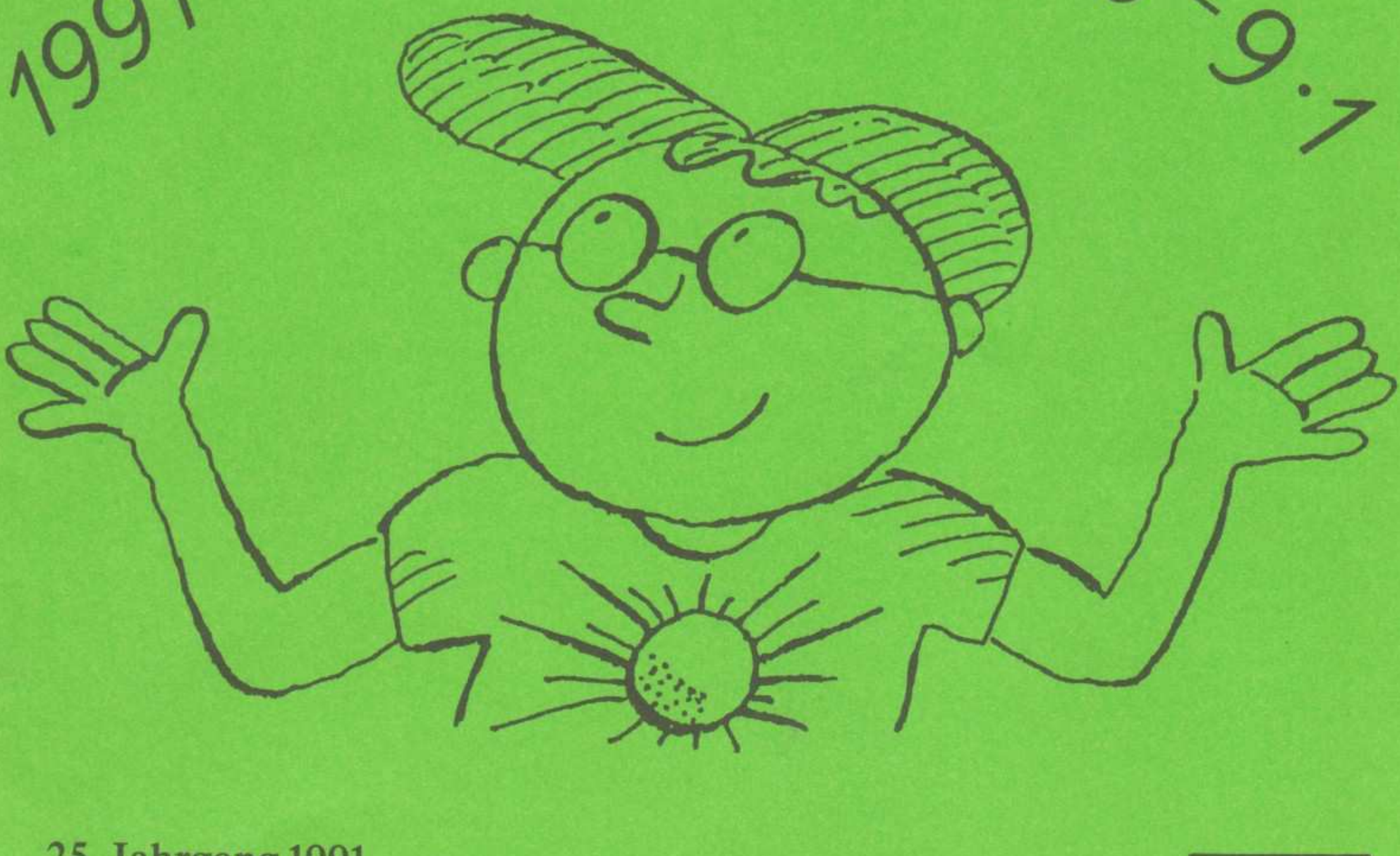
Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha

$$1991 = 199 \cdot 1(19 - 9 \cdot 1) + 1 + 9 - 9 \cdot 1$$



25. Jahrgang 1991
Preis 1,50 DM
ISSN 0002-6395
Friedrich Verlag
Velber

3

Herausgeber und Verlag:
Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG
Postfach 10 01 50, 3016 Seelze 6
Tel.: (05 11) 4 00 04–53

Anschrift der Redaktion:
Redaktion „alpha"
PSF 129, O-7010 Leipzig

Redaktion:
Dr. Gabriele Liebau

Lizenznummer: 1545
Erscheinungsweise: zweimonatlich
alpha ist zu beziehen durch alle Buchhandlungen und Postämter oder direkt vom Verlag.

Liebe Leser! Ab Heft 4/91 erscheint *alpha* mit neuem Outfit, d. h. 32 Seiten Umfang und besserer Ausstattung.
Diese Veränderungen sind aber mit dem bisherigen Preis nicht machbar! Deshalb muß dieser ab Heft 4/91 generell auf 2,– DM pro Heft angehoben werden. Dazu kommen pro Heft –,50 DM Portokosten. Das macht also 15,– DM im Jahresabonnement.
Soviel können wir aber versichern: Es gibt weiterhin viel Inhalt und das zu einem Preis, an dem sich der Friedrich Verlag keine „goldene Nase" verdient!

Fotos: Dr. P. Schreiber, Greifswald (S. 54); M. Spindler, Berlin (S. 56); Dr. L. Flade, Halle (S. 62)
Vignetten: L. Otto, Leipzig (Titelblattvignette, S. 56, Alphonsvignetten); Dr. St. Koch (S. 58)
Technische Zeichnungen: OStR G. Gruß, Leipzig
Titelblatt: H. Tracksdorf, Leipzig, nach einer Vorlage von L. Otto, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Satz und Druck:
INTERDRUCK Leipzig GmbH
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 23. April 1991
Auslieferungstermin: 14. Juni 1991

alpha

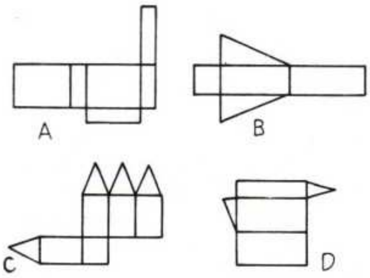
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

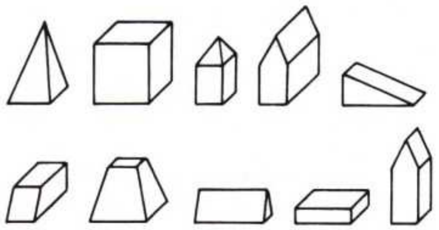
Alphons weist Euch auf Artikel mit geringerem Schwierigkeitsgrad hin.
Das heißt aber nicht, daß alle anderen Beiträge für mathematische Anfänger ungeeignet sind. Probiert es selbst aus!

Einige Aufgaben, die Du „im Kopf" lösen sollst

Marcel räumt sein Zimmer auf. In der untersten Schublade seines Schreibtisches entdeckt er diese Bastelbögen aus Pappe:

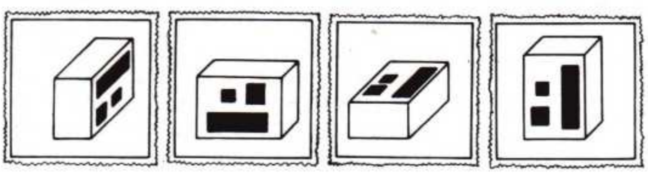


Marcel überlegt: „Soll ich die Bastelbögen wegwerfen?" Wenn er wüßte, was man aus den Bastelbögen herstellen könnte, würde ihm die Entscheidung leichter fallen. Kannst Du ihm helfen?
Welche der unten abgebildeten Körper können aus den Bastelbögen hergestellt werden? Schreibe jeweils den Buchstaben des Bastelbogens unter den entsprechenden Körper!



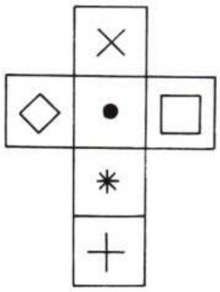
Marcel räumt weiter auf. Auf dem Boden einer Truhe findet er eine Schachtel. Eine Fläche der Schachtel ist mit verschiedenen Rechtecken bedruckt. Alle anderen Flächen sind weiß. Hier siehst Du eine Abbildung dieser Schachtel:

Als Marcel die Schachtel aus der Truhe nimmt, sieht er darunter diese Fotos:



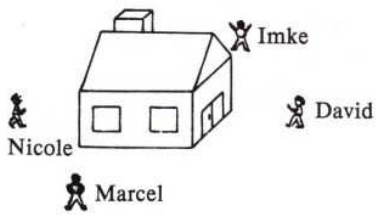
Sind das Fotos von Marcels Schachtel oder zeigen die Fotos nur eine Schachtel, die Marcels Schachtel sehr ähnlich sieht? Kreuze die Fotos an, von denen Du meinst, daß sie Marcels Schachtel abbilden.

Marcels Freund David kommt zu Besuch. Er bringt zwei Würfel mit, die er zu Hause aus Pappe gebastelt hat. Beide Würfel sind aus solch einem Bastelbogen hergestellt:

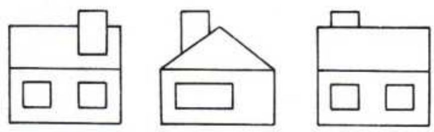


Die Rückseite des Bastelbogens ist weiß. Leider hat der Regen bei jedem Würfel ein Zeichen verwischt:

Weißt Du, welches Zeichen verwischt wurde?
Nach dieser, wie ich finde, recht schwierigen Aufgabe zum Schluß noch eine etwas leichtere:
Marcel und David gehen nach draußen. Vor Marcels Haus treffen sie ihre Schulfreundinnen Imke und Nicole. Zu viert spielen sie „Fangen".



Welches Kind sieht das Haus gerade so?
Schreibe den Namen darunter!



Nun, konntest Du alle Aufgaben lösen?
Vielleicht hättest Du bei der ersten Aufgabe gerne die Bastelbögen in der Hand gehabt und sie gefaltet, um zu sehen, welcher Körper daraus entsteht; und die Lösung der zweiten Aufgabe wäre Dir bestimmt noch leichter gefallen, hättest Du die Schachtel in der Hand drehen und dann mit den Fotos vergleichen können. Aber Du mußtest alle hier formulierten Aufgaben „im Kopf", also in Deiner Vorstellung lösen.
Die Fähigkeit, solche und ähnliche Aufgaben im Kopf zu lösen, nennt man räumliches Vorstellungsvermögen.
Räumliches Vorstellungsvermögen ist keine Eigenschaft, die man hat oder nicht hat, wie etwa blaue Augen oder eine krumme Nase. Räumliches Vorstellungsvermögen kann man trainieren, indem man z. B. Modelle aus Pappe bastelt, mit Legosteinen oder Klötzen baut oder auch, indem man versucht, die Aufgaben dieses Artikels zu lösen.

A. Tonn

Eine Regel zur Berechnung des Volumens von Rotationskörpern

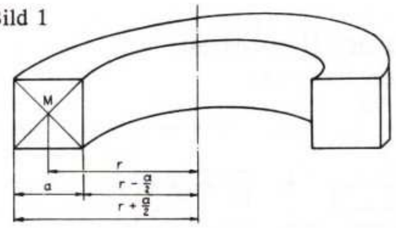
Der Konstrukteur einer Dampf- oder Gasturbine muß noch während der Entwurfsarbeiten die Masse der Laufräder bestimmen, um sich ein Bild von der zu erwartenden „kritischen Drehzahl“ der Turbine machen zu können. Er steht dabei vor der Aufgabe, von einem geometrisch verhältnismäßig komplizierten Rotationskörper das Volumen zu bestimmen. Derartige Anforderungen treten in der Technik des öfteren auf.

Bevor wir uns an eine etwas anspruchsvollere Aufgabe heranwagen, beschäftigen wir uns mit einigen einfacheren Rotationskörpern.

▲1▲ Ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 6$ cm rotiert im Raum um eine Achse, die mit dem Quadrat in einer Ebene liegt, parallel zu einer Quadratseite verläuft und vom Mittelpunkt M des Quadrats einen Abstand von $r = 10$ cm hat. Berechne das Volumen des entstehenden Körpers!

Das Volumen V dieses Hohlzylinders läßt sich relativ leicht als Differenz aus dem Volumen des „äußeren“ Zylinders mit dem Radius $r_a = r + \frac{a}{2}$ und dem Volumen des „inneren“ Zylinders mit dem Radius $r_i = r - \frac{a}{2}$ berechnen:

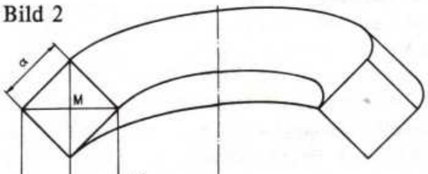
Bild 1



$$V = V_a - V_i = \pi r_a^2 a - \pi r_i^2 a = \pi a\left(r_a^2 - r_i^2\right)$$
$$= \pi a\left(\left(r + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(r - \frac{a}{2}\right)^2\right)$$
$$V = 2\pi r a^2 = 720\pi\,\text{cm}^3 \approx 2\,262\,\text{cm}^3.$$

Lassen wir nun dasselbe Quadrat um eine Achse rotieren, die ebenfalls mit dem Quadrat in einer Ebene liegt und von dessen Mittelpunkt den Abstand $r = 10$ cm hat, aber parallel zu einer *Diagonalen* des Quadrats verläuft (Bild 2), so ist für den entstehenden Rotationskörper die Volumenberechnung nicht mehr ganz so einfach. Man kann dazu Summen bzw. Differenzen der Volumina geeigneter Kegel verwenden.

Bild 2



▲2▲ Berechne das Volumen des im Bild 2 skizzierten Körpers!

Erstaunt stellen wir fest, daß dieser Körper ebenfalls das Volumen $V = 2\pi r a^2 = 720\pi\,\text{cm}^3$ hat, obwohl er zu dem Körper aus Aufgabe 1 offensichtlich nicht kongruent ist.

Sehen wir uns die Formel $V = 2\pi r a^2$ genauer an, so bemerken wir: Der Flächeninhalt a^2 des rotierenden Quadrats wird mit dem Faktor $2\pi r$ multipliziert. $2\pi r$ ist aber der Umfang des Kreises, den der Mittelpunkt M des Quadrates bei der jeweiligen Rotation beschreibt.

Um dem sich andeutenden Zusammenhang noch mehr auf die Spur zu kommen, lösen wir die folgende Aufgabe:

▲3▲ Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a = 1{,}5$ dm und $b = 3{,}6$ dm dreht sich um seine Hypotenuse. Berechne das Volumen des Rotationskörpers!

Lösung:

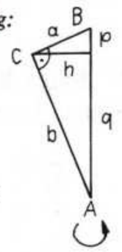


Bild 3

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi}{3} h^2 p + \frac{\pi}{3} h^2 q$$
$$= \frac{\pi}{3} h^2 (p+q) = \frac{1}{3}\pi h^2 c \qquad (*)$$

(Rechne selbst weiter! Verwende Höhen- und Kathetensatz!)

Für unsere Zwecke untersuchen wir den letzten Term in (*) und schreiben

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 c = \frac{ch}{2} \cdot 2\pi \frac{h}{3}.$$

Das Volumen V ergibt sich also als Produkt aus dem Flächeninhalt $\frac{ch}{2}$ des rotierenden Dreiecks und dem Umfang $2\pi\frac{h}{3}$ eines Kreises mit dem Radius $\frac{h}{3}$.

Gibt es in unserem Dreieck evtl. einen besonderen Punkt, der von der Hypotenuse den Abstand $\frac{h}{3}$ hat? Wir erinnern uns, daß der *Schwerpunkt* (Schnittpunkt der Seitenhalbierenden) eines Dreiecks jede Seitenhalbierende im Verhältnis 1 : 2 teilt, wobei die kürzere Teilstrecke jeweils zur entsprechenden Seite hin liegt. Bild 4 zeigt, daß eine Parallele zur Seite c durch den Schwerpunkt S die Höhe h_c ebenfalls im Verhältnis 1 : 2 teilt. Der Abstand des Punktes S zur Seite c beträgt demnach $\frac{1}{3}h_c$.

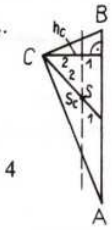


Bild 4

Bis zur Gleichung (*) wurde von der Rechtwinkligkeit des Dreiecks kein Gebrauch gemacht, so daß wir allgemein formulieren können:

Das Volumen eines Körpers, der durch Rotation eines Dreiecks um eine seiner Seiten entsteht, ist gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt dieses Dreiecks und dem Umfang des Kreises, auf dem sich der Schwerpunkt des Dreiecks bei der Rotation bewegt.

Spätestens jetzt wird es Zeit, in einem Nachschlagewerk (z. B. Kleine Enzyklopädie Mathematik, BI Leipzig) nachzusehen, ob es auch für das Volumen eines beliebigen Rotationskörpers einen entsprechenden Satz gibt. Wir finden unter dem Stichwort „Rotationskörper“ die Guldinsche Regel für die Volumenberechnung: *Rotiert ein ebenes Flächenstück A um eine in der gleichen Ebene liegende Gerade g, die höchstens Randpunkte mit A gemeinsam hat, so ist das Volumen V des entstehenden Rotationskörpers größengleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt von A und der Länge des Weges des Schwerpunktes von A bei einer Umdrehung.*

Damit haben wir eine Regel gefunden, die Berechnungen an Rotationskörpern erleichtert. Sie wurde nach dem Jesuit und Lehrer Paul *Guldin* (1577–1643) benannt, der sie 1635 in einem seiner Werke erläuterte. Die Regel selbst wurde aber bereits von dem griechischen Mathematiker *Pappos* von Alexandria (3. Jh. u. Z.) ohne Beweis mitgeteilt.

Auch wir können den Beweis hier nicht führen, da dies Mittel der Integralrechnung erfordern würde. Wir wollen im folgenden noch etwas mit der *Guldin*schen Regel arbeiten. Zuvor sei noch bemerkt, daß der mathematische Begriff „Schwerpunkt einer geometrischen Fläche“ dem physikalischen Begriff „Schwerpunkt eines Körpers“ entspricht, wenn man sich die Fläche durch einen realen Körper mit überall gleicher Dicke und Dichte (z. B. Blechstück) ersetzt denkt.

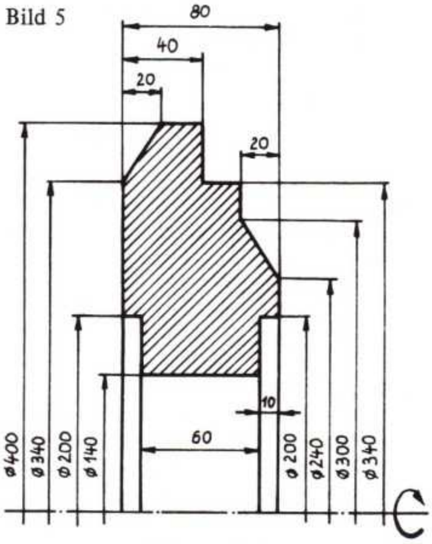
▲4▲ Ein (nicht gleichschenkliges) rechtwinkliges Dreieck rotiert a) um seine kürzere und b) um seine längere Kathete. Vergleiche die Volumina der jeweils entstehenden Rotationskörper!

▲5▲ Stelle eine Formel für die Berechnung des Volumens eines Torus auf! (Ein Torus ist ein ringförmiger Körper, der durch die Rotation einer Kreisfläche K um eine außerhalb von K verlaufende Achse, die in der Ebene von K liegt, entsteht.)

▲6▲ Bestimme die Lage des Schwerpunktes einer Halbkreisfläche!
(Hinweis: Bei dieser Aufgabe muß man vom bekannten Volumen des Rotationskörpers auf den Abstand des Schwerpunktes der rotierenden Fläche von der Rotationsachse schließen.)

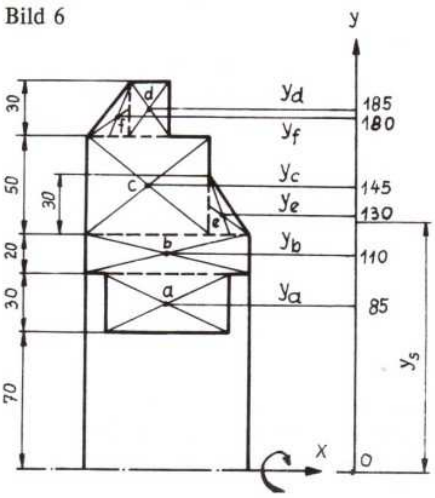
▲7▲ Berechne das Volumen des Rotationskörpers, von dem im Bild 5 die rotierende Fläche und die Rotationsachse dargestellt sind (alle Maße in mm)!

Bild 5



Lösungsüberlegung: Um diese Aufgabe mit Hilfe der *Guldin*schen Regel zu lösen, benötigen wir den Flächeninhalt der rotierenden Fläche sowie den Abstand ihres Schwerpunktes von der Rotationsachse. Der Flächeninhalt läßt sich relativ leicht berechnen, wenn man die Gesamtfläche in geeignete Teilflächen zerlegt. Bild 6 zeigt eine Zerlegung in Rechtecke und rechtwinklige Dreiecke. Diese Teilflächen sind hier mit den Buchstaben a bis f bezeichnet. Außerdem ist ein Koordinatensystem mit der Rotationsachse als x-Achse

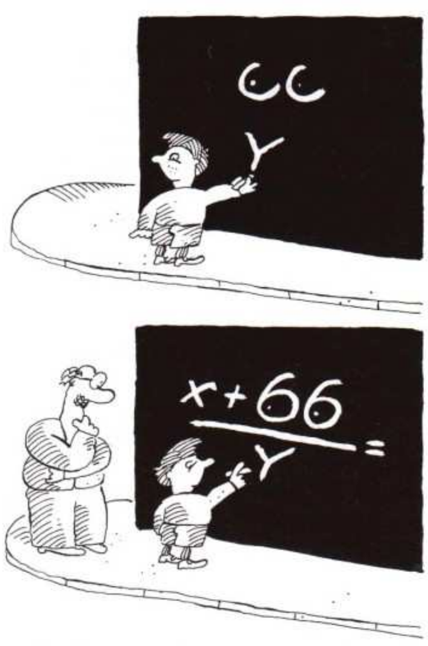
Bild 6



und darauf senkrecht stehender y-Achse eingezeichnet.
Der Abstand y_s des Schwerpunktes der rotierenden Fläche von der Rotationsachse läßt sich aus den entsprechenden Abständen der Schwerpunkte der Teilflächen gewinnen, wenn man sich wieder der bereits erwähnten physikalischen Vorstellung (Blechstück mit überall gleicher Dicke und Dichte) bedient. Wir denken uns sowohl die Masse des gesamten Stücks als auch die Massen der Teilstücke in ihren jeweiligen Schwerpunkten konzentriert. Stellen wir uns dann das gesamte Blechstück parallel zur Erdoberfläche liegend vor, so wirken in den Schwerpunkten jeweils den Massen entsprechende Gewichtskräfte $F_a, F_b, \ldots, F_f$ bzw. F_{ges}, die rechtwinklig an einem einseitigen Hebel mit Drehpunkt auf der Rotationsachse angreifen. (Die Abszissen der Schwerpunkte sind für unser Problem ohne Bedeutung.) Die Längen der entsprechenden Kraftarme sind $y_a, y_b, \ldots, y_f$ bzw. y_s.
Nach dem Hebelgesetz ist dann
$F_a \cdot F_b \cdot y_b + \ldots + F_f \cdot y_f = F_{ges} \cdot y_s$.
Da die auftretenden Kräfte proportional zu den jeweiligen Massen und damit auch zu den jeweiligen Flächeninhalten sind, können wir auch schreiben
$A_a \cdot y_a + A_b \cdot y_b + \ldots + A_f \cdot y_f = A_{ges} \cdot y_s$.
Daraus ist y_s schnell berechnet, und der Anwendung der *Guldin*schen Regel steht nichts mehr im Wege.

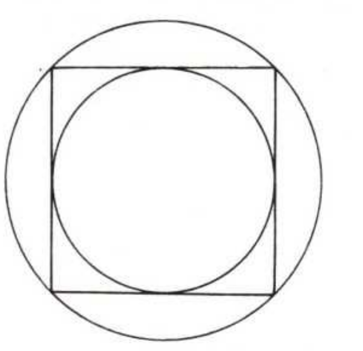
▲8▲ Beim Nachschlagen seid ihr sicher auch auf die Guldinsche Regel für die Flächenberechnung gestoßen. Berechnet mit Hilfe dieser Regel die Oberflächeninhalte der Körper aus den Aufgaben 1, 2, 3 und 5, und vergleicht – wo dies möglich ist – mit den auf „herkömmliche" Art gewonnen Ergebnissen!

C. P. Helmholz/A. Körner



Lothar Otto

▲1▲ Un objet d'art
Un objet d'art est constitué d'une sphère en verre. A l'intérieur se trouve un cube dont les 8 sommets touchent exactement l'extérieur de la sphère. A l'intérieur du cube se trouve une sphère de couleur qui effleure chacune des 6 faces extérieures du cube. Quel est le rapport du volume de la grande sphère a celui de la petite?



aus: Tangente, Paris

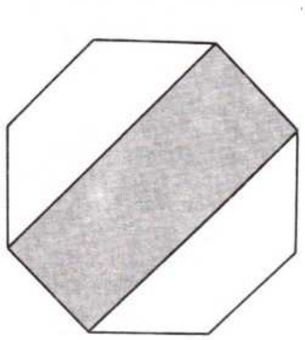
▲2▲ Seems difficult but is quite easy
Simplify the following fraction and give its value as one number in the numerator and one in the denominator:

$$\frac{1\cdot2\cdot4 + 2\cdot4\cdot8 + 3\cdot6\cdot12 + \ldots + 7\cdot14\cdot28}{1\cdot3\cdot9 + 2\cdot6\cdot18 + 3\cdot9\cdot27 + \ldots + 7\cdot21\cdot63}$$

aus: Fun with mathematics, Toronto

Maths is like Ophelia in Hamlet – charming and a bit mad.
John H.C. Whitehead (1904–1960)

▲3▲ В правильном восьмиугольнике провели две параллельные диагонали (см. рисунок). Докажите, что площадь получившегося прямоугольника вдвое меньше площади восьмиугольника.



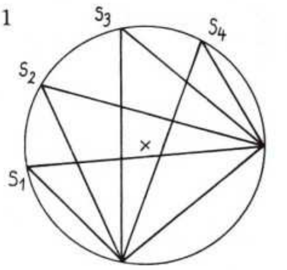
aus: Quant, Moskau

Peripheriewinkel über demselben Bogen eines Kreises sind gleich groß – na und?

Was läßt sich mit diesem Satz aus der Lehre von den Winkeln am Kreis anfangen? Nun, die Kenntnis des Peripheriewinkelsatzes kann aus ganz unterschiedlichen Gründen nützlich sein, sogar aus recht praktischen.

Fußballtrainer stellen beim Üben des Torschusses ihre Spieler auf einer Kreislinie auf. Für jeden ist dann das Tor – es bildet eine Sehne des Kreises – gleich groß. Jeder der Spieler hat die gleiche Chance.

Bild 1



Ein Tourist möchte von einem Parkweg aus die Vorderseite des Goethe-Gartenhauses fotografieren. Der Bildwinkel seiner Kamera beträgt 54°. Wie könnte er auf einem Lageplan wohl die Stelle(n) ermitteln, von wo aus er die gesamte Vorderfront fotografieren kann, ohne die Grünanlagen zu betreten? Wie muß er seinen Standort verändern, wenn er ein Objektiv mit dem Bildwinkel 47° benutzt?

Bild 2

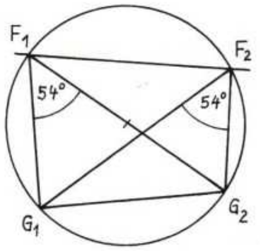


Bild 2 zeigt, daß es offensichtlich zwei solcher Stellen auf dem Parkweg gibt, von denen aus die Gebäudefront unter einem Bildwinkel von 54° erscheint. Wird das Objektiv mit dem Bildwinkel von 47° benutzt, dann muß ein anderer Standort auf dem Weg gefunden werden, einer, der auf einem Kreis mit größerem Radius liegt.

Wie könnte man aber die Mittelpunkte solcher Kreise finden, von deren Punkten aus man eine Sehne gegebener Länge unter einem gegebenen Winkel sieht? Beim Lösen dieser Konstruktionsaufgabe wird uns bewußt, daß hierzu die Kenntnis weiterer Sätze über Winkel am Kreis notwendig ist.

Am bekanntesten sind Konstruktionen, die sich auf den Zentri-Peripheriewinkelsatz stützen oder auch auf den Satz über Sehnentangentenwinkel. Der Winkel zwischen der Sehne und der Tangente an den Kreis in einem Endpunkt der Sehne ist nämlich ebenso groß wie der Peripheriewinkel über dieser Sehne. Nun könnte man die Konstruktion der für unsere Aufgaben nötigen Kreise ausführen. Probiert es!

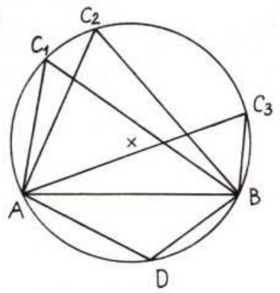
Der Peripheriewinkelsatz hat nicht nur für die angeführten praktischen Fragen eine Bedeutung. Er ist auch ein wichtiges Mittel zum Beweisen weiterer geometrischer Sätze.

Nehmen wir einmal an, wir hätten diesen Satz abgeleitet aus dem Satz über die Summe der gegenüberliegenden Winkel im Sehnenviereck.

Er sagt, daß diese Summe 180° beträgt.

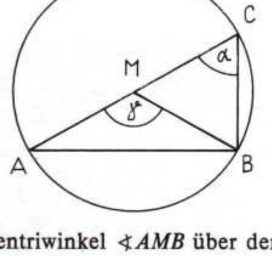
Bei festem Winkel $\sphericalangle ADB$ müssen alle Winkel $\sphericalangle AC_jB$ über $\widehat{AB}$ gleich sein.

Bild 3



Wenn nun zwischen der Größe des Zentriwinkels zum Bogen $\widehat{AB}$ und einem Peripheriewinkel über demselben Bogen ein Zusammenhang entdeckt werden soll, so kann man sich zunächst auf einen einfachen Spezialfall beschränken. Es könnte z. B. M auf einem Schenkel des Peripheriewinkels liegen.

Bild 4



Der Zentriwinkel $\sphericalangle AMB$ über dem Bogen $\widehat{AB}$ ist als Außenwinkel im gleichschenkligen Dreieck $\triangle MBC$ ebenso groß wie die Summe der beiden nichtanliegenden gleichgroßen Basiswinkel $\sphericalangle MCB$ und $\sphericalangle MBC$. Da wir andererseits wissen, daß alle Peripheriewinkel über $\widehat{AB}$ gleich groß sind, gilt für diese Winkel auch, daß sie alle halb so groß sind wie der Zentriwinkel über diesem Bogen.

Es könnte aber auch sein, daß man zunächst den Zusammenhang von Zentri- und Peripheriewinkel entdecken möchte. Dann genügen die Beweisüberlegungen zum Bild 4 nicht mehr, denn mit ihnen wäre die Gültigkeit der Aussage nur für einen Spezialfall bewiesen.

Man muß entsprechende Überlegungen für die beiden anderen möglichen Fälle der Lage des Kreismittelpunktes anstellen, wie es die Bilder 5 und 6 zeigen.

Bild 5

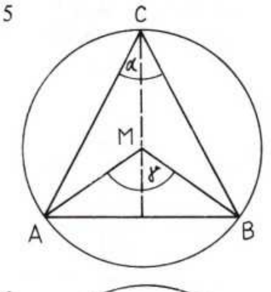
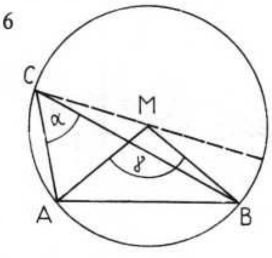


Bild 6



Versucht selbst zu beweisen, daß auch jetzt gilt $\gamma = 2\alpha$!

Da die Lage des Scheitelpunktes des Peripheriewinkels offensichtlich ohne Einfluß auf seine Beziehung zum Zentriwinkel ist, kann man nun auch sagen: Alle Peripheriewinkel über demselben Bogen sind gleich groß.

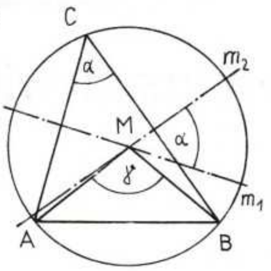
Sehr einfach ist der Zusammenhang zwischen Zentri- und Peripheriewinkel zu entdecken, wenn man dabei geometrische Abbildungen verwendet, speziell Spiegelungen und Drehungen.

Wer die Eigenschaften der Spiegelung an einer Geraden noch gut kennt, der wird auch leicht erkennen, daß man die Nacheinanderausführung von zwei Spiegelungen an zwei sich schneidenden Geraden durch eine Drehung um den Schnittpunkt dieser Geraden ersetzen kann. Dabei ist der Drehwinkel doppelt so groß wie der Winkel zwischen den Spiegelachsen.

Bild 7

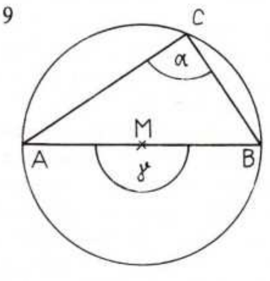
Diesen ganz einfachen Zusammenhang zwischen zwei Winkeln kann man in der Figur wiederfinden, die uns den Zusammenhang von Zentri- und Peripheriewinkel zeigt.

Bild 8



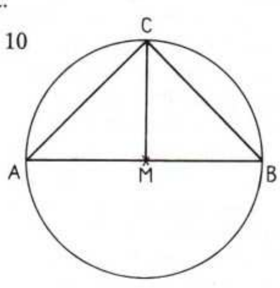
Die Spiegelung an der Mittelsenkrechten von $\overline{AC}$ bildet A auf C ab; die Spiegelung an der Mittelsenkrechten von $\overline{BC}$ bildet C auf B ab. Der Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten m_1 und m_2 ist M. Durch die Drehung um M mit dem Drehwinkel
$\gamma = \sphericalangle AMB = 2\sphericalangle(m_1, m_2) = 2\alpha$
wird also A auf B abgebildet.
Was hat das aber mit dem Peripheriewinkel $\sphericalangle ACB$ zu tun? Die entsprechenden Schenkel von $\sphericalangle ACB$ und von $\sphericalangle(m_1, m_2)$ stehen aufeinander senkrecht, die Winkel sind dann gleich groß. (Wer könnte diesen Satz beweisen?)
Es ist also
$\gamma = 2\sphericalangle(m_1, m_2) = 2\sphericalangle ACB = 2\alpha$.
Sehr nützlich ist der Peripheriewinkelsatz auch, wenn man einen anderen wichtigen Satz beweisen will, nämlich den Thalessatz.
Kennt man bereits den Zentri-Peripheriewinkelsatz, dann ist der Thalessatz nur ein spezieller Fall von ihm: Der Zentriwinkel ist 180° groß und der Peripheriewinkel über dem Durchmesser ist dann ein Rechter.

Bild 9



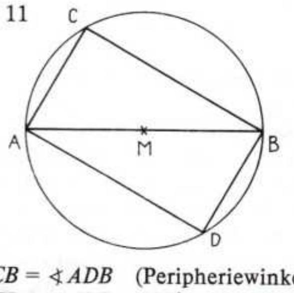
Kennt man jedoch nur den Peripheriewinkelsatz, dann genügt es, zunächst einen Spezialfall zu betrachten, so wie es Bild 10 zeigt.

Bild 10



Es sei $MC \perp AB$. Dann gilt:
$\triangle AMC \cong \triangle BMC$ und
$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACM + \sphericalangle MCB = 2 \cdot 45° = 90°$.
Da nun alle Peripheriewinkel über $\overset{\frown}{AB}$ gleich groß sind, gilt für sie, daß in diesem Fall jeder von ihnen ein rechter Winkel ist.
Man könnte auch folgendermaßen überlegen: Durch eine beliebige Sehne AB erhält man stets zwei verschiedene Kreisbögen $\overset{\frown}{AB}$ und $\overset{\frown}{BA}$ Die entsprechenden Peripheriewinkel sind spitze Winkel bzw. stumpfe Winkel. Bei einem Durchmesser AB sind diese Kreisbögen jedoch kongruent, die jeweiligen Peripheriewinkel also gleich groß, also weder stumpfe noch spitze Winkel sondern rechte Winkel.
Wen diese Argumentation nicht überzeugt, der kann auch noch den Satz über die Summe der gegenüberliegenden Winkel im Sehnenviereck heranziehen.

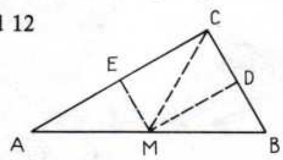
Bild 11



$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$ (Peripheriewinkelsatz)
$\sphericalangle ACB + \sphericalangle ADB = 180°$ (Sehnenviereck)
$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 90°$

Nicht nur der Thalessatz hat in der Geometrie Bedeutung, auch seine Umkehrung wird häufig benötigt. Sie besagt, daß der Scheitel des rechten Winkels in allen rechtwinkligen Dreiecken, die man zu einer gegebenen Hypotenuse zeichnen kann, immer auf dem Kreis um den Mittelpunkt der Hypotenuse durch ihre Endpunkte liegt.
Dieser Satz könnte uns auch in der folgenden Form gegenübertreten: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Seitenhalbierende der Hypotenuse halb so groß wie diese. Wer kann nachweisen, daß beide Sätze das gleiche aussagen?
Es sollen drei Möglichkeiten für den Beweis dieses Satzes gezeigt werden.

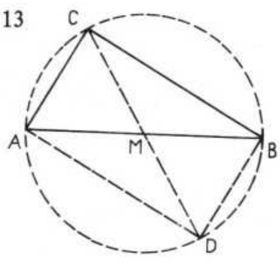
Bild 12



Vorauss.: $\sphericalangle ACB = 90°$
$\overline{AM} = \overline{MB}$
Beh. $\overline{MC} = \overline{AM} = \overline{MB}$

Die Parallelen zu den Katheten $\overline{BC}$ *bzw.* $\overline{AC}$ durch M schneiden die Katheten in den Punkten D und E. Die Dreiecke $\triangle AME$ und $\triangle MBD$ sind kongruent wegen wsw. Es ist also $\overline{ME} = \overline{BD}$. Außerdem ist $\overline{ME} = \overline{DC}$, denn das Viereck $MDCE$ ist ein Rechteck. Es ist also $\overline{BD} = \overline{DC}$, d. h. $\overline{MD}$ ist Mittelsenkrechte im gleichschenkligen Dreieck $\triangle MBC$. Demnach ist $\overline{MB} = \overline{MC} = \overline{MA}$, d. h. C liegt auf dem Kreis um M durch A und B.
Den etwas umständlichen Nachweis, daß D der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ ist, hätte man mit dem Hinweis umgehen können, daß die Parallele zu $\overline{AC}$ durch M das Teilverhältnis von $\overline{AB}$ auf $\overline{BC}$ überträgt. Der hier angegebenen Beweis jedoch vermeidet bewußt diesen Begriff.
Ein anderer Beweis der Umkehrung des Thalessatzes stützt sich auf die für solche Beweisaufgaben nützliche Empfehlung: Versuche die Figur so zu ergänzen, daß eine dir bekanntere entsteht!

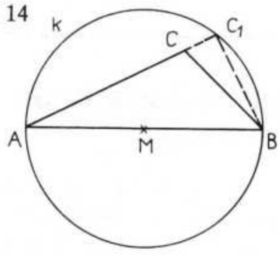
Bild 13



Vorauss.: $\sphericalangle ACB = 90°$
$\overline{AM} = \overline{MB}$
Beh. $\overline{MC} = \overline{AM} = \overline{MB}$

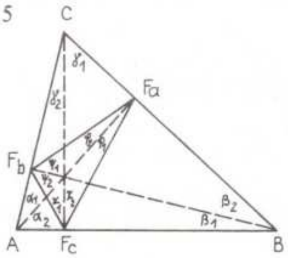
Man verlängert $\overline{CM}$ über M hinaus um $\overline{CM}$ und erhält D. Das so entstandene Viereck $ADBC$ besitzt nach Konstruktion zwei einander halbierende Diagonalen und einen rechten Winkel bei C. Es ist also ein Rechteck. (Wie könnte man das beweisen?) Im Rechteck sind die Diagonalen jedoch gleich lang. Der Scheitel des rechten Winkels liegt also auf dem Umkreis dieses Rechtecks.
Die Gültigkeit der Umkehrung des Thalessatzes kann man auch leicht durch einen indirekten Beweis zeigen. Man nimmt an, daß z. B. der Scheitelpunkt C des rechten Winkels über der Hypotenuse $\overline{AB}$ nicht auf dem Kreis k durch A und B liegt, sondern innerhalb dieses Kreises.

Bild 14



Der Schnittpunkt von AC mit k sei C_1. Der Peripheriewinkel $\sphericalangle AC_1B$ über dem Durchmesser $\overline{AB}$ ist nach dem Thalessatz ein Rechter.
Dies führt jedoch zu einem Widerspruch zum Winkelsummensatz im Dreieck $\triangle CC_1B$, es hätte nach unserer Annahme zwei Innenwinkel von 90°. Unser Annahme über die Lage von C war also falsch.
Die gleiche Situation tritt ein, wenn angenommen wird, daß C außerhalb von k liegt. (Zeigt das einmal!)
Es erweist sich, daß nur die Annahme: „C liegt auf k" nicht zu Widersprüchen mit bekannten Sätzen führt. Die Umkehrung des Thalessatzes ist also eine wahre Aussage.
Dieser Satz und der Peripheriewinkelsatz sind z. B. beim Beweis einer interessanten Eigenschaft von Dreieckstransversalen hilfreich, für welche es allerdings auch viele andere Beweismöglichkeiten gibt. Diese Eigenschaft besagt, daß die Höhen eines Dreiecks zugleich die Winkelhalbierenden des aus den Fußpunkten der Höhen gebildeten Dreiecks sind.
Im Dreieck $\triangle ABC$ seien $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta = \beta_1 + \beta_2$, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ die Innenwinkel und F_a, F_b, F_c die Höhenfußpunkte.
Die Innenwinkel des aus ihnen gebildeten Dreiecks seien
$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\psi = \psi_1 + \psi_2$, $\chi = \chi_1 + \chi_2$

Bild 15



Zu beweisen ist, daß gilt:
$\varphi_1 = \varphi_2$, $\psi_1 = \psi_2$, $\chi_1 = \chi_2$
Die Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$ sind Durchmesser von Thaleskreisen k_1, k_2, k_3 durch A, B, F_a, F_b bzw. B, C, F_b, F_c bzw. C, A, F_c, F_a. Und nun kann man eine ganze Anzahl von Peripheriewinkeln über jeweils dem gleichen Bogen erkennen. Es ist nämlich

$$\beta_1 = \varphi_2,\ \alpha_2 = \psi_1,\ \beta_2 = \chi_1,$$
$$\gamma_1 = \psi_2,\ \gamma_2 = \varphi_1,\ \alpha_1 = \chi_2 \qquad (1)$$

außerdem ist

$$\alpha_1 = \beta_2,\ \beta_1 = \gamma_2,\ \gamma_1 = \alpha_2. \qquad (2)$$

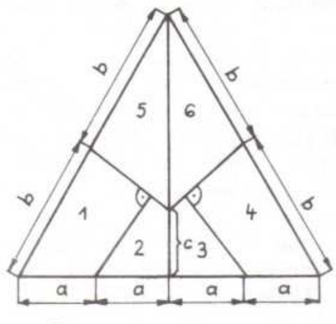
Findet selbst heraus, für welche Bögen welcher Kreise das gilt!
Aus (1) und (2) folgt dann die angegebenen Eigenschaft unmittelbar. Peripheriewinkel über demselben Bogen eines Kreises sind gleich groß – Gut, daß wir diesen Satz kennen!

W. Jungk

Quadratur des gleichseitigen Dreiecks

Gemäß der Abbildung und der angegebenen Formeln ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $s = 10$ cm mit den eingezeichneten Strecken auf Papier zu zeichnen. (Für $s = 10$ cm ergibt sich mit Taschenrechner

$$c = \frac{s}{4}\left(\sqrt{3} - \sqrt{\sqrt{3} - 1}\right) \approx 2{,}1911\ldots \text{ cm.})$$



$$a = \frac{s}{4}$$
$$b = \frac{s}{2}$$
$$c = \frac{s}{4}\left(\sqrt{3} - \sqrt{\sqrt{3} - 1}\right)$$

Anschließend ist dieses Dreieck auszuschneiden und längs der eingezeichneten Linien in 6 Teilflächen zu zerschneiden. Die 6 Teilflächen sind dann zu einer Quadratfläche aneinander zulegen.

W. Träger, Döbeln

Lösung auf Seite 71!

A. A. Fraenkel – der Lobatschewski der Mengenlehre

Vor 100 Jahren, am 17. 2. 1891, wurde Abraham Adolf Fraenkel in einer strenggläubigen jüdischen Familie in München geboren. Er wirkte als Dozent bzw. Professor der Mathematik an den Universitäten Marburg, Kiel und (ab 1933) Jerusalem. Dort starb er am 15. 10. 1965. Sein Name ist für immer mit der Entwicklung der Mengenlehre verbunden, zu der er viele bedeutende Beiträge leistete. Das erste, 1908 von Ernst Zermelo (1871–1953) vorgeschlagene Axiomensystem der Mengenlehre wurde von Fraenkel wesentlich verbessert und trägt seitdem die Bezeichnung Zermelo-Fraenkel'sches Axiomensystem. Wir wollen hier anläßlich des 100. Geburtstages von Fraenkel einer seiner Leistungen gedenken, die im Strom folgender, ähnlicher Resultate überflutet wurde und daher heute nicht mehr so allgemein bekannt ist. Unsere Geschichte beginnt aber rund 2200 Jahre früher im antiken Alexandria.

Abraham A. Fraenkel

Seitdem Euklid um 300 v. u. Z. in seinem Werk „Elemente" große Teile der damals bekannten Geometrie deduktiv aufgebaut, d. h. aus gewissen Grundannahmen (Axiomen und Postulaten) durch logische Schlußfolgerungen abgeleitet hatte, galt diese Art, „more geometrico" (d. h. auf geometrische Weise) Mathematik und vielleicht sogar Mechanik und andere Wissenschaften zu betreiben, als methodisch vorbildlich. Freilich konnte dieses Vorbild auf Grund vieler begrifflicher Schwierigkeiten bis ins 19. Jh. hinein nicht einmal in anderen mathematischen Disziplinen (wie z. B. Algebra, Zahlentheorie, Differentialrechnung, Wahrscheinlichkeitsrechnung) geschweige denn in den Naturwissenschaften erreicht werden. Genau genommen war es aus heutiger Sicht auch um die angebliche logische Strenge der euklidischen Geometrie nicht allzu gut bestellt.

Was es eigentlich bedeutet, aus gegebenen Voraussetzungen eine Behauptung durch logische Schlußfolgerung zu beweisen (statt sich z. B. durch Erfahrung und Experimente von ihrer Gültigkeit zu überzeugen, hätte noch um 1800 niemand zu erklären vermocht, und das fiel nur darum nicht so unangenehm auf, weil in jedem konkreten Fall eines mathematischen Beweises kein Zweifel an seiner Stichhaltigkeit aufkam. Es ist übrigens eine ganz allgemeine Erscheinung in den Wissenschaften, daß man Dinge tut (z. B. Beweisen, Konstruieren, Widerlegen), ohne sich darüber den Kopf zu zerbrechen, solange sie sich tun lassen. Erst wenn man vor der Aufgabe steht nachzuweisen, daß etwas prinzipiell unmöglich ist, erfordert dies ein tiefes Eindringen in das Wesen dessen, was da getan werden soll. So war es auch mit den mathematischen Beweisen: Die Frage, was ein mathematischer Beweis ist, entstand im Umfeld der sich über mehr als 2000 Jahre erstreckenden Bemühungen, ein gewisses der von Euklid vorausgesetzten geometrischen Postulate (das Parallelenpostulat) als logische Folgerung aus den übrigen nachzuweisen. Heute wissen wir, daß dieses Postulat nicht aus den anderen folgt. Um dies einzusehen, muß man jedoch einen wahrhaft umwälzenden Schritt gehen. Man muß die Begriffe der Geometrie von ihrer allgemein anerkannten scheinbar feststehenden Bedeutung abtrennen und ihnen eine solche abweichende Deutung unterschieben, bei der die übrigen Axiome und Postulate Euklids ebenfalls alle erfüllt werden, das Parallelenpostulat jedoch nicht. Dies wurde in den Dreißigerjahren des 19. Jh. durch den Russen N. I. Lobatschewski (1792–1856) und den Ungarn J. von Bolyai eingeleitet und erst um 1870 durch E. Beltrami (1835–1900) und F. Klein (1849–1925) vollendet. Als Verallgemeinerung ergibt sich: Die Aussage A folgt nicht aus den Aussagen $A_1, A_2, \ldots$, wenn es eine Deutung der Sprache gibt, in der $A, A_1, A_2, \ldots$ formuliert sind, bei der $A_1, A_2, \ldots$ erfüllt werden (wahr sind), A jedoch nicht. A heißt in diesem Fall unabhängig von $A_1, A_2, \ldots$ (was gleichbedeutend mit unbeweisbar aus $A_1, A_2, \ldots$ ist). Die betreffende Deutung der Sprache (d. h. der in ihr vorkommenden Begriffe) nennt man ein Modell für die Aussagen $A_1, A_2, \ldots$, wenn alle diese Aussagen bei dieser Deutung erfüllt werden. Durch bloße Umformulierung aus der Definition des „Nichtfolgens" erhalten wir: Die Aussage A folgt aus den Aussagen $A_1, A_2, \ldots$, wenn jedes Modell für $A_1, A_2, \ldots$ auch ein Modell für A ist. Der Preis, den die Mathematiker für diese kostbare Erkenntnis zahlen mußten, war hoch: Man mußte den naiven, quasi naturwissenschaftlichen Standpunkt gegenüber den mathematischen Objektiven aufgeben, der – vereinfacht gesagt – darin besteht, daß alle Begriffe eine einfürallemal gegebene „Standardbedeutung" besitzen. Im Laufe der rund 50 Jahre zwischen 1870 und 1920 lernte die Mathematik, sich selbst auf neue Weise zu verstehen, und sie bekam zusätzliche neue Inhalte und Aufgaben, indem eine große Vielfalt von Modellen für Begriffssysteme entdeckt und erforscht wurde. Derartige Modelle können in der Regel nicht aus der materiellen Sphäre bezogen werden, weil sie meist aus unendlich vielen Objekten bestehen müssen, um den mathematischen Axiomen zu genügen. Man denke z.B. an die Zahlbereiche!

Gerade zur rechten Zeit entstand also um 1870 die Mengenlehre.

In Gestalt der Mengen, Mengen von Mengen, Mengen von Mengen von Mengen, … lieferte sie das „Baumaterial" für unübersehbar viele Modelle mathematischer Theorien und damit Pseudoantworten auf Fragen wie: Als was kann man sich natürliche, rationale, reelle Zahlen vorstellen? Wo gibt es einen Bereich von Dingen, der den Axiomen der Geometrie in aller Strenge (unabhängig von den schwer erforschbaren Eigenschaften des „wahren physikalischen Raumes") genügt? Pseudoantworten, weil sie die Existenz von Mengen in einer der Existenz materieller Objekte vergleichbaren Weise voraussetzen, während doch zugleich diese Mengen, sofern sie unendlich sind, nicht als materielle Objekte vorstellbar sind. Tatsächlich beruhten die großen Erfolge der neuen Mathematik zumindest psychologisch darauf, daß die Mathematiker nun gegenüber den Mengen einen analogen naiven Standpunkt einnahmen wie vorher gegenüber den Begriffen der Geometrie. Diese von Georg Cantor (1845–1918), dem Begründer der Mengenlehre, vorgedachte „Philosophie", der Glaube an die Existenz eines immateriellen „Reiches aller Mengen", ist eine moderne Form des auf den antiken Philosophen Platon (427–348 v. u. Z.) zurückgehenden objektiven Idealismus. Daß dieser Standpunkt in der Mengenlehre unhaltbar ist, ergab sich eigentlich bereits aus einem 1915 von L. Löwenheim (1878–1957) und 1920 von T. Skolem (1887–1963) erhaltenen allgemeinen Resultat, wonach jedes Axiomensystem, sofern es überhaupt ein unendliches Modell besitzt, auch ein solches besitzt, das nur aus abzählbar vielen Objekten besteht, d.h. daß man diese Objekte durchnumerieren bzw. den natürlichen Zahlen eineindeutig zuordnen kann, während andererseits ein bekannter Satz der Mengenlehre besagt, daß eine solche Zuordnung für die Menge aller Teilmengen von natürlichen Zahlen nicht existiert. Gegenüber diesem „Skolemschen Paradoxon" konnten sich die Anhänger Cantors jedoch noch auf den Standpunkt stellen, daß sich das immaterielle Reich der Mengen nicht vollständig durch ein Axiomensystem beschreiben läßt und daher der Satz von Löwenheim und Skolem hier nicht anwendbar sei. Da fand Fraenkel 1922, daß man durch eine in ganz anschaulicher Weise beschreibbare Ausdünnung des vorgestellten Reiches aller Mengen, d. h. durch Weglassen vieler dieser Mengen nach einem bestimmten Gesetz, ein anderes Mengen-Universum erhalten kann, in dem alle Axiome des Zermelo-Fraenkel'schen Axiomensystems mit einer Ausnahme (dem sogenannten Auswahlaxiom) gültig bleiben. Das bedeutet, das sich dieses Auswahlaxiom zu den übrigen Axiomen der Mengenlehre analog verhält wie das Parallelenpostulat zu den übrigen Axiomen der Geometrie: Es folgt nicht aus ihnen, ist nicht aus ihnen beweisbar. Es gibt also auch ebenso wenig ein ausgezeichnetes „Standardmodell" der Mengenlehre, wie es kein ausgezeichnetes Modell der Geometrie gibt.

In den folgenden Jahrzehnten wurden viele Methoden zur „Konstruktion" von Nichtstandardmodellen der Mengenlehre aus vorausgesetzten Modellen entwickelt, und mittels solcher Modelle wurde eine beeindruckende Fülle von Resultaten über die logischen Beziehungen zwischen wichtigen mengentheoretischen Aussagen erzielt. (In analoger Weise verfügen wir heute über ein ungeheures Arsenal von Modellen für geometrische Aussagen, mit denen wir bis in alle Feinheiten klären können, welche Voraussetzungen welche Folgerungen nach sich ziehen bzw. welche Sätze von welchen anderen Sätzen unabhängig sind.) Zugleich ist der Seelenfrieden zumindest derjenigen Mathematiker, die bei ihrer Arbeit unendliche Mengen von hoher Mächtigkeit wesentlich benutzen, erheblich gestört, denn es gibt keinen allgemein anerkannten Standardbereich von Objekten, auf die sich ihre Resultate beziehen. Kann man also einerseits mit einem gewissen Recht sagen: „Wir Mathematiker wissen heute nicht, womit wir uns beschäftigen," so wissen wir andererseits genauer als je zuvor, was wir tun (d.h. wir haben das Wesen des deduktiven Schließens vollständig begriffen), und es gibt wohl keinen Mathematiker, der sich in die „paradiesischen" Zeiten vor Lobatschewski und vor Fraenkel zurückwünscht.

P. Schreiber

Alphons logische Abenteuer (5)

„Es gibt nichts", schimpfte Alphons Schwester, „nein wirklich, es gibt einfach nicht, was ich suche." Alphons wollte wissen, weshalb sie sich denn so aufrege. „Es geht um meine gewünschten Zeichenstifte", antwortete sie. „Seit drei Wochen rennen ich und Mutti durch die Geschäfte, die Zeichenartikel führenden Geschäfte unseres Ortes" korrigierte sie sich, um der Verbesserung, zu der Alphons schon ansetzte, zuvorzukommen, „aber es ist nichts zu machen, es gibt sie nicht." Weil es diese Zeichenstifte nicht zu kaufen gibt, könne man aber nicht sagen, es gäbe überhaupt nichts zu kaufen, versuchte Alphons seine Schwester zu trösten. Dieser feine Unterschied, wenn es überhaupt einer ist, sei ihr egal, worauf Alphons zu bedenken gab, daß wenn es gar nichts zu kaufen gäbe, sie sich das Herumlaufen nach käuflichen Zeichenstiften ersparen könne. Bei so einem überschlauen Bruder könne man sich weder herzlich freuen noch richtig aufregen, murrte seine Schwester.

Alphons Erklärungsbereitschaft war durch den nicht akzeptierten Unterschied angestachelt worden. Er wolle sie ja nicht zusätzlich ärgern, aber es sei nun einmal so, daß sie zwei verschiedene Aussagen gemacht habe. „Es gibt nichts zu kaufen", was sie wohl mit „es gibt nichts" meine, besage mit nur anderen Worten, daß alles, was es gibt, nicht käuflich ist. Er wolle allerdings nicht darauf eingehen, wie seine Schwester „käuflich" verstehe, z. B. als nicht durch sie oder als Eigenschaft dessen, was es gibt. Hingegen meine mit nur anderen Worten „es gibt nicht zu kaufen, was ich suche" dasselbe wie die Aussage: „Alles, was ich suche, ist nicht käuflich". Da seine Schwester, die mit dem „ich" gemeint sei, sicherlich nicht alles, was es gibt, auch suche, lasse sie mit dieser Aussage mehr an Käuflichem zu, als mit der ersten Aussage.

Alphons, so recht in Fahrt gekommen, versuchte seiner etwas hilflos dreinschauenden Schwester „mit nur anderen Worten" das an sich richtig Gesagte deutlicher zu machen, statt sie selber nachdenken zu lassen. Da mischte sich seine Mutter ein: „Alphons, suche, und zwar ein Geschäft, in dem es Butter zu kaufen gibt.

Mit nur anderen Worten, gehe das einkaufen, was ich heute vergaß zu besorgen." Alphons bemerkte zwar noch, daß es sich hier nicht um gleichbedeutende Aussagen handle, machte sich aber als Zeichen seiner Friedfertigkeit sofort auf den Weg.

L. Kreiser

Die Sprache ist ein unerbittlicher Richter, und wir können ihrem Urteilsspruch nicht entgehen, wenn wir uns ihrer schlecht bedienen.

Johannes R. Becher

Deutscher Schulschachpokal 1991

„Autoritäten auf den Gebieten der angewandten Mathematik und des Schachs haben errechnet, daß es eine größere Anzahl möglicher Schachstellungen und erst recht dynamisch entwickelter Abfolgen derselben gibt als Atome im ganzen Weltall. Schon nach 12 Halbzügen sind mehr Stellungen möglich, als die mutmaßliche Zahl der Sekunden seit geschätztem Anfang des physischen Universums."

Prof. Dr. Josef Seifert
„Schachphilosophie"

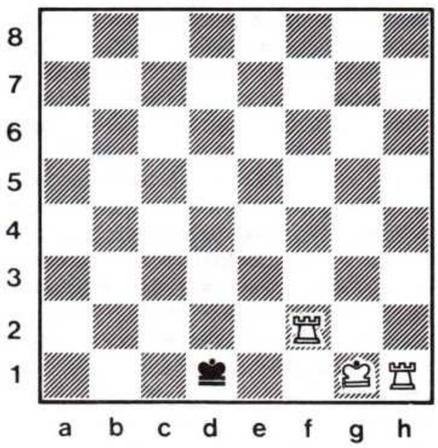
Diese Vielfalt des Schachs zieht immer wieder nicht nur begeisterte Profis, sondern auch Millionen Amateure in ihren Bann. Dem trug in diesem Jahr die deutsche Coca-Cola Organisation Rechnung, als sie sich entschloß, als Sponsor für einen gesamtdeutschen Schulschachpokal in allen 16 Bundesländern aufzutreten. Zur Auftaktveranstaltung dieses Großereignisses waren alle Schulschachreferenten der Länder nach Verden an der Aller (Niedersachsen) eingeladen, wo am 9. März 1991 der erste Landesausscheid stattfand. Hier konnten wir uns persönlich von dem Anklang überzeugen, den das Turnier bei Kindern der ersten bis 13. Klasse fand.
Der Austragungsmodus ist einfach: In jedem Bundesland wird ein für alle Schulen offenes Turnier für Vierermannschaften ausgetragen. Man spielt sieben Runden nach Schweizer System (jeweils gleichstarke Gegner werden gegeneinander gesetzt). Der Sieger qualifiziert sich für das Bundesfinale, welches unter Schirmherrschaft des Bundesrates am 30. November in Berlin stattfinden wird. Dieser wird zwar immer aus den höheren Jahrgängen kommen, doch sollten die Kleinen nicht traurig sein: auch die besten Mannschaften jüngerer Altersklassen erhalten einen Preis. Coca-Cola ließ es sich nicht nehmen, außer Sachpreisen auch attraktive Pokale für jedes Land zu stiften. Der Siegermannschaft des Bundesfinales schließlich winkt eine Reise in die USA.
In Verden wurde hart darum gekämpft. Die Stimmung war super, der Kampfgeist stand dem bei einer Deutschen Meisterschaft der Profis in nichts nach. Im Gegenteil; Remis war ein seltenes Ergebnis. Durch belegte Brötchen und Getränke des Sponsors wurden die unermüdlichen Kämpfer jederzeit wieder fit gemacht, ein neues Computerprogramm sorgte für eine sekundenschnelle Auslosung und den sofortigen Tabellenausdruck nach jeder Runde.
Für den Organisator, Herrn Erich Scholvin, Schulschachreferent der Deutschen Schachjugend, war es ein leichtes Hantieren dank seiner hervorragenden Vorbereitung. Als schließlich auch noch der Kultusminister ankam, der (wie in vielen Landesverbänden) die Schirmherrschaft übernommen hatte, da begann der Kampf härter denn je. Sich unter die über 200 Teilnehmer mischend, erfuhr Herr Professor Wernstedt sicher so manche Neuigkeit.
Nach sieben Stunden stand der Sieger auf dem verdienten Podest: die KGS Stuhr-Brinkus lag mit 13:1 Mannschaftspunkten unangefochten vorn. Ob sie es auch im November schafft?!

Die nächsten Termine sind dicht belegt. Am 27.4. findet die Veranstaltung in Sachsen und in Sachsen-Anhalt statt. Das zweite Bundesland hat dafür einen traditionsbewußten Austragungsort gefunden – das alte Schachdorf Ströbeck lädt ein. Bereits eine Woche später geht es weiter. Brandenburg und Berlin z. B. haben sich zusammen für eine Großveranstaltung in den Festsälen der Trabrennbahn Mariendorf entschieden. Alle anderen Bundesländer folgen bis Oktober nach.
Ich denke, daß diese bemerkenswerte Aktivität, die nicht nur von der Schachjugend, sondern auch noch von einem freigebigen Sponsor und den Kultusministerien bzw. dem Bundesrat unterstützt wird, Anlaß zu weiteren Aktivitäten sein sollte, besonders in den Schulen, die bisher noch keine Schachgruppe haben. Vielleicht werden gerade sie dann im nächsten Jahr erster?!

M. Spindler

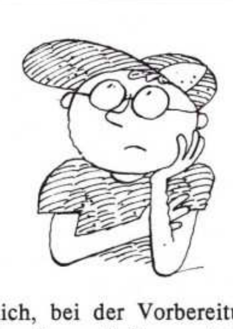
Die Rochade als Mattzug

Eine Besonderheit beim Schachspiel ist die Rochade. Nur einmal im Verlauf einer Schachpartie ist es Weiß und Schwarz erlaubt, einen Doppelzug auszuführen: Die Rochade, eine gleichzeitige Bewegung von König und Turm. Bei der Ausführung der Rochade zieht der König in derselben Reihe auf das jeweils übernächste Feld gleicher Farbe. Sodann geht derjenige Turm, zu dem sich der König hinbewegt hat, über den König hinweg auf dasjenige Feld, daß der König soeben überschritten hatte.
Die Rochade ist nur dann durchführbar, wenn
1. der König und der Rochadeturm im Spielverlauf noch nicht gezogen haben,
2. zwischen dem König und dem Rochadeturm keine anderen Figuren stehen,
3. der König vor und nach der Rochade keinem Schachgebot ausgesetzt ist und der Rochadeturm nach Ausführung der Rochade durch keine gegnerische Figur angegriffen wird.
In der Diagrammstellung kann Weiß durch 1. Kg2 und 1. Kh2 auf zwei verschiedene Arten Schwarz in einem Zug mattsetzen.



Die Aufstellung der Schachfiguren ist so zu verändern, daß es für Weiß vier verschiedene Möglichkeiten gibt, Schwarz in einem Zug mattzusetzen. Dabei ist auch die Rochade als eine Lösungsmöglichkeit in Betracht zu ziehen.

H. Rüdiger



Neulich, bei der Vorbereitung des Titelblattes dieses Heftes gerieten wir in arge Schwierigkeiten. Um das mir von Lothar Otto zugedachte „Ferienlächeln" eindrucksvoll auf's Titelblatt bannen zu können, mußte die Vorlage mit einer Breite von 7,8 cm auf eine Breite von 18,5 cm umkopiert werden. Wie jeder sofort nachrechnet, mußte die Zeichnung damit um mehr als das Doppelte vergrößert werden. Zu dumm, daß unser Kopierer nur um maximal 200 % vergrößern kann. Wie wir das Problem gelöst haben? Na, das dürftet Ihr wohl selbst herausbekommen!

Vom Wortwürfel zum Zahlenwürfel

Das nachstehende Bild (Bild 1) zeigt einen „Wortwürfel".

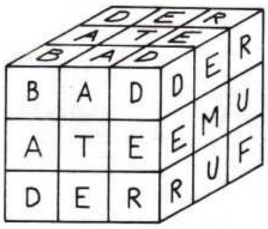


Bild 1
Der $3 \times 3 \times 3$-Wortwürfel

Er besteht aus 27 kleinen Würfeln. Jeder dieser kleinen Würfel trägt auf jeder seiner 6 Seiten den gleichen Buchstaben. Es sind 3 Zerlegungen in einen $3 \times 3 \times 1$-Quader möglich (Bild 2).

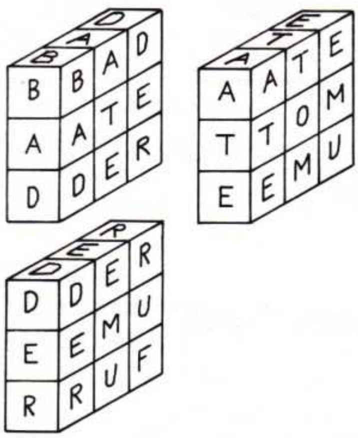


Bild 2
Eine der 3 möglichen Zerlegungen
in der $3 \times 3 - 1$-Quader

In jeder dieser Zerlegung kann man 3mal die Worte BAD, TOM und RUF und 6mal die Worte ATE, DER und EMU lesen (in der natürlichen Lesart von links nach rechts bzw. von oben nach unten).
Die in diesem Würfel vorkommenden 10 Buchstaben sind durch die Zahlen, 0, 1, 2, ..., 9 zu ersetzen und zwar verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern so, daß die sich ergebenden sechs dreistelligen Zahlen alle dieselbe Quersumme haben. Dabei soll der Buchstabe O in der Mitte des Würfels durch die Zahl Null ersetzt werden.
Es gibt 2 Lösungen! Die sich daraus ergebenden Zahlenwürfel sind halbmagisch, d. h. die Summe der Zahlen von je 3 kleinen Würfeln in Richtung der Würfelkanten ist gleich, nicht die von diagonal angeordneten Würfeln. Es gibt genau 27 derartiger „Dreierquader"! Wie lauten die 6 dreistelligen Zahlen?

Erst selbst lösen! Dann weiterlesen!

Lösung

I. Die magische Summe S und die Ziffer E

Da die Summe der zehn Ziffern gleich 45 ist, gilt die Gleichung:
(1) $A + B + D + E + F + M + O + R + T + U = 45$
Andererseits soll aber auch sein:
(2) $(B + A + D) + (T + O + M) + (R + U + F) = 3S$
Durch Subtraktion (1) – (2) erhalten wir
(3) $E = 45 - 3S.$
Diese Gleichung zeigt, daß E durch 3 teilbar sein muß; das bedeutet aber, daß E nur die Werte 0, oder 3 oder 6 oder 9 haben kann.
Ferner gilt:
(4) $(A + T + E) + (D + E + R) + (E + M + U) = 3S$
Durch Subtraktion (4) – (2) ergibt sich
(5) $3E = B + O + F$
Nun ist die Summe dreier verschiedener Ziffern mindestens gleich $3 (= 0 + 1 + 2)$ und höchstens gleich $24 (= 9 + 8 + 7)$, so daß also die Werte $E = 0$ und 9 nicht möglich sind (ganz abgesehen davon, daß 0 schon vergeben ist). Es sind daher nur die Möglichkeiten $E = 3$, $S = 14$ und $E = 6$, $S = 13$ in Erwägung zu ziehen.

II. Die Ziffern B, O und F

Wir untersuchen zuerst den Fall $E = 6$, $S = 13$. Zunächst ist
(6) $(A + T + E) = (D + E + F) = (E + M + U) = S.$
also hier
(7) $(A + T) = (D + R) = (M + U) = 7.$
Daher kommen für die Klammerausdrücke nur die Zahlen (ohne die 6) $(0 + 7)$ bzw. $(2 + 5)$ bzw. $(3 + 4)$ in Frage. Somit bleiben für B, O und F nur die Werte 1, 8 und 9. Da aber der Buchstabe O gleich 0 sein soll, ist dieser Fall nicht möglich.
Für $E = 3$, $S = 14$ erhalten wir aus (6)
(8) $(A + T) = (D + R) = (M + U) = 11.$
Dies ist aber nur realisierbar (ohne die 3!) durch $(2 + 9)$ bzw. $(4 + 7)$ bzw. $(5 + 6)$. Hier bleiben für B, O, F die Werte 0, 1 und 8. Daraus kann man schließen: Es muß notwendig sein $E = 3$, $S = 14$, und B entweder 1 oder 8 und dann entsprechend F entweder 8 oder 1. (2 Möglichkeiten!)

III. Die Ziffern T, M und A

Da $T + O + M = 14$, also $T + M = 14$ und die Ziffer 8 nach Abschnitt II schon vergeben ist, kommen für diese beiden Buchstaben nur die Ziffern 5 und 9 in Betracht. Wir haben daher im nachfolgenden die folgenden vier Möglichkeiten zu untersuchen:
($A = 11 - T$, nach Gleichung (8)).

Fall a): $B = 1$ $(F = 8)$, $T = 9$ $(M = 5)$, $A = 2$;
Fall b): $B = 1$ $(F = 8)$, $T = 5$ $(M = 9)$, $A = 6$;
Fall c): $B = 8$ $(F = 1)$, $T = 9$ $(M = 5)$, $A = 2$;
Fall d): $B = 8$ $(F = 1)$, $T = 5$ $(M = 9)$, $A = 6$.

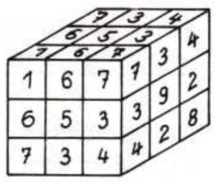
IV. Die Ziffern D, R und U

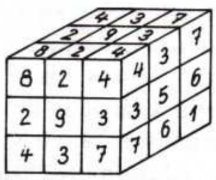
Da $B + A + D = S = 14$, also $D = 14 - A - B$ erhalten wir im
Fall a): $D = 14 - 2 - 1 = 11$;
dies ist aber ausgeschlossen.
Fall b): $D = 14 - 6 - 1 = 7$;
Fall c): $D = 14 - 2 - 8 = 4$;
Fall d): $D = 14 - 6 - 8 = 0$;
Null ist aber schon vergeben.
Daher kann es eine Lösung nur für den Fall b) und c) geben.
Aus $D + E + R = 14$ oder $R = 11 - D$ und $E + M + U = 14$ oder $U = 11 - M$ erhalten wir schließlich für a):
$R = 7$, $U = 2$ bzw. für b) $R = 4$, $U = 6$.
Somit gibt es *zwei Lösungen* unseres Problems:

$BAD = 167$; $ATE = 653$; $DER = 734$;
$TOM = 509$; $EMU = 392$; $RUF = 428$.

$BAD = 824$; $ATE = 293$; $DER = 437$;
$TOM = 905$; $EMU = 356$; $RUF = 761$.

Die nachstehenden Bilder zeigen die zwei gefundenen Lösungen.





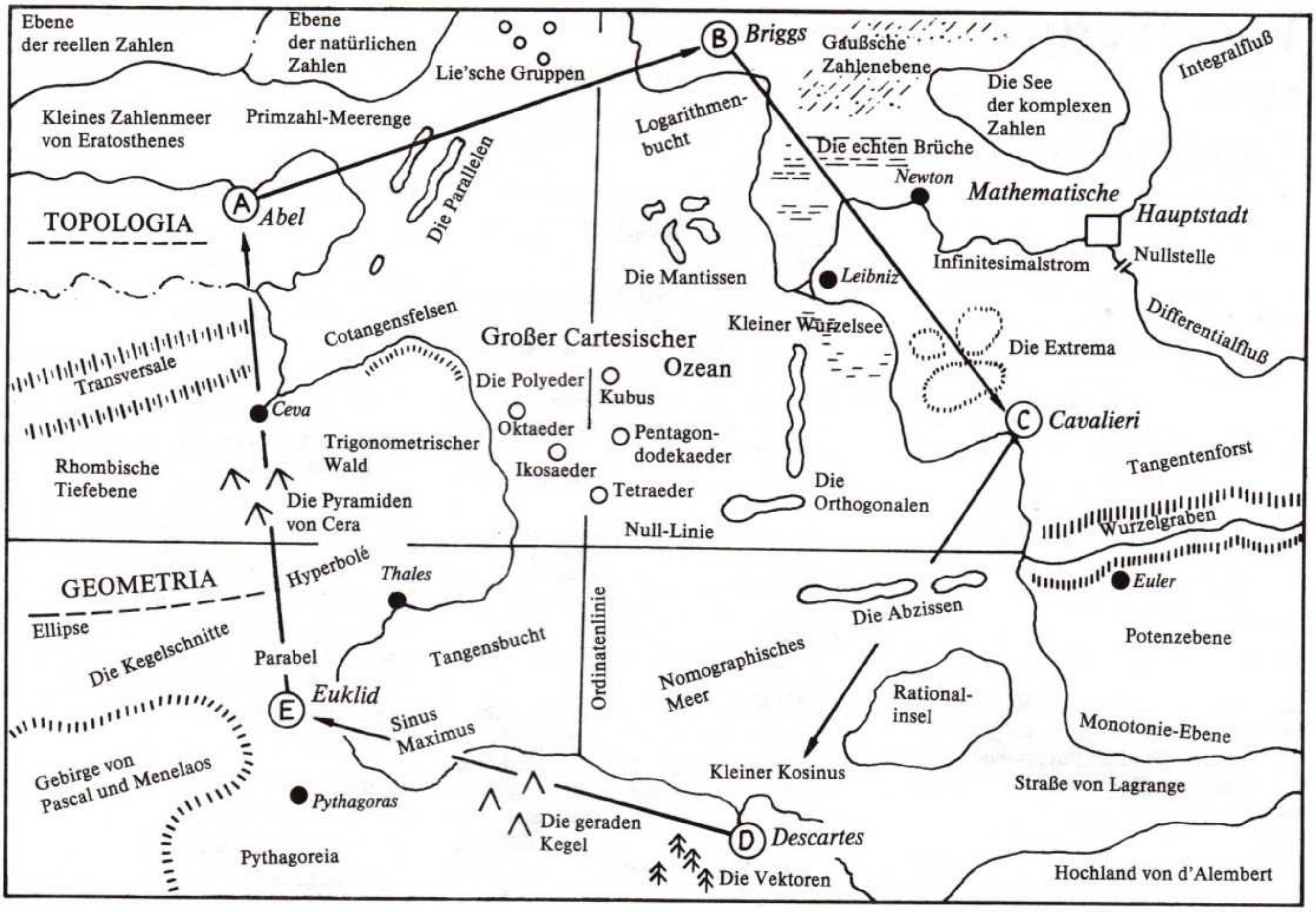
Man erkennt, daß die zweite Lösung das an der Würfelmitte gespiegelte Bild der ersten Lösung ist. *H. Oehl*

Eine Anekdote

G. B. Shaw und die Mathematik

Der große irische Dramatiker George Bernard Shaw (geb. 1856 in Dublin, gest. 1950 in Ayot St. Lawrence) wurde einmal von neugierigen Reportern gefragt, was er eigentlich von der Mathematik halte. Sie erwarteten (natürlich) eine vernichtende Antwort. G. B. S. aber sagte: „Also eigentlich ist die Mathematik doch etwas sehr Schönes, man kann sich schon dafür begeistern ... Vielleicht wäre ich selbst ein guter Mathematiker geworden ... Mein einziger Fehler war nur der, daß bei uns die Mathematik schon auf der Schule gelehrt wurde!"

Alphons Traum



Alphons zieht – gleichsam im Traum –
schwebend durch den weiten Raum
und durchstreift dabei behende
mathematisches Gelände.
Erster Schritt: Von A nach B[1]).
Dort gibt's ein kräftiges Diner
nach abgedrucktem Speiseplan,
und da geht Alphons tüchtig ran.
Weiterflug zum nächsten Ort. (C)
Viel Demonstranten gibt es dort.
Alphons bestaunt die Transparente.
Die Parolen sprechen Bände.
Schmunzelnd zieht's ihn froh und heiter
alsbald zum nächsten Punkte (D) weiter.

Restaurant zur
Silbernen Quadratwurzel

(Inh. X. Minimax)

Speisenkarte

Vorspeisen

- *Suppe à l'Hospital (franz. Spezialität)*
- *Bürgerliche Rekursionsformeln „Graph de la function"*

Hauptgerichte

- *Skalierte Koordinatenachserln mit Faktorenröllchen und Pyramidenspitzen nach Art des Hauses, Wurzelsalat*
- *Orthonormierte Kegelschnitte mit pikanten Sehnen und Asymptotensalat*
- *Transzendente Wurzeln mit natürlichen Vektorprodukten (Diät-Speise)*
- *Analytisches Kegelschnitzel mit böhmischen Quadern*

Dessert

- *Skalares Leckerli à la Descartes*
- *Halbdifferenziertes mit Pi-Eierchen*

Dazu empfehlen wir

- *Term Goniometric (orthogonal) (Wein aus der Republik Algebra)*
- *Geo-Sekt (extra dry)*

Die Geister haben dort mit Goethe
und seinem „Faust" so ein'ge Nöte.
Zur Zeit bemüh'n sie sich mit Streiten,
das Hexenkücheneinmaleins[2]) zu deuten.
Nachdem sie außer Rand und Band,
erläutert ihr Boß kurzerhand,
wie das, was scheinbar Zahlenspielerei,
am besten zu verstehen sei:

Hexenkücheneinmaleins

im Faust:	Deutung:
Du mußt versteh'n:	*Aus 1 wird 10 gemacht, d. h. es*
Aus Eins mach Zehn,	*werden 9 hinzugezählt.*
und Zwei laß geh'n,	*Davon ab 2 ergibt 7.*
und Drei mach gleich,	*Vergleicht man diese 7 mit 3,*
so bist du reich.	*so fehlen 4, die zum Ausgleich*
Verlier die Vier!	*‚verloren' werden.*
Aus Fünf und Sechs,	*Vergleicht man 5 und 6 mit*
so sagt die Hex',	*7 + 8 (also = 15),*
mach' Sieben und Acht,	
so ist's vollbracht:	
Und Neun ist Eins,	*6 + 9 ist ‚eins' mit 15.*
und Zehn ist keins.	*Desgleichen bleibt 0 (keins)*
	bei 5 + 10 zur 15

Das ist das Hexeneinmaleins.

Zweifelnd sagt Alphons Adé
und wandert weiter zum Ort E.
Hier will man was Besond'res lehren,
auf völlig neue Art erklären,
wie man könnt' multiplizieren
nur durch Verdoppeln und Halbieren.
Alphons denkt darüber nach.
Ob wohl was dran ist an der Sach'?

Ein eigenartiges Multiplikationsschema

Bei dieser Multiplikationsart wird nur halbiert (Reste bleiben unberücksichtigt) und verdoppelt und addiert.

z. B.	19	mal	75	
(links fortgesetzt	9		150	(rechtsseitig
halbieren,	4		300	fortgesetzt verdoppeln)
Reste entfallen)	2		600	
	1		1200	

Alle Zahlen, wo links eine gerade Zahl steht, streichen, sonst rechts addieren. Es bleiben:

$$\begin{array}{r} 75 \\ 150 \\ \underline{1200} \\ 1425 \end{array}$$

Am End' fragt Alphons – halb benommen –:
Wie mag ich wohl nach Hause kommen?
Ihm hilft ein Geist, der ihm erklärt,
wie er wohl am besten fährt.
Doch dafür, sagt das Fabelwesen,
müßt' er noch ein Problemchen lösen.
Und nun hört er die Geschicht'
von der Familienreise als Gedicht:

Familienreise

Auf Reisen geht Familie Radikand –
200 km quer durchs Land –
Im Auto Platz bequem für vier;
wenn man vom Motorrad noch zwei addier',
so reicht der Platz genau für alle.
Doch zu beachten ist in jedem Falle,
daß Opa wegen seinem Bein
soll vorn neben dem Fahrer sein.
Vater, Mutter können beide
den neuen Wagen lenkend fahren;
beide Söhne fahr'n Motorrad
(und das schon seit ein paar Jahren).
Außerdem ist mit von der Partie
auch die Kusine Ros'marie.
Wie oft muß nun die Familie
wechseln auf der langen Reise,
daß die Vor- und Sitznachteile
sich ausgleichen auf die Weise?

Kaum hat Antwort er gegeben,
konnte Alphons heimwärts schweben
und ist nach der durchträumten Nacht
ganz plötzlich wieder aufgewacht.
Er rekonstruiert auch gleich die Route
und überlegt mit frohem Mute,
was müßt', bei rechtem Licht beseh'n,
wohl anders als im Traum gescheh'n?
Besonders reizt ihn schon die Frage,
ob bei der vorgegeb'nen Lage
der Weg bei seiner Träumerei
auch anders noch zu nehmen sei.
Wer hilft Alphons wohl dabei?
So, nun seid Ihr an der Reih'!

Problem

a) Wieviel verschiedene Wege von A aus über alle Punkte B, C, D und E nach A zurück gibt es, wenn jeder Punkt nur einmal aufgesucht wird und die Wege in umgekehrter Richtung nicht gesondert gezählt werden sollen?
b) Ist der eingeschlagene Weg A – B – C – D – E – A der kürzeste?

Alphons denkt jedenfalls noch lang zurück
an sein durchlebtes Traumgeschick.

St. Koch

[1]) Die Orte A (Abel), B (Briggs), C (Cavalieri), D (Descartes) und E (Euklid) bilden auf beigefügter Karte ein regelmäßiges Fünfeck.
[2]) „Hexeneinmaleins" von J. W. Goethe, Faust I

XXX. Olympiade Junger Mathematiker

3. Stufe

Februar 1991

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

Olympiadeklasse 7

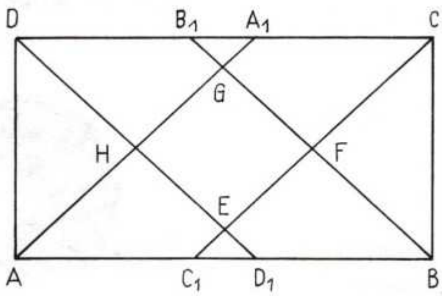
300731 In einem Lehrbuch aus dem Jahre 1525 wird sinngemäß folgende Aufgabe gestellt:
Ein Hund jagt einen Fuchs. Jeweils in der Zeit, in der der Fuchs 9 Sprünge macht, macht der Hund 6 Sprünge, aber mit 3 Sprüngen legt der Hund einen ebenso langen Weg zurück wie der Fuchs mit 7 Sprüngen. Mit wieviel seiner Sprünge holt der Hund den Fuchs ein, wenn der Fuchs zu Beginn 60 Fuchssprünge Vorsprung hat?
Bemerkung: Es wird vorausgesetzt, daß der Hund der Spur des Fuchses folgt und daß beide ihren ersten Sprung gleichzeitig beginnen.

300732 200 Schüler seien in Form eines Rechtecks, nämlich in Längsreihen zu je 20 und in Querreihen zu je 10 Schülern, aufgestellt.
Nun werde aus jeder Querreihe ein möglichst kleiner Schüler herausgerufen. Unter den so ermittelten 20 Schülern werde ein möglichst großer mit A bezeichnet. Die 20 Schüler stellen sich dann wieder auf ihre ursprünglichen Plätze.
Sodann werde aus jeder Längsreihe ein möglichst großer Schüler herausgerufen und unter den so ermittelten 10 Schülern ein möglichst kleiner mit B bezeichnet. Dabei stelle sich heraus, daß B eine andere Größe als A hat.
Untersuche, welcher von den beiden Schülern A und B unter diesen Voraussetzungen der größere sein muß!

300733 Aus zwei gegebenen Längen $h_b = 4{,}0$ cm und $p_b = 4{,}0$ cm sowie einer gegebenen Winkelgröße $\beta = 20°$ soll ein Dreieck ABC konstruiert werden. Wenn dabei D den Fußpunkt der auf AC senkrechten Höhe D bezeichnet, so wird gefordert:
Es gilt $\overline{BD} = h_b$. (1)
Es gilt $\overline{AD} = p_b$. (2)
Der Winkel $\sphericalangle ABC$ hat die Größe β. (3)
a) Beweise: Wenn ein Dreieck ABC die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Stücken h_b, p_b, β konstruiert werden;
b) beschreibe eine solche Konstruktion!
c) Beweise: Wenn ein Dreieck ABC nach deiner Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die Bedingungen (1), (2), (3).
d) Stelle fest, ob ein Dreieck durch die Bedingungen (1), (2), (3) bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

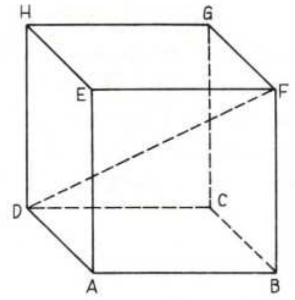
300734 Jemand möchte nach folgenden Regeln möglichst viele verschiedene der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 auswählen:
Als erste Zahl ist eine zufällig gewählte der Zahlen 1 bis 6 zu nehmen, indem gewürfelt und die von dem Würfel gezeigte Zahl gewählt wird.
Die weiteren Zahlen sollen so gewählt werden, daß folgendes gilt: Wenn die Auswahl von Zahlen beendet ist, so haben je zwei der insgesamt ausgewählten Zahlen stets eine durch 3 teilbare Summe.
Ermittle (in Abhängigkeit von allen Möglichkeiten der ersten Zahl) die größtmögliche Anzahl von Zahlen, die man nach diesen Regeln auswählen kann!

300735 Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit den Seitenlinien $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$, und es sei $a > b$. Auf AB seien die Punkte C_1 und D_1 sowie auf CD die Punkte A_1 und B_1 derart eingezeichnet, daß die Strecken AA_1, BB_1, CC_1 und DD_1 jeweils Winkelhalbierende eines Innenwinkels von $ABCD$ sind. Die Schnittpunkte E, F, G, H dieser Winkelhalbierenden miteinander seien wie in unten stehenden Bild bezeichnet.



Ermittle den Flächeninhalt I des Vierecks $EFGH$, wenn außerdem vorausgesetzt wird, daß $a = 8$ cm und $b = 5$ cm gilt!

300736 Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel (vgl. Bild). Beweise, daß die Abstände der Punkte A, B, C, D, E, G und H von der Raumdiagonale DF sämtlich einander gleich sind!



Olympiadeklasse 8

300831 Ermittle die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen, die jede der Ziffern 1, 2, 3, …, 9 genau einmal enthalten und durch 45 teilbar sind!

300832 Gegeben seien drei verschiedene Sorten von Kugeln; von jeder Sorte seien 100 Stück vorhanden:
Sorte A: Kugeln mit einer Masse von 0,3 g je Stück,
Sorte B: Kugeln mit einer Masse von 1,5 g je Stück,
Sorte C: Kugeln mit einer Masse von 7,0 g je Stück.
Untersuche, ob es möglich ist, aus diesen Kugeln genau 100 so auszuwählen, daß ihre Gesamtmasse genau 100 g beträgt! Wenn das der Fall ist, so ermittle alle derartigen Möglichkeiten für die drei Anzahlen, die man jeweils aus Kugeln der Sorten A, B und C auszuwählen hat!

300833 Aus drei gegebenen Längen $c = 8$ cm; $s_a = 6$ cm; $s_b = 7$ cm soll ein Dreieck ABC konstruiert werden.
Dabei wird gefordert:
Die Seite AB hat die Länge $\overline{AB} = c$. (1)
Die Seitenhalbierende AD der Seite BC hat die Länge $\overline{AD} = s_a$. (2)
Die Seitenhalbierende BE der Seite AC hat die Länge $\overline{BE} = s_b$. (3)
a) Konstruiere ein Dreieck und beschreibe deine Konstruktion!
b) Beweise: Wenn ein Dreieck nach deiner Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die Bedingungen (1), (2), (3).

300834 Man beweise: Für jede natürliche Zahl $n > 0$ befindet sich stets unter den natürlichen Zahlen $n-1$, n, $n+1$ und n^2+1 eine Zahl, die durch 5 teilbar ist.

300835
a) Beweise den folgenden Satz:
In jedem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten stets auch der größere Winkel gegenüber.
b) Gib an, ob die Umkehrung dieses Satzes gilt, und beweise die Richtigkeit deiner Angabe!

300836 Im Raum seien zwölf Punkte derart gegeben, daß keine vier dieser Punkte in einer gemeinsamen Ebene liegen.
Ermittle die Anzahl aller derjenigen verschiedenen Tetraeder, deren vier Eckpunkte zu den zwölf gegebenen Punkten gehören!
Hinweis: Jedes Tetraeder ist durch die

Menge seiner vier Eckpunkte (die nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen) eindeutig bestimmt; irgendwelche Anforderungen an die Reihenfolge oder die gegenseitigen Abstände der Eckpunkte gibt es nicht.

Olympiadeklasse 9

300931 Zwei Spieler A und B spielen das folgende Spiel:
Auf dem Tisch liegen aufgedeckt 50 Spielkarten. Jede ist mit genau einer der Zahlen von 1 bis 50 beschriftet, jede dieser Zahlen steht auf genau einer der Karten. Weitere unbeschriftete Karten stehen zur Verfügung. Die Spieler sind, beginnend mit A, abwechselnd am Zug.
Wer am Zug ist, wählt zwei beliebige der beschrifteten Karten und nimmt sie aus dem Spiel. Dann beschriftet er eine der unbeschrifteten Karten mit dem Absolutbetrag der Differenz der Zahlen auf den weggenommenen Karten, legt die so neu beschriftete Karte auf den Tisch und bringt sie damit ins Spiel.
Das Spiel endet, wenn nur noch eine Karte im Spiel ist. Steht auf dieser eine gerade Zahl, so hat A gewonnen, andernfalls B.
Kann einer der Spieler das Spiel so gestalten, daß er mit Sicherheit gewinnt?

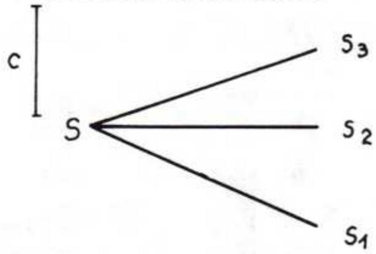
300932 Man ermittle alle Darstellungen der Zahl 1991 als Summe von mindestens drei aufeinanderfolgenden positiven natürlichen Zahlen.

300933 Man beweise, daß es 40 im Innern oder auf dem Rand eines Würfels der Kantenlänge 10 cm liegende Punkte gibt, von denen keine zwei einen Abstand kleiner als 4 cm voneinander haben.

300934 Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n zwischen 100 und 400, für die die Summe s der Ziffern bei Darstellung von n im Dezimalsystem (die übliche „Quersumme") gleich der Summe t der Ziffern ist, die bei der Darstellung von n im System mit der Basis 9 auftreten.
Hinweis: Um eine Summe von Ziffern bilden zu können, ist natürlich jede einzelne Ziffer als Zahl aufzufassen. Das ist ohne Mißverständnis möglich, da die für das System der Basis 9 notwendigen Ziffern 0, 1, ..., 8 dort dieselben Zahlen darstellen wie im Dezimalsystem.

300935 Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen, für die
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}$$
gilt!

300936 Gegeben seien drei von einem Punkt S ausgehende Strahlen s_1, s_2, s_3. Dabei habe der von s_1 und s_3 gebildete Winkel $\sphericalangle(s_1, s_3)$ eine beliebige Größe kleiner als 60°, und der Strahl s_2 sei ein beliebiger von S aus in das Innere des Winkels $\sphericalangle(s_1, s_3)$ hinein verlaufender Strahl (siehe Bild). Gegeben sei ferner eine beliebige Streckenlänge c.
a) Wählen Sie derartige Vorgaben c, s_1, s_2, s_3 (dabei s_2 nicht als Winkelhalbierende von $\sphericalangle(s_1, s_3)$) und konstruieren Sie dann drei von S verschiedene Punkte A auf s_1, B auf s_2 und C auf s_3 so, daß sie die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks ABC der Seitenlänge c sind!
b) Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!



c) Beweisen Sie, daß das nach Ihrer Beschreibung konstruierte Dreieck ABC gleichseitig ist und daß seine Ecken A, B, C auf s_1, s_2 bzw. s_3 liegen!
Eine Untersuchung, wieviele Dreiecke mit den geforderten Eigenschaften es außerdem noch gibt, wird nicht verlangt.

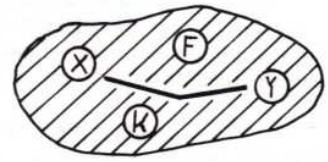
Olympiadeklasse 10

301031 Beim Umrechnen natürlicher Zahlen aus dem Dezimalsystem in Systeme mit anderer Basis kann man feststellen, daß es Zahlen gibt, deren Darstellung sowohl im System mit der Basis 2 als auch im System mit der Basis 4 auf die Ziffernfolge ...01 endet; z. B. hat
$17 = [10001]_2 = [101]_4$ diese Eigenschaft.
Gibt es auch natürliche Zahlen, deren Darstellung in beiden Systemen (sowohl mit der Basis 2 als auch mit der Basis 4) auf die Ziffernfolge ...10 endet?

301032 Bekanntlich nennt man jede Folge von n Zahlen der Form
$$a_1 = z,\ a_2 = z + d,\quad a_3 = z + 2d,\ \ldots,\quad a_n = z + (n-1)d \tag{1}$$
($n \geqq 1$ natürliche Zahl; z, d reelle Zahlen)
eine (endliche) arithmetische Folge.
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen arithmetischen Folgen (1), in denen auch z und d natürliche Zahlen mit $z \geqq 1$, $d \geqq 1$ sind und für die $n \geqq 3$ sowie
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1991 \tag{2}$$
gilt!

