



1

75

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Ju-
gendobjekt Studienvor-
bereitung der Sektion
Mathematik an der
Friedrich-Schiller-Uni-
versität Jena

9. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Von der Mausefalle zum Addierautomat (I)

Was haben Mausefalle und Addierautomat gemeinsam? Wir werden sehen, daß sich beide als sogenannte "Zustandssysteme" betrachten lassen, als Beispiele für den Begriff des abstrakten Automaten. Diese abstrakten Automaten werden innerhalb der mathematischen Kybernetik untersucht. Die Theorie der abstrakten Automaten dient der Modellierung der Arbeitsweise elektronischer Rechenanlagen, und zwar auf einer möglichst abstrakten Ebene mittels rein mathematischer Methoden. Demgemäß sind Untersuchungen über konkrete Automaten (wie Fernsprechautomaten, Geldwechselautomaten, Verkehrsampeln, Spielautomaten oder auch Computer) kein unmittelbarer Bestandteil der Theorie der abstrakten Automaten. Ein Ziel dieser Theorie ist es jedoch, die abstrakt gewonnenen Aussagen über "Zustandssysteme" für die Konstruktion konkreter Automaten oder für die Erforschung realer Zustandssysteme (wie etwa des menschlichen Organismus - die Medizin spricht vom Zustand des menschlichen Organismus, insbesondere von seinem Gesundheitszustand; oder des Schachspiels - der aktuelle Zustand wird hier durch die Position aller auf dem Brett befindlichen Figuren gegeben) anwendbar zu gestalten. Wir können derartige reale Mechanismen oder Systeme zur Veranschaulichung des Begriffs des abstrakten Automaten heranziehen. Dem WURZEL-Leser sind aus Heft 6/73 und aus Heft 1/74 bereits zwei Typen abstrakter Automaten bekannt - die TURING-Maschine und der MEDWEDJEW-Automat.

Die Mausefalle

Wir betrachten die Mausefalle als "Zweizustandssystem" mit Eingabe und Ausgabe. Folgende zwei Zustände sind für die Falle möglich - die Feder ist gespannt (dies sei der Zustand z_0) oder die Feder ist nicht gespannt (dies sei der Zustand z_1). Als mögliche "Eingaben" betrachten wir "eine Maus berührt den Mechanismus der Feder" (wir bezeichnen dies kurz als Eingabe 1) und "der Mechanismus der Feder wird nicht berührt" (als Eingabe 0). Als Ausgabe 1 nehmen wir den Fall "eine Maus wird erschlagen" und als Ausgabe 0 "keine Maus wird erschlagen". Der kritische Leser wird be-

merken, daß wir im weiteren die Arbeitsweise der Mausefalle etwas idealisieren.

Die Feder der Falle werde nun im Zeitpunkt $t = 0$ gespannt. Wir betrachten die Falle nur zu diskreten Zeitpunkten t , d. h. für t sind genau alle nichtnegativen ganzen Zahlen möglich. Mit $z(t)$ wird der Zustand der Falle im Zeitpunkt t bezeichnet. Die Eingabe bzw. Ausgabe zum Zeitpunkt t sei $x(t)$ bzw. $y(t)$. Für $z(t) = z_0$ (d. h. zum Zeitpunkt t ist die Feder noch gespannt) und $x(t) = 0$ folgt $z(t+1) = z_0$ und $y(t+1) = 0$ - wir warten weiter auf die Maus. Für $z(t) = z_0$ und $x(t) = 1$ ist $z(t+1) = z_1$ und $y(t+1) = 1$ - die Maus ist tot. Für $z(t) = z_1$ ist sowohl für $x(t) = 1$ als auch für $x(t) = 0$ stets $z(t+1) = z_1$ und $y(t+1) = 0$ - die Feder ist neu zu spannen.

Der Briefmarkenautomat

Der Automat gebe 10-Pfennig-Marken aus. Mit E bezeichnen wir die Eingabe, daß ein 10-Pfennig-Stück eingeworfen wird. Mit K bezeichnen wir die Eingabe, daß kein Einwurf erfolgt. Die möglichen Ausgaben des Automaten sind: m - Ausgabe einer Briefmarke, r - Rückgabe des 10-Pfennig-Stückes, k - keine Ausgabe. Mit $\{E, K\}$ ist folglich die Menge der möglichen Eingaben gegeben, mit $\{m, r, k\}$ die Menge der möglichen Ausgaben. Zu dem Zeitpunkt $t = 0$ wird der Automat neu mit 10-Pfennig-Marken aufgefüllt. Die Anzahl sei n . Mit $z(t)$ wird der "Zustand" des Automaten im Zeitpunkt t bezeichnet, wobei wir als mögliche Zustände die Menge $\{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ betrachten. Dabei bedeutet "der Automat befindet sich im Zustand z_i " (für $0 \leq i \leq n$), daß im Automat noch genau i Briefmarken vorhanden sind. Die Eingabe bzw. Ausgabe zum Zeitpunkt t seien $x(t)$ bzw. $y(t)$. Befindet sich nun der Automat im Zeitpunkt t im Zustand $z(t) = z_i$ mit $1 \leq i \leq n$ und erfolgt die Eingabe $x(t) = E$, so wird im nächsten Zeitpunkt vom Automat eine Marke ausgegeben, d. h. es ist $y(t+1) = m$ und $z(t+1) = z_{i-1}$. Für $z(t) = z_0$ und $x(t) = E$ ist $y(t+1) = r$ und $z(t+1) = z_0$. Für beliebigen Zustand $z(t)$ folgt auf die Eingabe $x(t) = K$ die Ausgabe $y(t+1) = k$, und der Automat bleibt im Zustand $z(t)$, d. h. es ist $z(t+1) = z(t)$.

Der abstrakte Automat

Unter einem abstrakten Automaten wollen wir hier ein System $\mathcal{A} = [Z, X, Y, f, g]$ verstehen, wobei Z, X, Y (nichtleere) Mengen sind, $f : Z \times X \longrightarrow Z$ und $g : Z \times X \longrightarrow Y$ sind Funktionen, die auf der Menge $Z \times X$ definiert sind (zur Erinnerung: $Z \times X =_{\text{Df}} \{ [z, x] : z \in Z \wedge x \in X \}$). Mit Z ist die Menge der Zustände gegeben, mit X die Menge der Eingaben und mit Y die Menge der Ausgaben. Die Funktionen f bzw. g werden Überföhrungs- bzw. Ausgabefunktion des Automaten $\mathcal{A}$ genannt.

Die "Arbeitsweise" dieses abstrakten Automaten kann folgendermaßen beschrieben werden: Der Automat beginnt seine "Arbeit" zum Zeitpunkt $t = 0$. Zu diesem Zeitpunkt befinde er sich im Zustand $z(0) \in Z$, dem sogenannten Anfangszustand. Der Automat wird nun zu beliebigen (nichtnegativen) ganzzahligen Zeitpunkten t betrachtet. Zum Zeitpunkt t bekomme der Automat die Eingabe $x(t) \in X$, während er sich im Zustand $z(t) \in Z$ befindet. Als Resultat dieser Situation geht $\mathcal{A}$ über in den (nicht notwendig neuen) Zustand

$$z(t+1) = f(z(t), x(t)) \in Z.$$

Während dieses Überganges gibt $\mathcal{A}$ die Ausgabe

$$y(t+1) = g(z(t), x(t)) \in Y.$$

Wie wir hier den abstrakten Automaten definiert haben, wurde er erstmals von dem Kybernetiker G. H. MEALY betrachtet. Ihm zu Ehren wird dieser Typ des abstrakten Automaten MEALY-Automat genannt.

Beispiel 1:

Wir geben einen abstrakten Automaten $\mathcal{A}$ vom Typ "Mausefalle" an. Hierzu setzen wir

$$\begin{aligned} Z &=_{\text{Df}} \{z_0, z_1\} \quad , \\ X &=_{\text{Df}} \{0, 1\} \quad \text{und} \\ Y &=_{\text{Df}} \{0, 1\} \quad . \end{aligned}$$

Die Überföhrungsfunktion f und die Ausgabefunktion g werden in folgender Tabelle angegeben:

$[z, x]$	$[z_0, 0]$	$[z_0, 1]$	$[z_1, 0]$	$[z_1, 1]$
$f(z, x)$	z_0	z_1	z_1	z_1
$g(z, x)$	0	1	0	0

Beispiel 2:

Für den abstrakten Automat $\mathcal{A}$ vom Typ "Briefmarkenautomat" wird

$$\begin{aligned} Z &=_{\text{Df}} \{z_0, z_1, \dots, z_n\} \quad , \\ X &=_{\text{Df}} \{E, K\} \quad \text{und} \\ Y &=_{\text{Df}} \{m, r, k\} \end{aligned}$$

gesetzt. Die Überföhrungsfunktion f und die Ausgabefunktion g werden hierbei durch folgende Tabelle gegeben:

$[z, x]$	$[z_0, E]$	$[z_0, K]$	$[z_1, E]$	$[z_1, K]$	...	$[z_n, E]$	$[z_n, K]$
$f(z, x)$	z_0	z_0	z_0	z_1	...	z_{n-1}	z_n
$g(z, x)$	r	k	m	k	...	m	k

Darstellung von MEALY-Automaten

Für den abstrakten Automaten $\mathcal{A} = [Z, X, Y, f, g]$ gelte $Z = \{z_0, \dots, z_n\}$ und $X = \{x_0, \dots, x_m\}$. Dann können wir $\mathcal{A}$ durch alleinige Angabe der folgenden Übergangs-Ausgabe-Tabellen vollständig charakterisieren:

f	z_0	...	z_1	...	z_n
x_0	$f(z_0, x_0)$	...	$f(z_1, x_0)$	...	$f(z_n, x_0)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_j	$f(z_0, x_j)$	...	$f(z_1, x_j)$	...	$f(z_n, x_j)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_m	$f(z_0, x_m)$	...	$f(z_1, x_m)$	...	$f(z_n, x_m)$

g	z_0	...	z_1	...	z_n
x_0	$g(z_0, x_0)$	...	$g(z_1, x_0)$	...	$g(z_n, x_0)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_j	$g(z_0, x_j)$	...	$g(z_1, x_j)$	...	$g(z_n, x_j)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_m	$g(z_0, x_m)$	...	$g(z_1, x_m)$	...	$g(z_n, x_m)$

So wird durch die Tabellen

f	z_0	z_1
0	z_0	z_1
1	z_1	z_1

g	z_0	z_1
0	0	0
1	1	0

vollständig der "Mausefalle"-Automat beschrieben, ebenso der "Briefmarkenautomat" durch folgende Tabellen:

f	z_0	z_1	z_2	...	z_{n-1}	z_n
E	z_0	z_0	z_1	...	z_{n-2}	z_{n-1}
K	z_0	z_1	z_2	...	z_{n-1}	z_n

g	z_0	z_1	z_2	...	z_{n-1}	z_n
E	r	m	m	...	m	m
K	k	k	k	...	k	k

Beispiel 3:

Wir betrachten den abstrakten Automaten $\mathcal{A}$ mit

$$Z = \{z_0, z_1, z_2\}, \quad X = \{a, b\}, \quad Y = \{3, 5, 7\},$$

$$f = \{[z_0, a, z_1], [z_0, b, z_1], [z_1, a, z_2], [z_1, b, z_2], [z_2, a, z_1], [z_2, b, z_2]\},$$

$$g = \{[z_0, a, 3], [z_0, b, 5], [z_1, a, 7], [z_1, b, 3], [z_2, a, 3], [z_2, b, 5]\}.$$

Hierzu sind folgende Tabellen äquivalent:

f	z_0	z_1	z_2
a	z_1	z_2	z_1
b	z_1	z_2	z_2

g	z_0	z_1	z_2
a	3	7	3
b	5	3	5

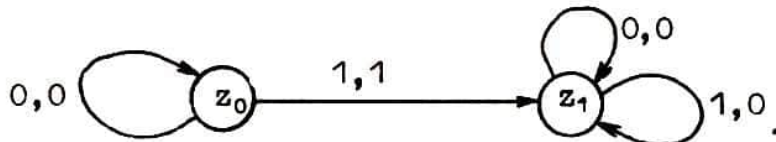
Neben dieser Darstellung von MEALY-Automaten mittels Tabellen erscheint die folgende graphische Angabe abstrakter Automaten als besonders instruktiv.

Für den MEALY-Automat $\mathcal{M} = [Z, X, Y, f, g]$ wird mit

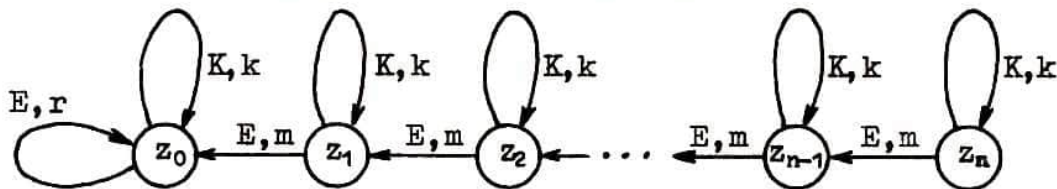


ausgesagt, daß $\mathcal{M}$ bei Eingabe von $x \in X$ aus dem Zustand $z_i \in Z$ in den Zustand $z_j \in Z$ übergeht, wobei $y \in Y$ ausgegeben wird. Dies bedeutet also, daß $f(z_i, x) = z_j$ und $g(z_i, x) = y$ gilt.

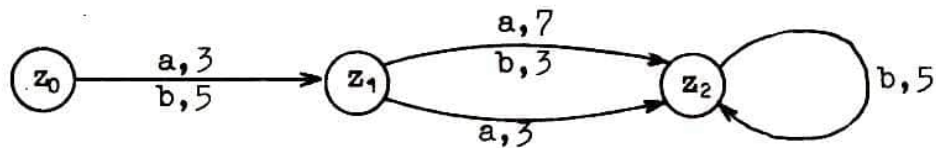
Der "Mausefalle"-Automat besitzt demnach die graphische Darstellung



Für den "Briefmarkenautomat" erhalten wir:



Für den Automaten aus Beispiel 3:



Übungsaufgabe 1:

Geben Sie die graphische Darstellung des folgenden Automaten an:

f	z ₀	z ₁	z ₂	z ₃	z ₄
A	z ₂	z ₁	z ₁	z ₄	z ₁
B	z ₃	z ₁	z ₀	z ₄	z ₂
C	z ₀	z ₄	z ₂	z ₂	z ₁
D	z ₄	z ₃	z ₄	z ₁	z ₃

g	z ₀	z ₁	z ₂	z ₃	z ₄
A	5	7	4	4	8
B	8	4	3	4	7
C	7	5	9	5	8
D	4	3	9	7	5

Reinhard Klette
Assistent im Bereich
Mathematische Kybernetik

(Wird fortgesetzt)

Preisaufgaben 1/75

- (G 1) Von einem Punkt S einer Kugel mit dem Radius r gehen drei gleichlange Sehnen aus, von denen jeweils zwei den gleichen Winkel α einschließen.
 Man berechne die Länge dieser Sehnen.

- (G 2) Man löse in den komplexen Zahlen das Gleichungssystem
- $$\begin{aligned} z^3 + w^5 &= 0 \\ z^2 \overline{w^4} &= 1. \end{aligned}$$
- Hierbei bedeutet $\overline{v}$ die zu v konjugiert komplexe Zahl, die durch $\overline{v} = a - bi$, falls $v = a + bi$, definiert ist.

- (G 3) Man beweise, daß der geometrische Ort aller Punkte, für die das Verhältnis ihres Abstandes zu zwei gegebenen Punkten A und B gleich einer vorgegebenen Zahl $s \neq 1$ ist, ein Kreis ist, dessen Mittelpunkt auf der Verbindungsgeraden der Punkte A und B liegt.

- (G 4) Innerhalb eines gegebenen Dreiecks ΔABC ist der Punkt O so zu finden, daß sich die Flächeninhalte der Dreiecke ΔAOB , ΔAOC und ΔBOC wie 1:2:3 verhalten.

- (G 5) Gegeben sei eine Funktion $f(i\varphi)$, $-\infty < \varphi < +\infty$, mit
- $$f(i(\varphi+\psi)) = f(i\varphi) \cdot f(i\psi), \quad \varphi, \psi \text{ reell.}$$
- Die Zerlegung der komplexen Zahl $f(i\varphi)$ in Real- und Imaginärteil sei
- $$f(i\varphi) = g(i\varphi) + i \cdot h(i\varphi); \quad g(i\varphi), h(i\varphi) \text{ reell.}$$
- Man beweise
- $$\begin{aligned} g(i(\varphi+\psi)) &= g(i\varphi) \cdot g(i\psi) - h(i\varphi) \cdot h(i\psi) \\ \text{und} \quad h(i(\varphi+\psi)) &= g(i\varphi) \cdot h(i\psi) + h(i\varphi) \cdot g(i\psi). \end{aligned}$$
- Ferner zeige man, daß die Additionstheoreme (18) und (19) aus dem Artikel "Komplexe Zahlen" (WURZEL 12/74)

$$\sin(\varphi + \psi) = \sin \varphi \cdot \cos \psi + \sin \psi \cdot \cos \varphi \quad (18),$$

$$\cos(\varphi + \psi) = \cos \varphi \cdot \cos \psi - \sin \varphi \cdot \sin \psi \quad (19)$$

Spezialfälle dieser Formeln sind. Wie hat man hierbei $f(i\varphi)$ zu wählen?

(G 6) Найти все вещественные значения a и b , при которых уравнения

2

$$x^3 + ax^2 + 18 = 0$$

$$x^3 + bx + 12 = 0$$

имеют два общих корня, и определить эти корни.

вещественный - reell

общий - gemeinsam, allgemein

корень - Wurzel

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.

Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.

Einsendeschluß: 1. 3. 1975

* * * * *

Im vergangenen Schuljahr erhielten wir von insgesamt 59 Schülern bzw. Mitgliedern unseres NVA-Zirkels Lösungen zu unseren Preisaufgaben zugesandt, und wir möchten an dieser Stelle die fünfzehn Punktbesten beim Lösen der Preisaufgaben E 43 bis F 42 vorstellen (die angegebenen Klassenstufen beziehen sich auf das vergangene Schuljahr):

Norbert Schieweck	Blumenberg	10. Klasse	85 Punkte
Friedhelm Schieweck	Blumenberg	10. Klasse	84 Punkte
Meinhard Mende	Lunzenau	12. Klasse	62 Punkte
Jürgen Socolowsky	Bergfelde	12. Klasse	55 Punkte
Uwe Risch	Burg	10. Klasse	54 Punkte

Hans-Ulrich Frömmer	Peckatel	11. Klasse	51 Punkte
Roger Labahn	Anklam	10. Klasse	41 Punkte
Lothar Wenzel	Berlin	NVA	41 Punkte
Dittmar Kurtz	Friedrichsrode	8. Klasse	38 Punkte
Hans-Georg Martin	Jena	10. Klasse	38 Punkte
Detlef Rütz	Neubrandenburg	11. Klasse	33 Punkte
Klaus Altmann	Berlin	11. Klasse	30 Punkte
Frank Burghard	Frankfurt/Oder	10. Klasse	24 Punkte
Marcus Kasner	Templin	10. Klasse	24 Punkte
Peter Mathe	Parchim	NVA	23 Punkte

◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇

Joseph-Louis Lagrange

J.-L. Lagrange wurde am 25. 1. 1736 in Turin geboren. Bereits im Alter von 19 Jahren wurde er Mathematikprofessor an der Turiner Artillerieschule. In den folgenden Jahren beschäftigte er sich mit Fragen der Variationsrechnung, der Lösung algebraischer Gleichungen des Grades n , $n > 4$, gab eine teilweise Lösung des Dreikörperproblems und erzielte auch in der Zahlentheorie wichtige Resultate. So stammt der Satz, daß jede natürliche Zahl als Summe von höchstens vier Quadratzahlen dargestellt werden kann, von Lagrange.

1766 wurde Lagrange von Friedrich II. nach Berlin eingeladen, wo er bis zum Tode Friedrichs im Jahre 1786 wirkte. Später kehrte er nach Paris zurück.

1788 erschien eines seiner wertvollsten Werke, die "Mecanique analytique". In diesem Buch wird die neuentwickelte Analysis auf die Mechanik der Punkte und der starren Körper angewendet. Die im 18. Jahrhundert vorliegenden Resultate (von Euler, d'Alembert u. a.) wurden eingearbeitet und weiterentwickelt. Noch heute existiert in der Physik der Begriff der Bewegungsgleichung in verallgemeinerten Koordinaten in der "Lagrangeschen" Form.

1795 wurde Lagrange als Professor an die École Normale und 1797 an die École Polytechnique berufen.

In den folgenden Jahren verfaßte er noch zwei grundlegende Werke über Funktionen. Allerdings lehnte er die von Newton angedeutete und von d'Alembert begründete Theorie der Grenzwerte ab und versuchte vielmehr, die Infinitesimalrechnung auf die Algebra zurückzuführen. Diese abstrakte Behandlung der Funktionen bedeutete trotz ihrer Mängel bezüglich der Infinitesimalrechnung und unzureichender Konvergenzuntersuchungen von Lagrange einen großen Fortschritt in der Mathematik. Diese Mängel wurden in den späteren Jahren (etwa 1825) von Cauchy und anderen Mathematikern beseitigt. Der Taylorsche Satz in der reellen Analysis verwendet noch heute die von Lagrange begründete Schreibweise der Ableitungen und die Lagrangesche Form des Restgliedes.

Am 10. 4. 1813 starb Lagrange in Paris.

Titelbild: Joseph-Louis Lagrange. Aus der Bildserie "Berühmte Mathematiker"; Sammlung Karger-Decker, Berlin.

Wir liefern π ,
genau wie nie:



3,	14159	26535	89793	23846	26433	83279	50288	41971	69399	37510
58209	74944	59230	78164	06286	20899	86280	34825	34211	70679	
82148	08651	32823	06647	09384	46095	50582	23172	53594	08128	
48111	74502	84102	70193	85211	05559	64462	29489	54930	38196	
44288	10975	66593	34461	28475	64823	37867	83165	27120	19091	
45648	56692	34603	48610	45432	66482	13393	60726	02491	41273	
72458	70066	06315	58817	48815	20920	96282	92540	91715	36436	
78925	90360	01133	05305	48820	46652	13841	46951	94151	16094	
33057	27036	57595	91953	09218	61173	81932	61179	31051	18548	
07446	23799	62749	56735	18857	52724	89122	79381	83011	94912	
98336	73362	44065	66430	86021	39494	63952	24737	19070	21798	
60943	70277	05392	17176	29317	67523	84674	81846	76694	05132	
00056	81271	45263	56082	77857	71342	75778	96091	73637	17372	
14684	40901	22495	34301	46549	58537	10507	92279	68925	89235	
42019	95611	21290	21960	86403	44181	59813	62977	47713	09960	
51870	72113	49999	99837	29780	49951	05973	17328	16096	31859	
50244	59455	34690	83026	42522	30825	33446	85035	26193	11881	
71010	00313	78387	52886	58753	32083	81420	61717	76691	47303	
59825	34904	28755	46873	11595	62863	88235	37875	93751	95778	
18577	80532	17122	68066	13001	92787	66111	95909	21642	01989	
38095	25720	10654	85863	27886	59361	53381	82796	82303	01952	
03530	18529	68995	77362	25994	13891	24972	17752	83479	13151	
55748	57242	45415	06959	50829	53311	68617	27855	88907	50983	
81754	63746	49393	19255	06040	09277	01671	13900	98488	24012	
85836	16035	63707	66010	47101	81942	95559	61989	46767	83744 ...	

Lösungen

Aufgabe F 39

Ist $a = b = 0$, so ist das System für beliebiges c lösbar: man setze $x = \arctan c$ und $y = \pi + x$.

Sei also $a^2 + b^2 > 0$. Es sei (x, y) eine Lösung des Systems. Setzt man $\frac{x+y}{2} = s$ und $\frac{x-y}{2} = d$ und verwendet man die bekannten Formeln für die Summe zweier sinus- bzw. cosinus-Werte, so lautet das System

$$\begin{aligned}\sin s \cdot \cos d &= a \\ \cos s \cdot \cos d &= b \\ \tan x + \tan y &= 2c\end{aligned}\tag{1}$$

Durch Quadrieren und Addieren der ersten beiden Gleichungen ergibt sich

$$\cos^2 d = a^2 + b^2,\tag{2}$$

und hieraus ergibt sich durch Einsetzen in die quadrierte erste und zweite Gleichung:

$$\sin s = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos s = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\tag{3}$$

Die dritte Gleichung von (1) kann mit Hilfe von Additionstheoremen so umgeformt werden:

$$\frac{2 \sin(x+y)}{\cos x \cos y} = 2c$$

$$\sin 2s = 2c \cos(s+d) \cdot \cos(s-d)$$

$$\sin s \cos s = c (\cos^2 s \cos^2 d - \sin^2 s \sin^2 d)$$

Einsetzen von (2) und (3) ergibt

$$\frac{ab}{a^2 + b^2} = c \left(\frac{b^2}{a^2 + b^2} (a^2 + b^2) - \frac{a^2}{a^2 + b^2} (1 - a^2 - b^2) \right),$$

d. h.

$$ab = c((a^2 + b^2)^2 - a^2).\tag{4}$$

Diese Gleichung und die aus (2) folgende Bedingung

$$0 < a^2 + b^2 \leq 1\tag{5}$$

sind notwendig für die Lösbarkeit von (1). Sie sind aber auch hinreichend, denn wegen (5) gibt es eine Zahl d so, daß

$\cos d = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$ ist, und bestimmt man mit diesem d $\sin s$

und $\cos s$ so, daß die ersten beiden Gleichungen von (1), also auch (3) erfüllt sind, so ergibt sich aus (4) durch Rückwärts-schließen und unter Verwendung von $x = s + d$, $y = s - d$, daß auch die dritte Gleichung von (1) erfüllt ist. Also ist in diesem Falle (1) und somit auch das Ausgangsgleichungssystem lösbar.

Insgesamt ist das Gleichungssystem also genau dann lösbar, wenn $0 < a^2 + b^2 \leq 1$ und $ab = c((a^2 + b^2)^2 - a^2)$ gilt, oder wenn $a = b = 0$ ist.

Zu den Lösungen der Serie 9/74

Unter den zu dieser Serie eingesandten Lösungen befanden sich ungewöhnlich viele fehlerhafte. Der Druckfehler in der Aufgabenstellung F 47, " $a^2 + b^2$ " an Stelle von " $a^4 + b^4$ ", wurde von einem großen Teil der Einsender bemerkt und korrigiert. Dieser Fehler vereinfachte zudem den Beweis erheblich, da unter der in der Aufgabenstellung formulierten Bedingung bereits $a^2 + b^2 > \frac{1}{2}$ gilt.

Die Fehlerschwerpunkte bei den übrigen Lösungen waren im einzelnen:

F 43: Der Wert $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ wurde nicht aus der Lösungsmenge ausgeschlossen.

F 44: Der Fall, daß der Mittelpunkt der beiden Kreise im Innern des Quadrates liegen kann, wurde nicht berücksichtigt, und der Hinweis, daß die für R und r gefundenen Bedingungen auch hinreichend sind, fehlte oft.

F 48: Die mit Hilfe der Kombinatorik geführten Beweise waren richtig, während die Induktionsbeweise Mängel aufwiesen.

Aufgabe F 43 (nach Hans-Ulrich Frömmer, Peckatel, 12. Klasse)

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x}$$

Zunächst muß $x \neq 0$ gelten, da x im Nenner auftritt.

Da die Radikanden nicht negativ sein dürfen, muß $\frac{x^2-1}{x} \geq 0$ gelten.

Daraus ergibt sich:

1. Für $x < 0$:

$$x^2 - 1 \leq 0, \quad x^2 \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\rightarrow \underline{-1 \leq x < 0}$$

(1)

2. Für $x > 0$:

$$x^2 - 1 \geq 0, \quad x^2 \geq 1, \quad \text{also } x \leq -1 \quad \text{oder } x \geq 1 \\ \rightarrow \underline{1 \leq x} \quad (2)$$

Aus (1) oder (2) erhält man auch stets

$$\frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \geq 0.$$

Somit ergibt sich aus der Ausgangsungleichung

$$\sqrt{\frac{x^2-1}{x}} - \sqrt{\frac{x-1}{x}} > 0$$

$$\sqrt{\frac{x^2-1}{x}} > \sqrt{\frac{x-1}{x}}.$$

Da beide Seiten größer als Null sind, können wir quadrieren:

$$\frac{x^2-1}{x} > \frac{x-1}{x}.$$

Betrachten wir x -Werte mit $-1 \leq x < 0$, so folgt $x^2-1 < x-1$, $x^2 < x$ und somit $x > 1$, ein Widerspruch zu $-1 \leq x < 0$.

Ist $x > 1$, so folgt $x^2-1 > x-1$, $x > 1$ (kein Widerspruch).

Damit entfällt (1), und es bleibt als notwendige Bedingung $x > 1$. Unter dieser Voraussetzung formen wir die Ungleichung äquivalent um.

$$\sqrt{\frac{x^2-1}{x}} - \sqrt{\frac{x-1}{x}} > \frac{x-1}{x}$$

$$\sqrt{x+1} - 1 > \sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

Wir können quadrieren, da beide Seiten größer als Null sind:

$$\sqrt{x+1} - 1 > \sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

$$x^2 + x + 1 - 2x\sqrt{x+1} > 0$$

$$(x - \sqrt{x+1})^2 > 0$$

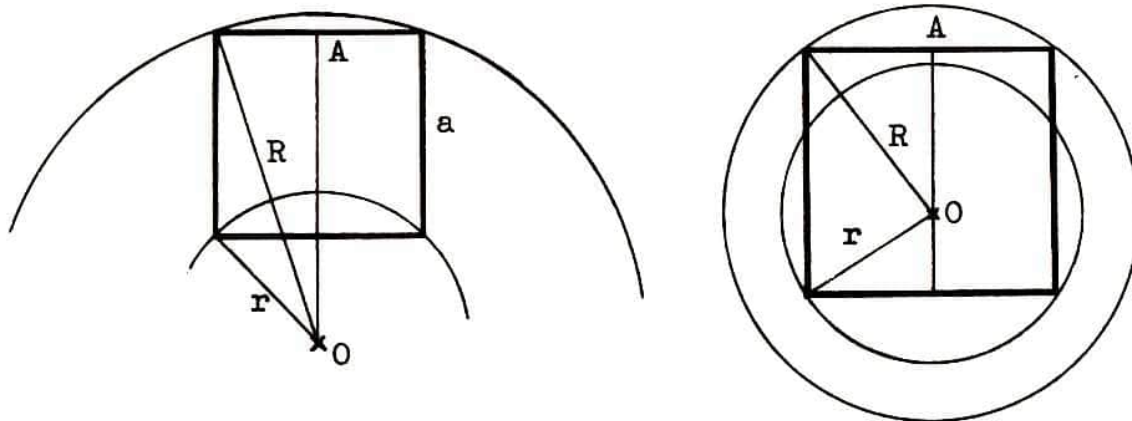
Das ist für alle $x > 1$ erfüllt, falls $x \neq \sqrt{x+1}$, d. h. $x^2 - x - 1 \neq 0$ gilt.

Es ergibt sich $x \neq \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und, da nur $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) > 1$ ist, die Lösungsmenge der Gleichung als

$$L = \{x : x \text{ reell, } x > 1, x \neq \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\}.$$

Aufgabe F 44 (nach Hans-Georg Martin, Jena, 11. Klasse)

Es sind 2 Fälle möglich:



Offensichtlich gilt:

$$\overline{AO} = a \pm \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} \quad \text{und} \quad \overline{AO} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} \quad \text{mit } R > r.$$

Wir erhalten die Gleichung

$$R^2 - \frac{a^2}{4} = \left(a \pm \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} \right)^2,$$

einige Umformungen führen auf $2a^4 - 2a^2(r^2 + R^2) + (R^2 - r^2)^2 = 0$,

$$\text{d. h.} \quad a^2 = \frac{1}{2}(r^2 + R^2 \pm \sqrt{(R^2 + r^2)^2 - 2(R^2 - r^2)^2}) \quad (1)$$

$$\text{oder} \quad a^2 = \frac{1}{2}(r^2 + R^2 \pm \sqrt{6R^2 r^2 - r^4 - R^4}).$$

Aus (1) wird ersichtlich, daß beide Werte für a^2 positiv werden, wenn der Radikand nichtnegativ ist, da $R > r$ gilt. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} & R^2 + r^2 \geq \sqrt{2}(R^2 - r^2) \\ \rightarrow & r^2(1 + \sqrt{2}) \geq R^2(\sqrt{2} - 1) \\ \rightarrow & 1 < \frac{R^2}{r^2} \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = 3 + 2\sqrt{2} \\ \rightarrow & \frac{R}{r} \leq \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} \end{aligned} \quad (2)$$

Da in (1) a^2 immer positiv ist, wenn (2) gilt, so ist für R und r nur die Einschränkung (2) notwendig und auch hinreichend.

Lösbar ist die Aufgabe also für $\frac{R}{r} \leq 1 + \sqrt{2}$, eindeutig lösbar für $\frac{R}{r} = 1 + \sqrt{2}$.

Aufgabe F 45 (nach Roger Labahn, Anklam, 10. Klasse)

Nach Substitution $\sin^2 x = a$ und $\cos^2 x = b$ ($a, b > 0$; $a+b = 1$) erhält man mit $(b - \frac{1}{2})^2 \geq 0$

$$\frac{1}{4} \geq b - b^2 = b(1 - b) = b \cdot a$$

$$\longrightarrow \frac{1}{a^2 b^2} \geq 16 \quad (1)$$

$$\text{und } 2b^2 + 2b + \frac{1}{2} \geq 0 \longrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \leq b^2 + b^2 - 2b + 1 = b^2 + (1 - b)^2 = b^2 + a^2 \quad (2)$$

(1) und (2) liefern:

$$\text{bzw. } a^2 + b^2 + \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \geq \frac{17}{2}$$

$$a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + 2 + \frac{1}{b^2} \geq \frac{25}{2},$$

$$\text{d. h. } \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2} \quad (3)$$

Gleichheit gilt dabei für $a = b = \frac{1}{2}$.

Weiterhin ist

$$12 + \frac{1}{2} \cdot \sin y \leq 12,5 \quad (4)$$

Mit (3) und (4) erhalten wir:

$$12,5 \leq \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2} \cdot \sin y \leq 12,5,$$

d. h., in (3) und (4) gilt Gleichheit. Damit muß gelten:

$$\sin y = 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad |\sin x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Man erhält:

$$y = \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi, \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{k_2\pi}{2} \quad (k_1, k_2 \text{ ganzzahlig})$$

Eine Probe bestätigt die Richtigkeit der Lösung.

Herausgeber: Leitung der FDJ-Grundorganisation der Friedrich-Schiller-Universität Jena;
Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Egbert Creutzburg

Chefredakteur: Waltraud Werner

Redaktion: J. Dubslaff, H.-G. Leopold, Th. Ullrich, G. Weske

Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.



2

75

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Ju-
gendobjekt Studienvor-
bereitung der Sektion
Mathematik an der
Friedrich-Schiller-Uni-
versität Jena

9. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Von der Mausefalle zum Addierautomat(II)

Ein binärer Addierautomat

Es ist ein binärer Addierautomat (Dualaddierer) zu konstruieren, d. h. ein Automat, der folgendes leistet: Der Maschine werden gleichzeitig zwei Dualzahlen eingegeben, der Ausgang der Maschine soll die Summe dieser beiden Zahlen in Dualdarstellung angeben.

Als Beispiel einer Eingabe betrachten wir die Zahlen

$30 \hat{=} 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \dots$

(da $30 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + \dots$)

und

$1945 \hat{=} 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ \dots$

Wir führen die duale Addition durch:

- 0. Stelle: $0 + 1 = 1$, Übertrag: 0
- 1. Stelle: $1 + 0 = 1$, Übertrag: 0
- 2. Stelle: $1 + 0 = 1$, Übertrag: 0
- 3. Stelle: $1 + 1 = 0$, Übertrag: 1
- 4. Stelle: $1 + 1$ (+ Übertrag 1) = 1, Übertrag: 1
- 5. Stelle: $0 + 0$ (+ Übertrag 1) = 1, Übertrag: 0 usw.

Als Ergebnis folgt $1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \hat{=} 1975$.

Der zu konstruierende Automat kann als "Zweizustandssystem" betrachtet werden - der Zustand z_0 bedeute "Übertrag 0", der Zustand z_1 bedeute "Übertrag 1". Wir setzen also $Z =_{\text{Def}} \{z_0, z_1\}$ als Zustandsmenge. Zur Addition an einer Stelle fassen wir die Ziffern beider Zahlen an dieser Stelle als Eingabe zusammen.

Die Addition des jeweiligen Übertrages von der vorhergehenden Stelle wird durch den Zustand, in dem sich der Automat gerade befindet, realisiert. Unsere Eingabemenge sei demnach

$X =_{\text{Def}} \{00, 01, 10, 11\}$. Die Ausgabemenge ist $Y = \{0, 1\}$. Wir erhalten die Tabellen:

f	00	01	10	11
z_0	z_0	z_0	z_0	z_1
z_1	z_0	z_1	z_1	z_1

g	00	01	10	11
z_0	0	1	1	0
z_1	1	0	0	1

Betrachten wir den Automat für unser gewähltes Zahlenbeispiel. Es ist $z(0) = z_0$, da natürlich zu Beginn der Addition kein Übertrag (d. h. genauer: der Übertrag 0) vorliegt. In den Automat wird nun, beginnend in diesem Anfangszustand $z(0)$, die

Eingabefolge

$x(0) = 01, x(1) = 10, x(2) = 10, x(3) = 11, x(4) = 11, x(5) = 00, \dots, x(10) = 01, x(11) = 00 \dots$

einggegeben. Wir erhalten die Ausgabefolge

$y(1) = 1, y(2) = 1, y(3) = 1, y(4) = 0, y(5) = 1, \dots, y(11) = 1, y(12) = 0, \dots,$

wobei der Automat nacheinander die folgenden Zustände annimmt:

$z(1) = z_0, z(2) = z_0, z(3) = z_1, z(4) = z_1, z(5) = z_0, \dots, z(11) = z_0, z(12) = z_0, \dots$

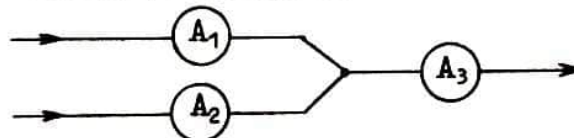
Technische Realisierung der Addition

Für den technisch interessierten Leser wollen wir kurz auf Möglichkeiten eingehen, die Addition von zwei positiven Zahlen a und b ohne jedwede Berechnung durchzuführen (in dem sehr verständlich geschriebenen, interessanten Buch von F. J. Budden "Zahlensysteme und Rechenautomaten", Teubner 1972, findet der Leser auch eine genaue Anleitung zur technischen Realisierung des angegebenen binären Addierautomaten).

Betrachten wir eine sehr einfache Methode der Addition:

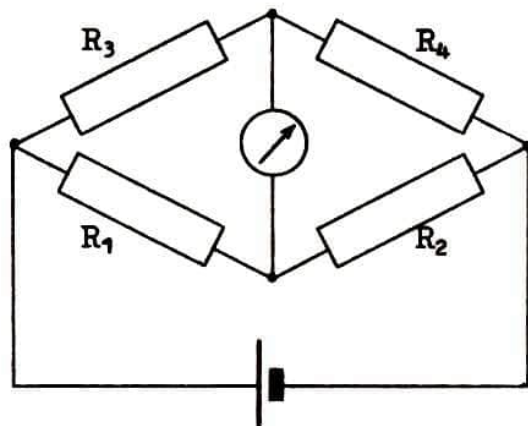
In einen Glaszylinder A gießen wir $a \text{ cm}^3$ Wasser, in einen Glaszylinder B werden $b \text{ cm}^3$ Wasser gegossen. Füllen wir Zylinder A in Zylinder B um, so können wir bei B auf einer Skala die Summe $a+b$ ablesen.

Ebenso einfach arbeitet folgende "Addiereinrichtung":



A_1, A_2, A_3 seien Amperemeter. Wird bei A_1 der Wert 2,4 A gemessen und zeigt A_2 den Wert 1,9 A an, so können wir bei A_3 den Wert $2,4 \text{ A} + 1,9 \text{ A} = 4,3 \text{ A}$ ablesen.

Etwas komplizierter können wir die Addition an der Wheatstone'schen Brückenschaltung nachvollziehen.



Aus dem Physikunterricht ist dem Leser bekannt: Fließt in dem als "Null"-Instrument benutzten Galvanometer kein Strom, dann stehen die vier Widerstände im Verhältnis $R_1 : R_2 = R_3 : R_4$.

Sind z. B. R_1, R_2, R_3 bekannt, so ist

$$R_4 = (R_2 \cdot R_3) : R_1$$

ablesbar, wenn die Brücke im Gleichgewicht ist. Verändern wir die Brückenschaltung, wie nebenstehende Abbildung zeigt, so gilt

$1 : 1 = (R_1 + R_2) : R_3$, falls die Brücke im Gleichgewicht ist. Dies bedeutet aber

$$R_3 = R_1 + R_2.$$

Stellen wir also R_1 auf $a \Omega$

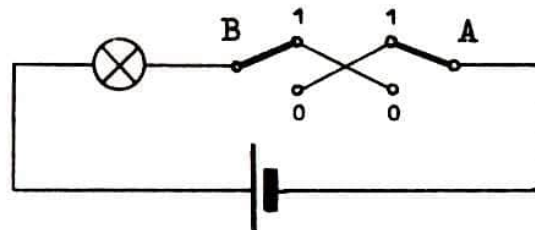
$$R_2 \text{ auf } b \Omega,$$

so können wir bei R_3 die Summe $a+b$ ablesen, wenn R_3 derart verändert wird, daß die Brücke im Gleichgewicht ist.

Übungsaufgabe 2:

Wie kann mittels der Wheatstone'schen Brückenschaltung die Subtraktion, Multiplikation und Division realisiert werden?

Zur technischen Realisierung der dualen Addition betrachten wir die nebenstehende Schaltung. Mit 1 wird der Fall bezeichnet, daß die Lampe brennt, mit 0 der Fall, daß die Lampe nicht brennt. Diese Schaltung ist dann durch folgende Tabelle zu charakterisieren:



Schalter A	0	0	1	1
Schalter B	0	1	0	1
Lampe	0	1	1	0

Dies entspricht der dualen Addition, wobei jedoch bei $1+1 = 0$ der Übertrag 1 zu beachten ist.

Was wird in der Theorie abstrakter Automaten untersucht?

Einleitend zu diesem kleinen Artikel wurden bereits einige Bemerkungen über die Aufgaben der Theorie der abstrakten Automaten gemacht. Demgemäß sind die zuletzt angestellten Betrachtungen über die technische Realisierung gewisser Rechenprozesse kein Bestandteil der Theorie abstrakter Automaten. In dieser Theorie werden ausschließlich Fragen rein abstrakter Natur behandelt, wie etwa: Man gebe einen Algorithmus an, der zu einem beliebigen vorgegebenen MEALY-Automaten $\mathcal{A}$ einen MEALY-Automaten $\mathcal{A}'$ konstruiert, so daß die Automaten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ "dasselbe leisten" und der Automat $\mathcal{A}'$ eine minimale Anzahl von Zuständen hat. So sind z. B. unsere Betrachtungen über den binären Additionsautomaten in die Theorie der abstrakten Automaten einzuordnen, jedoch nicht Fragen seiner technischen Realisierung.

Übungsaufgabe 3:

Konstruieren Sie einen (abstrakten) Additionsautomaten für Zahlen im Oktalsystem!

Der Zahl 60435 z. B. entspricht im Oktalsystem die Zahl 166023, also die Eingabefolge 32066100... , da

$$60435 = 3 \cdot 8^0 + 2 \cdot 8^1 + 0 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8^3 + 6 \cdot 8^4 + 1 \cdot 8^5 + 0 \cdot 8^6 + \dots$$

Reinhard Klette

Assistent im Bereich

Mathematische Kybernetik

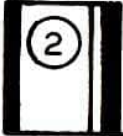
Preisaufgaben 2/75

- (G 7) Man konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, wenn die Hypotenuse c und die Winkelhalbierende w_γ des rechten Winkels gegeben sind!

- (G 8) Konstruieren Sie einen (abstrakten) Additionsautomaten für Zahlen im Oktalsystem (siehe obigen Artikel)!

- (G 9) Man berechne den Ausdruck $\sqrt{\underbrace{11\dots 11}_{2n} - \underbrace{22\dots 22}_n}$ (n - natürliche Zahl)!

(G 10) Man löse das Gleichungssystem



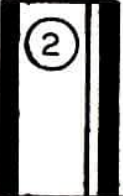
$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = a$$

$$x + y = 2 \arcsin\left(a + \frac{1}{2}\right) .$$

(G 11) Man weise die Divergenz der unendlichen Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v v$ nach!



(G 12) Найти сторону наибольшего из квадратов, внутренние точки которых находятся внутри правильного шестиугольника со стороной a .



сторона

- Seite

правильный шестиугольник - regelmäßiges Sechseck

Einsendeschluß: 31. 3. 1975

René Descartes (31. 3. 1596-11. 2. 1650)

- Zum 325. Todestag des Gelehrten -

Die Bedeutung einzelner großer Gelehrter für die Entwicklung einer Wissenschaft einzuschätzen, fällt nicht immer leicht. - Aber es gibt in der Reihe bekannter Wissenschaftler immer wieder solche Persönlichkeiten, deren Wirken der Ausgangspunkt war für eine Wende in der Entwicklung einer Wissenschaft.

Solch eine Persönlichkeit war für die Mathematik René Descartes, auch wenn - oder gerade deshalb, weil seine mathematischen Ideen uns heute vielfach selbstverständlich erscheinen.

René Descartes war ein Philosoph, der aus der Touraine stammte, das Leben eines Edelmannes führte, eine Zeitlang in der Armee von Moritz von Oranien diente, viele Jahre in den Niederlanden lebte und in Stockholm, wohin er von der Königin von Schweden eingeladen worden war, starb.

Als Rationalist suchte er gleich vielen anderen großen Denkern des 17. Jahrhunderts nach einem allgemeinen Denkverfahren, das es ermöglichen sollte, Entdeckungen zu erleichtern und die Wahrheit in den Wissenschaften zu erkennen. Über die Mechanik, die damals die einzige bekannte Naturwissenschaft mit einem

einigermaßen zusammenhängenden systematischen Aufbau war, kam er zur Mathematik, die ihrerseits mit ihren überzeugenden Aussagen selbst ein glänzendes Beispiel dafür war, daß in der Wissenschaft Wahrheit gefunden werden konnte. Descartes und seine Anhänger - die Cartesianer (Cartesius ist der latinisierte Name für Descartes) - die an eine allgemeine auf Vernunft gegründete Methode glaubten, sahen ähnlich wie die Anhänger Platons in der Mathematik die Königin der Wissenschaften.

Dieser Zusammenhang des philosophischen Wirkens von Descartes mit dem mathematischen kommt auch darin zum Ausdruck, daß sein mathematisches Hauptwerk "La Géométrie" als Anhang zum "Discours de la Méthode" (Abhandlung von der Methode) erschien, worin Descartes sein rationalistisches Herangehen an das Studium der Natur erklärte. Hier schrieb er:

"Wer auch immer meine Gedanken aufmerksam prüfen wird, der wird bemerken, daß ich eine Wissenschaft im Auge habe, ganz verschieden von der Mathematik. Eher könnte die Mathematik ihre Hülle sein als ein Teil von ihr."

Descartes wird gemeinsam mit Fermat als der Begründer der analytischen Geometrie angesehen; und die Entstehung der Methoden der analytischen Geometrie charakterisiert zusammen mit der Herausbildung der Methoden der Differential- und Integralrechnung den Übergang zur modernen Mathematik.

Die Geometrie der Antike, insbesondere Euklids, ist synthetische Geometrie. Betrachtet werden hier die Inzidenz von Punkten und Geraden, Anordnungsfragen und Kongruenzprobleme. Der Grundgedanke der analytischen Geometrie besteht darin, daß geometrische Untersuchungen mit rechnerischen Methoden geführt werden, d. h., hier stehen der Zahl- und Koordinatenbegriff sowie das Arbeiten mit algebraischen Operationen im Mittelpunkt.

Descartes konnte diesen Schritt von der griechischen Wertung der Geometrie zur analytischen Betrachtung gehen, da für ihn die Arithmetik und die Algebra - die im 17. Jahrhundert hoch entwickelt war - der Geometrie rein logisch vorangehen und ihr außerdem noch sachlich übergeordnet sind. - Lassen wir Descartes selbst sprechen:

"Alle Probleme der Geometrie können leicht auf einen solchen Ausdruck gebracht werden, daß es nachher nur der Kenntnis gewisser gerader Linien bedarf, um diese Probleme zu konstruieren. Und gleichwie sich die gesamte Arithmetik nur aus vier oder fünf Operationen zusammensetzt ... so hat man auch in der Geometrie,

um die gesuchten Linien so umzuformen, daß sie auf bekanntes führen, nichts anders zu tun, als andre Linien ihnen hinzuzufügen oder von ihnen abzuziehen; oder aber, wenn eine solche gegeben ist, die ich, um sie mit den Zahlen in nähere Beziehung zu bringen, die Einheit nennen werde und die gewöhnlich ganz nach Belieben angenommen werden kann, und man noch zwei andre hat, eine vierte Linie zu finden, die sich zu einer dieser beiden verhält wie die andre zur Einheit, was dasselbe ist wie die Multiplikation; oder aber eine vierte Linie zu finden, die sich zu einer der beiden verhält wie die Einheit zur anderen, was dasselbe ist wie die Division. Oder endlich eine oder zwei oder mehrere mittlere Proportionale zu finden zwischen der Einheit und irgendwelchen andern Linien*), was dasselbe ist wie das Ausziehen der Quadrat- oder Kubikwurzel usw. - Und ich werde mich nicht scheuen, diese der Arithmetik entnommenen Ausdrücke in die Geometrie einzuführen, um mich dadurch verständlicher zu machen ... Hierbei ist zu bemerken, daß ich unter a^2 oder b^3 oder dergleichen nur einfache Linien verstehe, und daß ich nur, um mich der in der Algebra gebrauchten Bezeichnungen zu bedienen, dieselben als Quadrate, Kuben usw. benenne."

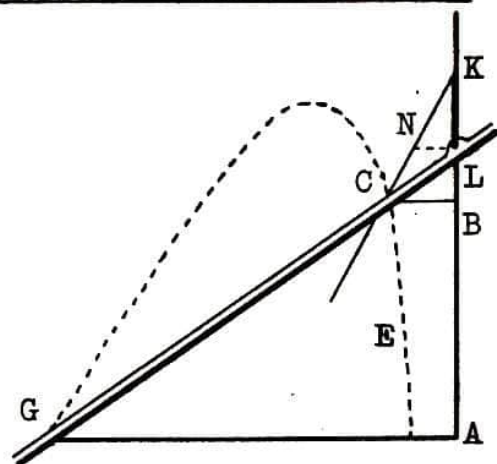
Wir haben absichtlich so umfangreich aus der "Géométrie" zitiert, weil hier die algebraische Großtat Descartes' - das wichtigste Koordinierungsprinzip: das Prinzip der Zuordnung einer Länge zu jeder Zahl, egal wie diese Zahl entstanden ist - deutlich wird. Jetzt erst war die Koordinatengeometrie möglich. Eine algebraische Gleichung wurde zu einer Beziehung zwischen Zahlen - ein neuer Fortschritt der mathematischen Abstraktion, der für die allgemeine Behandlung algebraischer Kurven notwendig war.

Übrigens stellt man fest, daß bei Descartes das Wort "Koordinaten" noch nicht zu finden ist. Es war vielmehr eine erst von Leibniz geprägte Bezeichnung für das, was Descartes "Fundamentallinien" nennt. Auch das rechtwinklige nach ihm benannte Cartesische Achsenkreuz gebraucht er im Prinzip nicht. Er arbeitet mit verschiedenen verkappten schiefwinkligen Koordinaten. Dabei erfolgt aber die Koordinierung bereits durchaus in unserem Sinne.

