1

74

WURZEL

zeitschrift für mathematik an

ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
Jugendobjekt Studien-
vorbereitung der
Sektion Mathematik
an der Fr.-Schiller-
Universität Jena

Das Problem des Herren Carl Dottheim

WURZEL publizierte in Nr. 7/8/73 einen Hilferuf des Carl Dottheim, der wissen möchte, wie er durch geeignete Anwendung von Orgelspiel und Weihrauch Ruhe in seinem von Gelächter und Rauschen heimgesuchten Haus erzielen kann. Für unsere neuen Leser zitieren wir diese Aufgabe noch einmal:

> Aus einem alten Brief:
> "Vor einiger Zeit kaufte ich dieses alte Haus, aber ich bemerkte sehr bald, daß es von zwei gespensterhaften Geräuschen heimgesucht wird. Ein wüstes Sausen und ein unheimliches Gelächter machen es kaum bewohnbar. Jedoch gibt es eine Hoffnung, denn durch lange Untersuchungen fand ich, daß ihr Verhalten gewissen unbekannten, aber festen Gesetzen untergeordnet ist und daß es durch Orgelspielen oder Verbrennen von Weihrauch beeinflußbar ist.
>
> Das Sausen wird in der folgenden Minute in gleicher Weise fortgesetzt (als Lärm oder Ruhe), außer wenn in der vorhergehenden Minute Orgelspiel ohne Gelächter war, wobei es ins Gegenteil umschlägt (Lärm in Ruhe oder umgekehrt).
>
> Was das Gelächter betrifft, so ertönt es oder nicht, wenn Weihrauch verbrannt wird, übereinstimmend damit, ob das Rauschen ertönt oder nicht (das Gelächter ahmt das Rauschen eine Minute später nach). Wenn kein Weihrauch vorhanden ist, macht das Gelächter das Gegenteil des Rauschens.
>
> In dieser Minute, in der ich schreibe, sind sowohl das Gelächter als auch das Rauschen zu hören.
>
> Bitte teilen Sie mir mit, welche Handhabung vom Weihrauch und Orgelspiel ich anwenden muß, um im Haus Ruhe zu bekommen.
>
> Ihr Carl Dottheim"

Durch Nachdenken kann jeder eine Lösung des Problems angeben. Jedoch interessiert den Mathematiker ja eigentlich mehr als eine solche Lösung. Ihn interessieren Fragen wie: "Ist diese Lösung eindeutig?", wenn nein,"Wie läßt sich die Lösungsmenge bequem angeben?". Diesen Fragen wollen wir uns im folgenden zuwenden und dabei gleichzeitig etwas Automatentheorie treiben.

1. Zunächst führen wir einen speziellen Typ eines abstrakten Automaten ein, der dadurch ausgezeichnet ist, daß er nur über innere Zustände und Eingabemöglichkeiten verfügt, nicht aber über eine Ausgabe. Wir stellen uns jedoch vor, daß wir in jedem Takt den Zustand des Automaten, in dem er sich gerade befindet,

irgendwie ablesen können. Später wird sich zeigen, daß dieser zunächst recht abstrakte Automatenbegriff gut geeignet ist, unser Problem zu bearbeiten.

Wir definieren:

D e f i n i t i o n 1 :

$\mathfrak{M} = [\ Z,\ X,\ f,\ z_0]$ heißt endlicher initialer Medwedjew-Automat $=_{Df}$

1. Z und X sind nichtleere, endliche Mengen,
2. f ist eine eindeutige Abbildung von $Z \times X$ in Z,
3. $z_0 \in Z$.

Wir interpretieren nun diese abstrakte Definition wie folgt: Z ist die Menge der Zustände, X die Menge der Eingaben des Automaten $\mathfrak{M}$. Dann ordnet die Abbildung f jedem Paar (Zustand, Eingabe) einen neuen (Folge-) Zustand zu. Wie üblich wollen wir die Arbeitsweise des Automaten $\mathfrak{M}$ als universell getaktet voraussetzen, d.h. befindet sich $\mathfrak{M}$ in einem Takt t ($t \in Nz$) im Zustand z_t ($z_t \in Z$) und wird im gleichen Takt t eine Eingabe x_t ($x_t \in X$) eingegeben, so geht $\mathfrak{M}$ vermöge der sogenannten Überführungsfunktion f im nächsten Takt in den Zustand z_{t+1} ($z_{t+1} \in Z$),

$$z_{t+1} =_{Df} f(z_t,\ x_t)\ ,$$

über.

Weiter soll z_0 ein ausgezeichneter Zustand sein, den wir als Anfangszustand (Initialzustand) ansehen, d.h. im Takt 0 soll $\mathfrak{M}$ im Zustand z_0 sein.

Zum besseren Verständnis betrachten wir ein Beispiel eines solchen Automaten.

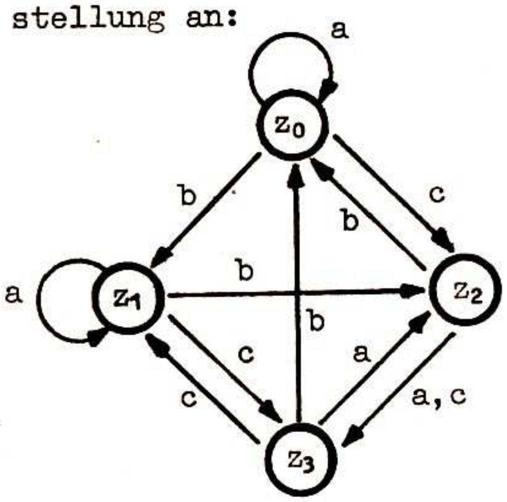
Beispiel 1 :

Es seien $Z = \{z_0,\ z_1,\ z_2,\ z_3\}$ und $X = \{a,\ b,\ c\}$. f wird durch folgende Tabelle gegeben: (Anmerkung: Wegen der Endlichkeit von Z und X können wir jede Überführungsfunktion f als (endliche) Tabelle angeben!)

f	z_0	z_1	z_2	z_3
a	z_0	z_1	z_3	z_2
b	z_1	z_2	z_0	z_0
c	z_2	z_3	z_3	z_1

Im Schnittpunkt von Zeile und Spalte der Tabelle steht dabei jeweils derjenige Zustand, der entsteht, wenn man auf den Zustand, der die Spalte bestimmt, die durch die Zeile bestimmte Eingabe gibt, z.B. ist $f(z_1, b) = z_2$ und $f(z_3, c) = z_1$.

Oft wählt man eine andere, übersichtlichere Darstellung eines endlichen Automaten, nämlich die Darstellung als endlicher, gerichteter Graph. Wir geben (für unser Beispiel) diese Darstellung an:



Dabei geben die mit a, b oder c ($a, b, c \in X$) gekennzeichneten Pfeile jeweils an, von welchem Zustand der Automat bei den entsprechenden Eingaben in welchen Zustand übergeht.

So liest man zum Beispiel sofort ab: Gibt man auf z_0 ein b, so geht der Automat in den Zustand z_1 über. Wir sind sogar in der Lage anzugeben, in welchen Zustand der Automat übergeht, wenn ihm, in einem Zustand z (z.B. im Initialzustand z_0) gestartet, eine Folge von Eingaben $x_1, \ldots, x_n$ ($x_i \in X$) eingegeben wird. (Gibt man z. B. a, b, a, c, a, b, c in dieser Reihenfolge ein (Start bei z_0), so geht der Automat in den Zustand z_2 über, wobei die Zustandfolge $z_0, z_1, z_1, z_3, z_2, z_0, z_2$ durchlaufen wurde.)

Um die Abarbeitung von Eingabefolgen besser beschreiben zu können, definieren wir:

<u>D e f i n i t i o n 2 :</u>

> X^* heißt Wortmenge über dem Alphabet (der endlichen Menge) X $=_{Df}$
>
> $$X^* =_{Df} \{p\colon p = x_1 x_2 \ldots x_n \wedge \forall i\, (1 \leq i \leq n \rightarrow x_i \in X) \wedge n \in Nz\}$$

Mit anderen Worten: Ein Wort p gehört zu X^*, wenn es aus beliebigen und beliebig endlich vielen Buchstaben des Alphabets X (hintereinandergeschrieben) besteht.

Das "leere" Wort (dasjenige Wort, das aus keinem Buchstaben besteht) bezeichnen wir durch e ($e \in X^*$).

Wir erweitern nun die Definition der Überführungsfunktion so, daß sich die Abarbeitung von Wörtern aus X^* beschreiben läßt, d.h. wir wollen eine Funktion F definieren, die einem (Anfangs-) Zustand und einem Wort p aus X^* denjenigen Zustand zuordnet, der nach Abarbeitung von p vorliegt.

D e f i n i t i o n 3 :

1. $F(z,e) = z$
2. $F(z,px) = f(F(z,p),x)$.

Machen wir uns diese induktive Definition klar:

1. Bei Eingabe des leeren Wortes e bleibt der Automat $\mathfrak{M}$ im gleichen Zustand (es wird ja "nichts" eingegeben!).
2. Geben wir ein Wort px ein, so arbeitet $\mathfrak{M}$ das Wort p ab, geht dabei in den Zustand F(z, p) über und anschließend durch die Eingabe von x aus F(z,p) in f(F(z,p),x).

Ist f gegeben, können wir damit F(z,p) für jedes p schrittweise ausrechnen. Wir betrachten dazu unser Beispiel:

$$\begin{aligned} F(z_0, \text{abacabc}) &= f(F(z_0, \text{abacab}), c) \\ &= f(f(F(z_0, \text{abaca}), b), c) \\ &= f(f(f(f(f(f(z_0, b), a), c), a), b), c) \\ &\vdots \\ &= f(z_0, c) = z_2 \end{aligned}$$

Damit haben wir eine mathematische Beschreibung für die Abarbeitung von Wörtern, wie sie z.B. im zu $\mathfrak{M}$ gehörenden gerichteten Graphen sofort ablesbar ist.

2. Es sei wieder X endliches Alphabet und X^* die Wortmenge über X. Dann sagen wir:

D e f i n i t i o n 4 :

S heißt Sprache über X $=_{Df}$ $S \subseteq X^*$.

[Anmerkung: Dieser "Sprachbegriff" ist durch Abstraktion aus unserem üblichen Sprachbegriff entstanden; legen wir etwa als Alphabet X alle auf einer Schreibmaschine vorhandenen Symbole fest, so entstehen durch wildes Umherhämmern auf dieser Schreibmaschine Wörter aus X^*; eine gewisse Teilmenge aller dieser Wörter, wie "Haus", "der", "alle" sind sinnvoll und gehören zu unserer Sprache.]

Mit Hilfe von endlichen Medwedjew-Automaten können wir nun Sprachen S ($S \subseteq X^*$) definieren.

D e f i n i t i o n 5 :

S ($S \subseteq X^*$) heißt die durch den Zustand z ($z \in Z$) des endlichen Medwedjew-Automaten $\mathfrak{M} = [Z, X, f, z_0]$ mit Initialzustand z_0 dargestellte Sprache $=_{Df}$.

$$S =_{Df} \{p: F(z_0, p) = z\} \quad .$$

Zur Verdeutlichung betrachten wir wieder unser Beispiel 1. Die durch z_3 dargestellte Sprache enthält zum Beispiel die Wörter bc, baac, ca, cc, ccbbaac, dagegen nicht die Wörter aac, bab, cbaabab.

Wie erweitern nun den Begriff des Medwedjew-Automaten, indem wir eine gewisse Untermenge $Z_{\mathfrak{F}}$ ($Z_{\mathfrak{F}} \subseteq Z$) von Zuständen auszeichnen:

D e f i n i t i o n 6 :

$\mathfrak{M}' = [Z, X, f, z_0, Z_{\mathfrak{F}}]$ heißt endlicher initialer Medwedjew-Automat mit Finalmenge $=_{Df}$

1. $\mathfrak{M} = [Z, X, f, z_0]$ endl. init. Medwedjew-Automat
2. $Z_{\mathfrak{F}} \subseteq Z$

D e f i n i t i o n 7 :

Es sei $\mathfrak{M}$ initialer Medwedjew-Automat mit Finalmenge. $S_{\mathfrak{M}}$ heißt die von $\mathfrak{M}$ dargestellte Sprache $=_{Df}$

$$S_{\mathfrak{M}} =_{Df} \{p: F(z_0, p) \in Z_{\mathfrak{F}}\} \quad .$$

Die von $\mathfrak{M}$ dargestellte Sprache besteht also aus allen und nur den Wörtern über dem Eingabealphabet X, die im Automaten vom Initialzustand z_0 in einen (beliebigen) Finalzustand führen.

Im nächsten Heft veröffentlichen wir die Lösung des Problems von Carl Dottheim.

Klaus Fischer
Assistent im Bereich Kybernetik

Gut gesagt

Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.

Albert Einstein

Preisaufgaben 1/74

(F 1) Für welche Werte a besitzt das System

1

$$|x| + |y| = 1$$
$$x^2 + y^2 = a$$

reelle Lösungen? Man gebe diese Lösungen an!

(F 2) Man gebe alle Lösungen der Gleichung

1

$\sin^2 x + \sin(2x)\sin(4x) + \ldots + \sin(nx)\cdot\sin(n^2 x) = 1$ an!

(F 3) Wieviel Koeffizienten der Entwicklung

1

$$(1 + x^2 + x^5)^{20} = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{100} x^{100}$$

sind von Null verschieden?

(F 4) Die Mittelpunkte von vier Kreisen mit dem Radius r bilden ein Quadrat der Kantenlänge a. S sei die Fläche, die von allen vier Kreisen gemeinsam überdeckt wird und im Inneren des Quadrats liegt.

2

Man berechne die Größe von S!

(F 5) Gegeben sei eine komplexe Zahl z, $z \neq \pm 1$.

1

Man zeige, daß $\frac{z-1}{z+1}$ genau dann imaginär ist, wenn $|z| = 1$ gilt!

(F 6) Доказать, что уравнение $3x^2 + 8 = y^2$ не имеет решений в целых числах.

2

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl; für 15 Wertpunkte erhält der Einsender einen Buchscheck. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender 15 Punkte haben, entscheidet das Los. Fällt ein Besitzer von 15 Punkten nicht unter die Gewinner, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil.
Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.

Letzter Einsendetermin: 1. 3. 1974

Zur Ausbildung von Diplomlehrern im Studienfach Methodik des Mathematikunterrichts

An der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität in Jena werden in einem vierjährigen Studium Diplomlehrer für die Fachkombination Mathematik/Physik ausgebildet. Dieses Studium setzt sich aus verschiedenen Studienfächern zusammen. Ein solches Fach, die Methodik des Mathematikunterrichtes, wollen wir Ihnen vorstellen. Zuständig für diese Studiendisziplin ist der Wissenschaftsbereich Methodik des Mathematikunterrichts. Er ist einer der sieben Wissenschaftsbereiche der Sektion Mathematik. Hier sind Wissenschaftler tätig, die langjährige Schulpraxis besitzen und ihre Erfahrungen in Vorlesungen, Übungen, Seminaren und Aussprachen an die Studenten weitervermitteln. Die Ausbildung in Methodik erstreckt sich über das 3. und 4. Studienjahr.

Die folgende Übersicht vermittelt einen Einblick in die einzelnen Teilbereiche der Ausbildung in Mathematikmethodik (MM).

3. Studienjahr

5. Semester	Methodischer Vorkurs	Schulpraktische Übungen	Seminar für Diplomanden in MM	Anfertigen der Diplomarbeit Einzel-konsultationen
6. Semester	Methodischer Grundkurs	Schulpraktische Übungen für Diplomanden in MM	Seminar für Diplomanden in MM	Anfertigen der Diplomarbeit Einzel-konsultationen

4. Studienjahr

7. Semester	Methodischer Grundkurs	Seminar für Diplomanden in MM	Anfertigen der Diplomarbeit Einzel-konsultationen Abgabe der Diplomarbeit
8. Semester	Großes Schulpraktikum (12-14 Wochen) Komplexer Abschlußkurs Abschluß-prüfung in MM		Verteidigung der Diplomarbeit

Nun soll kurz erläutert werden, was in den einzelnen Lehrveranstaltungen behandelt wird.

Die Methodikausbildung im 3. Studienjahr beginnt mit dem <u>methodischen Vorkurs</u>. In diesem Seminar lernen die Studenten einige Grundvoraussetzungen für die Vorbereitung und Durchführung des Mathematikunterrichts kennen. Sie beschäftigen sich mit verschiedenen Unterrichtsverfahren, setzen sich damit auseinander, wie der Lehrstoff im Mathematikunterricht vermittelt und gefestigt wird, welche Rolle Unterrichtsmittel spielen und wie sie eingesetzt werden können. Sie untersuchen verschiedene Aspekte solcher Probleme wie Fragestellung, Hausaufgabenstellung, Kontrolle und Bewertung von Schülerleistungen.

Im methodischen Vorkurs erhalten also die Studenten die Grundlagen, um den Mathematikunterricht gestalten und durchführen zu können. Die Einteilung in Seminargruppen von 15-20 Studenten gestattet es, daß jeder Student aktiv an der Diskussion teilnehmen kann. Geeignetes Studienmaterial, das durch den Bereich Mathematikmethodik entwickelt wurde und das jeder Student erhält, hilft mit, die Seminare effektiv zu gestalten.

Gleichzeitig mit dem methodischen Vorkurs beginnen die schulpraktischen Übungen. Diese Lehrveranstaltung ist eine folgerichtige Fortsetzung der Hospitationen im Rahmen des pädagogisch-psychologischen Grundkurses im 1. und 2. Studienjahr. Hier treten die Studenten erstmals als Lehrer vor die Klasse. An einem Tag in der Woche gehen Studentengruppen (4-5 Studenten) mit einem Betreuer aus dem Bereich Methodik in die Schulen. Ein Student hält eine Unterrichtsstunde. Die übrigen Studenten der Gruppe hören zu und machen sich über vorher festgelegte Gesichtspunkte Notizen.

Die Vorbereitung dieser Stunde erfordert von jedem Studenten viel Mühe und Verantwortungsbewußtsein. Der Stundenentwurf wird vorher mit dem Betreuer der Gruppe ausführlich beraten und notfalls verändert oder ergänzt.

Die Unterrichtsstunde wird in der Übungsgruppe sofort ausgewertet. Dabei erhalten alle Studenten der Gruppe Anregungen für die Gestaltung weiterer Unterrichtsstunden.

An den methodischen Vorkurs schließt der methodische Grundkurs an. Hier wechseln Vorlesungen und Seminare bzw. seminarische Übungen. Dabei eignen sich die Studenten weitere theoretische Grundlagen für den Mathematikunterricht in allen Klassen an. Sie lernen die wichtigsten Dokumente von Partei und Regierung kennen, die den Mathematikunterricht betreffen. Breiten Raum nehmen ferner solche wichtigen Probleme ein wie z. B. die Behandlung des Aufbaus der Zahlenbereiche, das Beweisen im Mathematikunterricht, die Behandlung von Gleichungen und Ungleichungen und die Erarbeitung des Funktionsbegriffs.

In den Seminaren bzw. seminarischen Übungen werden die in den Vorlesungen vermittelten Fakten nochmals diskutiert und durch zahlreiche praktische Beispiele weiter untermauert und erläutert. Vorlesungen, Seminare und Übungen zeichnen sich durch enge Verbindung zur Schulpraxis aus.

So erhalten die Studenten im methodischen Grundkurs ein festes Fundament, um einen modernen, auf den neuesten Erkenntnissen der Wissenschaft, insbesondere der Sowjetwissenschaft, beruhenden Mathematikunterricht erteilen zu können.

Etwa 20 % der Studenten eines Studienjahres schreiben die Diplomarbeit zu Fragen der Methodik des Mathematikunterrichts. Diese Studenten nehmen am sogenannten Diplomandenseminar teil. Es erstreckt sich über das 5., 6. und 7. Semester. Hier erhalten sie eine vertiefte Ausbildung in Mathematikmethodik. Es werden solche Probleme behandelt wie programmierter Unterricht, die Anfertigung von Arbeitsblättern und Folien und der Einsatz von Film und Lichtbild im Mathematikunterricht. Breiten Raum nehmen Fragen des Geometrieunterrichts und Probleme der Abiturstufe ein.

Im 5. Semester erhalten die Studenten das Arbeitsthema ihrer Diplomarbeit. Ein Teil der Diplomthemen ist mit umfangreichen Untersuchungen in der Schulpraxis verbunden. Andere sind eng mit den Forschungsaufgaben des Bereiches gekoppelt. In zahlreichen Konsultationen werden die Studenten durch ihre Betreuer unterstützt und angeleitet. Die Diplomarbeit wird am Ende des 7. Semesters abgegeben und am Ende des 8. Semesters als Abschluß des gesamten Studiums verteidigt.

Im großen Schulpraktikum (8.Semester) liegt die große Bewährungsprobe der Studenten in der Schulpraxis. Mehrere Wochen lang haben sie Gelegenheit, ihr im Studium erworbenes Wissen und ihre theoretischen Erkenntnisse in praktischer Tätigkeit als Mathematiklehrer zu erproben und zu erweitern. Auch das Praktikum ist fester Bestandteil der Methodikausbildung. Das äußert sich auch darin, daß die Studenten von den Betreuern mehrmals besucht werden.

Die Studenten führen unter Anleitung erfahrener Mentoren in der Regel den Mathematikunterricht in zwei Klassen selbständig durch. Natürlich beginnen sie erst mit wenigen Stunden, erteilen aber bereits nach 5 Wochen etwa 16 Stunden Unterricht. Auch in der außerunterrichtlichen Arbeit, in Arbeitsgemeinschaften, in der Jugendorganisation und in der Zusammenarbeit mit den Eltern bewähren sich die Studenten. Sie gehören mit zum Lehrerkollektiv der Schule. Sie finden in der Praxis bestätigt, daß der Lehrerberuf nicht nur im Stundenvorbereiten und -halten, sondern insbesondere in der Tätigkeit als sozialistischer Erzieher besteht. Gerade in der Einheit von Unterricht und Erziehung liegen die Ursachen für die guten Ergebnisse, die viele Studenten bereits im großen Schulpraktikum erzielen.

Die schulpraktische Prüfung ist der Höhepunkt dieses Ausbildungsabschnitts. In einem komplexen Abschlußkurs nach dem Schulpraktikum wird die Methodikausbildung abgeschlossen. Dabei werden die Erfahrungen des Praktikums in den Gesamtrahmen der Methodikausbildung eingeordnet.

In der mündlichen Abschlußprüfung müssen die Studenten ihre Kenntnisse in Methodik des Mathematikunterrichts, die sie in der theoretischen und praktischen Ausbildung erworben haben, nachweisen.

Vier Semester lang haben sich die Studenten mit Fragen des Mathematikunterrichts befaßt. Viel Fleiß und Ausdauer müssen aufgebracht werden, um die Probleme zu meistern.

Die Studenten haben damit die Voraussetzungen dafür erworben, einen modernen, wissenschaftlich fundierten, erfolgreichen Mathematikunterricht zu erteilen.

Dr. R. Mattasch
Lektor im Bereich Methodik
des Mathematikunterrichtes

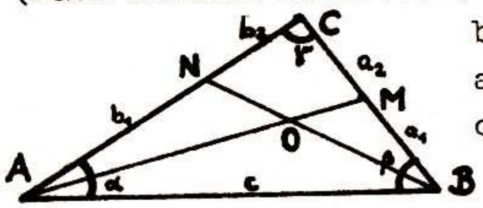
Gewinner im Monat Dezember

Zum Jahresabschluß gibt es ausnahmsweise vier Gewinner, da wir eine Auslosung vermeiden wollten.

Wolfgang Wernicke,	Röbel,	12. Klasse
Frank Burghardt,	Frankfurt/O.,	11. Klasse
Roger Labahn,	Anklam,	10. Klasse
Jürgen Socolowsky,	Bergfeld,	12. Klasse

Lösungen

(A 43) (Nach Norbert Schieweck)



$b_1 = \overline{AN}$; $b_2 = \overline{NC}$
$a_1 = \overline{BM}$; $a_2 = \overline{MC}$
$c = \overline{AB}$; $a = \overline{BC}$; $b = \overline{AC}$

Wir verwenden im weiteren den folgenden Satz:

Die Winkelhalbierende eines Dreiecks teilt die Gegenseite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten.

Dieser Satz wird von uns auf die Dreiecke ABN, ABM und ABC angewendet.
So erhalten wir:

$$\overline{BO} : \overline{ON} = \overline{AB} : \overline{AN} = 1 : (\sqrt{3} - 1) \quad \text{(nach Vorauss.)}$$
$$\overline{AO} : \overline{OM} = \overline{AB} : \overline{BM} = \sqrt{3} : 1 \quad \text{(nach Vorauss.)}$$
$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BM} : \overline{MC} = \overline{BM} : (\overline{BC} - \overline{BM})$$
$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AN} : \overline{NC} = \overline{AN} : (\overline{AC} - \overline{AN})$$

und mit den Bezeichnungen aus der Skizze sowie zwei kleinen Umformungen in den ersten beiden Gleichungen:

$$b_1 = (\sqrt{3} - 1)\, c \qquad (1)$$
$$a_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, c \qquad (2)$$
$$\frac{c}{b} = \frac{a_1}{a - a_1} \qquad (3)$$
$$\frac{c}{a} = \frac{b_1}{b - b_1} \qquad (4)$$

Durch Einsetzen von (2) in (3) und von (1) in (4) erhalten wir:

$$b = \sqrt{3}\left(a - \frac{1}{3}\sqrt{3}\, c\right) = \sqrt{3}\, a - c \qquad (5)$$
$$a = \frac{1}{\sqrt{3} - 1}\left(b - (\sqrt{3} - 1)c\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)b - c \qquad (6)$$

und aus (5) und (6) erhalten wir jetzt:

$$b = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)\, b - c\right) - c$$
$$(\sqrt{3} + 1)\, c = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)\, b \quad , \qquad b = 2c$$

und hiermit aus (5) $a = \sqrt{3}\, c$.
Mit Hilfe dieser Ergebnisse und des Kosinussatzes ergibt sich:

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \text{ und somit } \alpha = \frac{\pi}{3}$$
$$\cos\beta = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ und somit } \beta = \frac{\pi}{6}$$
$$\cos\gamma = 0 \text{ und somit } \gamma = \frac{\pi}{2} \quad .$$

(E 45) (Nach Friedhelm Schieweck)

Es sei a eine reelle Zahl und

$$a =_{Df} \sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}} \qquad (*) .$$

Wir werden im weiteren den Wert von a berechnen. Durch Umrechnung von (*) ergeben sich unter Verwendung von

$$3 \cdot \sqrt[3]{36 - \frac{847}{27}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{125}{27}} = 5$$

und der Definition von a die folgenden Gleichungen:

$$a^3 = 12 + 3 \sqrt[3]{\left(6 + \sqrt{\frac{847}{27}}\right)\left(6 - \sqrt{\frac{847}{27}}\right)} \cdot$$
$$\cdot \left[\sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}}\right]$$

$$a^3 = 12 + 3 \sqrt[3]{36 - \frac{847}{27}} \cdot a$$

$$a^3 - 5a - 12 = 0 \qquad (**)$$

$$(a^2 + 3a + 4)(a - 3) = 0$$

Aus der letzten Gleichung ist unmittelbar ablesbar, daß die kubische Gleichung (**) zwei imaginäre Lösungen sowie die Lösung $a = 3$ besitzt. Da $a = 3$ die einzige reelle Lösung ist und die Wurzeln in (*) nur reell berechnet werden, gilt

$$\sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}} = 3 \quad .$$

(E 49) (Nach Norbert Schieweck und Uwe Risch)

Das in der Aufgabenstellung gegebene Gleichungssystem erhält durch Auflösen der Klammern folgende Form:

$$\left.\begin{aligned} xyz - a(xy + xz + yz) + a^2(x + y + z) - a^3 &= d \\ xyz - b(xy + xz + yz) + b^2(x + y + z) - b^3 &= d \\ xyz - c(xy + xz + yz) + c^2(x + y + z) - c^3 &= d \end{aligned}\right\} (*)$$

Durch die Substitution

$$xyz = u \ ; \ xy + xz + yz = v \ ; \ x + y + z = w$$

erhält man ein lineares Gleichungssystem in den Variablen u, v und w.

$$u - av + a^2 w = a^3 + d$$
$$u - bv + b^2 w = b^3 + d$$
$$u - cv + c^2 w = c^3 + d$$

Als Lösungen hiervon erhalten wir:

$$u = xyz \qquad\qquad = d + abc$$
$$v = xy + xz + yz = ab + ac + bc \qquad (**)$$
$$w = x + y + z \qquad = a + b + c$$

Die Art der Lösung des linearen Gleichungssystems möchten wir hier nicht noch einmal darstellen. Wir möchten aber auf eine interessante Variante verweisen, die aus (*) sofort (**) liefert, ohne ein Gleichungssystem lösen zu müssen.
Aus (*) folgt sofort, daß a, b und c die kubische Gleichung

$$t^3 - (x + y + z)t^2 + (xy + xz + yz)t + d - xyz = 0$$

erfüllen. Da außerdem a, b und c nach Aufgabenstellung voneinander verschieden sind, sind diese drei Werte genau die Lösungen der kubischen Gleichung.
Es gilt damit nach dem Wurzelsatz des Vieta:

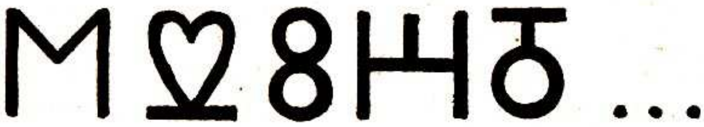
$$-(a + b + c) = -(x + y + z)$$
$$ab + ac + bc = xy + xz + yz$$
$$-abc = d - xyz$$

Dies ist aber gerade (**).
Jetzt berechnen wir noch $x^3 + y^3 + z^3$.

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= (x + y + z)^3 \\ &\quad - 3(x + y + z)(xy + xz + yz) + 3xyz \\ &= (a + b + c)^3 \\ &\quad - 3(a + b + c)(ab + ac + bc) + 3(abc + d) \\ &= \underline{\underline{a^3 + b^3 + c^3 + 3d}} . \end{aligned}$$

Haben Sie genug Phantasie?

Versuchen Sie, in den unten angegebenen Symbolen eine Gesetzmäßigkeit zu finden und die Reihe entsprechend fortzusetzen!



Zu unserem Titelbild:

In diesem Monat besteht unsere Zeitschrift 7 Jahre. Wie wir aber kürzlich erfuhren, soll es die WURZEL schon vor einigen hundert Jahren gegeben haben - unser Bild zeigt die Redaktionsräume von 1567.

Zu unserem Preisausschreiben (WURZEL 9/10)

Leider war die Beteiligung an unserer Umfrage in Heft 9/10 geringer als erwartet. Relativ wenige WURZEL-Leser nutzten die Gelegenheit, uns ihre Wünsche und Vorstellungen mitzuteilen und auf die zukünftige Gestaltung unserer (und ihrer) Zeitschrift Einfluß zu nehmen.

Eine Auswertung der Einsendungen ergab folgendes Bild:
Bei der Frage nach dem besten WURZEL-Heft des Schuljahres 1972/73 erhielt Heft 3/73 die meisten Stimmen. Folgende Artikel gefielen am besten:

Vom Rechenbrett zum Computer - Episoden einer Entwicklung
Gesetzmäßigkeiten des Zufalls
Einführung in die Funktionalanalysis

Der Schwierigkeitsgrad der Preisaufgaben wurde allgemein als "gerade richtig" oder "schwer" eingeschätzt.
Wir danken allen Einsendern für ihre Anregungen (die sehr unterschiedlich sind). Wir werden uns bemühen, ihre Hinweise und Wünsche zu berücksichtigen.

Die Gewinner sind:

Dieter Garling, Lübz,	(1. Preis)
Norbert Haack, Torgelow,	(2. Preis)
Birgit Thormann, Lobenstein,	(3. Preis)
Johannes Gerth, Eisenach,	(4. Preis)
Andreas Lösche, Weißenfels,	(5. Preis)

Die Gewinner der weiteren Preise (WURZEL-Abonnements für 1973/74) wurden bereits benachrichtigt.

Herausgeber: Leitung der FDJ-Grundorganisation der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Egbert Creutzburg
Chefredakteur: Werner Nagel
Redaktion: J. Dubslaff, H.-G. Leopold, G. Weske
Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Bezugspreis je Heft: 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
V-14-6

2

74

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Fr.-Schiller-Universität Jena

Das Problem des Herrn Carl Dottheim (II)

Durch die Bereitstellung einiger Grundlagen im ersten Teil des Artikels ist es uns nun möglich, die eingangs gestellten Fragen zu präzisieren.

Offenbar bestehen die möglichen Handlungsweisen des Carl Dottheim aus Wörtern über dem Alphabet

$$X = \left\{\binom{o}{w}, \binom{\bar{o}}{w}, \binom{o}{\bar{w}}, \binom{\bar{o}}{\bar{w}}\right\} ,$$

wobei wir folgende Abkürzungen verwenden:

o - Orgelspiel, $\bar{o}$ - kein Orgelspiel
w - Weihrauch verbrennen, $\bar{w}$ - keinen Weihrauch verbrennen

Eine Handlungsweise muß sowohl Orgelspiel als auch Weihrauch berücksichtigen, also beschreiben wir die Handlungen durch die im Alphabet genannten Paare.

Gesucht ist nun die Menge aller Wörter über X, die in den Zustand "Ruhe im Haus" führen, also eine Sprache über X.

Spätestens jetzt wird der Leser mit Vergnügen bemerken, daß wir das sausende und lachende Haus des C. D. als endlichen Medwedjew-Automaten beschreiben wollen. Was sind nun die Zustände dieses Automaten?

Wir setzen g - Gelächter, $\bar{g}$ - kein Gelächter
s - Sausen (bzw. Rauschen), $\bar{s}$ - kein Sausen.

Dann treten folgende Zustände auf :

$$Z = \left\{\binom{g}{s}, \binom{\bar{g}}{s}, \binom{g}{\bar{s}}, \binom{\bar{g}}{\bar{s}}\right\}$$

Wir haben nun die Aufgabe, aus den von C. D. geäußerten Angaben die Überführungsfunktion des Automaten zu konstruieren.

Wir konstruieren die Tabelle für f, der Leser vergleiche schrittweise mit den Angaben des C. D. :

(Die Angabe "in der folgenden Minute" fassen wir auf als "im nächsten Takt".)

	$\binom{g}{s}$	$\binom{g}{\bar{s}}$	$\binom{\bar{g}}{s}$	$\binom{\bar{g}}{\bar{s}}$	
$\binom{o}{w}$	s	$\bar{s}$	$\bar{s}$	s	1)
$\binom{o}{\bar{w}}$	s	$\bar{s}$	$\bar{s}$	s	
$\binom{\bar{o}}{w}$	s	$\bar{s}$	s	$\bar{s}$	2)
$\binom{\bar{o}}{\bar{w}}$	s	$\bar{s}$	s	$\bar{s}$	

	$\binom{g}{s}$	$\binom{g}{\bar{s}}$	$\binom{\bar{g}}{s}$	$\binom{\bar{g}}{\bar{s}}$	
$\binom{o}{w}$	g	$\bar{g}$	g	$\bar{g}$	3)
$\binom{o}{\bar{w}}$	$\bar{g}$	g	$\bar{g}$	g	
$\binom{\bar{o}}{w}$	g	$\bar{g}$	g	$\bar{g}$	3)
$\binom{\bar{o}}{\bar{w}}$	$\bar{g}$	g	$\bar{g}$	g	

[1] Orgelspiel ohne Gelächter, also schlägt Sausen ins Gegenteil um.

[2] In allen anderen Fällen bleibt der Zustand des Sausens erhalten.

[3] Weihrauch, also verhält sich das Gelächter wie Sausen.

Damit erhalten wir:

f	$\binom{g}{s}$	$\binom{g}{\bar{s}}$	$\binom{\bar{g}}{s}$	$\binom{\bar{g}}{\bar{s}}$
$\binom{o}{w}$	$\binom{g}{s}$	$\binom{\bar{g}}{\bar{s}}$	$\binom{g}{\bar{s}}$	$\binom{\bar{g}}{s}$
$\binom{o}{\bar{w}}$	$\binom{\bar{g}}{s}$	$\binom{g}{\bar{s}}$	$\binom{\bar{g}}{\bar{s}}$	$\binom{g}{s}$
$\binom{\bar{o}}{w}$	$\binom{g}{s}$	$\binom{\bar{g}}{\bar{s}}$	$\binom{g}{s}$	$\binom{\bar{g}}{\bar{s}}$
$\binom{\bar{o}}{\bar{w}}$	$\binom{\bar{g}}{s}$	$\binom{g}{\bar{s}}$	$\binom{\bar{g}}{s}$	$\binom{g}{\bar{s}}$

Zeichnen Sie zur Übung den gerichteten Graphen dieses Automaten! In diesem Graphen können Sie alle Wörter $S_{\mathfrak{M}}$ sofort ablesen.

Der gewünschte (Final-) Zustand ist Ruhe im Haus, also $\binom{\bar{g}}{\bar{s}}$, der Initialzustand ist $\binom{g}{s}$.

Sicher ist, daß C. D. wünscht, nicht nur einmal (während einer Minute) Ruhe zu haben, sondern Gelächter und Rauschen für immer zu unterbinden.

Hier stellen wir nun mit Freude fest, daß dies tatsächlich möglich ist. Ist nämlich einmal Ruhe eingetreten $\binom{\bar{g}}{\bar{s}}$, so läßt sich durch ständige Eingabe von $\binom{\bar{o}}{w}$ die Ruhe auch erhalten, d. h., C. D. muß ständig Weihrauch verbrennen, das Orgelspiel jedoch streng meiden.

Ein möglicher Weg (ein Wort aus $S_{\mathfrak{M}}$), überhaupt Ruhe zu bekommen, ist z. B.

$$p = \binom{o}{\bar{w}} \binom{o}{\bar{w}} ,$$

aber auch $$p = \binom{o}{w} \binom{o}{w} \binom{\bar{o}}{\bar{w}} \binom{o}{w} \binom{o}{w} .$$

Damit haben wir das eingangs gestellte Problem gelöst. Wir stellen aber fest, daß die möglichen Verhaltensweisen des Carl Dottheim (also die Sprache $S = S_{\mathfrak{M}}$) nur über den Automaten selbst angegeben werden können.

Es sei noch bemerkt, daß man derartige Sprachen auch "automatenfrei" (also ohne das Modell des Medwedjew-Automaten) beschreiben kann. Dazu dient zum Beispiel der von KLEENE entwickelte Kalkül.

(Siehe dazu auch: Kobrinski, Trachtenbrot: "Einführung in die Theorie endlicher Automaten")

Klaus Fischer
Assistent
im Bereich Kybernetik

Preisaufgaben 2/74

(F 7) ①

Man beweise die Ungleichung

$$\tan \alpha_1 < \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \ldots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \ldots + \cos \alpha_n} < \tan \alpha_n$$

wobei $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$ gilt.

(F 8) ①

Gegeben ist ein Kreissektor OAB (O sei das Zentrum, R der Radius des Kreises) mit einem Zentrumswinkel von 90°.
Über der Strecke $\overline{OB}$ wird mit $r = \frac{R}{2}$ ein Halbkreis im Inneren des Kreissektors beschrieben. Gesucht ist der Durchmesser desjenigen Kreises, der die Strecken $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ und den Kreisbogen $\widehat{OB}$ berührt.

(F 9) ②

Eine unendliche reelle Zahlenfolge $x_1, x_2, \ldots$ mit $x_1 \neq 0$ befriedige für beliebige $n \geq 3$ die Gleichung

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2)(x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2) =$$
$$(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n)^2 .$$

Zu zeigen ist, daß dann die $x_1, x_2, \ldots$ Glieder einer geometrischen Reihe sind.

(F 10) ①

Man gebe die Menge der reellen Zahlen an, die folgende Ungleichung erfüllen:

$$|x - 2x^2 + 4x^3 - 8x^4 + \ldots + (-2)^{n-1}x^n + \ldots| < 1 .$$

(F 11) ②

В треугольнике ABC углы α, β, γ собразуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Доказать, что

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} .$$

угол - Winkel
прогрессия - Reihe
знаменатель (прогрессии) - Stufensprung (entspricht q in der geometrischen Reihe $\sum a_1 q^k$)

(F 12) Доказать, что число $a^2 + b^2$ делится на 441, если известно, что $a^2 + b^2$ делится на 21 (a и b - натуральные числа).

Lösungsbedingungen wie üblich!

Letzter Einsendetermin: 1. 4. 1974

Gewinner im Monat Januar

Uwe Risch, Burg, 10. Klasse

Zur Ausbildung von Diplomlehrern im Fach Marxismus-Leninismus

Ein wichtiger Bestandteil in der Ausbildung der Mathematik/Physik-Lehrer ist das marxistisch-leninistische Grundlagenstudium. Es wird von den Professoren, Dozenten, Assistenten und wissenschaftlichen Mitarbeitern der Sektion Marxismus/Leninismus verantwortlich durchgeführt.

Die Lehrkräfte dieser Sektion lassen sich dabei von der Forderung des VIII. Parteitages leiten, ständig die Qualität der Ausbildung und das inhaltliche Niveau der Lehre zu erhöhen sowie die klassenmäßige Erziehung der Studenten zu verbessern.

Im Mittelpunkt des marxistisch-leninistischen Grundlagenstudiums, das sich über die gesamte Dauer des Studiums erstreckt, steht die Herausbildung der politischen, moralischen und kulturellen Merkmale und Eigenschaften der sozialistischen Persönlichkeit.

Im Konkreten heißt das, daß sich die künftigen Lehrer in allen Kursen des marxistisch-leninistischen Grundlagenstudiums bewußt die Weltanschauung der Arbeiterklasse aneignen, um zu einem hohen Verständnis der grundlegenden Gesetzmäßigkeiten der Entwicklung in der Natur, in der Gesellschaft und im menschlichen Denken zu gelangen.

Wie ist das marxistisch-leninistische Grundlagenstudium organisiert?

Im 1. Studienjahr hören die Studenten Vorlesungen über Grundfragen der marxistisch-leninistischen Philosophie. Parallel zu den Vorlesungen werden Seminare durchgeführt. Der Student eignet sich dabei wichtige theoretische Kenntnisse über den dialektischen und historischen Materialismus an. Es werden z.B. behandelt: der Gegenstand der marxistisch-leninistischen Philosophie, die Grundfrage der Philosophie, der marxistisch-leninistische Materiebegriff, die Gesetze des dialektischen Widerspruchs sowie andere wesentliche philosophische Kategorien.

Neben den grundlegenden Problemen des philosophischen und dialektischen Materialismus werden ausgewählte Probleme der Erkenntnistheorie (z.B. die marxistisch-leninistische Wahrheitsauffassung) und des historischen Materialismus behandelt.

Schwerpunkte des Kurses Politische Ökonomie im 2. Studienjahr bilden ausgewählte Fragen der kapitalistischen Produktionsweise, die Leninsche Imperialismustheorie und Probleme der politischen Ökonomie des Sozialismus.

Die Studenten beschäftigen sich in diesem Kurs unter anderem mit bestimmten Abschnitten aus dem Marxschen Werk "Das Kapital", der Leninschen Schrift "Der Imperialismus als höchstes Stadium des Kapitalismus" oder "Die große Initiative" und weiteren Klassikerschriften.

Im 3. und 4. Studienjahr wird der Kurs "Wissenschaftlicher Kommunismus - Grundlehren der Geschichte der deutschen Arbeiterbewegung" gelehrt. Hier werden, ausgehend von den Klassikerschriften des Marxismus/Leninismus und den Dokumenten und Beschlüssen, Probleme der Strategie und Taktik der Partei, der historischen Mission der Arbeiterklasse, des marxistisch/leninistischen Parteibegriffs, der Leninschen Revolutionstheorie, Fragen der Entwicklung des sozialistischen Weltsystems und der nationalen Befreiungsbewegung, des Kampfes der Arbeiterklasse in den hochentwickelten kapitalistischen Ländern und aktuelle theoretische und politische Fragen des Aufbaus der entwickelten sozialistischen Gesellschaft und des Kommunismus studiert.

Am Ende des 1. und 2. Studienjahres finden mündliche Zwischenprüfungen statt, und am Ende des 1. Semesters des 4. Studienjahres legen alle Studenten die Hauptprüfung im Fach Marxismus-Leninismus ab.

Wie sind die im Lehrprogramm festgelegten, verbindlichen Aufgaben zu erfüllen?

Neben den wöchentlich stattfindenden Vorlesungen werden Seminare durchgeführt. In den Seminaren werden anhand der in den Studienanleitungen fixierten Schwerpunkte ausgewählte theoretische und politische Fragen vertiefend behandelt. Um den Anforderungen zu genügen, ist der Student verpflichtet, die vorgegebene Pflichtliteratur gründlich und gewissenhaft zu studieren. Das systematische Selbststudium bildet die Hauptform der aktiven Wissensaneignung. Von der Qualität der Seminarvorbereitung hängt es entscheidend ab, ob ein bewußtes Eindringen in die Theorie und Praxis des Marxismus-Leninismus stattfindet, ob sich in den Seminaren ein echter Meinungsstreit entwickelt.

Den Lehrenden geht es in der Ausbildungs- und Erziehungsarbeit darum, die Vermittlung und Aneignung der theoretischen Kenntnisse mit den Erfahrungen und konkreten Ergebnissen des Klassenkampfes zu verbinden, damit theoretisches Wissen bei jedem Studenten zur Herausbildung fester Klassenpositionen führt. Der Student wird in den Seminaren gefordert, sich die Dialektik umfassend anzueignen und sinnvoll zu gebrauchen. Das geschieht nicht so, daß lediglich die Notwendigkeit des dialektischen Denkens anerkannt wird, sondern das verlangt zuerst die Beherrschung des theoretischen Rüstzeugs. Deshalb legen wir in den Lehrveranstaltungen besonderen Wert auf das Studium und die bewußte Beherrschung der Gesetze der Dialektik.

Das ist nicht nur eine Aufgabe des Kurses marxistisch-leninistische Philosophie im 1. Studienjahr. Der Student erschließt sich das kritische und revolutionäre Wesen des Marxismus-Leninismus auf dem Wege eines gründlichen Studiums, vor allem der Klassikerschriften und Parteidokumente, und der immer bewußteren Anwendung der Dialektik in den Seminardiskussionen, in der politischen Arbeit des sozialistischen Jugendverbandes sowie im Studium der Mathematik und Physik, seiner Fachwissenschaft, der Pädagogik und Psychologie. Damit ist ausgedrückt, daß man die wissenschaftlichen Kenntnisse der marxistisch-leninistischen Philosophie, der politischen Ökonomie und des wissenschaftlichen Kommunismus nicht im Selbstlauf erwirbt. Dazu bedarf es bestimmter persönlicher Anstrengungen, Ausdauer, Disziplin und vieler Mühen. Denn der Marxismus-Leninismus, als die Wissenschaft der Arbeiterklasse, muß auch als Wissenschaft betrieben, d.h. systematisch studiert werden.

Daraus leiten sich solche Forderungen an die Studenten ab, sich konsequent und genauestens die Kategorien des dialektischen und historischen Materialismus, Begriffe und Gesetze der politischen Ökonomie und des wissenschaftlichen Kommunismus anzueignen. Also ohne exaktes Wissen in den Disziplinen des Marxismus-Leninismus und ohne die Fähigkeit, dieses Wissen bei der Erziehung und Bildung junger Menschen selbständig anzuwenden, gibt es keinen erfolgreichen sozialistischen Lehrer.

Ein Oberschüler, der sich während seiner Schulzeit in den gesellschaftswissenschaftlichen Fächern solche Fähigkeiten aneignet wie dialektisches Denken, Bewerten von politischen Ereignissen auf der Grundlage der Position der Arbeiterklasse oder wie Ausdauer und Fleiß beim selbständigen Durcharbeiten von Klassikerschriften, sich ständig übt im Erfassen des Wesentlichen und im Anwenden der Theorie, wird bestimmte Anfangsschwierigkeiten schneller überwinden. Wesentlich ist aber nicht nur die Aneignung der marxistisch-leninistischen Grundkenntnisse, sondern auch deren Anwendung in der gesellschaftlichen Praxis.
Studenten, die in der EOS oder in den Berufsschulen eine Funktion in der FDJ, in der GST oder in anderen Massenorganisationen ausübten bzw. aktiv das politische Leben in der Klasse und Schule mitgestalteten, haben sich in der Regel dabei bestimmte Voraussetzungen erworben, um den Anforderungen des Universitätsstudiums in hohem Maße zu genügen.

Bewährt hat sich an der Universität, daß der sozialistische Jugendverband den Prozeß der schöpferischen Aneignung und Anwendung des Marxismus-Leninismus als den wichtigsten Gegenstand seiner Arbeit betrachtet.

Unsere Erfahrungen besagen: Die Fortschritte sind dann am deutlichsten, wenn die FDJ-Grundeinheiten und -Gruppen eng mit den Seminarleitern und den Lehrenden im Marxismus-Leninismus, mit den Betreuern sowie dem Erzieherkollektiv zusammenwirken. Die FDJ-Gruppe ist die Basis für die politische Entwicklung der Lehrerstudenten. Hier erhalten sie die vielfältigsten Möglichkeiten, ihr Profil als künftige sozialistische Lehrer zu formen und zu stabilisieren.

Am besten gelingt das den Kollektiven, die nicht in erster Linie sogenannte "Sachfragen" in den Vordergrund schieben, sondern vielmehr um das ideologische Verständnis, um die Notwendigkeiten und gesellschaftlichen Zusammenhänge in der täglichen Erziehungsarbeit ringen. Es ist und bleibt eine alte Weisheit der Arbeiterklasse, daß allein die marxistisch-leninistische Theorie und Politik zum Verständnis der grundlegenden Gesetzmäßigkeiten führt und befähigt.

Von großer Bedeutung ist deshalb, im Rahmen der Tätigkeit der FDJ den Studenten weitere Möglichkeiten zur Entfaltung ihrer praktisch-theoretischen Kenntnisse zu schaffen.

Das geschieht in der politischen Praxis z.B. bei der Gestaltung des FDJ-Lehrjahres, beim Auftreten in Versammlungen und Zusammenkünften der Studenten, in der kulturellen Tätigkeit und im aktiven Mitgestalten des jährlich stattfindenden Studentenwettstreits. Damit wird das Studium des Marxismus-Leninismus bereichert, und die Studenten werden entsprechend ihren Möglichkeiten zur selbständigen wissenschaftlichen Arbeit angeregt.

Dieter Schuster
wiss. Mitarbeiter der
Sektion Marxismus-Leninismus

Einführung in die Theorie der Halbgruppen (I)

Halbgruppen, mit denen schon die Schüler der ersten Klassen, ohne es zu wissen, im Rechenunterricht zu tun haben, sind aus der Mathematik nicht mehr wegzudenken. Sie tauchen in den verschiedensten Gebieten an entscheidenden Stellen auf. Zunächst erfuhren sie nur insofern Beachtung, als sie in irgendwelchen anderen Zusammenhängen wichtig waren. Heute kann man von einer selbständigen Theorie der Halbgruppen sprechen, in der die Halbgruppen selbst und ihre Eigenschaften den Gegenstand der Forschung bilden.