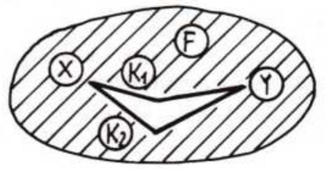
301033 Es sei F die Oberfläche eines regulären Tetraeders $ABCD$. Die Mittelpunkte der Strecke AB bzw. CD seien M bzw. N.
Die Bilder a und b verdeutlichen den Vorgang des „Aufschneidens einer Fläche F längs einer Kurve $k = XY$": Diese Kurve k, die im Innern der Fläche F verläuft, geht durch das Aufschneiden über in eine von X nach Y durchlaufende Kurve k_1 und eine andere von Y nach X durchlaufende Kurve k_2. Beide Kurven k_1 und k_2 bilden zusammen eine neu entstandene geschlossene (d. h. in sich zurücklaufende) Randkurve der aufgeschnittenen Fläche F.
a) Schneidet man die Tetraederfläche F in dieser Weise zweimal auf, nämlich längs der Strecke AB und außerdem längs der Strecke CD, so läßt sich die aufgeschnittene Fläche F so verbiegen, daß die aus AB und aus CD entstandenen Randkurven zu zwei Kreislinien werden, die in zueinander parallelen Ebenen liegen. Die Fläche F wird dabei zur Mantelfläche eines geraden Zylinders.

a)



b) Schneidet man die Tetraederfläche sowohl längs der Kurve auf, die aus den Strecken CM und MD besteht, als auch längs der Kurve, die aus den Strecken AN und NB besteht, so läßt sich F ebenfalls so verbiegen, daß die Randkurven zu Kreislinien werden und F zum Mantel eines geraden Zylinders.

b)



Untersuchen Sie, welcher der beiden in a), b) genannten Zylinder das größere Volumen hat!

301034 Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung (1) erfüllen!
$$||x-2|-2|<1. \tag{1}$$

301035 Man untersuche, ob es eine Menge M von 1991 verschiedenen positiven natürlichen Zahlen mit folgenden Eigenschaften gibt:
(1) Keine Zahl aus M enthält einen Primfaktor größer als 31.
(2) Kein Produkt von zwei verschiedenen Zahlen aus M ist eine Quadratzahl.

301036 Zur Konstruktion eines Dreiecks seien die Streckenlängen $c = \sqrt{120}$ cm und $r = 3$ cm vorgegeben. Gefordert wird, daß c die Länge der Seite AB ist, r der Inkreisradius des Dreiecks ABC ist und daß der Winkel $\sphericalangle ACB$ die Größe 60° hat.
a) Beweisen Sie: Wenn ein Dreieck ABC diese Bedingungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Streckenlängen c und r konstruiert werden;
b) beschreiben Sie eine solche Konstruktion!
c) Beweisen Sie: Wenn ein Dreieck nach Ihrer Beschreibung konstruiert werden kann, dann erfüllt es die geforderten Bedingungen.
d) Beweisen Sie, daß es bis auf Kongruenz (bei der es nicht auf die Reihenfolge der Eckpunkte A, B, C ankommt) genau ein Dreieck ABC gibt, das diese Bedingungen erfüllt!
Eine zeichnerisch genaue Ausführung der Konstruktion wird nicht verlangt.

Olympiadeklasse 11/12

301231
a) Man untersuche, ob für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c, d stets
$$\sqrt{ac}+\sqrt{bd} \leqq \sqrt{a+b}\cdot\sqrt{c+d}$$ gilt.

b) Man untersuche, ob für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c, d stets

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leqq \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \text{ gilt.}$$

301232 Im Raum seien n Punkte ($n \geqq 3$) so gelegen, daß sich unter je drei dieser Punkte stets mindestens zwei befinden, die zueinander einen Abstand kleiner als 1 haben.
Man beweise, daß es unter dieser Voraussetzung stets zwei Kugelkörper K_1 und K_2 vom Radius 1 geben muß, so daß jeder der n Punkte (mindestens) einem der beiden Kugelkörper K_1, K_2 angehört.
Bemerkung: Jeder Kugelkörper werde hier ohne seinen Rand (die Kugelfläche) verstanden.

Von den nachfolgenden Aufgaben 301233 A und 301233 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

301233 A Man ermittle alle diejenigen siebzehnstelligen natürlichen Zahlen n, für deren 17 Ziffern $x_1, x_2, \ldots, x_{17}$ die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt sind:
(1) Es gilt $x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_{17}$.
(2) Für die Summe $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_{17}$ und das Produkt
$p = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{17}$ gilt $s = p$.
Hinweis: Die Reihenfolge $x_1, \ldots, x_{17}$ entspreche der üblichen Schreibweise; es bezeichne also x_{17} die Einer-, x_{16} die Zehnerziffer usw.

301233 B Es seien $D_1, \ldots, D_n$ Dosen, für deren Größen (Durchmesser) $d_1, \ldots, d_n$ in geeigneter Maßeinheit

$$d_1 = 2,\ d_2 = 3,\ \ldots,\ d_n = n+1$$

gelte. Weiter seien $G_1, \ldots, G_n$ Gegenstände, für deren Größen $g_1, \ldots, g_n$

$$g_1 = 1,\ g_2 = 2,\ \ldots,\ g_n = n$$

gelte. Dabei seien die Größen so abgestimmt, daß jeweils gilt:
Genau dann, wenn $g_i \leqq d_j$ ist, paßt G_i in D_j.
Ermitteln Sie für jede natürliche Zahl $n \geqq 1$ die Anzahl $A(n)$ aller derjenigen Verteilungen der Gegenstände in die Dosen, bei denen in jeder Dose genau ein Gegenstand liegt!
Hinweis: Zwei Verteilungen heißen genau dann verschieden voneinander, wenn mindestens ein Gegenstand bei einer dieser beiden Verteilungen in einer anderen Dose liegt als bei der anderen Verteilung.

301234 Man beweise: In jedem n-Eck ($n \geqq 3$) gibt es mindestens zwei verschiedene Seiten des n-Ecks, für deren Längen a, b die Ungleichung $b < 2a$ gilt.

301235 Man untersuche, ob die durch

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = \frac{1}{x_n + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

definierte Folge (x_n) konvergent ist, und ermittle, wenn das der Fall ist, ihren Grenzwert.

301236 Man beweise: Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen n, für die $2^n + n^2$ durch 100 teilbar ist.

Die Lösungen könnt Ihr von uns erhalten, bei Einsendung eines frankierten und adressierten Rückumschlages.

Gemixtes aus:
Wer übt, kommt weiter

Flade · Pruzina

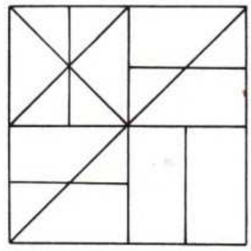
Wer übt, kommt weiter ist nicht nur eine alte Weisheit, sondern auch der Titel eines mathematischen Übungsbuches, das im Sommer dieses Jahres im Volk und Wissen Verlag GmbH Berlin erscheint.
Dieses Buch enthält eine Fülle von Aufgaben zum Mathe-Training; es bietet vielfältige Übungsmöglichkeiten vor allem für das in den Klassenstufen 6 bis 8 anzueignende Wissen und Können. Ihr findet in ihm sowohl ein umfangreiches Angebot von Übungen zur Festigung von elementaren Grundlagen als auch in jedem Abschnitt Aufgaben mit erhöhtem Schwierigkeitsgrad.
Zu den Aufgabenserien des Abschnittes
Kontrolliere dich selbst
gehören auch Lösungen und eine Anleitung zur selbständigen Einschätzung der erbrachten Leistungen.
Euch *alpha*-Lesern sind besonders die Aufgaben aus den Abschnitten
Extras für Pfiffige
und *Denken macht Spaß*
zu empfehlen, in denen Knobel-, Logik- und Beweisaufgaben zusammengestellt sind.
Im folgenden haben wir für Euch einige „Kostproben" aus *Wer übt, kommt weiter* ausgewählt, zu deren Lösung wenig mathematische „Theorie" (höchstens Wissen aus dem Mathematikunterricht bis zur Klasse 7) benötigt wird. Ein heller Kopf kann jedoch nicht schaden.
Übrigens: Zu *Wer übt, kommt weiter* erscheint zeitgleich ein Lösungsheft.
Na dann – viel Spaß!

1. Setze für * Ziffern ein, so daß eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht!

```
* * * · * * *
-------------
    * 0 *
      * * 1
        * * *
-------------
  * * * * * *
```

2. Stelle jede der Zahlen 1; 2; 3; ...; 10 mit Hilfe von genau vier Ziffern 4 unter Verwendung von Operationszeichen und Klammern dar!
Beispiel: $4:4 + 4:4 = 2$

3. Wie viele Quadrate, Rechtecke bzw. Dreiecke erkennst du im Bild?



4. Gib die Größe des kleineren der beiden Winkel an, die der Stunden- und der Minutenzeiger einer Uhr um
a) 18.30 Uhr
b) 21.10 Uhr
miteinander bilden!

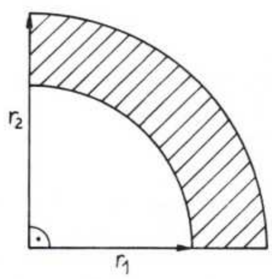
5. Ein Quader mit den Maßen $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 4$ cm ist außen grün gefärbt. Der Quader wird in kleine Würfel von 1 cm Kantenlänge zersägt (parallele Schnitte zu jeweils einer Seitenfläche). Wieviel Würfel haben keine grüne Fläche?

6. Das Produkt dreier aufeinanderfolgender Vielfacher von 3 sei 648. Ermittle diese drei Zahlen!

7. Bestimme die Summe aller unkürzbaren Brüche der Form $\frac{n}{2}$, wobei $n \in N$ und $1 \leqq n \leqq 50$ ist!

8. Welche der folgenden Aussagen sind falsch?
a) Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt: $a + b > a$
b) Es gibt natürliche Zahlen, so daß gilt: $a^b = b^a$
c) Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt: $a \cdot b > a$
d) Es gibt eine natürliche Zahl a, so daß für alle natürlichen Zahlen b gilt: $a \cdot b = 0$
e) Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $n^2 > \sqrt{n}$

9. Berechne den Flächeninhalt und den Umfang des schraffierten Flächenstücks!



$r_1 = 5{,}3$ cm
$r_2 = 4{,}1$ cm

10. Bernd, Christine und Klaus zeichneten eine Reihe von Vierecken. Eva betrachtete die Zeichnungen und erstellte folgende Übersicht:

Übersicht:	Bernd	Christine	Klaus
Trapeze	6	2	5
Rechtecke	2	2	4
Quadrate	3	2	1

a) Wieviel Vierecke hat Christine gezeichnet?
b) Welche Spalte ist von Eva ganz sicher falsch ausgefüllt worden?

11. Gegeben ist eine Gleichung
$$n \cdot x + 6 = 66 \quad (n, x \in N;\ n \neq 0).$$
a) Für welche Werte von n wird die Lösung der Gleichung eine gerade Zahl?
b) Für welche Werte von n wird die Lösung der Gleichung eine ungerade Zahl?
c) Für welche Werte von n ist die Lösungsmenge leer?

12. Rainer hat ein Aquarium mit den Abmessungen
$l = 70{,}0$ cm; $b = 40{,}0$ cm und $h = 30{,}0$ cm.
Das Aquarium wird aus einer Wasserleitung mit Hilfe eines Schlauches gefüllt. Wie ist der Wasserstand nach 12 Minuten, wenn pro Minute 5,0 l Wasser einfließen?

13. Nach wieviel Jahren ist ein Guthaben von 8 000 DM auf mindestens 15 000 DM angewachsen, wenn kein Geld abgehoben wird und der Zinssatz in den ersten 5 Jahren 5 %, danach 6 % beträgt?

14. Verneine alle falschen Aussagen!
Gib die Verneinungen in zwei verschiedenen sprachlichen Formulierungen an!
a) Alle Parallelogramme sind Rechtecke.
b) Jede natürliche Zahl ist ungerade.
c) Alle ungeraden Zahlen sind durch 5 teilbar.
d) Es gibt eine natürliche Zahl x, so daß $2x = 1$ ist.
e) Es gibt natürliche Zahlen, deren Quadrat kleiner als die Zahl selbst ist.
f) Es gibt durch 10 teilbare natürliche Zahlen, die ungerade sind.

15. Auf wieviel verschiedene Weisen kann man den Betrag von 0,50 DM zusammenstellen, wenn ausreichend viele Geldstücke zu 1 Pf, 2 Pf, 5 Pf, 10 Pf zur Verfügung stehen?

L. Flade/M. Pruzina

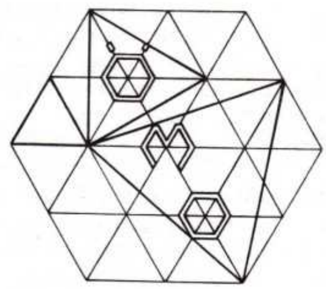
Fortsetzung in Heft 4/91

Bezeichnungsweise und Darstellung folgen den gegenwärtig üblichen Normen, vereinzelt findet man auch Hinweise auf eine andere oder frühere Symbolik (z. B. bei der Zahlenbereichsnomenklatur S. 20).
Dem Kompendium sind zwei große Kapitel über Logik und Mengenlehre vorangestellt, die in annehmbarer Konzentration das Wichtigste aus beiden Teilgebieten enthalten. Die Abschnitte 8 (Matrizenrechnung), 9 (Aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung/beschreibende Statistik) und 13 (Aus der Informatik) gehen über den derzeitigen Abiturstoff hinaus, ordnen sich aber sinnvoll in das Gesamtkonzept des Buches ein und spannen einen Bogen zur zweckmäßigen Anwendung in der Praxis. Es entspricht offenbar der Intension des Verfassers, mit dem Nachschlagebuch auch angehende Studierende naturwissenschaftlicher und anderer Fachrichtungen zu unterstützen und ihnen ergänzende Informationen über in der Schule nicht oder selten behandelte Gebiete zu vermitteln. Das trifft auch auf die erweiterten Abschnitte zu Ungleichungssystemen, dem Hornerschen Schema, Arcusfunktionen, Kugelflächengeometrie, Kegelschnitten und Anwendungen des bestimmten Integrals zu. Gerade diese Teile des Titels werden daher vom Leser allgemein geschätzt und machen das Buch wertvoll. Für ein erstes Erlernen des Mathematikstoffes ist das Nachschlagewerk nicht gedacht und wenig geeignet; es sieht seine Aufgabe vielmehr darin, verlorengegangenes Wissen zu reaktivieren und sich schnell, sachgerecht und zweckentsprechend über „mathematisches Handwerkszeug" zu informieren.
Dem dienen auch die sinnvoll eingestreuten und aussagekräftigen Bilder, Übersichten und Tabellen sowie die den Teilabschnitten zugeordneten Beispiele, die das Verstehen der Gesetzmäßigkeiten fördern und das Reaktivieren beschleunigen.
In der Literatur zur mathematischen Ausbildung gibt es zwangsläufig eine gewisse Normierung der Darstellung in den Verfahren, Formeln und Gesetzmäßigkeiten, in seiner methodischen Struktur weist aber das Buch trotzdem eine große Eigenständigkeit auf, die es zu einem wertvollen Helfer der Lernenden macht, gerade auch in der Phase der Angleichung des Niveaus mathematischen Grundwissens in Ost und West. *Dr. St. Koch, Leipzig*

G. Baron/E. Windischbacher
Österreichische Mathematik Olympiaden 1970–1989
ISBN 3-7030-0227-1, Preis: 40,– DM
Universitätsverlag Wagner GmbH, Innsbruck

Liebhaber insbesondere der Mathematik in Aufgaben kommen bei dieser Sammlung von 283 Aufgaben voll auf ihre Kosten. Diese sind übersichtlich nach Landes-, Gebiets- und Bundeswettbewerben gegliedert und thematisch aufgeschlüsselt nach Folgen und Reihen – Funktionen, Funktionalgleichungen und Polynome – Geometrie in der Ebene und im Raum – Gleichungen – Gleichungssysteme und Ungleichungssysteme – Kombinatorik und kombinatorische Geometrie – Ungleichungen – Zahlentheorie.
Dem 34seitigem Aufgabenteil schließen sich 244 Seiten Lösungen an. Diese umfassende Beispielsammlung eignet sich hervorragend zum Üben, zur Vorbereitung auf die Olympiade, zur Überprüfung des mathematischen Wissens und für alle, die gern an kniffligen Aufgaben tüfteln.

Auf dem Titel obigen Buches ist das Erkennungszeichen der Mathematikolympiaden von Österreich zu finden:



Diese Zeichnung enthält zugleich eine Aufgabe.
Im Sechseck liegen 19 „Gitterpunkte". Drei gleichseitige Dreiecke mit den Ecken in den Gitterpunkten sind schon eingezeichnet. Wieviele solche Dreiecke gibt es in diesem Sechseck?

mitgeteilt von Dr. H. Vohla, Wien

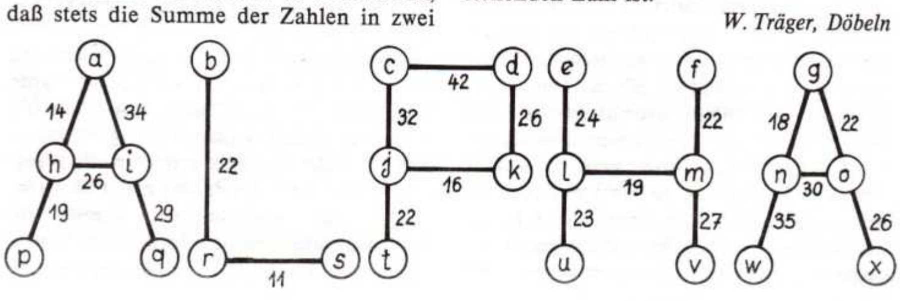
Dr. A. Hilbert
Mathematik
Nachschlagebücher für Grundlagenfächer
Fachbuchverlag, 2. Auflage 1989,
Best.-Nr. 546 928 3

An Nachschlagebücher werden heute recht hohe Anforderungen gestellt, besonders wenn sie ein so weitverzweigtes und umfangreiches Sachgebiet wie die Mathematik betreffen. Bei o. a. Titel ist es zweifellos gelungen, dem weitgehend Rechnung zu tragen. Das Buch vermittelt einen Gesamtüberblick über Inhalt, Aufbau, Formeln, Gesetze, Verfahren und Anwendungen mathematischer Teilgebiete.

ALPHA-Tüftelei

Anstelle der Buchstaben ist in jeden Kreis des Schriftbildes „ALPHA" eine der natürlichen Zahlen von 1 bis 24 so einzusetzen, daß stets die Summe der Zahlen in zwei durch eine „Strecke" verbundenen Kreisen gleich der an der verbindenden „Strecke" stehenden Zahl ist.

W. Träger, Döbeln



Mathematik und Geographie – Eine zweitausendjährige Partnerschaft (2)

Die geophysikalische Stufe

Wenden wir uns nun kurz der zweiten Entwicklungsetappe zu. Sie begann im islamischen Mittelalter und reicht bis zur Gegenwart. Die geographischen Erscheinungen, die hier die Mathematik inspirierten, wären z. B.

- die Sonneneinstrahlung
- die Tages- und Jahreszeiten
- die Witterung und das Klima
- der Wind und die Gezeiten
- der Erdmagnetismus

und die Geotektonik.

Heute gehört die Untersuchung dieser Erscheinungen z. T. in Wissenschaften, die sich um die Jahrhundertwende von der Geographie getrennt und verselbständigt haben, wie z. B. die Geophysik oder die Meteorologie. Erste Ansätze zu einer physischen Geographie finden wir bei Ibn Sina (Avicenna/980–1037) und Al-Biruni (973–1048). Ibn Sina untersuchte bereits die Art und Weise der Entstehung von Wettererscheinungen, wie Gewitter, Wolken, Wind, Regenbögen und interessierte sich für die Beschaffenheit von Gebirgen. Al-Biruni befaßte sich u. a. mit hydrologischen und geologischen Fragestellungen, aber auch mit Problemen der geometrischen Stufe, wie z. B. Erdumfangsbestimmungen. Auch ist er der Schöpfer einer ziemlich umfangreichen Länderkunde Indiens, die aber wenig mit seinen geophysikalischen und mathematischen Arbeiten zu tun hat. (vgl. Al-Biruni „In den Gärten der Wissenschaft", reclam 1228, Leipzig 1988) In diesem Buch befinden sich auch Auszüge des Briefwechsels beider Gelehrter, z. T. geophysikalischen Inhalts, z. B. über die Natur der Sonnenstrahlen (S. 56) und die Ursachen von Klimaunterschieden (S. 62). Ein weiterer bedeutender Wissenschaftler, der sich mit Problemen dieser Stufe beschäftigte, war S. Stevin (1548–1620). Von ihm stammt das erste wissenschaftlich begründete, auf Berechnungen basierende Projekt, die Zuidersee (Niederlande) trockenzulegen, um Land zu gewinnen. Auch untersuchte er die Erosion und Akkumulation durch fließendes Wasser und berücksichtigte die erhaltenen Ergebnisse bei Schleusenkonstruktionen und bei Projekten zur Freihaltung von Schiffahrtswegen. Diese, seine geographischen, Arbeiten haben auf den ersten Blick mit seinen rein mathematischen, wie z. B. seiner Arbeit zu den Dezimalzahlen, wenig gemein, jedoch zeichnen auch erstere sich besonders durch eine mathematische Herangehensweise aus. E. Halley (1656–1742), dem berühmten Mathematiker und Astronomen, verdanken wir auch viele geophysikalische Erkenntnisse. So befaßte er sich mit dem Erdmagnetismus und erstellte 1701 die erste Karte der ortsabhängigen Abweichungen von der Nordrichtung (Mißweisung), auf der die Orte gleicher Abweichungen übersichtlich durch Kurven verbunden waren. Er deutete auch als erster das Nordlicht als erdmagnetisches Phänomen. Andere Untersuchungen widmete er dem Salzgehalt der Meere. (vgl. P. Schreiber in alpha 6/86, S. 140 f.) Die Erkenntnis, daß der Erdmagnetismus nur als gerichtete Größe (Vektor) begreifbar ist und seine dreidimensionale Definition geht auf Christopher Hansteen (1784–1873) zurück, der mit C. F. Gauß in Verbindung trat und ihn zu dessen theoretischen Untersuchungen über Vektorfelder inspirierte. (vgl. den Artikel von P. Schreiber in alpha 1/87, S. 13)

Weiterhin gehören in diese Stufe z. B. die Analyse von Erdbebenwellen mit statischen und dynamischen Untersuchungsmethoden und daraus zu schließende Modelle für den inneren Erdaufbau sowie Probleme der Meteorologie, damit u. a. auch der Wettervorhersage.

Die statistische Stufe

Diese dritte Entwicklungsetappe der Beziehungen zwischen Mathematik und Geographie begann im 17. Jahrhundert, jedoch auch in der Gegenwart werden wir fast täglich mit Ergebnissen statistischer Erhebungen konfrontiert, deren Gegenstände häufig geographischer und deren Methoden oft mathematischer Art sind. Man denke hierbei nur an Bevölkerungs- oder Wirtschaftsstatistiken von Ländern oder Erdteilen.

Der Name „Statistik" könnte möglicherweise vom lateinischen Wort "status", was soviel wie „Zustand" oder auch „Staat" bedeuten kann, abstammen. Früher wurde die Statistik auch als eine Art Staatskunde, die sich nach Möglichkeit der Zahlen oder kartographischer Darstellungen bedient, aufgefaßt. Von einigen Gelehrten wurde aber schon in der Anfangsphase mehr die Methode in den Vordergrund gerückt, so daß sie unter Statistik ziffernmäßige Verzeichnisse über irgendetwas z. B. Geburten, Banken usw. verstanden. Bereits im 17. Jahrhundert wurden statistische Untersuchungen durchgeführt, so ermittelte z. B. der Engländer W. Petty 1683 mit Methoden der sogenannten politischen Arithmetik, woraus sich später die mathematische Statistik entwickelte, das Wachstum der City von London. Die Institutionalisierung der Statistik, d. h. die Gründung statistischer Büros fand in den meisten europäischen Ländern im 18. und 19. Jahrhundert statt, so z. B. in Schweden 1756, in Frankreich 1796 (zuvor bereits schon 1609 für kurze Zeit) und in Preußen 1805.

Ab 1660 gab es auch bereits erste Universitätsvorlesungen über Statistik z. B. von H. Conring (1606–1681) in Helmstedt (Dort war die damalige Braunschweiger Universität.) oder im 18. Jahrhundert, von M. Schmeitzel (1679–1747) von 1723 bis 1731 in Jena sowie danach in Halle. Diese beiden und Schmeitzels Schüler G. Achenwall (1719–1772) waren Vertreter des mehr staatswissenschaftlichen Zweiges der Statistik, d. h. der Vergleich der Staaten mittels Zahlen stand bei ihnen im Vordergrund. A. F. Büsching (1724–1793) gilt als ein Begründer der beschreibenden bzw. vergleichenden Statistik, welche den Stoff nach Gegenständen und nicht nach Ländern ordnete. Er faßte die Statistik als Teilgebiet der Geographie auf, welches dem zahlenmäßigen Vergleich geographischer Objekte diente. Darunter sind die häufig tabellarisch aufgeführten Zahlenangaben zu verschiedenen Sachgebieten, z. B. in den Statistischen Jahrbüchern oder auch in Euren Geographielehrbüchern, zu verstehen, mit deren Hilfe sich u. a. geographische Objekte wie Kontinente, Länder oder Städte gut miteinander vergleichen lassen. Neben dieser beschreibenden Statistik gab es aber auch schon relativ früh Versuche, Gesetzmäßigkeiten zwischen den Daten (Zahlenangaben) zu finden. So wurde schon im 17. Jahrhundert in England versucht, Sterberaten und Lebenserwartungen aus den über die Kirchenbücher ermittelten Zahlen zu errechnen. Die Royal Society (englische Akademie der Wissenschaften) besaß damals schon ein Konzept, durch mathematische Verfahren, Untersuchungen über die Lebensdauer der Menschen an verschiedenen Orten und über die Einwohnerzahl von Städten anzustellen, was heute der Bevölkerungsgeographie zugeordnet werden würde. Die erste sogenannte Sterbetafel stammte übrigens von E. Halley. Der Holländer W. Kersseboom (1691–1771) berechnete aus solchen Daten die Einwohnerzahl Hollands und Westfrieslands. Geeignete mathematische Modelle zur allgemeinen Lösung solcher und natürlich auch wesentlich komplizierterer statistischer Probleme konnten erst mit der Anwendung der Erkenntnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Statistik geliefert werden. Erstmals soll ein Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik von J. Bernoulli (1654–1705) mit seiner Fassung des sogenannnten Gesetzes der Großen Zahlen hergestellt worden sein. Durch viele weitere bekannte Mathematiker wie u. a. L. Euler (1707–1783), A. de Moivre (1667–1754), P. S. de Laplace (1749–1827), C. F. Gauß (1777–1855) oder auch L. A. J. Quetelét (1796–1874) wurde das entscheidend weiterentwickelt. Letzterer gilt übrigens als ein Begründer der mathematischen Statistik. Diese wurde bis heute stark vervollkommnet, so daß eine moderne Wissenschaft, die Daten irgendwelcher Art erhebt, ohne Methoden der mathematischen Statistik undenkbar wäre. Die Geographie ging nach den vorher genannten, engen Zusammenhängen mit den Vorläufern der mathematischen Statistik in der Anfangsperiode viele Jahrzehnte auf Distanz zu ihr, in welchen lediglich die beschreibende Statistik als „geographisch" angesehen wurde. Erst ab der Mitte dieses Jahrhunderts wurde dieser Zustand auf Grund objektiver Notwendigkeiten, aber auch wegen des wesentlich höheren Entwicklungsstandes der mathematischen Statistik, überwunden.

Die Stufe des komplexen Eindringens der Mathematik in die Geographie

Den Prozeß, um den es in dieser jüngsten Etappe der Beziehungen zwischen beiden Wissenschaften geht, könnte man auch als „Mathematisierungsprozeß der Geographie" bezeichnen. Er begann etwa in der Mitte dieses Jahrhunderts und ist heute noch nicht abgeschlossen.

Bei der Verselbständigung einiger Teilgebiete der Geographie etwa an der Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert spalteten sich vornehmlich die Wissensgebiete ab, die der Mathematik zu dem damaligen Zeitpunkt am nächsten standen, weswegen eigentlich nur der mehr beschreibende Teil der Geographie übrigblieb, z. B. die Länderkunde oder Teile der physischen und ökonomischen Geographie, die bisher nicht oder nur sehr ungenügend mit mathematischen oder physikalischen Methoden bearbeitet werden konnten.

Führende Geographen, wie z. B. A. Hettner (1859–1941), vertraten in den ersten Jahrzehnten dieses Jahrhunderts Auffassungen etwa derart, daß der Gegenstand der Geographie das konkrete geographische Individuum sei und man deshalb immer nach dem Spezifischen, dem Besonderen suchen müsse. Es käme also nicht darauf an, Gesetzmäßigkeiten zu finden. Diese Wissenschaftsauffassung erschwerte natürlich die Zusammenarbeit mit der Mathematik sehr. Ein weiteres Problem bestand vor allem darin, daß für die mathematische Behandlung der Gegenstände der damaligen Geographie, sehr entscheidende Voraussetzungen vor allem innermathematischer Art fehlten. Erst in den 30er und 40er Jahren wurde in den USA und in der Sowjetunion das mathematische Fundament für das komplexere Eindringen der Mathematik in die Geographie gelegt.

N. Wiener (1894–1964) begründete 1948 die Kybernetik. J. v. Neumann (1903–1957) und O. Morgenstern schrieben 1944 ihr Werk „Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten", womit eine exakte mathematische Beschreibung bestimmter ökonomischer Prozesse möglich wurde. Auch Arbeiten von sowjetischen Mathematikern wie z. B. von L. V. Kantorovič (geb. 1912) und A. J. Chinčin (1894–1959) über lineare Algebra und Wahrscheinlichkeitsrechnung gehören dazu. Diese Theorien wurden auch von Geographen der jeweiligen Länder begeistert aufgenommen und führten zu einem regelrechten Boom der Anwendung mathematischer Methoden in der Geographie in den 50er Jahren, der sogenannten „Quantitativen Revolution". Die objektiven Bedingungen waren in diesen beiden Ländern dafür relativ günstig. In beiden Ländern war die Geographie keine rein akademische Wissenschaft, sondern stark auf die Anwendung z. B. in der Raumplanung oder der Ressourcenforschung orientiert. Deshalb war man natürlich auch an neuartigen Erkenntnissen interessiert und war gezwungen, große Datenmengen zu erfassen und mit ihnen umzugehen. In den 60er Jahren entstand als ein Ergebnis der „Quantitativen Revolution" die „Theoretische Geographie", ein Teilgebiet, das aus der Anwendung der mathematischen Verfahren in der Geographie, Schlußfolgerungen für eine Umgestaltung der geographischen Wissenschaft selbst zog, so z. B. für deren Mathematisierung. Vertreter der „Quantitativen Revolution" bzw. der „Theoretischen Geographie" wären z. B. P. Haggett, R. Chorley, W. Bunge, D. Harvey und J. G. Sauschin. Von den USA kamen diese Ideen über Großbritannien nach Westeuropa und von der UdSSR nach Osteuropa. In beide Teilen Deutschlands kamen sie etwa Anfang der 70er Jahre und erlebten im westlichen Teil anfangs einen gewissen Boom. Aber die zu hochgesteckten Erwartungen ließen sich aus verschiedenen Gründen zum großen Teil nicht erfüllen, z. B. wegen des Standes der Rechentechnik, der einfach eine sofortige Umsetzung der Kenntnisse noch nicht ermöglichte oder auch wegen der subjektiven und objektiven Verständigungsprobleme zwischen Mathematikern und Geographen, weswegen nur bestimmte Teile der Mathematik den Geographen zugänglich blieben. Man wendete dabei in der Geographie vorwiegend statistische Verfahren zur Bearbeitung von Datenmengen mittels Computer an. Auf geographischem Gebiet erstrecken sich die Anwendungen eigentlich auf alle Teilbereiche, die irgendwelche Meßdaten oder andere Zahlenangaben verwenden bzw. sich mit der territorialen Ausdehnung irgendwelcher Objekte befassen. Als problematisch erweist sich hierbei aber der mitunter logisch nicht einwandfreie, uneinheitliche Begriffsapparat der Geographie sowie die manchmal kritiklose Übernahme anscheinend ähnlicher mathematischer Verfahren aus anderen Wissenschaften wie z. B. aus der Biologie. Die nicht zuletzt auch daraus resultierenden, leider z. T. noch unbefriedigenden Ergebnisse der „Quantitativen Geographie" bzw. die im vorherigen Sinne auch noch nicht ausreichende „Theoretische Geographie" konnten vielleicht aber gerade deshalb viele Geographen noch nicht von den Vorteilen dieser Methoden bzw. Denkweisen überzeugen.

Wie könnte die Zukunft dieser Partnerschaft aussehen?

Die Geographie steht gerade vor dem Hintergrund der gesamten Umweltproblematik vor der Aufgabe, von einer mehr beschreibenden zu einer mehr konstruktiven Wissenschaft zu werden. Betrachtet man nämlich die Einflußgrößen auf unsere Umwelt, so ist die Geographie gerade die verknüpfende Wissenschaft, die diese zum Untersuchungsgegenstand hat. Um aber notwendige objektive und möglichst genaue Prognosen zu ermöglichen, oder auch nur die anfallenden, sehr großen Datenmengen zu beherrschen, müssen mathematische Modelle geschaffen werden, die in Form von Algorithmen für die Computer realisiert werden können. Dabei müßte der geographische Sachverhalt möglichst gut in ein solches Verfahren „übersetzt" werden können. Daraus ergeben sich bestimmte Anforderungen bzgl. der Theorien, des Begriffsapparates und der Strukturen an die Geographie. Sie seien hier nur mit den Stichworten „Formalisierbarkeit in Teilbereichen" und „Axiomatisierung" sehr unscharf umrissen. Die Mathematik muß ihrerseits auf diese Anforderungen reagieren, sei es durch Verfahren, Modelle oder Theorien, aber auch nur durch die Hilfe für die Geographie. Das alles ist aber nur durch eine stark verbesserte Kommunikation zwischen beiden Wissenschaften möglich, die auf längere Sicht durch eine solide Ausbildung von Geographen im mathematischen Denken, aber auch durch eine Zweitfachausbildung von Mathematikern in Geographie realisiert werden könnte. Wenn von beiden Seiten die Bereitschaft zur interdisziplinären Zusammenarbeit vorhanden ist, können viele dieser Probleme sicher bewältigt werden. Dann ließe sich diese Partnerschaft entsprechend den Anforderungen unserer Zeit auf ein neues Niveau heben, und sicher würden sich für beide Wissenschaften ungeahnte Impulse ergeben, wie schon so oft in den mehr als 2000 Jahren ihrer gemeinsamen Geschichte.

O. Kappler

Zweiter mathematischer Unfall

Ein hoffnungsvoller junger Kreis
lief Schlittschuh auf dem blanken Eis.
Sich rühmend, daß er kerngesund
und außerdem – natürlich rund –
woll't er besonders hoch hinaus
und führte tolle Sprünge aus.
Der ungestüme Übermut
bekam ihm aber gar nicht gut.
Am Sturz, den er sodann gebaut,
hat er sein Leben lang gekaut.
Der Mittelpunkt war ihm verrückt,
sein Radius in zwei zerstückt.
Als Kreis war's nun mit ihm vorbei,
er glich jetzt eher einem Ei
und hieß Ellipse als Figur,
die niemals mehr auf Schlittschuh'n fuhr.

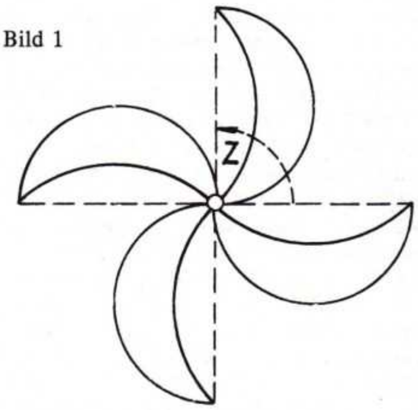
Ehrenfried Winkler
aus: H.-D. Hornschuh, Humor rund um die Mathematik, Manz Verlag, München

Wie symmetrisch ist ein Vieleck?

Vielecke mit maximaler Symmetrie

Du hast, lieber Leser, sicherlich sofort eine Antwort parat, wenn Du nach einem Vieleck mit möglichst großer Symmetrie gefragt wirst. Es sind die *regelmäßigen* Vielecke! Und als Begründung wird angeführt, daß bei diesen Vielecken sowohl die Seiten als auch die Innenwinkel jeweils kongruent (d. h. gleich groß) sind.

Bild 1



Das Bild 1 zeigt eine Figur, die kein Vieleck ist, die wir aber auch als recht symmetrisch werten möchten. Wir erkennen, daß sie durch vier Drehungen (um den Punkt Z mit den Drehwinkeln 90°, 180°, 270° und 0°) zur Deckung gebracht werden kann.
Läßt sich auf diese Weise auch die große Symmetrie bei den regelmäßigen Vielecken verstehen? Du erkennst anhand des regelmäßigen Vierecks (also Quadrats, Bild 2a), daß es durch vier Geradenspiegelungen und vier Drehungen um sein Zentrum Z (mit den Drehwinkeln 90°, $2 \cdot 90° = 180°$, $3 \cdot 90° = 270°$ und $0° = 0 \cdot 90°$) zur Dekkung gebracht werden kann.
Es besitzt also 8 Deckabbildungen.
Und mehr als 8 Deckabbildungen kann kein Viereck besitzen. Dies kann wie folgt

Bild 2a

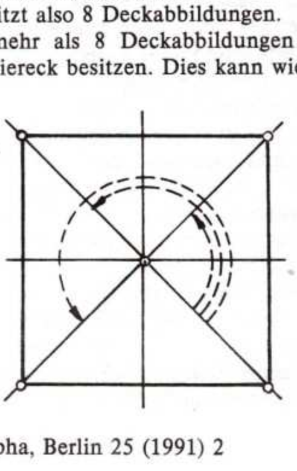
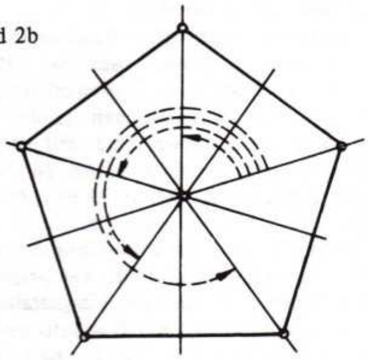


Bild 2b



näher begründet werden. Die Deckabbildungen eines Vielecks können nur Drehungen und Geradenspiegelungen sein, wobei die Drehungen ein gemeinsames Drehzentrum besitzen und dieses auf den Achsen der Geradenspiegelungen liegt. (Andere Bewegungen als Deckabbildungen würden zu einer echten Verschiebung als Deckabbildung führen. Auf eine nähere Begründung wird hier verzichtet.) Nun können bei n Ecken nur maximal n Drehungen und n Geradenspiegelungen als Deckabbildungen auftreten.
Wir erkennen also gleich allgemein:
(1) *Ein n-Eck besitzt höchstens 2n Deckabbildungen.*
Außerdem erkennt man leicht
(2) *Die regelmäßigen n-Ecke besitzen diese maximale Zahl von Deckabbildungen,* nämlich n Geradenspiegelungen und n Drehungen

$$\left(\text{mit den Drehwinkeln } 0 \cdot \frac{360°}{n},\ 1 \cdot \frac{360°}{n}, \ldots, (n-1) \cdot \frac{360°}{n}\right).$$

Das Bild 2b verdeutlicht das für ein regelmäßiges 5Eck.
Umgekehrt gilt:
(3) *Ein Vieleck mit der größten Anzahl möglicher Deckabbildungen ist regelmäßig.*
Denn dann müssen nach den Darlegungen, die zu der Einsicht (1) führten, je zwei Ekken und je zwei Seiten jeweils durch eine Deckabbildung aufeinander abgebildet werden können, d. h. Innenwinkel und Seiten sind jeweils gleich groß.

Vielecke mit geringerer Symmetrie

Nach der Aussage (3) hat ein n-Eck, das nicht regelmäßig ist, weniger als $2n$ Deckabbildungen. Sind dann nur bestimmte Anzahlen m möglich?

Wir betrachten zunächst einige Beispiele.
• Wie viele Deckabbildungen besitzt
a) ein echtes Rechteck,
b) ein echter Rhombus (gleichseitiges Viereck),
c) ein echtes Parallelogramm (d. h. ein Parallelogramm, das weder Rechteck noch Rhombus ist),
d) ein gleichschenkliges Dreieck, das nicht gleichseitig ist?
Eine Antwort ist anhand der Figuren selbst leicht ersichtlich:
a) 4 (2 Geradenspiegelungen und neben der identischen Abbildung als Drehung noch eine Drehung um 180°), Bild 3a),
b) 4 (wie bei a), Bild 3b),
c) 2 (Bild 3c),
d) 2 (1 Geradenspiegelung und die identische Abbildung als Drehung, Bild 3d).

Bild 3a

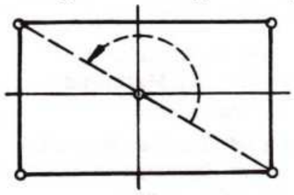


Bild 3b

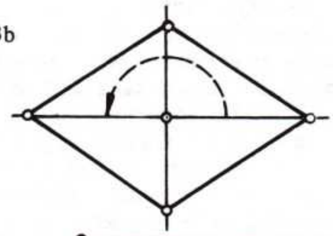


Bild 3c

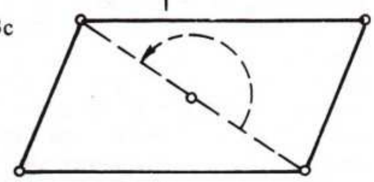
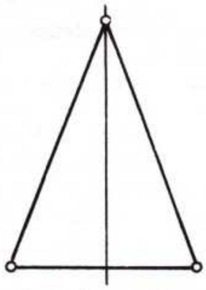


Bild 3d



• Gibt es neben dem echten Parallelogramm weitere Vierecke mit genau zwei Deckabbildungen?
Natürlich, das (echte) gleichschenklige Trapez (Bild 4a) und das (echte) Drachenviereck (Bild 4b).

Bild 4a

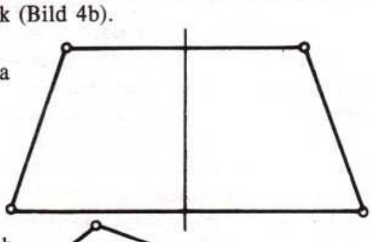
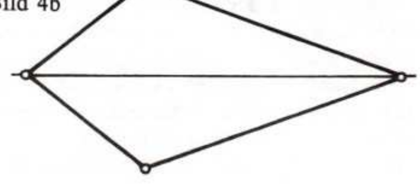


Bild 4b

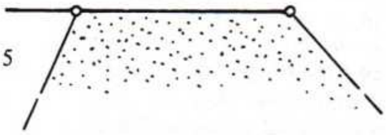


• Gibt es ein Dreieck mit genau 3 oder 4 oder 5 Deckabbildungen?

Nein, aber eine einfache Begründung läßt sich nicht ohne weiteres geben. Sie ergibt sich aus den folgenden allgemeineren Überlegungen.

Wir betrachten einen Strahl p, der von einer Ecke eines Vielecks V ausgeht und eine benachbarte Ecke von V enthält (Bild 5).

Bild 5



Einen derartigen Strahl nennen wir einfach *Strahl des Vielecks V*. Besitzt das Vieleck V genau m Deckabbildungen (die identische Abbildung wird dabei immer mitgezählt!), dann hat der Strahl p bei diesen Abbildungen m Bilder, neben p sind das $m-1$ weitere Strahlen $p_1, \ldots, p_{m-1}$ des Vielecks V. Und jeder dieser m Strahlen wird bei den Deckabbildungen von V wieder nur auf einen von ihnen abgebildet. Denn ein solcher Strahl p_i $(i = 1, \ldots, m-1)$ ist das Bild von p bei einer Deckabbildung α, und wird auf p_i eine Deckabbildung β angewendet, so ist das damit gleich, daß auf p nacheinander die Deckabbildungen α und β angewendet werden. Die Nacheinanderausführung von zwei Deckabbildungen von V ist aber offenbar wieder eine Deckabbildung von V. Die Menge der $2n$ Strahlen des Vielecks V zerfällt also in Teilmengen von jeweils m Strahlen, die aufeinander durch Deckabbildungen von V abgebildet werden können.

Also gilt:

(4) *m ist ein Teiler von $2n$.*

Daraus folgt, daß ein Dreieck nicht genau 4 oder 5 Deckabbildungen besitzen kann. Ein n-Eck, bei dem n eine Primzahl ist, kann höchstens genau eine, zwei, n oder $2n$ Deckabbildungen besitzen. Im folgenden wird sich noch zeigen, daß hier n selbst nicht möglich ist.

Halbsymmetrische Vielecke

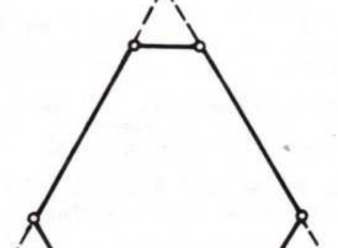
Die Bezeichnung ist wörtlich zu nehmen. Ein n-Eck heißt *halbsymmetrisch*, wenn es genau $\frac{2n}{2} = n$ Deckabbildungen besitzt.

Nach den bisherigen Betrachtungen spezieller Vielecke sind ein echtes Rechteck und ein echter Rhombus halbsymmetrische Vierecke.

• Zeichne ein halbsymmetrisches Sechseck!

Ein Beispiel zeigt Bild 6.

Bild 6



• Gibt es halbsymmetrische Dreiecke oder Fünfecke?

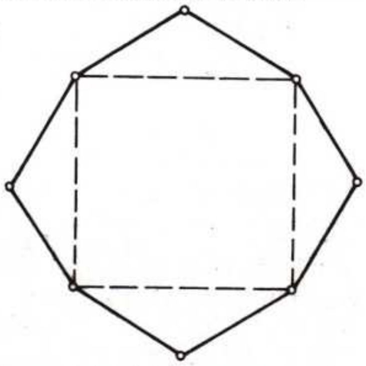
Wir haben schon bemerkt, daß die Deckabbildungen eines Vielecks nur Drehungen oder Geradenspiegelungen sein können. Bei n Deckabbildungen (auf Grund der Halbsymmetrie) sind es nicht nur Drehungen, sonst wäre das n-Eck regelmäßig. Dann müssen es (wie man eingehender zeigen kann) gleichviel Drehungen und Geradenspiegelungen sein, also jeweils $\frac{n}{2}$.

Damit ergibt sich:

(5) *Ist ein n-Eck halbsymmetrisch, dann ist n eine gerade Zahl.*

Zu jeder geraden Zahl n $(n \geqq 6)$ können leicht zwei Arten von halbsymmetrischen n-Ecken konstruiert werden. Man wählt ein beliebiges regelmäßiges $\frac{n}{2}$-Eck. Die eine Art erhält man durch Abschneiden der Ecken derart, daß die abgetrennten Dreiecke gleichschenklig und kongruent sind und das entstandene n-Eck selbst nicht regelmäßig wird. (Abb. 6 zeigt ein Beispiel für $n = 6$.) Setzt man den Seiten des regelmäßigen $\frac{n}{2}$-Ecks gleichschenklige und kongruente Dreiecke so auf, daß ein nicht regelmäßiges aber konvexes n-Eck entsteht (Bild 7), so erhält man eine zweite Art von halbsymmetrischen n-Ecken.

Bild 7



Bemerkenswert ist, daß zusammen mit den echten Rechtecken und echten Rhomben auf diese Weise bereits eine vollständige Übersicht über alle möglichen halbsymmetrischen n-Ecke gegeben ist. (Bei all unseren Betrachtungen haben wir nur konvexe Vielecke einbezogen!)

Symmetrie der Sechsecke

Die Zahl $n = 6$ ist unter den ersten natürlichen Zahlen $n \geqq 3$ die erste, die relativ viele Teiler besitzt. Nach den notwendigen Bedingungen (4) und (5) stellt sich die Aufgabe Sechsecke zu finden, die genau 12 oder 6 oder 4 oder 3 oder 2 Deckabbildungen besitzen. Für 12 und 6 ist die Frage schon vollständig beantwortet.

Die Suche nach den restlichen Arten von Symmetrien überlassen wir Dir, lieber Leser. Auch Probieren führt zum Ziel. Die Ergebnisse lassen sich systematisch ordnen.

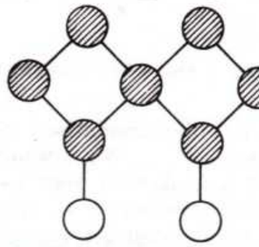
Eine Antwort findest Du in dem im nächsten Heft folgenden kleinen Beitrag „Die Symmetrien der Sechsecke".

E. Quaisser

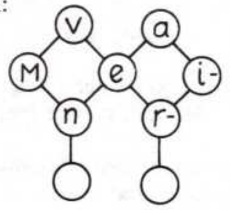
Wer wird Champion?

Schiebepuzzle „Minerva"

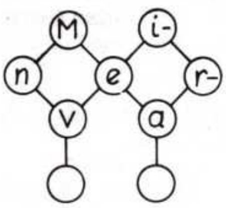
Zunächst fertige man 7 wie aufgezeichnet beschriftete Pappscheiben an und zeichne das abgebildete Spielfeld mit 9 Feldern auf ein Blatt Papier.



Zu Spielbeginn wird auf jedes schraffierte Feld des Spielfeldes je eine der 7 beschrifteten Pappscheiben gelegt. So kann zum Beispiel die folgende Ausgangsstellung entstehen:



Die beiden nicht schraffierten Felder werden beim Ziehen als Ausweichfelder benutzt. Ein Zug besteht im Verschieben einer Pappscheibe von einem Feld auf ein mit diesem durch eine Strecke verbundenes unbesetztes Feld. Durch mehrere Züge ist zu erreichen, daß die auf den beschrifteten Pappscheiben stehenden Buchstaben das Wort *Minerva* (Minerva – römische Göttin der Künste) darstellen, wobei in jeder Zeile eine Silbe dieses Wortes steht:



Da von jeder Ausgangsstellung aus die Endstellung herzustellen ist, kann dieses Spiel nach kurzer Übungszeit im Freundeskreis gespielt werden, wobei im Wechsel ein Partner die Pappscheiben auflegt und ein anderer entweder mit möglichst wenig Zügen oder in möglichst kurzer Zeit die Endstellung herstellt. Sieger wird dann der sein, der dieses kleine „Kunststück" am besten beherrscht.

Lösung: Eine mögliche Zugfolge zur angegebenen Ausgangsstellung ist die folgende. Dabei wird bei jedem Zug der Stein angegeben, der verschoben wird. Falls zwei Zugmöglichkeiten bestehen, wird zusätzlich die Zugrichtung durch einen Pfeil angegeben.

r; e; v; M; $n\nwarrow$; v; $v\downarrow$; e; $e\swarrow$; r; a; i; $r\nearrow$; a; e; v

W. Träger, Döbeln

Lösungen

Teilnehmer am alpha-Wettbewerb – Achtung!

Damit keine Mißverständnisse entstehen, eine Bemerkung zur Wettbewerbsbedingung 6. Ihr habe dann am Wettbewerb erfolgreich teilgenommen, wenn Ihr mindestens 8 Aufgaben gelöst, d. h. eine **„1“ oder „2“ für mindestens 8 Aufgaben** bekommen habt. Die Registrierung der „sehr gut“ gelösten Aufgaben dient uns zur Ermittlung der ersten fünf Preisträger jeder Klassenstufe. Denn das sind die Schüler mit den meisten „sehr gut“ gelösten Aufgaben.
Aus dem übrigen Kreis der erfolgreichen Teilnehmer werden fünf weitere Preisträger ausgelost.
Und – wir haben eine neue Postanschrift:

Redaktion alpha
PSF 129
O-7010 Leipzig

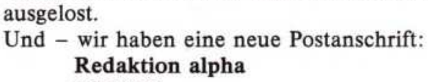
Alphons

Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 1/91

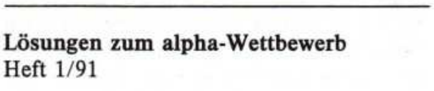
5/8 Da Ingo genau über Jürgen, Hans aber tiefer als Jürgen wohnt, muß Ingo im dritten Stockwerk wohnen und zwar rechts; denn links neben ihm wohnt Maria. Im ersten Stockwerk wohnt links Hans, rechts von ihm Luise. Da Jürgen genau unter Ingo wohnt, muß links von ihm Klaus Gerber wohnen.

5/9 Von den Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 erfüllen nur
$4 + 16 + 36 = 2^2 + 4^2 + 6^2 = 56$
die gestellten Bedingungen. Es gibt genau eine Lösung, nämlich $z = 246$.

5/10 a) Wegen $2{,}5 + x + 1{,}5 = 8$,
also $x = 4$, hat die Strecke $\overline{BC}$ eine Länge von 4 cm.



b) Wegen $x + 8 + x = 14{,}5$,
also $2 \cdot x = 6{,}5$ und $8 - 6{,}5 = 1{,}5$
ist die Strecke $\overline{BC}$ 1,5 cm lang. Jede der beiden Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ ist somit 6,5 cm lang.



5/11 Es sind folgende Zahlen näher zu untersuchen: 119, 227, 335, 443, 551.
Nun gilt $191 - 119 = 72$, $272 - 227 = 45$, $353 - 335 = 18$, $434 - 443$ nicht lösbar, $515 - 551$ nicht lösbar. Von den Differenzen erfüllt nur die dritte die gestellten Bedingungen. Es handelt sich um die Zahl 335.

5/12 Wir geben die Lösung in einer Tabelle an.
Anzahl der Münzen zu

1 Pf	5 Pf	10 Pf	20 Pf
30	–	–	–
25	1	–	–
20	2	–	–
20	–	1	–
15	3	–	–
15	1	1	–
10	4	–	–
10	2	1	–
10	–	2	–
10	–	–	1
5	5	–	–
5	3	1	–
5	1	2	–
5	1	–	1
–	6	–	–
–	4	1	–
–	2	2	–
–	2	–	1
–	–	1	1

Dies sind insgesamt 19 Möglichkeiten.

5/13 Wir kennzeichnen die neun kleineren Quadrate, wie aus dem Bild ersichtlich, durch Zahlen.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Die Felder (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9) ergeben neun Rechtecke. Die Felder (1, 2), (2, 3), (4, 5), (5, 6), (7, 8), (8, 9), (1, 4), (4, 7), (2, 5), (5, 8), (3, 6), (6, 9) ergeben zwölf Rechtecke. Die Felder (1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9), (1, 4, 7), (2, 5, 8), (3, 6, 9) ergeben sechs Rechtecke. Die Felder (1, 2, 4, 5), (2, 3, 5, 6), (4, 5, 7, 8), (5, 6, 8, 9), ergeben vier Rechtecke (1, 2, 3, 4, 5, 6), (4, 5, 6, 7, 8, 9), (1, 4, 7, 2, 5, 8), (2, 5, 8, 3, 6, 9) ergeben vier Rechtecke. Alle neun Felder zusammen ergeben ein Rechteck. Das sind insgesamt 36 Rechtecke.

5/14 Der Vater ist $(31 - 8)$ Jahre $= 23$ Jahre älter als Lars. Wegen $2 \cdot 23 = 46$ und $23 - 8 = 15$ wird Lars nach 15 Jahren $(8 + 15)$ Jahre, sein Vater doppelt so alt wie Lars, nämlich $(31 + 15)$ Jahre $= 46$ Jahre alt sein.

6/8

erreichte ganzzahlige Literzahlen	eine Möglichkeit der Füllstände der Gefäße für 10 l	4 l	3 l
1	9	1	0
2	5	2	3
3	6	1	3
4	6	4	0
5	5	4	1
6	6	4	0
7	7	0	3
8	8	2	0
9	9	1	0

6/9 Jeder Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks ABC hat die Größe $(180° - 80°) : 2 = 50°$. Jeder Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks FEA hat somit die Größe
$(180° - 50°) : 2 = 65°$. Das gleiche gilt für das gleichschenklige Dreieck DFB. Deshalb hat der Winkel $\sphericalangle DFE$ die Größe $180° - 2 \cdot 65° = 50°$.

6/10 Von den Quadratzahlen 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 erfüllen nur
$4 + 9 + 36 = 2^2 + 3^2 + 6^2 = 49$ und
$49 + 0 + 0 = 7^2 + 0^2 + 0^2 = 49$ die gestellten Bedingungen. Deshalb existieren sieben solche Zahlen, sie lauten 236, 263, 326, 362, 623, 632, 700.

6/11
a) $6 \cdot 25\ \text{cm}^2 - 2 \cdot 1\ \text{cm}^2 = 148\ \text{cm}^2$
b) $150\ \text{cm}^2 - 8 \cdot 3\ \text{cm}^2 + 8 \cdot 3\ \text{cm}^2$
$= 150\ \text{cm}^2$
c) $6 \cdot 9\ \text{cm}^2 + 6 \cdot 12\ \text{cm}^2$
$= 54\ \text{cm}^2 + 72\ \text{cm}^2 = 126\ \text{cm}^2$

6/12 Wegen $\overline{AS} \cong \overline{AB}$ hat der Winkel $\sphericalangle ABS$ die Größe α und somit der Außenwinkel $\sphericalangle CAB$ des Dreiecks SBA die Größe 2α. Im gleichschenkligen Dreieck CAB hat der Winkel $\sphericalangle ACB$ ebenfalls die Größe 2α. Der Außenwinkel $\sphericalangle CBD$ des Dreiecks SBC hat die Größe $\alpha + 2\alpha = 3\alpha$, der Winkel CDB also auch die Größe 3α. Im n-ten gleichschenkligen Dreieck dieser Art hat jeder der beiden Basiswinkel die Größe $n \cdot \alpha$; deshalb gilt
$\alpha + n \cdot \alpha = 90°$, $15° + n \cdot 15° = 90°$,
$n \cdot 15° = 75°$, $n = 5$.
Es lassen sich fünf solcher gleichschenkligen Dreiecke konstruieren.

6/13 Aus (1) und (3) folgt: Der Berliner ist Schüler einer 6. Klasse. Aus (2) und (4) folgt: Der Berliner hat den Familiennamen Neumann. Aus (6) und (3) folgt: Der Rostocker ist Schüler einer 5. Klasse. Folglich ist der Schweriner Schüler einer 7. Klasse. Aus (6) folgt: Weder der Schweriner noch der Rostocker haben den Vornamen Jan. Folglich hat der Berliner den Vornamen Jan. Aus (1) folgt: Der Rostocker hat den Vornamen Horst, also hat der Schweriner den Vornamen Gerd. Aus (5) folgt: Der Schüler Schulz hat den Vornamen Horst, also hat der Schüler Meier den Vornamen Gerd.
Lösungen: Jan Neumann, 6. Klasse, Berlin; Horst Schulz, 5. Klasse, Rostock; Gerd Meier, 7. Klasse, Schwerin.

6/14 Die Masse der Stahlkugel beträgt
$15\ \text{cm}^3 \cdot 7{,}8\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 117\ \text{g}$.
1 cm³ Aluminium hat eine Masse von 2,7 g, da die Dichte des Aluminiums
$\varrho_{\text{Al}} = 2{,}7\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ beträgt. Damit ein Körper aus Aluminium eine Masse von 117 g hat, muß demzufolge sein Volumen $\frac{117}{2{,}7}\ \text{cm}^3$ betragen. Das sind rund 43 cm³.

7/8 Es sei $10a + b$ das Alter der Großmutter, wobei a und b natürliche Zahlen sind und $a \neq 0$ gilt. Die Großmutter rechnet zunächst $10a + b - (a + b) = 63$;

daraus folgt $a = 7$. Die Großmutter rechnet danach
$10b + a - (a + b) = 18$; daraus folgt
$b = 2$. Die Großmutter ist 72 Jahre alt.

7/9 Aus $a = \frac{36 \cdot 25}{100}$ cm $= 9$ cm und
$b = \frac{48 \cdot 25}{100}$ cm $= 12$ cm und $u = 25$ cm folgt
$c = 4$ cm. Zugleich gilt $a + c > b$;
somit existiert ein solches Dreieck.

7/10 Es gilt $100a + 10b + c + 297 = 100c + 10b + a$ mit $1 \leqq a \leqq 6$,
$0 \leqq b \leqq 9$ und $1 \leqq c \leqq 9$. Daraus folgt
$99c = 99a + 297$, $c = a + 3$. Die zu ermittelnden Zahlen lauten 104, 114, ..., 194, 205, ..., 295, ..., 609, ..., 689, 699. Deshalb existieren $6 \cdot 10 = 60$ solcher Zahlen.

7/11 Aus $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$
folgt $a \cdot h_a = b \cdot h_b$. Wegen $a > b$ gilt somit $h_b > h_a$. Wir erhalten durch Addition
$a + h_b > b + h_a$.

7/12 An einem Tag schafft der erste Bagger allein $\frac{1}{20}$, der zweite Bagger allein $\frac{1}{x}$, beide zusammen $\frac{1}{12}$ der durchzuführenden Arbeit; deshalb gilt
$\frac{1}{20} + \frac{1}{x} = \frac{1}{12}$, $3x + 60 = 5x$, $2x = 60$,
$x = 30$. Der zweite Bagger würde diese Arbeit allein in 30 Tagen ausführen können.

7/13 a) $\overline{\sphericalangle EDC} = 90°$ (Thales);
b) $\sphericalangle ADC \cong \sphericalangle BDC$ (laut Voraussetzung), $(\gamma = 25°)$;
c) $\overline{\sphericalangle BAC} = \overline{\sphericalangle ACB} = \overline{\sphericalangle ADC} = 25°$ (laut Voraussetzung); also
d) $\overline{\sphericalangle ABC} = 130°$ (Innenwinkelsumme im $\triangle ABC$!)

7/14 Die Gesamtmasse des gefüllten Becherglases beträgt 105 g. Da auf einen Körper mit der Masse von 100 g auf der Erdoberfläche eine Gewichtskraft von (etwa) 1 N wirkt, beträgt die Gewichtskraft des gefüllten Becherglases 1,05 N. Damit das gefüllte Becherglas schwimmt, muß seine Gewichtskraft gleich der Gewichtskraft des verdrängten Wassers sein. Bei einer Grundfläche des Becherglases $A = 19{,}6\ \text{cm}^2$ (Zahlentafel), der Dichte des Wassers
$\varrho_{H_2O} = 1\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ und einer Eintauchtiefe x cm beträgt die Masse des verdrängten Wassers $1 \cdot x \cdot 19{,}6$ g, seine Gewichtskraft $x \cdot 0{,}196$ N. Aus der Schwimmbedingung ergibt sich $x \cdot 0{,}196\ \text{N} = 1{,}05\ \text{N}$.
Die Eintauchtiefe beträgt 5,4 cm.

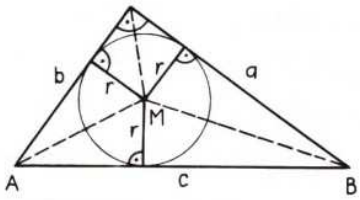
8/8 Es sei $z = \overline{abc}$ eine dreistellige natürliche Zahl in dezimaler Schreibweise; dann soll gelten
$a \cdot b \cdot c = 5 \cdot (a + b + c)$. Wegen $c \neq 0$ und da $a \cdot b \cdot c$ Vielfaches von fünf ist, muß $c = 5$ sein. Daraus folgt
$5ab = 5 \cdot (a + b + 5)$, $a \cdot b = a + b + 5$,
$ab - b = a + 5$, $b \cdot (a - 1) = a + 5$,
$b = \frac{a + 5}{a - 1}$, $b = 1 + \frac{6}{a - 1}$.
Daraus ergibt sich wegen der einschränkenden Bedingungen folgende Lösung:

a	b	c
2	7	5
3	4	5
4	3	5
7	2	5

8/9 Es gelten die Beziehungen
$v_k = \frac{s_k}{t_k}$ und $v_g = \frac{s_g}{t_g}$
(v: Geschwindigkeit; s: Weg; t: Zeit; k: kleiner Zeiger; g: großer Zeiger)
$v_k = \frac{2\pi r}{12\ \text{h}} = \frac{2\pi \cdot 7{,}5\ \text{cm}}{720\ \text{min}} \approx 0{,}07\ \frac{\text{cm}}{\text{min}}$
$v_g = \frac{2\pi r}{1\ \text{h}} = \frac{2\pi \cdot 10\ \text{cm}}{60\ \text{min}} \approx 1{,}05\ \frac{\text{cm}}{\text{min}}$
Der große Zeiger legt in jeder Minute etwa 1,05 cm, der kleine Zeiger etwa 0,07 cm zurück.

8/10 a) $x = 1{,}4a$ b) $U = 4{,}7a$
c) $A = \frac{2{,}3a \cdot a}{2} = 1{,}15a^2$

8/11 Für den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ABC gilt
$\frac{a \cdot b}{2} = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2}$,
$a \cdot b = r \cdot (a + b + c)$, $r = \frac{a \cdot b}{a + b + c}$,
$r = \frac{a \cdot b}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}}$,
$r = \frac{8 \cdot 6}{8 + 6 + \sqrt{64 + 36}}$ cm $= 2$ cm.



8/12 a) Fritz bildet von der genannten Zahl die Quersumme und ergänzt diese zum nächsten Vielfachen von 9. Diese Ergänzung ist die gestrichene Zahl.
b) Aus $(1000a + 100b + 10c + d)$ $+ 8(a + b + c + d)$ folgt
$1008a + 108b + 18c + 9d$.
Somit ist die Quersumme ein Vielfaches von 9. Die gestrichene Zahl ist daher die Ergänzung zu diesem Vielfachen. Sie ist eindeutig, da die Streichung einer Null ausgeschlossen wurde, was die Angabe „0 oder 9" zur Folge gehabt hätte.

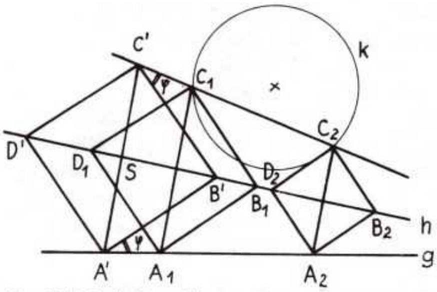
8/13 Der Stab wird als Hebel verwendet. Wenn an einem zweiseitigen Hebel mehrere Kräfte (im vorliegenden Fall Gewichtskräfte von 1 N) wirken, dann herrscht Gleichgewicht, wenn die Summe der Produkte aus Kraft · Hebellänge für beide Seiten gleich ist. Denkt man sich einen Drehpunkt zwischen dem 2. und 3. Körper im Abstand x vom linken Ende, so gilt:
$x \cdot 1\ \text{N} + (x - 6\ \text{cm}) \cdot 1\ \text{N}$
$= (10\ \text{cm} - x) \cdot 1\ \text{N} + (20\ \text{cm} - x) \cdot 1\ \text{N}$
Ergebnis: $x = 9$ cm. Der Stab muß im Abstand von 9 cm vom linken Ende unterstützt werden, damit er sich im Gleichgewicht befindet.

8/14 Da der Schweredruck $(p = \varrho \cdot g \cdot h)$ an der Trennfläche gleich groß ist, verhalten sich die Längen der Flüssigkeitssäulen umgekehrt wie die Dichten der Flüssigkeiten. Im vorliegenden Fall beträgt die Länge der Wassersäule 13,6 cm (bei einer Länge der Quecksilbersäule von 1 cm). Der Abstand zwischen beiden Menisken beträgt demnach 12,6 cm.

9/8 Man formt beide Terme in Brüche der Form $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in N$ und $a \neq 0$ um:
Aus $x = 0{,}\overline{75}$ folgt $100x = 75{,}\overline{75}$ und
$99x = 75$, also $x = \frac{75}{99}$. Man zerlegt
$y = 0{,}7\overline{57}$ in $y = 0{,}7 + 0{,}0\overline{57}$. Aus
$z = 0{,}0\overline{57}$ folgt $1000z = 57{,}\overline{57}$ und
$10z = 0{,}\overline{57}$, also $990z = 57$. Nun ist
$y = \frac{7}{10} + \frac{57}{990} = \frac{693 + 57}{990} = \frac{750}{990} = \frac{75}{99}$.
Somit gilt das Gleichheitszeichen.

9/9 Die erste Zahl sei x, dann ist die zweite Zahl $19 - x$, und es gilt weiter nach Aufgabenstellung
$x^2 + (19 - x)^2 = 205$. Die quadratische Gleichung $x^2 + (19 - x)^2 = 205$ bzw.
$x^2 - 19x + 78 = 0$ hat die Lösungen
$x_1 = 13$ und $x_2 = 6$. Wenn $x = 13$,
so ist $19 - x = 6$ und wenn $x = 6$,
so ist $19 - x = 13$. Es handelt sich um die Zahlen 13 und 6.
Probe: $13 + 6 = 19$ und $13^2 + 6^2 = 205$.

9/10 In einem beliebigen Punkt S der Geraden h zeichnen wir die Senkrechte zu h; sie schneide die Gerade g in A'. Der Kreis um S mit $\overline{SA'}$ als Radius schneide h in B' und D' und die Gerade $A'S$ in C'. Nach Konstruktion ist das Viereck $A'B'C'D'$ ein Quadrat.



Der Winkel, der A' zum Scheitel und $A'B'$ und die Gerade g als Schenkel hat, habe die Größe φ. Wir tragen in C' an $C'B'$ einen Winkel der Größe φ an; der freie Schenkel schneide k in C_1 und C_2. Die Parallele zu $A'C'$ durch C_1 bzw. C_2 schneide g in A_1 bzw. A_2. Die beiden Quadrate $A_1B_1C_1D_1$ und $A_2B_2C_2D_2$, die $\overline{A_1C_1}$ bzw. $\overline{A_2C_2}$ zur Diagonale haben, erfüllen auf Grund der vorgenommenen Ähnlichkeitsabbildung die geforderten Bedingungen.

9/11 $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$; $385 + 1 = 386$ und 386 ist keine Primzahl; $2 \cdot 385 + 1 = 771$, und 771 ist keine Primzahl, denn $3/771$;
$3 \cdot 385 + 1 = 1156$, und 1156 ist keine Primzahl, denn $2/1156$;
$4 \cdot 385 + 1 = 1541$, und 1541 ist keine Primzahl, denn $23/1541$;
$5 \cdot 385 + 1 = 1926$, und 1926 ist keine Primzahl, denn $2/1926$;

$6 \cdot 385 + 1 = 2311$, und 2311 ist Primzahl.
Die Zahl 2311 ist die kleinste Primzahl mit den geforderten Eigenschaften.

9/12 Wenn wir jeden Faktor im Zähler und im Nenner mit $16 = 2^4$ multiplizieren, erhalten wir

$$\frac{(2^4+4)(6^4+4)(10^4+4)\cdot\ldots\cdot(22^4+4)}{(4^4+4)(8^4+4)(12^4+4)\cdot\ldots\cdot(24^4+4)}.$$

Unter Beachtung der in der Aufgabe genannten Identität erhalten wir daraus

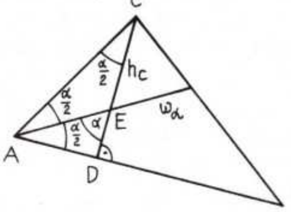
$$\frac{(1^2+1)(3^2+1)(5^2+1)(7^2+1)\cdot\ldots}{(3^2+1)(5^2+1)(7^2+1)(9^2+1)\cdot\ldots}$$
$$\frac{\cdot(21^2+1)(23^2+1)}{\cdot(23^2+1)(25^2+1)} = \frac{2}{626} = \frac{1}{313}.$$

9/13 Kraft auf das Elektron in Richtung der positiv geladenen Platte F = Feldstärke E · Elektronenladung e. Nach dem Newtonschen Grundgesetz gilt: Kraft F = Elektronenmasse m_e · Beschleunigung a, d.h.
$a = E \cdot \frac{e}{m_e}$. Mit $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} A \cdot s$,
$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg
ergibt sich $a = 1{,}8 \cdot 10^{15} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.
Mit $v^2 = 2 \cdot a \cdot s$ erhält man
$v = 2{,}65 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

9/14 Aus dem Tafelwerk entnimmt man
$\varrho_{\mathrm{Al}} = 0{,}028 \frac{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2}{2}$. Der Widerstand
R kann aus $R = \frac{2 \cdot l \cdot \varrho_{\mathrm{Al}}}{A}$ berechnet werden. $R = 0{,}224\ \Omega$. Aus dem Ohmschen Gesetz ergibt sich der Spannungsabfall $U = I \cdot R$. Der Spannungsabfall beträgt $U = 18$ V.

10/8 Angenommen, es gibt solche Primzahlen, dann gilt $p_2 = a \cdot 1000 + p_1$
und $p_1^2 + 1 = 2(a \cdot 1000 + p_1)$,
$p_1^2 + 1 = 2a \cdot 1000 + 2p_1$,
$p_1^2 - 2p_1 + 1 = 20 \cdot a \cdot 100$,
$(p-1)^2 = 20 \cdot a \cdot 100$. Daraus folgt
$a = 5$ und $p_1 - 1 = 100$ bzw. $p_1 = 101$
und damit $p_2 = 5101$. Tatsächlich sind p_1, p_2 Primzahlen und erfüllen die Bedingungen. Ein anderes Primzahlenpaar mit gleichen Eigenschaften gibt es nicht.

10/9 Nach Voraussetzung ($\overline{AE} \cong \overline{CE}$)
gilt $\sphericalangle CAE \cong \sphericalangle ACE \cong \sphericalangle EAD = \frac{\alpha}{2}$.
Im Dreieck AEC gilt nach dem Außenwinkelsatz $\sphericalangle AED = \alpha$. Nach dem Innenwinkelsatz gilt im Dreieck ADE
$\frac{\alpha}{2} + \alpha = 90°$, also $30° + 60° = 90°$.
Es gilt $\alpha = 60°$.



Skizze
(nicht maßgerecht!)

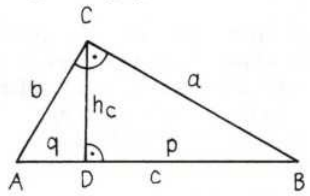
10/10 Aus der gegebenen Ungleichung folgt schrittweise durch Umformen

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 < 6 + \frac{36}{113},$$
$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 < \left(3 + \frac{36}{113}\right)^2,$$
$$2 + 2\sqrt{6} + 3 < 9 + \frac{216}{113} + \left(\frac{36}{113}\right)^2,$$
$$2\sqrt{6} < 5 + \frac{103}{113} + \left(\frac{36}{113}\right)^2,$$
$$24 < 25 < \left[5 + \frac{103}{113} + \left(\frac{36}{113}\right)^2\right]^2.$$

Die gegebene Ungleichung stellt eine wahre Aussage dar.

10/11 Aus (2) folgt $(ad)^2 = acb$, und daraus folgt $a = 1$. Mit $a = 1$ ergeben sich für acb zwei Möglichkeiten, nämlich 169 oder 196. Aus (3) geht hervor, daß $acb = 169$ sein muß, denn vor den Sternen steht kein negatives Vorzeichen. Nun ist $c = 6$, $b = 9$ und $d = 3$. Wegen $196 - 169 = 27$ ergeben sich für die beiden Sterne in (3) $2 = e$ und $7 = f$. Aus (1) $196 : *^2 = **$ kommt wegen $196 = 2^2 \cdot 7^2$ für den ersten Stern nur 2 in Frage, denn $196 : 2^2 = 49$; $4 = g$. Ersetzt man die Sterne durch Buchstaben, so folgt
(1) $abc : e^2 = gb$; (2) $acb : ad = ad$;
(3) $abc - acb = ef$.
Die Lösung des Systems lautet
(1) $196 : 2^2 = 49$; (2) $169 : 13 = 13$;
(3) $196 - 169 = 27$.

10/12 Im Dreieck ADC gilt nach dem Satz des Pythagoras
$q^2 = b^2 - h_c^2$; $q^2 = 100\ \mathrm{cm}^2 - 64\ \mathrm{cm}^2$;
$q^2 = 36\ \mathrm{cm}^2$; $q = 6$ cm.
Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ADC und BCD folgt $\frac{a}{h_c} = \frac{b}{q}$,
$a = \frac{b \cdot h_c}{q} = \frac{10 \cdot 8}{6}\ \mathrm{cm} = \frac{40}{3}\ \mathrm{cm}$.
Deshalb gilt
$A_{ABC} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{40 \cdot 10}{3 \cdot 2}\ \mathrm{cm}^2 = 66{,}6\ \mathrm{cm}^2$.

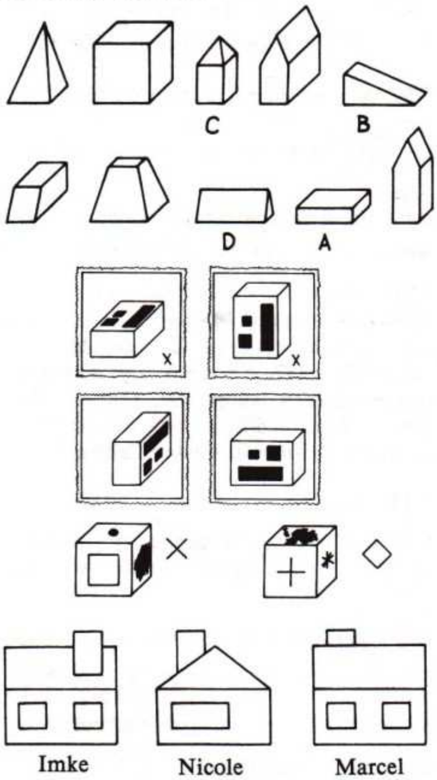


Skizze (nicht maßgerecht!)

10/13 Die Eigenfrequenz verdoppelt sich, da sich die Kapazität des Kondensators $\left(\text{wegen } c \sim \frac{A}{d}\right)$ und die Induktivität der Spule $\left(\text{wegen } L \sim N^2 \cdot \frac{A}{l}\right)$ halbieren bei Berücksichtigung von $f = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$.

10/14 Die Haftreibungszahl μ ist definiert als Quotient aus der Reibungskraft zu Beginn des Gleitens F_R und der Normalkraft F_N auf die Unterlage. Bei Beginn des Gleitens ist die Hangabtriebskraft gleich der Reibungskraft. Ist G die Gewichtskraft des Körpers und α der Neigungswinkel, so ergibt sich aus dem Parallelogramm der Kräfte
$F_R = G \cdot \sin\alpha$ und $F_N = G \cdot \cos\alpha$.
Also $\mu = \tan\alpha$.
Die Haftreibungszahl beträgt 0,65.

Lösungen zu: Aufgaben, die Du „im Kopf" lösen sollst



Lösungen zu: Eine Regel zur Berechnung des Volumens von Rotationskörpern

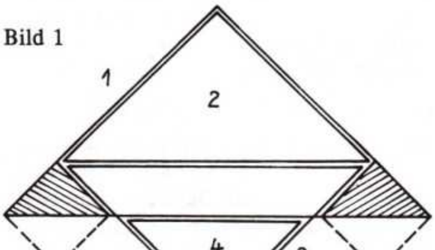
▲2▲ Bild 1 (Achsenschnitt) zeigt, wie man das Volumen aus den Volumina geeigneter Kegel gewinnen kann:
$V = V_1 - V_2 - V_3 + V_4$

$r_1 = r + \frac{a}{2}\sqrt{2}$ $\quad r_2 = r_3 = r$ $\quad r_4 = r - \frac{a}{2}\sqrt{2}$

$h_i = r_i$ $\quad V_i = \frac{\pi}{3} r_i^2 h_i = \frac{\pi}{3} r_i^3$ $(i = 1, \ldots, 4)$

$$\frac{V}{2} = \frac{\pi}{3}\left(\left(r + \frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^3 - r^3 - r^3 + \left(r - \frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^3\right) = \ldots = \pi r a^2$$
$V = 2\pi r a^2 = 720\ \pi\mathrm{cm}^3$

Bild 1



▲3▲ $V = \frac{1}{3}\pi h^2 c$

$V = \frac{1}{3}\pi p \cdot q \cdot c$ (Höhensatz)

$V = \frac{1}{3}\pi \frac{a^2}{c} \frac{b^2}{c} \cdot c$ (Kathetensatz)

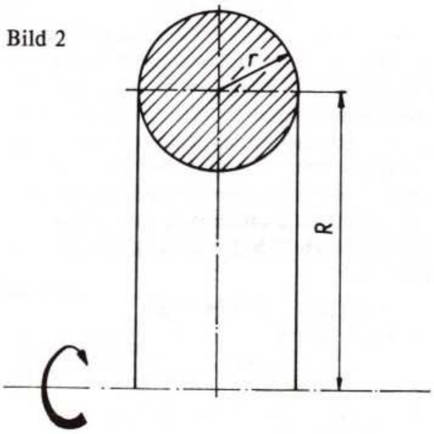
$V = \frac{1}{3}\pi \frac{a^2 b^2}{c}$

$$V=\frac{1}{3}\pi\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{(Satz des Pythagoras)}$$
$$V=\frac{1}{3}\pi\frac{1{,}5^2\,\mathrm{dm}^2\cdot 3{,}6^2\,\mathrm{dm}^2}{\sqrt{1{,}5^2+3{,}6^2\,\mathrm{dm}}}$$
$$\approx 7{,}8\,\mathrm{dm}^3$$

▲4▲ Das jeweilige Volumen (V_a im Fall a), V_b im Fall b) hängt ab vom Inhalt der rotierenden Fläche (in beiden Fällen derselbe!) und vom Abstand des Schwerpunktes dieser Fläche von der Rotationsachse. Letzterer ist im Fall a) größer als im Fall b).
Es ist also $V_a > V_b$.

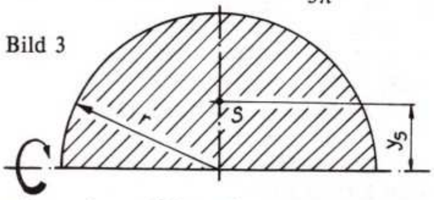
▲5▲ Mit den Bezeichnungen von Bild 2 gilt $V = r^2\pi \cdot 2\pi R = 2\pi^2 R r^2$.

Bild 2



▲6▲ Rotiert ein Halbkreis mit dem Radius r um seinen Durchmesser (Bild 3), so entsteht eine Kugel. Deren Volumen ist bekannt $\left(V=\frac{4}{3}\pi r^3\right)$, läßt sich aber auch nach der GULDINschen Regel berechnen:
$$V=\frac{1}{2}r^2\pi\cdot 2\pi y_s = \pi^2 r^2\cdot y_s.$$
Dabei ist y_s der Abstand des gesuchten Schwerpunktes S vom Durchmesser. Durch Gleichsetzen erhält man
$$y_s=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\pi^2 r^2}=\frac{4}{3}\,\frac{r}{\pi}.$$
Aus Symmetriegründen liegt S auf der Mittelsenkrechten des Durchmessers und hat von diesem den Abstand $\frac{4r}{3\pi}$.

Bild 3



▲7▲
$$\begin{array}{ll}
A_a = 1800\,\mathrm{mm}^2 & y_a = 85\,\mathrm{mm}\\
A_b = 1600\,\mathrm{mm}^2 & y_b = 110\,\mathrm{mm}\\
A_c = 3000\,\mathrm{mm}^2 & y_c = 145\,\mathrm{mm}\\
A_d = 600\,\mathrm{mm}^2 & y_d = 185\,\mathrm{mm}\\
A_e = 300\,\mathrm{mm}^2 & y_e = 130\,\mathrm{mm}\\
A_f = 300\,\mathrm{mm}^2 & y_f = 180\,\mathrm{mm}\\
\hline
A_{ges} = 7600\,\mathrm{mm}^2 &
\end{array}$$
$$A_a y_a + \ldots + A_f y_f = 968\,000\,\mathrm{mm}^3$$
$$968\,000\,\mathrm{mm}^3 = 7600\,\mathrm{mm}^2\cdot y_s$$
$$y_s = 127{,}4\,\mathrm{mm}$$
$$V = A_{ges}\cdot 2\pi y_s = 6\,083\,631\,\mathrm{mm}^3$$
$$\approx 6\,1000\,\mathrm{cm}^3$$
(Es fällt auf, daß zunächst durch A_{ges} dividiert wurde, um dann wieder damit zu multiplizieren. Man kann deshalb kürzer und weniger fehleranfällig rechnen
$V = 2\pi(A_a y_a + \ldots + A_f y_f)$
$= 2\pi\cdot 986\,000\,\mathrm{mm}^3 \approx 61\,000\,\mathrm{cm}^3$.)

▲8▲ 1: $A_o = 8\pi ar$ 2: $A_o = 8\pi ar$
3: $A_o = \pi h(a+b)$
(Der Schwerpunkt der rotierenden *Kurve* hat von der Rotationsachse den Abstand $\frac{h}{2}$.) 5: $A_o = 4\pi^2 rR$

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Ein Kunstgegenstand
Ein Kunstgegenstand hat die Form einer Glaskugel. In ihrem Inneren befindet sich ein Würfel, dessen 8 Eckpunkte diese Kugel berühren. Im Inneren des Würfels befindet sich eine zweite farbige Kugel, die die 6 Seitenflächen des Würfels berührt. In welchem Verhältnis stehen die beiden Kugelvolumen zueinander?
Lösung:

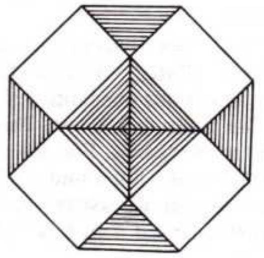
Volumen der großen Kugel: $V_1=\frac{\pi}{6}d_1^3$

Der Durchmesser d_1 der großen Kugel ist die Raumdiagonale des Würfels. Daraus errechnet sich die Kantenlänge a des Würfels, die ihrerseits gleich dem Durchmesser d_2 der kleinen Kugel ist.

$$d_1^2 = 3a^2 \rightarrow a = \frac{d_1^2}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,d_1 = d_2$$
Das Volumen der kleinen Kugel ist demnach: $V_2=\frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\,d_1\right)^3$
Das Verhältnis der Kugelvolumen:
$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{\pi}{6}d_1^3}{\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{27}3\sqrt{3}\,d_1^3}=\frac{1}{\frac{1}{9}\sqrt{3}}$$
$$=\frac{9}{\sqrt{3}}=9\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3}$$
Die beiden Kugelvolumen stehen im Verhältnis $\frac{V_1}{V_2}=\frac{3\sqrt{3}}{1}$.

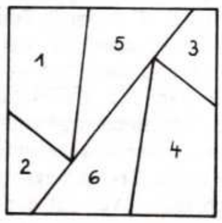
▲2▲ Scheinbar schwer, doch ganz einfach
Vereinfache folgenden Ausdruck und gib seinen Wert als eine Zahl im Zähler und eine im Nenner an.
Lösung: Der Faktor $(1\cdot 2\cdot 4)$ ist in jedem Summanden des Zählers enthalten, der Faktor $(1\cdot 3\cdot 9)$ in jedem Summanden des Nenners. Also gilt:
$$\frac{(1\cdot 2\cdot 4)\cdot(1+8+\ldots+343)}{(1\cdot 3\cdot 9)\cdot(1+8+\ldots+343)}$$
$$=\frac{1\cdot 2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 9}=\frac{8}{27}.$$

▲3▲ In einem regelmäßigen Achteck werden zwei parallele Diagonalen gezeichnet (siehe Bild). Beweist, daß der Flächeninhalt des so erhaltenen Rechtecks halb so groß ist wie der Flächeninhalt des Achtecks!
Lösung: Aufgrund der Symmetrieeigenschaften des regelmäßigen Achtecks kann dieses in 8 zueinander kongruente rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke und vier zueinander kongruente Rechtecke zerlegt werden (vgl. Figur). Da das in der Aufgabe dunkel gezeichnete Rechteck sich aus 4 solchen Teildreiecken und 2 solchen Teilrechtecken zusammensetzt, folgt die Behauptung der Aufgabe.



Lösung zu: Die Quadratur des gleichseitigen Dreiecks

Die Seite des Quadrates ist $\frac{5}{2}\sqrt[4]{3}$.



Lösung zur Schachecke

Weiß: Ke1, Tc2, Th1 – Schwarz: Ka1.
1. Kd2, 1. Ke2, 1. Kf2, 1. 0-0
(Rochade: König zieht von e1 nach g1 und der Turm von h1 nach f1).

Bemerkungen und Lösungen zu: Alphons' Traum

Ein eigenartiges Multiplikationsschema
Das eigenartige, uneingeschränkt anwendbare Multiplikationsverfahren beruht auf der Darstellung der Zahlen im Dualsystem. Wenn die (natürlichen) Zahlen Z und K zu multiplizieren sind, geht man von der Darstellung von Z mit Zweierpotenzen aus:
$$Z = c_o 2^0 + c_1 2^1 + \ldots + c_{n-1}2^{n-1} + c_n 2^n$$
$$c_i \in \{0;1\};\ c_n = 1$$
$$= c_o + c_1 2 + \ldots + c_{n-1}2^{n-1} + 2^n,$$
Für die Multiplikation wird zunächst der erste Term abgespalten
$Z\cdot K = c_o K + Z_1 K$
Wenn $c_o = 0$, ist Z gerade, der Wert rechts wird – wegen Geradzahligkeit links – nicht in die Addition einbezogen.
Bei $c_o = 1$ bleibt rechts K; bei der nachfolgenden Division durch 2 („Halbierung") entfällt dann der entstehende Rest, weil bereits in $1\cdot K$ berücksichtigt.
Addition auf der rechten Seite: $c_o K$
$Z_1 \cdot K$
$= 2K(c_1 + c_2 2 + \ldots + c_{n-1}2^{n-1} + 2^{n-1})$
wieder wird der erste Term abgespalten
$= c_1 2K + 2KZ_2$
Addition auf der rechten Seite: $c_1 2K$
$Z_2\cdot 2K = c_2 2^2 K + 2^2 K Z_3$
Addition auf der rechten Seite: $c_2 2^2 K$
Das Verfahren wird fortgesetzt (Halbierung, Abspalten) bis
$Z_n 2^{n-1} K = c_n 2^n K = 2^n K$

Addition auf der rechten Seite: $2^n K$
Die abgespaltenen Glieder rechts werden addiert, wobei bei $c_i = 0$ (gerade linke Seite) der Summand rechts entfällt. Es ergibt sich $Z \cdot K$.

Familienreise

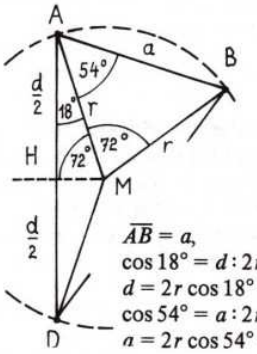
Für den Fahrer des Wagens gibt es zwei Möglichkeiten (Vater, Mutter), für den Fahrer des Motorrads ebenfalls 2 (Sohn 1, Sohn 2). Der Platz rechts vom Fahrer ist durch den Opa festgelegt. Für das eine Elternteil, den anderen Sohn und die Kusine bleiben die beiden Rücksitze im Wagen und der Soziussitz auf dem Krad. (Permutation $3! = 6$)
Gesamtzahl der Möglichkeiten:
$2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$, also 23 Wechsel sind erforderlich.

Problem

a) Von A aus gibt es 4 Möglichkeiten zu den Orten B, C, D, E. Vom 2. Punkt der Reise noch Verbindungen zu den restlichen 3 Punkten und von dort aus noch 2 Varianten. In den $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten sind aber alle doppelt gezählt (nämlich in einer und in der umgekehrten Richtung). Es bleiben 12 ,Traum'wege.
b) Der eingeschlagene Weg auf den Seiten des Fünfecks ist (abgesehen von der umgekehrten Aufeinanderfolge) der kürzeste und ist 5 $\overline{AB}$ lang. In jedem anderen Falle sind mindestens 2 Diagonalen zu durchlaufen, die je mit

$\frac{\overline{AB}}{2}(\sqrt{5}+1)$ oder $1{,}618\ \overline{AB}$

deutlich länger sind.



$\overline{AB} = a$,
$\cos 18° = d : 2r$
$d = 2r \cos 18° = 1{,}9021r$
$\cos 54° = a : 2r$
$a = 2r \cos 54° = 1{,}1756r$

$d : a = 1{,}9021 : 1{,}1756 = 1{,}618$
(Der $\cos 72°$ läßt sich nach dem Goldenen Schnitt beim Teildreieck des reg. Zehnecks bestimmen zu $0{,}25\,(\sqrt{5}-1)$

es folgt $d = \frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$,

$a = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ und $\frac{d}{a} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$

Lösung zur ALPHA-Tüftelei

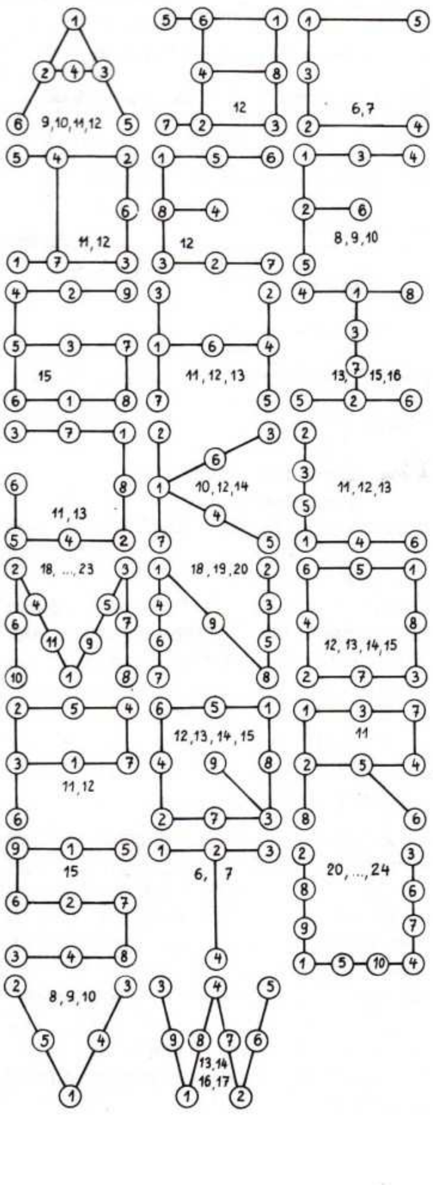
$a = 11$, $b = 21$, $c = 18$, $d = 24$, $e = 20$,
$f = 7$, $g = 5$, $h = 3$, $i = 23$, $j = 14$,
$k = 2$, $l = 4$, $m = 15$, $n = 13$, $o = 17$,
$p = 16$, $q = 6$, $r = 1$, $s = 10$, $t = 8$,
$u = 19$, $v = 12$, $w = 22$, $x = 9$

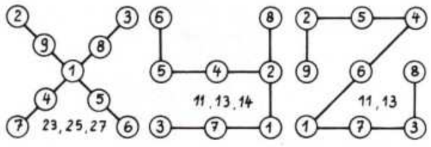
Lösungen zu: Kurz nachgedacht

1. Wegen $4\alpha = 180°$ gilt
$2\alpha = 90°$
2. Wegen $\alpha = \beta$ und $6 \cdot \beta = 180°$ gilt
$\alpha = 30°$
3. Wegen $4 \cdot \beta = 180°$ gilt $\beta = 45°$.
Aus der Umkehrung des Satzes über Wechselwinkel gilt $b \parallel c$.
4. Wegen $6\alpha = 180°$ gilt $3\alpha = 90°$,
also $\sphericalangle ACB = 90°$.
5. Lot von C auf AB, Fußpunkt E.
Wegen der allgemeinen Eigenschaft gleichseitiger Dreiecke gilt
$2 \cdot \overline{CE} = \overline{BC} = a$.
Damit $\overline{CE} = \frac{a}{2}$. Wegen $AD \parallel CE$ ist die Aussage begründet.
6. $\overline{AB} = 3a$.
7. Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle BCD$.
a) $\sphericalangle DBC = 15°$;
Umkehrung des Wechselwinkelsatzes.
b) $1:4$.
8. Siehe Lösung zu 5.! $\overline{AC} = 2c$.
Damit: $u = 8c$

Lösungen zu:
Magisches ALPHA-Alphabet

Man könnte jede Buchstaben-Figur auf die Gesamtheit aller Eintragungsmöglichkeiten hin untersuchen, das aber würde hier zu weit führen und zu umfangreich sein. Wir haben deshalb je Figur nur eine mögliche Eintragung angegeben, und zwar diejenige mit der kleinstmöglichen charakteristischen Summe.