Descartes befaßte sich sehr eingehend mit dem Studium und der Klassifizierung algebraischer Kurven. Er stellte sich hierbei stets auf den Standpunkt der dynamischen Erzeugung (man sagt auch phoronomischen Erzeugung) der Kurven, d. h., die Kurven sollten durch eine stetige Bewegung oder durch mehrere aufeinanderfolgende solche Bewegungen erzeugbar sein. Ein schönes Beispiel für seine Methode liefert die folgende Skizze:

*) $x_1, x_2, \dots, x_n$ sind mittlere Proportionale zwischen a und b genau dann, wenn gilt $a : x_1 = x_1 : x_2 = x_2 : x_3 = \dots = x_n : b$.

Es geht Descartes um die Bestimmung der Gleichung der Kurve EC, die beschrieben wird durch den Schnittpunkt des Lineals GL mit der Verlängerung der Seite CNK des rechtwinkligen Dreiecks NKL, dessen Seite KL sich entlang der gegebenen Geraden BA bewegt, wenn das Lineal im Punkt G gedreht wird und es dabei ständig durch den Punkt L verläuft. Unter der Voraussetzung, daß GA, die Senkrechte zu BA, gleich a, $KL = b$, $NL = c$ seien, daß AB die x-Achse und A den Koordinatenursprung darstellen, bezeichnet Descartes die "unbestimmten und unbekannten Größen" CB mit y und BA mit x. Dann folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CBK und NLK einerseits und der Dreiecke CBL und GAL andererseits schnell die Gleichung der Kurve ECG.



$$yy = cy - \frac{c}{b} xy + ay - ac \quad 3)$$

(Descartes schrieb noch yy statt y^2 , obwohl er sonst y^3 für yyy, y^4 für yyyy usw. schrieb.)

In Descartes' "Géométrie" findet sich außerdem noch eine Theorie der Gleichungen, wobei er sich schon vollkommen klar ist über die Tatsache, daß der Grad der Gleichung die Anzahl der Lösungen bedingt. Am bekanntesten dürfte hier die nach ihm benannte Zeichenregel zur Bestimmung der Anzahl der Nullstellen eines Polynoms in Abhängigkeit von der Anzahl der Vorzeichenwechsel der Koeffizienten sein (siehe z. B. Kleine Enzyklopädie Mathematik, S. 142). Im Vorübergehen führt er hier auch noch die Ausdrücke "reell" und "imaginär" ein. - Bei der Diskussion von Kurven finden wir ebenso in vollster Allgemeinheit das Problem der Tangenten, Normalen, Subtangenten und Subnormalen aufgerollt. Er muß erkannt haben, daß Tangenten und Normalen faktisch die Gesetzgeber der Kurven sind.

Descartes war sich seiner Größe voll bewußt. In seiner "Géométrie" lesen wir:

"Und ich hoffe, daß unsere Enkel mir nicht nur für die Dinge Dank wissen werden, die ich hier auseinandergesetzt habe, sondern auch für diejenigen, die ich absichtlich übergangen habe, um ihnen das Vergnügen zu überlassen, sie zu erfinden." 4)

Egbert Creutzburg

Forschungsstudent

1) Zitiert in: Colerus, Von Pythagoras bis Hilbert, Rowohlt, Reinbeck b. Hamburg 1969, S. 136

2) Zitiert ebenda, S. 129

3) Aufgabe und Skizze aus История Математики, изд. "наука", Москва 1970, S. 105

4) Zitiert in: Colerus, Von Pythagoras bis Hilbert, S. 135

Unendliche Reihen (I)

Die unendlichen Reihen besitzen sowohl für den inneren Aufbau der Mathematik als auch für praktische Anwendungen große Bedeutung. Auf der Theorie der unendlichen Reihen begründen sich mannigfache numerische Methoden. Zum Beispiel wird die Zahl e , die als $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ definiert ist, wesentlich schneller und bequemer durch die unendliche Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!}$ näherungsweise berechnet. Gleiches gilt für Logarithmen- und Winkelfunktionen. Noch vor 200 Jahren war der Begriff der Summe einer unendlichen Reihe in der mathematischen Theorie nicht geklärt. So kann man die Schlußfolgerung

" $1-1+1-1+1-\dots = \left\{ \begin{array}{l} 1 - (1-1) = (1-1) - \dots = 1 \\ (1-1)+(1-1) + (1-1) - \dots = 0 \end{array} \right.$ - also besitzt $1-1+1-1+ \dots$ den Grenzwert $\frac{1}{2}$ "

finden. Wie wir später sehen werden, divergiert diese Reihe, besitzt also keine Summe.

Zunächst müssen wir den Begriff der unendlichen Summe erklären. Zur verkürzten Schreibweise einer endlichen Summe verwenden wir den griechischen Buchstaben Σ .

$\sum_{v=1}^n a_v$ ist eine Abkürzung für $a_1+a_2+\dots+a_n$.

Eine Summation über endlich viele Summanden ist im Körper der reellen Zahlen induktiv definierbar.

Was bedeutet aber nun $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$?

Die Summation unendlich vieler Summanden ist rein algebraisch nicht erklärbar bzw. führt zu keinem Resultat. Das Symbol $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ wird als Abkürzung für den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^n a_v$ verwendet.

Mit dieser Deutung werden wir uns im weiteren beschäftigen. Dazu stellen wir zuerst einige Grundbegriffe der Theorie der unendlichen Zahlenfolgen zusammen. Diese findet man z. B. im Lehrbuch der 11. Klasse oder zum Teil im Fachartikel "Konvergente Zahlenfolgen" (WURZEL 4/74).

1. ZahlenfolgenDefinition 1 :

Eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl v eine reelle Zahl a_v zuordnet, nennt man eine Zahlenfolge.

Wir werden Zahlenfolgen in der Form $\{a_v\}_{v=1}^{\infty}$ schreiben.

Definition 2 :

Die Zahlenfolge $\{a_v\}_{v=1}^{\infty}$ heißt konvergent, wenn es eine reelle Zahl a mit der folgenden Eigenschaft gibt: Zu jeder positiven reellen Zahl ε gibt es eine natürliche Zahl v_ε , so daß

$$|a_v - a| < \varepsilon$$

für alle natürlichen Zahlen v mit $v > v_\varepsilon$ erfüllt ist.

Die Zahl a heißt Grenzwert der Folge $\{a_v\}_{v=1}^{\infty}$.

(Schreibweise: $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = a$)

Satz 1 :

Es seien $\{a_v\}_{v=1}^{\infty}$, $\{b_v\}_{v=1}^{\infty}$ zwei konvergente Zahlenfolgen, für die gilt: $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = a$, $\lim_{v \rightarrow \infty} b_v = b$. Ferner seien α und β zwei reelle Zahlen.

Dann ist die Zahlenfolge $\{c_v\}_{v=1}^{\infty}$,
 $c_v =_{\text{Df}} \alpha \cdot a_v + \beta \cdot b_v$ für alle v , wieder konvergent,
 und es gilt für den Grenzwert:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} (\alpha \cdot a_v + \beta \cdot b_v) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b.$$

Satz 2 :

Es seien $\{a_v\}_{v=1}^{\infty}$ und $\{b_v\}_{v=1}^{\infty}$ zwei konvergente Zahlenfolgen mit $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = a$, $\lim_{v \rightarrow \infty} b_v = b$. Dann ist auch die durch $d_v =_{\text{Df}} a_v \cdot b_v$ definierte Zahlenfolge $\{d_v\}_{v=1}^{\infty}$ konvergent, und es gilt:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} (a_v \cdot b_v) = a \cdot b.$$

Satz 3 :

Es seien $\{a_v\}_{v=1}^{\infty}$ und $\{b_v\}_{v=1}^{\infty}$ zwei konvergente Zahlenfolgen mit $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = a$, $\lim_{v \rightarrow \infty} b_v = b$. Ferner sei $b \neq 0$. Dann existiert eine natürliche Zahl v^* , so daß für $v > v^*$ gilt: $b_v \neq 0$.

Die durch $e_v =_{\text{Df}} \frac{a_v}{b_v}$ für $v > v^*$, $e_v =_{\text{Df}} 1$ für $1 \leq v \leq v^*$

definierte Zahlenfolge $\{e_v\}_{v=1}^{\infty}$ ist konvergent, und es gilt: $\lim_{v \rightarrow \infty} e_v = \frac{a}{b}$.

Satz 4 :

Die Zahlenfolge $\{a_v\}_{v=1}^{\infty}$ sei gegeben durch $a_v = q^v$ für alle v . Ist $|q| < 1$, so gilt $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = 0$.

Definition 3 :

Eine Zahlenfolge $\{a_v\}_{v=1}^{\infty}$ heißt beschränkt, wenn es eine reelle Zahl L gibt, so daß für alle v $|a_v| \leq L$ gilt.

Definition 4 :

Eine Zahlenfolge $\{a_v\}_{v=1}^{\infty}$ heißt monoton wachsend (fallend), falls für alle v die Ungleichung $a_v \leq a_{v+1}$ ($a_v \geq a_{v+1}$) gilt.

Satz 5 :

Eine monoton wachsende (fallende) Zahlenfolge $\{a_v\}_{v=1}^{\infty}$ konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist.

Definition 5 :

$\{a_{v_\mu}\}_{\mu=1}^{\infty}$ heißt Teilfolge von $\{a_v\}_{v=1}^{\infty}$, falls $\{v_\mu\}_{\mu=1}^{\infty}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen ist (d. h. falls $v_1 < v_2 < v_3 < \dots$).

Satz 6 :

Es sei $\{a_v\}_{v=1}^{\infty}$ eine konvergente Zahlenfolge mit $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = a$. Dann ist auch jede Teilfolge $\{a_{v_\mu}\}_{\mu=1}^{\infty}$ eine konvergente Zahlenfolge, und es gilt $\lim_{\mu \rightarrow \infty} a_{v_\mu} = a$.

Beispiel:

$\{a_v\}_{v=1}^{\infty}$ mit $a_v =_{\text{Df}} \frac{1}{v}$.

Eine Teilfolge hiervon ist zum Beispiel $\{a_{v_\mu}\}_{\mu=1}^{\infty}$ mit $v_\mu = 2^\mu$.

Wie man sich überzeugen kann, sind die Bedingungen der Definition 5 erfüllt.

Schreiben wir uns die ersten Glieder beider Zahlenfolgen auf,

so erhalten wir $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ und $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

2. Unendliche ReihenDefinition 6 :

Gegeben sei eine Zahlenfolge $\{a_v\}_{v=1}^{\infty}$.

$s_n = \sum_{v=1}^n a_v$ heißt die n-te Partialsumme der unendlichen Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$.

Die unendliche Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ konvergiert gegen die Zahl s , falls die Folge der Partialsummen $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ gegen s konvergiert, d. h. $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ gilt.

Die Zahl s heißt Summe der unendlichen Reihe (Schreibweise: $\sum_{v=1}^{\infty} a_v = s$).

Hat die unendliche Reihe eine endliche Summe, so heißt sie konvergent, andernfalls (wenn die Summe gleich ∞ ist bzw. nicht existiert) nennt man die Reihe divergent.

Beispiele:

- ① Betrachten wir zuerst das in der Einleitung angegebene Beispiel $1-1+1-1+ \dots$.

Kürzer können wir für diese unendliche Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1}$ schreiben.

Berechnen wir jetzt die einzelnen Partialsummen, so können wir feststellen, daß $s_{2k} = 0$ und $s_{2k-1} = 1$ für beliebige natürliche Zahlen k gilt.

$\{s_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ und $\{s_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ sind beides Teilfolgen der Folge der Partialsummen $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Nach Satz 6 würde sich aus der Konvergenz der Folge $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ die Konvergenz der Teilfolgen $\{s_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{s_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ ableiten lassen, wobei zusätzlich noch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k} = s = \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k-1} \quad (*)$$

gelten müßte.

Wie wir aber festgestellt haben, ist $s_{2k} = 0$ für alle k und somit $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k} = 0$ und $s_{2k-1} = 1$ für alle k und somit $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k-1} = 1$. Damit ist die Bedingung $(*)$ verletzt, woraus folgt, daß $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ nicht konvergent sein kann. Nach unserer Definition 6 ist dann aber die unendliche Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1}$ divergent und besitzt somit keine Summe.

- ② Eine Folge $\{b_v\}_{v=0}^{\infty}$ heißt geometrische Folge, falls eine reelle Zahl q existiert, so daß für alle Folgenglieder $b_v = q \cdot b_{v-1}$ gilt.

Aus dieser Rekursionsformel können wir sofort die Beziehung $b_v = q^v \cdot b_0$ ableiten.

Falls $q \neq 1$ ist, erhält man für die n -te Partialsumme der geometrischen Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} b_0 \cdot q^v$ den Ausdruck

$$s_n = \sum_{v=0}^n b_0 q^v = b_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Unter Verwendung der Sätze 1, 3 und 4 und unter der zusätzlichen Voraussetzung $|q| < 1$ (wesentlich für die Anwendung von Satz 4!) können wir den Grenzwert von $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ berechnen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) = b_0 \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^{n+1})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q)} = b_0 \cdot \frac{1}{1 - q},$$

d. h. für $|q| < 1$ konvergiert die geometrische Reihe und besitzt die Summe $b_0 \cdot \frac{1}{1 - q}$.

Um auch über unendliche Reihen der Gestalt

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{x}{v} \right)^v, \quad \sum_{v=1}^{\infty} \frac{x^v}{v!} \quad (x \text{ feste reelle Zahl}), \quad \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(2v-1)^4}$$

Konvergenz- bzw. Divergenzaussagen treffen zu können, werden wir im 3. Abschnitt dieses Artikels einige wichtige Sätze über unendliche Reihen und im 4. Abschnitt drei Konvergenzkriterien für unendliche Reihen mit positiven Gliedern angeben und beweisen.

Hans-Gerd Leopold
Forschungsstudent
im Bereich Analysis

Titelbild: René Descartes. Aus der Sammelbildserie
"Berühmte Mathematiker" des VEB Verlag Bild und
Heimat Reichenbach. Sammlung Karger-Decker, Berlin.

Lösungen

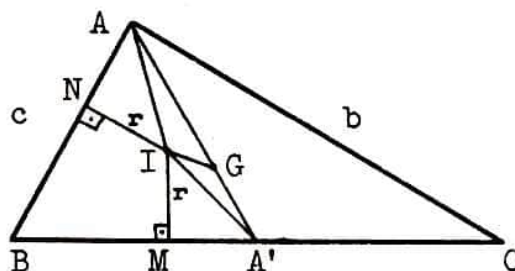
Aufgabe F 52

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck mit $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, I als Mittelpunkt des Inkreises, G als Schwerpunkt, A' als Mitte von $\overline{BC}$.

Ferner gelte $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, $r = \overline{IM} = \overline{NI}$ (r - Inkreisradius).

Dann gilt:

$$\overline{A'C} = \overline{A'B} = \frac{a}{2}$$



Ferner erhält man unter Verwendung der Tatsache, daß die Tangentenabschnitte von einem Punkt an einen Kreis gleichlang sind (es gilt also $\overline{BM} = \overline{BN}$ etc.), sofort die Beziehungen:

$$\overline{AN} = s-a \quad \text{und} \quad \overline{BM} = s-b.$$

Wenden wir auf die Dreiecke $BA'A$ und $A'CA$ den Kosinussatz an, so erhalten wir:

$$\overline{AA'}^2 + \frac{a^2}{4} - c^2 = a \cdot \overline{AA'} \cdot \cos \angle BA'A \quad (1)$$

$$b^2 - \overline{AA'}^2 - \frac{a^2}{4} = -a \cdot \overline{AA'} \cdot \cos \angle AA'C \quad (2)$$

Es gilt:

$$\angle BA'A + \angle AA'C = \pi$$

und somit

$$\cos \angle BA'A = -\cos \angle AA'C.$$

Wir erhalten aus (1) und (2)

$$\begin{aligned} \overline{AA'}^2 + \frac{a^2}{4} - c^2 &= b^2 - \overline{AA'}^2 - \frac{a^2}{4} \\ \overline{AA'} &= \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} \end{aligned} \quad (*)$$

Weiter gilt: $\overline{MA'} = \left| \frac{a}{2} - (s-b) \right| = \frac{|b-c|}{2}$

und $\overline{IA'} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2} \quad (*)$

$$\overline{IA'} = \sqrt{r^2 + (s-a)^2} \quad (*)$$

Die Seitenhalbierenden schneiden sich im Dreieck im Verhältnis 2:1. Daraus folgen die Beziehungen

$$\overline{AG} = \frac{2}{3} \overline{AA'} \quad ; \quad \overline{GA'} = \frac{1}{3} \overline{AA'} \quad . \quad (*)$$

In den Dreiecken $A'GI$ und GAI liefert der Kosinussatz:

$$\overline{IA'}^2 = \overline{IG}^2 + \overline{A'G}^2 - 2\overline{A'G} \cdot \overline{IG} \cdot \cos \sphericalangle A'GI \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \overline{IA}^2 &= \overline{IG}^2 + \overline{AG}^2 - 2\overline{AG} \cdot \overline{IG} \cdot \cos \sphericalangle IGA \\ &= \overline{IG}^2 + \overline{AG}^2 + 2\overline{AG} \cdot \overline{IG} \cdot \cos \sphericalangle A'GI \end{aligned} \quad (4)$$

(auf Grund gleicher Überlegungen wie vorhin).

Wir multiplizieren (3) mit $\overline{AG}$ und (4) mit $\overline{A'G}$ und addieren die entstehenden Gleichungen.

$$\overline{IA'}^2 \cdot \overline{AG} + \overline{IA}^2 \cdot \overline{A'G} - \overline{IG}^2 (\overline{AG} + \overline{A'G}) = \overline{AG} \cdot \overline{A'G} (\overline{AG} + \overline{A'G})$$

Nach Voraussetzung der Aufgabe (Inkreis des Dreiecks geht durch den Schwerpunkt) erhalten wir $\overline{IG} = r$.

Damit und mit den Gleichungen (*) folgt:

$$r^2 = \overline{IA}^2 \cdot \frac{\overline{GA'}}{\overline{AA'}} + \overline{IA'}^2 \cdot \frac{\overline{GA}}{\overline{AA'}} - \overline{AG} \cdot \overline{AG'}$$

$$r^2 = [r^2 + (s-a)^2] \cdot \frac{1}{3} + [r^2 + (\frac{b-c}{2})^2] \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot [2(b^2+c^2) - a^2]$$

$$r^2 = r^2 + \frac{1}{9} \cdot [2(a^2+b^2+c^2) - 3s^2]$$

$$3s^2 = 2(a^2+b^2+c^2)$$

$$\underline{5(a^2+b^2+c^2) = 6(ab + bc + ac)}$$

Herausgeber: Leitung der FDJ-Grundorganisation der Friedrich-Schiller-Universität Jena;
Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Egbert Creutzburg

Chefredakteur: Waltraud Werner

Redaktion: J. Dubslaff, H.-G. Leopold, Th. Ullrich, G. Weske

Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

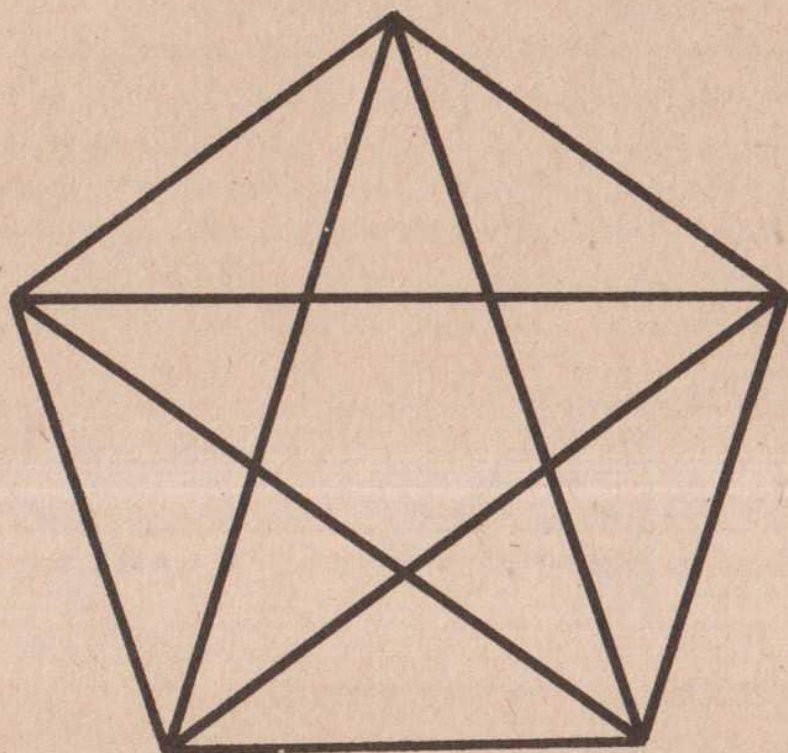
12180

128

33873 10/74 235

Michel, Joh.

Tschaikowskistr. 4



3

75

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Ju-
gendobjekt Studienvor-
bereitung der Sektion
Mathematik an der
Friedrich-Schiller-Uni-
versität Jena

9. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Konvergenzgeschwindigkeit von Zahlenfolgen

1. Konvergente Zahlenfolgen

Unter einer Zahlenfolge verstehen wir (vgl. WURZEL 4/74 sowie 2/75) eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl x_n zuordnet. Wir wollen mit x_n das n -te Folgenglied, mit $(x_k) = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ die Folge bezeichnen. Außerdem werden wir die im weiteren betrachteten Zahlenfolgen als konvergent voraussetzen und schreiben $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ für den Grenzwert der Folge (x_k) .

Ausführlich:

Definition 1:

$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n =_{\text{Df}}$ zu jeder positiven reellen Zahl ε gibt es eine reelle Zahl N_ε , so daß für alle natürlichen Zahlen n mit $n > N_\varepsilon$ die Beziehung $|x_n - x| < \varepsilon$ erfüllt ist.

Beispiele:

$$(1) \quad (x'_k) = \left(\frac{1}{k+1}\right)$$

$$(2) \quad (x''_k) = \left(\frac{1}{2^k}\right)$$

$$(3) \quad (x'''_k) = \left(\frac{1}{2^{2^k}}\right)$$

Diese 3 Folgen konvergieren gegen Null.

Beweis der Konvergenz von (x'_k) :

$$|x'_n - 0| = \left|\frac{1}{n+1} - 0\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \text{ist erfüllt für}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < n+1,$$

$$\text{d. h.} \quad \frac{1}{\varepsilon} - 1 < n.$$

Deshalb können wir $N_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} - 1$ wählen.

Die Folgen (2) und (3) sind Teilfolgen von (1) und haben deshalb den gleichen Grenzwert, sind damit auch Nullfolgen.

Wir wollen die ersten Glieder der 3 Folgen betrachten (auf 9 Stellen nach dem Komma berechnet).

	$(x'_k) = \left(\frac{1}{k+1}\right) (1)$	$(x''_k) = \left(\frac{1}{2^k}\right) (2)$	$(x'''_k) = \left(\frac{1}{2^{2^k}}\right) (3)$
x_0	1.000 000 000	1.000 000 000	1.000 000 000
x_1	0.500 000 000	0.500 000 000	0.250 000 000
x_2	0.333 333 333	0.250 000 000	0.062 500 000
x_3	0.250 000 000	0.125 000 000	0.003 906 250
x_4	0.200 000 000	0.062 500 000	0.000 015 259
x_5	0.166 666 667	0.031 250 000	0.000 000 000

Während die Werte x_5 von (1) und (2) noch deutlich vom Grenzwert Null verschieden sind, liefert uns x_5''' bereits (im Rahmen der Genauigkeit von 9 Stellen) die Null, mit anderen Worten, (1) konvergiert am "langsamsten" und (3) am "schnellsten".

2. Konvergenzfaktoren

Wir werden nun ein Maß dafür einführen, wie "langsam" oder "schnell" eine Folge konvergiert. Mit ε_n wird der Abstand des n -ten Folgengliedes vom Grenzwert (d. h. der Fehler) bezeichnet, also

$$\varepsilon_n = |x_n - x|.$$

Definition 2:

(x_k) sei eine konvergente Folge, $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Es existiere die Zahl

$$Q_1(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x|}{|x_n - x|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}.$$

Dann heißt $Q_1(x_k)$ (asymptotischer) Konvergenzfaktor der Folge (x_k) (falls dieser Grenzwert existiert).

Mit anderen Worten: Q_1 gibt uns für $n \rightarrow \infty$ das Verhältnis der Fehler ε_{n+1} und ε_n , oder für große n $\varepsilon_{n+1} \approx Q_1(x_k) \cdot \varepsilon_n$ 1). Eine Folge konvergiert daher umso schneller, je kleiner Q_1 ist.

1) Das Zeichen $\approx$ soll ausdrücken, daß die Beziehung nur näherungsweise erfüllt ist, und zwar umso besser, je größer n ist.

Exakt formuliert: Zu jedem positiven δ gibt es ein N_δ , so daß für alle natürlichen $n > N_\delta$ die Beziehung

$$\varepsilon_{n+1} \leq (Q_1(x_k) + \delta) \cdot \varepsilon_n$$

erfüllt ist.

Für $0 < Q_1(x_k) < 1$ heißt (x_k) linear konvergent, falls $Q_1(x_k) = 0$ sagen wir, daß (x_k) superlinear konvergiert, und für $Q_1(x_k) \geq 1$ soll (x_k) sublinear konvergent heißen.

Wir wollen die Konvergenzordnungen für unsere Beispiele ausrechnen.

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{1}{n+2} - 0 \right|}{\left| \frac{1}{n+1} - 0 \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{1}{2^{n+1}} - 0 \right|}{\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{1}{2^{2^{n+1}}} - 0 \right|}{\left| \frac{1}{2^{2^n}} - 0 \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2^n}}{2^{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2^n}}{2^{2 \cdot 2^n}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2^n}}{(2^{2^n})^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{2^n}} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} = 0$$

Danach konvergiert (1) sublinear (d. h. schlechter als linear), (2) linear und (3) superlinear (besser als linear).

Ganz analog können wir den Begriff der quadratischen Konvergenz oder allgemeiner der Konvergenz p -ter Ordnung einführen. Dazu wird Definition 2 verallgemeinert:

Definition 3:

(x_k) sei eine konvergente Folge, $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$,
 p eine reelle Zahl mit $1 \leq p < \infty$. Es existiere

$$Q_p(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x|}{|x_n - x|^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^p}.$$

Dann heißt $Q_p(x_k)$ (asymptotischer) Konvergenzfaktor der Ordnung p .

Das bedeutet, daß zwischen ε_{n+1} und ε_n die Beziehung (für genügend große n)

$$\varepsilon_{n+1} \approx Q_p(x_k) \cdot \varepsilon_n^p \quad 2)$$

erfüllt ist.

Falls $0 < Q_2(x_k) < +\infty$, heißt (x_k) quadratisch konvergent, für $Q_2(x_k) = 0$ konvergiert (x_k) superquadratisch, und falls $Q_2(x_k) = +\infty$ (uneigentlicher Limes), nennen wir (x_k) subquadratisch konvergent.

Aufgabe: Man zeige, daß (1) und (2) subquadratisch konvergieren.

Die Folge (3) konvergiert quadratisch, denn

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{1}{2^{2^{n+1}}} - 0 \right|}{\left| \frac{1}{2^{2^n}} - 0 \right|^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^{2^n})^2}{2^{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2^n \cdot 2}}{2^{2^{n+1}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2^{n+1}}}{2^{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1. \end{aligned}$$

Allgemein läßt sich beweisen, daß jede linear konvergente Folge subquadratisch und jede quadratisch konvergente Folge superlinear konvergiert.

Gregor Weske

**Student des 4. Studienjahres
im Bereich Numerische Mathematik**

2) Genauer: Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein N_δ , so daß für $n > N_\delta$

$$\varepsilon_{n+1} \leq (Q_p(x_k) + \delta) \cdot \varepsilon_n^p \quad \text{gilt.}$$

Preisaufgaben 3/75

(G 13) Die natürlichen Zahlen werden wie folgt in Gruppen angeordnet:

②

(1), (2,4), (3,5,7), (6,8,10,12), (9,11,13,15,17)...

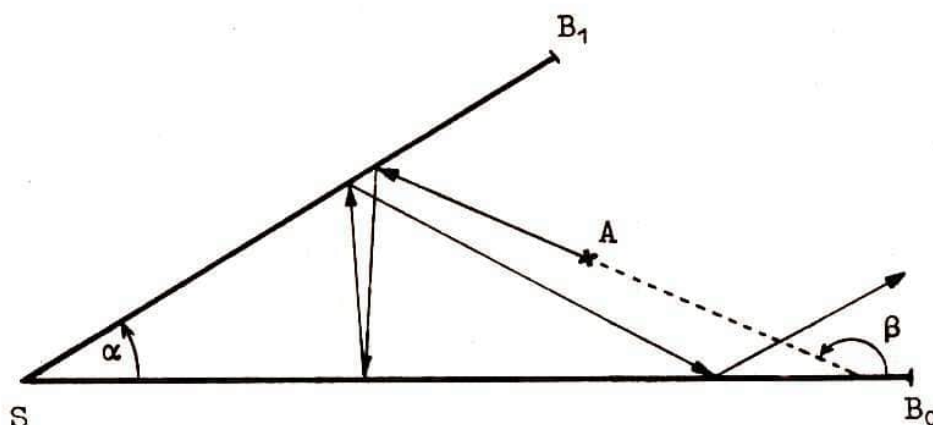
Man berechne die Summe der Zahlen der n-ten Gruppe.

(G 14) Man löse die Gleichung

①

$$\log_{\sin x} \left(\sin x - \frac{1}{4} \cos x \right) = 3.$$

- (G 15) Von einem Punkt A aus, der im Inneren eines Winkels α gelegen ist, wird ein Lichtstrahl ausgesendet. Die beiden Schenkel des Winkels seien verschieden lang. Man beweise, daß die Zahl der Reflexionen, die der ausgesandte Lichtstrahl an den Seiten des Winkels erfährt, immer endlich ist. Man gebe die Zahl der Reflexionen in Abhängigkeit von den Winkeln α und β (s. Skizze) an, und finde eine Bedingung, unter welcher der Lichtstrahl nach dem Aussenden nochmals durch den Punkt A läuft.



- (G 16) Man beweise den Satz 14 im Fachartikel "Unendliche Reihen"!

- (G 17) Man untersuche die unendliche Reihe

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{5(v+1)}{2v^2 \cdot v!} \right)^v$$

auf Konvergenz!

- (G 18) Найти одно решение системы

$$\begin{array}{rcl} x_1(x_2 + x_3 + \dots + x_n) + 1 \cdot 2 \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 & = & 9a^2 \\ x_2(x_1 + x_3 + \dots + x_n) + 2 \cdot 3 \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 & = & 25a^2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_n(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) + n(n+1)(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 & = & (2n+1)^2 a^2. \end{array}$$

Einsendeschluß: 30. 4. 1975

Unendliche Reihen (II)

3. Hauptsätze über unendliche Reihen

Satz 7 (Cauchysches Konvergenzkriterium):

Die unendliche Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ konvergiert genau dann, wenn zu jeder positiven reellen Zahl ε eine reelle Zahl M_ε existiert, so daß für alle natürlichen Zahlen $m, n > M_\varepsilon$ die Ungleichung $|\sum_{v=1}^n a_v - \sum_{v=1}^m a_v| < \varepsilon$ erfüllt ist.

Dieser Satz entspricht dem Cauchyschen Konvergenzkriterium für reelle Zahlenfolgen (siehe WURZEL 4/74) und wird hier ohne Beweis angegeben.

Satz 8:

Falls die unendliche Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ konvergiert, so folgt daraus $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = 0$.

Beweis:

Zu zeigen ist, daß für jedes $\varepsilon > 0$ ein v^* existiert, so daß für $v > v^*$ $|a_v| < \varepsilon$ gilt. $\varepsilon > 0$ sei beliebig, aber im Verlauf der Rechnung fest vorgegeben.

$\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ ist konvergent. Nach Satz 7 gilt dann, daß ein M_ε existiert und für $n, m > M_\varepsilon$ gilt $|\sum_{v=1}^n a_v - \sum_{v=1}^m a_v| < \varepsilon$. (*)

Wir definieren unser gesuchtes v^* als $M_\varepsilon + 1$, und müssen jetzt noch zeigen, daß v^* das Gewünschte leistet.

$$v > v^* \longrightarrow v > M_\varepsilon + 1$$

Also ist auch $v-1 > M_\varepsilon$.

v und $v-1$ sind natürliche Zahlen mit $v, v-1 > M_\varepsilon$. Also muß für v und $v-1$ die Beziehung (*) gelten, d. h. aber ($n = v$, $m = v-1$)

$$\left| \sum_{i=1}^v a_i - \sum_{i=1}^{v-1} a_i \right| = \left| \sum_{i=1}^v a_i - \sum_{i=1}^{v-1} a_i \right| < \varepsilon,$$

also auch $|a_v| < \varepsilon$, da ja

$$\sum_{i=1}^v a_i - \sum_{i=1}^{v-1} a_i = a_v \text{ ist.}$$

Damit haben wir zu einem beliebig gewählten $\varepsilon > 0$ ein v^* mit der geforderten Eigenschaft gefunden. Also gilt $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = 0$. ■

Wie wir noch an einem Beispiel sehen werden, ist die Bedingung $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = 0$ notwendig, aber nicht hinreichend für die Konvergenz von $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$. D. h., aus der Gültigkeit von $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = 0$ darf nicht auf die Konvergenz der unendlichen Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ geschlossen werden.

Entfernt man aus einer Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ die ersten m Glieder, so erhält man eine Restreihe $\sum_{v=m+1}^{\infty} a_v$.

Mit A_m bezeichnen wir die (endliche) Summe der ersten m Glieder -
 $A_m = \sum_{v=1}^m a_v$.

Satz 9:

Die unendliche Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ konvergiert gegen die Summe s genau dann, wenn die unendliche Reihe $\sum_{v=m+1}^{\infty} a_v$ gegen die Summe $(s - A_m)$ konvergiert.

Beweis: Bezeichnen wir die Partialsummen der Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ mit s_n und die der Reihe $\sum_{v=m+1}^{\infty} a_v$ mit s'_n , so erhalten wir für $n > m$:

$$s_n = \sum_{v=1}^n a_v = \sum_{v=1}^m a_v + \sum_{v=m+1}^n a_v = A_m + s'_n,$$

da s'_n gerade als $\sum_{v=m+1}^n a_v$ definiert ist.

A_m ist eine Konstante, und somit folgt unter der Voraussetzung, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ ist,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_m + s'_n) = A_m + \lim_{n \rightarrow \infty} s'_n,$$

die Existenz des Grenzwertes der Folge $\{s_n\}_{n=m+1}^{\infty}$

und sein Wert als $\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = s - A_m$.

Umgekehrt folgt aus $\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = s - A_m$ die Konvergenz von $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$,

und der Grenzwert bestimmt sich zu $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = A_m + (s - A_m) = s$.

Wir sehen also, daß das Entfernen endlich vieler Anfangsglieder einer unendlichen Reihe oder das Hinzufügen endlich vieler Glieder an den Anfang einer unendlichen Reihe keinen Einfluß auf das Verhalten dieser Reihe bezüglich ihrer Konvergenz oder Divergenz hat. Selbstverständlich wird sich im Falle der Konvergenz der Wert ihrer Summe ändern.

Dieser Satz 9 gibt also noch eine nachträgliche Rechtfertigung für das Beispiel der geometrischen Reihe. Hier hatten wir bei der

Summation nicht erst bei 1, sondern bereits bei 0 begonnen.

Satz 10 :

Die unendlichen Reihen $\sum_{v=1}^{\infty} a_v = s$ und $\sum_{v=1}^{\infty} b_v = s'$ seien beide konvergent. λ und μ seien zwei beliebige reelle Zahlen. Dann ist die unendliche Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} c_v$ mit $c_v = \lambda a_v + \mu b_v$ wieder konvergent, und es gilt $\sum_{v=1}^{\infty} (\lambda a_v + \mu b_v) = \lambda s + \mu s'$.

Der Beweis ergibt sich sofort aus Satz 1 und Definition 6.

Beispiel:

Die harmonische Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}$ ist divergent.

Offenbar gilt für jede natürliche Zahl n die Ungleichung

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \quad (*)$$

Entfernen wir aus der harmonischen Reihe die ersten beiden Glieder (das ist nach Satz 9 erlaubt), so lassen sich die übrigen Glieder in aufeinanderfolgende Gruppen zu $2, 4, 8, \dots, 2^{k-1}, \dots$

Glieder einteilen:

$$\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_2; \quad \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{2^2}; \quad \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{2^3}; \quad \dots$$

Jede dieser Summen ist nach (*) größer als $\frac{1}{2}$ ($n = 2^{k-1}$ in (*) eingesetzt).

Damit gilt für die 2^k -ten Partialsummen der harmonischen Reihe

$$s_{2^k} > k \cdot \frac{1}{2}$$

und somit $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (k \cdot \frac{1}{2}) = \infty$;

$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2^k} = \infty$ - ein eigentlicher Grenzwert existiert nicht.

Würde die Folge der Partialsummen $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ der harmonischen Reihe konvergieren, so müßte auch die Teilfolge $\{s_{2^k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergieren

(Satz 6). $\{s_{2^k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergiert aber nicht gegen eine reelle

Zahl, also ist auch $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ nicht konvergent. D. h. aber,

$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}$ divergiert.

Trotzdem gilt bei diesem Beispiel

$$\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v} = 0.$$

Also ist diese Bedingung (siehe Satz 8) notwendig, aber nicht

hinreichend für die Konvergenz einer unendlichen Reihe.

Satz 11 :

Die unendliche Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^{\alpha}}$ konvergiert für $\alpha > 1$.

Auf den Beweis müssen wir hier verzichten, da dieser zuviel Raum in Anspruch nehmen würde.

4. Konvergenzkriterien

Die folgenden Sätze gelten nur für unendliche Reihen mit positiven Gliedern, d. h. für alle a_v muß $a_v \geq 0$ gelten.

Satz 12 (Majorantenkriterium):

Gegeben seien zwei positive unendliche Reihen

$$\sum_{v=1}^{\infty} a_v \quad (*) \quad \text{und} \quad \sum_{v=1}^{\infty} b_v \quad (**).$$

Ist die Ungleichung $a_v \leq b_v$ von einem bestimmten v^* an, etwa für $v \geq v^*$, erfüllt, so folgt aus der Konvergenz der Reihe $(**)$ die Konvergenz der Reihe $(*)$ und aus der Divergenz der Reihe $(*)$ die Divergenz der Reihe $(**)$.

Beweis: Nach Satz 9 gilt, daß endlich viele Anfangsglieder (etwa $a_1, \dots, a_{v^*}$) das Konvergenzverhalten einer unendlichen Reihe nicht beeinflussen. Wir können also o. B. d. A. annehmen, daß $a_v \leq b_v$ für $v=1, 2, 3, \dots$ gilt.

s_n sei die n -te Partialsumme von $(*)$,

s'_n sei die n -te Partialsumme von $(**)$.

Dann erhalten wir aus der Ungleichung:

$$s_n \leq s'_n.$$

Da die Reihen nur positive Glieder besitzen, sind die Folgen $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{s'_n\}_{n=1}^{\infty}$ monoton wachsend. Wir können den Satz 5 anwenden.

1. $()$ sei konvergent.**

Also ist $\{s'_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergent und somit nach Satz 5 beschränkt.

Es existiert eine reelle Zahl L mit

$$|s'_n| \leq L \quad \text{für alle } n.$$

Für alle n gilt außerdem $s'_n \geq 0$, $s_n \geq 0$ (die Reihen bestehen nur aus positiven Gliedern).

Dann gilt aber auch

$$0 \leq s_n \leq L, \quad$$

$$\text{also } |s_n| \leq L, \quad$$

und nach Satz 5 ist $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ dann konvergent.

2. (*) sei divergent.

Zu zeigen ist die Divergenz von (**).

Der Beweis wird indirekt geführt.

Wir nehmen an, daß (**) konvergent ist. Dann folgt aus dem unter 1. Bewiesenen, daß auch (*) konvergent sein muß. Dies ist aber ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung, daß (*) divergent ist.

Also ist die Annahme, (**) sei konvergent, falsch.

Dann muß (**) aber divergent sein. ■

Beispiel:

Die unendliche Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2+3v+5}$ ist konvergent.

Für $v \geq 1$ gilt die Ungleichung $\frac{1}{v^2+3v+5} < \frac{1}{v^2}$.

Die unendliche Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2}$ konvergiert nach Satz 11.

Wir wenden das Majorantenkriterium an und erhalten als Resultat, daß die unendliche Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2+3v+5}$ konvergiert.

Satz 13 (Wurzelkriterium oder Cauchysches Kriterium):

Gegeben sei eine positive unendliche Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$.
Gibt es eine natürliche Zahl v^* , so daß für $v \geq v^*$ die Ungleichung

$$\sqrt[v]{a_v} \leq q$$

gilt, wobei q eine konstante reelle Zahl mit $|q| < 1$ ist, so ist die Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ konvergent.

Gilt für $v \geq v^*$ die Ungleichung

$$\sqrt[v]{a_v} \geq 1,$$

so ist $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ divergent.

Beweis:

- ① Wir können wieder (nach Satz 9) o. B. d. A. annehmen, daß $\sqrt[v]{a_v} \leq q < 1$ für $v \geq 1$ gilt ($v^* = 1$).

Aus dieser Ungleichung folgt

$$a_v \leq q^v \quad \text{mit } |q| < 1.$$

Die geometrische Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} q^v$ konvergiert, wie wir als Beispiel im 2. Abschnitt gezeigt haben, für $|q| < 1$. Somit können wir das Majorantenkriterium anwenden (Reihe (*) entspricht $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$, Reihe (**) entspricht $\sum_{v=1}^{\infty} q^v$) und erhalten die Konvergenz der Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$.

② Es gelte für $v \geq v^*$

$$\sqrt[v]{a_v} \geq 1.$$

Hieraus folgt $a_v \geq 1$ für $v \geq v^*$

und somit, falls der Grenzwert der Zahlenfolge $\{a_v\}_{v=1}^{\infty}$ überhaupt existiert,

$$\lim_{v \rightarrow \infty} a_v \neq 0.$$

Damit ist die notwendige Bedingung für die Konvergenz der unendlichen Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ verletzt. (Nach Satz 8 ist $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = 0$ notwendige Bedingung.)

Die unendliche Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ ist divergent.

Für das Nachprüfen der Konvergenz oder Divergenz von unendlichen Reihen ist eine verschärfte Fassung des Satzes 13 bequemer zu handhaben:

Satz 13':

$\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ sei eine unendliche positive Reihe. Der Grenzwert $\lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[v]{a_v} = A$ möge existieren.

Dann gilt: $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ konvergiert, falls $A < 1$ ist.

$\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ divergiert, falls $A > 1$ ist.

Beispiel: $\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{x}{v}\right)^v$ ist konvergent.

Es gilt nämlich $\lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[v]{a_v} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{x}{v} = 0$, woraus nach Satz 13' die Konvergenz der unendlichen Reihe folgt.

Satz 14 (Quotientenkriterium oder d'Alembertsches Kriterium):

Gegeben sei eine positive unendliche Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$.

Gibt es eine natürliche Zahl v^* , so daß für $v \geq v^*$

die Ungleichung

$$\frac{a_{v+1}}{a_v} \leq q$$

gilt, wobei q eine konstante reelle Zahl mit $0 < q < 1$ ist, so ist die Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ konvergent.

Gilt für $v \geq v^*$ die Ungleichung

$$\frac{a_{v+1}}{a_v} \geq 1,$$

so ist $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ divergent.

Beweis: Preisaufgabe G 16

Satz 14':

$\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ sei eine unendliche positive Reihe.

Der Grenzwert $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{a_{v+1}}{a_v} = B$ möge existieren. Dann

gilt: $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ konvergiert, falls $B < 1$ ist.

$\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ divergiert, falls $B > 1$ ist.

Wie auch bei Satz 13' ist für den Fall $B = 1$ keine Aussage möglich.

Beispiel: $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{x^v}{v!}$ ist konvergent.

Es gilt: $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{a_{v+1}}{a_v} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{x^{v+1} \cdot v!}{(v+1)! x^v} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{x}{(v+1)} = 0.$

Hieraus folgt nach Satz 14' die Konvergenz der unendlichen Reihe.

Wir haben bisher nur Aussagen über die Konvergenz oder Divergenz und nicht über die Größe der Summe einer unendlichen Reihe im Konvergenzfall getroffen. Deshalb geben wir zum Abschluß noch die Summen einiger Reihen an:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v!} = e; \quad \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(2v-1)} = \frac{\pi^4}{96}; \quad \sum_{v=2}^{\infty} \frac{1}{v(v-1)} = 1; \quad \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Hans-Gerd Leopold
Forschungsstudent
im Bereich Analysis

Lösungen

Zu den Lösungen der Serie 10/74

Unter den Einsendungen zu dieser Serie befanden sich leider ca. 40% mangelhafte Lösungen. Ein besonderer Schwerpunkt lag bei den Aufgaben F 49, F 50 und F 53, zu denen auch die größte Anzahl Lösungen eintraf.

Bei den Einsendungen zur F 49 fehlte des öfteren die Angabe der Lösung $x = k\pi$ für beliebige $a > 0$.

Der Hauptfehler der Lösungen zur F 50 bestand in der Nichtbeachtung der notwendigen Lösungsbedingung $a - \sqrt{a+x} \geq 0$. Hierdurch reduziert sich die Vielzahl der Lösungen auf

$$x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{4a-3}) \text{ für } a \geq 1 \text{ und } x = 0 \text{ für } a = 0.$$

Bei der Aufgabe F 53 schließlich wurden teilweise völlig falsche Lösungsintervalle angegeben, und auch der Hinweis darauf, daß die angegebenen Bedingungen hinreichend für die Erfüllung der Ungleichung sind, fehlte oft.

Zu den Lösungen der Serie 11/74

Die Hauptfehlerquellen der zur Serie 11/74 eingegangenen Lösungen waren:

F 57: Unverständnis der Definition 8 des Fachartikels über Topologie und falsches Rechnen mit den Beträgen reeller Zahlen.

F 59: Zum wiederholten Male das Nichtbeachten der an die Parameter a und b zu stellenden Bedingungen für die Lösbarkeit des Gleichungssystems. Diese sind:

$$a \geq b \geq 0 \text{ und } a+b \neq 0 \text{ mit den Lösungen } x = \frac{ab}{a+b}, y = \frac{a+b}{4} \text{ bzw.}$$

$$a=b=0 \text{ mit } x=y=0.$$

(Zur F 58 siehe veröffentlichte Lösung.)

Aufgabe F 55 (nach Marcus Kasner, Templin, 11. Klasse)

Gegeben ist die Funktion $f(m) = \frac{\sum_{n|m} n}{\sum_{n|m} n^0}$ ($m \in G, m > 1$).

Dabei stellt der Zähler die Summe der Teiler von m dar und der Nenner die Anzahl dieser Teiler.

$$\text{Es gilt } f(2) = \frac{3}{2}, f(3) = 2. \quad (1)$$

Ist $m > 3$, dann hat m die Teiler 1 und m ; und falls m keine Primzahl ist, so hat m noch weitere Teiler $a_1, \dots, a_p$. Für diese gilt $a_i \geq 2$ ($1 \leq i \leq p$). Folglich gilt: $a_1 + \dots + a_p \geq 2p$.

Wegen $m > 3$ folgt: $1 + m + a_1 + \dots + a_p > 2p + 4 = 2(p+2)$,

$$\text{d. h. } 2 < \frac{1 + m + a_1 + \dots + a_p}{p+2} = f(m). \quad (2)$$

Mit (1), (2) ergibt sich, daß $f(m)$ den kleinsten Wert für $m = 2$ annimmt, nämlich $f(2) = \frac{3}{2}$. Sei nun m Primzahl, d. h. $f(m) = \frac{1+m}{2}$.

Da es keine größte Primzahl gibt, kann $f(m)$ keinen größten Wert annehmen.

Aufgabe F 57 (nach Hans-Ullrich Frömmer, Peckatel, 12. Klasse)

Wir verwenden die Eigenschaften des metrischen Raumes, wie sie in der WURZEL 11/74, S. 37 (Definition 8) angegeben sind.

Durch zweimaliges Anwenden der Dreiecksungleichung (c) erhalten wir

$$d(x,y) \leq d(x,y') + d(y',y)$$

$$d(x,y') \leq d(x,x') + d(x',y')$$

und
$$d(x,y) \leq d(x,x') + d(y',y) + d(x',y')$$

$$d(x,y) - d(x',y') \leq d(x,x') + d(y',y) .$$

Auf Grund der Symmetrie von d (b) gilt $d(y,y') = d(y',y)$ und damit:

$$d(x,y) - d(x',y') \leq d(x,x') + d(y,y') \quad (*)$$

Auf analoge Weise (in obiger Rechnung x,y,x',y' durch x',y',x,y ersetzen und nochmals b) anwenden):

$$d(x',y') - d(x,y) \leq d(x,x') + d(y,y') \quad (**)$$

Aus (*) und (**) folgt die behauptete Ungleichung.

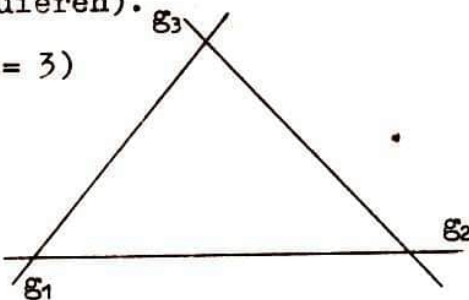
Aufgabe F 58

Fast alle Einsender lösten diese Aufgabe durch vollständige Induktion nach der Anzahl der vorgegebenen Geraden. Diese Lösungsmethode ist jedoch falsch. Mit Hilfe der vollständigen Induktion nach der Anzahl der vorgegebenen Geraden erhält man hier nur folgende Aussage:

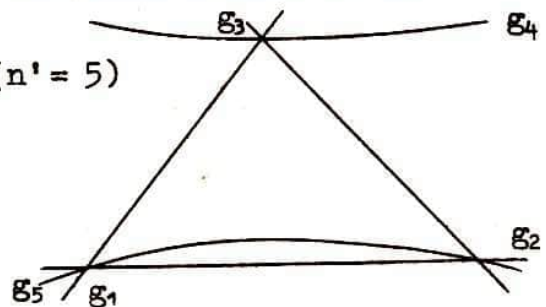
Wenn man von einem Fall ausgeht, bei dem n vorgegebene Geraden durch einen Punkt gehen, so erhält man durch Hinzunahme der $(n+1)$ -ten Geraden, d. h. nur einer Geraden, eine Konfiguration im Sinne der Aufgabenstellung, wenn alle $n+1$ Geraden durch einen Punkt verlaufen.

Diese Aussage beweist aber noch nicht die Behauptung. Die Möglichkeit, daß n_1 Geraden, für die die Voraussetzungen der Aufgabenstellung nicht gelten, mit n_2 Geraden so geschnitten werden, daß eine im Sinne der Aufgabe zulässige Konfiguration entsteht, wird nicht erfaßt. Die folgende Darstellung möge das veranschaulichen (ein exaktes Gegenbeispiel läßt sich natürlich nicht konstruieren).

$(n_1 = 3)$



$(n' = 5)$

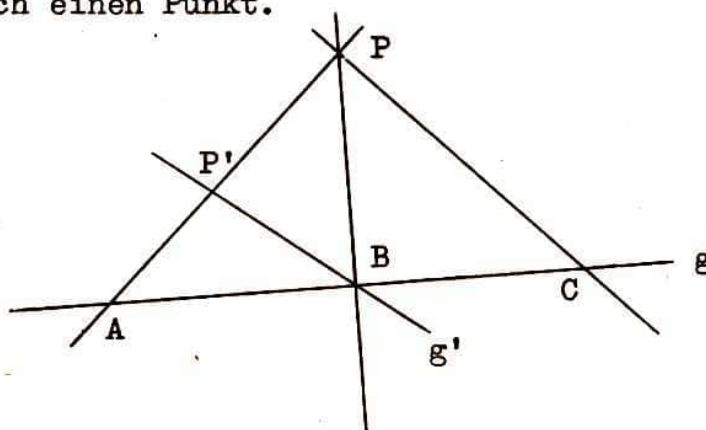


Auf Grund desselben Beispiels kann auch eine vollständige Induktion über die Anzahl der hinzugenommenen Geraden nicht erfolgen.

