

MARKT + BÜCHER
MARKT + BÜCHERMARKT + BÜCHER

AUCH 1972:

“WURZEL”

— RATGEBER IN SACHEN

STUDIENWERBUNG – STUDIENVORBEREITUNG



JETZT NEU !!!

BÜCHER—

MARKT

MARKT + BÜCHERMARKT + BÜCHER
MARKT + BÜCHER

1

72

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
FDJ-Aktiv der
Sektion Mathematik
an der
Friedrich-Schiller-
Universität Jena

Codierungstheorie II

Unsere bisherigen Betrachtungen führen zu der Frage, ob es ein Kriterium dafür gibt, daß ein (n,k) -Code C resistent gegen s -fache Störungen ist, d.h., ob er eine eindeutige Zurückgewinnung von Codevektoren aus s -fach gestörten Vektoren ermöglicht.

Wie unsere Beispiele zeigen, kommt es dabei offenbar darauf an, in geeigneter Weise sagen zu können, wann zwei Codevektoren "weit" oder "weniger weit" voneinander entfernt sind. Ein Maß für die Entfernung zweier Codevektoren ist aber doch die Anzahl der Störungen, die man benötigt, um den einen Codevektor aus dem anderen zu erhalten. Gilt also für zwei Codevektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ und für einen Störvektor σ die Beziehung

$$\mathbf{x} + \sigma = \mathbf{y},$$

so ist die Anzahl der Einsen von σ ein Maß für den Abstand von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$.

Wir setzen also den Abstand

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) =_{\text{Df}} \sum_{r=1}^n (x_r \oplus y_r) \quad ^1)$$

Überprüfen wir zunächst, daß es sich dabei um einen "vernünftigen" Abstandsbegriff handelt, d.h., daß H solche Eigenschaften hat, wie z. B. der in der analytischen Geometrie verwendete Abstand

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

zweier Punkte in der Ebene mit den Koordinaten $[x_1, y_1], [x_2, y_2]$.

In der Tat, es ist

① $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Beweis: Ist $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, so ist $(x_r \oplus y_r) = 0$, nach

Definition von $\oplus$ heißt dies aber,

$x_r = y_r$ für jedes r ($1 \leq r \leq n$).

Ist dagegen $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, so folgt $(x_r \oplus y_r) = 0$

für jedes r ($1 \leq r \leq n$) und damit $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

$$\textcircled{2} \quad H(x, y) = H(y, x)$$

Hier ist nichts zu zeigen.

$$\textcircled{3} \quad H(x, y) + H(y, z) \geq H(x, z)$$

Beweis: Es gilt

$$(x_r \oplus z_r) = (x_r \oplus y_r \oplus y_r \oplus z_r) \leq (x_r \oplus y_r) + (y_r \oplus z_r)$$

also

$$\sum_{r=1}^n (x_r \oplus z_r) \leq \sum_{r=1}^n (x_r \oplus y_r) + \sum_{r=1}^n (y_r \oplus z_r),$$

wie behauptet.²⁾

Wir verwenden nun den Mindestabstand, den paarweise verschiedene Vektoren aus C haben, d.h. die Zahl

$$H_C =_{\text{Df}} \min_{\substack{x, y \in C \\ x \neq y}} H(x, y),$$

um unser Kriterium zu formulieren.

S a t z (Hamming)



Ein (n, k) -Code C ist genau dann gegen s -fache Störung resistent, wenn $H_C \geq 2s + 1$.

Beweis: $\textcircled{a}$ C sei gegen s -fache Störung resistent. Zur Vereinfachung bezeichne für einen Störvektor

$$\sigma = [u_1, \dots, u_n]$$

die Zahl $G(\sigma)$ die Anzahl der Einsen von σ , d.h.

$$G(\sigma) = \sum_{r=1}^n u_r.$$

1) Dieser Abstandsbegriff wurde erstmals von Hamming verwendet, und daher wird er Hamming-Distanz genannt.

2) Abstandsmaße mit den Eigenschaften 1 bis 3 heißen gewöhnlich Metrik.

Wir betrachten die folgende Skizze:

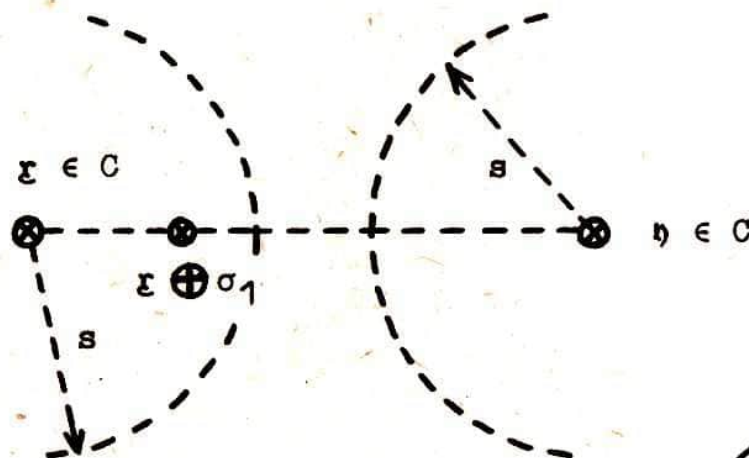


Abb. 6

Für jedes σ_1 mit $G(\sigma_1) \leq s$ muß nun nach unseren Voraussetzungen gelten:

Falls für σ_2 die Gleichung

$$x \oplus \sigma_1 = y \oplus \sigma_2 \quad \text{gilt} \quad (x \neq y),$$

so ist $G(\sigma_2) \geq s + 1$.

Wir wählen ein σ_1 , so daß

$$H(x, x \oplus \sigma_1) + H(x \oplus \sigma_1, y) = H(x, y), \quad \text{d.h.}$$

$x \oplus \sigma_1$ liegt auf der in Abb. 6 eingezeichneten "Geraden". Dann haben wir für jedes σ_2 mit

$$G(\sigma_2) \leq s \quad \text{sofort}$$

$$H(x, x \oplus \sigma_1) + H(y \oplus \sigma_2, y) + 1 \leq$$

$$H(x, x \oplus \sigma_1) + H(x \oplus \sigma_1, y) = H(x, y).$$

Diese Ungleichung gilt insbesondere für

$$G(\sigma_1) = G(\sigma_2) = s, \quad \text{d.h.}$$

$$2s + 1 = H(x, y).$$

b) Es sei $H(\underline{x}, \eta) \geq 2s + 1$.

Für σ_1 mit $G(\sigma_1) \leq s$ folgt dann

$$H(\underline{x}, \underline{x} \oplus \sigma_1) + H(\underline{x} \oplus \sigma_1, \eta) \geq H(\underline{x}, \eta) \geq 2s + 1$$

(wir verwenden ③ von Seite 3 und unsere Voraussetzung).

Wegen $G(\sigma_1) \leq s$ folgt

$$H(\underline{x} \oplus \sigma_1, \eta) \geq s + k \quad \text{mit } k \geq 1, \text{ d.h.}$$

$\underline{x} \oplus \sigma_1$ ist aus η durch keinen Störvektor mit höchstens s Störungen erreichbar.

Es scheint nun so, als wären wir mit diesem Satz aller Sorgen ledig, indem wir einfach H_0 hinreichend groß wählen, wenn wir eine vorgegebene Fehleranzahl korrigieren wollen.

Beim gründlichen Nachdenken wird dem Leser nicht verschlossen bleiben, daß die soeben genannte Schlußfolgerung an den Versuch erinnert, ein perpetuum mobile zu konstruieren. Man vermutet daher, daß auch im Falle fehlerresistenter Codes eine Art von "Erhaltungssatz" existiert, der besagt, daß man größere Fehlerresistenz eines Codes mit dem Verzicht auf andere Beschaffenheiten dieses Codes bezahlen muß.

Dr. Rolf Lindner

Wissenschaftlicher Oberassistent
im Bereich Mathematische Kybernetik
an der Sektion Mathematik

Literatur: **В. Питерсон,**
Коды исправляющие ошибки
Verlag Мир, Москва 1964

Preisaufgaben 1/72

(D 1) Man zeige, daß für jede natürliche Zahl n

② $9^n(9^n + 1) + 1$ durch $3^n(3^n + 1)$ teilbar ist!

(D 2) Der größte gemeinsame Teiler zweier dreistelliger

① Zahlen m und n sei 6 und ihr kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches eine sechsstellige Zahl.

Man bestimme das Vorzeichen von

$\tan \frac{\pi}{350} !$

(D 3) Für genau welche reellen Zahlen a ist die Funktion

② $f(x) = \cos ax + \cos x$ periodisch?

(D 4) Kann man in ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis

① $\frac{9}{16}$ ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis $\frac{4}{7}$ so einbeschreiben, daß auf jeder Seite des ersten Rechtecks ein Eckpunkt des einbeschriebenen liegt?

(D 5) Es ist zu zeigen, daß es für beliebige nichtnegative

② reelle Zahlen a_1, a_2 mit $a_1 + a_2 = 1$ nichtnegative reelle Zahlen b_1, b_2 mit $b_1 + b_2 = 1$ derart gibt, daß

$$\left(\frac{5}{4} - a_1\right)b_1 + 3\left(\frac{5}{4} - a_2\right)b_2 > 1 \text{ gilt!}$$

(D 6)

② Суть $\mathcal{L} \stackrel{\text{Def}}{=} \left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right\|$ и $\mathcal{C}$ множество всех $\mathbf{x} \in \{0,1\}^7$, для которых $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{o}$.

Доказать: Если $G(\sigma) \leq 1$ для некоторого вектора помеха, то $(\mathbf{x} - (\mathbf{x} \oplus \sigma)^T)^T$ является двоичным числом того места, на котором σ мешает.

(D 6)

Die Aufgabe bezieht sich auf den zweiteiligen Artikel
"Codierungstheorie" von Dr. Rolf Lindner.

Für jeden vollständigen Lösungsweg erhält der Einsender einen bzw. zwei Wertpunkte. Die Anzahl ist bei jeder Preisaufgabe unter der laufenden Nummer angegeben. Für 15 Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch.

Sollten pro Monat mehr als drei Einsender 15 Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges). Falls ein Besitzer von 15 Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum Ende des darauffolgenden Monats unter dem Kennwort "WURZEL"-Preis-aufgaben" an unsere Adresse einzuschicken.

Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungen bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders und seiner Adresse versehen sein müssen. Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

Als Delegierter zum IX. Parlament der Freien Deutschen Jugend



Vom 25. bis 29. Mai 1971 tagte in Berlin das höchste Organ der Freien Deutschen Jugend, das Parlament. Es war das erste Mal, daß ich ein Parlament unserer Jugendorganisation als Delegierter miterleben konnte, und ich muß sagen, es hat mich ehrlich begeistert. Die Atmosphäre unseres IX. Parlaments war einfach großartig.

Der Rechenschaftsbericht unseres 1. Sekretärs Günther Jahn stand unter dem Thema: Die Verantwortung der Jugend bei der Gestaltung der entwickelten sozialistischen Gesellschaft in der DDR und die Aufgaben der Freien Deutschen Jugend.

Günther Jahn konnte feststellen, daß die Zeit zwischen dem VIII. und IX. Parlament Jahre großer Initiativen und Leistungen der Jugend waren. In den Bewegungen: "Der revolutionären Kämpfer würdig erweisen - vollbringt hohe Leistungen zu Ehren der DDR", der Verfassungsdiskussion: "Mit würdigen Leistungen schaffen wir das Fundament für unsere neue sozialistische Verfassung", dem "Lenin-Aufgebot" und der Bewegung "Würdige

Initiativen zu Ehren des VIII. Parteitages der SED" dokumentierte sich die große und ständig wachsende Kraft unseres Jugendverbandes.

Als Grundaufgabe unseres Jugendverbandes formulierte der 1. Sekretär, "alle Mädchen und Jungen zu klassenbewußten Sozialisten zu erziehen, die unter der Führung der Arbeiterklasse und ihrer marxistisch-leninistischen Partei mit revolutionärem Schöpfungstum die sozialistische Gesellschaft in der DDR mitgestalten, ihr sozialistisches Vaterland gegen alle Anschläge zuverlässig schützen und im Geiste des proletarischen Internationalismus handeln".

Aus dieser Grundaufgabe leiten sich die Überzeugungen ab, die jeder junge Sozialist gewinnen muß:

1. Der Sozialismus ist Sinn und Inhalt unseres Lebens.
Er gibt unserer Epoche das Gepräge. Ihn mitzugestalten ist unsere geschichtliche Aufgabe.
2. Die Deutsche Demokratische Republik ist unser sozialistisches Vaterland. Sie allseitig zu stärken und zu schützen, ist unsere tägliche Aufgabe.
3. Die Sozialistische Einheitspartei Deutschlands gibt uns mit ihrer Politik die Richtschnur für unser Denken und Tun. Ihr erweisen wir uns stets als Helfer und Reserve.
4. Die Sowjetunion, der Pionier des menschlichen Fortschritts, ist uns Freund und Vorbild. Wir tragen zur Festigung des Bruderbundes mit der UdSSR und den anderen Ländern der sozialistischen Staatengemeinschaft bei.
5. Der proletarische Internationalismus ist uns Herzensanliegen und Sache der Tat. Wir üben Solidarität mit allen gegen den Imperialismus kämpfenden Völkern.
6. Das imperialistische System ist unser Feind. Nichts verbindet uns mit der BRD, dem imperialistischen NATO-Staat, von dem wir uns vollständig abgrenzen.
7. Die Freie Deutsche Jugend, der einheitliche sozialistische Jugendverband, ist unsere politische Kampforganisation.

Unsere politische Verantwortung besteht darin, alle zu erreichen, jeden zu gewinnen und keinen zurückzulassen. Wir haben in den letzten Jahren große Fortschritte in der klassenmäßigen

Erziehung der Jugend erzielt. Aber die Größe der vor uns liegenden Aufgaben kann man erst erkennen, wenn wir uns unserer politischen Verantwortung: alle erreichen, jeden gewinnen und keinen zurückzulassen, im Zusammenhang mit unserer Grundaufgabe und den nötigen Grundüberzeugungen klar werden.

Das IX. Parlament war eine große Manifestation der Kraft der fortschrittlichen Jugend unserer Republik und der ganzen Welt. Das wurde deutlich an der großen Zahl der ausländischen Delegationen, an deren Spitze der Komsomol, der Jugendverband der Sowjetunion, stand. Das IX. Parlament war weiterhin eine große Manifestation der Geschlossenheit unseres Jugendverbandes, seiner treuen Haltung zur Partei der Arbeiterklasse und unserem großen Brudervolk, der Sowjetunion.

Es war eine Manifestation des Kampfes gegen den Imperialismus, für die Unterstützung des Kampfes unserer vietnamesischen Genossen, gegen die USA-Imperialisten, des Kampfes der arabischen Völker gegen die Aggressionsakte des US-Stellvertreters Israel und der Unterstützung der antiimperialistischen Bewegung in der ganzen Welt.

Das IX. Parlament hat ausgehend von dem großen Wegweiser des Weges in die Zukunft, der Politik der KPdSU, die sich kurze Zeit vorher auf dem 24. Parteitag dokumentierte, und der Politik unserer Sozialistischen Einheitspartei die Weichen für die weitere Entwicklung unserer Jugend zum Helfer und zur Kampfesreserve unserer Partei gestellt.

Für uns ist es wichtig, die Ideen und Aufgaben, aber auch die Atmosphäre des IX. Parlaments in unseren FDJ-Gruppen in die Tat umzusetzen. Immer von unserer Hauptaufgabe, der klassenmäßigen Erziehung der Jugend ausgehend, müssen wir jede Gelegenheit nutzen, um unsere Freunde für unsere große Aufgabe, als aktive Mitgestalter, als Initiatoren zu gewinnen.

Peter Lang

**Lehrerstudent im IV. Studienjahr an der
Sektion Mathematik**

Lösungen

(C 33)

L

2. Lösung, eingesandt von A. Möbius, Halle.

Der Beweis erfolgt mit Mitteln der Vektorrechnung. Man wählt einen Punkt O als Koordinatenursprung. Die Ortsvektoren der Punkte A, B, C, D seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ und $\mathbf{d}$. Dann gilt

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{c} - \mathbf{d}) = 0 \quad , \text{ da nach Vorauss. } \overline{AB} \perp \overline{CD}$$

$$(\mathbf{a} - \mathbf{c})(\mathbf{b} - \mathbf{d}) = 0 \quad , \text{ da nach Vorauss. } \overline{AC} \perp \overline{BD}.$$

Nach dem Distributionsgesetz für Skalarprodukte gilt

$$\mathbf{ac} - \mathbf{bc} - \mathbf{ad} + \mathbf{bd} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{ab} - \mathbf{bc} - \mathbf{ad} + \mathbf{cd} = 0 \quad (2)$$

Subtrahiert man jetzt (1) von (2), so erhält man

$$\mathbf{ab} - \mathbf{ac} + \mathbf{cd} - \mathbf{bd} = 0 \quad \text{oder}$$

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0.$$

Da man annehmen kann, daß alle vier Punkte A, B, C, D paarweise voneinander verschieden sind, gilt also $\mathbf{a} - \mathbf{b} \neq 0$ und $\mathbf{b} - \mathbf{c} \neq 0$ und die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ stehen senkrecht aufeinander.

(C 38)

L

eingesandt von J. Roßmann, Neubrandenburg.

Aus $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ folgt

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = 0 \quad , \text{ d.h.}$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n) = 0.$$

Damit wird

$$a_1 a_2 + \dots + a_1 a_n + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n = -\left(\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{2}\right)$$

Da das Quadrat einer reellen Zahl stets nichtnegativ und die Summe nichtnegativer Zahlen wiederum nichtnegativ ist, gilt

$$\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{2} \geq 0 \quad \text{oder} \quad -\left(\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{2}\right) \leq 0,$$

woraus die Behauptung folgt.

(C 37) eingesandt von K. Girlebeck, Prenzlau.

L

Alle gesuchten Zahlen z müssen die gleiche Quersumme besitzen wie $9z$. Da $9z$ durch 9 teilbar ist, muß auch die Quersumme von $9z$ und damit auch die von z durch 9 teilbar sein. Also muß z selbst ein Vielfaches von 9 sein.

In Betracht kommen also nur die Zahlen

18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99.

Wegen $7 \cdot 27 = 189$

$8 \cdot 36 = 288$

$7 \cdot 54 = 378$

$3 \cdot 63 = 189$

$4 \cdot 72 = 288$

$6 \cdot 81 = 486$

erfüllen die Zahlen

27, 36, 54, 63, 72, 81 die Bedingungen nicht, denn es ist die Quersumme 9 dieser Zahlen verschieden von der Quersumme eines ihrer Vielfachen.

Nur die Zahlen

18, 45, 90, 99

haben die gesuchten Eigenschaften, wie man leicht nachprüft.

Für gerade n kann der " n -Springer" von jedem Feld aus jedes beliebige Feld erreichen. Für ungeradzah-
lige n ist dies nicht möglich.

Die Felder des unendlichen Schachbrettes seien durch geordnete Paare ganzer Zahlen bezeichnet.

Dann kann ein " n -Springer" von einem Feld $[k, l]$ aus genau zu den Feldern

$[k+1, l-n], [k+1, l+n], [k-1, l-n], [k-1, l+n],$
 $[k+n, l-1], [k+n, l+1], [k-n, l-1], [k-n, l+1]$

ziehen.

Sei jetzt n gerade. Um zu zeigen, daß dann der " n -Springer" jedes Feld erreichen kann, genügt es nachzuweisen, daß er von einem Feld $[q_1, q_2]$ auf das Nachbarfeld $[q_1+1, q_2]$ gelangen kann, denn jedes andere Feld $[k, l]$ läßt sich durch diese Schritte

$[q_1, q_2] \rightarrow [q_1+1, q_2] \rightarrow [q_1+2, q_2] \rightarrow \dots \rightarrow$

$\dots \rightarrow [k, q_2] \rightarrow \dots \rightarrow [k, l]$ erreichen.

Dazu kann man einfach die Züge angeben:

1. Zug $[q_1, q_2]$ nach $[q_1+n, q_2+1]$

2. Zug $[q_1+n, q_2+1]$ nach $[q_1, q_2+2]$

3. Zug $[q_1, q_2+2]$ nach $[q_1+n, q_2+3]$

$\vdots$ Zug $[q_1, q_2+n-1]$ nach $[q_1, q_2+n]$

$(n+1)$. Zug

$[q_1, q_2+n]$ nach $[q_1+1, q_2]$

Ist nun n ungerade, so lassen sich von dem " n -Springer" nur solche Felder erreichen, deren Summe der Koordinaten den gleichen Rest bei der Division durch 2 lassen wie die Summe der Koordinaten des Ausgangsfeldes, d.h. entweder nur "weiße" oder "schwarze" Felder. Der Grund ist, daß sich die Summe der Koordinaten

bei einem Zug immer um eine gerade Zahl ändert, wie man leicht nachprüft. Daß alle "weißen" bzw. "schwarzen" Felder erreichbar sind, beweist man analog zu oben durch Angabe der Züge von $[q_1, q_2]$ nach $[q_1+2, q_2]$.

(C 43)

L

Es muß $x \neq 0$, $y \neq 0$ und $z \neq 0$ gelten, da jede der Unbekannten einmal im Nenner auftritt. Da alle drei Summanden

$$\frac{x \cdot y}{z}, \quad \frac{x \cdot z}{y}, \quad \frac{y \cdot z}{x}$$

das gleiche Vorzeichen besitzen, müssen sie positiv sein. Das heißt, es sind entweder alle drei Unbekannten positiv, oder genau zwei sind negativ.

Ist aber $[x, y, z]$ Lösung der Gleichung, so sind auch

$[x, -y, -z]$, $[-x, y, -z]$, $[-x, -y, z]$ Lösungen.

Weiterhin sind auch $[x, z, y]$, $[y, x, z]$, $[y, z, x]$, $[z, x, y]$, $[z, y, x]$ Lösungen, so daß man o.B.d.A.

$0 < x \leq y \leq z$ voraussetzen kann.

Für nichtnegative reelle Zahlen gilt aber:

$$\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{xy}{z} \cdot \frac{xz}{y} \cdot \frac{yz}{x}} = 3 \cdot \sqrt[3]{xyz}$$

Da nach Voraussetzung $\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = 3$

sein soll, folgt daraus

$$3 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{xyz}, \quad 1 \geq \sqrt[3]{xyz}, \quad 1 \geq xyz.$$

Das ist aber nur für $x = y = z = 1$ möglich.

Damit ergibt sich die Lösungsmenge

$$L = \{ [1, 1, 1], [-1, -1, 1], [-1, 1, -1], [1, -1, -1] \}.$$

Unter dieser Rubrik werden wir unseren Lesern künftig interessante Bücher mathematischen Inhalts vorstellen. Für Schüler, die sich für die Mathematik begeistern, wird es sicher von Interesse sein, auf diesem Wege einiges über die Bücher zu erfahren, mit denen die Studenten an unserer Sektion arbeiten. Wir hoffen, daß Ihnen unsere Hinweise als Anregung dienen.

Als erstes Buch stellen wir vor :

G.M. FICHTENHOLZ Differential- und Integralrechnung

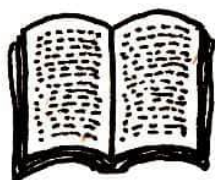
Dieses Werk wird an unserer Sektion als Literatur zur Vorlesung "Analysis" im 1.Studienjahr benutzt. Es kann als Grundliteratur zur Differential- und Integralrechnung während des gesamten Studiums angesehen werden. Wer einmal ein naturwissenschaftliches Studium aufnehmen möchte, wird diesen Büchern sicher zu Beginn des Studiums wieder begegnen.

Gregor Michailowitsch Fichtenholz lebte von 1888 bis 1959. Er arbeitete als Hochschullehrer in Leningrad und hielt dort bis zu seinem Tode Vorlesungen. Seine langjährige Erfahrung bei der Ausbildung von Studenten schlägt sich auch in diesem Werk nieder. Als Ergänzungsliteratur zum Schulstoff der 11. und 12.Klasse und zur Vorbereitung auf das Studium sind vor allem der erste und der zweite Band zu empfehlen.

Aus dem Inhalt: Band 1 Reelle Zahlen

Theorie der Grenzwerte
Funktionen einer Veränderlichen
Grundlagen der Differentialrechnung

!!!!!!



!!!!!!

Band 2 Unbestimmtes und bestimmtes Integral
Anwendung der Integralrechnung
Unendliche Reihen mit konstanten Gliedern
Funktionsfolgen- Funktionsreihen
Uneigentliche Integrale

Band 3 Kurvenintegrale
Flächenintegrale
Oberflächenintegrale Raumintegrale
Mehrdimensionale Integrale
Fourierreihen
Allgemeine Gesichtspunkte beim Limesbegriff

Preis eines jeden Bandes: ca. 30,- M.

➡ MZ 71 ⚡

Denjenigen, die es nicht wissen sollten, sei erst einmal gesagt, daß MZ die Abkürzung für "Mathematikerball" ist. Selbiger findet alljährlich statt und wurde bisher stets vom 4. Studienjahr organisiert.

Der letzte war am 12. November vergangenen Jahres. Dieser Höhepunkt des gesellschaftlichen Lebens unserer Sektion will natürlich vorbereitet sein! Da gilt es zuallererst, für eine originelle Werbung zu sorgen, was im letzten Jahr wirklich beherzigt wurde:

Es erschienen erstmalig MZ-Plaketten, es wurden Gläser mit drei unterschiedlichen Motiven angeboten, weiterhin machten viele Plakate auf unseren Ball aufmerksam, und in der Woche des MZ öffnete eine Schießbude vor der Mensa ihre Pforten.



Das waren aber nur die Vorbereitungen, die einem Außenstehenden sofort ins Auge fallen mußten. Doch zur Ausstattung eines Balles gehört mehr! Schließlich erwartet das Publikum keinen gewöhnlichen Tanzabend, sondern es möchte auch etwas geboten bekommen, das für die veranstaltende Sektion charakteristisch ist. Rein vom Äußeren sorgen dafür zahlreiche Plakate in allen drei Sälen der Mensa. Dabei kommt es im oberen Saal zu lustigen Begegnungen zwischen dem Lehrkörper und mehr oder weniger treffenden Karikaturen desselben. Höhepunkte des MZ stellen dann das Programm, das von Studenten ausgearbeitet und dargeboten wird, sowie der Verkauf der MZ-Zeitung dar. Das Programm stand im vorigen Jahr unter dem Motto "Der Sektionsdirektor wird eingeladen" und hatte Probleme unserer Ausbildung zum Inhalt, die auf wirkungsvolle Weise (z.B. durch Pantomime) zum Ausdruck gebracht wurden.

Unsere Zeitung, deren Titelblatt übrigens auf der letzten

"WURZEL" zu sehen
war, erschien
mit dem Namen

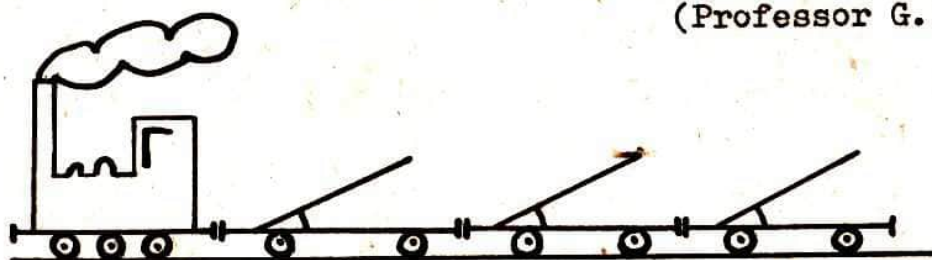
Riemannsche Blätter

und enthielt 30 interessante sowie lustige Artikel und Skizzen.
Hier eine kleine Auswahl:

1. "Mathematik ist die Kunst, das Rechnen zu vermeiden"
(Professor W.)
2. "Heute machen wir wirklich Mathematik und rechnen nicht
einfach"

(Professor G.)

3.



„Immer diese Winkelzüge!“



Sie sehen, Mathematik muß keineswegs nur graue Theorie sein.
Auch Mathematiker besitzen Humor !

In diesem Sinne verbleiben wir bis zum nächsten ~~13~~ - viel-
leicht haben Sie das Glück, selbst dabei zu sein.

Diesen Beitrag verfaßte unsere bisherige grafische Gestalterin
Uschi Schleicher (4.Stj. Mathe-Diplom). Sie gibt damit ihren
Einstand als Manuskriptchef der "WURZEL", indem sie unseren
langjährigen Mitarbeiter Bernd Wächter ab nächsten Monat
ablöst.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienwerbung-Studienvorbereitung“ der Sektion Mathematik
der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Leiter: Manfred Wolf

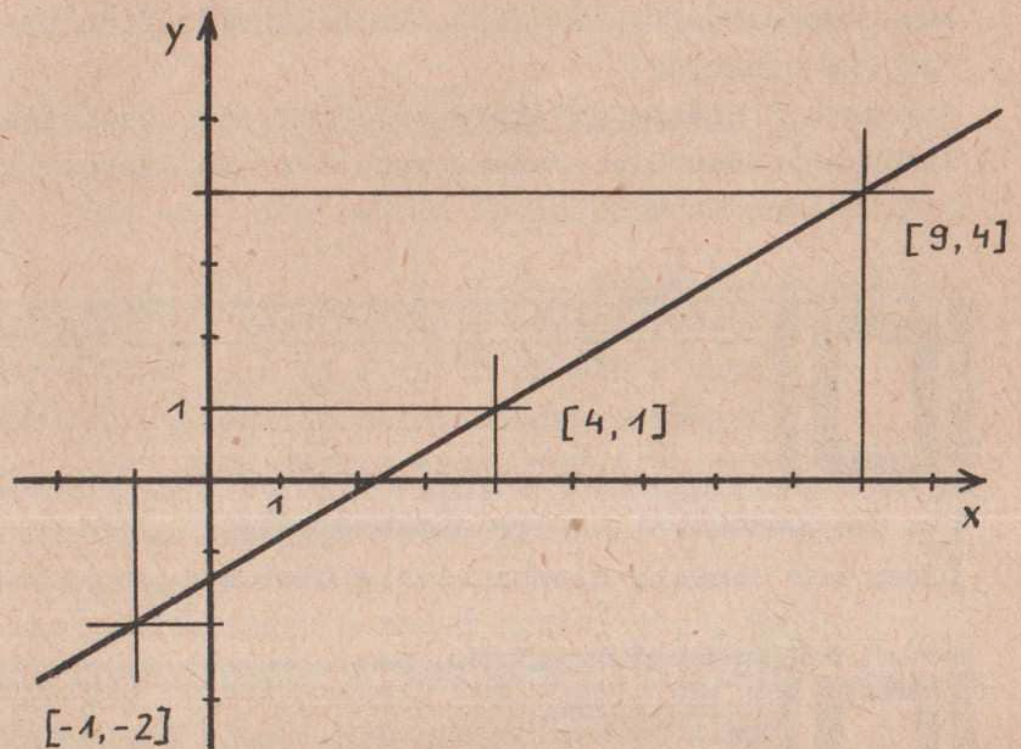
Redaktion: Volker Kögel (Chefredakteur); B. Wächter, H. Fischer

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich
von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen
sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns
aufzugeben.

Anschrift: WURZEL
69 Jena
Helmholtzweg 1

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45

● Lösung diophantischer Gleichungen



Aufgabe (2)
Seite 19/20

2

72

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
FDJ-Aktiv der
Sektion Mathematik
an der
Friedrich-Schiller-
Universität Jena

Diophantische Gleichungen

Ein sehr interessantes Gebiet der Zahlentheorie sind die diophantischen Gleichungen. Erstmalig wurden derartige Gleichungen von dem griechischen Mathematiker Diophantos (250 u. Z.) behandelt, und trotz jahrhundertelanger Forschungsarbeit sind heute noch mehrere Probleme dieser Theorie ungeklärt.

Gegenstand dieses Artikels soll nur ein spezieller Typ von diophantischen Gleichungen sein: Wir wollen nur lineare Gleichungen betrachten.

Definition 1:

D G ist lineare diophantische Gleichung genau dann, wenn G die Form $ax + by = c$ hat, wobei a, b, c gegebene ganze Zahlen darstellen und x, y Variable für ganze Zahlen sind.

(Im folgenden wollen wir unter diophantischen Gleichungen immer nur lineare diophantische Gleichungen verstehen.)

Definition 2:

D L ist Lösung der diophantischen Gleichung $ax + by = c$ genau dann, wenn L ein Paar $[x_0, y_0]$ von ganzen Zahlen ist, für das $ax_0 + by_0 = c$ gilt.

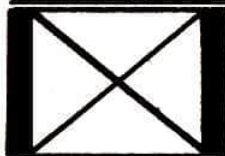
Allgemein ist bekannt, daß man die Gleichung $ax + by = c$ als Geradengleichung interpretieren kann, falls x und y aus dem Bereich der reellen Zahlen gewählt werden dürfen. Die Forderung "x, y ganzzahlig" kann man nun so verstehen, daß wir auf der vorliegenden Geraden nach Punkten mit ganzzahligen Koordinaten, sogenannten Gitterpunkten, suchen werden. Das Ziel besteht nun darin, sämtliche Lösungen L der diophantischen Gleichung $ax + by = c$ anzugeben.

Rein anschaulich kann man sich überlegen, daß es Geraden geben kann, die nicht durch Gitterpunkte hindurchführen. Mit anderen Worten bedeutet das: Nicht jede diophantische Gleichung muß lösbar sein. Bevor man also an das Lösen von

diophantischen Gleichungen herangehen wird, muß man die Lösbarkeitsfrage klären.

Eine Antwort darauf gibt Satz 1:

Satz 1:



Eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit der diophantischen Gleichung $ax + by = c$ ist, daß der größte gemeinsame Teiler von a und b auch ein Teiler von c ist.

Bemerkungen:

- (1) Die natürliche Zahl d heißt Teiler der ganzen Zahl c , in Zeichen $d|c$, wenn es eine ganze Zahl e gibt, so daß $c = d \cdot e$ gilt. Gibt es keine solche Zahl, dann schreibt man $d \nmid c$.
- (2) Unter (a,b) verstehen wir den größten gemeinsamen Teiler von a und b . Ist $(a,b) = 1$, so nennen wir a und b teilerfremd.

Beweis von Satz 1:

Es sei $ax + by = c$ lösbar und $(a,b) = d$. Unter Berücksichtigung der Zerlegungen $a = \alpha \cdot d$ und $b = \beta \cdot d$ mit ganzzahligen α und β ergibt sich durch Einsetzen: $d(\alpha x + \beta y) = c$, und daraus folgt $d|c$.

Die Frage der Lösbarkeit einer diophantischen Gleichung haben wir damit auf das Vergleichen der ganzen Zahlen a, b, c zurückgeführt. Besitzen a, b, c den größten gemeinsamen Teiler d , dann wollen wir ihn stets aus der diophantischen Gleichung herausgekürzt denken, so daß wir nun ohne Einschränkung der Allgemeinheit für lösbare Gleichungen stets $(a,b) = 1$ voraussetzen können.

Aufgabe: Man versuche wenigstens je 2 Lösungen $[x,y]$ für die diophantischen Gleichungen



(1) $6x + 3y = 1$

(2) $3x - 5y = 7$

anzugeben, indem man die zugehörigen Geraden zeichne und Gitterpunkte bestimme! (siehe Titelbild)

Ergebnis:

- (1) Da $(6,3) = 3$ und $3 \nmid 1$, folgt unmittelbar Unlösbarkeit!

- (2) Aus der angefertigten Zeichnung kann man erkennen, daß z. B. die Paare $[-1, -2]$, $[4, 1]$ und $[9, 4]$ zur Lösungsmenge gehören, wie man durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung bestätigen kann. Auffallend ist, daß sich die x - bzw. y -Werte um Vielfache von 5 bzw. 3 unterscheiden. Diese Eigenschaft legt die Vermutung nahe, daß, falls eine diophantische Gleichung lösbar ist, beliebig viele Lösungen existieren.

Hiermit haben wir ein erstes, wenn auch umständliches Verfahren zur Lösung diophantischer Gleichungen kennengelernt. Es gibt jedoch wesentlich elegantere Methoden. Zwei Verfahren werden wir im folgenden behandeln.

Erste Methode: Das Eulersche Reduktionsverfahren

Wir erarbeiten uns den Lösungsalgorithmus an Hand des Beispiels der diophantischen Gleichung $3x - 5y = 7$.

1. Schritt: Man stelle die Gleichung $3x - 5y = 7$ nach einer Variablen um (aus rechentechnischen Gründen nach derjenigen, deren Koeffizient den kleineren Betrag hat).

$$x = \frac{7 + 5y}{3}$$

2. Schritt: Man führe die Division so weit wie möglich aus.

$$x = 2 + y + \frac{1 + 2y}{3}$$

3. Schritt: Da beide Variable x, y ganzzahlig sind, folgt, daß der verbleibende Bruch ebenfalls ganzzahlig sein muß. Man führe dafür eine neue Variable z ein.

$$z = \frac{1 + 2y}{3}$$

Hieraus folgt:

$$3z - 2y = 1$$

Das Ergebnis dieser 3 Schritte besteht darin, daß wir die diophantische Gleichung $3x - 5y = 7$ auf die diophantische Gleichung $3z - 2y = 1$ zurückgeführt haben. Auf diese neu gewonnene diophantische Gleichung wenden wir das Verfahren abermals an und wiederholen es so lange, bis sich eine Gleichung ergibt, in der eine Variable den Koeffizienten 1 hat. (Dieser Fall wird stets erreicht, da bei

diesem Verfahren die Koeffizienten ihrem Betrage nach kleiner werden.)

1. Schritt: $y = \frac{3z - 1}{2}$

2. Schritt: $y = z + \frac{z - 1}{2}$

3. Schritt: $u = \frac{z - 1}{2}, \quad 2u - z = -1$

1. Schritt: $z = 2u + 1$

Damit ist der Algorithmus beendet.

Um die Lösungen $[x, y]$ zu erhalten, müssen wir nun lediglich $z = 2u + 1$ in $y = \frac{3z - 1}{2}$ einsetzen. Wir erhalten $y = 1 + 3u$. Einsetzen in $x = \frac{2 + 5y}{3}$ liefert $x = 4 + 5u$.

Ergebnis:

Die Lösungen der diophantischen Gleichung $3x - 5y = 7$ lauten:

$$\begin{cases} x = 1 + 3u \\ y = 4 + 5u \end{cases}$$

mit beliebigem ganzzahligem u .

Damit haben wir überdies gezeigt, daß - wie oben vermutet - die Gleichung unendlich viele Lösungen hat.

Zweite Methode: "Verfahren mittels linearer Kongruenzen"

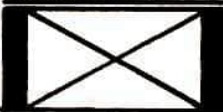
Wir lernen hier die wichtigsten Eigenschaften linearer Kongruenzen kennen. Mit Hilfe dieser Theorie lassen sich diophantische Gleichungen, wie wir sehen werden, sehr schnell lösen.

Definition 3:

D Zwei ganze Zahlen a, b heißen kongruent modulo m , in Zeichen $a \equiv b \pmod{m}$, wenn $m \mid a - b$ gilt. Man sagt: a, b sind inkongruent modulo m , in Zeichen $a \not\equiv b \pmod{m}$, wenn $m \nmid a - b$ ist. Die natürliche Zahl m nennt man den Modul der Kongruenz.

Beispiele:

$$\begin{aligned} 15 &\equiv 5 \pmod{5} \\ 537 &\equiv 117 \pmod{10} \\ 3 &\not\equiv 4 \pmod{2} \end{aligned}$$

S a t z 2 :

Die Kongruenz $a \equiv b \pmod{m}$ gilt dann und nur dann, wenn a und b bei der Division durch m denselben Rest lassen.

Beweis: Wir haben zweierlei zu beweisen:

- (1) Falls $a \equiv b \pmod{m}$ gilt, dann folgt, daß a und b bei Division durch m denselben Rest lassen.
- (2) Umkehrung zu (1)

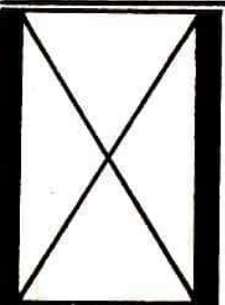
Zu (1):

$a \equiv b \pmod{m}$ ist äquivalent mit $m \mid a-b$ bzw. $a = b + km$ mit ganzzahligem k . Für b nehmen wir o. B. d. A. die Zerlegung $b = qm + r$ mit $0 \leq r < m$ und ganzzahligem q an. Folglich ergibt sich für a die Zerlegung $a = (k + q)m + r$.

Zu (2):

$a = qm + r$ und $b = pm + r$ mit $0 \leq r < m$ und q, p ganzzahlig. Subtraktion der beiden Gleichungen liefert $a - b = (q - p)m$, d. h. $m \mid a-b$ und somit $a \equiv b \pmod{m}$.

Der Vorteil der Schreibweise $a \equiv b \pmod{m}$ für die Teilbarkeitsbeziehung $m \mid a-b$ liegt vor allem darin, daß mit Kongruenzen bezüglich Addition, Subtraktion und Multiplikation so gerechnet werden kann wie mit Gleichungen.

S a t z 3 :

Gegeben sind die Kongruenzen

$$a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$$

$$a_2 \equiv b_2 \pmod{m}.$$

Dann gelten die Kongruenzen

$$a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{m}$$

$$a_1 - a_2 \equiv b_1 - b_2 \pmod{m}$$

$$a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 \pmod{m}$$



Aufgabe: Man versuche die Beweise selbständig zu führen, indem man Definition 2 anwende!

Anders verhält es sich hingegen mit der Division. Wir wissen bereits, daß aus der Gleichung $ax = ay$ stets $x = y$ folgt, falls $a \neq 0$ vorausgesetzt wird. Bei Kongruenzen ist dies jedoch nicht immer richtig.

Zum Beispiel ist $2 \cdot 5 \equiv 2 \cdot 10 \pmod{10}$, aber $5 \not\equiv 10 \pmod{10}$ bei Division durch 2.

Eine hinreichende Bedingung dafür, wann in einer diophantischen Gleichung dividiert werden darf, liefert Satz 4:

Satz 4: Die Kongruenz $ax \equiv ay \pmod{m}$ kann durch a dividiert werden, falls $(a, m) = 1$ gilt.

Beweis: $ax \equiv ay \pmod{m}$ bedeutet nach Definition 2 $m \mid a(x-y)$.

Da $m \nmid a$ ist, folgt $m \mid x-y$. D. h. $x \equiv y \pmod{m}$.

An einem Beispiel wollen wir jetzt das "Verfahren mittels linearer Kongruenzen" anwenden lernen.

Beispiel: Die diophantische Gleichung $3x - 5y = 7$ (siehe Eulersches Reduktionsverfahren) soll mit dieser Methode gelöst werden.

1. Schritt: Wir verwandeln die diophantische Gleichung $3x - 5y = 7$ in eine lineare Kongruenz. Als Modul wählen wir dabei einen der Koeffizienten der Variablen, z. B. 5:

$3x - 5y \equiv 7 \pmod{5}$. Da $-5y \equiv 0 \pmod{5}$ und $5 \equiv 0 \pmod{5}$ sind, folgt durch Subtraktion $3x \equiv 2 \pmod{5}$.

2. Schritt: Wir versuchen, durch geschickte Rechnung auf der linken Seite der Kongruenz den Koeffizienten 1 zu erzeugen. (Man kann beweisen, daß dies stets erreichbar ist, und zwar auf Grund der oben getroffenen Voraussetzung $(a, b) = 1$.)

$$\begin{array}{l} 3x \equiv 2 \pmod{5} \quad | \cdot 2 \\ 6x \equiv 4 \pmod{5} \end{array}$$

Da $5x \equiv 0 \pmod{5}$ gilt, folgt unmittelbar $x \equiv 4 \pmod{5}$.

3. Schritt: Wir schreiben die so ermittelte Kongruenz als Gleichung auf. Mit diesem Ausdruck für x wird in die Ausgangsgleichung eingegangen und y bestimmt.

$$x = 4 + 5u ; \quad 3(4 + 5u) - 5y = 7 ; \quad y = 1 + 3u$$

Ergebnis:

$$x = 4 + 5u$$

$$y = 1 + 3u$$

mit beliebigem ganzzahligem u .

Der Leser möge sich nun selbst weitere Gleichungen vorgeben und sie nach den angegebenen Methoden lösen.

Hartmut Menzer
Wiss. Assistent an der Sektion Mathematik
im Bereich Theoretische Mathematik

Preisaufgaben 2/72

(D 7) Man löse die Gleichung

$$\sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} = 6$$

in reellen Zahlen x .

(D 8) Es ist zu beweisen: Gilt für die drei Winkel α, β, γ

$$\tan(\alpha + \beta) \cdot \cos \gamma = \sin \gamma,$$

so ist

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

wobei k eine ganze Zahl ist.

(D 9) Wieviel geordnete Tripel $[a, b, c]$ positiver ganzer

Zahlen gibt es, für die $a + b + c$ gleich einer gegebenen natürlichen Zahl n ist?

(D 10) Es sei $\diamond ABCDEF$ ein gleichwinkliges Sechseck. Man beweise, daß dann gilt

$$\overline{AB} - \overline{DE} = \overline{EF} - \overline{BC} = \overline{CD} - \overline{AF}.$$

(D 11) Man beweise: Liegt das arithmetische Mittel der n

ersten Ziffern nach dem Komma der Dezimalbruchdarstellung der Zahl $\sqrt{2} - 1$ zwischen $4\frac{2}{5}$ und $4\frac{3}{5}$, so gilt das auch für das arithmetische Mittel der n ersten Ziffern nach dem Komma in der Dezimalbruchdarstellung der Zahl $2 - \sqrt{2}$.

(D 12) Gegeben seien 100 reelle Zahlen $x_1, \dots, x_{100}$ mit der Eigenschaft:

Für alle $k = 1, 2, \dots, 99$ gilt $|x_{k+1} - x_k| < \frac{1}{50}$.

