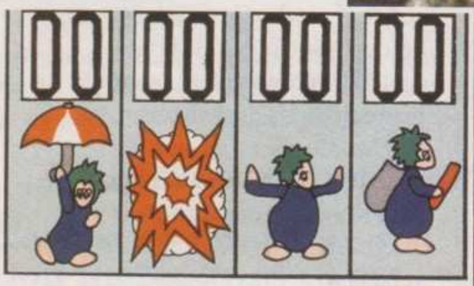
H 11328 F

Heft 1
Februar 1992
26. Jahrgang

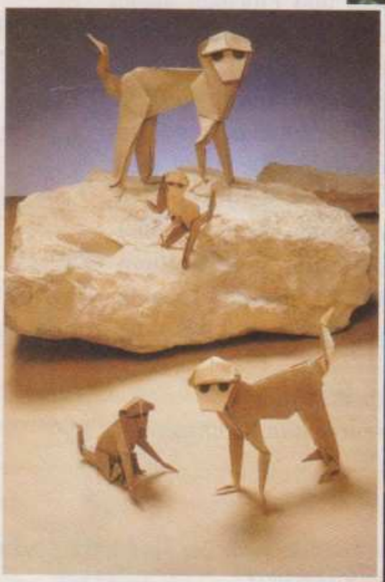
Fachzeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

alpha

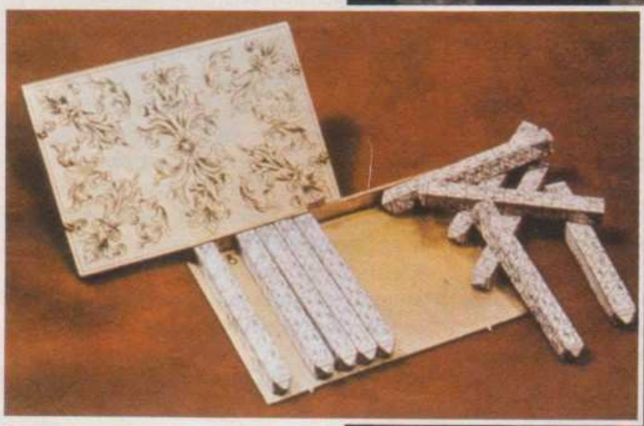
Mathematische Schülerzeitschrift



Lemmings



Origami



Nepersche Rechenstäbchen

Sommerschule Junger Mathematiker

Wilhelm Weber zu Gauß:

„Carl-Friedrich, jetzt haste lange genug gesessen, hier haste ´nen Zehner, ich bin dran!"

So oder ähnlich könnte das Gespräch der beiden Göttinger Wissenschaftler verlaufen sein, wenn man dem Bild Glauben schenken würde. Echt ist nur der neue 10,– DM Schein, der mit dem Konterfei des Carl-Friedrich Gauß (1777 – 1855) versehen ist. Eine Ehrung, die der Mathematiker, Astronom, Geodät und Physiker sicher verdient hat, sind doch rund 50 mathematische Gesetze, Lehrsätze, Formeln und Methoden nach ihm benannt. Das Gauß-Weber Denkmal steht übrigens am Göttinger Wall, unweit von dem mathematischen Institut und der Sternwarte, dessen erster Direktor Gauß war.

Text und Foto:
B. Beuermann, Göttingen

alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett.

Redaktion:
Dr. Gabriele Liebau, Tel. (Leipzig) 58 18 54, PSF 129, Leipzig, O-7010

Anzeigenleitung: Bernd Schrader
Anzeigenabwicklung:
Telefon (05 11) 4 00 04-23
Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01.01.1990
Vertrieb und Abonnement:
Telefon (05 11) 4 00 04-50
Verlag:
Erhard Friedrich Verlag
GmbH & Co. KG,
Postfach 10 01 50, 3016 Seelze 6
Telefon (05 11) 4 00 04-0
Telefax: 4 00 04-19
Das Jahresabonnement für alpha besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt DM 12,00, im Einzelbezug DM 2,50. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten.
Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).
alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV Klett Cotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, CH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.

Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschrift im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.
Herstellung: Pädagogika Zentrale
Druck: Druckerei Schröer, Seelze
ISBN 3-617-34007-5

Inhaltsverzeichnis

Der Druckfehlerteufel schlug zu in Heft 6/91. Wir bitten folgende Korrekturen zu beachten:
S. 30, 1. Spalte, 3. Zeile v. u.:
statt „5" lies „s",
S. 31, 2. Spalte, 8. Zeile v. u.:
statt „=" lies „≈".

Richtigstellung
Bedauerlicherweise enthielt das uns zugesandte Material zur 4. Stufe der XXX. OJM (alpha Heft 5/91, Seite 29) einen Fehler. Der Preisträger *Marco Schlichting* besuchte zu diesem Zeitpunkt nicht, wie abgedruckt, die C.-F.-Gauß-Schule in Frankfurt/O., sondern die *Weinbergschule in Kleinmachnow*.

Die Konkurrenz der Gummibärchen

Eine Plauderei über Unternehmensstrategien

Wir wollen gemeinsam den Einstieg in einige mathematisch gut beschreibbare Zusammenhänge der Marktwirtschaft versuchen. Dazu ist es wie in vielen Fällen zunächst günstig, die aus der Praxis kommenden Aufgaben so zu vereinfachen, daß die Zusammenhänge klar und übersichtlich werden. Aus diesem Grund wollen wir hier einen Markt untersuchen, welcher lediglich zwei Produzenten umfaßt und von außen unbeeinflußt ist.

Genau diese Situation liegt in dem kleinen Städtchen Ökonohausen vor, wo die beiden Süßwarenfabrikanten Köhler und Hoffmann miteinander konkurrieren. Außer den gelben Köhlerschen Gummibären und den Hoffmannschen grünen Gummifröschen gibt es nichts Vergleichbares in den Läden zu kaufen, und beide Artikel sind auch sehr beliebt bei der jüngeren Bevölkerung.

Da das Taschengeld aber immer knapp ist, hängt die gekaufte Menge, d. h. die Nachfrage nach Gummitierchen, sehr vom Preis ab, zu dem die Süßigkeiten angeboten werden. Im Ergebnis von Testkäufen zu unterschiedlichen Preisen sowie von Befragungen zum eventuellen Kaufverhalten gelang es den zwei Produzenten, diesen Zusammenhang durch die Gleichungen

$x_1=4-2p_1+p_2$ und (1)
$x_2=6+p_1-p_2$ (2)

zu beschreiben. Dabei bezeichnen x_1 und x_2 die pro Monat in Ökonohausen gekauften Mengen, p_1 und p_2 die Preise (je Tüte) der Gummibärchen bzw. -frösche. Die durch die Gleichungen gegebenen Funktionen $x_i=f(p_1,p_2)$ heißen Nachfragefunktionen, denn für gegebene Preise kann die Nachfrage (gekaufte Menge) direkt ermittelt werden. Der beschriebene Sachverhalt ist dabei ganz natürlich, denn: Sinkt der Preis des eigenen Produkts, wächst die Nachfrage nach diesem, sinkt der Preis des Konkurrenzprodukts, verringert sich die Nachfrage und umgekehrt.

Wir setzen dabei voraus, daß in Ökonohausen obige Nachfragefunktionen exakt gelten. Dies ist eine weitere Vereinfachung der Problematik, denn in der Realität besitzen Nachfragefunktionen kompliziertere Strukturen, deren exakte Ermittlung oft nicht möglich ist. Die erforderliche Verwendung von Näherungen hat dann zur Folge, daß die in der Praxis erzielten Ergebnisse ebenfalls "nur" Näherungscharakter tragen.

Auf die Angabe von Maßeinheiten verzichten wir der Kürze wegen, doch wer will, kann z. B. "DM" für p_i und "1000 Stck." für x_i verwenden. Die Koeffizienten hätten demzufolge die Einheit "1000 Stck./DM".

Außerdem seien die bei der Produktion der Gummitierchen entstehenden Kosten als Funktionen der nachgefragten Mengen bekannt (Kostenfunktionen):

$K_1=1+2x_1$ (bei Fabrikant Köhler), (3)
$K_2=2+x_2$ (bei Fabrikant Hoffmann). (4)

Fabrikant Köhler (im weiteren F_1 genannt) kann nur den Preis p_1 beeinflussen, während Unternehmer Hoffmann (F_2) nur p_2 festlegen kann. Die Festlegung des jeweiligen Preises geschieht dabei in Abhängigkeit vom Preis des Konkurrenzproduktes oder auch nach eigenem Gutdünken (aktive Preispolitik).

Wir wollen untersuchen, wie die Preisfestlegung (z. B. bei F_2) erfolgen muß, damit der eigene Gewinn so groß wie möglich wird, wie beide Konkurrenten durch illegale Preisabsprachen ihren Gewinn vergrößern können und welcher Gewinn bei einer Verschmelzung beider Firmen (Monopol) entstände.

Welche mathematischen Kenntnisse werden benötigt?

Erstens müssen wir in der Lage sein, eine Gerade in ein Koordinatensystem einzuzeichnen, z. B. die Gerade $p_2=2p_1-4$ in ein p_1,p_2-Koordinatensystem (Abb. 1).

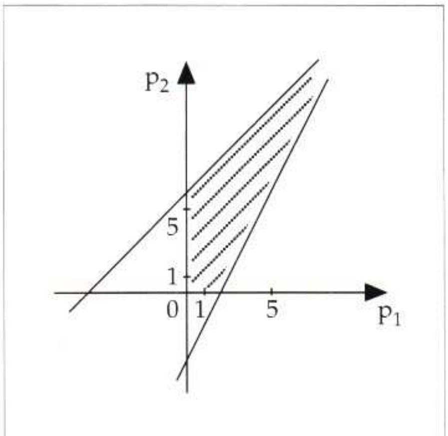


Abb. 1

Für alle Preispaare (p_1,p_2) die auf dieser Geraden liegen, gilt nämlich aufgrund der dazugehörenden Nachfragefunktion $x_1 = 0$.

Zweitens benötigen wir die Menge der "sinnvollen" Punkte in der p_1,p_2-Ebene. In bezug auf x_1 sind dies alle Preispaare, für die $x_1 \geq 0$, d. h. $4-2p_1+p_2 \geq 0$ gilt. Da das Paar $(p_1,p_2) = (0,0)$ diese Beziehung offensichtlich erfüllt, erfüllen alle Punkte der durch die Gerade $p_2=2p_1-4$ erzeugten Halbebene, in der (0,0) liegt, die betrachtete Ungleichung (vgl. den Artikel von B. Luderer in alpha 5/90).

In Abb. 1 ist die Menge der "sinnvollen" Punkte, d. h. die Menge derjenigen Preispaare hervorgehoben, für die gilt:

$x_1=4-2p_1+p_2 \geq 0$, $x_2=6+p_1-p_2 \geq 0$, $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$. Drittens schließlich müssen wir den größten Wert (Maximum) einer quadratischen Funktion $f(x)=-ax^2-bx-c$ $(a>0)$ bestimmen können, welcher jedoch im Scheitel $S=\left(-\frac{b}{2a}, \frac{b^2}{4a}-c\right)$ angenommen wird.

Welche ökonomischen Kenntnisse werden benötigt?

Wir benötigen, nachdem die Nachfrage- und Kostenfunktionen bereits eingeführt sind, außerdem noch beide Umsatzfunktionen und beide Gewinnfunktionen. Dabei gilt generell:

Umsatz = verkaufte Menge · Preis,
Gewinn = Umsatz – Kosten.

Konkret bedeutet das also:

$U_1=x_1p_1$, $G_1 = U_1-K_1$ für Unternehmer F_1 und
$U_2=x_2p_2$, $G_2 = U_2-K_2$ für F_2.

Zu bemerken wäre, daß je nach Betrachtungsweise bestimmte Größen (z. B. p_1) als fixiert gelten, so daß z. B. x_2 sowohl eine Funktion von p_1 und p_2, als auch eine Funktion von nur p_2 sein kann. Nunmehr sind wir gerüstet, verschiedene marktwirtschaftliche Strategien anhand der Betrachtung des Ökonohausener Gummitierchenmarktes genauer zu diskutieren.

Gewinnmaximierung

Die Maximierung seines Gewinns ist für jeden Unternehmer eines seiner natürlichen Ziele. Wir unterstellen beiden Fabrikanten eine solche Verhaltensweise und versetzen uns in die Lage von F_2. Angenommen, F_1 hat seine Preisentscheidung p_1 bereits getroffen. Dann ist für F_2 der Preis p_1 eine gegebene Größe, die er nicht beeinflussen kann. Er wird deshalb den Preis p_2 so festlegen, daß dieser Lösung der Extremwertaufgabe

$G_2(p_2) \to \max$, $p_2 \geq 0$

ist. (Die Beziehung $G_2(p_2)$ beschreibt hier den Gewinn von F_2 als Funktion des Preises p_2.) Unter Verwendung von (2) und (4) erhält man

$$G_2(p_2)=U_2(p_2)-K_2(p_2)=x_2(p_2)p_2-K_2(p_2)$$
$$=6p_2-p_2^2+p_1p_2-(2+6-p_2+p_1)$$
$$=-p_2^2-(-p_1-7)p_2-(p_1+8).$$

Der maximale Wert von $G_2(p_2)$ wird für

$$(p_2)_{\max}=\frac{1}{2}(p_1+7) \qquad (6)$$

angenommen. Die Größe $(p_2)_{\max}$ ist positiv, da $p_1 \geq 0$ gilt. Auf analoge Weise nutzt F_1, sofern

F_2 seinen Preis p_2 festgelegt hat, die Aufgabe
$G_1(p_1) \rightarrow \max,\ p_1 \geq 0$
zur Ermittlung seines gewinnoptimalen Preises p_1, wobei nach (1) und (3)

$$G_1(p_1) = -2p_1^2 - (-p_2 - 8)p_1 - (2p_2 + 9) \qquad (7)$$

$$(p_1)_{\max} = \frac{1}{4}(p_2 + 8) \qquad (8)$$

gilt. Die Beziehungen (6) und (8) bzw. ihre geometrischen Darstellungen (Abb. 2)

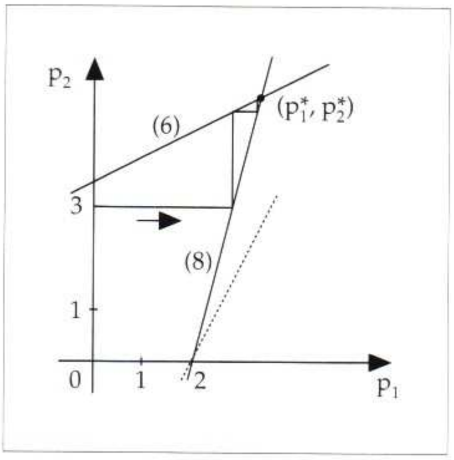


Abb. 2

werden Preisreaktionsgeraden genannt. Sie beschreiben die optimale Wahl des eigenen Preises bei vorgegebenem Preis des Konkurrenzproduktes. Hat also F_1 eine Wahl p_1 getroffen, so muß F_2, um seinen Gewinn zu maximieren, seinen Preis p_2 so festlegen, daß (p_1, p_2) auf der Geraden (6) liegt.
Beide Preisreaktionsgeraden schneiden sich im Punkt

$$\left(p_1^*, p_2^*\right) = \left(\frac{23}{7}, \frac{36}{7}\right).$$

Überprüft dies! Überprüft auch, daß sich für (p_1^*, p_2^*) gemäß (5) und (7) die Gewinne $G_1 = 2{,}31$ und $G_2 = 15{,}16$ ergeben.
Im Punkt (p_1^*, p_2^*) liegt ein Marktgleichgewicht vor, denn beide Konkurrenten haben in diesem Punkt kein Interesse an Preiserhöhungen und Preissenkungen (Strategie der Gewinnmaximierung vorausgesetzt). Außerdem wirken die betrachteten marktwirtschaftlichen Zusammenhänge in solcher Weise auf die Konkurrenten, daß sich die aktuellen Preise mit fortschreitender Zeit den Gleichgewichtspreisen nähern.
Wie das geschieht, zeigt folgendes Beispiel: Wählt F_2 einen anderen Preis, etwa $p_2 = 3$, für seine grünen Gummifrösche, so verkauft F_1 entsprechend (8) zum Preis $p_1 = 2{,}75$. Die Gewinne betragen hier $G_1 = 0{,}125$ und $G_2 = 9{,}5$ und sind somit beide niedriger als im Gleichgewichtspunkt. F_2 wird deshalb schnell auf seine Gerade (6) zurückkehren, was zu $p_2 = 4{,}88$ $(p_1 = 2{,}75)$ führt.
Nun wählt F_1 entsprechend (8) $p_1 = 3{,}22$, F_2 nimmt $p_2 = 5{,}11$ usw. In Abb. 2 erkennen wir, daß sich diese Punktfolge immer mehr dem Punkt (p_1^*, p_2^*) nähert oder, wie man sagt, gegen (p_1^*, p_2^*) konvergiert.

Preisabsprache

Können die Konkurrenten Köhler und Hoffmann ihre Gewinne erhöhen, wenn sie, was allerdings verboten ist, (geheime) Preisabsprachen treffen?
Wir nehmen an, F_2 wählt einen von p_2^* verschiedenen Wert p_2 und unterstellen weiterhin, daß F_1 seinen Gewinn zu maximieren sucht. Dazu betrachten wir zwei Beispiele:
$p_2 = 7$ liefert gemäß (8) $p_1 = 3{,}75$. Die Gewinne ergeben sich zu $G_1 = 5{,}13$ und $G_2 = 14$, also ein deutlicher Zuwachs für F_1, jedoch ein Verlust für F_2.
$\hat{p}_2 = 6$ hingegen zieht $\hat{p}_1 = 3{,}5$ nach sich, was zu den Gewinnen $G_1 = 3{,}5$ und $G_2 = 15{,}5$ führt, wodurch beide Konkurrenten einen Gewinnzuwachs gegenüber dem Gleichgewichtspunkt erzielen könnten.
Sprechen sich also die Konkurrenten Köhler und Hoffmann ab, einen derartigen Punkt zu wählen, können sie beide ihre Gewinnlage gegenüber (p_1^*, p_2^*) verbessern. Speziell im Punkt $(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$ hat es F_2 auch in der Hand, durch "Genügsamkeit" in $(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$ zu verbleiben, vorausgesetzt, F_1 bleibt bei seiner Strategie der Gewinnmaximierung.
Ist F_2 jedoch wieder bestrebt, den momentan bestmöglichen Gewinn zu erzielen, wird er feststellen müssen, daß sich dieser im Laufe der Zeit auf das Gleichgewichtsniveau verschlechtert. Die entsprechende Punktfolge (3,5; 6), (3,5; 5,25), (3,31; 5,25), (3,31; 5,16), ..., die durch abwechselnde Wahl von p_1 und p_2 gemäß (6) und (8) entsteht (und sich (p_1^*, p_2^*) nähert), ist in Abb. 3 dargestellt.

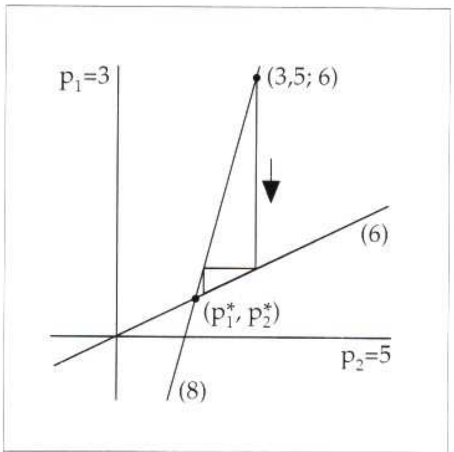


Abb. 3

Natürlich werden auch noch ganz andere Verhaltensweisen im Konkurrenzkampf beobachtet, als das die Strategie der Gewinnmaximierung darstellt. Es wäre z. B. gut denkbar, daß F_2 im Rahmen seiner finanziellen Belastbarkeit eigene Gewinnverluste in Kauf nimmt, um den Gewinn von F_1 so klein wie möglich zu halten, mit dem Ziel, ihn aus dem Markt zu drängen. Denn dann wäre ja F_2 alleiniger Anbieter von Gummitierchen, wozu man auch sagt, F_2 besitze das Monopol auf dem entsprechenden Markt.

