1

76

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an

ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

10. Jahrgang

Index 33 873

Preis: 0,20 M

# Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung (II)

## 4. Die Formel für die totale Wahrscheinlichkeit

Wir haben in den vorhergehenden Abschnitten den Begriff des Ereignisses und den der Wahrscheinlichkeit kennengelernt. Oft ist nun die bedingte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A in bezug auf bestimmte Ereignisse $C_1, \ldots, C_n$ leicht zu ermitteln. Wir fragen uns jetzt, ob man mit Hilfe dieser bedingten Wahrscheinlichkeiten P(A) berechnen kann bzw. welche Bedingungen die $C_i$ erfüllen müssen, damit dies möglich ist.

Es seien A ein zufälliges Ereignis und $C_1, \ldots, C_n$ Ereignisse mit den Eigenschaften

$$C_i \cap C_j = \emptyset \quad \text{für } i \neq j,$$
$$C_1 \cup \ldots \cup C_n = S$$
$$\text{und} \quad P(C_i) > 0, \; i = 1, \ldots, n.$$

Dann gilt die Formel für die totale Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A / C_i) \cdot P(C_i).$$

Der Beweis für diese Formel ergibt sich so:

Aus $A = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap C_i)$ erhält man $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap C_i)$, und nach der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit ist dies gleichbedeutend mit

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A / C_i) \cdot P(C_i).$$

Wir bringen jetzt eine Anwendung der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit:

Beispiel: Von drei vor uns liegenden Gewehren wählen wir auf gut Glück ein Gewehr aus und schießen mit diesem auf ein bestimmtes Ziel. Die Wahrscheinlichkeit, das Ziel mit dem i-ten Gewehr zu treffen, bezeichnen wir mit $p_i$, und es sei $p_1 = 0{,}7$,

$p_2 = 0{,}9$ und $p_3 = 0{,}95$.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Ziel getroffen wird?

Es sei A = "Das Ziel wird getroffen."

$C_i$ = "Das i-te Gewehr wird ausgewählt."

Dann ist

$$P(A / C_i) = p_i.$$

Da bei der Auswahl der Gewehre keines bevorzugt wird, gilt

$$P(C_1) = P(C_2) = P(C_3) = \frac{1}{3}.$$

Damit erhalten wir aus der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = 0{,}7 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}9 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}95 \cdot \frac{1}{3} = 0{,}85.$$

Wie aus dem angeführten Beispiel zu entnehmen ist, bewährt sich die Anwendung der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit, wenn der zufällige Vorgang in mehreren Etappen hintereinander abläuft. Insbesondere haben sich bedingte Wahrscheinlichkeiten bei der Untersuchung von zufälligen Systemen in ihrem zeitlichen Ablauf als vorteilhaft erwiesen.

## 5. Zufällige Irrfahrt

Wir markieren auf der reellen Achse die Punkte $0, \mp 1, \mp 2, \ldots$ und führen folgenden Versuch aus:

Auf den Punkt 0 stellen wir ein Teilchen und werfen eine Münze. Liegt das Wappen oben, so setzen wir das Teilchen um einen Teilstrich nach links, liegt die Zahl oben, so setzen wir es um einen Teilstrich nach rechts. Nun werfen wir die Münze zum zweiten Male, zum dritten Male usw. und setzen jedesmal das Teilchen entsprechend dem Resultat des Wurfes. Bewegt sich ein Teilchen auf den ganzen Zahlen in der oben beschriebenen Weise, so sagt man, das Teilchen führt eine zufällige Irrfahrt auf den ganzen Zahlen aus.

Man kann annehmen, daß die beiden Möglichkeiten eines Wurfes die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, und aus diesem Grund ist bei jedem Wurf die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Teilchen nach links bewegt wird, genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit, daß es nach rechts bewegt wird, nämlich gleich $\frac{1}{2}$. Wir betrachten nun für $k \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots\}$ die Ereignisse

$A_k$ = "Das Teilchen erreicht irgendwann den Punkt k."

Weiter sei

$A_0$ = "Das Teilchen kehrt irgendwann zum Punkt 0 zurück (d.h., es befindet sich zu einem anderen Zeitpunkt als dem Beginn im Nullpunkt)."

Der folgende Satz gibt einen Einblick in den Mechanismus der zufälligen Irrfahrt:

Satz:

Führt ein Teilchen die oben beschriebene zufällige Irrfahrt aus, so gilt für alle $k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$

$$P(A_k) = 1.$$

Beweis:

Wir setzen zur Abkürzung $x_k = P(A_k)$. Da alle Punkte vollkommen gleichberechtigt sind, ist $x_1$ überhaupt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen von $(k-1)$ ausgehend irgendwann den Punkt k erreicht. Genauso ist $x_{-1}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen von $(k+1)$ ausgehend irgendwann k erreicht.
Wir nehmen an, daß das Teilchen vom Punkt 0 ausgeht, und betrachten die Ereignisse

$B_1$ = "Das Teilchen gelangt beim ersten Schritt zum Punkt 1."

$B_2$ = "Das Teilchen gelangt beim ersten Schritt zum Punkt -1."

Nach der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit gilt

$$P(A_0) = P(A_0 / B_1) \cdot P(B_1) + P(A_0 / B_2) \cdot P(B_2).$$

Ist das Ereignis $B_1$ eingetreten, so befindet sich das Teilchen nach einem Schritt im Punkt 1. Damit unter dieser Bedingung das Ereignis $A_0$ eintritt, ist es notwendig, daß das Teilchen von 1 aus irgendwann 0 erreicht. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $x_{-1}$. Somit gilt

$$P(A_0/B_1) = x_{-1},$$

und analog erhält man

$$P(A_0/B_2) = x_1.$$

Ferner ist $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$.

Werden diese Werte in die obige Formel eingetragen, so erhalten wir

$$x_0 = \frac{1}{2}x_{-1} + \frac{1}{2}x_1.$$

Infolge der Symmetrie ist $x_{-1} = x_1$; also gilt

$$x_0 = x_1.$$

Wir wenden jetzt die Formel für die totale Wahrscheinlichkeit auf das Ereignis $A_1$ an und erhalten

$$P(A_1) = P(A_1/B_1) \cdot P(B_1) + P(A_1/B_2) \cdot P(B_2).$$

Gelangt das Teilchen in einem Schritt zum Punkt 1, so gelangt es auch irgendwann zum Punkt 1. Also gilt $B_1 \subseteq A_1$ und damit

$$P(A_1/B_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1)}{P(B_1)} = 1.$$

Weiterhin ist $P(A_1/B_2)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Teilchen von −1 aus irgendwann nach 1 gelangt. Wir berechnen diese Wahrscheinlichkeit:

Es sei D = "Das Teilchen erreicht von −1 ausgehend irgendwann 1."

F = "Das Teilchen erreicht von −1 ausgehend irgendwann 0."

Dann gilt offensichtlich $F \cap D = D$ und somit

$$P(D) = P(F \cap D) = P(D/F) \cdot P(F).$$

Nun ist jedoch $P(F) = x_1$ und $P(D/F) = x_1$. Deshalb ergibt sich

$$P(A_1/B_2) = P(D) = x_1^2 .$$

Setzen wir diesen Wert in die Formel für die Wahrscheinlichkeit von $A_1$ ein, so erhält man

$$x_1 = 1 \cdot \frac{1}{2} + x_1^2 \cdot \frac{1}{2}$$

oder

$$x_2^2 - 2x_1 + 1 = 0$$

$$(x_1 - 1)^2 = 0,$$

woraus $x_1 = 1$ und somit $x_o = 1$ folgt. Wegen $x_{-1} = x_1$ ist auch $x_{-1} = 1$.

Wir zeigen jetzt, daß sogar $x_k = 1$ für alle k gilt. Dabei können wir uns auf den Fall $k > 0$ beschränken. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion: Für k=1 ist unsere Behauptung auf Grund des obigen Resultates $x_1=1$ richtig. Wir nehmen an, die Behauptung sei für k=n bewiesen, und zeigen, daß sie dann auch für k=n+1 gilt.

Dazu betrachten wir das Ereignis

$A_{n+1}$ = "Das Teilchen erreicht irgendwann den Punkt (n+1)."

Offensichtlich ist

$$A_{n+1} = A_n \cap A_{n+1}.$$

Nach der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt deshalb

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}/A_n) \cdot P(A_n).$$

Nun ist aber nach Induktionsvoraussetzung $P(A_n) = x_n = 1$. Wir hatten bereits festgestellt, daß die Wahrscheinlichkeit, von n ausgehend irgendwann (n+1) zu erreichen, nicht von n abhängt und den Wert $x_1=1$ hat. Damit folgt

$$P(A_{n+1}) = 1,$$

und die Behauptung $P(A_k) = 1$ ist für alle k bewiesen. $\blacksquare$

**Dr. F. Liese**
**Oberassistent**
**im Bereich Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik**

Wir müssen wissen.
Wir werden wissen.

# David Hilbert

**23. 1. 1862 - 14. 2. 1943**

"Wer von uns würde nicht gern den Schleier lüften, unter dem die Zukunft verborgen liegt, um einen Blick zu werfen auf die bevorstehenden Fortschritte unserer Wissenschaft und in die Geheimnisse ihrer Entwicklung während der künftigen Jahrhunderte! Welche besonderen Ziele werden es sein, denen die führenden mathematischen Geister der kommenden Geschlechter nachstreben? Welche neuen Methoden und neuen Tatsachen werden die neuen Jahrhunderte entdecken - auf dem weiten und reichen Felde mathematischen Denkens?" [1)]

Mit diesen Sätzen begann David Hilbert am 8. August 1900 seinen berühmten Vortrag anläßlich des 2. Internationalen Mathematikerkongresses (Paris 6. - 12. 8. 1900). Weder vordem noch danach gelang es einem einzelnen Mathematiker, in einer wissenschaftlichen Arbeit oder in einem Vortrag die Probleme der Mathematik im Ganzen zu umfassen. In seinem Vortrag, der ein klassisches Beispiel einer wissenschaftlichen Prognose darstellt, formulierte Hilbert nach einem einleitenden Teil, in dem Fragen der mathematischen Problemstellung, der mathematischen Strenge und des Zusammenhangs der Mathematik mit anderen Naturwissenschaften behandelt wurden, 23 zur damaligen Zeit ungelöste Probleme aus den verschiedensten Gebieten der Mathematik.

Über diese 23 Hilbertschen Probleme schreibt H. Weyl, ein langjähriger Kollege Hilberts in Göttingen, im wissenschaftlichen Nachruf auf Hilbert "David Hilbert and His Mathematical Work": "Ein Mathematiker, der eines von ihnen gelöst hatte, rückte dar-

---

1) D. Hilbert: Mathematische Probleme, 1900. Zitiert nach [1], S. 22

um ein in die Ehrenklasse der Gemeinschaft der Mathematiker".[2)]

Mehr über diese 23 Probleme, die teilweise für die mathematische Entwicklung des 20. Jahrhunderts richtungsweisend wurden, findet man in dem sehr interessanten Buch "Die Hilbertschen Probleme", in dem neben den Problemformulierungen auch die bis 1970 bekannten Lösungen vorgestellt werden.

Wer aber war David Hilbert, ein Mathematiker, der mit 39 Jahren einen solch umfassenden Überblick über das Gesamtgebäude der damaligen Mathematik besaß, ohne den dieser bedeutende Vortrag nicht möglich war?
David Hilbert wurde am 23. Januar 1862 in Wehlau bei Königsberg geboren. Er besuchte in Königsberg verschiedene Gymnasien, legte 1880 das Abitur ab und begann an der heimatlichen Universität zu studieren. Er fand hier vorzügliche Lehrer und lernte H. Minkowski kennen. Es entstand eine herzliche Freundschaft mit dem bereits in jungen Jahren international bekannten Minkowski. Dieser hatte in Berlin studiert, und durch ihn lernte Hilbert die in Berlin von E. E. Kummer, L. Kronecker und K. Weierstraß vertretene strenge Auffassung der Mathematik kennen. Mit dem Problem der Notwendigkeit der Strenge in der mathematischen Beweisführung beschäftigte sich Hilbert intensiv, so auch in seinem Vortrag 1900 in Paris, und setzte sie in seinen Arbeiten durch. Jean Dieudonné schreibt hierzu in seinem Artikel "David Hilbert": "Möglicherweise hat Hilbert die mathematische Welt am tiefsten durch die Art seines Denkens beeinflußt, und zwar mehr noch als durch seine genialen Entdeckungen; er hat die Mathematiker axiomatisch denken gelehrt, d. h. danach zu streben, jede Theorie auf ihr strengstes logisches Schema zu reduzieren..."[3)].

---

2) H. Weyl: David Hilbert and His Mathematical Work, 1944.
Zitiert nach [1] , S. 15

3) J. Dieudonné: David Hilbert, 1962. Zitiert nach [3]

Nach der Promotion in Königsberg 1885 folgten Studienaufenthalte bei F. Klein in Leipzig und Ch. Hermite in Paris. Im Jahre 1886 schon habilitierte sich Hilbert in Königsberg und wirkte hier bis 1892 als Privatdozent und bis 1895 als ordentlicher Professor für Mathematik. 1895 erfolgte seine Berufung an die Universität Göttingen. Trotz weiterer ehrenvoller Berufungen blieb Hilbert Göttingen bis zu seinem Tode treu. Um ihn sammelten sich hier viele bekannte Mathematiker wie E. Landau, H. Weyl, R. Courant, O. Blumenthal, E. Noether u.a.

Er wurde 1930 emeritiert, hielt aber erst 1934 mit 72 Jahren seine letzten Vorlesungen.

In seiner Forschung wandte sich Hilbert trotz seiner großen Universalität nacheinander recht scharf getrennten Gebieten zu. Diese waren

| | |
|---|---|
| 1885 - 1893 | Invariantentheorie |
| 1893 - 1898 | Theorie der algebraischen Zahlenkörper |
| 1898 - 1902 | Grundlagen der Geometrie |
| 1902 - 1912 | Integralgleichungen |
| 1910 - 1922 | Physik |
| 1922 - 1930 | Grundlagen der Mathematik im allgemeinen.[4] |

Auf all diesen Gebieten und nicht nur hier erreichte Hilbert hervorragende Ergebnisse, die in einer Vielzahl von Veröffentlichungen und Monographien, die er allein oder als Mitautor verfaßte, ihren Niederschlag fanden. In dem bereits zitierten wissenschaftlichen Nachruf auf Hilbert von H. Weyl heißt es unter anderem: "Kein Mathematiker von gleichem Format ist aus unserer Generation hervorgegangen!"[5]

Ein anderer Mitarbeiter Hilberts schreibt im Vorwort einer Hilbertbiographie 1969: "David Hilbert war einer der wirklich großen Mathematiker seiner Zeit. Sein Werk und seine begeisternde Wissenschaftlerpersönlichkeit haben die Entwick-

---

4) nach H. Weyl: David Hilbert and His Mathematical Work, 1944. In [2] , S. 245 f.

5) Ebenda, S. 245

lung der mathematischen Wissenschaft bis zur Gegenwart stark beeinflußt."
Zeit seines Lebens trat Hilbert gegen jeglichen Agnostizismus in der Wissenschaft auf. Er vertrat die These der Lösbarkeit jeder mathematischen Aufgabe im weiten Sinne des Wortes, d.h. durch Angabe der Lösung, einen Unmöglichkeitsbeweis oder den Nachweis der Unentscheidbarkeit.

Am 14. Februar 1943 starb David Hilbert in Göttingen. Auf dem Gedenkstein an seinem Grab sind seine eigenen Worte zu lesen:

Wir müssen wissen.
Wir werden wissen.

**Hans-Gerd Leopold**
**Forschungsstudent**
**im Bereich Analysis**

Literatur:

[1] Die Hilbertschen Probleme. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig Leipzig 1971

[2] Constance Reid: Hilbert. Springer Verlag Berlin/Heidelberg 1970

[3] D. J. Struik: Abriß der Geschichte der Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1972

Titelbild: David Hilbert. Aus der Sammelbildserie "Berühmte Mathematiker"; Sammlung Karger-Decker, Berlin.

# Preisaufgaben 1/76

(H 1) 1 Für welche Werte a besitzt das System

$$x - y = a$$
$$2(\cos 2x + \cos 2y) = 1 + 4\cos^2(x - y)$$

eine Lösung ? Man gebe diese Lösung an.

(H 2) 1 Man konstruiere ein Dreieck aus der Höhe $h_c$ auf c, der Seitenhalbierenden $s_c$ von c und dem Umkreisradius r.

(H 3) ② Gegeben ist eine regelmäßige Pyramide mit sechseckiger Grundfläche. Die Winkel an der Pyramidenspitze zwischen den einzelnen Seitenkanten sind gleich $\alpha$. Entlang der größten Diagonalen der Grundfläche wird eine Schnittebene durch die Pyramide gelegt, deren Winkel zur Grundfläche gleich $\beta$ ist.
Man gebe das Verhältnis des Flächeninhalts der Schnittfläche mit der Pyramide zum Flächeninhalt der Grundfläche an.

(H 4) ② Man löse die Funktionalgleichung

$$f(x)\cdot f(x+y) = [f(y)\cdot f(x-y)]^2 \cdot 2^{y+4}$$

(siehe Wurzel 10/75, 11/75)!

(H 5) ② Gegeben seien 5 Kästen mit roten und blauen Kugeln. Dabei enthalten 2 Kästen je 2 rote Kugeln und je 1 blaue Kugel, 2 Kästen je 3 rote Kugeln und je 2 blaue Kugeln und 1 Kasten 8 blaue Kugeln. Man wählt auf gut Glück einen Kasten aus und entnimmt ihm eine Kugel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß diese Kugel rot ist?

(H 6) ① Доказать, что если сумма

$$a_1 \cos(a_1 + x) + a_2 \cos(a_2 + x) + \ldots + a_n \cos(a_n + x)$$

при $x = 0$ и $x = x_1 \neq k\pi$ (k целое) обращается в нуль, то она равна нулю при всяком $x$.

(обращаться - sich verwandeln, всякий - jeder beliebige)

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.

Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.

Einsendeschluß: 1. 3. 1976

# Die FDJ-Organisation der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität kämpft um den Ehrennamen »Wilhelm Pieck«

Am 3. Januar 1976 begeht das Volk der Deutschen Demokratischen Republik den 100. Geburtstag des unvergessenen Wilhelm Pieck. Sein Name ist für immer in die Geschichte eingegangen als der eines hervorragenden Kämpfers gegen Imperialismus, Militarismus und Faschismus, eines unermüdlichen Streiters für die Einheit der Arbeiterklasse, für Frieden, Demokratie und Sozialismus. In Wilhelm Pieck verehren wir den großen Patrioten, der so entscheidendes für die Entwicklung unseres Vaterlandes leistete, und den wahren Internationalisten, den treuen Freund der Sowjetunion.

Wilhelm Pieck ehren, heißt in erster Linie sein Vermächtnis erfüllen, in seinem Sinne an dem Platz, den man in unserer Gesellschaft einnimmt, mit aller Kraft für die Stärkung unserer DDR, für die unverbrüchliche Freundschaft mit der Sowjetunion und den anderen sozialistischen Staaten, für den Vormarsch des gesellschaftlichen Fortschritts im Weltmaßstab eintreten.
Daher formulierte die FDJ-Delegiertenkonferenz der FDJ-Organisation der Sektion Mathematik am 5. 11. 75 in ihrer Entschließung auch: "Leben und Wirken Wilhelm Piecks ... sind uns Ansporn und Verpflichtung zugleich, durch hohe Leistungen im sozialistischen Wettbewerb unsere Republik allseitig zu stärken".

Die FDJ-Organisation beschloß konkrete Maßnahmen, um das Niveau der sozialistischen Klassenerziehung durch die FDJ an unserer Sektion entscheidend zu verbessern, indem sie sich konkrete Schwerpunkte setzte für die Herausbildung sozialistischer Grundhaltungen, wie z. B. das Verständnis der führenden Rolle der Arbeiterklasse und ihrer Partei oder die Ausprägung kommunistischer Moralnormen, die sozialistische Arbeitshaltung und die Gestaltung der sozialistischen Lebensweise.

Als zentralen Bestandteil in der Erfüllung des Vermächtnisses von Wilhelm Pieck erkannte die FDJ-Organisation, sich noch konsequenter zu bemühen um hohe Leistungen auf allen Gebieten der fachlichen und gesellschaftlichen Arbeit und die Qualität der gesamten Arbeit entscheidend zu erhöhen.

Dazu setzte man sich Schwerpunkte, wie z. B.

- Erhöhung der Qualität der massenpolitischen Arbeit, insbesondere hinsichtlich der Diskussion aktuell-politischer Probleme.
- Verbesserung der Ergebnisse des marxistisch-leninistischen Grundlagenstudiums, wobei die Vorbereitung auf die Seminare unter FDJ-Kontrolle gestellt wird.
- Die Erziehung höherer fachlicher Leistungen, wobei die FDJ sich auch verstärkt solchen Fragen wie Liebe zum Fach, Studienmotivation und Berufsbild zuwenden muß.

Mit ihrem Kampfprogramm - aus dem wir einige Schwerpunkte andeuteten - nimmt die FDJ-Organisation unserer Sektion den Kampf auf um den Titel "FDJ-Organisation Wilhelm Pieck" und beantwortet so den Aufruf des ZK der SED zum 100. Geburtstag von Wilhelm Pieck.

Gewiß ist es wichtig, großen Revolutionären wie Wilhelm Pieck durch Verleihung ihrer Namen an hervorragende Kollektive ein Denkmal zu setzen und das Bewußtsein an sie, an ihre Leistungen und damit das Bewußtsein über die Entwicklung unserer Gesellschaft wach zu halten bzw. zu entwickeln, denn nur so kann man das, was wir erreichten, richtig werten und die Größe der vor uns liegenden Aufgaben erkennen. Dennoch: Vorbilder ehrt man, indem man ihnen nacheifert. - So kann die Namensverleihung "Wilhelm Pieck" an unsere FDJ-Organisation, wofür wir kämpfen, erst dann ihrer vollen Bestimmung genügen, wenn wir sie so auffassen, ständig im Geiste Wilhelm Piecks zu leben und zu arbeiten. Das haben wir uns fest vorgenommen.

Egbert Creutzburg

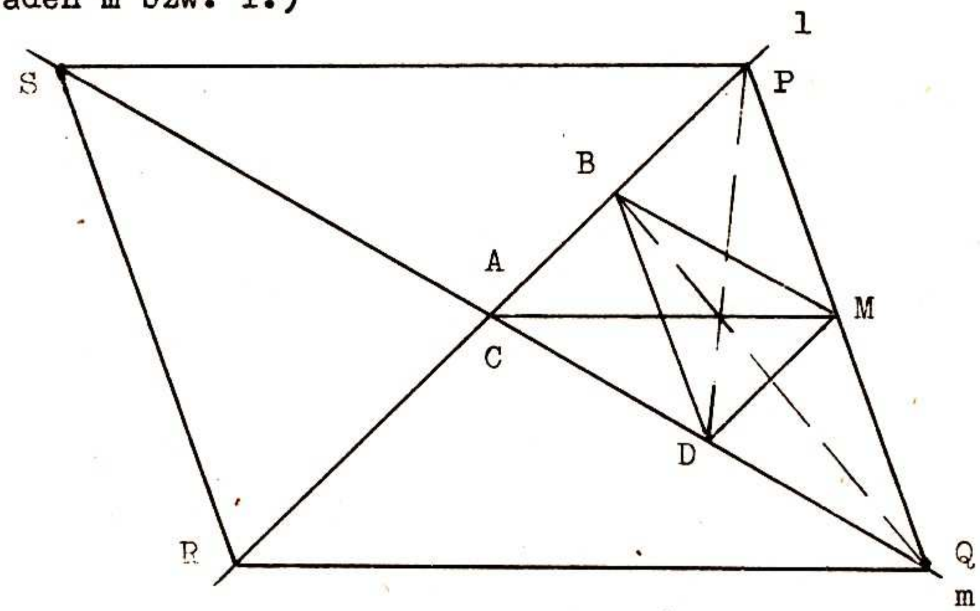
# Lösungen

Aufgabe G 50

Wir geben einen Beweis für den Fall $\overline{AB} \nparallel \overline{CD}$ an. Liegt die Strecke $\overline{AB}$ auf der Geraden l und $\overline{CD}$ auf der Geraden m, so besteht der gesuchte geometrische Ort aus den vier Seiten des Parallelogramms PQRS, in dem l und m die Diagonalen sind und in dem die Lage der Ecken P, Q durch die Beziehungen

$$h_P \cdot \overline{CD} = a^2 \text{ , } h_Q \cdot \overline{AB} = a^2 \qquad (1)$$

bestimmt wird. ($h_P$, $h_Q$ sind die Abstände der Punkte P, Q von den Geraden m bzw. l.)




Beweis: Es genügt, den Fall zu betrachten, bei dem A, C mit dem Schnittpunkt der beiden Geraden m, l zusammenfallen, denn bei fixiertem l und m wird der gesuchte geometrische Ort nur durch a und die Länge der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ bestimmt, nicht aber von der Lage der Strecken auf l bzw. m (der Flächeninhalt der Dreiecke ABM, CMD ändert sich nicht, wenn $\overline{AB}$ auf l und $\overline{CD}$ auf m verschoben werden).

Sei M ein Punkt des gesuchten geometrischen Ortes, der im Innern des Winkels $\sphericalangle$ BAD liegt.

Es gilt:

$$F_{\triangle BMD} = \left| F_{\triangle AMB} + F_{\triangle CMD} - F_{\triangle ABD} \right| = \left| a^2 - F_{\triangle ABD} \right| \quad (2) \quad .$$

Aus (2) folgt, daß der Abstand des Punktes M von der Geraden $\overline{BD}$ nicht von seiner Lage auf $\overline{PQ}$ abhängt. Für P,Q gilt (1) trivialerweise.

Ist andererseits M ein beliebiger Punkt auf $\overline{PQ}$ und sind P, Q nach (1) bestimmt, so folgt aus

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{F_{\triangle APD}}{F_{\triangle ABD}} = \frac{a^2}{F_{\triangle ABD}} , \quad \frac{\overline{CQ}}{\overline{CD}} = \frac{F_{\triangle CQB}}{F_{\triangle CDB}} = \frac{a^2}{F_{\triangle ABD}}$$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{CD}} \text{ , d. h. } \overline{PQ} \parallel \overline{BD} \text{ .}$$

Deshalb gilt:

$$F_{\triangle AMB} + F_{\triangle CMD} = F_{\triangle ABD} + F_{\triangle BMD} = F_{\triangle ABD} + F_{\triangle BPD} = F_{\triangle APD} = a^2 \text{ .}$$

Folglich gehört der Punkt M zum gesuchten geometrischen Ort. Die übrigen Seiten des Parallelogramms PQRS ergeben sich durch die Vereinigung der anderen Eckpunkte der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, nämlich:

$\overline{QR}$ durch: $B \equiv C$, $\overline{RS}$ durch: $B \equiv C$ und $\overline{SP}$ durch: $A \equiv D$ .

$\boxed{\text{Aufgabe G 53}}$ (nach Friedhelm Schieweck, Blumenberg)

Behauptung: Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form 4n-1.

Beweis: Wir nehmen an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen der Form 4n-1, und $p_N$ sei die größte von ihnen. Außer p=2 können alle Primzahlen nur die Form 4n-1 oder 4n+1 haben. Alle Primzahlen bis zu $p_N$ seien der Größe nach geordnet:

$$p_1 = 2, \; p_2 = 3, \; p_3 = 5, \; \ldots, \; p_N \, .$$

Dann gilt:

$$\begin{array}{llll} & p_1 \equiv 2 & \bmod 4 & \\ & p_\nu \equiv 1 & \bmod 4 & \text{mit } p_\nu = 4n+1 \\ \text{oder} & p_\nu \equiv -1 & \bmod 4 & \text{mit } p_\nu = 4n-1 \end{array} \Bigg\} \nu = 2,3,\ldots N ,$$

also $p_1 \cdot p_2 \cdots p_N \equiv 2 \mod 4$

oder $p_1 \cdot p_2 \cdots p_N \equiv -2 \mod 4$ .

Hieraus folgt $\quad p_1 \cdot p_2 \cdots p_N + 1 \equiv -1 \mod 4 \qquad (1)$ .

Die Zahl $p = p_1 \cdot p_2 \cdots p_N + 1$ ist entweder selber Primzahl (und da $p \equiv -1 \mod 4$ gilt, erhalten wir sofort den Widerspruch zur Annahme, daß $p_N$ die größte Primzahl der Gestalt $4n-1$ ist), oder $p$ ist das Produkt von Primzahlen größer als $p_N$, denn $p$ ist durch keine der Primzahlen $p_1, p_2 \ldots p_N$ teilbar.

Wäre $p = \prod_{k=1}^{m} \bar{p}_k$ ein Produkt, das nur aus $m$ Primzahlen der Form $\bar{p}_k = 4n+1$ besteht, so ist aber $p \equiv (+1)^m \equiv 1 \mod 4$, was ein Widerspruch zu (1) wäre. Also ist $p$ durch eine Primzahl $p_o > p_N$ teilbar, die die Form $4n-1$ hat. Das ist aber ein Widerspruch zu unserer Annahme, daß $p_N$ die größte Primzahl der Form $4n-1$ ist. D. h., es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $4n-1$.

Ein Hauptanliegen der WURZEL ist es, Ihnen, liebe Leser, Gelegenheit zur Vorbereitung auf ein Mathematik- oder ein naturwissenschaftliches Studium zu geben. Immer wieder stehen viele Studenten gerade zu Beginn ihres Studiums vor großen Schwierigkeiten. Wir möchten deshalb in einem der nächsten Hefte besonders auf die Probleme eingehen, die erfahrungsgemäß beim Übergang von der Schule zur Universität auftreten, und auch Eindrücke und Erfahrungen einiger Studenten des 1. Studienjahres von ihrem Studienbeginn weitergeben.

Sicher wird dies das Interesse vieler Schüler und zukünftiger Studenten finden. Wir bitten Sie, uns Ihre Fragen und Meinungen zu diesem Problemkreis bis zum 1. 3. 1976 mitzuteilen, damit sie mit berücksichtigt werden können.

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung", **Leiter:** Egbert Creutzburg
**Chefredakteur:** Waltraud Werner
**Redaktion:** R. Jeske, H.-G. Leopold, E. Reuter
**Anschrift:** WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
**Konto:** Postscheckkonto Erfurt 180 45
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. 

2
76


# WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
10. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

# Gewöhnliche Differentialgleichungen (I)

## 1. Problemstellung

Bevor wir die mit gewöhnlichen Differentialgleichungen verbundenen Aufgabenstellungen genau formulieren, wollen wir zwei Beispiele betrachten.

### Orthogonale Trajektorien

Für jede positive Zahl c wird durch die Gleichung

$$x^2 + 2y^2 = c \tag{1}$$

in der x-y-Ebene eine Ellipse definiert. Man sieht, daß durch jeden Punkt der Ebene (außer dem Nullpunkt) genau eine Ellipse geht. Gibt es Kurven, die alle diese Ellipsen senkrecht schneiden?

Wir werden uns davon überzeugen, daß es solche Kurven gibt. Kurven, die alle Kurven einer gegebenen Kurvenschar senkrecht schneiden, heißen "orthogonale Trajektorien". Orthogonale Trajektorien sind in unserem Beispiel die Achsen $x = 0$ und $y = 0$. Zur Bestimmung weiterer orthogonaler Trajektorien erinnern wir uns daran, daß sich zwei Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ genau dann im Punkt $(x_0, y_0)$ senkrecht schneiden, wenn

$$f(x_0) = g(x_0) = y_0 \text{ und } g'(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

gilt. Durch Differentiation der Gleichung (1) erhält man

$$2x + 4yy' = 0$$

und damit

$$y' = -\frac{x}{2y}, \tag{2}$$

d.h. im Punkt $(x,y)$ ist der Anstieg der entsprechenden Ellipse $y = f(x)$ gleich $-\frac{x}{2y}$. Der Anstieg der gesuchten Kurve $y = g(x)$ müßte $\frac{2y}{x}$ sein. Für die gesuchte Funktion $y = g(x)$ gilt also

$$y' = \frac{2y}{x}. \tag{3}$$

(Im Unterschied zu (2) müßte man ausführlicher

$$g'(x) = \frac{2g(x)}{x} \tag{4}$$

schreiben.)

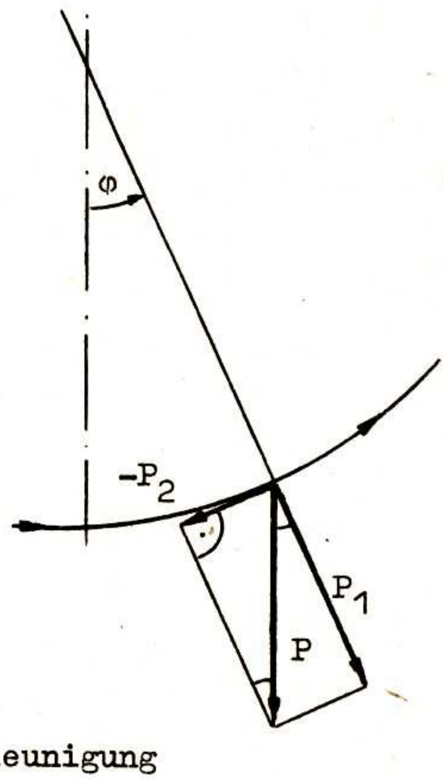
Gleichung (3) ist eine Differentialgleichung. Wir werden später sehen, wie man sie löst, d.h. wie man sämtliche differenzierbaren Funktionen $y = g(x)$ bestimmt, die für alle x der Gleichung (4) genügen. Ferner werden wir sehen, daß die Lösung durch eine zusätzliche Anfangsbedingung

$$g(x_0) = y_0$$

($x_0$ und $y_0$ fest vorgegeben) eindeutig bestimmt ist.

Mathematisches Pendel

Ein Pendel der Masse m und der Länge l sei zum Zeitpunkt $t_0$ um den Winkel $\varphi_0$ aus der Ruhelage ausgelenkt. Die Masse denken wir uns punktförmig am Pendelende konzentriert.




Wenn man das Pendel sich selbst überläßt, wird es sich zunächst infolge der Schwerkraft in Richtung Ruhelage bewegen. Wie groß ist die Auslenkung $\varphi_1$ in einem beliebigen späteren Zeitpunkt $t_1$? Die im Massenpunkt angreifende Schwerkraft $P = mg$ wird in die Komponenten $P_1$ und $P_2$ zerlegt (Abb. 1). Die in Tangentenrichtung wirkende Kraft berechnet sich aus geometrischen Gründen durch

$$P_2 = -P\sin\varphi = -mg\sin\varphi$$

und ruft nach dem Prinzip

Kraft = Masse x Beschleunigung

eine Tangentialbeschleunigung

$$\ddot{s} = \frac{P_2}{m} = -g\sin\varphi$$

($s(t)$ ist die Bogenlänge des Weges, den der Massenpunkt beschreibt) hervor. Die Koordinate $s(t)$ hängt mit dem Winkel $\varphi(t)$ (Bogenmaß) durch

$$s(t) = l\varphi(t)$$

und damit auch

$$\ddot{s}(t) = l\ddot{\varphi}(t)$$

zusammen. Eingesetzt ergibt sich

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l}\sin\varphi(t) \quad . \tag{5}$$

Das ist wieder eine Differentialgleichung, die man jedoch mit elementaren Methoden nicht lösen kann. Wenn man nur kleine Auslenkungen zuläßt, kann man aber den Sinus des Winkels durch den Winkel selbst ersetzen, ohne einen größeren Fehler zu machen. Es entsteht die Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l}\varphi(t) . \tag{6}$$

Ein wesentlicher Unterschied gegenüber der Differentialgleichung unseres vorigen Beispiels besteht darin, daß man hier zur eindeutigen Lösbarkeit neben der Bedingung $\varphi(t_0) = \varphi_0$ auch noch die Winkelgeschwindigkeit im Anfangszeitpunkt $\dot{\varphi}(t_0) = \omega_0$ vorgeben muß. Physikalisch ist das plausibel, denn ein zusätzlicher Stoß beim Loslassen des ausgelenkten Pendels beeinflußt natürlich den Bewegungsablauf.

Unsere Differentialgleichung zur Bestimmung der orthogonalen Trajektorien hatte die Struktur

$$y' = a\frac{y}{x} . \tag{7}$$

Differentialgleichungen sind z. B. auch

$$y' = ay + bx \tag{8}$$

$$y' = \sin y \tag{9}$$

$$y' = x^2 \tag{10}$$

$$y' = a\,x \log y \tag{11}$$

$$y' = \cos\frac{x}{y} \tag{12}$$

D e f i n i t i o n :

Eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$y' = F(x,y) \quad ,$$

wobei F eine stetige Funktion von zwei Variablen ist. Eine Lösung der Differentialgleichung ist eine differenzierbare Funktion $y = f(x)$ mit

$$f'(x) = F(x,f(x)) \tag{13}$$

für alle x.

Bemerkung:

1. Es kann vorkommen, daß die Funktion F von zwei Variablen nicht in der gesamten Ebene definiert ist ( (7): $x = 0$, (11): $y = 0$, (12): $y = 0$). Dann ist die Bedingung (13) natürlich nur für Zahlen x sinnvoll, für die der Punkt $(x,f(x))$ im Definitionsbereich von F liegt.

2. Wir sprechen hier von gewöhnlichen Differentialgleichungen im Gegensatz zu partiellen, bei denen Funktionen f von mehreren Variablen gesucht sind und durch die Differentialgleichung eine Verknüpfung von Variablen und partiellen Ableitungen gegeben ist.

D e f i n i t i o n :

Eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$y'' = F(x,y,y') \quad ,$$

wobei F eine stetige Funktion von drei Variablen ist. Eine Lösung der Differentialgleichung ist eine zweimal differenzierbare Funktion $y = f(x)$ mit

$$f''(x) = F(x,f(x), f'(x))$$

für alle x.

Das Anfangswertproblem einer Differentialgleichung erster Ordnung besteht im Aufsuchen einer Lösung, die die zusätzliche Anfangsbedingung

$$f(x_0) = y_0$$

mit fest vorgegebenen Zahlen $x_0$ und $y_0$ erfüllt.

Das Anfangswertproblem einer Differentialgleichung zweiter Ordnung besteht im Aufsuchen einer Lösung, die die zusätzlichen Anfangsbedingungen

$$f(x_0) = y_0 \quad \text{und} \quad f'(x_0) = z_0$$

mit fest vorgegebenen Zahlen $x_0$, $y_0$ und $z_0$ erfüllt.

## 2. Die Methode der Trennung der Variablen

Wir wollen nun versuchen, für einige einfache Typen von Differentialgleichungen Lösungen zu finden. Dazu betrachten wir folgendes Beispiel:

$$y' = \frac{1 - 2x}{y^2} \quad , \; y \neq 0 \,. \tag{14}$$

Das ist eine Differentialgleichung erster Ordnung. Wenn wir eine solche Lösungsfunktion $y = f(x)$ suchen, die durch den Punkt $(x_0, y_0) = (3,4)$ geht (d. h. für $x_0 = 3$ soll $f(x_0) = y_0 = 4$ sein), dann liegt ein Anfangswertproblem vor. Wir formen die Gleichung (14) zunächst so um, daß auf der einen Seite nur $x$, auf der anderen Seite nur $y$ und $y'$ vorkommen. Dabei erhalten wir

$$y^2 y' = 1 - 2x. \tag{15}$$

Eine Lösung $y = f(x)$ muß neben (14) auch (15) und alle folgenden Umformungen befriedigen. Um die Ableitung von $y$ zu kompensieren, bilden wir über beide Seiten das bestimmte Integral von $x_0 = 3$ bis zur variablen oberen Grenze $x$:

$$\int_3^x y^2 y' dx = \int_3^x (1 - 2x)\, dx \tag{16}$$

Die rechte Seite ist leicht zu berechnen, es ergibt sich

$$[x - x^2]_3^x = x - x^2 - 3 + 9 = 6 + x - x^2.$$

Links müssen wir erst $y$ substituieren und erhalten wegen

$dy = y'dx$ (dabei auch die Grenzen **beachten**, $x = 3$ hat $y = 4$ zur Folge!)

$$\int_4^y y^2\,dy = \int_3^x (1 - 2x)dx = 6 + x - x^2 \;,$$

$$\frac{1}{3}y^3 - \frac{64}{3} = 6 + x - x^2,$$

$$y = \sqrt[3]{82 + 3x - 3x^2} \;.$$

Natürlich muß nun noch die Probe gemacht werden. Für $x = 3$ ist tatsächlich die Anfangsbedingung erfüllt:

$$y = \sqrt[3]{82 + 3\cdot 3 - 3\cdot 3^2} = \sqrt[3]{82 + 9 - 27} = 4.$$

Nun zu Gleichung (1). Einerseits gilt

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3-6x)}{\sqrt[3]{(82+3x-3x^2)^2}} = \frac{1-2x}{\sqrt[3]{(82+3x-3x^2)^2}},$$

andererseits ist

$$\frac{1 - 2x}{y^2} = \frac{1-2x}{(\sqrt[3]{82+3x-3x^2})^2} \;,$$

und somit das gestellte Anfangswertproblem richtig gelöst.

Übungsaufgabe 1: Man löse die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{y}{x} \;,\quad x \neq 0$$

mit den Anfangswerten $(x_0, y_0) = (2,3)$ !

Übungsaufgabe 2: Man löse die Differentialgleichung

$$y' = 2y \cos x$$

mit den Anfangswerten $(x_0, x_0) = (\frac{\pi}{6}, 2e)$ !

Übungsaufgabe 3: Man löse die Differentialgleichung

$$y' = 6 + 3x - 2y - xy$$

mit den Anfangswerten $(x_0, y_0) = (2, 3-2\cdot e^{-8})$ !

Übungsaufgabe 4: Man löse die Differentialgleichung

$$2xyy' = 1 + y^2$$

mit den Anfangswerten $(x_0, y_0) = (-2, 1)$ !

Mit der beschriebenen Methode, die man Trennung der Variablen nennt, können auch die im Abschnitt 1 angeführten Beispiele (7), (9), (10) und (11) behandelt werden.

**Dr. Oloff, Dr. Schwarz**
**Bereich Analysis**

# Preisaufgaben 2/76

(H 7) Es sind die beiden Geraden $g_a$ und $g_b$ vorgegeben. Auf $g_a$ liegt das Punktetripel $A_1$, $A_2$, $Z_a$ (das Punktepaar $A_1A_2$ ist in der Reihenfolge der Indizes gerichtet). Auf $g_b$ liegt das Punktetripel $B_1$, $B_2$, $Z_b$ (das Punktepaar $B_1B_2$ ist ebenfalls gerichtet).

2

**Unter Anwendung der Definition: "Ein orientiertes Parallelgeradenpaar ist ein B a n d ." sollen zwei Bänder - eines durch $A_1A_2$, das andere durch $B_1B_2$ - gefunden werden, so daß der Schnitt der beiden Bänder, XY, auf der Geraden durch $Z_a$ und $Z_b$ liegt.**

(H 8) Man drücke $\cos\alpha$ und $\sin\beta$ durch A und B aus, falls gilt

1

$$\sin\alpha = A \sin\beta \qquad \text{und} \qquad \tan\alpha = B \tan\beta \quad .$$

(H 9) Man beweise: Falls für eine geometrische Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ und für eine arithmetische Folge $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ die Ungleichungen

1

$$a_1 > 0, \quad \frac{a_2}{a_1} > 0 \quad , \quad b_2 - b_1 > 0$$

erfüllt sind, so existiert eine Zahl $\alpha$ , so daß $\log_\alpha a_n - b_n$ nicht von n abhängt.

(H 10) Gegeben sind n gleichförmige zylindrische Gefäße. Das erste ist bis zum Rand mit **reinem** Alkohol gefüllt, die übrigen (n-1) Gefäßte bis zur Hälfte mit einem Gemisch aus Wasser und Alkohol. Dabei ist die Alkoholkonzentration in jedem Gefäß um $\frac{1}{k}$ mal geringer als in dem vorhergehenden. Mit dem Inhalt des ersten Gefäßes wird jetzt das zweite Gefäß bis zum Rand aufgefüllt, danach mit dem Inhalt des zweiten Gefäßtes das dritte Gefäß bis zum Rand usw.

1

Man gebe die im n-ten Gefäß entstandene **Alkoholkonzentration** an!

(H 11) Man löse die Übungsaufgabe 1 (Seite 23)!

2

(H 12) Найти объём треугольной пирамиды, если площади её граней равны $S_0$, $S_1$, $S_2$, $S_3$ а двугранные углы, прилежащие к грани с площадью $S_0$, равны между собой.

2

грань - Rand, Grenze, Fläche
двугранные углы - zweikantige Winkel (Winkel zwischen zwei Begrenzungsflächen)

Einsendeschluß: 31. 3. 1976

Auch in diesem Jahr möchten wir die besten Einsender des vergangenen Schuljahres vorstellen (Preisaufgaben F 43 bis G 48). Die angegebenen Klassenstufen beziehen sich auf das Schuljahr 1974/75. Insgesamt erhielten wir von 75 Schülern und Mitgliedern unseres NVA-Zirkels Lösungen zugesandt. Der allgemeine Punktdurchschnitt liegt bei 17,64 Punkten.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Norbert Schieweck | Blumenberg | 11. Klasse | 87 Punkte |
| Friedhelm Schieweck | Blumenberg | 11. Klasse | 84 Punkte |
| Hans-Georg Martin | Jena | 11. Klasse | 69 Punkte |
| Dittmar Kurtz | Friedrichsrode | 9. Klasse | 54 Punkte |
| Meinhard Mende | (NVA) | | 51 Punkte |
| Reiner Lindemann | Cottbus | 11. Klasse | 45 Punkte |
| Gunter Gerbeth | Greiz | 10. Klasse | 43 Punkte |
| Roger Labahn | Anklam | 11. Klasse | 42 Punkte |
| Michael Schaper | Magdeburg | 11. Klasse | 39 Punkte |
| Norman Bitterlich | Karl-Marx-Stadt | 12. Klasse | 39 Punkte |
| Lutz Gärtner | Wismar | 10. Klasse | 38 Punkte |
| Eigbert Riewald | (NVA) | | 38 Punkte |
| Marcus Kasner | Templin | 11. Klasse | 37 Punkte |
| Roland Bemowski | Anklam | 11. Klasse | 35 Punkte |
| Bernhard Lützke | (NVA) | | 32 Punkte |

◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇ - ◇

Es gibt die erstaunliche Möglichkeit, daß man einen Gegenstand mathematisch beherrschen kann, ohne den Witz der Sache wirklich erfaßt zu haben.

Albert Einstein

# Der Horner-Algorithmus

Wir wollen den Wert des Polynoms

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

für $x = x_0$ mit möglichst wenig Rechenaufwand ermitteln.

$P_n(x)$ läßt sich darstellen in der Form

$$P_n(x) = (x - x_0)Q_{n-1}(x) + R\ ,$$

wobei $R = P_n(x_0)$ gilt. Wir bestimmen R als Rest, den die Division von $P_n(x)$ durch $(x-x_0)$ läßt. Das sei hier an einem Polynom 4. Ordnung ausgeführt:

$$
\begin{array}{l}
(a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0):(x-x_0) = a_4' x^3 + a_3' x^2 + a_2' x + a_1' + \dfrac{R}{x-x_0} \\
\underline{-(a_4 x^4 - x_0 a_4' x^3)} \\
\qquad\quad a_3' x^3 + a_2 x^2 \\
\qquad\quad \underline{-(a_3' x^3 - x_0 a_3' x^2)} \\
\qquad\qquad\qquad a_2' x^2 + a_1 x \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-(a_2' x^2 - x_0 a_2' x)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a_1' x + a_0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-(a_1' x - x_0 a_1')} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_0' = R
\end{array}
$$

$a_4', \ldots, a_1', a_0'$ ergeben sich aus

$$
\begin{aligned}
a_4' &= a_4 \\
a_3' &= a_3 - x_0 a_4' \\
a_2' &= a_2 - x_0 a_3' \\
a_1' &= a_1 - x_0 a_2' \\
a_0' &= a_0 - x_0 a_1' = R\ .
\end{aligned}
$$

Man benötigt offensichtlich für den gesamten Divisionsvorgang nicht mehr als die Bestimmung dieser 5 Koeffizienten $a_4', \ldots, a_0'$. Die Berechnung der $a_i'$ läßt sich sehr einfach in dem folgenden Schema ausführen, welches nach dem englischen Mathematiker William George HORNER (1786 - 1837) benannt ist:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $a_4$ | $a_3$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_0$ |
| $x = x_0$ | – | $x_0 a_4'$ | $x_0 a_3'$ | $x_0 a_2'$ | $x_0 a_1'$ |
| | $a_4'$ | $a_3'$ | $a_2'$ | $a_1'$ | $a_0' = R$ |

Diese Überlegungen sind leicht auf Polynome beliebiger Ordnung zu übertragen. Man schreibt die Koeffizienten $a_i$ des Polynoms in absteigender Folge der x-Potenzen hintereinander (fehlende Potenzen durch Koeffizienten Null berücksichtigen!), multipliziert jeweils $a'_{i+1}$ mit $x_0$, trägt diesen Wert unter $a_i$ ein, addiert $a_i$ und erhält $a'_i$.

**Beispiel:**

Es ist zu untersuchen, ob $x_0 = 2$ Nullstelle des Polynoms $P_5(x) = 3x^5 - 2x^4 + x^2 - 7x - 4$ ist. Nach dem Hornerschema ergibt sich:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | -2 | 0 | 1 | -7 | -4 |
| x = 2 | – | 6 | 8 | 16 | 34 | 54 |
| | 3 | 4 | 8 | 17 | 27 | 50 = R = $P_5(2)$ |

$x_0 = 2$ ist somit keine Nullstelle.
Wie Sie leicht selbst mit Hilfe des Hornerschemas nachprüfen können, ist auch $x_0 = -1$ keine Nullstelle von $P_5$, denn $P_5(-1) = -1$
Nach dem Zwischenwertsatz muß zwischen -1 und +2 (mindestens) eine reelle Nullstelle liegen, denn $P_5$ wechselt in dem Intervall $[-1,2]$ das Vorzeichen.