1. Zweistellige Operationen

Es sei M eine beliebige Menge. Eine Funktion ω von zwei Veränderlichen, deren Argumente und Werte in M liegen, heißt zweistellige Operation auf M. An Stelle der Schreibweise $\omega(a,b)$ bevorzugt man bei zweistelligen Operationen Schreibweisen der Art $a \cdot b$, $a * b$, $a \circ b$ o.ä.

Beispiele:

Mit Nz bezeichnen wir die Menge $\{0,1,2, \dots \}$ der natürlichen Zahlen.

1. Addition und Multiplikation sind Operationen auf Nz, denn mit $a,b \in$ Nz sind stets auch $a+b$ und $a \cdot b$ natürliche Zahlen.

2. Durch $p(a,b) =_{Df} a^b$ ist eine Operation p auf Nz definiert

3. Durch $a * b =_{Df} 3a + ab + b^2$ ist eine Operation $*$ auf Nz definiert.
   Es gilt z. B. $2 * 1 = 9$, $0 * 10 = 100$, $10 * 0 = 30$.

4. Maximumbildung:
$$\max(a,b) =_{Df} \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq b \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$
   Es gilt z. B. $\max(2,5) = 5$, $\max(7,3) = 7$.

2. Eigenschaften zweistelliger Operationen

Die Operation $\bullet$ auf M heißt **assoziativ** $\Longleftrightarrow_{Df}$ Für alle $a,b,c \in M$ gilt $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$.
Die Operation $\bullet$ auf M heißt **kommutativ** $\Longleftrightarrow_{Df}$ Für alle $a,b \in M$ $a \bullet b = b \bullet a$.
e heißt **Einselement** oder besser **neutrales Element** der Operation $\bullet$
$\Longleftrightarrow_{Df}$ Für alle $a \in M$ gilt $a \bullet e = e \bullet a = a$.

Wir untersuchen nun die oben angegebenen Operationen daraufhin, ob sie einige dieser Eigenschaften besitzen. Es ergibt sich : Addition, Multiplikation und Maximumbildung sind assoziativ und kommutativ. p und $*$ sind weder kommutativ noch assoziativ, denn es gilt z.B.

$$2^3 = 8 \neq 9 = 3^2, \quad 0 * 10 = 100 \neq 30 = 10 * 0,$$

$$2^{(2^3)} = 256 \neq 64 = (2^2)^3, \quad (2 * 1) * 1 = 9 * 1 = 37 \neq 41$$
$$41 = 2 * 5 = 2 * (1 * 1) \quad .$$

Die Addition besitzt das Einselement 0, bezüglich der Multiplikation ist 1 Einselement, max hat 0 als Einselement, und p und $*$ haben kein Einselement.

3. Halbgruppen

Ist auf einer Menge M eine zweistellige Operation $\bullet$ definiert (d.h. gehört mit je zwei Elementen a,b stets auch $a \bullet b$ zu M), so nennen wir das Paar **$[M,\bullet]$ eine Halbgruppe, wenn $\bullet$ assoziativ ist.** M nennt man auch die Trägermenge der Halbgruppe oder die Menge ihrer Elemente. Eine Halbgruppe heißt **kommutativ**, wenn $\bullet$ zusätzlich kommutativ ist, und wir sprechen von einer **Halbgruppe mit Einselement**, wenn M bezüglich $\bullet$ ein Einselement enthält.

Wir beweisen den

Satz:

Eine Halbgruppe kann höchstens ein Einselement besitzen.

Beweis: Sind e_1, e_2 Einselemente einer Halbgruppe $[M,\cdot]$, so ist $e_1 \cdot e_2 = e_1$, weil e_2 Einselement ist, und $e_1 \cdot e_2 = e_2$, weil e_1 Einselement ist; also ist $e_1 = e_2$. $\blacksquare$

Aus diesen obigen Überlegungen ergibt sich sofort, daß [Nz,+], [Nz,·], [Nz,max] kommutative Halbgruppen mit Einselement sind. [Nz,p] und [Nz,*] sind keine Halbgruppen, weil p und * nicht assoziativ sind. [{1,2,3} , +] ist keine Halbgruppe, weil {1,2,3} nicht abgeschlossen ist bezüglich der Addition, denn beispielsweise ist $3+3 \notin \{1,2,3\}$. [{1,2,3,...} ,+] ist kommutative Halbgruppe ohne Einselement.

Ist M eine beliebige Menge und bezeichnet $\mathfrak{P}(M)$ die Menge aller Teilmengen von M, so sind [$\mathfrak{P}(M)$, $\cap$] und [$\mathfrak{P}(M)$, $\cup$] kommutative Halbgruppen, von denen die erste das Einselement M, die zweite das Einselement $\emptyset$ besitzt.

Dr. Gerd Wechsung
Dozent im Bereich
Mathematische Kybernetik

Dieser Artikel wird im nächsten Heft fortgesetzt.

Lösungen

Zur Serie 9/10/73

Die Aufgaben der Serie 9/10/73 waren etwas leichter als gewöhnlich. Das drückte sich auch in der hohen Zahl von richtigen Lösungen aus. Charakteristische Fehler traten bei keiner Aufgabe auf.

Aufgabe E 47

(nach Hans-Ulrich Frömmer, Peckatel, Klasse 11)

Behauptung: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2$

Beweis: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{n(n-1)}$, da

$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$ für alle k, $k \geq 2$, $k \in N$.

Wegen $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1+k-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

folgt $1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{n(n-1)} = 2 - \frac{1}{n} < 2$, da $n > 0$.

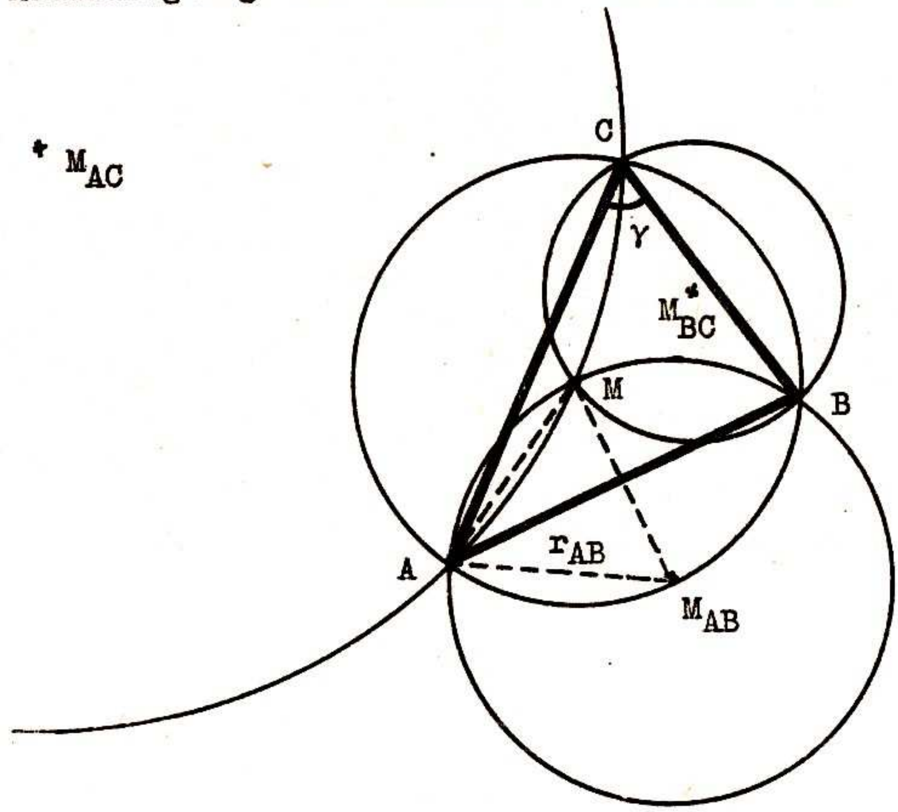
Und damit ist

$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2$. q.e.d.

Aufgabe E 50

(eingesandt von Jürgen Socolowsky, Bergfelde, Klasse 12)

Die Abbildung möge die Situation veranschaulichen:



Es ist $a = 2$, $b = 3$, $\gamma = 60^\circ$.

Zunächst berechnen wir den Flächeninhalt A des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3} \tag{1}$$

Nach dem Kosinussatz ergibt sich andererseits:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 7$$

$$\curvearrowright \quad c = \sqrt{7} \tag{2}$$

Aus der Beziehung $A = \frac{abc}{4r}$ gewinnen wir somit für den Umkreisradius r:

$$r = \frac{abc}{4A} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{7}}{4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{7} \cdot \sqrt{3} \; . \tag{3}$$

Als nächstes berechnen wir den Winkel $\varphi_{AB} = \sphericalangle AMB$.

Es ist $\sin\frac{\varphi_{AB}}{2} = \frac{c}{2r} = \frac{\sqrt{7}}{2 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{7}\,\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Wegen $\varphi_{AB} < 180^0$ ist nun

$$\frac{\varphi_{AB}}{2} = 60^0 \curvearrowright \varphi_{AB} = 120^0 \qquad (4)$$

Wir beweisen nun folgenden Hilfssatz:

$$\boxed{\sin \varphi = \sin \frac{360^0 - 2\varphi}{2}}$$

Beweis:

$$\sin \frac{360^0 - 2\varphi}{2} = \sin(180^0 - \frac{2\varphi}{2}) = \sin \frac{2\varphi}{2} = \sin \varphi .$$

Nach dem Hilfssatz ist unabhängig davon, ob M_{AB} innerhalb oder außerhalb des Dreiecks liegt, folgende Beziehung erfüllt:*)

$$\sin \varphi_{AB} = \sin \sphericalangle AM_{AB}M = \frac{1}{2}\sqrt{3} .$$

Nun gilt im Dreieck $\Delta AM_{AB}M$ nach dem Sinussatz:

$$\frac{\sin \frac{\varphi_{AB}}{2}}{r_{AB}} = \frac{\sin \left(\frac{360^0 - 2\varphi_{AB}}{2}\right)}{r} = \frac{\sin \varphi_{AB}}{r}$$

$$r_{AB} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{7}\,\sqrt{3}$$

$$\underline{\underline{r_{AB} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\sqrt{7}}} .$$

Die Berechnung der beiden anderen Radien erfolgt völlig analog. Man erhält dann:

$$\underline{\underline{r_{AC} = \frac{7}{3}\sqrt{3}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{r_{BC} = \frac{7}{12}\sqrt{3}}} .$$

*) Anmerkung: Die Beziehung im Hilfssatz drückt aus, daß der Sinus des halben Zentriwinkels zu einem gegebenen Peripheriewinkel φ immer gleich $\sin \varphi$ ist, unabhängig davon, ob der Zentriwinkel 2φ oder $360^0 - 2\varphi$ beträgt.

Professor Pietsch würde an dieser Stelle sagen:
"Also, ich schreibe jetzt 'trivial' dahinter, und wenn Sie's nicht verstanden haben, dann schreiben Sie auch 'trivial' hin!"

(Zitiert aus der Festausgabe zum diesjährigen MB.)

Und hier noch drei Happen aus der MB-Festzeitung ...

Dr. Mecke: "Ich sage das jetzt noch mal mündlich!"

Dr. Oloff: "Wir werden nachher noch eine Differentialgleichung lösen, die wir nicht lösen können."

Prof. Pietsch: "Bei dieser Aufgabe können Sie sich ruhig verrechnen. Es kommt immer das Richtige raus."

MB 74

Auch in diesem Jahr fand wieder der traditionelle Mathematikerball, spektakulär MB genannt, statt . Wir zitierten schon einige Kostproben aus der MB-Zeitung. Das Programm des Abends und die Zeitung gestalteten Studenten des dritten Studienjahres. Die fruchtbare Zusammenarbeit zwischen Diplomanden und Lehrerstudenten zahlte sich aus - sie zeigten ein gelungenes Programm. Hartmut Menzer (Mitarbeiter der Sektion Mathematik) sagte einmal:"Auf daß der MB der Größte werde, denn die Mathematik als Königin der Wissenschaften hat es so verdient." Er mußte sich nicht eines Besseren belehren lassen.
Zum Schluß sei es uns gestattet, dem Leser noch einen Einfall aus der MB-Zeitung anzubieten:

Die Idee (frei nach Chr. Morgenstern)

Ein finstrer Esel
sprach einmal
zu seinem ehelichen
Gemahl:

Ich bin so dumm,
du bist so dumm.
Wir wollen
Mathe lernen..
Kumm.

Herausgeber: Leitung der FDJ-Grundorganisation der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Egbert Creutzburg
Chefredakteur: Werner Nagel
Redaktion: J. Dubslaff, H.-G. Leopold, G. Weske
Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Bezugspreis je Heft: 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
V-14-6

3

74

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Fr.-Schiller-Universität Jena

Einführung in die Theorie der Halbgruppen (II)

Hiermit setzen wir den in Heft 2/74 begonnenen Artikel über die Theorie der Halbgruppen fort.

4. Abbildungshalbgruppen

Beispiele nichtkommutativer Halbgruppen findet man leicht unter den sogenannten Abbildungshalbgruppen.

Um Abbildungshalbgruppen zu beschreiben, denken wir uns eine feste Menge A und bezeichnen mit A^A die Menge aller eindeutigen Abbildungen von A in A.

Beispiel: Es sei $A = \{a,b\}$. Die Elemente von A^A , d.h. die Abbildungen von A in A, wollen wir in der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix}$ schreiben und folgendermaßen verstehen:

Ist $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix}$, so ist α diejenige Abbildung, die durch $\alpha(a) = x$, $\alpha(b) = y$ definiert ist. Man sieht sofort, daß A^A aus genau den folgenden Abbildungen besteht:

$\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ a & a \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$, $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Nun kann man folgendermaßen ein "Produkt" $\varphi \bullet \psi$ von Abbildungen $\varphi, \psi \in A^A$ definieren (die sogenannte Hintereinanderausführung oder Superposition):

$$(\varphi \bullet \psi)\ (x) =_{Df} \psi(\varphi(x)) \qquad \text{für } x \in A.$$

In Worten bedeutet diese Definition: $\varphi \bullet \psi$ ist diejenige Abbildung, die, angewendet auf ein $x \in A$, dasjenige Bildelement liefert, das man erhält, wenn man zuerst φ auf x anwendet und auf das dabei entstehende Element noch die Abbildung ψ anwendet.

Fortsetzung des Beispiels: $(\alpha \bullet \beta)\ (a) = \beta(\alpha(a)) = \beta(a) = b$, $(\alpha \bullet \beta)\ (b) = \beta(\alpha(b)) = \beta(a) = b$, d.h. $\alpha \bullet \beta = \beta$.

Dadurch ist auf der Menge A^A die zweistellige Operation $\bullet$ eingeführt worden. Wir beweisen den

Satz: $[A^A, \bullet]$ ist eine Halbgruppe.

Beweis: Es muß zweierlei gezeigt werden.

(1) Mit $\varphi, \psi \in A^A$ ist stets auch $\varphi \bullet \psi \in A^A$.

(2) $\bullet$ ist assoziativ.

Zu (1): Aus der Definition von $\bullet$ geht hervor, daß $\varphi \bullet \psi$ wieder eine Abbildung von A in A ist, wenn nur φ und ψ solche Abbildungen sind.

Zu (2): Zu zeigen: Sind φ, ψ, χ drei beliebige Abbildungen von A in A, so ist stets $(\varphi \bullet \psi) \bullet \chi = \varphi \bullet (\psi \bullet \chi)$.
Dazu braucht nur gezeigt zu werden, daß die Abbildungen $(\varphi \bullet \psi) \bullet \chi$ und $\varphi \bullet (\psi \bullet \chi)$ bei Anwendung auf das gleiche Element $x \in A$ das gleiche Bildelement liefern. Dies ist in der Tat der Fall. Denn durch zweimalige Anwendung der Definition von $\bullet$ ergibt sich $((\varphi \bullet \psi) \bullet \chi)(x) = \chi((\varphi \bullet \psi)(x)) = \chi(\psi(\varphi(x)))$, und ganz entsprechend ist

$$(\varphi \bullet (\psi \bullet \chi))(x) = (\psi \bullet \chi)(\varphi(x)) = \chi(\psi(\varphi(x))), \text{ also}$$
$$((\varphi \bullet \psi) \bullet \chi)(x) = (\varphi \bullet (\psi \bullet \chi))(x). \qquad \blacksquare$$

Weitere Fortsetzung des Beispiels

Die Halbgruppe $[A^A, \bullet]$ ist nicht kommutativ. Denn es gilt beispielsweise $\alpha \bullet \beta = \beta$, aber $\beta \bullet \alpha = \alpha$.
Bereits $H = \{\alpha, \beta\}$ ist Trägermenge einer nichtkommutativen Halbgruppe $[H, \bullet]$, die vollständig durch die folgenden Gleichungen beschrieben wird: $\alpha \bullet \alpha = \beta \bullet \alpha = \alpha$, $\alpha \bullet \beta = \beta \bullet \beta = \beta$.

5. Reguläre Halbgruppen

Die multiplikative Halbgruppe $[Nz, \cdot]$ hat die angenehme Eigenschaft, daß man aus einer Gleichung der Form $ax = bx$ mit $x \neq 0$ immer $a = b$ schließen kann (obwohl in der Halbgruppe das Dividieren nicht erlaubt ist!). Die Verallgemeinerung dieser Eigenschaft führt zu der Definition: x heißt rechtsreguläres Element der Halbgruppe $[M, \bullet]$, wenn aus einer Gleichung der Form $a \bullet x = b \bullet x$ stets $a = b$ folgt.
Rechtsreguläre Elemente sind also solche, die "gekürzt" werden dürfen, wenn sie als Rechtsfaktoren auftreten. Entsprechend

kann man linksreguläre Elemente definieren. Ein Element heißt regulär, wenn es gleichzeitig rechts- und linksregulär ist. Eine Halbgruppe heißt regulär, wenn sie nur reguläre Elemente enthält.

Beispiel: In der am Ende des 4. Abschnitts angegebenen Halbgruppe $[H,\bullet]$ sind die Elemente α und β nicht rechtsregulär (es gilt nämlich beispielsweise $\alpha\beta = \beta\beta$ und gleichzeitig $\alpha \neq \beta$), aber sie sind beide linksregulär.

Aufgaben:

1) Welche der oben angegebenen Halbgruppen sind regulär?
2) Es sei $[M,\cdot]$ eine Halbgruppe, $a \in M$ und $a \cdot a = a$. Ist a regulär, so ist a Einselement.
3) Es sei a linksreguläres Element der Halbgruppe $[M,\cdot]$. Falls ein $u \in M$ existiert mit $a \cdot u = a$, so ist u Linkseinselement (d. h., für jedes $x \in M$ gilt $u \cdot x = x$).

6. Erzeugendensysteme in Halbgruppen

Ist $[M,\bullet]$ eine Halbgruppe, so nennen wir eine Teilmenge $E \subseteq M$ ein Erzeugendensystem dieser Halbgruppe, wenn jedes Element $x \in M$ eine Darstellung der Form $x = a_1 \bullet a_2 \bullet \ldots \bullet a_n$ gestattet, wobei n eine (von x abhängige) natürliche Zahl ist und $a_1, \ldots, a_n \in E$ gilt.

Beispiele:

1. In der Halbgruppe $[H,\bullet]$ ist $\{\alpha,\beta\}$ ein (nicht verkleinerbares) Erzeugendensystem.
2. In $[Nz,+]$ ist $E = \{1\}$ Erzeugendensystem. Beispielsweise ist $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$. Auch die 0 ist als "Summe" von Einsen darstellbar, nämlich als "Summe" von 0 Einsen.
3. $[\{1,2,3, \ldots\}, \cdot]$ ist Halbgruppe mit dem Erzeugendensystem $\{2,3,5,7, \ldots\}$ = Menge der Primzahlen.

7. Freie Halbgruppen

Eine Halbgruppe $[M, \bullet]$ heißt frei, wenn es eine Teilmenge $B \subseteq M$ gibt (die sogenannte Basis), die Erzeugendensystem für $[M,\bullet]$ ist, wobei gilt (eindeutige Basisdarstellung):
(1) Aus $x = b_1 \bullet b_2 \bullet \ldots \bullet b_n = b_1' \bullet \ldots \bullet b_m'$ und $b_1', \ldots, b_m' \in B$ folgt stets $n = m$ und $b_1 = b_1'$ und ... und $b_n = b_n'$.

Von den bisher genannten Beispielen von Halbgruppen ist nur $[Nz, +]$ frei. Ihre Basis ist $\{1\}$. In allen anderen genannten Halbgruppen findet man keine Basis im eben definierten Sinne.

Freie Halbgruppen werden gewöhnlich in der Form von Worthalbgruppen angegeben. Darunter versteht man folgendes. Es sei B eine endliche Menge, ein sogenanntes Alphabet. B^* bezeichne die Menge aller "Wörter" endlicher Länge, die aus Buchstaben aus B gebildet werden können. Ist z.B. $B = \{a, b, c\}$, so sind a, bab, cccaba solche Wörter. Auch das sogenannte "leere Wort" soll zu B^* gehören. Es enthält keinen einzigen Buchstaben und werde mit e bezeichnet. Definieren wir nun als "Multiplikation" einfach die Aneinanderreihung von Wörtern, z.B.
$aa \cdot bca =_{Df} aabca$, so entsteht offenbar eine Halbgruppe mit Einselement e. Das ist die freie Halbgruppe mit der Basis B.

In freien Halbgruppen ist offenbar jedes Element regulär. Es gilt darüberhinaus der

Satz:

$[H, \cdot]$ ist eine freie Halbgruppe mit Einselement e und Basis B genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
(2) Das neutrale Element e gestattet keine Darstellung der Form $e = b_1 \cdot \ldots \cdot b_n$ mit $n > 0$ und $b_1, \ldots, b_n \in B$.
(3) Aus $u \cdot b = v \cdot c$ mit $b, c \in B$ und $u, v \in H$ folgt stets $u = v$ und $b = c$ (scharfe Kürzungsregel).

Daß eine freie Halbgruppe, d.h. eine solche mit Bedingung (1) diese Eigenschaften besitzt, folgt unmittelbar. Zum Beweis der Freiheit (d.h. der Bedingung (1)) einer Halbgruppe, die (2) und (3) erfüllt, braucht man nur vollständige Induktion über n anzuwenden. Der Induktionsbeginn wird durch (2) ermöglicht, der Induktionsschluß gelingt mit Hilfe von (3).

Denjenigen Lesern, die sich näher mit der Halbgruppentheorie beschäftigen möchten, empfehlen wir:

[1] Rédei, Ladislaus: Algebra (Leipzig 1959)
[2] Rédei, Ladislaus: Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen (Leipzig 1963)
[3] Ляпин, Евгений Сергеевич: Полугруппы (Москва 1960)
[4] Мальцев, Анатолий Иванович: Алгебраические системы (Москва 1970)

Dr. Gerd Wechsung
Dozent im Bereich
Mathematische Kybernetik

Zu unserem Titelbild

Am 31. März 1727 (nach damaliger Zählung am 20. März) starb im Alter von 84 Jahren einer der bedeutendsten Naturwissenschaftler des 17. und 18. Jahrhunderts - Isaac Newton. Seine großen Entdeckungen beeinflußten nachhaltig die weitere Entwicklung der Physik, Astronomie und Mathematik. Es sei hier nur auf Newtons Werk "Mathematische Grundlagen der Naturwissenschaft" (1687) hingewiesen, das z. B. eine Darstellung der Mechanik auf rein axiomatischer Grundlage sowie das Gravitationsgesetz enthält. In Verbindung mit Problemen der Physik entwickelte er die Differential- und Integralrechnung - unabhängig von dem deutschen Gelehrten Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716). Weiterhin veröffentlichte er Arbeiten über Kegelschnitte, unendliche Reihen, Algebra oder z. B. das nach ihm benannte Verfahren zur angenäherten Bestimmung der Nullstellen von Funktionen.

Im Rahmen dieses Beitrages ist es nicht möglich, das Verdienst Isaac Newtons eingehender zu würdigen. Die folgenden Auszüge aus einem Nachschlagewerk des 18. Jahrhunderts zeigen, welche Anerkennung Newton, der bereits zu Lebzeiten überall angesehen war, schon damals zuteil wurde:

N E W T O N (Isaac), ein englischer Weltweiser und Mathematicus, gebohren zu Woolstrop in der Grafschafft Lincoln 1642 den 25 Dec. legte sich von Jugend an auf die Mathesin[1]), lernte Cartesii Geometrie, Keplers Optic, und den Euclidem bald verstehen, und hatte bereits im 24 Jahre grosse Entdeckungen in der Geometrie gemacht. Er zohe 1660 auf die Academie nach Cambridge, ward ... 1669 Professor

[1]) Mathematik

Fortsetzung S. 107

Preisaufgaben 3/74

(F 13) ① Die Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilden eine arithmetische Folge. Man gebe diese Folge an, wenn $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$ und $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = b$ gilt.

(F 14) ① Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck. Einer seiner Basiswinkel sei gleich α. Man berechne das Verhältnis von Umkreisradius zu Inkreisradius und gebe den Winkel α an, für den das Verhältnis seinen kleinsten Wert annimmt.

(F 15) ① Man löse die Aufgabe 3) auf Seite 100!

(F 16) ② Man konstruiere eine Abbildungshalbgruppe, die mehr als ein Linkseinselement und kein Rechtseinelement besitzt!
Erläuterung: Ist $[M, \cdot]$ Halbgruppe, so heißt $e \in M$ Linkseinselement, falls für jedes $x \in M$ gilt $e \cdot x = x$. $e \in M$ heißt Rechtseinselement, falls für jedes $x \in M$ gilt $x \cdot e = x$.
(Ist e gleichzeitig Rechtseinselement und Linkseinselement, so ist e also Einselement.)

(F 17) ① What are the solutions of the equation
$\cos x + \cos y - \cos(x + y) = \frac{3}{2}$?

(F 18) ① Разложить в области комплексных чисел на линейные множители выражение

$$(y - z)^5 + (z - x)^5 + (x - y)^5.$$

множитель – Faktor
выражение – Ausdruck

Lösungsbedingungen wie üblich.

Einsendeschluß: 1. 5. 1974

Über die Mathematikausbildung der Lehrerstudenten an der Universität Jena

Viele Schüler und selbst Studenten, die am Anfang eines Mathematikstudiums stehen, sind der Meinung, daß man kein umfangreiches Studium in Mathematik zu absolvieren braucht, um Lehrer für Mathematik zu werden - das, was man später in der Schule unterrichten muß, hat man ja bereits in der Schule gelernt! Daß diese Meinung falsch ist, hat viele Gründe. Zunächst muß ein Lehrer, der in einer Wissenschaft unterrichten will, das Wesen dieser Wissenschaft kennen und verstehen, und dazu genügt ein reines Faktenwissen nicht. Er muß vielmehr die Denk- und Arbeitsweise dieser Wissenschaft beherrschen. Für einen wissenschaftlich einwandfreien Unterricht muß der Lehrer außerdem den Gesamtzusammenhang kennen, in den sich ein bestimmtes Stoffgebiet einordnet, das er gerade unterrichtet. In der Geometrie zum Beispiel wird ständig von Punkten und Geraden gesprochen, ohne daß in der Schule die Frage "Was ist ein Punkt?" oder "Was ist eine Gerade?" gestellt und beantwortet wird. Der Leser versuche einmal selbst, diese Fragen durch eine mathematische Definition zu beantworten. Er wird dabei auf eine Problematik geführt, über die der Mathematiklehrer völlige Klarheit haben muß. Neben diesen inhaltlichen Fragen spielt der methodische Aspekt eine große Rolle: Zur Beantwortung der Frage, <u>wie</u> ein Stoffkomplex den Schülern zu vermitteln ist, gehört mehr als nur die Kenntnis der zu vermittelnden Fakten! Schließlich werden die Lehrpläne an den Schulen gelegentlich geändert, um etwa neuen Anforderungen der Berufspraxis besser gerecht zu werden - solchen Änderungen darf der Lehrer nicht hilflos gegenüberstehen. Ja, der heute ausgebildete Lehrer wird noch nach dem Jahr 2000 unterrichten müssen und dann vielleicht auf Gebieten, an die heute noch niemand denkt. Im Studienprogramm für die Ausbildung von Mathematik-Fachlehrern heißt es dazu: "Der Fachlehrer für Mathematik muß befähigt sein, ... die Entwicklung der Mathematik zu verfolgen, sich selbständig neue Wissensgebiete zu erarbeiten ..."

Nach diesen Bemerkungen zur Notwendigkeit einer guten Mathematikausbildung soll nun der Studiengang für die Ausbildung in Mathematik beschrieben werden. In der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena werden zur Zeit Fachlehrer mit dem Hauptfach Mathematik und dem Nebenfach Physik in einem vierjährigen Studium ausgebildet. In diesem Artikel soll nun ausschließlich die Ausbildung im Fach Mathematik behandelt werden, das den Hauptanteil darstellt gegenüber den anderen Fächern dieses Studiums: Physik, Marxismus-Leninismus, Pädagogik, Methodik, Psychologie u. a.

Das Mathematikstudium gliedert sich in zwei Teile: Grundstudium und Fachstudium.

1. Das Grundstudium erstreckt sich über die ersten beiden Studienjahre mit je 1o bzw. 11 Wochenstunden. Im Rahmen eines "Grundkurses Mathematik" erwerben die Studenten ein Grundwissen in den Gebieten:

- Allgemeine Grundlagen (Logik, Mengenlehre),
- Algebra und Arithmetik (algebraische Strukturen, lineare Algebra, Aufbau der Zahlensysteme, Zahlentheorie, Polynome und rationale Funktionen),
- Analysis (Zahlenfolgen, unendliche Reihen, Funktionen und ihre Eigenschaften, Differential- und Integralrechnung),
- Geometrie (axiomatischer Aufbau der euklidischen Geometrie, analytische Geometrie)

Die Stoffvermittlung erfolgt in Vorlesungen (etwa 6 Wochenstunden), in denen der Stoff von einem Hochschullehrer vorgetragen wird, in Übungen (etwa 4 Wochenstunden) und in Seminaren (1-2 Wochenstunden). Die Studenten erhalten wöchentlich Aufgaben, die sie zu Hause lösen und durch die der Vorlesungsstoff angewendet und gefestigt werden soll. Diese und andere Aufgaben werden dann, ebenso wie Fragen zur Vorlesung, in den Übungsstunden besprochen. In den Seminaren halten die Studenten Vorträge zu bestimmten Gebieten, die meistens eine Ergänzung zum Vorlesungsstoff darstellen. Diese Vorträge werden unter Anleitung eines Assistenten und mit Hilfe von Fachbüchern vom Studenten möglichst selbständig erarbeitet. Neben dem Lösen von Übungsaufgaben stellt die Erarbeitung dieser Seminarvorträge eine Hauptform des selbständigen wissenschaftlichen Arbeitens der Studenten dar.

Im zweiten Studienjahr wird der Grundkurs ergänzt durch eine Vorlesung zur Numerischen Mathematik und Rechentechnik und eine Vorlesung zur Einführung in die Kybernetik (jeweils etwa 2 Wochenstunden). In diesen Veranstaltungen lernen die Studenten Möglichkeiten der Anwendung der Mathematik in anderen Wissenschaften und in der Praxis kennen sowie Probleme der technischen Realisierung solcher Anwendungen.

Nach einer Zwischenprüfung am Ende des ersten Studienjahres schließt das Grundstudium am Ende des zweiten Studienjahres mit der sogenannten Vorprüfung ab.

2. Das Fachstudium umfaßt in seinem obligatorischen Teil eine vertiefende Ausbildung in Numerischer Mathematik und Rechentechnik (1 Jahr) und Vorlesungen mit Übungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, zu den Grundlagen der Mathematik und zur Geschichte der Mathematik (jeweils ein Halbjahr).

Neben diesem obligatorischen Teil besteht das Fachstudium aus einer wahlweise-obligatorischen Ausbildung. Hier kann sich der Student ein ihn interessierendes Teilgebiet der Mathematik aussuchen, in welchem er eine intensivere Ausbildung erhält. An unserer Sektion besteht z. Z. die Möglichkeit für ein solches Spezialstudium in den Gebieten Geometrie, Algebra/Zahlentheorie, Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Vorlesungen, Übungen und Seminare (etwa 5 Wochenstunden) beginnen im 3. Studienjahr und enden mit der Anfertigung der Diplomarbeit in dem gewählten Fach. In diesem Spezialstudium dringt der Student tiefer in ein spezielles Gebiet der Mathematik ein, wird mit der Problematik mathematischer Forschung vertraut gemacht und befähigt, sich in eine mathematische Disziplin weitgehend selbständig einzuarbeiten und die Entwicklung dieser Disziplin zu verfolgen.

Zum Fachstudium gehört schließlich noch ein vierwöchiges mathematisches Fachpraktikum. An unserer Sektion dient ein Teil dieses Praktikums zur Einarbeitung in die Darstellende Geometrie. In einem zweiten Teil wird die Programmierung elektronischer Datenverarbeitungsanlagen behandelt, so daß die Studenten am Ende des Praktikums selbständig an den Rechenanlagen unseres Rechenzentrums arbeiten können.

Das Fachstudium schließt mit der Hauptprüfung im vierten Studienjahr ab. Höhepunkt des selbständigen wissenschaftlichen Arbeitens eines jeden Studenten ist die Anfertigung der Diplomarbeit am Ende des Studiums, mit deren Fertigstellung und erfolgreicher Verteidigung der Absolvent den akademischen Grad eines Diplomlehrers erwirbt.

Dr. sc. E. Hertel
Leiter des Bereichs
Theoretische Mathematik

Professor Matheseos [1]) auf gedachter Academie. An. 1696 gab ihm König Wilhelm eine gewisse Aufsicht über die Müntze, und 1699 ward er Ober-Müntzmeister. In eben diesem Jahre ernennte ihn die königliche Academia der Wissenschaften zu Paris zu ihrem Mitgliede, und 1703 ward er Präsident der königlichen englischen Academie der Wissenschafften, 1705 aber von der Königin Anna zum Ritter gemacht ... Er stand überall in grosser Hochachtung, und der Marqvis d'Hospital pflegte die Engelländer die ihn besuchten, zu fragen: isset, trincket und schläfft denn euer Newton wie andere Menschen? Ich stelle mir denselben wie einen Genium, wie einen Geist vor, der von den Banden des Leibes befreyet ist ... Er starb 1726 den 20 Mertz unverheyrathet, im 85 Jahre, hatte nie eine Brille gebraucht, nur einen Zahn verlohren, und verliess 32000 Pfund Sterling ...

Aus: Allgemeines Gelehrten-Lexicon. Darinne die Gelehrten aller Stände sowohl männ- als weiblichen Geschlechts, welche vom Anfange der Welt bis auf ietzige Zeit gelebt, und sich der gelehrten Welt bekannt gemacht, Nach ihrer Geburt, Leben, merckwürdigen Ge-schichten, Absterben und Schrifften aus den glaubwürdigsten Scribenten in alphabetischer Ordnung beschrieben werden. Leipzig MDCCLI.

Lösungen

Herr Prof. Dr. Roth war so freundlich, die für seine Aufgabe (vergleiche Heft 11/73) eingegangenen Lösungen selbst zu korrigieren. Im weiteren werden wir seine Einschätzung der Lösungen veröffentlichen.

Es lagen 13 Einsendungen vor, von denen 10 einen Punkt erhielten, während 3 Lösungen mit 0 Punkten bewertet werden mußten. Ein zweiter Punkt fehlte insofern, als die Bedingung

$$\text{"für alle } P \notin g\text{"} \qquad (*)$$

durchgehend unbeachtet geblieben war. Bei Beachtung von (*) ist die folgende Überlegung nämlich unerläßlich:

Hat man $\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ mit $G \in g$ unter Benutzung eines frei gewählten Punktes P gewonnen, dann ist zwar nicht ungewiß, bei Wahl eines zweiten Punktes P' wieder auf

$$\overrightarrow{P'G'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{P'A} + \overrightarrow{P'B} + \overrightarrow{P'C}) \quad \text{mit} \quad G' \in g$$

zu kommen. Die Beachtung der Bedingung (*) erfordert aber nun die Fragestellung, ob $G = G'$ gilt. Es handelt sich um die <u>Einzigkeit</u> von G, während dem variierenden P diese Einzigkeit <u>nicht</u> zukommt. Wir geben im folgenden die erforderliche Ergän-<u>zung</u>, weil sie bei keinem Bearbeiter vorkam.

Bei Wahl des ersten Punktes P entstand

$$\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}),$$

bei Wahl eines zweiten Punktes P' entsteht

$$\overrightarrow{P'G'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{P'A} + \overrightarrow{P'B} + \overrightarrow{P'C}).$$

Nach Subtraktion folgt hieraus:

$$\overrightarrow{PG} - \overrightarrow{P'G'} =$$

$$= \frac{1}{3}(\underbrace{\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{P'A}}_{\overrightarrow{PP'}} + \underbrace{\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{P'B}}_{\overrightarrow{PP'}} + \underbrace{\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{P'C}}_{\overrightarrow{PP'}})$$

$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{PP'})$$

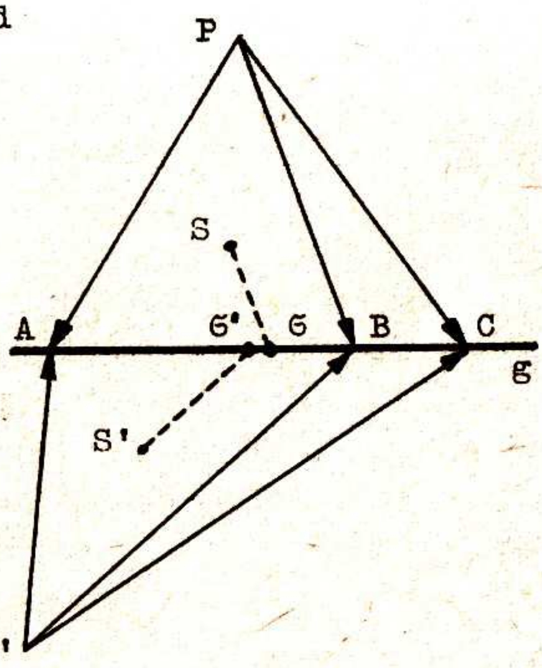
$$= \overrightarrow{PP'};$$

nach Verwandlung in Punktdifferenzen also

$$-P + G + P' - G' = -P + P',$$

und hieraus folgt

$$G = G';$$



d. h., der Punkt G ist von der Wahl des variierenden Hilfspunktes P unabhängig. Damit ist die Einzigkeit von G bewiesen.

Zu den Aufgaben der Serie 11/73

Probleme traten bei der Aufgabe E 54 auf. Wir erhielten hierzu viele unvollständige Lösungen. Bei den Lösungen zu E 51 fehlte zumeist der Hinweis auf die Probe bzw. die Äquivalenz der Schritte. Bei den wenigen Lösungen zu E 52 wurde das erste Normaxiom nicht immer vollständig gezeigt. Bei den restlichen Lösungen traten keine charakteristischen Fehler auf.

Aufgabe E 53 (nach Uwe Risch, 327 Burg, 10. Klasse)

Wir setzen $z = u + v \cdot i$ mit $u, v \in R$. Dann folgt aus der gegebenen Gleichung unmittelbar

$$u\,[|z| + a] + [v\,(|z| + a) + 1] \cdot i = 0 \text{ , also}$$

$$u\,(|z| + a) = 0.$$

Daraus erhält man $u = 0$, da $a \geq 0$ und $|z| > 0$ ($z = 0$ erfüllt die Gleichung nicht). Weiterhin gilt $v < 0$, denn für $v \geq 0$ wäre immer $v \cdot (|z| + a) + 1 > 0$. Wegen $v < 0$ und $u = 0$ gilt $|z| = -v$. Dies in

$$v\,(|z| + a) + 1 = 0 \quad \text{eingesetzt ergibt}$$

$$v\,(-v + a) + 1 = 0$$

$$v^2 - a\,v - 1 = 0$$

$$v_{1/2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + 1} \text{ .}$$

Wegen $v < 0$ erhält man nur

$$v = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + 1} \quad \text{und damit}$$

$$z = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{2}\, i \quad \text{als Lösung der Gleichung.}$$

Aufgabe E 54

$f(x)$ sei eine Funktion mit

$f(x + 1) = (x + 1) \cdot f(x)$ für alle x, $x \neq -1$ (1)

$f(x) \neq 0$ für alle x (2)

und $g(x)$ eine für alle x definierte Funktion.

1. Teil

Es gelte $g(x + 1) = g(x)$. (3)

Zu zeigen ist dann, daß $y(x) = f(x) \cdot g(x)$ (4)

folgende Gleichung erfüllt:

$y(x + 1) = (x + 1)\, y(x)$ (5)

für alle x, $x \neq -1$.

Aus der Definition von $y(x)$ folgt:

$$\begin{aligned} y(x+1) &= f(x+1)\, g(x+1) \\ &= (x+1)\, f(x)\, g(x+1) && \text{nach (1)} \\ &= (x+1)\, f(x)\, g(x) && \text{nach (3)} \\ &= (x+1)\, y(x) && \text{nach Definition von } y(x) \end{aligned}$$

2. Teil

Es gelte $y(x)+ 1) = (x + 1)\, y(x)$ (6)

für alle x, $x \neq -1$ mit der oben angegebenen Definition von $y(x)$.
Zu zeigen ist, daß $g(x)$ dann die Periode 1 besitzt.
Aus der Definition von $y(x)$ folgt:

$$\begin{aligned} y(x+1) &= f(x+1)\, g(x+1) \\ (x+1)\, y(x) &= (x+1)\, f(x)\, g(x+1) && \text{nach (6) und (1)} \\ (x+1)\, f(x)\, g(x) &= (x+1)\, f(x)\, g(x+1) && \text{nach (4).} \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$g(x) = g(x + 1)$, da nach (2) $f(x) \neq 0$
und $x + 1 \neq 0$ für $x \neq -1$ gilt.

Zu den Aufgaben der Serie 12/73

Bei den Lösungen der Serie 12/73 traten keine charakteristischen Fehler auf. Bei der Aufgabe E 58 hat ein Teil der Einsender den uns unterlaufenen Fehler bemerkt und uns auf ihn hingewiesen. Richtig wird h_c als $\overline{BC} - \overline{AC}$ definiert.

Hier noch einmal die vollständige Aufgabenstellung:

(E 58) Im Dreieck ABC ist die Differenz der Winkel α und β gegeben; $\varphi = \alpha - \beta > 0$. Außerdem ist bekannt, daß die Höhe von C auf $\overline{AB}$ (h_c) die Länge der Differenz der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ hat; $h_c = \overline{BC} - \overline{AC}$.

Man berechne die Winkel des Dreiecks (in Abhängigkeit von den Seiten)!

Für diese Aufgabe der Serie 12/73 verlängern wir den Einsendetermin bis zum 1. 5. 1974.

Aufgabe E 57 (nach Hans-Georg Martin, Jena, 10. Klasse)

Für alle reellen Zahlen x mit $-1 \leq x \leq 1$ gilt die Ungleichung

$$(x - 1)(4x + 1)^2 \leq 0 .$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} 16x^3 - 8x^2 - 7x - 1 &\leq 0 \\ 4 - 8x^2 + 5x &\leq 12x - 16x^3 + 5 . \end{aligned}$$

Es wird jetzt $x = \sin\alpha$ substituiert. Dies ist möglich, da für beliebige Winkel α der Wert $\sin\alpha$ zwischen -1 und $+1$ liegt und somit die Voraussetzung für die obige Ungleichung erfüllt ist.

$$4 - 8\sin^2\alpha + 5\sin\alpha \le 12\sin\alpha - 16\sin^3\alpha + 5 .$$

Es gelten die Additionstheoreme

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha ,$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha .$$

Hierdurch erhalten wir die zu beweisende Ungleichung

$$4\cos 2\alpha + 5\sin\alpha \le 4\sin 3\alpha + 5 .$$

Aufgabe E 59

1. Lösung (nach Bernd Klipps, Boddin, 12. Klasse)

n sei eine natürliche Zahl mit $n > 2$. Zu zeigen ist $(n!)^2 > n^n$.

Es ist $(n!)^2 = \prod_{i=1}^{n}(n+1-i)\cdot i$.

Für Zahlen i mit $1 \le i \le n$ gilt:

$$i - 1 \ge 0 \quad \text{und} \quad i - n \le 0 .$$

Somit folgt

$$(i-1)(i-n) \le 0 \quad \text{(Gleichheit bei } i = 1 \text{ und } i = n),$$

$$i^2 - (n+1)i + n \le 0$$

$$n \le i(n+1-i) . \qquad (*)$$

Da das Produkt $\prod_{i=1}^{n}(n+1-i)i$ aus genau n Faktoren besteht $(n > 2)$ und nur für $i = 1$ und $i = n$ in $(*)$ das Gleichheitszeichen gilt, folgt

$$\prod_{i=1}^{n}(n+1-i)i > n^n$$

$$(n!)^2 > n^n .$$

2. Lösung (nach Jürgen Socolowsky, Bergfelde, 12. Klasse)

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $n = 3$

Es gilt $(3!)^2 = 36 > 27 = 3^3$.

Induktionsvoraussetzung:

Für $n = k$ gilt $(k!)^2 > k^k$.

Induktionsbehauptung:

Es gilt dann auch $[(k+1)!]^2 > (k+1)^{k+1}$.

Beweis der Induktionsbehauptung:

Es wird verwendet, daß für beliebige natürliche Zahlen k mit $k \geq 2$ gilt:

$$(k + 1) > e \qquad (1),$$

$$\left(\frac{k + 1}{k}\right)^k < e \qquad (2).$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} [(k + 1)!]^2 &= (k!)^2 (k + 1)^2 \\ &> k^k \cdot (k + 1)^2 && \text{(nach Induktionsvor.)} \\ &> k^k \cdot (k + 1) \cdot e && \text{(nach (1))} \\ &> k^k \cdot (k + 1) \cdot \left(\frac{k + 1}{k}\right)^k && \text{(nach (2))} \\ &> (k + 1)^{k+1} . \end{aligned}$$

Also gilt $[(k + 1)!]^2 > (k + 1)^{k+1}$, womit die Induktionsbehauptung gezeigt wurde. Die Ungleichung $(n!)^2 > n^n$ ist jetzt für beliebige natürliche Zahlen $n > 2$ bewiesen.

Anmerkung:

Wir möchten an die Definition von e als

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

erinnern. Es ist ferner bekannt, daß die Folge

$$\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$$ monoton wächst.

Gewinner im Monat Februar

Hans-Ullrich Frömmer,	2081 Peckatel,	12.	Klasse
Friedhelm Schieweck,	3101 Blumenberg,	10.	Klasse
Norbert Schieweck,	3101 Blumenberg,	10.	Klasse

Herausgeber: Leitung der FDJ-Grundorganisation der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Egbert Creutzburg
Chefredakteur: Werner Nagel
Redaktion: J. Dubslaff, H.-G. Leopold, G. Weske
Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Bezugspreis je Heft: 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
V-14-6

WURZEL

4

74

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Fr.-Schiller-Universität Jena

Konvergente Zahlenfolgen

1. Zahlenfolgen

D e f i n i t i o n 1 :

Eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuordnet, nennt man eine Zahlenfolge.

Wir schreiben Zahlenfolgen (kurz Folgen) in der Form $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Die reelle Zahl a_n nennt man das n-te Glied der Folge, n heißt Index von a_n.

Beispiele:

(1) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, (-1)^n \frac{1}{n}, \ldots$

(2) $-1, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \ldots, -\sqrt{n}, \ldots$

(3) $\frac{2}{6}, \frac{1}{11}, 0, -\frac{1}{21}, -\frac{2}{26}, \ldots, \frac{3-n}{5n+1}, \ldots$

(4) $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \ldots, \sqrt[n]{n}, \ldots$

(5) die Folge 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ... der nicht gerundeten Näherungsbrüche (nach der n-ten Kommastelle abgebrochene Dezimalbruchentwicklung) von $\sqrt{2}$.

(6) $0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots, \cos\frac{n\pi}{2}, \ldots$

(7) $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \ldots, \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}, \ldots$

(8) die Folge 1, 5, 14, 33, ..., die durch $a_1 = 1$ und $a_n = 2a_{n-1} + n+1$ für $n = 2,3,\ldots$ bestimmt ist.

Eine Zahlenfolge ist gegeben, wenn man die Vorschrift kennt, nach der man bei gegebenem Index n das entsprechende Folgenglied a_n berechnen kann; dies kann durch explizite Angabe des n-ten Gliedes (wie in (1) - (7)) oder durch eine Rekursionsbeziehung (wie in (8)) geschehen.

2. Konvergenz

In der Menge aller Zahlenfolgen sind jene von besonderem Interesse, wo sich die Zahlen a_n bei wachsendem Index n einer reellen Zahl "annähern", wie es bei den Beispielen (1) und (5) der Fall ist. Dieses "Annähern" erfassen wir durch die folgende Definition.

Definition 2:

> Die Zahlenfolge $a_1, a_2, \dots$ heißt <u>konvergent</u>, wenn es eine reelle Zahl a mit der folgenden Eigenschaft gibt: Zu jeder positiven reellen Zahl ε gibt es eine reelle Zahl N_ε, so daß
>
> $$|a_n - a| < \varepsilon$$
>
> für alle natürlichen Zahlen n mit $n > N_\varepsilon$ erfüllt ist. Die Zahl a heißt <u>Grenzwert</u> (oder <u>Limes</u>) der Folge $a_1, a_2, \dots$

Die in der Definition auftretende Ungleichung kann auch in der Form

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

geschrieben werden. Sie beinhaltet, daß "fast alle" Glieder a_n der Folge sich von der Zahl a betragsmäßig höchstens um ε unterschieden; nur für jene Indizes n mit $n \leq N_\varepsilon$ (das sind endlich viele) braucht die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ nicht erfüllt zu sein.

Die Tatsache, daß die konvergente Folge $a_1, a_2, \dots$ die Zahl a als Grenzwert hat, drücken wir durch die Schreibweise

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

und durch die Sprechweise "a_n konvergiert gegen a" aus.

3. Beispiele konvergenter Folgen

Wir zeigen, daß die Folge $-1, \frac{1}{2}, \dots, (-1)^n \frac{1}{n}, \dots$ gegen die Zahl 0 konvergiert. Es sei ε eine beliebige positive Zahl.

Dann ist die Ungleichung $|(-1)^n \frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$, d. h. $\frac{1}{n} < \varepsilon$, sicher erfüllt, wenn $n > \frac{1}{\varepsilon}$ ist. Wir können deshalb $N_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$ (oder $N_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} + 1$ oder $N_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon}$ oder jede andere reelle Zahl, die größer als $\frac{1}{\varepsilon}$ ist) nehmen. Damit haben wir $\lim\limits_{n \to \infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$ bewiesen.