Man zeige, daß man dann aus diesen Zahlen 50

auswählen kann, deren Summe sich von $\frac{1}{2}$ um nicht

mehr als $\frac{1}{100}$ unterscheidet.

Für jeden vollständigen Lösungsweg erhält der Einsender einen bzw. zwei Wertpunkte (Die Anzahl ist bei jeder Preisaufgabe unter der laufenden Nummer angegeben). Für 15 Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender 15 Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges). Falls ein Besitzer von 15 Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. - Die Lösungen sind bis zum Ende des darauffolgenden Monats unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgaben" an unsere Adresse einzuschicken. Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungen bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders und seiner Adresse versehen sein müssen. Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

B E R I C H T I G U N G

In der Aufgabe C 51 (12/71) muß es richtig heißen:
Man zeige: Gibt es zwei natürliche Zahlen m und n mit $m \neq n$, für die $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^n a_i$ gilt, so ist $\sum_{i=1}^{m+n} a_i = 0$.

+ BÜCHERMARKT + BÜCHERMARKT + BÜCHERMARKT + BÜCHERMARKT +

Wir stellen vor:

I.N. BRONSTEIN und K.A. SEMENDJAJEW
Taschenbuch der Mathematik

Daß wir heute kein Lehrbuch, sondern ein Nachschlagewerk gewählt haben, hat seinen besonderen Grund: Dieses für den Studenten mathematisch-technischer Zweige ebenso wie für den Praktiker nützliche Buch sollte einen festen Platz in der Standardbibliothek eines Naturwissenschaftlers haben. Es enthält zusammengefaßt alle wichtigen mathematischen Begriffe, Formeln, Übersichten und Lösungswege, die im Verlaufe des Studiums behandelt werden. Darüberhinaus sind umfangreiche Tabellen vorhanden. Das Buch ist leicht verständlich, bequem in der Handhabung und weitgehend mathematisch exakt gestaltet. Neben einem umfangreichen Sachregister, in dem viele mathematische Begriffe verzeichnet sind, ist ein Literaturverzeichnis der wichtigsten Standardwerke der Mathematik enthalten, auf die oft verwiesen wird.

Das TASCHENBUCH DER MATHEMATIK wird vom Teubner-Verlag
Leipzig herausgegeben.

Aus dem Inhalt: Tabellen der elementaren Funktionen



Näherungsrechnung
Algebra, Analysis
Geometrie, analytische Geometrie
Trigonometrie, Differentialgeometrie
Differential- und Integralrechnung
(u. a. mit 515 Grundintegralen)
Differentialgleichungen
komplexe Zahlen
Vektorrechnung
Variationsrechnung
Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Der Preis dieses nützlichen Nachschlagewerkes beträgt 22,50 M.

Modernes Studentenwohnheim in Neu-Lobeda

Was machen eigentlich Studenten, wenn sie nicht studieren, genauer gesagt, wenn sie keine Vorlesungen, Übungen, Seminare, Versammlungen o.ä. zu besuchen haben? Dann sind sie meistens "zu Hause" anzutreffen - falls nicht gerade 'mal ein Ereignis mit einem Glas Bier gewürdigt werden muß. Das "Zuhause" ist für viele Studenten unserer Universität eines der Internate, die über ganz Jena verstreut sind.

Eines der Wohnheime der Friedrich-Schiller-Universität wollen wir heute näher vorstellen: das Studentenwohnheim Neu-Lobeda. Vor etwa 5 Jahren wurde im Süden Jenas, an der Autobahn Dresden - Eisenach, mit dem Bau einer modernen Satellitenstadt begonnen, um Wohnraum für die Werktätigen des strukturbestimmenden Industriezweiges unserer Stadt zu schaffen. Dadurch erhielt auch die Universität Wohnungen in modernen Hochhäusern. Zwei Häuser eines 9-geschossigen Blockes wurden im Herbst 1970 als Internate für etwa 450 Studenten zur Verfügung gestellt. (Inzwischen wurde ein ganzer 11-geschossiger Block als Mädchenwohnheim übergeben.)

Da diese Wohnungen ursprünglich nicht als Internate gebaut wurden, ergaben sich zunächst einige Umstellungen. In jeder

Etage eines Hauses befinden sich vier Wohnungen, die ein bis vier Zimmer haben, die alle ferngeheizt werden. Zu jeder Wohnung gehören eine komplett eingerichtete Küche und ein Bad mit fließendem warmem und kaltem Wasser. Die Belegung der Wohnungen wurde so gewählt, daß pro Zimmer zwei Studenten wohnen. Die Unterbringung in diesen Wohnungen ist für viele Studenten eine gewaltige Verbesserung der Wohn- und Lebensbedingungen gegenüber früheren Internaten.

Wie sieht nun das Leben in unserem Wohnheim aus? Drei Viertel der Bewohner studieren an der Sektion Mathematik, während die übrigen den Sektionen Ökonomische Kybernetik und Philosophie/Geschichte angehören.

Zu Beginn des Jahres 1971 wurde das Wohnheim von der staatlichen Leitung den FDJ-Leitungen der betreffenden Sektionen als Jugendobjekt übergeben. Mit der Übergabe war das Ziel verbunden, im Wohnheim eine Atmosphäre intensiven Lernens und Schaffens sowie sozialistische Formen des Zusammenlebens zu entwickeln, das Verantwortungsbewußtsein gegenüber dem sozialistischen Eigentum zu vertiefen und möglichst viele Studenten in die gesellschaftliche Arbeit einzubeziehen.

In einer ersten Auswertung wurde Ende vergangenen Jahres Rechenschaft abgelegt. Nachdem die Probleme auf dem Gebiet der Ordnung und Sauberkeit gelöst worden waren (die Studenten sind für die wöchentliche Reinigung des gesamten Hauses verantwortlich), konzentrierte man sich in der zweiten Phase auf die Gestaltung eines sozialistischen Wohnheimlebens und die Schaffung einer guten Lernatmosphäre. Kritisch eingeschätzt wurden das geistig-kulturelle und sportliche Leben. Es beschränkte sich im wesentlichen auf die Benutzung der zwei Tischtennisplatten im Keller sowie des Klubraumes, wobei in letzterem meist Seminargruppenfeiern stattfanden.

Eine Verbesserung erhofft man sich vom Ausbau einiger ungenutzter Kellerräume. Weiterhin ist die Bildung von Reparaturbrigaden geplant, um anfallende Mängel zu beseitigen.

Wir hoffen Ihnen damit einen kleinen Einblick in das Leben unserer Studenten im Wohnheim gegeben zu haben und werden auch in Zukunft dieser Seite des Studiums etwas mehr Aufmerksamkeit in unserer Zeitschrift widmen.

Lösungen

(C 38) Aus der Voraussetzung folgt:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = 0$$

Es gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = 0.$$

Daraus folgt:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Aus $\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq 0$ folgt $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \leq 0$,

was zu beweisen war.

(C 37) Es sei Q_z die Quersumme der Zahl z .

Aus $z = a + 10b$ folgt $Q_z = a + b = (a + 10b) - 9b \equiv a + 10b \pmod{9}$.

Falls $Q_z = Q_{n \cdot z}$ ($1 \leq n \leq 9$) gelten soll, muß

$z \equiv Q_z \equiv Q_{n \cdot z} \equiv n \cdot z \pmod{9}$ sein.

Also: $z \equiv n \cdot z \pmod{9}$;

$(n-1) \cdot z \equiv 0 \pmod{9} \quad \forall n (1 \leq n \leq 9)$;

$z \equiv 0 \pmod{9}$.

$z = 9k \quad (2 \leq k \leq 11)$

Nun werden die Quersummen aller Vielfachen von z betrachtet:

$$Q_{n \cdot z} = Q_{9 \cdot k \cdot n} = Q_{(10 \cdot k \cdot n - k \cdot n)}$$

$$Q_{n \cdot z} = Q_{9 \cdot k \cdot n} = \begin{cases} 18 & \text{für } k \cdot n = 10q+1, 10q+2, \dots, 11q \quad (q \in \mathbb{N}) \\ 9 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die einzige Zahl, für die $Q_z = Q_{n \cdot z} = 18$ ($n=1,2,\dots,9$) gilt, ist $z_1 = 99$.

Durch Probieren findet man die weiteren Lösungen

($Q_z = Q_{n \cdot z} = 9$) $z_2 = 90, z_3 = 45, z_4 = 18$.

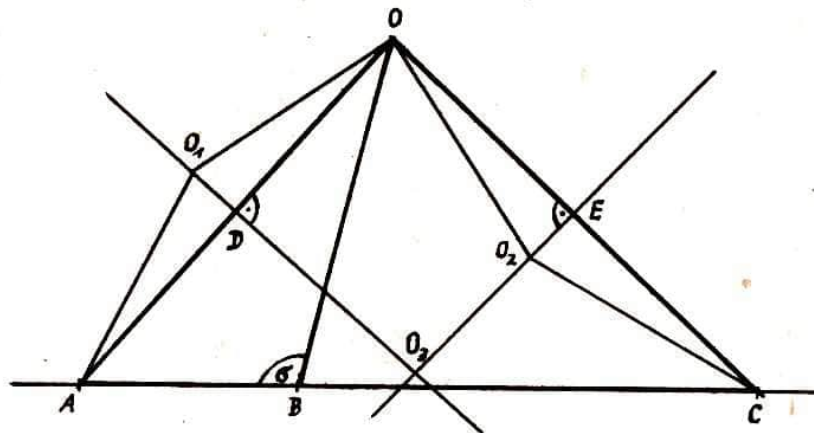
(C 39)

L

(nach einer Einsendung von Gerit Schrade, Prenzlau)

Behauptung: Das Viereck $O_1O_2O_3O$ ist ein Sehnenviereck.

Zu zeigen: $\sphericalangle OO_1O_3 + \sphericalangle OO_2O_3 = 180^\circ$.



Beweis:

Nach Voraussetzung gilt:

(1) $\overline{O_1O_3}$ ist Mittelsenkrechte zu $\overline{AO}$ und

(2) $\overline{O_2O_3}$ ist Mittelsenkrechte zu $\overline{CO}$.

Aus (1) und (2) folgt: $\sphericalangle ODO_3 = \sphericalangle OEO_3 = 90^\circ$.

Wegen der Innenwinkelsumme des Vierecks ODO_3E gilt somit: $\sphericalangle DO_3E + \sphericalangle DOE = 180^\circ$.

Weil der Zentriwinkel doppelt so groß wie der zugehörige Peripheriewinkel ist und O_1 Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks OAB ist, gilt:

$\sphericalangle AO_1O = 360^\circ - 2\sigma$ (der überstumpfe Winkel $\sphericalangle AO_1O$ beträgt 2σ).

Ebenso zeigt man die Gültigkeit der Gleichung

$\sphericalangle OO_2C = 2 \cdot (180^\circ - \sigma)$

($\sphericalangle OBC = 180^\circ - \sigma$, Nebenwinkel)

Demnach gilt: $\sphericalangle OO_1O_3 = 180^\circ - \sigma$; $\sphericalangle OO_2O_3 = \sigma$.

($\sphericalangle OO_2O_3 = 180^\circ - \frac{1}{2}(\sphericalangle OO_2C)$)

Daraus folgt die Behauptung.

(C 47)

(nach Peter Junghanns, EOS Stollberg)

L

m und n seien ganze Zahlen mit $m \neq 0$, $n \neq 0$. Nach Aufgabenstellung gilt:

$$(1) \quad a_1 + b = km \quad \text{und}$$
$$(2) \quad c_1 + d = kn.$$

Aus (1) folgt (Multiplikation mit $\frac{d}{1}$):

$$(3) \quad ad + \frac{bd}{1} = \frac{kmd}{1}.$$

Aus (2) folgt (Multiplikation mit $\frac{b}{1}$):

$$(4) \quad bc + \frac{bd}{1} = \frac{knb}{1}.$$

Aus (3) und (4) folgt: $ad - bc = \frac{k(md-nb)}{1}.$

Jetzt ist noch zu beweisen, daß $(md-nb)$ durch 1 teilbar ist. Es gilt:

$$\frac{a_1+b}{c_1+d} = \frac{m}{n},$$

$$na_1+nb = mc_1+md,$$

$$1(na-mc) = md-nb.$$

Da $(na-mc)$ eine ganze Zahl ist, ist $(md-nb)$ durch 1 teilbar. Somit ist $ad-bc = \frac{k(md-nb)}{1} = k(na-mc)$ durch k teilbar. q.e.d.

Neue Leitungsstruktur im Jugendobjekt

Im vergangenen Monat beging unsere Zeitschrift ihr fünfjähriges Jubiläum. Neben der "WURZEL"-Sondernummer war eine Festveranstaltung äußeres Merkmal dieses Ereignisses. Auf dieser wurde Bilanz der zurückliegenden fünf Jahre gezogen und ein Ausblick in die Zukunft gegeben.

In seiner Festrede ging der Chefredakteur der "WURZEL" zunächst auf die Entwicklung der Zeitschrift ein. Dabei sprach er nochmals im Namen aller Mitarbeiter seinen Dank für den teilweise recht selbstlosen Einsatz der Gründer aus, die das Fundament für die heutige Tätigkeit legten. Im weiteren Verlauf seiner Rede erwähnte der Chefredakteur die besondere Rolle der "WURZEL" innerhalb des Jugendobjekts "Studienwerbung - Studienvorbereitung", das Ende 1970 gebildet wurde. Er stellte fest, daß es im vergangenen Jahr gelungen ist, alle

Bereiche des Jugendobjekts arbeitsfähig zu gestalten, so daß für die Zukunft meßbare Ergebnisse zu erwarten sind.

Das Jubiläum war für uns eine wichtige Zwischenstation. Es ist gleichzeitig Ansporn, unsere zukünftige Arbeit im Rahmen des Jugendobjektes nach besten Kräften fortzusetzen. Auf uns wartet die Bewältigung umfangreicher Aufgaben. Dazu bedarf es jedoch einer engen Zusammenarbeit zwischen Lesern und Schöpfern unserer Zeitschrift.

Wir möchten Sie an dieser Stelle über einige studienbedingte Umbesetzungen im Redaktionskollektiv informieren.

Der Leiter unseres Jugendobjekts, Manfred Wolf, unser Manuskriptchef, Bernd Wächter, und Wolfgang Kiefer, der im Aufgabenteil mitarbeitet, beginnen im Februar ein dreimonatiges Schulpraktikum und schließen danach ihr Studium ab. Ab September werden sie dann als Mathematik-Physik-Lehrer an verschiedenen Schulen der DDR tätig sein. Für ihre mehrjährige qualifizierte Mitarbeit im Jugendobjekt und der "WURZEL" danken wir ihnen an dieser Stelle und wünschen ihnen für die Zukunft eine erfolgreiche und interessante Tätigkeit, viel Glück und persönliches Wohlergehen.

Ebenfalls ab Februar scheidet unser bisheriger Chefredakteur, Volker Kögel, aus seiner Funktion aus. Er wird sich in Zukunft verstärkt auf sein Forschungsstudium konzentrieren. Auch ihm sei hier für seine verantwortungsvolle Arbeit bei der Leitung des Redaktionskollektivs gedankt.

Zum neuen Leiter des Jugendobjekts wurde Reinhard Klette berufen, der jetzt im 4. Studienjahr ist. Er wird im September ein Forschungsstudium im Bereich Mathematische Kybernetik an unserer Sektion aufnehmen und diese Leitungsfunktion als Vorbereitung späterer Aufgaben ausüben.

Neuer Chefredakteur der "WURZEL" wird Werner Nagel, der im zweiten Studienjahr (Mathe-Diplom) studiert. Er arbeitet seit Beginn seines Studiums in der Redaktion mit und stellte seine Befähigung für dieses neue Amt zuletzt mit der Gestaltung der Jubiläumsausgabe unter Beweis.

Das Amt des Manuskriptchefs übernimmt ab März Uschi Schleicher. Sie ist damit für den Inhalt und die Ausgestaltung der "WURZEL" verantwortlich. Uschi arbeitet seit einem Jahr im Manuskriptbereich und zeigt dabei viel schöpferische Initiative.

Wir hoffen, daß durch diese neue Leitungsstruktur keine wesentlichen Probleme entstehen, obwohl es immer erst einer gewissen Einarbeitungszeit bedarf. Wir werden uns bemühen, die "WURZEL" genauso gut zu gestalten wie unsere Vorgänger. Wir würden uns sehr freuen, wenn Sie als Leser uns bei diesen Bemühungen unterstützen.

Die Redaktion

An dieser Stelle noch ein Wort in eigener Sache:

In letzter Zeit kam es häufig zu verspäteten Zusendungen der "WURZEL". Das hatte größtenteils Ursachen, die nicht allein von uns beeinflußbar waren. Wir haben jedoch versucht, mit den dafür verantwortlichen Stellen diesen Zustand zu ändern. Was in unserer Macht liegt, werden wir tun, um Ihnen die Zeitschrift so schnell wie möglich zugänglich zu machen. Entschuldigen Sie daher bitte die bisherigen Verspätungen. Wir versuchen in Zukunft, die "WURZEL" bis zum 10. des Erscheinungsmonats zu versenden.

Harald Fischer
stellv. Chefredakteur der „Wurzel“
Versandleiter

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienwerbung-Studienvorbereitung“ der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Leiter: Manfred Wolf

Redaktion: Volker Kögel (Chefredakteur); B. Wächter, H. Fischer

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

Anschrift: WURZEL
69 Jena
Helmholtzweg 1

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45

**Herausgegeben vom
Jugendobjekt
Studienwerbung -
Studienvorbereitung
der Sektion Mathematik
an der Friedrich-Schiller-
Universität**

In eigener Sache

Am 1. März schied Volker Kögel feierlich und in Ehren aus seinem Amt als Chefredakteur der "WURZEL". Er wird jetzt Gelegenheit haben, sich seinem Forschungsstudium intensiver zu widmen. Das "verbleibende" Redaktionskollektiv wünscht ihm dafür viel Erfolg und einen guten Abschluß. Mit unseren Glückwünschen verbinden wir unseren aufrichtigen Dank für seine Arbeit, die er in den vergangenen eineinhalb Jahren geleistet hat.

Unter Volkers Leitung wurde eine neue Führungs- und Arbeitsordnung für das "WURZEL"-Kollektiv konzipiert und realisiert. Das brachte nach außen den Vorteil, daß die Ausgaben der "WURZEL" durch die Redaktion kontinuierlich und termingerecht fertiggestellt wurden. Sehr wesentlich für uns war aber auch, daß alle Mitarbeiter zu einem relativ guten Kollektiv zusammenwuchsen.

Nochmals unseren Dank an Volker, der durch seinen persönlichen Einsatz erheblichen Anteil an den Erfolgen der letzten Zeit hat!

Die Aufgabe für das Redaktionskollektiv und insbesondere für mich als Volkers Nachfolger besteht nun darin, die guten Traditionen der "WURZEL" (ich glaube, nach 5 Jahren kann man schon von Traditionen sprechen) fortzusetzen. Das bedeutet, noch viele gute Hefte herzustellen und die Wirksamkeit auf unsere Leser ständig zu vergrößern.

Wir werden in Zukunft bemüht sein, die Artikel aus dem gesellschaftlichen Leben aktueller zu veröffentlichen. Außerdem stellen wir uns die Aufgabe, die Exemplare der "WURZEL" inhaltlich und graphisch attraktiver und einfallreicher zu gestalten, ohne dadurch vom wesentlichen mathematischen Gehalt abzulenken.

Wir hoffen auf einen "nahtlosen" Übergang (und darauf, daß es uns gelingt, unseren Lesern auch weiterhin das zu bieten, was sie von der "WURZEL" erwarten)!

Werner Nagel

Lösung linearer Gleichungssysteme durch Elimination

Das Hauptanliegen dieses Artikels ist auf die Konstruktion der Lösung eines linearen Gleichungssystems gerichtet. An einem Beispiel wird die Problematik erklärt und danach eine Modifikation des Gaußschen Eliminationsverfahrens gegeben. ¹⁾

1. Einführungsbeispiel

Die Arbeitsgemeinschaft "Junge Biologen" einer Polytechnischen Oberschule besitze für praktische Übungen im Schulgarten eine 26 m² große Nutzfläche. Die Schüler wollen drei verschiedene Blumensorten A, B, C züchten. Für den Ankauf der Sämereien steht ein Gesamtbetrag von 24,50 M zur Verfügung, wobei die auf 1 m² bezogenen Kosten respektive 0,60 M, 1,10 M und 0,90 M betragen. Die Bepflanzung pro m² erfordert bei der Sorte A 30 min, bei den beiden anderen Sorten jeweils 50 min. Insgesamt sind für diese Arbeiten 20 Stunden vorgesehen. Gefragt ist nach der Aufteilung der Gartenfläche.

Mathematische Formulierung des Problems: Es seien x_1 , x_2 , x_3 beziehungsweise die in m² gemessenen Flächenstücke für die Aussaat der Blumensorten A, B, C. Dann bestehen zwischen diesen Größen folgende Relationen:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 26 \\6x_1 + 11x_2 + 9x_3 &= 245 \\3x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 120\end{aligned}\tag{1}$$

Die erste Gleichung resultiert aus der Aufteilung der Nutzfläche, die zweite aus den Kaufkosten, die dritte aus der Bepflanzungsdauer.

¹⁾ Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855), großer deutscher Mathematiker

In (1) haben wir ein System von drei linearen Gleichungen für die drei Unbekannten x_1, x_2, x_3 . Die Gleichungen sind linear in x_1, x_2, x_3 , weil diese Größen nur in der ersten Potenz vorkommen. Eine Lösung von (1) suchen heißt, drei Zahlen x_1, x_2, x_3 bestimmen, die - in (1) eingesetzt - das Gleichungssystem befriedigen. Die Frage, ob bei derartigen Problemen überhaupt eine Lösung existiert, und wenn ja, ob diese die einzige ist, wird in diesem Beitrag nur in Verbindung mit dem Rechenalgorithmus berührt, welcher hierauf "automatisch" eine Antwort gibt.

2. Herleitung des Eliminationsverfahrens

Um den Lösungsmechanismus zu erkennen, genügt es vollauf, wenn wir uns für die Darlegung der Methode auf ein System von drei Gleichungen mit drei Unbekannten der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \quad (2)$$

beschränken, wo die Koeffizienten a_{ij} und freien Glieder b_i ($i, j = 1, 2, 3$) zahlenmäßig gegeben sind.

Der Index i bezeichnet die Nummer der Gleichung, der zweite, j , legt fest, daß a_{ij} mit der Unbekannten x_j gekoppelt ist. Die wesentliche Idee eines Eliminationsverfahrens besteht darin, durch systematische Umformungen von (2) die Anzahl der Unbekannten in den einzelnen Gleichungen ständig zu verringern, d. h. durch geschickte Kombination der Gleichungen sollen möglichst viele Unbekannte eliminiert (beseitigt) werden.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_{11} \neq 0$ voraussetzen (andernfalls schreibe man die Gleichungen in anderer Reihenfolge auf). Die Elimination von x_1 geschieht jetzt so: Man multipliziere die zweite Gleichung mit a_{11} , die erste mit $(-a_{21})$ und addiere beide Gleichungen, dann entsteht

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \quad (3)$$

mit

$$\begin{aligned} a'_{22} &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\ a'_{23} &= a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13} \\ b'_2 &= a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{aligned} \quad (3')$$

Multipliziert man jetzt in (2) die dritte Gleichung mit a_{11} und addiert dazu die mit $(-a_{31})$ multiplizierte erste Gleichung, so ergibt sich

$$a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3, \quad (4)$$

wo die gestrichenen Größen ähnlich lauten wie in (3'). (3), (4) und die erste der Gleichungen in (2) bilden zusammen wieder ein lineares System

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= b'_2 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 &= b'_3, \end{aligned} \quad (5)$$

dessen Lösung identisch ist mit der des ursprünglichen Systems. Rückschauend wird deutlich, daß das **Leitelement** a_{11} - oft auch als **Pivot** bezeichnet - in diesem ersten Schritt die entscheidende Rolle spielte, und daß ohne die Voraussetzung $a_{11} \neq 0$ eine Beseitigung von x_1 erfolglos geblieben wäre.

Merke: Das Leitelement muß stets ungleich Null sein! **=====**

Anknüpfend an (5) lassen sich nun auf ganz analoge Weise x_2 und x_3 eliminieren (in welcher Reihenfolge das geschieht, ist offenbar gleichgültig). Hierbei ist die Wahl des Pivots nur noch unter den gestrichenen Koeffizienten möglich. Andernfalls würde man nämlich bei Elimination von x_2 oder x_3 - entgegen unserer Absicht - zugleich die Unbekannte x_1 wieder mit einschleusen.

Merke: Jede Gleichung darf im Laufe der Rechnung nur **=====**
e i n m a l für die Wahl des Pivots benutzt werden!

Mit dem Leitelement $a'_{22} \neq 0$ zum Beispiel würde das System (5) ohne Änderung der zweiten Gleichung übergehen in

$$\begin{aligned} a'_{11}x_1 + a'_{13}x_3 &= b'_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= b'_2 \\ a'_{33}x_3 &= b'_3 \end{aligned} \quad (6)$$

Wir verzichten darauf, die ähnlich (3') leicht zu berechnenden Koeffizienten und Freiglieder explizit anzugeben und überlassen dem Leser die kleine Übung, mit dem Pivot a'_{33} auch den letzten Eliminationsschritt formelmäßig hinzuschreiben. Vielmehr richten wir jetzt unsere Aufmerksamkeit auf die **p r a k - t i s c h e** Berechnung mittels eines geeigneten Schemas.

Dr. F. Goetze

wiss. Oberassistent im Bereich
Numerik/Operationsforschung
Sektion Mathematik

Die Fortsetzung dieses Artikels mit 3. Schematisierung des Verfahrens und 4. Numerische Gesichtspunkte wird im nächsten Heft erscheinen.

Preisaufgaben 3/72

(D 13) Man beweise für nichtnegative reelle Zahlen a, b, c die Ungleichung

$$6a + 4b + 5c \geq 5\sqrt{ab} + 7\sqrt{ac} + 3\sqrt{bc}.$$

(D 14) Man zeige, daß für jede natürliche Zahl n der Ausdruck $n^{8888} - n^{7777} + 1$ durch $n^2 - n + 1$ teilbar ist.

(D 15) Gegeben seien vier Punkte A, B, C, D in der Ebene.

②

Man bestimme einen Punkt O so, daß die Summe der Entfernungen von O zu den vier Punkten minimal wird.

(D 16) Man vereinfache den Ausdruck

①

$$\frac{\log_b \log_b a}{\log_b a}$$

(D 17) Für welche reellen Werte a hat das Gleichungssystem

①

$$\sin x \cdot \cos 2y = (a^2 - 1)^2 + 1$$

$$\cos x \cdot \sin 2y = a + 1$$

Lösungen? Wie lauten diese?

(D 18) Сколько рациональных членов содержится в разложении

①

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{100}.$$

Für jeden vollständigen Lösungsweg erhält der Einsender einen bzw. zwei Wertpunkte. Die Anzahl ist bei jeder Preisaufgabe unter der laufenden Nummer angegeben. Für 15 Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch.

Sollten pro Monat mehr als drei Einsender 15 Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).

Falls ein Besitzer von 15 Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum Ende des darauffolgenden Monats unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an unsere Adresse einzuschicken.

Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungen bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders und seiner Adresse versehen sein müssen. Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

Studenten unserer Sektion zu Gast bei polnischen Freunden

Oft hört man die Formulierung Studentenaustausch. Was heißt das, wenn Studenten im Austausch ein anderes befreundetes Land besuchen und kennenlernen?

Es bedeutet, daß zur gleichen Zeit Studenten der befreundeten Universität interessante Tage bei uns verbringen.

Diese organisatorische Form hat aber nicht bloß eine formale Seite. Sie ist zugleich Ausdruck der immer enger werdenden Beziehungen zwischen unseren Ländern, zwischen den Studenten unserer Universitäten.

Durch Veröffentlichungen in unserer "WURZEL" sind Ihnen ja schon hinreichend die Beziehungen zu den sowjetischen Studenten bekannt; von einer Reise in die Volksrepublik Polen im September 1971 soll hier berichtet werden:

Krakow war das Ziel unserer Reise, und nachdem wir - neun Lehrerstudenten des 4. Studienjahres und unser Betreuer Dr. Mattasch - an einem frühen Spätsommormorgen aus den Schlafgelegenheiten unseres Liegewagens krochen, hatten wir bis dahin nur noch 50 km zu fahren. Sicher kennen Sie die bewegte polnische Geschichte, deren Zentrum Krakow gewesen ist. Auf dem Wawel, der mächtigen Burganlage an der Weichsel, residierten einst die polnischen Könige, deren bekanntestes Geschlecht das der Jagiellonen gewesen ist. Das Zentrum der Stadt ist der Hauptmarkt mit den bekannten Tuchhallen und der Marienkirche, in der sich der weltberühmte Veit-Stoß-Altar befindet. Beide Gebäude sind Ausdruck des Reichtums der Stadt im Spätmittelalter.

Die Stadt zeigt interessante Kompositionen zwischen neu und alt, wobei das Neue überwiegt, je mehr man sich vom Zentrum entfernt.

Aber nun zur Universität, deren Einladung wir gefolgt waren.

Die Jagiellonen-Universität in Krakow trägt den Namen des Fürsten Jagiello und wurde im 14. Jahrhundert gegründet. Das historische Gebäude ist das Collegium Majus in der

Ulica Jagiellonska. Wenn Sie einmal Krakow besuchen, so schauen Sie sich doch dieses Museum an! Es birgt u. a. den Schatz der Universität und die Arbeitsgeräte von Nikolaus Kopernikus. Das mathematische Institut der Universität befindet sich in einem Stadtteil, in dem vor allem moderne Universitätsneubauten stehen, beispielsweise die Bibliothek, Internate, Studentenhotels mit entsprechenden Clubs usw. Leider konnten wir keinen umfassenden Kontakt zu den polnischen Studenten aufnehmen, weil der allgemeine Studienbetrieb erst im Oktober anlief. Trotzdem haben wir einen tiefen Einblick in das mathematische Institut durch einen interessanten Vortrag und Gespräche mit Dozent Dr. Kleiner erhalten. Wir haben aber auch in polnischen Schulen hospitiert, und zwar in verschiedenen Klassenstufen und auch in einer Spezialschule für Mathematik. Diese mathematische Ausbildung, die recht umfangreich und gut ist, hat uns stark beeindruckt.

Soviel zu den Ergebnissen, zu denen wir auf Grund unseres Reiseauftrages, den wir von unserem Sektionsdirektor erhalten hatten, gelangt sind.

Sehr stark beeindruckte uns ein Besuch in Auschwitz, im ehemaligen größten faschistischen Vernichtungslager. -

Uns begegneten immer wieder Gastfreundlichkeit und Hilfsbereitschaft der polnischen Menschen.

Ein Höhepunkt unserer Reise war zweifellos der Ausflug in die Hohe Tatra, in die Umgebung von Zakopane. Wir hatten allerdings ausgesprochenes Glück mit dem Wetter, denn bei unserer Ankunft verzogen sich die Wolken und kamen erst wieder, als wir uns auf die Rückfahrt nach Krakow vorbereiteten. Ausgedehnte Wanderungen mit Inangriffnahme verschiedener 2000er und Sonnenbaden gehörten genauso zu unserem Programm wie gemütliche Baudenabende.

Es ist bei einem solchen Bericht nicht möglich, alles zu erzählen, was man erlebt. Aber eins steht fest: Wir haben eine erlebnisreiche Zeit verbracht, die uns vor allem zeigte, wie die Menschen in einem anderen Land leben.

Wir haben viele neue Freunde gefunden, und ich habe mir vorgenommen, sie in diesem Jahr zu besuchen.

Manfred Wolf
Lehrerstudent, 4. Studienjahr

+ BÜCHERMARKT + BÜCHERMARKT + BÜCHERMARKT + BÜCHERMARKT +

Wir stellen vor:

Wolfgang Tutschke: "Grundlagen der Funktionentheorie"

Dieses Buch wird im ersten Studienjahr als Literatur zur Funktionentheorie empfohlen. Es ist für denjenigen geeignet, der mit dem Begriff der reellen Zahlen und der reellen Funktionen vertraut ist und sich für den Begriff der komplexen Zahlen und Funktionen interessiert.

Der Verfasser führt dann vom Begriff der komplexen Zahlen, der komplexen Ebene und deren Eigenschaften zu Funktionen komplexer Veränderlicher. Er untersucht im weiteren die Eigenschaften solcher Funktionen und zeigt auch Ähnlichkeiten und wesentliche Unterschiede zu Funktionen im Reellen auf. Dabei dehnt er die Untersuchungen im folgenden auf gewisse isolierte Punkte und die komplexe Zahl ∞ aus. Zum Schluß betrachtet der Verfasser noch einige geometrische Eigenschaften regulärer Funktionen und weist auf einige weitergehende Fragestellungen der Funktionentheorie hin.



Das Buch ist für Schüler, die sich für Mathematik interessieren und später ein entsprechendes Studium aufnehmen wollen, als Grundlehrbuch zu empfehlen, besonders da es in seinen letzten Abschnitten Stoff bietet, der den Leser tiefer in das Gebiet der Funktionentheorie eindringen läßt.

Das im Deutschen Verlag der Wissenschaften Berlin erschienene Buch ist im Fachhandel erhältlich und kostet 22,60 M.

Lösungen

(C 49)

L

Für nichtnegative reelle Zahlen x, y, z gilt

$$x + y + z \geq \sqrt[3]{xyz}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für $x = y = z$.

Also gilt

$$a^2 + 5 = a^2 + 4 + 1 > \sqrt[3]{a^2 \cdot 4 \cdot 1} = \sqrt[3]{4a^2}$$

und

$$a + 3 = a + 2 + 1 > \sqrt[3]{a \cdot 2 \cdot 1} = \sqrt[3]{2a}$$

für nichtnegative reelle Zahlen a .

Da beide Ungleichungen Relationen zwischen nichtnegativen reellen Zahlen darstellen, können sie miteinander unter Beibehaltung der Relation multipliziert werden, also

$$(a^2 + 5)(a + 3) > \sqrt[3]{4a^2} \cdot \sqrt[3]{2a}, \text{ d. h.}$$

$$a^3 + 3a^2 + 5a + 15 > \sqrt[3]{8a^3} = 2a.$$

Daraus folgt sofort

$$a^3 + 3a^2 + 15 > 13a.$$

(C 50)

L

Gilt $x + y = (x - y)^2$ für natürliche Zahlen x, y , so muß eine ganze Zahl k existieren, so daß

$$x + y = k^2 \quad \text{und}$$

$$x - y = k.$$

Daraus ergibt sich für x

$$x = \frac{1}{2}(k^2 + k)$$

und für y

$$y = \frac{1}{2}(k^2 - k).$$

Andererseits ist für jede ganze Zahl k die Gleichung

$$\frac{1}{2}(k^2 + k) + \frac{1}{2}(k^2 - k) = \left(\frac{1}{2}(k^2 + k) - \frac{1}{2}(k^2 - k)\right)^2$$

erfüllt, denn es ist

$$\frac{1}{2}(k^2 + k) + \frac{1}{2}(k^2 - k) = k^2 \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{2}(k^2 + k) - \frac{1}{2}(k^2 - k) = k.$$

Das bedeutet, die Lösungen der Gleichung sind die geordneten Paare

$$\left[\frac{k(k+1)}{2}, \frac{k(k-1)}{2} \right],$$

wobei k die Menge der ganzen Zahlen durchläuft.

(C 53)

L

Es gilt für

$$x < a$$

$$\varphi(x) = a+b+c+d-4x > (b-a) + (c-a) + (d-a)$$

$$a \leq x < b$$

$$\varphi(x) = -a+b+c+d-2x > (c-a) + (d-b)$$

$$b \leq x < c$$

$$\varphi(x) = c - a + d - b$$

$$c \leq x < d$$

$$\varphi(x) = 2x-a-b-c+d \geq (c-a) + (d-b)$$

$$d \leq x$$

$$\varphi(x) = 4x-a-b-c-d \geq (d-a)+(d-b)+(d-c)$$

Wegen $a < b$

$$\text{gilt} \quad 2a < 2b$$

$$\text{und} \quad d - b < (b - a) + (d - a)$$

$$\text{und} \quad (c - a) + (d - b) < (b - a) + (c - a) + (d - a)$$

sowie wegen $c < d$

$$2c < 2d$$

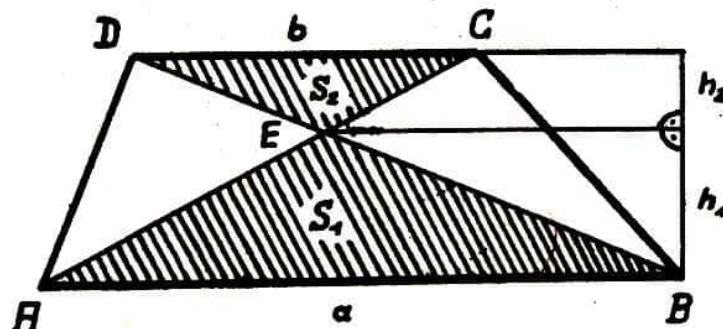
$$c - a < (d - c) + (d - a)$$

$$(c - a) + (d - b) < (d - a) + (d - b) + (d - c)$$

Also ist der minimale Wert der Funktion $\varphi(x)$

$d + c - b - a$, und dieser wird für $b \leq x \leq c$ angenommen.

L



Es gilt $S_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_2$$

Gesucht wird $S_T(S_1, S_2)$.

Der Flächeninhalt des Trapezes ist

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(a+b)(h_1+h_2) \\ &= \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}bh_2 + \frac{1}{2}ah_2 + \frac{1}{2}bh_1. \end{aligned}$$

Da die Dreiecke ABE und ECD ähnlich sind, gilt

$$\frac{a}{h_1} = \frac{b}{h_2} = k. \text{ Damit wird } ah_2 = bh_1 \text{ und}$$

$$\frac{1}{2}ah_2 + \frac{1}{2}bh_1 = ah_2.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} ah_2 &= k \cdot h_1 \cdot h_2 = \sqrt{k^2 h_1^2 h_2^2} = \sqrt{kh_1 \cdot kh_2 \cdot h_1 \cdot h_2} \\ &= \sqrt{a \cdot b \cdot h_1 \cdot h_2} \\ &= 2 \sqrt{\frac{1}{2}ah_1 \cdot \frac{1}{2}bh_2} \end{aligned}$$

Damit gilt $S_T = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}bh_2 + ah_2$

$$= S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 \cdot S_2}$$

$$= (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2.$$

Damit schließen wir die Veröffentlichung von Lösungen zu Aufgaben der C - Serie (Jahrgang 1971) ab. In der nächsten Ausgabe beginnen wir also mit der aktuellen Serie.

Mathematik-Spezialistenlager

Wie langjährigen Lesern unserer Zeitschrift bekannt ist, finden in jedem Jahr zwei Spezialistenlager für die besten Mathematiker des Bezirkes Gera statt. So war es auch im Februar in Saalfeld der Fall. Doch soll im weiteren nicht, wie sonst üblich, speziell auf die dort behandelten mathematischen Probleme und durchgeführten Veranstaltungen, sondern auf die Aufgaben der Mathematiklager im System der Studienwerbung und Studienvorbereitung eingegangen werden. In einem Mathematiklager werden ca. 40 Schüler der Klassenstufen 8 bis 12, nämlich die Mitglieder des BKJM (vergleiche "WURZEL" 3/71), systematisch in Teilgebiete der Mathematik eingeführt. Ziel ist es, im Rahmen dieser Ausbildung einen kleinen Einblick in die reichhaltigen und interessanten Gebiete der Mathematik zu geben, zur weiteren Beschäftigung mit ihnen anzuregen, schrittweise an den teilweise sehr hohen Abstraktionsgrad der Mathematik heranzuführen, wichtige Beweisprinzipien und mathematische Methoden zu vermitteln sowie bei aller Abstraktion die Anwendungsmöglichkeiten des jeweiligen Fachgebietes nicht zu vergessen. Letzteres erachten wir als besonders wichtig, da hiermit den noch weitverbreiteten Ansichten von der Mathematik als Selbstzweck, oder dem anderen Extrem, der Mathematik als Hilfswissenschaft, entgegengewirkt wird.

Durch das Lösen von Olympiade- und anderen Aufgaben werden gute Voraussetzungen für die Mathematikolympiaden geschaffen sowie eine selbständige und intensive Beschäftigung mit den verschiedensten mathematischen Problemen gewährleistet. Dies sind kurz umrissen einige Aufgaben der Mathematiklager. Nur durch eine gute Zusammenarbeit Jugendobjekt - BKJM können die Voraussetzungen für ihre Lösung geschaffen werden. Die vom BKJM veranstalteten Mathematiklager werden von Studenten der FSU Jena im Rahmen unseres Jugendobjekts betreut. Diese Studenten vermitteln außer dem Stoff im Unterricht in Veranstaltungen und persönlichen Gesprächen ihre Studienerfahrungen, Hinweise zur Vorbereitung eines Mathematikstudiums und anderes mehr an die Lagerteilnehmer,

die Studenten der nächsten Jahre. Dieser Kontakt Schüler - Betreuer war und ist gut, da mindestens die Hälfte aller Betreuer vor einigen Jahren selbst als Schüler an solchen Mathematiklagern teilgenommen hat und somit die "Lageratmosphäre" auch vom Standpunkt eines Schülers kennt. Für uns als Betreuer eingesetzte Studenten ist diese Tätigkeit kein notwendiges Übel, sondern sie macht uns Spaß und gibt uns wertvolle Hinweise. Ein Teil der Betreuer sind Lehrerstudenten, für die ein solches außerplanmäßiges Praktikum nützlich für ihren späteren Beruf ist. Auch als Lehrender hört man einiges aus fremden Fachgebieten und gestaltet nicht zuletzt zwei Wochen seiner Ferien abwechslungsreich und interessant, da nicht nur Mathematik betrieben wird, sondern auch diverse Kultur- und Sportveranstaltungen stattfinden, die bei Schülern und Betreuern großen Anklang finden. Als Mitarbeiter der "WURZEL" erhalten wir Anregungen für eine bessere Gestaltung unserer Zeitschrift. Wir hoffen, daß wir - ähnlich wie bei der "WURZEL" 1972 ein fünfjähriges - im Jahre 1975 ein zehnjähriges Jubiläum der Mathematiklager feiern können. Wo? Selbstverständlich in einem Mathematiklager!

Hans-Gerd Leopold
Student des 2. Studienjahres
Mathematik-Diplom

Kreuz und quer durch die „Wurzel“

W a a g e r e c h t :

2. Vernünftiges Attribut einer Zahl
5. Erfreulicher Teil einer Bergabeinfahrt
8. Lagrange \ Theaterplatz = Ortsangabe
10. Ausruf des Redaktionskollektivs bei Eingang einer Neubestellung
16. Mit Schwung und 16. gehen wir an die 14. waagerecht
17. NPT ohne Träger
18. Getränk zur Aufmunterung unserer Manuskriptschreiber
21. Negation von Reactio
24. Kurzwort für "Organisation der Hilbertraumoperatoren" in den USA
25. 10° in den Augen eines Physikers
26. Geben wir allen, die der "WURZEL" kontra bieten
27. Vereinigung zweier Polstellen

Auerochse in der "Wurzel" !

1			2		3			4		
5	6	7								
	8			9		10	11		12	13
14					15					
			16						17	
18	19	20		21			22	23		
24							25			
26				27						

Senkrecht :

1. Logarithmus zur Basis 10
2. Anweisende Aufgabe des Chefredakteurs
3. Alte Bezeichnung einer Winkelfunktion
4. Teures Kurzwort für "Nicht eine richtige Zahl"
6. 3/5 von 13. senkrecht im Hochgebirge
7. Beginn der Parallelität in Sachsen
9. Mädchenname im Wurzellager
10. Wurzeleigener Fehler
11. Auerochse in der "WURZEL"
12. Das dicke Ende von Irren
13. Zentralorgan junger Mathematiker im Vor-"WURZEL"-Stadium
14. Sorgt mit seinem Artikel für unser fachliches Niveau
15. Wurzelmitbegründer mit Bilderbuchwerdegang
19. Abkürzung für "erare humanum est" (Irren ist menschlich)
20. Laienhafte Bezeichnung für Ellipsoid
22. Inversion der Koseform von Großmutter
23. Schlecht bekömmliches Getränk aus 992 Oelsnitz

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienwerbung-Studienvorbereitung“ der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Leiter: Reinhard Klette

Redaktion: Werner Nagel (Chefredakteur); U. Schleicher, H. Fischer, R. Lorenz

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

Anschrift: WURZEL

69 Jena

Helmholtzweg 1

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45

SATZ

Wenn 17 gerade ist,
so ist 17 auch durch
256 teilbar.

(Voraussetzung: Gültigkeit der
üblichen Teilbarkeitsregeln)



Winnibald Wurz versucht die
Teilung auf seine Art

4

72

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
Jugendobjekt Studien-
vorbereitung der
Sektion Mathematik
an der Fr.-Schiller-
Universität Jena

Schlußfolgern Sie bitte nicht aus dem Titelbild,

daß diese "WURZEL" eine reine **Scherznummer** ist !
Falls Sie dies dennoch tun, werden Sie bald merken, daß Sie

damit auf dem **Holzweg** sind.

Denn sogar der so unlogisch klingende **SATZ** läßt sich
mathematisch exakt beweisen. Was, Sie g l a u b e n das
n i c h t ??? Wir werden es Ihnen schon zeigen —

aber erst in der **Mai** - Ausgabe , bis dahin dürfen
Sie es 'mal selbst versuchen.

Doch nun werden wir, wie versprochen, wieder ganz ernst
und wünschen Ihnen viel Spaß bei der Lektüre unserer Zeit-
schrift.