Leserpost zur Leserpost

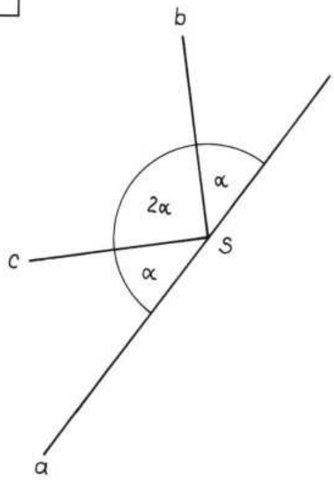
Kritik gab es seitens unserer Leser Hans-Dietrich Schwabe (Sondershausen), Rolf Kamieth (Leipzig) und Sven Peyer (Weimar) an der Leserpostaufgabe 5 in *alpha* Heft 6/90, Seite 139.
Stellvertretend sei aus der Einsendung von Hans-Dietrich Schwabe zitiert:
Um „alle positiven Wurzeln x und z" zu ermitteln, reichen weder die besten Mathematiker noch die aufwendigsten Computer aus, denn für x kann **jede** positive Zahl gewählt werden und zu dieser läßt sich eindeutig ein passendes z bestimmen. Gemeint ist wahrscheinlich die Bestimmung „der Menge aller geordneten Paare natürlicher Zahlen". Dann gingen dem Aufgabensteller jedoch 70 % der Lösungen durch die Lappen.

Die Gleichung $x^2 + 84^2 = z^2$
wird umgeformt:
$z^2 - x^2 = 84^2$
$(z-x)(z+x) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$
$(z-x) \mid 84^2$, $(z+x) \mid 84^2$, $(z-x) < (z+x)$,
$(z-x) < 84$.
Sei $(z-x)$ ungerade, so ist von x und z genau eine Zahl ungerade, daher ist auch $(z+x)$ ungerade und auch das Produkt $(z-x)(z+x)$.
Das steht im Widerspruch zu 84^2.
Sei $16 \mid (z-x)$. Dann ist $(z+x)$ ungerade und daher genau einer der Summanden ungerade und somit auch $(z-x)$, was im Widerspruch zur gemachten Voraussetzung steht.
$(z-x)$ enthält deshalb einen der Teiler 2, 4, 8.
Nunmehr können alle Zahlen, die für $(z-x)$ in Frage kommen, notiert werden und dazu kann dann das zugehörige $(z+x)$ bestimmt werden. Aus beiden kann dann durch Differenzbildung auf x und dann auf z geschlossen werden.

$(z-x)$	$(z+x)$
= 2, 4, 8	= 3528, 1764, 882
= 6, 12, 24	= 1176, 588, 294
= 18, 36, 72	= 392, 196, 98
= 14, 28, 56	= 504, 252, 126
= 42	= 168

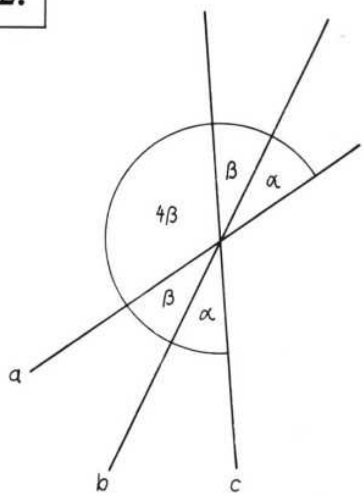
(In allen anderen Fällen würde $(z-x)$ nicht kleiner als 84.)
$(z+x) - (z-x)$
$= 2x = 3526, 1760, 874$
$= 1170, 576, 270$
$= 374, 160, 26$
$= 490, 224, 70$
$= 126.$
$x = 1763, 880, 437, 585, 288, 135, 187, 80, 13, 245, 112, 35, 63$
$z = 1765, 884, 445, 591, 300, 159, 205, 116, 85, 259, 140, 91, 105.$
Mit den jeweils untereinanderstehenden Zahlen sind damit alle 13 Paare bestimmt.

1.



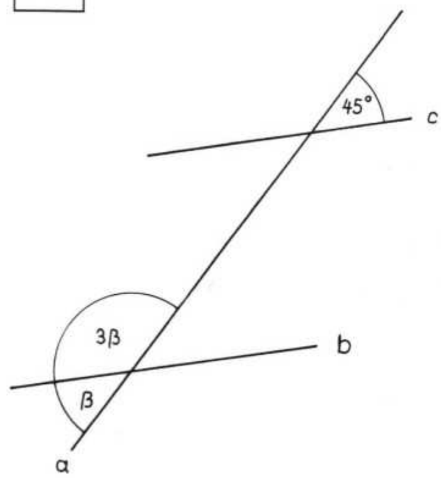
Begründe, daß $c \perp b$!

2.



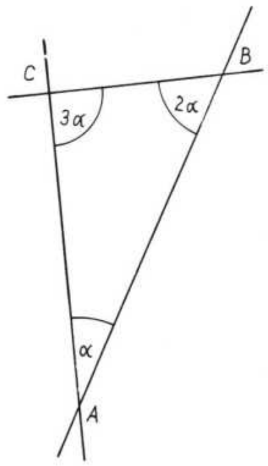
Wie groß ist α?

3.



Begründe, daß $b \parallel c$!

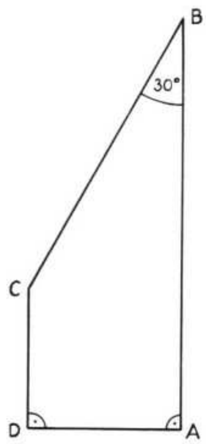
4.



Begründe, daß $AC \perp BC$!

Kurz nachgedacht

5.

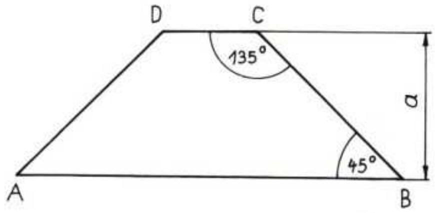


Begründe, daß $\overline{AD} = \overline{CD}$!

$\overline{BC} = a$

$\overline{CD} = \frac{a}{2}$

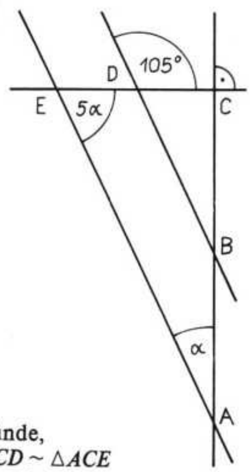
6.



Wie lang ist $\overline{AB}$?

$\overline{CD} = a$

7.

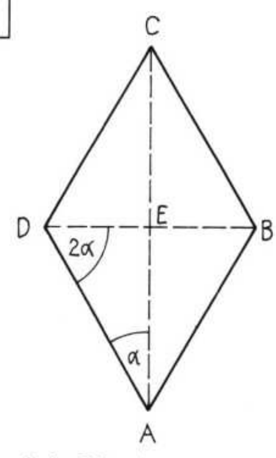


a) Begründe, daß $\triangle BCD \sim \triangle ACE$

b) $\overline{CD} = \overline{DE}$

Wie verhalten sich die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle BCD$ und $\triangle ACE$ zueinander?

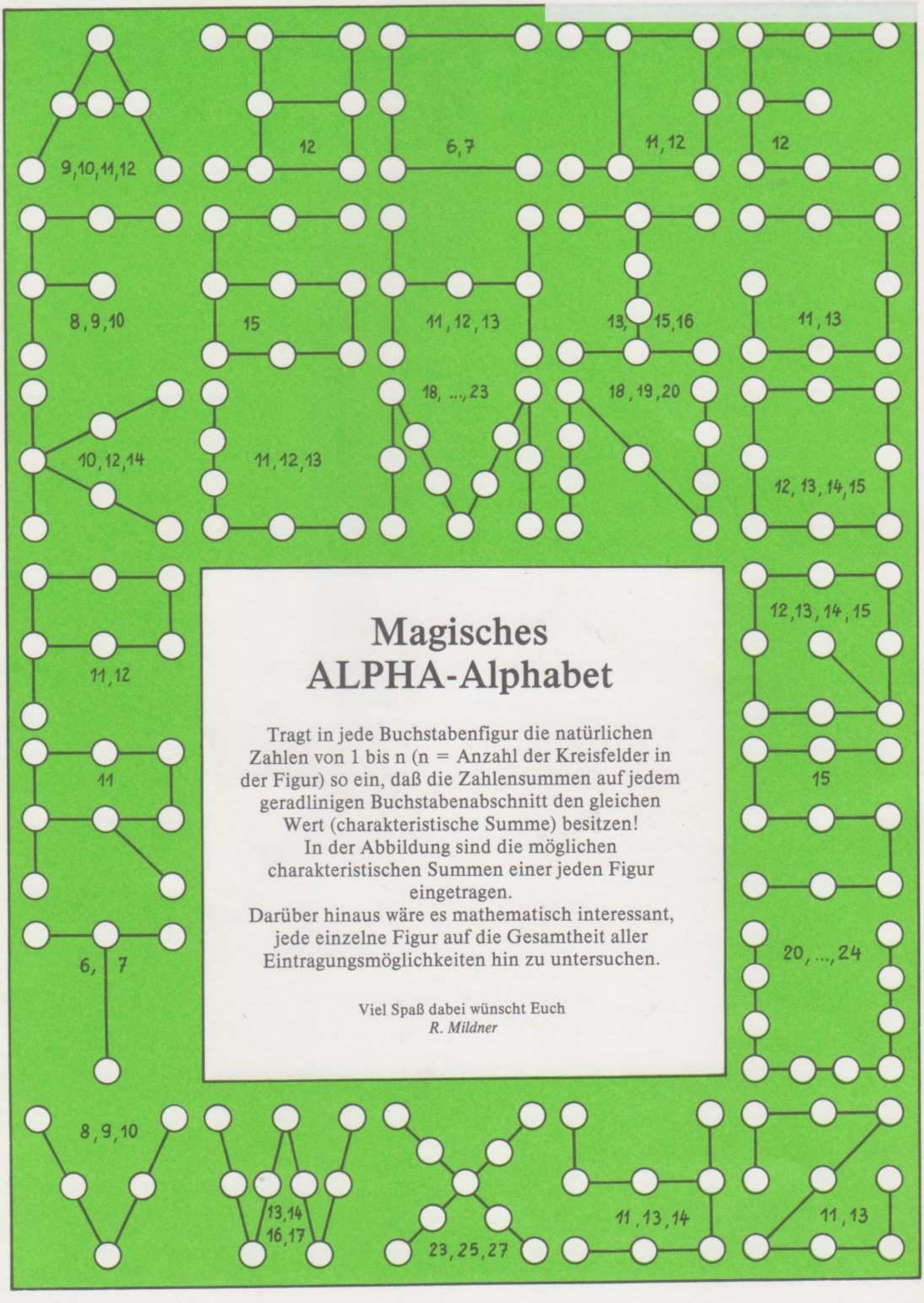
8.



ABCD sei ein Rhombus.

$\overline{DE} = c$

Gib den Umfang des Rhombus *ABCD* als Funktion von c an!



Magisches ALPHA-Alphabet

Tragt in jede Buchstabenfigur die natürlichen Zahlen von 1 bis n (n = Anzahl der Kreisfelder in der Figur) so ein, daß die Zahlensummen auf jedem geradlinigen Buchstabenabschnitt den gleichen Wert (charakteristische Summe) besitzen!
In der Abbildung sind die möglichen charakteristischen Summen einer jeden Figur eingetragen.
Darüber hinaus wäre es mathematisch interessant, jede einzelne Figur auf die Gesamtheit aller Eintragungsmöglichkeiten hin zu untersuchen.

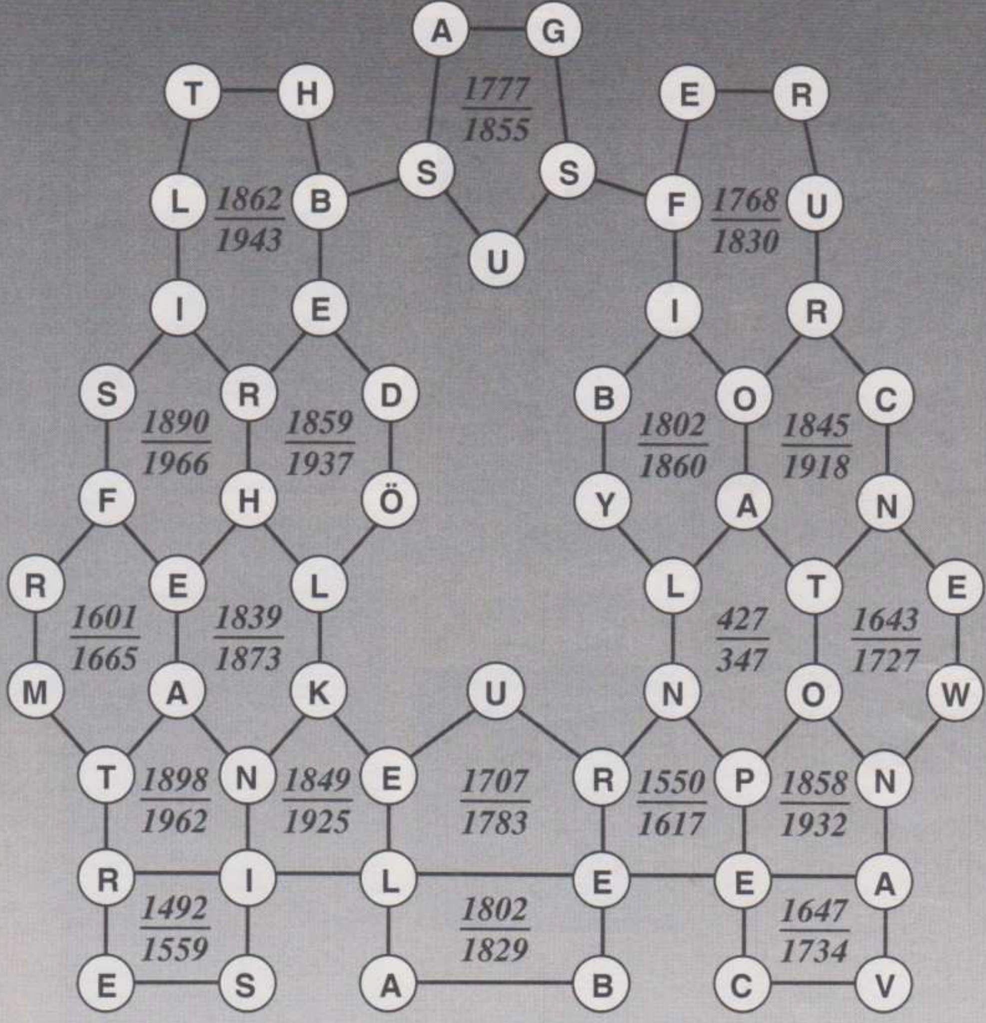
Viel Spaß dabei wünscht Euch
R. Mildner

H 11328 F

Heft 4
August 1991
25. Jahrgang

Fachzeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift



Wann lebte wer?

Bedeutende Mathematiker

Aus den Buchstaben in den Umrandungs-Polygonen kann man die den Lebensdaten zugeordneten Mathematikernamen bilden.

ABELsche Gruppe • ARTINsches Reziprozitätsgesetz • BOLYAI-Geometrie CANTORsches Diagonalverfahren • EULERsche Funktion • FERMATsche Primzahl • FISHERsche Verteilung • FOURIERreihe • GAUSS-Algorithmus HANKEL-Transformation • HILBERTraum • HÖLDERsche Ungleichung KLEINsche Vierergruppe • nach Adam RIES • NEPERsche Regel • NEWTON-Interpolation • PEANOsches Axiomensystem • PLATONischer Körper Satz von CEVA

alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett.

Redaktion:
Gabriele Liebau, Tel. (Leipzig) 58 18 54
Redaktionskollegium:
StR F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), OL Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. C. P. Helmholz (Leipzig), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OStR J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. W. Schmidt (Greifswald), OStR G. Schulze (Herzberg), W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

Anzeigenleitung:
Bernd Schrader
Anzeigenabwicklung:
Telefon (05 11) 4 00 04-23
Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01.01.1990
Vertrieb und Abonnement:
Telefon (05 11) 4 00 04-53
Verlag:
Erhard Friedrich Verlag
GmbH & Co. KG,
Postfach 10 01 50, 3016 Seelze 6
Telefon (05 11) 4 00 04-0
Telefax: 4 00 04-19
Das Jahresabonnement für alpha besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt DM 12,00, im Einzelbezug DM 2.50. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten.
Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).
alpha ist zu beziehen durch den Buch- und Zeitschriftenhandel oder direkt vom Verlag. Auslieferung in Österreich durch ÖBV Klett Cotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, CH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.

Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschrift im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.

Herstellung: Pädagogika Zentrale
Druck: Druckerei Schröer, Seelze

ISBN 3-617-34004-0

Inhalt

1. Teil

Von der Ähnlichkeit zur Selbstähnlichkeit

In den letzten zehn Jahren erlangte der Begriff des Fraktals in der Mathematik und der Physik eine immer größere Bedeutung. Das liegt unter anderem wesentlich an der stürmischen Entwicklung der Computertechnik. Wir wollen Euch in diesem Artikel mit einer speziellen Klasse von Fraktalen, den "Selbstähnlichen Mengen", bekannt machen. Gleichzeitig geben wir im zweiten Teil ein einfaches Basic-Programm für den KC 85/3 an, mit welchem Ihr selbständig solche Mengen erzeugen könnt.

In den Greifswalder Schulen wird jährlich in den Klassenstufen 3 bis 6 ein Wettstreit im Fach Mathematik um den "Pokal des Rektors der Ernst-Moritz-Arndt-Universität" ausgetragen. Eine Aufgabe für die Klasse 6 war 1988 die folgende:

Die Figur A aus **Abbildung 1** ist in vier kongruente Teile zu zerlegen.

Abbildung 2 zeigt die Lösung.

Die Figur A erhalten wir also als Zusammenfassung (Vereinigung) der Figuren A_1, A_2, A_3, A_4. Wir schreiben dafür $A=A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Die Figuren A_i, i=1,2,3,4, sind dabei untereinander und auch zur großen Figur ähnlich, d. h. je zwei solcher Figuren lassen sich durch eine Ähnlichkeitsabbildung ineinander überführen.

Wir erinnern daran, daß Ähnlichkeitsabbildungen Nacheinanderausführungen von Bewegungen und zentrischen Streckungen sind und fragen uns nun, welche Ähnlichkeitsabbildungen f_1, f_2, f_3, f_4 die Figur A in A_1, A_2, A_3 bzw. A_4 überführen. Dazu legen wir die Figur A geeignet in ein Koordinatensystem (**Abbildung 3**).

Die zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum $P_0(0;0)$ und dem Streckungsfaktor k=0,5 überführt A in A_1. Im folgenden wollen wir bei zentrischen Streckungen, deren Streckungsfaktor k echt kleiner als 1 ist, von zentrischen Stauchungen sprechen. A wird durch die zentrische Stauchung mit dem Zentrum $P_1(0{,}5;0{,}5)$ und dem gleichen Faktor k=0,5 auf A_2 abgebildet. Wir erhalten als Ähnlichkeitsabbildungen f_1 und f_2 die beiden zentrischen Stauchungen:

	Zentrum	Faktor
$\mathbf{f_1}$	P_0 (0;0)	0,5
$\mathbf{f_2}$	P_1 (0,5;0,5)	0,5

Die beiden Ähnlichkeitsabbildungen f_3 und f_4, die A in A_3 bzw. A_4 überführen, bekommen wir als Zusammensetzung von f_1 und einer Spiegelung an einer Geraden. Genauer: Um A auf A_3 abzubilden, führen wir erst die zentrische Streckung f_1 aus und danach eine Spiegelung an der Geraden, die parallel zur Abszissenachse durch den Punkt (0;0,5) verläuft. Diese Nacheinanderausführung ist unsere gesuchte Ähnlichkeitsabbildung f_3. Analog zu f_3 wird f_4 durch Nacheinanderausführung von f_1 und der Spiegelung an der Parallelen zur Ordinatenachse durch den Punkt (0,5;0) erhalten. Es ist dann $f_i(A)=A_i$ für i=1, ..., 4 und wir können die Gleichung

$A=A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$

auch in der Form

$A=f_1(A) \cup f_2(A) \cup f_3(A) \cup f_4(A)$

schreiben.

1. Aufgabe:

Ermittelt die Koordinaten des Zentrums der Ähnlichkeitsabbildungen f_3 und f_4.

A läßt sich also als Vereinigung von Teilen $f_i(A)=A_i$, i=1, ..., 4, darstellen, die alle wieder zu A ähnlich sind. Figuren, für die dies möglich ist, nennt man selbstähnlich. Für eine

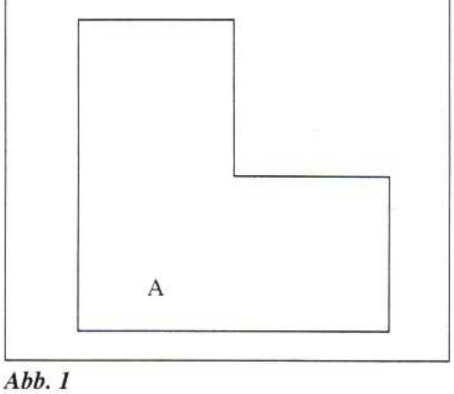


Abb. 1

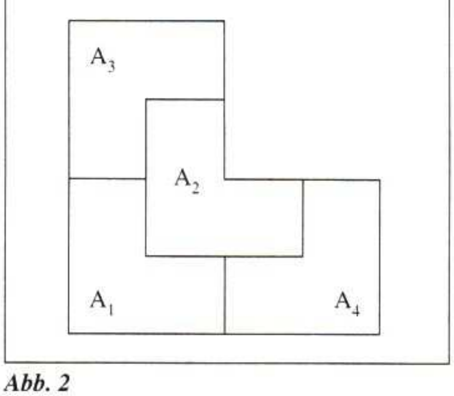


Abb. 2

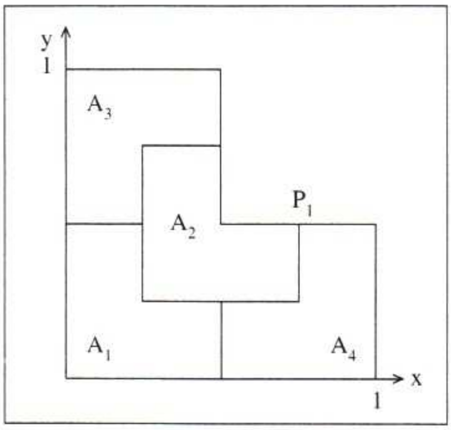


Abb. 3

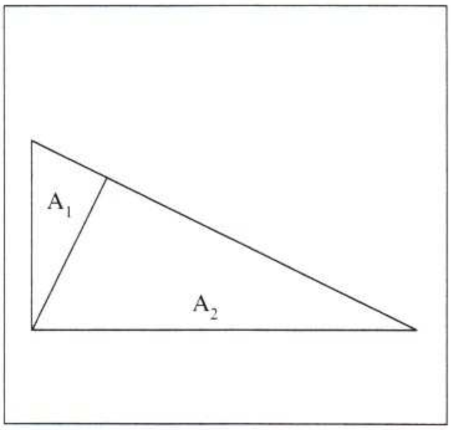


Abb. 4

exakte mathematische Definition einer selbstähnlichen Menge benötigen wir noch zwei Eigenschaften ebener Mengen. Wir nennen eine ebene Menge A beschränkt, wenn man um diese einen Kreis zeichnen kann, der die Menge ganz enthält. So ist z. B. ein Strahl im Gegensatz zu einer Strecke oder einem Quadrat nicht beschränkt. Eine ebene Menge A heißt abgeschlossene ebene Menge, wenn zu A auch der Rand von A gehört. Die Menge

$$A_1 = \{(x;y) \mid \quad 0 < x < 1 \text{ und } 0 < y < 1\}$$

ist nicht abgeschlossen, wohingegen die Menge

$$A_2 = \{(x;y) \mid \quad 0 \le x \le 1 \text{ und } 0 \le y \le 1\}$$

abgeschlossen ist.
Wir können nun den Begriff der selbstähnlichen Menge exakt definieren:
Definition: (selbstähnliche Menge)
Eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge A der Ebene heißt selbstähnliche Menge, wenn n,n $\in$ N, Ähnlichkeitsabbildungen f_1, ..., f_n deren Streckungsfaktoren alle kleiner als 1 sind derart existieren, daß $A=f_1(A)\cup...\cup f_n(A)$ ist.
Ein weiteres Beispiel für eine selbstähnliche Figur ist jedes rechtwinklige Dreieck (**Abbildung 4**).

2. Aufgabe:

Sucht weitere Beispiele für selbstähnliche Figuren. Wie sehen dabei die zur jeweiligen Figur ähnlichen Teile A_i und die Ähnlichkeitsabbildungen f_i aus?

Die Bilder 5 und 6 zeigen zwei selbstähnliche Mengen, die mit Hilfe des Kleincomputers KC 85/3 erzeugt wurden.
Sie zeigen die reizvolle Struktur selbstähnlicher Mengen. Zu jedem dieser beiden Beispiele gehören drei Ähnlichkeitsabbildungen f_1, f_2 und f_3, die sich als Nacheinanderausführung einer Drehung und einer zentrischen Stauchung ergeben. Dabei sind jeweils das Drehzentrum und das Stauchungszentrum gleich. In der Angabe

f_i : k ; w ; x ; y ;

sind k der Stauchungsfaktor,
w der Drehwinkel, $-360° \le w \le 360°$,
x die Abszisse des Stauchungszentrums,
y die Ordinate des Stauchungszentrums.

Im 2. Teil werden wir ein einfaches Basic-Programm für den KC 85/3 angeben, mit dem Ihr Euch eine Vielzahl solcher selbstähnlicher Figuren erzeugen könnt (**Abbildung 5**).

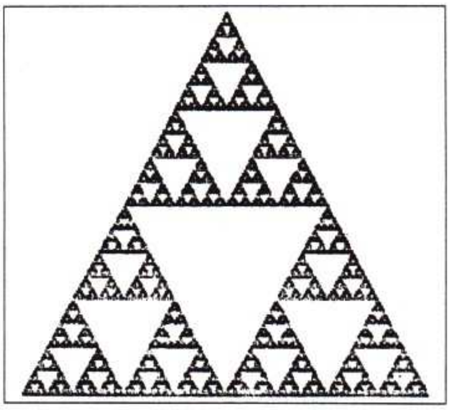


Abb. 5

f_1 : 0,5 ; 0° ; 0,0 ; 0,0
f_2 : 0,5 ; 0° ; 1,0 ; 0,0
f_3 : 0,5 ; 0° ; 0,5 ; 0,866
Grenzen: -0,5 ; 1,5 ; -0,25 ; 1,25

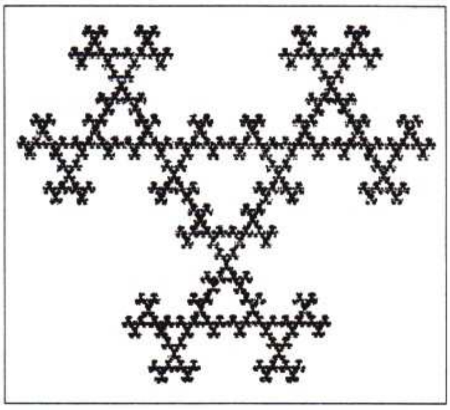
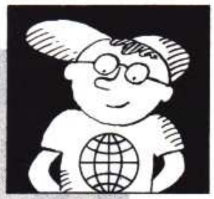


Abb. 6

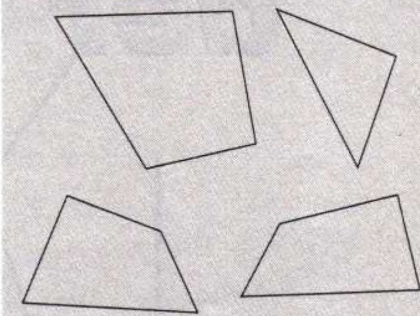
f_1 : 0,5 ; 300° ; 1,0 ; 0,0
f_2 : 0,5 ; 300° ; -0,5 ; 0,87
f_3 : 0,5 ; 300° ; -0,5 ; -0,87
Grenzen: -2,0 ; 2,0 ; -1,5 ; 1,5

Dr. Uwe Feiste, stud. math. E. Krause
Fachrichtungen Mathematik/Informatik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald



Cutting Polygons

1 The German mathematician David Hilbert proved a very interesting theorem: Any polygon can be changed into any other polygon of the same area by cutting the first polygon into a finite number of pieces which can then be arranged to form the second polygon.
Using Hilbert's approach, however, the number of pieces can be very large. To achieve the same results with a small number of pieces may be quite a challenge. The English inventor Henry Dudney has developed a beautiful way to cut an equilateral triangle into four pieces which can be put together to create a square. The drawing gives you the four pieces. Make a copy, cut them out, and put them together to form a square. Then rearrange the pieces to form an equilateral triangle.



aus: Fun with mathematics, Toronto

Les dix chiffres

2 Pour écrire en système décimal deux nombres A et B, leur somme S, et leur différence D, on a utilisé une fois et une seule chacun des chiffres de 0 à 9.
Trouver A et B, sachant que A est plus grand que B.

aus: Tangente, Paris

3 Судно "Альфа" пришвартовалось к причалу раньше, чем судно "Квант". Сможет ли оно и отплыть раньше, если при этом не снимать с тумбы швартовочный канат "Кванта" (см. рисунок)?

aus: Quant, Moskau

Die Symmetrie der Sechs-ecke

Dieser kleine Beitrag steht im Zusammenhang mit dem Artikel „Wie symmetrisch ist ein Vieleck?" in dieser Zeitschrift (Heft 3/91). Doch ist er auch für sich selbst verständlich.

Wir möchten eine vollständige und systematische Übersicht über die möglichen Symmetrien der Sechsecke geben und erhalten auf diese Weise auch eine gewisse Systematik der Sechsecke.

Zunächst erinnern wir an einige Symmetriebegriffe und -bezeichnungen:

Eine Gerade a ist eine Symmetrieachse einer Figur F, wenn die Spiegelung an a die Figur F auf sich abbildet.

Ein Punkt Z heißt Drehsymmetriezentrum m-ten Grades einer Figur F, wenn es (genau) m Drehungen um Z gibt, die die Figur F auf sich abbilden. (Die identische Abbildung ist dabei stets als mögliche Drehung mit dem Drehwinkel 0° mitzuzählen!) Ein Drehsymmetriezentrum 2. Grades entspricht demnach einfach dem Begriff Symmetriezentrum.

Symmetrien einer Figur werden einfach durch die Deckabbildungen erfaßt, und letztere heißen deshalb Symmetrieabbildungen. Ein Vieleck kann nur Geradenspiegelungen und Drehungen mit gemeinsamen Drehzentrum als Symmetrieabbildungen besitzen. Dabei liegt das Drehzentrum auf den Achsen der Geradenspiegelungen.

Im folgenden setzen wir ein konvexes Sechseck voraus.

a) Ein Sechseck kann höchstens 12 Symmetrieabbildungen besitzen. Es ist dann (und nur dann) regelmäßig und besitzt 6 Symmetrieachsen und ein Drehsymmetriezentrum 6ten Grades.

Jede geringere Anzahl von Symmetrieabbildungen muß ein Teiler von 12 sein.

b) Sechsecke mit genau 6 Symmetrieabbildungen sind die sogenannten halbsymmetrischen Sechsecke. Sie besitzen 3 Symmetrieachsen und ein Drehsymmetriezentrum 3ten Grades. Die Symmetrieachsen sind entweder die Mittelsenkrechten der Seiten oder die Winkelhalbierenden der Innenwinkel.

c) Ein Sechseck mit genau 4 Symmetrieabbildungen muß genau 2 Symmetrieachsen und ein Symmetriezentrum besitzen. Dabei ist eine Symmetrieachse Seitenmittelsenkrechte und die andere Winkelhalbierende.

d) Genau 3 Symmetrieabbildungen bestehen nur bei einem Sechseck mit nur einem Drehsymmetriezentrum 3ten Grades.

e) Genau 2 Symmetrieabbildungen liegen vor, wenn das Sechseck entweder nur eine Symmetrieachse oder nur ein Symmetriezentrum besitzt. Die Symmetrieachse kann entweder Seitenmittelsenkrechte oder Winkelhalbierende sein.

Eine nähere Einsicht über die Symmetriezusammenhänge gibt folgende Eigenschaft: Besitzt eine Figur zwei Symmetrieachsen a und b, die sich in einem Punkt Z schneiden, dann ist die Drehung um Z mit einem Drehwinkel, der doppelt so groß wie der von a und b eingeschlossene Winkel ist, eine Symmetrieabbildung der Figur.

Die nebenstehende grafische Übersicht faßt unsere Ergebnisse zusammen und berücksichtigt insbesondere logische Zusammenhänge:

Dr. Erhard Quaisser, Fachbereich Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Verblüffendes

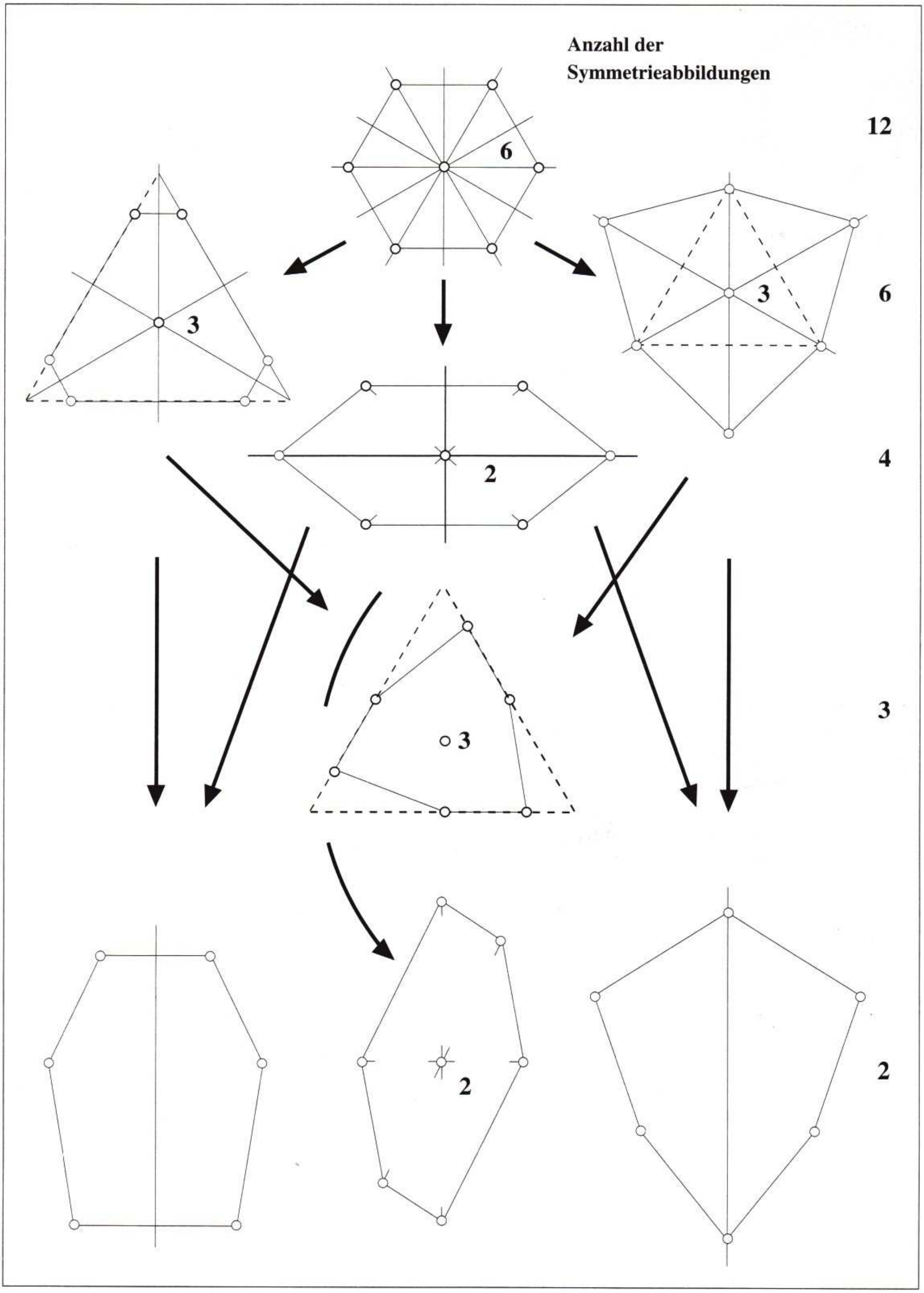
Man denke sich um den ca. 40000 km langen Erdäquator ein überall fest anliegendes Band gezogen. Nun wird dieses Band um einen Meter verlängert und daraufhin wieder so gestrafft, daß es einen zum Äquator konzentrischen Kreis bildet.

Wie hoch liegt das Band jetzt über der Erde? Kann eine Maus jetzt hindurchkriechen?

Fertig?

Nun führt doch einmal dieses Experiment an einem Fußball aus. Sein „Äquator" ist etwa einen Meter lang.

Wie hoch steht jetzt das wieder um einen Meter verlängerte Band über der Balloberfläche?


Anzahl der
Symmetrieabbildungen
12
6
6
3
3
4
2
3
3
2
2

2. Teil

Gemixtes aus: Wer übt, kommt weiter

Wer übt, kommt weiter ist nicht nur eine alte Weisheit, sondern auch der Titel eines mathematischen Übungsbuches, das im Sommer dieses Jahres erscheint (im Verlag Volk und Wissen GmbH Berlin). Wir hatten es bereits im Heft 3/91 vorgestellt und haben nun für „helle Köpfe" noch weitere Aufgaben herausgesucht. Na dann - viel Spaß!

1. a) Zeige, daß die folgenden Gleichungen wahre Aussagen sind!

(1) $\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$

(2) $\sqrt{5\frac{5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}}$

b) Gib weitere Beispiele für solch "wahre" Gleichungen an!
c) Unter welchen Voraussetzungen gilt die verwendete Gesetzmäßigkeit?

2. Forme die Gleichung nach x um!

$$\frac{1}{a+b} + \frac{a+b}{x} = \frac{1}{a-b} + \frac{a-b}{x}$$

($a \neq b$; $a \neq -b$; $x \neq 0$)

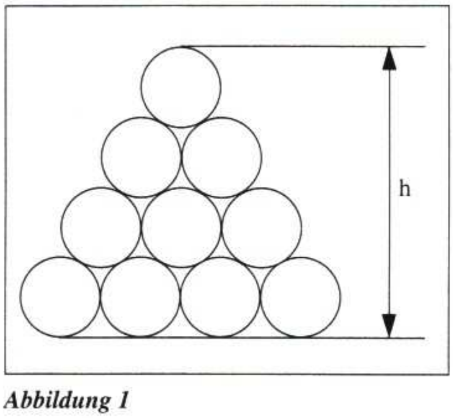


Abbildung 1

3. Berechne die Höhe h, wenn 10 Rohre mit dem Außendurchmesser d = 0,30 dm wie in der **Abbildung 1** gestapelt sind!

4. Vervollständige den Beweis!
Satz: Für alle $a, b, c, d \in Q$ und $b \neq 0$, $d \neq 0$ sowie $a \neq b$ und $c \neq d$ gilt, daß aus

$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ die Gleichung

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ folgt.

Voraussetzung: ...
Behauptung: ...
Beweis:

(1) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \quad |\cdot(a-b)\cdot(c-d)$

(2) ...

( ) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ w. z. b. w.

5. a) Zeichne einen Kreis und vier Tangenten so, daß diese sich schneiden und ein Viereck ABDC bilden!
b) Miß die Längen der Seiten dieses "Tangentenvierecks" und bilde die Summe der Längen gegenüberliegender Seiten. Was vermutest Du?
c) Ist die Vermutung allgemeingültig? (Beweis!)

6. Gegeben ist ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b. Über jeder Rechteckseite wird ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a bzw. b konstruiert. Gib Umfang und Flächeninhalt der so entstandenen Figur in Abhängigkeit von a und b an!

7. Es seien
a der absolute Betrag von -0,5;
b das Reziproke von 0,25;
c die entgegengesetzte Zahl von 2;
d die Quadratwurzel von $(-\frac{2}{3})^2$.
Ermittle $a^2 \cdot \sqrt{b} \cdot c \cdot \frac{1}{d}$!

8. Der Punkt T liegt auf einer Strecke $\overline{XY}$ und es gelte $\overline{XT} = k \cdot \overline{XY}$. Vervollständige die Tabelle!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
k	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{3}$				m:n	
$\overline{XT}:\overline{TY}$				1:2	2:7	2:3		p:q

9. Ermittle jeweils den Flächeninhalt der schraffierten Fläche!
(siehe **Abbildung 2**
auf der folgenden Seite!)

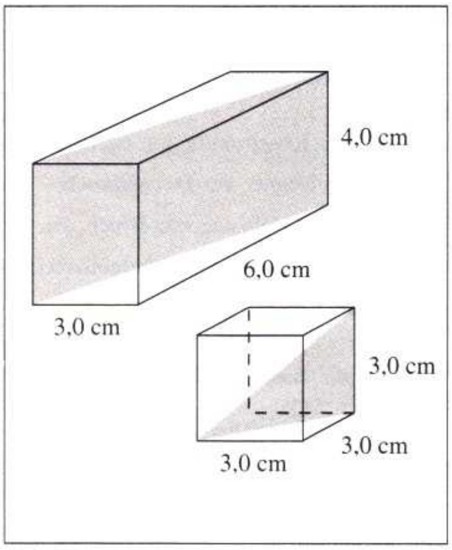


Abbildung 2

10. a) Konstruiere ein Trapez ABCD

($\overline{AD} \| \overline{BC}$) mit $\overline{AD} = 3{,}0$ cm, $\overline{BC} = 4{,}5$ cm,

$\sphericalangle$ CBD = 60°, $\sphericalangle$ BCD = 45°!

b) Konstruiere ein Trapez ABCD

($\overline{AD} \| \overline{BC}$) mit $\overline{AD} = 3{,}0$ cm, $\overline{BC} = 4{,}5$ cm,

$\sphericalangle$ BCA = 45°, $\sphericalangle$ CBD = 60°!

11. Beweise, daß der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks eine natürliche Zahl ist, wenn die drei Seitenlängen des Dreiecks natürliche Zahlen sind!

12. Wenn z eine beliebige zweistellige natürliche Zahl ist, und z' eine Zahl ist, die sich durch Vertauschen der Ziffernfolge von z ergibt (z. B. z = 18; z'=81), dann ist $|z - z'|$ stets durch 9 teilbar.

Beweise diese Behauptung!

13. Ermittle alle natürlichen Zahlen n von 0 bis 100, für die von den folgenden drei Aussagen zwei wahr und eine falsch ist!

(a) n ist eine Primzahl.
(b) n+1 ist eine Zahl, die auf Null endet.
(c) n-1 ist eine Quadratzahl.

14. Gib alle möglichen Anordnungen der vier Buchstaben b; e; o; r an! Dabei sollen genau diese vier Buchstaben ohne Wiederholung auftreten (z. B. rbeo). Schreibe sie in der Reihenfolge auf, wie sie im Wörterbuch stehen würden!

Dr. Lothar Flade, Dr. Manfred Pruzina, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Wie groß ist „alpha"?

Unsere mathematische Schülerzeitschrift erscheint ab jetzt im Friedrich-Verlag (Seelze bei Hannover), formal gilt damit

alpha $\subset$ Friedrich.

Ob die Gleichung

FRIED + RICH = ALPHA

Lösungen (im Sinne eines Kryptogrammes) besitzt, könnt Ihr bitte nachprüfen: Buchstaben sind durch Ziffern zu ersetzen (gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern), so daß die Additionsaufgabe

$$\begin{array}{r} \text{FRIED} \\ +\ \text{RICH} \\ \hline \text{ALPHA} \end{array}$$

gelöst wird. Die Buchstaben A, F und R sollen nicht Null werden.

Hier noch ein Tip von Computer-Alphons: Wollt Ihr zur Lösung des Kryptogramms einen Computer benutzen, so braucht Ihr nicht alle Zuordnungen der Ziffern 0,...,9 zu den Variablen A, C, D, E, F, H, I, L, P, R zu betrachten. Mit D und H ist nämlich A und F = A-1 festgelegt. Jeder Wert für E bestimmt C, mit I hat man auch P. Die Wahl von R zieht den Wert von L nach sich. Mögliche Überträge sind dabei zu berücksichtigen (if - then - Anweisungen). Zuordnungen, bei denen verschiedene Variable den gleichen Wert besitzen, sind auszuschließen. Man kommt somit mit fünf for - to - Schleifen für die Variablen D, H, E, I, R aus. Die Rechenzeit ist auch bei kleineren Computern gering.

Dr. Werner Schmidt, Fachrichtungen Mathematik/Informatik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

Alphons logische Abenteuer

Nr. 6

„Ach", schwärmte Alphons Schwester, "bei meiner Hochzeit werden alle staunen." Alphons unterbrach sie: "Alle? Auch die Eisbären am Nordpol?" Seine Schwester schaute ihn verdutzt an: "Natürlich meine ich nicht Tiere, sondern Menschen." "Also alle Menschen werden staunen, auch Adam und Eva?" fragte Alphons. Nachdem sich seine Schwester vergewissert hatte, daß auch Alphons die biblischen Wesen meinte, an die sie dachte, sagte sie schon etwas gereizter: "Es können mich dann nur lebende Menschen sehen." Alphons ließ nicht lokker: "Wenn nicht das Fernsehen kommt auch die in Australien?" Da wurde Alphons Schwester wütend: "Alle, die mich sehen!" "Na ja", meinte Alphons freundlich, "das werden aber im Vergleich zu den zu Deiner Hochzeit lebenden Menschen herzlich wenige sein, lohnt sich denn da der Aufwand?" Das könne ihm doch egal sein, und außerdem sei ihr sowieso die Lust am Heiraten vergangen. "Siehst Du, die Wahrheit bewahrt vor Illusionen." "Welche Wahrheit denn?" fragte seine Schwester aufgebracht. "Einfach die, daß bei Aussagen, in denen von allen, einigen, einem oder jeden etwas behauptet wird, der Bereich von Gegenständen angegeben werden muß, über den man dabei behauptet. Wenn Du z. B. behauptest: Für alle Zahlen a, b mit a-b=1 gibt es genau eine Zahl, die zwischen b und a liegt, so ist diese Aussage bezogen auf den Bereich der natürlichen Zahlen wahr, für den Bereich der rationalen oder dem der reellen Zahlen aber ist sie falsch. Ohne Bereichsangabe ist diese Aussage zugleich wahr und falsch, und damit kann sie nicht Prämisse eines logischen Schlusses sein." Alphons wollte das noch seiner Schwester erklären, aber da betrat ihre Mutter die Wohnung.

Seine Schwester hatte schon ganz sehnsüchtig auf sie gewartet, denn die Mutter hatte ihr versprochen, eine bestimmte Art von Zeichenstiften mitzubringen. Die Mutter schüttelte bedauernd den Kopf und sagte. "In allen Geschäften gibt es keine." "Oh, Mutti, sage das nicht so. Unser Alphons wird Dir entgegenhalten: In allen Geschäften, in denen Du nach ihnen gefragt hast, gibt es die von mir gewünschten Zeichenstifte nicht. Du wirst ja nicht in allen Geschäften der Stadt, der Welt oder wo sonst noch gewesen sein." "Kinder", seufzte darauf die Mutter, "da laufe ich mir die Füße wund und ihr verlangt, daß ich gar noch durch die ganze Welt renne! So wichtig sind die Zeichenstifte doch auch nicht." Alphons dachte, daß seine Mutter meint in allen jenen Geschäften der Straße gewesen zu sein, die ihres Wissens nach Zeichenartikel führen, und das wird wohl nicht jedes Geschäft der Straße tun. Immerhin - und er streichelte bewundernd seiner Mutter über die Hände - kommen der Länge der Straße und der Kürze der Zeit nach allerhand Geschäfte in Betracht.

Prof. Dr. Lothar Kreiser, Institut für allgemeine Logik der Universität Leipzig

Was Brüche mit Musik zu tun haben

Für die Betrachtungen zu Schönberg`s Musiktheorie (siehe Seite 11) benötigt Ihr Kenntnisse über Kettenbrüche.
Dieser Beitrag ist für diejenigen von Euch gedacht, die auf diesem Gebiet Neulinge sind oder die ganze Sache einfach nochmal auffrischen wollen.

Jeder Leser unserer Zeitschrift weiß, was ein *Doppelbruch* ist - in dessen Zähler und/oder Nenner stehen erneut Brüche wie zum Beispiel

bei $\frac{2}{\frac{5}{3}}$, $\frac{\frac{4}{7}}{3}$, $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}$.

Wenn man solche Doppelbrüche aufschreibt, sollte man den „Hauptbruchstrich" kennzeichnen, denn natürlich ist z.B.

$\frac{2}{\frac{5}{3}} = \frac{3\cdot 2}{5} = \frac{6}{5}$ verschieden von $\frac{\frac{2}{5}}{3} = \frac{2}{3\cdot 5} = \frac{2}{15}$.

Nun könntet Ihr einwenden, daß man auf Doppelbrüche überhaupt verzichten kann, denn nach den Regeln für die Division von Brüchen läßt sich jeder solche Doppelbruch in einen "einfachen" Bruch der Gestalt $\frac{a}{b}$ (a,b ganzzahlig) verwandeln.
Jedoch erweisen sich sogar noch kompliziertere Bildungen als Doppelbrüche als außerordentlich nützlich zur Lösung recht unterschiedlicher Probleme, etwa zu Schönbergs Musiktheorie, wie Ihr in einem anderen Artikel dieses Heftes erfahrt.

Auch mit Kettenbrüchen keine Bruchlandung

Zunächst wollen wir uns überlegen, daß man jeden Bruch so umformen kann wie wir es am Beispiel des Bruches $\frac{59}{11}$ vormachen.
Dieser unechte Bruch kann zerlegt werden in einen ganzzahligen Anteil und einen echten Bruch:

$\frac{59}{11} = 5 + \frac{4}{11}$. Nun können wir $\frac{4}{11}$ als Doppelbruch mit dem Zähler 1 schreiben: $\frac{4}{11} = \frac{1}{\frac{11}{4}}$

Da $\frac{4}{11}$ nach Konstruktion ein echter Bruch ist, steht im Nenner des Doppelbruches mit $\frac{11}{4}$ zwangsläufig ein unechter Bruch, den wir erneut in seinen ganzen Anteil und einen echten Bruch verwandeln: $\frac{59}{11} = 5 + \frac{1}{\frac{11}{4}} = 5 + \frac{1}{2+\frac{3}{4}}$

Wenden wir diese Überlegung nun auf den Bruch $\frac{3}{4}$ an, so erhalten wir weiter:

$$\frac{59}{11} = 5 + \frac{1}{2+\frac{3}{4}} = 5 + \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{4}{3}}} = 5 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$$

Beim Versuch, dieses Verfahren fortzusetzen, erhält man nun immer wieder denselben Ausdruck. Damit haben wir den Bruch $\frac{59}{11}$ als „Mehrfachbruch" aus lauter Brüchen mit Zähler 1 „zusammengesetzt".

1. Aufgabe

Forme $\frac{62}{43}$ in dieser Weise in einen „Mehrfachbruch" um!

Offenbar können wir bei jedem Bruch $\frac{a}{b}$ so vorgehen, man braucht dazu nur fortlaufend die *Division mit Rest* anzuwenden (siehe **Tabelle 1**).
Wir erkennen:
1. Das Verfahren ist beendet, wenn erstmalig der Rest Null entsteht. Dies aber tritt stets nach endlich vielen Schritten ein, denn $r_1, r_2, r_3, \ldots$ ist eine echt abnehmende Folge nichtnegativer ganzer Zahlen, d.h., für ein gewisses n muß schließlich $r_{n+1} = 0$ sein. In obigem Zahlenbeispiel ist $n = 3$, also $r_4 = 0$.
2. Mit q_0 erhält man den ganzen Anteil des Bruches $\frac{a}{b}$, und die folgenden Werte q_i ($i = 1,2,\ldots,n$) ergeben fortlaufend die *Teilnenner* des „Mehrfachbruches". Formen wir nämlich alle obenstehenden Gleichungen so um wie hier für die erste von ihnen vorgemacht: $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}$

und setzen dies ineinander ein, so erhalten wir:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\ddots\, q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}}$$

Ein derartiger "Mehrfachbruch" heißt *Kettenbruch*, genauer *regelmäßiger Kettenbruch*, wenn man besonders betonen will, daß seine *Teilzähler* sämtlich gleich 1 sind. Jede rationale Zahl läßt sich demnach eindeutig als regelmäßiger Kettenbruch darstellen. Da die Teil-

allgemein		für a = 59, b = 11
$a = q_0 b + r_1$	mit $0 < r_1 < b$	$59 = 5 \cdot 11 + 4$
$b = q_1 r_1 + r_2$	mit $0 < r_2 < r_1$	$11 = 2 \cdot 4 + 3$
$r_1 = q_2 r_2 + r_3$	mit $0 < r_3 < r_2$	$4 = 1 \cdot 3 + 1$
$r_2 = q_3 r_3 + r_4$	mit $0 < r_4 < r_3$	$3 = 3 \cdot 1 + 0$
...		
$r_{n-2} = q_{n-1} r_{n-1} + r_n$	mit $0 < r_n < r_{n-1}$	
$r_{n-1} = q_n r_n + 0$		

Tabelle 1

zähler alle gleich 1 sind, genügt es, den ganzen Anteil q_0 und die Folge (q_i) der *Teilnenner* anzugeben, und man schreibt dies kurz so: $\frac{a}{b} = [q_0; q_1, q_2, \dots q_n]$; im Zahlenbeispiel $\frac{59}{11} = [5; 2, 1, 3]$.

Da offenbar stets $[q_0; q_1, \dots q_{n-1}, q_n, 1] = [q_0; q_1, \dots q_{n-1}, q_n + 1]$ (im Beispiel $[5; 2, 1, 2, 1] = [5; 2, 1, 3]$) ist, fordern wir der Eindeutigkeit der Darstellung zuliebe noch, daß der letzte Teilnenner eines Kettenbruches stets größer als 1 sein soll.

Umgekehrt entspricht jedem derartigen Kettenbruch eine rationale Zahl; wir brauchen dazu lediglich den Kettenbruch nach den Regeln der Bruchrechnung unter Beachtung der „Rangfolge der Bruchstriche" umzuformen.

2. Aufgabe

Welcher gemeine Bruch wird durch den Kettenbruch [0; 1, 3, 5, 5, 4] dargestellt?

Huygens baut ein Planetenmodell

Der holländische Mathematiker und Physiker Christian Huygens (1629-1695) wollte ein möglichst genau gehendes mechanisches Modell unseres Sonnensystems bauen: Eine Kurbel oder ein Uhrwerk bewegt die auf konzentrischen Kreisen um die Sonne als Mittelpunkt angeordneten Planeten. Damit dieses Zahnradmodell "möglichst genau" geht, muß das Übersetzungsverhältnis von ineinandergreifenden Zahnrädern dem Verhältnis der Sonnenumlaufzeiten der durch sie bewegten Planeten entsprechen. Jedoch ist es technisch unmöglich, relativ kleine Zahnräder mit beispielsweise 500 oder mehr Zähnen zu versehen. So entsteht das Problem, einen gegebenen Bruch, dessen Zähler und Nenner "große" Zahlen sind, durch einen Bruch mit möglichst kleinem Zähler und kleinem Nenner möglichst genau anzunähern.

Nehmen wir beispielsweise das Verhältnis $\frac{115}{151}$. Vor die Aufgabe gestellt, Näherungswerte für diesen Bruch anzugeben, wird man bei naivem Vorgehen zur Dezimalbruchdarstellung 0,761589... übergehen und diese nach der – sagen wir – zweiten Dezimalstelle abbrechen: $0{,}76 = \frac{76}{100}$. Obwohl der Nenner mit 100 wohl noch immer zu groß sein wird, muß man bereits einen Fehler von etwa 0,0016 in Kauf nehmen. Erstaunlicherweise liefert ein Bruch mit viel kleinerem Nenner, nämlich $\frac{16}{21}$, sogar eine bessere Näherung, denn $\frac{16}{21} = 0{,}7619\dots$ Bricht man den obigen Dezimalbruch bereits nach der ersten Stelle ab, nimmt also $0{,}7 = \frac{7}{10}$, so ist der Fehler etwa 0,062, und auch hier findet man in $\frac{3}{4} = 0{,}75$ einen besseren Konkurrenten mit noch kleinerem Nenner. Wie aber findet man diese vorzüglichen Näherungsbrüche?

Dazu entwickeln wir $\frac{115}{151}$ in seinen Kettenbruch [0; 1,3,5,7], was der Leser überprüfen möge. Genau wie bei der Dezimalbruchdarstellung spricht man von einem *Näherungsbruch* (oder *Teilbruch*) des obigen Kettenbruchs, wenn man ihn nach einer gewissen Stellenanzahl vorzeitig abbricht, etwa [0; 1,3,5] oder [0;1,3]. Die nächste Aufgabe liefert nun des Rätsels Lösung.

3. Aufgabe

Welche rationalen Zahlen gehören zu obigen Näherungsbrüchen?

Ist allgemein $\frac{a}{b} = [q_0; q_1, q_2, \dots q_n]$; so nennt man den nach k Stellen abgebrochenen Kettenbruch $[q_0; q_1, \dots q_k] = \frac{s_k}{t_k}$ den *Näherungsbruch der Ordnung k* von $[q_0; q_1, \dots, q_n]$. Man kann zeigen:

1. Die Näherungsbrüche $\frac{s_{2k}}{t_{2k}}$ gerader Ordnung sind sämtlich kleiner als $\frac{a}{b}$ und nehmen mit wachsenden k zu.

2. Die Näherungsbrüche $\frac{s_{2k+1}}{t_{2k+1}}$ ungerader Ordnung sind sämtlich größer als $\frac{a}{b}$ und nehmen mit wachsenden k ab.

3. Sieht man z.B. $\frac{s_k}{t_k}$ als Näherungswert von $\frac{a}{b}$ an, so ist der Fehler kleiner als $\frac{1}{t_k \cdot t_{k+1}}$ und unter allen Brüchen, deren Nenner nicht größer ist als t_k, stellt keiner eine bessere Näherung für $\frac{a}{b}$ dar.

4. Aufgabe

Gib den besten Näherungswert von $\frac{725}{318}$ an, dessen Nenner kleiner als 26 ist.

Archimedes' Treffsicherheit:

Ob wir wohl mit dieser Methode auch Näherungswerte für irrationale Zahlen wie etwa $\sqrt{15}$ oder π finden können? Freilich müßten wir dazu jene Zahlen erst einmal in Kettenbrüche entwickeln, und diese können gewiß nicht endlich sein, denn jeder solche stellt bekanntlich eine rationale Zahl dar.

Wir spalten von $\sqrt{15}$ zunächst – wie bei den Brüchen – den „ganzen Anteil" ab: Wegen $3^2 < 15 < 4^2$ ist $\sqrt{15} = 3 + r_1$ mit $0 < r_1 < 1$ oder $\sqrt{15} = 3 + \frac{1}{\rho_1}$ mit $\rho_1 < 1$, mithin

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{15} - 3} = \frac{\sqrt{15} + 3}{\left(\sqrt{15} - 3\right)\left(\sqrt{15} + 3\right)} = \frac{\sqrt{15} + 3}{6}$$

Wegen $1 < \rho_1 < 2$ machen wir nun den Ansatz $\frac{\sqrt{15} + 3}{6} = \rho_1 = 1 + \frac{1}{\rho_2}$ woraus sich

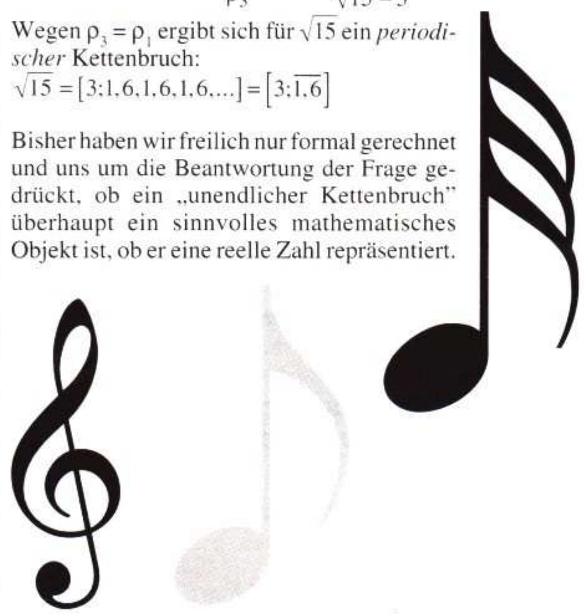
$$\rho_2 = \frac{6}{\sqrt{15} - 3} = \frac{6\left(\sqrt{15} + 3\right)}{6} = \sqrt{15} + 3 \text{ ergibt.}$$

Im nächsten Schritt folgt aus $6 < \rho_2 < 7$ und dem Ansatz $\rho_2 = 6 + \frac{1}{\rho_3}$: $\rho_3 = \frac{1}{\sqrt{15} - 3} = \rho_1$

Wegen $\rho_3 = \rho_1$ ergibt sich für $\sqrt{15}$ ein *periodischer* Kettenbruch:

$\sqrt{15} = [3; 1, 6, 1, 6, 1, 6, \dots] = [3; \overline{1, 6}]$

Bisher haben wir freilich nur formal gerechnet und uns um die Beantwortung der Frage gedrückt, ob ein „unendlicher Kettenbruch" überhaupt ein sinnvolles mathematisches Objekt ist, ob er eine reelle Zahl repräsentiert.



Um sich von diesen Zweifeln zu befreien, betrachtet man die Näherungsbrüche eines unendlichen Kettenbruches (deren Anzahl ist unendlich, aber jeder von ihnen ist ein endlicher Kettenbruch!). Für diese Näherungsbrüche gilt ähnlich wie oben:

1. Die Näherungsbrüche $\frac{s_{2k}}{t_{2k}}$ gerader Ordnung nehmen mit wachsendem k zu und sind sämtlich kleiner als $\frac{s_1}{t_1}$.

2. Die Näherungsbrüche $\frac{s_{2k+1}}{t_{2k+1}}$ ungerader Ordnung nehmen mit wachsendem k ab und sind sämtlich größer als $\frac{s_2}{t_2}$.

3. Der Abstand zweier aufeinanderfolgender Näherungsbrüche ist:

$$\frac{s_{2k+1}}{t_{2k+1}} - \frac{s_{2k}}{t_{2k}} = \frac{1}{t_{2k+1}t_{2k}}$$

Bilden wir nun die Folge der Intervalle $\left(\frac{s_{2k}}{t_{2k}}, \frac{s_{2k+1}}{t_{2k+1}}\right)$, so ist wegen **1.** bis **3.** jedes dieser Intervalle im vorangegangenen enthalten, und überdies wird die Intervall-Länge wegen **3.** schließlich „beliebig klein". Mithin liegt hier eine sog. *Intervallschachtelung* vor, die auf der Zahlengeraden genau eine reelle Zahl erfaßt.

Dieses Ergebnis macht uns kühn, und der Leser entwickelt die berühmte Kreiszahl π, ausgehend von den ersten Stellen ihrer Dezimalbruchdarstellung $\pi = 3{,}14159265$ ..., nach obiger Methode leicht in einen Kettenbruch, von dem wir allerdings nur einige Stellen angeben können: $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, \ldots]$. Berechnet man davon den Näherungsbruch erster Ordnung [3; 7], so erhält man den wohlbekannten, von Archimedes gefundenen Näherungswert $\frac{22}{7}$ für π. Die Theorie der Kettenbrüche lehrt außerdem, daß es unter den Brüchen mit einem 7 nicht übersteigenden Nenner keinen gibt, der einen besseren Näherungswert für π liefert als $\frac{22}{7}$. Archimedes hat also – ohne die Theorie der Kettenbrüche zu kennen – ins Schwarze getroffen!

Nachschlag für Neugierige

Die Eigenschaften **1.** bis **3.** für Näherungsbrüche eines unendlichen Kettenbruches $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ haben wir oben "aus dem Ärmel gezogen". Hier nun einige Tips für jene Leser, die diese Eigenschaften beweisen wollen:

a) Die beiden ersten Näherungsbrüche kann man unmittelbar ausrechnen und erhält für ihre Zähler $s_0 = a_0$, $s_1 = a_0a_1 + 1$, für die Nenner $t_0 = 1$, $t_1 = a_1$. Sodann kann man mit Hilfe der *vollständigen Induktion* für Zähler s_k und Nenner t_k des k-ten Näherungsbruches ($k \geq 2$) *ein rekursives Bildungsgesetz* beweisen:

$$s_k = a_k s_{k-1} + s_{k-2} \qquad t_k = a_k t_{k-1} + t_{k-2}$$

b) Daraus folgt leicht für alle $k \geq 1$:

$$\Delta_k = s_k t_{k-1} - t_k s_{k-1} = (-1)^k$$

c) Aus b) entnimmt man unmittelbar, daß

$$\frac{s_{k+1}}{t_{k+1}} - \frac{s_k}{t_k} = \frac{(-1)^k}{t_{k+1}t_k}$$

(woraus sofort Eigenschaft 3 folgt)

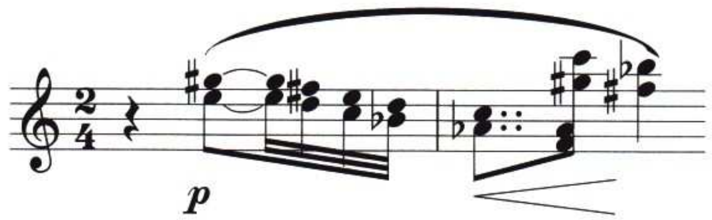
$$\frac{s_{k+2}}{t_{k+2}} - \frac{s_k}{t_k} = \left(\frac{s_{k+2}}{t_{k+2}} - \frac{s_{k+1}}{t_{k+1}}\right) + \left(\frac{s_{k+1}}{t_{k+1}} - \frac{s_k}{t_k}\right) = \frac{(-1)^k a_{k+2}}{t_{k+2}t_k}$$

woraus man durch spezielle Wahl von k die Eigenschaften 1 und 2 folgert.

Überdies spiegelt die Kettenbruch-Darstellung einer reellen Zahl deren „Natur" viel besser als ihre Dezimalbruchdarstellung. In der Schule lernen wir: "Einem endlichen Dezimalbruch entspricht eine rationale Zahl, *aber nicht umgekehrt* (vgl. z.B. $\frac{2}{3} = 0{,}66\bar{6}\ldots$)." Für die Kettenbruch-Darstellung aber gilt: Eine reelle Zahl ist genau dann rational, wenn ihre Kettenbruch-Darstellung endlich ist. Periodische Kettenbruch-Darstellungen ergeben sich genau dannn, wenn es sich um eine sog. *quadratische Irrationalität* handelt, also um eine Zahl, die mit Hilfe der vier Grundrechenarten aus rationalen Zahlen und Quadratwurzeln zusammengesetzt ist.

Mit Hilfe der Kettenbruch-Darstellung lassen sich sogar Eigenschaften angeben, die nur den transzendenten Zahlen (wie z.B. π oder e), nicht aber den algebraischen Zahlen zukommen. Leider gestattet dies jedoch nicht, im Einzelfall zu entscheiden, ob eine Zahl algebraisch oder transzendent ist.

Herbert Kästner, Sektion Mathematik der Universität Leipzig



Aus mathematischer Sicht betrachtet:

Zu Schönberg`s Musiktheorie

Der Versuch, den Unterschied zwischen natürlicher und Tastaturstimmung geringer zu halten als dies durch das wohltemperierte Klavier erreicht werden kann, ist im Jahre 1911 von Arnold Schönberg in seiner „Harmonielehre" in Form der 53-Tonmusik unternommen worden. Wir wollen hier den dort nur verbal vorgenommenen Begründungen eine mathematische Herleitung unterlegen. [1]

Auch ein musikalischer Laie hat ein Gefühl dafür, ob Musik harmonisch ist: sie wirkt einfach angenehmer, beruhigender. Physikalisch läßt sich ein Ton neben der Lautstärke (die hier nicht diskutiert werden soll) durch seine Höhe beschreiben, und ein Klang (Akkord) durch die Höhen der dabei zusammenklingenden Töne. Die Tonhöhe hängt mit der Frequenz der zugehörigen Schallwelle wie folgt zusammen: Je höher der Ton, desto höher die Frequenz. Und ein harmonisch klingender Akkord stellt eine Resonanz der darin klingenden Töne dar. Diese Resonanz ist besonders dann ausgeprägt, wenn die Verhältnisse der Frequenzen der Töne zueinander kleine natürliche Zahlen oder zumindest rationale Zahlen mit kleinem natürlichen Zähler und Nenner sind. Je näher die Frequenzverhältnisse an diesen Resonanzverhältnissen liegen, desto harmonischer klingt der Akkord.

1. Stimmung

Wir stellen uns ein Tasteninstrument vor, und jeder Taste soll ein bestimmter Ton einer bestimmten Frequenz zugeordnet werden. Wenn alle Frequenzen mit einer bestimmten festen Zahl multipliziert werden, ändert sich an den harmonischen Verhältnissen überhaupt nichts; deshalb werden wir keine absoluten Frequenzen, sondern nur Frequenzverhältnisse zu betrachten haben. Genauer: Wir bezeichnen eine beliebige Taste als Grundton, und jeder Taste ordnen wir dann die Zahl F zu, die das Frequenzverhältnis zwischen dieser Taste und dem Grundton ist.

Der Grundton soll hier stets der tiefste Ton eines Akkords sein, so daß stets $F \geq 1$ gilt. Das menschliche Ohr ist für Frequenzen von 16 Hz bis 32000 Hz empfindlich, also ist es sinnvoll, sich gleich auf den Bereich $F \geq 2000$ zu beschränken.

1. 1. Die natürliche Stimmung

Für die natürliche Stimmung werden die natürlichen Zahlen $F \geq 1$ verwendet. $F = 1$ ist definitionsgemäß der Grundton, für $F > 1$ ist F der (F-1)-te Oberton. Speziell liegt der 1. Oberton genau eine Oktave über dem Grundton, hat also doppelte Frequenz; der 2. Oberton liegt eine Duodezime über dem Grundton, also ein Quinte über dem 1. Oberton und hat die dreifache Frequenz. Mit f bezeichnen wir das Frequenzverhältnis zweier Töne, es stimmt mit dem Verhältnis der zugehörigen F-Werte überein. Durch Vergleich des ersten und zweiten Obertons erkennt man, daß die Quinte dem Wert $f = 3/2$ zugeordnet ist.

1. 2. Die wohltemperierte Stimmung

Für die wohltemperierte Stimmung (also sauberes Spiel in allen Tonarten möglich), müssen die Abstände aufeinanderfolgender Töne, d. h., deren Frequenzverhältnisse, einander gleich sein: Die den einzelnen Tasten zugehörigen Zahlen F sind also alles Glieder einer geometrischen Folge. Aus der Forderung, daß die Oktave rein sein soll, folgt, daß die Zahl 2 in dieser geometrischen Folge vorkommen muß. Es besteht jetzt nur noch die Freiheit in der Wahl der charakteristischen Zahl n, die angibt, in wieviele Teile die Oktave zerteilt wird; beim Klavier ist $n = 12$, das ist die klassische 12-Ton-Musik. Wir wollen jetzt der Bemerkung Schönbergs nachgehen, daß die 53-Ton-Musik eine wesentlich reinere Quinte hat als das wohltemperierte Klavier.

2. Die Reinheit der Quinte

Da die Oktave definitionsgemäß rein ist, ist die Quinte als Intervall vom ersten zum zweiten Oberton der erste Fall, bei dem die natürliche Stimmung von der wohltemperierten Tastaturstimmung abweicht. Es ist deshalb eine sinnvolle Forderung an ein zu entwickelndes System von Stimmungen, daß die Quinte möglichst rein sein soll. Und genau nach diesem Kriterium teilt Schönberg die Stimmungen ein.

2. 1. Die n-Ton-Musik

Bei der n-Ton-Musik entspricht ein Tonschritt einem Frequenzverhältnis von $f = \sqrt[n]{2}$, da n Tonschritte dann gerade die geforderte Frequenzverdoppelung ergeben. m Tonschritte in der n-Ton-Musik entsprechen dann einem Wert

$$f = 2^{\frac{m}{n}} \qquad (1)$$

Bei welchen Werten m und n ist nun eine gute Quinte erreicht? Wir schreiben dazu die Quinte als $\frac{3}{2} = 2^x$ (2)

daraus ergibt sich nach Logarithmieren und einfachen Umformungen [2)]

$$x = \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1 = 0,5849625...$$

Nun ist x keine rationale Zahl [3], also gibt es, wie ein Vergleich von Formel (1) und (2) zeigt, überhaupt keine ganz reine Quinte. Es kommt nun darauf an, solche Werte m und n zu finden, daß $\frac{m}{n}$ eine gute Näherung für x darstellt. Man könnte natürlich n sehr groß wählen und dann m passend dazu, daß es recht genau wird. Es soll aber ein nicht allzu unübersichtliches Tastenfeld geben; speziell sollen also diejenigen möglichst kleinen Werte n gefunden werden, für die ein m existiert, so daß $\frac{m}{n} \approx x$ recht genau gilt.

2.2. Die Kettenbruchentwicklung

Das hier vorliegende Problem, nämlich zu einer irrationalen Zahl Näherungsbrüche zu finden, bei denen der Nenner nicht allzu groß wird, wird durch die Kettenbruchentwicklung der Zahl x gelöst. Sie lautet

$$x = [1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 2, 2, ...] \qquad (3)$$

Das entspricht den einzelnen Teilbrüchen

$$x(1) = 1,\ x(2) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},\ x(3) = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = \frac{3}{5}$$

$$x(4) = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}} = \frac{7}{12}, \quad x(5) = \frac{24}{41}$$

$$x(6) = \frac{31}{53}, \quad x(7) = \frac{179}{306}, ...$$

Zur Bewertung der jeweiligen Genauigkeit seien die Fehler der Quinte angeben (siehe **Tabelle 1**)

x(1) und x(2) kann man noch nicht als Näherung ansehen: Oktave bzw. Tritonus [4] haben nichts mit einer Quinte zu tun. Mit x(3) ist die Quinte als 3-Ton-Abstand einer 5-Ton-Musik nur 2,6 % verkehrt $\left(\frac{x(3)-x}{x}\right)$, und mit x(4) ist die Quinte als 7 Tonschritte der klassischen 12-Ton-Musik nur 0,27 % verkehrt. x(5) wird sicher keine Rolle spielen, da der nur unwesentlich kompliziertere Bruch x(6) eine erheblich genauere Quinte aufweist. x(7) und weiter erfordern eine Einteilung der Oktave in mehr als 300 Teiltöne, was praktisch kaum Bedeutung haben wird. Damit bleibt $x(6) = \frac{31}{53}$ die einzig akzeptable Alternative zur 12-Ton-Musik; 31 Tonschritte in der 53-Ton-Musik sind also genau die von Schönberg angegebene sehr genaue Quinte.

2.3. Ergebnisse

Aus der Theorie der Kettenbrüche folgt, daß eine Erhöhung der Tonzahl n nur dann eine Verbesserung in der Quinte bringt, wenn man mindestens bis zum nächsten Kettenbruchnenner erhöht, speziell folgt also: Unter allen Stimmungen, bei denen die Oktave in höchstens 300 gleiche Teile zerlegt wird, ist die 53-Ton-Musik diejenige mit der genauesten Quinte. Unter allen Stimmungen, bei denen die Oktave in höchstens 40 gleiche Teile zerlegt wird, ist die 12-Ton-Musik diejenige mit der genauesten Quinte; "genaueste" heißt "es gibt keine genauere", natürlich hat die 36-Ton-Musik, wo in der 12-Ton-Musik jedes Intervall noch einmal dreigeteilt wird, eine ebenso gute Quinte. Der Fehler der Quinte in der 12-Ton-Musik ist etwa 30 mal so groß wie der Fehler in der 53-Ton-Musik.

i	1	2	3	4	5	6	7
x(i)-x	0,41	- 0,085	0,015	- 0,0016	0,0004	- 0,00006	0,000005

Tabelle 1

3. Die nächsten Obertöne

Betrachten wir die nächsten Obertöne. Die üblichen Intervallbezeichnungen behalten wir bei und beziehen sie auf die natürliche Stimmung: f = 2 ist die Oktave; $f = \frac{3}{2}$ die Quinte, deren Ergänzung zur Oktave die Quarte mit $f = \frac{4}{3}$ ist. Die große Terz ist $f = \frac{5}{4}$ und deren Ergänzung zur Quinte ist die kleine Terz mit

$$f = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{6}{5}.$$

Schließlich erwähnen wir noch die große Sekunde, die als "2 Quinten minus 1 Oktave" definiert werden kann, also $f = \frac{9}{8}$ entspricht.

Wir sehen: Wenn wir jetzt noch die Reinheit der großen Terz gewährleisten können, sind alle wesentlichen Tonabstände gesichert.

3.1. Die große Terz

Wir berechnen jetzt analog zu Formel (1) und (2) die große Terz. Wir setzen also

$$\frac{5}{4} = 2^y \text{ mit } y = \frac{\ln 5}{\ln 2} - 2 = 0,3219281...$$

was wiederum eine irrationale Zahl darstellt. Die Kettenbruchentwicklung lautet diesmal:

$$y = [3, 9, 2, 2, 4, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 17, ...]$$

$$\text{mit } y(1) = \frac{1}{3},\ y(2) = \frac{1}{3+\frac{1}{9}} = \frac{9}{28};\ y(3) = \frac{19}{59}$$

$$\text{und } y(4) = \frac{47}{146}$$

Die weiteren Nenner sind dann wieder größer als 300. Erwartungsgemäß treten hier ganz andere Nenner auf. Die entsprechende Fehlertabelle lautet

i	1	2	3	4
y(i)-y	0,0114	-0,0005	0,0001	-0,00001

$y(1) = \frac{4}{12}$ ist die große Terz der 12-Ton-Musik und hat einen Fehler von 3,4 %, ist also erheblich weniger genau als die Quinte der 12-Ton-Musik. Den m-Wert für die große Terz der 53-Ton-Musik erhält man durch Rundung von 53 y auf die nächste ganze Zahl: 53 y = 17,062... ≈ 17, und $\frac{17}{53} - y = -0,0012$. Da der Nenner 53 nicht in der Kettenbruchentwicklung von y auftritt, ist klar, daß der Fehler nicht kleiner sein kann als bei y (2); der Fehler der großen Terz in der 53-Ton-Musik ist nur $\frac{1}{10}$ des entsprechenden Fehlers der 12-Ton-Musik.

3.2. Intervalle der 53-Ton-Musik

Aus dem oben Erwähnten ergibt sich folgendes Intervallschema in der 53-Ton-Musik: Oktave = 53 Tonschritte, Quinte = 31, Quarte = 53 - 31 = 22, große Terz = 17, kleine Terz = 31 - 17 = 14, große Sekunde = 2 mal 31 - 53 = 9. Natürlich ist die große Sekunde auch als Differenz zwischen Quinte und Quarte bestimmbar: 31 - 22 = 9. Die weiteren Unterteilungen ("Halbtonschritte") werden allerdings situationsabhängig: definiert man die kleine Sekunde als Ergänzung von großer Terz zur Quarte, erhält man 5 Tonschritte, definiert man sie dagegen als Ergänzung von kleiner zu großer Terz, erhält man nur 3 Tonschritte. Hier beginnt die wesentliche Abweichung von der 12-Ton-Musik und deutet sich die zunehmende Reichhaltigkeit der möglichen harmonischen Klänge an. Sowohl diese Reichhaltigkeit der Klänge als auch die große Reinheit der Grundintervalle lassen die 53-Ton-Musik als vielversprechender erscheinen als etwa die ebenfalls verschiedentlich diskutierte Variante einer 36- oder 48-Ton-Musik, bei der die Halbtonschritte der 12-Ton-Musik einfach in 3 bzw. 4 gleiche Teile zerteilt werden.

Anmerkungen

[1] Für weitergehende Rechnungen zu diesem Thema sei der Artikel von W. Thirring Annalen der Physik (Leipzig) 47 (1990), S. 245, empfohlen.

[2] Die Gleichheit der Werte x in Formel (2) beweisen wir wie folgt: Wir wenden ln auf beide Seiten der ersten Formel für x an, erhalten also $\ln(3/2) = \ln(2^x)$; nach den Logarithmengesetzen ist das ln3 - ln2 = x ln2, und nach Division durch ln2 entsteht die angegebene zweite Formel.

[3] Daß x nicht rational sein kann, beweisen wir indirekt: angenommen, x=p/q, p, q natürlich, q ≥ 1. Dann ist Formel (2) als $3/2 = 2^{p/q}$ schreibbar. Wir multiplizieren mit 2 und heben in die q-te Potenz; es entsteht $3^q = 2^{p+q}$. Links steht eine ungerade, rechts eine gerade natürliche Zahl. Widerspruch.

[4] Es ist $2^{x(2)} = \sqrt{2}$, und dies Frequenzverhältnis entspricht drei Ganztonschritten, z. B. von C bis Fis, daher die Bezeichnung Tritonus.

Dr. Hans-Jürgen Schmidt,
Institut für Astrophysik Potsdam

Keyboard Domino

Spielregeln:

Die Steine werden wie beim herkömmlichen Domino zu Ketten aneinandergelegt. Dabei ist allerdings darauf zu achten, daß

1.
die Farbpunkte analog der Klaviertastatur abwechselnd in 2er- und 3er - Gruppen aufeinanderfolgen

und

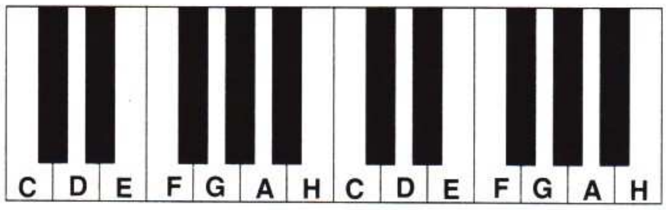
2.
aneinanderstoßende Punkthälften die gleiche Farbe haben müssen.

Werner Miller, Wien

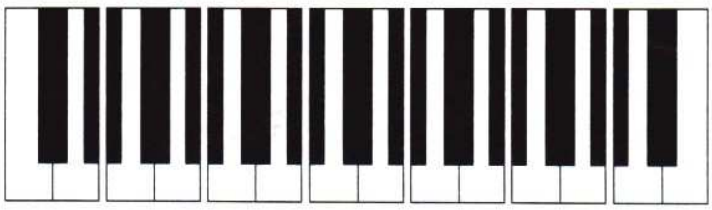
Ein Anlegespiel für vier Personen nach dem Prinzip der Klaviertastatur

Grundidee:

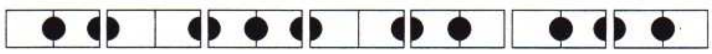
Klavier-
tastatur



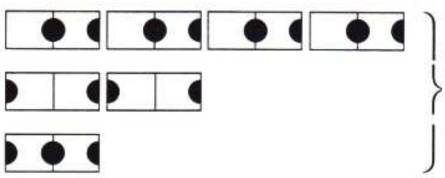
nach jeder zweiten weißen Taste „auseinandergeschnitten"



und zu Dominosteinen abstrahiert:



Spielmaterial: 28 Dominosteine



je einmal

viermal,
- mit roten Punkten,
- mit gelben Punkten,
- mit grünen Punkten,
- mit blauen Punkten

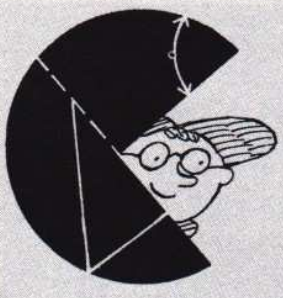
Spielvarianten:

Variante 1 (leichter):

Jeder der vier Spieler erhält zu Beginn 5 Steine. Es wird nach den üblichen Regeln des Dominospiels gespielt, bis ein Spieler alle seine Steine angelegt hat; dieser Spieler ist der Gewinner.

Variante 2 (anspruchsvoller):

Jedem der 4 Spieler wird vor Beginn des Spiels eine der 4 Farben Rot, Gelb, Grün, Blau zugeordnet. Dann werden alle Spielsteine verdeckt gemischt und auf alle Mitspieler gleichmäßig aufgeteilt. (Jeder erhält also 7 Steine in zufälliger Farbverteilung.)
Mit diesen Steinen wird nun nach den üblichen Domino-Regeln so lange gespielt, bis alle 28 Steine angelegt sind.
Ermittlung des Siegers: Jeder Spieler stellt fest, wieviele Punkte die 7 Spielsteine seiner Farbe in der ausgelegten Kette wert sind. Dabei zählen die Tasten bzw. Töne wie folgt: C und D je 2 Punkte, E, F, G und A je 1 Punkt, H null Punkte. Der Spieler mit der höchsten Punktezahl gewinnt.



In freien Stunden:

alpha – heiter

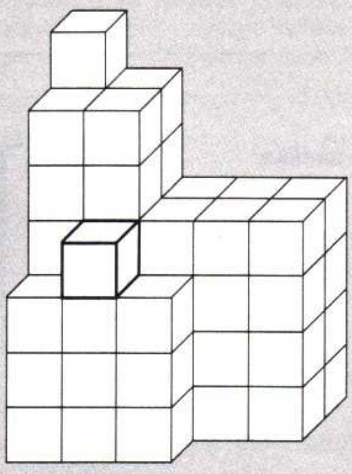
1 *Wahre Aussage gesucht*

Nach einem richtigen System gelesen, ergibt sich eine wahre Aussage.

E	A	E	R		D	K	I	A
D			R	J	N			C
T	C						U	E
	E						E	
	I	H	S	S	T	Q	T	

H.-Joachim Kerber, Neustrelitz

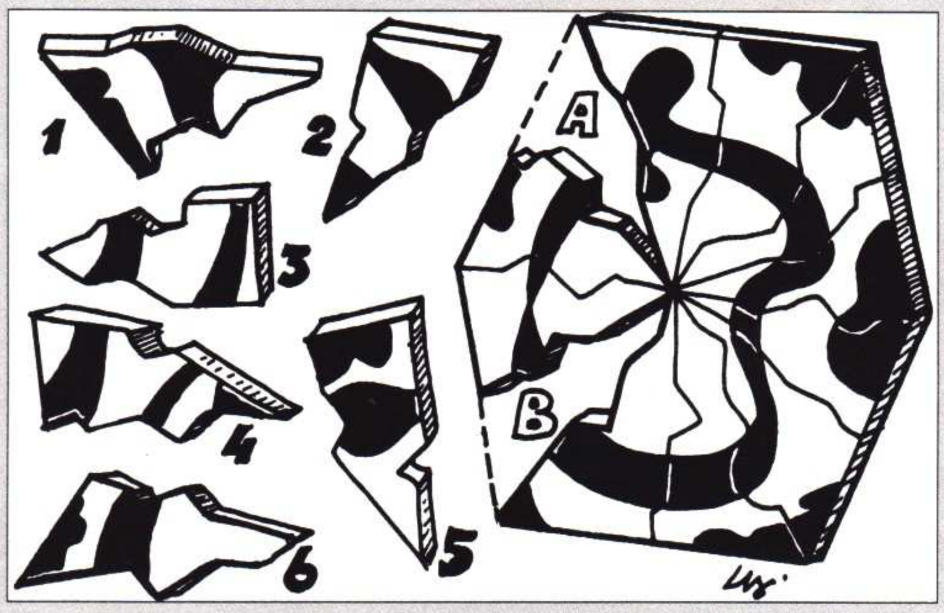
3 *Wieviel Würfel sind das?*



2 *Puzzle*

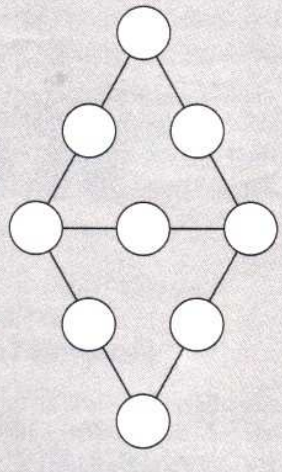
Welche Teile vervollständigen die zerbrochene Platte?

aus: Füles, Budapest



4 *Das Mittel im Mittelpunkt*

In jeden Kreis der abgebildeten Figur ist eine der natürlichen Zahlen von 1 bis 9 so einzusetzen, daß für die Zahlen in drei auf einer eingezeichneten Strecke liegenden Kreise gilt: Die im mittleren Kreis stehende Zahl ist das arithmetische Mittel der Zahlen in den beiden Randkreisen.



Walter Träger, Döbeln

In der Mathematikstunde schreibt der Lehrer 4:4 an die Tafel und fragt nach dem Ergebnis. „Ganz einfach: unentschieden.", ruft der Torwart der Klasse.

5 *Geometrisch-kombinatorisches Mathematik-Lexikon*

Zerlegt die Figur derart in 10 deckungsgleiche Teile, daß sich aus den in jedem solchen Segment befindlichen Buchstaben ein mathematischer Begriff bilden läßt.
Um welche 10 Begriffe handelt es sich?

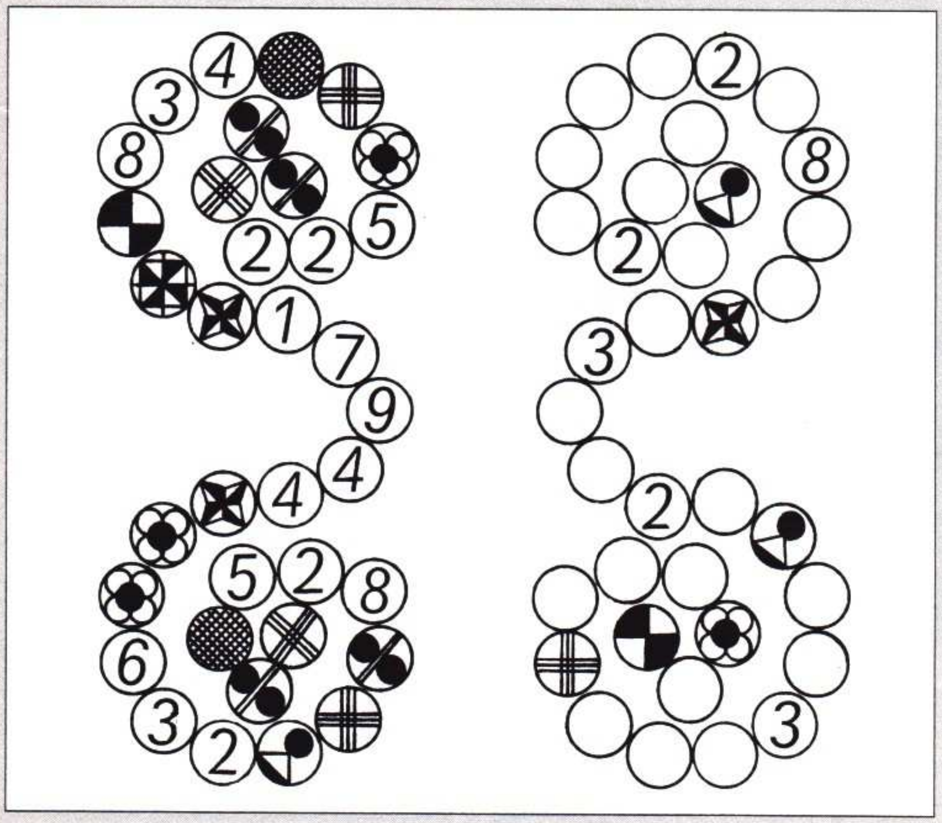
	F	I	N	D	E	D	A	S	
				I	M				
M	E	E	R	N	U	B	A	L	D
R	E	I	T	O	T	Y	L	S	O
W	E	T	T	E	K	L	A	R	A
T	E	X	T	M	S	P	I	R	O
R	E	I	S	L	T	R	A	T	E
K	W	I	R	T	E	S	S	E	N
K	O	S	T	E	S	U	L	T	O
E	G	E	L	Y	L	D	I	K	O
				N	N				
	H	U	P	E	E	L	L	E	

Dr. Roland Mildner, Leipzig

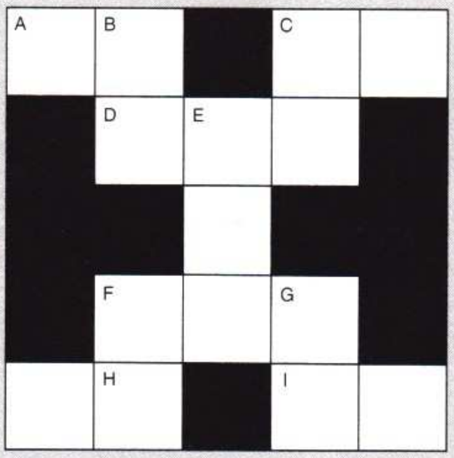
6 *Visuelle Logik*

Zwischen den Zahlen und Zeichen der 35 Kreisfelder der linken Seite besteht ein logischer Zusammenhang. Welche Zahlen und Zeichen müssen in die freien Kreisfelder der rechten Seite eingetragen werden, damit dieser Zusammenhang erhalten bleibt?