Eine Möglichkeit der Lösung ist die mit Hilfe des indirekten Beweises:

Annahme: Die Geraden gehen nicht alle durch einen Punkt.

Sei P der Schnittpunkt von drei Geraden, wobei P ein zu Geraden g nächstliegender Punkt ist, durch den zwei Geraden gehen und g nicht durch P verläuft. Die drei Geraden durch P mögen g in A , B , C schneiden (mit B auf $\overline{AC}$). Durch B muß nach Voraussetzung noch eine weitere Gerade g' verlaufen, g' schneidet nun aber entweder $\overline{AP}$ oder $\overline{CP}$ in P' . Der Abstand von P' zu g ist jedoch kleiner als der von P zu g . Das ist ein Widerspruch zur Annahme, daß P ein zu g nächstliegender Punkt sei. Damit kann eine solche Gerade g nicht existieren, d. h., alle Geraden verlaufen durch einen Punkt.



Herausgeber: Leitung der FDJ-Grundorganisation der Friedrich-Schiller-Universität Jena;
Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Egbert Creutzburg

Chefredakteur: Waltraud Werner

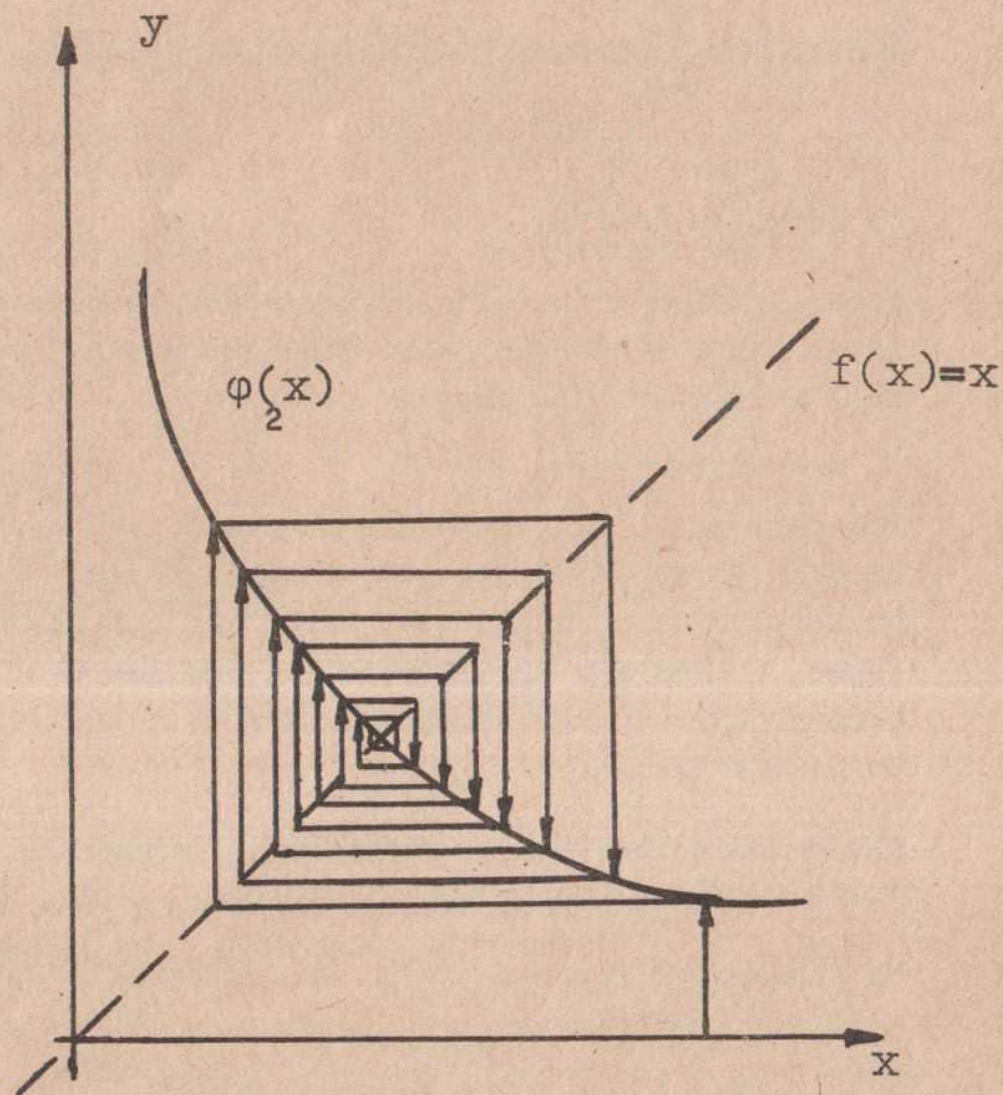
Redaktion: J. Dubslaff, H.-G. Leopold, Th. Ullrich, G. Weske

Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,50 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.



4

75

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Ju-
gendobjekt Studienvor-
bereitung der Sektion
Mathematik an der
Friedrich-Schiller-Uni-
versität Jena

9. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Iterative Lösung nichtlinearer Gleichungen

1. Aufgabenstellung

Eine wichtige Aufgabe der Numerischen Mathematik besteht im Lösen von Gleichungen. Als wichtigen nicht trivialen Spezialfall wollen wir Gleichungen der Form

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

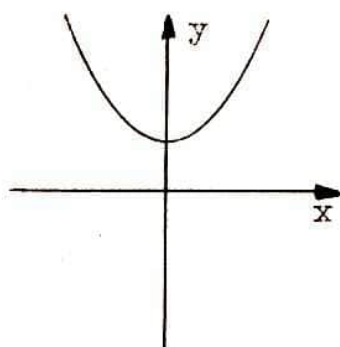
betrachten, wobei f eine nichtlineare reellwertige Funktion der reellen Variablen x ist. Mit anderen Worten: Wir suchen reelle Nullstellen der Funktion f . Bevor wir auf Lösungsmethoden eingehen, wollen wir uns klarmachen, daß das Problem (1) nicht unbedingt eine Lösung haben muß oder auch beliebig viele Lösungen aufweisen kann.

Als Beispiel betrachten wir die Gleichung

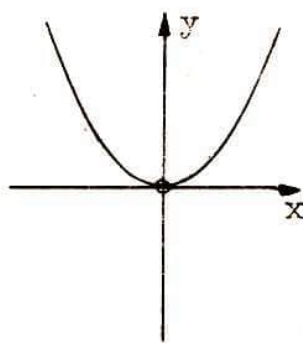
$$f(x) = x^2 - c = 0. \quad (2)$$

In Abhängigkeit von c treten folgende Fälle auf:

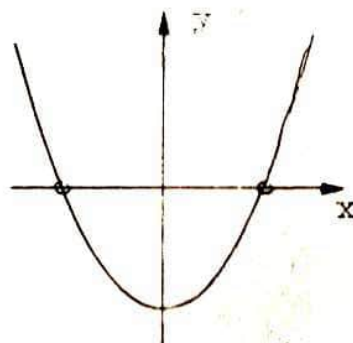
- | | | |
|---------|----------------------------------|-------|
| $c < 0$ | keine Lösung | (i) |
| $c = 0$ | eine Lösung $x = 0$ | (ii) |
| $c > 0$ | zwei Lösungen $x = \pm \sqrt{c}$ | (iii) |



(i)



(ii)

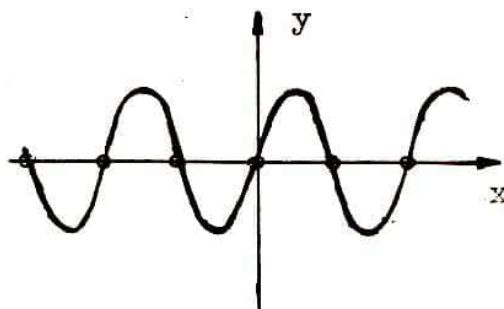


(iii)

Dagegen hat die Gleichung

$$f(x) = \sin \pi x \quad (3)$$

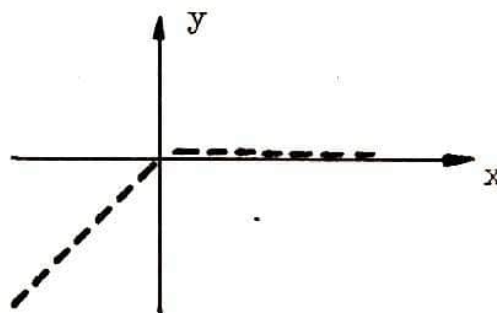
unendlich (aber abzählbar viele) Lösungen $x_i = i$ mit $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$,



während die Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{2}(x - |x|) \quad (4)$$

sogar überabzählbar viele, d. h. ein ganzes Kontinuum von Lösungen (das Intervall $[0, +\infty)$) besitzt.



Diese Beispiele sollen einen Eindruck von den Schwierigkeiten geben und weisen auf die Notwendigkeit von Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für die Aufgabe (1) hin.

Wir wollen uns mit der Konstruktion und Untersuchung von Verfahren zur Approximation der Lösungen von (1) (d. h. zur näherungsweise Bestimmung von Lösungen) befassen, denn anders als bei der Lösung von linearen Gleichungen und linearen Gleichungssystemen sind hier direkte Verfahren zur exakten Bestimmung der Lösung nur für wenige Spezialfälle anwendbar. Deshalb wollen wir uns iterativen Lösungsverfahren zuwenden, d. h. Verfahren, die durch fortwährende Anwendung ein und der gleichen Vorschrift eine Zahlenfolge konstruieren, die gegen eine Lösung unseres Problems konvergiert.

2. Der Begriff der Iterationsfunktion

Wir gehen von Gleichung (1) aus und versuchen sie nach x aufzulösen, d. h. sie in die Gestalt

$$x = \varphi(x) \quad (5)$$

zu überführen.

Diese Funktion φ nennen wir Iterationsfunktion (im folgenden mit I. F. abgekürzt).

Für die Lösung ξ von (1) gilt

$$\xi = \varphi(\xi).$$

Deshalb bezeichnen wir ξ als Fixpunkt der Iterationsfunktion.

x_k sei ein Näherungswert für ξ . Durch

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \quad (6)$$

erhalten wir den (für $x_k \neq \xi$) von x_k verschiedenen neuen Näherungswert x_{k+1} . Die I. F. φ erzeugt somit für jeden Startwert x_0 eine Zahlenfolge (x_k) . Die Konvergenz dieser Folgen ist jedoch nicht automatisch gesichert.

Wir wollen für den Fall (iii) von Beispiel (2) Iterationsfunktionen bilden. Die Lösung ξ der Gleichung $f(x) = x^2 - c = 0$ für $c > 0$ und $x > 0$ liefert die Quadratwurzel von c . Eine mögliche Umformung wäre

$$x = \varphi_1(x) = \frac{c}{x}. \quad (I)$$

Durch Addition von x auf beiden Seiten von

$$x^2 = c \quad (*)$$

erhalten wir $x + x^2 = x + c$ oder $x(1+x) = x + c$.

Damit ergibt sich

$$x = \varphi_2(x) = \frac{x + c}{x + 1}. \quad (II)$$

Zu einer dritten Variante gelangen wir, wenn wir in $(*)$ x^2 addieren:

$$2x^2 = x^2 + c, \text{ umgeformt } x = \frac{1}{2x} (x^2 + c).$$

Die I. F. lautet also

$$x = \varphi_3(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{c}{x} \right). \quad (III)$$

Die ersten Glieder für $c = 2$ und $x_0 = 1$ lauten:

	(I)	(II)	(III)
x_1	2. 000 000 000	1. 500 000 000	1. 500 000 000
x_2	1. 000 000 000	1. 400 000 000	1. 416 666 667
x_3	2. 000 000 000	1. 416 666 667	1. 414 215 693
x_4	1. 000 000 000	1. 413 793 111	1. 414 213 567
x_5	2. 000 000 000	1. 414 285 721	1. 414 213 567

Diese drei Folgen verhalten sich somit recht verschieden. Während (I) nicht konvergiert, hat (III) bereits mit x_4 die Quadratwurzel von 2 auf 9 Stellen nach dem Komma genau bestimmt.

3. Konvergenzsatz für Iterationsfunktionen

Bei der Untersuchung der Konvergenzeigenschaften von I. F. treten drei wesentliche Probleme auf:

Erstens muß gesichert sein, daß die Iteration wohldefiniert ist, d. h. zu beliebigem x_k muß stets $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ eindeutig bildbar sein. Da es im allgemeinen unmöglich ist, die Menge aller Startwerte x_0 zu bestimmen, für die eine gegebene I. F. wohldefiniert ist, gibt man sich meist mit der Angabe einer Teilmenge zufrieden.

Das zweite Problem betrifft die Konvergenz der durch eine I. F. erzeugten Folgen und die Frage, ob die Grenzwerte tatsächlich Lösungen unserer Ausgangsgleichung (1) sind. Diese Problematik ist Inhalt zahlreicher Konvergenzsätze, die im wesentlichen auf den BANACHschen Fixpunktsatz zurückgreifen. Bevor wir einen Spezialfall dieses Satzes angeben, wollen wir einige Begriffe einführen.

Definition 4 :

$I = [a, b]$ sei ein abgeschlossenes reelles Intervall. Dann heißt die Funktion φ Selbstabbildung von I in sich, wenn für alle $x \in [a, b]$ das Bild $\varphi(x)$ wieder in $[a, b]$ liegt, d. h. $\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$.

Wenn die I. F. φ Selbstabbildung von I in sich ist, so ist sie wohldefiniert auf I .

Definition 5 :

φ heißt kontraktiv, falls es für alle x und y aus $[a, b]$ eine positive Konstante $q < 1$ gibt, so daß die Beziehung

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q |x - y| \quad (7)$$

erfüllt ist.

Mit anderen Worten: Der Abstand der Bilder zweier Punkte ist angebar kleiner als der Abstand der Originale.

Wir formulieren nun

Satz 1 :

Die Funktion $\varphi(x)$ sei auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ definierte kontraktive Selbstabbildung. Dann hat φ genau einen Fixpunkt ξ in I und für jeden Startwert $x_0 \in I$ konvergiert die Folge der Iterationswerte

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

für $k \rightarrow \infty$ gegen ξ .

Bemerkung:

Wir können die Voraussetzung, daß $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q |x - y|$ sein soll (Kontraktivität) auch als Beschränktheit des Betrages des Differenzenquotienten durch q auffassen, d. h.

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y} \right| \leq q < 1. \quad (7)$$

Für differenzierbare I. F. φ ist diese Beziehung immer erfüllt, falls für die Ableitung $\varphi'(x)$

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad (8)$$

für alle x aus $[a, b]$ gilt.

4. Anwendungen des Konvergenzsatzes

Wir wollen untersuchen, ob und für welche Startwerte x_0 Konvergenz für die I. F. der Beispiele (I) bis (III) gesichert ist (zur Vereinfachung des Vorgehens sei $c > 1$ vorausgesetzt).

$$(I). \quad \varphi_1(x) = \frac{c}{x}$$

Da $\varphi'_1(x) = -\frac{c}{x^2}$ ist, gilt $|\varphi'_1(x)| = \frac{c}{x^2} < 1$

für $x > \sqrt{c}$, d. h. φ_1 ist kontraktiv für $x \in [\sqrt{c}, d]$ mit beliebigem $d > c$.

Für die Untersuchung, ob φ_1 Selbstabbildung ist, können wir ausnutzen, daß $\varphi_1(x)$ monoton fällt. Danach gilt:

$$\varphi_1([\sqrt{c}, d]) = [\varphi_1(d), \varphi_1(\sqrt{c})] = \left[\frac{c}{d}, \sqrt{c}\right],$$

Original- und Bildintervall haben also nur den Wert $\sqrt{c}$ gemeinsam.

$\varphi_1(x)$ genügt damit an keiner Stelle den Voraussetzungen des Konvergenzsatzes.

Wir können allgemein zeigen, daß die I. F. (I) für kein positives x_0 (mit Ausnahme von $x_0 = \sqrt{c}$) eine konvergente Folge erzeugt.

Denn für $x_0 > 0$, $x_0 \neq \sqrt{c}$ ist

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_0) = \frac{d}{x_0} \\ x_2 &= \varphi_2(x_1) = \frac{d}{\frac{d}{x_0}} = x_0 \end{aligned}$$

oder allgemein

$$x_{2i} = x_0, \quad x_{2i+1} = \frac{d}{x_0},$$

$(x_k) = x_0, \frac{d}{x_0}, x_0, \frac{d}{x_0}, \dots$ ist aber offensichtlich eine divergente Folge.

$$(II). \quad \varphi_2(x) = \frac{x+c}{x+1}$$

Für die Ableitung gilt $\varphi_2'(x) = \frac{(x+1) - (x+c)}{(x+1)^2} = \frac{1-c}{(x+1)^2}$.

Wir untersuchen φ_2 im Intervall $I = [\sqrt{c}-1, \sqrt{c}+1]$.

Da φ_2 monoton fallend ist, gilt für das Bildintervall

$$\begin{aligned} \varphi_2(I) &= [\varphi_2(\sqrt{c}+1), \varphi_2(\sqrt{c}-1)] = \\ &= \left[\frac{\sqrt{c}+1+c}{\sqrt{c}+1+1}, \frac{\sqrt{c}-1+c}{\sqrt{c}-1+1} \right] \subseteq [\sqrt{c}-1, \sqrt{c}+1] \end{aligned}$$

da wegen $\sqrt{c}+1+c > \sqrt{c}+c-2$ $\frac{\sqrt{c}+1+c}{\sqrt{c}+2} > \sqrt{c}-1$

und $\frac{\sqrt{c}-1+c}{\sqrt{c}} < \sqrt{c}+1$ wegen $\sqrt{c}-1+c < c+\sqrt{c}$

ist. Demnach ist φ_2 Selbstabbildung von I in sich.

Für $x \in I$ ist außerdem

$$|\varphi_2'(x)| \leq \frac{|1-c|}{(\sqrt{c}-1+1)^2} = \frac{|1-c|}{c} = \frac{c-1}{c} = q < 1,$$

die Voraussetzungen des Konvergenzsatzes sind für $x_0 \in I$ erfüllt und die durch φ_2 erzeugten Zahlenfolgen konvergieren somit gegen $\sqrt{c}$.

$$(III). \quad \varphi_3(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{c}{x} \right)$$

Es ist $\varphi_3'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c}{x^2} \right)$.

Für $x > \sqrt{c}$ ist $\frac{c}{x^2} < 1$, deshalb folgt

$$\varphi_3'(x) \leq q = \frac{1}{2} < 1, \text{ demnach ist } \varphi_3 \text{ für } x \in [\sqrt{c}, d]$$

kontraktiv.

Da $\varphi_3([\sqrt{c}, d]) = [\varphi_3(\sqrt{c}), \varphi_3(d)] = [\sqrt{c}, \frac{1}{2}(d + \frac{c}{d})]$

(φ ist monoton wachsend) und

$$\frac{1}{2} \left(d + \frac{c}{d} \right) < \frac{1}{2} \left(d + \frac{d^2}{d} \right) = d$$

gilt, folgt, daß φ Selbstabbildung ist. Nach dem Konvergenzsatz ist daher die Konvergenz der Iteration (III) für beliebige Startwerte $x_0 \geq \sqrt{c}$ gesichert.

Für den Fall, daß $x_0 < \sqrt{c}$ gewählt wird, folgt

$$x_0 (x_0 - \sqrt{c}) > \sqrt{c} (x_0 - \sqrt{c})$$

$$x_0^2 + c > 2\sqrt{c} x_0$$

$$x_0 + \frac{c}{x_0} > 2\sqrt{c} \quad ,$$

damit
$$x_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{c}{x_0} \right) > \sqrt{c} \quad .$$

Die Konvergenz der durch die I. F. (III) erzeugten Zahlenfolgen gegen $\sqrt{c}$ ist somit für jeden positiven Startwert x_0 gesichert.

5. Konvergenzordnung von Iterationen

Als drittes Problem steht die Frage nach der Effektivität des Verfahrens, insbesondere das Problem, wie schnell die erhaltene Folge konvergiert. Dazu werden wir uns der im Artikel "Konvergenzgeschwindigkeit von Zahlenfolgen" in Heft 3/75 eingeführten Begriffe bedienen.

Wir betrachten die durch unsere Iteration φ und die zulässigen Startwerte x_0 erzeugten Zahlenfolgen, die gegen ein und denselben Grenzwert ξ konvergieren. Zu jeder dieser Zahlenfolgen (x_k) kann gemäß Definition 3 (Heft 3/75) die Konvergenzordnung bestimmt werden. Die Konvergenzordnung der Iteration φ ergibt sich dann als Minimum aller Konvergenzordnungen der Folgen, die gegen ξ konvergieren.

Dieses direkte Vorgehen ist natürlich sehr aufwendig, eine bedeutende Vereinfachung ergibt

S a t z 2 :

Alle Ableitungen der I. F. φ bis zur p -ten Ordnung sollen existieren und stetig sein. φ hat genau dann die Konvergenzordnung p , wenn für den Fixpunkt $\xi = \varphi(\xi)$ sämtliche Ableitungen bis zur $(p-1)$ -ten Ordnung Null sind, d. h. es muß gelten

$$\begin{aligned} \varphi^{(j)}(\xi) &= 0 \quad \text{für } j=1,2,\dots,p-1 \\ \varphi^{(p)}(\xi) &\neq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Bemerkung:

Der Konvergenzfaktor einer I. F. ergibt sich durch die Beziehung

$$Q_1(x_k, \xi) = |\varphi'(\xi)|.$$

Wir wollen die Konvergenzordnung und -faktoren für die Beispiele (II) und (III) ermitteln.

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad |\varphi'(\sqrt{c})| &= \left| \frac{1-c}{(\sqrt{c}+1)^2} \right| = \left| \frac{(1+\sqrt{c})(1-\sqrt{c})}{(1+\sqrt{c})^2} \right| = \\ &= \left| \frac{1-\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}} \right| = Q_1(x_k, \xi) \neq 0, \end{aligned}$$

(II) konvergiert linear mit dem recht großen Konvergenzfaktor $\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1}$, d. h. es liegt ziemlich langsame Konvergenz vor.

$$\text{(III)} \quad |\varphi'(\sqrt{c})| = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c}{\sqrt{c}^2}\right) = 0 = Q_1(x_k, \xi),$$

d. h. (III) konvergiert superlinear.

$$|\varphi''(\sqrt{c})| = \frac{1}{2} \frac{c}{\sqrt{c}^3} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{c}} \neq 0,$$

(III) konvergiert quadratisch.

6. Die NEWTON - Iteration

Selbstverständlich sind wir an Iterationen mit möglichst hoher Konvergenzordnung interessiert. Deshalb wollen wir hier zeigen, wie wir zu einer beliebigen Gleichung $f(x) = 0$ eine I. F. konstruieren können, die gegen einfache Nullstellen der Funktion $y = f(x)$ mindestens quadratisch konvergiert.

Definition 6 :

Die Nullstelle ξ der Funktion $y = f(x)$ heißt einfach, wenn $f'(\xi) \neq 0$ gilt.

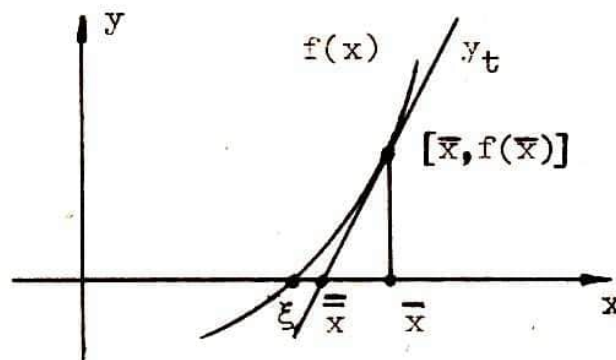
Bemerkung:

Wenn ξ mehrfache Nullstelle ist, so wird $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{(x - \xi)}$ zu Null,

$$\text{da } f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{(x - \xi)} = 0.$$

Eine doppelte Nullstelle hat die Funktion in Beispiel (ii),
denn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$

Die Idee der NEWTON-Iteration lässt sich leicht geometrisch veranschaulichen. Ausgehend von einer Näherung $\bar{x}$ für die gesuchte Nullstelle ξ ersetzen wir die Funktionskurve $y = f(x)$ durch die Tangente an die Funktion im Punkt $[\bar{x}, f(\bar{x})]$ und ermitteln deren Nullstelle $\bar{\bar{x}}$ als Näherung für ξ .



Mit der Tangentengleichung

$$y_t = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) \tag{10}$$

ergibt sich für $y_t = 0$

$$0 = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(\bar{\bar{x}} - \bar{x})$$

$$-f(\bar{x}) = f'(\bar{x})(\bar{\bar{x}} - \bar{x}),$$

oder

$$\bar{\bar{x}} = \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}.$$

Damit erhalten wir die I. F. $x = \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

und das NEWTON - Verfahren

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Auskunft über die Konvergenzordnung gibt

S a t z 3 :

$f(x)$ sei eine Funktion, die dreimal differenzierbar ist. Dann konvergiert die NEWTON - Iteration

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

quadratisch gegen die einfache Nullstelle ξ , falls der Startwert x_0 hinreichend nahe bei ξ liegt.

Wir wollen auch hier auf den Beweis verzichten und nur die Größe der Konvergenzordnung nachprüfen.

Es ist
$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$= \frac{f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

und damit
$$\varphi'(\xi) = \frac{f(\xi) f''(\xi)}{[f'(\xi)]^2} = 0$$

wegen $f(\xi) = 0$ und $f'(\xi) \neq 0$.

Falls ξ doppelte Nullstelle ist, d. h. $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) \neq 0$, kann trotzdem die NEWTON - Iteration verwendet werden, die Konvergenz ist dann jedoch nur noch linear.

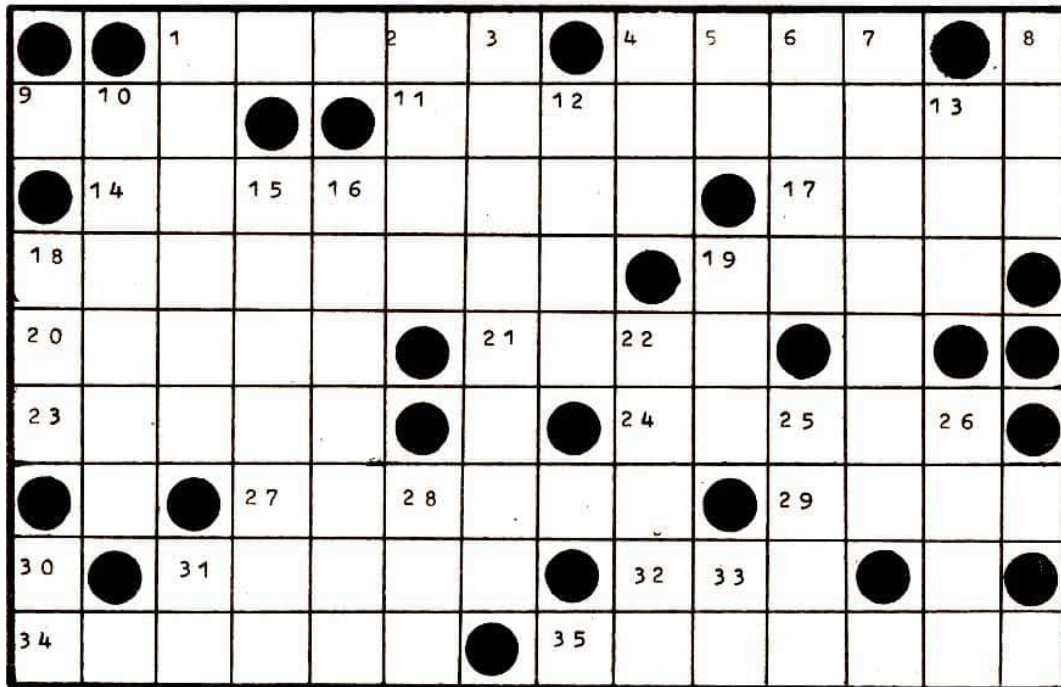
Wie sich der Leser selbst überzeugen kann, stellt (III) die NEWTON - Iteration für $f(x) = x^2 - c$ dar und konvergiert somit quadratisch.

Gregor Weske
Student des 4. Studienjahres
im Bereich Numerische Mathematik

Titelbild:

Schematische Darstellung des Konvergenzverhaltens der I.F. φ_2

Zum Ausruhen



Waagerecht

1. gehört auf jedes Wurstbrot
4. Adelstitel oder Tasche
9. Abkürzung für Jenaer Universität
11. Zimmertanne
14. Schreck am Semesterende
17. Empiriekritizist und Physiker
18. Hochschullehrer (Mz.)
19. entschlossene Zustimmung
20. Beschlagnahme (RR = R)
21. Singstimme
23. Gewürz
24. jeder Esel tut es
27. keine Ruhe, Bewegung
29. Schmuckstein
31. Genußmittel Südasiens

32. russ. Herrschertitel
34. Volk in Jugoslawien
35. bedeutender Tag auf dem Schleizer Dreieck

Senkrecht

1. Sie lesen sie
2. vitaminreiches Getränk
3. sollte man nicht blasen
4. ... und Trug
5. Alles klar!
6. weibl. Vorname ohne na
7. gegen ihn kämpft man in der Sage
8. Waldtier
10. sie sollte man sich verdienen
12. weibl. Vorname
13. Sie selbst
15. frühere Bezeichnung für Skoplje
16. Bündnis im 1. Weltkrieg
18. Meistergrad im Judo
19. Abk. Deutscher Sprachatlas
22. im Hörsaal sind sie zum Klappen
25. man bläst hinein
26. poln. Stadt, früher Weiße
28. nord. Haustier
30. Spielkarte
31. Brom
33. sowj. Flugzeugtyp

Preisaufgaben 4/75

Einsendeschluß 31.5.1975

- (G 19) Über jeder Seite eines Parallelogramms wird ein Quadrat konstruiert.

①

Man beweise, daß die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte der vier Quadrate wieder ein Quadrat bilden.

- (G 20) a sei eine natürliche Zahl und $a^{100} - 2$, $a^{101} - 69$ sind durch 73 teilbar.

①

Welchen Rest läßt a bei der Division durch 73?

- (G 21) Man gebe alle Lösungen der folgenden Ungleichung im Intervall $0 < x < \pi$ an:

②

$$\tan \frac{x}{2} > \frac{\sin x - 2 \cos x}{\sin x + 2 \cos x}$$

(G 22) Man untersuche die unendliche Reihe

① $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a^{n-1}$ a bel. reelle Zahl
auf Konvergenz bzw. Divergenz.

(G 23) Man untersuche die unendliche Reihe

① $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+1)}{n^4 + 3n^3 - n^2 - 3n}$ auf Konvergenz.

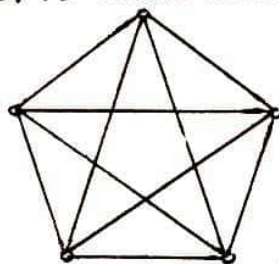
(G 24) При каких значениях x и y последовательность a_1, a_2, a_3 ,

① где $a_1 = 8^x + \log_2 y$, $a_2 = 2^x - \log_2 y$
 $a_3 = 5y$
является одновременно, арифметической и геометрической
прогрессией ?

последовательность - Folge
одновременно - simultan, gleichzeitig

Vierdimensionales Simplex

Die wenigsten Leser werden bemerkt haben, daß das Titelbild 3/75 einen Blick in den für Laien so geheimnisumwitterten,



für Mathematiker aber ganz harmlosen vierdimensionalen Raum bietet: Die Figur kann als Bild einer dreidimensionalen Projektion eines bestimmten vierdimensionalen Körpers aufgefaßt werden.

In der Geometrie des zwei- (Ebene) bzw. dreidimensionalen Raumes können die Punkte nach Einführung eines Koordinatensystems durch Paare (x,y) bzw. Tripel (x,y,z) reeller Zahlen charakterisiert werden. Man kann daher die Punkte eines vierdimensionalen Raumes R_4 als Quadrupel (x_1, x_2, x_3, x_4) reeller Zahlen erklären. So wie der dreidimensionale Raum Ebenen bzw. Geraden als zwei- bzw. eindimensionale "Teilräume" enthält, gibt es in einem R_4 außer Geraden und Ebenen auch dreidimensionale Teilräume. Teilräume werden durch lineare Gleichungen und

Gleichungssysteme für die betreffenden Zahlenquadrupel charakterisiert, und man kann ohne weiteres beweisen, daß z. B. eine Gerade des R_4 einen dreidimensionalen Teilraum des R_4 im allgemeinen in genau einem Punkte schneidet.

In der Ebene ist die kleinste Anzahl von Punkten, die nicht schon auf einer Geraden untergebracht werden können, gleich drei (Dreieck), die minimale Zahl von nicht in einer Ebene liegenden Punkten des dreidimensionalen Raumes ist vier (Tetraeder), und im R_4 ist die kleinste Anzahl von Punkten, die nicht in einem dreidimensionalen Teilraum untergebracht werden können, gleich fünf. Der durch fünf solche Punkte bestimmte Körper heißt vierdimensionales Simplex. Die Verbindungsstrecken jedes Eckpunktes mit jedem anderen heißen Kanten, das R_4 - Simplex hat zehn Stück. Als "Seiten" des R_4 - Simplex fungieren fünf dreidimensionale Tetraeder, die durch jeweils vier der fünf Eckpunkte bestimmt sind.

Unserer auf das Zwei- und Dreidimensionale ausgerichteten Anschauung können vierdimensionale Gebilde durch eine Projektion nahegebracht werden. Man legt im R_4 einen dreidimensionalen Teilraum als Bildraum (Anschauungsraum) fest und gibt eine dazu nicht parallele Projektionsrichtung vor. Die projizierenden Geraden - etwa diejenigen durch die fünf Ecken eines R_4 - Simplex - schneiden den Bildraum je in genau einem Punkt, es entsteht ein räumliches Fünfeck. Dieses kann wiederum in eine Zeichenebene projiziert werden, und dabei kann sich z. B. eine solche Figur ergeben, wie sie das Titelbild von 3/75 zeigt: eine zweidimensionale Projektion einer dreidimensionalen Projektion der Ecken und Kanten eines vierdimensionalen Simplex.

Dr. Walter Börner

Lektor im Bereich

Theoretische Mathematik

Herausgeber: Leitung der FDJ-Grundorganisation der Friedrich-Schiller-Universität Jena;
Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Egbert Creutzburg

Chefredakteur: Waltraud Werner

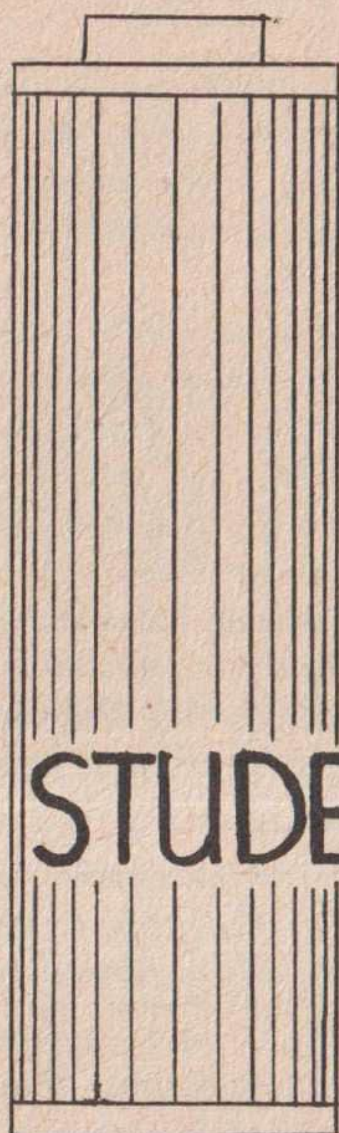
Redaktion: J. Dubslaff, H.-G. Leopold, Th. Ullrich, G. Weske

Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.



IV. FDJ STUDENTENTAGE

der Friedrich-Schiller-Universität

5

75

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Ju-
gendobjekt Studienvor-
bereitung der Sektion
Mathematik an der
Friedrich-Schiller-Uni-
versität Jena

9. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Der Satz von HELLY

1. Einführung

Der Satz, der hier behandelt werden soll, läßt sich in das Gebiet der "kombinatorischen Geometrie" (Zweig der Geometrie zwischen elementarer Schulgeometrie und Topologie) einordnen. Der Wiener Mathematiker Eduard HELLY fand ihn etwa im Jahre 1912. Der erste Beweis erfolgte 1921 durch RADON. Ein Beweis von HELLY kam erst 1923 heraus. In der Folgezeit haben mehrere hervorragende Gelehrte weitere Beweise angegeben; der Satz wurde in verschiedenen Richtungen verallgemeinert und angewendet. 1930 veröffentlichte HELLY eine Arbeit über ein rein topologisches Theorem, das den vorher erkannten Satz als Spezialfall enthält.

Wir werden den Satz von HELLY für die Ebene formulieren und beweisen. Anhand einiger Aufgaben bzw. Sätze wird demonstriert, welche Anwendungsmöglichkeiten in der Elementargeometrie für diesen Satz bestehen.

Die Grundlage unserer Erörterungen bildet die

Definition 1 :

Eine Punktmenge (Figur) M der Ebene heißt konvex genau dann, wenn gilt: M enthält mit zwei Punkten P_1 und P_2 sämtliche Punkte der Verbindungsstrecke P_1P_2 .

Bei den hier betrachteten konvexen Figuren sollen deren Randpunkte stets als zur Figur gehörend vorausgesetzt werden (Abgeschlossenheit).

F o l g e r u n g : Der Durchschnitt konvexer Punktmen-
gen ist konvex.

2. Der Satz von HELLY für die Ebene

Satz 1:

Es seien in der Ebene p (≥ 3) abgeschlossene konvexe Figuren gegeben, von denen je drei beliebig ausgewählte mindestens einen gemeinsamen Punkt haben. Dann existiert mindestens ein Punkt, der allen Figuren angehört.

Beweis:

Hilfssatz (ohne Beweis):

Eine konvexe Figur F enthält alle inneren und Randpunkte des Dreiecks, dessen Eckpunkte drei beliebige Punkte von F sind.

Für $p = 3$ ist der Satz von Helly wegen der Voraussetzung trivial. Bei größerem p genügt es, den Satz für vier Figuren F_h, F_i, F_j, F_k zu beweisen, wie später noch näher ausgeführt wird.

Ein Punkt des nichtleeren Durchschnitts von drei der Figuren erhalte den Index der Figur, die an der Durchschnittsbildung gerade nicht beteiligt ist:

$$(1) \quad P_h \in F_i \cap F_j \cap F_k.$$

Wir gewinnen so vier Punkte P_h, P_i, P_j, P_k , die paarweise voneinander verschieden sind (wenn nicht, wäre schon alles bewiesen). Je drei der Punkte bilden jeweils ein Dreieck, das nach dem Hilfssatz ganz in der Figur liegt, deren Index bei den beteiligten Punkten nicht vorkommt:

$$(2) \quad \Delta P_i P_j P_k \subset F_h.$$

Für die gegenseitige Lage der vier Punkte sind zwei Fälle möglich:

- (a) Drei der Punkte sind Eckpunkte eines Dreiecks, zu dem der vierte Punkt als innerer oder Randpunkt gehört, etwa $P_h \in \Delta P_i P_j P_k$. Wegen (1) und (2) gilt damit $P_h \in F_i \cap F_j \cap F_k$ und $P_h \in F_h$, also ist P_h ein gemeinsamer Punkt aller Figuren. Wenn alle vier Punkte auf einer Strecke liegen, bleiben diese Überlegungen richtig.
- (b) Die vier Punkte sind Eckpunkte eines konvexen Vierecks V . Dann ist der Schnittpunkt S der Diagonalen von V ein Punkt,

der jedem der aus P_h, P_i, P_j, P_k bildbaren Dreiecke angehört, denn jedes liegt nach (2) in je einer Figur F_h, F_i, F_j, F_k . Demnach liegt S in jeder dieser Figuren und ist damit ein ihnen gemeinsamer Punkt.

Bei mehr als vier Figuren, etwa F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 , erhält man folgendermaßen den eben behandelten Fall:

F_5 hat mit F_4 wegen der Voraussetzung einen nichtleeren konvexen Durchschnitt F'_4 . F'_4 erfüllt zusammen mit F_1, F_2, F_3 die Bedingungen des Satzes; sie haben also einen Punkt gemeinsam. Damit haben auch F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 einen gemeinsamen Punkt. ■

Der Satz von Helly gilt auch für den n -dimensionalen euklidischen Raum R_n (n beliebige natürliche Zahl) und lautet dort:

Satz 2 :

Es seien im R_n p ($\geq n+1$) abgeschlossene konvexe Punkt-mengen gegeben, von denen je $n+1$ beliebig ausgewählte stets einen nichtleeren Durchschnitt haben. Dann haben alle p Mengen nichtleeren Durchschnitt.

3. Anwendungen für den Satz von HELLY der Ebene

Die Behandlung des Problems vollzieht sich allgemein in drei Schritten:

1. Konstruktion von konvexen Punkt-mengen
2. Nachweis der Gültigkeit der Voraussetzungen des Satzes von Helly
3. Nachweis der geforderten Eigenschaften eines gemeinsamen Punktes aller Mengen

Satz 3 :

Kann man von m (≥ 3) Punkten der Ebene je drei in einen Einheitskreis einschließen, so sind alle in einen Einheitskreis einschließbar.

Beweis : Beliebige drei Punkte P_h, P_i, P_j der gegebenen Menge seien in einen Einheitskreis e mit Mittelpunkt M eingeschlossen. Die Einheitskreise e_h, e_i, e_j , deren Mittelpunkte P_h, P_i, P_j sind, haben einen nichtleeren Durchschnitt, der im ungünstigsten Fall, wenn P_h, P_i, P_j nicht auf einem Halbkreis gelegene Peri-

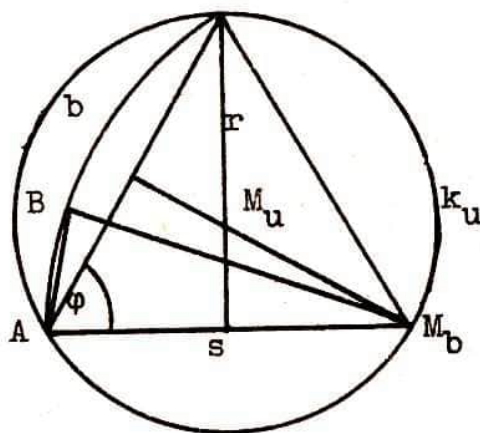
pheriepunkte von e sind, nur aus dem Punkt M besteht. Demnach haben die (konvexen) Einheitskreise, deren Mittelpunkte Punkte der gegebenen Menge sind, zu je dreien einen gemeinsamen Punkt. Also haben nach dem Satz von Helly alle wenigstens einen gemeinsamen Punkt M' , von dem kein Punkt der Menge größeren Abstand als 1 haben kann. Man kann deshalb die gesamte Menge in einen Einheitskreis um M' einschließen. ■

Satz 4 (Satz von JUNG) :

Beliebig viele Punkte der Ebene, deren Abstand paarweise nicht größer als 1 ist, lassen sich durch einen Kreis mit dem Radius $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$ bedecken.

Beweis : Diese Aufgabe ist auf Satz 3 zurückführbar. Man muß nur zeigen, daß je drei Punkte von einem Kreis mit $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$ bedeckt werden. Beliebige drei Punkte der Menge sind jeweils Eckpunkte eines Dreiecks, dessen längste Seite höchstens 1 ist. Solche stumpf- oder rechtwinkligen Dreiecke werden von einem Kreis mit $r = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ bedeckt (Satz des THALES). Ist das Dreieck spitzwinklig, so kann der längsten Seite kein kleinerer Winkel als $\frac{\pi}{3}$ gegenüberliegen. Im ungünstigsten Fall liegen gleichschenklige Dreiecke mit der Schenkellänge 1 vor. Wächst der Spitzenwinkel von 0 bis $\frac{\pi}{3}$, so durchläuft ein variabler Basispunkt B einen Kreisbogen b mit Radius 1 und Mittelpunkt M_b im Spitzenpunkt des gleichschenkligen Dreiecks (Abb. 1). Alle spitzwinkligen Dreiecke lassen sich also durch F , ein gleichseitiges

Abb. 1



$$\begin{aligned} s &= 1 \\ r &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \varphi &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Dreieck, dessen eine Seite durch den Bogen b mit $r=1$ und Mittelpunkt M_b im gegenüberliegenden Eckpunkt ersetzt wurde, einschließen. Der Umkreis k_u des gleichseitigen Dreiecks hat den Radius $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$, wie man leicht nachrechnet, und ist wegen $\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ stärker gekrümmt als der Bogen b . Deshalb schließt er die Überdeckungsfigur F irgendeines spitzwinkligen Dreiecks ein. Je drei Punkte der Menge werden tatsächlich durch einen Kreis mit $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$ überdeckt, mit Satz 3 zusammen ergibt sich, daß alle Punkte durch einen solchen Kreis bedeckt werden. Das gleichseitige Dreieck mit Seitenlänge 1 zeigt, daß die Angabe für r nicht erniedrigt werden kann. ■

Satz 5 :

Zu jeder beliebigen beschränkten, nicht notwendig zusammenhängenden Kurve k mit der Länge $L(k)$ gibt es einen Punkt der Ebene derart, daß jede beliebige Gerade durch ihn k in zwei Teile teilt, deren Länge jeweils nicht kleiner als $\frac{1}{3} L(k)$ ist.

Beweis : Wir betrachten sämtliche Halbebenen ε_i , $i \in I$, die Kurvenstücke k_i von mehr als $\frac{2}{3} L(k)$ enthalten. Je drei dieser Halbebenen haben nichtleeren Durchschnitt:

$$(k_1 \subset \varepsilon_1 \wedge L(k_1) > \frac{2}{3} L(k)) \wedge (k_2 \subset \varepsilon_2 \wedge L(k_2) > \frac{2}{3} L(k)) \quad (1)$$

$$\xrightarrow{(1)} L(k_1) + L(k_2) > \frac{4}{3} L(k) \rightarrow k_{12} \subset \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \wedge L(k_{12}) > \frac{1}{3} L(k) \quad (2)$$

$$k_3 \subset \varepsilon_3 \wedge L(k_3) > \frac{2}{3} L(k) \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(2)(3)} \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3 \neq \emptyset$$

Nach dem Satz von Helly haben alle Halbebenen ε_i , $i \in I$ den Durchschnitt $D \neq \emptyset$. Ein Punkt P von D (der natürlich nicht Kurvenpunkt von k sein muß) leistet das Behauptete:

Wir betrachten eine beliebige orientierte Gerade g durch P .

Annahme: Links von g liege k_0 mit $L(k_0) < \frac{1}{3} L(k)$.

Man verschiebe g solange parallel, bis man eine Gerade g' hat, auf deren linker Seite k'_0 mit $L(k'_0) = \frac{1}{3} L(k)$ liegt. Zwischen g und g' liegt eine parallele Gerade h , auf deren rechter Seite

k_h mit $L(k_h) > \frac{2}{3} L(k)$ liegt; diese Halbebene e_h enthält aber $P \notin g$ nicht, im Widerspruch zur Wahl von $P \in D$. ■

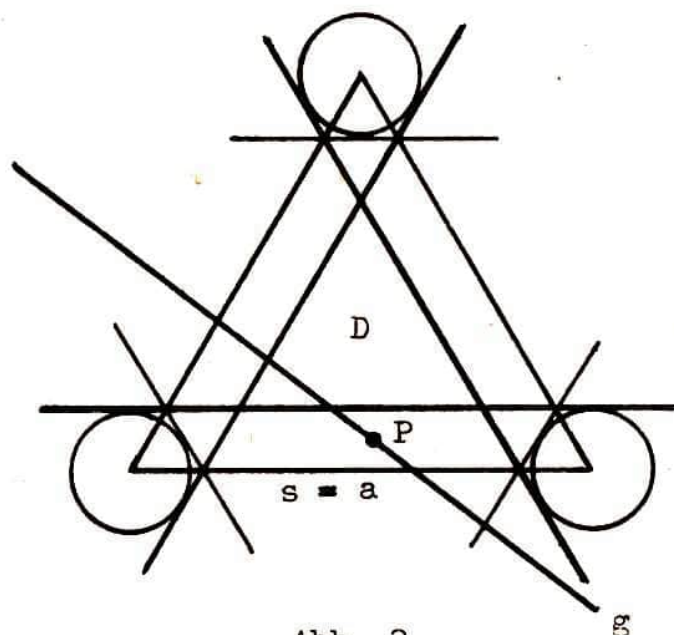


Abb. 2

Die Grenze $\frac{1}{3} L(k)$ läßt sich nicht erhöhen, wie das Beispiel einer Kurve k zeigt, die aus drei Kreislinien mit gleichem Radius $r < \frac{1}{6}\sqrt{3}a$ besteht, deren Mittelpunkte Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge a sind. (Abb. 2)

Satz 6 (Satz von KLEE) :

Seien F_1, F_2, F_3, F_4 und K konvexe Figuren der Ebene. Gibt es zu je drei der F_i eine Translation τ_v ($v = 1, \dots, 4$), so daß das Bild $\tau_v(K)$ von K ganz im Durchschnitt der drei F_i liegt, dann gibt es auch eine Translation τ , so daß $\tau(K)$ ganz im Durchschnitt aller F_i ($i=1, \dots, 4$) liegt.

Beweis : Alle Translationen $\tau_{i\mu}$; $i=1, \dots, 4, \mu \in \mathbb{I}$, die K in eine Punktmenge F_i , $i=1, \dots, 4$, abbilden, erzeugen eine konvexe Menge $\tau_i^!(P)$ von Bildpunkten eines beliebigen, fest gewählten Punktes P . Die Mengen $\tau_i^!(P)$ haben zu je drei einen Punkt gemeinsam, da in der v -ten Kombination ($v=1, \dots, 4$) von je drei Mengen F_i ein- und dasselbe Bild $\tau_v(K)$ von K auftritt, dem ein Bildpunkt $\tau_v(P)$ entspricht. Sämtliche Mengen $\tau_i^!(P)$,

$i = 1, \dots, 4$, erfüllen also die Bedingungen des Satzes von HELLY. Sie haben einen gemeinsamen Durchschnitt $\tau'(P)$. Diesem entspricht mindestens eine Translation τ , die offenbar K in $\tau(K)$ überführt und $\tau(K)$ liegt im Durchschnitt aller Figuren F_1, F_2, F_3, F_4 .

Barbara Salzmann
Assistentin im Bereich
Theoretische Mathematik

Preisaufgaben 5/75

(G 25) Man konstruiere ein Dreieck ABC, falls h_a, h_b und der Winkel $\angle BCA$ gegeben sind.

1

(G 26) Man löse die Ungleichung

1

$$\frac{1 + \log_a^2 x}{1 + \log_a x} > 1.$$

(G 27) Man berechne die Summen

1

$$S_n = \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{n}.$$

(G 28) Man bestimme eine Funktion $f(x)$, so daß für alle reellen Zahlen x die folgende Gleichung erfüllt ist:

1

$$a \cdot f(1-x) - b \cdot f(x-1) = x \cdot c \quad (a, b, c \text{ reelle Zahlen, } |a| \neq |b|)$$

(G 29) Zu jeder beliebigen nicht notwendig zusammenhängenden, beschränkten Figur F mit dem Flächeninhalt $A(F)$ gibt es einen Punkt der Ebene derart, daß jede Gerade durch ihn F in zwei Teile teilt, deren Inhalte nicht kleiner als $\frac{1}{3} A(F)$ sind. Man beweise diesen Satz!

2

(G 30) Найти объём пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной a , если двугранные углы между плоскостью основания и боковыми гранями равны α, β и γ . (основание - Basis, двугранный - zweikantig, плоскость - Ebene, боковой - Seiten-)

2

Einsendeschluß: 30. 6. 1975

„FDJ-Freundschaftsstafette“ und 4. FDJ-Studententage

Zur würdigen Vorbereitung des 30. Jahrestages der Befreiung unseres Volkes vom Faschismus beschloß die XXVII. Delegiertenkonferenz der FDJ-Grundorganisation der Friedrich-Schiller-Universität die Teilnahme an der "FDJ-Freundschaftsstafette". Höhepunkt dabei stellen die 4. FDJ-Studententage vom 5. bis 8. Mai dar, mit denen die Studenten in einer Vielzahl von Veranstaltungen dokumentieren, wie sich die sozialistische klassenmäßige Haltung und internationalistische Denk- und Verhaltensweisen entwickelt haben. Auf zwei Veranstaltungen möchte ich hier besonders eingehen: auf das VIII. Karl-Marx-Seminar und auf die Studienjahreskonferenzen.