Lösung linearer Gleichungssysteme durch Elimination (II)

3. Schematisierung des Verfahrens

	x_1	x_2	x_3		
a_{11}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1	Tabelle 0
$-a_{21}$	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2	
$-a_{31}$	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3	
$-a_{12}$	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1	Tabelle 1
a'_{22}	0	a'_{22}	a_{23}	b'_2	
$-a'_{32}$	0	a'_{32}	a_{33}	b'_3	
$-a'_{13}$	a'_{11}	0	a_{13}	b'_1	Tabelle 2
$-a'_{23}$	0	a'_{22}	a_{23}	b'_2	
a'_{33}	0	0	a'_{33}	b'_3	

x_1	x_2	x_3		
a'_{11}	0	0	b'_1	Tabelle 3
0	a'_{22}	0	b'_2	
0	0	a'_{33}	b'_3	

Tabelle 0 enthält die Ausgangsdaten a_{ij} und b_i . Um jetzt die Vorschriften (3') zu realisieren, die dem ersten Eliminationsschritt zugrunde liegen, ziehe man die Pivotspalte heraus an den linken Rand der Tabelle, und zwar Pivot a_{11} ohne, alle übrigen Elemente mit Vorzeichenwechsel. Die Pivotzeile - hier die erste - wird unverändert in die neue Tabelle übernommen. Bei der Umrechnung der anderen Zeilen werden gemäß (3') nur solche Elemente verknüpft, die wie die Ecken eines Rechtecks angeordnet sind (s. Schema), zum Beispiel entsteht a'_{22} durch Addition der beiden Produkte $a_{11}a_{23}$ und $(-a_{21})a_{13}$. Der nach dieser "Rechteckregel" ablaufende Vorgang kann sogar auf die Pivotspalte ausgedehnt werden und liefert in Tabelle 1 - wie es sein muß - unterhalb des Leitelements überall eine Null.

Wie im Schema dargestellt, vollzieht sich dieser Eliminationsprozeß auf entsprechende Weise in allen folgenden Tabellen. Mit Ausnahme der jeweiligen Pivotzeile, die stets ohne Änderung in die nächste Tabelle überwechselt, verfährt man sonst durchweg nach dieser Rechteckregel.

Wir konstatieren: Bei dem beschriebenen Prozeß wird ein vorgelegtes Gleichungssystem mittels einer Folge von Tabellen ständig "umgeschrieben". Das Ziel ist (siehe die letzte Tabelle im Schema!) ein Gleichungssystem von "Diagonalgestalt"

$$\begin{aligned}
 a'_{11}x_1 &= b'_1 \\
 a'_{22}x_2 &= b'_2 \\
 a'_{33}x_3 &= b'_3
 \end{aligned} \tag{7}$$

mit der eindeutigen Lösung

$$\boxed{x_i = \frac{b_i''}{a_{ii}} \quad (i = 1, 2, 3)}$$

Die hier dargelegte Methode stellt eine leichte Abwandlung des ursprünglichen Gaußschen Eliminationsverfahrens ²⁾ dar. Es läßt sich nun zeigen, daß bei einem linearen Gleichungssystem außer der eindeutigen Lösung noch zwei andere Fälle vorkommen können, die durch den Algorithmus prinzipiell mit erfaßt werden.

Zur Verdeutlichung: Angenommen, es hätte sich ergeben $a_{33}' = 0$. Wir müßten dann bei Tabelle 2 des Schemas bleiben (da Übergang zur Tabelle 3 sinnlos).

Fall 1: $b_3' \neq 0$. Die letzte Zeile in Tab. 2 enthielte einen Widerspruch $\rightarrow$ Unlösbarkeit des Problems.

Fall 2: $b_3 = 0$. Die letzte Zeile in Tab. 2 wäre überflüssig; es bliebe

$$\begin{array}{rcl} a_{11}'x_1 & + & a_{13}'x_3 = b_1' \\ a_{22}'x_2 & + & a_{23}'x_3 = b_2' \end{array}$$

- ein System mit unendlich vielen Lösungen der Form

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}'} (b_1' - a_{13}'t) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}'} (b_2' - a_{23}'t) \\ x_3 &= t, \end{aligned}$$

t beliebig reell, wo zu jedem Wert t eine andere Lösung gehört.

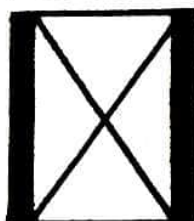
²⁾ Diese Modifikation ist auch als Verfahren von Gauß-Jordan bekannt.

Camille Jordan (1838 - 1922), französ. Mathematiker.

4. Numerische Gesichtspunkte

Da das Gauß-Jordan-Verfahren bis zur Schlußtabelle völlig divisionsfrei arbeitet, ist zu erwarten, daß die entstehenden Zahlen sehr schnell groß werden. Diesem Nachteil kann man in gewisser Weise entgegenwirken ³⁾. Es besteht nämlich der

S a t z :



Alle als ganzzahlig vorausgesetzten Elemente irgendeiner Tabelle k ($k = 2, 3, \dots$)
- mit Ausnahme der aus Tabelle $k-1$ unverändert übernommenen Pivotzeile - sind o h n e
Rest durch das Pivotelement aus Tabelle $k-2$ teilbar.

In Anlehnung an das frühere Schema lassen sich z. B. alle Zahlen aus Tab. 2 (die zweite Zeile ausgeschlossen) restlos durch a_{11} teilen. Wir beschränken uns darauf, diese Eigenschaft für a'_{13} zu zeigen und verwenden

$$a'_{13} = a'_{22} a_{13} - a_{12} a'_{23} . \quad (8)$$

Mittels der Beziehungen

$$\begin{aligned} a'_{22} &= a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \\ a'_{23} &= a_{11} a_{23} - a_{21} a_{13} \end{aligned}$$

ergibt sich nach Einsetzen in (8)

$$\begin{aligned} a'_{13} &= a_{13} (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}) - a_{12} (a_{11} a_{23} - a_{21} a_{13}) \\ a'_{13} &= a_{11} (a_{13} a_{22} - a_{12} a_{23}) . \end{aligned}$$

³⁾ Wir denken hier an Gleichungssysteme mit ganzzahligen Elementen a_{ij} , b_i - eine durchaus nicht s o starke Einschränkung, wie das folgende Beispiel verdeutlicht:

$$\begin{aligned} 1,5 x_1 + 3,1 x_2 &= 5,6 & \rightarrow & 15x_1 + 31x_2 = 56 \\ 4,3 x_1 - 2,2 x_2 &= 1,7 & & 43x_1 - 22x_2 = 17. \end{aligned}$$

Folglich ist a'_{13} ohne Rest durch a_{11} teilbar. Ähnlich läuft der Beweis bei den anderen Elementen.

Wir kehren abschließend zurück zu dem Zahlenbeispiel aus dem ersten Abschnitt und erhalten folgendes Schema:

	x_1	x_2	x_3	
1	1	1	1	26
-6	6	11	9	245
-3	3	5	5	120
-1	1	1	1	26
5	0	5	3	89
-2	0	2	2	42
-2	5	0	2	41
-3	0	5	3	89
4	0	0	4	32
	4	0	0	20
	0	4	0	52
	0	0	4	32

In Anwendung des obigen Satzes wurden bei der letzten Tabelle alle Zahlen durch $a'_{22} = 5$ dividiert (letzte Zeile ausgenommen), z. B.

$$b'_2 = \frac{4 \cdot 89 - 3 \cdot 32}{5} = 52.$$

Die Schlußtabelle zeigt die Lösung

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 \\ x_2 &= 13, \\ x_3 &= 8. \end{aligned} \quad \parallel$$

Dr. Fr. Götz

Wiss. Oberassistent

im Bereich Numerische Mathematik

INFORMATION

Seit Dezember 1968 arbeiten sowjetische und französische Forscher gemeinsam an der kosmischen Erdvermessung, um die geodätischen (d. h. die Landvermessung betreffenden) Beziehungen zwischen dem europäischen und asiatischen Kontinent zu klären. In letzter Zeit beteiligen sich an diesen Beobachtungen auch Wissenschaftler aus der DDR, z. B. am Programm der kosmischen Dreiecksvermessungen.

MITTEILUNG

Am 9.3.1972 verteidigten die Mitglieder des Jugendobjekts "Studienvorbereitung" der Sektion Mathematik Jena ihr Kampfprogramm zur Erringung des Titels "Sozialistisches Studentenkollektiv". Das Jugendobjekt besteht aus den Bereichen "WURZEL", Mathematik-Spezialistenlager sowie NVA- und Schülerzirkel.

Preisaufgaben 4/72

- (D 19) Man zeige, daß sich jede gerade natürliche Zahl eindeutig in der Form $k = (x + y)^2 + 3x + y$ mit nichtnegativen ganzen Zahlen x, y darstellen läßt.

2

- (D 20) Man zeige, daß genau dann, wenn das Polynom $P(x) = ax^2 + bx + c$ für alle ganzen Zahlen x ganzzahlige Werte annimmt, $2a$, $a+b$ und c ganze Zahlen sind.

2

- (D 21) Man zeige, daß die Lösung x der Gleichung

2

$$\frac{x - a - b}{c} + \frac{x - a - c}{b} + \frac{x - b - c}{a} = 3$$

die folgenden Eigenschaften besitzt (a, b, c seien positive ganze Zahlen):

(1) x ist ganzzahlig

(2) es gilt

$$x > a + b, \quad x > a + c, \quad x > b + c.$$

- (D 22) Man bestimme die Summe

1

$$K_n = 1^3 + 3^3 + \dots + (2n + 1)^3.$$

- (D 23) Eine Zahlenfolge $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ reeller Zahlen erfülle die folgenden Bedingungen:

2

(I) $a_1 = a_2 = 1$

(II) Für $n \geq 3$ sei $a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}}$.

Man beweise, daß dann alle Glieder dieser Folge ganze Zahlen sind.

- (D 24) In den Punkten A, B einer Geraden g werden nach ein und derselben Seite je eine Senkrechte $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ der Länge $\overline{AA'} = a$ und $\overline{BB'} = b$ errichtet. Man zeige, daß der Abstand des Schnittpunktes der Strecken $\overline{AB'}$ und $\overline{A'B}$ von der Geraden g unabhängig vom Abstand der Punkte A und B ist.

S O N D E R P R E I S A U F G A B E ! ! ! (3 P u n k t e)

Пусть $\mathcal{L}$ матрица типа $\|l_{i,k}\|$ $1 \leq i \leq n-k$, причем $l_{i,k} \in \{0,1\}$.

Далее пусть $\mathcal{C}$ множество всех $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$, для которых имеет место $\mathcal{L} \cdot \mathbf{x}^T = 0$.

(Мы определим, как обычно, $\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.)

Доказать: а) $\mathcal{C}$ является (n,k) -кодом.

б) Для каждой суммы $\sum_{j=1}^i \sigma_j$ вектор-столбец матрицы $\mathcal{L}$ выполняется условие: Если $i \leq n_C - 1$, то $\sum_{j=1}^i \sigma_j \neq 0$.
(Σ обозначает сумму по $\bullet$)

в) Существуют n_C вектор-столбцы $\sigma_1, \dots, \sigma_{n_C}$ матрицы $\mathcal{L}$ такие, что $\sum_{j=1}^{n_C} \sigma_j = 0$.

Diese Aufgabe bezieht sich (wie (D 6)) auf den zweiteiligen Artikel "Codierungstheorie" von Dr. Rolf Lindner, der in "WURZEL" 12/71 bzw. 1/72 erschienen ist.

Übrigens erwarten wir keineswegs, daß Sie uns die Lösung in russischer Sprache einsenden!

Für jeden vollständigen Lösungsweg erhält der Einsender einen bzw. zwei Wertpunkte (Die Anzahl ist bei jeder Preisaufgabe unter der laufenden Nummer angegeben). Für 15 Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender 15 Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges). Falls ein Besitzer von 15 Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. - Die Lösungen sind bis zum Ende des darauffolgenden Monats unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an unsere Adresse einzuschicken. Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungen bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders und seiner Adresse versehen sein müssen. Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

Bessere Studienvorbereitung überall in der Republik

Erste Kontakte mit der TH Magdeburg und der Universität Halle

Eine Umfrage in unserem 1. Studienjahr im September 1971 ergab, daß einige Neuimmatrikulierte mit besseren fachlichen Voraussetzungen und präziseren Vorstellungen das Mathematikstudium begannen. Es zeigte sich, daß die Grundlagen hierfür u. a. durch die "WURZEL" und die von uns betreuten Mathematiklager gelegt worden waren. Die hieraus resultierenden Folgerungen scheinen uns nicht nur für die Jenaer Sektion Mathematik, sondern auch für andere Universitäten wichtig. Wir begrüßen die Initiative der Sektion Mathematik/Physik der TH Magdeburg, ein Jugendobjekt der Studienvorbereitung zu gründen und hierbei die Erfahrungen unseres Jugendobjekts zu verwerten. Im Gespräch mit dem Vertreter der TH Magdeburg, Herrn Schönemann, zeigte sich, daß sich unsere Erfahrungen verallgemeinern lassen. Wir würden uns über eine erfolgreiche Arbeit des Jugendobjekts in Magdeburg freuen, da sich Ansatzpunkte für gemeinsame Aktivitäten bieten. Mit der Sektion Mathematik in Halle haben wir auch schon erste Gespräche über mögliche Zusammenarbeit in der Studienvorbereitung durchgeführt. Endziel könnte es sein, daß Schüler in der gesamten DDR die Möglichkeit haben, sich systematisch auf ein Mathematikstudium vorzubereiten. Hierdurch wird das Studium von Anfang an effektiver, und diese Aufgabenstellung hat Bedeutung im Maßstab unserer gesamten Gesellschaft.

Was wollen wir also den interessierten Schülerinnen und Schülern im Rahmen der Zusammenarbeit mit anderen Universitäten bieten?



- ◆ Information über Inhalt, Ablauf und Funktion des Mathematikstudiums
- ◆ persönliche Kontaktaufnahme mit der zukünftigen Studieneinrichtung (durch Studenten betreute Mathematiklager, enge Zusammenarbeit mit den Bezirksklubs Junger Mathematiker)

- ◆ Information über das gesellschaftliche Leben an einer sozialistischen Hochschule (Rolle der FDJ und SED)
- ◆ Vorbereitung auf fachliche Themenstellungen der späteren Studieneinrichtung
- ◆ Vorstellung des Ausbildungsprofils mathematischer Sektionen unserer Republik (Fachartikel in der "WURZEL" auch von Vertretern anderer Universitäten)

Hierzu eine spezielle Aufgabenstellung, die uns wichtig erscheint:

Es wird in Zukunft so sein, daß der größte Teil der Studienbewerber vor Aufnahme des Studiums den Ehrendienst in der NVA ableisten wird.

Nach dem Beispiel der Betreuung der Soldaten durch ihren Produktionsbetrieb während des Armeedienstes ist es sicher von Nutzen, Kontakt mit den Vorimmatrikulierten aufzunehmen und auszubauen. Diese Maßnahme hat fachliche und psychologische Bedeutung für den betreffenden Soldaten.

Bisher praktizieren wir folgende Form der Betreuung:

- Anschreiben der Vorimmatrikulierten und Information über unser Vorhaben
- kostenlose Zusendung der "WURZEL"
- Zusendung und Auswertung spezieller Aufgaben zur Studienvorbereitung (in Abstimmung mit dem Lehrplan)
- Hilfe bei der Lösung aller Probleme, die der Soldat in bezug auf sein späteres Studium hat

Da wir diese Form für verallgemeinerungswürdig halten, interessieren uns Meinungen unserer Leser hierzu.

Es ist sicher gut, wenn bereits vor Schulabschluß ein Kontakt der Schülerinnen und Schüler zu Angehörigen der Sektionen aufgebaut wird. Hierbei haben Mathematiklager eine maßgebliche Rolle. Da sich Bezirksklubs Junger Mathematiker vielerorts als Organisationsform interessierter Schülerinnen und Schüler bewährt haben, sollte bei der Durchführung solcher Lager eng zusammengearbeitet werden. In diesen Lagern sollte neben dem wesentlichen Olympiadetraining auch eine systematische

Studienvorbereitung realisiert werden. (In "WURZEL" 3/72 wurde ein spezieller Artikel hierzu veröffentlicht.)

Ein von uns bisher nur für das Stadtgebiet von Jena gelöstes Problem ist die Arbeit in Schülerzirkeln. Hier bieten in den einzelnen Schulen Mathematikstudenten wöchentlich die Möglichkeit, über den Schulstoff hinausgehende Fragen mit einem größeren Kreis von Schülerinnen und Schülern zu behandeln. Falls das Interesse der Schüler groß ist (Leserzuschriften!), würde sich der Aufwand lohnen, auch in anderen Städten Arbeitsgemeinschaften zu organisieren.

Mit diesen Erläuterungen haben wir versucht, eine Modellvorstellung zu entwickeln, die wir allen Lesern zur Diskussion stellen. Wir schlagen insbesondere vor, daß sich Vertreter anderer mathematischer Sektionen zu unseren Vorstellungen äußern. Wir würden sehr gern zu dieser Problematik in einen Erfahrungsaustausch treten. Wir meinen, daß in solchen Jugendobjekten das Prinzip des wissenschaftlich-produktiven Studiums mit einem großen Nutzen realisiert wird.

Reinhard Klette
Leiter des Jugendobjekts

I N F O R M A T I O N

Im Rechenzentrum des Instituts für angewandte Mathematik der Staatsuniversität Tbilissi sind rund 200 wissenschaftliche Mitarbeiter tätig, unter ihnen 9 habilitierte und 45 promovierte Mathematiker. Das Institut wird vom Rektor der Universität Tbilissi, Akademiemitglied Ilja Weckna, geleitet. Am Institut wird z. B. mit Hilfe einer Datenverarbeitungsanlage vom Typ BESM - 6 (1 Mill. Operationen pro Sekunde) am Problem der Optimierung der Metallversorgung in der UdSSR gearbeitet.

Beziehungen zur Sowjetwissenschaft

Es gehört zu den Erkenntnissen des Marxismus - Leninismus, daß sich die Wissenschaft erst in der sozialistischen Gesellschaftsordnung frei entfalten kann. So ist es nur folgerichtig, daß in der Sowjetunion die Wissenschaft in den vergangenen fünf Jahrzehnten eine solche Blüte erreicht hat, daß sie in ihren einzelnen Disziplinen im Weltmaßstab eine führende Rolle spielt. Deshalb wird bei uns in der DDR mit Recht propagiert, in jeder Weise von der Sowjetunion zu lernen. Diese Forderung zu realisieren heißt aber, sie schon auf der untersten Ebene, also bei unserer täglichen Arbeit, zu verwirklichen. Wie das konkret aussehen kann, soll im folgenden gezeigt werden.

Beispiele aus unserer Sektion

▷ STUDIUM DER SOWJETISCHEN FACHLITERATUR

Dieses ist in den Bereichen Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Kybernetik nicht nur eine Selbstverständlichkeit, sondern auch eine elementare Notwendigkeit, um über die wichtigsten Ergebnisse auf diesen Gebieten unterrichtet zu sein.

▷ STUDIUM AN SOWJETISCHEN UNIVERSITÄTEN

Viele wissenschaftliche Mitarbeiter unserer Sektion studierten an Universitäten in der Sowjetunion. Zum Beispiel war Herr Dr. Lindner zwei Jahre an der Lomonossow-Universität in Moskau tätig, und Herr Dr. Wechsung wird ab September diesen Jahres ein Zusatzstudium in der SU aufnehmen. Beide werden unseren Lesern durch ihre Fachbeiträge bekannt sein.

▷ VERÖFFENTLICHUNGEN IN SOWJETISCHEN ZEITSCHRIFTEN

Die sowjetischen Fachzeitschriften besitzen ein sehr hohes Niveau. Es ist daher für unsere Wissenschaftler von großem Nutzen, Beiträge in diesen Organen zu veröffentlichen, und so wird diese Möglichkeit von Angehörigen unserer Sektion rege genutzt.

▷ BETREUUNG WISSENSCHAFTLICHER ARBEITEN DURCH SOWJETISCHE WISSENSCHAFTLER

Von 1971 bis 1972 hält sich der Moskauer Wissenschaftler Prof. Dr. Kudrjavzev als Gastdozent an der Universität Rostock auf. Er betreut gleichzeitig die Promotionsarbeit eines Assistenten unserer Sektion. Wir werten dies als neue, höhere Form der Zusammenarbeit.

▷ GEGENSEITIGER BESUCH ZU TAGUNGEN, VORTRÄGEN usw.

Lösungen

(D 1)

L

Es ist

$$\begin{aligned}9^n(9^n + 1) + 1 &= 9^{2n} + 9^n + 1 \\&= 9^{2n} + 2 \cdot 9^n + 1 - 9^n \\&= (9^n + 1)^2 - 9^n \\&= (3^{2n} + 1)^2 - 3^{2n} \\&= (3^{2n} + 3^n + 1)(3^{2n} - 3^n + 1) \\&= (3^n(3^n + 1) + 1)(3^{2n} - 3^n + 1).\end{aligned}$$

Also ist $9^n(9^n + 1) + 1$ durch $3^n(3^n + 1) + 1$ teilbar.

(Leider wurde diese Aufgabe durch einen Druckfehler falsch gestellt. Wir bitten, dies zu entschuldigen.)

(D 2)

L

Man kann leicht zeigen, daß für zwei natürliche Zahlen m, n gilt

$$(m, n) \cdot [m, n] = m \cdot n,$$

wenn (m, n) den größten gemeinsamen Teiler und $[m, n]$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache bezeichnen.

Dann ist wegen $(m, n) = 6$ und $[m, n] \geq 100\,000$
 $m \cdot n \geq 600\,000$.

Da m und n dreistellige Zahlen sind, folgt für m
 $600 \leq m \leq 999$

und für $\frac{m}{350}$

$$\frac{600}{350} = \frac{12}{7} \leq \frac{m}{350} \leq \frac{999}{350} < \frac{20}{7}.$$

Da aber gilt

$$\frac{\pi}{2} < \frac{12}{7} \leq \frac{m}{350} < \frac{20}{7} < \pi,$$

ergibt sich

$$\tan \frac{m}{350} < 0.$$

(D 3)



Eine Funktion $f(x)$ ist genau dann periodisch, wenn es eine reelle Zahl T gibt, so daß für alle reellen Zahlen x $f(x) = f(x + T)$ gilt. Insbesondere muß gelten $f(0) = f(T)$.

Wenn also $f(x) = \cos ax + \cos x$ periodisch sein soll, so muß gelten

$$f(T) = \cos aT + \cos T = \cos(a \cdot 0) + \cos 0 = 2 = f(0).$$

$\cos aT + \cos T = 2$ kann aber nur gelten, wenn

$$\cos aT = 1 \quad \text{und}$$

$$\cos T = 1.$$

Damit muß aber sein

$$aT = 2k\pi \quad \text{mit ganzzahligem } k$$

$$T = 2m\pi \quad \text{mit ganzzahligem } m$$

oder

$$a = \frac{k}{m}, \text{ d. h. } a \text{ rational.}$$

Andererseits ist für rationale Zahlen $a = \frac{p}{q}$

$$(p, q \text{ ganzzahlig}) \quad f(x + 2q\pi) = f(x).$$

Das bedeutet: Genau für die rationalen Zahlen a ist die Funktion $f(x) = \cos ax + \cos x$ periodisch.

(D 5)



Zur Lösung dieser Aufgabe genügt es, universelle Zahlen b_1, b_2 anzugeben, d. h. Zahlen b_1, b_2 , die für beliebig vorgegebene a_1, a_2 mit $a_1 + a_2 = 1$ die Bedingungen erfüllen. Solche Zahlen sind

$$b_1 = \frac{3}{4} \quad \text{und} \quad b_2 = \frac{1}{4}.$$

Tatsächlich gilt dann

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{4} - a_1\right) \frac{3}{4} + 3\left(\frac{5}{4} - a_2\right) \frac{1}{4} &= \frac{3}{4}\left(\frac{5}{4} - a_1 + \frac{5}{4} - a_2\right) \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{5}{2} - 1\right) \\ &= \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

Wir stellen vor:

Lilly Görke: "Mengen - Relationen - Funktionen"

Dieses für mathematisch interessierte Schüler sehr gut geeignete Buch gibt einen Einblick in die wichtigsten Grundlagen der Mengenlehre.

Der Stoff wird leicht verständlich und an Hand von Beispielen und Skizzen dargeboten; Zusammenfassungen erleichtern das Einprägen des Wesentlichen.

Abschnitte höheren Schwierigkeitsgrades sind gekennzeichnet, in einem Anhang werden Ergänzungen zu den vorangegangenen Kapiteln, z. B. Beweise zu einigen Sätzen, angeführt. So kann der Leser nach eigenem Ermessen zunächst schwierigere Stellen übergehen und sich danach schrittweise diese Abschnitte und den Anhang erarbeiten.

Zukünftige Mathematikstudenten werden der Mengenlehre im ersten Semester wieder begegnen, und es ist dann von Vorteil, mit diesen Problemen bereits etwas vertraut zu sein. Daher kann dieses Buch auch als Lektüre zur Vorbereitung auf das spätere Studium empfohlen werden.

Aus dem Inhalt: Mengenbegriff



Operationen mit Mengen
Mengenalgebra
Antinomien der Mengenlehre
Zwei- und mehrstellige Relationen
Ordnungsrelationen
Äquivalenzrelationen
Funktionen und Abbildungen
Zusammensetzung und Umkehrung von Funktionen
Transformationen der Ebene
Geregelte Mengen
Aufbau der Zahlenbereiche
Vergleich unendlicher Mengen
Anwendung von Mengen im Schulstoff

Verlag Volk und Wissen Berlin 1970

Preis: 11.80 M

INSTRUKTIONEN ZUR AUFLÖSUNG

¹ L	⁵ G		¹⁴ H	U	¹⁸ T	²⁴ O	²⁶ R
	⁶ H	⁸ L	¹⁵ P		¹⁹ E	H	E
	⁷ B	H	¹⁶ R		²⁰ E	I	
² R	E	G	¹⁷ J	¹⁶ E		O	
H		⁹ E	¹⁸ L	L	²¹ H		²⁷ D
³ T	G		¹⁹ W	H	C	K	I
I		¹⁰ H	²⁰ U	N	T		P
O		¹¹ U	²¹ R		²² I	²⁵ M	O
⁴ N	E	R	²² Z		²³ O	E	L
H		¹² R	²³ E	¹⁷ N		G	
L		¹³ H	²⁴ L	P	H	H	

Wir haben uns erlaubt, bei dieser Auflösung des Kreuzworträtsels aus "WURZEL" 3/72 die waagerechten und senkrechten Zeilen miteinander zu vertauschen und hoffen, Ihnen damit keine allzu großen Schwierigkeiten zu bereiten.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienwerk und Studienvorbereitung“ der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena; **Leiter:** Reinhard Klette

Redaktion: Werner Nagel (Chefredakteur); M. Schleicher, H. Fischer, R. Lorenz

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

Anschrift: WURZEL
69 Jena
Helmholtzweg 1

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45

XI.



OLYMPIADE

**JUNGER
MATHEMATIKER**

der

DDR

Bericht von der Mathe-
matikolympiade 1972

Seite 77 - 80

5

72

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
Jugendobjekt Studien
vorbereitung der
Sektion Mathematik
an der Fr.-Schiller-
Universität Jena

Wir stellen vor: **Dozent Prof. Dr. habil. Hans Triebel**

Prof. Hans Triebel ist Mitarbeiter der Sektion Mathematik der FSU Jena und arbeitet auf dem Gebiet der Funktionalanalysis. Er wurde am 7. 2. 1936 geboren. In Dessau besuchte er die Rosa-Luxemburg-Oberschule und legte dort 1954 sein Abitur ab. Von 1954 bis 1959 studierte er in Jena. Nach Beendigung seines Studiums arbeitete er ein Jahr im VEB Carl Zeiss Jena. 1960 wurde er Assistent und promovierte im Dezember 1962 mit der Arbeit "Über die Lamé'sche Differentialgleichung". Nach seiner Promotion wurde er für ein Jahr nach Leningrad delegiert. Im Januar 1966 habilitierte Prof. Triebel mit der Arbeit "Zur Theorie der quasilinearen elliptischen Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme". Seit Februar 1969 ist er Dozent und seit September 1970 Professor. Prof. Triebel ist Leiter des Bereiches Analysis der Sektion Mathematik. Seine profilierte fachliche Arbeit unterstreichen über 30 Veröffentlichungen in verschiedenen in- und ausländischen Zeitschriften. Noch 1972 wird von ihm das Buch "Höhere Analysis" erscheinen.

Funktionen mehrerer Veränderlicher (I)

1. Funktionen einer Veränderlichen

Wir beginnen mit einigen Begriffen einer Funktion $f(x)$ einer Veränderlichen (Variablen). Mit x bezeichnen wir eine reelle Veränderliche, die in einem offenen Intervall (a, b) variieren kann:

$$a < x < b.$$

(Dabei ist nicht ausgeschlossen, daß $a = -\infty$ oder $b = +\infty$ ist.) Als "Funktion" bezeichnet

man eine Zuordnung, die

jeder Zahl x aus dem Intervall (a, b) in eindeutiger Weise eine reelle Zahl zuordnet, die mit $f(x)$ bezeichnet wird.

Den "Verlauf" einer Funktion (d. h. die Menge aller dieser Zuordnungen) kann man graphisch darstellen, wie es in der Abb. 1 geschehen ist. Das Intervall (a, b) bezeichnet man als Definitionsgebiet der Funktion. Die Gesamtheit der "Bilder" $f(x)$, die man erhält, wenn x das Definitionsgebiet durchläuft, nennt man den Wertevorrat.

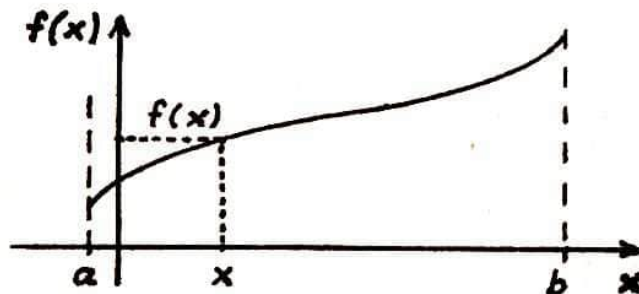


Abb. 1

Wir erinnern an zwei wichtige Begriffe: Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Stetigkeit: Grob-anschaulich könnte man die Stetigkeit folgendermaßen definieren: Eine Kurve (das ist die graphische Darstellung der Zuordnung

$x \rightarrow f(x)$) ist stetig, falls man sie mit dem Bleistift zeichnen kann, ohne dabei absetzen zu müssen. Natürlich ist das keine exakte mathematische Definition. Sie gibt aber anschaulich wieder, was man unter

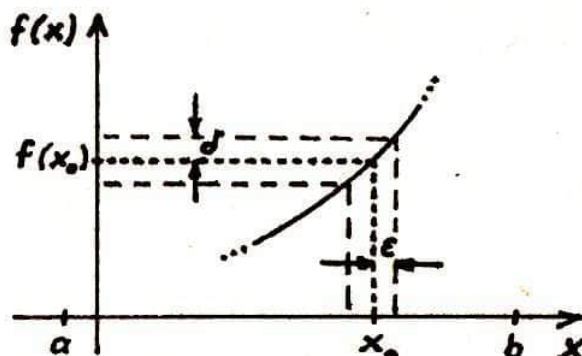


Abb. 2

dem Begriff "Stetigkeit" versteht. Es kommt darauf an, eine mathematisch exakte Definition zu finden. Eine etwas bessere Fassung wäre: Eine Kurve, dargestellt durch $f(x)$, ist stetig, wenn sich $f(x)$ wenig ändert, falls sich x wenig ändert. Man braucht jetzt lediglich den letzten Satz in eine Formel umzusetzen, um die übliche Definition der Stetigkeit zu erhalten: Vorgegeben ist ein Punkt x_0 und sein Funktionswert $f(x_0)$. "Wenn sich $f(x)$ wenig ändert" heißt

$$(1) \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \delta,$$

wobei δ eine vorgegebene positive Zahl ist.

"Falls sich x wenig ändert" heißt

$$(2) \quad |x - x_0| \leq \epsilon$$

Dabei hat man $\epsilon > 0$ so klein zu wählen, daß (1) gilt. ϵ hängt dann von der Größe von δ ab. Dabei haben wir alles auf $x_0, f(x_0)$ bezogen.

Insgesamt erhalten wir also:

$f(x)$ heißt im Punkte x_0 stetig, falls für jede positive Zahl δ eine positive Zahl ϵ (in Abhängigkeit von δ) existiert, so daß für alle x , für welche die Abschätzung (2) gilt, die Formel (1) richtig ist.

Differenzierbarkeit. Man kann

wieder eine anschauliche Definition geben. $f(x)$ heißt im Punkte x_0 differenzierbar, falls sich die "Sekanten" s (siehe Abb. 3) zur "Tangente" t einpendeln, falls sich x_1 und x_2 (unabhängig voneinander) dem Punkt x_0 nähern. Die

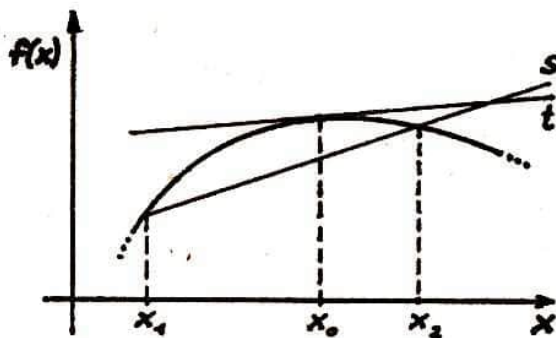


Abb. 3

formelmäßige Umsetzung dieser Beschreibung lautet bekanntlich

$$(3) \quad \lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_0 \\ x_2 \rightarrow x_0}} \underbrace{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}_{\text{Anstieg der Sekante}} = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{Anstieg der Tangente}}.$$

$f'(x_0)$ heißt die Ableitung der Funktion $f(x)$ im Punkte x .

2. Abstrakte Funktionen

Bisher war eine Funktion eine e i n d e u t i g e Zuordnung von reellen Zahlen (Definitionsgebiet) in reelle Zahlen (Wertevorrat). Wir wollen jetzt den Begriff der Funktion wesentlich erweitern.

Wir definieren eine Funktion als e i n d e u t i g e Abbildung eines Definitionsgebietes in einen Wertevorrat. Dabei wird nichts über den Charakter des Definitionsgebietes oder des Wertevorrates vorausgesetzt. (Im obigen Beispiel handelte es sich in beiden Fällen um reelle Zahlen.)

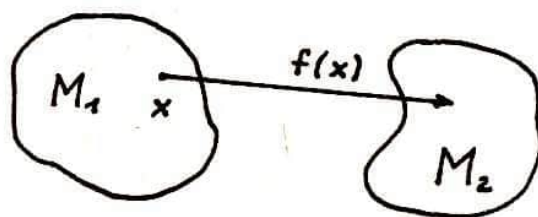


Abb. 4

Man kann auch so sagen: Eine Funktion ist eine eindeutige Abbildung von einer Menge M_1 in eine Menge M_2 .

Bezeichnet man die Elemente der Menge M_1 mit x , also $x \in M_1$, und die Funktion mit f , so ist $f(x) \in M_2$.

Zur Erläuterung betrachten wir einige Beispiele.

Beispiele:

- (a) M_1 sei die Menge aller (zur Zeit lebenden) Menschen. Gefragt ist nach der Größe jedes einzelnen Menschen. $f(x)$ gibt somit die Größe des Menschen x aus M_1 an. In diesem Fall besteht $f(x)$ aus reellen Zahlen (nämlich den Größen der verschiedenen Menschen).
- (b) M_1 sei die Menge der Punkte eines Zimmers. Gefragt ist nach der Temperatur im Punkte x des Zimmers. $f(x)$ ist dann die Zuordnung "Punkt x des Zimmers $\rightarrow$ Temperatur in diesem Punkt". Der Wertevorrat besteht wiederum aus reellen Zahlen.
- (c) M_1 sei die Menge aller (zur Zeit lebenden) Menschen. Gefragt ist, ob der Mensch x aus M_1 am 1. Januar Geburtstag hat oder nicht. In diesem Falle kann $f(x)$ nur zwei Werte annehmen - "ja" oder "nein". Das ist ein Beispiel, das zeigt, daß der Wertevorrat nicht immer aus reellen Zahlen besteht.

Im ersten Abschnitt hatten wir zwei Begriffe eingeführt: Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Es fragt sich, ob man analoge Begriffe in dem jetzt betrachteten allgemeinen Fall definieren kann. Das geht nicht, da die Mengen M_1 und M_2 keine zusätzlichen Eigenschaften besitzen. (Zur Definition der Stetigkeit im ersten Abschnitt hatten wir etwa den Begriff "Abstand" verwendet. Bei der Definition der Ableitung haben wir den Begriff "Konvergenz" verwendet.) Wir werden deshalb den Begriff der Funktion wieder etwas einschränken und zu "Funktionen mehrerer Veränderlicher" übergehen.

3. Funktionen mehrerer Veränderlicher (Definition, Stetigkeit)

Die Zahlengerade bezeichnen wir mit R_1 , die Ebene mit R_2 und den dreidimensionalen Raum mit R_3 . Die Punkte des R_3 nennen wir x , die einzelnen Komponenten x_i , $i = 1, 2, 3$. Also

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in R_3 .$$

(Entsprechend für R_2 .) Sind $x = (x_1, x_2, x_3)$ und $y = (y_1, y_2, y_3)$

zwei Punkte im R_3 , so wird der Abstand von x zu y gemessen durch

$$(4) \quad |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

(Entsprechend für R_2 .) Durch direkte Verallgemeinerung gelangt man jetzt zum n -dimensionalen Raum R_n . Dabei ist n eine natürliche Zahl, also $n = 1, 2, 3, \dots$. Wir definieren R_n als die Gesamtheit der "n-Tupel"

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad x_j \text{ reelle Zahl } (j = 1, 2, \dots, n).$$

Die einzelnen "Komponenten" x_j können dabei unabhängig voneinander die Zahlengerade R_1 durchlaufen. In Analogie zur Formel (4) definieren wir den Abstand $|x - y|$ zweier "Punkte" $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ durch die Formel

$$(5) \quad |x - y| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2}.$$

Es ist klar, daß für $n = 1, 2, 3$ die neue Definition des Abstandes mit der üblichen anschaulichen Definition des Abstandes übereinstimmt. Ist $x \in R_n$ ein fester Punkt und ist v eine vorgegebene positive Zahl, so bezeichnen wir die Gesamtheit der Punkte y mit der Eigenschaft

$$|y - x| < v$$

als "Kugel vom Radius v um den Punkt x ". Im dreidimensionalen Fall stimmt das mit dem üblichen Begriff "Kugel" überein. "Zweidimensionale Kugeln" sind Kreise. "Eindimensionale Kugeln" sind Intervalle.

Wir benötigen noch den Begriff "offene Menge in R_n ". Es sei M_1 eine Teilmenge von R_n , also $M_1 \subset R_n$. M_1 heißt "offen", falls mit jedem Punkt x aus M_1 auch eine Kugel um M_1 mit genügend kleinem (aber positivem) Radius ebenfalls in M_1 liegt (s. Abb. 5).

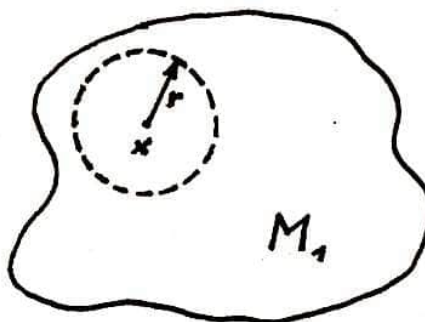


Abb. 5

Der zweite Teil dieses Artikels erscheint in "WURZEL"-6/72.

Preisaufgaben 5/72

(D 25) Man zeige, daß das unendliche Produkt

②

$$P = 2^{1/2} \cdot 4^{1/4} \cdot 8^{1/8} \cdot \dots \cdot (2^n)^{1/2^n} \dots$$

gleich 4 ist.

(D 26) Man bestimme alle vierstelligen Dezimalzahlen der Form $(abca)_{10}$, die gleich $(5c + 1)^2$ sind.

①

(D 27) Man beweise: Die Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit reellen Koeffizienten a, b, c, d und $a \neq 0$ besitzt genau dann eine Lösung, die rein imaginär ist, wenn $ac > 0$ und $ad = bc$ gilt.

②

(D 28) Man beweise für positive reelle Zahlen a und natürliche Zahlen n die Ungleichung

①

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{6} \geq \sqrt[4]{a} (n+1 - \sqrt[4]{a}).$$

(D 29) Man löse die Gleichung

①

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 1$$

in reellen Zahlen x .

(D 30) Если в шестиугольнике противоположные стороны равны и параллельны, то при его диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

②

Für jeden vollständigen Lösungsweg erhält der Einsender einen bzw. zwei Wertpunkte. Die Anzahl ist bei jeder Preisaufgabe unter der laufenden Nummer angegeben. Für 15 Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender 15 Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges). Falls ein Besitzer von 15 Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil.

Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungen bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders und seiner Adresse versehen sein müssen. Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

2.2.2.2.2.2.2.2

- 

INFORMATION

Anfang dieses Jahres wurde in der VR Polen erstmals ein Hybridrechner gebaut. Diese Anlage vereinigt die Arbeitsweise eines Analogrechners mit der Geschwindigkeit eines Digitalrechners. Die ersten in Polen hergestellten Hybridrechner werden in wissenschaftlichen Forschungsstellen des Landes verwendet.

Wir empfehlen:

v. Mangoldt/Knopp "Einführung in die höhere Mathematik"

Dieses Werk - es ist ebenso wie Fichtenholz "Differential- und Integralrechnung" (siehe "WURZEL" 1/72) ein Standardwerk der Analysis - vereinigt in sich zwei große Vorzüge, nämlich strenge Wissenschaftlichkeit und leichte Faßlichkeit. Deshalb ist es eine ideale Grundlage für das Studium, zumal es auch über die unmittelbare Analysis hinausgeht. Es ergänzt sich ausgezeichnet mit obengenanntem Werk von Fichtenholz.

Die Tatsache, daß die einzelnen Bände von v. Mangoldt/Knopp "Einführung in die höhere Mathematik" in der DDR bereits in 11. bzw. 14. Auflage erschienen sind, spricht für dieses Werk.

Aus dem Inhalt: Band 1

!!!!!!



!!!!!!

Band 2

Band 3

Zahlen, Funktionen, Grenzwerte, Analytische Geometrie, Algebra, Mengenlehre

Differentialrechnung, unendliche Reihen, Elemente der Differentialgeometrie und der Funktionentheorie

Integralrechnung und ihre Anwendung, Funktionentheorie, Differentialgleichungen

Jeder Band kostet 22,- M.

INFORMATION

15 Jahre im Kosmos aktiv

Nach etwa 15 Jahren aktiver Raumforschung konnte die UdSSR Mitte März 1972 auf insgesamt 590 Weltraumexperimente zurückblicken. Die seit dem 16. März 1962 gestarteten Satelliten der Kosmos-Serie machen etwa ein Drittel aller Raumfahrtunternehmen der Welt und vier Fünftel der sowjetischen Starts überhaupt aus. Im Jahre 1971 startete alle 108 Stunden ein Kosmos-Satellit. Die bisher mit Kosmos-Satelliten auf eine Umlaufbahn gebrachte Gesamtmasse beträgt etwa 1,5 Millionen Kilogramm, was etwa dem Gewicht von 20.000 erwachsenen Männern entspricht.

Lösungen

(D 7)

L

Die Wurzeln für beliebige Exponenten werden i.a. nur aus positiven Zahlen gezogen; diese Feststellung ist, trotz der Eindeutigkeit der Umkehrfunktion von x^{2n+1} , günstig bei der Erweiterung des Potenzbegriffes auf reelle Exponenten. Trotzdem erhielten alle Einsender, die die dritte Lösung

$$x_3 = -88$$

nicht ausgeschlossen hatten, volle Punktzahl. Von fast allen Einsendern wurde folgender Lösungsweg gewählt:

Eingesandt von Helmut Roßmann, Neubrandenburg, POS V.

$$\sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} = 6$$

Da die Radikanden stets nichtnegativ sind, folgt

$$24 + x > 0 \quad \text{und} \quad 12 - x > 0.$$

Ich führe jetzt die folgende Substitution ein:

$$\sqrt[3]{24+x} = a$$

$$\sqrt{12-x} = b \quad \text{mit } a, b \geq 0$$

Hieraus folgt:

$$a + b = 6$$

$$a^3 + b^2 = 36$$

Dieses Gleichungssystem kann man lösen, indem man den aus der ersten Gleichung gefundenen Wert für b in die zweite Gleichung einsetzt.

$$a^3 + (6 - a)^2 = 36$$

$$a^3 + a^2 - 12a = 0 \quad (*)$$

$$a(a + 4)(a - 3) = 0$$

$$\underline{\text{1. Fall:}} \quad a = 0 \quad b = 6$$

$$x = -24$$

$$\underline{\text{2. Fall:}} \quad a + 4 = 0 \quad a = -4 \quad \text{entfällt, da die Wurzeln nichtnegativ definiert.}$$

3. Fall: $a = 3$ $b = 3$

$$x = 3$$

Die Lösungen sind also

$$\underline{x_1 = -24} \quad \text{und} \quad \underline{x_2 = 3.}$$

Eine andere Möglichkeit der Substitution, die sofort auf (*) führt, wurde von Bernd Kutniek aus Teterow gebraucht.

$$\text{Er ersetzte } x = a^3 - 24 \quad a \in \mathbb{R}.$$

(D 8)

L

Leider unterlief uns bei dieser Aufgabe ein Druckfehler. Aus der gegebenen Voraussetzung folgt selbstverständlich nicht die Behauptung.

Wer dieses durch ein Gegenbeispiel (z.B. für $\gamma = 30^\circ$) zeigte, erhielt schon den Punkt.

Trotz des Fehlers erhielten wir zahlreiche Einsendungen von Lesern, die ihn berichtigt hatten und als Voraussetzung $\cot(\alpha + \beta) \cdot \cos \gamma = \sin \gamma$ ansetzten.