Wilhelm Neugebauer, Berlin



10 *Aller Anfang ist (nicht) schwer!*



Es sind zwei- und dreistellige natürliche Zahlen zu finden, für die gelten soll:

Waagerecht

A_w: Die Hälfte von B_s
C_w: Primzahl kleiner als C_s
D_w: Eine durch 7 teilbare Zahl
F_w: Aus gleichen Ziffern bestehende Zahl
H_w: = a - b - c, wobei a, b, c drei Zahlen aus Waagerecht bedeuten sollen
I_w: Größte Primzahl des Rätsels

Senkrecht

B_s: Teiler von F_w
C_s: Primzahl kleiner als A_w
E_s: Das Achtfache von A_w
F_s: Teiler von G_s
G_s: Aus zwei verschiedenen Ziffern von E_s bestehende Zahl

Schüler Stefan Kerber, Saal

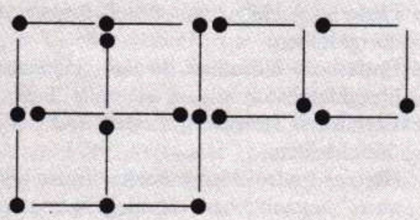
7 *Logische Zahlenfolge*

Mein Lehrer auf die 10
Mir trat, weil ich 9x-
Klug nicht 8 gab
Und durch eigenes Ver7
In der 6. Stunde
Eine 5 baute.
Zu Hause am Kla4
Setzte ich mich auf den 3fuß
Und war mit mir ohne 2fel
Wieder mal nicht 1.

Rainer Gundelach

8 *Hölzchentricks*

Entferne 4 Streichhölzer so, daß 3 Quadrate übrigbleiben.



9 *Bildungsgesetz gesucht*

Abgesehen von der Zahl 1 in der obersten Zeile sind die Zahlen dieses Dreiecks nach einer Vorschrift gebildet worden. Welche Zahlen müssen in die Kreise der folgenden Zeile eingesetzt werden, wenn diese Gesetzmäßigkeit beibehalten wird?

1
1 1 1
1 2 3 2 1
1 3 6 7 6 3 1
1 4 10 16 19 16 10 4 1
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

Walter Träger, Döbeln

Die Knobelecke der Felix-Mauersberger-Oberschule Netzschkau stellt sich vor

Wie wird`s bei uns gemacht?

Unsere Schule ist zwei- bis dreizügig und damit eine der größten in der Umgebung. Ein gutes mathematisch-naturwissenschaftliches Klima herrscht schon seit vielen Jahren, so daß immer wieder die talentiertesten Schüler ihren Platz im Kreisförderzirkel Reichenbach (Vogtland) finden und im Laufe der Zeit nicht wenige von ihnen auf Kreis- oder auch Bezirksolympiaden Junger Mathematiker Medaillen erkämpfen konnten. Somit besteht das Ziel der Knobelecke darin, Schüler aus möglichst allen Leistungsstufen an das Lösen kniffliger Aufgaben heranzuführen und ihnen dabei die Überzeugung zu vermitteln, daß Knobeln und Denken Vergnügen bereiten.

Es ist klar, daß das nur funktioniert, wenn wie in Netzschkau alle Mathematiklehrer der Schule gern bereit sind, die Arbeit mitzutragen.
An unserer Knobelecke sollen die Schüler von Klasse 4 bis Klasse 10 teilnehmen. Es gibt vier Serien von Aufgaben, die etwa gleichmäßig über das Schuljahr verteilt werden. Für die 1. Serie verwendeten wir bisher (außer in Klasse 4) die Aufgaben der Stufe I der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR. In dieser Serie werden nur Lösungen zu Aufgaben der eigene Klassenstufe entgegengenommen, denn es stehen ja mehrere Aufgaben zur Auswahl.
Für jede Klassenstufe wird jährlich ein verantwortlicher Mathematiklehrer benannt, der die Lösungen zu den Aufgaben dieser Klassenstufe korrigiert. Dieser "Klassenstufenverantwortliche" sucht für die Serien 2 bis 4 drei für seine Klassenstufe geeignete Aufgaben heraus. Ein "Koordinator", dem später auch die Gesamtauswertung obliegt, stellt daraus die weiteren Aufgabenserien zusammen.
Eine "Serie" enthält somit für die Klassenstufen von 4 bis 10 je eine Aufgabe. Sie wird zur geeigneten Zeit an der Knobelwandzeitung ausgehängt, außerdem bekommt jede Klasse etwa drei Abzüge.
Jeder Schüler darf jede Aufgabe lösen, also nicht nur die der eigenen Klassenstufe.
Pro Lösung gibt es maximal 8 Punkte. Die volle Punktzahl wird aber nur erteilt, wenn der Lösungsweg gut erkennbar ist.
Löst ein Schüler Aufgaben einer niedrigeren Klassenstufe, so vermindert sich die erreichbare Gesamtpunktzahl pro Klassenstufe um einen Punkt.
Aus den Serienergebnislisten der Klassenstufenverantwortlichen ermittelt der Koordinator manuell die Seriengesamtpunktzahlen der Schüler. Der Computer druckt dann eine geordnete Serienliste, eine Gesamtwertung und einen Klassenvergleich aus, so daß an der Wandzeitung neben mustergültigen Schülerlösungen die vollständigen Ergebnisse ausgehängt werden können.
Die besten drei jeder Serie erhalten Urkunden und kleine Preise. Vor allem aber dürfen die 18 besten Teilnehmer des Schuljahres im Juni an einer Exkursion mit wissenschaftlichem oder technischem Inhalt teilnehmen, bekommen sozusagen einen zusätzlichen Wandertag. Als Anreiz für die schwächeren Schüler losen wir aus dem Feld der weiteren Teilnehmer mit mehr als 8 Punkten zwei weitere Berechtigte für diese Exkursion öffentlich aus.

Hat die Knobelecke nach all den Wandlungen in Schule und Gesellschaft eine Zukunft? Es liegt nahe, optimistisch zu sein. Freude am Denken wird sich bei Schülern im jedem Schulsystem wecken lassen, und das Interesse an der Förderung von Talenten dürfte unter marktwirtschaftlichen Bedingungen nicht geringer werden.

Dr. Heinz Trochold, Felix-Mauersberger-OS, Netzschkau

Hier ist ein Beispiel einer Serie unserer Aufgaben:

Klassenstufe 4: In einem Abteil eines D-Zuges an die Ostsee sitzen Herr Müller, Herr Schulze und Herr Lehmann. Einer von ihnen ist aus Zwickau, einer aus Plauen, einer aus Reichenbach. Einer fährt nach Rostock, einer nach Stralsund, einer nach Wismar. Wir wissen außerdem:

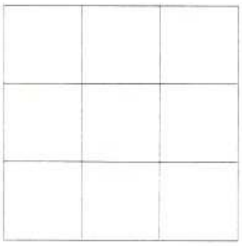
(1) Herr Müller wohnt in Reichenbach.
(2) Herr Schulze fährt nach Wismar.
(3) Herr Lehmann fährt nicht nach Stralsund.
(4) Herr Lehmann wohnt nicht in Zwickau.

Gib die Wohnorte und die Reiseziele von allen drei Reisenden an! Erkläre, was Du dabei überlegen mußt!

Klassenstufe 5: Aus Hölzchen der Länge 1 cm wird die auf S. 21 folgende Figur gelegt.

a) Wieviele Hölzchen brauchst Du dazu insgesamt?
b) Wieviele Quadrate enthält die Figur? Dabei sollen auch die Quadrate mitgezählt werden, deren Seitenlänge größer als 1 cm ist.
c) Entferne 4 Hölzchen, so daß 6 Quadrate übrigbleiben!
d) Entferne 4 Hölzchen, so daß 5 Quadrate übrigbleiben!
e) Entferne 6 Hölzchen, so daß 3 Quadrate übrigbleiben!
(Bei c) bis e) dürfen keine "Einzelhölzchen" liegenbleiben, die nicht wenigstens

zu einem der übriggebliebenen Quadrate gehören!)



Klassenstufe 6: a, b, c und so weiter seien natürliche Zahlen, wobei gelten soll
$a \geq b \geq c \geq d \geq \ldots$

a) Welche natürlichen Zahlen erfüllen die Gleichung $a + b + c = a \cdot b \cdot c$?
Gib alle Lösungen an und zeige, daß es keine weiteren gibt!
b) Löse ebenso die Gleichungen
$a + b + c + d = a \cdot b \cdot c \cdot d$
$a + b + c + d + e = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$ usw. !

Klassenstufe 7: Vor den derzeitigen Fahrpreisveränderungen bekam man in Dresden für 1 DM sechs Straßenbahnfahrscheine, in Plauen sieben. Um wieviel Prozent war ein Straßenbahnfahrschein in Dresden teurer als in Plauen?

Klassenstufe 8: Zeichne ein Parallelogramm mit beiden Diagonalen! Die Diagonalen teilen es in vier Dreiecke.

a) Beweise, daß diese vier Dreiecke flächengleich sind!
b) Zeige, daß die Umkehrung dieses Satzes nicht gilt! Dazu genügt ein Gegenbeispiel. Das heißt: Zeichne ein Viereck, das aus vier flächengleichen Dreiecken zusammengesetzt ist, das aber kein Parallelogramm ist!

Klassenstufe 9: Aus dem Fahrplan der "Weißen Flotte" kann man entnehmen: Von Dresden bis Pirna sind es auf der Elbe 20 km. Ein Schiff fährt 8.45 Uhr in Dresden ab und erreicht ohne Zwischenhalt 11.20 Uhr Pirna. Die Rückfahrt von Pirna nach Dresden (ebenfalls ohne Zwischenhalt) dauert von 15.30 Uhr bis 17.00 Uhr. Ermittle daraus die ungefähre Fließgeschwindigkeit der Elbe!
Nenne Idealisierungen oder vereinfachende Annahmen, die Du bei der Lösung der Aufgabe verwenden mußt!

Klassenstufe 10: Für Schüler, die gern mit dem Taschenrechner experimentieren: Löse die Gleichung $x^2=1{,}5^x$ im Bereich der reellen Zahlen! Hinweis: es gibt drei Lösungen, sie sind alle irrational. Anzugeben sind möglichst genaue Näherungswerte ... und natürlich die Vorgehensweise bei der Suche nach diesen Näherungswerten.

Eine kleine Übung zur Falluntersuchung

Gerade und Viereck

Eine Aufgabe verlangt, zu untersuchen, wie viele gemeinsame Punkte eine Gerade g und ein Quadrat Q (Eckpunkte A, B, C und D) miteinander, je nach gegenseitiger Lage, haben können.
Dabei sei vorausgesetzt, daß g und Q in einer Ebene liegen.
Bild 1 zeigt eine Lösung: g und Q haben keinen Punkt gemeinsam.

Ferner sind möglich:
Ein gemeinsamer Punkt (siehe **Bild 2**)
Zwei gemeinsame Punkte (siehe **Bild 3**)

1 Sind das alle möglichen Lösungen? Gehe systematisch vor! Zeichne!
Bild 3 führt uns zu weiteren Überlegungen. Man könnte untersuchen, in welche Arten von Figuren die Gerade g das Quadrat Q zerlegt.
Bei **Bild 3** sind es zwei Vierecke (Trapeze). Möglich wären noch ein Dreieck und ein Fünfeck (siehe **Bild 4**) und zwei Dreiecke (siehe **Bild 5**).

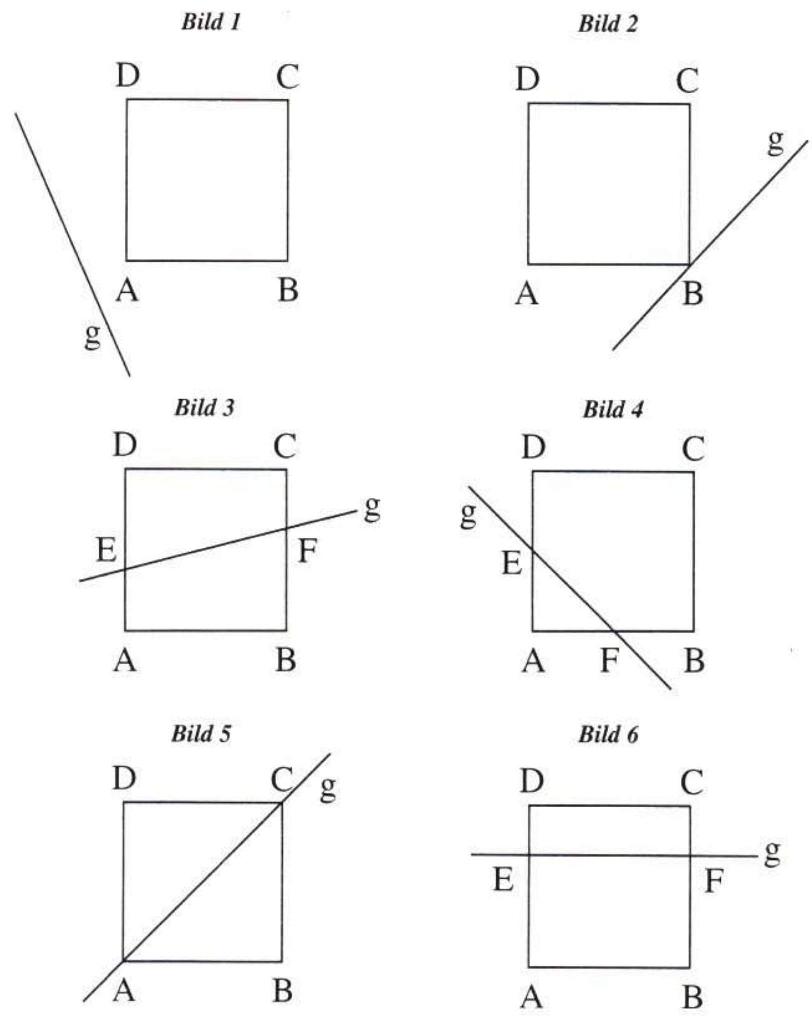
Dagegen wäre das in **Bild 6** gezeigte Beispiel keine prinzipiell neue Möglichkeit (vergleiche mit **Bild 3**), denn es handelt sich wiederum um zwei Vierecke, wenn auch spezielle, nämlich Rechtecke. Man müßte dann allerdings auch noch hinzufügen, daß g parallel zu einer Quadratseite verläuft.

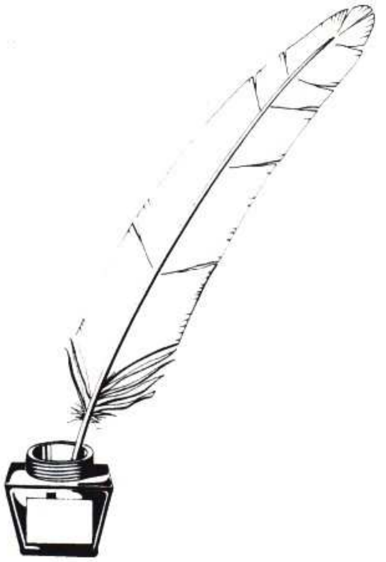
2 Eine weitere Möglichkeit wurde vergessen. Finde sie! Zeichne!

Überprüft nun selbst, ob ihr das Anliegen dieses kleinen Beitrages verstanden habt!

3 Wie viele gemeinsame Punkte können zwei verschiedene Quadrate (verschiedene Seitenlängen) Q1 und Q2 miteinander haben? Gehe wieder systematisch vor! Zeichne!

OStR J. Kreusch, Staatliches Seminar Löbau





Mathematiker als Memoirenschreiber

Schon seit Jahrhunderten haben sich Mathematiker gelegentlich mit autobiographischen Aufzeichnungen an die Öffentlichkeit gewandt.
(Mit dieser Formulierung sind Lebensläufe, wie sie jeder im Zusammenhang mit Bewerbungen u. ä. verfassen muß, aus unseren weiteren Betrachtungen ausgeschlossen, da diese sich ja nicht an die Öffentlichkeit richten.)

Während aus früheren Jahrhunderten nur Einzelfälle von gedruckten Mathematikermemoiren bekannt sind, hat die Tendenz der Mathematiker, Memoiren zu schreiben, in den vergangenen Jahrzehnten rapide zugenommen. Dabei muß man natürlich die Zunahme der Literatur insgesamt und darin eingeschlossen die große Schwemme von Memoirenliteratur (u. a. von Politikern, Künstlern, Sportlern) berücksichtigen. Da andererseits das Interesse der Öffentlichkeit an Mathematik und Mathematikern gering, vielleicht sogar rückläufig ist, muß ein Mathematiker, der eine Autobiographie schreibt, wohl sich selbst oder das was er erlebt hat, für recht bedeutend halten, wenn er mit einem Lesepublikum für sein Werk rechnet.
Den Mathematikhistorikern sind die Autobiographien natürlich eine wichtige und wohlvertraute Quelle, und sie haben es bedauert, daß es nicht mehr davon gibt, da derartige Literatur in der Regel Aufschlüsse über die Lebens- und Arbeitsbedingungen, über die Entstehungsgeschichte mathematischer Ideen, über persönliche Beziehungen zwischen Wissenschaftlern und über den "Geist einer Epoche" zu geben vermag, die durch andere Quellen (wie z. B. Briefe und Akten) nicht zu ersetzen sind. So kann man als sicher annehmen, daß auch die in unserem Jahrhundert so reichlich sprudelnde Memoirenliteratur späteren Historikergenerationen hochwillkommen sein wird. Freilich darf man solche Memoiren nicht völlig unkritisch verwenden. Wie leicht kann man sich an einem Widersacher bis weit über den Tod hinaus rächen, indem man - mitunter sehr geschickt verhüllt - Boshaftes über ihn berichtet, was sich später kaum noch überprüfen läßt!
Die älteste mir bekannte eigentliche Autobiographie eines Mathematikers ist die von Girolamo Cardano (1501-1576) 1542 und in erweiterter Fassung 1576 publizierte. Von Spezialisten der Renaissance wird sie als kulturgeschichtliche Quelle neben die berühmte, von Goethe ins Deutsche übersetzte Autobiographie des Goldschmieds und Bildhauers Benvenuto Cellini (1500-1571) gestellt. Eine Autobiographie im modernen Sinne, d. h. ein im wesentlichen chronologischer Lebensbericht, ist das Werk Cardanos freilich nicht, eher eine Selbstdarstellung und Selbstrechtfertigung, wie man schon an Kapitelüberschriften wie "Von meiner Gesundheit", "Meine geistigen Vorzüge, Standhaftigkeit und Charakterfestigkeit", "Von meinen Feinden und Neidern" usw. erkennt. Wer aus diesem Buch weitergehende Aufschlüsse über den berühmten Streit zwischen Cardano und Tartaglia um die Veröffentlichung der Lösungsformel für Gleichungen dritten Grades erwartet, wird enttäuscht. Es heißt dort lediglich. "Von Tartaglia hatte ich verschiedenes in das erste Kapitel meines Werkes übernommen; er aber wollte mich lieber zum Rivalen, und zwar zum überlegenen Rivalen, als zum Freund und Dankverschuldeten haben." Von Mathematik ist in Cardanos Lebensbeschreibung auch sonst nur an wenigen Stellen beiläufig die Rede. Dennoch vermittelt das Buch ein eindrucksvolles Bild vom Innenleben eines typischen Renaissancegelehrten, welches für ein tieferes Verständnis der Rahmenbedingungen damaliger Wissenschaft unverzichtbar ist.
Noch etwas älter als die Lebensbeschreibung Cardanos, aber keine eigentliche Autobiographie ist die kurze "Familienchronik" Albrecht Dürers (1471-1528), der aus heutiger Sicht zu den bedeutendsten Geometern seiner Zeit zählt.
Wir machen einen großen Sprung und erwähnen aus dem 19. Jahrhundert die Autobiographien von Bernard Bolzano (1781-1848), Charles Babbage (1792-1871) und Sonja Kowalewskaja (1850-1891). Letztere, die auch anderweitig literarisch tätig war, erregte mit ihren "Erinnerungen an meine Kindheit" auch bei Literaturwissenschaftlern und Literaturkritikern wohlwollende Aufmerksamkeit. Recht berühmt wurde bei den Mathematikern jene Passage ihres Buches, in der sie humorvoll ihr späteres leichtes Eindringen in die höhere Mathematik damit begründete, daß sie als Kind die Formeln der Analysis ständig vor Augen hatte, weil die Wände ihres Kinderzimmers mit den mathematischen Vorlesungsmitschriften eines Onkels tapeziert waren. (Dies war als Untergrund für eine geplante eigentliche Tapezierung gedacht, die jedoch nie erfolgte, weil die dafür bestellte Tapete das abgelegene Landgut der Eltern nicht erreichte.)
Ergiebige und von den Mathematikhistorikern gern genutzte Quellen für die Mathematik zwischen etwa 1870 und 1945 sind die Lebenserinnerungen von Leo Koenigsberger (1837-1921), Lothar Heffter (1862-1962) und Gerhard Kowalewski (1876-1950). Letzterer

scheint sich des Quellenwertes seiner Aufzeichnungen besonders bewußt gewesen zu sein, denn er gab ihnen den Untertitel "Meine Lebenserinnerungen. Zugleich ein Beitrag zur neueren Geschichte der Mathematik". Hieraus ein paar Kostproben: "Felix Klein [1] war damals in der Mathematik der Königsmacher. Ohne ihn konnte niemand ein mathematisches Ordinariat erlangen, mit seiner Hilfe auch mancher ganz Unbedeutende, z. B. Gutzner [2] das Ordinariat in Halle. Study [3] hatte es nicht fertiggebracht, sich mit Felix Klein gut zu stellen. Er war ein Feind alles Bonzentums und jeder Art von Kriecherei. Klein wußte es nur zu gut, daß Study sich nicht vor ihm beugte, und mochte ihn deshalb nicht." Besonders unterhaltend, vielleicht sogar anregend, sind für jüngere (und ältere) Leser auch solche Stellen, in denen die Verfasser sich an ihre Schulzeit und die damals verübten Streiche erinnern. So beschreibt Kowalewski, wie die Klasse einen neuen Lehrer von innen am Öffnen der Tür des Klassenraums hinderte, wie aber die Tür, als dieser den Rektor zu Hilfe holte, ganz leicht aufging, der Rektor daraufhin den jungen Kollegen darüber belehrte, daß man in solchen alten Gemäuern die Türklinken recht energisch anfassen müsse, die Tür sich dann aber, als der Rektor weg war, wunderbarerweise trotz heftigsten Rüttelns wieder nicht öffnen ließ und der junge Lehrer den Rest der Unterrichtsstunde verzagt auf dem Flur zubrachte.

Auch Heffter weiß Lustiges aus seiner Schulzeit zu berichten, z. B. vom Elementarlehrer Steinbrenner, dessen unverfälschter Pfälzer Dialekt bei den norddeutschen Schülern oft Heiterkeit erregte. "Von den Katheten im rechtwinkligen Dreieck erklärte er z. B.: 'Der eine Kadett steht senkrecht auf dem andren Kadett'. Das veranlaßte einen Mitschüler zu einer Zeichnung dieser Situation, was ihm eine Ohrfeige eintrug." An anderer Stelle beschreibt Heffter, wie die Klasse sich verabredete, an einem bestimmten Tag tadellos vorbereitet zu sein und sich musterhaft zu benehmen. Dem Lehrer kam dies so ungewohnt und unheimlich vor, daß er schließlich schrie: "Ich lasse mir das nicht länger gefallen. Das ist wieder ein Komplott!"

Über das Mathematikstudium berichtet Kowalewski von dem Leipziger Professor Adolph Mayer: "Mayer war immer ausgezeichnet vorbereitet und hatte eine wunderbare Beredsamkeit. Er ging so schnell vor, daß in jeder Stunde eine große Menge Stoff behandelt wurde. Nie versprach er sich trotz des raschen Tempos und nie verrechnete er sich. Wenn er eine Zahlenfolge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ oder eine unendliche Reihe $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$ ausschrieb, so wurden die Punkte, die das Fortlaufen ins Unendliche andeuten, derart rasch und kräftig gesetzt, daß es klang wie das Hacken eines Spechts. Es waren auch nicht drei, sondern mindestens sechs Punkte." Heffter berichtet aus seiner Berliner Studentenzeit: "Eines Tages war ich mit einigen anderen Studenten von ihm (Prof. L. I. Fuchs) zur Hilfeleistung bei der Revision der Seminarbibliothek bestellt. Einen Zweck schien uns dieses Unternehmen eigentlich nicht zu haben; denn die Bücher standen in wunderschönen Einbänden in ebensolchen Glasschränken verschlossen, und ich erinnere mich nicht, daß je ein Buch daraus entliehen wurde. Der Student holte sich das Nötige aus der Universitätsbibliothek, aus der Königlichen Bibliothek, aus dem mathematischen Verein oder aus der Technischen Hochschule. Aber die Revision war befohlen, und wir waren pünktlich zur Stelle, nicht jedoch Fuchs, der mit halbstündiger Verspätung eintraf und klagend sagte: "Da bin ich endlich; leider habe ich aber die Schrankschlüssel zu Hause liegen lassen !"

Mir scheint besonders das letzte Zitat ein schönes Beispiel dafür zu sein, wie in den Memoiren manchmal ein einziger Satz Lesevergnügen mit wertvollen Details zur Biographie eines Wissenschaftlers (sein Wesen bzw. seinen Charakter betreffend) und zur Geschichte wissenschaftlicher Einrichtungen in sich vereinen kann. Die Seminarbibliotheken, die an den Universitäten um die Mitte des vorigen Jahrhunderts gegründet wurden, waren nämlich die Keime der heutigen umfangreichen Instituts- und Fachbibliotheken an den Universitäten und Hochschulen, die in ihrer Bedeutung für den Alltag der Hochschullehrer und Studenten den zentralen Universitätsbibliotheken längst den Rang abgelaufen haben. Die beiden autobiographischen Bücher Norbert Wieners (1894-1964), in deutscher Übersetzung unter dem gemeinsamen Titel "Mathematik mein Leben", regen besonders dazu an, über das Verhältnis vorliegender Autobiographien zu Biographien nachzudenken, die von anderen Autoren nachträglich über dieselbe Person geschrieben werden. Sind letztere dann nicht überflüssig oder nur "billige Abschreiberei"? Beides scheint mir nicht der Fall zu sein. Der Außenstehende kann unbefangener das wissenschaftliche Werk eines Gelehrten würdigen als dieser selbst und obendrein, bei genügendem zeitlichen Abstand, die sich hieraus ergebenden weiteren Entwicklungen darstellen, Einschätzungen der Bedeutung liefern, die eventuell zu Lebzeiten des Gelehrten objektiv noch nicht möglich waren. Er kann ferner Erinnerungen Dritter an den Betreffenden einbeziehen sowie Akten über ihn, die der Betroffene vielleicht nie zu Gesicht bekommen hat.

Fußnoten

[1] Zu Felix Klein (1849-1925) vergleiche man seine Biographie von R. Tobies und F. König in der Biographienreihe des Teubner-Verlages, Leipzig 1981. Seine gemeinsam mit dem preußischen Ministerialbeamten Friedrich Althoff (1839-1908) betriebene autoritäre Personalpolitik wird dort in all ihren positiven und negativen Aspekten ausführlich dargestellt, das hier gegebene Zitat jedoch nicht ausdrücklich benutzt.

[2] August Gutzmer (1860-1924), Prof. in Jena und Halle, war durchaus nicht so bedeutungslos, wie Kowalewski es hier darstellt. Es ist dies ein solcher Fall von nachträglichem Rufmord aus persönlicher Feindschaft, wie er oben von mir als allgemeine Gefahr in der Memoirenliteratur angesprochen wurde. Interessant wäre es zu wissen, ob bei der Namensschreibung wirklich ein Druck- bzw. Schreibfehler vorliegt oder ob Kowalewski dadurch seine Nichtachtung unterstreichen wollte.

[3] Eduard Study (1862-1930) war trotz seiner hier behaupteten Unterdrückung durch Klein ab 1894 Professor an den preußischen Universitäten Bonn, Greifswald und wieder Bonn. Er gehört aus heutiger Sicht zu den vielseitigsten und originellsten Geometern seiner Zeit.

Für Leselustige

Des Girolamo Cardano von Mailand eigene Lebensbeschreibung, übertragen und eingeleitet von H. Hefele. Jena: Verlag Eugen Diederichs (1914).

Albrecht Dürer: Familienchronik, in: Schriften und Briefe. Reclams Universalbibliothek, Bd. 26.
Bernard Bolzano: Selbstbiographie, in: Ausgewählte Schriften, herausgegeben u. eingeleitet von E. Winter. Berlin: Union-Verlag 1976.
Charles Babbage: Passages from the life of a philosopher (Engl.) Reprint New York 1969 (Erstausgabe London 1864).
Sonja Kowalewskaja: Erinnerungen an meine Kindheit. Weimar: Kiepenheuer-Verlag 1960.
Leo Koenigsberger: Mein Leben. Heidelberg 1919.
Lothar Heffter: Beglückte Rückschau auf neun Jahrzehnte. Freiburg i. Breisgau: Schulz-Verlag 1952.
Gerhard Kowalewski: Bestand und Wandel. München: Oldenbourg-Verlag 1950.
Norbert Wiener: Mathematik mein Leben. Düsseldorf-Wien: Econ-Verlag 1962.

Weitere, im Text nicht erwähnte Memoiren:

Oskar Bolza: Aus meinem Leben. München 1936.
Abraham A. Fraenkel: Lebenskreise. Stuttgart 1967.
Walter Lietzmann: Aus meinem Lebenserinnerungen. Göttingen 1960.
Helene Braun: Eine Frau und die Mathematik 1933-1940. Berlin usw. (Springer) 1990.

In englischer bzw. amerikan. Sprache gibt es u. a. Memoiren von P. R. Halmos (New-York usw. 1985), G. H. Hardy (Cambridge-London 1967), M. Kac (Berkeley usw. 1987), S. M. Ulam (New-York 1976).

In russ. Sprache gibt es eine in vielen Auflagen erschienene Autobiographie Moi Bospominania (Meine Erinnerungen) des angewandten Mathematikers und Schiffstheoretikers A. N. Krylow.

Dr. Peter Schreiber, Fachrichtungen Mathematik/Informatik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

31. Olympiade Junger Mathematiker

1. Stufe

Die Aufgaben dieser 1. Stufe sind vorgesehen, zu Hause gelöst zu werden. Erklärung der Nummern: Die zwei Ziffern nach 31 nennen die Klasse (05 bis 10 und für Klasse 11 - 13: 12), danach kommt die 1 für Stufe 1, dann die Aufgabennummer 1-4. Jeder Schüler kann sich beteiligen (wer will, auch mit Aufgaben einer höheren Klasse) und seiner Lösung einem Lehrer oder Arbeitsgemeinschaftsleiter zeigen. Er hat damit eine Möglichkeit mehr, sein Interesse z. B. auch an seiner Teilnahme an Stufe 2 zu erkennen zu geben. Die Lösungen veröffentlichen wir nicht. Bei Problemen wendet Euch bitte an Euren Mathematiklehrer.

310511

a) In die neun Felder eines 3 x 3 - Quadrates sollen die Zahlen 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33 so eingetragen werden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
In jeder Zeile kommt jede der Ziffern 1, 2, 3 sowohl an der Einerstelle als auch an der Zehnerstelle je genau einmal vor. Dasselbe gilt auch in jeder Spalte.

b) In die Felder eines 4 x 4 - Quadrates sollen die zweistelligen Zahlen eingetragen werden, die sich unter Verwendung der Ziffern 1, 2, 3, 4 bilden lassen. Dabei sollen für die Ziffern 1, 2, 3, 4 dieselben Bedingunen wie bei a) erfüllt sein.

Gib je eine geforderte Eintragung an! Stelle bei a) und b) fest, ob sich zwei Eintragungen finden lassen, die sich nicht durch Vertauschen von Zeilen oder Spalten miteinander, oder durch Umwandeln der Zeilen in Spalten (oder durch mehrere solche Vorgänge) ineinander überführen lassen! Eine Begründung wird nicht verlangt.

310512

Maik trifft sich mit sechs Mitschülern. Einer davon hat den Vornamen Heino, einer den Vornamen Torsten, und vier heißen mit Vornamen Steffen. Ferner haben vier von diesen sieben Schülern den Familiennamen Lehmann, einer heißt mit Familiennamen Krull, und zwei haben den Familiennamen Pfitzner, aber unterschiedliche Vornamen.

a) Zeige, daß für zwei der sieben Schüler der Vor- und Familienname eindeutig aus diesen Angaben hervorgeht! Gib den Vor- und Familiennamen dieser beiden Schüler an!

b) Untersuche, ob noch für weitere Schüler der Vor- und Familienname eindeutig aus den Angaben hervorgeht oder ob für jeden weiteren Schüler mehr als eine Möglichkeit besteht, die obigen Angaben durch Zusammenstellen von Vor- und Familiennamen zu erfüllen!

310513

Die **Abbildung A 310513** zeigt einen Punkt A und vier Verschiebungspfeile 1, 2, 3, 4. Verschiebt man den Punkt nacheinander mit zwei dieser Verschiebungspfeile, so erhält man einen Punkt A''. Stelle fest, welche zwei Verschiebungspfeile Du nehmen mußt, damit A'' möglichst weit von A entfernt ist!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

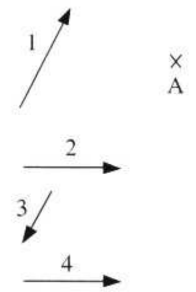


Abbildung A 310513

310514

Thomas schreibt die Zahl 2375246895 an die Tafel und erklärt, sie sei durch Hintereinanderschreiben von drei Zahlen entstanden. Diese drei Zahlen habe er der Größe nach geordnet aufgeschrieben, beginnend mit der kleinsten. Keine der drei Zahlen enthalte eine Ziffer zweimal.

a) Sebastain vermutet, die drei Zahlen seien 2, 375 und 246895; denn sie entsprechen den Angaben von Thomas.
Werner entgegnet: "Die Angaben von Thomas können auch durch drei andere Zahlen erfüllt werden." Stimmt das? Begründe Deine Antwort!

b) Ändere in der von Thomas angeschriebenen Zahl eine Ziffer so, daß es dann nur noch genau eine Möglichkeit gibt, die Angaben durch drei Zahlen zu erfüllen! Nenne (bei der von Dir gewählten Änderung) diese eine Möglichkeit für die drei Zahlen!! Ein Begründung wird nicht verlangt.

310611

Uwe und Jan zeichnen jeder ein Rechteck, das sich in genau 60 Quadrate von je 1 cm Seitenlänge zerlegen läßt. Jans Rechteck hat einen doppelt so großen Umfang wie Uwes Rechteck. Ermittle die Seitenlängen der Rechtecke von Uwe und Jan!

310612

a) Begründe, daß jede Drehung, die einen gegebenen Punkt A in einen anderen gegeben Punkt A' überführt, ihren Drehpunkt M auf der Mittelsenkrechten von AA' haben muß!

b) Die **Abbildung A 310612** zeigt zwei einander gleichlange Strecken AB und A'B'. Konstruiere den Drehpunkt M derjenigen Drehung, bei der A in A' und B in B' übergeht, also die Strecke AB das Bild A'B' hat! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

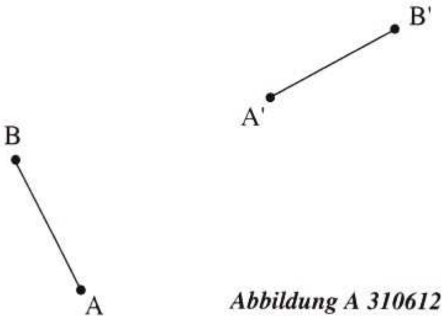


Abbildung A 310612

310613

Elke, Regina, Gerd und Joachim vergleichen ihre Briefmarkensammlungen. Sie bemerken:

(1) Joachim hat mehr Briefmarken als Gerd.

(2) Elke und Regina haben zusammen genau so viele Briefmarken, wie Joachim und Gerd zusammen haben.

(3) Elke und Joachim haben zusammen weniger Briefmarken als Regina und Gerd zusammen haben.

Stelle fest, ob diese Angaben nur durch eine Reihenfolge für die Anzahlen von Elkes, Reginas, Gerds und Joachims Briefmarken erfüllt werden können! Wenn das der Fall ist, ermittle diese Reihenfolge, nach fallenden Anzahlen geordnet!

310614

An einem Ausflug nahmen insgesamt 20 Personen teil. Man bemerkte:

(1) Genau 5 der Teilnehmer waren 30 Jahre alt oder jünger.

(2) Von den Teilnehmern, die älter als 30 Jahre waren, kauften sich genau 10 bei der ersten Rast etwas zu trinken, genau 12 bei der zweiten Rast. Kein Teilnehmer verzichtete beide Male auf diesen Kauf.

(3) Genau 6 der Teilnehmer waren 40 Jahre alt oder älter, darunter genau 2, die bei der ersten Rast nichts zu trinken kauften, und genau 2, die bei der zweiten Rast nichts zu trinken kauften.

Wieviele der Teilnehmer, die älter als 30, aber jünger als 40 Jahre waren, kauften sich sowohl bei der ersten als auch bei der zweiten Rast etwas zu trinken?

310711

Ein Warenhaus erhielt eine Lieferung von roten, blauen und grünen Bällen, zusammen 675 Stück. Während einer gewissen Zeit wurden davon verkauft:
die Hälfte der roten Bälle,
zwei Drittel der blauen Bälle und
drei Viertel der grünen Bälle.
Es stellte sich heraus, daß danach von jeder der drei Farben noch gleich viele Bälle übriggeblieben waren.
Ermittle aus diesen Angaben,

a) wieviele Bälle von jeder der drei Farben in der genannten Zeit verkauft worden waren,

b) wieviele Bälle danach insgesamt noch vorhanden waren!

310712

Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen, die folgende Bedingungen (1) und (2) erfüllen!

(1) Die Zahl enthält keine anderen Ziffern als 0, 1 und 4, aber jede dieser drei Ziffern mindestens einmal.

(2) Die Zahl ist durch 18 teilbar.

310713

Aus fünf einander kongruenten Quadraten werde eine T-förmige Figur zusammengesetzt. Die Eckpunkte der Quadrate seien wie in **Abbildung A 310713** bezeichnet.

a) Zeichne eine solche Figur mit $\overline{AB} = 2$ cm und darin die Strecken BM und DE; ihren Schnittpunkt bezeichne mit S und stelle eine Vermutung über die Größe des Winkels ∢BSD auf!

b) Beweise diese Vermutung!

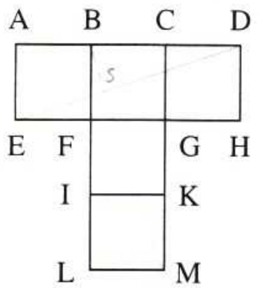


Abbildung A 310713

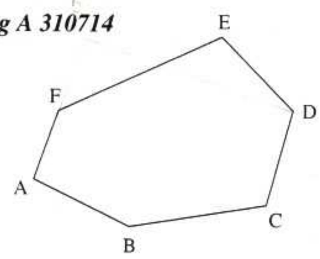
310714

a) Konstruiere ein beliebiges Dreieck ABC und einen beliebigen von A ausgehenden Strahl s, der die Gerade durch A, B nach derjenigen Seite hin verläßt, auf der auch C liegt!
Konstruiere nun denjenigen auf dem Strahl s liegenden Punkt C', für den das Dreieck ABC' denselben Flächeninhalt wie das Dreieck ABC hat!

b) Konstruiere zu einem beliebigen Sechseck ABCDEF, wie **Abbildung A 310714** eines zeigt, einen Punkt E', für den ABCDE' ein Fünfeck ist, das denselben Flächeninhalt wie das Sechseck ABCDEF hat!

Beschreibe Deine Konstruktion und weise nach, daß ein nach Deiner Beschreibung konstruierter Punkt E' diese Bedingungen erfüllt!

Abbildung A 310714



310811

Auf einem Tisch liegen drei Schachteln. In einer liegen zwei schwarze Kugeln, in der anderen eine schwarze und eine weiße Kugel, in der dritten zwei weiße Kugeln. Die Schachteln tragen die Aufschriften "Zwei schwarze", "Schwarz und weiß", "Zwei weiße"; jedoch trifft keine dieser drei Aufschriften zu. Untersuche, ob sich bei diesen Voraussetzungen durch Herausnehmen einer einzigen Kugel, ohne daß die anderen Kugeln gesehen werden, eindeutig die Verteilung der Kugeln ermitteln läßt! Ist das der Fall, dann gib an, wie dies geschehen kann!

310812

Rudolf macht folgende Aussage:
„Für je drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gilt stets: Multipliziert man die kleinste dieser drei Zahlen mit der mittleren und addiert zum Ergebnis das Produkt aus der mittleren und der größten der drei Zahlen, so ist die entstandene Summe gleich dem doppelten Quadrat der mittleren Zahl."

a) Überprüfe, ob diese Gleichheit in einigen selbstgewählten Beispielen zutrifft!

b) Beweise oder widerlege Rudolfs Aussage!

310813

Dirk zeichnet an einen Kreis k zwei Tangenten, die sich in einem Punkt P außerhalb von k schneiden. Den Mittelpunkt des Kreises nennt er M, die Berührungspunkte der Tangenten A bzw. B. Nun stellt er fest, daß der Winkel ∢ AMB die gleiche Größe hat wie einer der Schnittwinkel der beiden Tangenten.

a) Konstruiere einen Kreis, dazu zwei Tangenten und die von Dirk betrachteten Winkel!

b) Beweise, daß Dirks Feststellung stets für beliebige (sich schneidende) Tangenten eines Kreises zutrifft!

310814

Gegeben seien ein Kreis k und ein Punkt P, der innerhalb von k liegt, aber verschieden ist vom Mittelpunkt M des Kreises k. Zu konstruieren sind zwei Sehnen s_1 und s_2 des Kreises k, die folgende Bedingung erfüllen:

(1) s_1 und s_2 schneiden einander in P.

(2) s_1 und s_2 stehen aufeinander senkrecht.

(3) s_1 und s_2 haben einander gleiche Länge.

a) Beschreibe eine Konstruktion, durch die zu gegebenem Kreis k und gegebenem Punkt P zwei Sehnen s_1 und s_2 erhalten werden! Führe die beschriebene Konstruktion durch!

b) Beweise, daß zwei Sehnen, die nach Deiner Beschreibung konstruiert werden, stets die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

310911

Denkt man sich an jede Ecke eines räumlichen Körpers eine Zahl geschrieben, so bezeichnen wir für jede Seitenfläche dieses Körpers als "Flächensumme" dieser Seitenfläche die Summe aus den Zahlen, die an die Ecken dieser Seitenflächen geschrieben wurden.

a) Stellen Sie fest, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist: Wenn man an die Ecken eines Tetraeders ABCD in irgendeiner Reihenfolge die Zahlen 1, 2, 3, 4 schreibt, so sind alle vier Flächensummen des Tetraeders einander gleich.
b) Untersuchen Sie, ob es möglich ist, an die Ecken eines Würfels die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 in einer solchen Reihenfole zu schreiben, daß alle sechs Flächensummen des Würfels einander gleich sind!

310912

Werner beschäftigt sich mit dem Herstellen von Kryptogrammen in Gestalt einer Additionsaufgabe. Bei einem solchen Kryptogramm sollen – unter Verwendung des dekadischen Zahlensystems – gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und ungleiche Buchstaben durch ungleiche Ziffern ersetzt werden, so daß dann eine richtig gerechnete Addition vorliegt.
Werner betrachtet die folgenden drei Kryptogramme:

a)	b)	c)
JACKE	MANN	MIR
+ HOSE	+ FRAU	+ EMIR
= ANZUG	= PAAR	= REIM

Stellen Sie für jedes dieser drei Kryptogramme fest, ob es eine Lösung hat, und ermitteln Sie, wenn das der Fall ist, alle Lösungen des betreffenden Kryptogramms!

310913

Beweisen Sie die folgende Aussage!
Wenn ein ebenflächig begrenzter Körper eine Oberfläche besitzt, die ausschließlich aus Dreiecksflächen zusammengesetzt ist, so kann deren Anzahl nicht ungerade sein.

310914

a) Eine Schule hat insgesamt 825 Schüler. Es wurde errechnet, daß während eines Schuljahres die Anzahl der Teilnehmer einer Interessengruppe um 4 % ihres Anfangswertes zugenommen habe und, hiermit gleichbedeutend, die Anzahl der Nichtteilnehmer um 7 % ihres Anfangswertes abgenommen habe. Wenn das genau zutraf, wie groß war dann die Anzahl der Nichtteilnehmer zu Beginn des Schuljahres, und um welche Schülerzahl hat sie bis zum Ende des Schuljahres abgenommen?
b) Nachträglich wurde aber mitgeteilt, die Prozentangaben seien nur als Näherungswerte 4,0 % bzw. 7,0 % ermittelt worden, nämlich gemäß den Rundungsregeln auf eine Dezimale nach dem Komma genau gerundet.
Sind hiernach die in a) gesuchten Anzahlen immer noch eindeutig bestimmt? Wenn das nicht der Fall ist, ermitteln Sie alle diejenigen Werte für in a) gesuchte Anzahlen, die ebenfalls auf die gerundeten Prozentangaben 4,0 % und 7,0 % führen!

311011

Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare $(x; y)$ positiver natürlicher Zahlen x und y, für die folgende Ungleichung gilt:
$x + y < 1991$.

311012

Von einem Quader sind gegeben: das Volumen 24552 cm^3, der Oberflächeninhalt 17454 cm^2 und die Länge 3 cm einer Kante. Inge und Rolf wollen die Längen der anderen Kanten ermitteln.
Inge sagt, daß sie Lösung mit Hilfe einer quadratischen Gleichung gefunden hat und daß die gesuchten Längen, in cm gemessen, ganzzahlig sind.
Rolf entgegnet, er könne quadratische Gleichungen noch nicht lösen; aber wenn die Ganzzahligkeit der gesuchten Längen bekannt sei, so seien seine BASIC-Kenntnisse ausreichend, um die Aufgabe mit Hilfe eines Computers zu lösen.
Wie könnte die Aufgabe von Inge gelöst worden sein, und wie von Rolf?

311013

Eine Funktion f (die in einem Intervall reeller Zahlen definiert ist und reelle Funktionswerte hat) heißt genau dann streng konkav, wenn für alle $x_1 \neq x_2$ ihres Definitionsbereiches und alle positiven q_1, q_2 mit $q_1 + q_1 = 1$ die folgende Ungleichung gilt:

$f(q_1x_1 + q_2x_2) > q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$.

Man beweise: Wenn f eine für alle reellen Zahlen definierte streng konkave Funktion ist, dann gilt für alle reellen u, v mit $u \neq v$ die

Ungleichung $f(u) + f(v) < 2 \cdot f(\frac{u+v}{2})$, (1)

und es gelten für alle reellen a, b mit $b \neq 0$ die Ungleichungen

$f(a) + f(a + 2b) < 2 \cdot f(a+b)$ (2)

$f(a) + f(1+3b) < f(a+b) + f(a + 2b)$. (3)

311014

Zur **Abbildung A 311014** wurde als Beschreibung hinzugefügt, sie sei Grundriß und zugehöriger Höhenmaßstab eines ebenflächig begrenzten Körpers. Dieser habe A, B, C, D, E, F als Eckpunkte.
(A'B'C'D' ist ein Quadrat, E' = F' sein Diagonalenschnittpunkt; im Höhenmaßstab ist die Strecke, die den Höhenunterschied zwischen A und E angibt, in drei gleichlange Teilstrekken geteilt.)
Weisen Sie nach, daß die Abbildung zusammen mit der obigen Beschreibung widerspruchsvoll ist! Führen Sie eine Änderung durch, die den Widerspruch beseitigt!

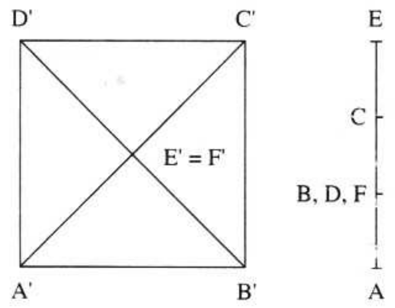


Abbildung A 311014

311211

Vier Dörfer bilden die Eckpunkte eines Quadrates mit der Seitenlänge 4 km. Man untersuche, ob es möglich ist, diese Dörfer durch ein Straßennetz mit einer Gesamtlänge von weniger als 11 km zu verbinden.

311212

Man ermittle alle diejenigen Tripel (a, b, n) positiver ganzer Zahlen a, b, n, für die folgende Aussagen (1) und (2) gelten:
(1) Die Zahlen a und b sind Primzahlen.
(2) Es gilt $97ab = (a+n)(b+n)$.

311213

In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C sei D der Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden des Winkels BAC. Ein Punkt P auf AB und ein Punkt Q auf AD seien so gelegen, daß DPQ ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei P ist.
Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen
a) der vierte Eckpunkt R des Quadrates DPQR auf AC liegt,
b) die Strecken BD und BP einander gleiche Länge haben.

Man ermittle die Seitenlänge des Quadrates DPQR
c) für $\overline{BC} = 49$ mm, $\overline{AC} = 168$ mm,
d) allgemein ausgedrückt durch $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$.

311214

Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) reeller Zahlen mit $x \leq y \leq z$, für die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllt ist:

$x + y + z = 5$, (1)

$x^2 + y^2 + z^2 = 15$, (2)

$xyz = -3$. (3)

Schachwettbewerb

... mit vielen neuen Schachfreunden

Der 8. alpha-Schachwettbewerb erregte bei vielen neuen alpha-Lesern vergnügliches Interesse. So war gegenüber den Vorjahren ein deutlicher Beteiligungsanstieg aus den alten Bundesländern zu verzeichnen, ebenso von Zuschriften aus Österreich, Luxemburg, Niederlande, Rumänien, Sowjetunion ... „Die vielfältigen Beziehungen zwischen Mathematik und Schach liegen auf der Hand und kommen auch in den Problemen des Wettbewerbs zum Ausdruck" (Dr. H. Büchel, Zella-Mehlis)

Fürwahr bilden Schachprobleme eine Hohe Schule des Denksports und sind ein sprudelnder Quell der Selbstbestätigung und der Freude und Entspannung beim Lösungserlebnis.

Lösungen

1. 1. Kc 3 Kal/K:c1
2. Kc2/Dg1 matt.
Diese Aufgabe von O. Blumenthal („Schweizerische Schachzeitung", 1907) wurde von fast allen Einsendern richtig gelöst.

2. 1. Da8 b2/c3/d4
2. Kb4/K:b3/Dh1 matt.
Auch dieser Zweizüger von E. Boswell („Svenska Dagbladet", 1929) bereitete den alpha-Lesern wenig Mühe.

3. 1.Tc8 K:g3
2. Dc7 matt.
Auf Grund der Pattstellung des schwarzen Königs muß der Turm den Weg für die Dame in der Aufgabe von Dr. A. Kraemer („Bochumer Anzeiger", 1926) frei bahnen.

4. 1.Dd6 c:d6/c6/b5
2. Tc1/Db8/Da6 matt.
1. ... T beliebig
2. D:d7 matt.
Hier zeigt uns der Ex-Schachweltmeister Prof. Dr. Max Euwe (1901-1981) in einem reizenden Achtsteiner, daß er auch mit leichter Hand Schachprobleme komponieren konnte.

5. 1.L:e4 (droht 2. s:c4 matt)
1. ... s:d6+/S:e3+/Se5+
2. Ld3/Sb5/Td3 matt.
1. ... Ke5
2. S:c4, Sf7 matt.
Das preisgekrönte Problem stammt von C. Mansfield („Good Companion", 1917). Dieser Zweizüger zählt zweifellos zu den besten Kreuzschach-Problemen. Was ist ein Kreuzschach? In unserer Aufgabe kann Schwarz sich damit verteidigen, daß er durch einen Zug des Sc4 dem weißen König Schach bietet. Dieses Schach nun beantwortet Weiß jeweils mit dem zweiten Zug, der das Schachgebot der schwarzen Figur aufhebt und gleichzeitig selbst ein Schach bietet, daß das Matt bedeutet.

6. 1. c8S Ka3
2. Sb6 a:b6
3. a:b6 matt.
Ein pointiertes Lösungsabspiel. Verfasser dieser und einer Reihe anderer Schachaufgaben ist das Oberhaupt der Römisch-Katholischen Kirche, Papst Johannes Paul II.!

7. 1. Kh3 Th8+
2. Th7 T:b8/T:h7/Tc8
3. T:b8/T:h7/Tbc7 matt.
1. ... Tf8
2. Tc8 Tf3+/T:c8
3. Lg3/Tc7 matt.
Ein phantastischer Schlüsselzug in der Aufgabe von P. Heuäcker („Deutsch-Österreichische Tageszeitung", 1926). Der weiße König muß zuerst gegen alle möglichen Angriffe des schwarzen Turms geschützt werden, ehe die weiße Figurenübermacht zur Wirkung kommt.

8. 1. Tbd7 (droht 2. Sb6 matt)
1. ... Sd2+/Sh2+
2. Kg3/Kg3 Se4+, Sc4/Sf1+
3. Kh4, K:h3/K:h3, Kh4 beliebig
4. Sb6 matt.
1. ... Sg1+/Sg5+
2. Kf2/Ke2, Kf2 Sh3+/Sg3+, Se4+
3. Ke1, K:f1/Kd1, Ke1 beliebig
4. Sb6 matt.
Bei der scheinbaren Diagonal-Symmetrie-Aufgabe von M. Zucker („Deutscher Schachverband", 1977 , 1. Preis) scheitert die thematische Verführung 1. Tdb7 mit der Mattdrohung 2. Sc7 an 1. ... Sg5+ nebst 2. ... Se6 und das Drohmattfeld c7 ist gedeckt.

Unter den Einsendern, die alle acht Aufgaben korrekt gelöst hatten, wurden folgende Gewinner ermittelt: *Silvio Baier (Dresden), Kersten Harborth (Sonderhausen), Lutz Häselbarth (Weimar), Kristina Schneider (Cottbus) und Robert Zyska (Ravensburg).*
Desweiteren wurden Preise unter allen Teilnehmern verlost, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst hatten: *Kathleen Holz (Rotenmoor), Ingo Kliemann (Darmstadt), Dietlind Kloß (Alsleben), Sveto Samardzic (Berlin 44) und Michael Wolf (Zeulenroda).*

Allen Gewinnern herzlichen Glückwunsch !

H. Rüdiger,
Werk für Fernsehelektronik Berlin

Ein indisches Rechenverfahren

Die Inder benutzten bereits vor einigen Jahrhunderten ein besonderes Verfahren zur Multiplikation natürlicher Zahlen, welches auch von den Griechen und Arabern übernommen wurde. Anfang des 20. Jahrhunderts griff der Mathematiker F. Ferrol dieses Verfahren erneut auf und bearbeitete es für einen breiteren Kreis von Interessenten.

Wir wollen dieses Verfahren in vereinfachter Weise unseren jungen alpha-Freunden vorstellen; seine Anwendung und Nutzung fördert das Training im Kopfrechnen. Am Beispiel der Multiplikation zweier zweistelliger natürlicher Zahlen soll dieses Verfahren erläutert werden.

Beispiel: 39 · 72

Es seien Z_1 die Zehner, E_1 die Einer des ersten Faktors, Z_2 die Zehner und E_2 die Einer des zweiten Faktors; dann gilt

$(Z_1 + E_1) \cdot (Z_2 + E_2) =$
$= Z_1 \cdot Z_2 + Z_1 \cdot E_2 + E_1 \cdot Z_2 + E_1 \cdot E_2.$

Daraus ergibt sich das folgende Rechenschema:

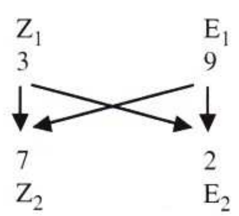


Abb. 1

Es ist, entsprechend dem Schema, wie folgt zu rechnen:
$E_1 \cdot E_2 = 9 \cdot 2 = 1\underline{8}$ (Übertrag 1).
$1 + E_1 \cdot Z_2 + Z_1 \cdot E_2 = 1 + 9 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 7\underline{0}$ (Übertrag 7),
$7 + Z_1 \cdot Z_2 = 7 + 3 \cdot 7 = \underline{28}$.

Diese auszuführenden Rechenoperationen lassen sich durch Kopfrechnen leicht bewältigen. Notiert werden nur (von rechts nach links) die unterstrichenen Ziffern; sie ergeben das Ergebnis 2808.
Diese Verfahren wollen wir nun für die Multiplikation zweier dreistelliger natürlicher Zahlen erläutern.

Beispiel: 326 · 273

$(H_1 + Z_1 + E_1) . (H_2 + Z_2 + E_2)$
$= H_1 \cdot H_2 + H_1 \cdot Z_2 + H_1 \cdot E_2 + Z_1 \cdot H_2 + Z_1 \cdot Z_2 +$
$+ Z_1 \cdot E_2 + E_1 \cdot H_2 + E_1 \cdot Z_2 + E_1 \cdot E_2.$

Daraus ergibt sich das folgende Rechenschema:

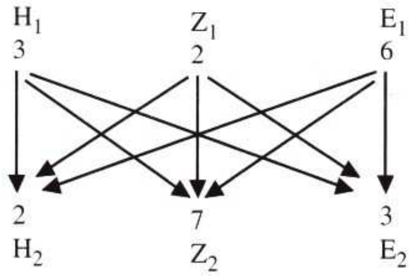


Abb. 2

Diesmal rechnen wir wie folgt:
$E_1 \cdot E_2 = 6 \cdot 3 = 1\mathbf{8}$ (Übertrag 1),
$1 + Z_1 \cdot E_2 + E_1 \cdot Z_2 = 1 + 2 \cdot 3 + 6 \cdot 7 = 4\mathbf{9}$ (Übertrag 4),

$4 + H_1 \cdot E_2 + E_1 \cdot H_2 + Z_1 \cdot Z_2 = 4 + 3 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 7 = 3\mathbf{9}$ (Übertrag 3),

$3 + H_1 \cdot Z_2 + Z_1 \cdot H_2 = 3 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 2 = 2\mathbf{8}$ (Übertrag 2),

$2 + H_1 \cdot H_2 = 2 + 3 \cdot 2 = \mathbf{8}$.
Ergebnis: 88998.

Abschließend wollen wir ein weiteres Beispiel in Kurzform gemeinsam durchrechnen.

617	
· 229	
3	Einer, Übertrag 6;
9	Zehner ($6 + 1 \cdot 9 + 7 \cdot 2 = 2\mathbf{9}$, Übertrag 2),
2	Hunderter ($2 + 6 \cdot 9 + 7 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 7\mathbf{2}$, Übertrag 7),
1	Tausender ($7 + 6 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 2\mathbf{1}$, Übertrag 2),
14	Zehntausender ($2 + 6 \cdot 2 = \mathbf{14}$).
141293	

Dieses Verfahren läßt sich auch auf vier- und mehrstellige Zahlen übertragen; es wird dann aber für ungeübte junge Rechenmeister schwerer überschaubar. Der interessierte Leser möge sich nun selbst ähnliche Multiplikationsaufgaben stellen und nach diesem Verfahren lösen.

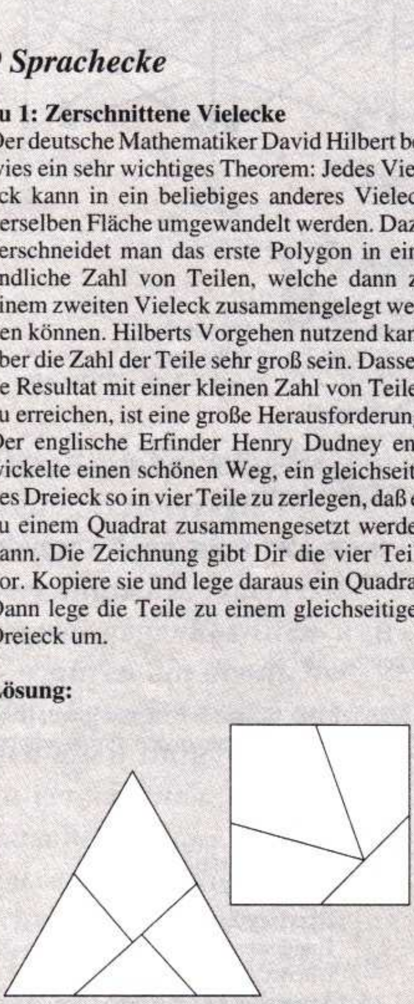
OStR J. Lehmann, Leipzig und
OStR Th. Scholl, Berlin

Lösungen

• *Sprachecke*

zu 1: Zerschnittene Vielecke
Der deutsche Mathematiker David Hilbert bewies ein sehr wichtiges Theorem: Jedes Vieleck kann in ein beliebiges anderes Vieleck derselben Fläche umgewandelt werden. Dazu zerschneidet man das erste Polygon in eine endliche Zahl von Teilen, welche dann zu einem zweiten Vieleck zusammengelegt werden können. Hilberts Vorgehen nutzend kann aber die Zahl der Teile sehr groß sein. Dasselbe Resultat mit einer kleinen Zahl von Teilen zu erreichen, ist eine große Herausforderung. Der englische Erfinder Henry Dudney entwickelte einen schönen Weg, ein gleichseitiges Dreieck so in vier Teile zu zerlegen, daß es zu einem Quadrat zusammengesetzt werden kann. Die Zeichnung gibt Dir die vier Teile vor. Kopiere sie und lege daraus ein Quadrat. Dann lege die Teile zu einem gleichseitigen Dreieck um.

Lösung:



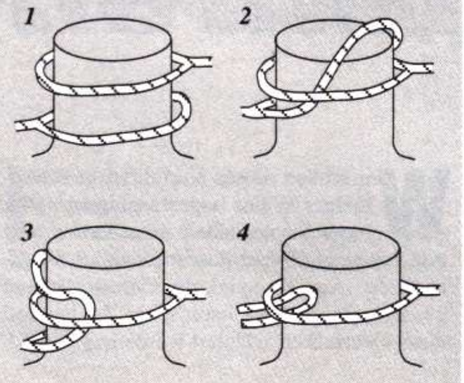
zu 2: Die zehn Ziffern
Um zwei Zahlen A und B, ihre Summe S und Differenz D im Dezimalsystem schreiben zu können, benötigt man jede der Ziffern von 0 bis 9 genau einmal. Findet die Zahlen A und B und berücksichtigt dabei, daß A größer als B ist!

Lösung:

A = 146, B = 57, S = 203, D = 89. Die beiden Zahlen sind 146 und 57.

zu 3: Schiff Alpha
Das Schiff "ALPHA" legte am Kai eher an, als das Schiff "QUANT". Kann es auch eher auslaufen, wenn dabei das Haltetau der "QUANT" nicht vom Poller genommen wird? (siehe Bild)

Lösung:



• *Wie groß ist „alpha"?*

Das Kryptogramm hat zehn Lösungen, und zwar

$$\begin{array}{r}16947\\+6905\\\hline 23852\end{array}\quad\begin{array}{r}16907\\+6945\\\hline 23852\end{array}\quad\begin{array}{r}19347\\+9305\\\hline 28652\end{array}\quad\begin{array}{r}19307\\+9347\\\hline 28652\end{array}$$

$$\begin{array}{r}49062\\+9073\\\hline 58135\end{array}\quad\begin{array}{r}49072\\+9063\\\hline 58135\end{array}\quad\begin{array}{r}65139\\+5148\\\hline 70287\end{array}\quad\begin{array}{r}65149\\+5138\\\hline 70287\end{array}$$

$$\begin{array}{r}76045\\+6093\\\hline 82138\end{array}\quad\begin{array}{r}76095\\+6043\\\hline 82138\end{array}$$

Da C und E vertauscht werden dürfen, ohne die Summe zu verändern, ergeben sich also fünf mögliche Werte für ALPHA.

• *Was Brüche mit Musik zu tun haben*

zu 1

$$\frac{62}{43}=[1;2,3,1,4]=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}$$

zu 2

$$[0;1,3,5,5,4]=\frac{348}{457}$$

zu 3

$$[0;1,3,5,]=\frac{16}{21};\quad [0;1,3]=\frac{3}{4}$$

zu 4

$$\frac{725}{318}=[2;3,1,1,2,1,12].$$

Die Näherungsbrüche sind:

$$\frac{s_1}{t_1}=\frac{7}{3},\ \frac{s_2}{t_2}=\frac{9}{4},\ \frac{s_3}{t_3}=\frac{16}{7},\ \frac{s_4}{t_4}=\frac{41}{18},$$

$$\frac{s_5}{t_5}=\frac{57}{25},\ \frac{s_6}{t_6}=\frac{725}{318}.$$

Also ist unter allen Brüchen, deren Nenner kleiner ist als 26, der Bruch $\frac{57}{25}$ der beste Näherungswert für $\frac{725}{318}$.

• *alpha – heiter*

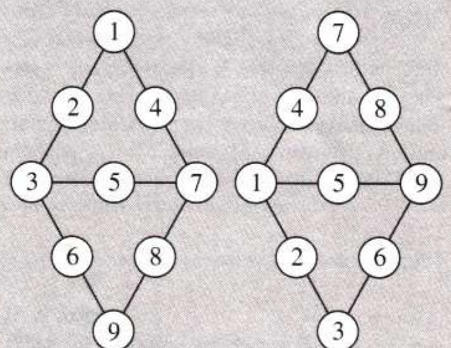
zu 1: Wahre Aussage gesucht
Beginnt man bei J und liest linksherum (indem man jeweils zwei Felder überspringt), so ergibt sich: Jedes Quadrat ist ein Rechteck.

zu 2: Puzzle
Teil 1 ergänzt A, Teil 6 ergänzt B richtig.

zu 3: Wieviel Würfel sind das?
Es sind 59 Würfel.

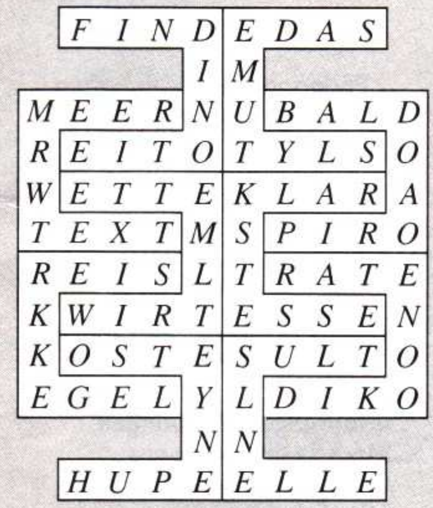
zu 4: Das Mittel im Mittelpunkt

Lösung:



zu 5: Geometrisch-kombinatorisches Mathematik-Lexikon

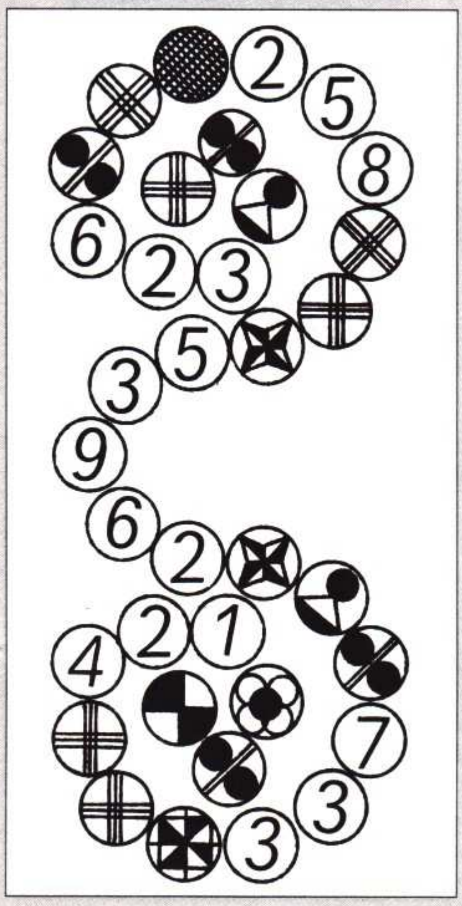
Lösung:



Links von oben nach unten: Definition, Extremwert, Mittelwert, Kreiskegel, Hypotenuse.
Rechts von oben nach unten: Dualsystem, Paraboloid, Restklasse, Koordinate, Nullstelle.

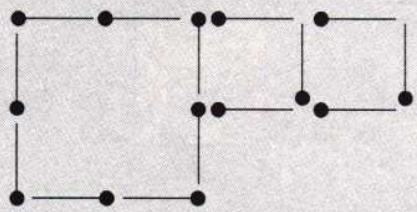
zu 6: Visuelle Logik
Die links dargestellte Figur besteht aus von innen nach außen aneinandergereihten Gruppen von 3 Zahlen und 3 Zeichen. Die den Zahlen folgenden Zeichen entsprechen deckungsgleich den Zahlen. Gleiche Zeichen entsprechen gleichen Zahlen. Die Differenz der Zahlen einer Gruppe von innen nach außen beträgt immer 1 (siehe nebenstehende Zeichnung).

Lösung:



zu 8: Hölzchentricks

Lösung:

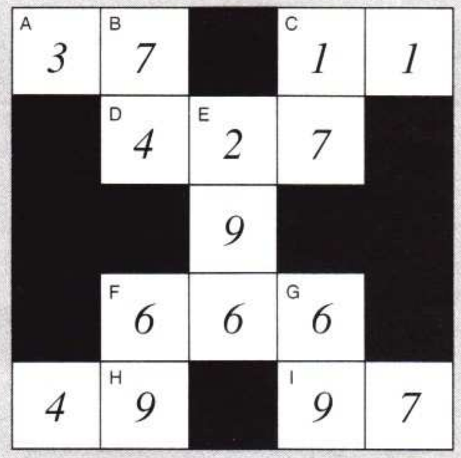


zu 9: Bildungsgesetz gesucht
Jede Zahl aus einer Zeile ist die Summe von 3 Zahlen, nämlich der direkt über ihr stehenden und deren Zeilennachbarn. Dabei hat man sich leere Plätze mit der Zahl 0 besetzt zu denken. Zahlen der 6. Zeile:

1 5 15 30 45 51 45 30 15 5 1

zu 10: Aller Anfang ist (nicht) schwer
Wegen A_w und B_s sind für F_w nur die Ziffern 2, 4, 6, 8 möglich. Wegen B_s und E_s jedoch nur 6. Dann ist D_w und C_s eindeutig. G_s kann wegen I_w nur 97 sein, F_s wegen G_s nur 69. H_w mit der Endziffer 9 ergibt sich (nur) aus den drei zweistelligen Zahlen, wobei wegen 97-37-C_w nur C_w = 11 und H_w = 49 sein kann.

Lösung:

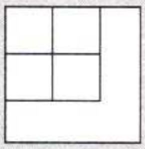


• *Wie wirds bei uns gemacht?*

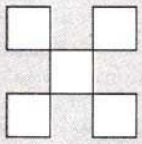
zu: Kl. 4:
Müller - Reichenbach - Stralsund
Schulze - Zwickau - Wismar
Lehmann - Plauen - Rostock

zu: Kl. 5:
a) 24
b) 9+4+1=14

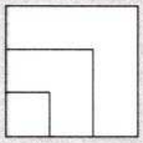
c)



d)



e)



zu Kl. 6:
I. Jede der Gleichungen hat die 'triviale' Lösung, bei der alle Variablen 0 sind.

II. $a + b + c = a \cdot b \cdot c$ hat als Lösung (3, 2, 1)
$a + b + c + d = a \cdot b \cdot c \cdot d$ hat als Lösung (4, 2, 1, 1)
$a + b + c + d + e = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$ hat als Lösung (5, 2, 1, 1, 1) und so weiter!

III. Weitere Lösungen bei den Gleichungen bis zu 10 Variablen sind:

bei 5 Variablen: (2, 2, 2, 1, 1) und (3, 3, 1, 1, 1)
bei 7 Variablen: (4, 3, 1, 1, 1, 1, 1)
bei 8 Variablen: (3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1)
bei 9 Variablen: (5, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)

Eine weitere oder gar vollständige Untersuchung des Problemes war im Rahmen der Knobelecke nicht vorgesehen.

IV. Der Einzigkeitsnachweis kann durch Betrachten aller Fälle nach geschickter Einengung der Möglichkeiten geführt werden.

zu Kl. 7:
Preis eines Fahrscheines in Dresden:
1/6 DM = x%
Preis eines Fahrscheines in Plauen:
1/7 DM = 100%

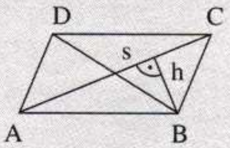
$$\frac{x}{100} = \frac{1/6}{1/7} \qquad x = 116{,}6...$$

Der Dresdner Fahrschein war 16,6% teuerer.

zu KL. 8:
a) Im Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander. Für die Inhaltsberechnung benachbarter Dreiecke werde jeweils die halbe Diagonale als Grundlinie angesehen. Da diese Dreiecke dann auch die gleiche Höhe haben, sind sie inhaltsgleich. Fortlaufend gilt:

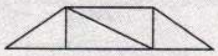
I(ABS) = I(BCS) = I(CDS) = I(DAS) w. z. b. w.

$h_{\Delta ABS} = h_{\Delta BCS}$



b) Gegenbeispiel:

Lösung:



zu Kl. 9:
8.45h - 11.20h = 2:35h = 2,583h
v_{auf}=20km/2,583h = 7,74 km/h

15.30h - 17.00h = 1:30h = 1,5h
v_{ab}=20km/1,5h = 13,33 km/h

$$\left.\begin{array}{l} v_{Schiff}+v_{Elbe} = 13{,}33 \text{ km/h} \\ v_{Schiff}-v_{Elbe} = \ \ 7{,}74 \text{ km/h} \end{array}\right\} \Rightarrow v_{Elbe} = 2{,}8 \text{ km/h}$$

Annahmen:
- Konstante Fließgeschwindigkeit,
- Schiff fährt stromauf und stromab mit gleicher Kraft,
- Zeiten für Ab- und Anlegemanöver sind unberücksichtigt.

Kl. 10:
x_1 = -0,8429170
x_2 = 1,3020995
x_3 = 12,431204

(Angaben mit Taschenrechnergenauigkeit)
Für die Verkürzung der Intervallschachtelung günstige Tabelle:

x	-1	0	1	2	12	13
x^2	1	0	1	4	144	169
$1{,}5^x$	2/3	1	1,5	2,25	129,7	194,6

• Gerade und Vieleck

zu 1: Bild a zeigt keine prinzipiell neue Möglichkeit. Es ergibt sich ja ebenfalls ein gemeinsamer Punkt - hier C statt B.

Bild a

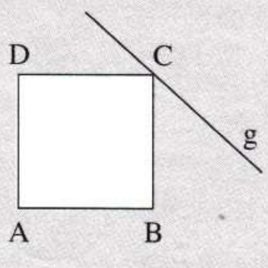
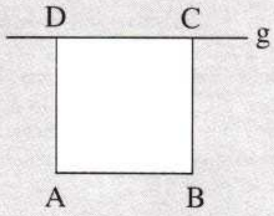


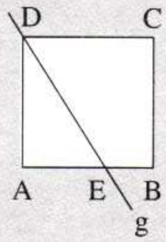
Bild b zeigt einen Fall, der häufig übersehen wird: g und Q haben unendlich viele Punkte gemeinsam.

Bild b



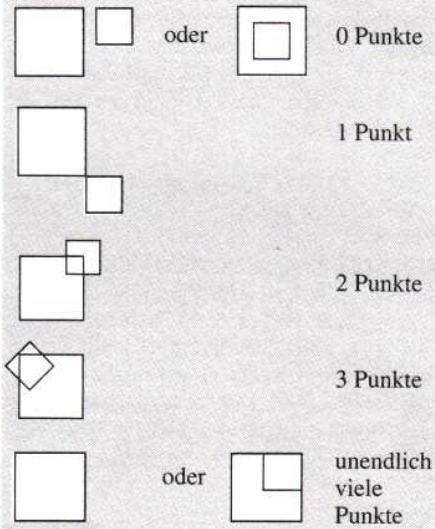
zu 2: Siehe Bild c! (ein Dreieck und ein Fünfeck)

Bild c



zu 3: Siehe Bild d!

Bild d



• Verblüffendes

Das überraschende und paradoxe Ergebnis lautet, daß unabhängig von der Kugelgröße das Band immer etwa 16 cm von der Kugeloberfläche entfernt ist.

• Zum Titel

Man erhält (v. l. n. r. und v. u. n. o.):
RIES (Adam, um 1492 – 1559), ABEL (Niels Henrik, 1802 – 1829), CEVA (Giovanni, 1647 – 1734), ARTIN (Emil, 1898 – 1962), KLEIN (Felix, 1849 – 1925), EULER (Leonhard, 1707 – 1783), NEPER od. NAPIER (John, 1550 – 1617), PEANO (Guiseppe, 1858 – 1932), FERMAT (Pierre de, 1601 – 1665), HANKEL (Hermann, 1839 – 1873), PLATON (etwa 427 – 347 v. u. Z.), NEWTON (Isaac, 1643 – 1727), FISHER (Ronald Aylmer, 1890 – 1966), HÖLDER (Otto, 1859 – 1937), BOLYAI (János, 1802 – 1860), CANTOR (Georg, 1845 – 1918), HILBERT (David, 1862 – 1943), GAUSS (Carl Friedrich, 1777 – 1855) FOURIER (Jean Baptiste Joseph, 1768 – 1830).

Der Storchschnabel

Der Storchschnabel spielt, wie auch viele andere mechanische Instrumente der praktischen Geometrie, als Folge des wissenschaftlich-technischen Fortschritts heute kaum noch eine Rolle. In älteren Lehrbüchern der angewandten Geometrie, der Vermessungskunde und über mathematische Geräte und Maschinen wurde er fast immer ausführlich behandelt und abgebildet. Er dient zur ähnlichen Vergrößerung oder Verkleinerung beliebiger Zeichnungen und beruht auf dem Prinzip der zentrischen Streckung bzw. Stauchung.

Damit der bewegliche Punkt Q, in dem sich ein Zeichenstift befindet, das Bild des ebenfalls beweglichen Punktes P, in dem sich ein Fahrstift befindet, bei der zentrischen Streckung mit dem fixierten Zentrum Z ist, muß man durch einen Gelenkmechanismus dafür sorgen, daß das Streckenverhältnis ZP:ZQ bei variabler Länge der Strecken konstant bleibt. (Durch Vertauschen von Fahr- und Zeichenstift bewirkt man ähnliche Verkleinerung.) Dies wird durch ähnlich bleibende gelenkige Dreiecke ZAP, PBQ erreicht, die bezüglich der Geraden ZPQ auf der gleichen Seite (Typ A) oder auf verschiedenen Seiten (Typ B) liegen können (siehe Abbildung 1).

Die Ähnlichkeit der Dreiecke wird jeweils durch Ergänzung des Mechanismus zu einem Parallelogramm (im Typ A: ADBP, im Typ B: ZDBA) erzwungen. Das gewünschte Verhältnis ZP:ZQ ist beim Typ A z. B. als ZA:ZD einstellbar, indem man auf der über A hinaus verlängerten Schiene DA verschiedene Drehpunkte Z wählen kann. Bei Typ B kann man z. B. auf der über B hinaus verlängerten Schiene DB verschiedene Stellungen des Fahr- bzw. Zeichenstiftes Q wählen. Im einzelnen gibt es mannigfache Ausführungen, die sich auch durch die Art der Unterstützung des Mechanismus durch Fahrrollen oder Aufhängung mit Drähten an einem Ständer unterscheiden. Als Erfinder des Storchschnabels (auch Pantograph, nach altgriech. Wortbestandteilen soviel wie Alleszeichner) gilt der Astronom und Mathematiker Christoph Scheiner (1575-1650), der als Jesuit in verschiedenen Lehrämtern in Freiburg (Breisgau), Ingolstadt und Neiße (heute Nysa/Polen) wirkte und vor allem durch seinen Prioritätsstreit mit Galilei um die Entdeckung der Sonnenflecken und der dadurch erstmals beobachteten Eigenrotation der Sonne bekannt wurde. In seiner lateinischen Abhandlung "Pantographice oder die Kunst, ein beliebiges Ding mit Hilfe eines Parallelogramms zu zeichnen" (Rom 1631) gab Scheiner an, er habe 1603 in Freiburg die Bekanntschaft eines Malers gemacht, der behauptete, ein Gerät zur mechanischen Ausführung von Vergrößerungen zu besitzen, es aber nicht vorzeigen wollte. Daraufhin habe er, Scheiner, das Gerät nach langem Nachdenken nacherfunden und den Maler damit in höchstes Staunen versetzt, da sein Gerät viel einfacher und besser als das des Malers war. Um die Mitte unseres Jahrhunderts wurde das Storchschnabelprinzip auch in der Technik verwendet, um Profile mit hoher Genauigkeit zu fräsen oder zu schleifen. Als Führung diente eine starke Vergrößerung des herzustellenden Profils, die abgetastet und per Storchschnabel-Mechanismus auf das Werkzeug übertragen wurde. Zuletzt konnte man einfache Storchschnäbel aus Holz oder Plaste vor Jahren noch gelegentlich in Spielwarenläden finden. Nun scheinen sie ausgestorben zu sein?

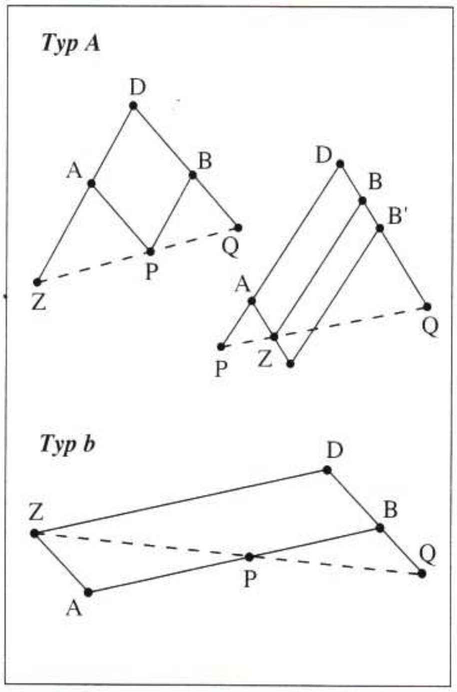
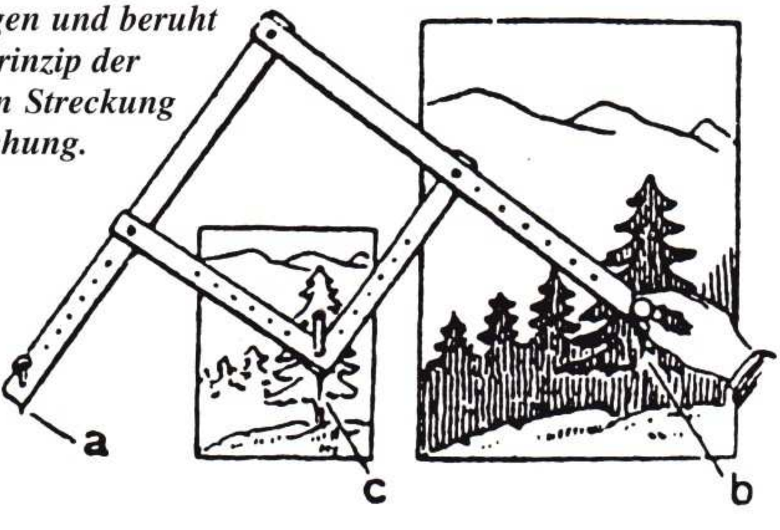


Abbildung 1



Dr. Peter Schreiber, Fachrichtungen Mathematik/Informatik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

H 11328 F

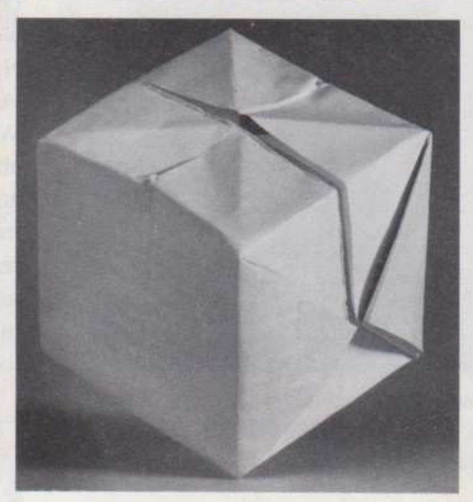
Heft 5
Oktober 1991
25. Jahrgang

Fachzeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

alpha

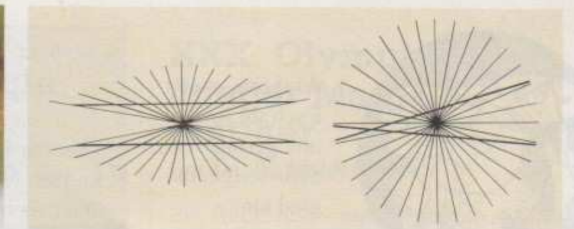
Mathematische Schülerzeitschrift

Konstruktion im Raum



Mathematik im Straßenverkehr

Optische Täuschungen



Geometrie am ICE

Tangram und Bruchrechnung

Hallo, liebe Mathe-Fans!

Das Heft 4 hat Euch von seinem Äußeren her sicher nicht gefallen. Auch wir sind unzufrieden, daß uns die Probleme des Verlagswechsels zu dieser Notlösung zwangen.
Dieses Heft findet Ihr, hoffen wir doch, wesentlich ansprechender gestaltet.
Nun ist nichts so gut, daß man es nicht verbessern könnte.
Wir wollen in Zukunft versuchen, auch inhaltlich Einiges zu verändern, "alpha" informativer und abwechslungsreicher zu gestalten. Dazu gehören zum Beispiel kürzere, mit mehr Bildmaterial aufgelockerte Beiträge, aktuelle Informationen und Leseproben aus Literatur für Liebhaber der Mathematik. Eine gute Zeitschrift für Leser kann aber nur entstehen, wenn Leser und Redaktion eng zusammenarbeiten. Deshalb solltet Ihr uns schreiben, was Ihr von "alpha" erwartet, was Euch nicht gefällt und welche Themen Euch besonders interessieren.

Wir sind gespannt auf Eure Meinungen!

Gabriele Liebau

Übrigens

Da es unsere Zeitschrift nun nicht mehr am Zeitungskiosk gibt, könnt Ihr sie direkt beim Erhard Friedrich Verlag in W-3016 Seelze 6, Postfach 100 150 bestellen. Wer interessierte Bekannte und Freunde hat, kann uns ebenfalls deren Anschrift mitteilen. Sie erhalten dann ein kostenloses Probeexemplar.

Alphons weist Euch auf Artikel mit geringerem Schwierigkeitsgrad hin.

Alphonsvignetten: Lothar Otto (Leipzig)

alpha-Wettbewerb

Unseren alpha-Wettbewerb starten wir im Heft 6/91.
Wir haben Unterstützung gefunden, führen jedoch auch in diesem Jahr nur zwei Teilwettbewerbe durch. Wir hoffen auf Euer Verständnis und wieder auf eine tolle Teilnahme.

Ein Nachtrag

Leider haben wir es im letzten alpha-Heft versäumt, den „Bastler" des Titelblattes vorzustellen. Dieses wollen wir unbedingt nachholen:
Dr. Roland Mildner, tätig an der Sektion Mathematik der Universität Leipzig und nebenberuflich leidenschaftlicher Erfinder von Knobelaufgaben.

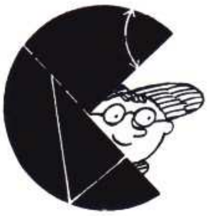
alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett.

Redaktion:
Dr. Gabriele Liebau, Tel. (Leipzig) 58 18 54, PSF 129, Leipzig, O-7010
Redaktionskollegium:
StR F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), OL Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. C. P. Helmholz (Leipzig), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pliezhausen), Herbert Kästner (Leipzig), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OStR J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. W. Schmidt (Greifswald), OStR G. Schulze (Herzberg), W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

Anzeigenleitung: Bernd Schrader
Anzeigenabwicklung:
Telefon (05 11) 4 00 04-23
Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01.01.1990
Vertrieb und Abonnement:
Telefon (05 11) 4 00 04-53
Verlag:
Erhard Friedrich Verlag
GmbH & Co. KG,
Postfach 10 01 50, 3016 Seelze 6
Telefon (05 11) 4 00 04-0
Telefax: 4 00 04-19
Das Jahresabonnement für alpha besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt DM 12,00, im Einzelbezug DM 2,50. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten.
Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).
alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV Klett Cotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, CH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.

Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschrift im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.
Herstellung: Pädagogika Zentrale
Druck: Druckerei Schröer, Seelze
ISBN 3-617-34005-9

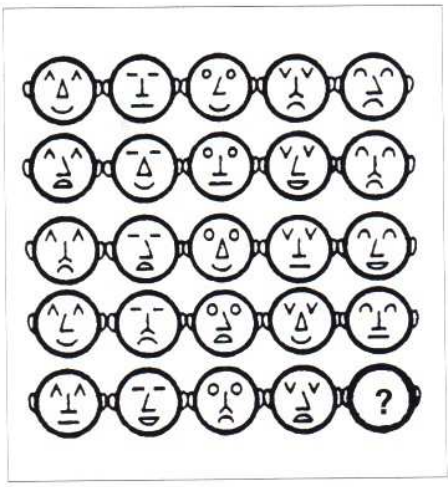
Inhaltsverzeichnis



Komisches, Kniffliges und Knackiges

Logisch gedacht

Die in der Abbildung gezeigten Figuren sind in einer bestimmten Reihenfolge geordnet. Man finde den logischen Zusammenhang. Aus ihm ergibt sich die fehlende Figur.



Teilbar oder nicht teilbar

Herr Flunkrich wird nach der Postleitzahl seines Wohnortes gefragt. Er macht über diese Zahl folgende Aussagen:

(1) Der Nachfolger der Zahl ist nicht durch 3 teilbar.
(2) Die Zahl läßt bei der Division durch 5 einen anderen Rest als bei der Division durch 7.
(3) Die Zahl ist größer als 800.
(4) Der Vorgänger der Zahl ist nicht durch 8 teilbar.
(5) Der Rest bei der Division der Zahl durch 7 ist kleiner als 3.
(6) Der Rest bei der Division der Zahl durch 5 ist größer als 3.

Nun wissen wir, daß alle Aussagen des Herrn Flunkrich falsch sind. Wie lautet die Postleitzahl seines Wohnortes?

Während der Vorlesung soll ein berühmter Mathematikprofessor einmal auf die schwierige Aufgabe 7 · 9 gestoßen sein. Er bittet die Studenten um Hilfe. Einer ruft: "62", ein anderer "65". Darauf der Professor: "Aber, meine Herren, das ist doch unmöglich, 7 · 9 kann doch nur 62 **oder** 65 sein!"

Überall natürliche Zahlen

Ein Mathematiklehrbuch umfaßt 196 Seiten. Die Seitenzahlen für die ersten beiden Seiten und für die letzte Seite wurden nicht gedruckt.

a) Wieviel Ziffern wurden zum Numerieren der übrigen Seiten verwendet?
b) Wie oft wurde dabei die Ziffer 0 gedruckt?

Nicht in die Brüche geraten

Zur Uraufführung des Puppenspiels "Der gestiefelte Kater" waren viele Zuschauer gekommen. Die Hälfte und einer waren Kinder. Ein Viertel und zwei der Anwesenden waren Mütter, und ein Sechstel und drei waren Väter dieser Kinder.

Wieviel Mütter, Väter und Kinder waren es?

Gleichungen in Theorie und Praxis

In einem alten Buch mit lustigen mathematischen Knobeleien fand Annerose folgenden Vers:

Eine Zahl hab ich gewählt,
107 dazugezählt,
dann durch 100 dividiert
und mit 4 multipliziert,
und zuletzt ist mir geblieben
als Resultat die Primzahl 7.

Gibt es Zahlen, die den gegebenen Bedingungen genügen?
Wenn ja, ermittle sie!

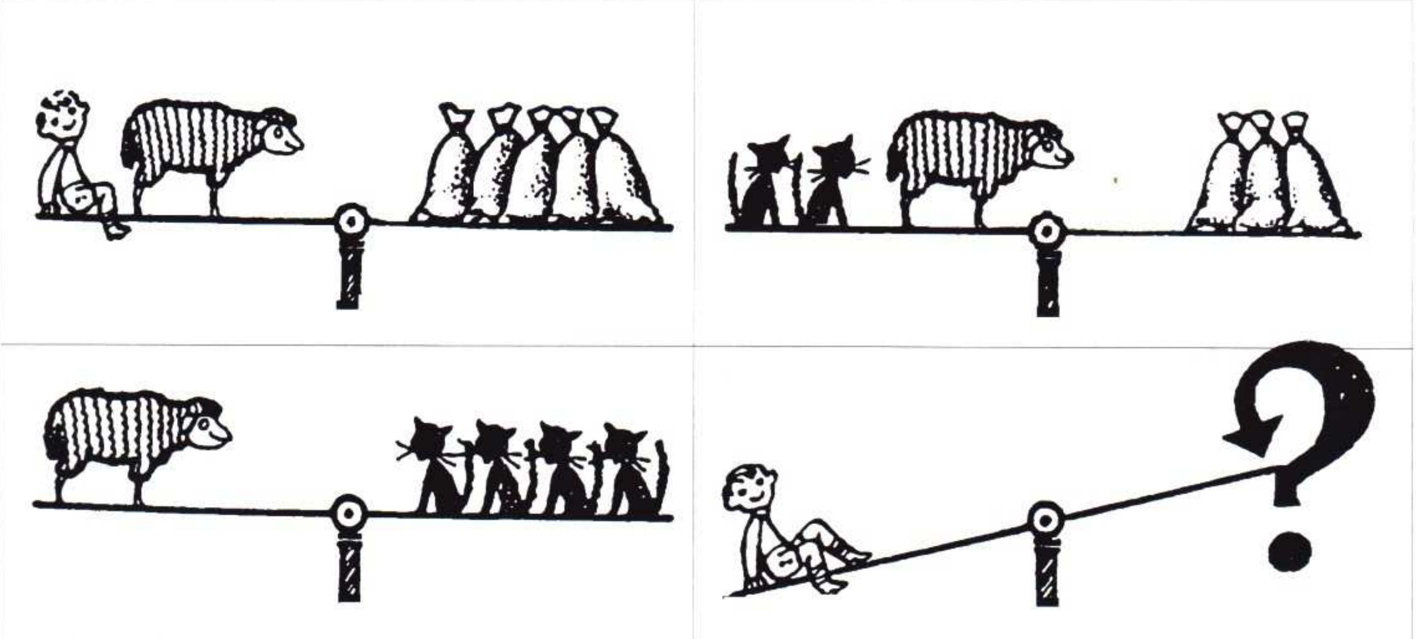
Rätsel

Jeder Buchstabe ist durch eine Ziffer zu ersetzen, so daß richtig gelöste Aufgaben entstehen. Innerhalb einer Aufgabe bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern.

a)
```
   ALPHA
 + MATHE
 -------
  HEITER
```

b)
```
   WOCHE
 + WOCHE
 + WOCHE
 + WOCHE
 -------
   MONAT
```

c)
```
    VIER
 +  EINS
 -------
   FUENF
```



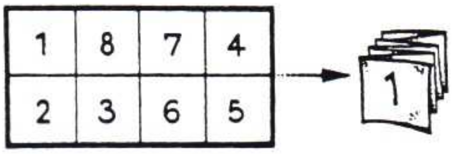
Ohne Worte

Wir falten

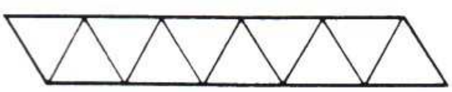
Henry Ernest Dudeney stellt folgendes Rätsel: Man unterteile einen rechteckigen Bogen in acht Quadrate und numeriere diese auf einer Seite (siehe Abb.).

Es gibt hierbei 40 Möglichkeiten, diese "Karte" entlang den eingezeichneten Linien so zu falten, daß ein quadratisches Paket entsteht, welches an oberster Stelle die "1" zeigt.

Das Problem verlangt nun, den Bogen so zu falten, daß die Quadrate in ihrer natürlichen Reihenfolge liegen, wobei die "1" oben sein soll.



