1
73

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Fr.-Schiller-Universität Jena

In diesem Heft setzen wir die in "WURZEL" 12/72 begonnene Artikelserie zur Wahrscheinlichkeitsrechnung fort. Im ersten Teil wurden die Begriffe "relative Häufigkeit" und "Wahrscheinlichkeit" eines zufälligen Ereignisses eingeführt und erste Eigenschaften dieser Größen betrachtet. Es folgen nun Betrachtungen zur Berechnung konkreter Wahrscheinlichkeiten sowie weitere Eigenschaften.

Gesetzmäßigkeiten des Zufalls (II)

Zwei Beispiele sollen demonstrieren, wie mit Hilfe der im vorhergehenden Artikel festgesetzten Eigenschaften

(1a) $0 \leq P(A) \leq 1$ und

(1b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

für unvereinbare zufällige Ereignisse A und B konkrete Wahrscheinlichkeiten berechnet werden können. Anschließend zeigen wir, wie aus diesen beiden elementaren Eigenschaften weitere folgen, d.h. als mathematische Sätze bewiesen werden können.

Beispiel 1: Zu bestimmen ist die Wahrscheinlichkeit P(A) für das zufällige Ereignis A:= "Mit einem Wurf eines symmetrischen Würfels wird eine Zahl größer als 4 gewürfelt."

In diesem einfachen Beispiel führen folgende Überlegungen direkt zum Ziel: Jedes der sechs möglichen Würfelergebnisse hat die gleiche Chance, da wir die Symmetrie des Würfels voraussetzen. Die Chancen für A stehen also 2:6, und die relative Häufigkeit wird dementsprechend um 1/3 herum schwanken. Dies bestätigt jedes Experiment mit einigermaßen symmetrischen Würfeln. Wir können die Zahl 1/3 als Wahrscheinlichkeit von A ansehen. Wollen wir diesen Lösungsweg auch auf kompliziertere Beispiele anwenden, müssen wir seinen rationalen Kern systematisch erfassen. Dabei werden wir versuchen herauszufinden, welche Rolle die elementaren Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit in diesem Lösungsweg spielen.

Wir führen neben dem Ereignis A das Ereignis $\bar{A}$:= "Die gewürfelte Zahl ist kleiner als 5." ein, welches genau dann eintritt, wenn A nicht eintritt. $\bar{A}$ nennt man das Komplement von A. Die Vereinigung von A und $\bar{A}$ ist ein Ereignis, welches immer eintritt. Es ist kein eigentliches zufälliges Ereignis. Es tritt mit Sicherheit immer ein, wenn die Versuchsbedingungen realisiert werden, d.h. in unserem Beispiel, wenn der Würfel geworfen wird. Solche Ereignisse nennen wir sichere Ereignisse und bezeichnen sie stets mit dem Buchstaben S. Als "Wahrscheinlichkeit" für S können wir sofort 1 ansetzen, da für alle n $R_n(S) = 1$ sein muß. Obwohl wir damit als erstes die triviale Wahrscheinlichkeit für ein nicht eigentliches zufälliges Ereignis bestimmt haben, ist ein wichtiger Schritt getan. Die Bedingungen des Beispiels können durch die Gleichung $2P(A) = P(\bar{A})$ ausgedrückt werden. Aus der Definition des Komplements von A folgt unmittelbar, daß A und $\bar{A}$ unvereinbar sind. Also ergibt sich aus (1b) $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$, und wir können eine ganze Kette von Gleichungen aufschreiben:

$1 = P(S) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 3P(A)$, woraus folgt

$P(A) = 1/3$.

Das nächste Beispiel wird zeigen, daß wir auf prinzipiell gleichem Wege auch in komplizierteren Fällen zum Ziele kommen. Neben dem zufälligen Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit wir suchen, betrachten wir andere zufällige Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe allgemeiner Eigenschaften wie (1b) und mit Hilfe der formelmäßig erfaßten konkreten Versuchsbedingungen berechenbar sind. Letztere werden so gewählt, daß aus ihren Wahrscheinlichkeiten die gesuchte abgeleitet werden kann.

Beispiel 2: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A:= "Unter 10 auf gut Glück aus einer Skatkarte ausgewählten Karten befinden sich genau zwei Buben."

Die Aussage "Auf gut Glück ausgewählt" kann nichts anderes bedeuten, als daß jede mögliche Auswahl von 10 Karten aus den gegebenen 32 Karten gleich wahrscheinlich sein soll. Daran knüpfen wir an. Jede mögliche Auswahl von 10 Karten betrachten wir als ein elementares Ereignis E_i und stellen uns diese zufälligen Ereignisse von 1 bis n numeriert vor ($i = 1,2,\ldots,n$). Die Gesamtzahl der verschiedenen Möglichkeiten, aus 32 Karten 10 auszuwählen, ist damit als Unbekannte n eingeführt. Das zufällige Ereignis A läßt sich darstellen als die Vereinigung aller der E_i, aus deren Eintreten das Eintreten von A folgt:

(2) $\boxed{A = E_{i_1} \cup E_{i_2} \cup \ldots \cup E_{i_m}.}$

Man sagt, daß die <u>elementaren Ereignisse</u> $E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_m}$ <u>dem zufälligen Ereignis A günstig sind.</u> Jedes dem Ereignis A nicht günstige Ereignis E_i ist mit A unvereinbar. Folgt aus dem Eintreten eines zufälligen Ereignisses Z_1 notwendig das Eintreten des zufälligen Ereignisses Z_2, schreibt man $Z_1 \subset Z_2$. Gelten gleichzeitig $Z_1 \subset Z_2$ und $Z_2 \subset Z_1$, sind Z_1 und Z_2 als zufällige Ereignisse identisch ($Z_1 = Z_2$), da sie stets zusammen eintreten oder nicht. Nach diesen Überlegungen überprüfen wir die Identität (2). Rechts stehen alle Ereignisse E_i, für die $E_i \subset A$ gilt, von 1 bis m numeriert. Tritt $E_{i_1} \cup E_{i_2} \cup \ldots \cup E_{i_m}$ ein, heißt das auf Grund der Definition der Vereinigung von Ereignissen, daß mindestens eines der Ereignisse E_{i_j} , $j = 1,2,\ldots,m$, eingetreten sein muß. Da für jedes $j = 1,2,\ldots,m$ $E_{i_j} \subset A$ folgt, muß

(3) $\boxed{E_{i_1} \cup E_{i_2} \cup \ldots \cup E_{i_m} \subset A}$ gelten.

Umgekehrt folgt aus dem Eintreten von A, daß mindestens eines der elementaren Ereignisse $E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_m}$ eintreten muß, also

(4) $\boxed{A \subset E_{i_1} \cup E_{i_2} \cup \ldots \cup E_{i_m}.}$

Dies erkennen wir daraus, daß eines der Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_n$ immer eintritt und daß dem Ereignis A nicht günstige elementare Ereignisse unter ihnen nicht gemeinsam mit A eintreten können.
(3) und (4) zusammen ergeben (2).
Offensichtlich sind alle E_i und E_j für $i \neq j$ unvereinbare Ereignisse, die, wie weiter oben bereits vermerkt, alle gleich wahrscheinlich sind. Die als Preisaufgabe (D 65) formulierte Folgerung aus (1b) liefert uns:

$P(E_1 \cup \ldots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n)$. Es gilt also:

$$1 = P(S) = P(E_1 \cup \ldots \cup E_n) = P(E_1) + \ldots + P(E_n) =$$
$$= nP(E_1) = nP(E_2) = \ldots = nP(E_n) \quad \text{und damit}$$

$$P(E_i) = \frac{1}{n} \quad \text{für alle } i = 1,2,\ldots,n .$$

Wegen (2) folgt daraus sofort:

$$\underline{P(A)} = P(E_{i_1} \cup \ldots \cup E_{i_m}) = P(E_{i_1}) + \ldots + P(E_{i_m}) = \underline{\frac{m}{n}} .$$

Es sind also nur noch die Zahlen m und n zu bestimmen. Diese Aufgabe gehört zur Kombinatorik. Wir müssen "auszählen", wieviele verschiedene Möglichkeiten es gibt, aus 32 Karten 1o auszuwählen und wieviele davon mit dem Ergebnis enden, daß genau zwei Buben mit ausgewählt worden sind. Da diese Artikelserie noch weiter in Gesetzmäßigkeiten des Zufalls vordringen soll, wollen wir uns bei der Herleitung von Formeln der Kombinatorik, die dieses Auszählen systematisch ermöglichen, nicht aufhalten. Die Anzahl der Möglichkeiten, aus 32 Karten 10 auszuwählen, ist

$\binom{32}{10} = \frac{32!}{10!22!}$, wobei für alle natürlichen Zahlen k gilt:

$$k! = k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1.$$

Um m zu berechnen, suchen wir die Anzahl derjenigen Auswahlergebnisse, bei denen aus den vorhandenen vier Buben zwei Buben und aus den restlichen 28 Karten acht Karten ausgewählt worden sind. Da jede Kombination einer Auswahl von zwei Buben mit einer Auswahl von acht Karten aus den restlichen 28 genau eines der elementaren Ereignisse E_{i_j} , $j = 1,2,\ldots,m$, liefert, ist

$$m = \binom{4}{2}\cdot\binom{28}{8} = \frac{4!}{2!2!}\,\frac{28!}{8!20!}\,.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit P(A) ist demnach:

$$\underline{\underline{P(A)}} = \frac{4\cdot3\cdot10\cdot9\cdot21\cdot22}{2\cdot1\cdot32\cdot31\cdot30\cdot29} = \frac{2^4\cdot3^4\cdot5\cdot7\cdot11}{2^7\cdot3\cdot5\cdot31\cdot29} = \frac{27\cdot7\cdot11}{8\cdot31\cdot29} \approx \underline{\underline{0,289}}\,.$$

Skatspieler könnten nun testen, ob die relative Häufigkeit der Spiele, bei denen sich zwei Buben in der Hand befinden, wirklich um 0,289 schwankt.

Zum Schluß dieses Artikels wollen wir einige Sätze beweisen, die andere allgemeine Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit auf die Eigenschaften (1a) und (1b) zurückführen und dabei eine weitere Verknüpfung zufälliger Ereignisse definieren.

Satz 1: Für jedes zufällige Ereignis A gilt $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Beweis: Aus der Unvereinbarkeit von A und $\bar{A}$ und der Identität $S = A \cup \bar{A}$ folgt $1 = P(A) + P(\bar{A})$.

D e f i n i t i o n 3 :

Sind A,B zufällige Ereignisse, versteht man unter $A \cap B$ das zufällige Ereignis, welches genau dann eintritt, wenn A und B gemeinsam eintreten.

Die bereits häufig benutzte Bedingung, daß zwei zufällige Ereignisse A, B unvereinbar sein sollen, können wir jetzt so formulieren:

$$A \cap B = U.$$

$A \cap B$ ist ein Ereignis, welches bei keiner Realisierung unserer Versuchsbedingungen eintreten kann. Solche Ereignisse wollen wir unmögliche Ereignisse nennen und mit U bezeichnen.

Satz 2: Es gilt für beliebige zufällige Ereignisse A, B $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Beweis: 1. Es ist $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$, da aus dem Eintreten der rechten Seite dieser Identität das Eintreten mindestens eines der Ereignisse $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$ und damit auf jeden Fall das Eintreten von A folgt.
Umgekehrt folgt aus dem Eintreten von A das Eintreten mindestens eines der Ereignisse $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, weil $B \cup \bar{B} = S$ ist. Es gilt also sowohl $A \subset (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$

als auch $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \subset A$.

2. Die Ereignisse $A \cap B$ und $A \cap \bar{B}$ sind unvereinbar, denn es ist $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = A \cap (B \cap \bar{B}) = A \cap U = U$. Aus (1b) folgt

(3) $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$.

Genauso kann gezeigt werden, daß $A \cup B = B \cup (A \cap \bar{B})$ und $B \cap (A \cap \bar{B}) = U$ gelten und deshalb

(4) $P(A \cup B) = P(B) + P(A \cap \bar{B})$ sein muß.

Aus (3) und (4) folgt sofort die Behauptung des Satzes 2.

Satz 3: Aus $A \subset B$ folgt $P(A) \leq P(B)$.

Beweis: $A \subset B$ ist identisch mit $B = A \cup B$. Andererseits ist $A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A})$ und $A \cap (B \cap \bar{A}) = U$. Wiederum folgt aus (1b) $P(B) = P(A) + P(B \cap \bar{A})$, und da wegen (1a) $P(B \cap \bar{A}) \geq 0$ sein muß, ist die Behauptung des Satzes bewiesen.

Die nächste Folge wird sich vor allem mit den zufälligen Ereignissen, den Eigenschaften ihrer Verknüpfung genauer beschäftigen. Der aufmerksame Leser wird schon erkannt haben, wie wichtig es ist, zufällige Ereignisse als mathematische Objekte beherrschen zu lernen.

Übungen

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die 11 Fußballspieler einer Mannschaft zur Verabschiedung nach dem Spiel der Größe nach angetreten sind, wenn zwei von ihnen gleichgroß sind?

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von zwei auf gut Glück aus einem Skatblatt ausgewählten Karten genau eine ein As ist?

3. In absoluter Dunkelheit werden einer Kiste mit 12 10-Ampere- und 8 6-Ampere-Sicherungen 5 Sicherungen entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß darunter genau 2 6-Ampere-Sicherungen sind?

4. Zu beweisen ist folgende Behauptung:
Sind A_1, A_2, A_3, zufällige Ereignisse, die paarweise disjunkt sind und für die $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = S$ ist, so gilt:
$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)$.

5. Beweisen Sie den Satz:
Das zufällige Ereignis B ist Komplement des zufälligen Ereignisses A, wenn die beiden Bedingungen
a) $A \cap B = U$ und b) $A \cup B = S$ erfüllt sind.

Für Leser, die sich für die in diesem Artikel aufgeworfenen Probleme der Kombinatorik - einem wichtigem Teilgebiet der Mathematik - interessieren, empfehlen wir folgende Literatur:

Flachsmeyer, J., Kombinatorik, Einführung in die mengentheoretische Denkweise, Berlin 1969, DVW.

Dr. Horst Oswald
Wissenschaftl. Sekretär
Sektion Mathematik

INFORMATION

Geschäftsbriefe aus dem Computer

Mitarbeiter von Verwaltungen verwenden 35 bis 60 Prozent ihrer Arbeitszeit für die Abfassung von gleichartigen Geschäftsbriefen. Ein in Kursk entwickelter Computer übernimmt jetzt diese Routinearbeit. Die Konstrukteure der neuen Maschine gingen davon aus, daß bestimmte Geschäftsbriefe weitgehend aus standardisierten Satzteilen und Sätzen bestehen. Die "Standards" können kodiert und die entsprechenden Zahlen dem Computer eingegeben werden.

Preisaufgaben 1/73

(E 1) 2

Der Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$ sei $2p$. Welchen maximalen Wert kann dann die Länge des innerhalb des Dreiecks liegenden Abschnitts der Tangente des Inkreises von $\triangle ABC$, die parallel zur Strecke $\overline{BC}$ verläuft, annehmen?

(E 2) 1

Man bestimme alle dreistelligen Zahlen $(abc)_{10}$, die gleich dem arithmetischen Mittel der Zahlen $(bca)_{10}$ und $(cab)_{10}$ sind.
($(abc)_{10}$ bezeichnet dabei eine im Dezimalsystem geschriebene natürliche Zahl mit den Ziffern a, b, c.)

(E 3) 1

Man zeige, daß die Gleichung $x^2 + y^2 = 4^n$ für natürliche Zahlen n keine Lösungen in positiven ganzen Zahlen x, y besitzt.

(E 4) 2

Man zeige, daß für keine positiven ganzen Zahlen n und k mit $k > 1$ die Zahl

$$3^{n^k} + 1$$

durch 5 teilbar ist.

(E 5) 2

Gegeben seien in einer Ebene eine Gerade l und zwei Punkte A, B, die auf verschiedenen Seiten von l liegen. Man bestimme den Punkt X auf l, für den der absolute Betrag der Differenz $\overline{XA} - \overline{XB}$ maximal wird.

(E 6) 1

По окружности радиуса R равномерно и в одном направлении движутся две точки. Одна из них делает польный круг на t сек. быстрее второй. Время между двумя последовательными встречами точек равно T сек. Определить скорости этих точек.

Lösungsbedingungen wie üblich!

Mathematikstudium in der Sowjetunion

In der Sowjetunion wurde ein sozialistisches Bildungssystem durchgesetzt, das sich durch seine Einheitlichkeit und die gute Abstimmung der Ausbildungsetappen aufeinander auszeichnet.

Das Studium ist eine hohe Auszeichnung und gesellschaftliche Verpflichtung für jeden Studenten. Das kommt auch darin zum Ausdruck, daß sich im Durchschnitt sechs Bewerber pro Studienplatz der Aufnahmeprüfung stellen. Daraus wird auch jeder ableiten können, daß das Niveau des Mathematikstudiums sehr hoch und Maßstab für uns ist. Die fünfjährige Ausbildung gliedert sich, wie auch bei uns, in Grund- und Fachstudium. Dabei ist in der UdSSR weitgehend das Prinzip realisiert: Die profiliertesten Wissenschaftler halten die Vorlesungen im Grundstudium. Das ist außerordentlich wichtig, weil dadurch Qualität und Effektivität des Grundlagenstudiums erhöht werden. Zudem trägt die Vorbildwirkung und Autorität bedeutender Wissenschaftler zur Entwicklung der Studenten zu jungen Wissenschaftlerpersönlichkeiten bei.

Typisch für das gesamte Studium ist die Arbeit mit der Fachliteratur. Der Student wäre unter den dortigen Studienbedingungen keinesfalls in der Lage, die für sein Studienziel notwendigen Kenntnisse und Fähigkeiten durch die Lehrveranstaltungen zu erreichen, wenn er kein umfangreiches selbständiges Literaturstudium betreiben würde. Um diese Art des Studiums zu fördern, verfügen die sowjetischen Universitäten über entsprechend große Bibliotheken. Die Staatliche Lomonossow-Universität Moskau ist zum Beispiel in der Lage, jedem Studenten im Grundstudium alle erforderlichen Bücher für mehrere Semester leihweise zu übergeben.

Die Studienarbeit der Studenten wird in relativ kurzen Zeitabständen kontrolliert und angeleitet. Dadurch wird es auch möglich, die Ergebnisse der Arbeit vielseitig und tiefgründig zu überprüfen. Damit ist immer Anregung zur weiteren Arbeit und zu einem wissenschaftlichen Arbeitsstil verbunden. Im allgemeinen ist es auch so, daß die Studenten zunächst in einer schriftlichen Arbeit ihre Fähigkeiten nachweisen müssen, ehe sie sich der mündlichen Prüfung unterziehen können.

Dieses Prüfungssystem trägt zu einer größeren Kontinuität des Studiums bei und hilft auch, den Zufall, der ja manchmal bei Prüfungen eine große Rolle spielt, auszuschalten.
Vom dritten Studienjahr an werden Kursarbeiten an die Studenten vergeben. Diese sollen beim Studierenden das Literaturstudium zu speziellen Themen und die Fähigkeit zu selbständigem wissenschaftlichem Arbeiten fördern. Im Sinne einer Auszeichnung erhalten besonders gute Studenten bereits kleinere Forschungsaufgaben. Sie können dadurch noch besser auf ihre spätere Tätigkeit vorbereitet werden. Es ist klar, daß dieses System von Kursarbeiten den Wettbewerbsgedanken unter den Studenten stark fördert.
Nun wird sich sicher auch niemand darüber wundern, daß die Diplomarbeiten der jungen Mathematiker ein für unsere Begriffe sehr hohes Niveau haben. Dafür ist kennzeichnend, daß der Betreuer zwar anfangs das Thema in gewisse Einzelheiten aufschlüsselt - wie das überall üblich ist - der Student aber im Werdegang der Arbeit sehr rasch selbständig und zum wissenschaftlichen Gesprächspartner seines Lehrers wird.
Vielleicht wird Ihnen einiges wie eine Selbstverständlichkeit erscheinen. Aber Sie werden, falls Sie einmal ein Mathematikstudium aufnehmen, selbst feststellen, wie schwer es ist und wieviel persönlichen Einsatz es kostet, zu hoher wissenschaftlicher Produktivität zu gelangen. Wir alle können - auch in bezug auf das Studium - aus dem Beispiel der Sowjetunion wichtige Erkenntnisse gewinnen.

Wir sind natürlich gern bereit, Ihre Fragen zum Bildungssystem in der Sowjetunion, insbesondere zum Mathematikstudium, zu beantworten bzw. eine Antwort für Sie einzuholen.

I N F O R M A T I O N

Rechenzentrale für 600 Kraftwerke

Im neunten Planjahrfünft (1971-1975) setzen die sowjetischen Kraftwerker den Ausbau des Vereinigten Energiesystems der UdSSR fort. Die Gesamtleitung der angeschlossenen rund 600 Wärme- und Wasserkraftwerke beträgt über 110 Millionen Kilowatt. Dieses komplizierte Energiesystem wird von einer Rechenzentrale in Moskau gesteuert.

(D 54) L

Der Beweis erfolgt indirekt:

Annahme: Es gibt eine reelle Zahl a mit $a \neq 0$ und $a \neq 1$ und $f(a) \neq 0$.

Wegen
$$a = \frac{\frac{a}{a-1}}{\frac{a}{a-1} - 1}$$
und damit
$$\frac{1}{a} = \frac{\frac{a}{a-1} - 1}{\frac{a}{a-1}}$$
gilt mit $x = \frac{a}{a-1}$:

$$f(a) - 2f(\tfrac{1}{a}) = 0 \qquad \text{oder}$$
$$f(a) = 2f(\tfrac{1}{a}) \,. \qquad (1)$$

Andererseits gilt wegen
$$\frac{1}{a} = \frac{\frac{1}{1-a}}{\frac{1}{1-a} - 1}$$
und damit
$$a = \frac{\frac{1}{1-a} - 1}{\frac{1}{1-a}}$$
mit $x = \frac{1}{1-a}$:

$$f(\tfrac{1}{a}) - 2f(a) = 0 \qquad \text{oder}$$
$$f(\tfrac{1}{a}) = 2f(a) \qquad \text{oder}$$
$$2f(\tfrac{1}{a}) = 4f(a) \,. \qquad (2)$$

Setzt man (1) in (2) ein, so ergibt sich
$$f(a) = 4f(a)$$
und damit $f(a) = 0$ im Widerspruch zur Annahme.

Damit muß $f(x) = 0$ für $x \neq 0$ und $x \neq 1$ sein.

Forderte man weiter, daß f auf der gesamten reellen Achse stetig sein soll, so würde sich sofort $f(0) = f(1) = 0$ ergeben.

(D 55)

L

Es gilt für Elemente eines Verbandes

$$a \leq b \text{ gdw. } a \cap b = a.$$

Dann gilt nach Voraussetzung für alle $i = 1,\ldots,n$ und $j = 1,\ldots,m$

$$a_i \cap b_j = a_i.$$

Für jedes $i = \{1,\ldots,n\}$ folgt daraus

$$\begin{aligned} a_i &= a_i \cap a_i \cap \ldots \cap a_i \\ &= (a_i \cap b_1) \cap (a_i \cap b_2) \cap \ldots \cap (a_i \cap b_m) \\ &= a_i \cap (b_1 \cap \ldots \cap b_m) \\ &= a_i \cap \bigcap_{j=1}^{m} b_j \,. \end{aligned}$$

Damit gilt aber auch

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{n} a_i &= a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_n \\ &= (a_1 \cap \bigcap_{j=1}^{m} b_j) \cup (a_2 \cap \bigcap_{j=1}^{m} b_j) \cup \ldots \cup (a_n \cap \bigcap_{j=1}^{m} b_j) \\ &= a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_n \cap \bigcap_{j=1}^{m} b_j \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} a_i \cap \bigcup_{j=1}^{m} b_j \,, \end{aligned}$$

was aber nichts anderes bedeutet als

$$\bigcup_{i=1}^{n} a_i \leq \bigcap_{j=1}^{m} b_j \,.$$

(D 56) **L**

Es gilt für natürliche Zahlen $x \neq 0$

$$\frac{1}{(2x+1)^2} < \frac{1}{2x(2x+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x+2}\right).$$

Damit ergibt sich für

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i+1)^2}$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2i} - \frac{1}{2i+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i} - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{2i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{2i} - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{2i} - \frac{1}{2(n+1)}\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4(n+1)}$$

$$< \frac{1}{4}.$$

(D 59) **L**

Es sei n die erste der 39 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Dann kommt unter den Zahlen $n, n+1, \dots, n+19$ eine Zahl p vor, die auf 0 endet und deren Zehnerstelle von 9 verschieden ist. Dann stimmen die Zahlen $p, p+1, \dots p+19$ bis auf die Zehner- und Einerstelle überein. Es habe nun p die Quersumme q. Dann haben die Zahlen $p+1, \dots, p+9$ die Quersummen $q+1, \dots, q+9$; die Zahlen $p+10, \dots, p+19$ die Quersummen $q+1, \dots, q+10$. Da $p+19 \leq n+38$ eine der 39 aufeinanderfolgenden Zahlen ist, treten in der Folge $n, n+1, \dots, n+38$ auf jeden Fall die elf Quersummen $q, q+1, \dots, q+10$ auf, von denen aber genau eine durch 11 teilbar ist.

Vorbereitung der X. Weltfestspiele der Jugend und Studenten

Der Beschluß des Vorbereitungskomitees, die X. Weltfestspiele der Jugend und Studenten 1973 in Berlin durchzuführen, ist ein Ausdruck des Vertrauens in die Jugend unserer Republik, ist eine hohe Anerkennung der Leistungen unseres Jugendverbandes im weltweiten Kampf um Frieden und Völkerfreundschaft. Unsere Antwort darauf besteht darin, daß wir uns sehr gründlich und umfassend auf die Weltfestspiele vorbereiten. Mit unserem Auftreten in Berlin, mit der initiativreichen Lösung der Aufgaben im Studienjahr 72/73 an der Sektion Mathematik, wollen wir würdiger Gastgeber der Jugend der ganzen Welt sein.
Entsprechend dem Beschluß der 4. Zentralratstagung der FDJ zur allseitigen Vorbereitung der X. Weltfestspiele stehen im Mittelpunkt unserer Arbeit im Studienjahr 72/73 unter anderem folgende Aufgaben:

1. Das Studium des Marxismus-Leninismus als Richtschnur unseres Handelns

Im Streben um höchste Studienleistungen im marxistisch-leninistischen Grundlagenstudium, im FDJ-Studienjahr und in der propagandistischen Tätigkeit geht es besonders darum, eine Einheit zwischen theoretischem Wissen und praktischer Verhaltensweise der Studenten zu erziehen. Es kommt darauf an, das im Grundlagenstudium erworbene Wissen auch in der täglichen politischen Arbeit anzuwenden. Um hier Verbesserungen zu erzielen, werden in den FDJ-Gruppen vor allem Formen der kollektiven Vorbereitung auf die Veranstaltungen im marxistisch-leninistischen Grundlagenstudium genutzt. Wir streben weiterhin an, Probleme, die unmittelbar mit der Arbeit im Jugendverband zusammenhängen, mit der Ausbildung in Marxismus- Leninismus zu verbinden.
Eine große Bedeutung für die Vorbereitung auf die X. Weltfestspiele hat die Durchführung des FDJ-Studienjahres. Mit den Themen des FDJ-Studienjahres, die für alle Gruppen verbindlich sind, erhalten wir beim intensiven Studium der dazu erscheinenden Materialien ein umfangreiches Wissen um die Gesetzmäßigkeiten des internationalen Klassenkampfes, den Kampf der verschiedenen Abteilungen der demokratischen Weltjugendbewegung.

2. Die Vertiefung der Freundschaft zur Sowjetunion

Die Vorbereitung und würdige Begehung des 50. Jahrestags der Gründung der Sowjetunion bildet den Höhepunkt in der 2. Etappe der Vorbereitung der X. Weltfestspiele. An unserer Sektion gibt es dabei die vielfältigsten Initiativen:

- In Verbindung mit dem FDJ-Studienjahr im Dezember werden Veranstaltungen zusammen mit Komsomolzen, die an unserer Universität studieren, durchgeführt.
- Einige Bereiche unserer Sektion führen Festveranstaltungen zu Ehren des 50. Jahrestages durch.
- Im Lehrerbereich wird eine Studentenkonferenz zum Thema "Auswertung der Erfahrungen der sowjetischen Pädagogik" durchgeführt.
- An unserer Sektion wurde eine Singegruppe gegründet, die auf einer Veranstaltung zum 50. Jahrestag das erste Mal auftritt.
- In vielfältigen Veranstaltungen mit Hochschullehrern und Dozenten unserer Sektion, die in der Sowjetunion studiert haben, werten wir die Erfahrungen des sowjetischen Hochschulwesens aus, ziehen Schlußfolgerungen für unsere Arbeit.

3. Jeder Student leistet seinen Beitrag im sozialistischen Wettbewerb um höchste Studienleistungen

Entsprechend unserer Grundaufgabe geht es auch im Studium primär um die sozialistische Klassenerziehung auf der Grundlage der Einheit von Erziehung und Ausbildung. Der Kampf um hohe Studienleistungen muß zur politischen Norm werden. An unserer Sektion orientieren wir dabei besonders auf folgende Aktivitäten:

- Kampf gegen Studienbummelei und Mittelmaß,
- Erhöhung der Verantwortung der FDJ bei der Realisierung der Studienpläne,
- Verbesserung der Studienatmosphäre im Wohnheim durch Erhöhung der Verantwortung der FDJ-Gruppen für die Arbeit im Wohnheim.

Große Bedeutung kommt bei der Erfüllung unserer Aufgaben dem sozialistischen Wettbewerb zu. Dabei kommt es besonders darauf an, auf der Grundlage des Arbeitsplanes der Gruppe monatlich die Ergebnisse in der Arbeit einzuschätzen (Leistungsstand, gesellschaftliche Aktivitäten, Erfüllung der monatlichen

Schwerpunktaufgaben).
Vor allem hier ist eine enge Zusammenarbeit zwischen den FDJ-Gruppen und den Mitarbeitern der Sektion erforderlich. Die Erfahrungen der besten Gruppen werden an der Wandzeitung veröffentlicht. Durch diese öffentliche Auswertung wollen wir erreichen, daß sich an unserer Sektion eine echte Wettbewerbsatmosphäre entwickelt.

R. Wackernagel
FDJ-Sekretär an der
Sektion Mathematik

● Aus unserer Matheball-Zeitung (siehe Titelbild) zitiert:

Gut gesagt

David Hilbert, über einen seiner Schüler befragt:

"Ach der?", hat sich Hilbert erinnert, "Der ist Poet geworden. Für die Mathematik hatte er zu wenig Phantasie."

Dirac war es gewöhnt, sich immer klar und deutlich auszudrücken. Nach Ende eines Vortrages fragte er: "Gibt es noch Fragen?" Ein Zuhörer meldete sich:"Ich habe die Herleitung dieser Formel nicht verstanden!" Darauf Dirac:"Das ist keine Frage, sondern eine Feststellung. Gibt es noch Fragen?"

ÜBRIGENS

... wünschen wir unseren Lesern für das Jahr 1973 alles Gute, viel Erfolg und Freude beim Lesen der "WURZEL".

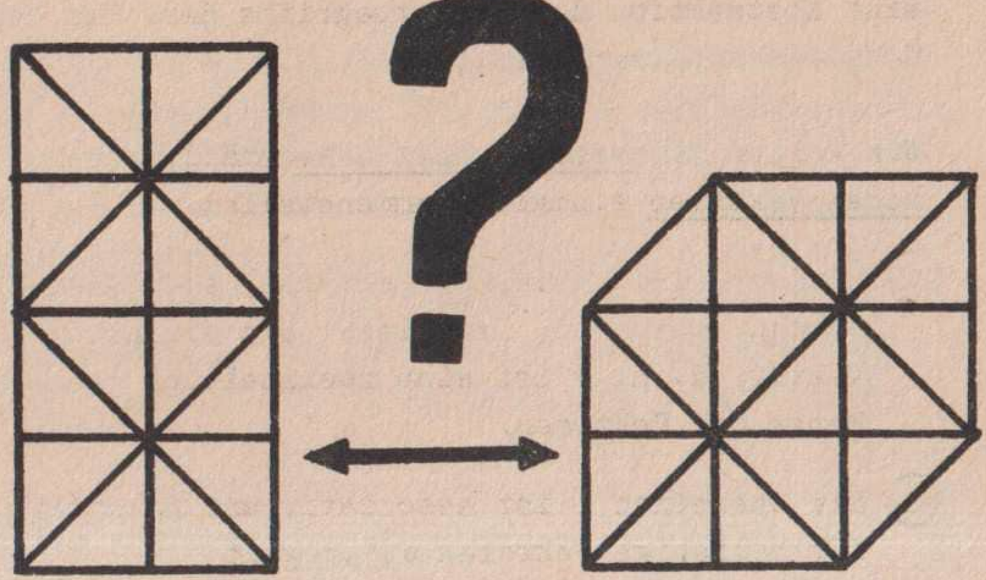
Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung" der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Leiter: Reinhard Klette

Redaktion: Werner Nagel (Chefredakteur); U. Heuke, H. Fischer, R. Lorenz
Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

Anschrift: WURZEL
69 Jena
Universitätshochhaus
Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45

Wer hätte das gedacht



Durch eine Zweiteilung längs der eingezeichneten Linien und neues Zusammenlegen der Teile erhält man aus der einen Figur die andere.

2
73

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Fr.-Schiller-Universität Jena

Der verallgemeinerte Vektorbegriff

Ebenso wie die Verbandstheorie (vgl. "WURZEL" 10/11/72) ist auch die lineare Algebra eine Spezialdisziplin der allgemeinen Algebra. Während der Gegenstand der Verbandstheorie die Verbände sind, ist der Gegenstand der linearen Algebra der Begriff des Vektorraumes. Dieser Begriff stellt eine Abstraktion des Vektorbegriffs dar, der Ihnen von der Schule her bekannt ist.

Wir wollen die wesentlichen Gesetzmäßigkeiten der geometrischen Vektoren einmal zusammenstellen.

1. Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beliebige Vektoren, so können diese addiert werden, und $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ist wieder ein eindeutig bestimmter Vektor, d. h., + ist eine zweistellige Operation auf der Menge der Vektoren.

2. Die Operation + ist assoziativ und kommutativ, d. h., für beliebige Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ gilt

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) \qquad (1)$$

und

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \,. \qquad (2)$$

3. Es gibt einen Vektor $\mathfrak{o}$, den wir Nullvektor nennen, und der für jeden Vektor $\mathfrak{a}$ die Gleichung

$$\mathfrak{o} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a} + \mathfrak{o} = \mathfrak{a} \qquad (3)$$

erfüllt.

4. Zu jedem Vektor $\mathfrak{a}$ existiert ein Vektor $\mathfrak{b}$ mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a} = \mathfrak{o} \,, \qquad (4)$$

nämlich der Vektor $\mathfrak{b} = -\mathfrak{a}$.

5. Sind $\mathfrak{a}$ ein Vektor und α eine reelle Zahl, so ist $\alpha \cdot \mathfrak{a}$ wieder ein eindeutig bestimmter Vektor.

6. Für die Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen gelten folgende Regeln (α,β reelle Zahlen, $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ Vektoren):

$$(\alpha + \beta)\mathfrak{a} = \alpha\mathfrak{a} + \beta\mathfrak{a} \,, \tag{5}$$

$$\alpha(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \alpha\mathfrak{a} + \alpha\mathfrak{b} \,, \tag{6}$$

$$\alpha(\beta\mathfrak{a}) = (\alpha\beta)\mathfrak{a} \,, \tag{7}$$

$$1 \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \,. \tag{8}$$

Man nennt in der Algebra eine Menge V mit einer zweistelligen Operation +, die die Eigenschaften (1) bis (4) erfüllt, eine kommutative Gruppe [V,+]. (Ist die Eigenschaft (2) nicht erfüllt, spricht man einfach von einer Gruppe.) Außer den Vektoren gibt es noch zahlreiche andere Gruppen, die in der Algebra Gegenstand der Spezialdisziplin Gruppentheorie sind, so z. B. die ganzen Zahlen, die geraden Zahlen, die rationalen Zahlen, die reellen Zahlen und viele andere mathematische Objekte.

Wir können also die Vektoren charakterisieren als eine spezielle kommutative Gruppe, in der eine Multiplikation mit reellen Zahlen erklärt ist, wobei die Regeln (5) bis (8) gelten.
Die reellen Zahlen stellen mit den Operationen + und •, der Addition und Multiplikation, eine algebraische Struktur dar, die man allgemein einen Körper nennt.

D e f i n i t i o n 1 :

D

Die algebraische Struktur $\mathfrak{V}$ = [V,+,K] heißt <u>Vektorraum</u> über K $=_{Df}$

1. [V,+] ist eine kommutative Gruppe.
2. K ist ein Körper, und jedes $\alpha \in$ K wirkt als eindeutige Abbildung von V in V, wobei die Regeln (5) bis (8) erfüllt sind (mit $\alpha,\beta,1 \in K$; $\mathfrak{a},\mathfrak{b} \in V$).

Der Leser kann sich unter K immer die Menge R der reellen Zahlen vorstellen. Die eindeutige Abbildung α ist so zu verstehen, daß für jedes $a \in V$ $\alpha \cdot a$ wieder ein eindeutig bestimmtes Element aus V ist.

Die Bedingung (8) in der Definition des Vektorraumes ist nicht unwesentlich. Man kann sich nämlich auch eine solche Struktur $[V,+,K]$ vorstellen, bei der $[V,+]$ eine beliebige kommutative Gruppe (etwa die der geometrischen Vektoren) und K ein beliebiger Körper ist (etwa der der reellen Zahlen), und wobei für alle $\alpha \in K$ und alle $a \in V$ definiert wird:

$$\alpha \cdot a =_{Df} o.$$

Dann gelten alle Bedingungen der Definition 1 bis auf Regel (8), weshalb diese Struktur kein Vektorraum ist.

Wir wollen drei weitere Beispiele für Vektorräume angeben.

1. Für reellwertige Funktionen f und g über dem reellen Intervall (a,b) definieren wir die Summe f + g und das Produkt mit einer reellen Zahl α wie folgt:

$$(f+g)(x) =_{Df} f(x) + g(x),$$
$$(\alpha f)(x) =_{Df} \alpha \cdot (f(x)) .$$

   f + g und αf sind dann wieder reellwertige Funktionen über (a,b), und der Leser prüft leicht selbst nach, daß die Menge aller reellwertigen Funktionen über dem Intervall (a,b) mit diesen Definitionen einen Vektorraum über R darstellt.

2. Wir wollen mit R_n die Menge aller Spalten der Länge n bezeichnen, die aus reellen Zahlen bestehen:

$$R_n =_{Df} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} : \alpha_i \in R \right\}.$$

   Wir definieren die Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen wie folgt:

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix} =_{Df} \begin{bmatrix}\alpha_1 + \beta_1\\ \vdots\\ \alpha_n + \beta_n\end{bmatrix}, \quad \gamma\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix} =_{Df} \begin{bmatrix}\gamma\alpha_1\\ \vdots\\ \gamma\alpha_n\end{bmatrix}$$

$$(\gamma \in R) .$$

$[R_n,+,R]$ ist dann für jede natürliche Zahl n ein Vektorraum über R.

3. Wir betrachten ein homogenes lineares Gleichungssystem von m Gleichungen in n Unbekannten:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \qquad (a_{ij} \in R) . \end{array}$$

Eine Lösung des Systems wollen wir in der Form

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

angeben (Man spricht hier auch vom Lösungsvektor.).

Werden die Summe von Lösungsvektoren und das Produkt eines Lösungsvektors mit einer reellen Zahl wie unter 2. verstanden, so zeigt sich, daß die Lösungsmenge eines solchen Gleichungssystems ebenfalls einen Vektorraum über R darstellt. Die Theorie der linearen Gleichungssysteme ist deshalb auch ein Teilgebiet der linearen Algebra.

Es sollen nun einige grundlegende Begriffe für Vektorräume definiert werden.

<u>D e f i n i t i o n 2 :</u>

D

Die Vektoren $b_1,\ldots,b_n \in V$ heißen <u>linear unabhängig</u> $=_{Df}$

Die Gleichung $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n = o$ mit $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in R$ ist dann und nur dann erfüllt, wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ gilt.

(Mit o werde der Nullvektor und mit 0 die reelle Zahl Null bezeichnet.)

Dies ist eine natürliche Verallgemeinerung der linearen Unabhängigkeit von geometrischen Vektoren.

<u>D e f i n i t i o n   3 :</u>

Die Menge $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ von Vektoren aus V heißt <u>Basis</u> von V $=_{Df}$

1. $b_1, \ldots, b_n$ sind linear unabhängig und
2. jeder Vektor $a \in V$ läßt sich als Linearkombination der Vektoren $b_1, \ldots, b_n$ darstellen, d. h., es ist
   $$a = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n$$
   mit gewissen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R$.

<u>Beispiele:</u>

1. Als Basis des Raumes der geometrischen Vektoren kann man ein orthonormiertes Dreibein wählen (drei zueinander senkrechte Vektoren der Länge 1): Jeder Vektor des Raumes läßt sich als Linearkombination dieser drei Vektoren darstellen, und diese selbst sind linear unabhängig.

2. Die n Vektoren
   $$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix},$$
   bei denen jeweils genau eine Koordinate 1 und die übrigen 0 sind, bilden eine Basis von R_n.

In diesem Zusammenhang ist der folgende Satz wichtig, der hier ohne Beweis angegeben wird.

<u>S a t z   1 :</u>

Jeder Vektorraum besitzt wenigstens eine Basis.

Der Raum der reellwertigen Funktionen über dem Intervall (a,b) besitzt eine Basis mit unendlich vielen Elementen (Menge derjenigen Funktionen, die jeweils an genau einer Stelle den Wert 1 annehmen und sonst überall Null). Eine Basis des Lösungsraumes eines linearen Gleichungssystems richtet sich nach der konkreten Beschaffenheit dieses Systems.

In den meisten Vektorräumen kann man viele verschiedene Basen angeben.

So ist z. B. neben $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ auch $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

eine Basis von R_3.

Beweis:

1. Die Vektoren sind linear unabhängig, denn

$$\alpha_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha_2\\\alpha_2\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha_3\\\alpha_3\\\alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\\\alpha_2+\alpha_3\\\alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

gilt dann und nur dann, wenn $\alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1 = 0$ ist.

2. Ein beliebiger Vektor

$\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix} \in R_3$ läßt sich wie folgt als Linearkombination dieser Vektoren darstellen:

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix} = (\alpha_1 - \alpha_2)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + (\alpha_2 - \alpha_3)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Beide Basen bestehen aus drei Elementen. Allgemein gilt

S a t z   2 :

Alle Basen ein und desselben Vektorraumes besitzen stets die gleiche Anzahl von Elementen.

Dieser Satz ist eine Folgerung des sogenannten Austauschsatzes:

S a t z   3 :

Ist $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis des Vektorraumes V und sind $a_1, \ldots, a_r$ linear unabhängige Vektoren aus V, so gibt es unter den Vektoren $b_1, \ldots, b_n$ r verschiedene Vektoren, die gegen die Vektoren $a_1, \ldots, a_r$ ausgetauscht werden können, so daß die dabei entstehende Menge ebenfalls eine Basis von V ist.

Der Leser überlege selbst, wie Satz 2 aus dem Satz 3 gefolgert werden kann. Der Austauschsatz selbst wird bewiesen durch vollständige Induktion über r, was wir Ihnen für den R_3 als Preisaufgabe (E 11) stellen.

Die Anzahl der Basiselemente eines Vektorraumes ist also eine charakteristische Größe für diesen Raum, und wir definieren deshalb:

D e f i n i t i o n   4 :

Die Anzahl der Elemente einer Basis eines Vektorraumes V heißt Dimension von V, bezeichnet durch dim V.

Folgerung:

Der Raum der geometrischen Vektoren hat die Dimension 3, der Raum der reellwertigen Funktionen ist unendlichdimensional, und es gilt $\dim R_n = n$.

Gerhard Lischke
Wiss. Assistent
im Bereich Kybernetik

I N F O R M A T I O N

Der "männliche" Computer

Kopfzerbrechen bereitete eine kybernetische Anlage den Wissenschaftlern des Nowosibirsker Rechenzentrums. Sie lieferte nur an das männliche Personal präzise Daten. Hielt sich jedoch eine Frau in der Nähe der Rechenanlage auf, spuckte sie falsche und mitunter absurde Antworten aus. Der Grund: Synthetische Kleidung erzeugt ein störendes elektrisches Feld!

Prüfungen - Notwendiges Übel oder Höhepunkt?

Die "WURZEL" informierte sich für Sie bei Herrn Professor G l a e s k e , dem stellvertretenden Direktor für Erziehung und Ausbildung unserer Sektion, über die Gegenwart und Zukunft des Prüfungssystems an unserer Sektion. Lesen Sie bitte im Folgenden das Wichtigste aus diesem Gespräch:

Zunächst zum Sinn der Prüfungen: Der augenfälligste Aspekt ist wohl der des Leistungsnachweises; aber es ist nur einer und gar nicht unbedingt der wichtigste. Dem Inhalt nach ist jede Prüfung natürlich ein Leistungstest, und oftmals hängt die Endnote im entsprechenden Fach vom Prüfungsergebnis ab. Deshalb ist auch jeder Student bemüht, möglichst gut gerüstet zur Prüfung zu erscheinen. Ihm steht eine von Lehrveranstaltungen freie Zeit zur Intensivvorbereitung (zwei oder drei Wochen, abhängig von der Zahl und Bedeutung der Prüfungen) zur Verfügung, in der er sich einen Gesamtüberblick über den Stoff des vergangenen Lehrabschnitts verschaffen kann. (Es soll ja auch Studenten geben, die in dieser Zeit überhaupt erst anfangen, die Vorlesung ernsthaft nachzuarbeiten; sie erscheinen dann meist zur Wiederholungsprüfung noch einmal.) Dieser Gedanke ist bei der Frage nach dem Sinn der Prüfungen außerordentlich wichtig: das Erkennen größerer inhaltlicher Zusammenhänge im behandelten Fachgebiet während der Prüfungsvorbereitung. Dies ist durch nichts zu ersetzen. So sehr sich auch jeder gute und sehr gute Student über eine Prüfungsbefreiung - die es zur Zeit noch in einigen Fächern gibt - freut, so gehen ihm doch indirekt wesentliche Erkenntnisse verloren.

Ein weiterer und nicht zu unterschätzender Aspekt jeder Prüfung ist, daß sie den Abschluß und damit Höhepunkt einer Vorlesungsreihe bildet.

Ist dieser Sinn der Prüfungen nun wirklich schon Realität? Was wird für die Verbesserung des Prüfungssystems getan? Wesentlich wird ein neuer, für die DDR einheitlicher Studien-plan Mathematik zur Verbesserung der gegenwärtig noch vorhandenen Mängel beitragen. Das Verhältnis der Vorlesungszeit zur Anzahl der Übungen wird verbindlich so geregelt, daß in den Übungen regelmäßig eine Leistungskontrolle durchgeführt werden kann. Das bringt eine größere Kontinuität in der Arbeit und eine vom Zufall weitgehend unabhängige Leistungsbewertung mit sich. Voraussetzung dafür ist allerdings die selbständige Arbeit der Studenten und sehr wesentlich auch eine gute Qualität der Vorlesungen.

Aus diesem Grund werden in Zukunft auch die bestqualifizierten Wissenschaftler für die Lehrveranstaltungen und damit auch zur Prüfungsabnahme verpflichtet werden. Eine von einem prominenten Wissenschaftler durchgeführte Prüfung wird für den Studenten zu einem größeren Ereignis.

In Zukunft werden auch keine sogenannten Komplexprüfungen (d. h. mehrere Disziplinen werden in <u>einer</u> Prüfung behandelt) mehr stattfinden, wie sie in der Vergangenheit oft aus Zeitgründen nötig waren. Es werden pro Semester auch nur zwei (in Ausnahmefällen drei) Prüfungen stattfinden, so daß die Prüfungsvorbereitungszeit ihren wirklichen Sinn erfüllen kann. Der Wegfall einiger Zwischenprüfungen wird möglich, weil die eigentliche Leistungskontrolle in den Übungen erfolgt.