Monopol

Nehmen wir nun an, Herrn Hoffmann wäre es gelungen, das Unternehmen Köhler aufzukaufen. Somit würde Herr Hoffmann allein und ohne Konkurrenzkampf die Preise für die gelben Gummibären und die grünen Gummifrösche festlegen können. In diesem Fall wäre wieder die Maximierung des Gesamtgewinns $G = G_1 + G_2$ eine naheliegende Zielstellung, wobei gilt:

Der Preis ist gleich Wert plus Belohnung für die Gewissensbisse bei seiner Festsetzung.
Julian Tuwim
poln. Satiriker (1894 – 1953)

$G = -2p_1^2 - p_2^2 + 2p_1p_2 + 7p_1 + 5p_2 - 17$.
D. h., G ist eine quadratische Funktion, die von zwei Variablen abhängt, welche nichtnegativ sind. Zur Bestimmung des Maximums werden i. allg. weiterreichende Kenntnisse nötig sein. Oft gelangt man aber mit Hilfe der quadratischen Ergänzung zum Ziel:

$$G = -\left(p_2 - \frac{2p_1 + 5}{2}\right)^2 - (p_1 - 6)^2 + \frac{101}{4}.$$

Gelingt es uns also, nichtnegative Werte p_1 und p_2 so zu bestimmen, daß beide Quadrate Null werden, so haben wir das Maximum von G gefunden, denn es gilt:

$G \leq \frac{101}{4}$ (da quadratische Ausdrücke nichtnegativ sind).
Somit wird für $p_1 = 6$ und $p_2 = \frac{17}{2}$ ein maximaler Gewinn von $\frac{101}{4} = 25{,}25$ erzielt.
Wir erkennen also, daß das Monopol bei gleichen materiellen Gegebenheiten einen wesentlich höheren Gewinn realisieren kann, als die im Konkurrenzkampf stehenden Unternehmen in ihrer Summe erzielen.

Ralf Baumgart, Dr. Bernd Luderer
Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Chemnitz

Noch eine Konstruktion im Raum: das Tetraeder

Eine Fortsetzung unserer Faltarbeiten mit Fingerspitzengefühl und mathematischen Hintergrund

Im Heft 5/1991 konstruierten wir – bitte lest über diese Möglichkeit nach – einen Würfel, indem wir ein quadratisches Stück Papier geeignet falteten und schließlich durch Aufblasen die räumliche Figur erhielten. Die Konstruktionsvorschrift lieferte in gleicher Weise exakte Ergebnisse, wie man sie bei den vertrauten Konstruktionen mit Zirkel und Lineal gewöhnt ist. Insbesondere ein "In-etwa-Hinbiegen", d. h. ein Probieren und schrittweises Annähern, soll nicht erlaubt sein.

Den letzten Gedanken wollen wir uns am **Becher** verdeutlichen, einer recht einfachen Faltarbeit, die den meisten bekannt sein dürfte. Dazu falten wir ein quadratisches Stück Papier, generell der Ausgangspunkt bei **Origami**-Faltarbeiten (Origami: die von Japanern entwickelte und bis heute gepflegte Papierfaltkunst), entlang einer der Diagonalen und legen die Arbeit mit dem rechten Winkel nach oben auf die feste, glatte Unterlage vor uns. Nun sind die Enden der Faltkante nach links bzw. rechts oben so zu falten, daß die Spitzen auf den Papierrand treffen und die auf dem Ausgangsdreieck liegenden Papierränder sowohl genau übereinander als auch parallel zur ersten Faltkante verlaufen (**Abb. 1**).

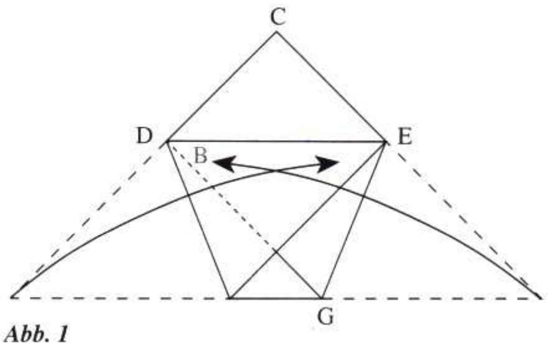


Abb. 1

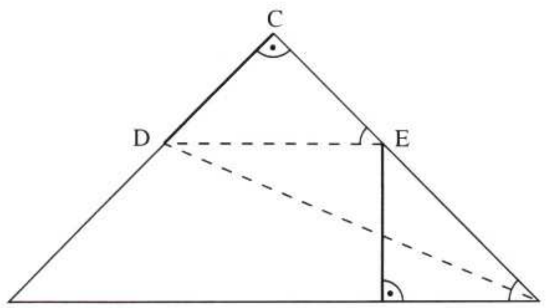


Abb. 2

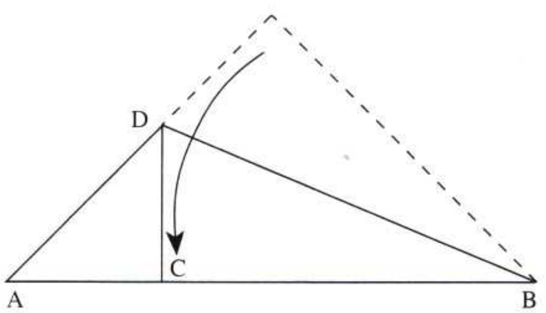


Abb. 3

Vollzieht diese wenigen Kniffe nach, und Ihr werdet sehen, daß dies erst durch Probieren, nochmaliges Auffalten usw. in etwa hinkommt. Wir wollen deshalb überlegen, wie man diejenige Stelle bestimmen kann, an die eines der Enden der Faltkante gelegt werden muß. (Damit wäre auch der entsprechende Punkt auf der anderen Papierkante bestimmt.)

Angenommen, wir hätten schon exakt konstruiert. Anhand der Überlegungsfigur (**Abb. 2**) erkennen wir, daß $\overline{EB} = \overline{ED}$ gelten muß (gemäß dem Ziel der Konstruktion).

Wegen der Parallelität von AB und DE sind die Winkel DEC und ABC Stufenwinkel und damit gleichgroß: $\frac{90°}{2} = 45°$.

Fällen wir von E auf AB das Lot, erhalten wir die zwei kongruenten Dreiecke DEC und FBE (nach Ssw).

Wie könnte man nun durch eine einfache Faltung den Punkt D **exakt** bestimmen?

Der Abstand der Faltkante AB von D, der $\overline{EF}$ beträgt, muß ebensogroß sein wie die Länge der Strecke DC (gleichliegende Seiten in kongruenten Dreiecken). Das können wir dadurch erreichen, daß die Papierkante BC (samt dem bei C befindlichen rechten Winkel) auf die Faltkante AB geknickt wird (**Abb. 3**).

An der Kante AC wird D mit einem kleinen Kniff markiert und anschließend spielend leicht der Becher paßgenau fertiggestellt, indem B auf D gefaltet und A entsprechend darüber geschlagen wird. Schließlich müssen die beiden rechtwinkligen Ecken bei C nach vorn bzw. hinten umgelegt werden.

> **1. Welchen Winkel schließen die Seitenkanten des Bechers mit seiner Bodenkante ein?**
> **2. Welches Fassungsvermögen hat der Becher? (Unlösbar?)**

Genug der Vorübungen. Fingerfertigkeit und Verständnis dafür, was unter exakten Papierfaltkonstruktionen zu verstehen ist, sind erworben. Gehen wir also an die in doppeltem Wortsinn knifflige **Tetraederkonstruktion**.

Wie gewöhnlich beginnen wir mit einem quadratischen Stück Papier von ca. 20 cm Kantenlänge und erzeugen durch zwei senkrecht zueinander verlaufende Talfalten vier kongruente Teilquadrate. Nun legen wir die untere linke Ecke straff gehalten um die obere linke Ecke auf die horizontale Falte, drücken diese an und entfalten sie wieder (**Abb. 4**).

> **3. Weise nach, daß die bei D entstandenen Winkel 30° bzw. 60° groß sind!**

Analog verfahren wir mit den anderen drei Ecken B, C und D: B wird um C an die Falte EF gelegt, C um B sowie D um A ebenfalls an EF, so daß ein Zwischenergebnis wie in **Abb. 5** entsteht. Mit zwei Talfalten durch G und H, die parallel zu AB verlaufen, setzen wir fort. Die obere öffnen wir wieder und klappen die linke Hälfte genau über die rechte (**Abb. 6**).

Nun falten wir senkrecht zu GI so, daß die entstehende Falte durch I verläuft. Mit anderen Worten, wir legen die Falte durch G und I genau im Punkt I zusammen, wobei wir sowohl nach vorn (Talfalte) als auch nach hinten (Bergfalte) kniffen. Das erleichtert den vielleicht schwierigsten Kniff: Der gesamte, zuletzt bewegte obere Teil der Faltarbeit wird jetzt in einem sogenannten Gegenbruch **zwischen** Vorder- und Rückseite hineingefaltet (**Abb. 7**). Die beiden übereinanderliegenden stumpfen Winkel von 120° bei K werden entlang der ehemaligen Mittellinie EF nach vorn bzw. hinten gefaltet, ebenso die beiden 60°-Spitzen bei C entlang der benachbarten, schon vorhandenen Faltlinie. Nun wird GI nochmals (nach vorn und hinten) vorgefaltet und anschließend (Das ist knifflig!) der vordere Teil nach vorn und der hintere nach hinten jeweils entlang GI geschlagen (**Abb. 8**).

Die untere rechte rechtwinklige Ecke wird entlang der vorhandenen Kniffe nach innen

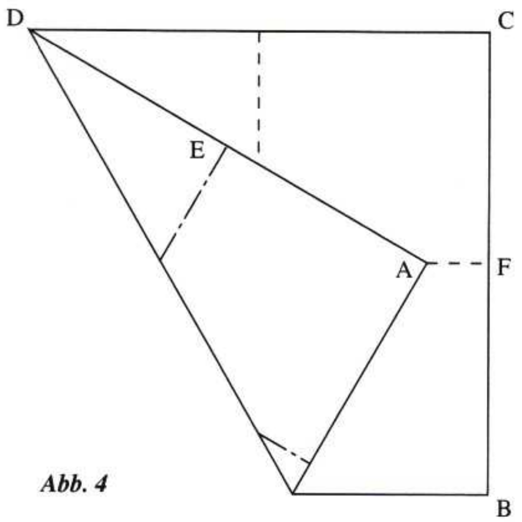


Abb. 4

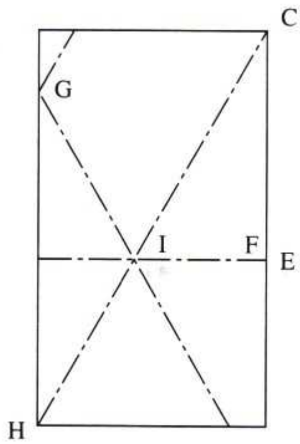


Abb. 6

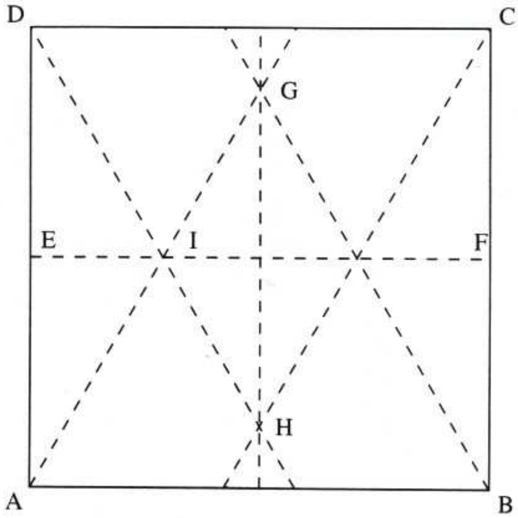


Abb. 5

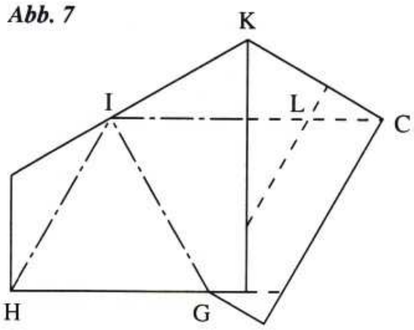


Abb. 7

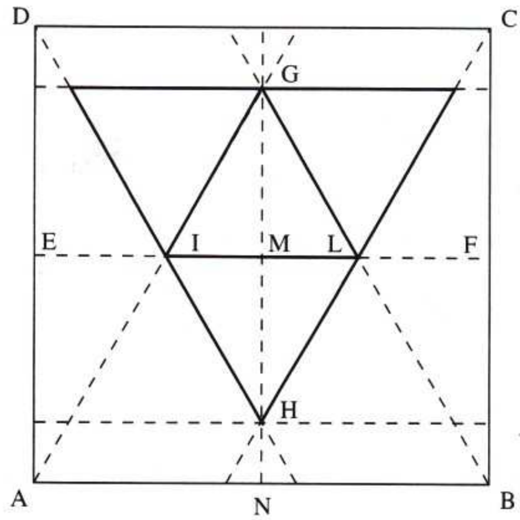


Abb. 9

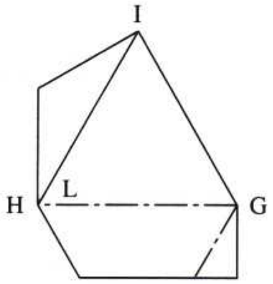


Abb. 8

gebracht (Gegenbruch) und schließlich die trapezförmigen unteren Abschnitte in die Mitte der Faltarbeit fest eingesteckt. Fertig! Fertig? Ein Körper war versprochen! Ein kleiner Puster in die untere Spalte bringt den Körper in aller Regelmäßigkeit zum Vorschein. Bitte verzagt nicht, wenn der erste Versuch noch nicht gelang. Geht die Anleitung nochmal in Ruhe Wort für Wort durch und beachtet dabei, daß sich die Angaben einzelner Punkte oder Faltkanten meist auf alle Faltteile beziehen, die an der betreffenden Stelle übereinander liegen! Steht das Tetraeder vor Euch, kommt wieder stärker die Geometrie ins Spiel:

Ist das nun ein Tetraeder oder **irgend eine dreiseitige Pyramide**?

Zum Beweis markieren wir mit einem Filzstift alle Kanten des Körpers. Sollten zwei Papierkanten "zusammenfallen", dann kennzeichnen wir beide, und entfalten den Körper vorsichtig. Das Ergebnis zeigt **Abb. 9**.

Aus der Lösung von Aufgabe 1 wissen wir schon, daß die Faltlinien durch die Eckpunkte A, B, C und D tatsächlich im Winkel von exakt

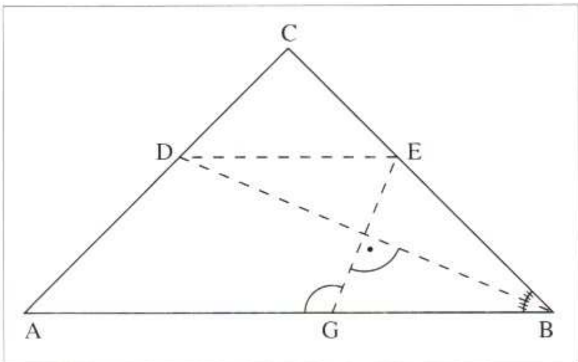


Abb. 10

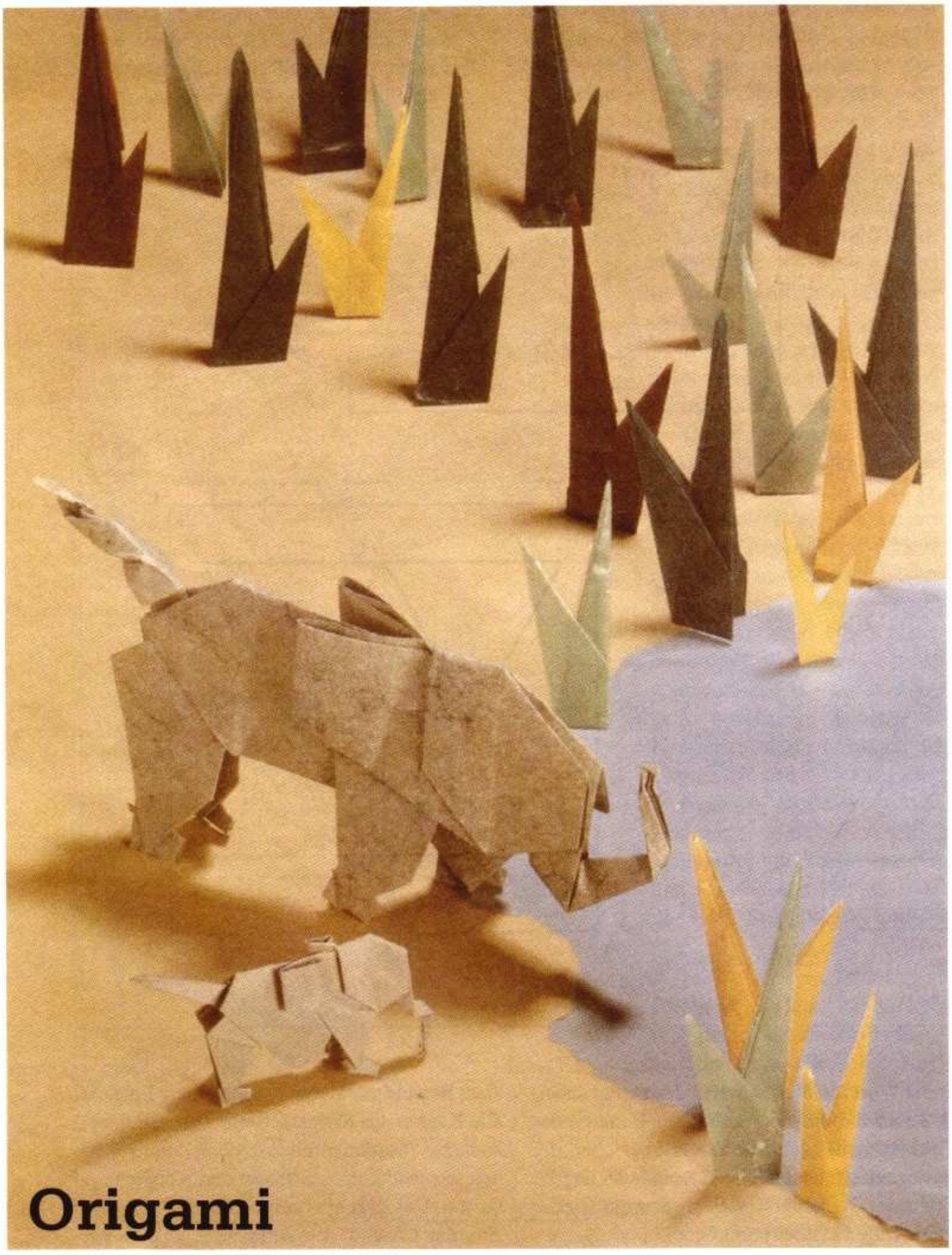
60° zur Horizontalen (z. B. zu AB) verlaufen. Daraus folgt für die eingezeichneten Winkel bei G und H, daß sie alle die Größe 60° haben (Winkelsumme im Dreieck). Die markierten Winkel bei I und L haben dieselbe Eigenschaft (Winkel an geschnittenen Parallelen). Damit sind die vier Dreiecke zumindest ähnlich (Hauptähnlichkeitssatz). Deckungsgleich (kongruent) sind sie darüber hinaus, denn sie haben alle die gleiche Höhe $\overline{GH}/2$.

Die entstandene Figur ist das Netz eines Tetraeders. Da beim Falten entsprechende Kanten aufeinanderfallen, ist bewiesen: Unser Werk aus Papier ist einer der fünf platonischen Körper, das Tetraeder.

4. **Wie groß ist das Volumen eines Tetraeders, der aus einem quadratischen Stück Papier von 20 cm Kantenlänge gefaltet wurde?**

5. **Welche Seitenlänge des Ausgangsquadrates wird für einen doppelt so voluminösen Tetraeder benötigt?**

Dr. Christian Werge
Mathematik- und Physiklehrer
Assistent im Wissenschaftsbereich Didaktik der Sektion Mathematik der Universität Leipzig



Die japanische Papierfaltkunst **Origami** benötigt als einziges Arbeitsmittel Papier*. Von den verschiedenen Grundformen, aus denen die Figuren entwickelt werden, hat die sogenannte Vogelgrundform die größte Bedeutung. Aus dieser kann auch die wohl berühmteste Origamifigur, der Kranich entwickelt werden. Dieser gilt als Symbol für ein langes Leben und Gesundheit. Der Glaube, daß das Falten von **Tausend Kranichen** zur Gesundung führt, war für viele Kinder, die an den Folgen der Atombombenabwürfe auf Hiroshima und Nagasaki litten, letzte Hoffnung.

Auch heute noch werden **Tausend Kraniche** weltweit zur Erhaltung des Friedens und unserer Umwelt gefaltet.

*Übrigens gibt es speziell für Origamiarbeiten hergestellte und zugeschnittene Papiere.

