dieses System hat, ist offenbar

$$z_k = 0 \quad 0 < k < n$$

Das bedeutet:

$$\lambda Q_{k-1} = k\mu Q_k \quad 0 < k < n$$

bzw.

$$Q_k = \frac{\lambda}{k\mu} Q_{k-1} \quad 0 < k < n$$

Daraus folgt:

$$Q_{k-1} = \frac{\lambda}{(k-1)\mu} Q_{k-2}, \quad Q_{k-2} = \frac{\lambda\mu}{(k-2)\mu} Q_{k-3}, \dots, Q_1 = \frac{\lambda}{\mu} Q_0$$

und durch sukzessives Einsetzen ergibt sich schließlich:

$$Q_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} Q_0 \quad 0 < k < n \quad \text{Gl. (10)}$$

Damit ist Q_k als Funktion von Q_0 dargestellt.

Q_0 kann aus den bisherigen Betrachtungen heraus nicht festgelegt werden. Wir benötigen dazu eine neue Gleichung.

Diese erhalten wir aber aus der Bedingung, daß die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Systemzustände gleich Eins sein muß:

$$\sum_{k=0}^n Q_k = 1$$

Also gilt (Benutzung von Gl. (10)):

$$\sum_{l=0}^n \frac{\lambda^l}{l! \mu^l} Q_0 = 1 \quad \text{oder}$$

$$Q_0 = \left(\sum_{l=0}^n \frac{\lambda^l}{l! \mu^l} \right)^{-1}$$

Wir setzen diesen Wert in Gl.(10) ein und erhalten die sog. Erlangschen Formeln

$$Q_k = \frac{\frac{\lambda^k}{k! \mu^k}}{\sum_{l=0}^n \frac{\lambda^l}{l! \mu^l}}$$

$$0 < k < n$$

Volker Stabenow
Forschungsstudent des Bereiches
Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik
Sektion Mathematik der FSU

Wir stellen vor:

Forschungsstudent Volker Stabenow

Volker Stabenow wurde 1945 in B u r o w bei Neubrandenburg geboren. In Ludwigslust (Bezirk Schwerin) besuchte er die Oberschule und legte dort 1963 sein Abitur ab.

Nach einem zweijährigem Studium in Halle begann er 1965 in Jena Mathematik zu studieren.

Er spezialisierte sich auf die Fachrichtung Wahrscheinlichkeitsrechnung-Mathematische Statistik und ist seit 1969 in diesem Bereich als Forschungsstudent tätig.

„Sommerpreisaufgaben“ 1971

1. Woran erkennt man, daß eine 69 nicht eine um 180° gedrehte 96 ist?
2. Um wieviel Tonnen würde sich die Masse der Erde vergrößern, baut man entlang des Äquators eine 1 m hohe und 1 m breite Mauer aus Stein mit der durchschnittlichen Dichte
- $$\rho_{\text{St}} = 1,5 \text{ kg/dm}^3$$
3. Man löse die Gleichungen, wobei gleiche Buchstaben gleiche Ziffern bedeuten:
- $$\begin{array}{rcl} \text{AAD} & - & \text{DA} = \text{BGA} \\ \text{H} \times \text{BC} & = & \text{EFB} \\ \hline \text{CB} + \text{AF} & = & \text{HE} \end{array}$$
4. Die sechs Zahlen der ersten Zeile sind nach einer festen Vorschrift gebildet worden. Wie groß ist X, wenn die zweite Zeile nach derselben Vorschrift gebildet wurde?
- $$\begin{array}{cccccc} 3 & 5 & 6 & 30 & 18 & 15 \\ 4 & 7 & 2 & 14 & X & 28 \end{array}$$
5. Man denke sich um den Äquator ein Seil gelegt. Man verlängere das Seil um einen Meter und lege es wiederum kreisförmig in gleichem Abstand von der Erdoberfläche. Frage: Kann eine Katze unter dem Seil hindurchkriechen?

Für die originellsten Lösungen werden von der Redaktion Bücher im Gesamtwert von 60,-- M bereitgestellt.

Studentenkonferenz der Sektion Mathematik

Am 22. April 1971 fand die diesjährige Studentenkonferenz unserer Sektion statt.

Der Direktor der Sektion, Prof. Dr. Walk, wünschte zunächst in seiner Begrüßungsansprache allen Teilnehmern der Tagung einen erfolgreichen Verlauf. Er gab gleichzeitig der Hoffnung Ausdruck, daß von dieser Zusammenkunft der aktivsten FDJ-Studenten Impulse für die Gestaltung eines integrierten Systems der Forschung, Ausbildung und Erziehung an unserer Sektion ausgehen mögen. Im Anschluß an seine kurzen Ausführungen überreichte er neun FDJ-Studenten das Abzeichen "Für Gutes Wissen " in Gold.

Die Diskussionsgrundlage zur anschließenden Aussprache gab Hans-Günter Koch (IV. Studienjahr Mathematik-Diplom) mit seinem Referat "Der schöpferische Beitrag der SED zur Gestaltung des entwickelten gesellschaftlichen Systems des Sozialismus".

Ausgehend von der führenden Rolle der Arbeiterklasse als der revolutionärsten Kraft und ihrer marxistisch-leninistischen Partei beim Aufbau des Sozialismus in der DDR entwickelte er die nächsten Aufgaben, die vor den Studenten und Wissenschaftlern in diesem Prozeß stehen: Die Weiterführung und Gestaltung der III. Hochschulreform. Das bedeutet, daß die Mitwirkung der Studenten bei der Bewältigung dieses Problemkreises zu einer breiten Massenbewegung werden muß. Im einzelnen leiten sich daraus für die FDJ und die staatliche Leitung ab

- das Bewußtsein für diese Massenbewegung zu entwickeln
- die Studenten zu höchsten Studienleistungen zu befähigen
- eine sozialistische Gestaltung des gesamten Studienprozesses zu erreichen.

Diese Ziele können natürlich nur unter der Mitwirkung aller

Studenten erreicht werden. Den Weg zur Erreichung skizzierte Hans-Günter Koch folgendermaßen:

- Verbesserung der ideologischen Arbeit, insbesondere der Vorbereitung und Durchführung der FDJ-Versammlungen und des FDJ-Studienjahres.
- Übertragung von Jugendobjekten an Studenten (z.Z. gibt es an unserer Sektion die Jugendobjekte "Wohnheim Neulobeda" und "Studienwerbung-Studienvorbereitung").
- Gemeinsame Planerfüllung durch Studenten und Lehrkörper.
- Kulturelle Betätigung der Studenten (z.B. Kulturpraktika, Besuch von kulturellen Veranstaltungen im Studentenkeller, Mitarbeit in Singeklubs).

Über diese Thesen wurde dann am Nachmittag in vier Arbeitskreisen diskutiert.

Als vorläufiges Ergebnis der diesjährigen Konferenz stellte am Abend der FDJ-Sekretär unserer Sektion, Gerald Schweinefleisch, fest, daß die Zielsetzung der Konferenz, "den Mitgliedern der Sektion einen Einblick in die gesellschaftlichen Aktivitäten der FDJ-Studenten zu geben, theoretische Einsichten in der Diskussion zu vermitteln und praktische Schlußfolgerungen für die weitere Arbeit abzuleiten" größtenteils erreicht wurde. Es hat sich im Verlauf der Diskussion gezeigt, daß die Studenten in der Lage sind, zur Klärung wesentlicher Probleme bei der Entwicklung der Sektion Mathematik beizutragen.

Die FDJ-Leitung ist der Auffassung, daß sich die Bereitschaft zur aktiven Auseinandersetzung mit Problemen der 3. HSR verstärkt hat.

So wurde in einem Arbeitskreis die Bildung einer vertikalen Studentengruppe zur Untersuchung der inhaltlichen Gestaltung des Berufspraktikums angeregt. Dabei wurden Forderungen nach einer genaueren Untersuchung der Rolle der Gesellschaftswissenschaften im Arbeitsprozeß der Diplommathematiker und des Einsatzes im Schwerpunktbetrieb VEB Carl Zeiß Jena gestellt.

Gerald Schweinefleisch stellte abschließend fest, daß man erst dann von einem wirklichen Erfolg unserer Studentenkonzferenz sprechen kann, wenn diese Initiativen auch in der praktischen Arbeit ihren Niederschlag finden.

Zusammenfassend kann die Studentenkonzferenz als würdiger Auftakt zur intensiven politischen Vorbereitung zum VIII. Parteitag gewertet werden.

Volker Kögel
Stellv. Chefredakteur der „Wurzel“

Anmerkungen der Redaktion

Aus Platzgründen war es uns leider nicht möglich, Lösungen der Aufgaben der X. DDR-Olympiade 1971 abzudrucken. Sollte ein größerer Leserkreis Interesse an einer derartigen Lösungssammlung haben, so bitten wir um Benachrichtigung und sind gern bereit, die Lösungen zu hektographieren und zu versenden.

Der angekündigte Artikel von Herrn Studienrat Kerber aus Neubrandenburg erscheint in unserem Septemberheft. Der Artikel wird vor allem die eigen-schöpferische Tätigkeit der Schüler auf mathematischem Gebiet behandeln.

Wir möchten alle Leser noch einmal daran erinnern, daß wir bei Abbestellung der "Wurzel" bis September benachrichtigt werden müssen. Ansonsten gilt das Abonnement automatisch als verlängert. Wir hoffen, mit dieser Regelung unserem ständigen Leserkreis entgegenzukommen.

Lösungen

(C 10) Man beweist zuerst mit vollständiger Induktion, daß es genau 9^k Zahlen z ohne die Ziffer 9 gibt, die der Ungleichung $a \cdot 10^k \leq z < (a+1) \cdot 10^k$ ($a = 1, 2, \dots, 8$) genügen.

1. Induktionsanfang: $k = 0$

Es gibt nur eine Zahl z mit $a \cdot 10^0 \leq z < (a+1) \cdot 10^0$, nämlich $z = a$. Nach Voraussetzung ist $a \neq 9$. Also gibt es 9^0 Zahlen z ohne 9 als Ziffer.

2. Induktionsschritt

Es gebe genau 9^n Zahlen z ohne Ziffer 9, die die Ungleichung

$$a \cdot 10^n \leq z < (a+1) \cdot 10^n$$

erfüllen.

In jeder solchen Zahl z gibt es aber genau 9 Zahlen $\bar{z}$ ohne Ziffer 9 mit

$$a \cdot 10^{n+1} \leq \bar{z} < (a+1) \cdot 10^{n+1},$$

indem man an eine Zahl z eine der Ziffern $0, 1, \dots, 8$ anhängt. Damit existieren genau $9 \cdot 9^n = 9^{n+1}$ Zahlen $\bar{z}$ ohne Ziffer 9, die der Ungleichung

$$a \cdot 10^{n+1} \leq \bar{z} < (a+1) \cdot 10^{n+1}$$

genügen.

Damit ergibt sich

$$\sum_{a \cdot 10^k \leq z < (a+1) \cdot 10^k} 1 \leq 9^k. \quad \frac{1}{a \cdot 10^k} = \frac{1}{a} \left(\frac{9}{10}\right)^k$$

z ohne Ziffer 9

Die gesuchte Summe ist dann

$$s = \sum_{a=1}^8 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a} \left(\frac{9}{10}\right)^k$$

$$\begin{aligned}
 s &= \sum_{a=1}^8 \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} \\
 &= 10 \cdot \sum_{a=1}^8 \frac{1}{a} \\
 &\leq 28
 \end{aligned}$$

(C 13)

Eingesandt von Bernd Kulicke, EOS Templin.

Es gilt die Ungleichung für nichtnegative reelle Zahlen $x_1, \dots, x_n$

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

wobei das Gleichzeichen genau dann richtig ist, wenn $x_1 = \dots = x_n$.

Dabei wird

$$1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{12}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{x_1}{5} + \frac{x_1}{5} + \frac{x_1}{5} + \frac{x_1}{5} + \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_2}{2} + x_3}{12} + \\
 &\quad + \frac{\frac{x_4}{4} + \frac{x_4}{4} + \frac{x_4}{4} + \frac{x_4}{4}}{12} \\
 &\geq \sqrt[12]{\frac{x_1^5}{5^5} \cdot \frac{x_2^2}{2^2} \cdot x_3 \cdot \frac{x_4^4}{4^4}}
 \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß

$$\sqrt[12]{\frac{x_1^5}{5^5} \cdot \frac{x_2^2}{2^2} \cdot x_3 \cdot \frac{x_4^4}{4^4}}$$

das Maximum 1 besitzt und dieses genau für

$$\frac{x_1}{5} = \frac{x_2}{2} = x_3 = \frac{x_4}{4},$$

also für $x_1 = 5$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 4$ annimmt.

Auf Grund der Monotonie der Wurzelfunktion muß auch das Produkt $x_1^5 \cdot x_2^2 \cdot x_3 \cdot x_4^4$ sein Maximum für

$x_1 = 5$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 4$ annehmen.

- (C 14) 1. zu zeigen: Wenn zwei zweistellige Relationen S_1 und S_2 auf einer nichtleeren Menge M die Eigenschaften Symmetrie und Transitivität besitzen, dann besitzt auch $S_3 = S_1 \cap S_2$ diese Eigenschaften.

Nachweis:

$$(S) \quad \forall x \forall y (xS_3y \rightarrow (xS_1y \wedge xS_2y))$$

$$\rightarrow (yS_1x \wedge yS_2x) \rightarrow yS_3x)$$

$$(T) \quad \forall x \forall y \forall z ((xS_3y \wedge yS_3z) \rightarrow (xS_1y \wedge xS_2y \\ \wedge yS_1z \wedge yS_2z) \rightarrow (xS_1y \wedge yS_1z \wedge xS_2y \wedge yS_2z) \\ \rightarrow (xS_1z \wedge xS_2z) \rightarrow xS_3z)$$

2. zu zeigen: Die Vereinigung zweier zweistelliger symmetrischer und transitiver Relationen S_1 und S_2 auf einer nichtleeren Menge M besitzt im allgemeinen nicht die Eigenschaften ihrer Teilmengen.

Zum Nachweis genügt hier ein Beispiel:

$$M = \{1, 2, 3\}$$

$$S_1 = \{[1, 1], [1, 2], [2, 1], [2, 2]\}$$

$$S_2 = \{[2, 2], [2, 3], [3, 2], [3, 3]\}$$

M ist nichtleere Menge, S_1 und S_2 besitzen die Eigenschaften (S) und (T), aber $S_1 \cup S_2$ erfüllt offensichtlich nicht (T), $[3, 1]$ bzw. $[1, 3]$ fehlen.

(C 19)

Es gilt

$|\cos x| < |\sin x|$ genau dann, wenn

$$\cos^2 x < \sin^2 x$$

Daraus folgt

$$\cos^2 x - \sin^2 x < 0 \quad \text{oder}$$

$$\cos 2x < 0$$

Die Funktion $f(z) = \cos z$ ist aber genau in den Intervallen

$$\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) \quad k \text{ ganzzahlig}$$

kleiner als Null. Damit ergibt sich

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{oder}$$

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

(C 32)

Es ist

$$28 = 4 \cdot 5 + 1 \cdot 8$$

$$29 = 1 \cdot 5 + 3 \cdot 8$$

$$30 = 6 \cdot 5 + 0 \cdot 8$$

$$31 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 8$$

$$32 = 0 \cdot 5 + 4 \cdot 8$$

Jede ganze Zahl $z > 32$ lässt sich aber in der Form

$$z = 5k + a \quad \text{mit } a \in \{28, 29, 30, 31, 32\}$$

schreiben und lässt sich damit als Linearkombination

$$z = 5l + 8p$$

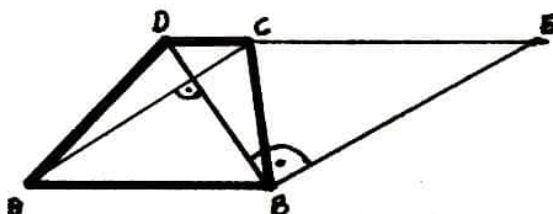
darstellen.

1. Lösung, eingesandt von Frank Müller, ABF Halle.

Es sei ABCD ein beliebiges Trapez, dessen Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.

($AB \parallel CD$ und $AC \perp BD$)

Die Parallele zu AC durch den Punkt B schneide die Gerade CD im Punkt E.



Das Viereck ABEC ist ein Parallelogramm, denn es gilt $AB \parallel CE$ und $AC \parallel BE$.

Daraus folgt:

$$\overline{AB} = \overline{CE} \quad (1)$$

$$\overline{AC} = \overline{BE} \quad (2)$$

und weiterhin

$$\overline{DE} = \overline{AB} + \overline{CD} \quad (3)$$

Das Dreieck BDE ist rechtwinklig, denn aus $\overline{AC} \parallel \overline{BE}$ und $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ folgt $\overline{BD} \perp \overline{BE}$ (Wechselwinkel).

Nach dem Satz des Pythagoras ist

$$\overline{DE}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{BD}^2.$$

Setzt man (2) und (3) in diese Gleichung ein, so erhält man

$$\underline{(\overline{AB} + \overline{CD})^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2.}$$

Das ist aber die Behauptung.

(C 20)

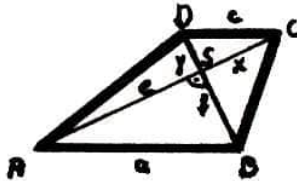
2. Lösung, eingesandt von Sonja Spredofsky,
EOS Wilhelm v. Humboldt, Nordhausen.

Voraussetzung: ABCD Trapez

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD}, \quad \overline{AC} \perp \overline{BD}$$

Behauptung: $e^2 + f^2 = (a + c)^2$

$$(e = \overline{AC}, f = \overline{BD}, a = \overline{AB}, c = \overline{CD})$$



Beweis: Es sei $x = \overline{SC}$, $y = \overline{SD}$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt im
Dreieck CDS:

$$x^2 + y^2 = c^2 \quad (1)$$

Nach dem Strahlensatz gilt:

$$a : c = (e - x) : x = (f - y) : y$$

Daraus folgt:

$$ax = c(e - x)$$

$$ax = ce - cx$$

$$x = \frac{ce}{a+c}$$

$$ay = c(f - y)$$

$$ay = cf - cy$$

$$y = \frac{cf}{a+c}$$

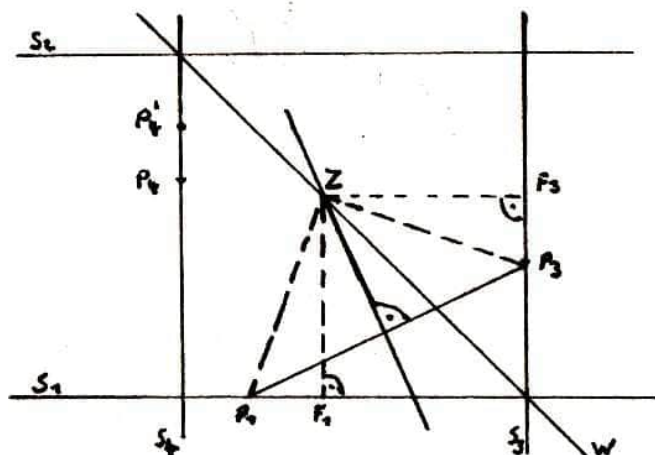
Diese Ausdrücke werden in (1) eingesetzt:

$$\left(\frac{ce}{a+c}\right)^2 + \left(\frac{cf}{a+c}\right)^2 = c^2$$

$$\underline{\underline{e^2 + f^2 = (a+c)^2}}$$

(C 26) Analyse: Die gegebenen Punkte seien $P_1, \dots, P_4$. Ein Quadrat mit den Seiten $s_1, \dots, s_4$ sei so konstruiert, daß P_1 auf $s_1, \dots, P_4$ auf s_4 liegt. Dieses Quadrat ist leicht konstruierbar, wenn ein weiterer Punkt auf einer der Quadratseiten angegeben werden kann, zum Beispiel P'_4 auf s_4 .