Alle Verbesserungen des Prüfungssystems können natürlich nur darauf zielen, die Effektivität der Studienarbeit zu erhöhen und eine möglichst gerechte Leistungseinschätzung zu erreichen. Am Arbeitsumfang wird sich für den Studenten nur wenig ändern, und es wird ihm auch niemand das Lernen abnehmen können - zumindest bis zur Einführung des berühmten Nürnberger Trichters nicht.

Nach Beschluß des neuen einheitlichen Studienplanes werden wir Sie über Einzelheiten informieren und Ihnen auch einen Überblick über alle abzulegenden Prüfungen während des Mathematik-Diplom- und -Lehrer-Studiums geben.

Preisaufgaben 2/73

(E 7) ② Eine natürliche Zahl n heiße Minimalpunkt einer Funktion f aus Nz^{Nz} (d. h. der Menge aller eindeutigen Abbildungen von der Menge der natürlichen Zahlen in die Menge der natürlichen Zahlen), wenn für alle natürlichen Zahlen m mit $m \geq n$ $f(m) \geq f(n)$ gilt.

Man zeige, daß jede eineindeutige Funktion g aus Nz^{Nz} unendlich viele Minimalpunkte besitzt.

(E 8) ① Man zeige, daß für alle reellen Zahlen x das Polynom

$$P(x) \equiv x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$$

positive Werte annimmt.

(E 9) ② Gegeben sei ein Winkel $\sphericalangle$ CAB und innerhalb von ihm ein Punkt P. Man lege durch P eine Gerade l so, daß der Umfang des durch l und die Schenkel $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ gebildeten Dreiecks minimal wird.

(E 10) ① Man bestimme den Wert $\tan \frac{\alpha}{2}$, wenn bekannt ist, daß $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$ und $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ gilt.

(E 11) ② Man beweise den Austauschsatz (Satz 3 unseres Fachartikels auf Seite 88) für den R_3.

(E 12) ① Пусть a, b – катеты прямоугольного треугольника, c – гипотенуза, h – высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу. Доказать, что треугольник со сторонами h, c+h, a+b является прямоугольным.

Lösungsbedingungen wie üblich! Beachten Sie bitte unsere neue Adresse:

WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

Zum Selbststudium

Eine sehr häufig im I. und II. Studienjahr aufgeworfene Frage beschäftigt sich mit der richtigen Organisation des Selbststudiums an der Universität. Der Grund dafür ist zweifellos auch in dem noch immer bestehenden großen Unterschied zwischen der Wissensvermittlung an den Schulen und den Universitäten zu suchen, und zwar hauptsächlich in der methodischen Aufbereitung des Stoffes. Wenn es in der Schule so war, daß man etwa ein Drittel der Unterrichtszeit für neuen Stoff und den Rest der Zeit zur Übung und Vertiefung dieses Stoffes verwendet hat, so ist das Verhältnis an den Universitäten gerade umgekehrt bzw. noch mehr zu Ungunsten der Übung verschoben. Es ist aber nach wie vor auch hier noch notwendig, sich den dargebotenen Stoff theoretisch und durch die Betrachtung von Beispielen anzueignen, was mitunter sehr viel Zeit kostet und natürlich zum größten Teil im Selbststudium geleistet werden muß. Hier beginnt nun die große Verantwortung des Studenten für sein Studium, die sich vor allem in der richtigen Einstellung zum Studium äußert. Konkret läßt sich das an solchen Kriterien wie

- sorgfältiges Nacharbeiten der Vorlesungen,
- richtiges Arbeiten mit den Fachbüchern,
- gewissenhafte Vorbereitung der Übung,
- volle Ausnutzung der Studienzeit usw.

messen.

Selbstverständlich trägt hierbei auch der Seminargruppenbetreuer - und natürlich auch schon der Lehrer an der Schule - eine große Verantwortung in der Hinsicht, daß er die Studenten zu einer richtigen Einstellung zum Studium erzieht und auch wichtige und wertvolle Ratschläge der methodischen Bearbeitung und Durchdringung des Stoffes gibt. Dazu gehören: Nutzung der Bibliotheken, richtige Literaturbeschaffung, lehrhafte Auswahl von Beispielen in der Übung, Erziehung der Studenten zu guter Studiendisziplin durch geeignete Kontrollsysteme.

Obwohl in dieser Richtung auch an unserer Sektion schon Anstrengungen unternommen werden, Betreuer zu benennen, die diesen hohen Anforderungen gerecht werden, werden trotzdem auch jetzt noch der Mangel an pädagogischen Kenntnissen und die mangelnde methodische Aufbereitung des Stoffes durch manche Dozenten und Übungsleiter von den Studenten kritisiert. Hier gilt es in nächster Zeit auch bei uns noch einiges nachzuholen.

Eine weitere wichtige Form der Organisierung des Selbststudiums ist das kollektive Lernen in der Seminargruppe. Konkret kann das so aussehen, daß sich innerhalb der Gruppe Lernkollektive bilden, die sich zu festgelegten Zeiten mit den Studienaufgaben beschäftigen. Das hat den großen Vorteil, daß leichtere Probleme bereits hier gelöst werden können und man nur die "schweren Brocken" in der Übung behandeln muß. An dieser Stelle möchte ich ganz deutlich auf die hohe Verantwortung der FDJ hinweisen, die sie in diesem Prozeß der Kollektivbildung, der richtigen Einstellung der Studenten für das Studium, für die Bildung solcher Lerngruppen und damit auch für das Selbststudium jedes Studenten trägt. Hier ergibt sich für uns als FDJ die verpflichtende Aufgabe, durch unsere konkrete ideologische Arbeit die Studenten zu höchsten Leistungen im Studium anzuspornen, um damit dann auch wesentlich zur Stärkung unseres sozialistischen Landes beizutragen.

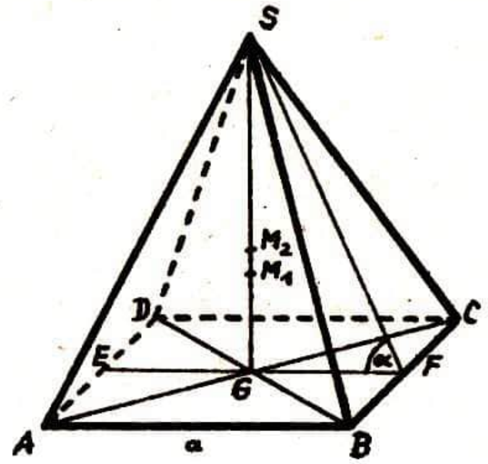
Es ließen sich jetzt noch einige Aspekte aufführen, die das Selbststudium beeinflussen, wie z. B. die Wohnheimatmosphäre. Immer wieder kommen wir aber, und das sei abschließend noch einmal hervorgehoben, auf das allgemeine Grundproblem, nämlich die richtige Einstellung des Studenten zum Studium, zurück.

Heinz Geußler
Student, Analysis V

(D 58)

L

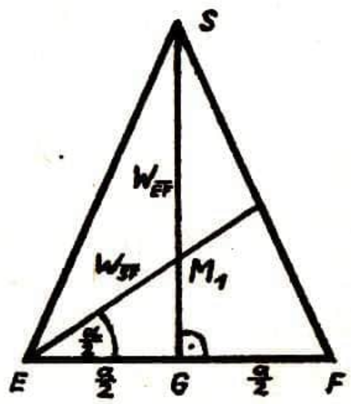
Es sei SABCD die vierseitige Pyramide mit dem Quadrat □ABCD als Grundfläche. Es seien E und F die Mittelpunkte der Kanten $\overline{AD}$ bzw. $\overline{BC}$, G der Schnittpunkt der Diagonalen von □ABCD, M_1, M_2 die Mittelpunkte der der Pyramide ein- bzw. umbeschriebenen Kugeln, a die Länge der Kante $\overline{AB}$ und α die Größe des Winkels ∢ EFS.



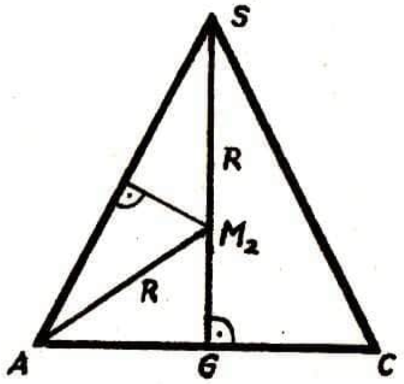
(1) Die Höhe $\overline{SG}$ der Pyramide, durch a und α ausgedrückt, ist gleich $\frac{a}{2}\cdot\tan\alpha$.

(2) Der Radius r der der Pyramide einbeschriebenen Kugel ist gleich dem Radius des Inkreises des Dreiecks Δ EFS und ergibt sich damit zu

$r = \frac{a}{2}\cdot\tan\frac{\alpha}{2}$.



(3) Der Radius R der der Pyramide umschriebenen Kugel ist gleich dem Radius des Umkreises des Dreiecks Δ ACS.



In dem rechtwinkligen Dreieck $\Delta\ AGM_2$ gilt aber

$$\overline{AG}^2 + \overline{M_2G}^2 = \overline{AM_2}^2$$

oder
$$\overline{AG}^2 + (\overline{SG} - \overline{M_2S})^2 = \overline{AM_2}^2 ,$$

d. h., $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\cdot\tan\alpha - R\right)^2 = R^2 .$

$$\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4}\cdot\tan^2\alpha - 2\cdot\frac{a}{2}\cdot\tan\alpha\cdot R + R^2 = R^2 ,$$

$$\frac{a^2}{4}(2 + \tan^2\alpha) = R\cdot a\cdot\tan\alpha ,$$

$$R = \frac{a(2 + \tan^2\alpha)}{4\cdot\tan\alpha} .$$

(4) Damit erhält man

$$\frac{R}{r} = \frac{a(2 + \tan^2\alpha)}{4\cdot\tan\alpha}\cdot\frac{2}{a\cdot\tan\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{2 + \tan^2\alpha}{2\cdot\tan\alpha\cdot\tan\frac{\alpha}{2}} .$$

Drückt man $\tan\alpha$ durch $\tan\frac{\alpha}{2}$ aus gemäß

$$\tan\alpha = \frac{2\cdot\tan\frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}} ,$$ so erhält man

$$\frac{R}{r} = \frac{2 + \dfrac{4\cdot\tan^2\frac{\alpha}{2}}{(1 - \tan^2\frac{\alpha}{2})^2}}{2\cdot\dfrac{2\cdot\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\tan\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{2(1 - \tan^2\frac{\alpha}{2})^2 + 4\cdot\tan^2\frac{\alpha}{2}}{4\cdot\tan^2\frac{\alpha}{2}\cdot(1 - \tan^2\frac{\alpha}{2})}$$

$$= \frac{1 + \tan^4\frac{\alpha}{2}}{2\cdot\tan^2\frac{\alpha}{2}\cdot(1 - \tan^2\frac{\alpha}{2})} .$$

Substituiert man $x = \tan \frac{\alpha}{2}$, so ergibt sich

$$\frac{R}{r} = \frac{1 + x^4}{2x^2(1 - x^2)} .$$

Es ist nur noch zu zeigen, daß für $0 < x < 1$

$$\frac{1 + x^4}{2x^2(1 - x^2)} \geq 1 + \sqrt{2} \quad \text{gilt.}$$

Es gilt aber $((1 + \sqrt{2})x^2 - 1)^2 \geq 0$

und damit $(1 + 2\sqrt{2} + 2)x^4 - 2(1 + \sqrt{2})x^2 + 1 \geq 0.$

Das läßt sich umformen zu

$$x^4 + 1 + 2(1 + \sqrt{2})x^2(x^2 - 1) \geq 0 .$$

Dividiert man die Ungleichung durch die für $0 < x < 1$ positive Zahl $2x^2(1 - x^2)$, ergibt sich

$$\frac{1 + x^4}{2x^2(1 - x^2)} - (1 + \sqrt{2}) \geq 0$$

oder $$\frac{1 + x^4}{2x^2(1 - x^2)} \geq 1 + \sqrt{2} .$$

Damit ist alles bewiesen.

Gut gesagt

"Es ist bekannt, daß die Kenntnisse der Menschen die Bezeichnung Wissenschaft in Abhängigkeit davon verdienen, welche Rolle in diesen Kenntnissen die Zahl spielt."

Emile Borel (1871 – 1956)

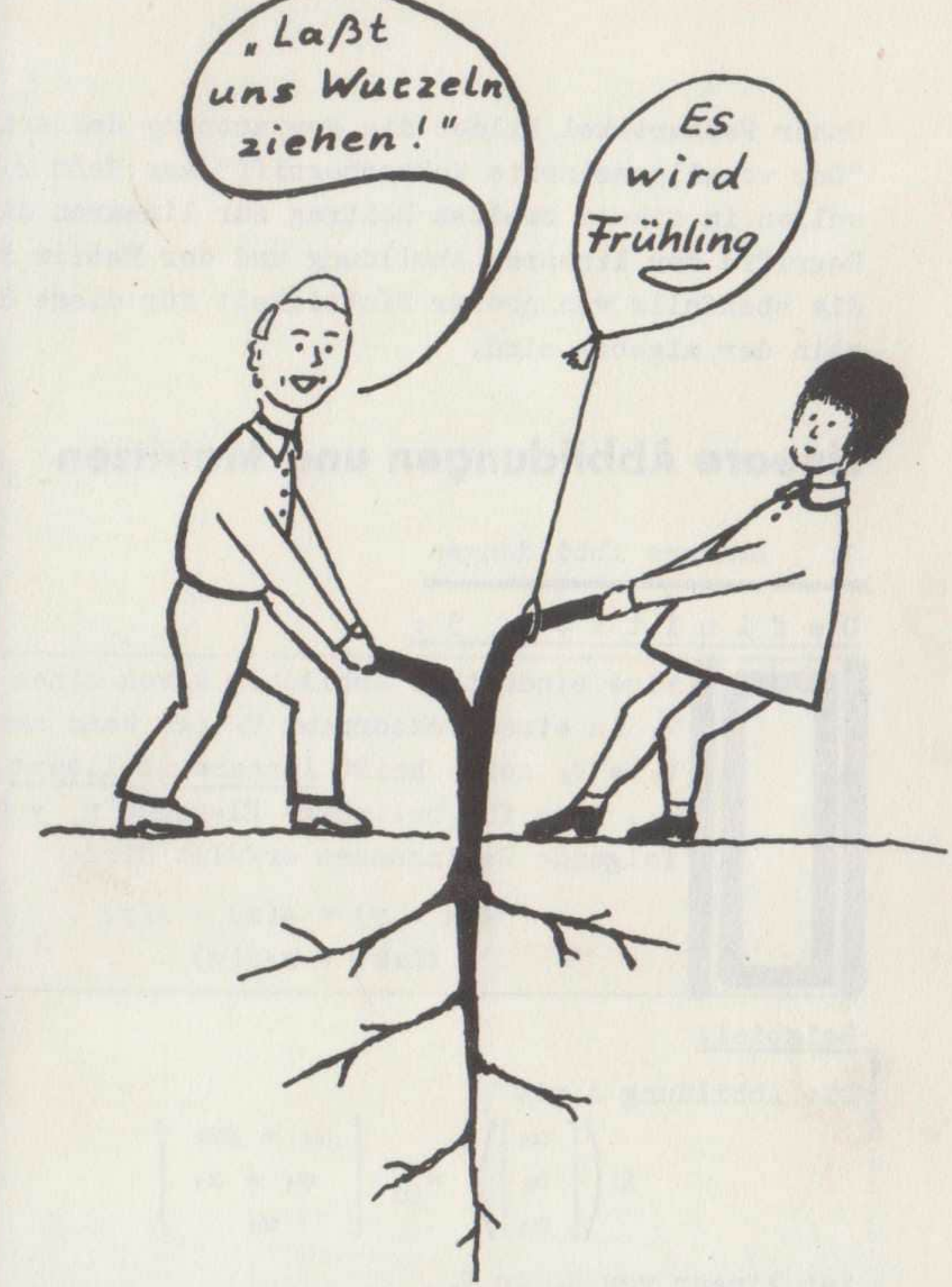
Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung" der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Leiter: Reinhard Klette

Redaktion: Werner Nagel (Chefredakteur); U. Heuke, H. Fischer, R. Lorenz

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

Anschrift: WURZEL
69 Jena
Universitätshochhaus
Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45



3
73

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Fr.-Schiller-Universität Jena

Unser Fachartikel bildet die Fortsetzung des Artikels "Der verallgemeinerte Vektorbegriff" aus Heft 2/73. Wir wollen in diesem zweiten Beitrag zur linearen Algebra die Begriffe der linearen Abbildung und der Matrix kennenlernen, die ebenfalls von großer Wichtigkeit für diese Spezialdisziplin der Algebra sind.

Lineare Abbildungen und Matritzen

1. Lineare Abbildungen

Definition 5:

Eine eindeutige Abbildung A von einem Vektorraum V_1 in einen Vektorraum V_2 (es kann natürlich $V_1 = V_2$ sein) heißt lineare Abbildung von V_1 in V_2, wenn für beliebige Elemente $x, y \in V_1$, $\alpha \in R$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$A(x + y) = A(x) + A(y)\ ,$$
$$A(\alpha x) = \alpha \cdot A(x)\ .$$

Beispiel:

Die Abbildung A mit

$$A\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}\right) =_{Df} \begin{bmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

ist linear von R_3 in R_3.

Setzen wir nëmlich $x = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$, so gilt:

$$A(x + y) = A\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \alpha_3 + \beta_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (\alpha_1 + \beta_1) + 2(\alpha_2 + \beta_2) \\ (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_3 + \beta_3) \\ \alpha_3 + \beta_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 + 2\beta_2 \\ \beta_1 + \beta_3 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = A(x) + A(y)\ ,$$

$$A(\alpha x) = A\left(\begin{bmatrix}\alpha\cdot\alpha_1\\ \alpha\cdot\alpha_2\\ \alpha\cdot\alpha_3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\alpha\alpha_1 + 2\alpha\alpha_2\\ \alpha\alpha_1 + \alpha\alpha_3\\ \alpha\alpha_3\end{bmatrix} = \alpha\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1 + 2\alpha_2\\ \alpha_1 + \alpha_3\\ \alpha_3\end{bmatrix} = \alpha\cdot A(x)\ .$$

Betrachten wir die Menge aller Elemente, die als Bild bei einer linearen Abbildung A auftreten können, d. h. die Menge $A(V_1) = \{A(x) : x \in V_1\}$ oder den Wertebereich von A, so können wir feststellen, daß diese Menge selbst wieder einen Vektorraum darstellt. In unserem Beispiel ist das die Menge aller Vektoren der Gestalt

$\begin{bmatrix}\alpha_1 + 2\alpha_2\\ \alpha_1 + \alpha_3\\ \alpha_3\end{bmatrix}$, wobei α_1, α_2, α_3 beliebige reelle Zahlen sind.

Die Addition von zwei Vektoren dieser Gestalt oder Multiplikation mit einer reellen Zahl ergibt stets wieder einen Vektor dieser Gestalt, und es gelten die Rechenregeln (1) bis (8).

Lineare Abbildungen sind also solche Abbildungen, bei denen ein Vektorraum wieder in einen Vektorraum überführt wird.

2. Matrizen

D e f i n i t i o n 6 :

D Ein rechteckiges Zahlenschema der Form

$$A = \begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \vdots & & & \vdots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn}\end{bmatrix}$$

heißt Matrix. Die α_{ij} sind dabei reelle Zahlen. A heißt Matrix vom Typ (m,n), wenn sie m Zeilen und n Spalten besitzt. Ist m = n, so heißt die Matrix quadratisch.

Matrizen gleichen Typs werden addiert, indem die Zahlen, die an entsprechend gleichen Stellen stehen, addiert werden:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{m1} & \cdots & \beta_{mn} \end{bmatrix} =_{\mathrm{Df}} \begin{bmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11} & \cdots & \alpha_{1n}+\beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}+\beta_{m1} & \cdots & \alpha_{mn}+\beta_{mn} \end{bmatrix} .$$

Bezüglich dieser Addition sind die Rechenregeln (1) bis (4) erfüllt, d. h., Matrizen gleichen Typs bilden bezüglich + eine kommutative Gruppe. Das Nullelement dieser Gruppe ist die sog. Nullmatrix, deren sämtliche Elemente gleich Null sind.

Eine Matrix wird mit einer reellen Zahl multipliziert, indem jedes Element der Matrix mit dieser Zahl multipliziert wird:

$$\gamma \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} =_{\mathrm{Df}} \begin{bmatrix} \gamma\alpha_{11} & \cdots & \gamma\alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma\alpha_{m1} & \cdots & \gamma\alpha_{mn} \end{bmatrix} .$$

Bezüglich dieser Multiplikation gelten die Regeln (5) bis (8), so daß wir insgesamt sagen können:

Alle Matrizen gleichen Typs bilden stets einen Vektorraum über R.

Sind $\mathfrak{A}$ eine Matrix vom Typ (m,n) und $\mathfrak{B}$ eine Matrix vom Typ (n,r), d. h. stimmt die Anzahl der Spalten von $\mathfrak{A}$ mit der Anzahl der Zeilen von $\mathfrak{B}$ überein, so können diese Matrizen miteinander multipliziert werden, und als Ergebnis ergibt sich eine Matrix $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ vom Typ (m,r), deren Elemente γ_{ik} wie folgt berechnet werden:

$$\gamma_{ik} = \alpha_{i1}\beta_{1k} + \alpha_{i2}\beta_{2k} + \ldots + \alpha_{in}\beta_{nk} = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{il}\beta_{lk} .$$

(α_{il} sind Elemente der Matrix $\mathfrak{A}$, β_{lk} Elemente der Matrix $\mathfrak{B}$.)

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 17 & 3 & 18 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix} .$$

(Es ist z. B. $\gamma_{23} = \alpha_{21}\beta_{13} + \alpha_{22}\beta_{23} + \alpha_{23}\beta_{33} + \alpha_{24}\beta_{43} =$
$= 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 18$).

Diese Multiplikation von Matrizen ist assoziativ und distributiv, d. h., es gilt:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \quad ,$$

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{C} \quad ,$$

$$(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{A} \quad .$$

Im Unterschied zur üblichen Zahlenmultiplikation ist die Matrizenmultiplikation jedoch nicht kommutativ, d. h., es gilt nicht allgemein $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ (deshalb müssen auch bei der Distributivität beide Fälle angegeben werden).

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \text{ jedoch } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Während auch bei reellen Zahlen das Produkt nur dann Null sein kann, wenn einer der Faktoren Null ist, kann bei Matrizen das Produkt die Nullmatrix ergeben, obwohl alle Faktoren von der Nullmatrix verschieden sind.

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

3. Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen

Wir wollen davon ausgehen, daß A eine lineare Abbildung von dem Vektorraum V_1 in den Vektorraum V_2 ist und $B_1 = \{b_1^{(1)}, \ldots, b_n^{(1)}\}$ eine Basis von V_1 und $B_2 = \{b_1^{(2)}, \ldots, b_m^{(2)}\}$ eine Basis von V_2. $A(b_j^{(1)})$ $(1 \leq j \leq n)$ ist stets ein Element aus V_2 und kann demzufolge in eindeutiger Weise als Linearkombination der Elemente aus B_2 dargestellt werden:

$$A(b_j^{(1)}) = \alpha_{1j} b_1^{(2)} + \alpha_{2j} b_2^{(2)} + \ldots + \alpha_{mj} b_m^{(2)} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i^{(2)} \quad .$$

Die Elemente α_{ij} $(i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n)$ können in einer Matrix angeordnet werden, und wir nennen dann

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

die zur Abbildung A hinsichtlich der Basen B_1, B_2 gehörende Matrix.

Ist x ein beliebiger Vektor aus V_1, so ist x eine Linearkombination der Elemente aus B_1:

$$x = \gamma_1 b_1^{(1)} + \dots + \gamma_n b_n^{(1)} \quad .$$

A(x) ist eine Linearkombination der Elemente aus B_2:

$$A(x) = \gamma_1' b_1^{(2)} + \dots + \gamma_m' b_m^{(2)} \quad .$$

Andererseits kann A(x) nach Definition 5 wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} A(x) &= A(\gamma_1 b_1^{(1)} + \dots + \gamma_n b_n^{(1)}) = \gamma_1 A(b_1^{(1)}) + \dots + \gamma_n A(b_n^{(1)}) \\ &= \gamma_1\Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i1} b_i^{(2)}\Big) + \dots + \gamma_n\Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{in} b_i^{(2)}\Big) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\gamma_j b_i^{(2)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\gamma_j b_i^{(2)} = \\ &= \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j}\gamma_j\Big) b_1^{(2)} + \dots + \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{mj}\gamma_j\Big) b_m^{(2)} \; . \end{aligned}$$

Es muß also $\gamma_i' = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\gamma_j$ sein. Dieser Zusammenhang wird gerade durch die folgende Matrizenmultiplikation zum Ausdruck gebracht:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1' \\ \vdots \\ \gamma_m' \end{bmatrix} \; .$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

S a t z 4 :

Ist $\mathfrak{A}$ die Matrix zur linearen Abbildung A von V_1 in V_2 hinsichtlich der Basen B_1, B_2, x ein beliebiges Element aus V_1 mit

$x = \gamma_1 b_1^{(1)} + \ldots + \gamma_n b_n^{(1)}$ und $A(x) = \gamma_1' b_1^{(2)} + \ldots + \gamma_m' b_m^{(2)}$, so gilt

$$\begin{bmatrix} \gamma_1' \\ \vdots \\ \gamma_m' \end{bmatrix} = \mathfrak{A} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} .$$

Es besteht also bei vorgegebenen Basen ein eineindeutiger Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und entsprechenden Matrizen. (Um dies vollständig klar zu machen, wären noch einige weitere Überlegungen nötig, die aber hier nicht gemacht werden sollen.)

Betrachten wir noch einmal unser Beispiel unter 1. Nehmen wir als Basen $B_1 = B_2 = \{b_1, b_2, b_3\}$ mit

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

so erhalten wir als zu A gehörige Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

(Die Bilder $A(b_i)$ der Basisvektoren sind hier gerade die Spalten der Matrix wegen der speziellen Beschaffenheit dieser Basis.) Ist x ein beliebiger Vektor aus R_3, so gilt hier wegen der speziellen Basis nach Satz 4

$$A(x) = \mathfrak{A} \cdot x .$$

4. Anwendungen der Matrizenrechnung

Die Matrizenrechnung und andere Teile der linearen Algebra finden vielfältige Anwendung bei der mathematischen Modellierung von Problemen der Ökonomie und Technik. Als Beispiel sei hier nur die sogenannte Verflechtungsbilanz kurz erläutert. Wir gehen aus von n Betrieben 1, 2, ..., n, die durch Lieferung und Abnahme von Produkten miteinander in Beziehung stehen. x_{ij} soll bedeuten, daß der Betrieb i an den Betrieb j die Menge x_{ij} eines bestimmten Produktes liefert. a_{ij} soll

die Menge der Erzeugnisse sein, die im Betrieb i aufgewendet werden muß, damit ein bestimmtes Erzeugnis im Betrieb j hergestellt werden kann. Ist x_j die Gesamtproduktion des Betriebes j, so gilt $x_{ij} = a_{ij} x_j$.
Außerdem werde vom Betrieb i der Endverbrauch y_i ausgesondert (Konsumtion, Investitionen, Reparaturen, Abschreibungen, Export usw.). Damit gilt für die Gesamtproduktion des Betriebes i:

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n + y_i = x_i \qquad (i = 1,\dots,n) .$$

Setzt man

$$\mathfrak{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

so erhält man folgende Matrizengleichung, die die Verflechtungsbilanz ausdrückt:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = \mathfrak{x} .$$

Bei Vorgabe des Endverbrauchsvektors $\mathfrak{y}$ können mit Methoden der linearen Algebra der Vektor $\mathfrak{x}$ und damit das benötigte Bruttoprodukt der Betriebe errechnet werden. Danach lassen sich Aussagen über die Realisierung der Planziele machen und Maßnahmen zur Bereitstellung von Arbeitskräften, den Vollzug von Investitionen usw. ableiten.

Gerhard Lischke
Wiss. Assistent
im Bereich Kybernetik

I N F O R M A T I O N

Lichtspiele am Computer

Ein in Kiew entwickelter Computer, der "MIR 2", ist für eine unmittelbare Mensch-Maschine-Kommunikation geeignet. Auf einem Bildschirm dieses Computers erscheinen mathematische Formeln, die der Operator mit Hilfe eines taschenlampenähnlichen Lichtstiftes vom Bildschirm abberufen kann, um sie in das jeweilige Programm zu übernehmen. Dies geschieht, indem der Operator auf die gewünschte Formel einen Lichtstrahl lenkt.

Preisaufgaben 3/73

(E 13) ②

In der Ebene P sei ein Winkel $\sphericalangle BAC$ von 60° gegeben. Ein Punkt S habe von A eine Entfernung von 25 cm, von der Gerade $\overline{AB}$ einen Abstand von 7 cm und von der Gerade $\overline{AC}$ einen Abstand von 20 cm. Wie groß ist der Abstand von S zur Ebene P?

(E 14) ①

Wieviel natürliche Zahlen kleiner als 1000 gibt es, die weder durch 3 noch durch 5 noch durch 7 teilbar sind?

(E 15) ②

Eine Funktion g von der Menge aller geordneten Paare reeller Zahlen in die Menge der reellen Zahlen besitze die Eigenschaft, daß für alle reellen Zahlen x, y, z die Gleichung

$$g(x,y) \cdot g(y,z) = g(x,z)$$

gilt. Man zeige, daß, falls es zwei reelle Zahlen a, b mit $g(a,b) = 0$ gibt, g identisch verschwindet, d. h. $g \equiv 0$ ist.

(E 16) ①

Man beweise, daß die Gleichung

$$\frac{2 \cdot \cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \sqrt{3}$$

gilt.

(E 17) ①

Man löse die Ungleichung

$$\log_3(x^2 - 5x + 6) < 0$$

in reellen Zahlen x!

(E 18) ②

Доказать, что угол треугольника будет острым, прямым или тупым, смотря по тому, будет ли противоположная сторона меньше, равна или больше удвоенной соответствующей медианы.

Lösungsbedingungen wie üblich!

Mengen, die es gar nicht gibt

Vielleicht halten Sie die Überschrift für Unsinn, der nichts mit ernsthafter Mathematik zu tun hat. Aber betrachten wir die Mengendefinition des Mathematikers Georg Cantor (1845 bis 1918) einmal näher! Ihnen wird diese Definition sicher schon aus dem Unterricht bekannt sein:

> "Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens – welche die Elemente der Menge genannt werden – zu einem Ganzen."

(1895 erschienen in "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre" von Cantor.)
Offenbar sind auch Mengen Objekte unseres Denkens; wir könnten also nach der Cantorschen Definition zum Beispiel die Menge aller Mengen bilden. Denken Sie einmal darüber nach, ob es eine solche Menge überhaupt geben kann! Diese "Menge aller Mengen" soll selbst eine Menge sein, müßte also ein Element von sich selbst sein. Eine solche Menge kann es aber nicht geben. Zwar kann eine Menge N Element einer anderen Menge $\mathfrak{M}$ sein; man spricht dann jedoch davon, daß $\mathfrak{M}$ von einer um eins höheren Bildungsstufe ist als N. (Betrachten wir zum Beispiel $N = \{a,b,c,d\}$ und $\mathfrak{M} = \{\{a,b,c,d\}\}$, so gilt $N \in \mathfrak{M}$. Die beiden Mengen sind nicht gleich, denn N enthält die Elemente a, b, c, d, während $\mathfrak{M}$ nur das Element N enthält.) Es kann also keine Menge geben, die sich selbst als Element enthält. Ist nämlich eine Menge von der Bildungsstufe n, so ist die Menge, in der sie als Element vorkommt, von der Stufe $n+1$. Zwei Mengen unterschiedlicher Bildungsstufen sind aber verschieden. Also kann es die "Menge aller Mengen" nicht geben.

Einen anderen widersprüchlichen Fall erhält man, wenn man die Menge M aller der Mengen bildet, die sich nicht selbst als Element enthalten. Untersucht man nun, ob M in M enthalten ist oder nicht, so stellt man leicht fest, daß $M \in M$ genau dann, wenn $M \notin M$. Das ist aber ein logischer Widerspruch. Folglich kann die Menge M gar nicht existieren.

Diese Beispiele von Mengen, die es gar nicht geben kann, die man aber anhand der Cantorschen Mengendefinition bilden darf, werden als Antinomien bezeichnet. Unser erster Fall ist als Cantorsche Antinomie der Menge aller Mengen bekannt, der zweite als Russelsche Antinomie (nach dem Mathematiker Bertrand Russel, geb. 1872). Führt man den Begriff der Kardinalzahl einer Menge ein (siehe z. B. "Kleine Enzyklopädie/ Mathematik" S. 701, 702), stößt man auf die sogenannte Fortische Antinomie (Cäsare Burali Forti, 1861 bis 1931) der Menge aller Kardinalzahlen.

Diese Beispiele zeigen, daß die Cantorsche Definition - die für die meisten Anwendungen und zur Veranschaulichung des Mengenbegriffs geeignet ist - im Sinne eines exakten Aufbaus der Mathematik unzureichend ist. Das schmälert nicht das Verdienst dieses großen Mathematikers, die Mengenlehre als grundlegende mathematische Theorie begründet zu haben.
Es zeigt sich, daß man auch in der Mathematik nicht "einfach irgendetwas definieren" darf, wie es manchem vielleicht erscheint, sondern daß man zumindest auf die Widerspruchsfreiheit achten muß.

Nach Entdeckung der Mengenantinomien verwarf man natürlich nicht die Idee der Mengenlehre als Ganzes, denn man hatte sie schon mit Erfolg in anderen mathematischen Disziplinen angewandt. Es gelang einigen Mathematikern, Axiomensysteme für den Aufbau der Mengenlehre aufzustellen, die allen bisherigen Prüfungen standgehalten haben. Ihre Widerspruchsfreiheit läßt sich allerdings nicht allgemein beweisen. Diese Axiomensysteme sind aber wenig anschaulich, und ihr Verständnis erfordert ein hohes Abstraktionsvermögen. Wer einen Eindruck davon gewinnen will, sollte einmal in dem Buch von Klaua, "Allgemeine Mengenlehre", blättern.

(Mit diesen Hinweisen wollen wir Sie natürlich nicht an Ihren mathematischen Fähigkeiten zweifeln lassen, sondern Sie vielmehr auf Probleme, die es in den Grundlagen der Mathematik gibt, aufmerksam machen.)

I N F O R M A T I O N

Optische Speicher - System der Zukunft

Ein wesentliches Kriterium für die Leistungsfähigkeit einer elektronischen Datenverarbeitungsanlage ist neben der Speicherkapazität die Geschwindigkeit, mit der die gespeicherten Informationen abgerufen werden können. Nach mehrjähriger Entwicklungszeit gelang es am Institut für Feinmechanik und Rechentechnik an der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, ein optisches Speichersystem zu entwickeln. Zur Aufzeichnung und zum "Lesen" der Informationen dient ein Laserstrahl, der auf ein Kristall trifft. Mit Hilfe dieses Prinzips werden die zukünftigen Maschinen Milliarden Ziffern und Worte speichern können.

Gut gesagt

"Die Mathematik ist eine gar herrliche Wissenschaft, die Mathematiker aber taugen oft den Henker nicht!"

Georg Ch. Lichtenberg (1742 - 1799)
Physiker und satirischer Schriftsteller
der Aufklärung

Lösungen

(D 60) L

Für nichtnegative reelle Zahlen gilt die Ungleichung

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc},$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn

$$a = b = c.$$

Dann gilt speziell für $a = x^3$, $b = y^3$ und $c = 1$

$$x^3 + y^3 + 1 \geq 3\sqrt[3]{x^3 y^3 1} = 3xy.$$

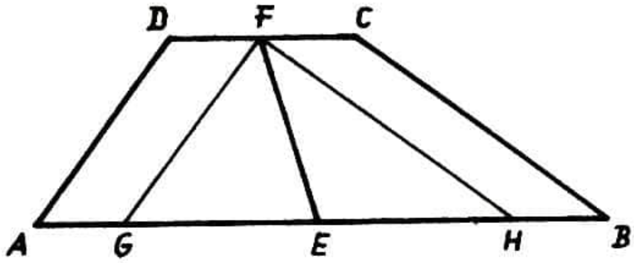
Das Gleichheitszeichen gilt nur für $x^3 = y^3 = 1$,

d.h. aber, nur $x = y = 1$ ist die Lösung der Gleichung

$$x^3 + y^3 + 1 = 3xy .$$

(D 63)

L



Es sei □ABCD das gegebene Trapez, wobei $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 90^\circ$. E und F seien die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$. Die Schnittpunkte der Seite $\overline{AB}$ mit den zu $\overline{AD}$ bzw. $\overline{BC}$ parallelen Geraden durch den Punkt F seien G bzw. H.

Dann gilt wegen $\overline{AD} \parallel \overline{FG}$ und $\overline{BC} \parallel \overline{FH}$, daß die Vierecke □AGFD und □HBCF Parallelogramme sind.
Daraus folgt

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle FGH \qquad (1)$$
$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle GHF \quad , \qquad (2)$$

und aus (1) und (2) folgt

$$\sphericalangle HFG = 180^\circ - \sphericalangle FGH - \sphericalangle GHF = 90^\circ \quad , \qquad (3)$$

was nichts anderes heißt, als daß das Dreieck Δ GHF rechtwinklig ist.

Weiter gilt
$$\overline{GH} = \overline{AB} - \overline{AG} - \overline{HB} = \overline{AB} - \overline{DF} - \overline{CF} = \overline{AB} - \overline{CD} \qquad (4)$$
sowie
$$\overline{EG} = \overline{AE} - \overline{AG} = \overline{AE} - \overline{DF} = \frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{CD} \quad , \qquad (5)$$
d. h., E ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{GH}$.

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Seitenhalbierende der Hypotenuse gleich der halben Hypotenuse (nämlich gleich dem Radius des Umkreises dieses Dreiecks).
Damit gilt speziell für das Dreieck Δ GHF

$$\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{GH} \quad \text{oder} \quad \overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AB} - \overline{CD}) \quad ,$$

was gerade zu beweisen war.

(D 64)

L

Eine durch 99 teilbare positive ganze Zahl n ist durch 9 und 11 teilbar. Damit muß ihre Quersumme durch 9 teilbar sein. Die Behauptung, daß ihre Quersumme größer als 17 ist, ist damit äquivalent zu der, daß die Quersumme von n ungleich 9 ist.

Es sei $n = (a_0 a_1 \ldots a_p)_{10}$ eine solche durch 99 teilbare Zahl im Dezimalsystem mit den Ziffern $a_0, \ldots, a_p$. Wir nehmen nun an, die Quersumme von n ist gleich 9, d. h.

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_p = 9 \quad . \tag{1}$$

Da n weiter durch 11 teilbar ist, muß auch gelten

$$a_0 - a_1 + a_2 - + \ldots + (-1)^p a_p = 11s \quad , \tag{2}$$

wobei s eine ganze Zahl ist.

Durch mehrmalige Anwendung der Dreiecksungleichung für reelle Zahlen x, y – $|x + y| \leq |x| + |y|$ – erhalten wir aber

$$\begin{aligned} |11s| &= |a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^p a_p| \\ &\leq |a_0| + |-a_1| + |a_2| + \ldots + |(-1)^p a_p| \\ &= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_p \\ &= 9 \ . \end{aligned}$$

Da s ganzzahlig sein muß, folgt also $s = 0$ und

$$a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^p a_p = 0 \ . \tag{2'}$$

Addiert man jetzt die Gleichungen (1) und (2'), so ergibt sich

$$2a_0 + 2a_2 + \ldots + 2a_{2\left[\frac{p}{2}\right]} = 9$$

($\left[\frac{p}{2}\right]$ ist die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich $\frac{p}{2}$ ist) und

$$2(a_0 + a_2 + \ldots + a_{2\left[\frac{p}{2}\right]}) = 9 \ .$$

Das ist aber ein Widerspruch, und unsere Annahme muß falsch sein.

Also hat jede durch 99 teilbare positive ganze Zahl eine Quersumme größer als 17.

(D 66)

L

Für beliebige Winkel x, y, z gelten die Beziehungen

$$\sin x + \sin y = \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) + \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right)$$

$$= \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} +$$

$$+ \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$= 2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\ , \tag{1}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cdot\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\ , \tag{2}$$

$$\cos x - \cos y = 2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}\ . \tag{3}$$

Daraus ergibt sich für die Summe

$$\sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$$

$$= 2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - 2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cos\left(\frac{x+y}{2} + z\right)$$

$$= 2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2} - \cos\left(\frac{x+y}{2} + z\right)\right)$$

$$= 2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\ .\ 2\cdot\sin\frac{x+z}{2}\sin\frac{y+z}{2}$$

$$= 4\cdot\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x+z}{2}\sin\frac{y+z}{2}\ .$$

Setzt man für x $2n\alpha$, y $2n\beta$ und z $2n\gamma$ mit $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, so erhält man

$$\sin 2n\alpha + \sin 2n\beta + \sin 2n\gamma - \sin 2n\pi$$

$$= 4\sin n(\alpha+\beta)\sin n(\alpha+\gamma)\sin n(\beta+\gamma)$$

$$= 4\sin n(\pi-\gamma)\sin n(\pi-\beta)\sin n(\pi-\alpha)\ .$$

Wegen $\sin 2n\pi = 0$ und

$$\sin n(\pi-x) = \sin n\pi\cos nx - \sin nx\cos n\pi$$

$$= -(-1)^n\sin nx$$

erhält man

$$\sin 2n\alpha + \sin 2n\beta + \sin 2n\gamma =$$

$$= (-1)^{n+1}\cdot 4\cdot\sin n\alpha\sin n\beta\sin n\gamma\ .$$

In KÖBELS RECHENBUCH, das im Jahre 1518 erschien, findet man folgende interessante Vorschrift zur Addition zweier Brüche:

Wiltu Summiren als $\frac{\text{II}}{\text{III}}$ zu $\frac{\text{III}}{\text{IIII}}$ so schreibe die creutzweiss under die Linie (= Rechenbank) also $\frac{\text{II}}{\text{III}} \times \frac{\text{III}}{\text{IIII}}$ Und manchfaltig die creutzweiss also / Sag III mal III ist IX und II mal IIII ist VIII. die VIII und IX leg zusammen / So wirt es XVII und ist der Zeler darnach mangfaltig die Nenner auch durch eynander also III mal IIII ist XII die XII schreib under die XVII und mach ein strichlein darzwischen stet also $\frac{\text{XVII}}{\text{XII}}$ und ist recht gemacht und helt in ym ein gantz und $\frac{\text{V}}{\text{XII}}$.

Bei unserer Feier zum 6-JAHRIGEN BESTEHEN DER "WURZEL" am 3. Februar legte auf einmal jemand 7 Streichhölzer in folgender Weise auf den Tisch:

(Man beachte die 6 auf der rechten Seite!) Er stellte uns die Aufgabe, durch Umlegen nur eines Streichholzes eine richtige Gleichung zusammenzulegen.
Wissen Sie, wie's geht?

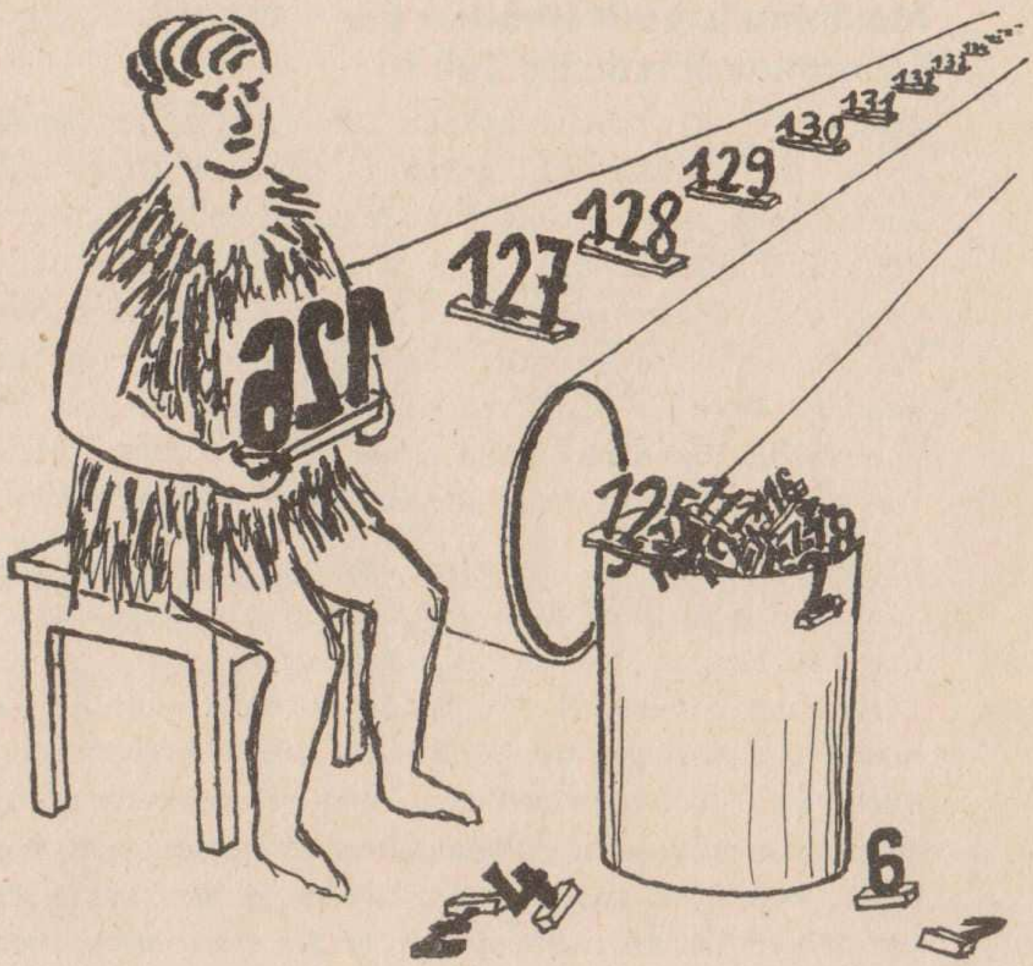
Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung" der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Leiter: Reinhard Klette

Redaktion: Werner Nagel (Chefredakteur); U. Heuke, H. Fischer, R. Lorenz

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

Anschrift: WURZEL
69 Jena
Universitätshochhaus
Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45



Winnibald Wurz lernt die natuerlichen Zahlen auswendig

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

4
73

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Fr.-Schiller-Universität Jena

Mathematische Methoden der Operationsforschung Teil I

Sie werden als mathematisch interessierter Leser, der Sie doch die "WURZEL" als ständige Lektüre Ihrer mathematischen Ausbildung betrachten, sicherlich schon des öfteren von der "Operationsforschung" gehört und vielleicht dieses Wort ebenfalls selbst gebraucht haben. Dabei sind bestimmt solche Fragen aufgetreten wie: Was ist überhaupt Operationsforschung? Welches Ziel und welche Bedeutung hat sie? Ist die Operationsforschung eine neue mathematische Disziplin, oder ist die Mathematik nur einer ihrer Bestandteile?

Dieser Artikel soll einige Grundgedanken zu solchen und ähnlichen Fragen darlegen und sich schließlich mit einigen speziellen Fragen der mathematischen Methoden in der Operationsforschung befassen. Sie werden hier sicherlich keine umfassende Darstellung der Probleme und erschöpfende Antworten erwarten. Jedoch mögen die Ausführungen Anregung für manchen zu seiner weiteren eigenen Beschäftigung mit diesen Fragen sein, wie etwa zum Studium der am Ende dieses Artikels aufgeführten Literatur und der im Artikel enthaltenen Aufgaben.

In der jüngsten Vergangenheit nahmen die Wissenschaften eine äußerst stürmische Entwicklung, die durch die Herausbildung sowohl zahlreicher relativ eigenständiger Spezialrichtungen innerhalb der verschiedenen Wissenschaften, als auch neuer wissenschaftlicher Disziplinen, meist als Bindeglieder zwischen schon bekannten Wissenschaften wirkend, gekennzeichnet ist. Besonders deutlich erkennbar wird dies an der Entwicklung der Mathematik selbst und durch die Entstehung der Operationsforschung, die uns hierbei aus gutem Grunde vorrangig interessieren soll.