Hier nun zwei Lösungsvarianten:

Eingesandt von Matthias Gatzsche, Neubrandenburg

Voraussetzung: $\cot(\alpha + \beta) \cdot \cos \gamma = \sin \gamma$

Behauptung: $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Beweis: 1. Fall: $\cos \gamma = 0$ $\sin \gamma = 1$

$$\cot(\alpha + \beta) \cdot \cos \gamma = 0$$

$$\sin \gamma = 1$$

Wegen $1 \neq 0$ ist die Voraussetzung nicht erfüllt.

2. Fall: $\cos \gamma \neq 0$

$$\cot(\alpha + \beta) \cdot \cos \gamma = \sin \gamma \quad | : \cos \gamma$$

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = \tan \gamma$$

$$\tan \gamma = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$$

$$\cot(\alpha + \beta) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \gamma + \pi k, \quad k \text{ ganz}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{q.e.d.}$$

Zweite Variante, eingesandt von Helmut Roßmann,
Neubrandenburg, POS V

$$\cot(\alpha + \beta) \cdot \cos \gamma = \sin \gamma$$

Die Gleichung kann nur erfüllt sein, wenn $\cot(\alpha + \beta)$ definiert ist, d.h. $\sin(\alpha + \beta) \neq 0$ gilt.

$$\cos \gamma \cdot \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \sin \gamma \quad | \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

$$\cos \gamma \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin \gamma \sin(\alpha + \beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos \gamma - \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = 0$$

nach Additionstheorem folgt hieraus

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = 0$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{mit } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{q.e.d.}$$

(D 9) Eingesandt von Helmut Roßmann, Neubrandenburg, POS V

L

Ich bestimme zunächst die Anzahl aller positiven ganzen Zahlen c und d , deren Summe gleich einer gegebenen natürlichen Zahl n ist. Ich kann hier $n \geq 2$ voraussetzen. Wenn $c + d = n$, so gibt es bestimmt $n-1$ Paare positiver ganzer Zahlen, die das erfüllen, und zwar

$$\begin{aligned} 1 + (n-1) &= n \\ 2 + (n-2) &= n \\ 3 + (n-3) &= n \\ &\dots\dots\dots \\ (n-1) + 1 &= n \end{aligned}$$

Setze ich jetzt $d = a + b$, a positiv und ganz, so gibt es sicherlich für

$$\begin{aligned} a + b &= 1 && \text{kein Paar} \\ a + b &= 2 && 2-1 = 1 \text{ Paar} \\ a + b &= 3 && 3-1 = 2 \text{ Paare} \\ &\dots\dots\dots \\ a + b &= n-1 && (n-1)-1 = n-2 \text{ Paare} \end{aligned}$$

Es gibt damit also genau $1 + 2 + \dots + n-2$ Tripel a, b, c , für die $a+b+c$ gleich einer gegebenen Zahl n ist.

Die Anzahl aller Tripel beträgt:

$$1 + 2 + \dots + n-2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \quad (\text{Siehe Tafelwerk!})$$

Und hier, wie versprochen, der Beweis des Satzes vom Titelbild des Aprilheftes:

16 gerade 17 - 16 = 1 gerade
1 ist durch 2 teilbar
3 und 7 sind durch 2 teilbar
 $3 \cdot 7 = 21$ ist durch 4 teilbar
 $21 - 4 = 17$ ist durch 4 teilbar

Analog kann man zeigen, daß 3 und 11 durch 4 teilbar sind, somit 33 und damit 17 durch 16 teilbar sind, und ebenfalls analog folgt, daß 3 und 91 durch 16, somit 273 und damit insgesamt $273 - 256 = 17$ durch 256 teilbar sind.

XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Berlin, Donnerstag, 30. 3. 1972, Jugendhochschule
Bogensee

Die letzten Busse sind abgefahren und es ist recht ruhig geworden in der Jugendhochschule. Nach den ereignisreichen Tagen der vergangenen Woche ein ungewohntes Bild. Ereignisreiche Tage - damit ist die XI. OJM der DDR gemeint, die vom 26.-29. März 1972 in der Jugendhochschule stattfand. Heute nun sind auch die letzten Teilnehmer wieder auf dem

Heimweg, die Preisträger stehen fest, und die Kandidaten für die IMO sind nominiert. Man wertet aus und erinnert sich noch einmal an die Tage der XI. OJM.

Sonntag, 26. 3. 1972

Die Delegationen treffen ein. Im Empfangsbüro wird auf Hochtouren gearbeitet. Insgesamt 201 Schülerinnen und Schüler werden ihre "mathematischen Kräfte" messen. Was die Schülerinnen anbetrifft, so sei noch gesagt, daß es nur 25 an der Zahl waren. Warum eigentlich immer noch so wenig? Kein Mensch in unserer Republik, der als modern und vernünftig gelten möchte, wird wohl heute noch behaupten, daß Mathematik nichts für Mädchen sei. Theoretisch ist also alles in Ordnung. Aber in der Praxis? Zweifelsohne ist das eine Frage der Entwicklung - aber Selbstlauf können wir uns dabei nicht leisten. Hier gibt es noch ungenutzte Möglichkeiten, die es auszuschöpfen gilt. Wie wäre es, wenn Sie, lieber Leser, sich einmal zu diesem Problem äußern würden? Welche Meinungen gibt es bei Ihnen? Wie wäre es mit einer Diskussion in der "WURZEL"?

Sonntag gegen 16.00 Uhr sind dann auch die letzten Delegationen, Korrektoren und Koordinatoren eingetroffen. Erste Beratungen finden statt. Die FDJ-Leitung konstituiert sich. Die FDJ-Sekretäre der einzelnen Delegationen und Vertreter des Zentralrates besprechen die Möglichkeiten und Vorschläge zur Gestaltung der Arbeit ihres Jugendverbandes während der Olympiadetage. Es wird beraten, diskutiert. Die Vorbereitung von Veranstaltungen, eine Vietnamspende, Weltfestspiele in Berlin, und anderes steht auf der Tagesordnung. Mathematikspezialisten bewußt politisch aktiv für die Entwicklung des Sozialismus - in unserem Staat eigentlich eine Selbstverständlichkeit. Abends ist dann die feierliche Eröffnung, die von Prof. Dr. Engel vorgenommen wird. Anschließend herrscht Stimmung auf der Bühne: ein Ensemble der Sowjetarmee begeistert die Teilnehmer mit Kampfliedern, Volkstänzen und - natürlich - der immer wieder schönen und vielgesungenen "Kalinka". Zweifelsohne ein Erlebnis mit nachhaltigem Eindruck.

Montag, 27. 3. 72

Die Köpfe rauchen. Vormittags bei den Schülern und nachmittags bei den Korrektoren und Koordinatoren, Die Aufgaben erfordern wahrlich Höchstleistungen. Drei Aufgaben müssen in jeder Klassenstufe (10 und 11/12) gelöst werden. Beim Mittagessen wird dann diskutiert und ausgewertet. Die Korrektoren und Koordinatoren beginnen ihre Arbeit.

Am Nachmittag stehen dann Volleyball, Fußball und Tischtennis auf dem Programm. Auch bei einer Simultanschachveranstaltung werden die Kräfte gemessen. Zwei Siege und zwei Remis können die Schüler auf ihrem Konto verbuchen. Im Laufe des Tages ist auch die Wandzeitung der FDJ-Leitung erschienen. Der Grundgedanke ist klar: "Die XI. OJM ist ein Höhepunkt im mathematischen Wettbewerb - Laßt sie auch zu einem Höhepunkt im Leben unseres Jugendverbandes werden!"

Abends läuft der Film "Salut Maria". Doch dann sind bei vielen die Gedanken schon bei der Klausur des kommenden Tages.

Dienstag, 28. 3. 1972

Die zweite Hälfte der Aufgaben wird in Angriff genommen. Wie bereits im vorangegangenen Jahr eingeführt, werden auch diesmal wahlobligatorische Aufgaben gestellt. Jeder Schüler kann einmal unter zwei Aufgaben wählen, sich also sein Spezialgebiet aussuchen. Diese Form hat sich bewährt und ist für die Schüler sicherlich eine Erleichterung, falls man bei dem Schwierigkeitsgrad der Aufgaben überhaupt von Erleichterung sprechen kann.

Nachmittags findet man sich zu Diskussionsrunden über Militär- und Außenpolitik zusammen. Prominente Gäste beantworten Fragen und diskutieren mit den FDJ-lern. Abends gibt es dann einen mathematischen Vortrag.

Gegen 22.00 Uhr ist es dann endlich so weit: Bereichsleiter, Jury und Delegationsleiter kommen zusammen. Die Ergebnisse werden bekanntgegeben. Ungeduldig werden die Delegationsleiter von ihren Delegationen erwartet. Groß ist der Jubel bei den Siegern. Die Delegationen der einzelnen Bezirke feiern ihre Besten.

Mittwoch, 29. 3. 1972

Vormittags ist Freizeit, die viele zu einem Stadt- und Einkaufsbummel nutzen.

Nach dem Mittagessen in der Kongreßhalle wohnen wir alle einem Auftritt des Pionier- und FDJ-Ensembles "Edgar André" bei; ein würdiger Abschluß der XI. Matheolympiade.

Abends dann die feierliche Siegerehrung, u. a. mit folgenden Preisträgern:

Oberschule, Klasse 10

1. Preis Ralph Lehmann, EOS Strausberg 36 Punkte

Oberschule, Klasse 11/12

1. Preis Harald Englisch, EOS Leipzig 39 Punkte

Hans-Jürgen Fischer, Karl-Marx-Stadt 39 Punkte

Anschließend wurden die Kandidaten für die Nationalmannschaft bekanntgegeben. Es sind dies:

Harald Englisch	Leipzig
Hans-Jürgen Fischer	Karl-Marx-Stadt
Gerd Weißenborn	Berlin
Olaf Böhme	Dresden
Rolf Haftmann	Karl-Marx-Stadt
Guntram Pansch	Leipzig
Albrecht Heß	Dresden
Matthias Günther	Leipzig
Pawel Kröger	Leipzig
Rainer Siegmund-Schulze	Berlin

Von diesen zehn Schülern werden acht bei der Internationalen Mathematikolympiade in der VR Polen die Deutsche Demokratische Republik vertreten. Dazu wünschen wir ihnen viel Erfolg.

Bernd Wächter

"WURZEL"-Korrespondent bei der
XI. OJM

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienwerbung-Studienvorbereitung“ der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Leiter: Reinhard Klette

Redaktion: Werner Nagel (Chefredakteur); U. Schleicher, H. Fischer, R. Lorenz

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

Anschrift: WURZEL

69 Jena

Helmholtzweg 1

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45



*„Hast Du schon
gehört, daß noch
in diesem Som-
mer das*

! BERUFSBILD EINES DIPLOM- MATHEMATIKERS !

erscheinen soll ?“

*„Mach keine
Witze! Wir
schreiben doch
noch nicht
den 1. April
1973!“*



6

72

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
Jugendobjekt Studien-
vorbereitung der
Sektion Mathematik
an der Fr.-Schiller-
Universität Jena

Funktionen mehrerer Veränderlicher (II)

Wir betrachten jetzt "Funktionen mehrerer Veränderlicher" $f(x)$. Das Definitionsgebiet ist eine offene Menge M_1 aus R_n . Der Wertevorrat ist eine Teilmenge von R_1 . Mit anderen Worten: $f(x)$ ist eine reelle Zahl, $x \in M_1$. Für $n = 1$ haben wir wieder die Funktionen aus Abschnitt 1 der vorigen "Wurzel". Für $n = 2$ (und in symbolischer Weise auch für beliebige n) hat man Abb. 1 durch Abb. 6 zu ersetzen.

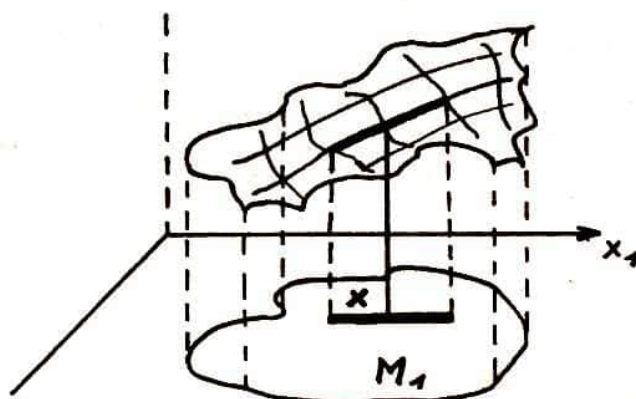


Abb. 6

Die Werte der Funktion $f(x)$ sind als "Funktionsgebirge" darstellbar. Hier ein paar Beispiele von Funktionen zweier Veränderlicher:

$$f(x): \quad x_1 + x_2, \quad x_1^{17} + x_2^{23} + 29x_1x_2^{57}, \quad e^{x_1}x_2, \quad \text{tg}(x_2 \sin x_1)$$

(mit entsprechenden Definitionsgebieten)

Wir gehen jetzt daran, die Begriffe "Stetigkeit" und "Differenzierbarkeit" zu übertragen. Im Falle der Stetigkeit haben wir es sehr einfach, da wir im ersten Abschnitt der vorigen "Wurzel" bereits gut vorgearbeitet haben. Wir brauchen lediglich in den Formeln (1) und (2) den Begriff des (eindimensionalen) Abstandes durch den Begriff des (n-dimensionalen) Abstandes zu ersetzen :

$f(x)$ heißt im Punkte $x_0 \in M_1$ stetig, falls für jede positive Zahl δ eine positive Zahl ε (in Abhängigkeit von δ) existiert, so daß für alle x , für welche die Abschätzung (2) gilt, die Formel (1) richtig ist,

(ϵ hat man dabei so klein zu wählen, daß die Kugel vom Radius ϵ um x_0 in M_1 liegt).

Aufgabe: Machen Sie sich in Analogie zum ersten Abschnitt
 der vorigen "Wurzel" für $n = 2$ den anschaulichen Sinn dieser Definition klar (Abb. 6):

4. Differentiation von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Während wir die Definition der Stetigkeit ohne Schwierigkeiten von einer Dimension auf n Dimensionen übertragen konnten, treten bei der Übertragung des Begriffes der Differentiation neue Effekte auf. Wir betrachten wieder eine Funktion $f(x)$, die auf der offenen M_1 erklärt ist.

Es sei $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Wir halten $x_2, \dots, x_n$ fest und lassen die erste Komponente variieren, also

$$y = (y_1, x_2, \dots, x_n).$$

Da M_1 offen ist, gilt $y \in M_1$ für $|y_1 - x_1| \leq \epsilon$

(ϵ hinreichend klein, warum?) Siehe Abb. 6!

Auf diese Weise erhalten wir eine Funktion F

$$F(y_1) = f(y_1, x_2, \dots, x_n),$$

der eindimensionalen Variablen y_1 .

Auf diese Funktion $F(y_1)$ können wir die Betrachtungen des ersten Abschnitts aus der vorigen "Wurzel" anwenden, insbesondere Formel (3).

Wir sagen jetzt, daß " $f(x)$ im Punkte x partiell nach x_1 -differenzierbar ist", falls die eindimensionale Funktion $F(y_1)$ im Sinne der Formel (3) bei x_1 differenzierbar ist.

Wir schreiben:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = F'(x_1)$$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}$ heißt partielle Ableitung.

Entsprechend kann man natürlich die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$$

im Punkte $x \in M_1$ definieren.

Ist $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ in M_1 definiert und besitzt diese Funktion eine

partielle Ableitung nach x_1 , so schreibt man

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} (x).$$

Analog

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} (x),$$

usw. Man kann auf diese Weise partielle Ableitungen beliebig "hoher Ordnung" definieren.

Es fragt sich, ob "Stetigkeit" und "partielle Ableitung" in Beziehung zueinander stehen. Ferner ist es von Interesse zu wissen, ob die partiellen Ableitungen untereinander in Beziehung stehen.

|| Im eindimensionalen Fall folgt aus der Differenzierbarkeit einer Funktion die Stetigkeit. Die Formel (3) zeigt nämlich, daß

$$\begin{aligned} & |f(x_2) - f(x_0)| \\ &= \left| \left(\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - f'(x_0) \right) (x_2 - x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) \right| \\ &\leq |x_2 - x_0| \left| \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - f'(x_0) \right| + |f'(x_0)| |x_2 - x_0| \\ &\leq c \cdot |x_2 - x_0| \quad \text{gilt.} \end{aligned}$$

Wenn $|x_2 - x_0|$ gegen Null strebt, so auch $|f(x_2) - f(x_0)|$.

Daraus folgt die Stetigkeit im eindimensionalen Fall.

Im mehrdimensionalen Fall ist die Situation komplizierter:

Eine Funktion, die sämtliche partiellen Ableitungen erster Ordnung besitzt, braucht nicht unbedingt stetig zu sein. ||

Wir geben ein Beispiel an:

Im $\mathbb{R}_2$ besitzt die Funktion

$$f(x) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{für } x \neq 0 \quad \text{und} \quad f(0) = 0$$

im Nullpunkt die partiellen Ableitungen.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0) = 0$$

$f(x)$ ist aber im Nullpunkt unstetig.

Aufgabe:

Man beweise die angegebenen Resultate!



Das in diesem Zusammenhang wichtigste Resultat ist der Satz von der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen.

Satz: Die Funktion $f(x)$ sei im Punkt x stetig. Ferner sollen alle Ableitungen der Form

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \quad 1 \leq j, k \leq n$$

existieren und ebenfalls im Punkte x stetig sein.

Dann ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x).$$

Das bedeutet, daß die Reihenfolge der Ausführungen der partiellen Differentiation keine Rolle spielt. Ein entsprechendes Resultat gilt für die Ableitungen höherer Ordnung.

5. Schlußbemerkungen

Der Begriff der partiellen Ableitung ist von fundamentaler Bedeutung für die Mathematik, Physik und Anwendungsgebiete der Mathematik in der Technik. Fast alle Teildisziplinen der theoretischen Physik (Mechanik, Elektrodynamik, Elastomechanik, Quantenphysik, Relativitätstheorie,...) gründen sich auf sogenannte "partielle Differentialgleichungen". Diese partiellen Differentialgleichungen werden aber aufgebaut mit Hilfe der hier beschriebenen partiellen Ableitungen. Der Begriff der Stetigkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher kann wesentlich erweitert werden auf spezielle Klassen von Funktionen im Sinne des Abschnitts 2 der vorigen "Wurzel". Derartige Verallgemeinerungen führen zu einem modernen Zweig der heutigen Mathematik, der Funktionalanalysis.

Prof. Dr. Hans Triebel

**Leiter des Bereiches Analysis
an der Sektion Mathematik**

Preisaufgaben 6/72

(D 31) Einige von 15 Bogen Papier wurden in 10 Teile zerschnitten. Sodann wurden einige der zerschnittenen Bogen nochmals in 10 Teile zerschnitten usw. Als man alle so entstandenen Papierbogen zählte, erhielt man 1972. Beweisen Sie, daß falsch gezählt wurde!

(D 32) Alle Seiten eines konvexen Vielecks vom Umfang 12 werden um 1 nach außen geschoben.
Es ist zu beweisen, daß sich der Flächeninhalt um mehr als 15 vergrößert!

(D 33) Man beweise, daß es keine ganzen Zahlen a, b, c, d derart gibt, daß der Ausdruck

①

$$a x^3 + b x^2 + c x + d$$

für $x = 19$ gleich 1

und für $x = 62$ gleich 2 ist!

(D 34) Auf dem ersten von n in einer Reihe angeordneten Feldern befindet sich eine Münze. Mit einem Zug kann man sie um 1, 2 oder 3 Felder vorrücken. Zwei Spieler ziehen abwechselnd. Verloren hat derjenige, der die Münze auf das letzte Feld zieht. Wer von beiden Spielern gewinnt? Wie muß man spielen?

①

(D 35) Geben Sie die reellen Lösungen x der Ungleichung

①

$$\frac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} - x} > 6\sqrt{x} \quad \text{an!}$$

(D 36) Beweis des Satzes 2 auf Seite 90

②

Für jeden vollständigen Lösungsweg erhält der Einsender einen bzw. zwei Wertpunkte. Die Anzahl ist bei jeder Preisaufgabe unter der laufenden Nummer angegeben. Für 15 Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender 15 Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges). Falls ein Besitzer von 15 Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum Ende des darauffolgenden Monats unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an unsere Adresse einzuschicken. Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungen bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und ab sofort auch mit der K l a s s e n s t u f e versehen sein müssen. Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

Wir konstruieren einen vierdimensionalen Würfel

Der mit dem Dimensionsbegriff vertraute Leser wird bei dieser Überschrift sicher stutzen. Was heißt "Würfel im vierdimensionalen Raum", wenn unsere Vorstellungen sich doch nur im dreidimensionalen Raum (Höhe, Tiefe, Breite) bewegen können? Wir werden sehen, daß ein mathematischer Geist vermag, diese Grenze zu überschreiten und sich in Räume beliebiger Dimension begeben kann.

Die Konstruktion unseres Würfels basiert auf mengentheoretischen Überlegungen. In der Ausdrucksweise einer Spezialrichtung der Mathematik, der Verbandstheorie, kann der im weiteren aufgezeigte Konstruktionsweg wesentlich eleganter formuliert werden. Aus Gründen des besseren Verständnisses möchten wir hierauf aber verzichten. Verwiesen sei noch auf den Artikel von Herrn Dr. Wechsung über "Mengen-Relationen-Funktionen". (Siehe "WURZEL" 11/70 - 2/71)

Mit M_n möchten wir die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis n bezeichnen, symbolisch

$$M_n = \{1, \dots, n\}.$$

Wir sagen: Die natürlichen Zahlen $1, \dots, n$ sind Elemente von M_n .

Definition

	1. Eine Menge N von natürlichen Zahlen heißt <u>Untermenge von M_n</u> genau dann, wenn alle Elemente von N auch Elemente von M_n sind. Wir schreiben dann: $N \subseteq M_n$.
	2. Zwei Untermengen N_1 und N_2 sind <u>identisch</u> genau dann, wenn in N_1 und in N_2 dieselben Elemente enthalten sind. Wir schreiben dann: $N_1 = N_2$ (Im weiteren Sinne wollen wir in jeder Menge natürlicher Zahlen die Elemente der Größe nach geordnet haben.)
	3. $\emptyset$ heißt die <u>leere Menge</u> genau dann, wenn $\emptyset$ überhaupt kein Element enthält.

Es ist leicht zu zeigen, daß es nur eine leere Menge gibt.

Folgerung: $\emptyset \subseteq M_n$, für jedes $n = 1, 2, \dots$

Mit $\mathfrak{P}(M_n)$ bezeichnen wir die Menge aller möglichen nichtidentischen Untermengen von M_n .

Beispiele: $\mathfrak{P}(M_1) = \{\emptyset, \{1\}\}$

$$\mathfrak{P}(M_4) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \\ \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \\ \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

Folgerung: Ist $n \leq m$, so sind alle Mengen, die in $\mathfrak{P}(M_n)$ enthalten sind, auch in $\mathfrak{P}(M_m)$ enthalten.

Satz 1: In $\mathfrak{P}(M_n)$ sind $\binom{n}{r}$ Untermengen von M_n mit r verschiedenen Elementen enthalten ($0 \leq r \leq n$).

Man beweise diesen Satz!

Es seien N_1 und N_2 Untermengen von M_n mit r Elementen, wir wollen schreiben: $N_1 \vdash N_2$ (" N_1 unmittelbarer Vorgänger von N_2 "), wenn N_1 in der lexikographischen Anordnung aller Untermengen von M_n mit r Elementen unmittelbar vor N_2 kommt. Lexikographische Anordnung ist hier im selben Sinne zu verstehen, wie sie dem Leser von einem Lexikon her bekannt ist, d.h. wie im Lexikon ab vor ad kommt, so kommt hier 1,2 vor 1,4.

Beispiel: in M_4 gilt: $\{1, 2, 3\} \vdash \{1, 2, 4\} \vdash \{1, 3, 4\} \vdash \{2, 3, 4\}$

Wir wollen nun zur Konstruktion unseres Würfels kommen, hierzu wollen wir eine spezielle graphische Darstellung von $\mathfrak{P}(M_n)$ angeben.

Wir wollen jeder Untermenge N von M_n im weiteren eineindeutig einen Punkt in unserer Zeichenebene zuordnen, den wir bzgl. N mit P_N bezeichnen. Die Lage dieser Punkte werden wir nun beschreiben:

1. Wir markieren in der Zeichenebene $n+1$ Waagerechte mit konstantem Abstand a , die wir von unten nach oben durchnummerieren: $w_1, \dots, w_{n+1}$, wobei also w_{n+1} die oberste Waagerechte ist.

2. Auf jeder Waagerechten W_i ($1 \leq i \leq n+1$) werden alle Punkte P_N markiert, für die N genau $i-1$ Elemente enthält. Durch die Waagerechten wird eine senkrechte Achse gelegt, zu der alle zu markierenden Punkte symmetrisch liegen in Abständen $m \cdot a$ ($m = 0, 1, \dots$; a siehe 1.) und alle Punkte liegen so nahe wie möglich an dieser Symmetrieachse.
3. Ein Punkt P_{N_1} liegt auf einer Waagerechten unmittelbar links neben P_{N_2} genau dann, wenn $N_1 \vdash N_2$.
4. P_{N_1} sei Punkt auf W_i ($2 \leq i \leq n+1$) und P_{N_2} sei Punkt auf W_{i-1} . Wir zeichnen zwischen P_{N_1} und P_{N_2} genau dann eine Strecke, wenn $N_2 \subseteq N_1$.

Satz 2: Zwischen W_i und W_{i-1} ($2 \leq i \leq n+1$) zeichnen wir auf diese Weise genau $(i-1) \cdot \binom{n}{i-1}$ Verbindungsstrecken ein.

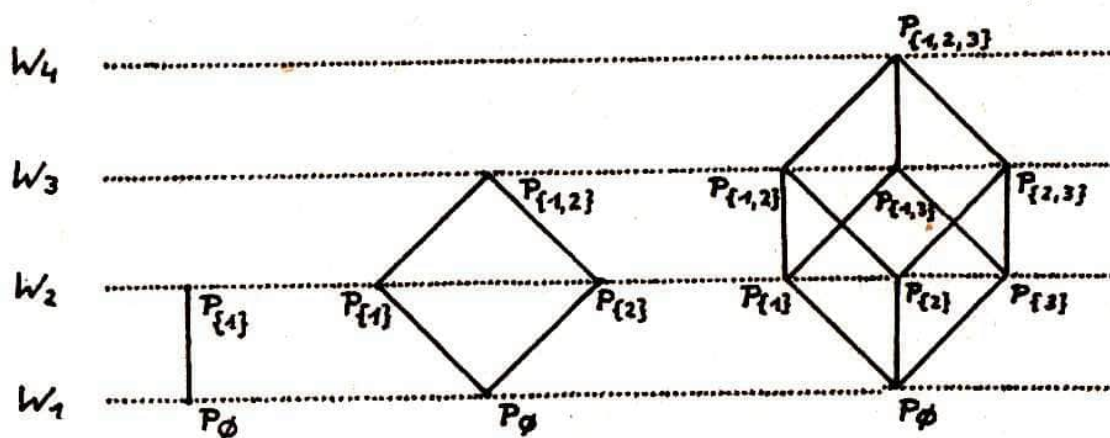
Dieser Satz ist als Preisaufgabe (D 36) zu beweisen!

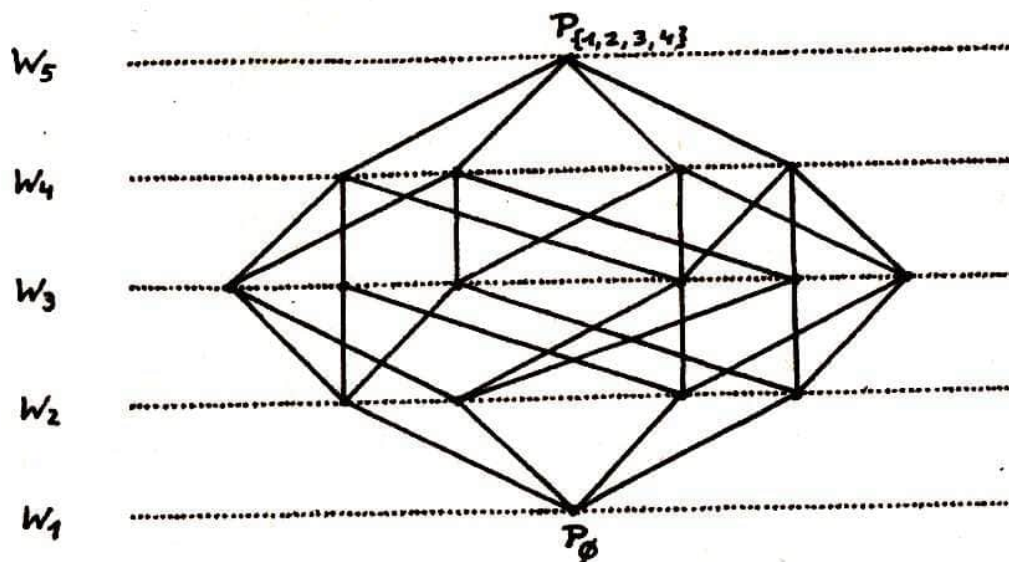
Nun endlich die entscheidende Folgerung:

W_n ist n -dimensionaler Würfel genau dann, wenn W_n der graphischen Darstellung von $\mathfrak{P}(M_n)$ entspricht.

(Mit anderen Worten: Die obige graphische Darstellung von $\mathfrak{P}(M_n)$ heißt per definitionem n -dimensionaler Würfel).

Betrachten wir die Darstellung der n -dimensionalen Würfel für $n \leq 4$:





Der Leser wird diese Konstruktion nun für beliebige n leicht durchführen können, vorausgesetzt, Zeit und Papier sind ausreichend vorhanden. Es sei noch folgender Satz angeführt:

Satz 3: Jeder n -dimensionale Würfel ist durch $2^{n-r} \binom{n}{r}$



r -dimensionale Würfel begrenzt ($0 \leq r < \infty$)

(Unter einem 0-dimensionalen Würfel verstehen wir einen Punkt)

Beispiel:

Der 4-dimensionale Würfel besitzt 32 1-dimensionale Würfel (d.h. Strecken) als Begrenzungslinien.

Reinhard Klette

IV. Stdj. / Kybernetik

Gut gesagt

"Ein Mathematiker, der nicht irgendwie ein Dichter ist, wird nie ein vollkommener Mathematiker sein."

Karl Weierstraß

Aus der Annahme, daß zwei mal zwei fünf ist, kann man auch folgern, daß es Hexen gibt.

F. Hausdorff

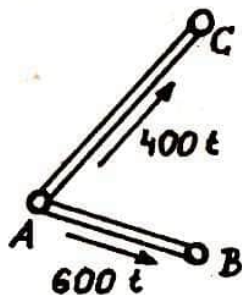
+ BÜCHERMARKT + BÜCHERMARKT + BÜCHERMARKT + BÜCHERMARKT +

Wir stellen vor:

A.S.BARSOW: " Was ist lineare Programmierung?"

Bei der Anwendung mathematischer Methoden in der Volkswirtschaft spielt die lineare Programmierung (oder besser: lineare Optimierung) eine grundlegende Rolle; wir möchten hierzu ein Beispiel anführen :

Ein Betrieb A liefert jährlich an die Betriebe B und C 600 t bzw. 400 t eines Erzeugnisses. Für die Transporte stehen Lastkraftwagen L_1 und L_2 mit Nutzlasten von 1 t bzw. 4 t zur Verfügung. L_1 kann jährlich höchstens 300 Fahrten leisten, L_2 kann höchstens 200 Fahrten leisten. Die Transportkosten betragen (in Mark):



von A zu B	für L_1 10	für L_2 20
von A zu C	30	60

Ziel: Die Fahrten von L_1 und L_2 sind so zu legen, daß die gesamten Fahrtkosten innerhalb eines Jahres möglichst gering sind.

Zur Lösung solcher und ähnlicher Optimierungsaufgaben finden die Verfahren Anwendung, die Herr Dr. F. Götze in "WURZEL" 3/72 und 4/72 erläutert hat. A. S. Barsow gibt in diesem Problemkreis eine elementare Einführung, die sich besonders durch eine fundierte Darstellung der Grundlagen innerhalb der linearen Algebra auszeichnet.

Aus dem Inhalt: Der n-dimensionale Raum



Vektoren in diesem Raum
Hyperebenen und Halbräume

Konvexe Polyeder
Systeme linearer Ungleichungen

Simplextransformation

Eine Minimaxaufgabe

Lösung des Transportproblems bzgl. der Kosten und der Zeit

B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1966, Preis 5,40M

Lösungen

(D 13)

L

In den Lösungen wurde von allen Einsendern auf folgende Beziehung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel zurückgegriffen.

Für $x_i \in \mathbb{R}$, $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ gilt:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

Somit ergibt sich für $n = 2$ und - wie in Aufgabenstellung gefordert - $a, b, c \geq 0$

$$5 \cdot \frac{a+b}{2} \geq 5\sqrt{ab},$$

$$7 \cdot \frac{a+c}{2} \geq 7\sqrt{ac},$$

$$3 \cdot \frac{b+c}{2} \geq 3\sqrt{bc}$$

Durch Addition der drei Ungleichungen entsteht

$$\frac{5(a+b)}{2} + \frac{7(a+c)}{2} + \frac{3(b+c)}{2} \geq 5\sqrt{ab} + 7\sqrt{ac} + 3\sqrt{bc}$$

$$6a + 4b + 5c \geq 5\sqrt{ab} + 7\sqrt{ac} + 3\sqrt{bc},$$

womit die gesuchte Ungleichung bewiesen ist.

(D 14)

L

(Lösung nach Helmut Roßmann, EOS Neubrandenburg)

Für $a, b \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} a^{2k+1} + b^{2k+1} &= (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - \dots \\ &\dots + a^k b^k - \dots + a^2 b^{2k-2} - ab^{2k-1} + b^{2k}) \quad (*) \end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N}$:

$$n^3 + 1 = (n^2 - n + 1)(n + 1)$$

$$\begin{aligned} (n^3)^{2961} + 1 &= (n^3 + 1)[(n^3)^{2960} - (n^3)^{2959} + \dots \\ &\dots - n^3 + 1] \end{aligned}$$

$$(n^3)^{2591} + 1 = (n^3 + 1)[(n^3)^{2590} - (n^3)^{2589} + \dots - n^3 + 1]$$

nach (*)

Hieraus folgt:

$$(n^3)^{2961} + 1 \equiv 0 \pmod{n^2 - n + 1}$$

$$[(n^3)^{2961} + 1]n^5 \equiv 0 \pmod{n^2 - n + 1} \quad (1)$$

$$(n^3)^{2591} + 1 \equiv 0 \pmod{n^2 - n + 1}$$

$$-[(n^3)^{2591} + 1]n^4 \equiv 0 \pmod{n^2 - n + 1} \quad (2)$$

$$-(n^2 - n + 1)(n^3 - n - 1) \equiv 0 \pmod{n^2 - n + 1} \quad (3)$$

Durch Addition von (1), (2) und (3) ergibt sich:

$$n^5[(n^3)^{2961} + 1] - n^4[(n^3)^{2591} + 1] -$$

$$-(n^2 - n + 1)(n^3 - n - 1) \equiv 0 \pmod{n^2 - n + 1}$$

$$n^5(n^{8883} + 1) - n^4(n^{7773} + 1) - (n^5 - n^4 + 1)$$

$$\equiv 0 \pmod{n^2 - n + 1}$$

$$n^{8888} - n^{7777} + 1 \equiv 0 \pmod{n^2 - n + 1}$$

q.e.d.

(D 16)

L

Die Lösung beruht auf der Anwendung einfacher Logarithmengesetze.

(Lösung nach Sabine Schlorff, EOS Neustrelitz)

$$a^{\frac{\log_b \log_b a}{\log_b a}} = a^{\frac{\log_a \log_b a}{\log_a b \cdot \log_b a}} \quad (\text{wegen } \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b})$$

$$= a^{\log_a \log_b a} \quad (\text{wegen } \log_a b \cdot \log_b a = 1)$$

$$= \log_b a \quad (\text{wegen } a^{\log_a c} = c)$$

(D 18)

L

Zu dieser Aufgabe erhielten wir fast ausschließlich richtige Lösungen, die alle auf der mehr oder weniger eleganten Anwendung des Binomischen Satzes beruhten.

(Lösung nach Jochen Harant, EOS Ilmenau)

$$\begin{aligned}(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{100} &= \sum_{i=0}^{100} \binom{100}{i} \sqrt{2}^{100-i} \sqrt{3}^i \\&= \sum_{k=0}^{49} \binom{100}{2k+1} \sqrt{2}^{99-2k} \sqrt{3}^{2k+1} + \sum_{k=0}^{50} \binom{100}{2k} \sqrt{2}^{100-2k} \sqrt{3}^{2k} \\&= \sum_{k=0}^{49} \binom{100}{2k} 2^{49-k} 3^k \sqrt{6} + \sum_{k=0}^{50} \binom{100}{2k} 2^{50-k} 3^k\end{aligned}$$

Die Summanden der ersten Summe bestehen aus den rationalen Faktoren

$$\binom{100}{2k} 2^{49-k} 3^k$$

und dem irrationalen Faktor $\sqrt{6}$.

Wie man leicht nachweisen kann, ist das Produkt aus einer rationalen Zahl und einer irrationalen Zahl wieder irrational, d. h. alle Summanden der ersten Summe sind irrational.

Die Summanden der zweiten Summe stellen sich als die Produkte von rationalen Zahlen dar, sind also selbst wieder rational.

Daraus folgt, daß die Zerlegungssumme von

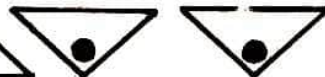
$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{100}$$

genau 51 rationale Summanden besitzt.

Wir freuen uns darüber, daß ...

... dem Leiter des Bereiches "NVA-Zirkel" in unserem Jugendobjekt, Egbert C r e u t z b u r g, als Anerkennung für seine hervorragenden fachlichen und gesellschaftlichen Leistungen das Karl-Marx-Stipendium verliehen wurde.

Eine wichtige Mitteilung an unsere Leser



Mit dem zu Ende gehenden Schuljahr müssen die Abonnements erneuert oder aufgehoben werden. Um diese Angelegenheit zu erleichtern, handhaben wir es grundsätzlich so, daß das Abonnement automatisch um ein Jahr verlängert wird, wenn bis zum 20. Juli 1972 keine Abbestellung erfolgt. Leser, die unsere Zeitschrift auch in Zukunft beziehen wollen, brauchen uns also **n i c h t** zu benachrichtigen.

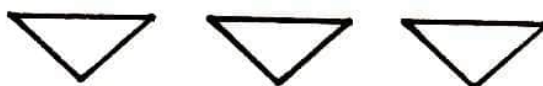
Selbstverständlich nehmen wir jederzeit Neubestellungen an, wobei wir Schulen und Institutionen bitten, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

Der letzte Zahlungstermin für den Jahrgang 1972/73 ist der 15. Dezember 1972. Der Preis eines Abonnements beträgt unverändert 2,50 M. Wir bitten, diesen Betrag **p e r** **Z a h l k a r t e** an uns zu senden (Konto: PSchA Erfurt 180 45).

Schulen und Institutionen können auf Wunsch größere Mengen Werbeexemplare kostenlos zugestellt bekommen.

Die Redaktion

• •
ÜBRIGENS



... soll auf dem Titelblatt Herr A recht behalten!

Bestellungen für dieses Sonderheft, in dem über das Mathematikstudium an unserer Sektion sowie über das Berufsbild eines Diplom - Mathematikers berichtet wird, werden noch entgegengenommen. Der Preis des Sonderheftes beträgt 0,50 M. Bereits eingegangene Bestellungen behalten ihre Gültigkeit.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienwerbung-Studienvorbereitung“ der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Leiter: Reinhard Klette

Redaktion: Werner Nagel (Chefredakteur); U. Schleicher, H. Fischer, R. Lorenz

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

Anschrift: WURZEL
69 Jena
Helmholtzweg 1

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45

STUDENTEN- TAGE

*der
Sektion
Mathematik
der FSU Jena*

7/8

72

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
Jugendobjekt Studien
vorbereitung der
Sektion Mathematik
an der Fr.-Schiller-
Universität Jena

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Problemstellung

Bevor wir die mit gewöhnlichen Differentialgleichungen verbundenen Aufgabenstellungen genau formulieren, wollen wir zwei Beispiele betrachten.

● Orthogonale Trajektorien

Für jede positive Zahl c wird durch die Gleichung

$$x^2 + 2y^2 = c \quad (1)$$

in der x - y -Ebene eine Ellipse definiert. Man sieht, daß durch jeden Punkt der Ebene (außer den Nullpunkt) genau eine Ellipse geht. Gibt es Kurven, die alle diese Ellipsen senkrecht schneiden?

Wir werden uns davon überzeugen, daß es solche Kurven gibt. Kurven, die alle Kurven einer gegebenen Kurvenschar senkrecht schneiden, heißen "orthogonale Trajektorien". Orthogonale Trajektorien sind in unserem Beispiel die Achsen $x = 0$ und $y = 0$. Zur Bestimmung weiterer orthogonaler Trajektorien erinnern wir uns daran, daß sich zwei Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ genau dann im Punkt (x_0, y_0) senkrecht schneiden, wenn

$$f(x_0) = g(x_0) = y_0 \quad \text{und} \quad g'(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

gilt. Durch Differentiation der Gleichung (1) erhält man

$$2x + 4yy' = 0$$

und damit

$$y' = -\frac{x}{2y}, \quad (2)$$

d.h. im Punkt (x, y) ist der Anstieg der entsprechenden Ellipse $y = f(x)$ gleich $-\frac{x}{2y}$. Der Anstieg der gesuchten Kurve $y = g(x)$ müßte $\frac{2y}{x}$ sein. Für die gesuchte Funktion $y = g(x)$ gilt also

$$y' = \frac{2y}{x}. \quad (3)$$

(Im Unterschied zu (2) müßte man ausführlicher

$$g'(x) = \frac{2g(x)}{x} \quad (4)$$

schreiben.)

Gleichung (3) ist eine Differentialgleichung. Wir werden später sehen, wie man sie löst, d.h. wie man sämtliche differenzierbaren Funktionen $y = g(x)$ bestimmt, die für alle x der Gleichung (4) genügen. Ferner werden wir sehen, daß die Lösung durch eine zusätzliche Anfangsbedingung

$$g(x_0) = y_0$$

(x_0 und y_0 fest vorgegeben) eindeutig bestimmt ist.

Mathematisches Pendel

Ein Pendel der Masse m und der Länge l sei zum Zeitpunkt t_0 um den Winkel φ_0 aus der Ruhelage ausgelenkt. Die Masse denken wir uns punktförmig am Pendelende konzentriert.

Wenn man das Pendel sich selbst überläßt, wird es sich zunächst infolge der Schwerkraft in Richtung Ruhelage bewegen. Wie groß ist die Auslenkung φ_1 in einem beliebigen späteren Zeitpunkt t_1 ?

Die im Massenpunkt angreifende Schwerkraft $P = mg$ wird in die Komponenten P_1 und P_2 zerlegt (Abb. 1). Die in Tangentenrichtung wirkende Kraft berechnet sich aus geometrischen Gründen durch

$$P_2 = -P \sin \varphi = -mg \sin \varphi$$

und ruft nach dem Prinzip

Kraft = Masse $\times$ Beschleunigung

eine Tangentialbeschleunigung

$$\ddot{s} = \frac{P_2}{m} = -g \sin \varphi$$

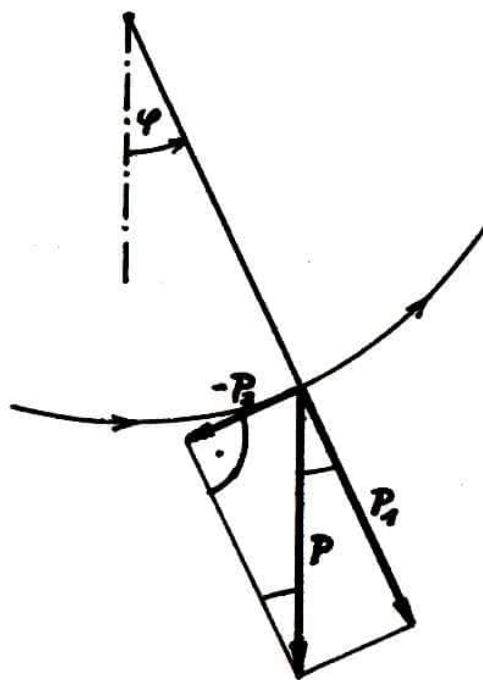


Abb. 1

($s(t)$ ist die Bogenlänge des Weges, den der Massenpunkt beschreibt) hervor. Die Koordinate $s(t)$ hängt mit dem Winkel $\varphi(t)$ (Bogenmaß) durch

$$s(t) = l\varphi(t)$$

und damit auch

$$\ddot{s}(t) = l\ddot{\varphi}(t)$$

zusammen. Eingesetzt ergibt sich

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l} \sin \varphi(t). \quad (5)$$

Das ist wieder eine Differentialgleichung, die man aber mit elementaren Methoden nicht lösen kann. Wenn man nur kleine Auslenkungen zuläßt, kann man aber den Sinus des Winkels φ durch den Winkel selbst ersetzen, ohne einen großen Fehler zu machen. Es entsteht die Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l} \varphi(t). \quad (6)$$

Ein wesentlicher Unterschied gegenüber der Differentialgleichung unseres vorigen Beispiels besteht darin, daß man hier zur eindeutigen Lösbarkeit neben der Bedingung $\varphi(t_0) = \varphi_0$ auch noch die Winkelgeschwindigkeit im Anfangszeitpunkt $\dot{\varphi}(t_0) = \omega_0$ vorgeben muß. Physikalisch ist das plausibel, denn ein zusätzlicher Stoß beim Loslassen des ausgelenkten Pendels beeinflußt natürlich den Bewegungsablauf.