Wir versuchen deshalb, das Parallelenpaar s_1, s_2 so auf das Parallelenpaar s_3, s_4 abzubilden, daß P_1 auf P_3 und P_2 auf einen Punkt P'_4 von s_4 abgebildet wird.



Man überlege sich:

1. Eine solche Abbildung ist im allgemeinen keine Spiegelung.
2. Alle Drehungen, die s_1 auf s_3 und gleichzeitig s_2 auf s_4 abbilden, sind Drehungen um den Winkel $+90^\circ$ (orientierter Drehwinkel). Das Zentrum liegt dabei auf w , der Winkelhalbierenden von s_1, s_3 bzw. s_2, s_4 .

Diejenige Drehung, die außerdem P_1 auf P_3 abbildet, sei D_0 . Das Zentrum Z von D_0 ist durch den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zu $\overline{P_1P_3}$ mit w bestimmt. Wir behaupten nun:

$$D_0(P_2) = P'_4, \quad P'_4 \in s_4$$

Dazu müssen wir zeigen, daß D_0 eine Drehung um $+90^\circ$ ist.

Beweis: Es gelten die Beziehungen:

$$\overline{P_1Z} = \overline{P_3Z}, \quad \overline{F_1Z} = \overline{F_3Z}$$

$$\angle ZF_1P_1 = \angle ZF_3P_3 = 90^\circ$$

(F_1 und F_3 sind die Fußpunkte der Lote von Z auf s_1 bzw. s_3 .)

$$\text{Demnach gilt: } \triangle ZF_1P_1 \cong \triangle ZF_3P_3$$

$$\text{Aus } \angle F_1ZF_3 = +90^\circ \text{ folgt } \angle P_1ZP_3 = +90^\circ$$

D_0 ist also eine Drehung mit den Eigenschaften

$$D_0(P_1) = P_3$$

$$D_0(s_1) = s_3$$

$$D_0(s_2) = s_4$$

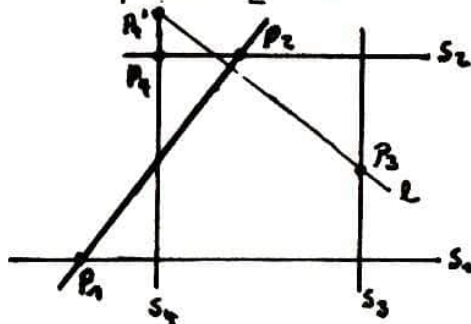
$$\angle PZD_0(P) = +90^\circ$$

$$\text{Daraus folgt: 1. } \overline{P_1P_2} = \overline{D_0(P_1)D_0(P_2)} = \overline{P_3P_4}$$

$$2. P_1P_2 \perp P_3P_4$$

Es ergibt sich die Konstruktion.

Konstr.: Auf die Gerade P_1P_2 wird von P_3 das Lot l gefällt. Auf l wird die Strecke $\overline{P_3P_4'} = \overline{P_1P_2}$ abgetragen. Aus der Geraden P_4P_4' ($\equiv s_4$) wird durch Parallelverschiebung s_3 , und durch Konstruktion der Lote s_1 und s_2 konstruiert. Der Beweis der Konstruktion wird geführt, indem man



eine Drehung D_0 mit dem Drehwinkel $+90^\circ$ angibt, die P_1 auf P_3 abbildet. Diese Drehung bildet auch das

Parallelenpaar s_1, s_2 auf s_3, s_4 ab. Da der Abstand erhalten bleibt und $s_1 \perp s_3$ und $s_2 \perp s_4$ gilt, bilden die Geraden $s_1, \dots, s_4$ ein Quadrat.

Diskussion: Die Aufgabe ist nur dann lösbar, wenn $P_4 \notin P_3 P_4'$ ist, sonst gäbe es zu $P_4 P_4'$

keine Parallele durch P_3 .

Falls jedoch $P_4' = P_4$ gilt, entstehen unendlich viele Lösungen.

(Die Gerade s_4 kann beliebig gezeichnet werden, nur der Fall $P_3 \in s_4$ ist ausgeschlossen.)

Die Aufgabe besitzt im allgemeinen zwei Lösungen, denn die Strecke $\overline{P_1 P_2}$ kann von P_3 aus in beiden Richtungen auf l abgetragen werden.

(C 22) Man substituiert zuerst $y = x - \frac{5}{2} a$ und erhält

$$(y - \frac{3}{2} a)(y - \frac{1}{2} a)(y + \frac{1}{2} a)(y + \frac{3}{2} a) = b^4 \quad \text{oder}$$

$$(y^2 - \frac{9}{4} a^2)(y^2 - \frac{1}{4} a^2) = b^4$$

$$y^4 - \frac{5}{2} a^2 y^2 + \frac{9}{16} a^4 - b^4 = 0$$

Damit ergeben sich die Lösungen

$$\begin{aligned} y_{1,2}^2 &= + \frac{5}{4} a^2 \pm \sqrt{\frac{25}{16} a^4 - \frac{9}{16} a^4 + b^4} \\ &= \frac{5}{4} a^2 \pm \sqrt{a^4 + b^4} \end{aligned}$$

Falls $|a| \geq \frac{2\sqrt{3}}{3} |b|$ gilt, ist $\frac{5}{4} a^2 \geq \sqrt{a^4 + b^4}$

und es ergeben sich 4 Lösungen für x

$$x_{1,2,3,4} = \frac{5}{2} a \pm \sqrt{\frac{5}{4} a^2 \pm \sqrt{a^4 + b^4}}$$

Falls $|a| < \frac{2\sqrt{3}}{3} |b|$ gibt es zwei reelle Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{5}{2} a \pm \sqrt{\frac{5}{2} a^2 + \sqrt{a^4 + b^4}}$$

(C 21) eingesandt von Barbara Dlubek, Berlin.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } [a+(b+c)]^n &= \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} a^{n-v} (b+c)^v \\ &= \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} a^{n-v} \cdot \sum_{k=0}^v \binom{v}{k} b^{v-k} c^k \end{aligned}$$

Daraus folgt für $P(x)$

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{v=0}^{20} \binom{20}{v} 1^{20-v} \cdot \sum_{k=0}^v \binom{v}{k} x^{5(v-k)} \cdot x^{7k} \\ &= \sum_{v=0}^{20} \binom{20}{v} \cdot \sum_{k=0}^v \binom{v}{k} x^{5v+2k} \end{aligned}$$

In $P(x)$ kommen also nur solche Potenzen von x vor, deren Exponenten sich in der Form $5v + 2k$ darstellen lassen.

Man muß also die diophantischen Gleichungen

$$5v + 2k = 17 \quad (1)$$

$$5v + 2k = 18 \quad (2)$$

lösen (mit $v, k \geq 0$ und $v \geq k$)

Die Gleichung (1) besitzt genau die Lösung $v = 3, k = 2$

während Gleichung (2) keine Lösung besitzt.

Damit ist der Koeffizient von x^{18} in $P(x)$ gleich 0, der Koeffizient von x^{17} ergibt sich zu

$$\binom{20}{3} \cdot \binom{3}{2} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3 = 3420.$$

„WURZEL“-Fußball aktuell:

Universitätsauswahl-Nationalmannschaft 3:10

Von unserem Sonderberichterstatter B. Kriesche

Zur Vorbereitung auf die grossen Aufgaben der EM- und Olympiaqualifikationsspiele testete am 28. April 1971 eine Auswahl unserer Universität die Fussballnationalmannschaft der DDR. In der Uni-Auswahl spielte auch der Chef des Aufgabenteils der "Wurzel", Reinhard Lorenz, mit. Als Verteidiger hatte er gute Chancen, und die Stars der Nationalmannschaft kamen an ihm nicht so leicht vorbei. Durch das laessige Spiel der Nationalmannschaft in der ersten Halbzeit konnten die Studenten recht gut mithalten und erreichten so einen Pausenstand von 2:2 .

Im zweiten Spielabschnitt musste dann Erich nur noch einmal den Ball aus den Maschen holen (vorangegangen war ein herrlicher Schraegschuss), der Torwart der Uni-Auswahl musste noch achtmal hinter sich greifen, (davon zwei Elfmeter, die diesmal ausnahmsweise nicht vorbeigingen!). Die Torflut der Kriesche, Stein, Dücke, Schlutter und Weise resultierte aus einem konzentrierteren Spiel der Nationalmannschaft und aus dem konditionellen Abbau der Studenten, die gegen hohe Eingaben in ihren Strafraum machtlos waren, besonders wenn der lange Sammer mit aufreuekte. So war das hohe Schlussresultat nicht verwunderlich. Die recht zahlreich erschienenen Zuschauer sahen jedenfalls ein interessantes Spiel, in dessen Verlauf unsere Nationalelf einige Proben ihres Koennens abgab, was beim letzten Spiel gegen Luxemburg in Oera schmerzlich vermisst wurde.

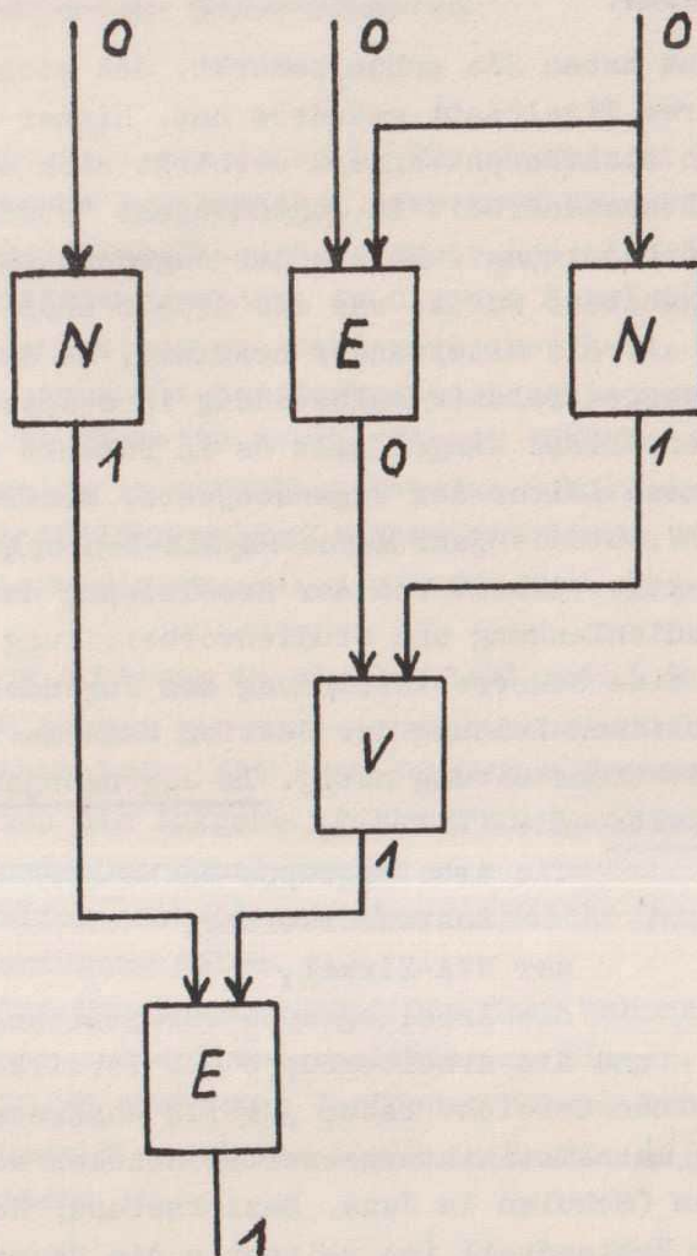
Herausgeber: Jugendobjekt „Studienwerbung-Studienvorbereitung“ der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Redaktion: Dipl.-Math. Karola Schimmel (Chefredakteur); V. Kögel, M. Wolf, R. Lorenz, H. Fischer

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

Anschrift: WURZEL
69 Jena
Helmholtzweg 1

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45



9/10

71

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
Jugendobjekt
Studienwerbung -
Studienvorbereitung
der Sektion Mathematik
an der Friedrich-Schiller-
Universität

Liebe Leser!

Vielleicht haben Sie schon bemerkt, daß sich der Aufdruck auf unserem Titelblatt geändert hat. Hinter diesem nach außen hin sichtbaren Vermerk verbirgt sich eine neue Qualität der Zusammenarbeit im Jugendobjekt "Studienwerbung - Studienzvorbereitung". Obwohl das Jugendobjekt schon im Vorjahr gebildet wurde, war die Arbeit eher durch ein Nebeneinander als ein Miteinander bestimmt, da die einzelnen Arbeitsgruppen relativ selbständig ihre speziellen Aufgaben lösten. Diese Mängel gilt es in Zukunft abzustellen, wie der neue Leiter des Jugendobjekts, Manfred Wolf (Student im IV. Studienjahr Mathe-Physik-Lehrer), betonte, um eine effektive Arbeit bei der Bewältigung der Studienwerbung, Studienlenkung und Studienzvorbereitung zu leisten. Dazu ist eine bessere Verbindung des Jugendobjekts sowohl zur staatlichen Leitung der Sektion Mathematik als auch zur FDJ-Sektionsleitung nötig. Im Jugendobjekt sind zusammengefaßt: die "Wurzel",

die Arbeitsgruppe Mathematiklager und
Bestenförderung,
der NVA-Zirkel,
die Arbeitsgruppe Vorbereitungsklassen
und die Arbeitsgruppe Schülerzirkel.

Die einzelnen Bereiche haben jeweils konkrete Aufgaben zur Förderung mathematikinteressierter Schüler auf den einzelnen Ebenen (Schulen in Jena, Bezirksebene, Republikebene). Zentraler Bestandteil ist weiterhin die "Wurzel", da sie den größten Wirkungsbereich hat. Das Redaktionskollektiv der "Wurzel" wird auch in Zukunft bemüht sein, durch interessante Beiträge fachlicher, gesellschaftlicher und kultureller Art einen breiten Leserkreis zu informieren. Wenn uns das gelingt, leisten wir einen entscheidenden Teil zur Lösung der vor unserem Jugendobjekt stehenden Aufgaben.

Volker Kögel

Chefredakteur der „Wurzel“

Schaltungen aus logischen Bauelementen

1. Vorbemerkung

Sicher haben fast alle von Ihnen im Physikkabinett bereits sogenannte "logische Bauelemente" oder auch "Bausteine für logische Schaltungen" kennengelernt. Das sind Kästchen mit verschiedenen Buchsen, in die man Kabel für Verbindungen der Elemente untereinander stecken kann. Wir wollen uns hier nicht mit der konkreten technischen Realisierung solcher Bauelemente beschäftigen, sondern mit ihrer Funktionsweise in zusammengesetzten Schaltungen. (Leser, die sich für den realen Aufbau aus Röhren oder Transistoren interessieren, seien auf das Buch [1] verwiesen.)

In dem Artikel "Einführung in die Schaltalgebra" in "Wurzel" 9/10/70 hatten wir eine Relaiskontaktschaltung für eine Wechselschaltung mit drei Schaltern konstruiert. Wir wollen uns nun die Aufgabe stellen, eine solche Schaltung aus logischen Bauelementen zu entwerfen. Dazu müssen wir natürlich erst einmal wissen, welche Bauelemente wir zur Verfügung haben.

Handelsüblich sind Bauelemente, die die drei Wahrheitswertfunktionen non, et und vel realisieren. (Leser, die die "Wurzel" 9/10/70 nicht zur Verfügung haben, können sich über Grundbegriffe aus der Logik z. B. in [1], [2], [3] informieren.)

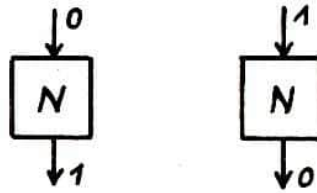
2. Logische Bauelemente

1. Das Bauelement, welches die Wahrheitswertfunktion "non" realisiert, hat genau einen Eingang (die Funktion "non" hängt von genau einer Variablen ab) und einen Ausgang (Eindeutigkeit der Wahrheitswertfunktion). Wir stellen dieses "Negationselement" durch ein Kästchen mit einer Eingangs- und einer Ausgangsleitung dar und kenn-



zeichnen es durch ein "N". Wir wollen weiter vereinbaren, daß wir die Ein-

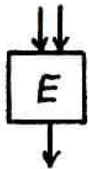
und Ausgänge (die ja bei der Wahrheitswertfunktion "non" W oder F (wahr oder falsch) sind) hier durch 0 oder 1 bezeichnen. Dann "negiert" also das Element N eine 0 am Eingang zu 1 am Ausgang und eine 1 am Eingang zu 0 am Ausgang.



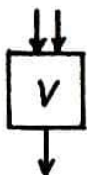
Eine Bemerkung für die Praktiker unter Ihnen:

Wenn wir hier von 0 oder 1 am Ein- oder Ausgang reden, so ist das natürlich auch wieder eine abstrakte Darstellung. Man kann sich $\{0,1\}$ etwa stellvertretend für Spannungen vorstellen, die einen vorgegebenen Wert unter- (0) oder überschreiten (1). Das Element N selbst könnte dann eine Triode sein (Eingang: negative Gitterspannung; Ausgang: Anodenspannung).

2. Ein weiteres Bauelement sei das Element "E", ein Element, welches die Wahrheitswertfunktion "et" realisiert, welches also zwei Eingänge und einen Ausgang hat (wieder belegbar jeweils durch 0 oder 1). Am Ausgang dieses Elements erscheint also genau dann 1, wenn beide Eingänge mit 1 belegt sind.



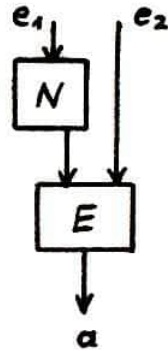
3. Als ein letztes Bauelement nehmen wir das Element "V" (von "vel") auf, das die Funktion "vel" realisiert. Am Ausgang dieses Elements erscheint dann 0, wenn beide Eingänge mit 0 belegt sind, also 1, wenn wenigstens an einem Eingang 1 liegt.



3. Schaltungen aus logischen Bauelementen

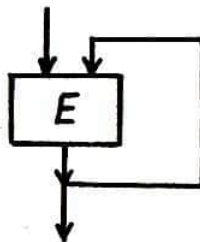
Unter Beachtung bestimmter Regeln und unter Hinzunahme gewisser Voraussetzungen können wir nun diese Elemente zu

Schaltungen verknüpfen. Stellen wir uns vor, wir hätten zwei Bauelemente N und E auf die untenstehende Weise verschaltet.

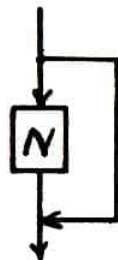


Falls der Impuls e_1 (kann 0 oder 1 sein) eine nicht zu vernachlässigende Zeit braucht, um in N umgeformt zu werden, e_1 und e_2 aber gleichzeitig kurzzeitig anlangen, so könnte es passieren, daß die beiden Eingänge für E nicht gleichzeitig eintreffen. Das wollen wir, um Komplikationen zu vermeiden, ausschließen. Wir legen also fest, daß N, E und V "verzögerungsfrei" arbeiten, das heißt, daß die Zeit für die "Abarbeitung" von Eingängen in den Bauelementen zu vernachlässigen ist.