Ein Buchtip:

Wie Ihr den Kranich und andere Tierfiguren falten könnt, findet Ihr in einem kleinen Bändchen der ***Ravensburger Hobbykurse***.

Zeitungsschnipsel

In den Zeitungen geblättert haben wir dieses Mal unter dem Blickwinkel Bahn und Auto. Ein Thema, das Politiker, Verkehrsplaner und Umweltschützer sowie natürlich die Industrie stark beschäftigt. Wenn Ihr so einen interessanten Schnipsel findet, auch zu anderen Themen, dann schneidet ihn doch aus und sendet ihn an uns! Vergeßt aber bitte nicht, die Quelle anzugeben.

Neues von der Bahn

Die Leipziger Volkszeitung brachte neulich folgende Meldung:

Auf dem Weg zur Deutschen Bahn

Im Vorfeld der geplanten Zusammenlegung von Deutscher Reichsbahn und Bundesbahn wird das Nummernschema der DB jetzt für beide deutschen Bahnverwaltungen angewandt. Für die Reichsbahn-Loks läuft die Umnumerierung auf vollen Touren, wie hier im Bahnbetriebswerk Leipzig Hbf. West. Thomas Schön und Jörg Hauptvogel sind daran beteiligt, den dort beheimateten 120 E-Loks ihre neuen "Visitenkarten" zu geben, die fortan eine 1 am Beginn der Baureihenbezeichnung tragen.

LVZ-Foto:Pullwitt

Bis zum 31.12.91 sollen die alten RB-Nummern noch gelten, ab 1.1.92 treten dann die einen dicken Wälzer umfassenden DB-Nummern in Kraft. Das Prinzip der beiden Nummernsysteme ist gleich, nur tragen eben zum Beispiel die E-Loks zukünftig statt der "2" eine "1" an erster Stelle. Damit haben wir das Geheimnis der ersten Zahl gelüftet, was bedeuten aber die anderen 6 Ziffern?

1 55 053 - 2

- 053: Herstellungsnummer der Lok (53. Lok der Baureihe 155)
- 55: Baureihe
- 1: Antriebsart (Dampf-, E- oder Diesellok)

Und die letzte Ziffer? Die Leser des Beitrages "Geheimschrift EAN?" aus Heft 6/91 werden es schon ahnen! Es handelt sich um eine Prüfziffer, welche nach folgendem Verfahren ermittelt wird:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 5 & 5 & 0 & 5 & 3 \\ \downarrow\cdot 1 & \downarrow\cdot 2 & \downarrow\cdot 1 & \downarrow\cdot 2 & \downarrow\cdot 1 & \downarrow\cdot 2 \end{array}$$

$$1 + (1 + 0) + 5 + 0 + 5 + 6 = 18 + \mathbf{2} = 20$$

Die Prüfziffer ergänzt also die Quersumme der neuen Ziffern auf die nächste durch 10 teilbare Zahl.

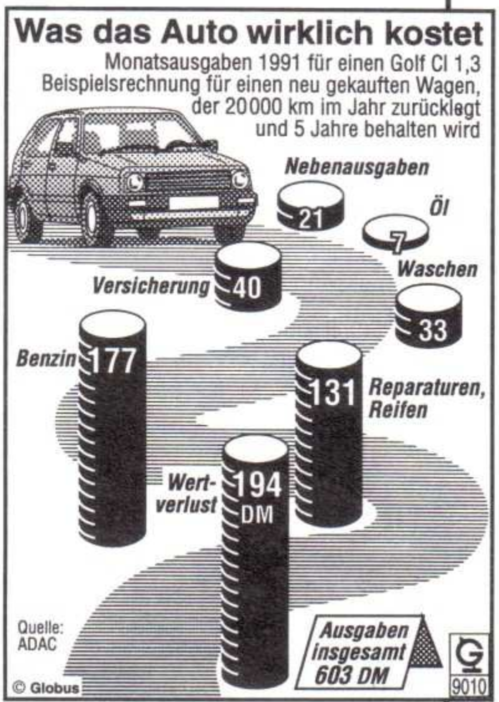
- Die Prüfziffer der zweiten Loknummer ist etwas verdeckt, ermittle sie selbst.
- Überlege, ob mittels dieses Prüfverfahrens die Änderung einer Ziffer, das Vertauschen zweier benachbarter Ziffern oder zweier beliebiger Ziffern bemerkt wird.

Schon gewußt?

Im Jahr 1920 gab es noch ebenso viele Personenwagen bei der Bahn wie PKW auf der Straße. Die Bahn war damals der Hauptträger des Güterverkehrs. Im Jahr 1985 besaß die DB 13531 Personenwagen, in der Bundesrepublik rollten 26 Millionen Pkw. Nur ein Drittel der Güter des Fernverkehrs wurden mit der Bahn transportiert, 1048 Millionen Personen benutzten die Bahn.

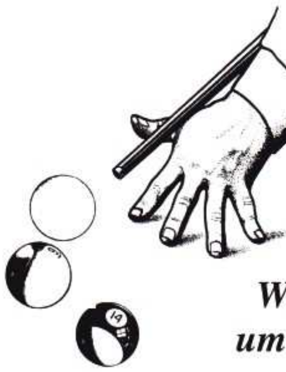
Autofahren wird teurer

Das Autofahren wird 1992 wieder teurer. Wie teuer war eine Autofahrt 1991?



Welcher „Fahrpreis" pro Person und pro Kilometer gehörte 1991 zu einem neuwertigen Golf CI 1,3, der 1991 20000 Kilometer zurücklegte und dabei stets mit 3 Personen besetzt war? (Die in der Tabelle angegebenen Monatsausgaben sind weitgehend unabhängig von der Zahl der mitfahrenden Personen)

In den Zeitungen blätterten für Euch: Dr. Gabriele Liebau, Leipzig und Walter Träger, Döbeln.



Mathematik am Billardtisch (2)

Welchen Weg muß eine Billardkugel rollen, um an den Ausgangspunkt zurückzukehren?

Guten Morgen! Draußen haben wir heute diesen so überaus beliebten Nieselregen, der alle Aktivität lähmt und uns an das Haus fesselt. Da ist es nur gut, daß wir – die "Mathematiker" meiner Klasse, Klaus, Hans und Eberhard, Ihr meine lieben LeserInnen und ich selbst – unser gemeinsames Problem haben, welches uns die unwirtliche Welt vor der Haustür vergessen läßt!

"Gibt es auf jedem, irgendwie viereckigen 'Billardtisch' geschlossene Reflexionswege, auf denen eine angestoßene Kugel nacheinander jede Bande berührt und zum Ausgangspunkt zurückkommt?" – wiederholte Hans gerade seine am Vorabend etwas unklarer formulierte Frage.

(Was alles wir über diese Frage bei einem normal rechteckigen Tisch herausgefunden haben, könnt ihr in Heft 6/91 nachlesen.)

Siegesgewiß zeichnete er dabei einen Fall mit unserer Spiegelungsmethode an die Tafel. (Abb. 1)

Klaus bemerkte sofort, daß es offenbar einige Veränderungen gegenüber dem 'Normalbillard' geben kann.

"Man kann aber nicht mehr von jedem Platz auf dem Tisch aus starten, ja, mir kommt es so vor, als könnte man die Winkel des Tisches so wählen, daß gar nichts mehr 'durchkommt'!"

Wohlweislich hatten wir heute Papier und Bleistift mitgebracht, und wir alle begannen eifrig zu skizzieren und dies und das zu probieren.

Plötzlich lag da ein Blatt von Eberhard mitten auf dem Tisch. "Na und?! Da geht nix; und außerdem ist unsere schöne Methode im Eimer. Nach drei Spiegelungen ist [A'B'] *nicht* zu [AB] parallel!" (Abb. 2)

Ratlosigkeit breitete sich aus. Wie sollte man da herauskommen?

Endlich (Lehrer, Lehrer ..!) konnte ich wieder einmal 'grundsätzlich' werden!

"Offensichtlich gibt es sowohl Vierecke, die Lösungen zulassen, als auch solche, bei denen wir keine finden. Wir haben aber bisher auch noch keinen Beweis dafür, daß es außer den mit unserer 'Spiegelungsmethode' gewonnenen Lösungen keine weiteren gibt. Ein solcher Sachverhalt liegt bei Problemen der Mathematik immer wieder einmal vor, und man sucht dann nach sogenannten 'Notwendigen Bedingungen' für eine eventuelle Lösung!"

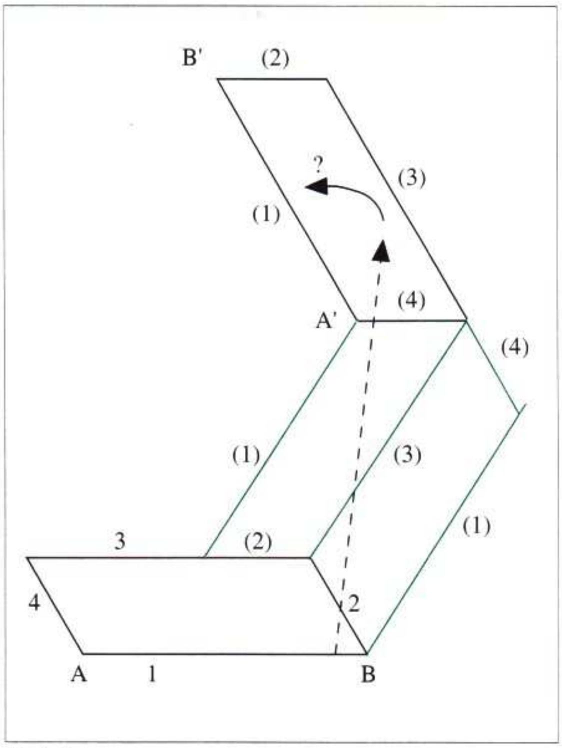


Abb. 2

"Aha" – Eberhard mußte sich wieder ins Spiel bringen, das war er sich einfach schuldig – "wir nehmen also an, daß wir eine Lösung gefunden haben und konstruieren daraus rückwärts den zugehörigen Tisch, also etwa so. (Abb. 3)

Im Δ AEH finden wir

$\hat{a} + 90° - \alpha + 90° - \beta$, also $\hat{a} = \alpha + \beta$

und genauso

$\hat{b} = \beta + \gamma$, (X)

$\hat{c} = \gamma + \delta$ und

$\hat{d} = \delta + \alpha$.

Aber weit und breit keine besondere geometrische Eigenschaft des Vierecks ABCD in Sicht ... ."

"Wieso nicht?" – Klaus war weniger Geometer als Algebraiker, und er hatte das sofort gesehen. – "Es ist doch

$$\hat{a} + \hat{c} = \hat{b} + \hat{d} = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} = \frac{360°}{2} = 180°,$$

also kommen nur solche Vierecke für den Tisch in Frage, deren Eckwinkel diese Bedingung erfüllen!"

"Mm, ungewöhnlich. Das gefällt mir noch nicht. Ein geometrisches Problem und eine algebraische Lösungsbedingung ..." – hörte ich Hans vor sich hinmurmeln. Aber plötzlich schlug er sich an die Stirn: "Sehnenviereck! ... Das ist es! 'Ein Viereck ABCD ist dann und nur dann einem Kreis einbeschrieben, wenn die Summe seiner Gegenwinkelpaare jeweils gleich 180° ist'. – Ende des Zitats!"

"Dann haben wir es ja: Auf einem Billardtisch gibt es genau dann geschlossene Reflexionswege, wenn sein Grundriß ein Sehnenviereck ist. Klaro." – Eberhard war wieder obenauf und freute sich sichtlich: "Wir können die Lösung dann auch immer mit unserer Methode bekommen, denn wie Ihr an meiner Skizze erkennen könnt (Abb. 4), ist die Gerade A'B' *immer* zu AB parallel, denn zunächst dreht man AB um den Winkel $-\hat{b}$ in Richtung BC, dann weiter um $\sphericalangle +\hat{c}$, $\sphericalangle -\hat{d}$ und schließlich um $\sphericalangle +\hat{a}$ in die Richtung von A'B', also gilt tatsächlich

$\sphericalangle$(AB; A'B') = $-\hat{b}+\hat{c}-\hat{d}+\hat{a} = (\hat{c}+\hat{a}) - (\hat{b}+\hat{d}) =$
$= 180° - 180° = 0°$

So war es auch beim Rechteck!"

Ich war recht froh, daß er das Letzte selbst noch 'nachgeschoben' hatte. Eigentlich hatte ich ihm nämlich schon widersprechen wollen und müssen, als er aus der zuerst bewiesenen notwendigen Bedingung (es gibt ... *nur dann* einen geschlossenen Weg ...) einfach eine notwendige und hinreichende Bedingung (es gibt *genau dann* einen geschlossenen Weg ...) machen wollte!

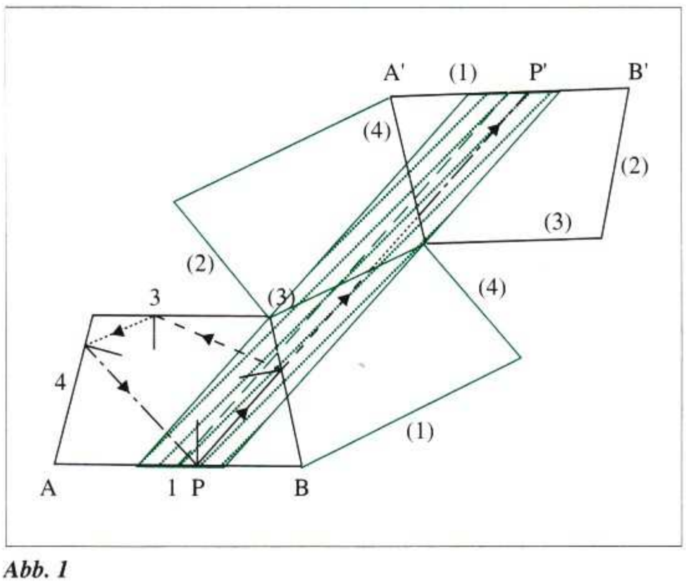


Abb. 1

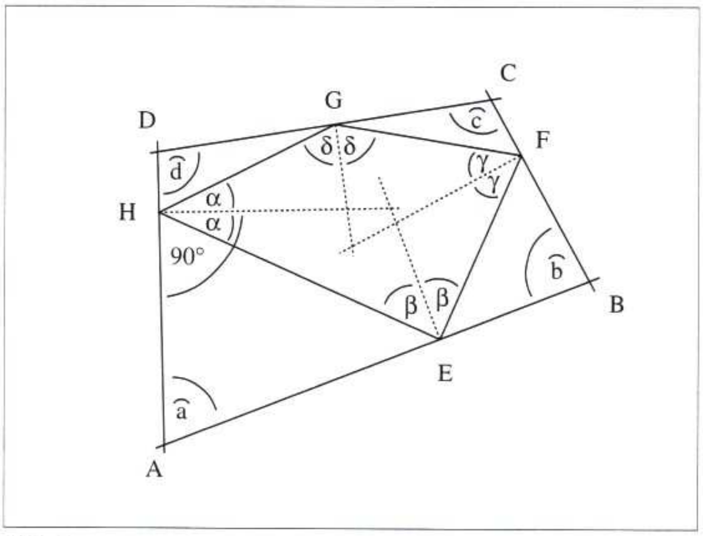


Abb. 3

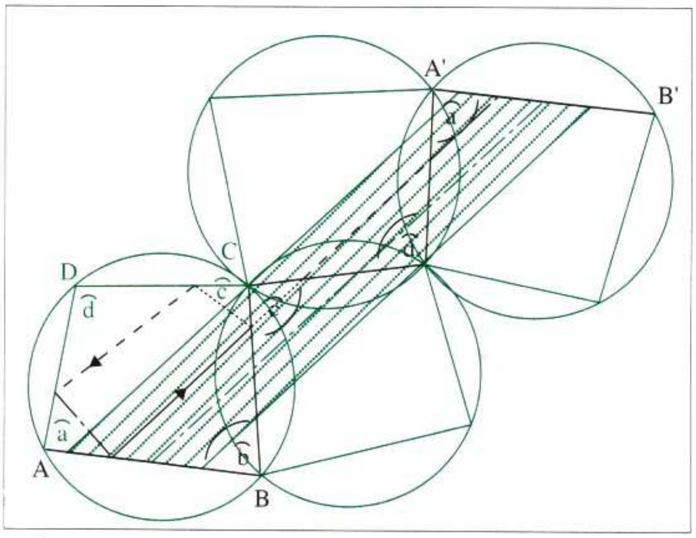


Abb. 4

Jetzt war alles im Lot, denn er hatte selbst noch den konstruktiven Existenzbeweis geliefert, und damit war die Bedingung auch als hinreichend (... es gibt *dann* einen geschlossenen Weg, wenn ...) nachgewiesen. "Wenn ich jetzt keinen solchen Bärenhunger hätte, könnte ich glatt noch die Frage stellen, ob die Sache eigentlich mit einem dreieckigen Tisch genauso funktioniert?" – Das war wieder typisch Hans. Aber auch Klaus ließ sich nicht lumpen, indem er auf 'sein' Gleichungssystem (X) zeigte und meinte: "Ein Viereck mit den Winkeln (2α, 2β, 2γ, 2δ) ist dann und nur dann die Lösung im Viereck ABCD mit den Winkeln ($\widehat{a}$, $\widehat{b}$, $\widehat{c}$, $\widehat{d}$), wenn (α, β, γ, δ) Lösungsvektor dieses linearen Gleichungssystems ist! So muß sich Eberhards Satz auch beweisen und sogar auf 3-, 5-, 6- und n-Ecke ausdehnen lassen!" Nun, wir gehen jetzt zum Mittagessen. Führt Ihr doch den Disput weiter. Sicher bekommt Ihr noch viel mehr heraus. Wir werden dann wieder miteinander darüber sprechen!

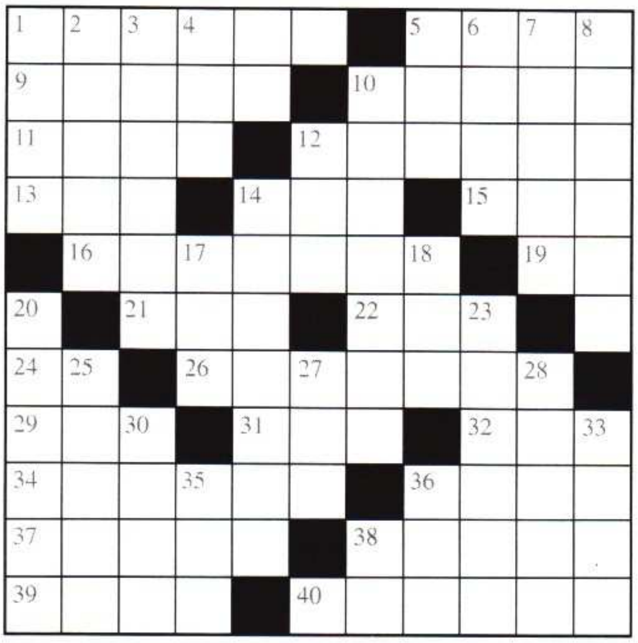
Dr. habil. Reinhard Hofmann
Gymnasiallehrer für Mathematik, Mitglied des Redaktionskollegiums der alpha

Teilbarkeit

(Kreuzzahlrätsel)

Benutze die Teilbarkeitsregeln!
Probiere nicht mehr als unbedingt nötig!