Das VIII. Karl-Marx-Seminar steht unter dem zentralen Thema "Die Sowjetunion - Kern der sozialistischen Staatengemeinschaft - Hauptkraft der revolutionären Weltbewegung - Interessenvertreter der Völker der Welt". Die Plenumsveranstaltung wird am Nachmittag mit der Diskussion in zwei Arbeitskreisen fortgesetzt. Die Verantwortung für die Durchführung der Diskussion in den Arbeitskreisen liegt in den Händen der Sektion Mathematik. Eine Kommission, bestehend aus Vertretern der Sektionen Mathematik und Marxismus-Leninismus, arbeitet unter der Leitung von Dr. sc. Rolf Lindner an der inhaltlichen und organisatorischen Absicherung des Seminars. Die Kommission vergibt unter anderem Diskussionsbeiträge an Studenten der Sektion Mathematik und "wacht" über deren qualitäts- und termingerechte Erarbeitung. Damit sollen nicht nur die beauftragten Studenten in ihrer politischen Weiterentwicklung positiv beeinflusst, sondern - durch Einbeziehung aller Gruppenmitglieder - die gesamte politisch-ideologische Arbeit der Gruppe auf ein neues Niveau gehoben werden.

Nun noch ein Wort zu den Studienjahreskonferenzen. Sie sind der Höhepunkt im studentischen Wettstreit innerhalb der einzelnen Studienjahre. Im Mittelpunkt steht das Hauptreferat der FDJ-

Studienjahresleitung, in dem eine Einschätzung des erreichten politisch-ideologischen Standes, der Ergebnisse bei der Führung des sozialistischen Wettbewerbs, der fachlichen Qualifikation der Studenten sowie des Standes der Kollektiv- und Persönlichkeitsentwicklung gegeben wird. Das Koreferat des Erzieherkollektivs beinhaltet die Rechenschaftslegung der staatlichen Leitung und nimmt zu den von der Studienjahresleitung aufgeworfenen Problemen aus der Sicht der staatlichen Leitung Stellung. Im weiteren werden aktuelle Probleme der Erziehung und Ausbildung diskutiert und Auszeichnungen von Beststudenten vorgenommen. Nicht zu vergessen sind die kulturellen Beiträge aus den einzelnen FDJ-Gruppen.

All diese Aktivitäten verdeutlichen die Stellung der FDJ an der Universität und bringen gleichzeitig die hohe Verantwortung, die jedes FDJ-Mitglied und noch mehr jedes Leitungsmitglied besitzt, zum Ausdruck. Darüber sollte jeder zukünftige Student rechtzeitig nachdenken.

Hilmar Schack
FOL-Verantwortlicher
für Agitation



Für alle Interessenten veröffentlichen wir an dieser Stelle und im nächsten Heft die Aufgaben der XIV. Olympiade Junger Mathematiker:

- 1) Es sei $z = (1 - \frac{4}{1^2})(1 - \frac{4}{3^2})(1 - \frac{4}{5^2}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{4}{199^2})$
 (wobei die Nenner der Subtrahenden in den Faktoren die Folge der ungeraden Quadratzahlen von 1^2 bis 199^2 durchlaufen).
 Man stelle die rationale Zahl z in der Form $z = \frac{p}{q}$ dar, wobei p, q ganze, teilerfremde Zahlen sind und $q > 0$ ist. (Kl. 10)

- 2) Beweisen Sie folgenden Satz:
 Ist ABCD ein Tangentenviereck mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{AD} = d$ und dem Inkreismittelpunkt M, so gilt
- $$\frac{a}{c} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{BM}}{\overline{CM} \cdot \overline{DM}} \quad . \quad (\text{Kl. 10})$$

- 3) Sechs Schüler eines Mathematikzirkels machen mit dem folgenden Ratespiel ein kleines Logiktraining: Peter, Klaus, Monika, Ilona und Uwe verstecken fünf Gegenstände: Zirkel, Radiergummi, Lineal, Bleistift und Füller so bei sich, daß jeder genau einen dieser Gegenstände hat. Dann bekommt Dirk fünf Aussagen mitgeteilt, unter denen, wie ihm ebenfalls gesagt wird, genau zwei falsch sind. Die Aussagen lauten:

Uwe: "Wenn Peter den Zirkel nicht hat, dann hat Klaus das Lineal nicht."

Monika: "Uwe hat soeben eine wahre Aussage gemacht."

Peter: "Ich habe den Zirkel oder Klaus hat das Lineal nicht."

Klaus: "Ich habe das Lineal nicht oder Uwe hat den Bleistift!"

Ilona: "Ich habe den Füller oder ich habe den Bleistift."

Man untersuche, ob sich nach diesen Regeln alle Verstecke der Gegenstände eindeutig ermitteln lassen. Wie lauten, falls dies möglich ist, die Verstecke? (Kl. 10)

- 4) Von einem Dreieck seien die Innenwinkel gemessen worden. Die Summe der dabei (als Näherungswerte der wahren Innenwinkelgrößen) erhaltenen Meßwerte u, v, w sei $180^\circ + \delta$ mit $\delta \neq 0^\circ$. Durch drei Korrekturwerte x, y, z sollen die Meßwerte so verändert werden, daß die Summe der dann entstehenden Werte $u+x, v+y, w+z$ gleich 180° ist. Es ist zu beweisen, daß für alle unter diesen Bedingungen möglichen Korrekturwerte x, y, z der Wert $S = x^2 + y^2 + z^2$ genau dann am kleinsten ist, wenn $x = y = z = -\frac{\delta}{3}$ gilt. (Kl. 11/12)

- 5) In einem Mathematikzirkel, in dem Eigenschaften von Funktionen f bei Kehrwertbildung untersucht werden, vermutet ein Zirkelteilnehmer, allgemein gelte für Funktionen f , die in einem Intervall J definiert sind und nur positive Funktionswerte haben, der folgende Satz:

(A) Ist f in J streng konkav, so ist $\frac{1}{f}$ in J streng konvex.

Ein anderer Zirkelteilnehmer meint, es gelte auch der folgende Satz:

(B) Ist f in J streng konvex, so ist $\frac{1}{f}$ in J streng konkav.

Man untersuche jeden dieser Sätze auf seine Richtigkeit.

(Kl. 11/12)

Hinweise:

- Genau dann heißt $f(x)$ in J streng konvex bzw. konkav, wenn für je drei Zahlen x_1, x^*, x_2 aus J mit $x_1 < x^* < x_2$ der auf der von den Punkten $(x_1; f(x_1))$ $(x_2; f(x_2))$ begrenzten Sehne gelegene Punkt, dessen Abszisse x^* ist, eine Ordinate hat, die größer bzw. kleiner als $f(x^*)$ ist.
- Mit $\frac{1}{f}$ ist die durch die Festsetzung $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ für alle Zahlen x des Intervalls J definierte Funktion g bezeichnet.

Lösungen

Zu den Lösungen der Serie 12/74

Schwierigkeiten traten bei den Aufgaben F 64 und F 65 auf (zu diesen Aufgaben erhielten wir nur wenige Einsendungen). In den Lösungen zur Aufgabe F 66 fehlte der Hinweis auf die Bedingung $a \neq -1$, während bei der Aufgabe F 63 unexakte Lösungen bei der Angabe der Polarkoordinaten vorkamen (Winkel im gerundeten Gradmaß angegeben).

Aufgabe G 2

In den Lösungen dieser Aufgabe befanden sich einige falsche Schlüsse. So folgt z. B. aus " w^5 ist reell" nicht, daß auch w eine reelle Zahl ist (Gegenbeispiel: $w^5 = 1$, $w = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$). Außerdem besitzt die Gleichung $z^3 = 1$ im Bereich der komplexen Zahlen nicht nur die Lösung $z_1 = 1$, sondern auch die Lösungen

$$z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{und} \quad z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Das gegebene Gleichungssystem

$$z^3 + w^5 = 0$$

$$z^2 \bar{w}^4 = 1$$

wird umgeformt zu:

$$z^6 = w^{10}$$

$$z^6 (\bar{w}^4)^3 = 1.$$

Wegen $w^4 = \bar{w}^4$ und $w \cdot \bar{w} = |w|^2$ erhalten wir aus den beiden Gleichungen durch Einsetzen:

$$w^{10} (\bar{w}^{12}) = 1$$

$$w^{10} \bar{w}^{10} \bar{w}^2 = 1$$

$$|w|^{20} \bar{w}^2 = 1$$

Setzen wir $w = a + bi$, so ergibt das:

$$(a^2 + b^2)^{10} (a^2 - b^2 - 2abi) = 1.$$

a und b können nicht gleichzeitig Null werden, da sonst das Produkt auf der linken Seite der Gleichung gleich Null wird.

Damit dieses Produkt gleich 1 wird, muß sein Imaginärteil verschwinden, d. h. es muß $(a^2+b^2)^{10}(-2abi) = 0$ gelten.

Daraus folgt $-2abi = 0$

und, durch Fallunterscheidung, als einzige Lösungen der Gleichung

$$(a^2+b^2)^{10}(a^2-b^2-2abi) = 1$$

die Werte $a = \pm 1, b = 0.$

Es ist also $w_1 = +1, w_2 = -1.$

Setzen wir diese Werte in das Ausgangssystem ein, so ergibt sich:

$$\begin{array}{ll} z_1^3 + 1 = 0 & z_2^3 - 1 = 0 \\ z_1^2 = 1 & z_2^2 = 1 \end{array}$$

mit den einzigen Lösungen

$$z_1 = -1 \quad z_2 = 1.$$

Die Probe bestätigt die Richtigkeit der Lösungen $(1, -1), (-1, 1)$ des Gleichungssystems.

Aufgabe G 6 (Marcus Kasner, 209 Templin, 11. Klasse)

Angenommen, es gibt reelle Zahlen a und b , so daß die Gleichungen

$$x^3 + ax^2 + 18 = 0 \quad (1)$$

$$x^3 + bx + 12 = 0 \quad (2)$$

zwei gemeinsame Lösungen haben. Dann gilt:

Es seien x_1, x_2, x_3 die Wurzeln der Gleichung (1) und x_1, x_2, x_4 die Wurzeln der Gleichung (2). Offensichtlich gilt $x_i \neq 0, 1 \leq i \leq 4$.

Nach dem Vietaschen Wurzelsatz ergeben sich aus (1) und (2) die Gleichungen:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -18 ; \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 = -12$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a ; \quad x_1 + x_2 + x_4 = 0$$

Hieraus erhalten wir ($x_i \neq 0$):

$$\frac{x_3}{x_4} = \frac{3}{2}, \quad \text{also} \quad 2x_3 = 3x_4 \quad (3)$$

und

$$x_4 = a + x_3 \quad (4)$$

Lösen wir (3) und (4) nach x_3 und x_4 auf, so ergibt sich

$$x_3 = -3a \quad \text{und} \quad x_4 = -2a \quad (5)$$

Da x_3 Lösung von (1) sein soll, muß dann auch gelten:

$$\begin{aligned} -27a^3 + 9a^3 + 18 &= 0 \\ a^3 &= 1 \end{aligned}$$

a soll eine reelle Zahl sein, also folgt

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ &===== \end{aligned}$$

Hiermit folgt aus (5) $x_3 = -3$ und $x_4 = -2$. Dieser Wert von x_4 in Gleichung (2) eingesetzt, liefert

$$\begin{aligned} -8 - 2b + 12 &= 0 \\ b &= 2 \\ &===== \end{aligned}$$

Damit gehen (1) und (2) in die Gleichungen

$$x^3 + x^2 + 18 = (x+3)(x^2 - 2x + 6) = 0$$

$$x^3 + 2x + 12 = (x+2)(x^2 - 2x + 6) = 0$$

über. Die beiden Gleichungen besitzen also die gemeinsamen Lösungen

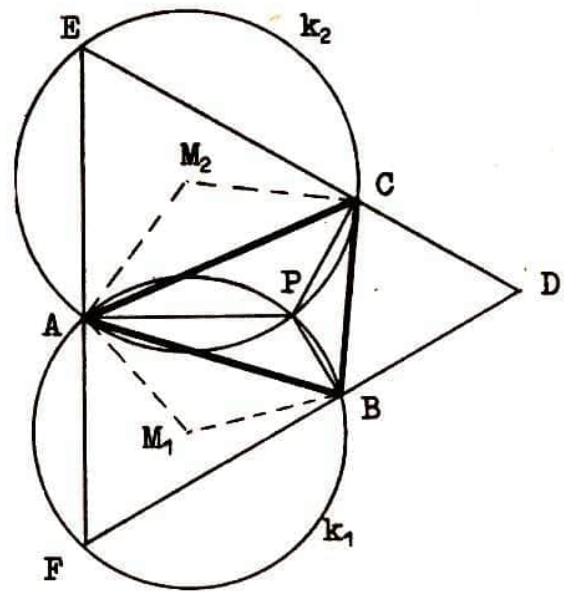
$$x_1 = 1 + i\sqrt{5}, \quad x_2 = 1 - i\sqrt{5}.$$

Aufgabe F 61

- a) Es sei $M_1 A = M_1 B$ $\angle AM_1 B = 120^\circ$
 $M_2 A = M_2 C$ $\angle AM_2 C = 120^\circ$.

M_1 bzw. M_2 seien die Mittelpunkte der Kreislinien k_1 bzw. k_2 . Der Schnittpunkt von k_1 und k_2 im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$ sei P. Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt: $\angle APB = \angle APC = 120^\circ$. Damit ist P der gesuchte Punkt, von dem aus alle Seiten unter einem Winkel von 120° erscheinen. Zwei Kreisbögen können sich nur zweimal schneiden (vorausgesetzt, daß ihre Mittelpunkte nicht zusammenfallen). Da der eine Schnittpunkt von k_1 und k_2 der Eckpunkt A ist, kann es innerhalb von $\triangle ABC$ nur einen Schnittpunkt von k_1 und k_2 geben.

b) D, E und F seien die Schnittpunkte der Geraden, die durch die Punkte A, B und C gehen und senkrecht zu $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ und $\overline{CP}$ verlaufen. Nach dem Peripheriewinkelsatz folgt, daß die Winkel $\angle AFB$ und $\angle AEC$ 60° betragen. Damit gilt auch $\angle BDC = 60^\circ$, und $\triangle DEF$ ist gleichseitig.



c) Jeder Punkt P^* im Innern des $\triangle ABC$ hat die gleiche Summe der Entfernungen zu den Seiten des $\triangle DEF$.

Beweis:

Man verbinde den Punkt P^* mit D, E und F. In den entstandenen drei Teildreiecken gilt dann:

$$\frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot h_1}{2} + \frac{a \cdot h_2}{2} + \frac{a \cdot h_3}{2} \quad (h - \text{Höhe des Dreiecks DEF, } h_1, h_2, h_3 - \text{Abstände von den Dreiecksseiten})$$

Da nach b) die Punkte A, B, C auf den Seiten des $\triangle DEF$ liegen, ist die Summe der Entfernungen der Punkte P^* zu A, B und C dann ein Minimum, wenn die Summe gleich h ist. Dies ist aber nur bei dem Punkt P der Fall.

Aufgabe F 63 (nach F. Schieweck, Blumenberg, Klasse 11)

Es gilt: $|-2 + 4i| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

$$z = \frac{\sqrt{100} + 15i}{-1 + 2i} + \frac{2}{1} = \frac{(\sqrt{100} + 15i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} + \frac{2i}{1^2} \\ = \frac{-10-15i-20i+30}{5} - 2i = 4 - 7i - 2i = \underline{\underline{4 - 9i}}$$

Weiterhin:

$$z = \sqrt{4^2 + 9^2} \left[\frac{4}{\sqrt{4^2 + 9^2}} - \frac{9}{\sqrt{4^2 + 9^2}} i \right]$$

Da $z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ ist, folgt: $r = \sqrt{97}$, $\cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{97}}$, $\sin\varphi = -\frac{9}{\sqrt{97}}$ mit $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$.

Die Polarkoordinaten sind also: $r = \sqrt{97}$, $\varphi = \arccos \frac{4}{\sqrt{97}}$ ($\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$).

Aufgabe G 5 (nach E. Specht, 355 Seehausen, Klasse 11)

Gegeben sei eine Funktion $f(i\varphi)$, $-\infty < \varphi < +\infty$, mit

$$f(i(\varphi+\psi)) = f(i\varphi) \cdot f(i\psi), \quad \varphi, \psi \text{ reell.} \quad (1)$$

Weiterhin gelte

$$f(i\varphi) = g(i\varphi) + i \cdot h(i\varphi), \quad g(i\varphi), h(i\varphi) \text{ reell.} \quad (2)$$

Zu zeigen ist:

$$g(i(\varphi+\psi)) = g(i\varphi) \cdot g(i\psi) - h(i\varphi) \cdot h(i\psi) \quad (3)$$

$$h(i(\varphi+\psi)) = g(i\varphi) \cdot h(i\psi) + h(i\varphi) \cdot g(i\psi) \quad (4)$$

Aus (2) folgt für das Argument ψ :

$$f(i\psi) = g(i\psi) + i \cdot h(i\psi), \quad g(i\psi), h(i\psi) \text{ reell.} \quad (5)$$

Wird nun nach (2) und (5) $f(i\varphi)$ bzw. $f(i\psi)$ in (1) eingesetzt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(i(\varphi+\psi)) &= [g(i\varphi) + i \cdot h(i\varphi)] \cdot [g(i\psi) + i \cdot h(i\psi)] \\ &= g(i\varphi) \cdot g(i\psi) - h(i\varphi) \cdot h(i\psi) + \\ &\quad + i[g(i\varphi) \cdot h(i\psi) + h(i\varphi) \cdot g(i\psi)] \end{aligned} \quad (6)$$

Aus (2) folgt für das Argument $(\varphi+\psi)$:

$$f(i(\varphi+\psi)) = g(i(\varphi+\psi)) + i \cdot h(i(\varphi+\psi)) \quad (7)$$

Durch Gleichsetzen von (6) und (7) erhält man:

$$\begin{aligned} g(i(\varphi+\psi)) + i \cdot h(i(\varphi+\psi)) &= \\ &= g(i\varphi) \cdot g(i\psi) - h(i\varphi) \cdot h(i\psi) + i[g(i\varphi) \cdot h(i\psi) + h(i\varphi) \cdot g(i\psi)] \end{aligned} \quad (8)$$

Da Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten von (8) gleich sein müssen, gilt

$$g(i(\varphi+\psi)) = g(i\varphi) \cdot g(i\psi) - h(i\varphi) \cdot h(i\psi)$$

$$\text{und} \quad h(i(\varphi+\psi)) = g(i\varphi) \cdot h(i\psi) + h(i\varphi) \cdot g(i\psi),$$

also (3) und (4).

Wählt man $f(i\varphi) = e^{i\varphi}$, wobei offensichtlich

$$f(i(\varphi+\psi)) = e^{i(\varphi+\psi)} = e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = f(i\varphi) \cdot f(i\psi)$$

gilt, so kann man $f(i\varphi) = e^{i\varphi}$ durch $g(i\varphi) = \cos \varphi$ und

$h(i\varphi) = \sin \varphi$ wie folgt darstellen: $f(i\varphi) = e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$.

Hieraus folgt sofort nach (3) und (4):

$$\cos(\varphi+\psi) = \cos \varphi \cdot \cos \psi - \sin \varphi \cdot \sin \psi, \quad \sin(\varphi+\psi) = \sin \varphi \cdot \cos \psi + \cos \varphi \cdot \sin \psi.$$

Herausgeber: Leitung der FDJ-Grundorganisation der Friedrich-Schiller-Universität Jena;
Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Egbert Creutzburg

Chefredakteur: Waltraud Werner

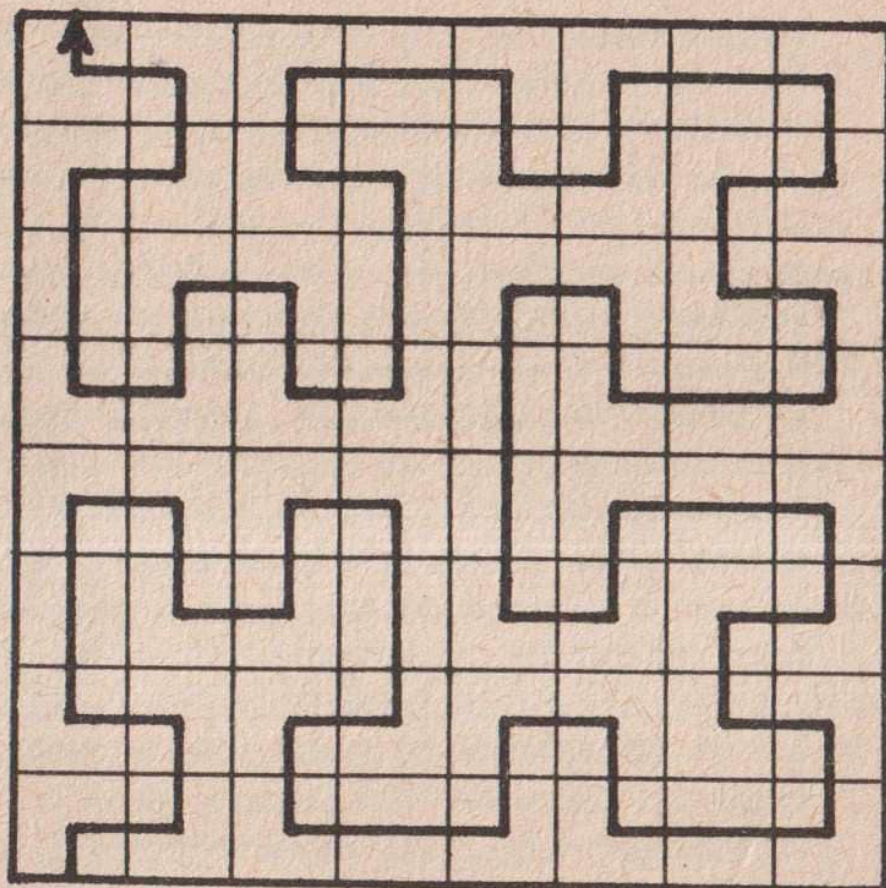
Redaktion: J. Dubslaff, H.-G. Leopold, Th. Ullrich, G. Weske

Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.



6

75

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Ju-
gendobjekt Studienvor-
bereitung der Sektion
Mathematik an der
Friedrich-Schiller-Uni-
versität Jena

9. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Beziehungen zwischen Physik und Mathematik (I)

Im Brockhaus "ABC Physik", Band II wird die Physik definiert als "die Wissenschaft von den Eigenschaften und Zustandsformen, der Struktur und der Bewegung der unbelebten Materie, den diese Bewegung hervorrufenden Kräften oder Wechselwirkungen und den hierbei konstant bleibenden Größen. Die Physik ist eine grundlegende Naturwissenschaft, die auf der Basis quantitativer, durch Messungen präzisierter Erfahrungen zur Aufdeckung, zur mathematischen Formulierung und praktisch-technischen Anwendung der Naturgesetze führt." Weiter wird gesagt: "Enge Wechselbeziehungen bestehen zwischen Physik und Mathematik, die allerdings keine Naturwissenschaft ist; denn die Mathematik geht in ihrem logischen inneren Aufbau (nicht in ihrer historischen Entwicklung!) nicht von überprüfbaren Erfahrungen aus, sondern erforscht logisch widerspruchsfreie Strukturen ohne unmittelbaren Bezug auf deren konkrete Realisierung. Wenn auch durchaus nicht alle mathematischen Strukturen realisierbar sein müssen, hat sich diese Methode als sehr erfolgreich erwiesen. Insbesondere sind viele abstrakte mathematische Strukturen historisch aus physikalischen Problemstellungen erwachsen, andererseits müssen auch neue, noch unerkannte reale Strukturen zumindest logisch widerspruchsfrei sein, so daß man mit Recht sucht, ihr formales Äquivalent aus bereits erforschten mathematischen Strukturen abzuleiten."

Hier wird eine ganze Reihe von Problemen angerissen. Wir wollen uns in diesem Artikel auf Wechselwirkungen zwischen Physik und Mathematik beschränken. Aber auch dabei können wir nur einige ausgewählte Probleme betrachten.

1. Die Erkenntnisgewinnung in der Physik

Aus dem oben Gesagten geht hervor, daß der Ausgangspunkt der Physik als Naturwissenschaft die Erfahrung ist, daß sie aber dabei nicht stehen bleibt. Das Ziel einer jeden Wissenschaftsdisziplin besteht vielmehr darin, ein "theoretisches System" aufzubauen.

Darunter ist ein kompliziertes Netzwerk von Hypothesen und Theorien zu verstehen. Die verschiedenen empirischen Wissenschaften haben bei dieser Entwicklung, die nie abgeschlossen sein wird, einen unterschiedlichen Stand erreicht, wobei die Physik - und hier besonders die Mechanik - heute am weitesten ist. Charakteristisch ist dabei eine fortschreitende Formalisierung. Wir verstehen darunter die Abstraktion von im jeweiligen Zusammenhang unwesentlichen Eigenschaften. So faßt man Autos, Kanonenkugeln, Steine u. a. zur Klasse der "festen Körper" zusammen. Wenn Probleme der Elastizität nicht diskutiert werden sollen, spricht man von "starren Körpern". Von Farbe, Form, Konsistenz u. a. wird dabei abgesehen. Untersucht man nur Probleme der Translationsbewegung, dann kann man oft (nicht in jedem Fall!) weiter zum Denkschema "Massenpunkt" abstrahieren. Man gelangt so zu Objekten, die der unmittelbaren Anschauung immer weniger zugänglich sind und schließlich zu Begriffen, die im Rahmen der Physik nur noch mathematisch faßbar und beschreibbar sind, wie etwa die physikalischen Größen (Geschwindigkeit, Beschleunigung usw.), aber auch etwa der Begriff "Feld". Damit wird die Physik immer stärker mathematisch durchdrungen; mit anderen Worten: Strukturen unserer physikalischen Umwelt werden auf mathematische Strukturen abgebildet, siehe oben. Ziel der Forschung ist es zunächst, einen geeigneten Bereich der Mathematik zu finden. Dabei kann ein entsprechendes Gebiet der Mathematik schon fertig vorliegen. So fanden M. Born, W. Heisenberg und P. Jordan 1925 in der Matrizenrechnung das geeignete Hilfsmittel zur Beschreibung quantenmechanischer Probleme. Es kann vorkommen, daß ein entwickelter mathematischer Formalismus lange auf eine Anwendungsmöglichkeit warten muß. Andererseits ist oft in Teilgebieten der Physik zunächst eine Weiterentwicklung deshalb nicht möglich, weil ein geeigneter mathematischer Formalismus noch fehlt. In vielen Fällen helfen sich dann die Physiker selbst weiter. Newton hat die Differential- und Integralrechnung vor allem deshalb entwickelt, um die Begriffe der Mechanik handhabbar zu machen, das ist vor ihm Galilei oft nur unvollkommen gelungen.

Auf diese Weise bestehen enge Beziehungen zwischen mathematischen und physikalischen Aussagen. Ein wichtiges und interessantes Beispiel ist das von der deutschen Mathematikerin E. Noether 1918

gefundene und nach ihr benannte Theorem. Es beinhaltet, daß jeder Symmetrieeigenschaft eines Systems (mathematische Aussage) ein Erhaltungssatz (physikalische Aussage) entspricht. Zum Beispiel folgt aus der Tatsache, daß die Ergebnisse experimenteller Untersuchungen unabhängig von Ort und Zeit sind, die Erhaltung von Energie und Impuls. Zeigt die Natur an jedem Ort und jeder Zeit die gleichen physikalischen Eigenschaften (Translationssymmetrie in Raum und Zeit), dann müssen zwangsläufig diese Erhaltungssätze gelten und umgekehrt.

Von Interesse ist weiterhin die Tatsache, daß häufig ein physikalischer Sachverhalt durch verschiedene mathematische Strukturen beschrieben werden kann. Das ist in der Quantenphysik der Fall, aber auch in der klassischen Physik häufig. Insbesondere ist durch eine Verallgemeinerung der mathematisch gefaßten Begriffe häufig eine Erweiterung der physikalischen Aussage - oft in neue Bereiche - möglich. Vielleicht noch interessanter ist es, daß eine mathematische Struktur sehr oft auf äußerlich völlig verschiedene Bereiche der Physik anwendbar ist, wodurch Zusammenhänge zwischen diesen Gebieten deutlich werden.

Nach diesen allgemeinen Darlegungen, die natürlich hier nur in groben Zügen möglich sind, wollen wir einige Beispiele genauer betrachten.

2. Ausgewählte Beispiele

2.1. Mathematische Verallgemeinerungen liefern neue Gesichtspunkte

Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel, dem freien Fall mit Anfangsgeschwindigkeit; mit anderen Worten: Der senkrechte Wurf. Im Schwerfeld der Erde gilt in der Nähe der Erdoberfläche bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes für die Beschleunigung

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = -g \quad .$$

Dabei ist g die Erdbeschleunigung, mit $\frac{ds}{dt}$ bzw. $\frac{d^2 s}{dt^2}$ bezeichnen wir die erste bzw. zweite Ableitung des Weges nach der Zeit, also Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Integration liefert $v = \int a \, dt = - \int g \, dt = v_0 - g \cdot t$.

Dabei ist v_0 offensichtlich die Geschwindigkeit zur Zeit $t=0$, die Anfangsgeschwindigkeit, sie kann sowohl positiv als auch negativ

sein (Wurf nach oben bzw. nach unten).

Nochmalige Integration der letzten Gleichung liefert

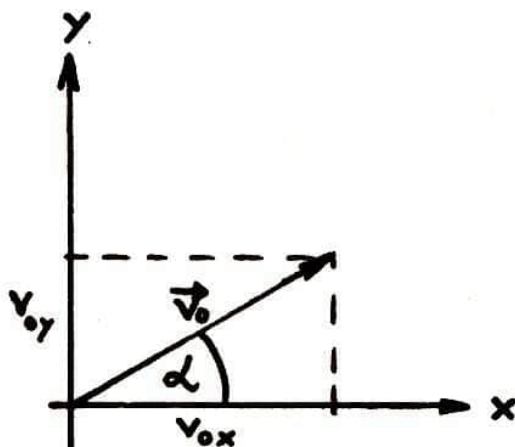
$$s = \int v \cdot dt = \int (v_0 - g \cdot t) dt = s_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad .$$

s_0 ist dabei die Höhe des geworfenen Körpers zur Zeit $t = 0$. Die angegebenen Gleichungen berücksichtigen nicht, daß s, v, a und g eigentlich vektorielle Größen sind. Unter Beachtung dieser Tatsache, d. h. durch einfaches Verändern der Symbole erhält man statt der letzten Gleichung

$$\vec{s} = \vec{s}_0 + \vec{v}_0 \cdot t - \frac{1}{2} \vec{g} \cdot t^2 \quad (1) .$$

Damit ist aber der Gültigkeitsumfang beträchtlich erweitert worden, es werden nun auch alle Fälle des schrägen Wurfes mit erfaßt. Das soll im folgenden gezeigt werden.

Zerlegt man den Vektor $\vec{v}_0$ in seine Komponenten, dann erhält man:



$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin \alpha$$

α = Abwurfwinkel

Berücksichtigt man, daß $\vec{g}$ nur eine Komponente in senkrechter (y-) Richtung hat, dann erhält man aus Gleichung (1) zwei Gleichungen:

$$s_y = s_{y0} + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (2)$$

$$s_x = s_{x0} + v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t \quad (3)$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen die Zeit, dann erhält man die Bahnkurve

$$(s_y - s_{y0}) = \tan \alpha \cdot (s_x - s_{x0}) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} (s_x - s_{x0})^2 \quad (4) .$$

Es handelt sich offensichtlich um eine Parabel. Aus den Gleichungen (2), (3) und (4) lassen sich weitere Aussagen herleiten, wie Wurfhöhe, Wurfweite u. a.

Dr. sc. Klaus Jupe
Leiter des Wissenschaftsbereiches
Physikmethodik

(Die Fortsetzung dieses Artikels erscheint in Heft 7/75.)

Preisaufgaben 6/75

- (G 31) Man gebe alle positiven Zahlen a an, für welche alle nicht negativen x , die die Gleichung
- $$\cos [(8a-3)x] = \cos [(14a+5)x]$$
- erfüllen und ihrer Größe nach angeordnet werden, eine arithmetische Folge bilden.

- (G 32) Man beweise, daß die Funktion
- $$F(x,y) = (x-1975)^{1974} \cdot (y-1976)^{1975} + 1$$
- nicht als Produkt zweier Funktionen $g(x) \cdot h(y)$ darstellbar ist, wobei die Funktionen $g(x)$ und $h(y)$ jeweils nur von einer Variablen abhängen.

- (G 33) Gegeben sei ein Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r . Durch zwei zueinander rechtwinklige Sekanten des Kreises wird außerhalb von ihm ein Punkt P bestimmt. Die erste Sekante schneide den Kreis in den Punkten A und C (der Punkt C liegt zwischen A und P), die zweite in den Punkten B und D (der Punkt B liegt zwischen D und P). P_1 sei die Projektion von P auf die Gerade AB und M einer der beiden Schnittpunkte der Geraden AB mit einem Kreis mit dem Radius P_1O um den Punkt P_1 . Man berechne die Länge der Strecke MP .

- (G 34) Man gebe alle Paare ganzer Zahlen an, die dem folgenden Ungleichungssystem genügen.

①

$$y - |x^2 - 2x| + \frac{1}{2} > 0$$

$$y + |x-1| < 2$$

- (G 35) Zu jeder ebenen konvexen Figur gibt es einen Punkt der Ebene derart, daß jede Gerade durch ihn diese Figur so teilt, daß die Flächeninhalte der Teile jeweils mindestens $\frac{4}{9}$ des Inhalts der Gesamtfläche der Figur betragen. Man zeige, daß sich die Grenze nicht erhöhen läßt.

②

- (G 36) Найти решения уравнения

①

$$\frac{\sqrt{1-\cos x} + \sqrt{1+\cos x}}{\cos x} = 4\sin x,$$

лежащие в интервале $(0, 2\pi)$.

Einsendeschluß: 31. 7. 1975



Hiermit setzen wir den Abdruck der Aufgaben der XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR fort.

- 6) Es sei ABCDS eine gerade vierseitige Pyramide mit fest vorgegebener quadratischer Grundfläche ABCD. Wir betrachten alle geschlossenen Streckenzüge PQ RTP, wobei P ein fest vorgegebener innerer Punkt der Kante AS, Q ein innerer Punkt von BS, R von CS sowie T von DS ist.

Man ermittle die Menge aller derjenigen Winkelgrößen φ ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$), für die folgendes gilt: Hat der Winkel $\angle ASB$ die Größe φ , so existiert unter den auf der Pyramide ABCDS betrachteten Streckenzügen PQ RTP ein kürzester. (Klasse 10)

- 7) In der Ebene sei der "Abstand" zwischen zwei Punkten wie folgt definiert:

Sind P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte, die in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Koordinaten $(x_1; y_1)$ bzw. $(x_2; y_2)$ haben (x_1, x_2, y_1, y_2 seien reelle Zahlen), so sei ihr "Abstand" $d(P_1; P_2) = \max \{ |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2| \}$.

Man ermittle die Menge M aller Punkte der Ebene, die bezüglich des so definierten Abstandes von den Punkten A (0;2) und B (1;4) gleichweit entfernt sind. (Klassen 11/12)

Fortsetzung Seite 92

Das Dilemma der exakten Definition (I)

Der Begriff der Kurve ist einer der fundamentalen Begriffe in der Geometrie. Es gibt eine Vielzahl von konkreten geometrischen Gebilden, die als Kurven bezeichnet werden, z. B. der Kreisbogen, die Parabel und die Sinuskurve. Bereits seit dem Entstehen der Geometrie ist daher die Abgrenzung der Kurven von anderen geometrischen Objekten von besonderem Interesse. So gibt es in der Geschichte der Mathematik eine ganze Reihe von Versuchen,

den Begriff der Kurve mathematisch exakt zu definieren, so daß der anschauliche Kurvenbegriff im Wesen und möglichst vollständig erfaßt wird.

Noch 1914 schreibt der deutsche Mathematiker Felix Hausdorff (1868 - 1942) angesichts der weit auseinandergehenden Auffassungen vom Kurvenbegriff: "Die Mengen, die herkömmlicherweise diesen Namen führen, sind so heterogen (verschiedenartig, d.A.), daß sie unter keinen vernünftigen Sammelbegriff fallen." Erst in den 20er Jahren dieses Jahrhunderts gelingt es dem sowjetischen Mathematiker Urysohn, eine voll befriedigende Lösung des Problems zu geben.

Wir wollen im folgenden auf einige bemerkenswerte Beispiele in der Entwicklung der Kurvenauffassung näher eingehen. Dazu seien zunächst einige geometrische Gebilde angegeben, die als Repräsentanten für den anschaulichen Kurvenbegriff gelten sollen (Abb. 1 - 3) bzw. die nicht als Kurven bezeichnet werden sollen (Abb. 4 - 6):

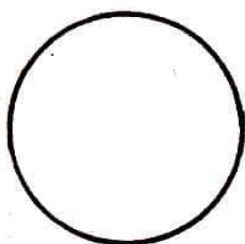


Abb. 1 Kreislinie



Lemniskate

Abb. 2

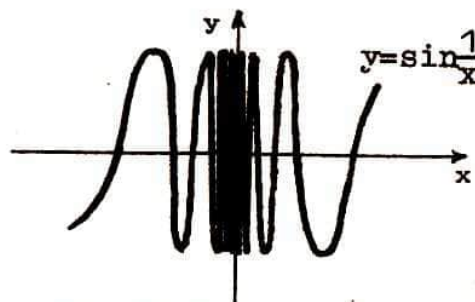


Abb. 3 Sinusoid

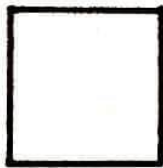


Abb.4 Quadrat

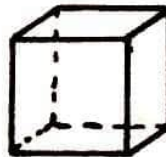
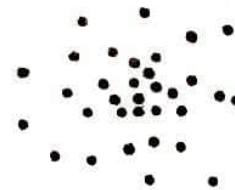


Abb.5 Würfel

Abb.6 "verstreute
Punktmenge"

Bereits Euklid gibt eine Definition für den Kurvenbegriff, indem er eine Kurve als "breitenlose Länge" und als "Ende einer Fläche" bezeichnet. Diese Charakterisierungen kommen zwar dem Wesen der Kurven schon ziemlich nahe, sie benutzen aber andere geometrische Begriffe, die selbst noch definiert werden müßten, und sind daher für den mathematischen Gebrauch ungeeignet.

Die heute in der Schule gelehrteten Methoden der Kurvenuntersuchung, die eine Gleichung (etwa $y=f(x)$) ihrer cartesischen Koordinaten benutzen, gehen auf den französischen Mathematiker Descartes (1596 - 1650, latinisiert Cartesius, s. WURZEL 2/75) zurück. Sie bieten die Möglichkeit, eine große Klasse von bekannten Kurven zu untersuchen, aber bei weitem nicht alle. Eine weitere Möglichkeit der Verallgemeinerung bieten der Übergang zu sogenannten krummlinigen Koordinaten und die Parameterdarstellung. Letztere kommt den Anwendungen in der Physik sehr entgegen, da sie Kurven als Bahnen bewegter Punkte betrachtet. Dabei werden die Koordinaten x und y nicht mehr in Abhängigkeit voneinander dargestellt, sondern als Funktionen einer dritten Variablen t , die als Zeit deutbar ist. Die Parameterdarstellung basiert auf dem Abbildungsbegriff, denn indem sie jedem Wert t aus einem Intervall $[a,b]$ den Punkt $(x(t), y(t))$ zuordnet, stellt sie eine Abbildung der Strecke $[a,b]$ (die ja selbst eine Kurve ist) auf das gerade betrachtete Gebilde her.

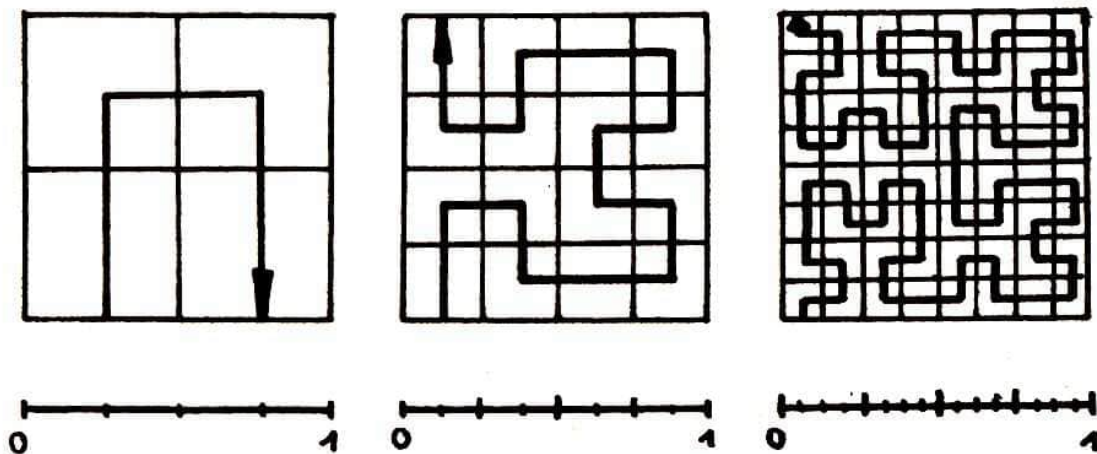
Durch bestimmte Bedingungen, die an die Abbildung der Strecke in die Ebene (oder den Raum) gestellt werden, können ganz spezielle Eigenschaften der Strecke auf ihre Bilder übertragen werden. Das Problem der Kurvendefinition wäre also gelöst, wenn es gelänge, eine solche Abbildung zu finden, bei der gerade die **Kurven** - Eigenschaften der Strecke erhalten bleiben, und

wenn diese Eigenschaften zur Charakterisierung aller Kurven ausreichen.

Eine erste Möglichkeit wäre, alle eindeutigen Streckenbilder als Kurven zu bezeichnen. Es lassen sich jedoch auch eindeutige Abbildungen von der Strecke auf zerstreute Mengen (Abb. 6) und das Quadrat angeben. (Für eine solche Abbildung von der Strecke $[0,1]$ auf das Einheitsquadrat $[0,1] \times [0,1]$ benutzen wir die Darstellung der Komponenten in Dualzahlen. So können wir jedem Punkt $x \in [0,1]$ eindeutig einen Punkt $(y,z) \in [0,1] \times [0,1]$ zuordnen, indem wir die Komponente y aus den Dualziffern von x bilden, deren Stellen ungerade sind, und die Komponente z aus den Dualziffern von x , deren Stellen gerade sind.)

Der französische Mathematiker C. Jordan (1838 - 1922) faßt unter dem Begriff Kurve alle Bilder einer Strecke zusammen, die bei stetigen Abbildungen entstehen. Eine Abbildung heißt dabei stetig, wenn "benachbarte" Punkte des Wertebereiches immer das Bild von "benachbarten" Punkten des Definitionsbereiches sein müssen. Anschaulich heißt das, daß bei einer stetigen Abbildung die Bilder von "zusammenhängenden Teilen" nicht "auseinandergerissen" werden. So sind also bei der Jordanschen Kurvendefinition die verstreuten Punktmengen von den Kurven ausgeschlossen. Der italienische Mathematiker Peano (1858 - 1932) konnte allerdings zeigen, daß es eine stetige Abbildung von der Strecke auf das Quadrat gibt. Im folgenden wollen wir eine solche Abbildung skizzieren:

Sei T die Strecke $[0,1]$ und Q das Einheitsquadrat $[0,1] \times [0,1]$. Sowohl T als auch Q werden nun schrittweise in 4, 16, 64 usw. kongruente abgeschlossene Teilstrecken bzw. Teilquadrate zerlegt, wobei es möglich ist, die Teilquadrate so durchnummerieren, daß sie nacheinander durchlaufen ("aufgefädelt") werden können:



So entstehen Intervall- bzw. Quadratschachtelungen, deren Durchschnitt aus genau einem Punkt von T bzw. Q besteht, wobei alle Punkte erfaßt werden. Ordnen wir nun jeder Intervallschachtelung die Quadratschachtelung zu, deren K -tes Quadrat im "aufgefädelten" Einheitsquadrat der Stellung (Numerierung) des K -ten Intervalls entspricht, so wird dadurch eine eindeutige (nicht umkehrbar eindeutige) Abbildung von T auf Q erzeugt, die die Eigenschaft besitzt, daß nahe aneinander gelegene Punkte von Q die Bilder von nahe aneinander gelegenen Punkten von T sind.

Damit ist gezeigt, daß eine Strecke eindeutig und stetig auf ein Quadrat abgebildet werden kann, daß also auch die Jordansche Kurvendefinition solche Gebilde umfaßt, die wir von der Anschauung her nicht als Kurven bezeichnen. Wir bemerken noch, daß sie außerdem keine Streckenbilder mit Unstetigkeitsstellen umfaßt, wie das Sinusoid; sie ist also andererseits auch zu eng.

Durch folgende schärfere Kurvendefinition können die flächenenthaltenden Gebilde ausgeschlossen werden: Kurven sind **e i n - e i n d e u t i g e** und **s t e t i g e** Streckenbilder. Die Kurven in diesem Sinne heißen Bögen. Allerdings bringt die Verschärfung der Definition auch eine noch stärkere Einengung mit sich: Weder das Sinusoid noch der Kreis oder die Lemniskate können als eineindeutiges und stetiges Streckenbild dargestellt werden.

Dieser Mangel ist dadurch auszugleichen, indem man Zusammensetzungen von Bögen als Kurven definiert. So fallen der Kreis als

Zusammensetzung von 2 Bögen und die Lemniskate als Zusammensetzung von 4 Bögen jetzt unter die Kurvendefinition. Läßt man abzählbar viele Bögen zu (also so viele Bögen, wie es natürliche Zahlen gibt), so wird auch das Sinusoid mit erfaßt.

Es gibt jedoch Kurven, die sich aus überabzählbar vielen Bögen zusammensetzen (aus so vielen Bögen etwa wie es reelle Zahlen gibt). Wollte man aber allgemein die Zusammensetzung von überabzählbar vielen Bögen als Kurven bezeichnen, so enthielte der Begriff wieder Flächen und Körper.

Alle diese Versuche, Kurven als bestimmte Streckenbilder darzustellen, führen also noch zu keiner voll befriedigenden Kurvendefinition. Wir werden im zweiten Teil dieses Artikels auf die Kurvendefinition des deutschen Mathematikers Georg Cantor eingehen, die zwar nur auf die Ebene anwendbar ist, aber dort mit der exakten Definition Urysohns identisch ist.

Roland Hendel
Student des 4. Studienjahres
im Bereich Analysis

(Fortsetzung von Seite 87)

- 3) Man beweise, daß für alle reellen Zahlen a, b, c, d mit $0 < a \leq b \leq c \leq d$ gilt:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} \quad (1)$$

(Klassen 11/12)

- 9) In einem Klub Junger Mathematiker gibt es Streit um das Monotonieverhalten zweier Funktionen. Bekannt ist von zwei Funktionen f und g , daß beide für alle reellen Zahlen x definiert sind, f im gesamten Definitionsbereich streng monoton wächst, und daß die Gleichung $g(x)^2 - f(x)^2 = 1$ für alle x erfüllt ist. Annemarie folgert nun daraus: "Dann ist auch g eine auf dem gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsende Funktion." Brigitte widerspricht: "Es läßt sich nur schließen, daß g im gesamten Definitionsbereich entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist." Christa meint: "Ihr habt beide nicht recht." Wer von diesen Schülerinnen hat nun recht?

(Klasse 10)

Anmerkung: Eine Funktion f wird genau dann als streng monoton wachsend bzw. fallend in einem Intervall bezeichnet, wenn für alle Zahlen x_1, x_2 aus diesem Intervall, für die $x_1 < x_2$ gilt, die Ungleichung $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$ gilt.

Fortsetzung Seite 96

Lösungen

Aufgabe G 11

Obwohl ein möglicher Lösungsweg durch das Beispiel 1 auf der Seite 29 bereits vorgezeichnet war, erhielten wir rund 30 % falsche Lösungen. Der Hauptfehler war, daß die $2k$ -te Partialsumme der Reihe falsch angegeben und berechnet wurde. Die $2k$ -te Partialsumme entsteht durch die Summation aller Reihenglieder a_v bis a_{2k} und nicht durch die Summation nur der Reihenglieder mit geradem Index:

$$s_{2k} = \sum_{v=1}^{2k} (-1)^v v \neq \sum_{v=1}^k (-1)^{2v} \cdot 2v$$

Es wird eine Teilfolge der Folge der Partialsummen $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ und nicht eine Teilfolge der Zahlenfolge $\{a_v\}_{v=1}^{\infty}$ betrachtet.

Wir möchten jetzt zwei verschiedene Lösungsmöglichkeiten angeben:

1. Nach Gunter Gerbeth, 66 Greiz, 10. Klasse.

Bekanntlich ist $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = 0$ eine notwendige Bedingung für die Konvergenz der Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ (vergleiche Satz 8, WURZEL 3/75). Wäre nun die gegebene Reihe konvergent, so müßte $\lim_{v \rightarrow \infty} (-1)^v v = 0$ gelten. Ist aber $\{(-1)^v v\}_{v=1}^{\infty}$ eine Nullfolge, so müßte zu jedem reellen $\varepsilon > 0$ ein v_ε existieren, so daß für alle $v > v_\varepsilon$ gilt:

$$|(-1)^v v| = v < \varepsilon.$$

Dies gilt aber nicht, denn sogar für beliebige, aber feste reelle Zahlen ε – wir wählen speziell $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ – und für beliebige v_ε existieren stets unendlich viele natürliche Zahlen v mit $v > v_\varepsilon$ und $v > \frac{1}{2} = \varepsilon_0$.

Also ist die notwendige Bedingung für die Konvergenz der Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v v$ nicht erfüllt. Demnach muß die Reihe divergieren.

2. Nach Rainer Lindemann, 75 Cottbus, 11. Klasse.

Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, daß die Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v v$ konvergiert. Dann muß auch jede Teilfolge der Partialsummen konvergieren. Diese Aussage führen wir zu einem Widerspruch.

Es gilt $s_{2v} = v$ für jede natürliche Zahl v . Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $v = 1$

$$s_2 = (-1)^1 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 2 = 1$$

Induktionsvoraussetzung: $v=k$, dann gilt $s_{2k} = k$.

Induktionsbehauptung: $v=k+1$, dann gilt $s_{2k+2} = k+1$.

Beweis:

$$s_{2k+2} = s_k + a_{2k+1} + a_{2k+2}$$

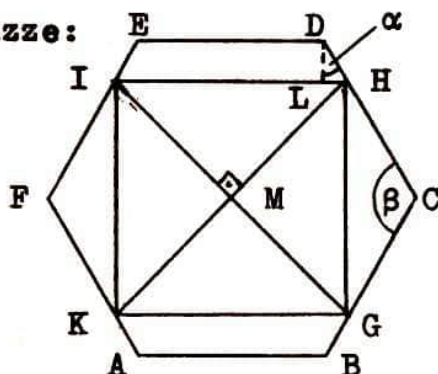
$$s_{2k+2} = k + (-1)^{2k+1} \cdot (2k+1) + (-1)^{2k+2} \cdot (2k+2)$$

$$s_{2k+2} = k + 1$$

Hieraus folgt, daß die Teilfolge der Partialsummen $\{s_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ divergent ist, und damit ist unsere obige Aussage zum Widerspruch geführt. Also divergiert die Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v v$.

Aufgabe G 12 (nach Eckhard Specht, Seehausen, 11. Klasse)

Skizze:



Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \overline{DC} &= a \\ \overline{HC} &= x \\ \overline{HG} &= b \\ \angle LDH &= \alpha \\ \angle DCB &= \beta \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt:

(1) Das gesuchte Quadrat ist dann am größten, wenn seine Diagonalen am größten sind.

(2) Das Quadrat ist dann am größten, wenn seine Eckpunkte auf den Seiten des Sechsecks liegen.