Durch Berechnung der Funktionswerte eines Polynoms an ausgewählten Stellen können wir uns einen Überblick über Verlauf der Funktionskurve und Lage der Nullstellen verschaffen, und mit Hilfe des Hornerschemas gestaltet sich dieses Aufstellen einer Wertetabelle mit minimalem Rechenaufwand. Doch die Anwendung des Horner-Algorithmus beschränkt sich nicht auf ein "Durchtesten" nach vorhandenen Nullstellen des Polynoms, sondern mit seiner Hilfe läßt sich die iterative Bestimmung der Nullstellen nach dem Newton-Verfahren (vgl. WURZEL 4/75) wesentlich vereinfachen und gestattet eine automatische Durchführung der Rechnung.

**Gregor Weske**
**Assistent im**
**Forschungsbereich „Stochastik"**

(Wird fortgesetzt)

# Lösungen

**Aufgabe G 54** (nach Klaus Altmann, Berlin)

Wenn für eine ganze Zahl n die Periode der Funktion $y = \frac{\sin nx}{\sin \frac{5}{n}x}$

$3\pi$ ist, so gilt für alle x aus dem Definitionsbereich:

$\frac{\sin n(x+3\pi)}{\sin \frac{5}{n}(x+3\pi)} = \frac{\sin nx}{\sin \frac{5}{n}x}$ . Für $x = x_o = n\frac{\pi}{2}$ ergibt sich:

$\frac{\sin (nx+3\pi n)}{\sin (5\frac{\pi}{2}+\frac{15}{n}\pi)} = \frac{\sin nx}{\sin 5\frac{\pi}{2}} = \sin nx$. Daraus folgt

$\frac{\sin (nx+3\pi n)}{\sin nx} = \sin (\frac{15}{n}\pi + \frac{\pi}{2})$.

Es gilt für $\alpha \in \mathbb{R}$ : $\sin(\alpha + \pi) = \sin(\alpha - \pi) = -\sin(\pi - \alpha) =$
$= -\sin \alpha$ .

Also ist $\sin(\frac{15}{n}\pi + \frac{\pi}{2}) = \pm 1$, und daraus folgt:

$$\frac{15}{n}\pi + \frac{\pi}{2} = K\pi + \frac{\pi}{2} , \quad K \in Z .$$

Da $K \in Z$ ist, ergibt sich $\frac{15}{n} \in Z$ für $n \in Z$ .

Daher kommen für n nur die Zahlen -15, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 15 in Frage.

Die Probe zeigt, daß für alle 8 Fälle und für alle x die Gleichung $\frac{\sin n(x+3\pi)}{\sin \frac{5}{n}(x+3\pi)} = \frac{\sin nx}{\sin \frac{5}{n}x}$ erfüllt ist, denn es gilt

$$\sin n(x+3\pi) = \sin(nx+3\pi n) = \sin(nx+\pi) \text{ und}$$
$$\sin \frac{5}{n}(x+3\pi) = \sin(\frac{5}{n}x + \frac{15}{n}\pi) ;$$

da $\frac{15}{n}$ ungerade ist, folgt

$$\sin(\frac{5}{n}x + \frac{15}{n}\pi) = -\sin \frac{5}{n}x .$$

Somit gilt $y(x) = y(x+3\pi)$ in allen 8 Fällen. Also sind die Werte $\pm 1$; $\pm 3$; $\pm 5$; $\pm 15$ die einzigen Lösungen.

**Aufgabe G 59** (nach Friedhelm Schieweck, Blumenberg, 12. Klasse)

Ein Dreieck ist aus den positiven Seitenlängen $x_1, x_2, x_3$ genau dann konstruierbar, wenn gilt

$$(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2-x_3)(x_1+x_3-x_2)(x_2+x_3-x_1) > 0 \qquad (*)$$

Beweis: Wenn das Dreieck aus $x_1,x_2,x_3$ konstruierbar ist, so folgt unmittelbar aus den Dreiecksungleichungen durch **Multiplikation** die Gleichung (*) (wegen $x_i > 0$ gilt offensichtlich auch $x_1+x_2+x_3 > 0$).

Es sei nun o.B.d.A. $x_1$ die größte **der** drei positiven Zahlen $x_1,x_2,x_3$. Dann gelten sicherlich die beiden Dreiecksungleichungen $x_1+x_2-x_3 > 0$ und $x_1+x_3-x_2 > 0$ und **trivialerweise auch** $x_1+x_2+x_3 > 0$, also nach Multiplikation $(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2-x_3)(x_1+x_3-x_2) > 0$. Gilt aber (*), so **muß** daraufhin notwendig auch $x_2+x_3-x_1 > 0$ erfüllt sein. Es gelten damit alle **drei** Dreiecksungleichungen.

Nach dem Vietaschen Wurzelsatz erhalten wir aus der Gleichung $x^3+px^2+qx+r=0$

$$p = -(x_1+x_2+x_3)$$
$$q = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$
$$r = -x_1x_2x_3 \quad .$$

**Wir formen die linke Seite der Ungleichung (*) um.**

$$-x_1^4 - x_2^4 - x_3^4 + 2x_1^2x_2^2 + 2x_2^2x_3^2 + 2x_3^2x_1^2 > 0$$

Unter Verwendung von $p^2-2q = x_1^2+x_2^2+x_3^2$

$$q^2-2rp = x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2$$

ergibt sich die Bedingung

$$-(p^2-2q)^2 + 4(q^2-2rp) > 0$$
$$4(q^2-2rp) > (p^2-2q)^2$$

Diese Bedingung ist notwendig und hinreichend dafür, daß aus den gegebenen $x_1,x_2,x_3$ ein Dreieck konstruiert werden kann.

Bemerkung: Da $x_1,x_2,x_3$ sämtlich positiv sind, gilt $-p=x_1+x_2+x_3>$ und damit $p<0$ . Hiermit läßt sich die angegebene Bedingung noch **vereinfachen**

$$p^3 - 4pq + 8r > 0 \quad .$$

■

**Aufgabe G 52** (nach Norbert Schieweck, Blumenberg)

Für ein Polynom $P(x)$, das für alle $x$ der Gleichung

$$x\, P(x-1) = (x-23)\, P(x) \qquad (*)$$

genügt, gilt:

(1) Aus $P(x) = 0$ folgt für $x \neq 22$ stets $P(x+1) = 0$.

(2) Aus $P(x) = 0$ folgt für $x \neq 0$ stets $P(x-1) = 0$.

Für $x = 0$ folgt aus $(*)$ $\quad 0 \cdot P(-1) = -23 \cdot P(0)$ und damit $P(0) = 0$. Wenden wir nun die Aussage (1) 22 mal hintereinander an, so erhalten wir

$$P(0) = P(1) = \ldots = P(22) = 0 \qquad (3).$$

Wir zeigen nun, daß es für alle Polynome mit endlichem Grad (außer für $P(x) = 0$), die $(*)$ erfüllen, nur die Nullstellen $x_N = 0, 1, 2, \ldots, 22$ geben kann.

Dazu nehmen wir an, $x_o \notin \{0, 1, \ldots, 22\}$ sei eine Nullstelle von $P(x)$, d. h. $P(x_o) = 0$. Ist $x_o$ keine ganze Zahl, so gilt stets $x_o + k \neq 22$ ($k$ nat. Zahl), so daß wir (1) unendlich oft anwenden können, d. h., das Polynom hätte unendlich viele Nullstellen und damit keinen endlichen Grad. Für $x_o$ ganze Zahl gilt offenbar $x_o < 0$ oder $x_o > 22$. Für $x_o > 22$ ist stets $x_o + k \neq 22$ ($k$ nat. Zahl), so daß wir durch (1) wiederum unendlich viele Nullstellen erhalten. Im Fall $x_o < 0$ ist stets $x_o - k \neq 0$ ($k$ nat. Zahl), so daß wir durch (2) ebenfalls unendlich viele Nullstellen erhalten.

Damit ist gezeigt, daß alle Polynome, die $(*)$ erfüllen, genau die Nullstellen $x_N = 0, 1, \ldots, 22$ besitzen (außer $P(x) = 0$).

Für $P(x)$ ergibt sich also zunächst die Form:

$$P(x) = c \cdot \prod_{k=0}^{22} (x-k)^{a_k} \qquad \begin{array}{l} c \text{ bel. reell} \\ a_k \text{ nat. Zahl, } a_k \neq 0 \end{array}$$

Wir werden jetzt die Werte der $a_k$ bestimmen.

Nach (*) gilt

$$x \cdot c \cdot \prod_{k=0}^{22} (x-1-k)^{a_k} = (x-23) \cdot c \cdot \prod_{k=0}^{22} (x-k)^{a_k}$$

$$c \cdot \prod_{k=0}^{23} (x-k)^{a_{k-1}} = c \cdot \prod_{k=0}^{23} (x-k)^{a_k}$$ wobei $a_{-1}=a_{23}=1$ gesetzt wird.

Für c=0 ergibt sich das Polynom $P(x) \equiv 0$, welches offensichtlich (*) erfüllt. Für $c \neq 0$ und $x \notin \{0, 1, \ldots, 23\}$ erhalten wir die Gleichung

$$\prod_{k=0}^{23} (x-k)^{a_k-a_{k-1}} = 1. \qquad (4)$$

<u>Annahme 1:</u> Es gibt ein $k_o \in \{0, 1, \ldots, 23\}$ mit $a_{k_o} - a_{k_o-1} < 0$.

Dann gilt: $\lim\limits_{x \to k_o} (x-k_o)^{a_{k_o} - a_{k_o-1}} = \infty$,

und wegen

$$\lim_{x \to k_o} (x-k)^{a_k - a_{k-1}} = (k_o-k)^{a_k - a_{k-1}} \neq 0$$

für $k \in \{0,\ldots,23\} \setminus \{k_o\}$

erhalten wir dann

$$\lim_{x \to k_o} \prod_{k=0}^{23} (x-k)^{a_k-a_{k-1}} = c' \cdot \infty \neq 1,$$

einen Widerspruch zu Gleichung (4).

Somit muß also stets $a_k - a_{k-1} \geq 0$ $k \in \{0,1,\ldots,23\}$ gelten.

<u>Annahme 2:</u> Es gibt ein $k_o \in \{0,1,\ldots,23\}$ mit $a_{k_o} - a_{k_o-1} > 0$,

Dann gilt: $\lim\limits_{x \to k_o} (x-k_o)^{a_{k_o} - a_{k_o-1}} = 0$,

und wegen

$$\lim_{x \to k_o} (x-k)^{a_k-a_{k-1}} = (k_o-k)^{a_k-a_{k-1}} = c'' < \infty$$

für $k \in \{0,\ldots,23\} \setminus \{k_o\}$

erhalten wir dann

$$\lim_{x \to k_o} \prod_{k=0}^{23} (x-k)^{a_k - a_{k-1}} = 0 \neq 1,$$

einen Widerspruch zu Gleichung (4).

Insgesamt erhalten wir damit $a_k - a_{k-1} = 0$ .

Es sei $k \in \{0,1,\ldots,23\}$ . Auf Grund von $a_{-1} = 1$ ergibt sich $a_{-1} = a_0 = a_1 = \ldots = a_{22} = a_{23} = 1$. Es muß also für ein Polynom, das (*) erfüllt, notwendigerweise gelten

$$P(x) = c \cdot \prod_{k=0}^{22} (x-k) \quad .$$

Andererseits erfüllen diese Polynome auch die Gleichung (*). Damit sind alle Polynome, die dieser Gleichung genügen, gefunden.

Bemerkung: In den meisten Einsendungen zu dieser Aufgabe wurden nur die Nullstellen des Polynoms bestimmt und hieraus auf die Darstellung

$$P(x) = c \cdot (x-1)(x-2) \ldots (x-22) \qquad c \text{ reell}$$

geschlossen. Trotz richtiger Angabe der Lösungsmenge wurde nicht der Nachweis geführt, daß damit alle möglichen Lösungen der Gleichung erfaßt werden, wie das in der abgedruckten Lösung geschehen ist.

"Mengenlehre - einmal anders" (WURZEL 12/75, S. 191):

Es sitzen 13 Männer am Tisch.

"Zahlenrätsel im Oktalsystem" (WURZEL 12/75, S. 185):

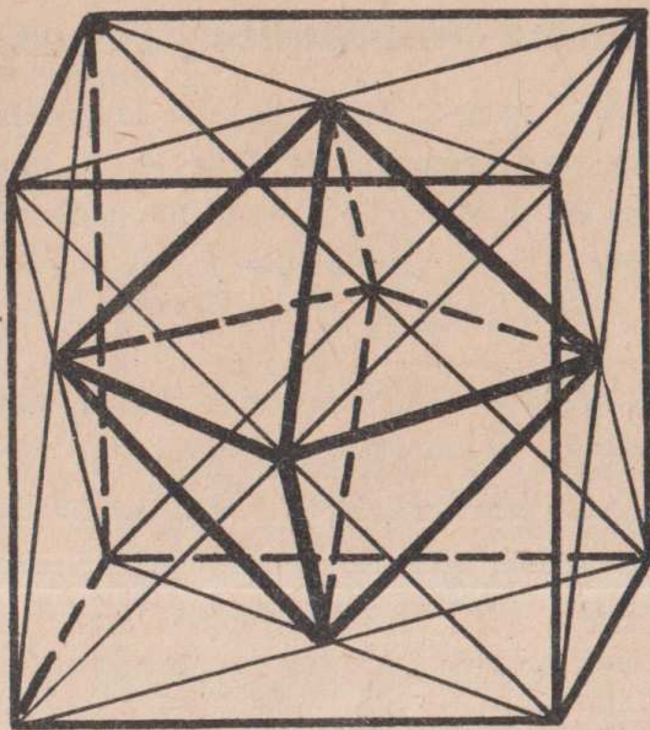
$$\begin{array}{rcrcr}
5126 & : & 77 & = & 52 \\
- & & \times & & + \\
126 & + & 46 & = & 174 \\
\hline
5000 & - & 4532 & = & 246
\end{array}$$

Titelbild: Petra Scharte, Görlitz

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Egbert Creutzburg
**Chefredakteur:** Waltraud Werner
**Redaktion:** R. Jeske, H.-G. Leopold, R. Neubauer
**Anschrift:** WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
**Konto:** Postscheckkonto 180 45
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.

3

76



$$e+f=k+2$$

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

10. Jahrgang

Index 33 873

Preis: 0,20 M

# Gewöhnliche Differentialgleichungen (II)

Am Schluß des ersten Teils haben wir anhand eines Beispiels die Methode der Trennung der Variablen kennengelernt. Im allgemeinen gelangt man mit dieser Methode immer dann zum Ziel, wenn die vorgelegte Gleichung die Gestalt

$$y' = g(x) \cdot h(y) \quad \text{mit } h(y) \neq 0 \qquad (17)$$

hat, wobei $g(x)$ und $h(y)$ irgendwelche stetigen Funktionen von $x$ bzw. $y$ sind. In unserem Beispiel war $g(x) = 1 - 2x$ und $h(y) = \frac{1}{y^2}$ . Wir müssen aber wissen, daß es auch Differentialgleichungen gibt, die man nicht auf diese Weise lösen kann (z. B. (8) und (12) aus Abschnitt 1) und darunter sogar solche, deren Lösung überhaupt nicht explizit aufgeschrieben werden kann.

Die Differentialgleichung (17) wird mit den Anfangswerten $(x_0, y_0)$ gelöst, indem man wie oben "die Variablen trennt", d. h. auf folgende Weise umformt:

$$\frac{y'}{h(y)} = g(x) \quad .$$

Durch Integration ergibt sich dann

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'}{h(y)}\, dx = \int_{x_0}^{x} g(x)\, dx, \qquad (18)$$

und nach der Substitution von $y$ mit $dy = y'\, dx$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(y)}\, dy = \int_{x_0}^{x} g(x)\, dx \quad .$$

Wenn es gelingt, die Integration durchzuführen und die Gleichung nach $y$ aufzulösen, dann hat man die explizite Lösung des Anfangswertproblems gefunden.

Interessieren wir uns für die Lösung einer Differentialgleichung, ohne daß wir uns auf einen bestimmten Anfangswert festlegen wollen, so bilden wir nach der Trennung der Variablen nicht das bestimmte, sondern das unbestimmte Integral. Wir erhalten in unserem Beispiel dann

$$\frac{1}{3} y^3 = x - x^2 + C \quad ,$$

wobei die beiden Integrationskonstanten in dem C auf der rechten Seite zusammengefaßt sind. Als Lösung ergibt sich

$$y = \sqrt[3]{3C + 3x - 3x^2} = \sqrt[3]{C_1 + 3x - 3x^2} \quad ,$$

wobei C oder $C_1$ eine beliebig wählbare Zahl ist. Man nennt dies die "allgemeine Lösung" der Differentialgleichung, während wir oben bereits eine spezielle oder "partikuläre Lösung" gefunden haben.

Das Auftreten einer frei wählbaren Konstanten in der allgemeinen Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung ist für diese charakteristisch. Ohne die spezialisierenden Anfangsbedingungen ist die Lösung einer Differentialgleichung also nicht eindeutig bestimmt, es gibt eine ganze Schar von Funktionen, die die Gleichung erfüllen.
Haben wir einmal die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung gefunden, ist es einfach, diejenige partikuläre zu finden, die bestimmte vorgegebene Anfangswerte annimmt. Dazu ist die Konstante C so zu bestimmen, daß die Lösungsfunktion an der Stelle $x = x_0$ den Wert $y_0$ besitzt. Wir müssen in unserem Beispiel also die Zahl $C_1$ aus

$$4 = y_0 = \sqrt[3]{C_1 + 3x_0 - 3x_0^2} = \sqrt[3]{C_1 + 3\cdot 3 - 3\cdot 3^2}$$

berechnen. Dabei ergibt sich, daß $C_1 = 82$ ist, was auch zu erwarten war.

Wir geben nun noch eine Faustregel an, die uns die Anwendung der Methode der Trennung der Variablen erleichtert. Statt $y'$

schreiben wir $\frac{dy}{dx}$, behandeln den Differentialquotienten wie einen gewöhnlichen Bruch und führen die Variablentrennung wie folgt durch:

| | |
|---|---|
| $\frac{dy}{dx} = \frac{1-2x}{y^2}$ , | $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ , |
| $y^2\,dy = (1-2x)\,dx$, | $\frac{1}{h(y)}\,dy = g(x)\,dx$ . |

Nun brauchen wir nur noch auf beiden Seiten das Integral zu ergänzen und sind so sehr schnell bis zu Gleichung (16) oder (18) gelangt. Es muß aber unbedingt beachtet werden, daß dies keine mathematische Umformung war, sondern eben nur eine Art Eselsbrücke.

Wenn wir nach dem angegebenen Schema die im ersten Abschnitt abgeleitete Differentialgleichung

$$y' = \frac{2y}{x}$$

der orthogonalen Trajektorien der Kurvenschar

$$x^2 + 2y^2 = c$$

behandeln, erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \quad ,$$

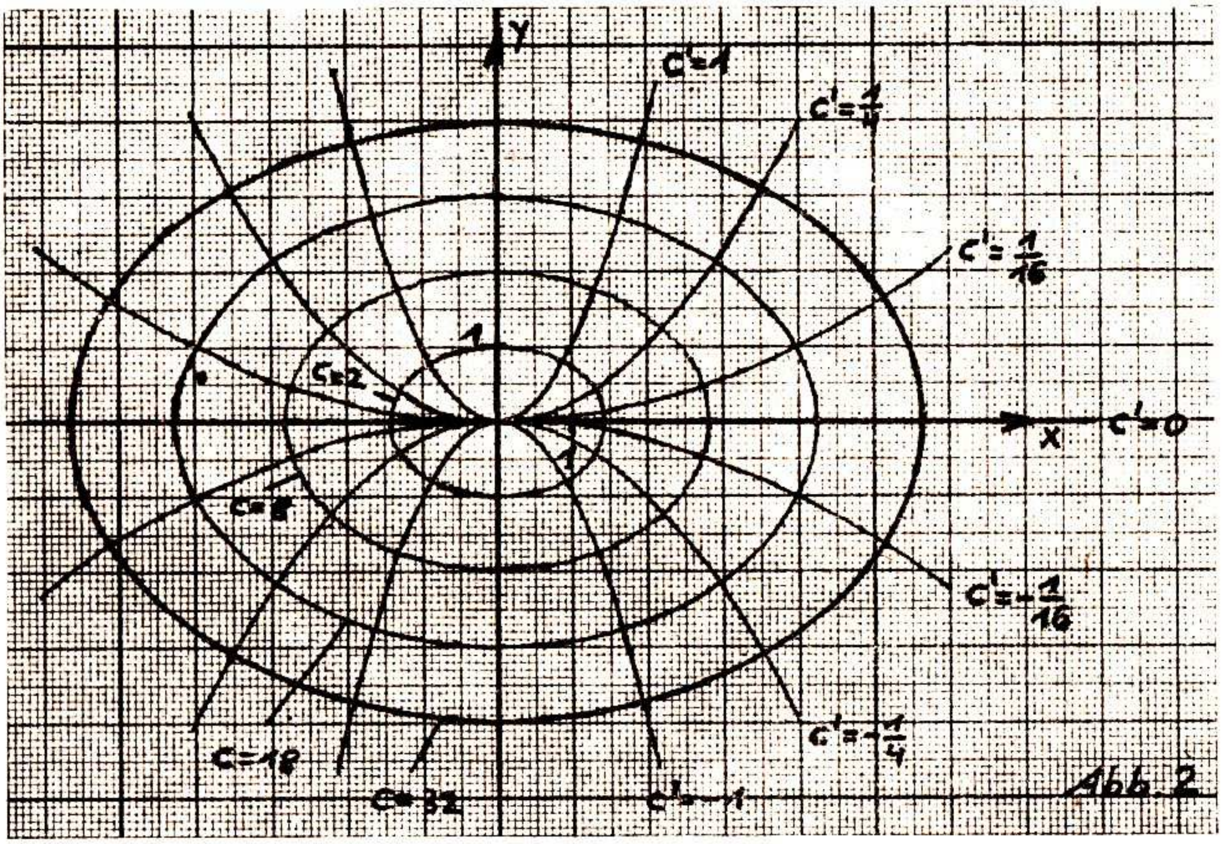
$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x} \quad ,$$

$$\ln y = 2 \ln x + c_1 \quad ,$$

$$y = e^{c_1} x^2 \quad ,$$

$$y = \pm e^{c_1} x^2 \quad .$$

Nach Einführung einer neuen Konstanten $c' = \pm e^{c_1}$ erhalten wir schließlich eine Schar von Parabeln $y = c'x^2$. In Abb. 2 ist die Ellipsenschar mit ihren orthogonalen Trajektorien skizziert.




Übungsaufgabe 5: Wie sehen die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen der Aufgaben 1 bis 4 aus?

Übungsaufgabe 6: Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = 1 + y \qquad \text{für } 1 + y > 0 \,.$$

## 3. Allgemeine Betrachtungen

Vorgelegt sei eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$y' = F(x,y) \quad , \tag{19}$$

wobei die Funktion F in einem gewissen Gebiet der Ebene sinnvoll definiert und dort stetig ist. Eine Lösung $y = f(x)$ ist nun dadurch gekennzeichnet, daß die Funktion f in einem Punkt

$(x,y)$ gerade den Anstieg $y' = F(x,y)$ hat. Wir können so in jedem Punkt des Definitionsgebietes von F die Richtung angeben, in der eine Lösungskurve verlaufen muß, die durch diesen Punkt geht. Einen Punkt $(x,y)$ mit dem zugehörigen Anstieg $y'$, der sich aus (19) berechnet, nennen wir Linienelement, wir können es als Zahlentripel $(x,y,y')$ schreiben. Denken wir uns in jedem Punkt des Definitionsbereiches von F den entsprechenden Anstieg eingetragen, erhalten wir das sogenannte Richtungsfeld der Differentialgleichung. Das Richtungsfeld ist also die Gesamtheit aller Linienelemente. In unserem ersten Beispiel ergibt sich das Richtungsfeld in Abb. 3 (wir beschränken uns auf die obere Halbebene, da ja die x-Achxe nicht zum Definitionsbereich gehört).

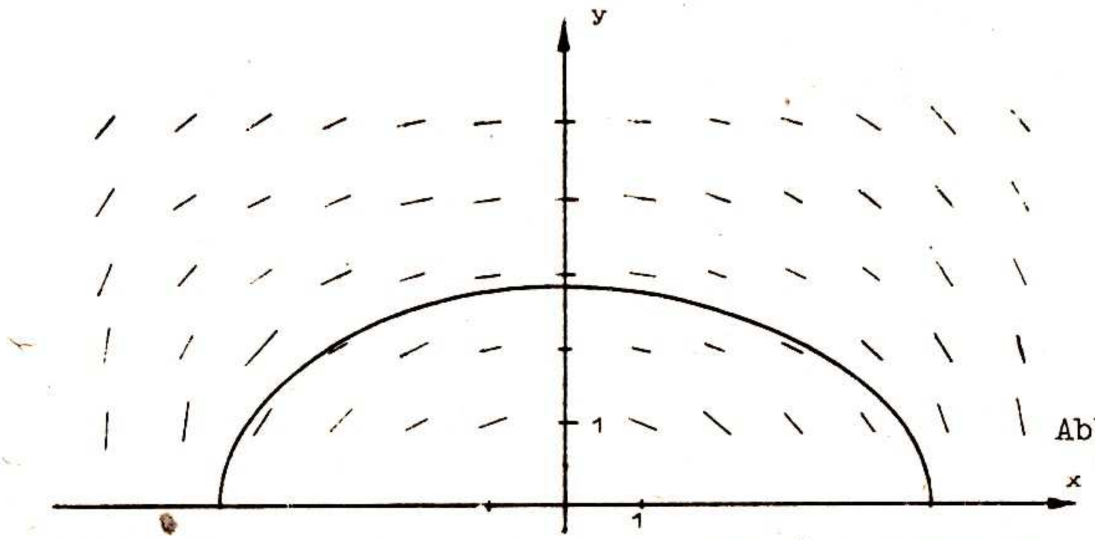


Abb. 3

Geometrisch können wir uns jetzt eine Lösung der Differential gleichung als Kurve vorstellen, deren Anstieg in jedem Punkt mit dem $y'$ des entsprechenden Linienelementes zusammenfällt. Die Lösung des Anfangswertproblems wird dann durch diejenige Kurve gegeben, die durch den vorgegebenen Punkt $(x_0,y_0)$ geht.

Zeichnet man zu einer Differentialgleichung das zugehörige Richtungsfeld, hat man meist schon einen recht guten Eindruck vom Verlauf der Lösungskurven. Beispielsweise ergibt sich für die Differentialgleichung $y' = -\frac{x}{y}$ (für $y < 0$ und $y > 0$ getrennt aufgezeichnet) das in Abb.4 dargestellte Richtungsfeld.

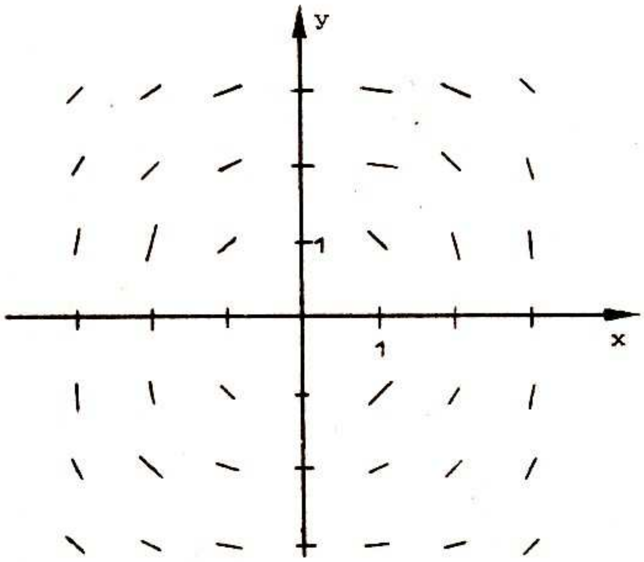



Abb. 4

Es wird sich jetzt wohl keiner mehr wundern, wenn sich als allgemeine Lösung die Schar der um den Nullpunkt konzentrischen Kreise ergibt, $x^2 + y^2 = r^2$. Hierbei hat der Parameter $r$ die geometrische Bedeutung der Radien.

Übungsaufgabe 7: Man skizziere das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = x + y$ !

Übungsaufgabe 8: Man skizziere das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = -x \cdot y$ für $y > 0$ !

Übungsaufgabe 9: Man skizziere die Richtungsfelder der bisher gelösten Differentialgleichungen !

Nachdem wir nun mit Differentialgleichungen und deren geometrischem Hintergrund besser vertraut sind, können wir uns die Frage vorlegen, wie es mit der Lösbarkeit einer beliebigen Differentialgleichung erster Ordnung aussieht. Während des Mathematikstudiums wird dazu bewiesen, daß unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen an F, die bei uns stets erfüllt sind, die Gleichung (19) für jeden Anfangswert $(x_0,y_0)$, der im Definitionsbereich von F liegt, genau eine Lösung besitzt. Wir können diesen Satz auch so formulieren:

Durch jeden Punkt $(x_0,y_0)$ des Definitionsbereiches der Funktion F verläuft genau eine Lösungskurve.

Wir bemerken noch, daß dieser Bereich auch die ganze Ebene sein kann, und daß in dem Satz nich gesagt wird, daß die Lösung jedesmal explizit aufgeschrieben werden kann. Das ist im Gegen-

teil sehr oft nicht möglich.
Abschließend betrachten wir noch zwei Beispiele, die zeigen, wie man manchmal eine gegebene Differentialgleichung durch eine geschickte Substitution so umformen kann, daß die Methode der Trennung der Variablen anwendbar wird.

a) Wenn wir in der Gleichung

$$y' = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

die neue Funktion u durch $y = xu$ einführen und natürlich auch $y'$ durch $y' = u + xu'$ (Ableitung des Produktes $x \cdot u$) ersetzen, erhalten wir

$$u + xu' = \frac{2x \cdot xu}{x^2+x^2u^2} = \frac{2u}{1+u^2}$$

oder

$$u' = \left(\frac{2u}{1+u^2} - u\right) /x.$$

Das ist nun eine Differentialgleichung für die Funktion u, die durch Variablentrennung gelöst werden kann. Aus $y = xu$ erhalten wir dann die ursprünglich gesuchte Funktion y.

b) In der Differentialgleichung

$$y' = 2x + 4y + 3$$

führt die Substitution $u = 2x + 4y + 3$ mit $u' = 2 + 4y'$ zum Erfolg.

Übungsaufgabe 10: Man löse die beiden Differentialgleichungen der Beispiele a) und b) !

Im dritten Teil dieses Artikels, der im Heft 4 erscheint, werden wir näher auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung eingehen.

**Dr. Oloff, Dr. Schwarz**
**Bereich Analysis**

# Preisaufgaben 3/76

(H 13) ② Man gebe die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = 6 + 3x - 2y - xy$$ an!

(H 14) ② Man gebe die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = 1 + y \quad \text{für } 1 + y > 0$$ an!

(H 15) ① Bestimmen Sie alle reellen Wurzeln der Gleichung

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1} = x\sqrt[3]{2}.$$

(H 16) ① Man löse die Ungleichung

$$\log_{\tan x} \sqrt{\sin^2 x - \frac{5}{12}} < 1 .$$

(H 17) ② In einem spitzwinkligen Dreieck haben zwei Höhen die Längen 3cm und $2\sqrt{2}$ cm, und ihr Schnittpunkt teilt die dritte Höhe im Verhältnis 5 : 1 (gerechnet von der Spitze des Dreiecks).

Man berechne die Dreiecksfläche!

(H 18) ① Найти все решения системы

$$8\cdot\cos x\cdot\cos y\cdot\cos(x-y) + 1 = 0$$
$$x + y = a .$$

При каких a решения возможны?

Einsendeschluß: 30. 4. 1976

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.

Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.

Beteiligen können sich Schüler aller Klassenstufen sowie die Mitglieder des NVA-Zirkels unseres Jugendobjekts.

# Aus der Arbeit des NVA-Zirkels

Eine gute Vorbereitung auf ein Studium der Mathematik anzuregen und zu unterstützen, ist das Hauptanliegen des Jugendobjektes "Studienvorbereitung" unserer Sektion, das nun bald schon sein zehnjähriges Jubiläum feiern kann.
Wir wollen heute einmal darüber berichten, welche Aufgabe sich der NVA-Zirkel als ein Bereich des Jugendobjekts gestellt hat, und wie er seine Arbeitsziele zu realisieren versucht.

Wir sind zunächst davon ausgegangen, daß gegenwärtig nahezu alle männlichen Studienbewerber ihren Ehrendienst in der NVA v o r Beginn ihres Studiums leisten. Dadurch wird eine gewisse Unterbrechung des Lernprozesses zwischen Schule und Universität unvermeidlich, und dies bringt u. a. mehr oder weniger große Schwierigkeiten mit sich. Die Frage:

> Wie können die zukünftigen Studenten der Sektion Mathematik der FSU Jena, die ihren Ehrendienst in den Reihen der NVA leisten, einen Teil dieser Schwierigkeiten überwinden?

charakterisiert deshalb die Arbeit des Bereiches "NVA-Zirkel" unseres Jugendobjektes.
Dabei erschienen uns für diese spezielle Art von Studienvorbereitung drei Dinge als besonders wichtig:

1) der Kontakt zur Universität während der Armeezeit (einschließlich der Möglichkeit, sich mit Problemen, Fragen und Wünschen an uns zu wenden),
2) die Beschäftigung mit der Mathematik,
3) die Information über das fachliche und gesellschaftliche Leben an der Sektion (und Universität).

Das regelmäßige Studium der "WURZEL" kann hierbei - wie wir meinen - schon von sehr großem Nutzen sein. Deshalb schikken wir jedem an unserer Sektion vorimmatrikulierten NVA-Angehörigen (und alle diese versuchen wir in unserer Kartei zu erfassen) die "WURZEL" kostenlos "ins Objekt". Darüber hinaus haben wir zwei Lesematerialien erarbeitet, die einige Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik (beides spielt ja in den Grundvorlesungen der ersten Semester eine hervorragende Rolle), die zum Teil schon von der Schule her bekannt sind, einmal unter einem anderen Aspekt vorstellen, um auf diese Weise ein wenig auf die Denkweise der Mathematik zu orientieren. Erfahrungsgemäß macht ja i.a. gerade die neue Art der Betrachtung und Behandlung der mathematischen Grundbegriffe zu Beginn des Studiums Schwierigkeiten.

Diese Lesematerialien sind speziell auf unsere "Partner", die Soldaten, zugeschnitten und haben bei ihnen bislang eine recht positive Resonanz gefunden.
Wir bleiben deshalb bei dieser Art der Betreuung, suchen aber nach weiteren Möglichkeiten, unsere Arbeit zu verbessern und zu effektivieren, soweit es sich realisieren läßt. (Die Arbeit des NVA-Zirkels, in dem z. Zt. drei Studenten arbeiten, ist relativ aufwendig; sie reicht von inhaltlichen Überlegungen und Entwürfen über die Beantwortung der umfangreichen Briefpost, vielen Adressenänderungen, der Neuerfassung unserer Mitglieder bis zum Versand der WURZEL und unserer Materialien.)

Von den Überlegungen, die wir uns um eine Verbesserung der Arbeit des NVA-Zirkels machen, seien hier genannt:
- Kontaktaufnahme mit anderen Universitäten und Erfahrungsaustausch über Methoden der Studienvorbereitung
- Verbesserung der Information über nicht-fachliche Fragen des Studiums
- Anregung zur Kontaktaufnahme der Soldaten untereinander (brieflich bzw. im selben Objekt)
- Verbesserung der Zusammenarbeit des NVA-Zirkels mit den anderen Bereichen des Jugendobjektes.

Sehr wichtig für die Effektivität der Arbeit ist es, daß wir möglichst von jedem unserer Mitglieder seine Meinung zu unserer Arbeit (etwa zu den Lesematerialien) und zu unseren Vorhaben erfahren. Wir können versichern, daß wir unsere Briefpost stets sehr gründlich auswerten (auch wenn wir nicht in jedem Fall antworten können), und wir werden auch die diesjährigen Jenaer Informationstage wieder dazu nutzen, mit unseren Partnern im Gespräch zu bleiben.

**Werner Nehrlich**
**Jugendobjekt „Studienvorbereitung"**
**- NVA-Zirkel -**

# Reguläre Polyeder

Das Titelbild dieses Heftes stammt von unserem Leser M. M e n d e , Strausberg. Wir wollen den dargestellten Sachverhalt kurz erläutern.

Bezeichnet e die Anzahl der Ecken, f die Anzahl der Flächen und k die Anzahl der Kanten eines konvexen Polyeders, so gilt die auf der Titelseite angegebene Gleichung

$$e + f = k + 2 \qquad (1)$$

(ein Polyeder heißt konvex, wenn es mit zwei Punkten auch deren Verbundungsstrecke enthält). Dies ist der Inhalt des Eulerschen Polyedersatzes.

Betrachten wir nun konvexe reguläre Polyeder, d. h. Polyeder mit einander kongruenten regelmäßigen Vielecken als Begrenzungsflächen. Mit Hilfe des Eulerschen Satzes läßt sich zeigen, daß es nicht mehr als fünf Typen solcher regulärer Polyeder geben kann: Es sei m die Anzahl der Kanten, die in jeder Ecke eines regulären Polyeders zusammentreffen, und n die Eckenzahl der Begrenzungsflächen. Dann gilt offenbar

$$m \geq 3 \quad \text{und} \quad n \geq 3\ . \qquad (2)$$

Jede der f Begrenzungsflächen hat n Kanten, das Polyeder also $\frac{1}{2} \cdot f \cdot n$ Kanten:

$$k = \frac{fn}{2}\ , \qquad (3)$$

und da in jeder Ecke des Polyeders m Kanten zusammentreffen, gilt für die Gesamtzahl der Kanten auch

$$k = \frac{em}{2}\ . \qquad (4)$$

Multiplizieren wir (1) mit $\frac{2m}{f}$ und substituieren nach (3), (4) $k = \frac{fn}{2}$ und em = fn, so ergibt sich

$$\frac{2em}{f} + 2m = \frac{2km}{f} + \frac{4m}{f}$$

$$2n + 2m = mn + \frac{4m}{f}$$

$$4 - (m-2)(n-2) = \frac{4m}{f} .$$

Wegen $\frac{4m}{f} > 0$ folgt

$$4 - (m-2)(n-2) > 0 ,$$

d. h.

$$(m-2)(n-2) < 4 . \tag{5}$$

Unter Berücksichtigung der Ungleichungen (2) können wir leicht alle Paare (m,n) angeben, die die Bedingung (5) erfüllen:

$$(3,3),\ (3,4),\ (3,5),\ (4,3),\ (5,3).$$

Für jedes dieser Paare läßt sich nun genau ein Tripel (e,f,k) aus den Gleichungen (1), (3) und (4) bestimmen:

$$e = \frac{4n}{4-(m-2)(n-2)} , \quad f = \frac{4m}{4-(m-2)(n-2)} ,$$
$$k = \frac{2mn}{4-(m-2)(n-2)} . \tag{6}$$

(Der Leser kann die Richtigkeit dieser Gleichungen leicht nachprüfen.)

Es gibt also nicht mehr als fünf reguläre konvexe Polyeder, und man kann beweisen, daß sich diese fünf durch (5) und (6) festgelegten Polyeder (die "Platonischen regulären Körper") auch tatsächlich konstruieren lassen. Wir stellen sie zusammenfassend in folgender Tabelle gegenüber:

| | f | k | e | m | n |
|---|---|---|---|---|---|
| Tetraeder | 4 | 6 | 4 | 3 | 3 |
| Hexaeder | 6 | 12 | 8 | 3 | 4 |
| Oktaeder | 8 | 12 | 6 | 4 | 3 |
| Dodekaeder | 12 | 30 | 20 | 3 | 5 |
| Ikosaeder | 20 | 30 | 12 | 5 | 3 |

Vertauscht man m und n, so bleibt die Anzahl der Kanten erhalten, und e und f werden ausgetauscht. Damit gehen Hexaeder in

Oktaeder, Dodekaeder in Ikosaeder (und umgekehrt) und das Tetraeder in sich über. Die Abbildung auf der Titelseite zeigt diesen Zusammenhang für den Fall $m = 3$, $n = 4$. Dem Würfel kann ein Oktaeder so einbeschrieben werden, daß jeder Ecke des Würfels genau eine Begrenzungsfläche des Oktaeders zugeordnet ist und umgekehrt in jeder Würfelfläche genau eine Ecke des Oktaeders liegt. Schließlich "kreuzt" jede Kante des einen Körpers je eine des anderen.

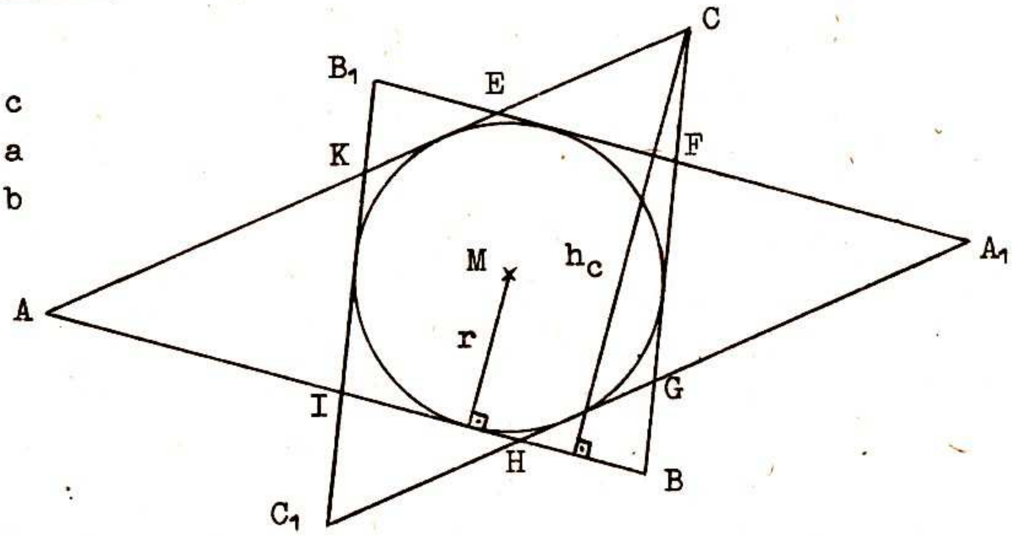
Interessenten empfehlen wir das folgende Buch aus der "Mathematischen Schülerbücherei":

T. Roman: Reguläre und halbreguläre Polyeder. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1968.

# Lösungen

Aufgabe G 55 (nach Norbert Schieweck, Blumenberg)

$\overline{AB} = c$
$\overline{BC} = a$
$\overline{AC} = b$




Da die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ punktsymmetrisch zum gemeinsamen Inkreismittelpunkt M liegen, gilt:

$$\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1 \qquad (1)$$

$$\overline{AB} \parallel \overline{A_1B_1}, \quad \overline{BC} \parallel \overline{B_1C_1}, \quad \overline{AC} \parallel \overline{A_1C_1}. \qquad (2)$$

Für die "Schnittdreiecke" gilt:

$$\Delta EFC \cong \Delta IC_1H\ ,\quad \Delta AIK \cong \Delta GA_1F\ ,\ \Delta HBG \cong \Delta KEB_1\ . \qquad (3)$$

Mit Hilfe des Strahlensatzes läßt sich (3) leicht beweisen.

Weiterhin gilt offenbar: $F = F_{\Delta ABC} = F_{\Delta A_1B_1C_1} = r\cdot s$, wobei s der halbe Umfang des Dreiecks ABC ist.
Wegen $\Delta EFC \sim \Delta ABC$ (denn $\overline{A_1B_1} \parallel \overline{AB}$) gilt

$$\frac{F_{\Delta EFC}}{F_{\Delta ABC}} = \frac{F_{\Delta EFC}}{F} = \frac{(h_c - 2r)^2}{h_c^2} = \left(1 - \frac{2r}{h_c}\right)^2$$

(die Flächen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten zueinander). Deshalb ist

$$F_{\Delta EFC} = \left(1 - \frac{2r}{h_c}\right)^2 F = \left(1 - \frac{r\cdot c}{\frac{1}{2}h_c c}\right)^2 F.$$

Wegen $\frac{1}{2}h_c c = F = r\cdot s$ folgt

$$F_{\Delta EFC} = \left(1 - \frac{c}{s}\right)^2 F$$

$$F_{\Delta EFC} = \left(\frac{s-c}{s}\right)^2 F = F_{\Delta IC_1H} \quad \text{(folgt aus (3))}.$$

Analog erhält man:

$$F_{\Delta AIK} = F_{\Delta GA_1F} = \left(\frac{s-a}{s}\right)^2 F$$

$$F_{\Delta HBG} = F_{\Delta KEB_1} = \left(\frac{s-b}{s}\right)^2 F\ .$$

Damit gilt nun für das Produkt P der Flächen der acht Dreiecke:

$$P = \left(F\cdot\left(\frac{s-a}{s}\right)^2\cdot\left(\frac{s-b}{s}\right)^2\cdot\left(\frac{s-c}{s}\right)^2\cdot F^3\right)^2$$

Wegen $F = r\cdot s$ folgt

$$P = \left(r^4\cdot s^4\cdot\frac{((s-a)(s-b)(s-c))^2}{s^6}\right)^2 = r^8\cdot\frac{((s-a)(s-b)(s-c))^4}{s^4}$$

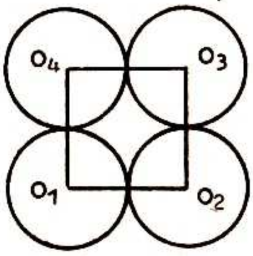
Nach der Heronischen Formel gilt bekanntlich:

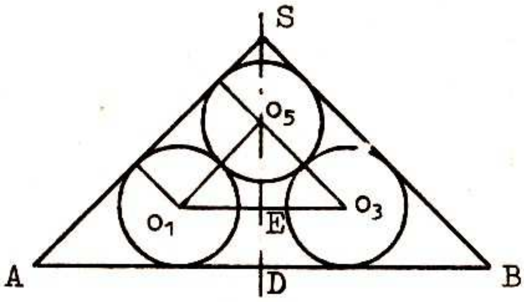
$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Damit ist $P = r^8\cdot r^8 = r^{16}$, was zu zeigen war.

**Aufgabe G 60**

Die Mittelpunkte $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$ der Kugeln, die die Grundfläche berühren, bilden ein Quadrat der Seitenlänge 2r .




Es folgt, daß der Abstand zwischen $O_1$ und $O_3$ $2r\sqrt{2}$ ist. Im Dreieck $O_1EO_5$ hat die Seite $\overline{O_1O_5}$ die Länge $2r$ und $\overline{O_1E}$ die Länge $r\sqrt{2}$.

Daraus folgt:

$$\frac{\overline{O_1E}}{\overline{O_1O_5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \text{d.h.} \sphericalangle O_5O_1E = 45^\circ.$$

Die Dreiecke ASD und $O_1O_5E$ sind ähnlich und gleichschenklig. Folglich sind Höhe und Radius der Grundfläche des Zylinders gleich, d.h. $H = R$.

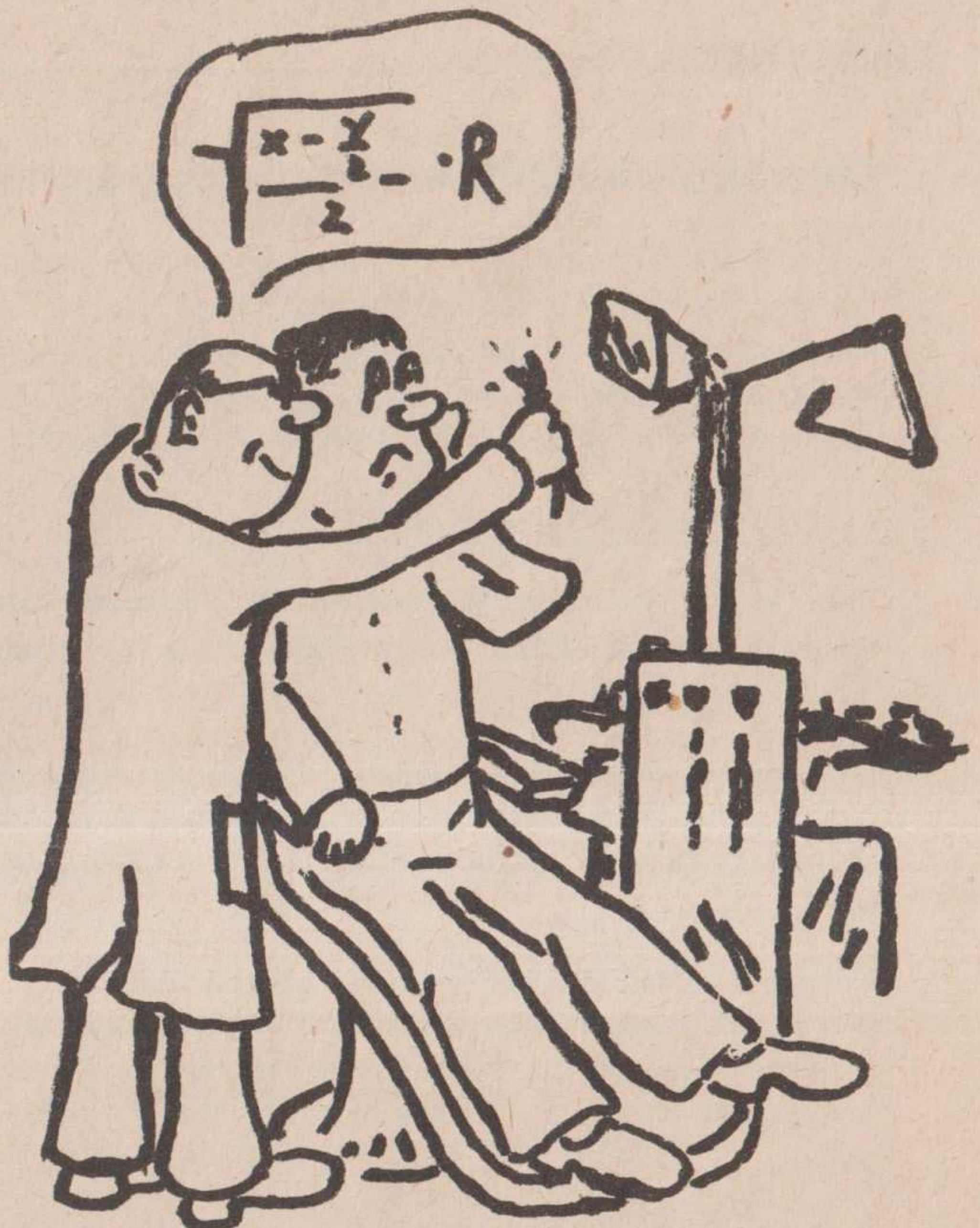
Für H ergibt sich:

$$H = \overline{SO_5} + \overline{O_5E} + \overline{ED} = \sqrt{2}\,r + \frac{2r}{\sqrt{2}} + r = r(2\sqrt{2} + 1)$$

Für das Volumen des Zylinders erhält man somit:

$$V = \frac{\pi r^3}{3}(2\sqrt{2} + 1)^3 = \frac{\pi r^3}{3}(22\sqrt{2} + 25).$$

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Egbert Creutzburg
**Chefredakteur:** Waltraud Werner
**Redaktion:** R. Jeske, H.-G. Leopold, R. Neubauer
**Anschrift:** WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
**Konto:** Postscheckkonto 180 45
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. 