Hans Dieter Drton
Sittichstraße 26
8440 Straubing



waagrecht
1 größte durch 8 teilbare sechsstellige Zahl, die sich allein mit den Ziffern 0 und 6 bilden läßt
5 durch 8 teilbar
9 durch 8 teilbar, hat nur 5 und 6 als Ziffern
10 hat lauter verschiedene gerade Ziffern
11 ist durch 3 teilbar
12 ist die kleinste durch 3 teilbare sechsstellige Zahl mit lauter verschiedenen Ziffern, von denen keine 0 ist
13 ist durch 8 teilbar und hat nur gerade Ziffern
14 ist ein Vielfaches von 8 und 9
15 ist nicht durch 3 teilbar
16 ist die kleinste durch 4 teilbare siebenstellige Zahl mit paarweise verschiedenen Ziffern, von denen keine 0 ist
19 Primzahl
21 kleinste aus den Ziffern 6, 7 und 8 gebildete und durch 4 teilbare dreistellige Zahl
22 durch 9 teilbar
24 Quadratzahl
26 größte durch 3 teilbare siebenstellige Zahl paarweise verschiedenen Ziffern
29 teilbar durch 3
31 größte aus den Ziffern 4, 6 und 8 gebildete dreistellige Zahl, die nicht durch 4 teilbar ist
32 hat die Ziffern 3, 4 und 5
34 teilbar durch 3 und 8, hat lauter verschiedene Ziffern
36 durch 8 teilbare unter den Zahlen 9144, 9148, 9244 und 9248
37 teilbar durch 8
38 größte durch 4 teilbare fünfstellige Zahl mit paarweise verschiedenen geraden Ziffern
39 kleinste durch 3, 4 und 5 teilbare vierstellige Zahl
40 teilbar durch 9 und 25

senkrecht
1 durch 2 und 3 teilbare Lösung von $6540 < x < 6550$
2 durch 3 teilbare Zahl, deren Ziffern mit wachsendem Stellenwert ebenfalls größer werden
3 teilbar durch 9
4 je kleiner der Stellenwert einer Ziffer dieser Zahl, desto kleiner die Ziffer
5 kleinste dreistellige Zahl mit paarweise verschiedenen Ziffern, die nicht durch 3 teilbar ist
6 kleinste vierstellige Zahl mit lauter gleichen Ziffern, die durch 4 teilbar ist
7 durch 3 und 4 teilbar, außerdem gehören zu größeren Stellenwerten größere Ziffern
8 kleinste durch 9 teilbare sechsstellige Zahl, die aus den Ziffern 6 und 9 gebildet werden kann
10 hat nur die Ziffern 2 und 6 und ist durch 3 teilbar
12 Vielfaches von 5 und 9
14 hat nur die Ziffern 4 und 8
17 durch 3 teilbar
18 durch 3 teilbar
20 größte durch 9 teilbare sechsstellige Zahl mit paarweise verschiedenen Ziffern
23 größte durch 4 teilbare sechsstellige Zahl, die nur die Ziffern 1 und 4 besitzt
25 kleinste durch 8 und 125 teilbare Zahl
27 teilbar durch 3 und 4
28 teilbar durch 3
30 von oben nach unten und von unten nach oben gelesen gleich und durch 9 teilbar
33 teilbar durch 3 und 5, nicht aber durch 25
35 Vielfaches von 4 und 25
36 Vielfaches von 2, 3 und 5
38 teilbar durch 2 und 3

Was war los?

Eine Chronologie ausgewählter Ereignisse über Jahrhunderte

408 v. u. Z. (?) Eudoxos von Knidos geboren: Astronom, Mathematiker, Geograph, Philosoph, Politiker

1392 Gründung der Universität Erfurt – in Erfurt wurden Mathematik und Naturwissenschaften besonders gepflegt

1592 Galilei führt in Pisa (1589/92) und Padua (1592/1600) Versuche über die Bewegung auf der schiefen Ebene durch

Eine sehr schöne Biographie über Galilei findet Ihr in Band 19 der Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner, von E. Schmutzer und W. Schütz, erschienen in der BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft.

1617 Erfindung der Neperschen Rechenstäbchen (siehe Text)

1642 Galileo Galilei am 8. Januar gestorben

1667 Gregorius a St. Vincentio am 27. Januar gestorben: Geometrie, Analysis, Astronomie

1742 Edmond Halley, Astronom und Mathematiker am 14. Januar gestorben

1767 L. Eulers berühmte „Vollständige Anleitung zur Algebra" verfaßt (gedruckt seit 1768)

1842 Christian Doppler entdeckt den „Dopplereffekt"

1868 das Element Helium wird in der Sonne entdeckt

1892 am 30. März Stefan Banach geboren (siehe Text)

Stefan Banach

Am 30. 3. 1892 wurde in Krakow der bedeutende polnische Mathematiker Stefan Banach geboren. Er stammte aus einfachsten Verhältnissen und wurde von Pflegeeltern aufgezogen. Banach studierte Ingenieurwissenschaften in Lwów, wobei er sich seinen Lebensunterhalt durch Privatunterricht verdienen mußte. In Lwów wurde der bekannte Mathematiker H. Steinhaus (1887 - 1972) auf Banach aufmerksam und förderte ihn tatkräftig. 1929 wurde Banach Professor in Lwów. Er gehörte zu den Mitbegründern der abstrakten (linearen) Funktionalanalysis und zeigte die Anwendbarkeit der Funktionalanalysis in vielen anderen Gebieten der Mathematik, z. B. in der Theorie der reellen Funktionen. Daneben bewiesen Banachs Lehrbücher, z. B. über Differential- und Integralrechnung (1929), über Mechanik (1938), über reelle Funktionen (1951) sein großes Geschick in der Darstellung schwierigster mathematischer Sachverhalte. Mit anderen bedeutenden polnischen Mathematikern zusammen verfaßte Banach auch mathematische Lehrbücher für den Schulunterricht. Banach starb am 31. 8. 1945 in Lwów. Seit 1946 verleiht die Polnische Mathematische Gesellschaft für herausragende mathematische Leistungen einen Stefan-Banach-Preis, seit 1972 trägt ein internationales mathematisches Zentrum der polnischen Akademie der Wissenschaften den Namen Banachs.

Npersche Rechenstäbchen

Hans-Joachim Ilgauds, Sudhoff-Institut der Universität Leipzig

Im Jahre 1617 veröffentlichte der schottische Edelmann John Neper (1550 - 1617) eine Schrift mit dem Titel "Rhabdologia..." ("Lehre vom Stab ..."). In diesem Werk beschrieb Neper die von ihm erfundenen vierkantigen Rechenstäbchen (Abb. 1). Diese Rechenstäbchen konnten zum Multiplizieren und, allerdings mit großen Schwierigkeiten, auch zum Dividieren ganzer Zahlen verwendet werden. Auf den Stäbchen ist das kleine Einmaleins verzeichnet (Abb. 2). Für eine einfache Multiplikationsaufgabe mit zwei Faktoren wurden mindestens zwei Stäbchen benötigt.

Abb. 1

Für die Rechenaufgabe 49375 · 32 mußte eine Zerlegung des zweiten Faktors in 30 + 2 vorgenommen werden, weil mechanisch nur 49375 · 2 und 49375 · 3 gerechnet werden konnten. Die zusätzliche Multiplikation von 49375 · 3 mit 10 mußte "im Kopf" vorgenommen werden. Das Verfahren lief auf eine mechanische Vervielfachung des ersten Faktors hinaus. Die Produkte ergeben sich in einer "Zickzacklinie":

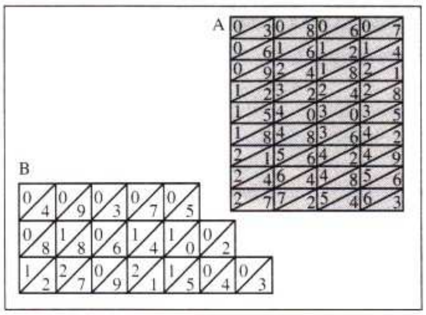


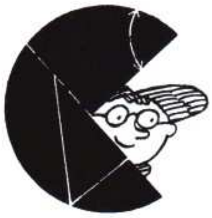
Abb. 2

49375 · 2 = (0)(8+1)(8+0)(6+1)(4+1)(0) = 98750

49375 · 3 = (1) (2+2) (7+0) (9+2) (1+1) (5) (Abb.).

Es ist noch die Schwierigkeit zu berücksichtigen, daß (9+2) nicht als eine Ziffer im Dezimalsystem schreibbar ist.

Die Folge (1)(2+2)(7+0)(9+2)(1+1)(5) ist also in (1)(2+2)(7+1)(1)(1+1)(5) = 148125 umzuschreiben. Die beiden Teilergebnisse waren nun, unter Berücksichtigung des oben erwähnten Faktors 10, auf die übliche Art zu addieren. Diese umständliche Rechenmethode fand bei den Zeitgenossen Lob. Neper hat seinen Rechenstäbchen weniger Bedeutung zugemessen; er lieferte selbst grundsätzliche Beiträge zur Entwicklung der Logarithmen (1614, 1619 aus dem Nachlaß).



Komisches, Kniffliges und Knackiges

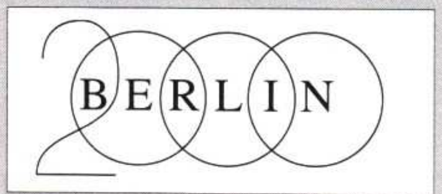
Meinte der Mathelehrer: "Mich interessiert nur eins: was hinten rauskommt."

Lehrer: "Vier mal vier ist sechzehn, sechs mal sechs ist sechunddreißig, aber was kommt bei dreizehn mal dreizehn heraus?"
Alphons: "Na das hab ich gern! Die leichten Fragen selbst beantworten, und mit den schweren Fragen kommen Sie dann zu mir!"

Wäßrige Melonen

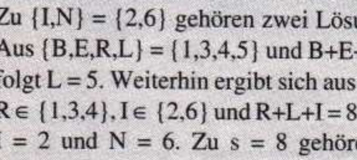
Großhändler Hinterbichler hat am Morgen 100 Zentner Wassermelonen gekauft, die 99 % Wasser enthalten. Diese große Menge muß er im Freien lagern, obwohl es tagsüber sehr heiß ist. Dadurch nimmt der Wassergehalt der Früchte um 1 % ab. Am Abend will er sie an Einzelhändler verkaufen.
Welche Menge Wassermelonen kann Großhändler Hinterbichler an die Einzelhändler verkaufen?
aus.: H.-D. Hornschuh, Mehr Mathe mit Köpfchen, Manz Verlag München

Olympia 2000 in Berlin?

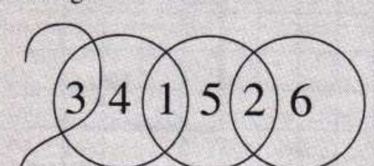


Gemäß der im Heft 6/91 gestellten Aufgabe sind die natürlichen Zahlen von 1 bis 6 anstelle der Buchstaben B, E, R, L, I und N so einzusetzen, daß
$B+E+R = R+L+I = I+N = s$ gilt.
Wegen
$B+E+R+L+I+N = 1+2+3+4+5+6 = 21$ gilt
$3s = B+E+2R+L+2I+N = 21+R+I$,
$24 = 21+1+2 \leq 3s \leq 21+5+6 = 32$ und damit wegen $s \in N \quad 8 \leq s \leq 10$.

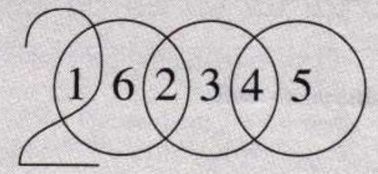
1. Möglichkeit: $s = 8$
Wegen $s = I+N = 8$ muß die Menge $\{I,N\}$ entweder gleich $\{3,5\}$ oder $\{2,6\}$ sein.
$\{I,N\} = \{3,5\}$ scheidet aus: Denn dann müßte $\{B,E,R,L\} = \{1,2,4,6\}$ gelten und $B+E+R = 8$ wäre nicht realisierbar.
Zu $\{I,N\} = \{2,6\}$ gehören zwei Lösungen: Aus $\{B,E,R,L\} = \{1,3,4,5\}$ und $B+E+R = 8$ folgt $L = 5$. Weiterhin ergibt sich aus $L = 5$, $R \in \{1,3,4\}$, $I \in \{2,6\}$ und $R+L+I = 8$ $R = 1$, $I = 2$ und $N = 6$. Zu $s = 8$ gehören die Lösungen

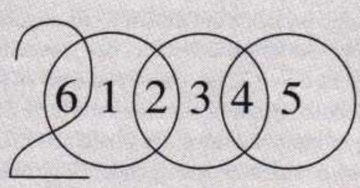


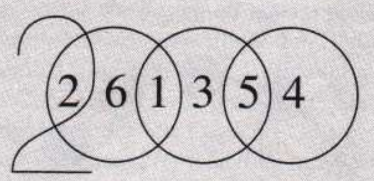
und

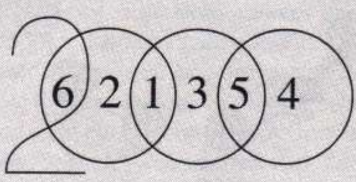


2. Möglichkeit: $s = 9$
Jetzt ist $\{I,N\}$ entweder gleich $\{3,6\}$ oder $\{4,5\}$.
$\{I,N\} = \{3,6\}$ scheidet aus:
Wegen $\{B,E,R,L\} = \{1,2,4,5\}$ könnte dann nicht $B+E+R = 9$ gelten.
Zu $\{I,N\} = \{4,5\}$ gehören Lösungen: Aus $\{B,E,R,L\} = \{1,2,3,6\}$ und $B+E+R = 9$ folgt $L = 3$. Wegen $L = 3$, $I \in \{4,5\}$, $R \in \{1,2,6\}$ und $R+L+I = 9$ muß entweder $I = 4$, $R = 2$ und $N = 5$ oder $I = 5$, $R = 1$ und $N = 4$ gelten. Damit sind vier weitere Lösungen ermittelt:

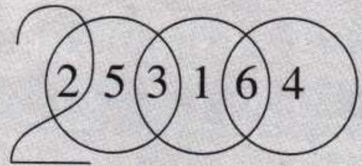


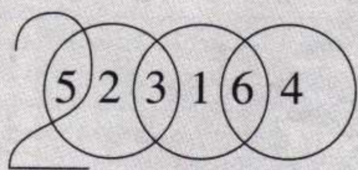


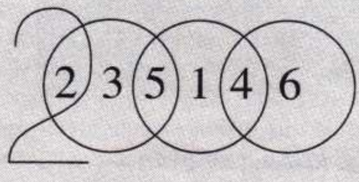


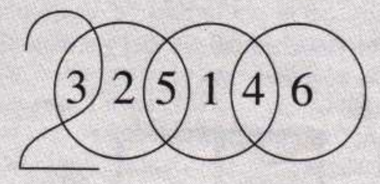


3. und letzte Möglichkeit: $s = 10$
Aus $\{I,N\} = \{4,6\}$, $\{B,E,R,L\} = \{1,2,3,5\}$ und $B+E+R = 10$ folgt $L = 1$. Wegen $L = 1$, $R+L+I = 10$, $R \in \{2,3,5\}$ und $I \in \{4,6\}$ muß entweder $R = 3$, $I = 6$ und $N = 4$ oder $R = 5$, $I = 4$ und $N = 6$ gelten. Zu $s = 10$ gehören 4 Lösungen:



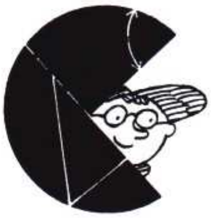






Die gestellte Aufgabe hat also insgesamt 10 Lösungen.

Walter Träger, Döbeln



Komisches, Kniffliges und Knackiges

Vorschrift zum Färben

In der Abbildung sollen einige Felder gefärbt werden. Die Zahlen in jedem Feld geben an, wieviel ganzseitig benachbarte Felder einschließlich dem eigenen zu färben sind. (So könnte z. B. im Innern höchstens die Zahl 5 auftreten; nämlich, wenn alle benachbarten Felder und das eigene zu färben sind. In den Ecken könnte höchstens die Zahl 3 stehen) ... Wichtig ist, das richtige Ausgangsfeld zu finden, dann wird auch bald die richtige Färbung gefunden sein.

2	**1**	**3**	**2**	**2**
2	**4**	**3**	**4**	**3**
3	**3**	**4**	**4**	**3**
2	**2**	**4**	**3**	**3**
1	**2**	**2**	**2**	**1**

a	**b**	**c**	**d**	**e**	
					1
					2
					3
					4
					5

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Hölzchentricks

Lege die Hölzchen so, daß drei gleichgroße Quadrate entstehen.

Von X nach Y

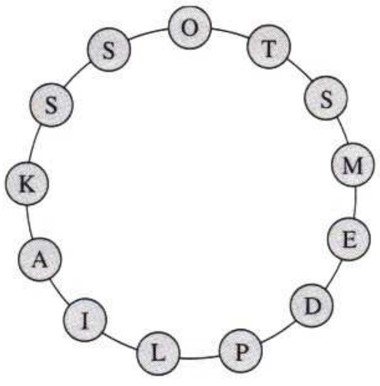
Du sollst von X über 13 Felder nach Y gelangen und zwar nur über solche, die Primzahlen enthalten. Jedes Feld darf dabei nur einmal benutzt werden. Beim Vorwärtsschreiten sind darüber hinaus nur vertikale und horizontale Wege erlaubt.
Zur Erinnerung: Eine Primzahl ist nur durch sich selbst und durch 1 teilbar.

31	13	11	X	41	53	11
43	15	57	17	75	47	13
59	21	39	19	93	45	31
67	73	19	17	23	61	73
29	49	37	87	97	69	53
37	29	27	91	89	63	83
47	79	71	Y	83	43	97

aus: Maximath, Paris

Wie heißt die Pflanze?

Die 13 Buchstaben des gesuchten Pflanzennamens sind im Bilde auf einem Kreis angeordnet. Der Anfangsbuchstabe des gesuchten Wortes ist durch Raten oder Probieren zu finden. Ebenso ist eine bestimmte natürliche Zahl m zu ermitteln. Für zwei im gesuchten Pflanzennamen aufeinanderfolgende Buchstaben (Vorgänger – Nachfolger) gilt nämlich: Im abgebildeten Buchstabenkreis ist der Nachfolger stets der m-te Buchstabe im Uhrzeigersinn nach seinem Vorgänger.



W. Träger, Döbeln

André Marie Ampère, der sich unvergängliche Verdienste auf dem Gebiet der Elektrizitätslehre erwarb, war während seines ganzen Lebens sehr zerstreut.
Eines Tages nahm er die Einladung eines Freundes zum Mittagessen an. Da sich das Mahl etwas verzögerte, nutzte Ampère die Zeit, um in seinem Notizbuch eine Formel nachzurechnen. Noch ganz in Gedanken hörte er, daß das Essen aufgetragen wurde, aß einige Bissen und rief dann, indem er glaubte, zu Hause zu speisen: "Das Essen ist ja wieder einmal nicht zu genießen! Wann wird meine Schwester endlich einsehen, daß jede Köchin – ehe man sie einstellt – erst eine Kostprobe ablegen muß!"

nach: Lingmann/Schmiedel: Anekdoten, Episoden, Lebensweisheiten, Fachbuchverlag Leipzig

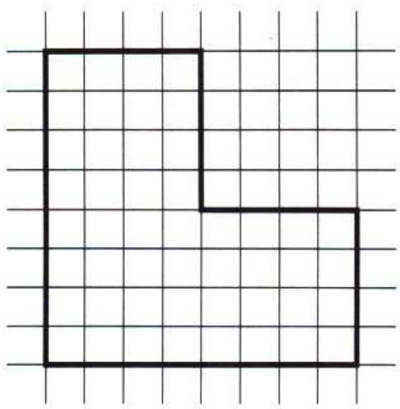
Durcheinander

Beim Schreiben sind die Buchstaben durcheinander geraten. Ordne sie zu sinnvollen mathematischen Begriffen!

Mumse, Chrub, Sinum, Derage, Tenoquit, Sulp, Ketmamitha.

Flächenverwandlung

Zwei zur abgebildeten Figur kongruente Flächen sind auf Papier zu zeichnen und auszuschneiden. Danach ist jedes von beiden in 3 Teilflächen zu zerschneiden und die 6 Teile sind zu einem zum abgebildeten ähnlichen Flächenstück aneinander zu legen.



W. Träger, Döbeln

Fix nachgedacht

	x		x		= 8
x	■	+	■	x	■
	+	9	–		= 8
+	■	–	■	+	■
	+		–		= 8
= 6	■	= 6	■	= 5	■

	+		–		= 1
:	■	:	■	x	■
	x	3	+		= 8
+	■	+	■	–	■
	–		:		= 2
= 7	■	= 1	■	= 5	■

	x		+		= 8
–	■	+	■	+	■
	+	9	–		= 3
+	■	:	■	–	■
	+		–		= 2
= 4	■	= 2	■	= 1	■

Begriffe gesucht

In der folgenden Figur sind 10 mathematische Begriffe versteckt.