Unsere Differentialgleichung zur Bestimmung der orthogonalen Trajektorien hatte die Struktur

$$y' = a \frac{y}{x}. \quad (7)$$

Differentialgleichungen sind z.B. auch

$$y' = ay + bx \quad (8)$$

$$y' = \sin y \quad (9)$$

$$y' = x^2 \quad (10)$$

$$y' = a x \log y \quad (11)$$

$$y' = \cos \frac{x}{y} \quad (12)$$

Definition: Eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$y' = F(x, y),$$

wobei F eine stetige Funktion von zwei Variablen ist. Eine Lösung der Differentialgleichung ist eine differenzierbare Funktion $y = f(x)$ mit

$$f'(x) = F(x, f(x)) \quad (13)$$

für alle x .

Bemerkungen:

- ① Es kann vorkommen, daß die Funktion F von zwei Variablen nicht in der gesamten Ebene definiert ist
((7): $x \neq 0$, (11): $y > 0$, (12): $y \neq 0$).
Dann ist die Bedingung (13) natürlich nur für Zahlen x sinnvoll, für die der Punkt $(x, f(x))$ im Definitionsbereich von F liegt.
- ② Wir sprechen hier von gewöhnlichen Differentialgleichungen im Gegensatz zu partiellen, bei denen Funktionen f von mehreren Variablen gesucht sind und durch die Differentialgleichung eine Verknüpfung von Variablen und partiellen Ableitungen gegeben ist.

Definition: Eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$y'' = F(x, y, y'),$$

wobei F eine stetige Funktion von drei Variablen ist. Eine Lösung der Differentialgleichung ist eine zweimal differenzierbare Funktion $y = f(x)$ mit

$$f''(x) = F(x, f(x), f'(x))$$

für alle x .

Das Anfangswertproblem einer Differentialgleichung erster Ordnung besteht im Aufsuchen einer Lösung, die die zusätzliche Anfangsbedingung

$$f(x_0) = y_0$$

mit fest vorgegebenen Zahlen x_0 und y_0 erfüllt.

Das Anfangswertproblem einer Differentialgleichung zweiter Ordnung besteht im Aufsuchen einer Lösung, die die zusätzlichen Anfangsbedingungen

$$f(x_0) = y_0 \quad \text{und} \quad f'(x_0) = z_0$$

mit fest vorgegebenen Zahlen x_0, y_0 und z_0 erfüllt.

Fortsetzung siehe Seite 106!

Preisaufgaben 7/8/72

(D 37) Man bestimme alle zweistelligen natürlichen Zahlen, die ein ganzzahliges Vielfaches des Produktes ihrer Ziffern sind.

1

(D 38) In ein Dreieck sei ein Kreis einbeschrieben, dem wiederum ein Quadrat umschrieben sei. Man zeige, daß sich dann innerhalb des Dreiecks mehr als ein Viertel des Umfangs dieses Quadrates befindet.

2

(D 39) Man bestimme die Größen $\lg 2$ und $\lg 5$, wenn $\lg 2 \cdot \lg 5 = k$ bekannt ist.

1

(D 40) Es ist zu zeigen: Hat ein Viereck eine Symmetrieachse, so hat es entweder einen Inkreis oder einen Umkreis.

2

(D 41) Drei Primzahlen größer als 5 bilden eine arithmetische Folge. Man beweise, daß der Abstand der Folgenglieder durch 6 teilbar ist.

1

(D 42) Man beweise mittels der Methode der vollständigen Induktion, daß für natürliche Zahlen a und b $(a + b)!$ durch $a!b!$ teilbar ist.

1

Für jeden vollständigen Lösungsweg erhält der Einsender einen bzw. zwei Wertpunkte. Die Anzahl ist bei jeder Preisaufgabe unter der laufenden Nummer angegeben. Für 15 Wert-

punkte erhält der Einsender ein Buch.
Sollten pro Monat mehr als drei Einsender 15 Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges). Falls ein Besitzer von 15 Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum Ende des darauffolgenden Monats unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an unsere Adresse einzuschicken.
Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungen bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und mit der Klassenstufe versehen sein müssen. Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

8. - 12. Mai 1972

Die ersten Studententage an der Friedrich-Schiller-Universität

Die Studententage, ein Höhepunkt im Studienjahr, liegen hinter uns. Anstelle von Vorlesungen und Seminaren fanden eine Woche lang Veranstaltungen wie Studienjahreskonferenz, Karl-Marx-Seminar, Gruppenversammlungen und Sportfest statt.

Was bewirkte nun dieser veränderte Tagesablauf?

Sowohl im Hörsaal als auch auf dem Sportplatz zeigte sich, welchen Stand eine jede Gruppe auf dem Wege zur Herausbildung eines Kollektivs erreicht hat. Die Einschätzung der Lösung ihrer Aufgaben, des Leistungsstandes, der Arbeitsmethoden war zugleich ein Erfahrungsaustausch. Erstens wurde jeder einzelne Student, an Vorbereitung und Durchführung der Studententage mehr oder weniger beteiligt, angeregt, seine Stellung innerhalb der Gruppe zu beurteilen, Kritik bzw. Selbstkritik zu üben. Zweitens bestand gerade in dieser Zeit für die Kollektive die Möglichkeit, mit Vertretern des Lehrkörpers über ihre Probleme zu diskutieren. Die Ergebnisse der Gespräche, der gemeinsamen Veranstaltungen müssen nun neue Zielsetzungen im Zeichen der Verwirklichung der Beschlüsse des VIII. Parteitages sein, die es mit Hilfe der gewonnenen Erkenntnisse zu lösen gilt.

Im folgenden wollen wir ausführlicher über einzelne Veranstaltungen während unserer Studententage berichten.

Sportfest

Der Dienstag war der Tag des Sports und des Wehrsports. Im Tischtennis, Basketball, Volleyball und Fußball sowie beim Hindernislauf maßen Studenten und Lehrkörper unserer Sektion ihre Kräfte. Wie bei den Olympischen Spielen auch hier unter dem Motto "Dabei sein ist alles" - wie der Ball im Tor unterzubringen war, war den meisten theoretisch klar. So gab es an diesem recht freundlichen Maitag viel Spaß auf der Gemeinschaftssportanlage der Universität. Selbstverständlich beteiligte sich auch die "Wurzel" am Sportfest - mit einer Fußballmannschaft. Als Selbstverpflichtung hatten wir uns vorgenommen, mindestens zwei Tore zu schießen. Dieses Ziel wurde dank hervorragendem Einsatz aller Mitspieler um 100 % überboten - gleich viermal trafen wir ins Schwarze ... Leider "schluckten" wir sieben Gegentore, obwohl unser dickster Mann im Tor stand. Das entscheidende Spiel um den Staffelsieg verloren wir nach halbstündigem Kampf mit 6:2, allerdings gegen den späteren Sieger des Fußballturniers und Universitätsmeister.

Höhepunkt des Tages war zweifellos der Fußballvergleichskampf Lehrkörper gegen Studentenauswahl unserer Sektion. In den ersten Minuten hielt das Lehrkörperteam noch mit, und es gelang ihm sogar, das erste Tor zu schießen. Doch im Verlaufe des Spiels wurde die spielerische und konditionelle Überlegenheit der Studenten immer größer, so daß der Sektionsdirektor ein halbes Dutzend Mal hinter sich greifen mußte. In Anbetracht des Zahlenverhältnisses der Studenten zum Lehrkörper (12:1) also ein durchaus respektables Ergebnis.

I N F O R M A T I O N

In Wrocław wurde kürzlich das erste polnische Rechenzentrum für medizinische Diagnostik übergeben. Die Rechenanlage vom Typ "Odra" verarbeitet täglich 1000 Messungen, wie Elektrokardiogramme, Arteriendruck- und Temperaturmessungen. Die Angaben ermöglichen eine schnellere Diagnose, z.B. während einer Operation.

Auf der Urlaubsreise

- Zwei Frauen treffen sich auf der Straße.
- A: Multipliziert man die Alter (in Jahren) meiner drei Töchter, so erhält man 36. Die Summe der Alter ergibt gerade diese Hausnummer hier.
- B: ?
- A: Meine älteste Tochter ist gerade beim Milchholen.
- B: Aha, Ihre Töchter sind also ...
- Nun, lieber Leser, wie alt sind die Töchter von Frau A?
- Können sich 21 Personen so zuprosten, daß jeder mit genau fünf anderen angestoßen hat?

Gut gesagt

"Mathematik ist das, was kompetente Leute darunter verstehen."

_____ David Hilbert (1862 -1943)

"Mathematik ist Sprache."

_____ Willard Gibbs (1839 - 1903)

"Die Mathematik ist das, womit die Menschen die Natur und sich selbst steuern."

_____ A. N. Kolmogoroff (geb.1903)

INFORMATION

Rechner im Tagebau

Das Institut für Energetik Leipzig entwickelte zusammen mit dem VEB Rationalisierung Braunkohle Großräuschen ein Programm, das wichtige Angaben für die Einsatzvorbereitung einer Prozeßrechenanlage zur Steuerung des Zugbetriebes in einem Tagebau liefert. Der gesamte Betriebsablauf wird von einem mathematischen Modell beschrieben und auf einer elektronischen Rechenanlage simuliert. Für die Steuerung des Betriebsablaufes durch einen Prozeßrechner läßt sich dann jeweils die Steuervariante auswählen, bei der Betriebsergebnis und Investitionsaufwand im günstigsten Verhältnis zueinander stehen.

2. Die Methode der Trennung der Variablen

Wir wollen nun versuchen, für einige einfache Typen von Differentialgleichungen Lösungen zu finden. Dazu betrachten wir folgendes Beispiel:

$$y' = \frac{1 - 2x}{y^2}, \quad y \neq 0. \quad (14)$$

Das ist eine Differentialgleichung erster Ordnung. Wenn wir eine solche Lösungsfunktion $y = f(x)$ suchen, die durch den Punkt $(x_0, y_0) = (3, 4)$ geht, d.h. für $x_0 = 3$ soll

$f(x_0) = y_0 = 4$ sein, dann liegt ein Anfangswertproblem vor.

Wir formen die Gleichung (14) zunächst so um, daß auf der einen Seite nur x , auf der anderen Seite nur y und y' vorkommen. Dabei erhalten wir

$$y^2 y' = 1 - 2x. \quad (15)$$

Eine Lösung $y = f(x)$ muß neben (14) auch (15) und alle folgenden Umformungen befriedigen. Um die Ableitung von y zu kompensieren, bilden wir über beide Seiten das bestimmte Integral von $x_0 = 3$ bis zur variablen oberen Grenze x :

$$\int_3^x y^2 y' dx = \int_3^x (1 - 2x) dx \quad (16)$$

Die rechte Seite ist leicht zu berechnen, es ergibt sich

$$[x - x^2]_3^x = x - x^2 - 3 + 9 = 6 + x - x^2.$$

Links müssen wir erst y substituieren und erhalten wegen $dy = y' dx$ (dabei auch die Grenzen beachten, $x = 3$ hat $y = 4$ zur Folge!)

$$\begin{aligned} \int_4^y y^2 dy &= \int_3^x (1 - 2x) dx = 6 + x - x^2, \\ \frac{1}{3} y^3 - \frac{64}{3} &= 6 + x - x^2, \\ y &= \sqrt[3]{82 + 3x - 3x^2}. \end{aligned}$$

Natürlich muß nun noch die Probe gemacht werden. Für $x = 3$ ist tatsächlich die Anfangsbedingung erfüllt:

$$y = \sqrt[3]{82 + 3 \cdot 3 - 3 \cdot 3^2} = \sqrt[3]{82 + 9 - 27} = 4.$$

Nun zu Gleichung (1). Einerseits gilt

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3-6x)}{\sqrt[3]{(82+3x-3x^2)^2}} = \frac{1-2x}{\sqrt[3]{(82+3x-3x^2)^2}},$$

andererseits ist

$$\frac{1-2x}{y^2} = \frac{1-2x}{(\sqrt[3]{82+3x-3x^2})^2},$$

und somit das gestellte Anfangswertproblem richtig gelöst.

▷ Übungsaufgabe 1: Man löse die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{y}{x}, \quad x \neq 0$$

mit den Anfangswerten $(x_0, y_0) = (2, 3) !$

▷ Übungsaufgabe 2: Man löse die Differentialgleichung

$$y' = 2y \cos x$$

mit den Anfangswerten $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{6}, 2e) !$

▷ Übungsaufgabe 3: Man löse die Differentialgleichung

$$y' = 6 + 3x - 2y - xy$$

mit den Anfangswerten $(x_0, y_0) = (2, 3-2 \cdot e^{-8}) !$

▷ Übungsaufgabe 4: Man löse die Differentialgleichung

$$2xyy' = 1 + y^2$$

mit den Anfangswerten $(x_0, y_0) = (-2, 1) !$

Mit der beschriebenen Methode, die man Trennung der Variablen nennt, können auch die im Abschnitt 1 angeführten Beispiele (7), (9), (10) und (11) berechnet werden. Im allgemeinen gelangt man mit dieser Methode immer dann zum Ziel, wenn die vorgelegte Gleichung die Gestalt

$$y' = g(x) \cdot h(y) \quad \text{mit } h(y) \neq 0 \quad (17)$$

hat, wobei $g(x)$ und $h(y)$ irgendwelche stetigen Funktionen von x bzw. y sind. In unserem Beispiel war $g(x) = 1 - 2x$ und $h(y) = \frac{1}{y^2}$. Wir müssen aber wissen, daß es auch Differentialgleichungen gibt, die man nicht auf diese Weise lösen kann (z.B. (8) und (12) aus Abschnitt 1) und darunter sogar solche, deren Lösung überhaupt nicht explizit aufgeschrieben werden kann.

Die Differentialgleichung (17) wird mit den Anfangswerten (x_0, y_0) gelöst, indem man wie oben "die Variablen trennt", d.h. auf folgende Weise umformt:

$$\frac{y'}{h(y)} = g(x) .$$

Durch Integration ergibt sich dann

$$\int_{x_0}^x \frac{y'}{h(y)} dx = \int_{x_0}^x g(x) dx , \quad (18)$$

und nach der Substitution von y mit $dy = y' dx$

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{h(y)} dy = \int_{x_0}^x g(x) dx .$$

Wenn es gelingt, die Integration durchzuführen und die Gleichung nach y aufzulösen, dann hat man die explizite Lösung des Anfangswertproblems gefunden.

Interessieren wir uns für die Lösung einer Differentialgleichung, ohne daß wir uns auf einen bestimmten Anfangswert festlegen wollen, so bilden wir nach der Trennung der Variablen nicht das bestimmte, sondern das unbestimmte Integral. Wir erhalten in unserem Beispiel dann

$$\frac{1}{3} y^3 = x - x^2 + C ,$$

wobei die beiden Integrationskonstanten in dem C auf der rechten Seite zusammengefaßt sind. Als Lösung ergibt sich

$$y = \sqrt[3]{3C + 3x - 3x^2} = \sqrt[3]{C_1 + 3x - 3x^2} ,$$

wobei C oder C_1 eine beliebig wählbare Zahl ist. Man nennt dies die "allgemeine Lösung" der Differentialgleichung, während wir oben bereits eine spezielle oder "partikuläre Lösung" gefunden haben.

Das Auftreten einer frei wählbaren Konstanten in der allgemeinen Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung ist für diese charakteristisch. Ohne die spezialisierenden Anfangsbedingungen ist die Lösung einer Differentialgleichung also nicht eindeutig bestimmt, es gibt eine ganze Schar von Funktionen, die die Gleichung erfüllen.

Haben wir einmal die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung gefunden, ist es einfach, diejenige partikuläre zu finden, die bestimmte vorgegebene Anfangswerte annimmt. Dazu ist die Konstante C so zu bestimmen, daß die Lösungsfunktion an der Stelle $x = x_0$ den Wert y_0 besitzt. Wir müssen in unserem Beispiel also die Zahl C_1 aus

$$4 = y_0 = \sqrt[3]{C_1 + 3x_0 - 3x_0^2} = \sqrt[3]{C_1 + 3 \cdot 3 - 3 \cdot 3^2}$$

berechnen. Dabei ergibt sich, daß $C_1 = 82$ ist, was auch zu erwarten war.

Wir geben nun noch eine Faustregel an, die uns die Anwendung der Methode der Trennung der Variablen erleichtert. Statt y' schreiben wir $\frac{dy}{dx}$, behandeln den Differentialquotienten wie einen gewöhnlichen Bruch und führen die Variablentrennung wie folgt durch:

$$\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{1-2x}{y^2} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \quad , \\ y^2 dy = (1-2x) dx, \quad \frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx \quad . \end{array}$$

Nun brauchen wir nur noch auf beiden Seiten das Integral zu ergänzen und sind so sehr schnell bis zu Gleichung (16) oder (18) gelangt. Es muß aber unbedingt beachtet werden, daß dies keine mathematische Umformung war, sondern eben nur eine Art Eselsbrücke.

Wenn wir nach dem angegebenen Schema die im ersten Abschnitt abgeleitete Differentialgleichung

$$y' = \frac{2y}{x}$$

der orthogonalen Trajektorien der Kurvenschar

$$x^2 + 2y^2 = c$$

behandeln, erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} ,$$

$$\frac{dy}{y} = 2 \frac{dx}{x} ,$$

$$\ln y = 2 \ln x + c_1 ,$$

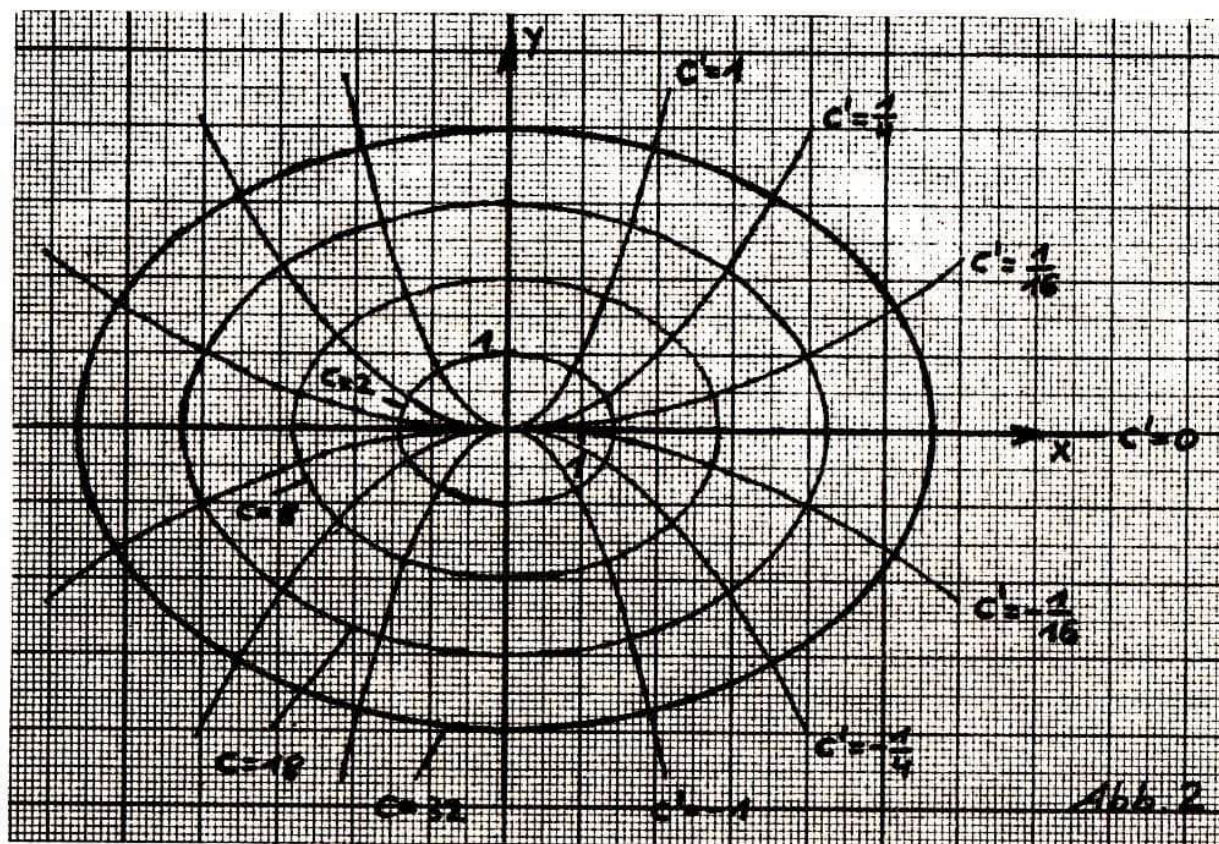
$$y = e^{c_1} x^2 ,$$

$$y = \pm e^{c_1} x^2 .$$

Nach Einführung einer neuen Konstanten $c' = \pm e^{c_1}$

erhalten wir schließlich eine Schar von Parabeln $y = c' x^2$.

In Abb. 2 ist die Ellipsenschar mit ihren orthogonalen Trajektorien skizziert.



- ▷ Übungsaufgabe 5: Wie sehen die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen der Aufgaben 1 bis 4 aus?
- ▷ Übungsaufgabe 6: Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = 1 + y \quad \text{für } 1 + y > 0 .$$

Fortsetzung siehe Seite 117!

Karl-Marx-Seminar

Seit nunmehr fünf Jahren treffen sich Studenten und junge Wissenschaftler unserer Universität alljährlich im Frühjahr anlässlich des Karl-Marx-Seminars, um wertvolle Erfahrungen ihrer Studienarbeit und ihres Studienlebens auszutauschen und hierüber zu diskutieren. Diese Seminare besitzen für die gesellschaftliche Tätigkeit in den einzelnen Sektionen der Universität große Bedeutung. Studentengruppen bereiten in der Dauer eines halben Jahres einzelne Diskussionsbeiträge vor, zu denen sie oft sehr umfangreiche Studien betreiben.

Am 10. Mai dieses Jahres war die Aula unserer Universität festlich geschmückt. Die Stirnwand ziert das Original von Ferdinand Hodler "Auszug der Jenenser Studenten 1913". Mit Musik und einer Rezitation aus Kants "Die Aula" fand das diesjährige Karl-Marx-Seminar seine feierliche Eröffnung. Hauptthema unserer Beratung war die Entwicklung sozialistischer Studentenpersönlichkeiten, ein wichtiges Problem der erzieherischen Arbeit in jedem Unterbereich unserer Universität. Im Präsidium hatten unter hervorragenden Vertretern des gesellschaftlichen Lebens unserer Universität auch der Rektor, Magnifizenz Prof. Dr. Bolck, und der 1. Sekretär der Universitätsparteileitung, Dr. Tennigkeit, Platz genommen.

Im Hauptreferat, erarbeitet von einem Kollektiv der FDJ-Universitätsleitung, wurde auf aktuelle Probleme der Entwicklung sozialistischer Studentenpersönlichkeiten Bezug genommen. Hierbei wurden den Leitungen der FDJ-Gruppen wichtige Maßstäbe und methodische Erfahrungen mitgeteilt, die bei der Erziehung der Studenten anzuwenden sind. Kernpunkt

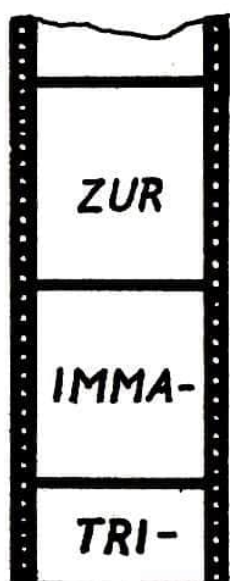
der Darlegungen war, daß es für alle Studenten wichtig ist, ihr Studium als Auftrag der Arbeiterklasse unseres Staates zu verstehen und hieraus die persönlichen Schlußfolgerungen zu ziehen – kein Mittelmaß in seiner Arbeit zu dulden, seine Verbundenheit mit unserer sozialistischen Heimat zu festigen, sich politisch zu engagieren.

In den vorbereiteten und unvorbereiteten Diskussionsbeiträgen dieses Tages konnte jeder Teilnehmer Anregungen empfangen.

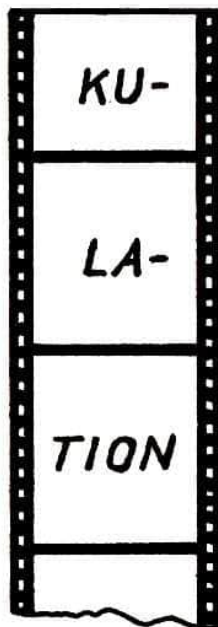
Eine Medizinstudentin sprach über die Zusammenarbeit zwischen Dozenten und Studenten, ein Lehrerstudent Philosophie/Geschichte über die niveauevolle Gestaltung von FDJ-Gruppenversammlungen; daß deren Effekt an der schöpferischen Aktivität der einzelnen Mitglieder bei allen Studienfragen meßbar ist; ein Mathematikstudent über Erfahrungen und Vorteile der Selbststudienpläne für jeden einzelnen Studenten.

Der Probleme waren es viele, und die Beiträge waren interessant, kritisch und offen. Wenn Sie, lieber Leser, einmal Student unserer Universität sein sollten, werden viele Ergebnisse dieses Karl-Marx-Seminars schon zur Praxis des Studentenlebens gehören; neue Problemstellungen im Studium werden aber dann sicher auf Sie warten, die nur in der gemeinsamen Diskussion zu lösen sind.

Bild-Ton-Vortrag für Neuimmatrikulierte



Anläßlich der Studententage der FSU legte die Seminargruppe I des 1. Studienjahres Mathematik-Diplom eine Arbeit vor, die ebenso viel Beachtung wie Interesse fand. Über ein Semester lang hatte diese Seminargruppe an der Anfertigung einer automatisch ablaufenden Einführungsvorlesung für neuimmatrikulierte Studenten gearbeitet. Die Zielstellung ist, diesen Studenten den Übergang von der Schule zur Universität wesentlich zu erleichtern und damit eine echte Lücke im Studienprogramm zu schließen. Dementsprechend gliedert sich der 90-minütige Bild-



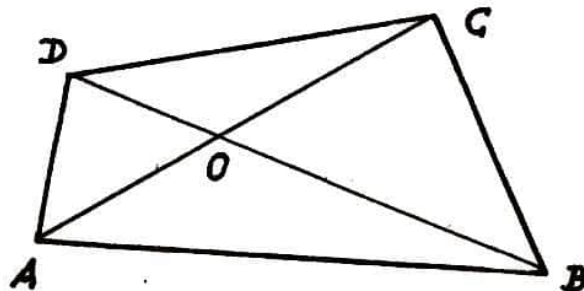
Ton-Vortrag in zwei Abschnitte, in einen informativen Teil und einen Teil, der das Wichtigste über effektive Studienmethoden enthält und den neuen Studenten die Möglichkeit bietet, sich einen guten Arbeitsstil gleich zu Beginn des Studiums anzueignen. Vor allem zur Erarbeitung dieses Teils wurden Dozenten und Professoren befragt, umfangreiche Literatur und eigene Erfahrungen ausgewertet. Die Prämierung des Projekts zu den Studententagen im Rahmen des Studentenwettstreites bewies, daß sich die großen kollektiven Anstrengungen der Seminargruppe gelohnt haben.

Lösungen

(D 15) Zur Lösung der Aufgabe kann man drei Fälle unterscheiden:

L

1. Fall: Die Punkte A, B, C, D bilden ein konvexes Viereck.



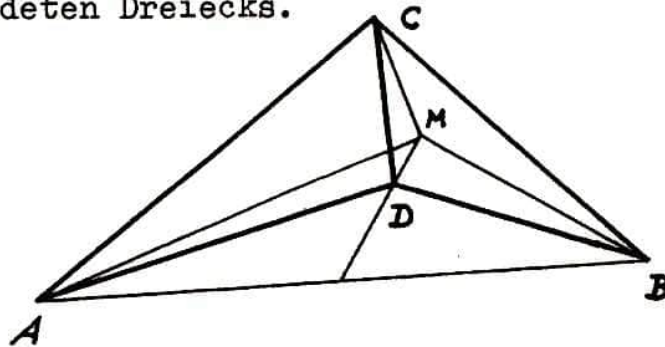
Dann gilt für beliebige Punkte M auf Grund der Dreiecksungleichung

$$\overline{AM} + \overline{CM} \geq \overline{AC} \quad \text{und}$$

$$\overline{BM} + \overline{DM} \geq \overline{BD}$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn der Punkt M auf der Strecke $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BD}$ liegt. Das bedeutet aber, der minimale Abstand ist $\overline{AC} + \overline{BD}$ und der gesuchte Punkt O liegt auf beiden Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, d.h. auf dem Schnittpunkt von $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$.

2. Fall: Die Punkte A, B, C, D bilden ein konkaves Viereck, liegen aber nicht auf einer Geraden. Dann liegt ein Punkt, es sei o.B.d.A. D, innerhalb oder auf dem Rand des von den übrigen drei gebildeten Dreiecks.



Liege ein Punkt M innerhalb oder auf einer Seite des Dreiecks $\triangle DBC$. Man betrachte nun jenen Punkt (B oder C), der auf derselben Seite der Geraden $\overline{AM}$ liegt wie D. Sei es o.B.d.A. C. Dann gilt:

$$\overline{AM} + \overline{CM} \geq \overline{AD} + \overline{CD} \quad (1)$$

$$\overline{DM} + \overline{BM} \geq \overline{BD} \quad (2)$$

Die Ungleichung (2) gilt wieder auf Grund der Dreiecksungleichung. Nach Addition der beiden Ungleichungen erhält man

$$\overline{AM} + \overline{BM} + \overline{CM} + \overline{DM} \geq \overline{AD} + \overline{BD} + \overline{CD},$$

d.h. der gesuchte Punkt O fällt mit D zusammen und die minimale Summe ist $\overline{AD} + \overline{BD} + \overline{CD}$. Liegt D auf derselben Seite von $\overline{AM}$ wie B, so lauten die Ungleichungen

$$\overline{AM} + \overline{BM} \geq \overline{AD} + \overline{BD} \quad (3)$$

$$\overline{DM} + \overline{CM} \geq \overline{CD} \quad (4)$$

Falls D auf $\overline{AM}$ liegt, so gelten alle Ungleichungen (1), (2), (3), (4).

Analog verläuft der Beweis, wenn man annimmt, M liege innerhalb oder auf dem Rand der Dreiecke $\triangle ACD$ oder $\triangle ADB$.

In jedem Fall ist D der gesuchte Punkt O.

3. Fall: Die Punkte A, B, C, D liegen auf einer Geraden.



Dann gilt für jeden Punkt M

$$\overline{AM} + \overline{DM} \geq \overline{AD} \quad (= \overline{AD} \text{ wenn M auf } \overline{AD} \text{ liegt})$$

$$\overline{BM} + \overline{CM} \geq \overline{BC} \quad (= \overline{BC} \text{ wenn M auf } \overline{BC} \text{ liegt}).$$

und

$$\overline{AM} + \overline{BM} + \overline{CM} + \overline{DM} \geq \overline{AD} + \overline{BC}$$

Die minimale Summe der Abstände ist $\overline{AD} + \overline{BC}$
und jeder beliebige Punkt, der auf der Strecke $\overline{BC}$ liegt, besitzt diese Abstandssumme.

(D 27) Es ist zu zeigen: (1) Die Gleichung

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit reellen Koeffizienten a, b, c, d , $a \neq 0$ und mit $ac > 0$ und $ad = bc$ besitzt eine rein imaginäre Lösung.

(2) Besitzt die Gleichung

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit reellen Koeffizienten a, b, c, d und $a \neq 0$ eine rein imaginäre Lösung, so ist $ac > 0$ und $ad = bc$.

Zu (1): Wegen $ac > 0$ und $ad = bc$ gilt $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

Damit wird $ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$= ax^3 + \frac{b}{a}ax^2 + cx + \frac{d}{c}c$$

$$= ax^3 + \frac{b}{a}ax^2 + cx + \frac{b}{a}c$$

$$= (ax^2 + c)(x + \frac{b}{a})$$

und die Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
hat die Lösungen

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

oder $x_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{c}{a}}$

Zu (2): Sei $x_0 = \alpha i$ mit der reellen Zahl $\alpha \neq 0$
Lösung der Gleichung, d.h.

$$a(\alpha i)^3 + b(\alpha i)^2 + c(\alpha i) + d = 0$$

$$-a\alpha^3 i - b\alpha^2 + c\alpha i + d = 0$$

Damit eine komplexe Zahl 0 wird, müssen Real- und Imaginärteil verschwinden, d.h.

$$-a\alpha^3 + c\alpha = 0 \quad \text{und} \quad -b\alpha^2 + d = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Wegen } \alpha \neq 0 \text{ gilt auch } -a\alpha^2 + c &= 0 \\ \text{und } -b\alpha^2 + d &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{und } \alpha^2 = \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

Daraus folgt $c \neq 0$

und $ad = bc$ sowie $ac > 0$,

$$\text{da } ac = \frac{c}{a}a^2 = \alpha^2 a^2.$$

INFORMATION

Was Computer möglich machen:

Das Gewicht der Erdatmosphäre ist durch die EDVA "Minsk 22" mit hoher Genauigkeit ermittelt worden. Es beträgt 5 Billiarden 157 Billionen Tonnen. Diese Berechnung ist wichtig für Forschungen auf dem Gebiet der Raumfahrt, der Raumgeodätik und der Gravimetrie.

Außerdem wurde errechnet, daß jedes Jahr von Januar bis Juli 4 Billionen Tonnen von der nördlichen zur südlichen Halbkugel überwechseln, in der zweiten Hälfte des Jahres ist es umgekehrt. Im Sommer wird die Atmosphäre 1 Billion Tonnen schwerer.

3. Allgemeine Betrachtungen

Vorgelegt sei eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$y' = F(x,y) \quad , \quad (19)$$

wobei die Funktion F in einem gewissen Gebiet der Ebene sinnvoll definiert und dort stetig ist. Eine Lösung $y = f(x)$ ist nun dadurch gekennzeichnet, daß die Funktion f in einem Punkt (x,y) gerade den Anstieg $y' = F(x,y)$ hat. Wir können so in jedem Punkt des Definitionsgebietes von F die Richtung angeben, in der eine Lösungskurve verlaufen muß, die durch diesen Punkt geht. Einen Punkt (x,y) mit dem zugehörigen Anstieg y' , der sich aus (19) berechnet, nennen wir Linienelement, wir können es als Zahlentripel (x,y,y') schreiben. Denken wir uns in jedem Punkt des Definitionsbereiches von F den entsprechenden Anstieg eingetragen, erhalten wir das sogenannte Richtungsfeld der Differentialgleichung. Das Richtungsfeld ist also die Gesamtheit aller Linienelemente. In unserem ersten Beispiel ergibt sich das Richtungsfeld in Abb. 3 (wir beschränken uns auf die obere Halbebene, da ja die x -Achse nicht zum Definitionsbereich gehört).

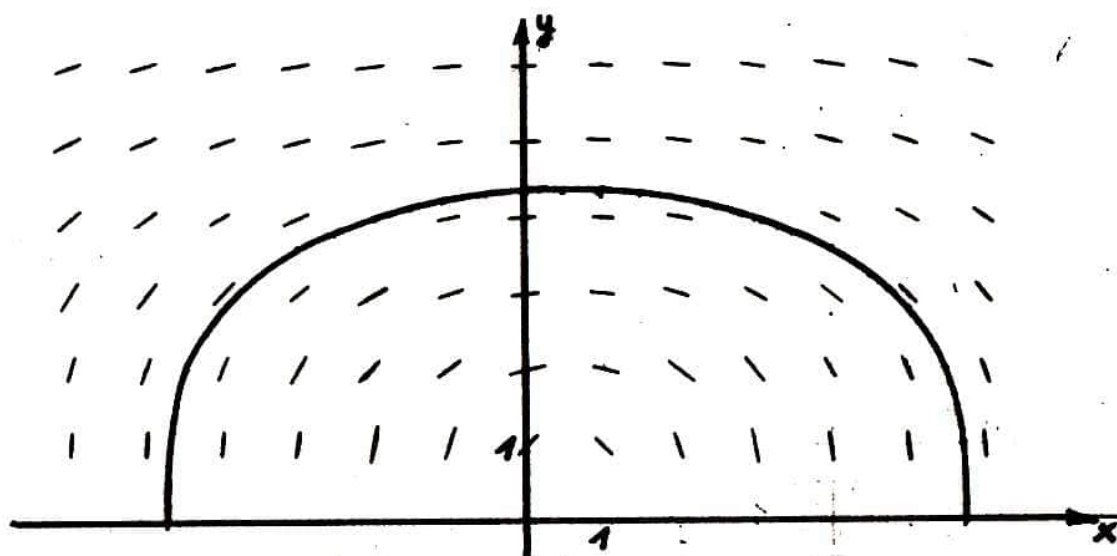


Abb. 3

Geometrisch können wir uns jetzt eine Lösung der Differentialgleichung als Kurve vorstellen, deren Anstieg in jedem Punkt mit dem y' des entsprechenden Linienelementes zusammenfällt. Die Lösung des Anfangswertproblems wird dann durch diejenige Kurve gegeben, die durch den vorgegebenen Punkt (x_0, y_0) geht.

Zeichnet man zu einer Differentialgleichung das zugehörige Richtungsfeld, hat man meist schon einen recht guten Eindruck vom Verlauf der Lösungskurven. Beispielsweise ergibt sich für die Differentialgleichung $y' = -\frac{x}{y}$ (für $y < 0$ und $y > 0$ getrennt aufgezeichnet) das in Abb. 4 dargestellte Richtungsfeld.

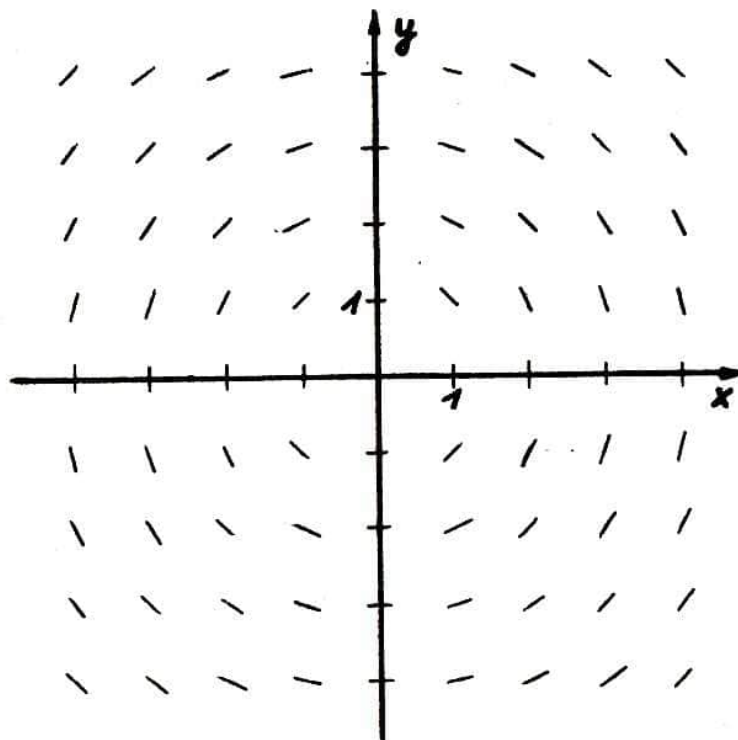


Abb. 4

Es wird sich jetzt wohl keiner mehr wundern, wenn sich als allgemeine Lösung die Schar der um den Nullpunkt konzentrischen Kreise ergibt, $x^2 + y^2 = r^2$. Hierbei hat der Parameter r die geometrische Bedeutung der Radien.

- ▷ Übungsaufgabe 7: Man skizziere das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = x + y$!
- ▷ Übungsaufgabe 8: Man skizziere das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = -x \cdot y$ für $y > 0$!
- ▷ Übungsaufgabe 9: Man skizziere die Richtungsfelder der bisher gelösten Differentialgleichungen !

Nachdem wir nun mit Differentialgleichungen und deren geometrischem Hintergrund besser vertraut sind, können wir uns die Frage vorlegen, wie es mit der Lösbarkeit einer beliebigen Differentialgleichung erster Ordnung aussieht. Während des Mathematikstudiums wird dazu bewiesen, daß unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen an F , die bei uns stets erfüllt sind, die Gleichung (19) für jeden Anfangswert (x_0, y_0) , der im Definitionsbereich von F liegt, genau eine Lösung besitzt. Wir können diesen Satz auch so formulieren:

Durch jeden Punkt (x_0, y_0) des Definitionsbereiches der Funktion F verläuft genau eine Lösungskurve.

Wir bemerken noch, daß dieser Bereich auch die ganze Ebene sein kann, und daß in dem Satz nicht gesagt wird, daß die Lösung jedesmal explizit aufgeschrieben werden kann. Das ist im Gegenteil sehr oft nicht möglich.

Abschließend betrachten wir noch zwei Beispiele, die zeigen, wie man manchmal eine gegebene Differentialgleichung durch eine geschickte Substitution so umformen kann, daß die Methode der Trennung der Variablen anwendbar wird.

a) Wenn wir in der Gleichung

$$y' = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

die neue Funktion u durch $y = xu$ einführen und natürlich auch y' durch $y' = u + xu'$ (Ableitung des Produktes $x \cdot u$) ersetzen, erhalten wir

$$u + xu' = \frac{2x \cdot xu}{x^2 + x^2 u^2} = \frac{2u}{1+u^2}$$

oder

$$u' = \left(\frac{2u}{1+u^2} - u \right) / x .$$

Das ist nun eine Differentialgleichung für die Funktion u , die durch Variablentrennung gelöst werden kann. Aus $y = xu$ erhalten wir dann die ursprünglich gesuchte Funktion y .

b) In der Differentialgleichung

$$y' = 2x + 4y + 3$$

führt die Substitution $u = 2x + 4y + 3$ mit $u' = 2 + 4y'$ zum Erfolg.

► Übungsaufgabe 10: Man löse die beiden Differentialgleichungen der Beispiele a) und b) !

In der Fortsetzung, die in Heft 9 erscheint, wird näher auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung eingegangen.

Dr. Oloff, Dr. Schwarz
Bereich Analysis

kleine KNOBELEIEN

(A) Man zeichne auf einem gewöhnlichen Schachbrett einen Kreis mit größtmöglichem Durchmesser derart, daß kein weißes Feld geschnitten wird.

(B) Man setze aus den folgenden Teilen den Buchstaben T zusammen.



(C) In welche größtmögliche Anzahl von Teilen kann die Ebene durch zwei Dreiecke zerlegt werden?

(D) In welchem Zahlensystem x ist die Gleichung
 $(42)_x \cdot (12)_x = (544)_x$
 richtig?

(E) Man löse das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rclcl} \text{HFG} & : & \text{AG} & = & \text{EA} \\ \text{FCB} & + & \text{BH} & = & \text{FFK} \\ \hline \text{BCE} & + & \text{DGF} & = & \text{GAA} \end{array}$$

Studentenkonferenz

Ziele der Studentenkonferenz am Donnerstag waren eine gründliche Analyse der FDJ-Arbeit und die Vorbereitung auf das Studienjahr 1972/73. Zunächst gab unser FSL-Sekretär vor dem Plenum, dem Vertreter aller Seminargruppen unserer Sektion angehörten, einen kritischen Bericht über den Erfüllungsstand des beschlossenen Arbeitsplanes unserer Sektion. Daraus ergaben sich Schwerpunktaufgaben für die weitere Arbeit:

- Verantwortung und Aufgaben des Studenten in unserer sozialistischen Gesellschaft; wie werden wir diesen Anforderungen gerecht?
- Rolle und Bedeutung des Mathematikers an der sozialistischen Schule
- Persönlichkeitsentwicklung der Studenten, Wechselbeziehungen zwischen Kollektiv und Einzelpersonlichkeiten
- Rolle des Jugendverbandes an der Sektion Mathematik bei der Verbesserung von Erziehung und Ausbildung
- Möglichkeiten zur Erhöhung der Effektivität des Studiums.

Da diese Aufgaben grundsätzliche Bedeutung haben und ihre Lösung entscheidend für die weitere Entwicklung der FDJ-Arbeit an unserer Sektion ist, waren sie Thema der Diskussion in kleineren Arbeitsgruppen. Obwohl leider noch zu viele Studenten zu passiv in der Diskussion waren, konnten doch einige wichtige sehr konkrete Ergebnisse erreicht werden.

Hier thesenhaft eine Auswahl daraus:

- Der Student muß eine feste persönliche Meinung zum Mathematikstudium besitzen und die gesellschaftliche Bedeutung seines Studiums erkennen
- Die Immatrikulationswoche hat beim Übergang Schule - Universität große Bedeutung
- Das Selbststudium ist nicht zu vernachlässigender, sondern sehr wichtiger Teil des Studiums
- Fachstudium - Grundstudium des Marxismus/Leninismus - FDJ-Arbeit müssen stärker im Komplex wirken
- Der sozialistische Studentenwettbewerb ist in größerem Maße als bisher öffentlich zu führen

- Das Praktikum ist unbedingt in einem sozialistischen Betrieb durchzuführen - es müssen verbesserte Bewertungskriterien erarbeitet werden.

+ BÜCHERMARKT + BÜCHERMARKT + BÜCHERMARKT + BÜCHERMARKT +

Wir stellen vor:

J. Churgin: "Formeln - und was dann?"

Dieses Buch ist weniger ein mathematisches Lehrbuch als ein in interessanter Form geschriebener Bericht eines Mathematikers über seine Tätigkeit, über die Zusammenarbeit mit Wissenschaftlern anderer Fachdisziplinen. In einer abwechslungsreichen Darstellung von Humor und wissenschaftlichem Ernst wird dem Leser ein breites Bild über Wesen, Inhalt und Aufgaben der Mathematik gegeben.

Was würden Sie z.B. auf folgendes antworten: "Folgt daraus, daß alle roten gekochten Krebse tot sind und alle toten roten Krebse gekocht sind, daß tote gekochte Krebse immer rot sind?" Sicher kein ganz einfaches Problem. Churgin entwickelt an diesem Beispiel eine erste Einführung in die Ereignisalgebra, eine spezielle mathematische Theorie.