War es einem Mathematiker noch vor gar nicht allzu langer Zeit möglich, sein gesamtes Fachgebiet und dazu noch Teile der Physik zu überschauen, bereitet es ihm heute oftmals schon Schwierigkeiten, die Forschungsergebnisse seiner Spezialrichtung zu überblicken und zu verfolgen, wie etwa der

Funktionalanalysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, Statistik und Kybernetik, die sich wiederum in jeweils viele spezielle Forschungsgebiete untergliedern. Gleichzeitig wurde der Charakter der Mathematik verändert. War sie früher eine fast ausschließlich theoretische Wissenschaft, die ihre Anwendung hauptsächlich in der Physik und verschiedenen technischen Wissenschaften fand und aus diesen Bereichen und besonders aus ihrer eigenen Entwicklung heraus die wichtigsten Impulse für die Forschung erfuhr, orientiert sich heute die Mathematik stark an den Anforderungen der Volkswirtschaft und noch anderer Wissenschaften, zum Beispiel Medizin, Biologie, Chemie, Ökonomie. Letztere ist heute zu einem der wichtigsten Anwendungsgebiete neben den anderen genannten geworden. Die Mathematik durchdringt gegenwärtig alle möglichen Bereiche unseres gesellschaftlichen Lebens.

Zur Erfüllung der vom VIII. Parteitag gestellten Hauptaufgabe ist die Ausnutzung aller Möglichkeiten erforderlich, durch die die gesamte gesellschaftliche Tätigkeit effektiver und rationeller gestaltet werden kann. Das trifft gleichermaßen für die Produktion wie auch für die Planungs- und Leitungstätigkeit zu.

> "Sehr wesentlich für die erfolgreiche Verwirklichung der ökonomischen Gesetze des Sozialismus ist das wissenschaftliche Niveau der Planung und Leitung der Volkswirtschaft",

führte Genosse Erich Honecker in seinen Darlegungen zu "Fragen von Wissenschaft und Politik in der sozialistischen Gesellschaft der DDR" aus.

Mit der wachsenden Arbeitsteilung und Kooperation, ob auf betrieblicher oder volkswirtschaftlicher Ebene oder im Rahmen des RGW, werden die ökonomischen Beziehungen immer komplizierter und umfangreicher. Die Einführung moderner Technik erfordert die weitere Zerfaserung der Produktionsprozesse, die Arbeitsgänge müssen in ihre elementaren Bestandteile zerlegt werden. Deshalb sind zur Gewährleistung eines harmonischen Produktionsablaufes mit hoher Effektivität wissenschaftliche Untersuchungen zur entsprechenden Organisation der Arbeitsabläufe notwendig, wobei gleichzeitig für die Werktätigen bestmögliche Arbeitsbedingungen gesichert sein müssen. Die Aufgaben der Leitung und Planung werden immer komplexer und komplizierter. Erfahrungen und Intuition versagen hierbei. Auch sind ein Plan und die zufälligen Entscheidungen nur dann wissenschaftlich, wenn sie auf der Grundlage wissenschaftlicher Untersuchungen und Methoden erarbeitet werden und unseren gesellschaftlichen Bedingungen entsprechen. Diese Methoden und Verfahren sind Gegenstand der Operationsforschung und anderer Leitungswissenschaften.

Die Operationsforschung ist eine noch verhältnismäßig junge Wissenschaft, die zunächst aus den Anforderungen des Militärwesens heraus entstand. Sehr schnell erkannten kapitalistische Wirtschaftsmanager, daß diese Verfahren und Methoden auch im wirtschaftlichen Bereich angewendet werden können. Sie wurden dem Streben nach Maximalprofit total untergeordnet und entsprechen ihm. Eine umfassende Anwendung gestattet und erfordert erst die sozialistische Gesellschaft bei der Leitung und Planung der gesellschaftlichen Reproduktion. Hier liegt der wesentliche Anwendungsbereich auf volkswirtschaftlicher Ebene.

Die Operationsforschung dient der Erhöhung der Effektivität der gesellschaftlichen Produktion zum mittelbaren und unmittelbaren Nutzen aller Werktätigen. In der unterschiedlichen Zielstellung, begründet auf der völligen Verschiedenheit beider Gesellschaftsordnungen, liegen die wesentlichen Unterschiede der Anwendung solcher Verfahren und Methoden. Deshalb müssen im Sozialismus eigene Wege ihrer Anwendung begangen werden, müssen die Verfahren und Methoden unseren Zielen entsprechend gestaltet werden. Jede formale Übertragung von Methoden der kapitalistischen Welt muß daher abgelehnt werden. Besonders in den letzten 20 Jahren hat sich die Operationsforschung in Verbindung mit der rasanten Entwicklung der Rechentechnik sehr rasch entfaltet, da diese die Möglichkeiten einer effektiven Berechnung von praktischen Aufgaben solcher Dimension, wie sie heute zu lösen sind, eröffnet.

"Operationsforschung - das heißt: Anwendung wissenschaftlicher Methoden und Verfahren zur Untersuchung ökonomischer, technologischer und auch gewisser gesellschaftlicher Prozesse, ihrer Organisation und Verhaltensweise mit dem Ziel, optimale Lösungen zu erreichen."

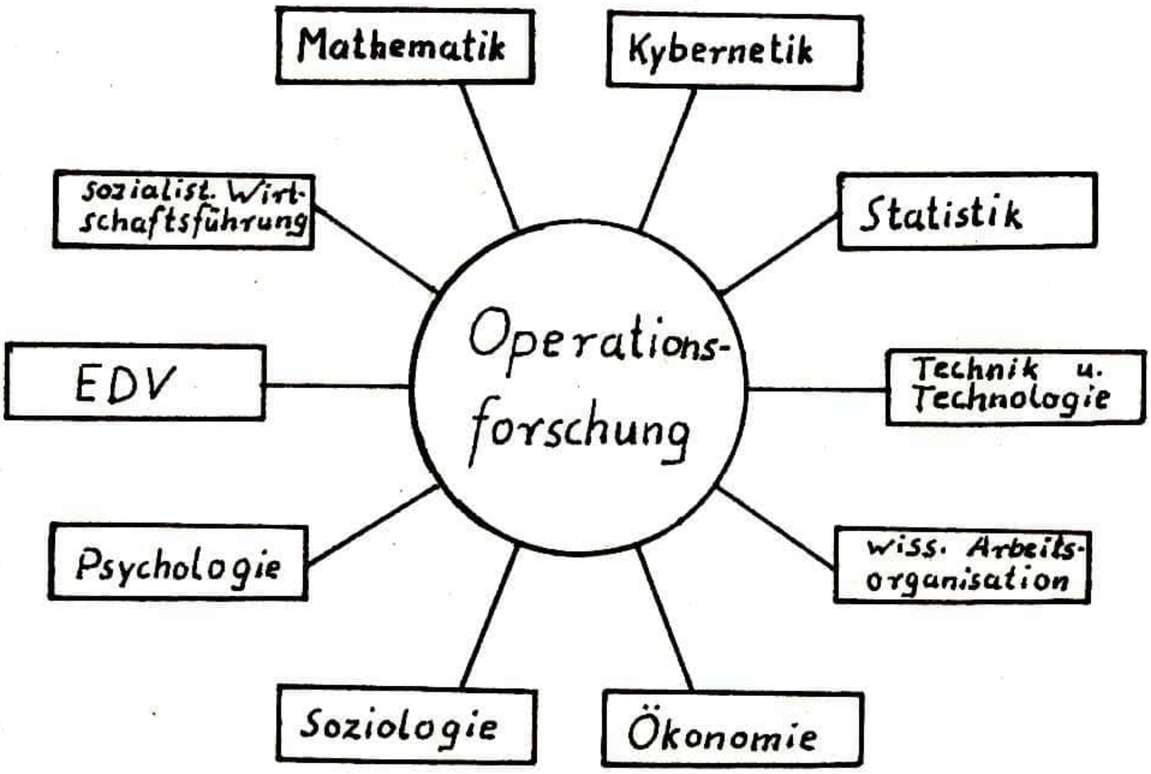
Diese Begriffsbestimmung gab Genosse Erich Honecker im Bericht des Politbüros an die 10. Tagung des ZK der SED 1969.

Die Zielstellung für die Anwendung der Operationsforschung in der Volkswirtschaft der DDR besteht darin, einen maximalen Beitrag zur Verwirklichung der Hauptaufgabe des Fünfjahrplanes bis 1975 und darüber hinaus zu leisten, insbesondere zur weiteren Intensivierung der gesellschaftlichen Produktion. Sie ist ein Teil der Führungstechnik und stellt vorwiegend mathematische Methoden und Verfahren zur Analyse, Modellierung und Berechnung im Sinne der Entscheidungsfindung bereit. Diese Modelle ermöglichen den Verantwortlichen den Überblick und erleichtern das tiefe Eindringen in die Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten, und erst sie gestatten die Ausführung der für die Planung notwendigen Berechnungen und Auswahl optimaler Varianten.

Die Operationsforschung ist im Rahmen der Volkswirtschaft nur ein Hilfsmittel, ein Instrument neben vielen anderen. Sie ist auch kein Allheilmittel zur schnellen und unkomplizierten Lösung bisher nicht lösbarer Probleme. Dies wäre eine Überschätzung ihrer Möglichkeiten. Grundlage unserer gesamten gesellschaftlichen, insbesondere wirtschaftlichen Tätigkeit, für Planung und Leitung ist und bleibt der Marxismus-Leninismus.

Die wissenschaftliche Analyse, Modellierung und Berechnung kann sich nur in gesellschaftlicher Arbeit von Fachleuten verschiedener Disziplinen vollziehen, denn die Modelle sollen möglichst genau die Praxis, die Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten widerspiegeln, davon hängt deren Verwendbarkeit ab. Die von der Operationsforschung verwendeten Methoden und Verfahren wurden deshalb der Praxis und den unterschiedlichsten Disziplinen entlehnt.

Eine Übersicht gibt die nachfolgende Abbildung. Es muß jedoch beachtet werden, daß die aufgeführten Gebiete selbständige Disziplinen sind.



Die mathematischen Methoden spielen dabei eine ausgezeichnete Rolle. Einerseits gestattet prinzipiell der mathematische Apparat die formale Beschreibung der Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten und gestaltet sie somit relativ überschaubar. Dabei können Problemstellungen aus den unterschiedlichsten Bereichen durchaus zu gleichartigen, lediglich im Umfang verschiedenen mathematischen Aufgaben führen. Die universelle Verwendbarkeit der Mathematik mögen einige Modelle im Teil II des Artikels unterstreichen.

Andererseits liefert die Mathematik, gleich, ob bereits vorhanden oder noch zu erforschen, die notwendigen Mittel zur Berechnung insbesondere unter dem Gesichtspunkt der Optimierung bei vorgegebenen, den Bedingungen entsprechenden

Kriterien. Gleichzeitig ist die formal-mathematische Beschreibung der Prozesse notwendig für diese Berechnungen mit Hilfe der Rechentechnik.

Die mathematischen Methoden in der Operationsforschung entstammen all jenen Disziplinen der Mathematik, die sich mit der Modellierung und optimalen Gestaltung realer Prozesse und Erscheinungen beschäftigen, wie zum Beispiel der mathematischen Statistik, Lagerhaltung und Spieltheorie, Extremwertrechnung und insbesondere der mathematischen Optimierung und Graphen- bzw. Netztheorie. Mit der mathematischen Optimierung wird sich ein Abschnitt des Artikels gesondert befassen.

Matthias Schilling
Forschungsstudent
im Bereich
Operationsforschung

Gut gesagt

Wenn die Mathematik nicht zu den Humanitätsstudien gezählt wird, so geschieht dies wohl nur, um nach der früheren Sitte das Studium der Mathematik von dem des Altertums mit seinen Sprachen zu unterscheiden, nicht um die Mathematik als ein für humanistische Bildung ungeeignetes Mittel zu bezeichnen.
(1834 von dem Lehrer Spiller in einer Streitschrift geschrieben; auch heute noch aktuell).

Der nicht ausführbare Befehl

Der Dorfbarbier Y war Soldat und bekam den Befehl, alle diejenigen Soldaten seiner Kompanie zu rasieren, die sich nicht selbst rasieren. Als er an sich selbst kam, stellte er fest, daß er den Befehl nicht ausführen konnte, und schoß sich eine Kugel durch den Kopf.
(Erkennen Sie die Mengenantinomie wieder?)

I N F O R M A T I O N

Beschlußkontrolle durch EDVA

Eine Rechenanlage vom Typ MINSK-22 arbeitet im Exekutivkomitee des Kiewer Stadtsowjets. Sie überprüft die Verwirklichung der Verfügungen und Beschlüsse. Dadurch ist die Qualität der Verwaltungsarbeit wesentlich verbessert werden.

Preisaufgaben 4/73

(E 19) 2

Eine regelmäßige vierseitige Pyramide ABCDS mit der Grundseite a und einem Winkel 2α zwischen der Grundfläche und der Seitenfläche Δ ABS werde von einer Ebene geschnitten, die diesen Winkel halbiert. Wie groß ist die entstehende Schnittfläche?

(E 20) 1

Für welche natürlichen Zahlen a besitzt die Gleichung

$$x^2 + y^2 = axy$$

eine Lösung in positiven ganzen Zahlen x, y?

(E 21) 2

Man zerlege unter der Voraussetzung, daß

$$13\,717\,421 = 761^2 + 7\cdot 1370^2$$
$$= 439^2 + 7\cdot 1390^2 ,$$

diese Zahl in Faktoren größer als 1!

(E 22) 1

Es ist zu zeigen, daß für positive ganze Zahlen n stets die Ungleichung

$$1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} < 2$$

gilt!

(E 23) 2

Man beweise, daß sich die Zahl $\sqrt[3]{2}$ nicht in der Form $p + q\sqrt{r}$ mit rationalen Zahlen p, q, r und $r > 0$ darstellen läßt!

(E 24) 2

Given an equilateral triangle Δ ABC. It is to prove that for all points M in the same plane as the triangle the inequality holds:

$$\overline{AM} \leq \overline{BM} + \overline{CM} .$$

For which points holds $\overline{AM} = \overline{BM} + \overline{CM}$?

Lösungsbedingungen wie üblich!

Unendlich
ist nicht gleich unendlich!

Der Zahlbegriff, jedem eine "Selbstverständlichkeit", setzt ein relativ hohes Abstraktionsvermögen voraus. Wie lernt man zählen? "Sieben Kühe, sieben Häuser, ...", bis man feststellt, daß alle betrachteten Objektmengen eines gemeinsam haben: die Anzahl. Die Zahl sieben ist dabei nur eine Bezeichnungsweise, ein Hilfsmittel, um sehr unterschiedliche Objektmengen zu vergleichen. Dieser Vergleich zweier Mengen ist natürlich auch direkt möglich: Man ordnet jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen Menge zu. Wenn eine solche Zuordnung möglich ist, bei der kein Element einer Menge ungepaart bleibt, so sagt man, daß beide Mengen gleich viele Elemente enthalten. Der Mathematiker nennt solche Mengen gleichmächtig. Nach diesen Vorbemerkungen nun die exakte

D e f i n i t i o n :

> **D** Zwei Mengen M und N heißen gleichmächtig $=_{Df}$
> Es existiert ein eineindeutige Abbildung von M auf N. (Man schreibt dann $M \sim N$.)

Beispiele:

1. $A = \{a,b,c\} \sim B = \{\alpha,\beta,\gamma\}$.
   (Geben Sie eine eineindeutige Abbildung von A auf B an!)
2. Die Mengen $C = \{a,b,c,d\}$ und $B = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ sind nichtgleichmächtig. (Es wird Ihnen nicht gelingen, eine eineindeutige Abbildung von B auf C oder von C auf B zu finden.)

Sehr oft gebraucht man die Begriffe "endliche Menge" und "unendliche Menge" (z.B.: Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen.). Anschaulich ist jedem klar, was damit gemeint ist, aber das kann einen Mathematiker natürlich nicht befriedigen. Mit Hilfe des Begriffs der Gleichmächtigkeit kann man sehr gut die Endlichkeit bzw. die Unendlichkeit von Mengen charakterisieren. Sie können selbst nachprüfen, daß die Definition gerada das ausdrückt, was Sie unter diesen Begriffen verstehen.

D e f i n i t i o n :

Eine Menge M heißt endlich $=_{Df}$
Es gibt keine echte Teilmenge N von M (d.h. $N \subseteq M$ und $N \neq M$) mit der Eigenschaft $N \sim M$.

Folgerung: Eine Menge M ist unendlich (nicht endlich), wenn es eine echte Teilmenge N von M gibt, so daß $N \sim M$.

Beispiel:

Wir behaupten, daß die Menge aller natürlichen Zahlen (Nz) unendlich ist.

Nachweis:

Die Menge aller geraden natürlichen Zahlen (GNz) ist offenbar eine echte Teilmenge von Nz.

Wir definieren folgende Zuordnung f:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \qquad \text{Nz} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \ldots \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & \ldots \qquad \text{GNz} \end{array}$$

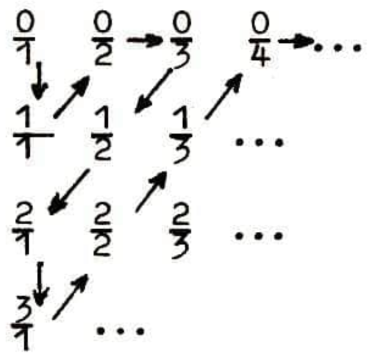
Offenbar ist $f(n) = 2n$ $(n \in \text{Nz})$ eine eineindeutige Abbildung, die jeder natürlichen Zahl eine gerade Zahl zuordnet. Jede gerade Zahl k kommt auch als Bild einer natürlichen Zahl vor (nämlich von $k/2$). f ist also eine eineindeutige Abbildung von Nz auf GNz.

Also ist Nz eine unendliche Menge.

Man kann zeigen, daß die Menge der rationalen Zahlen P – die ja auf den ersten Blick "viel größer " erscheint – der Menge Nz gleichmächtig ist: Jede rationale Zahl läßt sich bekanntlich in der Form

$$\frac{p}{q} \text{ bzw. } -\frac{p}{q} \quad (p, q \in \text{Nz},\ q \neq 0)$$

darstellen. Im folgenden Schema erfassen wir sämtliche positiven Brüche:



Wir zählen nun die rationalen Zahlen in folgender Weise (der Pfeilrichtung folgend) ab, wobei natürlich jede Zahl nur einmal aufgeführt wird (Brüche kürzen!).

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 & -2 & 3 & -3 & \dots \end{array}$$

Offenbar wird so jeder natürlichen Zahl genau eine rationale Zahl zugeordnet, und jede rationale Zahl wird genau einmal erfaßt. Wir haben also eine eineindeutige Abbildung <u>von</u> Nz <u>auf</u> P konstruiert. Es gilt also Nz $\sim$ P.
Mengen, die zu Nz gleichmächtig sind, heißen abzählbare Menge
Uns interessiert nun die Frage, ob alle unendlichen Mengen abzählbar sind. Wir betrachten das reelle Intervall $[0,1]$. Nehmen wir an, daß die Menge der reellen Zahlen dieses Intervalls abzählbar ist. Wir können dann <u>alle</u> Elemente dieser Menge in ihrer Dezimalbruchdarstellung in einer Reihe aufschreiben:

$$\begin{array}{l} 0,\alpha_1^1\alpha_2^1\alpha_3^1 \dots \\ 0,\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 \dots \qquad (\alpha_i^j \in \{0,1,\dots,9\}) \\ 0,\alpha_1^3\alpha_2^3\alpha_3^3 \dots \\ \vdots \end{array}$$

Die Zahl $d =_{Df} 0,\beta_1\beta_2\beta_3 \dots$ mit $\beta_i =_{Df} \begin{cases} 2 & \text{falls } \alpha_i^i \neq 2 \\ 3 & \text{falls } \alpha_i^i = 2 \end{cases}$

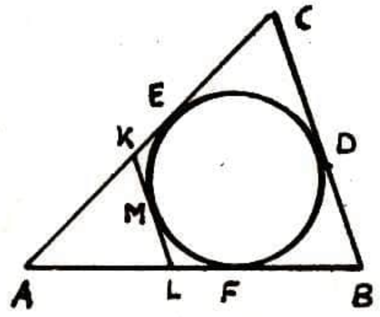
ist eine reelle Zahl, aber von allen aufgeführten verschieden. Folglich war unsere Annahme falsch, daß wir <u>alle</u> reellen Zahlen aus $[0,1]$ in einer abzählbaren Reihe aufschreiben können.
Solche unendlichen Mengen, die nicht abzählbar sind, heißen überabzählbar.
Wir können also auch die unendlichen Mengen noch nach ihrer Mächtigkeit klassifizieren - unendlich ist nicht immer gleich unendlich!

<u>Bemerkung:</u> Wenn man bei einer Funktion davon spricht, daß ihr Wert an einer Stelle "gegen unendlich geht", so bedeutet dies, daß ihr Wert über alle Grenzen wächst. Hierbei ist die Frage, ob die Funktion "gegen abzählbar oder überabzählbar unendlich" strebt, natürlich nicht sinnvoll.

Lösungen

(E 1)

L



Es seien D, E, F die Berührungspunkte des Inkreises von Δ ABC mit den Seiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ bzw. $\overline{AB}$, $\overline{KL}$ der zu $\overline{BC}$ parallele Tangentenabschnitt und M der Berührungspunkt von $\overline{KL}$ mit dem Inkreis von Δ ABC. Die Längen der Seiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ und $\overline{AB}$ seien a, b, c sowie m die Länge von $\overline{KL}$.

Aus der Gleichheit der von einem Punkt ausgehenden Tangentenabschnitte ergeben sich die Gleichungen

$$\overline{BF} = \overline{BD}\ , \quad \overline{CE} = \overline{CD}\ , \quad \overline{LM} = \overline{FL}\ , \quad \overline{KM} = \overline{EK}\ .$$

Dann gilt für den Umfang 2p' des Dreiecks Δ ALK:

$$\begin{aligned} 2p' &= \overline{AK} + \overline{AL} + \overline{KM} + \overline{LM} \\ &= \overline{AK} + \overline{AL} + \overline{EK} + \overline{FL} \\ &= \overline{AE} + \overline{AF} \\ &= \overline{AC} - \overline{CE} + \overline{AB} - \overline{BF} \\ &= \overline{AC} + \overline{AB} - (\overline{CD} + \overline{BD}) \\ &= \overline{AC} + \overline{AB} + \overline{BC} - 2\overline{BC} \\ &= 2p - 2a\ . \end{aligned}$$

Da die Dreiecke Δ ABC und Δ ALK ähnlich sind, gilt die Proportion

$$\frac{p}{p-a} = \frac{a}{m}$$

und damit

$$m = \frac{a(p-a)}{p} = \frac{ap-a^2}{p} = \frac{\frac{p^2}{4} - \left(\frac{p}{2} - a\right)^2}{p}\ .$$

Der Wert m wird demnach am größten, wenn $\frac{p}{2} = a$, oder, äquivalent dazu, wenn $b + c = 3a$ gilt, und m nimmt in diesem Fall den Wert $\frac{p}{4}$ an.

(E 2) L

Es sind also alle geordneten Tripel $[a,b,c]$ aus der Menge $\{1,2,\ldots,9\} \times \{1,2,\ldots,9\} \times \{1,2,\ldots,9\}$ gesucht, die die Gleichung

$$100a + 10b + c = \frac{1}{2}(100b+10c+a+100c+10a+b) \qquad (1)$$

erfüllen. Umgeformt ergibt sich aus (1)

$$200a + 20b + 2c = 11a + 101b + 110c$$

$$189a = 81b + 108c$$

$$7a = 3b + 4c \, . \qquad (2)$$

Subtrahiert man auf beiden Seiten $7c$, so erhält man

$$7(a - c) = 3b - 3c = 3(b - c) \, .$$

Damit muß 7 ein Teiler von $3(b-c)$ und demnach auch von $b-c$ sein. Wegen $1 \leq b$, $c \leq 9$ kommen nur die Werte $b-c = -7$, $b-c = 0$, $b-c = 7$ in Frage. In diesen drei Fällen ergeben sich für $a-c$
$a-c = -3$, $a-c = 0$, $a-c = 3$.

Die Lösungen dieser drei Gleichungssysteme im oben angegebenen Zahlenbereich sind nun:

$b = 1 \quad c = 8 \quad a = 5$

$b = 2 \quad c = 9 \quad a = 6$

$a = b = c = k$, wobei $k = 1,2,\ldots,9$

$b = 8 \quad c = 1 \quad a = 4$

$b = 9 \quad c = 2 \quad a = 5$.

Wie man leicht nachprüft, erfüllen alle sich ergebenden dreistelligen Zahlen - 518, 629, 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999, 481, 592 - die geforderte Bedingung.

(E 3) L

Zuerst ist es klar, daß für $n = 0$ die Gleichung $x^2 + y^2 = 4^0 = 1$ keine Lösung in <u>positiven</u> ganzen Zahlen besitzt, denn es ist $1^2 + 1^2 = 2 > 1$.

Wir nehmen nun an, es gäbe zwei positive ganze Zahlen x und y und eine natürliche Zahl n mit

$$x^2 + y^2 = 4^n \text{ .}$$

Es läßt sich nun jede natürliche Zahl p in der Form $p = 2^m \cdot k$ mit natürlichen Zahlen m, k darstellen, wobei k nicht durch 2 teilbar ist. Dann gilt auch $x = 2^{x_0} \cdot x_1$ und $y = 2^{y_0} \cdot y_1$, wobei x_1, y_1 nicht durch 2 teilbar sind. Dann ist aber

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2^{2x_0} \cdot x_1^2 + 2^{2y_0} \cdot y_1^2 \\ &= 4^{x_0} \cdot x_1^2 + 4^{y_0} \cdot y_1^2 \text{ .} \end{aligned}$$

Es sei nun o. B. d. A. $x_0 \leq y_0$. Damit gilt

$$x^2 + y^2 = 4^{x_0}(x_1^2 + 4^{y_0 - x_0} \cdot y_1^2) \text{ .}$$

Da x_1 nicht durch 2 teilbar ist, läßt x_1^2 bei Division durch 4 den Rest 1. Das gleiche gilt für y_1^2. Wir können jetzt zwei Fälle unterscheiden:

<u>1. Fall: $y_0 = x_0$</u>

Hier läßt die Summe $x_1^2 + y_1^2$ bei Division durch 4 den Rest 2, ist also nicht durch 4 teilbar.

<u>2. Fall: $y_0 > x_0$</u>

Hier läßt die Summe $x_1^2 + 4 \cdot 4^{y_0 - x_0 - 1} \cdot y_1^2$ den Rest 1 bei Division durch 4.

Daraus folgt, daß die Summe $x_1^2 + 4^{y_0 - x_0} \cdot y_1^2$ in keinem Fall durch 4 teilbar ist und damit die Gleichung $x^2 + y^2 = 4^n$ nicht richtig sein konnte im Widerspruch zur Annahme.

(E 4)

L

Es gelten die folgenden Beziehungen für alle natürlichen Zahlen m:

$$\begin{aligned} 3^{4m} &= 81^m \equiv 1 \pmod 5 \\ 3^{4m+1} &= 3 \cdot 81^m \equiv 3 \pmod 5 \\ 3^{4m+2} &= 9 \cdot 81^m \equiv 4 \pmod 5 \\ 3^{4m+3} &= 27 \cdot 81^m \equiv 2 \pmod 5 \text{ ,} \end{aligned}$$

d. h., es gilt für natürliche Zahlen p $3^p \equiv 1 \pmod 5$

genau dann, wenn $p = 4m$. Desgleichen gilt $3^p \equiv 4$ (mod 5) genau dann, wenn $p = 4m + 2$. Ist also $3^{n^k} + 1$ durch 5 teilbar, so muß gelten

$$3^{n^k} \equiv 4 \pmod 5$$

oder $n^k = 4m + 2 = 2(2m + 1)$.

Das heißt nichts anderes, als daß n^k durch 2, aber nicht durch 4 teilbar ist. Wegen $k > 1$, d. h. $k \geq 2$, kann dieser Fall jedoch nicht eintreten, denn ist n ungerade, so ist auch n^k ungerade, und ist n gerade, so ist n^k mindestens durch 2^2 teilbar.

Damit ist bewiesen, daß die Zahl $3^{n^k} + 1$ unter diesen Bedingungen nicht durch 5 teilbar sein kann.

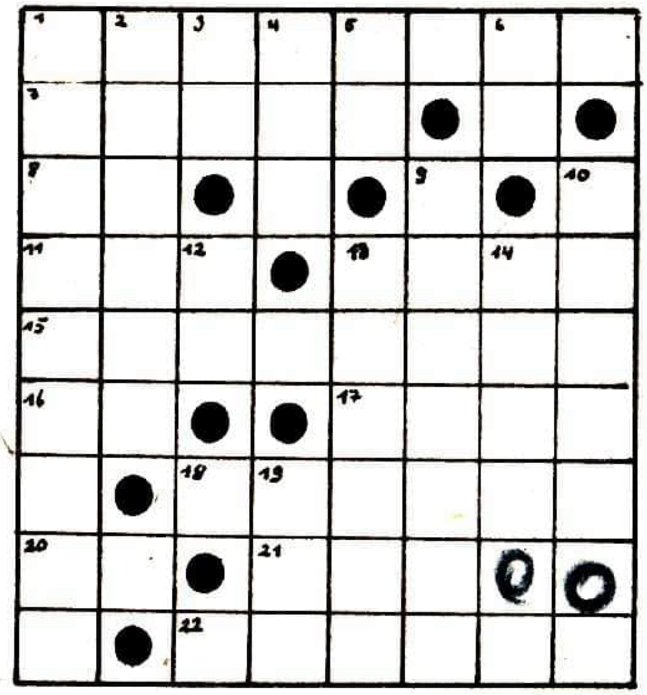
Die Aufnahmeprüfung (im April)

Prof.: Sagen Sie bitte noch, wieviel 7 mal 7 ist!
P 1 : Nun, sagen wir 47.
Prof.: Kann es nicht vielleicht auch etwas mehr sein?
P 1 : Ja, man könnte auch 52 nehmen.
Prof.: Und etwas weniger?
P 1 : Aber natürlich, zum Beispiel 38.
Prof.: Ich merke schon, Sie haben ein disponibles Wissen, ich beglückwünsche Sie zu Ihrer Immatrikulation und wünsche Ihnen viel Erfolg!

Prof.: Rechnen Sie bitte noch schnell aus, wieviel 7 Mal 7 ist!
P 2 : 51.
Prof.: Sind Sie sicher?
P 2 : Es kann sich höchstens um einen Fehler zwischen 1 und 3 handeln, der aber bei praktischen Anwendungen keine Rolle spielt.
Prof.: Das ist sehr gut, daß Sie von der Praxis ausgehen; allerdings hätten Sie die Fehlerschranke etwas genauer angeben können. Wir nehmen Sie erst einmal zur Probe für ein Jahr.

Prof.: Bitte sagen Sie schnell noch, wieviel 7 mal 7 ist!
P 3 : 49!!
Prof.: Vielleicht etwas mehr?
P 3 : Nein!
Prof.: ...oder etwas weniger?
P 3 : Aber auf gar keinen Fall!
Prof.: Sie sind stur! Hinaus mit Ihnen!

(Bei P1, P2, P3 handelt es sich um Prüflinge.)



Waagerecht:

1. Wesentlicher Teil eines Vielecks
7. Spuckende Tiere
8. Spezieller Logarithmus eines Kellners
11. 1/3 einer Iteration
13. Wortart im Verband
15. Polytechnik im Garten Eden
16. Schneller Rechner (Abk.)
17. Koseform für Kaderleiter
18. Bei uns seltene Frucht zur Weinherstellung
20. Hypermodern
21. Großer, ordentlicher, intelligenter Mensch
22. Zustand vor einer Prüfung

Senkrecht:

1. Ein fast runder Körper
2. Erfinder der Cantor-Nummer
3. Kleines Maß
4. Farbfernsehsystem eines Spaltes
5. United States
6. Kaputtgeschlagener Operator
9. Serum zur Beruhigung des 3. Falles
10. Sächsischer Monat
12. Ausgeschriebener Konsonant
13. Viktors Lieblingsbegriff bei einer Rechnung
14. Nichtmathematische Ansprache
19. Alter eines Engländers

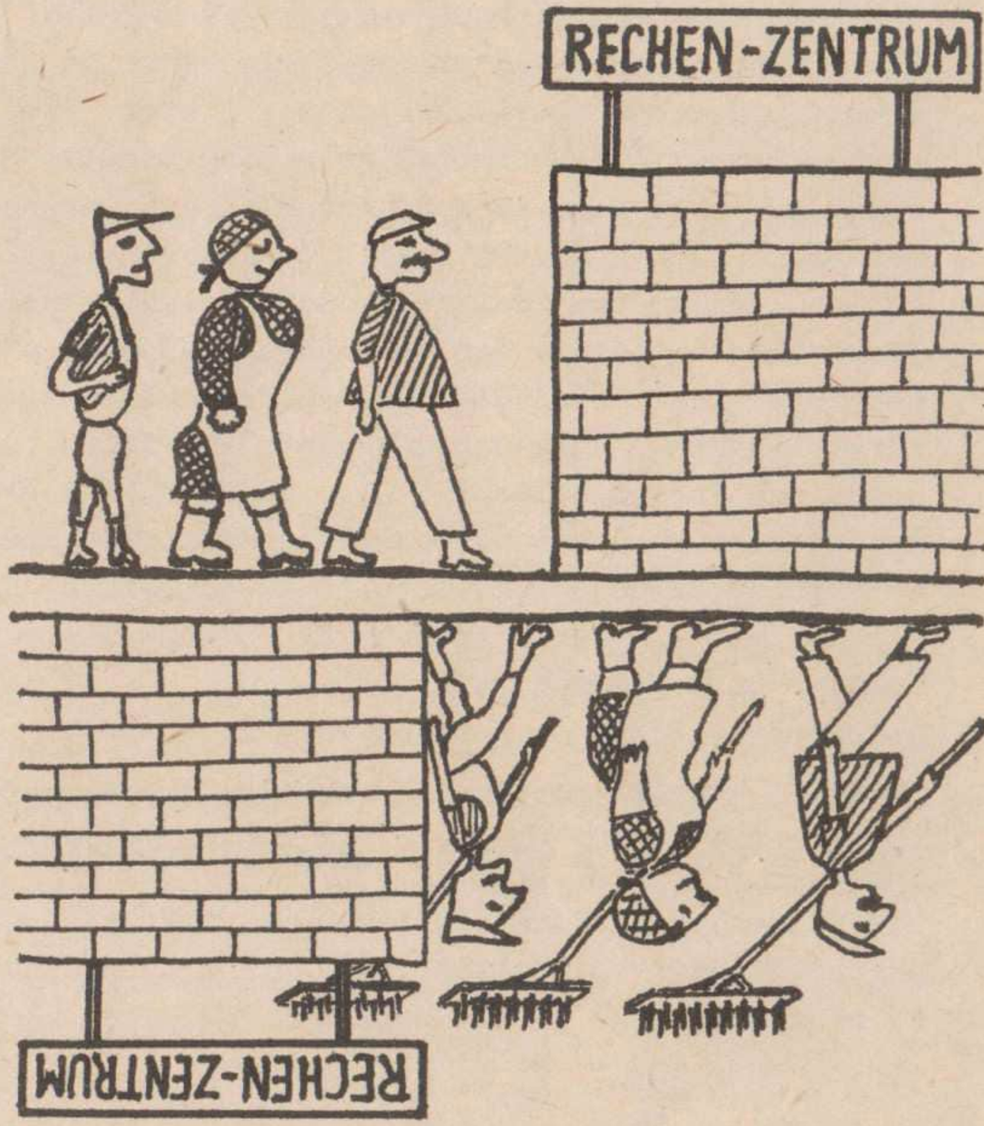
Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung" der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Leiter: Reinhard Klette

Redaktion: Werner Nagel (Chefredakteur); U. Heuke, H. Fischer, R. Lorenz

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

Anschrift: WURZEL
69 Jena
Universitätshochhaus
Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45



5

73

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Fr.-Schiller-Universität Jena

Mathematische Methoden der Operationsforschung (II)

Die "Mathematische Optimierung" als wichtige mathematische Methode in der Operationsforschung liefert Verfahren und Aussagen über die optimale Gestaltung praktischer Prozesse unter gewissen gegebenen Bedingungen und vorgegebenen Kriterien, an denen die Optimalität gemessen wird. Solche Kriterien können etwa "Maximaler Gewinn", "Minimale Kosten", "Maximale Auslastung der vorhandenen Maschinen" und ähnliche sein. Dabei sind die behandelten mathematischen Aufgabenstellungen und Aussagen darüber in vielfältiger Weise praktisch interpretierbar. Dies mögen einige Beispiele belegen. Doch zunächst wollen wir uns fragen, warum es notwendig ist, eine solche Theorie zu betreiben, da man doch mit den Mitteln der Differentialrechnung Extrema gewisser Funktionen bestimmen kann.

Angenommen, folgende Aufgabe wäre zu lösen:

Man bestimme das Maximum der Funktion

$f(x) = x^2 + 1$ auf dem Intervall $[-1,1]$!

Mit Hilfe der Differentialrechnung würde man bekanntlich die Ableitung der Funktion $f(x)$ bilden und eine reelle Zahl x_0 bestimmen, die der Gleichung

$$\frac{df(x)}{dx} = 2x = 0 \qquad \text{genügt.}$$

Man erhält $x_0 = 0$ und weiß, daß die Funktion $f(x) = x^2 + 1$ in diesem Punkt ihr lokales (und sogar globales) Minimum besitzt. Das Bild der Funktion zeigt aber deutlich, daß $f(x) = x^2 + 1$ in den Punkten $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ ihr Maximum auf dem Intervall $[-1,1]$ annimmt.

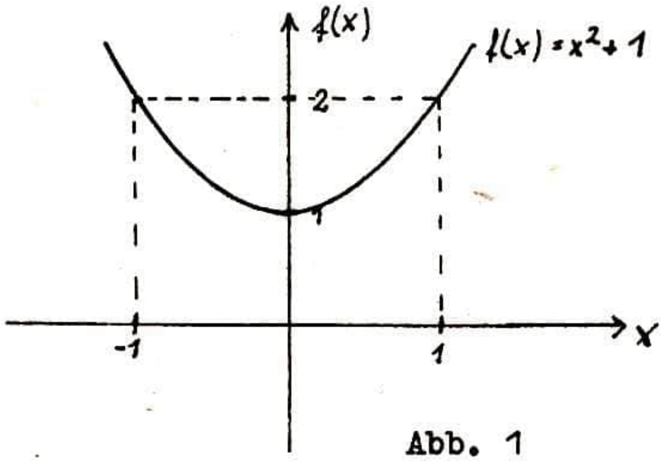


Abb. 1

Oder stellen wir die Aufgabe:

Man bestimme Maximum und Minimum der Funktion

$f(x) = 2x + 1$ auf dem Intervall $[1,2]$!

Die Differentialrechnung liefert $\frac{df(x)}{dx} = 2$. Dies besagt, daß diese Funktion kein lokales Extremum besitzt.

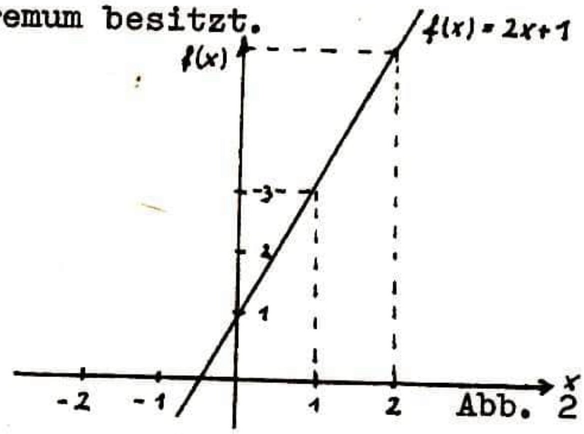


Abb. 2

An ihrem Bild läßt sich aber ablesen, daß sie im Punkte

$x_1 = 1$ ihr Minimum

und im Punkte

$x_2 = 2$ ihr Maximum

auf dem Intervall $[1,2]$ annimmt.

Die angeführten Beispiele zeigen, daß schon bei solch einfachen Aufgaben die Differentialrechnung versagt. Für kompliziertere Funktionen läßt sich auch eine graphische Darstellung nicht mehr angeben. Neue Methoden für die Behandlung dieser Art von Problemen müssen entwickelt werden, wobei natürlich nicht ausgeschlossen wird, daß bei bestimmten Aufgaben die Anwendung der Differentialrechnung brauchbare Ergebnisse liefern kann, wie etwa im ersten Beispiel, wenn statt des Maximums das Minimum zu bestimmen ist.

Wenden wir uns nun einigen Beispielen zu.

Beispiel 1: Ein Schwein soll mit Kartoffeln und Rüben gemästet werden. Dabei kommt es auf den Gehalt des Futters an Kohlehydraten, Eiweiß und Mineralstoffen an. Die Tabelle möge Auskunft über deren Anteil in einer Mengeneinheit Kartoffeln bzw. Rüben und den Bedarf eines Schweines an den genannten Stoffen geben. (Die Zahlen sind willkürlich angenommen.)

	Kartoffeln	Rüben	Bedarf des Schweines
Kohlehydrate	140	40	560
Eiweiß	10	8	80
Mineralstoffe	4	8	48

Wir nehmen nun an, daß der Preis für Kartoffeln 10 Mark und für Rüben 4 Mark pro Mengeneinheit beträgt.

Gesucht ist eine Fütterungsvorschrift, die den Bedarf an den genannten Stoffen deckt und gleichzeitig minimale Kosten verursacht.

Verfüttert man x_1 Einheiten Kartoffeln und x_2 Einheiten Rüben, so wird der Bedarf des Schweines gedeckt, wenn für x_1 und x_2 die Ungleichungen

$$\begin{aligned} x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0, \\ 140x_1 + 40\,x_2 &\geq 560, \\ 10x_1 + 8\,x_2 &\geq 80, \\ 4x_1 + 8\,x_2 &\geq 48 \end{aligned} \qquad (1)$$

erfüllt sind. Derartige Zahlen x_1, x_2 wollen wir <u>zulässige Programme</u> nennen. Zu einer Übersicht über die Menge Z_1 aller zulässigen Programme gelangt man durch Darstellung der Vorschriften als Punkte (x_1, x_2) der Ebene, die den Nebenbedingungen (1) genügen. Die Kosten für ein solches Programm betragen dann

$$Z\big((x_1,x_2)\big) = 10x_1 + 4x_2.$$

Wir wollen $Z\big((x_1,x_2)\big)$ als <u>Zielfunktion</u> bezeichnen.

Die Aufgabe besteht nun darin, einen Punkt $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ aus Z_1 zu finden, so daß die Kosten

$$Z\big((x_1^0,x_2^0)\big) = 10x_1^0 + 4x_2^0$$

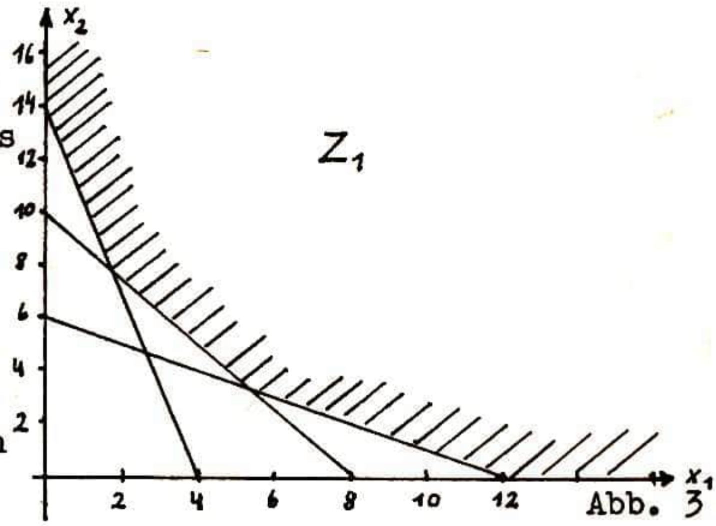


Abb. 3

für dieses Programm minimal werden, das heißt, daß für jedes Programm $x = (x_1, x_2)$ aus Z_1 die Ungleichung $Z(x) \geq Z(x^0)$ gilt.

<u>Beispiel 2:</u> Bei der Produktion der Produkte A und B verbrauchen wir zwei Rohstoffe M_1 und M_2.

Die folgende Tabelle gibt den Rohstoffverbrauch pro Einheit der einzelnen Produkte und die Menge der zur Verfügung stehenden Rohstoffe an, die nicht überschritten werden darf.

Rohstoff	Verbrauch für A	Verbrauch für B	Menge der Rohstoffe
M_1	1	5	20
M_2	3	5	30

Das Reineinkommen betrage pro Einheit (z.B. Stück) des Produktes A 4 Mark und für B 8 Mark. Zu bestimmen sind die zu produzierenden Mengen x_A bzw. x_B der Produkte A und B, die das größtmögliche Reineinkommen garantieren.

Wir gehen ähnlich vor wie im Beispiel 1 und erhalten folgende mathematische Aufgabenstellung:

Gesucht ist das Maximum der Zielfunktion

$$Z((x_A, x_B)) = 4x_A + 8x_B$$

unter den Bedingungen

$$\begin{aligned} x_A + 5x_B &\leq 20 \ , \\ 3x_A + 5x_B &\leq 30 \ , \\ x_A \geq 0 \ , \ x_B &\geq 0 \ . \end{aligned} \tag{2}$$

Die Übersicht über die zulässigen Programme möge sich der Leser selbst erarbeiten.

Aufgaben solcher Art können wie folgt allgemeiner formuliert werden.

(a) Die Anzahl der zu betrachtenden Produkte ist nicht auf zwei beschränkt, sondern kann irgendeine endliche Anzahl n sein. Wir ordnen den Produkten nacheinander die Zahlen 1, 2,...,n zu. Die gesuchte zu produzierende Anzahl Einheiten des Produktes i bezeichnen wir mit x_i.

(b) Die Anzahl der zur Verfügung stehenden beschränkten Fonds, z.B. verschiedene Rohstoffe, Arbeitszeit, Maschinen, Geld usw., ist im allgemeinen ebenfalls größer als zwei; wir nehmen an, es seien m Stück. Wir numerieren wieder die Fonds von 1 bis m, und es sei a_{ij} der für die Produktion einer Einheit vom Typ j notwendige Aufwand des Fonds i. Ferner sei die Beschränkung des Fonds i angegeben durch eine gewisse Zahl b_i.

(c) Wir nehmen an, daß der Aufwand des Fonds i zur Produktion von x_j Einheiten des Typs j linear von x_j abhängt (für alle $i = 1,\dots,m$ und $j = 1,\dots,n$). Ferner hänge das Betriebsergebnis linear von der Anzahl der produzierten Einheiten ab, das heißt, $Z(x) = Z\left((x_1,\ldots,x_n)\right) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$, wobei z.B. c_j den Preis einer Einheit des Produktes vom Typ j bedeuten kann für alle $j = 1,\ldots,n$.

Für irgendein Produktionsprogramm $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ berechnet sich dann der Aufwand a_i am Fonds i ($i = 1,\ldots,m$) als

$$a_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j. \tag{3}$$

Nach Voraussetzung sollen die zur Verfügung stehenden Mittel nicht überschritten werden, was nichts anderes bedeutet als

$$a_i \leq b_i \quad \text{für alle } i = 1,\ldots,m.$$

Damit erhalten wir ein System von Ungleichungen als Bedingungen (Restriktionen genannt):

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \leq b_1\,, \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \leq b_2\,, \\ &\qquad\vdots \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \leq b_m\,, \\ &x_1 \geq 0,\ldots,x_n \geq 0\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Jeder Vektor x aus der Menge Z der zulässigen Programme genügt also (4).
Fassen wir die Aufwände a_{ij} zu einer Matrix A zusammen,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots\quad\vdots & & \vdots \\ a_{m1}a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{und } x^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ b^T = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Bezeichnen wir mit x^T den zu $x = (x_1,\ldots,x_n)$ transponierten Vektor und mit b^T den Vektor der Beschränkungen der vorhandenen

Mittel, so läßt sich das System (4) von Restriktionen darstellen als

$$Ax^T \leq b^T$$
$$x \geq 0 \,. \qquad (4')$$

(Die entsprechenden Grundlagen wurden in Heft 3/73 der "WURZEL" dargestellt.) Hierbei ist die Relation "$\leq$" für Vektoren folgendermaßen erklärt:

D e f i n i t i o n :

Zwei Vektoren $a = (a_1,\ldots,a_m)$ und $b = (b_1,\ldots b_m)$ des m-dimensionalen euklidischen Raumes R^m genügen der Relation $a \leq b$, wenn für ihre sich entsprechenden Komponenten diese Relation gilt, das heißt, für alle $i = 1,\ldots,m$ gilt $a_i \leq b_i$.