Schülerin Daniela Simon, Braunsdorf

E	*T*	*P*	*O*	*P*	*A*	*S*	*U*	*M*	*M*	*E*	*F*
S	*E*	*P*	*S*	*R*	*T*	*A*	*O*	*I*	*K*	*T*	*D*
F	*A*	*K*	*T*	*O*	*R*	*M*	*S*	*N*	*R*	*D*	*I*
M	*R*	*S*	*K*	*D*	*E*	*I*	*M*	*U*	*S*	*I*	*F*
O	*T*	*E*	*E*	*U*	*M*	*A*	*U*	*E*	*E*	*V*	*F*
S	*O*	*I*	*S*	*K*	*A*	*N*	*T*	*N*	*I*	*I*	*E*
U	*S*	*O*	*A*	*T*	*S*	*K*	*A*	*D*	*M*	*D*	*R*
S	*U*	*S*	*U*	*M*	*M*	*A*	*N*	*D*	*T*	*E*	*E*
D	*I*	*V*	*I*	*S*	*O*	*R*	*V*	*I*	*R*	*N*	*N*
I	*K*	*Q*	*U*	*O*	*T*	*I*	*E*	*N*	*T*	*D*	*Z*
S	*U*	*B*	*T*	*R*	*A*	*H*	*E*	*N*	*D*	*E*	*F*

Nummernsalat

Wenn man die beiden Buchstaben und den Bindestrich in meiner Autonummer wegläßt, so lautete sie wie folgt: die 2. Ziffer war das Doppelte und gleichzeitig das Quadrat der 1. Ziffer, ergo war die 1. Ziffer die Hälfte bzw. die Quadratwurzel der 2. Ziffer. Die 3. Ziffer war das Doppelte + 1 der 2. Ziffer, bzw. das Vierfache + 1 der 1. Ziffer. Die 4. Ziffer war gleich der 2. Ziffer, bzw. das Doppelte bzw. Quadrat der 1. Ziffer, bzw. die Hälfte – 0,5 der 3. Ziffer bzw. ein Viertel minus 0,25 der 1. Ziffer. Welche Autonummer hatte Herr Knabe?

K. H. Knabe, Falken/Werra

Alphons logische Abenteuer (9)

Alphons Freund Berti fand dauernd etwas "logisch". Was er denn unter "logisch" verstehe, fragte Alphons. Wenn das, was gesagt wird, so klar sei, daß selbst er, Berti, es sofort verstehe, bekam er zur Antwort. Da Alphons davon nicht überzeugt schien, fügte er hinzu, logisch sei, was so und nicht anders sein könne. Wenn man Durst hat, dann sucht man etwas zum Trinken, das sei doch ebenso logisch wie der Umstand, daß sich Alphons nochmals die Finger verbrenne, wenn er wieder einen glühenden Ofen berühre.

Auf dem Heimweg kamen Alphons doch Zweifel an dieser Erklärung. Sicher, er würde sich erneut die Finger an einem glühenden Ofen verbrennen, berührte er ihn. Glühender Ofen und seine Berührung, das sind zusammen die Ursache für verbrannte Finger als Wirkung. Untersucht die Logik die Ursache-Wirkung-Beziehung? Berti fand die Aussage eines Mitschülers: "Wenn ich Hunger habe, dann habe ich Hunger", auch logisch. Ist Hunger die Ursache für Hunger? Außerdem, so erinnerte sich Alphons, fand Berti anfangs überhaupt nicht klar, daß das Produkt zweier negativer ganzer Zahlen eine positive ganze Zahl ist. Heute findet er das logisch. Dafür leuchtet ihm heute nicht ein, was im antiken Griechenland schon "logisch" war, nämlich daß die Zahl 2 keine rationale Zahl als Wurzel hat.

Vor der Haustür traf Alphons Nachbars Georg, der an der hiesigen Universität studiert. Alphons fragte, ob er sagen könne, was "logisch" bedeute. "Nimm an, eine Aussage ist aus zwei Aussagen als ihren Teilaussagen zusammengesetzt und die zusammengesetzte Aussage ist wahr genau dann, wenn mindestens eine ihrer Teilaussagen wahr ist. Ist nun die zusammengesetzte Aussage und eine Teilaussage wahr, was kann man dann über die Wahrheit bzw. Falschheit der anderen Teilaussage sagen?" Alphons dachte kurz nach, dann sagte er: "Sie kann wahr, aber auch falsch sein, ohne daß sich daraus ein Widerspruch mit den Voraussetzungen ergibt. Hättest Du aber gesagt, die zusammengesetzte Aussage ist wahr, eine Teilaussage ist jedoch falsch, dann freilich muß die andere Teilaussage wahr sein." Georg klopft Alphons anerkennend auf die Schulter: "Siehst du, dieses "muß" ist eben das, was "logisch" auch meint. In der deutschen Sprache wird die als Beispiel betrachtete zusammengesetzte Aussage eine Oder-Aussage genannt. Du kannst Dir ja einmal überlegen, welcher Wahrheitsbedingung eine Entweder-Oder-Aussage unterliegt und was gelten muß, wenn eine Teilaussage wahr ist." Das zu tun versprach Alphons.

Prof. Dr. L. Kreiser
Institut für allgemeine Logik der Universität Leipzig

Den letzten beißen die Hunde

Ein pfiffiges Spiel mit Bleistift und Papier

Sicher hat so mancher von Euch in den Pausen schon einmal Schiffeversenken oder Fünf-in-einer-Reihe gespielt. Solche Spiele sind in der Schule sehr beliebt, weil man zum Spielen nur ein Blatt Papier und zwei verschiedene Stifte benötigt.

Ich möchte Euch ein Spiel vorstellen, wozu man auch nur ein Blatt kariertes Papier und zwei verschiedenfarbige Stifte braucht. Dieses Spiel ist für zwei Personen gedacht und heißt "Den letzten beißen die Hunde".

Als Spielplan dient ein 4 x 4 Feld (Abb. 1) Fortgeschrittene Spieler können auch auf größeren Spielfeldern spielen. Da werden Euch keine Grenzen gesetzt.

Abwechselnd zieht Ihr und Euer Gegner gerade Linien, die waagerecht, senkrecht oder diagonal zwei, drei oder vier Punkte miteinander verbinden. Die Züge werden immer am Endpunkt der zuletzt gezeichneten Linie fortgesetzt. Jeder Punkt darf nur einmal benutzt werden und Linien dürfen sich nicht kreuzen. Derjenige, der die letzte Linie zeichnet, hat verloren.

Die Punkte werden wie die Felder eines Schachbrettes bezeichnet, nur der Einfachheit halber wurden für beide Achsen Zahlen benutzt.

Abb. 1

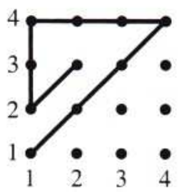


Abb. 2

Das Anfangsfeld heißt z. B. (11).

Die Spielaufzeichnung erfolgt ähnlich wie beim Schach. Dazu ein Beispiel:

A -(32) heißt, daß Spieler A vom letzten Endpunkt zum Punkt (32) eine Linie zeichnet. Zum besseren Verständnis möchte ich ein Beispiel erläutern. Die "Endstellung" seht Ihr in Abb. 2. Die Zugfolge sieht wie folgt aus:

1. A -(44) B -(14)
2. A -(12) B -(23)

Spieler B machte den letzten Zug und hat verloren.

Damit man das Spiel theoretisch etwas erläutern kann, sind noch einige Begriffe erforderlich. Wir nennen jeden Punkt, der noch durch eine Linie erreichbar ist "frei". So hatte Spieler B im obigen Beispiel nur noch einen freien Punkt, bevor er den letzten Zug machte. Da Ihr auch noch etwas knobeln sollt, gehe ich nur auf Zugvarianten ein, wo Spieler A seinen ersten Zug im Punkt (11) beginnt.

Der Zug von Spieler A ist -(44). Spieler B hat 12 freie Punkte. Da unser Feld symmetrisch ist, betrachten wir nun die 6 freien Felder der oberen Bretthälfte. Nach -(14) zu ziehen, ist für Spieler B ungünstig, denn Spieler A hat 3 freie Punkte und hat die Möglichkeit so zu ziehen, daß Spieler B verliert. Für den Gewinn schreiben wir kurz + und für den Verlust -. D. h. unser Beispiel sieht jetzt so aus:

A -(44); B -(14); A -(12); B -(23); A +.

Spieler B könnte andere Züge machen, um nicht zu verlieren. Er könnte Spieler A 4 freie Felder lassen, z. B. B -(24). Spieler A hat 4 freie Felder ((23), (12), (13), (14)). Es erfolgt

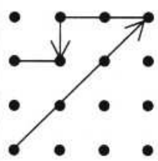


Abb. 3a

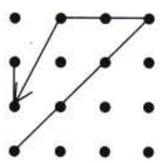


Abb.3b

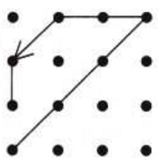


Abb. 3c

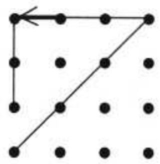


Abb. 3d

a) A -(23); B -(13); A -
b) A -(12); B -(13); A -
c) A -(13); B -(23/12); A -
d) A -(14); B -(12); A -

D. h. A verliert, wenn er 4 freie Felder hat. Man könnte sagen, daß der Spieler gewinnt, welcher dem Gegner 4 freie Felder läßt.

Wenn Spieler B nach A -(44) dem Gegner 5 freie Felder läßt, kann Spieler A gewinnen, indem er Spieler B 4 freie Felder läßt.

Aufgabe 1:

Wie muß Spieler A nach folgenden Zügen ziehen, um zu gewinnen?

a) A -(44); B -(34)
b) A -(44); B -(23)
c) A -(44); B -(12)
d) A -(44); B -(13)

Spieler A kann 9 verschiedene Züge machen, wobei die Symmetrie unseres Spielfeldes jetzt beachtet wurde.

A -(22), A -(33), A -(44), A -(12), A -(13), A -(14), A -(23), A -(24), A -(34)

Wie Spieler B jetzt spielen sollte, um zu gewinnen, müßt Ihr probieren. Eine Theorie dazu anzugeben, wäre genauso sinnlos, wie der Versuch, eine Theorie für den sicheren Gewinn einer Schachpartie zu finden.

Zum Schluß möchte ich noch einen Spezialfall genauer erläutern. Folgende Züge wurden durchgeführt (Abb. 4).

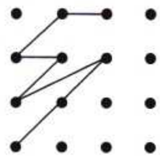


Abb. 4

A -(33); B -(12);
A -(23); B -(13); A -(24); B -(34); ...

Spieler A hat 4 freie Felder und wird deshalb verlieren. Die folgenden Zugfolgen zeigen, wie Spieler B zieht, um zu gewinnen (Abb. 5a – d)

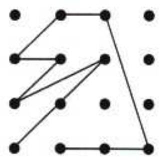


Abb. 5a

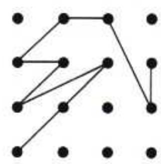


Abb.5b

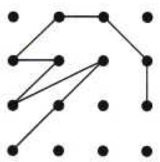


Abb. 5c

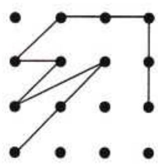


Abb. 5d

a) ... A -(41); B -(21); A -
b) ... A -(42); B -(43); A -
c) ... A -(43); B -(42); A -
d) ... A -(44); B -(42); A -

Aufgabe 2:

Gebt die vollständige Zugfolge von Fall c) und d) an!

Alle weiteren Gewinnmöglichkeiten solltet Ihr selbst ausprobieren. Dazu wünsche ich Euch viel Spaß!

Claudia Erdmann

Claudia Erdmann ist Mathematikstudentin an der Universität Leipzig und wird Euch auch in den nächsten Heften Spiele vorstellen.

Erste Gesamtdeutsche Kinderschachmeisterschaft U 11

in Schwarzburg (Thüringen)

Im Gegensatz zu manch anderen Bereichen verlief der Zusammenschluß der beiden Schachverbände in Ost und West sehr demokratisch und sachbezogen. Auch im Kinder- und Jugendbereich wurde aufeinander zugegangen. Beispiel dafür ist die erste gesamtdeutsche Meisterschaft der Jungen und Mädchen im Schach, die nach dem 1.1.1980 geboren sind (U 11). Das gab es vorher nur in der DDR. Entsprechend gespannt sahen Befürworter und Skeptiker auf den kleinen Ort Schwarzburg bei Rudolstadt, den sich die Ausrichter von Borussia Friedrichsfelde Berlin wegen seiner zentralen Lage und den günstigen gebotenen Bedingungen ausgesucht hatten. Auch das ein Novum in der bisherigen Meisterschaftsgeschichte, daß ein Ausrichter in einem anderen Bundesland austrug. Zum Lohn hatten die Organisatoren mit bürokratischen Hürden zu kämpfen, weil sich kein Land zuständig fühlte. Aber mit dem nötigen Elan und dem festen Willen, etwas ganz Besonderes zu leisten, wurde gemeinsam mit der deutschen Schachjugend an die Arbeit gegangen.

Nach Wochen harter Vorbereitung war es dann soweit: vom 27. Juli bis 4. August bevölkerten über 100 Kinder und ungefähr 55 Betreuer die Hotels, Pensionen, Jugendherberge und Privatquartiere an der malerischen Schwarza, in der auch Gold gewaschen werden kann. Die kämpferisch gestimmte Schachjugend aller Bundesländer strebte nach anderem Gold. So ging es von Anfang an heiß her im großen Kultursaal des Hotels Schwarzburger Hof. Für ein entsprechendes Äußeres hatte der Hauptsponsor, die Volksbank Rudolstadt, mit Spruchbändern und Fahnen gesorgt. 11 Runden im Schweizer System waren angesagt – eine harte Arbeit, die jedoch durch ein vielfältiges Freizeitangebot von Tischtennis bis Blitz gegen die Betreuer und einer Wanderung zur steilsten Bergbahn Europas aufgelockert wurde.

Von den knapp 100 Teilnehmern waren rund ein Drittel Mädchen, viele von ihnen machten den Jungen ernsthaft Konkurrenz. Schon nach wenigen Runden setzte sich Wilko Stubbe aus Halle an die Spitze des Turnieres und hielt diese lange Zeit unangefochten, bis er in der 9. Runde durch Matthias Pflug aus Bayern gestoppt wurde. Nun stieg die Spannung kurz vor Schluß nochmals auf den Höhepunkt, denn rund 20 Spielerinnen und Spieler hatten zwei Runden vor Schluß noch die Chance, erster gesamtdeutscher Meister zu werden.

Schließlich setzte sich aber doch Wilko Stubbe durch; mit 9,5 Punkten belegte er nach Wertung den ersten Platz vor Matthias (ebenfalls 9,5) und Ronald Starke aus Leipzig. Henry Barth vom Ausrichterverein wurde Vierter. Gesamtdeutsche Mädchenmeisterin in dieser Altersklasse wurde mit 7,5 Punkten auf Platz 10 der Gesamtwertung Gloria Ballhause aus Thüringen.

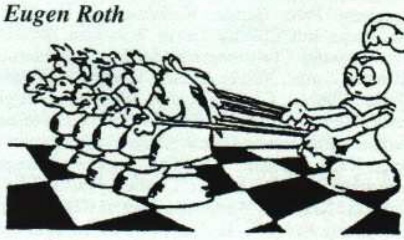
Zur Siegerehrung erschienen nicht nur Vertreter des Hauptsponsors und des Bürgermeisteramtes, sondern auch der 2. Vorsitzende der Deutschen Schachjugend, Norbert Schätzke. Dank unserer Sponsoren wie der Mitteldeutschen Fahrradfabrik Sangerhausen, der Pfander-Sport-GmbH Hamburg, Coca-Cola, dem Karl-May Verlag Bamberg, der Porzellanmanufaktur Sitzendorf, der Puppenfabrik Königsee (A. Riedeler) und dem Kinderbuchverlag Berlin konnten alle Kinder mit einem tollen Preis nach Hause fahren. Im nächsten Jahr wollen alle wiederkommen, wie uns von vielen Seiten versichert wurde. Vielleicht nimmt der eine oder andere dann Revanche für eine verlorene Partie. Wie wird der nächste Meister unter den Jüngsten heißen?

Markus Spindler
Student der Mathematik an der Humboldt-Universität zu Berlin

Die Meister

Ein Mensch sitzt da, ein schläfrig trüber,
Ein anderer döst ihm gegenüber.
Sie reden nichts, sie stieren stumm.
Mein Gott, denkst du, sind die zwei dumm!
Der eine brummt, wie nebenbei,
Ganz langsam: Tc6-c2.
Der andre wird allmählich wach
Und knurrt: Da3-g3, Schach!
Der erste weiter nicht erregt,
Starrt vor sich hin und überlegt.
Dann plötzlich, vor Erstaunen platt,
seufzt er ein einzig Wörtchen: matt!
Und die du hielst für niedre Geister
Erkennst du jetzt als hohe Meister.

Eugen Roth

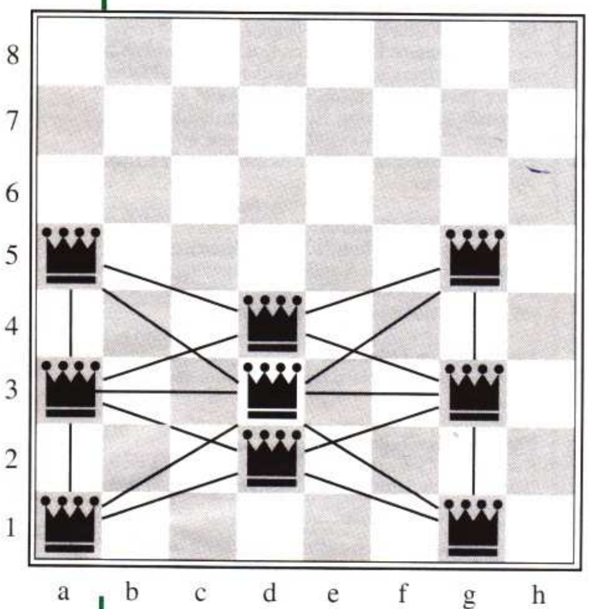


Damen im Verbund

Häufig werden zur Illustration verschiedener mathematischer Begriffe und Aufgabenstellungen das Schachbrett, die Figuren und das Spiel selbst benutzt. In der Literatur über Logik, Numerische Mathematik, Kombinatorik, Graphen-, Zahlen- und Spieltheorie findet man oftmals Beispiele und Begriffe aus dem Schachspiel. Einen bedeutenden Platz nimmt das Schach bei der Entwicklung moderner Methoden der Computerprogrammierung ein.

Auch in der mathematischen Disziplin, der Topologie, lassen sich Eigenschaften von ebenen Punktmengen mit schachlichem Bezug darstellen.

In dem folgenden Diagramm sind 9 schwarze Damen auf dem Schachbrett so aufgestellt, daß jeweils drei davon 10 gerade Linien bilden. Welche weiteren Möglichkeiten gibt es, diese 9 Damen auf dem Schachbrett unter dieser Bedingung zu postieren?



Harald Rüdiger, Werk für Fernsehelektronik, Berlin

alpha-Wettbewerb

Wer löst mit?

Einsendeschluß: 22. April 1992

Wettbewerbsbedingungen

1. Der Wettbewerb 1991/92 läuft über zwei Teilwettbewerbe in den Heften 6/91 und 1/92.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Anschrift, Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter) zu richten an:
Mathematische Schülerzeitschrift alpha
Postfach 129
O-7010 Leipzig
Den Lösungen ist die frankierte und an Euch adressierte **Antwortkarte** beizulegen, welche Ihr **im Innenteil unserer Zeitschrift** findet. Darauf erhaltet Ihr die Ergebnisse dieses Teilwettbewerbes mitgeteilt. Steht mehreren Schülern nur eine Zeitschrift zur Verfügung, so kopiert Euch die Auswertungsseite der Antwortkarte und klebt sie auf eine an Euch adressierte Postkarte (Porto nicht vergessen).
Schulen beachten bitte, daß die gesammelte Rücksendung entsprechend mehr Porto verlangt.
3. Von dem Teilnehmer sind nur Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe zu lösen. Teilnehmer ab Klassenstufe 10 lösen die mit 10 und E gekennzeichneten Aufgaben.
4. Jeder Teilnehmer sollte einen Durchschlag seiner Lösungen anfertigen, um diese mit den jeweils zwei Hefte später erscheinenden Lösungen zu vergleichen.
5. Diejenigen Teilnehmer, die insgesamt mindestens 8 Aufgaben richtig (gut oder sehr gut) gelöst haben, senden bis zum 10. September beide Antwortkarten, einen entsprechend frankierten und adressierten Rückumschlag und
a) bei mehr als dreimaliger Teilnahme die zuletzt erhaltene Urkunde bzw.
b) bei mit diesem Wettbewerb dreimaliger Teilnahme die beiden bereits vorhandenen Urkunden ein.
Bei erst- bzw. zweimaliger Teilnahme genügen die beiden Antwortkarten.
6. Alle erfolgreichen Teilnehmer erhalten eine Urkunde und einen alpha-Button. Pro Klassenstufe 5 bis 10 werden die 5 besten Teilnehmer ermittelt (entscheidend ist die Anzahl der sehr gut gelösten Aufgaben) und unter den Übrigen jeweils fünf Teilnehmer ausgelost. Außerdem prämieren wir 5 Frühstarter (Klassen 1 bis 4).
Diesen Glücklichen winken attraktive Preise (siehe Seite 26).

Beachtet bitte, daß wir Einsendungen ohne Rückporto nicht mehr bearbeiten können.