An Hand dieses Beispiels sieht man, daß die Zahl N_ε von der Größe der Zahl ε abhängt, eine Funktion von ε ist; in der Regel wird N_ε um so größer sein, je kleiner ε vorgegeben wurde. Das Beispiel zeigt ferner, daß bei einer gegen a konvergenten Folge $a_1, a_2, \ldots$ die Glieder sowohl links als auch rechts von a liegen können. Im allgemeinen werden überdies die Abstände $|a_n - a|$ der Punkte a_n und a nicht jedesmal kleiner werden, wenn man von einem Glied der Folge zum nächsten übergeht. Es kann auch der Fall eintreten, daß manche (oder sogar alle) Folgenglieder a_n gleich a sind.

Wir wollen $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3-n}{5n+1} = -\frac{1}{5}$ beweisen. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wegen $\left|\frac{3-n}{5n+1} + \frac{1}{5}\right| = \frac{16}{5(5n+1)}$ ist $\left|\frac{3-n}{5n+1} - (-\frac{1}{5})\right| < \varepsilon$ erfüllt, sofern $n > \frac{16}{25\varepsilon} - \frac{1}{5}$ ist. Deshalb kann man $N_\varepsilon = \frac{16}{25\varepsilon}$ (oder $N_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$) wählen.

Um die Konvergenz der Folge aus Beispiel (4) zu zeigen, vermerken wir zunächst, daß $1 \leq \sqrt[n]{n}$ für alle natürlichen Zahlen n gilt. Die Ungleichung $\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$ oder $n < (1+\varepsilon)^n$ ist wegen

$$(1+\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k = 1 + n\varepsilon + \frac{1}{2} n(n-1)\varepsilon^2 + \ldots$$

sicher erfüllt, wenn n der Ungleichung

$$n < \frac{1}{2} n(n-1) \cdot \varepsilon^2$$

genügt, d. h. also wenn $n > 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}$. Somit gilt

$$1 - \varepsilon < \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon ,$$

falls $n > N_\varepsilon = 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}$ ist. Also ist $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

4. Divergenz

Jede Folge, die nicht konvergent ist, heißt divergent. Die Folge 0, -1, 0, ..., $\cos\frac{n\pi}{2}$, ... ist divergent; denn die Folgenglieder haben abwechselnd die Werte ± 1 und 0; es gibt also keine Zahl mit der in der Definition 2 genannten Eigenschaft. Ein besonderer Fall von Divergenz liegt vor, wenn die Glieder einer Folge bei wachsendem Index n unbeschränkt anwachsen bzw. unbeschränkt fallen.

D e f i n i t i o n 3 :

> Die Zahlenfolge $a_1, a_2, \ldots$ heißt divergent gegen $+\infty$ (bzw. divergent gegen $-\infty$), wenn es zu jeder natürlichen Zahl m eine reelle Zahl N_m gibt, so daß $a_n > m$ (bzw. $a_n < -m$) für alle natürlichen Zahlen n mit $n > N_m$ gilt.

In diesem Fall schreiben wir $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (bzw. $= -\infty$)
und verstehen unter "Limes" hier "uneigentlicher Limes".

Wir wollen $\lim_{n\to\infty}(-\sqrt{n}) = -\infty$ beweisen. Sei m eine natürliche Zahl. Die Ungleichung $-\sqrt{n} < -m$ ist sicher richtig, sofern $n > m^2$ ist, d. h. wir können $N_m = m^2$ wählen.

A u f g a b e :

> Man beweise, daß die Folge aus Beispiel (8) divergent gegen $+\infty$ ist!

5. Das Cauchysche Konvergenzkriterium

Da in der Definition der konvergenten Folge der Grenzwert der Folge vorkommt, ist es mitunter schwierig zu entscheiden, ob eine gegebene Zahlenfolge konvergent oder divergent ist. Nützliche Hilfe bei Konvergenzuntersuchungen leistet der folgende wichtige, auf den französischen Mathematiker A. L. Cauchy zurückgehende Satz.

Satz (Cauchysches Konvergenzkriterium):

> Eine Zahlenfolge $a_1, a_2, \ldots$ ist dann und nur dann konvergent, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:
> Zu jeder positiven reellen Zahl ε gibt es eine reelle Zahl M_ε, so daß
> $$|a_k - a_l| < \varepsilon$$
> für alle natürlichen Zahlen k und l mit $k > M_\varepsilon$ und $l > M_\varepsilon$ erfüllt ist.

Man beachte, daß in diesem die Konvergenz betreffenden Satz der Grenzwert der Folge überhaupt nicht vorkommt.

Der Beweis, daß die im Satz genannte Bedingung hinreichend ist, ist schwierig; wir beweisen hier nur die Notwendigkeit dieser Bedingung. Die Folge $a_1, a_2, \ldots$ sei konvergent und habe die reelle Zahl a als Grenzwert. Dann gibt es zu jeder positiven Zahl ε eine reelle Zahl $N_{\varepsilon/2}$, so daß für alle Indizes $n > N_{\varepsilon/2}$ die Ungleichung
$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$
erfüllt ist. Für zwei natürliche Zahlen k und l mit $k > N_{\varepsilon/2}$ und $l > N_{\varepsilon/2}$ gilt (wegen der Dreiecksungleichung) demzufolge
$$|a_k - a_l| = |(a_k - a) + (a - a_l)|$$
$$\leq |a_k - a| + |a_l - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad .$$
Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung bewiesen (man setze $M_\varepsilon = N_{\varepsilon/2}$).

Wir wollen mit Hilfe des Cauchyschen Konvergenzkriteriums beweisen, daß die Folge $1,\ 1 + \frac{1}{2},\ \ldots, \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m},\ \ldots$ divergent ist.
Aus dem Satz folgt: die Folge $a_1, a_2, \ldots$ ist divergent, wenn es mindestens ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft gibt, daß es zu jeder reellen Zahl M mindestens zwei natürliche Zahlen $k > M$ und $l > M$ gibt, für die $|a_k - a_l| \geq \varepsilon$ gilt. In unserem Fall ist

$$|a_{2l}-a_l| = a_{2l}-a_l = \frac{1}{l+1} + \frac{1}{l+2} + \dots + \frac{1}{2l}$$

$$\geq \frac{1}{2l} + \frac{1}{2l} + \dots + \frac{1}{2l}$$

$$= l \cdot \frac{1}{2l} = \frac{1}{2} .$$

Die Bedingung im Satz ist also für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ nicht erfüllt (zu vorgegebenem M wähle man $l > M$ und $k = 2l$).

A u f g a b e n :

1. Man beweise $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{m=1}^{n} \frac{1}{m} = +\infty$!

2. Unter Benutzung des Cauchyschen Konvergenzkriteriums beweise man, daß die Folge aus Beispiel (5) konvergent ist!

Dr. T. Bätz
Assistent im Bereich Analysis

Denksport

Auf der Erde geht ein Wanderer von einem markierten Ort aus 20 km südwärts, dann 20 km ostwärts und schließlich 20 km nach Norden. Von wo muß er losgegangen sein, wenn er sich nach dem Marsch wieder an seinem Ausgangspunkt befindet?
Wir nehmen an, die Erde besitze eine ideale Kugelgestalt.

Als Gedächtnisstütze bis zur Auflösung im Heft 5/74:

- Es gibt keinen solchen Punkt. ☐
- Es gibt genau einen solchen Punkt. ☐
- Es gibt genau zwei solche Punkte ☐
- Es gibt unendlich viele solche Punkte. ☐

Preisaufgaben 4/74

(F 19) Man löse das Gleichungssystem

1

$$u^2 + v^2 + w = 2$$
$$v^2 + w^2 + u = 2$$
$$w^2 + u^2 + v = 2\ .$$

(F 20) Ein Würfel mit der Kantenlänge a wird von einer Ebene so geschnitten, daß eine der Würfeldiagonalen in dieser Ebene liegt. Den dritten, noch freien Lageparameter der Ebene bestimme man so, daß der Flächeninhalt der Schnittfläche von Würfel und Ebene minimal wird. Man gebe die Größe dieses Minimums an.

2

(F 21) Man löse die Gleichung

1

$$\cos(\pi\sqrt{x})\cdot\cos(\pi\sqrt{x-4}) = 1\ .$$

(F 22) a) An dem Kreis K um M, der den Punkt P trägt, wird folgende Konstruktion ausgeführt (siehe auch Abb. 1):

2

Es sei $\overline{PQ}$ eine beliebige Sehne des Kreises, die den Mittelpunkt M nicht enthält. $\overline{AB}$ stehe senkrecht auf der Strecke $\overline{QM}$ $(A,B \in K)$. Der Schnittpunkt von $\overline{AB}$ und $\overline{PQ}$ sei R. Die zu $\overline{AP}$ parallele Gerade durch den Punkt R schneide die Gerade, die parallel zu $\overline{PR}$ durch den Punkt B verläuft, im Punkt S. (Die Dreiecke PAR und SRB sind einander ähnlich.)

Man beweise: $\overline{SP}$ ist Tangente an K im Punkt P.

b) Man denke sich diese Konstruktion an einer Parabel ausgeführt (Abb. 2) und untersuche mit Hilfe der analytischen Geometrie, ob auch hier $\overline{SP}$ Tangente an die Parabel in P ist.

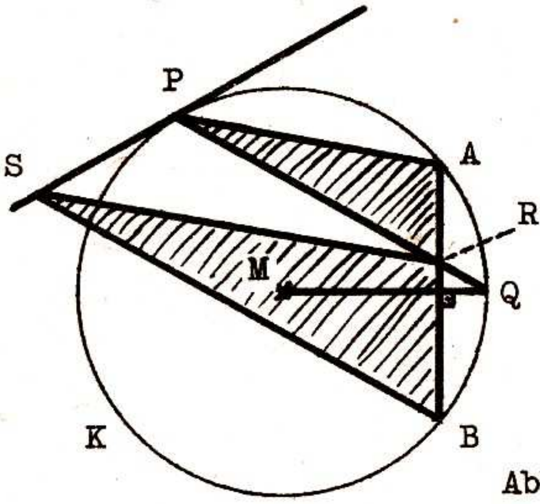


Abb. 1

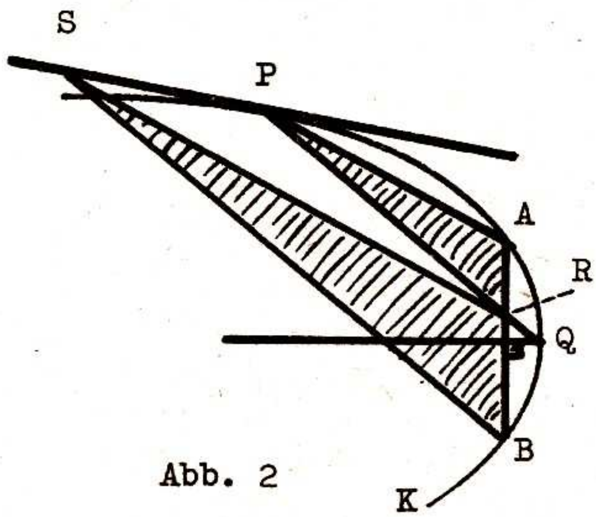


Abb. 2

(F 23) ② Es sei $c > 1$ eine reelle Zahl. Man zeige, daß die Folge

$$c, \sqrt{c}, \sqrt[3]{c}, \ldots, \sqrt[n]{c}, \ldots$$

konvergent ist.

(F 24) ② Один из двух треугольных пирамид с общим основанием расположена внутри другой. Доказать, что сумма плоских углов при вершине внутренней пирамиды больше, чем сумма плоских углов при вершине внешней.

основание – Basis
плоских углов – ebene Winkel (in der Aufgabenstellung: Winkel der Seitenflächen)
вершина – Spitze

Lösungsbedingungen wie üblich.

Letzter Einsendetermin: 15. 6. 1974

Gewinner im Monat März

Lutz Müller, Halle, 12. Klasse
Bernd Klipps, Boddin, 12. Klasse
Uwe Risch, Burg, 10. Klasse

Zum 125. Geburtstag von Felix Klein

Am 25. April jährt sich zum 125. Mal der Geburtstag des großen deutschen Gelehrten des 19. und 20. Jahrhunderts Felix K l e i n . Er war einer der wenigen genialen Köpfe seiner Zeit, der sich der Ende des 19. Jahrhunderts einsetzenden Spezialisierung innerhalb der Wissenschaften, insbesondere der Mathematik, entziehen konnte. Diese Universalität ermöglichte es ihm, Bedeutendes zu leisten.

1849 in Düsseldorf geboren, erlangte Klein bereits 1868 den Grad eines Doktors der Philosophie in Bonn. Im Jahre 1905 wurde er ehrenhalber von der Technischen Hochschule München zum Dr. ing. und von der Universität Berlin zum Dr. rer. pol. ernannt.

In der heutigen Zeit ist uns Felix Klein durch seine Leistungen auf dem Gebiet der Mathematik ein Begriff. Ende der 60er Jahre befaßte er sich als Assistent in Bonn vor allem mit Geometrie. 1870 traf Klein in Paris mit dem Norweger Sophus Lie zusammen, mit dem er gemeinsam über Gruppentheorie arbeitete.

Berühmt geworden ist seine Antrittsvorlesung als Professor in Erlangen (1872). In dieser Vorlesung, die als "Erlanger Programm" bekannt geworden ist, erläuterte er die zentrale Bedeutung des Gruppenbegriffs für die Mathematik. Es gelang ihm damit zum Beispiel, die unterschiedlichen Geometrien, die damals bekannt waren, unter einem einheitlichen Gesichtspunkt zu betrachten (nämlich als Invariantentheorie einer bestimmten Transformationsgruppe). Solche Leistungen, die der Systematisierung unterschiedlicher wissenschaftlicher Spezialgebiete dienen, hatten und haben besonders große Bedeutung. Bereits Ende des 19. Jahrhunderts war die Mathematik sehr umfangreich und für die meisten Gelehrten fast unübersehbar geworden.

Von 1886 - 1913 wirkte F. Klein als ordentlicher Professor der Mathematik in Göttingen.

Seine Vielseitigkeit kommt auch in seinen bekannt gewordenen

"Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert" (1927 erschienen) zum Ausdruck. Dieses Werk dient auch heute noch als wesentliche Grundlage für Darstellungen der Geschichte der Mathematik. Klein war Mitbegründer und Herausgeber der "Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften", die eine umfassende Darstellung der Erkenntnisse der reinen und angewandten Mathematik zum Ziel hatte.

Felix Klein starb am 22. 6. 1925 in Göttingen.

Mathematik-Spezialistenlager des Bezirkes Gera

Seit 9 Jahren werden regelmäßig die Mathematik-Spezialistenlager unter Mitwirkung von Studenten der Jenaer Universität (die seit einigen Jahren im Jugendobjekt "Studienvorbereitung" mitarbeiten) durchgeführt. In der jetzigen Phase, da die Organisation der Lager auf lange Sicht gesichert ist, auf der Grundlage vertraglicher Regelungen eine sehr gute Zusammenarbeit mit dem Rat des Bezirkes möglich ist und die Erfahrungen der bisherigen Lager zur Verfügung stehen, kommt es darauf an, die Qualität der Arbeit zu erhöhen.

Das erfordert einmal eine abgewogene fachliche Konzeption und zum anderen eine Verbesserung der Freizeitgestaltung. Während des letzten Winterlagers vom 11. - 18. Februar in Lobenstein fanden die gemeinsamen Überlegungen der Mitglieder des Jugendobjektes und des Bezirksklubs Junger Mathematiker (BKJM) einen ersten Abschluß. In der Vergangenheit bestand die fachliche Ausbildung der Schüler aus dem Aufgabentraining für die Olympiaden und der Vermittlung mathematischen Fachwissens (oft Studienstoff) zur Vorbereitung auf das künftige Studium. Inzwischen zeigten sich die Nachteile dieser Ausbildung: Die oft unsystematische Wahl der Aufgaben und der Fachgebiete schränkte die Wirkung auf Olympiaden und Studium stark ein, zum ande-

ren haben Stoffvorgriffe oft große nachteilige Wirkung. Die fachliche Ausbildung soll, ohne stoffliche Vorgriffe zu enthalten, zu einer Verbesserung der Olympiadeergebnisse führen und auf ein Mathematikstudium vorbereiten.
Welcher Weg ist zu beschreiten, um diesen Forderungen gerecht zu werden? Diese Aufgaben haben etwas gemeinsam; sie setzen neben logischem, abstraktem Denken gute mathematische Fähigkeiten und Fertigkeiten voraus. In der neuen fachlichen Konzeption, in der keine Trennung nach Aufgaben und Fach mehr vorgenommen wird, ist das berücksichtigt. Die genaue Ausarbeitung der einzelnen Stoffgebiete, die über 5 Jahre (so lange nimmt ein Schüler in der Regel an den Lagern teil) in einem geschlossenen Lehrgang geboten werden, wird in Form von Diplomarbeiten von Lehrerstudenten vorgenommen. Hier haben wir konkrete Taten zum neuen Jugendgesetz: Studenten stellen in enger Zusammenarbeit mit den staatlichen Leitungen selbst Diplomthemen, die für die Mathematik-Spezialistenlager und auch für die Mathezirkel an den Schulen eine echte Hilfe darstellen und somit von großem gesellschaftlichem Nutzen sind.

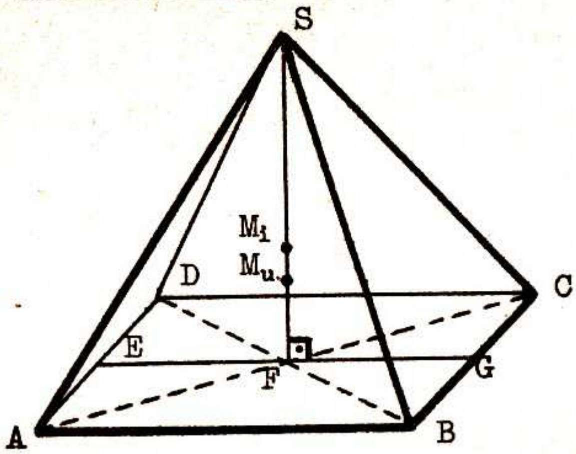
Eine andere sehr wichtige Seite unserer Arbeit ist die Betreuung der Schüler in der Freizeit, denn es gilt, keine "Fachidioten" heranzubilden, sondern allseitig gebildete Persönlichkeiten. Diese Doppelfunktion der Studenten bringt eine hohe Belastung mit sich. In der Freizeitbetreuung gilt es, neben vielen Sportveranstaltungen, die bereits eine gute Tradition haben, insbesondere die Schüler bei der niveauvollen kulturellen Ausgestaltung der Freizeit zu unterstützen. Dazu ist für die Zukunft die Teilnahme eines Lehrerstudenten einer gesellschaftswissenschaftlichen Sektion geplant, der sich dann ganz der Freizeitbetreuung der Schüler widmen kann. So werden neben dem ständigen persönlichen Gespräch zwischen Betreuern und Schülern solche Diskussionsrunden, wie sie bereits im vergangenen Lager stattfanden, eine breite Bedeutung erlangen. In diesen Diskussionen geht es uns neben fachlichen Problemen insbesondere darum, Klarheit bei den Schülern darüber zu schaffen, daß ein Mathematikstudium nicht nur Mathematik bedeutet, sondern der Marxismus-Leninismus und die gesellschaftliche Arbeit einen breiten

Raum einnehmen und ihre Bedeutung bei der Entwicklung von Wissenschaftler-Persönlichkeiten gar nicht hoch genug eingeschätzt werden kann. Mit dieser Konzeption dürften die Mathematik-Spezialistenlager für alle Beteiligten noch interessanter und erfolgreicher für die weitere Entwicklung werden.

Winfried Schrocko
2. Studienjahr
Leiter des Bereichs Mathematiklager im Jugendobjekt

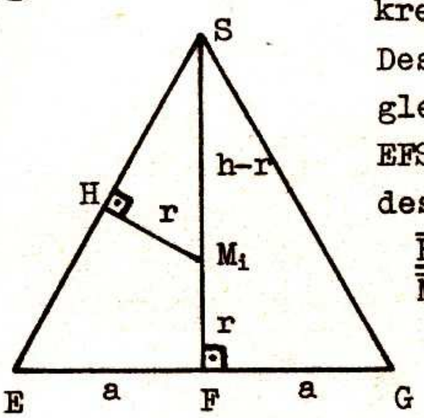
Lösungen

Aufgabe E 60 (Uwe Risch, Burg, 10. Klasse)



Die einzelnen Punkte seien gemäß nebenstehender Skizze bezeichnet, wobei M_i und M_u die Mittelpunkte der ein- bzw. umbeschriebenen Kugel sind. Außerdem sei $\overline{SF} = h$ und $\overline{AB} = 2a$.

I.



Der Inkreis des Dreiecks EGS ist ein Großkreis der der Pyramide einbeschriebenen Kugel. Deshalb ist der Inkreisradius des Δ EGS gleich r. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke EFS und M_iHS (wobei H der Berührungspunkt des Inkreises mit der Seite $\overline{ES}$ sei) folgt

$$\frac{\overline{HM_i}}{\overline{M_iS}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{ES}}, \text{ also } \frac{r}{h-r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}$$

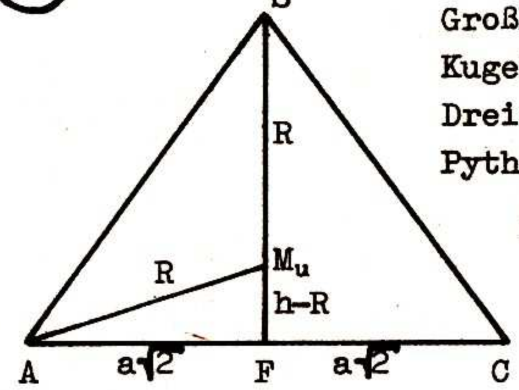
$$r^2(a^2+h^2) = a^2(h-r)^2$$

$$r^2h^2 = a^2h^2 - 2a^2hr$$

$$r^2 + 2\frac{a^2}{h}r - a^2 = 0$$

$$r = -\frac{a^2}{h} + \sqrt{\frac{a^4}{h^2} + a^2}\,.$$

II.



Der Umkreis des Dreiecks ACS ist ein Großkreis der der Pyramide umbeschriebenen Kugel. Deshalb ist der Umkreisradius des Dreiecks ACS gleich R. Mit dem Satz des Pythagoras erhält man im Δ AFM_u:

$$R^2 - (h - R)^2 = 2a^2$$

$$R = \frac{1}{2}\left(\frac{2a^2}{h} + h\right) .$$

III. Es ist

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{2} \frac{\frac{2a^2}{h} + h}{\sqrt{\frac{a^4}{h^2} + a^2} - \frac{a^2}{h}} .$$

Jetzt erweitern wir den Bruch auf der rechten Seite mit $\frac{h}{a^2}$ und erhalten:

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{2} \frac{2 + \frac{h^2}{a^2}}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}} - 1} .$$

Die Substitution $\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}} - 1 = t$ führt auf

$$2 + \frac{h^2}{a^2} = (t + 1)^2 + 1 \quad , \text{ also ist}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{2} \frac{(t+1)^2 + 1}{t} = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2 + 2t + 2}{t}\right) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{2}{t} + 2\right)$$

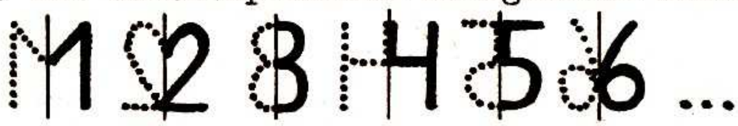
$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{t}\right) + 1$$

Nun gilt für beliebige positive Zahlen a, b die Ungleichung

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, also auch $\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{t} \geq 2$ und somit

$$\frac{R}{r} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 + 1 \text{ , d. h. } \frac{R}{r} \geq \sqrt{2} + 1 .$$

Sicher haben Sie längst bemerkt, daß die Zeichenfolge in unserer kleinen Knobelei im Heft 1/74, S. 79 aus den Ziffern 1, 2, 3,... entstanden ist und dementsprechend fortgesetzt werden kann:



$\boxed{\text{Aufgabe F 2}}$ (nach Ute Kuffner, Strasburg, 10. Klasse)

Die gegebene Gleichung wird mit Hilfe des Theorems

$$2 \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)$$

umgeformt. Wir erhalten:

$$2 \sin^2 x + \cos(2x) - \cos(6x) + \cos(6x) - \cos(12x) + - \ldots + \cos(n^2 x - nx) - \cos(n^2 x + nx) = 2 .$$

In dieser Gleichung heben sich alle Glieder von $\cos(6x)$ an bis $\cos(n^2 x - nx)$ gegenseitig auf:

$$2 \sin^2 x + \cos(2x) - \cos(n^2 x + nx) = 2$$

$$\cos(2x) - \cos(n^2 x + nx) = 2(1 - \sin^2 x) ,$$

und wegen $2 \cos^2 x = \cos(2x) + 1$ und $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ gilt:

$$\cos(2x) - \cos(n^2 x + nx) = \cos(2x) + 1$$

$$\cos(n^2 x + nx) = -1 .$$

Hieraus ergibt sich:

$$x(n^2 + n) = \pi(2k + 1)$$

$$x = \frac{\pi(2k + 1)}{n^2 + n}$$

mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots ; n = 1, 2, 3, \ldots$

Sämtliche Lösungen sind mit $x = \dfrac{\pi(2k + 1)}{n^2 + n}$

erfaßt.

$\boxed{\text{Aufgabe F 5}}$ (nach Rainer Lindemann, Cottbus, 10. Klasse)

Es sei $z = a + bi$, wobei a und b reelle Zahlen sind. Ferner gelte stets $z \neq \pm 1$. Für den Quotienten ergibt sich dann:

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{a-1+bi}{a+1+bi} = \frac{a^2+b^2-1}{(a+1)^2+b^2} + \frac{2b}{(a+1)^2+b^2}\, i .$$

Da $z \neq -1$ gilt, existiert dieser Quotient immer, weil sein Nenner dann ungleich Null ist. Er ist imaginär, wenn $a^2+b^2-1 = 0$ und $2b \neq 0$ gilt. Da $|z|^2 = a^2 + b^2$ ist, folgt also $|z|^2 = 1$. Andererseits erhält man für $|z| = 1$ und $z \neq \pm 1$ (nach Voraussetzung der Aufgabe), $a^2 + b^2 = 1$ und somit auch $b \neq 0$.
Also wird der Quotient imaginär. Es gilt

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{b}{a+1}\, i \quad \text{für } |z| = 1,\ z \neq \pm 1 .$$

Neue Bücher

Wir möchten Sie an dieser Stelle auf ein sehr interessantes Vorhaben des VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin hinweisen. Mit dem 1969 bestätigten Programm für die Ausbildung von Fachlehrern mit dem Haupt- oder Nebenfach Mathematik in der DDR entstanden der Wunsch und auch die Notwendigkeit, ein darauf abgestimmtes eigenständiges Lehrwerk zu schaffen. Der VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften trägt dem Rechnung, indem er in der Reihe "Studienbücherei" die Serie "Mathematik für Lehrer" herausgibt, deren erste beide Bände

G. Asser: "Grundbegriffe der Mathematik I"
J. Wisliceny: "Grundbegriffe der Mathematik II"

bereits erschienen sind. Bis 1975 werden weitere sieben Bände über Algebra, Analysis, Geometrie, Darstellende Geometrie und Numerische Mathematik und Rechentechnik folgen.

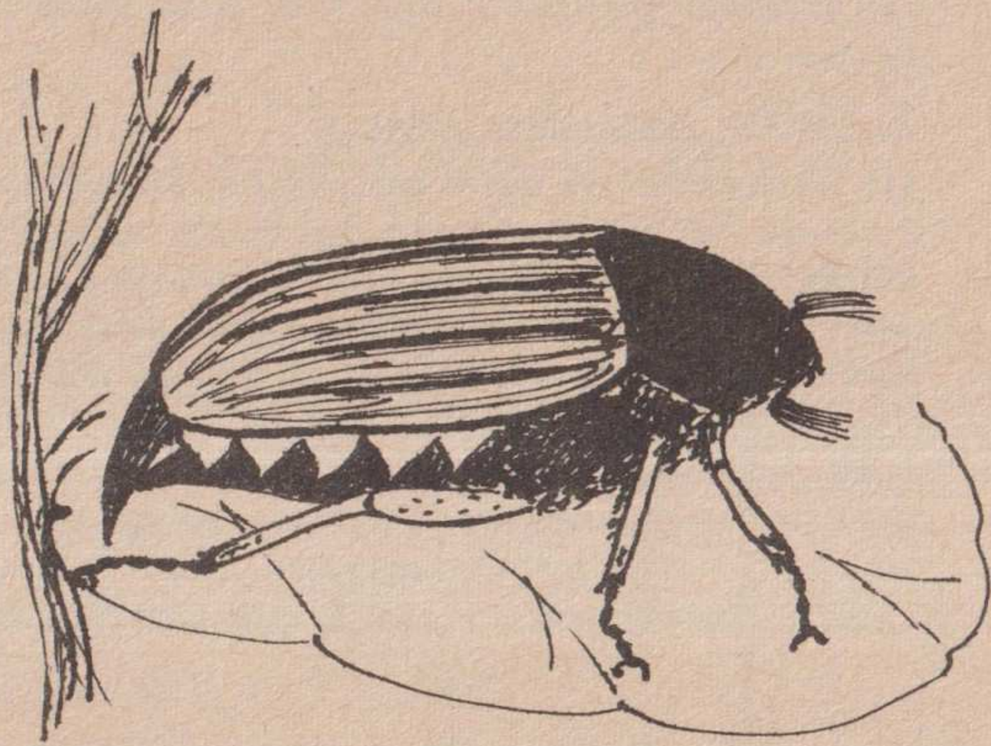
Diese Bände umfassen den hauptsächlichen Stoff in den ersten beiden Studienjahren. Von den beiden obengenannten Werken scheint uns insbesondere das erste gut geeignet, um sich ausgehend vom Schulstoff in weitere Gebiete der Mathematik einzuarbeiten. Definitionen und Sätze werden hier in halbformalisierter Form aufgeschrieben, die Beweise jedoch grundsätzlich in der Umgangssprache inhaltlich geführt. Herr Prof. Dr. G. Asser schreibt im Vorwort seines Buches:

> "Die in diesem Band erklärten Begriffe und Sätze werden dem Leser zum größten Teil aus der Schule bekannt sein, allerdings vorwiegend als mehr oder minder empirisch gewonnene Einzelfakten. Demgegenüber werden sie hier in einen systematischen Zusammenhang gebracht und exakt begründet. Diese Seite der Mathematik bereitet dem Anfänger beim Mathematikstudium erfahrungsgemäß erhebliche Schwierigkeiten und ist die berüchtigte Barriere beim Übergang von der Schule zur Hochschule."

Aus dem Inhalt: Grundbegriffe der Mengenlehre, Grundbegriffe der Abbildungstheorie, Das System der natürlichen Zahlen. Preis: 9,80 M.

Herausgeber: Leitung der FDJ-Grundorganisation der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Egbert Creutzburg
Chefredakteur: Werner Nagel
Redaktion: J. Dubslaff, H.-G. Leopold, G. Weske
Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Bezugspreis je Heft: 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.
V-14-6

Wem gehört der Maikäfer?



Näheres finden Sie auf Seite 138!

5
74

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Fr.-Schiller-Universität Jena

Eine Einführung in die Intervallarithmetik

Wir wollen uns in dieser kleinen Einführung im wesentlichen mit zwei Fragen beschäftigen. Einmal wollen wir die Grundbegriffe der Intervallarithmetik einführen und erläutern, und zum anderen wollen wir die Frage anschneiden, wie man dazu gekommen ist, mit Intervallen zu rechnen, welche Bedeutung, welche Vor- und Nachteile die Intervallarithmetik hat. Wir können dabei nur einige Aspekte nennen.

1. Was ist Intervallarithmetik?

Wir bezeichnen die Menge der reellen Zahlen wie üblich mit R. In R kennen wir die vier Grundoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division (+, -, •, :). Das Teilgebiet der Mathematik, in dem diese vier Grundoperationen gründlich untersucht werden, wird bekanntlich als Arithmetik bezeichnet.

Definition 1:

Eine Teilmenge A der reellen Zahlen heißt abgeschlossenes Intervall genau dann, wenn zwei reelle Zahlen a_1, a_2 existieren, so daß A sich in der Form

$$A = \{x: \; x \in R \wedge a_1 \leq x \leq a_2\}$$

darstellen läßt. a_1 (bzw. a_2) heißt untere (bzw. obere) Grenze des Intervalls A.

(Bemerkung: Da wir nur abgeschlossene Intervalle betrachten, lassen wir im weiteren das Attribut "abgeschlossen" weg.)

Wir schreiben auch

$$A = [a_1, a_2] .$$

Wir betrachten jetzt die Menge I(R) aller abgeschlossenen Intervalle über R:

$$I(R) := \{A: \; A \subset R \; , \; A \text{ ist abgeschlossenes Intervall}\}$$

In I(R) führen wir analog zu den reellen Grundoperationen ebenfalls eine Addition ($\oplus$), Subtraktion ($\ominus$), Multiplikation ($\odot$) und Division ($\oslash$) ein. Zur Vereinfachung treffen wir folgende

Vereinbarung, die für diesen gesamten Artikel gilt: Wenn in einer Gleichung das Zeichen $*$ bzw. $\circledast$ auftritt, dann soll diese Gleichung für alle vier Operationen +, -, ., : bzw. $\oplus$, $\ominus$, $\odot$, $\oslash$ gelten. Die betreffende Gleichung repräsentiert dann also vier Gleichungen.

D e f i n i t i o n 2 :

Es seien A und B Intervalle. Es werden vier Operationen von Intervallen erklärt durch die Definitionsgleichungen

(1) $A \circledast B := \{z : z \in R, z = x * y, x \in A, y \in B\}$

Im Falle der Division müssen wir stets $0 \notin B$ voraussetzen!

Analog zur Arithmetik wird nun das Gebiet der Mathematik, in dem die Eigenschaften der vier in I(R) erklärten Grundoperationen $\circledast$ untersucht werden, als I n t e r v a l l a r i t h m e t i k bezeichnet. Wenden wir uns jetzt diesen Eigenschaften zu.

Da A und B Intervalle sind, folgt aus (1), daß auch $A \circledast B$ wieder Intervalle sind. Damit können wir aber das Rechnen mit Intervallen zurückführen auf das Rechnen mit ihren Grenzen.
Es sei also $A = [a_1, a_2]$ und $B = [b_1, b_2]$. Dann gilt im einzelnen:

(2 a) $A \oplus B = [a_1+b_1, a_2+b_2]$

(2 b) $A \ominus B = [a_1-b_2, a_2-b_1]$

(2 c) $A \odot B = [\min\{a_1 \cdot b_1, a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2\},$
$\max\{a_1 \cdot b_1, a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2\}]$

(2 d) $A \oslash B = \left[\min\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_1}{b_2}, \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right\}, \max\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_1}{b_2}, \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right\}\right]$

Von der Richtigkeit dieser Gleichungen kann sich jeder leicht selber überzeugen.

Aufgabe: Man beweise die Gleichung (2 c) und überlege, daß man bei der Berechnung von $A \odot B$ in vielen Fällen mit weniger als 4 Multiplikationen auskommt, indem man Fallunterscheidungen bzgl. der Vorzeichen der Intervallgrenzen vornimmt!

$\boxed{\text{Beispiel:}}$ $A = [2,4]$, $B = [-4,-2]$

$A \oplus B = [-2,+2]$

$A \ominus B = [4,8]$

$A \odot B = [-16,-4]$

$A \oslash B = [-2,-0,5]$

Eine Sonderstellung innerhalb von I(R) nehmen die sogenannten Punktintervalle ein.

Definition 3:

Ein Intervall $A = [a_1,a_2]$ heißt Punktintervall genau dann, wenn $a_1 = a_2$ gilt.

Jedem Punktintervall $A = [a,a]$ läßt sich in eineindeutiger Weise eine reelle Zahl zuordnen:

$$A = [a,a] \longleftrightarrow a \in R$$

Wir können also in gewissem Sinne die Punktintervalle mit den reellen Zahlen identifizieren.

Für die Multiplikation eines Punktintervalls $A = [a,a]$ mit einem beliebigen Intervall $B = [b_1,b_2]$ schreibt man deshalb auch abkürzend

$$(3) \qquad a \cdot B := [a,a] \odot B.$$

Offensichtlich gilt

$$a \cdot B = \begin{cases} [a \cdot b_1,\ a \cdot b_2] \ , & \text{wenn } a \geq 0 \text{ ist.} \\ [a \cdot b_2,\ a \cdot b_1] \ , & \text{wenn } a < 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Für das Rechnen mit Punktintervallen gemäß Definition 2 gelten genau die gleichen Regeln wie für das Rechnen mit reellen Zahlen. Gelten aber auch alle diese Rechenregeln bzw. Eigenschaften allgemein in I(R)? Wie wir gleich sehen werden, ist das nicht der Fall.

Im einzelnen wollen wir folgende Fragen beantworten:

a) Gelten Kommutativ- und Assoziativgesetz für die Addition und Multiplikation?

b) Gilt das Distributivgesetz?

c) Gibt es bzgl. der Addition und Multiplikation neutrale Elemente?

d) Gibt es bzgl. Addition und Multiplikation zu jedem Intervall ein inverses Intervall?
(Sind die Subtraktion und Division auch in I(R) Umkehroperationen zur Addition und Multiplikation?)

Diese Fragen werden durch die folgenden Sätze beantwortet.

Satz 1:

Für beliebige $A \in I(R)$, $B \in I(R)$ gelten die Kommutativgesetze

(4 a) $\quad A \oplus B = B \oplus A$

(4 b) $\quad A \odot B = B \odot A$.

Satz 2:

Für beliebige $A \in I(R)$, $B \in I(R)$, $C \in I(R)$ gelten die Assoziativgesetze

(5 a) $\quad A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

(5 b) $\quad A \odot (B \odot C) = (A \odot B) \odot C$.

Satz 1 und 2 beantworten die Frage a).
Die Beweise für beide Sätze folgen unmittelbar aus (1) und sind so einfach, daß wir sie gar nicht näher ausführen wollen.

Satz 3:

Das Distributivgesetz

(6) $\quad A \odot (B \oplus C) = A \odot B \oplus A \odot C$

gilt i. a. nicht. Es gilt lediglich die Beziehung

(7) $\quad A \odot (B \oplus C) \subseteq A \odot B \oplus A \odot C$,

die als Subdistributivgesetz bezeichnet wird.

Beweis: Daß (7) gilt, folgt aus (1).
Es sei nämlich x ein beliebiges Element aus $A \odot (B \oplus C)$, dann läßt sich x gemäß (1) in der Form

$$x = a \cdot (b+c)$$

darstellen, wobei $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ ist.
Nun ist aber $a \cdot (b+c) = a.b + a.c$ und somit

$$x \in A \odot B \oplus A \odot C.$$

Damit ist (7) bewiesen.

Daß (6) nicht für alle Intervalle gilt, läßt sich leicht am Beispiel zeigen:
Es sei $A = [1,2]$, $B = [1,1]$, $C = [-1,-1]$.

Aufgabe: Man überzeuge sich davon, daß (6) für diese Intervalle nicht gilt!

Damit ist der Satz 3 bewiesen und die Frage b) beantwortet. ∎

Satz 4:

$0 = [0,0]$ ist neutrales Element in I(R) bzgl. der Addition.
$1 = [1,1]$ ist neutrales Element in I(R) bzgl. der Multiplikation.

Der Beweis sei dem Leser überlassen, wir wollen nur daran erinnern, was es heißt, neutrales Element zu sein:
E heißt neutrales Element bzgl. der Operation $*$, falls für alle $B \in I(R)$ die Beziehung

$$E * B = B$$

gilt.

Wir wollen jetzt die Frage d) beantworten.
Zunächst zur Erinnerung eine Definition:

Definition 4:

A heißt das zu B (bzgl. der Operation $*$) inverse Element, falls

$$B * A = E \quad (E = \text{neutrales Element bzgl. } *)$$

gilt.

In R sind bekanntlich die Elemente a und −a bzgl. der Addition sowie a und $1/a$ $(a \neq 0)$ bzgl. der Multiplikation zueinander invers, d. h. es gilt stets

$$a - a = 0 \quad ,$$
$$a : a = 1 \quad (a \neq 0).$$

Deshalb spricht man hier auch von der Subtraktion (bzw. Division) als Umkehroperation zur Addition (bzw. Multiplikation).
In I(R) ist dieser Sachverhalt <u>nicht</u> gegeben, was in dem folgenden Satz zum Ausdruck kommt.

Satz 5:

a) Zu $A \in I(R)$ existiert ein Element $B \in I(R)$ mit der Eigenschaft

$$A \ominus B = 0 \tag{8}$$

dann und nur dann, wenn A und B Punktintervalle sind.

b) Die Gleichung $A \oslash B = 1$ $(0 \notin B)$ ist ebenfalls dann und nur dann erfüllbar, wenn A und B Punktintervalle sind.

Beweis: Wir beschränken uns auf den Beweis von a). b) wird analog bewiesen.

Wir müssen den Beweis in zwei Richtungen führen, da es sich um eine "genau dann - wenn"-Aussage handelt.

1. Richtung: Aus der Tatsache, daß A ein Punktintervall ist, folgt die Existenz eines Punktintervalls B mit der Eigenschaft (8). Das ist trivial, denn es gilt stets

$$[a,a] \ominus [a,a] = [0,0] = 0.$$

2. Richtung: Wir müssen zeigen: Wenn (8) erfüllt ist, dann folgt daraus, daß A und B Punktintervalle sind.

Ansatz: $A = [a_1,a_2]$, $B = [b_1,b_2]$.

Daraus folgt $A \ominus B = [a_1-b_2,\ a_2-b_1]$

Wegen (8) muß also gelten

$$a_1 = b_2 \quad \text{und} \quad a_2 = b_1. \tag{9}$$

Nun gilt aber $a_1 \le a_2$ und $b_1 \le b_2$ nach Definition 1.

Damit folgt aus (9) $b_2 \le b_1$ und $a_2 \le a_1$.

Somit gilt $a_1 = a_2 = b_1 = b_2$, und der Satz ist bewiesen. ∎

2. Warum Intervallarithmetik?

Die Idee des Rechnens mit Intervallen ist nicht neu. Sie ergab sich von selbst, als man mit Zahlen rechnen wollte, die man nicht genau kannte, wenn also statt der Zahl x nur ein Intervall

$$X = [\,\bar{x} - \varepsilon\,,\ \bar{x} + \varepsilon\,] = [x_1,x_2]$$

bekannt ist, in dem x liegt.

Praktisch kommen solche Aufgabenstellungen sehr häufig vor. Da beim praktischen Rechnen außerdem fast immer Rundungsfehler entstehen, die sich auch fortpflanzen, kommt der Intervallarithmetik eine zweite Bedeutung zu: Das Erfassen von Rundungsfehlern. Von Bedeutung wurden diese Aspekte mit der Entwicklung der elektronischen Rechenanlagen, die es gestatten, Algorithmen mit unheimlich vielen Grundrechenoperationen anzuwenden, denn hier ist die Gefahr der Fehlerakkumulation (Fehleranhäufung) natürlich außerordentlich groß. Wenn es also darauf ankommt, für ein Problem eine Lösung näherungsweise (praktisch sind fast immer nur näherungsweise Berechnungen möglich) zu bestimmen und sichere Fehlerschranken anzugeben, dann bietet sich die Intervallarithmetik in vielen Fällen an. In welcher Weise das im einzelnen geschieht, darauf kann hier nicht näher eingegangen werden.

Ein wesentlicher Nachteil der Intervallarithmetik besteht darin, daß ihre praktische Realisierung einen beträchtlichen Rechenaufwand erfordert.

Dr. J. Grützmann
wiss. Assistent
im Bereich Numerische Mathematik

Auflösung der Denksportaufgabe aus Heft 4/74

Ein Punkt, der der genannten Bedingung genügt, wurde sicherlich von jedem gefunden. Es ist der Nordpol.
Er ist aber nicht der einzige, sondern es existieren beliebig viele solcher Punkte. Wir verschaffen uns einen Teil von ihnen durch die folgende Konstruktion:

Wir suchen einen Breitenkreis auf der südlichen Halbkugel mit dem Umfang von 20 km. 20 km nördlich von diesem liegt dann ein Breitenkreis, dessen sämtliche Punkte der Bedingung der Aufgabe genügen. Das nachzuprüfen überlassen wir unseren Lesern.

Noch eine Anmerkung. Der Umfang des Breitenkreises, von dem wir ausgehen, muß nicht 20 km betragen. Es genügen auch z. B. 10 km oder 5 km.

Gut gesagt

"Die Wissenschaft soll die Freundin der Praxis sein, aber nicht ihre Sklavin."

Carl Friedrich Gauß

Preisaufgaben 5/74

(F 25) Man gebe ohne Verwendung der Differentialrechnung den größten Wert des Ausdrucks

$$(\log_2 x)^4 + 12(\log_2 x)^2 \cdot \log_2 \frac{8}{x}$$

an, wobei x eine reelle Zahl zwischen 1 und 64 sei.

1

(F 26) Welchen Bedingungen müssen die Zahlen a_1, a_2, a_3 genügen, damit das Gleichungssystem

$$(1 + a_1)\,x + y + z = 1$$
$$x + (1 + a_2)\,y + z = 1$$
$$x + y + (1 + a_3)\,z = 1$$

genau eine Lösung besitzt?

2

(F 27) Man beweise: Gibt es zu einem vorgegebenen Element a einer Gruppe [G,∗] irgendein Element a', das eine der Bedingungen

$$a * a' = e \qquad \text{oder} \qquad a' * a = e$$

erfüllt, so ist $a' = a^{-1}$.

1

(F 28) [G,∗] sei eine Gruppe. Man beweise: Zu je zwei Elementen a und b aus G kann man Elemente x und y aus G finden derart, daß $a * x = b$ und $y * a = b$ ist.

Bemerkung: x und y lassen sich vermittels ∗ durch a,b und deren Inverse darstellen.

2

(F 29) Afford a proof of the equation

$$\sin 5x = 16 \sin x \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{2\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{2\pi}{5}\right)$$

for all real numbers x.

1

(F 30) ②

В треугольник вписан квадрат так, что одна из его сторон лежит на наибольшей стороне треугольника. Доказать неравенство

$$\sqrt{2}\, r < x < 2r \quad ,$$

где x - длина стороны квадрата, r - радиус круга, вписанного в данный треугольник.

треугольник - Dreieck
сторона - Seite
вписанный - einbeschrieben

Lösungsbedingungen wie üblich!

Letzter Einsendetermin: 15. 7. 1974

<u>Gewinner im Monat April</u>

Matthias Gatzsche,	20 Neubrandenburg,	12. Klasse
Jürgen Socolowsky,	1402 Bergfelde,	12. Klasse
Heidrun Wabnitz,	69 Jena,	12. Klasse

Zum Knobeln

Fünfzehn Angaben, die zu berücksichtigen sind:

1. Da stehen fünf Häuser.
2. Manfred wohnt in einem roten Haus.
3. Jürgen hat einen Hund.
4. "Wissenschaft und Fortschritt" wird im grünen Haus gelesen.
5. Elke liest "alpha".
6. Das grüne Haus steht unmittelbar rechts. Daneben steht das elfenbeinfarbene Haus.
7. Der Schüler, der Milch trinkt, hält sich Schnecken.
8. Brause wird im gelben Haus getrunken.
9. "Jugend und Technik" liest man im mittleren Haus.
10. Thomas wohnt im ersten Haus.
11. Derjenige, der Tee trinkt, wohnt neben dem Haus mit dem Schüler, der einen Fuchs besitzt.
12. Brause wird in dem Haus neben dem Haus mit dem Pferd getrunken.
13. Der Schüler, der Cola trinkt, liest "Urania".
14. Petra trinkt Kaffee.
15. Das Haus, in dem Thomas wohnt, steht neben dem blauen Haus.

<u>Fragen:</u> Wer liest WURZEL? Wem gehört der Maikäfer?

(Erläuterung: Punkt 6 ist vom Leser aus zu sehen.)

Der folgende Artikel soll am Beginn einer Serie stehen, in der wir jeweils einige einfache Definitionen und Sätze aus den verschiedensten Bereichen der Mathematik angeben werden, auf deren Grundlage dann eine Preisaufgabe gelöst werden kann. Wir wollen hiermit eine bessere Studienvorbereitung auch mit den Preisaufgaben ermöglichen.

Während des Studiums erhält der Mathematikstudent zu den einzelnen in der Vorlesung behandelten Fachgebieten Übungsaufgaben, die auf der Grundlage der Vorlesung und mit Hilfe weiterführender Literatur zu lösen sind.

Algebra: Der Gruppenbegriff

Eine sehr wichtige algebraische Struktur ist die Gruppe.

D e f i n i t i o n :

$[G, *]$ heißt Gruppe, wenn G eine nichtleere Menge und $*$ eine Verknüpfung von Elementen aus G ist, für die folgende Eigenschaften gelten:

1. Je zwei Elementen a,b aus G wird durch $*$ ein Element c aus G zugeordnet, welches i. a. als $a * b$ bezeichnet wird.
2. Für je 3 Elemente a,b und c aus G gilt
   $a * (b * c) = (a * b) * c$ (Assoziativität)
3. Es existiert ein Element e aus G (neutrales Element) mit der Eigenschaft, daß $a * e = e * a = a$ für alle a aus G gilt.
4. Zu jedem a aus G existiert ein inverses Element a^{-1} aus G, so daß $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ gilt.

B e m e r k u n g :

Der Verknüpfung $*$ ist im allgemeinen nicht kommutativ, d. h. es braucht $a * b$ nicht gleich $b * a$ zu sein.
Gilt zusätzlich zu den obigen 4 Axiomen auch noch das Gesetz der Kommutativität, so nennen wir die Gruppe ABELsch.
In der Literatur wird auch statt $*$ das Zeichen + bzw. . und statt e die Bezeichnung 0 bzw. 1 verwendet.

Beispiel:

G sei eine vierelementige Menge und wir geben die Operation * durch folgende Tafel an:

$*$	a_0	a_1	a_2	a_3
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_0	a_3	a_2
a_2	a_2	a_3	a_0	a_1
a_3	a_3	a_2	a_1	a_0

Die Verknüpfung * ist für zwei beliebige Elemente aus G definiert.
Von der Assoziativität (2. Axiom) kann man sich leicht überzeugen.
Das Element a_0 erfüllt die Bedingungen für das neutrale Element (3. Axiom). Es gilt nämlich:

$$a_0 * a_0 = a_0 * a_0 = a_0$$
$$a_1 * a_0 = a_0 * a_1 = a_1$$
$$a_2 * a_0 = a_0 * a_2 = a_2$$
$$a_3 * a_0 = a_0 * a_3 = a_3$$

Das 4. Axiom gilt ebenfalls. Jedes Element ist zu sich selbst invers:

$$a_0 * a_0 = a_0 \qquad a_1 * a_1 = a_0$$
$$a_2 * a_2 = a_0 \qquad a_3 * a_3 = a_0$$

Die angegebene Gruppe ist sogar kommutativ und wird in der Algebra als <u>KLEINsche Vierergruppe</u> bezeichnet.