(3) Wegen der Zentralsymmetrie gilt, daß der Mittelpunkt des Quadrates mit dem Mittelpunkt des Sechsecks übereinstimmt.

Man kann sich überlegen, daß (1), (2) und (3) erfüllt sein müssen, denn jedes andere Quadrat im Inneren des Sechsecks wäre ja

$g(z, x)$	$x \in$	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}
z_0		0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6
z_1		1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7

Der Addierautomat $\mathcal{A} = [Z, X, Y, f, g]$ ist damit gegeben.

(Fortsetzung von Seite 92)

- 10) Man ermittle alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen x und y , für die die Gleichungen

$$24x^2 - 25xy - 73x + 25y - 35 = 0 \quad (1) \quad \text{und}$$

$$x^2 - y^2 - 2x - 2y - 7 = 0 \quad (2) \quad \text{gelten.}$$

(Klassen 11/12)

- 11) Es sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$. Jemand schreibt n Briefe, von denen jeder für genau einen unter n verschiedenen Adressaten vorgesehen ist, und steckt in jeden von n Umschlägen genau einen dieser Briefe, ohne vorher die Adressen auf die Umschläge zu schreiben. Da er nun nicht mehr weiß, in welchem Umschlag sich welcher Brief befindet, schreibt er willkürlich die n Adressen auf die n Umschläge (auf jeden Umschlag genau eine Adresse).

Man beweise: Die Wahrscheinlichkeit q_n dafür, daß bei keinem der Adressaten der an ihn gerichtete Umschlag den für ihn vorgesehenen Brief enthält, hat den Wert

$$q_n = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2!} + (-1)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}.$$

(Klassen 11/12)

Hinweis: Man bezeichne jede überhaupt mögliche Verteilung der Briefe an die Adressaten (jeder Brief an genau einen der Adressaten) als einen "möglichen Fall". Unter diesen bezeichne man jede Verteilung, bei der für keinen Adressaten der an ihn gerichtete Umschlag den für ihn vorgesehenen Brief enthält, als einen "günstigen Fall". Die Anzahl aller "möglichen Fälle" sei a_n genannt, die Anzahl aller "günstigen Fälle" g_n . Dann ist die genannte Wahrscheinlichkeit q_n definiert als $q_n = \frac{g_n}{a_n}$.

Herausgeber: Leitung der FDJ-Grundorganisation der Friedrich-Schiller-Universität Jena;
Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Egbert Creutzburg

Chefredakteur: Waltraud Werner

Redaktion: J. Dubslaff, H.-G. Leopold, Th. Ullrich, G. Weske

Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

7

75

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

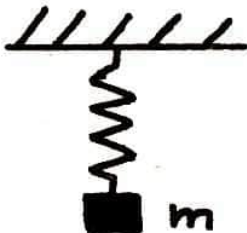
Herausgegeben vom Ju-
gendobjekt Studienvor-
bereitung der Sektion
Mathematik an der
Friedrich-Schiller-Uni-
versität Jena

9. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Beziehungen zwischen Physik und Mathematik (II)

2.2. Analogien zwischen verschiedenen Bereichen der Physik

Wir wollen die verschiedenen Arten von Schwingungen untersuchen, die von der Erscheinung her wenig miteinander zu tun haben. Als Ausgangspunkt wählen wir einen Federschwinger, einen Körper mit der Masse m , der an einer Feder vernachlässigbarer Masse hängt. Für die Rückstellkraft, mit der die Feder den Körper in die Ruhelage zurückzieht, gilt (Hooke'sches Gesetz)



$$F = m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = -k \cdot y,$$

d. h. die Kraft ist (das gilt nur für kleine Auslenkungen) proportional der Elongation y , k ist die sogenannte Federkonstante. Wird die Reibungskraft berücksichtigt, dann ergibt die Erfahrung, daß diese der Geschwindigkeit $v = \frac{dy}{dt}$ proportional und dieser entgegengerichtet ist.

Wir erhalten dann $m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = -c \cdot \frac{dy}{dt} - k \cdot y$ oder

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{c}{m} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} \cdot y = 0. \quad (5)$$

Wir haben eine Gleichung vor uns, die neben den bekannten Größen m , c und k die unbekannte Funktion y sowie deren erste und zweite Ableitung enthält. Zu berechnen ist aus dieser "Differentialgleichung" die Elongation y als Funktion der Zeit t . Dabei geht man in der Physik oft so vor, daß man nicht die allgemeine Lösung sucht, sondern ausgehend von der Erfahrung einen plausiblen Ansatz macht. Wir wissen, daß eine gedämpfte Schwingung zu erwarten ist. In der Gleichung $y = y_{\max} \cdot \sin \omega t$

(vgl. Lehrbuch "Physik", Klasse 10) ersetzen wir daher $y_{\max}$ durch $y_0 \cdot e^{-\delta t}$, um die zeitlich abnehmende Amplitude zu beschreiben und erhalten als Ansatz

$$y = y_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin \omega t \quad (6)$$

Wir müssen jetzt prüfen, ob dieser Ansatz eine Lösung der Differentialgleichung ist und, wenn das der Fall ist, die unbekannten Größen $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ und δ berechnen.

Wir müssen also den Ansatz (6) in Gleichung (5) einsetzen. Dazu bilden wir aus (6)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= y_0 \cdot e^{-\delta t} (-\delta \sin \omega t + \omega \cdot \cos \omega t) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= y_0 \cdot e^{-\delta t} (\delta^2 \sin \omega t - 2\delta \omega \cdot \cos \omega t - \omega^2 \sin \omega t) \end{aligned}$$

Einsetzen in (7) ergibt

$$y_0 e^{-\delta t} [\delta^2 \sin \omega t - 2\delta \omega \cos \omega t - \omega^2 \sin \omega t - \frac{c}{m} \delta \sin \omega t + \frac{c}{m} \omega \cos \omega t + \frac{k}{m} \sin \omega t] = 0$$

oder

$$y_0 e^{-\delta t} [(-2\delta \omega + \frac{c}{m} \omega) \cos \omega t + (\delta^2 - \omega^2 - \frac{c}{m} \delta + \frac{k}{m}) \sin \omega t] = 0$$

Dieser Ausdruck kann nur identisch für alle t verschwinden, wenn sowohl die $\cos$ - als auch die $\sin$ -Terme verschwinden. Wir erhalten also zwei Gleichungen

$$\omega(-2\delta + \frac{c}{m}) = 0 \quad (7)$$

$$\delta^2 - \omega^2 - \frac{c}{m} \delta + \frac{k}{m} = 0. \quad (8)$$

Aus (7) erhalten wir $\delta = \frac{c}{2m}$ (das Ergebnis $\omega = 0$ ist physikalisch uninteressant und bleibt außer Betracht). Setzen wir das in (8) ein und lösen nach ω auf, erhalten wir

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$$

Die Lösung lautet dann

$$y = y_0 \cdot e^{-\frac{c}{2m} \cdot t} \cdot \sin \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} \cdot t \quad (9)$$

Die Schwingdauer beträgt dann $T = 2\pi \cdot (\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2})^{-1/2}$, bei Ver-

nachlässigung der Dämpfung $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Für große Dämpfung ($c \geq 2\sqrt{m \cdot k}$) wird der Wurzelinhalt Null bzw. negativ, es kommt dann keine Schwingung mehr zustande, die Lösung ist in dieser Form nicht zu gebrauchen.

Wir zeigen noch eine zweite Möglichkeit der Lösung von Gleichung (7), indem wir mit komplexen Zahlen rechnen. Der Ansatz lautet dann

$$y = y_0 \cdot e^{\alpha \cdot t} \quad (10),$$

wobei α komplex sein kann. Wir wollen deutlich machen, daß wir mit dieser höheren Abstraktion schneller zum Ergebnis kommen und daß die Lösung allgemeiner ist. Darauf sollen auch die Leser hingewiesen werden, die das Rechnen mit komplexen Zahlen nicht beherrschen und daher den Lösungsweg nicht verfolgen können.

Wir bilden wieder $\frac{dy}{dt} = y_0 \cdot e^{\alpha t} \cdot \alpha$
 $\frac{d^2y}{dt^2} = y_0 \cdot e^{\alpha t} \cdot \alpha^2$

Einsetzen in (5) ergibt

$$y_0 \cdot e^{\alpha t} \left[\alpha^2 + \frac{c}{m} \alpha + \frac{k}{m} \right] = 0$$

Wir erhalten

$$\alpha = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \quad (11)$$

und können zwei Fälle unterscheiden:

(1) Starke Dämpfung ($c \geq 2\sqrt{m \cdot k}$)

$$y = y_0 \cdot e^{-\left(\frac{c}{2m} + \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\right)t} \quad (12)$$

Hier nähert sich die Elongation y , ausgehend von $y = y_0$ zur Zeit $t = 0$ exponentiell der Ruhelage, eine Schwingung gibt es nicht. Wir wollen hier nicht erörtern, aus welchen physikalischen Gründen von den beiden in Gl. (11) gegebenen Fällen in (12) nur einer enthalten ist.

(2) Schwache Dämpfung ($c < 2\sqrt{m \cdot k}$ und damit $\frac{c^2}{4m^2} < \frac{k}{m}$)

Wir schreiben statt (11):

$$\alpha = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{(-1) \cdot \left(\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}\right)} = -\frac{c}{2m} \pm i \sqrt{\left(\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}\right)}$$

$$\text{mit } i = \sqrt{-1}$$

und erhalten

$$y = y_0 \cdot e^{-\frac{c}{2m} \cdot t} \cdot e^{\pm i \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} \cdot t}$$

Dafür können wir schreiben (das soll hier nicht bewiesen werden)

$$y = y_0 \cdot e^{-\frac{c}{2m} \cdot t} \cdot \sin \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} \cdot t ,$$

das ist wieder die schon gefundene Gleichung (9).

Wir haben hier typische Abbildungen physikalischer auf mathematische Strukturen vor uns. Dabei ist wesentlich, daß man sich nach Auffinden einer entsprechenden mathematischen Beschreibung des Sachverhaltes voll auf den mathematischen Formalismus verläßt und aus ihm möglichst viel herausholt. Dabei darf man aber nicht stehen bleiben, sondern man muß dann die Ergebnisse physikalisch interpretieren und experimentell prüfen.

Besonders bedeutsam ist aber die Tatsache, daß sich die Gleichung (5) mit ihren Lösungen (9) und (12) auf viele andere, nicht nur mechanische Fälle übertragen läßt. Für einen elektrischen Schaltkreis, bestehend aus einem Kondensator mit der Kapazität C und einer Spule mit dem Ohm'schen Widerstand R und der Induktivität L gilt für die Stromstärke i die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot i = 0$$

Die Analogie zu Gl. (5) ist offensichtlich. Wir könnten daher die gefundenen Lösungen sofort übernehmen, verzichten aber darauf, diese niederzuschreiben. Es entsprechen einander

Dämpfungskonstante c	und Ohm'scher Widerstand R	
träge Masse m	und Induktivität L	
Federkonstante k	und Kehrwert der Kapazität $\frac{1}{C}$	

Dieser Zusammenhang ist nicht rein formal, er macht tiefere Bezüge deutlich.

3. Schlußbemerkungen

Aus der Fülle der Probleme der Anwendung der Mathematik auf die Physik sind hier nur einige wenige ausgewählt worden und auch diese konnten nicht erschöpfend behandelt werden. Weitere As-

pekte sind etwa Fragen physikalischer Maßsysteme und ihre Beziehung zur Gruppentheorie, mathematische Modelle, Abstraktionsstufen physikalischer Aussagen, die historische Entwicklung bestimmter Gebiete der Physik bei fortschreitender Formalisierung u. a. Aber auch andere Wissenschaftsdisziplinen zeigen eine immer stärkere Tendenz zur Anwendung mathematischer Mittel. Nach der Physik ist hier vielleicht die Chemie zu nennen, aber auch etwa in Biologie, Ökonomie und anderen Einzelwissenschaften ist dieser Prozeß in vollem Gange.

Dr. sc. Klaus Jupe
Leiter des Wissenschaftsbereiches
Physikmethodik

Preisaufgaben 7/75

- G 37 Gegeben seien drei von Null verschiedene reelle Zahlen, die eine arithmetische Folge bilden. Die Quadrate dieser Zahlen bilden in der gleichen Reihenfolge eine geometrische Folge. Man gebe alle möglichen Quotienten $q = \frac{a_1}{a_0}$ dieser geometrischen Folge an.

- G 38 Man löse in den reellen Zahlen das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} (x-y)\sqrt{y} &= \frac{\sqrt{x}}{2} \\ (x+y)\sqrt{x} &= 3\sqrt{y} \end{aligned}$$

- G 39 Gegeben sind die Längen zweier Dreiecksseiten b und c . Die Länge der dritten Seite a stimmt mit der Länge der auf a errichteten Höhe überein. Man berechne a .

- G 40 Es sei a die Kantenlänge eines Würfels. Eine Kugel mit dem Mittelpunkt O halbiere drei Kanten dieses Würfels, die den gemeinsamen Eckpunkt A haben. Von K , einem dieser Halbierungspunkte, wird die Senkrechte auf die Würfeldiagonale durch den Punkt A gefällt. Der Winkel zwischen dieser Senkrechten und dem Kugelradius $\overline{OK}$ wird von der Würfelkante halbiert. Man berechne den Radius der Kugel.

- G 41 Im ebenen Dreieck werde vom Fußpunkt der drei Höhen das Lot auf die jeweils zwei gegenüberliegenden Seiten gefällt. Man zeige, daß die Fußpunkte dieser sechs Lote auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

- G 42 Доказать, что если

$$\tan \alpha = \frac{1}{7}, \quad \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

то $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}$ (α, β - углы первой четверти).

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.

Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.

Wir bitten diejenigen Einsender zu den Serien 1/75 und 2/75, die dies nicht berücksichtigten und keinen Absender auf ihren Lösungenangaben, uns zu schreiben.

Einsendeschluß: 31. 8. 1975

Preisausschreiben

Nicht ohne Grund fehlt bei diesem Heft die Abbildung auf der ersten Seite: Das leere Feld soll Sie, lieber Leser, auffordern, selbst einmal ein Titelbild für Ihre Zeitschrift zu entwerfen. Ihrer Phantasie sind dabei keine Grenzen gesetzt - nur sollte das Bild mit dem Inhalt der WURZEL, also mit Mathematik in Verbindung stehen.

Für die drei besten Einsendungen werden folgende Preise vergeben:

1. Preis: Büchergutschein über 30,- M
2. Preis: Büchergutschein über 20,- M
3. Preis: Büchergutschein über 10,- M

Die prämierten Zeichnungen erscheinen dann auf den Titelseiten der Hefte 12/75 bis 2/76.

Ihren Titelbildvorschlag zeichnen Sie bitte mit schwarzer Tusche, schwarzem Kugelschreiber oder Faserschreiber auf weißen Zeichenkarton (Format A 6). Einsendeschluß ist der 30. September.

Wir wünschen viele Ideen und gutes Gelingen!

Die Familie Bernoulli

Wie die Familie Bach durch eine ganze Reihe hervorragender Musiker bekannt ist, so ist die Baseler Familie der Bernoullis durch nicht weniger als acht zum Teil sehr bedeutende Mathematiker, die drei Generationen angehören, in die Geschichte eingegangen. Die Dynastie der Bernoullis wurde begründet durch Jakob Bernoulli (1654-1705) und seinen Bruder Johann (1667-1748). Von den Söhnen Johannis ist vor allem Daniel so wie auch sein Enkel Johann durch besondere Leistungen hervorgetreten.

Jakob Bernoulli hatte ursprünglich Theologie studiert und daneben auch Mathematik betrieben. Nach Beendigung seines Studiums unternahm er größere Reisen durch Frankreich, England und Holland, bei denen er mit führenden Mathematikern bekannt geworden ist. Durch sie angeregt studierte er die Arbeiten von René Descartes, Christian Huygens, John Wallis und vor allem die Veröffentlichungen von Gottfried Wilhelm Leibniz in den Acta eruditorum, die in Leipzig herausgegeben wurden. Mit Leibniz konnte er dann auch sehr bald persönliche Verbindungen herstellen. Durch intensives Eigenstudium erwarb er sich solche Kenntnisse und machte so auf sich aufmerksam, daß er 1687 eine Berufung als Professor der Mathematik an die Universität Basel erhielt. Hier hat er bis zu seinem Tode gewirkt.

Sein um 13 Jahre jüngerer Bruder Johann sollte nach dem Willen des Vaters Kaufmann werden, setzte es aber durch, daß ihm die Familie das Studium der Medizin gestattete. Er schloß dieses Studium mit der Promotion ab. Sein besonderes Interesse galt aber der Mathematik, wobei ihm der Bruder Möglichkeiten für seine mathematischen Studien erschloß und auch Hilfe zukommen ließ. So wurde er in den Kreisen der Mathematiker bekannt und 1695 als Professor an die Universität Groningen berufen, wo er bis 1705 arbeitete. Dann übernahm er nach dem Tode des Bruders den Baseler Lehrstuhl, wo er 43 Jahre wirkte.

In ständigem Gedankenaustausch mit Leibniz und in heftiger Rivalität untereinander haben die beiden Brüder auf vielen Gebieten der Mathematik grundlegende Ergebnisse gebracht. An ihr Wirken erinnern mathematische Benennungen, wie

1. die Bernoulli-Ungleichung

$$(1+h)^n \geq 1+nh \quad h > 0 ; n > 1, \text{ natürliche Zahl}$$

2. die Bernoullischen Zahlen

$$B_1 = \frac{1}{6} \quad B_2 = \frac{1}{30} \quad B_3 = \frac{1}{42} \quad B_4 = \frac{1}{30} \quad B_5 = \frac{5}{66} \quad \dots,$$

die bei der Entwicklung bestimmter Potenzreihen auftreten und die der Rekursionsformel

$$\binom{2n+1}{2} B_n - \binom{2n+1}{4} B_{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{2n+1}{2n} B_1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{2} = 0$$

genügen.

3. die nach Jakob Bernoulli benannte Differentialgleichung erster Ordnung $y' + f(x) \cdot y + g(x) \cdot y^n = 0$, $n \neq 0$, $n \neq 1$, mit deren Hilfe eine Reihe komplizierter Differentialgleichungen gelöst werden können.

Jakob Bernoulli befaßte sich eingehend mit dem Studium der Logarithmischen Spirale $r = b \cdot e^{as}$ ($a > 0$, $b > 0$). Er hat diese Kurve rektifiziert und ihre Sektorfläche ermittelt, auch stellte er fest, daß sie sich bei verschiedenen Transformationen reproduziert und daß ihre Evolute (d. h. die Kurve der Krümmungsmittelpunkte) wieder eine logarithmische Spirale ist. Die logarithmische Spirale bereitete ihm eine derartige Freude, daß er anordnete, diese Kurven mit der Inschrift "eadem mutata resurgo" - "Ich bleibe dieselbe, auch wenn ich verändert werde" - auf seinem Grabstein einzumeißeln, ein Spruch, den das Geschlecht der Bernoulli sich wohl als Motto setzen durfte. Die Spirale auf dem Grabstein von Jakob Bernoulli sieht allerdings wie eine Archimedische Spirale aus. - Außer der logarithmischen Spirale hat er ausführlich die parabolische Spirale behandelt, ihre Tangente und Krümmung genau studiert und die Rektifikation und Quadratur durchgeführt.

Übrigens hat Jakob Bernoulli die von ihm behandelten Kurven in rechtwinkligen cartesischen Koordinaten dargestellt, selbst dann, wenn sich wie bei den Spiralen Polarkoordinaten geradezu anbieten.

Jakob befaßte sich auch als einer der ersten mit der Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Diese Untersuchungen sind erst nach seinem Tode veröffentlicht worden, unter dem Titel "ars conjectandi". Es werden die Permutationen und Kombinationen mit und ohne Wiederholung ausführlich von ihm behandelt und es findet sich in dieser Schrift auch das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen, das in etwa besagt: "Je größer die Zahl der Fälle ist, die bei einem zufälligen Ereignis auftreten, um so besser pflegen die betrachteten Verhältnisse dem Verhalten der mathematischen Formeln zu entsprechen". Für diesen Satz hat Jakob Bernoulli mathematische Beweise geliefert. - Jakob hat sich auch mit unendlichen Reihen beschäftigt und festgestellt, daß eine Summenbildung bei bestimmten Reihen auf einen Widerspruch führt. So hat er die Divergenz der Leibnizschen harmonischen Reihe nachgewiesen.

Auf Aufforderung seines Bruders Johann studierte er die Brachystochrone, d.h. die Kurve, längs welcher sich ein Massenpunkt unter dem Einfluß der Schwere von einem Punkt A zu einem Punkt B möglichst rasch bewegt. Jakob fand, daß diese Kurve eine Zyklode ist, was auch Leibniz bereits bekannt war. Bei der Veröffentlichung seiner Lösung stellte er eine neue Aufgabe, die unter dem Namen isoperimetrische Aufgabe bekannt ist. Sie verlangt das Auffinden einer Kurve von bestimmter Länge, die unter Beachtung von Nebenbedingungen eine maximale Fläche einschließt. Die Behandlung dieses Problems führte zur Entdeckung der Variationsberechnung. Er führte dabei die bissige Bemerkung an, es sei jemand, für den er selbst bürgen, bereit, seinem Bruder, falls er die Aufgabe löse, 50 Dukaten auszuzahlen. Johann aber löste das Problem und fügte hinzu: "Es hat nur wenige Minuten in Anspruch genommen, um die Aufgabe anzusehen, sich daran zu machen und das ganze Geheimnis zu lösen". Er stellte nun seinerseits die Aufgabe nach der kürzesten Linie zwischen zwei Punkten auf einer konvexen Oberfläche (geodätische Linien), wobei er die Art der zugelassenen Oberflächen und die in Frage kommenden Lösungsmethoden stark einengte. So blieb ihm die Möglichkeit, die von Jakob zu erwartende Lösung

wegen ihrer "mangelnden Allgemeinheit" zu kritisieren und selbst das Problem ausführlich zu behandeln. Der Streit der Brüder hat so zur intensiven Behandlung mathematischer Probleme der Variationsrechnung geführt. Es gab noch mehrere solcher Kontroversen, so bei der Bestimmung des Krümmungsradius von Kurven.

Johann hat auch durch die systematische Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung Großes geleistet. Ihm verdanken wir die Methode der Trennung der Variablen, das Prinzip der Variation der Konstanten bei bestimmten Gruppen. Johann hat auch als erster ausführliche Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung gehalten, die allerdings als Buch sehr spät herausgegeben wurden. Ein im Jahre 1696 gedrucktes Werk der Differential- und Integralrechnung von dem französischen Mathematiker l'Hospital benutzt die von Johann Bernoulli in Paris gehaltenen Vorträge. L'Hospital kommt nur das Verdienst zu, sie geordnet und pädagogisch aufbereitet zu haben. Auch hat Johann Bernoulli durch seine Untersuchungen zur Entwicklung des Funktionsbegriffes beigetragen. Er verstand unter einer Funktion einen analytischen Ausdruck, der irgendwie aus Veränderlichen und Zahlen zusammengesetzt ist. Diese Definition mußte naturgemäß zu der Frage führen, ob denn die durch analytische Ausdrücke dargestellte Abhängigkeit alle möglichen Arten des Zusammenhangs zwischen Veränderlichen erschöpft. Diese Frage wurde dann in der Literatur des 18. und 19. Jahrhunderts wiederholt behandelt. Schließlich hat Johann Bernoulli das bleibende Verdienst, Leonhard Euler, einen der fruchtbarsten Mathematiker aller Zeiten, gefördert und zu wissenschaftlicher Reife geführt zu haben.

Prof. Dr. Otto Stamfort
em. Prof. beim Bereich Methodik
des Mathematikunterrichts

Lösungen

Zu den Lösungen der Serie 2/75

Keine wesentlichen Fehler traten bei den Lösungen der Aufgaben G 8, G 9 und G 12 auf; eine Lösung der Aufgabe G 11 wurde zusammen mit einigen Bemerkungen bereits in der WURZEL 6/75 veröffentlicht. Bei den Lösungen der Aufgabe G 7 fehlte häufig die Konstruktionsbeschreibung, und zur Aufgabe G 10 erhielten wir leider keine völlig richtige Lösung. Es wurden stets nur einzelne Lösungspaare und nicht die gesamte Lösungsmenge des Gleichungssystems angegeben.

Zu den Lösungen der Serie 3/75

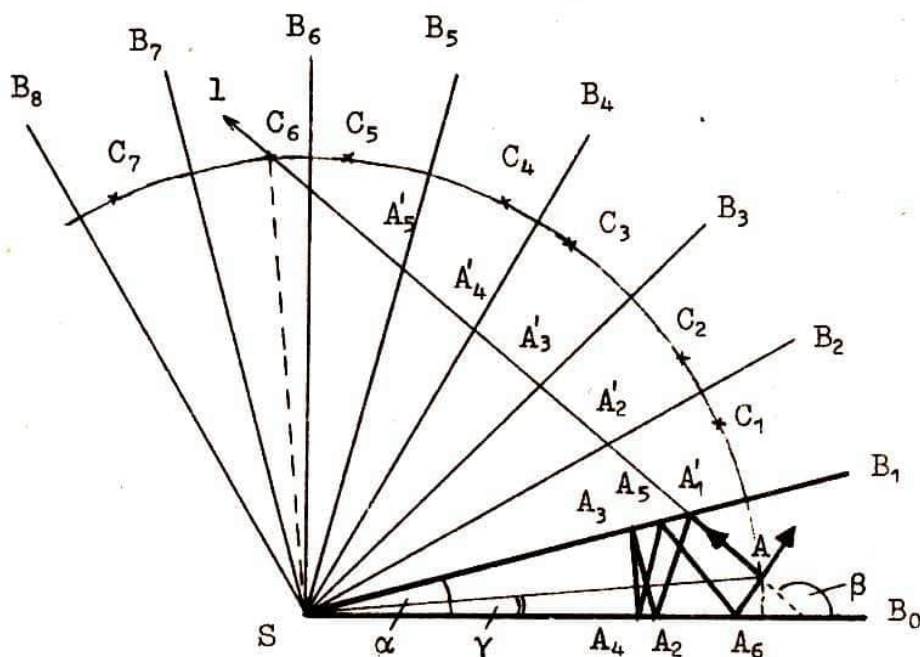
Charakteristische Fehler traten in dieser Serie bei den Aufgaben G 14, G 15 und G 16 auf. In den Lösungen zur Aufgabe G 14 wurde nicht immer die gesamte Lösungsmenge

$$\{x: x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ oder } x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \text{ ganzzahlig}\}$$

angegeben, und in den Lösungen zur G 16 wurden einzelne Beweisschritte ungenügend oder falsch begründet. Zur G 15 erreichte uns leider keine richtige Lösung. Häufige Fehler waren die falsche Angabe der Zahl der Reflexionen ($[\frac{8}{2}]$ ist falsch!) sowie fehlende notwendige und hinreichende Bedingungen für eine Reflexion durch A.

Wir haben es nicht als Fehler gewertet, wenn die endliche Länge der Schenkel nicht berücksichtigt wurde. Auch wir geben eine Lösung für den Fall "unendlich lange Schenkel" an.

Aufgabe G 15



Es seien A_i ($i=1,2,\dots$) die Reflexionspunkte.
 Dabei liegen die A_{2K-1} auf $\overline{SB_1}$ und die
 A_{2K} auf $\overline{SB_0}$ ($K=1,2,\dots$). In Drehrichtung von $\overline{SB_0}$ nach $\overline{SB_1}$ konstruiert man nacheinander die Winkel $\angle B_1SB_2, \angle B_2SB_3, \dots$ mit
 $\angle B_1SB_{i+1} = \alpha$ ($i=1,2,\dots$). Wenn man auf den Seiten $\overline{SB_m}$ ($m=2,3,\dots$) die Strecken $\overline{SA'_m} = \overline{SA_m}$ abträgt ($A_1 \equiv A'_1$), kann man zeigen, daß die Punkte $A'_1, A'_2, \dots$ auf genau einer Geraden liegen. Dazu genügt es zu zeigen, daß drei aufeinanderfolgende Punkte A'_m, A'_{m+1}, A'_{m+2} auf einer Geraden liegen ($m=0,1,2,\dots; A \equiv A_0$):
 Wegen $\triangle A'_mSA'_{m+1} \cong \triangle A_mSA_{m+1}$ folgt $\angle A'_mA'_{m+1}S = \angle A_mA_{m+1}S$, analog
 $\triangle A'_{m+1}SA'_{m+2} \cong \triangle A_{m+1}SA_{m+2}$, d. h. $\angle SA'_{m+1}A'_{m+2} = \angle SA_{m+1}A_{m+2}$.

Nach dem Reflexionsgesetz ist $\angle SA_{m+1}A_{m+2} = \angle A_mA_{m+1}B_{0,1}$ und folglich
 $\angle A'_mA'_{m+1}S + \angle SA'_{m+1}A'_{m+2} = \angle A_mA_{m+1}S + \angle A_mA_{m+1}B_{0,1} = \pi$.

Man kann also den Weg des Lichts entlang des Polygonzuges $AA_1A_2\dots$ auffassen als Weg des Lichts längs der Geraden l . Weil die Gerade nur endlich viele Seiten $\overline{SB_m}$ schneiden kann, ist die Zahl der Reflexionen endlich.

Ist die Seite $\overline{SB_n}$ die letzte, die von l geschnitten wird, so gilt: $n \cdot \alpha < \beta$ und $(n+1) \cdot \alpha \geq \beta$, d. h. die Anzahl der Reflexionen ist gleich dem n , für das gilt: $n < \frac{\beta}{\alpha} \leq n+1$.

Die Punkte C_m entstehen durch Spiegelung von C_{m-1} an $\overline{SB_m}$ ($m=2,3,\dots$), C_1 entsteht durch Spiegelung von A an $\overline{SB_1}$. Offensichtlich ist der Lauf des Lichtstrahles durch den Punkt A gleichbedeutend damit, daß einer der Punkte C_m auf l liegt.

Man unterscheidet zwei Fälle:

- a) $C_K \in l$, K gerade
- b) $C_K \in l$, K ungerade

zu a) Es sei $\gamma = \angle ASB_0$. Offensichtlich ist $\angle ASC_K = K \cdot \alpha$.
 Weil $\triangle ASC_K$ gleichschenkelig ist, gilt: $\angle SAC_K = \frac{\pi}{2} - \frac{K \cdot \alpha}{2}$;
 andererseits gilt: $\angle SAC_K = \gamma + \pi - \beta$

$$\begin{aligned} (\text{weil } \beta &= \gamma + \angle ASC_K + \angle SC_KA = \gamma + \angle ASC_K + \angle SAC_K \\ \beta + \angle SAC_K &= \gamma + \angle ASC_K + 2 \cdot \angle SAC_K \\ \beta &= \gamma + \pi - \angle SAC_K) \end{aligned}$$

$$\text{Folglich: } \frac{\pi}{2} - \frac{K \cdot \alpha}{2} = \gamma + \pi - \beta,$$

$$\text{d. h. } K = \frac{2\beta - 2\gamma - \pi}{\alpha} \quad (1)$$

zu b) Hier ist $\star ASC_K = (K+1)\alpha - 2\gamma$

und wie bei a):

$$\frac{\pi}{2} - \frac{(K+1)\alpha - 2\gamma}{2} = \gamma + \pi - \beta ,$$

$$\text{d. h.} \quad K+1 = \frac{2\beta - \pi}{\alpha} . \quad (2)$$

Umgekehrt, führt man die Überlegungen rückwärts, ist zu sehen, daß bei Erfüllung einer der Bedingungen (1) oder (2) bei ganzzahligem $K \geq 1$ durch C_K läuft.

Aufgabe G 13

(nach Margit Birnbaum, Greifswald, 11. Klasse)

Offensichtlich gilt: ($k \in \mathbb{N}$)

a) In der $(2k)$ -ten Gruppe stehen $2k$ gerade Zahlen

b) In der $(2k+1)$ -ten Gruppe stehen $2k+1$ ungerade Zahlen in natürlicher Reihenfolge.

Deshalb ist zunächst eine Fallunterscheidung günstig.

1. n gerade

Anzahl der geraden Zahlen, die vor der n -ten Gruppe stehen:
 $2+4+6+\dots+(n-2) = \frac{n(n-2)}{4}$ (wegen a)

Folglich heißt die letzte dieser Zahlen:

$$2 \cdot \frac{n(n-2)}{4} = \frac{n(n-2)}{2}$$

Damit heißt die erste gerade Zahl der n -ten Gruppe $\frac{n(n-2)}{2} + 2$. Die übrigen Zahlen dieser Gruppe lassen sich dann darstellen in der Form:

$$\frac{n(n-2)}{2} + 4, \frac{n(n-2)}{2} + 6, \dots, \frac{n(n-2)}{2} + 2n.$$

Für die Summe dieser Zahlen ergibt sich somit:

$$n \cdot \frac{n(n-2)}{2} + 2 \cdot \sum_{i=1}^n i = n \cdot \frac{n(n-2)}{2} + n(n+1) = \frac{n}{2} (n^2 + 2).$$

2. n ungerade

Anzahl der ungeraden Zahlen, die vor der n -ten Gruppe stehen:
 $1 + 3 + 5 + \dots + (n-2) = \frac{(n-1)^2}{4}$ (wegen b). Folglich heißt die letzte dieser Zahlen:

$$2 \cdot \frac{(n-1)^2}{4} - 1 = \frac{(n-1)^2}{2} - 1$$

Deshalb heißt die erste ungerade Zahl der n -ten Gruppe

$$\left(\frac{(n-1)^2}{2} - 1\right) + 2 = \frac{(n-1)^2}{2} + 1.$$

Die übrigen Zahlen dieser Gruppe lassen sich dann darstellen in der Form

$$\frac{(n-1)^2}{2} + 3, \frac{(n-1)^2}{2} + 5, \dots, \frac{(n-1)^2}{2} + (2n-1).$$

Die Summe dieser Zahlen lautet:

$$n \cdot \frac{(n-1)^2}{2} + \sum_{i=1}^n (2i-1) = n \cdot \frac{(n-1)^2}{2} + n^2 = \frac{n}{2} (n^2 + 1)$$

Aus 1. und 2. ergibt sich für beliebiges n : Die Summe der Zahlen der n -ten Gruppe lautet

$$\frac{n}{2} \left[n^2 + \frac{3}{2} + (-1)^n \cdot \frac{1}{2} \right].$$

Aufgabe G 18

nach Norman Bitterlich, Karl-Marx-Stadt,
12. Klasse

Wir setzen $x_1 + x_2 + \dots + x_n = s$.

Daraus folgt für das Gleichungssystem:

$$x_k(s - x_k) + (k^2 + k)s^2 = (2k+1)^2 a^2$$

$$x_k^2 - s x_k - (k^2 + k)s^2 + (2k+1)^2 a^2 = 0.$$

Für x_k erhalten wir:

$$x_{k\frac{1}{2}} = \frac{s}{2} \pm (2k+1) \cdot \sqrt{\frac{1}{4} s^2 - a^2}$$

Wir suchen nur eine Lösung; diese sei

$$x_k = \frac{s}{2} - (2k+1) \cdot \sqrt{\frac{1}{4} s^2 - a^2} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n x_k = s = \frac{n \cdot s}{2} - \sum_{k=1}^n (2i+1) \sqrt{\frac{1}{4} s^2 - a^2}$$

$$s = \frac{n \cdot s}{2} - ((n+1)^2 - 1) \sqrt{\frac{1}{4} s^2 - a^2}$$

$$s(n-2) = (n^2 + 2n) \sqrt{\frac{1}{4} s^2 - a^2}$$

$$s^2 = \frac{4(n^2 + 2n)^2 a^2}{(n^2 + 2n)^2 - (n-2)^2}$$

$$s = \frac{2(n^2 + 2n) \cdot |a|}{\sqrt{(n^2 + 2n)^2 - (n-2)^2}} \quad (2)$$

Durch Einsetzen von (2) in (1) erhalten wir eine Lösung des Gleichungssystems:

$$x_k = \frac{2(n^2+2n) - (n-2)(2k+1)}{\sqrt{(n^2+2n)^2 - (n-2)^2}} \cdot |a|, \quad k=1,2,\dots,n.$$

Aufgabe G 17

nach Frank Burghardt, Frankfurt (Oder),
11. Klasse

Satz 13' aus dem Artikel "Unendliche Reihen":

$\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ sei eine unendliche positive Reihe. Der Grenzwert
 $\lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[v]{a_v} = A$ möge existieren.

Dann gilt: $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ konvergiert, falls $A < 1$ ist.

Die Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{5(v+1)}{2v^2 \cdot v!} \right)^v$ hat nur positive Glieder. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[v]{a_v} &= \lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[v]{\left(\frac{5(v+1)}{2v^2 \cdot v!} \right)^v} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{5(v+1)}{2v^2 \cdot v!} = \frac{5}{2} \lim_{v \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{v \cdot v!} + \frac{1}{v^2 \cdot v!} \right) \\ &= \frac{5}{2} \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v \cdot v!} + \frac{5}{2} \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v^2 \cdot v!} = 0 + 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt nach dem oben zitierten Satz die Konvergenz der Reihe.

◊	◊	W	U	R	S	T	◊	L	O	R	D	◊	R
F	S	U	◊	◊	A	R	A	U	K	A	R	I	E
◊	P	R	U	E	F	U	N	G	◊	M	A	C	H
D	O	Z	E	N	T	E	N	◊	D	O	C	H	◊
A	R	E	S	T	◊	B	A	S	S	◊	H	◊	◊
N	E	L	K	E	◊	S	◊	I	A	H	E	N	◊
◊	N	◊	U	N	R	A	S	T	◊	O	N	Y	X
A	◊	B	E	T	E	L	◊	Z	A	R	◊	S	◊
S	E	R	B	E	N	◊	R	E	N	N	T	A	G

(Auflösung des Kreuzwort-
rätsels aus Heft 4/75)

Herausgeber: Leitung der FDJ-Grundorganisation der Friedrich-Schiller-Universität Jena;
Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Egbert Creutzburg

Chefredakteur: Waltraud Werner

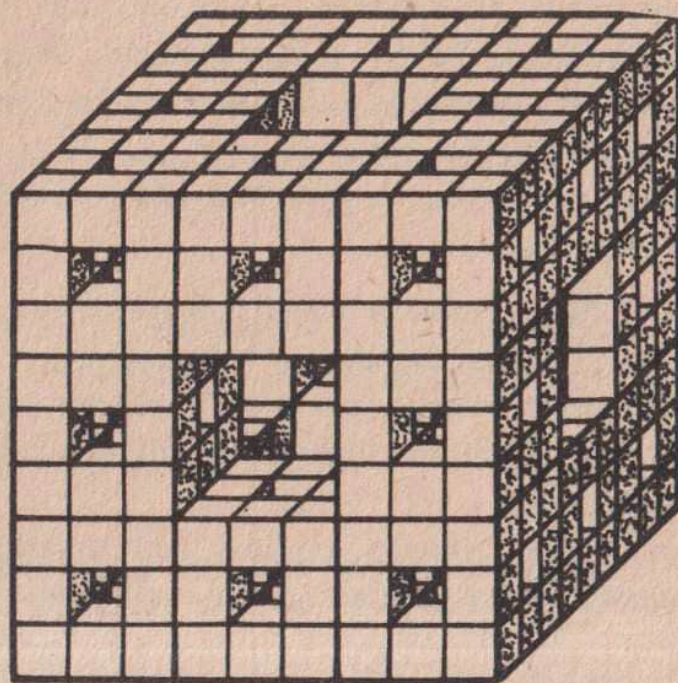
Redaktion: J. Dubslaff, H.-G. Leopold, Th. Ullrich, G. Weske

Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.



8

75

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Ju-
gendobjekt Studienvor-
bereitung der Sektion
Mathematik an der
Friedrich-Schiller-Uni-
versität Jena

9. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Unendliche Reihen (III)

Auf Grund der Einsendungen zu den Preisaufgaben G 17, G 22, G 23 erscheint es sinnvoll, dem Artikel "Unendliche Reihen" (WURZEL 2/75 und 3/75) einen dritten Teil hinzuzufügen, der sich mit der Umordnung unendlicher Reihen beschäftigt. In den uns zugesandten Lösungen traten aus Unkenntnis der für unendliche Reihen geltenden Gesetze eine Anzahl von Ungenauigkeiten und Fehlern auf.

Im Teil I des Artikels stellten wir fest, daß $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ eine Abkürzung für den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^n a_v$ ist. Wegen dieses Grenzübergangs müssen die für endliche Summen geltenden Gesetze der beliebigen Umordnung für unendliche Reihen neu überprüft werden.

Wie leicht das formale Rechnen mit unendlichen Reihen zu Fehlern führt, zeigt das folgende Beispiel:

Aus der reellen Analysis ist $\ln 2 = \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1} \cdot \frac{1}{v}$ bekannt. Diese Reihe wird jetzt umgeformt:

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \\ &= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots) - 2 \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots) \\ &= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wir erinnern an die Definition der Konvergenz einer unendlichen Reihe (Def. 6 in WURZEL 2/75) und definieren jetzt die absolute Konvergenz einer unendlichen Reihe.

Definition 7 :

Die unendliche Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ heißt absolut konvergent, falls die unendliche Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} |a_v|$ konvergiert.

Aus dieser Definition folgt also sofort, daß für unendliche Reihen mit positiven Gliedern ($a_v \geq 0$) die absolute Konvergenz mit der normalen Konvergenz übereinstimmt.

Satz 15:

Falls die Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ absolut konvergiert, so konvergiert sie auch im Sinne der Definition 6.

Beweis:

Nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium (Satz 7) genügt es, zu jeder positiven reellen Zahl ε eine reelle Zahl M_ε zu finden, so daß für alle natürlichen Zahlen $n, m > M_\varepsilon$ die Ungleichung

$$\left| \sum_{v=1}^n a_v - \sum_{v=1}^m a_v \right| < \varepsilon \quad (*)$$

erfüllt ist.

Die Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ ist absolut konvergent, d. h. es gilt: Für beliebiges, festes $\varepsilon > 0$ existiert ein M'_ε , so daß für $n, m > M'_\varepsilon$

$$\left| \sum_{v=1}^n |a_v| - \sum_{v=1}^m |a_v| \right| < \varepsilon$$

gilt.

Wir setzen $M_\varepsilon =_{\text{Def}} M'_\varepsilon$ und schätzen die linke Seite von $(*)$ ab:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{v=1}^n a_v - \sum_{v=1}^m a_v \right| &= \sum_{v=\min(n,m)+1}^{\max(n,m)} a_v \leq \sum_{v=\min(n,m)+1}^{\max(n,m)} |a_v| \\ &\leq \left| \sum_{v=1}^n |a_v| - \sum_{v=1}^m |a_v| \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

nach Voraussetzung der absoluten Konvergenz. ■

Satz 16:

Konvergiert die unendliche Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$, so konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\sum_{v=v_{\mu-1}+1}^{v_{\mu}} a_v \right)$$

und hat dieselbe Summe wie die Ausgangsreihe.

Bemerkung:

Dabei gilt $\mu \in \mathbb{N}_z$, $v_0 =_{\text{Def}} 0$ und $v_\mu < v_{\mu+1}$ für alle μ , oder, anders geschrieben:

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\sum_{v=v_{\mu-1}+1}^{v_{\mu}} a_v \right) = (a_1 + \dots + a_{v_1}) + (a_{v_1+1} + \dots + a_{v_2}) + \dots$$

Die Reihe wird nicht umgeordnet, in ihr werden nur Klammern gesetzt.

Beweis:

Die Folge der Partialsummen $\{\tilde{s}_k\}_{k=1}^{\infty}$ der neuen Reihe ist nichts anderes als die spezielle Teilfolge $\{s_{v_k}\}_{k=1}^{\infty}$ der Folge der Partialsummen der Ausgangsreihe.

Wegen der Konvergenz von $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ konvergiert die Folge der Partialsummen $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Dann ist aber auch nach Satz 6 jede Teilfolge konvergent, also insbesondere die Teilfolge $\{s_{v_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Wegen $s_{v_k} = \tilde{s}_k$ für beliebige k gilt damit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{k \rightarrow \infty} s_{v_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{s}_k = s.$$

Wir sehen, daß in konvergenten Reihen Klammern gesetzt werden dürfen. Das Umgekehrte, in konvergenten Reihen Klammern fortzulassen, ist im allgemeinen nicht richtig.

Beispiel: Es gilt

$$\sum_{v=1}^{\infty} [(-1)^v + (-1)^{v+1}] = (1-1) + (1-1) + \dots = 0.$$

Werden in dieser Reihe aber die Klammern fortgelassen, so entsteht die uns bekannte divergente Reihe $1-1+1-1+\dots$.

Aus den Einsendungen zur Aufgabe G 23 ein Beispiel für die Umordnung einer unendlichen Reihe:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} &= \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \dots \\ &= s_1 + s_2 + s_3 \end{aligned}$$

$$\text{mit } s_1 = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots$$

$$s_2 = \frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 9} + \dots$$

$$s_3 = \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots$$

$$\text{Ordnen wir die Reihe } \sum_{v=1}^{\infty} a_v \quad (*)$$

um, so erhalten wir die Reihe

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} a'_{\mu} \quad (**),$$

wobei gilt:

Jedes a_{ν_k}' ist mit einem bestimmten Glied a_{ν_k} der Reihe $(*)$ identisch, wobei die Folge $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ ohne Lücken und Wiederholungen die natürlichen Zahlen durchläuft.

Satz 17:

Wenn die Reihe $(*)$ absolut konvergiert, so ist auch die aus ihr durch Umordnung ihrer Glieder hervorgehende Reihe $(**)$ konvergent und hat dieselbe Summe s wie die Ausgangsreihe.

Wir geben zu diesem Satz keinen Beweis an. Für konvergente Reihen mit positiven Gliedern gilt also, daß sie beliebig umgeordnet werden können, da für sie die absolute Konvergenz und die normale Konvergenz gleichwertig sind.

Satz 18 (Umordnungssatz von Riemann):

Wenn die unendliche Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}$ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, so können für jede vorgegebene Zahl a (endlich oder gleich ∞) die Glieder dieser Reihe so umgeordnet werden, daß die Summe der umgeordneten Reihe genau gleich a ist.

Auch dieser Satz erscheint hier ohne Beweis. Dafür wollen wir für diesen, auf den ersten Blick kurios erscheinenden Sachverhalt ein Beispiel angeben.

Wie bereits erwähnt, gilt $\ln 2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \cdot \frac{1}{\nu}$.

Außerdem ist diese Reihe nicht absolut konvergent:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| (-1)^{\nu+1} \cdot \frac{1}{\nu} \right| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = \infty \quad - \text{harmonische Reihe.}$$

Wir wählen $a =_{\text{Df}} \frac{1}{2} \cdot \ln 2$ und ordnen unsere Ausgangsreihe so um, daß nach jedem positiven Glied jetzt zwei negative Glieder folgen:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2\nu-1} - \frac{1}{4\nu-2} - \frac{1}{4\nu} + \dots$$

Berechnen wir die Partialsummen $\tilde{s}_n$ der entstandenen Reihe, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{3k} &= \sum_{\nu=1}^k \left(\frac{1}{2\nu-1} - \frac{1}{4\nu-2} - \frac{1}{4\nu} \right) = \sum_{\nu=1}^k \left(\frac{1}{4\nu-2} - \frac{1}{4\nu} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\nu=1}^k \left(\frac{1}{2\nu-1} - \frac{1}{\nu} \right) = \frac{1}{2} \cdot s_{2k}, \end{aligned}$$

wobei $s_{2k} = \sum_{v=1}^{2k} (-1)^{v+1} \cdot \frac{1}{v}$ die $2k$ -te Partialsumme der Ausgangsreihe ist. Wegen der Konvergenz dieser Reihe konvergiert auch die Teilfolge der Partialsummen $\{s_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ (Satz 6).

Daraus folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k} = \ln 2 = 2 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{s}_{3k} ,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{s}_{3k} = \frac{1}{2} \ln 2 .$$

Da außerdem noch

$$\tilde{s}_{3k-1} = \tilde{s}_{3k} + \frac{1}{4k} ,$$

$$\tilde{s}_{3k-2} = \tilde{s}_{3k} + \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k}$$

gilt, erhalten wir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{s}_{3k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{s}_{3k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{s}_{3k-2} = \frac{1}{2} \cdot \ln 2 .$$

Hierdurch sind aber alle möglichen Partialsummen erfaßt, und es folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{s}_n = \frac{1}{2} \ln 2 , \text{ d. h.}$$

$$(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots) = \frac{1}{2} \cdot \ln 2 .$$

Der Umordnungssatz von Riemann und das anschließende Beispiel zeigen also noch einmal deutlich, daß für das Rechnen mit unendlichen Reihen die Eigenschaften endlicher Summen nicht formal übertragen werden dürfen.

Hans-Gerd Leopold
Forschungsstudent
im Bereich Analysis

Preisaufgaben 8/75

(G 43) Gegeben seien zwei reelle Zahlen a und b . Zwei Zahlenfolgen $a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots$ werden wie folgt gebildet:

2

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, \quad \dots, \quad a_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}, \quad \dots$$

$$b_1 = \frac{b+a_1}{2}, \quad b_2 = \frac{b_1+a_2}{2}, \quad \dots, \quad b_{k+1} = \frac{b_k+a_{k+1}}{2}, \quad \dots$$

Man berechne $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k$.

(G 44) Man beweise, daß für $0 \leq x \leq 1$ gilt:

1

$$\arcsin x - \arcsin \frac{x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

(G 45) Man löse das Gleichungssystem

2

$$\cot x + \sin 2y = \sin 2x$$

$$2 \sin y \sin(x+y) = \cos x$$

(G 46) Man gebe alle reellen Werte m an, für die die Ungleichung

1

$$mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0$$

für alle positiven x erfüllt ist.

(G 47) Ist die Zahl $\underbrace{10 \ 10 \ \dots \ 10}_{80 \text{ mal}} 1$ durch 81 teilbar?

1

(G 48) Доказать, что из трёх отрезков с длинами $a > 0, b > 0, c > 0$ можно построить треугольник тогда и только тогда, когда

2

$$pa^2 + qb^2 > pqc^2$$

для любых чисел p и q , связанных соотношением $p + q = 1$.

Einsendeschluß: 30. 9. 1975

Im zweiten Teil unseres Artikels zu Problemen der Kurvendefinition (WURZEL 6/75) geht es um

Teppiche und Schwämme

Nachdem wir uns im ersten Teil dieses Artikels mit einigen unvollkommenen Versuchen einer Kurvendefinition beschäftigt haben, wollen wir nun zeigen, auf welche Weise dieses Problem gelöst wurde. Zwar können wir hier nicht auf die erwähnte Urysohn'sche Definition für Kurven in beliebig-dimensionalen Räumen eingehen - hierzu fehlen uns noch die nötigen mathematischen Voraussetzungen -, wir wollen aber eine wichtige Vorstufe dazu kennenlernen: die Definition für Kurven der Ebene nach dem deutschen Mathematiker G. Cantor (1845 - 1918), dem Begründer der Mengenlehre.

Wir hatten im Teil I vereinbart, die "verstreuten Punktmengen" (Abb. 6) von den Kurven auszuschließen. Diese Festlegung führt bereits zur ersten definierenden Eigenschaft für Kurven:

- (1) Sie sind zusammenhängende Mengen.

Den Begriff "zusammenhängend" sollen Abb. 10 und 11 veranschaulichen.



Abb. 10: zusammenhängende Mengen

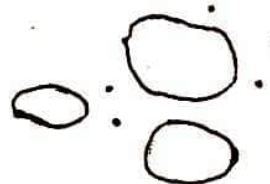


Abb. 11: nicht zusammenhängende Mengen

Jedoch haben offensichtlich auch Flächen noch diese Eigenschaft. Um die Mengen, die wir als Kurven bezeichnen wollen, auch von den flächenhaften Gebilden zu unterscheiden, müssen wir sie noch durch eine zweite Eigenschaft charakterisieren:

- (2) Für jeden Punkt x der Menge gilt: in jedem beliebig kleinen Kreis mit dem Mittelpunkt x ist stets noch ein Punkt enthalten, der nicht zu der Menge gehört.

Der Leser kann sich an Hand der Abb. 1 - 4 und 6 (S. 88/89) selbst davon überzeugen, daß die anschaulich als Kurven bezeichneten geometrischen Gebilde tatsächlich die Eigenschaften (1)

und (2) haben, während die "Nichtkurven", wie "verstreute Punktmengen" oder Quadratflächen, mindestens eine dieser beiden Eigenschaften nicht besitzen.