Klassenstufe 5

5/8
Hans fordert seinen Freund Martin auf: "Denk dir eine beliebige natürliche Zahl. Verdoppele diese Zahl! Addiere 4! Nimm vom Ergebnis die Hälfte! Addiere 5! Multipliziere das Ergebnis mit 4! Subtrahiere 8! Dividiere das Ergebnis durch 2! Subtrahiere 9! Nenne mir dein Endergebnis!" Martin nannte die Zahl 27. Nach dem kurzen Auswerten einiger Notizen nannte Hans diejenige Zahl, die Martin sich gedacht hatte. Wie ist das möglich?
Sch.

5/9
In dem Schema

```
  W I N T E R
+ W I N T E R
+ W I N T E R
-------------
  S C H N E E
```

sind die Buchstaben so durch Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 bzw. 9 zu ersetzen, daß man eine richtig gelöste Additionsaufgabe erhält. Dabei sind für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern zu setzen.
Sch.

5/10
Die Anzahl der Zehner einer zweistelligen natürlichen Zahl ist dreimal so groß wie die Anzahl der Einer. Wenn man die beiden Ziffern dieser Zahl vertauscht, so erhält man eine Zahl, die um 36 kleiner ist als die gesuchte Zahl. Ermittle diese Zahl!
Sch.

5/11
Der Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks ist 28 cm lang. Seine Basis ist um 2 cm kürzer als ein Schenkel. Wie lang sind die Seiten dieses Dreiecks?
Sch.

5/12
Fünf Schüler, die eine Turnriege bilden, haben sich der Größe nach aufgestellt. Von ihnen wissen wir:

(1) Richard ist kleiner als Herbert.
(2) Klaus ist kleiner als Richard.
(3) Lutz ist größer als Richard.
(4) Klaus ist größer als Paul.
(5) Herbert ist der Größte.
In welcher Reihenfolge stehen diese fünf Schüler in der Riege?
Sch.

5/13
In diesem Zahlenquadrat mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 25 sind sechs Zahlen so zu vertauschen, daß man in jeder Zeile, in jeder Spalte, von links oben nach rechts unten sowie von rechts oben nach links unten jeweils die gleiche Summe erhält.

7 ~~6~~	5	23	16	14
21	19	12	10 ~~11~~	3
19 ~~20~~	8	1	24	17
4	22	20 ~~15~~	13	6 ~~7~~
18	11 ~~10~~	9	2	25

Sch.

5/14
Die vier Schülerinnen Katharina, Franziska, Tanja und Claudia haben (in anderer Reihenfolge) die Familiennamen Spitzbart, Schwanbeck, Rosenhain und König. Von ihnen ist folgendes bekannt:

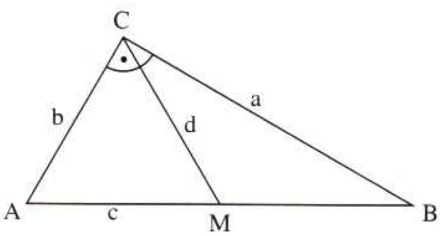
(1) Franziska hat nicht den Familiennamen Spitzbart.
(2) Tanja hat den Familiennamen Schwanbeck.
(3) Die Schülerin mit dem Familiennamen König ist mit Claudia eng befreundet.
(4) Claudia und die Schülerin mit dem Familiennamen Spitzbart haben beide die Schülerzeitschrift "ALPHA" abonniert.

Wie heißen die übrigen drei Schülerinnen (außer Tanja) mit vollem Namen?
Schülerin Astrid Neidhardt, Brotterode

Klassenstufe 6

6/8
Es sind alle natürlichen Zahlen zu ermitteln, die kleiner als 500 sind und die folgende Eigenschaften besitzen:
a) Eine solche Zahl läßt bei Division durch 2, 3, 4, 5 bzw. 6 jeweils den Rest 1.
b) Eine solche Zahl ist ein Vielfaches von 7.
Sch.

6/9
Die Abbildung stellt ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ dar. Der Mittelpunkt M von $\overline{AB}$ wurde mit dem Punkt C verbunden. Es seien a, b, c, d die Längen der Strecken $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ und $\overline{CM}$. Weise nach, daß $d < \frac{1}{2} \cdot (a+b)$ gilt!



Sch.

6/10

Die fünf Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 sind unter Beibehaltung ihrer Reihenfolge durch Operationszeichen der vier Grundrechenarten so zu verknüpfen, daß man als Ergebnis die Zahlen von 2 bis 10 erhält. Dabei dürfen auch Klammern gesetzt werden und es dürfen zwei Ziffern ohne Operationszeichen verknüpft werden. Beispiele: $12-3-4-5=0$, $(12-3):(4+5)=1$.

Sch.

6/11

Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen, die gleich der dritten Potenz ihrer Quersumme sind.

Sch.

6/12

Schreibe Dein vierstelliges Geburtsjahr zweimal nebeneinander. Dividiere nun die so erhaltene achtstellige Zahl zunächst durch 73, das Ergebnis dann noch durch 137. Begründe das ermittelte Endergebnis für jedes beliebige (vierstellige) Geburtsjahr!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/13

Von drei Personen mit den Familiennamen Arndt, Brandt und Conrad besitzt jede ein Auto, und zwar vom Typ Skoda, Wartburg und Trabant. Diese Autos, die in Neubrandenburg, Rostock bzw. Schwerin gekauft wurden, haben die Farbe blau, gelb bzw. rot. Gib für jede Person den Autotyp, die Farbe und den Ort des Einkaufs an, wenn folgendes gilt:

(1) Herr Arndt hat ein gelbes Auto.
(2) Herr Conrad hat einen Wartburg.
(3) Der Skoda wurde in Rostock gekauft.
(4) Das rote Auto wurde nicht in Schwerin gekauft.
(5) Das blaue Auto wurde in Neubrandenburg gekauft.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/14

Vorhanden sind 2 gleiche Gefäße (Grundfläche 10 cm², Höhe 10 cm, Masse 50 g) und eine Balkenwaage. Das eine Gefäß wird mit Wasser, das andere mit Quecksilber gefüllt.

a) Beide Gefäße werden gemeinsam auf eine der beiden Waagschalen gestellt.
b) Ein Gefäß wird auf die eine, das andere auf die andere Waagschale gestellt.

Welche Masse ist durch Auflegen von Wägestücken notwendig, damit sich die Waage in beiden Fällen im Gleichgewicht befindet?

R.

Klassenstufe 7

7/8

Von vier Freunden mit den Vornamen Erwin, Fritz, Hans und Klaus und den Nachnamen (in anderer Reihenfolge) Müller, Meier, Schulz und Schmidt ist folgendes bekannt:

(1) Der Schüler mit dem Nachnamen Müller und der mit dem Vornamen Klaus spielen jeden Montag zusammen Schach.
(2) Die vier Schüler Müller, Schmidt, Erwin und Fritz betreiben aktiv Sport.
(3) Die Schüler Meier und Fritz sammlen oft zusammen Pilze.

Es sind die vollständigen Namen dieser vier Schüler zu ermitteln!

Schüler Sven Reinald, Zerbst

7/9

Es sei $p=\overline{aba}$ eine in dekadischer Schreibweise dargestellte Primzahl, deren Quersumme 19 beträgt.

Wieviele derartige Primzahlen gibt es, und wie lauten sie?

Sch.

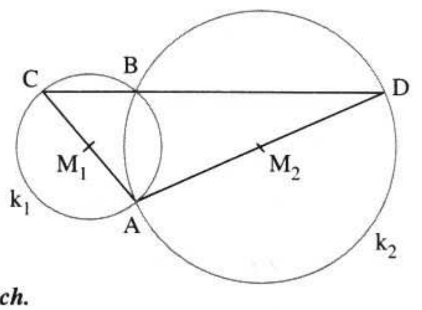
7/10

Es sind alle durch 9 teilbaren dreistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die bei Addition von 594 jeweils eine dreistellige natürliche Zahl mit umgekehrter Ziffernfolge ergeben!

Sch.

7/11

Gegeben seien zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien r_1 und r_2 mit $r_2>r_1$. Die Kreise schneiden einander in den Punkten A und B. Von A aus wurden die Durchmesser $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$ gezeichnet. Es ist zu beweisen, daß die Punkte C, B und D auf einer Geraden liegen.



Sch.

7/12

Kürze den Bruch $\frac{171717}{191919}$, ohne Zähler und Nenner in Primfaktoren zu zerlegen!

Sch.

7/13

Franz und Frieda haben gleiche Masse und stehen auf Rollschuhen. Sie ziehen gleichzeitig an einem Seil und bewegen sich dadurch aufeinander zu. Wo treffen sie sich? Beim 2. Versuch wird das Seil am Gürtel von Franz befestigt, nur Frieda zieht. Wo treffen sich in diesem Fall beide?

R.

7/14

Ein Sack Kartoffeln hat auf der Erde eine Gewichtskraft von 500 N. Welche Masse und welche Gewichtskraft hat er auf dem Mond? (Ortsfaktoren: Erde 9,81 $N \cdot kg^{-1}$, Mond 1,6 $N \cdot kg^{-1}$).

R.

Klassenstufe 8

8/8

Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC. Der Schnittpunkt der drei Höhen sei mit H bezeichnet. A_1, B_1 und C_1 seien die Mittelpunkte der Höhenabschnitte $\overline{HA}$, $\overline{HB}$ und $\overline{HC}$. D, E und F seien die Mittelpunkte der Dreieckseiten $\overline{CB}$, $\overline{CA}$ und $\overline{AB}$.

Es ist zu beweisen, daß die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und DEF kongruent sind.

Waltraut Jagusch

8/9

Es sind alle Primzahlen zu ermitteln, die bei Division durch 2, 3 und 5 jeweils den Rest 1 lassen und größer als 320, aber kleiner als 500 sind.

Sch.

8/10

In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ sei die Höhe h_c 6 cm lang, der Flächeninhalt des Dreiecks betrage 48 cm².

Es ist die Länge des Umfangs u dieses Dreiecks zu berechnen!

Wolfgang Schneider, Radeberg

8/11

Die achtfache Summe aus drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist gleich dem Produkt aus diesen drei Zahlen.

Für welche Zahlen trifft dies zu?

Thomas Saller, Bad Langensalza

8/12

Gegeben sei ein Trapez ABCD mit $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. $\overline{AB}$ sei länger als $\overline{CD}$. Die Parallele zu $\overline{BC}$ durch den Eckpunkt D des Trapezes schneide die Diagonale $\overline{AC}$ in E und die Seite $\overline{AB}$ in F. Es ist zu zeigen, daß die Dreiecke CEB und CFB den gleichen Flächeninhalt haben.

OStR J. Kreusch. Löbau

8/13

Eine Fahrradbeleuchtung eines 26er Rades besteht aus einer Scheinwerferlampe (6 V, 0,5 A) und einer Rücklichtlampe (6 V, 0,1 A). Welche zusätzliche Kraft muß der Radfahrer beim Einschalten der Beleuchtung aufbringen, wenn er mit einer Geschwindigkeit v = 10,8 km/h fährt?

R.

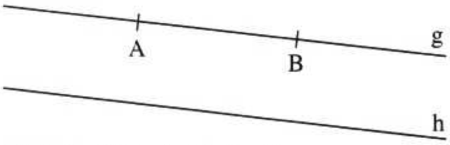
8/14

Bei einem Luftdruck von 1000 hPa wird eine mit Luft gefüllte Flasche mit der Öffnung nach unten in einem See versenkt. Auf welchen Bruchteil des Volumens wird die Luft in 30 m Tiefe zusammengedrückt?

R.

Klassenstufe 9

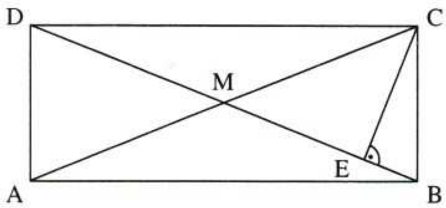
9/8
Gegeben sind zwei zueinander parallele Geraden g und h. Auf g liegt die Strecke $\overline{AB}$, wie die Abbildung zeigt. Es ist unter alleiniger Verwendung des Lineals und ohne Benutzen der Meßskala der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ zu konstruieren.
Die Gültigkeit der Konstruktion ist zu beweisen.



Christian Sevenheck, Berlin

9/9
Es ist folgendes Gleichungssystem zu lösen:
(1) $y = x + 1$
(2) $x^2 + y^2 = 481$
Glenn Hoffmann, Hohenstein-Ernsttal

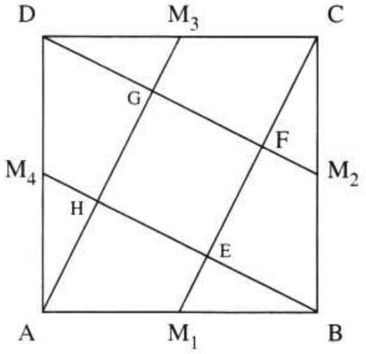
9/10
In dem abgebildeten Rechteck ist die Strecke $\overline{EB}$ 2 cm und die Strecke $\overline{EC}$ 5 cm lang. Der Winkel $\sphericalangle CEB$ ist ein Rechter.
Es sind die Längen der Rechteckseiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ zu berechnen.



Roland Schmugler, Neuhaus

9/11
Gegeben ist die Funktionsgleichung
$y = mx$ ($m \geq 0$; $x \geq 0$; m und x seien reelle Zahlen).
Es ist eine Funktionsgleichung $A = f(m)$ zu bilden, in der A den Flächeninhalt des Steigungsdreiecks bedeuten soll. Diese Funktion ist in einem rechtwinkligen Koordinatensystem graphisch darzustellen!
Peter Brill, Schwerin

9/12
Die Mittelpunkte der Seiten des abgebildeten Quadrats ABCD wurden jeweils mit einem Eckpunkt verbunden.



Es ist durch eine geeignete Zerlegung nachzuweisen, daß die Figur EFGH ein Quadrat ist. Ferner ist das Verhältnis der Flächeninhalte der Quadrate ABCD und EFGH zu berechnen bzw. zu bestimmen.
Dr. E. Umlauft. Hümpfershausen

9/13
Ein Faden darf maximal mit einer Zugkraft von 10 N belastet werden. Es wird zum Bau eines Flaschenzuges mit 6 Rollen verwendet. Welche Last kann maximal mit diesem Flaschenzug gehoben werden? (Gewichtskraft der Flaschen wird nicht berücksichtigt).
R.

9/14
Ein elektrisches Meßwerk hat einen Innerwiderstand von 50 Ω und zeigt bei 2mA Vollausschlag. Es soll als Spannungsmesser für einen Meßbereich von 10 V und als Strommesser für einen Meßbereich von 1 A verwendet werden. Wie müssen Widerstände eingeschaltet werden? Welche Größe haben sie?
R.

Klassenstufe 10

10/8
In einem beliebigen Drachenviereck teilen die Diagonalen die Innenwinkel, so daß acht Teilwinkel entstehen, die wir mit α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2, δ_1, δ_2, bezeichnen wollen.
Es ist zu beweisen, daß dann in jedem Drachenviereck gilt:
$\sin^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_2 + \sin^2\beta_1 + \sin^2\beta_2 + \sin^2\gamma_1 + \sin^2\gamma_2 + \sin^2\delta_1 + \sin^2\delta_2 = 4.$
Gunnar Jeschke, Schwarzheide

10/9
Auf einem Kreis k liegen sechs verschiedene Punkte A, B, C, D, E, F.
a) Wieviele Dreiecke, die von jeweils drei dieser sechs Punkte bestimmt werden, könnte man zeichnen?
b) Ermittle die Anzahl der Sehnenvierecke, die jeweils vier der sechs Punkte als Eckpunkte haben!
c) Wieviele verschiedene Fünfecke gibt es, die k als Umkreis haben?

Bernd Trappe, Berlin

10/10
Es seien p_1 und p_2 Primzahlzwillinge mit $p_1 < p_2$. (Primzahlzwillinge sind Primzahlpaare p,q mit $q = p + 2$.)
Es sind die folgenden Aussagen zu beweisen:

(1) Die Summe der beiden Primzahlen eines solchen Paares $(p_1; p_2)$ ist immer dann durch 6 teilbar, wenn $p_1 > 3$ ist.
(2) Für alle p_1; p_2 gilt : $12 | p_2^2 - p_1^2$, falls $p_1 > 3$.
(3) Wenn p_1 größer als 3 ist, dann ist die Summe der Kuben der Primzahl p_1 und p_2 stets durch 18 teilbar.

OStR Jochen Kreusch, Löbau

10/11
Gegeben ist ein Quader mit den Kantenlängen $a = 5$ cm und $b = 10$ cm. Der Oberflächeninhalt des Quaders beträgt 550 cm².
Wie lang ist die Raumdiagonale e des Quaders?
René Pratsch, Dresden

10/12
Gegeben sei ein Kreis k mit einem Radius der Länge $r = 10$ cm.
a) Zu berechnen ist die Länge der Sehne s, die zu einem Zentriwinkel $\varphi = 37°$ gehört.
b) Zu berechnen ist der Abstand a dieser Sehne vom Kreismittelpunkt M.

Thomas Kuschel, Prenzlau

10/13
Ein mit Wasser gefüllter Eimer wird auf einer Kreisbahn in einer vertikalen Ebene herumgeschleudert. Wie schnell muß der Eimer bei einer Armlänge von 1,0 m bewegt werden, damit kein Wasser ausfließt?
R.

10/14
Ein Flugzeug fliegt einen Vollkreis in 3 min. mit einer Geschwindigkeit von 250 km·h⁻¹.
Welchen Durchmesser hat der Kreis?
R.

Aufgaben ab Klassenstufe 11

E/8
In unserer Aufgabe wollen wir uns einmal mit dem Wort „Knobelei" beschäftigen.
In diesem Wort steckt – wie man unmittelbar ablesen kann – das Wort „Nobel" oder auch das Wort „Ei". Zu weiteren Wörtern kommt man, wenn man eine bestimmte Buchstabenauswahl vornimmt (zwei, drei, vier, ... Buchstaben) und die Reihenfolge der Buchstaben verändert, z. B. NEBEL, LEBEN oder NOBEL, LOBEN usw. Es lassen sich nun auf sehr verschiedene Weise z. B. vier Buchstaben auswählen und damit Wörter (also sinnvolle Buchstabenfolgen) bilden, etwa: KEIL, KIEL, BLEI, KLEE, ELKE, EILE, BEIL, BEIN, KNIE, LEIB, ... usw.
Wenn man systematisch untersuchen wollte, wieviele und welche Wörter (evtl. auch fremder Sprachen) es gibt, die ausschließlich aus den Buchstaben (alle acht oder sieben, sechs, ..., zwei) des Wortes „Knobelei" bestehen, müßte man alle möglichen Buchstabenfolgen, die auf die eben beschriebene Weise entstehen können, aufschreiben und so ihren Sinngehalt feststellen.
Es ist nun zu berechnen, wieviele derartige Buchstabenfolgen existieren!

Um diese recht komplexe und auch etwas schwierige Aufgabe lösen zu können, wollen wir zum „Warmmachen" und Trainieren vorher vier ähnliche, aber nicht so komplexe

Aufgaben lösen, deren Schwierigkeitsgrad von Aufgabe zu Aufgabe steigt.

E/9
Wieviele verschiedene Buchstabenfolgen (Aneinanderreihungen) lassen sich mit dem Wort „Winkel" bilden?
Die Buchstaben sollen nur in ihrer Reihenfolge verändert werden; es dürfen weder Buchstaben weggelassen, noch hinzugefügt werden!
F.

E/10
Wieviele verschiedene Buchstabenfolgen lassen sich mit dem Wort „Gleichung" bilden?
Es gelten die gleichen Bedingungen wie in Aufgabe 1!
F.

E/11
Wieviele verschiedene Buchstabenfolgen, je aus 5 Buchstaben bestehend, lassen sich aus den Buchstaben des Wortes „Winkel" bilden?

E/12
Wieviele verschiedene Buchstabenfolgen, die jeweils aus vier Buchstaben bestehen, lassen sich aus dem Wort „Tangens" bilden?

Und nun viel Freude und Erfolg beim Lösen der Aufgabe mit dem Wort „Knobelei"!

E/13
Auf einer Säule der Höhe $h = 5m$ liegt eine Kugel mit der Masse $m = 200$ g. Die Kugel wird angestoßen und fällt im Abstand $s = 20$ m auf den Erdboden. Welche Geschwindigkeit hatte die Kugel nach dem Stoß und in welcher Zeit erreicht sie den Boden? ($g = 10 \cdot m \cdot s^{-2}$)
R.