So bietet dieses Buch gute Möglichkeiten für die Leser, Eindrücke über die Vielfalt der Mathematik zu sammeln.

Aus dem Inhalt: Gespräche mit einem Physiologen
Was ist nun wirklich Mathematik?



Mathematik und Kunst
Extremale Kurven
Leonhard Euler
Seifenblasen
Woher kommen die Axiome?
Das mathematische Modell
Der Fall und der Zufall
Gespräch mit einem Doktoranden
Was ist das, Information?
Modelle der Sprache und Informationsübertragung
Gespräch mit einem Psychiater
Zeichenerkennung

Das Buch ist im VEB Verlag Technik Berlin 1970 erschienen und kostet 9,- M.

Aussprache mit Absolventen

Um den Studenten unserer Sektion einen Einblick in ihre späteren Aufgaben zu geben, führte die Seminargruppe Analysis III eine Aussprache mit Absolventen zum Thema "Das Berufsbild des Mathematikers" durch. Dazu luden wir fünf Vertreter aus sozialistischen Betrieben ein, die uns mit ihren Aufgaben in der Praxis bekannt machten. So kamen wir zu dem Schluß, daß der Absolvent die Aufgabe hat, mathematische Methoden in der Industrie, das heißt sowohl in der Produktion als auch in der Planung und Leitung, einzusetzen. Hierbei liegen die Schwerpunkte auf Operationsforschung, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, Numerik und EDV. Der Mathematiker hat also sehr interessante Entwicklungsmöglichkeiten, zumal sich heute für den Einsatz der Mathematik ungeahnte Möglichkeiten abzeichnen.

Solidarität mit dem vietnamesischen Volk

Im Rahmen der Studententage wurde von den Seminargruppen Operationsforschung/Numerik des vierten Studienjahres eine Solidaritätsveranstaltung durchgeführt. In dieser Veranstaltung bekundeten Studenten und Lehrkörper unserer Sektion ihre Anteilnahme am gerechten Kampf des vietnamesischen Volkes gegen die amerikanischen Aggressoren.

Ein Film über das derzeitige Leben des vietnamesischen Volkes, das ein ständiger Kampf gegen die amerikanischen Eindringlinge ist, zeigte deutlich die Grausamkeit, mit der die Amerikaner diesen Krieg führen.

Die Gruppen Operationsforschung/Numerik gestalteten zur materiellen Unterstützung einen Vietnam-Basar aus. Zusammen mit dem Erlös des Fußballspieles Lehrkörper-Studenten konnte eine Summe von 1.200,-- M auf das Solidaritätskonto überwiesen werden.

I N F O R M A T I O N

Die Leistung der EDV-Anlagen des Vereinigten Instituts für Kernforschung in Dubna bei Moskau wuchs in den letzten fünf Jahren auf das 20-fache an. Gegenwärtig werden neue große und mittelgroße sowie 20 kleine Computer bei physikalischen Experimenten immer großzügiger eingesetzt.

Lösungen

(D 25) Zur Lösung der Aufgabe genügt es, zu zeigen, daß

L

$$\log_2 P = \frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{1}{4} \log_2 4 + \dots + \frac{1}{2^n} \log_2 2^n + \dots = 2 \text{ ist.}$$

Es ist also

$$\begin{aligned} \log_2 P &= \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \frac{1}{2^n} + \dots \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i + \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots\right) \\ &= 2 \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \end{aligned}$$

Die Summe der geometrischen Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i$ ist aber 1, so daß sich $\log_2 P = 2$ und $P = 4$ ergibt.

Eine andere Möglichkeit wäre diese:

$$\text{Sei } \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots = x$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots = \\
 & = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{n-1}{2^n} + \dots \\
 & = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \dots + \frac{n-1}{2^n} + \dots \\
 & = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots + \\
 & \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \dots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 x &= 1 + \frac{1}{2} x \\
 \frac{1}{2} x &= 1 \\
 x &= 2
 \end{aligned}$$

(D 26) Die Zahl $5c+1$ endet, je nachdem, ob c gerade oder ungerade ist, auf 1 oder 6. Damit endet auch $(5c+1)^2$ auf 1 oder 6. Die Zahl $(abca)_{10} = 1001a + 100b + 10c$ endet auf a . Wäre $a = 6$, so müßte

$(5c+1)^2 \geq 6006$ sein, was aber wegen $c \leq 9$ unmöglich ist. Also ist $a = 1$ und c gerade, d.h. $c = 2c'$ mit natürlicher Zahl c' .

Dann gilt die Gleichung

$$\begin{aligned}
 1001 + 100b + 20c' &= (10c' + 1)^2 \\
 1001 + 100b + 20c' &= 100c'^2 + 20c' + 1 \\
 1000 + 100b &= 100c'^2 \\
 10 + b &= c'^2
 \end{aligned}$$

Diese hat genau eine Lösung $b = 6$, $c' = 4$ (damit $c = 8$) in natürlichen Zahlen.

Es existiert demnach genau eine Zahl mit den gewünschten Eigenschaften, nämlich $1681 [= (5 \cdot 8 + 1)^2]$

Mathematikstudium vietnamesischer Freunde in der Deutschen Demokratischen Republik

Seit über 18 Jahren sind Studenten aus Vietnam an Hochschulen und Universitäten unserer Republik eingeschrieben; für das Mathematikstudium seit 1967 in Halle und an der Bergakademie in Freiberg, seit 1969 auch in Greifswald.

Ein Mitglied unseres Jugendobjekts sprach in Halle mit vietnamesischen Mathematikstudenten; übrigens gab es beim Essen mit Stäbchen für ihn dabei viel Spaß. In Halle studieren zur Zeit insgesamt 55 Vietnamesen, davon 17 Studentinnen. Fräulein Phan thi ha Thanh ist die einzige vietnamesische Mathematikstudentin in der DDR. Sie ist im vierten Studienjahr und hat mit ihrer Diplomarbeit auf dem Gebiet "Numerische Mathematik" begonnen.

Insgesamt werden in Halle 18 Vietnamesen als Mathematiker ausgebildet. Unsere vietnamesischen Freunde widerlegen auch sehr gut die Meinung, Mathematiker wären humorlose, trockene Menschen. Nicht nur, daß sie im täglichen Leben viel Lebenslust zeigen, sie führen auch reichhaltige kulturelle Veranstaltungen durch, z.B. Kabarettauftritte nach eigenen Texten.

In Halle bzw. in Berlin promovieren in diesem Jahr zwei vietnamesische Aspiranten. Sie werden im Sommer nach Hause zurückkehren und an dem mathematischen Institut der dortigen Universität unterrichten. Dieses Institut besteht seit 1956 und wird stark erweitert, im ersten Studienjahr studieren dort 150 Studenten mit dem Ziel Diplommathematiker.

Nach dem Abschluß ihres Mathematikstudiums in der DDR werden die vietnamesischen Freunde in ihrer Heimat an der Hochschule, in der Forschung, als Mathematiker in Ministerien oder in der Armee arbeiten. Während ihrer Studienzeit in der DDR, mit dem vorbereitenden Jahr am Herder-Institut in Leipzig sechs bzw. fünf Jahre, haben manche nicht einmal die Möglichkeit gehabt, in ihre Heimat auf Urlaub zu fahren. Diese lange Abwesenheit ist sehr schwer, besonders auch durch die Ungewißheit über einzelne Geschehnisse im Kampf ihres Volkes gegen die amerikanischen Aggressoren. Wie die vietnamesischen Studenten der

"Wurzel" aber versicherten, haben vielfältige freundschaftliche Beziehungen zu Jugendlichen und Erwachsenen unserer Republik ihnen sehr geholfen, das Vertrauen in den Sieg ihrer Sache zu festigen. Die "Wurzel" wünscht unseren Freunden ebenfalls viel Erfolg in ihrem weiteren Kampf.

Unseren Lesern stellen wir hier die Aufgaben, die Schüler der 10. Klasse bei der schriftlichen Mathematikprüfung 1966 im Bezirk Bac Thai zu lösen hatten. Den Schülern standen hierfür drei Stunden zur Verfügung.

1. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = (m^2 - 5m + 6)x^2 + (4 - m^2)x + 18.$$

Gesucht sind Bedingungen für m , so daß für die Nullstellen x_1, x_2 von $f(x)$ gilt:

a) $x_1 < 1 < x_2$

b) $x_1 < x_2 < 1$

2. Zu beweisen ist: Die Summe der Quadrate fünf aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist keine Quadratzahl einer natürlichen Zahl.

3. $(1 + \sin 2x)(\cos x - \sin x) = 1 - 2\sin^2 x$.

Gesucht sind die Werte für x .

4. Gegeben ist ein Tetraeder ABCD. Der Mittelpunkt von AB sei I, von CD sei J. Das Lot von A auf das Dreieck BCD ergebe Punkt H, der Mittelpunkt von AH sei M. Zu zeigen ist:

a) IJ steht senkrecht auf AB und CD

b) AH schneidet IJ in einem Punkt O

c) Die Strecken AO, BO, CO und DO sind gleich lang

d) $\angle BMC = \angle CMD = \angle DMB = 90^\circ$.

Wir würden uns freuen, wenn...

...wir zum Schuljahresende nicht zu viele Abbestellungen, aber im September Neubestellungen aus den 10. Klassen erhielten.

"Kurtzen Nachricht von denen
Academien und Universitaeten ueberhaupt."
(Halle, Anno M.DCC, IX)

§ 1 Was ein Student sey / ist so bekant / dass es einer weitlaeffigen Beschreibung nicht noethig. Es bedeutet aber einen solchen Menschen / der sich denen hoeheren Wissenschaften mit allem Fleisse ergeben und zu deren Erlernung an einem solchen Orte / wo selbige getrieben werden / sich aufhaelt / daher von selbstem klar wird / in wie ferne ein Student / und ein auf Trivial Schulen lebender von einander differiren.

§ 3 Es gibt auch deren viele Studenten / die sich einbilden / ob haetten sie ihrem Amte ein gross Benuegen gethan / wenn sie sich etliche Jahr auf Academien aufgehalten / darbey in den Wein-Bier-Tabacks und andern dergleichen Collegiis sich recht lustig erzeigt / viele lose Haendel und Schmaeusse gestifftet / um die Studia hingegen sich ebenso wenig betuemmert / als ob sie selbige als eine Pest hassen muessten / daher es auch geschicht / dass der Kopff mit weit weniger Witze wieder nach Hause wandert / als er dessen bey Antrit des Academischen Lebens gehabt.

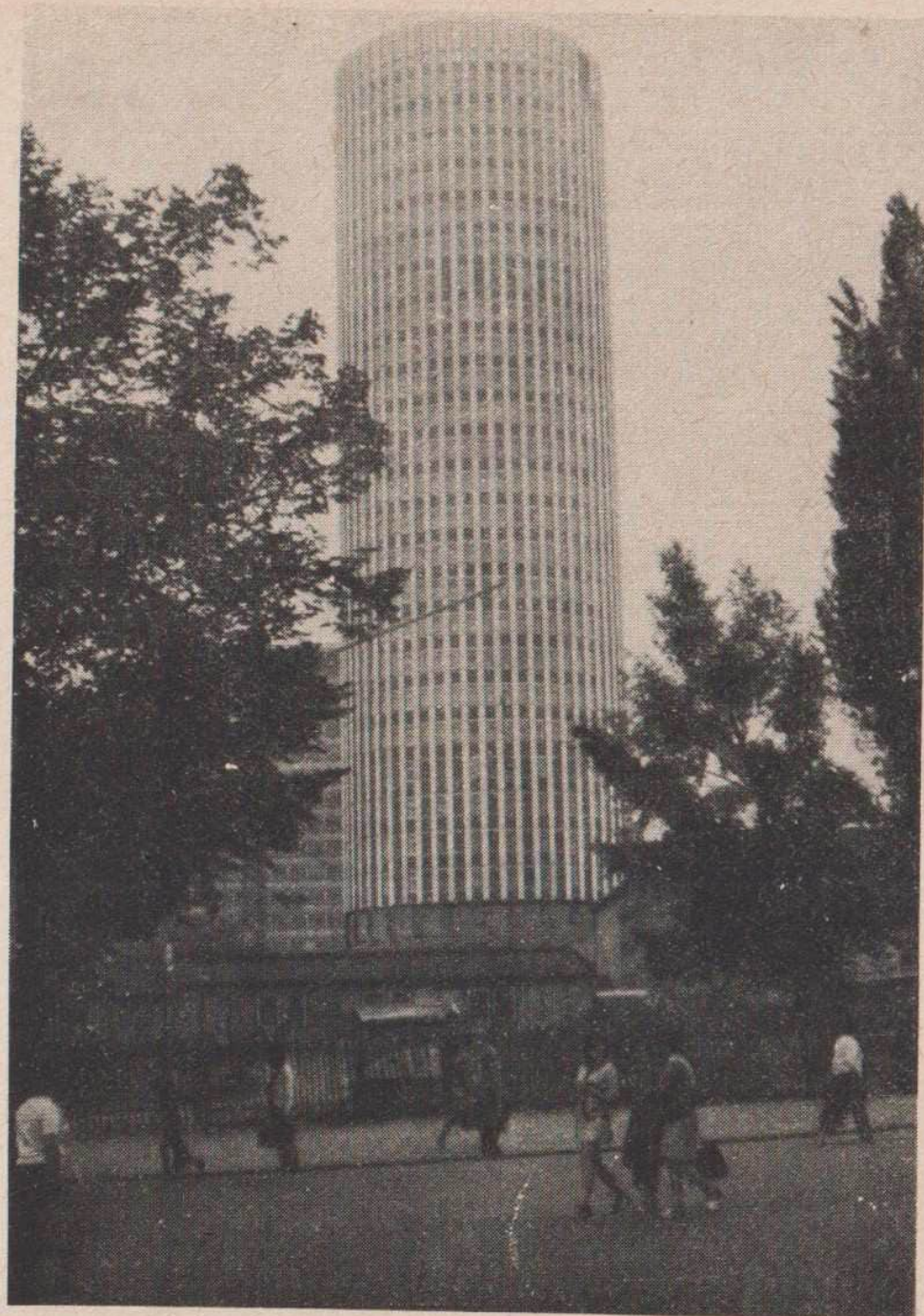
Herausgeber: Jugendobjekt „Studienwerbung-Studienvorbereitung“ der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena; **Leiter:** Reinhard Klette

Redaktion: Werner Nagel (Chefredakteur); U. Schleicher, H. Fischer, R. Lorenz

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

Anschrift: WURZEL
69 Jena
Helmholtzweg 1

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45



9

72

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
Jugendobjekt Studien-
vorbereitung der
Sektion Mathematik
an der Fr.-Schiller-
Universität Jena

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Nachdem wir uns im ersten Teil mit der Problemstellung vertraut gemacht und Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung betrachtet haben, kommen wir nun zu

4. Differentialgleichungen 2. Ordnung

Bereits bei dem physikalisch anspruchslosen Problem des Pendels trat eine Differentialgleichung 2. Ordnung auf:

$$y'' + \frac{g}{l} \cdot y = 0. \quad (20)$$

(Die gesuchte Funktion nennen wir jetzt wieder y - wie üblich in der Mathematik.) Wir betrachten deshalb folgenden allgemeinen Typ, der Gleichung (20) offenbar als Spezialfall enthält:

$$y'' + ay' + by = 0. \quad (21)$$

Man nennt eine solche Differentialgleichung exakt eine lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Theorie lehrt hierzu folgenden Satz:

S a t z : Die Gleichung (21) besitzt für vorgegebene Anfangsbedingungen $(x_0; y_0; z_0)$ genau eine Lösung, d.h., es gibt genau eine Funktion $y = f(x)$, die (21) erfüllt und für die $f(x_0) = y_0$ und $f'(x_0) = z_0$ gilt.

Um diese Lösungsfunktionen zu bestimmen, versuchen wir den Ansatz $y = e^{\lambda x}$.

Wir nehmen also an, daß die Lösung diese Gestalt hat.

Da die Gleichung (21) erfüllt sein muß, ergibt sich zunächst mit

$$y' = \lambda e^{\lambda x} \quad \text{und} \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$
$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a \lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0.$$

Daraus folgt (bekanntlich ist $e^{\lambda x} \neq 0$) die Beziehung

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0, \quad (22)$$

die man charakteristische Gleichung nennt. Wenn also die Lösungsfunktion von der angenommenen Gestalt sein soll, muß die charakteristische Gleichung erfüllt sein. Das ist aber für die Zahl λ eine quadratische Gleichung, und wir müssen deshalb folgende drei Fälle unterscheiden:

(A.) Die Diskriminante $D = \frac{a^2}{4} - b$ ist positiv.

(B.) Die Diskriminante ist Null.

(C.) Die Diskriminante ist negativ.

(A.) In diesem Falle gibt es zwei reelle Zahlen $\lambda_1 \neq \lambda_2$, die die Gleichung (22) erfüllen. Dann besitzt die Differentialgleichung (21) die allgemeine Lösung

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

wobei wir jetzt zwei frei wählbare Konstanten C_1 und C_2 haben.

Beispiel:

$y'' - 5y' + 6y = 0$. Der Ansatz $y = e^{\lambda x}$ liefert die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

mit den beiden Wurzeln $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$. Damit ist

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

die allgemeine Lösung dieser Gleichung. (Probe!)

Um aus der Schar der allgemeinen Lösungen nun diejenige herauszufinden, die die Anfangswerte $f(x_0) = y_0$ und $f'(x_0) = z_0$ erfüllt, müssen wir noch die Konstanten C_1 und C_2 richtig bestimmen. Es soll gelten:

$$\begin{aligned} y_0 &= C_1 e^{\lambda_1 x_0} + C_2 e^{\lambda_2 x_0} \\ z_0 &= C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x_0} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x_0}. \end{aligned} \quad (23)$$

Das ist aber ein lineares Gleichungssystem in den zwei Unbekannten C_1 und C_2 (x_0, y_0, z_0 sind ja gegeben), das wir leicht lösen können. Geben wir für unser Beispiel die Anfangswerte $(x_0; y_0; z_0) = (0; 3; 5)$ vor, so hat das Gleichungssystem (23) folgendes Aussehen:

$$3 = C_1 2e^{2 \cdot 0} + C_2 e^{3 \cdot 0} = C_1 + C_2$$

$$5 = C_1 2e^{2 \cdot 0} + C_2 3e^{3 \cdot 0} = 2C_1 + 3C_2,$$

mit dessen Lösung $C_1 = 4$ und $C_2 = -1$ wir für das Anfangswertproblem das Ergebnis

$$y = 4 \cdot e^{2x} - e^{3x}$$

erhalten. Durch eine Probe läßt sich dies schnell bestätigen.

Ⓐ Die charakteristische Gleichung besitzt die reelle Doppelwurzel $\lambda = -\frac{a}{2}$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (21) hat dann die Gestalt

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}.$$

Beispiel:

$y'' + 8y' + 16y = 0$. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$$

und wir erhalten $\lambda = -4$. Damit ist

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{-4x}$$

die allgemeine Lösung unseres Beispiels.

Ⓑ Die charakteristische Gleichung hat nun keine reelle Lösung. Mit $\alpha = -\frac{a}{2}$ und $\beta = \sqrt{-D}$ hat die allgemeine Lösung von (21) nun die Form

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

(Probe!)

Wer bereits mit komplexen Zahlen vertraut ist, kann einmal versuchen, das Ergebnis von Fall C. mit Hilfe der Eulerschen Formeln aus Fall A. abzuleiten.

Beispiel:

Wir betrachten noch einmal die Differentialgleichung des Pendels (20). Sie hat nach der Formel unter C. die allgemeine Lösung

$$y = C_1 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} x + C_2 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} x .$$

In der ursprünglichen Bezeichnung - die gesuchte Funktion war der Winkel φ in Abhängigkeit von der Zeit t - lautet die Bewegungsgleichung des Pendels somit

$$\varphi(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t .$$

Dem im 1. Abschnitt beschriebenen physikalischen Sachverhalt entsprechen die Anfangsbedingungen

$$\varphi(t_0) = \varphi_0 \quad \text{und} \quad \dot{\varphi}(t_0) = 0 .$$

Zur Vereinfachung der folgenden Rechnung nehmen wir $t_0 = 0$ an, d.h., wir legen den Nullpunkt der Zeitrechnung in den Augenblick des Loslassens des Pendels. Die Funktion $\varphi(t)$ und ihre Ableitung haben im Punkt $t = 0$ die Werte

$$\varphi_0 = C_1 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} 0 + C_2 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} 0 = C_1$$

$$\text{und} \quad 0 = -C_1 \sqrt{\frac{g}{l}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} 0 + C_2 \sqrt{\frac{g}{l}} \cos \sqrt{\frac{g}{l}} 0 = C_2 \sqrt{\frac{g}{l}} ,$$

woraus sofort

$$C_1 = \varphi_0 \quad \text{und} \quad C_2 = 0$$

folgt. Die Bewegung des Pendels wird also durch die Schwingungsgleichung

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

beschrieben, die die experimentelle Erfahrung bestätigt.

▷ Übungsaufgabe 11: Man bestimme die Bewegungsgleichung des Pendels, wenn es sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Ruhelage befindet und mit einem Stoß auf die Geschwindigkeit v_0 gebracht wird!

▷ Übungsaufgabe 12: Man bestimme zu folgenden Differentialgleichungen die allgemeine Lösung:

(a) $y'' - 4y' + 13y = 0,$

(b) $y'' + 3y' - 4y = 0,$

(c) $y'' - 4y' + 4y = 0.$

▷ Übungsaufgabe 13: Man löse folgende Anfangswertaufgaben:

(a) $4y'' + 4y' + y = 0, \quad (x_0; y_0; z_0) = (0; 2; 0),$

(b) $y'' + 4y' + 29y = 0, \quad (x_0; y_0; z_0) = (0; 0; 15),$

(c) $y'' - 4y' + 3y = 0, \quad (x_0; y_0; z_0) = (0; 6; 10).$

Außer den hier behandelten Differentialgleichungen gibt es noch eine Vielzahl anderer Typen, die spezielle Lösungsmethoden erfordern. Zur Ergänzung des hier dargestellten Stoffes empfehlen wir folgende Bücher:

[1] W. May, Differentialgleichungen, Leipzig 1971

(Mathematische Schülerbücherei Bd. 49)

[2] A. Kneschke, Differentialgleichungen und Randwertprobleme Bd. 1, Leipzig 1965

[3] Kleine Enzyklopädie Mathematik

Dr. Oloff, Dr. Schwarz

Bereich Analysis

I N F O R M A T I O N

Im Laufe des neunten Fünfjahrplans werden in der Sowjetunion über 2000 neue Rechenzentren und mehr als 1000 Prozeßrechner in Betrieb genommen. Insgesamt soll sich der Ausstoß von EDV-Anlagen auf das 2,6fache steigern. Das werden vor allem Großrechner der dritten Generation sein, Maschinen mit Arbeitsgeschwindigkeiten bis zu 2,5 Millionen Operationen in der Sekunde, auf der Basis integrierter Schaltungen.

Preisaufgaben 9/72

(D 43) Man zeige, daß die Gleichung

②

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n \cdot x + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1} \cdot y = 1$$

für alle natürlichen Zahlen n genau eine Lösung in ganzen Zahlen x und y besitzt.

(D 44) Man zeige, daß für nichtnegative reelle Zahlen a, b mit $a - b > 0$ und natürliche Zahlen $n \geq 2$

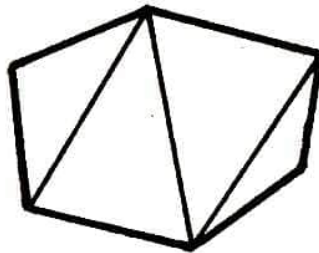
①

$$\sqrt[n]{a-b} > \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} \quad \text{gilt.}$$

(D 45) Ein Vieleck M sei durch sich nicht im Inneren schneidende Diagonalen in Dreiecke zerlegt. Man beweise, daß es dann zwei Eckpunkte gibt, von denen keine Diagonale ausgeht.

②

Zur
Erläuterung:



(D 46) Welche maximale Anzahl von Gliedern (nach Zusammenfassen gleicher Variablenpotenzen) kann ein Polynom 100. Grades in den Variablen x, y, z besitzen?

①

(D 47) Даны n бесконечных (в обе стороны) целочисленных арифметических прогрессий, каждые две из которых имеют общий член. Доказать, что все прогрессии имеют общий член.

②

(D 48) Найти многочлен $x^2 + px + q$, максимум абсолютной величины которого на отрезке $-1 \leq x \leq 1$ был бы наименьшим.

②

Für jeden vollständigen Lösungsweg erhält der Einsender einen bzw. zwei Wertpunkte. Die Anzahl ist bei jeder Preisaufgabe unter der laufenden Nummer angegeben. Für 15 Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch.

Sollten pro Monat mehr als drei Einsender 15 Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges). Falls ein Besitzer von 15 Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum Ende des darauffolgenden Monats unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an unsere Adresse einzuschicken.

Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungen bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und mit der Klassenstufe versehen sein müssen. Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

+ BÜCHERMARKT + BÜCHERMARKT + BÜCHERMARKT + BÜCHERMARKT +

Seit einigen Jahren wird sehr viel über programmiertes Lernen und Lehrmaterial gesprochen. Die Forderung danach wird immer lauter, ganz einfach deshalb, weil durch ein gutes Lehrprogramm eine sehr effektive Wissensaneignung möglich wird. Dem Schüler oder neuimmatrikulierten Studenten hilft solches Material, sich an das Selbststudium mit dem Buch zu gewöhnen, was für jedes Studium unbedingte Voraussetzung ist.

Endlich wird diesbezüglich auf dem Gebiet der Mathematik eine große Lücke geschlossen: Die Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig Leipzig hat eine Reihe "Mathematik - Lehrprogrammbücher - Hochschulstudium" ins Leben gerufen.

Als Band 2 dieser Reihe wird noch in diesem Jahr

"Einführung in die Technik des Integrierens"
von Dr. Karl Lemnitzer

erscheinen.

Jeder, der ungefähr die Praxis eines Mathematikers oder Physikers kennt, weiß, daß eine gut beherrschte Technik des Integrierens zum elementaren Werkzeug gehört - und dazu zählen nicht nur die Anwendung von Grundintegralen

und die partielle Integration. Der gesamte Inhalt ist auch auf praktische Methoden zur Lösung von Integralen ausgerichtet. Man muß sich also nicht erst durch viele Seiten grauer Theorie hindurcharbeiten (einige Grundkenntnisse aus der Differentialrechnung sind allerdings Voraussetzung). Der Autor, der an unserer Sektion tätig ist, ist "von Haus aus" Methodiker – Sie können also sicher sein, daß der Stoff gut für Sie aufbereitet wurde. Außerdem ist das Material schon in mehreren Studienjahren getestet und für den Druck noch einmal überarbeitet worden.

Auf 136 Seiten werden Ihnen in einem ständig wiederholten Zyklus Mitteilung (neuer Stoff) – Aufgabe (die vom Leser zu lösen ist) – Lösung der Aufgabe (auf der folgenden Seite) Grundkenntnisse zu folgenden Komplexen vermittelt:



Stammfunktionen und unbestimmte Integration
Grundintegrale und einfache Integrationsregeln

Integration durch Partialbruchzerlegung
Integrale der Form

$$\int R(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x) dx .$$

Neben einer Zusammenfassung finden Sie am Ende des Buches noch eine Reihe von Übungsaufgaben, und Sie können in einer abschließenden Kontrollarbeit selbst überprüfen, wieviel Sie gelernt haben.

Gemessen am Effekt ist das Lehrprogramm für 9,-- M preiswert.

Gut gesagt

"Mathematik ist die Wissenschaft, welche die räumlichen Formen und die quantitativen Beziehungen der realen Umwelt zum Gegenstand hat."

Friedrich Engels

Lösungen

(D 28) Es gilt für jede positive reelle Zahl a und jede natürliche Zahl k die Ungleichung

$$k^2 + \sqrt{a} \geq 2\sqrt{k^2\sqrt{a}} = 2k\sqrt[4]{a}$$

Dann gilt auch

$$\sum_{k=1}^n (k^2 + \sqrt{a}) \geq \sum_{k=1}^n (2k\sqrt[4]{a})$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k^2 + \sqrt{a}) &= \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n \sqrt{a} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n\sqrt{a} \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2k\sqrt[4]{a}) &= 2\sqrt[4]{a} \sum_{k=1}^n k \\ &= n(n+1)\sqrt[4]{a} \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort die Ungleichung

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n\sqrt{a} \geq n(n+1)\sqrt[4]{a},$$

die sich umformen läßt zu

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{6} + \sqrt{a} \geq (n+1)\sqrt[4]{a}$$

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{6} \geq \sqrt[4]{a} (n+1 - \sqrt[4]{a})$$

(D 31) Zerschneidet man einen Bogen Papier in 10 Teile, so ändert sich die Anzahl der Papierstücke genau um 9. Nach k Schnitten ändert sich die Anzahl der Papierbögen um $9k$. In unserem Fall beträgt sie dann $15+9k$. Da $1972 = 3 \cdot 657 + 1$ nicht durch 3 teilbar ist, jedoch $15+9k = 3(5+3k)$ diese Eigenschaft hat, können 1972 Papierbögen bei diesem Verfahren nicht entstanden sein.

(D 32)

L

Seien $A_1 A_2 \dots A_n$ das konvexe Vieleck mit dem Umfang 12, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Innenwinkel an den entsprechenden Eckpunkten (im Bogenmaß) und $a_1, \dots, a_n$ die Längen der Seiten $\overline{A_1 A_2}, \dots, \overline{A_n A_1}$.

Die Differenzfläche nach dem Verschieben setzt sich aus Rechtecken und Drachenvierecken zusammen. (Abb. 1)

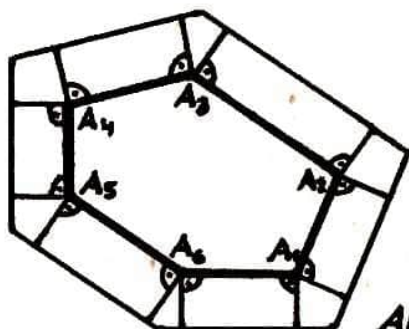
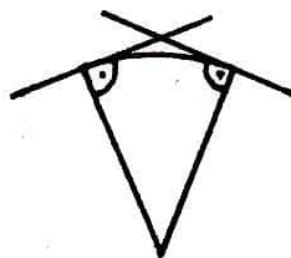


Abb. 1



Ai Abb. 2

Es ist also der Flächeninhalt der Differenzfläche

$$F_D = \sum_{i=1}^n F_{R_i} + \sum_{i=1}^n F_{D_i},$$

wobei R_i das Rechteck an der Seite $A_i A_{i+1}$ (bei $i=n$ an der Seite $A_n A_1$) und D_i das Drachenviereck am Punkt A_i sind.

Weiter gilt

$$F_{R_i} = 1 \cdot a_i = a_i$$

und

$$F_{D_i} > \frac{1}{2} (\pi - \alpha_i),$$

weil D_i ein Drachenviereck mit zwei rechten Innenwinkeln und einem Innenwinkel $\pi - \alpha_i$ am Punkt A_i ist, in das sich ein Kreissektor mit dem Radius 1 um A_i vollständig einbeschreiben lässt. (Abb. 2)

Die Seiten des neuen Vielecks sind jeweils Tangenten für die entsprechenden Kreissektoren.

$$\begin{aligned} \text{Also ergibt sich} \quad F_D &> \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (\pi - \alpha_i) \\ &= 12 + \frac{n}{2} \pi - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i = 12 + \pi \geq 15, \end{aligned}$$

da $\sum_{i=1}^n \alpha_i = (n-2)\pi$ die Innenwinkelsumme eines konvexen n -Ecks ist.

(D 35) Da der Definitionsbereich von $\sqrt{x}$ nur die nichtnegativen reellen Zahlen umfaßt sowie die linke Seite für $x = 0$ und $x = 1$ keinen Sinn hat, genügt es, die Lösungen in den Intervallen $(0,1)$ und $(1,\infty)$ zu suchen. Da $x = 0$ ausgeschlossen ist, kann man die Ungleichung

$$\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} > 6\sqrt{x} \quad \text{vereinfachen.}$$

Für $x > 1$ wird $1 - \sqrt{x} < 0$ und damit

$$\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} < 0 < 6\sqrt{x}.$$

Für $0 < x < 1$ ist $1 - \sqrt{x} > 0$, d.h. man kann die Ungleichung mit $1 - \sqrt{x}$ multiplizieren, ohne das Relationszeichen zu verändern.

$$1 + \sqrt{x} > 6\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$$

$$6x - 5\sqrt{x} + 1 > 0$$

$$(2\sqrt{x} - 1)(3\sqrt{x} - 1) > 0$$

Diese Relation gilt, falls $2\sqrt{x} - 1 > 0$ und $3\sqrt{x} - 1 > 0$ oder $2\sqrt{x} - 1 < 0$ und $3\sqrt{x} - 1 < 0$ sind. Es folgt jedoch wegen $\sqrt{x} > 0$ aus $2\sqrt{x} - 1 > 0$ auch $3\sqrt{x} - 1 > 0$ und aus $3\sqrt{x} - 1 < 0$ auch $2\sqrt{x} - 1 < 0$. Also gilt die obige Ungleichung für alle reellen Werte x mit $0 < x < 1$ und $2\sqrt{x} - 1 > 0$ oder $3\sqrt{x} - 1 < 0$.

Das heißt aber $2\sqrt{x} > 1$ oder $\sqrt{x} > \frac{1}{2}$ oder $x > \frac{1}{4}$ sowie $3\sqrt{x} < 1$ oder $x < \frac{1}{9}$.

Damit ist die Lösungsmenge die Vereinigung der beiden offenen Intervalle $(0, \frac{1}{9})$ und $(\frac{1}{4}, 1)$, oder anders ausgedrückt, die Menge aller reellen Zahlen x mit $0 < x < \frac{1}{9}$ oder $\frac{1}{4} < x < 1$.

(D 29) Die Gleichung

L

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 1$$

läßt sich umformen zu

$$\sqrt{2x+3} = 1 - \sqrt{x+1}$$

$$2x+3 = 1 - 2\sqrt{x+1} + x + 1$$

$$x+1 = -2\sqrt{x+1}$$

$$x + 1 + 2\sqrt{x+1} = 0$$

$$\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1} + 2) = 0 \quad (1)$$

Da $\sqrt{x+1} + 2$ für alle x größer als 0 ist, kann (1) nur für $\sqrt{x+1} = 0$, d.h. für $x = -1$ gelten.

Daraus folgt, daß die Lösungsmenge aus dem einen Element -1 besteht.

INFORMATION

Indien wird in nächster Zeit aus der Sowjetunion seinen bisher leistungsstärksten Computer erhalten. Der Großrechner vom Typ BESM 6 wird im indischen Atomforschungszentrum von sowjetischen Spezialisten aufgestellt.

Dr. Horst Oswald (wiss. Sekretär der Sektion Mathematik)



Auf nebenstehendem Bild sehen Sie den zur Zeit meistbeschäftigten Mann unserer Sektion: Er ist Chef-dispatcher der Umzugsaktion der Mathematiker in das neue Hochhaus (Titelbild). Trotz seiner umfangreichen Arbeit hat er nachfolgenden Artikel für die "WURZEL" verfaßt, um Sie über die wichtigsten Fakten und neuen Dimensionen zu informieren.

Unsere Sektion zieht um

Wie in allen Städten unserer Republik, wurde in den vergangenen 10 Jahren auch in Jena ein umfangreiches Bauprogramm realisiert. Im Norden und Osten der Stadt entstanden neue Wohnviertel, im Süden sogar eine Stadt, die heute bereits ca. 20 000 Einwohner beherbergt. Neben Wohnhäusern, Wohnheimen, Schulen und Kindertagesstätten, Kaufhäusern, Sporteinrichtungen und Gaststätten entstanden auch Industriebauten. Der VEB Carl Zeiss Jena war dabei selbstverständlich der größte Auftraggeber. Im Süden der Stadt entstanden für dieses Kombinat neue Werkhallen und Lagerplätze.

Die Friedrich-Schiller-Universität hat sich in den letzten 10 Jahren ebenfalls stark vergrößert. Von den vielen Zahlen, die das widerspiegeln könnten, seien hier nur folgende genannt: Die Sektion Mathematik immatrikulierte im Jahre 1962 etwa 75 Studenten. 20 Wissenschaftler bildeten reichlich 200 Studenten aus. 1972 immatrikulierte unsere Sektion 230 Studenten. Über 80 Wissenschaftler, darunter 13 Professoren, sind heute an der Ausbildung von insgesamt 900 Mathematikstudenten beteiligt. Etwa 20 Assistenten werden allein im kommenden Jahr neu eingestellt.

In den Jahren 1970 bis 1972 entstanden neue Wohnheime für etwa 2000 Studenten. Eine Erweiterung der baulichen Substanz für Arbeitsplätze der Wissenschaftler und Hörsäle gab es über 10 Jahre nicht mehr. Seit einem Jahr steht nun fest, daß wir, die Mathematiker, noch im Herbst 1972 zusammen mit vielen anderen Sektionen in das neue Universitäts-hochhaus einziehen werden.

Dieser Neubau, rund und hoch wie ein riesiger Turm, hat 28 Etagen. 6000 Treppenstufen verbinden diese Etagen. Der Fahrstuhl benötigt 30 Sekunden vom Erdgeschoß bis zum 28. Stock. Im rechteckigen Sockelbau mit 3 Geschossen werden eine neue Mensa mit 564 Essenplätzen, zentrale Einrichtun-

gen der Universitätsleitung und Seminarräume Platz finden. In den darüberliegenden Geschossen, die wir auf Grund ihrer Form "Scheiben" nennen, erwarten modern eingerichtete Arbeitsplätze und Lesesäle die Wissenschaftler und Studenten der FSU. Die Grundfläche jeder Scheibe ist 710 m² groß. Davon sind rund 500 m² als Arbeitsfläche nutzbar. Der Rest wird für 6 Fahrstühle, 2 Treppen, Teeküchen, sanitäre und technische Einrichtungen im Kern des Hochhauses benötigt. Jede Halbscheibe kann 25 bis 30 Wissenschaftler in hellen freundlich eingerichteten und voll klimatisierten Großräumen Arbeitsplätze bieten. In 10 Lesesälen haben je 40 Studenten Platz. Zwei Lesesäle, also 80 Plätze, sind davon unserer Sektion vorbehalten. (Gegenwärtig verfügen wir nur über einen provisorischen Lesesaal mit 20 Stühlen, die an einem einzigen riesigen Tisch stehen.)

Die angeführten Zahlen machen deutlich, daß ein beträchtlicher Teil unserer Universität in den Neubau einziehen kann. Außer der Sektion Mathematik werden es die Sektionen Literatur- und Kunstwissenschaft, Erziehungswissenschaft, Sprachwissenschaften, Marxismus-Leninismus, Technologie - Fachbereich Konstruktion - , Psychologie, Philosophie und Geschichte, Staats- und Rechtswissenschaft und Wirtschaftswissenschaft sein.

Zahlreiche Gebäude der Stadt, darunter auch 1- bis 3-Familienhäuser, werden wieder ihrem ursprünglichen Zweck zugeführt und werden die trotz des großen Wohnungsbauprogramms immer noch angespannte Wohnungssituation verbessern helfen. Andere Gebäude verbessern als Bettenhäuser und Schwesternwohnheime der Kliniken die medizinische Versorgung der Bevölkerung des Kreises Jena.

Der Einzug in das Hochhaus bedeutet also nicht nur für die Angehörigen der Universität eine Lösung der angespannten Arbeitsplatzsituation, sondern bringt der ganzen Stadt verbesserte Lebens- und Arbeitsbedingungen.

Das kommende Studienjahr wird natürlich von allen Angehörigen der Universität besondere Anstrengungen verlangen, und das nicht nur während der Umzugswochen, auf deren technische Probleme die notwendige Umsetzung von etwa 355 000 Büchern ausreichend hinweist. Viel Geduld und Mühe wird es auch kosten, unsere Arbeitsorganisation, die Bewältigung umfangreicher Aufgaben in Ausbildung und Forschung auf die neuen Bedingungen einzustellen. Der größte Teil unserer Lehrveranstaltungen wird nach wie vor außerhalb des Neubaus stattfinden, da er keine Hörsäle und nur wenige Seminarräume und Konsultationsplätze besitzt. Eine wohldurchdachte Studienorganisation wird also verhindern müssen, daß Wissenschaftler und Studenten zuviel Zeit "auf Schusters Rappen" auf dem Wege von Lehrveranstaltung zu Lehrveranstaltung zubringen müssen. An der Lösung solcher Probleme arbeiten wir selbstverständlich schon lange.

Der Umzug beginnt am 1. 10. dieses Jahres. Seine allseitige Vorbereitung steht vor dem erfolgreichen und entscheidenden Abschluß. Schon im Januar 1973 wird ein Mathematikstudent, der nach den Weihnachtsferien an seinen Studienort Jena zurückkehrt, den Mitreisenden beim Erscheinen des 121,70 m hohen neuen Wahrzeichens der Stadt stolz mitteilen können, daß sich seine Sektion in den Etagen 16, 17 und 18 befindet und in den unteren Stockwerken moderne Lesesäle und eine neue Mensa die Freude am Studium beträchtlich gesteigert haben.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung“ der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena; **Leiter:** Reinhard Klette

Redaktion: Werner Nagel (Chefredakteur); U. Heuke, H. Fischer, R. Lorenz

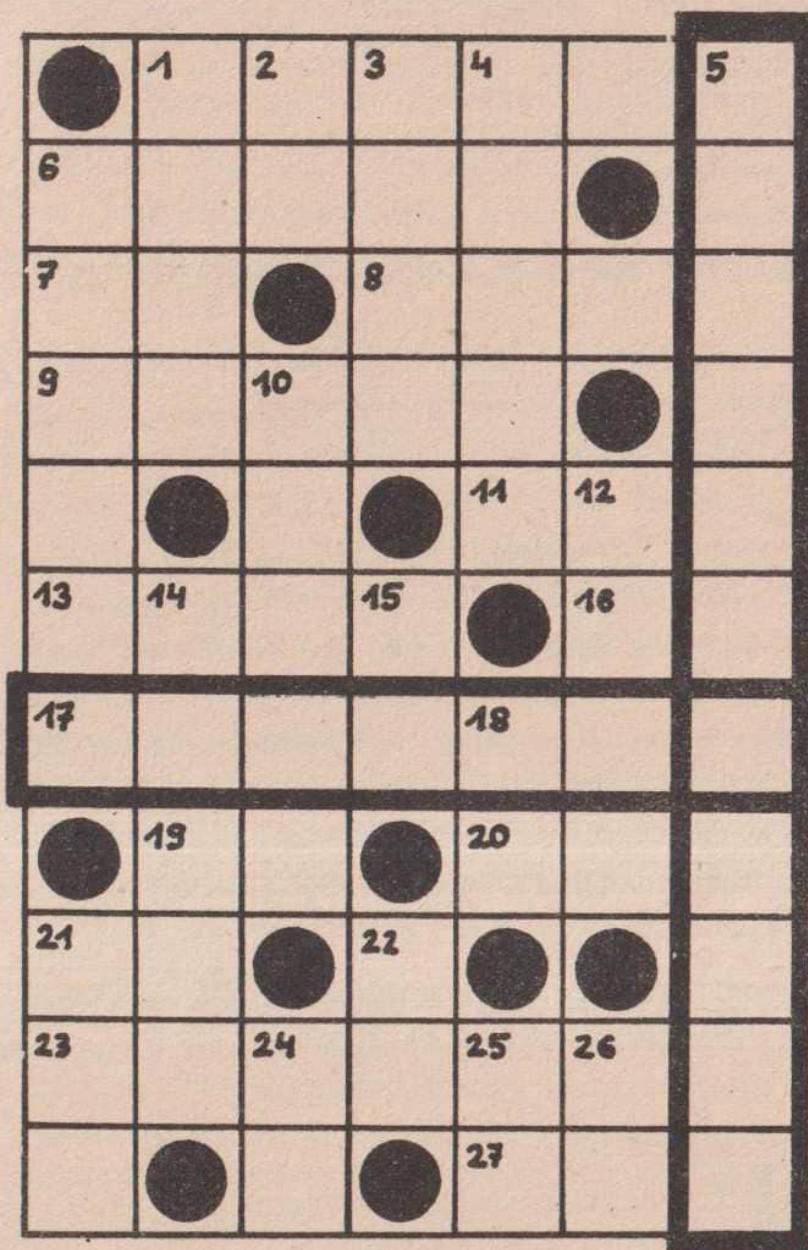
Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

Anschrift: WURZEL

69 Jena

Helmholtzweg 1

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45



WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
Jugendobjekt Studien-
vorbereitung der
Sektion Mathematik
an der Fr.-Schiller-
Universität Jena

Die Algebra gehört zu den wichtigsten Gebieten der Mathematik, da sie wegen ihrer großen Allgemeinheit vielseitig anwendbar ist. Diese große Allgemeinheit erfordert natürlich einen relativ hohen Abstraktionsgrad. Wir wollen Ihnen helfen, Ihr Abstraktionsvermögen zu schulen, und haben deshalb unseren Autor Klaus Wagner gebeten, einige Grundlagen für Sie gut verständlich aufzubereiten.

Einführung in die Verbandstheorie (I)

Die Verbandstheorie ist eine Spezialdisziplin der Algebra. Die Algebra befaßt sich im wesentlichen mit strukturierten Mengen, d.h. mit Mengen, in denen gewisse Operationen (Abbildungen) oder Relationen erklärt sind. Die Begriffe "Menge", "Operation", "Abbildung" und "Relation" sind dem Leser aus früheren Darstellungen in der "WURZEL" bekannt. Viele Spezialdisziplinen der Algebra, zum Beispiel die Gruppentheorie, befassen sich mit einer genau festgelegten Klasse von strukturierten Mengen. So auch die Verbandstheorie. Dort wird die Klasse der Verbände betrachtet, d.h. man studiert ausgehend von der Definition des Verbandsbegriffes die Eigenschaften der Verbände schlechthin bzw. die Eigenschaften spezieller Verbände.