Des weiteren wollen wir Rückkopplungen ausschließen. Um sich vom Sinn dieser Forderung zu überzeugen, betrachte man z. B. die folgende Schaltung:

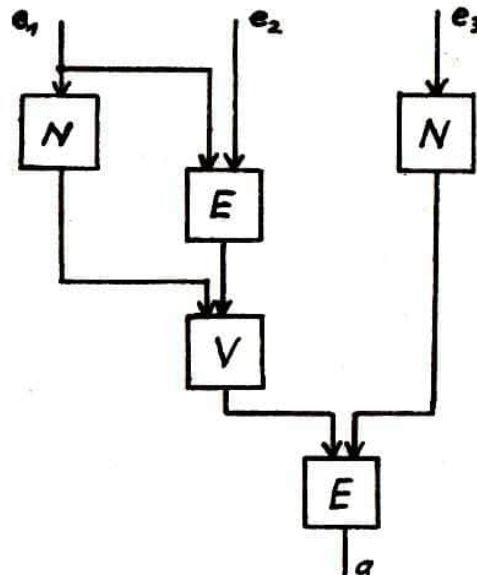


Als drittes legen wir fest, daß höchstens Abzweigungen, aber keine Zusammenführung von Leitungen gestattet ist. Was würde wohl sonst am Ausgang der folgenden Schaltung erscheinen?



Wir wollen uns nun überlegen, was solche Schaltungen leisten und wie zu einem gegebenen Problem eine Schaltung konstruiert werden kann, falls es überhaupt lösbar mit diesen Mitteln ist. Dabei werden wir gleichzeitig erkennen, zu welcher Klasse von Problemen es solche logischen Schaltungen gibt.

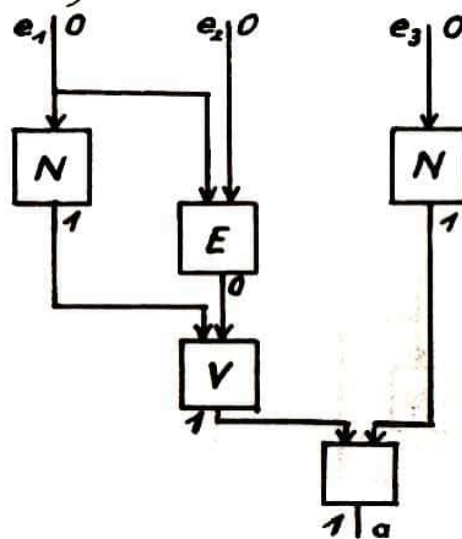
Betrachten wir das Beispiel (1):



Schaltung (1)

Um zu erkennen, was diese Schaltung leistet, könnten wir alle möglichen Belegungen der drei Eingänge e_1 , e_2 und e_3 mit 0 und 1 durchprüfen und den zugehörigen Ausgang errechnen. Dazu notieren wir hinter jedem Element die entsprechenden Werte, also z. B. für die Eingänge.

$e_1 = 0$, $e_2 = 0$, $e_3 = 0$:

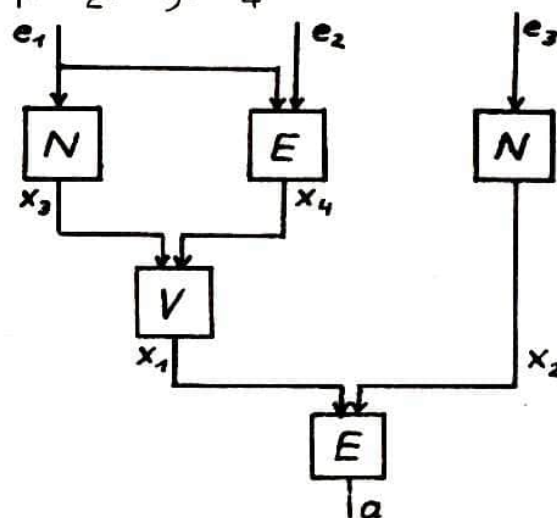


Zunächst ist klar, daß jede solcher Schaltungen eine BOOLE'sche Funktion realisiert (also eine eindeutige Abbildung von $\prod_1^3 \{0,1\}$ in $\{0,1\}$, vergl. "Wurzel" 9/10/70, Seite 139).

Um zu erfahren, welche BOOLE'sche Funktion in Beispiel (1) realisiert wird, könnten wir den Ausgang a für alle möglichen Belegungen der drei Eingänge mit 0 oder 1 prüfen (wie wir wissen, gibt es $2^3 = 8$ verschiedene Belegungen). Die Ergebnisse können wir tabellarisch festhalten:

e_1	e_2	e_3	a
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Dieses Verfahren ist natürlich etwas aufwendig. Wir überlegen uns also, daß wir ja aus der Schaltung direkt einen logischen Ausdruck, der die Schaltung beschreibt, ablesen können. Dazu bezeichnen wir die einzelnen "Leitungen" mit Hilfsgrößen x_1, x_2, x_3, x_4 .



Damit erkennen wir:

$a = \text{et}(x_1, x_2)$

$x_1 = \text{vel}(x_3, x_4)$

$x_2 = \text{non}(e_3)$

$x_3 = \text{non}(e_1)$

$x_4 = \text{et}(e_1, e_2)$

Einsetzen ergibt

$a = \text{et}(\text{vel}(\text{non}(e_1), \text{et}(e_1, e_2)), \text{non}(e_3))$.

Zu diesem logischen Ausdruck können wir die Tabelle sofort ausrechnen:

e_1	e_2	e_3	$\text{non}(e_1)$	$\text{et}(e_1, e_2)$	$\text{vel}(\text{non}(e_1), \text{et}(e_1, e_2))$	$\text{non}(e_3)$	a
0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	0	0

Wie können wir nun zu einer beliebigen BOOLE'schen Funktion, dargestellt durch ihre Tabelle, ein logisches Netz konstruieren, welches gerade die vorgegebene BOOLE'sche Funktion realisiert ?

Wir betrachten die Tabelle

e_1	e_2	e_3	a
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

und erkennen:

1. Wenn $e_1 = 0$, so stimmt a (ohne Beachtung von e_2) mit $\text{non}(e_3)$ überein, oder mit anderen Worten:
wenn $e_1 = 0$, so ist $a = 1$ genau dann, wenn $e_3 = 0$.
2. Wenn $e_1 = 1$, so ist $a = 1$ genau dann, wenn $e_2 = 1$ und $e_3 = 0$.

Daraus folgt:

$a = 1$ genau dann, wenn

$(e_1 = 0 \text{ und } e_3 = 0) \text{ oder } (e_1 = 1 \text{ und } (e_2 = 1 \text{ und } e_3 = 0))$.

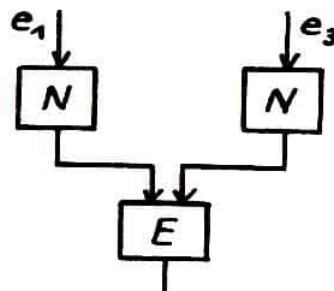
Aus dieser Beschreibung der Tabelle müssen wir nun einen logischen Ausdruck gewinnen. Dazu gehen wir (rein formal) von $e_1 = 1$ zu e_1 und von $e_1 = 0$ zu $\text{non}(e_1)$ über und schreiben an Stelle von "x und y" (bzw. "x oder y") $\text{et}(x,y)$ (bzw. $\text{vel}(x,y)$).

Dann erhalten wir:

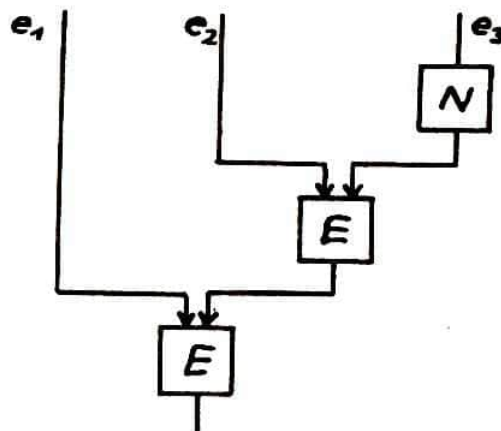
$a = \text{vel}(\text{et}(\text{non}(e_1), \text{non}(e_3)), \text{et}(e_1, \text{et}(e_2, \text{non}(e_3))))$.

Dazu können wir aber nun leicht eine Schaltung konstruieren:

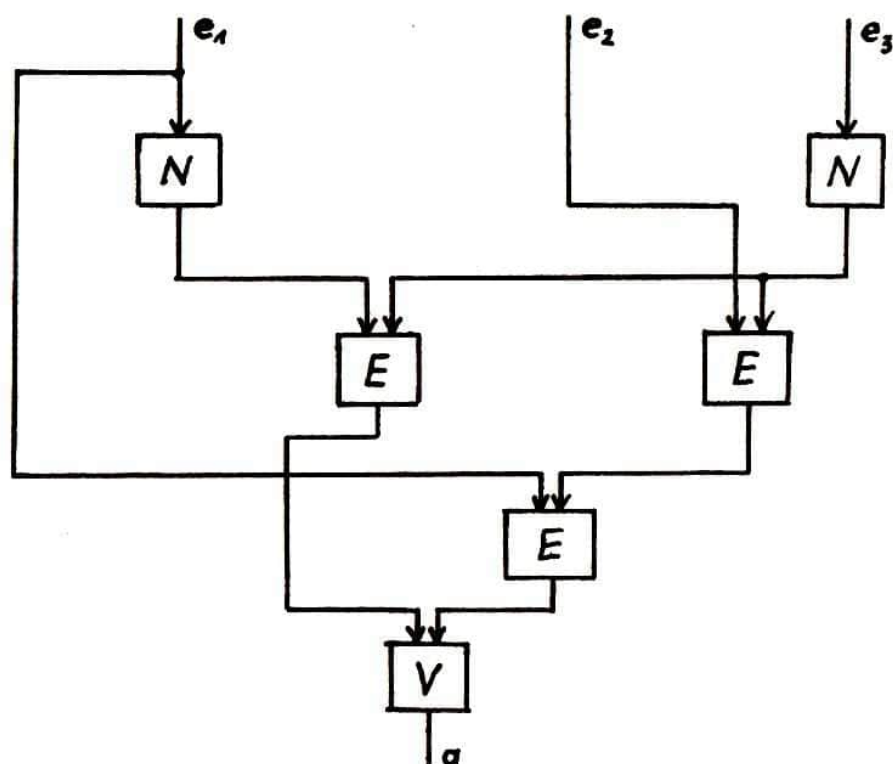
Dem Teilausdruck $\text{et}(\text{non}(e_1), \text{non}(e_3))$ entspricht die Schaltung



dem Teilausdruck $\text{et}(e_1, \text{et}(e_2, \text{non}(e_3)))$ die Schaltung



dem Gesamtausdruck also die Schaltung



Schaltung (2)

Nun sehen wir, daß diese Schaltung (2) sich von der Schaltung aus Beispiel (1) unterscheidet, obwohl beide die gleiche BOOLE'sche Funktion realisieren; das ist aber nicht verwunderlich, denn es gibt ja verschiedene Möglichkeiten, die die BOOLE'sche Funktion definierende Tabelle in einem logischen Ausdruck zu beschreiben.

Lösen wir nun endlich unsere eingangs gestellte Aufgabe und betrachten unsere Wechselschaltung für drei Schalter. Die Tabelle (vergl. "Wurzel" 9/10/70, Seite 144) ist

e_1	e_2	e_3	a
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Wir suchen also

1. einen logischen Ausdruck, dessen Wahrheitstabelle gerade die vorgegebene ist, und
2. zu diesem logischen Ausdruck die Schaltung.

Aus der Tabelle lesen wir ab:

$a = 1$ genau dann, wenn

$(e_1 = 0 \text{ und } e_2 = 0 \text{ und } e_3 = 1)$
oder $(e_1 = 0 \text{ und } e_2 = 1 \text{ und } e_3 = 0)$
oder $(e_1 = 1 \text{ und } e_2 = 0 \text{ und } e_3 = 0)$
oder $(e_1 = 1 \text{ und } e_2 = 1 \text{ und } e_3 = 1)$

daraus folgt:

$a = \text{vel} \{ \text{vel} [\text{et} \langle \text{non}(e_1), \text{et} \langle \text{non}(e_2), e_3 \rangle \rangle ,$
 $\text{et} \langle \text{non}(e_1), \text{et} \langle e_2, \text{non}(e_3) \rangle \rangle],$
 $\text{vel} [\text{et} \langle e_1, \text{et} \langle \text{non}(e_2), \text{non}(e_3) \rangle \rangle , \text{et} \langle e_1, \text{et}(e_2, e_3) \rangle \rangle] \}$

(Die verschiedenen Klammern wurden zur besseren Unterscheidung gesetzt.)

Dieser Ausdruck ist allerdings recht lang und unübersichtlich. Ungeachtet dessen könnten wir dazu sofort die Schaltung aufmalen.

Wir werden jedoch versuchen, aus der Tabelle einen einfacheren Ausdruck abzulesen, z. B.

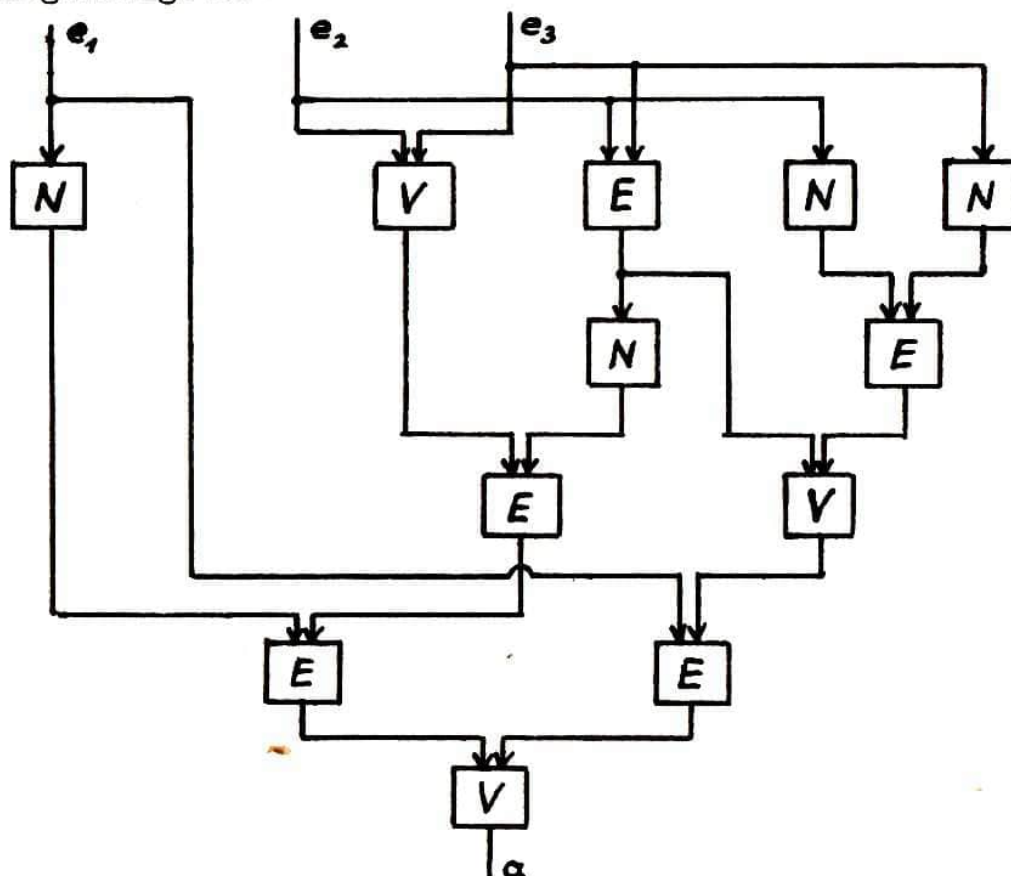
$a = 1$ genau dann, wenn

$[e_1 = 0 \text{ und } (e_2 = 1 \text{ oder } e_3 = 1) \text{ und nicht}$
 $(e_2 = 1 \text{ und } e_3 = 1)] \text{ oder}$
 $[e_1 = 1 \text{ und } ((e_2 = 0 \text{ und } e_3 = 0) \text{ oder } (e_2 = 1 \text{ und } e_3 = 1))]$

Der zugehörige logische Ausdruck wäre dann

$a = \text{vel} [\text{et} (\text{non}(e_1), \text{et} (\text{vel}(e_2, e_3), \text{non}(\text{et}(e_2, e_3)))),$
 $\text{et}(e_1, \text{vel}(\text{et}, (\text{non}(e_2), \text{non}(e_3)), \text{et}(e_2, e_3)))] .$

Das zugehörige Netz:



Zum Abschluß dieser kleinen Betrachtung möchten wir unseren Lesern noch eine Anregung geben:

1. Gesucht ist eine Schaltung für ein Gerät, welches vierstellige Dualzahlen addiert und welches aus logischen Bauelementen zusammengeschaltet werden soll.
(Hinweis: Beim Aufstellen der Tabelle beachte man den Übertrag!)
2. Gesucht ist ein Gerät, welches Ziffern in vierstellige Dualzahlen (Tetradendarstellung) umformt (codiert), d.h. es gilt die folgende Zuordnung:

Ziffer	Tetradendarstellung (die einzelnen Stellen haben die Bedeutung $2^3, 2^2, 2^1, 2^0$)
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100

5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

(Man stelle sich z. B. ein Gerät mit einem Tastensatz mit den Tasten 0,1,...,9 vor, welches vier Ausgänge (die vier Stellen der entsprechenden Dualzahl) besitzt.)

3. Gesucht ist ein Decoder, der also Dualzahlen wieder in Ziffern umwandelt!

4. Durch Zusammenschaltung der Geräte 1.,2.,3. (eventuell mehrstellig ausgelegt) erhält man eine kleine Addiermaschine.

(Man beachte, daß man beim Addieren vierstelliger Dualzahlen nicht immer eine vierstellige Dualzahl erhält, daß man also, um wieder zur Tetradendarstellung zu gelangen, ein weiteres Gerät konstruieren muß.)

Klaus Fischer

Wissenschaftlicher Assistent

Bereich Kybernetik der Sektion Mathematik

Literatur:

- [1] Kobrinski/Trachtenbrot:
"Einführung in die Theorie endlicher Automaten"
Berlin 67, Kapitel III.
- [2] M. Hasse:
"Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik"
Leipzig 67
- [3] Segeth:
"Elementare Logik"
Berlin 66

Preisaufgaben (Serie 9/10/71)

(C 37) Man bestimme alle zweistelligen Zahlen z , deren Quersumme mit den Quersummen der Zahlen $2z, 3z, 4z, \dots, 9z$ übereinstimmt.

(C 38) Man zeige, daß für reelle Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ stets gilt: Aus $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ folgt
 $a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_1 a_n + a_2 a_3 + a_2 a_4 + \dots + a_2 a_n + \dots + a_{n-1} a_n \leq 0$.

(C 39) Gegeben seien drei Punkte A, B, C auf einer Geraden und ein Punkt O außerhalb von ihr. O_1, O_2, O_3 seien die Umkreismittelpunkte der Dreiecke $\triangle ABO, \triangle ACO$ und $\triangle BCO$. Man beweise, daß die Punkte O, O_1, O_2, O_3 auf einem Kreis liegen.

(C 40) Auf einem beliebigen Feld Q eines unendlichen Schachbrettes stehe ein "n-Springer", d.h. eine Figur, deren Zug aus einer Bewegung um n Felder auf der Horizontalen und ein Feld auf der Vertikalen (oder umgekehrt) besteht.
Für welche n kann der "n-Springer" von Q aus jedes gegebene Feld erreichen und für welche n ist das nicht möglich?