Es ist sofort klar, daß mit zwei Vektoren a und b des R^m auch die zu ihnen transponierten Vektoren a^T und b^T der Ungleichung genügen und umgekehrt.

Wir können nun die allgemeine Aufgabe der linearen Optimierung in endlichdimensionalen euklidischen Räumen formulieren.

A: Gegeben seien eine Matrix $A = (a_{ij})$ $\begin{array}{l} i = 1,\ldots,m \\ j = 1,\ldots,n \end{array}$,

zwei Vektoren $b = (b_1,\ldots,b_m)$ und $c = (c_1,\ldots,c_n)$.

Gesucht ist ein Vektor $x^o = (x_1^{\,o},\ldots,x_n^{\,o})$ aus Z, der ein Maximum der Zielfunktion

$$Z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \langle (c_1,\ldots,c_n),(x_1,\ldots,x_n) \rangle = c \cdot x^T$$

garantiert. Dabei ist Z die Menge aller zulässigen Vektoren:

$$Z = \{x = (x_1,\ldots,x_n);\ x \in R^n,\ x \geq 0,\ Ax^T \leq b^T\}.$$

(Bem.: $\langle a,b \rangle$ bedeutet Skalarprodukt der Vektoren a und b.)

Das Beispiel 1 kann in analoger Weise verallgemeinert werden:

B: Man suche einen zulässigen Vektor $x^o = (x_1^{\,o},\ldots,x_n^{\,o})$, der das Minimum der Zielfunktion

$$Z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \langle c,x \rangle$$ auf dem Zulässigkeitsbereich

$$Z = \{x, x \in R^n,\ x \geq 0,\ Ax^T \geq b^T\}$$

bei vorgegebener Matrix $A = (a_{ij})$ $\quad i = 1,\dots,m$; $j = 1,\dots,n$

und gegebenen Vektoren $b = (b_1,\dots,b_m)$ und $c = (c_1,\dots,c_n)$ garantiert.

Führt man eine Matrix $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ $\quad i = 1,\dots,m$; $j = 1,\dots,n$ ein,

wobei $\bar{a}_{ij} = -a_{ij}$ gilt, weiterhin die Vektoren

$\bar{b} = (\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_m)$ mit $\bar{b}_i = -b_i$ $\quad (i = 1,\dots,m)$ und

$\bar{c} = (\bar{c}_1,\dots,\bar{c}_n)$ mit $\bar{c}_j = -c_j$ $\quad (j = 1,\dots,n)$,

und bildet die Menge $\bar{Z} = \{x,\ x \in R^n,\ x \geq 0,\ \bar{A}x^T \leq \bar{b}^T\}$,

so stimmen bei Aufgabe B die Mengen Z und $\bar{Z}$ überein.

Konnte man schließlich die Aufgabe B lösen, so ist diese Lösung x^o ebenfalls Lösung der Aufgabe A für $\bar{A}$, $\bar{c}$ und $\bar{b}$, wenn man hier als Zielfunktion $\bar{Z}(x) = \langle \bar{c}, x \rangle$ maximiert.

Für beide Zielfunktionen gilt dann $\bar{Z}(x) = -Z(x)$ und $Z(x^o) = \text{Minimum}\{Z(x),\ x \in Z\} = -\text{Maximum}\{\bar{Z}(x),\ x \in \bar{Z}\} = -\bar{Z}(x^o)$.

Es ist also beliebig, welche Aufgabe man als lineare Optimierungsaufgabe formuliert.

Man nennt sie lineare Optimierungsaufgabe, da die Restriktionen und die Zielfunktion nur lineare Abhängigkeiten enthalten. Läßt man andere Zielfunktionen (z.B., wenn die x_i quadratisch oder in Produkten als $x_i \cdot x_j$ eingehen) und andere Zulässigkeitsbereiche, die nicht in der angegebenen Form dargestellt werden können, zu, ergeben sich allgemeinere Probleme der nichtlinearen Optimierung. Die linearen Probleme werden gegenwärtig gut beherrscht, die Theorie dazu ist sehr weit ausgebaut. Die nichtlinearen Probleme und Verallgemeinerungen der verschiedensten Aufgaben bilden gegenwärtig den Forschungsgegenstand der mathematischen Optimierung. Die praktischen Aufgaben sind in der überwiegenden Zahl nichtlinear, sie können aber sehr oft durch Linearisierung gut angenähert werden, und die Lösungen der betreffenden linearen Aufgaben sind meist praktisch verwendbar. Daraus ist die Bedeutung der linearen Optimierung

für die Anwendung in der Praxis ersichtlich.
Weitere Beispiele, die die breite Anwendbarkeit der linearen Optimierung belegen können, findet man unter anderem in der folgenden Literatur:

W. Sadowski: Theorie und Methoden der Optimierungsrechnung in der Wirtschaft,
D.B.Judin, E.G.Golstein: Lineare Optimierung I.
Mathematische Schülerbücherei: Lineare Optimierung

Matthias Schilling

Preisaufgaben 5/73

(E 25) 2

Die Grundfläche einer Pyramide sei ein gleichschenkliges Trapez mit den parallelen Seiten a und b, wobei $a > b$, und einem Winkel φ zwischen den ungleichen Diagonalenabschnitten. Weiter verlaufe das Lot der Spitze auf die Grundfläche durch den Schnittpunkt der Diagonalen und verhalten sich die Winkel zwischen der Grundfläche und den Seitenflächen an den parallelen Seiten wie 2:1. Wie groß ist das Volumen dieser Pyramide?

(E 26) 1

Es sei die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit den Wurzeln x_1, x_2 gegeben. Man stelle eine quadratische Gleichung mit den Wurzeln $y_1 = x_1^2 + x_2^2$ und $y_2 = x_1^3 + x_2^3$ auf!

(E 27) 1

Man bestimme alle komplexen Zahlen z, die die Gleichungen

$$\left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1 \quad \text{und} \quad \left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3}$$

befriedigen!

(E 28) 2

Man zeige, daß es unter 16 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen eine gibt, die zu den übrigen 15 relativ prim ist (d. h., die mit jeder der übrigen 15 Zahlen den größten gemeinsamen Teiler 1 hat).

(E 29) Man löse das Gleichungssystem

2

$$a^{2x} + a^{2y} = 2b$$
$$a^{x+y} = c \quad .$$

Unter welchen Bedingungen für b und c ist das System überhaupt lösbar?

(E 30) Доказать, что если $2^n + 1$ – простое число, то n – степень числа 2.

2

Lösungsbedingungen wie üblich!

Betr.: Preisaufgaben

Heute möchten wir einige Neuerungen in unserem Aufgabenteil zur Diskussion stellen. Die Anregungen hierzu erhielten wir teilweise bei dem im Wintermathematiklager des Bezirkes Gera in Lobenstein durchgeführten Leserforum, teils durch Leserbriefe.

Um die in einem Brief formulierte Meinung, "daß die Einsendungen ... ungelesen in den Papierkorb wandern", zu widerlegen, werden künftig (ab Serie 1/73) an alle Einsender Postkarten mit den erreichten Punktzahlen versandt. Damit soll die Rückinformation über die Qualität der eingesandten Lösungen gewährleistet werden.

Dem Ärger einiger Gewinner, denen ihre bestellten Bücher erst nach sehr langer Zeit zugeschickt wurden, da sie bei uns in Jena vergriffen waren (nicht wegen mangelnder finanzieller Mittel in der WURZEL), können wir jetzt abhelfen, indem wir Buchschecks verschicken, die in der gesamten DDR gültig sind (diese Möglichkeit besteht für uns erst seit kurzer Zeit).

Zum Abdruck der Lösungen haben wir uns in Lobenstein wie folgt geeinigt: Wir werden nicht mehr die Lösungen 2 bis 3 Monate nach der Aufgabenstellung veröffentlichen (die Lösungen mußten von uns verfaßt werden, da bei Redaktionsschluß erst sehr wenige Schülerlösungen vorlagen), sondern immer 4 Monate nach Aufgabenstellung, und zwar vorrangig Schülerlösungen. Dazu werden wir eine kurze globale Einschätzung der eingesandten Lösungen geben. Die Lösungen der Serie 5/73 veröffentlichen wir also im Heft 9/73. Der lange Zeitraum ist durch die Einsendefrist, Korrektur und Druckvorbereitung bedingt.

Da uns eine begrenzte Seitenzahl zur Verfügung steht, können wir nur 3 bis 4 Lösungen veröffentlichen. Wir bitten Sie deshalb darum, uns aus jeder Serie die Aufgaben mitzuteilen, deren Lösungen wir veröffentlichen sollen, indem Sie z. B. diese Aufgabennummern, mit einem Vermerk versehen, auf eine Ihrer Einsendungen schreiben.

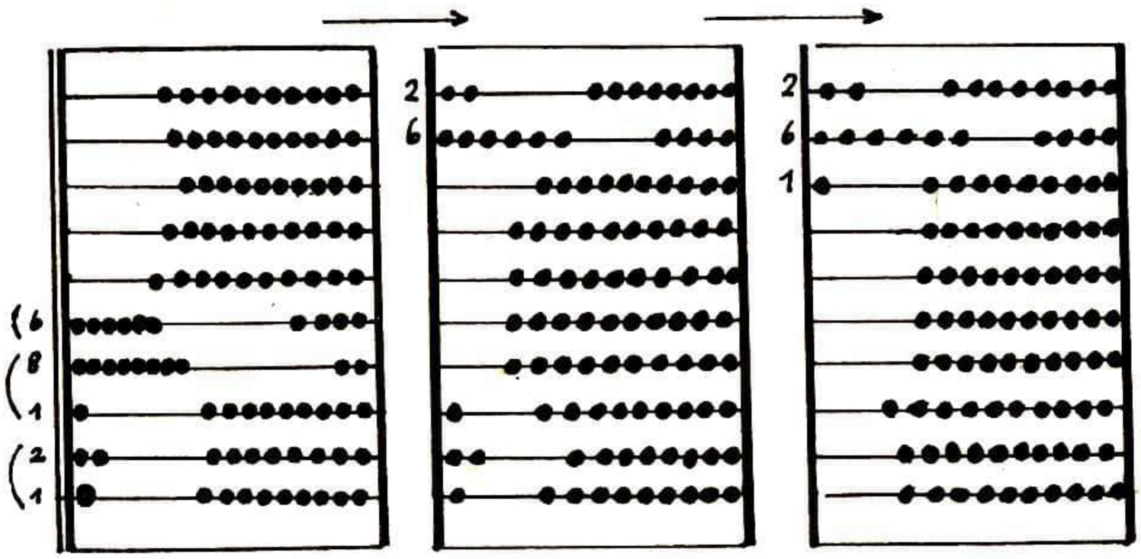
Wir hoffen, daß wir durch diese Änderungen unseren Aufgaben- und Lösungsteil interessanter gestalten können.

Vom Rechenbrett zum Computer
Episoden der Entwicklung

Jeder von uns kennt den Widerwillen beim Lösen uninteressanter Aufgaben, welche bloße Konzentration erfordern und den Gedanken keinen Spielraum lassen. So fahndeten die Menschen, solange sie sich an dem abstrakten Gebilde der Zahlen versuchten, nach Maschinen zur Erleichterung des Rechnens. Von der ersten "Rechenmaschine", den Fingern und Zehen, bis hin zu den Computern unserer Zeit waren viele gute Ideen notwendig.

Wer einmal in der Sowjetunion zu Gast war, hat sicher an Verkaufsständen eines der ältesten Rechengeräte bemerkt - das russische Rechenbrett. Es fordert Respekt ab, mit welcher Geschwindigkeit eine jede Verkäuferin hiermit operiert. Interessant ist, daß mit diesen Rechenbrettern nicht nur subtrahiert und addiert werden kann, sondern auch multipliziert, dividiert und radiziert.

Betrachten wir das Radizieren bei einer natürlichen Zahl x (im Dezimalsystem). Hierbei wird verwendet, daß die Summe der aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen von 1 bis $2n-1$ n^2 ergibt. Wir erhalten $\sqrt{x}$, indem wir betrachten, wieviele ungerade Zahlen 1, 3, 5, ... addiert werden können, ohne daß deren Summe größer als x ist. Zur Erleichterung teilen wir x von rechts nach links in Zweiergruppen auf und subtrahieren von der linksstehenden höchsten Gruppe 1, 3, 5 usw., soweit möglich. Wir erhalten die Ziffer der höchsten Stelle von $\sqrt{x}$, welche mit x_1 bezeichnet sei. Ein möglicher Rest nach der Subtraktion wird zur zweithöchsten Gruppe von x addiert. Von der erhaltenen Zahl wird $20x_1 + 1$, $20x_1 + 3$, $20x_1 + 5$ usw. subtrahiert, soweit möglich, und wir erhalten die nächste Ziffer x_2 von $\sqrt{x}$. Man überlegt sich leicht die Motivierung und den weiteren Verlauf bei diesem Vorgehen. Die Abbildung zeigt, wie nach diesem Verfahren $\sqrt{68121}$ bestimmt wird.



Neben dem russischen Rechenbrett zählen der griechische Abakus, das chinesische Suan-Pan und das japanische Soruban zu den ältesten Rechengeräten. Symbolisch für die einzelnen Zahlenwerte wurden hierbei durchbohrte Obstkerne in den einzelnen Ebenen bewegt. Mit den zu berechnenden Summen wuchsen die Ausmaße der Rechenbretter, und so ist die Bezeichnung "Bank" entlehnt von den entstandenen Rechenbänken. Auch die Rechensteinchen haben sich in der Wirtschaftssprache verewigt; ihre altrömische Bezeichnung liegt der "Kalkulation" zugrunde.

Die Konstruktion eigentlich maschineller Rechenhilfen wurden von Blaise Pascal begonnen. Blaise, ein mathematisches Genie, baute für seinen Vater, einen Finanzbeamten, 1642 die erste Rechenmaschine, um seinen alten Herrn von der Pein nächtelangen Addierens zu befreien. Es war eine Maschine zum Addieren und Subtrahieren achtstelliger Zahlen. Gottfried Wilhelm von Leibniz verbesserte diese Maschine, indem er sie auch zum Dividieren und Multiplizieren verwendbar konstruierte (1500). Diese Leibnizschen Rechenmaschinen wurden von 1820 bis etwa 1880 in Paris in Serienproduktion hergestellt.

Von diesen Maschinen war aber noch ein weiter Weg bis zu den heutigen superschnellen Computern. Ein wichtiger Gedanke des englischen Mathematikprofessors Ch. Babbage führte in die Richtung programmgesteuerter Rechenmaschinen, wobei er sich auf die Erfahrungen der durch Lochkarten gesteuerten Jacquard-Webstühle stützen konnte. Sie webten nach Programmen komplizierte Muster. Aber Babbages Maschine wurde kein Erfolg - irgendein Rädchen klemmte immer. Als er 1871 starb, galt er weder als bedeutender Mathematiker noch als Erfinder.

Es mußte erst das Zeitalter der praktisch trägheitslosen und reibungsfreien Elektronen kommen, um die Idee der großen programmgesteuerten Rechenmaschine technisch realisierbar zu machen.

Es läßt sich übrigens darüber streiten, ob es ohne elektronische Rechenautomaten überhaupt schon einen funktionierenden Kernspaltungsreaktor auf der Erde gäbe. Per Hand hätten die Berechnungen selbst für einen der einfachsten große Rechnergruppen hundert Jahre beschäftigt. Heute ist eine moderne Volkswirtschaft in unserem Lande (und natürlich in vielen anderen Ländern auch) ohne den Einsatz von elektronischen Datenverarbeitungsanlagen undenkbar. Aber darüber hinaus erschließen sich den Computern ständig neue Aufgaben-bereiche (z. B. in der medizinischen Diagnostik und bei automatischen Übersetzungen).

Übrigens wurden in Ungarn Studien durchgeführt, um mit Hilfe von Computern das Tanzen zu analysieren und danach neue Tänze zu entwickeln.

Lösungen

(E 7) L

Es läßt sich sogar zeigen, daß jede Funktion aus Nz^{Nz} unendlich viele Minimalpunkte besitzt.

Der Beweis erfolgt indirekt:
Man nimmt an, es gäbe eine Funktion f aus Nz^{Nz}, die nur endlich viele Minimalpunkte besitzt.
Dann gibt es unter diesen einen größten Minimalpunkt m. Da m+1 kein Minimalpunkt sein kann, gibt es eine natürliche Zahl $p_0 > m + 1$ mit $f(p_0) < f(m+1)$.
p_0 ist größer als m, also kann p_0 auch kein Minimalpunkt von f sein, d. h., es gibt eine natürliche Zahl $p_1 > p_0$ mit $f(p_1) < f(p_0)$ usw. Schließlich gibt es eine natürliche Zahl $p_{f(m+1)+1} > p_{f(m+1)}$ mit $f(p_{f(m+1)+1}) < f(p_{f(m+1)})$, da $p_{f(m+1)}$ kein Minimalpunkt sein kann.

Für Funktionen f mit natürlichen Zahlen als Wertebereich ist die Ungleichung $f(a) < f(b)$ äquivalent zu $f(a) + 1 \leq f(b)$.
Damit gelten die folgenden Ungleichungen:

$$
\begin{aligned}
f(m+1) &\geq f(p_0) + 1 \\
f(p_0) &\geq f(p_1) + 1 \\
f(p_1) &\geq f(p_2) + 1 \\
&\vdots \\
f(p_{f(m+1)}) &\geq f(p_{f(m+1)+1}) + 1 .
\end{aligned}
$$

Nach Addition der f(m+1) + 2 Ungleichungen erhält man aber

$$f(m+1) + \sum_{i=0}^{f(m+1)} f(p_i) \geq \sum_{i=0}^{f(m+1)} f(p_i) + f(p_{f(m+1)+1}) + f(m+1) + 2$$

oder $$0 \geq f(p_{f(m+1)+1}) + 2$$

oder $$-2 \geq f(p_{f(m+1)+1}) \,,$$

was ein Widerspruch zu der Annahme $f \in Nz^{Nz}$ ist.

(E 8) L

Es genügt zu zeigen, daß das Polynom
$P(x) \equiv x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$ in den drei Intervallen

a) $-\infty < x \leq 0$

b) $0 < x \leq 1$

c) $1 < x < \infty$

jeweils nur positive Werte annimmt.

a) Für $x \leq 0$ gilt $x^8 \geq 0$ und $x^2 \geq 0$
sowie $-x^5 \geq 0$ und $-x \geq 0$.
Damit wird $P(x) \geq 0 + 1$, d. h. $P(x) \geq 1 > 0$.

b) Für $0 < x \leq 1$ läßt sich das Polynom umformen zu

$$\begin{aligned} P(x) &= x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 \\ &= x^8 + (x^2 - x^5) + (1 - x) \\ &= x^8 + x^2(1 - x^3) + (1 - x) \quad . \end{aligned}$$

Da sowohl $1 - x$ als auch $1 - x^3$ für $0 < x \leq 1$ nichtnegativ sind und weiter $x^8 > 0$ gilt, folgt auch hier $P(x) > 0$.

c) Für $x > 1$ erhält man

$$P(x) \equiv x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 = x^5(x^3 - 1) + x(x-1) + 1$$

woraus wegen $x^3 - 1 > 0$ und $x - 1 > 0$ sofort $P(x) > 0$ folgt.

(E 12) L

(nach Dieter Erdmann, Loitz, Klasse 10)

Auf der Grundlage des Satzes von Pythagoras können wir die folgende Gleichung beweisen:

$$(a + b)^2 + h^2 = (c + h)^2$$

Und zwar gilt:

$$F_\Delta = \frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$$

$$2ab = 2ch$$

$$2ab + h^2 = 2ch + h^2$$

Auf Grund des Satzes von Pythagoras folgt:

$$a^2 + b^2 + 2ab + h^2 = c^2 + 2ch + h^2$$

$$(a + b)^2 + h^2 = (c + h)^2 \ .$$

Aus der Umkehrung des Satzes von Pythagoras folgt, daß das Dreieck mit den Seiten $(a + b)$, h, $(c + h)$ rechtwinklig ist.

So schrieb man noch 1836:

In Ansehung des Stoffes hilft die Mathematik uns weder die Schwierigkeiten zu überwinden, noch die Gefahren vermeiden, welchen wir auf dem weiten Tummelplatz des Lebens und seiner Bewegung begegnen.

(Vielleicht können Sie daran ermessen, welche Entwicklung die Mathematik in den letzten 150 Jahren genommen hat.)

Mitteilung an unsere Leser

Alle Abonnements, die nicht bis zum 20. Juli 1973 abbestellt werden, betrachten wir als um ein Jahr verlängert. Neubestellungen werden jederzeit entgegengenommen.

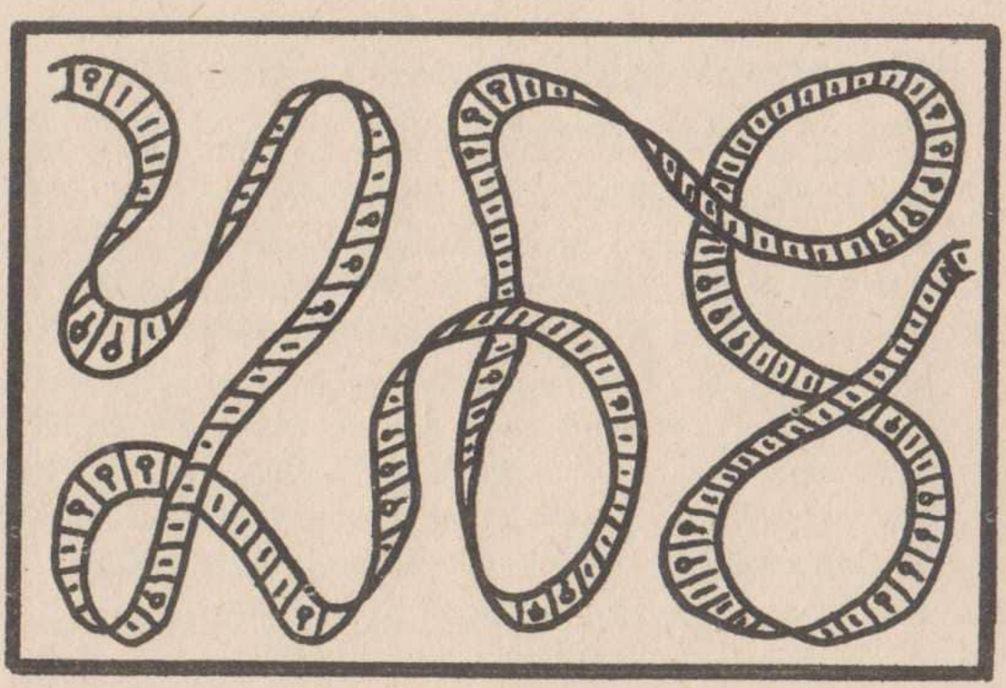
Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung" der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Leiter: Reinhard Klette

Redaktion: Werner Nagel (Chefredakteur); U. Heuke, H. Fischer, R. Lorenz

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

Anschrift: WURZEL
69 Jena
Universitätshochhaus
Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45



Was ist das ?

a) Eine Riesenschlange,

b) ein Mathematikergehirn,

c) ein TURING - Band (S.152)?

6

73

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Fr.-Schiller-Universität Jena

Gesetzmäßigkeiten des Zufalls (III)

In den ersten zwei Teilen (Wurzel Heft 12/72, Heft 1/73) hatten wir uns überlegt, daß die Suche nach einem mathematischen Modell zufälliger Erscheinungen damit beginnen muß, ein Modell für die Menge derjenigen zufälligen Ereignisse (z.E.) A,B,C,.. zu entwickeln, die bei gegebenen Versuchsbedingungen betrachtet werden sollen. Die Menge dieser z.E. wollen wir mit $\mathfrak{M}$, ihre Elemente in der Regel mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnen. Das für uns zunächst allein Interessante an den unter gegebenen VB zufälligen Ereignissen ist, daß bei jeder Realisierung dieser VB folgendes gelten soll:

Für alle $A \in \mathfrak{M}$ ist entweder die Aussage

1) A ist eingetreten oder
2) A ist nicht eingetreten richtig.

In diesem Sinn ist das Ereignis $\overline{A}$, welches genau dann eintreten soll, wenn A ($A \in \mathfrak{M}$) nicht eintritt, als zu gegebenen VB eindeutig definiertes zufälliges Ereignis zu betrachten. Sind die Ereignisse $A_i \in \mathfrak{M}$ $(i=1,2,\dots,n)$ gegeben, ist im gleichen Sinne auch das Ereignis

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

welches genau dann eintreten soll, wenn mindestens eins der Ereignisse $A_i \in \mathfrak{M}$ $(i=1,2,\dots,n)$ eintritt (Vereinigung), eindeutig bestimmt (vergl. Def. 2, Heft 12/72). Dasselbe gilt für das Ereignis

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i,$$

welches genau dann eintreten soll, wenn alle Ereignisse A_i $(i=1,2,\dots,n)$ eintreten (Durchschnitt, vergl. Def.3, Heft 1/73).

Die betrachteten Beispiele zeigen, daß bei der Bildung der Vereinigung und des Durchschnittes von Ereignissen und der Bildung des Komplements eines Ereignisses wieder Ereignisse entstehen, die für die vollständige Beschreibung des zufälligen Geschehens unter den gegebenen VB wichtig sind. Wir fordern deshalb, daß $\mathfrak{M}$ folgende Eigenschaften hat:

Ist A ein z.E. aus der Menge $\mathfrak{M}$, so soll auch $\overline{A}$ zu $\mathfrak{M}$ gehören;

sind $A_1, A_2, \dots, A_n$ Elemente von $\mathfrak{M}$, so sollen auch $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ und

$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ zu $\mathfrak{M}$ gehören. Wir fordern damit, daß $\mathfrak{M}$ bezüglich Durchschnitts-, Vereinigungs- und Komplementbildung abgeschlossen ist.

Jede Menge $\mathfrak{M}$ von zufälligen Ereignissen, die diese Bedingungen erfüllt, wollen wir <u>Ereignisalgebra</u> nennen.

Zu gegebenen VB können mehrere unterschiedliche Ereignisalgebren gehören. Unter den Versuchsbedingungen des Würfelwurfes sind die Ereignisalgebren $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ nicht identisch, wenn

A:= "Es wird eine 6 gewürfelt."

B:= "Es wird eine gerade Zahl gewürfelt."

$\mathfrak{M}_1 := \{A, \overline{A}, S, U\}$, $\quad \mathfrak{M}_2 := \{B, \overline{B}, S, U\}$ gilt.

(Dabei sind S das sichere Ereignis und U das unmögliche.)

<u>Übung:</u> Zu bestimmen ist eine Ereignisalgebra $\mathfrak{M}$, die A und B enthält, wobei A und B die oben zu den VB des Würfelwurfes definierten Ereignisse sind.

Als nächstes beweisen wir einige Eigenschaften der Operationen des Durchschnitts, der Vereinigung und des Komplements von zufälligen Ereignissen in Form von Sätzen. Diese Sätze gelten für beliebige Ereignisalgebren.

<u>S a t z 1 :</u>

Das Ereignis $B \in \mathfrak{M}$ ist genau dann Komplement des zufälligen Ereignisses $A \in \mathfrak{M}$, wenn

1) $A \cup B = S$,

2) $A \cap B = U$ ist.

Beweis:

Aus $A \cup B = S$ folgt, daß B eintreten muß, wenn A nicht eintritt.
Aus $A \cap B = U$ folgt, daß B nicht eintreten kann, wenn A eintritt.
D.h. aus 1) und 2) folgt, daß B genau dann eintritt, wenn A nicht eintritt, also $B = \overline{A}$ ist.
Umgekehrt folgt aus $B = \overline{A}$, daß B eintreten muß, wenn A nicht eintritt, also $A \cup B = S$, und B nicht eintreten kann, wenn A eintritt, also $A \cap B = U$. (q.e.d.)

Aus diesem Satz ergibt sich als Folgerung:

Folgerung:

1) $\overline{A}$ ist nicht nur Komplement von A, es ist auch A Komplement von $\overline{A}$, d.h. $\overline{\overline{A}} = A$.
2) Da $S \cup U = S$ ist, und $S \cap U = U$ gilt, ist $\overline{S} = U$ und $\overline{U} = S$.

Die in der zweiten Folgerung dieses Satzes enthaltene Formulierung - das unmögliche Ereignis tritt ein, wenn das sichere Ereignis nicht eintritt -, enthält keinen logischen Widerspruch. Eine Behauptung der Form - wenn..., dann...- sagt nichts darüber aus, ob die in dem Satzteil - wenn...,- enthaltene Aussage wahr ist oder überhaupt wahr sein kann. Wenn diese Aussage nicht wahr sein kann, wird die Behauptung zwar inhaltslos, aber nicht unwahr oder logisch widersprüchlich. Diese Überlegungen gehören zu den Grundlagen der mathematischen Logik.

S a t z 2 :

Jede nichtleere Ereignisalgebra muß auch das sichere Ereignis S und das unmögliche Ereignis U enthalten.

Beweis:

Ist $A \in \mathfrak{M}$ und $A \neq S$, so müssen auch $\overline{A}$, und demnach $\overline{A} \cup A = S$, $\overline{A} \cap A = U$, zu $\mathfrak{M}$ gehören. Ist $A = S$, so gehört auch $U = \overline{S}$ zu $\mathfrak{M}$. (q.e.d.)

Bemerkung:

Die kleinstmögliche nichtleere Ereignisalgebra besteht aus den uneigentlichen zufälligen Ereignissen U und S. An dieser Stelle wollen wir nochmals darauf aufmerksam machen, daß U und S eigentlich keine zufälligen Ereignisse sind, jedoch als wichtige Ereignisse stets mit erfaßt werden, wenn wir von zufälligen Ereignissen sprechen.

S a t z 3 :

Aus $A \subset B$ folgt $\overline{B} \subset \overline{A}$ und umgekehrt.

Beweis:

Wenn aus dem Eintreten von A das Eintreten von B folgt, kann A nicht eintreten, wenn B nicht eintritt, es muß also $\overline{B} \subset \overline{A}$ gelten. Die Wiederholung der gleichen Überlegungen führt zu

$\overline{\overline{A}} \subset \overline{\overline{B}}$, wenn $\overline{B} \subset \overline{A}$ ist. Aus der Folgerung 1)des Satzes 1 folgt der zweite Teil der Behauptung dieses Satzes.

S a t z 4 :

Vereinigungs- und Durchschnittsbildung zufälliger Ereignisse sind kommutativ und assoziativ, d.h.:

1) Für beliebige $A,B \in \mathfrak{M}$ ist $A\cup B = B\cup A$,

$$A\cap B = B\cap A.$$

2) Für beliebige $A,B,C \in \mathfrak{M}$ ist $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$,

$$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C).$$

Den einfachen Beweis dieses Satzes überlassen wir dem Leser. Es genügt, daran zu erinnern, daß zwei Ereignisse R,L genau dann gleich sind, wenn $R \subset L$ und $L \subset R$.

Aus diesem Satz folgen Gleichungen beispielsweise folgender Art:

$$\bigcup_{i=1}^{4} A_i = (A_1\cup A_2)\cup(A_3\cup A_4) = (A_1\cup A_4)\cup(A_3\cup A_2) = A_4\cup\Big(\bigcup_{i=1}^{3} A_i\Big) = \dots$$

Der nächste Satz beweist Eigenschaften der Verknüpfung zwischen Durchschnittsbildung und Vereinigungsbildung, die Distributivgesetze genannt werden.

S a t z 5 :

Für beliebige $A,A_1,A_2,\dots,A_n \in \mathfrak{M}$ gilt:

1) $A\cap\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \bigcup_{i=1}^{n} (A\cap A_i)$,

2) $A\cup\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) = \bigcap_{i=1}^{n} (A\cup A_i)$.

Wir beweisen hier nur die erste Gleichung für n=2 und überlassen den vollständigen Beweis dem Leser.

Es gilt $A\cap(A_1\cup A_2) = (A\cap A_1)\cup(A\cap A_2)$: Aus dem Eintreten von $A\cap(A_1\cup A_2)$ folgt das Eintreten von A und mindestens eines der Ereignisse A_1,A_2.D.h., es muß mindestens eines der Ereignisse $A\cap A_1$, $A\cap A_2$ eintreten, und damit ist $A\cap(A_1\cup A_2) \subset (A\cap A_1)\cup(A\cap A_2)$ gezeigt. Die Umkehrbarkeit der eben benutzten Schlüsse beweist auch die Beziehung $(A\cap A_1)\cup(A\cap A_2) \subset A\cap(A_1\cup A_2)$. (q.e.d.)

S a t z 6 (Morgansche Formeln) :

Es gilt: 1) $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$,

2) $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

Beweis:

1) $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = S \,, \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = U$,

da entweder keins oder mindestens eins der Ereignisse A_i eintritt.

2) $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = S \,, \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = U$,

da entweder alle A_i eintreten oder mindestens eins nicht eintritt. Der Beweis des Satzes 6 folgt also aus Satz 1.

S a t z 7 :

Folgende Beziehungen sind äquivalent:

1) $A \subset B$,

2) $A \cup B \subset B$,

3) $A \cap B \supset A$.

Beweis:

Die Behauptung wird für $A = U$ trivial. Also kann $A \neq U$ vorausgesetzt werden. Gilt $A \subset B$, so muß B eintreten, wenn mindestens eins der Ereignisse A, B eintritt. Aus $A \cup B \subset B$ folgt, daß A nicht eintreten kann, wenn B nicht eintritt (andernfalls wäre das gemeinsame Eintreten von $\overline{B}$ und B möglich), d.h. $\overline{B} \subset \overline{A}$. Also folgt $A \subset B$ (Satz 3) aus $A \cup B \subset B$. In analoger Weise kann die Äquivalenz von $A \subset B$ und $A \cap B \supset A$ bewiesen werden. Damit ist auch die Äquivalenz von $A \cap B \supset A$ und $A \cup B \subset B$ bewiesen.

Bemerken wir noch, daß für beliebige $A, B \in \mathfrak{A}$ die Beziehungen $B \subset A \cup B$ und $A \cap B \subset A$ richtig sind.

Es gilt deshalb der

S a t z 7':

Die folgenden Beziehungen sind äquivalent:

1) $A \subset B$,

2') $A \cup B = B$,

3') $A \cap B = A$.

Die bisherigen Betrachtungen liefern uns ausreichende Kenntnisse über eine Ereignisalgebra, um unter einer einschränkenden Bedingung leicht und anschaulich ein einfaches mathematisches Modell zu entwickeln, in dem die Ereignisse als Mengen gedeutet werden können, $\mathfrak{T}$ - Menge von Teilmengen einer bestimmten Grundmenge wird und die Vereinigung, der Durchschnitt sowie das Komplement von Ereignissen in die entsprechenden, wohlbekannten Operationen mit Mengen überführt werden.
Die einschränkende Bedingung soll dabei sein, daß $\mathfrak{T}$ nur endlich viele zufällige Ereignisse enthält.

Dr. Horst Oswald
Wiss. Sekretär
der Sektion Mathematik

Preisaufgaben 6/73

(E 31) 1

Man bestimme das Maximum und das Minimum der Funktion

$y(x) = 2 \sin^2 x + 4 \cos^2 x + 6 \sin x \cos x$!

(E 32) 2

Unter allen Dreiecken ΔABC mit gleicher Seite $\overline{AB}$ und gleichem Winkel $\sphericalangle BCA$ bestimme man dasjenige mit maximalem Umfang !

(E 33) 1

Man zeige, daß für alle reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$, $x_1, \ldots, x_n$ und für alle positiven reellen Zahlen ε die Ungleichung

$$|a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n| \leq \frac{1}{\varepsilon}(x_1^2 + \ldots + x_n^2) + \frac{\varepsilon}{4}(a_1^2 + \ldots + a_n^2)$$

besteht!

(E 34) Man löse die Gleichung

1

$$1 + \log_x \frac{4-x}{10} = (\lg \lg n - 1)\log_x 10$$

in reellen Zahlen x, wenn n eine fest vorgegebene positive reelle Zahl mit $n \neq 1$ ist. Wieviel Lösungen gibt es dabei ?

(E 35) In einem Dreieck Δ ABC gelte die Beziehung

2

$$\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = 5\,\overline{AB}^2 .$$

Man zeige, daß dann die Seitenhalbierenden der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ senkrecht aufeinander stehen !

(E 36) Найти два натуральных числа, кратных четырем, разность куъов которых равна четырехзначному числу, кратному 91 .

1

Lösungsbedingungen wie üblich !

Die TURING-Maschine - ein mathematisches Denkmodell

Bis zum Beginn unseres Jahrhunderts war ein Reihe von mathematischen Problemen bekannt geworden (z.B. formulierte D. HILBERT 1900 die dreiundzwanzig nach ihm benannten Probleme), die bis dahin ungelöst waren und es zum Teil auch heute noch sind. In dieser Zeit begann man, grundsätzliche Überlegungen zur Lösbarkeit bzw. Unlösbarkeit von Aufgaben anzustellen. Eine wesentliche Aufgabenstellung läßt sich etwa so formulieren: Es sind gewisse Eigenschaften (z.B. "Primzahl", "Lösbarkeit") - bezogen auf eine bestimmte Objektmenge (z.B. natürliche Zahlen, lineare Gleichungssysteme) - vorgegeben.

Gibt es dann einen Algorithmus, mit dessen Hilfe man für ein <u>beliebiges Element</u> der Objektmenge (beliebige natürliche Zahl, beliebiges lineares Gleichungssystem) feststellen kann, ob es diese Eigenschaften erfüllt oder nicht (Ist die Zahl Primzahl? Ist das lineare Gleichungssystem lösbar?) .

Gibt es einen solchen Algorithmus, so sagt man, daß die Eigenschaften entscheidbar sind. Unter einem Algorithmus wollen wir vorläufig ein (endliches) System von Regeln verstehen, mit dessen Hilfe man in endlich vielen Schritten ermitteln kann, ob ein Element zu einer Menge (die gewisse Eigenschaften repräsentiert) gehört. Dieser Algorithmenbegriff entspricht dem menschlichen Leistungsvermögen bei der Entscheidung einer Menge. Will man beispielsweise feststellen, ob eine natürliche Zahl n Primzahl ist, so kann man für alle Zahlen m mit $1 < m < n$ die Teilbarkeit von n durch m testen. Nach höchstens (n-2) Schritten weiß man also, ob n Primzahl ist. Folglich ist die Menge aller Primzahlen entscheidbar.

Findet man einen geeigneten Algorithmus, hat man die gesicherte Aussage, daß die untersuchte Menge entscheidbar ist. Gelingt dies aber nicht, so kann das entweder daran liegen, daß es gar keinen gibt, oder daß man nur noch keinen gefunden hat. Man könnte also nie sicher sagen, daß eine Menge unentscheidbar ist. Das liegt vor allem an der für mathematische Zwecke unbrauchbaren Beschreibung des Begriffs "Algorithmus". In den dreißiger Jahren bemühten sich deshalb einige Mathematiker (unter ihnen TURING, POST, MARKOW, CHURCH) um eine Präzisierung der Definition eines Algorithmus'.

TURING erdachte sich folgendes mathematisches Modell:
Über einem nach beiden Seiten unendlichen Band, das in Zellen eingeteilt ist, bewegt sich ein Lese- und Schreibkopf, der unterschiedliche Zustände annehmen kann. Man denke sich die Eingabe (die die Maschine verarbeiten soll) - z.B. ein Element einer Menge - auf das Band geschrieben und die (unendlich vielen) noch freien Zellen mit dem Symbol ♀ ("Lindenbaum") beschriftet. Der Lese- und Schreibkopf steht zu Beginn auf der ersten Zelle links neben der Eingabe. Den Anfangszustand bezeichnen wir mit z_1.

Beispiel: Eingabe der Zahl 3 ≙ ||| (Anfangssituation)

Die sogenannte TURING-Maschine (TM) arbeitet nun folgendermaßen:

1) Der Inhalt der Zelle, auf der der Lese- und Schreibkopf steht, wird gelesen.
2) Abhängig vom gelesenen Symbol und dem Zustand des Kopfes wird a) diese Zelle neu beschriftet (damit auch der alte Inhalt gelöscht),
   b) ein neuer Zustand angenommen, und
   c) der Kopf auf die linke bzw. rechte benachbarte Zelle verschoben (d.h. um -1 bzw. +1), weiter wie bei 1)
3) Die Maschine stoppt genau dann, wenn ein bestimmter Zustand - wir bezeichnen ihn mit z_0 - angenommen wird. Wird dieser Zustand für eine bestimmte Eingabe nie erreicht, so bedeutet das, daß die TM unendlich lange arbeitet. In diesem Fall ist der Wert der Ausgabe nicht definiert.

Jede TM läßt sich durch eine Befehlsliste vollständig charakterisieren. Die Befehle haben die folgende Form:

z	$x \longrightarrow$	z'	x'	± 1
Zustand beim Einlesen	eingelesenes Symbol	neu anzunehmender Zustand	zu schreibendes Symbol	Bewegung des Kopfes

Beispiel: Wir wollen nun eine Befehlsliste (und damit eine TM) vorgeben und überlegen, was sie leistet.
Außer ♀ habe die TM nur das Ein- und Ausgabesymbol | .

z_1 ♀ $\longrightarrow$ z_2 ♀ $+1$

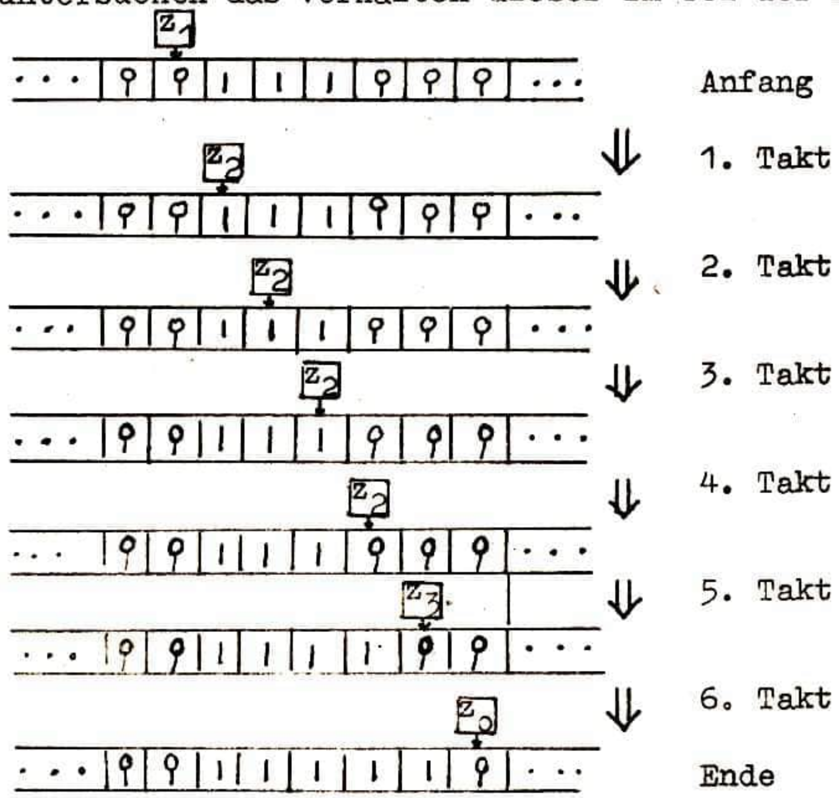
z_2 ♀ $\longrightarrow$ z_3 | $+1$

z_2 | $\longrightarrow$ z_2 | $+1$

z_3 ♀ $\longrightarrow$ z_0 | $+1$

(Für z_1 | und z_3 | können die rechten Seiten beliebig ausgefüllt werden, da diese Situationen nicht vorkommen.)

Wir untersuchen das Verhalten dieser TM bei der Eingabe 3 ≙ III:



Untersucht man das Verhalten auch für andere Eingaben x (z.B. für 0 ≙ nur ♀ auf dem Band), so sieht man, daß immer genau x+2 auf dem Band steht, wenn die TM in z_0 angekommen ist. Diese Zahl nennen wir Ausgabe.
Man kann z.B. eine solche TM definieren, die bei Eingabe einer Primzahl den Wert 1 und für alle anderen natürlichen Zahlen immer 0 ausgibt. Es ist einzusehen, daß diese Maschine geeignet ist, die Menge aller Primzahlen zu entscheiden.
Es sind nicht alle Teilmengen der Menge der natürlichen Zahlen entscheidbar. Derartige Mengen zu beschreiben, erfordert jedoch umfangreichere Grundlagen.
Wir wollen noch die exakte Definition einer TM angeben. Sie können selbst überprüfen, daß sie mit den obigen Erläuterungen übereinstimmt.

D e f i n i t i o n :

D

Ein 8-tupel [X, Z, V, f, g, h, z_0, z_1] heißt TURING - Maschine $=_{Df}$
X ist eine nichtleere endliche Menge, ♀ ∈ X (Ein-

und Ausgabesymbole),
Z ist eine nichtleere endliche Menge (Zustandsmenge),
V = {+1,-1} (Bewegungsmöglichkeiten des Kopfes),
f ist eindeutige Abbildung von $Z \times X$ in Z (2.b)),
g ist eindeutige Abbildung von $Z \times X$ in X (2.a)),
h ist eindeutige Abbildung von $Z \times X$ in V (2.c)),
$z_1, z_0 \in Z$ (Anfangs- bzw. Stoppzustand) .

Beschreiben Sie die im Beispiel angegebene TM als ein solches 8-tupel.

TM sind geeignete Denkmodelle, die aber nie technisch realisiert werden können (unendlich langes Band, eventuell unendlich lange Laufzeit !).

Bisher konnte kein Algorithmus zur Entscheidung von Mengen oder zur Lösung irgendwelcher anderer Probleme gefunden werden, der nicht auf einer TM modellierbar wäre. Diese Tatsache spricht für die Hypothese von CHURCH, die besagt, daß keine Präzisierung des anschaulichen Algorithmenbegriffs mehr leisten kann als eine TM. Diese Hypothese kann natürlich nie bewiesen werden (da der intuitive Algorithmenbegriff nicht exakter faßbar ist); sie könnte höchstens durch ein Gegenbeispiel widerlegt werden. Da sie aber bisher allen Prüfungen standgehalten hat, wird sie als wichtige Arbeitsgrundlage in der mathematischen Kybernetik verwendet.

Für Interessenten ein Literaturtip:

Trachtenbrot, "Wieso können Automaten rechnen?", Berlin 68

Lösungen

Zu den Lösungen der Serie 2/73

Wir erhielten ausschließlich Lösungen zu den Aufgaben (E 8), (E 10) und (E 12).
Charakteristische Fehler traten nicht auf, wenn man von Rechenfehlern bei der zehnten Aufgabe absieht.
Insgesamt lösten sechs Schüler alle drei Aufgaben einwandfrei und erhielten somit drei Punkte.

(E 10)

L

Da keine Formel zur Verfügung steht, die uns den Funktionswert von tan $\frac{\alpha}{2}$ aus unseren Angaben sofort liefert, gestaltet sich seine Berechnung etwas langwierig.

Zuerst wollen wir die verwendeten Formeln angeben:

$$(1) \qquad \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$(2) \qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

$$(3) \qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$(4) \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Da der Winkel α zwischen $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ liegt, können keine Vorzeichenumschläge bzw. Divisionen durch Null auftreten.

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{7}{4}$$

$$\text{(nach 4)} \qquad 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\text{(nach 3)} \qquad \sin 2\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\text{(nach 4)} \qquad \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{(nach 2)} \qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+0{,}25\sqrt{7}}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{7}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}+1}{4}$$

$$\text{(nach 1)} \qquad \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-0{,}25(\sqrt{7}+1)}{1+0{,}25(\sqrt{7}+1)}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{4-\sqrt{7}-1}{4+\sqrt{7}+1}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{7})(5-\sqrt{7})}{25-7}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{11-4\sqrt{7}}}{3}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{7}-2}{3}$$

(E 11) L

$\{b_1, b_2, b_3\}$ sei eine Basis des R_3. Zunächst werden wir in dieser Basis einen Vektor austauschen.