Falte aus dem gezeichneten Tetra-Flexagon ein Sechseck!



Gegeben ist ein Streifen von 2 cm Breite und 14 cm Länge. Falte aus ihm einen Würfel mit einer Kantenlänge von 2 cm!

Abraham Gotthelf Kästner (1719 bis 1800), Mathematiker und Epigrammdichter, lernte als Student so spielend leicht, daß er es sich vor seinem Staatsexamen leisten konnte, mit der bildhübschen Tochter seines Professors spazierenzugehen, anstatt die Nase in die Bücher zu stecken. Als ihn der Professor deswegen zur Rede stellte, erwiderte Kästner schlagfertig: "Herr Professor, Sie haben uns Studenten als Vorbereitung für das Examen das Studium Ihrer eigenen Werke empfohlen. Ihre Tochter halte ich für Ihr bestes."

Alle Aufgaben dieser zwei Seiten stammen aus ***Mathe mit Herz*** von J. Lehmann, einem netten Trainingsbuch für alle, die Mathe bisher nicht besonders mochten. Erschienen ist es beim ***Urania-Verlag Leipzig*** in der Reihe Kopf + Nuss.

Diese Reihe bietet außerdem:

Der verzauberte Raum von R. Thiele und K. Haase
Eine Menge Spiele in drei Dimensionen mit vielen Bauplänen zum Selbermachen, mit Kniffelaufgaben nebst ausführlichen optischen Lösungen und einem Schuß Spielgeschichte.

Studentenfutter von Hugo Steinhaus
Unterhaltungsmathematik für den Sprung von elementarer zu höherer Mathematik

Nano's Physikabenteuer von K. Haase und D. Lehmann
Physiktüfteleien, bei denen man keine Angst vor Formeln haben muß, denn sie werden ausführlich kommentiert.

Sparen lohnt sich

Ein Streifzug durch die Finanzmathematik

Dieser Tage kam mir ein Werbeprospekt in die Hände, in dem ein Geldinstitut Reklame für regelmäßiges Sparen mit folgendem Angebot machte:

Wählt unseren Sparplan

Sparen und Wünsche erfüllen!

Ihr spart zehn Jahre lang regelmäßig monatlich eine bestimmte Summe, sagen wir 30 DM, die sich von Jahr zu Jahr ein wenig erhöht. Damit Ihr aber nicht nur sparen müßt, sondern Euch viele Wünsche erfüllen könnt, bekommt Ihr schon nach sechs Jahren sowie nach acht und zehn Jahren jeweils 1000 DM.

Und obwohl Ihr nach Ablauf von zehn Jahren nichts mehr einzuzahlen braucht, erhaltet Ihr am Ende des zwölften Jahres noch einen ansehnlichen Betrag extra.

Wie groß dieser "ansehnliche Betrag" sein sollte, stand leider nicht im Prospekt. Beim aufmerksamen Durchlesen fand ich aber noch die Angaben, daß alle Einzahlungen über die gesamte Laufzeit hinweg mit 6,5% verzinst werden und daß sie sich in jedem Jahr um 5% erhöhen (Dynamisierung).

Damit sind alle notwendigen Angaben bekannt, um die nach zwölf Jahren zur Auszahlung kommende Restsumme zu ermitteln. Doch wie groß ist diese? Die Beantwortung dieser Frage ist nicht ganz einfach, obwohl im Grunde genommen nur elementare mathematische Mittel benötigt werden, in erster Linie geometrische Folgen und Reihen. Die Überlegungen werden allerdings wesentlich erleichtert, verfügt man über einige Kenntnisse aus der Finanzmathematik.

Einfache Verzinsung

Jeder weiß, daß das Überlassen eines Geldbetrages an eine andere Person oder ein Geldinstitut (z. B. eine Spareinlage auf einer Sparkasse) dadurch belohnt wird, daß man **Zinsen** erhält. Diese sind von der Höhe des eingezahlten Betrages K_o (dem **Kapital**), der Dauer des Überlassens t (**Laufzeit**) sowie vom vereinbarten Zinsfuß p bzw. **Zinssatz** i = p/100 abhängig. Der Zinsfuß bezieht sich dabei auf eine bestimmte **Zinsperiode**, die anzugeben ist und in aller Regel ein Jahr beträgt. Die Laufzeit t ist als Vielfaches der Zinsperiode zu verstehen. Somit bedeutet t = 1, daß das Geld ein Jahr lang ausgeliehen bzw. gespart wird. Sinnvoll sind vor allem Werte für t, die zwischen 0 und 1 liegen, da man für t > 1 die Verzinsung der Zinsen (**Zinseszins**) berücksichtigen muß, sofern diese nicht abgehoben werden (s. unten). Die zu zahlenden Zinsen betragen

> *Geld öffnet Wege, aber es verschließt andere.* J. Urzieli

$$Z_t = \frac{K_o p_t}{100} = K_o it, \qquad (1)$$

so daß sich ein **Endwert** von

$$K_t = K_o(1 + \frac{p_t}{100}) = K_o(1 + it) \qquad (2)$$

ergibt. Nunmehr sind wir in der Lage, den ersten Teilschritt zu gehen: Welche Summe hat ein Sparer am Jahresende auf seinem Konto, wenn er, im Januar beginnend, am Anfang eines jeden Monats 30 DM einzahlt und wenn jährlich mit 6,5% verzinst wird?

Wir wollen mit r die Höhe der monatlichen Einzahlung bezeichnen, so daß in Formel (1) $K_o = r = 30$ gilt. Ferner ist p = 6,5. Jetzt betrachten wir einzeln die zwölf Monate des Jahres und berechnen, wieviel jede Monatsrate am Jahresende wert ist.

Die zu Beginn des Januars eingezahlte Rate r bleibt das gesamte Jahr über auf dem Sparkonto, so daß sie am Jahresende gemäß Formel (2) einen Wert von $K_{JAN}=r(1 + i\cdot \frac{12}{12})$ hat.

Die Februarzahlung wird nur elf Monate lang verzinst, d. h. 11/12 eines Jahres. Folglich beträgt ihr Endwert $K_{FEB}=r(1 + i\cdot \frac{11}{12})$. Indem wir so fortfahren, erhalten wir für die Anfang Dezember eingezahlte Rate am Jahresende einen Betrag von $K_{DEZ}=r(1 + i\cdot \frac{1}{12})$. Der Wert aller Einzahlungen beträgt damit zum Jahresende

$$R = r\left(1+i\cdot\frac{12}{12}+1+i\cdot\frac{11}{12}+...+1+i\cdot\frac{1}{12}\right) = r\left[12+i\cdot\left(\frac{12}{12}+\frac{11}{12}+...+\frac{1}{12}\right)\right]. \qquad (3)$$

Der Ausdruck in der runden Klammer in (3) stellt eine **arithmetische Reihe** dar, d. h. eine Summe, die aus Gliedern einer **arithmetischen Zahlenfolge** $a_1, ..., a_n$ gebildet wird. Letztere ist dadurch charakterisiert, daß die Differenz zweier beliebiger aufeinanderfolgender Glieder konstant ist: $a_{k+1}-a_k=D$. Im Falle der Zahlenfolge $\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, ..., \frac{12}{12}$ beträgt die Differenz $D = \frac{1}{12}$. Man kann sich leicht überlegen, daß die Summe der Glieder $a_1, ..., a_n$ gerade $S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ beträgt, so daß sich in unserem Beispiel $S = \frac{12}{2}\cdot\left(\frac{1}{12}+\frac{12}{12}\right) = \frac{13}{2} = 6,5$ ergibt.

Damit können wir nun endgültig das Sparguthaben am Ende des 1. Jahres (bei monatlichen Einzahlungen von r=30 [DM]) berechnen.

Es beläuft sich auf

$$R = r(12+6,5i) = 30\left(12+6,5\frac{6,5}{100}\right) = 372,68\,[DM] \qquad (4)$$

Zinseszins

Oben hatten wir die Verzinsung eines Sparguthabens innerhalb eines Jahres (einer Zinsperiode) beschrieben. Jetzt wollen wir mehrere aufeinanderfolgende Jahre betrachten.

Die Zinsen werden in der Regel am Jahresende gutgeschrieben.

Zahlt man nun einmalig zu Jahresbeginn eine Summe Ko ein und läßt diese einschließlich der anfallenden Zinsen über mehrere Jahre stehen, ergibt sich zunächst als Betrag am Ende des 1. Jahres:

$K_1 = K_o + Z_1 = K_o + K_o i = K_o q$

(wir setzen q=1+i und nennen diese Größe den **Zinsfaktor**). Dies ist gleichzeitig das Startkapital für das 2. Jahr, so daß sich am Ende des 2. Jahres ein Sparguthaben in Höhe von

$K_2 = K_1 q = K_o q^2$

ergibt. Setzt man diese Überlegungen fort, so erhält man als **Endwert nach n Jahren**

$$K_n = K_o q^n. \qquad (5)$$

Formel (5) wird Endwertformel der Zinseszinsrechnung genannt.

Auch die umgekehrte Fragestellung ist von Interesse: Wieviel Geld muß ich jetzt (zu Beginn des 1. Jahres) einzahlen, damit bei einer jährlichen Verzinsung von p% nach n Jahren ein Betrag der Höhe K_n aufläuft?

Durch Umstellung von (5) ergibt sich leicht

$$K_o = K_n \cdot \frac{1}{q^n} \qquad (6)$$

Die Größe Ko nennt man in diesem Zusammenhang **Barwert**, und (6) heißt **Barwertformel der Zinseszinsrechnung.**

Rentenrechnung

Unter einer **Rente** versteht man eine regelmäßige Ratenzahlung, die i. allg. in konstanter Höhe in gleichmäßigen Abständen gezahlt wird. Im Rahmen der Finanzmathematik sind vor allem die sogenannten **Zeitrenten** von Bedeutung, deren Zahlung über einen festgelegten Zeitraum von n Ratenperioden (die der Einfachheit halber gleich den Zinsperioden, bei uns also gleich einem Jahr sein sollen) erfolgt. Wird die Rente stets am Ende der Periode gezahlt, spricht man von **nachschüssiger** Rentenzahlung.

Wie groß ist der Endwert (d. h. der Gesamtwert nach n Jahren) einer über n Jahre nachschüssig gezahlten Rente mit der Rate R?

Zahlt man beispielsweise am Ende eines jeden Jahres den Betrag R auf sein Sparkonto ein und das regelmäßig über n Jahre hinweg, wieviel hat man dann insgesamt (aus Einzahlungen plus Zinsen) am Ende des n-ten Jahres? Der Zinssatz sei wieder $i=p/100$, der Zinsfaktor $q=1+i$. Die 1. Rate wird (n-1)-mal verzinst, da sie sich n-1 Jahre auf dem Sparkonto befindet. Entsprechend Formel (5) wächst sie somit auf Rq^{n-1} an.

Die 2. Rate liefert am Ende Rq^{n-2} usw. Die letzte Rate schließlich hat den Endwert R, weil sie ja – erst am Ende des letzten Jahres eingezahlt – nicht verzinst wird. Insgesamt erhalten wir damit den Endwert

$E_n = R\,(1+q+q^2+ \ldots + q^{n-1})$.

Der Ausdruck innerhalb der Klammern stellt eine sogenannte **geometrische Reihe** dar, das ist die Summe der Glieder einer **geometrischen Folge** $a_1, a_2, \ldots, a_n$, in der der Quotient aufeinanderfolgender Glieder stets konstant ist: $a_{k+1}/a_k = q$. Man überzeugt sich leicht davon (z. B. mittels Partialdivision, Ausmultiplizieren oder vollständiger Induktion), daß für $q \neq 1$ die Beziehung

$$1+q+\ldots+q^{n-1} = \frac{q^n-1}{q-1} \text{ gilt.}$$

Damit wird
$$E_n = R \cdot \frac{q^n-1}{q-1}. \qquad (7)$$

Unter Nutzung von (6) berechnen wir den zugehörigen Barwert:

$$E_0 = R \cdot \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n-1}{q-1} \qquad (8)$$

Die so ermittelte Größe stellt den Wert aller Ratenzahlungen (hier: Wert aller jeweils zum Jahresende erfolgten Einzahlungen) zum Zeitpunkt t = 0 dar.

Sie läßt sich auch wie folgt interpretieren: Hat man die Summe E_0 auf einem Konto 1 und wird jährlich mit p% verzinst, so ist man in der Lage, n Jahre lang von Konto 1 auf ein anderes Konto 2 zum Ende eines jeden Jahres den Betrag R zu zahlen.

Da die Beziehung $R>E_0 i$ gilt (Überprüft dies!), verringert sich der Kontostand des 1. Kontos von Jahr zu Jahr, und nach n Jahren ist dann Konto 1 gerade leer, während sich auf Konto 2 der Endwert E_n aus Formel (7) angesammelt hat.

Dynamischer Sparplan

Jetzt untersuchen wir das Anwachsen eines Sparkontos, wenn - im Unterschied zur eben betrachteten Rentenrechnung - die (nachschüssigen) Einzahlungen jährlich dynamisiert, d. h. um einen festen Prozentsatz c vergrößert werden oder, anders gesagt, um einen Faktor d = 1 + c/100 zunehmen. Im ersten Jahr sei die Rate R, im zweiten ist sie dann Rd, im dritten Rd^2 usw. Andererseits wachsen die bereits eingezahlten Beträge im Laufe des jeweiligen Jahres um den Zinsfaktor q an. Das ergibt folgendes Bild für das Guthaben E_n am Ende des n-ten Jahres:

$E_1 = R$,

$E_2 = Rq + Rd = R(q+d)$,

$E_3 = R(q+d)q + Rd^2 = R(q^2+qd+d^2)$,

....

$$E_n = R(q^{n-1}+q^{n-2}d + \ldots + qd^{n-2}+d^{n-1}). \qquad (9)$$

Der Ausdruck (9) stellt wieder eine geometrische Reihe mit Q=d/q und dem Anfangsglied q^{n-1} dar, deren Summe

$$E_n = R \cdot q^{n-1}\frac{Q^n-1}{Q-1} = R \cdot q^{n-1}\frac{(d/q)^n-1}{(d/q)-1},$$

also

$$E_n = R\frac{d^n-q^n}{d-q} \qquad (10)$$

beträgt, sofern $d \neq q$ ist; für $d = q$ gilt offenbar $E_n = R \cdot n \cdot q^{n-1}$.

Berechnung der Restsumme

Nach obigen Vorbereitungen sind wir nun gerüstet, die eingangs gestellte Frage nach dem "ansehnlichen Betrag", den ein Sparer nach zwölf Jahren ausgezahlt bekommt, zu beantworten. Dazu vergleichen wir den Barwert aller Einzahlungen mit dem Barwert aller Auszahlungen und ermitteln hieraus den fraglichen Betrag.

Barwert aller Einzahlungen: Zunächst fassen wir die monatlichen Raten von 30 DM im ersten Jahr zum Endwert R=372,68 DM zusammen (s. Formel (4)). Es ist folglich völlig gleich, ob wir mit regelmäßigen monatlichen Zahlungen oder mit einer einmaligen nachschüssig gezahlten Rate rechnen. Damit ist es möglich, Formel (10) für den dynamischen Sparplan anzuwenden, wobei R=372,68, q=1,065 und d=1,05 gilt. (Überlegt Euch, daß sich bei Erhöhung der Monatsraten um den Faktor d die Jahresrate R auch gerade um d erhöht!) Einsetzen dieser Werte in (10) liefert den Endwert

$$E_{10} = 372{,}68\frac{1{,}05^{10}-1{,}065^{10}}{1{,}05-1{,}065} = 6167{,}66.$$

Der zu diesem Endwert gehörige Barwert ergibt sich (wie man sagt, durch **Abzinsen** oder **Diskontieren**) gemäß Formel (6) mit $K_n=E_n$ zu E_0 = 3285,67 [DM].

Die Größe E_0 ist der Wert, den man jetzt (zum Zeitpunkt t=0) besitzen müßte, um nach 10 Jahren bei 6,5% jährlicher Verzinsung auf denselben Endwert E_{10} = 6167,66 zu kommen, wie er sich aus den 120 monatlichen Einzahlungen (einschließlich Zinsen) ergibt.

Barwert aller Auszahlungen: Entsprechend dem Angebot des Geldinstituts erhält man nach 6, 8 und 10 Jahren jeweils A=1000 [DM] und nach 12 Jahren eine noch unbekannte Restsumme U. Um den Gegenwert all dieser in der Zukunft erfolgenden Zahlungen für den Zeitpunkt t=0, also den Barwert aller Auszahlungen, zu ermitteln, müssen wir wiederum Beziehung (6) mehrfach anwenden:

$$\begin{aligned} A_0 &= A \cdot \left(\frac{1}{q^6}+\frac{1}{q^8}+\frac{1}{q^{10}}\right) + U \cdot \frac{1}{q^{12}} \\ &= 1000 \cdot (0{,}68533 + 0{,}60423 + 0{,}53273) + \\ &\quad + 0{,}46968 \cdot U \\ &= 1822{,}29 + 0{,}46968 \cdot U. \end{aligned}$$

Setzt man nun $E_0=A_0$ (denn weder der Sparer noch das Geldinstitut wollen ja bei diesem "Geschäft" etwas verlieren), ermittelt man leicht die Restsumme U:

3285,67 = 1822,29 + 0,46968·U, d. h.

U = 1463,38 : 0,46968 = 3115,70.

Nach 12 Jahren wird also ein Restbetrag von 3115,70 DM ausgezahlt.

Damit haben wir das gestellte Problem gelöst. Es ist allerdings anzumerken, daß die angegebenen Formeln nur für einen Anfang Januar beginnenden Sparplan exakt gelten, falls die Verzinsung am Kalenderjahresende erfolgt.

Dr. Bernd Luderer

Tätig auf den Gebieten der Mathematischen Optimierung, Wirtschaftsmathematik und Finanzmathematik an der Technischen Universität Chemnitz. Ist verheiratet und hat eine Tochter.

Zeitungsschnipsel

Auch ein flüchtiger Zeitungsleser wird immer wieder auf Meldungen stoßen, die etwas mit Mathematik zu tun haben. Solche, aber auch Informationen, die wir allgemein interessant finden, sind hier aufgeführt. Wenn Ihr so einen Schnipsel findet, schneidet ihn doch bitte aus und sendet ihn an uns!
Vergeßt aber bitte nicht, die Quelle anzugeben!

Herr Walter Träger aus Döbeln fand in der *Bild am Sonntag* die Information, daß die Termitenkönigin das fruchtbarste Insekt der Welt ist.

Sie stößt fast jede Sekunde ein Ei aus, im Laufe ihres Lebens über 100 Millionen. Welches ist nach diesen Angaben die minimale Zeitspanne, in der eine Termitenkönigin diese 100 Millionen Eier legt?

In *Unsere Illustrierte* war die Meldung zu finden, daß die Elefantendame Kiri aus dem Nürnberger Zoo die Stabilität der Kinderfahrzeuge einer Fürther Spielwarenfabrik testete. Wie, sehr Ihr auf dem Foto.

„Kiri" prüft Kinderfahrzeuge

Als Warentester ganz besonderer Art betätigte sich Elenfantenkuh "Kiri" im Nürnberger Zoo. Der Fürther "Big"-Spielwarenfabrikant hatte die schwergewichtige Dame engagiert, um die Stabilität seiner Kinderfahrzeuge zu testen. Zur Freude des Herstellers hielt der rote Kunststoff-Renner dem starken Auftritt "Kiris" mühelos stand und bekam das Prädikat "unzerbrechlich".

Wißt Ihr eigentlich, wie schwer so ein Elefant ist?

In der Zeitschrift *Panthera* des Leipzigers Zoos fanden sich die Angaben für den 26 Jahre alten Sahib, er wog bei einer Größe von 3,5 m fast 5 t (1 Tonne = 1000 kg). Nur zum Vergleich: Der inzwischen allerorts bekannte Trabbi wiegt zusammen mit 4 normalgewichtigen Personen etwa 1 t.

Diese Meldung erinnert an die Frage, mit der Leipziger Physiklehrer die Klassen bei der Einführung des Druckes gern konfrontieren.
Wer übt den größeren Druck aus? Das Leipziger Völkerschlachtsdenkmal mit seinen 300 000 t und der Grundfläche von 80 m x 67,5 m oder der Pfennigabsatz eines Stöckelschuhs?

Wenn Ihr nicht klar kommt, fragt doch mal Euren Physiklehrer.

Schon gewußt, daß ...

• ein Würfel mit der Kantenlänge von 1 cm eine Oberfläche von 6 cm^2 hat, diese aber auf 6000 cm^2 anwächst, wenn man das gleiche Volumen auf viele kleine Würfel mit 10^{-3} cm Kantenlänge verteilt (woraus sich die Wirksamkeit poröser Stoffe erklären läßt).

• daß früher das Steinsalz (Natriumchlorid, NaCl) aus der Oase Ammon als sal ammoniacum bezeichnet wurde, dieser Name später fälschlicherweise auf den ägyptischen Salmiak (Ammoniumchlorid, NH_4CL) übertragen wurde und so der Name Ammoniak entstand.

aus: Urania, Berlin

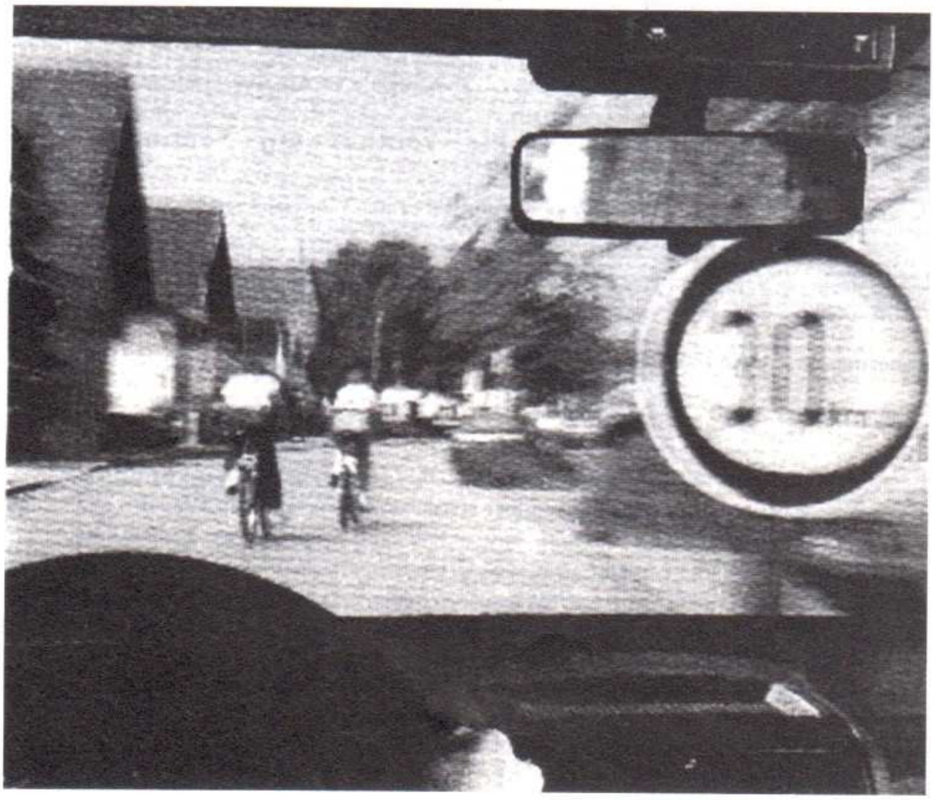
Mathematik im Straßenverkehr

Ein leider sehr aktuelles Thema

Die erschreckend hohen Unfallzahlen der letzten Monate verdeutlichen, welche Gefahren im Straßenverkehr liegen. Ein häufiger Unfallgrund ist zu schnelles Fahren; d. h. der Anhalteweg ist beim Erkennen einer Gefahrensituation zu lang. Der unten wiedergegebene Zeitungsausschnitt (Hannoversche Allgemeine Zeitung vom 19. Juni 1991) gibt einige Hinweise zum Bremsweg und zum Anhalteweg.

Neben der angesprochenen Berechnungsmöglichkeit des Bremsweges gibt es verschiedene Arten, wie der Anhalteweg berechnet werden kann. Der Anhalteweg ist die Summe aus dem Vorbremsweg (das ist die Strecke, die während der "Schrecksekunde" zurückgelegt wird) und dem Bremsweg. Die Reaktionszeit ist bei Spitzensportlern beim Start des 100m-Laufes sehr kurz: 0,2 Sekunden wurden gemessen – bei einem plötzlich auftretenden Hindernis kann man "vor Schreck wie gelähmt sein" und (lebens)wichtige Zeit verstreichen lassen.
Der Anhalteweg wird auch nach den Faustregeln "Tachohalbe" oder "Zwei-Sekunden-Abstand" oder der Fahrschulregel $\frac{v^2}{10} + \frac{3v}{10}$ berechnet. Welche Werte erhält man jeweils für Tempo 30, 50, 80, 100 und 130?
Einschub: Die Polizei hat bei einer innerörtlichen Geschwindigkeitsmessung einen Motorradfahrer mit Tempo 247 geblitzt. In der Zeitungsmeldung steht, daß für ihn ein Bremsweg von 444 m berechnet wurde. Paßt dieser Wert zu einer der oben angegebenen Formeln?
Im Stadtverkehr kommt man vor den Ampeln häufig in den Zwiespalt "darf ich – oder darf ich nicht weiterfahren?", wenn die Ampel auf "Gelb" umspringt.

- Kann man es bei einer Geschwindigkeit von 50 km pro Stunde, einer Reaktionszeit von 1 Sekunde und einer Gelbphase von 3 Sekunden immer vermeiden, bei "Rot" über die Kreuzung zu fahren?
- Auf eine Kreuzung von zwei je sechs Meter breiten Straßen fahren zwei Autos mit der zugelassenen Geschwindigkeit von 50 km pro Stunde zu. Sie sind gleich weit von der Kreuzung entfernt. Kommt es zum Unfall?
- Wie langsam müßte eines der beiden Autos fahren, um den Aufprall vermeiden zu können?



Beim Bremsvorgang spielen viele Faktoren eine Rolle

Mehr Abstand bringt mehr Sicherheit

Von Otto Kretschmer

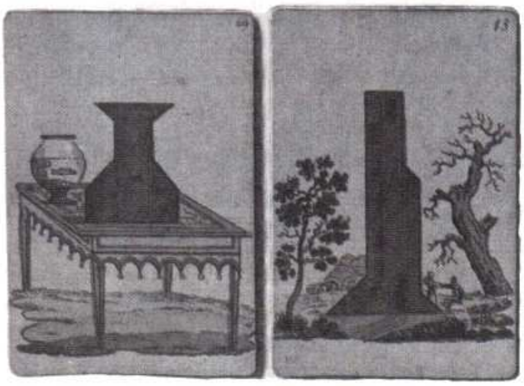
Für viele Urlauber endet die Fahrt in die Ferien leider vorzeitig. Gerade in der Reisezeit im Sommer ereignet sich eine Vielzahl von Unfällen auf unseren Straßen, die auf falsche Einschätzung des Bremsweges zurückzuführen sind. Je höher die Geschwindigkeit, desto verheerender sind die Folgen.

Der Bremsweg ist oft länger, als man denkt. Die sogenannte Schrecksekunde, schlechte Reifen- oder Fahrbahnbeschaffenheit, Überladung, ungewohntes Fahren mit Wohn- oder Bootsanhänger, können zu Überraschungen führen, die häufig nicht mit einkalkuliert werden.
Gut funktionierende Bremsen sind die wichtigste Voraussetzung für sicheres Fahren. Doch nutzen die besten Bremen wenig, wenn der Fahrer das Einmaleins des Bremsens nicht beherrscht. Am besten ist es natürlich, immer so zu fahren, daß man gar nicht erst in die Verlegenheit kommt, die Bremse voll durchtreten zu müssen. Der Sicherheitsabstand spielt dabei die entscheidende Rolle. Er sollte jeweils dem halben Tachowert entsprechen, bei Tempo 90 als etwa 45 Meter betragen. Nur so kann man Auffahrunfälle vermeiden.
Besonders bei hohen Geschwindigkeiten auf Schnellstraßen und Autobahnen wird die Länge des Bremsweges häufig unterschätzt. Denn der Bremsweg wächst im Quadrat der Geschwindigkeit. Er verdoppelt sich demnach bei doppelter Geschwindigkeit nicht nur, sondern vervierfacht sich. Ein Beispiel: Bei einer Geschwindigkeit von 50 km/h liegt er bei 16 Meter, während er bei 100 km/h bereits 64 Meter beträgt.
Der tatsächliche Anhalteweg jedoch ist noch länger. Denn von dem Augenblick an, in dem man die Gefahr erkennt, bis zum Handeln vergeht oft mehr als die sogenannte Schrecksekunde. Diese Reaktionszeit ist nicht nur von Mensch zu Mensch verschieden, sondern auch bei ein und demselben Fahrer. Sie hängt nicht unerheblich von der augenblicklichen seelischen und körperlichen Verfassung ab. Und in dieser Zeit rollte der Wagen mit unverminderter Geschwindigkeit weiter. Um den Anhalteweg eines Wagens zu berechnen, muß man also zum Bremsweg den Reaktionsweg addieren.
Verzögert werden kann der Anhalteweg darüber hinaus noch durch verschiedene andere Faktoren. So zum Beispiel durch die Reifen. Stark abgefahrene Profile können den Bremsvorgang ganz erheblich beeinflussen. Ebenso negativ kann sich zu niedriger oder zu hoher Reifenluftdruck bemerkbar machen.
Eine entscheidende Rolle spielen beim Bremsvorgang auch die Straßenbeschaffenheit und die Witterung. Schon bei normaler Regennässe kann sich der Bremsweg verdoppeln, bei schmieriger Fahrbahn verdreifachen. Da sich der Straßenzustand unversehens ändern kann, sollte man gar nicht erst das Risiko einer Vollbremsung eingehen, sondern mit ausreichendem Sicherheitsabstand fahren und den Fuß rechtzeitig vom Gaspedal nehmen. Das gilt ganz besonders auch in Kurven. Denn bei Vollbremsung besteht immer die Gefahr, daß die Räder blockieren und der Wagen ins Schleudern kommt.

Tangram und Bruchrechnung

Tangram-Set aus Kunststein mit Puzzlekarten aus dem Deutschland um die Jahrhundertwende

Legespiele gehören zum uralten Kulturgut vieler Völker. Bereits im 16. Jahrhundert war das Tangram-Spiel in Europa zur Lösung geometrischer Probleme weit verbreitet. Die Tangram-Idee bietet interessante Möglichkeiten für ein experimentelles und spielerisches Lernen. Es geht im folgenden nicht nur um das Spielen mit einer fertigen Tangram-Einheit, sondern um die Konzipierung und Herstellung eines entsprechenden Spiels.



Diese handgedruckten Tangramkarten sind Teil eines Spiels, das im Europa der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts erschien. Aufgabe der Spieler war, die Figuren unter Verwendung aller Teile nachzulegen.

Die Geschichte des Tangram-Spiels

Sicher ist, daß bereits Archimedes, Euklid und Pythagoras das Tangram-Spiel kannten. Vermutlich ist das Spiel in China entstanden; es wird sogar behauptet, daß dieses dort bereits vor 4000 Jahren bekannt war. Die Herkunft des Begriffes "Tangram" ist hingegen unbekannt. Fest steht, daß das Tangram-Spiel Europa im 19. Jahrhundert förmlich "überschwemmte", nachdem es 1813 in einem chinesischen Buch mit rund 300 Figuren wiederentdeckt worden war. Die Besonderheit des chinesischen Tangram: Es besteht aus sieben Teilstücken (Tan's), die sich stets zu der Urform des Quadrats zusammensetzen lassen.

Bruchtangram

Mit dem Bruchtangram können, wie mit dem üblichen Tangram, die verschiedensten Figuren gelegt werden. Aber vorher sollst Du ausrechnen, wie groß die einzelnen Bruchteile sind.

Spielanregungen

Die einfachste (aber trotzdem schwierige) Spielweise besteht darin, daß man die Tangramteile auf einem Tisch zu leicht erkennbaren Figuren, Symbolen usf. anordnet. Mit Geduld und Phantasie kann man zum Beispiel Zahlen, Buchstaben, Tiere, Menschen, Profile, Gesichter oder verschiedene Gegenstände legen (vgl. die Abbildungen). Um das Spiel abzuändern, läßt sich auch die Aufgabe stellen, eine Vorlage nachzubilden. Wenn man zum Beispiel ein erstes, beliebiges Tangram gelegt hat, ist es gar nicht gesagt, daß man nach dem Mischen der Teile das ursprüngliche Quadrat sofort auf Anhieb wieder zustande bringt. Noch schwieriger ist es, gewisse Vorlagen nachzubilden. Die Zahl der möglichen Figuren ist für einen phantasiebegabten Spieler fast unbegrenzt.

Selbstbau eines

Dieses Spiel kannst Du selbst herstellen und Weihnachten Deinen Freunden und Verwandten schenken.
Als Vorlage können die Bruchtangram-Spiele (Abb. 1 und 2), das übliche Tangram (Abb. 3), das Sechsecktangram (Abb. 4) oder eine von

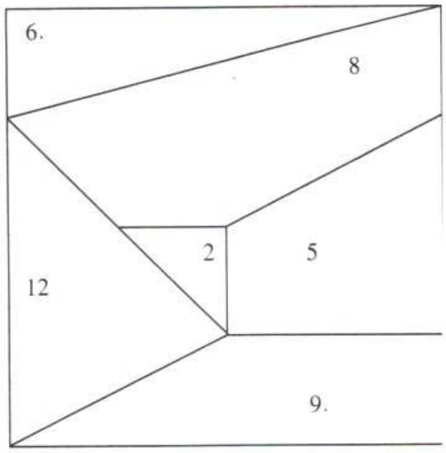
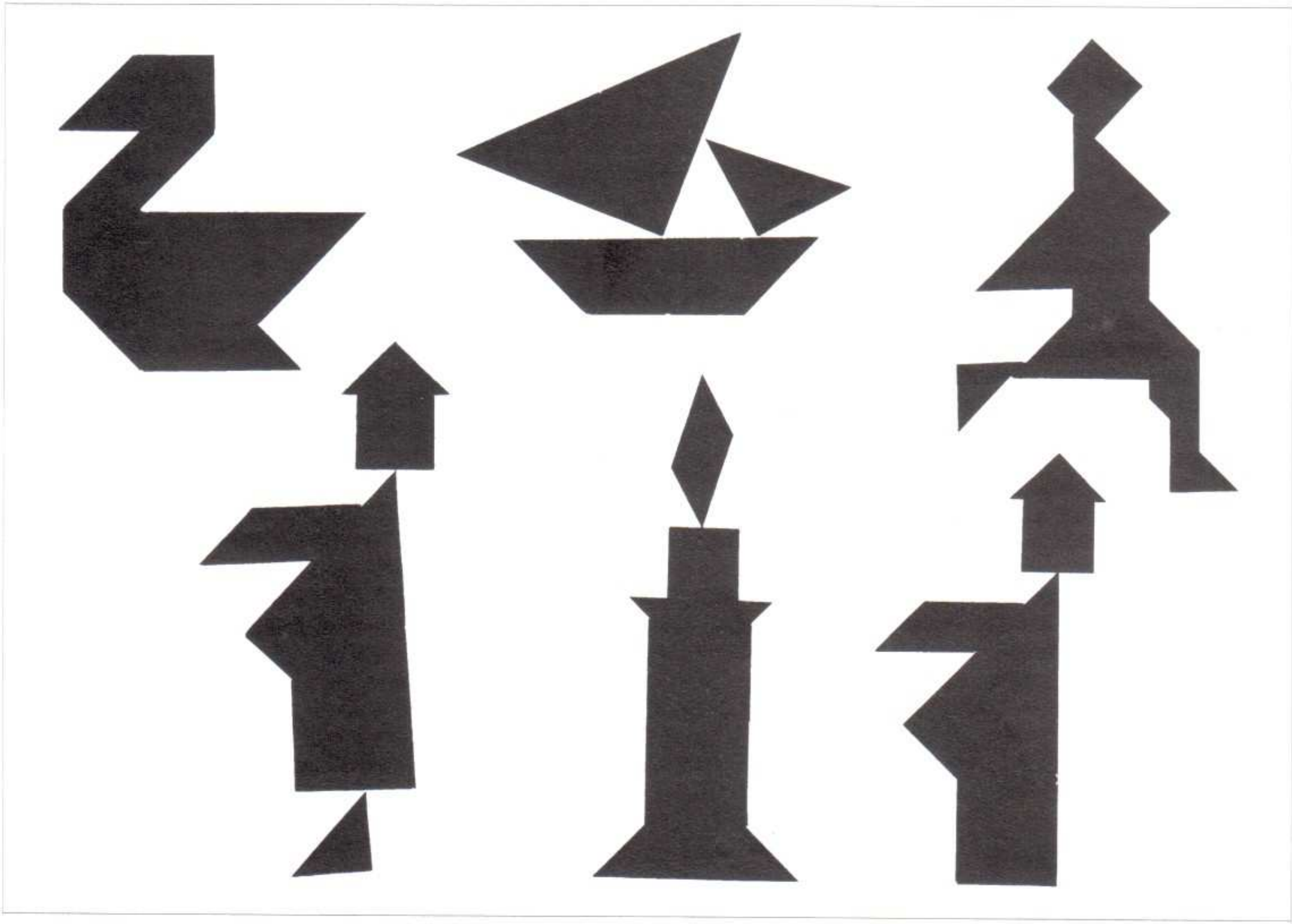


Abb. 1



Auf der höchsten Stufe des Tangrams befaßt man sich mit optischen Täuschungen. Die zwei kleinen, unten als erste und letzte Figur abgebildeten Chinesen zum Beispiel sind aus vollkommen gleichen Teilen aufgebaut, aber der eine hat einen Fuß und der andere nicht. Warum?

Tangramspiels aus Holz

Dir selbst erdachte Einteilung dienen. Wenn Du Dein persönliches Tangram herstellen willst, geht das in folgenden Schritten:

- Zeichnen eines Quadrats in beliebiger Größe (empfohlen wird eine Kantenlänge von 12 bis 20 cm)

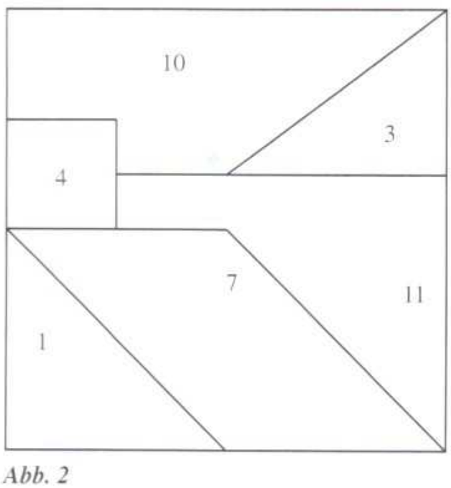


Abb. 2

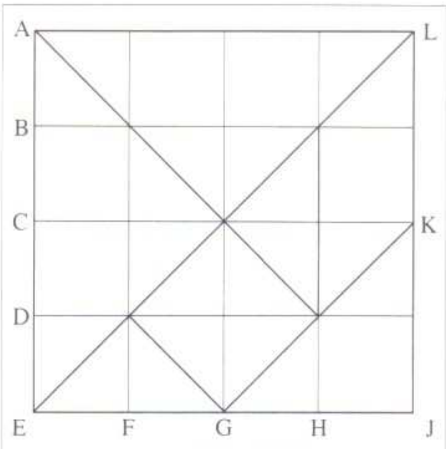


Abb. 3

- Aufteilen dieses Quadrats in 16 kleinere, gleichgroße Quadrate
- Einzeichnen von sieben Teilstücken (Tan's) durch Verbindung verschiedener Kreuzungspunkte.

Dabei ergeben sich beliebige Figuren wie Quadrate, Dreiecke, Rechtecke usw.

- Auftragen der Zeichnung auf Pappe (möglichst farbig) oder Sperrholz
- Ausschneiden bzw. Aussägen entlang der eingezeichneten Linie und die einzelnen Teile "durcheinanderwürfeln".

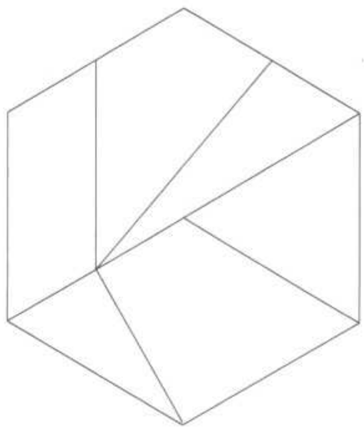


Abb. 4

Von der Ähnlichkeit zur Selbstähnlichkeit

2. Teil

In den letzten 10 Jahren erlangte der Begriff des Fraktals in der Mathematik und der Physik eine immer größere Bedeutung. Im letzten Heft wurdet Ihr mit einer speziellen Klasse von Fraktalen, den "Selbstähnlichen Mengen" bekannt gemacht. Dieser Beitrag soll Euch helfen, mit dem Computer selbständig solche Mengen zu erzeugen.

Im ersten Teil haben wir festgelegt: Eine beschränkte und abgeschlossene Figur A heißt selbstähnlich, wenn A aus endlich vielen zu A ähnlichen Teilen besteht. Wir schreiben hierfür: $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n,\ n \in N$. Wenn $f_1,\ldots,f_n$ die entsprechenden Ähnlichkeitsabbildungen mit $f_i(A) = A_i$ sind, so können wir auch schreiben $A = f_1(A) \cup \ldots \cup f_n(A)$. Die Bilder 1 und 2 zeigen zwei weitere Computerbeispiele solcher Mengen.

Im Jahre 1981 hat der australische Mathematiker J. E. Hutchinson einen jetzt nach ihm benannten Satz bewiesen:

Zu jeder endlichen Menge $f_1,\ldots,f_n$ von Ähnlichkeitsabbildungen, deren Streckungsfaktoren alle kleiner als 1 sind, gehört genau eine selbstähnliche Menge A, die die Gleichung $A = f_1(A) \cup \ldots f_n(A),\ n \in N$ erfüllt.

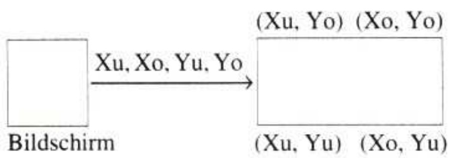
Bei der Erzeugung solcher selbstähnlicher Figuren bedienen sich die Mathematiker oft der Computer. Dem Computer werden die Ähnlichkeitsabbildungen eingegeben. Die Programme sind dann so gestaltet, daß der Computer die zugehörige selbstähnliche Figur auf den Bildschirm zeichnet. Ein solches Basic-Programm für den KC85/3 geben wir Euch hier an:

```
10  WINDOW 0,31,0,39 : CLS
20  PRINT AT (2,5); "PROGRAMM ZUM
    ZEICHNEN"
30  PRINT AT (4,5); "SELBSTÄHNLI
    CHER MENGEN"
40  PRINT AT (6,2); ****************
************************************
***********"
50  LOCATE 10,2: PRINT "GEBEN SIE
    DIE ANZAHL N DER"
60  PRINT "ABBILDUNGEN EIN"
70  INPUT N: DIMF(N): DIMW(N): DIMX
    (N): DIMY (N)
80  PRINT "GEBEN SIE FÜR DIE ABBIL-
    DUNGEN NR.I"
90  PRINT "FAKTOR, WINKEL, FIX-
    PUNKT EIN!"
100 FOR I = 1 TO N
110 PRINT "ABBILDUNG: ",I
120 INPUT F(I), W(I), X(I), Y(I) : W(I) =
    W(I) *2* PI/360
130 NEXT I: XO = X(1) : Y0 = Y(1)
140 PRINT "GEBEN SIE DIE BEGREN-
    ZUNGEN DER"
150 PRINT "ZEICHENEBENE Xu, Xo, Yu,
    Yo EIN"
160 INPUT Xu Xo, Yu, Yo : CLS
170 F= Int (N * RND (1) + 1) : X = X0 : Y =
    Y0
175 A = COS (W(F)) : B = SIN (W(F)) : C =
    X-X (F) : D = Y-Y (F)
180 X0 = F(F) * (A * C-B * D) + X(F)
190 YO = F(F) * (B * C + A * D) + Y(F)
200 P = 319 * (X0 - Xu) / Xo - Xu):
    Q = 256 * (Y0-Yu) / Yo-Yu)
210 IF P<0 OR P> 319 THEN 240
220 IF Q<0 OR Q> 256 THEN 240
230 PSETP, Q, 7: GOTO 170
240 PRINT "GRENZEN SIND ZU KLEIN"
250 PRINT "GEBEN SIE NEUE Xu, Xo,
    Yu, Yo EIN!"
260 INPUT Xu, Xo, Yu, Yo: CLS
270 GOTO 170
```

Alle Bilder unseres Artikels sind mit diesem Programm gezeichnet. Um die Startschwierigkeiten beim Umgang mit dem Programm zu verringern, seien hier einige Hinweise gegeben:

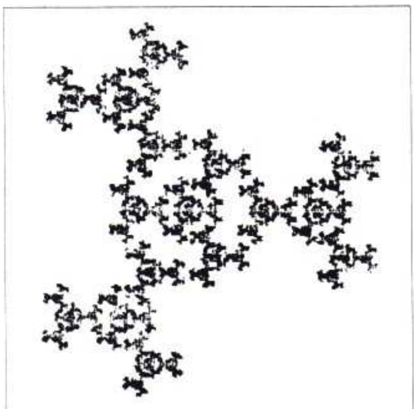
1. Mit diesem Programm könnt Ihr nur selbstähnliche Mengen erhalten, für die die Ähnlichkeitsabbildungen $f_1,\ldots,f_n$ Nacheinanderausführungen einer Drehung und einer zentrischen Stauchung sind und bei denen das Drehzentrum und das Stauchungszentrum zusammenfallen. (Durch einfache Ergänzungen in dem Programm kann man jedoch die Klasse der zulässigen Abbildungen $f_1,\ldots,f_n$ ohne Schwierigkeiten vergrößern.)

2. Ihr werdet zuerst aufgefordert, die Anzahl der Abbildungen $f_1,\ldots,f_n$ einzugeben. Jede einzelne Abbildung f_i, $i = 1,\ldots,n$, ist durch die Angabe eines Stauchungsfaktors k_i, eines Drehwinkels w_i (zwischen -360° und 360°) und des Stauchungszentrums $(x_i; y_i)$ charakterisiert. Diese Daten habt Ihr danach in der Reihenfolge Faktor, Winkel, Fixpunkt (immer getrennt durch Komma) für jede Abbildung einzugeben. Zum Schluß müssen noch die Grenzen Xu, Xo, Yu und Yo des Teils der Zeichenebene, der auf dem Bildschirm erscheint, eingegeben werden.



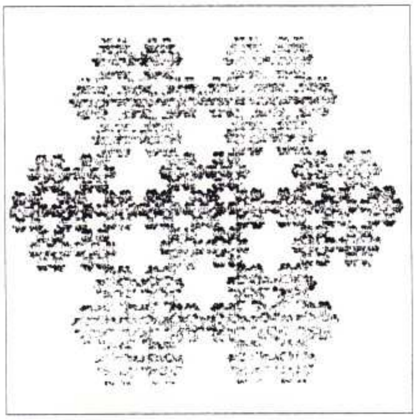
Sollten bei der Abarbeitung des Programms Bildpunkte berechnet werden, die außerhalb der eingegebenen Bildschirmebene liegen, so werdet Ihr aufgefordert, neue (größere) Grenzen für die Zeichenebene einzugeben.

Abb. 1



f_1:	0,42;	180°;	0,5;	0,0
f_2:	0,42;	180°;	-0,25;	0,43
f_3:	0,42;	180°;	-0,25;	-0,43
f_4:	0,42;	180°;	0,0;	0,0
Grenzen:	-2,0;	2,0;	-1,5;	1,5

Abb. 2



f_1:	0,34;	180°;	0,25;	0,43
f_2:	0,34;	180°;	-0,25;	0,43
f_3:	0,34;	180°;	-0,5;	0,0
f_4:	0,34;	180°;	-0,25;	-0,43
f_5:	0,34;	180°;	0,25;	-0,43
f_6:	0,34;	180°;	0,5;	0,0
f_7:	0,34;	180°;	0,0;	0,0
Grenzen:	-2,0;	2,0;	-1,5;	1,5

Fraktale

Fraktale hielten Einzug in das allgemeine wissenschaftliche Bewußtsein mit der Frage "Wie lang ist die Küste von Großbritannien?" im Titel einer Arbeit von Benoit B. Mandelbrot im Jahr 1967; das Wort "Fraktal" wurde dort allerdings noch nicht verwendet. So trivial die Frage zu sein scheint, so überraschend ist die Antwort: praktisch unendlich, jedenfalls verglichen mit der Zahl, die man erhält, wenn man die Länge der Küste auf der Landkarte in Abbildung 1 a ermittelt und durch den Maßstabsfaktor 1:X dividiert. Abbildung 1 b zeigt, warum das so ist: die auf der detaillierteren Karte sichtbaren Einbuchtungen und Ausbuchtungen tragen zur gemessenen Gesamtlänge der Küste bei. In der Wirklichkeit wächst die Küstenlänge bei jeder Verkürzung der Meßlatte – bis es spätestens bei atomaren Abmessungen sinnlos wird, von "Länge" der "Küste" zu sprechen. Richardson, der – von Mandelbrot zitiert – die Abhängigkeit der Küstenlänge von der Meßgenauigkeit untersucht hat, findet, daß bei einer Maßstabslänge von 1 km die Küste Großbritanniens dreimal so lang ist wie bei einer Länge von 1000 km. Nach Richardsons empirischem Gesetz für das Wachstum der Küstenlänge bei Verkürzung des Maßstabs ist die Küste Großbritanniens unendlich lang. Derartige Kurven nennt Mandelbrot Fraktale. Statt von der Länge eines Fraktals spricht man besser von dessen "fraktaler Dimension".

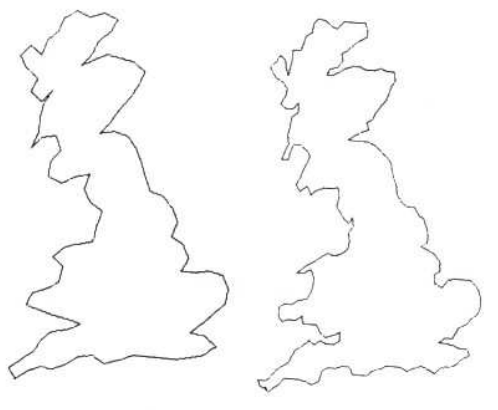
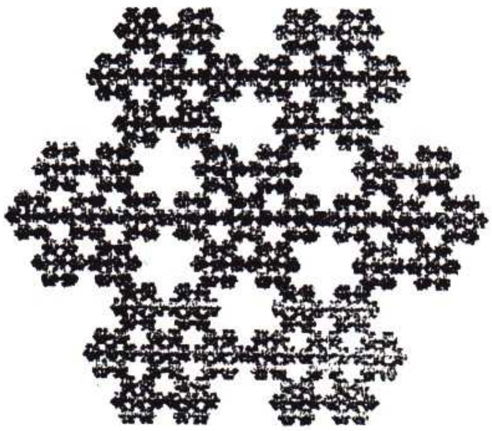
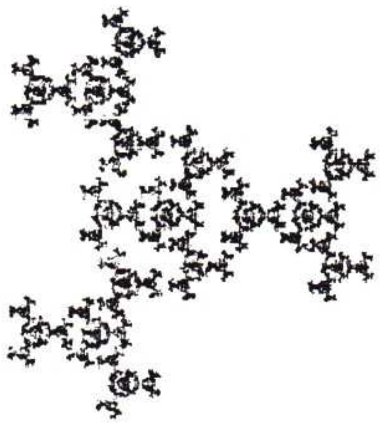


Abb. 1a *Abb. 1b*

3. Von der Wahl der Stauchungsfaktoren hängt wesentlich ab, ob man in dem Computerbild die einzelnen Teile $A_i = f_i(A)$ der selbstähnlichen Menge A gut erkennen kann. Zu große Stauchungsfaktoren führen zur Überlappung der A_i, und damit wird eine Unterscheidung dieser Teile kaum noch möglich. Als Beispiel dafür mögen die Bilder 3a (Faktor 0.3) und 3b (Faktor 0.38) dienen.

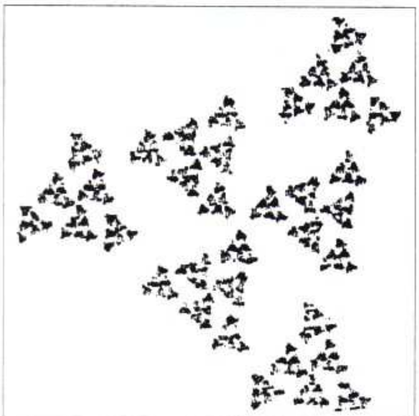
Zum Abschluß noch einige Bemerkungen zur Arbeitsweise des Programms:
Die selbstähnliche Menge A wird durch einen iterativen Prozeß erhalten, d.h. es wird zuerst der Fixpunkt $(x_1; y_1)$ der ersten Abbildung f_1 auf dem Bildschirm gezeichnet. Im Befehl 170 wird zufällig eine Abbildung f aus den Abbildungen $f_1,...,f_n$ ausgewählt und in 180 das Bild $f(x_1; y_1)$ von $(x_1; y_1)$ unter der ausgewählten Abbildung f berechnet. Der Bildpunkt $f(x_1; y_1)$ wird in Befehl 230 gezeichnet. Danach beginnt mit einem Sprung zu 170 der nächste Iterationsschritt, in welchem $f(x_1; y_1)$ jetzt die Rolle von $(x_1; y_1)$ übernimmt. Diese Iterationsschleife wird nun vom Computer solange durchlaufen, bis man der Meinung ist, das Bild der selbstähnlichen Menge ist "deutlich genug". Dann bricht man das Programm mittels der Stopptaste ab. Eine Begründung dafür, daß uns dieser iterativen Zufallsalgorithmus stets ein vernünftiges Bild der entsprechenden selbstähnlichen Menge liefert, würde den Rahmen dieses Artikels sprengen. Sicher ist, daß auf diese Weise immer selbstähnliche Mengen erhalten werden.





Denjenigen, die schon ein wenig Erfahrung mit der Programmiersprache BASIC haben, wird es sicher nicht schwerfallen, einige kleine Verbesserungen der Bedienung in das Programm einzubauen. Wir wünschen Euch viel Spaß dabei und hoffen, daß Ihr mit unserem Programm viele schöne Bilder erzeugen könnt.

Abb. 3 a

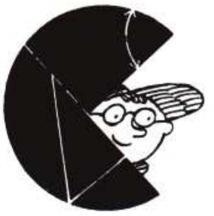


f_1:	0,3;	30°;	0,5;	0,87
f_2:	0,3;	30°;	-1,0;	0,0
f_3:	0,3;	30°;	0,5;	-0,87
f_4:	0,3;	0°;	-0,25;	0,43
f_5:	0,3;	0°;	-0,25;	-0,43
f_6:	0,3;	0°;	0,5;	0,0
Grenzen:	-2,0;	2,0;	-1,5;	1,5

Abb. 3 b

f_1:	0,38;	30°;	0,5;	0,87
f_2:	0,38;	30°;	-1,0;	0,0
f_3:	0,38;	30°;	0,5;	-0,87
f_4:	0,38;	0°;	-0,25;	0,43
f_5:	0,38;	0°;	-0,25;	-0,43
f_6:	0,38;	0°;	0,5;	0,0
Grenzen:	-2,0;	2,0;	-1,5;	1,5

Dr. Uwe Feiste, stud. math. E. Krause
Fachrichtungen Mathematik/Informatik
der Ernst-Moritz-Arndt-Universität
Greifswald



Komisches, Kniffliges und Knackiges

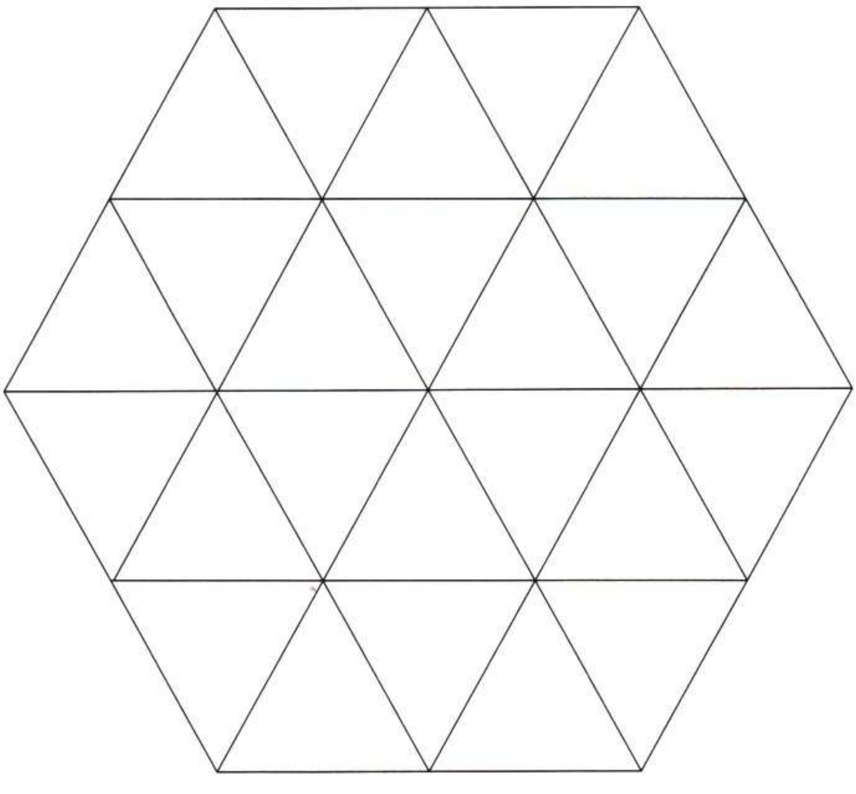
Alphons logische Abenteuer (7)

"Niemand ist hier", sagte Alphons' Schwester, als sie die Wohnung betrat, dabei Alphons übersehend, der zufällig hinter dem Schrank in seinem Zimmer stand. Als er hervortrat freute sie sich und sagte: "Es ist doch nicht niemand hier." Alphons nickte ihr freundlich zu und setzte sich an seinen Tisch. Zu seinen Schularbeiten kam er aber nicht, denn die beiden Aussagen seiner Schwester gingen ihm nicht aus dem Kopf. Ist die Aussage "Es ist nicht niemand hier" tatsächlich die Verneinung der Aussage "Niemand ist hier"? Immer wieder in seinem Logikbuch nachlesend überlegte sich Alphons folgendes. Wenn man nur Aussagen in Betracht zieht, die entweder wahr oder falsch sind, dann ist die Verneinung einer wahren Aussage eine falsche, die Verneinung einer falschen Aussage eine wahre Aussage. Ich muß also zunächst prüfen, ob "Niemand ist hier" eine Aussage vorausgesetzter Art ist. Mit "hier" ist unsere Wohnung gemeint. Daß niemand in der Wohnung ist, bezieht sich auf einen bestimmten Zeitpunkt. Selbst wenn sonst niemand da war zu diesem Zeitpunkt, so war sie ja zu diesem Zeitpunkt da. Wen erwartete sie dann in unserer Wohnung? Sicherlich ein Mitglied unserer Familie und diese besteht aus Mutti, Vati, meiner Schwester und mir. Die vollständige Behauptung meiner Schwester ist also: "Niemand von der Familie außer mir ist zu dem Zeitpunkt t in unserer Wohnung". Diese Behauptung ist entweder wahr oder falsch. Ersichtlich ist sie falsch, denn zu diesem Zeitpunkt war ja außer ihr noch ich in der Wohnung. Hätte nun meine Schwester die Aussage "Niemand ist hier" (eine Kurzfassung für die vollständige Aussage) auch so verneinen können: "Niemand ist nicht hier"? Das ist wieder eine Kurzfassung für die vollständige Aussage: "Niemand von der Familie außer mir ist zu dem Zeitpunkt t nicht in unserer Wohnung". Wenn niemand nicht hier ist, dann sind alle Familienmitglieder hier. Zum Zeitpunkt waren aber meine Eltern nicht hier, also ist diese Aussage falsch. Da die Verneinung einer falschen Aussage eine wahre Aussage ist, kann die falsche Aussage "Niemand ist nicht hier" nicht die Verneinung von "Niemand ist hier" sein.
Meine Schwester bildete die Verneinung von "Niemand ist hier" durch den Satz: "Nicht niemand ist hier." Ist es so, daß zum Zeitpunkt t nicht niemand in der Wohnung ist, dann ist zu diesem Zeitpunkt jemand hier. Da meine Schwester die zum Zeitpunkt t getroffene Behauptung verneint, muß ich in der Wohnung denselben Zeitpunkt t beibehalten, obwohl es natürlich einen Zeitunterschied zwischen der Äußerung der beiden Aussagen gibt. Ein solcher jemand bin ich, denn ich war zum Zeitpunkt t in der Wohnung. Sie hat demnach eine Aussage behauptet, die wahr ist und die die Verneinung einer falschen Aussage ist.
"Die Verneinung ist schon eine verflixt knifflige Angelegenheit. Bist Klasse, Schwester", dachte Alphons noch ehe er sich auch mit sich zufrieden an seine Schularbeiten machte.

Prof. Dr. Lothar Kreiser
Institut für allgemeine Logik der Universität Leipzig

Legespiel

10 Münzen (5 Pfennigstücke und 5 Fünfpfennigstücke) müssen so auf die Schnitt- und Endpunkte der Linien gelegt werden, daß auf **einer** Linie nie zwei gleiche Geldstücke zu finden sind.
Es gibt mehrere Lösungen: Schließt Euch zu Vierergruppen zusammen.



Noch etwas für Logiker

Von fünf Freunden hat jeder je einen Sohn. Jeder Sohn hat sich ein Buch bei einem der Freunde seines Vaters entliehen.
Die Freunde haben alle Familiennamen, die einen Beruf bezeichnen.
Es bestehen dabei folgende Bedingungen:
1. Bei keinem stimmt der Familienname mit seinem Beruf überein.
2. Entsprechend einer alten Familientradition erlernt der Sohn den Beruf seines Vaters.
3. Der Sohn des Schneiders hat ein Buch von Herrn Schneider.
4. Der Familienname des Sohnes des Schneiders ist die Berufsbezeichnung des Sohnes von Herrn Schneider.
5. Der Sohn von Herrn Schneider hat ein Buch vom Schneider entliehen.
6. Der Zimmermann heißt nicht Schuster.
7. Der Zimmermann hat ein Buch von Herrn Sattler entliehen.

Wie heißt der Gärtner?

aus: O. Zich/A. Kolman, Unterhaltsame Logik, Mathematische Schülerbücherei Nr. 51, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig

„Mensch ärgere Dich schnell!"

Es ist eine Art schnelles "Mensch ärgere Dich nicht". Du brauchst dazu 4 Pfennigstücke, 4 Fünfpfennigstücke und einen Würfel.

Und so werden die Münzen verteilt:

	1				5	
1						5
			■			
1						5
	1				5	

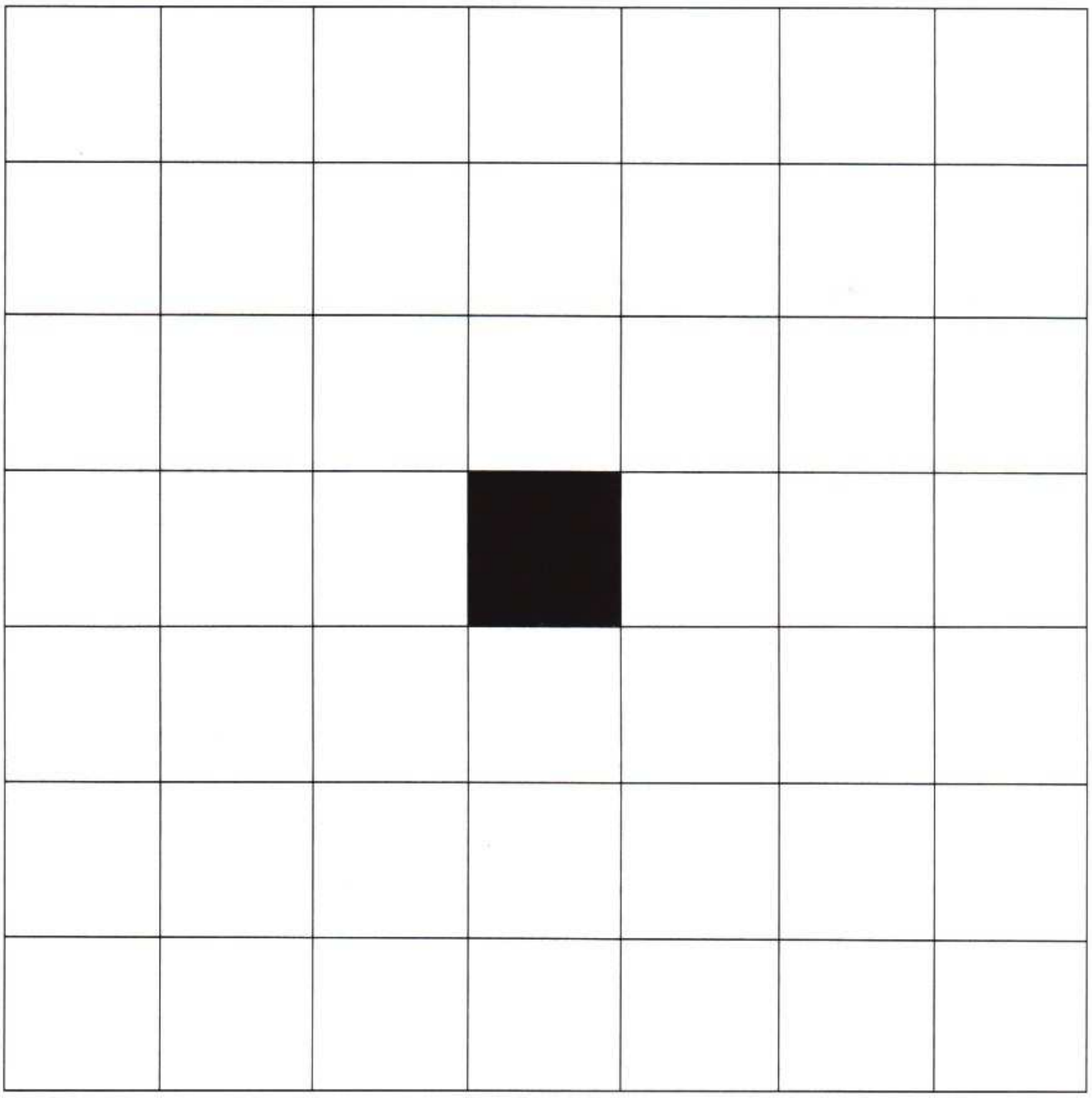
Regel:
1 und 4 auf dem Würfel
= 1 Kästchen weiter

2 und 5 auf dem Würfel
= 2 Kästchen weiter

3 und 6 auf dem Würfel
= 3 Kästchen weiter

Gezogen wird nur waagerecht oder senkrecht.

In der Mitte ist also das Loch. Besetzte Felder dürfen nicht übersprungen werden. Kommt man auf ein besetztes Feld, wird dessen Figur irgendwohin verwiesen (ganz an den Rand). Wer zuerst zwei gegenüberliegende Felder am Loch in der Mitte erreicht, hat gewonnen!



Sprachecke

The puzzle of the five houses

There are five houses.

1. An Englischman lives in the red house.
2. The Spaniard owns a dog.
3. Coffee is drunk in the green house.
4. The Ukrainian drinks tea.
5. The Old Gold smoker owns snails.
6. The green house is immediately to the right of the ivory house.
7. Kools are smoked in the yellow house.
8. Milk is drunk in the middle house.
9. The Norwegian lives in the first house.
10. The man who smokes Chesterfields lives next to the man who owns a fox.
11. Kools are smoked in the house next to the house where the horse is kept.
12. The Lucky strike smoker drinks orange juice.
13. The Japanese smokes Parliaments.
14. The Norwegian lives next to the blue house.
15. Each man has one house, one pet, one smoke, a different nationality and a different choice of drinks.

Who drinks water? Who owns a Zebra?

mitgeteilt von Dr. Jochen Hesse, Beilrode

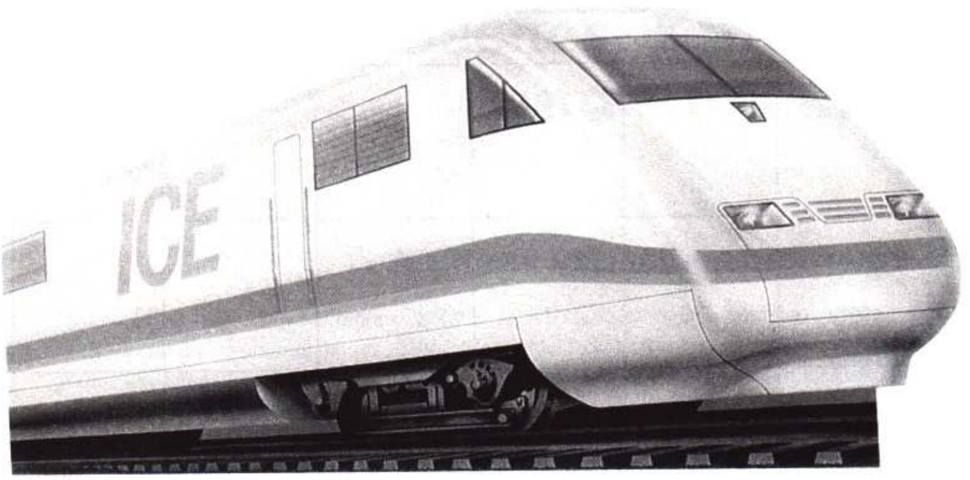
Les plaquettes de José

José a disposé 9 plaquettes numérotées de 1 à 9 dans un sac. Il en tire 4 d'un seul coup. Avec ces quatre plaquettes, en permutant les chiffres, il fabrique tous les nombres possibles à quatre chiffres, qu'il note au fur et à mesure. Il en fait le total et trouve 159984.

Quels sont les quatre plaquettes tirées? On n'oubliera pas d'indiquer le nombre de solutions.

aus: tangente, Paris
(übersetzt von Peter Hofmann, Leipzig)

Bei Herrn Kohl im Bücherschrank steht die Gesamtausgabe von Hölderlin, 4 Bände in Klarsichtfolie verpackt. Ein Bücherwurm hat die Folie durchbohrt und beginnt auf Seite 1 des ersten Bandes mit dem Fressen. Wie viele Zentimeter hat er bis zur letzten Seite des 4. Bandes zurückgelegt, wenn jeder Band 5 cm breit ist und die Einbanddecke 2,5 mm dick ist?

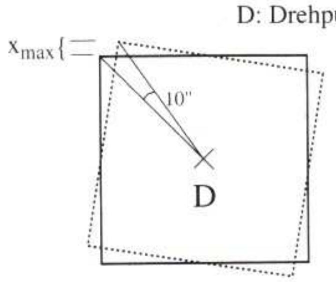


Mathematisches rund um die Bahn

Geometrie am ICE

Damit die an verschiedenen Orten hergestellten Bauteile großer technischer Geräte (z. B. Flugzeuge, Lokomotiven usw.) zueinander passen, dürfen die Abweichungen von den vom Entwicklungsingenieur vorgesehenen Idealmaßen (Sollwerte) bestimmte Grenzen nicht überschreiten.
Bei der Fertigung der Antriebswelle für den ICE wird ein quadratischer Arbeitstisch (vgl. Skizze, Seitenlänge l=1500 mm) benutzt, der im Verlauf der Bearbeitung aus der Grundposition um 360 Grad gedreht wird. Die zu bearbeitende Welle ist fest auf dem Tisch montiert, die jeweilige Position des Tisches wird automatisch gemessen und mit einer Genauigkeit von 10 Winkelsekunden korrigiert.
Berechne die maximale Abweichung x_{max} nach der Rückkehr in die Grundposition, wenn auch hier der Fehler maximal 10 Winkelsekunden beträgt.

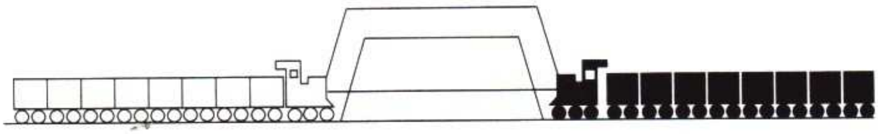
Diese Rechnung wurde nötig, da zu viele der gefertigten Wellen die erforderlichen Abmessungen nicht aufwiesen. Aufgrund des Ergebnisses der Rechnung ergab sich: Die benötigte Genauigkeit kann auf einer solchen Maschine nicht erreicht werden.



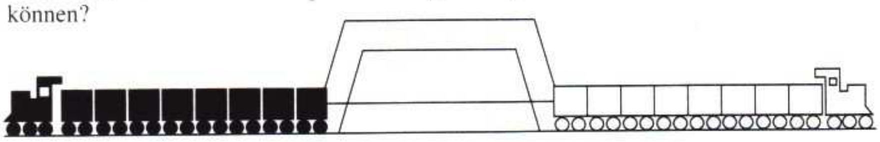
StR Friedrich Arnet, Helene-Lange-Gymnasium Fürth, Mitglied des Redaktionskollegiums der alpha

Interessante Begegnung

Lokführer Weiß und Lokführer Schwarz begegnen sich auf einer eingleisigen Strecke mit ihren Zügen, von denen jeder 8 Wagen hat, neben einem Ausweichgleis, das nur Platz für eine Lokomotive und 4 Wagen besitzt. Nun ist guter Rat teuer.



Wie müssen beide Lokführer mit ihren Wagen rangieren, um ihre Fahrten fortsetzen zu können?



aus: H.-D. Hornschuh: Noch mehr Mathe mit Köpfchen, Manz Verlag München

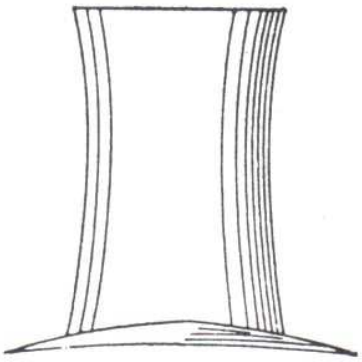
Deutschland im Stundentakt

Auf der 513 km langen Strecke zwischen Würzburg Hbf und Hamburg-Altona verkehren Intercity-Züge im Stundentakt. Der erste Zug fährt morgens um 7^{10} in Würzburg ab und kommt um 10^{59} in Hamburg an; der nächste fährt 8^{10} ab und erreicht um 11^{59} Hamburg-Altona usw. Abends besteht mit der Abfahrt um 19^{10} und der Ankunft um 22^{59} die letzte Fahrtmöglichkeit zwischen Würzburg und Hamburg.
In der Gegenrichtung von Hamburg-Altona nach Würzburg Hbf sind die Abfahrtszeiten 6^{58}, 7^{58} usw. bis 18^{58}; mit den Ankunftszeiten 10^{48} bzw. 11^{48} usw. bis 22^{48}.

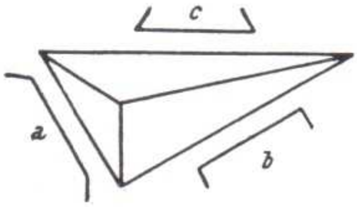
1. Wann und wo begegnen sich im Laufe eines Tages zwischen Würzburg und Hamburg erstmals zwei Intercity-Züge?
2. Wie viele Zugbegegnungen finden im Laufe eines ganzen Tages statt?
3. Warum finden diese Zugbegegnungen stets an gleichen Stellen statt?
4. Wie viele derartige Begegnungsstellen gibt es zwischen Würzburg und Hamburg und in welchem Anstand befinden sich diese?
5. Wie viele Züge sind zu einem beliebigen Zeitpunkt zwischen Würzburg und Hamburg unterwegs?
6. Wie viele Gegenzüge beobachtet ein Reisender auf der Fahrt von Würzburg nach Hamburg?
7. In welchem zeitlichen Abstand beobachtet der Reisende diese Gegenzüge?
8. Wie viele Zuggarnituren sind mindestens erforderlich, um den gesamten Verkehr zwischen Würzburg und Hamburg zu bedienen?

Studiendirektor Harald Walter, Helene-Lange-Gymnasium Fürth

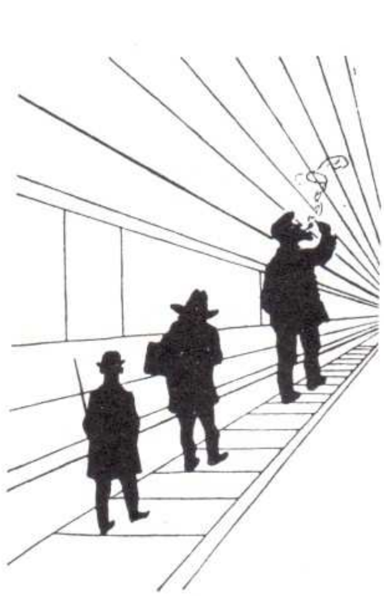
Optische Täuschungen



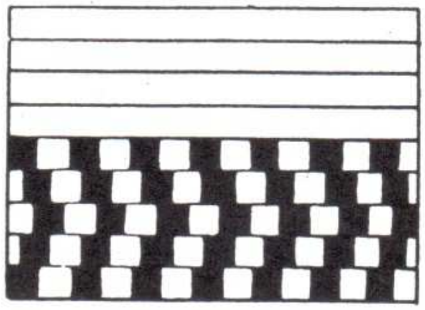
1. Ist der Zylinder ebenso hoch wie breit?



2. Vergleiche die Länge der Strecken *a*, *b* und *c*!

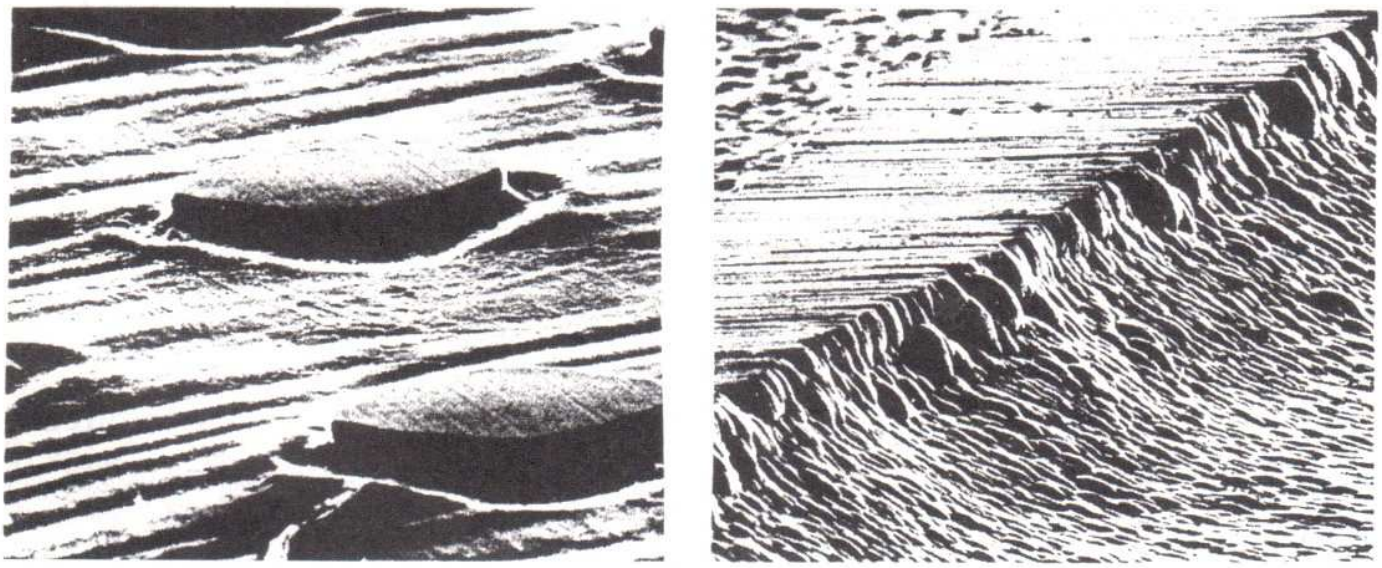


4. Diese Männer sind doch nicht gleich groß!

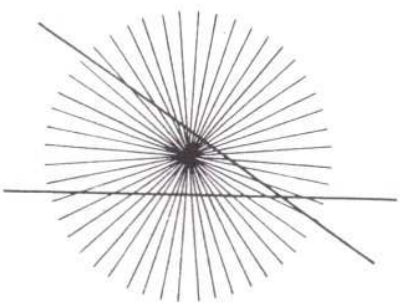


7 Der untere Teil scheint verdruckt und verworfen! Ist das so?

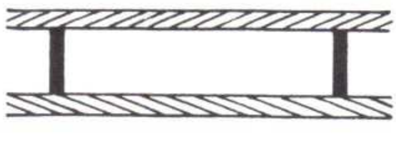
8. Vergleiche Masthöhe und Bootslänge!



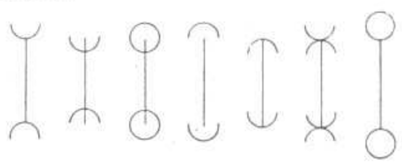
Konkav – Konvex. Dreht man diese Bilder um, so werden aus Erhebungen Einbuchtungen



3. Verbogen oder nicht?



5. Konvergieren diese Balken oder sind sie parallel?



6. Vergleiche die Längen der Hauptlinie!

9. Welcher der beiden Ochsen ist größer?

Würfel bauen auf dem Papier?

Eine Glanzleistung für Fantasievolle

Das geht, ist aber eine ganz schöne Denkleistung. Zur Unterstützung des räumlichen Vorstellungsvermögens kann man aus dem Baukasten der jüngeren Geschwister oder aus eigenen Beständen alle gleichgroßen Würfel heraussuchen. Die Bausteine des "Herzberger Quaders" sind mit etwas handwerklichem Geschick auch selbst aus Holz zu bauen.

Spiele mit dem Herzberger Quader

Aus gleichgroßen Würfeln aus Holz oder Plaste wollen wir Bausteine herstellen. Dabei sollen die Würfel so zusammengeklebt werden, daß

1. die Flächen aller Würfel zueinander parallel oder senkrecht sind,
2. aneinander stoßende Würfel eine gemeinsame Quadratfläche haben.

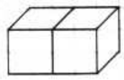


Abb. 1: Zwilling 2

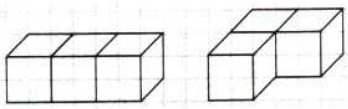
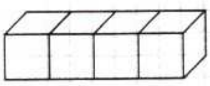
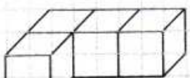


Abb. 2: Unverzweigter Drilling III *Verzweigter Drilling 3*

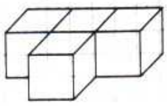
Aus zwei Würfeln erhalten wir einen Würfel-Zwilling (Abb. 1), aus drei Würfeln zwei Würfel-Drillinge (Abb. 2), und aus jeweils vier Würfeln acht Würfel-Vierlinge (Abb. 3).



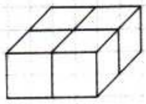
Stange S



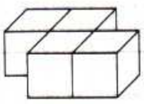
Haken H



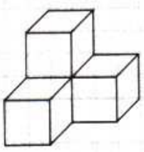
Auto A



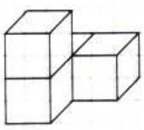
Platte P



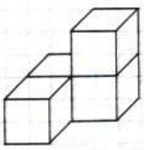
Treppe T



Dreibein D



Linke Hand L



Rechte Hand R

Abb. 3

Es sind insgesamt 11 Bausteine, für die wir 40 gleichgroße Würfel benötigen. Um uns besser verständigen zu können, führen wir für die Bausteine Namen ein und legen Abkürzungen fest.

Aufgabe 1

Untersuche, ob man mit zwei, drei oder vier Würfeln noch andere Bausteine bei Einhaltung der vorgegebenen Bedingungen zusammensetzen kann!

Aufgabe 2

Setze aus den 11 Bausteinen einen (5, 4, 2)-Quader (5 Würfelkanten lang, 4 breit und 2 hoch) zusammen!
Einen solchen Quader wollen wir Herzberger Quader nennen (Abb. 4).

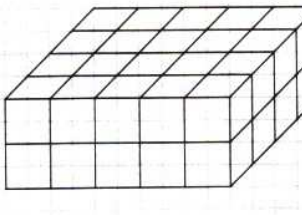
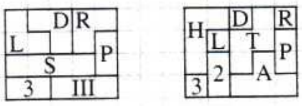


Abbildung 4

Aufgabe 3

Ermittle fünf verschiedene Zusammensetzungen für den Herzberger Quader und zeichne sie, wie es in Abb. 5 gezeigt wird.



untere Schicht *obere Schicht*

Abbildung 5

Um das räumliche Vorstellungsvermögen und damit die Fertigkeit im Zusammensetzen zu verbessern, ist es ratsam, einzelne Spielsteine in allen Lagen, in denen sie verbaut werden können, zu zeichnen. In der Abb. 6 wird dies mit dem Baustein Treppe T, in der Abb. 7 mit dem Baustein Linke Hand L vorgeführt.
Auf kleinkariertem Papier ist das leichter möglich.

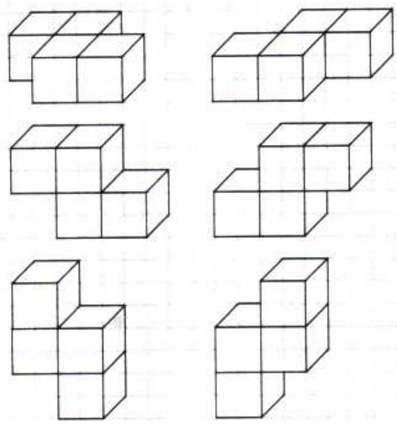


Abbildung 6

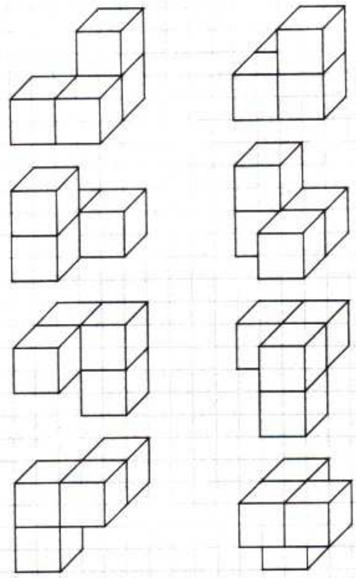


Abbildung 7

Würfelpuzzle

Du kennt sicher den "Teufelswürfel", auch "Rubiks Würfel" oder "Rubik Cube" genannt.
Wir wollen etwas Ähnliches bauen. Schau dir zunächst einmal die Zeichnung in Ruhe an:
Aus 9 gleichlangen Kanthölzern wurde ein Würfel zusammengesetzt, wobei die Würfelaugen mit schwarzem Filzstift aufgemalt werden.
Wie Du wahrscheinlich weißt, ist ein Würfel nur dann korrekt zusammengesetzt, wenn die gegenüberliegenden Seiten zusammen die Summe "7" ergeben. Es liegen sich also gegenüber: 1 und 6, 2 und 5, 3 und 4.
Für das Puzzle wird der Würfel einem Mitspieler in zusammengesetztem Zustand gezeigt – und dann läßt man ihn in seine Einzelteile zerfallen.

Aufgabe 4
Zeichne den Baustein Verzweigter Drilling 3 (Dreibein D und Rechte Hand R) in allen Stellungen, in denen sie verbaut werden können! Wir wollen uns nun einer umfangreicheren Untersuchung zuwenden und einen (4, 2, 2)-Quader (Abb. 8) mit Zusatzbedingungen zusammensetzen. Dabei sollen die drei kleinen Bausteine aus zwei und drei Würfeln immer verwendet und jeweils durch zwei Vierlinge ergänzt werden.

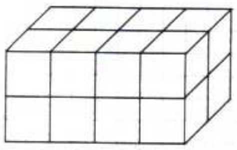
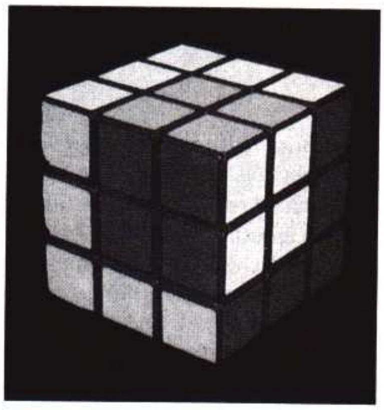


Abbildung 8

Aufgabe 5
Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus den Bausteinen 2, III, 3 und jeweils zwei Vierlingen einen (4, 2, 2)-Quader zusammenzusetzen?
Um das Finden aller Möglichkeiten zu erleichtern, fertigen wir eine Tabelle an. Ihren Anfang wollen wir angeben.

Fall	S	H	A	P	T	D	L	R
1	x	x						
2	x		x					
3	x			x				
4	x				x			
5	x					x		
6	x						x	
7	x							x
8		x	x					
9		x		x				
⋮								

Rubik´s Cube



Das gegenwärtig wohl bekannteste Puzzlespiel ist der ungarische Würfel, bereits als Puzzle des Jahrhunderts gefeiert.
Die Schwierigkeiten beim Richten des Würfels liegen darin, daß unter mechanischen Nebenbedingungen eine Farbanordnung als Ganzes hergestellt werden soll.
Bestünden keine mechanischen Zwänge, so wäre das Richten des Würfels eine Beschäftigung für Kinder.

Aufgabe 6
Vervollständige die Tabelle! Versuche das Ordnungsprinzip zu erkennen!

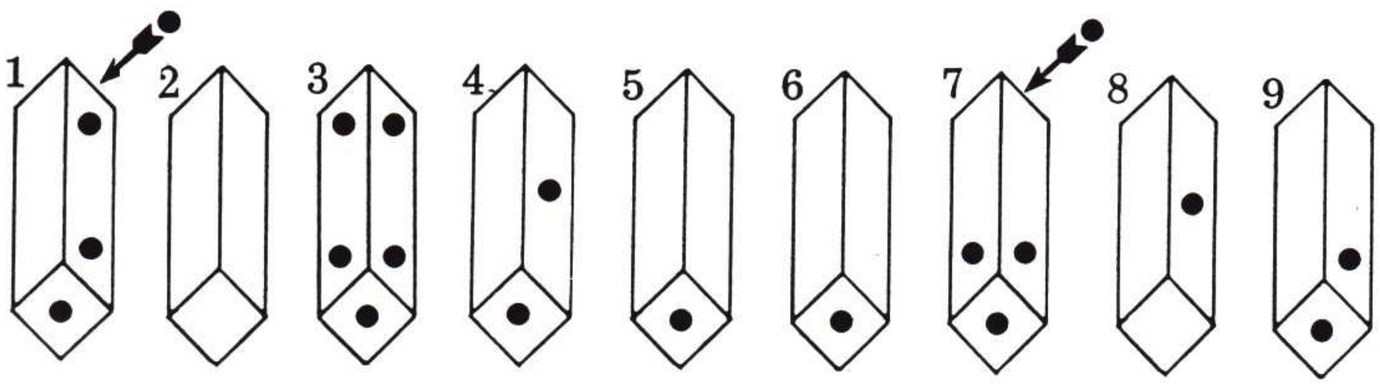
Aufgabe 7
Versuche für jeden Fall eine Zusammensetzung zu finden!
Gibt es Fälle, für die es keine Zusammensetzung gibt? Warum gibt es keine Zusammensetzung?

Aufgabe 8

Zeichne für jeden Fall, für den es eine Zusammensetzung gibt, eine Lösung!
Für den Fall 1, in dem der (4, 2, 2)-Quader aus den Bausteinen 2, III, 3, S und H zusammengesetzt wird, kann sie so aussehen, wie die Abb. 9 zeigt.

Abb. 9

OStR Gerhard Schulze aus Herzberg, Rentner, aber keineswegs im Ruhestand, Erfinder des Herzberger Quaders, hat eine reichhaltige Sammlung auch anderer mathematischer Spiele, Spielideen und Strategien, die auf seinen Ausstellungen Jung und Alt ins Knobeln und Schwitzen bringen.
Mitglied des Redaktionskollegiums der alpha.



Die Aufgabe ist, den Würfel wieder richtig zusammenzusetzen.
Beim Bau ist die wichtigste Frage:
"Wie lang müssen die Kanthölzer sein?"
Schau dir zur Beantwortung der Frage zunächst einmal die Kanthölzer an.

Du erkennst, daß das Ganze nur geht, wenn die Enden genau quadratisch sind. Weil nun aber eine Längsseite die dreifache Länge einer Endseite hat, mußt du dir 9 Hölzer von eben genau dieser Länge zurechtsägen.

Beispiel: Hat das einzelne Holz eine Schmalseite (die an den beiden Enden) von 1 cm, muß es 3 cm lang werden.
Alles klar?
Und jetzt geht es ans Sägen, Bemalen und Zusammensetzen!

Eine Konstruktion im Raum: der Würfel

Heute wollen wir uns auf ein kleines Abenteuer einlassen: eine Konstruktion im Raum. Sie soll ebenso exakt sein wie die jedem vertrauten Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, jedoch ein *dreidimensionales* geometrisches Gebilde liefern, einen Würfel. Unmöglich? Bitte, jeder überzeuge sich selbst!

Einen Würfel aus einem Blatt Papier falten! Eine echt anspruchsvolle Aufgabe, und so ganz nebenbei bekommt man auch noch etwas Mathematik mit.

Wir nehmen vorerst irgendein Blatt Papier, es kann auch ein Stückchen aus unerwünschter Werbepost sein, und falten es auf einer festen, ebenen Unterlage einmal in der Mitte. Danach wiederholen wir diesen Vorgang, legen aber dabei die gerade entstandene Faltkante exakt aufeinander (Bild 1).

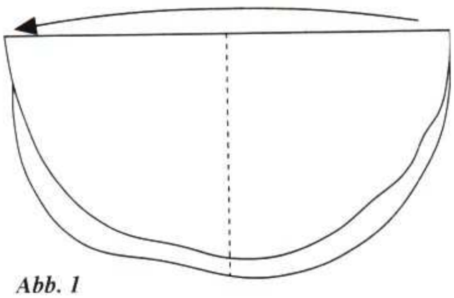


Abb. 1

Wenn wir nun alles wieder entfalten und untersuchen, können wir zweierlei sehen:

- Beide Kniffe verlaufen "schnurgerade" und stehen einer mit Lineal gezogenen Bleistiftlinie in punkto Exaktheit nicht nach.
- Die beiden Faltlinien stehen senkrecht aufeinander.

Zum Beweis dieser Aussage bedenke man, daß bei der zweiten Faltung gleichgroße ("kongruente", wie es exakt heißt) Nebenwinkel entstehen. Wenn zwei Nebenwinkel aber gleichgroß sind, haben wir es mit zwei rechten Winkeln ($180° : 2 = 90°$) zu tun.
Auf diese Weise können wir weitere Grundkonstruktionen ebenso exakt wie mit Zirkel und Lineal vornehmen, indem wir Papier falten.

1 Überlege, wie ein durch zwei einander kreuzende Kniffe gegebener Winkel halbiert werden kann!