(C 41) Man konstruiere eine Schaltung, die Grundlage für das in Aufgabe 2 auf Seite 140 beschriebene Gerät ist.

(C 42) Man gebe alle natürlichen Zahlen an, die, mit 999 999 999 multipliziert, ein Produkt ergeben, daß ausschließlich aus Einsen besteht.!

Für jeden vollständigen Lösungsweg einer Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für zehn Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender zehn Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Aus-

schluß des Rechtsweges).

Falls ein Besitzer von zehn Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum 10. des folgenden Monats (Datum des Poststempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preis-aufgaben" an unsere Adresse einzuschicken.

Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden.

Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

Ein Mitarbeiter unseres Jugendobjekts, Werner Nagel, Student im 2. Studienjahr, berichtet für uns vom



FDJ-Studentensommer, Jena-Minsk '71

Vier Wochen Arbeit, zwei Wochen Erholung - sechs Wochen lang täglich neue Eindrücke, sechs Wochen lang Erlebnis der bjelorussischen Gastfreundschaft, sechstausend Kilometer unterwegs - das war unser Aufenthalt in der Sowjetunion.

Die FDJ-Studentenbrigade der Friedrich-Schiller-Universität, die hauptsächlich aus Studenten unserer Sektion Mathematik bestand, fuhr Anfang Juli in Richtung Minsk ab. Die Stimmung war mindestens so gut, wie die Koffer und Taschen schwer waren.

Kaum in der Hauptstadt Bjelorußlands angekommen, begann unser umfangreiches Programm: Begrüßung, Frühstück, Empfang und Rundgang durch die Universität, Mittagessen, Stadtführung. Beeindruckend ist in Minsk die großzügige Anlage des Straßensystems und des gesamten Stadtbildes. Der Leninprospekt, die Magistrale der Hauptstadt, auf der der Verkehr sechsspurig fließt, ist elf km lang. Das riesige Regierungsgebäude, die Universität, das Kaufhaus GUM, der Zirkus, der Platz des Sieges mit einem monumentalen Denkmal, die Techni-

sche Hochschule sind die wichtigsten Stationen an diesem Prospekt. Dazwischen immerwieder Parks und Grünanlagen. Wir sahen auch das Haus, in dem der erste Parteitag der KP Bjelorußlands stattfand. Bei der Besichtigung der "Ausstellung der Erfolge der bjelorussischen Wirtschaft" bekamen wir einen Überblick über die Rohstoffgewinnung (Erdöl, Kali), die Landwirtschaft und die Industrie dieser Sowjetrepublik. Wer nach dem noch nicht völlig erschöpft war, bummelte abends noch durch Minsk. Bereits an diesem ersten Tag schlossen wir Bekanntschaften mit sowjetischen Jugendlichen, was durch das noch stockende Ausprobieren der russischen Sprache zwar behindert, durch den ersten Wodka jedoch beflügelt wurde.

Am nächsten Tag fuhren wir per Bus 150 km in Richtung Süden nach Saligorsk - die Stadt der drei großen Kalikombinate. Ehe vor 13 Jahren mit dem Bau dieses Ortes begonnen wurde, war hier nichts als Steppe. Und fast genauso jung wie die Häuser sind die meisten ihrer Einwohner. So fiel es uns auch gar nicht schwer, mit vielen Menschen Kontakt zu finden. Bei den allabendlichen Tanzveranstaltungen und bei den Veranstaltungen im Kulturpalast der Stadt fanden wir schnell Freunde und mußten sehr viele Fragen beantworten. Oft haben wir uns darüber geärgert, nicht besser Russisch zu beherrschen, weil uns dadurch einiges Interessante entgangen ist.

Zur Arbeit wurden wir täglich 25 km mit dem Bus gefahren. Wir hatten ein Rübensilo zu betonieren und einen Kuhstall zu bauen. Die Arbeit war - besonders durch die große Hitze und Trockenheit bedingt - nicht immer leicht. Da fast überall in der Sowjetunion gebaut wird und im Sommer die Ernte auch noch große Konzentration erfordert, gab es hin und wieder Schwierigkeiten mit der Werkzeugbeschaffung und der Arbeitsorganisation. Aber es gelang uns immer wieder, gemeinsam mit der Komsomolgruppe, mit der wir zusammenarbeiteten, diese Mängel zu überwinden und die Arbeit mit guter Qualität und Normerfüllung durchzuführen.

An einem Wochenende besuchten wir einen Kolchos, wo nach

einem Fußballspiel ein großes Festessen und -trinken stattfand; an einem anderen Sonntag fuhren wir in den Kurort Neswisch im Südwesten Bjelorußlands. Ein Erlebnis für uns alle war die Einfahrt in einen 420 m tiefen Schacht des Kalibergwerkes.

Nach der vierwöchigen Arbeitszeit reisten wir um einige 100 Abzeichen erleichtert, mit Geschenken beladen und um wertvolle Erfahrungen reicher wieder ab. Für viele war es kein leichter Abschied von den Freunden, die wir dort gefunden hatten. Aber wir sahen auch mit Freude der Erholungszeit entgegen, in der wir - nach kurzem Zwischenaufenthalt in Minsk - zuerst nach Riga flogen. Die Hauptstadt der lettischen Sowjetrepublik ist reich an Baudenkmälern, und es fiel uns nicht leicht, in den wenigen Tagen unseres Aufenthalts wenigstens einen Überblick zu bekommen. Einen sehr starken Eindruck hinterließ bei uns das Mahnmal eines ehemaligen deutschen Konzentrationslagers, das von sowjetischen Architekten sehr wirkungsvoll gestaltet wurde.

Schon nach viel zu kurzer Zeit verließen wir Riga wieder in Richtung Süden und hatten Gelegenheit, ein paar Stunden die alte Hauptstadt Litauens - Vilnius - zu besichtigen. Wir waren damit auf unserer Reise bereits in der dritten Sowjetrepublik. Das heißt, wir hörten wieder eine andere Sprache, erlebten ein anderes Volk, eine andere Atmosphäre. Es ist sehr interessant, die unterschiedlichen Völker, ihre Sitten und Gebräuche kennenzulernen und dabei zu wissen, daß sie unter der Sowjetmacht einen gemeinsamen Weg gehen.

Im Erholungszentrum der Minsker Universität am Narotschsee konnten wir uns dann fast eine Woche lang wunderbar erholen und beginnen, unsere Reiseimpressionen zu ordnen. Und auch hier gab es viele persönliche Begegnungen mit sowjetischen Studenten bei Sport, Diskussionen, Gesprächen, Erholung. Leider mußten wir auch von dem See bald Abschied nehmen: die letzte Etappe unserer Reise begann. Unweit von Minsk befinden sich das Denkmal der großen Kesselschlacht bei Minsk, bei der die deutsche Armee im II. Weltkrieg eine

Niederlage erlitt, und die Denkmalsanlage des Partisanendorfes Chatyn, das von den Faschisten völlig zerstört wurde. An diesen historischen Stätten erhielten wir einen Eindruck vom Leid, das die bjelorussische Bevölkerung im Krieg zu ertragen hatte, und von dem Heldenmut und Kampfesgeist dieses Volkes. Die intensive Traditionspflege ist ein wichtiger Bestandteil der Erziehung der sowjetischen Jugend.

Der alles krönende Abschluß unseres Aufenthalts war ein sehr großzügiges Bankett im Minsker Intourist-Hotel. An einer mit Früchten, Wodka, Sekt, Kaviar und anderen sowjetischen Spezialitäten beladenen Tafel wurde Abschied genommen. Immer wieder wurden Toasts auf die Freundschaft, die Zusammenarbeit in Vergangenheit und Zukunft ausgesprochen.

Unser Besuch in der Sowjetunion bewirkte bei vielen Teilnehmern ein wichtiges Stück Persönlichkeitsentwicklung. Wir hatten die Möglichkeit, uns in einem relativ langen Zeitraum mit dem Leben und der Arbeit der sowjetischen Menschen bekannt zu machen.

So war für uns die Mitarbeit eine sehr wertvolle und nützliche Sache. Wenn ich persönlich bis jetzt auch noch nicht alle Eindrücke verarbeiten konnte, so empfehle ich doch jedem, in die Sowjetunion zu reisen - es lohnt sich bestimmt!

Terminverschiebung

Leider war es uns nicht möglich, das für September geplante Sonderheft (siehe Nr.6/71) über das Berufsbild eines Diplommathematikers rechtzeitig herauszugeben. Auf Grund einer Überarbeitung des Manuskripts an unserer Sektion verzögert sich der Druck bis Ende des Jahres. Leser, die das Sonderheft bestellt haben, erhalten es sofort nach Fertigstellung. Nachbestellungen sind noch möglich.

Die Redaktion

Nachfolgend veröffentlichen wir eine Zuschrift von Studienrat H. J. Kerber, dem Leiter des Bezirksklubs Junger Mathematiker Neubrandenburg. Darin greift er eine von uns schon vor längerer Zeit unterbreitete Idee auf, in der wir die Zusendung von Eigenaufgaben anregten. In dem Brief heißt es unter anderem:

"Eine wichtige Seite bei der Herausbildung allseitig entwickelter sozialistischer Schülerpersönlichkeiten ist die Erziehung zum selbständig-schöpferischen Arbeiten. Sicher müssen viele mathematische Probleme, speziell wie sie auf den Olympiaden gestellt werden, im hohen Grade selbständig-schöpferisch bearbeitet werden. Kenntnisse und Fertigkeiten sind notwendige Voraussetzungen zum Lösen der Probleme. Ideenreichtum entwickelt sich aber erst, wenn man mit seinen Kenntnissen und Fertigkeiten bewußt nach eigenen Wegen sucht.

Von diesen Gedanken geleitet, beauftragte das Bezirkskomitee für Mathematikolympiaden des Bezirkes Neubrandenburg alle Teilnehmer von Bezirksmathematikolympiaden und zentralen Mathematiklehrgängen, sich mit speziellen mathematischen Problemen eingehend zu beschäftigen und - wie aus den Aufgaben von Mathematikolympiaden bekannt - nach neuen Problemen, Sätzen, Aussagen zu suchen, sie aufzustellen und zu lösen.

Diese Aufträge sind den Jungen Mathematikern des Bezirkes Neubrandenburg unter dem Begriff "Eigenaufgaben" bekannt. Im Laufe von zwei Jahren wurden bisher fast 200 Eigenaufgaben von Schülern der Klassen 6 bis 12 eingesandt, von denen ca. 100 mit gut bzw. sehr gut bewertet werden konnten.

Wer einmal die "Entdecker-oder Erfinderfreude" erlebt hat, wird immer wieder Zeit finden, um nach neuen Eigenaufgaben zu suchen. Es ist offensichtlich, daß diese Art der Selbstbeschäftigung auch für den Verfasser von großem Nutzen ist.

In "Wurzel" 1/68, Seite 2 heißt es in einem redaktionellen Artikel: "Wir sind ... für Einsendungen von interessanten Aufgaben (zur evtl. Veröffentlichung) ... sehr dankbar." ,

und in 1/70 wird mitgeteilt, daß für eingesandte Aufgaben (wenn sie in der "Wurzel" als Preisaufgaben veröffentlicht werden) Wertpunkte vergeben werden. Ich möchte an dieser Stelle alle Wurzel-Leser auffordern, Eigenaufgaben zu erarbeiten und einzusenden, und ich bin überzeugt, daß die Verfasser Freude daran finden werden. Es wäre doch erfreulich, wenn sich die Wurzel-Redaktion veranlaßt fühlen müßte, auf Grund der zahlreichen Zusendungen eigens eine Eigenaufgabenseite einzurichten. Der Nutzen läge nicht nur bei Redaktion und Leser."

Wir schließen uns dieser Aufforderung an und veröffentlichen in diesem Heft erstmals drei Einsendungen Neubrandenburger Schüler mit der Hoffnung, daß uns bald noch mehr solcher Aufgaben erreichen. Jede Eigenaufgabe (die uns mit Lösung zugesandt werden muß), die in der "Wurzel" erscheint, wird mit einem Punkt bewertet, der zu den Wertpunkten der Preisaufgaben hinzukommt.

Falls diese Form der selbsttätigen schöpferischen Arbeit Anklang findet, werden in Zukunft regelmäßig Eigenaufgaben erscheinen. Eventuell werden wir Eigenaufgaben als Preisaufgaben stellen (an deren Lösung sich der Einsender dann natürlich nicht beteiligen kann).

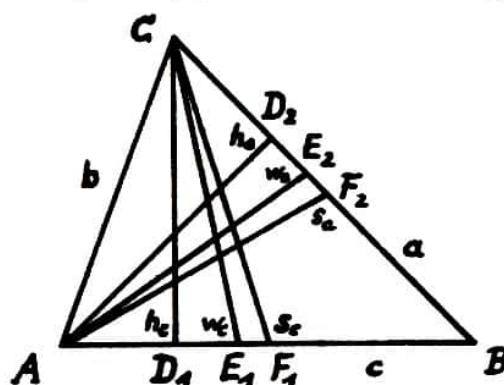
Und hier die von uns ausgewählten Eigenaufgaben, bei deren Lösung wir viel Erfolg wünschen:

(E 1) Martin Sprossman, EOS Prenzlau, Klasse 10

Jede natürliche Zahl n ($n \geq 1000$) kann durch $1000a + b$ (a, b natürliche Zahlen, $a > 0$, $0 \leq b \leq 999$) ausgedrückt werden.

Für welche natürliche Zahl a gilt

$$a = \sqrt[3]{1000a + b} \quad ?$$



Es sei ABC ein beliebiges spitzwinkliges, nicht gleichschenkliges Dreieck. D_1 sei der Fußpunkt von h_c , D_2 der Fußpunkt von h_a und D_3 der Fußpunkt der Höhe h_b . Weiter sei E_1 der Schnittpunkt von c mit w_c , E_2 der Schnittpunkt von a mit w_a und E_3 der Schnittpunkt von b mit w_b .

F_1 sei der Schnittpunkt von c mit s_c , F_2 der Schnittpunkt von a mit s_a und F_3 der Schnittpunkt von b mit s_b .

Man beweise, daß, wenn $\overline{D_1E_1} = x_1$, $\overline{D_2E_2} = x_2$ und $\overline{D_3E_3} = x_3$, $\overline{E_1F_1} = y_1$, $\overline{E_2F_2} = y_2$, $\overline{E_3F_3} = y_3$ ist, stets gilt:

$$\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3} = \frac{U}{r}^2$$

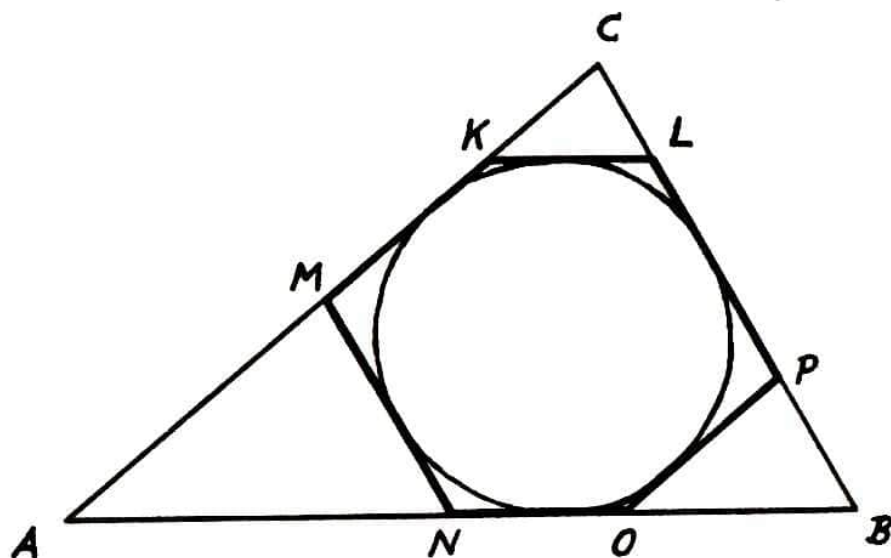
(Wobei U der Umfang des Dreiecks und r der Umkreisradius ist.)

(E 3) Peter Wegner, EOS Neubrandenburg, Klasse 9

Im Dreieck ABC (Skizze siehe nächste Seite!) seien die parallelen Tangenten $\overline{KL}$, $\overline{MN}$, $\overline{OP}$ zu $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AC}$ an den Inkreis des Dreiecks gezeichnet. Es entsteht das Tangentensechseck $KLMNOP$.

a) Man beweise, daß im Tangentensechseck $KLMNOP$ die gegenüberliegenden Winkel gleich groß sind!

- b) Man berechne die sechs Seiten des Sechsecks, wenn die Dreieckseiten gegeben sind!



Sommerpreisaufgaben 1971

Durch das warme Wetter bedingt, erhielten wir nicht allzuvielle Lösungen unserer kleinen Sommerknobelei aus Heft 7/8/71.

Als Erschwernis hatten wir bei der dritten Aufgabe noch einige Rechenzeichen "vergessen", die aber von den meisten richtig eingesetzt wurden. Im Prinzip wurden alle Aufgaben richtig gelöst, lediglich die Drehung der 96 um 180° und der Bau der Mauer entlang des Äquators bereiteten Schwierigkeiten. Aber die riesige Menge Baumaterial dafür von einem anderen Planeten zu holen, ist in absehbarer Zeit trotz der Erfolge der Raumfahrt unmöglich, so daß die Masse der Erde noch einige Zeit konstant bleibt.

Aus den uns eingegangenen Lösungen zog unser Loser vom Dienst unter Ausschluß des Rechtsweges die folgenden drei Gewinner, die sicher bereits ihr Buch erhalten haben:

Norbert Samland	205	Teterow
Rita Sproßmann	2131	Damme
Rüdiger Nützman	2031	Trittelwitz

GEWINNER

Das Mathematik - Spezialistenlager 1971

In der Zeit vom 5. 7. - 16. 7. 1971 fand das Mathematik - Spezialistenlager des Bezirkes Gera wie bereits im vorigen Jahr in Lobenstein statt. Es nahmen Schüler der jetzigen 8. - 12. Klassen teil, die wiederum von Assistenten und Studenten unserer Sektion betreut wurden. Die Schüler der 8. Klasse wurden unterrichtet in Mengenlehre, Elementargeometrie und "unterhaltsamer" Mathematik. Sie lernten im Fach Mengenlehre den Begriff einer Menge, die grundsätzlichen Operationen sowie Grundbegriffe der Relationen kennen. Im Fach Elementargeometrie wurden einfache Konstruktionsaufgaben behandelt und geometrische Sätze bewiesen, während im Fach "unterhaltsame" Mathematik Knobelaufgaben oder die verschiedensten der Praxis entnommenen Aufgaben nach ihrem mathematischen Hintergrund untersucht wurden.

In der 9. und 10. Klasse wurden Zahlentheorie und Kombinatorik behandelt, selbstverständlich in der 10. Klasse mit größerem Schwierigkeitsgrad, weiterhin wurde die 9. Klasse unterrichtet in Gruppentheorie und die 10. Klasse hörte etwas über lineare Gleichungssysteme.

Die 11. Klasse beschäftigte sich mit Kybernetik, Verbandstheorie und Numerik, während die 12. Klasse Höhere Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung und endliche affine und projektive Ebenen kennenlernte. Außerdem wurde in jeder Klassenstufe noch ein Aufgabentraining durchgeführt; die Schüler beschäftigten sich dabei mit Olympiadeaufgaben und erhielten Hinweise für die Lösung von Aufgaben ähnlichen Typs.