Ein weiteres Beispiel ist die Addition in den ganzen Zahlen. Das neutrale Element ist die 0. Das inverse Element zu einer Zahl a ist die Zahl -a.

Zwei weitere Beispiele finden wir auch in der unten angegebenen Literatur.

Wir wollen jetzt den Satz von der Eindeutigkeit des neutralen Elementes beweisen. Wenn wir mit Axiom 3 vergleichen, so war hier nur die Existenz, nicht die Eindeutigkeit von e gefordert.

S a t z :

Gibt es zu irgendeinem bestimmten Element a einer Gruppe G ein Element e', das eine der Bedingungen $a * e' = a$ oder $e' * a = a$ erfüllt, so ist notwendigerweise $e' = e$.

B e w e i s :

Es gelte $a * e' = a$ (+) .

b sei ein beliebiges Element aus G. Dann gilt:

$b * e' = (b * e) * e'$ (Axiom 3 und 2)

$= (b * (a^{-1} * a)) * e'$ (Axiom 4; danach existiert a^{-1} mit $a * a^{-1} = e$)

$= (b * a^{-1}) * (a * e')$ (Axiom 2)

$= (b * a^{-1}) * a$ (nach Voraussetzung(+))

$= b * (a^{-1} * a)$ (Axiom 2)

$= b * e$ (Axiom 4)

$= b$ (Axiom 3)

Ebenso erhält man: $e' * b = b$.

Also gilt für beliebige b: $b * e' = e' * b = b$.

Wir setzen nun insbesondere $b = e$. Dann gilt $e * e' = e$. Andererseits gilt nach Axiom 3 (e' ist ein Element aus G) $e' * e = e' * e = e'$.

Hieraus folgt dann $e = e'$.

Für die Voraussetzung $e' * a = a$ läuft der Beweis analog ab. ∎

Ferner kann man die Eindeutigkeit des inversen Elementes beweisen (Preisaufgabe F 27).

Noch eine interessante Rechenregel:

$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$, d. h. die Elemente vertauschen ihre Position. Das ist auf Grund der Nichtkommutativität vieler Gruppen wichtig.

Die Rechenregel beweist man wie folgt:

$$(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = b^{-1} * (a^{-1} * a) * b = b^{-1} * e * b = b^{-1} * b = e$$

und $(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = a * (b * b^{-1}) * a^{-1} = a * e * a^{-1} = a * a^{-1} = e.$

Also ist $b^{-1} * a^{-1}$ ein inverses Element zu $(a * b)$, und auf Grund der Eindeutigkeit desselben gilt also $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$. ■

Den interessierten Leser möchten wir auf

P. S. Alexandroff: "Einführung in die Gruppentheorie", VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin,

verweisen.

D R E I   E X P O N A T E . . .

... bereitet die Sektion Mathematik für die Zentrale MMM im Herbst dieses Jahres vor. Es handelt sich um ausgezeichnete Diplomarbeiten, die einen studentischen Beitrag zu Forschungsleistungen der Fachbereiche Wahrscheinlichkeitsrechnung/mathematische Statistik, mathematische Kybernetik und Analysis darstellen.

Lösungen

Zu den Aufgaben der Serie 1/74

Wir erhielten zu dieser Serie eine Reihe falscher bzw. unvollständiger Lösungen. Bei der Aufgabe F 1 gaben einige Einsender die Lösung des Gleichungssystems nicht an, obwohl dies in der Aufgabenstellung verlangt war. Bei Aufgabe F 4 wurden die Fallunterscheidungen nicht immer vollständig durchgeführt. In den Einsendungen zur F 5 fehlte die Betrachtung der Spezialfälle.

Im folgenden geben wir Lösungen zu den Aufgaben F 4 und F 6 an; Lösungen der Aufgaben F 2 und F 5 erschienen bereits im Heft 4/74.

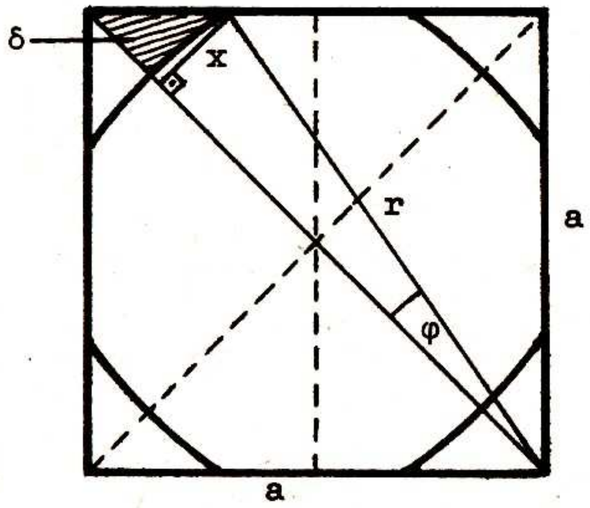
Aufgabe F 4

Zur Lösung dieser Aufgabe müssen wir 4 Fälle unterscheiden:

1) $r \geq a\sqrt{2}$: Die Kreise überdecken das gesamte Quadrat, folglich ist $S = a^2$.

2) $r \leq \frac{a}{2}\sqrt{2}$: Die Kreise mit dem Mittelpunkt in jeweils gegenüberliegenden Eckpunkten des Quadrats schneiden sich nicht, also ist $S = 0$.

3) $\frac{a}{2}\sqrt{5} \leq r < a\sqrt{2}$



Es ist offensichtlich, daß gilt $S = a^2 - 8\delta$.
(δ ist die in der Zeichnung schraffierte Fläche).
$\delta = \frac{1}{2}\,x \cdot a\sqrt{2} - \frac{1}{2}\,r^2\varphi$, wobei $\varphi = \text{arc sin}\,\frac{x}{r}$ ist.

Man kann x berechnen aus

$$2\,x^2 = \left(a - \sqrt{r^2 - a^2}\right)^2, \text{ folglich gilt}$$

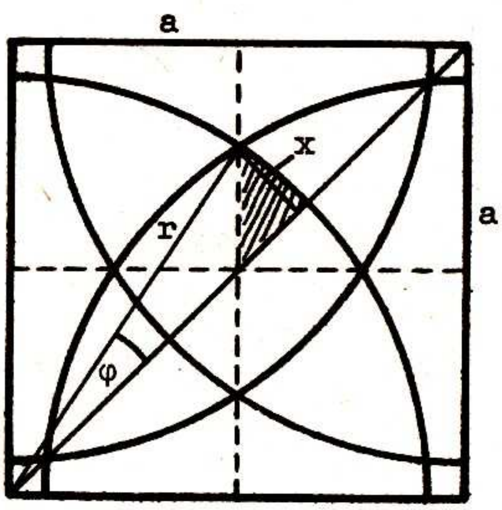
$$x = \frac{a - \sqrt{r^2 - a^2}}{\sqrt{2}}.$$

Wir erhalten also

$$\delta = \frac{1}{2}\,a\,(a - \sqrt{r^2 - a^2}) - \frac{1}{2}\,r^2 \text{ arc sin } \frac{a - \sqrt{r^2 - a^2}}{r\sqrt{2}} \quad \text{und}$$

$$S = -3a^2 + 4\,a\sqrt{r^2 - a^2} + 4\,r^2 \cdot \text{arc sin } \frac{a - \sqrt{r^2 - a^2}}{r\sqrt{2}}$$

4) $\frac{a}{2}\sqrt{2} < r < \frac{a}{2}\sqrt{5}$



Hier gilt nun: $S = 8\delta$, wobei δ wieder die schraffierte Fläche ist. Es gilt

$$\delta = \frac{1}{2} r^2\varphi - \frac{1}{2} x \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2},$$

wobei wieder $\varphi = \arcsin \frac{x}{r}$ ist.

x läßt sich berechnen aus

$$2x^2 = \left(\sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}\right)^2 \text{, und es gilt folglich}$$

$$x = \frac{\sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4r^2 - a^2} - a}{2 \cdot \sqrt{2}}$$

Man erhält schließlich:

$$S = 8\delta = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}r^2 \arcsin \frac{\sqrt{4r^2-a^2}-a}{2r\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{4r^2-a^2}-a}{2\sqrt{2}}\,\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)$$

$$= 4r^2 \arcsin \frac{\sqrt{4r^2-a^2}-a}{2r\sqrt{2}} - a\left(\sqrt{4r^2-a^2}-a\right).$$

Aufgabe F 6 (nach Hans-Georg Martin, Jena, 10. Klasse)

Hätte $3x^2 + 8 = y^2$ eine ganzzahlige Lösung, so müßte für x_0 und y_0 gelten: $3x_0^2 = y_0^2 - 8$, d. h. $3 \mid y_0^2 - 8$, und hieraus würde folgen $y_0^2 \equiv 2 \pmod 3$.

Es gilt aber:

Ist $y_0 \equiv 0 \pmod 3$, so folgt $y_0^2 \equiv 0 \pmod 3$,
ist $y_0 \equiv 1 \pmod 3$, so folgt $y_0^2 \equiv 1 \pmod 3$,
ist $y_0 \equiv 2 \pmod 3$, so folgt $y_0^2 \equiv 1 \pmod 3$.
Also existiert kein y_0 mit $y_0^2 \equiv 2 \pmod 3$, d. h., $3x^2 + 8 = y^2$ besitzt keine natürlichen bzw. ganzzahligen Lösungen.

Herausgeber: Leitung der FDJ-Grundorganisation der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Egbert Creutzburg
Chefredakteur: Werner Nagel
Redaktion: J. Dubslaff, H.-G. Leopold, G. Weske
Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Bezugspreis je Heft: 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.

V-14-6

III. FDJ-STUDENTENTAGE

DER FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT

6

74

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Fr.-Schiller-Universität Jena

Mengen, Relationen, Funktionen (I)

Die Bedeutung der Mengenlehre für die Mathematik besteht darin, daß alle bisher bekannten Begriffe der Mathematik sich auf mengentheoretischer Grundlage definieren lassen. Wir werden dies am Beispiel von solchen grundlegenden Begriffen wie Funktion, Abbildung, Relation genauer ausführen.

1. Elementare Einführung in die Mengenlehre

Was man unter Mengen zu verstehen hat, wollen wir nicht zu definieren versuchen. Wir nehmen diesen Begriff vielmehr aus der Umgangssprache in seiner Bedeutung zur Bezeichnung gewisser Gesamtheiten von Dingen. Die Dinge, die die Menge bilden, nennen wir ihre E l e m e n t e .

Beispiele:

1. Die Menge der Selbstlaute des lateinischen Alphabets besteht aus den Elementen a, e, i, o, u.
2. Die Menge aller durch 5 teilbaren Zahlen, die größer als 20 sind, besitzt zum Beispiel die Elemente 25, 30, 35.

Mengen werden wir im allgemeinen mit irgendwelchen Buchstaben bezeichnen. Ist ein Ding x ein Element der Menge M, so wollen wir abkürzend dafür schreiben $\underline{x \in M}$. Im anderen Fall benutzen wir die Schreibweise $\underline{x \notin M}$.

Beispiele:

1. Die Menge der Selbstlaute des lateinischen Alphabets werde mit S bezeichnet. Dann gilt zum Beispiel $a \in S$, $i \in S$, $k \notin S$, $s \notin S$.
2. Bezeichnet man die Menge aller durch 5 teilbaren natürlichen Zahlen, die größer als 20 sind, mit Z, so gilt $0 \notin Z$, $15 \notin Z$, $18 \notin Z$, $25 \in Z$, ...

Um mit Mengen arbeiten zu können, muß man sie zunächst aufschreiben können. Eine Möglichkeit, dies zu tun, besteht darin, alle Elemente der Menge aufzuschreiben und sie zum Zeichen dafür, daß nicht die Elemente einzeln betrachtet werden, sondern ihre Gesamtheit als Menge aufgefaßt werden soll, in geschweifte Klammern setzt.

Beispiele:

1. $S = \{a,e,i,o,u\}$
2. $Z = \{25,30,35,40,45,\ldots\}$

Im zweiten Beispiel handelt es sich um eine Menge, deren Elemente nicht alle wirklich aufgeschrieben werden können, weil es unendlich viele sind. Darauf sollen die drei Punkte in der geschweiften Klammer hinweisen. Bei Benutzung dieser Schreibweise wird immer angenommen, daß der Leser aus dem jeweiligen Zusammenhang heraus in der Lage ist, die Reihe der Elemente richtig fortzusetzen.

Eine Menge kann im allgemeinen auch durch eine Eigenschaft angegeben werden, die die Elemente dieser Menge charakterisiert. Beispielsweise werden die Elemente der oben betrachteten Menge S durch die Eigenschaft gekennzeichnet, Selbstlaute des lateinischen Alphabets zu sein. Die Elemente der Menge Z werden durch die Eigenschaft festgelegt, natürliche Zahlen größer als 20 zu sein, die durch 5 teilbar sind. Demgemäß wollen wir schreiben

$$Z = \{x\colon x \text{ natürliche Zahl und } x > 20 \text{ und } x \text{ teilbar durch } 5\},$$

gelesen: "Z ist die Menge aller derjenigen Elemente, die durch 5 teilbare natürliche Zahlen größer als 20 sind." Mit anderen Worten:
Ein Element (bei uns mit x bezeichnet) gehört genau dann zur Menge Z, wenn es die rechts vom Doppelpunkt aufgeführte Eigenschaft besitzt.

Hieraus ergibt sich sofort, daß das x durch ein beliebiges anderes Symbol ersetzt werden kann, ohne daß sich an der aufgeschriebenen Menge etwas ändert.

Die Menge S kann so aufgeschrieben werden:

$$S = \{x\colon x \text{ ist Selbstlaut des lateinischen Alphabets}\}.$$

Weitere $\boxed{\text{Beispiele:}}$

1. $E = \{ x: x^2 - 3x + 2 = 0 \}$
   E besteht also aus allen denjenigen x, die die Bedingung $x^2 - 3x + 2 = 0$ erfüllen. Das heißt aber $E = \{1,2\}$, denn $x = 1$ und $x = 2$ sind die einzigen Zahlen, die diese Gleichung lösen.

2. $F = \{ x: x = 0 \text{ oder } x = 3 \text{ oder } x = 7 \}$
   Es ist offenbar $F = \{ 0,3,7 \}$.

2. Untermengen

Im folgenden sollen zur Abkürzung umgangssprachlicher Aussagen die in der Logik üblichen Zeichen

$\wedge$	(und)
$\vee$	(oder)
$\sim$	(nicht)
$\longrightarrow$	wenn ..., so
$\longleftrightarrow$	genau dann, wenn
$\forall x$	für alle x
$\exists x$	es gibt ein x

benutzt werden. Wer mehr über den richtigen Gebrauch und die richtige Interpretation dieser Zeichen wissen möchte, greife etwa zu dem Buch von G. Asser "Einführung in die mathematische Logik I".

Verschiedene Mengen können hinsichtlich ihrer Elemente miteinander verglichen werden. Es kann vorkommen, daß alle Elemente einer Menge A auch Elemente der Menge B sind. In diesem Fall wollen wir A eine Teilmenge (oder Untermenge) von B nennen:

D e f i n i t i o n 1 :

A heißt <u>Unter- oder Teilmenge</u> von B (in Zeichen $A \subseteq B$) $=_{Df}$ $\forall x(x \in A \longrightarrow x \in B)$

D e f i n i t i o n 2 :

A heißt <u>echte Teilmenge</u> von B ($A \subset B$) $=_{Df}$

$$\forall x(x \in A \longrightarrow x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$$

Beispiele:

1. Für jede Menge M gilt $M \subseteq M$. M ist jedoch keine echte Teilmenge von M.
2. Ist A die Menge aller Buchstaben des lateinischen Alphabets, so gilt $S \subseteq A$ und sogar $S \subset A$.
3. Ist N die Menge der natürlichen Zahlen, so ist $Z \subseteq N$ und sogar $Z \subset N$.

Wir sind nun in der Lage zu definieren, wann zwei Mengen gleich sein sollen.

D e f i n i t i o n 3 :

$$A = B =_{Df} A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Wenn man an die Definition von $\subseteq$ denkt, bedeutet diese Definition folgendes:
Die Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn jedes Element von A auch Element von B und jedes Element von B auch Element von A ist.
(Es ist interessant, daß diese Vorstellung über die Gleichheit von Mengen, die jeder vernünftige Mensch gefühlsmäßig sofort anerkennt, durch obige Definition auf die Elementbeziehung allein zurückgeführt ist.)

Beispiel:

Die Mengen $U = \{x: x^2 = 4\}$ und $V = \{x: 1 < |x| < 3$ und x ganze Zahl$\}$ sind gleich. Es gilt $U = V$.

Aufgaben:

1) Mit Hilfe von Definition 1 und Definition 3 beweise man: $\{1,2,3,4,5\} = \{3,1,5,4,2\}$.
2) Man überlege sich im Anschluß, daß sich eine Menge nicht ändert, wenn man ihre Elemente in anderer Reihenfolge aufschreibt.
3) Man beweise wie in Aufgabe 1: $\{1,2,3\} = \{1,2,1,1,3,2,3,3\}$
4) Man überlege sich allgemein, daß sich eine Menge nicht ändert, wenn man ihre Elemente mehrfach aufschreibt. Daher kann man sich darauf beschränken, jedes Element nur einfach zu notieren.

3. Elementare Mengenoperationen

Jetzt wollen wir einige Möglichkeiten kennenlernen, aus gegebenen Mengen neue Mengen zu erzeugen.

3.1. Durchschnitt zweier Mengen

D e f i n i t i o n 4 :

> $A \cap B =_{Df} \{x: x \in A \wedge x \in B\}$
> $A \cap B$ heißt Durchschnitt von A und B.

In Worten: Der Durchschnitt von A und B enthält genau diejenigen Elemente, die sowohl in A als auch in B vorkommen.

Beispiel:

Ist $A =_{Df} \{x: x \in N \wedge 2 \text{ ist ein Teiler von } x\}$,
$B =_{Df} \{x: x \in N \wedge 3 \text{ ist ein Teiler von } x\}$, so ist
$A \cap B = \{x: x \in N \wedge 6 \text{ ist ein Teiler von } x\}$.

N ist dabei die Menge der natürlichen Zahlen.

Frage: Welche Menge ergibt sich als Durchschnitt von
$K =_{Df} \{ x:x \in N \wedge 0 \leq x \leq 5\}$ und
$L =_{Df} \{ x:x \in N \wedge x \text{ Teiler von } 6\}$?

Es kann vorkommen, daß zwei Mengen A und B kein einziges gemeinsames Element besitzen, z. B. $S = \{a,e,i,o,u\}$ und $R = \{1,2,3,4,5\}$. Man nennt solche Mengen durchschnittsfremd oder disjunkt. Wir formulieren die präzise

D e f i n i t i o n 5 :

> A und B heißen durchschnittsfremd (oder disjunkt)
> $=_{Df} \sim \exists x(x \in A \wedge x \in B)$

Auch bei disjunkten Mengen spricht man von einem Durchschnitt gemäß Definition 4. Sind A und B disjunkt, so gibt es kein Element x, das die Bedingung $x \in A \wedge x \in B$ erfüllt. Deshalb nennt man den Durchschnitt disjunkter Mengen die leere Menge.
Für die leere Menge gibt es die feste Bezeichnung $\emptyset$. Die leere Menge ist diejenige Menge, die überhaupt kein Element enthält. Daß wir von der leeren Menge sprechen, ist berechtigt, weil sich auf Grund von Definition 3 und Definition 1 beweisen läßt, daß es nur eine leere Menge geben kann.

3.2. Vereinigung von Mengen

D e f i n i t i o n 6 :

$A \cup B =_{Df} \{x: x \in A \vee x \in B\}$

$A \cup B$ heißt die Vereinigung von A und B.

In Worten: Die Vereinigung von A und B enthält genau diejenigen Elemente, die in wenigstens einer der Mengen A und B vorkommen.

Beispiel:

$A = \{a,b,c\}$, $B = \{b,c,d\}$. $A \cup B = \{a,b,c,d\}$

Aufgaben: 1) Was ist $A \cup \emptyset$?

2) Man beweise: $A \cap A = A \cup A = A$

3) Welches ist die Vereinigungsmenge der Menge aller durch 4 teilbaren natürlichen Zahlen mit der Menge aller durch 6 teilbaren natürlichen Zahlen?

3.3. Relatives Komplement (oder Differenz) zweier Mengen

D e f i n i t i o n 7 :

$A \setminus B =_{Df} \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$

$A \setminus B$ heißt Komplement von B bezüglich A oder Differenz von A und B.

In Worten: Das Komplement von B bezüglich A ist die Menge aller Elemente von A, die außerhalb von B liegen.

Beispiel:

$A = \{0,1,2,3\}$, $B = \{0,3\}$. $A \setminus B = \{1,2\}$

Aufgaben: 1) Man bestimme für eine beliebige Menge A die Differenz $A \setminus A$!

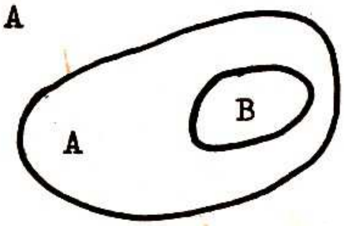
2) Wann ist $A \setminus B = A$?

3) Man beweise: $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$.

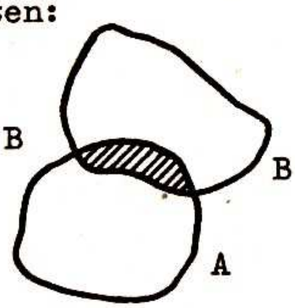
Hinweis zu Aufgabe 3: Ein stichhaltiger Beweis muß unbedingt auf die Definitionen 7, 6, 3 und 1 zurückgreifen, weil uns die Begriffe Gleichheit, Vereinigung und Differenz von Mengen nur über diese Definitionen zugänglich sind!

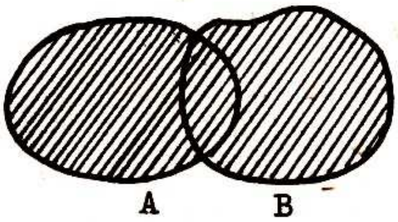
Besonders anschaulich werden die eingeführten Begriffe, wenn wir mit Mengen von Punkten der Ebene arbeiten:

$B \subseteq A$



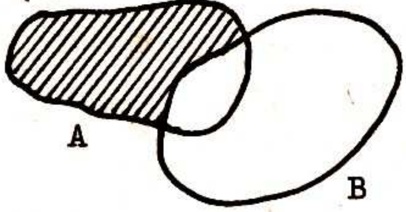
$A \cap B$





$A \cup B$

$A \setminus B$



Dr. Gerd Wechsung
Dozent im Bereich
Mathematische Kybernetik

Der zweite Teil dieses Artikels erscheint im Heft 7/8.

III. FDJ-Studententage

(30.4.-5.5.1974)

Obwohl in diesem Jahr erst die dritten Studententage stattfanden, sind sie doch schon zu einer Tradition geworden. In der FDJ-Arbeit nehmen sie eine zentrale Stellung ein. Von einigen Ereignissen dieser Woche, die frei von Lehrveranstaltungen ist, möchten wir im folgenden kurz berichten.

Am Dienstag, dem 30. April, fanden an unserer Sektion die Studienjahreskonferenzen statt. Ihre besondere Bedeutung erlangten sie in diesem Jahr dadurch, daß sie erstmals eigenverantwortlich von den Studienjahresleitungen der FDJ gestaltet wurden. Studenten und Lehrkörper gaben Rechenschaft über die erreichten Ergebnisse, und es wurden z. B. Probleme des Studiums, der FDJ-Arbeit und der Aneignung des Marxismus-Leninismus diskutiert. Die Zusammenarbeit zwischen den Studenten und den Lehrkräften fand hier einen Höhepunkt. Man spürte deutlich das Bemühen der Studenten, an der weiteren Verbesserung ihrer Ausbildung mitzuwirken.

(Fortsetzung Seite 157)

Preisaufgaben 6/74

(F 31) Man bestimme Supremum und Infimum der folgenden Menge:

2

$$M = \{x_n : x_n = \frac{1}{n} \wedge n \in N\}$$

N ist dabei die Menge $\{1,2,\ldots\}$ der natürlichen Zahlen.

(F 32) Man beweise den Satz 4 auf Seite 157.

2

Hinweis: Man versuche, den Beweis von Satz 2 zu übertragen.

(F 33) Vorgegeben sei im R_2 eine Gerade g mit den Punkten $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n, \ldots$ und die Vektor-Folge

1

$$\overrightarrow{PQ_1},\ \frac{\overrightarrow{PQ_1} + \overrightarrow{PQ_2}}{2},\ \ldots,\ \frac{\overrightarrow{PQ_1} + \overrightarrow{PQ_2} + \ldots + \overrightarrow{PQ_n}}{n},\ \ldots,$$

wobei n eine natürliche Zahl und P ein beliebiger Punkt der Ebene ist.

Es ist zu beweisen, daß jeder Vektor dieser Folge in der Geraden g endet.

(F 34) Man gebe die Menge aller reellen Zahlen x an, die die Gleichung

2

$$\sin x + 2 \sin 2x = 3 + \sin 3x$$

lösen.

(F 35) Найти наименьшее значение функции

1

$$\varphi(x) = |x-a| + |x-b| + |x-c| + |x-d|,$$

где $a < b < c < d$ – фиксированные вещественные числа, а x принимает произвольные вещественные значения.

произвольный – beliebig
вещественный – reell

(F 36) Найти основной период функции $y = \cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}$.

1

основной – Haupt-, Grund-, wesentlich
(основной период entspricht in der Aufgabe der kleinstmöglichen Periode)

Letzter Einsendetermin: 15. 8. 1974

Supremum und Infimum von Zahlenmengen

Supremum und Infimum zählen zu den Grundbegriffen der reellen Analysis.
Wir werden diese Begriffe für Mengen reeller Zahlen definieren.

Definition 1:

$M \subseteq R$, $M \neq \emptyset$. (R bedeute die Menge d. reellen Zahlen.)
Die reelle Zahl a heißt obere Schranke von M $=_{Df}$
$m \leq a$ für alle $m \in M$.

Jedes Element der Menge M muß also kleiner oder gleich a sein.

Definition 2:

$M \subseteq R$, $M \neq \emptyset$.
Die reelle Zahl s heißt kleinste obere Schranke (Supremum) von M $=_{Df}$
(1) s ist obere Schranke von M,
(2) für jede andere obere Schranke s' der Menge M gilt $s \leq s'$.

s wird als sup M oder auch finis superior M bezeichnet.

Satz 1:

Jede nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein eindeutig bestimmtes Supremum.

Auf den Beweis können wir hier nicht eingehen; er beruht auf der Vollständigkeit der Menge der reellen Zahlen und der in ihr bestehenden Ordnung " $\leq$".
Ein zweiter Satz liefert uns eine zur Definition 2 äquivalente Formulierung des Supremumbegriffs.

Satz 2:

s ist Supremum einer nichtleeren Menge M reeller Zahlen dann und nur dann, wenn gilt:
(1) $m \leq s$ für alle $m \in M$.
(2') Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $m_\varepsilon \in M$, so daß $s - \varepsilon < m_\varepsilon$ ist.

<u>Beweis:</u> Die ersten Bedingungen in Definition 2 und Satz 2 stimmen überein. Es genügt also, die Gleichwertigkeit von (2) und (2') zu zeigen.

a) (2) $\longrightarrow$ (2')

$s = \sup M$, d. h. ist s' eine obere Schranke von M, so muß stets $s \leq s'$ gelten $(*)$.

Für beliebige ε, $\varepsilon > 0$, gilt: $s - \varepsilon < s$.

Also kann $(s - \varepsilon)$ keine obere Schranke von M sein, sonst wäre $(*)$ verletzt.

Dann muß es aber ein Element m_ε aus M geben, für das gilt:

$s - \varepsilon < m_\varepsilon$.

Damit ist (2') gezeigt.

b) (2') $\longrightarrow$ (2)

$\varepsilon > 0$ sei beliebig, aber fest vorgegeben.

Dann existiert nach (2') stets ein $m_\varepsilon \in M$, für das $s - \varepsilon < m_\varepsilon$ gilt.

c sei eine beliebige obere Schranke von M.

(Zum Beweis der Behauptung $s = \sup M$ genügt es, $s \leq c$ zu zeigen, da c eine beliebig gewählte obere Schranke von M ist.)

Dann gilt $s - \varepsilon < m_\varepsilon \leq c$

und somit auch $s - \varepsilon < c$.

Letztere Ungleichung gilt für beliebige $\varepsilon > 0$.

Damit folgt $s \leq c$. ■

Mit Hilfe des in dem Satz enthaltenen Kriteriums werden wir die Suprema einiger Mengen bestimmen:

$$M_1 = \{x : x \in R \wedge a < x < b\}$$

<u>Behauptung:</u> $\sup M_1 = b$

(1) Es gilt $x \leq b$ für alle $x \in M_1$.

(2') $\varepsilon > 0$ sei beliebig vorgegeben.

Wir definieren $x_\varepsilon = b - \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt $x_\varepsilon \in M_1$ und

$$b - \varepsilon < x_\varepsilon = b - \frac{\varepsilon}{2} .$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. ■

Definition 3:

$M \subseteq R, \quad M \neq \emptyset$.

c heißt <u>Maximum</u> von M ($c = \max M$) $=_{Df}$

(1) $c = \sup M$,

(2) $c \in M$.

Also besitzt die Menge M_1 zwar ein Supremum, nämlich b, aber kein Maximum, da b nicht zur Menge gehört.

$M_2 = \{x : x \in R \wedge d < x \leq e\}$

Hier ist $e = \sup M = \max M$.

$M_3 = \{x_n : \quad x_n = -\frac{1}{n} \wedge n \in N\}$

<u>Behauptung:</u> $\sup M_3 = 0$

(1) Offensichtlich ist $-\frac{1}{n} < 0$ für alle n.

(2') Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest vorgegeben.
Wir zeigen, daß ein $x_{n_\varepsilon} \in M_3$ existiert mit $0 - \varepsilon < x_{n_\varepsilon}$.
Dazu wählen wir n_ε als $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, und somit ist

$x_{n_\varepsilon} = \dfrac{-1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1}$. Dann gilt nämlich $x_{n_\varepsilon} = \dfrac{-1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1} > -\varepsilon$.

Damit ist die Behauptung bewiesen. $\blacksquare$

Zum Abschluß geben wir noch die entsprechenden Definitionen und Sätze für das <u>Infimum</u> an.

Definition 4:

$M \subseteq R, \quad M \neq \emptyset$.

Die reelle Zahl u heißt <u>untere Schranke</u> von M $=_{Df}$

$u \leq m$ für alle $m \in M$.

Definition 5:

$M \subseteq R, \quad M \neq \emptyset$.

Die reelle Zahl i heißt <u>größte untere Schranke</u> <u>(Infimum)</u> von M ($i = \inf M$) $=_{Df}$

(1) i ist untere Schranke von M,

(2) für jede andere untere Schranke i' der Menge M gilt $i' \leq i$.

Definition 6:

$M \subseteq R, \quad M \neq \emptyset.$

d heißt Minimum von M ($d = \min M$) $=_{Df}$

(1) $d = \inf M$,

(2) $d \in M$.

Satz 3:

Jede nach unten beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein eindeutig bestimmtes Infimum.

Satz 4:

i ist Infimum einer nichtleeren Menge M der reellen Zahlen dann und nur dann, wenn gilt:

(1) $i \leq m$ für alle $m \in M$.

(2') Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $m_\varepsilon \in M$, so daß $m_\varepsilon < i + \varepsilon$ ist.

Der Leser versuche nun, die Aufgaben F 31 und F 32 zu lösen.

(Fortsetzung von Seite 152)

Den Nachmittag des 1. Mai nutzten die Studenten zu Wanderungen und anderen gemeinsamen Veranstaltungen. Im Rahmen der Studentenkonferenz befaßten sich am Donnerstag und Freitag Arbeitskreise mit Fragen des geistig-kulturellen Lebens, der Arbeit von Jugendobjekten an unserer Sektion, mit Studienproblemen u. a. Beststudenten hatten Gelegenheit, sich durch Vorträge selbst in der Darlegung eigener Erarbeitungen zu üben. Diese Vorträge stellten meist eine Weiterführung und Vertiefung des Lehrplanstoffs dar.

Zum VII. Karl-Marx-Seminar der Universität, das unter dem Thema "Sozialismus - Patriotismus - Internationalismus" stand, zeigten die Studenten, daß sie sich neben dem Fachstudium sehr interessiert mit dem Marxismus-Leninismus beschäftigen.

Am Freitagabend hatte dann die Sektion zum geistig-kulturellen Leistungsvergleich aufgerufen, an dem sich Lehrkörper und Studenten mit einem abwechslungsreichen Programm beteiligten. Hier zeigte sich, daß zu einem Mathematiker mehr als das Fachstudium gehören kann und muß.

Ihren Abschluß fanden die Studententage in einem Sportfest. Am Fußballturnier beteiligte sich wie in jedem Jahr auch eine Mannschaft der WURZEL. Wenn wir uns auch nicht gut plazieren konnten, so hat uns doch die Teilnahme - wie die Studententage überhaupt - Spaß gemacht.

Lösungen

Aufgabe F 9

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion.
$x_1, x_2, x_3, \ldots$ sei eine reelle Zahlenfolge, die den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt.

Induktionsanfang: $k = 3$

Laut Voraussetzung gilt die Gleichung

$$(x_1^2 + x_2^2)(x_2^2 + x_3^2) = (x_1x_2 + x_2x_3)^2.$$

Durch Umformungen erhalten wir die Gleichungen

$$x_2^4 + x_1^2x_3^2 - 2x_1x_2^2x_3 = 0$$

$$(x_2^2 - x_1x_3)^2 = 0$$

und somit

$$x_2^2 = x_1x_3 .$$

Da $x_1 \neq 0$ gelten soll, bilden die Zahlen x_1, x_2 und x_3 die Anfangsglieder einer geometrischen Reihe mit $q = \frac{x_2}{x_1}$.

Induktionsvoraussetzung:

Die ersten k Glieder der Folge $x_1, x_2, \ldots$ bilden eine geometrische Reihe mit $q = \frac{x_2}{x_1}$, d. h. es gilt

$$x_i = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^i \cdot x_1 \qquad \text{für } i = 0,1,\ldots,k.$$

Induktionsbehauptung:

Auch x_{k+1} läßt sich als $x_{k+1} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{k+1} \cdot x_1$ darstellen, gehört also zu der geometrischen Reihe.

Induktionsbeweis:

Nach den Voraussetzungen der Aufgabenstellung gilt für $n = k+1$ die Gleichung

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2)(x_2^2+x_3^2+\ldots+x_{k+1}^2) = (x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_kx_{k+1})^2 .$$

Wir führen die Abkürzung

$$a^2 =_{Df} x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{k-1}^2$$

ein.

Da $x_1 \neq 0$ ist, gilt auch $a^2 \neq 0$.
Aus obiger Gleichung erhalten wir jetzt

$$(a^2 + x_k^2)(q^2a^2 + x_{k+1}^2) = (qa^2 + x_kx_{k+1})^2,$$

da nach Induktionsvoraussetzung

$$x_i = q^i x_1 = qx_{i-1} \quad , \qquad i = 0,1,\ldots,k$$

gilt.
Durch Umformen ergibt sich

$$a^2(x_kq - x_{k+1})^2 = 0.$$

Da $a \neq 0$ ist, erhalten wir

$$x_{k+1} = qx_k.$$

Also sind auch die ersten (k+1) Glieder der Folge Glieder einer geometrischen Reihe mit $q = \frac{x_2}{x_1}$.
Hieraus folgt aber die Behauptung der Aufgabe.

Aufgabe F 10

Die Ungleichung

$$|x - 2x^2 + 4x^3 - 8x^4 + \ldots + (-2)^{n-1}x^n + \ldots| < 1 \qquad (1)$$

soll erfüllt werden.
Als erstes müssen wir eine Bedingung für die Konvergenz der unendlichen Reihe angeben. Wir haben hier eine geometrische Reihe mit $a_o = x$ und $q = -2x$, die für $a_o \neq 0$ genau dann konvergiert, wenn $|q| < 1$ gilt. Der Grenzwert der Reihe beträgt im Konvergenzfall

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_o q^n = a_o \frac{1}{1-q}.$$

Insgesamt erhalten wir hieraus zwei zur Ungleichung (1) äquivalente Ungleichungen:

$$|2x| < 1 \qquad (2)$$

$$\left|\frac{x}{1+2x}\right| < 1 \qquad (3)$$

Aus (2) folgt $-1 < 2x < 1$, also auch $1 + 2x > 0$.
Deshalb können wir (3) umformen in

$$\frac{|x|}{1+2x} < 1 \qquad \text{bzw.} \qquad |x| < 1+2x.$$

Wir erhalten also:

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \qquad (2')$$

$$|x| < 1+2x \qquad (3')$$

Jetzt unterscheiden wir die zwei Fälle $x \geq 0$ und $x < 0$.
Aus $\underline{x \geq 0}$ folgt das System

$$\left.\begin{array}{r} x \geq 0 \\ x < 1+2x \\ -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \text{mit den Lösungen } 0 \leq x < \frac{1}{2},$$

und für $\underline{x < 0}$ folgt das System

$$\left.\begin{array}{r} x < 0 \\ -x < 1+2x \\ -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \text{mit den Lösungen } -\frac{1}{3} < x < 0 .$$

Die Lösungsmenge ergibt sich zu $\{x : -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\}$
wie auch die Probe bestätigt.

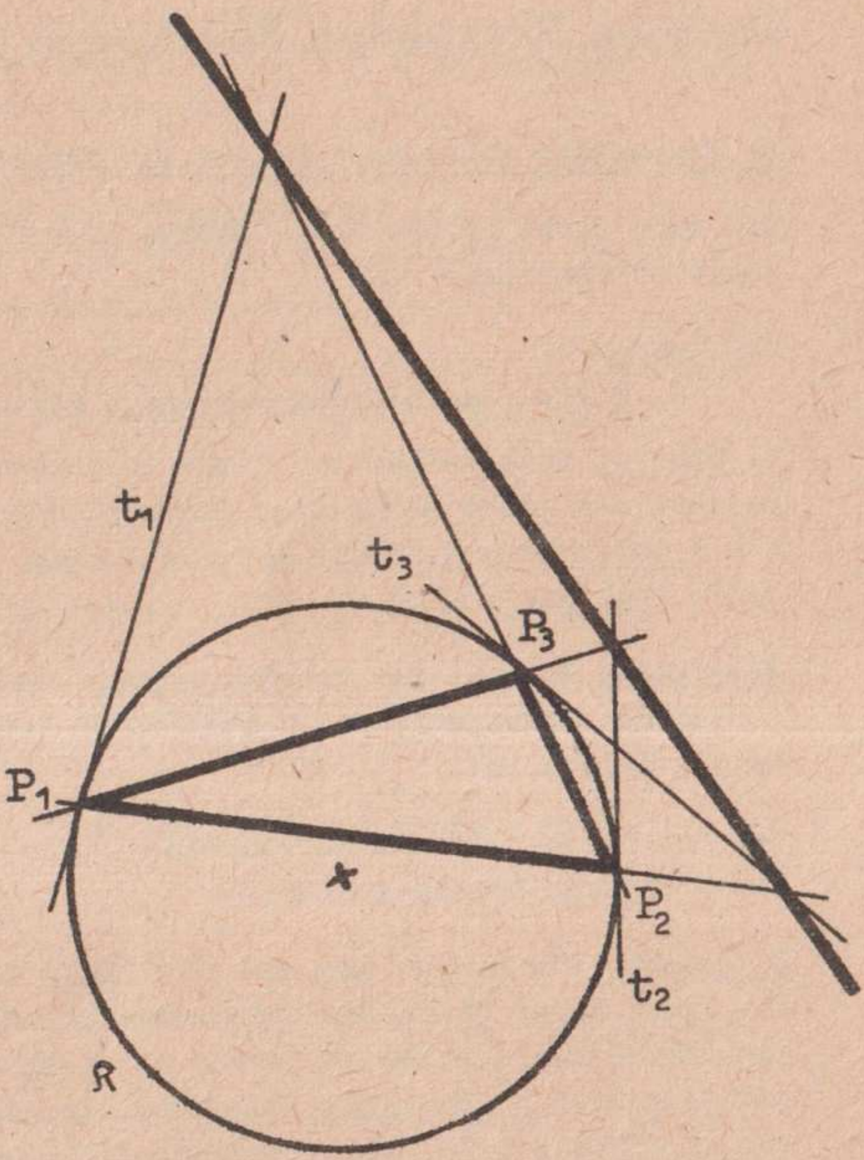
Lösung der Aufgabe auf S. 138 (WURZEL 5/74):

Petra gehört der Maikäfer; Thomas liest WURZEL.

Gewinner im Monat Mai

Roger Labahn,	214	Anklam,	9. Klasse
Marcus Kasner,	209	Templin,	10. Klasse
Detlef Rütz,	20	Neubrandenburg,	11. Klasse

Herausgeber: Leitung der FDJ-Grundorganisation der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Egbert Creutzburg
Chefredakteur: Werner Nagel
Redaktion: J. Dubslaff, H.-G. Leopold, G. Weske
Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Bezugspreis je Heft: 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.
V-14-6



7/8
74

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Fr.-Schiller-Universität Jena

Mengen, Relationen, Funktionen (II)

4. Elementare Gesetzmäßigkeiten der Mengenlehre

Wir sind jetzt in der Lage, einige einfache Sätze der Mengenlehre zu beweisen.

S a t z 1 :

> Für jede beliebige Menge A gilt $\emptyset \subseteq A$.

1. Beweis: Nach Definition 1 ist zu zeigen: $\forall x(x \in \emptyset \longrightarrow x \in A)$. Da aber die leere Menge kein Element enthält, ist die Aussage $x \in \emptyset$ immer falsch. Damit ist die Aussage $x \in \emptyset \longrightarrow x \in A$ bei jeder Wahl von x wahr. ■

Bemerkung: Hierbei ist benutzt worden, daß eine "Implikation" $p \longrightarrow q$ der Aussagen p und q stets dann wahr ist, wenn die Aussage p falsch ist.

Wer nicht so weit mit der Aussagenlogik vertraut ist, kann einen anderen Beweis führen:

2. Beweis: Wir nehmen an, daß eine Menge A vorhanden ist, die die leere Menge nicht als Untermenge enthält, und wollen zeigen, daß diese Annahme auf einen Widerspruch führen muß, so daß also Satz 1 doch gilt. Es müßte dann wenigstens ein x geben mit $x \in \emptyset \wedge x \notin A$. Diese Aussage muß aber immer falsch sein, weil $x \in \emptyset$ immer falsch ist. ■

S a t z 2 :

> Folgende Aussagen sind gleichwertig:
> (1) $A \subseteq B$
> (2) $A \cap B = A$
> (3) $A \cup B = B$

Beweis: Wir haben zu beweisen: Aus jeder der Aussagen (1), (2) und (3) folgt jede dieser Aussagen. Es reicht zu zeigen: Aus (1) folgt (2), aus (2) folgt (3) und aus (3) folgt (1).

1. Aus (1) folgt (2)

Wir nehmen also $A \subseteq B$ an. Das heißt: $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$. Unter dieser Voraussetzung ist $A = A \cap B$ zu beweisen. Nach Definition 3 ist dazu zu zeigen:
$A \subseteq A \cap B$ und $A \cap B \subseteq A$.

a) Ist $x \in A$, so ist nach Voraussetzung (1) auch $x \in B$. Damit ist auch $x \in A \cap B$ (nach Definition 4). Also ist unter der Voraussetzung (1) auch $A \subseteq A \cup B$.

b) Nach Definition 4 ist jedes Element von $A \cap B$ auch Element von A. Also ist nach Definition 1 $A \cap B \subseteq A$.

2. Aus (2) folgt (3)

Wir nehmen an, daß $A \cap B = A$ gilt. Dann ist zu beweisen: $A \cup B = B$, d. h. nach Definition 3 ist dazu zu zeigen:
$B \subseteq A \cup B$ und $A \cup B \subseteq B$.

a) Ist $x \in B$, so nach Definition 6 auch $x \in A \cup B$. Daher ist nach Definition 1 $B \subseteq A \cup B$.

b) Es sei $x \in A \cup B$. Nach Definition 6 gibt es dann zwei Fälle:
1. Fall: $x \in B$
2. Fall: $x \in A$

Nach Voraussetzung (2) ist dann $x \in A \cap B$. Nach Definition 4 ist dann $x \in B$.
Wir haben damit gezeigt: Jedes Element von $A \cup B$ ist unter der Voraussetzung (2) auch Element von B. Nach Definition 3 ist daher gezeigt: $A \cup B \subseteq B$.

3. Aus (3) folgt (1)

Wir setzen voraus, daß $A \cup B = B$ gilt. Wir müssen zeigen, daß dann jedes Element von A auch in B liegt. Es sei also $x \in A$. Dann ist nach Definition 6 auch $x \in A \cup B$. Aber weil nach (3) $A \cup B = B$ ist, ist damit $x \in B$. Damit ist alles bewiesen. $\blacksquare$

Damit sind Vorbilder für Beweise einfacher mengentheoretischer Sätze geliefert, und der Leser kann nun versuchen, die folgenden grundlegenden Gesetze der Mengenlehre selbst zu beweisen.

S a t z 3 :

Für beliebige Mengen A,B,C gelten die folgenden Gesetze:

Kommutativgesetze

$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$

Assoziativgesetze

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Verschmelzungsgesetze

$A \cup (B \cap A) = A \qquad A \cap (B \cup A) = A$

Gesetze über den Gebrauch des relativen Komplements

$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

$B \cup (A \setminus B) = A \cup B$

$B \cap (A \setminus B) = \emptyset$

Die De Morganschen Gesetze

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Der Leser möge sich diese Gesetze auch an Hand ebener Punktmengen veranschaulichen.

5. Die Potenzmenge einer Menge

Wir betrachten die Menge $M = \{0, \{0\}, \{1,2,3\}\}$. M hat die Eigenschaft, daß als Elemente von M auch Mengen auftreten.

Frage: Welche der folgenden Aussagen sind wahr:

$0 \in M$, $\{0\} \in M$, $\{0\} \subseteq M$, $\{0,1,2\} \subseteq M$, $\{1,2,3\} \in M$, $1 \in M$?

Antwort: Die vierte und die letzte Aussage sind falsch, alle anderen sind wahr.

Denn $1 \notin M$, weil die einzigen Elemente von M durch 0, $\{0\}$ und $\{1,2,3\}$ gegeben sind. Wäre $\{0,1,2\} \subseteq M$, so müßte nach Definition 1 z. B. $1 \in M$ sein, was eben als falsch erkannt wurde.

Aufgaben: 1. Es sei $A = \{x : 3x = 6\}$. Ist $A = 2$?

Antwort: Nein! Begründung?

2. Welche der folgenden Mengen sind gleich:
$\{0\}$, $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset , \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset,0\}$?

Antwort: Keine zwei sind einander gleich. Begründung?

3. Es sei $A = \{2,4, \{4,5\}\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr: $\{4,5\} \subset A$, $\{4,5\} \in A$, $\{\{4,5\}\} \subseteq A$, $5 \in A$, $\{5\} \in A$, $\{5\} \subset A$?

Antwort: Nur die zweite und dritte Aussage sind wahr. Begründung?

Wir haben jetzt genügend Erfahrung, um folgende Definition als sinnvoll anzusehen:

D e f i n i t i o n 8 :

$\mathfrak{P}(A) =_{Df} \{ X : X \subseteq A \}$

$\mathfrak{P}(A)$ heißt Potenzmenge von A.

In Worten: Die Potenzmenge der Menge A enthält genau alle Untermengen von A.

Beispiele:

1. Es sei $A = \{1,2,3\}$. Dann hat $\mathfrak{P}(A)$ folgende Elemente:

$\emptyset$
$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ (Einermengen)
$\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ (Zweiermengen)
$\{1,2,3\}$

2. $\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Die Potenzmenge der leeren Menge enthält also genau ein Element, nämlich die leere Menge!

Das Beispiel 1 deutet bereits einen Beweis für folgenden Satz an:

S a t z 4 :

Wenn A n Elemente enthält, so enthält $\mathfrak{P}(A)$ 2^n Elemente.

__Beweis:__ Es gibt $n = \binom{n}{1}$ Einermengen, $\binom{n}{2}$ Zweiermengen, ... , $\binom{n}{n}$ Mengen mit n Elementen in $\mathfrak{P}(A)$. Dazu kommt die leere Menge. Insgesamt enthält also $\mathfrak{P}(A)$

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Elemente (hierbei ist $\binom{n}{0} = 1$ benutzt worden). Nach dem binomischen Lehrsatz ist andererseits

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, 1^k\, 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Also gibt es 2^n Elemente in $\mathfrak{P}(A)$. ■

Die Bedeutung des Satzes 4 liegt darin, daß man durch den Übergang von einer Menge zu ihrer Potenzmenge zu einer Menge gelangt, die mehr Elemente als die Ausgangsmenge enthält. Dabei hat man keine andere Menge zu Hilfe nehmen müssen.
Eine andere wichtige Eigenschaft der Potenzmenge besteht darin, daß sie abgeschlossen ist bezüglich Vereinigungs-, Durchschnitts- und Differenzbildung. Das bedeutet, daß für beliebige $X, Y \in \mathfrak{P}(A)$ auch $X \cap Y$, $X \cup Y$ und $X \setminus Y$ zu $\mathfrak{P}(A)$ gehören.

6. Geordnete Paare und Mengenprodukte

Da für eine Zweiermenge $\{x,y\}$ die Beziehung $\{x,y\} = \{y,x\}$ gilt, hat es keinen Sinn, von einem ersten und einem zweiten Element einer solchen Menge zu sprechen. Es besteht aber die Notwendigkeit, neben solchen ungeordneten Paaren auch sogenannte geordnete Paare zu besitzen. Das sollen Gebilde sein, die von 2 Elementen abhängen, wobei ein wohlbestimmtes erstes und ein wohlbestimmtes zweites Element dieses Paares existiert, d. h. im Gegensatz zu einer Paarmenge sollen die Elemente eines geordneten Paares hinsichtlich ihrer Stellung und Zugehörigkeit wohlunterscheidbar sein.
Wir bezeichnen die Menge $\{\{x\}, \{x,y\}\}$ mit $[x,y]$. In dieser Bezeichnung kommt zum Ausdruck, daß diese Menge eigentlich nur von x und y abhängt.
Beispiele: $[1,2] = \{\{1\}, \{1,2\}\}$, $[a,b] = \{\{a\}, \{a,b\}\}$ usw.
Die Art, wie x und y in die Menge $[x,y]$ eingehen, ist aber unterschiedlich. Während $\{x\} \in [x,y]$ ist, ist $\{y\} \notin [x,y]$. Diese Tatsache ist ausschlaggebend für den folgenden Satz:

Satz 5:

$[x,y] = [u,v]$ hat $x = u$ und $y = v$ zur Folge.