$a_1 \in R_3$ sei linear unabhängig, d.h. $a_1 \neq 0$.

Somit ist a_1 also in der Form

(*) $a_1 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$

darstellbar, wobei nicht alle α_i gleichzeitig 0 werden.

O.B.d.A. sei $\alpha_1 \neq 0$.

Wir wollen jetzt zeigen, daß b_1 gegen a_1 ausgetauscht werden kann, daß also $\{a_1, b_2, b_3\}$ wieder eine Basis des R_3 bildet. (Man vergleiche mit Definition 3, 2/73).

1.) z.z.: a_1, b_2, b_3 sind linear unabhängig.

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3 = 0.$$

$$-\beta_1 a_1 = \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3 .$$

Durch Einsetzen von (*) :

$$-\beta_1(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3) = \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3 ,$$

$$-\alpha_1\beta_1 b_1 - (\alpha_2\beta_1 + \beta_2) b_2 - (\alpha_3\beta_1 + \beta_3) b_3 = 0 .$$

Da $\{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis des R_3 bildet, sind die drei Vektoren linear unabhängig. Außerdem gilt $\alpha_1 \neq 0$ (siehe oben). Somit folgt : $-\alpha_1\beta_1 = 0$,

$$\beta_1 = 0$$

und hieraus $-\beta_2 b_2 - \beta_3 b_3 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$,

womit die lineare Unabhängigkeit von a_1, b_2, b_3 gezeigt ist.

2.) z.z.: Darstellbarkeit jedes Vektors des R_3 als Linearkombination von a_1, b_2, b_3.

$c \in R_3$, c ist darstellbar als

$$c = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \gamma_3 b_3 , \quad \gamma_i \in R .$$

Es gilt: $a_1 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$ und $\alpha_1 \neq 0$,

$$b_1 = \alpha_1^{-1} a_1 - \alpha_2\alpha_1^{-1} b_2 - \alpha_3\alpha_1^{-1} b_3.$$

Somit ergibt sich:

$$c = \gamma_1(\alpha_1^{-1} a_1 - \alpha_2\alpha_1^{-1} b_2 - \alpha_3\alpha_1^{-1} b_3) + \gamma_2 b_2 + \gamma_3 b_3,$$

$$c = \gamma_1\alpha_1^{-1} a_1 - (\alpha_2\alpha_1^{-1} - \gamma_2)b_2 - (\alpha_3\alpha_1^{-1} - \gamma_3)b_3 \,.$$

Sämtliche Koeffizienten sind reell, c ist also bezüglich a_1, b_2 und b_3 darstellbar.

Aus 1.) und 2.) folgt, daß $\{a_1, b_2, b_3\}$ eine Basis des R_3 bildet. In dieser neuen Basis kann nun ein weiterer Vektor ausgetauscht werden, und so kann man fortfahren bis zum r-ten Vektor (in unserem Spezialfall ist r = 3).

(E 6) nach F. Burghardt, Frankfurt (Oder)

L

Die beiden Punkte seien P_1 und P_2, ihre Geschwindigkeiten v_1 und v_2 und die Zeiten für einen Vollkreis t_1 und t_2. Nun gilt: $t_2 = t_1 + t$,

$$v_1 = \frac{2\pi R}{t_1} \quad (1) \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{2\pi R}{t_2} \quad (2)\,.$$

In der Zeit T durchläuft der Punkt P_1 (x+1)-mal, der Punkt P_2 genau x-mal den Kreis.

Daraus ergibt sich: $t_1 = \frac{T}{x+1}$ und $t_2 = \frac{T}{x}$

$$\text{oder} \quad x = \frac{T - t_1}{t_1} \quad (3)\,, \quad x = \frac{T}{t_2}\,.$$

Es gilt nun: $v_1 = \frac{2\pi R\,(x+1)}{T}$, $v_2 = \frac{2\pi R\,x}{T}$ (4) .

Setzt man (2) und (4) gleich, ergibt sich:

$$\frac{2\pi R}{t_1 + t} = \frac{2\pi R\,x}{T}\,, \quad \frac{1}{t_1 + t} = \frac{x}{T}$$

und unter Verwendung von (3) $\dfrac{1}{t_1 + t} = \dfrac{T - t_1}{t_1 \cdot T}$.

Die Umformung führt zu einer quadratischen Gleichung in t_1: $t_1 \cdot T = (T - t_1) \cdot (t_1 + t)$,

$$t_1 \cdot T = T \cdot t_1 + T \cdot t - t_1^2 - t_1 \cdot t\,,$$

$$0 = t_1^2 + t_1 \cdot t - T \cdot t\,.$$

Zunächst ergeben sich für t_1 zwei Lösungen:

$$t_1 = -\frac{t}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} + T\cdot t} \quad (5)\,, \quad t_1' = -\frac{t}{2} - \sqrt{\frac{t^2}{4} + T\cdot t}\,.$$

Eine Lösung des Problems liefert aber nur t_1, weil t_1' negativ ist.

Setzt man Gleichung (5) in (1) und (2) ein, ergibt sich unmittelbar die Lösung:

$$v_1 = \frac{2\pi R}{-\frac{t}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} + T\cdot t}}\,, \quad v_2 = \frac{2\pi R}{\frac{t}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} + T\cdot t}}\,.$$

Man kann die Ausdrücke nun noch etwas vereinfachen:

$$v_1 = \frac{\pi R}{\sqrt{t^2 + 4\,T\cdot t} - t}\,, \quad v_2 = \frac{\pi R}{\sqrt{t^2 + 4\,T\cdot t} + t}\,.$$

A U F L Ö S U N G unseres Kreuzworträtsels aus Heft 4/73:

W a a g e r e c h t : 1. Eckpunkt, 7. Lamas, 8. ln, 11. Ite, 13. Verb, 15. Polyeder, 16. SR, 17. Kadi, 18. Dattel, 20. in, 21. Goi, 22. nervös.

S e n k r e c h t : 1. Ellipsoid, 2. Cantor, 3. km, 4. Pal, 5. US, 6. k.o., 9. sedativ, 10. Abril, 12. El, 13. Vektor, 14. Rede, 19. Age.

Übrigens sollte es k e i n Aprilscherz sein, daß die Leerfelder G 8 und H 8 nicht gekennzeichnet waren!

Gut gesagt

Diejenigen, welche viel Mathematik und keine andere Wissenschaft studiert haben, bekommen für dieselbe solch eine Vorliebe, daß sie glauben, es gebe in keiner anderen Wissenschaft etwas Zuverlässiges und kein anderes Axiom außer dem des Euklid.

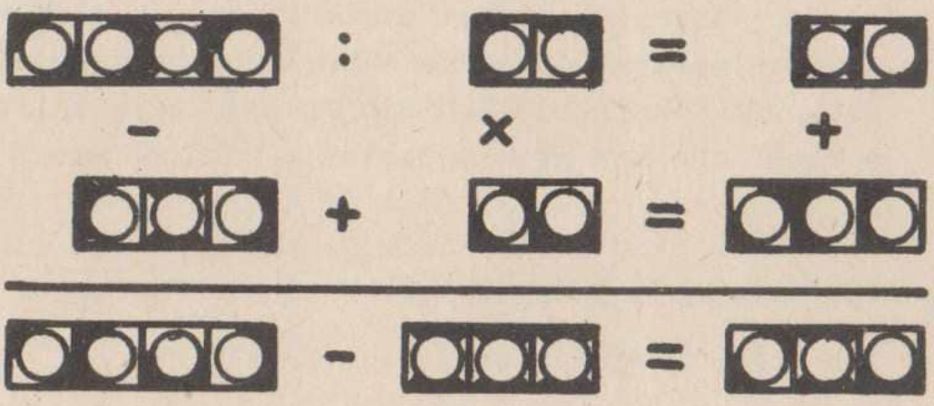
Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung" der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller Universität Jena; Leiter: Reinhard Klette

Redaktion: Werner Nagel (Chefredakteur); U. Heuke, H. Fischer, R. Lorenz

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

Anschrift: WURZEL
69 Jena
Universitätshochhaus
Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45



Wir wünschen allen Lesern einen erholsamen Sommerurlaub!

Wir sind bemüht, auch im nächsten Schuljahr die „WURZEL" pünktlich und in guter Qualität zur Verfügung zu stellen und hoffen auf einen regen Erfahrungsaustausch mit unserem Leserkreis.

7/8
73

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Fr.-Schiller-Universität Jena

Einführung in die Funktionalanalysis

In der linearen Algebra beschäftigt man sich mit linearen Gleichungssystemen. Im einfachsten Fall heißt das das Folgende: Zu vorgegebenen reellen Zahlen a_{11}, a_{12}, a_{21} und a_{22} sowie y_1, y_2 bestimme man reelle Zahlen x_1 und x_2 mit

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = y_1$$

und

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = y_2 \ .$$

Man schreibt für diesen Sachverhalt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

und nennt $A =_{\mathrm{Df}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ eine M a t r i x .

Wir untersuchen nun etwas genauer diese Matrix A. Mit R_2 bezeichnen wir im folgenden die Menge aller Vektoren $x = (x_1, x_2)$, wobei die Komponenten x_1 und x_2 beliebige reelle Zahlen sind. Anschaulich kann man sich den R_2 als Ebene vorstellen, und die Vektoren $x = (x_1, x_2)$ sind die Punkte in dieser Ebene.

Jede Matrix A definiert eine Abbildung A von R_2 in R_2 durch die Zuordnung

$$x = (x_1, x_2) \xrightarrow{A} y = (y_1, y_2)$$

mit
$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ .$$

Man schreibt dafür $Ax = y$.

Beispielsweise ordnet die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ jedem Vektor $x = (x_1, x_2)$ den Vektor $y = (x_1, x_1 + x_2)$ zu. Insbesondere wird also das Element (1,1) auf den Vektor (1,2) abgebildet.

Fassen wir noch einmal zusammen:

Jede Matrix $\mathcal{A}$ definiert eine Abbildung A von R_2 in R_2. Unser zu Beginn gestelltes Problem lautet dann: Zu einer Matrix $\mathcal{A}$ und zu $y \in R_2$ bestimme man ein $x \in R_2$ mit $Ax = y$.

Die durch die Matrix definierte Abbildung hat weitere schöne Eigenschaften. Bevor wir diese beschreiben können, müssen wir uns näher mit der Menge R_2 beschäftigen. Für zwei Elemente $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ aus R_2 und eine reelle Zahl λ definiert man

$$x + y =_{Df} (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \qquad \text{(Addition von Vektoren)}$$

und

$$\lambda x =_{Df} (\lambda x_1, \lambda x_2) \qquad \text{(skalare Multiplikation).}$$

Wir bekommen durch diesen Ansatz Abbildungen von $R_2 \times R_2$ in R_2 bzw. von $R_2 \times R$ in R_2 (R ist die Menge der reellen Zahlen). Diese Abbildungen haben die folgenden Eigenschaften:

<u>Satz 1:</u>

(1) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

(2) $x + y = y + x$;

(3) Es existiert ein Vektor $\theta \in R_2$ mit $x + \theta = x$ für alle $x \in R_2$;

(4) Zu jedem $x \in R_2$ gibt es ein Element $(-x)$ mit $x + (-x) = \theta$;

(5) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

(6) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;

(7) $1 \cdot x = x$.

Dabei sind x, y und z aus R_2 und $\lambda, \mu \in R$.

Der Beweis aller dieser Eigenschaften ist in unserem Fall sehr einfach. Sie sind aber Ausgangspunkt für die allgemeine Definition eines Vektorraums (vgl. "WURZEL" 2/73).

D e f i n i t i o n   1 :

Eine Menge E mit einer Abbildung von $E \times E$ in E ($(x,y) \longrightarrow x+y$) und einer Abbildung von $R \times E$ in E ($(\lambda,x) \longrightarrow \lambda \cdot x$) , für die die Eigenschaften (1) bis (7) von Satz 1 erfüllt sind, nennt man einen <u>V e k t o r r a u m</u> .

Wir können somit Satz 1 folgendermaßen formulieren:

S a t z   1' :

Die Menge R_2 , versehen mit den Operationen (+) und ($\cdot$), bildet einen Vektorraum.

Wir untersuchen jetzt die Frage, was passiert, wenn wir die von einer Matrix $\mathcal{A}$ definierte Abbildung A auf das Element $x+y \in R_2$ bzw. auf das Element $\lambda x \in R_2$ anwenden.

Man bekommt dann

$$
\begin{aligned}
A(x+y) &= (a_{11}(x_1+y_1) + a_{12}(x_2+y_2), a_{21}(x_1+y_1) + a_{22}(x_2+y_2)) \\
&= Ax + Ay
\end{aligned}
$$

und ebenso

$$A(\lambda x) = \lambda Ax \; .$$

Fassen wir dieses Ergebnis zusammen:

S a t z   2 :

Für eine Matrix $\mathcal{A}$ hat die zugehörige Abbildung A die Eigenschaften

(1) $\quad A(x+y) = Ax + Ay$,

(2) $\quad A(\lambda x) = \lambda Ax$

für alle $x,y \in R_2$ und reelle Zahlen λ.

D e f i n i t i o n   2 :

Eine Abbildung A von einem Vektorraum E in E nennt man **l i n e a r** , wenn für $x,y \in E$ und $\lambda \in R$ stets

(1) $\quad A(x+y) = Ax + Ay$

und (2) $\quad A(\lambda x) = \lambda Ax \quad$ gilt.

Satz 2':

Für eine Matrix A ist A linear.

Man kann auf dem Vektorraum R_2 noch eine weitere Abbildung definieren, das sogenannte Skalarprodukt von Vektoren. Man ordnet $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ die Zahl

$$\langle x,y \rangle =_{Df} x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$$

zu. Dies ist eine Abbildung von $R_2 \times R_2$ in R.

Satz 3:

Das Skalarprodukt besitzt die Eigenschaften

(1) $\langle x,x \rangle \geq 0$ und $\langle x,x \rangle = 0$ genau dann, wenn $x = (0,0) = \theta$;

(2) $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$;

(3) $\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x,y \rangle + \mu \langle x,z \rangle$

für $x,y,z \in R_2$ und $\lambda, \mu \in R$.

Beweisen Sie diesen Satz!

Auch diese bekannte Definition läßt sich verallgemeinern:

Definition 3:

Ist auf einem Vektorraum E eine Abbildung von $E \times E$ in die reellen Zahlen mit den Eigenschaften von Satz 3 gegeben, so nennt man E einen <u>unitären Raum</u>. Die Abbildung heißt <u>Skalarprodukt</u>.

Somit lautet also Satz 3:

Satz 3':

Der Vektorraum R_2 ist ein unitärer Raum mit dem Skalarprodukt $\langle x,y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$.

Nicht auf jedem Vektorraum E läßt sich ein Skalarprodukt definieren. Die Theorie der Räume mit einem Skalarprodukt ist sehr weit entwickelt, und es gibt viele Bücher über dieses Thema. Man hat sich mit diesen Räumen besonders beschäftigt, da in ihnen viele Eigenschaften sehr ähnlich denen der Menge R_2 sind. So kann man definieren, wann zwei Elemente senkrecht stehen, und es gibt einen Satz von Pythagoras im unitären Raum.

Die folgende Ungleichung ist ein Beispiel für die engen Verbindungen zwischen beliebigen unitären Räumen und der Menge R_2. Wir werden sie ganz abstrakt in einem unitären Raum E formulieren und beweisen. Dazu werden wir nur die Eigenschaften (1), (2) und (3) von Satz 3 verwenden. Wenn Ihnen das Schwierigkeiten bereiten sollte, können Sie sich stets unter dem unitären Raum E den Raum R_2 vorstellen.

Satz 4:

(Schwarzsche Ungleichung)
Für x,y aus einem unitären Raum E gilt stets

$$|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}.$$

Beweis:

Für eine beliebige reelle Zahl λ gilt auf Grund von (1) aus Satz 3 stets

$$0 \leq \langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle .$$

Unter Verwendung von (2) und (3) folgt dann

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle &= \langle x-\lambda y, x\rangle - \lambda\langle x-\lambda y, y\rangle \\ &= \langle x, x-\lambda y\rangle - \lambda\langle y, x-\lambda y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle - \lambda\langle x,y\rangle - \lambda\langle y,x\rangle + \lambda^2\langle y,y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle - 2\lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2\langle y,y\rangle \end{aligned}$$

für eine beliebige reelle Zahl λ.

Setzt man nun für λ speziell

$$\lambda = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} \quad , \; y \neq \theta!$$

so erhält man

$$0 \leq \langle x,x \rangle - 2\frac{|\langle x,y \rangle|^2}{\langle y,y \rangle} + \frac{|\langle x,y \rangle|^2}{\langle y,y \rangle}$$

oder

$$0 \leq \langle x,x \rangle - \frac{|\langle x,y \rangle|^2}{\langle y,y \rangle}$$, woraus sofort

$$|\langle x,y \rangle|^2 \leq \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle$$ folgt.

Damit ist die Ungleichung bewiesen.

(Man veranschauliche die Schwarzsche Ungleichung im R_2 geometrisch!)

Fortsetzung auf Seite 172

Studententage an unserer Universität

Vom 21. - 26. Mai fanden zum 2. Mal die Betriebsfestspiele der Friedrich-Schiller-Universität statt. Wie bereits im vergangenen Jahr waren sie ein Höhepunkt im Studienjahr und legten Zeugnis ab von der Arbeit, die die Studenten und Mitarbeiter der Sektionen in den zurückliegenden Monaten geleistet haben. Jede Gruppe zog Bilanz über den erreichten Stand sowohl auf fachlicher und gesellschaftlicher Ebene als auch auf sportlichem und kulturellem Gebiet und stellte sich neue Aufgaben für das nächste Semester.

Hervorragende Aktivitäten wurden besonders auf der Leistungsschau der 2. MMM der FSU vorgestellt. Die Bewegung "Messe der Meister von Morgen" stand unter dem Leitmotiv

> "Mit hohen Studienergebnissen bereiten wir die X. Weltfestspiele der Jugend und Studenten in Berlin, der Hauptstadt der DDR, vor!"

Die MMM dokumentierte, daß die eingegangenen Verpflichtungen zur Vorbereitung und Durchführung der X. Weltfestspiele in vielen Sektionen bereits realisiert sind. Auch das Jugendobjekt "Studienvorbereitung" beteiligte sich an dieser Leistungsschau.

Wie sahen nun die Studententage an unserer Sektion aus?

Eine Woche lang wurde bei einer Vielzahl von Veranstaltungen diskutiert und gestritten, Kritik und Selbstkritik geübt, gewandert und gefeiert. Im Mittelpunkt standen natürlich die Fragen des Studiums. Einige Veranstaltungen seien hier näher vorgestellt.

Auf der Studienjahreskonferenz gaben Studenten und Lehrkörper Rechenschaft über die erzielten Ergebnisse. Es wurden viele Fragen aufgeworfen und versucht, sie in einer anschließenden Diskussion zu beantworten. Zum Beispiel gab es im Bereich M 2 die folgenden Fragen:

- Wie kann der Übergang von der EOS zur Universität erleichtert werden?
- Welche Probleme gibt es bei der Auslastung der Studienwoche?
- Sind die Studenten kontinuierlich belastet?
- Welche Aufgaben hat ein Seminargruppenbetreuer?
- Ist die Sprachausbildung effektiv?

Man kann einschätzen, daß die Studenten die Möglichkeit nutzten, ihre Meinung zur Qualität der Vorlesungen und Seminare zu sagen und auf Mängel hinzuweisen. Am Ende der Veranstaltung wurden die fachlich und gesellschaftlich besten Studenten des Studienjahres mit Geld- und Buchprämien ausgezeichnet.

Erstmals fanden in diesem Jahr im Rahmen der Betriebsfestspiele an unserer Sektion wiss. Seminare statt, deren Ziel es war, besondere Leistungen von Studenten und Kollektiven vorzustellen. Das Programm umfaßte Vorträge zu Diplomthemen, über Jahresarbeiten, Verteidigungen von Diplomarbeiten und einen Vortrag über die Arbeit des wissenschaftlichen Studentenzirkels "Glasabkühlung". Die Arbeit dieses Zirkels ist ein Argument gegen die Meinung, daß Mathematik wenig praxisbezogen sei.

Der Dienstag und Freitag waren die Tage des Wehrsports und des Universitätssportfestes. Auf mehreren Plätzen und in zwei Turnhallen wurden die Besten in 13 Disziplinen ermittelt. Bei gutem Sportwetter herrschte an allen Wettkampfstätten eine großartige Stimmung. Ob beim Volleyball, Basket- oder Handball, Kanu oder Fechten - überall war man mit letztem Einsatz dabei, und fehlende Technik wurde durch großen Kampfgeist ersetzt. An den Ausscheidungen zur Sektionsmeisterschaft im Fußball beteiligte sich selbstverständlich eine "WURZEL"-Mannschaft. Wie in den letzten Jahren reichte es aber auch diesmal nicht zum Staffelsieg, obwohl das erste Spiel mit 6 : 0 gewonnen wurde. Das zweite und entscheidende ging jedoch mit 0 : 4 verloren. Im traditionellen Spiel Lehrkörper gegen Studenten unserer Sektion unterlag die "Professorenmannschaft" mit 1 : 3, wobei der Lehrkörper das erste Tor schoß, dann aber konditionell nicht mehr mithalten konnte. Wie auch im letztjährigen Spiel (6 : 1 für die Studenten) galt die Regel:

"Wer führt, verliert!"

In einer Solidaritätsveranstaltung bekundeten Lehrkörper und Studenten ihre Verbundenheit mit dem vietnamesischen Volk. In der Bilanz unserer Sektion erscheinen als Erlös mehrerer Spendenaktionen von Januar 72 bis Februar 73 2 100 Mark von den Studenten. Die Teilnehmer dieses Meetings versicherten, daß nach dem Vietnamabkommen die Solidarität weitergeführt wird. Noch nach dem Friedensvertrag wurden 850 Mark der einzelnen Bereiche auf das Solidaritätskonto überwiesen.

Den Abschluß der Betriebsfestspiele für unsere Sektion bildete eine Veranstaltung mit Kulturprogramm, gestaltet von den Singegruppen der Bereiche Lehrer III, Mathematiker I. Das Kabarett der Sektion bot einen Auszug aus seinem Repertoire.

Den folgenden Auszug entnahmen wir aus: F. J. Budden, "Zahlensysteme und Rechenautomaten", Teubner VG, 1972.

Aus einem alten Brief:

"Vor einiger Zeit kaufte ich dieses alte Haus, aber ich bemerkte sehr bald, daß es von zwei gespensterhaften Geräuschen heimgesucht wird. Ein wüstes Sausen und ein unheimliches Gelächter machen es kaum bewohnbar. Jedoch gibt es eine Hoffnung, denn durch lange Untersuchungen fand ich, daß ihr Verhalten gewissen unbekannten, aber festen Gesetzen untergeordnet ist und daß es durch Orgelspielen oder Verbrennen von Weihrauch beeinflußbar ist.

Das Sausen wird in der folgenden Minute in gleicher Weise fortgesetzt (als Lärm oder Ruhe), außer wenn in der vorhergehenden Minute Orgelspiel ohne Gelächter war, wobei es ins Gegenteil umschlägt (Lärm in Ruhe oder umgekehrt).

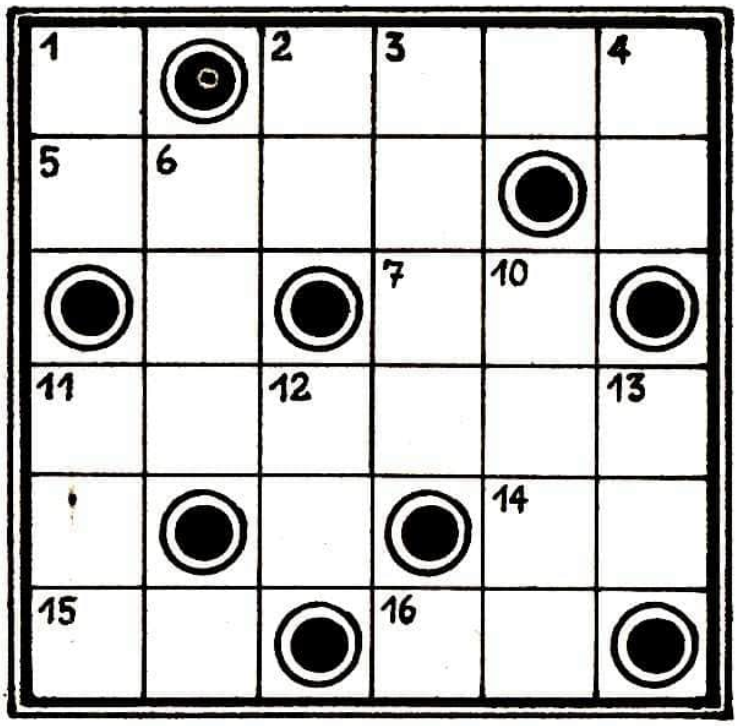
Was das Gelächter betrifft, so ertönt es oder nicht, wenn Weihrauch verbrannt wird, übereinstimmend damit, ob das Rauschen ertönt oder nicht (das Gelächter ahmt das Rauschen eine Minute später nach). Wenn kein Weihrauch vorhanden ist, macht das Gelächter das Gegenteil des Rauschens.

In dieser Minute, in der ich schreibe, sind sowohl das Gelächter als auch das Rauschen zu hören.

Bitte teilen Sie mir mit, welche Handhabung vom Weihrauch und Orgelspiel ich anwenden sollte, um im Haus Ruhe zu bekommen.

Ihr Carl Dottheim "

OKTALES KREUZWORTRÄTSEL



<u>Anmerkung:</u> Alle Zahlen, sowohl in der Aufgabenstellung als auch in den Quadraten, sind oktal beziehungsweise oktal einzusetzen. Unter dem Oktalsystem versteht man ein Zahlensystem zur Basis 8.

<u>Beispiel:</u> 103 im Oktalsystem heißt

$1 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 64 + 3 = 67$

im Dezimalsystem.

Waagerecht:

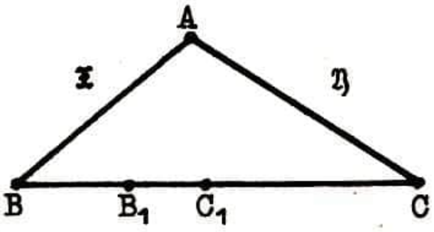
2. Die Sonne geht früh um 7 Uhr und 62 Minuten auf und um 22 Uhr 20 Minuten unter. Wieviel Minuten scheint sie?
5. Fläche (in cm^2) einer Tür der Abmessungen 132 und 44 cm.
7. Eine Lösung von $\begin{aligned} 4x - 5y &= 15 \\ 13x + 3y &= 334. \end{aligned}$
11. $4^{11} - 11^4$.
14. Eine Primzahl.
15. Eine Fahrt von Berlin nach Erfurt in $10\frac{1}{2}$ Stunden. Durchschnittsgeschwindigkeit (gerundet) in km pro Stunde.
16. Nächstes Glied der Folge 2, 12, 14, 26, 42, ...

Senkrecht:

1. Anzahl der Tage vom 36. Januar bis 2. April im Jahr 3554.
2. Kleinster Winkel der Steighöhe der Sonne in $117\frac{1}{2}{}^{\circ}$ nördlicher Breite am 31. Juni (auf Grad gerundet).
3. Eine Quadratzahl.
4. $2^n = 1000000$; Größe von n.
6. Eine Zahl der Form $n \cdot (n+1)$.
10. 6!
11. Vielfaches von 161.
12. $2 \cdot (x-17) = 63-x$; Größe von x.
13. Höhe des Mount Everest in Fuß (die zwei höchsten Oktalstellen).

Eine Aufgabe von Dr. habil. Roman Roth, emer. Universitäts-Professor, Jena, für unsere Leser:

Im Dreieck Δ ABC liegt zwischen B und C das Punktepaar $B_1 C_1$. Gesucht sind $\mathfrak{X} \in AB$, $\mathfrak{Y} \in AC$; die Strecken $B_1\mathfrak{X}$ und $C_1\mathfrak{Y}$ sollen gleich und parallel sein.



Fortsetzung von Seite 167

Mit Hilfe des Skalarproduktes läßt sich auf einem unitären Raum ein "Abstand" von θ ("Betrag") definieren. Jedem Element $x \in E$ kann man eine positive reelle Zahl $\|x\|$ mit

$$\|x\| =_{Df} \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

zuordnen, die **N o r m** von x.
Im R_2 gilt für $x = (x_1, x_2)$ stets

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad ,$$

also gerade der Abstand des Punktes $x = (x_1, x_2)$ vom Punkt $\theta = (0,0)$.

S a t z 5 :

Diese Norm hat folgende Eigenschaften:

(1) $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = \theta$;

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ für $\lambda \in R$;

(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Dabei sind x,y beliebige Elemente aus dem unitären Raum E.

Beweis:

Aus Eigenschaft (1) von Satz 3 folgt, wenn man die Definition $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ beachtet, sofort (1).

Für eine reelle Zahl λ gilt

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x,x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x,x \rangle} = |\lambda| \|x\|$$

und somit (2).

Sind $x,y \in E$, so hat man

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle = \langle x+y, x \rangle + \langle x+y, y \rangle \\ &= \langle x,x \rangle + 2\langle x,y \rangle + \langle y,y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x,y \rangle + \|y\|^2 . \end{aligned}$$

Verwenden wir die Schwarzsche Ungleichung in der Form

$$|\langle x,y \rangle| \leq \|x\| \|y\| ,$$

so gilt

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x,y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x,y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 . \end{aligned}$$

Zieht man noch auf beiden Seiten der Ungleichung die Wurzel, so erhält man

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| .$$

D e f i n i t i o n 4 :

D Ist auf einem Vektorraum E eine Abbildung von E in R gegeben, die die Eigenschaften (1), (2) und (3) von Satz 5 erfüllt, so sagt man, E ist ein <u>n o r m i e r t e r R a u m</u>. Die Abbildung nennen wir eine <u>N o r m</u> auf E und bezeichnen das Bild für $x \in E$ mit $\|x\|$.

Anschaulich können wir uns unter der Norm eines Elementes $x \in E$ stets den Abstand vom Nullelement θ vorstellen. Die Bedingung (3) in der Definition der Norm wird auch als "Dreiecksungleichung" bezeichnet. Der Name kommt daher, daß im Fall $E = R_2$ diese Ungleichung gerade die Tatsache beschreibt, daß im Dreieck die Summe der Länge zweier Seiten stets größer ist als die Länge der dritten Seite.

Versuchen Sie, sich dies zu überlegen!

Dagegen besagt Bedingung (1) einfach, daß der Abstand eines beliebigen Elementes (verschieden dem Nullelement) zum Nullelement stets echt positiv ist.

Wir haben gesehen, daß jeder unitäre Raum ein normierter Raum ist. Die umgekehrte Aussage ist nicht richtig. Gerade die Existenz eines Skalarprodukts ist eine sehr gute Eigenschaft, die nur relativ wenige Vektorräume besitzen. Die meisten in der Funktionalanalysis vorkommenden Räume sind nur normiert, manche haben sogar noch schlechtere Eigenschaften.

Wir kehren jetzt wieder zu unserer linearen Abbildung A zurück.

S a t z   6 :

Für jede durch eine Matrix A definierte Abbildung A von R_2 in R_2 existiert eine Konstante $c \geq 0$ mit

$$\|Ax\| \leq c\,\|x\|$$

für alle $x \in R_2$.

Beweis:

Für $x = (x_1, x_2)$ und $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ gilt

$$Ax = (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2\;,\; \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2)$$

und somit

$$\|Ax\|^2 = (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2)^2 + (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2)^2 .$$

Bezeichnen wir mit α_1 den Vektor $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12})$ und mit α_2 den Vektor $\alpha_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22})$, so folgt auf Grund der Schwarzschen Ungleichung

$$(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2)^2 = \langle \alpha_1, x\rangle^2 \leq \langle \alpha_1, \alpha_1\rangle \langle x, x\rangle = (\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2)(x_1^2 + x_2^2)$$

und ebenso

$$(\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2)^2 = \langle \alpha_2, x\rangle^2 \leq \langle \alpha_2, \alpha_2\rangle \langle x, x\rangle = (\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2)(x_1^2 + x_2^2) .$$

Folglich können wir weiter abschätzen

$$\|Ax\|^2 \leq (\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2)(x_1^2 + x_2^2) = c^2\,\|x\|^2$$

mit $c^2 = \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2$,

d. h. $\|Ax\| \leq c \cdot \|x\|$, was zu beweisen war.

Anschaulich besagt die Aussage des Satzes 6, daß der Abstand des Bildes Ax nicht sehr groß ist, wenn der Abstand von x zu Θ nicht sehr groß ist.

Nicht für jeden linearen Operator A von einem normierten Raum E in E existiert eine Konstante c mit der Abschätzung $\|Ax\| \leq c\|x\|$. Es ist deshalb die folgende Definition sinnvoll:

D e f i n i t i o n 5 :

Eine lineare Abbildung A eines normierten Raumes E in sich heißt **b e s c h r ä n k t ,** wenn eine Konstante $c \geq 0$ mit

$$\|Ax\| \leq c\|x\|$$

für alle $x \in E$ existiert.

Somit folgt

S a t z 6' :

Jede durch eine Matrix definierte Abbildung von R_2 in R_2 ist beschränkt.

Nach der letzten Definition kann man nun etwas erläutern, womit sich die Funktionalanalysis beschäftigt.

Einen großen Platz nehmen in der Funktionalanalysis Untersuchungen über unitäre bzw. normierte Räume und über beschränkte lineare Abbildungen in diesen Räumen ein. Die dabei auftretenden Probleme sind sehr vielfältig. Ebenso verschiedenartig sind die Möglichkeiten der Anwendung. Die Funktionalanalysis liefert Ergebnisse, die entweder direkt in der Praxis anwendbar sind oder aber in anderen Richtungen der Mathematik, so in der Numerik, der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der Quantenphysik oder in der Operationsforschung, angewendet werden.

Fortsetzung auf Seite 180

Preisaufgaben 7, 8/73

(E 37) ① Man bestimme alle rationalen Zahlen x, so daß $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$ eine rationale Zahl ist.

(E 38) ② Es ist zu zeigen, daß, falls alle Koeffizienten der Entwicklung $(a+b)^n$ ungerade sind, $n = 2^s - 1$ ist.

(E 39) ② Man zerlege ein Dreieck Δ ABC durch eine Gerade so in zwei Teile, daß diese sowohl den gleichen Umfang als auch den gleichen Flächeninhalt besitzen.

(E 40) ① Die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

seien x_1, x_2. Man gebe eine neue quadratische Gleichung an, deren Wurzeln $\frac{x_1}{x_2}$ und $\frac{x_2}{x_1}$ sind.

(E 41) ① Es ist zu zeigen, daß bei einer beliebigen Primzahl p die Differenz

$$\underbrace{11\ldots1}_{p\text{-mal}}\underbrace{22\ldots2}_{p\text{-mal}}\ldots\underbrace{88\ldots8}_{p\text{-mal}}\underbrace{99\ldots9}_{p\text{-mal}} - 123456789$$

durch p teilbar ist.

(E 42) ② Найти последние два цифры числа $7^{9^{9^9}}$.

Lösungsbedingungen wie üblich!

Gewinner im Monat März

Mit Lösungen der Serie 2/73 bzw. 3/73 erreichten folgende Schüler den 15. Punkt und gewannen somit einen Buchscheck:

Hans-Ullrich	Frömmer,	208	Neustrelitz,	10. Klasse,
Dieter	Erdmann,	2033	Loitz,	10. Klasse,
Wolfram	Bast,	207	Röbel,	10. Klasse.

Hierzu unseren herzlichen Glückwunsch!

Karl-Marx-Seminar

An unserer Universität ist es schon zur Tradition geworden, daß alljährlich die besten Studenten und junge Wissenschaftler im Mai zusammenkommen, um beim Karl-Marx-Seminar über Probleme des Studiums und der aktuell-politischen Ereignisse zu diskutieren, neue Erkenntnisse zu sammeln und eigene weiterzuvermitteln.

Das Seminar, das zum sechsten Mal stattfand, war der Höhepunkt der 2. Betriebsfestspiele unserer Universität. Es stand unter dem Motto

"Marxismus-Leninismus - Richtschnur unseres Handelns"

und hatte zum Hauptgegenstand der Beratungen Fragen des Sozialismus und der friedlichen Koexistenz. Diese Thematik ist von großer politisch-ideologischer Aktualität.

Die Eröffnung des diesjährigen KMS in der Aula wurde durch den Rektor der Universität, Magnifizenz Prof. Dr. Bolck, vorgenommen; den feierlichen Rahmen schuf der FDJ-Chor des Max-Reimann-Ensembles mit einem Ausschnitt aus dem Festivalprogramm. Als Gäste weilten Mitglieder der Bezirksleitung der SED und der 1. Sekretär der Universitätsparteileitung, Dr. Tennigkeit, sowie Mitglieder der offiziellen Festivaldelegation des Bezirkes Gera unter den Teilnehmern des Seminars. Im Referat, gehalten von einer Forschungsstudentin der Sektion Marxismus-Leninismus, wurde auf die wachsende Stärke und Überlegenheit des Sozialismus hingewiesen, die den Imperialismus zur Politik der friedlichen Koexistenz zwingt.

In der Diskussion im Plenum gingen die Teilnehmer auf viele Fragen des Prinzips der friedlichen Koexistenz und seiner Durchsetzung ein.

Eine Physikstudentin des 1. Studienjahres sprach über ideolo-

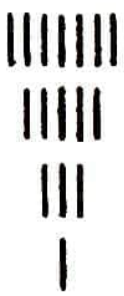
gisch-theoretische Probleme in der Dialektik von Abgrenzung und friedlicher Koexistenz und stellte fest, daß die Abgrenzung keine Frage des Wollens oder Nichtwollens, sondern ein objektiver Prozeß ist.
Eine Medizinstudentin sprach über den Einfluß der Politik der friedlichen Koexistenz auf die Entfaltung des antiimperialistischen Kampfes in den hochentwickelten kapitalistischen Ländern, ein Biologiestudent über den Beitrag der sozialistischen ökonomischen Integration bei der Verwirklichung der Politik der friedlichen Koexistenz.

Der Diskussion im Plenum schlossen sich Beratungen in verschiedenen Arbeitskreisen an. Auch in ihnen wurde offen und parteilich gestritten über bürgerliche Auffassungen der friedlichen Koexistenz und die Dialektik von Prinzipienfestigkeit und Kompromiß.

Dieses Karl-Marx-Seminar lieferte allen Beteiligten Argumente für die Diskussionen in den FDJ-Gruppen zu Fragen des internationalen Kräfteverhältnisses.

Georgisches Schach

Man lege 16 Streichhölzer in die in der Skizze gezeigte Anordnung.



Die beiden Spielpartner dürfen nun abwechselnd aus einer beliebigen Reihe (aber bei jedem Zug nur aus genau einer) eine beliebige Anzahl von Hölzchen entfernen. Verloren hat derjenige, der das letzte Streichholz nimmt.

<u>Unsere Frage:</u> Nach welchem Plan kann der beginnende Partner stets gewinnen?

Wir bekamen den Titel "Sozialistisches Studentenkollektiv der Friedrich-Schiller-Universität Jena"

Am 24. Mai hatte unser Jugendobjekt seinen großen Tag: Vertreter der Universitäts- und Sektionsleitung überreichten dem Jugendobjekt "Studienvorbereitung" in Würdigung seiner Arbeit und der im sozialistischen Wettbewerb der FDJ-Gruppen unserer Sektion gezeigten Aktivitäten den Ehrentitel "Sozialistisches Studentenkollektiv der FSU Jena". Für die Mitglieder unseres Jugendobjektes, 22 Studenten der Sektion Mathematik, war dies ein schöner Lohn für die seit der Aufnahme des Kampfes um diesen Titel am 9. März 1972 vollbrachten Anstrengungen innerhalb unserer Freizeit um eine wirkungsvolle Ausstrahlung des Jugendobjektes "Studienvorbereitung ".

An allen Universitäten unseres Landes hat die Mehrzahl der FDJ-Gruppen den Kampf um diesen Ehrentitel aufgenommen, der zusammen mit einer Geldprämie gemeinsam vom Rektor und der FDJ-Leitung der jeweiligen Universität verliehen wird. Aber nur sehr wenige Gruppen erreichen die sehr hohen Normen zur Vergabe dieses Titels, sei es auf dem Gebiet der politisch-ideologischen Arbeit des Kollektivs oder der fachlichen Leistungen der Gruppenmitglieder.

Wir können heute feststellen, daß uns die zielstrebige Teilnahme am Wettbewerb um diesen Ehrentitel sehr in unserer persönlichen Entwicklung geholfen hat. Durch die Aktivierung unserer FDJ-Arbeit im Titelkampf hatten wir im letzten Jahr ein sehr interessantes und abwechslungsreiches Gruppenleben. Unser Tip für andere FDJ-Gruppen, auch an den Schulen:

Die FDJ-Arbeit gestalten in erster Linie die Gruppenmitglieder selbst, und wo eine Gruppe es versteht, alle Aktivitäten und Ideen der Mitglieder möglichst vollständig in das Gruppenleben einzubeziehen, wo Probleme in der Gruppe nicht nur oberflächlich, sondern ausdiskutiert werden, bringt die FDJ-Arbeit jedem Gruppenmitglied Nutzen und Freude.

Fortsetzung von Seite 175

Im folgenden sollen noch einige Beispiele von normierten Räumen und linearen Abbildungen gegeben werden, um das breite Spektrum der Anwendungsmöglichkeiten der obigen Definition etwas zu zeigen.

Mit $C^{\infty}[0,1]$ bezeichnen wir die Menge der Funktionen von $[0,1]$ in die reelle Achse, die Ableitungen beliebig hoher Ordnung besitzen. Beispiele hierfür sind die Funktionen $\cos t$, $\sin t$, t^2, alle Polynome, usw.
Die Menge $C^{\infty}[0,1]$ ist ein Vektorraum, wenn man die Addition und die skalare Multiplikation wie folgt erklärt:

$$(f,g) \longrightarrow f + g \quad \text{mit } (f+g)(t) =_{Df} f(t) + g(t)$$

$$(\lambda,f) \longrightarrow \lambda f \quad \text{mit } (\lambda f)(t) =_{Df} \lambda \cdot f(t)$$

$f, g \in C^{\infty}[0,1]$ und $\lambda \in R$.

$C^{\infty}[0,1]$ läßt sich auf sehr viele Arten zu einem normierten Raum machen. Z. B. setzt man für $f \in C^{\infty}[0,1]$:

$$\| f \| =_{Df} \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)| ,$$

d. h. den betragsmäßig größten Funktionswert von f im Intervall $[0,1]$.

Man kann sich überlegen, daß dies wirklich eine Norm ist. Versuchen Sie, dies zu beweisen!

Wir betrachten jetzt die Abbildung D, die jeder Funktion $f \in C^{\infty}[0,1]$ ihre Ableitung $f' \in C^{\infty}[0,1]$ zuordnet, d. h.

$$D f =_{Df} f' .$$

Die Abbildung ist linear, da für $f,\ g \in C^{\infty}[0,1]$ und $\lambda \in R$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} &D(f+g) = (f+g)' = f' + g' = Df + Dg \\ \text{und}\quad &D(\lambda f) = (\lambda f)' = \lambda f' = \lambda Df \end{aligned}$$

bestehen. Allerdings ist D <u>nicht</u> beschränkt. Betrachtet man nämlich für jede natürliche Zahl n die Funktion $f_n(t) = t^n$, so gilt $\quad \| f_n \| = 1$

und $\quad \| D f_n \| = \| f_n' \| = n$, da

$$\max_{0 \le t \le 1} | f_n' (t) | = \max_{0 \le t \le 1} | n \cdot t^{n-1} | = n.$$

Würde eine Konstante c mit

$$\| Df \| \le c \cdot \| f \|$$

für alle $f \in C^{\infty}[0,1]$ existieren, so würde insbesondere

$$n = \| Df_n \| \le c \cdot \| f_n \| = c \qquad \text{folgen,}$$

d. h. $\quad n \le c \quad$ für jede natürliche Zahl n.

Dies ist aber unmöglich, da c eine feste Zahl ist. Also ist D nicht beschränkt.

Betrachten wir eine weitere lineare Abbildung:

Mit A bezeichnen wir die Abbildung, die jeder Funktion $f \in C^{\infty}[0,1]$ die Funktion

$$g \in C^{\infty}[0,1] \qquad \text{mit} \qquad g(t) = \int_0^t f(s)\, ds$$

zuordnet. Beispielsweise wird also der Funktion cos t die Funktion sin t, der Funktion t^n die Funktion $\frac{1}{n+1} t^{n+1}$ zugeordnet.

Auch diese Abbildung ist linear, denn es gilt

$$\int_0^t (f(s) + h(s))\, ds = \int_0^t f(s)\, ds + \int_0^t h(s)\, ds$$

und $\int_0^t (\lambda f(s))\, ds = \lambda \int_0^t f(s)\, ds$

für $f, h \in C^\infty [0,1]$ und $\lambda \in R$.

Die Abbildung A ist beschränkt, man kann sogar c = 1 wählen. Dies folgt aus der Ungleichung

$$\left| \int_0^t f(s)\, ds \right| \leq t \max_{0 \leq s \leq t} |f(s)|$$

$$\leq \max_{0 \leq s \leq 1} |f(s)| = \| f \| ,$$

die für beliebige Zahlen t mit $0 \leq t \leq 1$ richtig ist. Hieraus erhält man nämlich sofort

$$\| Af \| = \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t f(s)\, ds \right| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} \| f \| = \| f \| .$$

Die Abbildung A ist eine sehr wichtige Abbildung, die genau untersucht worden ist.

Abschließend betrachten wir noch eine dritte Abbildung, die sogenannte Multiplikationsabbildung M.
Und zwar definiert man für $f \in C^\infty [0,1]$

$$Mf = g \quad \text{mit } g(t) = t \cdot f(t).$$

Also wird z. B. die Funktion sin t auf die Funktion t . sin t, die Funktion t^n auf die Funktion t^{n+1} abgebildet. Die Abbildung M ist linear, denn für

$$M(f+g) = h$$

mit $\quad h(t) = t\big(f(t) + g(t)\big) = tf(t) + t\,g(t)$

folgt $\quad h = Mf + Mg,$

und ebenso erhält man $M(\lambda f) = \lambda M(f)$.

Aufgabe 1: Man zeige, daß M beschränkt ist.

Aufgabe 2: Man überprüfe, ob die folgenden Abbildungen Normen auf R_2 sind:

a) $\| x \| = | x_1 | + | x_2 |$,

b) $\| x \| = \max (| x_1 | , | x_2 |)$,

c) $\| x \| = | x_1 |$.

Dabei ist x stets $x = (x_1, x_2) \in R_2$.

Aufgabe 3: Mit $\mathfrak{P}$ bezeichnen wir die Menge der Polynome auf der reellen Achse, d. h.

$$\mathfrak{P} = \{ p;\ p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_o \} .$$

Dabei ist n eine beliebige natürliche Zahl, nicht fest.

a) Man mache $\mathfrak{P}$ zu einem Vektorraum!

b) Man zeige, daß die Abbildung

$$p \longrightarrow \|p\| =_{Df} | a_o | + | a_1 | + \dots + | a_n |$$

mit $p(t) = a_n t^n + \dots + a_o$ eine Norm auf $\mathfrak{P}$ ist!

c) Man zeige, daß für $p(t) = a_n t^n + \dots + a_o$ und $q(t) = b_m t^m + \dots + b_o$ die Abbildung von $\mathfrak{P} \times \mathfrak{P}$ in R mit

$$(p,q) \longrightarrow \langle p,q \rangle =_{Df} \begin{cases} a_o b_o + a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \\ \text{für } n \leq m \\ \\ a_o b_o + a_1 b_1 + \dots + a_m b_m \\ \text{für } m \leq n \end{cases}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathfrak{P}$ ist!

d) Wie sieht die von diesem Skalarprodukt erzeugte Norm aus?

e) Man zeige, daß die Abbildung A von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{P}$ mit

$$Ap =_{Df} q \quad , \; q(t) = a_n t^{n-1} + a_{n-1} t^{n-2} + \ldots + a_1$$

für $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_o$

eine lineare Abbildung ist, die bezüglich der Norm von b) beschränkt ist.