Daher steht auch am Beginn unseres kleinen Exkurses in die Verbandstheorie eine Definition des zu untersuchenden Gegenstandes.

Definition 1:

Die algebraische Struktur $\mathfrak{V} = [V, \cap, \cup]$ heißt **Verband**

=Df 1. V ist eine Menge.

2. Es sind die zweistelligen Operationen $\cap$ und $\cup$ auf V erklärt, d.h. $\cap$ und $\cup$ sind eindeutige Abbildungen von $V \times V$ in V .

3. Die Operationen $\cap$ und $\cup$ sind assoziativ, d.h. für jedes $a, b, c \in V$ gilt

$$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) \quad \text{und} \quad (1)$$

$$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c). \quad (2)$$

4. Die Operationen $\cap$ und $\cup$ sind kommutativ, d.h. für jedes $a, b \in V$ gilt
- $$a \cap b = b \cap a \quad \text{und} \quad (3)$$
- $$a \cup b = b \cup a \quad . \quad (4)$$
5. Für die Operationen $\cap$ und $\cup$ gelten die Verschmelzungsgesetze, d.h. für jedes $a, b \in V$ gilt
- $$a \cup (a \cap b) = a \quad \text{und} \quad (5)$$
- $$a \cap (a \cup b) = a \quad . \quad (6)$$

Die Eigenschaften (1) - (6) nennt man auch Verbandsaxiome.

Bemerkung: Die Zeichen $\cap$ und $\cup$, die in der Mengenlehre für die Begriffe "Durchschnitt" und "Vereinigung" benutzt werden, sind hier in einem allgemeineren Sinne zu verstehen. Obwohl wir für $a \cap b$ bzw. $a \cup b$ auch hier stets "a geschnitten mit b" bzw. "a vereinigt mit b" sagen werden, muß damit nicht immer der mengentheoretische Durchschnitt bzw. die mengentheoretische Vereinigung gemeint sein. Wie die folgenden Beispiele 2 - 5 zeigen, müssen die Elemente eines Verbandes noch nicht einmal Mengen sein. Anhand des sehr wichtigen Beispiels 1 wird jedoch deutlich, warum man in der Verbandstheorie die Zeichen $\cap$ und $\cup$ verwendet.

Beispiel 1: Es sei M eine Menge. Bezeichnen wir wie üblich mit $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge (Menge aller Teilmengen) von M und mit $\cap$ und $\cup$ den mengentheoretischen Durchschnitt und die mengentheoretische Vereinigung, so ist $[\mathcal{P}(M), \cap, \cup]$ ein Verband, der Potenzmengenverband von M . Der Leser kann sehr leicht die Gültigkeit der 6 Verbandsaxiome überprüfen. Analog ist auch die Struktur $[\mathcal{P}_E(M), \cap, \cup]$ ein Verband, wobei $\mathcal{P}_E(M)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von M ist.

Beispiel 2: Es sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$. Für zwei beliebige natürliche Zahlen m und n sei mit $\text{ggT}(m, n)$ der größte gemeinsame Teiler von m und n und mit $\text{kgV}(m, n)$ das kleinste

gemeinsame Vielfache von m und n bezeichnet, dann ist $[Nz, \text{ggT}, \text{kgV}]$ ein Verband.

Beispiel 3: Es sei $\mathcal{G}$ eine Gruppe und $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ die Menge aller Untergruppen von $\mathcal{G}$. Für zwei beliebige Untergruppen U und V von $\mathcal{G}$ sei mit $U \cap V$ der mengentheoretische Durchschnitt $U \cap V$ und mit $U \sqcup V$ die kleinste Untergruppe von $\mathcal{G}$ bezeichnet, die U und V gleichzeitig umfaßt. Dann ist $[\mathcal{A}(\mathcal{G}), \cap, \sqcup]$ ein Verband.

Beispiel 4: Es sei R die Menge der reellen Zahlen. Für zwei beliebige reelle Zahlen α und β sei mit $\min(\alpha, \beta)$ die kleinere der Zahlen α und β und mit $\max(\alpha, \beta)$ die größere der Zahlen α und β bezeichnet. Dann ist $[R, \min, \max]$ ein Verband.

Beispiel 5: Es seien A und B Teilmengen der Menge R der reellen Zahlen. Mit B^A bezeichnen wir die Menge aller eindeutigen Abbildungen von A in B . Für zwei beliebige Abbildungen $f, g \in B^A$ definieren wir $f \cap g$ und $f \cup g$ durch

$$\begin{aligned}(f \cap g)(x) &=_{\text{Df}} \min(f(x), g(x)) & \text{und} \\ (f \cup g)(x) &=_{\text{Df}} \max(f(x), g(x)),\end{aligned}$$

wobei $x \in A$.

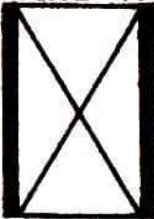
Dann ist $[B^A, \cap, \cup]$ ein Verband.

Auch in den Beispielen 2 - 5 kann man unschwer die Verbandseigenschaften nachweisen. Wir empfehlen dem Leser, dies zum besseren Verständnis der hier behandelten Begriffe für einige der oben genannten Beispiele einmal exakt durchzuführen.

Anhand der Beispiele 1-5 erkennen wir, daß sich viele uns schon gut bekannte mathematische Objekte und Begriffe verbandstheoretisch auffassen lassen. Dies gilt auch für manche wichtigen Objekte anderer mathematischer Disziplinen, so daß es für jeden Mathematiker sehr nützlich ist, mit den Grundlagen der Verbandstheorie vertraut zu sein.

Wir wollen nun einige einfache Eigenschaften von Verbänden studieren.

Satz 1: Es sei $\mathfrak{B} = [V, \cap, \cup]$ ein Verband.



- (7) Für jedes $a \in V$ gilt $a \cap a = a$.
- (8) Für jedes $a \in V$ gilt $a \cup a = a$.
- (9) Für jedes $a, b \in V$ gilt
 $a \cap b = a$ genau dann, wenn $a \cup b = b$ gilt.

Beweis: (7) Wegen des Verschmelzungsgesetzes gilt für beliebige Elemente $a, x \in V$

$$a \cup (a \cap x) = a$$

und somit auch

$$a \cap (a \cup (a \cap x)) = a \cap a.$$

Abermals mit Hilfe des Verschmelzungsgesetzes erhalten wir

$$a \cap (a \cup (a \cap x)) = a.$$

Die letzten beiden Gleichungen liefern dann
 $a \cap a = a$.

(8) beweist man völlig analog zu (7).

(9) Wir setzen zunächst für je zwei Elemente $a, b \in V$ die Gleichung $a \cap b = a$ voraus. Damit haben wir auch $b \cup (a \cap b) = b \cup a$.

Nach dem Verschmelzungsgesetz gilt aber

$$b \cup (a \cap b) = b,$$

und somit ist

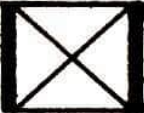
$$a \cup b = b \cup a = b.$$

Ganz analog folgern wir aus der Gültigkeit der Gleichung $a \cup b = b$ die Gültigkeit der Gleichung $a \cap b = a$ für je zwei Elemente $a, b \in V$.

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Es sei nun $\mathfrak{B} = [V, \cup, \cap]$ ein beliebiger Verband. Wir definieren in V die zweistellige Relation $\leq$ wie folgt:

Für zwei Elemente $a, b \in V$ sei $a \leq b$ genau dann, wenn $a \cap b = a$ ist. Wir bemerken, daß dies wegen (9) gleichbedeutend mit $a \cup b = b$ ist.

Satz 2:  Ist $[V, \cap, \cup]$ ein beliebiger Verband, so ist V bzgl. $\leq$ eine halbgeordnete Menge, in der für je zwei Elemente aus V Infimum und Supremum existieren.

Wir wollen schnell noch einmal die entsprechenden Begriffe aus der Theorie der Halbordnungen wiederholen.

- ▷ Eine Menge V heißt bezüglich der Relation $\leq$ halbgeordnet, falls die Relation $\leq$ auf V reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.
- ▷ Eine Relation $\leq$ heißt auf einer Menge V
 - reflexiv, falls für jedes Element $x \in V$ die Beziehung $x \leq x$ gilt;
 - antisymmetrisch, falls für je zwei Elemente $x, y \in V$ aus den Beziehungen $x \leq y$ und $y \leq x$ die Gleichheit von x und y , also $x = y$, folgt;
 - transitiv, falls für je drei Elemente $x, y, z \in V$ aus den Beziehungen $x \leq y$ und $y \leq z$ die Beziehung $x \leq z$ folgt.
- ▷ Gibt es bzgl. $\leq$ in V ein kleinstes (größtes) Element, das größer (kleiner) als zwei Elemente $x, y \in V$ ist, so nennen wir dieses Element Supremum (Infimum) der beiden Elemente x und y . Schreibweise: $\sup(x, y)$; $(\inf(x, y))$.

Aus dieser Definition geht hervor, daß es in einer beliebigen halbgeordneten Menge nicht für jedes Paar von Elementen ein Supremum oder ein Infimum geben muß.

So gibt es z.B. in der Menge $\{a, b, c\}$, die durch die Festsetzungen $a \leq a$, $b \leq b$, $c \leq c$, $a \leq c$, $b \leq c$ halbgeordnet wird, für die Elemente a und b zwar ein Supremum (nämlich c), aber kein Infimum.

Nun zum Beweis des Satzes 2:

- a) Die Relation $\leq$ ist auf V reflexiv, also $x \leq x$.
Wir müssen dazu zeigen, daß für jedes $x \in V$ die Gleichung $x \cap x = x$ gilt.
Das ist aber die schon bewiesene Verbandseigenschaft (7).
- b) Die Relation $\leq$ ist auf V antisymmetrisch, also aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$.

Wir müssen dazu zeigen, daß aus $x \cap y = x$ und $y \cap x = y$ die Gleichung $x = y$ folgt. Das ist aber wegen der Kommutativität von $\cap$ (3) erfüllt.

- c) Die Relation $\leq$ ist auf V transitiv, also aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$.

Wir müssen zeigen, daß aus $x \cap y = x$ und $y \cap z = y$ auch $x \cap z = x$ folgt. Es sei also $x \cap y = x$ (*) und $y \cap z = y$ vorausgesetzt; wegen (9) gilt mit $y \cap z = y$ auch $y \cup z = z$ (**).

Wir rechnen nun einfach aus:

$$\begin{aligned} x \cap z &= (x \cap y) \cap (y \cup z) && (*) \text{ und } (**) \\ &= x \cap (y \cap (y \cup z)) && \text{Assoziativität von } \cap \text{ (1)} \\ &= x \cap y && \text{Verschmelzungsgesetz (6)} \\ &= x && (*) \end{aligned}$$

- d) Für beliebige $x, y \in V$ existiert $\sup(x, y)$. Wir zeigen $\sup(x, y) = x \cup y$. Da $x \cup y$ für je zwei Elemente $x, y \in V$ existiert, ist damit d) bewiesen.

Zunächst besteht wegen $x \cap (x \cup y) = x$ (6) die Beziehung $x \leq x \cup y$ und analog auch $y \leq x \cup y$. Bleibt noch nachzuweisen, daß $x \cup y$ das kleinste Element aus V ist, das größer als x und y ist. Es sei $z \in V$ ein beliebiges Element mit $x \leq z$ und $y \leq z$, also mit $x \cup z = z$ und $y \cup z = z$. Hieraus folgt

$$z = x \cup z = x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z, \text{ und somit ist } x \cup y \leq z. \text{ Es ist also } (x \cup y) \text{ wirklich das kleinste Element aus } V, \text{ das größer als } x \text{ und } y \text{ ist.}$$

- e) Die Existenz des Infimums für je zwei Elemente aus V wird ganz analog zu d) bewiesen.

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Klaus Wagner

Wiss. Assistent im Bereich Kybernetik berne

Der Artikel wird in "WURZEL" 11/72 mit weiteren Eigenschaften und Beispielen von Verbänden fortgesetzt.

Preisaufgaben Serie 10/72

(D 49) In einem Rechteck R mit den Abmessungen 20×25 liegen 120 Quadrate Q mit der Seitenlänge 1. Man zeige, daß man in R einen Kreis mit dem Durchmesser 1 so einzeichnen kann, daß er kein Einheitsquadrat Q schneidet.

(D 50) Man bestimme den Summanden in der Entwicklung von $(1 + x + \frac{6}{x})^{10}$, der x nicht enthält.

(D 51) Der Flächeninhalt eines Dreiecks $\triangle ABC$ betrage 1. Es gelte außerdem $\overline{AB} \leq \overline{BC} \leq \overline{CA}$. Welche Werte kann dann

- die Seite $\overline{AB}$,
- die Seite $\overline{BC}$,
- die Seite $\overline{AC}$ annehmen?

(D 52) Die Gleichungen (1) $x^3 + p_1x + q_1 = 0$,
(2) $x^3 + p_2x + q_2 = 0$
mit reellen Zahlen p_1, p_2, q_1, q_2 und $p_1 \neq p_2$,
 $q_1 \neq q_2$
besitzen eine gemeinsame Lösung x . Man bestimme diese Wurzel und die weiteren Wurzeln beider Gleichungen.

(D 53) Zwei geradlinige Straßen $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ stehen senkrecht aufeinander und schneiden sich im Punkt C , wobei $\overline{AC} = a$ und $\overline{BC} = b$. Von A und B fahren zwei Autos mit den Geschwindigkeiten v_A bzw. v_B in Richtung C los. Wie groß ist während der Fahrt der minimale Abstand der Wagen voneinander?

(D54) If a function $f(x)$ satisfies the condition

(1) $f(\frac{x}{x-1}) - 2f(\frac{x-1}{x}) = 0$,
then $f(x) \equiv 0$ (at least for $x \neq 0$ and $x \neq 1$).

Für jeden vollständigen Lösungsweg erhält der Einsender einen bzw. zwei Wertpunkte. Die Anzahl ist bei jeder Preisaufgabe unter der laufenden Nummer angegeben. Für 15 Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender 15 Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges). Falls ein Besitzer von 15 Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum Ende des darauffolgenden Monats unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an unsere Adresse einzuschicken. Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungen bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und mit der Klassenstufe versehen sein müssen. Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

Gut gesagt

"Mach's nach der Regel und kumpt recht."

(Vorschrift mittelalterlicher Rechenbücher)

+ BÜCHERMARKT + BÜCHERMARKT + BÜCHERMARKT + BÜCHERMARKT +

Nachdem wir in "WURZEL" 7/8 1972 Band 2 der Reihe

"Mathematik - Lehrprogrammbücher - Hochschulstudium"

vorstellten, heute zum ersten Buch

"Zum Sprachgebrauch in der Mathematik".

Jeder, der sich näher mit der Mathematik befaßt (also z.B. auch ein Physikstudent), bemerkt, wie wichtig es ist, sich exakt auszudrücken, um den vom umgangssprachlichen Inhalt bestimmter Begriffe und Wendungen abweichenden Sinn in der Mathematik zu verstehen. Daher ist das vorgelegte Buch jedem Schüler und auch Studenten des ersten Studienjahres dringend zu empfehlen. Es wird helfen, viele Schwierigkeiten, mit denen man sich als Anfänger auseinandersetzen muß und die manche Klausur verderben, zu beseitigen.

Die Autoren konzentrieren sich auf einige wenige, aber sehr grundlegende Begriffe und Wendungen und führen den Leser sehr "geduldig" von Erkenntnis zu Erkenntnis.

Aus technischen Gründen sind die einzelnen Lehrschritte nicht


aufeinanderfolgend geordnet, so daß man
- natürlich angeleitet - "kreuz und quer"
in dem Buch "herumlesen" und aufpassen
muß, daß einem die inhaltlichen Zusammen-
hänge nicht verloren gehen.

Deshalb sollte man sich, wenn man wiederholen oder nachschla-
gen möchte, der sehr nützlichen abschließenden Zusammenfassung
bedienen, da man innerhalb des Programms kaum etwas Bestimm-
tes wiederfindet.

Nachdem wir das Programm getestet haben, empfehlen wir es
Ihnen als wertvolles Hilfsmittel zum Verständnis der
Mathematik.

Preis: 4,50 M, Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig

8. Wissenschaftliche Haupttagung der Mathematischen Gesellschaft der DDR

atischen

Diese 8. Wissenschaftliche Haupttagung, welche vom 28. 8.
bis 2. 9. 1972 in Dresden stattfand, war gleichzeitig ein
Jubiläum: Die Mathematische Gesellschaft der DDR besteht
nunmehr seit 10 Jahren.

Zu der Tagung hatten sich etwa 1200 Teilnehmer eingefunden,
darunter sogar Schüler. Namhafte Wissenschaftler von den
verschiedenen Universitäten der DDR sowie aus weiteren 9
europäischen Staaten hielten an diesen 6 Tagen interessante
Referate über ihre neuesten Forschungsergebnisse. Auch von
der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität
Jena nahmen Professoren, Doktoren und Assistenten an dem
wissenschaftlichen Austausch teil und legten ihre Erkennt-
nisse dar.

Anläßlich der Tagung wurde eine Ausstellung unter dem Titel
"Olympiaden Junger Mathematiker - 10 Jahre systematische
Förderung mathematisch talentierter Schüler in der DDR" er-
öffnet. Unter anderem wurden in einem Schaukasten 15 inter-
nationale Schülerzeitschriften für Mathematik gezeigt, unter
denen auch die "WURZEL" vertreten war.

Mathematikerkongreß in Weimar

Ende Juni 1972 fand in Weimar der VI. Internationale Kongreß über die Anwendung der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften statt. 700 Teilnehmer aus über 20 Staaten beteiligten sich hieran. Die Gastgeber berichteten z.B. über die Entwicklung einer automatischen Zeichenanlage (Baupläne usw.), in welcher die EDVA Robotron 300 und der Großkoordinatograph CARTIMAT II des VEB Carl Zeiss eingesetzt werden. Von den Kongreßrednern wurde immer wieder betont, daß bei aller Mathematisierung der Ingenieurwissenschaften die von den Rechnern erzielten Ergebnisse nur Entscheidungshilfen sein können.

Mathematische Modellierung der Wissenschaftsentwicklung

Mathematikern aus Greifswald gelang es, die Beschreibung der allgemeinen Entwicklung der Wissenschaften in ein mathematisches Modell zu fassen, welches sich hauptsächlich Differentialgleichungen bedient und viele Erscheinungen zutreffend darstellt. Ein Ergebnis dieser Modellierung ist es, daß in Zukunft der Wissenschaft weder ein maßloses Wachstum noch eine Stagnation vorauszusagen ist.

Lösungen

(D 33)

L

Wir nehmen an, es gäbe ganze Zahlen a, b, c, d mit

$$62^3 a + 62^2 b + 62c + d = 2 \quad \text{und}$$

$$19^3 a + 19^2 b + 19c + d = 1.$$

Dann ist

$$1 = 2 - 1$$

$$= 62^3 a + 62^2 b + 62c + d - (19^3 a + 19^2 b + 19c + d)$$

$$= (62^3 - 19^3)a + (62^2 - 19^2)b + (62 - 19)c$$

$$= (62 - 19)(62^2 + 62 \cdot 19 + 19^2)a +$$

$$+ (62 - 19)(62 + 19)b + (62 - 19)c$$

$$= 43((62^2 + 62 \cdot 19 + 19^2)a + 81b + c).$$

Da der Klammerausdruck eine ganze Zahl ist, ergibt sich hier ein Widerspruch! Also existieren keine ganzen Zahlen a, b, c, d mit der geforderten Eigenschaft.



A - Anziehender, B - Nachziehender

Zug - Bewegung der Münze von Feld zu Feld

Spielzug - ziehen von A und B

Die Felder seien von n bis 1 durchnummeriert.

Der Anziehende A muß eine Situation schaffen, die es ihm bei Anwendung einer bestimmten Strategie ermöglicht, nach endlich vielen Spielzügen das Feld 2 zu belegen.

Es ist A möglich, auf jeden Spielzug von B so zu reagieren, daß die Zahl der Züge um 4 verringert wird.

B rückt 1 Feld — A muß 3 Felder rücken

B rückt 2 Felder — A muß 2 Felder rücken

B rückt 3 Felder — A muß 1 Feld rücken

Somit ergibt sich: Muß B beim Stande von $4k+1$ offenen Zügen, d.h. Münze auf dem Feld $4k+2$, ziehen, so ist es A nach obiger Strategie möglich, nach k Zügen auf das Feld 2 zu gelangen und B den letzten Zug nach Feld 1 zu überlassen. Der 1. Spielzug ist also entscheidend. A muß die Münze auf ein Feld der Art $4k+2$ rücken. Dies ist bei allen Anfangsstellungen, außer bei

$$n \equiv 2 \pmod{4}$$

möglich. In diesem Fall steht A vor $4k+1$ offenen Zügen und wird, falls B obige Strategie anwendet, verlieren.

Wie kann man besser spielen und jeden Spielverlust ausschalten?

Eckhard Klenk schlägt vor:

"Befindet sich die Münze zu Beginn auf einem Feld der Form $4a+2$, so lasse ich den Gegenspieler beginnen. Ist das nicht der Fall, so beginne ich ..."

Für Einsender von Lösungen zur Beachtung:

Bei n Feldern stehen nur $(n-1)$ Züge offen, d.h.

bei $n \equiv 1 \pmod{4}$ gewinnt A.

Wir haben für jene, die dies nicht berücksichtigten, den Punkt trotzdem vergeben.

(D 39)

L

Es gilt offenbar

$$\lg 2 + \lg 5 = \lg 10 = 1.$$

In Verbindung mit der gegebenen Gleichung

$$\lg 2 \cdot \lg 5 = k$$

ergibt sich folgende quadratische Gleichung

$$(\lg 2)^2 - \lg 2 + k = 0$$

$$\lg 2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 - k}.$$

Da $2 < 10^{1/2}$ und somit $\lg 2 < 1/2$ gilt, entfällt

die Lösung $\frac{1}{2} + \sqrt{1/4 - k}$, und wir erhalten

$$\lg 2 = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - 4k})$$

(D 41)

L

Es seien p_1, p_2, p_3 die drei Primzahlen größer als 5 und d die Differenz der arithmetischen Folge.

Es genügt dann zu zeigen, daß gilt

- (1) d ist gerade und
- (2) d ist durch 3 teilbar.

Da p_1 eine Primzahl größer als 5 ist, ist sie ungerade und überdies nicht durch 3 teilbar.

- (1) Annahme: d ist ungerade.

Hieraus folgt sofort, daß $p_2 = p_1 + d$ gerade ist. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

- (2) Annahme: d ist nicht durch 3 teilbar.

Dann lassen die Zahlen p_1, p_2, p_3 bei Division durch 3 drei verschiedene Reste, denn ließen zwei der Primzahlen den gleichen Rest, so wäre auf Grund der Gleichungen

$$p_1 + d = p_2, \quad p_1 + 2d = p_3, \quad p_2 + d = p_3$$

d durch 3 teilbar. Also läßt eine den Rest 0 und ist durch 3 teilbar. Das ist wieder ein Widerspruch zur Voraussetzung. Demnach muß d gerade und durch 3 teilbar, also durch 6 teilbar sein.

(D 42)

Die Induktion erfolgt am besten über die Summe $a + b$.

L

Induktionsanfang:

Es ist $(0+0)! = 1$ durch $0!0! = 1$ teilbar.

Induktionsschritt:

Für alle a, b mit $a+b = n$ sei die Behauptung richtig. Es ist zu zeigen, daß unter dieser Voraussetzung die Behauptung auch für alle a, b mit $a+b = n+1$ gilt.

Dazu werden zwei Fälle unterschieden:

1. Fall:

Es ist $a = 0$ oder $b = 0$.

Dann gilt aber, daß $(n+1)!$ durch $(n+1)!0! = (n+1)!$ teilbar ist.

2. Fall:

Es ist $a \neq 0$ und $b \neq 0$.

Dann ist wegen $a+b-1 = n$

$(a+b-1)!$ durch $(a-1)!b!$

und $(a+b-1)!$ durch $a!(b-1)!$ teilbar.

Dann ist aber auch

$a(a+b-1)!$ durch $a(a-1)!b! = a!b!$

und $b(a+b-1)!$ durch $ba!(b-1)! = a!b!$ teilbar.

Sind nun zwei Zahlen durch eine dritte teilbar, so ist auch ihre Summe durch diese teilbar; folglich gilt:

$$\begin{aligned} a(a+b-1)! + b(a+b-1)! &= (a+b)(a+b-1)! \\ &= (a+b)! \end{aligned}$$

ist durch $a!b!$ teilbar.

Gut gesagt



K.D. Sinelnikow (ukrainischer Physiker):

"Die Mathematik ist in der modernen Physik nicht nur Werkzeug zum Rechnen; ohne Mathematik ist es unmöglich, die Eigenschaften der Mikrowelt ausreichend genug zu überprüfen."

Epigramm auf dem Grabstein des griechischen
Mathematikers DIOPHANTOS:

"Hier das Grabmal deckt Diophantos. Schauet das Wunder!
Durch des Entschlafenen Kunst lehret sein Alter der Stein.
Knabe zu sein, gewährte ihm Gott ein Sechstel des Lebens;
Noch ein Zwölftel dazu, sproßt auf der Wange der Bart;
Dazu ein Siebentel noch, da schloß er das Bündnis der Ehe;
Nach fünf Jahren entsprang aus der Verbindung ein Sohn.
Wehe das Kind, das vielgeliebte, die Hälfte der Jahre
Hatt' es des Vaters erreicht, als es dem Schicksal erlag.
Drauf vier Jahre hindurch der großen Betrachtung den
Kummer
von sich scheuchend, auch er kam an das irdische Ziel."

Wie alt wurde Diophantos?

I N F O R M A T I O N

Die erste Kybernetik-Enzyklopädie der Welt erscheint jetzt
in Kiew. Das zweibändige Werk ist eine Kollektivarbeit
sowjetischer Wissenschaftler des Instituts für Kybernetik
bei der Akademie der Wissenschaften der Ukraine und Fach-
leuten verschiedener wissenschaftlicher Zentren des Landes.

Im Jahre 1972 ist jemand genau so alt, wie die Quersumme
seines Geburtsjahres angibt. In welchem Jahr wurde er
geboren?

?

Berichtigung

In "Wurzel" 7/8 1972 Seite 111, Zeile 19 muß es natürlich
richtig heißen: "Auszug der Jenenser Studenten 1813".

Mathematik und Medizin verbindendes Element

Wenn Sie unseren Fachartikel aufmerksam studiert haben, wird es Ihnen nicht schwerfallen, dieses durch seine Schlüsselwörter 17. waagerecht und 5. senkrecht auf die Verbandstheorie bezogene Kreuzworträtsel zu lösen.
Wir wünschen Ihnen viel Spaß dabei!

W a a g e r e c h t :

1. Erfinder des Banachraumes
6. Lebensabschnitt einer Alternative
7. Rasantes Element
8. Uraltes Gebirge in der SU
9. Ursprungsland des Chinin-Natriums
11. Kompakter linearer Operator (Abk.)
13. Griechisches i ohne Punkt
16. Verkürzter Zeitmesser
17. Mathematik und Medizin verbindendes Element
19. Dem Russischen nicht geläufiger Buchstabe
20. Meistergrad eines berühmten italienischen Dichters
21. Maßeinheit für Stars
23. Geometrischer Ort eines bekannten Senders
27. Eigenschaft eines beschränkten Raumes

S e n k r e c h t :

1. Bestandteil eines Nabla-Hüllenoperator
2. Alttestamentarische Abkürzung
3. Nichtprimzahl
4. Treibstoff einer Starrakete
5. Nicht ganz ordentlicher Verband
6. Sammlung der Arche Noah
10. Kurzname für Inge-Petra
12. Bei Neumond abwesende Göttin
14. Kopfteile mehrerer Nähnadeln
15. Bewegungsform eines Fahrstuhls
18. Wesentlicher Bestandteil eines emeritierten Majors
21. Erzieherin der Ajaner
22. Sechzehnter Buchstabe des sächsischen Alphabets
24. Ungebräuchlicher Ausdruck beim Romme
25. Gestürzter Konsonant
26. Linksbeschränkter Tangens

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung“ der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Leiter: Reinhard Klette

Redaktion: Werner Nagel (Chefredakteur); U. Heuke, H. Fischer, R. Lorenz

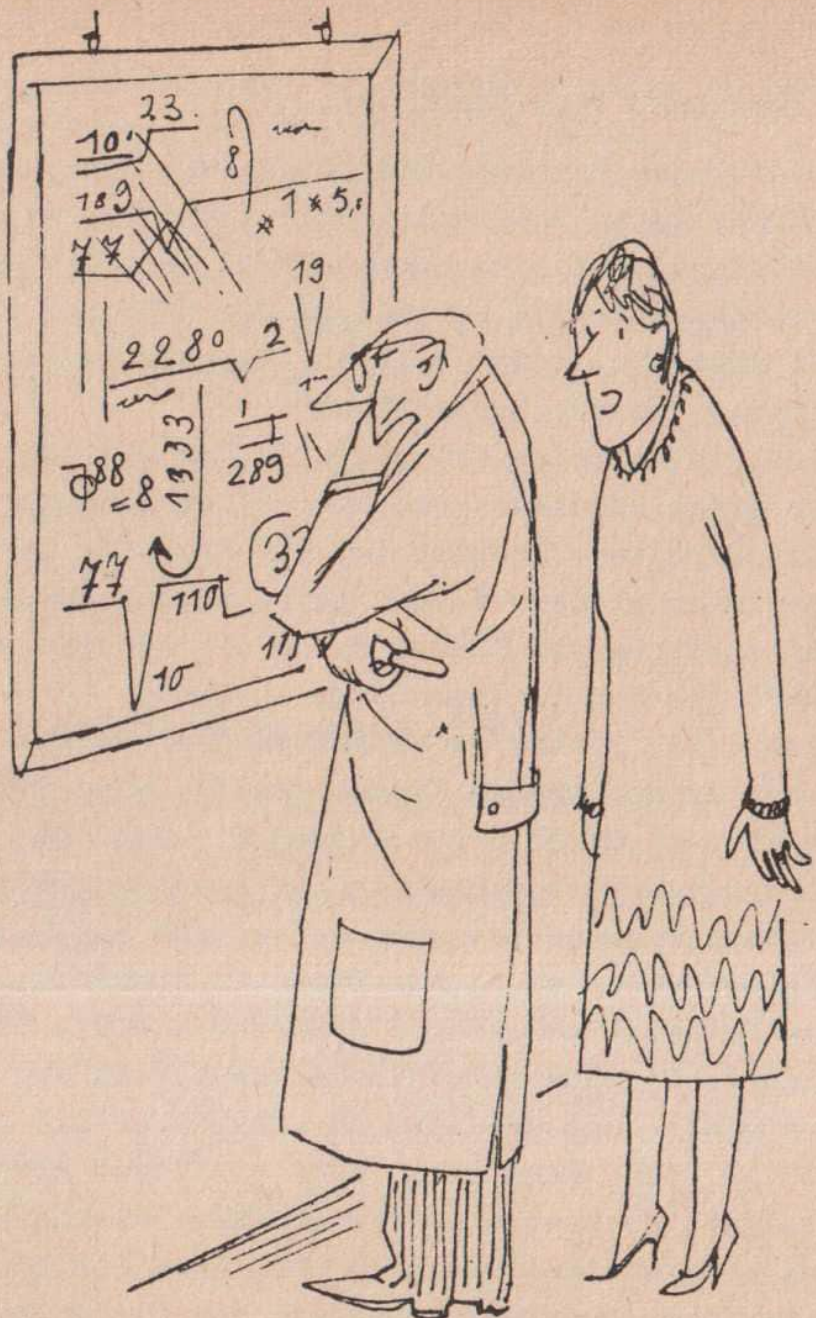
Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

Anschrift: WURZEL

69 Jena

Helmholtzweg 1

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45



„An was denkst du, Liebster?“

11

72

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
Jugendobjekt Studien-
vorbereitung der
Sektion Mathematik
an der Fr.-Schiller-
Universität Jena

Was uns beschäftigt ...

... ist das Problem: Wie können wir unsere Leser - also Sie - stärker daran interessieren, sich intensiv mit den von uns veröffentlichten Fachartikeln zu beschäftigen? Seien Sie ehrlich! Wieviele Artikel in der "WURZEL" haben Sie bisher von vorn bis hinten gelesen; durch wieviele haben Sie sich richtig "hindurchgearbeitet"?

Sind die Beiträge "zu schwer"? Nun, wir kennen die Anforderungen eines Studiums, und wir wollen Ihnen helfen, sich darauf vorzubereiten. Deshalb ist das Ergebnis der Diskussionen bei uns immer wieder: Niveau beibehalten, durch gute methodische Aufbereitung des Themas durch die Autoren und besseres "Beispiel" die Schüler zum Lesen anregen.

Wissen Sie nicht, "wozu das alles"? - Eine Gegenfrage: War Ihnen in der ersten Klasse bewußt, wozu Sie das kleine Einmaleins lernten? Heute wissen Sie das. Die Frage nach der Notwendigkeit und praktischen Anwendungsmöglichkeiten mathematischen Wissens ist aber selbst für uns Studenten hin und wieder schwer zu beantworten. In dieser Beziehung haben es die Mathematiker sicher schwerer als die Vertreter mancher anderer Wissenschaftsdisziplinen. Wenn ein Mediziner in der Krebsforschung arbeitet oder Chemiker ein neues Element entdecken, dann kann sich jeder zumindest etwas darunter vorstellen, auch wenn er die genauen Zusammenhänge nicht kennt. Was aber stellen Sie sich vor, wenn Sie hören, daß ein Mathematiker über Erkennbarkeit von Mengen rekursiver Funktionen nachdenkt?

Es gehört also eine ganze Menge scheinbar unmotivierter Vorarbeit dazu, wenn man praktische Bezugspunkte seines mathematischen Wissens verstehen will. Versuchen Sie einmal, sich in Zukunft beim Lernen - insbesondere auch beim Lesen der "WURZEL" - nicht zuerst die Frage zu stellen: Wozu brauche ich das später einmal?

Überlegen Sie sich immer: Wie kann ich das, was ich schon weiß, dazu anwenden, das Neue zu verstehen? Dann werden Sie auch rückschauend feststellen können, daß Sie nichts "umsonst" gelernt haben.

Neben unseren Versuchen, die "WURZEL" für Sie attraktiver zu gestalten (Diesbezüglich würden wir uns auch gern durch Sie anregen lassen.), wird uns also immer wieder nur der Appell an Sie bleiben: Versuchen Sie bitte, von jedem Artikel so viel wie möglich zu verstehen, so viel wie möglich für sich herauszulesen. Es ist eine oft bestätigte Erfahrung, daß man beim Studium vieles leichter versteht, wenn man schon einmal davon gehört hat.

Je mehr Sie wissen, um so mehr Zusammenhänge werden Sie erkennen und um so interessanter wird für Sie die Beschäftigung mit der Mathematik werden.

Denken Sie einmal darüber nach!

Einführung in die Verbandstheorie (II)

Nach Satz 2 entstehen aus Verbänden durch Einführung der Relation $\leq$ halbgeordnete Mengen, in denen je zwei Elemente sowohl ein Infimum als auch ein Supremum besitzen. Wir wollen nun den umgekehrten Weg gehen.

Satz 3: Ist V eine bez. $\leq$ halbgeordnete Menge, in der je zwei Elemente sowohl ein Infimum als auch ein Supremum besitzen, so ist $[V, \cap, \cup]$ ein Verband, wobei die Operationen $\cap$ und $\cup$ durch

$$x \cap y =_{\text{Df}} \inf\{x, y\} \quad \text{und}$$

$$x \cup y =_{\text{Df}} \sup\{x, y\}$$

definiert sind.

Beweis: a) Die Operationen $\cap$ und $\cup$ sind assoziativ. Wir beschränken uns auf den Nachweis der Assoziativität der Operation $\cap$. Der Nachweis der Assoziativität von $\cup$ erfolgt ganz analog.

Wir setzen $u =_{\text{Df}} (a \cap b) \cap c = \inf\{\inf\{a, b\}, c\}$.

Daraus folgt nun

$$u \leq \inf\{a, b\} \text{ und } u \leq c.$$

Es ist aber $\inf\{a, b\} \leq a$ und $\inf\{a, b\} \leq b$.

Wegen der Transitivität von $\leq$ haben wir daher

$$u \leq a \text{ und } u \leq b.$$

Mit $u \leq b$ und $u \leq c$ ist auch $u \leq \inf\{b, c\}$.

Daraus und aus $u \leq a$ folgt schließlich

$$u \leq \inf\{a, \inf\{b, c\}\}.$$

Analog beweisen wir $\inf\{a, \inf\{b, c\}\} \leq \inf\{\inf\{a, b\}, c\}$.

Damit ist die Assoziativität von $\cap$ bewiesen.

b) Die Kommutativität von $\cap$ und $\cup$ ist offensichtlich.

c) Auch die Verschmelzungsgesetze gelten, denn wegen

$$\inf\{a, b\} \leq a \leq \sup\{a, b\} \text{ gilt}$$

$$a \cap (a \cup b) = \inf\{a, \sup\{a, b\}\} = a \quad \text{und}$$

$$a \cup (a \cap b) = \sup\{a, \inf\{a, b\}\} = a.$$

Damit ist Satz 3 bewiesen.

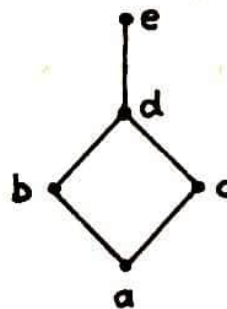
Als Folgerung aus den Sätzen 2 und 3 erkennen wir, daß wir am Beginn unserer Betrachtungen über Verbandstheorie einen Verband auch als eine halbgeordnete Menge, in der je zwei Elemente sowohl ein Infimum als auch ein Supremum besitzen, hätten definieren können. Beide Definitionen sind vollkommen gleichwertig.

Mit Hilfe der ordnungstheoretischen Beschreibung der Verbände erhalten wir nun die Möglichkeit, die Verbände sehr übersichtlich graphisch darzustellen. Und zwar werden wir auf einer Fläche ein Element a des Verbandes $\mathfrak{B}$ genau dann oberhalb eines Elementes b des Verbandes $\mathfrak{B}$ anordnen, wenn $b \leq a$. Dann werden die unmittelbar benachbarten Elemente (Das sind solche Elemente, die bez. $\leq$ in Relation stehen, zwischen denen jedoch bez. $\leq$ kein drittes Element steht.) durch Linien verbunden. Wir betrachten den Verband mit der Grundmenge $\{a, b, c, d, e\}$ und der Relation $\leq$, die gegeben ist durch

$$a \leq a, b \leq b, c \leq c, d \leq d, e \leq e, a \leq b, a \leq c, a \leq d, a \leq e, \\ b \leq d, b \leq e, c \leq d, c \leq e, d \leq e.$$

Dieser Verband wird durch die nebenstehende Graphik dargestellt:

Wir wollen nun anhand einiger uns schon bekannter Verbände die Relation $\leq$ betrachten und eine graphische Darstellung geben.



Beispiel 6: Bei dem Potenzmengenverband $[P(M), \cap, \cup]$ einer Menge M ist die Relation $\leq$ identisch mit der mengentheoretischen Inklusion $\subseteq$, denn für zwei Mengen A und B gilt $A \subseteq B$ genau dann, wenn $A \cap B = A$ ist.

Graphische Darstellung einiger einfacher Potenzmengenverbände:

a) leere Menge:

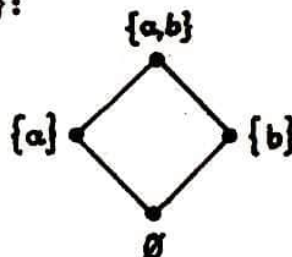
$\emptyset$

b) Einermenge $\{a\}$:

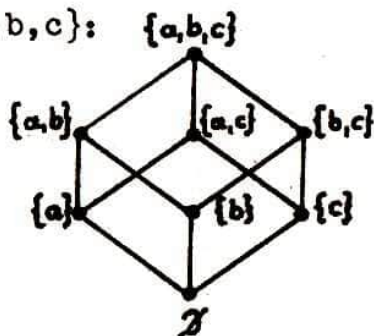
$\{a\}$



c) Zweiermenge $\{a, b\}$:



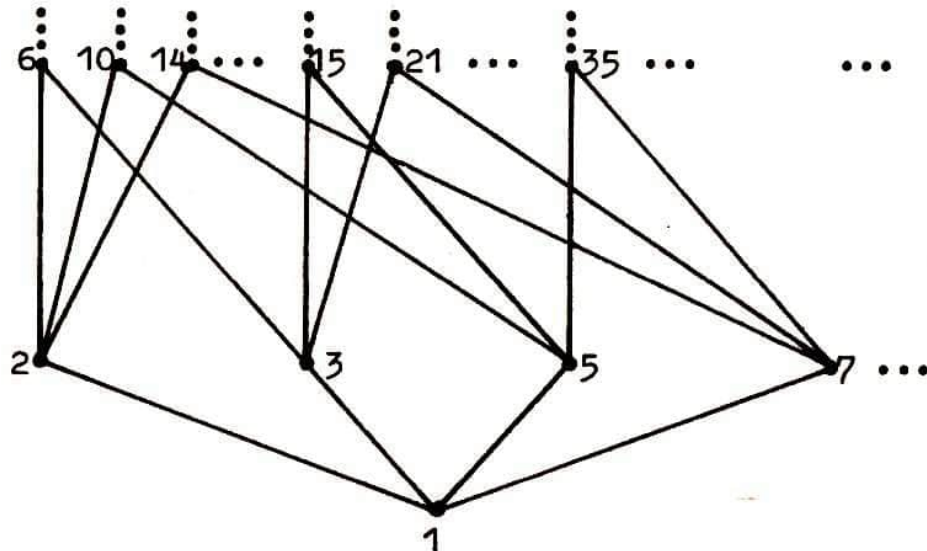
d) Dreiermenge $\{a, b, c\}$:



Bemerkung: Wie man bemerkt, ist eine solche Darstellung eines Potenzmengenverbandes einer Menge mit n Elementen identisch mit einer bestimmten Projektion eines n -dimensionalen Würfels in die Ebene. (Über n -dim. Würfel siehe "WURZEL", Heft 6/72.) Auf die tieferen Ursachen dafür wollen wir hier nicht näher eingehen.

Beispiel 7: Im Verband $[Nz, ggT, kgV]$ ist die Relation $\leq$ identisch mit der Relation "Teiler sein", denn die natürliche Zahl m ist genau dann Teiler der natürlichen Zahl n , wenn $ggT(m, n) = m$ ist.

Graphische Darstellung:



Beispiel 8: Im Verband $[B^A, \leq, \cup]$ gilt für beliebige $f, g \in B^A$ genau dann die Beziehung $f \leq g$, wenn für alle $x \in A$ die Ungleichung $f(x) \leq g(x)$ gilt.

Wir spezialisieren die Mengen A und B :

1) Es seien $A =_{\text{Def}} \{x, y\}$ und

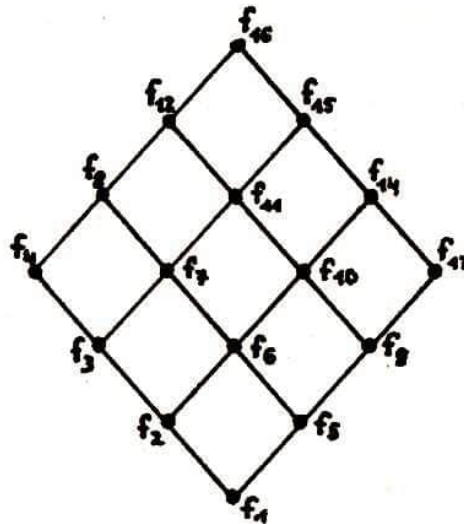
$B =_{\text{Def}} \{a, b, c, d\}$,

wobei $a \leq b \leq c \leq d$ ist.

Die Menge B^A umfaßt genau 16 Funktionen:

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
x	a	a	a	a	b	b	b	b	c	c	c	c	d	d	d	d
y	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d

Graphische Darstellung:



2) Es seien $A \stackrel{\text{Def}}{=} \{x, y, z\}$ und

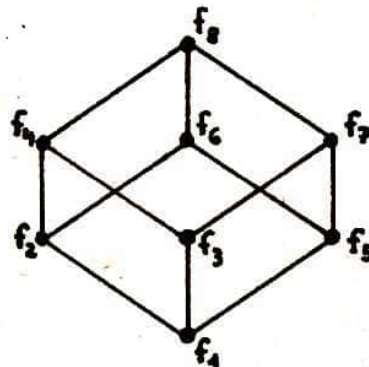
$B \stackrel{\text{Def}}{=} \{a, b\}$,

wobei $a \leq b$ ist.

Die Menge B^A umfaßt genau 8 Funktionen:

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
x	a	a	a	a	b	b	b	b
y	a	a	b	b	a	a	b	b
z	a	b	a	b	a	b	a	b

Graphische Darstellung:



Alle hier aufgeführten Beispiele sind Behauptungen, die der Leser sehr einfach nachweisen kann.

Betrachten wir die Graphik des letzten Beispiels etwas genauer, so bemerken wir, daß sie der Graphik des Potenzmengenverbandes einer dreielementigen Menge gleicht. In einem solchen Fall sprechen wir davon, daß diese beiden Verbände isomorph (strukturgleich) sind. Zwei Verbände, denen ganz verschiedene Objekte zugrunde liegen, können also dennoch isomorph sein. Vom Standpunkt der Algebra betrachtet man zwei isomorphe Strukturen als nicht wesentlich voneinander verschieden.

Damit wollen wir unseren kleinen Ausflug in das Reich der Verbände beenden. Noch vieles gibt es da zu entdecken, und dem interessierten Leser, der gern noch etwas mehr über Verbände wissen möchte, sei das Buch von Gabor Szász empfohlen, das den Titel "Einführung in die Verbandstheorie" trägt und 1962 in der Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig erschienen ist.