2 Wie konstruiert man durch Falten eines beliebigen Stücks Papier dreiviertel einer darauf markierten Strecke?

Inzwischen wird langsam klar, wie vorgegangen werden soll. Wer aber denkt, naja, erst falten, dann schneiden und schließlich kleben ..., der hat unrecht. Ganz wie die japanischen Papierkünstler, die die sogenannte "Origami"-Technik hervorgebracht haben, wollen wir weder Schere noch Klebstoff verwenden, höchstens, um den quadratischen Bogen Papier auszuschneiden, der das Ausgangsmaterial bildet (etwa 20 cm Seitenlänge).
Wir legen den Bogen mit der farbigen Seite nach unten und falten entlang beider Diagonalen. Dann wenden wir die wieder entfaltete Arbeit und kniffen entlang der Mittellinie des Quadrats (Bild 2).

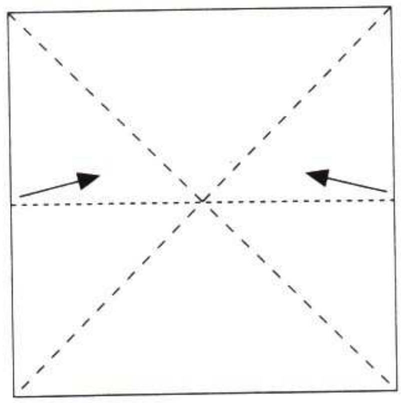


Abb. 2

Nun werden die Enden der zuletzt gefalteten Linie nach unten zusammengelegt, so daß ein Dreieck entsteht. Dessen vier (!) untere Ecken werden jeweils vorn bzw. hinten an die obere Spitze des Dreiecks (rechter Winkel) gefaltet, bis ein Viereck entsteht. Indem die obere und untere Spitze aufeinandergelegt werden, markieren wir durch einen flüchtigen Knick die halbe Höhe und falten nun vorn die rechte und linke Ecke zum so entstandenen "Mittelpunkt" des Vierecks (Bild 3).

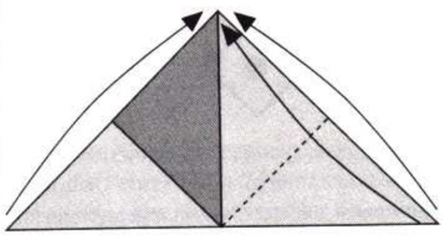


Abb. 3

Dasselbe wiederholen wir auf der Rückseite der Faltarbeit. Die oberen vier freien Spitzen werden dann ebenfalls zur "Mitte" gefaltet (Bild 4) und schließlich in die vier "Tütchen", die dort entstanden sind, fest eingesteckt (Bild 5).

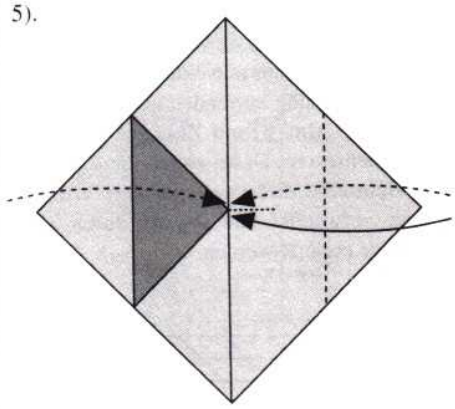


Abb. 4

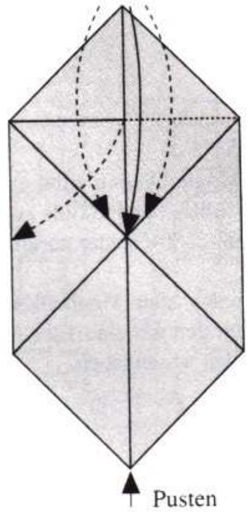
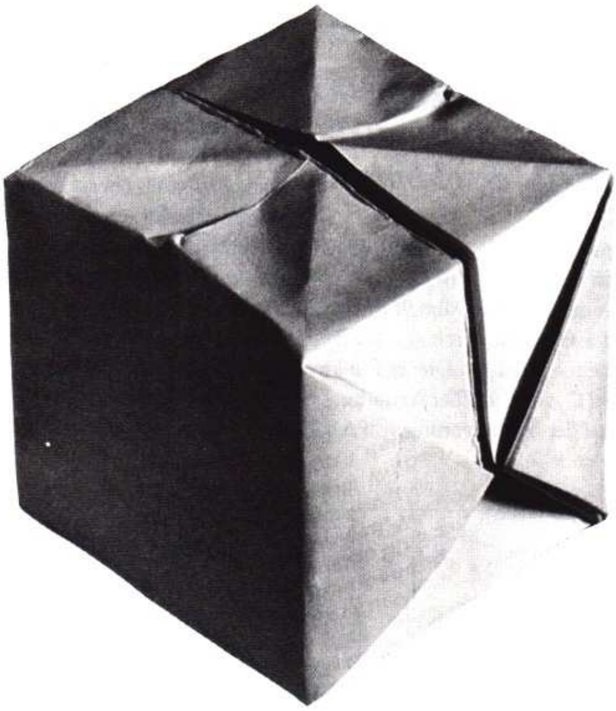


Abb. 5

Fertig.
Fertig? Wo bleibt der versprochene Würfel? Ganz einfach: An der unteren Ecke des Sechsecks ist eine Öffnung verblieben, in die wir kräftig, aber wohldosiert hineinblasen können und so das unmöglich Erscheinende möglich machen, ein räumliches Objekt aus einem ebenen Stück Papier.
Das entstandene Gebilde wird mehr oder weniger einem Würfel gleichen, je nach Geschick und Übung. Bitte nicht entmutigen lassen, wenn die ersten Versuche nicht so richtig klappen! Bedenken sollte man, daß auch die ersten Versuche, einen Kreis mit einem Zirkel zu zeichnen, vielleicht "nicht ganz rund liefen".
Über solche material- und geschicklichkeitsbedingten Ungenauigkeiten müssen wir - in gleicher Weise wie bei Zirkel/Lineal-Konstruktionen - hinwegsehen, wenn wir nun beweisen wollen, daß tatsächlich ein Würfel entstanden ist. Der Würfel oder das Hexaeder (griechisch: Sechsflächner) ist einer der fünf berühmten und nach dem antiken griechischen Mathematiker und Philosophen Platon (etwa 427 - 347 v. u. Z.) benannten Körper, die jeweils ausschließlich von ein und denselben regelmäßigen Vielecken (gleichseitige Dreiecke, Quadrate bzw. regelmäßige Fünfecke) begrenzt werden.



3 Warum ist ein ausschließlich aus regelmäßigen Sechsecken zusammengesetzter Körper unmöglich? Wenn Du keine Lösung findest, füge mehrere regelmäßige Sechsecke gleicher Größe aneinander!

Zum Beweis nehmen wir die Faltarbeit nochmals zur Hand, vielleicht sollte aber auch ein zweiter Würfel für diesen Zweck verwendet werden. Nun markieren wir die Seitenflächen des Würfels, und zwar so, daß an den Stellen, wo aus Gründen der Stabilität mehrere Schichten Papier übereinander liegen, die unterste Schicht gekennzeichnet wird. Nach dem Entfalten der gesamten Arbeit haben wir das in Bild 6 dargestellte Faltengewirr, das es nun zu enträtseln gilt:

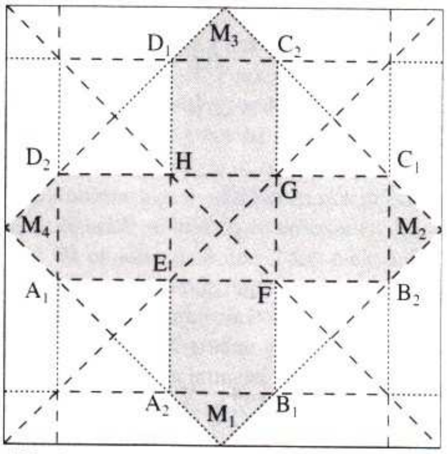


Abb. 6

Schaut man sich die Falten genauer an, erkennt man viele rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke unterschiedlicher Größe, deren kleinste gerade jede der Seitenflächen in vier Stücke teilen. Alle diese Dreiecke haben die gleiche Form (Sie sind "ähnlich", wie die Mathematiker sagen), denn bei einer jeden Faltung parallel zur Papierkante oder parallel zu einer der Diagonalen des Ausgangsquadrates entstehen ausschließlich Winkel von 90° oder 45° (Winkel an geschnittenen Parallelen). Dazu kommt, daß wir in jedem Fall die Papierkante, eine Diagonale oder einen schon vorliegenden Teil davon genau in der Hälfte gefaltet haben. Z. B. das Dreieck $D_1C_2M_3$, eines der zu betrachtenden kleinsten rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecke, entsteht durch viermaliges Falten des über die Diagonale HF gefalteten Ausgangsquadrats. Somit sind die außenliegenden Seitenflächen allesamt deckungsgleiche Quadrate.
Schneiden wir mit der Schere die ausschließlich der Festigkeit der Faltarbeit dienlichen Teile ab, erkennen wir darüberhinaus, daß beim Zusammenfalten (z. B. bei G, wenn C_1 auf C_2 kommt) je zwei weitere rechte Winkel im Raum gebildet werden, also stehen die Kanten EA, FB, GC und HD senkrecht auf der Seitenfläche EFGH. Damit ist der Beweis erbracht, daß unser Gebilde ein Würfel ist.

4 Warum ist auch das entstehende Viereck ABCD ein Quadrat?

5 Welchen Rauminhalt hat ein solcher Würfel, wenn die Kantenlänge des Ausgangsquadrates gerade 24 cm beträgt?

6 Welcher Rauminhalt für einen Würfel wäre möglich, wenn wir die Schere verwenden dürfen und Klebefalze in die Rechnung nicht einbeziehen?

Dr. Christian Werge
Mathematik- und Physiklehrer
Assistent im Wissenschaftsbereich Didaktik der Sektion Mathematik der Universität Leipzig

Für Freunde der Zahlenjongliererei

Eine immer wieder beliebte Knobelei ist es, die Zahlen von 1 bis 50 (und noch weiter) mit Hilfe der Ziffern der aktuellen Jahreszahl in gegebener Reihenfolge zu errechnen.
Unser Leser Klaus-Horst Milde aus Dresden berechnete aus den Ziffern 1, 9, 9 und 1 die Zahlen 1 bis 50, erlaubt waren alle Grundrechenoperationen, Klammern, negative Vorzeichen sowie die Fakultät, mindestens ein Wurzelausdruck mußte enthalten sein.
Walter Görgens aus Schönebeck schickte uns die Lösungen für die Zahlen 1 bis 100 mit den Ziffern von 1990 und 1991 zu. Auch er ließ die oben genannten Operationen, negative Zahlen und Klammern zu, kam aber zu seinem Bedauern nicht ohne die Funktion [ ] – „ganzzahliger Ausdruck von" (z. B. [3,43]=3) aus. Das betraf als erstes die 39 ($39 = [\sqrt{19 \cdot 9}] \cdot 1$), die weiteren Problemzahlen sind 51, 66, 68, 69, 74, 75 und 77.. Bei der 65 und 92 tauchten Potenzen auf:
$65 = (1 + \sqrt{9})^{\sqrt{9}} + 1$ und $92 = 1^9 + 91$. Ob es auch ohne die geht?
Wie wäre es, wenn Ihr mal versucht, die Zahlen 1 bis 100 mittels der 1991 und 1992 darzustellen!
Eure Ergebnisse könnt Ihr an die Redaktion senden! Natürlich interessieren uns die „Problemzahlen" besonders. Im Heft 1/92 verabschieden wir dann das alte und begrüßen wir das neue Jahr mit Euren Ergebnissen. *Alphons*

Lösungen

- 1 Die Schenkel werden übereinandergelegt. Die beiden entstehenden Winkel sind, wie die Faltung zeigt, deckungsgleich.
- 2 Die Strecke wird zweimal halbiert und damit geviertelt. Drei dieser Teile ergeben dreiviertel der gegebenen Strecke.
- 3 Wenn drei regelmäßige Sechsecke zusammengelegt werden, treffen am gemeinsamen Punkt drei Winkel von 120° zusammen. Demzufolge liegen diese drei Sechsecke nach dem Zusammenfügen weiter in ein und derselben Ebene. Daraus kann kein (platonischer) Körper entstehen, man kann aber die Ebene mit solchen Sechsecken lückenlos ausfüllen, d. h. parkettieren.
- 4 Die erste mögliche Antwort wäre, weil ABCD auch aus vier der kleinsten rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecke zusammengesetzt ist. Eine zweite Antwort liefert die Tatsache, daß A, B, C und D jeweils senkrecht und in gleichem Abstand über den Eckpunkten des Quadrates EFGH liegen.
- 5 Da die Seitenlänge des Würfels gerade ein Viertel der Seitenlänge des Ausgangsquadrates ist, folgt für das Volumen
$V = (6\text{ cm})^3 = 216\text{ cm}^3$.
- 6 Aus einem quadratischen Stück Papier $A = a^2 = (24\text{ cm})^2 = 576\text{ cm}^2$ kann maximal ein Würfel gebildet werden, dessen Seitenflächen ein Sechstel davon einnehmen: 96 cm^2. Ein solcher Würfel hat eine Kantenlänge von etwa 9,8 cm und damit einen Rauminhalt von etwa 941 cm^3.

Die Bewegungen der Ebene

Ein Nachweis der Tatsache, daß die Bewegungen die Menge der (eindeutigen) Längenvarianten Abbildungen bereits erschöpfen.

In Mathematikbüchern für die Schule finden wir folgende Definition: Bewegung nennt man jede Verschiebung, Drehung und Spiegelung sowie jede Nacheinanderausführung dieser Abbildungen.
Weiterhin werden dort die folgenden Eigenschaften von Bewegungen erarbeitet:

Gunter Winkler

Bei Bewegungen werden Punkte auf Punkte und Geraden auf Geraden abgebildet. Parallele Geraden werden auf parallele Geraden abgebildet, Strecken auf gleichlange Strecken und Winkel auf gleichgroße Winkel. Bei jeder Bewegung gibt es zu jedem Punkt der Ebene genau einen Bildpunkt, und umgekehrt ist jeder Punkt der Ebene Bildpunkt genau eines Originalpunktes (eineindeutige Abbildung der Menge der Punkte der Ebene auf sich).

Wir wollen alle Abbildungen φ mit folgenden Bedingungen bestimmen: [1]
I. Jede Abbildung φ bildet jeden Punkt der Ebene eindeutig auf einen Punkt der Ebene ab. (Eindeutige Abbildung der Menge der Punkte der Ebene in die Menge der Punkte der Ebene)
II. Bei jeder Abbildung φ haben zwei Bildpunkte stets den gleichen Abstand wie ihre Originalpunkte (Invarianz des Abstandes).
Solche Abbildungen gibt es. Beispielsweise ist jede Bewegung eine derartige Abbildung. Die Menge $\mathfrak{M}$ der gesuchten Abbildungen ist also eine Obermenge der Menge $\mathfrak{B}$ der Bewegungen: $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{B}$
Für jede Abbildung $\varphi \in \mathfrak{M}$ gilt: Sind A und B zwei Punkte der Ebene, so gibt es bei jeder Abbildung $\varphi \in \mathfrak{M}$ gemäß Bedingung I zwei eindeutig bestimmte Bildpunkte A_φ und B_φ. Laut Bedingung II gilt $\overline{A_\varphi B_\varphi} = \overline{AB}$. B_φ liegt also auf dem Kreis k um A_φ mit Radius AB. ***(Abb. 1)***
Analog gilt: Sind A, B und C drei Punkte der Ebene, so gibt es bei jeder Abbildung $\varphi \in \mathfrak{M}$ drei Bildpunkte A_φ, B_φ und C_φ. Dabei gilt $\overline{A_\varphi B_\varphi} = \overline{AB}$, $\overline{B_\varphi C_\varphi} = \overline{BC}$ und $\overline{A_\varphi C_\varphi} = \overline{AC}$.
Wie werden bei jeder Abbildung $\varphi \in \mathfrak{M}$ die Punkte einer Geraden abgebildet? g sei eine Gerade durch die Punkte A und B. Für die Bildpunkte A_φ und B_φ von A und B bei einer Abbildung $\varphi \in \mathfrak{M}$ gilt $\overline{A_\varphi B_\varphi} = \overline{AB}$. ***(Abb. 2)***
Ist C ein zwischen A und B gelegener Punkt der Geraden g, so gilt $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB}$, und der Bildpunkt C_φ von C bei dieser Abbildung φ muß auf den Kreisen k_1 um A_φ mit Radius $\overline{AC}$ und k_2 um B_φ mit dem Radius $\overline{BC}$ liegen. k_1 und k_2 haben nur einen gemeinsamen Punkt; dieser liegt auf der Geraden durch A_φ und B_φ und zwar zwischen A_φ und B_φ. Dieser Punkt muß der Bildpunkt C_φ von C bei der Abbildung φ sein. Liegt C auf der Verlängerung von AB über B hinaus, so ist $\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC}$. Wiederum haben die Kreise k_1 um A_φ mit Radius $\overline{AC}$ und k_2 um B_φ mit Radius $\overline{BC}$ nur einen gemeinsamen Punkt, der ebenfalls auf der Geraden durch A_φ und B_φ liegt. Für die dritte Lagemöglichkeit von C auf g, nämlich auf der Verlängerung von AB über A hinaus, gilt diese Feststellung analog.
Durch jede Abbildung $\varphi \in \mathfrak{M}$ wird also jede Gerade g der Ebene auf eine Gerade g_φ der Ebene abgebildet.
Weiterhin gilt: Strahlen werden auf Strahlen und Strecken auf kongruente Strecken abgebildet. Insbesondere gilt damit: Der Mittelpunkt einer Strecke wird bei jeder Abbildung

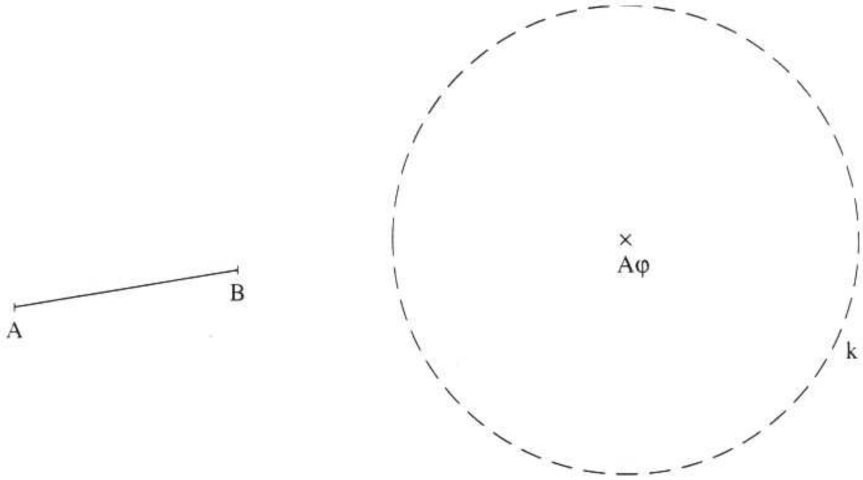


Abb. 1

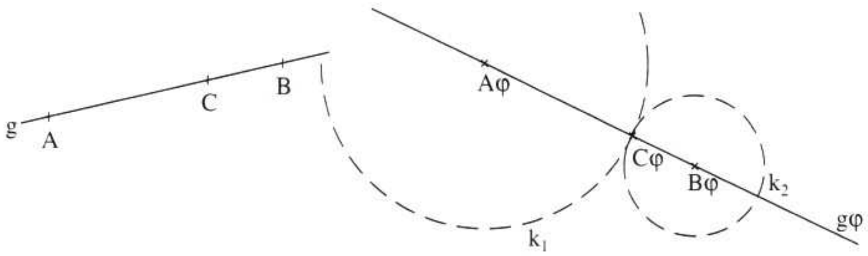


Abb. 2

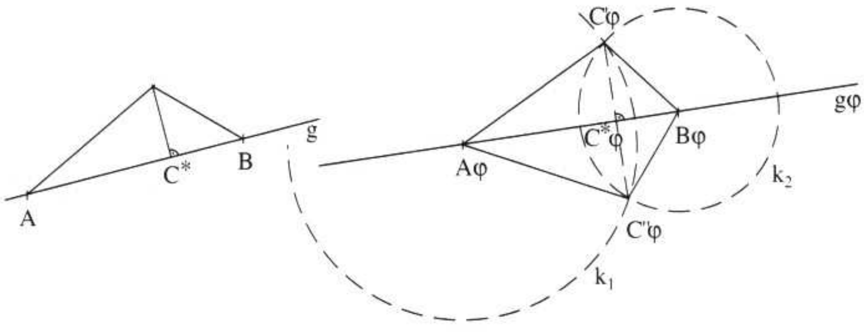


Abb. 3

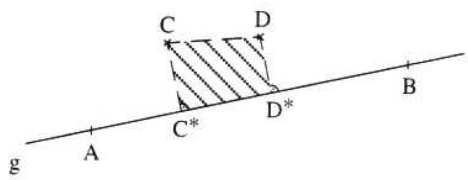


Abb. 4 a

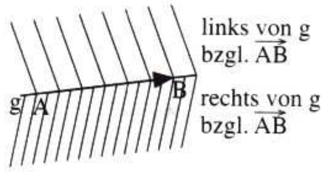


Abb. 5

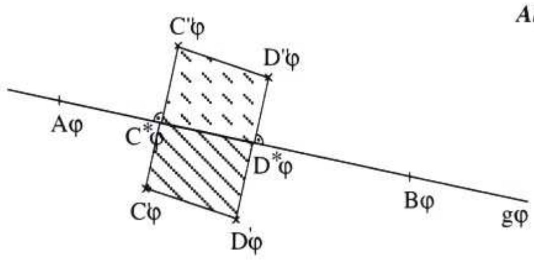


Abb. 4 b

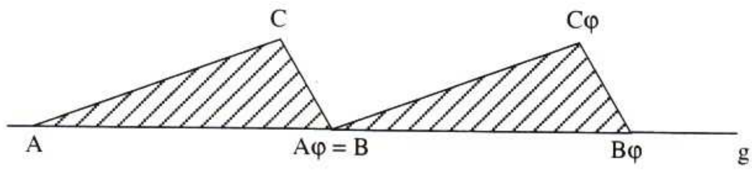


Abb. 6

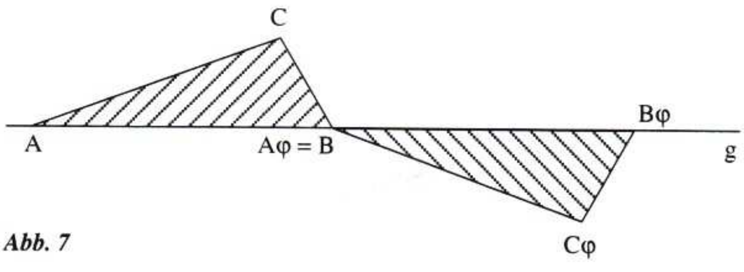


Abb. 7

$\varphi \in \mathfrak{M}$ auf den Mittelpunkt der Bildstrecke abgebildet.

Wie wird ein Punkt C, der nicht auf der durch die Punkte A und B verlaufenden Geraden g liegt, durch eine Abbildung $\varphi \in \mathfrak{M}$ abgebildet? ***(Abb. 3)***

Der Bildpunkt C_φ eines Punktes C bei der Abbildung $\varphi \in \mathfrak{M}$ muß einer der beiden Schnittpunkte C'_φ und C''_φ der Kreise k_1 um A_φ mit Radius $\overline{AC}$ und k_2 um B_φ mit dem Radius $\overline{BC}$ sein. C_φ liegt also nicht auf der Geraden g_φ, und es gilt $\Delta ABC \cong \Delta A_\varphi B_\varphi C_\varphi$ nach Kongruenzsatz sss. Bei einer Abbildung $\varphi \in \mathfrak{M}$ sind Original- und Bilddreieck und ebenso Original- und Bildwinkel kongruent. Die Strecke $\overline{C'_\varphi C''_\varphi}$ (Bild 3) steht senkrecht auf g_φ und wird von g_φ halbiert. Der Schnittpunkt C^*_φ von g_φ und $C'_\varphi C''_\varphi$ ist der Bildpunkt des Fußpunktes C^* des von C auf g gefällten Lotes.

Wie werden die Punkte einer Halbebene durch eine Abbildung $\varphi \in \mathfrak{M}$ abgebildet? [2)] g sei die Gerade durch A und B, und C und D seien zwei in der gleichen Halbebene bezüglich g gelegene Punkte. Durch eine Abbildung $\varphi \in \mathfrak{M}$ werde A auf A_φ, B auf B_φ, g auf g_φ und C auf C_φ abgebildet. ***(Abb. 4)***

Weiterhin seien C^* und D^* die Fußpunkte der von C und D auf g gefällten Lote und C^*_φ und D^*_φ die Bilder von C^* und D^*. D_φ fällt mit einem der beiden Punkte D'_φ und D''_φ zusammen, die auf der Senkrechten zu g_φ durch D^*_φ liegen und von D^*_φ den Abstand $\overline{DD^*}$ haben. Jener der beiden möglichen Bildpunkte von D, der mit C_φ in der gleichen Halbebene bezüglich g_φ liegt, sei mit D'_φ bezeichnet. Ist C''_φ der Spiegelpunkt von C_φ an g_φ, so ist $D'_\varphi D''_\varphi C''_\varphi C_\varphi$ für $D^* \neq C^*$ ein gleichschenkliges Trapez.

Da in einem gleichschenkligen Trapez die Diagonale stets länger als ein Schenkel ist, und weil $\overline{DC} = \overline{D'_\varphi C_\varphi}$ wegen $\square DD^*C^*C \cong \square D'_\varphi D^*_\varphi C^*_\varphi C_\varphi$ gilt, kann D_φ nur mit $D'\varphi$ zusammenfallen. Fällt D^* mit C^* zusammen, so gilt ebenfalls $D_\varphi = D'_\varphi$. Durch jede Abbildung $\varphi \in \mathfrak{M}$ werden die Punkte einer Halbebene bezgl. g stets auf die Punkte einer Halbebene bezgl. g_φ abgebildet, und die der anderen Halbebene bezgl. g auf die der anderen Halbebene bezgl. g_φ.

Die Abbildungen $\varphi \in \mathfrak{M}$ lassen sich in gerade und ungerade Abbildungen unterteilen: Es sei $\varphi \in \mathfrak{M}$, es seien A, B und C drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte und A_φ, B_φ und C_φ ihre Bilder. Durch die Pfeile $\overrightarrow{AB}$ bzw. $\overrightarrow{A_\varphi B_\varphi}$ werden auf den Geraden g = AB bzw. $g_\varphi = A_\varphi B_\varphi$ Durchlaufrichtungen festgelegt. Bezüglich AB liegt der Punkt C entweder "rechts" oder "links" von g (Abb. 5). Hat der Punkt C_φ bezgl. $A_\varphi B_\varphi$ dieselbe (eine verschiedene) Lage, so heißt φ gerade (ungerade). Die Einteilung der Abbildungen $\varphi \in \mathfrak{M}$ in gerade und ungerade Abbildungen ist unabhängig von der Wahl der benutzten Punkte A, B und C, wie sich mittels der hergeleiteten Eigenschaften dieser Abbildungen zeigen läßt. Damit gilt:

III. Unter den Abbildungen aus $\mathfrak{M}$ (d. h., jenen mit den Eigenschaften I und II), die zwei vorgegebene Punkte A, B ($A' \neq B$) auf zwei vorgegebene Bildpunkte A´, B´ abbilden, gibt es höchstens eine gerade und höchstens eine ungerade Abbildung.

Nunmehr sollen alle Abbildungen $\varphi \in \mathfrak{M}$ bestimmt werden.

Die einfachste derartige Abbildung φ ist die, bei der jeder Bildpunkt A_φ mit seinem Originalpunkt A zusammenfällt. Man nennt sie identische Abbildung. Sie erfüllt auf triviale Weise die Bedingungen I und II. Bei jeder anderen Abbildung $\varphi \in \mathfrak{M}$ gibt es mindestens einen Punkt A der Ebene, dessen Bildpunkt A_φ nicht mit A zusammenfällt.

Als zweiter Originalpunkt neben A wird $B = A_\varphi$ betrachtet. Dann gilt gemäß II $\overline{A_\varphi B_\varphi} = \overline{AB} = \overline{AA_\varphi}$. B_φ liegt auf dem Kreis um B mit Radius AA_φ.

Für jede Lagemöglichkeit von B_φ wird nun je eine gerade und eine ungerade Bewegung angegeben, welche A auf A_φ und B auf B_φ abbildet. Da es in $\mathfrak{M}$ höchstens je eine solche Abbildung geben kann, sind diese somit Bewegungen und es gilt statt $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{B}$ sogar $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$. D. h., außer den Bewegungen gibt es keine "abstandstreuen" eindeutigen Abbildungen.

Fall 1: B_φ liegt auf der Verlängerung von AA_φ über A_φ hinaus.

Fall 1a: $\varphi \in \mathfrak{M}$ sei eine gerade Abbildung. (Abb. 6)

Durch die Verschiebung (Translation) τ mit dem Verschiebungspfeil $\overrightarrow{AA_\varphi}$ wird A auf A_φ und B auf B_φ abgebildet. Da die Verschiebung τ eine gerade Bewegung ist, gilt nach III $\varphi = \tau$.

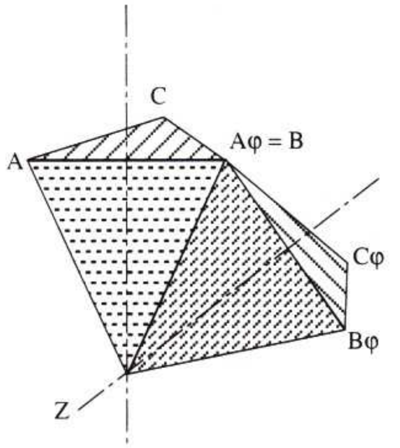


Abb. 8

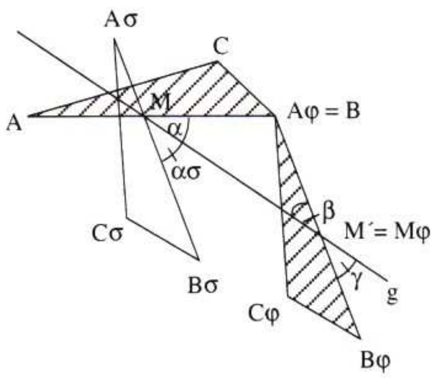


Abb. 9

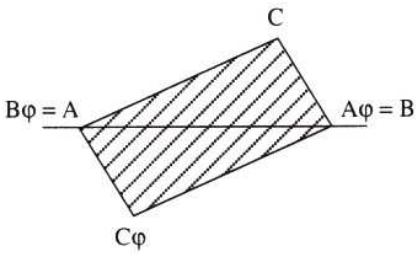


Abb. 10

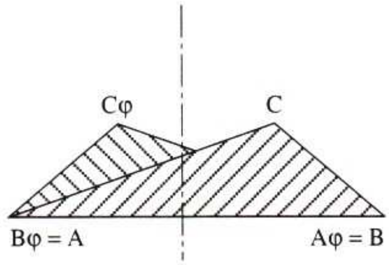


Abb. 11

Fall 1b: $\varphi \in \mathfrak{M}$ sei eine ungerade Abbildung. ***(Abb. 7)***. Durch die im Fall 1a betrachtete Verschiebung τ wird A auf A_φ und B auf B_φ abgebildet. Durch die Spiegelung σ an der Geraden g durch A und A_φ werden A_φ und B_φ als Punkte der Symmetrieachse g auf sich abgebildet. Die Nacheinanderausführung $\tau \circ \sigma$ von τ und σ bildet also A auf A_φ und B auf B_φ ab. [3] Die Spiegelung σ ist eine zu $\mathfrak{M}$ gehörige ungerade Bewegung. Da die Nacheinanderausführung der geraden Bewegung τ und der ungeraden Bewegung σ eine zu $\mathfrak{M}$ gehörende ungerade Bewegung ist, gilt nach III $\varphi=\tau \circ \sigma$. $\varphi=\tau \circ \sigma$ nennt man Schubspiegelung. Schubspiegelung heißt die Nacheinanderausführung einer Verschiebung τ und einer axialen Spiegelung σ, deren Symmetrieachse parallel zum Verschiebungspfeil von τ ist. Als Achse einer Schubspiegelung $\tau \circ \sigma$ wird die Symmetrieachse der Spiegelung σ bezeichnet. Wie in Bild 7 ablesbar, kommt es bei einer Schubspiegelung auf die Reihenfolge der Ausführung von Verschiebung und Spiegelung nicht an, also gilt auch $\varphi=\sigma \circ \tau$.
(Abb. 7)

Fall 2: B_φ liegt nicht auf der Geraden durch A und A_φ.

Fall 2a: $\varphi \in \mathfrak{M}$ sei eine gerade Abbildung. ***(Abb. 8)***
Die Mittelsenkrechten von AA_φ und BB_φ schneiden einander in genau einem Punkt Z. Nach dem Satz über die Mittelsenkrechte gilt $\overline{AZ}=\overline{BZ}=\overline{B_\varphi Z}$. Da gemäß II $\overline{AB}=\overline{A_\varphi B_\varphi}$ gilt, sind die Dreiecke AZB und $A_\varphi ZB_\varphi$ kongruent (sss). Weil in kongruenten Dreiecken entsprechende Winkel gleich groß sind, gilt $\sphericalangle AZB=\sphericalangle A_\varphi ZB_\varphi$. Durch die Drehung δ mit dem Zentrum Z und orientiertem Drehwinkel $\sphericalangle AZA_\varphi$ wird A auf A_φ und B auf B_φ abgebildet.
Da die Drehung δ eine zu $\mathfrak{M}$ gehörige gerade Abbildung ist, gilt nach III $\varphi=\delta$.

Fall 2b: $\varphi \in \mathfrak{M}$ sei eine ungerade Abbildung. ***(Abb. 9)***
Die Mittelpunkte der Strecken AB und $A_\varphi B_\varphi$ seien mit M und M´, und die Gerade durch M und M´ sei mit g bezeichnet. M´ ist der Bildpunkt vom M bei der Abbildung φ : M_φ=M´. Denn der Mittelpunkt einer Strecke wird bei diesen Abbildungen auf den Mittelpunkt der Bildstrecke abgebildet. Aus $\overline{AM}=\overline{MB}$ und $\overline{AM}=\overline{A_\varphi M_\varphi}$ folgt $\overline{MB}=\overline{A_\varphi M_\varphi}$. Dreieck $MM_\varphi B$ ist also gleichschenklig. Die mit α und β bezeichneten Basiswinkel sind also gleich groß. (Abb. 9) Der Winkel γ hat weiterhin die gleiche Größe wie sein Scheitelwinkel β. Also gilt $\alpha=\gamma$. Durch die Spiegelung σ mit g als Symmetrieachse werden A und B auf A_σ und B_σ und α wird auf α_σ abgebildet. Dabei gilt $\alpha=\alpha_\sigma$ und damit auch $\gamma=\alpha_\sigma$. Durch die Verschiebung τ mit Verschiebungspfeil $\overrightarrow{MM_\varphi}$ wird M auf M_φ, A_σ auf A_φ und B_σ auf B_φ abgebildet. Durch die Nacheinanderausführung $\sigma \circ \tau$ der Spiegelung σ und der Verschiebung τ wird A auf A_φ und B auf B_φ abgebildet. Da $\sigma \circ \tau$ eine zu $\mathfrak{M}$ gehörende ungerade Bewegung ist, gilt wegen III $\varphi=\sigma \circ \tau=\tau \circ \sigma$. φ ist wiederum eine Schubspiegelung.

Fall 3:
Jetzt gilt B_φ=A.

Fall 3a: $\varphi \in \mathfrak{M}$ sei eine gerade Abbildung. ***(Abb. 10)***
Durch die 180°-Drehung δ, deren Drehzentrum der Mittelpunkt M der Strecke AA_φ ist, wird A auf A_φ und B auf B_φ=A abgebildet. Da $\delta \in \mathfrak{M}$ gilt und δ eine gerade Bewegung ist, gilt nach III $\varphi=\delta$.

Fall 3b: $\varphi \in \mathfrak{M}$ sei eine ungerade Abbildung. ***(Abb. 11)***
Durch die Spiegelung σ an der Mittelsenkrechten der Strecke AA_φ wird A auf A_φ und B auf B_φ=A abgebildet. Da $\sigma \in \mathfrak{M}$ gilt und σ eine ungerade Bewegung ist, gilt nach III $\varphi=\sigma$.
Wegen $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$ können wir die Bewegungen in der Ebene auch wie folgt definieren:
Bewegung heißt jede Abbildung, die jeden Punkt der Ebene eindeutig auf einen Punkt dieser Ebene abbildet und bei welcher der Abstand zweier Originalpunkte stets gleich dem Abstand der zugehörigen Bildpunkte ist.
Aufgrund dieser Ausführungen gilt: Jede Bewegung ist entweder die **identische Abbildung**, eine Spiegelung, eine Schubspiegelung, eine **Verschiebung** oder eine **Drehung**.
Die geraden Bewegungen sind bei dieser Aufzählung fett gedruckt.
Nach diesen Betrachtungen muß die Nacheinanderausführung einer Drehung δ und einer Verschiebung τ eine gerade Bewegung sein. Es läßt sich zeigen, daß $\delta \circ \tau$ eine Drehung ist, deren Drehwinkel ebenso groß ist wie der von δ.

Bei der Arbeit an diesem Beitrag unterstützte mich Herr Walter Träger aus Döbeln, dem ich für seine Bemühungen recht herzlich danken möchte.

Gunter Winkler, geboren am 5. 7. 1976
schrieb diesen Beitrag mit 14 Jahren
regelmäßiger Frühstarter bei der OJM mit 1. Plätzen
Interesse außerdem am Schach und dem Programmieren auf dem Heimcomputer.
Schüler an der Spezialschule Riesa

Anmerkungen

[1] In diesem Beitrag werden die folgenden Buchstaben des griechischen Alphabets benutzt: α Alpha, β Beta, γ Gamma, δ Delta, σ Sigma, τ Tau, φ Phi

[2] Jede Gerade zerlegt die Ebene in zwei Bereiche, Halbebenen genannt.

[3] $\tau \circ \sigma$ wird "Tau Kringel Sigma" gelesen.

XXX. Olympiade Junger Mathematiker

4. Stufe

In diesem Jahr wurde die Olympiade Junger Mathematiker zum 30. Mal durchgeführt.
Das Zeichen dieser Olympiade ist das 17-Eck, dessen Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal C. F. Gauß 1796 bewies. Die Stadt Braunschweig, Geburtsort von Gauß, ehrte den großen deutschen Mathematiker durch den abgebildeten Sonderstempel (siehe Abbildungen)

Erfurt, 3. - 6.6.1991
Vor einem Jahr fand fast zum gleichen Zeitpunkt am gleichen Ort die Siegerehrung der 4. Stufe der XXIX. Olympiade Junger Mathematiker statt. Uns alle bewegte damals die Frage: Wie geht es weiter?
Durch die Einladung der Kultusministerin Thüringens, Frau Lieberknecht, zur "Mathematikolympiade 1991" nach Erfurt war eine erste Antwort auf diese Frage gegeben.
Erstmalig konnten auch Schüler aus den alten Bundesländern an diesem Wettbewerb teilnehmen. Besonders herzlich wurden Schülerinnen und Schüler aus Hamburg, Niedersachsen, Nordrhein-Westfalen und Schleswig-Holstein begrüßt.
Im nächsten Jahr erwartet uns in Erfurt die 600 Jahrfeier der Universität und die 1250 Jahrfeier der Stadt. Die Mathematikolympiade ordnet sich in diesen Prozeß ein, indem sie den zukünftigen wissenschaftlichen Nachwuchs in einem Leistungsvergleich vereint. Es könnte eine lohnenswerte Aufgabe für die Universität sein, alljährlich die besten Jungen Mathematiker Deutschlands zum Wettstreit zusammenzuführen. Schließlich ist es gelungen, durch Initiative eines neuen Bundeslandes auf dem Gebiet der Schülerwettbewerbe eine wesentliche Bereicherung einzubringen.
Unter den 125 Startern befanden sich auch 10 Mädchen. Die Jury konnte erste Preise verleihen an:

Klasse 12/13:
Lutz Lehmann, Heinrich-Hertz-Schule, Berlin
Marco Schlichting, C. F.-Gauß-Schule, Frankfurt/Oder
Jan Sieber, Heinrich-Hertz-Schule, Berlin
Tomas Antonius Klenke, Stormarn-Schule, Ahrensburg
Klasse 11:
Andreas Bernig, Spezialschule Leipzig
Klasse 10:
Martina Eckner, Spezialschule "Carl Zeiss", Jena
Reinhard Priber, Spezialschule Chemnitz
Andreas Mück, Spezialschule Halle
Ferner wurden 11 zweite und 19 dritte Preise vergeben. 28 Teilnehmer erhielten Anerkennungsurkunden. Bodo Lass (Eichenschule Scheeßel) konnte zwei Diplome für die besonders elegante Lösung einer Aufgabe entgegennehmen.

Dr. Wolfgang Moldenhauer
Sektion Mathematik der Pädagogischen Hochschule Erfurt

Ein Siegerfoto darf nicht fehlen.

Von links: Dr. W. Moldenhauer (Landesvorsitzender der OJM Thüringens), Marco Schlichting, Lutz Lehmann, Martina Eckner, Jan Sieber, Andreas Bernig, Tomas Antonius Klenke, Andreas Mück, Herr Schnöller (Repräsentant des Sponsors Siemens-Nixdorf AG Thüringen)

XXX. Olympiade Junger Mathematiker (4. Stufe)

Aufgaben

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, sollen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) soll deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

Olympiadeklasse 10

301041

Zur Konstruktion eines Vierecks ABCD seien die Streckenlängen
$a = 3$ cm, $c = 6$ cm, $e = \sqrt{27}$ cm, $f = \sqrt{108}$ cm
und die Winkelgröße $\varphi = 60°$ vorgegeben. Gefordert wird:

(1) Die Seite AB hat die Länge $\overline{AB} = a$.
(2) Die Seite CD hat die Länge $\overline{CD} = c$.
(3) Die Diagonale AC hat die Länge $\overline{AC} = e$.
(4) Die Diagonale BD hat die Länge $\overline{BD} = f$.
(5) Die Diagonalen AC und BD schneiden sich in einem Punkt S; für diesen hat der Winkel $\sphericalangle$ ASB die Größe ϕ.

(a) Beweisen Sie: Wenn ein Viereck ABCD die geforderten Bedingungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Größen a, c, e, f, φ konstruiert werden;
(b) Beschreiben Sie eine Konstruktion und führen Sie die beschriebene Konstruktion durch!
(c) Beweisen Sie: Wenn ein Viereck ABCD nach Ihrer Beschreibung konstruiert werden kann, dann erfüllt es die geforderten Bedingungen!
(d) Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Viereck ABCD gibt, das die geforderten Bedingungen erfüllt!

301042

Es seien $x_1, x_2, ..., x_n$ Zahlen, von denen jede entweder gleich 1 oder gleich -1 ist. Ferner sei
$x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2, x_{n+3} = x_3$;
für jedes $i = 1, ..., n$ sei
$p_i = x_i \cdot x_{i+1} \cdot x_{i+2} \cdot x_{i+3}$,
und es werde
$p_1 + p_2 + ... + p_n = 0$
vorausgesetzt. Man beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt: n ist durch 4 teilbar.

Von den nachstehenden Aufgaben 301043 A und 301043 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

301043 A

Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl m derart gibt, daß es zu jeder positiven natürlichen Zahl k höchstens m natürliche Zahlen t gibt, mit denen die Zahl $\sqrt{t + k \cdot \sqrt{t}}$ rational ist!

301043 B

Im Raum seien vier Punkte A, B, C, D so gelegen, daß zwischen ihnen folgende Abstände auftreten:
$\overline{AB} = 7{,}2$ cm; $\overline{AC} = 9{,}6$ cm; $\overline{AD} = 15{,}6$ cm; $\overline{BC} = 12{,}0$ cm; $\overline{BD} = 15{,}6$ cm; $\overline{CD} = 15{,}6$ cm.
Ermitteln Sie den Radius r derjenigen Kugel, auf deren Oberfläche diese vier Punkte liegen!

301044

Untersuchen Sie, ob es eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f so gibt, daß für alle natürlichen Zahlen a und b die Gleichung $f(a) + f(a+b) - f(a-b) = a^2 + 4b + 2$ gilt!

301045

Ein Mathematiklehrer, der demnächst den Flächeninhalt von Kreisen behandeln wollte, stellte folgende vorbereitende Hausaufgabe: Auf kariertem Papier (quadratische Kästchen der Seitenlänge 5 mm) sollten die Schüler um einen Eckpunkt eines Kästchens Kreise mit den Radien 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm und 5 cm zeichnen. Zu jedem dieser Kreise sollten sie unter allen Kästchen, die gemeinsame Punkte mit der Kreisfläche haben, diejenigen zählen,

(A) die vollständig in der Kreisfläche enthalten sind,
(B) deren Vereinigungsmenge die Kreisfläche vollständig überdeckt.

Offenbar ergibt das Produkt des Flächeninhaltes eines Kästchens mit der in (A) gefundenen Anzahl einen zu kleinen Näherungswert für den Flächeninhalt des Kreises, mit der in (B) gefundenen Anzahl dagegen einen zu großen Näherungswert. Anschließend sollte noch das arithmetische Mittel dieser beiden Näherungswerte (als ein dritter Näherungswert) berechnet werden.
Die Schüler, die sehr sorgfältig gearbeitet hatten, erhielten folgende Ergebnisse (siehe Tabelle 1).

Nun wurde bemerkt, daß jeweils die Maßzahlen des dritten Näherungswertes sämtlich nach dem Komma die Ziffer 5 haben. Trifft das auch bei Wahl aller Radien r zu, deren Maßzahlen in cm die natürlichen Zahlen größer als 5 sind?

301046

Das Arbeitsblatt zeigt die Bilder A', B', C', D', E', F', G' von sieben Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G eines Körpers bei Parallelprojektion. Dieser Körper hat außerdem noch einen Eckpunkt H; die Oberfläche des Körpers besteht aus sechs ebenen Vierecken ABCD, ABFE, ADHE, BCGF, CDHG, EFGH. Die Kanten AB, BC, BF werden (bei der Sicht auf die Zeichenebene in Projektionsrichtung) von davorliegenden Flächen verdeckt; daher sind A'B', B'C', B'F' gestrichelt gezeichnet.
Konstruieren Sie unter diesen Voraussetzungen das Bild H' des Punktes H und die Bilder der von H ausgehenden Kanten! Begründen und beschreiben Sie Ihre Konstruktion! (siehe Abbildung 1)

Radius r in cm	Anzahl der Kästchen bei (A)	bei (B)	Näherungswert des Flächeninhalts in cm²
1	4	16	(1+ 4):2 = 2,5
2	32	60	(8+15):2 = 11,5
3	88	132	(22+33):2 = 27,5
4	164	224	(41+56):2 = 48,5
5	276	344	(69+86):2 = 77,5

Tabelle 1

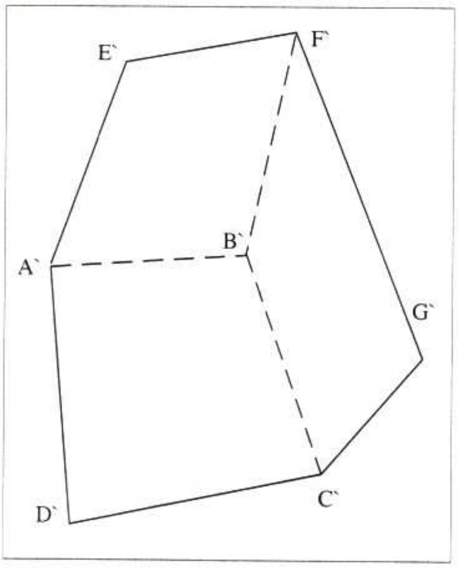


Abb. 1

Olympiadeklassen 11 - 13

301241

Man ermittle zu jedem Tripel (a, b, c) positiver reeller Zahlen a, b, c, alle diejenigen Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$x^2 - (y-z)^2 = a,$ (1)

$y^2 - (z-x)^2 = b,$ (2)

$z^2 - (x-y)^2 = c.$ (3)

301242

Zu einem würfelförmigen Kasten der Kantenlänge 10 cm seien alle diejenigen Geraden betrachtet und als "markiert" bezeichnet, die durch das Innere des Würfels gehen, parallel zu einer Würfelkante verlaufen und von den beiden Seitenflächen, die diese Kante enthalten, ganzzahlige in cm gemessene Abstände haben.

Man beweise:

Wie man auch den Kasten mit 250 quaderförmigen Bausteinen der Abmessungen 2 cm x 2 cm x 1 cm vollständig ausfüllt, stets gibt es wenigstens 100 markierte Geraden, die keinen der Bausteine durchstechen.

Dabei gilt ein Baustein genau dann als "durchstochen", wenn die Gerade innere Punkte des Bausteins enthält.

301243

Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die den folgenden Bedingungen (1) und (2) genügen:

(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen x definiert und stetig.

(2) Für jede reelle Zahl x gilt
$f(x) - 4 \cdot f(x^2) = x - 16x^4.$

301244

Eine streng monoton steigende Zahlenfolge $x_1, x_2, \dots, x_n$ werde genau dann "m-schmal" genannt, wenn für alle $\upsilon = 2, \dots, n$ die Ungleichungen $x_\upsilon - x_{\upsilon-1} \leq m$ gelten.

Eine Menge Z von Zahlen werde genau dann "m-dicht" genannt, wenn sie für jede natürliche Zahl $n \leq 2$ eine n-gliedrige streng monoton steigende Zahlenfolge enthält, die m-schmal ist.

Man beweise die folgende (einen berühmten Satz des niederländischen Mathematikers B. L. van der Waerden abschwächende [1]) Aussage:

Zu jeder Zerlegung der Menge $\mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen in eine Anzahl $r \leq 2$ paarweise disjunkter nicht leerer Teilmengen $T_1, \dots, T_r$ gibt es eine positive ganze Zahl m, so daß (mindestens) eine der Mengen $T_1, \dots, T_r$ eine m-dichte Menge ist.

301245

Man ermittle ein Polynom

$f(x) = a_o + a_1 x + \dots + a_2 x^2$ (1)

($a_o, a_1, \dots, a_n$ reell; $a_n \neq 0$)

das die Bedingungen

$f(-4) = 0, f(-3) = 1, f(-2) = 0, f(-1) = -1,$

$f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 0, f(3) = -1,$ (2)

$f(4) = 0$

erfüllt und dabei möglichst niedrigen Grad n hat.

Von den nachstehenden Aufgaben 301246 A und 301246 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

301246 A

Man beweise: In jedem Dreieck ABC erfüllen für jeden Punkt P im Innern des Dreiecks die Längen $x = \overline{PA}, y = \overline{PB}, z = \overline{PC}$ und die Längen u, v bzw. w der von P auf die Seiten BC, CA bzw. AB oder deren Verlängerungen gefällten Lote die Ungleichung

$xyz \geq (v+w)(w+u)(u+v).$

301246 B

Für natürliche Zahlen n, k mit $2 \leq k \leq n$ werde eine "Menge *N* von n Personen" genau dann als "k-familiär" bezeichnet, wenn sich in jeder Menge *K* von k Personen aus *N* eine Person befindet, die mit allen anderen Personen aus *K* bekannt ist.

Ermitteln Sie zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ alle diejenigen natürlichen Zahlen k mit $2 \leq k \leq n$, für die die Aussage gilt, daß jede k-familiäre Menge von n Personen auch n-familiär sein muß!

Hinweise: Für Personen a, b gelte stets: Wenn a mit b bekannt ist, so ist b mit a bekannt.

Ferner werde vorausgesetzt, daß jede in einer Menge theoretisch widerspruchsfreie Verteilung gegenseitiger Unbekanntheit oder Bekanntheit auch durch eine "Menge von Personen" realisiert werden kann.

Die Lösungen zu diesen Aufgaben könnt Ihr bei Einsendung eines frankierten (2,60 DM) und adressierten Rückumschlages (A5) von uns erhalten.

[1] Diesen Satz (bei dem arithmetische statt m-schmaler Folgen auftreten) ohne Beweis nur als bekannten Sachverhalt zu zitieren, würde hier für eine Lösung der obigen Aufgabe 301244 nicht ausreichen.

Aktuelle Meldungen

Am 3. Oktober 1991 wurde in Annaberg ein Adam-Ries-Bund gegründet, dem die Nachfahren des bekannten Rechenmeisters, Riesforscher und Interessenten beitreten können. Anlaß ist der 500. Geburtstag von Adam Ries im Jahr 1992.

Die Adam-Ries-Städte Staffelstein in Bayern (sein Geburtsort), Erfurt in Thüringen und Annaberg-Buchholz in Sachsen planen 1992 gemeinsame Projekte. Neben Vorträgen zum Wissenschaftler, Humanisten und Bergbeamten Adam Ries steht auch ein mathematischer Schülerwettbewerb der drei Länder auf dem Programm. Staffelstein gedenkt zum Beispiel mit einem Altstadtfest ihres großen Sohnes, Bundespostminister Schwarz-Schilling übergibt eine Sondermarke und erstmals wird das wissenschaftliche Werk Coß, mit dem Ries als Wegbereiter der neuen Mathematik in die Geschichte einging, gedruckt vorliegen.

alpha wird natürlich darüber berichten.

Die 2. Stufe der 31. OJM (auf Kreisebene) wird in Klausurform am 13. 11. ´91 durchgeführt. Interessenten wenden sich bitte an das Kultusministerium ihres Landes, dort liegen die Aufgaben und Teilnahmebedingungen vor.

Die 3. Stufe auf Länderebene soll am 8. und 9. Februar ´92 starten.

Bezüglich der 4. Stufe (Deutschland-Olympiade) und ihrer Abstimmung mit dem Bundeswettbewerb wird in diesem Monat beraten.

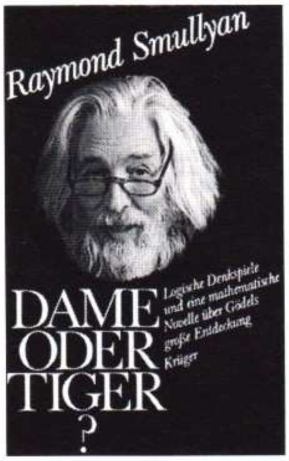
Bücher
Programme
Videos
Spiele

Die Marktecke

Lesens- und Sehenswertes vom Medienmarkt

Dame oder Tiger?

Im ersten Teil von "Dame oder Tiger?" werden von einer prächtigen Gesellschaft imaginärer Gestalten – darunter Vampire, Psychiater, Träumer, Eremiten, Könige, Ritter und Schurken – immer kniffliger werdende Rätsel gestellt. Den zweiten Teil bildet eine mathematische Novelle – die erste ihrer Art –: "Das Geheimnis des Schlosses von Monte Carlo". Inspektor Craig, der bei der praktischen Aufgabe beginnt, die Zahlenkombination für ein Safeschloß zu finden, wobei ihm zwei Freunde mit ihren Rechenmaschinen zu Hilfe kommen, gerät in immer tiefere logisch-mathematische Gedanken, die ihn schließlich mitten in Gödels wunderschönes Theorem über Wahrheit und Beweisbarkeit führen...



Raymond Smullyan: Dame oder Tiger? - Logische Denkspiele und eine mathematische Novelle über Gödels große Entdeckung, Wolfgang Krüger Verlag, 1983; ISBN 3-8105-1806-9

Ebenso einfallsreich und in ihrer Wirkung verblüffend sind M. C. Eschers paradoxe und verrätselte Zeichnungen, mit denen die 19 Kapitel von "Dame oder Tiger?" optisch eingeleitet werden.

Zum Autor:

Raymond Smullyan wurde 1918 in Far Rokkaway auf Long Island (New York) geboren. Mit 12 Jahren verließ er die Schule, um im Selbststudium moderne Algebra und mathematische Logik zu lernen. Seinen Unterhalt verdiente er zunächst als Zauberer in Clubs und als Musiklehrer. 1955, nach Jahren verschiedener Studien, wurde Smullyan von dem Philosophen Rudolf Carnap dem Dartmouth College als Professor für mathematische Logik empfohlen. Inzwischen ein international bekannter Mathematiker, lehrt er heute an der City University in New York, am Lehman College und im Graduate Center.

Eine Kostprobe:

Die Versuche des ersten Tages

Am ersten Tag fanden drei Versuche statt. Bei allen dreien erklärte der König den Gefangenen, daß in jedem der beiden Räume sich entweder eine Dame oder ein Tiger befände, aber es könnte sein, daß Tiger in beiden Räumen oder Damen in beiden Räumen oder eben auch möglicherweise in dem einen eine Dame und im andern ein Tiger wären.

1. Der erste Versuch

"Angenommen, in beiden Räumen sind Tiger", fragte der Gefangene, "was mache ich dann?"
"Das ist dein Pech!" erwiderte der König.
"Und angenommen, in beiden Räumen sind Damen?" fragte der Gefangene.
"Das ist dann offensichtlich dein Glück", entgegnete der König. "Die Antwort darauf hättest du sicher selbst erraten können."
"Nun, und angenommen, in dem einen Raum befindet sich eine Dame und in dem andern ein Tiger, was passiert dann?" fragte der Gefangene zum dritten Mal.
"In diesem Fall macht es einen ganz schönen Unterschied, für welchen Raum du dich entscheidest, nicht wahr?"
"Woher weiß ich aber, für welchen ich mich entscheiden soll?" wollte der Gefangene wissen.
Der König zeigte auf die Schilder an den Türen, die zu den Räumen führten:

I In diesem Raum ist eine Dame, und in dem anderen Raum ist ein Tiger.

II In einem dieser Räume ist eine Dame, und in einem dieser Räume ist ein Tiger.

"Stimmt denn das, was auf den Schildern steht?" fragte der Gefangene.
"Ein Schild ist richtig", erwiderte der König, "aber das andere ist falsch."
*Wenn **Sie** der Gefangene wären, welche Tür würden Sie öffnen (vorausgesetzt natürlich, daß Sie die Dame dem Tiger vorziehen)?*

Lösung:
1. Uns ist bekannt, daß eines der beiden Schilder richtig und das andere falsch ist. Könnte es sein, daß das erste richtig und das zweite falsch ist? – Natürlich nicht, denn wenn das erste Schild richtig ist, dann muß das zweite auch richtig sein – mit anderen Worten, wenn die Dame in Raum I ist und der Tiger im Raum II, dann trifft auch die Feststellung zu, daß in einem der Räume eine Dame und in dem andern ein Tiger ist. Da es nicht sein kann, daß das erste Schild richtig und das zweite Schild falsch ist, muß das zweite Schild richtig und das erste falsch sein. Da das zweite Schild richtig ist, befindet sich die Dame tatsächlich in einem der Räume und der Tiger im andern. Und da das erste Schild falsch ist, muß der Tiger in Raum I und die Dame in Raum II sein. Darum hat sich der Gefangene für Raum II entschieden.

Ultrarechner

Vom Aufbau der Chips über die Architektur der Rechner bis zur Grundkonzeption der Software steht die Computertechnik vor radikalen Neuerungen. Sie werden nicht nur eine Leistungsexplosion bringen, sondern das Gehirn zum Vorbild des Computers machen. Dieses Sonderheft beschreibt die Ultrarechner von morgen und ihre Auswirkungen auf die Gesellschaft.

Inhalt:

Trends in der Computertechnologie • Das Bilionending • Fortschritt in der Galliumarsenid-Technologie • Nanotechnik • Der Quan-

Harte Nüsse für Fortgeschrittene

Diese bietet das Buch "Die mathematischen Abenteuer von Fritz und Katharina" von Klaus Langmann, herausgegeben bei Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen. 33 "mildere" Abenteuer, deren Lösungen man Schülern aus Leistungskursen Mathematik oder Spezialschülern ruhig zutrauen darf, werden abgelöst durch 44 "wildere" Abenteuer. Bei diesen braucht man schon Kenntnisse der Analysis mehrerer Variablen (bis zum Oberflächenintegral) und der Linearen Algebra (bis zur Jordannormalform), um Fritz, Katharina und ihren Freunden beistehen zu können. Die Lösungsansätze im Anhang münden jeweils in weitere, zur Lösung führende Aufgaben. 222 sind damit insgesamt zu knacken.
Die dabei benötigten mathematischen Sätze und Methoden erfassen die wichtigsten Inhalte der Vorlesungen des mathematischen Grundstudiums, das Studenten der Mathematik, Physik, anderer Natur- oder Ingenieurwissenschaften zu absolvieren haben.
Zuweilen muten die Abenteuer etwas aufgesetzt an. Das ergibt sich aber aus dem Wollen des Autors, den mathematischen Stoff möglichst umfassend einzuarbeiten und mindert die Freude am Knacken der Probleme nicht. **(ISBN 3-525-40733-5, 19,80 DM)**

Symmetrie
das Spiel mit der Spiegelung

Mit vier verschiedenen Objekten – Punkt, Strecke, Gerade oder Dreieck – kannst Du Such- und Geschicklichkeitsaufgaben lösen. Dabei geht es um geometrische Konstruktionsprinzipien wie Verschieben, Spiegelung, Drehung und Schubspiegelung. Je besser Du wirst, desto komplexer werden die Aufgaben. Du kannst aber auch selbst Symmetrieachsen und -zentren definieren ...
Die Programme laufen auf PC mit MS-DOS ab Version 3.2, 640 KB Hauptspeicher und Grafikkarte (Hercules, EGA, VGA). DM 128,—
Alle Programme sind vom CoMet Verlag in Duisburg. Bestellungen bitte an: Cornelsen Verlagsgesellschaft, Postfach 8729, 4800 Bielefeld. Die Preise gelten für Schulen, SchülerInnen, LehrerInnen und StudentInnen.

teneffekt-Transistor • Spingläser • Ultraschnelle Prozessor-Netzwerke • Kollektives Rechnen mit neuronenähnlichen Schaltkreisen • Optische Neurocomputer • Können Computer denken? • Telekommunikation •Informationsmanagement im Wandel.
Dieses Sonderheft erhalten Sie bei Ihrem Zeitschriftenhändler, im Bahnhofsbuchhandel oder direkt beim Verlag.

128 Seiten, DM 14,80/sfr 14,80/öS 120
Spektrum der Wissenschaft
Mönchhofstraße 15, D-6900 Heidelberg

Videoserie zur "Künstlichen Intelligenz"

Die Künstliche Intelligenz (KI) als Automation weiter Bereiche geistiger Arbeit wird zunehmend mehr Einfluß auf unser Leben haben, sowohl am Arbeitsplatz als auch in der Freizeitgestaltung. Mit Hilfe von anschaulichen, faszinierenden und lustigen Beispielen gibt die vierteilige Video-Serie einen allgemeinverständlichen Überblick über wesentliche Grundlagen, wichtige Anwendungen und mögliche Auswirkungen der KI. Jeder Teil besteht aus zwei Folgen. Autor und Moderator der Serie ist Prof. Dr. Robert Trappl, Vorstand des Instituts für Medizinische Kybernetik und AI der Universität Wien und Leiter des Österreichischen Forschungsinstituts für Artificial Intelligence.

Einführung
in die Künstliche Intelligenz 1
- Herausforderung und Abenteuer
- Darstellung von Wissen

Ein Überblick über die wichtigsten Bereiche der KI. Anhand einfacher Beispiele werden drei wichtige Methoden zur Darstellung von Wissen erklärt: Semantische Netze, Rahmen, Scripts. Des weiteren abstrakte Beziehungen wie Besitzverhältnisse oder Handlungsabläufe, Probleme und Konsequenzen.

Einführung
in die künstliche Intelligenz 2
- Problemlösen, Suchen, Planen
- Expertensysteme

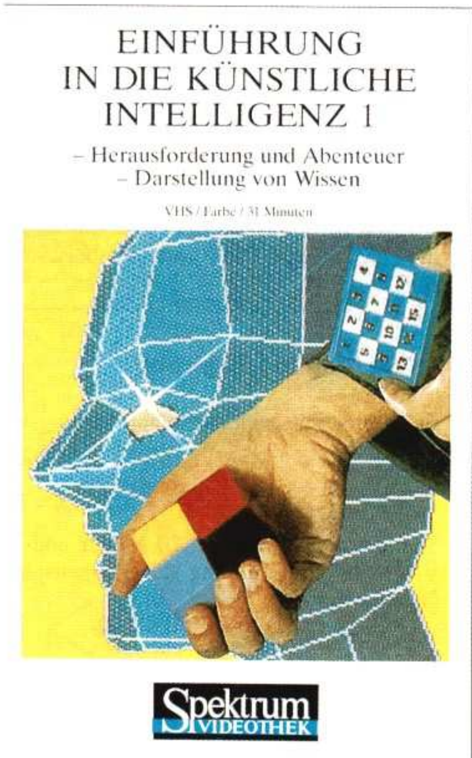
Eine Hauptaufgabe von intelligenten Systemen wird die Problemlösung sein. Anhand eines einfachen Schiebepuzzles, eines Spiels und der Planung einer Roboteraktion lernen wir verschiedene Methoden kennen; des weiteren, wie Expertensysteme funktionieren und wie sie eingesetzt werden.

Einführung
in die künstliche Intelligenz 3
- Natürlichsprachige Systeme 1
- Natürlichsprachige Systeme 2

Das Verstehen von Sprache und ihre Mehrdeutigkeiten. Mustervergleich, ATN, Casusrahmen und ein System im Einsatz werden vorgestellt. Des weiteren das Verstehen ganzer Texte. Und wir lernen ein Programm kennen, das selber Geschichten erfindet.

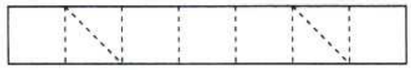
Einführung in die künstliche Intelligenz 4
- Roboter, Lernen, Non-Vons
- Zukunft und Auswirkungen

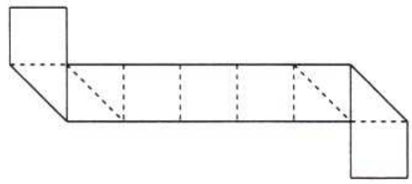
Damit Roboter "sehen" können, müssen die KI-Systeme immer wirklichkeitsnaher werden. Dazu muß man ihnen immer mehr Wissen eingeben. Wir erfahren, welche Arten von "Lernen" es gibt, und sehen und hören, wie ein Programm selbständig lernt, einen Text vorzutragen. Zudem: Chancen und Risiken in der Zukunft.

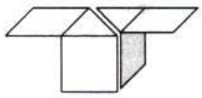


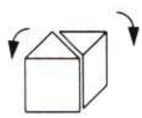
Die Videos kosten jeweils 99,— DM;
FHS/Farbe/31 Minuten
Zu bestellen bei:
Spektrum Videothek
Mönchhofstraße 15 . D-6900 Heidelberg

Lösungen

a


b


c


d


• Teilbar oder nicht teilbar

Da alle Aussagen des Herrn Flunkrich falsch sind, ergibt die Zahl wegen (1) bei der Division durch 3 den Rest 2 und wegen (2) bei der Division durch 5 denselben Rest wie bei der Division durch 7.
Dieser Rest ist wegen (5) größer oder gleich 3 und wegen (6) kleiner oder gleich 3, also gleich 3.
Wegen (4) läßt die Zahl bei der Division durch 8 den Rest 1. Ferner ist wegen (3) die Zahl nicht größer als 800. Nun gibt es wegen $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 840$ und $840 > 800$ höchstens eine natürliche Zahl $a \leq 800$, die
bei der Division durch 3 den Rest 2 (7)
bei der Division durch 5 den Rest 3 (8)
bei der Division durch 7 den Rest 3 (9)
bei der Division durch 8 den Rest 1 läßt. (10)

Wegen (10) ist a eine der Zahlen 9, 17, 25, 33, ..., 793 und wegen (9) eine der Zahlen 17, $17 + 8 \cdot 7 = 73$, $17 + 2 \cdot 56$, ..., $17 + 13 \cdot 56$; also wegen (8) eine der Zahlen 73, $73 + 8 \cdot 7 \cdot 5 = 73 + 280 = 353$, $73 + 2 \cdot 280 = 633$; also wegen (7) $a = 353$. Die Postleitzahl von Herrn Flunkrich ist 353; er wohnt in Havelberg.

• Überall natürliche Zahlen

Beim Numerieren der Seiten des Lehrbuches werden die Zahlen von 3 bis 195 gedruckt. Für die Zahlen 3 bis 9 braucht man 7 Ziffern. Für die Zahlen von 10 bis 99 braucht man $90 \cdot 2 = 180$ Ziffern. Für die Zahlen von 100 bis 195 dagegen $96 \cdot 3 = 288$ Ziffern. Das sind insgesamt 475 Ziffern. Die 0 kommt dabei 29mal vor.

• Nicht in die Brüche geraten

Es waren x Personen anwesend, davon $\frac{1}{2}x+1$ Kinder, $\frac{1}{4}x + 2$ Mütter und $\frac{1}{6}x + 3$ Väter.
$\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{4}x + 2 + \frac{1}{6}x + 3 = x$, also $x = 72$.
Somit waren 37 Kinder, 20 Mütter und 15 Väter zur Uraufführung des Puppenspiels gekommen.

• Logisch gedacht

• Ohne Worte

Sechs Katzen müssen auf der rechten Seite der Waage sitzen, damit diese im Gleichgewicht ist.

• Gleichungen in Theorie und Praxis

$\frac{x+107}{100} \cdot 4 = 7; \quad x = 68$

Die Zahl 68 erfüllt die Bedingungen.

• Rätsel

a) Es gibt mehrere Lösungen, z. B.

$$\begin{array}{r} 58\,015 \\ +\ 65\,412 \\ \hline 123\,427 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 13\,274 \\ +\ 13\,274 \\ +\ 13\,274 \\ +\ 13\,274 \\ \hline 53\,096 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13\,402 \\ +\ 13\,402 \\ +\ 13\,402 \\ +\ 13\,402 \\ \hline 53\,608 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 19\,863 \\ +\ 19\,863 \\ +\ 19\,863 \\ +\ 19\,863 \\ \hline 79\,452 \end{array}$$

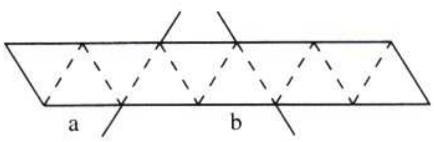
c) Es gibt insgesamt 24 Lösungen, z. B.
6 493 + 9 408 = 15 901

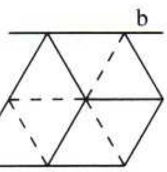
• Wir falten

Man halte den Bogen mit der beschrifteten Seite nach unten, so daß beim Betrachten des Bogens von oben die numerierten Quadrate in folgender Stellung liegen:

2	3	5	6
1	8	7	4

Nun falte man die rechte Hälfte des Bogens nach links, so daß die 5 über der 2, die 6 über der 3, die 4 über der 1 und die 7 über der 8 liegt. Die untere Hälfte falte man nun nach oben, so daß die 4 über der 5 und die 7 über der 6 liegt. Anschließend falte man 4 und 5 zwischen 6 und 3 und falte 1 und 2 unter das Paket.





• Noch etwas für Logiker

Name	Beruf
Schuster	Schneider
Schneider	Schuster
Gärtner	Zimmermann
Zimmermann	Sattler
Sattler	Gärtner

• Sprachecke

Die Tafeln des José

José hat 9 Tafeln in einem Gefäß, die jeweils die Nummern 1 bis 9 tragen. Mit einem Mal nimmt er 4 beliebige Tafeln heraus. Mit diesen 4 Tafeln stellt er alle vierstelligen Zahlen zusammen, indem er die Ziffern vertauscht, und schreibt sie nacheinander auf. Am Ende erhält er die Summe 159984.
Welche 4 Tafeln sind gezogen worden? Wieviele Lösungen gibt es insgesamt?

Lösung
Zwei von insgesamt 8 Lösungen sind:
1 - 6 - 8 - 9 oder 4 - 5 - 7 - 8

Das Rätsel der fünf Häuser

Es geht um fünf Häuser, fünf Nationalitäten, fünf Getränkearten, fünf Arten von Tabakwaren und fünf Haustierarten.

1. Der Engländer wohnt im roten Haus.
2. Der Spanier besitzt einen Hund
3. Im grünen Haus wird Kaffee getrunken
4. Der Ukrainer trinkt Tee.
5. Der Raucher von "Old Gold" besitzt Schnecken.
6. Das grüne Haus befindet sich direkt rechts neben dem elfenbeinfarbenen Haus.
7. Im gelben Haus wird "Kool" geraucht.
8. Im mittleren Haus wird Milch getrunken.
9. Der Norweger lebt im ersten Haus.

10. Der Mann, der "Chesterfield" raucht, lebt neben dem Mann, der einen Fuchs besitzt.
11. "Kool" wird im Nachbarhaus des Hauses geraucht, in dem das Pferd gehalten wird.
12. Der Raucher von "Lucky Strike" trinkt Orangensaft.
13. Der Japaner raucht "Parliament".
14. Der Norweger wohnt neben dem blauen Haus.
15. Jeder Mann hat ein Haus, eine Haustierart, eine Tabakware, eine Getränkesorte und eine Nationalität.

Wer trinkt Wasser? Wer besitzt ein Zebra?

Lösung

Haus 1	Haus 2	Haus 3	Haus 4	Haus 5
Norweger	Ukrainer	Engländer	Spanier	Japaner
gelb	blau	rot	elfenbein	grün
Wasser	Tee	Milch	Orangensaft	Kaffee
Kool	Chesterfield	Old Gold	Lucky Strike	Parliament
Fuchs	Pferd	Schnecken	Hund	Zebra

• Kohl

Die Bücher stehen von links nach rechts. Also frißt er sich praktisch nur durch Band 2 und 3 sowie durch je eine Einbanddecke von Band 1 und 4 = 10,5 cm;

• Rund um die Bahn

Deutschland im Stundentakt

Diese Aufgabe löst man am besten graphisch. Im ***Diagramm 1*** ist die Lösung vorgegeben. Übertragt es auf Millimeterpapier und Ihr könnt die Antworten problemlos ablesen.

Interessante Begegnung

Nach sieben Rangierungen können beide Züge ihre Fahrt ungehindert fortsetzen (siehe ***Abbildung 1***).

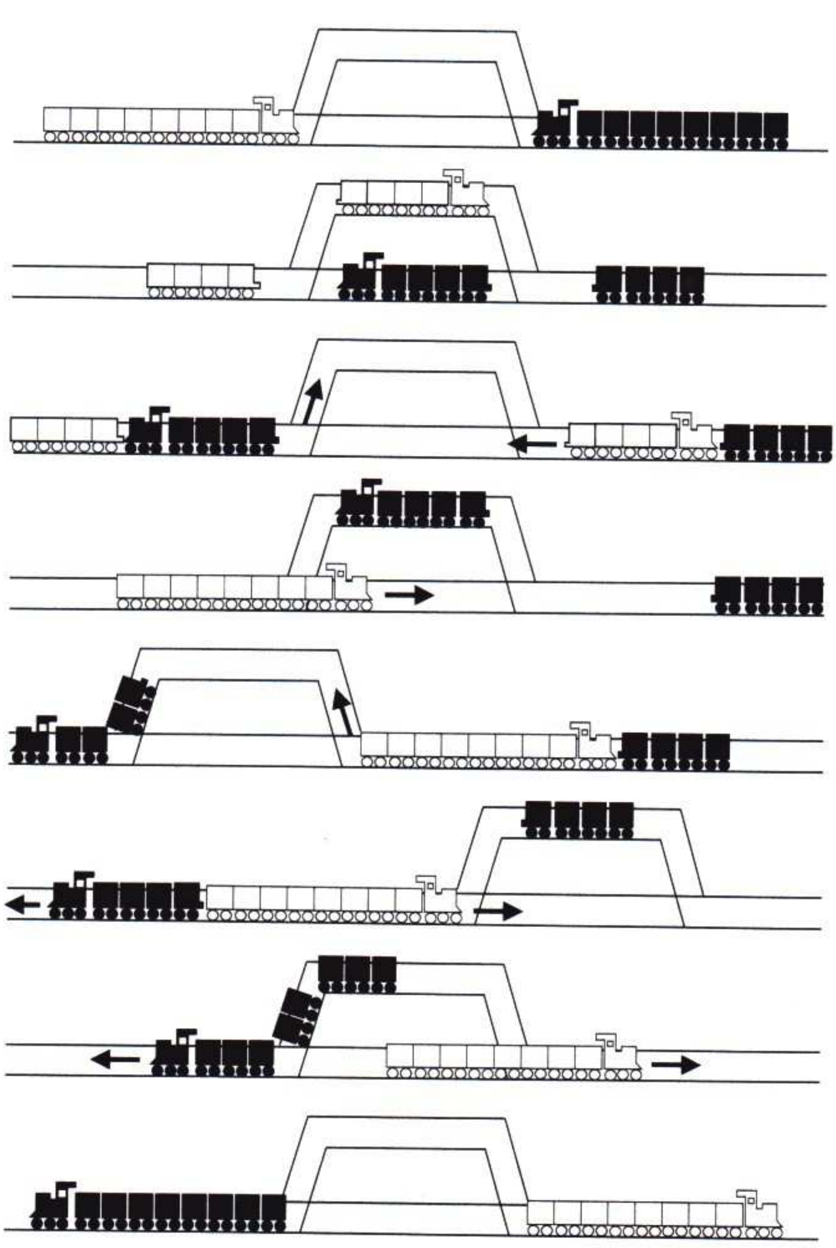


Abbildung 1

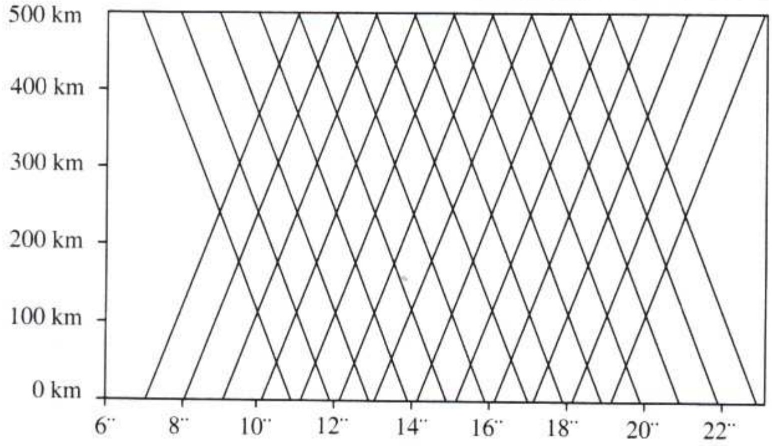
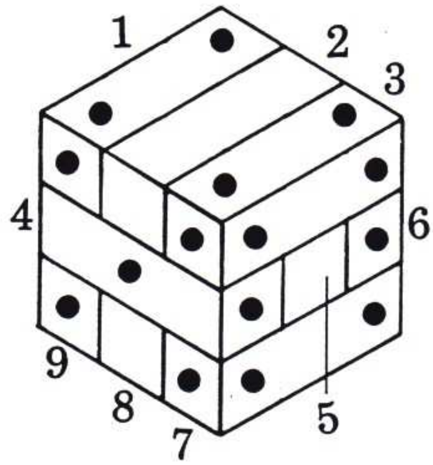


Diagramm 1

• Würfelpuzzle



Beliebte Schachübung

ein Euwetest

Voraussichtlich im Herbst dieses Jahres wird im Bange-Verlag Hollfeldt das "Schachlehrbuch für Kinder" in zwei Bänden erscheinen. Der erste Band führt den Anfänger ein in die bunte Welt des Schachspiels, erzählt, wie das Spiel entstanden ist, wie die Figuren ziehen, was ein Matt ist und viele andere wichtige Dinge, die man für eine regelgemäße Schachpartie wissen muß. Das alles wird in märchenhafter Form dargestellt und am Schluß eines jeden Kapitels gibt es Übungsaufgaben.
Der zweite Band führt den ersten nahtlos weiter, kann aber auch für sich allein gelesen werden. Das Mittelspiel mit seinen Fallen, Gabeln, verräterischen Abzugsschachs und Mattkombinationen steht im Mittelpunkt des ersten Kapitels. Danach folgt eine Darstellung aller modernen und vielgespielten Eröffnungen in Arbeitsblättern. Ein Abschnitt über die Schachuhr, die Fide-Regeln und die Geschichte des Schachs lockern das Ganze auf. Im letzten großen Kapitel finden sich schließlich Partien zum Nachspielen. Hier griff der Autor Markus Spindler, alpha-Schachfans ein Begriff, auf Partien seiner Schachkinder zurück. Diese Mannschaft wurde 1990 DDR-Meister der Altersklasse 9/10. Vorgestellt werden im Buch auch 8 Euwetests, nach deren Bewältigung der Leser prüfen kann, welche Leistungsklasse im Schach er hätte.
Einen stellt Euch der Autor in diesem Beitrag vor.

Nehmt Euch ein weißes Blatt Papier und Euer Schachbrett zur Hand. Mit dem Blatt deckt Ihr alle nun folgenden Zeilen ab. Spielt die folgende Partie nach! Immer, wenn ein * am Zeilenende auftaucht, dürft Ihr das Blatt nicht nach unten schieben, sondern Ihr schreibt zuerst die geforderte Stelleneinschätzung (z. B.: Weiß hat die offene e-Linie besetzt) auf bzw. überlegt, was Ihr gezogen hättet, wenn Ihr Weiß gewesen wäret. Danach schiebt Ihr das Blatt nach unten und schreibt Euch die erreichte Punktzahl auf. Am Schluß könnt Ihr Eure Punkte zusammenzählen und nachsehen, wie gut Ihr seid.

Werner (Stahl NSH Berlin) - Nichterlein (Post Dresden) Wilhelmstahl, 1.8.1990; Vier-Springer-Spiel
Mit Norman Werner, 10 Jahre und Dritter der DDR-Einzelmeisterschaften 1990, spielt der Leser Weiß.
1. e4 e5 2. Sf3 Sc6 3. Sc3 Sf6 4. Lc4 Lc5 5. d3 0-0 6. Lg5 d6?
Hier sollte doch besser h6 folgen, denn Weiß hat eine bekannte Drohung! Seht euch die Stellung genau an, schätzt sie ein und findet für beide Pläne! *
Die Eröffnung wurde von beiden zügig vorangetrieben.
(1) Weiß steht aktiver. **(1)** Weiß sollte unverzüglich am Königsflügel angreifen, dabei die Schwächen der schwarzen Stellung nutzen. **(1)** Schwarz muß schnell eine Verteidigung organisieren und versuchen, seinerseits aktiv zu werden. **(1)** *
7. Sd5! (3) Diese Chance muß unbedingt genutzt werden. Kommt Schwarz zu Le6, ist sie vertan. **7...Lg4** *
8.c3! (3) Das verhindert ein für alle mal, daß Weiß in dieselbe Falle tappt. Gut war auch h3 **(2)** oder S:f6 **(2). 8...h6?** *
9.S:f6+ (2) Viel besser als L:f6, der Läufer wird beim Angriff noch gebraucht. **9...g:f6** Erzwungen. *
10.L:h6 (1) Das sollte selbstverständlich sein. Nun sehen wir auch, warum h6 schlecht war. **10...Te8**
11.h3 (2) Hier hatte Weiß eine ganze Reihe anderer Möglichkeiten. Mit Db3! **(3)** hätte er f7 und b7 angegriffen, mit De2 oder Dd2 **(je 1)** die Dame entwickelt und mit 0-0 **(1)** den König gesichert. Hier sollte man allerdings lieber später 0-0-0 spielen, um den Königsflügel für Angriffsoperationen freizuhalten! **11...Lh5** *
12.g4 (2) Für Dd2 und De2 gibt es einen Punkt. **12...Lg6** *
13.Sh4 (3) Auch h4 **(3)** war gut. Der Angriff muß fortgesetzt werden, solange Schwarz seine Reihen noch nicht zur Verteidigung ordnen konnte. **13...Kh7** *
14.Le3 (1) Hier war Dd2 **(2)** besser; natürlich nicht Sf5? L:f5 g:f5 K:h6! Der Zug Le3 ist etwas passiv. **14...L:e3** *
15.f:e3 Wer diesen Zug nicht fand, schreibt sich fünf Minuspunkte an! **15...Kg7** Schwarz will Th8 spielen. *
16.Df3 (2) Mit Sf5+ **(2)** wäre der Springer gut postiert worden. **16...f5??** Ein äußerst schlechter Zug – Weiß beherrscht dieses Feld viermal. *
17.S:f5+ (2) Erzwungen, denn Schwarz stellte eine Falle. Es drohte D:h4+, nur der Springer durfte also schlagen. **17...Kf8** *
18.h4 (2) Weiß geht unbeirrt nach vorn. Gut war auch 0-0-0 **(2)**, was den zweiten Turm ins Spiel bringt.
18...L:f5 *
19.D:f5 (2) Das ist das beste, denn nun droht D:f7≠. Möglich war auch e:f5 **(1)**, wonach Weiß eine erdrückende Bauernmehrheit am Königsflügel hätte.
19...De7
Seht euch diese Stellung auf eurem Brett gut an! Schätzt sie ein und entwickelt Pläne! *

Weiß hat zwei Bauern mehr. Er hat Angriff auf die offene schwarze Königsstellung. Der g- und h-Bauer sind sehr stark. Weiß steht klar besser. **(je 1)**
Weiß sollte lang rochieren, auf der f-Linie angreifen und mit den beiden Bauern laufen **(3)**. Schwarz muß den König auf den Damenflügel überführen und die g- und h-Linie verteidigen. **(2)** *
20.g5! (3) Ein Schritt nach vorn, der gleichzeitig h4 schützt. Gut war auch 0-0-0, was den König aus dem drohenden Schach herausbringt (D:h4+ nach Tf1?), und Dh7, was Dh8≠ droht **(je 3). 21...Sd8** Das deckt f7. *
21.0-0-0 (3) Möglich war auch Dh7 **(1)**, Tf1 **(2)**, g6 **(1)** und h5 **(1)**. **21...c6** Schwarz will den gefährlichen Läufer von c4 vertreiben. *
22. Tdf1 (2) Je einen Punkt gibt es für h5, g6 und Thf1. **22...d5** *
23.e:d5 (1) Was sonst? **23...Tc8** *
24.D:c8 (1) Wer das nicht gesehen hat, schreibt sich 5 Minuspunkte an! Tc8 war ein grober Fehler, doch Schwarz hatte auch so keine Chance mehr. Den Rest zum Anschauen: **24...c:d5 25.L:d5 Dd6 26.Dc4 Dg6 27.Tf6! Dg7 28.Thf1 Te7 29.g6** Neun Figuren decken f7 oder greifen an! **29...Dh6 30.Kd2!** Weiß kann sich Zeit nehmen, den Punkt e3 zu verteidigen. **30...Dg7? 31.L:f7 b6 32.Le6+ Ke8 33.Db5+ Sc6 34.D:c6+ Kd8 35.Dc8≠.**
Ein glanzvoll geführter Angriff, der nur zustande kam, weil Schwarz Lg5 und Sd5 zuließ. Weiß spielte hervorragend! Ihr auch?

Schaut doch in der Tabelle nach:

Erreichte Punkte	Leistungsklasse	ELO-Zahl	INGO-Zahl
bis zu 12	8 = Anfänger	300 bis 540	320 bis 285
13 bis 22	7	540 bis 780	285 bis 255
23 bis 30	6	780 bis 1020	255 bis 225
31 bis 38	5	1020 bis 1260	225 bis 195
39 bis 45	4	1260 bis 1500	195 bis 165
46 bis 50	3 und stärker	1500 und mehr	165 und weniger

Zum Vergleich: LK 5 entspricht ungefähr dem deutschen Meister Altersklasse 9/10 oder einem Landesmeister Ak 11/12, mit LK 6 ist man als Mannschaftsspieler in jedem Verein im Kinderbereich bis 14 Jahre gern gesehen.

stud. math. M. Spindler
Humboldt-Universität zu Berlin

 ISBN 3-617-34005-9 Einzelpreis: 2,50 DM Einzelpreis im Abo: 2,00 DM

H 11328 F

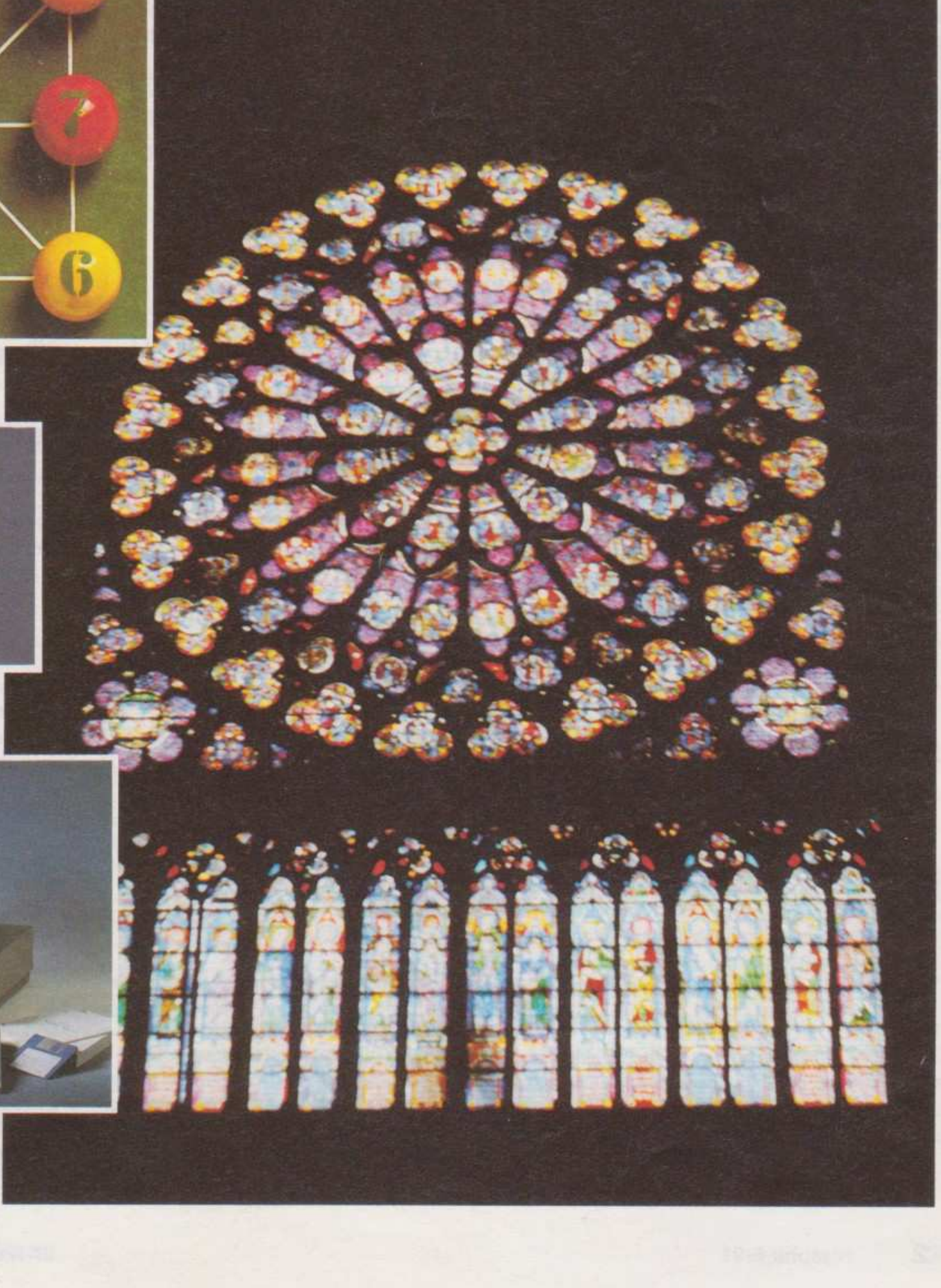
Heft 6
Dezember 1991
25. Jahrgang

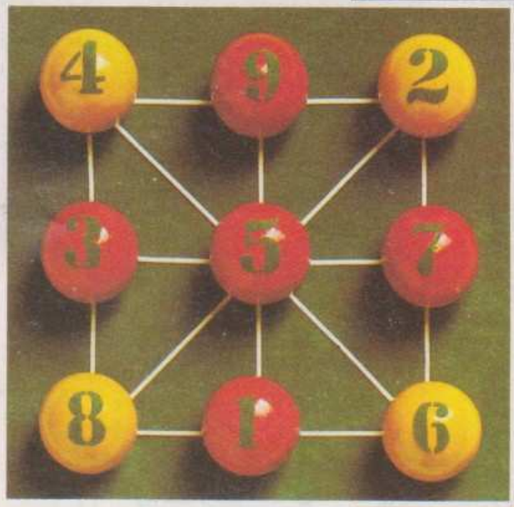
Fachzeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Kirchen, Kreisketten und eigene Kunstwerke





Magie im Großformat

4 007817 308431

Geheimschrift EAN?

Attraktive Preise im alpha-Wettbewerb 1991/92

Hallo, liebe Mathe-Fans!

Vor Euch liegt die letzte Nummer des 25. Jahrgangs der alpha. Hoffentlich gefällt sie Euch! Wenn ja, dann schreibt uns doch und wenn nicht, dann wollen wir das auch gern wissen.
Machen wir ihn doch gemeinsam – den 26. Jahrgang.

Ein Leser kritisierte kürzlich, daß so viele Autoren aus dem Universitätsbereich stammen, wo bleiben die Lehrer und vor allem die Schüler?! Die Kritik ist – meinen wir – berechtigt!
Also – stürmt die Bastionen der Mathematik!
Es muß sich ja nicht immer nur um innermathematische und komplizierte Probleme handeln. Mathematik ist überall im Alltag zu finden, man muß sie nur aufspüren, aufschreiben und an die Redaktion alpha senden. Vielleicht schon mit Euren Lösungen zum alpha-Wettbewerb?

Gabriele Liebau

Weihnachtsgrüße

Wir überbringen allen Lesern zum Jahreswechsel einen herzlichen Gruß.
Der Wortlaut dieses Grußes wurde allerdings in Geheimschrift angegeben, die es zu entschlüsseln gilt. Der angewendete Code besteht in einer eindeutigen Abbildung des Alphabets auf sich.

Der Gruß lautet:

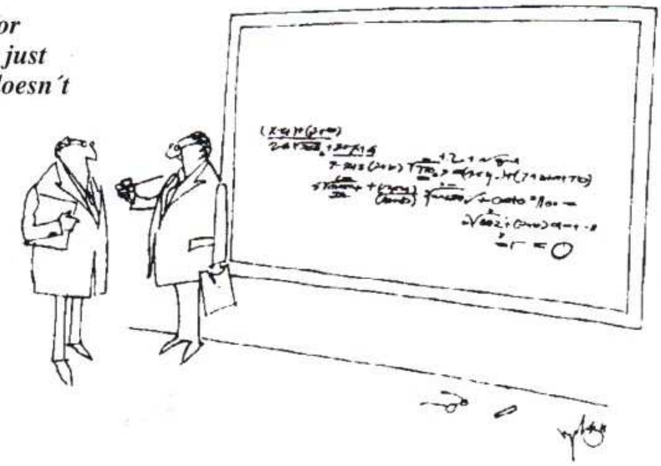
XIS XUEPTDJEP AMMEP AMQJAMETESP EIP GSOJET XEIJPADJTGETV TOXIE EIP HETUPFET UPF ESGOMHSEIDJET PEUET KAJS !