Die abschließende Lagerolympiade, in der Aufgaben über alle unterrichteten Fächer gestellt wurden, bestätigte, daß sich fast alle Schüler sehr intensiv mit dem behandelten Stoff auseinandersetzten.

Während der Lagerzeit beschäftigte man sich aber nicht nur mit Mathematik. Die sehr hohen Lufttemperaturen im Verlaufe dieser zwölf Tage waren oftmals nur im Waldbad zu ertragen,

das sehr häufig besucht wurde.

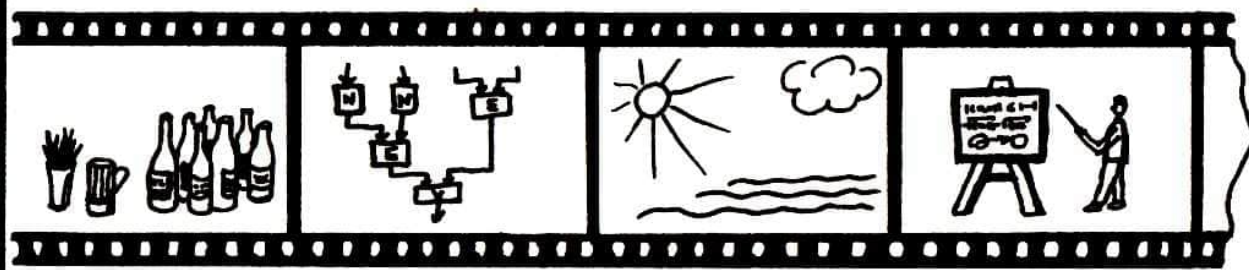
Einen Höhepunkt stellte das Pressefest der "Volkswacht" dar. In zahlreichen Veranstaltungen wirkten namhafte Künstler aus Funk und Fernsehen mit. Ein großes Feuerwerk bildete den Abschluß dieses Pressefestes. Natürlich hatten die Schüler an diesen drei Tagen einen verlängerten Ausgang.

Aber nicht nur das Pressefest, auch die übrigen Veranstaltungen bildeten Höhepunkte des Lagerlebens: ein Vortrag von Studienrat Lehmann über die Entstehung der "alpha" und die Arbeit mit ihr; die Besichtigung des Feingußwerkes in Lobenstein, bei der wir interessante Einzelheiten der Herstellung eines Gußstückes erfuhren; ein Sportfest mit abschließendem Fußballspiel einer Schülerauswahl gegen die Betreuer; eine Wanderung nach Wurzbach, verbunden mit einem Badbesuch; ein Lichtbildervortrag über Krakow und Zakopane und natürlich das Abschlußfest mit Rostwurst, Bier und Limonade. Neben vielen Einlagen, die das Lagerleben betrafen, gab es bei Spielen und Quizveranstaltungen viele Preise zu gewinnen. Außerdem erhielten die Gewinner des Sportfestes und die Gewinner der Lagerolympiade wertvolle Bücherpreise. Dieser Abend bildete einen würdigen Abschluß für unser Spezialistenlager, das sowohl auf mathematischem wie auch auf kulturellem Gebiet ein Erfolg war und eine Bereicherung der Ferien der teilnehmenden Schüler bildete.

Wolfgang Freybote

4. Studienjahr, Leiter der Arbeitsgruppe

Mathematiklager im Jugendobjekt



Lösungen

(C 24)

L

Die Aufgabe läßt sich mit Hilfe der Methode der vollständigen Induktion lösen, wenn man durch systematisches Probieren

$$s_n = 1 - \frac{1}{n!}$$

vermutet. Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1-1}{1!} + \frac{2-1}{2!} + \frac{3-1}{3!} + \dots + \frac{n-1}{n!} \\ &= \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} + \frac{3}{3!} + \dots + \frac{n}{n!} - \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right) - \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right) - \\ &\quad \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right) - \frac{1}{n!} \\ &= 1 - \frac{1}{n!}, \\ &\quad \text{da } \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

(C 28)

L

Beate Hardenacke, Richard-Wossidlo-EOS, Waren

Jedes Glied einer arithmetischen Folge läßt sich in der Form

$$a_x = a_1 + (x - 1)d$$

darstellen.

$$\text{Damit ist } a_p = a_1 + (p-1)d = q$$

$$\text{und } \underline{a_q = a_1 + (q-1)d = p}.$$

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt } a_p - a_q &= (p-1)d - (q-1)d = q-p \\ &= pd - d - qd + d = q-p \end{aligned}$$

$$d(p-q) = (q-p)$$

und man erhält $d = \frac{q-p}{p-q} = -1$.

Also gilt

$$a_n = a_1 + (n-1)d = a_1 - (n-1).$$

Für a_1 ergibt sich

$$a_1 + (p-1)(-1) = q$$

$$a_1 - p + 1 = q$$

$$a_1 = q + p - 1$$

und daraus erhält man für a_n

$$a_n = p + q - 1 - (n-1)$$

$$a_n = p + q - 1 - n + 1$$

$$a_n = p + q - n$$

(C 30) Sabine Schlorff, EOS Clara-Zetkin, Neustrelitz

L

ΔABC sei das gegebene Dreieck, b und c die gegebenen Seiten und α der Winkel $\angle CAB$.

Für jedes Dreieck gilt die Formel

$$A = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

oder $\frac{A}{bc} = \frac{\sin \alpha}{2}$

Wegen der Voraussetzung $A = \frac{2}{5} bc$ gilt

$$\frac{\sin \alpha}{2} = \frac{2}{5}$$

oder $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Dann gilt für den $\cos \alpha$ wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$= \frac{9}{25}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{3}{5}.$$

Aus den Werten b, c und $\cos \alpha$ kann nach dem Kosinussatz die Seite a bestimmt werden:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc \left(\pm \frac{3}{5} \right).$$

Also $a = \sqrt{b^2 + c^2 \pm \frac{6}{5} bc},$

wobei das Pluszeichen für $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$

und das Minuszeichen für $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ gilt.

(C 33)

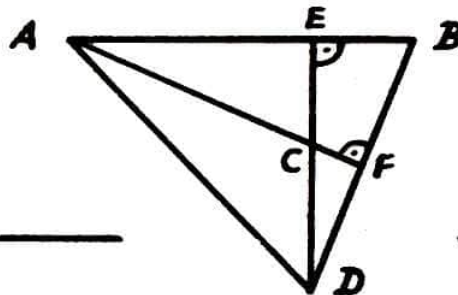
Bernd Zimdars, EOS Templin

L

Es gilt $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ und $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

Daraus folgt, daß die Verlängerung von $\overline{AC}$ mit der Strecke $\overline{BD}$ einen rechten Winkel bildet. Weiter bildet die Verlängerung der Strecke $\overline{CD}$ mit $\overline{AB}$ einen rechten Winkel. Die Schnittpunkte seien E und F . Dann sind die Strecken $\overline{DE}$ und $\overline{AF}$ im Dreieck $\triangle ADB$ je eine Höhe.

Da sich in jedem Dreieck die drei Höhen in einem Punkt schneiden, ist der Höhenschnittpunkt durch den Schnittpunkt zweier Höhen schon bestimmt. Dann muß aber der Punkt C Höhenschnittpunkt sein, und die Verlängerung der Strecke $\overline{BC}$ steht senkrecht auf der Strecke $\overline{AD}$.



(C 34)

L

Bernd Zaddach, 10.Oberschule, Cottbus

Es ist klar, daß die Summe der beiden Angaben auf einem Stein 999 ist. Es müssen also die letzten Ziffern der beiden Zahlen die Summe 9 haben, sie sind also stets verschieden voneinander. Die zwei Ziffern, die auf den gesuchten Steinen stehen, sind also a und b , wobei $a + b = 9$ ist (man kann $a < b$ voraussetzen). Die Ziffernfolgen der beiden Kilometersteinangaben können nun folgendermaßen lauten:

$a a a$	-	$b b b$
$a a b$	-	$b b a$
$a b a$	-	$b a b$
$a b b$	-	$b a a$
$b a a$	-	$a b b$
$b a b$	-	$a b a$
$b b a$	-	$a a b$
$b b b$	-	$a a a$

Da $a < b$ gelten soll, kann a die Werte 0, 1, 2, 3, 4 annehmen. Es gibt also $5 \cdot 8 = 40$ Kilometersteine, auf denen nur zwei Ziffern stehen.

(C 35)

L

Helmut Roßmann, POS V, Neubrandenburg

Es soll also gelten

$$k(n + 4) = n^2 + 8n + 15$$

n und k seien natürliche Zahlen.

$$k(n + 4) = (n + 4)^2 - 1$$

$$1 = (n + 4)(n + 4 - k)$$

wegen $n + 4 > 0$ muß

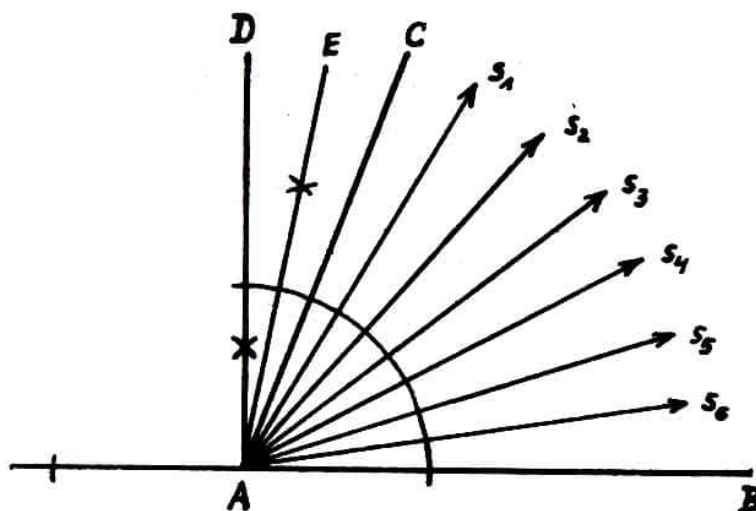
$$n + 4 = 1 \text{ sein.}$$

Daraus folgt

$$n = -3$$

Das ist ein Widerspruch. Es gibt also keine natürliche Zahl n , für die $n^2 + 8n + 15$ teilbar durch $n + 4$ ist.

L



Die Siebenteilung des Winkels $\sphericalangle BAC$, dessen Maß 70° beträgt, erfolgt folgendermaßen:

Man errichte in A auf $\overline{AB}$ die Senkrechte $\overline{AD}$, halbiert den Winkel $\sphericalangle CAD$ durch die Halbierende $\overline{AE}$, trägt schließlich den Winkel $\sphericalangle CAE$ an $\overline{AC}$ in A fortlaufend in Richtung $\overline{AB}$ ab. Die erhaltenen Strahlen s_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) ergeben die geforderte Siebenteilung von 70° .

Beweis:

Nach Konstruktion ist

$$\sphericalangle BAD = 90^\circ$$

$$\sphericalangle BAC = 70^\circ$$

$$\sphericalangle CAD = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ = 2 \cdot \sphericalangle CAE$$

$$\sphericalangle (AC; s_1) = \sphericalangle (s_1; s_2) = \dots = \sphericalangle (s_6; AB) = \sphericalangle CAE$$

$$\sphericalangle CAE = 10^\circ = \frac{1}{7} \cdot 70^\circ.$$

In eigener Sache

Die Zusammenfassung der Nummern 9/71 und 10/71 zu einer Doppelnummer erfolgte aus versandtechnischen Gründen, um allen Schulen die Möglichkeit der Sammelbestellung zu geben.

Harald Fischer

(Technischer Leiter)



SED

Auswertung des VIII. Parteitages an unserer Sektion

Wenn hier über die Auswertung des VIII. Parteitages berichtet wird, so heißt das natürlich nicht, daß dieses ungemein wichtige und notwendige Studium erst jetzt zu Beginn des neuen Studienjahres, also runde zehn Wochen nach Beendigung des Parteitages, beginnt. Zwar gab es auch bei uns genug Studenten, die glaubten, während der Semesterferien "Urlaub von der Politik" machen zu können, oder der Meinung waren, man müsse erst die Prüfungen abschließen, ehe man die Materialien des VIII. Parteitages studieren könne. Aber mit solchen Ansichten kann man sich natürlich nicht einverstanden erklären. Man muß sich mit ihnen auseinandersetzen, und so wurden noch vor dem Parteitag entsprechende Diskussionen in jeder Seminargruppe geführt, die zu der Einsicht verhelfen sollten, daß das Studium der Dokumente und aktuelle Information genauso zum Klassenauftrag des Studenten gehören wie beispielsweise eine gute Prüfungsvorbereitung. Die Ergebnisse dieser Diskussionen wurden als Programm formuliert und an der Wandzeitung veröffentlicht.

Hier ein Beispiel dafür: Die Seminargruppe Analysis III schrieb unter anderem:

"...Unser Ziel ist es, beim Studium der Dokumente höchstmögliche Effektivität für unsere Gruppe und jeden einzelnen zu erreichen. Deshalb werden von der FDJ-Gruppenleitung für jeden konkrete, abrechenbare Aufgaben gestellt. In der Mitgliederversammlung in der ersten Septemberwoche ziehen wir, ausgehend von den erarbeiteten Analysen und Stellungnahmen der einzelnen Gruppenmitglieder, Schlußfolgerungen für unsere weitere Tätigkeit in der FDJ-Gruppe, insbesondere

- für die Weiterführung und den erfolgreichen Abschluß unseres Kampfes um den Titel "Sozialistisches Studenten-

kollektiv der Friedrich-Schiller-Universität",

- für die Einbeziehung eines jeden in das Gruppenleben und die Entwicklung eines festen Klassenstandpunktes,
- für die Weiterentwicklung des Wettbewerbes zwischen den Gruppenmitgliedern um höchste Leistungen im Studium.

Auf einer außerordentlichen FDJ-Versammlung am Donnerstag, dem 17. Juni 1971, erfolgte bereits eine erste gemeinsame Auswertung des Referats des Genossen Erich Honecker auf dem VIII. Parteitag der SED."

Es folgte eine Aufteilung der folgenden sechs Themen auf die einzelnen Gruppenmitglieder, um ein effektives Studium der Dokumente zu erreichen:

1. Die internationale Stellung der DDR und die weitere Entwicklung unserer Republik,
2. Rolle und Bedeutung der III. Hochschulreform in den nächsten Jahren und die Aufgaben der Studenten bei ihrer Verwirklichung,
3. Bedeutung des sozialistischen Wettbewerbs für die Erhöhung der Leistungen jedes Mitglieds (Titelkampf),
4. Stellung und Aufgabe der FDJ bei der weiteren Entwicklung des Sozialismus in der DDR,
5. Rolle und Bedeutung der Parteigruppen und -mitglieder bei der Verbesserung der Studienleistungen und -disziplin,
6. Verhältnis von Arbeiterklasse, Partei und Intelligenz sowie die Bedeutung der Heranbildung sozialistischer Hochschulabsolventen.

In ähnlicher Form wurde in allen FDJ-Gruppen das Studium der Parteidokumente im Prüfungszeitraum und während der Ferien gesichert.

In der ersten Studienwoche des neuen Studienjahres, genauer vom 6.9. bis 8.9.1971 wurde an unserer Sektion die so geschaffene Grundlage zur gründlichen gemeinsamen Durcharbeitung der Dokumente des VIII. Parteitages genutzt. Zu jedem der folgenden zentral festgelegten Themen fand

eine dreistündige Vorlesung und seminargruppenweise ein ebensolanges Seminar statt:

1. Die Haupttendenzen der internationalen Entwicklung und die außenpolitische Linie der SED,
2. Die Entwicklung der sozialistischen Gesellschaft in der DDR und die wichtigsten Aufgaben der Volkswirtschaft im Zeitraum 1971-1975,
3. Die wachsende Rolle der Arbeiterklasse und ihrer marxistisch-leninistischen Partei als führende Kraft der Gesellschaft.

Das Ziel dieser Studienwoche bestand darin,

- das gründliche Studium der Materialien des VIII. Parteitages durch alle Studenten zu sichern;
- bei allen Studenten Klarheit über die politische Grundlinie des VIII. Parteitages, die Hauptaufgaben des Fünfjahresplanes und die wachsende gesellschaftliche Führungsrolle der Arbeiterklasse und ihrer marxistisch-leninistischen Partei zu schaffen;
- die Fähigkeit und Bereitschaft aller Studenten zu entwickeln, die Politik der Partei in ihrer FDJ-Gruppe, in der Sektion und an der Hochschule mit verwirklichen zu helfen.

In den Seminaren gab es teilweise recht rege Diskussionen, und man kann insgesamt einschätzen, daß die drei Tage Intensivauswertung der Dokumente des VIII. Parteitages eine gute Grundlage für die weitere politisch-ideologische Arbeit im Studienjahr geschaffen haben.

Für unsere weitere Arbeit wird es nun darauf ankommen, das Studium der Materialien des VIII. Parteitages kontinuierlich fortzusetzen und die Beschlüsse mit Leben zu erfüllen, indem wir der theoretischen Einsicht die praktische Konsequenz folgen lassen.

Georg Baumbach

Wissenschaftlicher Assistent an der Sektion Mathematik

(stellv. Sekretär der APO II)

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienwerbung-Studienvorbereitung“ der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Leiter: Manfred Wolf

Redaktion: Volker Kögel (Chefredakteur); B. Wächter, H. Fischer

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

Anschrift: WURZEL

69 Jena

Helmholtzweg 1

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45

Университет
им. В. И. Ленина



Studentenaustausch
JENA - MINSK '71



*Fr. Schiller-
Universität*

11

71

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
Jugendobjekt
Studienwerbung -
Studienvorbereitung
der Sektion Mathematik
an der Friedrich-Schiller-
Universität

Zerlegungsgleichheit von Polygonen

Das folgende praktische Problem führt uns auf eine interessante Fragestellung der Geometrie. Wir wollen ein Zimmer, z. B. eine Küche mit dem in Abb. 1 links angegebenen Grundriß, mit Fußbodenbelag auslegen.

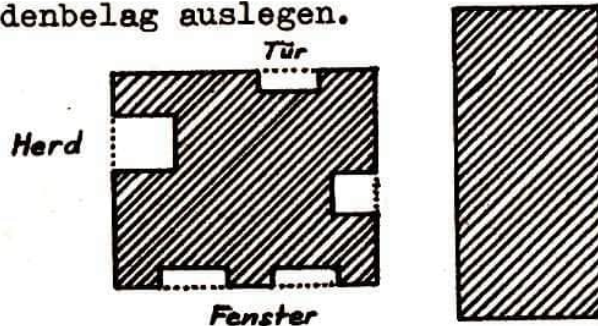


Abb. 1

Dazu kaufen wir eine Rolle Fußbodenbelag, der ausgerollt die Gestalt eines Rechtecks hat (Abb. 1 rechts). Dabei erhebt sich die Frage: Wieviel Fußbodenbelag benötigen wir? Eine erste Antwort kann sich jeder sofort geben: Die Fläche des ausgerollten Belages muß genau so groß sein wie die zu belegende Fläche der Küche. Diese Inhaltsgleichheit der beiden Flächen ist also n o t w e n d i g für die Lösung unserer praktischen Aufgabe. Der scharf denkende Leser wird nun aber eine zweite Frage stellen: Ist mit dieser Inhaltsgleichheit der Flächen aber auch die Lösung garantiert, d. h. kann man den Fußbodenbelag auch so zerschneiden ("zerlegen"), daß aus den Teilstücken der Küchenboden lückenlos und einfach belegt werden kann? Ist also die Inhaltsgleichheit der beiden Flächen h i n r e i c h e n d für die Lösung unserer Aufgabe?