Beweis: $[x,y] = [u,v]$ bedeutet $\{\{x\}, \{x,y\}\} = \{\{u\}, \{u,v\}\}$. Also muß jedes Element der linken Menge auch Element der rechten Menge sein und umgekehrt. Es gibt zwei Fälle:

1. Fall: $\{x\} = \{u\}$ und $\{x,y\} = \{u,v\}$.
Hieraus folgt, daß $x = u$ und $y = v$. Wäre nämlich $y \neq v$, so müßte $y = u$ und $v = x$ sein, woraus wegen $x = u$ ebenfalls $y = v$ folgte. Widerspruch!

2. Fall: $\{x\} = \{u,v\}$, $\{x,y\} = \{u\}$.
Hieraus folgt $x = u = v$ und $u = x = y$.
Also $x = u = y = v$. $\blacksquare$

Folgerung:

Ist $x \neq y$, so ist $[x,y] \neq [y,x]$.

Damit besitzen diese Mengen genau die Eigenschaften, die wir von geordneten Paaren gern haben wollen. Da wir bisher noch nichts weiter über geordnete Paare wissen, können wir diese Mengen zu geordneten Paaren erklären.

Definition 9:

$[x,y] =_{Df} \{\{x\}, \{x,y\}\}$ nennen wir geordnetes Paar von x und y. x heißt erste, y zweite Komponente des Paares.

Der Vorteil dieses Vorgehens besteht darin, daß wir neben Mengen nicht noch den Begriff des geordneten Paares als weiteren Grundbegriff in die Mengenlehre einführen müssen. Geordnete Paare sind einfach ganz bestimmte Mengen. Für das folgende ist es aber gänzlich unwichtig zu wissen, wie diese Menge aussieht. Ausschlaggebend für das Arbeiten mit geordneten Paaren ist nur ihre in Satz 5 angesprochene wichtige Eigenschaft.

Definition 10:

$A \times B =_{Df} \{ [a,b] : a \in A \wedge b \in B \}$
$A \times B$ heißt das Produkt von A und B.

In Worten: Das Produkt von A und B besteht aus allen geordneten Paaren, deren erste Komponente in A und zweite Komponente in B liegt.

Beispiele:

1. $A = \{1,2\}$, $B = \{a,b,c\}$.
   $A \times B = \{[1,a], [1,b], [1,c], [2,a], [2,b], [2,c]\}$
   $B \times A = \{[a,1], [a,2], [b,1], [b,2], [c,1], [c,2]\}$
2. $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

F o l g e r u n g e n :

1. Im allgemeinen ist $A \times B \neq B \times A$.
2. Hat A n Elemente und B m Elemente, so hat $A \times B$ n.m Elemente. Daraus erklärt sich die Bezeichnung Produktmenge.

Aufgaben:
1. Man beweise, daß $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ gilt!
2. Man beweise, daß $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ gilt!
3. Ist $A \subseteq B$, so gilt für beliebige C auch $A \times C \subseteq B \times C$.

(Fortsetzung Seite 178)

Gewinner im Monat Juni

Hans-Ullrich Frömmer,	2081	Peckatel,	12. Klasse
Meinhard Mende,	9293	Lunzenau,	12. Klasse
Wolfgang Peinelt,	9112	Burgstädt,	12. Klasse

Gewinner im Monat Juli

Friedhelm Schieweck,	3101	Blumenberg,	10. Klasse
Norbert Schieweck,	3101	Blumenberg,	10. Klasse
Jürgen Socolowsky,	1402	Bergfelde,	12. Klasse

Gewinner im Monat August

Karl-Heinz Wenzlaff,	20	Neubrandenburg,	10. Klasse
Dittmar Kurtz,	5401	Friedrichsrode,	8. Klasse
Peter Mathé,	2105	Löcknitz	(NVA)

Preisaufgaben 7/8/74

(F 37) ② Man beweise, daß für ungerade n aus der Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

die Beziehung

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}$$

folgt.

(F 38) ① Man löse im Bereich der reellen Zahlen die Gleichung

$$\sqrt{|x| + 1} - \sqrt{|x|} = a.$$

a sei eine beliebige reelle Zahl.

(F 39) ② Выяснить, каким условиям должны удовлетворять числа a, b, c для того, чтобы система уравнений

$$\sin x + \sin y = 2a$$
$$\cos x + \cos y = 2b$$
$$\tan x + \tan y = 2c$$

имела хотя бы одно решение.

выяснить – (auf)klären
условие – Bedingung

(F 40) ② Внутри угла AOB, меньшего π, дана точка M, находящаяся на расстоянии a от вершины угла. Отрезок OM образует углы α и β со сторонами угла AOB. Найти радиус R окружности, проходящей через M и отсекающей на сторонах угла AOB хорды, равные 2a.

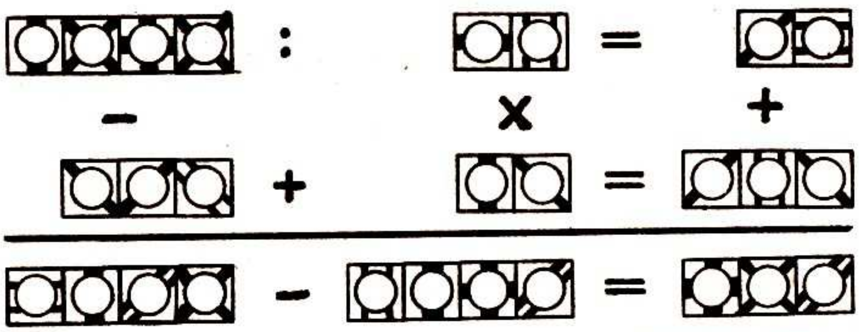
вершина – Scheitel
сторона – Schenkel
отсекать – abtrennen, abschneiden
хорда – Sehne

(F 41) 1 **Man beweise die De Morganschen Gesetze (siehe Seite 164)!**

(F 42) 1 **Beweisen Sie die Behauptung auf Seite 178, daß in der Hesseschen Normalform der cosinus und sinus des Winkels zwischen x-Achse und einer zur betreffenden Geraden senkrechten Richtung unmittelbar durch die Koeffizienten von x und y gegeben ist!**

Lösungsbedingungen wie üblich.

Einsendeschluß: 15. 10. 1974



Keine Angst vor der Kybernetik, am Ende schaltet sie sich selbst aus.

Stanisław Jerzy Lec

* * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Tempo! Tempo! Man kann das Leben an e i n e m Tag durchleben. Aber was tun mit der übrigen Zeit?

Stanisław Jerzy Lec

* * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Druckfehler sind am ehesten geeignet, ein Buch zu konservieren.

Karol Irzykowski

* * * * * * * * * * * * * * * * * * *

(Beim WURZEL-Lesen:)

Die Broschüre war so überzeugend, daß er kopfstehend weiterlas, als er ein umgekehrt eingeheftetes Blatt fand.

Janusz Osęka

Ausbildung in Physik und Physikmethodik

Im Rahmen der Artikelserie über das vierjährige Studium des Diplomlehrers für die Fachkombination Mathematik/Physik möchten wir Ihnen mit diesem letzten Beitrag zwei weitere Fächer vorstellen: Die Ausbildung in Physik und in Physikmethodik.

Am Beispiel des Weges der Erkenntnisgewinnung in der Physik soll Ihnen die Notwendigkeit des Studiums dieser beiden Fächer für den zukünftigen Fachlehrer für Physik und Wesentliches aus ihrem Inhalt aufgezeigt werden.

Die Physik teilt sich heute mit vielen anderen Zweigen in das große Gebiet der Naturwissenschaften. Sie untersucht grundlegende Probleme der unbelebten Natur, wie zum Beispiel Stoffe, Kräfte und Wellenerscheinungen.
Die Physik ist eine Erfahrungswissenschaft, das bedeutet, daß unser physikalisches Wissen in erster Linie aus zahlreichen Einzelbeobachtungen und -messungen gewonnen wird.
Darüber hinaus untersucht die Physik sehr häufig auch solche Prozesse, die nicht ohne unser Zutun ablaufen, die also von uns erzeugt werden müssen - sie stellt Experimente an.
Ebenso wie Beobachtungen und Messungen in der Natur soll das Experiment zu qualitativen und quantitativen Aussagen über das physikalische Geschehen führen.
Ziel des Physikers ist, eine Theorie zu schaffen, die alle Einzelbeobachtungen und -messungen richtig in sich aufnimmt und die Zusammenhänge zwischen ihnen erklärt. Dazu ist es notwendig, ausgehend von den experimentellen Ergebnissen wissenschaftlich begründete Annahmen - Hypothesen - aufzustellen. Bewahrheiten sich diese nicht nur für das Einzelexperiment, sondern auf einem umfangreichen Gebiet, werden sie zur Theorie. Kriterium für die Wahrheit dieser Hypothesen ist die Praxis. Das bedeutet, daß dazu eine Reihe weiterer Experimente durchgeführt werden muß. Oft erweisen sich Hypothesen auch als falsch, aber auch daraus erwächst für den Physiker ein Fortschritt auf dem Wege zur Erkenntnis.
Natürlich lernen Sie im Physikunterricht nur gesichert Richtiges aus Theorien kennen. Aber diesen interessanten Weg der Erkenntnisfindung in vereinfachter Form im Physikunterricht nachzuvoll-

ziehen, ist eine der wichtigsten Aufgaben des Fachlehrers für Physik.
Damit versuchten wir Ihnen zu verdeutlichen, daß der Physiklehrer sowohl über gute Kenntnisse im Fach Physik verfügen muß, als auch beherrschen muß, wie er den oben angedeuteten Erkenntnisprozeß beim Schüler steuert, wann und wie er das Wissen und Können der Schüler festigt, anwenden und wiederholen läßt und bewertet.
Die Kenntnisse im Fach Physik erwirbt der zukünftige Physiklehrer im wesentlichen im Grundstudium des 1. und 2. Studienjahres, der Erkenntnisprozeß des Schülers im Physikunterricht und viele weitere Probleme sind Inhalt des Faches Methodik des Physikunterrichts, das im 3. Studienjahr einsetzt.

Zunächst einige Bemerkungen zum Grundstudium im Fach Physik. Dieses setzt sich aus folgenden Lehrveranstaltungen zusammen, deren Inhalt im Anschluß an die Aufzählung kurz erläutert wird:

1. Vorlesung Grundkurs Physik
2. Übungen zum Grundkurs Physik
3. Vorlesung Theoretische Physik
4. Übungen zur Theoretischen Physik
5. Anfängerpraktikum in Physik
6. Fortgeschrittenenpraktikum in Physik.

In der Vorlesung Grundkurs Physik werden den Studenten über vier Semester Grundkenntnisse aus allen Teilgebieten der Physik vermittelt, wobei Experimente einen wichtigen Platz einnehmen.
Für die Auswahl des Bildungsgutes dieses Grundkurses sind die Erfordernisse des späteren Einsatzes maßgebend. Die Vorlesung schließt unmittelbar an das in der Schule erworbene Wissen an, zieht aber auch bereits Verbindungen zur Theoretischen Physik, um Übergangsschwierigkeiten zu vermeiden.
In den Übungen zum Grundkurs festigen die Studenten das in der Vorlesung Gebotene. Sie haben Gelegenheit, Fragen zu stellen, um so Verständnislücken zu schließen. Durch die Bearbeitung einer reichen Auswahl physikalischer Aufgaben lernen sie, die theoretischen Darlegungen vielseitig anzuwenden.
In der Vorlesung und in den Übungen Theoretische Physik werden die Studenten mit einer anderen, höheren Betrachtungsweise der Physik in den Grundlagen vertraut gemacht. Voraussetzung dafür

sind gewachsene Kenntnisse in der höheren Mathematik.
Das Anfängerpraktikum dient dazu, die theoretischen Kenntnisse in einer Reihe interessanter Praktikumsexperimente aus allen Teilgebieten der Physik anzuwenden und sich dabei grundlegende Fähigkeiten und Fertigkeiten im selbständigen Experimentieren anzueignen.
Im Fortgeschrittenenpraktikum werden höhere Forderungen an die Experimentierfähigkeit der Studenten gestellt. Sie absolvieren hier eine weitere Reihe von Versuchen, insbesondere aus dem Bereich der Elektronik.

Die Methodik des Physikunterrichtes ist eine pädagogische Wissenschaft mit engem Bezug zum Fach Physik, zu den Erziehungswissenschaften und zum Marxismus/Leninismus. Das heißt, die Methodikausbildung baut auf dem Wissen und Können, das die Studenten im Fachstudium, der Marxismus/Leninismus-Ausbildung und im pädagogisch-psychologischen Grundkurs erworben haben, auf.

Auch in diesem Studienzweig absolvieren die Studenten unter der Leitung von Wissenschaftlern mit langjähriger Erfahrung als Fachlehrer für Physik verschiedene Lehrveranstaltungen, deren Inhalte wir im folgenden überblicksweise darstellen möchten:

Die Vorlesung macht die Studenten mit einer Vielzahl von Problemen der Methodik des Physikunterrichtes vertraut. Einen besonders wichtigen Platz nehmen die Arbeit mit dem Lehrplan, die Erkenntnisgewinnung im Physikunterricht, die Vorbereitung und Gestaltung des Unterrichtsprozesses sowie moderne Unterrichtsmittel ein.

In den Übungen und Seminaren lernen die zukünftigen Physiklehrer, ihre in der Vorlesung gewonnenen Erkenntnisse in speziellen Fällen anzuwenden. Viele interessante Fragen der Praxis des Physikunterrichtes stehen im Mittelpunkt der Vorträge und Diskussionen. Durch den zunehmenden Einsatz moderner audio-visueller Unterrichtsmittel, wie zum Beispiel Tonband- und Filmaufnahmen von Physikstunden wird in den Übungen und Seminaren eine starke Unterrichtsnähe realisiert.

In einigen Seminaren werden bereits Probleme der Behandlung einzelner Stoffgebiete erörtert.
Im Rahmen der Lehrveranstaltung Physikalische Schulexperimente

werden die zukünftigen Fachlehrer mit der experimentellen Methode des Physikunterrichts vertraut gemacht. Dabei lernen sie eine Auswahl von physikalischen Schulexperimenten mit den in der Schule vorhandenen Standardgeräten kennen. Gleichzeitig lernen sie, selbständig den methodisch sinnvollen Einsatz der Experimente zu planen.

All diese Veranstaltungen bereiten systematisch und koordiniert die schulpraktische Ausbildung der Lehrerstudenten im Fach Physik vor.

Die schulpraktischen Übungen, in denen sie in einer Jenaer Schule ihre ersten Physikstunden erteilen, sind ihre erste praktische Bewährung und ein wertvolles Mittel zur Erziehung im selbständigen Denken, Planen und Handeln. Mit viel Fleiß bereitet jeder Student etwa einmal im Monat eine Physikstunde vor, berät den Entwurf mit seinem Betreuer und hält sie vor der Klasse. In der anschließenden Auswertung ergeben sich für ihn wichtige Hinweise für seine weitere Arbeit.

Im 8. Semester absolvieren die Studenten das Große Schulpraktikum. Mehrere Wochen lang gehören sie dem Lehrerkollektiv einer Schule an und erfüllen unter der Anleitung erfahrener Mentoren die vielseitigen Aufgaben eines Fachlehrers für Physik. Darüber hinaus sind sie aktiv in Arbeitsgemeinschaften und im Jugendverband tätig und unterstützen einen Klassenleiter bei der Ausübung seiner Funktion. Gegen Ende des Praktikums stellt jeder Student seine durch das Studium und insbesondere durch das Große Schulpraktikum gewonnenen Fähigkeiten im Unterrichten in einer Prüfungsstunde unter Beweis. Im Anschluß an das Schulpraktikum erfolgt ein gemeinsamer Erfahrungsaustausch.

Wir hoffen, daß wir mit diesem Beitrag eventuelle Fragen über die Ausbildung in den Fächern Physik und Physikmethodik beantworten konnten und bei dem einen oder anderen von Ihnen Interesse für diesen verantwortungsvollen, nicht einfachen aber schönen Beruf erwecken konnten.

Dr. sc. Klaus Jupe
Leiter des Wissenschaftsbereiches Physikmethodik

Zum 100jährigen Todestag von O. Hesse – die Hessesche Normalform einer Geradengleichung

Die Erinnerung an die Leistungen der großen Wissenschaftler wird oft dadurch wachgehalten, daß man bei der Benennung von Begriffen und Sachverhalten die Namen derjenigen verwendet, die die betreffenden Dinge eingeführt bzw. entdeckt haben; man denke etwa – um Beispiele aus der Mathematik zu nennen – an den Thaleskreis, den Satz des Pythagoras, den Eulerschen Polyedersatz, die Gaußsche "Glockenkurve", an Dedekindsche Schnitte, Cauchy-Folgen, Hilbert-Räume usw.

Auch der Name des Mathematikers Otto Hesse, dessen Todestag sich am 4. 8. 1974 zum hundertsten Male jährt, ist mit einer Reihe von mathematischen Begriffen verbunden. Im "Mathematischen Lexikon" finden wir aufgeführt und erläutert: Hessesche Gerade, Hessesche Konfiguration, Hessesche Kovariante, Hessesche Kurve einer ebenen Kurve n-ter Ordnung, Hessesche Kurve eines Kurvenbündels, Hessesche Normalform einer Geradengleichung, Hessescher Punkt, Hessescher Satz über perspektive Dreiecke. Die Vielzahl dieser mit dem Namen Hesse verknüpften Begriffe weist auf die Bedeutung dieses Mathematikers hin. Er lebte von 1811 bis 1874 und war in der Hauptsache in Königsberg, Heidelberg und München tätig. Sein Arbeitsgebiet waren vor allem die Analytische Geometrie, die Differentialgeometrie (ein Teilgebiet der Geometrie, in dem wesentlich von den Mitteln der Differential- und Integralrechnung Gebrauch gemacht wird) und die lineare Algebra.

Von den acht genannten Begriffen können zwei schon mit Schulkenntnissen verstanden werden, und sie sollen hier erläutert werden.

Ist $\mathfrak{K}$ eine Kurve zweiter Ordnung (also ein Kreis, eine Ellipse, eine Hyperbel, eine Parabel o. ä.), sind t_1, t_2, t_3 drei Tangenten an $\mathfrak{K}$ mit den Berührungspunkten P_1, P_2, P_3 ($t_i \cap \mathfrak{K} = \{P_i\}$ für $i=1,2,3$) und bringt man je eine Seite (Gerade, auf der die Seite liegt) des Dreiecks $P_1P_2P_3$ zum Schnitt mit derjenigen der drei Tangenten t_1, t_2, t_3, deren Berührungspunkt der betreffenden

Dreiecksseite gegenüberliegt (also $g(P_1P_2) \cap t_3$, $g(P_2P_3) \cap t_1$, $g(P_3P_1) \cap t_2$), so erhält man drei Punkte (unter denen sich evtl. "unendlich ferne" befinden), die auf ein und derselben Geraden liegen, der sogenannten Hesseschen Geraden von $\mathfrak{R}$ (s. Titelbild).

Der zweite Begriff, der hier erläutert werden soll, ist der der Hesseschen Normalform einer Geradengleichung. Bekanntlich kann in der analytischen Geometrie eine jede Gerade dadurch charakterisiert werden, daß man eine Gleichung der Form $Ax + By + C = 0$ vorgibt (wobei A und B nicht gleichzeitig Null sein dürfen, also $A^2 + B^2 \neq 0$ ist) und die Menge derjenigen Punkte betrachtet, deren Koordinaten (x,y) zur Lösungsmenge dieser Gleichung gehören; diese Punktmenge ist dann eine Gerade, und $Ax + By + C = 0$ heißt Gleichung dieser Geraden. Zu jeder solchen Gleichung gibt es genau eine Gerade; umgekehrt aber gibt es zu jeder Geraden unendlich viele solche Gleichungen, sie gehen durch Multiplikation mit einem Faktor $\neq 0$ auseinander hervor (Multiplikation mit einer Zahl $\neq 0$ ändert ja nichts an der Lösungsmenge der Gleichung, also auch nichts an der Geraden). Unter den unendlich vielen Gleichungen einer festen Geraden haben diejenigen eine besondere Bedeutung, für die $A^2 + B^2 = 1$ ist; man nennt diese besonderen Gleichungen Hessesche Normalform der Geradengleichung. Es ist klar, daß man aus einer beliebigen Geradengleichung $Ax + By + C = 0$ durch Multiplikation mit einem Faktor $\pm (A^2 + B^2)^{-1/2}$ eine Hessesche Normalform herstellen kann und daß es zu jeder Geraden genau zwei (sich durch den Faktor -1 unterscheidende) Hessesche Normalformen gibt.

Beispiel: Geradengleichung: $3x + 4y + 10 = 0$

$$\pm (A^2 + B^2)^{-1/2} = \pm \frac{1}{5}$$

Hessesche Normalform: $\frac{3}{5} x + \frac{4}{5} y + 2 = 0$.

Um eine praktische Bedeutung der Hesseschen Normalform zu zeigen, stellen wir folgende

Aufgabe:

Gegeben ist eine Gerade g durch eine Gleichung $ax + by + c = 0$ in Hessescher Normalform ($a^2 + b^2 = 1$) und ein Punkt P_o mit Koordinaten (x_o, y_o). Gesucht ist der (senkrechte) Abstand des Punktes P_o von der Geraden g.

Zur Lösung berücksichtigen wir, daß die Senkrechte s durch P_o zu g durch die Gleichung $b(x - x_o) - a(y - y_o) = 0$ gegeben ist. (Denn g hat im Falle $b \neq 0$ den Anstieg $-\frac{a}{b}$, eine beliebige Senkrechte zu g hat dann den Anstieg $\frac{b}{a}$ und kann somit in der Form $y = \frac{b}{a} x + u$ bzw. $bx - ay + u_1$ mit einer geeigneten Konstanten u_1 dargestellt werden; im Falle $b = 0$ ist g parallel zur y-Achse, eine Senkrechte zu g ist also parallel zur x-Achse und in der Form $ay + v = 0$ darstellbar. Ferner ist bei der angegebenen Gleichung offensichtlich, daß sie von den Korrdinanten (x_o, y_o) erfüllt wird.) Da der gesuchte Abstand gleich dem Abstand des Punktes P_o vom Schnittpunkt von g und s ist, berechnen wir zunächst die Koordinaten dieses Schnittpunktes aus den Gleichungen für g und s, wobei die Gleichung von g leicht umgeformt wird:

$$\begin{array}{lll} g: & a(x-x_o) + b(y-y_o) + ax_o + by_o + c = 0 & \text{(I)} \\ s: & b(x-x_o) - a(y-y_o) \qquad\qquad\qquad\;\; = 0 & \text{(II)} \end{array}$$

Wir bezeichnen die Größe $ax_o + by_o + c$ mit l_o, merken dabei an, daß l_o durch Einsetzen der Koordinanten von P_o in die linke Seite der Hesseschen Normalform für g entstanden ist, und erhalten durch Multiplikation von (I) mit a, von (II) mit b und anschließender Addition von (I) und (II) wegen $a^2 + b^2 = 1$:

$$x - x_o = al_o ,$$

ferner durch Multiplikation von (I) mit b, von (II) mit -a und anschließender Addition:

$$y - y_o = -bl_o ,$$

so daß $(al_o + x_o, -bl_o + y_o)$ die Koordinaten des Schnittpunktes $g \cap s$ sind. Der gesuchte Abstand ist dann nach der bekannten Formel für den Abstand zweier durch ihre Koordinaten gegebenen Punkte gleich

$$\sqrt{a^2 l_o^2 + b^2 l_o^2} = \sqrt{(a^2+b^2) l_o^2} = \sqrt{l_o^2} = |l_o| ,$$

so daß man folgenden Satz hat:

S a t z :

> Der Abstand eines Punktes P_o von einer Geraden g ergibt sich als der Betrag derjenigen Zahl, die man bei Einsetzen der Koordinaten von P_o in die linke Seite einer Hesseschen Normalform für g erhält.

Zum Beispiel kann man nun bei dem oben angegebenen Beispiel sofort ablesen, daß der Koordinatenursprung von der Geraden $3x + 4y + 10 = 0$ den Abstand 2 hat.

Eine weitere Bedeutung der Hesseschen Normalform liegt darin, daß in dieser Gleichung die Koeffizienten von x und y unmittelbar den cosinus und sinus des Winkels zwischen x-Achse und einer zur Geraden senkrechten Richtung angeben. Der interessierte Leser wird den Beweis hierfür leicht selbst finden können.

Dr. Walter Börner
Lektor im Bereich Theoretische Mathematik

(Fortsetzung von Seite 168)

7. Relationen

Im täglichen Leben und in der Mathematik kommen häufig Beziehungen zwischen verschiedenen Objekten vor. Beispiele solcher Beziehungen (oder, wie man auch sagt, Relationen) sind:

a ist mit b verheiratet,
a steht mit b im Briefwechsel,
der Mensch a kennt die Stadt b,
der Punkt P liegt auf der Geraden g,
die Geraden g und h sind zueinander orthogonal,
die Murmeln a und b haben die gleiche Farbe,
die natürliche Zahl n teilt die natürliche Zahl m,
die reelle Zahl x ist größer als die reelle Zahl y,
x ist Element der Menge X,
usw.

Wir greifen nun eine dieser Beziehungen heraus, etwa die letzte, und studieren sie genauer.

Dazu setzen wir $A = \{1,2\}$, $B =_{Df} \mathfrak{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ und lassen nur Elemente aus A und Mengen aus B zu.
Um einen Überblick über diese Beziehungen zu bekommen, stellen wir alle diejenigen Paare [Element, Menge] zusammen, für die diese Beziehung zutrifft. Damit erhalten wir die Menge

$$E =_{Df} \{ [x,X] : x \in A \wedge X \in B \wedge x \in X \},$$

durch die unsere Relation vollständig beschrieben wird.
Es gilt nämlich - und so haben wir E gerade definiert -

$$[x,X] \in E \leftrightarrow x \in X \wedge x \in A \wedge X \in B ,$$

d. h. $[x,X] \in E$ genau dann, wenn x und X in der betrachteten Beziehung stehen.
In unserem Beispiel ist

$$E = \{[1, \{1\}] , [1 , \{1,2\}] , [2 , \{2\}], [2 , \{1,2\}]\},$$

Wir fassen das Ergebnis dieser Betrachtung nochmals zusammen: Unsere Beziehungen zwischen Elementen von A und Elementen von B hat in eindeutiger Weise zu einer Untermenge E von A x B geführt, die diese Beziehung genau beschreibt.
Dieses Resultat läßt sich sofort verallgemeinern: Jede Beziehung (Relation) zwischen Elementen einer Menge A und Elementen einer Menge B legt eine eindeutig bestimmte Untermenge von A x B fest.

Auf Grund dieser Bemerkung haben wir keine Veranlassung mehr, zwischen Untermengen von A x B und Relationen zwischen A und B zu unterscheiden. Daher ist folgende Definition berechtigt:

Definition 11 :

1. S heißt Relation zwischen A und B $=_{Df}$ $S \subseteq A \times B$
2. Ist A = B, so sprechen wir von einer zweistelligen Relation auf A.
3. Ist $[x,y] \in S$, so sagen wir auch "x steht in der Relation S zu y" und schreiben dafür abkürzend auch x S y.

F o l g e r u n g :

Die Menge der Relationen zwischen A und B stimmt genau mit $\mathfrak{P}(A \times B)$ überein. Also gibt es $2^{n \cdot m}$ verschiedene Relationen zwischen A und B.

Beispiele:

1. Es sei $A = \{1,2,3\}$. Wir betrachten die Relation $U =_{Df} \{[1,2], [1,3], [2,3]\} \subseteq A \times A$ und stellen z. B. fest: 1 steht mit 2 in der Relation U, aber nicht 2 mit 1. Man sieht, daß U genau die <-Beziehung auf A darstellt.

2. Es sei $A = \{1,2,3\}$, $V =_{Df} \{[1,2], [2,1], [1,3], [3,2], [3,3]\}$ In diesem Beispiel ist es im Gegensatz zum vorigen nicht leicht, irgendeine natürliche Deutung zu finden.

Aufgabe: Es sind alle $2^4 = 16$ 2-stelligen Relationen auf der Zweiermenge $A = \{a,b\}$ wirklich anzugeben.

8. Graphen

Die Theorie der zweistelligen Relationen wird dadurch sehr viel übersichtlicher und interessanter, daß es gelingt, jede endliche zweistellige Relation geometrisch zu veranschaulichen. Mit jeder Relation R auf der Menge M ist nämlich ein sogenannter Graph eng verknüpft.

D e f i n i t i o n 12 :

$G = [M,R]$ heißt orientierter oder gerichteter Graph $=_{Df}$

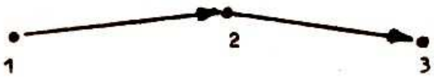
1. M ist eine Menge
2. $R \subseteq M \times M$

Die Elemente von M heißen Knoten oder Ecken von G, die Elemente von R heißen Kanten oder Bögen von G.

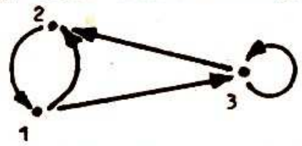
Graphen mit endlicher Knotenmenge können folgendermaßen durch geometrische Figuren (die man auch manchmal einfach Graphen nennt) veranschaulicht werden: Den Elementen von M werden Punkte der Ebene beliebig, aber so zugeordnet, daß zwei verschiedenen Elementen von M verschiedene Punkte entsprechen. Der dem Element x zugeordnete Punkt wird ebenfalls mit x bezeichnet. Zwei dieser Punkte, x und y, werden genau dann durch einen von x nach y verlaufenden Pfeil verbunden, wenn [x,y] ∈ R gilt.

Beispiele:

1. Der Graph [A,U] , der der Relation des vorletzten Beispiels aus Abschnitt 7 entspricht, hat das Diagramm



2. Das letzte Beispiel des vorigen Abschnitts liefert den Graphen [A,V], der durch folgendes Bild dargestellt wird:



Bemerkung: In der Definition 12 ist die Schreibweise [M,R] als geordnetes Paar aufzufassen. Graphen sind also nichts anderes als ganz bestimmte Mengen! Relationen sind ebenfalls nur Mengen. Dasselbe wird auf Funktionen zutreffen. Damit werden wir das in der Einleitung zu dieser Artikelserie gestellte Ziel erreicht haben, wichtige mathematische Grundbegriffe auf mengentheoretischer Grundlage zu definieren.

9. Abbildungen und Funktionen

Wir gehen vom Begriff der Relation zwischen zwei Mengen aus (vgl. Definition 11) und führen einfach folgende neue Sprechweise ein:

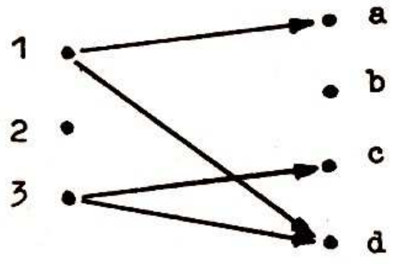
D e f i n i t i o n 13 :

1. F heißt Abbildung aus A in B $=_{Df}$ $F \subseteq A \times B$ (d. h. F ist Relation zwischen A und B)
2. Ist $[a,b] \in F$, so sagen wir, daß F dem Element a das Element b zuordnet, oder auch, daß a durch F auf b abgebildet wird.
3. $F(a) =_{Df} \{y: [a,y] \in F\}$ heißt Bildmenge von a.
4. $F^{-1}(b) =_{Df} \{x: [x,b] \in F\}$ heißt Urbildmenge von b.

Beispiel:

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c,d\}$, $F = \{[1,a], [1,d], [3,c], [3,d]\}$.

Eine Veranschaulichung des Graphen $[A \cup B, F]$ liefert folgendes Bild:



$$
\begin{aligned}
F(1) &= \{a,d\} \\
F(2) &= \emptyset \\
F(3) &= \{c,d\} \\
F^{-1}(a) &= \{1\} \\
F^{-1}(b) &= \emptyset \\
F^{-1}(c) &= \{3\} \\
F^{-1}(d) &= \{1,3\}
\end{aligned}
$$

Wir führen nun noch ganz wichtige Sorten von Abbildungen ein:

Definition 14:

Eine Abbildung F aus A in B heißt eindeutig $=_{Df}$
$\forall x \ \forall y \ \forall y' ([x,y] \in F \wedge [x,y'] \in F \longrightarrow y = y')$
Eindeutige Abbildungen heißen auch Funktionen.

In Worten: Eine Abbildung aus A in B heißt Funktion, wenn jedem Element aus A höchstens ein Element zugeordnet wird. Es gilt also der

Satz 6:

F ist genau dann eine Funktion aus A in B, wenn für jedes $x \in A$ die Bildmenge $F(x)$ höchstens ein Element enthält.

Beispiel:

$F = \{[1,a], [2,a], [3,c]\}$ ist Funktion aus $A = \{1,2,3\}$ in $B = \{a,b,c,d\}$. Das sieht man auch am Bild, weil von jedem Element von A höchstens ein Pfeil ausgeht:

D e f i n i t i o n 15 :

Eine Abbildung F aus A in B heißt eindeutig umkehrbar $=_{Df}$

$$\forall x \ \forall x' \ \forall y([x,y] \in F \wedge [x',y] \in F \rightarrow x = x')$$

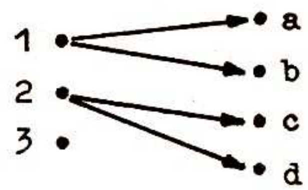
In Worten: Eine Abbildung F aus A in B heißt genau dann eindeutig umkehrbar, wenn niemals verschiedene Elemente aus A dem gleichen Element aus B entsprechen. Offenbar gilt:

S a t z 7 :

F ist genau dann eine eindeutig umkehrbare Abbildung aus A in B, wenn für jedes $y \in B$ die Urbildmenge $F^{-1}(y)$ höchstens ein Element enthält.

Beispiel:

$F = \{[1,a], [1,b], [2,c], [2,d]\}$ ist eindeutig umkehrbare Abbildung aus A in B. Im Bild wird das dadurch deutlich, daß in jedem Knoten aus B höchstens ein Pfeil einläuft:



Diese Abbildung ist jedoch nicht eindeutig.
Definiert man

D e f i n i t i o n 16 :

$F^{-1} =_{Df} \{[x,y] : [y,x] \in F\}$ heißt inverse Abbildung von F oder Umkehrabbildung von F,

so gilt der

S a t z 8 :

F ist genau dann eindeutig umkehrbar, wenn F^{-1} eindeutig ist.

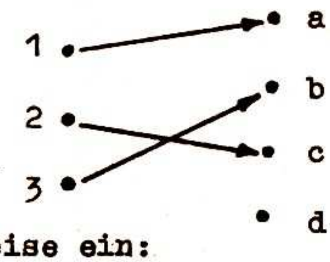
Eindeutige Umkehrbarkeit bedeutet also, daß die Umkehrabbildung eindeutig ist.

D e f i n i t i o n 17 :

Eine Abbildung, die eindeutig und zugleich eindeutig umkehrbar ist, heißt eineindeutig oder umkehrbar eindeutig.

Beispiel:

$F = \{[1,a], [2,c], [3,b]\}$ ist eineindeutig.



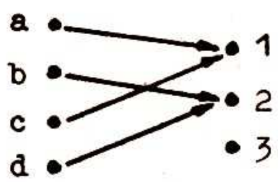
Schließlich führen wir noch folgende Sprechweise ein:

D e f i n i t i o n 18 :

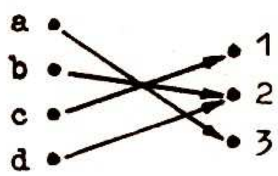
1. F heißt Abbildung von A in B $=_{Df}$ $D_F = A$
   ($D_F =_{Df} \{x: \exists y([x,y] \in F)\}$ (Definitionsbereich von F))
2. F heißt Abbildung aus A auf B $=_{Df}$ $B_F = B$
   ($B_F =_{Df} \{y: \exists x([x,y] \in F)\}$ (Bildbereich von F))

Beispiele:

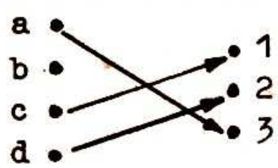
1. $F = \{[a,1], [b,2], [c,1], [d,2]\}$ ist Abbildung von B in A.



2. $G = \{[a,3], [b,2], [c,1], [d,2]\}$ ist Abbildung von B auf A.



3. $H = \{[a,3], [c,1], [d,2]\}$ ist Abbildung aus B auf A.



Im Falle einer eindeutigen Abbildung F wollen wir an Stelle von $F(x) = \{y\}$ kürzer $F(x) = y$ schreiben.
Man kann solche Funktionen selbstverständlich auch in Form von Wertetabellen aufschreiben.

Beispiel:

$F = \{[1,a], [2,c], [3,b], [4,c]\}$ hat die Wertetabelle

x	1	2	3	4
F(x)	a	c	b	c

Die im Schulunterricht behandelten Funktionen sind sämtlich Beispiele für den hier dargelegten Funktionsbegriff.

10. Kritik der naiven Mengenlehre

Wir haben gesehen, wie wichtige Grundbegriffe der Mathematik bei näherem Zusehen sich als mengentheoretisch streng definierbar erweisen. Wenn damit der Mengenbegriff eine zentrale Stellung in der Mathematik einnimmt, so ist die Frage berechtigt, was eigentlich eine Menge ist. Georg Cantor (1845 - 1918), der als der Schöpfer der Mengenlehre angesehen werden kann und der ganz bedeutende Leistungen auf diesem Gebiet vollbracht hat, hat folgende Festlegungen des Mengenbegriffs vorgeschlagen:

> "Eine Menge ist die Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens, die wir die Elemente der Menge nennen wollen, zu einem Ganzen."

Wie B. Russell bemerkt hat, könnte man danach auch die Menge R aller Mengen bilden, die sich nicht selbst als Element enthalten (z. B. ist die Menge aller natürlichen Zahlen selbst keine natürliche Zahl und daher nicht in sich selbst als Element enthalten). Für R gilt also

$$R = \{ X : X \notin X \}, \text{ d. h.}$$

$$X \in R \leftrightarrow X \notin X \qquad (*) .$$

Wir fragen nun, ob $R \in R$ gilt. Aus (*) folgt sofort der Widerspruch

$$R \in R \longleftrightarrow R \notin R,$$

der als Russellsche Antinomie bekannt ist.

Muß angesichts dieses Widerspruchs die Mengenlehre und damit die Mathematik über Bord geworfen werden? Wenn es nicht gelingen würde, diesen oder andere Widersprüche durch einen korrekten Aufbau der Mengenlehre auzuschalten, stände die Mathematik in der Tat vor einem ernsten Problem. Es gibt aber bisher schon mehrere verschiedene Möglichkeiten einer sogenannten axiomatischen Begründung der Mengenlehre,bei denen diese Widersprüche vermeidbar sind, von denen allerdings bis heute noch nicht feststeht, ob sie nicht vielleicht andere Widersprüche enthalten. Auf die Darlegung dieser interessanten Probleme muß hier jedoch verzichtet werden.

Dr. Gerd Wechsung
Dozent im Bereich Mathematische Kybernetik

Lösungen

Aufgabe F 11

Da die Winkelsumme im Dreieck bekanntlich π beträgt, können wir aus den Voraussetzungen in der Aufgabenstellung die Größe der drei Winkel bestimmen.

Es gilt: $\gamma = 2\beta$ und $\beta = 2\alpha$

sowie

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi .$$

Also erhalten wir

$$\alpha = \frac{\pi}{7}, \qquad \beta = \frac{2\pi}{7}, \qquad \gamma = \frac{4\pi}{7} .$$

Nach dem Sinussatz können wir die drei Dreiecksseiten darstellen als

$$a = 2r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$$
$$b = 2r \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$$
$$c = 2r \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right),$$

wobei r der Radius des Umkreises ist.

Um die Gleichung

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

zu beweisen, genügt es demnach,

$$\sin\frac{2\pi}{7}\ \sin\frac{4\pi}{7} = \sin\frac{\pi}{7}\ \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7}\ \sin\frac{2\pi}{7}$$

zu zeigen.

Unter Verwendung der folgenden Identitäten formen wir die linke Gleichungsseite um.

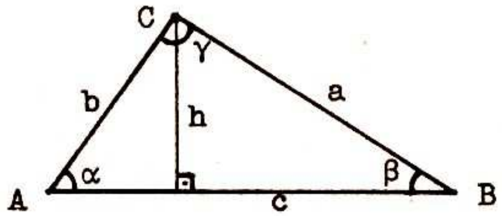
$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2\sin x\cos x \\ 2\sin x\cos y &= \sin(x+y) + \sin(x-y) \\ \sin x &= \sin(\pi - x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\frac{2\pi}{7}\ \sin\frac{4\pi}{7} &= 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7} \\ &= \sin\frac{\pi}{7}\left(\sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7}\right) \\ &= \sin\frac{\pi}{7}\ \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7}\ \sin\frac{2\pi}{7}\ . \end{aligned}$$

Aufgabe E 58

Die Korrektur der Aufgabenstellung in Heft 3/74 enthielt leider einen neuen Fehler. Die Winkel des Dreiecks sollten unter den angegebenen Bedingungen berechnet werden – da die Seitenlängen unbekannt waren, selbstverständlich nicht in Abhängigkeit von diesen Seiten. Für Einsendungen, die sich hierauf bezogen und z. B. $\sin\alpha = \frac{a-b}{b}$ oder $\sin\gamma = \sin\varphi + \frac{a-b}{ab}\sqrt{2ab - a^2}$ als Lösungen hatten, vergaben wir nicht die volle Punktzahl, jedoch noch einen Punkt.

Lösung (nach Uwe Risch, Burg, 10. Klasse):



Nach Aufgabenstellung gilt:

$$a = b + h$$
$$\varphi = \alpha - \beta > 0$$

Nach dem Sinussatz im Dreieck ABC erhalten wir:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} = \frac{b+h}{b} = 1 + \frac{h}{b} = 1 + \sin\alpha\ .$$

und somit

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \sin\alpha - \sin\beta\ . \qquad (*)$$

Aus $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ und $\alpha - \beta = \varphi$

erhält man $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma - \varphi}{2}$ bzw. $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma + \varphi}{2}$.

Daraus folgt

$$\sin \alpha = \cos \frac{\gamma - \varphi}{2} \quad \text{und} \quad \sin \beta = \cos \frac{\gamma + \varphi}{2} .$$

Diese Werte setzen wir in (*) ein.

$$\cos \frac{\gamma - \varphi}{2} \cos \frac{\gamma + \varphi}{2} = \cos \frac{\gamma - \varphi}{2} - \cos \frac{\gamma + \varphi}{2}$$

Hierauf wenden wir jetzt die Formeln für die Produkte und Differenzen zweier Cosinuswerte an.

Wir erhalten:

$$\frac{1}{2} (\cos \varphi + \cos \gamma) = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

Wegen $\cos \gamma = 1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}$ folgt daraus:

$$\frac{1}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \cos \varphi = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \left(2 \sin \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{1}{2} (1 + \cos \varphi) = 0$$

$$\left(\sin \frac{\gamma}{2}\right)_{1/2} = - \sin \frac{\varphi}{2} \pm \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \varphi}$$

Wegen $\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ ergibt sich für den Wurzelausdruck der Wert 1.

$$\left(\sin \frac{\gamma}{2}\right)_{1/2} = - \sin \frac{\varphi}{2} \pm 1$$

Die Lösung $- \sin \frac{\varphi}{2} - 1$ entfällt wegen $|\sin \frac{\gamma}{2}| < 1$.

Somit gilt:

$$\underline{\sin \frac{\gamma}{2} = 1 - \sin \frac{\varphi}{2}}$$

Hieraus erhält man sofort die Lösungen:

$$\gamma = 2 \arcsin \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\alpha = \frac{\pi + \varphi}{2} - \arcsin \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2}\right) ,$$

$$\beta = \frac{\pi - \varphi}{2} - \arcsin \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2}\right) .$$

Zu den Lösungen der Serie 3/74

Außer zur Aufgabe F 14 erhielten wir überraschend wenig Einsendungen. Unter diesen befanden sich allerdings auch wenig fehlerhafte.

Bei den Lösungen der Aufgabe F 13 ist zu bemängeln, daß ein Hinweis auf die Bedingungen $bn - a^2 \geq 0$ und $b \geq 0$ für die Existenz der Lösung und für die Existenz zweier Folgen des öfteren fehlte. Auch verwendeten einige Einsender in den Beweisen zur Aufgabe F 16 die abstrakten Begriffe der Theorie der Halbgruppen nicht immer einwandfrei.

Aufgabe F 13 (nach Jürgen Socolowsky, Bergfelde, 12. Klasse)

Das allgemeine Glied der arithmetischen Folge $x_1, x_2, \ldots, x_n$ habe das Aussehen:

$$x_i = x_1 + (i-1)d \quad , \quad d = \text{const.}$$

Für die n-te Partialsumme erhalten wir somit:

$$s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = nx_1 + d\,\frac{n(n-1)}{2} = a \qquad (1)$$

Des weiteren ergibt sich:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = nx_1^2 + \{1+2+\ldots+(n-1)\}2x_1d +$$

$$+ \{1+4+9+\ldots+(n-1)^2\}\,d^2 = b \qquad (2)$$

Verwenden wir nun die bekannten Summenformeln für natürliche Zahlen und Quadratzahlen, dann erhalten wir aus (2)

$$nx_1^2 + n(n-1)x_1d + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\,d^2 = b \qquad (3)$$

(1) und (3) bilden ein Gleichungssystem in den Unbekannten x_1 und d.

Aus (1) folgt:

$$x_1 = \frac{a}{n} - \frac{n-1}{2}\,d$$

Setzen wir dieses Resultat in (3) ein, so ergibt sich:

$$n\left(\frac{a}{n} - \frac{n-1}{2}\,d\right)^2 + n(n-1)d\cdot\left(\frac{a}{n} - \frac{n-1}{2}\,d\right) + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\,d^2 = b$$

und durch Umrechnung:

$$d^2 = \frac{12(bn - a^2)}{n^2(n^2-1)}$$

$$d = \pm \frac{1}{n}\cdot\sqrt{\frac{12(bn - a^2)}{n^2-1}} \qquad (4)$$

Für x_1 ergibt sich somit:

$$x_1 = \frac{a}{n} \mp \frac{n-1}{2n} \cdot \sqrt{\frac{12(bn-a^2)}{n^2-1}} \qquad (5)$$

Wir erhalten als notwendige Bedingungen für die Existenz von Lösungen:

$$b \geq 0 \qquad \text{und} \qquad bn - a^2 \geq 0 \ .$$

Die gesuchten Folgen werden dann durch

$$d_1 = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{12(bn - a^2)}{n^2 - 1}} \ ; \qquad x_1^{(1)} = \frac{a}{n} - \frac{n-1}{2n}\sqrt{\frac{12(bn - a^2)}{n^2 - 1}}$$

und

$$d_2 = -\frac{1}{n}\sqrt{\frac{12(bn- a^2)}{n^2 - 1}} \ ; \qquad x_1^{(2)} = \frac{a}{n} + \frac{n-1}{2n}\sqrt{\frac{12(bn - a^2)}{n^2 - 1}}$$

bestimmt.

Aufgabe F 18 (nach Lutz Gartner, Wismar, 9. Klasse)

Wir führen die folgende Substitution durch:

$$a = y - z \qquad \text{und} \qquad b = z - x \ .$$

Damit erhalten wir sofort

$$x - y = -(y-z) - (z-x) = -(a+b) \ .$$

Der in der Aufgabenstellung gegebene Ausdruck
$(y-z)^5 + (z-x)^5 + (x-y)^5$ läßt sich nun durch
$a^5 + b^5 - (a+b)^5$ ersetzen.

Es gilt weiterhin:

$$a^5 + b^5 - (a+b)^5 = -5ab(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3) \qquad (*)$$

Die Summe (a^3+b^3) läßt sich in das Produkt $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ und die Summe $(2a^2b+2ab^2)$ in das Produkt $(a+b)\cdot 2ab$ zerlegen.

Also können wir (*) weiter umrechnen zu:

$$-5ab\,(a+b)(a^2-ab+b^2+2ab) = -5ab\,(a+b)(a^2+ab+b^2) \qquad (**)$$

Die in a quadratische Gleichung $a^2+ab+b^2=0$ besitzt die komplexen Lösungen

$$a_{1/2} = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,b\,i\,,$$

woraus man

$$a^2+ab+b^2 = \frac{1}{4}\,(2a+b-\sqrt{3}\,bi)(2a+b+\sqrt{3}\,bi)$$

erhält.

Setzen wir dieses Resultat in (**) ein, so ergibt sich

$$a^5+b^5-(a+b)^5 = -\frac{5}{4}\,ab\,(a+b)(2a+(1-\sqrt{3}\,i)b)\,.\,(2a+(1+\sqrt{3}\,i)b)$$

Jetzt machen wir die Substitution rückgängig und erhalten:

$$(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5 =$$

$$= \frac{5}{4}(y-z)(z-x)(x-y)\left\{2(y-z)+(1-\sqrt{3}\,i)(z-x)\right\}\cdot\left\{2(y-z)+(1+\sqrt{3}\,i)(z-x)\right\}$$

$$= \frac{5}{4}(y-z)(z-x)(x-y)\left\{2y-(1+\sqrt{3}\,i)z-(1-\sqrt{3}\,i)x\right\}\cdot$$

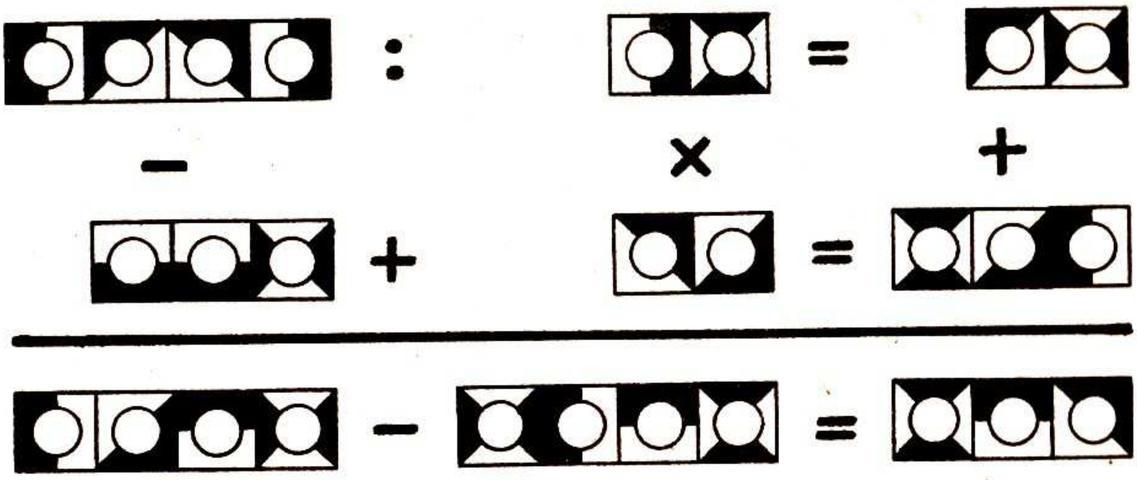
$$\cdot\left\{2y-(1-\sqrt{3}\,i)z-(1+\sqrt{3}\,i)x\right\},$$

womit die geforderte Zerlegung in Linearfaktoren erfolgt ist.