E/14
Es stehen ein Gleitwiderstand mit $R = 24\,\Omega$, der als einstellbarer Spannungsteiler verwendet werden soll, und eine Spannungsquelle mit einem sehr geringen Innenwiderstand mit $U = 12$ V zur Verfügung.
Um eine Dynamolampe (6 V, 3 W) zu betreiben, wird der Schleifkontakt zunächst so eingestellt, daß zwischen ihm und einem Pol der Spannungsquelle die Spannung $U = 6$ V liegt. Bei Anschließen der Lampe sinkt diese Spannung. Damit die Lampe mit ihrer Nennspannung betrieben wird, muß der Schleifkontakt verstellt werden.

a) Wo steht der Schleifkontakt vor dem Anschalten der Lampe? (Setzen Sie das Verhältnis Teilwiderstand (R') / Gesamtwiderstand (R) = x!)
b) Auf welche Spannung U' sinkt die Spannung an der Lampe beim Anschalten?
c) An welche Stelle muß der Schleifkontakt gestellt werden, damit die Lampe mit ihrer Nennspannung betrieben wird?
d) Welche Stromstärke muß die Spannungsquelle im Fall a, b und c liefern?
e) Geben Sie eine allgemeine Gliederung $U' = f(x, R_L, R, U)$ an.

1. Internationale Physikolympiade, Polen

Die Preise:

- Ein ***Vegas Computer CE 0808 mit 20 MB Festplatte, Tastatur und Bildschirm***, Hantarex Deutschland Vertriebsges. mbH., W-5230 Altenkirchen
- Vier ***Software-Programme*** des CoMet Verlages für Unterrichtssoftware, 4100 Duisburg:
Cabri Geomètre, Derive 2.0, Treffer!, Graphix
Erforderliche Hardware: jeweils PC mit MS-DOS ab unterschiedlichen Versionen 2,11; 3,2; 3,3; 512 bzw. 648 KB Hauptspeicher und Graphikkarte (Hercules, CGA, EGA, VGA)
- Ein ***Graphik-Rechner FX-7700 G*** von Casio Computer Co. GmbH, 2000 Hamburg
- Zehn ***Electronic-Rechner*** unterschiedlicher Ausstattung von Texas Instruments Deutschland GmbH, 8050 Freising
- Zehnmal die ***Bände I-III "Internationale Mathematik-Olympiade"*** für die Oberstufe vom Manz Verlag, 8000 München
- Fünf ***Electronic Translators mit Währungsrechner und sechs Weltsprachen im Griff*** von Conrad Electronic, 8452 Hirschau
- Zwei Bände ***Schülerduden, Mathematik I und II*** vom Bibliographischen Institut & Fa. Brockhaus AG, 6800 Mannheim
- Fünfzehn ***Spiele*** unterschiedlicher Ausstattung vom Otto Maier Verlag Ravensburg AG, 7980 Ravensburg
- Ein ***Schülerduden "Die Informatik"***. Bibliographisches Institut & Fa. Brockhaus AG, 6800 Mannheim
- Jeweils fünf ***Arbeitshefte und Lösungsbände der "Aufgabensammlung für mathematisch interessierte Schüler"***: 5. - 7. Jahrgangsstufe, 8. - 10. Jahrgangsstufe und 11. - 13. Jahrgangsstufe. Insgesamt 15 Preise! Sponsor: Manz Verlag, 8000 München
- Fünfzehn ***Bücher*** unterschiedlicher Ausstattung vom Otto Maier Verlag Ravensburg AG, 7980 Ravensburg.

Mitarbeiter/innen des Verlages und deren Angehörige können nicht am Wettbewerb teilnehmen. Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.
Die Verlosung erfolgt unter den erfolgreichen Einsendern (Bedingung 5). Der Vegas Computer wird unter den fünf Besten aller Klassenstufen verlost.

Sprachecke

В выпуклом четырехугольнике площадью S проведены отрезки, соединяющие середины противоположных сторон. Найдите наименьшее возможное значение произведения длин тих отрезков.

aus: Quant, Moskau

It shouldn't take you long
How much is one-half of two-thirds of three-quarters of four-fifths of 150?

aus: Fun with mathematics, Toronto

Opérations difficiles

9	9	9	-			=					
	:			+				-			
			·	3		=		1			
			+			=		6			

Complétez pour que toutes les opérations soient justes!

aus: Tangente, Paris

Найдите наибольшее возможное значение частного от деления трехзначного гисла на сумму его цифр.

aus: Quant, Moskau

Übersetzt von R. Bergmann (†), Döbeln, Dr. G. Liebau und P. Hofmann, Leipzig

Sommerschule Junger Mathematiker 1991 – Impressionen

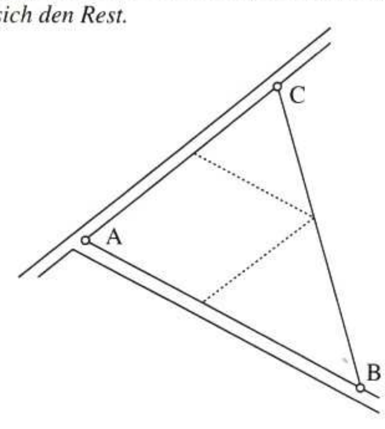
***Mathematik* und *Ferien*? Wie das funktioniert, zeigt Euch dieser Beitrag.**

Für 60 Schülerinnen und Schüler aus dem Regierungsbezirk Leipzig begannen die Sommerferien, wie seit fast dreißig Jahren für ihre Vorgänger, mit einem "mathematischen" Ferienaufenthalt.

Erstmals im Ausland hatten Mitarbeiter der Sektion Mathematik der Universität Leipzig die Sommerschule organisiert. Die Reise ging in die Nähe von Zatec (Saaz) im Böhmischen. Vom mathematischen Anteil dieser Reise, der in den Ferien natürlich nicht 100 Prozent ausmacht, und von ein paar besonderen Erlebnissen handelt dieser Beitrag.

An sechs Vor- oder Nachmittagen beschäftigten sich die einzelnen Altersgruppen gemeinsam unter Anleitung von Studenten und Assistenten der Universität bzw. der TH Leipzig intensiv mit einzelnen Knobelaufgaben oder auch mit Bestandteilen einer mathematischen Theorie, die nicht Gegenstand der Schule sind. Daraus entnahm der Autor die folgenden Beispiele und erläutert sie so, daß sich auch Schüler zurechtfinden, die jünger als die betreffenden Teilnehmer sind.

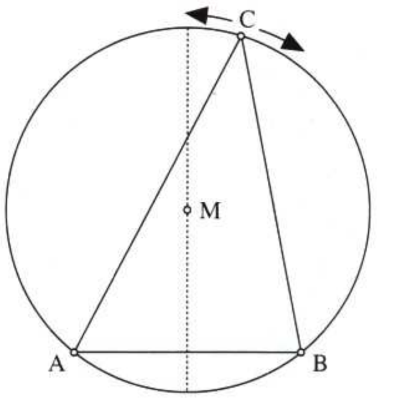
• *Ein Grundstück im spitzen Winkel zweier Straßen hat den angegebenen Grundriß (Abb. 1). Es soll unter drei Personen aufgeteilt werden. Die erste erhält ein Teilstück, das an die beiden Straßen stößt und außerdem zu diesen parallele Begrenzungslinien hat, die an der dritten Seite zusammentreffen. Dieses Teilstück soll, so steht es im Vertrag, möglichst groß sein. Die beiden übrigen Personen teilen sich den Rest.*



Welche Anordnungen der drei Teilflächen genügen den Forderungen des Vertrages?

Diese und einige andere sogenannte Extremwertaufgaben waren Gegenstand des Zirkels für die 10- bis 12jährigen, der von Dr. Hunecke geleitet wurde. Dabei sollte natürlich kein allgemeingültiges mathematisches Verfahren erläutert werden, wie es in den Klassen der Sekundarstufe II gelehrt wird. Insbesondere durch funktionale Überlegungen kann man sich trotzdem der Lösung sehr weit nähern oder sie gar sofort bestimmen. An einem einfacheren Beispiel soll das zunächst verdeutlicht werden.

• *Bestimme das flächengrößte Dreieck, dessen eine Seite Sehne eines Kreises ist und dessen dritter Eckpunkt auf diesem Kreis liegt.*



Betrachten wir gemeinsam Abb. 2 und denken uns den Punkt C auf k beweglich. Nähert sich C dem Punkt A, entsteht ein Dreieck mit immer geringerem Flächeninhalt. Das ist auch für Punkt B der Fall. In der Nähe der Mittelsenkrechten m von AB vermutet man das flächengrößte Dreieck. Wenn wir nun in unsere Überlegungen die Formel für die Dreiecksfläche $A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{s \cdot h}{2}$ einbeziehen, folgt mit der konstanten Länge s der Sehne AB, daß bei maximaler Höhe h auch der Flächeninhalt A maximal wird. Diese größte Höhe liegt aber genau dann vor, wenn C auf der Mittelsenkrechten zu A und B liegt.

1) Stellt zum erstgenannten Problem eine Vermutung auf und beweist diese, indem Ihr die Restfläche geschickt zu einem Flächenstück zusammenfaßt!

• *Durch die Spalten vieler Zeitungen ging im Jahre 1986 folgende Meldung:*

"Der jugoslawische Geographieprofessor Vladimir Zubic vermag im Kopfrechnen die 37. Wurzel aus einer 100stelligen Zahl in nur 2 min 17 s zu ermitteln. Der Hobbymathematiker übt sich täglich mehrere Stunden. Er ist überzeugt, daß er derzeit den absoluten Weltrekord hält."

Könnte man seinen Rekord einstellen oder ihn gar kräftig überbieten?

Ralf Laue, Student der Mathematik an der Universität Leipzig, selbst Rekordhalter im Guiness-Buch der Rekorde (alpha berichtete im Heft 6/91 darüber), stellte diese Aufgabe seinen Schülern der zehnten Klasse. Man kommt aber schon in jüngeren Jahren in rekordverdächtige Gefilde, wenn man verstanden hat, wie *logarithmisches Rechnen* funktioniert.

Dazu nehmen wir ein einfaches Beispiel.

Wir berechnen $8 \cdot 16$. Das kann jeder im Kopf: 128. Wir wissen auch, daß 8 als Produkt von drei Faktoren 2 und 16 gar von 4 Faktoren 2 geschrieben werden kann. Abgekürzt schreibt man dies mit Hochzahlen (Exponenten) als Potenz:

$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$

$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$

Bildet man nun das Produkt $8 \cdot 16$, so enthält es 7 Faktoren 2, also

$128 = 8 \cdot 16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 2^4 = 2^7$.

Das ist alles sehr leicht, auch folgender Fakt: Wenn man die Hochzahlen zu einer bestimmten Basis (hier 2) kennt, kann man *multiplizieren*, indem man die Hochzahlen *addiert* und schließlich die Basis mit dieser Summe potenziert.

Hier heißt das für die Basis 2:

$8 \longrightarrow 3$ und $16 \longrightarrow 4$, $3+4=7$, $7 \longrightarrow 2^7 = 128$

Da man mit diesen Exponenten bei der Basis 10 besonders gut rechnen kann, stehen auf dem Taschenrechner (auch in der Zahlentafel) diese sogenannten *Logarithmen*, ein anderes Wort für Exponent oder Hochzahl, zur Verfügung. Tippt zum Probieren solche Zahlen ein, deren Logarithmus zur Basis 10 Ihr schon wißt, z. B. $100=10^2$, oder $1\,000\,000 = 10^6$. Benutzt die Taste **lg**, "lg" ist die Abkürzung von "$\log_{10}$".

Bei Zahlen, die keine Zehnerpotenzen sind, gibt der Taschenrechner einen Näherungswert aus.

Bestimmen wir noch einige Logarithmen: $\log_{10} 20 \approx 1{,}301$.

Wie groß ist $\log_{10} 5$?

Bitte erst überlegen und nicht gleich zum Rechner greifen!

$5 \cdot 20 = 100$, also ist die Summe der Logarithmen (Exponenten) zur Basis 10 von 5 und 20 gleich 2, denn $10^2 = 100$. Der Zehnerlogarithmus von 5 ist also etwa

$2 - 1{,}301 = 0{,}699$.

Inzwischen habt Ihr auch bemerkt, daß einstellige natürliche Zahlen Zehnerlogarithmen zwischen 0 und 1, zweistellige zwischen 1 und 2, ... damit 100stellige zwischen 99 und 100 haben. Teilen wir $99 < a < 100$ durch 37, erhalten wir die Zehnerlogarithmen der 37. Wurzel aus hundertstelligen Zahlen. Die zugehörigen Zahlen werden mit der zur **lg** -Taste entgegengesetzten Taste **10^x** bestimmt: $2{,}67.. < \lg z < 2{,}70.. \longrightarrow 473{,}88.. < z < 504{,}31..$ Es kommen damit nur die natürlichen Zahlen 474 bis 504 als Lösungen in Frage, ganze 31 Stück, deren 37. Potenzen man spielend in "mehreren Stunden", und zwar an einem Tag, zu unterscheiden lernen kann! Doch es kommt noch einfacher. Bildet man das Quadrat (die zweite Potenz) einer Zahl, die auf Ziffer 9 endet, so endet die Potenz auf 1, die dritte Potenz endet wieder auf 9 usw.

Beispiel: 1**9**, $19^2 = 36\mathbf{1}$, $19^3 = 685\mathbf{9}$,
$19^4 = 13032\mathbf{1}$

Die Zahl 37 ist nun sehr gut ausgesucht, denn alle zehn Endziffern 0, 1, ..., 9 kehren in der 37. Potenz stets als Endziffer wieder. Nehmen wir gleich ein Beispiel, das auf eine hundertstellige Zahl führt. Ohne jede Rechnung weiß der Geographieprofessor, daß die 37. Potenz von 503 auf 3 endet. Darüber hinaus weiß er: Weil 504^{37} die größte hundertstellige Zahl liefert, kann die hundertstellige Zahl, die *mit 9 beginnt und mit 3 endet*, als 37. Wurzel nur die Zahl 503 haben.

2) Fertigt eine Übersicht an, die zu jeder in Frage kommenden Zahl einen Näherungswert für ihre 37. Potenz angibt!

Wer diese mit Überlegung auswendig gelernt hat, kann die 37. Wurzel aus einer 100stelligen Zahl innerhalb einer Sekunde ziehen, denn ein Blick auf deren erste und ein zweiter auf deren letzte Stelle genügen.
Bestimmt im Kopf die 37. Wurzel aus der folgenden hundertstelligen Zahl!

1 873 874 126 983 103 425 520 145 277 956 535 720 721 472 397 998 816 864 036 679 277 736 626 954 078 448 170 640 276 188 699 820 032

Zwei Tagesausflüge standen auf dem Programm der Sommerschule. Der erste führte in die Hauptstadt Prag, der zweite zum sogenannten Heiligen Berg (Svatá Hora), einem eindrucksvollen katholischen Wallfahrtsort, und zur Talsperre Orlik. Eine 460m lange Staumauer speichert etwa 750 Mill. Kubikmeter Wasser. Dort konnten wir nicht nur die Zdakovsky-Brücke, mit 50m Höhe und einer Spannweite von 330m eine der größten Europas, genauer in Augenschein nehmen, sondern auch das gleichnamige Märchenschloß der Schwarzenbergs (einer der Nachfahren ist ein enger Berater V. Havels, des Präsidenten der CSFR) besichtigen, das ehemals 60m über dem Wasserspiegel der Moldau gelegen, heute direkt am Ufer des Stausees steht.
Ein traditioneller Höhepunkt ist allsommerlich die Mathematikolympiade, an der sich alle Schüler beteiligen. Die folgende Aufgabe zeigt, welche Nuß diejenigen aus der Achten knacken mußten.

3) An einem Küstenabschnitt von Phantasien, an dem es erfahrungsgemäß von Untiefen nur so wimmelt, muß Kapitän Bastian Balthasar Bux durch Peilung den genauen Standort seines Schiffes bestimmen. Er hat auf der Brücke Seekarten gefunden, die den vor ihm liegenden Leuchtturm L, einen spitz aufragenden Felsen F und einen Rauch ausströmenden Vulkankegel V verzeichnen (Abb. 3). Sein getreuer Erster Offizier ermittelt die Winkel
$\sphericalangle VSL = 16°$ und $\sphericalangle FSL = 25°$.
Kapitän BBB konstruiert im Handumdrehen seine Position.

Auf der Zdakovsky-Brücke

Zahlreiche komplizierte Dreieckskonstruktionen hatte Torsten Angermann, Lehrerstudent an der Sektion Mathematik der Universität, in seinen Zirkeln erläutert, doch nun das. Hoffentlich würde aus der Lösung keine *Unendliche Geschichte* werden!
Wo, ist zu fragen, liegen die Scheitelpunkte aller Winkel von 16°, deren Schenkel durch V bzw. L gehen? Natürlich auf einem Kreisbogen durch V und L, das ist doch der Peripheriewinkelsatz. Viel mehr soll nicht verraten werden, außer, daß der Mittelpunkt eines solchen Kreises in einem der behandelten Sätze eine wichtige Rolle spielt ...
Mit einer Weltneuheit, einem *mathematischen Vortrag am Lagerfeuer*, begannen die letzten Stunden der gemeinsamen Ferien. Drei der Schüler waren Teilnehmer der diesjährigen Deutschlandolympiade, die im Juni in Erfurt ausgetragen worden war.
Einer der Preisträger, Jens Meiler, sprach unter etwas ungewöhnlichen äußeren Bedingungen über die aufregenden Tage. Das Lagerfeuer war gerade entzündet worden, zu früh, um schon Schwein und Hammel darüber zu braten. Eine Tafel wurde provisorisch aufgestellt, so daß auch der mathematische Teil des Berichts für alle verständlich werden konnte.

Jens rechnet eine Aufgabe der Deutschlandolympiade, deren Lösung ihm nicht leicht gefallen war.

Dr. Christian Werge
Mathematik- und Physiklehrer
Assistent im Wissenschaftsbereich Didaktik der Sektion Mathematik der Universität Leipzig

Historische mathematische Instrumente

Die Rechenmaschine von Johann Philipp Gruson

Halt! Vor dem Lesen solltet Ihr Euch die Rechenscheibe basteln. Aufkleben auf eine feste Pappe empfiehlt sich!

Vor 200 Jahren gelang dem in Magdeburg geborenen Mathematiker Johann Philipp Gruson (2.2.1768 – 16.11.1857) die Erfindung einer mechanischen Rechenmaschine, die im Vergleich zu ihren Vorgängern analoge Leistungsparameter aufwies, aber völlig ohne "Räderwerk" auskam und damit leicht herzustellen war. Nach Einschätzung des Heidelberger Mathematikhistorikers Moritz Cantor scheint die Grusonsche Erfindung "Beifall gefunden zu haben".

Johann Philipp Gruson

Lobende Worte findet auch der Zeitzeuge Edmund Brunow: "Je einfacher eine Maschine ist, je weniger Räder oder andere mechanische Hilfsmittel sie hat, desto besser. Sie ist alsdenn wohlfeiler und dauerhafter; Mängel entdeken und verbessern sich leichter. In dieser Rüksicht macht die Grusonsche Rechenmaschine gewiß allen ihren Schwestern den Rang streitig. Sie ist eine einfache Scheibe, und leistet dennoch zum mechanischen Rechnen die Dienste einer zusammengesetzten Maschine". Der junge Gruson baute diese Rechenmaschine während seiner ersten Anstellung als Königlich Preußischer Baubeamter an der Kriegs- und Domänenkammer in Magdeburg. Die dort anfallenden umfangreichen und zeitaufwendigen Berechnungen wollte er schnell, exakt und fehlerfrei lösen. In seinen Publikationen ist nachvollziehbar, wie intensiv sich Gruson mit mechanischen Rechenmaschinen beschäftigte. In seinen Veröffentlichungen sind – in historische Reihenfolge gesetzt – folgende Erfinder mit ihren Rechenmaschinen genannt (siehe nebenstehende Tabelle). Gruson konstruierte seine Rechenmaschine zur mechanischen Ausführung der vier Grundrechenarten in Form einer kreisrunden Scheibe (Durchmesser: 0,7 rhein. Fuß = 22 cm) um deren Mittelpunkt sich ein Weiser drehte. Die Scheibenmitte umschloß ein Kreis (Durchmesser: 0,27 rhein. Fuß = 8,5 cm), darin stand: "Rechenmaschine, erfunden von Johann Philip Gruson. Magdeburg, den 2. Febr. 1790". Von den neun Kreissektoren sind ein Sektor (A/S) für die Addition und Subtraktion und acht Sektoren (2, 3, ..., 9) für die Multiplikation und Division zu verwenden. Die Sektoren sind in Spalten untergliedert, die am äußeren Rand der Scheibe gekennzeichnet sind. Für den Sektor A/S sind das neun Spalten und für die anderen acht Sektoren ist die Anzahl der Spalten gleich der Nummer des jeweiligen Sektors.