# WURZEL

4

76

zeitschrift für mathematik an

ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

10. Jahrgang

Index 33 873

Preis: 0,20 M

# Gewöhnliche Differentialgleichungen (III)

Nachdem wir uns in den ersten zwei Teilen mit der Problemstellung vertraut gemacht und Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung betrachtet haben, kommen wir nun zu

## 4. Differentialgleichungen 2. Ordnung

Bereits bei dem physikalisch anspruchslosen Problem des Pendels trat eine Differentialgleichung 2. Ordnung auf:

$$y'' + \frac{g}{l} \cdot y = 0. \tag{20}$$

(Die gesuchte Funktion nennen wir jetzt wieder $y$ - wie üblich in der Mathematik.) Wir betrachten deshalb folgenden allgemeinen Typ, der Gleichung (20) offenbar als Spezialfall enthält:

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{21}$$

Man nennt eine solche Differentialgleichung exakt eine lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Theorie lehrt hierzu folgenden Satz:

S a t z : Die Gleichung (21) besitzt für vorgegebene Anfangsbedingungen $(x_o;y_o;z_o)$ genau eine Lösung, d. h., es gibt genau eine Funktion $y = f(x)$, die (21) erfüllt und für die $f(x_o) = y_o$ und $f'(x_o) = z_o$ gilt.

Um diese Lösungsfunktionen zu bestimmen, versuchen wir den Ansatz $y = e^{\lambda x}$.

Wir nehmen also an, daß die Lösung diese Gestalt hat. Da die Gleichung (21) erfüllt sein muß, ergibt sich zunächst mit

$$y' = \lambda e^{\lambda x} \quad \text{und } y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = 0 .$$

Daraus folgt (bekanntlich ist $e^{\lambda x} \neq 0$) die Beziehung

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \, , \tag{22}$$

die man charakteristische Gleichung nennt. Wenn also die Lösungsfunktion von der angenommenen Gestalt sein soll, muß die charakteristische Gleichung erfüllt sein. Das ist aber für die Zahl $\lambda$ eine quadratische Gleichung, und wir müssen deshalb folgende drei Fälle unterscheiden:

A. Die Diskriminante $D = \frac{a^2}{4} - b$ ist positiv.

B. Die Diskriminante ist Null.

C. Die Diskriminante ist negativ.

A. In diesem Falle gibt es zwei reelle Zahlen $\lambda_1 \neq \lambda_2$, die die Gleichung (22) erfüllen. Dann besitzt die Differentialgleichung (21) die allgemeine Lösung

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \, ,$$

wobei wir jetzt zwei frei wählbare Konstanten $C_1$ und $C_2$ haben.

$\boxed{\text{Beispiel:}}$

$y'' - 5y' + 6y = 0$. Der Ansatz $y = e^{\lambda x}$ liefert die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

mit den beiden Wurzeln $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$ . Damit ist

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

die allgemeine Lösung dieser Gleichung. (Probe!)

Um aus der Schar der allgemeinen Lösungen nun diejenige herauszufinden, die die Anfangswerte $f(x_0) = y_0$ und $f'(x_0) = z_0$ erfüllt, müssen wir noch die Konstanten $C_1$ und $C_2$ richtig bestimmen. Es soll gelten:

$$\begin{aligned} y_0 &= C_1 e^{\lambda_1 x_0} + C_2 e^{\lambda_2 x_0} \\ z_0 &= C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x_0} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x_0} \, . \end{aligned} \tag{23}$$

Das ist aber ein lineares Gleichungssystem in den zwei Unbekannten $C_1$ und $C_2$ ($x_0$, $y_0$, $z_0$ sind ja gegeben), das wir leicht lösen können. Geben wir für unser Beispiel die Anfangswerte $(x_0; y_0; z_0) = (0;3;5)$ vor, so hat das Gleichungssystem (23) folgendes Aussehen:

$$3 = C_1 \cdot e^{2\cdot 0} + C_2 e^{3\cdot 0} = C_1 + C_2$$
$$5 = C_1 2e^{2\cdot 0} + C_2 3e^{3\cdot 0} = 2C_1 + 3C_2 \text{ ,}$$

mit dessen Lösung $C_1 = 4$ und $C_2 = -1$ wir für das Anfangswertproblem das Ergebnis

$$y = 4\cdot e^{2x} - e^{3x}$$

erhalten. Durch eine Probe läßt sich dies schnell bestätigen.

B. Die charakteristische Gleichung besitzt die reelle Doppelwurzel $\lambda = -\frac{a}{2}$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (21) hat dann die Gestalt

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x} \text{ .}$$

$\boxed{\text{Beispiel:}}$

$y'' + 8y' + 16y = 0$. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$$

und wir erhalten $\lambda = -4$. Damit ist

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-4x}$$

die allgemeine Lösung unseres Beispieles.

C. Die charakteristische Gleichung hat nun keine reelle Lösung. Mit $\alpha = -\frac{a}{2}$ und $\beta = \sqrt{-D}$ hat die allgemeine Lösung von (21) nun die Form

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x \text{ .}$$

(Probe!)

Wer bereits mit komplexen Zahlen vertraut ist, kann einmal versuchen, das Ergebnis von Fall C. mit Hilfe der Eulerschen Formeln aus Fall A. abzuleiten.

**Beispiel:**

Wir betrachten noch einmal die Differentialgleichung des Pendels (20). Sie hat nach der Formel unter C. die allgemeine Lösung

$$y = C_1 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\, x + C_2 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\, x \,.$$

In der ursprünglichen Bezeichnung - die gesuchte Funktion war der Winkel $\varphi$ in Abhängigkeit von der Zeit t - lautet die Bewegungsgleichung des Pendels somit

$$\varphi(t) = C_1 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + C_2 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\, t \,.$$

Dem im 1. Abschnitt beschriebenen physikalischen Sachverhalt entsprechen die Anfangsbedingungen

$$\varphi(t_o) = \varphi_o \quad \text{und} \quad \dot{\varphi}(t_o) = 0 \,.$$

Zur Vereinfachung der folgenden Rechnung nehmen wir $t_o = 0$ an, d. h., wir legen den Nullpunkt der Zeitrechnung in den Augenblick des Loslassens des Pendels. Die Funktion $\varphi(t)$ und ihre Ableitung haben im Punkt $t = 0$ die Werte

$$\varphi_o = C_1 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot 0 + C_2 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot 0 = C_1$$

und

$$0 = -C_1\sqrt{\frac{g}{l}} \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot 0 + C_2\sqrt{\frac{g}{l}} \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot 0 = C_2\sqrt{\frac{g}{l}} \,,$$

woraus sofort

$$C_1 = \varphi_o \quad \text{und} \quad C_2 = 0$$

folgt. Die Bewegung des Pendels wird also durch die Schwingungsgleichung

$$\varphi(t) = \varphi_o \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\, t$$

beschrieben, die die experimentelle Erfahrung bestätigt.

Übungsaufgabe 11: Man bestimme die Bewegungsgleichung des Pendels, wenn es sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Ruhelage befindet und mit einem Stoß auf die Geschwindigkeit $v_o$ gebracht wird!

Übungsaufgabe 12: Man bestimme zu folgenden Differentialgleichungen die allgemeine Lösung:

a. $y'' - 4y' + 13y = 0$,
b. $y'' + 3y' - 4y = 0$,
c. $y'' - 4y' + 4y = 0$,

Übungsaufgabe 13: Man löse folgende Anfangswertaufgaben:

a. $4y'' + 4y' + y = 0$, $(x_0;y_0;z_0) = (0;2;0)$,
b. $y'' + 4y' + 29y = 0$, $(x_0;y_0;z_0) = (0;0;15)$,
c. $y'' - 4y' + 3y = 0$, $(x_0;y_0;z_i) = (0;6;10)$.

Außer den hier behandelten Differentialgleichungen gibt es noch eine Vielzahl anderer Typen, die spezielle Lösungsmethoden erfordern. Zur Ergänzung des hier dargestellten Stoffes empfehlen wir folgende Bücher:

1 W. May, Differentialgleichungen, Leipzig 1971 (Mathematische Schülerbücherei Bd. 49)
2 A. Kneschke, Differentialgleichungen und Randwertprobleme Bd. 1, Leipzig 1965
3 Kleine Enzyklopädie Mathematik

Dr. Oloff, Dr. Schwarz
Bereich Analysis

# Preisaufgaben 4/76

(H 19) ① Man löse die Gleichung

$$(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1}+(2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} = \frac{101}{10(2-\sqrt{3})}$$

(H 20) ① Man gebe alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$\sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}} = 1$$ an!

(H 21) ② $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ seien zwei senkrecht aufeinanderstehende Durchmesser des gegebenen Kreises $S_1$. Um den Punkt D wird ein weiterer Kreis $S_2$ mit dem Radius $\overline{BD}$ konstruiert. Auf der Peripherie von $S_1$ werden zwei Punkte P und Q so eingetragen, daß $\overline{DQ}$ und $\overline{DP}$ $\overline{AB}$ schneiden. Die Schnittpunkte von $\overline{DQ}$ und $\overline{DP}$ mit der Peripherie von $S_2$ seien mit N und M bezeichnet. Die Punkte $Q_1$ und $P_1$ erhält man durch die senkrechte Projektion vin Q und P auf $\overline{AB}$. Man zeige, daß die Figur PMNQ und das Dreieck $P_1Q_1D$ den gleichen Flächeninhalt haben.

(H 22) ② Man löse das Anfangswertproblem

$$y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 3 .$$

(H 23) ② Man gebe die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $(y^2-1) + (2xy+3y)y' = 0$ an.

(H 24) ② Найти все пары чисел x,y, которые удовлетворяют уравнению: $\mathrm{tg}^4 x+\mathrm{tg}^4 y+2\,\mathrm{ctg}^2 x\cdot\mathrm{ctg}^2 y = 3+\sin^2(x+y)$.

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.

Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.

Einsendeschluß: $\boxed{1.\ 6.\ 1976}$

# Der Horner-Newton-Algorithmus

Im Heft 2/76 wurde gezeigt, daß sich jedes Polynom $P_n(x)$ in der Form

$$P_n(x) = (x-x_o)\ P_{n-1}(x) + P_n(x_o) \qquad (1)$$

darstellen läßt. Dabei bestimmen sich die Koeffizienten von $P_{n-1}(x)$ aus dem Hornerschema. In gleicher Weise können wir $P_{n-1}(x)$ als

$$P_{n-1}(x) = (x-x_o)\ P_{n-2}(x) + P_{n-1}(x_o) \qquad (2)$$

aufschreiben. (2) in (1) eingesetzt ergibt

$$P_n(x) = (x-x_o)^2 P_{n-2}(x)+(x-x_o)\ P_{n-1}(x_o) + P_n(x_o).$$

Wir differenzieren beide Seiten dieser Gleichung

$$\frac{d}{dx} P_n(x) = 2(x-x_o)P_{n-2}(x)+(x-x_o)^2 \frac{d}{dx} P_{n-2}(x) + P_{n-1}(x_o)$$

und erhalten für $x = x_o$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} P_n(x) \Big|_{x=x_o} &= 2(x_o-x_o)P_{n-2}(x_o) + (x_o-x_o)^2 \frac{d}{dx} P_{n-2}(x)\Big|_{x=x_o} \\ &\quad + P_{n-1}(x_o) \\ &= P_{n-1}(x_o).\end{aligned}$$

Was besagt dieses Ergebnis? Die Ableitung unseres Ausgangspolynoms $P_n(x)$ an der Stelle $x_o$ ist gleich dem Funktionswert des Polynoms $P_{n-1}(x)$ bei $x_o$; sowohl die Koeffizienten von $P_{n-1}(x)$ als auch der Wert $P_{n-1}(x_o)$ lassen sich mit dem Hornerschema bestimmen.

Beispiel:

Wie groß ist $\frac{d}{dx} P_4(x) \Big|_{x=2}$ für $P_4(x) = 3x^5 - 2x^4 + x^2 - 7x - 4$ ?

Wir ermitteln zuerst $P_3(x)$:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | -2 | 0 | 1 | -7 | -4 |
| $x_o=2$ | - | 6 | 8 | 16 | 34 | 54 |
| | 3 | 4 | 8 | 17 | 27 | 50 |

$P_{n-1}(x) = P_3(x) = 3x^4+4x^3+8x^2+17x+27.$

Jetzt wird $P_3(2)$ berechnet:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 4 | 8 | 17 | 27 |
| $x_o=2$ | - | 6 | 20 | 56 | 146 |
| | 3 | 10 | 28 | 73 | $\boxed{173}$ |

Die Ableitung unseres Polynoms hat an der Stelle 2 somit den recht großen Wert $\frac{d}{dx} P_4(x) \Big|_{x=2} = P_3(2) = 173.$

Die letzte Zeile der oberen Tabelle stimmt mit der ersten der unteren überein (Koeffizient von $P_3(x)$), deshalb können wir beide Tabellen zu einer zusammenfassen. Wir wollen dies bei der Bestimmung von $P_4(1)$ und $\frac{d}{dx} P_4 (x)\Big|_{x=1}$ ausnutzen.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | -2 | 0 | 1 | -7 | -4 |
| $x_o=1$ | - | 3 | 1 | 1 | 2 | -5 |
| | 3 | 1 | 1 | 2 | -5 | $\boxed{-9}$ |
| $x_o=1$ | - | 3 | 4 | 5 | 7 | |
| | 3 | 4 | 5 | 7 | $\boxed{2}$ | |

Somit ist $P_4(1) = -9$ und $\frac{d}{dx} P_4(x) \Big|_{x=1} = 2$

Der Leser wird schon bemerkt haben, daß für verschiedene Werte $x_o$ unterschiedliche Polynome $P_{n-1}(x)$ entstehen.
Um $\frac{d}{dx} P_n(x) \Big|_{x=x_o}$ zu ermitteln, muß der Horner-Algorithmus in der angegebenen Art daher immer zweimal durchlaufen werden. Welche Bedeutung hat das so "vervollständigte Hornerschema"? Polynomwert und Wert der Ableitung werden zur iterativen Nullstellenbestimmung (vgl. Wurzel 4/75) nach dem Newtonverfahren benötigt. Der verbesserte Näherungswert $x_{k+1}$ für die Nullstelle ergibt sich aus einem vorhergehenden Näherungswert $x_k$ nach der Beziehung

$$x_{k+1} = x_k - \frac{P_n(x)}{\frac{d}{dx} P_n(x) \Big|_{x=x_k}} \quad .$$

Wir können beide Algorithmen zum Horner-Newton-Algorithmus vereinigen, der ein geeignetes und praktikables Verfahren zur automatischen Nullstellenbestimmung von Polynomen darstellt.

Das soll für unser Beispiel demonstriert werden.
Da $P_4(1) = -9$ und $P_4(2) = 50$ ist, muß zwischen 1 und 2 eine Nullstelle unseres Polynoms $P_4(x)$ liegen.
Wir wählen als ersten Näherungwwert dafür $x_o = 1{,}5$.
Der vervollständigte Horner-Algorithmus liefert:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | -2 | 0 | 1 | -7 | -4 |
| $x_o=1{,}5$ | - | 4,5 | 3,75 | 5,625 | 9,938 | 4,407 |
| | 3 | 2,5 | 3,75 | 6,625 | 2,938 | 0,407 |
| $x_o=1{,}5$ | - | 4,5 | 10,50 | 21,375 | 42,000 | |
| | 3 | 7,0 | 14,25 | 28,000 | 44,938 | |

Der verbesserte Näherungswert $x_1$ ergibt sich als

$$x_1 = 1{,}5 - \frac{0{,}407}{44{,}938}$$

$$= 1{,}5 - 0{,}00906$$

$$= 1{,}491.$$

Für diesen Wert bestimmen wir wiederum nach dem vervollständigten Horner-Algorithmus $P_4(x_1)$ und $\frac{d}{dx} P_4(x)\Big|_{x=x_1}$.
Es ergibt sich $x_2 = 1{,}490819$.

Das Verfahren wird solange fortgesetzt, bis die Iteration "steht", d.h. ab einem gewissen Index $k_o$ an ändern sich die $x_k$ nicht mehr. Für unser Beispiel wird im Rahmen einer siebenstelligen Genauigkeit der Rechnung bereits mit $x_2$ ein Wert erreicht, der sich nicht weiter verbessern läßt.
Wir werden im folgenden Artikel sehen, auf welche Weise ein Rechenautomat diesen Algorithmus anwenden kann.

**Gregor Weske**
**Assistent im**
**Forschungsbereich „Stochastik"**

# Lösungen

Aufgabe G 57

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{x}{a}}} = a\,.$$

Die Aufgabenstellung erfordert die Voraussetzungen $a > 0,\ \neq 1$ und $x > 0\ ,\ \neq 1$, da a und x als Basen von Logarithmen vorkommen. Wir erhalten durch Umformung von $\log_x a$ in $1/\log_a x$, wenn wir noch zur Abkürzung $\log_a x = L$ setzen (wegen $x \neq 1$ wird $L \neq 0$):

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}(1+L) + \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{L} + 1)} + \sqrt{\tfrac{1}{4}(L-1) + \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{L} - 1)} = a$$

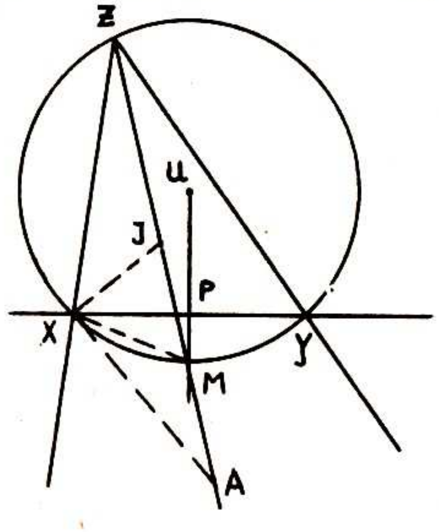
$$\sqrt{\frac{(1+L)^2}{L}} + \sqrt{\frac{(L-1)^2}{L}} = 2a$$

Für $L < 0$ gibt es keine Lösung. Für $L > 0$ ergibt sich

$$L + 1 + |L - 1| = 2a\sqrt{L}\,.$$

Ist $L \geq 1$, so ergibt sich $L = a\sqrt{L}$, also $L = a^2$, d.h. $x = a^{(a^2)}$.
Ist $0 < L < 1$, so ergibt sich $1 = a\sqrt{L}$, also $L = \frac{1}{a^2}$ d.h.
$x = a^{\frac{1}{a^2}}$. Man überprüfe, daß die Werte $x_1 = a^{(a^2)}$ und
$x_2 = a^{\frac{1}{a^2}}$ tatsächlich Lösungen der Gleichung sind.

Aufgabe G 61 (nach Rainer Lindemann, Cottbus, 12. Klasse)



Es sei I-Inkreismittelpunkt,
A-Ankreismittelpunkt,
U-Umkreismittelpunkt.

XYZ sei das gesuchte Dreieck. I und A liegen auf der Winkelhalbierenden von Winkel XZY. M sei Schnittpunkt des Umkreises mit der Winkelhalbierenden. Es gilt $\overline{XI} \perp \overline{XA}$ , da $\overline{XI}$ und $\overline{XA}$ die Winkelhalbierenden zweier Nebenwinkel sind.

Ferner gilt: $\overline{IM} = \overline{XM} = \overline{MA}$

Beweis: Es sei $\sphericalangle XZY = \gamma$ und $\sphericalangle YXZ = \alpha$ .

Peripheriewinkelsatz: $\sphericalangle MXY = \sphericalangle MZY = \frac{\gamma}{2}$

Es folgt: $\sphericalangle MXI = \sphericalangle IXY + \sphericalangle MXY = \frac{\alpha+\gamma}{2}$

Im Dreieck ZXM gilt: $\sphericalangle XMZ = 180^\circ - \frac{\gamma}{2} - (\alpha + \frac{\gamma}{2})$
$= 180^\circ - (\alpha + \gamma)$

Im Dreieck XIM gilt: $\sphericalangle XIM = \frac{\alpha+\gamma}{2}$

Somit gilt $\overline{XM} = \overline{IM}$ .

Ferner gilt $\sphericalangle IXA = 90^\circ$. Daraus folgt $\sphericalangle MXA = 90^\circ - \frac{\alpha+\gamma}{2}$ .

Im Dreieck IXA gilt: $\sphericalangle XAM = 90^\circ - (\frac{\alpha+\gamma}{2})$ , also gilt $\overline{XM} = \overline{MA}$.

<u>Konstruktion</u>:

1. Man zeichne die Gerade durch I und A.
2. Konstruktion von M durch Halbierung von $\overline{IA}$
3. Konstruktion des Thaleskreises über $\overline{IA}$
4. Kreis um U mit Radius $\overline{MU}$ schneidet den Thaleskreis in X. sowie Y und g in Z, wobei I zwischen A und Z liegen muß.

<u>Beweis</u>: Er ergibt sich leicht aus der Umkehrung der Schlüsse. Aus der Tatsache, daß M Element von $\overline{IA}$ und des Umkreises ist, sowie $\overline{IM} - \overline{XM} = \overline{MA}$, $\sphericalangle IXA = 90^\circ$ usw. (analog für Y) folgt , daß $\overline{XI}$ und $\overline{XA}$ jeweils die Winkelhalbierenden sowie I Inkreis- und A Ankreismittelpunkt sind.

<u>Determination</u>: (I und A seien fest, I $\neq$ A)

1. I muß innerhalb des Umkreises liegen, somit gilt:

$$\overline{MU} > \frac{\overline{MI}}{2}$$

Wenn $U \in g$, so muß U nicht mit A zusammenfallen.

2. Es gilt die Ungleichung $\overline{MU} > \overline{IU}$, denn stets gilt $\overline{MU} \geq \overline{UI} + \overline{IM}$. Gleichheit gilt nur, falls U auf g liegt(Dreiecksungleichung).

$\boxed{\text{Aufgabe G 62}}$ (nach Friedhelm Schieweck, Blumenberg)

Skizze:

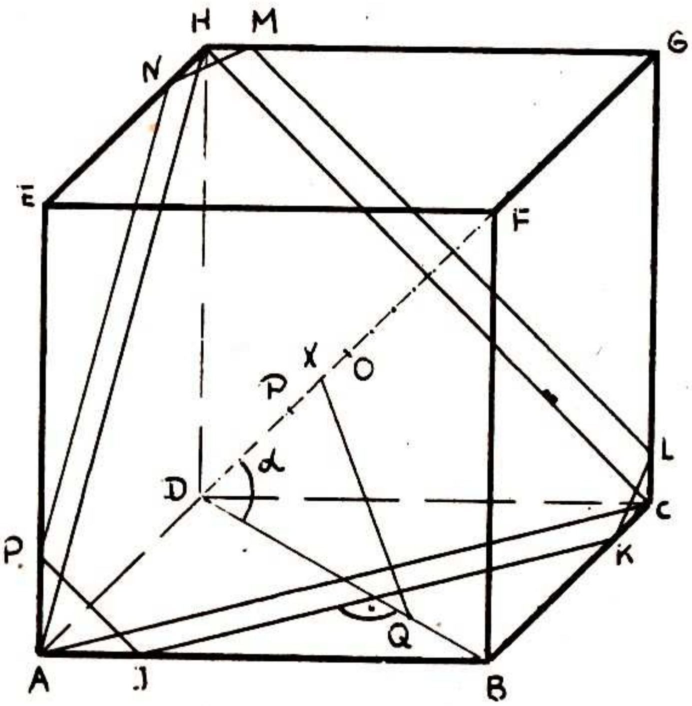



Abb. 1
(a sei die Seitenlänge des Würfels)

Es sei X der Schnittpunkt der Schnittebene mit der Würfeldiagonalen $\overline{DF}$. O.B.d.A. können wir $X \in \overline{DO}$ annehmen.
Die Schnittebene $\varepsilon_{ACH}$ stellt einen Grenzfall dar, denn bei $X \in \overline{OP}$ ist die Schnittfigur ein Sechseck IKLMNP (Abb. 1) und bei $X \in \overline{DP}$ fallen jedoch P und I, K und L sowie M und N zusammen, so daß ein Dreieck entsteht.

(Dabei ist P der Schnittpunkt von $\varepsilon_{ACH}$ mit $\overline{DF}$)
Es werden folgende Fälle betrachtet:

1. Fall: $X \in \overline{OP}$

Es sei Q der Punkt auf $\overline{DB}$ mit $\sphericalangle DXQ = 90^\circ$, d.h. Q liegt auf dem Rand der Schnittfigur und somit gilt $Q \in \overline{IK}$.
Aus $\overline{FD} = a\sqrt{3}$ und $\overline{DB} = a\sqrt{2}$ folgt mit
$\overline{DQ} = \frac{\overline{DX}}{\cos\alpha}$ und $\cos\alpha = \frac{\overline{DB}}{\overline{DF}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ :

$\overline{DQ} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \overline{DX}$. Mit $x = \overline{OX}$ und $\overline{DO} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ erhält man:
$$\overline{DQ} = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{a}{2}\sqrt{3} - x\right)$$
Aus Abb. 1 erhält man weiter:
$$\overline{BQ} = a\sqrt{2} - \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{a}{2}\sqrt{3} - x\right) = \frac{a}{4}\sqrt{2} + \frac{x}{2}\sqrt{6}.$$
Wegen $\sphericalangle QBI = \sphericalangle QIB = 45^\circ$ folgt $\overline{IQ} = \overline{QB}$.
Da die Schnittfigur zur Schnittgeraden mit der Ebene $\varepsilon_{DBFH}$ symmetrisch ist, gilt:
$$\overline{IK} = 2\,\overline{BQ} = \frac{a}{2}\sqrt{2} + x\cdot\sqrt{6}$$
Weiterhin: $\overline{IB} = \sqrt{2}\cdot\overline{BQ} = \sqrt{2}\left(\frac{a}{4}\sqrt{2} + \frac{x}{2}\sqrt{6}\right)$
$$= \frac{a}{2} + x\cdot\sqrt{3}$$
$$\overline{AI} = a - \overline{IB} = \frac{a}{2} - x\cdot\sqrt{3}$$
und wegen $\overline{AI} = \overline{AP}$ sowie $\sphericalangle PAI = 90^\circ$ folgt:
$$\overline{PI} = \sqrt{2}\;\overline{AI} = \frac{a}{2}\sqrt{2} - x\sqrt{6}.$$

Bemerkung:

Würde man den Punkt Q in die Ebene $\varepsilon_{ADH}$ legen und analog verfahren, so erhielte man $\overline{PN} = \frac{a}{2}\sqrt{2} + x\sqrt{6}$ und $\overline{EP} = \frac{a}{2} + x\sqrt{3}$, was $\overline{AI} = \overline{AQ}$ begründen würde.
Auf die gleiche Weise kommt man somit zu dem Gesamtergebnis:
$$\overline{IK} = \overline{LM} = \overline{PN} = \frac{a}{2}\sqrt{2} + x\sqrt{6} \quad \text{und}$$
$$\overline{PI} = \overline{KL} = \overline{MN} = \frac{a}{2}\sqrt{2} - x\sqrt{6}$$

2. Fall: $x \in \overline{DP}$

Hier fallen die Punkte P und I, K und L sowie M und N zusammen zu P, K und M. Man verfährt analog zu Fall 1 und erhält:

$\overline{DQ} = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{a}{2}\sqrt{3} - x\right)$. Dabei gilt $\overline{QP} = \overline{DQ}$ und aus Symmetriegründen $\overline{QP} = \overline{QK}$, also $\overline{PK} = 2\,\overline{QP} = \overline{DQ}$

$$= \frac{3}{2}\, a\sqrt{2} - x\sqrt{6}\,.$$

Würde man Q wieder in die andere Ebene legen, so erhält man das Resultat:

$\overline{PK} = \overline{KM} = \overline{PM} = \frac{3}{2}a\sqrt{2} - x\sqrt{6}$

$\boxed{\text{Aufgabe G 65}}$ (nach Jürgen Uhlig, Leipzig, 11. Klasse)

Es gilt $0 = \cos 6x + \cos 8x = 2\cos 7x \cos x$.

Damit sind zwei Fälle möglich:

1. Fall: $\cos x = 0$

2. Fall: $\cos 7x = 0$.

Wegen $\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$ ist die Bedingung $\cos 3x = 2\sin^2 2x$ äquivalent zu $\cos 3x + \cos 4x = 1$, d. h. $2\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2} = 1$.

Hieraus folgt mit $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$, $\cos 7x = 2\cos^2\frac{7x}{2} - 1$:

$$4\cos^2\frac{7x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 1$$
$$(\cos x + 1))\cos 7x + 1) = 1.$$

Im Fall 1 ergibt sich:

$$(0+1)(\cos 7x + 1) = 1$$
$$\cos 7x = 0,$$

im 2. Fall

$$(\cos x + 1)(0+1) = 1$$
$$\cos x = 0.$$

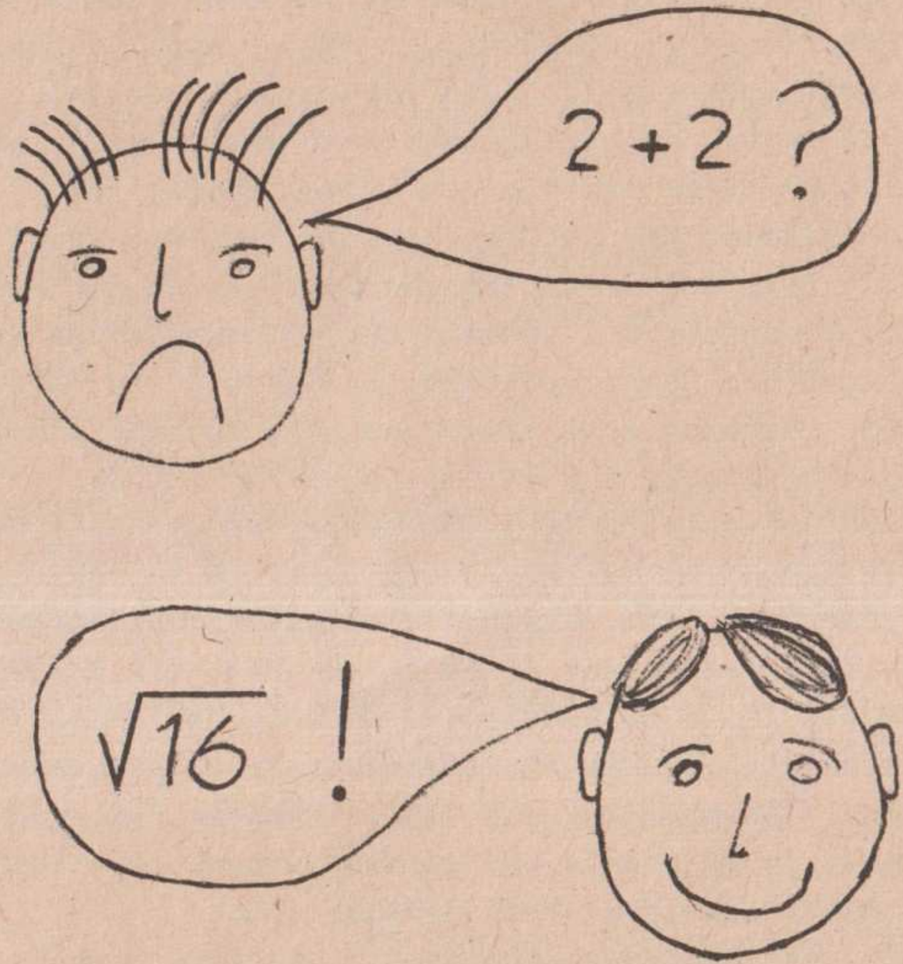
In beiden Fällen erhält man

$$\cos x = \cos 7x = 0. \qquad (1)$$

Es ist $\cos x = 0$ genau dann, wenn $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ (k ganzzahlig). Für $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ folgt $\cos 7x = \cos\frac{14k+7}{2}\pi = \cos\frac{2(7k+3)+1}{2}\pi = 0$, so daß alle diese x die Gleichung (1) erfüllen. Unter Berücksichtigung der Einschränkung $-5 < x < 5$ erhält man hieraus folgende Werte für x, die - wie eine Probe zeigt- die Bedingungen de · Aufgabe erfüllen:

$$x_{1/2} = \pm\frac{3}{2}\pi \quad , \qquad x_{3/4} = \pm\frac{\pi}{2} \quad .$$

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Egbert Creutzburg
**Chefredakteur:** Waltraud Werner
**Redaktion:** R. Jeske, H.-G. Leopold, R. Neubauer
**Anschrift:** WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
**Konto:** Postscheckkonto 180 45
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. 




5
76

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an

ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
10. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

# Differentialgleichungen in der Physik

Die Beziehungen zwischen Physik und Mathematik haben wir im Jahrgang 1975 der WURZEL ( Heft 6 und 7 ) betrachtet. Dort wurde festgestellt, daß verschiedene Gebiete der Mathematik von Physikern weiterentwickelt worden sind, weil die vorliegenden mathematischen Mittel häufig zur Lösung bestimmter physikalischer und technischer Probleme nicht ausreichten.
Ein Beispiel dafür ist die Entwicklung der Infinitesimalrechnung durch I. NEWTON zur mathematischen Fassung von Problemen der Bewegungslehre. In den meisten Fällen wird dabei die mathematische Seite der Untersuchung nicht mit der Strenge durchgeführt, die der Mathematiker mit Recht von seinen eigenen Arbeiten fordert. So zerbricht sich der Physiker in vielen Fällen nicht den Kopf über Probleme der Differenzierbarkeit und Stetigkeit. Erstens sind diese Forderungen bei den Funktionen, mit denen er es zu tun hat, meist ohnehin erfüllt (jedenfalls im Rahmen der klassischen Physik) und zweitens kann sich ein Naturwissenschaftler eine gewisse "Großzügigkeit" beim Umgang mit der Mathematik deswegen leisten, weil ja - im Gegensatz zur reinen Mathematik - seine Ergebnisse unmittelbar praktisch prüfbar sind.
Ein wesentlicher Bereich für die Anwendung der Mathematik in der Physik ist die Infinitesimalrechnung, insbesondere die Differentialgleichungen. Das wurde schon im o.g. Artikel ( WURZEL 6/75 und 7/75 ) deutlich. Wir wollen im folgenden dafür einige Beispiele vorstellen, wobei wir nicht auf die Theorie der Differentialgleichungen eingehen werden; wir versen auf die entsprechenden Artikel von Dr. Oloff und Dr. Schwarz ( WURZEL 2/76, 3/76 und 4/76 ).
Bei der Anwendung einer (oder mehrerer) Differentialgleichungen auf ein physikalisches oder technisches Problem kann man drei Phasen unterscheiden:

- Die Aufstellung der Differentialgleichung, die dem gestellten Problem angemessen ist. Dabei werden häufig Vereinfachungen vorgenommen ( David Hilbert: "Die Physik ist viel zu schwer für die Physiker" ).
- Die Lösung der Gleichung. Das ist die rein mathematische Seite der Problematik, wobei es häufig nicht auf die allgemeine Lösung ankommt, sondern es genügt oft eine spezielle Lösung.
- Interpretation (Deutung) des erhaltenen **Ergebnisses.**

Dabei sind der erste und der dritte Schritt die eigentliche "Arbeit des Physikers".

## 1. Fallende Körper unter Berücksichtigung der Reibung

Den <u>freien Fall</u> in der Nähe der Erdoberfläche haben wir bereits behandelt (WURZEL 6/75), wir wollen hier einen etwas komplizierteren Fall vorstellen.

Wir fragen nach der Bewegung eines Körpers in einem Medium, z.B. einer Stahlkugel in Wasser unter dem Einfluß der Schwerkraft. Solche Probleme treten z.B. bei der Messung der Zähigkeit von Flüssigkeiten oder bei der Ermittlung der Korngrößenverteilung in Tonerde auf.

Es treten dann drei Kräfte auf, die im Gleichgewicht stehen:

| | | |
|---|---|---|
| - Schwerkraft (Gewicht) | $m \cdot g$ | (nach unten gerichtet) |
| - Trägheitskraft | $m \cdot \ddot{x}$ | (nach oben gerichtet) |
| - Reibungskraft | $k \cdot \dot{x}$ | ( der Bewegung entgegengesetzt gerichtet, also beim fallenden Körper nach oben) |

Dabei bedeuten $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v$ die Geschwindigkeit,
$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt}$ = a die Beschleunigung; k ist die "Reibungskonstante", sie hängt von der Größe und Form des fallenden Körpers sowie von der Zähigkeit des Mediums ab.

Damit können wir die Differentialgleichung aufschreiben, sie lautet:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} = m \cdot g \quad \text{oder} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot \dot{x} - g = 0 \qquad (1)$$

Das ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, die wir in eine Differentialgleichung erster Ordnung für $v = \dot{x}$

umwandeln ( $\ddot{x} = \dot{v}$ ) :

$$\dot{v} + \frac{k}{m}\cdot v - g = 0 \qquad (2)$$

oder

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}\cdot v - g = 0 \qquad (3)$$

Wir trennen die Variablen ( v und t ) :

$$\frac{dv}{g - \frac{k}{m}\cdot v} = dt \qquad (4)$$

Integration auf beiden Seiten ergibt ( mit der Integrationskonstante C ):

$$C - \frac{m}{k}\cdot \ln \left( g - \frac{k}{m}\cdot v \right) = t \qquad (5)$$

C bestimmen wir aus der Anfangsbedingung, es soll für $t = 0$ auch $v = 0$ sein. Das ergibt:

$$C = \frac{m}{k}\cdot \ln g \qquad \text{und} \qquad t = \frac{m}{k}\cdot \ln \frac{g}{g - \frac{k}{m}\cdot v} \qquad (6)$$

bzw. nach v aufgelöst:

$$v = \frac{m\cdot g}{k}\left( 1 - e^{-\frac{k}{m}\cdot t} \right) \qquad (7)$$

Diese Gleichung ist physikalisch sehr interessant:

(a) Für kleine t ergibt sich die Näherung

$$v = g\cdot t - \frac{k\cdot g\cdot t^2}{m} \pm \dots , \qquad (8)$$

also ein Geschwindigkeitsverlauf wie beim freien Fall.

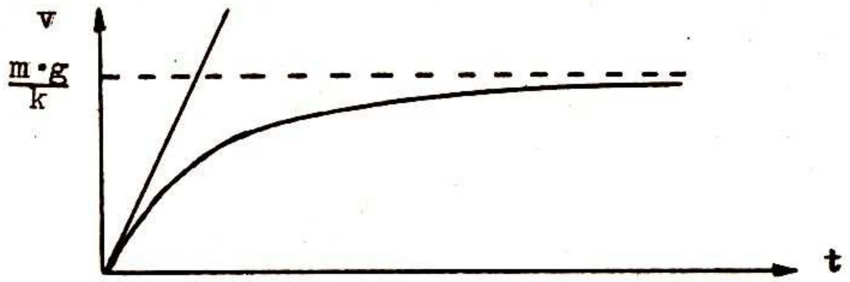
(b) Für $t \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$v = \frac{m\cdot g}{k} , \qquad (9)$$

also eine konstante **Geschwindigkeit.**

Ein in Luft frei fallender Mensch erreicht eine Endgeschwindigkeit von etwa 60 m/s.

Das Geschwindigkeit - Zeit - Diagramm zeigt die folgende Abbildung, die steigende Gerade würde beim Wegfall der Reibung gelten. Wir erkennen, daß die Bewegung von einer beschleunigten immer mehr in eine gleichförmige übergeht.




Wir können schließlich $x(t)$ durch nochmalige Integration von (7) berechnen:

$$x = \frac{m \cdot g}{k} \int \left( 1 - e^{\frac{k}{m} \cdot t} \right) dt$$

$$x = \frac{m \cdot g}{k} \left( t + \frac{m}{k} \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} + C_1 \right) \qquad (10)$$

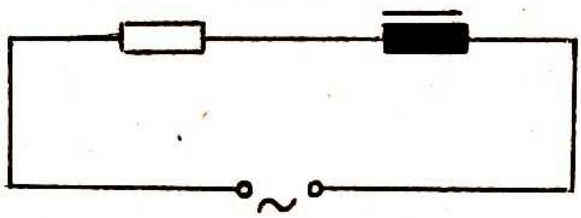
Fordern wir als Anfangsbedingung für $t = 0$ auch $x = 0$, so erhalten wir $C_1 = -\frac{m}{k}$ , also

$$x = \frac{m \cdot g}{k} \cdot t - \frac{m^2 \cdot g}{k^2} \cdot \left(1 - e^{-\frac{k}{m} \cdot t}\right) \qquad (11)$$

Diese Gleichung wollen wir nicht weiter diskutieren, das physikalisch wesentliche über den Bewegungsvorgang hat uns bereits Gleichung (7) geliefert.

## 2. Der induktive Widerstand

Wir betrachten eine Reihenschaltung einer Spule und eines Schichtwiderstandes im Wechselstromkreis.



Der Spannungsabfall am Schichtwiderstand beträgt $I \cdot R$. In der Spule wird eine Gegenspannung $- L \cdot \frac{dI}{dt}$ ( L - Induktivität ) induziert, zu deren Überwindung die Spannung $L \cdot \frac{dI}{dt}$ erforderlich ist. Die Summe dieser Spannungen ist gleich der angelegten Spannung $U_0 \cdot \sin \omega t$ ( mit $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ ).
Damit erhalten wir als Differentialgleichung für unsere Schaltung:

$$R \cdot I + L \cdot \dot{I} = U_0 \cdot \sin \omega t \qquad (12)$$

Es ist für die Physik oft typisch, daß man bei der Lösung von Differentialgleichungen von plausiblen Ansätzen ausgeht. Hier ist zu erwarten, daß ein Wechselstrom fließt, der die gleiche Frequenz wie die angelegte Spannung hat, aber möglicherweise phasenverschoben ist.
Wir schreiben als Lösungsansatz:

$$I = I_0 \cdot \sin ( \omega t - \varphi ) = I_0 \cdot \sin \omega t \cdot \cos \varphi - I_0 \cdot \cos \omega t \cdot \sin \varphi \qquad (13)$$

und müssen jetzt fragen

- Ist das eine Lösung der Differentialgleichung (12) ?
- Wenn das der Fall ist, wie berechnen sich dann $I_0$ und $\varphi$ ?

Wir setzen den Lösungsansatz (13) in Gleichung (12) ein, wobei wir auf die <u>allgemeine</u> Lösung verzichten, diese ist für das praktische Problem meist nicht von Interesse.

Mit

$$\dot{I} = I_0 \cdot \omega \cdot \cos \omega t \cdot \cos \varphi + I_0 \cdot \omega \cdot \sin \omega t \cdot \sin \varphi \qquad (14)$$

erhalten wir aus Gleichung (12)

$$\begin{aligned} & I_0 \cdot R \cdot \sin \omega t \cdot \cos \varphi - I_0 \cdot R \cdot \cos \omega t \cdot \sin \varphi \\ & + I_0 \cdot \omega \cdot L \cdot \cos \omega t \cdot \cos \varphi + I_0 \cdot \omega \cdot L \cdot \sin \omega t \cdot \sin \varphi \\ & = U_0 \cdot \sin \omega t \end{aligned}$$

oder umgeformt

$$\begin{aligned} & I_0 \cdot \sin \omega t \, [ R \cdot \cos \varphi + \omega \cdot L \cdot \sin \varphi ] \\ & + I_0 \cdot \cos \omega t \, [ - R \sin \varphi + \omega \cdot L \cdot \cos \varphi ] \\ & = U_0 \cdot \sin \omega t \qquad (15) \end{aligned}$$

Die Gleichheit muß für <u>beliebige</u> Werte von t gelten. Das ist genau dann der Fall, wenn die Glieder mit $\sin \omega t$ beiderseits des Gleichheitszeichens übereinstimmen und entsprechend auch die Glieder mit $\cos \omega t$. Wir erhalten damit folgende zwei Gleichungen:

$$I_o \left[ R \cdot \cos \varphi + \omega \cdot L \cdot \sin \varphi \right] = U_o \qquad (16)$$

$$- R \cdot \sin \varphi + \omega \cdot L \cdot \cos \varphi = 0 \qquad (17)$$

Aus (17) erhalten wir sofort

$$\tan \varphi = \frac{\omega \cdot L}{R} \qquad (18)$$

Aus (16) ergibt sich

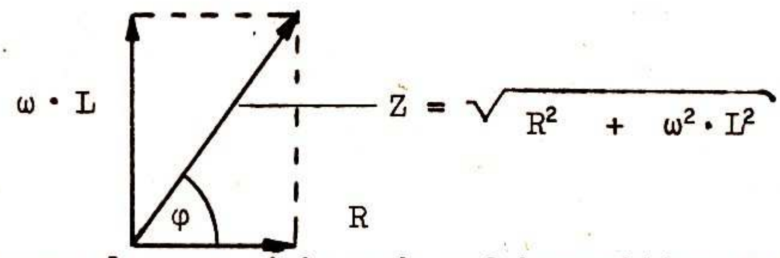
$$\frac{U_o'}{I_i} = R \cdot \cos \varphi + \omega \cdot L \cdot \sin \varphi$$

unter Verwendung von Gleichung (18)

$$Z = \frac{U_o}{I_o} = \sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2} \qquad (19)$$

Die Größe $Z = \frac{U_o}{I_o}$ bezeichnen wir als "Scheinwiderstand" des Wechselstromkreises. Damit ist bewiesen, daß der Ansatz (13) mit den Ergebnissen (18) und (19) <u>eine</u> Lösung der Differentialgleichung (12) ist.

Eine anschauliche Darstellung des Ergebnisses gibt folgendes "Zeigerdiagramm", das die Wechselstromwiderstände als Vektoren widergibt, wobei die Richtung der Vektoren die Phasenbeziehungen angibt.




Solche Zeigerdiagramme lassen sich auch auf kapazitive Widerstände erweitern, sie sind ein wertvolles Hilfsmittel für die Untersuchung von Wechselstromvorgängen.

## 3. Die traurige Geschichte vom Elfenpaar

Folgende kleine Geschichte soll den Leser dazu anregen, selbst eine einfache Differentialgleichung für ein Bewegungsproblem aufzustellen und zu lösen.

Ein Elfenpärchen lebte ganz allein glücklich auf einer Kugel vom Radius $r_o = 1$ m . Eines Tages, als sich die beiden Elfen gerade an entgegengesetzten Punkten der Kugel aufhielten, begann ein böser Geist , die Kugel gleichmäßig aufzublasen, und zwar so, daß der Radius gleichmäßig mit einer Geschwindigkeit von $u = 1$ m/s wächst. Das Elfenmännchen begann sofort mit seiner Höchstgeschwindigkeit $v = 0{,}1$ m/s zu seiner Partnerin zu laufen . Aber die Lage erscheint aussichtslos, denn in einer Sekunde kann der Elf eine Strecke von 0,1 m zurücklegen, aber in der gleichen Zeit vergrößert sich die Entfernung zur Elfe um 3,14 m.
Trotzdem läßt sich folgendes zeigen:
Bei den angegebenen Bedingungen erreicht der Elf sein Weibchen in 1,40 Millionen Jahren. Läuft ihm aber die Elfe mit der gleichen Geschwindigkeit ( $v = 0{,}1$ m/s ) entgegen, so treffen sich beide bereits nach 77 Tagen.

Rechnen Sie!

**Dr. sc. Klaus Jupe**
**Leiter des Wissenschaftsbereiches**
**Physikmethodik**

---

## BERICHTIGUNG

Wie Sie sicher bemerkt haben, hatte sich bei den Preisaufgaben in Heft 4/76 ein Fehler eingeschlichen.
In Aufgabe H 20 muß es richtig heißen:

Man gebe alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$\sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}} = 1$$

$$\sqrt{x^2-y} + \sqrt{x^2+y} = 1 \quad \text{an!}$$

# Preisaufgaben 5/76

(H 25) Man gebe die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

2

$$y^2 ( 1 + x^2 ) y' = ( 1 + y^3 ) x$$ an.

(H 26) Man gebe die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

2

$$y' x^2 + y' 6x = - 34 y'$$ an.

(H 27) Man gebe die Lösung des Anfangswertproblems

2

$$y'' - 6 y' + 9y = 0 ; \quad y (1) = 1 , y' (1) = e^3 + 1$$

an.

(H 28) Gegeben seien eine Sehne $\overline{CD}$ und zwei Peripheriepunkte A und B eines Kreises, so daß sich die Sehnen $\overline{CD}$ und $\overline{AB}$ nicht schneiden. In diesen Kreis konstruiere man den Peripheriepunkt M so, daß die Sehnen $\overline{AM}$ und $\overline{BM}$ die Sehne $\overline{CD}$ in P und Q schneiden bei fest vorgegebenem Abstand a von P und Q.

1

(H 29) Man löse die folgende Ungleichung:

2

$$\log_{|x + 6|} 2 \cdot \log_2 ( x^2 - x - 2 ) \geq 1$$

# Karl-Marx-Seminar

Es hat sich an unserer Universität eine gute Tradition herausgebildet: alljährlich - nun schon zum neunten Male - veranstalten die FDJ-Studenten der Friedrich-Schiller-Universität gemeinsam mit internationalen Gästen im Rahmen der FDJ-Studententage ihr Karl-Marx-Seminar.
Hier befassen sich Vertreter aller Sektionen unter einem zentralen Thema auf theoretisch anspruchsvollem Niveau mit Problemen ihres unmittelbaren Wirkungsbereiches, mit Fragen der aktuellen Politik.
Die bisherigen Karl-Marx-Seminare bewiesen immer wieder, welch großen Nutzen ein solches Forum im Rahmen des Studiums als gesellschaftlichen Prozeß besitzt. Dieser ergibt sich vor allem aus den folgenden Gesichtspunkten:

- Unsere FDJ - Studenten dokumentieren ihre hohe politische Reife, ihre Verbundenheit mit Partei und Staat. Eine parteiliche Haltung zeigt sich auch, indem mit Sachkenntnis die Probleme genannt werden und man ausgehend von einer festen Klassenposition Wege zu deren Überwindung aufzeigt.
- Durch die Diskussionen in den FDJ-Gruppen während der Ausarbeitung der Beiträge ergeben sich wiederholt Anlässe der Bestandsaufnahme der eigenen FDJ-Arbeit in den Gruppen, indem sie an den eigenen theoretischen Erkenntnissen gemessen wird.
- Der Marxismus-Leninismus ist Grundlage der Ausbildung an allen Hochschulen unserer Republik. Das Kennenlernen der marxistisch-leninistischen Weltanschauung ist aber nicht identisch mit ihrer Aneignung, die sich auch darin äußert, daß man sie im praktischen Leben zum bewußten Ausgangspunkt des Handelns macht. Andererseits genügt es nicht für eine parteilich-überzeugende Argumentation , an die Klärung der Grundfragen unserer gesellschaftlichen Entwicklung von einem rein emotionalen Standpunkt aus heranzugehen.