Um die Kurven für ihre Untersuchungen "greifbarer" zu machen, hat Cantor der Definition noch eine dritte Eigenschaft hinzugefügt:

- (3) Jede von ihnen ist abgeschlossen (im gleichen Sinne wie ein abgeschlossenes Intervall) und in einem Kreis mit einem endlichen Radius enthalten.

Diese Eigenschaft hat aber nur technische Bedeutung und ist im Grunde nicht wesentlich.

Wir können nun die Kurven im Sinne C a n t o r s bestimmen.

D e f i n i t i o n :

Eine ebene Kurve ist eine Teilmenge der Ebene, die die Eigenschaften (1), (2) und (3) besitzt.

Wollte man diese Definition in eine analoge Kurvendefinition für den dreidimensionalen Raum umformen, so müßte man die in Eigenschaft (2) vorkommenden Kreise durch Kugeln ersetzen. Wie der Leser leicht einsehen wird, wären dann im Raum liegende Flächen von dieser übertragenen Kurvendefinition nicht mehr ausgeschlossen. Die Cantorsche Definition ist also auf die Ebene beschränkt.

Wie kompliziert eine Kurve im Cantorschen Sinne sein kann, wollen wir an folgendem Beispiel demonstrieren.

Wir zerlegen das Einheitsquadrat $[0,1] \times [0,1]$ in 9 kongruente Teilquadrate und entfernen das mittlere davon. Die von $[0,1] \times [0,1]$ übrigbleibende Menge ist dann noch zusammenhängend. Mit jedem der verbliebenen 8 Teilquadrate verfahren wir nun genauso wie mit dem Einheitsquadrat. Wir teilen es wiederum in 9 kongruente Teilquadrate auf und streichen jeweils das mittlere heraus. Auch jetzt ist der von $[0,1] \times [0,1]$ verbleibende Rest noch zusammenhängend. Diesen Prozeß des Ausstreichens von immer kleiner werdenden Quadraten aus dem Einheitsquadrat denken wir uns unbegrenzt fortgesetzt (dritter Schritt siehe Abbildung 12).

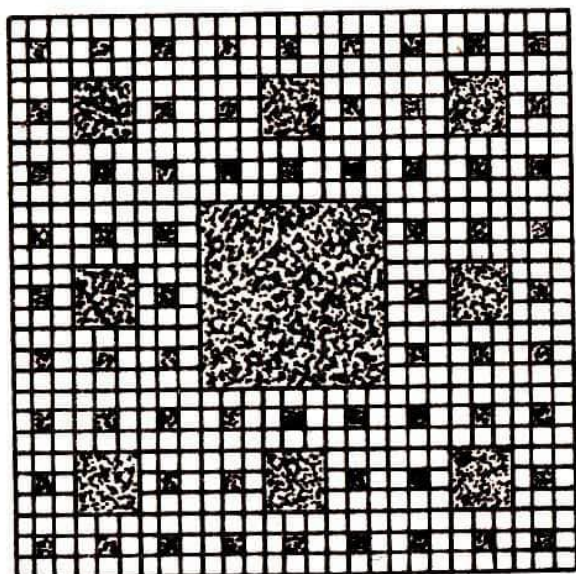


Abb. 12

Die Menge S aller derjenigen Punkte von $[0,1] \times [0,1]$, die dabei niemals von einem auszustreichenden Quadrat erfaßt werden, bildet den sogenannten Sierpiński-Teppich (benannt nach dem polnischen Mathematiker, der diese Menge als erster konstruierte). (Wer will, möge sich S als ausgewalzten Plätzchenteig vorstellen, aus dem immer kleiner werdende quadratische Plätzchen in der in Abb. 12 dargestellten Weise ausgestochen werden.)

Auch die Menge S ist wieder zusammenhängend. Außerdem ist sie abgeschlossen und in einem Kreis z. B. vom Radius 2 enthalten. Wir wollen nun noch zeigen, daß S auch die Eigenschaft (2) aus der Cantorschen Kurvendefinition besitzt. Dazu sei x ein beliebiger Punkt von S und K ein Kreis um x mit dem beliebig kleinen Radius r . Nach der Konstruktion von S ist x bei jedem Zerlegungsschritt des Einheitsquadrates in einem Teilquadrat enthalten. Da die Seitenlänge der Teilquadrate nach jedem Schritt um $2/3$ verringert wird und deshalb gegen Null strebt, muß ein x enthaltendes Teilquadrat existieren, das ganz im Kreis K liegt. Aus der Mitte dieses Teilquadrates wird aber beim nächsten Konstruktionsschritt von S ein Quadrat entfernt, so daß also auch K noch Punkte enthält, die nicht zu S gehören. Da wir x und r beliebig gewählt hatten, haben wir damit die Eigenschaft (2) für S nachgewiesen.

Der Sierpiński-Teppich S besitzt also alle drei Kurveneigenschaften und gehört deshalb ebenfalls mit zu den Kurven im Sinne Cantors.

Bei der Untersuchung vieler in der Praxis vorkommender Kurven sind nur ganz bestimmte Eigenschaften interessant. An einem U-Bahn-Streckenplan zum Beispiel sind für den Fahrgast doch eigentlich nur solche Informationen wichtig, wie die Reihenfolge der einzelnen Stationen und die Kreuzungs- und Verzweigungspunkte von verschiedenen Strecken. Nebensächlich dagegen sind solche Angaben, wie die der Entfernungen zwischen den Stationen oder des genauen Streckenverlaufs. Verzichtet man auf diese Angaben, so läßt sich das Streckennetz wesentlich übersichtlicher darstellen. Mathematisch ausgedrückt ist diese Darstellung das eineindeutige und in beiden Richtungen stetige (s. S. 90) Bild der Kurve, die durch das Streckennetz gebildet wird. Eineindeutige und in beiden Richtungen stetige Abbildungen, auch topologische Abbildungen genannt, sichern nämlich gerade, daß die oben geschilderte Struktur erhalten bleibt. Stellt man sich eine Kurve aus Gummiseilstücken zusammengesetzt vor, so wird sie durch topologische Abbildungen verbeult, gedehnt oder gestaucht, ohne daß dabei der Zusammenhang der Stücke verändert wird oder neue Schnittpunkte hinzukommen.

Der Sierpiński-Teppich S hat nun die bemerkenswerte Eigenschaft, daß er von jeder ebenen Kurve im Cantorsche Sinne ein topologisches Bild als Teilmenge enthält. (Es würde sich also beispielsweise auch jedes noch so komplizierte U-Bahn-Netz in S darstellen lassen.) Den Beweis dieser Aussage wollen wir hier nur andeuten.

Dazu sei C' eine beliebige ebene Kurve im Sinne Cantors. Wenn wir eine Menge S' finden können, die C' als Teilmenge enthält und die topologisch auf den gesamten Sierpiński-Teppich S abgebildet werden kann, so wird offensichtlich auch C' topologisch auf eine Teilmenge von S abgebildet.

Eine solche Menge S' wollen wir nun konstruieren. Da C' als Cantorsche Kurve in einem Kreis mit endlich großem Radius eingeschlossen ist, existiert auch ein Rechteck R , das C' als Teilmenge enthält. Wir teilen R zunächst in 9 kongruente Rechtecke

auf (gestrichelt in Abb. 13). Aus Eigenschaft (2) der Kurvendefinition können wir schließen, daß im mittleren dieser Rechtecke noch ein Rechteck enthalten ist, das die Kurve C' nicht schneidet. Die Seiten dieses Rechtecks verlängern wir bis zu den Seiten von R , so daß insgesamt 9 neue Rechtecke entstehen. Das mittlere davon streichen wir heraus (Abb. 13).

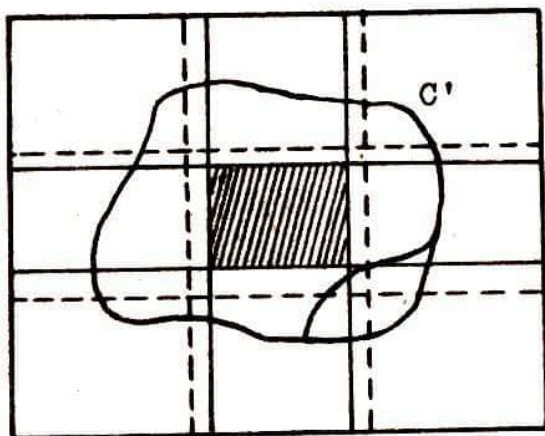


Abb. 13

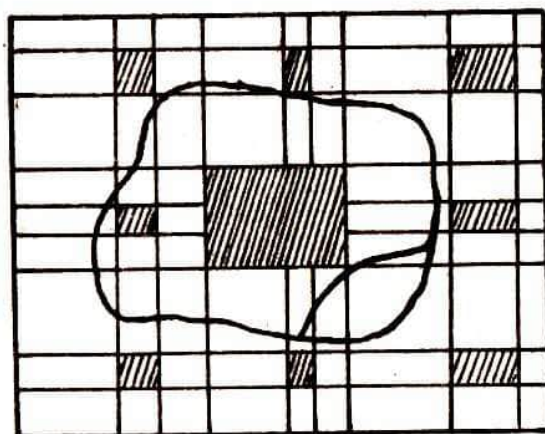


Abb. 14

Die von R übrigbleibende Menge enthält offensichtlich noch die Kurve C' . Wir behandeln nun jedes der 8 verbliebenen Rechtecke genau wie R und können jeweils aus deren Mitte wieder ein Rechteck entnehmen, das mit C' keine gemeinsamen Punkte hat (Abb. 14). Auch dieses Verfahren denken wir uns unbegrenzt fortgesetzt. Die von R dann übrigbleibende Menge ist unsere gesuchte Menge S' . Denn offensichtlich enthält auch sie noch die Kurve C' und, da sie prinzipiell genau so aufgebaut ist wie der Sierpifski-Teppich S , kann sie auch topologisch auf S abgebildet werden.

In S lassen sich also tatsächlich alle ebenen Kurven mit dem "Gummihammer" der topologischen Abbildung einbetten. Diese Eigenschaft von S wird Universalität genannt und der S i e r p i f s k i - T e p p i c h daher als e b e n e U n i v e r s a l k u r v e bezeichnet.

Wir wollen abschließend noch bemerken, daß es auch bezüglich der allgemeinen Kurvendefinition von Urysohn eine solche Universal Kurve gibt. Sie wurde von dem österreichischen Mathematiker Karl Menger konstruiert und ist ein dreidimensionales Analogon zum Sierpifski-Teppich (siehe Titelbild). Das ist ein recht erstaunliches Ergebnis, wenn man bedenkt, daß nicht nur

alle Kurven des dreidimensionalen Raumes in diesen "Menger-Schwamm" topologisch abgebildet werden können, sondern auch Kurven höherdimensionaler und sogar noch abstrakterer Räume; es können also alle bei topologischen Abbildungen erhalten bleiben- den Eigenschaften dieser Urysohnschen Kurven im Raum unserer Anschauung dargestellt werden.

Roland Hendel
Student des 4. Studienjahres
im Bereich Analysis

Lösungen

Zu den Lösungen der Serie 4/75

Fehler traten in dieser Serie insbesondere bei den Aufgaben G 21, G 22 und G 23 auf.

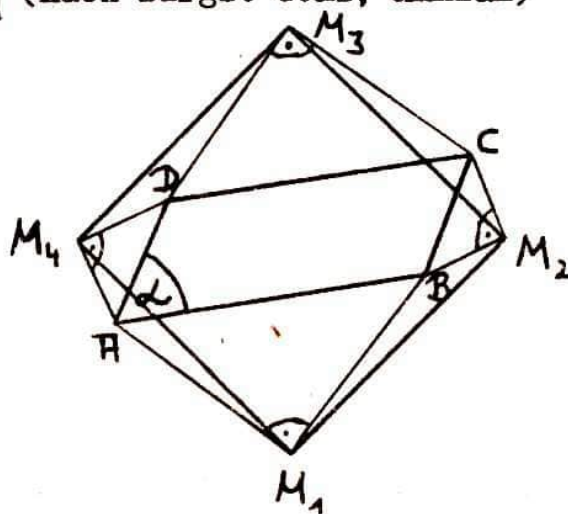
Während die Lösung $0 < x < \frac{\pi}{2}$ von fast allen Einsendern gefunden wurde, fehlte bei den Lösungen der Aufgabe G 21 oft die zweite Lösung

$$2 \cdot \arctan \frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < \pi.$$

In der Aufgabenstellung G 22 fehlte die Bedingung $a > 0$. Hierdurch ergaben sich Schwierigkeiten bei der Lösung, denn das Quotientenkriterium im Fachartikel war nur für positive Reihen angegeben. Die für $a < 0$ auftretenden Fehler wurden aber nicht bestraft.

Bei der Aufgabe G 23 schließlich ist zu beachten, daß das Umordnen von unendlichen Reihen, im Gegensatz zum endlichen Fall, nur unter bestimmten Voraussetzungen erlaubt ist.

Aufgabe G 19 (nach Birgit Genz, Anklam)



ABCD sei ein Parallelogramm mit $\angle BAD = \alpha$;

$M_1, \dots, M_4$ seien die Mittelpunkte der errichteten Quadrate.

Behauptung: Die Punkte M_1, M_2, M_3, M_4 bilden ein Quadrat.

Beweis: Es gilt

$$\overline{AM_4} = \overline{M_4D} = \overline{BM_2} = \overline{M_2C} \quad (1)$$

$$\overline{AM_1} = \overline{M_1B} = \overline{CM_3} = \overline{M_3D} \quad (2)$$

$$\angle M_1AM_4 = 45^\circ + \alpha + 45^\circ = 90^\circ + \alpha$$

$$\angle M_1BM_2 = 360^\circ - 45^\circ - (180^\circ - \alpha) - 45^\circ = 90^\circ + \alpha$$

$$\angle M_2CM_3 = 45^\circ + \alpha + 45^\circ = 90^\circ + \alpha$$

$$\angle M_3DM_4 = 360^\circ - 45^\circ - (180^\circ - \alpha) - 45^\circ = 90^\circ + \alpha$$

Also gilt:

$$\angle M_1AM_4 = \angle M_1BM_2 = \angle M_2CM_3 = \angle M_3DM_4 \quad (3)$$

Aus (1), (2), (3) folgt nach dem Kongruenzsatz (SWS):

$$\triangle AM_1M_4 \cong \triangle BM_1M_2 \cong \triangle CM_2M_3 \cong \triangle DM_3M_4 \quad (4)$$

Aus (4) folgt:

$$\overline{M_1M_2} = \overline{M_2M_3} = \overline{M_3M_4} = \overline{M_4M_1} \quad (5)$$

und

$$\angle AM_1M_4 = \angle BM_1M_2. \quad (6)$$

Es gilt:

$$\angle M_4M_1M_2 = \angle AM_1M_4 + \angle AM_1B - \angle BM_1M_2.$$

Nach Voraussetzung ist

$$\angle AM_1B = 90^\circ.$$

Mit (6) ergibt sich also

$$\angle M_4M_1M_2 = 90^\circ. \quad (7)$$

(5) und (7) bedeuten:

$M_1M_2M_3M_4$ bildet einen Rhombus mit einem rechten Innenwinkel, d. h.

$M_1M_2M_3M_4$ ist ein Quadrat.

Aufgabe G 21 (nach E. Roth, Sonneberg)

Aus der Ungleichung

$$\tan \frac{x}{2} > \frac{\sin x - 2 \cos x}{\sin x + 2 \cos x}$$

erhalten wir für $x \neq \frac{\pi}{2}$, d. h. $\cos x \neq 0$ durch äquivalente Umformung die Ungleichung

$$\tan \frac{x}{2} > \frac{\tan x - 2}{\tan x + 2}.$$

Durch die Ersetzung

$$\tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}$$

und

 $\tan \frac{x}{2} = z$ erhalten wir

$$\frac{z^3 - 1}{z^2 - z - 1} > 0$$

$$\frac{(z-1)(z^2+z+1)}{(z-\frac{1+\sqrt{5}}{2})(z-\frac{1-\sqrt{5}}{2})} > 0$$

Fallunterscheidung:

$$1. \ z > 1 \text{ und } z^2 - z - 1 > 0$$

Es ergibt sich

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} < z$$

und damit wegen $\tan \frac{x}{2} = z$ im Intervall $(0, \pi)$ die Lösung

$$2 \arctan \frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < \pi.$$

$$2. \ z < 1 \text{ und } z^2 - z - 1 < 0$$

Es ergibt sich

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < z < 1$$

und damit im Intervall $(0, \pi)$ die Lösung

$$0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

3. Wie leicht nachzuprüfen ist, erfüllt der Wert $x = \frac{\pi}{2}$ die Ungleichung nicht.

Also ergibt sich die Lösungsmenge zu

$$0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad 2 \cdot \arctan \frac{1 + \sqrt{5}}{2} < x < \pi.$$

Aufgabe G 23 (nach Thomas Kaatz, Gräfenhainichen)

Es ist die Konvergenz der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+1)}{n^4 + 3n^3 - n^2 - 3n} \text{ zu untersuchen.}$$

Auf Grund von $n \geq 2$ können wir die Nenner der Reihenglieder in Faktoren zerlegen und kürzen:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+1)}{n^4 + 3n^3 - n^2 - 3n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$$

Für alle $n \geq 2$ gilt stets $0 < \frac{1}{n^2 + 3n} < \frac{1}{n^2}.$

Außerdem konvergiert die unendliche Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ nach Satz 11 des Fachartikels.

Somit ist nach dem Majorantenkriterium (Satz 12) die Konvergenz der unendlichen Reihe nachgewiesen.

Herausgeber: Leitung der FDJ-Grundorganisation der Friedrich-Schiller-Universität Jena;
Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Egbert Creutzburg

Chefredakteur: Waltraud Werner

Redaktion: J. Dubslaff, H.-G. Leopold, Th. Ullrich, G. Weske

Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.



9

75

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Ju-
gendobjekt Studienvor-
bereitung der Sektion
Mathematik an der
Friedrich-Schiller-Uni-
versität Jena

9. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Shinger

Primzahlen

Ein sehr interessantes, aber zugleich schwieriges Gebiet der Zahlentheorie beschäftigt sich mit den Primzahlen. Bereits im Altertum, etwa 250 v.u.Z., konnten die griechischen Mathematiker Euklid sowie Eratosthenes aus Kyrenaika im Reich der Primzahlen erste Ergebnisse aufweisen, jedoch gibt es auch heute, trotz jahrhundertelanger Forschungsarbeit, noch mehrere ungeklärte Probleme. Auch bei Nichtmathematikern ist die Kompliziertheit von Aufgabenstellungen auf diesem Gebiet bekannt, so schrieb beispielsweise der russische Dichter Brjussow (1873 - 1924):

"aber Ödipus dachte an das Rätsel der Sphinx:

das Geheimnis der Primzahlen ist noch nicht gelöst ...".

In diesem Artikel sollen nun, anknüpfend an die Untersuchungen von Euklid und Eratosthenes, vor allem die beiden folgenden Fragestellungen in das Blickfeld gerückt werden.

1. Wie kann man möglichst schnell eine Primzahltablelle aufstellen?
2. Was läßt sich über die Anzahl und die Verteilung von Primzahlen aussagen?

Um von vornherein Mißverständnisse über Primzahlen auszuschließen - die Zahl 1 zählt nämlich nicht dazu -, soll der Begriff der Primzahl exakt gefaßt werden:

Definition 1:

Eine natürliche Zahl p heißt Primzahl genau dann, wenn p nur die zwei verschiedenen positiven Teiler 1 und p besitzt.

Alle anderen natürlichen Zahlen - außer der Zahl 1, der Einheit - heißen zusammengesetzte Zahlen.

Es sei noch bemerkt, daß die große Wichtigkeit von Primzahlen vor allem durch den folgenden Satz 1 begründet wird.

Satz 1:

Jede natürliche Zahl $n > 1$ läßt sich eindeutig, bis auf die Reihenfolge der Faktoren, als ein Produkt von Primzahlpotenzen darstellen, d. h. zu jeder natürli-

chen Zahl n gibt es Primzahlen $p_1, \dots, p_r$ ($p_i \neq p_j$ für $i \neq j$) und natürliche Zahlen $v_1, \dots, v_r$ mit

$$n = p_1^{v_1} \cdot p_2^{v_2} \cdot \dots \cdot p_r^{v_r}.$$

Die Bedeutung dieses Satzes besteht darin, daß man häufig bei der Lösung von Aufgaben an Stelle der zusammengesetzten Zahlen mit den zugehörigen Primzahlen arbeiten kann. In der Literatur hat deshalb dieser Satz die Bezeichnung "Fundamentalsatz der Zahlentheorie" erhalten. Auf einen Beweis dieses Satzes soll hier verzichtet werden, da man diesen in vielen Fachbüchern vorfindet. Es sei jedoch soviel gesagt, daß ein Existenz- und Eindeutigkeitsnachweis zu erbringen sind.

Im weiteren wird nun die zu Beginn aufgeworfene erste Frage beantwortet.

Bevor ein allgemeines Verfahren geschildert wird, soll zunächst ein konkretes Beispiel, die Ermittlung aller Primzahlen zwischen 1 und 50, betrachtet werden. Natürlich könnte man sofort versuchen, durch Anwendung der Definition 1 zum Ziel zu kommen, jedoch ist dies ein sehr umständliches Vorgehen, da man für jede Zahl eine Prüfung, ob Primzahl oder nicht, vornehmen müßte. Ein schnelleres, auf Eratosthenes zurückgehendes Verfahren besteht im folgenden:

Man schreibt alle Zahlen von 1 bis 50 auf, streicht die Zahl 1 (sie ist keine Primzahl), unterstreicht dann die Zahl 2 und streicht alle Zahlen durch, die durch 2 teilbar sind. Anschließend unterstreicht man die erste der nicht durchgestrichenen Zahlen, die Zahl 3, und streicht die durch 3 teilbaren Zahlen. Diesen Prozeß setzt man solange fort, bis man alle Vielfachen von 5 und 7 durchgestrichen hat. Es entsteht somit die folgende Tabelle:

1	<u>2</u>	<u>3</u>	4	<u>5</u>	6	<u>7</u>	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Bei genauer Betrachtung dieser Tabelle kann man unschwer feststellen, daß dort nur noch Primzahlen vorkommen, alle anderen Zahlen sind durchgestrichen. Daß es kein Zufall war, bereits nach Streichung aller Vielfachen von 2, 3, 5 und 7 die Primzahl-

tabelle bis zur Zahl 50 erhalten zu haben, läßt sich damit begründen, daß man für jede zusammengesetzte Zahl $n \leq 50$ bekanntlich stets $n = ab$ mit $a \leq \sqrt{n}$ oder $b \leq \sqrt{n}$ schreiben kann, so daß man sicher ist, daß alle zusammengesetzten Zahlen bis zur 50 gestrichen wurden.

Dieses am Beispiel demonstrierte Verfahren wird zu Ehren von Eratosthenes, der als erster eine derartige Tabelle aufstellte, indem er auf Papyrus alle zusammengesetzten Zahlen nicht durchstrich, sondern durchstach und so eine Art Sieb entstand, als Sieb des Eratosthenes bezeichnet.

Allgemein läßt es sich so beschreiben:

Zur Herstellung einer Primzahltablette unterhalb einer (nicht zu großen) Zahl x notiere man alle natürlichen Zahlen $n \leq x$. Anschließend streiche man die Zahl 1 und alle Vielfachen der Primzahlen p mit $1 < p \leq \sqrt{x}$. Dann bleiben alle Primzahlen p mit $\sqrt{x} < p \leq x$ übrig, denn jede stehengebliebene Zahl $n \leq x$ hat außer 1 keinen Teiler $\leq \sqrt{x}$, also erst recht keinen Teiler $\leq \sqrt{n}$ und ist somit eine Primzahl.

Bemerkung:

In der modernen Zahlentheorie spielen allgemeinere Siebverfahren, beispielsweise das von dem italienischen Mathematiker Brun (1920) entwickelte, eine große Rolle. Hierauf kann jedoch in diesem Artikel wegen des hohen Schwierigkeitsgrades nicht eingegangen werden.

Als nächstes wird nun versucht, die Fragestellung nach Anzahl und Verteilung der Primzahlen möglichst umfassend zu klären. Zuerst soll nochmals die vorn aufgestellte Primzahltablette betrachtet werden. Dabei erkennt man, daß die Primzahlen zwischen 1 bis 25 dichter angeordnet sind als die zwischen 26 bis 50. So sind in der ersten Hälfte 9 Primzahlen und in der zweiten Hälfte 6 Primzahlen enthalten. Geht man noch etwas weiter und zieht eine Primzahltablette aus einem Tafelwerk heran, kann man erkennen, daß es große Zahlenintervalle gibt, in denen nur noch zusammengesetzte Zahlen auffindbar sind, zum Beispiel sind die elf aufeinanderfolgenden Zahlen 998, 999, 1000, ..., 1008 alle zusammengesetzt.

Dabei könnte man auf den Gedanken kommen, daß alle natürlichen Zahlen von einer bestimmten Zahl an zusammengesetzt sind. Viel-

leicht gibt es nur eine endliche Menge von Primzahlen, und alle übrigen natürlichen Zahlen sind zusammengesetzt? Also existiert wohl auch eine größte Primzahl?

Euklid befaßte sich sehr intensiv mit dieser Aufgabe und löste sie vollständig. Seine Antwort darauf steht in

S a t z 2 :

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis (nach Euklid):

Indirekt: Annahme: Es gibt eine größte Primzahl p .

Nun bilde man das Produkt aller Primzahlen von 2 bis p und füge zu dieser Zahl 1 hinzu. Somit entsteht die Zahl N ,

$N := 2 \cdot 3 \cdot 5 \dots \cdot p + 1$, die bedeutend größer ist als p .

Diese Zahl N hat aber die Eigenschaft, daß sie weder durch eine Primzahl zwischen 2 und p noch, wegen Satz 1, durch eine zusammengesetzte Zahl teilbar ist. Folglich ist die Zahl N eine Primzahl, und da weiterhin $N > p$ gilt, ergibt sich ein Widerspruch zur Annahme.

Bemerkung:

Heute existieren sehr viele voneinander verschiedene Beweise für Satz 2. Neben diesem nach Euklid geschilderten Beweis sind die des französischen Mathematikers Legendre und des ungarischen Mathematikers Polya am bekanntesten.

Kehrt man noch ein weiteres Mal zur Primzahlentabelle zurück, so kann man daraus ablesen, daß alle ungeraden Primzahlen - die einzige gerade Primzahl ist 2 - entweder die Form $4n + 1$ oder $4n - 1$ haben. Untersuchungen erbrachten das Ergebnis, daß es in den beiden genannten arithmetischen Zahlenfolgen unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe: Man versuche den Euklidischen Beweisgedanken auf den Satz, daß es unendlich viele Primzahlen der Gestalt $4n-1$ gibt, zu übertragen.

In Verallgemeinerung zu den eben aufgeführten Resultaten liegt die Frage nahe, ob es nicht noch weitere arithmetische Zahlenfolgen gibt, die auch unendlich viele Primzahlen enthalten. Besonders gegen Ende des 18. Jahrhunderts und am Anfang des 19. Jahrhunderts haben sich viele bedeutende Mathematiker mit die-

ser Problematik beschäftigt, wobei es dem Deutschen Dirichlet (1805 - 1859) als erstem gelang, den folgenden tiefliegenden Satz zu zeigen:

S a t z 3 :

In jeder arithmetischen Zahlenfolge gibt es unendlich viele Primzahlen, sofern das Anfangsglied und die Differenz zueinander teilerfremd sind.

Aufgabe: Man überlege sich, warum die Voraussetzung über die Teilerfremdheit in Satz 3 erforderlich ist.

Auf einen Beweis des Satzes 3, des sogenannten Satzes von Dirichlet, kann in diesem Artikel nicht eingegangen werden, da sämtliche existierende Beweise außerordentlich kompliziert und umfangreich sind.

Damit soll die Erörterung der zweiten Fragestellung abgeschlossen werden, obwohl es noch viel Interessantes, zum Beispiel über die Primzahlfunktion oder über spezielle Primzahlen, zu sagen gäbe.

Zur ersten Fragestellung sei noch hinzugefügt, daß die größte heute bekannte Primzahl die von dem Amerikaner Tuckermann (1971) gefundene 6002-ziffrige Zahl $P := 2^{19937} - 1$ zu sein scheint, wobei für den Nachweis, daß P Primzahl ist, ein Computer über zwei Stunden Zeit benötigte. Untersuchungen in dieser Richtung sind aber vom mathematischen Standpunkt aus gesehen nur als Spielereien zu bezeichnen, da sie keine wesentlichen neuen Erkenntnisse bringen.

Dr. Hartmut Menzer
Assistent im Bereich
Theoretische Mathematik

Gut gesagt



Der Mangel an mathematischer Bildung gibt sich durch nichts so auffallend zu erkennen wie durch maßlose Schärfe im Zahlenrechnen.

Carl Friedrich Gauß

Preisaufgaben 9/75

- (G 49) Man gebe alle Werte a und b an, für die das Gleichungssystem

2

$$xyz + z = a$$

$$xyz^2 + z = b$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

genau eine Lösung besitzt (a, b, x, y reell).

- (G 50) In der Ebene seien zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gegeben. Geben Sie den geometrischen Ort aller Punkt M an, die die Eigenschaft besitzen, daß die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke AMB und CMD gleich einer vorgegebenen Konstanten a^2 ist.

2

- (G 51) Ohne Verwendung der Differentialrechnung gebe man den größten Wert des Ausdrucks

1

$$\frac{3x - 2}{4x - x^2 - 6} \quad (x \text{ bel. reelle Zahl})$$

an.

- (G 52) Man bestimme alle Polynome $P(x)$, die für alle x der Gleichung

1

$$xP(x-1) = (x-23) \cdot P(x)$$

genügen.

- (G 53) Es ist zu beweisen, daß es unendlich viele Primzahlen der Gestalt $4n-1$ gibt.

2

(Man versuche, den Beweisgedanken von Seite 133 zu übertragen!)

- (G 54) При каких целых значениях n функция

1

$$y = \frac{\sin nx}{\sin \frac{5}{n}x}$$

имеет период 3π ?

Einsendeschluß: 31. 10. 1975

Differenzengleichungen (I)

Vor einigen Jahren löste in Leningrad ein junger Aspirant das berühmte 10. Problem von HILBERT, das dieser 1900 formuliert hatte. In diesem Problem war die Frage nach der Existenz eines universellen Verfahrens zur Lösung diophantischer Gleichungen gestellt. Es zeigte sich, daß ein solches Verfahren nicht existiert.

Im Beweis wurden die sogenannten FIBONACCI'schen Zahlen verwendet, die bisher in der Mathematik keine wesentliche Rolle spielten, obwohl sie seit langer Zeit bekannt waren. Es handelt sich hierbei um Zahlen mit der Eigenschaft, daß jede (außer den ersten beiden) von ihnen die Summe ihrer zwei Vorgänger ist.

Mit anderen Worten, es ist

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Wenn man nun die ersten zwei Zahlen F_0 und F_1 festlegt, so definiert Gleichung (1) alle weiteren. Für $F_0=1$ und $F_1=1$ erhält man sofort $F_2=2$, $F_3=3$, $F_4=5$, $F_5=8$ usw. Die Gleichung (1) ist eine sogenannte Differenzengleichung, genauer: eine lineare homogene Differenzengleichung zweiten Grades mit konstanten Koeffizienten. Wir werden hier anschließend Differenzengleichungen dieses Typs betrachten, wobei der Grad m nicht unbedingt 2 ist. Der allgemeine Fall hat dann die folgende Form:

$$x_{n+m} + a_{m-1}x_{n+m-1} + \dots + a_1x_{n+1} + a_0x_n = 0, \quad (2)$$

wobei wir $a_0 \neq 0$ voraussetzen wollen.

Zu dieser Differenzengleichung gehören noch m Anfangsbedingungen:

$$x_0 = s_0, x_1 = s_1, \dots, x_{m-1} = s_{m-1}.$$

Wenn wir die Gleichung (1) in dieser Weise schreiben, erhalten wir

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0, \quad (3)$$

$$x_0=1, x_1=1.$$

Die Gleichung (3) erweckt wohl kaum den Eindruck eines mathematischen Problems. In der Tat, die Werte x_0 bis x_{m-1} sind bekannt, und wenn man $n=0$ setzt, erhält man aus (2) sofort x_m , damit x_{m+1} usw. Dieses Vorgehen erfordert keine schöpferische Denkarbeit und nicht einmal eine Division.

Na schön, wie groß ist denn die Zahl F_{27463} ?

Dem Leser sei abgeraten, an dieser Stelle die WURZEL, deren Rand dafür sicherlich nicht ausreicht, gegen einige Blätter Papier auszutauschen und sich in der beschriebenen Weise auf die Suche nach der Lösung zu machen - es wäre eine SISYPHUSarbeit, bei der das Resultat (wenngleich eine große Zahl) in keinem Verhältnis zum Aufwand stünde.

Die Frage nach F_{27463} mag konstruiert erscheinen (und sie ist es in diesem Fall tatsächlich), aber in vielen Fällen sind gerade die "weiter weg" liegenden Werte von Interesse.

Betrachten wir Gleichung (2) genauer. Die Zahlen x_n , $n=0,1,2,\dots$ nennen wir Lösung von (2), wenn sie beim Einsetzen in (2) der Gleichung genügen. Dabei werden die Anfangsbedingungen also nicht berücksichtigt.

Man sieht sofort, daß die Gleichung (2) nicht nur eine Lösung besitzt. Um zum Ausgangsbeispiel zurückzukehren: auch die Folgen $1,3,4,7,11,18,29,\dots$ und $2,2,4,6,10,16,26,\dots$ genügen der Gleichung (3) und sind damit Lösungen.

Es seien nun x_n und y_n zwei Lösungen von (2). Wir setzen $u_n = x_n + y_n$ und $w_n = \lambda x_n$, wobei λ eine beliebige feste Zahl ist. Dann sind u_n und w_n ebenfalls Lösungen von (2):

$$\begin{aligned} & u_{n+m} + a_{m+1} u_{n+m-1} + \dots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n \\ &= (x_{n+m} + y_{n+m}) + a_{m+1}(x_{n+m-1} + y_{n+m-1}) + \dots + a_0(x_n + y_n) \\ &= (x_{n+m} + a_{m+1}x_{n+m-1} + \dots + a_0x_n) + (y_{n+m} + \dots + a_0y_n) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und } & \lambda w_{n+m} + a_{m+1}(\lambda w_{n+m-1}) + \dots + a_0(\lambda w_n) = \\ &= \lambda(x_{n+m} + a_{m+1}x_{n+m-1} + \dots + a_0x_n) = \lambda \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Diese beiden Eigenschaften bezeichnet man mit dem Begriff "Linearität".

Es zeigt sich, daß man auf einfache Weise ein System von Lösungen konstruieren kann, wenn die Differenzengleichung (2) gewissen Bedingungen genügt. Zu diesem Zweck betrachten wir das aus (2) gebildete Polynom $P_m(t) = t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \dots + a_1 t + a_0$ (4).

Aus der Algebra ist bekannt, daß ein Polynom m -ten Grades m Nullstellen besitzt, die aber nicht alle reell und verschieden voneinander zu sein brauchen. Wenn t_0 eine reelle Nullstelle von $P_m(t)$ ist, d. h. $P_m(t_0) = 0$, dann gilt der folgende

S a t z :

Die Folge $x_n = t_0^n$ ist eine Lösung der Gleichung (2).

Beweis: Da $P_m(0) = a_0 \neq 0$ nach Voraussetzung, so ist $t_0 \neq 0$ und ein Wert der Form 0^0 tritt nicht auf. Es gilt

$$t_0^{n+m} + a_{m-1} t_0^{n+m-1} + \dots + a_1 t_0^{n+1} + a_0 t_0^n$$

$$= t_0^n (t_0^m + a_{m-1} t_0^{m-1} + \dots + a_1 t_0 + a_0)$$

$$= t_0^n P_m(t_0) = 0.$$

Wenn nun das Polynom (4) genau m verschiedene reelle Nullstellen t_i , $i=1,2,\dots,m$, besitzt, so ist wegen der Linearität die Folge

$$x_n = c_1 t_1^n + c_2 t_2^n + \dots + c_m t_m^n$$

Lösung von (2), wobei $c_1, c_2, \dots, c_m$ beliebige feste Werte sind. Man braucht nun diese Konstanten c_1 bis c_m nur so zu wählen, daß die Werte x_n , $n=0,1,\dots,m-1$, den Anfangsbedingungen genügen, und das ergibt ein lineares Gleichungssystem:

$$n = 0 \quad c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_m = s_0$$

$$n = 1 \quad c_1 t_1 + c_2 t_2 + \dots + c_m t_m = s_1$$

$$n = 2 \quad c_1 t_1^2 + c_2 t_2^2 + \dots + c_m t_m^2 = s_2$$

....

$$n = m-1 \quad c_1 t_1^{m-1} + c_2 t_2^{m-1} + \dots + c_m t_m^{m-1} = s_{m-1}.$$

Ohne Beweis sei bemerkt, daß sich dieses System stets eindeutig lösen läßt und die Koeffizienten c_1 bis c_m liefert.

Kehren wir wieder zu Gleichung (3) zurück. Das Polynom (4) hat hier die Gestalt

$$P_2(t) = t^2 - t - 1,$$

dessen Nullstellen man sofort mit

$$t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{erhält.}$$

Die Lösung ist damit $x_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$,

und aus den Anfangswerten ergibt sich

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$c_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1.$$

Das liefert sofort $c_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$ und $c_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$.

Wenn man noch berücksichtigt, daß $t_1 t_2 = -1$ und damit $t_2 = -t_1^{-1}$ ist, so erhält man endgültig

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

Aus der Zahlentafel erhält man $t_1 = 1.618\dots$ und damit ist zu erkennen, daß für große Werte von n der zweite Summand in der Klammer im Vergleich zum ersten verschwindend klein wird. Unter Benutzung der Logarithmentafel ergibt sich für $\lg F_{27463}$ die Näherung

$$\lg F_{27463} = 27464 \cdot (\lg (1+\sqrt{5}) - \lg 2) - \frac{1}{2} \lg 5 = 5739.6\dots,$$

und damit ist F_{27463} etwa $4 \cdot 10^{5739}$.

Eine direkte Berechnung wäre also auch für einen Computer keine leichte Aufgabe gewesen.

Werner Rosenheinrich
Assistent im Bereich
Numerische Mathematik

Der folgende Artikel über das Studium an der Moskauer Staatlichen Universität (s. Titelbild) wird sicher nicht nur für diejenigen von Ihnen interessant sein, die selbst einmal in der Sowjetunion studieren werden.

Wir danken unserem langjährigen Leser Frank M u l l e r vielmals für diesen ausführlichen Bericht.

Mathematikstudium im befreundeten Ausland

Im Mai 1971 stand es fest: Zusammen mit drei Schülern meiner Gruppe wurde ich zur Aufnahme eines Mathematikstudiums an die Lomonossow-Universität Moskau delegiert. Damit erfüllte sich mein sehnlichster Wunsch, an der ersten Universität in der Sowjetunion studieren zu können. Nachdem ich die 11. und 12. Klasse an der ABF "Walter Ulbricht" Halle absolviert und mich dort auf ein Auslandsstudium eingehend vorbereitet hatte, sollte es nun am 1. September nach Moskau gehen.

Das erste Jahr war für uns das schwierigste. Trotz der guten Russisch-Ausbildung an der ABF hatten wir zu Anfang Mühe, die Lektionen, die natürlich in Russisch gelesen wurden, zu verstehen, ganz zu schweigen, sie inhaltsmäßig zu Papier zu bringen. Doch schon nach kurzer Zeit standen unsere Vorlesungsmitschriften denen der sowjetischen Mitstudenten kaum nach. Die Feinheiten bekamen wir zunächst noch nicht mit, solche Lücken schlossen wir zu Hause beim Selbststudium. Neben Vorlesungen gab es, wie auch an DDR-Universitäten, Seminare zur Festigung der Theorie und ihrer Anwendung beim Aufgabenlösen. An dieser Stelle gilt Dank und Anerkennung für die Mühen, die die Dozenten und Lehrer an der ABF Halle aufgewandt hatten, um uns so gut als möglich auf dieses Studium vorzubereiten. Denn, das war für uns klar, ohne dieses intensive Vorstudium wären wir nur schwer in der Lage gewesen, uns so schnell ins Studium hineinzufinden. DDR-Studenten der höheren Kurse und sowjetische Mitstudenten unterstützten uns in vorbildlicher Weise. Die ersten Früchte trug diese Hilfe und unser kontinuierliches Selbststudium des Lektionsstoffes bei den Kolloquien in höherer Algebra und mathe-

matischer Analysis.

Am 20. Dezember begann die Sessia⁺), zunächst mit der ersten Examensperiode, in der der Seminarstoff geprüft wurde, also vor allem Aufgabenrechnen. Dabei waren folgende Fächer vertreten: analytische Geometrie, mathematische Analysis und höhere Algebra. Außerdem absolvierten wir Kurzprüfungen ("Satschots") in Geschichte der KPdSU, Körperkultur und russischer Sprache. Anfang Januar waren die eigentlichen Examen dran: höhere Algebra, analytische Geometrie und mathematische Analysis.

Das zweite Semester stellte uns vor neue fachliche Probleme; Sprachschwierigkeiten waren nun aber im wesentlichen überwunden. Die Frühlingssessia sah Examen in mathematischer Analysis, linearer Algebra und Geometrie, mathematischer Logik und Geschichte der KPdSU vor. Mit unseren im ersten Jahr gezeigten Leistungen, die höher als der Durchschnitt bei den sowjetischen Studenten waren, rechtfertigten wir das Vertrauen, das man in uns gesetzt hatte bei der Delegierung an die Metropole der Universitäten in der SU.

An die Meisterung des zweiten Studienjahres gingen wir schon als "Routiniers". Wir waren zu jener Zeit bereits in der Lage, unseren sowjetischen Freunden fachlich zur Seite zu stehen, wenn diese Hilfe benötigten. So wohnte ich im zweiten Jahr mit einem Armenier auf einem Zimmer und war ihm bei der Examensvorbereitung behilflich. Das Verhältnis zu den sowjetischen Fachkollegen beruhte von Anfang an auf Kameradschaft und gegenseitiger Unterstützung. Nunmehr standen Lektionen in höherer Algebra, mathematischer Analysis, Geschichte der KPdSU, Differentialgleichungen, ab viertem Semester in Differentialgeometrie, Wahrscheinlichkeitsrechnung und dialektischem Materialismus auf dem Programm.

In dieser Zeit nahmen wir außerdem die Gelegenheit wahr, uns auf die Spezialisierung im dritten Jahr vorzubereiten. So besuchte ich Spezialkurse in verschiedenen algebraischen und logischen Fächern, um mir eine Vorstellung über diese Disziplinen

⁺) Sessia - Abschnitt am Ende jedes Semesters, in dem die Prüfungen abgelegt werden

machen zu können. Dann, im Frühjahr 1973, traf ich meine Wahl für die Spezialrichtung, in der ich ab 5. Semester arbeiten wollte. Dem gingen erste Gespräche mit dem zukünftigen wissenschaftlichen Betreuer voraus. Außer den obligatorischen Lektionen und Seminaren ist es hier Pflicht, während des dritten bis fünften Studienjahres mehrere Spezialkurse (insgesamt 3 Jahre) und -seminare zu besuchen und dazu Examen abzulegen. Hierbei steht für jede Spezialrichtung eine große Palette zur Auswahl, und gelesen werden diese Intensivkurse von vielen großen Mathematikerkapazitäten der Sowjetunion, etwa in der Logik Prof. Markow, Prof. Uspenski, in der Wahrscheinlichkeitsrechnung Prof. Gnedenko, Prof. Schirjajew, in der algebraischen Zahlentheorie Schafarewitsch, um nur einige zu nennen. Nachdem wir unsere Spezialrichtung gewählt hatten, schrieben wir im Verlaufe des 3. und 4. Jahres je eine Kursarbeit, deren Themen vom Betreuer, im Einverständnis mit seinen Schülern, gewählt wurden.

Inzwischen bin ich Student des 5. Kurses geworden, ab 1. 9. 1975 schreibe ich die Diplomarbeit. Unser Studium schließt in großem Maße Anfänge echter wissenschaftlicher Arbeit ein. Davon zeugen sowohl die genannten Kursarbeiten als auch die Mitarbeit an Spezialseminaren. Letztere beschränkt sich keineswegs nur auf das Anhören von Vorträgen anderer, sondern fordert von uns ebenfalls Referate über diverse mathematische Themen der Spezialrichtung oder eigene Resultate, etwa aus den Jahresarbeiten. Hierbei erlangt man die Fähigkeit, mathematische Artikel mit vollem Verständnis zu lesen und diese anschließend in Lektionsform wiederzugeben.

Die Schilderung unserer fachlichen Arbeit möchte ich in der Richtung ergänzen, daß an unserer Universität die DDR-Studenten jeder Fakultät in FDJ-Gruppen organisiert sind, wo sich für alle auch in gesellschaftlicher Hinsicht ein breites Betätigungsfeld auftut. Wir finden aber auch viel Gelegenheit, uns mit Moskau und seinen Menschen bekanntzumachen, was für uns nicht weniger interessant ist als das Studium. Auf Konzerten im Konservatorium und selbst in der Universität erleben wir die berühmten Musiker des Freundeslandes und aus aller Welt, wie z.B. David und Igor Oistrach, Oleg Kogan, Swjatoslaw Richter aus der

SU, Karl Richter aus der BRD, van Cliburn aus den USA und viele andere. Dieser Ausgleich ist bei der angestrengten fachlichen Arbeit besonders wichtig und dazu sehr angenehm.

Während unseres Studiums kommt uns immer wieder die frühere Teilnahme an Mathematikolympiaden zugute. Das hilft besonders beim schnellen Erfassen von mathematischen Problemen und Lösen von Aufgaben, aber dies allein reicht nicht aus. Nur wenn man ständig an sich arbeitet, sein mathematisches Wissen vervollkommt und sich nicht ausschließlich auf mathematische Gebiete beschränkt, ist der erfolgreiche Abschluß des Studiums garantiert, wird man zu einem wertvollen Wissenschaftler für unseren Staat.

Frank Müller

Lösungen

Aufgabe G 28 (nach Klaus Altmann, Berlin)

Gesucht ist eine Funktion $f(x)$, so daß für alle reellen x die Gleichung

$$af(1-x) - bf(x-1) = xc$$

erfüllt ist (a, b, c reell, $|a| \neq |b|$).

Behauptung: $g(x) = -\frac{c}{a+b}x + \frac{c}{a-b}$ ist eine solche Funktion.

Beweis:

1) g ist für alle reellen x definiert, da $|a| \neq |b|$.

$$2) \quad ag(1-x) = -\frac{ac}{a+b}(1-x) + \frac{ac}{a-b}, \quad bg(x-1) = \frac{bc}{a+b}(1-x) + \frac{bc}{a-b}$$

Hieraus folgt für beliebiges reelles x

$$ag(1-x) - bg(x-1) = c \frac{a-b}{a-b} - (1-x)c \frac{a+b}{a+b} = c + (x-1)c = xc.$$

Aufgabe G 30 (nach Gunter Gerbeth, Greiz)

Hilfssatz: In einem gleichseitigen Dreieck ist die Summe der Entfernungen eines inneren Punktes zu den Seiten gleich der Länge der Höhe.

Beweis:

Für den Schwerpunkt ist die Behauptung offensichtlich, d. h., es gilt

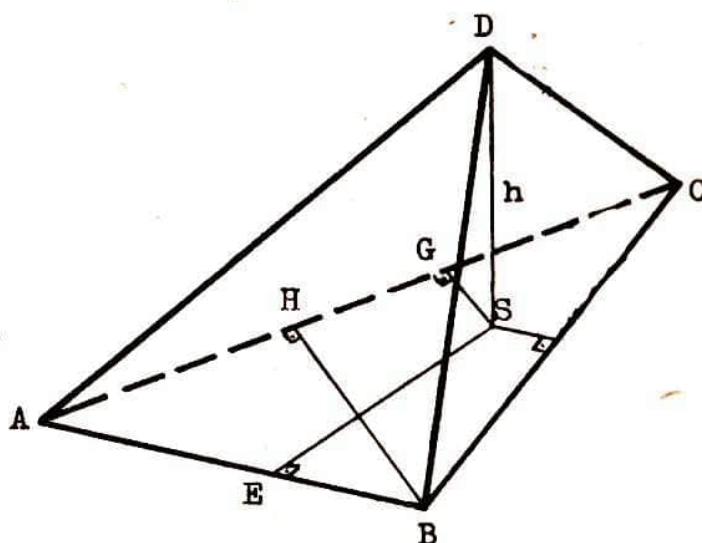
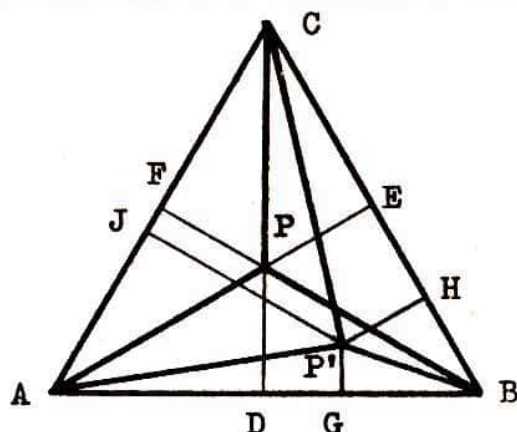
$$\overline{PD} + \overline{PE} + \overline{PF} = \overline{AE}.$$

Für einen beliebigen anderen inneren Punkt P' gilt nun:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \overline{PD} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \overline{PE} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \overline{PF} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \overline{P'G} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \overline{P'H} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \overline{P'J},$$

also
$$\overline{PD} + \overline{PE} + \overline{PF} = \overline{P'G} + \overline{P'H} + \overline{P'J}.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.