Wir wollen nun diesem Problem eine mathematische Fassung geben. Grundlage dafür ist der Begriff des Polygons (Vieleck), wobei wir hier unter einem Polygon genauer die Polygonfläche verstehen, also nicht nur die "Randpunkte" (Kanten und Ecken), sondern auch die "inneren Punkte". Abb. 1 zeigt dann z. B. zwei Polygone, nämlich links ein 24-Eck, welches nicht konvex ist ("einspringende" Ecken hat), und rechts ein konvexes 4-Eck (ohne "einspringenden" Ecken!). Ferner benötigen wir den Begriff der Bewegung (Kongruenztransformation).

Dann können wir die folgende Relation zwischen Polygonen definieren:

Definition 1:

D Zwei Polygone A und B heißen kongruent (in Zeichen $A \equiv B$), wenn es eine Bewegung φ gibt, welche das Polygon A auf das Polygon B abbildet: $\varphi(A) = B$.

Eine anschaulichere Bezeichnung für "kongruent" wäre in unserem Zusammenhang "deckungsgleich". Tatsächlich hat auch die Relation $\equiv$ wichtige Eigenschaften mit der Gleichheit gemeinsam, es gilt nämlich der folgende

Satz 1: Die Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation in der Menge aller Polygone.

Wir wollen diesen Satz nicht beweisen; die Leser, die mit dem Gruppenbegriff vertraut sind, können den Beweis vielleicht selbst erbringen, wenn sie beachten, daß die Bewegungen eine Gruppe bilden. Aber wir wollen hier aufschreiben, was es genau heißt, daß die Kongruenz eine Äquivalenzrelation ist:

1. Jedes Polygon ist zu sich selbst kongruent:
 $A \equiv A$ (Reflexivität).
2. Wenn $A \equiv B$ gilt, so ist auch $B \equiv A$ (Symmetrie).
3. Wenn $A \equiv B$ und $B \equiv C$ gilt, so ist auch $A \equiv C$ (Transitivität).

Schließlich wollen wir den Begriff der Zerlegung eines Polygons exakt fassen in der

Definition 2:

D Das Polygon C heißt in die Teilpolygone A und B zerlegt, oder C heißt die Summe von A und B (symbolisch: $C = A + B$), wenn C aus allen Punkten besteht, die zu A oder B gehören ($C = A \cup B$), und wenn die Teilpolygone A und B höchstens gemeinsame Randpunkte haben.

Dabei bedeutet $C = A \cup B$, daß die Punktmenge C als Vereinigung der Punktmengen A und B im Sinne der Mengenlehre aufgefaßt werden kann.

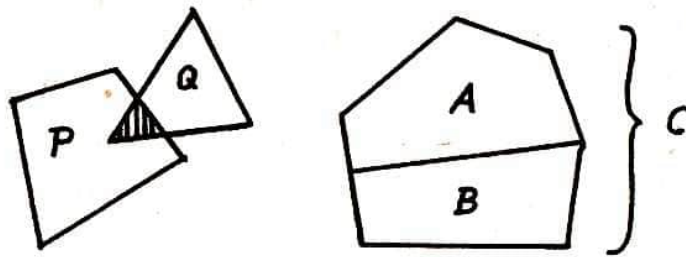


Abb. 2

In Abb. 2 gilt $C = A + B$, während die Summe $P + Q$ im Sinne der Definition 2 nicht gebildet werden darf, weil P und Q nicht nur Randpunkte, sondern auch die schraffierten inneren Punkte gemeinsam haben.

Nun können wir die Relation "zerlegungsgleich" erklären durch die folgende

Definition 3 :

Zwei Polygone A und B heißen zerlegungsgleich (symbolisch : $A \sim B$), wenn sie sich in endlich viele Teilpolygone zerlegen lassen, die paarweise kongruent sind:

$$A \sim B =_{\text{df}} A = A_1 + A_2 + \dots + A_n \quad \& \quad B = B_1 + B_2 + \dots + B_n$$

$$\& \quad A_i \equiv B_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Die Relation "zerlegungsgleich" ist eine Verallgemeinerung der Relation "kongruent", d.h. kongruente Polygone sind trivialerweise nach Definition 3 auch zerlegungsgleich (man "zerlegt" sie eben jeweils nur in ein Teilpolygon), und andererseits gibt es Polygone, die nicht kongruent sind, wohl aber zerlegungsgleich, wie Abb. 3 zeigt:

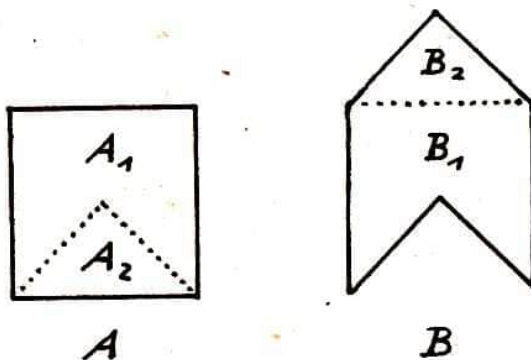


Abb. 3

$A \not\equiv B$, aber $A_1 \equiv B_1$ und $A_2 \equiv B_2$, also gilt wegen
 $A = A_1 + A_2$ und $B = B_1 + B_2$ nach Definition 3 $A \sim B$.

Bezüglich der so erklärten Relation $\sim$ gilt als Folgerung aus Satz 1 der folgende

Satz 2: Die Zerlegungsgleichheit ist eine Äquivalenzrelation in der Menge aller Polygone, d. h. es gilt

(R) $A \sim A$ für jedes Polygon A ,
 (S) aus $A \sim B$ folgt $B \sim A$ und
 (T) aus $A \sim B$ und $B \sim C$ folgt $A \sim C$.

Auch hier soll auf einen Beweis verzichtet werden, da diese Eigenschaften der Zerlegungsgleichheit einerseits leicht einzusehen sind, der Beweis, vor allem für (T), aber andererseits zu aufwendig ist. Beweisen wollen wir aber den folgenden

Satz 3: (Additionssatz) Wenn die Summen $A+B$ und $C+D$ im Sinne der Definition 2 erklärt sind und wenn $A \sim C$ und $B \sim D$ gilt, so gilt auch $A + B \sim C + D$.

Beweis: $A \sim C$ bedeutet: $A = A_1 + \dots + A_n$, $C = C_1 + \dots + C_n$, $A_i \equiv C_i$
 $B \sim D$ bedeutet: $B = B_1 + \dots + B_m$, $D = D_1 + \dots + D_m$, $B_j \equiv D_j$

Dann ist

$$A + B = A_1 + \dots + A_n + B_1 + \dots + B_m \quad \text{und}$$

$$C + D = C_1 + \dots + C_n + D_1 + \dots + D_m$$

und die Teilpolygone von $A+B$ und $C+D$ sind paarweise kongruent, also gilt $A+B \sim C+D$

Nun können wir die Ausgangsfrage behandeln: Unter welcher Bedingung sind zwei Polygone zerlegungsgleich? Wir wissen von unserem praktischen Beispiel her, daß der Flächeninhalt eine Rolle bei der Beantwortung dieser Frage spielen wird. Von den Eigenschaften des Flächeninhaltes interessieren uns folgende:

Der Flächeninhalt $F(P)$ eines Polygons P ist eine positive reelle Zahl, und es gilt:

1. Es ist gleichgültig, "wo der Inhalt eines Polygons gemessen wird", d. h. sind zwei Polygone kongruent, können sie also durch eine Bewegung zur Deckung gebracht werden, so müssen sie denselben Inhalt haben:

Aus $A \equiv B$ folgt $F(A) = F(B)$.

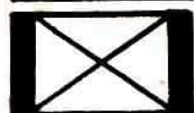
2. Der Inhalt eines Polygons ist gleich der Summe der Inhalte seiner Teile, d.h. wenn

$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ gilt, so ist

$$F(A) = F(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = F(A_1) + \dots + F(A_n).$$

Tatsächlich ergibt sich damit die Inhaltsgleichheit als notwendige Bedingung für die Zerlegungsgleichheit, was wir genauer formulieren in dem

Satz 4: Wenn zwei Polygone zerlegungsgleich sind, so müssen sie auch inhaltsgleich sein, d.h. aus $P \sim Q$ folgt $F(P) = F(Q)$.



Beweis: Sei $P \sim Q$, d.h. etwa $P = P_1 + \dots + P_n$ und

$$Q = Q_1 + \dots + Q_n \text{ und}$$

$$P_i = Q_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Aus der Eigenschaft 1. von F folgt dann $F(P_i) = F(Q_i)$ für $i = 1, \dots, n$.

Die so erhaltenen n Gleichungen werden addiert zu $F(P_1) + \dots + F(P_n) = F(Q_1) + \dots + F(Q_n)$,

woraus mit der Eigenschaft 2. von F die Beziehung

$$F(P_1 + \dots + P_n) = F(Q_1 + \dots + Q_n), \text{ also}$$

$$F(P) = F(Q) \text{ folgt.}$$

Um die Frage nach einer hinreichenden Bedingung für die Zerlegungsgleichheit (eventuelle Gültigkeit der Umkehrung von Satz 4) zu beantworten, benötigen wir einige Hilfssätze.

Hilfssatz 1: Parallelogramme mit derselben Grundseite und zwischen denselben Parallelen sind zerlegungsgleich.

Beweis: Wir betrachten die Parallelogramme $ABCD$ und $ABC'D'$ (Abb. 4)

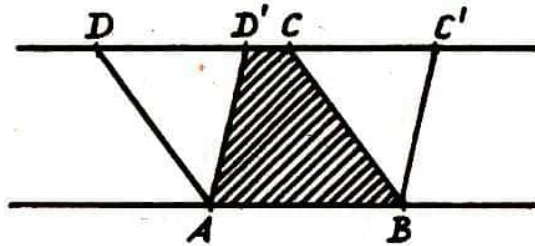


Abb. 4

und behandeln hier nur den Fall, daß D' zwischen D und C liegt – der Leser überlege sich, wie man die beiden anderen möglichen Fälle auf den hier behandelten zurückführen kann! Im Fall der Abb. 4 sind offenbar die Dreiecke $AD'D$ und $BC'C$ kongruent (parallele Seiten, also gleiche Winkel, und etwa $\overline{BC'} \equiv \overline{AD'}$). Also sind diese Dreiecke auch als zerlegungsgleich anzusehen:

(1) $AD'D \sim AC'C$.

Außerdem ist wegen der Reflexivität (R) der Zerlegungsgleichheit (s. Satz 2) das Trapez $ABCD'$ zu sich selbst zerlegungsgleich:

(2) $ABCD' \sim ABCD'$

Aus (1) und (2) folgt nach dem Additionssatz (Satz 3)

$AD'D + ABCD' \sim BC'C + ABCD'$, also

$ABCD \sim ABC'D'$, was zu beweisen war.

Hilfssatz 2 : Jedes Dreieck ist mit einem Parallelogramm derselben Grundseite und der halben Dreieckshöhe zerlegungsgleich.

Der Beweis bleibt dem Leser überlassen – s. Abb. 5, nach welcher die Kongruenz der Dreiecke DEC und FEB gezeigt werden muß, um wie bei Hilfssatz 1 die Beziehung $ABC \sim ABFD$ herleiten zu können.

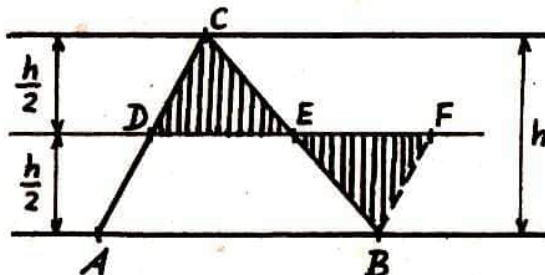


Abb. 5

Hilfssatz 3 : Dreiecke mit derselben Grundseite und Höhe sind zerlegungsgleich.

Beweis:

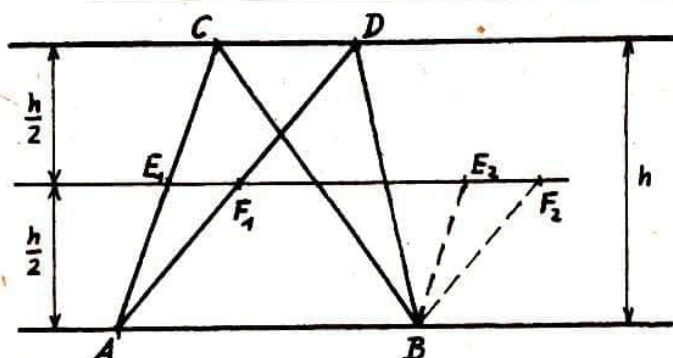


Abb. 6

Nach Hilfssatz 2 gilt

$ABC \sim ABE_2E_1$ und $ABD \sim ABF_2F_1$ (s. Abb. 6),

nach Hilfssatz 1 muß gelten $ABF_2F_1 \sim ABE_2E_1$, also $ABF_2F_1 \sim ABE_2E_1 \sim ABC$.

Unter Berücksichtigung der Transitivität (T) der Zerlegungsgleichheit gilt also $ABD \sim ABC$.

Hilfssatz 4 : Jedes Polygon ist zerlegungsgleich mit einem Dreieck.

Beweis:

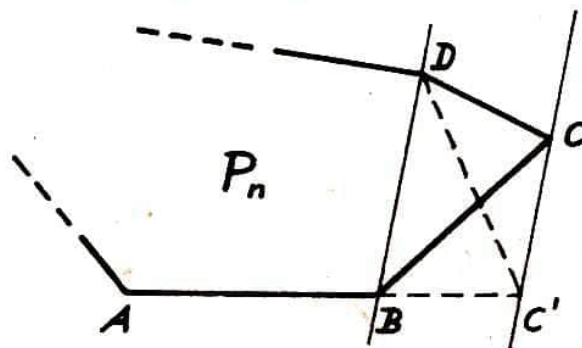


Abb. 7

Wir betrachten ein beliebiges (zur Vereinfachung konvexes) Polygon P_n mit n Ecken und greifen 4 "aufeinanderfolgende" Ecken A, B, C, D heraus (Abb. 7). Durch C wird eine Parallele zu $\overline{BD}$ gelegt und die Verlängerung von $\overline{AB}$ mit dieser Parallelen in C' zum Schnitt gebracht. Nach Hilfssatz 3 sind die Dreiecke BDC und BDC' zerlegungsgleich, also ist das Polygon P_n mit einem Polygon P_{n-1} zerlegungsgleich, welches eine Ecke (nämlich B) weniger hat, da B auf der Geraden (Kante von P_{n-1}) durch A und C' liegt. Durch

mehrmaliges Anwenden dieser "Flächenverwandlung" kann schließlich P_n zerlegungsgleich in ein Dreieck überführt werden, was zu beweisen war.

Nun sind alle Hilfsmittel bereitgestellt zur Herleitung von

Satz 5: Wenn zwei Polygone inhaltsgleich sind, so sind sie auch zerlegungsgleich, d.h. aus $F(P) = F(Q)$ folgt $P \sim Q$.

Beweis: Gegeben seien zwei Polygone P und Q mit $F(P) = F(Q)$.

Nach Hilfssatz 4 sei P zerlegungsgleich mit einem Dreieck ABC und Q zerlegungsgleich mit dem Dreieck DEF , wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen dürfen, daß $A = D$ gilt und die Seiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{DE}$ der beiden Dreiecke in einer Geraden liegen, wie es Abb. 8 zeigt.

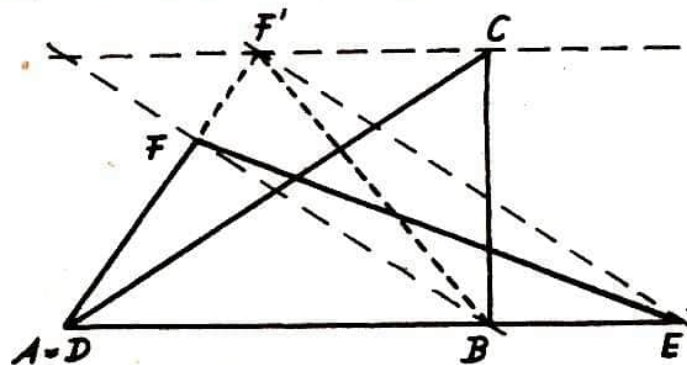


Abb. 8

Aus $FBE \sim FBF'$ ergibt sich dann $DEF \sim DBF' = ABF'$.
Damit gilt $P \sim DEF \sim ABF'$ und $Q \sim ABC$.

Nach Satz 4 muß deshalb $F(P) = F(ABF')$ und
 $F(Q) = F(ABC)$ sein.

Da nach Voraussetzung $F(P) = F(Q)$ war, muß auch
 $F(ABF') = F(ABC)$ gelten,

d.h. die Dreiecke ABC und ABF' sind inhaltsgleich.

Da sie die gemeinsame Grundseite $\overline{AB}$ haben, müssen sie also auch dieselbe Höhe besitzen. Das bedeutet aber nach Hilfssatz 3, daß sie zerlegungsgleich sind: $ABF' \sim ABC$.

Insgesamt gilt also

$$P \sim DEF \sim ABF' \sim ABC \sim Q,$$

unter Berücksichtigung der Transitivität (T) der Zerlegungsgleichheit folgt daraus endlich $P \sim Q$, was zu beweisen war.

Satz 4 und Satz 5 zusammen besagen, daß die Inhaltsgleichheit zweier Polygone notwendige und hinreichende Bedingung für ihre Zerlegungsgleichheit ist, d.h. die Relationen "zerlegungsgleich" und "inhaltsgleich" sind gleichbedeutend:

$$A \sim B \iff F(A) = F(B).$$

Damit können wir die eingangs gestellte Frage zu unserem praktischen Problem beantworten: Der "Flächeninhalt" des Fußbodenbelages muß ebensogroß sein wie der "Flächeninhalt" des Küchenfußbodens, und dann ist auch mit Sicherheit eine lückenlose und einfache "Belegung" möglich, wenn der Grundriß ein Polygon und nicht etwa krummlinig ist.

Dr. Eike Hertel

Oberassistent an der Sektion Mathematik
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Preisaufgaben 11/71

(C 43) Man löse die Gleichung

$$\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = 3$$

in ganzen Zahlen x, y, z !

(C 44) Man zeige, daß $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ eine ganze Zahl ist!

(C 45)	Man bestimme alle Paare (m,n) natürlicher Zahlen, die den folgenden Bedingungen genügen:
1	
	(1) $m^2 - 9n^2$ ist Primzahl
	(2) $2 \lg \frac{m}{n} + 1 < 0$
(C 46)	Man löse die Gleichung
1	$ 2z - 3 - z + 1 = 4z - 1$
	in komplexen Zahlen z !
(C 47)	Es seien a,b,c,d,l ganze Zahlen. Man beweise:
1	Ist der Bruch $\frac{al + b}{cl + d}$ durch die Zahl k kürzbar, so ist der Ausdruck $ad - bc$ durch k teilbar.
(C 48)	Man bestimme den geometrischen Ort der Projektionen eines Punktes A im dreidimensionalen euklidischen Raum auf alle Ebenen, die durch einen weiteren gegebenen Punkt B verlaufen!
1	

Auf Grund von Leserzuschriften haben wir uns entschlossen, unser Preisaufgabensystem zu verändern. Um einen größeren Leserkreis anzusprechen, stellen wir in Zukunft differenzierte Preisaufgaben.