R. Mildner, Leipzig

Übrigens

Da es unsere Zeitschrift nun nicht mehr am Zeitungskiosk gibt, könnt Ihr sie direkt beim Erhard Friedrich Verlag in W-3016 Seelze 6, Postfach 10 01 50 bestellen. Wer interessierte Bekannte und Freunde hat, kann uns ebenfalls deren Anschrift mitteilen. Sie erhalten dann ein kostenloses Probeexemplar.

„... Professor Schlemmer just proved he doesn't exist..."



Alphons weist Euch auf Artikel mit geringerem Schwierigkeitsgrad hin. Das heißt aber nicht, daß alle anderen Beiträge für mathematische Anfänger ungeeignet sind.

Alphonsvignetten: Lothar Otto (Leipzig)

alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett.

Redaktion:
Dr. Gabriele Liebau, Tel. (Leipzig) 58 18 54, PSF 129, Leipzig, O-7010
Redaktionskollegium:
StR F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), OL Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. C. P. Helmholz (Leipzig), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pliezhausen), Herbert Kästner (Leipzig), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OStR J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. W. Schmidt (Greifswald), OStR G. Schulze (Herzberg), W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

Anzeigenleitung: Bernd Schrader
Anzeigenabwicklung:
Telefon (05 11) 4 00 04-23
Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01.01.1990
Vertrieb und Abonnement:
Telefon (05 11) 4 00 04-50
Verlag:
Erhard Friedrich Verlag
GmbH & Co. KG,
Postfach 10 01 50, 3016 Seelze 6
Telefon (05 11) 4 00 04-0
Telefax: 4 00 04-19
Das Jahresabonnement für alpha besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt DM 12,00, im Einzelbezug DM 2,50. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten.
Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).
alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV Klett Cotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, CH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.

Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschrift im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.
Herstellung: Pädagogika Zentrale
Druck: Druckerei Schröer, Seelze
ISBN 3-617-34006-7

Komisches, Kniffliges und Knackiges

Die Idee zu einem Wecker

Leonardo da Vinci hatte stets Schwierigkeiten mit dem Aufstehen. Deshalb hatte er die Idee zu einem Wecker als Uhr für diejenigen, "... die in der Verwendung ihrer Zeit geizig sind. Und sie wirkt so: wenn der Wassertrichter soviel Wasser in das Gefäß fließen ließ, wie in der anderen Waagschale ist, so gießt diese, indem sie sich hebt, ihr Wasser in das erstgenannte Gefäß.
Dieses hebt, indem es sein Gewicht (dadurch) verdoppelt, mit Gewalt die Füße des Schlafenden, dieser richtet sich auf und geht seinen Geschäften nach".

aus:
Lingmann/Schmiedel: Anekdoten, Episoden, Lebensweisheiten, Fachbuchverlag Leipzig

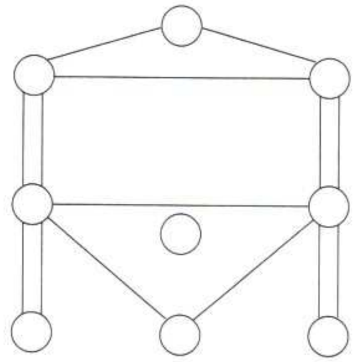
Erstaunlich viele Weihnachtsgeschenke

Vier Freunde berichten über die Zahl ihre diesjährigen Weihnachtsgeschenke:
Rest 19 bleibt beim Teilen durch 91.
Durch 19 geteilt entsteht Rest 9 und die Ziffer 1 kommt in der vierstelligen Lösung vor.
Haben sie vielleicht doch etwas geflunkert?

Dr. Ch. Werge, Leipzig

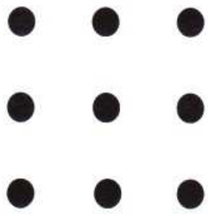
Alle zu Haus

Verteile die Primzahlen von 2 bis 23 so in der Figur, daß die Summe in jedem der Drei- und Vierecke ein und dieselbe Primzahl ist!



Dr. Ch. Werge, Leipzig

Zum Knobeln



Verbinde diese 9 Punkte mit 4 geraden Linien, ohne dabei den Bleistift abzusetzen.

Übereinstimmung

Jan und Norbert, beide im gleichen Jahr geboren, Jan im Januar und Norbert im November, stellen zu Weihnachten 1991 fest: In 43 Jahren fielen unsere Geburtstage jeweils auf gleiche

Die Magie der Weihnachtssterne

In **Abb. 1** seht Ihr ein gezacktes regelmäßiges Zwölfeck.
Auf die Ecken und den Mittelpunkt sind die Zahlen von 1 bis 13 so verteilt, daß die Summe der sich paarweise gegenüberliegenden Zahlen an den Außenecken stets 20 und an den Innenecken stets 7 beträgt. Der Mittelpunkt trägt die Zahl 10.

Die magische Summe dieses Stern beträgt 27 (= 3^3). Sie kann insgesamt 18mal durch Addition von geeignet gewählten vier Zahlen, die auf einfachen geometrischen Bildern liegen, erzeugt werden.

Bevor Ihr weiterlest, solltet Ihr selbst versuchen, diese Möglichkeiten aufzuspüren!

1. Verbindet man jede Innenecke mit den beiden benachbarten Innenecken, so erhält man

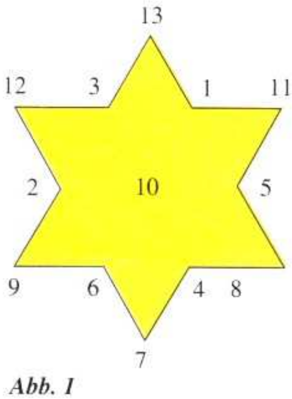


Abb. 1

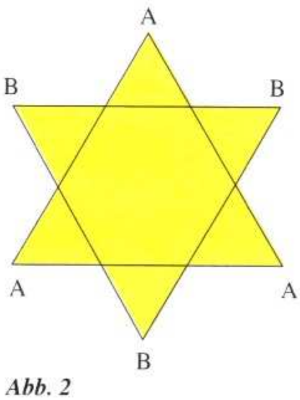


Abb. 2

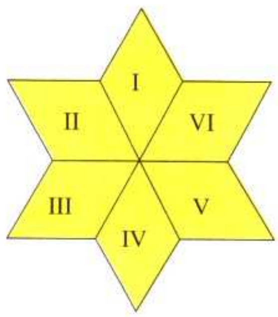


Abb. 3

Wochentage. In welchem Jahr wurden beide geboren?

W. Träger, Döbeln

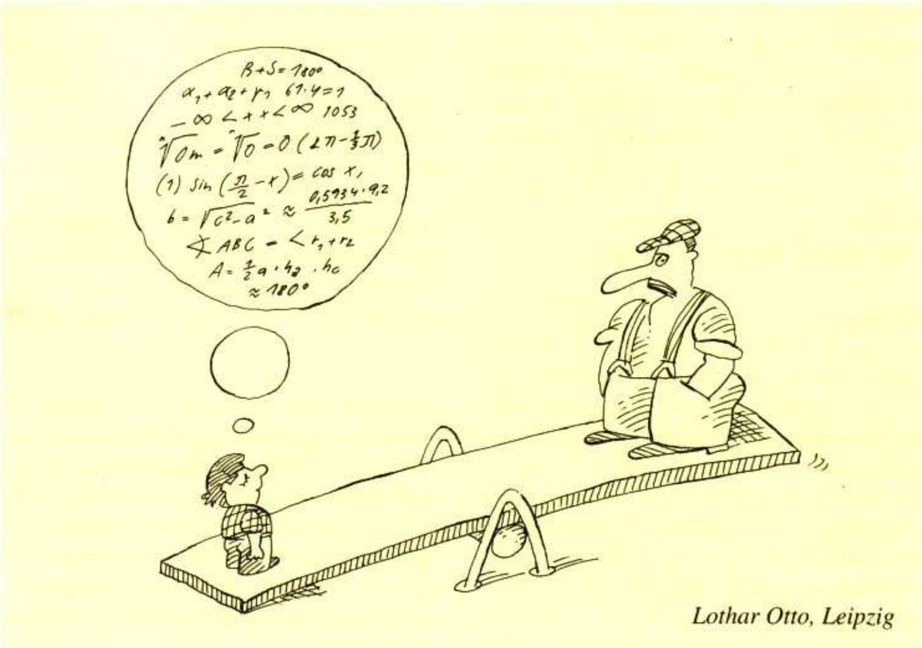
Ohne Fleiß kein Preis!

Mit 4 Ziffern wird eine 4stellige natürliche Zahl aufgeschrieben. Mit den gleichen 4 Ziffern werden zwei 2stellige natürliche Zahlen aufgeschrieben. Dabei ist das Produkt der beiden zweistelligen Zahlen gleich der 4stelligen Zahl.
Wer findet eine derartige vierstellige Zahl und die zugehörige Produktdarstellung?

W. Träger, Döbeln

Hölzchentricks

Wer kann aus neun Streichhölzern zwei große und vier kleine Quadrate legen?(siehe rechts)



Lothar Otto, Leipzig

Mathematische Liebe

(Verfasser unbekannt)

Ein Sinus liebt eine Tangente
Und seufzet und sinnet voll Harm
Wie durch den Bogen er könnte
Sie führen in seinen Arm.

Da lauert ein grauer Philister,
Herr Kosinus wird er genannt,
Vom König Radius ist er
Der Rat und die rechte Hand.

Und neidisch sieht er die Beiden
Sich lieben so aus der Fern',
Er kann den Sinus nicht leiden
Und die Tangente so gern.

An Ränken in Plus und in Minus
Ist der Halunke so reich,
Er dividiert den unglücklichen Sinus
Und erhält die Tangente sogleich.

aus: H.-D. Hornschuh: Humor rund um die Mathematik, Manz Verlag München

zwei sich überschneidende gleichseitige Dreiecke A und B (**Abb. 2**).
Die Summe der auf den sechs Seiten dieser Dreiecke stehenden vier Zahlen ergibt jeweils 27.
2. Verbindet man jede Innenecke des Sterns mit seinem Mittelpunkt, so entstehen sechs Rauten (**Abb. 3**).
Die Summe der vier Zahlen an den Ecken jeder Raute beträgt stets 27.

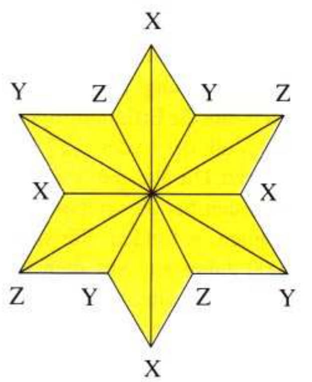


Abb. 4

3. Die Verbindungslinie der gegenüberliegenden Innenecken bildet mit der Verbindungslinie der ihnen nicht benachbarten Außenecken ein ungleichseitiges rechtwinkliges Kreuz (**Abb. 4**). Es ergeben sich drei solcher Kreuze, die im Bild mit X, Y und Z bezeichnet sind.
Die Summe der vier Zahlen an den Endpunkten jedes dieser Kreuze ergibt stets die magische Summe.
4. Betrachtet man die Verbindungslinie zweier einander gegenüberliegender Innenecken und den doppelt gezählten Mittelpunkt als eine entartete Raute (mit den Winkeln 0° und 180°), so kann man wie bei 3. verfahren: Die Summe der Zahlen an den beiden Innenecken und das Doppelte der Zahl des Mittelpunktes ergeben auch hier jeweils die magische Summe, also auch hier insgesamt 3mal.
Gibt es noch einen weiteren solchen magischen Stern mit den Zahlen 1 bis 13?

Hermann Oehl, München

Verschlüsselter Weihnachtswunschzettel

Bernd übergibt seinen Eltern, die gern knobeln, den abgebildeten Zettel mit den Worten: Mein Wunschzettel enthält zwei Worte, deren Buchstaben in Form von zwei Rösselsprüngen in ein 4x4-Schachbrett eingetragen sind. Die Zugfolge des einen Springers bestimmt das eine Wort und die des anderen das zweite. Dabei wird jedes Feld nur einmal von einem Springer betreten. – Was wünscht sich Bernd zu Weihnachten?

H	E	L	E
L	H	N	S
E	C	H	A
U	B	C	S

W. Träger, Döbeln

Diceboard Games

Neue Spielideen mit Würfeln für lange Winterabende

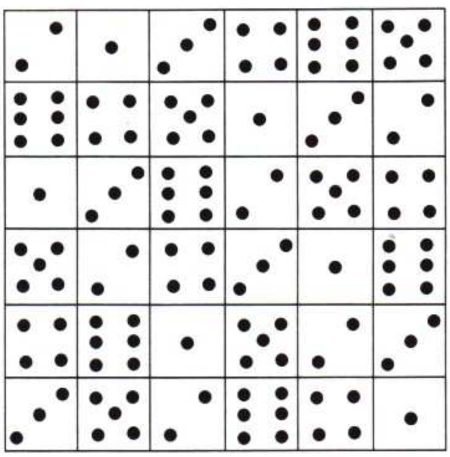
Was Ihr braucht

16 Spielwürfel, davon je 4 in der gleichen Farbe (z. B. 4 weiß, 4 gelb, 4 rot, 4 blau).

1 quadratischer Spielplan mit 6 x 6 Feldern in der Größe je einer Würfelfläche, bedruckt mit Punkten von 1 bis 6 in der vom Würfel gewohnten Anordnung (und zwar so, daß jede Punktezahl in jeder Reihe und jeder Spalte nur einmal vorkommt; siehe Zeichnung unten).

Spiele und Leben bilden eine Einheit – magisch ineinander verwoben. Die Spiele nehmen die kräftige Farbe der Wirklichkeit an, die Wirklichkeit hat den schillernden Zauber der Phantasie.

Klaus Mann



Die Grundidee

Die Würfel werden nicht nur zum Ermitteln von Zufallszahlen, sondern gleichzeitig auch als Spielsteine verwendet.
Sie können nur auf ein Feld gesetzt werden, dessen Punktezahl der vorher geworfenen Augenzahl entspricht.
(Der gesetzte Würfel zeigt also auf seiner obersten Fläche die gleiche Anzahl an Augen, wie er mit seiner Grundfläche Feldpunkte verdeckt.)

Eine Menge Spielvorschläge

Variante 1:
2-4 Spieler, jeder hat 3 Würfel einer anderen Farbe. Jeder Spieler wirft mit einem Würfel; der Spieler mit der höchsten Augenzahl eröffnet das Spiel, ihm folgen die anderen reihum im Uhrzeigersinn.
Jeder am Zug befindliche Spieler nimmt einen seiner Würfel, wirft damit und setzt den Würfel anschließend auf eines der Felder des Spielplans, das in seiner Punktezahl der geworfenen Augenzahl entspricht.
Sieger ist, wem es als erster gelingt, drei waagerecht, senkrecht oder diagonal aneinandergrenzende Felder mit seinen Würfeln zu besetzen.
Sind nach dem dritten Zug eines Spielers alle seine Würfel gesetzt, ohne daß er oder einer seiner Mitspieler dieses Ziel erreicht hat, so nimmt er ab jetzt für jeden Wurf und Zug einen seiner bereits gesetzten Würfel, dessen Position er damit aufgibt. Ein Spieler, der eine Augenzahl wirft, von der auf dem Spielplan kein entsprechendes Punktefeld mehr frei ist, scheidet aus.

Variante 2:
Wie vorher, aber jeder Spieler erhält 4 Würfel einer Farbe, mit denen er ein Quadrat von 2 x 2 Feldern zu besetzen versucht.

Variante 3:
Wie vorher, aber die 3 (4) Würfel müssen nicht in aneinandergrenzende Felder gesetzt werden, sondern so, daß ihre Augensumme einem vorher vereinbarten Wert entspricht (z. B. 12 bei 3 Würfeln oder 16 bei 4 Würfeln) oder sie alle die gleiche Augenzahl zeigen.

Variante 4:
2-4 Spieler, jeder hat 2 Würfel der gleichen Farbe und sitzt an einer anderen Seite des Spielplans.
Beginn wie vorher, aber jeder Spieler muß bei seinem ersten Zug seinen Würfel auf das entsprechende Feld der ihm zugekehrten ersten (äußersten) Reihe setzen. Kommt er dann wieder zum Zug, so darf er seinen zweiten Würfel nur in ein waagerecht oder senkrecht angrenzendes Feld setzen. Gelingt es ihm nicht, die dafür notwendige Augenzahl zu werfen, so ist der nächste Spieler am Zug.
Ist der zweite Würfel gesetzt, wird der erste Würfel vom Feld genommen. Mit ihm wird jetzt versucht, das an den zweiten Würfel waagerecht oder senkrecht angrenzende Feld zu besetzen usw. Sieger ist, wer als erster mit einem seiner Würfel den gegenüberliegenden Spielfeldrand erreicht.

Variante 5:
Wie vorher, aber mit 3 Würfeln gleicher Farbe.

Variante 6:
Wie Variante 4 bzw. 5, aber die zu besetzenden Felder müssen diagonal aneinandergrenzen.

Vereinbart man zusätzlich zum Setzen als weiteren möglichen Zug das Kippen des Würfels um eine seiner Grundkanten (er gelangt dadurch auf ein waagerecht oder senkrecht angrenzendes Feld, dessen Punktezahl nun nicht mehr mit der auf der obersten Würfelfläche sichtbaren Augenzahl übereinstimmen muß; es darf allerdings von keinem anderen Würfel bereits besetzt sein), so lassen sich etwa die folgenden Varianten spielen:

Wie alt ist der Würfel?

Würfeln ist wahrscheinlich das älteste Glücksspiel der Welt. Nach dem römischen Geschichtsschreiber Tacitus sollen die alten Germanen das Würfeln erfunden haben. Nun, ihre Spielleidenschaft ist uns zwar sogar in liedhafter Form überliefert, aber die Erfindung des Würfels kann ihnen nicht zugeschrieben werden. Der als Vater der Geschichtsschreibung bekannte Grieche Herodot schreibt die Erfindung des Würfelspiels dem Volk der Lyder (6./7. Jahrhundert v. u. Z.) zu. Die ältesten Würfel, die wir kennen, wurden bei Ausgrabungen in Ur, Mesopotamien, gefunden. Sie sind damit etwa 4 000 Jahre alt. Mit dem heutigen Würfel haben sie allerdings wenig Ähnlichkeit.
Sie weisen die Form einer vierseitigen Pyramide auf.

Variante 7:
2-4 Spieler, je ein andersfarbiger Würfel.
Die Spieler kommen reihum abwechselnd zum Zug. Beim ersten Zug würfelt jeder Spieler und setzt seinen Würfel auf ein entsprechendes Feld.
Beim zweiten Zug kippt er seinen Würfel auf ein angrenzendes Feld.
Der Spieler, bei dem die Summe aus der vor dem Kippen auf der obersten Würfelfläche sichtbaren Augenzahl und der nach dem Kippen besetzten Punktezahl am größten ist, hat gewonnen.

Variante 8:
Wie vorher, aber es zählt nicht die Summe, sondern die Differenz aus Augen- und Punktezahl.
Oder: Der Spieler mit der größten Summe bzw. Differenz hat verloren.

Variante 9:
Wie vorher, aber das Ergebnis der Rechnung soll möglichst nahe an eine vorher vereinbarte Zielzahl herankommen (Überschreitungen erlaubt).

Variante 10:
2 Spieler; Spieler A hat 1 Würfel, Spieler B hat 3 Würfel einer anderen Farbe.
Spieler A würfelt einmal und setzt seinen Würfel. Dann würfelt B dreimal und setzt seine drei Würfel möglichst nahe an den Würfel von A.
Ab jetzt besteht jeder Zug im Kippen eines Würfels. Aufgabe von B ist es, durch seine Züge den Würfel von A in eine Ecke des Spielfeldes abzudrängen, sodaß er schließlich nicht mehr gekippt werden kann. A versucht mit seinen Zügen, dies zu verhindern. Gelingt es B, innerhalb einer vereinbarten Anzahl von Zügen den Würfel von A zu blockieren, so hat er gewonnen; schafft er es nicht, ist A der Sieger.

Variante 11:
Wie vorher, aber B hat 4 Würfel.
(Dadurch ist es ihm möglich, den Würfel von A auch in der Mitte des Spielfelds zu blockieren.)

Bei den nachfolgend beschriebenen Varianten gilt, daß auch nach dem Kippen die auf der obersten Würfelfläche sichtbare Augenzahl mit der auf dem besetzten Feld verdeckten Punktezahl übereinstimmen muß.
(Der Würfel darf vor dem Kippen um 90 oder 180 Grad nach links oder rechts verdreht werden.)

Variante 12:
1 Spieler, 1 Würfel.
Der Spieler würfelt und setzt seinen Würfel auf ein entsprechendes Feld.
Dann wählt er ein beliebiges anderes Feld, das die gleiche Punkteanzahl aufweist, als Ziel und versucht, es in möglichst wenigen Zügen durch Kippen zu erreichen.

Variante 13:
2 Spieler, 1 Würfel.
Der erste Spieler würfelt und setzt seinen Würfel. Der zweite Spieler bestimmt, welches der 5 Felder, die die gleiche Punktezahl aufweisen, das Ziel sein soll.
Der erste Spieler versucht, es in möglichst wenigen Zügen zu erreichen. (Die Anzahl der Züge wird notiert.)
Anschließend Wiederholung mit vertauschten Rollen. Sieger ist, wer von den beiden die wenigsten Züge benötigt hat.

Als Abschluß noch zwei Varianten mit veränderter Ausgangslage:

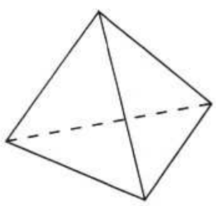
Variante 14:
1 Spieler, 1 Würfel.
Der Spieler würfelt und setzt seinen Würfel auf ein Eckfeld, dessen Punkteanzahl nicht mit der geworfenen Augenzahl übereinstimmt. (Ist das nicht möglich, würfelt er nochmals, gegebenenfalls ein drittes Mal.)
Dann versucht er, durch fortgesetztes Kippen des Würfels alle 36 Felder des Spielplans nacheinander in einem Zug zu durchlaufen; jedes Feld muß genau einmal berührt werden. Die Zahl der Fälle, wie oft dabei die Punktezahl eines Feldes mit der auf der Würfeloberseite sichtbaren Augenanzahl übereinstimmt, wird notiert.
Als erstrebenswert kann entweder eine möglichst hohe oder eine möglichst niedrige Zahl von Übereinstimmungen festgelegt werden.

Variante 15:
2 Spieler, 1 Würfel.
Wie vorher, aber zwei Spieler nacheinander. Der Spieler mit der höheren Zahl von Übereinstimmungen verliert (gewinnt).

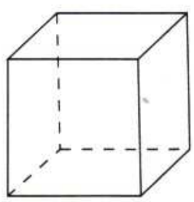
Werner Miller, Wien

Würfelspieler. Holzschnitt aus de Cessolis „Schachzabel" von 1477

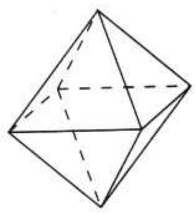
Es lassen sich übrigens alle regelmäßigen Körper als Würfel verwenden, da infolge ihrer Symmetrie alle Seiten gleichberechtigt sind.
Schwierigkeiten, nichtkubische Würfel anzufertigen, verhinderten allerdings, daß alle unten dargestellten Körper in den Spielwürfelstand erhoben wurden.
Gemogelt wurde auch früher schon gern. Die alten Römer zum Beispiel versahen den Würfel an geeigneter Stelle mit Blei und halfen so dem Glück nach.
Und nicht immer war der Würfel gern gesehen. Im Jahr 1452 wurden in Nürnberg etwa 40 000 Würfel und zahlreiche andere Spielgeräte als Werke des Teufels verbrannt.
Wer mehr über den Würfel erfahren möchte und sich generell für Spiele interessiert, findet mehr in **Die gefesselte Zeit** von Rüdiger Thiele, erschienen im Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin.



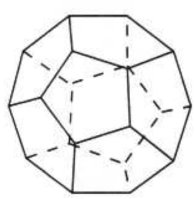
Tetraeder (Vierflächner)



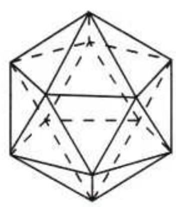
Hexaeder (Sechsflächner oder Würfel)



Oktaeder (Achtflächner)



Pentagondodekaeder (Zwölfflächner)



Ikosaeder (Zwanzigflächner)

Die XXXII. Internationale Mathematik-Olympiade

Vom 15.7. bis 23.7. fand in Schweden die 32. Internationale Mathematik-Olympiade statt. Zum ersten Mal nahm nur *eine* deutsche Mannschaft teil.

Sie bestand aus Martin Wiechert, Jakob Stix, Jan-Christoph Puchta, Bodo Laß, Norbert Hoffmann und Michael Dreher. Delegations-

Hinten v.l.n.r.: Prof. Gronau, Dr. Sewerin, Michael Dreher, Bodo Laß, Jan-Christoph Puchta; von v.l.n.r.: Norbert Hoffmann, Jakob Stix, Martin Wiechert

leiter bzw. Stellvertreter waren Dr. Horst Sewerin und Prof. Dr. Hans-Dietrich Gronau. Die Mannschaften aus 55 teilnehmenden Ländern mit je maximal 6 Schülern waren in der Internatsschule von Sigtuna untergebracht. Sigtuna liegt 50 km nördlich von Stockholm, war früher schwedische Hauptstadt und ist berühmt für ihr Pensionat. Viele bekannte schwedische Persönlichkeiten, wie z. B. Olof Palme oder König Karl XVI. Gustaf gingen hier zur Schule.
Am Tag nach unserer Ankunft besuchten wir zunächst das Schloß von SkoKloster. Dieses nicht ganz vollendete Schloß gehörte einem Grafen, der seine restlichen Schlösser z. T. in Mecklenburg-Vorpommern bauen ließ, z. B. bei Stralsund oder Wolgast.
Am Abend wurde die Olympiade feierlich im Festsaal der Universität Uppsala eröffnet. Bei dieser Veranstaltung sahen wir zum ersten Mal unseren Delegationsleiter wieder, der schon vor uns nach Schweden gereist war, um mit seinen Kollegen aus den anderen Ländern die Klausuraufgaben auszuwählen, die wir dann zu lösen hatten. Selbstverständlich war garantiert, daß die Mannschaften bei dieser Gelegenheit nicht die Aufgabenstellungen erfahren konnten.
An den nächsten zwei Vormittagen schrieben wir die zwei Klausuren mit einer Arbeitszeit von je 4,5 Stunden. Vor allem bei der dritten Aufgabe hatten wir alle einige Schwierigkeiten. Zwar hatte jeder als Lösung ein Ergebnis, das allen Anschein nach richtig war. Aber niemand von uns konnte eine überzeugende Begründung liefern. Doch diese Schwäche war kein Grund zur Aufregung, denn wir hörten, daß es vielen anderen Mannschaften genauso ging.
Nach der zweiten Klausur nahmen wir an einem Fußballturnier teil. Wenn man außer acht ließ, daß wir keine Fußballer, sondern Mathefans sind, so vermutete man hinter dem Spiel Deutschland-Argentinien eine hochklassige Begegnung. Doch es kam anders. Bei unserer 0 : 2 Niederlage machten wir keine gute Figur und aufgrund des k.o.-Systems war das dann auch schon unser letztes Spiel.
Am Tag danach besuchten wir eine IBM-Firma in Kista. Unser Gesamteindruck war eher mäßig, lediglich die Vorführung neuer Techniken zur computergestützten Video-, Bild-, Sprach- und Musikbearbeitung traf unser Interesse. Der größte Teil des folgenden Tages war ausgefüllt mit einem Bummel durch Stockholm. Stockholm liegt zum Teil auf einigen Inseln, hat eine sehr gut erhaltene Altstadt und zählt wohl auch deshalb zu den schönsten Städten Europas.
Am Abend gab es eine Experimentalvorlesung über physikalische Phänomene. Der Moderator tauchte z. B. seine Hand in flüssiges Blei und erläuterte, warum ihm kaum etwas passiert. Obwohl die Erklärungen überzeugend klangen, möchte ich meine Hand dafür lieber nicht hergeben.
Am nächsten Tag fuhren wir per Schiff durch Stockholm und besichtigten das Vasa-Museum. Die Vasa war ein riesiges Kriegsschiff zur Zeit des Dreißigjährigen Krieges. Bekannt wurde das Prachtschiff dadurch, daß es auf der allerersten Fahrt noch im Stockholmer Hafen sank.
Inzwischen waren unsere Lösungen schon korrigiert und die Punktzahlen aller Lösungen koordiniert worden. Wir waren sehr verwundert, als wir hörten, daß drei von uns bei der angeblich verkorksten dritten Aufgabe volle Punktzahl hatten und der Rest zum großen Teil nur minimale Punktabzüge. Offensichtlich war hier aufgrund der Internationalität der Anspruch an Exaktheit geringer als bei unseren Olympiaden, so daß sich die Koordinatoren mit unseren unscharfen Begründungen zufrieden gaben.
Der folgende Tag war der Tag der Abschlußveranstaltung. Vorher machten wir noch einen Bummel durch Uppsala und schauten uns den Dom an. Bei der Preisverleihung bekamen wir unsere Medaillen überreicht (Norbert: Gold; die anderen Silber) und anschließend ging es zum Bankett. Den Abend beschloß ein buntes Unterhaltungsprogramm.
Damit war die 32. IMO beendet, am nächsten Tag flogen wir wieder nach Hause.
Für mich war die Internationale Mathematik-Olympiade in Schweden ein schöner Schlußpunkt meiner Olympiade-Laufbahn.

Michael Dreher

Aufgaben des 1. Tages

1. Es sei I der Inkreismittelpunkt eines Dreiecks ABC. Die Halbierenden der Innenwinkel bei A, B, bzw. C schneiden die gegenüberliegenden Seiten in den Punkten A', B' bzw. C'.
Man beweise:

$$\frac{1}{4} < \frac{\overline{AI}\cdot\overline{BI}\cdot\overline{CI}}{\overline{AA'}\cdot\overline{BB'}\cdot\overline{CC'}} \leq \frac{8}{27}.$$

2. Es sei n eine natürliche Zahl größer als 6 und es seien $a_1, a_2, \dots, a_k$ alle diejenigen natürlichen Zahlen, die kleiner als n und teilerfremd zu n sind.
Man beweise: Falls $a_2-a_1=a_3-a_2=\dots=a_k-a_{k-1}>0$, dann ist n entweder eine Primzahl oder eine Potenz von 2 mit natürlichen Exponenten.

3. Es sei $S = \{1,2,3,\ldots,280\}$. Man bestimme die kleinste natürliche Zahl n mit folgender Eigenschaft:
In jeder n-elementigen Teilmenge von S gibt es 5 Elemente, die paarweise teilerfremd sind.

Aufgaben des 2. Tages

4. Es sei G ein zusammenhängender Graph mit genau k Kanten. Man beweise, daß man die Kanten von G mit den Zahlen 1 bis k so numerieren kann, daß für jeden Eckpunkt von G gilt: Laufen in diesem Eckpunkt zwei oder mehr Kanten zusammen, so ist der größte gemeinsame Teiler der Nummern dieser Kanten gleich 1.

(Ein Graph G besteht aus einer Menge von Eckpunkten und einer Menge von Kanten, welche gewisse Paare verschiedener Eckpunkte verbinden. Dabei ist jedes Paar verschiedener Eckpunkte durch höchstens eine Kante verbunden. Der Graph heißt zusammenhängend, wenn es für jedes Paar (x, y) verschiedener Eckpunkte eine Folge $x=v_0, v_1, v_2, \ldots v_m=y$ von Eckpunkten gibt, so daß jedes Paar (v_i, v_{i+1}) $(0 \leq i < m)$ durch eine Kante von G verbunden ist.

5. Es sei P ein beliebiger Punkt im Inneren eines Dreiecks ABC.
Man beweise, daß wenigstens einer der Winkel $\sphericalangle BAP$, $\sphericalangle CBP$ bzw. $\sphericalangle ACP$ kleiner oder gleich 30° ist.

6. Eine unendliche Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ reeller Zahlen heißt beschränkt, wenn es eine Konstante C gibt, so daß $|x_i| \leq C$ für alle $i \geq 0$ gilt. Es sei a eine beliebige reelle Zahl größer als 1. Man konstruiere eine beschränkte, unendliche Folge reeller Zahlen $x_0, x_1, x_2, \ldots$, so daß für alle nicht negativen ganzen Zahlen i, j mit $i \neq j$ die folgende Ungleichung gilt: $|x_i - x_j| \cdot |i-j|^a \geq 1$.

Bei jeder Aufgabe konnten 7 Punkte erreicht werden, insgesamt also 42. Ab 39 Punkten gab es Gold, das schafften 20 Schüler, 51 Schüler mit mindestens 31 Punkten Silber und 84 Schüler erhielten bei mindesten 19 erreichten Punkten Bronze.
In der Länderwertung nahmen die UdSSR, China, Rumänien und Deutschland in dieser Reihenfolge die vorderen vier Plätze ein.
Die XXXIII. IMO findet 1992 in Moskau statt.

Die Lösungen dieser Aufgaben senden wir Euch auf Wunsch zu, wenn Ihr uns einen adressierten und frankierten (2,60 DM!) DIN A4-Rückumschlag beilegt.

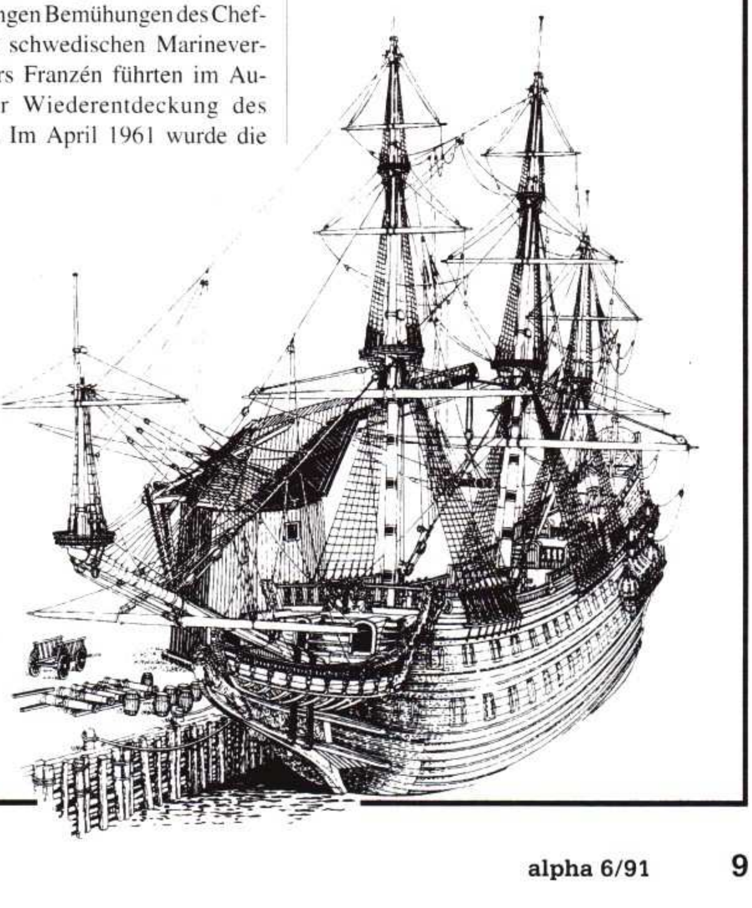
„Kleine Schiffe zu bauen führt bloß zur Vergeudung von Jungholz."

(Gustav II., König von Schweden; 1611 - 1632)

Im Januar 1625 erhielt die Stockholmer Werft den Auftrag, bis zum Ablauf des Jahres 1629 zwei kleinere und zwei größere Schiffe für die Kriegsflotte des Königs zu bauen. Am 10. August 1628 sollte das Flaggschiff, die Vasa, auf ihre erste Reise gehen. Die Jungfernfahrt war kurz, etwa 1500 m. Ein Windstoß drückte das prachtvolle Kriegsschiff, das durch sagenhaften Prunk und seine für damalige Zeiten enorme Größe und Bestückung die Feinde Schwedens erschauern lassen sollte, so auf die Backbordseite, daß Wasser eindringen konnte. In wenigen Minuten sank das stolze Schiff. An Bord befanden sich etwa 250 Menschen, über die Anzahl der Opfer ist jedoch nichts bekannt.
Sofort begonnene Untersuchungen brachten zutage, daß die Vasa topplastig gewesen war. Die Schiffsbaumeister konnten aber nicht belastet werden, da sie nach ausdrücklichen Direktiven des Königs gebaut hatten und eine negativ verlaufene Probe der Lastigkeit während des Baus von Admiral Fleming, der rechten Hand des Vorsitzenden des Untersuchungsausschusses, ohne die erforderlichen Konsequenzen abgebrochen wurde. So verlief der Prozeß ergebnislos und in den Jahren bis 1683 wurden lediglich eine Reihe der Geschütze geborgen.
Die Vasa geriet in Vergessenheit.
Erst die jahrelangen Bemühungen des Chefingenieurs der schwedischen Marineverwaltung Anders Franzén führten im August 1956 zur Wiederentdeckung des Schiffswracks. Im April 1961 wurde die Vasa nach 333 Jahren auf dem Meeresgrund gehoben. Sie war, wie viele Ausrüstungsgegenstände auch, relativ gut erhalten. Mit den modernsten Mitteln der Wissenschaft ging man nun daran, das Verbliebene zu erhalten und zu rekonstruieren. Die Restauration dauerte bis Ende 1988. Am 15. Juni 1990 eröffnete der schwedische König das Vasa-Museum auf Djurgården.

Der Name des Schiffes wurde damals nicht an die Bordwand geschrieben, sondern durch ein Symbol, in diesen Falle eine Getreidegarbe (vasakärven), verdeutlicht. In älteren Dokumenten wurden die Bezeichnungen "Wasan" bzw. "Vasan" gebraucht. Da in Schweden heute der w-Laut immer mit "v" geschrieben wird, hat sich das schwedische Sprachkomitee für "Vasa" entschieden. Im Deutschen ist aber auch der Schiffsname "Wasa" gebräuchlich.

Viele weitere interessante Dinge rund um die Vasa könnt Ihr in dem Buch **Die Wasa von 1628** von Günter Lanitzki erfahren, das 1990 im Verlag für Verkehrswesen der DDR erschien. Aus diesem Buch entnahmen wir auch unsere Informationen. Fragt doch mal in Eurer Bücherei nach.



Magie im Großformat

Von den Schwierigkeiten, einen Weltrekord aufzustellen

Schon nach der ersten Bahn zeigte sich, daß die Halle zu klein war. Aber man wußte sich zu helfen. Der „Überhang" wurde einfach mit Klebeband an der Hallenwand befestigt.

Zu den beliebtesten Problemen der Unterhaltungsmathematik gehört das Bilden magischer Quadrate. Das älteste bekannte magische Quadrat wurde vor etwa 4000 Jahren in China aufgezeichnet. Die Spalten- und Zeilensummen ergeben jeweils 15.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Bereits im Jahr 1612 gab C.G. Bachet de Mézeriac ein Verfahren zur Aufstellung magischer Quadrate mit ungerader Feldanzahl an. Auch für Quadrate mit gerader Feldanzahl gibt es entsprechende Verfahren.
Somit ist für den ausschließlich theoretisch interessierten Hobbymathematiker das Problem beliebig großer magischer Quadrate gelöst. Mit dem ersten bekannten **Weltrekord** von R. Suntag (USA) mit seinem 105 x 105 Quadrat im Jahre 1975 begann jedoch ein Wettkampf um die Berechnung des größten magischen Quadrates, dem ich mich als Mathematikstudent und mehrfacher Rekordhalter nicht entziehen konnte. Mein Ziel war ein Quadrat mit 2121 x 2121 Feldern. Das Computerprogramm zur Bildung des Quadrates war schnell geschrieben, einen Partner zu finden, der schnelle Drucker, Computer und Papier bereitstellt, schon schwieriger. Ich fand ihn in Alex Dummer, Inhaber der Firma pro data service in Langburkersdorf. Er kümmerte sich hervorragend um die Organisation. An einem Tag im August sollte nun der Rekord aufgestellt werden. Mein Partner hatte sich jedoch in der nötigen Zeit zum Ausdrucken der etwa 30 Millionen Ziffern gehörig verschätzt und so mußte der Termin für die Aufstellung des Rekords verschoben werden. Um das Quadrat mit der Hand zu schreiben, hätte ich übrigens ein Jahr ununterbrochen arbeiten müssen. Noch vier Tage war man bei pro data service beschäftigt, weitere Listen mit Zahlen zu bedrucken. Schließlich sollte auf dem Sportplatz von Langburkersdorf das Quadrat von über 400 m² zusammengelegt werden. Ein Windstoß wedelte uns jedoch bereits die erste Rolle um die Ohren. Es war völlig aussichtslos, den Rekord an diesem Tag auf dem Sportplatz aufzustellen. Beim dritten Versuch waren wir schlauer: Das Quadrat sollte in einer entsprechend großen Turnhalle in Leipzig aufgestellt werden. Mein Partner schickte mir die Papierrollen in vier Paketen zu. Die Turnhalle war reserviert, Interessenten benachrichtigt – was nicht kam, war das vierte Paket. Und als hätte es die Bundespost darauf abgesehen, mich zu ärgern, kam es kurz *nach* dem geplanten Termin.
Nun aber war endlich alles beisammen; ich konnte den vierten und letzten Anlauf zum Rekord nehmen. Am 24. Oktober wurde das Weltrekord-Quadrat vor etlichen Zuschauern ausgebreitet. Der Rekord ist nun "offiziell": Er wird in der nächsten Ausgaben des **„Lexikons der Superlative"** erscheinen, wenn bis zum Redaktionsschluß im Mai '92 nicht ein noch größeres magisches Quadrat zusammengestellt wird. Allerdings würde es mich auch nicht stören, wenn mein Rekord nur kurzen Bestand hätte. Im Gegenteil, ich hoffe, mit diesem Artikel vielleicht den einen oder anderen Leser zum Sturm auf neue Bestmarken angeregt zu haben. Die Bedingungen für diesen und weitere mathematische Rekorde teile ich Interessenten gerne mit.

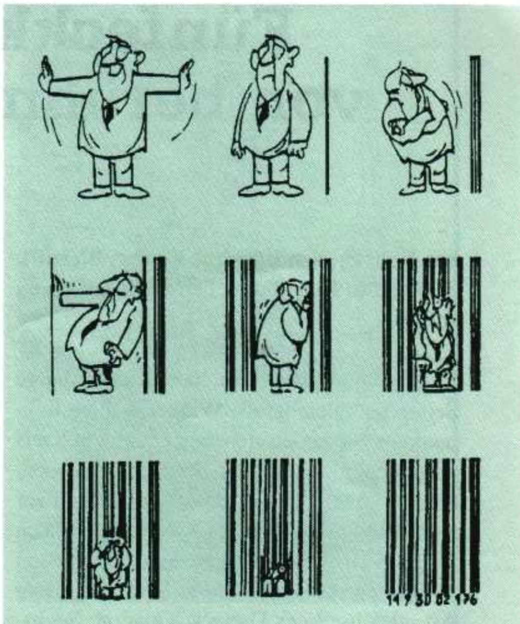
R. Laue, Mathematikstudent
an der Leipziger Universität,
Postfach 80, O-7060 Leipzig

Daten des aktuellen Rekordquadrates

Felder:	2121 x 2121
gedruckte Zahlen:	4 498 641
gedruckte Ziffern:	30 379 384
Summe in jeder Zeile und Spalte:	4 770 807 720
Größe:	über 400 m²
Rechenzeit:	2 Rechner und Drucker je 59 Stunden

Ralf Laue ist Mitglied des Rekord-Klubs Saxonia. In diesen 1988 gegründeten Klub darf nur, wer einen originellen Weltrekord aufgestellt hat. Viermal jährlich berichtet das Saxonia-Info über neue Rekorde.
Weitere Weltrekorde von Ralf Laue:
- größte private Rekordsammlung im deutschsprachigen Raum (Daten zu etwa 8000 Rekorden, u.a. mehr als 70 Rekordbücher)
- größter Kartenfächer (310 Karten), aufgestellt 1991
- längstes Bilderrätsel der Welt (37,42 m lang, 4,3 cm breit, 215 Wörter verschlüsselt durch 272 farbige Bilder, kein Wort wiederholt sich, ausgedacht und gezeichnet von September 1984 bis August 1986)
- längstes Wort in einem Kreuzworträtsel: *Kraftfahrzeughaftpflichtversicherung* Inzwischen überboten von Georgios Stefanidis aus Reutlingen mit *Fußballweltmeisterschaftsendrundenteilnehmer*
- Ordnen des "Zauberwürfels" während einer Fahrradtour in 41,56 s, aufgestellt bei den Weltrekordfestspielen in Zürich 1991; bei den offiziellen WM im Würfeldrehen wäre das der drittletzte Platz gewesen, aber da wurde dabei nicht Fahrrad gefahren.

Geheimschrift EAN?

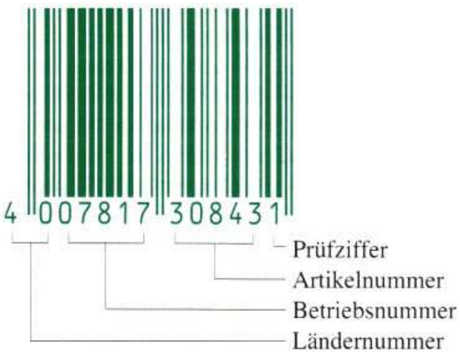


Walter Hanel

Immer häufiger findet sich auf der Verpackung unserer eingekauften Waren die EAN (Europäische Artikelnummer) sowie ihre Verschlüsselung in Form eines Strichcodes.

Welche Vorteile bringt diese Nummer?

Zum einen sollen die Kassenbereiche im Handel automatisiert werden, denn mittels eines Lesegerätes wird der Artikel erkannt und der festgelegte Preis eingesetzt. Der wesentliche Vorteil liegt aber darin, daß damit zugleich automatisch jede Warenbewegung erfaßt, der Warenbestand in kürzester Zeit überprüft und bei Unterschreitung eines Mindestbestandes sofort neue Ware nachbestellt werden kann. Mit der EAN werden drei Informationen gegeben:



Firmen in der Bundesrepublik Deutschland, die mit dem EAN-Code arbeiten wollen, erhalten von der Centrale für Coorganisation in Köln eine Bundeseinheitliche Betriebsnummer zugewiesen.

Einige EAN-Länderkennzeichen

00-09	USA, Kanada
30-37	Frankreich
40-43	Bundesrepublik Deutschland
49	Japan
50	Großbritannien ...

Aufgabe 1: Wie viele verschiedene Artikelnummern verstecken sich in diesem System?

Welchen Sinn hat nun die Prüfziffer?

Beim Ablesen oder Eingeben der Nummer können Fehler auftreten. Die Kassiererin muß das Lesegerät solange über den Strichcode führen, bis dieses durch einen Piepton die Annahme des Strichcodes signalisiert. Genau hier kommt die Prüfziffer zum Tragen.

Aufgabe 2: Sucht Euch verschiedene EAN-Nummern und rechnet jeweils die Summen nach dem in **Abb. 1** gezeigten System aus! Gemerkt? Die Summe ergibt jeweils eine durch 10 teilbare Zahl.

Aufgabe 3: Gibt es ein kürzeres Verfahren zur Berechnung der Prüfziffer?

Aufgabe 4: Berechne für folgende neue Artikelnummer die Prüfziffer!
49 06550 25409 p

Machen wir uns nun mittels der Prüfziffer auf Fehlerjagd!
Welche Fehler tauchen am häufigsten auf? Die Tabelle (**Abb. 2**) ist das Ergebnis einer statistischen Untersuchung. Problemlos ist Fall b). Was aber passiert, wenn eine der Prüfziffern falsch ist?

Aufgabe 5: Ersetze in unserer oben gegebenen EAN jeweils eine der Ziffern durch eine andere und berechne die Prüfziffern. Warum ist eine Vertauschung unfehlbar zu erkennen?

Alles klar? Wird eine mit 1 zu multiplizierende Zahl vertauscht, kann die Summe nicht mehr eine durch 10 teilbare Zahl ergeben.
Wird eine mit 3 zu multiplizierende 0 durch eine der Zahlen von 1 bis 9 ersetzt, dann kann sich ebenfalls nicht ein Vielfaches von 10 ergeben, da keines der Produkte $1 \cdot 3, 2 \cdot 3, \ldots, 9 \cdot 3$ auf 0 endet.
Wird eine der mit 3 zu multiplizierenden Zahlen ungleich 0 ersetzt, kann die Prüfbedingung ebenfalls nicht mehr erfüllt werden, da sich in der Dreierreihe bis 9 nie gleiche Einerstellen ergeben. Damit erkennt der Kollege Computer in diesem Fall sofort, daß ein Fehler vorliegt, er erkennt aber nicht die Stelle.

Aufgabe 6: In folgender EAN ist eine der Ziffern falsch. Welche Möglichkeiten für eine richtige EAN gibt es?
40 04400 23456 7

Unfehlbar ist das Prüfsystem aber nicht! Werden zum Beispiel zwei Ziffern so verändert, daß die Differenzen zu den ursprünglichen Ziffern ein Vielfaches von 10 ergeben, wird die Nummer akzeptiert.
Das Vertauschen benachbarter Zweierblöcke bleibt gänzlich unbemerkt, da die Zahlen jeweils wieder mit dem gleichen Faktor multipliziert werden.
Ebenfalls unentdeckt bleiben Zahlendreher der Form 0/5, 1/6, 2/7, 3/8 und 4/9.

Aufgabe 7: Warum entdeckt der Computer diese Zahlendreher nicht?

Sicher gibt es Prüfverfahren, welche diese Fehler ausschließen. Dafür versagen sie aber bei anderen Eingabefehlern. Die Anwendung dieses Prüfverfahrens wird dadurch gerechtfertigt, daß es die am häufigsten auftretenden Fehlertypen (a) und b)) sicher erkennt.

nach einem Beitrag von Wilfried Herget in mathematik lehren

Im nächsten Heft knacken wir den Strichcode!

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 4 & 0 & 0 & 7 & 8 & 1 & 7 & 3 & 0 & 8 & 4 & 3 & 1 \\ \downarrow\cdot 1 & \downarrow\cdot 3 & \downarrow\cdot 1 & \downarrow\cdot 3 & \downarrow\cdot 1 & \downarrow\cdot 3 & \downarrow\cdot 1 & \downarrow\cdot 3 & \downarrow\cdot 1 & \downarrow\cdot 3 & \downarrow\cdot 1 & \downarrow\cdot 3 & \downarrow\cdot 1 \end{array}$$

$$4 + 0 + 0 + 21 + 8 + 3 + 7 + 9 + 0 + 24 + 4 + 9 + 1 = 90$$

Abb. 1

Fehlertyp	Häufigkeit
a) Eine Ziffer falsch	60%
b) Anzahl der Ziffern falsch	25%
c) Zwei oder mehr Ziffern falsch	8%
d) Vertauschen benachbarter Ziffern	5%
e) Vertauschen benachbarter Zweierblöcke	1%

Abb. 2

Fünfeckkonstruktionen von berühmten Künstlern

Ein Beitrag, den Ihr ohne Papier, Bleistift, Zirkel und Lineal daneben nicht anfangen solltet.

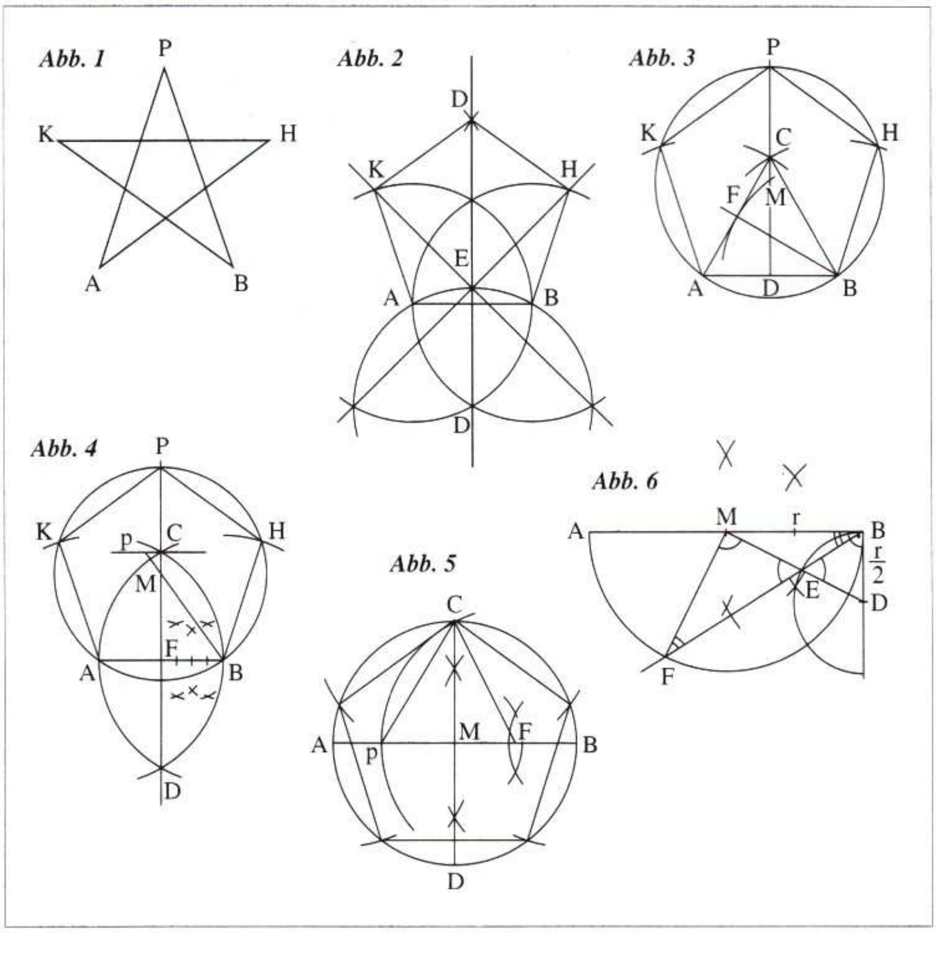
Regelmäßige Vielecke haben gleichlange Seiten und gleichgroße Winkel in allen Eckpunkten. Sie lassen sich daher in einem Kreis einzeichnen, ihre Seiten sind dann Sehnen, dieser Umkreis ist ein ideales Hilfsmittel zur Konstruktion der Vielecke. Natürlich haben sie auch einen Inkreis, ihre Seiten sind dann Tangenten. Die einfachsten Vielecke dieser Art, gleichseitiges Dreieck, Quadrat, Sechseck und Achteck mit In- und Umkreis gehören heute zu den Grundaufgaben im Geometrieunterricht unserer Schulen.
Nicht so das Fünfeck: seine Konstruktion hat nicht nur die Mathematiker seit Jahrtausenden herausgefordert. Der Sage nach war das Pentagramma, das ist das regelmäßige Sternfünfeck, Geheimzeichen der legendenumwobenen Pythagoräer in der Zeit der Antike. Es wird aus den Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks gezeichnet, benachbarte Eckpunkte werden demzufolge nicht verbunden (**Abb. 1**).
Im berühmten Almagest des Griechen Claudius Ptolemäus (geb. um 85, gest. um 165), den uns die Araber durch ihre Übersetzungen aus der Antike überliefert haben, ist die exakte Konstruktion des einem Kreise einbeschriebenen Fünfecks bewahrt. Natürlich kannte auch Euklid in seinen Elementen die Konstruktion und benutzte für seinen Beweis das regelmäßige Zehneck mit dem daraus folgenden goldenen Schnitt.

Albrecht Dürer

Doch nicht nur in der Baukunst, auch von berühmten Malern der Vergangenheit sind uns mehr oder weniger exakte, aber praktische Konstruktionen des Fünfecks auch mit dem Umkreis als Bestimmungsstück überliefert und bekannt geworden. Kein Geringerer als Albrecht Dürer (1471 - 1528) beschreibt eine originelle, sehr einfache Näherungskonstruktion "mit dem unverrückten Zirkel" zur praktischen Anleitung für die Jünger der Baukunst. Sie steht in seiner Hauptschrift aus dem Jahre 1525 mit dem Titel:
"Unterweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt in Linien ebenen und gantzen Corporen durch Albrecht Dürer zusammengetzogen und zu nutz allen Kunstliebhabenden mit zugehörigen figuren in truck gebracht." Diese auch auf dem Gebiet der Stereometrie wertvolle mathematische Schrift ist seinem Freund und Förderer Willibald Pirckheimer (1470 - 1530) in Nürnberg gewidmet. (**Abb. 2**)
Mit dem Radius r = AB werden um A und B zwei Kreise geschlagen, dazu ein dritter mit dem Mittelpunkt im unteren Schnittpunkt D der beiden ersteren. Die Sehne DC senkrecht auf AB schneidet diesen dritten Kreis in E. Durch E müssen nun die beiden Sehnen zu den unteren Schnittpunkten der drei Kreise gezogen werden. Ihre Verlängerungen liefern bereits den 3. und 4. Eckpunkt des gesuchten Fünfecks H und K. Mit dem anschließenden Zirkelschlag um H und K ist der 5. Eckpunkt P gewonnen und damit das Fünfeck zu zeichnen.

Leonardo da Vinci

Der größte Maler des 15. Jahrhunderts jenseits der Alpen, Leonardo da Vinci (1452 - 1519) hat sich ebenfalls wiederholt mit mathematischen Aufgaben beschäftigt, leider ist uns nur weniges erhalten geblieben. Doch die verschiedenen regelmäßigen Vielecke finden sich wiederholt in seinen fragmentarischen Blättern und Aufzeichnungen, darunter das uns hier interessierende Fünfeck (**Abb. 3**).
Er geht dabei anders als Dürer vom gleichseitigen Dreieck ABC aus, dessen Seite AB zugleich Seite des gesuchten Fünfecks werden soll. Mit dieser Grundseite AB muß er auf der Höhe CD aus Symmetriegründen den noch unbekannten Mittelpunkt des Umkreises M finden, dann ist das Fünfeck fertig zu zeichnen. Zu diesem Zweck fällt er das Lot vom Punkt B auf die Dreieckseite AC und erhält dort den Fußpunkt F. Der Kreis um B mit dem Radius der Lotlänge BF schneidet die Höhe im Dreieck im Punkte M, damit hat er schon Mittelpunkt und Radius des Umkreises gewonnen und kann leicht das Fünfeck zeichnen. Neben einem Vorversuch auf ähnlichem Wege mittels eines Dreiecks, den Leonardo schon selbst mit der Bemerkung "falso" (= falsch) versehen hat, beschreibt er an anderer Stelle seiner Schriften noch eine dritte Konstruktion (**Abb. 4**).
Mit der festgelegten Fünfeckseite AB = a werden als Radius zwei Kreise um A und B geschlagen. Ihre Schnittpunkte C und D liefern eine gemeinsame Sehne CD, die senkrecht auf der Grundlinie AB steht und diese in F halbiert. Die rechte Hälfte BF wird dann in vier gleiche Abschnitte geteilt, einen davon trägt Leonardo in C parallel zu AB nach links ab und erhält den neuen Punkt p. Die Verbindungslinie durch B und p schneidet die senkrechte Sehne DC in M, dies ist schon der Mittelpunkt des Umkreises für unser Fünfeck, hat also den Radius MB. Mit vier weiteren

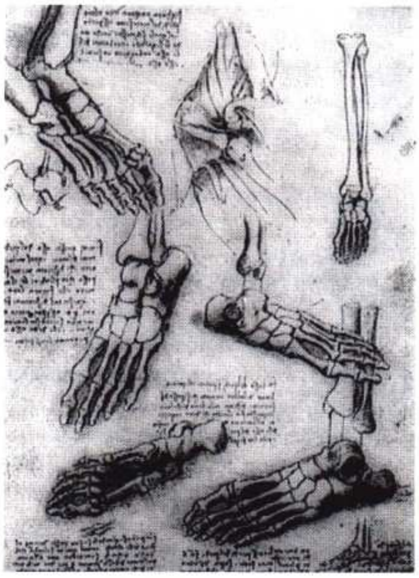


Zirkelschlägen ist dann das gesuchte Fünfeck fertig.
Diese und andere mathematische Arbeiten von Leonardo entstanden etwa in der Zeit zwischen 1480 und 1500, sind also älter als das Buch von Albrecht Dürer.
Etwa um 1600 hat Christoph Clavius (1537 - 1612), Mathematikprofessor am berühmten Collegium Germanicum in Rom, die Fünfeckkonstruktionen der Künstler genauer unter die Lupe genommen und nachgerechnet. Er fand für die Winkel im Fünfeck von Dürer an der Basis in A und B die Werte 108°22', also etwas zu groß, in den Eckpunkten H und K den Wert 107°2' also zu klein, und in der Spitze 109°12', wieder zu groß.

Hat Clavius mit seiner Nachprüfung der Konstruktion von Dürer richtig gerechnet? Man überprüfe Clavius und auch Leonardo mit den Mitteln der Trigonometrie! Wie groß sind genau die Eckwinkel, d. h. wieviel weichen sie vom theoretischen Wert 108° ab?

Leonardo da Vinci

Der italienische Maler, Bildhauer, Baumeister, Ingenieur, Mathematiker, Naturwissenschaftler, Kunsttheoretiker und Philosoph lebte von 1452 bis 1519. Er ist wohl der genialste Künstler und enzyklopädische Wissenschaftler der Renaissance und gilt als Begründer der experimentellen Naturwissenschaft. Leonardo da Vinci nahm anatomische Sektionen vor und wurde durch meisterhafte Darstellungen der Ergebnisse zum Schöpfer der wissenschaftlichen Demonstrationszeichnung.
Das Bild verdeutlicht sehr gut, daß da Vinci Linkshänder war und die Eigenart besaß, seine Manuskripte in Spiegelschrift zu schreiben.
Vermutet wird, daß er damit vermeiden wollte, daß Unbefugte darin stöbern.



Anatomische Studien

Griechische Mathematik

Die exakte Konstruktion des regelmäßigen Füxcks in einem gegebenen Umkreis mit festem Radius verdanken wir schon der frühen griechischen Mathematik. Die Konstruktion ist sehr einfach (**Abb. 5**).
Im Mittelpunkt M des Umkreises zwei senkrechte Durchmesser gezeichnet, dann muß man den Radius MB halbieren im Punkt F. Mit der Strecke FC als neuem Radius schlägt man um F einen Kreis, der den waagerechten Durchmesser in P trifft. Die Sehne in diesem Kreis PC ist bereits die genaue Seite des einbeschriebenen Fünfecks! Zusätzlich hat man noch die Seite des regelmäßigen Zehnecks gewonnen, es ist die Strecke MP.
Der geometrische Beweis, wie er von den Griechen vor mehr als 2000 Jahren geführt wurde, geht zuerst vom Zehneck aus und führt über den eingangs erwähnten goldenen Schnitt. Die in **Abb. 5** vorgestellte Konstruktion von Ptolemäus läßt sich leicht berechnen: nach dem Satz von Pythagoras gilt für die Hypotenuse im Dreieck FCM der Ansatz

$FC^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} = 5\frac{r^2}{4}$ und daraus die Wurzel gezogen $FC = \left(\frac{r}{2}\right)\cdot\sqrt{5}$.

Da auch P auf diesem Kreis liegt, sind beide Strecken FC und PF gleich lang. Bis zum Mittelpunkt reicht $PM = \left(\frac{r}{2}\right)\left(\sqrt{5} - \frac{r}{2}\right)$

oder kürzer $PM = \left(\frac{r}{2}\right)\left(\sqrt{5} - 1\right)$

also schon das einbeschriebene Zehneck. Das gesuchte Fünfeck hat die Sehne PC als Kante, denn es gilt im Dreieck PCM

$$PC^2 = MC^2 + PM^2 = r^2 + \left(\frac{r^2}{4}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)^2$$

und aufgelöst

$$PC^2 = \left(\frac{r^2}{4}\right)\cdot\left(10 - 2\cdot\sqrt{5}\right)$$, daraus

$$PC = \left(\frac{r}{2}\right)\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

liefert die Seite im Fünfeck nach der Formel.

Konstruktion eines Unbekannten

Eine leider wenig bekannte Konstruktion des Fünfecks finden wir im Briefwechsel zwischen Gauß und seinem Schüler und Freund Gerling. Dieser berichtet in einem Brief vom 17.2.1814 aus Kassel von einer originellen Konstruktion eines seiner Schüler, die **Abb. 6** zeigt.
Auf dem Durchmesser des Umkreises AB wird in B senkrecht nach unten der halbe Radius nach D abgetragen. Der Halbkreis um D als Mittelpunkt schneidet die vorher eingezeichnete Verbindungsstrecke MD in E. Mit ME ist schon die exakte Seite des Zehnecks gewonnen. Verlängert man die Verbindungsgerade EB über E hinaus bis zum Schnitt mit dem Umkreis in F, so hat man die exakte Seite für das gesuchte Fünfeck gewonnen (EF).
Zum Beweis rechnen wir nacheinander:

$$MD^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} = 5\frac{r^2}{4}$$

und die Wurzel $MD = \left(\frac{r}{2}\right)\cdot\sqrt{5}$

davon muß noch der halbe Radius abgezogen werden, damit ist $ME = \left(\frac{r}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)$

die fertige Zehneckseite, wie es die Formel verlangt. Die gesuchte Fünfeckseite ist Hypotenuse im Dreieck FEM, daher gilt für sie:

$$FE^2 = FM^2 + ME^2 = r^2 + \left(\frac{r^2}{4}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)^2 = \left(\frac{r^2}{4}\right)\cdot\left(10-2\sqrt{5}\right)$$, die Wurzel

$$FE = \left(\frac{r}{2}\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$,

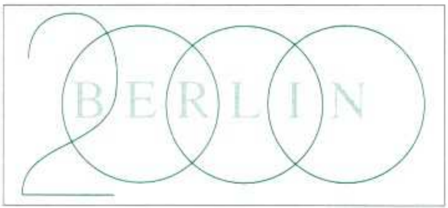
so wie es die Formel für das Fünfeck verlangt.
Die exakten Formeln für die einem Kreis einbeschriebenen Vielecke bis hin zum 24-Eck findet der interessierte alpha-Leser in der "Kleinen Enzyklopädie Mathematik" auf der Seite 190, er muß nur noch die Sehne DE in der Zeichnung eintragen und ausrechnen.
Doch zurück zum Fünfeck. Wie schon gesagt, kennen wir leider nicht den Namen des Schülers, der die Konstruktion nach Bild 6 ersonnen hat.
In seiner Antwort an Gerling schreibt Gauß am 20. Februar 1814:
"Die Konstruktion des Fünfecks, auf welche Ihr Schüler gekommen ist, hat mir sehr wohl gefallen.
Ich gestehe indes, daß ich Ihnen in diesem Augenblick keine befriedigende Antwort geben kann, ob sie neu ist, ja, ich muß bekennen, daß mir Ptolemäus' Konstruktion nicht gleich gegenwärtig ist." Diese ehrlichen Zeilen des Princeps mathematicorum sind bemerkenswert, wenn man bedenkt, welchen entscheidenden Beitrag er zu diesem Problem selbst geleistet hat und das schon mit 18 Jahren.

Dr. Joachim Buhrow ist Dozent an der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, Fachrichtungen Mathematik/Informatik

Komisches, Kniffliges und Knackiges

Olympische Spiele im Jahr 2000 in Berlin?

Im obigen Symbol ist für jeden der sechs Buchstaben B, E, R, L, I und N je eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 so einzusetzen, daß gilt: Denkt man sich zwischen die in einem Kreis (einer Null von 2000) stehenden Ziffern Pluszeichen gesetzt, so sind diese drei Summen für die drei Kreise einander gleich. Wieviel Möglichkeiten für das Einsetzen der zulässigen Zahlen gibt es?



Damit Euch genügend Zeit zur Beschäftigung mit dieser Aufgabe zur Verfügung steht, wird die zugehörige Lösung erst im Folgeheft veröffentlicht. *Walter Träger, Döbeln*

Mathematische Fahndung

Im Silbenrätsel sind 13 mathematische Begriffe versteckt!

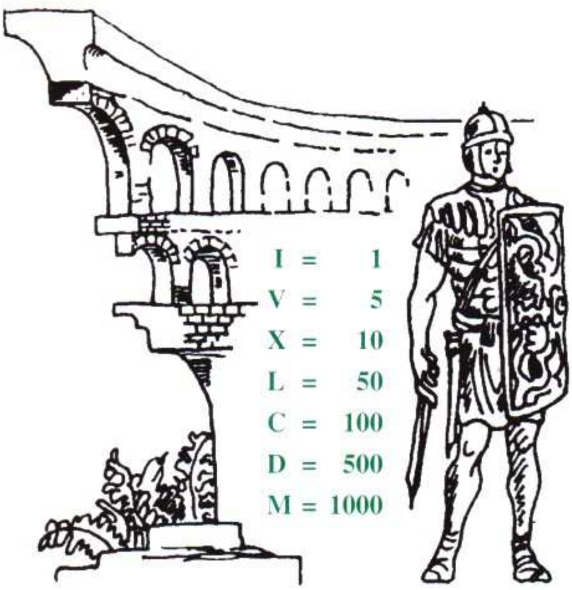
Tan	Seh	kan	ti	Py	pli
Mul	Di	qua	tient	ne	ra
Sum	Quo	Mi	Ra	nu	end
mi	den	stumpf	Se	Dia	Ka
tion	te	gen	die	sion	drie
Geo	te	go	zie	le	me
ren	vi	me	na	trie	ren

Schülerin Andrea Leuschke, Aue

Den alten Römern auf die ~~Fi~~ Zahlen geschaut

Die alten Römer hatten es mit ihren Zahlenzeichen nicht leicht! Oder kommt Ihr ohne Mühe mit solchen Jahreszahlangaben klar, wie Ihr sie an vielen alten Gebäuden findet?
Die römische Jahreszahl auf dem nebenstehend abgebildeten Rathaus in Leipzig verrät Euch das Jahr der Fertigstellung des Renaissancebaus nach Plänen von Hieronymus Lotter.

Klären wir also mal die Sache auf. Die Römer und auch unsere Vorfahren bis etwa zum Jahr 1500 mußten mit den sieben Zahlenzeichen auskommen, die in der folgenden Zeichnung abgebildet sind.
(Das "M" gibt es übrigens erst seit dem Mittelalter, die Römer schrieben "CI0")



Nach welchen Regeln werden nun diese Zeichen zusammengestellt:

1. Gleiche Zahlen werden zusammengezählt.
Zum Beispiel:
II = 1 + 1 = 2, III = 1 + 1 + 1 = 3,
XXX = 10 + 10 + 10 = 30,
MM = 1000 + 1000 = 2000

2. Kleinere Zahlen, die hinter größeren Zahlen stehen, werden dazugezählt:
Zum Beispiel:
VI = 5 + 1 = 6,
XII = 10 + 1 + 1 = 12,
XVIII = 10 + 5 + 1 + 1 + 1 = 18,
DXVI = 500 + 10 + 5 + 1 = 516

3. Kleinere Zahlen, die vor größeren Zahlen stehen, werden abgezogen:
Zum Beispiel:
IV = 5 - 1 = 4, IX = 10 - 1 = 9,
XIV = 10 + (5 - 1) = 14, CD = 500 - 100 = 400
MDXC = 1000 + 500 + 100 - 10 = 1590

Nun seid Ihr an der Reihe!

1. Übersetzt folgende römischen Zahlen in unsere Schreibweise: VIII, XII, CX, DC, CXL, CM, XL, XIX, MCCC, LIX.

2. Nun das Ganze umgekehrt:
7, 13, 45, 101, 450, 543, 333, 876, 999

3. Übersetze die folgenden Zahlen, die auf Denkmälern zu finden sind:
Schiller, geb. MDCCLIX gest. MDCCCV
Goethe, geb. MDCCIL gest. MDCCCXXXII
Kant, geb. MDCCXXIV gest. MDCCCIV
Galilei, geb. MDLXIV gest. MDCXLII
Friedrich der Große, geb. MDCCXII gest. MDCCLXXXVI

4. An einem alten Burgtor steht MDCLXXIV. Welcher der zuvor genannten Herren könnte darin gewohnt haben?

nach: R. Strüter: Knobeln und Kombinieren, Verlag Die Schulpraxis

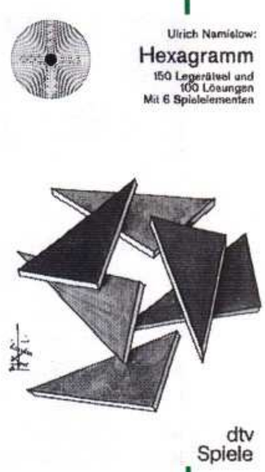
Alphons logische Abenteuer (8)

Alphons las auf der einem medizinischen Präparat beigefügten Information: „Durch Einwirkung des Medikaments und/oder infolge des fortgeschrittenen Erkrankungsgrades kann es zu zeitweiligen Übelkeitsgefühlen kommen." Was, so fragte er sich, bedeutet das „und/oder"? Würde nur „und" stehen, so wäre das Übelkeitsgefühl Folge sowohl des fortgeschrittenen Erkrankungsgrades als auch des Medikaments. Beides zusammen bewirkt zeitweilige Übelkeit. Würde nur „oder" stehen, so ist dieser Fall nicht ausgeschlossen, wenn man „oder" nicht im ausschließenden Sinn versteht, ausgedrückt durch „entweder, oder". Anders als im ersteren Sinn kann das „oder" in „und/oder" auch gar nicht verstanden werden, denn das „und" schließt das „entweder, oder" aus und umgekehrt. Die Übelkeit kann des einschließenden „oder" wegen aber auch Folge nur der Einnahme des Präparates bzw. nur Anzeiger des Grades der Erkrankung sein. Wenn also das „oder" in der Kombination „und/oder" den Fall des „und" einschließt, warum wird dieser dann extra angeführt? Vermutlich will man mit „und/oder" gerade die Verstehensweise des „oder" betonen: Im Zusammenhang mit Grad der Erkrankung und Einnahme der Medizin kann mindestens eines zu zeitweiliger Übelkeit führen. Dann aber darf man überall, wo das einschließende „oder" gemeint ist, „und/oder" verwenden.

„Alphons" rief seine Schwester, „wann schreibst Du den aufgegebenen Aufsatz?" Er antwortete:„Heute und/oder morgen." Seine Schwester erwiderte: „Besser, Du schreibst ihn heute und morgen, als nur morgen." Nachdem Alphons sie über den Gebrauch von „und/oder" aufgeklärt hatte, meinte sie: „Und warum drückst Du Dich dann so kompliziert aus?" Diese Frage gab Alphons seinem Deutschlehrer weiter. „Man greift zu dieser Konstruktion, weil oft „oder" verwendet wird, wo eigentlich „entweder, oder " stehen müßte", meinte dieser. „So erhält man auf eine Frage eine Oder-Antwort, obwohl sachlich klar ist, daß nur ein Entweder-Oder zutreffen kann. Auf die Frage z. B., wann jemand heute von Berlin nach Madrid fliege, ist die Antwort: 15 Uhr oder 17 Uhr, nicht ungewöhnlich. Der Gebrauch von „und/oder" soll dem Mißverstehen vorbeugen, obwohl es doch den viel einfacheren Weg gibt, die schon zur Verfügung stehenden unterscheidenden Sprachausdrücke korrekt zu verwenden. Es liegt ja hier kein echter Mangel der deutschen Sprache vor, sondern nur unangemessene Lockerheit im Umgang mit ihr. Ganz ausschließen kann auch diese Konstruktion das Mißverstehen nicht. Wichtiger aber ist, ihren Gebrauch übt man durch Rückgriff auf die Unterscheidung von ein- und ausschließendem oder. So wird denn diese schon gegebene sprachliche Unterscheidung wieder in das Bewußtsein gerückt und die Konstruktion macht sich auf diese Weise selbst wieder überflüssig."

Prof. Dr. L. Kreiser
Institut für allgemeine Logik der Universität Leipzig

Verhextes Hexagramm

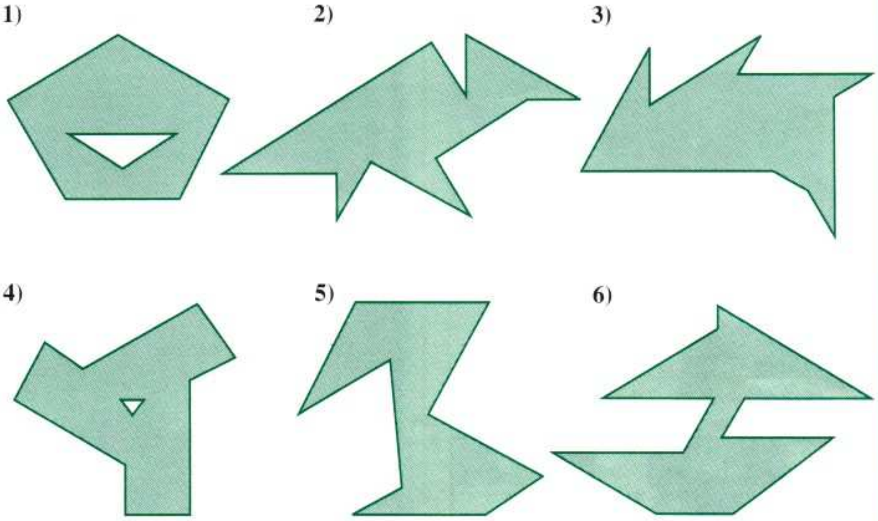


Eine Empfehlung für „Legebesessene"

Als der dtv (Deutscher Taschenbuch Verlag) uns das Büchlein **„Hexagramm"** von Ulrich Namislow sandte, kam die Arbeit in der Redaktion für einige Zeit zum Erliegen. Allerdings ohne schlechtes Gewissen darüber, denn wir wollen Euch ja nichts empfehlen, was wir nicht selbst ausprobiert haben.

In dem Büchlein werden 150 Legerätsel zum Knacken vorgegeben, die aus den sechs kongruenten, ungleichseitig-rechtwinkligen Dreiecken zusammenzulegen sind.

Für ganz Ungeduldige stellen wir hier einige Rätsel vor. Die erforderlichen Dreiecke sind schnell gebastelt. Zu beachten ist noch, daß stets alle Spielfiguren zu verwenden sind und sich jeweils mindestens zwei Eckpunkte und zwei Seiten berühren müssen.



Übrigens – zusammen mit dem Büchlein (**ISBN 3-423-10340-X**, Preis 14,80 DM) erhaltet Ihr gleich ein stabiles Legespiel mit.

Sprachecke

Квадратный лист бумаги разрезали на 6 кусков в форме выпуклых многоугольников. Пять кусков затерялись, остался один кусок в форме правильного восьмиугольника. Можно ли по одному этому восьмиугольнику восстановить исходный квадрат?

aus: Quant, Moskau

Le mousse tache

Le jeune mousse a fait une tache sur le journal de bord du capitaine. Sur cette page, le capitaine avait reporté le montant de la facture correspondant aux 36 chandelles achetées lors de la dernière escale. Au niveau du total, on lit maintenant: ?7,4? DM.

Les points d'interrogation désignent les taches faites par le mousse. Indiquez le prix d'une chandelle, sachant qu'il est inférieure à 2 DM.

aus: Tangente, Paris

For christmas eve

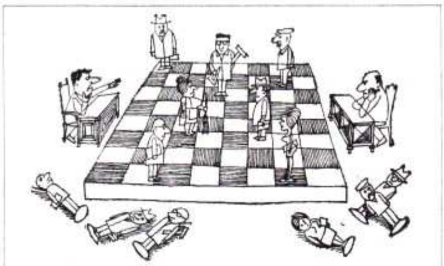
In the problem each letter must be replaced by a digit in such a way that the addition is correct.

$$\begin{array}{r} N\ O\ E\ L \\ +\ N\ O\ E\ L \\ \hline B\ E\ L\ L\ S \end{array}$$

aus: fun with mathematics, Toronto

alpha-Schachwettbewerb

Zum 9. Mal fordert alpha alle Schachfreunde und jene, die es werden wollen, zur Teilnahme an einem Lösungswettbewerb auf! Wiederum sind acht Schachaufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad zum Lösen vorgegeben. Vordergründig soll dieser Wettbewerb Spaß an den reizvollen Knobeleien auf dem Schachbrett vermitteln, wobei bis zum Erreichen der Lösungen einige Fallstricke zu erkennen und zu durchschauen sind, was die Entwicklung mathematischer Analysetätigkeit unterstützt.



Schachwelt *Tiber Kajan*

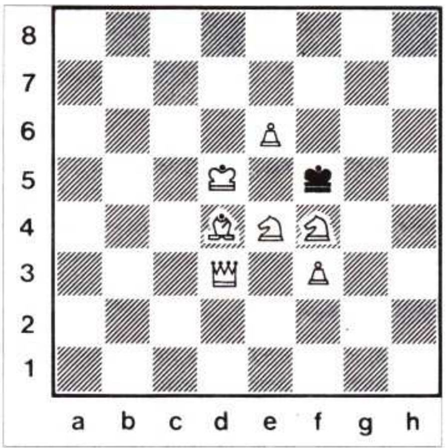
In allen acht Aufgaben beginnt Weiß und setzt trotz bester Gegenwehr von Schwarz in der geforderten Zügezahl matt. Als vollständig gilt die Lösung, wenn alle Abspiele bis zum Matt angeführt werden!

Unter den Teilnehmern, die alle Aufgaben korrekt gelöst haben, werden Buchpreise verlost und Urkunden verteilt. In einer weiteren Verlosung haben auch alle anderen Teilnehmer, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst haben, die Chance, einen Buchpreis zu gewinnen.

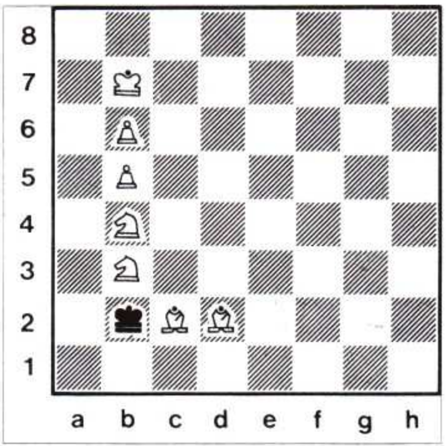
Die Einsendung der Lösungen ist bitte bis zum 1. März 1992 unter Angabe von Name, Vorname und Alter zu richten an

Redaktion alpha
PSF 129
O - 7010 Leipzig

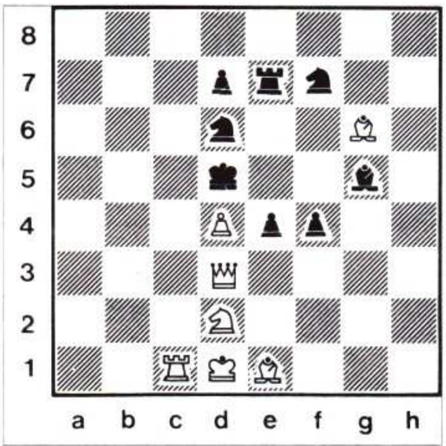
Die Lösungen und die Gewinner werden in alpha 4/1992 veröffentlicht.



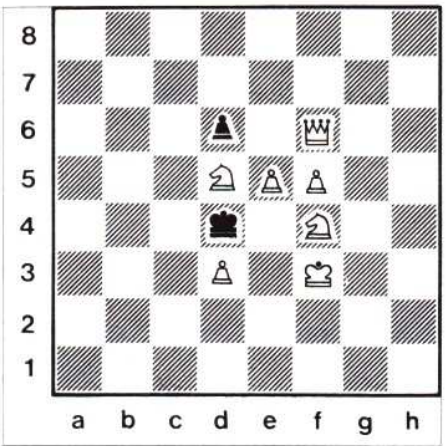
Nr. 1 Matt in zwei Zügen



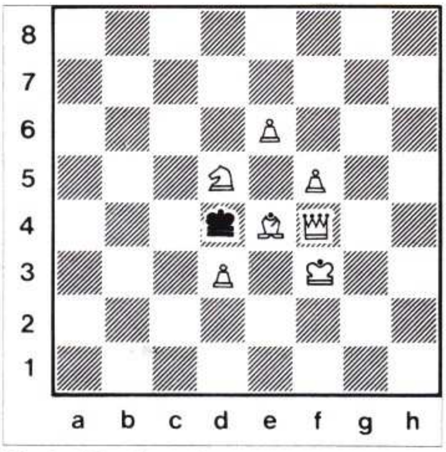
Nr. 2 Matt in zwei Zügen



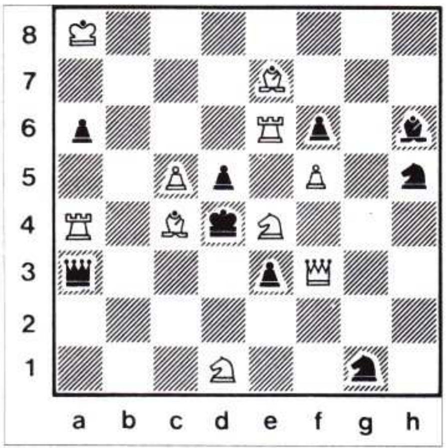
Nr. 3 Matt in vier Zügen



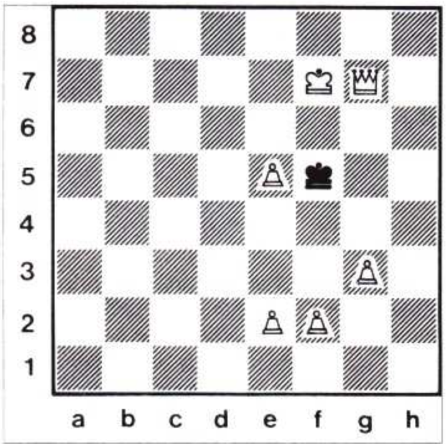
Nr. 4 Matt in zwei Zügen



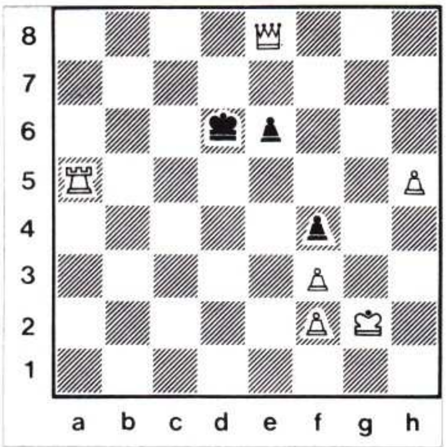
Nr. 5 Matt in zwei Zügen



Nr. 6 Matt in zwei Zügen



Nr. 7 Matt in drei Zügen



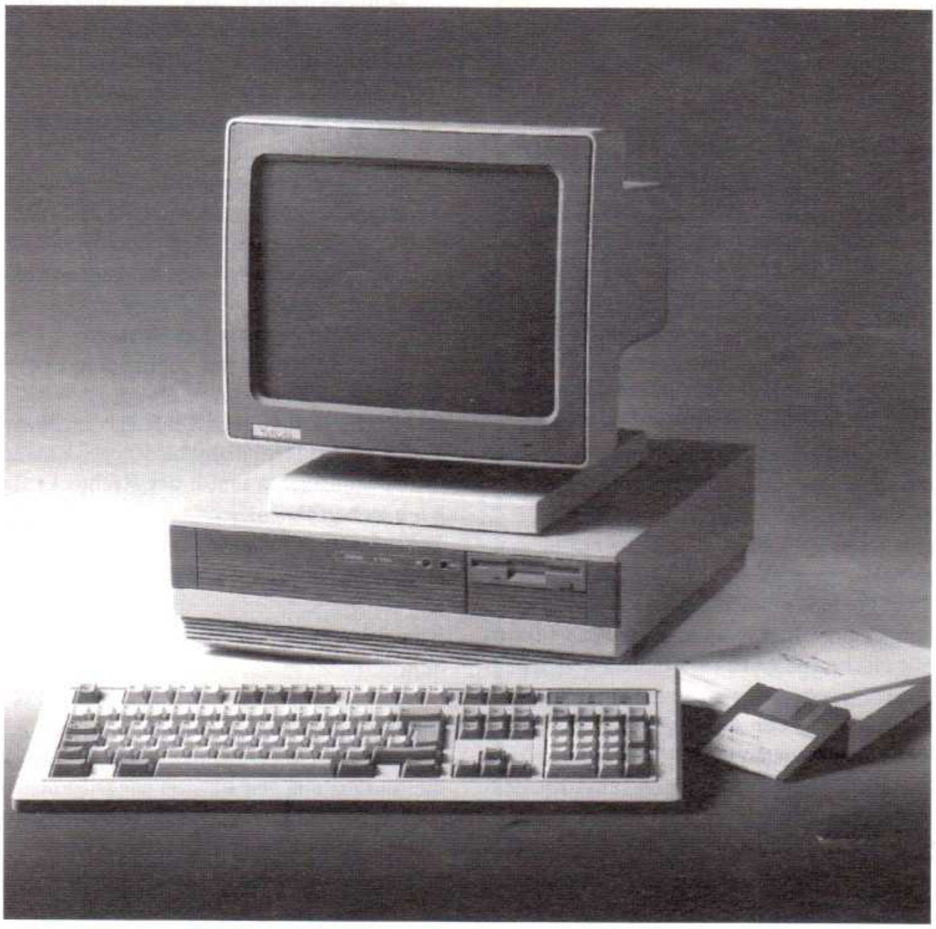
Nr. 8 Matt in vier Zügen

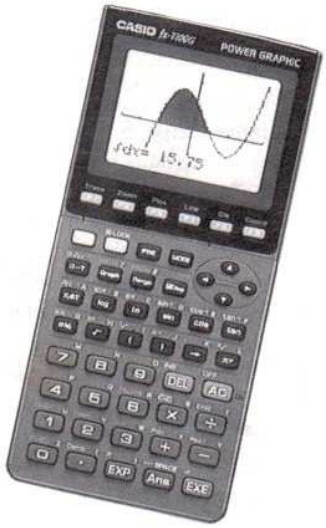
Attraktive Preise im alpha-Wettbewerb 1991/92

alpha-Wettbewerb

Hauptpreis: 1 Vegas Computer CE 0808 incl. 20 MB Festplatte und Bildschirm

Tolle Preise gibt es beim alpha-Wettbewerb 1991/92 zu gewinnen. Mitmachen lohnt sich also und bringt neben dem Spaß an der Mathematik auch die Möglichkeit, einen attraktiven Preis zu ergattern. Die Wettbewerbsbedingungen findet Ihr auf Seite 22. Wir bedanken uns bei den Sponsoren des Wettbewerbs und wünschen uns eine rege Teilnahme.





Die Preise:

- Ein ***Vegas Computer CE 0808 mit 20 MB Festplatte, Tastatur und Bildschirm***, Hantarex Deutschland Vertriebsges. mbH., W-5230 Altenkirchen
- Vier ***Software-Programme*** des CoMet Verlages für Unterrichtssoftware, 4100 Duisburg: Cabri Geomètre, Derive 2.0, Treffer!, Graphix Erforderliche Hardware: jeweils PC mit MS-DOS ab unterschiedlichen Versionen 2,11; 3,2; 3,3; 512 bzw. 648 KB Hauptspeicher und Graphikkarte (Hercules, CGA, EGA, VGA)
- Ein ***Graphik-Rechner FX-7700 G*** von Casio Computer Co. GmbH, 2000 Hamburg
- Zehn ***Electronic-Rechner*** unterschiedlicher Ausstattung von Texas Instruments Deutschland GmbH, 8050 Freising
- Zehnmal die ***Bände I-III "Internationale Mathematik-Olympiade"*** für die Oberstufe vom Manz Verlag, 8000 München
- Fünf ***Electronic Translators mit Währungsrechner und sechs Weltsprachen im Griff*** von Conrad Electronic, 8452 Hirschau
- Zwei Bände ***Schülerduden, Mathematik I und II*** vom Bibliographischen Institut & Fa. Brockhaus AG, 6800 Mannheim
- Fünfzehn ***Spiele*** unterschiedlicher Ausstattung vom Otto Maier Verlag Ravensburg AG, 7980 Ravensburg
- Ein ***Schülerduden "Die Informatik"***. Bibliographisches Institut & Fa. Brockhaus AG, 6800 Mannheim
- Jeweils fünf ***Arbeitshefte und Lösungsbände der "Aufgabensammlung für mathematisch interessierte Schüler"***: 5. - 7. Jahrgangsstufe, 8. - 10. Jahrgangsstufe und 11. - 13. Jahrgangsstufe. Insgesamt 15 Preise! Sponsor: Manz Verlag, 8000 München
- Fünfzehn ***Bücher*** unterschiedlicher Ausstattung vom Otto Maier Verlag Ravensburg AG, 7980 Ravensburg.

Mitarbeiter/innen des Verlages und deren Angehörige können nicht am Wettbewerb teilnehmen. Der Rechtsweg ist ausgeschlossen. Die Verlosung erfolgt unter den Einsendern, die die Aufgaben richtig gelöst haben. Der Vegas Computer wird unter den fünf Besten aller Klassenstufen verlost.

alpha-Wettbewerb

Wer löst mit?

Wettbewerbsbedingungen

1. Der Wettbewerb 1991/92 läuft über zwei Teilwettbewerbe in den Heften 6/91 und 1/92.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Anschrift, Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter) zu richten an:
Mathematische Schülerzeitschrift alpha
Postfach 129
O-7010 Leipzig
Den Lösungen ist die frankierte und an Euch adressierte **Antwortkarte** beizulegen, welche Ihr **im Mittelteil unserer Zeitschrift** findet. Darauf erhaltet Ihr die Ergebnisse dieses Teilwettbewerbes mitgeteilt. Steht mehreren Schülern nur eine Zeitschrift zur Verfügung, so kopiert Euch die Auswertungsseite der Antwortkarte und klebt sie auf eine an Euch adressierte Postkarte (Porto nicht vergessen).
Schulen beachten bitte, daß die gesammelte Rücksendung entsprechend mehr Porto verlangt.
3. Von dem Teilnehmer sind nur Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe zu lösen. Schüler ab Klassenstufe 10 und Erwachsene lösen die mit 10 und E gekennzeichneten Aufgaben.
4. Jeder Teilnehmer sollte einen Durchschlag seiner Lösungen anfertigen, um diese mit den jeweils zwei Hefte später erscheinenden Lösungen zu vergleichen.
5. Diejenigen Teilnehmer, die insgesamt mindestens 8 Aufgaben richtig (gut oder sehr gut) gelöst haben, senden bis zum 10. September beide Antwortkarten, einen entsprechend frankierten und adressierten Rückumschlag und
a) bei mehr als dreimaliger Teilnahme die zuletzt erhaltene Urkunde bzw.
b) bei mit diesem Wettbewerb dreimaliger Teilnahme die beiden bereits vorhandenen Urkunden ein.
Bei erst- bzw. zweimaliger Teilnahme genügen die beiden Antwortkarten.
6. Alle erfolgreichen Teilnehmer erhalten eine Urkunde und einen alpha-Button. Pro Klassenstufe 5 bis 10 werden die 5 besten Teilnehmer ermittelt (entscheidend ist die Anzahl der sehr gut gelösten Aufgaben) und unter den Übrigen jeweils fünf Teilnehmer ausgelost.) (Außerdem prämieren wir 5 Frühstarter (Klassen 1 bis 4)). Diesen Glücklichen winken attraktive Preise, welche wir auf Seite 21 vorstellen.
Beachtet bitte, daß wir Einsendungen ohne Rückporto nicht mehr bearbeiten können.