Es sei nun ABCD die Pyramide. Die Winkel α, β und γ sind gerade die Winkel $\angle DFS$, $\angle DGS$ und $\angle DES$. Es gilt:

$$\overline{SF} = h \cdot \cot \alpha, \quad \overline{SG} = h \cdot \cot \beta, \quad \overline{SE} = h \cdot \cot \gamma.$$

Mit dem Hilfssatz folgt

$$\overline{SF} + \overline{SG} + \overline{SE} = \overline{BH} = \frac{a}{2} \sqrt{3} = h(\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma)$$

$$h = \frac{\frac{a}{2} \sqrt{3}}{2(\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma)}$$

$$V = \frac{1}{3} A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \sqrt{3}}{2(\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma)} = \frac{a^3}{8(\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma)}$$

Herausgeber: Leitung der FDJ-Grundorganisation der Friedrich-Schiller-Universität Jena;
Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Egbert Creutzburg

Chefredakteur: Waltraud Werner

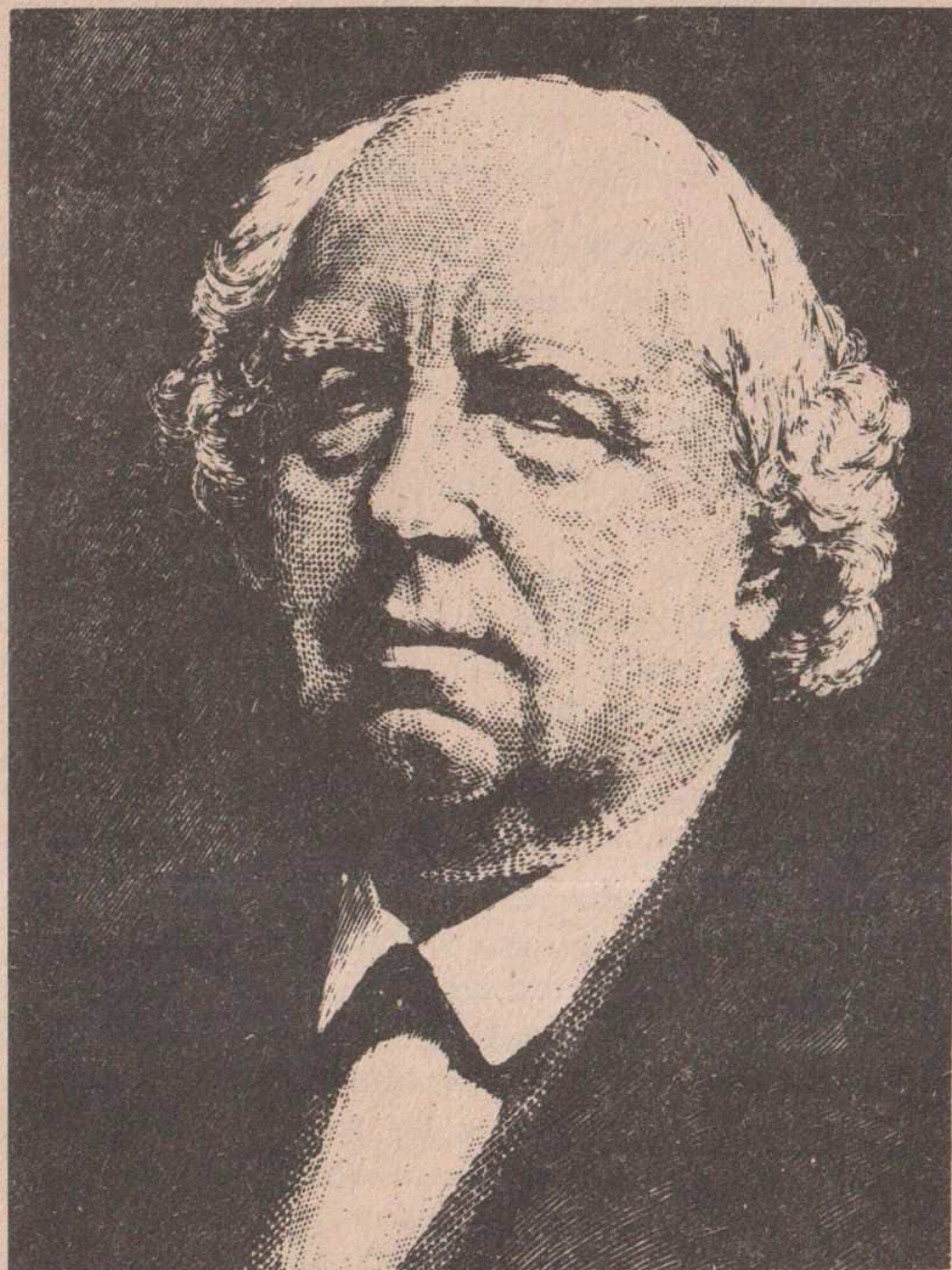
Redaktion: J. Dubslaff, H.-G. Leopold, Th. Ullrich, G. Weske

Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitäts-Hochhaus, Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.



10

75

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Ju-
gendobjekt Studienvor-
bereitung der Sektion
Mathematik an der
Friedrich-Schiller-Uni-
versität Jena

9. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Funktionalgleichungen (I) *)

Im Schulunterricht der 9. und 10. Klasse begegnet man zum ersten Male Beziehungen, die man üblicherweise als Additionstheoreme bezeichnet. Denken wir etwa an das Gesetz:

$$(1) \quad \lg(x \cdot y) = \lg x + \lg y,$$

das benutzt wird, um die (schwierigere) Operation der Multiplikation auf die der Addition (ihrer Logarithmen) zurückzuführen. Schreiben wir $l(x) = \lg x$, so gilt also

$$(1') \quad l(x \cdot y) = l(x) + l(y).$$

Das ist ein Beispiel für eine Funktionalgleichung (in Zukunft abkürzend FGL genannt). Die Funktion $l(x) = \lg x$ nennen wir eine Lösung der FGL (1').

Auch in der Trigonometrie sind Additionstheoreme geläufig. Wir wissen z. B., daß

$$(2) \quad \cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cdot \cos y$$

gilt. Setzen wir $c(x) = \cos x$, so nimmt (2) die Form an:

$$(2') \quad c(x+y) + c(x-y) = 2c(x) \cdot c(y).$$

Auch das ist ein Beispiel einer FGL. Sie wird als d'Alembertsche Funktionalgleichung bezeichnet, nach dem französischen Mathematiker d'Alembert (1717-1783). D'Alembert stieß auf diese FGL bei der Begründung der Regel für die Addition von Kräften, d. h. bei einem physikalischen Problem.

Aber auch durch geometrische Probleme kann man zu Funktionalgleichungen gelangen. Folgen wir einem Gedankengang des französischen Mathematikers Legendre (1752-1833). Bezeichnen wir die Seitenlängen eines Rechtecks R mit x und y , dann ist der Flächeninhalt des Rechtecks natürlich abhängig von diesen Seitenlängen. Er ist eine Funktion der zwei Veränderlichen x und y , $F(x,y)$. Wir wollen uns auf den Standpunkt stellen, daß wir erst eine Formel für den Flächeninhalt gewinnen wollen. Welche Eigenschaften müßte $F(x,y)$ haben? Wenn man das Rechteck durch eine Parallele zu einer der Seiten in zwei Rechtecke R_1 und R_2 zerlegt, so müßte die Summe der Flächeninhalte von R_1 und R_2 gleich dem Flächeninhalt von R sein. Das bedeutet in Formeln:

*) unveränderter Nachdruck aus WURZEL 3/69

Ist $x = x_1 + x_2$ (bzw. $y = y_1 + y_2$), so gilt

$$(3_1) \quad F(x_1 + x_2, y) = F(x_1, y) + F(x_2, y)$$

$$(3_2) \quad F(x, y_1 + y_2) = F(x, y_1) + F(x, y_2)$$

Der Flächeninhalt $F(x, y)$ von R müßte also die FGLn (3_1) , (3_2) erfüllen, d. h. ein System von Funktionalgleichungen.

Es entsteht hier sofort das Problem: Welche Funktionen $F(x, y)$ erfüllen dieses System? Solche Funktionen heißen Lösungen von $(3_1, 3_2)$. Das Lösen von FGLn bildet einen der ältesten Problemkreise der Analysis. Große Mathematiker wie Euler, d'Alembert, Gauß, Cauchy, Abel, Weierstraß, Darboux, Hilbert - um nur einige Namen zu nennen - befaßten sich wiederholt und eingehend mit der Auflösung von Funktionalgleichungen. In den letzten 50 Jahren haben viele Mathematiker Arbeiten über die Lösung von Funktionalgleichungen veröffentlicht. Es handelt sich also um die Aufgabe, sämtliche Funktionen zu finden, die eine vorgegebene FGL erfüllen. In unseren obigen Beispielen würden zum Beispiel auch $l(x) = 2 \lg x$ eine Lösung von $(1')$ und $c(x) = 1$ eine Lösung von $(2')$ sein.

Ehe wir an die Lösung von FGLn gehen, wollen wir aber erklären, was wir unter einer FGL verstehen wollen. Hierzu geben wir zuerst die Definition des Begriffs "Ausdruck":

Definition:

- (1) Die unabhängigen Veränderlichen $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ sind Ausdrücke.
- (2) Sind $A_1, A_2, \dots, A_m$ Ausdrücke und ist F eine Funktion von m Veränderlichen, so ist $F(A_1, A_2, \dots, A_m)$ ein Ausdruck.
- (3) Sonst gibt es keine Ausdrücke.

Damit geben wir die Definition der Funktionalgleichung:

Definition:

Eine FGL ist eine Gleichung $A_1 = A_2$ zwischen zwei Ausdrücken, welche k unabhängige Veränderliche $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ und n ($n \geq 1$) unbekannte Funktionen $F_1, F_2, \dots, F_n$ sowie eine endliche Zahl von bekannten Funktionen enthält.

In unseren ersten beiden Beispielen ist $k = 2$ und $n = 1$.

Nun zur Lösung einiger Funktionalgleichungen. Als erstes Beispiel betrachten wir eine FGL besonders einfacher Gestalt:

$$(4) \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Sie wird nach dem französischen Mathematiker Cauchy (1789–1857) als Cauchysche FGL bezeichnet. Sie wurde durch Cauchy selbst 1821 etwa wie folgt gelöst: Mit der Methode der vollständigen Induktion beweist man aus (4) sofort

$$f(x_1+x_2+\dots+x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) .$$

Setzt man $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$, so ergibt sich

$$(5) \quad f(nx) = n \cdot f(x) .$$

Setzt man $x = \frac{y}{n}$, so erhält man wegen $nx = y$

$$f\left(\frac{y}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot f(y) .$$

Bezeichnen wir jetzt mit m eine positive ganze Zahl, so wird mit $y = mz$ hieraus

$$f\left(\frac{m}{n}z\right) = \frac{1}{n} \cdot f(mz) = \frac{m}{n} \cdot f(z)$$

wegen (5). Setzen wir hier $z = 1$ und $f(1) = c$, wobei c also irgendeine Konstante ist, so wird

$$(6) \quad f(x) = cx$$

für alle positiven rationalen Zahlen $x = \frac{m}{n}$. Dieses Ergebnis gilt auch noch für $x = 0$ und für die negativen rationalen Zahlen $x = -\frac{m}{n}$; denn aus (4) folgt für $x = 0$ sofort $f(0) = 0$. Setzen wir aber in (4) $y = -x$, so ergibt sich für negative rationale x

$$f(0) = f(x) + f(-x)$$

oder

$$f(x) = -f(-x) = -c \cdot (-x) = cx ,$$

d. h. wieder (6). Man kann nun überlegen, daß sich auch für irrationale Werte von x nur (6) als Lösung von (4) ergibt, falls man nur solche Funktionen sucht, wie sie in der Schule betrachtet werden. Das wollen wir hier nicht beweisen. Durch Einsetzen stellt man fest, daß $f(x) = cx$ auch wirklich eine Lösung der Cauchyschen FGL ist. Die sämtlichen Lösungen (6) der FGL (4) sind also, geometrisch gesprochen, die Geraden durch den Nullpunkt des Koordinatensystems, mit Ausnahme der y -Achse selbst.

Neue Prüfungsordnung

Am 1. September trat für die Hoch- und Fachschulen der DDR eine neue Prüfungsordnung in Kraft (siehe Gesetzblatt Teil I Nr. 10 vom 27. 2. 1975). Einige Einzelheiten hierzu werden sicher für viele unserer Leser von Interesse sein. Wir informierten uns deshalb für Sie bei Herrn Prof. Dr. B ö h m , dem stellvertretenden Direktor für Erziehung und Ausbildung an der Sektion Mathematik. Darüberhinaus sind wir gern bereit, Ihre Fragen zur neuen Prüfungsordnung zu beantworten.

WURZEL:

Könnten Sie unseren Lesern kurz etwas zur Notwendigkeit einer neuen Prüfungsordnung an den Hoch- und Fachschulen unserer Republik sagen?

PROF. BÖHM:

Die neue Prüfungsordnung hat die Aufgabe, für Hoch- und Fachschulen, für Direkt-, Fern-, Abend- und postgraduales Studium und auch für Externe eine gemeinsame und einheitliche Ordnung aufzustellen. Die im Laufe der Zeit zur alten Prüfungsordnung aus dem Jahre 1966 hinzugekommenen Änderungen machten das Prüfungswesen in der letzten Zeit wenig übersichtlich.

Die neue Anordnung läßt erkennen, daß die Prozesse der Erziehung und Ausbildung der Studenten neu durchdacht wurden und der Erhöhung des theoretischen Niveaus und der praxiwirksamen Gestaltung des Lehr- und Studienprozesses im verstärkten Maße Rechnung getragen wird. Schließlich findet das Jugendgesetz in der neuen Prüfungsordnung einen wesentlichen Niederschlag, indem die erweiterte Verantwortung der Jugend klar fixiert wird.

WURZEL:

Wie äußert sich die erhöhte Verantwortung der FDJ in dieser neuen Prüfungsordnung?

PROF. BÖHM:

Inbesondere regelt § 5 der neuen Prüfungsordnung, daß grundsätzliche Fragen bei der Anwendung der Prüfungsordnung mit der zuständigen Leitung der Freien Deutschen Jugend zu beraten und deren Vorschläge bei der Entscheidungsfindung zu berücksichtigen sind.

WURZEL:

Welchen Stellenwert haben Prüfungen am Ausbildungsprozeß?

PROF. BÖHM:

In Prüfungen sind die im Verlaufe des gesamten Studiums eines Lehrgebietes erworbenen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten nachzuweisen. Sie sind für Studenten und für den Lehrkörper ein wichtiger Gradmesser der Qualität der Arbeit.

WURZEL:

Wie beurteilen Sie das Verhältnis von Leistungskontrollen und Prüfungen? Welche Erfahrungen gibt es an Ihrer Sektion?

PROF. BÖHM:

Leistungskontrollen erfassen immer nur Ergebnisse eines einzelnen Studienabschnitts. Sie sind eine Vorbereitung auf Prüfungen und fließen außerdem mit ein bei der Einschätzung der studentischen Leistungen in der Prüfung. Nach einem wohlüberlegten Plan, der zu Beginn des Studienjahres allen Studierenden bekanntgegeben wird, finden die einzelnen Leistungskontrollen im Verlaufe eines Studienjahres statt. Die Prüfungen werden gemäß dem staatlichen, vom Ministerium bestätigten Studienplan angesetzt. Leistungskontrollen haben sich im vergangenen ersten Studienjahr in einer besonderen Form sehr bewährt, um die Studierenden von Anfang an zu einem effektiven Arbeitsstil zu befähigen.

WURZEL:

Welche konkreten neuen Anforderungen bringt die Prüfungsordnung für den Studenten mit sich oder worauf orientiert sie verstärkt?

PROF. BÖHM:

Die Prüfungsordnung bringt endlich einmal Ordnung in den Studienablauf; ein Vorteil der neuen Anordnung ist es zum Beispiel, daß sie ganz konkret regelt, wie im Falle des Nichtbestehens einer Prüfung oder der Nichtannahme einer Hausarbeit zu verfahren

ren ist. Auch werden genaue Regelungen getroffen für den Fall, daß ein Student nicht zur Prüfung erscheint. Auf alle Fälle wird gesichert, daß Prüfungsrückstände niemals in die nächste Prüfungsperiode verschleppt werden können, weil in solchen Fällen der Student nicht mehr weiterstudieren darf.

WURZEL:

Welche Relationen existieren in den Prüfungen an den Hochschulen (oder speziell an Ihrer Sektion) zwischen Faktenüberprüfung und Anwendung schöpferischer Fertigkeiten? Wie beeinflußt die neue Prüfungsordnung dieses Verhältnis?

PROF. BÖHM:

Es muß natürlich Faktenwissen vorhanden sein; aber dieses muß immer im Zusammenhang mit der Fähigkeit gesehen werden, schöpferisch wirksam zu werden und auf Anwendungen Bezug nehmen zu können. Insbesondere muß der Student der Mathematik in der Lage sein, Beweise zu reproduzieren und auch in gewissen Grenzen sich selbst Beweise zu überlegen. § 3 regelt diese Zusammenhänge, indem dort niedergelegt ist, daß die Festigkeit, der Umfang und die Anwendungsbereitschaft des Wissens und Könnens in den Prüfungen einzuschätzen ist und darüber hinaus festgestellt werden muß, inwieweit der Student in der Lage ist, selbständig zu denken und notwendige Zusammenhänge zu erkennen und darzustellen.

WURZEL:

Wir danken Ihnen für dieses Gespräch.

Preisaufgaben 10/75

(G 55) Zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ liegen bezüglich des Mittelpunktes ihres gemeinsamen Inkreises zueinander symmetrisch. Der Inkreis habe den Radius r . Beweisen Sie, daß das Produkt der Flächen von ABC , $A_1B_1C_1$ und der Flächen derjenigen sechs Dreiecke, die man durch den Schnitt der Seiten der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ erhält, gleich r^{16} ist.

(G 56) Man löse die Gleichung $\sin 4x = \tan x$ für $m > 0$.

(G 57) Man löse die Gleichung

①
$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax}} + \log_x \sqrt[4]{ax} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{x}{a}} = a$$

für $a > 0$, $a \neq -1$.

(G 58) Man beweise: Die sämtlich von Null verschiedenen reellen Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_k$, $k \geq 3$ bilden eine arithmetische Folge genau dann, wenn für beliebige n mit $3 \leq n \leq k$ gilt:

①
$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}$$

(G 59) Es sei bekannt, daß die Wurzeln x_1, x_2, x_3 der Gleichung $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ positiv sind. Welche zusätzliche Bedingung müssen die Koeffizienten p, q, r erfüllen, damit aus drei Strecken mit den Längen x_1, x_2, x_3 ein Dreieck konstruiert werden kann?

(G 60) В конус помещены пять равных шаров. Четыре из них лежат на основании конуса, причем каждый из этих шаров касается двух других, лежащих на основании, и боковой поверхности конуса. Пятый шар касается боковой поверхности конуса и остальных четырех шаров. Найти объём конуса, если радиусы шаров равны r .

②

основание	-	Grundfläche
боковая поверхность	-	Mantelfläche
касаться	-	berühren
объём	-	Inhalt

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.

Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.

Beteiligten können sich Schüler aller Klassenstufen sowie die Mitglieder des NVA-Zirkels unseres Jugendobjekts.

Einsendeschluß: 30. 11. 1975

Zu unserem Titelbild:

Karl Weierstraß

- Zum 160. Geburtstag des Gelehrten -

Welcher Schüler hat sich nicht schon einmal geärgert, wenn er auf Grund einer Unexaktheit bei der Lösung einer mathematischen Aufgabe etwa einen Punkt weniger erhielt - der ihm vielleicht gerade an einer besseren Zensur fehlte?!

Karl Weierstraß war ein Beispiel dafür, daß Exaktheit eine notwendige Voraussetzung für eine erfolgreiche Arbeit als Mathematiker ist, daß logische Klarheit in den Schlußweisen es erst erlaubt, das ganze Spektrum mathematischer Probleme voll zu erfassen und zu bewältigen.

Weierstraß, der viele Jahre hindurch Lehrer an einem preußischen Gymnasium war, der beginnend mit dem Jahre 1856 dreißig Jahre lang als Mathematikprofessor an der Universität Berlin lehrte und dessen stets auf das sorgfältigste vorbereitete Vorlesungen sich wachsender Berühmtheit erfreuten, wird von Struik ¹⁾ als das mathematische Gewissen schlechthin, sowohl in methodischer als auch in logischer Beziehung, bezeichnet. Hauptsächlich durch seine Vorlesungen sind die Gedanken von Weierstraß zum Gemeingut der Mathematiker geworden.

Besonders verdienstvoll war sein Wirken auf den Gebieten der Funktionentheorie und der Variationsrechnung. Hier tritt auch sehr deutlich die "Weierstraßsche Strenge" in den ausgeführten Schlußweisen zutage, die seinen Ruhm begründet:

- Seine am meisten bekannt gewordene Leistung ist die Begründung der Theorie der komplexen Funktionen durch die Methode

1) Struik, Dirk, J., Abriß der Geschichte der Mathematik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961, S. 182-184

Der vorliegende Artikel beruht auf dieser Arbeit, aus ihr ist ebenso das Zitat von Hilbert entnommen (S. 184).

der Potenzreihen. Hierbei knüpfte er in gewissem Sinne an Lagrange an, erzielte jedoch durchweg völlige Strenge, da er konsequent in der komplexen Ebene arbeitete.

- Er präzisierte die Begriffe des Minimums, der Funktion und der Ableitung und leistete damit einen wertvollen Beitrag für die Infinitesimalrechnung, indem er die noch vorhandene Unbestimmtheit der Ausdrucksweise in deren grundlegenden Begriffen beseitigte.
- Weierstraß entdeckte die gleichmäßige Konvergenz - ein Resultat seiner peinlich genauen Denkweise, das er erzielte, indem er sich nicht mit dem Begriff der Konvergenz schlechthin zufriedengab, sondern ihn genauestens analysierte.

Das Verdienst der Weierstraßschen Tätigkeit - wir haben stichpunktartig einige wesentliche Resultate hervorgehoben, die geeignet sind, die Art dieser Tätigkeit anzudeuten - kann keine bessere Würdigung erfahren, als durch den berufenen Mund eines David Hilbert in seiner Arbeit "Über das Unendliche" (Math. Annalen 95, S. 161-190(1926)):

"Wenn heute in Verfolgung der Schlußweisen, die auf dem Begriff der Irrationalzahl und überhaupt des Limes beruhen, in der Analysis volle Übereinstimmung und Sicherheit herrscht und in den verwickeltsten Fragen, die die Theorie der Differential- und Integralgleichungen betreffen, trotz der kühnsten und mannigfaltigsten Kombinationen unter Anwendung von Über-, Neben- und Durcheinander-Häufung der Limites doch Einhelligkeit aller Ergebnisse statthat, so ist dies wesentlich ein Verdienst der wissenschaftlichen Tätigkeit von Weierstraß."

Lösungen

Aufgabe G 38

Wir substituieren $\sqrt{x} = u$ und $\sqrt{y} = v$. Dann gilt sofort $u \geq 0$, $v \geq 0$. Das Gleichungssystem erhält die folgende Gestalt:

$$(u^2 - v^2)v = \frac{u}{2} \quad (1)$$

$$(u^2 + v^2)u = 3v \quad (2)$$

Offensichtlich ist $u = v = 0$ eine Lösung des Systems. Im Verlauf der weiteren Rechnung werden wir jetzt $u \neq 0$ und damit wegen (2) auch $v \neq 0$ voraussetzen.

Wir multiplizieren die Gleichungen (1) und (2) miteinander und erhalten:

$$u^4 - v^4 = \frac{3}{2} \quad (3).$$

Die Gleichung (1) wird mit v und die Gleichung (2) mit u multipliziert. Dann addieren wir die entstehenden Gleichungen und erhalten:

$$u^4 - v^4 + 2u^2v^2 = \frac{7}{2}uv \quad (4).$$

Verwenden wir das Resultat (3), so ergibt sich die quadratische Gleichung:

$$4(uv)^2 - 7(uv) + 3 = 0 \quad (5).$$

Diese besitzt die Lösungen

$$(uv)_1 = 1 \text{ und } (uv)_2 = \frac{3}{4}.$$

Wir betrachten nun die zwei Gleichungssysteme

$$\left. \begin{array}{l} uv = 1 \\ (u^2 + v^2)u = 3v \end{array} \right\} (6) \quad \left. \begin{array}{l} uv = \frac{3}{4} \\ (u^2 + v^2)u = 3v \end{array} \right\} (7)$$

Es ist klar, daß jede von der Trivillösung $u = v = 0$ verschiedene Lösung von (1) und (2) auch die Systeme (6) oder (7) lösen muß.

Umgekehrt jedoch müssen Lösungen der Systeme (6) und (7) daraufhin untersucht werden, ob sie auch die Gleichungen (1) und (2) erfüllen. Dieser Sachverhalt kann nicht vorausgesetzt werden.

Die Lösungen der Systeme (6) und (7) ergeben sich unmittelbar, jeweils nach Umstellung der ersten Gleichung nach u oder v :

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[4]{2}, & v &= \frac{\sqrt[4]{8}}{2} & \text{und} \\ u &= \frac{\sqrt[4]{27}}{2}, & v &= \frac{\sqrt[4]{3}}{2}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichungen (1) und (2) zeigt man, daß diese erfüllt sind. Damit hat man alle möglichen Lösungen gefunden. Nach Rücksubstitution ergeben sich für das ursprüngliche Gleichungssystem folgende Lösungspaare (x, y) :

$$(0, 0); (\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}); (\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}).$$

Aufgabe G 41

Wir führen den Beweis in zwei Schritten, wobei am Ende gezeigt ist, daß die Punkte M, N, P, Q, R, S (s. Skizze) auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

1. Schritt: Wir zeigen $SM \parallel AC$,
 $RQ \parallel BC$, $NP \parallel AB$. (1)

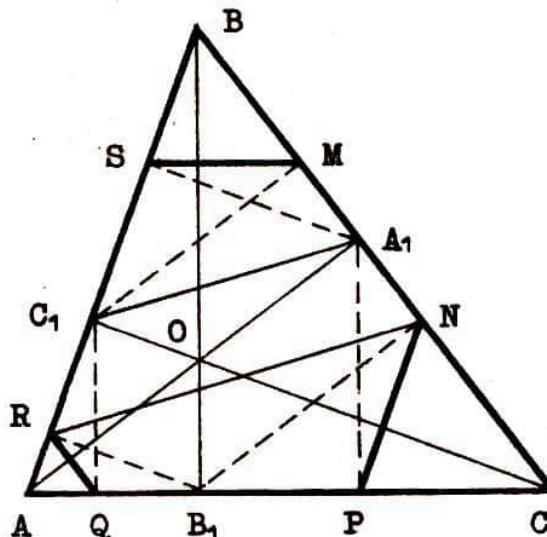
Es ist $\triangle BA_1A \sim \triangle BC_1C$ (rechtwinklige Dreiecke mit gemeinsamem Winkel $\angle ABC$). Hieraus folgt

$$\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA}{BC}, \text{ also } \triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$$

und $\angle BA_1C_1 = \angle BAC$.

Im Dreieck $\triangle A_1BC_1$ sind A_1S und C_1M Höhen; ähnlich wie oben erhält man $\angle BSM = \angle BA_1C_1$, und hieraus folgt $\angle BSM = \angle BAC$, also $SM \parallel AC$.

Analog zeigt man $RQ \parallel BC$, $NP \parallel AB$.



2. Schritt: M, N, P, Q, R, S liegen auf einem gemeinsamen Kreis. Dazu genügt es zu zeigen: Beliebige vier aufeinanderfolgende Punkte liegen auf einem gemeinsamen Kreis.

Beweistechnisch gibt es zwei Typen von Punktquadrupeln:

RSMN, MNPQ, PQRS (Punkte auf zwei Dreiecksseiten)

NPQR, QRSM, SMNP (Punkte auf drei Dreiecksseiten).

Wir betrachten die Quadrupel RSMN und NPQR. Offensichtlich ist

$$\frac{BC_1}{BR} = \frac{BO}{BB_1} = \frac{BA_1}{BN} \quad (C_1O \parallel RB_1, A_1O \parallel NB_1, \text{ Strahlensatz}). \text{ Hieraus ergibt sich } NR \parallel A_1C_1. \quad (2)$$

Deshalb ist $\angle MNR = \angle BA_1C_1 = \angle BAC = \angle BSM$ (nach (2) und 1. Schritt), d. h. $\angle MNR + \angle MSR = 180^\circ$; R, S, M, N liegen auf einem gemeinsamen Kreis (beträgt die Winkelsumme gegenüberliegender Winkel im Viereck 180° , dann liegen die Eckpunkte des Vierecks auf einem gemeinsamen Kreis).

$$\begin{aligned} \text{Ferner gilt: } \angle PNR + \angle PQR &= 180^\circ - (\angle PNC + \angle BNR) + 180^\circ - \angle AQR \\ &= 360^\circ - (\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB) \\ &= 180^\circ \end{aligned}$$

(nach 1. Schritt, (1) und (2)). Damit liegen auch N, P, Q, R auf einem gemeinsamen Kreis.

Analog wird der Beweis für die restlichen Vierecke geführt.

Aufgabe G 32

Behauptet wird, daß die Funktion $F(x,y) = (x-1975)^{1974} \cdot (y-1976)^{1975} + 1$ nicht als das Produkt zweier Funktionen $g(x) \cdot h(y)$ darstellbar ist. Der Beweis der Behauptung erfolgt indirekt.

Annahme: $F(x,y) = g(x) \cdot h(y)$, wobei $g(x)$ und $h(y)$ jeweils nur von einer Variablen abhängen.

Dann folgt für $x_0 = 1975$ und beliebige y :

$$F(x_0, y) = g(x_0) \cdot h(y) = (x_0 - 1975)^{1974} \cdot (y - 1976)^{1975} + 1$$

$$F(x_0, y) = g(x_0) \cdot h(y) = 1$$

$$h(y) = \frac{1}{g(1975)} = c_1 = \text{constant}$$

($g(x_0) \neq 0$, da sonst das Produkt $g(x_0) \cdot h(y)$ nicht gleich 1 sein kann).

Analog erhalten wir für $y_0 = 1976$ und beliebige x :

$$F(x, y_0) = g(x) \cdot h(y_0) = 1$$

$$g(x) = \frac{1}{h(1976)} = c_2 = \text{constant}.$$

Damit ergibt sich für die Funktion $F(x,y)$

$$F(x,y) = g(x) \cdot h(y) = c_1 \cdot c_2 = \text{constant},$$

aber $F(x,y)$ ist definiert als:

$$F(x,y) = (x-1975)^{1974} \cdot (y-1976)^{1975} + 1.$$

Dieser Ausdruck ist sicherlich nicht konstant für beliebige Werte x und y .

Damit ist der für den Beweis der Behauptung notwendige Widerspruch konstruiert.

Sommerlager des Bezirksklubs Junger Mathematiker

Vom 7. 7. bis 17. 7. 1975 fand das Sommerlager der Jungen Mathematiker des Bezirkes Gera statt. Wer diese Mathematiklager organisiert, wer an ihnen teilnimmt und wie sie gestaltet werden, soll in diesem Artikel beschrieben werden.

Die Lager werden in Zusammenarbeit des Bezirkskabinetts für außerunterrichtliche Tätigkeit in der Abteilung Volksbildung beim Rat des Bezirkes Gera und der Sektion Mathematik der FSU Jena organisiert und durchgeführt. Das Bezirkskabinett, das von Herrn Jahn geleitet wird, sorgt für die terminliche Festlegung, für die Unterkunft der Teilnehmer und für die finanzielle Absicherung des Lagers. Außerdem wird für jedes Lager ein Lagerleiter berufen, der für den organisatorisch-kulturellen Teil im Lager verantwortlich ist. Die Sektion Mathematik hat die gesamte Planung und Durchführung eines wissenschaftlichen Unterrichtsprogramms übernommen. Hierfür eingesetzt sind von staatlicher Seite Dr. Bätz und von unserem Jugendobjekt "Studienvorbereitung" der Student Jörg Vogel. (Das Jugendobjekt umfaßt nicht nur die "Wurzel", sondern hat auch noch einen Bereich "Mathematiklager" und einen Bereich "NVA-Zirkel"). Die Zusammenarbeit zwischen dem Bezirkskabinett und der Sektion ist gut. Das zeigte sich sowohl auf den gemeinsamen Sitzungen zur Vorbereitung der Mathematiklager als auch in den Lagern selbst.

Jährlich finden zwei große Lager zu Beginn der Sommer- und Winterferien (ca. 8 bis 10 Tage) und zwei Wochenendlehrgänge zu Beginn der Herbst- bzw. Frühjahrsferien (ca. 4 Tage) statt. Für jedes Lager setzt die Sektion zur Durchführung des Unterrichts zwei wissenschaftliche Mitarbeiter und außer dem Verantwortlichen im Jugendobjekt "Studienvorbereitung" noch zwei bis drei Studenten ein. Gegenwärtig wird an einem Unterrichtsprogramm gearbeitet, das über mehrere Jahre für die Schüler von der 8. bis zur 12. Klasse gültig sein soll. Die Mitgliedschaft im Bezirksklub Junger Mathematiker (BKJM), die notwendig für die Teilnahme an diesen Lagern ist, wird für die Schüler in jedem Schuljahr neu festgelegt. Entscheidende Kriterien sind das Abschnei-

den bei der Mathematikolympiade (insbesondere bei der Bezirksolympiade) und - soweit das eingeschätzt werden kann - die Leistungen, das Interesse und die Disziplin in den vergangenen Mathematiklagern. So ist es nicht verwunderlich, daß sich besonders in den oberen Klassen ein fester Stamm von Teilnehmern herausgebildet hat. In diesem Schuljahr hat der BKJM 48 Mitglieder.

Das diesjährige Sommerlager fand in Ruppertsdorf (Kr. Lobenstein) statt. Schon zum zweiten Mal war der BKJM zu Gast in dieser kleinen, sehr schön gelegenen Gemeinde. Die neuerbaute Oberschule mit eigener Küche und Turnhalle eignet sich vorzüglich für die Durchführung eines solchen Lagers.

Leider reiste nur ungefähr die Hälfte der eingeladenen Schüler an. Die Gründe hierfür waren einerseits individuelle Urlaubspläne, zum anderen aber auch das gleichzeitig in Jena durchgeführte Lager Junger Physiker. Auf Grund der geringen Teilnehmerzahl wurden die Schüler in nur 3 Gruppen zusammengefaßt. Der Unterrichtsstoff wurde aus folgenden mathematischen Themenkomplexen ausgewählt:

- Klasse 8: Elementargeometrie, Zahlentheorie, Gleichungen und Ungleichungen, Aussagenlogik
- Klasse 9/10: Zahlentheorie, vollständige Induktion, räumliche Geometrie, Dirichletsches Schubfachprinzip, Matrizen und Determinanten
- Klasse 11/12: Funktionalgleichungen, geometrische Gleichungen, räumliche Geometrie, Ungleichungen, Matrizen und Determinanten.

Für die Gestaltung der Nachmittage und Abende war der Lagerleiter Herr Lappe, Lehrer für Mathe/Physik an der Oberschule Ruppertsdorf, verantwortlich. Es wurden Wanderungen, Nachmittage im Waldbad, ein Sportfest, Luftgewehrschießen, ein Forum, Skat- und Schachabende und eine Abschlusfeier organisiert und durchgeführt. Eine geplante Filmveranstaltung und eine Betriebsbesichtigung mußten wegen kurzfristiger Absagen leider ausfallen. Die Schüler hatten außerdem die Möglichkeit, die Turnhalle zu benutzen, wovon auch reger Gebrauch gemacht wurde. Besonders gut gefielen die Ganztagswanderung nach Wursbach und die Abschlusdiscothek. Viel Lob ernteten die Küchenfrauen, die sich sehr aufopfernd um die Verpflegung ihrer Schützlinge kümmerten.

Einen Höhepunkt bildete die abschließende Lagerolympiade. Die Aufgaben für die einzelnen Klassenstufen wurden entsprechend dem Unterrichtsstoff ausgewählt. Dabei blieb der Charakter von Olympiadeaufgaben im wesentlichen erhalten. Die Ergebnisse bestätigten, daß man nur durch kontinuierliche Arbeit und vielseitiges Üben einen wirklichen Erfolg erzielen kann. Am besten schnitt die Klassenstufe 11/12 ab. Noch nicht zufrieden können wir mit den Ergebnissen der 8. Klasse und eines Teils der 9. Klasse sein.

Hier die Besten der einzelnen Klassenstufen, die einen Buchpreis erhielten:

Klasse 8: Barbara Gremir

Klasse 9: Andreas Jeschah

Klasse 10: Herbert Rose

Peter Dittrich (als Frühstarter in der 11/12
erreichte er die höchste
Punktzahl im Lager überhaupt!)

Klasse 11: Holger König

Andreas Kleinwächter

Klasse 12: Volker Wahner (BBS)

Andreas Martin.

Das Sommerlager in Ruppertsdorf wird für alle Beteiligten eine schöne Erinnerung bleiben.

Jörg Vogel

Jugendobjekt „Studienvorbereitung“

Titelbild: Karl Weierstraß. Aus der Bildserie "Berühmte Mathematiker", Sammlung Karger-Decker, Berlin.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Egbert Creutzburg

Chefredakteur: Waltraud Werner

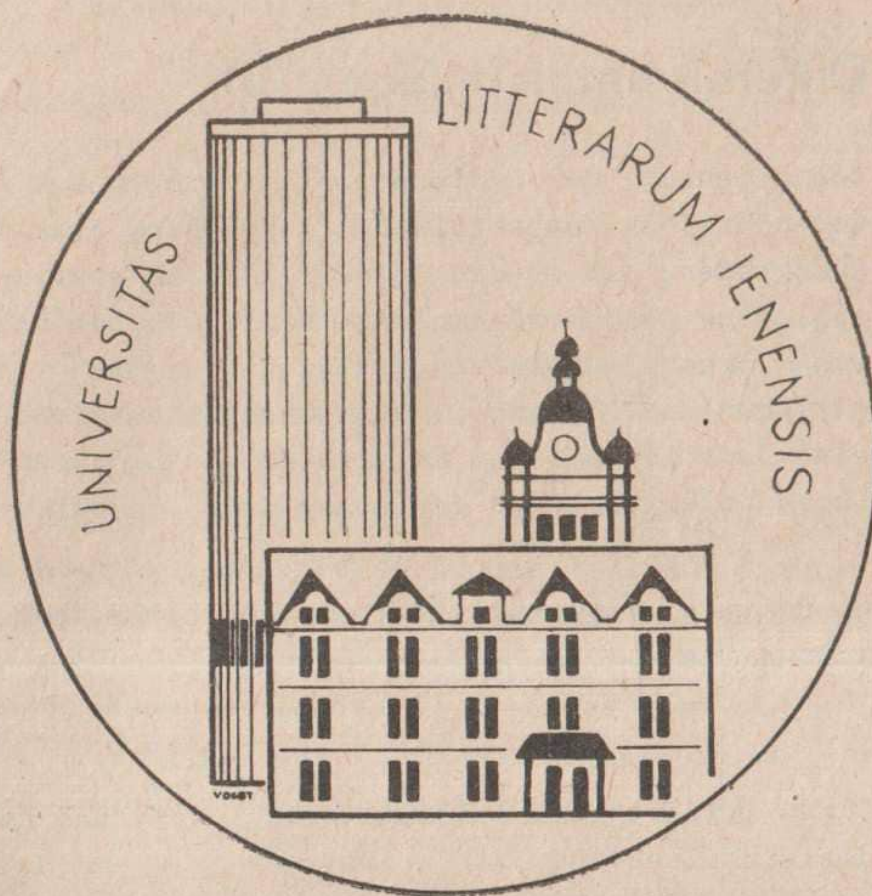
Redaktion: R. Jeske, H.-G. Leopold, E. Reuter

Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.



11

75

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Ju-
gendobjekt Studienvor-
bereitung der Sektion
Mathematik an der
Friedrich-Schiller-Uni-
versität Jena

9. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Differenzengleichungen (II)

Die Bedeutung der Differenzengleichungen ist besonders für die Anwendung der Mathematik bei der Lösung praktischer Probleme weit- aus größer, als es die Ausführungen im ersten Teil erwarten las- sen. Eine besonders wichtige Rolle spielen sie bei der prakti- schen Behandlung ihrer "großen Schwestern" - der Differential- gleichungen. Es handelt sich hierbei um Gleichungen, bei denen eine Funktion aus dem angegebenen Zusammenhang zwischen ihr und ihren Ableitungen zu bestimmen ist. Als Beispiel sei die folgen- de Problemstellung betrachtet:

Gesucht ist diejenige Funktion $y(x)$, die überall gleich ihrer Ab- leitung ist:

$$\frac{dy}{dx} = y. \quad (5)$$

Diese Differentialgleichung soll jetzt ohne genauere Begründung der einzelnen Schritte gelöst werden. Zunächst schreibt man

$$\frac{dy}{y} = dx$$

und integriert beide Seiten:

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx ,$$

$$\text{d. h. } \ln|y| = x + C,$$

und damit ist

$$|y| = e^{x+C} = e^C \cdot e^x = C_1 e^x .$$

Also ist $y(x) = C_2 e^x$, wobei C_2 eine beliebige reelle Konstante ist.

Zur genauen Fixierung der Lösung ist in diesem Falle noch eine sogenannte Anfangsbedingung nötig, d. h. man müßte das Problem eventuell so formulieren:

Gesucht ist die Funktion $y(x)$ mit $\frac{dy}{dx} = y$ und $y(0) = 1$.

Dann erhält man sofort aus der zweiten Bedingung $C_2 = 1$ und $y(x) = e^x$.

Differentialgleichungen der verschiedensten Art tauchen in allen Gebieten der Naturwissenschaften und Technik auf, ihr klassisches Feld ist die Mechanik, da sie sich in unübertroffener Weise zur Beschreibung von Bewegungsvorgängen eignen. Häufig ergeben sich lineare homogene Differentialgleichungen m -ten Grades mit konstanten Koeffizienten der folgenden Form:

$$\frac{d^m y}{dx^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0. \quad (6)$$

Bei mechanischen Problemen ist der Grad m meist 2, da die Bewegung in der Regel durch die drei wichtigsten Parameter Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung, d. h. y , $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{d^2 y}{dt^2}$, beschrieben wird.

Es ist eher die Ausnahme als die Regel, wenn es gelingt, für eine gegebene Differentialgleichung eine Lösung $y(x)$ als Kombination elementarer Funktionen anzugeben. Dieser Umstand ist prinzipieller Natur und liegt nicht am Unvermögen der Mathematiker, diese elementaren Lösungen zu finden, weil sie eben nicht existieren. Nun sind allerdings alle Differentialgleichungen der Form (6) elementar lösbar, und für einen Fall soll der Lösungsweg hier skizziert werden, weil er sehr gut die Verwandtschaft zwischen Differenzen- und Differentialgleichungen demonstriert. Aus (6) bilden wir das Polynom

$$R_m(s) = s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0. \quad (4')$$

Es sei s_0 eine reelle Nullstelle von $R_m(s)$; dann gilt der folgende

Satz:

Die Funktion $y_0(x) = e^{s_0 x}$ ist Lösung der Gleichung (6).

Beweis:

$$\text{Es ist } \frac{dy_0}{dx} = s_0 e^{s_0 x}, \quad \frac{d^2 y_0}{dx^2} = s_0^2 e^{s_0 x}, \dots, \quad \frac{d^m y_0}{dx^m} = s_0^m e^{s_0 x}$$

$$\text{und damit } \frac{d^m y_0}{dx^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y_0}{dx^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dy_0}{dx} + a_0 y_0 =$$

$$\begin{aligned}
&= s_0^m e^{s_0 x} + a_{m-1} s_0^{m-1} e^{s_0 x} + \dots + a_1 s_0 e^{s_0 x} + a_0 e^{s_0 x} \\
&= (s_0^m + a_{m-1} s_0^{m-1} + \dots + a_1 s_0 + a_0) e^{s_0 x} \\
&= R_m(s_0) e^{s_0 x} = 0.
\end{aligned}$$

Wenn nun das Polynom $R_m(x)$ genau m verschiedene reelle Nullstellen $s_1, i=1,2,\dots,m$ hat, so ist wegen der Linearität auch die Funktion

$$y(x) = C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x} + \dots + C_m e^{s_m x} \quad (7)$$

eine Lösung der Gleichung (6), wobei $C_1, C_2, \dots, C_m$ beliebige feste Werte sind, die in jedem konkreten Fall aus gewissen Anfangsbedingungen bestimmt werden müssen.

Falls das Polynom $R_m(x)$ mehrfache oder komplexe Nullstellen besitzt, ist ein ähnliches Vorgehen möglich, hierbei ergeben sich noch Winkel- und Hyperbelfunktionen im Ausdruck (7).

Vom Standpunkt der "theoretischen" Mathematik wäre damit das Problem (6) gelöst. Ein ebenso denkender Praktiker würde bald eine böse Überraschung erleben, da der Ausdruck (7) oft so umfangreich wird, daß seine tatsächliche Verwendung fast unmöglich ist. Meist scheitert der Ansatz bereits an der Aufgabe, die Nullstellen des Polynoms (4') mit genügender Genauigkeit zu bestimmen. In einem solchen Falle macht es sich notwendig, zu Näherungsverfahren überzugehen, wobei davor gewarnt sei, den Begriff "Näherung" abwertend zu begreifen. Das nachfolgend angegebene Verfahren liefert in der Regel recht genaue Werte, während ein Vorgehen über die "exakte" Lösung manchmal sogar ein falsches Vorzeichen ergibt, obwohl formal richtig gerechnet wurde.

Eine Näherungslösung zu (6) erhält man, indem man diese Gleichung durch eine Differenzengleichung ersetzt. Der Grundgedanke ist dabei der folgende:

Die Ableitung der Funktion $y(x)$ an der Stelle $x = x_0$ ist bekanntlich der Grenzwert des Verhältnisses $\frac{y(x_0+h) - y(x_0)}{h}$ für $h \rightarrow 0$.

Aus der Definition des Grenzwertes folgt nun, daß für genügend

kleine Werte von h dieses Verhältnis immer besser mit dem Wert $y'(x_0)$ übereinstimmt. In die eingangs betrachtete Gleichung $y' - y = 0$ wird nun anstatt y' dieses Verhältnis eingesetzt. Um die neue Gleichung nicht mit der Ausgangsgleichung zu verwechseln, schreiben wir u statt y :

$$\frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h} - u(x_0) = 0.$$

Die praktikabelste Angabe einer Funktion ist die Form der Tabelle, und unser Verfahren liefert eine solche. Nehmen wir an, die Lösung des Problems $y' - y = 0$ und $y(0) = 1$ soll im Intervall $[0,1]$ tabelliert werden, so unterteilen wir das Intervall in n Teilintervalle der Länge $h = 1/n$, es sei $x_0 = 0$ und $x_i = ih$, $i=1,2,\dots,n$. Auf jedem Teilintervall setzen wir

$$\frac{u(x_i+h) - u(x_i)}{h} - u(x_i) = 0,$$

d. h.
$$\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} - u(x_i) = 0.$$

Wenn wir nun $u(x_i)$ mit u_i bezeichnen und mit h multiplizieren, so erhalten wir die Differenzengleichung

$$u_{i+1} - (1+h) u_i = 0$$

mit der Anfangsbedingung $u_0 = 1$.

Das zugehörige Polynom (4) ist damit $P_1(t) = t - (1+h)$, und $t_0 = 1+h$ ist die einzige Nullstelle. Damit ist $u_i = (1+h)^i$ die Lösung der Differenzengleichung mit der gegebenen Anfangsbedingung. Der Wert $u_n = u(nh) = u(1)$ ist dann eine Näherung zu $y(1) = e^1 = e = 2.7182818\dots$, definiert als der Grenzwert von $(1+h)^n = (1+1/n)^n$. Für den einfachsten Fall $n=1$ erhalten wir die recht grobe Näherung $u_n = 2$. Je größer wir nun den Wert n wählen, desto kleiner wird h und desto besser die Näherung u_n zu e .

Nachstehend sind einige Werte in Tabellenform angegeben:

n	u_n
1	2.0000
2	2.2500
3	2.3703
10	2.5937
100	2.7048
1000	2.7170

Die zwischen 0 und 1 liegenden Werte sind umso bessere Näherungen zu den genauen Werten, je näher sie an Null liegen.

Das betrachtete Problem sollte nur als Beispiel dienen, da ja hier die exakte Lösung sehr einfach ist. Die Vorteile der Differenzennäherung wirken sich besonders bei Differentialgleichungen höherer Ordnung aus.

Es ist bemerkenswert, daß man auch einige theoretische Untersuchungen von Differentialgleichungen auf Differenzengleichungen übertragen kann. Wenn es z. B. darum geht, zu einer speziellen Differentialgleichung die Eindeutigkeit der Lösung nachzuweisen, so kann man die Differentialgleichung eventuell durch eine Differenzengleichung annähern, für diese die Eindeutigkeit untersuchen (was oft einfacher zu machen ist) und nachweisen, daß diese Eigenschaft beim Übergang zurück zur Differentialgleichung erhalten bleibt. Beweise dieser Art sind leicht zu führen, erfordern keine besonderen Kniffe, sind dafür aber meist sehr umfangreich und langweilig, weshalb sie nach Möglichkeit durch direkte und elegante analytische ersetzt werden. Für einige Probleme gibt es diese allerdings noch nicht, so daß der Beweis über eine Differenzengleichung immer noch der beste - weil einzige - ist.

Zum Abschluß sei noch ein Beispiel für eine "theoretische" Untersuchung mit Hilfe einer Differenzengleichung gegeben. Wir betrachten hierzu die Aufgabe im Artikel von Dr. sc. K. Jupe in WURZEL 7/75. Für die Bewegung eines Federschwingers der Masse m gilt die Differentialgleichung zweiten Grades

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{c}{m} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} \cdot y = 0, \quad (8)$$

hierbei ist c die Dämpfungs- und k die Federkonstante. Es sei nun die Frage gestellt: In welchem Falle ergibt sich keine Schwingung, sondern die ausgelenkte Masse "kriecht" in die Ruhelage zurück? Im erwähnten Artikel ergibt sich die Bedingung $c \geq 2\sqrt{m \cdot k}$. Nachfolgend erhalten wir dasselbe Resultat über eine Differenzengleichung. Zu diesem Zweck formen wir zunächst die Differentialgleichung (8) in eine solche um. Die zweite Ableitung ist die Ableitung der ersten Ableitung, und damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t) &\approx \frac{\dot{y}(t+h) - \dot{y}(t)}{h} \approx \frac{\frac{y(t+2h) - y(t+h)}{h} - \frac{y(t+h) - y(t)}{h}}{h} \\ &= \frac{y(t+2h) - 2y(t+h) + y(t)}{h^2}\end{aligned}$$

Das liefert die Differenzengleichung

$$\frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{h^2} + \frac{c}{m} \cdot \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \frac{k}{m} \cdot u_i = 0,$$

d. h.

$$u_{i+2} + \left(\frac{ch}{m} - 2\right) u_{i+1} + \left(1 + \frac{kh^2}{m} - \frac{ch}{m}\right) u_i = 0.$$

Das zugehörige Polynom ist damit

$$t^2 + \left(\frac{ch}{m} - 2\right)t + \left(1 + \frac{kh^2}{m} - \frac{ch}{m}\right)$$

mit den Nullstellen

$$\begin{aligned}t_{1,2} &= 1 - \frac{ch}{2m} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{ch}{2m}\right)^2 - 1 - \frac{kh^2}{m} + \frac{ch}{m}} \\ &= 1 - h \cdot \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}.\end{aligned}$$

Man kann sich nun überlegen, daß die beiden Werte t_1 und t_2 komplex sein müssen, damit eine "echte" Schwingung herauskommt. Die Bedingung für den "Kriechfall" ist also, daß der Wert in der Wurzel nichtnegativ ist, d. h. $c^2 - 4mk \geq 0$ und damit $c \geq 2\sqrt{mk}$.

Es sei erwähnt, daß man jetzt durch Grenzübergang auch sofort die Gleichung (12) des erwähnten Artikels erhalten kann, in der die Bewegung des Schwingers explizit angegeben ist (WURZEL 7/75, Seite 100).

Werner Rosenheinrich
Assistent im Bereich
Numerische Mathematik

Preisaufgaben 11/75

- (G 61) Die Mittelpunkte des Um- und Inkreises sowie eines Ankreises eines Dreiecks ABC seien gegeben. Man konstruiere das Dreieck.

1

- (G 62) Durch einen beliebigen Punkt auf der Diagonale eines Würfels mit der Kantenlänge a wird senkrecht zu dieser Diagonale eine Ebene gelegt.
- Welche Figur entsteht beim Schnitt dieser Ebene mit den Würfel Flächen?
 - Wie groß sind die Längen der Strecken (in Abhängigkeit von a und von der Entfernung x der Schnittebene vom Mittelpunkt O des Würfels), die beim Schnitt der Ebene mit den Würfel Flächen entstehen?

2

- (G 63) Man löse die Ungleichung
- $$4x^2 + 3^{\sqrt{x}+1} + x \cdot 3^{\sqrt{x}} < 2x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 2x + 6.$$

1

- (G 64) Man löse die Gleichung

1

$$4^{\sin^2 \pi x} + 4^{\cos^2 \pi x} = -8x^2 + 12|x| - \frac{1}{2}.$$

- (G 65) Найти все значения x , удовлетворяющие одновременно следующим уравнениям:

1

$$\cos 6x + \cos 8x = 0, \quad \cos 3x = 2 \cdot \sin^2 2x$$

при условии, что $|x| < 5$.

одновременно - gleichzeitig

- (G 66) Man beweise die Ungleichung

1

$$\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}} > \frac{1}{4}$$

unter der Voraussetzung, daß der Zähler der linken Seite n und der Nenner $n-1$ Wurzelzeichen enthält!