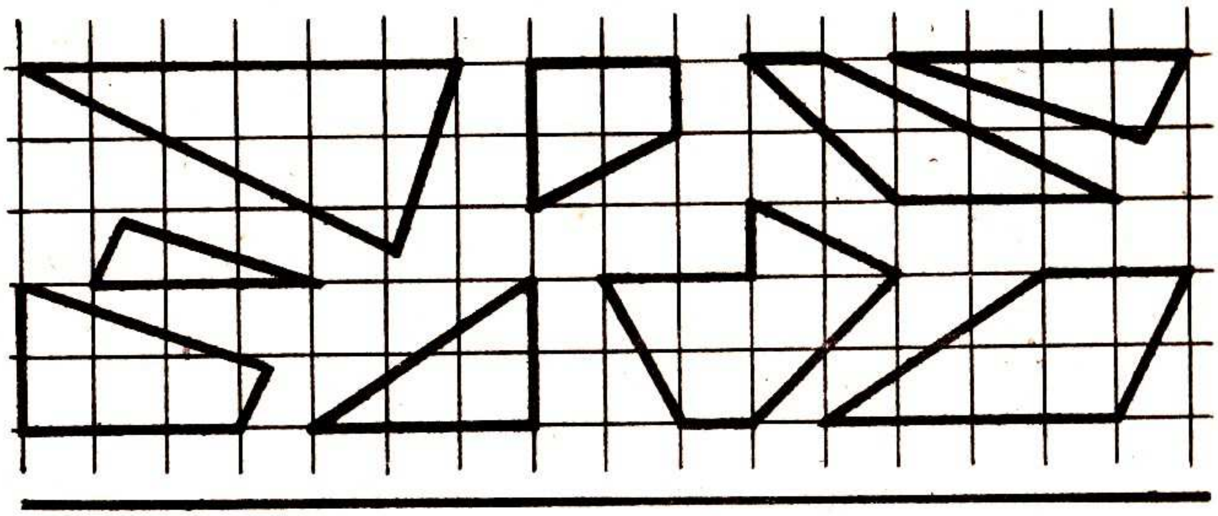
Übrigens ...

... bewiesen uns Zuschriften zahlreicher Leser, daß nach wie vor Interesse an der WURZEL und ihrer termingerechten Auslieferung besteht. Durch Krankheit von Mitarbeitern der Druckerei und andere technische Probleme ließen sich Verspätungen in den letzten Monaten nicht vermeiden. Die Redaktion bittet um Entschuldigung und gibt sich optimistisch, im neuen Schuljahr die Hefte pünktlich und in altgewohnter Qualität liefern zu können.

Zum Knobeln



Die Teile ergeben - ausgeschnitten und richtig zusammengesetzt - den Buchstaben F (womit wir unseren f-ormelgeladenen Lesern f-rohe F-erien wünschen!).



Herausgeber: Leitung der FDJ-Grundorganisation der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Egbert Creutzburg
Chefredakteur: Werner Nagel
Redaktion: J. Dubslaff, H.-G. Leopold, G. Weske
Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Bezugspreis je Heft: 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
V-14-6

9
74

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Fr.-Schiller-Universität Jena

Zu unserem Titelbild:

„Lest Euler, er ist unser aller Meister!"

Leonhard Euler wurde am 15. 4. 1707 in Basel geboren. Bereits sein Vater hatte Mathematik bei Jakob Bernoulli studiert, und auch Leonhard begann seine mathematischen Studien bei dessen Sohn Johann Bernoulli. 1727 reiste Euler nach Petersburg und wirkte an der dortigen Akademie. Danach arbeitete er an der Berliner Akademie der Wissenschaften, bis er im Jahre 1766 wieder nach Petersburg zurückkehrte. Sein Todestag jährt sich in diesem Monat - am 18. September - zum 191. Male.

Euler war der produktivste Mathematiker des 18. Jahrhunderts. Die Gesamtzahl seiner Veröffentlichungen umfaßt 45 Bände sowie über 800 in den verschiedensten Zeitschriften erschienene Abhandlungen. Selbst nach seiner Erblindung 1766 arbeitete er unermüdlich weiter und diktierte seine Entdeckungen. Eulers Forschungen sind äußerst vielseitig - in allen Bereichen der damaligen Mathematik lieferte er bedeutende Beiträge. Die Gesamtheit der von ihm behandelten Themen anzugeben ist an dieser Stelle unmöglich. Er lieferte wesentliche Arbeiten zur Differential- und Integralrechnung und zur Zahlentheorie, beschäftigte sich mit Fragen der Geometrie, aber auch mit Astronomie und zahlreichen physikalischen Problemen.
Carl Friedrich Gauß sagte über das Werk Leonhard Eulers:
"Das Studium der Werke Eulers bleibt die beste Schule in den verschiedenen Gebieten der Mathematik und kann durch nichts anderes ersetzt werden."
Und Pierre Simon Laplace, ein anderer führender Mathematiker des 18. Jahrhunderts, pflegte zu jüngeren Mathematikern zu sagen:
"Lest Euler, er ist unser aller Meister."

Hier nun noch einige mit dem Namen Eulers verknüpfte Resultate:

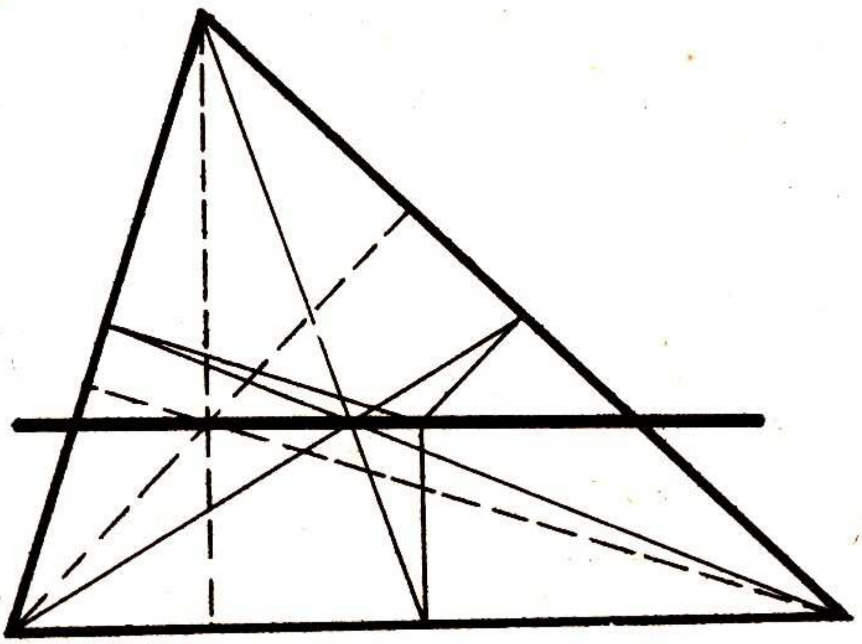
Fermat-Eulers Primzahlsatz

Jede Primzahl von der Form 4n + 1 läßt sich auf eine einzige Weise als Summe zweier Quadrate darstellen.

(gefunden von Fermat um 1660 und von Euler 1754 erstmalig bewiesen)

Eulersche Gerade im Dreieck

In jedem Dreieck liegen das Umkreiszentrum, der Schwerpunkt und der Höhenschnittpunkt in dieser Reihenfolge auf einer Geraden, und zwar so, daß der Höhenschnittpunkt vom Schwerpunkt doppelt so weit entfernt ist wie das Umkreiszentrum. (veröffentlicht 1765)



Eulerscher Polyedersatz

In einem geschlossenen Polyeder bezeichne E die Anzahl der Ecken, K die Anzahl der Kanten und F die Anzahl der Flächen. Dann gilt stets E + F - K = 2.

Eulers Tetraederproblem

Es besteht darin, den Inhalt eines Tetraeders durch seine sechs Kanten auszudrücken.
(gestellt und gelöst von Euler 1752)

Die Eulersche Zahl e

Die Grenzwerte der Funktionen

$$\varphi(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \quad \text{und} \quad \Phi(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

für unbegrenzt wachsendes x sind zu finden.

Wir setzen bei der Lösung die folgende Potenzungleichung voraus:

$$x^{\varepsilon} < 1 + \varepsilon(x - 1) \quad \text{für } x > 0 \text{ und } 0 < \varepsilon < 1. \qquad (*)$$

O. B. d. A. seien $a > b > 0$ zwei beliebige Zahlen, und wir definieren mit ihrer Hilfe:

$$x_1 = 1 + \frac{1}{b}, \qquad \varepsilon_1 = \frac{b}{a} \qquad (1)$$

$$x_2 = 1 - \frac{1}{b+1}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{b+1}{a+1} \qquad (2)$$

Aus (1) ergibt sich mit Hilfe der Ungleichung (*)

$$\left(1 + \frac{1}{b}\right)^{\frac{b}{a}} < 1 + \frac{1}{a}$$

bzw.

$$\left(1 + \frac{1}{b}\right)^{b} < \left(1 + \frac{1}{a}\right)^{a} . \qquad (3)$$

Aus (2) ergibt sich

$$\left(1 - \frac{1}{b+1}\right)^{\frac{b+1}{a+1}} < 1 - \frac{1}{a+1}$$

$$\left(\frac{b}{b+1}\right)^{b+1} < \left(\frac{a}{a+1}\right)^{a+1}$$

und endlich

$$\left(1 + \frac{1}{b}\right)^{b+1} < \left(1 + \frac{1}{a}\right)^{a+1} . \qquad (4)$$

Die Ungleichungen (3) und (4) beinhalten den folgenden

Satz: Mit wachsendem positivem Argument x nimmt die Funktion $\varphi(x)$ zu, während die Funktion $\Phi(x)$ abnimmt.

Es gilt also:

$0 < x_1 < x_2$

$$\longrightarrow \qquad \varphi(x_2) > \varphi(x_1) \quad ; \quad \Phi(x_2) < \Phi(x_1).$$

Für gleiche Argumente $x > 0$ gilt:

$$\Phi(x) = (1 + \tfrac{1}{x}) \cdot \varphi(x) > \varphi(x).$$

Somit erhalten wir jetzt die Ungleichungen:

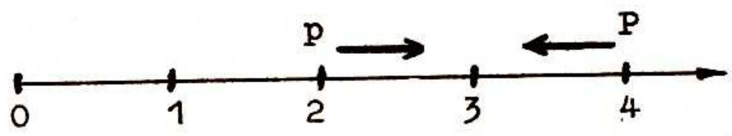
$$\varphi(x_1) < \varphi(x_2) < \Phi(x_2) \quad \text{und} \quad \varphi(x_2) < \Phi(x_2) < \Phi(x_1),$$

d. h. für positive Argumente gilt: Jeder Wert der Funktion Φ ist größer als jeder Wert der Funktion φ .

Wir denken uns nun auf der positiven Zahlenachse zwei bewegliche Punkte p und P, die zur Zeit t vom Nullpunkt die Abstände $\varphi(t)$, $\Phi(t)$ haben mögen und ihre Bewegung zum Zeitpunkt $t = 1$ beginnen. Dann wandert der Punkt p, an der Stelle $\varphi(1) = 2$ beginnend, ständig nach rechts, der Punkt P dagegen, an der Stelle $\Phi(1) = 4$ beginnend, ständig nach links. Da aber nach obiger Bemerkung $\Phi(t)$ stets größer als $\varphi(t)$ ist, sich also P stets rechts von p befindet, können sich die beiden Punkte niemals begegnen. Andererseits verringert sich ihr gegenseitiger Abstand mit zunehmender Zeit unbegrenzt.

Es sei $d = \Phi(t) - \varphi(t) = \dfrac{\varphi(t)}{t}$.

Da $\varphi(t) < 4$ beschränkt ist, wird also $d = \dfrac{\varphi(t)}{t} < \dfrac{4}{t}$ mit zunehmender Zeit kleiner als jede beliebige positive Zahl.



Der Sachverhalt der unbegrenzten Annäherung der Punkte p und P auf der Zahlengerade ist nur so zu erklären, daß auf ihr (zwischen den Zahlen 2 und 4) ein fester Punkt existiert, dem sich p von links und P von rechts her beliebig annähern, ohne ihn allerdings je zu erreichen.
Die Entfernung dieses Fixpunktes vom Nullpunkt ist die sogenannte Eulersche Zahl e.
Der Vorschlag, diese Zahl mit dem Buchstaben e zu bezeichnen, stammt von Euler (Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum 1739 T. IX).

Die Zahl e ergibt sich durch Berechnung zu etwa
2,718281828459045...
und ist eine der wenigen bekannten transzendenten Zahlen.

Titelbild: Aus der Bildserie "Berühmte Mathematiker";
Sammlung Karger-Decker, Berlin.

Zu unseren Preisaufgaben

Im letzten Jahr stieg die Zahl der Einsendungen zu unseren Preisaufgaben stark an, so daß in jedem Monat mehr als drei Einsender die 15-Punkte-Grenze überschritten und die Gewinner durch Auslosung ermittelt werden mußten. Um die Auslosung zu vermeiden und gleichzeitig noch mehr Leser als bisher unter den "Gewinnern" zu haben, entschlossen wir uns zu folgenden Veränderungen der Einsendebedingungen:

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.

Diejenigen Leser, die mit den Aufgaben der Serie 7/8/74 15 Punkte erreichten, erhalten noch in diesem Jahr den entsprechenden Büchergutschein (ohne Auslosung). Alle anderen Punktzahlen werden in die Wertung des Schuljahres 1974/75 übernommen.

Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.

Preisaufgaben 9/74

(F 43) ①

Man löse die Ungleichung

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x}$$

in reellen Zahlen.

(F 44) ②

Gegeben sind zwei konzentrische Kreise mit den Radien R und r (R > r). Wir zeichnen ein Quadrat so ein, daß zwei seiner Eckpunkte auf dem inneren Kreis und zwei auf dem äußeren Kreis liegen. Für welche Verhältnisse der Radien der gegebenen Kreise zueinander ist dies möglich und für welche Verhältnisse sogar eindeutig?

(F 45) ②

Man gebe alle Paare reeller Zahlen an, die die folgende Gleichung lösen:

$$\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2}\sin y.$$

(F 46) ①

Man zeige, daß in einem beliebigen ebenen Dreieck das Verhältnis von Inkreisradius zu Umkreisradius nicht größer als $\frac{1}{2}$ ist!

(F 47) ①

Man zeige: Für beliebige reelle Zahlen a, b mit $a + b = 1$ gilt:

$$a^2 + b^2 \geq \frac{1}{8}.$$

(F 48) ②

n параллельных прямых плоскости пересекаются серией из m параллельных прямых. Сколько параллелограммов можно выделить в образовавщейся сетке?

Einsendeschluß: 31. 10. 1974

Das Rinderproblem des Archimedes

Eine vollständige Fassung dieses Problems enthält eine von Gotthold Ephraim Lessing 1773 in der Wolfenbütteler Bibliothek aufgefundene Handschrift in griechischer Sprache. Die Autorschaft des Archimedes wird teils bestritten (Lessing, Nesselmann, Vincent), teils bejaht, letzteres z. B. vom dänischen Archimedesforscher J. L. Heiberg und von dem französischen Mathematiker P. Tannery.

Das Problem selbst lautet in einer Übersetzung von G. Wertheim:

Sage, Freund, mir genau die Zahl von Helios' Rindern.
Sorgsam rechne mir aus, wenn dir Weisheit nicht fremd,
Wieviel deren es waren, die auf der Insel Sizilien
Fluren weideten einst, vierfach in Herden geteilt.
Jede Herde war anders gefärbt; die erste war milchweiß,
Aber die zweite erglänzt' von ganz dunkelem Schwarz.
Braun war die dritte sodann, die vierte scheckig; in jeder
Hatten die Stiere an Zahl weit das Übergewicht.
Und in solchem Verhältnis nun standen diese: die weißen
Glichen den braunen an Zahl und noch dem dritten Teil
Samt der Hälfte der Schwarzen, o Freund, zusammengenommen.
Weiter der schwarzen Meng' war gleich dem vierten Teil
Und dem fünften der Scheck'gen, vermehrt um sämtliche braune.
Endlich der scheckigen Stier' Zahl gleichsetzen du mußt,
Freund, dem sechsten und auch dem siebten Teile der weißen,
Noch gerechnet dazu sämtlicher braunen Meng'.
Anders verhielt sich's jedoch mit den weiblichen Rindern:
Es waren die mit weißlichem Haar gleich dem dritten Teil
Und dem vierten der schwärzlichen Rinder, der Kühe wie Stiere.
Ferner die schwarzen Küh' waren dem vierten Teil
Und dem fünften der Herde der scheckigen gleich, wenn
Gerechnet wurden sowohl die Küh' als auch die Stiere dazu.
Ebenso waren die scheckigen Küh' ein Fünftel und Sechstel
Aller mit braunem Haar, wenn zur Weide es ging.
Endlich die braunen Küh' ein Sechstel waren und Siebtel
Von der gesamten Herd', welcher weißlich das Haar.
Kannst du sagen genau, mein Freund, wie viele der Rinder
Dort nun waren vereint, auch wie viele es gab
Kühe von jeder Farb' und wohlgenährete Stiere,
Dann recht tüchtig fürwahr nennet im Rechnen man dich.
Doch noch zählt man dich nicht zu den Weisen; aber wohlan nun,
Komm und sage mir an, wie sich dies weiter verhält:
Wenn die ganze Zahl der weißen Stier' und der schwarzen
Sich vereint', alsdann standen geordnet sie da
Gleich nach Tiefe und Breite; die weiten Fluren Siziliens
Wurden völlig gefüllt durch die Menge der Stier'.
Stellte man aber zusammen die braunen und scheckigen, alsdann

Wurde ein Dreieck erzeugt, einer stand an der Spitz',
Und es fehlte keiner der braunen und scheckigen Stiere,
Noch darunter man fand einen von anderer Farb'.

Hast du auch dies ausfindig gemacht und im Geiste erfasset,
Gibst das Verhältnis mir an, Freund, das bei jeder Herd'
Findet statt, dann magst du stolz als Sieger einhergehn,
Denn hell strahlet dein Ruhm nun in der Wissenschaft.

Zur Lösung des Problems:

Zunächst einige Vereinbarungen über die Bezeichnungen.
Mit X, Y, Z, T bezeichnen wir die Anzahl der weißen, schwarzen, scheckigen bzw. braunen Stiere. Analog mit x, y, z, t die Anzahl der weißen, schwarzen, scheckigen bzw. braunen Kühe.
M, m, N, n, i, K sind beliebige natürliche Zahlen, die in der Rechnung als Parameter auftreten. Um die Lösung übersichtlich zu gestalten, werden wir an geeigneter Stelle die Zahlen 4657 als α, 957 als β und 4942 als γ bezeichnen.

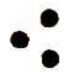
Aus dem Gedicht erhalten wir die folgenden Gleichungen, die in den natürlichen Zahlen zu lösen sind:

Zeile	10/11	$X = T + \frac{5}{6} Y$	(1)
	12/13	$Y = T + \frac{9}{20} Z$	(2)
	14-16	$Z = T + \frac{13}{42} X$	(3)
	18/19	$x = \frac{7}{12} (Y + y)$	(4)
	20-22	$y = \frac{9}{20} (Z + z)$	(5)
	23/24	$z = \frac{11}{30} (T + t)$	(6)
	25/26	$t = \frac{13}{42} (X + x)$	(7)
	33-36	$X + Y = M^2$	(8)
	37-40	$Z + T = \frac{1}{2} N \cdot (N + 1)$	(9)

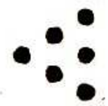
M und N sind hierbei beliebige natürliche Zahlen. Die Gleichung (9) sagt aus, daß Z + T eine Dreieckszahl sein soll.

Eine natürliche Zahl $\mathfrak{z}$ bezeichnet man als Dreieckszahl, wenn sich mit $\mathfrak{z}$ Punkten ein Gitter von kongruenten gleichseitigen Dreiecken herstellen läßt, so daß die Ecken der einzelnen Dreiecke diese Punkte sind. Die ersten Dreieckszahlen sind demnach

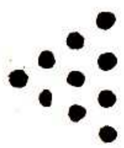
$1 \ (= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2)$



$3 \ (= 1+2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3)$



$6 \ (= 1+2+3 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4)$



$10 \ (= 1+2+3+4 = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5)$

$15 \ (= 1+2+3+4+5 = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6)$

Wir beschränken uns zuerst auf die Gleichungen (1) bis (7). Aus (1), (2) und (3) folgt:

$$6\,X - 5\,Y = 6\,T; \quad 20\,Y - 9\,Z = 20\,T; \quad 42\,Z - 13\,X = 42\,T$$

bzw. durch Umrechnung

$$X = \frac{742}{297}\,T; \quad Y = \frac{178}{99}\,T; \quad Z = \frac{1580}{891}\,T.$$

Die Zahlen 891 und 1580 sind teilerfremd. Andererseits muß Z eine natürliche Zahl sein. Also ist T ein ganzzahliges Vielfaches von 891.

$$T = 891\,i\,, \qquad i \in N.$$

Somit ergibt sich

$$\left.\begin{array}{ll} X = 2226\,i\,; & Y = 1602\,i \\ Z = 1580\,i\,; & T = 891\,i \end{array}\right\} (10)$$

Das Ergebnis von (10) in (4) - (7) eingesetzt, ergibt:

$$12\,x - 7\,y = 11214\,i \quad ; \quad 20\,y - 9\,z = 14220\,i$$
$$30\,z - 11\,t = 9801\,i \quad ; \quad 42\,t - 13\,x = 28938\,i.$$

Dieses Gleichungssystem lösen wir nach x, y, z und t auf.

$$4657\,x = 7206360\,i \quad ; \quad 4657\,y = 4893246\,i \qquad (11)$$
$$4657\,z = 3515820\,i \quad ; \quad 4657\,t = 5439213\,i$$

4657 ist eine Primzahl, die wir, wie bereits vereinbart, im weiten mit α abkürzen werden. Da keine der auf der rechten Seite der Gleichungen (11) stehenden Zahlen durch α teilbar ist, muß i ein ganzzahliges Vielfaches von α sein,

$$i = 4657\,K = \alpha \cdot K,$$

und wir erhalten als Lösungen der Gleichungen (1) - (7)

$$X = 10366482\,K \quad ; \quad Y = 7460514\,K$$
$$Z = 7358060\,K \quad ; \quad T = 4149387\,K$$
$$(12)$$
$$x = 7206360\,K \quad ; \quad y = 4893246\,K$$
$$z = 3515820\,K \quad ; \quad t = 5439213\,K\,.$$

K ist hierbei eine beliebige natürliche Zahl. Wie man leicht sieht, haben die Gleichungen (1) - (7) also unendlich viele Lösungen. Gesucht ist jetzt eine solche Lösung, die auch die Gleichungen (8) und (9) befriedigt.

Wir ersetzen in (8) und (9) X, Y, Z und T durch die entsprechenden Werte aus (10), wobei wir beachten, daß sich i als $\alpha \cdot K$ darstellt.

$$3828 \cdot \alpha \cdot K = M^2 \quad ; \quad 4942 \cdot \alpha \cdot K = N^2 + N$$

Wir ersetzen $957 = 3 \cdot 11 \cdot 29$ durch β und 4942 durch γ und erhalten:

$$M^2 = 4 \cdot \beta \cdot \alpha \cdot K \quad ; \quad N^2 + N = \gamma \cdot \alpha \cdot K \qquad (13)$$

M muß demnach ein ganzzahliges Vielfaches von 2, 3, 11, 29, 4657 sein:

$$M = 2 \cdot 957 \cdot 4657 \cdot m = 2 \cdot \beta \cdot \alpha \cdot m ,$$

so daß wir

$$M^2 = 4 \cdot \beta^2 \cdot \alpha^2 \cdot m^2$$

erhalten.

Der Vergleich mit (13) ergibt wieder

$$4 \cdot \beta^2 \cdot \alpha^2 \cdot m^2 = 4 \cdot \beta \cdot \alpha \cdot K$$

$$K = \alpha \cdot \beta \cdot m^2 = 4456749 \; m^2 . \qquad (14)$$

Diesen Wert von K setzen wir in (13) ein.

$$N^2 + N = \gamma \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \beta \cdot m^2 .$$

Durch Umformung entsteht

$$(2 N + 1)^2 = 4 \gamma \cdot \beta \cdot \alpha^2 \cdot m^2 + 1 .$$

Definieren wir:

$$2 N + 1 = n, \quad 4 \gamma \cdot \beta \cdot \alpha^2 = \delta ,$$

so erhalten wir endlich

$$n^2 - \delta m^2 = 1 ,$$

eine sogenannte Fermatsche Gleichung.

Diese Gleichung ist lösbar, aber ihre Lösung führt auf riesenhafte Zahlen, zumal schon δ den Wert 410 286 423 278 424 hat. Auf eine weitere Behandlung der Aufgabe müssen wir aus diesem Grunde verzichten.

1880 gelang es dem deutschen Mathematiker Amthor, diese Aufgabe zu lösen. Nach seiner Lösung weist das Ergebnis Zahlen auf, von denen eine jede im Dezimalsystem geschrieben 206545 Stellen hat.

Zum Beispiel sind die ersten vier Ziffern der Gesamtzahl der Stiere und Kühe aller vier Herden 7766 oder die der weißen Stiere 1598. Es folgen jeweils noch 206541 Ziffern.

Hans-Gerd Leopold
Forschungsstudent
im Bereich Analysis

Lösungen

Aufgabe F 27 (nach Gunter Gerbeth, 66 Greiz, 9. Klasse)

Voraussetzung für die Lösung ist $a * a' = e$ und $[G, *]$ Gruppe.
Wir wollen zeigen, daß dann $a' = a^{-1}$ gilt.

$a' \in G$, also gilt nach Axiom 3:

$a' = e * a'$

$a' = (a^{-1} * a) * a'$ (Axiom 4)

$a' = a^{-1} * (a * a')$ (Axiom 2)

$a' = a^{-1} * e$ (Voraussetzung)

$a' = a^{-1}$ (Axiom 3).

Für den Fall $a' * a = e$ verläuft der Beweis analog.

Aufgabe F 30 (nach Friedhelm und Norbert Schieweck, 3101 Blumenberg, 10. Klasse)

1) Wir betrachten den Kreis K' (mit dem Radius r'), der dem Quadrat einbeschrieben ist, und legen an ihn die Tangenten $\overline{A'C'}$ bzw. $\overline{C'B'}$ mit $\overline{A'C'} \parallel \overline{AC}$ bzw. $\overline{C'B'} \parallel \overline{CB}$ (siehe Abb. 1). Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ und der Tatsache, daß $\Delta A'B'C'$ im Inneren von ΔABC liegt, gilt:

$$\frac{r'}{r} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} < 1, \quad \text{das bedeutet} \quad x = 2r' < 2r.$$

(r ist hierbei Inkreisradius des Dreiecks ΔABC.)

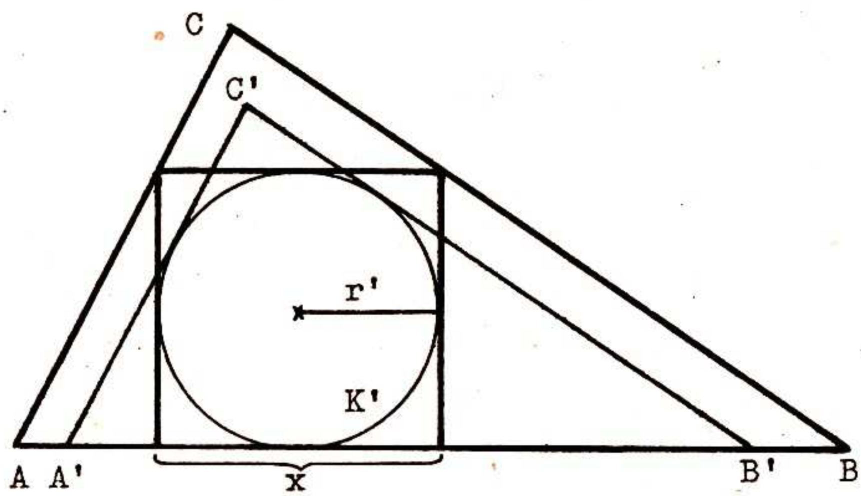


Abb. 1

2) An den Kreis K'' (Radius r''), der dem Quadrat umbeschrieben ist, legen wir die Tangenten $\overline{B''C''}$, $\overline{A''B''}$, $\overline{A''C''}$ mit $\overline{A''B''} \parallel \overline{AB}$, $\overline{A''C''} \parallel \overline{AC}$, $\overline{B''C''} \parallel \overline{BC}$. Das Dreieck ΔABC liegt im Innern des Dreiecks $\Delta A''B''C''$ und $\Delta ABC \sim \Delta A''B''C''$ (siehe Abb. 2).
Somit gilt:

$$\frac{r''}{r} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} > 1 \text{ , d. h. } x = \sqrt{2}\,r'' > \sqrt{2}\,r.$$

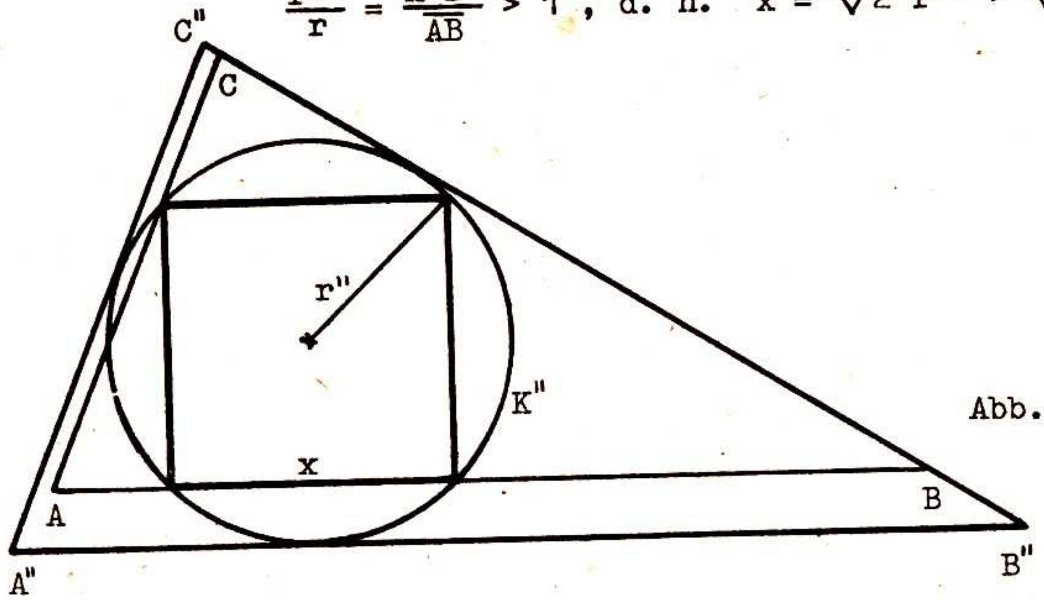
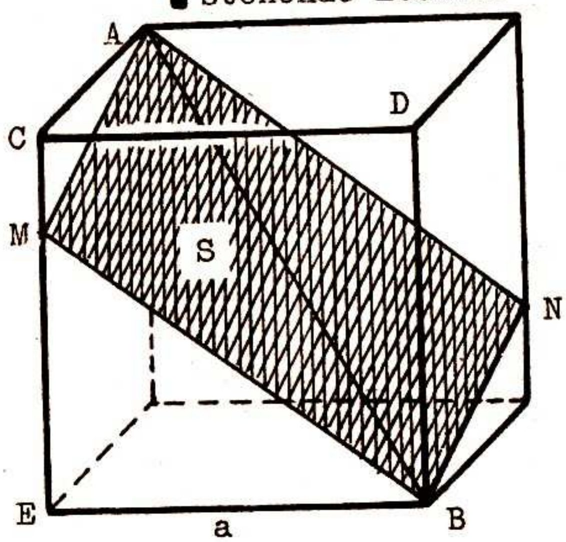


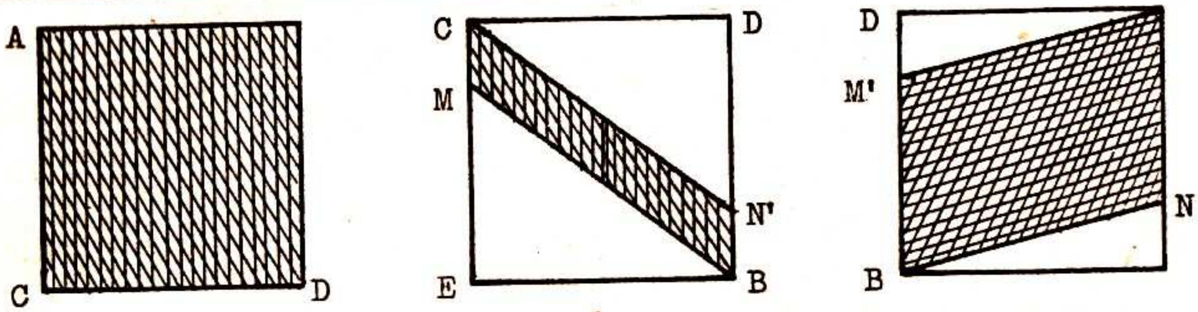
Abb. 2

Aufgabe F 20

Die Lösung ergibt sich sehr leicht nach folgendem

S a t z : Das Quadrat der Fläche eines ebenen Vielecks ist gleich der Summe der Quadrate der Flächen seiner Projektionen auf drei zueinander senkrecht stehende Ebenen.





Die Projektionsflächen auf die Ebenen ACD, ECDB, BDN sind gleich a^2, ax, $a^2 - ax$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} S^2 &= (a^2)^2 + (ax)^2 + (a^2 - ax)^2 \\ &= 2a^2(x^2 - ax + a^2) \\ &= 2a^2\left[\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4}\right] . \end{aligned}$$

Die Fläche S wird folglich minimal, wenn $x = \frac{a}{2}$ ist:

$$S_{min} = 2a^2 \cdot \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2} .$$

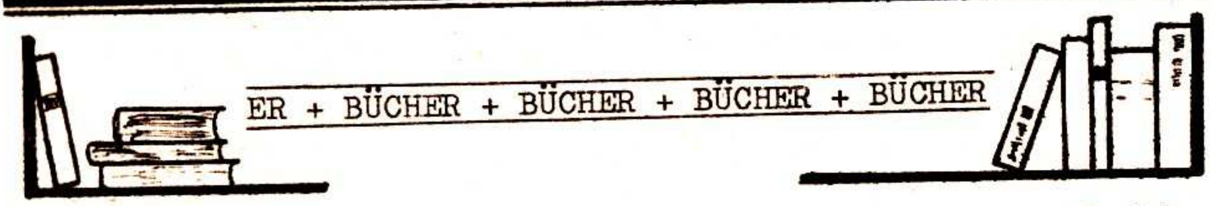
Lösung der Zahlenrätsel aus Heft 7/8/74:

(Seite 170)

5292	:	63	=	84
–		×		+
780	+	57	=	837
4512	–	3591	=	921

(Seite 192)

3854	:	47	=	82
–		×		+
662	+	51	=	713
3192	–	2397	=	795



Maximilian Miller: Gelöste und ungelöste mathematische Probleme
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1973,
Mathematische Schülerbücherei Nr. 73. Preis: 5,70 M

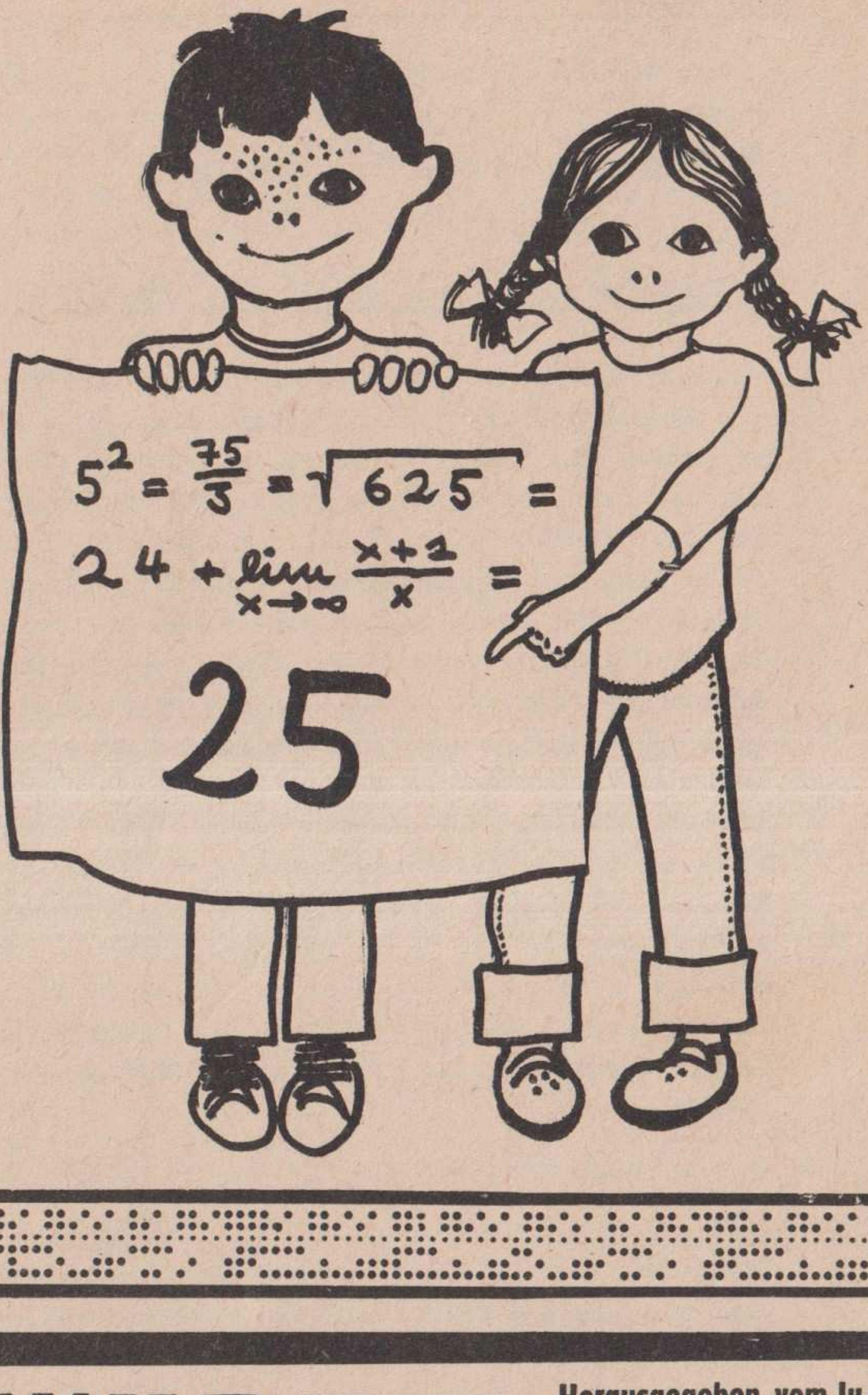
Wolfgang May: Differentialgleichungen
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1974,
Mathematische Schülerbücherei Nr. 49. Preis: 11,00 M

Hans Wussing: Carl Friedrich Gauß
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1974.
Preis: 4,70 M

Im Schuljahr 1973/74 veröffentlichten wir mathematische Artikel mit folgenden Themen:

Im Rahmen einer Artikelserie zum Mathematik/Physik-Lehrer-Studium an der Friedrich-Schiller-Universität Jena (siehe Heft 9/10, S. 13 - 16) informierten wir über die Ausbildung in

Herausgeber: Leitung der FDJ-Grundorganisation der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Egbert Creutzburg
Chefredakteur: Werner Nagel
Redaktion: J. Dubslaff, H.-G. Leopold, G. Weske
Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Bezugspreis je Heft: 0,20 M. Ein Jahresabonnement erstreckt sich von September bis August und kostet einschließlich eines Sonderheftes 2,50 M. Bestellungen sind direkt an unsere Adresse einzusenden. Schulen bitten wir, Sammelbestellungen bei uns aufzugeben.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.
V-14-6



10
74

WURZEL

zeitschrift für mathematik an

ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität

8. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Einführung in die Topologie (I)

1. Topologische Eigenschaften der Zahlengeraden

Von der 9. Klasse an ist jeder Schüler mit der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, der Zahlengeraden, hinreichend vertraut. Wir verwenden die Begriffe "Menge der reellen Zahlen" und "Zahlengerade" als äquivalente Begriffe in dem Sinne, daß jeder reellen Zahl eindeutig ein Punkt der Zahlengeraden und umgekehrt jedem Punkt der Zahlengeraden eindeutig eine reelle Zahl zugeordnet werden kann. In der Schule werden vor allem die algebraischen Eigenschaften und die Ordnungseigenschaften der Zahlengeraden betrachtet. Zu den algebraischen Eigenschaften der Zahlengeraden gehören beispielsweise die unbeschränkte Ausführbarkeit der Addition, der Multiplikation und der Subtraktion in $\mathbb{R}$ und die unbeschränkte Ausführbarkeit der Division in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ordnungseigenschaften sind alle die Eigenschaften, die mit der Tatsache verbunden sind, daß $\mathbb{R}$ eine geordnete Menge ist. Wie wir wissen, gilt ja z. B. für zwei beliebige reelle Zahlen x,y entweder $x < y$ oder $x > y$ oder $x = y$. Es lassen sich also zwei beliebige reelle Zahlen x,y stets der Größe nach vergleichen. Weiterhin ist der Betrag $|x|$ einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Der Betrag der Differenz zweier reeller Zahlen $x,y \in \mathbb{R}$, $|x-y|$, wird als Abstand zwischen x und y bezeichnet, was der anschaulichen Deutung auf der Zahlengeraden völlig entspricht.

In den folgenden Ausführungen werden wir die sogenannte Dreiecksungleichung sehr häufig benutzen.

Sind x,y beliebige reelle Zahlen, so gilt stets:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Unter einer Folge reeller Zahlen verstehen wir eine eindeutige Abbildung von $\mathbb{N}^*$ (Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ohne Null) in $\mathbb{R}$. Mit anderen Worten: Eine Folge reeller Zahlen ist eine Funktion f mit dem Definitionsbereich $D(f) = \mathbb{N}^*$ und einem Wertebereich $W(f) \subset \mathbb{R}$. Für $f(n)$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) \in \mathbb{R}$) schreiben wir auch a_n und symbolisieren eine Folge reeller Zahlen durch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Beispiele für reelle Zahlenfolgen:

$$(\tfrac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*} = (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots, \tfrac{1}{n}, \ldots)$$

$$(2^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*} = (1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1}, \ldots)$$

$$((-\tfrac{1}{2})^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*} = (1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{8}, \ldots, (-\tfrac{1}{2})^{n-1}, \ldots)$$

Der Begriff der Konvergenz einer Folge reeller Zahlen in $\mathbb{R}$ wird wie folgt definiert:

Definition 1:

Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ heißt konvergent in $\mathbb{R}$ genau dann, wenn eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ existiert mit folgender Eigenschaft: Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}^*$, so daß für alle $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}^*$, gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Formalisiert:

Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ heißt konvergent in $\mathbb{R}$ $\leftrightarrow$

$$\exists a\, \forall \varepsilon\, \exists n_0\, \forall n (a, \varepsilon \in \mathbb{R} \wedge \varepsilon > 0 \wedge n_0, n \in \mathbb{N}^* \wedge n > n_0 \longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$$

Ist für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ die in Def. 1 formulierte Konvergenzbedingung erfüllt, so sagen wir, die Folge konvergiert gegen den Grenzwert a, bzw. die Folge besitzt den Grenzwert a. Die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ besitzt demnach den Grenzwert 0 (Null), während die Folge $(2^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ keinen (eigentlichen) Grenzwert hat. Auch der Sachverhalt der Konvergenz läßt sich auf der Zahlengeraden veranschaulichen. Es muß ein Punkt a auf der Zahlengeraden existieren mit folgender Eigenschaft: Wählen wir eine beliebige positive reelle Zahl ε (ε mag sich noch so wenig von Null unterscheiden), so muß sich eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}^*$ finden lassen,

so daß alle a_n mit $n > n_o$ zwischen $a - \varepsilon$ und $a + \varepsilon$ liegen, während sich außerhalb dieses Abschnittes (Intervalls) höchstens die endlich vielen Folgenglieder $a_1, a_2, \ldots, a_{n_o}$ befinden.
Es gilt nun der folgende Satz:

Satz 1:

Der Grenzwert einer konvergenten Folge reeller Zahlen ist in $\mathbb{R}$ eindeutig bestimmt.

Beweis (indirekt): Nehmen wir an, es seien sowohl a als auch a' mit $a \neq a'$ Grenzwert einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Wegen $a \neq a'$ gilt: $|a - a'| > 0$. Wir wählen $\varepsilon = \frac{|a-a'|}{2} > 0$. Nach Definition 1 existiert dann ein $n_o \in \mathbb{N}^*$ mit $|a_n - a| < \varepsilon = \frac{|a-a'|}{2}$ für alle $n > n_o$.
Ebenso existiert dann nach Definition 1 ein $n_o' \in \mathbb{N}^*$ mit $|a_n - a| < \varepsilon = \frac{|a-a'|}{2}$ für alle $n > n_o'$.
Sei $m_o := n_o + n_o'$, so ist $m_o > n_o$ und auch $m_o > n_o'$, und es muß sowohl $|a_{m_o} - a| < \varepsilon$ als auch $|a_{m_o} - a'| < \varepsilon$ gelten. Wir erhalten:

$$|a-a'| = |a - a_{m_o} + a_{m_o} - a'| \leq |a - a_{m_o}| + |a_{m_o} - a'| < 2\varepsilon =$$

$$2 \cdot \frac{|a-a'|}{2} = |a-a'| .$$

Es kann aber $|a-a'| < |a-a'|$ nicht richtig sein, also muß auch unsere Annahme $a \neq a'$ falsch sein. $\blacksquare$

Wir bemerken: Um den Begriff der Konvergenz einer Folge reeller Zahlen definieren zu können, war neben anderem insbesondere der Begriff des Abstandes $|x - y|$ zweier reeller Zahlen x,y erforderlich.

All die bisher besprochenen Tatsachen werden auch in der Schule gelehrt oder können aus früheren Beiträgen in unserer Zeitschrift als bekannt vorausgesetzt werden. Womit ein Schüler aber weit weniger vertraut sein wird, das sind die topologischen Eigenschaften der Zahlengeraden. Ohne hier ausführliche Erklärungen anzuschließen, was man unter topologischen Eigenschaften versteht, wollen wir uns der Betrachtung solcher Eigenschaften zuwenden.

D e f i n i t i o n 2 :

Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$, so heißt
$]a,b[\; := \{x : x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b\}$
ein offenes Intervall mit den Endpunkten a und b.

Die offenen Intervalle sind spezielle Teilmengen von $\mathbb{R}$. Der Punkt $\frac{a+b}{2}$ heißt Mittelpunkt des Intervalls $]a,b[$, und $|b-a|$ ist die Länge des Intervalls.

D e f i n i t i o n 3 :

Sind $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, so heißt das spezielle offene Intervall der Länge 2ε mit x_0 als Mittelpunkt eine ε-Umgebung von x_0, die wir mit $U_\varepsilon(x_0)$ bezeichnen.
$U_\varepsilon(x_0) = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\}$.

Jetzt sind wir in der Lage, einen ganz wesentlichen Begriff zu definieren, nämlich den Begriff der Umgebung.

D e f i n i t i o n 4 :

Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ heißt Umgebung eines Punktes $x \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(x) \subseteq U$.

S a t z 2 :

Jede ε-Umgebung von x_0, $U_\varepsilon(x_0)$, ist Umgebung U jedes ihrer Punkte.

Beweis: Sei $x \in U_\varepsilon(x_0)$ beliebig gewählt, so ist $|x-x_0| < \varepsilon$ oder $\varepsilon - |x-x_0| > 0$. Wir setzen $\varepsilon' = \varepsilon - |x-x_0|$ und betrachten $U_{\varepsilon'}(x)$. Wählen wir $y \in U_{\varepsilon'}(x)$ beliebig, so ist stets $|y-x| < \varepsilon'$. Jetzt betrachten wir den Abstand zwischen x_0 und y, d. h. $|y-x_0|$:

$$|y-x_0| = |y-x+x-x_0| \leq |y-x| + |x-x_0| < \varepsilon' + |x-x_0| =$$
$$\varepsilon - |x-x_0| + |x-x_0| = \varepsilon \quad .$$

$|y-x_0| < \varepsilon$ heißt $y \in U_\varepsilon(x_0)$. Wenn also $y \in U_{\varepsilon'}(x)$, so auch $y \in U_\varepsilon(x_0)$ und folglich $U_{\varepsilon'}(x) \subseteq U_\varepsilon(x_0)$.
Für jedes $x \in U_\varepsilon(x_0)$ existiert ein $\varepsilon' > 0$, so daß $U_{\varepsilon'}(x) \subseteq U_\varepsilon(x_0)$. Nach Definition 4 bedeutet das aber, es ist $U_\varepsilon(x_0)$ Umgebung von x. ∎

Wegen $x_0 \in U_\varepsilon(x_0)$ ist nach Satz 2 natürlich $U_\varepsilon(x_0)$ auch Umgebung von x_0 selbst. Ist x_0 ein beliebiger Punkt der Zahlengeraden, so gibt es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$. Damit ist gesagt, daß es für jeden Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig viele ε-Umgebungen gibt. Da jede ε-Umgebung von x_0 auch Umgebung von x_0 ist, kann die Anzahl der Umgebungen von x_0 natürlich nicht geringer sein. Wir bezeichnen die Menge aller Umgebungen eines Punktes $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\mathfrak{U}(x_0)$.

Nunmehr beweisen wir vier Sätze, die grundlegende topologische Eigenschaften der Zahlengeraden beinhalten. Aus diesem Grunde geben wir diesen Sätzen eine besondere Bezeichnung.

Satz U_1:

Wenn U eine Umgebung des Punktes $x \in \mathbb{R}$ ist, so gilt: $x \in U$.
Formalisiert:

$$\forall x \ \forall U \ (x \in \mathbb{R} \wedge U \in \mathfrak{U}(x) \longrightarrow x \in U)$$

Beweis: Ist $U \in \mathfrak{U}(x)$, so existiert nach Definition 4 ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, so daß $U_\varepsilon(x) \subseteq U$. Da $x \in U_\varepsilon(x) \subseteq U$, folgt $x \in U$. ∎

Satz U_2:

Wenn U eine Umgebung von $x \in \mathbb{R}$ ist, und es ist $U \subseteq U'$, so ist auch U' Umgebung von x.
Formalisiert:

$$\forall x \ \forall U \ \forall U' \ (x \in \mathbb{R} \wedge U \in \mathfrak{U}(x) \wedge U \subseteq U' \longrightarrow U' \in \mathfrak{U}(x))$$

Beweis: Ist $U \in \mathfrak{U}(x)$, so existiert nach Definition 4 ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, so daß $x \in U_\varepsilon(x) \subseteq U$. Da $U \subseteq U'$ ist, gilt natürlich auch: $U_\varepsilon(x) \subseteq U'$. Folglich ist nach Definition 4 auch U' Umgebung von x, d. h. $U' \in \mathfrak{U}(x)$. ∎

Satz U_3:

Wenn U_1, U_2 Umgebungen von $x \in \mathbb{R}$ sind, so ist auch ihr Durchschnitt, $U_1 \cap U_2$, Umgebung von x.
Formalisiert:

$$\forall x \ \forall U_1 \ \forall U_2 (x \in \mathbb{R} \wedge U_1, U_2 \in \mathfrak{U}(x) \longrightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{U}(x))$$

Beweis: Da U_1 Umgebung von x ist, existiert nach Definition 4 ein $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_1 > 0$, so daß $U_{\varepsilon_1}(x) \subseteq U_1$.