Für jeden vollständigen Lösungsweg erhält der Einsender einen bzw. zwei Wertpunkte (Die Anzahl ist bei jeder Preisaufgabe unter der laufenden Nummer angegeben). Für 15 Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch.

Sollten pro Monat mehr als drei Einsender 15 Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).

Falls ein Besitzer von 15 Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil.

Die Lösungen sind bis zum 10. des folgenden Monats (Datum des Poststempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgaben" an unsere Adresse einzuschicken.

Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungen bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders und seiner Adresse versehen sein müssen. Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

Besuch in Minsk

Für vier Studentinnen und fünf Studenten des III. Studienjahres Mathematik-Diplom verlief das Frühjahrssemester 1971 etwas außergewöhnlich. Als Auszeichnung für ihre guten gesellschaftlichen und fachlichen Leistungen während des Studiums durften sie im Monat Mai drei Wochen lang zu einem Studienaufenthalt nach Minsk an die dortige W. I. Lenin-Universität reisen.

Ziel der Fahrt war es, Land und Leute kennenzulernen, mit den Menschen Freundschaft zu schließen, uns über die gesellschaftliche und wissenschaftliche Arbeit an der Minsker Universität zu informieren und kleinere Forschungsaufträge auszuführen, sowie vor allem unsere russischen Sprachkenntnisse zu erweitern und zu vertiefen.

Die meisten Mitglieder der zehnköpfigen Delegation standen am 5. Mai vor ihrer bisher größten Reise. Viele Fragen bewegten uns beim Antritt der Fahrt. Fragen, die in den darauffolgenden 21 Tagen beantwortet wurden. Denn schon der erste Tag in der 900 000 Einwohner zählenden Hauptstadt der Belorussischen Sozialistischen Sowjetrepublik brachte uns so viele neue Eindrücke, daß wir es kaum glauben konnten, gerade erst angekommen zu sein.

Minsk, das ist eine Stadt, die in anderen, größeren Dimensionen gebaut ist als irgendeine Großstadt bei uns. Das sind neue vielstöckige Hotels, das ist der modernste Kultur- und Sportpalast Europas mit 6000 Plätzen, das ist der Leninprospekt, die 13 km lange Hauptstraße, das sind die vielen Neubauviertel.

Unsere Gastgeber, Mathematik-Studentinnen und -Studenten des IV. Studienjahres, waren sehr aufmerksame und gastfreundliche Betreuer. Alles Sehenswerte bekamen wir gezeigt und jeder nur erfüllbare Wunsch wurde sofort realisiert. In der Zeit von der Ankunft auf dem Minsker Hauptbahnhof bis zum

großen Abschied waren wir gute Freunde geworden.

Gleich nach der Ankunft machten wir in unserem Quartier die erste Bekanntschaft mit der belorussischen Küche. Man ißt dort zu jeder Mahlzeit nicht nur ein Hauptgericht wie bei uns, sondern vier bis sechs Gänge.

Zum fachlichen Programm des Studienaufenthaltes gehörten Vorlesungen der Leiter der einzelnen mathematischen Disziplinen (Funktionentheorie, theoretische Physik und Operationsforschung) über ihre speziellen Aufgabengebiete. Diese Vorlesungen wurden selbstverständlich in russischer Sprache gehalten, und es gehörte schon eine gehörige Portion Konzentration dazu, den Ausführungen gut folgen zu können.

Im Rechenzentrum der Universität wurden wir mit der Rechenmaschine "MINSK 22" und ihrer Programmiersprache "Awtokod Inshenjer" bekannt gemacht. Zur Demonstration wurde danach eine von uns gestellte Aufgabe programmiert und auf der "MINSK 22" gelöst.

Als besonderen Höhepunkt durften wir im Rechenzentrum der Akademie der Wissenschaften der BSSR die moderne Rechenmaschine "MINSK 32", eine Maschine der dritten Computergeneration, besichtigen.

Damit die Erholung nicht zu kurz kam, ging es zweimal für zwei Tage in die freie Natur. Wir erlebten "Camping auf belorussisch", bei dem die Zeltstangen im Wald geschlagen werden, und ein Lagerfeuer, wo jeder seine Sprachkenntnisse, die russischen wie auch die deutschen und englischen, in Gesprächen anbringen konnte, und wo, wie bei Studenten stets üblich, viel gesungen wurde. Als großes Kräftesammeln vor dem Moskau-Besuch war dann der Aufenthalt am Narotsch-See gedacht, wo sich jeder noch einen kräftigen Sonnenbrand und ein paar ganz kluge Fußballer Blasen an den Füßen holten.

Als krönender Abschluß erwartete uns für die letzten drei Tage die sowjetische Hauptstadt. Obwohl uns die 9-Millionenstadt mit Regen empfing, tat das unserer Stimmung keinen

Abbruch. Kaum zu beschreiben sind die vielen Eindrücke, die wir bekamen, sei es beim Besuch des Lenin-Mausoleums, bei der Besichtigung des Kremls, beim Bummel durch das Kaufhaus GUM, beim Betrachten der Metrostationen, von denen eine immer schöner als die andere ist, beim Blick von den Leninsbergen herab auf die gesamte Stadt, beim Besuch der Tretjakow-Galerie oder gar beim Auftritt des weltberühmten Alexandrow-Ensembles in der hochmodernen Kongreßhalle im Kreml. Viel zu schnell verging die Zeit in Moskau, und gern hätten wir das Kofferpacken noch um einige Tage verschoben.

Drei Wochen voller unzähliger neuer Eindrücke lagen nun hinter uns. Vor uns liegt nun noch die Aufgabe, unseren Gastgebern aus Minsk die drei Wochen im September in der DDR zu einem ebensolchen Erlebnis werden zu lassen. Daß wir es sehr schwer haben werden, solche Gastgeber zu sein, ist uns klar, aber wir werden unsere ganze Kraft dafür einsetzen.

Reinhard Lorenz, einer der Mitarbeiter der "Wurzel", schrieb diesen Bericht Anfang September. Inzwischen waren nun die Minsker Studenten in Jena, wovon der nächste Artikel handelt.

Gegenbesuch in Jena

Soeben haben wir unsere Minsker Freunde verabschiedet. Sie weilten vom 5. 9. bis 25. 9. 71 in unserer Stadt, waren Gäste der Friedrich-Schiller-Universität und insbesondere der Sektion Mathematik.

Wie stark die beim Besuch unserer Studenten in Minsk geknüpften Freundschaftsbande waren, zeigte sich bereits bei der Begrüßung. Sprunghaft schienen sich die Sprachkenntnisse verbessert zu haben, deutlicher als noch in Minsk traten gemeinsame Lebensauffassungen hervor.

Besonders stolz konnten wir als Gastgeber sein, daß sowohl

das gesamte fachliche Vorlesungsprogramm als auch viele Erläuterungen beim Besuch von Kulturstätten in russischer Sprache dargeboten wurden. Unsere sowjetischen Freunde erkannten unsere Bemühungen, Russisch zu unserer zweiten Muttersprache werden zu lassen. Besonders beeindruckt waren sie davon, daß bei uns Lehrveranstaltungen in russischer Sprache abgehalten werden, die für unsere Studenten obligatorisch sind.

Zu einem Höhepunkt gestaltete sich eine Diskussion der Minsker Studentengruppe mit Studenten unserer Sektion über Fragen der europäischen Sicherheit. Hier wurde allen Anwesenden klar, was Integration sozialistischer Länder- insbesondere auf politisch-ideologischem Gebiet - in der Praxis heißt. Die Diskussion ergab völlige Übereinstimmung in allen Fragen. Sie zeigte aber auch, über welche großen Erfahrungen und Kenntnisse die Sowjetunion bei der politisch-ideologischen Erziehung ihrer Jugend verfügt.

Aus der Fülle der gemeinsamen Erlebnisse möchte ich nur einige stichpunktartig herausgreifen: Wir weilten drei Tage in Dresden, ein Wochenende im Thüringer Wald, besuchten die Mahn- und Gedenkstätte Buchenwald, die Nationalen Kultur- und Gedenkstätten Weimars, die Dornburger Schlösser, den Erfurter Dom und die "IGA", wanderten viel in der reizvollen Jenaer Umgebung und saßen manchen Abend gemütlich beim Bier zusammen, das den Minskern ausgezeichnet schmeckte.

Die Minsker Studenten waren sehr daran interessiert, etwas über die "Wurzel" zu erfahren. Auch dieser Besuch klang, wie viele andere, am Abend bei einigen Gläsern Bier und anregenden Gesprächen aus.

Alle Betreuer der Minsker Studentendelegation waren sich beim Abschied im dem Wunsch einig:

Möge es noch recht viele solcher Begegnungen geben, damit sich die Freundschaft zwischen unseren Völkern immer mehr vertieft.

Winfried Verbeseke

wiss. Assistent im Bereich Operationsforschung/
Numerik an der Sektion Mathematik

Allen Lesern der "Wurzel" widmete unser Besuch die folgenden Zeilen:

*Используя возможность,
предоставленную нам редакцией
журнала "Wurzel", мы рады привет-
ствовать всех школьников ГДР
и пожелать им больших успехов в
учебе.*

*Группа студентов Гродзко-
ского университета им. В.И. Ленина
г. Минск*

Wir freuen uns, durch die Zeitschrift "Wurzel" alle Schüler der DDR grüßen zu können und wünschen ihnen große Erfolge im Schuljahr.

Studentengruppe der
belorussischen Lenin-Universität
Minsk

Bezahlung des Abonnements für 1971/72

Mit dieser Nummer erhalten Sie die Zahlkarte zur Bezahlung des Jahresabonnements 1971/72 (für die Nummern 9/71-8/72). Wir bitten die Sammel- und Einzelbesteller, den entsprechenden Betrag (ein Jahresabonnement kostet M 2,50) bis zum 15. Januar 1972 auf unser Postscheckkonto Erfurt 180.45 zu überweisen. Im Interesse eines reibungslosen Registrierens Ihrer Bezahlung bitten wir um deutliche Angabe des Absenders auf dem linken Abschnitt der Zahlkarte.

Die Redaktion

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienwerbung-Studienvorbereitung“ der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Leiter: Manfred Wolf

Redaktion: Volker Kögel (Chefredakteur); B. Wächter, H. Fischer

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

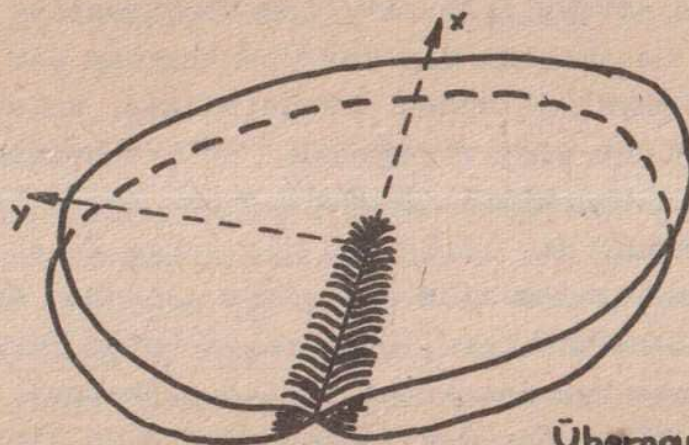
Anschrift: WURZEL
69 Jena
Helmholtzweg 1

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45

Spätausgabe

Riemannsche Blätter

Morgenblatt, Tageblatt, Abendzeitung und
Nachtbummler-Ausgabe



Übergang
verboten



12

71

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
Jugendobjekt
Studienwerbung -
Studienvorbereitung
der Sektion Mathematik
an der Friedrich-Schiller-
Universität

Codierungstheorie - eine interessante Anwendung der Algebra, I

In der Artikelserie "Aus der mathematischen Kybernetik" ("Wurzel" 12/68 - 3/69) wurde bereits erläutert, daß Probleme der Informationsübertragung zum Untersuchungsgegenstand der mathematischen Kybernetik gehören. Wir wollen uns hier einem Aspekt der Informationsübertragung zuwenden - der geeigneten Verschlüsselung von Informationen.

Warum müssen Informationen überhaupt verschlüsselt, oder wie wir sagen, codiert werden? Der Leser kann darauf eine Antwort finden, wenn er sich überlegt, warum der Tast-Funkverkehr zwischen Funkstationen die Verwendung des Morsealphabetes notwendig macht: Das übertragende Medium, das heißt die Gesamtheit der zur Übertragung der Signale ausgenutzten physikalischen Erscheinungen, erlaubt es im wesentlichen nur, vier voneinander unterscheidbare Arten von Signalen zu übermitteln, nämlich das kurze Zeichen, das lange Zeichen, die kurze und die lange Pause. Will man nun Informationen, die sich aus einer größeren Menge von Grundzeichen zusammensetzen, übertragen (etwa Texte bestehend aus Wörtern über dem lateinischen Alphabet), so kann man dies eben nur, wenn man jedem Buchstaben eineindeutig eine Kombination der zur Verfügung stehenden Signale zuordnet, dies mit dem Empfänger verabredet (das heißt die Codierung bekannt gibt) und schließlich jene Kombinationen sendet.

Beim ersten Durchdenken dieses Sachverhaltes vermeint man, eine Anwendung der Mathematik in diesem Bereich überflüssig zu sein. Wir wollen uns schrittweise vom Gegenteil überzeugen.

Der Leser akzeptiert zunächst sicher, daß wir anstelle des Morse-Codes ... für den Buchstaben l auch $[0,1,0,0]$ schreiben können, wo "[,]" für lange Pausen, ",", für kurze Pausen, "0" für kurze Zeichen und "1" für lange Zeichen stehen. Wir wollen uns nun die Aufgabe stellen, einen Code des Alphabets $\{a,b,c,d\}$ zu schaffen, der nur gleichlange Signalketten enthält.

Es bietet sich an:

$a - [0,0]$, $b - [0,1]$, $c - [1,0]$, $d - [1,1]$.

Der Prozeß der Übertragung von Informationen über $\{a,b,c,d\}$ mit Hilfe unseres Codes läßt sich wie folgt veranschaulichen:

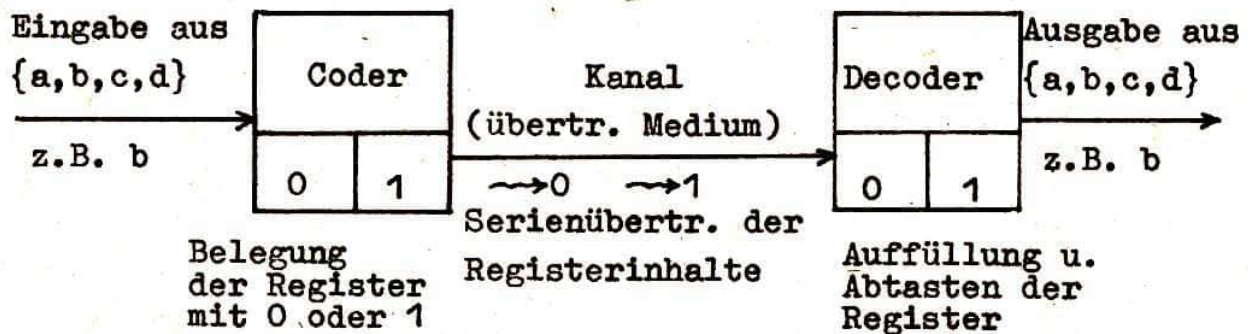


Abb. 1

Leider ist in beinahe allen realen Fällen unser Kanal so beschaffen, daß er die ihm "anvertrauten" Signale verfälscht. Beobachten Sie bitte Signalketten einer Funkstation, die auf einem Kurzwellenband sendet. Sie bemerken unschwer, daß schon allein durch die mit dem "Schwinden" des Empfanges verbundenen Verzerrungen häufig eine eindeutige Beantwortung der Frage, ob im betrachteten Zeitintervall ein "Punkt" oder ein "Strich" gesendet wurde, sehr erschweren.

Wir betrachten einen einfachen Fall von Störungen: Punkte werden mitunter als Striche, Striche mitunter als Punkte wahrgenommen. Unser Modell von Abb. 1 gestattet es, diesen Fall aufzunehmen, indem wir den Kanal wie folgt abändern:

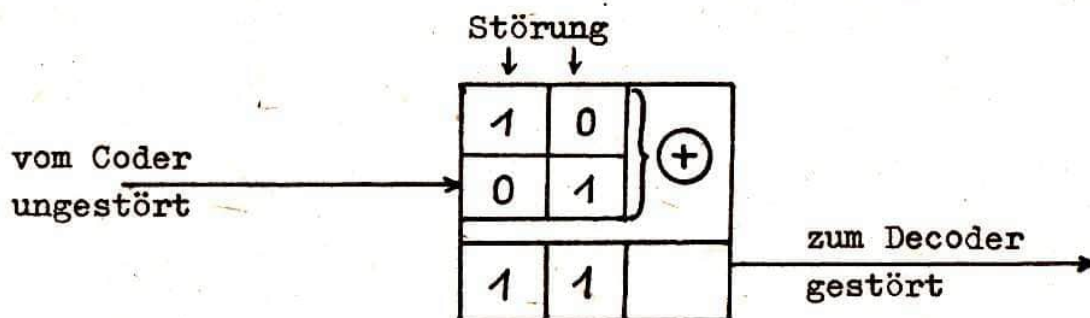


Abb. 2

Wir fassen also Störungen auf als Addition eines Störvektors (im Beispiel $[1,0]$) zum Codevektor (im Beispiel $[0,1]$), wobei wir verabreden

$$0 + 0 = 0, \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 0,$$

das heißt, eine "1" im Störvektor verwandelt die entsprechende Komponente des Codevektors, eine "0" dagegen hat keinen Einfluß.

Selbst wenn wir nun wissen, daß jeder Störvektor unseres Kanales höchstens eine "1" enthält, sind wir im Falle unseres Beispiels am Ende des Kanals nicht in der Lage, von einem empfangenen Vektor zu entscheiden, ob es sich um einen gestörten oder ungestörten Vektor handelt, oder gar festzustellen, welcher Codevektor vor der Störung vorlag. Angenommen, wir empfangen $[1,1]$, dann sind die folgenden Fälle möglich:

Codevektor	Störvektor	gestörter Vektor
$[1,1]$	$[0,0]$	$[1,1]$
$[1,0]$	$[0,1]$	$[1,1]$
$[0,1]$	$[1,0]$	$[1,1]$

Tab. 3

Wir wollen die Gründe für diese Erscheinung aufdecken, um nach Möglichkeit eine Änderung zu erreichen. Dazu deuten wir die Codevektoren als Koordinaten von Punkten der Ebene:

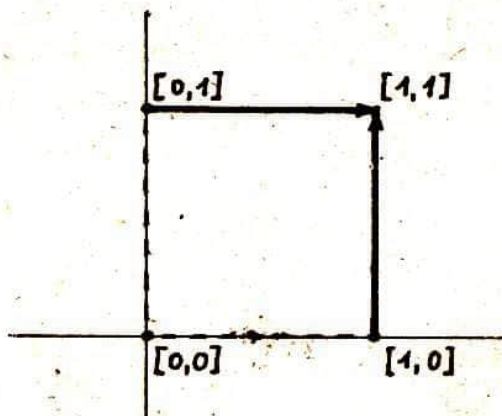


Abb. 4

Durch Störungen, die höchstens eine "1" enthalten, gelangen wir bereits von jedem Eckpunkt des Quadrates zu weiteren, die auch aus anderen Eckpunkten erreichbar sind (beachte die dicken Pfeile in Abb. 4). Diese Erscheinung zu vermeiden, das heißt, den Code resistent gegen einfache Störungen zu machen. Überlegen wir uns, welche Möglichkeiten es hierfür gibt. Offenbar reicht es aus, einen Code so zu finden, daß man durch einfache Störungen nicht von einem Eckpunkt des entsprechenden geometrischen Gebildes zu einem Eckpunkt, der auch von einem anderen Codevektor durch einfache Störung erreichbar ist, gelangen kann. Dies gelingt aber doch nur, wenn es "Lücken" gibt, das heißt Eckpunkte, denen keine Codevektoren entsprechen, man sagt in diesem Falle, der Code ist redundant. Versuchen wir, diesen Gedanken in einem Beispiel zu verfolgen.