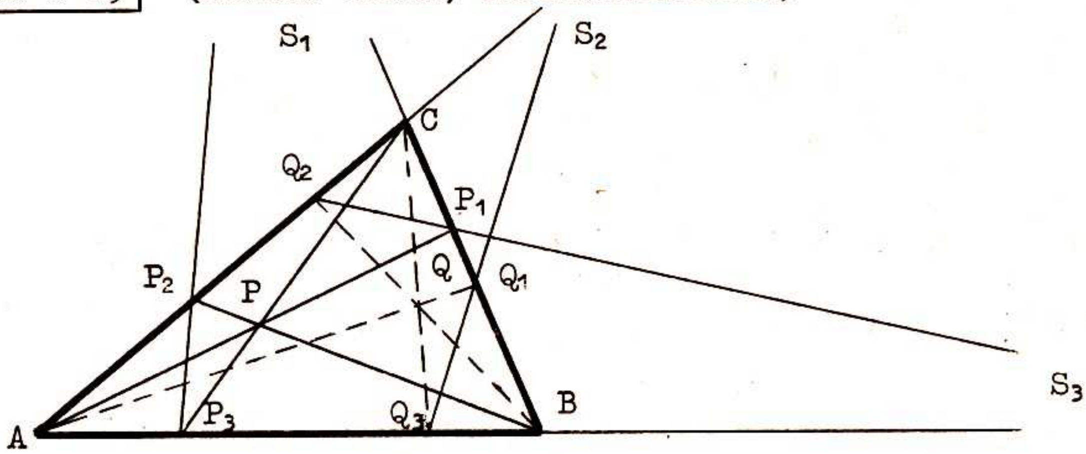
In diesem Sinne leistet das Karl-Marx-Seminar einen Beitrag zur bewußten Anwendung des Marxismus-Leninismus auf Fragen unserer Zeit.

Das diesjährige IX. Karl-Marx-Seminar, das ganz im Zeichen des 30.Jahrestages der Gründung der SED und der Vorbereitung des IX. Parteitages der SED steht, läuft unter dem Thema " Sozialismus - Partei - Jugend ".
Die bereits vorliegenden Thesen beweisen, daß die Studenten unserer Sektion das Anliegen dieses Themas verstanden haben: Unser Dank der Partei für ihre kontinuierliche Politik im Interesse der Jugend. Das 'Ja' für diese Politik, indem wir uns aktiv an ihr beteiligen, was für uns in erster Linie bedeutet: Wahrnehmung unserer Verantwortung im Studium.
Wir werden in Abhängigkeit vom Anliegen unserer Zeitschrift von diesem Karl-Marx-Seminar berichten, falls es Beiträge gibt, die auch das Interesse unserer Abonnenten finden könnten.
Übrigens, falls es etwa in Ihrer Bildungseinrichtung Vorstellungen über ähnliche Veranstaltungen gibt, sind wir gern bereit, über unsere FDJ-Hochschulgruppenleitung Erfahrungen bei der Durchführung des Karl-Marx-Seminars -im vergangenen Jahr durch den FDJ-Zentralrat mit der Arthur-Becker-Medaille geehrt- zu vermitteln.

**Egbert Creutzburg**
**Leiter des Jugendobjektes**
**Studienvorbereitung**

# Lösungen

Aufgabe G 69 (Thomas Kaatz, Gräfenhainichen)




Außer den Bezeichnungen der Aufgabenstellung seien

$S_1$: Schnittpunkt der Geraden $g(P_2, P_3)$ und $g(P_1, Q_1)$

$S_2$: Schnittpunkt der Geraden $g(Q_1, Q_3)$ und $g(P_2, Q_2)$

$S_3$: Schnittpunkt der Geraden $g(Q_2, P_1)$ und $g(P_3, Q_3)$

Dabei gilt $g(P_1, Q_1) = g(B,C)$, $g(P_2, Q_2) = g(A,C)$, $g(P_3, Q_3) =$ $= g(A,B)$.

Dann seien folgende Teilverhältnisse definiert:

$g(P_2, P_3)$ ist Transversale

$$\overrightarrow{CP_2} : \overrightarrow{P_2A} = a_1,\quad \overrightarrow{AP_3} : \overrightarrow{P_3B} = a_2,\quad \overrightarrow{BS_1} : \overrightarrow{S_1C} = a_3;$$

$g(Q_3, Q_1)$ ist Transversale

$$\overrightarrow{BQ_1} : \overrightarrow{Q_1C} = b_1,\quad \overrightarrow{CS_2} : \overrightarrow{S_2A} = b_2,\quad \overrightarrow{AQ_3} : \overrightarrow{Q_3B} = b_3;$$

$g(P_1, Q_1)$ ist Transversale

$$\overrightarrow{BP_1} : \overrightarrow{P_1C} = c_1,\quad \overrightarrow{CQ_2} : \overrightarrow{Q_2A} = c_2,\quad \overrightarrow{AS_3} : \overrightarrow{S_3B} = c_3.$$

Außerdem gilt nach dem Satz von Menelaos bezüglich des Dreiecks ABC

$$a_1 a_2 a_3 = b_1 b_2 b_3 = c_1 c_2 c_3 = -1$$

$$a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3 c_1 c_2 c_3 = -1 \qquad (*)$$

und nach dem Satz von Ceva:

$$a_2 c_1 a_1 = b_3 b_1 c_2 = 1$$

$$a_1 a_2 c_1 b_3 b_1 c_2 = 1,$$

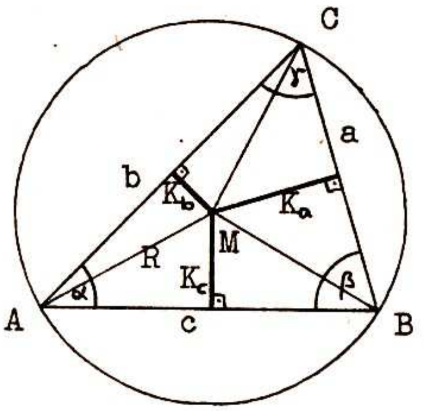
also nach (*) $\quad a_3 b_2 c_3 = -1,$

Mit der Umkehrung des Satzes von Menelaos folgt, daß $S_1, S_2$ und $S_3$ auf einer Geraden liegen, d. h., im Sechseck $Q_1 P_1 Q_2 P_2 P_3 Q_3$

liegen die Schnittpunkte je zweier Gegenseiten auf einer Geraden. In Verbindung mit der Umkehrung des Pascalschen Lehrsatzes über Sehnensechsecke von Kegelschnitten folgt damit die Behauptung der Aufgabe.
Um welchen Kegelschnitt es sich handelt, hängt von der Art des Dreiecks bzw. von der Wahl der Geradenbüschel P und Q ab.

Der Beweis wurde unter der Voraussetzung der Existenz von $S_1$, $S_2$ und $S_3$ geführt. Sollten sich Parallelitäten ergeben, so erreicht man durch analoges Vorgehen wie beim Beweis des Pascalschen Satzes und unter Beibehaltung der Ceva-Beziehungen den Beweis der Behauptung.

**Aufgabe G 72** (nach Reiner Lindemann)




Nach bekannten Flächenformeln gilt für die Fläche des Dreiecks:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = r \cdot s = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin\gamma \qquad (1)$$

mit $s = \frac{a+b+c}{2}$, R – Umkreisradius, r – Inkreisradius.
Aus (1) folgt:

$$r = \frac{F}{s} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{F} \qquad (2)$$

$$R = \frac{abc}{4F} \qquad (3)$$

Da $K_a$, $K_b$ und $K_c$ Abschnitte der Mittelsenkrechten sind, gilt

$$K_a^2 = R^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2b^2c^2}{16F^2} - \frac{a^2}{4} \qquad \text{(nach (3))}$$

$$K_a = \frac{a}{4F}\sqrt{b^2c^2 - 4F^2} .$$

Analog erhält man $K_b$ und $K_c$. Also ist

$$K_a + K_b + K_c = \frac{1}{4F}\left(a\sqrt{b^2c^2 - (2F)^2} + b\sqrt{a^2c^2 - (2F)^2} + c\sqrt{b^2a^2 - (2F)^2}\right)$$

$$= \frac{abc}{4F}\left(\sqrt{1-\sin^2\alpha} + \sqrt{1-\sin^2\beta} + \sqrt{1-\sin^2\gamma}\right)$$

(nach (1)). Nach Anwendung des Kosinussatzes folgt (da $\Delta ABC$ spitzwinklig ist, gilt $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma > 0$ und somit $(b^2+c^2-a^2)$, $(a^2+c^2-b^2)$ bzw. $(a^2+b^2-c^2) > 0$):

$$K_a + K_b + K_c = \frac{1}{8F}\{2abc(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\}$$

$$= \frac{1}{8F}\{a(b^2+c^2-a^2) + b(a^2+c^2-b^2) + c(a^2+b^2-c^2)\}$$

$$= \frac{1}{8F}\{ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2-a^3-b^3-c^3-2abc+2abc\}$$

$$= \frac{1}{8F}\{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) + 2abc\}$$

$$= \frac{(s-c)(s-b)(s-a)}{F} + \frac{abc}{4F}$$

$$= r + R \qquad \text{(nach (2) und (3)).}$$

$\boxed{\text{Aufgabe G 71}}$ (Friedhelm Schieweck, Blumenberg)

1. Behauptung: $2\cdot\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cos\frac{k\pi}{2n+1} = 1.$

<u>Beweis:</u> Es sei $z =_{Df} \cos\frac{\pi}{2n+1} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2n+1}$.

Dann ist $\quad z^k = \cos\frac{k\pi}{2n+1} + i\cdot\sin\frac{k\pi}{2n+1} \qquad (1)$

und $\quad z^{-k} = \cos\frac{k\pi}{2n+1} - i\cdot\sin\frac{k\pi}{2n+1}. \qquad (2)$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\cos\frac{k\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}\cdot(z^k + z^{-k})$$

Damit ist

$$2\cdot\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cos\frac{k\pi}{2n+1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(z^k + z^{-k})$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}(-z)^k - \sum_{k=1}^{n}(-z)^{-k} = -(-z)\frac{1-(-z)^n}{1+z} - \frac{1}{(-z)^n}\,\frac{1-(-z)^n}{1+z}$$

$$= \frac{1-(-z)^n}{1+z}\left(z - \frac{1}{(-z)^n}\right) = \frac{z+(-z)^{n+1}+1-1/(-z)^n}{1+z}$$

$$= 1 + \frac{1}{(1+z)(-z)^n}\left((-z)^{2n+1}-1\right) = 1 + \frac{1}{(1+z)(-z)^n}(-z^{2n+1}-1) \ .$$

Wegen $z^{2n+1} = \cos\pi = -1$ ist der zweite Summand gleich Null. Damit ist die Behauptung bewiesen.

2. Behauptung: $2^n \cdot \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi}{2n+1} = 1.$

Beweis:

Der Ausdruck $x^{2n+1} - 1$ wird in $x^{2n+1} - 1 = \prod_{\nu=1}^{2n+1}(x-\varepsilon_\nu)$ zerlegt, wobei $\varepsilon_\nu$ die $(2n+1)$ten Einheitswurzeln der Gleichung $x^{2n+1}-1$ sind mit

$$\varepsilon_\nu = \cos\frac{2\nu\pi}{2n+1} + i\cdot\sin\frac{2\nu\pi}{2n+1} \ .$$

$(x-1)$ ist offenbar Teiler von $x^{2n+1}-1$. Weiterhin existieren noch n Paare von konjugiert komplexen Einheitswurzeln $\varepsilon_\nu$. Da $\cos t$ im Intervall $[0,\pi]$ streng monoton fallend ist, können für $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ $\varepsilon_i$ und $\varepsilon_j$ nicht zusammenfallen, denn sie unterscheiden sich schon im Realteil wegen

$$0 < \frac{2\nu\pi}{2n+1} < \pi \quad \text{für } \nu \in \{1,2,\dots,n\} \ .$$

Für $k = 1,2,\dots,n$ existiert also die konjugiert komplexe Einheitswurzel

$$\bar{\varepsilon}_k = \cos\frac{2k\pi}{2n+1} - i\cdot\sin\frac{2k\pi}{2n+1} \ .$$

Hieraus folgt

$$x^{2n+1} - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{n}(x-\varepsilon_k)(x-\bar{\varepsilon}_k)$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\{x^2 - (\varepsilon_k + \bar{\varepsilon}_k)x + \varepsilon_k\bar{\varepsilon}_k\}(x-1) \ .$$

Mit $\varepsilon_k + \bar{\varepsilon}_k = 2\cdot\cos\frac{2k\pi}{2n+1}$ und $\varepsilon_k\bar{\varepsilon}_k = |\varepsilon_k|^2 = 1$ folgt weiter:

$$x^{2n+1} - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1} + 1\right).$$

Für x = −1 ergibt sich:

$$-2 = (-2)\prod_{k=1}^{n}\left(2 + 2\cdot\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$$

$$1 = 2^n\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$$

Unter Verwendung von $2\cdot\cos^2 t = 1 + \cos 2t$ erhält man:

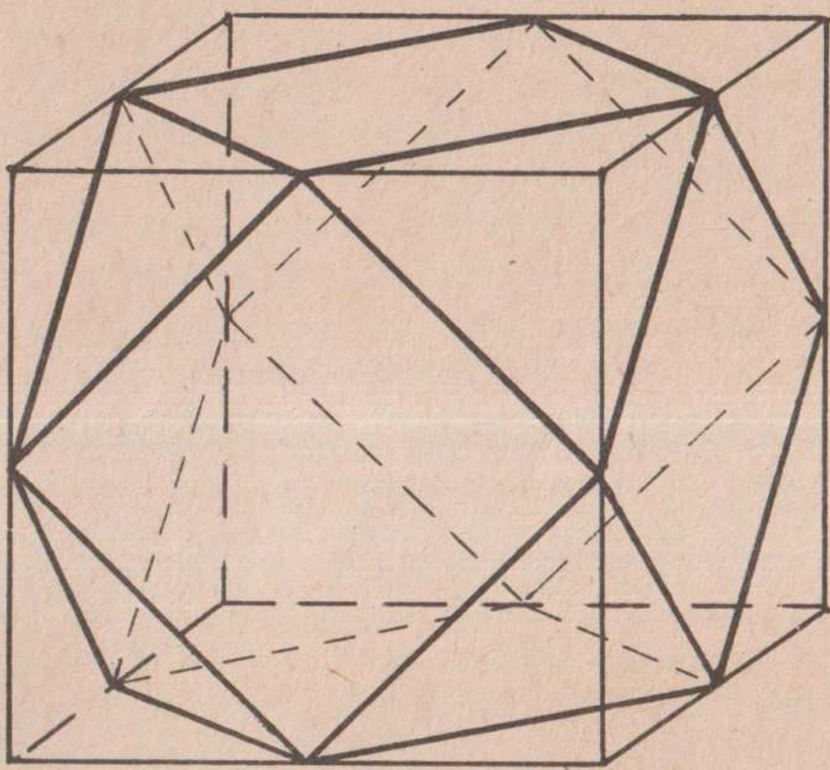
$$1 = 2^n\prod_{k=1}^{n} 2\cos^2\frac{k\pi}{2n+1} = \left\{2^n\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n+1}\right\}^2 \qquad (3)$$

Wegen $0 < \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$ für alle $k = 1,2,\ldots,n$ gilt $\cos\frac{k\pi}{2n+1} > 0$

und damit auch $2^n\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n+1} > 0$, so daß aus (3) folgt

$2^n\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n+1} = 1$, was zu beweisen war.

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Egbert Creutzburg
**Chefredakteur:** Waltraud Werner
**Redaktion:** R. Jeske, H.-G. Leopold, R. Neubauer
**Anschrift:** WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
**Konto:** Postscheckkonto 180 45
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932



6

76

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an

ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

10. Jahrgang

Index 33 873

Preis: 0,20 M

# Statistische Qualitätskontrolle (I)

Dieser Beitrag soll keine Einführung in das Gebiet der Mathematischen Statistik sein (hierfür verweisen wir auf das ausgezeichnete Büchlein von U. Grenander, "Einführung in das Studium der mathematischen Statistik", Fachbuchverlag Leipzig 1969). Wir wollen lediglich an einem Beispiel zeigen, wie in der Praxis Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie und der mathematischen Statistik benutzt werden.
Wir setzen voraus, daß der Leser mit den Beiträgen "Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung" (WURZEL 12/75 und 1/76) bekannt ist.

## 1. Das Anliegen der Statistischen Qualitätskontrolle ("Gut - Schlecht- Prüfung")

Durch die Qualitätskontrolle in den Betrieben soll vermieden werden, daß minderwertige Erzeugnisse in die Fertigung gelangen bzw. ausgeliefert werden. Dabei ist es wirtschaftlich oft nicht gerechtfertigt (bzw. nicht möglich, wenn nämlich die Erzeugnisse bei der Prüfung beschädigt oder zerstört werden), jedes einzelne Erzeugnis zu prüfen. Man entnimmt dann dem zu prüfenden Warenposten (auf bestimmte Weise) eine Stichprobe von Erzeugnissen, prüft diese und kommt so zu einem Urteil über die Qualität des Warenpostens. Dabei kann es natürlich zu Fehlentscheidungen kommen, weil ja die Verhältnisse in der Stichprobe nicht in jedem Fall die gleichen wie im gesamten Warenposten sein müssen. Das Anliegen der Qualitätskontrolle durch Stichprobenprüfung besteht also in folgendem:

- Trennung "schlechter" Warenposten von "guten"
- Beschränkung des Prüfaufwandes (der Prüfkosten!)
- Verminderung des Risikos von Fehlentscheidungen

Wir setzen jetzt immer voraus, daß bei der Prüfung eines Erzeugnisses nur die Ergebnisse "gut" oder "schlecht" zugelassen sind.

Das ist natürlich eine starke Einschränkung, da komplizierte Erzeugnisse meist durch eine Vielzahl von Qualitätsparametern charakterisiert werden.

## 2. Der Einfachstichprobenplan

Bei diesem Verfahren wird aus einem Warenposten, der N Erzeugnisse umfasse, auf eine noch näher zu bestimmende Weise eine Stichprobe von $n < N$ Erzeugnissen entnommen und geprüft. Die Anzahl der dabei als "schlecht" befundenen Erzeugnisse bezeichnen wir mit k. Nun gilt folgende Entscheidungsregel:

Ist $k \leq c$, so wird der Warenposten angenommen,
im Falle $k > c$ wird er zurückgewiesen.

Dabei ist c die sogenannte Annahmezahl. Der Einfachplan wird also durch den Vektor $[n, c]$ charakterisiert. Es taucht nun die Frage auf, wie n und c gewählt werden müssen, damit der Prüfaufwand und das Risiko von Fehlentscheidungen möglichst gering sind.

Bevor wir auf diese Frage eingehen, muß noch geklärt werden, auf welche Weise die Stichprobe entnommen wird (außerdem muß der Begriff "Risiko von Fehlentscheidungen" präzisiert werden).

## 3. Die Zufallsstichprobe

Um die Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung anwenden zu können, muß die Stichprobenentnahme gewissen Bedingungen genügen.
Eine Stichprobe bezeichnet man - grob gesagt - als "Zufallsstichprobe", wenn die Entnahme der Stichprobenelemente aus dem Warenposten so erfolgt, daß jedes Element des Postens (Stück, Erzeugnis) die gleiche "Chance" (Wahrscheinlichkeit) besitzt, in die Stichprobe aufgenommen zu werden.

Wir wollen den Begriff "Zufallsstichprobe" jetzt exakt fassen. Aus einem Warenposten vom Umfang $N$ kann man genau $\binom{N}{n}$ verschiedene Stichproben vom Umfang $n$ entnehmen. (Dabei betrachten wir zwei Stichproben als verschieden, wenn es mindestens ein Element gibt, das in der einen Stichprobe enthalten ist, in der anderen jedoch nicht.)

Das kann man so beweisen:

Wir stellen uns vor, daß der Warenposten durchnumeriert ist (mit den Zahlen $1,2,\ldots,N$) und wir die Stichprobenelemente hintereinander entnehmen und die Nummer notieren.
Wir erhalten dann eine Folge $l_1, \ldots, l_n$, wobei die $l_i$ voneinander verschiedene Zahlen zwischen 1 und $N$ sind.
Da $l_1$ $N$ verschiedene Werte annehmen kann, $l_2$ aber nur noch $N-1$ verschiedene Werte annehmen kann (ein Element ist ja bereits entnommen), kommen wir zu dem Schluß, daß es genau

$$N(N-1)(N-2)\ \ldots\ (N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!}$$

verschiedene Folgen $l_1, \ldots, l_n$ (d.h. verschiedene Auswahlen mit Berücksichtigung der Reihenfolge) gibt.
Da aber jeweils $n!$ dieser Auswahlen sich nur durch die Reihenfolge der Elemente unterscheiden (es gibt ja genau $n!$ Permutationen von $n$ Elementen), ergibt sich, daß den $\frac{N!}{(N-n)!}$ verschiedenen Auswahlen mit Berücksichtigung der Reihenfolge genau $\frac{N!}{(N-n)!\,n!} = \binom{N}{n}$ verschiedene Auswahlen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge (d.h. Stichproben) entsprechen.

Der Versuch "Entnahme von $n$ Elementen aus einem Posten des Umfangs $N$" hat also $\binom{N}{n}$ verschiedene mögliche Versuchsausgänge.
Wir sprechen von einer "Zufallsstichprobe", wenn der Entnahmemechanismus so beschaffen ist, daß alle Versuchsausgänge die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen.

**Beispiel:**

Nehmen wir das Ziehen von Lotto-Zahlen. Dieser Vorgang kann als die Entnahme einer Stichprobe (vom Umfang $n = 5$) aus einem Warenposten (vom Umfang $N = 90$) gedeutet werden. Der Mechanismus der Ziehung (Trommel usw.) gewährleistet offensichtlich, daß eine "Zufallsstichprobe" entnommen wird.

( Hier sind übrigens $\binom{90}{5} \approx 4 \cdot 10^7$ verschiedene Stichproben möglich.) In der Praxis der Warenprüfung zu einer "Zufallsstichprobe" zu gelangen, ist nicht ganz so einfach.
In den Fällen, in denen sich die Elemente des Warenpostens durchnumerieren lassen, kann man den Vorgang der Ziehung von Lotto-Zahlen nachahmen. Man benutzt dazu Tabellen von sogenannten "Zufallszahlen" bzw. "Zufallswürfel". (Wir gehen auf dieses Problem nicht weiter ein, sondern verweisen Interessenten auf die Monographie Schindowski/Schütz "Statistische Qualitätskontrolle", Verlag Technik, Berlin 1966, S. 303 ff.)

Wir setzen im weiteren stets voraus, daß eine Zufallsstichprobe vorliegt.

## 4. Annahmewahrscheinlichkeit und Operationscharakteristik

Aus einem Warenposten vom Umfang $N$ entnehmen wir eine Zufallsstichprobe vom Umfang $n < N$. Das ist ein Versuch, der $\binom{N}{n}$ verschiedene Versuchsausgänge besitzt.
Durch die Forderung "Zufallsstichprobe" ist gewährleistet, daß man das klassische Modell der Wahrscheinlichkeitsrechnung anwenden kann:
Alle Versuchsausgänge besitzen die gleiche Wahrscheinlichkeit (in unserem Fall $\frac{1}{\binom{N}{n}}$ ).

Wir nehmen jetzt an, die Zahl der defekten Teile des Warenpostens $M$ sei uns bekannt. (Natürlich ist in der Praxis $M$ nicht bekannt. Aufgabe der statistischen Qualitätskontrolle ist es ja gerade, Angaben über $M$ zu erhalten. Dazu kommen wir im nächsten Beitrag.)
Mit $A_k$ bezeichnen wir das Ereignis, daß in der Stichprobe genau $k$ defekte Teile sind. Für die Wahrscheinlichkeit $P(A_k)$ gilt (vgl. WURZEL 12/75):

$$P(A_k) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Versuchsausgänge}}{\text{Anzahl der möglichen Versuchsausgänge}}$$

Die Anzahl derjenigen Auswahlen vom Umfang n (aus einer Menge mit M "defekten" und N-M "guten" Teilen), die genau k defekte Teile enthalten, ist

$$\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k} \quad .$$

(Das begründet man ebenso wie vorn.)

Damit ergibt sich:

$$P(A_k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Für große Werte von N ist die numerische Berechnung nach dieser Formel sehr kompliziert.

Man kann aber zeigen:

Für $N \rightarrow \infty$ , $M \rightarrow \infty$ , $\frac{M}{N} = p$ gilt

$$P(A_k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \longrightarrow \binom{n}{k} \cdot p^{n} \cdot (1-p)^{n-k}$$

(Wir verzichten auf den Beweis)

Man kann also zur Berechnung von $P(A_k)$ die Formel

$$P(A_k) = \binom{n}{k} \; p^{k} \cdot (1 - p)^{n-k}$$

benutzen, falls $N \gg n$.

Dabei ist $p = \frac{M}{N}$ , $p \cdot 100\%$ heißt der "<u>Ausschußprozentsatz</u>".

Wir wollen nun die <u>Annahmewahrscheinlichkeit L</u> berechnen, die natürlich vom Ausschußanteil p abhängt:

L(p) = P ("Annahme des Warenpostens")

Da wir den Warenposten annahmen, falls die Anzahl der defekten Teile $k \leq c$ , ist das gleich

L(p) = P ("höchstens c defekte Teile sind in der Stichprobe")

$$L(p) = P ( A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_c )$$

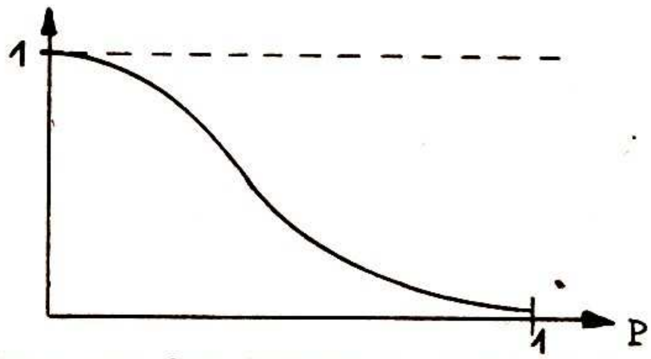
Weil die Ereignisse $A_0, A_1, \ldots, A_c$ durchschnittsfremd sind (sie können ja nicht gleichzeitig eintreten) gilt nach Folgerung S.181, WURZEL 12/75 :

$$L(p) = P(A_o) + P(A_1) + \dots + P(A_c)$$

Die $P(A_k)$ haben wir vorn berechnet. Wir erhalten also (falls $N \gg n$)

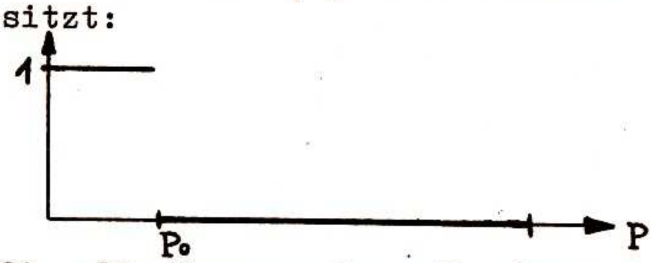
$$L(p) = \sum_{k=0}^{c} \binom{n}{k} \cdot (p)^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Die Kurve $L(p)$ wird <u>Annahmekennlinie</u> oder <u>Operationscharakteristik</u> genannt. Die Gestalt der Kurve hängt natürlich vom Prüfplan $n$, $c$ ab.
Sie hat folgendes qualitatives Aussehen:




Wir können aus der Abbildung entnehmen:
Ist der Ausschußanteil $p$ klein, wird die Annahmewahrscheinlichkeit näher bei 1 sein, ist $p$ nahe N, dann wird man mit großer Wahrscheinlichkeit <u>nicht</u> annehmen.
Das sind natürlich Forderungen, die man an einen "vernünftigen" Prüfplan stellt.

Stellen wir uns vor, ein Abnehmer wolle nur Warenposten mit einem Ausschußanteil $p_o$ (oder kleiner) annehmen. Ideal wäre dann ein Prüfplan $[n, c]$, der folgende Operationscharakteristik besitzt:




Das heißt, <u>alle</u> Warenposten mit einem Ausschußanteil $p < p_o$ werden angenommen, <u>alle anderen</u> abgelehnt.

Natürlich gibt es einen solchen Prüfplan nicht. Wenn man nur einen Teil der Waren prüft und daraus auf den gesamten Warenposten schließt, kann es zu Fehlentscheidungen kommen.

Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, wie man das Risiko von solchen Fehlentscheidungen abschätzen kann.

**Dr. H. Debes**
**Oberassistent im Bereich**
**Wahrscheinlichkeitsrechnung**

# Preisaufgaben 6/76

H 31 ① Man löse folgendes Gleichungssystem

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3 y$$
$$\sin x = \cos 2y$$

H 32 ① Man beweise, daß

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4$$

ist.

H 33 ② Man beweise, daß für $a+b+c = 0$

$$a^5(b^2+c^2)+b^5(a^2+c^2)+c^5(b^2+a^2) = \frac{(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4)}{2}$$

ist.

H 34 ② Das Parallelgeradentripel $g_a g_b g_c$ trägt das gleichseitige Dreieck $ABC: A \in g_a$, $B \in g_b$, $C \in g_c$. Die Gerade durch O, den Mittelpunkt des Dreiecks ABC, steht senkrecht auf $g_a, g_b, g_c$. Sie schneidet: $g_a$ in A', $g_b$ in B', $g_c$ in C'. Zieht man durch A' die Parallele zu AO,
durch B' die Parallele zu BO,
durch C' die Parallele zu CO,
so bilden diese drei Geraden ein Geradenbüschel Z, was zu beweisen ist.

H 35 ① Man löse die Ungleichung:

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3.$$

# Einführung in die Programmsprache INKA 4100

## 1. Arten der Programmierung einer EDVA

Wenn wir auf einer elektronischen Datenverarbeitungsanlage ( EDVA ) einen Algorithmus realisieren wollen, so müssen wir ihn in eine Folge von Befehlen zerlegen.
Die Form der einzelnen Befehle ist dabei vom Typ der Rechenanlage abhängig. Man spricht von maschinenorientierter Programmierung. Der Nachteil dieser Art des Programmierens liegt auf der Hand:
Jede EDVA hat ihre eigene Art von Befehlen und Regeln für die Abfolge der Befehle.
Deshalb führte man maschinenunabhängige, nur auf das zu lösende Problem orientierte Programmiersprachen ein. Ein in problemorientierter Programmiersprache zu lösendes Problem läßt sich auf einer beliebigen EDVA realisieren, sofern für diese ein Übersetzungsprogramm - der sogenannte Compiler - vorhanden ist.
Der Compiler ist ein Programm zur Bearbeitung von Programmen. Der von ihm gesteuerte Übersetzerlauf des Rechners bildet aus dem Programm in problemorientierter Programmiersprache ein dem speziellen Rechner "verständliches" Maschinenprogramm.
In problemorientierter Programmiersprache geschriebene Programme sind kürzer als Maschinenprogramme und besser zu überschauen. Wie wir im weiteren sehen werden, orientiert sich ihr Aufbau stark an der mathematischen Symbolik und ist Elementen der Umgangssprache ( im allgemeinen Englisch ) nachgebildet.
Diesen wesentlichen Vorteilen steht der Aufwand für den Übersetzerlauf und eine allgemein größere Abarbeitungszeit des Programms gegenüber, da das durch automatische Übersetzung gewonnene Maschinenprogramm meist eine größere Zahl von Befehlen enthält als ein von einem geschickten Programmierer direkt erstelltes Maschinenprogramm.

Mit Gewinn wendet man heute die Programmierung in problemorientierter Programmiersprache zur automatischen Behandlung der für Naturwissenschaften und Mathematik typischen umfangreichen und komplizierten Algorithmen an, während für viele ökonomische Belange die maschinenorientierte Programmierung überwiegt.
Je nach Aufgabenstellung und für den Rechner vorhandenen Compilern kann man verschiedene Programmiersprachen verwenden. Die wichtigsten darunter sind ALGOL, FORTRAN und PL 1 . Diese Namen sind von den Entwicklern der Sprache eingeführte Abkürzungen. Wir wollen im folgenden einen Überblick über INKA 4100 geben. Der Name INKA bedeutet INterpreting on-line-KAlkulator.

## 2. Elemente von INKA 4100

Wie unsere Umgangssprache besitzt INKA ein Alphabet, worunter wir die Menge der zugelassenen Zeichen verstehen wollen. Dieses umfaßt :

a.) die Großbuchstaben A bis Z
b.) die Ziffern 0 bis 9
c.) die Zeichen

Zwischenraum (Leertaste)

| | |
|---|---|
| = | gleich |
| + | plus |
| - | minus |
| * | mal |
| / | dividiert durch |
| $_{10}$ (Index-Zehn) | potenziert |
| ( | runde Klammer auf |
| ) | runde Klammer zu |
| [ | eckige Klammer auf |
| ] | eckige Klammer zu |
| . | Dezimalpunkt |
| , | Komma |
| ; | Semikolon |
| ' | Apostroph |

Durch Aneinanderreihung von Elementen dieser Zeichenmenge entstehen INKA - "Befehlssätze". Natürlich muß es dafür eine Lehre über die zulässigen Formen, eine Syntax, geben, deren Regeln sehr streng sind, damit ein automatisches "Verstehen" der Anweisung möglich ist.
Wir wollen nun anhand von Beispielen die einzelnen Typen von Anweisungen einführen:

a.) Die Wertzuweisung

Das Symbol A soll den Wert -2 annehmen. Die INKA - Anweisung hat folgende Form:

SET A=-2

Was ist zu beachten?
Wie bei allen folgenden Anweisungen muß zwischen Anweisungswort (SET) und Symbol (A) ein Zwischenraum sein. Als Symbole sind zugelassen :

| | |
|---|---|
| i.) ein Buchstabe | z.B. C (einzige Ausnahme: F ist nicht erlaubt) |
| ii.) zwei Buchstaben | z.B. PI |
| iii.) ein Buchstabe und danach eine Ziffer | z.B. M1 |

Mit der Anweisung SET kann einem Symbol nicht nur ein Zahlenwert, sondern auch der Wert eines arithmetischen Ausdrucks zugewiesen werden.

Beispiel:

Das Symbol F1 soll den Zahlenwert des Flächeninhalts eines Kreises mit dem Durchmesser d annehmen.
Wenn wir für π den Näherungswert 3.1416 setzen, können wir die folgende Anweisung formulieren:

SET F1 = 3.1416/4 * $D_{10}2$

Was wird unter einem arithmetischen Ausdruck verstanden?
Wir wollen das induktiv definieren:

D e f i n i t i o n :

1. Zahlen und Symbole sind arithmetische Ausdrücke.
2. Sind H und K arithmetische Ausdrücke, dann sind auch

i.) +H, -H, +K und -K

ii.) H+K und H-K

iii.) H * K und H/K

iv.) $H_{10}K$

arithmetische Ausdrücke.

Wir nennen die Ausdrücke vom Typ i.) Ausdrücke nullter, vom Typ ii.) Ausdrücke erster, vom Typ iii.) Ausdrücke zweiter und vom Typ iv.) Ausdrücke dritter Stufe.
Die Abarbeitung arithmetischer Ausdrücke erfolgt nach den bekannten Vorrangregeln, d.h. zuerst werden Ausdrücke höherer Stufe abgearbeitet, z.B. entspricht $A+B * C_{10}D$ dem Term $a+bc^d$, er wird als $A+(B *(C^D))$ abgearbeitet.
Nebeneianderstehende Ausdrücke gleicher Stufe werden von links nach rechts abgearbeitet, wie es im obigen Befehl zur Berechnung von F1 ersichtlich ist.
Sollen die Operationen in anderer Reihenfolge ablaufen, so sind runde Klammern zu setzen. Die Auflösung ineinandergeschachtelter Klammern erfolgt von innen nach außen.
Im Gegensatz zur Formelschreibweise darf der Stern für die Multiplikation nicht weggelassen werden. Für das Potenzieren sind nur positive Exponenten zulässig. Wichtig ist weiterhin, daß bei den Zahlen mit gebrochenem Teil statt des Kommas ein Dezimalpunkt zu verwenden ist.

b.) Der Schreibbefehl

Wir wollen das unter a.) als -2 definierte A über das Schreibwerk des Rechners ausgeben. Dazu dient der Befehl

TYPE A .

Die Stelle des A kann eine Zahl oder auch ein beliebiger arithmetischer Ausdruck annehmen. So könnte statt

TYPE F1 auch

TYPE $3.1416/4 * D_{10}2$ stehen.

Falls in einem vorhergehenden SET - Befehl D = 2 gesetzt worden ist, erscheint in beiden Fällen über Schreibmaschine 3.1416.

Mit einem Schreibbefehl lassen sich auch mehrere arithmetische Ausdrücke ausgeben. Diese sind dabei durch Komma zu trennen, z.B.

```
TYPE  -2, F1/2 .
```

Über das Schreibwerk des Rechners wird

```
-  2.0000    1.5708
```

ausgedruckt.

Das Zeichen [ organisiert einen Wagenrücklauf und Zeilenvorschub der Schreibmaschine.

```
TYPE  -2,[ ,F1/2
```

ergibt im Gegensatz zu oben

```
-  2.0000
   1.5708
```

Oft ist es notwendig und sinnvoll, einen Text auszugeben. Auch das ist mit dem Befehl TYPE möglich. Der Text muß dabei in Apostrophe eingeschlossen werden.
Die Ausführung von

```
TYPE 'DER WERT VON PI IST', F1
```

ergibt die Zeile

```
DER WERT VON PI IST   3.1416 .
```

Dem Leser sei zum Abschluß dieser Fortsetzung die Aufgabe gestellt, mit Hilfe des TYPE - Befehls und eines arithmetischen Ausdrucks durch den Rechner einen Näherungswert für $\sqrt{2}$ bestimmen und ausgeben zu lassen, dazu einen erläuternden Text und Zeilenvorschub-Wagenrücklauf.

**Gregor Weske**
**Assistent im Forschungsbereich**
**»Stochastik«**

## Lösung der Aufgabe vom Elfenpärchen (WURZEL 5/76, S. 72 ):

Für den zurückgelegten Winkel gilt ($\omega = \frac{v}{r}$ : Winkelgeschwindigkeit

$$d\varphi = \omega . dt = \frac{v}{r} . dt \qquad (1)$$

Dabei ist der Radius r der Kugel veränderlich, es gilt

$$r = r_o + u.t \qquad (2)$$

Setzen wir das in (1) ein, ergibt sich

$$d\varphi = \frac{v}{r_o + u.t} dt \qquad (3)$$

Integration auf beiden Seiten liefert

$$\int_0^{\pi} d\varphi = \int_0^{t} \frac{v}{r_o + u.t} dt \qquad (4)$$

$$\pi = \frac{v}{u} \left[ \ln(r_o + u.t) - \ln r_o \right]$$

$$= \frac{v}{u} . \ln \frac{r_o + u.t}{r_o} \qquad (5)$$

bzw.

$$e^{\frac{\pi . u}{v}} = \frac{r_o + u.t}{r_o} \qquad (6)$$

und

$$t = \frac{r_o}{u} \left( e^{\frac{\pi . u}{v}} - 1 \right) \qquad (7)$$

<u>Fall 1:</u> $r_o = 1\text{m}; \quad u = 1 \text{ m/s}; \quad v = 0{,}1 \text{ m/s}$

$$t = 1 \text{ s}.(e^{10\pi} - 1) \approx 4{,}4.10^{13} \text{ s} \approx \underline{1{,}40.10^6 \text{ Jahre}}$$

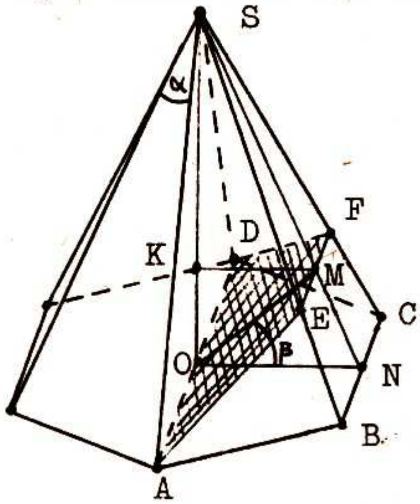
<u>Fall 2:</u> $r_o = 1\text{m}; \quad u = 1 \text{ m/s}; \quad v = 0{,}2 \text{ m/s}$

$$t = 1 \text{ s}.(e^{5\pi} - 1) \approx 6{,}6.10^6 \text{ s} \approx \underline{77 \text{ Tage}}$$

# Lösungen

Aufgabe H 3

Sei s die Spitze der Pyramide, SO die Höhe der Pyramide,a die Kantenlänge des regelmäßigen Sechsecks und weiter sei $\overline{BN} = \overline{NC}$. (siehe Abb.)




Aus den Dreiecken SON und SBC folgt:

$$\frac{\overline{KM}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{OM} \cdot \cos\beta}{\overline{ON}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{SM}}{\overline{SN}} = \lambda \tag{1}$$

$\overline{ON}$ ist Höhe im gleichseitigen Dreieck BOC, also ist

$$\overline{ON} = a\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Hieraus folgt: $\overline{EF} = \lambda \cdot a$ , $\overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\lambda}{\cos\beta}\,a$

Die Schnittfläche ergibt sich aus:

$$\frac{1}{2}\left(\overline{AD} + \overline{EF}\right) OM = \frac{1}{2}\left(2a + \lambda\, a\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\lambda}{\cos\beta}\,a$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4\cos\beta}\,\lambda(\lambda + 2)\,a^2 = A_s$$

Für die Grundfläche (regelmäßiges Sechseck) gilt:

$$A_G = 3\,\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

Wir erhalten das gesuchte Verhältnis:

$$\frac{A_s}{A_G} = \frac{1}{6\cos\beta}\,\lambda(\lambda + 2) \tag{2}$$

Um die Aufgabe vollständig zu lösen, muß $\lambda$ bestimmt werden. Sei $\sphericalangle SNO = \varphi$. Nach dem Sinussatz im Dreieck SOM erhalten wir:

$$\overline{SM} = \overline{SO}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{\sin(\beta+\varphi)} = \overline{SO}\,\frac{\cos\beta}{\sin(\beta+\varphi)}$$

Weil $\overline{SO} = \overline{SN}\sin\varphi$ ist, folgt:

$$\lambda = \frac{\overline{SM}}{\overline{SN}} = \frac{\cos\beta\,\sin\varphi}{\sin(\beta+\varphi)} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}\beta\,\operatorname{ctg}\varphi} \qquad (3)$$

Wir müssen jetzt noch $\operatorname{ctg}\varphi$ berechnen.
Dazu berechnen wir:

$$\overline{SN} = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \qquad \overline{ON} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{SO} = \sqrt{\overline{SN}^2-\overline{ON}^2} = \frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-3}$$

Folglich erhalten wir für $\operatorname{ctg}\varphi$ :

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\overline{ON}}{\overline{SO}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-3}}$$

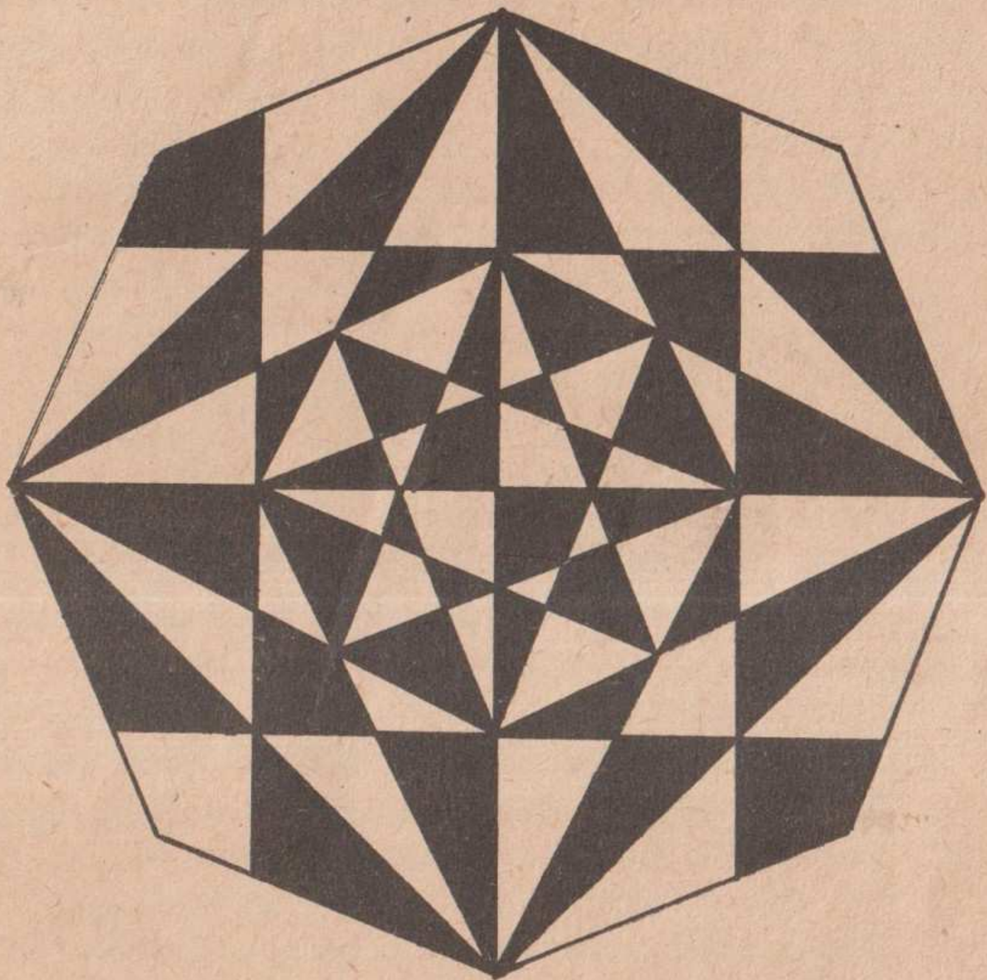
Es ergibt sich aus (2) und (3) :

$$\lambda = \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-3}}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-3}+\sqrt{3}\operatorname{tg}\beta} \qquad (4)$$

Das gesuchte Verhältnis lautet :

$$\frac{A_S}{A_G} = \frac{1}{6\cos\beta}\,\lambda(\lambda+2) \quad \text{mit } \lambda \text{ aus (4).}$$

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Egbert Creutzburg
**Chefredakteur:** Waltraud Werner
**Redaktion:** R. Jeske, H.-G. Leopold, R. Neubauer
**Anschrift:** WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
**Konto:** Postscheckkonto 180 45
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932



7

76

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an

ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

10. Jahrgang

Index 33 873

Preis: 0,20 M

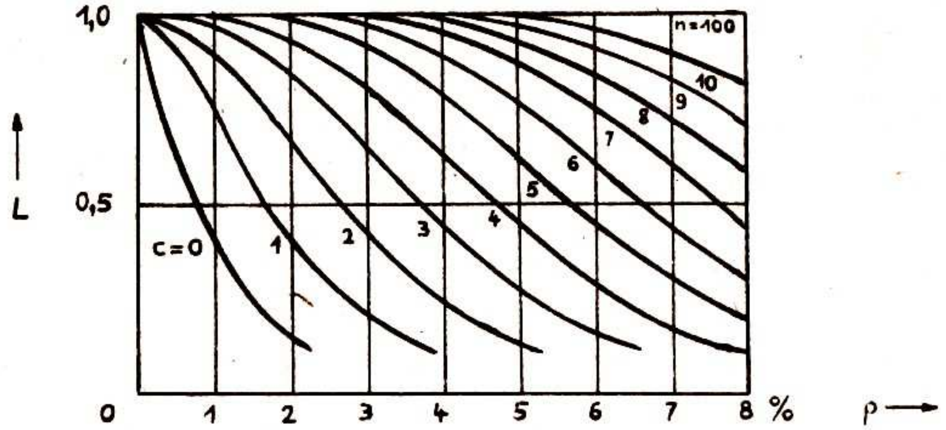
# Statistische Qualitätskontrolle (II)

## 5. Eigenschaften der Operationscharakteristik (OC-Kurve)

Es soll nun untersucht werden, in welcher Weise die Gestalt der Annahmekennlinie von den Parametern des Prüfplanes n und c abhängt.

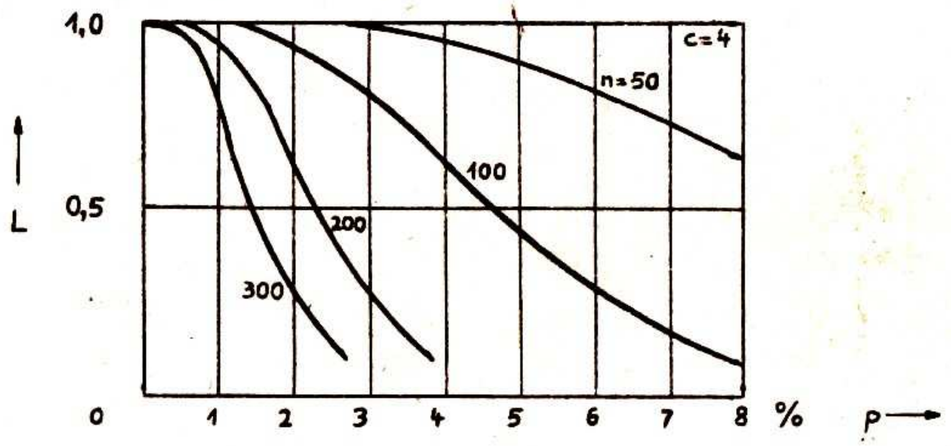
Aus der Formel für L(p) folgt sofort, daß mit größer werdender Annahmezahl c auch die Annahmewahrscheinlichkeit (bei einem bestimmten Ausschußanteil p) wächst.