Da U_2 Umgebung von x ist, existiert nach Definition 4 ein $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_2 > 0$, so daß $U_{\varepsilon_2}(x) \subseteq U_2$.

Setzen wir $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, so ist $U_\varepsilon(x) \subseteq U_1$ und $U_\varepsilon(x) \subseteq U_2$ und somit $U_\varepsilon(x) \subseteq U_1 \cap U_2$. Nach Definition 4 ist also $U_1 \cap U_2$ Umgebung von x. $\blacksquare$

Satz U_4:

Zu jeder Umgebung U eines Punktes $x \in \mathbb{R}$ existiert eine weitere Umgebung W von x derart, daß U Umgebung jedes Punktes $y \in W$ ist.
Formalisiert:
$\forall x \, \forall U \, \exists W \, \forall y \, (x \in \mathbb{R} \wedge U, W \in \mathfrak{U}(x) \wedge y \in W \longrightarrow U \in \mathfrak{U}(y))$

Beweis: Da U Umgebung von x ist, existiert nach Definition 4 ein $\varepsilon > \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, so daß $U_\varepsilon(x) \subseteq U$. Nach Satz 2 ist $U_\varepsilon(x)$ Umgebung jedes Punktes $y \in U_\varepsilon(x)$ und natürlich auch Umgebung von x. Wegen $U_\varepsilon(x) \subseteq U$ ist nach Satz U_2 auch U Umgebung jedes Punktes $y \in U_\varepsilon(x)$. Setzen wir $W := U_\varepsilon(x)$, so erfüllt W gerade die im Satz U_4 geforderten Bedingungen. $\blacksquare$

Karl Herrmann
Lektor im Bereich
Theorethische Mathematik

Die Fortsetzung dieses Artikels erscheint in Heft 11/74.

Gut gesagt

Die Mathematiker, die nur Mathematiker sind, denken also richtig, aber nur unter der Voraussetzung, daß man ihnen alle Dinge durch Definitionen und Prinzipien erklärt; sonst sind sie beschränkt und unerträglich, denn sie denken nur dann richtig, wenn es um sehr klare Prinzipien geht.

Blaise Pascal

Preisaufgaben 10/74

(F 49) ① Man gebe alle reellen Zahlen x an, die die folgende Ungleichung erfüllen:

$$a^2 \sin^2 x \leq \sin^2 3x \quad , \quad a > 0.$$

(F 50) ① Man löse die Gleichung

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x \quad ; \quad a \text{ - reelle Zahl.}$$

(F 51) ② Im Viereck ABB'A' liege P auf der Verlängerung der Strecke $\overline{AA'}$.
Gesucht ist diejenige Gerade g durch P, deren Schnittpunkte mit $\overline{AB}$, C und mit $\overline{A'B'}$, C' die folgende Gleichung erfüllen:

$$\overline{AC} : \overline{CB} = \overline{A'C'} : \overline{C'B'} \; .$$

Wann ist keine Lösung möglich?

(F 52) ① Man beweise:
Geht in einem Dreieck der Inkreis durch den Schwerpunkt, so gilt für die Seitenlängen a,b,c das Dreiecks

$$5(a^2+b^2+c^2) = 6(ab+bc+ac) \; .$$

(F 53) ① Man löse die Ungleichung

$$[\log_2 x + \log_{\frac{1}{4}}(x+3)]^{x-4} \geq 1 \; .$$

(F 54) ② Найти все значения n, при которых какие-либо три последовательных коэффициента разложения бинома $(a+b)^n$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии.

значение	- Wert
какой-либо	- irgendein, beliebig
последовательный	- sukzessiv

Aufgabe F 51 stammt - wie auch bereits die Aufgaben F 22 und F 33 - von Herrn Dr. habil. R. Roth, emer. Universitäts-Professor, Jena.

Die Aufgabe F 52 sandte unser Leser F. Müller, zur Zeit Mathematikstudent in Moskau, ein.

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.

Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.

Einsendeschluß: 30. 11. 1974

Liebe Leser!

Am 1. Oktober übernahm der Postzeitungsvertrieb den Versand unserer Zeitschrift. Bitte beachten Sie folgende mit dieser Umstellung verbundene Veränderungen:

- Neubestellungen, Abbestellungen sowie Änderungen des Abonnements sind nur noch über das zuständige Postamt möglich.
- Ab Oktober werden die Abonnementsgelder von der Deutschen Post eingezogen. Ein Vierteljahresabonnement kostet 0,60 M.
- Nachbestellungen älterer Nummern richten Sie bitte an unsere Adresse:

Redaktion WURZEL
69 Jena
Universitätshochhaus
Sektion Mathematik

Lösungen

Zu den Aufgaben der Serien 4/74 und 5/74

Bedingt durch die verspätete Auslieferung der Hefte 4/74 und 5/74 war die Zahl der Einsender geringer als sonst, obwohl wir selbstverständlich alle eingegangenen Lösungen - unabhängig vom Einsendetermin - gewertet haben.
Unter den Lösungen sortierten wir nur wenige falsche aus, z. B. bei F 26 und F 27. Die auftretenden Fehler waren so unterschiedlich, daß eine Charakterisierung nicht erfolgen kann.

Aufgabe F 25 (nach Lutz Gärtner, Wismar, 9. Klasse)

Die Bedingung $1 \leq x \leq 64$ ist auf Grund der Monotonie der Logarithmusfunktion äquivalent zu

$$\log_2 1 \leq \log_2 x \leq \log_2 64 \quad \text{, d. h.}$$
$$0 \leq \log_2 x \leq 6.$$

Den in der Aufgabenstellung gegebenen Ausdruck formen wir mit Hilfe der Logarithmengesetze um.

$$(\log_2 x)^4 + 12(\log_2 x)^2 \cdot \log_2 \frac{8}{x} =$$
$$(\log_2 x)^4 + 12(\log_2 x)^2 \cdot (\log_2 8 - \log_2 x) =$$
$$(\log_2 x)^4 - 12(\log_2 x)^3 + 36(\log_2 x)^2$$

Wir substituieren nun $a = \log_2 x$.
Der so erhaltene Term T lautet:

$$T = a^4 - 12a^3 + 36a^2$$
$$T = a^2(a^2 - 12a + 36)$$
$$T = a^2(a-6)^2$$
$$T = [a(a-6)]^2$$
$$T = [(a-3)^2-9]^2$$

T ist genau dann maximal, wenn $|(a-3)^2-9|$ den größten Wert annimmt.

<u>1. Fall:</u> $(a-3)^2 - 9 > 0$.
Dieser Fall kann wegen $(a-3)^2-9 = a(a-6)$ für das angegebene Intervall $0 \leq a \leq 6$ nicht eintreten.

2. Fall: $(a-3)^2 - 9 \leq 0$

Wegen $(a-3)^2 \geq 0$ für beliebige a gilt

$(a-3)^2-9 \geq -9$.

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn

$a = 3$ ist.

Also wird $|(a-3)^2-9|$ mit $0 \leq a \leq 6$ für $a = 3$ maximal. Damit nimmt auch T an der Stelle $a = 3$ seinen größten Wert an. Nun ist $a = \log_2 x$. Also ist der gegebene Ausdruck für $x = 2^3 = 8$ maximal.

Das Maximum beträgt 81.

Aufgabe F 26 (Gunter Gerbeth, Greiz, 9. Klasse)

Bei dem in der Aufgabenstellung vorliegenden Gleichungssystem handelt es sich um ein inhomogenes System mit 3 Unbekannten und 3 Gleichungen. Nach der Cramerschen Regel ist es für die Existenz von genau einer Lösung notwendig und hinreichend, daß die Koeffizientendeterminante von Null verschieden ist.

$$D = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Durch Ausrechnen ergibt sich:

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3) \neq a_1+a_2+a_3+1$$

$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3 + a_1a_2a_3 \neq 0 \qquad (*)$$

Falls $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$ gilt, kann die Bedingung für die drei Zahlen a_1, a_2, a_3 noch in folgende Form umgewandelt werden:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + 1 \neq 0 .$$

Erfüllen die Zahlen a_1, a_2, a_3 die Bedingung (*), so existiert genau eine Lösung des Gleichungssystems.

Aufgabe F 29 (nach Lothar Wenzel, Berlin)

Zuerst werden die beiden Gleichungsseiten unabhängig voneinander umgeformt. Es werden allgemein bekannte Additionstheoreme verwendet, so daß es nicht nötig ist, im weiteren jeden einzelnen Zwischenschritt anzugeben.

1. $\sin 5x = \sin 2x \cos 3x + \cos 2x \sin 3x$

$$= 2\sin x(4\cos^4 x - 3\cos^2 x) + 8\sin^5 x - 10\sin^3 x + 3\sin x$$

$$= 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x \qquad (*)$$

2. $16\sin x . \sin(x-\frac{\pi}{5}) . \sin(x+\frac{\pi}{5}) . \sin(x-\frac{2\pi}{5}) . \sin(x+\frac{2\pi}{5}) =$

$16\sin x(\sin^2 x \cos^2 \frac{\pi}{5} - \sin^2 \frac{\pi}{5} \cos^2 x)(\sin^2 x \cos^2 \frac{2\pi}{5} - \sin^2 \frac{2\pi}{5} \cos^2 x) =$

$16\sin x(\sin^2 x - \sin^2 \frac{\pi}{5})(\sin^2 x - \sin^2 \frac{2\pi}{5}) =$

$16\sin^5 x - 16(\sin^2 \frac{\pi}{5} + \sin^2 \frac{2\pi}{5})\sin^3 x + 16\sin^2 \frac{\pi}{5} . \sin^2 \frac{2\pi}{5} . \sin x \quad (**)$

Vergleichen wir (*) und (* *), so sind diese Polynome in $\sin x$ bis auf ihre Koeffizienten gleich. Um auch die Gleichheit der Koeffizienten nachzuweisen, müssen wir $\sin^2 \frac{\pi}{5} + \sin^2 \frac{2\pi}{5}$ und $\sin^2 \frac{\pi}{5} . \sin^2 \frac{2\pi}{5}$ berechnen.
Dies geschieht am zweckmäßigsten mit Hilfe des folgenden Ansatzes, der sich aus (*) ableitet:
$\sin 5y = \sin y\ (16 \sin^4 y - 20 \sin^2 y + 5)$.

Für $y = \frac{\pi}{5}$ bzw. $y = \frac{2\pi}{5}$ wird dieser Ausdruck Null ($\sin \pi = \sin 2\pi = 0$).
Da außerdem $\sin \frac{\pi}{5} \neq 0$ und $\sin \frac{2\pi}{5} \neq 0$ gilt, können wir durch $\sin y$ dividieren und erhalten:

(***) $0 = 16 \sin^4 y - 20 \sin^2 y + 5$ für $y = \frac{\pi}{5}$ und $y = \frac{2\pi}{5}$.

Faßt man diese Gleichung als quadratisch in $\sin^2 y$ auf, so ergibt sich wegen $\sin^2 \frac{\pi}{5} \neq \sin^2 \frac{2\pi}{5}$ und obiger Gleichung, daß $\sin^2 \frac{\pi}{5}$ und $\sin^2 \frac{2\pi}{5}$ die Lösungen von (***) sind.
Dann gilt aber nach dem Vietaschen Wurzelsatz:

$$\sin^2 \frac{\pi}{5} + \sin^2 \frac{2\pi}{5} = \frac{20}{16}$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{5} . \sin^2 \frac{2\pi}{5} = \frac{5}{16}$$

Setzen wir das erhaltene Resultat in (**) ein, so ergibt sich genau (*).
Da alle Umformungen in 1. und 2. äquivalent sind, ist somit der Beweis für die Behauptung der Aufgabe erbracht.

Unser Leser Dr. Bruno H a n i s c h , 4011 Halle, Merseburger Str. 122 sandte uns folgenden Beitrag ein, den wir - leicht redaktionell bearbeitet - im folgenden wiedergeben wollen:

Konstruieren einmal anders -

Betrachtungen zur Quadratur des Kreises

Im Jahre 1882 gelang es F. Lindemann, nachzuweisen, daß die Zahl π eine transzendente Zahl ist. Durch diesen Beweis wurde das alte Problem der Kreisquadratur endgültig in dem Sinne gelöst, daß es nicht möglich ist, die Fläche des Kreises mit Zirkel und Lineal in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln, d. h., mit Zirkel und Lineal aus einem vorgegebenen Kreis ein Quadrat zu konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich demjenigen des gegebenen Kreises ist.

Die folgenden Betrachtungen stehen keinesfalls im Widerspruch zu diesem Satz von Lindemann, der auch von mehreren anderen großen Mathematikern (Weierstraß, Hilbert u. a.) bewiesen wurde. Wenn man als konstruktive Hilfsmittel auch Konstruktionen mit dem Zirkel auf einer Zylinderfläche sowie das Abwickeln dieser Zylinderfläche in eine Ebene zuläßt, so ist, wie das folgende Beispiel zeigt, die Konstruktion des Kreisumfangs bzw. die Kreisquadratur mit Zirkel und Lineal durchaus möglich.

Der Gedankengang ist folgender: Es liege ein Zylinder (Papp- oder Holzzylinder) mit dem Radius r vor, und es soll ein Quadrat konstruiert werden, dessen Flächeninhalt $\pi \cdot r^2$ ist.
Wir nehmen ein Zeichenblatt und zeichnen zwei senkrecht zueinander stehende Geraden ein. Dann legen wir das Zeichenblatt so auf die Zylinderfläche, daß die eine Gerade als Mantellinie des Zylinders betrachtet werden kann, die andere bedeckt dann einen Kreis $\mathfrak{K}$ auf dem Zylinder. Im Schnittpunkt S der beiden Geraden stechen wir mit dem Zirkel ein und lassen die andere Zirkelspitze auf der Zylinderfläche gleiten, die Zirkelspanne sei gleich $r \cdot \sqrt{2}$. Wir erhalten auf dem Zeichenblatt eine geschlossene Kurve, die den Kreis K auf dem Zylinder in den Punkten P_1 und P_2 schneidet

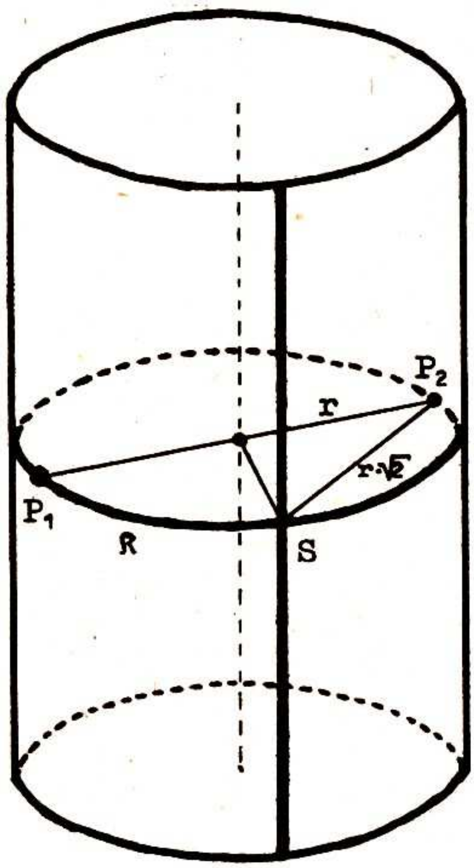


Abb. 1

$\overline{SP_3} = \overline{SP_4} = r\sqrt{2}$

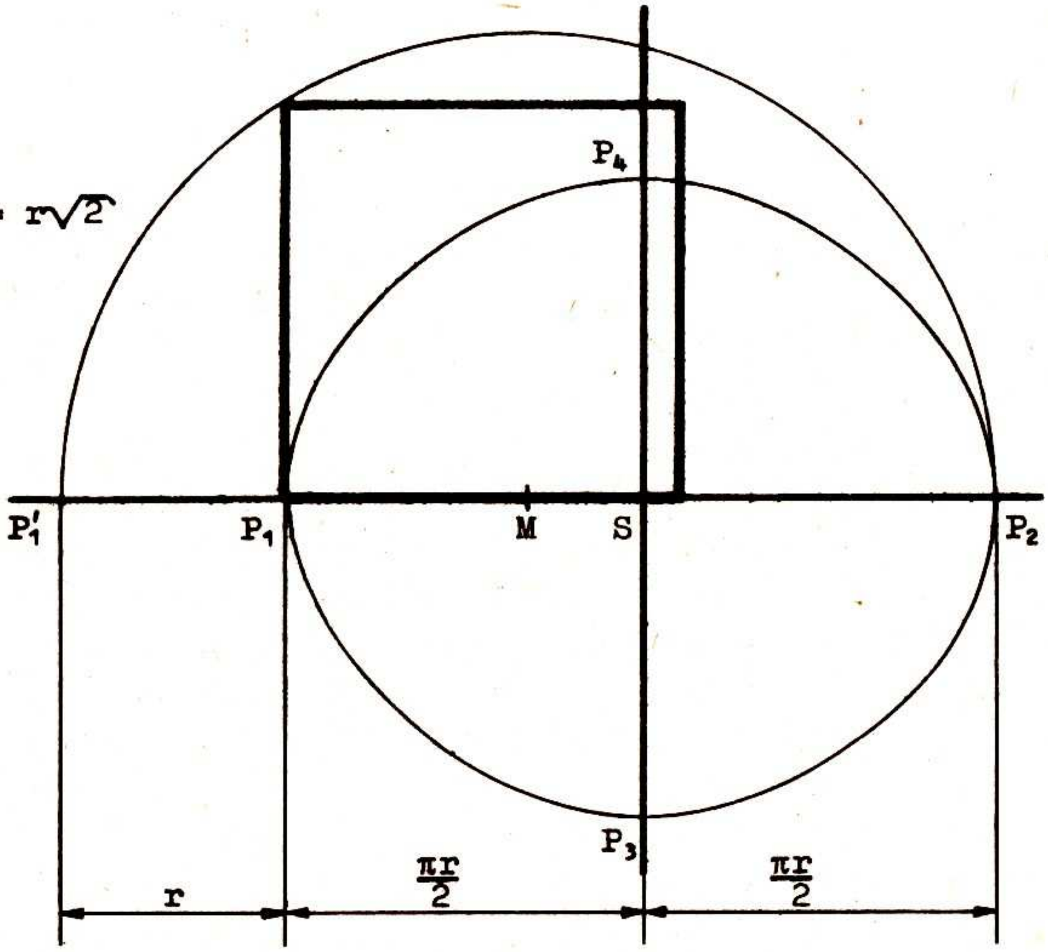


Abb. 2

(siehe Abb. 1). Nimmt man das Zeichenblatt vom Zylinder ab und breitet es wieder in der Ebene aus, so erscheint die vorher räumliche Kurve als ebene geschlossene Kurve. Die im abgewickelten Zeichenblatt sichtbare Strecke P_1P_2 hat den halben Umfang des Kreises K als Länge, also πr (siehe Abb. 2). Mit Hilfe des Höhensatzes läßt sich dann leicht ein Quadrat mit dem Flächeninhalt $\pi \cdot r^2$ konstruieren, also die Fläche eines Kreises vom Radius r in ein Quadrat verwandeln: $a^2 = r \cdot \pi r$ bzw. $a = \sqrt{\pi r^2}$.

Es ist nicht schwer einzusehen, daß man nach Verwandlung eines Kreises vom Radius r in ein flächengleiches Quadrat, wobei eine Konstruktion auf einem Zylinder verwendet wurde, nun auch Kreise mit anderen Radien in flächengleiche Quadrate verwandeln kann, und zwar ohne noch einmal mit einem Zylinder operieren zu müssen.

Studium und 25. Jahrestag

Der Vorbereitung des 25. Jahrestages war an der Friedrich-Schiller-Universität die erste Woche des neuen Studienjahres gewidmet. Zu diesem Zweck gab es eine Reihe Veranstaltungen, in denen die politische Bedeutung der Gründung der DDR, die Entwicklung unseres Staates und die weiteren Aufgaben diskutiert wurden.

Diskutiert - das bedeutete nicht, daß man sich allein auf allgemeine Darlegungen über das Vierteljahrhundert Geschichte beschränkte, sondern prominente Vertreter der Sektion berichteten über die Entwicklung an unserer Universität, teilten ihre Erfahrungen bei der Erziehung, Ausbildung und Forschung mit und sorgten damit für eine anschauliche und interessante Darstellung.

In seiner Vorlesung zur "Rolle der Mathematik in der sozialistischen Gesellschaft" ging Nationalpreisträger Professor Dr. Nawrotzki vor allem auf den Einsatz von Diplom-Mathematikern in der Volkswirtschaft ein. Gerade der Wissenschaft und damit auch der Mathematik kommt eine bedeutsame Stellung zu bei der erfolgreichen Verwirklichung der Hauptaufgabe des Fünfjahrplanes, sind doch 60% der Steigerung der Arbeitsproduktivität durch Anwendung der Wissenschaft zu erreichen.

Das heißt konkret, der Anwendungsbereich der Mathematik muß in der Volkswirtschaft weiter vergrößert werden - nicht zuletzt durch den persönlichen Einsatz eines jeden Absolventen der Sektion. Daraus erwachsen hohe Anforderungen an die Erziehung und Ausbildung der Studenten.

Es ist deshalb auch kein Zufall, wenn im Mittelpunkt der Initiativen der FDJ-Gruppen zum 25. Jahrestag der Kampf um hohe Studienleistungen, um beste Ergebnisse beim Studium des Marxismus-Leninismus und in den mathematischen Fächern stand.

In den FDJ-Gruppenversammlungen dieser ersten Studienwoche wurden außer einem Rückblick auf den erreichten Stand die Aufgaben und Ziele der FDJ-Arbeit im Studienjahr 1974/75 erörtert, einem Studienjahr, das durch die gesellschaftlichen Höhepunkte 25. Jahrestag der Gründung der DDR und 30. Jahrestag der Befreiung vom Faschismus geprägt sein wird.

Herausgeber: Leitung der FDJ-Grundorganisation der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Egbert Creutzburg
Chefredakteur: Waltraud Werner
Redaktion: J. Dubslaff, H.-G. Leopold, Th. Ullrich, G. Weske
Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.

11

74

WURZEL

zeitschrift für mathematik an

ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität

8. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

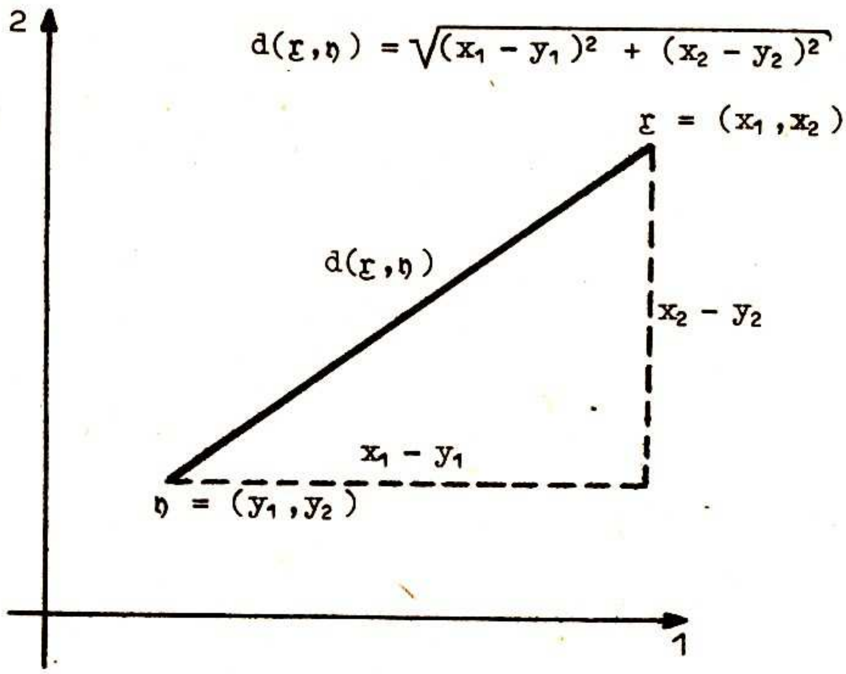
Einführung in die Topologie (II)

2. Topologische Eigenschaften des $\mathbb{R}^n$

Alles, was wir für die Zahlengerade definiert, erläutert und bewiesen haben, kann bis auf die Ordnungseigenschaften ohne jede Schwierigkeit auf die Menge aller n-Tupel reeller Zahlen $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, den $\mathbb{R}^n$, übertragen werden.
Hatten wir auf der Zahlengeraden $d(x,y) := |x-y|$ als Abstand der beiden Punkte x und y erklärt, so definieren wir den Abstand $d(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ zweier Punkte $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $\mathfrak{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ des $\mathbb{R}^n$ wie folgt:

$$d(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) := \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$$

Für n=1 ist $d(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2} = |x_1-y_1| = d(x_1, y_1)$. Also enthält die Abstandsdefinition im $\mathbb{R}^n$ den auf der Zahlengeraden definierten Abstand als Spezialfall. Für n=2 ist $d(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der anschaulich gegebene Abstand zweier Punkte der Ebene:



Sobald im $\mathbb{R}^n$ der Abstand $d(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ zweier Punkte erklärt ist, kann der Begriff der Konvergenz einer Folge $(\mathfrak{x}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ von Punkten $\mathfrak{x}_\nu$ des $\mathbb{R}^n$ definiert werden.

D e f i n i t i o n 5 : Eine Folge $(\mathfrak{x}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ von Punkten des $\mathbb{R}^n$ heißt konvergent in $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn ein Punkt $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ existiert mit folgender Eigenschaft: Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$, so daß für alle $\nu > \nu_0$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, gilt:

$$d(\mathfrak{x}_\nu, \mathfrak{a}) = \sqrt{(x_1^{(\nu)} - a_1)^2 + (x_2^{(\nu)} - a_2)^2 + \ldots + (x_n^{(\nu)} - a_n)^2} < \varepsilon$$

Genau wie auf der Zahlengeraden ist auch hier der Grenzwert $\mathfrak{a}$ einer konvergenten Folge $(\mathfrak{x}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ eindeutig bestimmt.

Auf der Zahlengeraden hatten wir für $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ eines Punktes $x_0 \in \mathbb{R}$ durch

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x\colon x \in \mathbb{R} \wedge x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\} = \{x\colon x \in \mathbb{R} \wedge |x - x_0| < \varepsilon\}$$

definiert. Völlig analog definieren wir die Begriffe "ε-Umgebung" $U_\varepsilon(\mathfrak{x}_0)$ und "Umgebung" U im $\mathbb{R}^n$:

D e f i n i t i o n 6 : Sind $\mathfrak{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so heißt

$$U_\varepsilon(\mathfrak{x}_0) := \{\mathfrak{x}\colon \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge d(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2} < \varepsilon\}$$

eine ε-Umgebung von $\mathfrak{x}_0$.

D e f i n i t i o n 7 : Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Umgebung des Punktes $\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(\mathfrak{x}) \subseteq U$.

Auch im $\mathbb{R}^n$ gilt der Satz 2: Jede ε-Umgebung von $\mathfrak{x}_0$, $U_\varepsilon(\mathfrak{x}_0)$, ist Umgebung U jedes ihrer Punkte.

Die vier grundlegenden topologischen Eigenschaften U_1 bis U_4 gelten für den $\mathbb{R}^n$ ebenso wie für die Zahlengerade. Die Beweise dieser vier Sätze für den $\mathbb{R}^n$ erhält man aus den Beweisen für die Zahlengerade, indem dort lediglich x durch $\mathfrak{x}$ und y durch $\mathfrak{y}$ ersetzt werden.

3. Topologische Eigenschaften metrischer Räume

Wir bemerken, daß sich der Begriff der Konvergenz einer Folge $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ von Elementen einer Menge E in jeder Menge E erklären läßt, in welcher ein Abstand d(x,y) zwischen je zwei beliebigen Elementen $x,y \in E$ definiert ist. Mit Hilfe des Abstandes lassen sich auch die Begriffe "ε-Umgebung" und "Umgebung" definieren und damit wiederum die Sätze U_1 bis U_4 formulieren und beweisen. Offensichtlich kommen die grundlegenden topologischen Eigenschaften U_1 bis U_4 nicht nur der Zahlengeraden und dem $\mathbb{R}^n$ zu, sondern auch noch allgemeineren Mengen.

Betrachten wir den auf der Zahlengeraden definierten Abstand $d(x,y) = |x-y|$ zweier Punkte $x,y \in \mathbb{R}$ etwas näher. Durch $d(x,y) = |x-y|$ wird je zwei Elementen $x,y \in \mathbb{R}$ eindeutig eine neue reelle Zahl zugeordnet. Es ist $d(x,y) = |x-y|$ eine eindeutige Abbildung (Funktion) von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ($D(d) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $W(d) \subseteq \mathbb{R}$) mit folgenden Eigenschaften:

a) Für jedes $x,y \in \mathbb{R}$ ist $|x-y| \geq 0$, und es ist $|x-y| = 0$ genau dann, wenn $x=y$ gilt.

b) Für jedes $x,y \in \mathbb{R}$ gilt: $|x-y| = |y-x|$

c) Für jedes $x,y,z \in \mathbb{R}$ gilt: $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$

Die Ungleichung unter c) ist eine elementare Folgerung aus der Dreiecksungleichung:

$$|x-y| = |x-z + z-y| \leq |x-z| + |z-y| \,.$$

Wegen ihrer geometrischen Bedeutung im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ wird diese Ungleichung ebenfalls Dreiecksungleichung genannt.

Auch der im $\mathbb{R}^n$ definierte Abstand zweier Punkte $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$d(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2} \,,$$

ist eine eindeutige Abbildung von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften a) bis c):

a) Wie man sofort erkennt, gilt für jedes $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$d(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2} \geq 0 \,,$$

und es ist $d(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ genau dann, wenn $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$, d. h. $x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n$ ist.

b) Für jedes $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\begin{aligned} d(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2} \\ &= \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + \ldots + (y_n-x_n)^2} \\ &= d(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) \end{aligned}$$

c) Für jedes $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$d(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$$

$$\leq \sqrt{(x_1-z_1)^2+\ldots+(x_n-z_n)^2} + \sqrt{(z_1-y_1)^2+\ldots+(z_n-y_n)^2}$$

$$= d(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) + d(\mathfrak{z}, \mathfrak{x})$$

Der Beweis der hier angegebenen Dreiecksungleichung für den im $\mathbb{R}^n$ definierten Abstand ist nicht ganz einfach und an dieser Stelle unangebracht.

Diese Erkenntnisse legen die folgende Definition nahe:

D e f i n i t i o n 8 : Eine Menge E heißt ein metrischer Raum genau dann, wenn eine eindeutige Abbildung d von $E \times E$ in $\mathbb{R}$ definiert werden kann, die folgende Eigenschaften besitzt:

a) Für jedes $x, y \in E$ ist $d(x,y) \geq 0$, und es ist $d(x,y)=0$ genau dann, wenn $x = y$.

b) Für jedes $x, y \in E$ gilt: $d(x,y) = d(y,x)$

c) Für jedes $x, y, z \in E$ gilt: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Wir nennen die Abbildung d eine Metrik oder Abstandsfunktion in E und den Wert $d(x,y) \in \mathbb{R}$ den Abstand zwischen den Punkten x und y. Die Zahlengerade und der $\mathbb{R}^n$ erweisen sich somit als metrische Räume mit $d(x,y) = |x - y|$ bzw.

$d(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$.

Ist die Menge E ein metrischer Raum, so läßt sich die Konvergenz einer Folge $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ von Elementen aus E wie folgt definieren:

D e f i n i t i o n 9 : Eine Folge $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ von Elementen aus E heißt konvergent in E genau dann, wenn ein $a \in E$ existiert mit folgender Eigenschaft: Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$, so daß für alle $\nu > \nu_0$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, gilt: $d(x_\nu, a) < \varepsilon$.

Wir sagen dann, die Folge $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ besitzt den Grenzwert a und schreiben:

$$\lim_{\nu \to \infty} x_\nu = a \, .$$

In jedem metrischen Raum ist wie auf der Zahlengeraden und im $\mathbb{R}^n$ der Grenzwert a einer konvergenten Folge $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ eindeutig bestimmt.

Die Begriffe " ε-Umgebung" und "Umgebung" definieren wir in einem metrischen Raum E wie auf der Zahlengeraden und wie im $\mathbb{R}^n$.

D e f i n i t i o n 10 : Sind $x_0 \in E$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so heißt

$U_\varepsilon(x_0) = \{x : x \in E \wedge d(x,x_0) < \varepsilon\}$

eine ε-Umgebung von x_0.

D e f i n i t i o n 11 : Eine Menge $U \subseteq E$ heißt Umgebung des Punktes $x \in E$ genau dann, wenn ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(x) \subseteq U$.

Auch in einem beliebigen metrischen Raum E gilt: Jede ε-Umgebung von $x_0 \in E$, $U_\varepsilon(x_0)$, ist Umgebung jedes ihrer Punkte.

Jetzt lassen sich die vier grundlegenden topologischen Eigenschaften U_1 bis U_4 für jeden metrischen Raum formulieren und genau so beweisen wie für die Zahlengerade. Somit erweisen sich die Sätze U_1 bis U_4 als Folgerungen aus den in Definition 8 angegebenen Grundeigenschaften des metrischen Raumes.

Karl Herrmann
Lektor im Bereich
Theoretische Mathematik

Im letzten Teil dieses Beitrages werden wir uns der Frage zuwenden, ob man in einer Menge E auch dann noch einen Konvergenzbegriff einführen kann, wenn in E keine Metrik erklärbar ist, und dazu den Begriff des topologischen Raumes definieren.

Preisaufgaben 11/74

(F 55) 1 Man bestimme den kleinsten Wert der Funktion

$$f(m) = \frac{\sum\limits_{n/m} n}{\sum\limits_{n/m} n^0}$$

für ganzzahlige m $(m > 1)$ und beweise, daß sie keinen größten Wert hat. Dabei bedeutet $\sum\limits_{n/m} n$ die Summation über alle Zahlen n, durch die m teilbar ist.

(F 56) 2

In der Ebene sind die zwei Punkte A und B fixiert. Man beweise, daß der geometrische Ort aller Punkte M, die der Bedingung $2\overline{AM}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{AB}^2$ genügen, ein Kreis mit dem Durchmesser $\overline{AC}$ ist. C ist ein auf der Strecke $\overline{AB}$ liegender Punkt, für den $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 2$ gilt.

(F 57) 1

Man beweise: Ist E metrischer Raum mit der Metrik d, so gilt für je zwei Paare von Punkten x, x'; y, y' $\in$ E die sogenannte Vierecksungleichung

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y') .$$

(F 58) 1

Gegeben seien n Geraden in der Ebene, von denen keine zwei parallel sind. Es ist bekannt, daß durch den Schnittpunkt von je zwei Geraden noch eine dritte Gerade geht. Man beweise, daß alle Geraden durch einen Punkt gehen!

(F 59) 1

Найти решение системы в области действительных чисел:

$$\sqrt{a - x} - \sqrt{y - x} = \sqrt{y}$$
$$\sqrt{b - x} + \sqrt{y - x} = \sqrt{y}$$

a,b - действительные числа.

действительный - reell

(F 60) 2

При каких значениях x и y выражение

$$\left(2\cos t + \tfrac{1}{2}\cos x\cdot\cos y\right)\cdot\cos x\cdot\cos y + 1 + \cos x - \cos y + \cos 2t$$

положительно при всех значениях t?
Указать, где на координатной плоскости расположены точки (x,y), удовлетворяющие этому условию.

выражение - Ausdruck
положительно - positiv
плоскость - Ebene

Einsendeschluß: 31. 12. 1974

Komplexe Zahlen (I)

Die komplexen Zahlen wurden von Gauß systematisch in die Mathematik eingeführt, nachdem andere Mathematiker (unter ihnen ist besonders Euler zu nennen) entscheidende Vorarbeiten geleistet hatten. Von Gauß stammt auch die heute übliche geometrische Darstellung der komplexen Zahlen (1831), die wir noch genau untersuchen werden. Nach ihrer Einführung stießen die komplexen Zahlen keineswegs auf ungeteilte Zustimmung. Viele Mathematiker der damaligen Zeit sahen darin etwas Unwirkliches. Darauf deutet auch noch die Bezeichnung "imaginär" hin, die in der Theorie der komplexen Zahlen eine wichtige Rolle spielt. Heute gehören die komplexen Zahlen zum selbstverständlichen Allgemeingut eines jeden Mathematikers. Im folgenden soll versucht werden, die Grundlagen der Theorie der komplexen Zahlen auf exakte Weise zu beschreiben.

1. Einführung der komplexen Zahlen

Ausgangspunkt unserer Betrachtungen sind die reellen Zahlen, die wir mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnen wollen. Zu zwei reellen Zahlen α_1 und α_2 bilden wir das Zahlenpaar $a = (\alpha_1, \alpha_2)$. Hierbei ist die Reihenfolge der Zahlen α_1 und α_2 wichtig, wir sprechen deshalb auch von einem geordneten Zahlenpaar. In der Gesamtheit aller Zahlenpaare, die wir auf diese Weise bilden können, definieren wir:

D e f i n i t i o n :

1. Zwei Zahlenpaare $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ und $b = (\beta_1, \beta_2)$ heißen gleich genau dann, wenn $\alpha_1 = \beta_1$ und $\alpha_2 = \beta_2$ gilt. Wir schreiben dann $a = b$.
2. Zu zwei Zahlenpaaren $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ und $b = (\beta_1, \beta_2)$ definieren wir ihre Summe $a + b$ durch
$a + b =_{Df} (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$.

Man muß sich darüber im klaren sein, daß in der Gesamtheit aller Zahlenpaare im ersten Moment **keinerlei** Operationen, wie Gleichheit oder Addition, erklärt sind. Unsere Festlegung der Gleichheit und der Addition ist zu einem gewissen Grade willkürlich, wenn auch sehr naheliegend. Diese beiden ersten Definitionen erlauben uns bereits, einige einfache Rechenregeln abzuleiten. Da a + b ebenfalls ein geordnetes Paar ist, ist es sinnvoll, (a + b) + c zu bilden. Hierbei sei $c = (\gamma_1, \gamma_2)$. Wir erhalten:

$$(a + b) + c = [(\alpha_1 + \beta_1) + \gamma_1, (\alpha_2 + \beta_2) + \gamma_2]$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1, \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2). \tag{1}$$

Andererseits können wir die Summe der Zahlenpaare a und b + c ausrechnen. Wir erhalten:

$$a + (b + c) = [\alpha_1 + (\beta_1 + \gamma_1), \alpha_2 + (\beta_2 + \gamma_2)]$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1, \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2). \tag{2}$$

Die rechten Seiten der Gleichungen (1) und (2) stimmen überein. Somit ist nach der Definition der Gleichheit der Zahlenpaare

$$(a + b) + c = a + (b + c). \tag{3}$$

Diese Regel nennt man das **Assoziativgesetz** der Addition. Es zeigt, daß es für die Ausführung der Addition der drei Zahlenpaare a, b und c belanglos ist, ob man erst a und b und anschließend c addiert oder erst b und c und anschließend a. Wir können daher ohne Verwechslungsgefahr statt (a + b) + c einfach a + b + c schreiben.
Wir können sofort ein zweites, ebenfalls sehr einfaches Gesetz herleiten. Aus der Definition der Addition folgt nämlich unmittelbar

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$$
$$= (\beta_1 + \alpha_1, \beta_2 + \alpha_2)$$
$$= b + a.$$

Diese Regel nennt man das Kommutativgesetz der Addition. Es zeigt, daß es bei der Ausführung der Addition auf die Reihenfolge der Zahlenpaare a und b nicht ankommt.
Wir wollen jetzt eine dritte Operation, nämlich die Multiplikation zweier Zahlenpaare, einführen. Sind wieder $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ und $b = (\beta_1, \beta_2)$, so wäre es naheliegend, die Multiplikation der Zahlenpaare a und b durch

$$a \cdot b =_{Df} (\alpha_1 \cdot \beta_1, \alpha_2 \cdot \beta_2) \tag{4}$$

festzulegen. Es zeigt sich jedoch, daß diese Definition sehr unzweckmäßig ist. Die Rechenregeln, die man aus der Theorie der reellen Zahlen kennt, würden bei einer derartigen Definition der Multiplikation von geordneten Zahlenpaaren nicht mehr durchweg gültig sein. Es ist aber ein Ziel unserer Überlegungen, die elementaren Grundrechenarten für Zahlenpaare so zu definieren, daß man mit ihnen in gleicher Weise rechnen kann wie mit den reellen Zahlen. Die Rolle der Zahl 0 im Bereich der reellen Zahlen übernimmt jetzt das Zahlenpaar (0,0). In Analogie zu den reellen Zahlen werden wir an eine mögliche Definition der Multiplikation der Zahlenpaare $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ und $b = (\beta_1, \beta_2)$ folgende Forderung stellen: Aus $a.b = (0,0)$ soll folgen, daß entweder $a = (0,0)$ oder $b = (0,0)$ oder aber $a = b = (0,0)$ ist. Der Definitionsversuch (4) erfüllt diese Forderung aber nicht. Für $a = (1,0)$ und $b = (0,1)$ wäre nämlich $a.b = (0,0)$. Wir wählen deshalb eine etwas kompliziertere (wie sich später herausstellen wird, geometrisch leicht deutbare) Definition der Multiplikation.

D e f i n i t i o n :

3. Ist $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ und $b = (\beta_1, \beta_2)$, so definieren wir das Produkt a.b durch

$$a \,.\, b =_{Df} (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2,\ \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1). \qquad (5)$$

Statt a.b schreiben wir in Zukunft auch ab. Wir werden später nachprüfen, daß $ab = (0,0)$ dann und nur dann gilt, wenn mindestens eines der beiden Zahlenpaare gleich (0,0) ist. Zuvor wollen wir aber das Distributivgesetz herleiten, daß die Addition und die Multiplikation verknüpft.

Es seien wieder $a = (\alpha_1, \alpha_2)$, $b = (\beta_1, \beta_2)$ und $c = (\gamma_1, \gamma_2)$ drei geordnete Zahlenpaare. Dann ist $b + c = (\beta_1+\gamma_1,\ \beta_2+\gamma_2)$ und somit erhalten wir nach (5):

$$a(b+c) = [\alpha_1(\beta_1+\gamma_1) - \alpha_2(\beta_2+\gamma_2),\ \alpha_1(\beta_2+\gamma_2) + \alpha_2(\beta_1+\gamma_1)].$$

Rechnen wir die Klammern aus und fassen anschließend wieder geschickt zusammen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} a(b+c) &= (\alpha_1\beta_1+\alpha_1\gamma_1-\alpha_2\beta_2-\alpha_2\gamma_2,\ \alpha_1\beta_2+\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\beta_1+\alpha_2\gamma_1) \\ &= [(\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2)+(\alpha_1\gamma_1-\alpha_2\gamma_2),\ (\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)+(\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1)] \\ &= ab + ac\ . \end{aligned}$$

Somit ist

$$a(b + c) = ab + ac. \qquad (6a)$$

(5) zeigt ferner, daß

$$\begin{aligned} ab &= (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) \\ &= (\beta_1\alpha_1 - \beta_2\alpha_2, \beta_2\alpha_1 + \beta_1\alpha_2) \\ &= ba \end{aligned} \tag{7}$$

gilt. (7) ist ebenfalls ein Kommutativgesetz. Mit seiner Hilfe können wir nun aus (6a) die Gleichung

$$(b + c)a = ba + ca \quad (= ab + ac) \tag{6b}$$

herleiten. (6a) und (6b) nennt man die beiden Distributivgesetze.

Im zweiten Teil des Artikels werden wir eine geometrische Interpretation einführen und im Zusammenhang damit die Beziehungen zwischen geordneten Zahlenpaaren und komplexen Zahlen kennenlernen.

Prof. Dr. habil. Hans Triebel
Bereich Analysis

Gottfried Wilhelm Leibniz
1.7.1646-14.11.1716

von LEIBNITZ (Gottfried Wilhelm), ein berühmter Polyhistor, der fast in allen Wissenschafften und sonderlich in der Mathematic excellirt, gebohren 1646 zu Leipzig am Tage Johannis des Täuffers...

Leibniz befaßte sich mit Philosophie, Rechtswissenschaft, Diplomatie, Geschichte, Theologie, Sprachwissenschaften, Geologie, Mathematik, Biologie, Physik. Das "Suchen nach einer universellen Methode, mit der man Wissen erlangen, Erfindungen machen und das Wesen der Einheit des Universums verstehen konnte, war die Haupttriebfeder seines Lebens. Die 'Scientia generalis' [1]), die er aufzubauen versuchte, besaß viele Seiten, und einige von ihnen führten Leibniz zu mathematischen Entdeckungen". [2])

---

[1]) scientia generalis - allgemeine Wissenschaft

[2]) D. J. Struik, Abriß der Geschichte der Mathematik, Berlin 1972, S. 120

... zohe im 15 Jahre auf die Academie in seiner Vaterstadt, studirte daselbst, wie auch zu Jena, wurde zu Leipzig 1664 Magister, wollte auch daselbst Doctor Juris werden, kriegte aber, weil er noch nicht 20 Jahr alt war, abschlägliche Antwort, und erhielt dafür zu Altorf 1666 den Doctor=Hut mit dem grösten Ruhm ...

Hier soll uns nur der Mathematiker Leibniz interessieren. Leibniz war auf diesem Gebiet Autodidakt. Aus Interesse für Mathematik ging er 1663 nach Jena, um den hier lehrenden Erhard Weigel zu hören. Allerdings lernte er hier nur Elementarmathematik kennen.

... wurde dagegen 1670 churfürstlicher maynzischer Rath ...

Im Dienste des Kurfürsten von Mainz weilte Leibniz 1672 bis 1676 in Paris. Hier, im Zentrum des geistigen Lebens seiner Zeit, lernte er den Physiker und Mathematiker Christian Huygens kennen, studierte er auf dessen Empfehlung hin Werke von Pascal, Descartes und Cavalieri und wurde so mit der zeitgenössischen Mathematik vertraut.

Er ... wandte viel Geld auf mathematische Dinge, von welchen ihn die Machina arithmetica, an welcher er lange gearbeitet, ... alleine über 24000 Thl. soll gekostet haben ...

Leibniz' Rechenmaschine (1672) gestattete die Ausführung aller vier Grundrechnungsarten und war weitaus vollkommener als die 1641 von Pascal erfundene Additions- und Subtraktionsmaschine.

... mit Newtonen wegen Erfindung des Calculi differentialis, welchen sie sich alle beyde zu eigneten, einen Streit gekriegt ...

Die Schaffung des Kalküls der Differential- und Integralrechnung ist wohl eine der bedeutendsten Leistungen des Gelehrten. Die Anfänge der Infinitesimalrechnung, wie man die beiden Teilgebiete der Mathematik zusammengefaßt bezeichnet, gehen ins 3. Jahrhundert v. u. Z. zurück - nämlich auf Archimedes. Aber erst im 16. Jahrhundert wurden die archimedischen Gedanken wieder aufgegriffen und weiterentwickelt. Hierbei ging es zunächst um Rektifikationen, Quadraturen und Kubaturen, d. h. um Kurvenlängenmessungen, Flächen- und Rauminhaltsbestimmungen. Bedeutendes auf diesem Gebiet leisteten z. B. Johannes Kepler (sein Werk "Neue Volumenberechnung von Weinfässern" enthält die bekannte "Keplersche Faßregel') und Bonaventura Cavalieri (dem Leser wird das 'Cavalierische Prinzip' bekannt sein). Daneben beschäftigte die Mathematiker (z. B. Pierre de Fermat und Blaise Pascal) das Tangentenproblem, die Frage, wie man die Richtung der Tangente an eine gegebene Kurve in einem beliebigen Punkt x_0 bestimmen kann. Daß zwischen beiden Aufgabenstellungen, zwischen Quadratur- und Tangentenproblem, Zusammenhänge bestehen, hatten einige Mathematiker zwar erkannt, aber erst Leibniz gelang es, diese Beziehungen in seinem Unendlichkeitskalkül umfassend und mit einer geeigneten Symbolik darzulegen. Er fand, daß die Rektifikationen und Quadraturen gleichwertig sind mit dem "umgekehrten Tangentenproblem". Bei diesem setzen wir die Tangentenrichtung in jedem Punkt der Kurve als bekannt voraus und fragen, wie hieraus die Kurvengleichung gewonnen werden kann.

Diejenigen Leser, die bereits mit der Infinitesimalrechnung etwas vertraut sind, werden bemerken, daß das Tangentenproblem darin besteht, die Ableitung der durch die Kurve dargestellten Funktion zu bestimmen, daß das umgekehrte Tangentenproblem die Frage nach einer Stammfunktion zu einer gegebenen Funktion beinhaltet und schließlich Quadraturen die Berechnung von (bestimmten) Integralen bedeuten. Leibniz erkannte also hier den wesentlichen Zusammenhang von Differential- und Integralrechnung: die Differentiation ist Umkehrung der Integration.