Klaus Wagner

Wiss. Assistent im Bereich Kybernetik

Der Autor dieses Artikels, Klaus Wagner, zählt zu den Nachwuchskräften unserer Sektion. Das Studium schloß er 1971 mit sehr guten Leistungen vorfristig ab. Seine Diplomarbeit wird in der renommierten sowjetischen Sammelreihe "Problemi Kibernetiki" veröffentlicht.

Auf fachlichem Gebiet arbeitet er zur Zeit unter Betreuung von Dr. Lindner an Problemen der Erkennung von mehrdimensionalen Zeichen.

Für seine hohen fachlichen Leistungen erhielt Klaus Wagner anläßlich der Sektionsfeierstunde zum 7. Oktober eine Prämie. Im nächsten Jahr wird er für seine berufliche Fortbildung ein Zusatzstudium in der Sowjetunion aufnehmen.

I N F O R M A T I O N

Im Moskauer Werk "Chromatron" werden Farbbildröhren automatisch hergestellt. Hierzu wurden eigens Prozeßrechner der dritten Generation entwickelt, welche die gesamte Fertigung überwachen, messen, kontrollieren und steuern helfen. Das geschieht über fast 8000 elektronische Augen, die an den unterschiedlichsten Punkten der Fertigung angebracht sind und ihre Informationen auf direktem Wege zu einem Rechner übermitteln. Diese Rechner sind untereinander verbunden, sind gewissermaßen Außenstellen eines zentralen Rechenzentrums.

Preisaufgaben 11/72

- (D 55) Diese Aufgabe bezieht sich auf den Artikel
② "Einführung in die Verbandstheorie".

Gilt für die Elemente $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$
eines Verbandes

$a_i \leq b_j$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, m$,
so ist auch

$$\bigcup_{i=1}^n a_i \leq \bigcap_{j=1}^m b_j.$$

Bemerkung:

Es sei $\bigcup_{i=1}^n a_i =_{\text{Df}} a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_n$

und $\bigcap_{j=1}^m b_j =_{\text{Df}} b_1 \cap b_2 \cap \dots \cap b_m.$

- (D 56) Man beweise, daß für alle natürlichen Zahlen n die

①

Ungleichung $\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}$
gilt.

- (D 57) Unter allen Parallelogrammen gleichen Flächeninhaltes
① bestimme man das mit minimaler großer Diagonale.

- (D 58) Seien R der Radius einer Kugel, die einer vierseiti-
② gen Pyramide umschrieben ist, und r der Radius der
der Pyramide einbeschriebenen Kugel.

Man zeige, daß dann

$$\frac{R}{r} \geq \sqrt{2} + 1 \quad \text{gilt.}$$

- (D 59) Man zeige, daß es unter 39 aufeinanderfolgenden na-
② türlichen Zahlen eine gibt, deren Quersumme durch 11
teilbar ist.

- (D 60) Prove that the equation $x^3 + y^3 + 1 = 3xy$ has one
① and only one solution $x = 1$ and $y = 1$ in nonnega-
tive integers x, y .

Für jeden vollständigen Lösungsweg erhält der Einsender einen bzw. zwei Wertpunkte. Die Anzahl ist bei jeder Preisaufgabe unter der laufenden Nummer angegeben; für 15 Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch.

Sollten pro Monat mehr als drei Einsender 15 Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges). Falls ein Besitzer von 15 Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum Ende des darauffolgenden Monats unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an unsere Adresse einzuschicken.

Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungen bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und mit der Klassenstufe versehen sein müssen. Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

Gut gesagt

Pafnuti L. Tschebyscheff (1821 - 1894)

Mathematik versteht er als "Wissenschaft von den Größen mit ihren offenkundigen Eigenschaften. Diese Eigenschaften haben einen konkreten Sinn; jede Beziehung zwischen mathematischen Symbolen entspricht einer Beziehung zwischen realen Dingen. Eine mathematische Überlegung ist gleichbedeutend mit einem Experiment von beliebig großer Genauigkeit, welches unbeschränkt oft wiederholbar ist, und sie muß zu einer logisch und sachlich fehlerfreien Folgerung führen."

+ BÜCHERMARKT + BÜCHERMARKT + BÜCHERMARKT + BÜCHERMARKT +

Wir stellen vor:

Dr. Günter Asser: "Einführung in die Mathematische Logik I"

Will man Mathematik oder sonst irgendeine Wissenschaft "sauber" betreiben (d.h. eben wissenschaftlich), so muß man logisch denken, muß die Gesetze der Logik - bewußt oder unbewußt - anwenden. Einige dieser Gesetze "hat man im Gefühl", sie sind einem selbstverständlich. Die meisten wissen auch, was eine Aussage ist. Dennoch, um solche Gesetze und Begriffe für wissenschaftliches Arbeiten verwendbar zu machen, müssen sie in einer unmißverständlichen und widerspruchsfreien Theorie formuliert und hergeleitet werden.

Der Autor bedient sich der Sprache und der Methoden der

Mathematik (Was wäre besser dazu geeignet?), um von dem, was man im Gefühl hat, zu abstrahieren und auf der abstrakteren Ebene zu neuen Ergebnissen zu kommen. Konkretisiert man diese allgemeinen Ergebnisse wieder, findet man z.B. wichtige Beweismethoden. (wie die Kontraposition).

Wesentlich für die mathematische Denkweise ist auch der Begriff der Normalform: Oftmals ist es so, daß ein und derselbe Sachverhalt auf unterschiedliche Weise beschrieben werden kann. Dann ist es für viele Probleme wichtig, daß man eine Beschreibung als "normal" definiert und alle anderen Formen dahin überführt.

Die mathematische Logik ist für die Mathematik grundlegend, andererseits schon für Schüler durchaus verständlich. Deshalb sind zumindest die ersten Kapitel dieses Buches bereits im Studienplan des ersten Semesters enthalten.



Aus dem Inhalt:

- Wahrheitswerte
- Aussagen des klassischen zweiwertigen Aussagenkalküls
- wichtige aussagenlogische Identitäten
- Normalformentheorie
- Ableitbarkeit im Aussagenkalkül

Die Neuauflage des Teiles I erschien 1972 in der Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig zum Preis von 11,25 M.

Der Teil II, der den Prädikatenkalkül der ersten Stufe behandelt, wurde ebenfalls in diesem Jahr herausgegeben.

Wo steckt der Fehler?

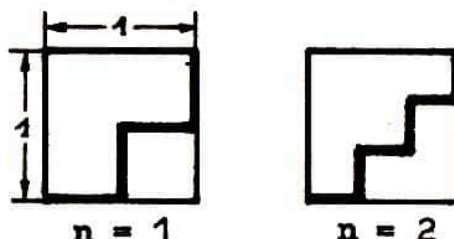
I. Beh.: 1 ist die größte natürliche Zahl!

I. "Beweis": Die größte natürliche Zahl kann nur eine sein, deren Quadrat (das ja wieder eine natürliche Zahl ist) nicht größer als sie ist. Demnach kommen nur 0 und 1 in Frage, unter denen 1 die größte ist.

II. Wir betrachten ein Einheitsquadrat, dessen Diagonale durch Treppen mit Stufen der Höhe

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$$

angenähert wird:



Die Länge der Treppe beträgt immer 2 (Summe der waagerechten Abschnitte = Summe der senkrechten Abschnitte = 1). Im Grenzfall ($n \rightarrow \infty$) strebt die Treppe gegen die Diagonale.

Daraus folgt: Die Länge der Diagonalen im Einheitsquadrat beträgt 2!



Gut gesagt

"Die Natur ist ein Buch, das in der Sprache der Mathematik geschrieben ist."

Galileo Galilei (1564 - 1642)

INFORMATION

Der Bau elektronischer Datenverarbeitungsanlagen nahm in den vergangenen Jahren in der DDR einen sehr erfolgreichen Verlauf und hat sich der Weltspitze wesentlich genähert. Besonders erfolgreiche Sektoren sind:

- Datenfernübertragungen
- die automatische Produktionsvorbereitung und -steuerung
- der Einsatz von Prozeßrechnern

Das bedeutendste Unternehmen hierbei ist der VEB Robotron Dresden mit 3000 Mitarbeitern und einem Großforschungszentrum mit 1000 Mitarbeitern. Dieser Betrieb stellte bis 1971 300 Robotron 300 her, die je nach Ausstattung mit 1 bis 2 Mio Mark gehandelt werden. Mit dem neuentwickelten Robotron 21 wird erstmals in unserer Republik ein Computer der 3. Generation hergestellt.

Lösungen

(D 36)

Satz 2 - Beweis:

L

Nach Satz 1 sind auf W_i genau $\binom{n}{i-1}$ Punkte eingezeichnet, deren entsprechende Mengen genau $i-1$ Elemente enthalten. Diese Mengen enthalten genau je

$\binom{i-1}{i-2} = i-1$ verschiedene Untermengen mit $i-2$ Elementen, welchen jeweils ein Punkt auf W_{i-1} entspricht.

Mithin entstehen genau $(i-1)\binom{n}{i-1}$ Verbindungsstrecken zwischen W_i und W_{i-1} .

(D 37)

Gesucht sind also alle Zahlen $10a + b$ mit ganzen Zahlen a, b , $0 \leq b \leq 9$ und $1 \leq a \leq 9$, für die

$$ab \mid 10a + b \text{ gilt, d.h.,}$$

für die es ganze Zahlen k mit

$$10a + b = kab \quad (1)$$

gibt.

Die Gleichung (1) läßt sich auch in der Form

$$10a = b(ka-1) \quad (1')$$

darstellen. Aus (1') folgt sofort $a \mid b$, denn der größte gemeinsame Teiler der Zahlen a und $ka-1$ ist 1, andererseits ist ja $a \mid b(ka-1)$.

$a \mid b$ bedeutet aber, daß es eine ganze Zahl l mit $b = al$ gibt.

Dann folgt aus (1') weiter $l \mid 10$ nach Einsetzen von la für b . Also kann l einen der vier Werte 1, 2, 5, 10 annehmen. Der letzte scheidet aber wegen $a \geq 1$ und $b \leq 9$ schon aus. Es bleiben also die folgenden drei Fälle:

1. $l = 1$

Hier ergibt sich $ka = 11$, und es existiert genau eine Lösung: $k = 11$ und $a = 1$.

Aus $a = 1$ und $l = 1$ folgt sofort $b = 1$, d.h.,

die Zahl 11 erfüllt die Forderungen der Aufgabe.

2. 1 = 2

Hier ergibt sich $ka = 6$, und es existieren die Lösungen:

$$k_1 = 6, \quad a_1 = 1;$$

$$k_2 = 3, \quad a_2 = 2;$$

$$k_3 = 2, \quad a_3 = 3;$$

$$k_4 = 1, \quad a_4 = 6.$$

Für die entsprechenden b_i erhält man

$$b_1 = 2,$$

$$b_2 = 4,$$

$$b_3 = 6,$$

$$b_4 = 12 \text{ (scheidet also aus).}$$

Man erhält also die Zahlen 12, 24, 36.

3. 1 = 5

Hier ergibt sich $ka = 3$, und es existieren die Lösungen:

$$k_1 = 3, \quad a_1 = 1;$$

$$k_2 = 1, \quad a_2 = 3.$$

Für die b_i erhält man hier $b_1 = 5$,

$$b_2 = 15 \text{ (scheidet also aus).}$$

Da die Bedingungen für a und b alle notwendig sind, gibt es außer den Zahlen 11, 12, 15, 24, 36 keine weiteren Lösungen der gestellten Aufgabe.

(D 43)

L

Die Behauptung der Aufgabe wird mittels vollständiger Induktion bewiesen.

$n = 0$:

$$1 \cdot x + \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) y = 1$$

$$x = 1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) y$$

Wie man leicht sieht, sind $x = 1$, $y = 0$ die einzigen ganzen Zahlen, die die Gleichung erfüllen.

(Produkt und Differenz einer irrationalen und einer ganzen Zahl ungleich 0 sind stets wieder irrational.)

Induktionsschluß von n auf n+1:

Bezeichnung: $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = a.$

Induktionsvoraussetzung:

$$a^n x + a^{n+1} y = 1$$

besitzt genau eine Lösung in ganzen Zahlen x und y.

Diese Lösung bezeichnen wir mit x_n, y_n .

$$a^{n+1} u + a^{n+2} v = 1,$$

$$a^{n+1} u + a^{n+2} v = a^n x + a^{n+1} y,$$

$$a^2 v + a(u-y) - x = 0,$$

o.B.d.A. $v \neq 0$ (Mit $v = 0$ kann keine Lösung entstehen.),

$$a^2 + a\left(\frac{u-y}{v}\right) - \frac{x}{v} = 0.$$

Andererseits ist a Lösung der Gleichung:

$$z^2 + z - 1 = 0.$$

Aus dem Koeffizientenvergleich erhalten wir:

$$v = +x, \quad u = y + x.$$

Wir zeigen jetzt, daß $v_{n+1} = +x_n$ und $u_{n+1} = y_n + x_n$

Lösungen unserer Gleichung sind:

$$a^{n+1} (y_n + x_n) + a^{n+2} x_n = a^{n+1} y_n + a^n a(1+a) \cdot x_n =$$

$$a^{n+1} y_n + a^n x_n = 1 \quad (\text{laut Induktionsvor.}),$$

d.h., es gibt ganzzahlige v_{n+1}, u_{n+1} , da x_n und y_n ganzzahlig sind, die die Gleichung erfüllen.

Eindeutigkeit:

Auf analoge Art erhält man, daß $x = v$ und $y = u-v$ die Gleichung mit der n-ten Potenz lösen müssen. x_n und y_n sind jedoch eindeutig bestimmt. Gäbe es also jetzt ganze Zahlen $v'_{n+1} \neq v_{n+1}$ oder $u'_{n+1} \neq u_{n+1}$, so erhielte man ein Paar ganzer Zahlen x'_n, y'_n mit $x'_n \neq x_n$ oder $y'_n \neq y_n$, die die Gleichung mit der n-ten Potenz lösen. Dies wäre ein Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung, d.h., es existiert eine eindeutig bestimmte Lösung.

Auflösung des Kreuzworträtsels zur Verbandstheorie:

Waagerecht: 1. Banach, 6. Alter, 7. Ra, 8. Ural, 9. China, 11. Klo, 13. Iota, 16. Ur, 17. Verband, 19. Ha, 20. Dan, 21. Ar, 23. Jerewan, 27. Eng.

Senkrecht: 1. Blah, 2. At, 3. Neun, 4. Arrak, 5. Halbordnung, 6. Archiv, 10. Intra, 12. Luna, 14. Oehre, 15. Ab, 18. a.D., 21. Aja, 22. Be, 24. Re, 25. We, 26. An.



kleine KNOBELEIEN

1. Gleiche Buchstaben entsprechen gleichen Ziffern:

$$\begin{array}{r} \text{F O R T Y} \\ + \quad \text{T E N} \\ + \quad \text{T E N} \\ \hline \text{S I X T Y} \end{array}$$

2. Man zeige: Eine Zahl im Dezimalsystem bestehe aus einer Folge von $2n$ Einsen. Subtrahiert man hiervon eine Zahl, die aus n Zweien besteht, so erhält man das Quadrat einer Zahl, die aus n Dreien besteht.

Wir freuen uns darüber, daß ...

... uns der profilierte Karikaturist Henry Büttner freundlicherweise eine seiner Zeichnung zur Veröffentlichung zur Verfügung stellte.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung“ der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Leiter: Reinhard Klette

Redaktion: Werner Nagel (Chefredakteur); U. Heuke, H. Fischer, R. Lorenz

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

Anschrift: WURZEL

69 Jena

Helmholtzweg 1

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45



50 Jahre UdSSR

12

72

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
Jugendobjekt Studien-
vorbereitung der
Sektion Mathematik
an der Fr.-Schiller-
Universität Jena

Zum 50. Jahrestag...

... der Sowjetunion will auch die "WURZEL" einen Beitrag leisten. Herr Dr. Lindner, der unseren Lesern bereits durch seine Artikel zu Themen der Kybernetik bekannt ist, schrieb für Sie über bedeutende sowjetische Wissenschaftler. Er konnte dabei von seinen eigenen umfangreichen Eindrücken ausgehen.

Kybernetik in der UdSSR

Sowjetische Forschung auf dem Gebiet der Mathematischen Kybernetik - das ist heute, wie in so vielen Disziplinen, Synonym für Weltspitzenleistung, für riesiges Wissenschaftspotential, eng verknüpft mit solch weltbekannten Zentren wie der Staatlichen Moskauer Universität, dem Rechenzentrum der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Moskau, dem Institut für Kybernetik der Ukrainischen Akademie der Wissenschaften, Kiew, dem Institut für Mathematik der Sibirischen Abteilung der Akademie der Wissenschaften, Nowosibirsk, der Staatlichen Rigaer Universität und nicht zu trennen vom Wirken namhafter Persönlichkeiten wie der Professoren A. A. Markow, S. W. Jablonski, O. B. Lupanow, J. I. Shurawljos, W. M. Gluschkow, B. A. Trachtenbrot, J. M. Barsdin u. a. m.

Zu allen Zeiten hat der Sowjetstaat sein Augenmerk auf die Entwicklung der Wissenschaften gerichtet. Am deutlichsten tritt wohl die Schlagkraft und Wirksamkeit dieser Wissenschaftspolitik in Zeiten des stürmischen Umbruchs zutage: Als sich z.B. zu Anfang der 50-er Jahre die Bedeutung der Kybernetik und diskreten Mathematik für die Beherrschung verschiedenster Formen der Verarbeitung, Speicherung und Übertragung von Informationen abzuzeichnen begann, formierte sich nicht zufällig um den berühmten Gelehrten A. A. Ljapunow ein Kollektiv von Mathematikern aus den verschiedensten Disziplinen und mit unterschiedlichsten Voraussetzungen. Gesellschaftlicher Auftrag und Ziel dieser Wissenschaftler waren klar: dieser neuen Wissenschaft in kürzester Frist zum Durchbruch zu verhelfen. Die eingangs - äußerst lückenhaft - aufgeführte Palette von "Tochterzellen" der Schule Ljapunows, die inzwischen auf 25 Bände angewachsene weltbekannte Sammlung von Forschungs-

berichten "Probleme der Kybernetik", Journale wie "Kybernetik" (Kiew), "Diskrete Analysis" (Nowosibirsk) u. a. m., und nicht zuletzt eine Fülle monographischer Werke legen beredtes Zeugnis vom Erfolg der Arbeit in den vergangenen 20 Jahren ab.

Der Autor hatte verschiedentlich Gelegenheit - zuletzt während eines zweijährigen Zusatzstudiums an der Staatlichen Moskauer Universität - einige bereits erwähnte Persönlichkeiten kennenzulernen. Vieles ließe sich berichten über den großen Einsatz dieser Menschen bei der Heranbildung neuer Wissenschaftler-Generationen, über ihre verantwortungsbewußte Arbeit als Wissenschaftsorganisatoren und über ihre derzeitigen wissenschaftlichen Projekte.

Nicht weniger interessant dürfte es jedoch sein, etwas über die mathematischen Verdienste einiger der genannten Gelehrten zu erfahren. Damit könnten wir gleichzeitig in bescheidenem Rahmen den Beweis dafür antreten, daß nicht nur neue Ergebnisse der Mathematik schlechthin entstehen, sondern sogar von der Gesellschaft gefordert und honoriert werden.

Zu diesem Zweck wenden wir uns einem Gegenstand zu, der in den hier gegebenen Grenzen hinreichend genau beschrieben werden kann: die Realisierung Boolescher Funktionen in logischen Netzen. Wir verweisen auf unseren Artikel "Herr Ambrosius und die Booleschen Funktionen" ("WURZEL", Nr. 12/67), weiterhin auf "Schaltungen aus logischen Bauelementen" ("WURZEL", Nr. 9/10/71). Dort wurde bereits deutlich, daß man jede n -stellige Boolesche Funktion f^n (d.h. jede n -stellige Funktion mit Argumenten und Werten in $\{0,1\}$) aus den Funktionen

$$\text{et}(x_1, x_2) =_{\text{Df}} \min(x_1, x_2) \quad \text{und}$$

$$\text{non}(x) =_{\text{Df}} 1-x$$

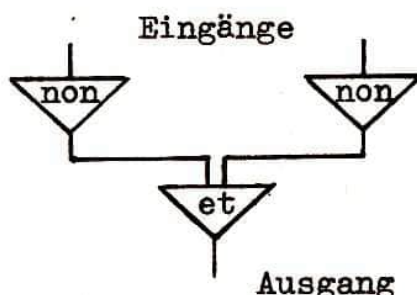
im wesentlichen durch Substitution erzeugen kann. Jede dieser Substitutionen kann man naturgemäß deuten als Kopplung gewisser Boolescher Schaltelemente (solcher nämlich, die unsere Substitution realisieren).

So kann man z.B. die Funktion f^2 , für die $f^2(x_1, x_2) = 1$ genau dann gelte, wenn $x_1 = x_2 = 0$, darstellen als

$f^2(x_1, x_2) = \text{et}(\text{non}(x_1), \text{non}(x_2))$; die zugehörige Schaltung aus den Elementen



wäre daher wie folgt beschaffen:



Unmittelbar aus der Praxis stammt nun das folgende Problem: Dem Konstrukteur ist eine gewisse Menge M "elementarer" Boolescher Bauelemente gegeben. Er hat zu entscheiden, ob diese Menge vollständig in dem Sinne ist, daß man jede Boolesche Funktion durch Schaltungen aus diesen Elementen realisieren kann. Es sei bemerkt, daß ein Probiervverfahren deshalb ausscheidet, weil die Menge aller denkbaren Schaltungen unendlich ist. Welchen Wert daher ein effektives, mathematisch begründetes Verfahren für die Entscheidung der Vollständigkeit von M hat, dürfte in diesem Zusammenhang klar werden.

S. W. Jablonski formulierte und bewies in seiner 1953 an der Staatlichen Moskauer Universität verteidigten Dissertation die folgenden entscheidenden Sätze:

1. Zu der Menge aller Booleschen Funktionen gibt es genau fünf "fast-vollständige" Mengen, das sind solche, bei denen die Hinzunahme eines beliebigen weiteren Elementes bereits genügt, um sie vollständig zu machen. Diese Mengen sind effektiv beschrieben.
2. Eine Menge M ist genau dann vollständig, wenn sie in keiner dieser fast-vollständigen Mengen enthalten ist.
3. Jede vollständige Menge enthält eine höchstens vierelementige Teilmenge, die ebenfalls vollständig ist.

Wir überlassen es dem Leser, den Wert dieser Sätze für unser eingangs genanntes Problem zu erkennen.

In den nachfolgenden Arbeiten Jablonskis finden sich eine Fülle interessanter Verallgemeinerungen dieser Probleme sowie ideenreiche Lösungen derselben.

(Der anspruchsvollere Leser sei in diesem Zusammenhang auf die sehr gut lesbare Abhandlung von Jablonski, Kudrjawzew, Gawrilow "Boolesche Funktionen und Postsche Klassen", Akademie-Verlag Berlin, verwiesen.)

Für seine umfangreichen Resultate auf diesem Gebiet wurde S. W. Jablonski mit dem Leninpreis geehrt. Er ist heute korrespondierendes Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR und gehört zu den führenden Kybernetikern seines Landes.

Dozent Dr. Rolf Lindner
Leiter der Abteilung MKR
Sektion Mathematik

Preisaufgaben 12/72

- (D 61) Man stelle eine Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit rationalen Koeffizienten p und q so auf, daß eine Lösung dieser Gleichung gleich $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$ ist.

- (D 62) Man zeige, daß die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ keine Lösung in positiven ganzen Zahlen x, y, z besitzt, falls $n > 2$ und $z < 1 + \frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1}$

- (D 63) In einem Trapez sei die Summe der Innenwinkel an einer der parallelen Seiten gleich 90° . Man beweise, daß dann die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der parallelen Seiten gleich der halben Differenz der parallelen Seiten ist.

- (D 64) Es ist zu zeigen, daß, falls eine positive ganze Zahl durch 99 teilbar ist, ihre Quersumme größer als 17 ist.

(D 65) Diese Preisaufgabe bezieht sich auf den Fachartikel
① auf den Seiten 55 bis 60.

Zu beweisen ist die Formel

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

für zufällige Ereignisse $A_1, A_2, \dots, A_n$, die paarweise unvereinbar sind. (vollständige Induktion über n).

(D 66) Доказать, что при n целом и $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ имеет тождество

②

$$\sin 2n\alpha + \sin 2n\beta + \sin 2n\gamma$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot 4 \sin n\alpha \sin n\beta \sin n\gamma .$$

Für jeden vollständigen Lösungsweg erhält der Einsender einen bzw. zwei Wertpunkte. Die Anzahl ist bei jeder Preisaufgabe unter der laufenden Nummer angegeben; für 15 Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch.

Sollten pro Monat mehr als drei Einsender 15 Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges). Falls ein Besitzer von 15 Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis Ende des darauffolgenden Monats unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an unsere Adresse einzuschicken.

Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungen bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und mit der Klassenstufe versehen sein müssen. Wir bitten unsere Leser, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken.

+ BÜCHERMARKT + BÜCHERMARKT + BÜCHERMARKT + BÜCHERMARKT +

Choquet: "Neue Elementargeometrie"

"Jede Ebene hat mindestens drei Richtungen." - Diese als SATZ formulierte Feststellung wird Ihnen vielleicht nur ein Schmunzeln abgewinnen können. Aber sind Sie sich über die Grundlagen der Geometrie, deren Axiome völlig im klaren? Wenn obige Bemerkung wirklich so trivial ist, versuchen Sie einmal, sie nachzuweisen. Worauf stützen Sie eigentlich Ihren Beweis? Das Werk "Neue Elementargeometrie" - übrigens als Lehrbuch geschrieben und mit einer Vielzahl von Übungsaufgaben versehen - zeigt eine Möglichkeit für den axiomati-

schen Aufbau der Geometrie. Die geometrischen Sachverhalte dürften Ihnen weitgehend bekannt sein, und die notwendigen Grundlagen aus der Mengenlehre können Sie sich gegebenenfalls leicht aneignen (dazu etwa Görke: "Mengen, Relationen, Funktionen" in "WURZEL" 4/72). Das hat den Vorteil, daß Sie sich auf die allgemeinen Grundlagen eines Axiomensystems konzentrieren können und lernen, aus diesen einfachsten Voraussetzungen immer kompliziertere Zusammenhänge abzuleiten. Sie lernen damit wesentliche mathematische Denkweisen, da die gesamte Mathematik auf Axiomen aufgebaut wird.

Wer sich also exaktes Denken aneignen will - denn dies ist keinem angeboren - der sollte sich intensiv mit diesem Buch beschäftigen.

Fachbuchverlag Leipzig 1969, Preis 16,80 M.



Gesetzmäßigkeiten des Zufalls (I)

Die in der Überschrift für die folgende Artikelserie enthaltene Behauptung, daß zufälliges Geschehen Gesetzmäßigkeiten unterworfen sein soll, scheint unserer Vorstellung vom Zufall zu widersprechen. Hört man vom Zufall, denkt man immer an Ereignisse, von denen nicht bekannt ist, ob oder wann sie eintreten. Jeder, der an einem Lotteriespiel teilnahm (Es gibt wohl nur wenige zwischen 14 und 80 Jahren, die nicht probiert hätten, ob ihnen "das Glück" hold ist.), weiß, daß keine Regeln, keine Naturgesetze bekannt sind, deren Beachtung den "großen Gewinn" garantieren. Jeder Versuch, solche Regeln zu finden, wäre ein Rückschlag in mittelalterlichen Hexenzauberglauben oder einfach das kriminelle Delikt eines Lotteriebetrugs, wenn vom Lotterieveranstalter die Hauptgewinne nach vereinbarter Regel vor der öffentlichen Ziehung markiert werden. In dieser Richtung, d.h. der sicheren Vorhersage über Eintreten oder Nichteintreten von zufälligen Ereignissen, kann also keine wissenschaftliche Erforschung von Gesetzmäßigkeiten des Zufalls liegen. Wohl aus

diesem Grunde waren über viele Jahrhunderte hinweg für die Naturforscher Zufall und exaktes wissenschaftliches Denken unvereinbare Gegensätze. Heute gibt es eine Theorie, die Gesetzmäßigkeiten des Zufalls in einer klaren und exakten Sprache formulieren kann - die Wahrscheinlichkeitstheorie. Wo entdeckte der menschliche Forschergeist den Ansatzpunkt für die Verschmelzung solcher lange Zeit als unüberwindbar geltender Gegensätze? Die geschichtlich-philosophische Behandlung dieser Frage wäre Gegenstand eines kleinen Buches. Wir wollen in dieser Abhandlung an einigen wenigen, aus unserer Umwelt geschöpften Beispielen einen kurzen Pfad zum Aufbau der mathematischen Theorie vom Zufall suchen, der den historischen Weg mit Siebenmeilenstiefeln durchheilt.

Wenn einer meiner Bekannten am Freitag erklärte, er habe eine günstige Gelegenheit, für 5000,-M einen "Trabant" zu kaufen, mich um 4000,-M bäte, die er mir vom am kommenden Sonntag bevorstehenden Lotteriegewinn zurückzahlen wolle, wäre das bestimmt eine recht unsichere Sache. Andererseits würde ich an einem warmen, sonnigen Sommersonnabendnachmittag bedenkenlos dem Vorschlag meines Freundes zustimmen, den darauffolgenden Sonntag in einem nahegelegenen Waldbad zu verbringen. In beiden Fällen handelt es sich um zufällige Ereignisse, einerseits um den Lotteriegewinn (nehmen wir an in "6 aus 49") und andererseits um das Wetter am Sonntag, wenn am Sonnabend vorher die Sonne scheint. Das Eintreten eines positiven Ereignisses im ersten Falle scheint im höchsten Grade unwahrscheinlich, im zweiten Falle aber sehr wahrscheinlich. Solche gefühlsmäßigen Urteile, die sich in den Worten: wahrscheinlich, unwahrscheinlich, höchstwahrscheinlich, höchst unwahrscheinlich, kaum möglich, fast sicher, "fifty-fifty" ausdrücken, wollen wir versuchen, in exakten, nicht mehr von gefühlsmäßigen Interpretationen abhängenden Zahlen festzuhalten.

Der Ausgangspunkt dafür spiegelt sich in unserer Umgangssprache wider, wenn wir davon sprechen, daß die Chancen für den positiven Ausgang eines uns interessierenden Ereignisses "wie 1 zu 1000" oder "fifty-fifty" oder "wie 9 zu 10" stehen.

Wir drücken damit aus, daß der positive Ausgang des Ereignisses
in 10 von 10 000 bzw. in 12 von 12 000 oder
in 50 von 100 bzw. in 55 von 110 oder
in 81 von 90 bzw. in 99 von 110 Fällen
zu erwarten sein wird.

Um diesen Gedanken so kurz, so klar und so allgemein wie möglich zu formulieren, führen wir eine Symbolik ein und einigen uns über bestimmte Voraussetzungen. Damit gehen wir einen wichtigen Schritt auf dem Wege zur mathematischen Theorie. Das uns interessierende Ereignis bezeichnen wir mit dem großen lateinischen Buchstaben A. Wir setzen voraus, daß das Ereignis A unter gegebenen Bedingungen eintreten wird oder nicht eintreten wird und diese gegebenen Bedingungen praktisch unbeschränkt oft herstellbar sind (beispielsweise die Ziehung von 6 Kugeln aus 49) bzw. beliebig häufig beobachtet werden können (beispielsweise schönes Wetter an einem Sommerabendnachmittag).

Sind diese Voraussetzungen erfüllt, sprechen wir vom zufälligen Ereignis A (beispielsweise 6 vorhergesagte Kugeln zu ziehen, am Sonntag Badewetter zu haben).

Angenommen, wir haben die zum zufälligen Ereignis A gehörenden Versuchsbedingungen n-mal hergestellt bzw. beobachtet und jedesmal registriert, ob A dabei eingetreten ist oder nicht. Die Gesamtzahl der Fälle unter diesen n Realisierungen der Versuchsbedingungen, bei denen das Ereignis A eintrat, soll mit n_A ($0 \leq n_A \leq n$) bezeichnet werden. Unter der relativen Häufigkeit des Ereignisses A verstehen wir den Quotienten

$\frac{n_A}{n}$, den wir auch mit $R_n(A)$ bezeichnen.

$$R_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

Die Ausdrucksweise "Für Eintreten des Ereignisses A stehen die Chancen fifty-fifty" können wir mit Hilfe der eingeführten Symbole ersetzen durch "R_n(A) liegt in der Nähe der Zahl 1/2". Falsch wäre "R_n(A)=1/2", wie man sich bei der Ausführung

der Übung Nr. 1 leicht überzeugen kann.

In analoger Weise können wir Formulierungen wie "sehr unwahrscheinlich" oder "höchstwahrscheinlich" mit dem Verhalten der relativen Häufigkeit $R_n(A)$ verbinden. Wichtig ist zu bemerken, daß $R_n(A)$ eine Zahl ist, die außer von n und von A auch noch vom Zufall abhängt! Die relative Häufigkeit für das "sommersonntägliche Badewetter" nach "sommersonnabendlichem Schönwetter" wird in jedem Jahr eine andere Zahl sein. Ist $R_{n_1}(A)$ die relative Häufigkeit dieses Ereignisses in den Jahren 1950...1959 und $R_{n_2}(A)$ die in den Jahren 1960...1969, fällt es nicht schwer zu glauben, daß diese Zahlen voneinander verschieden sind, "höchstwahrscheinlich" aber nicht weit voneinander entfernt sein werden.

Unser Gefühl sagt uns, daß für jedes zufällige Ereignis A eine Zahl existiert, die wir mit $P(A)$ bezeichnen und die wir Wahrscheinlichkeit von A nennen wollen, um deren Wert die relative Häufigkeit $R_n(A)$ schwankt. (Siehe Übungen Nr. 1, 2!) Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ hängt also nicht mehr vom Zufall ab, sondern sagt etwas über das Verhalten der relativen Häufigkeit $R_n(A)$ aus.

Die systematische Erforschung der Gesetzmäßigkeiten des Zufalls beginnt mit der Erforschung grundlegender Eigenschaften dieser Wahrscheinlichkeit, mit der Suche nach Möglichkeiten, diese Wahrscheinlichkeit für alle uns interessierenden Ereignisse zu berechnen.

Der Begründer der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie, der sowjetische Mathematiker A. N. Kolmogoroff (geb. 1903), entwickelte in den 20-er Jahren einen genialen Gedanken als Grundlage für diese neue mathematische Disziplin:

Er suchte solche Eigenschaften der relativen Häufigkeit $R_n(A)$, die weder von n noch vom Zufall abhängen und darüber hinaus als fundamentale Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit $P(A)$ anzusehen sind. Dabei verstand er unter fundamentalen Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit $P(A)$ solche Eigenschaften, aus denen ausschließlich mit den Mitteln der mathematischen Logik alle anderen Gesetzmäßigkeiten des Zufalls abgeleitet werden können und mit Hilfe derer die Wahrscheinlichkeit eines

Ereignisses A sogar bestimmt werden kann, d.h. Eigenschaften, die die Wahrscheinlichkeit zufälliger Ereignisse definieren.

Die wohl einfachste Eigenschaft von $R_n(A)$, die weder vom Zufall noch von n abhängt, ist

$$(1) \quad 0 \leq R_n(A) \leq 1,$$

die sofort aus $0 \leq n_A \leq n$ folgt.

Um eine zweite solche Eigenschaft von $R_n(A)$ zu formulieren, benötigen wir zwei neue Begriffe.

Definition 1 :



Man sagt, daß die zufälligen Ereignisse A und B unvereinbar sind, wenn ihr gemeinsames Eintreten bei den gegebenen Versuchsbedingungen unmöglich ist.

Beispiel: $A_1 :=$ "Alle sechs gezogenen Kugeln bei '6 aus 49' tragen ungerade Zahlen."

$B_1 :=$ "Die Summe der sechs gezogenen Zahlen ist eine ungerade Zahl."

$B_2 :=$ "Alle sechs gezogenen Zahlen sind kleiner als 30."

A_1 und B_1 sind unvereinbare Ereignisse.

A_1 und B_2 sind nicht unvereinbare Ereignisse.

Definition 2 :



Vereinigung von A und B nennt man das Ereignis, welches dann und nur dann eintritt, wenn mindestens eins der beiden Ereignisse A, B eintritt. Dieses jedem Paar zufälliger Ereignisse A, B zugeordnete zufällige Ereignis bezeichnet man mit $A \cup B$.

Beispiel: $A_1 \cup B_1:$ "Alle gezogenen Zahlen sind ungerade, oder ihre Summe ist ungerade."

$A_1 \cup B_2:$ "Alle sechs gezogenen Zahlen sind ungerade natürliche Zahlen, oder sie liegen zwischen 0 und 30."

Wenn A und B unvereinbare Ereignisse sind, folgt

$$n_{A \cup B} = n_A + n_B$$

und damit

$$(2) \quad R_n(A \cup B) = R_n(A) + R_n(B).$$

Das ist die zweite Eigenschaft der relativen Häufigkeit, die sowohl unabhängig von n als auch vom Ausgang des zufälligen Geschehens richtig ist.

Wir legen nun folgendes fest:

Den unter gegebenen Versuchsbedingungen betrachteten zufälligen Ereignissen A, B, ... sind reelle Zahlen $P(A)$, $P(B)$, ... zugeordnet und dabei folgende Bedingung erfüllt:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$, $0 \leq P(B) \leq 1$, ...
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ für beliebige unvereinbare A, B.

Die Zahlen $P(A)$, $P(B)$, ... nennen wir die Wahrscheinlichkeiten der zufälligen Ereignisse A, B, ...

Im nächsten Beitrag zeigen wir, daß diese Festlegungen schon ausreichen, um unter bestimmten Bedingungen die Wahrscheinlichkeit für zufällige Ereignisse zu berechnen, d.h., die Zahl zu berechnen, um die herum unter diesen Bedingungen die relative Häufigkeit $P_n(A)$ schwankt.

Übungen

1. Es soll eine Münze geworfen werden (Versuchsbedingungen), und A soll das Ereignis sein: "Die Zahl fällt nach oben." Zu bestimmen sind in zwei Versuchsserien die relativen Häufigkeiten $R_{100}^1(A)$ und $R_{100}^2(A)$.
2. Zu bestimmen ist die relative Häufigkeit $R_{100}(A)$, wenn A das Ereignis ist, beim Würfeln mit einem Wurf eine "6" zu erreichen.

Dr. Horst Oswald
Wissenschaftl. Sekretär
Sektion Mathematik

Lösungen

(D 44)

L

Zuerst formen wir die zu beweisende Ungleichung äquivalent um.

$$\sqrt[n]{a-b} > \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b},$$

$a > 0$ laut Vor.,

$$\frac{\sqrt[n]{a-b}}{\sqrt[n]{a}} > \frac{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}},$$

$$\sqrt[n]{1 - \frac{b}{a}} > 1 - \sqrt[n]{\frac{b}{a}},$$

$$\frac{b}{a} = x,$$

$$(*) \quad \sqrt[n]{1-x} > 1 - \sqrt[n]{x}, \text{ wobei}$$

$$\begin{aligned} 0 < x < 1 \\ 0 < 1-x < 1 \end{aligned} \text{ gilt.}$$

Diese beiden Ungleichungen folgen unmittelbar aus den Voraussetzungen der Aufgabenstellung und der Definition von x .

Die Ungleichung $(*)$ beweisen wir mittels vollständiger Induktion.

$n = 2$:

$$1 - x > 1 - x - 2\sqrt{x}, \quad \text{da } x > 0,$$

$$1 - x > (1 - \sqrt{x})^2,$$

$$\sqrt{1-x} > 1 - \sqrt{x}.$$

Schluß von n auf $n+1$:

$$\text{Ind.Vor.: } \sqrt[n]{1-x} > 1 - \sqrt[n]{x}$$

Für $0 < z < 1$ ist die Ungleichung $\sqrt[n]{z} < \sqrt[n+1]{z}$ stets richtig.

Somit ergibt sich

$$\sqrt[n+1]{1-x} > \sqrt[n]{1-x} > 1 - \sqrt[n]{x} > 1 - \sqrt[n+1]{x},$$

also

$$\sqrt[n+1]{1-x} > 1 - \sqrt[n+1]{x}$$

$$\text{für } \begin{aligned} 0 < x < 1 \\ 0 < 1-x < 1 \end{aligned}$$

Da $(*)$ durch äquivalente Umformungen aus der Ausgangsungleichung hervorging, ist auch diese bewiesen.

(D 48) Man zeigt zunächst, daß für jedes Polynom

$$P(x) \equiv x^2 + px + q$$

mit reellen Koeffizienten p, q das Maximum des absoluten Betrages von $P(x)$ im Intervall $[-1, 1]$ größer oder gleich $1/2$ ist, d.h.

$$\max\{|P(x)| : -1 \leq x \leq 1\} \geq \frac{1}{2}$$

Der Beweis erfolgt indirekt:

Annahme: Es gibt ein Polynom

$$P_0(x) \equiv x^2 + p_0x + q_0 \quad \text{mit}$$

$$\max = \{|P_0(x)| : -1 \leq x \leq 1\} < \frac{1}{2}$$

Dann gilt speziell auch für $x = -1, 0, 1$:

$$|P(-1)| = |1 - p_0 + q_0| < 1/2 \quad (1)$$

$$|P(0)| = |q_0| < \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$|P(1)| = |1 + p_0 + q_0| < \frac{1}{2} \quad (3)$$

Da für reelle Zahlen a $|a| < \frac{1}{2}$ gleichbedeutend mit $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ ist, gilt auch:

$$-\frac{1}{2} < 1 - p_0 + q_0 < \frac{1}{2} \quad (1')$$

$$-\frac{1}{2} < q_0 < \frac{1}{2} \quad (2')$$

$$-\frac{1}{2} < 1 + p_0 + q_0 < \frac{1}{2} \quad (3')$$

Addiert man jetzt (1') und (3'), so erhält man

$$-1 < 2 + 2q_0 < 1 \quad (4)$$

$$\text{oder } -3 < 2q_0 < -1 \quad (5)$$

$$\text{oder } -\frac{3}{2} < q_0 < -\frac{1}{2}, \quad (6)$$

was aber im Widerspruch zu Ungleichung (2') steht.
Damit ist bewiesen, daß $\max\{|P(x)| : -1 \leq x \leq 1\} \geq \frac{1}{2}$.

Analog kann man jetzt zeigen, daß das Ungleichungssystem (1), (2), (3) keine Lösung in reellen Zahlen besitzt, wenn in höchstens zwei Ungleichungen das Relationszeichen $<$ durch $\leq$ ersetzt wird. Das bedeutet aber: Gibt es ein Polynom

$$P_1(x) = x^2 + p_1x + q_1 \quad \text{mit} \quad \max\{|P_1(x)| : -1 \leq x \leq 1\} = \frac{1}{2},$$

so muß $|P_1(-1)| = |P_1(0)| = |P_1(1)| = \frac{1}{2}$ sein.

Das wiederum heißt nichts anderes als

$$p_1 = 0 \quad \text{und} \quad q_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad P_1(x) \equiv x^2 - \frac{1}{2}.$$

Andererseits erfüllt

$$P_1(x) \equiv x^2 - \frac{1}{2} \quad \text{die Bedingung} \quad |P(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Damit ist das gesuchte Polynom $P(x)$ mit $x^2 - \frac{1}{2}$ gefunden.

(D 50)

L

$$\begin{aligned} \text{Es ist} \quad (1 + x + \frac{6}{x})^{10} &= ((x + \frac{6}{x}) + 1)^{10} \\ &= \sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} (x + \frac{6}{x})^i 1^{10-i} \\ &= \sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} (x + \frac{6}{x})^i \end{aligned}$$

Für $(x + \frac{6}{x})^i$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} (x + \frac{6}{x})^i &= \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} x^j \cdot (\frac{6}{x})^{i-j} \\ &= \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} x^j \cdot 6^{i-j} \cdot x^{j-i} \\ &= \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} 6^{i-j} \cdot x^{2j-i}; \end{aligned}$$

d.h., in $(x + \frac{6}{x})^i$ kommt genau dann ein nicht verschwindender Koeffizient von x^0 vor, wenn i gerade ist, und dieser Koeffizient ist dann $\binom{i}{i/2} 6^{i/2}$

Damit wird der Koeffizient von x^0 in $(1 + x + \frac{6}{x})^{10}$ gleich

$$\sum_{k=0}^5 \binom{10}{2k} \binom{2k}{k} 6^k = \sum_{k=0}^5 \frac{10!}{(10-2k)!k!k!} 6^k.$$

Gut gesagt

G. W. Leibniz (1646 - 1716, Philosoph, Politiker und Gelehrter auf fast allen Wissensgebieten, besonders in der Mathematik)

Über die von ihm wesentlich mit eingeführte mathematische Symbolik: "Bei den Bezeichnungen ist darauf zu achten, daß sie für das Erfinden bequem sind. Dies ist am meisten der Fall, so oft sie das innere Wesen der Sache mit Wenigem ausdrücken und gleichsam abbilden. So wird nämlich auf wunderbare Weise die Denkarbeit vermindert."

MITTEILUNG

Da unsere Redaktion im Rahmen des Umzugs der Sektion Mathematik in das neue Universitätshochhaus ebenfalls ihren Sitz wechseln mußte, war es uns leider nicht möglich, die letzten Hefte pünktlich auszuliefern. Wir bitten, dies zu entschuldigen und versichern, daß wir uns bemühen werden, den Rückstand so bald wie möglich aufzuarbeiten.

Die Redaktion

Lithographie auf dem Titelbild: "Auf Wacht für die UdSSR" von A.I. Krawtschenko (1889 - 1940)

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung“ der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Leiter: Reinhard Klette

Redaktion: Werner Nagel (Chefredakteur); U. Heuke, H. Fischer, R. Lorenz

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

Anschrift: WURZEL

69 Jena

Universitätshochhaus

Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45