Die Abbildung zeigt OC-Kurven für n=100, c=0,1,...,10.




Wächst bei gleicher Annahmezahl c der Stichprobenumfang n, dann fällt die Annahmewahrscheinlichkeit (bei einem bestimmten Ausschußanteil p). Das ist zu erwarten, weil bei größeren Stichproben natürlich auch mehr Ausschußteile in der Stichprobe zu erwarten sind und folglich die Annahmezahl häufiger überschritten wird.

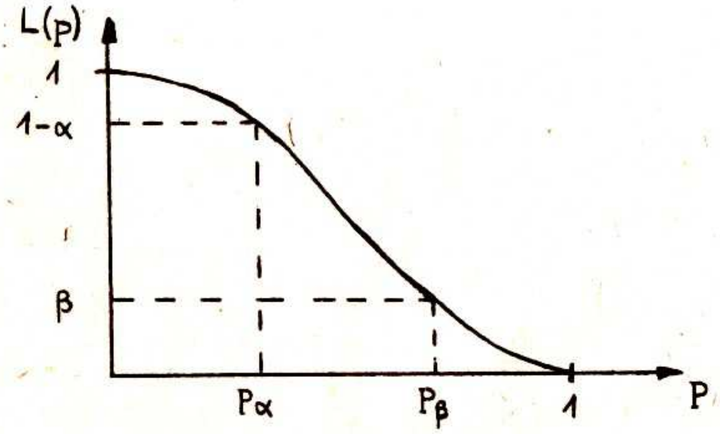
Die folgende Abbildung zeigt OC-Kurven für c=4 und n=50,100,200,300.



Im folgenden Abschnitt werden wir sehen, wie man diese Eigenschaften der OC-Kurven benutzt, um geeignete Stichprobenpläne zu konstruieren.

## 6. Verbraucher- und Herstellerrisiko

Bei der Wahl eines geeigneten Stichprobenplanes müssen i.a. die Interessen von Hersteller und Verbraucher "unter einen Hut" gebracht werden. Der Verbraucher ist daran interessiert, daß Warenposten mit einem hohen Ausschußanteil (höher als $p_\beta$, die sogenannte "Schlechtlage")mit kleiner Wahrscheinlichkeit angenommen werden. Die Wahrscheinlichkeit $\beta$ dafür, daß Warenposten mit einem Ausschußanteil $p_\beta$ angenommen werden, heißt Verbraucherrisiko. Der Hersteller möchte, daß bei niedrigem Ausschußanteil (niedriger als $p_\alpha$, der sogenannten "Gutlage") mit großer Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ angenommen wird.
Die Wahrscheinlichkeit $\alpha$ dafür, daß Warenposten mit einem Ausschußanteil $p_\alpha$ abgelehnt werden, heißt Herstellerrisiko. Haben sich also Hersteller und Verbraucher auf die Werte $p_\alpha$, $p_\beta$, $\alpha$, $\beta$ geeinigt, dann muß nur noch ein Stichprobenplan gefunden werden, dessen Annahmekennlinie die Bedingungen $L(p_\alpha) \geq 1-\alpha$, $L(p_\beta) \leq \beta$ erfüllt:




In der Praxis verwendet man meist $\alpha = \beta = 10\ \%$ und die Gut- und Schlechtlagen werden von Fall zu Fall vom Hersteller und Verbraucher "ausgehandelt".
Es ist natürlich klar, daß bei extremen Forderungen ($p_\alpha$ groß, $p_\beta$ klein) nur Stichprobenpläne mit sehr großen Stichprobenumfängen n "kleine Risiken" gewährleisten können. Hier müssen die Prüfkosten und die Kosten, die durch diese Fehlentscheidungen entstehen, berücksichtigt werden.

Manchmal werden Stichprobenpläne aufgestellt, die nur das Verbraucherrisiko gering halten, das Herstellerrisiko dagegen unbeachtet lassen (oder umgekehrt).
In der DDR sind in der TGL 14450 Richtlinien für die Durchführung der statistischen Qualitätskontrolle und umfangreiche Tabellen zum Aufsuchen geeigneter Stichprobenpläne vorhanden.

## 7. Schlußbemerkung

Wir haben an einem einfachen Beispiel gesehen, wie sich Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie in der Praxis anwenden lassen. Die Wahrscheinlichkeitstheorie und die mathematische Statistik beschäftigen sich mit der Untersuchung von zufälligen Massenerscheinungen. In diesem Sinne ist die statistische Qualitätskontrolle ein extremes Beispiel. Denn im Grunde liegt hier kein "echter" Zufall vor. Jeder Lieferposten hat ja einen festen, wenn auch unbekannten Ausschußanteil. Der Zufall wird erst durch die Stichprobenentnahme ("auf gut Glück") "erzeugt". Bei anderen Anwendungen der Statistik ist der Zufall nicht "künstlich erzeugt", sondern in der Natur der Erscheinungen begründet (Meßvorgänge, Zellteilungen, Wachstumsprozesse usw.).

**Dr. H. Debes**
**Oberassistent im Bereich**
**Wahrscheinlichkeitsrechnung und**
**Mathematische Statistik**

# Preisaufgaben 7/76

H 37 Man löse die Ungleichung

②

$$x^{\frac{5x+2}{5x+10}} < 1$$

H 38 Gegeben seien die Höhen $\overline{AA_1}=h_a$, $\overline{BB_1}=h_b$ des Dreiecks ABC, sowie die Winkelhalbierende $\overline{CD}=l$ des Winkels ACB. Man berechne den Winkel ACB.

①

**H 39** Man löse die Gleichung

1

$$\sin 4x \left[2+\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] = 2\sqrt{2}\,(1+\sin 2x + \cos 2x)$$

**H 40** Man zeige, daß die Gleichung $x^3+ax^2-b=0$ für $a, b$ reell, $b>0$ eine und nur eine positive Wurzel hat.

1

**H 41** Man löse die Gleichung

1

$$\frac{\lg_2 x}{\lg_2^2 a} - \frac{2 \lg_a x}{\lg_{\frac{1}{b}} a} = \lg_{\sqrt[3]{a}} x \cdot \lg_a x \quad .$$

**H 42** Уравнения

1

$$x^3 + p_1 x + q_1 = 0$$
$$x^3 + p_2 x + q_2 = 0$$

$(p_1 \neq p_2,\ q_1 \neq q_2)$ имеют общий корень.
Найти этот корень, а также остальные корни обоих уравнений.

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.

Die Lösungen sind – jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders – unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.

Einsendeschluß: 1.9.1976

## Gut gesagt

Mathematik ist die einzige perfekte Methode, sich selber an der Nase herumzuführen.

Albert Einstein

# Algebraische Gleichungen (I)

Unter einer algebraischen Gleichung vom Grade n (oder n-ten Grades) versteht man eine Gleichung folgender Gestalt zur Bestimmung einer reellen oder komplexen Zahl x, der Lösung oder Wurzel der Gleichung: Es dürfen in den Ausdrücken der Gleichung nur die algebraischen Grundrechenoperationen Addition, Subtraktion und Multiplikation verwendet werden mit der zusätzlichen Forderung, daß von der gesuchten Zahl x nur die Potenzen $x, x^2, \ldots, x^n$ vorkommen. Wir schreiben eine derartige Gleichung in der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_o = 0. \tag{1}$$

Die Koeffizienten $a_o, a_1, \ldots, a_n$ sind dabei beliebige, aber fest vorgegebene reelle oder komplexe Zahlen. Wir werden uns vorwiegend mit dem Fall reeller Koeffizienten beschäftigen. Trotzdem läßt sich der Begriff der komplexen Zahl nicht vermeiden, weil die Theorie der algebraischen Gleichungen sehr eng mit ihm verknüpft ist. Diejenigen Leser, denen komplexe Zahlen nicht oder nicht gut genug bekannt sind, weisen wir hin auf die beiden Beiträge "Komplexe Zahlen" I und II in den WURZEL-Heften Nr. 11 und Nr. 12 (1974) bzw. auf das Büchlein von A.G.KUROSCH "Algebraische Gleichungen beliebigen Grades", das unter Nr. 21 in die Mathematische Schülerbücherei aufgenommen wurde und auch sonst als Ergänzung zu den folgenden Ausführungen zu empfehlen ist.

Da die Koeffizienten der Gleichung (1) auch den Wert Null annehmen können, wollen wir zur Rechtfertigung der Bezeichnung "vom Grade n" stets voraussetzen, daß der Höchstkoeffizient $a_n$ ungleich Null sei.

Für die algebraischen Gleichungen 1. bis 4. Grades sind spezielle Bezeichnungen üblich:

| | |
|---|---|
| $a_1 x + a_o = 0$ | lineare Gleichung |
| $a_2 x^2 + a_1 x + a_o = 0$ | quadratische Gl. |
| $a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_o = 0$ | kubische Gleichung |
| $a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_o = 0$ | biquadratische Gl. |

## Algebraische Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten

Algebraische Gleichungen spielten in der geschichtlichen Entwicklung der Mathematik eine bedeutende Rolle. Zum Beispiel führte die Frage nach dem Beweis der Unmöglichkeit gewisser geometrischer Konstruktionen auf einzelne spezielle Gleichungen dieser Art.

Derartige Konstruktionsaufgaben wurden bereits im Altertum gestellt und diskutiert. Hierzu gehören u. a. die folgenden drei griechischen Probleme:

- Verdopplung des Würfels
- Dreiteilung eines beliebigen Winkels
- Konstruktion eines regelmäßigen Siebenecks

und zwar dies alles allein unter Verwendung von Zirkel und Lineal.

Durch Jahrhunderte bemühte man sich vergeblich um die Lösung dieser (und ähnlicher) Probleme, bis sich schließlich zu Anfang des 19. Jahrhunderts die Vermutung durchsetzte, daß sie gar nicht lösbar sein könnten. Nunmehr handelte es sich darum, die Unlösbarkeit zu beweisen. Dies gelang, nachdem man gelernt hatte, den Konstruktionsvorgang algebraisch zu beschreiben. Es stellte sich z. B. heraus, daß die Lösbarkeit der oben genannten Probleme zur Folge hätte, daß gewisse kubische Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten eine positive rationale Wurzel besitzen, was aber nicht zutrifft. Diese kubischen Gleichungen lauten in der obigen Reihenfolge der drei griechischen Probleme:

$$x^3 - 2 = 0 \tag{2}$$

$$8x^3 - 6x - 1 = 0 \tag{3}$$

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0 \tag{4}$$

Dabei haben wir zur Aufstellung von (3) als Beispiel den Winkel von $60^\circ$ gewählt.

Der Beweis dafür, daß die positive Wurzel der Gleichung (2) keine rationale Zahl sein kann, oder anders ausgedrückt, daß die Kubikwurzel aus 2 nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellbar ist, kann leicht mit Hilfe des folgenden Satzes der elementaren Zahlentheorie geführt werden:

Wenn eine Primzahl p Teiler eines Produktes a.b ganzer Zahlen ist, dann muß p Teiler von a oder von b sein.
Ebenfalls unter Verwendung einfacher Teilbarkeitsregeln lassen sich die entsprechenden Sachverhalte für die Gleichungen (3) und (4) beweisen.

Die Wurzeln einer algebraischen Gleichung der Gestalt (1) mit ganzzahligen Koeffizienten - die Gleichungen (2), (3), (4) sind Beispiele hierfür - nennt man algebraische Zahlen.

Das System der algebraischen Zahlen enthält als Spezialfall (n=1) die reellen rationalen Zahlen und stellt somit eine Verallgemeinerung des Systems dieser Zahlen dar. Aber nicht jede reelle Zahl ist algebraisch. Man nennt nicht-algebraische Zahlen transzendent; denn wie EULER sagte, "überschreiten (transzendieren) sie die Wirksamkeit algebraischer Methoden".

Beispiele für transzendente Zahlen sind die Zahlen e und $\pi$. Es gibt also keine algebraische Gleichung - und sei ihr Grad noch so hoch - mit ganzzahligen Koeffizienten, unter deren Wurzeln die Zahlen e oder $\pi$ vorkommen würde.

Eine Methode, mit der man dies beweisen kann, stammt von CHARLES HERMITE (1822 - 1901). Er selbst hat damit gezeigt, daß die Zahl e transzendent ist. Mit Hilfe einer geringfügigen Erweiterung ist es dann F. LINDEMANN (1882) gelungen, die Transzendenz von $\pi$ zu beweisen. Damit war im übrigen auch das uralte Problem der "Quadratur des Kreises" (Konstruktion eines Quadrats mit demselben Flächeninhalt wie ein vorgegebener Kreis allein unter Verwendung von Zirkel und Lineal) endgültig im negativen Sinne entschieden. Trotzdem gibt es selbst heutzutage immer wieder unbelehrbare "Kreisquadrierer", die die Lösung des unlösbaren Problems gefunden zu haben glauben.

## Auflösung durch "Radikale"

Wie schon die Betrachtung algebraischer Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten zeigte, sind die Wurzeln algebraischer Gleichungen im allgemeinen irrationale (reelle oder komplexe) Zahlen. Diese können - bei der üblichen Rechnung im Dezimalsystem - nur durch nicht-abbrechende nicht-periodische Dezimalbrüche erfaßt werden. Hieraus folgt, daß allgemeine Auflösungsverfahren für algebraische Gleichungen nur in Form von Rechenprozessen mit theoretisch unendlich vielen Schritten existieren können.

Man darf sich hierüber nicht hinwegtäuschen lassen durch "Auflösungsformeln" wie z. B. $x = \sqrt[3]{2}$ für die Gleichung (2). Es handelt sich hierbei vom rechnerischen Standpunkt aus gesehen nur um ein Symbol für den infiniten Rechenprozeß des Ausziehens der Kubikwurzel aus der Zahl 2. Natürlich erhält man durch derartige Formeln wichtige Hinweise für das praktische Vorgehen, z. B. im obigen Fall für die näherungsweise Berechnung der Wurzel mit Hilfe einer Logarithmentafel.

Von der Schule her bekannt sind derartige Auflösungsformeln für lineare und quadratische Gleichungen in der Gestalt

$$x = -a_0/a_1 \tag{5}$$

$$x = \frac{-a_1 \pm \sqrt{(a_1)^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \tag{6}$$

Im Laufe des 16. Jahrhunderts hatte man analoge Formeln zur Auflösung algebraischer Gleichungen 3. und 4. Grades gefunden. Diese Formeln haben folgendes gemeinsam: Die Wurzeln werden durch Ausdrücke dargestellt, die außer den vier rationalen Grund-Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) lediglich das Ausziehen einer Quadratwurzel, einer Kubikwurzel bzw. einer vierten Wurzel erfordern ("Auflösung durch Radikale").

Die Auflösungsformel für kubische Gleichungen kann man z. B. dem bereits erwähnten Büchlein von A.G.KUROSCH entnehmen. Für den praktischen Gebrauch ist diese Formel jedoch sehr schlecht geeignet. Sie ist sehr kompliziert und auch umständlich in der Hinsicht, daß oft einfache reelle Wurzeln als Differenzen schwer berechenbarer komplexer Zahlen dargestellt werden.

Die gleichen Nachteile in sehr viel stärkerem Maße besitzt die Auflösungsformel durch Radikale für biquadratische Gleichungen.

Trotzdem beschäftigten sich im 17. und 18. Jahrhundert selbst bedeutende Mathematiker immer wieder mit dem Problem, auch Gleichungen fünften und höherem Grades durch Radikale aufzulösen. Dabei täuschte man sich oft in dem Glauben, die Lösung gefunden zu haben, bis Anfang des 19. Jahrhunderts der Italiener RUFFINI (1765 - 1822) und der Norweger N.H.ABEL (1802 - 1829) auf die damals revolutionäre Idee kamen, zu beweisen, daß für Werte von n größer als 4 eine Auflösung der allgemeinen algebraischen Gleichung n-ten Grades durch Radikale nicht möglich ist.

Die Beschäftigung mit diesem Problem gab den Anstoß zur Entwicklung der modernen theoretischen Algebra und Gruppentheorie. Bahnbrechend wirkte dabei neben den oben genannten Mathematikern der französische Mathematiker GALOIS (1811 - 1832).

**Prof. Dr. W. Wallisch**
**Bereich Numerische Mathematik**

# Auf der Ellipsenbahn

Am 5. Februar 1976 erreichte mit dem Forschungssatelliten Kosmos 801 der tausendste sowjetische Raumflugkörper seine vorgesehene Bahn. Seit dem Start von Sputnik 1 stiegen bis zu diesem Zeitpunkt knapp 1900 Raumflugkörper von der Erde auf, 1000 aus der UdSSR, fast 840 aus den USA und rund 60 aus anderen Ländern.

Als Nikolaus KOPERNIKUS (1473 - 1543) es unternahm, das ptolemäische System der Planeten- und Sonnenbewegung durch eine prinzipiell neue Theorie zu ersetzen, wurde die allgemeine Anerkennung seines Bewegungssystems nicht nur durch den erbitterten Widerstand der Kirche behindert. Kopernikus stellte richtig die Sonne in den Mittelpunkt des Planetensystems, ließ die Planeten jedoch auf Kreisbahnen um die Sonne laufen. Anhand dieser Kreisbahnen berechnete Planetenstellungen wiesen jedoch starke Abweichungen von den tatsächlich beobachteten Konstellationen auf. Es ist ein großes Verdienst von Johannes KEPLER (1571 - 1630), insbesondere durch langjährige Beobachtung der Marsbahn zu entdecken, daß die Bahnen der Planeten **E l l i p s e n** sind, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Die von Kepler entdeckten Gesetze der Bewegung der Planeten um die Sonne gelten sinngemäß auch für die Bewegung künstlicher Erdsatelliten und Raumsonden mit elliptischen Bahnen. Wird ein Raumflugkörper während seines Starts auf eine Geschwindigkeit zwischen der 1. und 2. astronomischen Geschwindigkeit beschleunigt, d. h. gilt $7{,}92\ \text{km/s} < v < 11{,}18\ \text{km/s}$, so nimmt er eine ellipsenförmige Bahn um die Erde ein. Gemäß dem oben erwähnten 1. K E P L E R s c h e n G e s e t z steht in einem Brennpunkt dieser Bahn die Erde oder genauer gesagt, ihr Massenschwerpunkt M (Erdmittelpunkt).

Wir veranschaulichen uns dies anhand folgender Abbildung:

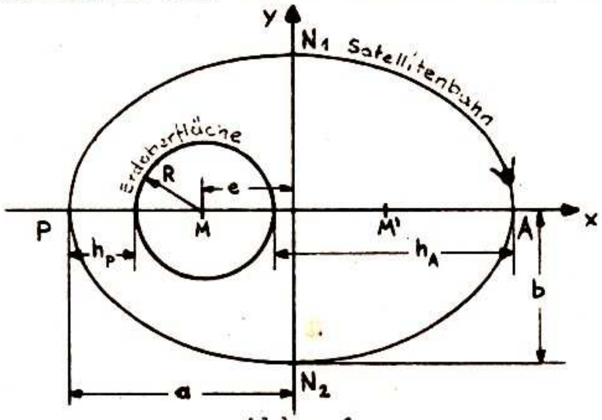



Abb. 1

Mit P ist dabei der dem Erdmittelpunkt nächste Punkt der Flugbahn, das **P e r i g ä u m**, bezeichnet. Entsprechend ist A der erdfernste Punkt, das **A p o g ä u m**, an dem die Richtung der Geschwindigkeit wieder mit der Erdtangente zusammenfällt. Mit $h_P$ bzw. $h_A$ sind dann die Höhen über der Erdoberfläche im Perigäum bzw. Apogäum gegeben. Die weiteren Bezeichnungen dürften dem Leser bekannt sein: a bzw. b als große bzw. kleine Halbachse der Ellipse, $N_1$ und $N_2$ die Nebenscheitelpunkte, P und A die Hauptscheitelpunkte der Ellipse, e die lineare Exzentrizität, M und M' die beiden Brennpunkte und schließlich der Erdradius R (am Äquator 6378 km).

Aus den Zeitungsmeldungen über erfolgte Starts von Raumflugkörpern können wir in der Regel die Werte für $h_P$ und $h_A$ entnehmen.

Als am 4. Oktober 1957 die Menschheit ihren ersten Boten ins All sandte, konnte man für den 83,6 kg schweren sowjetischen " S p u t n i k 1 " wenig später die Daten $h_P$ = 228 km und $h_A$ = 947 km erfahren. Für einen Erdumlauf benötigte er dabei 96,16 min.

Im weiteren wollen wir uns der Frage zuwenden, wie aus der Kenntnis der Satellitendaten $h_A$, $h_P$ und der Erdumlaufzeit annähernd die Geschwindigkeit des Satelliten in einem beliebigen Punkt seiner Bahn zu bestimmen ist. Es ist dabei darauf zu verweisen, daß ein Satellit auf seiner ellipsenförmigen Umlaufbahn seine Geschwindigkeit stetig ändert, er fliegt im Punkt P schneller als im Punkt $N_1$, hier wiederum schneller als im "langsamsten" Punkt A. Dieser Sachverhalt ergibt sich aus dem

<u>2. K E P L E R s c h e n  G e s e t z :</u>

Der Leitstrahl oder Radiusvektor des Satelliten überstreicht in gleichen Zeitabschnitten gleiche Flächengrößen.

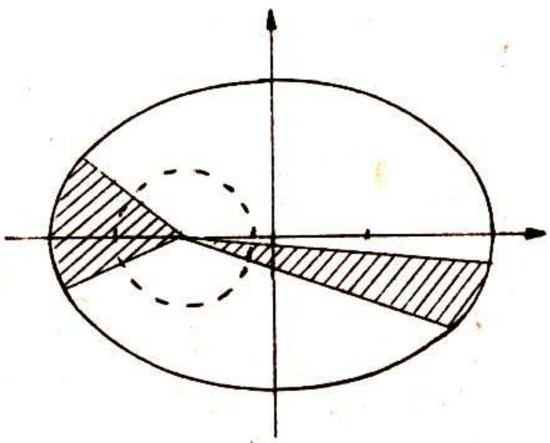


Abb. 2

Aus den Werten für $h_P$ und $h_A$ können wir leicht die Halbachsen a und b bestimmen:

Gemäß Abbildung 1 gilt:

(1) $$2a = h_P + 2R + h_A$$

sowie

(2) $$a = h_P + R + e \; .$$

Aus (1) und (2) erhalten wir

(3) $$e = \frac{h_A - h_P}{2} \; .$$

Da der Erdradius R bekannt ist, können wir aus (1) die große Halbachse $a$ bestimmen. Für die lineare Exzentrizität $e$ gilt ferner bekanntlich (unmittelbar nach Definition einer Ellipse):

(4) $$e^2 = a^2 - b^2 .$$

Somit ist mittels

(5) $$b = \sqrt{a^2 - e^2}$$

die kleine Halbachse zu ermitteln.

Es sei auch auf eine weitere Art der (näherungsweisen) Berechnung von $a$ hingewiesen:

Das 3. KEPLERsche Gesetz besagt,

> daß sich die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen der Umlaufellipse verhalten.

Für Erdsatelliten wurde hierbei der Faktor 331,5 ermittelt, d. h. es gilt:

(6) $$a = 331{,}5 \sqrt[3]{T^2} ,$$

wobei die Umlaufzeit $T$ in Minuten einzusetzen ist.

Gemäß unseres Wissens von $a$ und $b$ können wir durch

(7) $$F = \pi ab$$

die Gesamtfläche der Ellipse bestimmen. Es sei nun $t$ die Umlaufzeit des Satelliten in Sekunden. Dann erhalten wir mittels $\frac{F}{t}$ die je Sekunde vom Leitstrahl des Satelliten überstrichene Fläche. Für den Flächeninhalt eines Kreissektors gilt bekanntlich

(8) $$F' = \frac{B \cdot r}{2} ,$$

wobei $B$ die Bogenlänge ist.

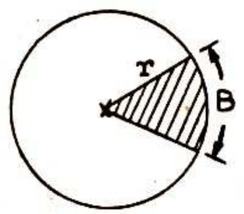



Abb. 3

Zur näherungsweisen Geschwindigkeitsberechnung soll es uns genügen, mit Formel (8) weiterzurechnen. Zur Bestimmung der Geschwindigkeit des Satelliten etwa im Punkt P betrachten wir also die pro Sekunde überstrichene Fläche $\frac{F}{t}$ als Fläche eines Kreissektors, wobei wir als $r$ den Abstand von M zu P setzen, d. h. $r = a-e$.
Aus Formel (8) können wir dann durch Umstellung nach B jene Strecke erhalten, welche der Satellit in einer Sekunde "im" Punkt P zurücklegt. Verfolgen wir nun unsere Rechnungen zurück, so erhalten wir insgesamt für den Punkt P die Geschwindigkeit

$$v_P = \frac{\pi\,(h_P + 2R + h_A)}{t} \cdot \sqrt{\frac{h_A + R}{h_P + R}} \quad . \tag{9}$$

Für die angegebenen Werte von "Sputnik 1" beträgt diese Geschwindigkeit etwa 7,98 km/s.

Übungsaufgabe:

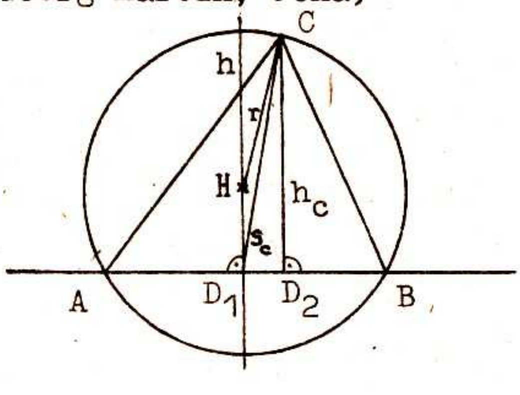
a) Entsprechend zu Formel (9) bestimme man die Geschwindigkeit $v_A$!

b) Es sei Q ein beliebiger Punkt der Satellitenbahn. Man bestimme näherungsweise die Geschwindigkeit $v_Q$!

**Reinhard Klette**
**Assistent im Bereich**
**Mathematische Kybernetik**
**und Rechentechnik**

# Lösungen

Aufgabe H 2 (nach Hans-Georg Martin, Jena)



Konstruktion des Dreiecks ABC :

Auf einer Geraden g errichtet man in einem Punkt $D_2$ die Senkrechte. Danach wird der Punkt C konstruiert mit $h_c = \overline{D_2C}$. Um C wird ein Kreis mit dem Radius $\overline{CD_1} = s_c$ geschlagen und man erhält den Punkt $D_1$ als einen beliebigen der beiden Schnittpunkte dieses Kreises mit g.
In $D_1$ errichtet man die Senkrechte h auf g und bringt sie zum Schnitt mit dem Kreis vom Radius r um C. Derjenige der beiden Schnittpunkte, der $D_1$ am nächsten liegt, istH.
Um H schlägt man einen Kreis mit dem Radius r und erhält auf g die Schnittpunkte A und B. Das Dreieck ABC genügt offenbar den geforderten Bedingungen.

Die Konstruktion ist genau dann ausführbar, wenn die gegebenen Größen $h_c$, $s_c$ und r folgenden Bedingungen genügen:

1. $s_c \geq h_c$ und
2. $r \geq \sqrt{s_c^2 - h_c^2}$ und
3. $r > \left| h_c - \sqrt{r^2 - (s_c^2 - h_c^2)} \right|$

---

Aufgabe H 18 (nach Holger König, MLU, Klasse 11)

Es gilt: $\cos x \cos y = \frac{1}{2} ( \cos (x+y) + \cos (x-y))$

$$4 ( \cos (x+y) + \cos (x-y)) \cos (x-y) +1 = 0$$

$$4 \cos^2(x-y) + 4 \cos(x-y) \cos(x+y + 1 = 0$$

$$\cos^2(x-y) + \cos(x+y) \cos(x-y) + \frac{1}{4} = 0$$

Setze: $\cos(x-y) = b \qquad \cos(x+y) = c$

$$b^2 + c \cdot b + \frac{1}{4} = 0$$

$$b_{1/2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - \frac{1}{4}} \qquad (*)$$

Es muß also gelten: $c^2 - 1 \geq 0$

$|\cos a| \geq 1$, wegen $|\cos z| \leq 1$ für alle z also

$a = 2k_1\pi$ oder $a = (2k_4 + 1)\pi$, $(k_1, k_4 \in G)$

Unter der Bedingung $a = k\pi$ $(k \in G)$ hat das Gleichungssystem Lösungen.

<u>1. Fall:</u> $x+y = 2k_1\pi$

es folgt nach (*):

$$x_1 - y_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k_2\pi$$

$$x_2 - y_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k_3\pi \qquad k_2, k_3 \in G$$

es folgt:

$$\left| \begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{3} + (k_1+k_2)\cdot\pi \\ y_1 &= -\frac{\pi}{3} + (k_1-k_2)\cdot\pi \end{aligned} \right.$$

$$\left| \begin{aligned} x_2 &= \frac{2\pi}{3} + (k_1+k_3)\cdot\pi \\ y_2 &= -\frac{2\pi}{3} + (k_1-k_3)\cdot\pi \end{aligned} \right.$$

<u>2. Fall:</u> $x+y = \pi + k_1\pi$

es folgt nach (*):

$$x_3 - y_3 = \frac{\pi}{3} + 2k_5\pi$$

$$x_4 - y_4 = \frac{5\pi}{6} + 2k_6\pi \qquad k_5, k_6 \in G$$

es folgt:

$$\left| \begin{aligned} x_3 &= \frac{2\pi}{3} + (k_4+k_5)\cdot\pi \\ y_3 &= \frac{\pi}{3} + (k_4-k_5)\cdot\pi \end{aligned} \right.$$

$$\left| \begin{aligned} x_4 &= \frac{4\pi}{3} + (k_4+k_6)\cdot\pi \\ y_4 &= -\frac{\pi}{3} + (k_4-k_6)\cdot\pi \end{aligned} \right.$$

Die Paare $(x_i, y_i)$ i=1,2,3,4 sind Lösungen des Systems.

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Egbert Creutzburg
**Chefredakteur:** Waltraud Werner
**Redaktion:** K. Bartholmé, H.-J. Hauschild, R. Jeske, H.-G. Leopold
**Anschrift:** WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
**Konto:** Postscheckkonto 180 45
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

8

76

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an

ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

10. Jahrgang

Index 33 873

Preis: 0,20 M

# Algebraische Gleichungen (II)

## Fundamentalsatz der Algebra

Die Unmöglichkeit der Lösung der allgemeinen algebraischen Gleichung n-ten Grades durch Radikale widerspricht nicht der Tatsache, daß jede algebraische Gleichung (mindestens) eine (reelle oder komplexe) Lösung besitzt. Diese Tatsache wurde zuerst von GAUSS in seiner Doktorarbeit 1799 bewiesen - eine große Leistung des erst 22-jährigen. GAUSS hielt das Ergebnis für so wichtig und interessant, daß er später noch drei weitere Beweise dafür aufstellte.

Daraus, daß jede algebraische Gleichung mindestens eine Lösung besitzt, läßt sich schlußfolgern, daß jede algebraische Gleichung n-ten Grades genau n Lösungen besitzt.

Zum Beweis benutzen wir einen Divisionsalgorithmus für Polynome, der auch für die praktische Auflösung algebraischer Gleichungen von grundlegender Bedeutung ist.

Unter einem Polynom n-ten Grades versteht man einen Ausdruck von der Gestalt der linken Seite der Gleichung (1). x wird hierbei als "freie Veränderliche" aufgefaßt. Hat man den Wert für x festgelegt, so bezeichnen wir den resultierenden Zahlenwert der linken Seite von (1) mit $P_n(x)$, d. h. wir definieren

(7) $$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o.$$

Diejenigen Werte von x, für die $P_n(x)$ den Wert Null annimmt, werden Nullstellen des Polynoms $P_n(x)$ genannt. Die Nullstellen des Polynoms (7) sind also identisch mit den Wurzeln der algebraischen Gleichung (1). Man nennt (1) daher oft auch "Polynomgleichung n-ten Grades".

Für das Operieren mit Polynomen ist die Division eines Polynoms durch ein zweites wichtig. Im Zusammenhang mit der Gleichungsauflösung ist die Division durch ein lineares Polynom der Gestalt

$$x - z$$

von besonderem Interesse; z soll dabei irgendein fester (reeller oder komplexer) Zahlenwert sein.

Die Durchführung dieser Division in Form eines Schemas ist bereits in der WURZEL 2/76 besprochen worden. Für die Zahl z wird dort das Zeichen $x_o$ verwendet. Wir erläutern die Division noch einmal am Beispiel eines kubischen Polynoms

$$P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_o .$$

Für allgemeines n läuft alles analog.

Die Division durch (x-z) kann als eine Zerlegung von $P_3(x)$ der Form

(8) $$P_3(x) = (x-z) . Q_2(x) + R$$

aufgefaßt werden. $Q_2(x)$ ist dabei ein quadratisches Polynom der Gestalt

$$Q_2(x) = a_3'x^2 + a_2'x + a_1' ,$$

dessen Koeffizienten sich aus denen des Polynoms $P_3(x)$ nach der Vorschrift

(9) $$a_3' = a_3 , \quad a_2' = a_2+za_3' , \quad a_1' = a_1+za_2'$$

berechnen. Der "Rest" R ergibt sich dann in der Form

(10) $$R = a_o' = a_o + za_1'$$

und hat die Bedeutung

$$R = P_3(z) .$$

Ist nun z speziell eine Nullstelle von $P_3(x)$ - wir wollen sie $z_1$ nennen -, so folgt R=0 und (8) geht über in

(11) $$P_3(x) = (x-z_1).Q_2(x) .$$

Es sei jetzt $z_2$ eine Nullstelle von $Q_2(x)$ und damit wegen (11) auch Nullstelle von $P_3(x)$. Dann gilt analog zu (11)

(12) $$Q_2(x) = (x-z_2).Q_1(x) ,$$

und schließlich

(13) $$Q_1(x) = (x-z_3).a_3 .$$

Aus (11), (12), (13) ergibt sich folgende Darstellung von $P_3(x)$

(14) $$P_3(x) = a_3.(x-z_1)(x-z_2)(x-z_3) .$$

Daraus folgt, daß $P_3(x)$ genau 3 Nullstellen, nämlich $x=z_1$, $x=z_2$, $x=z_3$ besitzt.

Allgemein läßt sich jedes Polynom n-ten Grades in der Form

(15) $$P_n(x) = a_n \cdot (x-z_1)(x-z_2) \cdot \ldots \cdot (x-z_n)$$

darstellen, d. h. es besitzt genau n Nullstellen $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Dabei können zwei oder mehrere dieser Größen zahlenwertmäßig übereinstimmen. Man nennt solche Zahlen "doppelte" oder entsprechend "mehrfache" Nullstellen des Polynoms $P_n(x)$.

Der durch (15) ausgedrückte Sachverhalt wird Fundamentalsatz der Algebra genannt. Im Hinblick auf die Thematik der modernen Algebra ist diese Bezeichnung allerdings nicht treffend.

## Das Rechenschema von HORNER

Wie schon bemerkt, besitzt der Divisionsalgorithmus (9), (10) grundlegende Bedeutung für das Operieren mit Polynomen und damit auch für die Berechnung von Wurzeln algebraischer Gleichungen.

Es ist üblich, diesen Algorithmus in einem übersichtlichen Rechenschema, dem "HORNER-Schema" (siehe WURZEL 2/76), durchzuführen:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_n$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-2}$ | ... | $a_1$ | $a_0$ |
| x=z | - | $za'_n$ | $za'_{n-1}$ | ... | $za'_2$ | $za'_1$ |
| | $a'_n$ | $a'_{n-1}$ | $a'_{n-2}$ | ... | $a'_1$ | $\boxed{a'_0}$ |

Neben weiteren interessanten Anwendungsmöglichkeiten sind es vor allem die folgenden beiden Eigenschaften der resultierenden Zahlen $a'_n, a'_{n-1}, \ldots, a'_0$, die dem Schema seinen praktischen Wert verleihen:

- $a'_0$ gibt den Zahlenwert des Polynoms an der Stelle x=z an

$$a'_0 = P_n(z),$$

wobei die Zahl der Rechenoperationen geringer ist als bei der direkten Berechnung nach der Formel (7):
n statt (2n-1) Multiplikationen.

- Im Falle $a'=0$ ist $z$ Nullstelle des Polynoms $P_n(x)$, und das aus den ersten $n$ Zahlen der 3. Zeile des HORNER-Schemas gebildete Polynom $(n-1)$-ten Grades

  $$Q_{n-1}(x) = a_n'x^{n-1}+a_{n-1}'x^{n-2}+\ldots+a_2'x + a_1'$$

  steht mit dem Ausgangspolynom $P_n(x)$ in dem Zusammenhang

  $$P_n(x) = (x-z) \cdot Q_{n-1}(x) \; .$$

  Auf diese Weise kann man also eine gefundene Nullstelle vom Polynom $P_n(x)$ "abdividieren" und mit dem Polynom $Q_{n-1}(x)$ weiterarbeiten, das ja die restlichen Nullstellen des Polynoms $P_n(x)$ mit diesem gemeinsam hat.

Wir demonstrieren die Anwendung des HORNER-Schemas nun an einem einfachen Beispiel. Es soll sich darum handeln, alle drei Wurzeln der kubischen Gleichung

$$x^3-2 = 0 \tag{2}$$

zu bestimmen.

Das kubische Polynom lautet ausführlich geschrieben

$$P_3(x) = 1.x^3 + 0.x^2 + 0.x - 2 \; ,$$

so daß also gilt

$$a_3 = 1 \quad a_2=a_1=0 \quad a_o = -2 \; .$$

Wir dividieren die reelle Nullstelle $z_1 = \sqrt[3]{2}$ mittels des HORNER-Schemas ab:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | -2 |
| $x = \sqrt[3]{2}$ | - | $\sqrt[3]{2} \cdot 1$ | $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}$ | $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$ |
| | 1 | $\sqrt[3]{2}$ | $\sqrt[3]{4}$ | $\boxed{0}$ |

und erhalten die restlichen beiden Nullstellen von $P_3(x)$ aus der quadratischen Gleichung

$$Q_2(x) = x^2 + \sqrt[3]{2} \cdot x + \sqrt[3]{4} = 0 \; .$$

Nach der Auflösungsformel (6) ergibt sich

(16) $$z_{2,3} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(-1 \pm \sqrt{-3}) .$$

Das Auftreten eines negativen Radikanden zeigt an, daß $P_3(x)$ außer $z_1 = \sqrt[3]{2}$ keine weiteren reellen Nullstellen besitzt. Um die durch die Gleichung (16) gegebenen komplexen Nullstellen im Real- und Imaginärteil zu zerlegen, erinnern wir uns an die spezielle komplexe Zahl $i$ mit der Eigenschaft $i^2 = -1$. Wir sehen, daß es zwei komplexe Zahlen gibt, deren Quadrat gleich -3 ist, nämlich

$$i\sqrt{3} \quad \text{und} \quad -i\sqrt{3} \quad .$$

Dieses Zahlenpaar verbirgt sich hinter dem Symbol $\pm\sqrt{-3}$ der Auflösungsformel (16).

Die drei Wurzeln der algebraischen Gleichung (2) lauten daher

$$z_1 = \sqrt[3]{2} \qquad z_2 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(-1+i\sqrt{3}) \qquad z_3 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(-1-i\sqrt{3}) ,$$

und die Darstellung des Polynoms $x^3-2$ in der Form (15) ist gegeben durch

$$x^3-2 = \left[x-\sqrt[3]{2}\right] \cdot \left[x-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(-1+i\sqrt{3})\right] \cdot \left[x-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(-1-i\sqrt{3})\right]$$

Zur Übung im Umgang mit komplexen Zahlen wird dem Leser empfohlen, sich durch Ausmultiplizieren der rechten Seite von der Richtigkeit dieser Gleichung zu überzeugen.

Ferner wird als eine einfache Übung die analoge Behandlung der Gleichung

$$x^4-16 = 0$$

empfohlen.

**Prof. Dr. W. Wallisch**
**Bereich Numerische Mathematik**

# Preisaufgaben 8/76

**H 43** Man löse die Gleichung

1

$$\lg_{\sin x} 2 \cdot \lg_{\sin^2 x} a + 1 = 0 .$$

**H 44** Das Gleichungssystem

1

$$a(x^2+y^2) + x + y - \lambda = 0$$
$$x - y + \lambda = 0$$

habe reelle Lösungen für beliebige $\lambda$.
Man zeige, daß $a=0$.

**H 45** Die Seiten a,b,c eines Dreiecks sollen im Verhältnis $a^2 = c(b+c)$ stehen. Man beweise, daß der Winkel $\alpha$ doppelt so groß ist, wie der Winkel $\gamma$ .

1

**H 46** Man löse die Ungleichung

2

$$x^{2-\lg_2^2 x-\lg_2 x^2} - \frac{1}{x} > 0$$

**H 47** Man löse das Gleichungssystem

1

$$x^4 + y^4 = 17(x+y)^2$$
$$xy = 2(x+y)$$

**H 48** Найти все пары чисел a и b, при которых для любых x и y удовлетворяющих условию $x + y = a$ ( где $x \neq \frac{\pi}{2} + n$ , $y \neq \frac{\pi}{2} + m$ , $n,m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) верно равенство

2

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = b .$$

Einsendeschluß: 30.9.1976

# Einführung in die Programmiersprache INKA 4100 (II)

Die Möglichkeit der Ausgabe des Wertes arithmetischer Ausdrücke mit Hilfe des Schreibbefehls erlaubt eine recht bequeme Realisierung der Funktionswertbestimmung verschiedener reeller Funktionen.

So kann $f(x) = \sqrt{x}$ in INKA als $X_{10}$ 0.5 dargestellt werden. Bei Ausführung des Befehls

```
        TYPE 'NAEHERUNGSWERT FUER WURZEL
              AUS ZWEI IST', 2₁₀ 0.5 , [
```

erfolgt nach Ausschreiben des erläuternden Textes zwischen beiden Apostrophen das Schreiben eines rationalen Näherungswertes für $\sqrt{2}$, anschließend ein Zeilenvorschub und Wagenrücklauf.

c) Das Ausgabeformat

Wie teilen wir dem Rechner mit, auf wieviel Stellen vor und nach dem Dezimalpunkt ein Ergebnis auszuschreiben ist? Das ist mit Hilfe der Formatfestlegung im TYPE-Befehl möglich. Bis zur Festlegung eines neuen Formates bleibt dieses bei den folgenden TYPE-Befehlen bestehen.

So müßte, um den Wert für $\sqrt{2}$ bis auf 3 Stellen nach dem Dezimalpunkt zu berechnen, der obige Befehl folgende Form haben:

TYPE ] 4.3 , $2_{10}$ 05

Das Zeichen ] leitet die Formatfestlegung ein, die erste Zahl gibt die Gesamtanzahl der auszugebenden Ziffern, die Zahl nach dem Punkt die Anzahl der Ziffern nach dem Dezimalpunkt an.

Bei Ausführung dieses Befehls wird über Schreibmaschine

1.414

ausgeschrieben.

Dagegen erscheint auf den Befehl

TYPE ] 4.0 , $2_{10}$ 0.5

über Schreibmaschine

1 ,

da zwar insgesamt 4 Ziffern, keine davon jedoch nach Komma verlangt wurden.

d) Die Abfolge von Befehlen

Bisher haben wir uns nur mit einzelnen Befehlstypen befaßt, ein Programm stellt aber immer eine Abfolge von Befehlen dar. Welche Regeln sind beim Zusammensetzen der Befehle zu einem Programm zu beachten?
Es können mehrere Befehle in eine Zeile geschrieben werden, sie sind durch Semikolon voneinander zu trennen.
Die Zeilen müssen numeriert werden, wobei sich die Numerierung im Bereich von 1.01 bis 31.99 bewegt. Dabei sind ganzzahlige Numerierungen (1.00, 2.00,...) nicht zugelassen. Unabhängig von der Reihenfolge der geschriebenen Zeilen wird ein Programm von der niedrigsten Zeilennummer aufsteigend bis zur höchsten abgearbeitet.
Wie ist es nun möglich, diese zwangsläufige Reihenfolge zu ändern? Dazu dient der GO-Befehl.

```
GO  2.29
```

bedeutet, daß die Abarbeitung mit Zeile 2.29 fortgesetzt wird.
Der GO-Befehl realisiert also einen "unbedingten Sprungbefehl".
In Abhängigkeit des Ergebnisses eines "Tests" müssen oft "bedingte Sprünge" ausgeführt werden.
Beispiel: Wir benötigen ein Programm, das entscheidet, ob die Zahl A kleiner, gleich oder größer Null ist. Diese Entscheidung ermöglicht der IF-Befehl.
Er hat die Struktur
IF (arithmetischer Ausdruck) 1. Zeilennummer, 2. Zeilennummer, 3. Zeilennummer

Wenn der (in Klammern geschriebene) arithmetische Ausdruck kleiner als Null ist, wird die Abarbeitung des Programmes bei der 1. Zeilennummer fortgesetzt. Ist er gleich Null, so geht es bei der 2. Zeilennummer weiter, und falls der Ausdruck größer Null ist, so wird als nächstes die Zeile mit der 3. Zeilennummer abgearbeitet.
Das Programm zur Untersuchung der Zahl A hat folglich die Form

```
1.01   IF (A) 2.01, 2.02, 2.03
2.01   TYPE 'A IST KLEINER NULL' ,[
2.02   TYPE 'A IST GLEICH NULL' ,[
2.03   TYPE 'A IST GROESSER NULL' ,[
```

Wie man sich leicht überlegt, sind mit dem IF-Befehl sämtliche vom Wert eines arithmetischen Ausdrucks abhängigen Entscheidungen zu realisieren.

e) Die Laufanweisung

Es sollen die geraden Zahlen von 0 bis 20 ausgegeben werden. Möglich wäre das in der folgenden Form

```
1.01   SET  I = 0
1.02   SET  I = I + 1
1.03   TYPE  2 * I
1.04   IF  (I-10) 1.02, 1.02, 1.05
1.05   ...
```

Eine einfachere Darstellung ist die folgende:

```
1.01  FOR  I=0, 1, 10 ; TYPE 2 * I
```

Man nennt den Befehl FOR I=0,1,10 Laufanweisung, I Laufvariable. In der Laufanweisung steht nach dem Gleichheitszeichen der Anfangswert für die Laufvariable, danach die Schrittweite und schließlich der Endwert.

f) Der DO-Befehl

Durch eine Laufanweisung können wir auch die Ausführung der Befehlszeile 2.08 von Anfangs- bis Endwert der Laufvariable veranlassen. In diesem Fall steht (obiges Beispiel)

```
1.01 FOR I = 0,1,10 ; DO 2.08 .
```

Damit sind die Einsatzmöglichkeiten des DO-Befehls nicht erschöpft. Mit seiner Hilfe wird ein Sprung zur angegebenen Zeile, die Ausführung der dort stehenden Befehle und ein Rücksprung realisiert.

Wenn nach DO eine ganze Zahl steht (Gruppennummer), so erfolgt die Abarbeitung aller mit dieser Zahl beginnenden Zeilen und ein abschließender Rücksprung.

g) Die Eingabe von Daten

Über Schreibmaschine lassen sich variable Daten in den Rechner eingeben.

Auf den Befehl

ASK A

druckt die Schreibmaschine einen Doppelpunkt. Der Rechner "war-

tet" auf Eingabe einer Zahl.
Nach ihrer Eingabe, die mit Wagenrücklauf abgeschlossen wird, ist A der Zahlenwert zugewiesen. Wie beim TYPE-Befehl ist es auch hier möglich, einen in Apostrophe eingeschlossenen kommentierenden Text ausdrucken zu lassen.
Auf

```
ASK 'ARGUMENT' A
```

erscheint über Schreibmaschine

```
ARGUMENT:
```

es kann jetzt die Zahl eingegeben und mit Wagenrücklauf abgeschlossen werden.

### h) Indizierte Variable

Die Zahlen $a_o$ bis $a_n$ sollen eingegeben werden. Das ist mit Hilfe einer Laufanweisung und indizierter INKA-Variablen möglich. Für $a_i$ schreibt man in INKA 4100 A(I).
Das Programmstück für die Eingabe hat dann die folgende Form

```
FOR I = 0,1,N ; ASK A(I).
```

### g) Der Haltbefehl

Um die Abarbeitung eines Programmes an definierter Stelle zu stoppen, läßt sich ein Halt programmieren. Das leistet der Befehl QUIT.

## 3. Programme in INKA 4100

Wir hatten in Heft 2/76 den Horner-Algorithmus eingeführt. Mit unseren Kenntnissen uber INKA-Programmierung sind wir nun in der Lage, ein Programm zur automatischen Bestimmung des Wertes eines Polynoms an gegebener Stelle $x_o$ aufzustellen, das den Horner-Algorithmus verwendet.

i.) Wir geben über Schreibmaschine den Polynomgrad n ein:

```
ASK 'POLYNOMGRAD'N
```

Der Rechner schreibt POLYNOMGRAD: und wartet auf die Eingabe einer natürlichen Zahl.

ii.) Jetzt werden die Koeffizienten, beginnend mit $a_n$ von $X^n$ bis zum Absolutglied $a_o$ eingegeben(Numerierung hier umgekehrt, d.h. A(I) := $a_{n-i}$).
Wir lassen zuerst den Text KOEFFIZIENTEN durch

```
TYPE 'KOEFFIZIENTEN', [
```

schreiben und geben danach die Werte mit der Laufanweisung

```
FOR I = 0,1,N; ASK A(I)
```

iii.) Schleißlich erfolgt durch

```
ASK 'ARGUMENT' XO
```

die Stelle $x_o$ , an der der Polynomwert zu berechnen ist.

iv.) Unser Schema hat, aufgeschrieben für ein Polynom 3.Grades in den INKA-Variablen die Form

$$P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_o$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | A(0) | A(1) | A(2) | A(3) |
| XO | - | B(0)*XO | B(1)*XO | B(2)*XO |
| | B(0) | B(1) | B(2) | B(3) = $P_3(x_o)$ |

Das ergibt den Algorithmus

```
SET B(0) = A(0)
FOR I = 1,1,N; SET B(I) = A(I) + B(I-1)* XO
```

v.) B(N) ist dann der gewünschte Polynomwert $P_n(X)$ den wir mit `TYPE 'POLYNOMWERT', ]8.4, B(N),[` auf insgesamt acht Stellen, davon vier nach dem Komma, angeben.

vi.) Wir numerieren jetzt die einzelnen Programmzeilen und geben als letzten Befehl eine Sprunganweisung zu der Stelle, wo das Argument eingegeben wird. Auf diese Weise kann hintereinander der Polynomwert an beliebigen Stellen $x_o$ ausgerechnet werden.