Werner Linde
Wiss. Assistent
Bereich Analysis

Lösungen

Bei der Durchsicht der Aufgaben der Serie 3/73 ergab sich folgendes Bild:
Die wenigsten Einsendungen erhielten wir zu den Aufgaben E 13, E 15, E 18, obwohl z. B. die Aufgabe E 15 nur einige Umformulierungen beinhaltete. Charakteristische Fehler traten nicht auf, da fast alle eingesandten Lösungen richtig waren oder nur geringfügige Fehler aufwiesen.

Die Besten dieser Serie waren:

H.-U. Frömmer	8 Punkte
B. Worel	8 "
J. Socolowsky	8 "

Den Einsender, der alle sechs Aufgaben auf drei Blättern gelöst hat, ohne seinen Namen auf diesen zu vermerken, bitten wir, uns zu schreiben.

(E 15) **L**

(nach Bernhard Worel, Neubrandenburg, 12. Klasse)

Es gelte $g(x,y) \cdot g(y,z) = g(x,z)$,
und es sei $g(a,b) = 0$.
Dann gilt auch für beliebige Paare (d,c):

$$g(a,c) = g(a,b) \cdot g(b,c) = 0 \cdot g(b,c) = 0$$

und somit

$$g(d,c) = g(d,a) \cdot g(a,c) = g(d,a) \cdot 0 = 0.$$

Das bedeutet aber $g(d,c) = 0$ für bel. (d,c);

$$g \equiv 0.$$

(E 16) **L**

(nach Dieter Erdmann, Loitz, 10. Klasse)

Verwendet werden: $\sin 60^\circ = 1/2\sqrt{3}$; $\cos 60^\circ = 1/2$;
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

$$\sqrt{3} = \sqrt{3},$$

$$\sqrt{3} = \frac{\cos 20^\circ - \cos 20^\circ + \sqrt{3}\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ},$$

$$\sqrt{3} = \frac{2(\cos 60^\circ \sin 20^\circ + \sin 60^\circ \sin 20^\circ) - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ},$$

$$\sqrt{3} = \frac{2\cos(60^\circ - 20^\circ) - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ},$$

$$\sqrt{3} = \frac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}.$$

(E 17) **L**

(nach Uwe Risch, Burg, 9. Klasse)

Die gegebene Ungleichung kann folgendermaßen umgeformt werden:

$$\log_3(x^2 - 5x + 6) < 0,$$

$$0 < x^2 - 5x + 6 < 1,$$

$$0{,}25 < (x - 2{,}5)^2 < 1{,}25\,,$$
$$0{,}5 < |x - 2{,}5| < 0{,}5 \cdot \sqrt{5}.$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $x \geq 2{,}5$.

   Dann erhält man: $0{,}5 < x - 2{,}5 < 0{,}5 \cdot \sqrt{5}$,
   $3 < x < 2{,}5 + 0{,}5 \cdot \sqrt{5}$.

2. $x < 2{,}5$.

   Dann erhält man: $-0{,}5 > x - 2{,}5 > -0{,}5 \cdot \sqrt{5}$,
   $2 > x > 2{,}5 - 0{,}5\sqrt{5}$.

Alle reellen Zahlen x mit

$x \in \{(2{,}5 - 0{,}5\sqrt{5};2) \cup (3;\ 2{,}5 + 0{,}5\sqrt{5})\}$

erfüllen damit die Ungleichung, da die angewandten Umformungen äquivalent sind.

In unserem Abschlußheft dieses Schuljahres möchten wir Ihnen die erfolgreichsten Einsender dieses Jahres vorstellen: Durch den Redaktionstermin ist dies nur bis zur Serie 3/73 (einschließlich) möglich. Die vollständige Übersicht veröffentlichen wir in unserem Dezemberheft.
Mit weitem Abstand führt ein Schüler der 9. Klasse !! die Schar der Löser an:

Uwe Risch	Burg	40 Punkte
Heidrun Wabnitz	Jena	13 "
Jürgen Socolowsky	"	13 "
Gatzsche	"	12 "
Morus Kasner	"	11 "
Andreas Schlosser	"	11 "

Wir freuen uns darüber, daß ...

... unserem staatlichen Betreuer, Herrn Dr. W. Börner, die Pestalozzi-Medaille in Bronze verliehen wurde. Wir gratulieren dazu.

Studentenkonferenz

Im Rahmen der Studententage fand am 24. 5. die Studentenkonferenz der Sektion Mathematik statt.

Student und Forschung - so lautete die Thematik eines Arbeitskreises der Studentenkonferenz. Ein interessanter Gegenstand, der aber auch leicht zu Illusionen verleitet. Wer sich näher mit der Mathematik befaßt, wird feststellen, daß auf einigen Gebieten der Mathematik, z. B. in der Analysis, so viel Wissen erforderlich ist, um an die Front der Forschung vorstoßen zu können, daß es von der Mehrzahl der Studenten während ihrer Ausbildungszeit nicht bewältigt werden kann. Der Beitrag der Studenten zur Grundlagenforschung kann also im allgemeinen nur gering sein. Dennoch kann man die meisten Diplomarbeiten, die an unserer Sektion geschrieben werden, als Forschungsarbeiten bezeichnen: Auch die Aufbereitung schon vorhandener mathematischer Erkenntnisse für Erfordernisse der Praxis und der Lehre kann ein Beitrag zur Forschung sein, der gesellschaftlich notwendig ist.

Auf Grundlage dieser Überlegungen wurde darüber diskutiert, wie alle Studenten während ihres gesamten Studiums systematisch auf die Diplomarbeit vorbereitet werden können. Grundsätzlich konnte festgestellt werden, daß es nicht sinnvoll ist, bei der gegenwärtig relativ hohen Studienbelastung noch zusätzliche Aufgaben zu vergeben. Wesentliche Fortschritte können bereits dadurch erreicht werden, daß die schon vorhandenen Formen gründlicher und konsequenter genutzt werden. Dazu gehören im Grundstudium (1. und 2. Studienjahr):

- Neben der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten muß sich jeder Student auch ein solides, anwendungsbereites Wissen aneignen. Dies kann durch regelmäßige Leistungskontrollen gefördert werden.

- Durch kleine Vorträge sollte jeder Student lernen, selbständig erarbeitetes Wissen mathematisch exakt darzustellen.
- Das System der Übungsaufgaben ist zu verbessern. Insbesondere ist mehr darauf zu achten, daß die Lösungen ausführlich und in einem ordentlichen mathematischen Deutsch abgefaßt werden. Dabei haben auch die FDJ-Gruppen große Verantwortung, besonders, wenn es um die selbständige Arbeit jedes Studenten geht.
- Jeder Student sollte bereits im ersten Studienjahr lernen, mit Fachliteratur zu arbeiten.

Im Fachstudium (3. und 4. Studienjahr) gehören dazu:

- In den Seminaren - die vor allem durch Studentenvorträge getragen werden - ist der fachliche Meinungsstreit zu fördern. Vom vortragenden Studenten ist eine einwandfreie Darstellung des Stoffes zu erwarten.
- Während des Betriebspraktikums im 3. Studienjahr leistet der Student seine erste größere selbständige Arbeit. Daraus ergibt sich die Forderung nach einem angemessenen Thema, das vom Betrieb gestellt wird, und nach der hohen Einsatzbereitschaft jedes Studenten. Die besten Praktikumsarbeiten sollten in einem Seminar vorgetragen werden.
- Mehr als bisher sollten Studenten auch die Forschungsseminare der einzelnen Bereiche und das Sektionskolloquium besuchen und sich mit den Publikationen der Wissenschaftler unserer Sektion beschäftigen.

Alle diese Forderungen, die gleichermaßen an Studenten, Lehrkörper und FDJ-Leitung gerichtet sind, machen die große Verantwortung deutlich, die jeder während seines Studiums trägt.

Jeder bestimmt seine Entwicklung wesentlich selbst, und zwar in dem Maße, wie er dieser Verantwortung gerecht wird. Zu einer guten Studienvorbereitung gehört also auch die Befähigung zur selbständigen Arbeit und zum Literaturstudium. Daran kann man sich bereits als Schüler gewöhnen.

Im Arbeitskreis 2 wurde über das Verhältnis von Mathematik und Gesellschaftswissenschaften diskutiert.
Mathematik und Weltanschauung, Mathematik und Erfordernisse der gesellschaftlichen Praxis, Stellung des Mathematikers in der sozialistischen Gesellschaft und die gesellschaftlichen Forderungen an das Studium - waren die Schwerpunkte der Diskussion.

Das ist ein sehr aktueller und wichtiger Problemkreis, mit dem man sich hier beschäftigte, und die Diskussion zeigte, daß es in der Ausbildung und Erziehung an der Sektion, wozu auch die FDJ-Arbeit gehört, notwendig ist, diese Probleme vor allem konkret zu diskutieren und zu lösen.

In vorbereiteten Diskussionsbeiträgen ging man zunächst hauptsächlich auf weltanschauliche Aspekte der Mathematik ein. Es wurde festgestellt, daß die Mathematik ein Mittel zur Erkenntnis der objektiven Realität bzw. zur Präzisierung und Erfassung bestimmter Aussagen anderer Wissenschaften - so auch der Gesellschaftswissenschaften - ist und daher ihre Anwendung in diesen Wissenschaften vor allem durch die wissenschaftlich-technische Revolution an Bedeutung zunimmt. Die Mathematik ist aber nicht in der Lage, diese Wissenschaften zu ersetzen. Mit dieser Feststellung wandte man sich entsprechend der realistischen Wissenschaftspolitik seit dem VIII. Parteitag der SED gegen Übertreibungen, die in diese Richtung gingen (so kommen Betrachtungen, Aussagen der Gesellschaftswissenschaften zu ersetzen, einer Entideologisierung gleich) und grenzte sich ab von in kapitalistischen Staaten existierenden Bemühungen, rein auf mathematisch-kybernetischer Basis beruhende Weltbilder zu "konstruieren" (wie etwa von Steinbuch) - als im Dienste des Kapitalismus stehenden mathematisch verbrämten Idealismus.

Dann wandte sich die Diskussion verstärkt Problemen des Komplexes "Mathematik - wissenschaftlich-technische Revolution" zu.
Wenn die Bewältigung der wissenschafl.-techn. Revolution zunehmend die Anwendung mathematischer Methoden und Vorlaufleistungen der mathematischen Grundlagenforschung verlangt und andererseits die Rolle der Mathematik in diesem Prozeß gegen den Widerstand subjektiver und objektiver Faktoren erst noch vollständig durchgesetzt werden muß, so ergibt sich daraus für unsere Mathematiker die Forderung, ein hohes Fachwissen zu besitzen, aber vor allem auch Einblick in die gesellschaftlichen Prozesse und einen durch Kenntnis der gesellschaftlichen Gesetzmäßigkeiten untermauerten festen Klassenstandpunkt, denn die Meisterung der wissenschaftlich-technischen Revolution ist eine politische Aufgabe! Dieser Tatsache, der bewußten Einheit von fachlicher und gesellschaftlicher Ausbildung, gilt es neben dem Grundstudium Marxismus-Leninismus vor allem auch in der Gestaltung der FDJ-Arbeit an der Sektion Rechnung zu tragen.
Auch in der Schule, wurde festgestellt, gilt es, diesen Zusammenhang bewußt zu machen.

Da wir einerseits unsere erst seit kurzem bestehende Regelung beibehalten möchten, die Lösungen 4 Monate nach Erscheinen der Aufgaben zu veröffentlichen, andererseits der Redaktionstermin für diese Doppelnummer zu früh liegt, um Schülerlösungen zu berücksichtigen, werden wir für die Serie 4/73 wieder eine Lösung eigener Produktion veröffentlichen. Eine Auswertung der eingesandten Lösungen dieser Serie erfolgt im Heft 9/73.

(E 22)

L

Die Abschätzung nach oben erhält man sehr leicht, indem man bildet:

$$S =_{Df} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \dots + \frac{1}{3n+1},$$

$$S < \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{2n+1} < 2 .$$

Mit der Abschätzung nach unten hat man jedoch etwas mehr Mühe. Zuerst ordnen wir die Summe um und überlegen uns, daß sie aus genau 2n+1 Summanden besteht, die wir nach der Umordnung paarweise (bis auf den letzten) zusammenfassen.

$$S = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+1} + \dots + \frac{1}{n+k+2} + \frac{1}{3n-k} + \dots + \frac{1}{2n+1} +$$

$$\frac{1}{n+k+2} + \frac{1}{3n-k} = \frac{4n+2}{(n+k+2)(3n-k)}$$

$$\text{mit } -1 \leq k < n - 1$$

Um eine Abschätzung nach unten zu erhalten, müssen wir den Nenner des Bruches nach oben abschätzen.

$$\begin{aligned}(n+k+2)(3n-k) &= 3n^2 + 6n + 2kn - k^2 - 2k \\ &= 3n^2 + 6n - (k-(n-1))^2 + (n-1)^2 \\ &\leq 3n^2 + 6n + (n-1)^2 \\ &\leq 4n^2 + 4n + 1 \quad .\end{aligned}$$

Somit ergibt sich für den Bruch:

$$\frac{4n+2}{(n+k+2)(3n-k)} \geq \frac{4n+2}{4n^2 + 4n + 1} \quad ;$$

und da in der Summe S n Brüche dieser Struktur erfaßt sind:

$$S \geq n \cdot \frac{4n+2}{4n^2+4n+1} + \frac{1}{2n+1} \quad .$$

Wie man leicht sieht, kann das "größer gleich" durch "echt größer" ersetzt werden, da für mindestens einen Summanden, z. B. für

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+1} > \frac{4n+2}{4n^2+4n+1}$$

gilt.

Somit erhalten wir

$$S > n \cdot \frac{4n+2}{4n^2+4n+1} + \frac{1}{2n+1}$$

$$> \frac{n(4n+2)(2n+1) + (4n^2+4n+1)}{(2n+1)(4n^2+4n+1)}$$

$$> \frac{(2n+1)(2n+1)}{4n^2+4n+1} = 1 \quad .$$

Damit ist die Ungleichung vollständig gezeigt.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung" der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Leiter: Reinhard Klette

Redaktion: Werner Nagel (Chefredakteur); U. Heuke, H. Fischer, R. Lorenz

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

Anschrift: WURZEL
69 Jena
Universitätshochhaus
Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45

9/10
73

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Fr.-Schiller-Universität Jena

Geometrische Figuren

Nicht nur im Mathematikunterricht der Schule nimmt die Geometrie einen beträchtlichen Platz ein, auch in der an Universitäten und Hochschulen gelehrten "höheren" Mathematik spielt sie eine nicht unbedeutende Rolle. Der an Mathematik interessierte Schüler wird fragen, in welcher Richtung denn oberhalb des Schulniveaus geometrische Untersuchungen geführt werden. Natürlich kann man auf diese Frage mit wenigen Worten keine erschöpfende Auskunft geben, weil die zur Geometrie zählenden Disziplinen der höheren Mathematik zu zahlreich und vielfältig sind. Um aber wenigstens einen kleinen Eindruck zu vermitteln, kann man Beispiele angeben, und in diesem Sinne soll der folgende Beitrag verstanden werden. Er soll einen kleinen Einblick in ein spezielles Stoffgebiet – das der konvexen Figuren – geben und gleichzeitig auf die Wichtigkeit präziser Begriffsbildung durch wohlbegründete und genaue Definitionen hinweisen. Die folgenden Betrachtungen spielen sich in der bekannten Geometrie der Ebene ab.

Im Geometrieunterricht wird viel mit folgenden Begriffen gearbeitet, die man alle unter dem Namen <u>geometrische Figur</u> führen kann: Strecken, Geraden, Winkel, Dreiecke, Rechtecke, Parallelogramme, Trapeze, Kreise, Kreissektoren und -segmente, Ellipsen usw.

Wenn man nun allgemein definieren soll (und die Mathematiker sind bekanntlich bestrebt, ihre Begriffe so exakt wie möglich zu fassen), was eine geometrische Figur ist, so wird man bald dazu kommen zu definieren:

<u>Eine geometrische Figur ist eine Punktmenge.</u>

Jedenfalls hat man mit dieser Definition die aufgezählten Figuren sicherlich erfaßt. Andererseits ist diese Definition sehr allgemein gehalten, so daß eine geometrische Figur unter Umständen ganz merkwürdige Eigenschaften haben kann.

Als Beispiel hierfür sei folgende Figur genannt:

Auf eine Seite AB eines Quadrates ABCD der Seitenlänge 1 seien senkrecht zu dieser Seite Strecken der Länge 1 aufgesetzt, und

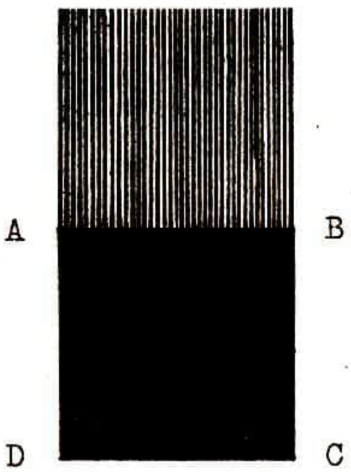


Abb. 1

zwar genau auf denjenigen Punkten P, für die die Länge von AP eine rationale Zahl ist; zur Figur sollen alle Punkte der Quadratfläche und alle Punkte der aufgesetzten Strecken gehören. Es entsteht eine Art "Bürste mit unendlich vielen Borsten", sie ist in Abbildung 1 angedeutet - genau aufzeichnen kann man sie nicht. Dieser Figur kann man in vernünftiger Weise keinen Umfang zusprechen. Denn beim Begriff des Umfangs denkt man an die Länge der Randlinie, und was soll man bei dieser Figur als Randlinie ansehen?

Um diese Frage zu klären, wollen wir einige allgemeine Überlegungen durchführen, die erst einmal den Begriff des Randes einer Figur zu definieren gestatten.

Wir denken an eine beliebige geometrische Figur $\mathfrak{J}$ (etwa eine Quadratfläche, Abb. 2). Ein Punkt P liegt im Inneren der Figur, wenn er auf allen Seiten von Punkten von $\mathfrak{J}$ umgeben ist, oder, exakter gesprochen:

Ein Punkt P ist i n n e r e r Punkt von $\mathfrak{J}$ genau dann, wenn es eine Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt P gibt, die ganz in $\mathfrak{J}$ enthalten ist.
(Eine solche Kreisscheibe kann eventuell sehr klein ausfallen.)

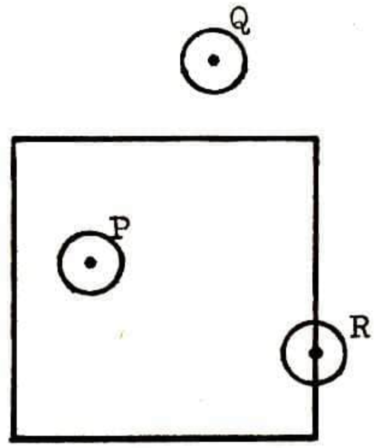


Abb. 2

Ein Punkt Q liegt außerhalb der Figur, wenn er auf allen Seiten von Punkten umgeben ist, die nicht zu $\mathfrak{J}$ gehören, genauer:

Ein Punkt Q ist ä u ß e r e r Punkt von $\mathfrak{J}$ genau dann, wenn es eine Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt Q gibt, die keinen Punkt von $\mathfrak{J}$ enthält.

Ein Punkt R, der weder innerer noch äußerer Punkt von $\mathfrak{J}$ ist, hat dann logischerweise die Eigenschaft, daß jede Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt R sowohl Punkte von $\mathfrak{J}$ enthält als auch Punkte, die nicht zu $\mathfrak{F}$ gehören. Solche Punkte nennt man Begrenzungspunkte von $\mathfrak{F}$.

Ein innerer Punkt von $\mathfrak{F}$ gehört automatisch zu $\mathfrak{F}$, ein äußerer Punkt von $\mathfrak{F}$ gehört gewiß nicht zu $\mathfrak{F}$, ein Begrenzungspunkt von $\mathfrak{F}$ kann, muß aber nicht zu $\mathfrak{F}$ gehören.
Diejenigen Begrenzungspunkte von $\mathfrak{F}$, die tatsächlich zu $\mathfrak{F}$ gehören, nennt man R a n d p u n k t e von $\mathfrak{F}$.

Zusammenfassend kann gesagt werden:

> Jede Figur bewirkt eine Einteilung aller Punkte der Ebene in drei Sorten: innere Punkte, äußere Punkte und Begrenzungspunkte; die der Figur angehörenden Begrenzungspunkte heißen Randpunkte, sie bilden den R a n d der Figur.

Es gibt Figuren, die keine inneren Punkte haben, zum Beispiel Geraden, Kreislinien, Strecken.
Bei jeder "vernünftigen" geometrischen Figur (vgl. die eingangs aufgezählten Beispiele aus dem Schulunterricht) überblickt man sofort, was innere, äußere und Begrenzungs- bzw. Randpunkte sind.

Bei der "Bürste" in Abb. 1 sind die Punkte der Strecken AB, BC, CD, DA und sämtliche Punkte der auf der Strecke AB aufsitzenden Quadratfläche Begrenzungspunkte, von dieser Fläche sind aber nur die Punkte der "Borsten" Randpunkte. Von einer Randlinie mit einer bestimmten Länge kann also bei dieser Figur keine Rede sein, die Figur hat keinen Umfang. Auch eine Flächeninhaltsbestimmung stößt bei dieser Figur auf Schwierigkeiten. (Schon rein anschaulich scheint der Flächeninhalt 1 zu klein, 2 zu groß zu sein.)

2. Wir haben gesehen, daß eine geometrische Figur unter Umständen ziemlich kompliziert sein kann und daß manche geometrischen Begriffsbildungen, wie in unserem Beispiel der Umfang, gar nicht für alle geometrischen Figuren von Belang sind. Man schränkt deshalb bei manchen Untersuchungen die Menge der zu betrachtenden Figuren auf spezielle Klassen ein.

Eine besonders wichtige Klasse bilden die sogenannten konvexen

Figuren, die folgendermaßen definiert sind:

> Eine Figur $\mathfrak{F}$ heißt k o n v e x genau dann, wenn mit zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke in $\mathfrak{F}$ enthalten ist.

Abbildung 3a zeigt konvexe, Abbildung 3b nichtkonvexe Figuren. Beispiele konvexer Figuren sind: Dreiecke, Parallelogramme, Trapeze, Kreise, Ellipsen, nicht überstumpfe Winkel, Streifen (hierbei sind jedesmal die Flächen gemeint).

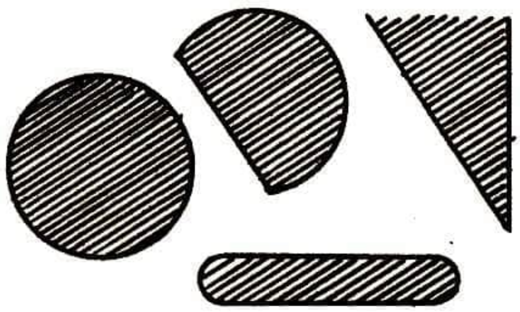


Abb. 3a

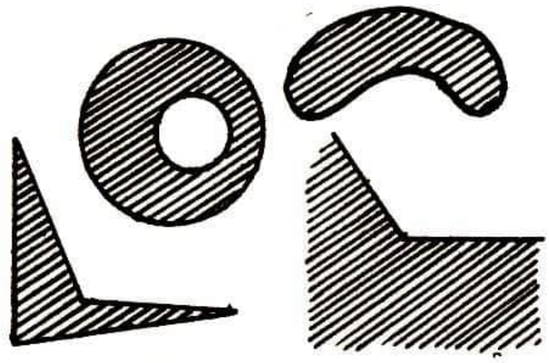


Abb. 3b

Ferner ist der (mengentheoretische) Durchschnitt zweier konvexer Figuren offenbar wiederum konvex. Die Bedeutung konvexer Figuren liegt auch darin, daß sich viele Figuren in einfacher Weise aus konvexen Figuren aufbauen lassen, etwa durch Bildung von Vereinigung oder Differenz (im Sinne der Mengenlehre).

Es ist bei der Betrachtung konvexer Figuren üblich, die Begrenzungspunkte immer zur Figur hinzuzurechnen, so daß der Rand der Figur aus allen ihren Begrenzungspunkten besteht.
Ferner wollen wir annehmen, daß die im folgenden betrachteten **konvexen Figuren innere Punkte haben.**

In der Theorie der konvexen Figuren spielt der Begriff der S t ü t z g e r a d e n eine wichtige Rolle.

Er wird folgendermaßen definiert:

> Ist $\mathfrak{F}$ eine beliebige Figur, so heißt eine Gerade s S t ü t z g e r a d e von $\mathfrak{F}$, wenn s mindestens einen Begrenzungspunkt von $\mathfrak{F}$ enthält und $\mathfrak{F}$ ganz auf einer Seite von s liegt.

Abbildung 4 zeigt einige Figuren und Stützgeraden.

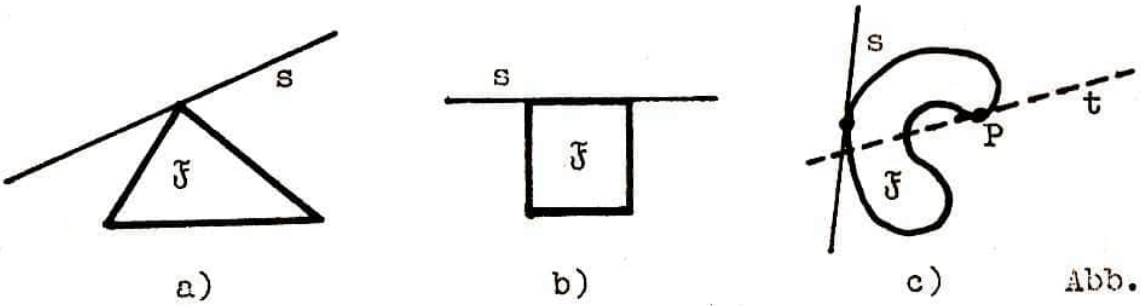


Abb. 4

Bei Kreisen sind die Stützgeraden genau die Tangenten
Es gibt aber Stützgeraden, die nicht Tangenten sind (Abb. 4a)) und Tangenten, die keine Stützgeraden sind (t in Abb. 4c)).
Am Beispiel von Abb. 4c) sieht man, daß nicht durch jeden Randpunkt einer Figur eine Stützgerade zu gehen braucht.

> Ist allerdings eine Figur konvex, so gibt es durch <u>jeden</u> ihrer Randpunkte mindestens eine Stützgerade.

Das läßt sich folgendermaßen beweisen:
Man gehe von einem beliebigen Randpunkt R einer konvexen Figur aus und betrachte die Menge aller Strahlen mit dem Anfangspunkt R, die zu Punkten der Figur führen. Auf Grund der Konvexität der Figur füllt diese Menge einen ganzen Winkelbereich aus, und ebenfalls wegen der Konvexität kann dieser Winkel nicht überstumpf sein. Folglich gibt es durch R entweder - falls der Winkel 180° ist - genau eine oder - falls, wie in Abb. 4a), der Winkel kleiner als 180^0 ist - unendlich viele Stützgeraden.

Von dem eben bewiesenen Sachverhalt gilt auch eine Umkehrung:

> Geht durch jeden Begrenzungspunkt einer Figur mit inneren Punkten mindestens eine Stützgerade, so ist die Figur konvex.

Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß man bei jeder nichtkonvexen Figur (mit inneren Punkten) einen Begrenzungspunkt finden kann, durch den es keine Stützgerade gibt.
Sei also 𝔉 eine nichtkonvexe Figur. Es gibt zwei Punkte A und B, die zu 𝔉 gehören und deren Verbindungsstrecke einen nicht zu 𝔉 gehörenden (also äußeren) Punkt C enthält.

Es kann angenommen werden, daß A innerer Punkt von $\mathfrak{F}$ ist; denn wenn es nicht der Fall ist, so kann A nur Begrenzungspunkt sein, und man kann dann in der Nähe von A einen inneren Punkt A' finden, so daß die Strecke A'B einen äußeren Punkt C' enthält (siehe Abb.5), und man könnte mit der Strecke A'B und dem Punkt C' weiter operieren. Da A innerer, C äußerer Punkt von $\mathfrak{F}$ ist, gibt es auf der Strecke AC einen Begrenzungspunkt R. Denn gäbe es auf AC keinen Begrenzungspunkt, so müßte es bei Durchlaufung der Strecke von A nach C entweder einen "letzten" inneren oder einen "ersten" äußeren Punkt geben; beides ist aber auf Grund der Definition von inneren und äußeren Punkten unmöglich. Durch den Punkt R gibt es keine Stützgerade, denn jede von AB verschiedene Gerade durch R hat die beiden zu $\mathfrak{F}$ gehörenden Punkte A und B auf verschiedenen Seiten, und die Gerade AB selbst ist auch keine Stützgerade, weil sie den inneren Punkt A enthält.

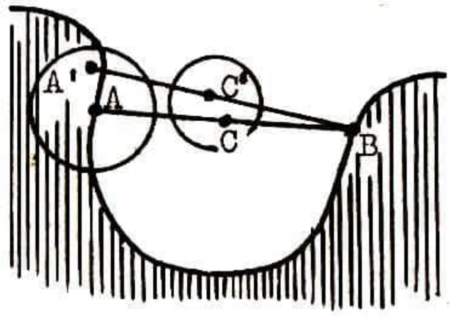


Abb. 5

Wir haben somit folgendes bewiesen:

Satz:

Eine Figur, die innere Punkte hat, ist genau dann konvex, wenn es durch jeden ihrer Begrenzungspunkte mindestens eine Stützgerade gibt.

3. Zum Schluß soll eine ganz spezielle bemerkenswerte Sorte von konvexen Figuren vorgestellt werden: Figuren konstanter Breite.

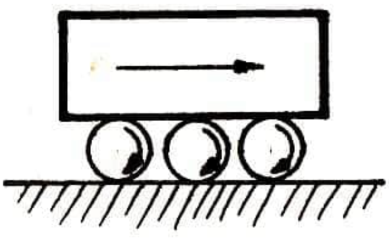


Abb. 6

Wir gehen von folgender Überlegung aus: Das Fortbewegen schwerer Kisten wird manchmal - wie in Abb. 6 angedeutet - durch Rollen auf untergelegten kreiszylinderförmigen Holzstämmen bewerkstelligt. Hierbei wird offenbar folgende Eigenschaft des Kreises ausgenutzt:

Zwei beliebige parallele Stützgeraden eines Kreises vom Radius r haben unabhängig von ihrer Richtung den konstanten Abstand 2r. Interessant ist nun, daß eine solche Eigenschaft (nämlich daß alle Paare paralleler Stützgeraden konstanten Abstand haben) auch andere konvexe Figuren haben, die Figuren konstanter Breite.

Betrachten wir das folgende Kreisbogendreieck (nach seinem "Entdecker" Reuleaux-Dreieck benannt), das aus einem gleichseitigen Dreieck durch Aufsetzen von Kreisbögen entsteht, die den gegenüberliegenden Eckpunkt als Mittelpunkt haben! (Abb. 7). Von zwei parallelen Stützgeraden geht notwendig eine durch eine Ecke, die andere berührt den gegenüberliegenden Kreisbogen, so daß beide die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks als Abstand haben. Das Reuleaux-Dreieck ist somit eine Figur konstanter Breite, und man könnte demnach zum Fortrollen von Kisten auch Walzen verwenden, die ein Reuleaux-Dreieck als Querschnitt haben.

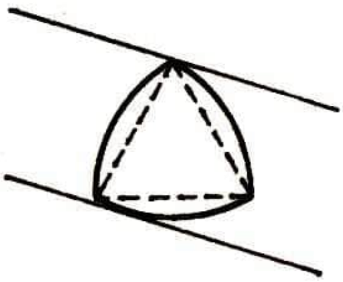


Abb. 7

Das Reuleaux-Dreieck ist das einfachste Beispiel einer nicht kreisförmigen Figur konstanter Breite, es gibt noch viele weitere, zum Beispiel auch solche, die keine Ecken haben, also "glatt" sind.

Figuren konstanter Breite können offenbar in einem umschriebenen Quadrat gedreht werden, ohne die Berührung mit den Quadratseiten zu verlieren. Es ist nicht verwunderlich, daß diese interessanten Figuren in der Technik Verwendung finden.

Dr. Walter Börner
Lektor im Bereich
Theoretische Mathematik

INFORMATION

In der Zeit vom 8. bis zum 13. Oktober 1973 wird an unserer Sektion erstmalig ein internationales Symposium des Bereiches Kybernetik stattfinden.

Preisaufgaben 9-10-73

(E 43) ②

Im Dreieck Δ ABC sind die zwei Winkelhalbierenden AM und BN gegeben, deren Schnittpunkt O sei. Bekannt ist, daß

$$AO : OM = \sqrt{3} : 1 \quad \text{und} \quad BO : ON = 1 : (\sqrt{3} - 1)$$

gilt. Man berechne die Winkel des Dreiecks!

(E 44) ①

Berechne den Ausdruck

$$\left(x^{\frac{1}{m}} + x^{\frac{1}{n}} \right) - 4\,a^2 \cdot x^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} \text{, wobei}$$

$$x = \left(a + \sqrt{a^2 - 1} \right)^{\frac{2mn}{m-n}} \text{, } a > 1 \text{ gelten soll!}$$

(E 45) ①

Man zeige:

$$\sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}} = 3 \text{ !}$$

(E 46) ①

Löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y - 2\,|x| + 3 &= 0 \\ |y| + x - 3 &= 0 \text{ !} \end{aligned}$$

(E 47) ①

Beweise für beliebige n die Ungleichung

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2 \text{ !}$$

(E 48) ①

Man beweise die Ungleichung

$$\sqrt{4a + 1} + \sqrt{4b + 1} + \sqrt{4c + 1} < 5$$

für $a + b + c = 1$ und unter der Voraussetzung, daß die auftretenden Radikanden nicht negativ sind!

(E 49) ② Числа x,y,z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}(x-a)(y-a)(z-a) &= d,\\ (x-b)(y-b)(z-b) &= d,\\ (x-c)(y-c)(z-c) &= d,\end{aligned}$$

где a,b,c не равны друг другу. Найти $x^3 + y^3 + z^3$.

(E 50) ② Вокруг треугольника ABC, в котором $a = 2$, $b = 3$ и угол $\gamma = 60^\circ$, описана окружность. Определить радиусы окружностей, проходящих через две вершины треугольника и центр описанной окружности.

Bem.: окружность - Kreis
вершина - Eckpunkt

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl; für 15 Wertpunkte erhält der Einsender einen Buchscheck. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender 15 Punkte haben, entscheidet das Los. Fällt ein Besitzer von 15 Punkten nicht unter die Gewinner, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil.
Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns einzusenden.

Letzter Einsendetermin: 20. 11. 73

Gewinner im Monat Juni

Heidrun Wabnitz,	Jena,	11. Klasse,
Wolfram Bast,	Röbel/Müritz,	10. Klasse.

Beide haben zum ersten Mal die 15 Punkte erreicht.

Gewinner im Monat Juli

Uwe Risch,	Burg,	9. Klasse,
Jürgen Socolowsky,	Bergfeld,	11. Klasse.

Auch Jürgen Socolowsky erreichte zum ersten Mal 15 Punkte, während Uwe Risch bereits zum dritten Mal zu den Gewinnern gehört.

Allen vier Gewinnern einen herzlichen Glückwunsch und im nächsten Schuljahr den gleichen Erfolg!

L Ö S U N G E N zur Aufgabe von Prof. Dr. Roman Roth
("WURZEL" 7/8, Seite 172)

1. Lösung

Die Strecke B_1C_1 wird mit Hilfe des Vektors $\overrightarrow{C_1C}$ verschoben und geht in B_2C über. B_2C wiederum gehe durch Verschiebung mit Hilfe des Vektors $\overrightarrow{B_2\mathfrak{X}}$ in $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ über, wobei $\mathfrak{X} \in AB$, $\mathfrak{Y} \in AC$ (siehe Abbildung 1). $B_1C_1\mathfrak{Y}\mathfrak{X}$ ist also ein Parallelogramm, und somit sind die Strecken $B_1\mathfrak{X}$ und $C_1\mathfrak{Y}$ gleich und parallel.

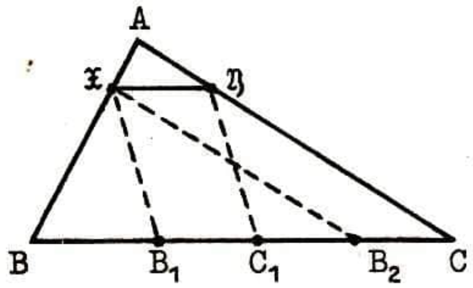


Abb. 1

2. Lösung

Eine weitere Lösung zu dieser Aufgabe macht vom Desarguesschen Lehrsatz Gebrauch. Die Kenntnis dieses Satzes kann bei den meisten Lesern wohl nicht vorausgesetzt werden, Interessenten möchten wir diese Variante aber nicht vorenthalten:

Man wählt $H_1 \in AB$ und $H_2 \in AC$ mit $H_1H_2 \parallel BC$. Der Schnittpunkt der Geraden H_1B_1 und H_2C_1 sei H_3 (siehe Abbildung 2).

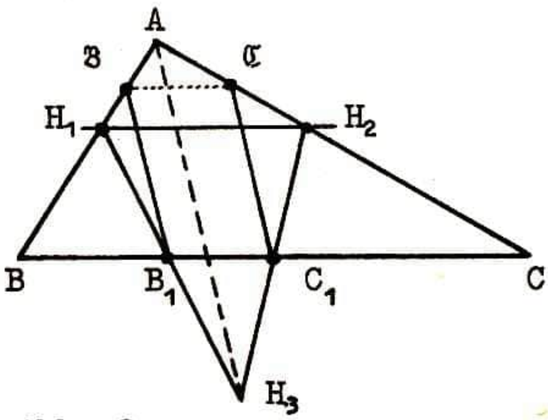


Abb. 2

Dann gibt es Punkte $\mathfrak{B} \in AB$ und $\mathfrak{C} \in AC$ mit $H_3A \parallel B_1\mathfrak{B} \parallel C_1\mathfrak{C}$.

Nun gilt folgender Satz:

Liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten zweier Dreiecke auf einer Geraden, so gehen die Verbindungsgeraden der entsprechenden Ecken durch einen Punkt (siehe Abbildung 3).

Läßt man auch den Schnitt von Geraden im Unendlichen zu (d. h. parallele Geraden) und wendet diesen Satz auf die Dreiecke $\Delta\, B_1H_1\mathfrak{B}$ und $\Delta\, C_1H_2\mathfrak{C}$ an, so folgt die Parallelität der Verbindungsgeraden B_1C_1, H_1H_2 und $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$.

Damit ist $H_3 A$ die gesuchte Richtung, und $\mathfrak{X} = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{C}$ sind die gesuchten Punkte.

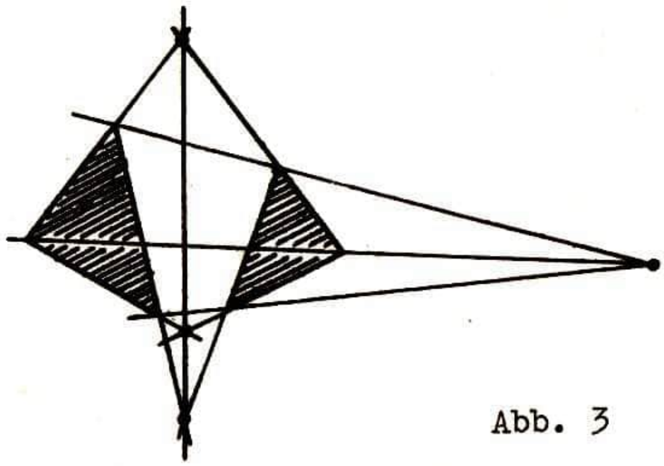


Abb. 3

Anmerkung:

Man könnte sich überlegen, ob das Punktepaar $B_1 C_1$ so wählbar ist, daß das entstehende Parallelogramm ein Quadrat wird.

Dies ist tatsächlich möglich.

Man wählt $H_1 \in AB$ und $H_2 \in AC$ mit $H_1 H_2 \parallel BC$ und betrachtet das Quadrat $H_1 H_3 H_4 H_2$ im Inneren des Dreiecks (siehe Abbildung 4).

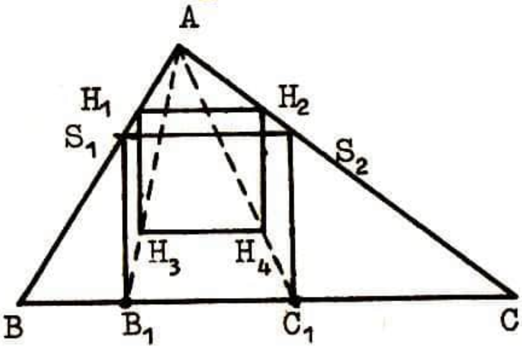


Abb. 4

Der Schnittpunkt der Geraden AH_3 mit BC ist der gesuchte Punkt B_1, der Schnittpunkt der Geraden AH_4 mit BC ist C_1.

Beweis: Die Parallelen zu $H_1 H_3$ durch B_1 bzw. C_1 mögen die entsprechenden Dreieckseiten in S_1 bzw. S_2 schneiden. Nach dem Strahlensatz ist dann

$$H_1H_3 : S_1B_1 = AH_3 : AB_1 = H_3H_4 : B_1C_1 =$$

$$= AH_4 : AC_1 = H_2H_4 : S_2C_1 ,$$

woraus $|S_1B_1| = |B_1C_1| = |C_1S_2|$ folgt, d. h., $B_1C_1S_2S_1$ ist ein Quadrat. q.e.d.

Liebe Schüler!

Studienwahl ? Berufswahl ?

Bei der Suche nach einem zukünftigen Beruf wird bei vielen der Beruf des Fachlehrers in den Fächern Mathematik und Physik zur Diskussion stehen. Tüchtige Lehrer für diese Fächer werden zur Zeit dringend gebraucht. An der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität besteht die Möglichkeit, ein Studium für diese Fachrichtung mit Mathematik als Hauptfach aufzunehmen. Vorbedingung für die Zulassung zu diesem Studium ist das erfolgreich bestandene Abitur oder die erfolgreiche Absolvierung der einjährigen Vorkursklasse in Jena sowie entsprechend gute Noten im Abschlußzeugnis und Lust und Liebe zum Beruf des Mathematik-Physik-Lehrers. In die Vorkursklasse, die speziell zum Erlangen der Befähigung für das Studium der obengenannten Fachrichtung eingerichtet ist, können nach erfolgreichem Abschluß der 10. Klasse der Allgemeinbildenden Polytechnischen Oberschule geeignete Bewerber aufgenommen werden.

Das Studium selbst umfaßt vier Jahre und schließt mit der Hauptprüfung und dem Diplomverfahren als Einheit ab. Damit wird der erste akademische Grad eines Diplomlehrers für die Fächer Mathematik und Physik erworben. Dieser besitzt die Lehrbefähigung zur Erteilung des Fachunterrichts in den genannten Fächern.

Wir haben uns nun entschlossen, in einer Artikelserie über dieses vierjährige Studium zu berichten, um allen Interessenten genauere Informationen zukommen zu lassen. Sie werden erfahren, welche Disziplinen beim Studium eine Rolle spielen, welche Praktika zu durchlaufen sind und welche weiteren Anforderungen an unsere Studenten gestellt werden müssen, damit das Ziel erreicht wird, gute Absolventen für die Praxis auszubilden.

Wir wollen versuchen, Ihnen klarzumachen, daß der Beruf des Mathematik-Physik-Lehrers ein schöner, aber auch ein sehr verantwortungsvoller Beruf ist und das Studium nicht leicht ist. Trotzdem hoffen wir, daß der eine oder andere von Ihnen, der noch unentschlossen ist und noch nicht so recht weiß, welchen Beruf er einmal ergreifen sollte, die Wichtigkeit und den Reiz unseres Studiums erkennt und im Falle einer Eignung sich für unser Studienfach entschließt. Unsere Artikelserie soll Ihnen dabei behilflich sein.

Prof. Dr. rer. nat. habil. J. Böhm
Beauftragter für Lehrerbildung
an der Sektion Mathematik
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Lehrer werden ...

Auf einem Forum zu Fragen und Möglichkeiten des Studiums an der Universität Jena, das anläßlich der Schulfestwoche vor kurzem an einer Erweiterten Oberschule des Bezirkes Gera durchgeführt wurde, begrüßten die in der übervollen Aula versammelten Schülerinnen und Schüler unsere vierköpfige Delegation lebhaft und mit herzlichem Beifall. Die Gesichter der Anwesenden widerspiegelten hohe Erwartungen und Aufgeschlossenheit. Man spürte, daß die Jugendlichen mit Ernst und großem Interesse die Auskünfte über Studienmöglichkeiten aufnahmen. Es ging ja auch um eine für jeden sehr wichtige Angelegenheit. Die Berufswahl und die Wahl der Studienrichtung bedeutet für jeden eine weitreichende persönliche Entscheidung. Auch Ihnen wird diese Entscheidung nicht abgenommen. Bevor wir Sie jedoch näher über das Studium des Fachlehrers für Mathematik und Physik informieren, wollen wir einige grundlegende Gedanken zum Beruf des Lehrers erörtern.

Die Lehrer der sozialistischen Schule haben die Aufgabe, alle Kinder unseres Volkes im Geiste der Ideologie der Arbeiterklasse zu erziehen, ihnen die wissenschaftliche Weltanschauung der Arbeiterklasse zu vermitteln und sie auf der Grundlage des Marxismus-Leninismus mit einer hohen wissenschaftlichen Bildung auszurüsten. Daraus ergibt sich zunächst für den sozialistischen Lehrer, daß er ein politisch gefestigter Mensch sein muß, der fest mit der Entwicklung der sozialistischen Gesellschaft, die sich unter Führung der Arbeiterklasse und ihrer marxistisch-leninistischen Partei vollzieht, verbunden ist.

In allen Bereichen des gesellschaftlichen Lebens in unserem sozialistischen Staat sind hohe und schöne, zugleich aber auch schwierige und umfangreiche Aufgaben zu lösen. Es sind ja auch hohe und lohnende Ziele, für die wir alle unsere Kräfte einsetzen. Geht es doch darum, die entwickelte sozialistische Gesellschaft so zu gestalten, daß für jeden eine allseitige Entwicklung und ein erfülltes, glückliches Leben nicht nur möglich, sondern auch zur Wirklichkeit wird.

Diese Ziele erfordern aber die aktive, bewußte Mitwirkung aller. "Ohne hohes Niveau der Kultur, der Bildung, der gesellschaftlichen Bewußtheit, der inneren Reife des Menschen ist der Kommunismus ebenso unmöglich, wie er ohne eine entsprechende materiell technische Basis unmöglich ist.", sagte L. I. Breshnew auf dem XXIV. Parteitag der KPdSU.

Es ist eine Besonderheit des Lehrerberufs, daß er weit in die Zukunft hinein wirkt.

Aus den Zielen der gesellschaftlichen Entwicklung und aus der eben genannten Besonderheit des Lehrerberufs ergibt sich auch heute schon die Aufgabe, die Schuljugend auf die Erfordernisse der Gestaltung der entwickelten sozialistischen und kommunistischen Gesellschaft vorzubereiten. Das ist keine leichte Aufgabe. Sozialistische Produktionsverhältnisse, soziale Sicherheit, materieller Wohlstand und vielfältige Möglichkeiten kultureller Betätigung führen nicht von selbst zur erforderlichen Einstellung zur Arbeit, zum erforderlichen Niveau im Wissen und Können, im Denken und Handeln im Sinne der Ideen des Marxismus-Leninismus. Dem Lehrer wird die Aufgabe gestellt, heute und hier, gemeinsam mit anderen gesellschaftlichen Kräften Persönlichkeiten heranzubilden und zu erziehen, die die Qualitäten eines politischen Kämpfers mit hoher Bildung, einem hohen Kulturniveau und körperlicher Leistungsfähigkeit in sich vereinen.

Dafür erfährt der Lehrer auch hohe Wertschätzung durch die Gesellschaft.