Funktionalgleichungen (II)

Mit dem Ergebnis im ersten Teil (WURZEL 10/75, Seite 148) können wir auch das System zur Bestimmung einer Formel für den Flächeninhalt eines Rechtecks lösen. Betrachten wir etwa (3_1) , so sehen wir, daß die zweite Veränderliche immer y heißt, d. h. wir können (3_1) wie eine FGL für eine Funktion einer Veränderlichen betrachten. Schreiben wir etwa $F_y(x) = F(x,y)$, so nimmt (3_1) die Gestalt an:

$$F_y(x_1 + x_2) = F_y(x_1) + F_y(x_2).$$

Das ist aber die Cauchysche FGL. Ihre Lösung ist

$$F_y(x) = g \cdot x.$$

Dabei ist es aber wichtig zu bemerken, daß unser g nur in Abhängigkeit von x konstant ist, bezüglich y aber variabel sein kann: $g = g(y)$. Durch Einsetzen prüft man sofort, daß

$$F_y(x) = g(y) \cdot x$$

Lösung ist. Nun soll aber F auch noch (3_2) genügen. Durch Einsetzen (der Faktor x hebt sich weg) ergibt sich

$$g(y_1 + y_2) = g(y_1) + g(y_2).$$

Das ist aber wieder die Cauchysche FGL für die Funktion $g(y)$. Ihre Lösung ist bekanntlich

$$g(y) = c \cdot y.$$

Insgesamt haben wir also $F(x,y) = cxy$ für den Inhalt des Rechtecks R . Der Wert der Konstante c hängt von der Wahl des Maßstabs ab. Wird der Maßstab so gewählt, daß der Flächeninhalt des Quadrates mit der Seitenlänge 1 gleich 1 ist, so ergibt sich

$1 = c \cdot 1 \cdot 1$, d. h. $c = 1$ und damit die uns bekannte Formel.

Wir sehen also, daß man zwangsläufig zu unserer bekannten Inhaltsformel geführt wird, wenn man nur die geometrisch einleuchtende Forderung der Additivität des Inhaltes bezüglich der Seiten fordert.

Mit Hilfe der Lösung der Cauchyschen FGL kann man nun auch die FGL (1') lösen. Seien vorerst x und y positiv. Dann führen wir neue Veränderliche x_1, y_1 ein:

*) - Nachdruck aus WURZEL 4/69

$$x = 10^{x_1}, \quad \text{d. h. } x_1 = \lg x$$

$$y = 10^{y_1}, \quad \text{d. h. } y_1 = \lg y.$$

Setzen wir noch $l(10^u) = f(u)$, so gilt nach (1')

$$l(10^{x_1+y_1}) = l(10^{x_1}) + l(10^{y_1}),$$

also $f(x_1 + y_1) = f(x_1) + f(y_1).$

Die Funktion f erfüllt demnach die Cauchysche FGL, d. h., es ist

$$f(x_1) = c \cdot x_1.$$

Wegen $f(\lg x) = l(x)$ und $x_1 = \lg x$ gilt somit

$$(7) \quad l(x) = c \cdot \lg x.$$

Das gilt nur für positive x . Setzt man in (1') $x = y = t (> 0)$, so wird

$$l(t^2) = 2l(t).$$

Setzt man $x = y = -t$, so ergibt sich

$$l(t^2) = 2l(-t).$$

Folglich ist $l(t) = l(-t)$. Für negative x gilt also

$$(7') \quad l(x) = c \cdot \lg(-x).$$

Unter Verwendung des absoluten Betrages $|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$

lassen sich die Ergebnisse (7), (7') zusammenfassen, und man erhält: Die allgemeine Lösung von (1') hat für $x \neq 0$ die Form

$$l(x) = c \cdot \lg|x|.$$

Soll die FGL (1') auch für $x = 0$ erfüllt sein, so ergibt sich aus (1') für $y = 0$:

$$l(0) = l(x) + l(0),$$

d. h. $l(x) = 0$ für alle x . Das ist die Gleichung der x -Achse.

Sie ist also Lösungsfunktion, falls (1') auch für $x = 0$ einen Sinn haben soll. Man nennt diese sofort zu erratende Lösung die triviale Lösung von (1').

Wenn man die umfangreiche Literatur über Funktionalgleichungen durchsieht, so fällt auf, daß fast jede Gleichung ihre eigene Lösungsmethode benötigt. Die Versuche einer einheitlichen Theorie der Funktionalgleichungen haben noch zu keinem Erfolg geführt. Trotzdem gelang es, gewisse Klassen von Gleichungen zu finden, die einheitlich behandelt werden können. So ist zum Beispiel die Methode der Lösung der Cauchyschen FGL auf alle Funktionalgleichungen des Typs

$$f(x+y) = F(f(x), f(y))$$

anwendbar, d. h. auf alle Additionstheoreme. Man kann sich auch überlegen, daß dieselbe Methode für die Lösung der Gleichung (2') verwendet werden kann. Man stellt dann fest, daß man verschiedene Lösungen erhält, je nachdem ob die Lösungsfunktion Funktionswerte haben kann, die größer als 1 oder kleiner als 1 sind. Im letzten Falle erhält man als einzige Lösung von (2'), abgesehen von der trivialen Lösung,

$$c(x) = \cos bx,$$

wobei b eine beliebige reelle Konstante ist. Das soll hier nicht vorgerechnet werden.

Unsere Beispiele zeigen aber auch, daß man Funktionalgleichungen in der Mathematik zur Definition von Funktionen verwenden kann. So kann man z. B. die Funktion $l(x) = \lg x$ dadurch erklären, daß man sagt: $l(x) = \lg x$ ist für alle positiven x nichttriviale Lösung der Funktionalgleichung (1'), und es gilt $l(10) = 1$. Durch die letzte Bedingung ist die Funktion $l(x)$ eindeutig bestimmt, denn wegen $l(10) = 1$ gilt

$$l(10) = c \cdot \lg 10 = c = 1.$$

Ähnliches gilt für die Funktionen $e(x) = a^x$ und $p(x) = x^\lambda$. Diese kann man mittels der FGLen

$$e(x+y) = e(x) \cdot e(y)$$

bzw.

$$p(x \cdot y) = p(x) \cdot p(y)$$

definieren. Das Problem der Lösung dieser Funktionalgleichungen kann man, ähnlich wie im Falle der FGL für $l(x)$, auf die Lösung der Cauchyschen FGL (4) zurückführen (man führe das zur Übung durch!).

Wir können hier natürlich nicht annähernd ein Bild von den vielfältigen Methoden zur Lösung von Funktionalgleichungen entwerfen. Für diejenigen aber, die Lust zum Probieren haben, sei beispielhaft noch ein ganz elementares Verfahren erläutert, das in vielen Fällen zum Ziel führt. Hierbei handelt es sich um die Methode der Spezialisierung der Variablen.

Betrachten wir etwa die FGL

$$(8) \quad f(x+y) + f(x-y) = f(x) + 6xy \sqrt[3]{f(y)} + x^3.$$

Setzen wir $y = 0$, erhalten wir

$$2f(x) = f(x) + x^3,$$

d. h. $f(x) = x^3$.

Das ist (Einsetzen!) auch wirklich eine Lösung von (8).

Dieser Weg führt bei

$$(9) \quad f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2$$

nicht zum Ziel. Für $y = 0$ erhält man nur

$$f(0) = 1.$$

Hier ist ein anderes Vorgehen angebracht. Setzt man etwa $x = 0$, $y = t$, so wird

$$f(t) - 2f(-t) + 1 - 2f(t) = t - 2.$$

Setzen wir $x = 0$, $y = -t$, ergibt sich

$$f(-t) - 2f(t) + 1 - 2f(-t) = -t - 2.$$

Multiplizieren wir die zweite Gleichung mit -2 und addieren sie zur ersten, so ergibt sich

$$-f(t) + 4f(t) = t - 3 + 2t + 6,$$

und daraus folgt

$$f(t) = t + 1.$$

Diese Funktion erfüllt auch wirklich die Gleichung (9).

Diese Methode beruht darauf, daß jede Lösung der Ausgangsgleichung notwendigerweise auch die spezialisierte Gleichung erfüllen muß. Diese ist i. a. von einfacherer Bauart und dann leichter zu lösen. Anschließend muß man aber immer prüfen, ob die erhaltenen Lösungen der speziellen Gleichung auch die Ausgangsgleichung erfüllen. Es kann natürlich durchaus der Fall sein, daß die spezialisierte Gleichung mehr Lösungen hat als die ursprünglich gegebene. Hierzu ein Beispiel:

$$(10) \quad f(x+y) + f(x-y) - f(x)(y+2) + y(x^2-2y) = 0.$$

Hier versagen die bisherigen Methoden. Setzen wir nacheinander $x = 0$, $y = t$; $x = t-2$, $y = -2$; $x = -2$, $y = t-2$, so erhalten wir die drei Gleichungen

$$f(t) + f(-t) - f(0)(t+2) - 2t^2 = 0$$

$$f(t-4) + f(t) - 2(t^2-4t+8) = 0$$

$$f(t-4) + f(-t) - f(-2)t + (t-2)(8-2t) = 0.$$

Mit der Methode zur Lösung von (9) erhält man aus (10) sofort $f(0) = 0$. Setzen wir $f(-2) = b$, so ergibt sich, wenn man die dritte Gleichung von der Summe der beiden ersten subtrahiert,

$$2f(t) = 2t^2 + (4-f(-2))t.$$

Setzt man noch $\frac{4-f(-2)}{2} = c$, so ergibt sich

$$f(t) = t^2 + ct.$$

Diese Funktionen erfüllen für alle c die drei spezialisierten Gleichungen. Setzt man aber $f(t)$ in (10) ein, so ergibt sich

$$(x+y)^2 + c(x+y) + (x-y)^2 + c(x-y) - (x^2+cx)(y+2) + y(x^2-2y)=0$$

oder

$$cxy = 0$$

für alle x, y , also $c = 0$. Damit ist $f(x) = x^2$ die einzige Lösung von (10).

Mit diesen Anregungen zur eigenen Beschäftigung mit Funktionalgleichungen wollen wir diese kurze Einführung schließen.

Prof. Dr. H.-J. Glaeske
Bereich Analysis

VERSCHIEDENES + VERSCHIEDENES + VERSCHIEDENES + VERSCHIEDENES

Mitteilungen der Redaktion:

Da wir immer wieder Zuschriften erhalten, die Abbestellungen, Adressenänderungen und Neubestellungen betreffen, möchten wir nochmals darauf hinweisen, daß hierfür **n u r** noch Ihr Postamt zuständig ist. Lediglich Nachbestellungen **ä l t e r e r** WURZEL-Hefte sind an unsere Adresse zu richten.

Unseren herzlichsten Glückwunsch ...

... Genossen Dozent Dr. sc. Rolf L i n d n e r , Leiter des Bereiches Mathematische Kybernetik und Rechentechnik an der Sektion Mathematik - unseren Lesern durch verschiedene Artikel bekannt -, zu seiner Berufung zum ordentlichen Professor!

Zu unserem Titelbild:

Im Oktober beging die Friedrich-Schiller-Universität den 30. Jahrestag ihrer Neueröffnung nach dem zweiten Weltkrieg. Dank der Hilfe und Unterstützung durch die Sowjetunion konnte die Jenaer Universität am 15. 10. 1945 als erste deutsche Universität den Lehrbetrieb wieder aufnehmen. (Lesen Sie bitte auch unseren Beitrag auf den folgenden Seiten.)

Im Studentenaustausch zu Besuch in Minsk

Wenn wir den 30. Jahrestag der Wiedereröffnung der Friedrich-Schiller-Universität Jena begehen, so sind das auch 30 Jahre enger Verbindungen zu Universitäten der befreundeten Länder. In dieser Zeit haben sich diese Beziehungen von ersten Kontakten bis zu einer engen Kooperation in Forschung und Lehre entwickelt. Nicht wenige der wissenschaftlichen Mitarbeiter unserer Sektion Mathematik absolvierten ihr Studium an Hochschulen der UdSSR und anderer sozialistischer Länder, es gibt gemeinsame Forschungsprogramme, und persönliche Kontakte verbinden viele Studenten und Wissenschaftler über Ländergrenzen hinweg.

Naturgemäß groß war meine Freude, als ich erfuhr, daß ich zu den glücklichen 8 Studenten gehören würde, die vom 10. Juni bis 1. Juli drei interessante Wochen in Minsk verbringen durften. Denn damit erlebte ich nicht nur meine bisher längste Reise, besichtigte unzählige Sehenswürdigkeiten, sondern konnte mich aus erster Hand über Lebensweise, Studium und Freizeitgestaltung sowjetischer Mathematikstudenten informieren und schloß Freundschaft mit den Studenten, die uns während dieser Tage betreuten.

Herzlich begrüßt wurden wir vom Dekan der mathematischen Fakultät der Belorussischen Lenin-Universität. Durch ihn, andere Wissenschaftler und unsere Betreuerstudenten lernten wir das Mathematikstudium in der Sowjetunion und seine Besonderheiten kennen. Die Studenten haben ein recht umfangreiches Programm an Vorlesungen, Übungen und Seminaren zu absolvieren. Die Leistungen während des Grundstudiums werden durch Ablegen von Testaten (das sind Prüfungen in "Kleinformat", die alle 6 bis 8 Wochen stattfinden) kontinuierlich überprüft. Am Ende jedes Semesters sind 4 - 5 Prüfungen abzulegen.

Die Aktivitäten auf gesellschaftlichem Gebiet werden durch ein Punktsystem erfaßt und entsprechende Zehntel (maximal 0,5) zum Zensurendurchschnitt der Prüfungen auf fachlichem Gebiet addiert. Da bekanntlich in der Sowjetunion die "5" die beste Note ist, wäre bei durchweg sehr guten Leistungen und ausgezeichneter ge-

sellschaftlicher Arbeit der maximale Durchschnitt von 5,5 erreichbar. Kurz vor Ende des Studiums wird für die Vermittlung der Arbeitsstellen entsprechend der so errechneten Werte eine Rangfolgeliste aufgestellt. Der erste dieser Liste kann eine beliebige Absolventenstelle wählen, der zweite alle bis auf die vom ersten gewählte, der dritte alle noch übrigen und so weiter. Damit wir einen Überblick über die an der Belorussischen Universität behandelten Fachgebiete erhielten, hörten wir Vorlesungen, die Vertreter der verschiedenen Bereiche (кафедры) hielten. Damit das nicht auf das alleinige Anhören beschränkt blieb, hatte jeder einen speziellen Auftrag zur Erkundung der Forschungsrichtungen in bestimmten Bereichen und der Ausbildungsprogramme erhalten.

Sehr interessant war eine Einführungsvorlesung in die Programmiersprache FORTRAN, die Erstellung eines FORTRAN-Programmes zur Wurzelberechnung und die Realisierung dieses Programmes auf dem Rechner MINSK 32.

Unsere Minskfahrt sollte natürlich nicht nur fachliche Aktivitäten umfassen. Trotz ihrer Belastung durch die Prüfungsperiode (Sessia) gaben sich die sowjetischen Studenten viel Mühe, um uns die Sehenswürdigkeiten von Minsk zu zeigen.

Minsk, die Hauptstadt der Belorussischen SSR, zählt zu den jüngsten Millionenstädten der Sowjetunion. Die Stadt, im 2. Weltkrieg fast völlig zerstört, entstand neu, großzügiger und schöner als je zuvor. Davon zeugen moderne, vielstöckige Hotels, der Sportpalast mit 6000 Plätzen, der Leninprospekt - die Minsker Hauptstraße, ausgedehnte Neubauviertel. Und in dieses moderne Minsk fügen sich auch die Gebäude der Lenin-Universität ein. Wir schlenderten durch die Stadt, besuchten Museen, lernten die Parks an der Swislotsch kennen. Bei Temperaturen von 33° C im Schatten verlebten wir zwei Sonntage am und im "Minsker Meer", einem Naherholungsgebiet der Millionenstadt.

Ein Höhepunkt war der Besuch der Hauptstadt Litauens, Vilnius, einer Stadt mit herrlichem mittelalterlichem Stadtkern und alter Universität, alles umgeben von ausgedehnten Grünanlagen. Noch bedeutender - die drei Tage, die wir in Moskau verleben konnten: für alle beeindruckend der Besuch des Lenin-Mausoleums

und eine Ballettaufführung im neuen Kremlpalast. Viel zu schnell vergingen die 3 Wochen, aber uns 8 Studenten und unseren 2 Betreuern aus Jena sind sie fest in Erinnerung geblieben.

Im September begrüßten wir ganz herzlich die 8 Minsker Studenten und ihre beiden Betreuer zum Gegenbesuch in Jena. Nun stand vor uns die Aufgabe, die in Minsk geschlossene Freundschaft zu vertiefen und ihnen sowohl einen Einblick in das Leben an der Sektion Mathematik als auch einen Eindruck von Menschen und Sehenswürdigkeiten in unserem Land zu vermitteln. Ich glaube, daß uns dies auch gelungen ist.

Fachlicherseits standen Vorlesungen über maschinenorientierte Programmierung - gehalten in Russisch - und ein Praktikum dazu auf der EDVA KSR 4100 unserer Sektion auf dem Programm.

Die schöne Jenaer Umgebung wurde gemeinsam erwandert, Exkursionen nach Weimar, Eisenach, Saalfeld, Dresden, in den Thüringer Wald, nach Naumburg und zu den Dornburger Schlössern unternommen, Erfurt und die IGA besucht. Ein Besuch der Hauptstadt Berlin und der Sehenswürdigkeiten Potsdams durfte natürlich nicht fehlen. Dabei und beim gemütlichen Zusammensitzen kamen wir, da anfängliche Sprachschwierigkeiten stets mit gemeinsamer Anstrengung und freundlichem Lächeln schnell überwunden waren, recht gut ins Gespräch. Allen fiel der Abschied am 25. September schwer, doch die freundschaftlichen Bande, die über 1800 km Jena - Minsk geknüpft wurden, werden bestehen, und bei den engen Beziehungen unserer Völker und der beiden Universitäten gehört ein Wiedersehen eigentlich zur Tagesordnung.

Gregor Weske
Assistent im
Forschungsbereich „Stochastik“

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Egbert Creutzburg

Chefredakteur: Waltraud Werner

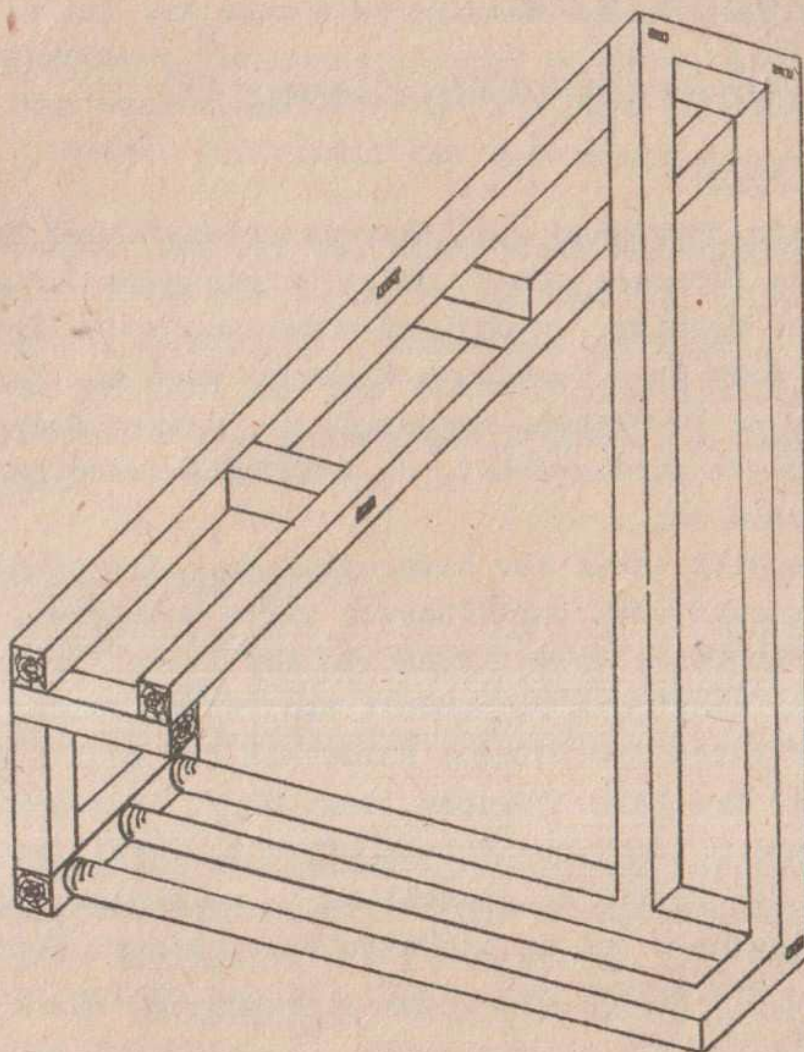
Redaktion: R. Jeske, H.-G. Leopold, E. Reuter

Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.



12

75

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Ju-
gendobjekt Studienvor-
bereitung der Sektion
Mathematik an der
Friedrich-Schiller-Uni-
versität Jena

9. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung (I)

1. Der Zufall

In vielen Bereichen von Naturwissenschaft und Technik sind ablaufende Prozesse und Vorgänge streng determiniert. Einer bestimmten Ursache entspricht unter gegebenem Komplex von Bedingungen eine ganz bestimmte Wirkung. Wird ein Versuch mit wohlbestimmter Versuchsanordnung, d. h. festgehaltenem Komplex von Bedingungen durchgeführt, so tritt die erwartete Wirkung mit Sicherheit ein.

Daneben gibt es in der Natur Prozesse, die nicht streng determiniert sind. Bei Durchführung eines Versuches, dem solch ein Prozeß zugrunde liegt, kann ein bestimmtes Ereignis eintreten, muß aber nicht mit Sicherheit eintreten. Solche Ereignisse heißen zufällige Ereignisse. Beispiele für zufällige Ereignisse sind das Ereignis: "Wappen liegt oben" beim Werfen einer Münze, "die Zahl 6 liegt oben" beim Würfeln. Zufällige Ereignisse treten in der Physik hauptsächlich im molekularen Bereich (Brown'sche Bewegung) und im atomaren Bereich auf. Weiterhin treten zufällige Ereignisse sehr häufig in den biologischen Wissenschaften auf.

Bedeutet nun die Existenz von zufälligen Ereignissen, daß es in der Natur Erscheinungen gibt, die nicht gesetzmäßig verlaufen, oder welchen Gesetzmäßigkeiten genügen zufällige Ereignisse?

Wir führen einen Versuch mit zufälligem Ausgang n mal unter den gleichen Versuchsbedingungen durch. Tritt dabei das Ereignis A k mal auf, so bezeichnet man den Quotienten $\frac{k}{n}$ als die relative Häufigkeit des Ereignisses A . Obwohl sich das Ergebnis eines einzelnen Versuches im allgemeinen nicht vorhersagen läßt, zeigen die relativen Häufigkeiten bei großen Werten von n die Tendenz, immer weniger um einen bestimmten Wert zu schwanken, so daß sich ein praktisch konstanter Wert der relativen Häufigkeit ergibt. Diesen Wert nennt man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses. Zufällige Ereignisse genügen gegenüber den streng deter-

minierten Erscheinungen einer neuen Art von Gesetzmäßigkeit. Diese Gesetzmäßigkeit ist eine statistische Gesetzmäßigkeit und besagt, daß zu gegebener Versuchsanordnung zu jedem Ereignis A eine Zahl $P(A)$ (Wahrscheinlichkeit von A) derart existiert, daß für große n die relative Häufigkeit des Auftretens von A annähernd $P(A)$ ist.

Wegen der Schwierigkeiten, die bei einer direkten mathematischen Beschreibung dieses Sachverhaltes auftreten, hat man eine mathematische Wahrscheinlichkeit axiomatisch definiert. Die Axiomatik wurde so gewählt, daß die Resultate der auf ihr aufbauenden Wahrscheinlichkeitsrechnung den praktischen Gegebenheiten entsprechen.

2. Ereignisse, Elementarereignisse

Zu einer mathematischen Theorie von den Ereignissen gelangen wir, wenn wir nicht nur ein Ereignis A , sondern mehrere Ereignisse $A, B, C, \dots$ und deren Beziehungen untereinander untersuchen.

Definition:

Vereinigung der Ereignisse A, B nennt man dasjenige Ereignis, das darin besteht, daß mindestens eines der beiden Ereignisse A, B eintritt, und bezeichnet es durch $A \cup B$. Durchschnitt der Ereignisse A, B heißt dasjenige Ereignis, das darin besteht, daß sowohl das Ereignis A als auch das Ereignis B eintritt. Es wird durch $A \cap B$ bezeichnet. Das Komplement $\bar{A}$ eines Ereignisses A ist das Ereignis, welches darin besteht, daß A nicht eintritt.

Beispiel:

$A_1 :=$ "Alle sechs gezogenen Kugeln bei '6 aus 49' tragen ungerade Zahlen."

$A_2 :=$ "Die Summe der sechs gezogenen Zahlen ist eine ungerade Zahl."

$A_3 :=$ "Alle sechs gezogenen Zahlen sind kleiner als 30."

Dann haben wir beispielsweise

$A_1 \cup A_2 =$ "Alle gezogenen Zahlen sind ungerade, oder ihre Summe ist ungerade."

$A_1 \cup A_3$ = "Alle sechs gezogenen Zahlen sind ungerade natürliche Zahlen oder gerade Zahlen zwischen 0 und 29"

$A_1 \cap A_3$ = "Die Nummern der sechs gezogenen Kugeln liegen in der Menge $\{1, 3, 5, \dots, 29\}$ "

$\overline{A_3}$ = "Wenigstens eine der gezogenen Zahlen ist größer oder gleich 30".

Definition:

Wir sagen, das Ereignis A liege im Ereignis B, falls das Eintreten von A dasjenige von B nach sich zieht. Wir schreiben hierfür $A \subseteq B$.

Aus der Definition ergibt sich unmittelbar, daß $A \subseteq B$ genau dann gilt, wenn $A \cap B = A$ erfüllt ist.

Beispiel:

A := "Beim Würfeln liegt die Zahl 6 oben."

B := "Beim Werfen mit einem Würfel liegt eine gerade Zahl oben!"

Dann gilt $A \subseteq B$.

Es zeigt sich nun, daß die Operationen $\cup$, $\cap$ und $\overline{}$ den gleichen Rechenregeln genügen wie die mengentheoretischen Operationen Vereinigung, Durchschnitt und Übergang zur Komplementärmenge. Demzufolge entspricht die Relation $\subseteq$ der mengentheoretischen Inklusion.

Wir bezeichnen im weiteren durch S das sichere Ereignis, d. h. dasjenige Ereignis, das immer eintritt, und durch $\emptyset := \overline{S}$ das unmögliche Ereignis, das ist dasjenige Ereignis, das nie eintreten kann. A und B heißen durchschnittsfremd, falls $A \cap B = \emptyset$ gilt.

Beispiel:

Wir betrachten das Würfeln mit einem Würfel. Dann ist

S = "Es fällt eine der Zahlen 1, 2, ..., 6" und

$\emptyset$ = "Es fällt keine der Zahlen 1, 2, ..., 6".

3. Wahrscheinlichkeit

Wir kommen jetzt zu den Axiomen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und wollen uns dazu zunächst mit zwei Eigenschaften der relativen Häufigkeit beschäftigen.

Wir führen einen Versuch mit zufälligem Ausgang n mal durch und

bezeichnen durch n_A die Häufigkeit des Auftretens des Ereignisses A. Dann gilt für die relative Häufigkeit

$$h_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

$$0 \leq h_n(A) \leq 1. \quad (1)$$

Sind die Ereignisse A und B durchschnittsfremd, so können sie nie gleichzeitig eintreten. Deshalb gilt

$$n_{A \cup B} = n_A + n_B \quad \text{und somit}$$

$$h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B). \quad (2)$$

Für die weiteren Betrachtungen legen wir in Anlehnung an die Eigenschaften der relativen Häufigkeiten folgendes fest:

Definition:

Den unter gegebenen Versuchsbedingungen betrachteten zufälligen Ereignissen A, B, ... sind Zahlen $P(A), P(B), \dots$ derart zugeordnet, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $0 \leq P(A) \leq 1, \quad 0 \leq P(B) \leq 1, \dots$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ für zwei beliebige durchschnittsfremde Ereignisse A und B
3. $P(\emptyset) = 0, P(S) = 1.$

Diese 3 Forderungen reichen schon aus, um in bestimmten Fällen die Wahrscheinlichkeit für zufällige Ereignisse zu berechnen, d. h. die Zahl zu berechnen, um die herum unter diesen Bedingungen die relative Häufigkeit schwankt. Mittels vollständiger Induktion läßt sich die Beziehung 2. folgendermaßen verallgemeinern:

Folgerung:

$A_1, A_2, \dots, A_k$ seien Ereignisse mit der Eigenschaft $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Dann gilt

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k).$$

Wir betrachten jetzt einen Versuch, bei dem es nur n verschiedene Versuchsausgänge $B_1, \dots, B_n$ gibt. Jedes weitere zufällige Ereignis A, das mit diesem Versuch zusammenhängt, läßt sich dann als Vereinigung gewisser Ereignisse $B_{i_1}, \dots, B_{i_{l_1}}$ darstellen.

Beispiel:

Wir werfen einen Würfel. Dann ist $n = 6$, $B_1 =$ "Es liegt die Zahl 1 oben". A sei das Ereignis, das darin besteht, daß eine gerade Zahl oben liegt. Dann gilt

$$A = B_2 \cup B_4 \cup B_6 .$$

Wir nehmen jetzt an, daß alle Versuchsausgänge gleichmöglich sind, d. h. es gelte

$$P(B_1) = P(B_2) = \dots = P(B_n).$$

In diesem Falle erhalten wir aus der obigen Folgerung wegen

$$S = \bigcup_{i=1}^n B_i$$

$$1 = P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \sum_{i=1}^n P(B_i)$$

$$= n P(B_1) \quad i=1, \dots, n$$

und somit

$$P(B_1) = \frac{1}{n} .$$

Jetzt sei A irgendein Ereignis, dann läßt sich A darstellen als

$$A = B_{i_1} \cup \dots \cup B_{i_l} .$$

Somit gilt

$$P(A) = P(B_{i_1}) + \dots + P(B_{i_l}) = l \cdot \frac{1}{n} = \frac{l}{n} .$$

Wir sehen also, daß die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von A nicht mehr davon abhängt, aus welchen Versuchsausgängen sich A zusammensetzt, sondern nur, aus wievielen Versuchsausgängen. Da das Ereignis A genau dann eintritt, wenn wenigstens eines der Ereignisse $B_{i_1}, \dots, B_{i_l}$ eintritt, sagt man, die Ereignisse $B_{i_1}, \dots, B_{i_l}$ sind für das Eintreten von A günstig. Damit erhalten wir für Versuche, deren Versuchsausgänge sämtlich gleich wahrscheinlich sind,

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} .$$

4. Die bedingte Wahrscheinlichkeit

Wir kommen jetzt zum Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit. B sei ein festgehaltenes zufälliges Ereignis mit $P(B) \neq 0$. Wir

ordnen jetzt jedem Ereignis A eine Zahl $Q(A)$ folgendermaßen zu:

$$Q(A) \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} .$$

Man kann dann leicht beweisen, daß Q wieder eine Wahrscheinlichkeit ist, d. h.

1. $0 \leq Q(A) \leq 1$
2. $Q(A_1 \cup A_2) = Q(A_1) + Q(A_2)$ für $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
3. $Q(\emptyset) = 0, Q(S) = 1$ gilt.

Wir berechnen die Größe $Q(B)$: Es gilt

$$Q(B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

Das Ereignis B tritt also bezüglich der "Wahrscheinlichkeit" Q praktisch immer ein. Q beschreibt uns also einen zufälligen Vorgang mit der zusätzlichen Bedingung, daß B immer eintritt.

Anders gesagt ist $Q(A)$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A unter der Voraussetzung, daß wir schon wissen, daß B eingetreten ist. Wir bezeichnen im weiteren $Q(A)$ durch $P(A/B)$.

Beispiel:

Wir betrachten den Versuch des Würfeln mit einem Würfel. Es sei

A = "Es fällt die Zahl 2 oder die Zahl 4"

B = "Es fällt eine gerade Zahl".

Dann ist
$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} .$$

Die möglichen Versuchsausgänge sind die Zahlen 1, 2, ..., 6.

Die günstigen Fälle sind für

A - das Fallen der Zahlen 2 oder 4,

B - das Fallen der Zahlen 2, 4 oder 6 und

$A \cap B$ - das Fallen der Zahlen 2 oder 4.

Dann gilt
$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} ; \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

und somit
$$P(A/B) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} .$$

Dr. F. Liese

Oberassistent im Bereich
Wahrscheinlichkeitsrechnung
und Mathematische Statistik

Preisaufgaben 12/75

- (G 67) Aus einem quadratischen Stück Papier konstruiere man ein regelmäßiges Sechseck allein durch Faltungen (d. h., es dürfen keinerlei Hilfsmittel wie Zirkel, Lineal u. ä. benutzt werden).

- (G 68) Man gebe die reellen Lösungen des folgenden Gleichungssystems an:

$$2x_2 = x_1 + \frac{2}{x_1}$$

$$2x_3 = x_2 + \frac{2}{x_2}$$

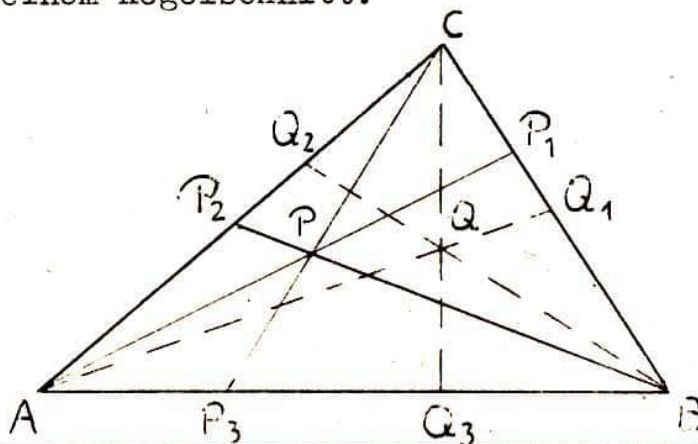
$$\vdots$$

$$2x_n = x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}$$

$$2x_1 = x_n + \frac{2}{x_n}$$

- (G 69) In der Zeichenebene des Dreiecks ABC schneidet das Geradenbüschel P die Dreiecksseiten in $P_1 \in \overline{BC}$, $P_2 \in \overline{CA}$, $P_3 \in \overline{AB}$; das Geradenbüschel Q schneidet die Dreiecksseiten in $Q_1 \in \overline{BC}$, $Q_2 \in \overline{CA}$, $Q_3 \in \overline{AB}$.

Man beweise: Die sechs Punkte $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ liegen auf einem Kegelschnitt.



- (G 70) Man löse die Ungleichung

$$\sqrt{\tan x - 1} \{ \log_{\tan x} (2 + 4\cos^2 x) - 2 \} \geq 0.$$

(G 71) Man zeige für beliebige natürliche Zahlen n

2 $2^n \cdot \prod_{k=1}^n \cos \frac{k \cdot \pi}{2n+1} = 1$ und $2 \cdot \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \cos \frac{k \cdot \pi}{2n+1} = 1$.

Hinweis: Man benutze komplexe Zahlen (WURZEL 11/12/74) und verwende die Moivresche Formel.

(G 72) Доказать, что в любом остроугольном треугольнике

2 $K_a + K_b + K_c = r + R$,
где K_a, K_b, K_c - перпендикуляры опущенные из центра описанной окружности на соответствующие стороны; r и R - радиусы вписанной и описанной окружностей.

(остроугольный - spitzwinklig, перпендикуляр - Senkrechte, описанная окружность - Umkreis, вписанная окружность - Inkreis)

Einsendeschluß: 31. 1. 1976

Die Aufgabe G 69 stammt von Herrn R. Roth, emeritierter Professor der Jenaer Universität; die Aufgabe G 71 wurde uns von unserem Leser Marcus Kasner aus Templin zugesandt.

Mit der Aufgabe G 67 wollen wir über Sylvester ein völlig anders geartetes Problem als sonst stellen. Wer diese Aufgabe gelöst hat, kann noch versuchen, aus einem Quadrat ein regelmäßiges Fünfeck zu falten. Wir wünschen dabei viel Erfolg und gleichzeitig ein gesundes neues Jahr!

Ihre Redaktion

Zahlenrätsel im Oktalsystem

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} : & \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} = & \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \\
 - & \times & + \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} + & \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} = & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} - & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} = & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Lösungen

Aufgabe G 31 (nach Michael Schaper, Magdeburg)

Alle mögliche Lösungen der gegebenen Gleichung sind:

$$(I) \quad (8a-3)x = (14a+5)x - 2k\pi, \quad k \text{ ganzzahlig}$$

$$(II) \quad (8a-3)x = -(14a+5)x + 2k\pi, \quad k \text{ ganzzahlig}$$

Aus (I) folgt $x = \frac{k\pi}{3a+4}$, und wegen $x \geq 0$, $a > 0$ gilt $k \geq 0$.

Die Lösungen x von (I) bilden somit eine arithmetische Folge $\{x_k^{(1)}\}$ mit $x_k^{(1)} = \frac{k\pi}{3a+4}$.

Aus (II) folgt $x = \frac{k\pi}{11a+1}$; wegen $x \geq 0$, $a > 0$ gilt $k \geq 0$. Die Lösungen x von (II) bilden also eine arithmetische Folge

$$\{x_k^{(2)}\} \text{ mit } x_k^{(2)} = \frac{k\pi}{11a+1}.$$

Beide Folgen sollen Teilfolgen einer arithmetischen Folge $\{x_k\}$ darstellen. Andererseits müssen beide Teilfolgen zusammen alle Glieder von $\{x_k\}$ enthalten. Hieraus folgt, daß eine der Teilfolgen mit $\{x_k\}$ identisch sein muß.

1. Fall: $\{x_k^{(1)}\} = \{x_k\}$

Dann ist $\{x_k^{(2)}\}$ Teilfolge von $\{x_k^{(1)}\}$, und es gilt:
 $d_2 = nd_1 \quad (n \geq 1 \text{ natürlich}).$

$$\frac{\pi}{11a+1} = n \cdot \frac{\pi}{3a+4}$$

$$a = \frac{4-n}{11n-3}. \quad (1)$$

Wegen $11n-3 \geq 8$ und $a > 0$ ist $4-n > 0$ und damit $1 \leq n < 4$. Aus (1) erhält man somit folgende Werte für a :

$$a_1 = \frac{3}{8}, \quad a_2 = \frac{2}{19}, \quad a_3 = \frac{1}{30}.$$

2. Fall: $\{x_k^{(2)}\} = \{x_k\}$

Dann ist $\{x_k^{(1)}\}$ Teilfolge von $\{x_k^{(2)}\}$, und es gilt $d_1 = nd_2$ ($n \geq 1$, natürlich). Analog zum ersten Fall erhält man

$$a = \frac{4n-1}{11-3n} \quad (2)$$

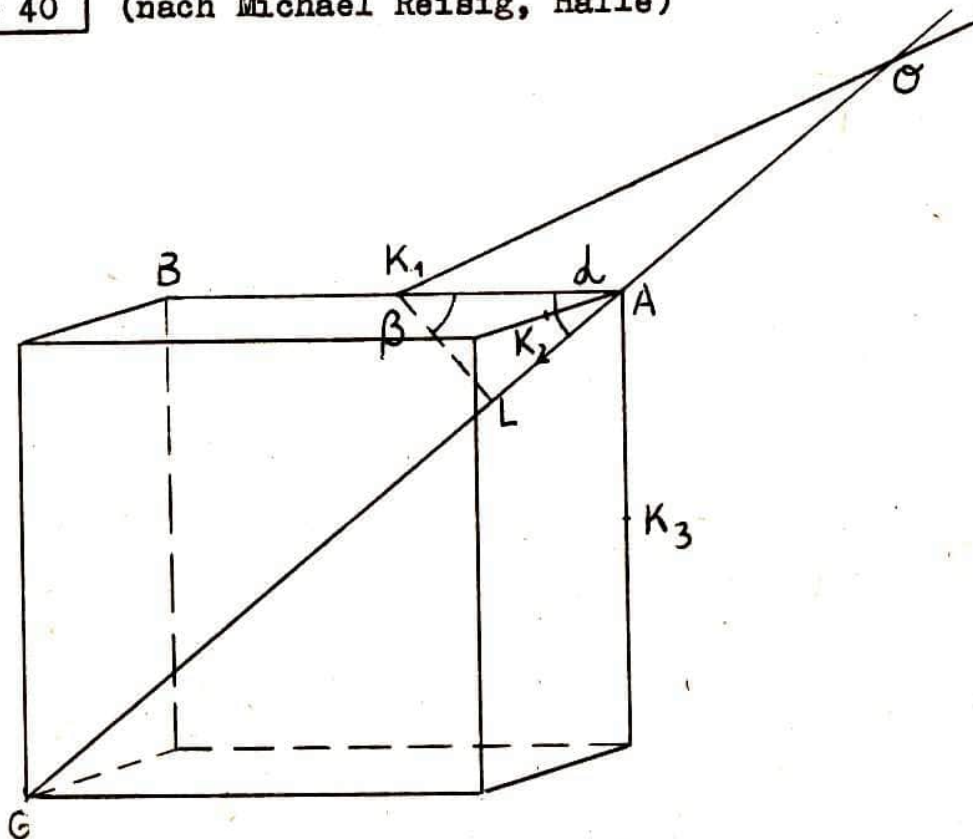
und $1 \leq n \leq 3$.

Nach (2) kann a folgende Werte annehmen:

$$a_4 = \frac{11}{2}, \quad a_5 = \frac{7}{5}, \quad a_6 = \frac{3}{8} = a_1.$$

Alle Zahlen a der Menge $M = \left\{ \frac{3}{8}, \frac{2}{19}, \frac{1}{30}, \frac{11}{2}, \frac{7}{5} \right\}$ erfüllen die gegebenen Bedingungen.

Aufgabe G 40 (nach Michael Reisig, Halle)



Ist M der Mittelpunkt des Würfels, so gilt:

$$\overline{MK}_1 = \overline{MK}_2 = \overline{MK}_3 = \frac{a}{2} \sqrt{2}$$

$$\overline{AK}_1 = \overline{AK}_2 = \overline{AK}_3 = \frac{a}{2}.$$

Aus Symmetriegründen folgt, daß der Punkt O auf der Geraden AG liegt. Weiterhin ist

$$\cos \alpha = \frac{1}{3} \sqrt{3} \quad \text{und} \quad \beta = 90^\circ - \alpha,$$

also (wegen $\cos \alpha = \sin \beta$)

$$\sin \beta = \frac{1}{3} \sqrt{3} \quad (1)$$

$$\cos \beta = \frac{1}{3} \sqrt{6} \quad (2).$$

Hieraus folgt:

$$\frac{1}{3} \sqrt{6} = \frac{\overline{K_1 L}}{\overline{K_1 A}}$$

$$\overline{K_1 L} = \frac{1}{6} \sqrt{6} a \quad (3).$$

Aus $\angle LK_1A = \angle AK_1O$ erhält man

$$\sin 2\beta = \frac{2}{3} \sqrt{2}, \quad \cos 2\beta = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \cos 2\beta = \frac{\overline{K_1 L}}{\overline{K_1 O}}.$$

Wegen (3) folgt $\overline{K_1 O} = \frac{1}{2} \sqrt{6} a$, d. h., der gesuchte Kugelradius hat die Länge $\frac{1}{2} \sqrt{6} a$.

Aufgabe G 43 (nach Friedhelm Schieweck, Blumenberg)

Wir beweisen durch vollständige Induktion die Beziehungen

$$a_k = \frac{2b+a}{3} - \frac{b-a}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}$$

$$b_k = \frac{2b+a}{3} + \frac{b-a}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \quad k = 1, 2, \dots$$

Für $k = 1$ stimmen beide Formeln offenbar, denn wir erhalten

$$a_1 = \frac{a+b}{2} \quad \text{und} \quad b_1 = \frac{a}{4} + \frac{3}{4}b = \frac{a+b}{2}.$$

Wir nehmen an, die Formeln gelten für beliebiges k , und beweisen, daß sie dann auch für $k+1$ gelten:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{a_k + b_k}{2} = \frac{2b+a}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} - \frac{b-a}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2(k+1)-1} \left(\frac{b-a}{3} - 2 \frac{b-a}{3} \right) + \frac{a+2b}{3} \\ &= \frac{a+2b}{3} - \frac{b-a}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(k+1)-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{k+1} &= \frac{b_k + a_{k+1}}{2} = \frac{b_k + \frac{a_k + b_k}{2}}{2} = \frac{a_k + 3b_k}{4} \\
 &= \frac{a + 2b}{3} + \frac{1}{4} \left(3 \frac{b-a}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{2k} - \frac{b-a}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{2k-1} \right) \\
 &= \frac{a + 2b}{3} + \left(\frac{1}{2} \right)^{2(k+1)} \left(3 \frac{b-a}{3} - 2 \frac{b-a}{3} \right) \\
 &= \frac{a + 2b}{3} + \frac{b-a}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{2(k+1)}
 \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{2k-1} = 0$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{2k} = 0$ folgt (nach den Grenzwertsätzen) mit unseren Formeln:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \frac{a + 2b}{3}.$$

Aufgabe G 46

Gesucht sind alle reellen Zahlen m , für die

$$mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0 \quad (*)$$

für alle positiven reellen x gilt.

Äquivalente Umformung der Ungleichung $(*)$ führt auf

$$m > \frac{4x - 1}{x^2 + 3} = 1 - \frac{(x - 2)^2}{x^2 + 3}.$$

Der Ausdruck $1 - \frac{(x - 2)^2}{x^2 + 3}$ ist gleich 1 für $x = 2$ und kleiner als 1 für alle reellen $x \neq 2$. Damit gilt $(*)$ für alle reellen x genau dann, wenn $m > 1$ ist (wie man sieht, hat die Einschränkung $x > 0$ in der Aufgabenstellung keinen Einfluß auf das Ergebnis).

Aufgabe G 47

Wir möchten zu dieser Aufgabe zwei verschiedene Lösungen vorstellen, um zu beweisen, daß die Teilbarkeit ohne großen Rechenaufwand (wie z. B. die Division $1010101010101010 : 9 = 11223344556677890$, die von vielen Einsendern durchgeführt und ausgewertet wurde) gezeigt werden kann.

1. Lösung (Norman Bitterlich, Karl-Marx-Stadt, 12. Klasse)

Die in der Aufgabenstellung gegebene Zahl wird mit z bezeichnet. Es gilt dann offensichtlich

$$\begin{aligned} z &= 10^{160} + 10^{158} + 10^{156} + \dots + 10^4 + 10^2 + 1 \\ &= 10^{108}(10^{52} + \dots + 10^2 + 1) + 10^{54}(10^{52} + \dots + 10^2 + 1) + \\ &\quad + (10^{52} + \dots + 10^2 + 1) \\ &= (10^{108} + 10^{54} + 1)\{10^{36}(10^{16} + \dots + 10^2 + 1) + \\ &\quad + 10^{18}(10^{16} + \dots + 1) + (10^{16} + \dots + 1)\} \\ &= (10^{108} + 10^{54} + 1)(10^{36} + 10^{18} + 1)(10^{16} + \dots + 10^2 + 1) \\ &= (10^{108} + 10^{54} + 1)(10^{36} + 10^{18} + 1)(10^{12} + 10^6 + 1) \cdot \\ &\quad \cdot (10^4 + 10^2 + 1) \end{aligned}$$

Wie leicht zu sehen ist, besteht jeder Klammerausdruck aus genau drei Einsen und einer bestimmten Anzahl von Nullen. Nach der Quersummenregel für die Teilbarkeit ist somit jeder der vier Ausdrücke durch 3 teilbar. Damit ist das gesamte Produkt, also z , durch $3^4 = 81$ teilbar.

2. Lösung (Norbert Schieweck, Blumenberg, 11. Klasse)

Es sei $A = \underbrace{10 \ 10 \ \dots \ 10}_{80 \text{ mal}} 1$.

Ist jetzt $10A$ durch 81 teilbar, so ist auch A durch 81 teilbar, da 10 und 81 zueinander teilerfremd sind. Für $10A$ gilt nun:

$$10A = \underbrace{10 \ \dots \ 10}_{81 \text{ mal}} = \underbrace{10 \ \dots \ 10}_{9 \text{ mal}} (1 + 10^{18} + 10^{2 \cdot 18} + \dots + 10^{8 \cdot 18})$$

Den ersten Faktor bezeichnen wir mit F_1 , den zweiten mit F_2 . Die Quersumme von F_1 ist 9. Der zweite Faktor F_2 besteht aus genau 9 Einsen und hat sonst nur Nullen als Ziffern. Somit ist auch die Quersumme von F_2 gleich 9. Damit sind beide Faktoren durch 9 teilbar. Dann ist aber auch ihr Produkt $10A$ und damit A durch $9 \cdot 9 = 81$ teilbar.

Mengenlehre - einmal anders

In einer Gaststätte sitzen mehrere Männer an einem Tisch: Acht von ihnen rauchen Zigaretten, sechs Zigarren, drei Pfeife, und einer ist Nichtraucher. Drei der Raucher verqualmen nun sowohl Zigaretten als auch Zigarren, zwei unter ihnen rauchen Zigarren und Pfeife, und der Nachbar des Nichtrauchers raucht sogar abwechselnd Zigaretten, Zigarren und Pfeife. Wie viele Männer sitzen am Tisch?

Titelbild:

„Sachen gibt's, die gibt's gar nicht!“

- eingesandt von Eberhard Diezel, Weimar -

Im Heft 7/75 forderten wir Sie, liebe Leser, auf, selbst einmal ein Titelbild für Ihre Zeitschrift zu entwerfen. Wir möchten an dieser Stelle allen danken, die sich an diesem Preisausschreiben beteiligt haben. Der Jury fiel es sehr schwer, unter den eingesandten ideenreichen und mit viel Mühe angefertigten Bildern die besten auszuwählen.

Die Preisträger sind:

1. Preis (Büchergutschein über 30,- M):
Eberhard Diezel, 53 Weimar, Gustav-Freytag-Str. 7
2. Preis (Büchergutschein über 20,- M):
Petra Scharfe, 8903 Görlitz, Hans-Beimler-Str. 24
3. Preis (Büchergutschein über 10,- M):
Sold. M. Mende, 126 Strausberg 5, PF 39534-M

Herzlichen Glückwunsch! Die mit dem 2. und 3. Preis ausgezeichneten Arbeiten erscheinen erst auf den Titelseiten der Hefte 2/76 und 3/76.

Es ist nicht genug, den Menschen ein Spezialfach zu lehren. Dadurch wird er zwar zu einer Art benutzbarer Maschine, aber nicht zu einer vollwertigen Persönlichkeit. Es kommt darauf an, daß er ein lebendiges Gefühl dafür bekommt, was zu erstreben wert ist. Er muß einen lebendigen Sinn dafür bekommen, was schön und was moralisch gut ist. Sonst gleicht er mit seiner spezialisierten Fachkenntnis mehr einem wohlabgerichteten Hund als einem harmonisch entwickelten Geschöpf.

Albert Einstein

Inhaltsverzeichnis 1975 (9. Jahrgang)

Heft		Seite
1	Von der Mausefalle zum Addierautomat I	2
	Joseph-Louis Lagrange	10
2	Von der Mausefalle zum Addierautomat II	18
	René Descartes	22
	Unendliche Reihen I	26
3	Konvergenzgeschwindigkeit von Zahlenfolgen	34
	Unendliche Reihen II	39
4	Iterative Lösung nichtlinearer Gleichungen	50
	Vierdimensionales Simplex	63
5	Der Satz von HELLY	66
	"FDJ-Freundschaftsstafette" und 4. FDJ-Studententage	73
6	Beziehungen zwischen Physik und Mathematik I	82
	Das Dilemma der exakten Definition (Was ist eine Kurve? I)	88
7	Beziehungen zwischen Physik und Mathematik II	98
	Die Familie Bernoulli	104
8	Unendliche Reihen III	114
	Teppiche und Schwämme (Was ist eine Kurve? II)	120
9	Primzahlen	130
	Differenzengleichungen I	136
	Mathematikstudium im befreundeten Ausland	140
10	Funktionalgleichungen I	146
	Neue Prüfungsordnung	149
	Karl Weierstraß	153
	Sommerlager des Bezirksklubs Junger Mathematiker	158
11	Differenzengleichungen II	162
	Funktionalgleichungen II	169
	Im Studentenaustausch zu Besuch in Minsk	174
12	Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung I	178

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Egbert Creutzburg

Chefredakteur: Waltraud Werner

Redaktion: R. Jeske, H.-G. Leopold, E. Reuter

Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto Erfurt 180 45

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.