Das vollständige Programm lautet:

```
1.01 ASK 'POLYNOMGRAD'N
1.02 TYPE 'KOEFFIZIENTEN',[
1.03 FOR I = 0,1,N; ASK A(I)
1.04 ASK 'ARGUMENT' XO
2.01 SET B(0) = A(0)
2.02 FOR I = 1,1,N; SET B(I) = A(I) + B(I-1)* XO
3.01 TYPE 'POLYNOMWERT',] 8.4, B(N), [
4.01 GO 1.04
```

---

Aufgabe: Das Programm für den Horner-Algorithmus ist so zu verändern, daß die Werte eines Polynoms für $x_0 = -5$ bis $x_{10} = 5$ in Einzelschritten des Arguments ausgegeben werden. Anschließend soll der Rechner in Halt gehen.

---

Es war nicht Sinn dieses Artikels, mehr als nur einen Überblick zu geben, wie eine problemorientierte Programmiersprache aufgebaut ist. Zum Erlernen des Umgangs mit einer derartigen Sprache gehört sehr viel praktische Erfahrung, die man aber durch direkten Kontakt zu einem Rechner recht schnell bekommt.
Wir geben daher interessierten Lesern die Möglichkeit, die Lösung der Aufgabe und andere kleine Programme an uns einzusenden (Redaktion WURZEL, Kennwort: INKA 4100). Wir sind gern bereit, sie auf Richtigkeit durchzusehen und auch für von Ihnen gegebene Beispiele Rechnungen auszuführen.

**Gregor Weske**
**Assistent im Forschungsbereich Stochastik**

# Lösungen

Aufgabe H 10 ( nach Michael Schaper)

Es sei $c_n$ die Alkoholkonzentration im n-ten Gefäß vor dem Auffüllen und $c_n^*$ die Alkoholkonzentration nach dem Auffüllen.
Nach Voraussetzung gilt:

$$(1) \quad c_n = \frac{1}{k} c_{n-1} \qquad c_1 = 1$$

$$(2) \quad c_n^* = \frac{c_{n-1}^* + c_n}{2} \qquad c_1^* = 1$$

Aus (1) folgt: $\{ c_n \}$ ist geometrische Folge.
Daraus folgt:

$$(3) \quad c_n = \left( \frac{1}{k} \right)^{n-1}$$

Durch Einsetzen von (3) in (2) ergibt sich

$$(4) \quad c_n^* = \frac{1}{2} (c^*_{n-1} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} \right)^{n-1}$$

Ersetzt man in (4) $c_{n-1}^*$, $c_{n-2}^*$,... durch die entsprechende Rekursionsformel, so erhält man:

$$c_n^* = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} \right)^{n-1} + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{k} \right)^{n-2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \left( \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{2^{n-1}} c_1^*$$

$$= \frac{1}{2^n} \left( \frac{2}{k} \right)^{n-1} + \frac{1}{2^n} \left( \frac{2}{k} \right)^{n-2} + \ldots + \frac{1}{2^n} \left( \frac{2}{k} \right) + \frac{c_1^*}{2^{n-1}}$$

Damit erhält man

$$(5) \quad c_n^* = \frac{1}{2^{n-1} k} \, \frac{1 - \left( \frac{2}{k} \right)^{n-1}}{1 - \frac{2}{k}} + \frac{c_1^*}{2^{n-1}}$$

Nach Umformung und wegen $c_1^* = 1$ folgt:

$$c_n^* = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1 - \left(\frac{2}{k}\right)^{n-1}}{2^{n-1}\,k - 2^n}$$

---

Aufgabe H 11 ( nach Michael Huhn )

$y' = -\frac{y}{x}$ , $x \neq 0$ , Anfangswerte : $(x_0, y_0) = (2,3)$

Für $y \neq 0$ ist $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$

Daraus folgt :

$$\int_z^x \frac{y'}{y}\,dx = \int_z^x -\frac{1}{x}\,dx \quad , \; dy = y'dx$$

$$\int_3^y \frac{dy}{y} = -\int_2^x \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| - \ln 3 = \ln 2 - \ln|x|$$

$$0 = \ln\left|\frac{x \cdot y}{6}\right|$$

$$1 = e^0 \quad \left|\frac{x \cdot y}{6}\right|$$

Diese Gleichung befriedigen zwei Funktionen :

$f_1(x) = y = \frac{6}{x}$

$f_2(x) = y = -\frac{6}{x}$

Wegen $f_2(2) = -\frac{6}{2} = -3 \neq 3$ folgt

$y = \frac{6}{x}$ ist Lösungsfunktion mit $f_1(2) = 3 = \frac{6}{2}$

---

# Sind Sie über die »Wurzel« informiert?

- Wieviele Studenten arbeiteten in den letzten 10 Jahren im Jugendobjekt?
- Wieviele Fachartikel wurden bisher veröffentlicht?
- Wieviele Lösungen wurden in den letzten 3 Jahren korrigiert?

Ähnliche Fragen veröffentlichen wir in unserem

# Sonderpreisausschreiben »10 Jahre Wurzel«

in den Ausgaben 10/76 bis 12/76.

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Egbert Creutzburg
**Chefredakteur:** Waltraud Werner
**Redaktion:** K. Bartholmé, H.-J. Hauschild, R. Jeske, H.-G. Leopold
**Anschrift:** WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
**Konto:** Postscheckkonto 180 45
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

9 / 76

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
10. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

# Zur mathematischen Behandlung des Mondflugproblems (I)

Es ist kein Geheimnis, daß jedem Raumflugunternehmen umfangreiche mathematische Vorarbeiten vorausgehen. Einige damit im Zusammenhang stehende Aspekte sollen hier am Beispiel der Bewegung eines Flugkörpers, der aus der Bahn eines künstlichen Erdsatelliten in Richtung Mond startet, untersucht werden. Es würde den Rahmen der Möglichkeiten sprengen, wenn das Problem auch nur einigermaßen erschöpfend betrachtet würde, und das zwingt uns, eine Reihe von Vereinfachungen zu treffen. Es wird sich aber zeigen, daß es auch das vereinfachte Modell noch gestattet, eine Reihe von bemerkenswerten Erscheinungen zu demonstrieren.

Es sei nun folgendes vorausgesetzt:

1. Der Mond bewege sich auf einer Kreisbahn um den Erdmittelpunkt. - Diese Forderung ist ein wesentlicher Eingriff in die himmelsmechanische Wirklichkeit. Tatsächlich bewegen sich Erde und Mond um einen gemeinsamen Schwerpunkt, der - obwohl nahe - nicht mit dem Erdmittelpunkt zusammenfällt. Außerdem ist die Mondbahn leicht elliptisch. Der Leser kann sich auf der Grundlage der künftigen Formeln leicht überzeugen, daß es nicht schwer gewesen wäre, bei der Aufstellung der Formeln auf diese Bedingung zu verzichten, daß die Formeln aber dadurch umfangreicher und insbesondere die graphische Auswertung schwieriger geworden wäre.
2. Außer den drei betrachteten existieren keine weiteren Himmelskörper. - Wir elliminieren damit den Einfluß, den die Anziehungskraft der anderen Mitglieder des Sonnensystems ausüben. Eine Schlußfolgerung hieraus ist auch, daß die Erdbewegung und die damit zusammenhängenden Effekte (z. B. Zentrifugalkraft) wegfallen!
3. Der Flugkörper befindet sich stets in der durch die Mondbahn gebildeten Ebene. - Das gestattet uns, mit zwei Ortskoordi-

naten auszukommen und ermöglicht damit die zeichnerische Darstellung der Flugbahn.

4. Die Masse des Flugkörpers ist zu klein, um die Bewegung von Mond und Erde zu beeinflussen. - Dies ist die einzige Bedingung, die in den wirklichen praktischen Rechnungen für den Flug von Luna 1 bis zu den Apollo-Raumschiffen ebenfalls gemacht wurde.
5. Der Start des Flugkörpers aus der kreisförmigen Satellitenbahn in 180 km Höhe über der Erdoberfläche erfolgt momentan, entspricht also einem - praktisch nicht zu realisierenden - Schuß . - Eine Beschreibung der Raketenbewegung bei arbeitendem Triebwerk ist zwar nicht allzu schwierig und mit der im weiteren Verlaufe beschriebenen Methode auch durchaus möglich, würde aber den Umfang des Artikels etwa verdoppeln.
6. Erde und Mond werden betrachtet als in je einem Punkt - ihrem Mittelpunkt - konzentrierte Massen. - Zur Beschreibung der Bahn des Flugkörpers werden wir das klassische Gravitationsgesetz verwenden, das streng nur unter der Voraussetzung gilt, daß die sich anziehenden Massen in einem Punkt konzentriert sind. Außerdem sind Erde und Mond in Wirklichkeit nicht genau kugelförmig, und damit ist ihr Gravitationsfeld auch nicht exakt sphärisch.

Die Berechnung der Flugbahn beruht auf dem folgenden Grundgedanken: Die Bewegung eines Körpers ist mir prinzipiell bekannt, wenn wir seine Lage und Geschwindigkeit in einem bestimmten Moment und seine Beschleunigung im Verlaufe der betrachteten Zeitspanne gegeben sind, hierbei sind Geschwindigkeit und Beschleunigung als mit einer Richtung versehene Größen zu verstehen. Als Beispiel sei daran erinnert, daß man nur aus Kenntnis der Abschußstelle, Abschußgeschwindigkeit (und -richtung) und der Erdbeschleunigung die Bahnkurve eines Geschosses berechnen kann (der Luftwiderstand ist hierbei vernachlässigt, will man ihn berücksichtigen, ist er als stets gegen die Flugrichtung wirkende Beschleunigung aufzufassen).

Die ersten beiden Angaben können wir selbst vorgeben, das wäre zunächst die Stelle der Satellitenbahn, wo der Start erfolgen soll, und als nächstes die Geschwindigkeit. Zur Vereinfachung setzen wir noch voraus, daß der Start tangential zur Kreisbahn erfolgt.

Die Bewegung des Körpers nach dem Start gilt es neu zu berechnen, indem alle auf ihn einwirkenden Faktoren berücksichtigt werden. Wie oben festgestellt, ist die Beschleunigung der Schlüssel zur Gewinnung der Bahnkurve, bestimmen wir also zunächst diese und untersuchen dann, wie man aus ihr die Ortskoordinaten des Körpers in Abhängigkeit von der Zeit erhält.

Den Zugang zur Beschleunigung liefert uns das erste NEWTONsche Axiom:

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}.$$

Es gilt also, die in jedem Moment auf den Körper wirkende Kraft F zu bestimmen, und nach den gemachten Voraussetzungen sind dies gerade die Anziehungskräfte $F_E$ und $F_M$ von Erde und Mond:

$$F = F_E + F_M \; .$$

Hierbei wirkt $F_E$ in Richtung Erde und $F_M$ in Richtung Mond. Nach dem Gravitationsgesatz ist die Anziehungskraft zwischen zwei Körpern proportional ihrer Masse und umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer Entfernung. Sei also $m_E$ die Erdmasse, $m_M$ die des Mondes, $r_E$ und $r_M$ entsprechend die Abstände des Flugkörpers zu Erde und Mond und m seine Masse. Dann sind die Beträge der Kräfte

$$|F_E| = K \frac{m.m_E}{r_E^2} \quad , \quad |F_M| = K \frac{m.m_M}{r_M^2} \; ,$$

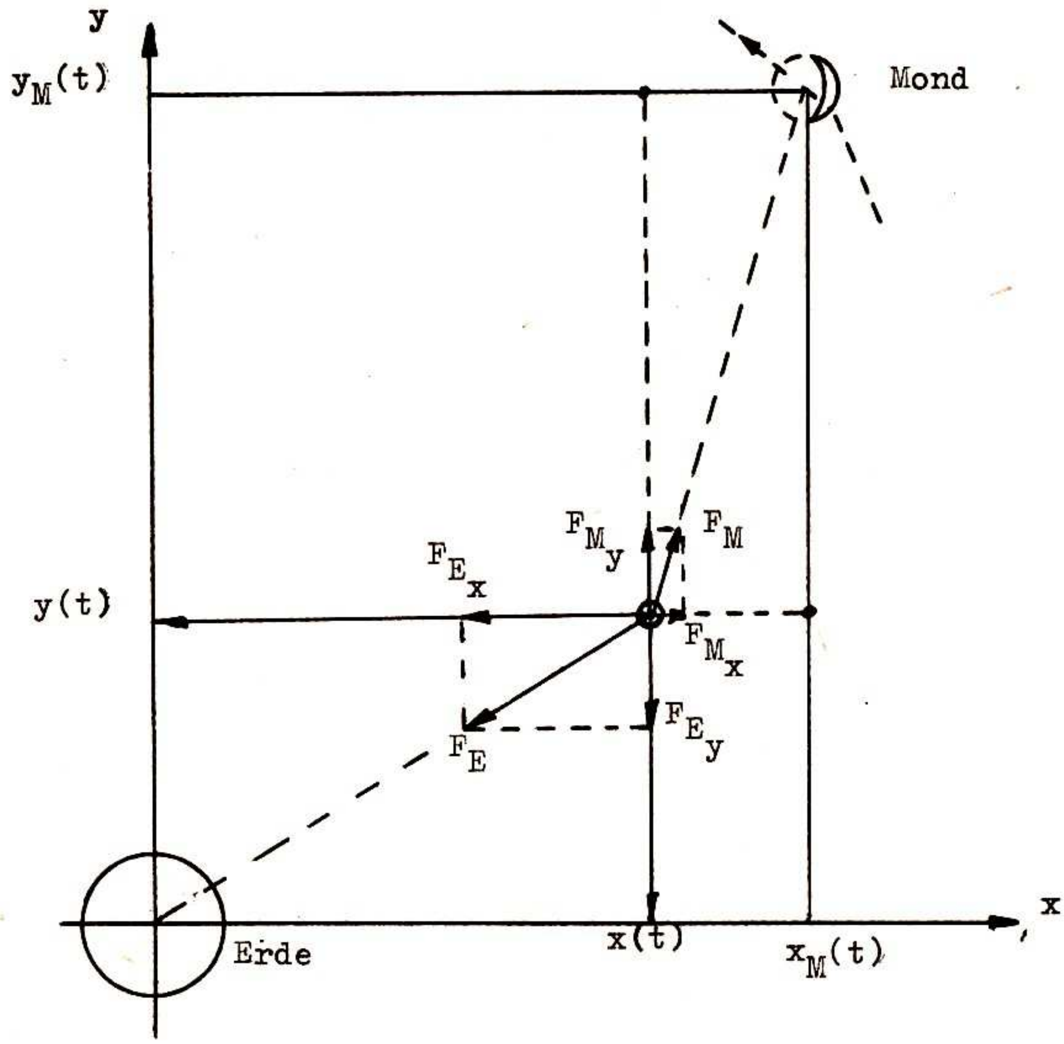
hierbei ist K die Gravitationskonstante, es gilt

$$K = 6.67.10^{-8} \; cm^3 \; . \; g^{-1}.s^{-2} \quad .$$

Als nächstes definieren wir ein Koordinatensystem in der folgenden Weise: Der Erdmittelpunkt befinde sich im Koordinatenursprung und die x-Achse führe im Zeitpunkt $t_o$ des Startes durch den Mondmittelpunkt. Setzen wir $t_0 = 0$, so ergibt sich die folgende einfache Darstellung der Mondbewegung:

$$X_M(t) = R \cos \omega t, \quad y_M(t) = R \sin \omega t,$$

hierbei ist R = 384 400 km der Radius der Mondbahn




und $\omega$ die Kreisfrequenz des Mondumlaufs. Da der Mond für einen Umlauf die Zeit T = 29.53 Tage = 708.7 Stunden benötigt und $\omega = 2\pi \cdot T^{-1}$ ist, ergibt sich $\omega = 0.008866.h^{-1}$. Wir merken uns, daß sich die jeweiligen aktuellen Koordinaten des Mondes - der sich in dieser Darstellung übrigens gegen den Uhrzeigersinn um die Erde bewegt - aus diesen Formeln berechnen lassen und verwenden künftig die Kurvenbezeichnungen $X_M$ und $y_M$.

Wie bereits gesagt, ist die Beschleunigung des Flugkörpers eine gerichtete Größe, und deshalb erweist es sich als vorteilhaft, sie als Summevon zwei Beschleunigungen in fest vorgegebene Richtungen darzustellen. Sei also $b_x$ die Beschleunigung in x-Richtung und $b_y$ die in y-Richtung. Analog lassen sich die Kräfte $F_E$ und $F_M$ in je zwei Kräfte $F_{Ex}$ und $F_{Ey}$ sowie $F_{Mx}$ und $F_{My}$ zerlegen.

Damit ist

$$m.b_x = F_{Ex} + F_{Mx} \text{ , } mb_y = F_{Ey} + F_{My} \text{ .}$$

Aus der Zeichnung ist ersichtlich, daß sich $|F_{Ex}|$ zur Kraft $|F_E|$ verhält wie die x-Koordinate des Flugkörpers zu seiner Entfernung $r_E$ von der Erde. Allerdings sind Beträge der Kräfte positiv, aus der Anordnung ist aber zu sehen, daß im Falle $x(t) > 0$ die Kraft $F_{Ex}$ in Richtung der negativen x-Achse wirkt und bei $x(t) < 0$ zur positiven. Das macht noch die Einführung des Faktors -1 in die Proportion erforderlich und liefert damit

$$-\frac{F_{Ex}}{|F_E|} = \frac{x(t)}{r_E}$$

oder

$$F_{E_x} = -\frac{x(t)}{r_E}|F_E| = -\frac{x(t).m.m_E.k}{r_E^3} \text{ .}$$

Analoge Überlegungen lassen sich auch für $F_{E_y}$ , $F_{Mx}$ und $F_{M_y}$ anstellen und wir erhalten damit

$$m.bx = -\frac{x(t).m.m_E.k}{r_E^3} = \frac{(x(t)-x_M(t))-m.m_M.k}{r_M^3}$$

$$m.b_y = -\frac{y(t).m.m_E.k}{r_E^3} - \frac{(y(t)-y_M(t)).m.m_M.k}{r_M^3} \text{ .}$$

Die Entfernungen $r_E$ und $r_M$ ergeben sich unmittelbar aus dem Satz des PYTHAGORAS:

$$r_2^2 = x^2(t) + y^2(t) \text{ , } r_E^2 = (x(t)-x_M(t))^2+(y(t)-y_M(t))^2,$$

so daß wir also den Zusammenhang zwischen Beschleunigung des

Flugkörpers und seinen Ortskoordinaten x und y aufgefunden haben.

Eine erste Erkenntnis erhalten wir bereits an dieser Stelle: Die Masse m des Flugkörpers kürzt sich aus beiden Gleichungen heraus! Das bedeutet also, daß man die Masse eines Flugkörpers bei der Bahnberechnung nicht zu berücksichtigen braucht (exakter: bei der Berechnung der antriebslos durchflogenen Bahnabschnitte)! Dies ist eine Verallgemeinerung des bekannten Fallgesetzes: Im luftleeren Raum fallen alle Körper gleich schnell.

Fassen wir die Formel nach etwas zusammen, indem wir $\gamma = -m_M \cdot k$ setzen. Die Mondmasse beträgt $7{,}35 \cdot 10^{25}$g und die Erdmasse das 81,6-fache davon. Damit ist $\gamma = -4{,}90 \cdot 10^{18}\,\mathrm{cm}^3 \cdot \mathrm{s}^{-2}$ und

$$b_x = \gamma \cdot \left[ \frac{81{,}6x}{r_E^3} + \frac{x - x_M}{r_M^3} \right] = f(x, y, t)$$

$$b_y = \gamma \cdot \left[ \frac{81{,}6y}{r_E^3} + \frac{y - y_M}{r_M^3} \right] = g(x, y, t)$$

Der letzte Schritt im Rahmen der vorbereitenden Überlegungen besteht nun noch darin, die Maßeinheiten festzulegen. Für kosmische Verhältnisse sind cm und s unhandlich, günstigere Größen bekommt man, wenn man als Zeiteinheit die Stunde und als Längeneinheit 10 000 km wählt. Damit ist R = 38.44 und $\gamma = -490 \cdot 10^{18} \cdot (10^{-9})^3 \cdot (3600)^2 = -0.0635$, und mit diesen Werten geben wir nochmals $b_x$ vollständig an:

$$b_x = -0{,}0635 \left[ \frac{81{,}6x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} + \frac{x - 38{,}44 \cdot \cos 0{,}008866\, t}{\sqrt{((x - R\cos\omega t)^2 + (y - R\sin\omega t)^2)^3}} \right] .$$

**Werner Rosenheinrich,**
**Assistent im Bereich**
**Numerische Mathematik**

# Preisaufgaben 9/76

H 49 Gegeben seien die Summen

1

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}$$

$$S_n^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_n^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Man berechne die Summe

$$S_n^4 = 1^4 + 2^4 + \dots + n^4 .$$

H 50 Im Dreieck ABC liege der Punkt O, so daß

1

$\sphericalangle ABO = \sphericalangle BCO = \sphericalangle CAO = \alpha$ gilt.

Mit Hilfe der Dreieckseiten und der Dreiecksfläche berechne man ctg $\alpha$ .

H 51 Man löse die Ungleichung

1

$$2x + \sqrt{a^2 - x^2} > 0 .$$

H 52 Man finde alle reellen Lösungen des Gleichungssystems:

2

$$x + y + z = 6$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 14$$
$$xz + yz = (xy+1)^2 .$$

H 53 Der Abstand der Mittelpunkte zweier sich schneidender Kreise mit Radius R und r sei d. Man berechne die Schnittfläche.

1

Einsendeschluß : 31.10.1976

Den folgenden Artikel sandte uns unser Leser Dr. D. H e t s c h aus Halle ein, der die Erfahrungen des Mathematikunterrichts an sowjetischen Spezialschulen an Ort und Stelle studiert hat. Die Redaktion möchte Herrn Dr. Hetsch an dieser Stelle noch einmal für seine Zuschrift danken.

# Über den Mathematikunterricht an den Schulen der UdSSR

Sie alle haben von den Erfolgen der Sowjetunion auf den verschiedensten Gebieten von Wissenschaft und Technik gehört, Sie haben von den Leistungen der sowjetischen Menschen beim Aufbau der kommunistischen Gesellschaft gelesen und sicher mit Aufmerksamkeit und Interesse die großen Zielstellungen zur Kenntnis genommen, die der XXV. Parteitag der KPdSU gesetzt hat.

Eine wichtige Voraussetzung für den Aufbau der kommunistischen Gesellschaft ist die Vermittlung einer hohen und festen Allgemeinbildung für alle Bürger. Mathematische Kenntnisse und Fertigkeiten sind untrennbarer Bestandteil dieser Allgemeinbildung. Bereits seit langer Zeit werden an sowjetischen Schulen im Vergleich zu den Schulen in vielen anderen Ländern auf mathematischem Gebiet besonders hohe Forderungen gestellt.

Dies spiegelt sich auch in den neuen Mathematiklehrplänen wider, die gegenwärtig an den Schulen der UdSSR eingeführt werden. Die Schüler unserer 11. und 12. Klassen können sich ein Bild davon machen, was es heißt, bereits in Klasse 7 den Wurzelbegriff, quadratische Gleichungen und Vektoren zu behandeln oder in Klasse 9 und 10 die Anfänge der Differential- und Integralrechnung beinahe in dem Umfang zu erlernen, wie das bei uns in Klasse 11 und 12 geschieht. Daneben wird die Geometrie ausführlicher behandelt, als dies bei uns üblich ist, es werden wesentlich mehr und schwierigere Gleichungen und Ungleichungen gelöst.

In zehn Jahren erlernen die sowjetischen Schüler auf mathematischem Gebiet fast dasselbe, wie unsere Schüler in zwölf Jahren. Und aus vielen eigenen Beobachtungen kann ich bestätigen, daß die Mehrzahl von ihnen das Erlernte auch beherrscht und anwenden kann.

Neben dem obligatorischen Unterricht besteht für mathematisch interessierte Schüler die Möglichkeit, sich am entsprechenden fakultativen Unterricht zu beteiligen. Dafür stehen in den Klassen 7 und 8 je zwei Wochenstunden und in den Klassen 9 und 10 je vier Wochenstunden zur Verfügung. Über ein Drittel der Teilnehmer am fakultativen Unterricht hat sich für Mathematik entschieden. So beschäftigen sich Schüler der 9. und 10. Klassen zusätzlich mit geometrischen Transformationen, mit komplexen Zahlen und Polynomem, mit Elementen der Wahrscheinlichkeitstheorie, mit Differentialgleichungen oder Elementen der nichteuklidischen Geometrie. Sie lösen Übungsaufgaben, deren Schwierigkeitsgrad über den Schulstoff hinausgeht.

Viele sowjetische Schüler beschäftigen sich auch in den traditionell bestehenden mathematischen Arbeitsgemeinschaften mit sie interessierenden Problemen. Ein beachtlicher Teil der Schüler hat die Möglichkeit, eine Schule oder Klasse mit verstärktem Mathematikunterricht zu besuchen. Voraussetzung für die Aufnahme in eine solche Klasse ist nur echtes Interesse, es gibt keine Aufnahmeprüfungen. Ich hatte selbst Gelegenheit, in mehreren sowjetischen Städten solche Klassen zu besuchen und war sehr beeindruckt vom Niveau des Unterrichts und der Kenntnisse und Fertigkeiten der Schüler, aber vor allem vom Enthusiasmus, mit dem die Schüler sich der Lösung mathematischer Aufgaben zuwenden. Man kann mit ruhigem Gewissen sagen, daß an diesen Schulen die Mathematik die Atmosphäre bestimmt. Einen Großteil ihrer Freizeit widmen die Schüler dem Lösen von Aufgaben und dem Studium mathematischer Literatur.(An den Zeitungskiosken der UdSSR bietet man populärwissenschaftliche mathematische Literatur ebenso an wie andere Zeitschriften, vor allem - man kauft sie auch.)

Um Ihnen einen Einblick in die an solchen Schulen üblichen Aufgaben zu geben, habe ich sowohl für die Schüler unserer Klassen 9 und 10 als auch für die Schüler der 11. und 12. Klassen einige ausgewählt:

Klasse 9/10:

Es gelte $p_1 p = 2(q_1 + q)$ .
Es ist zu beweisen, daß wenigstens eine der Gleichungen

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 + p_1 x + q_1 = 0$$

reelle Wurzeln hat!

---

a und b seien Längen der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, c die Länge der Hypotenuse. Es ist zu beweisen:

$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \cdot \log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a$ , wobei $c+b \neq 1$ und $c-b \neq 1$ gilt.

---

Es ist zu beweisen, daß $\sqrt[m+n+\ldots+s]{a \cdot b \cdot \ldots \cdot g}$ zwischen dem größten und dem kleinsten Wert von $\sqrt[m]{a}, \sqrt[n]{b}, \ldots \sqrt[s]{g}$ liegt, wobei $a, b, \ldots, g \geq 0$ gilt!

Klasse 11/12:

Wir betrachten die reelle Funktion f, die auf der Menge P der reellen Zahlen definiert und stetig ist und für die gilt:

$$|f(x)| < |x|, \text{ wenn } x \neq 0$$

Es ist zu beweisen, daß $f(0) = 0$ ist !

---

Beweisen Sie, daß für $x > 0$ die folgende Ungleichung gilt:

$$e^x > \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \qquad , n \quad N$$

---

Die Folge $( a_n )$ ist durch die Beziehungen $a_1 = \sqrt{x}$ $( x > 0 )$ und $a_{n+1} = \sqrt{x + a_n}$ gegeben.
Es ist zu beweisen, daß $( a_n )$ monoton wächst und beschränkt ist. Außerdem ist der Grenzwert der Folge zu bestimmen.

---

# Lösungen

$\boxed{\text{Aufgabe H 24}}$ (nach Thomas Kaatz, Gräfenhainichen)

1. Es gilt $x,y \neq k\pi$ , $x,y \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ , $k \in G$
nach Definition von $\tan x$ , $\tan y$ , $\mathrm{ctg}\, x$ und $\mathrm{ctg}\, y$.

2. $\tan^4 a \geq 0$ für alle a,
$\mathrm{ctg}^2 a \geq 0$ , $\tan^2 a \geq a$ für alle a,
$\sin^2 (a+b) \geq 0$ , für alle a und b

3. $(\tan^2 x - \tan^2 y)^2 \geq 0$ für alle x und y
$\tan^4 x + \tan^4 y \geq 0\tan^2 x \tan^2 y$

4. Wegen 3. muß gelten:
$$3 + \sin^2(x+y) = \tan^4 x + \tan^4 y + s\,\mathrm{ctg}^2 x\,\mathrm{ctg}^2 y$$
$$\geq 2(\tan^2 x \tan^2 y + \mathrm{ctg}^2 x\,\mathrm{ctg}^2 y)$$

5. Wir wenden 2 und 4 auf die Ungleichung
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{an:}$$
$$\tan^2 x \tan^2 y + \mathrm{ctg}^2 x\,\mathrm{ctg}^2 y \geq 2$$

Wegen 4 folgt: $3 + \sin^2(x+y) \geq 4$

Dies ist nur für $\sin(x+y) = \pm 1$ erfüllt, was aus $\sin^2 a \leq 1$ für alle a folgt.

Mit $x+y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ gilt auch:
$$\tan x = \tan\left[\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + k\pi\right]$$
$$= \tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$$
$$= \mathrm{ctg}\, y$$

und somit gilt $\tan^2 x \tan^2 y = \mathrm{ctg}^2 x\,\mathrm{ctg}^2 y = 1$

Wegen 5 gilt das Gleichheitszeichen.

Wie suchen die Paare, die die Anfangsgleichung erfüllen:

$$\tan^4 x + \tan^4 y \left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k\pi\right] = 2 \quad , \text{ denn } ctg^2 x \; ctg^2 y = 2,$$
$$\sin^2(x+y) = 1$$

$$\tan^4 x + \tan^4 \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2$$
$$\tan^4 x + ctg^4 x = 2$$

Es folgt also:

$$\tan^4 x = ctg^4 x = 1 \quad \text{und somit}$$
$$\tan x = \pm 1 \quad , \quad ctg x = \pm 1 \quad ,$$

d.h. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ oder $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Analog: $y = \frac{\pi}{4} + k\pi$ oder $y = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

Mit $x+y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ finden wir die Lösungspaare

$$x = \frac{\pi}{4} + k_1\pi \quad , \quad y = \frac{\pi}{4} + k_2\pi \quad \text{oder}$$
$$x = -\frac{\pi}{4} + k_1\pi \quad , \quad y = -\frac{\pi}{4} + k_2\pi \quad ; \; k_1, k_2 \in G$$

---

**Aufgabe H 29** (nach Michael Schaper, Magdeburg)

$$\log_{|x+6|} 2 \cdot \log_2 (x^2 - x - 2) \geq 1$$

Wegen $\log_2 (x^2-x-2) = \dfrac{\log_{|x+6|} (x^2 - x - 2)}{\log_{|x+6|} 2}$ folgt:

$$\log_{|x+6|} (x^2 - x - 2) \geq 1 \qquad (1)$$

Fallunterscheidung:

1.Fall: $x < -7$

Dann gilt für die Basis $|x+6| > 1$. Die Logarithmusfunktion ist wachsend und aus (1) folgt:

$$x^2 - x - 2 \geq |x+6| = -x - 6 \quad \text{nach Voraussetzung}$$
$$x^2 \geq -4$$

Wie erhalten $(-\infty, -7)$ als erstes Lösungsintervall.

**2.Fall:** $x = -7$ entfällt, da die Basis 1 ist

**3.Fall:** $-7 < x < -6$

Dann gilt $|x+6| < 1$ und die Logarithmusfunktion ist fallend.
Aus (1) folgt:

$$x^2 - x - 2 \leq |x+6| = -x - 6 \quad \text{nach Voraussetzung}$$
$$x^2 \leq -4 \quad \text{keine Lösung}$$

**4.Fall:** $x = -6$ entfällt, da die Basis 0 ist

**5.Fall:** $-6 < x < -5$

Dann gilt $|x+6| < 1$, die Logarithmusfunktion ist fallend und aus (1) folgt:

$$x^2 - x - 2 \leq |x+6| = x+6 \quad \text{nach Voraussetzung}$$
$$x^2 - 2x + 1 \leq 9$$
$$|x - 1| \leq 3 \quad , \text{ es folgt: } -2 \leq x \leq 4$$

Widerspruch zur Voraussetzung, keine Lösung!

**6.Fall:** $x = -5$ entfällt, da die Basis 1 ist

**7.Fall:** $-5 < x$, d.h. $|x+6| > 1$

Die Funktion ist wachsend und aus (1) folgt:

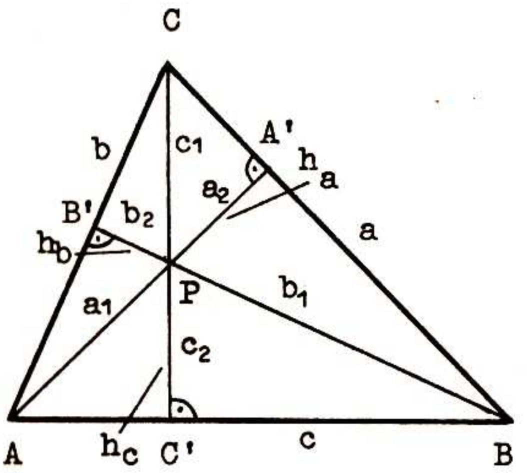
$$x^2 - x - 2 \geq |x+6| = x+6 \quad \text{nach Voraussetzung}$$
$$x^2 - 2x + 1 \geq 9$$
$$|x - 1| \geq 3$$
$$x - 1 \geq 3 \quad , \quad -x + 1 \geq +3$$
$$x \geq 4 \qquad x \leq -2$$

Unter Berücksichtigung der Voraussetzung erhält man hier die Lösungsintervalle $[4 ; \infty)$ und $(-5 ; -2]$.

Damit lautet die Lösungsmenge:

$$L = \left\{ (-\infty; -7) ; (-5 ; -2] ; [4 ; +\infty) \right\} .$$

$\boxed{\text{Aufgabe H 17}}$ (nach Marcus Kasner, Templin)




O. B. d. A. sei $h_a = 2\sqrt{2}$ cm,

$h_c = 3$ cm

und $b_1 : b_2 = 5 : 1$

mit $b_1 + b_2 = h_b$ .

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\Delta AC'P$ und $\Delta CPA'$ folgt:

$$a_1 \cdot a_2 = c_1 \cdot c_2 \tag{1}$$

Da P innerhalb des Dreiecks liegt ($\Delta ABC$ ist spitzwinklig), gilt

$$F_{\Delta APC} + F_{\Delta ABP} + F_{\Delta BCP} = F_{\Delta ABC} = F \quad , \tag{2}$$

$$\frac{b \cdot b_2}{2} + \frac{c \cdot c_2}{2} + \frac{a \cdot a_2}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} \quad .$$

Wegen $b_2 = \frac{1}{6}h_b$ folgt:

$$\frac{1}{6} \cdot b \cdot h_b + c \cdot c_2 + a \cdot a_2 = c \cdot h_c = \frac{1}{6} \cdot c \cdot h_c + c \cdot c_2 + a \cdot a_2$$

$$c \cdot c_2 + a \cdot a_2 = \frac{5}{6} \cdot c \cdot 3 = \frac{5}{2} \cdot c$$

$$a_2 = \frac{c}{a}\left(\frac{5}{2} - c_2\right) \ . \tag{3}$$

Wegen $\frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$ ist $\frac{c}{a} = \frac{h_a}{h_c} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ . (4)

In (3) eingesetzt ergibt dies: $a_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}(5 - 2c_2)$ . (5)

Aus (1) folgt: $a_2(2\sqrt{2} - a_2) = c_2(3 - c_2)$

$$2\sqrt{2}\,a_2 - a_2^2 = 3c_2 - c_2^2 \quad .$$

Unter Verwendung von (5) gilt:

$$\frac{4}{3}(5 - 2c_2) - \frac{4}{9}(5 - 2c_2)^2 = 3c_2 - c_2^2$$
$$c_2^2 - 11c_2 + 10 = 0$$

$$c_{2/1} = 10 \quad \text{und} \quad c_{2/2} = 1 \,. \qquad (6)$$

Wegen $c_2 < h_c$ folgt $c_2 = c_{2/2} = 1$ cm und somit $c_1 = 2$ cm sowie $a_2 = \sqrt{2}$ cm,

d. h. $\overline{AC'} = 1$ cm und $b = \sqrt{10}$ cm . (7)

Aus (1) folgt weiter:

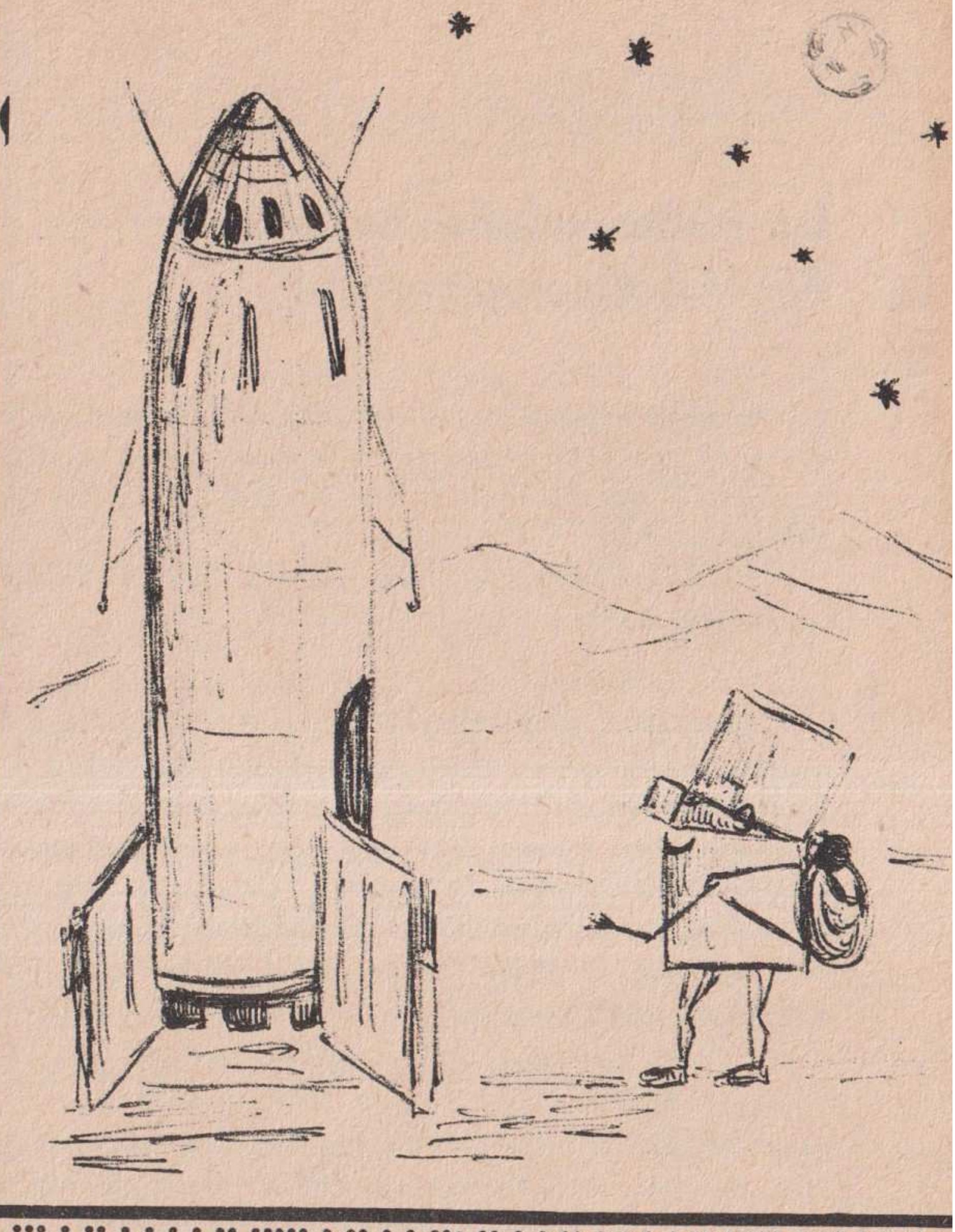
$$b_1 \cdot b_2 = a_1 \cdot a_2$$
$$5b_2^2 = 2$$
$$b_2 = \frac{\sqrt{10}}{5} \text{ cm}$$
$$b_1 = \sqrt{10} \text{ cm}$$
$$h_b = \frac{6}{5}\sqrt{10} \text{ cm} \,. \qquad (8)$$

Aus (7) und (8) ergibt sich für den Flächeninhalt des Dreiecks:

$$F = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{6 \cdot \sqrt{10}}{5} \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2 \,.$$

---

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Egbert Creutzburg
**Chefredakteur:** Waltraud Werner
**Redaktion:** K. Bartholmé, H.-J. Hauschild, R. Jeske, H.-G. Leopold
**Anschrift:** WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
**Konto:** Postscheckkonto 180 45
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932



10
76

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

10. Jahrgang

Index 33 873

Preis: 0,20 M

# Zur mathematischen Behandlung des Mondflugproblems (II)

Nachdem dieser Stand erreicht ist, kann eine Darstellung von $x(t)$ und $y(t)$ aufgestellt werden, indem wir $b_x$ durch $x$ und $b_y$ durch $y$ ausdrücken. Hierzu verwenden wir die Definition der Beschleunigung:

Die Beschleunigung eines Körpers ist die Änderung seiner Geschwindigkeit je Zeitintervall:

$$b = \frac{\Delta v}{\Delta t} .$$

Exakt gilt diese Formel nur in dem Fall, daß die Beschleunigung konstant ist, ansonsten ergibt sich hieraus nur die Durchschnittsbeschleunigung über den Zeitabschnitt $\Delta t$. Wenn wir aber diesen Zeitabschnitt sehr kurz wählen (was der Ausdruck "sehr kurz" beinhaltet, konkretisieren wir später), so wird sich diese Durchschnittsbeschleunigung kaum von der Beschleunigung in einem beliebigen Zeitpunkt des betrachteten Abschnittes unterscheiden. Im Moment $t_1$ gilt also

$$b_x(t_1) = \frac{v_x(t_1 + \Delta t) - v_x(t_1)}{\Delta t} + d_1(t_1, \Delta t),$$

hierbei ist $v_x$ die Geschwindigkeit in x-Richtung und $d_1$ eine von $t_1$ und $\Delta t$ abhängende Größe, deren Betrag man durch Verringerung von $\Delta t$ beliebig klein machen kann. Nun ist aber

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

bei konstanter Geschwindigkeit und somit erhalten wir die analogen Formeln

$$v_x(t_1) = \frac{x(t_2) - x(t_1 - \Delta t)}{\Delta t} + d_2(t_1, \Delta t)$$

$$v_x(t_1 + \Delta t) = \frac{x(t_2 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t} + d_2(t_2 + \Delta t, \Delta t),$$

wobei wir, um die nachfolgende Formel symmetrisch bezüglich $t_1$

zu gestalten, die Differenz $\Delta x$ diesmal "rückwärts" genommen haben. Damit gilt

$$b_x(t_1) = \frac{x(t_1+\Delta t)-2x(t_1)+x(t_1-\Delta t)}{(\Delta t)^2} + d_3(t_1, \Delta t) ,$$

wobei $d_3$ die Zusammenfassung aller "kleiner" Größen ist, und endgültig ergibt sich

$$x(t_1+\Delta t)-2x(t_1)+x(t_1-\Delta t)=(\Delta t)^2 \cdot \left[f(x(t_1),y(t_1),t_1)-d_3(t_1, \Delta t)\right] .$$

Diese Formel ist ein interessantes rekursives Verhältnis zwischen drei im zeitlichen Abstand $\Delta t$ aufeinanderfolgenden $x(t)$-Werten, in das aber leider der unbekannte Term $d_3(t_1, \Delta t)$ eingeht.

Im Vergleich mit den anderen Größen ist $d_3$ aber sehr klein, und das legt den Gedanken nahe, es zu ignorieren. Dann ist die Formel praktisch verwendbar, liefert aber nicht mehr die exakten Werte, und das macht eine genauere Formulierung erforderlich.

Betrachten wir einen bestimmten Zeitabschnitt $\Delta t$, dessen Länge wir zunächst fixieren wollen. Im Moment $t_o=0$ hat unser Flugkörper die Koordinaten $x(0)$ und $y(0)$ , wir setzen $x_o=x(0)$ und $y_o=y(0)$. Wenn der Flugkörper jetzt - von Erde und Mond nicht beeinflußt - mit der konstanten Geschwindigkeit $v_o$ geradeaus fliegen würde, so hätte er nach Ablauf des Zeitabschnittes $\Delta t$ die Koordinaten $x_1$ und $y_1$ , die natürlich nicht genau mit $x(\Delta t)$ und $y(\Delta t)$ übereinstimmen, obwohl bei kleinem $\Delta t$ die Differenz gering sein wird.
Weiterhin definieren wir

$$x_{i+1} = 2x_i-x_{i-1} + (\Delta t)^2 f(x_i,y_i,t_i) ,$$

$$y_{i+1} = 2y_i-y_{i-1} + (\Delta t)^2 g(x_i,y_i,t_i) ,$$

wobei $r^2_{E_i} = x^2_i+y^2_i$ , $x_{M_i} = R \cos (i. \Delta t . \omega)$ usw. gilt.
Für $i=1$ kann man nun aus der Kenntnis von $x_o,y_o,x_1$ und $y_1$ die Werte $x_2,y_2$ berechnen, daraus $x_3,y_3$ und dieser Prozeß läßt sich formal fortsetzen. Es erhebt sich die Frage, ob die so erhaltenen Werte in passender Relation zur theoretischen

Flugbahn stehen. Die Antwort hierauf gibt der folgende

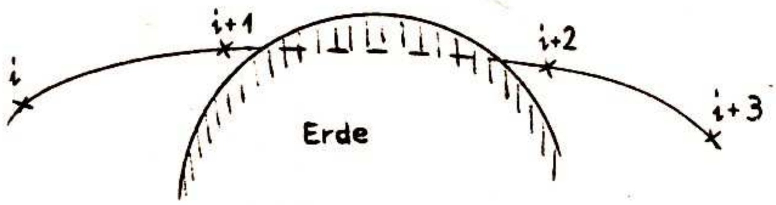
**S a t z :** Es sei $T_0$ 0 und $\varepsilon$ 0 . Die exakte Flugbahn des Körpers berühre im Zeitintervall $[0, T_0)$ nicht die Oberfläche von Erde oder Mond. Dann existiert eine natürliche Zahl $N(T_0, \varepsilon)$ derart, daß für jede Zahl $n > N$ gilt:
Wenn $\Delta t = \frac{T_0}{n}$ ist, so sind für alle $i$ von 0 bis $n$ die Ungleichungen

$$|x_i - x(i.\Delta t)| \leq \varepsilon \quad \text{und} \quad |y_i - y(i.\Delta t)| \leq \varepsilon$$

erfüllt.

Auf einen Beweis dieses Satzes sei hier verzichtet, da er ziemlich umfangreich würde und ohne Hilfsmittel der Differentialrechnung kaum geführt werden kann.

Auf ein Detail sei jedoch besonders verwiesen: Die Voraussetzung, daß die Flugbahn für $t < T_0$ nicht an der Oberfläche von Erde oder Mond abbricht, hat eine doppelte Bedeutung. Zunächst geht es darum, ein unbemerktes Durchqueren (in der Rechnung) eines Himmelskörpers zu vermeiden. Es sei hierbei daran erinnert, daß die Werte $(x_i, y_i)$ ja diskret liegen, so daß ein solcher Fall eintreten könnte (siehe Abb.).




Die Werte $(x_i, y_i)$, die sich im Verlaufe der weiteren Rechnung ergäben, wären dann unsinnig. Zum anderen bewirkt diese Bedingung, daß die Werte $r_E$ und $r_M$ nach unten durch den Erd- bzw. Mondradius beschränkt werden, und das garantiert uns, daß die Nenner in den betrachteten Ausdrücken nicht beliebig klein werden können. Ohne diese Voraussetzung trifft der Satz nicht mehr zu, selbst wenn man die theoretische Flugbahn durch den Körper hindurchführte.

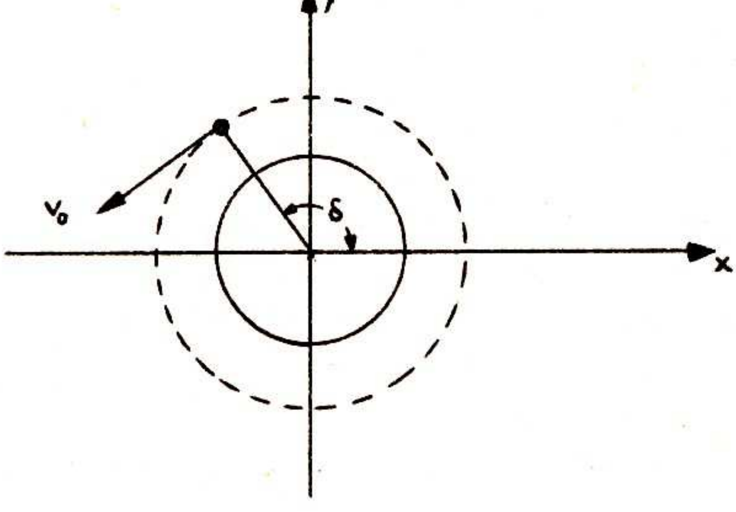
Damit wäre die gewünschte Methode zur Bahnberechnung gefunden. Man möge sich nicht daran stören, daß es sich hierbei um eine Näherungslösung handeln wird. Skeptiker neigen wohl dazu, einen Näherungswert zum exakten in ein ähnliches Verhältnis zu setzen wie Malzkaffee zu türkischem Mocca und merken in der Regel nicht, daß sie dadurch mit dem Satz auch den Kaffee wegschütten. Betrachten wir die Sache realistisch, setzen wir $\varepsilon = 10^{-7}$ und kalkulieren wir für den Raumflug eine Zeit von zwei Wochen, d. h. $t_1 = 336$, so garantiert uns der Satz, daß für ein genügend kleines $\Delta t$ die berechneten Werte von den wirklichen höchstens einen Meter abweichen, und das ist eine völlig bedeutungslose Distanz angesichts der kosmischen Maßstäbe. Freilich ist die Frage offen, wie klein der Wert $\Delta t$ gewählt werden muß, und darüber gibt der Satz keine Auskunft. Es ist zwar möglich, auf theoretischem Wege Aussagen über die Zahl $N(t_1, \varepsilon)$ in ihrer Abhängigkeit von $t_1$ und $\varepsilon$ zu machen, aber das ist einesteils sehr umständlich und zum anderen ergibt sich meist ein viel zu großer Wert, mit dem man in der Praxis wenig anfangen kann. Wir wählen besser einen anderen Weg und bestimmen den nötigen Wert $\Delta t$ experimentell am Computer. Zu diesem Zweck ist es nun an der Zeit, die Rechenvorschrift explizit zu formulieren.