L. I. Breshnew formulierte das auf dem Unionskongreß der sowjetischen Lehrer wie folgt:

"In unserem Land ist der Schullehrer einer der ehrenvollsten und vom Volke geachtetsten Berufe. Man sagt richtig, der Mensch verändere durch seine Arbeit die Natur. Aber die Arbeit des Lehrers ist deshalb wertvoll und schön, weil sie den Menschen selbst formt. Und was der Mensch im Leben auch immer geworden ist ..., jeder erinnert sich mit einem Gefühl der Dankbarkeit an seinen Lehrer, seine Schule. Der Lehrer stellt, bildlich gesprochen, die Verbindung der Zeiten dar. Er ist ein Glied in der Kette der Generationen. Er reicht gleichsam die Stafette aus der Gegenwart in die Zukunft weiter. Und das macht seine Arbeit so bezaubernd, fürwahr schöpferisch ..."

Nun bildet und erzieht der Lehrer nicht irgendwie, sondern er wirkt hauptsächlich durch seinen Fachunterricht. Daraus ergibt sich, daß der Lehrer sich auch durch hohes fachliches Wissen und Können auszeichnen muß. Das Studium des Mathematik-Physik-Lehrers setzt nicht nur gute und sehr gute Ergebnisse in diesen Fächern voraus. Es erfordert auch in besonderem Maße Fähigkeiten und Charaktereigenschaften auszuprägen wie Ausdauer, Beharrlichkeit, Zielstrebigkeit, Fähigkeiten zur kritischen Einschätzung eigener Arbeitsergebnisse und zur Arbeit im Kollektiv. Gewissenhaftigkeit, Sorgfalt, aber auch Phantasie gehören gleichfalls zu den Voraussetzungen, um den hohen Anforderungen an die mathematische und physikalische Fachausbildung gerecht zu werden.

Wir hoffen, daß wir Sie mit diesen Darlegungen etwas zum tieferen Nachdenken über den interessanten, schönen, aber auch schweren Beruf des Mathematik- und Physiklehrers angeregt haben.
In unserem nächsten Beitrag sollen Sie Näheres über das Studium des Marxismus-Leninismus als überaus wichtigen und grundlegenden Bestandteil des Lehrerstudiums erfahren.

Klaus Scheibe
wiss. Mitarbeiter des Bereiches
Methodik des Mathematikunterrichtes

I N F O R M A T I O N

Partner durch Computer - keine Utopie!

In der ČSSR wurde der sowjetische Rechner MINSK 22 mit 750 Millionen Informationen über 5500 heiratslustige Männer und Frauen "gefüttert". Das Ergebnis: Mehr als die Hälfte der Kandidaten passen (numerisch!) zueinander.

Mitteilungen der Redaktion

Auf viele Anfragen hin, besonders aber für unsere neuen Leser, möchten wir an dieser Stelle die Bezugsbedingungen für die WURZEL wiederholen:

- Die WURZEL erscheint monatlich zum Preis von -,20 M. Ein Jahresabonnement kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M und läuft über ein Schuljahr, d. h. von September bis August. Die Bezahlung des Abonnements erfolgt über unser Postscheckkonto Erfurt 18045.

- Bei dieser Gelegenheit möchten wir erneut darauf hinweisen, daß noch verschiedene Hefte vergangener Jahrgänge zum Preis von -,20 M lieferbar sind. Inhaltsverzeichnisse dieser Jahrgänge können auf Wunsch kostenlos zugesandt werden.

- Anschrift der Redaktion: WURZEL
69 Jena
UHH, Sektion Mathematik

- Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen, Zirkel und Arbeitsgemeinschaften bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

— Die Natur der Zahlen —

Das Zählen ist ursprünglich an bestimmten Gegenständen ausgeführt worden und wird von jedem Kinde in derselben Weise gelernt. Man spricht also zuerst z. B. von vier, fünf, sechs Fingern; da man aber ebenso vier, fünf, sechs Nüsse, vier, fünf, sechs Pferde usw. zählen kann, so wird man inne, daß es immer gerade so geht, d. h., daß es auf die Gegenstände nicht weiter ankommt, und daß die Thätigkeit der Seele in den genannten Fällen immer dieselbe bleibt. Diese hat sich jedesmal vorzustellen, daß das zuerst als eins Vorgestellte wiederholt zu dem Vorigen hinzukommt. Sieht man also von den Gegenständen ab und redet nun von vier, fünf, sechs ohne weiteren Zusatz, so bezeichnen diese Worte die Wiederholung der vorzustellenden Thätigkeit der Seele, abgesehen von dem, was vorgestellt war, und heißen absolute, d. h. (von den Gegenständen) losgelöste) Zahlen.

(Aus "Decimales Rechnen und Metrisches Messen", von Prof. Dr. Mauritius, Paderborn, 1869.)

"Auszug aus den Anfangs-Gründen Aller Mathematischen Wissenschaften, Zu Bequemerem Gebrauche der Anfänger auf Begehren verfertigt von Christian Wolffen, A. MDCCXLIII"

Anfangs-Gründe der Geometrie

49. Wenn in zweyen Triangeln ABC und abc der Winckel A = a, AC = ac und AB = ab, so sind die gantzen Triangel einander gleich.

83. Der Winckel an dem Mittel-Puncte eines Circuls ist zweymahl so groß wie der Winckel an der Peripherie, der mit ihm auf einem Bogen stehet.

130. Der Inhalt des Circuls verhält sich zum Quadrat seines Diametri wie bey nahe 785 zu 1000.

149. Wenn in einem Triangel ABC eine Linie DE mit der Grund-Linie BC parallel gezogen wird, so verhält sich AD zu AE wie AB zu AC und wie BD zu EC, auch AD : DE = AB : BC.

152. Wenn in zweyen Triangeln ABC und FDE, B = D und AB : BC = FD : DE, so ist auch A = F und C = E, und BA : AC = DF : FE.

199. Eine jede Pyramide ist der dritte Theil von einem Prismate, so mit ihr gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

203. Die Kugel ist $\frac{2}{3}$ von einem Cylinder, der gleiche Grundfläche und Höhe mit ihr hat.

206. Die Kugel-Fläche verhält sich zu dem gröſten Circul der Kugel wie 4 zu 1.

Anfangs-Gründe der Astronomie

135. Der 1. Lehrsatz.

Die Sonne ist ein würckliches Feuer.

Beweiß: Sie leuchtet sehr helle, ihre Strahlen machen warm ...

Anfangs-Gründe der Bau-Kunst

124. Der 3. Lehrsatz.

Ein Fenster muß so breit seyn, daß zwey Personen gemächlich neben einander in demselbigen liegen können.

Beweiß: Denn man pfleget sich öffters mit einer anderen Person an das Fenster zu legen und sich umzusehen.

"Ich pflege die Mathematik aus zwei Ursachen zu schätzen: Einmal wegen der unvergleichlichen Ordnung, in welcher sie ihre Sachen gründlich ausführt, darnach wegen ihrer Lehren, welche sowohl in gründlicher Erkenntnis der Natur und Kunst, als im menschlichen Leben vielfältig genutzt werden."

Christian Wolff

(1679 - 1754; Philosoph der Aufklärungszeit)

INFORMATION

Der ungarische Jugendverband KISZ übernahm das Projekt der umfassenden Einführung der EDV in die Volkswirtschaft als Jugendobjekt. Dieses zentrale Regierungsvorhaben soll im Verlauf der nächsten 15 Jahre realisiert werden. Begonnen wurde mit der Übernahme von Jugendobjekten auf lokaler Ebene, rechentechnischen Wettbewerben und internatinalem Erfahrungsaustausch.

In unserer Festivalnummer wurden die Lösungen zu den Aufgaben in russischer Sprache auf Seite 11 angegeben. An dieser Stelle wollen wir noch einige Hinweise hierzu bringen.

1. Um zur angegebenen Lösung zu gelangen, muß man beachten, daß $x = \frac{-9 - \sqrt{141}}{6}$ zwar die Gleichung

$$x^2 - 5x + 6 = (2x + 1)^2$$

erfüllt, jedoch nicht das Ausziehen der Wurzel in der Ursprungsgleichung gestattet.

---

2. Die angegebenen Intervalle erhält man, indem man die Gleichung nach Logarithmengesetzen, unter anderem

$$\log_a c = (\log_c a)^{-1} \quad \text{und}$$

$$\log_b c = (\log_a c)(\log_a b)^{-1} ,$$

umformt.

---

3. Nach zweimaliger Anwendung von

$$\cos 2y = 2 \cdot \cos^2 y - 1 \quad \text{erhält man}$$

$$\cos^4 x - \frac{3}{4} \cdot \cos^2 x + \frac{1}{8} = 0$$

und als Lösungen hierzu:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi ,$$

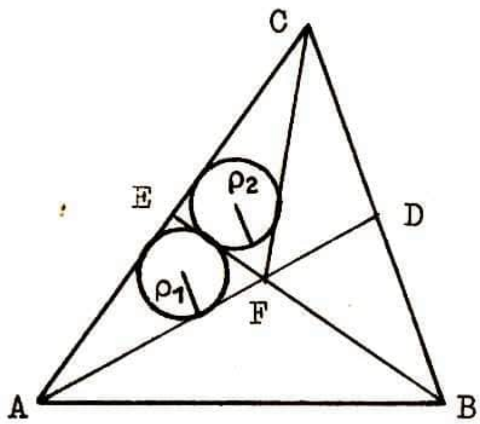
$$x_2 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi ,$$

$$x_3 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi ,$$

$$x_4 = -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \quad \text{mit} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Jetzt ist noch der minimale Wert von $x^2 + 2x - 3$ zu ermitteln. Man unterscheidet $k \neq 0$ und $k = 0$ und erhält endlich als Lösung $x = -\frac{\pi}{3}$.

(4.) Zuerst zur Erläuterung der Aufgabenstellung eine Skizze:



<u>Zu zeigen:</u> $\overline{AB} = \overline{BC}$, d. h. die Gleichschenkligkeit des Dreiecks ABC.

Es gilt $F_{AFE} = F_{EFC}$, da die beiden Dreiecke die gleiche Höhe und eine gleich lange Grundseite besitzen.

Aus der Formel $F = \frac{\rho}{2} \cdot U$ mit $U = a + b + c$ und ρ Radius des Inkreises,

angewandt auf die beiden kleinen Dreiecke, ergibt sich:

$$\frac{\rho_1}{2} \cdot (\overline{AF} + \overline{FE} + \overline{AE}) = \frac{\rho_2}{2} \cdot (\overline{CF} + \overline{EF} + \overline{EC}) \quad (*).$$

Nach Voraussetzung der Aufgabe gilt:

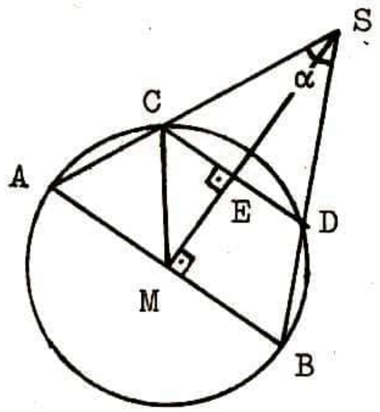
$\rho_1 = \rho_2$ und $\overline{AE} = \overline{EC} = \frac{a}{2}$ sowie trivialerweise $\overline{FE} = \overline{EF}$.

Somit folgt aus (*) $\overline{FA} = \overline{FC}$, d. h., das Dreieck AFC ist gleichschenklig, und es gilt Δ AFE $\cong$ Δ EFC, somit auch $\measuredangle$ FEA = $\measuredangle$ CEF = 90^0 und Δ ABE $\cong$ Δ BCE.

Hieraus folgt aber auch $\overline{AB} = \overline{BC}$.

(5.) Das dreidimensionale Problem vereinfacht sich sofort auf ein zweidimensionales.

Auch hierzu eine Skizze.



Bezeichnungen:

$\overline{MB} = \overline{AM} = \overline{MC} = a,$

$\overline{SB} = \overline{SA} = 1,$

$\overline{CE} = \overline{ED} = r$ und $\overline{SM} = h$.

Wir berechnen den Flächeninhalt von Δ AMS und von den Dreiecken Δ AMC und Δ MSC und setzen diese gleich.

$F_{AMS} = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot F_{ABS}$,

$F_{MSC} = r \cdot \frac{h}{2}$,

$F_{AMC} = \frac{a^2}{2} \cdot \sin\alpha$ (da $\sphericalangle$ AMC = α; dies erhält man aus der Gleichschenkligkeit der Dreiecke ABS und AMC).

Ferner gilt:

$h = 1 \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$ (Winkelfunktion im rechtwinkligen Dreieck),

$a^2 = 1^2 - 1^2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ (Pythagoras).

Somit ergibt sich:

$$\frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot \sin\alpha = \frac{r \cdot h}{2} + \frac{a^2}{2} \cdot \sin\alpha,$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin\alpha = r \cdot 1 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} + (1^2 - 1^2 \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}) \cdot \sin\alpha,$$

$$r = (1 \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin\alpha)(\cos\frac{\alpha}{2})^{-1},$$

$$r = 1 \cdot (\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\alpha - \frac{\sin\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}),$$

$$\underline{r = 1 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha}$$ unter Verwendung von:

$$\frac{1}{2} \cdot \sin\alpha = \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\cos\alpha = 2 \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} - 1.$$

Zum Abschluß noch die Lösungen der Aufgaben von Seite 8 der Festivalausgabe der WURZEL:

Zwei Eilboten: 1200 m, $7{,}2\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $4{,}8\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Die schräge Allee: $(360 - 80\pi)\ \mathrm{m}^2$.

LÖSUNGEN zu den RÄTSELAUFGABEN aus Heft 7/8

● Zahlenrätsel der Titelseite:

$$\begin{array}{ccccccc} 1560 & : & 24 & = & 65 \\ - & & \times & & + \\ 285 & + & 37 & = & 322 \\ \hline 1275 & - & 888 & = & 387 \end{array}$$

● "Aus einem alten Brief" (Seite 170):

Die Antwort lautete: "In der ersten Minute Weihrauch vermeiden; in der zweiten Minute Orgelspielen und gleichfalls Weihrauch vermeiden."

● Oktales Kreuzworträtsel (Seite 171):

7	X	1	1	6	2
6	2	5	0	X	2
X	6	X	2	1	X
7	6	3	1	3	7
0	X	3	X	2	1
4	0	X	7	0	X

Preisausschreiben

Mit der Teilnahme an unserem Preisausschreiben helfen Sie uns, die WURZEL künftig interessanter und nach Ihren Wünschen zu gestalten. Gleichzeitig haben Sie die Chance, einen der folgenden Preise zu gewinnen:

1. Preis:	Buchscheck über 30,- M.
2. Preis:	Buchscheck über 20,- M.
3. - 5. Preis:	Buchscheck über 10,- M.
6. - 30. Preis:	Wurzel-Abonnement für das Schuljahr 73/74.

Bitte senden Sie das nebenstehende Formular vollständig ausgefüllt und mit -,10 M frankiert an uns.

Letzter Einsendetermin ist der 10. 11. 1973.

Und hier die Fragen:

1. Welches WURZEL-Heft des letzten Schuljahres gefiel Ihnen insgesamt am besten?

2. Welche drei Artikel des letzten Schuljahres waren Ihrer Meinung nach die interessantesten und am besten verständlichen?

3. Zu welchen Teilgebieten der Mathematik wünschen Sie in Zukunft Artikel?

4. Wie beurteilen Sie den Schwierigkeitsgrad der Preisaufgaben?

5. Welche Vorschläge oder kritischen Hinweise können Sie zur Verbesserung unserer Zeitschrift geben?

$\boxed{1.}$ ....

$\boxed{2.}$ 1. ....

2. ....

3. ....

$\boxed{3.}$ 1. ....

2. ....

3. ....

$\boxed{4.}$ (Zutreffendes unterstreichen!)

zu schwer - schwer - gerade richtig

- leicht - zu leicht

....

$\boxed{5.}$ ....

....

....

....
Unterschrift

Hier abtrennen!

Hier ausschneiden!

Absender:

....
Name, Vorname

....
Ort

....
Straße, Nummer

....
Schule/Klasse bzw. Beruf

Wurzel-Leser seit ....

POSTKARTE

Redaktion WURZEL

69 Jena

Universitätshochhaus, 17. OG,

Sektion Mathematik

Hier ausschneiden!

Hier abtrennen!

Lösungen

Erfreulicherweise erhielten wir zu allen Aufgaben der 4. Serie Lösungen, mußten aber diesmal einen höheren Prozentsatz falscher oder mangelhafter Zusendungen aussortieren.
Am beliebtesten war die Aufgabe E 20, zu der uns die meisten Lösungen erreichten. Die meisten Fehler traten bei den Aufgaben E 19 und E 23 auf.

Einmal mehr war Uwe Risch mit 8 Punkten der erfolgreichste Einsender. Es folgen Jürgen Socolowsky mit 6 und Klaus Gurlebeck mit 5 Punkten.

Noch einige Bemerkungen zur Aufgabe E 23.

Der charakteristische Fehler (1 Punkt Abzug) war das Unterlassen folgender Betrachtung (*).

(E 23)

L

1. Zuerst wird gezeigt, daß $\sqrt[3]{2}$ irrational ist (analog zum Schulstoff).

2. Beweis der Aufgabe indirekt:

   Annahme: $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$ mit p, q, r rational, $r > 0$.

   Es ergibt sich

   $$2 - p^3 - 3pq^2r = q\cdot\sqrt{r}\cdot(3p^2 + q^2r),$$

   $$\sqrt{r} = \frac{2 - p^3 - 3pq^2r}{q\cdot(3p^2 + q^2r)} \qquad (+).$$

   Zur Rechtfertigung dieser Division ist die Überlegung (*) notwendig:

   a) $q = 0$ würde $\sqrt[3]{2} = p$ und somit $\sqrt[3]{2}$ rational bedeuten, also hier schon einen Widerspruch ergeben.

   b) $q \neq 0$: Wegen $r > 0$, $q^2 > 0$ und $3p^2 \geq 0$ gilt $q\cdot(3p^2 + q^2r) \neq 0$.

Gehen wir zu (+) zurück:

Auf der rechten Gleichungsseite stehen nur rationale Ausdrücke, also muß auch $\sqrt{r}$ rational sein.

Hieraus folgt $\sqrt[3]{2} = p + q \cdot \sqrt{r}$ mit $p, q, \sqrt{r}$ rational,

und somit ist $\sqrt[3]{2}$ rational.

Dies ist ein Widerspruch zu dem unter 1. Bewiesenen.

Da diese Doppelnummer noch im September in Euere Hände gelangen sollte, das Studienjahr aber erst am 10. September beginnt, wird das Manuskript für dieses Heft schon Ende Juni angefertigt.

Deshalb ist es leider unmöglich, an dieser Stelle die Serie 5/73 auszuwerten, da für sie erst am 30. 6. 73 Einsendeschluß war.

Aus den bereits bei uns eingegangenen Lösungen haben wir jedoch einige zur Veröffentlichung ausgewählt.

(E 26) nach Lothar Wenzel, 111 Berlin, 12. Klasse.

L

x_1 und x_2 sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0.$$

Somit gilt:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,,$$
$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,, \qquad (*)$$

und man errechnet:

$$x_1^2 = \frac{p^2}{2} - p \cdot \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - q\,,$$
$$x_2^2 = \frac{p^2}{2} + p \cdot \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - q\,,$$
$$y_1 = x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q \qquad (1)\,.$$

Völlig analog ergibt sich durch das Erheben der Gleichungen (*) in die dritte Potenz und anschließende Addition

$$y_2 = x_1^3 + x_2^3 = -p^3 + 3pq \qquad (2).$$

y_1 und y_2 sollen die Lösungen der gesuchten quadratischen Gleichung sein. Also ergibt sich aus (1) und (2) und nach dem Satz von Vieta die gesuchte Gleichung:

$$(x - y_1)(x - y_2)$$
$$= x^2 + (p^3 - p^2 - 3pq + 2q)\cdot x + (p^2 - 2q)(-p^3 + 3pq)$$
$$= 0.$$

(E 27)

L

Ausgehend von der Darstellung $z = a + bi$ für eine komplexe Zahl und von der Definition des Betrages erhält man aus den zwei Gleichungen der Aufgabenstellung die folgenden beiden Gleichungen:

$$\sqrt{(a-4)^2 + b^2} = \sqrt{(a-8)^2 + b^2} \qquad (1),$$

$$3\cdot\sqrt{(a-12)^2 + b^2} = 5\cdot\sqrt{a^2 + (b-8)^2} \qquad (2).$$

Aus der Gleichung (1) ergibt sich sofort $a = 6$.

Geht man mit diesem Wert in die Gleichung (2), so erhält man die quadratische Gleichung

$$b^2 - 25b + 136 = 0$$

mit den Lösungen $b_1 = 17$, $b_2 = 8$.

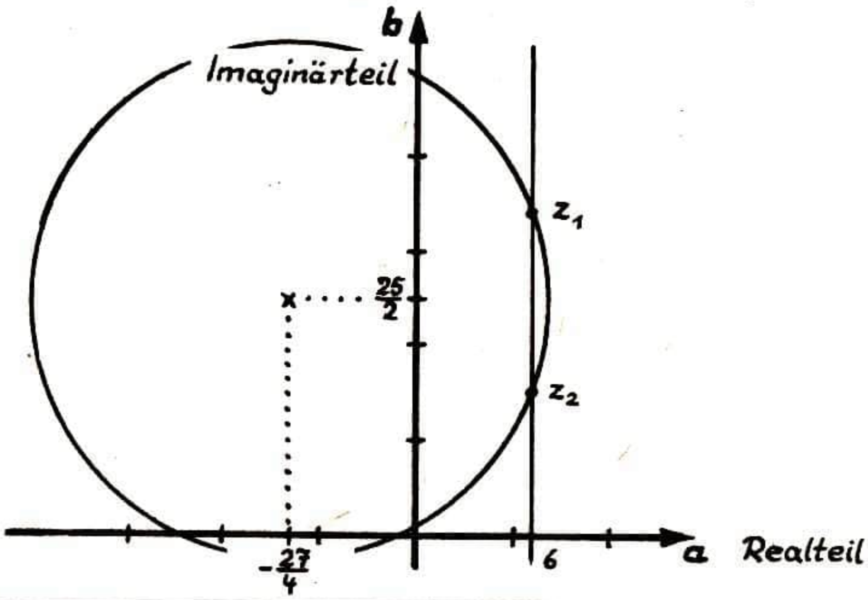
Die Zahlen $z_1 = 6 + 17i$ und $z_2 = 6 + 8i$ sind die beiden einzig möglichen Lösungen, die aber noch durch die Probe bestätigt werden müssen, da Umformungen der Ausgangsgleichungen durch Quadratur erfolgten.

Will man sich die Lösung des Problems geometrisch veranschaulichen, so muß man sich die zwei durch die Gleichungen gegebenen Kurven in der komplexen Zahlenebene aufzeichnen (vergleiche mit einem früheren Artikel).

Es ergeben sich:

aus (1) $a = 6$ und b beliebig, d. h. die Gerade $a = 6$,

aus (2) $\frac{2925}{16} = (a + \frac{27}{4})^2 + (b - \frac{25}{2})^2$, d. h. ein Kreis mit dem Mittelpunkt $(-\frac{27}{4}, \frac{25}{2})$ und dem Radius $\sqrt{\frac{2925}{16}}$. Die Schnittpunkte der beiden Kurven sind die gesuchten Lösungen z_1 und z_2.



(E 30)

L

nach Lothar Wenzel, 111 Berlin, 12. Klasse.

Laut Zahlentafel gilt für ungerade m die Identität

$$(a^m + b^m) = (a + b)(a^{m-1} - a^{m-2}b + \dots$$
$$\dots - ab^{m-2} + b^{m-1}) \qquad (*) \quad .$$

Der eigentliche Beweis der Behauptung der Aufgabe wird indirekt geführt.

Annahme: Es existiert ein n mit $n \neq 2^k$, $k=0,1,\ldots$, für das $2^n + 1$ eine Primzahl ist.

Dann läßt sich n wie folgt zerlegen:

$$n = p_1 \cdot p_2 \text{ mit } p_1 \text{ ungerade und } p_1 > 1.$$

Jetzt ergibt sich durch Anwendung von (*)

$$2^{p_1 \cdot p_2} + 1 = (2^{p_2})^{p_1} + 1^{p_1}$$

$$= (2^{p_2} + 1)(2^{p_1 - 1} - 2^{p_1 - 2} + \ldots - 2 + 1),$$

wobei $2^{p_2} + 1 \neq 2^{p_1 \cdot p_2} + 1$, da $p_1 > 1$,

und $2^{p_2} + 1 \neq 1$, falls $p_2 \neq 0$ (vergleiche **),

gilt, $2^{p_2} + 1$ also ein echter Teiler von $2^n + 1$ ist. Dies steht aber im Widerspruch zu unserer Voraussetzung über $2^n + 1$.

Demnach muß sich n als Potenz von 2 darstellen lassen, falls $2^n + 1$ eine Primzahl ist.

Anmerkung:

** Die Aufgabe war nicht völlig korrekt gestellt, da sich für $n = 0$ $2^0 + 1 = 2$, eine Primzahl ergibt, 0 aber nicht als Potenz von 2 darstellbar ist. Dieser Fall wird durch $p_2 \neq 0$ ausgeschlossen.

Zu unserem Titelbild:

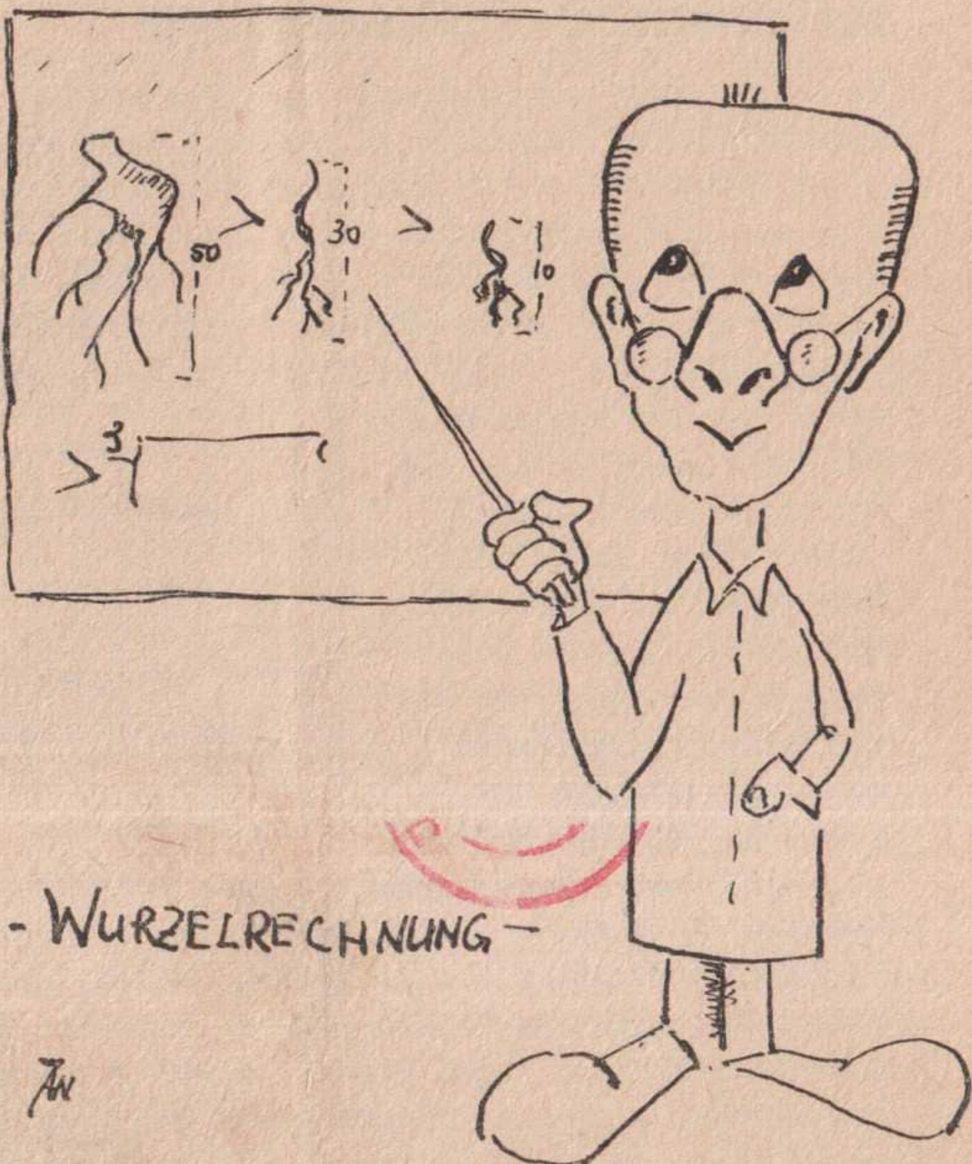
Im Sommer war die "WURZEL" zu Gast beim Pressefest der Schülerredaktion "KONTAKT" in Mühlhausen. Diese Redaktion gestaltet regelmäßig in der Werkszeitung des Patenbetriebes ihrer Schule eine Seite für Schüler, zu deren Inhalt auch mathematische Aufgaben gehören.

Im vergangenen Schuljahr veröffentlichten wir mathematische Artikel mit folgenden Themen:

Allen unseren Lesern wünschen wir ein erfolgreiches Schuljahr 1973/74!

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung": Leiter: Egbert Creutzburg
Redaktion: J. Dubslaff, H.-G. Leopold, W. Nagel, G. Weske
Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

Anschrift: WURZEL
69 Jena
Universitätshochhaus
Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45



11
73

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Fr.-Schiller-Universität Jena

Ungelöste Probleme der geometrischen Zahlentheorie (I)

In der geometrischen Zahlentheorie beschäftigt man sich unter anderem mit der folgenden allgemeinen Fragestellung :
In der Ebene sei ein kartesisches Koordinatensystem gegeben. Dann kann man in bekannter Weise jeden Punkt der Ebene durch Angabe seiner Koordinaten (x,y) beschreiben. Wir nennen nun einen Punkt A der Ebene mit den Koordinaten (m,n) einen <u>Gitterpunkt</u>, wenn beide Koordinaten m und n <u>ganzzahlig</u> sind.
Geben wir eine weitgehend beliebige geschlossene und doppelpunktfreie Kurve [1]) (Abb. 1) vor, so ist die Frage nach der Anzahl der Gitterpunkte in dem durch diese Kurve begrenzten Gebiet eine der typischen Aufgabenstellungen der geometrischen Zahlentheorie.

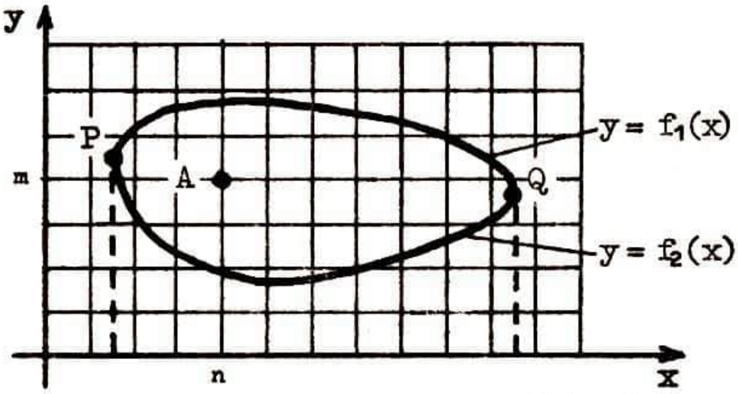


Abb. 1

Dabei ist von vornherein grundsätzlich folgendes zu beachten: Eine formelmäßige Darstellung der Anzahl der Gitterpunkte gelingt in den seltensten Fällen, und selbst in diesen Fällen ist es im allgemeinen unmöglich, die Gitterpunktsanzahlen aus jenen Formeln direkt zu berechnen. Daher konzentriert sich die Aufmerksamkeit der Forscher nicht in erster Linie auf das Aufstellen solcher Formeln, sondern auf möglichst genaue Abschätzungen der betreffenden Gitterpunktsanzahlen. Seinen historischen Ausgangspunkt hat dieses Problem bei Gauß und Dirichlet gefunden. Danach ruhte es bis zum Anfang unseres Jahrhunderts. Erst zu dieser Zeit konnten die Ergebnisse von Gauß und Dirichlet entscheidend verbessert und damit auch verallgemeinert werden. Die Blütezeit der geometrischen Zahlentheorie findet sich in den zwanziger und dreißiger Jahren, in denen die wesentlichen Grundlagen der Theorie gelegt wurden. Aber noch heute gibt es zahlreiche Mathematiker - so u.a. in der UdSSR, in den USA, der VR Ungarn, der ČSSR, der BRD und der DDR –, die sich mit dieser reizvollen Aufgabenstellung beschäftigen.

Wir wollen uns zunächst mit der von Gauß aufgeworfenen Fragestellung beschäftigen. Es handelt sich hierbei um die Frage nach der Anzahl der Gitterpunkte im Kreis

$$(1) \qquad u^2 + v^2 \leq x$$

(einschließlich der Berandung). Wir können auch so sagen: Gefragt ist nach der Anzahl der ganzzahligen Lösungen (u,v), die der Ungleichung (1) genügen. Bezeichnen wir mit R(x) jene Anzahl, so finden wir beispielsweise schnell R(0) = 1, R(1) = 5, R(2) = 9, R(3) = 9, R(4) = 13, R(5) = 21. Wird aber x, also der Radius $\sqrt{x}$ des Kreises, sehr groß, so bekommen wir bald Schwierigkeiten. Wir wollen daher R(x) für große x abschätzen. Dazu ordnen wir jedem Gitterpunkt der Ebene das "Gitterquadrat" der Seitenlänge 1 (und mit dem Flächeninhalt 1) zu, das ihn zur Südwestecke hat. Dann ist R(x) der Gesamtflächeninhalt der Gitterquadrate, deren Südwestecke zur Kreisfläche (1) gehört (vergleiche Abbildung 2). Das heißt, R(x) ist gleich dem Flächeninhalt des entsprechenden Polygons mit senkrechten und waagerechten Rändern.

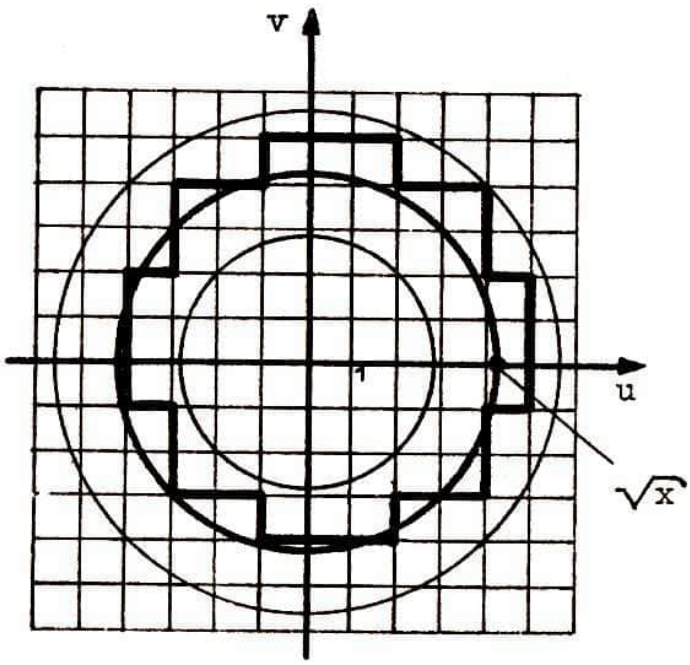


Abb. 2

Alle diese Gitterquadrate gehören zur Kreisfläche

$$u^2 + v^2 \leq (\sqrt{x}+\sqrt{2})^2,$$

da kein Punkt des Polygons weiter als um $\sqrt{2}$ vom Rande des Kreises (1) entfernt ist (Lehrsatz des Pythagoras!). Ganz entsprechend gehört die Kreisfläche

$$(2) \qquad u^2 + v^2 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{2})^2$$

jenem Polygon an, da die Südwestecke eines Gitterquadrates, das mit der Kreisfläche (2) einen Punkt gemeinsam hat, der Kreisfläche (1) angehört. Bei Beachtung der Formel für den Flächeninhalt eines Kreises ergibt sich:

$$\pi x - 2\pi\sqrt{2x} + 2\pi = \pi(\sqrt{x} - \sqrt{2})^2 \leq R(x) \leq \pi(\sqrt{x} + \sqrt{2})^2 = \\ = \pi x + 2\pi\sqrt{2x} + 2\pi .$$

Und hieraus folgt

$$(3) \; | R(x) - \pi x | \leq 2\pi \sqrt{2x} + 2\pi .$$

Wir formulieren das Ergebnis noch etwas anders, indem wir eine von Landau herrührende Bezeichnung einführen: Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei beliebige Funktionen, die für große x (oder, was dasselbe ist, für $x > x_0$ bzw. $x \longrightarrow \infty$) der Abschätzung

$$(4) \qquad |f(x)| \leq c\,|g(x)|$$

mit einer geeigneten positiven Konstanten c genügen. Dann schreibt man an Stelle von (4) auch

$$f(x) = O(g(x))$$

(gelesen "$f(x)$ gleich oh von $g(x)$"). Mit dieser Schreibweise können wir (3) in der Gestalt

$$(5) \qquad R(x) = \pi x + O(\sqrt{x})$$

darstellen. Die Interpretation des Ergebnisses (5) ist offenbar die folgende: Die Anzahl der Gitterpunkte $R(x)$ des Kreises (1) ist für große x in erster Näherung gleich dem Flächeninhalt πx des Kreises. Der dabei begangene Fehler ist von der Größenordnung $\sqrt{x}$. Es fällt hierbei auf, daß dieser Fehler in etwa der Länge der Kreislinie entspricht. Betrachten wir die Abbildung 2, so wird uns auch ohne weiteres plausibel, daß die Fehlerquelle in der Berandung der Kreisfläche liegen muß.

Diesen Gedanken griff der tschechische Mathematiker Jarnik auf und übertrug das Ergebnis von Gauß auf allgemeinere Kurven: Er betrachtete in der Ebene eine geschlossene, doppelpunktfreie Kurve, die von einer vertikalen Geraden höchstens zweimal geschnitten wird (Abb. 1). Die Funktionen $y = f_1(x)$ für den oberen Teil der Kurve von P bis Q und $y = f_2(x)$ für den unteren Teil seien einmal stetig differenzierbar [2]). Es bezeichne N die Anzahl der Gitterpunkte und F den Flächeninhalt des von einer solchen Kurve mit der Länge 1 umschlossenen Gebietes. Dann gilt

$$(6) \qquad |N - F| < 1 .$$

Dieses Resultat ist zwar anschaulich klar, aber nicht so leicht zu beweisen. Man beachte noch, daß (6) für den Fall des Kreises sogar noch etwas präziser als (3) ist.

Kehren wir zum Kreisproblem zurück. Wir können dieses Problem auch frei von einer geometrischen Veranschaulichung rein zahlentheoretisch formulieren. Dazu betrachten wir die zahlentheoretische Funktion r(n), die für nicht-negative ganze Zahlen n die <u>Anzahl der Darstellungen</u> von n als Summe von 2 Quadraten ganzer Zahlen angibt, also

$$r(n) = \sum_{n_1^2+n_2^2=n} 1 \quad .$$

Man findet rasch $r(0) = 1$, $r(1) = 4$, $r(2) = 4$, $r(3) = 0$, $r(4) = 4$, $r(5) = 8$. Aber auch hier bekommen wir Schwierigkeiten, r(n) für große n zu berechnen. Eine Möglichkeit, Aussagen über r(n) zu finden, besteht in der Mittelwertbildung, d.h. wir betrachten die Summe

$$\frac{1}{x} \sum_{0 \le n \le x} r(n) .$$

Nun ist aber

$$\sum_{0\le n\le x} r(n) = \sum_{0\le n\le x} \sum_{n_1^2+n_2^2=n} 1 = \sum_{0\le n_1^2+n_2^2\le x} 1 = R(x).$$

Es handelt sich also um genau das gleiche Problem. Wegen

$$\frac{1}{x} \sum_{0\le n\le x} r(n) = \frac{1}{x} R(x) = \pi + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

und

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{0\le n\le x} r(n) = \pi$$

sagen wir, $r(n)$ hat die "durchschnittliche Größenordnung" π oder: es gibt im Durchschnitt π Lösungen der Gleichung $n_1^2 + n_2^2 = n$.

Bis hierhin ist alles noch ziemlich einfach. Im zweiten Teil dieses Artikels werden wir uns ansehen, worin das eigentliche Problem besteht.

Prof. Dr. E. Krätzel

Professor im Bereich Theoretische Mathematik

Anmerkungen:

1) Anschaulich hat man sich hierunter eine Kurve vorzustellen, die man in einem Zuge durchlaufen kann, indem man bei einem beliebigen Punkt startet und, ohne einen Punkt doppelt oder mehrfach durchlaufen zu müssen, wieder zum Ausgangspunkt zurückgelangt.

2) Das heißt, daß diese Funktionen eine Ableitung haben, die ihrerseits stetige Funktionen sind; es bedeutet anschaulich, daß die betreffenden Kurven keine Ecken haben, sondern glatt sind.

Preisaufgaben 11/73

(E 51) ① Man gebe alle reellen x an, die die Ungleichung

$$\log_3 \frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} \geq 0$$ erfüllen.

(E 52) ① (Bezieht sich auf den Fachartikel in Heft 7/8/73.)
Man überprüfe, ob die Abbildung

$$\|x\| = |x_1| + |x_2| \quad , \quad x = (x_1, x_2) \in R_2$$

eine Norm auf R_2 ist.

(E 53) ② Man löse für nichtnegative beliebige a die Gleichung

$$z\,|z| + az + i = 0$$

in den komplexen Zahlen.

(E 54) ② Es sei f(x) eine Funktion mit

$f(x + 1) = (x + 1)\, f(x) \qquad \forall x\,;\ x \neq -1$
und $f(x) \neq 0 \qquad \forall x.$

Außerdem sei g(x) eine für alle x definierte Funktion.
Man beweise:
Die Funktion $y(x) =_{Df} f(x) \cdot g(x)$ erfüllt genau dann die Gleichung

$$y(x + 1) = (x + 1) \cdot y(x)\,,$$

wenn g(x) eine mit 1 periodische Funktion ist (d.h. es gilt $g(x) = g(x + 1)$).

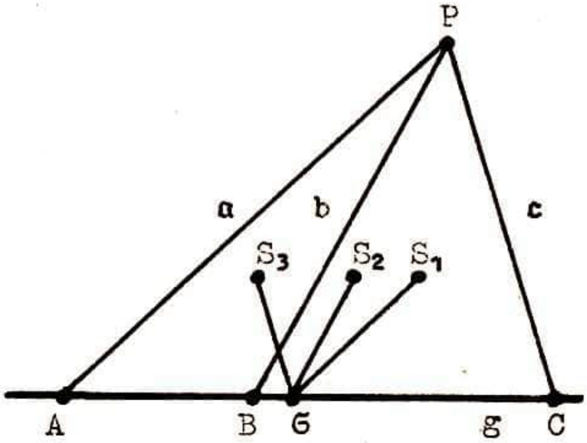
(E 55) ① Man bestimme alle reellen Zahlen, für die

$\tan x \cdot \tan 3x < -1$ gilt.

(E 56) ② Доказать, что числа $20^{15} - 1$ делится на произведение $11 \cdot 31 \cdot 61$.

Sonderpreisaufgabe (2 Punkte)

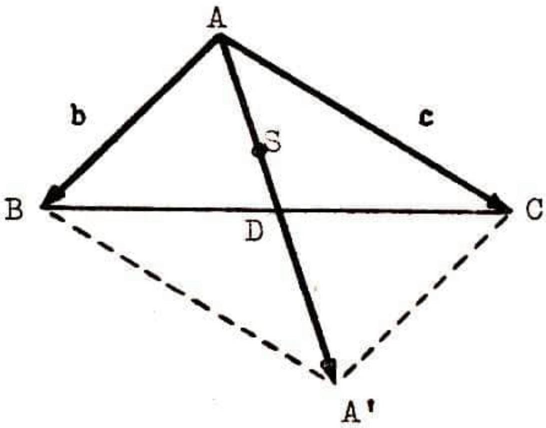
- gestellt von Prof. Dr. Roman Roth, Jena -



Gegeben seien drei Punkte A, B und C auf einer Geraden g. Dann gilt für jeden Punkt P außerhalb der Geraden g:
Die Parallelen zu PA, PB bzw. PC, die durch die Schwerpunkte der Dreiecke Δ PBC, Δ PAC bzw. Δ PAB verlaufen, schneiden sich in einem Punkt G, $G \in g$, für den die Beziehung

$\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ erfüllt ist.

Beweisen Sie diesen Sachverhalt!



<u>Anleitung:</u>

In nebenstehender Figur gilt

wegen $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$, oder

anders $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl; für 15 Wertpunkte erhält der Einsender einen Buchscheck. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender 15 Punkte haben, entscheidet das Los. Fällt ein Besitzer von 15 Punkten nicht unter die Gewinner, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil.
Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.

Letzter Einsendetermin: 20. 12. 73

In unserer Artikelserie über das Studium mit dem Berufsziel Mathematik/Physik-Lehrer bringen wir dieses Mal einen Beitrag über die Ausbildung in Pädagogik und Psychologie. Er wurde verfaßt von Dr. sc. P. Mitzenheim, Dozent an der Sektion Erziehungswissenschaft der Friedrich-Schiller-Universität Jena.

Warum studiert der künftige Mathematik- und Physiklehrer Pädagogik und Psychologie?

Wenn ein Jugendlicher, der sich entschlossen hat, den Beruf des Lehrers zu ergreifen, erfährt, wie groß die Verantwortung des Lehrers in der sozialistischen Gesellschaft ist, wird er vielleicht seine Berufsentscheidung noch einmal überprüfen. Aber bei dieser Besinnung über die richtige Berufswahl muß man daran erinnern, daß selbst die bedeutendsten Lehrerpersönlichkeiten der Vergangenheit und der Gegenwart nicht als hervorragende Lehrer geboren wurden. Während der Vorbereitung auf den Beruf und im Prozeß der alltäglichen pädagogischen Tätigkeit können sich jene Eigenschaften ausprägen und jene Fähigkeiten ausbilden, über die der Fachlehrer und Klassenleiter verfügen muß, wenn er bei den Schülern Autorität gewinnen und die pädagogische Meisterschaft erlangen will. Das Bemühen um echte Autorität und das Ringen um pädagogische Meisterschaft sind Voraussetzungen für eine erfolgreiche Bildungs- und Erziehungsarbeit, ganz gleich, ob ich Mathematik oder Physik unterrichte und ob dies in einem fünften oder zehnten Schuljahr geschieht. Die Stärken und Schwächen jedes Schülers und der Klassenkollektive zu kennen, mit Geduld, Einfühlungsvermögen und Konsequenz sie zu fordern und zu fordern, das verlangt ein gründliches Studium der Pädagogik und Psychologie. Die Ausbildung in Pädagogik und Psychologie ist <u>ein</u> wesentlicher Bestandteil des Fachlehrerstudiums.

Jeder Schüler weiß aus eigener Erfahrung, daß sich Bildung, mehr Bildung und bessere Bildung nicht von selbst anhäufen und auf die jeweils neuen Jahrgänge der Lernenden übertragen. Und auch die Erziehung des jungen Menschen ist kein spontaner Vorgang. Wie die Bildung und Erziehung des Menschen nach wissenschaftlichen Grundsätzen geschehen kann, das ist hauptsächlich der Gegenstand der Pädagogik und Psychologie. Deshalb kann das Studium der Pädagogik und Psychologie nicht als etwas Nebengeordnetes oder Zusätzliches zum Fachstudium in Mathematik und Physik aufgefaßt werden. Für jeden Lehrer kommt es darauf an, die individuellen Besonderheiten jeder einzelnen Schülerpersönlichkeit zu ermitteln und bei der Bildung und Erziehung zu berücksichtigen. Durch das Studium der Pädagogik und Psychologie lernt der künftige Lehrer die Bildungspolitik und die Erziehungsauffassung der Arbeiterklasse und ihrer marxistisch-leninistischen Partei kennen, macht sich diese zu eigen und wird während der vierjährigen Ausbildung schrittweise dazu befähigt, den Schülern eine moderne wissenschaftliche Allgemeinbildung zu vermitteln und sie über den Prozeß der Erziehung und Selbsterziehung zu kollektiver Verantwortung zu führen.