Wir können doch die Menge $\{a, b\}$ zum Beispiel wie folgt codieren:

$$a - [0, 0, 0]$$

$$b - [1, 1, 1]$$

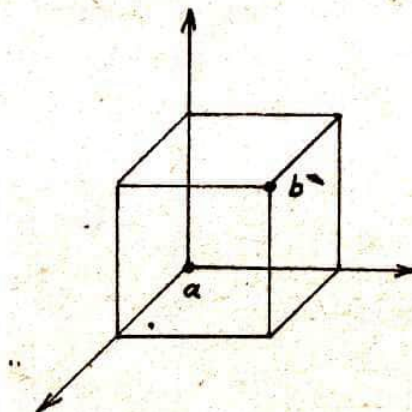


Abb. 5

Bei dieser Art von Codierung sind wir in der Lage, von einem empfangenen Vektor zu erkennen, ob er durch zweifache Störung gestört wurde oder nicht.

Ferner ist uns beim Empfang eines als einfach gestört erkannten Vektors eine eindeutige Bestimmung des ursprünglich gesendeten Codevektors möglich.

Den Beweis dieser Aussagen überlassen wir dem Leser.

Fassen wir nun, wie in unseren Beispielen, einen (n,k) -Code auf als Teilmenge C der Menge $\{0,1\}^n$ aller n -Tupel von Nullen und Einsen mit folgenden Eigenschaften:

1. $[0, \dots, 0] = 0 \in C$
2. Wenn $x = [x_1, \dots, x_n] \in C$ und $y = [y_1, \dots, y_n] \in C$, so ist $x \oplus y = [\dots, x_v \oplus y_v, \dots] \in C$
3. Zu jedem $x \in C$ gibt es ein $y \in C$, so daß $x \oplus y = 0$
4. Es ist $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) = x \oplus y \oplus z$ und $x \oplus y = y \oplus x$ für jedes $x, y, z \in C$. 1)
5. C enthält genau 2^k n -Tupel. 2)

-
- 1) In der Algebra sagt man, $[C, \oplus]$ ist eine Gruppe.
 - 2) Unser erstes Beispiel war also in diesem Sinne ein $(2,2)$ -Code, im zweiten Beispiel lag ein $(3,1)$ -Code vor.

In der nächsten Ausgabe setzen wir diesen Beitrag mit Beispielen und Anwendungen fort.

Dr. Rolf Lindner
Wissenschaftlicher Oberassistent
Bereich Kybernetik (Sektion Mathematik)

Unser Titelbild zeigt das Titelblatt der Festzeitschrift, die anlässlich des diesjährigen Mathematikerballs vom IV. Studienjahr herausgegeben wurde. Der MB fand am 12. November 1971 statt. In unserer nächsten Ausgabe werden wir über diesen festlichen gesellschaftlichen Höhepunkt berichten.

Preisaufgaben (Serie 12/71)

(C 49) Man zeige, daß für nichtnegative reelle Zahlen a stets

①

$$a^3 + 2a^2 + 15 > 13a \text{ gilt.}$$

(C 50) Man löse die Gleichung

②

$$x + y = (x - y)^2$$

in nichtnegativen ganzen Zahlen x und y .

(C 51) Es sei $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ eine arithmetische Folge

①

reeller Zahlen. Man zeige: Gibt es zwei natürliche Zahlen m und n , für die

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{i=1}^n a_i \quad \text{gilt, so ist}$$

$$\sum_{i=1}^{m+n} a_i = 0.$$

(C 52) Man bestimme den geometrischen Ort des vierten Eckpunktes aller Rechtecke mit den folgenden Eigenschaften:

②

1. Zwei Eckpunkte liegen auf einem gegebenen Kreis K .
2. Der dritte Eckpunkt liegt innerhalb von K .

(C 53) Man bestimme den kleinsten Wert der Funktion

①

$$\varphi(x) = |x-a| + |x-b| + |x-c| + |x-d|,$$

wenn a, b, c, d reelle Zahlen mit $a < b < c < d$ sind.

Für einen Mathematiker ist es heute unerlässlich, sich ständig mit den neuesten Erkenntnissen der Sowjetwissenschaft vertraut zu machen. Dazu gehört aber, daß man die Veröffentlichungen im Originaltext studieren kann. Um den Leser an diese Problematik heranzuführen, werden wir in dieser Ausgabe damit beginnen, einzelne Preisaufgaben in russischer Sprache zu veröffentlichen.

(С 54)

Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции с её основаниями, равны S_1 и S_2 .
Найти площадь трапеции.

1

Für jeden vollständigen Lösungsweg einer Preisaufgabe erhält der Einsender einen bzw. zwei Wertpunkte (Die Anzahl ist bei jeder Preisaufgabe unter der laufenden Nummer angegeben). Für 15 Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch.

Sollten pro Monat mehr als drei Einsender 15 Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges). Falls ein Besitzer von 15 Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum 10. des folgenden Monats (Datum des Poststempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgaben" an unsere Adresse zu schicken.

Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungen bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders und seiner Adresse versehen sein müssen. Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

Hohe Auszeichnungen

Anläßlich des 22. Jahrestages der Gründung unserer Republik wurden Angehörige der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena mit hohen Auszeichnungen geehrt.

Der Nationalpreis der DDR III. Klasse für Wissenschaft und Technik wurde für beispielhafte wissenschaftliche Leistungen zum Aufbau neuer Theorien zur Entwicklung neuer Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung an das Kollektiv "Wahrscheinlichkeitstheorie" verliehen, dem aus unserer Sektion angehören:

Prof. Dr. rer. nat. habil. Johannes Kerstan
Ordentlicher Professor für Mathematik an der Sektion
Mathematik der FSU Jena

Prof. Dr. rer. nat. habil. Kurt Nawrotzki
Ordentlicher Professor für das Fachgebiet Wahrscheinlich-
keitstheorie und mathematische Statistik an der Sektion
Mathematik der FSU Jena

Dr. rer. nat. habil. Joseph Mecke
Hochschuldozent für Wahrscheinlichkeitstheorie an der
Sektion Mathematik der FSU Jena

Die Aufgaben der FDJ-Grundorganisation der Sektion Mathematik in der Wahlperiode 1971/72

Am 20. Oktober 1971 fand die diesjährige Delegiertenkonferenz unserer FDJ-Grundorganisation statt. Dabei wurde Rechenschaft über die im vergangenen Studienjahr geleistete Arbeit abgelegt, und die Delegierten diskutierten und beschlossen die Aufgaben für das kommende Jahr. Zum neuen FDJ-Sekretär wurde Rainer Wackernagel, Assistent an der Sektion Mathematik, gewählt, der unseren Lesern sicher durch seine langjährige Mitarbeit in der "Wurzel" bekannt sein wird. Er hat in dem folgenden Artikel versucht, den Leser mit den Hauptaufgaben der FDJ an der Sektion Mathematik vertraut zu machen.

In seinem Referat auf dem IX. Parlament der FDJ sagte der 1. Sekretär des Zentralrates der FDJ, Günther Jahn:

"In Übereinstimmung mit dem Entwurf der Direktive zum Fünfjahrplan ist und bleibt es die entscheidende Aufgabe der FDJ in der III. Hochschulreform zu helfen, daß alle Studenten zu sozialistischen Persönlichkeiten herangebildet werden, die als Fachleute des Marxismus-Leninismus und Meister ihres Faches jederzeit bereit sind, jeden Auftrag unserer Arbeiter- und Bauern-Macht vorbehaltlos zu erfüllen."

Daraus und aus den Beschlüssen des VIII. Parteitages ergeben sich für die Arbeit unserer FDJ-Organisation an der Sektion Mathematik die wichtigsten Aufgaben für die Arbeit im Studienjahr 1971/72.

Die zentrale Aufgabe in der politisch-ideologischen Arbeit ist die Festigung und Vertiefung der vorbehaltlosen Überzeugung von der führenden Rolle der Arbeiterklasse und ihrer marxistisch-leninistischen Partei, die Entwicklung der Bereitschaft, die Politik der SED jederzeit und überall zu vertreten.

Im Prozeß der Lösung dieser Hauptaufgabe sehen wir vor allem folgende Problemstellungen, wollen wir folgende Grundüberzeugungen schaffen:

- ①. Die Vertiefung der Überzeugung von der Sowjetunion als dem allgemeingültigen Modell des Sozialismus und von der Notwendigkeit der Freundschaft zur Sowjetunion, zur KPdSU und zum Komsomol als Grundbedingung für unsere gesellschaftliche Entwicklung und für die Entwicklung sozialistischer Persönlichkeiten. Das heißt für uns z. B.
- verstärkte Auswertung und Anwendung der Sowjetwissenschaft
 - Entwicklung der Beziehungen zu sowjetischen Menschen (Briefwechsel, Studentendelegationen)
 - Intensivierung des Studiums der russischen Sprache
 - Auswertung der Sowjewissenschaften in den Vorlesungen.

- ②. Weitere Entwicklung der klassenbewußten Haltung zum Imperialismus und seinen Ideologien.

Dabei kommt es vor allem darauf an, die Gefährlichkeit des Imperialismus, insbesondere des imperialistischen Systems in der BRD zu verdeutlichen und die Rolle des Sozialdemokratismus zu klären.

- ③. Die Vertiefung einer politisch richtigen Einstellung zum Jugendverband als dem Helfer und der Kampfreserve der Partei der Arbeiterklasse und als dem Interessenvertreter der Jugend. Es kommt darauf an, über die
- politische Organisation des Gemeinschaftslebens,
 - verstärkte konkrete Aufgabenverteilung an alle Mitglieder,
 - bessere Berücksichtigung der steigenden geistigen Ansprüche und Bedürfnisse,
 - differenzierte, kontinuierliche politisch-ideologische Arbeit mit allen Mitgliedern
- die FDJ zur echten Heimstatt jedes FDJ-Studenten zu entwickeln und den Stolz auf unseren Jugendverband zu verbreitern.

Bei der Vervollkommnung der III. Hochschulreform hat die FDJ eine große Verantwortung. Das heißt für uns:

- Verstärkung der politisch-ideologischen Arbeit in allen FDJ-Gruppen.

Eine wesentliche Aufgabe ist dabei der Kampf um höchste Studienleistungen im marxistisch-leninistischen Grundlagenstudium. Das dort erworbene Wissen muß aber auch angewendet werden in der täglichen Arbeit, in den FDJ-Versammlungen, im FDJ-Studienjahr, in persönlichen Gesprächen. Die Aneignung und Anwendung des Marxismus-Leninismus muß eine Einheit bilden.

- Erfüllung der Studienpläne mit höchster Effektivität.

Hierbei kommt es vor allem auf folgende Schwerpunkte an:

- Entwicklung einer sozialistischen Studienhaltung,
- Mitgestaltung der Studienpläne,
- Arbeit mit Jugendobjekten.

In diesem Jahr werden wir ein Jugendobjekt schaffen, dessen Mitglieder sich mit der inhaltlichen Bearbeitung und Klärung von Problemen und Aufgaben bei der Erhöhung der Effektivität und Intensität des Studiums befassen.

Ein wesentlicher Bestandteil für die Effektivierung des Studiums ist die Verbesserung des Selbststudiums. In diesem Jahr wird deshalb verstärkt darauf orientiert, daß die Studenten nach Selbststudienplänen arbeiten (für einzelne Studenten oder auch auf kollektiver Basis).

- Die FDJ muß ihren Platz in der sozialistischen Demokratie voll wahrnehmen und an der Planung und Leitung des Hochschulwesens teilnehmen.

An unserer Sektion drückt sich das z. B. aus in der Mitarbeit der Studenten in den Erzieherkollektiven der Studienjahre, in der Diskussion der Erziehungs- und Ausbildungspläne und nicht zuletzt in der Mitarbeit in der Sektionsleitung. Die Arbeit des Jugendobjekts "Studienwerbung - Studienvorbereitung" und die Erarbeitung eines Berufsbildes des Mathematikers (durch Studenten des IV. Studienjahres) dokumentieren ebenfalls die Wahrnehmung der Verantwortung der Studenten für die Erziehung und Ausbildung.

Eine wesentliche Methode zur Umsetzung unserer Zielstellungen ist der sozialistische Wettbewerb. Wir wollen hierdurch die vielfältigsten Initiativen zur Erreichung der Ausbildungs-

und Erziehungsziele entwickeln. In dieser Bewegung ist der Kampf um den Ehrentitel "Sozialistisches Studentenkollektiv" die qualitativ höchste Form des Wettbewerbs. Er ist auf die Herausbildung sozialistisch denkender und handelnder, allseitig gebildeter Persönlichkeiten gerichtet, die bereit und fähig sind, in sozialistischer Gemeinschaftsarbeit Höchstleistungen zu vollbringen. Es kommt bei der Führung des sozialistischen Wettbewerbes besonders darauf an, alle Studenten zu aktivieren, jeden in die Arbeit einzubeziehen, um so die Forderung "alle erreichen, jeden gewinnen, keinen zurücklassen" zu verwirklichen.

R. Wackernagel

FDJ-Sekre

FDJ-Sekretär an der Sektion Mathematik
der FSU Jena

Lösungen

(C 27)

L

Wenn $P(x)$ ein volles Quadrat sein soll, muß es sich als $P(x) \equiv [f(x)]^2$ darstellen lassen, wobei $f(x)$ ein geeignetes Polynom ist. Dieses Polynom hat notwendig die Form

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

mit reellen Zahlen α, β, γ . Damit ergibt sich folgende Identität

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1 \\ &\equiv \alpha^2 x^4 + 2\beta\alpha x^3 + (2\alpha\gamma + \beta^2)x^2 + 2\beta\gamma x + \gamma^2 = \\ &= [f(x)]^2 \end{aligned}$$

Zwei Polynome sind aber genau dann identisch, wenn die Koeffizienten jeder Potenz des Argumentes übereinstimmen.

Man erhält also die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\gamma^2 &= 1 \\ 2\beta\gamma &= -8 \\ 2\alpha\gamma + \beta^2 &= b \\ 2\alpha\beta &= a \\ \alpha^2 &= 1\end{aligned}$$

und kann daraus die möglichen Werte für a und b bestimmen. Es ist

$$\alpha_{1,2} = \pm 1$$

$$\gamma_{1,2} = \pm 1$$

$$\beta_{1,2} = -\frac{4}{\gamma} = \pm 4$$

Damit wird

$$a_{1,2} = 2\alpha\beta$$

$$= \pm 8$$

und es gilt

$$\begin{aligned}b_{1,2} &= \beta^2 + 2\alpha\beta \\ &= 16 \pm 2\end{aligned}$$

Das bedeutet: Genau für die Wertepaare $(-8, 14)$ und $(8, 18)$ wird das Polynom $P(x)$ ein volles Quadrat.

(C 29) Durch Subtraktion von $2xy$ auf beiden Seiten der 1. Gl. erhält man das Gleichungssystem

$$(x - y)^2 = \frac{1}{4}xy \quad (1')$$

$$x - y = \frac{1}{4}xy \quad (2)$$

Man unterscheidet jetzt zwei Fälle:

1. Fall: $x = y$

Dann ist $xy = 0$, und es gibt eine Lösung

$$x_1 = y_1 = 0$$

2. Fall: $x \neq y$

Dann muß auch $x \neq 0$ und $y \neq 0$ sein.

Durch Division der ersten Gleichung durch das Quadrat der zweiten ergibt sich:

$$1 = \frac{8}{xy}$$

$$\text{oder } xy = 8 ,$$

weiter erhält man

$$, x-y = 2 .$$

Es ist also noch das Gleichungssystem

$$xy = 8 \quad (1'')$$

$$x-y = 2 \quad (2'') \quad \text{zu lösen.}$$

Die Lösungen ergeben sich zu

$$x_2 = 4, y_2 = 2 \quad \text{und} \quad x_3 = -2, y_3 = -4.$$

Damit sind genau die Paare $(0,0)$, $(4,2)$ und $(-2,-4)$ Lösungen des obigen Gleichungssystems.

(C 31)

eingesandt von Edgar Petersdorff, EOS Wurzen, 12. Kl.

L

$a_1; a_2; \dots; a_n$ ist eine geometrische Folge, d. h. es gilt:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\ a_4 &= a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Für s_1 und s_2 gilt deshalb:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 + a_1 \cdot q + a_1 q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} \\ s_1 &= a_1 (1 + q + \dots + q^{n-1}) \end{aligned} \quad (1)$$

$$s_2 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 q} + \dots + \frac{1}{a_1 q^{n-1}}$$

$$s_2 = \frac{1}{a_1} \left(1 + \frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q^{n-1}} \right)$$

$$s_2 = \frac{1}{a_1} \left(\frac{1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}}{q^{n-1}} \right) \quad (2)$$

Aus $P = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$ folgt:

$$P = a_1 \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$P = \frac{a_1^{\frac{n}{2}} \cdot (1+q+q^2+\dots+q^{n-1})^{\frac{n}{2}} \cdot a_1^{\frac{n}{2}} \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1+q+q^2+\dots+q^{n-1})^{\frac{n}{2}}}$$

$$P = s_1^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{s_2^{\frac{n}{2}}} \quad \text{nach (1) und (2)}$$

$$P = \left(s_1 \cdot \frac{1}{s_2} \right)^{\frac{n}{2}}$$

Inhaltsverzeichnis der »Wurzel« 1971

971

	Seite
Mengen, Relationen, Funktionen III	2
Mengen, Relationen, Funktionen IV	18
Über geometrische Konstruktionsaufgaben I	34
Über geometrische Konstruktionsaufgaben II	50
Über geometrische Konstruktionsaufgaben III	66
Einführung in die Bedienungstheorie I	82
Einführung in die Bedienungstheorie II	98
Schaltungen aus logischen Bauelementen	131
Zerlegungsgleichheit von Polygonen	161
Codierungstheorie I	178
Pädagogik und Mathematik	11
Die Gründung des "Bezirksklubs Junger Mathematiker" des Bezirkes Gera	38

Mathematik-Winterlager des Bezirkes Gera	57
"Bezirksklub Junger Mathematiker" des Bezirkes Neubrandenburg	72
X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR	87
Wissenschaftlich-produktives Studium in der Diskussion	26
Studentenkonferenz der Sektion Mathematik	115
FDJ-Studentensommer, Jena - Minsk '71	143
Auswertung des VIII. Parteitages an unserer Sektion	158
Besuch in Minsk	171
Die Aufgaben der FDJ-Grundorganisation der Sektion Mathematik in der Wahlperiode 1971/72	185

*Die Wurzel wünscht ihren Lesern frohe
Weihnachtsfeiertage und einen guten
Rutsch ins Neue Jahr.*

Das Redaktionskollektiv

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienwerbung-Studienvorbereitung“ der Sektion Mathematik
der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Leiter: Manfred Wolf

Redaktion: Volker Kögel (Chefredakteur); B. Wächter, H. Fischer

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich
von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen
sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns
aufzugeben.

Anschrift: WURZEL
69 Jena
Helmholtzweg 1

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45

V-14-6 3,4 5563 M 175/71