Der Flugkörper soll von einer Satellitenbahn in 180 km Höhe starten. Es ist am bequemsten, den Startpunkt durch einen Winkel $\delta$ zu bestimmen und hieraus $x_0$ und $y_0$ zu berechnen. Für den Erdradius setzen wir 6380 km, dann ist

$$x_0 = 0{,}656 \cdot \cos \delta$$

und

$$y_0 = 0{,}656 \cdot \sin \delta$$



Die Startgeschwindigkeit $v_0$ betrachten wir als absolute Geschwindigkeit des Körpers im Koordinatensystem. Es bleibt zu überlegen, in welche Richtung wir die Geschwindigkeit richten wollen, und hier empfiehlt es sich, sie im selben Sinn wie die Mondbewegung zu orientieren. Das ermöglicht uns, den Mond gewissermaßen einzuholen, anstatt ihm zu begegnen, und die erste Variante wäre z. B. für wissenschaftliche Untersuchungen günstiger.

Der Flugkörper legt in der Zeit $\Delta t$ die Strecke $v_0 \cdot \Delta t$ zurück und hieraus erhält man

$$x_1 = x_0 + v_0 \cdot \Delta t \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right)$$

$$y_1 = y_0 + v_0 \cdot \Delta t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right)$$

oder kürzer

$$x_1 = x_0 - v_0 \cdot \Delta t \cdot \sin\delta$$

$$y_1 = y_0 + v_0 \cdot \Delta t \cdot \cos\delta$$

Die weiteren Werte $x_i, y_i$ erhält man dann aus der Rekursionsvorschrift.

Wer den Wunsch hat, kann jetzt selbst für eine beliebige Parameterkonstellation $v_0$, $\delta$ und $\Delta t$ die Rechnung durchführen, er wird aber sehr bald feststellen, daß das recht aufwendig ist. Es macht sich notwendig, auf einen Rechenautomaten zurückzugreifen.

Zunächst gilt es, Aussagen über die Größe $\Delta t$ zu gewinnen. Da wir nun keine Möglichkeit haben, die gewonnenen Werte $x_i, y_i$ mit den zugehörigen exakten zu vergleichen, weil letztere uns unbekannt bleiben, müssen wir ein anderes Kriterium wählen, um über die Güte der Näherungen Informationen zu erhalten. In der Praxis hat sich die folgende Regel gut bewährt:

Man berechnet für die gleichen Werte $v_0$ und $\delta$ die Koordinaten $x_i$ und $y_i$ zweimal, wobei bei der zweiten Rechnung der Wert $\frac{1}{2}\Delta t$ verwandt wird, und vergleicht die beiden Resultate. Der Wert $\Delta t$ ist brauchbar, wenn sich die beiden Resultate nur unwesentlich unterscheiden.

Eine weitere Kontrollmöglichkeit bieten uns die drei KEPLERschen Gesetze, die die Bewegung eines Körpers im Schwerfeld eines anderen Körpers beschreiben (s. Artikel von R. Klette, WURZEL 7/76). Dieser Fall liegt bei uns vor, wenn wir den Mond aus unseren Betrachtungen vorerst eliminieren, wodurch sich das rekursive Verhältnis auf die folgende Form reduziert:

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + 81{,}6 \cdot \gamma \cdot (\Delta t)^2 \frac{x_i}{r_{E_i}^3}$$

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + 81{,}6 \cdot \gamma \cdot (\Delta t)^2 \frac{y_i}{r_{E_i}^3}$$

Die Ellipsenbahn ist eine geschlossene Kurve, der Flugkörper müßte also zu seinem Ausgangspunkt zurückkehren, und es bleibt zu untersuchen, für welche Werte von $\Delta t$ das mit befriedigender Genauigkeit geschieht. Außerdem besteht die Möglichkeit, mehrere Umläufe abzuwarten, wobei sich die Abweichungen aufsummieren und deutlicher werden. Diese Untersuchungen führen wir zur Vereinfachung mit dem festen Wert $\delta = 0$ durch. Für $v_o = 10$ km.s$^{-1}$ sind in der folgenden Tabelle 1 einige Resultate angegeben. Die erste Spalte enthält die Kehrwerte von $\Delta t$. Rechenautomaten arbeiten bekanntlich im Dualsystem, so daß sich die Verwendung von Potenzen von 2 empfiehlt. Die zweite und dritte Spalte enthält $x_i$ und $y_i$ für den Zeitpunkt t=1h, die vierte und fünfte diese Werte für t=3h , die sechste die x-Koordinate $x_u$, die nach einem vollen Umlauf angenommen wird ($y_u$=0). Der theoretische Wert $x_u$ ist 0.656. In der letzten Spalte steht die benötigte "Umlaufzeit" $t_u$ .

| $1/\Delta t$ | $x_i$ | $y_i$ | $x_i$ | $y_i$ | $x_u$ | $t_u$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.654 | 3.600 | 0.506 | 9.928 | - | - |
| 2 | 0.533 | 3.268 | -0.044 | 8.394 | - | - |
| 4 | 0.113 | 2.676 | -1.435 | 5.773 | - | - |
| 8 | -0.474 | 2.090 | -2.663 | 2.932 | 0.647 | 12.4 |
| 16 | -0.836 | 1.732 | -2.902 | 1.348 | 0.661 | 7.61 |
| 32 | -1.007 | 1.553 | -2.902 | 0.717 | 0.657 | 6.83 |
| 64 | -1.086 | 1.467 | -2.894 | 0.460 | 0.655 | 6.66 |
| 128 | -1.124 | 1.424 | -2.879 | 0.338 | 0.654 | 6.51 |
| 256 | -1.143 | 1.399 | -2.815 | 0.233 | 0.656 | 6.19 |
| 512 | -1.136 | 1.370 | -2.460 | 0.033 | 0.628 | 5.00 |

Eine weitere Verkleinerung von $\Delta t$ führt zu völlig unsinnigen Werten.

Die erhaltenen Resultate erfüllen die in sie gesetzten Hoffnungen keineswegs. Nach Aussage des Satzes müßten die Werte in jeder Spalte der Tabelle "stehenbleiben", d. h. bei genügend kleinem $\Delta t$ dürften sie sich kaum noch voneinander unterscheiden. Die Tendenz zur Stabilisierung ist auch zunächst vorhanden. Für $t \geq \frac{1}{4}$ ergeben sich sehr grobe Werte, der "Flugkörper" verläßt den ernahen Raum, ohne auf eine Umlaufbahn zu gelangen. Dann werden die Zahlen "vernünftiger" und beginnen, sich aneinander anzunähern, wie es die Theorie verlangt, aber dieser Prozeß führt nicht zu passenden Werten, um die sich dann die Resultate gruppieren.

Die Theorie stimmt. Das Programm für den Automaten war auch richtig, und letzterer war intakt und hat ordentlich gerechnet, andererseits zeigen die Resultate, daß irgendwo eine Fehlerquelle steckt, denn die errechneten Koordinatenwerte können nicht mit den theoretischen übereinstimmen, zumindest für kleine $\Delta t$.

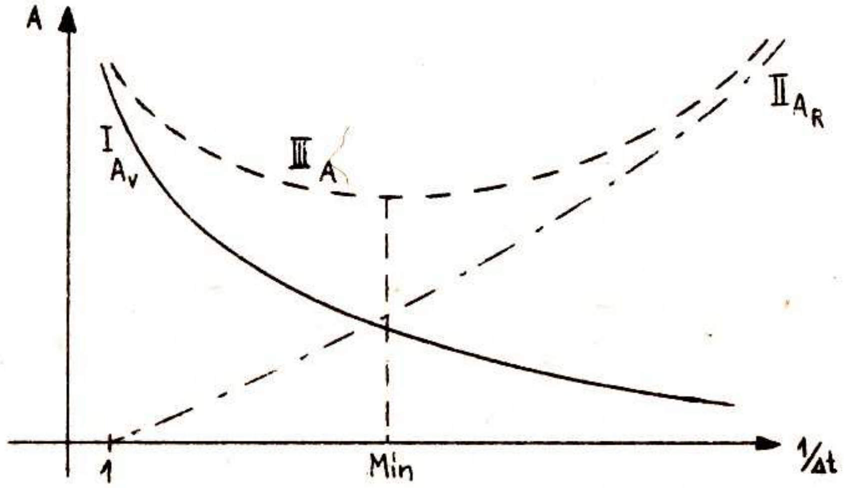
Eine Erklärung für diese Erscheinung erhält man, wenn man sich vergegenwärtigt, daß theoretische und rechnerisch erhaltene Resultate auch unmöglich identisch sein können. Der erwähnte Satz setzte voraus, daß die Werte $x_i, y_i$ völlig exakt ermittelt wurden, und das ist praktisch nicht zu realisieren, da stets nur mit einer gewissen maximalen Anzahl von Dezimalstellen gerechnet werden kann, im gegebenen Falle waren es sieben Stellen. Schon die Multiplikation zweier derartiger Zahlen kann eine vierzehnstellige Zahl liefern, von der dann die letzten sieben Stellen im Automaten weggerundet werden. Bei jeder arithmetischen Operation ist dieser Fehler nicht sehr groß, aber er führt dazu, daß sich die errechneten Wert $\bar{x}_2, \bar{y}_2$ etwas von den exakten Koordinaten $x_2, y_2$ unterscheiden. Mit diesen schon leicht abweichenden Zahlen werden nun $\bar{x}_3, \bar{y}_3$ berechnet. Es ist klar, daß auch diese damit schon nicht exakt werden können, umsomehr, als daß auch im Laufe ihrer Berechnung neue Rundungsfehler hinzukommen. Durch Aufsummierung der Fehler wachsen die Abweichungen im Laufe der Rechnung immer weiter an und werden schließlich größer als die eigentlichen Resultate.

Etwas vereinfacht ergibt sich folgendes Bild:

Dem Augenblick $t=1$ Stunde entspreche das errechnete Wertepaar $\bar{x}_i, \bar{y}_i$. Betrachten wir die Abweichung

$$A = x(1)-\bar{x}_i = (x(1)-x_i) + (x_i-\bar{x}_i) = A_V + A_R \text{ ,}$$

so sehen wir, daß sie sich aus der theoretischen Abweichung des Verfahrens $A_v$ und den aus der Rechnung stammenden Rundungsfehlern $A_R$ zusammensetzt. Setzen wir den schlimmsten Fall voraus, daß $A_v$ und $A_R$ dasselbe Vorzeichen haben, seien sie positiv. Die Theorie zeigt, daß der Verfahrensfehler $A_v$ mit $\Delta t$ abnimmt und beliebig klein gemacht werden kann (Kurve I). Wenn wir aber $\Delta t$ verringern, so wächst die Zahl der Schritte, die wir bis $t=1$ zu rechnen haben: für $\Delta t=1$ ist $x_1$ zu nehmen, für $\Delta t=0.01$ aber $x_{100}$. Jehr mehr Schritte,




umso größer wird aber voraussichtlich $A_R$ (Kurve II). Der Gesamtfehler $A$ ist damit in seiner Abhängigkeit von $\Delta t$ etwa durch Kurve III charakterisiert, und diese Kurve hat ein positives Minimum, das sich nicht unterbieten läßt.

Die gewonnenen Erkenntnisse zeigen auch die möglichen Auswege aus dieser Sackgasse:
Man muß mindestens eine der Kurven I oder II "herunterziehen", das verkleinert auch das Minimum der Abweichung.

Im gegebenen Falle bestand die Möglichkeit, $A_R$ durch

Übergang zu zehnstelliger Rechnung zu verringern. Die Abweichung bei jedem Rechenschritt verringerte sich dadurch etwa auf ein Tausendstel der vorigen, die Rechenzeit wuchs auf das Doppelte. Die folgende Tabelle enthält die Resultate:

| $1/\Delta t$ | $x_i$ | $y_i$ | $x_i$ | $y_i$ | $x_u$ | $t_u$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.654 | 3.600 | 0.506 | 9.928 | - | - |
| 2 | 0.533 | 3.268 | -0.044 | 8.394 | - | - |
| 4 | 0.113 | 2.675 | -1.435 | 5.773 | - | - |
| 8 | -0.474 | 2.090 | -2.663 | 2.932 | 0.647 | 12.4 |
| 16 | -0.837 | 1.732 | -2.903 | 1.348 | 0.660 | 7.62 |
| 32 | -1.007 | 1.553 | -2.903 | 0.718 | 0.655 | 6.87 |
| 64 | -1.086 | 1.467 | -2.899 | 0.465 | 0.654 | 6.70 |
| 128 | -1.124 | 1.426 | -2.901 | 0.355 | 0.654 | 6.54 |
| 256 | -1.143 | 1.406 | -2.903 | 0.304 | 0.654 | 6.64 |
| 512 | -1.152 | 1.396 | -2.904 | 0.280 | 0.654 | 6.64 |
| 1024 | -1.157 | 1.391 | -2.905 | 0.268 | 0.654 | 6.64 |
| 2048 | -1.159 | 1.388 | -2.906 | 0.261 | 0.654 | 6.65 |

Diese Tabelle weist einen erheblichen Gewinn an Genauigkeit aus. Die Differenzen der Koordinaten, die $t=1h$ und $t=3h$ entsprechen, betragen für $\Delta t=1/1024$ und $\Delta t=1/2048$ entsprechend 20,30,10 und 70 km. Das ist zwar immer noch weit von dem erwähnten einen Meter entfernt, aber in Anbetracht der Grobheit des Ausgangsmodells könnte man nun vielleicht $\Delta t=1/2048$ akzeptieren. Es erweist sich aber, daß außer den Rundungsfehlern noch ein Aspekt der praktischen Rechnung berücksichtigt werden muß: die Rechenzeit. Sie ist der Zahl der zu rechnenden Schritte proportional und verdoppelt sich damit bei Halbierung von $\Delta t$. Für $\Delta t=1/2048$ wurde für die Berechnung des Erdumlaufes eine knappe Stunde benötigt, d. h. der Automat wäre etwa siebenmal "schneller" als der Flugkörper. Wenn wir für einen Mondflug drei Tage rechnen, so würde seine Berechnung sicher 24 Stunden in Anspruch nehmen, da wir dann höchstens noch dreimal "schneller" sind als der natürliche Ablauf, weil dann die komplizierten Ausdrücke $f(x,y,t)$ und $g(x,y,t)$ berechnet werden müssen - bei unserem Erdsatelliten fehlt z. B. das Glied

$$\frac{x - R\cos\omega t}{\sqrt{(x-R\cos\omega t)^2 + (y-R\sin\omega t)^2}}$$

in der Formel. Weiterhin wird es nötig sein, eine ganze Serie von "Starts" auszuführen, um den Mond zu treffen, und es ist zu erwarten, daß die Gesamtrechenzeit in die Größenordnung eines Monats gerät, und letzteres ist offensichtlich nicht akzeptabel.

Die Resultate erwecken den Eindruck, daß die Klippe der Rundungsfehler umfahren ist, dahinter stießen wir auf das nächste Hindernis. Es ist in der Wissenschaft wie im Leben üblich, in solchen Fällen nicht zu kapitulieren, sondern sich etwas Neues einfallen zu lassen, der Weg ist klar: Die Abweichung $A_v$ muß verringert werden.

Bevor wir uns damit befassen, sei noch an einem Beispiel demonstriert, wie sich theoretische Erkenntnisse in numerischen Resultaten widerspiegeln. Man kann zeigen, daß die Größe $A_v(\Delta t)$ (als Funktion von $\Delta t$ bei fixiertem $t=1h$ oder $t=3h$) für kleine Werte $\Delta t$ ungefähr proportional zu $\Delta t$ ist. Dem Leser sei empfohlen, diese Gesetzmäßigkeit einmal z. B. an der linken Spalte $x_i$ nachzuprüfen, indem er die Differenzen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Werten $x_i$ berechnet. Sei $x_i$ der Wert zu einem gewissen $\Delta t$ und $x_i^*$ der zu $\frac{1}{2}\Delta t$ gehörende, so ist

$$
\begin{aligned}
x_i - x_i^* &= (x_i - x(1)) - (x_i^* - x(1)) \\
&= A_v(\Delta t) - A_v(\tfrac{1}{2}\Delta t) \\
&\approx A_v(\Delta t) - \tfrac{1}{2} A_v(\Delta t) \\
&= \tfrac{1}{2} A_v(\Delta t) ,
\end{aligned}
$$

und damit ist auch $x_i - x_i^*$ etwa proportional zu $\Delta t$. Hierbei ist noch zu beachten, daß die Werte $x_i$ bei Verringerung von $\Delta t$ monoton abnehmen. Dieselben Gesetzmäßigkeiten erkennt man auch bei $y_i$ für $t=1h$ und $t=3h$, aber nicht bei $x_i$ für $t=3h$. Das ist kein Zufall, den Grund hierfür möge sich der Leser jedoch selbst überlegen!

Noch ein interessanter Fakt ergibt sich aus der Tabelle: Das Perigäum $x_u$ erweist sich als relativ stabiler Parameter.

**Werner Rosenheinrich**
**Assistent im Bereich**
**Numerische Mathematik**

# Preisaufgaben 10/76

**H 55** Man löse die Ungleichung

2

$$\sqrt{1+2\cos x} + \sqrt{\cos x} > \sqrt{\frac{17}{7} - \cos x}$$

**H 56** Eine Wurzel der Gleichung

1

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + 6x + 2 = 0$$

laute $\sqrt{3} + 1$. Man finde die anderen Wurzeln der Gleichung, wenn a und b rationale Zahlen.

**H 57** Man löse die Gleichung

2

$$\sqrt{\lg_a \sqrt[4]{ax} + \lg_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\lg_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \lg_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = 0 .$$

**H 58** Man löse das Gleichungssystem

2

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ xz + yt &= 2 \\ xz^2 + yt^2 &= 5 \\ xz^3 + yt^3 &= 14 \end{aligned}$$

**H 59** Man beweise, daß die Gleichung

1

$$(\sin x + 3\cos x) \cdot \sin 4x = 2$$

keine Lösung besitzt.

Für jede vollstandige Lösung erhalt der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.

Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.

Einsendeschluß: 1.12.76

# Lösungen

Aufgabe H 33 (nach Norman Bitterlich, K.-M.-Stadt)

Wegen der Voraussetzung $a+b+c = 0$ gilt:

$$(a+b+c)^2 = 0 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2\cdot(ab + ac + bc)$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = [-2\cdot(ab + ac + bc)]^2$$

$$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2 = 4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 +2a^2bc+2ab^2c+2abc^2)$$

$$a^4+b^4+c^4 = 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) + 8abc(a+b+c)$$

$$a^4+b^4+c^4 = 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$$

In die Ausgangsgleichung eingesetzt ergibt das:

$$\begin{aligned} a^5(b^2+c^2)+b^5(a^2+c^2)+c^5(a^2+b^2) &= (a^3+b^3+c^3)\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) \\ &= a^5b^2+a^5c^2+a^3b^2c^2+a^2b^5+a^2b^3c^2+\ldots \\ &\qquad \ldots+a^2b^2c^3+a^2c^5+b^2c^5 \\ &= a^5(b^2+c^2)+b^5(a^2+c^2)+c^5(a^2+b^2) \\ &\qquad +a^2b^2c^2(a+b+c) \\ &= a^5(b^2+c^2)+b^5(a^2+c^2)+c^5(a^2+b^2) \end{aligned}$$

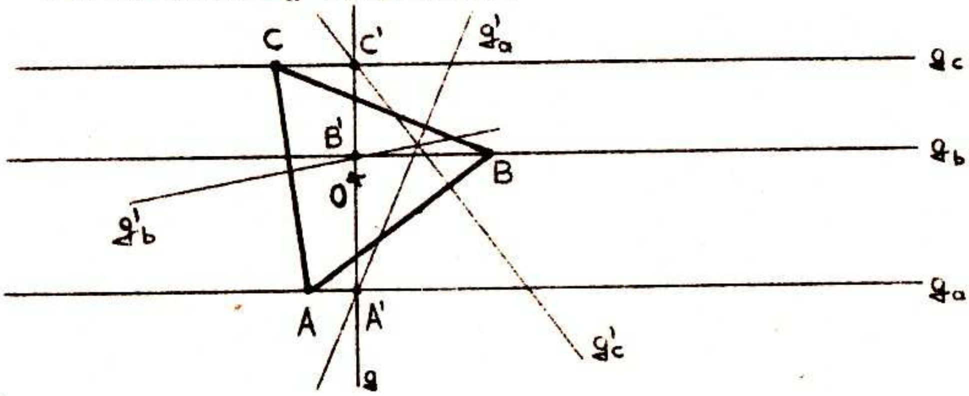
Da alle Schritte umkehrbar sind, gilt tatsachlich für alle a,b,c mit $a+b+c = 0$

$$a^5(b^2+c^2)+b^5(a^2+c^2)+c^5(a^2+b^2) = \frac{1}{2}(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4)$$

q. e. d.

$\boxed{\text{Aufgabe H 34}}$ (nach Roger Labahn, Anklam)

Die Lösung erfolgt mittels komplexer Zahlen. Das gesamte Gebilde wird in die GAUSSsche Zahlenebene gelegt, wobei der Mittelpunkt von $\Delta ABC$ der Ursprung ist, die Parallelen die eine, die Senkrechte darauf die andere Koordinatenrichtung bestimmen.




<u>o.B.d.A.:</u> C habe die komplexe Darstellung $C = 1+y_c i$. (1)

Dann gilt, da $\measuredangle COA = \measuredangle AOB = 120^\circ$:

$$A = (-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, y_c) + (\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\, y_c)\, i \qquad (2)$$

$$B = (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, y_c) + (-\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\, y_c)\, i\,, \qquad (3),$$

da $\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i$. Da A', B', C' auch als Projektionen von A, B, C auf die Realteilachse (g) aufgefaßt werden können, ergibt das:

$$A' = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, y_c \qquad (4)$$

$$B' = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, y_c \qquad (5)$$

$$C' = 1 \qquad (6)$$

Da nun $g_a'$, $g_b'$, $g_c'$ genau die Parallelverschiebungen der Ortsvektoren OA, OB, OC um die Imaginärteile von A, B, C sind, lassen sich Parametergleichungen aufstellen:

$$g_a' := t_1\left[(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, y_c) + (\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\, y_c)\, i\right] - (\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\, y_c)$$

$$g_b' := t_2\left[(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, y_c) + (-\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\, y_c)\, i\right] - (-\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\, y_c)$$

$g_c' := t_3\left[1 + y_c i\right] - (y_c i)$ .

Es gilt nun zu zeigen, daß 3 Parameterwerte $t_1, t_2, t_3$ existieren, sodaß alle 3 Geraden denselben Wert annehmen ( Schnittpunkt ). Da dann alle 3 Real- bzw. Imaginärteile tripelweise übereinstimmen müssen, ergibt sich das Gleichungssystem:

$$t_1\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\, y_c\right) = t_2\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\, y_c\right) = t_3$$

$$t_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} y_c\right) - \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} y_c\right) = t_3\, y_c - y_c$$

$$= t_2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} y_c\right) - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} y_c\right)$$

Durch Nachrechnen zeigt sich, daß dies genau die Parameter

$$t_1 = \frac{1}{1+y_c^2}\left(1 - \sqrt{3}\, y_c\right)$$

$$t_2 = \frac{1}{1+y_c^2}\left(1 + \sqrt{3}\, y_c\right)$$

$$t_3 = \frac{1}{1+y_c^2}\left(1 - \sqrt{3}\, y_c\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\, y_c\right)$$

erfüllen, das heißt es existiert ein Schnittpunkt, also bilden die 3 Parallelen ein Geradenbüschel.

q. e. d.

+ ! + ! + ! + ! + ! + ! + ! + ! + ! + ! + ! + ! + ! + ! + ! + ! +

Da im vergangenen Monat einige unserer Redaktionsmitglieder aus dienstlichen oder persönlichen Gründen nicht im Jugendobjekt mitarbeiten konnten, war es uns leider nicht möglich, das Oktoberheft der WURZEL termingerecht fertigzustellen. Wir bedauern dies aufrichtig und möchten unsere Leser hiermit um Ihr Verständnis bitten. DANKESCHÖN !

# Sonderpreisausschreiben „10 Jahre Wurzel"

Wir stellen in drei aufeinanderfolgenden Heften jeweils 5 Schätzfragen mit 3 verschiedenen Antwortmöglichkeiten. Eure Antworten erwarten wir auf einer Postkarte bis zum 1.12.76 unter dem Kennwort "PREISAUSSCHREIBEN".
Die 10 besten Einsender aller Folgen erhalten von uns verschiedene Sachpreise im Gesamtwert von ca.200 Mark. Auf die Einsendungen jeder einzelnen Folge verlosen wir 3 weitere Trostpreise.
Die Auflösung des Preisausschreibens veröffentlichen wir in unserer Jubiläumsnummer im Februar 1977, die Preisträger im Heft 3/77.

01. Wieviele Studenten arbeiten z.Z. im Jugendobjekt?
A 10 B 15 C 22

02. Wieviele Lösungen wurden bis Heft 5/76 veröffentlicht?
A 211 B 341 C 473

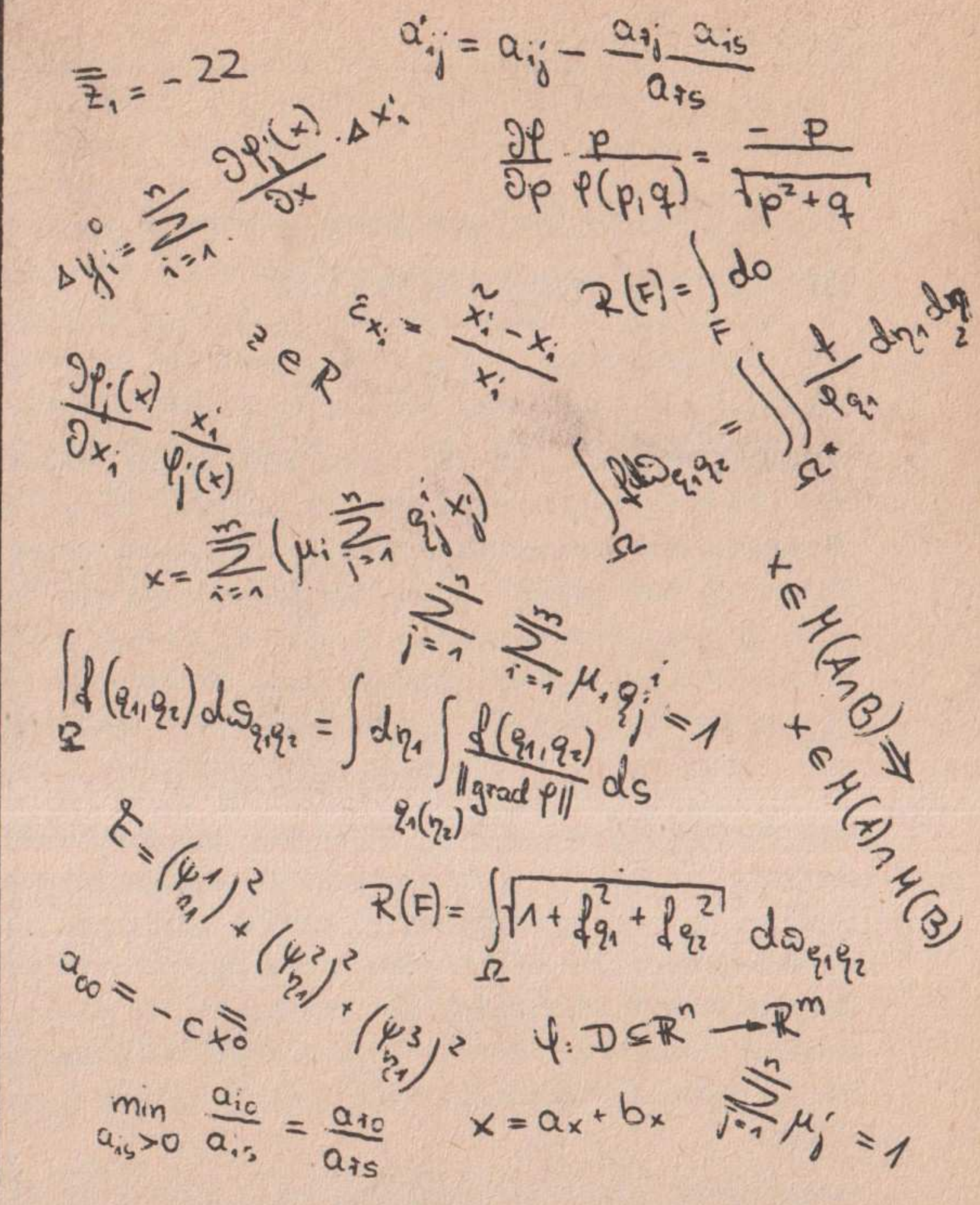
03. Wieviele gesellschaftliche Artikel erschienen bis Heft 10/76?
A 46 B 64 C 81

04. IN welchem Monat des Jahres 1974 erhielten wir die meisten Einsendungen?
A Januar B April C September

05. Wann wurde der NVA-Zirkel des Jugendobjektes gegründet?
A 1968 B 1970 C 1971

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Egbert Creutzburg
**Chefredakteur:** Waltraud Werner
**Redaktion:** K. Bartholmé, H.-J. Hauschild, R. Jeske, H.-G. Leopold
**Anschrift:** WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
**Konto:** Postscheckkonto 180 45
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Artikel-Nr. (EDV): 10932



11/76

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

10. Jahrgang

Index 33 873

Preis: 0,20 M

# Zur mathematischen Behandlung des Mondflugproblems (III)

Der Ausgangspunkt auf der Suche nach einem besseren Algorithmus ist die Feststellung der Ursache für die unbefriedigenden Möglichkeiten des ersten, und hier wäre als wesentlichste Fehlerquelle die Fixierung der Beschleunigung für jedes Zeitintervall $[t_i, t_{i+1})$ zu nennen.
Betrachten wir nur den Zusammenhang zwischen Beschleunigung $b_x$ und Geschwindigkeit $v_x$, so hatten wir faktisch die Formel

$$v_x(t_{i+1}) \approx v_x(t_i)+h.f(x_i,y_i,t_i)$$

zur Berechnung von $v_x(t_{i+1})$ benutzt und die sich im Zeiterintervall $[t_i, t_{i+1})$ i.a. ändernde Beschleunigung auf den Wert $f(x_i,y_i,t_i)$ festgelegt. Obige Formel würde nun zweifelsohne genauer, wenn man die Änderung von $f(x,y,t)$ im betrachteten Abschnitt mit berücksichtigt und statt des einen, relativ willkürlich (nur wegen seiner Zugänglichkeit) ausgewählten Wertes in $t_i$ einen Durchschnittswert über das ganze Intervall nehmen würde.

Angenommen, die Beschleunigung (d.h. $f(x,y,t)$) wächst im gegebenen Zeitintervall, dann liefert die betrachtete Formel einen zu kleinen Wert für $v_x(t_{i+1})$. Mit derselben Berechtigung könnte man auch die Formel

$$v_x(t_{i+1}) \approx v_x(t_i)+h.f(x_{i+1},y_{i+1},t_{i+1})$$

verwenden, aus ihr resultiert aber in diesem Falle ein etwas zu großer Wert für $v_x(t_{i+1})$. Eine Vereinigung beider Formeln zu

$$v_x(t_{i+1}) \approx v_x(t_i)+ \frac{h}{2}\,(f(x_i,y_i,t_i)+f(x_{i+1},y_{i+1},t_{i+1}))$$

ergäbe damit in der Regel einen guten Genauigkeitsgewinn, aber leider ist diese Formel praktisch nicht verwendbar, da in sie die zu diesem Zeitpunkt noch unbekannten Größen $x_{i+1}, y_{i+1}$ eingehen. Die auftretende Schwierigkeit läßt sich aber umgehen, indem wir zunächst mit dem alten Verfahren $x_{i+1}, y_{i+1}$ bestimmen und deren Wert benutzen, um diese beiden Größen nochmals mit höherer Genauigkeit zu bestimmen. Um beide Koordinatenpaare nicht zu verwechseln, bezeichnen wir die nach dem alten Verfahren erhaltenen groben Werte mit $\bar{x}_i, \bar{y}_i$ usw. Der gesamte Rechengang läuft nun folgendermaßen ab:

Im Moment $t_o=0$ sind uns $x_o, y_o, v_{ox}$ und $v_{oy}$ gegeben, wir bestimmen zunächst

$$\bar{x}_1 = x_o + h.v_{ox}, \quad \bar{y}_1 = y_o + h.v_{oy}$$

$$\bar{v}_{1x} = v_{ox} + h.f(x_o, y_o, t_o)$$

$$\bar{v}_{1y} = v_{oy} + h.g(x_o, y_o, t_o)$$

und damit berechnen wir

$$x_1 = x_o + \frac{1}{2} h(v_{ox} + \bar{v}_{1x})$$

$$y_1 = y_o + \frac{1}{2} h(v_{oy} + \bar{v}_{1y})$$

$$v_{1x} = v_{ox} + \frac{1}{2} h(f(x_o, y_o, t_o) + f(\bar{x}_1, \bar{y}_1, t_1))$$

$$v_{1y} = v_{oy} + \frac{1}{2} h(g(x_o, y_o, t_o) + g(\bar{x}_1, \bar{y}_1, t_1)) \quad \text{usw.}$$

An dieser Stelle drängt sich der Gedanke auf, die Genauigkeit noch weiter zu erhöhen, indem man jetzt die letzten vier Formeln wiederholt, aber statt der nur grob bestimmten Werte $\bar{x}_1$ usw. die berechneten genaueren verwendet, und dies eventuell noch einige Male. Ein solches Vorgehen ergibt tatsächlich eine Erhöhung der Genauigkeit, allerdings ist diese so gering, daß sich der Aufwand nicht lohnt.

Das neue Verfahren ist in der Literatur als "Verfahren von HEUN" bekannt, während das erste noch auf EULER zurückgeht.

Der Rechenaufwand ist in dieser Variante etwa doppelt so groß wie in der früheren (dort mußten bei jedem Schritt die Werte f(x,y,t) und g(x,y,t) einmal berechnet werden, hier dagegen zweimal), und es fragt sich nun, ob sich dieser Mehraufwand auch auszahlt.

Eine detailliertere Untersuchung ergibt, daß die Abweichung des Verfahrens von HEUN nicht wie früher etwa proportional zu $\Delta t$ abnimmt, sondern proportional zu $(\Delta t)^2$, und hieraus resultiert seine Existenzberechtigung.

Während also beim EULERschen Verfahren das Produkt des theoretischen Fehlers mit dem Rechenaufwand etwa konstant war (Halbierung der Schrittweite $\Delta t$ führte zur Verdoppelung des Rechenumfanges und Halbierung des Fehlers), verringert es sich jetzt proportional zu $\Delta t$ (ebenfalls doppelter Aufwand, aber nur noch ein Viertel der vorherigen theoretischen Abweichung).

Bei zehnstelliger Rechnung ergaben sich die in der folgenden, zur vorigen analogen, Tabelle zusammengefaßten Resultate:

| 1/h | $x_i$ | $y_i$ | $x_i$ | $y_i$ | $x_u$ | $t_u$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -5.3675 | 3.6000 | -17.3558 | 10.3350 | | |
| 2 | -2.3464 | 3.2864 | - 8.0546 | 8.8603 | | |
| 4 | -1.1883 | 2.4499 | - 4.4920 | 5.1459 | | |
| 8 | -1.0879 | 1.8146 | - 3.6818 | 2.1766 | 0.6563 | 18.5 |
| 16 | -1.1251 | 1.5262 | - 3.1976 | 0.8346 | 0.6572 | 8.19 |
| 32 | -1.1470 | 1.4332 | - 3.0095 | 0.4410 | 0.6547 | 7.062 |
| 64 | -1.1540 | 1.4087 | - 2.9606 | 0.3441 | 0.6558 | 6.859 |
| 128 | -1.1560 | 1.4026 | - 2.9489 | 0.3207 | 0.6558 | 6.8125 |
| 256 | -1.1565 | 1.4011 | - 2.9461 | 0.3149 | 0.6558 | 6.8005 |
| 512 | -1.1566 | 1.4006 | - 2.9454 | 0.3135 | 0.6558 | 6.7988 |
| 1024 | -1.1566 | 1.4007 | - 2.9453 | 0.3132 | 0.6558 | 6.7978 |

Es sei zunächst darauf verwiesen, daß diesmal vier Stellen nach dem Komma angegegeben wurden. Resultate der siebenstelligen Rechnung ergaben bis zu h = 1/256 eine gute Übereinstimmung.

Akzeptieren wir also das Verfahren von HEUN, da seine Genauigkeit etwa der Leistungsfähigkeit unseres mathematischen Modells mit seinen Einschränkungen entspricht.

Als letzte Kontrolle sei nun noch auf das dritte KEPLERsche Gesetz zurückgegriffen (s. WURZEL, 7, 1976). Für die Umlaufzeit T und die große Halbachse a der Ellipsenbahn gilt der Zusammenhang

$$a^3 = 0{,}1311\ T^2 ,$$

der aus der dort aufgeführten Formel nach Umrechnung in unsere Maßeinheiten folgt. Nachfolgende Tabelle enthält nun die maximale Entfernung $r_m$ des Flugkörpers und die Umlaufzeit T in Abhängigkeit von der Startgeschwindigkeit $v_o$ bei konstanter Starthöhe 180 km. Die jeweilige große Halbachse a ist wegen

$$2a = 0{,}018 + r + r_m = 0{,}656 + r_m$$

(r - Erdradius) leicht zu errechnen, und zur Kontrolle ist noch das Verhältnis $a^3 \cdot T^{-2}$ angegeben. Die Schrittweite $\Delta t$ war konstant $2^{-8}$.

| $v_o$ | $r_m$ | T | a | $a^3 \cdot T^{-2}$ |
|---|---|---|---|---|
| 8.0 | 0.7249 | 1.59 | 0.6905 | 0.1302 |
| 8.1 | 0.7644 | 1.65 | 0.7102 | 0.1315 |
| 8.2 | 0.8067 | 1.73 | 0.7314 | 0.1307 |
| 8.3 | 0.8522 | 1.81 | 0.7541 | 0.1309 |
| 8.4 | 0.9012 | 1.90 | 0.7786 | 0.1307 |
| 8.5 | 0.9542 | 1.99 | 0.8051 | 0.1318 |
| 8.6 | 1.0116 | 2.10 | 0.8338 | 0.1315 |
| 8.7 | 1.0740 | 2.22 | 0.8650 | 0.1313 |
| 8.8 | 1.1421 | 2.35 | 0.8991 | 0.1316 |
| 8.9 | 1.2166 | 2.50 | 0.9363 | 0.1313 |
| 9.0 | 1.2985 | 2.66 | 0.9773 | 0.1319 |
| 9.1 | 1.3889 | 2.85 | 1.0225 | 0.1316 |
| 9.2 | 1.4893 | 3.07 | 1.0727 | 0.1310 |
| 9.3 | 1.6013 | 3.31 | 1.1287 | 0.1312 |
| 9.4 | 1.7271 | 3.59 | 1.1916 | 0.1313 |
| 9.5 | 1.8693 | 3.92 | 1.2627 | 0.1310 |
| 9.6 | 2.0314 | 4.30 | 1.3437 | 0.1312 |
| 9.7 | 2.2177 | 4.75 | 1.4369 | 0.1315 |
| 9.8 | 2.4343 | 5.30 | 1.5452 | 0.1313 |
| 9.9 | 2.6890 | 5.97 | 1.6725 | 0.1313 |
| 10.0 | 2.9977 | 6.80 | 1.8269 | 0.1319 |
| 10.1 | 3.3612 | 7.86 | 2.0086 | 0.1312 |
| 10.2 | 3.8174 | 9.23 | 2.2367 | 0.1314 |
| 10.3 | 4.3970 | 11.09 | 2.5265 | 0.1311 |
| 10.4 | 5.1575 | 13.68 | 2.9068 | 0.1313 |
| 10.5 | 6.1994 | 17.52 | 3.4277 | 0.1312 |
| 10.6 | 7.7136 | 23.62 | 4.1848 | 0.1314 |
| 10.7 | 10.117 | 34.48 | 5.3865 | 0.1315 |
| 10.8 | 14.513 | 57.59 | 7.5845 | 0.1315 |
| 10.9 | 25.159 | 127.55 | 12.908 | 0.1322 |
| 11.0 | - | - | - | - |

Wie man sieht, stellen die errechneten Kontrollwerte eine recht zufriedenstellende Näherung dar. Am stärksten weicht das letzte Verhältnis ab, ein Zeichen, daß sich in die sehr umfangreiche Rechnung (127.55 . 256 ≈ 32600 Schritte, d. h. 130400 Funktionswertberechnungen!) schon spürbare Rundungsfehler eingeschlichen haben.

Für $v_0$=11,0 km.s$^{-1}$ gerät der Flugkörper auf eine Hyperbelbahn und kehrt nicht wieder zurück. Das erscheint zweifelhaft, da die zweite kosmische Geschwindigkeit erst 11,18 km.s$^{-1}$ ist, man muß aber die schon erreichte Höhe von 180 km berücksichtigen. Eine Überschlagsrechnung zeigt folgendes Bild:
Bei einem Start von der Erdoberfläche mit 11,18 km.s$^{-1}$ (Luftwiderstand ignoriert) benötigt der Flugkörper ca. 17 Sekunden, um eine Höhe von 180 km zu erreichen und verliert dabei eine Geschwindigkeit von etwa 17 s . 10 m·s$^{-2}$ = 170 m.s$^{-1}$, so daß seine Geschwindigkeit hier wirklich nur noch rund 11 km.s$^{-1}$ beträgt.

Die Tabelle zeigt auch, welche enorme Genauigkeitsanforderungen an die Bremsschlußgeschwindigkeit gestellt werden, wenn man eine gewünschte Bahn erreichen will. Durch lineare Interpolation findet man leicht, daß eine Vergrößerung der Startgeschwindigkeit um nur 1 m.s$^{-1}$ (= Fußgänger! oder 0,01 % der eigentlichen Geschwindigkeit!) bei $v_0$=10,5 kms$^{-1}$ das Apogäum um etwa 150 km (=Entfernung von Jena nach Lutherstadt Wittenberg per Bahn) anhebt und die Umlaufzeit um knapp fünf Minuten verlängert. Praktisch bedeutet das, daß man ohne Kurskorrekturen kaum auskommen kann.

Damit sind die Vorarbeiten abgeschlossen und die Möglichkeiten des Modells mit einiger Sicherheit bekannt. Nachstehend eine berechnete Bahn stellvertretend für die außerordentliche Vielfalt möglicher Varianten - bereits der Versuch einer Systematisierung wäre sehr umfangreich.

Die Tabelle enthält neben der Zeit die zugehörigen x- und y-Koordinaten des Flugkörpers und seine Geschwindigkeit
$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ relativ zur Erde in km.s$^{-1}$, ferner Abstand zu

Erde und Mond sowie die Mondkoordinaten $X_M$, $Y_M$. Die Startgeschwindigkeit war $v_o$=10.95 $km.s^{-1}$, der Winkel $\delta_o$=223° und $\Delta$ t=$2^{-6}$.

| t | x | y | v | $r_E$ | $r_M$ | $X_M$ | $Y_M$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.19 | -0.79 | 5.70 | 2.33 | 36.26 | 38.44 | 0.34 |
| 2 | 3.87 | -0.25 | 4.33 | 3.88 | 34.57 | 38.43 | 0.68 |
| 4 | 6.29 | 0.90 | 3.28 | 6.36 | 32.13 | 38.42 | 1.36 |
| 8 | 9.74 | 3.00 | 2.45 | 10.19 | 28.61 | 38.34 | 2.72 |
| 12 | 12.36 | 4.86 | 2.05 | 13.28 | 25.88 | 38.22 | 4.08 |
| 16 | 14.53 | 6.54 | 1.79 | 15.93 | 23.55 | 38.05 | 5.43 |
| 20 | 16.40 | 8.09 | 1.60 | 18.28 | 21.48 | 37.84 | 6.78 |
| 24 | 18.04 | 9.53 | 1.45 | 20.40 | 19.58 | 37.57 | 8.12 |
| 32 | 20.84 | 12.14 | 1.22 | 24.12 | 16.12 | 36.90 | 10.76 |
| 44 | 24.17 | 15.52 | 0.99 | 28.73 | 11.42 | 35.55 | 14.62 |
| 52 | 25.99 | 17.49 | 0.88 | 31.33 | 8.45 | 34.43 | 17.10 |
| 60 | 27.58 | 19.27 | 0.79 | 33.65 | 5.55 | 33.13 | 19.50 |
| 64 | 28.33 | 20.10 | 0.76 | 34.74 | 4.12 | 32.42 | 20.66 |
| 68 | 29.09 | 20.90 | 0.77 | 35.81 | 2.73 | 31.66 | 22.35 |
| 70 | 29.49 | 21.30 | 0.81 | 36.37 | 2.07 | 31.27 | 22.35 |
| 72 | 29.93 | 21.72 | 0.90 | 36.93 | 1.52 | 30.87 | 22.91 |
| 74 | 30.42 | 22.23 | 1.06 | 37.67 | 1.22 | 30.46 | 23.45 |
| 76 | 30.90 | 22.87 | 1.17 | 38.44 | 1.40 | 30.04 | 23.99 |
| 78 | 31.30 | 23.62 | 1.18 | 39.21 | 1.91 | 29.61 | 24.51 |
| 80 | 31.63 | 24.39 | 1.16 | 39.94 | 2.54 | 29.17 | 25.04 |
| 84 | 32.15 | 25.94 | 1.11 | 41.31 | 3.89 | 28.26 | 26.05 |
| 88 | 32.56 | 27.46 | 1.08 | 42.60 | 5.26 | 27.32 | 27.04 |
| 92 | 32.90 | 28.95 | 1.05 | 43.83 | 6.63 | 26.35 | 27.99 |

Der Flugkörper passiert den Mond in dem relativ großen Abstand von 12200 km, trotzdem wird seine Flugbahn wesentlich beeinflußt: Obwohl die Startgeschwindigkeit nur 10,95 $km.s^{-1}$ betrug, wird er beim Vorbeiflug am Mond so stark beschleunigt (um etwa 400 $m.s^{-1}$), daß er das Erdschwerefeld verläßt, er ist also von einer elliptischen auf eine hyperbolische Bahn gelangt. Das bietet die Möglichkeit, beim Start einer interplanetaren Sonde Treibstoff zu sparen, indem man den Mond als Hilfe benutzt.

Abschließend möchte ich dem KSR 4100 unserer Sektion herzlich für die bereitwillige und sorgfältige Durchführung der umfangreichen Berechnungen danken.

Werner Rosenheinrich
Assistent im Bereich
Numerische Mathematik

# Studentenaustausch Jena-Tbilissi

Im Jahre 1966 wurde die Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena gegründet. Seit dieser Zeit bestehen freundschaftliche Beziehungen mit Mathematikern aus vielen Ländern der Erde. Besonders enge Beziehungen gibt es zu den Universitäten in Moskau, Minsk und Tbilissi. Einen der Höhepunkte hierbei bildet der Austausch von Studentengruppen.

Vom 29. Juni bis 21. Juli war eine Delegation von 8 Studenten und 2 Betreuern der Universität Tbilissi zu Gast in Jena. Für diese Studenten wurden eine Reihe von Lehrveranstaltungen organisiert. So hörten sie Vorlesungen zu Themen der mathematischen Kybernetik und Analysis und führten ein dreitägiges Praktikum im Rechenzentrum der Friedrich-Schiller-Universität durch.

Daneben standen eine große Anzahl von gemeinsamen Veranstaltungen mit Studenten aus Jena auf dem Programm. So besuchten wir das Optische Museum, das Planetarium und das Phyletische Museum. Wir wanderten zum Fuchsturm und zum Landgrafen. Großen Anklang fanden auch die Orgelkonzerte mittwochs in der Stadtkirche.
Aber nicht nur Jenaer Sehenswürdigkeiten wollten wir unseren Gästen zeigen.
So unternahmen wir Busfahrten zum Kyffhäuser und in den Harz sowie nach Eisenach zur Wartburg. Wir besuchten die Gedenkstätten in Weimar, sahen uns die Saalfelder Feengrotten an und waren auch beim Pressefest in Gera dabei. Bei diesen Fahrten knüpften sich eine Reihe von freundschaftlichen Beziehungen zwischen den grusinischen Studenten und der Gruppe aus Jena.
Ein besonderer Höhepunkt war der Abschlußabend, den wir im FDJ-Studentenclub "Schmiede" durchführten.

Bevor unsere Freunde in ihre Heimat zurückkehrten, hatten sie noch einen mehrtägigen Aufenthalt in Dresden und Berlin, um auch diese Städte unserer Republik ein wenig kennenzulernen.

In der Zeit vom 24. 8. bis 15. 9. 1976 weilte dann ebenfalls eine Delegation von 8 Studenten und 2 Betreuern in der SU. Die acht Studenten gehören den Fachbereichen "Mathematische Kybernetik und Rechentechnik" und "Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik" unserer Sektion an. Zwei von ihnen sind Mitarbeiter im Jugendobjekt "Studienvorbereitung".

Auf unserer Reise wurden wir mit vielen Sehenswürdigkeiten der SU, insbesondere Grusiniens, bekanntgemacht. Stationen unserer Reise waren unter anderem Moskau, Batumi und Tbilissi.
Die Betreuer aus Tbilissi sowie aus Jena und die Studenten aus Tbilissi bemühten sich sehr, uns einen angenehmen Aufenthalt zu gestalten. Auf diese Weise erfuhren wir von einer uns vorher kaum näher bekannten Unionsrepublik sehr viel. Besonders aufschlußreich und interessant waren die persönlichen Begegnungen mit den grusinischen Menschen. Auf die nationale Kunst und Kultur sind die Menschen Grusiniens sehr stolz. Man gab sich große Mühe, uns die Kultur und die Traditionen nahezubringen. Einige ihrer Baudenkmäler wurden von uns besichtigt. Die Bauweise vieler dieser Gebäude ließ erkennen, daß wir uns nicht mehr in Europa befanden. Das war eben georgische Baukunst!