Ausgehend von den Erfordernissen, die sich aus der Gestaltung der entwickelten sozialistischen Gesellschaft ergeben, hat der VIII. Parteitag beschlossen, allen gesunden und normalen Kindern eine vollwertige zehnklassige Oberschulbildung zu gewährleisten und die weitere inhaltliche Ausgestaltung unserer Oberschule - der grundlegenden Bildungs- und Erziehungsstätte für alle Kinder des Volkes - als <u>wichtigsten</u> gesellschaftlichen Auftrag aller Lehrer hervorgehoben. Die Funktion der Bildung und Erziehung besteht also im umfassenden Sinne darin, die Ergebnisse und Errungenschaften des Kampfes der Arbeiterklasse zu sichern und die Menschen, besonders die Schuljugend, auf das Leben und die Arbeit in der sozialistischen Gesellschaft vorzubereiten. Es handelt sich bei der Bildung und Erziehung um einen gesellschaftlichen Vorgang, an dem viele Erziehungskräfte und Bildungseinrichtungen beteiligt sind. Der Lehrer in seiner Funktion als Klassenleiter trägt eine ganz besondere Verantwortung dafür, daß eine echte Gemeinschaftsarbeit aller an der Erziehung Beteiligten entsteht und die Potenzen, die unsere Gesellschaft für die allseitige und harmonische Persönlichkeitsbildung der Kinder und Jugendlichen besitzt, bewußt genutzt werden. Das Ziel ist hierbei eine weitgehend geschlossene Erziehung aller Erziehungsträger und einheitliche Maßstäbe und abgestimmte Anforderungen bei der Bildung und Erziehung der gleichen Schüler.

Die Ziele und Inhalte der Bildung und Erziehung sind durch die staatlichen Dokumente (Gesetz über das einheitliche sozialistische Bildungssystem, die Lehrpläne, die Schulbücher u. a.) dem Lehrer weitgehend vorgegeben. Es kommt während der Ausbildung darauf an, daß er die Ziele und Inhalte nicht nur zur Kenntnis nimmt, sondern sich mit diesen Zielen und Inhalten persönlich identifiziert. Der Fachlehrer und Klassenleiter steht in der Praxis ständig vor der Aufgabe, das Erziehungsziel in einer konkreten pädagogischen Situation, in einer bestimmten Schulklasse anzustreben und die Lehrinhalte an alle Schüler weiterzugeben. Dazu braucht er psychologisches Wissen, um sein pädagogisches Vorgehen im Unterricht und in der außerunterrichtlichen und außerschulischen Arbeit auf die "inneren Positionen" der Schüler abzustimmen. Es ist uns nicht neu, daß wir in der pädagogischen Tätigkeit bei Zehnjährigen anders vorgehen müssen als bei Fünfzehnjährigen. Aber welche Altersbesonderheiten sind dem Kind und dem Jugendlichen auf den verschiedenen Stufen ihrer Entwicklung eigen? Wie entwickeln sich ihre Wahrnehmungen und Vorstellungen, ihr Denken und ihr Gedächtnis? Wie sind Fähigkeiten und Begabungen zu fördern? Wie entstehen die sozialen Beziehungen in den Schulklassen? Wie groß ist die physische und geistige Belastbarkeit von Kindern verschiedener Altersstufen? Zur Beantwortung dieser und ähnlicher Fragen verhilft das Studium der Psychologie.

Die pädagogisch-psychologische Grundausbildung wird im III. und IV. Studienjahr spezifiziert durch die Methodikausbildung in den beiden Fächern, die der Student später unterrichten wird. Somit ergibt sich insgesamt für die erziehungswissenschaftliche Ausbildung folgender Studiengang (zur Methodikausbildung ist noch ein Artikel in dieser Reihe vorgesehen):

Nach dem gültigen Studienprogramm von 1969 werden im ersten Studienjahr einige Grundlagen der Pädagogik und der marxistischen Persönlichkeitstheorie in einem pädagogisch-psychologischen Grundkurs vermittelt. Das zweite Studienjahr sieht die Ausbildung in der Theorie der Erziehung, der Didaktik, der Kinder- und Jugendpsychologie und der Persönlichkeits- und Kollektivdiagnostik vor. Im vierten Studienjahr liegen die Lehrveranstaltungen zur Geschichte der Pädagogik und zu Lern- und Erziehungsschwierigkeiten. Die Methodikausbildung erstreckt sich auf das dritte und vierte Studienjahr. In enger Verbindung mit der Ausbildung in Pädagogik und Psychologie vollzieht sich die praktische pädagogische Tätigkeit. Sie beginnt mit der Tätigkeit als Pioniergruppenleiter oder einer anderen nützlichen erzieherischen Tätigkeit im Rahmen eines Verbandsauftrages der FDJ.

Am Ende des ersten Studienjahres absolvieren alle Lehrerstudenten ein etwa dreiwöchiges Ferienlagerpraktikum. Im zweiten Studienjahr werden die Studenten durch ein pädagogisch-psychologisches Praktikum mit den Aufgaben des Klassenleiters vertraut gemacht und üben sich in einigen pädagogischen und psychologischen Methoden. Höhepunkt ist das große Schulpraktikum, wo die künftigen Lehrer für die Zeit von 11 Wochen an einer Schule unterrichten und eigenverantwortlich einige Aufgaben des Klassenleiters lösen helfen. Mit dem dritten Studienjahr beginnt außerdem die wahlweise-obligatorische Ausbildung für jene Studenten, die zu einem psychologischen oder pädagogischen Thema ihre Diplomarbeit schreiben. Den Abschluß des Studiums bilden die Hauptprüfung in Pädagogik und Psychologie und für die Teilnehmer der wahlweise-obligatorischen Ausbildung die Verteidigung der Diplomarbeiten an der Sektion Erziehungswissenschaft.

Dr. sc. P. Mitzenheim

Sektion Erziehungswissenschaft der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Gut gesagt

Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache und dann ist es alsobald ganz etwas Anderes.

Johann Wolfgang von Goethe

Lösungen

Zu den Lösungen der Serie 5/73

Erfreulicherweise erhielten wir, bis auf die Aufgaben E 28 und E 30, recht viele Einsendungen, von denen jedoch mehrere falsch oder unvollständig waren. Keine Schwierigkeiten bereiteten die Aufgaben E 25 und E 26. Eine Häufung von Fehlern trat, von uns unerwartet, bei E 27 auf. Es wurde nicht beachtet, daß für eine komplexe Zahl $z = a + bi$

$|z|^2 = a^2 + b^2$, aber $z^2 = a^2 + 2abi - b^2$

gilt und somit die Beträge in der Aufgabenstellung nicht durch Quadrieren beseitigt werden können. Die Lösung hierzu sowie zu den Aufgaben E 26 und E 30 erschien bereits in Heft 9/10 /73. Eine sehr elegante Lösung, die wir im Anschluß veröffentlichen, erhielten wir von einem früheren Leser und jetzigen Mathematikstudenten in Moskau zugesandt. Die Lösung der Aufgabe E 28 wurde mehrfach gewünscht und erscheint im Heft 12/73. Zur Aufgabe E 29 ist folgendes zu bemerken:

Für negative Basen ist i. a. die Exponentialfunktion nicht erklärt. In den Lösungen der Aufgabe fehlt uns ein eindeutiger und richtiger Hinweis hierauf bzw. auf auftretende Spezialfälle, falls x und y natürliche Zahlen sind, z. B. $a = -2$, $b = 8{,}5$, $c = 4$ und $x = 0$, $y = 2$.

Eine Argumentation, in der zuerst das Gleichungssystem

$$x = \frac{1}{2} \log_a(b \pm \sqrt{b^2 - c}) \qquad (*)$$

gelöst und dann gefolgert wird: der Logarithmus ist nur für positive Zahlen $a \neq 0$, $a \neq 1$ definiert, a l s o muß a so beschaffen sein, ist unseres Erachtens unzulässig, da ja die Umformungen, die zu (*) führten, nur unter den gefolgerten Voraussetzungen entstanden sind, also andere Fälle gar nicht erfassen können. Gewiß waren die Untersuchungen für den Fall $a < 0$ nicht einfach und eindeutige Bedingungen für die Lösbarkeit nicht ohne weiteres angebbar, erwähnen müßte man ihn. Da wir zwei Punkte vorgesehen hatten, fiel uns die Entscheidung in der Bewertung, Punkteteilung, relativ leicht.

(E 27) **L**

(Frank Müller, stud. math., 20 Jahre)

Da für komplexe Zahlen $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

und $|z|^2 = z\bar{z}$ ist, folgt sofort die Äquivalenz des gegebenen Systems mit:

(1) $z \neq 8$

(2) $z \neq 8i$

(3) $(z - 4)(\bar{z} - 4) = (z - 8)(\bar{z} - 8)$

(4) $9(z - 12)(\bar{z} - 12) = 25(z - 8i)(\bar{z} + 8i)$

Es sei $z = a + bi$ $\qquad a,b \in R$

Aus (3) folgt

$z + \bar{z} = 12$ und somit $\underline{a = 6}$.

Aus (4) folgt

$16z\bar{z} + 25 \cdot 8i(z - \bar{z}) + 25 \cdot 64 + 9(12(z + \bar{z}) - 144) = 0$

und daraus wegen $z = a + bi$, $a = 6$

$b^2 - 25b + 136 = 0$

$\underline{b_1 = 17}$; $\underline{b_2 = 8}$

Eine Probe bestätigt die Richtigkeit der Lösungen

$z_1 = 6 + 17i$ und $z_2 = 6 + 8i$.

Zu den Lösungen der Serie 6/73

Aus technischen Gründen veröffentlichen wir an dieser Stelle bereits zwei Lösungen zur Aufgabenserie des Juniheftes. Eine Auswertung der Einsendungen kann aber erst in unserer Dezemberausgabe erfolgen.

(E 33)

L

Zunächst benutzt man, daß das geometrische Mittel zweier positiver Zahlen nicht größer als ihr arithmetisches Mittel ist,

d. h. $\sqrt{bc} \leq \frac{b + c}{2}$.

Setzt man $b = \frac{2}{\varepsilon} x_k^2$ und $c = \frac{\varepsilon}{2} a_k^2$, so erhält man
$\sqrt{x_k^2 \, a_k^2} \leq \frac{1}{\varepsilon} x_k^2 + \frac{\varepsilon}{4} a_k^2$, also

$$|x_k a_k| \leq \frac{1}{\varepsilon} x_k^2 + \frac{\varepsilon}{4} a_k^2 \qquad (1).$$

Die Behauptung wird nun mit vollständiger Induktion bewiesen.

Für $n = 1$ erhält man die Behauptung, indem man in (1) $k = 1$ setzt.

Es gelte nun

$$|a_1x_1 + \ldots + a_{k-1}x_{k-1}| \leq \frac{1}{\varepsilon}(x_1^2 + \ldots + x_{k-1}^2) + \frac{\varepsilon}{4}(a_1^2 + \ldots + a_{k-1}^2).$$

Addiert man dazu (1), so ergibt sich

$$|a_1x_1 + \ldots + a_{k-1}x_{k-1}| + |a_kx_k| \leq \frac{1}{\varepsilon}(x_1^2 + \ldots + x_k^2) + \frac{\varepsilon}{4}(a_1^2 + \ldots + a_k^2)$$

Nach der Dreiecksungleichung ist aber

$$|a_1x_1 + \ldots + a_kx_k| \leq |a_1x_1 + \ldots + a_{k-1}x_{k-1}| + |a_kx_k|,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

(E 34)

L

Damit die Werte $\log_x \frac{4 - x}{10}$ und $\lg \lg n$ existieren, muß man die Voraussetzungen auf folgende Weise verschärfen:
$n > 1$ und $0 < x < 4$ mit $x \neq 1$.
Nun löst man die Gleichung, indem man mehrfach potensiert und geeignet kürzt.

$$x^{\left(1 + \log_x \frac{4-x}{10}\right)} = x^{(\lg \lg n - 1)\log_x 10}$$

$$x \cdot \frac{4-x}{10} = 10^{(\lg \lg n - 1)}$$

$$\frac{4x - x^2}{10} = \frac{\lg n}{10}$$

$$x^2 - 4x + \lg n = 0$$

$$x_1 = 2 + \sqrt{4 - \lg n}$$
$$x_2 = 2 - \sqrt{4 - \lg n}$$

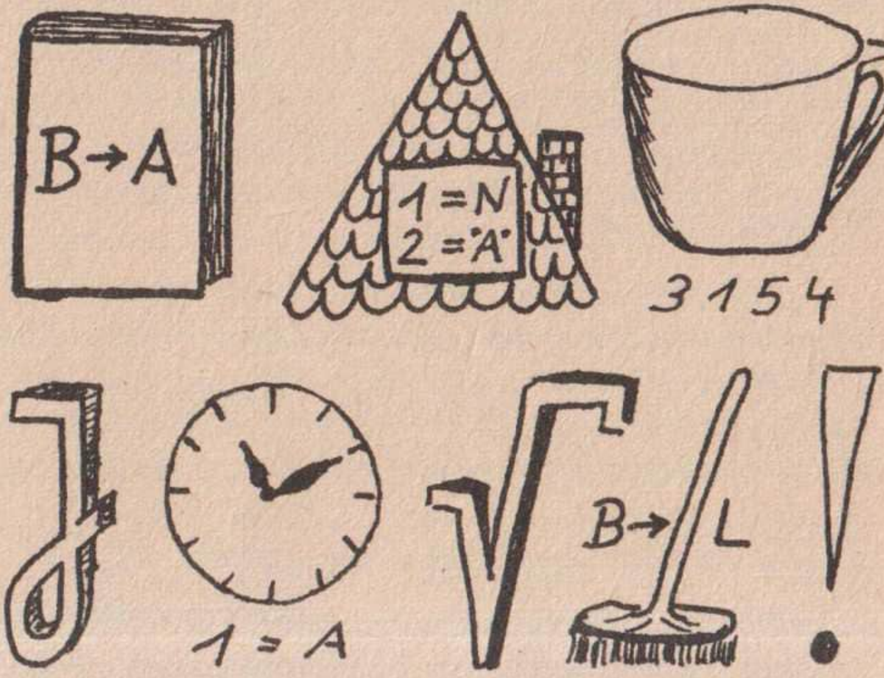
Die Gleichung ist also nur unter den genannten Voraussetzungen und $n \leq 10\,000$ (damit $4 - \lg n \geq 0$) lösbar und hat dort die angegebenen Lösungen x_1 und x_2. Da mit $1 < n \leq 10\,000$ auch

$$0 < \lg n \leq 4 \quad \text{und} \quad 2 > \sqrt{4 - \lg n} \geq 0$$

ist, erfüllen die Lösungen x_1, x_2 bereits die obige Bedingung $0 < x < 4$. Für $n = 1000$ wäre $x_2 = 1$, deshalb ist x_2 nur im Falle $n \neq 1000$ Lösung.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung": Leiter: Egbert Creutzburg
Redaktion: J. Dubslaff, H.-G. Leopold, W. Nagel, G. Weske
Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

Anschrift: WURZEL
69 Jena
Universitätshochhaus
Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45



Beachten Sie dazu bitte die Mitteilung auf Seite 64!

12
73

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Fr.-Schiller-Universität Jena

In Nummer 11/73 begannen wir mit der Veröffentlichung eines Artikels von Prof. Dr. Krätzel über

Ungelöste Probleme der geometrischen Zahlentheorie

Der Autor führte zunächst den Begriff des Gitterpunktes (Punkt in einem vorgegebenen rechtwinkligen Koordinatensystem mit ganzzahligen Koordinaten) ein. Anschließend erläuterte er eine klassische Aufgabenstellung, nämlich die Frage nach der Anzahl der Gitterpunkte auf einer Fläche, die von einer geschlossenen Kurve gebildet wird. In diesem Teil folgen genauere Abschätzungen zur Lösung des Problems und äquivalente bzw. ähnliche Problemstellungen.

Eine natürliche Frage ist die, ob wir die Abschätzung $O(\sqrt{x})$ in

$$R(x) = \pi x + O(\sqrt{x}) \tag{5}$$

nicht noch verbessern können. Dazu schreiben wir

$$R(x) = \pi x + O(x^{\alpha}) \tag{7}$$

und stellen die so ungemein schwierig zu beantwortende Frage, welchen wahren Wert die Konstante α hat. Nach (5) gilt jedenfalls $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Wir wollen jetzt überlegen, daß nicht

$$\lim_{x \to \infty} (R(x) - \pi x) = 0$$

gilt, d.h., daß $\alpha \geq 0$ ist. Nehmen wir das Gegenteil an! Wir betrachten jetzt speziell natürliche Zahlen x. Für diese Zahlen ist einerseits

$$R(x + \frac{1}{2}) = R(x)$$

und andererseits laut Annahme

$$0 = \lim_{x \to \infty} \left\{\left(R(x+\tfrac{1}{2}) - \pi(x+\tfrac{1}{2})\right) - \left(R(x) - \pi x\right)\right\}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad ,$$

was einen offenbaren Widerspruch hervorruft. Damit haben wir insgesamt gefunden, daß in (7) die wahre Konstante α in dem Intervall $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ zu suchen ist. Damit ist die Situation zu Beginn unseres Jahrhunderts geschildert.

Im Jahre 1906 erzielte der polnische Mathematiker Sierpiński den entscheidenden Fortschritt, indem er - aufbauend auf einer Untersuchung des russischen Mathematikers Voronoi - in einer überaus komplizierten und langwierigen Untersuchung $\alpha \leq \frac{1}{3}$ nachwies. Damit war der Anstoß zu einer wahren Flut von Untersuchungen und Publikationen gegeben. Der englische Mathematiker Hardy bewies eine Formel für R(x), auf deren Grundlage Landau das Sierpińskische Ergebnis in wenigen Zeilen herleiten konnte. Und Hardy bewies $\alpha \geq \frac{1}{4}$. Die Abschätzung von α nach unten konnte in der Folgezeit nur unwesentlich verbessert werden. Zur Abschätzung von α nach oben wurden von dem holländischen Mathematiker van der Corput und dem sowjetischen Mathematiker Vinogradov wirkungsvolle Methoden entwickelt, die die weitere Behandlung des Kreisproblems und weiterer Gitterpunktsprobleme entscheidend beeinflußten. Von den verschiedensten Autoren wurde die Abschätzung von α nach oben verbessert. Die beste bekannte Abschätzung lautet $\alpha \leq \frac{13}{40}$ und stammt von dem chinesischen Mathematiker Hua aus dem Jahre 1940. Damit ergibt sich für den gegenwärtigen Stand, die wahre Konstante α in (7) in dem Intervall $\frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{13}{40}$ zu suchen. Man vermutet allgemein, daß α wohl sehr dicht bei $\frac{1}{4}$ liegen wird.

Die von van der Corput und Vinogradov angegebenen Methoden erlauben auch die Abschätzung von Gitterpunktsanzahlen in solch allgemeinen Bereichen wie in Abb. 1 angegeben oder in mehrdimensionalen Bereichen. Interessant ist folgende Verallgemeinerung des Kreisproblems, die insbesondere in den letzten Jahren die Aufmerksamkeit auf sich lenkte: Es bezeichne k eine natürliche Zahl und $R_k(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte in dem Bereich

$$(8) \qquad |u|^k + |v|^k \leq x ,$$

also die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (u,v), die der Ungleichung (8) genügen. Es ist also insbesondere $R_2(x) = R(x)$. Für $k \geq 3$ ergab sich die Abschätzung

$$(9) \qquad R_k(x) = F_k x^{2/k} + O(x^{1/k - 1/k^2}),$$

wobei F_k wieder den Flächeninhalt von (8) angibt. Zur großen Überraschung läßt sich diese Abschätzung nun nicht mehr verbessern. Damit ist aber dieses Problem keineswegs erledigt! Man kann über (9) hinausgehend nämlich noch für $k > 3$ (!)

$$(10) \qquad R_k(x) = F_k x^{2/k} + g_k(x) x^{1/k - 1/k^2} + O(x^{\alpha_k})$$

zeigen. Dabei bedeutet in (10) $g_k(x)$ eine ziemlich komplizierte Funktion mit $g_k(x) = O(1)$ für $x \longrightarrow \infty$. Für die Konstante α_k wurde $\alpha_k \leq \frac{2}{3k}$ nachgewiesen, aber eine Abschätzung von α_k nach unten ist heute noch unbekannt.

Parallel zum Kreisproblem hat das sogenannte Dirichletsche Teilerproblem seine Geschichte gefunden. Es handelt sich hierbei um die zahlentheoretische Funktion $d(n)$, die die Anzahl der Teiler der natürlichen Zahl n angibt. So ist z.B. $d(1) = 1$, $d(2) = 2$, $d(3) = 2$, $d(4) = 3$, $d(p) = 2$, wenn p eine Primzahl bedeutet. Man kann $d(n)$ formelmäßig so darstellen:

$$d(n) = \sum_{t/n} 1 = \sum_{n_1 n_2 = n} 1 \quad .$$

Das bedeutet, daß in der ersten Summe über alle Teiler t von n zu summieren ist oder, was dasselbe ist, in der zweiten Summe über alle Lösungen in natürlichen Zahlen (n_1, n_2) von $n_1 \cdot n_2 = n$. Es interessiert wieder die "summatorische" Funktion

$$D(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} d(n) = \sum_{1 \leq n \leq x} \; \sum_{n_1 n_2 = n} 1 = \sum_{1 \leq n_1 n_2 \leq x} 1 \quad .$$

In der letzten Schreibweise erkennt man wieder die geometrische Seite des Problems. $D(x)$ gibt die Anzahl der Gitterpunkte unterhalb der Hyperbel $n_1 \cdot n_2 = x$ an, die nicht auf den Koordinatenachsen liegen.

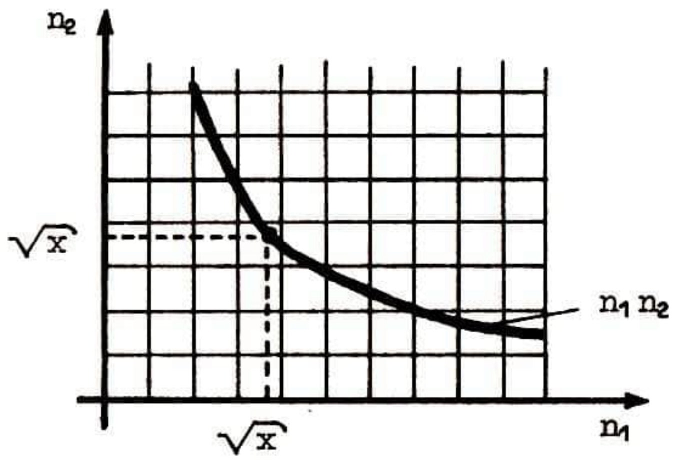


Abb. 3

Ganz leicht findet man

$$D(x) = \sum_{1 \leq n_1 \leq x} \; \sum_{1 \leq n_2 \leq \frac{x}{n_1}} 1$$

$$D(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{1 \leq n \leq x} \left\{\frac{x}{n} + O(1)\right\} = x \cdot \log x + O(x) \; .$$

Bei Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften der Hyperbel findet man ebenfalls noch leicht

$$D(x) = x\log x + (2C - 1)x + O(\sqrt{x}),$$

wobei
$$C = \lim_{x \to \infty} \left\{ \sum_{1 \leq n \leq x} \frac{1}{n} - \log x \right\}$$

die sogenannte Eulersche Konstante bedeutet. Schreibt man analog zu (7)

$$D(x) = x\log x + (2C - 1)x + O(x^{\beta}),$$

so sieht man, daß sich jetzt das Problem stellt, die wahre Konstante β zu bestimmen. Nach Dirichlet ist $0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}$. Im Jahre 1903 gelang Voronoi der entscheidende Fortschritt, indem er $\beta \leq \frac{1}{3}$ erzielte. Dieses Ergebnis ist der eigentliche Wendepunkt in der Geschichte der Bestimmung von Gitterpunktsanzahlen, denn es wurde schon erwähnt, daß beim Kreisproblem Sierpiński auf das Voronoische Ergebnis aufbaute. Von nun an wurden das Kreisproblem und das Dirichletsche Teilerproblem nahezu parallel behandelt. Hardy zeigte 1915 $\beta \geq \frac{1}{4}$. Die Abschätzung von β nach oben wurde in der Folgezeit von verschiedenen Autoren mehrfach verbessert. Das beste Ergebnis erzielten unabhängig voneinander Chih (China, 1950) und Richert (BRD, 1953) mit $\beta \leq \frac{15}{46}$. So stellt sich heute das Problem so dar, die wahre Konstante β im Intervall $\frac{1}{4} \leq \beta \leq \frac{15}{46}$ zu suchen, wobei man auch hier die Vermutung äußert, daß sich β wohl sehr nahe bei $\frac{1}{4}$ befinden wird.

Gegenwärtig beschäftigt man sich intensiv mit dem unsymmetrischen Problem

$$D(a,b;x) = \sum_{1 \leq n_1^a n_2^b \leq x} 1 \quad ,$$

bei dem a und b natürliche Zahlen mit $1 \leq a < b$ bedeuten. Die Unsymmetrie des Problems bringt aber auch außerordentliche neue Schwierigkeiten mit sich.

Abschließend sei vermerkt, daß alle modernen Resultate mit tiefliegenden Methoden der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen erzielt wurden. In der Gegenwart versucht man auch, mit elementaren Methoden an die Problematik heranzukommen. Fortschritte erreichten dabei Vinogradov, Richert sowie die Ungarn Erdös und Fuchs. Aber diese Methoden sind noch nicht so weit entwickelt, daß sie die besten vorliegenden Resultate nachzuweisen vermögen.

Prof. Dr. E. Krätzel
Professor im Bereich
Theoretische Mathematik

<u>Anmerkung (zu S. 53, dritte Zeile):</u>

$[z] = g$ ist die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich z ist, d. h., es gilt:

$$z \geq g > z - 1 \,, \qquad g \text{ ganzzahlig.}$$

Preisaufgaben 12/73

(E 57) 1

Man zeige, daß für beliebige Winkel α die Ungleichung

$$4 \cdot \sin 3\alpha + 5 \geq 4 \cdot \cos 2\alpha + 5 \cdot \sin \alpha$$

gilt!

(E 58) 2

Im Dreieck ABC ist die Differenz der Winkel α und β gegeben; $\varphi = \alpha - \beta > 0$. Außerdem ist bekannt, daß die Höhe von C auf $\overline{AB}$ (h_c) die Länge der Differenz der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ hat; $h_c = \overline{AC} - \overline{BC}$.

Man berechne die Winkel des Dreiecks!

(E 59) 1

Man beweise für $n > 2$, n natürliche Zahl, die Ungleichung

$$(n!)^2 > n^n \,.$$

(E 60) 2

Es sei R der Radius einer Kugel, der eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche einbeschrieben wird. r ist der Radius der dieser Pyramide einbeschreibbaren Kugel, die die Seiten- und Grundfläche der Pyramide berührt. Man beweise:

$$\frac{R}{r} \geq \sqrt{2} + 1 \,.$$

(E 61) 1

Falls die Funktion $f(x) = \sin x + \cos(ax)$ periodisch ist, so ist a eine rationale Zahl.

Man beweise diese Aussage!

(E 62) 1

Доказать, что

$$\left|\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy}\right| + \left|\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy}\right| = |x| + |y|$$

для любых действительных x и y, имеющих одинаковые знаки.

Bem.: одинаковые знаки – einheitliche Vorzeichen

Lösungsbedingungen wie üblich.

Einsendeschluß: 31. Januar 1974

Gewinner im Monat Oktober

Jürgen Socolowsky,	Bergfelde,	11. Klasse,
Rainer Linde,	Schmalkalden,	z. Z. NVA,
Bernhardt Worel,	Neubrandenburg,	12. Klasse.

Gewinner im Monat November

Lothar Wenzel,	Berlin,	12. Klasse,
Norman Bitterlich,	Karl-Marx-Stadt,	10. Klasse,
Marcus Kasner,	Templin,	9. Klasse.

Allen Gewinnern unseren **herzlichen** Glückwunsch!

Eine Aufgabe von Dr. habil. Roman Roth, emer. Universitätsprofessor, Jena

In der Ebene des allgemeinen Vierecks ABCD soll eine Gerade gefunden werden, welche

a) den Richtungsvektor $\mathbf{r} \nparallel \overrightarrow{AC}$ und $\mathbf{r} \nparallel \overrightarrow{BD}$ trägt und

b) die gerichteten Strecken AB und CD in einem gleichen Teilverhältnis schneidet.

1. Lösung

Man ergänzt das Dreieck ABD zum Parallelogramm $ABDH_1$. Die den Richtungsvektor $\mathbf{r}$ tragende Gerade durch A schneidet H_1C in H_2. (siehe Abb. 1). AH_2 geht durch Verschiebung mit Hilfe des Vektors $\overrightarrow{AH_3} = \overrightarrow{H_2H_4}$ in H_3H_4 über.

Behauptung: H_3H_4 ist die gesuchte Gerade.

Beweis: $DH_4 : H_4C = x : y$ (1)

$\rightarrow DH_1 : H_4H_2 = x+y : y \quad \rightarrow DH_1 = m(x+y),\ m \neq 0,$

$H_4H_2 = my.$

$DH_1 : H_4H_2 = BA : H_3A = m(x+y) : my = (x+y) : y$ (2)

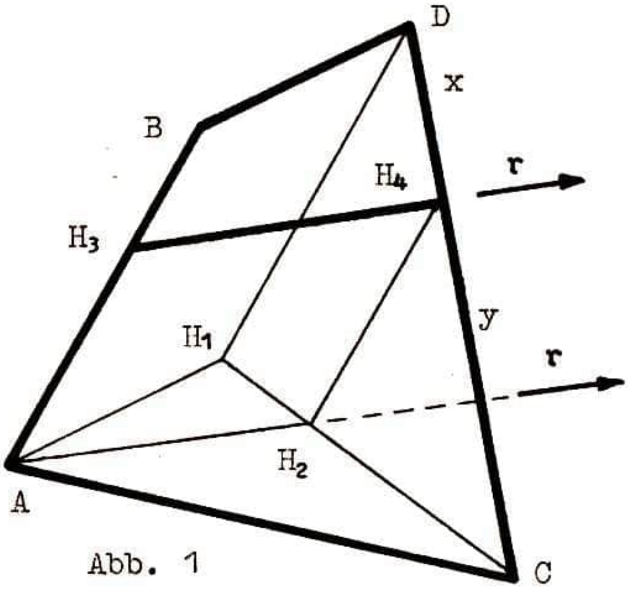


Abb. 1

Der Vergleich von (1) und (2) bestätigt das geforderte gleiche Teilverhältnis, und durch die erfolgte Schiebung ist der vorgeschriebene Richtungsvektor **r** nicht geändert worden.

<u>Anmerkung:</u> Man erledige selbständig den möglichen Fall $\mathbf{r} \parallel H_1C$, bei dem H_2 uneigentlich wird.

<u>2. Lösung</u>

1. Schritt: Man parallelprojiziere AB in Richtung **r** nach $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \in CD$ (siehe Abb. 2). (Nur im Sonderfall fällt dabei $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ mit CD zusammen; dieser Sonderfall wird in der Aufgabenstellung ausgeschlossen.)

2. Schritt: Man errichte über $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und CD die perspektivisch ähnlichen Dreiecke $\mathfrak{A}\mathfrak{B}H_1$ und CDH_2.

3. Schritt: H_1H_2 schneidet CD im Punkt H_4.
Ergebnis: Durch H_4 geht in Richtung **r** die gesuchte Gerade H_3H_4.

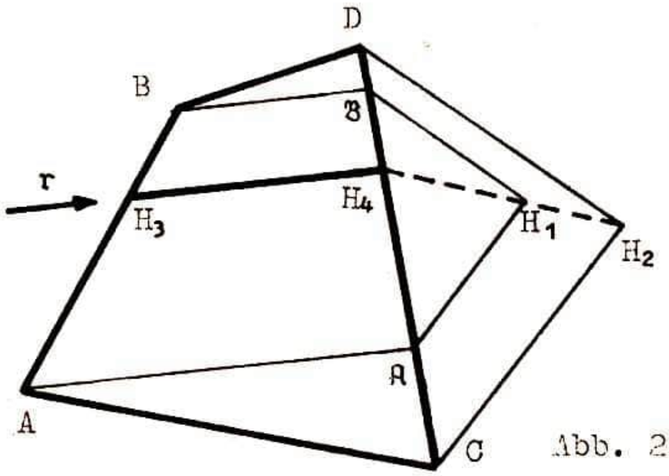


Abb. 2

Beweis:

H_4 ist der Fixpunkt der Streckung $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $C \to D$.
H_3H_4 überträgt durch Parallelprojektion das Teilverhältnis $\mathfrak{A}H_4 : H_4\mathfrak{B}$ nach $AH_3 : H_3B$.
Somit sind beide Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Die meisten Punkte ...

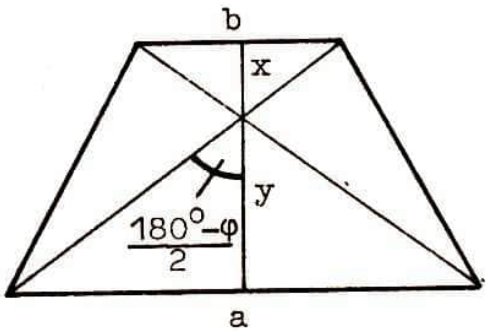
... bei der Lösung der Preisaufgaben D 43 bis E 42 des letzten Schuljahres erreichten folgende Einsender (die Klassenstufen beziehen sich auf 1972/73):

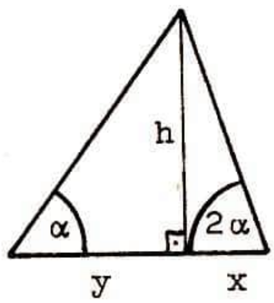
Uwe Risch	Burg	9. Klasse	58 Punkte
Jürgen Socolowsky	Bergfeld	11. Klasse	48 Punkte
Roger Labahn	Anklam	9. Klasse	19 Punkte
Heidrun Wabnitz	Jena	11. Klasse	17 Punkte
Marcus Kasner	Templin	9. Klasse	17 Punkte
Lothar Wenzel	Berlin	12. Klasse	16 Punkte
Frank Burghardt	Frankfurt/O.	10. Klasse	15 Punkte
Bernhardt Worel	Neubrandenburg	12. Klasse	15 Punkte
Dieter Erdmann	Loitz	10. Klasse	14 Punkte

Lösungen

(E 25)

(nach Frank Burghardt, Frankfurt/O., Klasse 9)





Nach Definition des Tangens gilt:

(1) $\tan 2\alpha = \frac{h}{x}$ und

(2) $\tan \alpha = \frac{h}{y}$.

Durch Umstellung erhält man:

(3) $h = x \tan 2\alpha$ und

(4) $h = x \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$.

Durch Einsetzen von (2) in (4) folgt

$$h = x \, \frac{2 \, \frac{h}{y}}{1 - \frac{h^2}{y^2}} \qquad (5)$$

Man dividiert (5) durch h und stellt die Gleichung wie folgt um:

$$1 - \frac{h^2}{y^2} = x \, \frac{2}{y} \; .$$

Nach einer Multiplikation mit y^2 erhält man

$$y^2 - h^2 = 2\,xy \; .$$

Nun eliminiert man h:

$$h^2 = y^2 - 2\,xy \quad \text{und}$$

$$h = \sqrt{y^2 - 2\,xy} \; . \qquad (6)$$

Nach der Definition des Tangens und einfachen Umstellungen erhält man:

$$\tan \frac{180^\circ - \varphi}{2} = \frac{a}{2y} \,, \quad y = \frac{a}{2 \tan \frac{180^\circ - \varphi}{2}} \quad \text{und} \qquad (7)$$

$$\tan \frac{180^\circ - \varphi}{2} = \frac{b}{2x} \,, \quad x = \frac{b}{2 \tan \frac{180^\circ - \varphi}{2}} \; . \qquad (8)$$

(7) und (8) eingesetzt in (6) ergibt:

$$h = \sqrt{\frac{a}{2 \tan \frac{180^\circ - \varphi}{2}} \cdot \frac{a - 2b}{2 \tan \frac{180^\circ - \varphi}{2}}} \quad \text{oder}$$

$$h = \frac{\sqrt{a(a - 2b)}}{2 \tan \frac{180^\circ - \varphi}{2}} \; . \qquad (9)$$

Das Volumen der Pyramide berechnet sich wie folgt:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h \quad \text{mit} \quad A_{G\ Trap} = \frac{a+b}{2} \cdot h_{Trap} \,,$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x + y\right) \cdot h \; .$$

Wir setzen Gleichungen (7), (8) und (9) ein, bekommen

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a + b}{2}\right) \cdot \left[\frac{a + b}{2 \tan \frac{180^\circ - \varphi}{2}}\right] \frac{\sqrt{a(a - 2b)}}{2 \tan \frac{180^\circ - \varphi}{2}}$$

und erhalten somit das gesuchte Volumen:

$$V = \frac{(a+b)^2 \sqrt{a(a-2b)}}{24 \tan^2 \frac{180^0 - \varphi}{2}} \quad .$$

(E 28) Eine Zahl x aus der Folge a, a+1, ..., a+15 ist genau dann prim zu allen anderen dieser Folge, wenn sie durch keine der Primzahlen 2, 3, 5, 7 teilbar ist und sie im Falle der Teilbarkeit durch 11 bzw. 13 nicht den Ungleichungen $a+5 \leq x \leq a+10$ bzw. $a+3 \leq x \leq a+12$ genügt. Streicht man aus der gegebenen Folge alle durch 2 oder durch 3 teilbaren Zahlen, so bleibt eine Restfolge der Form 2k+u (u ungerade) mit entweder a) k = 0,1,3,4,6,7 oder b) k = 0,2,3,5,6. Da eine solche Restfolge höchstens zwei Vielfache von 5 und im Falle a) höchstens zwei, im Falle b) höchstens ein Vielfaches von 7 enthält, gibt es in der Restfolge mindestens zwei durch keine der Primzahlen 2, 3, 5, 7 teilbare Zahlen n_1, n_2. Gibt es mehr als zwei, so bleibt eine auch nicht durch 11 oder 13 teilbare, also relativ prime übrig. Gibt es genau zwei, so bleibt nur der Fall zu betrachten, daß genau eine (z. B. n_1) durch 11 und genau eine (n_2) durch 13 teilbar ist und daß weder $a+5 \leq n_1 \leq a+10$ noch $a+3 \leq n_2 \leq a+12$ gilt, ferner kann angenommen werden, daß alle von n_1, n_2 verschiedenen Zahlen der Ausgangsfolge mindestens einen der Teiler 2, 3, 5, 7 haben (In allen anderen Fällen ergibt sich eine relativ prime Zahl). Der angegebene Fall ist aber nicht möglich: Der Abschnitt $a+5 \leq z \leq a+10$ enthält genau zwei Zahlen der oben angegebenen Restfolge, von denen eine – sie heiße n_3 – durch 5, eine durch 7 teilbar sein muß. Ist $n_3 \neq a+5, \neq a+10$, so gibt es in der aus fünf oder sechs Zahlen bestehenden Restfolge zu den Primzahlen 5,7,11,13 je genau ein Vielfaches, so daß mindestens eine durch keine dieser Primzahlen teilbare bleibt, im Widerspruch zur Annahme. Ist $n_3 = a+5$ (bzw. $n_3 = a+10$) und $a+5 \equiv 2 \pmod 3$ (bzw. $a+10 \equiv 1 \pmod 3$), so ist a+15 (bzw. a) ein Vielfaches von 3, gehört also nicht zur Restfolge, so daß nach Streichung der Vielfachen von 5,7,11,13 in Widerspruch zur Annahme wiederum eine Zahl übrig bleibt. Ist $n_3 = a+5 \equiv 1 \pmod 3$, so gehört a+15 zur Restfolge, aber a, a+1, a+2 nicht, so daß im Widerspruch zur Annahme $a+3 \le n_2 \le a+12$ gelten muß. Ist schließlich $n_3 = a+10 \equiv 2 \pmod 3$, so ist $a \equiv 1 \pmod 3$, a ungerade und durch 5 teilbar, so daß für n_2 ebenfalls nur $a+3 \le n_2 \le a+12$ gelten kann im Widerspruch zur Annahme.

Zu den Lösungen der Serie 6/73

Wir erhielten zu allen sechs Aufgaben Lösungen. Zwei Lösungen dieser Serie wurden bereits im Heft 11/73 veröffentlicht. Bei den Aufgaben E 32 bis E 36 traten keine charakteristischen Fehler auf, anders jedoch bei E 31. Deshalb soll jetzt eine Lösung von dieser Aufgabe angegeben werden.

Die besten Einsender dieser Serie:

Jürgen Socolowsky (8 Punkte), Lothar Wenzel (7), Bernhardt Worel (7).

(E 31)

Alle Einsender versuchten, die Lösung mit Hilfe der Differentialrechnung zu finden und gerieten dabei z.T. in erhebliche Schwierigkeiten. So wurden z.B. von einigen die Extrempunkte, aber nicht die Extremwerte bestimmt. Auch die richtigen Lösungen erschienen uns recht umständlich. Deshalb haben wir uns entschlossen, eine eigene Lösung ohne Verwendung der Differentialrechnung zu veröffentlichen.

Die Idee ist folgende:

Wir suchen eine reelle Zahl a mit

$$y(x) = a - (\sqrt{2-a}\,\sin x + \sqrt{4-a}\,\cos x)^2,$$
$$a \le 4 \quad \text{und } 2\cdot\sqrt{2-a}\cdot\sqrt{4-a} = 6 \quad .$$

Hieraus ergibt sich die quadratische Gleichung

$a^2 - 6a \cdot (-1) = 0$ mit den Lösungen

$$a_{1/2} = 3 \pm \sqrt{10} \quad .$$

Jetzt verwenden wir a_1 und a_2 wie folgt:

I. $y(x) = 2\sin^2 x + 4\cos^2 x + 6\sin x\cos x$

$$= 3 + \sqrt{10} - (1 + \sqrt{10})\sin^2 x - (\sqrt{10} - 1)\cos^2 x +$$
$$+ 6 \cdot \sin x \cos x$$
$$= 3 + \sqrt{10} - \left(\sqrt{1 + \sqrt{10}} \sin x - \sqrt{\sqrt{10} - 1} \cos x\right)^2.$$

1. Für alle x gilt:
$$-(\sqrt{1 + \sqrt{10}} \sin x - \sqrt{\sqrt{10} - 1} \cos x)^2 \le 0 .$$

2. Existiert ein x, das die Gleichheit realisiert?
$$\sqrt{1 + \sqrt{10}} \sin x - \sqrt{\sqrt{10} - 1} \cos x = 0$$
$$\tan x = \frac{\sqrt{\sqrt{10} - 1}}{\sqrt{\sqrt{10} + 1}}$$

Also wird durch eine Lösung dieser Gleichung die Null realisiert.

Somit ist $3 + \sqrt{10}$ das Maximum von y(x).

II. $y(x) = 3 - \sqrt{10} + (\sqrt{10} - 1)\sin^2 x + (\sqrt{10} + 1)\cos^2 x +$
$$+ 6 \sin x \cos x$$
$$= 3 - \sqrt{10} + (\sqrt{\sqrt{10} - 1} \sin x + \sqrt{\sqrt{10} + 1} \cos x)^2.$$

1. Für alle x gilt: $(\sqrt{\sqrt{10} - 1} \sin x + \sqrt{\sqrt{10} + 1} \cos x)^2 \ge 0$.
2. Es existiert ein x, welches die Gleichheit realisiert, nämlich die Lösung von
$$\tan x = - \frac{\sqrt{\sqrt{10} + 1}}{\sqrt{\sqrt{10} - 1}} .$$

Also ist $3 - \sqrt{10}$ das Minimum von y(x).

Zu den Lösungen der Serie 7/8/73

Von den Ferienaufgaben der Serie 7/8/73 waren die Aufgaben E 40 und E 42 besonders beliebt. Hoffentlich bleiben uns die Löser, die hier ihre ersten Punkte erhielten, auch weiterhin treu. Zu den Aufgaben E 39 und E 41 erhielten wir nur wenige Lösungen. Fehler traten lediglich bei Aufgabe E 40 auf, die von einigen offensichtlich zu leicht genommen wurde. Die Fehler waren überwiegend Rechen- bzw. Flüchtigkeitsfehler.

Die besten Einsender dieser Serie:

Jürgen Socolowsky (8), Uwe Risch (6), Frank Burghardt (6), Bernd Klipps (5).

(E 37) **L**

(nach Uwe Risch, Burg, 10. Klasse)

Wenn wir die Gleichung $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$ quadrieren, erhalten wir, da y stets nichtnegativ ist, höchstens zu viele Lösungen, die aber durch die Probe herausfallen.

$$y^2 = x^2 + x + 3$$

$$\left[y - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right]\left[y + \left(x + \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{11}{4} \qquad (*)$$

Wir substituieren: $a =_{Df} y - (x + \frac{1}{2})$

Laut Aufgabenstellung soll x rational sein. Dann ist y genau dann rational, wenn a eine rationale Zahl ist. Außerdem gilt auf Grund von (*) $a \neq 0$.
Aus (*) erhalten wir die Gleichung

$$y + \left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{11}{4a} .$$

Hieraus und aus der Definition von a als

$$a = y - \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

ergibt sich

$$x = \frac{11 - 4a - 4a^2}{8a} \quad \text{mit } a \neq 0;\ a \text{ rational.}$$

Für solche x, x ist selbstverständlich wieder rational wie gefordert (da a rational ist), ergibt sich in der Ausgangsgleichung $y^2 = x^2 + x + 3$ y als rationale Zahl. Die Probe bestätigt, daß für alle x dieser Gestalt auch $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$ eine rationale Zahl wird.

Probe:

$$y = \sqrt{\frac{(11 - 4a - 4a^2)^2}{(8a)^2} + \frac{11 - 4a - 4a^2}{8a} + 3}$$

$$y = \sqrt{\frac{121 + 88a^2 + 16a^4}{64a^2}}$$

$$y = \frac{11 + 4a^2}{|8a|}$$

(E 41) L

(nach Uwe Risch, Burg, 10. Klasse)

Es ist $\underbrace{11\ldots1}_{p\text{-mal}}\underbrace{22\ldots2}_{p\text{-mal}}\ldots\underbrace{88\ldots8}_{p\text{-mal}}\underbrace{99\ldots9}_{p\text{-mal}} - 123456789$

$$= \underbrace{11\ldots1}_{p\text{-mal}} \cdot (10^{8p} + 2\cdot10^{7p} + 3\cdot10^{6p} + \ldots + 9) -$$

$$- (10^8 + 2\cdot10^7 + 3\cdot10^6 + \ldots + 9)$$

$$= \sum_{k=1}^{9} \left(k\cdot10^{(9-k)p}\cdot\frac{10^p-1}{9} - k\cdot10^{9-k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{9} \left(k\cdot10^{(9-k)p}\cdot\frac{10^p-1}{9} - k\cdot10^{(9-k)p} + k\cdot10^{(9-k)p} - k\cdot10^{9-k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{9} \left(k\cdot10^{(9-k)p}\cdot\frac{10(10^{p-1}-1)}{9} + k\cdot10^{9-k}\cdot[(10^{9-k})^{p-1}-1]\right) \qquad (1)$$

Nach dem kleinen Satz von Fermat sind nun sowohl $10^{p-1}-1$ als auch $(10^{9-k})^{p-1}-1$ durch p teilbar, d.h. jeder Summand von (1) ist durch p teilbar und damit auch (1) selbst.

F A L L S mancher von Ihnen durch die vielen Auswertungen in diesem Heft gelangweilt ist, bitten wir um Verständnis. Wie alle anderen wollten auch wir uns noch im alten Jahr der fälligen Pflichten entledigen.

Wir wünschen Ihnen für 1974 Erfolg bei der Realisierung Ihrer Vorhaben und ein glückliches Jahr. Übrigens - beachten Sie bitte unseren Tip auf der Titelseite.

Ihre Redaktion

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung": Leiter: Egbert Creutzburg
Redaktion: J. Dubslaff, H.-G. Leopold, W. Nagel, G. Weske
Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

Anschrift: WURZEL
69 Jena
Universitätshochhaus
Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45