Einsendeschluß: 22. Februar 1992

Klassenstufe 5

5/1
Von drei Freunden mit den Rufnamen André, Bernd und Christian und den Familiennamen (in anderer Reihenfolge) Lange, Meier und Neumann ist folgendes bekannt:
(1) Bernd und der Junge mit dem Familiennamen Lange besuchen die gleiche Schule.
(2) André, Christian und der Junge mit dem Familiennamen Neumann betreiben aktiv Sport.
(3) Der Junge mit dem Familiennamen Lange ist mit Christian verwandt.
Wie heißen die drei Freunde mit vollem Namen?
Schüler Sven Reinald, Zerbst

5/2
Bestimme die kleinste und die größte dreistellige natürliche Zahl mit der Quersumme 10. (Beispiel für eine Quersumme: Die Zahl 369 hat die Quersumme $3 + 6 + 9 = 18$.)
Schülerin Corinna Petzold, Cottbus

5/3
Eine Familie besteht aus vier Personen, die zusammen 101 Jahre alt sind. Der Vater ist viermal so alt wie sein Sohn und drei Jahre älter als die Mutter. Der Sohn ist vier Jahre jünger als seine Schwester. Wie alt ist jedes Familienmitglied?
Schülerin Corinna Petzold, Cottbus

5/4
Drei Freunde mit den Vornamen Ronny, Falk und Ingmar haben (in anderer Reihenfolge) die Nachnamen Krause, Lumnitz und Schettler.
Von ihnen wissen wir folgendes:
(1) Falk hilft Krause in Mathematik.
(2) Falk, Ingmar und Lumnitz sind Klassenkameraden.
Wie heißen die drei Freunde mit vollem Namen?
Schülerin Sandra Löser, Grüningen

5/5
In dem folgenden Schema sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei stehen gleiche Buchstaben für gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben für verschiedene Ziffern.

$$\begin{array}{r} \text{A R I E} \\ +\ \text{A R I E} \\ \hline \text{O P E R A} \end{array}$$

Schülerin Melanie Anefeld, Herges-Hallenberg

5/6
Die drei Geschwister Axel, Beate und Christian sind im Alter jeweils zwei Jahre auseinander. Beate ist älter als Christian, aber jünger als Axel. Zusammen sind sie 24 Jahre alt. Wie alt ist jedes dieser drei Kinder?
Sch.

5/7
Ein Hotel hat zusammen 20 Ein- und Zweibettzimmer mit insgesamt 32 Betten. Über wieviel Ein- bzw. Zweibettzimmer verfügt es?
Sch.

Klassenstufe 6

6/1
Die vier Jungen Dirk, Rico, Mark und Lars haben (in anderer Reihenfolge) die Nachnamen Wagenknecht, Stöwesand, Fischer und Jakobi. Von ihnen ist folgendes bekannt:
(1) Die drei Jungen Rico, Mark und der mit dem Nachnamen Stöwesand sind zusammen auf einem Erinnerungsfoto zu sehen.
(2) Lars heißt nicht Stöwesand.
(3) Mark, Lars und der Schüler mit dem Nachnamen Jakobi waren kürzlich zusammen im Schwimmbad.
(4) Mark und der Schüler mit dem Nachnamen Fischer waren zusammen im Ferienlager.
Wie heißt jeder dieser vier Jungen mit vollständigem Namen?
Schülerin Annekatrin Voß, Gielow

6/2
Ein Rechteck hat einen Umfang von 26 cm und einen Flächeninhalt von 40 cm^2. Es sind die Seitenlängen a und b des Rechtecks für $a > b$ zu berechnen!
Sch.

6/3
Kürze so weit wie möglich: $\frac{131313}{656565}$
Sch.

6/4
Weise nach, daß in einem konvexen Viereck die Summe aus den Längen der Diagonalen größer ist als die Summe aus den Längen zweier gegenüberliegender Seiten.
Sch.

6/5
Der Nenner eines Bruches ist um 3521 größer als sein Zähler. Nach dem Kürzen dieses Bruches erhält man $\frac{4}{11}$. Durch welche Zahl wurde der Bruch gekürzt?
Sch.

6/6
Für alle natürlichen Zahlen gilt folgende Aussage: "Wenn die kleinste von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gerade ist, so ist deren Summe durch 10 teilbar." Es ist nachzuweisen, daß diese Aussage wahr ist.
Sch.

6/7
Ein Fußgänger bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $v = 4$ km/h. Welchen Weg legt er in 30 min zurück?
R.

Klassenstufe 7

7/1
Eine vierköpfige Familie ist zusammen 88 Jahre alt.
Die Mutter ist viermal so alt wie die Tochter, der Vater dreimal so alt wie der Sohn. Vater und Mutter sind zusammen 48 Jahre älter als Tochter und Sohn zusammen. Wie alt ist jedes der vier Familienmitglieder?
Schülerin Melanie Anefeld, Herges-Hallenberg

7/2
Addiert Tobias zur Zahl seines Geburtsjahres deren Quersumme, so erhält er als Ergebnis 2000. In welchem Jahr wurde Tobias geboren?
Schüler Thomas Schaller, Bad Langensalza

7/3
"Gib mir einen Apfel; dann habe ich doppelt soviel Äpfel wie du", sagte Axel zu seiner Schwester Beate. "Das ist ungerecht. Gib du mir einen Apfel von deinen, dann haben wir gleichviel Äpfel", antwortete die Schwester. Wie viele Äpfel hat jedes der beiden Geschwister?
Schülerin Jana Motzing, Möhra

7/4
In zwei Jahren wird Axel doppelt so alt sein, wie er vor zwei Jahren alt war. Wie alt ist Axel gegenwärtig?
Schülerin Jana Motzing, Möhra

7/5
Addiert man zu einer dreistelligen natürlichen Zahl 297, so erhält man eine weitere natürliche Zahl, die aus den gleichen Ziffern bei umgekehrter Anordnung besteht.

a) Wie viele solcher Zahlen gibt es?
b) Wie lautet die kleinste, wie die größte dieser Zahlen?

Sch.

7/6
Ein Fahrzeug bewegt sich eine Strecke von 20 km mit einer Geschwindigkeit von 40 km/h und 10 km mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h. Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit?
R.

7/7
Ein Mondauto hat auf der Erde eine Masse von 240 kg.
Welche Masse hat es auf dem Mond? (Die Fallbeschleunigung auf dem Mond beträgt $1{,}62\ m \cdot s^{-2}$.)
R.

▶

Preisträger im alpha - Wettbewerb 1990/91

Sonderpreise für Frühstarter (Klassenstufe 2 - 4): Susann Fellenberg, *Torgau*; Stephanie Möder, *Schmalkalden*; Claudia Schreiber, *Leipzig*

Klassenstufe 5: AG Mathe Kl. 5, *Dallgow*; Christiane Dammann, *Freital*; Stefan Herrmann, *Wegefarth*; Thomas Kalinowski, *Grambow*; Doreen Köhler, *Cottbus*; Sylke Kowtsch, *Dresden*; Kordula Petri, *Berlingerode*; Stephanie Ratzke, *Klein Oschersleben*; Roland Voigt, *Böhlen*; Daniel Wille, *Sondershausen*

Klassenstufe 6: AG Mathe 6/7, *Mieste*; Sarah Bardy, *Netphen*; Anja Biallas, *Magdeburg*; Lydia Franck, *Potsdam*; Martin Friederichs, *Bergfelde*; Jan Kasper, *Herzberg*; Anja Mann, *Bautzen*; Silke Rudolph, *Großröhrsdorf*; Henryk Schreiber, *Wulfen*; Andreas Stolle, *Wittenberg*

Klassenstufe 7: AG Mathe 7, *Dallgow*; Thomas Kranhold, *Wasserthaleben*; Ulrike Kretschmer, *Dresden*; Karen Mühlenbein, *Rampe*; Lars-Peter Müller, *Leipzig*; Ulrike Müller, *Fischheim*; Arlett Prengel, *Rostock*; Manuela Vogel, *Halberstadt*; Georg Wenig, *Kaiserslautern*; Angela Wiesjahn, *Holzendorf*

Klassenstufe 8: Diana Fanghänel, *Gersdorf*; Anja Friederichs, *Bergfelde*; Anett Gschwender, *Brohm*; Christoph König, *Greifswald*; Thomas Prüver, *Bad Freienwalde*; Norbert Schröder, *Bernau*; Antje Vogt, *Worbis*; Andrea Weigl, *Bad Salzungen*; Andreas Willnow, *Lindenthal*; Daniel Wolf, *Mittweida*

Klassenstufe 9: Kristian Debrabant, *Eisleben*; Birgit Elßner, *Werneuchen*; Christian Föllmer, *Berlin*; Andreas Hamm, *Suhl*; Yvonne Langer, *Eisenach*
Matthias Loesdau, *Landshut*; Thomas Lotze, *Suhl*; Falk Pätzold, *Werdau*; Jörg Siede, *Zepernick*; Ulrich Voigt, *Böhlen*

Klassenstufe 10: Dr. Frank Aßmus, *Oranienburg*; Bertram Bracher, *Schwarzheide*; Stefan Erb, *Schwallungen*; Matthias Kassner, *Meiningen*; Astrid Mirle, *Kleindehsa*; Jens Pönisch, *Chemnitz*; Doris Seifert, *Rochlitz*; Matthias Tittel, *Berlin*; Sylvia Wachholz, *Görlitz*; Heike Walter, *Berlin*

Wir gratulieren herzlich!

Die Liste der Teilnehmer, die mindestens dreimal teilgenommen haben, veröffentlichen wir in Heft 1/92.

Beteiligung im Team Wettbewerb 1990/91

Peter - Lamberz - OS, *Bergfelde*; Regelschule Lindenberg/Eichsfeld, *Berlingerode*; Sekundarschule, *Bismark*; Grundschule, Blumberg

Theodor-Körner-OS, *Chemnitz*; Obere Luisenschule, *Chemnitz*; Haus der Freizeit/ Klub Junge Mathematiker, *Cottbus*

Grundschule, *Dallgow*; Schülerfreizeitzentrum "Anne Frank", *Dresden*

OS "Thomas Müntzer", *Ebeleben*; 2. OS, *Eberswalde-Finow; Grundschule am Schloßplatz, Elsterwerda*

Ernst-Thälmann-OS, *Freital*; Helene-Lange-Gymnasium, *Fürth*

Erwin - Hartsch - OS, *Gersdorf*; John - Brinckmann - OS, *Goldberg*; Rosa - Luxemburg - OS, *Gotha*; Juri - Gagarin - OS, *Grünhain*

Matheklub Sekundarschule, *Iden*; Goethe - Schule, *Ilsenburg*; Schule, *Ivenack*

Erich - Weinert - OS, *Johanngeorgenstadt*

alpha-club Oberschule, *Latdorf*; Goetheschule, *Lauscha*; OS, Leutersdorf 1. OS, *Lommatzsch*

Oberschule I, *Mieste*

Max - Langer - OS/AG Mathematik, *Niederoderwitz*

H. - Warnke - Schule, *Oederan*; Alfred - Wirth - OS, *Osternienburg*

Oberschule, *Schneidlingen*; Hans-Beimler-OS/AG Mathematik, *Schönhausen*; Realschule mit Grundschulteil, *Schorssow*; OS "Glückauf", *Sondershausen*; Schule, *Steinbach*

POS Ernst Schneller, *Töplitz*

Johann-Gottfried-Seume OS, *Vacha*

OS Wachau/Seifersdorf, *Wachau*; EOS Alexander von Humboldt, *Werdau*; alpha-club, *Werneuchen*; Heinrich - Heine - Schule, *Wörmlitz*; Sekundarschule Thomas Müntzer, *Wulfen*

Staatliches Gymnasium, *Zeulenroda*; Real- und Grundschule, *Züssow*

Klassenstufe 8

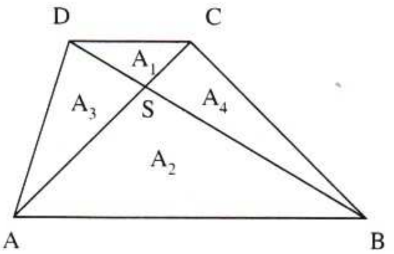
8/1
Wo steckt der Fehler?
16 - 36 = 25 - 45 (Das ist sicher wahr!)
Auf beiden Seiten wird $\frac{81}{4}$ addiert, das ergibt
$16 - 36 + \frac{81}{4} = 25 - 45 + \frac{81}{4}.$
Das läßt sich, wie bekannt, umformen zu
$\left(4-\frac{9}{2}\right)^2 = \left(5-\frac{9}{2}\right)^2$
Auf beiden Seiten wird nun die Quadratwurzel gezogen:
$4-\frac{9}{2} = 5-\frac{9}{2}$, und auf beiden Seiten $\frac{9}{2}$ addiert, ergibt 4 = 5.
aus einer Mathematikolympiade

8/2
Mit welchen Ziffern müssen die Leerstellen in der Zahl 52☐2☐ belegt werden, damit die entstehende fünfstellige Zahl
a) durch 36 teilbar ist,
b) durch 11 teilbar ist?
Es sind stets alle Möglichkeiten anzugeben!
Fr.

8/3
Man zeichne ein beliebiges Dreieck ABC.
Es ist eine Gerade g so zu konstruieren, daß
(1) g das Dreieck ABC schneidet,
(2) g zu keiner Dreieckseite parallel ist und
(3) g ein Dreieck abschneidet, das zu ABC ähnlich ist.
Fr.

8/4
Eine zweistellige natürliche Zahl z besitzt die Quersumme 9. Vertauscht man die Grundziffern von z, so erhält man eine zweistellige Zahl z', die größer als das Zweifache, aber kleiner als das Dreifache von z ist. Um welche Zahl z handelt es sich?
Sch.

8/5
In dem abgebildeten Trapez ABCD, dessen Diagonalen sich im Punkte S schneiden, seien A_1, A_2, A_3 bzw. A_4 die Flächeninhalte der Teildreiecke Δ CDS, Δ ABS, Δ DAS bzw. Δ BCS. Es ist nachzuweisen, daß die Beziehung $A_3 = \sqrt{A_1 \cdot A_2}$ gilt!



Sch.

8/6
Um auf der Erde einen Körper auf einer Unterlage gleiten zu lassen, ist ein Kraft F von 3,5 N erforderlich, wenn der Reibungskoeffizient μ=0,35 beträgt. Welche Kraft F' ist auf dem Mond erforderlich, um den Körper auf der gleichen Unterlage gleiten zu lassen?
R.

8/7
Um die Erde sei längs des Äquators ein Stahlgürtel gespannt. Wie groß wäre dessen Längenzunahme bei einer Erwärmung um 1 K? Der Erdumfang wird mit 40 000 km angenommen.
R.

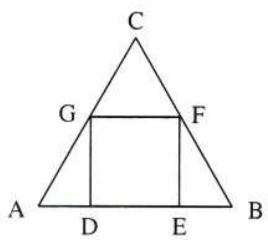
Klassenstufe 9

9/1
Gegeben sei eine dreistellige Zahl, deren Einerziffer nicht Null ist. Nun vertausche man ihre erste mit ihrer dritten Ziffer und bilde die Differenz der so entstandenen Zahl mit der ursprünglichen Zahl.
Es sind alle natürlichen Zahlen zu finden, die Teiler des Betrages dieser Differenz sind.
von einer Fachgruppe Mathematik aus Altenburg/Thür.

9/2
Es ist das Produkt zweier verschiedener zweistelliger Zahlen mit unterschiedlichen Ziffern zu bilden.
Anschließend sind die beiden Ziffern in jeder Zahl zu vertauschen und das Produkt aus den beiden neuen Zahlen zu bilden. Unter welchen Bedingungen sind beide Produkte gleich?
Es sind zwei Beispiele anzuführen!
Fr.

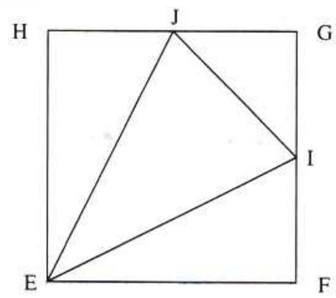
9/3
Zeichne einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r = 4 cm. Lege im Innern des Kreises k einen Punkt P fest, der nicht mit dem Mittelpunkt M zusammenfällt. Konstruiere eine Sehne, die 6 cm lang ist und durch Punkt P geht! Die Konstruktion ist zu begründen!
Sch.

9/4
Einem gleichseitigen Dreieck ABC wurde, wie aus der Abbildung ersichtlich, ein Quadrat DEFG einbeschrieben. Wieviel Prozent des Flächeninhalts des gleichseitigen Dreiecks macht der Flächeninhalt des Quadrates aus?



Sch.

9/5
Das Quadrat EFGH habe die Seitenlänge a. Der Punkt I ist Mittelpunkt der Seite $\overline{FG}$, und der Punkt J ist Mittelpunkt der Seite $\overline{HG}$. Welches Verhältnis besteht zwischen dem Flächeninhalt des Dreiecks EIJ und dem des Quadrates EFGH?



Fr.

9/6
Der Meßbereich eines Drehspulmeßwerkes beträgt 3 mA, sein Widerstand 20 Ω. Durch einen Parallelwiderstand soll der Meßbereich auf 300 mA erweitert werden. Welcher Widerstand R_p muß parallel geschaltet werden?
R.

9/7
Der Brunnen auf der Festung Königstein ist 152,3 m tief, der Wasserstand beträgt 12 m. Wieviel Zeit vergeht vom Abwurf eines Steines, bis man seinen Aufschlag hört, wenn die Schallgeschwindigkeit c=340 m/s beträgt? (Fallbeschl. = 9,81 $m \cdot s^{-2}$).
R.

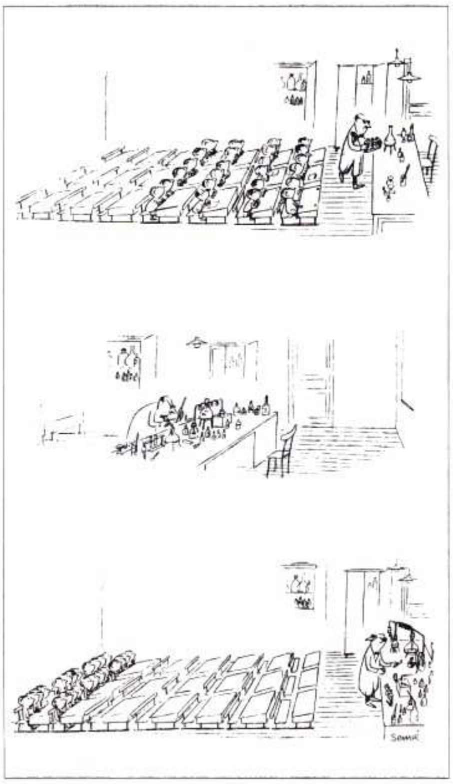
Klassenstufe 10

10/1
Es seien a, b und c paarweise voneinander verschiedene Grundziffern und a = 0.
Wie lautet die im dekadischen Positionssystem geschriebene vierstellige natürliche Zahl $\overline{abcb}$, wenn die Zahlen $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bca}$, $\overline{ac}$ und b jeweils Quadratzahlen sind?
Sch.

10/2
Gegeben sei die Gleichung
$\sin\alpha + \cos\alpha = m. \quad (0° \leq \alpha \leq 90°)$
Es ist für $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ ein Ausdruck in m zu finden!

10/3
Welche Paare natürlicher Zahlen (a;b) sind Lösungen der Gleichung
$$\frac{\sqrt{8}}{b^2} \cdot a^{(a+a)} = \frac{\sqrt{2}}{50} \cdot a^{(3a)} \quad (a \neq 0; b \neq 0)\ ?$$
Frank Pampel, Zeulenroda

10/4
Gegeben sei ein spitzer Winkel mit seinem Scheitel S und seinen Schenkeln s_1 und s_2



aus: Archimedes, Niederlande

sowie ein innerer Punkt dieses Winkels, der nicht auf seiner Halbierenden liegt.
Es sind alle Kreise durch P zu konstruieren, die die Schenkel des gegebenen Winkels berühren.
Sch.

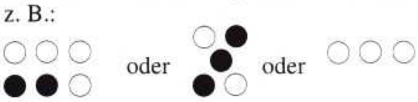
10/5
Das Geburtsjahr des Enkels von Herrn Meyer ist ein Produkt $x \cdot y$ zweier natürlicher Zahlen x und y.
Im Jahre x^2 wird der Enkel x Jahre alt sein.
In welchem Jahre wurde der Enkel, der gegenwärtig noch ein Kind ist, geboren?
Sch.

10/6
Ein Körper mit der Gewichtskraft G=1kN bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $v = 20\ m \cdot s^{-1}$. Er soll auf einem 20 m langen Weg l zum Stillstand gebracht werden. Welche Kraft F ist dazu erforderlich?
R.

10/7
An einem Kondensator mit der Kapazität C von 5µF liegt eine Spannung U von 218 V. Es fließt ein Strom I von 0,342 A. Welche Frequenz f hatte die angelegte Wechselspannung?
R.

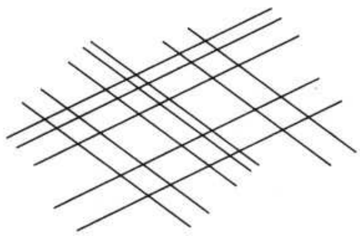
Aufgaben ab Klassenstufe 11

E1
Fred und Rainer wollen sich künftig Briefe in einer "Geheimschrift" senden, die sie selbst erfinden wollen. Jeder Buchstabe soll aus einer bestimmten, aber gleichen Anzahl weißer oder schwarzer Punkte dargestellt werden, also z. B.:



Wieviele weiße oder schwarze Punkte muß man für jeden Buchstaben mindestens festlegen, damit alle 26 Buchstaben verschieden darstellbar sind?
Wie ändert sich das Ergebnis, wenn auch für die verschiedenen Buchstaben unterschiedliche Anzahlen weißer oder schwarzer Punkte zugelassen sind und für die Darstellung des Alphabets die geringstmögliche Anzahl von Zeichen gefordert wird?
Fr.

E2
Wie das Bild zeigt, wird eine Schar von 5 zueinander parallelen Geraden von einer zweiten Schar von 7 zueinander parallelen Geraden geschnitten.
Wieviele Parallelogramme entstehen dadurch?



E3
Gegeben sei ein Quadrat mit einem Flächeninhalt von 1 cm². Es werde ein zweites Quadrat konstruiert, so daß die Eckpunkte des ersten zu Seitenmittelpunkten des zweiten Quadrates werden. Das werde so fortgesetzt, daß das n-te Quadrat als Seitenmittelpunkte die Eckpunkte des (n-1)-ten Quadrates hat. Das wievielte Quadrat übertrifft erstmalig die Fläche von einem Hektar?
Fr.

E4
Bei welcher der neu erfundenen Wettarten ist die Chance, einen Hauptgewinn zu erzielen, am größten, bei welcher am geringsten? Wir wollen von der Höhe des Gewinns absehen.
(1) Aus 60 Zahlen sollen 8 gezogen werden. Der Hauptgewinn ist ein "Achter".
(2) In einem neuen Fußballtoto soll von 20 Spielen vorausgesagt werden, welches gewonnen, welches verloren, welches unentschieden ausfällt.
(3) Bei einem internationalen Skispringen kämpfen am letzten Tag nur noch 13 Springer um die Plätze.
Es soll die genaue Plazierung dieser 13 Springer vorausgesagt werden.
(4) An einem Marathonlauf nehmen genau 100 Läufer teil.
Es soll vorausgesagt werden, wer die Gold-, wer die Silber- und wer die Bronzemedaille erkämpft.
Fr.

E5
Wieviele Schnittpunkte können n Geraden ($n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$) in einer Ebene höchstens erzeugen?
Die Vermutung ist mit Hilfe der Beweismethode der vollständigen Induktion zu zeigen!
Fr.

E6
Eine Druckflasche enthält verdichtetes Gas unter einem Druck von p = 4 MPa und der Temperatur t = 27 °C. Auf welchen Druck ändert sich das Gas, wenn nach Ablassen der Hälfte des eingeschlossenen Gases die Temperatur um 15 K abnimmt?
R.

E7
An einem Serienschwingkreis (L=0, 25 H, C=25 µF, R=12 Ω) liegt eine Wechselspannung U von 125 V. Berechnen Sie die Stromstärke I im Resonanzfall!
R.

Die Lösungen veröffentlichen wir in Heft 2/92.

Ein Dankeschön

Die Redaktion alpha konnte in diesem Jahr den Preisträgern des alpha-Wettbewerbes 1990/91 wieder viele interessante Bücher senden. Diese stellten uns zahlreiche Verlage zur Verfügung, denen wir an dieser Stelle herzlichen Dank sagen möchten:

Fachbuchverlag, Leipzig
Deutscher Taschenbuchverlag (dtv), München
Urania Verlag, Leipzig · Jena · Berlin
Aulis Verlag, Köln
Universitätsverlag Wagner GmbH, Innsbruck
Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen
B. G. Teubner Verlagsgesellschaft mbH, Leipzig
Philipp Reclam jun. Verlag, Ditzingen
Bleicher Verlag, Gerlingen
Ernst Klett Schulbuchverlag, Stuttgart
Manz Verlag, München
Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin

Kirchen, Kreisketten und eigene Kunstwerke

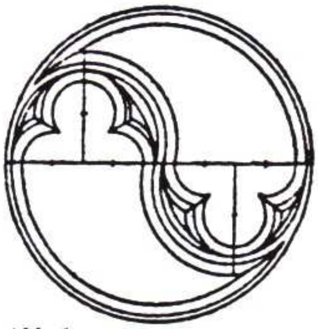


Abb. 1

Abb. 2

Abb. 3

Abb. 4

Sicher wird jeder von Euch schon einmal eine mittelalterliche Kirche gesehen und ihre Schönheit bewundert haben. Besonders an gotischen Kirchen und Kathedralen haben die damaligen Künstler mit bewundernswertem Geschick eine ganz besondere Art der Kreisbogenornamentik entwickelt und zu hoher Blüte gebracht. Diese Formenbildungen werden als Maßwerk bezeichnet. Die Gestaltung der Ornamente mittels Zirkel, Lineal und Winkelmaß lag der Kunstbetätigung dieser Epoche nahe.

Die Umsetzung dieser Ornamente im Bauwerk stellt übrigens eine technische Meisterleistung dar.

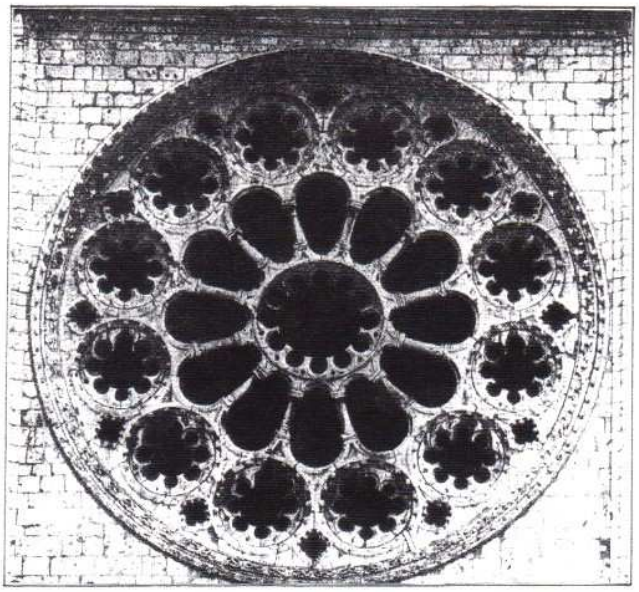
Notre Dame, Paris

Gotik ist die zweite große Stilperiode der mittelalterlichen Kunst in Europa. Neben dem Kirchenbau als Hauptaufgabe erlebt der bürgerliche Profanbau eine erste Blüte, im Städtebau wird eine planmäßige Anlage angestrebt, an Wohn- und Gemeinschaftsbauten (z. B. Rathäusern) äußert sich Repräsentationsbedürfnis. Am Ende der Gotik wird die Burg zum Schloß. Übrigens – das erste deutsche Bauwerk, dem ein gotischer Bauplan zugrunde lag, ist der Magdeburger Dom (seit 1209), das bedeutendste der Hoch-Gotik ist der Dom zu Köln (seit 1248).

Bekannte und allgemein benutzte Einzelformen sind die Fischblasen (**Abb. 1 – 4**), das Dreiblatt (**Abb. 5 und 6**), das Vierblatt (**Abb. 7**) u.s.w., der Dreipaß, Vierpaß, Fünfpaß u.s.w. (einen Vierpaß zeigt das Mittelfeld von **Abb. 8**, zwei Dreipässe stehen rechts und links darüber).

Die Abbildungen entnahmen wir dem Handbuch der Ornamentik von Franz Sales Meyer, das 1927 im Seemannverlag in Leipzig erschien. Gedacht war es "Zum Gebrauche für Musterzeichner, Architekten, Schulen, Gewerbetreibende sowie zum Studium im allgemeinen".

Habt Ihr nicht Lust, Euch auf den Spuren der mittelalterlichen Künstler selbst als Ornamentzeichner zu probieren? Wir würden es empfehlen.



Die Westrose der Kathedrale von Chartres aus dem Jahr 1276, Außenansicht

Hervorragende Beispiele dieser Ornamentmotive finden sich an der Kathedrale Notre-Dame von Chartres. Die Baugeschichte dieser Kathedrale ist kompliziert. Der Nordturm wurde 1134 bis 1150 und der Südturm 1145 bis 1170 errichtet. 1194 brannte der Vorgängerbau der Kathedrale ab. Die beiden unversehrt gebliebenen Türme wurden nun dem unmittelbar nach dem Brand in Angriff genommenen Neubau eingegliedert.

So entstand schließlich im Jahr 1276 das zwischen beiden Türmen angeordnete Rundfenster über dem Hauptportal der Westfassade. Es weist den enormen Durchmesser von 13,5 m auf.

Dieses Radfenster besitzt 12 Speichen in Gestalt kurzer glatter Säulen. Geometrisch liegt dem Fenster eine Zwölfer-Kreiskette zugrunde, deren Glieder mit Achtpässen ausgefüllt sind, ferner eine innere und kleinere Zwölfer-Kreiskette, und schließlich befindet sich im Zentrum noch ein Zwölfer-Paß. Es liegen also zwei Kreisketten mit identischer Gliederzahl ineinander und zwar so, daß jedes Glied der äußeren Kette von zwei benachbarten Gliedern der inneren Kette berührt wird. Die zwölf großen Rosetten werden vom Dreifußmaß bestimmt, indem sechs Quadrate von 12 Fuß* Seitenlänge um die zentrale Rosette gezeichnet werden. Deren Seitenlinien sind danach zu einem 24zackigen Stern erweitert. Dieser Stern legt schließlich die Mittelpunkte der Kreisketten-Glieder sowie deren Berührungspunkte fest.

Versucht doch selbst einmal, hinter das Geheimnis der geometrischen Struktur der Westrose von Chartres zu kommen.

Alphons

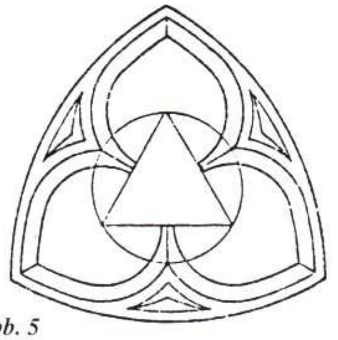


Abb. 5

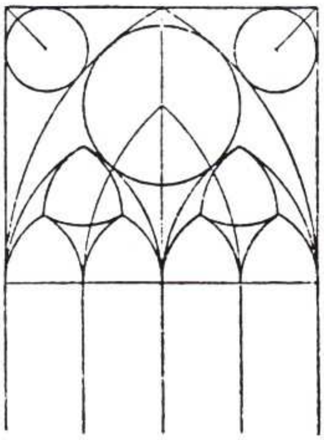


Abb. 6

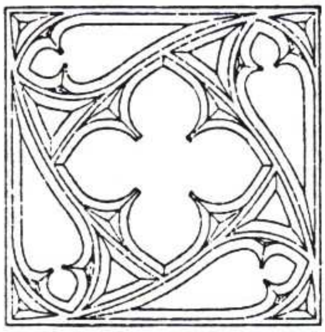


Abb. 7

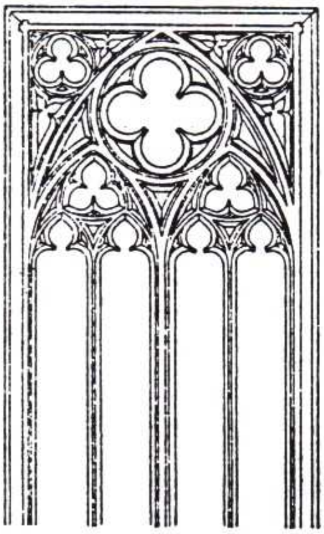
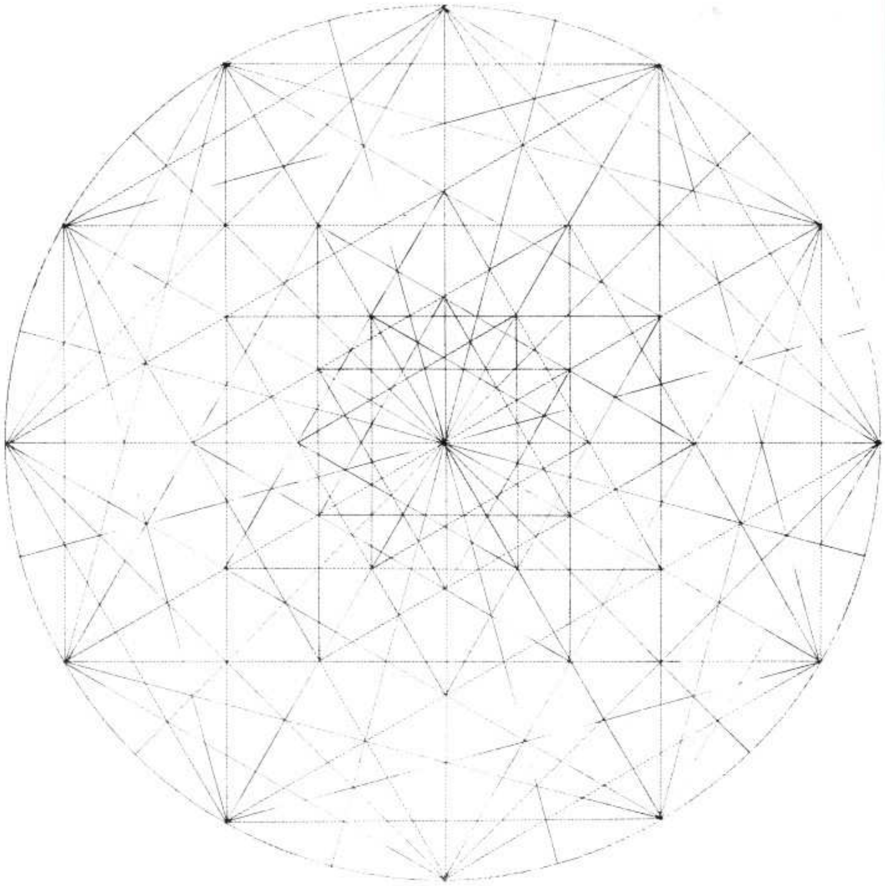


Abb. 8

* Fuß – veraltetes, von der Länge des Fußes abgeleitetes Längenmaß unterschiedlichen Betrages um 30 cm. In Deutschland gab es früher über 100 verschiedene Fußmaße.

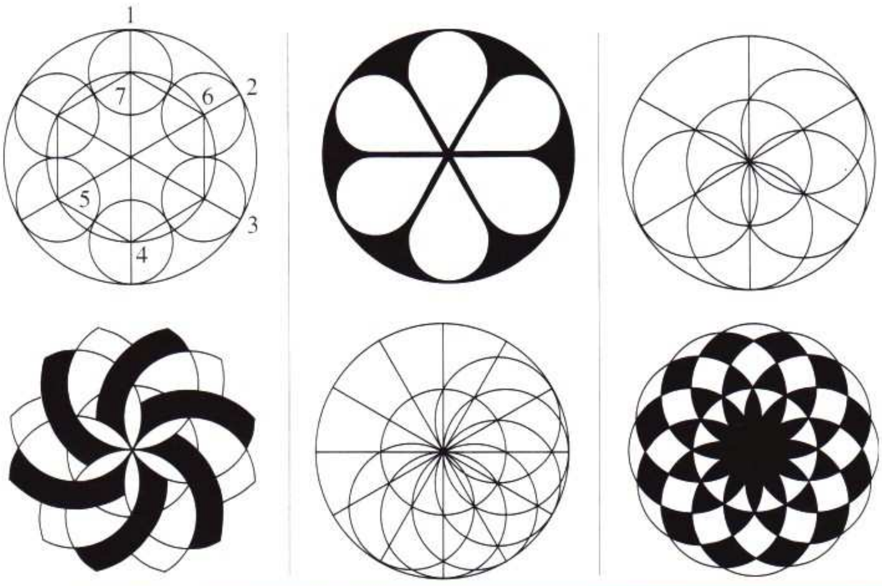
Ein Tip für den Weihnachtsgruß – Kunst im Kreis

Mit Zirkel und Lineal lassen sich sehr schöne "Kunstwerke im Kreis" herstellen. Eine mögliche Ausgangsfigur ist hier abgebildet. Sie kann nun von Euch durch Weglassen verschiedener Linien, Hinzufügen von Kreisen,... vielfältig abgewandelt werden. Wenn Ihr die einzelnen Segmente dann noch farbig ausmalt, könnt Ihr die schönsten Poster oder ganze Serienproduktionen von Weihnachtskarten selbst gestalten.



Falls Euch die Puste noch nicht ausgegangen ist, versucht doch, die folgenden Figuren nachzuzeichnen.

Alphons



Mathematik am Billardtisch

Teil 1

Es ist doch erstaunlich, wo in unserem Leben überall Mathematik steckt. Ob aber zum Beispiel der Billardspieler immer daran denkt, daß sein Spiel mathematischen Gesetzmäßigkeiten unterliegt?
Begleiten wir doch einmal Klaus, Hans und Eberhard sowie ihren Klassenleiter bei einem Exkurs in die Mathematik am Billardtisch.

Es war einer dieser Abende in der Jugendherberge, an denen man im Spielzimmer oder sonstwo herumlungert, dies und das beginnt, aber noch nicht recht weiß, womit er ausgefüllt werden soll.
Klaus, Hans und Eberhard, die „Mathematiker" meiner Klasse, hatten sich am Billardtisch versammelt. Sie versuchten diesen oder jenen Stoß, wobei sie offensichtlich auch Gesetzmäßigkeiten auf die Spur zu kommen hofften. Ich hatte mich etwas abseits niedergelassen und verfolgte mehr beiläufig ihr Treiben.
„Ich möchte doch zu gern wissen" – Hans richtete das Queue aus verschiedenen Richtungen auf die einzige noch auf dem Tisch liegende Kugel – „ob ich diese Kugel so anstoßen kann, daß sie wieder an dieselbe Stelle zurückkommt, nachdem sie nacheinander jede Bande berührt hat!"
Sofort entspann sich eine hitzige Debatte, begleitet von mehreren erfolglosen Versuchen von Hans und Klaus. Plötzlich verlangte Eberhard das Queue, führte nach einem kurzen Blick tatsächlich einen erfolgreichen Stoß aus und lieferte, wie es so seine Art war, anhand einer Skizze an der Ergebnistafel auch gleich die Erklärung (siehe **Abb. 1**).
„Stoße ich in Richtung einer Diagonalen, so läuft die Kugel nach der Reflexion in Richtung der zweiten weiter. Klaro? –
Außerdem ist $b_1 : b_2 = a_1 : a_2$ und $(b_1 + b_2) : b_2 = \frac{d}{2} : x$, sowie $(a_1 + a_2) : a_2 = \frac{d}{2} : y$.

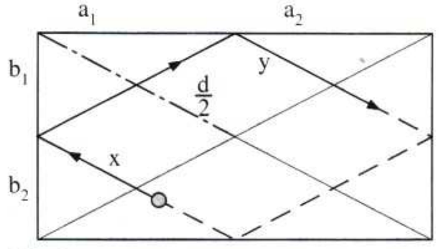


Abb. 1

Setzt man die erste Gleichung in die beiden nächsten ein, so findet man ohne Mühe die Beziehung $x = y$! Also schließt sich der Weg der Kugel zu einem Parallelogramm".
Klaus mußte Theorien immer in der Praxis überprüfen und wiederholte den Versuch von einer anderen Stelle des Tisches aus, hatte ebenfalls Erfolg und nun begann erst einmal eine Runde ‚Entspannungsübung'. Mitten aus der begeisterten Ruhe hörte ich plötzlich Hans fragen: „Kommt es mir nur so vor, oder brauchen die Kugeln auf ihren geschlossenen Wegen immer die ungefähr gleiche Zeit? Sind die Wege etwa alle gleich lang?"
„Waaas ...", das war Klaus, der gleichzeitig etwas an die Tafel zeichnete (**Abb. 2**).
„Sollen diese beiden Wege etwa gleich lang sein? ... Das würde ja bedeuten, daß alle diagonalparallelen, einem Rechteck einbeschriebenen Vierecke die gleiche Länge 2d haben müßten, wenn wir den Grenzfall in Betracht ziehen!" „Und doch ist es wirklich so!" – Diesmal war es Hans, der die Anwendbarkeit der Ähnlichkeitssätze zuerst erkannt hatte. –
„Wir sehen sofort $l_1 : a_1 = l_2 : a_2 = d : (a_1 + a_2)$ ein. Daraus folgt
$l_1 = a_1 \cdot d/(a_1 + a_2)$ und
$l_2 = a_2 \cdot d/(a_1 + a_2)$, also
$l = l_1 + l_2 = (a_1 + a_2)d/(a_1 + a_2) = d$
Das gilt aber offensichtlich für jedes diagonalparallele Viereck dieser Art."
Jetzt war der Moment gekommen, wo die Jungen aus dem deutlichen Gefühl heraus, eine Entdeckung gemacht zu haben, dafür Anerkennung brauchten, und jetzt fiel ihr Blick in meine Richtung.
„Herr Hofmann, was meinen Sie zu unserer Entdeckung?" – sie hatten meinem Blick wohl die Gewißheit abgelesen, daß ich alles mit angehört hatte. Und ob ich nun wollte oder nicht, ich mußte meine Meinung sagen und war von nun an mitten im Disput. Ich hielt auch mit meinem Lob nicht hinter dem Berg. Weil aber Lehrer ‚natürlich' immer noch ein wenig klüger sein müssen, strengte ich mich an und konnte (zu meiner eigenen Verblüffung, ehrlich!) tatsächlich noch eins draufsetzen (**Abb. 3**).

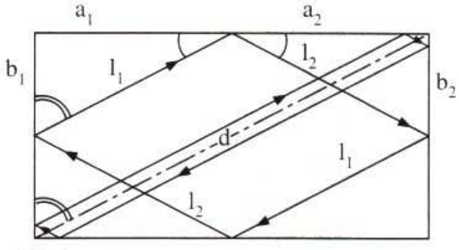


Abb. 2

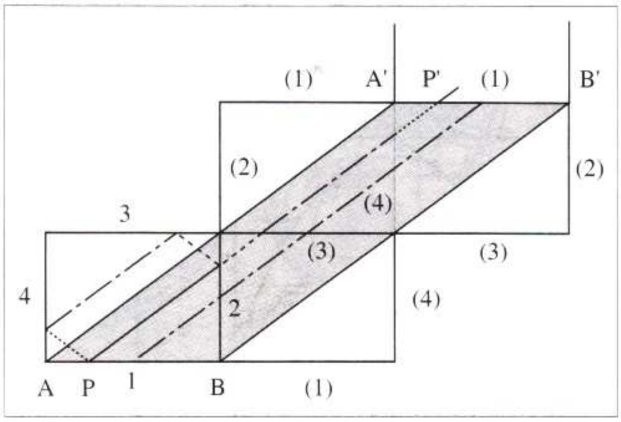


Abb. 3

„Seht her! Ich kann den geschlossenen ‚Spiegelweg' durch drei Spiegelungen, nacheinander an den Seiten ausgeführt, als gerade Strecke [PP'] darstellen. Weil $AB \parallel A'B'$ ist, kommt der Weg in P' unter dem gleichen Winkel an, unter dem er die Seite [AB] im Punkte P verläßt. Außerdem ist aber $\overline{AP} = \overline{A'P'}$.
Nun seht Ihr wohl auch ohne Rechnung sofort ein, daß **alle** diese Wege die gleiche Länge 2d besitzen müssen. Wir sehen aber sogar noch mehr: unsere ‚Reflexionswege' innerhalb des Rechteckes sind die einbeschriebenen Vierecke mit dem kleinstmöglichen Umfang!"
„Sie haben recht" – meldete sich Eberhard aus seinen Überlegungen zurück – „die gerade Strecke ist die kürzeste Verbindung der Punkte P und P'. Klaro!" Dies letzte Wort aber zeigte mir, daß er nun all' seine Gedanken anspannen würde, um wieder an die Spitze des unerklärten Wettstreites zu kommen.
Zunächst war es aber wieder einmal Hans, dem es zu langweilig wurde und der deshalb mit der Frage nach einem ‚Billard-Tisch mit allgemein viereckiger Grundfläche' kam!
Den hatten wir nicht, und nun mußten wir die Debatte wohl oder übel anhand von ‚Kreide-Physik' weiterführen. –
Warum wollen wir eigentlich alles allein machen? Diskutiert Ihr, liebe LeserInnen, doch selbst einmal die Frage, ob es in allgemeinen Vierecken einbeschriebene geschlossene ‚Reflexionswege' gibt und wie man sie gegebenenfalls beschreibt und konstruiert.
Wir berichten im nächsten Heft, wie unter uns der Disput weitergegangen ist.

Dr. habil. Reinhard Hofmann
Gymnasiallehrer für Mathematik, Mitglied des Redaktionskollegiums der alpha

Zeitungsschnipsel

Auch ein flüchtiger Zeitungsleser wird immer wieder auf Meldungen stoßen, die etwas mit Mathematik zu tun haben. Solche, aber auch Informationen, die wir allgemein interessant finden, sind hier aufgeführt. Wenn Ihr so einen Schnipsel findet, schneidet ihn doch bitte aus und sendet ihn an uns!
Vergeßt aber bitte nicht, die Quelle anzugeben!

Sparen und Teuerung

Ein Sparer hat einen Teil seines Sparguthabens als Festgeld mit dem jährlichen Zinssatz 6,75 % bei einer Bank angelegt.
Um wieviel Prozent ist der Realwert (Kaufwert) dieses Sparguthabens im Laufe des Jahres 1990 durch Zinsen und Inflationsrate gestiegen?
(siehe Abb. Geldwert in Gefahr)

Verkaufspraktiken

Der Sommerschlußverkauf ist schon wieder vergessen, wir haben noch ein Problem!

China-Teppich

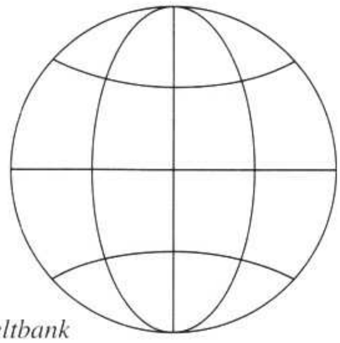
handgeknüpft, nach Dessins und Farben sortiert

Nahm bei den zum Sommerschlußverkauf angebotenen handgeknüpften Chinateppichen der Preis je Quadratmeter stets mit wachsender Teppichgröße (Flächeninhalt) ab?

ca.	*69 x 137 cm*	*249,–*
ca.	*91 x 152 cm*	*359,–*
ca.	*122 x 183 cm*	*499,–*
ca.	*183 x 274 cm*	*1298,–*

Symbolik der Weltbank

Sicher habt Ihr dieses Zeichen schon in einer Zeitung oder Zeitschrift gesehen. Es wird übrigens nicht nur von der Weltbank verwendet.

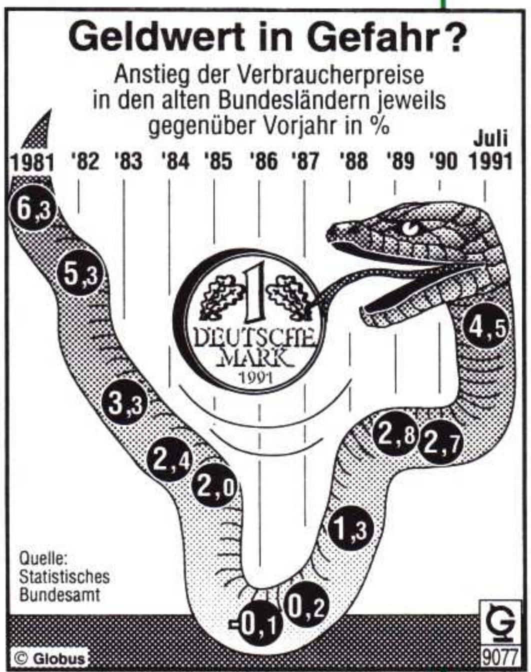


Weltbank

Die seit 1945 bestehende Weltbank IBRD (engl.: International Bank for Reconstruction and Development) fördert private Kapitalanlagen und hält ihre Mitgliedsländer zur Förderung des Welthandels und zu einer das Gleichgewicht ihrer Zahlungsbilanzen beachtenden Politik an.
Das Symbol der Weltbank umschließt 16 von Kreisbögen oder Stecken begrenzte Flächen, von denen keine zwei innere Punkte gemeinsam haben. Mit vier Farben sind diese 16 Flächen so zu färben, daß nie gleichgefärbte Flächen einen Randpunkt gemeinsam haben.

Sparen und Teuerung

Die *Hannoversche Allgemeine Zeitung* brachte unter der Überschrift *„Nur" 4,4 Prozent Teuerungsrate* folgende Übersicht:



Wie groß ist die Inflationsrate (Teuerungsrate) für die Lebenshaltung privater Haushalte im Jahre 1990 gegenüber dem Jahre 1980?

Ausblick auf Olympia

Welt am Sonntag berichtet unter dem Motto *Standpunkt*, daß nun endlich die seriöse Olympiawerbung für Berlin beginnen kann. Wir wollen uns hier nicht über Für und Wider der Austragung Olympischer Spiele im Jahr 2000 in Berlin streiten, sondern die olympische Symbolik unter die mathematische Lupe nehmen.
Die olympische Flagge wird seit der VII. Olympiade 1920 in Antwerpen gehißt. Sie besteht aus einem weißem Tuch mit fünf ineinander verschlungenen farbigen Ringen, die die fünf Erdteile symbolisieren. Diese Kreise begrenzen 9 Flächen, von denen keine zwei innere Punkte gemeinsam haben. Der Rand dieser Flächen wird von zwei oder drei Kreisbögen gebildet.
Trage in jede dieser 9 Flächen eine der natürlichen Zahlen von 1 bis 9 so ein, daß gilt: Die in jeder der vier von zwei kongruenten Kreisbögen begrenzten Flächen stehende Zahl ist die Summe der in den beiden angrenzenden Flächen stehenden Zahlen.

In den Zeitungen geblättert hat für Euch: Walter Träger aus Döbeln.

Über ein neues Fernrohr und seine Größe

Aus einer knappen Angabe kann manchmal erstaunlich viel berechnet werden. Ein Beispiel dafür möchte ich hier wiedergeben. Ich hörte eine kurze Meldung im Radio: "Für ein neues Fernrohr wird gerade der Spiegel hergestellt, und zwar wird die nötige Wölbung des Spiegels dadurch erzeugt, daß die Schmelze mit sehr gleichmäßigen sechs Umdrehungen pro Minute in Rotation gehalten wird." Ich fragte mich, was für ein Fernrohr das nun werden mag; speziell interessierte mich, was die einzige Zahlenangabe der Meldung bedeuten könnte. Es stellte sich heraus, daß man daraus tatsächlich die Länge des Fernrohrs berechnen kann. Wir wollen die entsprechende Rechnung hier nachvollziehen.

Vorbetrachtung

Wir haben nur eine Angabe, die Drehzahl n, nämlich n = 6U/min. Gesucht ist die Länge L des Fernrohrs. Da n die Einheit Umdrehungen pro Minute, also "Anzahl dividiert durch Zeit" hat, läßt sich daraus noch keine Länge bilden.

Kann man aus der Angabe, daß die nötige Wölbung eines Spiegels für ein neues Fernrohr durch eine mit sechs Umdrehungen pro Minute gleichmäßigen Schmelze erzeugt wird, die Länge des Fernrohrs berechnen?

Rein formal wäre natürlich der Ausdruck c/n (mit c als Lichtgeschwindigkeit, also c = 300 000 km/s) eine Länge, aber es gibt nicht den geringsten Anlaß, anzunehmen, daß bei diesem Problem die Größe der Lichtgeschwindigkeit eine Rolle spielen könnte. Was aber eine Rolle spielt, ist die Fallbeschleunigung g im Schwerefeld der Erde. Deren Größe beträgt g = 9,81 m/s². Eine kurze Rechnung zeigt, daß es genau eine Möglichkeit gibt, daß ein Produkt aus einer Potenz von n mit einer Potenz von g eine Länge bildet. Es handelt sich um den Ausdruck $Q = g/n^2$.

Beweis: Zunächst benutzen wir den Fakt, daß 60 Sekunden eine Minute bilden, also die Drehzahl auch als n = 0,1 U/s geschrieben werden kann. Wir setzen n in die a-te und g in die b-te Potenz und bilden das entsprechende Produkt: $n^a \cdot g^b$

Die Einheit dieses Produkts ist $5^{-a} \cdot m^b \cdot s^{-2b}$. Die Einheit des Produkts ist das Meter genau dann, wenn b = 1 und a = - 2 b = - 2 gilt.

Es liegt nun nahe, anzunehmen, daß dieser Ausdruck Q bis auf einen numerischen Faktor (der Größenordnung 1) gleich der gesuchten Länge L des Fernrohrs ist. Was ist damit gemeint? Es handelt sich hier um ein übliches Vorgehen, ähnlich dem Überschlag bei Rechenaufgaben: Bevor man das Problem im einzelnen behandelt, sucht man eine solche Kombination der Ausgangsdaten, so daß das Ergebnis die korrekte Einheit aufweist. Wenn die Einheit stimmt, kann also höchstens noch der Zahlenwert falsch sein, wenn dieser annähernd gleich 1 gesetzt wird.

Was hat das für unser Beispiel für Konsequenzen?

Es ist n = 6/min = 0,1 / s, also ist 1/n = 10 s, $1/n^2 = 100\ s^2$, also $Q = g/n^2 = 981$ m. Es ist nun offensichtlich unsinnig zu vermuten, daß ein Fernrohr von dieser Größe gebaut werden soll; denn das wäre ja größer als der größte Turm, und ein Fernrohr muß ja – anders als ein Turm – noch beweglich sein. Was haben wir also falsch gemacht? Um dies zu beantworten, wollen wir das Ganze jetzt etwas genauer herleiten.

Das Spiegelteleskop

Beginnen wir kurz mit einer Erläuterung, was ein Spiegelteleskop ist.

Auf dem Foto rechts ist ein Teleskop von 2 Meter Durchmesser abgebildet. Es gibt grundsätzlich zwei verschiedene Typen von Teleskopen: Reflektor (Spiegelteleskop) und Refraktor (Linsenfernrohr). Bei kleinen Teleskopen ist die Ausführung mittels Linsen verbreitet; große Linsen lassen sich dagegen kaum in geeigneter Qualität herstellen, so daß heute alle größeren Fernrohre als Spiegelteleskope ausgebildet sind: Der Spiegel ist so gekrümmt, daß das reflektierte Licht im Spiegelbrennpunkt konzentriert wird, also auch lichtschwache Objekte erkennbar werden. Wir gehen von einem Spiegel mit kleinem Durchmesser aus, so daß z. B. der Unterschied zwischen einem parabolischen und einem sphärischen Spiegel nicht berücksichtigt zu werden braucht. Wir rechnen nachfolgend mit einem sphärischen Spiegel, wie er sich z. B. auch im Innern des abgebildeten Teleskops befindet.

In **Abb. 1** ist ein Querschnitt durch den Spiegel skizziert, aus der die Bedeutung der Koordination r und h ersichtlich wird.

Die Spiegeloberfläche wird durch einen Kreisbogen vom Radius R beschrieben; der Mittelpunkt M des Kreises hat die Koordinaten (O, R). Wir bestimmen jetzt die Brennweite dieses Spiegels, vgl. dazu **Abb. 2**.

(Damit die Zeichnung übersichtlich wird, ist dort der Winkel α unrealistisch groß gezeichnet.) Ein aus dem Unendlichen (∞) kommender Lichtstrahl wird im Punkt A auf der Spiegeloberfläche reflektiert und trifft schließlich auf den Brennpunkt F. (Wir gehen davon aus, daß der Stern soweit entfernt ist, daß die von ihm eintreffenden Lichtstrahlen annähernd parallel sind, und dann spricht man üblicherweise von "Strahlen aus Unendlich").

Die Tangente t an die Spiegelfläche schließe mit der Abszisse (also der r-Achse) den Winkel α ein. Da der Radius $\overline{MA}$ senkrecht auf der Tangente in A steht, ergibt sich für den Winkel ∢ NMA ebenfalls der Wert α. Bei der

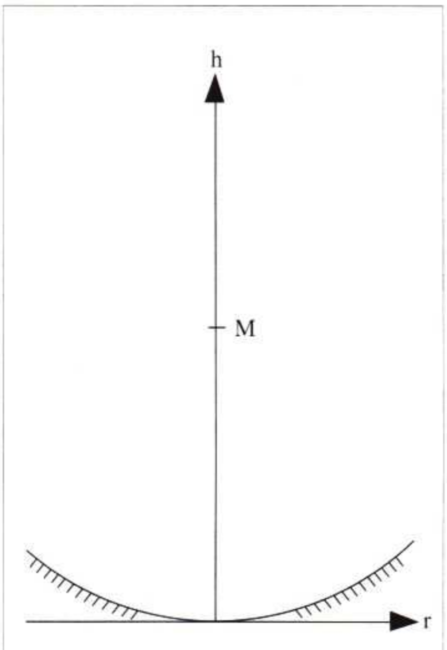


Abb. 1: Querschnitt durch den Spiegel

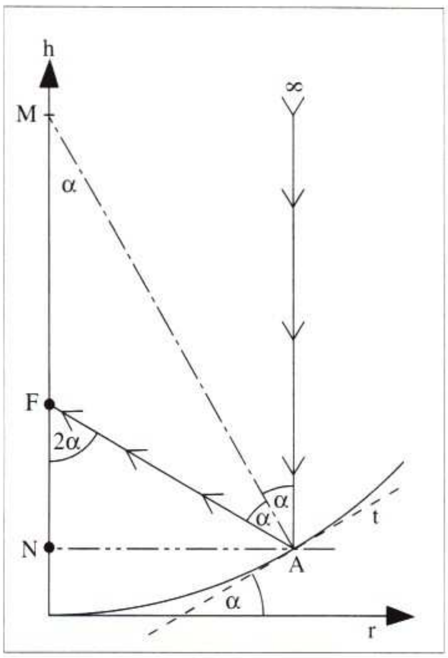


Abb. 2: Der Strahlengang zum Brennpunkt

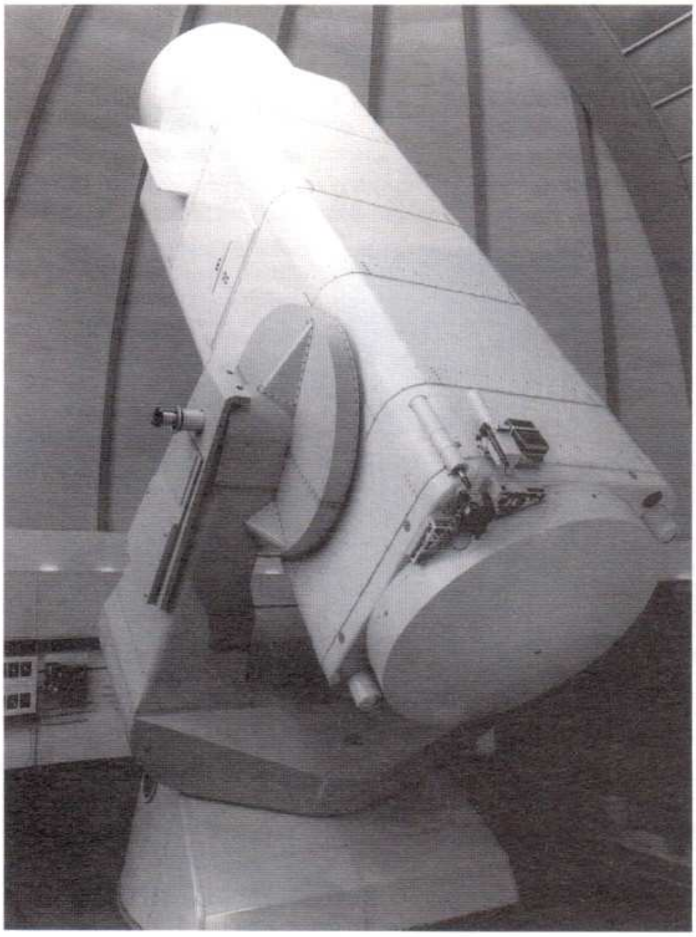


Foto: 2m - Universalspiegelteleskop des Karl-Schwarzschild-Observatoriums Tautenberg.

Aufnahme: ZIAP

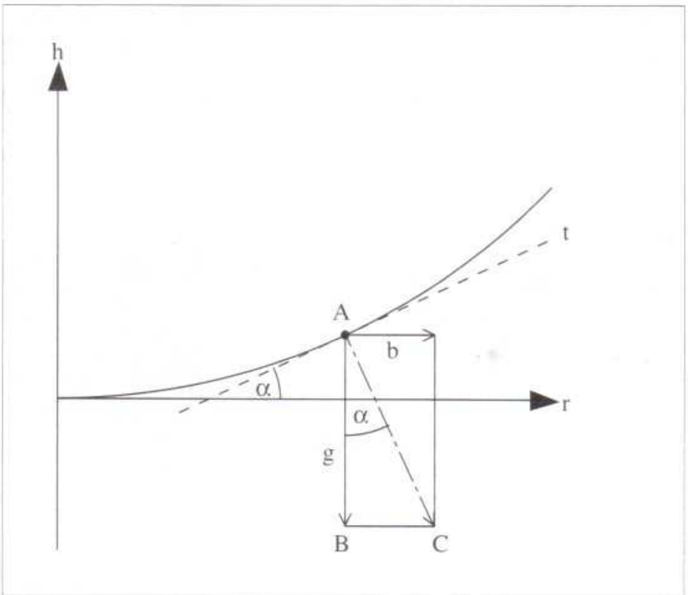


Abb. 3: Das Beschleunigungsparallelogramm

Reflexion sind Einfalls- und Ausfallswinkel einander gleich, hier also beide gleich α. Der einfallende Lichtstrahl ist parallel zur Ordinate (also der h-Achse), so daß sich schließlich der Brennpunkt F durch die Bedingung, daß der Winkel $\sphericalangle$ NFA der Wert 2α hat, lokalisieren läßt.

Ohne weitere astronomische Kenntnisse würde man jetzt davon ausgehen, daß die Länge eines Spiegelteleskops im Wesentlichen mit der Brennweite des Spiegels übereinstimmt. In der Tat ist dies auch annähernd der Fall, genauer ist es aber so, daß sich im Teleskop außer dem Spiegel noch eine sogenannte Korrektionsplatte befindet, die die Genauigkeit der Abbildung verbessert. Diese Platte befindet sich etwa im Krümmungsmittelpunkt des Spiegels, so daß der Krümmungsradius R mit der Gesamtlänge L des Teleskops übereinstimmt. Mit guter Näherung läßt sich also sagen, daß $L = \overline{MN}$ die Länge des Fernrohrs darstellt.

Die Rotationsgeschwindigkeit

Die Erdbeschleunigung g wirkt nach unten, die Zentrifugalbeschleunigung b nach außen, es gilt

$$b = \frac{v^2}{r} \qquad (1)$$

wobei v die Kreisbahngeschwindigkeit ist. Damit die Spiegelform wirklich wie gefordert entsteht, wenn der Spiegel bei der Schmelze in Rotation versetzt wird, muß die Resultierende aus b und g (vgl. Strich-Punkt-Linie in **Abb. 3**) auf der Spiegelfläche senkrecht stehen. Es gilt demnach $\sphericalangle BAC = \alpha$, woraus sich ergibt: Die Dreiecke $\Delta\, ABC$ und $\Delta\, MNA$ sind einander ähnlich, da sie rechtwinklig sind und einen Innenwinkel α haben. Es gilt deshalb die Proportion $\overline{MN} : \overline{NA} = \overline{AB} : \overline{BC}$,

also $L : r = g : b \quad (2)$

Für v erhalten wir $v = 2\,\pi\, r\, n$, so daß sich aus Formel (1)

$b = 4\,\pi^2\, r\, n^2 \qquad (3)$

errechnen läßt. Wir setzen Gleichung (3) in (2) ein, multiplizieren mit r und erhalten

$$L = \frac{g}{4\pi^2 n^2} \qquad (4)$$

Diskussion

Es ist

$$\frac{1}{4\pi^2} \approx 0{,}0253,$$

also mit der in Abschnitt 1 eingeführten Bezeichnung $Q = g/n^2$ ist Formel (4) als $L = 0{,}0253 \cdot Q$ schreibbar. Mit den obigen Werten erhält man dann $L \neq 24{,}80$ m, ein durchaus plausibler Wert. Wir sehen hier, daß die überschlagsmäßige Vorbetrachtung grundsätzlich das richtige Ergebnis lieferte, nur ist eben der Vorfaktor 0,0253 nicht von der Größenordnung 1. Es soll aber auch betont werden, daß solche Vorbetrachtungen in vielen Fällen verblüffend gute Ergebnisse liefern.

Was hier gezeigt werden sollte, ist, daß mitunter aus sehr wenig Angaben erstaunlich konkrete Ergebnisse errechnet werden können.

Dr. Hans-Jürgen Schmidt ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Astrophysik in Potsdam.

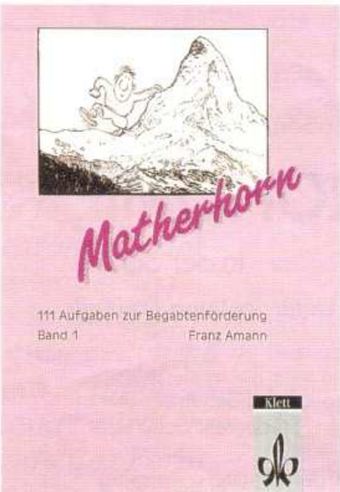
Bücher
Programme
Videos
Spiele

Die Marktecke

Lesens- und Sehenswertes vom Medienmarkt

Matherhorn

Jeder Band enthält 111 Aufgaben. Diese sind in 2 Blöcke – einen thematischen Block (Band 1 – Systematisches Probieren, Band 2 – Winkel am Kreis) und einen Block Vermischte Aufgaben – gegliedert.
Sehr hilfreich für einen raschen Überblick und zur Auswahl der Aufgaben sind die Klassifizierungshinweise vor jeder Aufgabe. Hier sind die Klassenstufe, der Schwierigkeitsgrad und Thementeilbereiche angegeben. In Stichworten sind die zur Lösung der Aufgabe notwendigen Kenntnisse aufgeführt.
Neben dem Aufgabenblock gibt es die jeweils voneinander getrennten Abschnitte "Lösungshinweise", die einen Einstieg in den Lösungsweg bieten, und "Lösungen".
Den Abschluß bietet ein umfassendes Register, das nach Klassenstufen getrennt ist und nach Teilgebieten geordnet die verwendeten Stichworte enthält.

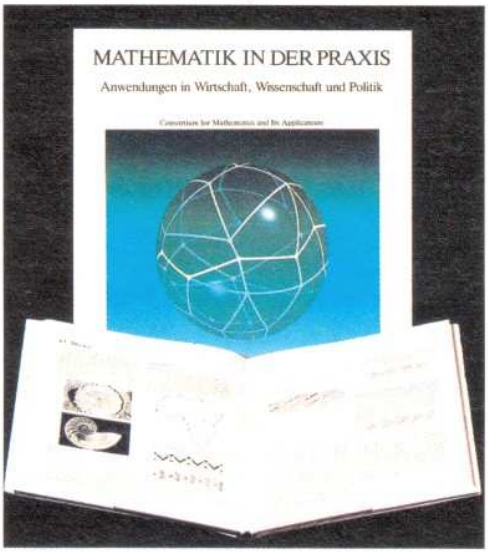


Franz Amann
Matherhorn
111 Aufgaben zur Begabtenförderung
Band 1: Kl. 5-8, Klettbuch 72211; DM 18,80
Band 2: Kl. 9/10, Klettbuch 72221; DM 18,80

Ein Buch sowohl für Erwachsene, als auch für Jugendliche.
Wer erst einmal angefangen hat, dem wird es so ergehen wie in dem vom Auto Franz Amann aufgeführten Zitat:
Die Mathematik ist eine Mausefalle.
Wer einmal in dieser Falle gefangen ist,
findet selten den Ausgang, der
zurück in seinen vormathematischen
Seelenzustand leitet.
Colerus, 1888 - 1939

Bauernschlau – Ein listenreiches Familienspiel

Die Idylle trügt. List und Bluff am laufenden Band sind die wesentlichen Elemente bei "Bauernschlau", dem gewitzten Familienspiel von Tom Schoeps, für 2 bis 6 Spieler ab 8 Jahren. Rings um die Höfe tobt der Streit um die besten Weiden. Schlaue Bauern, weiße und schwarze Schafe sowie der Bau von Zäunen führen zu einem spannenden Wettbewerb. Bluff, Tricks und ein gutes Gedächtnis bringen den Sieg.
Bauernschlau stammt aus dem ***Priener Spieleverlag F. X. Schmid*** und steht 1991 auf der Auswahlliste zum Spiel des Jahres.



Praxisnahe Mathematik

Mathematik hat heute eine ganz praktische Seite in Wirtschaft, Verwaltung und Politik – sei es nun bei Wahlstatistiken, Planungs- und Organisationsproblemen, wie sie etwa beim Flugbetrieb oder bei der Telefonvermittlung auftreten, oder auch bei der industriellen Produktion. Die Autoren stellen die fünf wichtigsten – und besonders faszinierenden – Forschungsgebiete der modernen Mathematik vor: Planungsforschung, Statistik, Auswahl – und Entscheidungstheorie, Form- und Musterbildung, Computerwissenschaft. "Mathematik in der Praxis" ist eine

Mit Kasparow zum Schachgipfel

Der Autor: Alexander Nikitin, 1935 in Moskau geboren, ist Hochfrequenz-Ingenieur. Während des Studiums vertrat er die UdSSR-Auswahl bei den Schach-Studenten-Weltmeisterschaften. 1973 wurde er überraschend zum Trainer der UdSSR-Nationalmannschaft berufen. Im gleichen Jahr entdeckte er bei einem Nachwuchsturnier in Vilnius den damals 10jährigen Garri Kasparow. Als Nikitins Trainerkarriere 1976 einen jähen Knick bekam, nutzte er konsequent die Gunst der Stunde und führte seine „Entdeckung" zum Schachgipfel. Nikitin hat gemeinsam mit seinem Schützling – ihre Wege trennten sich unmittelbar vor dem WM-Kampf 1990 – zahlreiche bemerkenswerte Schachbücher geschrieben. Der vorliegende Titel ist eine „Weltpremiere", denn über seine mehr als 15jährige Zusammenarbeit mit dem jüngsten Weltmeister der Schachgeschichte hat sich der Autor in der Öffentlichkeit niemals zuvor geäußert. Literatur über berühmte Schachspieler entsteht häufig aus „zweiter Hand", diese Biografie jedoch ist eine bemerkenswerte Ausnahme: Nikitin skizziert alle wichtigen Stationen seines Schützlings auf dem Weg zum Schachgipfel und bezieht die entscheidenden Partien aus den Jahren 1976 – 1990 mit ein. Dabei wird ein geradezu sensationelles Geheimnis gelüftet: warum nämlich ausgerechnet Alexander Nikitin sich das Ziel stellte, den Schachkometen aus Baku auf den Weltmeisterthron zu bringen.

Alexander Nikitin: Mit Kasparow zum Schachgipfel, Sport Verlag; 39, 80 DM
ISBN 3-328-00394-0

Lexikon bedeutender Mathematiker

Jegliche Geschichte wird von Personen gemacht. Daher tritt in der Geschichte von Wissenschaften neben das Interesse an der Entwicklung der fundamentalen Ideen das Interesse an den Personen, die diese Wissenschaftsentwicklung getragen haben. Dieses Lexikon spricht einen breiten Kreis von Nutzern an, zumal sich die Herausgeber bemühten, wo immer es ging, die mathematischen Leistungen mit Begriffen darzustellen, wie sie etwa auch im ***Lexikon der Mathematik*** oder in der ***Kleinen Enzyklopädie Mathematik*** des gleichen Verlages gefunden werden können.

Herausgegeben von Siegfried Gottwald, Hans-Joachim Ilgauds u. Karl-Heinz Schlote im Bibliographischen Institut, Leipzig. (ISBN 3-323-00319-5)

Gemeinschaftsleistung eines Teams aus dreizehn Autoren, die das Consortium for Mathematics and Its Applications (COMAP) für ein Buch- und Filmprojekt zusammengeholt hat, um Arbeitsweisen und Anwendungen der modernen Mathematik einer breiten Öffentlichkeit zugänglich zu machen. Außer dem Buch umfaßt das Projekt eine Filmserie, die als zweiteilige Kurzfassung in der Spektrum-Videothek erschienen ist.

Mathematik in der Praxis
Anwendungen in Wirtschaft, Wissenschaft und Politik
Spektrum der Wissenschaft
296 Seiten, ISBN 3-89330-697-8
DM 78,-/sfr 72,-/öS 608,-

Ziel 2000

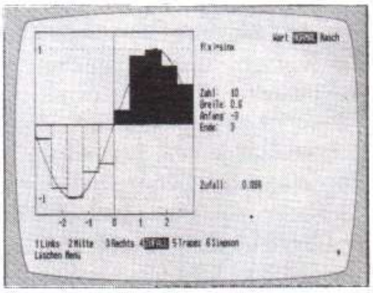
mit mathematischen Termen spielen

Bei diesem spannenden, bunten „Brettspiel" wird nicht gewürfelt. Ziel 2000 nennt Zufallszahlen, mit denen der Spieler einen mathematischen Term formuliert. Das Ergebnis bestimmt dann den nächsten Zug auf dem Spielplan: einem Zahlenstrahl als Straßenkarte, mit Abzweigungen und Städten.
Das Programm läuft auf PC mit MS-DOS ab Version 3.3, 640 KB Hauptspeicher und Grafikkarte (Herkules, EGA, VGA). ***88,– DM.***

Graphix

der universelle Funktionsplotter

Mit Graphix kann man Funktionen – auch komplizierte wie Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung ... – zeichnen und experimentell untersuchen: Berechnung von Flächeninhalten, Nullstellen, Taylor Polynome, ...



Für Graphix braucht man einen PC mit MS-DOS ab 3.2, 512 KB Hauptspeicher u. Grafikkarte (Hercules, CGA, EGA, VGA). ***168,– DM.***

Beide Programme erscheinen bei ***CoMet Verlag für Unterrichtssoftware in Duisburg,*** Bestellungen bitte an: ***Cornelsen Verlagsgesellschaft, Postfach 8729, 4800 Bielefeld.***
Die Preise gelten für Schulen, SchülerInnen, StudentInnen und Studenten.

Klausur- und Abiturtraining

Eine Buchreihe des ***Aulis Verlag Deubner & Co KG*** zur gezielten Vorbereitung auf Klausuren und das Abitur, die sich an alle Schüler der gymnasialen Oberstufe wendet. Anhand zahlreicher Musteraufgaben

wird der Schüler über viele Denkanstöße, Bemerkungen oder ausführliche Hilfestellungen zu ihrer Lösung geführt, um anschließend weitere Übungsaufgaben selbständig lösen zu können. Die Musteraufgaben enthalten typische Aufgabenstellungen, so wie sie in Klausuren, Tests oder in der Abiturprüfung verwendet werden. Für die Mathematik sind bisher erschienen:

- ***Band 1: Grundkurse Analysis: Funktionsuntersuchungen***
- ***Band 2: Grundkurse Analysis: Extremwertaufgaben***
- ***Band 3: Grundkurse Analysis: Integralrechnung***
- ***Band 7: Grundkurse Stochastik: Binomial- und Normalverteilung***

Jeder Band kostet 19,80 DM. In dieser Reihe sind auch Bände zur Chemie, Biologie und Physik erschienen.

Lösungen

• Weihnachtsgrüße

Angewandter Code: Vokale bleiben fest, und Konsonanten werden durch den im Alphabet rechten Nachbarkonsonanten ersetzt; bei der Rückübersetzung durch den linken Nachbarkonsonanten. Der Gruß lautet folglich:

WIR WÜNSCHEN ALLEN ALPHALESERN EIN FROHES WEIHNACHTSFEST SOWIE EIN GESUNDES UND ERFOLGREICHES NEUES JAHR!

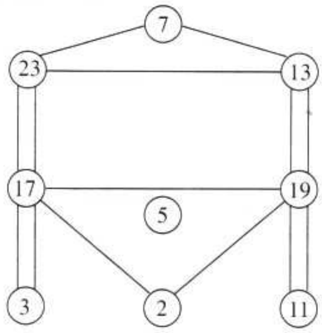
• Erstaunlich viele Weihnachtsgeschenke

Durch Verwendung der Konstantenautomatik eines Taschenrechners erhalten wir
19 [+] 91 [=] [=] [=] ... [=] 1020.
Diese Zahl ist die kleinste vierstellige, die die erste Bedingung erfüllt, nicht aber die zweite. Der nächste Druck auf die Gleichtaste liefert 1111, eine richtige Lösung des Rätsels.
Da 19 und 91 teilerfremd sind, ist jede weitere mögliche Lösung um $19 \cdot 91 = 1729$ größer, also gleich 2840, 4569 usw. Eine Ziffer 1 tritt jedoch bei den vierstelligen Zahlen nicht mehr auf, so daß das mathematische Problem eindeutig lösbar ist. Die Deutung allerdings bleibt im weihnachtlichen Schneegestöber verborgen. Erhielt obendrein jeder der vier Freunde nur ein Geschenk?

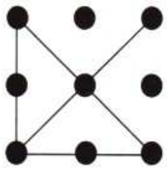
• Die Magie der Weihnachtssterne

Man ersetze einfach jede der 13 Zahlen durch ihre Ergänzung zu 14. Die magische Summe beträgt dann 29.

• Alle zu Haus



• Zum Knobeln



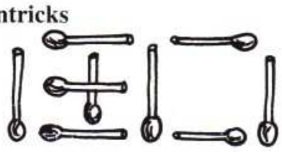
• Übereinstimmung

Die Jahre, in denen Jan und Norbert an gleichen Wochentagen Geburtstag hatten, sind entweder alle aufeinanderfolgende Schaltjahre (1. Fall) oder aufeinanderfolgende Normaljahre (2. Fall). Im 1. Fall wären dies die Schaltjahre $1992 - 4n$ mit $1 \leq n \leq 22$ und $1900 - 4m$ mit $1 \leq m \leq 21$, denn 1900 ist kein Schaltjahr. Ihren ersten Geburtstag hätten beide entweder $1900 - 4 \cdot 21 = 1816$, 1815, 1814 oder 1813 gehabt. Beide wären Ende 1991 mindestens $1991 - 1816 - 1 = 176$ Jahre alt. Wegen des hohen Alters scheidet dieser Fall aus. Im 2. Fall wären diese Jahre die Normaljahre $1991 - 4n$, $1990 - 4n$ und $1989 - 4n$ mit jeweils $0 \leq n \leq 13$ sowie $1991 - 4 \cdot 14 = 1935$. Jan und Norbert wurden 1934 geboren, und da 1934 ein Normaljahr ist, wurden beiden auch am gleichen Wochentag geboren.

• Ohne Fleiß kein Preis

$1260 = 60 \cdot 21$, $1530 = 30 \cdot 51$

• Hölzchentricks



• Verschlüsselter Weihnachtswunsch

Da in mindestens einem Eckfeld von zwei gegenüberliegenden Eckfeldern der Anfangs- oder Schlußbuchstabe eines Wortes stehen muß, tragen mindestens zwei der vier Eckfelder Anfangs- oder Schlußbuchstaben der Lösungsworte. Bernds Wünsche sind: Schneeschuhe, Ball.

3 H	6 E	III L	12 E
IV L	9 H	4 N	7 S
5 E	2 C	11 H	II A
10 U	I B	8 C	1 S

• Mathematische Fahndung

Tangente, Sehne, Sekante, Multiplikation, Summe, Minuend, Division, Quadrieren, Radizieren, Quotient, Pyramidenstumpf, Diagonale, Geometrie

• Den alten Römern auf die ~~Fi~~ Zahlen geschaut

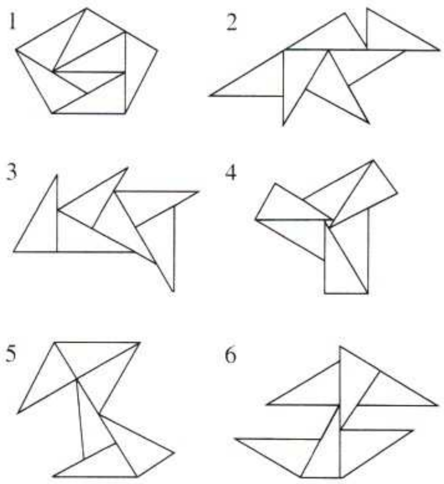
1. VIII = 8, XII = 12, CX = 110, DC = 600, CXL = 140, CM = 900, XL = 40, XIX = 19, MCCC = 1300, LIX = 59

2. 7 = VII, 13 = XIII, 45 = VL, 101 = CI, 450 = LD, 543 = DXLIII, 333 = CCCXXXIII, 876 = DCCCLXXVI, 999 = IM

3. Schiller : 1759 - 1805
   Goethe : 1749 - 1832
   Kant : 1724 - 1804
   Galilei : 1564 - 1642
   Friedrich der Große: 1712 - 1786

4. 1674, in dieser Burg hat keiner der fünf Herren gewohnt.

• Verhextes Hexagramm

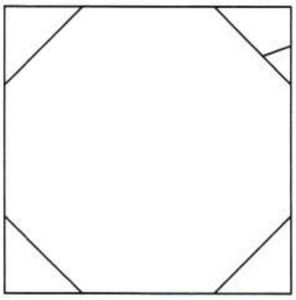


• Sprachecke

Ein quadratisches Stück Papier wurde in 16 Stückchen von der Form konvexer Vielecke zerschnitten.
5 Teilstückchen gingen verloren, übrig bleib ein Teilstück in Form eines regelmäßigen Achtecks. Kann man allein nach diesem Achteck das Ausgangsquadrat rekonstruieren?

Lösung:
Man kann das ursprüngliche Quadrat rekonstruieren. Da die verlorengegangenen Teile konvex sind, kann keines von ihnen gleichzeitig mit zwei verschiedenen Seiten des Achtecks Punkte gemeinsam haben. Deshalb kann die Anzahl der verlorenen Teile nicht geringer

sein als die Anzahl jener Seiten des Achtecks, die nicht in die Begrenzung des Papiers fallen; das heißt, nicht weniger als drei Seiten des Achtecks fallen in die Papierbegrenzung. Da aber das Papierblatt quadratisch ist, sind diese Seiten paarweise zueinander parallel oder senkrecht, das heißt, es sind dies jene drei Seiten des Achtecks, welche mit einer anderen dazwischenliegenden Seite aufeinander folgen.
Somit wird unser Quadrat aus dem Achteck durch Anfügen von vier Eckstücken des Papiers gebildet; im einzelnen fallen genau vier Seiten des Achtecks in die Papierbegrenzung. Da aber fünf Teile verloren gingen, folgt, daß noch ein Eckstück in genau zwei Teile zerschnitten wurde.



Der Fleck des Schiffsjungen
Der Schiffsjunge hat einen Fleck in das Bordbuch des Kapitäns gemacht. Auf einer Seite hat der Kapitän die Kosten für die Rechnung von 36 Kerzen aufgeschrieben, die er anläßlich des letzten Landganges gekauft hatte. Für die Gesamtsumme liest man jetzt: ? 7, 4 ? DM. Die Fragezeichen kennzeichnen die Stellen, die durch die Flecken des Schiffsjungen entstanden sind.
Bestimmt den Preis einer Kerze, von dem man weiß, daß er unter 2 DM liegt!

Lösung:
Eine Kerze kostet 1,04 DM, d. h. die Rechnung beläuft sich auf 37,44 DM.

Für Heiligabend
In der Aufgabe müssen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß eine richtige Additionsaufgabe entsteht.

Lösung:
B = 1, N = 9, E = 8, 0 = 3, 1 = 7, S = 4, also

$$\begin{array}{r} 9387 \\ +\ 9387 \\ \hline 18774 \end{array}$$

• Die geometrische Struktur der Westrose der Kathedrale von Chartres

Siehe nebenstehende Abb. 1.

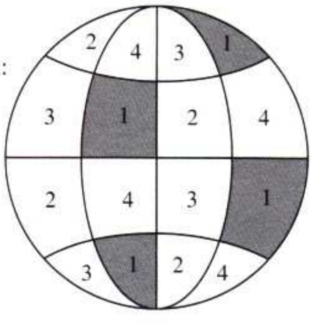
• Sommerschlußverkauf

Nein, denn es gilt:

Preis	Flächeninhalt	Preis je m²
499 DM	2,2m²	223,51 DM/m²
1298 DM	5,0m²	258,86 DM/m²

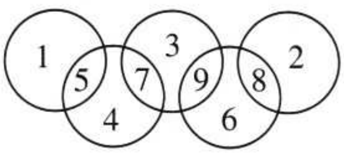
• Weltbank

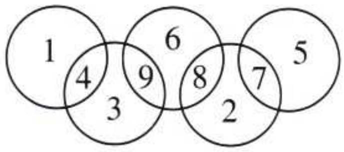
Zum Beispiel:
1 = grün,
2 = rot,
3 = blau,
4 = gelb



Weltbank

• Olympische Ringe





Zwei weitere Lösungen entstehen aus den angegebenen durch Spiegelung an der Symmetrieachse der aus den fünf Kreisen bestehenden Figur.

• „Nur" 4,4 Prozent

Die Preise kletterten von 1980 bis 1990 auf $P_{1990} = P_{1980} \cdot 1{,}063 \cdot 1{,}053 \cdot 1{,}033 \cdot 1{,}024 \cdot 1{,}020 \cdot 0{,}999 \cdot 1{,}002 \cdot 1{,}013 \cdot 1{,}028 \cdot 1{,}027$ $= P_{1980} \cdot 1{,}293$
Die Inflationsrate (Preisanstieg) von 1980 bis 1990 beträgt 29,3 %.
Das Sparguthaben K am Jahresbeginn 1990 wächst im Laufe des Jahres 1990 auf $K \cdot 1{,}0675$ und die Preise P steigen von P auf $P \cdot 1{,}027$. Mithin wächst der Kaufwert dieses Sparguthabens von K auf

$$K \cdot \frac{1{,}0675}{1{,}027} \approx K\ 1{,}039.$$

Der Realwert dieses Sparguthabens ist im Laufe des Jahres 1990 um 3,9 % gestiegen.

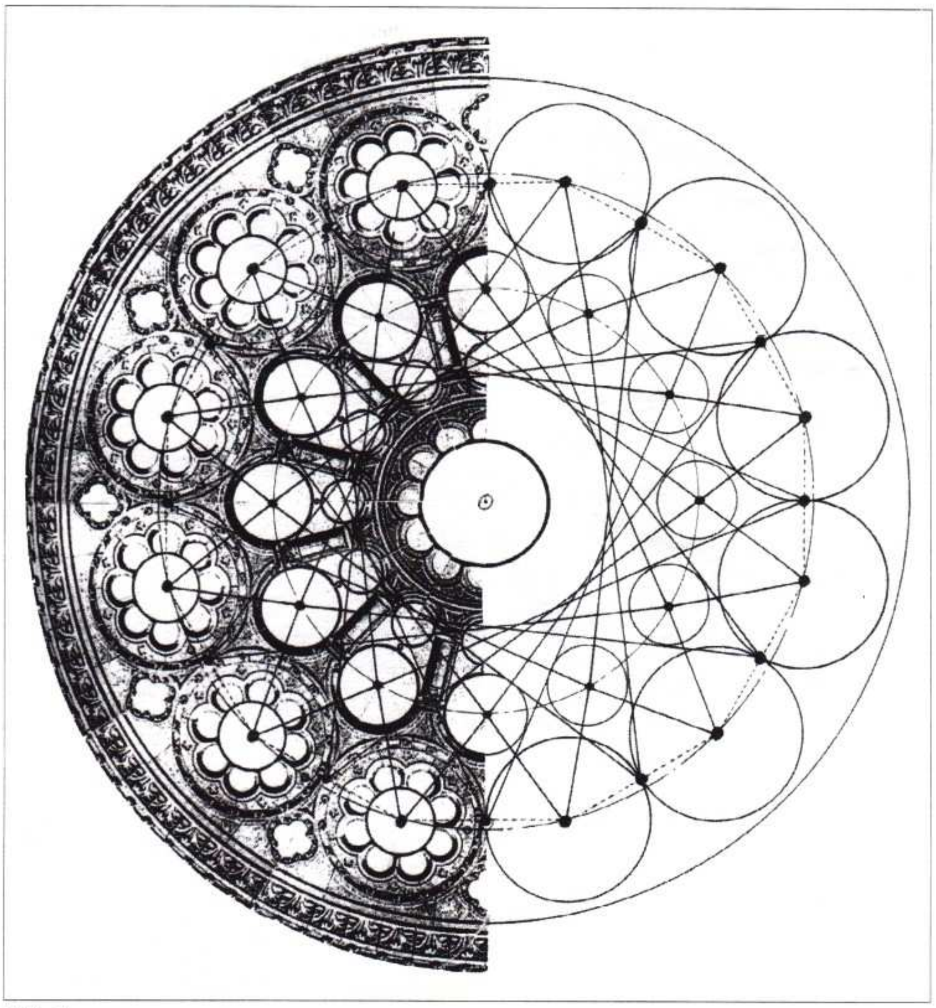
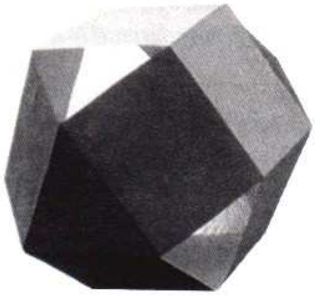
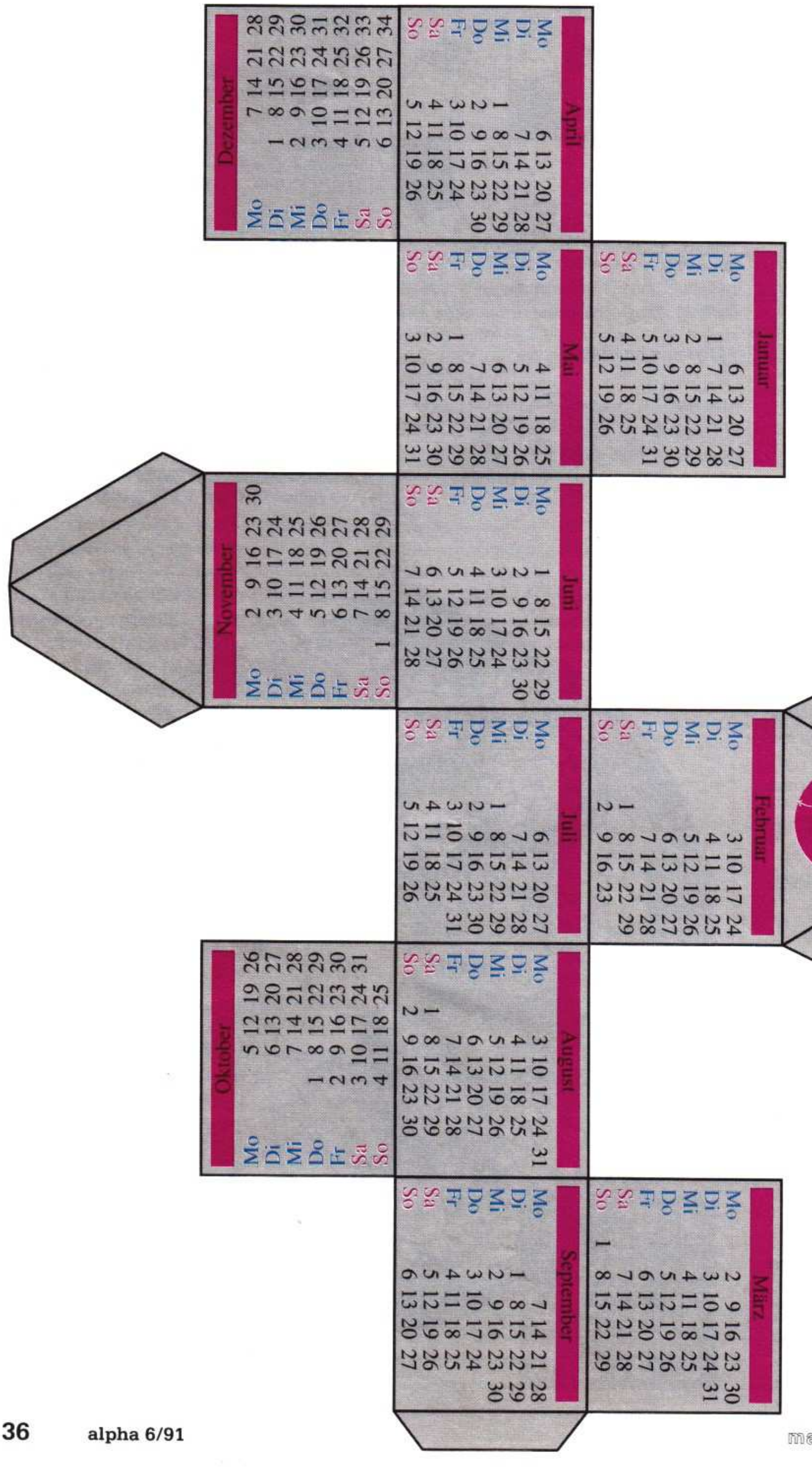


Abb. 1

alpha-Bastelkalender mit Durchblick

Die Idee zu diesem Kalender entnahmen wir der Zeitschrift **matheplus**, verlegt vom Bibliographischen Institut Mannheim, herausgegeben von OStD Eberhard Oettinger, die 1987 nach drei Jahren aus wirtschaftlichen Gründen ihr Erscheinen einstellen mußte.





ISBN 3-617-34006-7 Einzelpreis: 2,50 DM Einzelpreis im Abo: 2,00 DM