In Tbilissi führten wir auch Gespräche mit dem Komsomol, mit dem Prorektor und mit dem Dekan der Universität. In diesen Gesprächen erfuhren wir einiges interessantes über das Studium in der SU. Studieren kann dort, wer die 10-klassige Schule absolviert und die Aufnahmeprüfung an der Universität bestanden hat.
Das Mathematikstudium dauert auch in der SU 5 Jahre. Es ist sogar möglich, nach dem zweiten Studienjahr parallel noch eine andere Fachrichtung, z. B. Kunst, zu studieren. Allerdings bedarf solch ein zweites Studium noch der Genehmigung des Dekans. Nach dem Abschluß besitzen solche Studenten dann zwei Diplome.

Die Vorlesungen, die wir besuchten, und der Aufenthalt im Rechenzentrum gaben uns noch einen Einblick über den Ablauf und

**den Inhalt des Studiums.**

**Von unserer Reise nahmen wir sehr viel Neues und eine Menge Eindrücke mit nach Hause. Unser Wunsch ist es, daß der Studentenaustausch weiter fortgesetzt wird und daß noch mehr Menschen auf so eine Weise freundschaftlich zusammentreffen, um somit die letzten Spuren des Krieges zu beseitigen.**

## Preisaufgaben 11/76

H 61

1

Man beweise, daß für $0 < x < 1$ und $\alpha = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1+x}{1-x}$, $\beta = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$ $\alpha + \beta = \pi$ gilt.

H 62

2

Man finde alle reellen Lösungen des Gleichungssystems:

$$x\sqrt{1-y^2} = a$$

$$y\sqrt{1-x^2} = b\,,$$

wenn $a > b > 0$ und $a+b < 1$.

H 63

1

Für reelle $a_i$, $b_i$, $p$, $q$ $(i=1,\ldots,n)$ mit

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = p^2$$

$$b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 = q^2$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = pq$$

und $pq \neq 0$ beweise man, daß $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2, \ldots, a_n = \lambda b_n$ mit $\lambda = \frac{p}{q}$ gilt.

H 64

1

Man löse die Ungleichung

$$\sin|\lg x| + \cos|\lg x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

H 65

2

Man berechne das Volumen des Tetraeders ABCD, wenn $\overline{BC} = \overline{AD} = a$, $\overline{CA} = \overline{DB} = b$, $\overline{AB} = \overline{DC} = c$.

# Lösungen

**Aufgabe H 37**

Fallunterscheidung:

1. $x > 0$: Für diesen Fall erhalten wir für die Ungleichung folgende äquivalente Bedingung:

$$(x-1)\,\frac{5x+2}{5x+10} < 0, \text{ also } (x-1)\,\frac{x+2/5}{x+2} < 0.$$

Diese Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn $0 < x < 1$ ist.

Daraus folgt, daß die Ungleichung für $0 < x < 1$ erfüllt ist.

2. $x = 0$: Wie man leicht sieht, ist die Ungleichung für $x=0$ erfüllt, denn $0^{1/5} < 1$.

3. $x < 0$: Wenn $x<0$, muß unbedingt

$$\frac{5x+2}{5x+10} = n \qquad n \ldots \text{ganze Zahl}$$

sein, damit wir Lösungen erhalten.

Aus der Bedingung $x < 0$ ergibt sich

$$x = \frac{10n-2}{5-5n} < 0 \qquad \text{für } n < 1/2, \quad n > 1.$$

Für $n=2k$ ($k$ ganz) und aus $x < 0$ ergibt sich

$$x = \frac{20k-2}{5-10k}, \text{ aber } \left(\frac{20k-2}{5-10k}\right)k > 0, \text{ also } \frac{(k+3/10)k}{k-1/2} < 0$$

So muß $k < -3/10$, $0 < k < 1/2$.

Da $k$ ganz, ergibt sich als Lösung

$$x = \frac{20k-2}{5-10k} \qquad k = -1, -2, -3, \ldots$$

Für $n = 2k+1$ ergibt sich $x = -\dfrac{10k+4}{5k}$.

Da $x < 0$ gelten soll, muß $n=1$, d. h. $k \neq 0$ gelten, und die Ungleichung ist so für alle $x$ mit

$$x = -\frac{10k+4}{5k} \qquad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

erfüllt.

Lösungen der Ungleichung:

(1) $0 \leq x < 1$

(2) $x = \frac{20k-2}{5-10k} \quad k = -1, -2, -3, \ldots$

(3) $x = -\frac{10k+4}{5k} \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

**Aufgabe H 38:** (nach Holger König, Jena)

Bezeichnung:

$\overline{AA_1} = h_a$   $\sphericalangle ACB = \gamma$

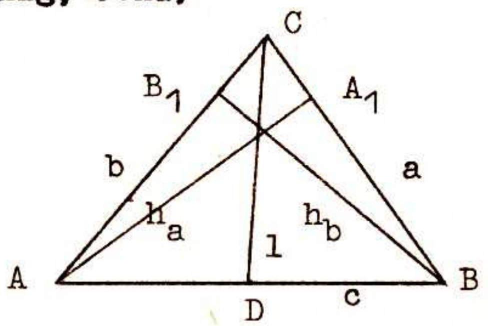
$\overline{BB_1} = h_b$   $\overline{CB} = a$

$\overline{CD} = l$   $\overline{AB} = c$

$\overline{AC} = b$

$\sphericalangle CAB = \alpha$

$\sphericalangle ABC = \beta$




Ansatz: Aus Sinussatz im Dreieck ACD und Dreieck DCB erhalten wir

▶ (1) $l\left(1 + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right) = c\,\frac{\sin\alpha^{2}}{\sin\gamma/2}$

Aus Sinussatz für Dreieck ABC:

▶ (2) $c = a\,\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$

▶ (3) $b = a\,\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$

$AA_1C$ rechtwinklig:

▶ (5) $h_a = b \cdot \sin\gamma$

Aus Formel für Flächeninhalt folgt:

▶ (4) $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$

Rechnung:

Aus (2) in (1) folgt: $b\left(1+\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right) = a \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma/2}$ (I)

Aus (4) in (3) folgt: $l\left(1+\frac{h_b}{h_a}\right) = a \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma/2}$ (II)

Aus (3) in (5) folgt: $a = \frac{h_a \cdot \sin\alpha}{\sin\beta \cdot \sin\gamma}$ (III)

Aus (III) in (II) folgt: $l\left(1+\frac{h_b}{h_a}\right) = \frac{h_a}{\sin\gamma/2} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ (IV) ber wegen (2), (3), (4) gilt: $\frac{h_b}{h_a} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ (V)

us (V) in (IV) folgt $l(1+\frac{h_b}{h_a}) = \frac{h_b}{\sin \gamma/2}$

araus folgt aber $\gamma = 2 \arcsin \frac{h_a \cdot h_b}{l(h_a+h_b)}$ als Lösung der ufgabe.

---

**Aufgabe H 35** (nach Peter Dittrich, 682 Rudolstadt, 10. Klasse)

Zu dieser Aufgabe erhielten wir kaum falsche Lösungen. Nur in 3 Fällen wurde die Bedingung $1-4x^2 \geq 0$ nicht berücksichtigt. Fast alle Einsender gingen von der notwendigen Bedingung $|x| \leq 1/2$, $x \neq 0$ aus und führten 3 Fallunterscheidungen ($-1/2 \leq x < 0$, $0 < x \leq 1/3$, $1/3 \leq x \leq 1/2$) durch. Eleganter ist jedoch die folgende Variante:

$1-4x^2 \geq 0$ genau dann, wenn $|x| \leq 1/2$

Behauptung: Die Ungleichung $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$ wird für alle $x$, $|x| \leq 1/2$, $x \neq 0$ erfüllt.

1. $-1/2 \leq x < 0$

$$0 \leq 1-4x^2 \leq 1$$

$$\sqrt{1-4x^2} \leq 1$$

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} \leq 0 < 3$$

. $0 \quad x \quad 1/2$

Es gilt $1 \leq 1+\sqrt{1-4x^2}$ ($\Diamond$)

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} = \frac{1-(1-4x^2)}{x(1+\sqrt{1-4x^2})} = \frac{4x}{1+\sqrt{1-4x^2}}$$

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} \leq 4x \qquad \text{nach } (\Diamond)$$

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} \leq 2 < 3$$

Aufgabe H 40 ( nach Roger Labahn, Anklam )

Gegeben ist die Gleichung $x^2 + ax^2 - b = 0$ mit a, b reell, $b > 0$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat diese Gleichung genau 3 Losungen im Bereich der komplexen Zahlen. Dabei folgt, daß neben jeder komplexen Zahl z auch die konjugiert komplexe Zahl z Lösung sein muß.
Somit ergeben sich zwei Fälle:

1. Es existieren 3 reelle Lösungen
2. Es existiert 1 reelle Lösung

Nach dem Satz von VIETA gilt:

$$x_1x_2x_3 = b > 0 \quad \text{(nach Voraussetzung)} \qquad (1)$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0 \qquad (2)$$

Fall 1: Wegen $b \;\; 0$ müssen eine oder alle drei Lösungen der Gleichung positiv sein.
Für $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ ist aber (2) verletzt.
Also ist nur eine Lösung positiv.

Fall 2: Falls zwei konjugiert komplexe Lösungen $x_1$, $x_2$ existieren, so folgt wegen $x_1x_2 = z \cdot z > 0$ aus (1), daß $x_3 > 0$ gelten muß.

Die Fallunterscheidung ist vollständig, da $x = 0$ nicht Lösung sein kann. Damit ist gezeigt, daß genau eine positive Lösung existiert.

---

Aufgabe H 46 ( nach Thomas Gundermann )

Da x als Argument des Logarithmus $\lg_2 z$ auftritt, gilt: $x > 0$.
Die gegebene Ungleichung kann umgeformt werden zu:

$$x^{3-\lg_2^2 x - \lg_2 x^2} > 1$$

Fall 1: x ist größer als 1, und der Exponent ist grösser als 0.

Fall 2: x ist kleiner als 1, und der Exponent ist kleiner als 0.

Fall 3: $x = 1$ löst die Ungleichung nicht.

Wird $y = \lg_2 x$ gesetzt, dann läßt sich der Exponent wie folgt schreiben: $3 - y^2 - 2y$

Es ergibt sich:

Fall 1: $3 - y^2 - 2y > 0$

Für $-3 < y < 1$ ist diese Ungleichung erfüllt.

Daraus folgt $x < 2$

Fall 2: $3 - y^2 - 2y < 0$

Für $y < -3$ oder $y > 1$ ist diese Ungleichung erfüllt.

Daraus folgt $x < \frac{1}{8}$ oder $x > 2$.

Unter Berücksichtigung aller sich aus Fall 1 und Fall 2 ergebenden Bedingungen ergibt sich als Lösungsmenge

$$L = \{ x: x \in P \wedge [(1 < x < 2) \vee (0 < x < \tfrac{1}{8})] \}$$

---

nigkeiten **** Aktuelle Kleinigkeiten **** Aktuelle Kleinigkei

◊ Im Rahmen des Jugendobjektes wurden bisher 375000 Exemplare der Zeitschrift "WURZEL" herausgegeben!

◊ Gegenwärtig studieren 426 Lehrerstudenten der Fachrichtung Mathematik/Physik sowie 207 Studenten mit dem Berufsziel Diplom-Mathematiker!

◊ Die Wissenschaftler der Sektion Mathematik veröffentlichten in den vergangenen 2 Jahren 134 Publikationen!

◊ In den 2 Jahren ihres Bestehens löste die "Konsultationsstelle Stochastik" bereits 22 Aufgaben erfolgreich!

# Sonderpreisausschreiben 10 Jahre „Wurzel" (II)

● 6. Wieviele Preisaufgaben wurden von uns bis einschließlich Heft 11/76 gestellt ?

A 513 B 644 C 812

● 7. Wieviele Sondernummern der WURZEL erschienen seit ihrer Gründung ?

A 4 B 7 C 9

● 8. War die Aufgabe, zu der wir im Jahre 1974 die meisten Einsendungen erhielten, eine Aufgabe aus dem Gebiet:

A Zahlentheorie B Geometrie C Gleichungen und Ungleichungen

● 9. Wieviele Punkte für Preisaufgaben wurden 1975 im Durchschnitt pro Monat vergeben ?

A 52 B 93 C 154

● 10. Wieviele Seiten hatte die erste WURZEL 1/67 ?

A 6 B 10 C 12

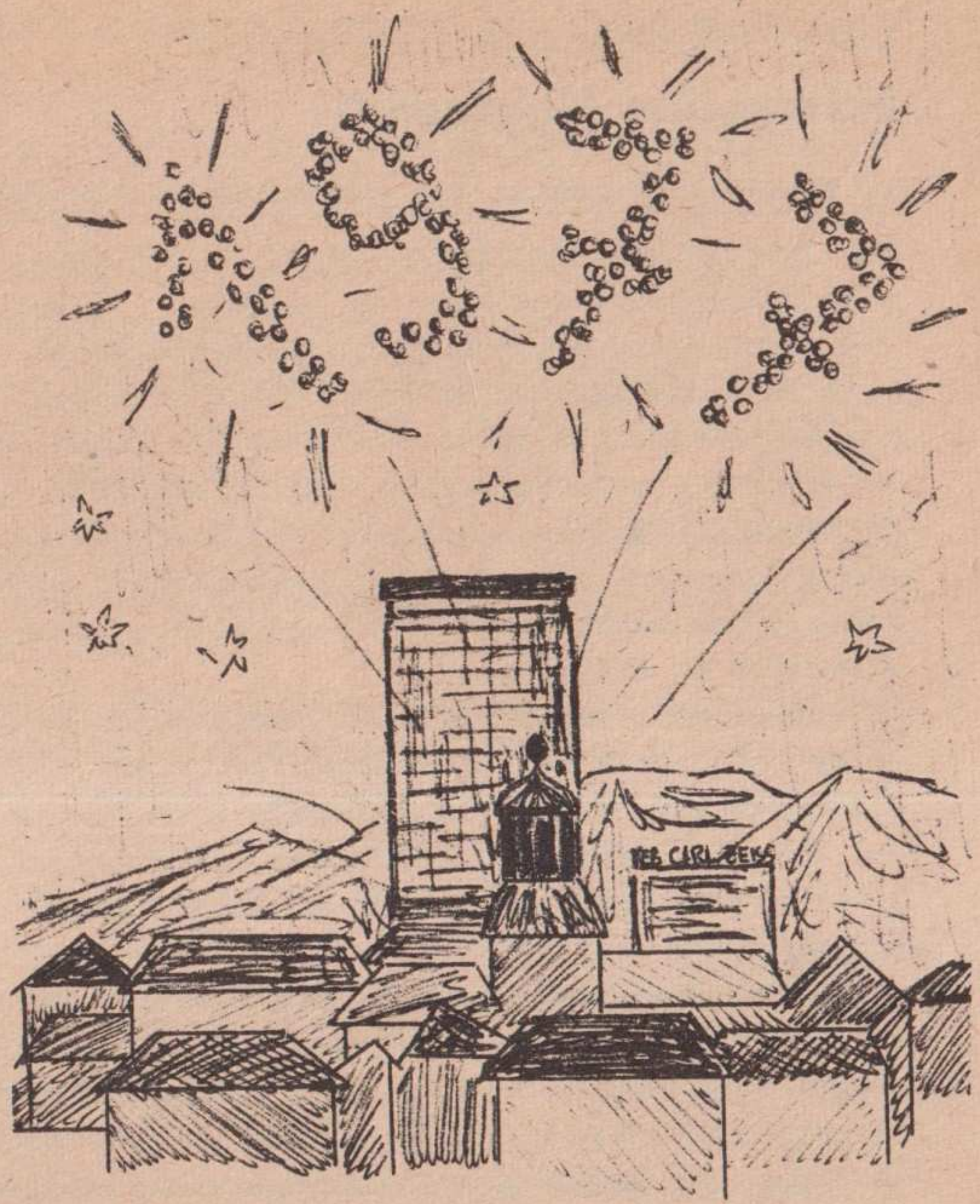
Nur eine Antwort pro Frage ist möglich. Eure Antworten erwarten wir bis zum 31.12.76 auf einer Postkarte unter dem Kennwort "Preisausschreiben". Die 10 besten Einsender erhalten von uns Sachpreise im Gesamtwert von ca. 200 M.

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Egbert Creutzburg
**Chefredakteur:** Waltraud Werner
**Redaktion:** K. Bartholmé, H.-J. Hauschild, R. Jeske, H.-G. Leopold
**Anschrift:** WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
**Konto:** Postscheckkonto 180 45
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

12

76




# WURZEL

zeitschrift für mathematik an

ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

10. Jahrgang

Index 33 873

Preis: 0,20 M

# Eine Einführung in die Theorie universeller Algebren (I)

## 1. Einige Bemerkungen zur Begründung des Gegenstandes

Die Theorie universeller Algebren bildet heute einen wesentlichen Bestandteil der modernen Algebra.
Wie vornehmlich die moderne Algebra überhaupt, erhielt auch sie ihre Entwicklungsimpulse durch die Erkenntnis, daß Probleme, Aufgabenstellung unterschiedlicher - manchmal scheinbar weit entfernter - mathematischer Gebiete oft über einen gemeinsamen "algebraischen Kern" verfügen. Die moderne Algebra hat es sich zur Aufgabe gemacht, diesen "algebraischen Kern", d. h. das vom algebraischen Standpunkt Wesentliche durch sinnvolle Abstraktion zu erfassen.
Da aus algebraischer Sicht die Beziehungen zwischen Mengen, auf denen (algebraische) Operationen definiert sind, - wir wollen sie algebraische Strukturen nennen - von Interesse sind, bedeutet das oben formulierte Anliegen der modernen Algebra, wesentliche strukturelle Gemeinsamkeiten mathematischer Objekte zu erfassen.
Wir haben uns entschlossen, einen Einblick in die Theorie universeller Algebren zu geben, um dem Leser anhand dieser Ausführungen eine Vorstellung vom Wert sinnvoller mathematischer Abstraktion zu vermitteln. Er wird so sicher ihm bereits bekannte Strukturen als konkrete Repräsentanten abstrakterer Begriffsbildungen wiederfinden und erkennen, daß gewisse Eigenschaften, die er von diesen ihm bekannten Objekten weiß, kein Spezifikum derselben sind, sondern für alle Objekte gelten, die eine in einem wohlbestimmten Sinn gleiche Struktur aufweisen.

## 2. Der Begriff der universellen Algebra

Wie wir schon betonten, wollen wir algebraische Strukturen, d.h. Mengen mit darauf definierten Operationen betrachten.
Mit dem Begriff der universellen Algebra wollen wir den der algebraischen Struktur mathematisch exakt formulieren.

Für eine nichtleere Menge A wollen wir unter $\underset{n}{X}A$ das n-fache kartesische Produkt der Menge A verstehen; d.h. es gilt
$\underset{n}{X}A =_{Df} \{[a_1,\dots,a_n] : a_i \in A \wedge 1 \leq i \leq n\}$.

Definition 1: Für eine nichtleere Menge A heißt

$\omega$ n-stellige Operation auf $A =_{Df}$ $\omega : \underset{n}{X}A \longmapsto A$.

D.h., unter einer n-stelligen Operation auf A verstehen wir eine eindeutige Abbildung von $\underset{n}{X}A$ nach A.

Mit $n(\omega)$ bezeichnen wir die Stellenzahl einer Operation $\omega$.
Durch $\mathfrak{S}(A) =_{Df} \{f$: Es existiert ein n mit $f: \underset{n}{X}A \longmapsto A\}$ bezeichnen wir die Menge aller Operationen auf A.

Definition 2: $[A,\Omega]$ heißt universelle Algebra$=_{Df}$

1. A ist eine nichtleere Menge. (Trägermenge)
2. $\Omega \subseteq \mathfrak{S}(A)$.

Der Leser prüft nun leicht nach, daß unser Begriff der universellen Algebra tatsächlich das Gewünschte leistet.
Dabei haben wir die unter den gegebenen Voraussetzungen allgemeinste Fassung des Begriffs der algebraischen Struktur erhalten, denn an die Operationen in $\Omega$ haben wir keine weiteren Forderungen gestellt; d.h., daß z.B. jede dem Leser bekannte algebraische Struktur durch eine universelle Algebra beschrieben wird.

Beispiel 3: 1. Es bezeichnen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ respektive die natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen. Dann sind folgende Beispiele universelle Algebren:

a) $[\mathbb{N}, \{+\}]$
b) $[\mathbb{N}, \{\cdot\}]$
c) $[\mathbb{N}, \{+,\cdot\}]$
d) $[\mathbb{Z}, \{+\}]$
e) $[\mathbb{Q}, \{+,\cdot\}]$
f) $[\mathbb{R}, \{+,\cdot\}]$
g) $[\mathbb{Z}, \hat{\mathbb{R}}]$ mit $\hat{\mathbb{R}} =_{Df} \{\hat{r} : r \in \mathbb{R}\}$, $n(\hat{r})=1$ und $\hat{r}(z) =_{Df} r.z$ für $z \in \mathbb{Z}$.
h) $[\mathbb{Z}, \hat{\mathbb{R}} \cup \{null\}]$ mit $\hat{\mathbb{R}}$ wie oben und $n(null)=0$ und $null \equiv 0$.

wobei "+" und "." die aus der Schule bekannten Operationen sind.

2. $[\mathbb{N}, \{:\}]$ ist keine universelle Algebra, da die Division keine Operation über $\mathbb{N}$ ist, denn mit

**zwei natürlichen Zahlen a und b ist i.a. a:b kein Element von $\mathbb{N}$ .**

**Beispiel 4:** Es sei $N = \{1,2,3\}$. Dann bezeichnen wir mit $\gamma_3$ die Menge aller Permutationen über N (d.h. die Menge aller eineindeutigen Abbildungen von N auf N).
Über $\gamma_3$ definieren wir eine Operation " $\circ$ " mit $n(\circ)=2$, indem wir für $f,g \in \gamma_3$ setzen
$(f \circ g)(x) =_{Df} f(g(x))$ für $x \in N$.
Der Leser überlege sich, daß $[\gamma_3, \{\circ\}]$ eine universelle Algebra ist, indem er zeige, daß mit f,g aus $\gamma_3$ auch gilt $f \circ g$ in $\gamma_3$ liegt.

**Beispiel 5:** a) $[\{0,1\}, \{+,.\}]$ ist universelle Algebra, wobei die Operationen "+" und "." wie folgt definiert sind:

| | |
|---|---|
| 0+0=0 | 0.0=0 |
| 0+1=1 | 0.1=0 |
| 1+0=1 | 1.0=0 |
| 1+1=0 | 1.1=1 |

b) $[\{0,1\}, \{+\}]$ ist universelle Algebra, wobei "+" wie in 5 a) definiert ist.

**Beispiel 6:** [ {ö,ü},{△,▽} ] ist universelle Algebra, wobei für die Operationen △ und ▽ gelte n(△)=n(▽)=2 sowie

| | |
|---|---|
| ö△ö = ö | ö▽ö = ö |
| ö△ü = ü | ö▽ü = ö |
| ü△ö = u | ü▽ö = ö |
| ü△ü = ö | ü▽ü = ü . |

## 3. Homomorphismen

Wie im Punkt 1. formuliert, ist es Anliegen der modernen Algebra, strukturelle Gemeinsamkeiten mathematischer Objekte zu erfassen. So wird dem Leser sofort aufgefallen sein, daß die in den Beispielen 5a) und 6 angegebenen universellen Algebren bis auf die Wahl der Bezeichnungen gleiche algebraische Strukturen beschreiben.

Ebenso besteht eine Ähnlichkeit in den mit den Beispielen 4 und 5b) gegebenen Strukturen. Wir wollen sie uns erarbeiten:

Die Definition der universellen Algebra $[\{0,1\}, \{+\}]$ kann man aufgrund der Endlichkeit der Trägermenge und der Menge der Operationen anhand der folgenden Tabelle darstellen:

| + | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Dabei steht im Kreuzungspunkt der i-ten Zeile und j-ten Spalte ($i \in \{1,2\}$) die Summe des i-ten Eingangs von links und des j-ten von oben.

Analog wollen wir die universelle Algebra $[\Upsilon_3, \{\circ\}]$ in einer Tabelle darstellen.

In $\Upsilon_3$ gibt es folgende Permutationen

$\pi_1$: $1 \to 1$, $2 \to 2$, $3 \to 3$ $\quad$ $\pi_2$: $1 \to 3$, $2 \to 1$, $3 \to 2$ $\quad$ $\pi_3$: $1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 1$ $\quad$ $\pi_4$: $1 \to 1$, $2 \to 3$, $3 \to 2$

$\pi_5$: $1 \to 2$, $2 \to 1$, $3 \to 3$ $\quad$ $\pi_6$: $1 \to 3$, $2 \to 2$, $3 \to 1$

Damit erhalten wir folgende Tabelle:

| $\circ$ | $\pi_1$ | $\pi_2$ | $\pi_3$ | $\pi_4$ | $\pi_5$ | $\pi_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi_1$ | $\pi_1$ | $\pi_2$ | $\pi_3$ | $\pi_4$ | $\pi_5$ | $\pi_6$ |
| $\pi_2$ | $\pi_2$ | $\pi_3$ | $\pi_1$ | $\pi_6$ | $\pi_4$ | $\pi_5$ |
| $\pi_3$ | $\pi_3$ | $\pi_1$ | $\pi_2$ | $\pi_5$ | $\pi_6$ | $\pi_4$ |
| $\pi_4$ | $\pi_4$ | $\pi_5$ | $\pi_6$ | $\pi_1$ | $\pi_2$ | $\pi_3$ |
| $\pi_5$ | $\pi_5$ | $\pi_6$ | $\pi_4$ | $\pi_3$ | $\pi_1$ | $\pi_2$ |
| $\pi_6$ | $\pi_6$ | $\pi_4$ | $\pi_5$ | $\pi_2$ | $\pi_3$ | $\pi_1$ |

Dabei ist die Tabelle wie folgt zu lesen: Steht im linken Eingang $\pi_i$ und im oberen $\pi_j$, so steht im Kreuzungspunkt der i-ten Zeile und j-ten Spalte das Element $\pi_i \circ \pi_j$.

Die "Ähnlichkeit" der mit $[\{0,1\},\{+\}]$ und $[\Upsilon_3,\{\circ\}]$ gegebenen Strukturen kommt durch die einander entsprechende Markierung in den Tabellen zum Ausdruck.

Hier haben wir zwar nicht wie im Falle der Beispiele 5a) und 6 eine Übereinstimmung bis auf die Bezeichnung, aber die Elemente $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ verhalten sich bzgl. der Operation "$\circ$" als Repräsentanten der Menge $\{ \pi_1,\pi_2,\pi_3 \}$ so wie die 0 bzgl. der Operation "+" und die Elemente $\pi_4,\pi_5,\pi_6$ wie die 1.

D.h. für die eindeutige Abbilaung $\varphi: \gamma_3 \longmapsto \{0,1\}$ mit

$$\varphi(x) =_{Df} \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \{ \pi_1,\pi_2,\pi_3 \} \\ 1 & \text{falls } x \in \{ \pi_4,\pi_5,\pi_6 \} \end{cases}$$

gilt: Ob man für je zwei Elemente $\pi_i,\pi_j \in \gamma_3$ zuerst die Operation " $\circ$ " anwendet $(\pi_i \circ \pi_j)$ und das so erhaltene Ergebnis danach abbildet $(\varphi(\pi_i \circ \pi_j))$ , so ist das dasselbe, als wenn man erst $\pi_i$ und $\pi_j$ abbildet $(\varphi(\pi_i),\varphi(\pi_j))$ und danach auf die so erhaltenen Bilder in $\{0,1\}$ die Operation + anwendet $(\varphi(\pi_i)+\varphi(\pi_j))$ .

Es gilt also

$$\varphi(\pi_i \circ \pi_j) = \varphi(\pi_i)+\varphi(\pi_j) \qquad \text{für } \pi_i, \pi_j \in \gamma_3.$$

Wir sagen $[\gamma_3,\{\circ\}]$ und $[\{0,1\},\{+\}]$ sind homomorph. Dabei kann man "homomorph" etwa mit "strukturähnlich" übersetzen. Den Homomorphiebegriif, den wir an diesem Beispiel hergeleitet haben, wollen wir nun allgemein definieren.
Dazu benötigen wir vorher noch einen Begriff, der zum Ausdruck bringt, daß zwei Algebren untereinander die "gleiche Anzahl" gleichstelliger Operationen besitzen.

Definition 7 : Zwei universelle Algebren $[A,\Omega]$ und $[A',\Omega']$ heißen gleichartig $=_{Df}$ . Es existiert eine eineindeutige Abbildung f von $\Omega$ auf $\Omega'$ mit $n(f(\omega))=n(\omega)$ für $\omega\in\Omega$ .

Beispiel 8: a) $[\mathbb{N},\{+\}]$ und $[\mathbb{N},\{.\}]$ sind gleichartig $(f(+)=.)$

b) $[\mathbb{Z},\widehat{\mathbb{R}}]$ und $[\mathbb{Z},\widehat{\mathbb{R}}\cup\{null\}]$ sind nicht gleichartig, denn in $[\mathbb{Z},\widehat{\mathbb{R}}\cup\{null\}]$ gibt es eine nullstellige Operation, aber in $[\mathbb{Z},\widehat{\mathbb{R}}]$ nicht.

c) $[\{0,1\},\{+,.\}]$ (s. Beisp. 5a) und
sind gleichartig $(f(+)=_{Df}\triangle,\ f(.)=_{Df}\triangledown)$

d) $[\{0,1\},\{+\}]$ (s. Beisp. 5b) und $[\gamma_3,\{\circ\}]$ sind gleichartig $(f(+)=_{Df} \circ)$

D e f i n i t i o n 9: a) eine eindeutige Abbildung $\varphi: A \longmapsto A'$ heißt Homomorphismus der Algebra $[A,\Omega]$ auf die Algebra $[A',\Omega']$ $=_{Df}$

1. $[A,\Omega]$ und $[A',\Omega']$ sind gleichartig
2. $\varphi(A)=A'$
3. Es existiert eine eineindeutige Abbildung f von $\Omega$ auf $\Omega'$ mit $n(\varphi(\omega))=n(\omega)$ für $\omega\in\Omega$ derart, daß für alle $\omega\in\Omega$ und $a_1,\ldots,a_{n(\omega)}\in A$ gilt

$$\varphi(\omega(a_1,\ldots,a_{n(\omega)})) = f(\omega)(\varphi(a_1),\ldots,\varphi(a_{n(\omega)}))$$

b) Eine Algebra $[A,\Omega]$ heißt homomorph zu einer Algebra $[A',\Omega']$ $=_{Df}$.
Es existiert ein Homomorphismus von $[A,\Omega]$ nach $[A',\Omega']$ oder umgekehrt.

F o l g e r u n g 10: a) $[\{0,1\},\{+\}]$ und $[\mathfrak{F}_3,\{\circ\}]$ sind homomorph ( $\varphi$ wie bereits angegeben und f gemäß Beispiel 8d)

b) $[\{0,1\},\{+,.\}]$ und $[\{ö,ü\},\{\vartriangle,\triangledown\}]$ sind homomorph
( $\varphi$:$\varphi(0)=_{Df}$ ö ; $\varphi(1)=_{Df}$ ü ; f gemäß Beispiel 8c))

Konnten wir vorhin zwischen der "Ähnlichkeit" von $[\{0,1\},\{+\}]$ und $[\mathfrak{F}_3,\{\circ\}]$ einerseits und der von $[\{0,1\},\{+,.\}]$ und $\{ö,ü\},\{\vartriangle,\triangledown\}]$ andererseits einen gewissen Unterschied lediglich konstatieren, so können wir diesen nun genau charakterisieren: Im zeiten Fall kann man einen eineindeutigen Homomorphismus $\varphi$ angeben, so daß auch $\varphi^{-1}$ Homomorphismus ist, im ersten dagegen nicht.

D e f i n i t i o n 11: a) Eine Abbildung $\varphi : A \longmapsto A'$ heißt Homomorphismus von $[A,\Omega]$ auf $[A',\Omega']$ $=_{Df}$

1. ist Homomorphismus von $[A,\Omega]$ auf $[A',\Omega']$
2. ist eineindeutig und $\varphi^{-1}$ ist Homomorphismus von $[A',\Omega']$ auf $[A,\Omega]$ .

b) Zwei Algebren $[A,\Omega]$ und $[A',\Omega']$ heißen isomorph $=_{Df}$.
Es existiert ein Homomorphismus von $[A,\Omega]$ auf $[A',\Omega']$ .

**F o l g e r u n g 12:** $[\{0,1\},\{+,.\}]$ (gemäß Beispiel 5a) und $[\{ö,ü\},\{\triangle,\triangledown\}]$ sind zueinander isomorph. Homomorphe Algebren kann man also vom algebraischen Standpunkt aus als gleich betrachten, da sie sich lediglich in der Wahl der Bezeichnungen unterscheiden.

Übungsaufgabe 13:

Es sei $\xi =_{Df} \{2^x : x \in \mathbb{Z}\}$

a) Zeigen Sie, daß $[\mathbb{Z},\{+\}]$ und $[\xi,\{.\}]$ homomorph sind, wobei "+" und "." die übliche Addition bzw. Multiplikation ist.

b) Sind beide universellen Algebren auch isomorph?

Homomorphismen - und insbesondere Isomorphismen - sind die geeigneten Mittel, um algebraisch-strukturelle Gemeinsamkeiten mathematischer Objekte hervorzuheben, denn sie sind genau solche Abbildungen, die die Wirkung von Operationen respektieren.

Das ganze Konzept ist aber nur sinnvoll, wenn die Transitivität gewährleistet ist, d. h. wenn aus der Homomorphie von $[A,\Omega]$ und $[A',\Omega']$ und von $[A',\Omega']$ und $[\hat{A},\hat{\Omega}]$ auch die von $[A,\Omega]$ und $[\hat{A},\hat{\Omega}]$ folgt, d. h. wenn man also tatsächlich in der Lage ist, alle homomorphen (isomorphen) Algebren zu einer Strukturklasse zusammenzufassen.

**S a t z 14:** Ist $\varphi$ ein Homomorphismus von $[A,\Omega]$ auf $[A',\Omega']$ und $\psi$ ein Homomorphismus von $[A',\Omega']$ auf $[\hat{A},\hat{\Omega}]$, so ist $\psi\circ\varphi$ ein Homomorphismus von $[A,\Omega]$ auf $[\hat{A},\hat{\Omega}]$.

Beweis: 1. Man überlegt sich leicht, daß $[A,\Omega]$ und $[\hat{A},\hat{\Omega}]$ gleichartige Algebren sind.

2. Es gilt $\varphi(A) = A'$ und $\psi(A')=\hat{A}$.
Also gilt $\psi(\varphi(A)) = \hat{A}$.

3. Da $\varphi$ ein Homomorphismus von $[A,\Omega]$ auf $[A',\Omega']$ ist, existiert ein eineindeutiges f von $\Omega$ auf $\Omega'$, so daß für alle $\omega\in\Omega$ und $a_1,\dots,a_{n(\omega)}\in A$ gilt
$$\varphi(\omega(a_1,\dots,a_{n(\omega)})) = f(\omega)(\varphi(a_1),\dots,\varphi(a_{n(\omega)})) .$$
Also gilt

(1) $$\psi(\varphi(\omega(a_1,\dots,a_{n(\omega)}))) = \psi(f(\omega)(\varphi(a_1),\dots,\varphi(a_{n(\omega)})))$$

Da nun $\psi$ ein Homomorphismus von $[A',\Omega']$ auf $[\hat{A},\hat{\Omega}]$

ist, existiert ein eineindeutiges g von $\Omega'$ auf $\hat{\Omega}$, so daß für alle $\omega' \in \Omega'$ und $a_1', \ldots, a'_{n(\omega')} \in A'$ gilt

$$\phi(\omega'(a_1', \ldots, a'_{n(\omega')})) = g(\omega')(\phi(a_1'), \ldots, \phi(a'_{n(\omega')})) .$$

Da insbesondere gilt $f(\omega) \in \Omega'$ und $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_{n(\omega)}) \in A'$, haben wir

$$\phi(f(\omega)(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_{n(\omega)}))) = g(f(\omega)(\phi(\varphi(a_1)), \ldots, \phi(\varphi(a_{n(\omega)}))))$$

Mit (1) erhalten wir daher

$$\phi \circ \varphi(\omega(a_1, \ldots, a_{n(\omega)})) = g \circ f(\omega)(\phi \circ \varphi(a_1), \ldots, \phi \circ \varphi(a_{n(\omega)}))$$

für alle $\omega \in \Omega$ und $a_1, \ldots, a_{n(\omega)} \in A$.

Da $g \circ f$ ebenfalls wieder eineindeutig von $\Omega$ auf $\hat{\Omega}$ ist, ist der Satz bewiesen.

**Egbert Creutzburg**
**Forschungsstudent im Bereich**
**Math. Kyp. und Rechentechnik**

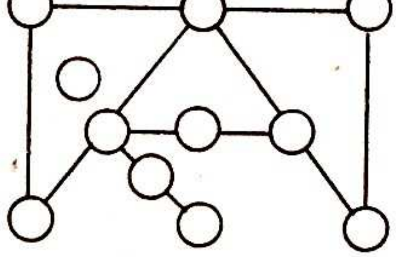
---

## KNOBELAUFGABEN

- Eine Zimmeruhr schlägt um 5 Uhr 5mal und braucht zu diesen Schlägen 5 Sekunden Zeit. Wieviel Zeit braucht sie zu den 10 Schlägen um 10 Uhr ?

- Auf einem Weihnachtsbaum brannten 12 Kerzen. 5 wurden ausgelöscht. Wieviele blieben übrig ?

- Die Zahlen von 3 bis 13 sind so in die nebenstehende Figur einzutragen, daß sich auf jeder Geraden die Summe 21 ergibt!



# Preisaufgaben 12/76

**H 67** 2

Man löse das Gleichungssystem

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = a$$
$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} y = 2$$

**H 68** 1

Es sei $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$.
Man zeige, daß

$$\operatorname{tg} \alpha_1 < \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \ldots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \ldots + \cos \alpha_n} < \operatorname{tg} \alpha_n$$

**H 69** 1

Man löse die Gleichung

$$6 \operatorname{tg} x + 5 \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x .$$

**H 70** 2

Hält man das gleichseitige Dreieck ABC fest und variiert die Richtung des Parallelgeradentripels $g_a, g_b, g_c$ aus Aufgabe H 34 (Wurzel 6/76), so beschreibt der Grundpunkt Z des Geradenbüschels derselben Aufgabe den Inkreis des Dreiecks ABC, was zu beweisen ist!

**H 71** 1

Man löse die Ungleichung

$$\left( \frac{3(\sin x + \cos x) - \sqrt{2}}{2\sqrt{2} - \sin x - \cos x} \right)^{1/2} > 1$$

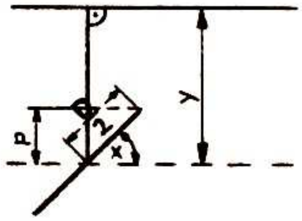
# Angenäherte Bestimmung von $\pi$ durch Nadelwürfe

Eine interessante Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist das sogenannte "Nadelproblem", das zuerst von dem französischen Mathematiker Buffon (1701-1788) gelöst wurde und das auch seinen Namen trägt.

Die Aufgabe lautet:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein möglichst schmaler Gegenstand (Nadel), der auf eine mit parallelen Geraden gleichen Abstandes a überzogene Ebene geworfen wird, eine Gerade kreuzt? Die Lange der Nadel sei D ($D < a$).

Das gesuchte Ereignis können wir vollständig mit dem Winkel x, den die Nadel mit den Geraden einschließt und durch den Abstand y ihres Mittelpunktes von der nächstgelegenen Geraden beschreiben (Abb. 1).

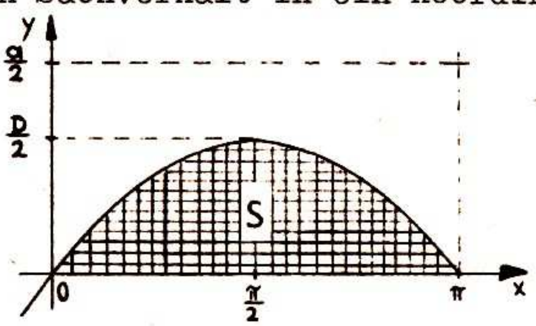



Die Nadel schneidet genau dann, wenn $p \geq y$ ist. Aus der Abbildung erkennen wir weiterhin, daß $p = \frac{D}{2} \sin x$ ist und erhalten damit entgültig das Kriterium für das gesuchte Ereignis:

$$y \leq \frac{D}{2} \sin x \,.$$

Aufgrund der Definition von y ist $0 \leq y < \frac{a}{2}$. Außerdem genügt es, Winkel x mit $0 \leq x < \pi$ zu untersuchen.

Die Lagen der Nadel für alle anderen Winkel lassen sich bis auf eventuelle Vertauschung auf diesen Fall zurückführen. Wir zeichnen uns diesen Sachverhalt in ein Koordinatensystem ein:



Alle möglichen Lagen der Nadel werden hier als Punkte des Rechteckes R dargestellt . Die Nadel kreuzt eine Gerade dann, wenn ihre Lage durch Punkte der Fläche S beschrieben wird. Es liegt nahe, als Wahrscheinlichkeit P des gesuchten Ereignisses den Quotienten der beiden Flachen zu verwenden:

$$P = \frac{S}{R}$$

Wir erhalten fur eine Flache

$$R = \frac{a}{2}\pi$$

Und S wird mit Hilfe der Integralrechnung bestimmt

$$S = \int_0^{\pi} \frac{D}{2} \sin x \, dx = D \, .$$

Somit ergibt sich

$$P = 2 \frac{D}{a} \frac{1}{\pi} \qquad (*)$$

Für das Verständnis des folgenden Abschnittes ist die Kenntnis des sogenannten Gesetzes der großen Zahlen, einem der grundlegendsten Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, notwendig. Dieser Satz besagt etwa, daß die Abweichung der sogenannten relativen Häufigkeit des Auftretens eines Ereignisses von dessen Wahrscheinlichkeit bei einer genügend großen Anzahl von Versuchen beliebig klein gemacht werden kann. Unter der relativen Häufigkeit eines Ereignisses A bei n gleichartigen Versuchen verstehen wir den Quotienten $\frac{\mu}{n}$ , wobei $\mu$ die Anzahl des Auftretens von A in diesen n Versuchen ist.
Damit können wir $\pi$ nun näherungsweiseaus (*) errechnen, wenn für P die relative Häufigkeit des zugehörigen Ereignisses eingesetzt wird. Wir beschaffen uns diese relative Häufigkeit, indem wir eine Nadel möglichst oft auf ein Blatt Papier fallen lassen, das gemäß der Aufgabenstellung präpariert wurde und das so groß ist, daß es gewährleistet, daß die Nadel auch ohne Zielen immer darauf fällt. Zielen ist nämlich verboten, weil alle Würfe zufällig sein müssen, wenn wir brauchbare Ergebnisse erhalten wollen. Man kann sich die Arbeit wesentlich vereinfachen, indem man mehrere Nadeln verwendet, also beispiels-

weise nicht eine Nadel 200 mal, sondern 10 Nadeln 20 mal wirft und jeweils die Fälle, in denen eine Nadel eine Gerade kreuzt, auszählt.
Weiterhin ist es zweckmäßig, a doppelt so groß zu wählen wie D. In diesem Fall vereinfacht sich (*) zu

$$P = \frac{1}{\pi}$$

und daraus ergibt sich

$$\pi = \frac{1}{P} .$$

Wenn wir P durch $\frac{\mu}{n}$ annähern, erhalten wir schließlich

$$\pi = \frac{n}{\mu} .$$

Dieser Zusammenhang zwischen Nadelwerfen und einem Näherungswert für die Zahl $\pi$ ist immer frappierend, auch wenn auf Grund dessen, daß ein Einzelner nicht genügend Versuche ausführen kann, die Näherung sehr ungenau wird.
Um für $\pi$ einen Wert zu erhalten, der mit großer Wahrscheinlichkeit auf zwei Stellen genau ist, müßte man etwa 10 000 mal werfen. Diese Zahl kann man praktisch nur dann realisieren, wenn mehrere ihre Ergebnisse zusammen verwerten.

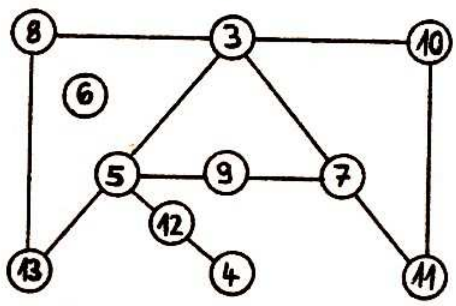
**Harald Schirrmeister**

---

Lösungen der Knobelaufgaben

11 1/4 Sekunden. Zwischen den 5 Schlägen liegen 4 Zwischenräume von je 1 1/4 Sekunde, zwischen den 10 Schlägen aber 9!

Nur die 5 ausgelöschten Kerzen. Die 7 anderen verbrannten völlig, blieben also nicht übrig!



# Lösungen

Aufgabe H 43 ( nach Ralf Becher )

Man löse die Gleichung

$$\log_{\sin x} 2 \cdot \log_{\sin^2 x} a + 1 = 0$$

Aus der Definition des Logarithmus folgen sofort die Einschränkungen: $a > 0$ und $0 < \sin x < 1$ .

Für unsere Umrechnung verwenden wir die Kettenregel für Logarithmen: $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ .

Dann folgt:

$$\log_{\sin x} 2 \cdot \log_{\sin^2 x} a + 1 = 0$$

$$\log_{\sin x} 2 \cdot ( \log_{\sin^2 x} \sin x \cdot \log_{\sin x} 2 \cdot \log_2 a ) = -1$$

$$(\log_{\sin x} 2)^2 = -2 \cdot \log_a 2$$

Es ergeben sich zwei Lösungsmöglichkeiten:

• 1. $\log_{\sin x} 2 = +\sqrt{-2 \cdot \log_a 2}$

Diese Lösung entfällt, da nach Voraussetzung $\sin x < 1$ und somit $\log_{\sin x} 2 < 0$ gilt.

• 2. $\log_{\sin x} 2 = -\sqrt{-2 \cdot \log_a 2}$

$$\sin x = 2^{-1/\sqrt{-2 \cdot \log_a 2}}$$

$$= 2^{-\sqrt{-\log_4 a}}$$

Da $\sin x < 1$ ist, muß auch $\sqrt{-\log_4 a} > 0$ und damit $a < 1$ gelten.

Für $0 < a < 1$ hat die gegebene Gleichung die Lösung

$\underline{\sin x = 2^{-\sqrt{-\log_4 a}}}$ bzw. $\underline{x = \arcsin 2^{-\sqrt{-\log_4 a}}}$ .

$\boxed{\text{Aufgabe H 48}}$ ( nach Reiner Lindemann, Cottbus )

Aus $x + y = a$ folgt $\tan(x + y) = \tan a$, falls $x + y \neq \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$, k ganze Zahl.

Wenn $x + y = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$ wäre, so müßte die zweite Gleichung $\tan x + \cot y = b - 1$ lauten, da $\tan y = \cot x$ und $\tan x \cdot \cot x = 1$, was nicht für alle x bei konstantem b erfüllt sein kann.

Somit gilt:

$$\tan a = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\cdot\tan y} \qquad \text{für alle } x,y$$

$$\tan a = \tan x + \tan y + \tan a\cdot\tan x\cdot\tan y \quad .$$

Ferner gilt für alle x,y:

$$b = \tan x + \tan y + \tan x\cdot\tan y \ .$$

Subtraktion der beiden Gleichungen liefert:

$$\tan a - b = \tan x\cdot\tan y\cdot(\tan a - 1) \qquad (*)$$

Diese Gleichung gilt nicht für alle x,y , da sonst die Voraussetzungen verletzt würden.

Soll (*) erfüllt sein, so muß nun $\tan a = 1$ und somit $\tan a = b$ sein.

Dies liefert die Lösung der Aufgabe:

$$\left\| \begin{array}{ll} a = \frac{\pi}{4} + l\cdot\pi & \quad l \text{ ganze Zahl} \\ b = 1 & \end{array} \right.$$

Die Richtigkeit ergibt sich leicht aus den gegebenen Gleichungen.

---

Man löse:

$$\begin{array}{r} \text{PPP} \cdot \text{PP} \\ \hline \text{PPP} \\ \text{PPPP} \\ \hline \text{PPPPP} \end{array}$$

P sind dabei beliebige Primzahlen zwischen 0 und 9!

# Sonderpreisausschreiben „10 Jahre Wurzel" (III)

11. Wieviele Studenten arbeiteten in den vergangenen 10 Jahren im Bereich WURZEL unseres Jugendobjektes mindestens ein Jahr lang mit?
    A 24 B 31 C 42

12. Von wievielen verschiedenen Einsendern veröffentlichten wir bis Heft 5/76 Lösungen?
    A 68 B 94 C 131

13. Wieviele Lösungen erhielten wir zu den Preisaufgaben aus den WURZELn 9/10/73 bis 2/76?
    A 1568 B 2381 C 4102

14. Wieviele Fachartikel sind bisher bei uns erschienen?
    A 54 B 65 C 87

15. Wie hoch war 1975 die Höchstzahl von Einsendungen zu einer Preisaufgabe?
    A 28 B 36 C 57

Dieses waren die letzten 5 Schätzfragen unseres dreiteiligen Sonderpreisausschreibens. Eure Antworten erwarten wir bis zum 1.2.77 unter dem Kennwort "PREISAUSSCHREIBEN". Die 10 besten Einsender aller Folgen erhalten von uns Sachpreise im Gesamtwert von ca. 200 Mark. Die Auflösungen veröffentlichen wir im Februar 1977, die Preisträger im Heft 3/77.

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Egbert Creutzburg
**Chefredakteur:** Waltraud Werner
**Redaktion:** K. Bartholmé, H.-J. Hauschild, R. Jeske, H.-G. Leopold
**Anschrift:** WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
**Konto:** Postscheckkonto 180 45
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.

Artikel-Nr. (EDV): 10932