Die Grundlage der gesamten Differentialrechnung bildet die nach Leibniz benannte und von ihm aufgestellte Formel

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \qquad (*)$$

d. h. die bekannte Definition des "Differentialquotienten" $\frac{dy}{dx}$ als Grenzwert einer Folge von Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Zur Veranschaulichung diene Abb. 1:

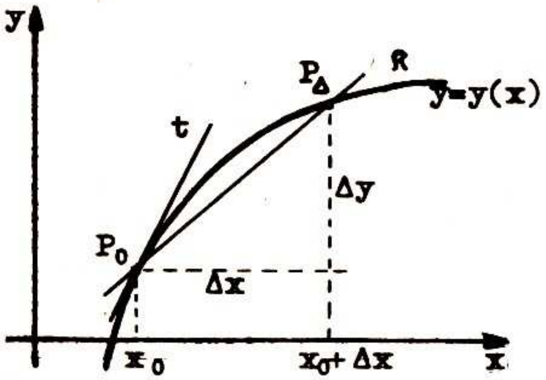


Abb. 1

Das Bild der Funktion $y = y(x)$, die Kurve $\mathfrak{K}$, enthalte die Punkte $P_0(x_0, y(x_0))$ und $P_\Delta(x_0+\Delta x, y(x_0+\Delta x))$. Für $y(x_0+\Delta x) - y(x_0)$ schreiben wir Δy. Für jedes $\Delta x \neq 0$ wird durch P_0 und P_Δ genau eine Sekante von $\mathfrak{K}$ bestimmt, deren Anstieg m_s durch $m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ gegeben ist. Strebt P_Δ

entlang $\Re$ gegen P_0, also Δx gegen Null, so gehen die Sekanten in die Tangente t über, und der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ gibt den Anstieg der Tangente im Punkt P_0 an. Leibniz gewann die Beziehung (*) aus ähnlichen geometrischen Überlegungen; allerdings unterschied er in der Bezeichnung noch nicht zwischen Δy (Differenz) und dy (Differential). Diese exakte Unterscheidung setzte sich erst im 19. Jahrhundert durch. Mit (*) war ein Algorithmus für das Tangentenproblem gefunden.
Gleichzeitig mit Leibniz (und unabhängig von ihm) arbeitete Isaac Newton an Problemen der Infinitesimalrechnung. Das Verdienst Leibniz' besteht darin, eine zweckmäßige und vorteilhafte Symbolik erfunden zu haben, die bis heute in Gebrauch geblieben ist: Als Integralzeichen verwendete er ein stilisiertes "S" - $\int$ (von "Summe"), für die inverse Operation d (von "Differenz"). Er besaß eine starke Begabung für sachgerechte, Form und Inhalt verbindende Symbole und Bezeichnungen (z. B. gehen =, :, ·, Ausdrücke wie "Funktion" und "Koordinaten", die Indexschreibweise u. a. auf Leibniz zurück). Diese Neuerungen in mathematischen Bezeichnungen und insbesondere die Erfindung des "Kalküls der Infinitesimalrechnung" können verstanden werden als Ergebnis seines eingangs erwähnten Forschens nach einer universellen Methode, nach einer "'lingua universalis', in der alle Fehler des Denkens in Gestalt von Rechenfehlern erscheinen sollten". [3]) Der Kalkül entstand bereits in Paris. Leibniz kam jedoch erst 1684 dazu, seine Gedanken zu veröffentlichen. In dem Artikel führte er auch die heute noch verwendeten elementaren Differentiationsregeln und Bedingungen für Extrema und Wendepunkte an. Diese sowie die kurz darauf erschienenen Arbeiten leiteten eine außerordentlich fruchtbare Periode mathematischen Schaffens ein. Leibniz arbeitete eng mit den Mathematikern Johann und Jakob Bernoulli zusammen. Bis zum Ende des 17. Jahrhunderts fanden diese Gelehrten den größten Teil dessen, was heute Studenten zur Infinitesimalrechnung hören. - Erwähnt sei noch, daß Leibniz auch zur Entwicklung der Variationsrechnung, Logik, Kombinatorik, Determinantentheorie und Geometrie wesentlich beitrug.

---

[3]) Ebenda, S. 120; lingua universalis - universale Sprache

Zitate aus: Allgemeines Gelehrten-Lexicon, Bd. 1, Leipzig 1750.

Titelbild: G. W. Leibniz. Aus der Sammelbildserie "Berühmte Mathematiker"; Sammlung Karger-Decker. Berlin.

Lösungen

$\boxed{\text{Aufgabe F 31}}$ (nach Norbert Schieweck, Blumenberg, 11. Klasse)

I) Das Supremum von M ist $s = 1$.

Beweis (nach Satz 2):

M ist eine nichtleere Menge reeller Zahlen.

(1) Offensichtlich gilt $x_n \leq 1$ für alle $x_n \in M$ $(n \in N)$.

(2') Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $x_{n_\varepsilon} \in M$, so daß $1 - \varepsilon < x_{n_\varepsilon}$ ist. Setzen wir $x_{n_\varepsilon} = 1$ $(n=1)$, so erkennen wir sofort die Richtigkeit dieser Aussage.

Aus (1) und (2') folgt nach Satz 2, daß $s=1$ das Supremum der nichtleeren Menge M reeller Zahlen ist.

II) Infimum von M ist $i = 0$.

Beweis (nach Satz 4):

(1) Offensichtlich gilt $0 \leq x_n$ für alle $x_n \in M$ $(n \in N)$.

(2') Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $x_{n_\varepsilon} \in M$, so daß $x_{n_\varepsilon} < 0 + \varepsilon$ ist. Setzen wir nämlich $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ ($\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ bedeutet Ganzteil von $\frac{1}{\varepsilon}$) bzw. $x_{n_\varepsilon} = \dfrac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1}$, so ist die Ungleichung $x_{n_\varepsilon} < \varepsilon$ erfüllt, denn wegen $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ gilt $\dfrac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1} < \dfrac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$.

Aus (1) und (2') folgt nach Satz 4, daß $i = 0$ das Infimum der nichtleeren Menge M reeller Zahlen ist.

$\boxed{\text{Aufgabe F 34}}$ (nach Friedhelm Schieweck, Blumenberg, 11. Klasse)

Wir beweisen indirekt, daß die Lösungsmenge der Gleichung leer ist. Dazu nehmen wir an, es existiere ein reelles x_o mit

$$\sin x_o + 2 \sin 2x_o = 3 + \sin 3x_o \qquad (*).$$

Die Gleichung (*) formen wir mit Hilfe zweier Additionstheoreme um:

$$\sin 3y = 3 \sin y - 4 \sin^3 y \text{ und } \sin 2y = 2 \sin y \cos y.$$

Es ergibt sich

$$\sin x_0 + 4 \sin x_0 \cos x_0 = 3 + 3 \sin x_0 - 4 \sin^3 x_0$$

$$\sin x_0 \; [4 \sin^2 x_0 + 4 \cos x_0 - 2] = 3$$

$$\sin x_0 \; [4 - 4\cos^2 x_0 + 4 \cos x_0 - 2] = 3$$

$$\sin x_0 \; [3 - 4(\cos x_0 - \tfrac{1}{2})^2] = 3 \qquad (**)$$

Aus der Gleichung (*) erhalten wir ferner wegen $\sin 3x_0 \geq -1$ und $2 \sin x_0 \leq 2$ die Relation $\sin x_0 \geq 0$.
Verwenden wir dieses Ergebnis in (**), so folgt $3-4(\cos x_0 - \frac{1}{2})^2 \geq 0$.
Da außerdem die Relationen

$$0 \leq \sin x_0 \leq 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq 3-4(\cos x_0 - \tfrac{1}{2})^2 \leq 3$$

bestehen, folgt notwendig für die Gültigkeit der Gleichung (* *)

$$\sin x_0 = 1 \quad \text{und} \quad 3-4(\cos x_0 - \tfrac{1}{2})^2 = 3,$$

woraus man sofort

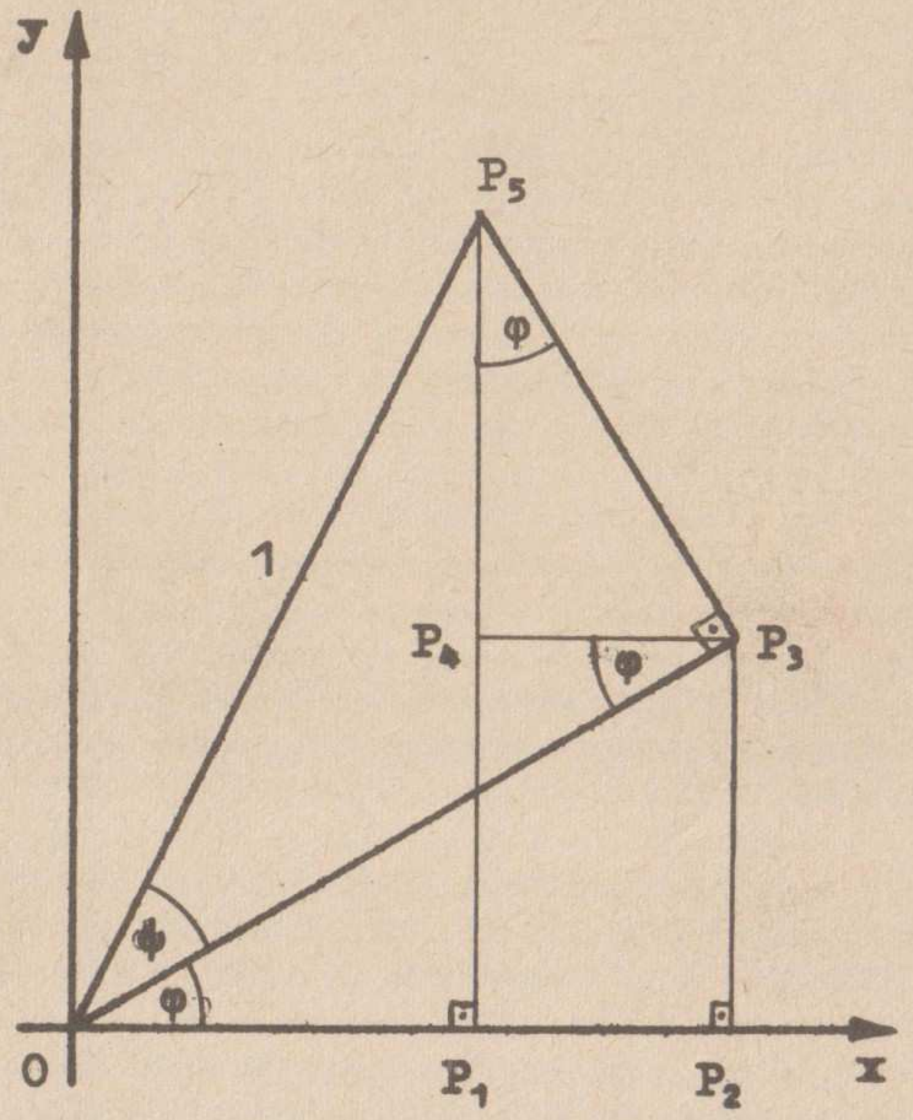
$$\sin x_0 = 1 \quad \text{und} \quad \cos x_0 = \tfrac{1}{2}$$

erhält. Das ist jedoch für reelle x_0 nicht möglich. Wir erhalten also aus unserer Annahme, daß (*) eine reelle Lösung x_0 besitzen möge, einen Widerspruch. Folglich ist die Lösungsmenge der Gleichung (*) in den reellen Zahlen leer.

* * * * * * * * * * * * * * * * * * *

... Da haben Sie ein typisches Beispiel für einen algebraischen Beweis. Es zeigt sich, daß wir etwas gezeigt haben, was gar nicht zu zeigen war, da es ohnehin schon galt. Wir haben also gezeigt, daß man damit, wenn man etwas zeigt, was schon gilt, etwas zu Zeigendes zeigen kann.

Herausgeber: Leitung der FDJ-Grundorganisation der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Egbert Creutzburg
Chefredakteur: Waltraud Werner
Redaktion: J. Dubslaff, H.-G. Leopold, Th. Ullrich, G. Weske
Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.



12
74

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität

8. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Komplexe Zahlen (II)

2. Geometrische Interpretation

Nachdem wir gelernt haben, mit den geordneten Zahlenpaaren zu rechnen, wollen wir eine verkürzte Schreibweise und eine damit verbundene geometrische Interpretation einführen. Hierzu betrachten wir die reellen Zahlen als Untermenge aller geordneten Zahlenpaare, indem wir jeder reellen Zahl α umkehrbar eindeutig das Zahlenpaar $(\alpha, 0)$ zuordnen, In diesem Sinne unterscheiden wir in Zukunft nicht mehr zwischen der reellen Zahl α und dem Zahlenpaar $(\alpha, 0)$. Wir wollen jetzt die Multiplikation des Zahlenpaares $b = (\beta_1, \beta_2)$ mit der reellen Zahl α (also im Sinne unserer Vereinbarung mit dem Zahlenpaar $(\alpha, 0)$) ausrechnen. Es ist

$$\alpha b = (\alpha, 0)\cdot(\beta_1, \beta_2) = (\alpha\cdot\beta_1, \alpha\cdot\beta_2). \tag{8}$$

Man hat also einfach die beiden reellen Zahlen β_1 und β_2 mit α zu multiplizieren. Wir betrachten jetzt "imaginäre" Zahlenpaare. Das sind Zahlenpaare der Form $(0, \alpha)$. Ist wiederum $b = (\beta_1, \beta_2)$, so erhalten wir

$$(0, \alpha)\cdot b = (0, \alpha)(\beta_1, \beta_2) = (-\alpha\beta_2, \alpha\beta_1). \tag{9}$$

Also auch hier vereinfacht sich die Multiplikation wesentlich. Die beiden letzten Formeln zeigen, daß die reellen und imaginären Zahlenpaare eine besondere Rolle spielen. Unsere bisherigen Resultate erlauben es, ein allgemeines Zahlenpaar in eindeutiger Weise in ein reelles und ein imaginäres Zahlenpaar zu zerlegen. Hierfür führen wir noch folgende Vereinbarung ein. Neben unserer Festsetzung, 1 und $(1,0)$ als nicht verschieden anzusehen, setzen wir $i = (0,1)$. Dann folgt aber aus der Definition der Addition und den Multiplikationsformeln (8) und (9) für ein Zahlenpaar
$a = (\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, 0) + (0, \alpha_2) = \alpha_1(1,0) + (0,1)\alpha_2 = \alpha_1 + i\cdot\alpha_2$.
Hierzu hat man in den Formeln (8) und (9) $\beta_2 = 0$ zu setzen.
$a = \alpha_1 + i\cdot\alpha_2$ bezeichnet man als komplexe Zahl. Sie setzt sich aus dem "Realteil" α_1 und dem "Imaginärteil" α_2 zusammen. Als Beispiel wollen wir $i\cdot i = i^2$ ausrechnen. Setzt man in der Formel (9) $\alpha = 1$ und $b = (0,1)$, so erhalten wir

$$i^2 = (-1, 0) = -1 \tag{10}$$

In diesem Sinne ist also die komplexe Zahl i eine Lösung der

Gleichung $x^2 + 1 = 0$ im Bereich der komplexen Zahlen. Mit Hilfe der Rechenregel (10) kann man sich die Multiplikation der komplexen Zahlen (so nennen wir ab jetzt die geordneten Zahlenpaare) leicht merken. Es sei $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ und $b = (\beta_1, \beta_2)$. Dann zeigt die Formel (5), daß

$$a \cdot b = \alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2 + i(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \qquad (11)$$

gilt. Lösen wir nun in dem Ausdruck

$$a \cdot b = (\alpha_1 + i\alpha_2)(\beta_1 + i\beta_2)$$

die Klammern auf, indem wir die Distributivgesetze (6a) und (6b) verwenden, so erhalten wir

$$a \cdot b = \alpha_1(\beta_1 + i\beta_2) + i\alpha_2(\beta_1 + i\beta_2) = \alpha_1\beta_1 + i^2\alpha_2\beta_2 + i\alpha_1\beta_2 + i\alpha_2\beta_1.$$

Da $i^2 = -1$ ist, folgt

$$a.b = \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 + i(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1). \qquad (12)$$

Selbstverständlich stimmt dieses Resultat mit der Formel (11) überein, da wir zu seiner Herleitung nur gültige Rechenregeln verwendet haben. Man multipliziert somit zwei komplexe Zahlen, indem man die Klammern in der üblichen Weise auflöst und die Rechenregeln $1 \cdot i = i \cdot 1 = i$ und $i^2 = -1$ verwendet.

Wir gehen jetzt zu einer geometrischen Deutung der komplexen Zahlen über. Jede komplexe Zahl setzt sich aus zwei reellen Zahlen zusammen, dem Realteil und dem Imaginärteil. Wir zeichnen uns ein x-y-Achsenkreuz auf (siehe Abbildung 1). Wir können jetzt jede komplexe Zahl $a = \alpha_1 + i\beta_2 = (\alpha_1, \alpha_2)$ geometrisch deuten, indem wir den Realteil α_1 auf der x-Achse und den Imaginärteil α_2 auf der y-Achse vom Nullpunkt aus abtragen (Abbildung 1). Die Punkte der Ebene und die komplexen Zahlen sind dann umkehrbar eindeutig einander zugeordnet. Diese geometrische Interpretation legt eine zweite Darstellung der komplexen Zahlen nahe, die wir Polardarstellung nennen wollen. Jede komplexe Zahl a kann man durch ihren Abstand $|a|$ zum Nullpunkt und durch den Winkel ϑ kennzeichnen. Hierbei ist $0 \leq \vartheta < 2\pi$. Aus dem Satz von Pythagoras folgt

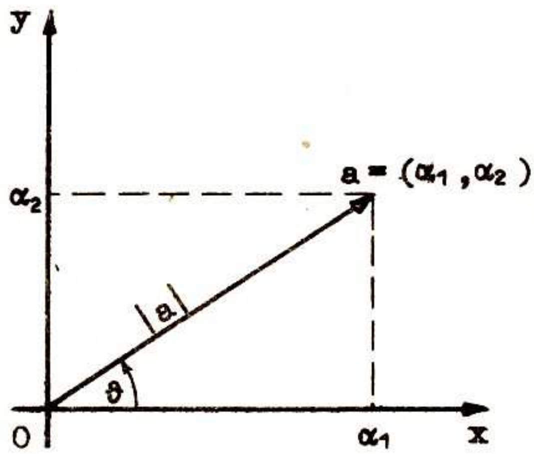


Abb. 1

$$|a|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \tag{13}$$

und somit

$$|a| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \quad .$$

Ferner ist

$$\tan\vartheta = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad . \tag{14}$$

Die Abbildung zeigt nun, daß man umgekehrt α_1 und α_2 aus $|a|$ und ϑ berechnen kann. Es ist

$$\alpha_1 = |a| \cdot \cos\vartheta \quad \text{und} \quad \alpha_2 = |a| \cdot \sin\vartheta \ . \tag{15}$$

Zur Abkürzung führen wir die komplexe Zahl

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i.\sin\vartheta \tag{16}$$

ein. Dann können wir aber die komplexe Zahl $a = (\alpha_1,\alpha_2) = \alpha_1 + i\cdot\alpha_2$ in die Form

$$a = |a| .\cos\vartheta + i.|a|.\sin\vartheta = |a|(\cos\vartheta + i.\sin\vartheta) =$$
$$= |a|.e^{i\vartheta} \tag{17}$$

umschreiben. (17) nennt man auch die Polardarstellung einer komplexen Zahl a. $|a|$ nennt man den Betrag der Zahl a und ϑ das Argument der Zahl a.

Zum Abschluß wollen wir die Addition und die Multiplikation komplexer Zahlen geometrisch deuten und zugleich eine bemerkenswerte Eigenschaft der Zahlen $e^{i\vartheta}$ herleiten. Zu diesem Zweck deuten wir die komplexen Zahlen $a = (\alpha_1,\alpha_2)$ und $b = (\beta_1,\beta_2)$ als Vektoren mit α_1 und α_2 bzw. β_1 und β_2 als Komponenten. Wir tragen den Vektor a vom Nullpunkt aus ab und den Vektor b vom Endpunkt des Vektors a (Abbildung 2). Der so erhaltene Endpunkt ist die komplexe Zahl a + b, wie man sofort aus der Abbildung 2 sieht. Die Addition von komplexen Zahlen ist somit gleich der Addition von Kräften in einem Kräfteparallelogramm. Um die Multiplikation in gleicher Weise geometrisch deuten zu können, führen wir eine Vorbetrachtung durch. Wir geben eine geometrische Herleitung der Additionstheo-

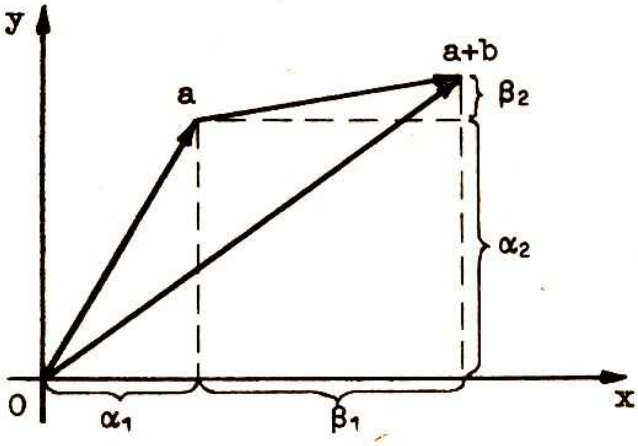


Abb. 2

reme für sin φ und cos φ . Aus der Abbildung 3 (siehe Titelseite) liest man folgende Relationen ab:

$$\overline{OP_5} = 1 ,$$

$$\begin{aligned}
\cos(\varphi + \phi) &= \overline{OP_1} = \overline{OP_2} - \overline{P_1P_2} = \overline{OP_3}\cdot\cos\varphi - \overline{P_3P_4} \\
&= \overline{OP_5}\cdot\cos\phi\cdot\cos\varphi - \overline{P_3P_5}\cdot\sin\varphi \\
&= \cos\phi\cdot\cos\varphi - \overline{OP_5}\cdot\sin\phi\cdot\sin\varphi \\
&= \cos\phi\cdot\cos\varphi - \sin\phi\cdot\sin\varphi
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\sin(\varphi + \phi) &= \overline{P_1P_5} = \overline{P_1P_4} + \overline{P_4P_5} = \overline{P_2P_3} + \overline{P_4P_5} \\
&= \overline{OP_3}\cdot\sin\varphi + \overline{P_3P_5}\cdot\cos\varphi \\
&= \overline{OP_5}\cdot\cos\phi\cdot\sin\varphi + \overline{OP_5}\cdot\sin\phi\cdot\cos\varphi \\
&= \sin\varphi\cdot\cos\phi + \sin\phi\cdot\cos\varphi .
\end{aligned}$$

Somit gelten die Additionstheoreme

$$\sin(\varphi + \phi) = \sin\varphi\cdot\cos\phi + \sin\phi\cdot\cos\varphi \quad \text{und} \tag{18}$$

$$\cos(\varphi + \phi) = \cos\varphi\cdot\cos\phi - \sin\varphi\cdot\sin\phi . \tag{19}$$

Nach der Art unseres Vorgehens liegen die Winkel φ und ϕ zwischen 0 und 2π, $\varphi+\phi$ liegt somit zwischen 0 und 4π. In den Formeln (18) und (19) hat man zu berücksichtigen, daß cos ϑ und sin ϑ Funktionen mit der Periode 2π sind.

Mit Hilfe dieser Formeln können wir jetzt die Multiplikation komplexer Zahlen geometrisch deuten. Es sei $a = (\alpha_1,\alpha_2)$ und $b = (\beta_1,\beta_2)$. Wir wollen $|ab|$ ausrechnen. Die Formeln (5) und (13) führen zu

$$\begin{aligned}
|ab|^2 &= (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2)^2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)^2 \\
&= \alpha_1^2\beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 + \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 + 2\alpha_1\beta_2\alpha_2\beta_1 + \alpha_2^2\beta_1^2 \\
&= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2) = |a|^2|b|^2 .
\end{aligned}$$

Somit ist

$$|ab| = |a|\cdot|b| . \tag{20}$$

Schreiben wir jetzt a·b in die Polardarstellung (17) um, so erhalten wir

$$ab = |ab|\cdot e^{i\vartheta} = |a|\cdot|b|\cdot e^{i\vartheta} . \tag{21}$$

Setzen wir andererseits

$$a = |a| \cdot e^{i\varphi}, \quad b = |b| \cdot e^{i\phi},$$

so erhalten wir

$$ab = |a| \cdot e^{i\varphi} \cdot |b| \cdot e^{i\phi} = |a| \cdot |b| \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\phi} \quad . \qquad (22)$$

Vergleichen wir die Darstellungen (21) und (22), so folgt

$$e^{i\vartheta} = e^{i\varphi} \cdot e^{i\phi} \quad . \qquad (23)$$

Wir wollen jetzt den Winkel ϑ aus den Winkeln φ und ϕ bestimmen. Dazu erinnern wir uns an die Formel (16). Die nochmalige Verwendung der Multiplikationsregel für komplexe Zahlen führt zu

$$e^{i\vartheta} = (\cos\varphi + i.\sin\varphi)(\cos\phi + i.\sin\phi) =$$
$$= \cos\varphi \cdot \cos\phi - \sin\varphi \cdot \sin\phi + i(\sin\varphi \cdot \cos\phi + \sin\phi \cdot \cos\varphi).$$

Wir benutzen jetzt die Additionstheoreme (18) und (19) und erhalten

$$e^{i\vartheta} = \cos(\varphi + \phi) + i.\sin(\varphi + \phi) = e^{i(\varphi + \phi)}. \qquad (24)$$

Aus der Formel (23) folgt nun die bemerkenswerte Multiplikationsregel

$$e^{i(\varphi + \phi)} = e^{i\varphi} \cdot e^{i\phi} \quad . \qquad (25)$$

Die Formel (22) führt uns zu der Polardarstellung

$$ab = |a| \cdot |b| \cdot e^{i(\varphi + \phi)} =$$
$$= |a| \cdot |b| \ (\cos(\varphi + \phi) + i.\sin(\varphi + \phi)). \qquad (26)$$

Diese Formel läßt eine einfache geometrische Deutung zu. Man geht von einer der beiden komplexen Zahlen, sagen wir a, aus. a und b deuten wir als Vektoren. Wir strecken den Vektor a mit $|b|$ und drehen den so erhaltenen Vektor $|b| \cdot a$ um den Winkel ϕ. Das Resultat ist $a \cdot b$ (man vergleiche hierzu Abbildung 3).
Wir wollen jetzt noch auf die Frage eingehen, wann das Produkt $ab = 0$ ist. Die Formel (20) zeigt, daß in diesem Fall

$$0 = |a| \cdot |b|$$

gelten muß. Somit ist entweder $|a| = 0$ oder $|b| = 0$ oder $|a| = |b| = 0$. Aus der Formel (13) folgt für $|a| = 0$, daß $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ sein muß. Entsprechend für $|b| = 0$. Somit sieht man, daß $a.b = 0$ dann und nur dann bestehen kann, wenn mindestens eine der beiden komplexen Zahlen a oder b gleich 0 ist.
Zum Schluß noch eine Bemerkung zur Multiplikation komplexer Zahlen. Wir denken uns die komplexen Zahlen a, b und c in Polardarstellung gegeben, also $a = |a| \cdot e^{i\varphi}$, $b = |b| \cdot e^{i\phi}$, $c = |c| \cdot e^{i\vartheta}$.

Dann folgt aus der Formel (26)

$$(a\cdot b)\cdot c = (|a|\cdot|b|\cdot e^{i(\varphi + \psi)})\cdot c$$
$$= |a|\cdot|b|\cdot|c|\cdot e^{i(\varphi + \psi + \vartheta)}$$
$$= a(|b|\cdot|c|\cdot e^{i(\psi + \vartheta)}) = a\cdot(b\cdot c)\,.$$

Diese Formel nennt man das Assoziativgesetz der Multiplikation. Wie bei der Addition, so schreiben wir auch hier $abc = a\cdot b\cdot c$ statt $(a\cdot b)\cdot c$.

Damit haben wir die Grundzüge der Theorie der komplexen Zahlen entwickelt. Die komplexen Zahlen spielen in zahlreichen Teilgebieten der Mathematik, Physik und Technik eine fundamentale Rolle. Viele Vorgänge der Natur kann man unter Verwendung komplexer Zahlen in mathematisch übersichtlicher Form beschreiben.

Prof. Dr. habil. Hans Triebel
Bereich Analysis

Einführung in die Topologie (III)

4. Der Begriff des topologischen Raumes

Es taucht die Frage auf, ob man den Begriff der Konvergenz einer Folge $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ von Elementen einer Menge E auch dann noch definieren kann, wenn es nicht mehr möglich ist, in E eine Metrik (Abstandsfunktion) zu erklären. Mit anderen Worten: Läßt sich der Konvergenzbegriff einer Folge in noch allgemeineren Mengen, als es die metrischen Räume sind, definieren? Zur Definition der Konvergenz einer Folge $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ aus E war letztlich nur die Menge aller ε-Umgebungen $U_\varepsilon(a)$ - und da jede ε-Umgebung auch Umgebung ist - die Menge aller Umgebungen von a, $\mathfrak{U}(a)$, erforderlich. Es müßte eigentlich der Umgebungsbegriff, mit allen erforderlichen Eigenschaften ausgestattet, auch zur Definition der Konvergenz einer Folge genügen. Aber bisher sind natürlich stets die Begriffe "ε-Umgebung" und "Umgebung" mit Hilfe der zur Verfügung stehenden Metrik definiert worden. Jetzt drehen wir die Sache einfach um und benutzen den Umgebungsbegriff als Grundbegriff, und die in U_1 bis U_4 formulierten Eigenschaften fordern wir als Grundeigenschaften (Axiome). Ist E eine beliebige Menge und läßt sich jedem Element $x \in E$ ein nicht leeres System

$\mathfrak{U}(x) \subseteq \mathfrak{P}(E)$ [1] zuordnen, wofür die Grundeigenschaften U_1 bis U_4 erfüllt sind, so nennen wir E einen topologischen Raum. Damit werden wahrscheinlich allgemeinere Mengen erfaßt, als es die metrischen Räume sind, da sich ja U_1 bis U_4 als Folgerungen aus den in Definition 8 angegebenen Grundeigenschaften des metrischen Raumes ergeben. Wir wollen eine saubere Definition für den Begriff des topologischen Raumes notieren.

D e f i n i t i o n 12 :

Eine Menge E heißt topologischer Raum genau dann, wenn:

(U_o) Jedem $x \in E$ ist eindeutig ein nicht leeres System $\mathfrak{U}(x) \subseteq \mathfrak{P}(E)$ ($\mathfrak{U}(x)$ ist eine nicht leere Teilmenge der Potenzmenge von E) zugeordnet. Es heißt dann $\mathfrak{U}(x)$ das Umgebungssystem von $x \in E$.

(U_1) Für jedes $U \in \mathfrak{U}(x)$ gilt $x \in U$.
$\forall x \ \forall U \ (x \in E \wedge U \in \mathfrak{U}(x) \longrightarrow x \in U)$

(U_2) Wenn $U \in \mathfrak{U}(x)$ und $U \subseteq U'$, so gilt $U' \in \mathfrak{U}(x)$.
$\forall x \ \forall U \ \forall U' \ (x \in E \wedge U \in \mathfrak{U}(x) \wedge U \subseteq U' \longrightarrow U' \in \mathfrak{U}(x))$

(U_3) Wenn $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}(x)$, so gilt auch $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{U}(x)$.
$\forall x \ \forall U_1 \ \forall U_2 (x \in E \wedge U_1, U_2 \in \mathfrak{U}(x) \longrightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{U}(x))$

(U_4) Für jedes $U \in \mathfrak{U}(x)$ existiert ein $W \in \mathfrak{U}(x)$, so daß für alle $y \in W$ gilt: $U \in \mathfrak{U}(y)$.
$\forall x \ \forall U \ \exists W \ \forall y \ (x \in E \wedge U, W \in \mathfrak{U}(x) \wedge y \in W \longrightarrow U \in \mathfrak{U}(y))$

Sind für eine Menge E die Forderungen U_o bis U_4 erfüllt, so sagen wir, daß E mit einer Topologie T versehen ist. Eine Topologie T auf E ist von den Umgebungssystemen $\mathfrak{U}(x)$ abhängig, d. h. eine Menge E kann mit verschiedenen Topologien versehen werden.

Beispiele für topologische Räume:

1. Wir betrachten die Menge $E = \{a,b,c\}$. Sind die den Elementen a,b,c zugeordneten Systeme durch

$\mathfrak{U}^1(a) = \{ \{a\}, \{a,b\} , \{a,c\} , E \}$

$\mathfrak{U}^1(b) = \{ \{a,b\} , E \}$

$\mathfrak{U}^1(c) = \{ \{a,c\} , E \}$

1) $\mathfrak{P}(E)$ sei die Potenzmenge der Menge E, also die Menge aller Teilmengen von E.

gegeben, so werden von diesen Systemen die Forderungen U_1 bis U_4 erfüllt, wie man leicht nachprüfen kann. Damit haben wir E mit einer Topologie T_1 versehen.

2. Betrachten wir nochmals die Menge $E = \{a,b,c\}$. Jetzt seien

$$\mathfrak{U}^2(a) = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, E\}$$

$$\mathfrak{U}^2(b) = \{E\}$$

$$\mathfrak{U}^2(c) = \{\{a,c\}, E\} .$$

Es werden von diesen Systemen wiederum die Forderungen U_1 bis U_4 erfüllt. Also haben wir E erneut mit einer Topologie T_2 versehen. Es ist aber T_2 eine von T_1 verschiedene Topologie.

3. Sei wieder $E = \{a,b,c\}$, und es sei $\mathfrak{U}(x)$ für jedes $x \in E$ die Menge aller das Element x enthaltenden Teilmengen von E, also

$$\mathfrak{U}(a) = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, E\}$$
$$\mathfrak{U}(b) = \{\{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, E\}$$
$$\mathfrak{U}(c) = \{\{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, E\}$$

Auch diese Systeme erfüllen die Forderungen U_1 bis U_4. Wir haben damit E mit einer Topologie T_3 versehen. Für diese Topologie sind die Systeme $\mathfrak{U}(x)$ für jedes $x \in E$ so umfassend gewählt, wie es nach Forderung U_1 nur irgend möglich ist. Wir nennen diese Topologie die <u>feinste Topologie</u> von E, oder da zu jedem $\mathfrak{U}(x)$ speziell die Menge $\{x\}$ gehört, auch die <u>diskrete Topologie</u> von E. Für diese Topologie ist jede nicht leere Teilmenge von E Umgebung jedes ihrer Punkte.

4. Nochmals sei $E = \{a,b,c\}$, und für jedes $x \in E$ setzen wir $\mathfrak{U}(x) = \{E\}$, also

$$\mathfrak{U}(a) = \{E\}$$
$$\mathfrak{U}(b) = \{E\}$$
$$\mathfrak{U}(c) = \{E\} .$$

Diese Systeme genügen ebenfalls den Forderungen U_1 bis U_4. Es ist E mit einer Topologie T_4 versehen. Im Gegensatz zu Beispiel 3 sind hier die Umgebungssysteme $\mathfrak{U}(x)$ so eng wie möglich gewählt. Es wird T_4 die <u>grobe Topologie</u> von E genannt.

5. Es ist völlig klar, daß jeder metrische Raum E ein topologischer Raum ist. So ist für jedes $x \in E$ das mit Hilfe der Metrik definierte Umgebungssystem $\mathfrak{U}(x) \neq \emptyset$ und genügt den Forderungen U_1 bis U_4, wie wir das in den Sätzen U_1 bis U_4 bewiesen haben. Demnach sind die Zahlengerade und der $\mathbb{R}^n$ topologische Räume. Durch die dort vorhandene Metrik werden die Zahlengerade bzw. der $\mathbb{R}^n$ mit einer ganz bestimmten Topologie versehen, die wir die <u>übliche Topologie der Zahlengeraden bzw. des $\mathbb{R}^n$</u> nennen.

6. Aber natürlich läßt sich z. B. die Zahlengerade $\mathbb{R}$ nicht nur mit der üblichen Topologie versehen. Wählen wir für jedes $x \in \mathbb{R}$ als $\mathfrak{U}(x)$ die Menge aller das Element x enthaltenden Teilmengen von $\mathbb{R}$, so wird damit $\mathbb{R}$ mit der diskreten Topologie versehen. Es ist die übliche Topologie auf $\mathbb{R}$ verschieden von der diskreten Topologie auf $\mathbb{R}$.

7. Setzen wir für jedes $x \in \mathbb{R}$ $\mathfrak{U}(x) := \{\mathbb{R}\}$, so wird $\mathbb{R}$ mit der groben Topologie versehen. Natürlich ist die übliche Topologie auf $\mathbb{R}$ von der groben Topologie auf $\mathbb{R}$ verschieden.

Ist die Menge E ein topologischer Raum, d. h. jedem $x \in E$ ist ein Umgebungssystem $\mathfrak{U}(x)$ eindeutig zugeordnet, das den Forderungen U_1 bis U_4 genügt, so läßt sich die Konvergenz einer Folge $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ von Elementen der Menge E wie folgt definieren:

<u>D e f i n i t i o n 13 :</u> Eine Folge $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ von Elementen aus E heißt konvergent in E genau dann, wenn ein $a \in E$ existiert mit folgender Eigenschaft: Für jedes $U \in \mathfrak{U}(a)$ existiert ein $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$, so daß für alle $\nu > \nu_0$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, gilt: $x_\nu \in U$.

Wir sagen dann, die Folge $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ besitzt den Grenzwert a und schreiben:

$$\lim_{\nu \to \infty} x_\nu = a .$$

Jetzt können natürlich Erscheinungen eintreten, die uns von der mit der üblichen Topologie versehenen Zahlengeraden her völlig unbekannt sind. Der Grenzwert einer Folge ist nicht mehr eindeutig bestimmt:

1. Betrachten wir einige Folgen der mit der Topologie T_1 versehenen Menge $E = \{a,b,c\}$.

a) $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*} = (a) = (a,a,a,\dots)$

Es ist $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu = a$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu = b$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu = c$.

b) $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*} = (b) = (b,b,b,\dots)$

$\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu = b$

c) $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*} = (c) = (c,c,c,\dots)$

$\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu = c$

d) $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*} = (a,b,a,b,a,b,\dots)$

$\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu = b$

e) $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*} = (b,c,b,c,b,c,\dots)$

Diese Folge ist nicht konvergent, d. h. sie besitzt in E mit der Topologie T_1 keinen Grenzwert.

2. Ist $\mathbb{R}$ mit der üblichen, durch die Metrik definierten Topologie versehen, so gelten die uns vertrauten Tatsachen für die Konvergenz einer Folge:

a) $(\frac{1}{\nu})_{\nu \in \mathbb{N}^*}$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{1}{\nu} = 0$

b) $(\frac{\nu-1}{\nu})_{\nu \in \mathbb{N}^*}$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{\nu-1}{\nu} = 1$

c) $((1+\frac{1}{\nu})^\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} (1+\frac{1}{\nu})^\nu = e$.

Der Grenzwert jeder konvergenten Folge ist hier eindeutig bestimmt.

3. Ist $\mathbb{R}$ mit der diskreten Topologie versehen, so konvergieren lediglich die bis auf endlich viele Glieder konstanten Folgen $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*} = (\dots,x,x,x,\dots)$ mit $\lim x_\nu = x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Alle anderen Folgen wie $(\frac{1}{\nu})_{\nu \in \mathbb{N}^*}$, $(\frac{\nu-1}{\nu})_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ und $((1+\frac{1}{\nu})^\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ sind jetzt nicht konvergent. Auch hier ist der Grenzwert jeder konvergenten Folge eindeutig bestimmt.

4. Ist $\mathbb{R}$ mit der groben Topologie versehen, so besitzt jede Folge reeller Zahlen jede reelle Zahl als Grenzwert. So gilt z. B. für die Folge $(\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*} = (1,2,3,\dots)$ $\lim\limits_{\nu\to\infty} \nu = 1$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty} \nu = 0$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty} \nu = 713$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty} \nu = \sqrt{2}$ usw.

Wie wir bemerken, ist in einem beliebigen topologischen Raum E der Grenzwert einer konvergenten Folge von Elementen aus E nicht eindeutig bestimmt. Die topologischen Räume sind von sehr allgemeiner Struktur, für sie ist eine Konvergenztheorie von Elementfolgen nach dem Muster metrischer Räume nicht möglich. Die Forderungen in den Axiomen U_0 bis U_4 reichen noch nicht aus, die Eindeutigkeit des Grenzwertes einer konvergenten Folge zu sichern. Erst durch Hinzunahme des sogenannten Hausdorffschen Trennungsaxioms U_5 ist der Grenzwert jeder konvergenten Folge eindeutig bestimmt.

U_5: Sind x, y zwei verschiedene Elemente von E, so existiert ein $U \in \mathfrak{U}(x)$ und ein $V \in \mathfrak{U}(y)$ mit $U \cap V = \emptyset$.
Formalisiert:

$$\forall x \forall y \, [x, y \in E \wedge x \neq y \longrightarrow \exists U \exists V (U \in \mathfrak{U}(x) \wedge V \in \mathfrak{U}(y) \wedge U \cap V = \emptyset)]$$

Definition 14: Ein topologischer Raum E heißt ein Hausdorffscher Raum genau dann, wenn für E das Hausdorffsche Trennungsaxiom U_5 zutrifft.

Satz 3: In einem Hausdorffschen Raum H ist der Grenzwert jeder konvergenten Elementfolge $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ eindeutig bestimmt.

Beweis: Es seien $a_1, a_2 \in H$ und $a_1 \neq a_2$, und es gelte $\lim\limits_{\nu \to \infty} x_\nu = a_1$ und $\lim\limits_{\nu \to \infty} x_\nu = a_2$. Dann existiert für jedes $U \in \mathfrak{U}(a_1)$ ein ν_{01}, so daß für alle $\nu > \nu_{01}$ gilt: $x_\nu \in U$. Für jedes $V \in \mathfrak{U}(a_2)$ existiert ein ν_{02}, so daß für alle $\nu > \nu_{02}$ gilt: $x_\nu \in V$.
Ist $\nu_0 = \max\{\nu_{01}, \nu_{02}\}$, so gilt für alle $\nu > \nu_0$: $x_\nu \in U$ und $x_\nu \in V$, d. h. $x_\nu \in U \cap V$. Das ist aber ein Widerspruch zum Hausdorffschen Trennungsaxiom, wonach es mindestens ein $U \in \mathfrak{U}(a_1)$ und mindestens ein $V \in \mathfrak{U}(a_2)$ geben muß mit $U \cap V = \emptyset$.

Es ist leicht zu zeigen, daß jeder metrische Raum auch ein Hausdorffscher Raum ist. Demnach sind die Zahlengerade $\mathbb{R}$ und der $\mathbb{R}^n$ Hausdorffsche Räume.

Aufgaben:

1. Gegeben sei die Menge $E = \{a, b, c, d\}$. Ordnen Sie jedem $x \in E$ ein System $\mathfrak{U}(x) \subseteq \mathfrak{P}(E)$ so zu, daß E ein topologischer Raum wird. Versehen Sie E mit zwei weiteren, von der ersten Topologie verschiedenen Topologien!

2. Beweisen Sie folgenden Satz:

   Ist die Menge E ein metrischer Raum, so ist die Menge E ein Hausdorffscher Raum.

3. Es sei E eine beliebige Menge mit mindestens zwei Elementen. Wir definieren eine eindeutige Abbildung d von $E \times E$ in $\mathbb{R}$ wie folgt:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

   a) Zeigen Sie, daß die Abbildung d eine Metrik in E ist!
   b) Mit welcher Topologie wird E durch die Metrik d versehen?

Karl Herrmann
Lektor im Bereich
Theoretische Mathematik

Preisaufgaben 12/74

(F 61) ② Es ist zu zeigen, daß innerhalb eines beliebigen spitzwinkligen Dreiecks ABC ein und nur ein Punkt P mit folgenden Eigenschaften existiert:

1. $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPA = 120^\circ$
2. Die Geraden, die durch die Punkte A, B und C senkrecht zu $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ verlaufen, bilden ein gleichseitiges Dreieck.
3. Die Summe der Entfernungen von P zu den Punkten A, B, C ist minimal.

(F 62) ① Man löse die Gleichung

$$\cot 2x + 3 \tan 3x = 2 \tan x + \frac{2}{\sin 4x} \quad .$$

(F 63) ① Man berechne

$$z = \frac{\sqrt{5} \cdot |-2 + 4i| + 15i}{-1 + 2i} + \frac{2}{i}$$

und stelle z in Polarkoordinaten dar!

(F 64) ② Lösen Sie obige Aufgabe 2 aus dem Artikel "Einführung in die Topologie"!

(F 65) ② Lösen Sie die Aufgabe 3 (Seite 61) aus dem Artikel "Einführung in die Topologie"!

(F 66) ① Какому условию должно удовлетворять комплексное число $a + ib$ для того, чтобы его можно было представить в виде

$$a + ib = \frac{1 - ix}{1 + ix},$$

где x – число вещественное.

удовлетворять – genügen
представить – darstellen

Lösungsbedingungen wie üblich.

Einsendeschluß: 31. 1. 1975

Lösungen

Zu den Lösungen der Serie 7/8/74

Besondere Schwierigkeiten traten bei den Aufgaben F 39 und F 40 auf (zu diesen Aufgaben erhielten wir nur wenige Einsendungen) und überraschenderweise auch bei der Aufgabe F 38. 40% der Lösungen zur F 38 mußten als unvollständig, mit 0 Punkten bewertet werden. Meist fehlte die Einschränkung für a, $0 < a \leq 1$, oder der Hinweis auf die Richtigkeit der Probe. Durch die Probe wird gesichert, daß die als notwendig erkannte Bedingung $0 < a \leq 1$ auch hinreichend für die Existenz von Lösungen ist.

Aufgabe F 37

1. Lösung (nach Norbert Schieweck, Blumenberg, Klasse 11)

Aus $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}$ folgt:

$$(a + b + c)(ab + ac + bc) = abc$$
$$a^2b + ab^2 + abc + a^2c + abc + ac^2 + abc + b^2c + bc^2 = abc$$
$$a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + c^2b + 2abc = 0$$

Offensichtlich gilt:

$$(a + b)(a + c)(b + c) = (a^2 + ab + ac + bc)(b + c) =$$
$$= a^2b + ab^2 + abc + b^2c + a^2c + abc + ac^2 + bc^2$$
$$= a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 2abc.$$

Damit folgt aus obiger Gleichung

$(a + b)(a + c)(b + c) = 0$, d. h. $a = -b$ oder $a = -c$ oder $b = -c$.

Da in der gegebenen Gleichung die Variablen a, b, c vollkommen gleichwertig sind, setzen wir beispielsweise $a = -b$.

Nun gilt für ungerade n:

$$\frac{1}{c^n} = \frac{1}{c^n}$$
$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{(-a)^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + (-a)^n + c^n}$$
$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n} \quad .$$

2. Lösung

Aus $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}$ folgt: $(a+b+c)(ab+ac+bc) = abc$.
Dies ist äquivalent zu: $(a + b)(a + c)(b + c) = 0$, wie man leicht überprüfen kann.

Für $n = 2k + 1$ $(k = 0,1,\ldots)$ gilt:

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{2k} - x^{2k-1}y + x^{2k-2}y^2 - + \ldots - xy^{2k-1} + y^{2k})$$

Setzen wir dies als bekannt voraus, so erhalten wir:

$$(a^n + b^n)(a^n + c^n)(b^n + c^n) = (a+b)(a+c)(b+c)\cdot P_{ab}\cdot P_{ac}\cdot P_{bc}$$
$$= 0\cdot P_{ab}\cdot P_{ac}\cdot P_{bc} = 0 \; ,$$

wobei $P_{xy} := (x^{2k} - x^{2k-1}y + x^{2k-2}y^2 - + \ldots - xy^{2k-1} + y^{2k})$.
$(a^n+b^n)(a^n+c^n)(b^n+c^n) = 0$ ist wiederum äquivalent zu

$(a^n + b^n + c^n)(a^nb^n + a^nc^n + b^nc^n) = a^nb^nc^n$, und für $a,b,c \neq 0$ und $a^n + b^n + c^n \neq 0$ folgt hieraus $\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}$.

Aufgabe F 38 (nach Marcus Kasner, Templin, 11. Klasse)

Angenommen, die Gleichung $\sqrt{|x| + 1} - \sqrt{|x|} = a$ (a reell) hat eine Lösung. Dann gilt:

Wegen $|x| + 1 > |x| > 0$ und $\sqrt{c} \geq 0$ ergibt sich: $a > 0$.
Durch Quadrieren der gegebenen Gleichung erhalten wir:

$$|x| + 1 = a^2 + |x| + 2a\sqrt{|x|},$$

d. h. $1 - a^2 = 2a\sqrt{|x|}$. (*)

Da $a > 0$ und $\sqrt{|x|} \geq 0$ ist, folgt $1 - a^2 \geq 0$, also $a^2 \leq 1$.
Wegen $a > 0$ ergibt sich daraus: $0 < a \leq 1$.
Wir formen (*) weiter um: $\sqrt{|x|} = \frac{1 - a^2}{2a}$, $|x| = \left(\frac{1 - a^2}{2a}\right)^2$

Setzen wir den erhaltenen Wert in die Ausgangsgleichung ein, so ergibt sich:

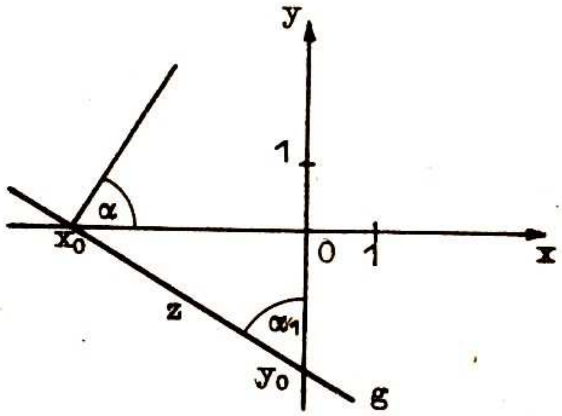
$$\sqrt{\frac{(1 + a^2)^2}{(2a)^2}} - \sqrt{\left(\frac{1 - a^2}{2a}\right)^2} = \frac{1 + a^2 - 1 + a^2}{2a} = a .$$

Wegen $\frac{1 - a^2}{2a} \geq 0$ folgt: $\sqrt{\left(\frac{1 - a^2}{2a}\right)^2} = \frac{1 - a^2}{2a}$.

Für $a \leq 0$ und $a > 1$ existieren keine reellen Lösungen; für $0 < a \leq 1$ hat die gegebene Gleichung die beiden Lösungen

$$x_1 = + \left(\frac{1 - a^2}{2a}\right)^2 \quad \text{und} \quad x_2 = - \left(\frac{1 - a^2}{2a}\right)^2 .$$

Aufgabe F 42 (nach Hans-Georg Martin, Jena, 11. Klasse)



Offensichtlich gilt $\alpha = \alpha_1$; ferner sei $Ax + By + C = 0$ die Geradengleichung in Hessescher Normalform ($A^2 + B^2 = 1$). Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen ergeben:

1) $x = 0 \longrightarrow y_0 = -\frac{C}{B} \longrightarrow |y_0| = \frac{|C|}{|B|}$

2) $y = 0 \longrightarrow x_0 = -\frac{C}{A} \longrightarrow |x_0| = \frac{|C|}{|A|}$

Damit ist

$$|z| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{C^2\left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2}\right)} = \frac{|C|}{|AB|}\cdot\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{|C|}{|AB|} .$$

Im Dreieck $\Delta x_0 y_0 0$ gilt für $\sin \alpha_1$ und $\cos \alpha_1$:

$$\sin \alpha_1 = \frac{|x_0|}{|z|} = \frac{|C|\cdot|A|\cdot|B|}{|A|\cdot|C|} = |B|, \quad \cos \alpha_1 = \frac{|y_0|}{|z|} = \frac{|C|\cdot|A|\cdot|B|}{|B|\cdot|C|} = |A|,$$

also $\sin \alpha = |B|$, $\cos \alpha = |A|$.

Herausgeber: Leitung der FDJ-Grundorganisation der Friedrich-Schiller-Universität Jena; Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Egbert Creutzburg
Chefredakteur: Waltraud Werner
Redaktion: J. Dubslaff, H.-G. Leopold, Th. Ullrich, G. Weske
Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.