Der Sektor A/S, einschließlich des Weisers, stellt eine pythagoräische Tafel dar. Solche Tafeln, wie sie hier Gruson für die Addition nutzt, waren zu jener Zeit üblich. In einem Zahlentableau wird zwei frei wählbaren Zahlen (Summanden) genau eine Zahl (Summe) zugeordnet.

Die **Addition** a + b = c wird im Sektor A/S wie folgt ausgeführt:
- Summand a, Weiser auf a-te Spalte stellen
- Summand b entspricht Zahl auf Weiser
- Summe c, links von (Weiser) in a-ter Spalte, d. h. in gleicher Zeile bzw. gleichem Kreisbogen ablesen.

Die **Subtraktion** a – b = c verläuft in umgekehrter Reihenfolge:
- Subtrahend b, Weiser auf b-te Spalte einstellen
- in b-ter Spalte Minuend aufsuchen und Differenz in gleicher Zeile bzw. gleichem Kreisbogen auf Weiser ablesen.

Für die acht Sektoren 2 bis 9 definierte Gruson folgende Begriffe (unterstrichen gekennzeichnet):

Faktorentafel i (i=2, 3, ..., 9)

i-1	...	...	$j^{3)}$	...	$1^{3)}$	$0^{2)}$	
							9
			$T_{kj}^{5)}$				$k^{4)}$
							1
			$i^{1)}$				Weiser

1) <u>Tafelzahl</u> / <u>Abteilung</u> / <u>Sektor</u> i
wobei i Multiplikator bzw. Divisor ist
2) <u>Colonne</u> oder <u>Spalte</u> o mit ihren <u>Reihenzahlen</u>
$\{a_k\}$ mit $a_k = i \cdot k$ (k = 1, 2, ..., 9)
3) <u>Colonne</u> oder <u>Spalte</u> j mit ihren Reihenzahlen, d. h.
$\{b_k\}$ mit $b_k = a_k + j = i \cdot k + j$
(i = 2, 3, ...,9; k = 1, 2, ..., 9; j = 1, 2, ..., i-1)
4) <u>Reihenzahl</u> (k = 1, 2, ..., 9)
5) <u>Fach</u> T_{kj} (Anzahl : 9 · i mit i = 2, 3, ...,9)

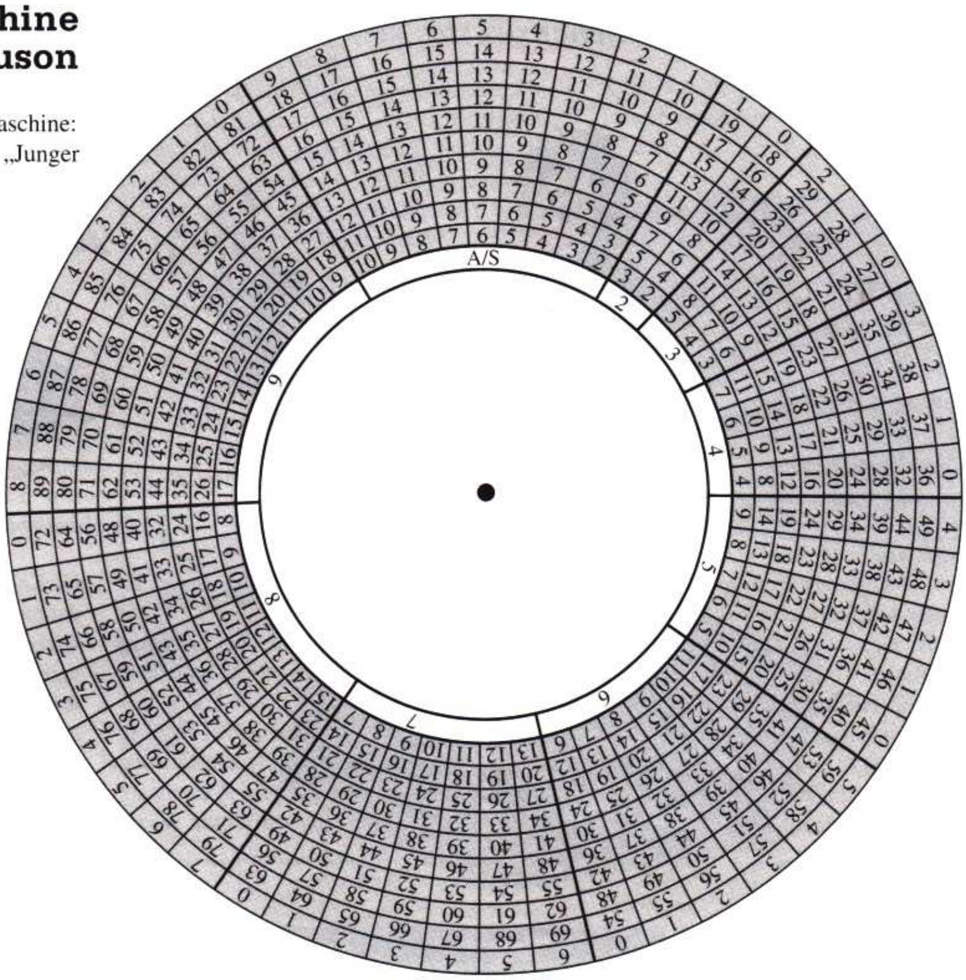
Die **Multiplikation** und **Division** wird mit Hilfe der Faktorentafeln wie folgt ausgeführt:

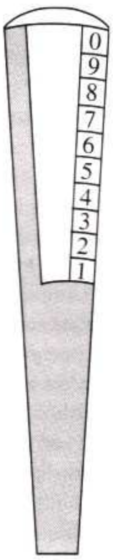
Aufgabe (1): 456 · 7
- Multiplikator ist 7, Faktorentafel 7 verwenden
- 1. Teilaufgabe 6 · 7
  Weiser auf 0-te Spalte drehen, in 6ter Reihe 42 ablesen, Einerstelle 2 notieren, Zehnerstelle 4 entspricht Übertrag und Weiser auf 4te Spalte stellen
- 2. Teilaufgabe 5 · 7
  in 5ter Reihe 39 ablesen, Einerstelle 9 notieren, Zehnerstelle 3 entspricht Übertrag und Weiser auf 3te Spalte stellen

Jahr	Erfinder	Angaben von Gruson zu den Rechenmaschinen
1617	*Neper*	Nepersche Rechenstäbe
1642	*Pascal*	Pascaline / Addier- und Subtrahierwerk (galt bis 1957 als erste mechanische Rechenmaschine)
1666	*Morland*	Addiermaschine mit Neperscher Produktanzeige
1673	*Leibniz*	Vierspezies-Staffelwalzenmaschine
1700	*Poloni*	Sprossenrad-Rechenmaschine
1700	*Perrault*	Rhabdologisches (stäbchenförmiges) Rechenbrett
1735	*Gersten*	Rechenmaschine nach Art Zahnstangenaddiatoren
1770	*Hahn*	Vierspezies-Staffelwalzenmaschine
1786	*Müller*	Maschina arithmetica portalis (Nepersche Rechenstäbe auf beweglichen konzentrischen Kreisen)
1789	*Schott*	Schott's Rechenkasten (mehrere Nepersche Rechenstäbe auf beweglichen geraden Zylindern)

Die Rechenmaschine von Gruson

(Techn. Herstellung der Rechenmaschine: U. Ostendorf, Magdeburg, Station „Junger Naturforscher und Techniker)





– 3. Teilaufgabe 4 · 7
in 4ter Reihe 31 ablesen und notieren
– Ergebnis (die von rechts nach links notierten Ziffern ergeben das Produkt) : 3192

Aufgabe (2): 456 · 73
– Multiplikatoren sind 7 und 3, zuerst wird die Zehnerstelle 7, dann die Einerstelle 3 des Multiplikators entsprechend den Sektoren 7 und 3 abgearbeitet und wie folgt notiert:

456 · 73	
3192	unter Zuhilfenahme des
1368	Sektors A/S
33288	Ergebnis

Aufgabe (3): 456 : 7
– Divisor ist 7, Faktorentafel 7 verwenden
– 1. Teilaufgabe 45 : 7
im Sektor 7 steht die 45 in der 6ten Reihe und der 3ten Spalte, d. h. die 45 ist 6mal durch 7 mit Rest 3 teilbar, notiere 6, verbleibt als Dividend 36
– 2. Teilaufgabe 36 : 7
die 36 steht in der 5ten Reihe und ersten Spalte, d. h. die 36 ist 5mal durch 7 mit Rest 1 teilbar, notiere 5, verbleibt als Dividend 10
– 3. Teilaufgabe 10 : 7
10 ist einmal durch 7 mit Rest 3 teilbar, notiere 1
– 4. Teilaufgabe 30 : 7
30 ist 4mal durch 7 mit Rest 2 teilbar, notiere 4
– Quotient: 456 : 7 = 65,14...

Die ersten Exemplare der Rechenmaschine von Gruson wurden ab November 1790 für 1 Thaler und 2 Groschen in Magdeburg verkauft.
Die technische Fertigung erfolgte mit Unterstützung von Prof. Klügel aus Halle, der die Herstellung des Kupferstiches besorgte. Obwohl Prof. Kästner aus Göttingen den jungen Gruson bei der Anfertigung der Gebrauchsanleitung für die Rechenscheibe unterstützte, gab es Kritik, weil "die Anweisung nicht verständlich" war. Selbstkritisch konstatiert Gruson: "zu bekannt mit den eigenen Operationen – habe ich – (Einfügung d. A.) mich in meiner Nachricht über vieles zu dürftig ausgedrückt". So folgte der Versuch von Edmund Brunow, eine weitergehende Gebrauchsanleitung zu geben. Zum Wert der Grusonschen Rechenscheibe hob er hervor: "sie giebt nur von den einfachen Zahlen ihre Summen und Produkte, ... Aber sie kann ja auf zusammengesetzte Zahlen ... ausgedehnt werden. – Ihre Anordnung und Zusammensetzung ist sinnreich, und dieses Verdienst bleibt dem Erfinder immer."
Zwischen dem Schicksal der Grusonschen Rechenscheibe und der Schickardschen Rechenmaschine, die erst 1957 durch Dr. Franz Hammer im "Pulkower Nachlaß" mit dem Auffinden eines Briefes von Schickard an Kepler vom 20. September 1623 wiederentdeckt wurde, gibt es gewisse Bezüge. 200 Jahre nach der Grusonschen Erfindung ist unklar, ob ein Originalexemplar oder eine Originalabbildung heute noch existiert. Eine intensive Suche blieb bisher ergebnislos. Somit ist nur der prinzipielle Aufbau und die Funktionsweise der Rechenscheibe von Gruson, nicht aber ihre genaue Gestalt bekannt.

Dr. Reinhard Buchheim
Prof. em. Dr. Karl Manteuffel
Fakultät für Mathematik der Technischen Universität "Otto von Guericke" Magdeburg

Die Marktecke

Lesens- und Sehenswertes vom Medienmarkt

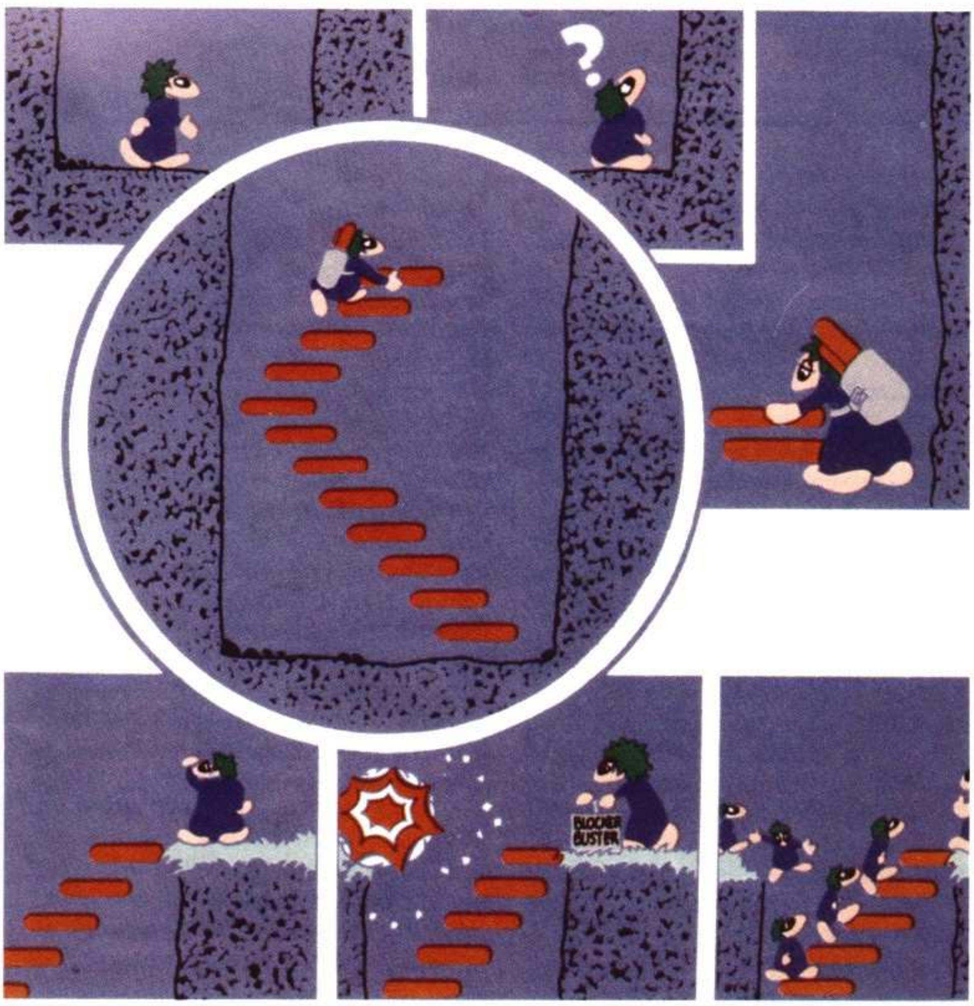
Lemmings

Sieh mal, was ich kann! *Klettern* *Fallschirmspringen* *Blocker hochjagen*

Lemminge könnten ideales Studienobjekt für Psychologen werden, denn bei Lemmigen herrscht Gruppendenken vor. Zum Lemmings-Gruppendenken gehört schon ein gerütteltes Maß an Dusseligkeit. Computerspieler kennen Lemminge. Lemminge sind auf dem Bildschirm weniger als 1 cm groß, einfältig und reagieren auf das, was man ihnen vorgibt. Sie tun das, was ihnen mittels Maus oder Tastatur befohlen wird: Brücken bauen, Tunnel graben, über Hindernisse klettern, mit dem Fallschirm zu springen, sich selbst in die Luft zu sprengen. Stößt so ein Lemming an ein Hindernis, dreht er um und marschiert stur in die entgegengesetzte Richtung. Beim Kontakt mit Fallen, Schluchten, Gebläsen und Flüssen ist ihr Schicksal besiegelt.

Was hat dabei die Mathematik bei Lemmings zu leisten? Eine ganze Menge! Freundlicherweise informiert das Programm vor jedem Level, wieviele Pelztiere erscheinen werden. Als Zielangabe erhält man noch den Hinweis, mindestens einen bestimmten Prozentsatz dieser sturen Wanderer retten zu müssen. Zuerst ist Kopfrechnen angesagt, um herauszufinden, wieviel denn nun 66 % von 100 Tieren sind. Einfach, oder? Wie ist es aber bei 75 % von 80 Tieren, oder bei 91 % von70? Die zu errechnende Zahl braucht man aber, um im Spiel auf der Informationsleiste rasch nachzurechnen, wieviele dieser netten grünhaarigen Artgenossen noch das Ziel erreichen sollen. Es ist einfach sinnlos, den verbleibenden Lemmings einen Weg zu bahnen, wenn die Anzahl derer, die das offene Tor erreicht haben werden, weit unter der geforderten Punktzahl liegen wird.

Gedankenlos läuft die Lemmings-Herde auf eine Schlucht zu. Was fehlt, ist eine Brücke. Es ist aber möglich, Lemminge als Brückenbauer einzusetzen. Zwölf Bausteine hat so ein Brückenbauer in seinem Rucksack, die er in einem etwa 30°-Winkel aufeinandersetzt. Wieviel Brücken muß ich aneinandersetzen, um über die Schlucht zu kommen, wenn deren Breite auf dem Bildschirm etwa 2 cm beträgt? Gab es da nicht bestimmte Sätze der Geometrie zu beachten? Noch wichtiger wird die Rechenkunst, wenn man eine Brücke planen muß, die einen Mittelpfeiler von gut 10 cm haben soll. In welcher Entfernung muß der Brücken-Leming mit seinen ersten 12 Stufen beginnen? Setzt man einen Blocker auf die oberste Brückenstufe, kann man von einem anderen Lemming verlangen, daß er an einer bestimmten Stelle der Brücke in einem weiteren 30°-Winkel in entgegengesetzter Richtung die Brücke verlängert. Winkelbetrachtungen verlangen die Lemmings auch beim Schrägbuddeln. Ein Winkel von etwa 30° zwingt auch hier vor dem Einsatz der Lemmings zu mathematischen Betrachtungen.



Das Zusammenspiel von Zeit und Wegstrecke wartet in derselben Art und Weise mit knackigen Rechnungen auf. Ein Lemming darf als selbstzündende Bombe deklariert werden. Vom Aktivieren bis zur Explosion vergehen exakt fünf Einheiten, die über dem Lemming als Ziffer angezeigt werden. Sich bewegende Lemminge legen in diesem Zeitraum eine bestimmte Wegstrecke zurück. Lemmings erwartet hier genaue Rechnung, denn leicht ist ein Lemming falsch programmiert; zu spät oder zu früh gezündet verpufft das arme Tierchen an einer nutzlosen Stelle.

Wie verändern sich die Planungen, wenn man nur eine vorgegebene Anzahl von Lemmings als Brückenbauer einsetzen kann? Der Ansatzpunkt jeder Brücke ist enorm wichtig. Bevor man die Tierchen den abenteuerlichen Gang durch die Levels starten läßt, sollte man deswegen die Stop-Taste aktivieren, um sich bei einem ausführlichen Stop Überblick verschaffen zu können, denn sonst läuft die Zeit unweigerlich davon. Acht Minuten können bei Lemmings verdammt kurz sein.

Als Spieler hat man alle Hände voll zu tun, mit Hilfe der Brückenbauer-, Buddler-, Fallschirmspringer-, Kletterer- oder Spreng-Lemminge die Horde, die zwischen 1 und 100 Tieren schwankt, zusammenzuhalten.

Lemmings läßt sich mit mathematischen Überlegungen inkl. einer geballten Ladung logischen Denkens lösen. Zugegeben: der 28. Level MAYHEM hat sehr starken Glücksspiel-Charakter, und der eine oder andere Level sorgt für graue Haare.

Lemmings ist grafisch erste Sahne, musikalisch hat es bei zu nutzender Soundkarte eine Menge zu bieten, die vier Schwierigkeitsgrade sorgen für anhaltende Motivation und die erspielten Paßwörter erlauben den direkten Zugriff auf alle Levels. Lemmings ist eine neue Spielidee. Da ist kein Monster zu morden, kein Rennwagen zu steuern, kein Flug zu simulieren. Bei Lemmings muß man immer nur einen Schritt schneller sein, einen Schritt vorausgedacht haben, denn ohne Denken, ohne Knobeln, ja ohne Mathematik können Lemmings nur jene schaffen, die über ein absollutes Auge und eine schnelle Hand verfügen.

H. Seitz /-se

Lemmings, Psygnosis 1991, taktisches Denkspiel, Distributor: United Software

Hardware: XT 12 MHz, 512 KB RAM
Grafik: CGA/EGA/VGA,
Sound: Karte und intern,
Bedienung: Maus, Joystick, Tastatur,
Handbuch mehrsprachig

Das Glastropfenspiel

Reihenweise Logik

Auch allein spielen kann Spaß machen. Und wer sich erst einmal in das neue Ravensburger Glastropfenspiel vertieft hat, braucht nichts dringender als volle Konzentration. Eine logische Legetüftelei für einen Spieler ab 10 Jahren von Dieter Matthes und Silvia Heinz.

Ein Spielbrett mit 72 Löchern und ebenso vielen verschiedenfarbigen Perlen fordern zum geistigen Abenteuer auf.

Die Glastropfen - man ahnt es - sollen in die Löcher wandern; den Auftakt bestimmen die Startperlen, um die alle anderen gruppiert werden müssen. Allerdings nicht irgendwie: Fünf eiserne Regeln sorgen für reichliches Kopfzerbrechen.

Wer die erste Aufgabe gelöst hat und noch nicht bunt sieht, kann sofort weitermachen.

60 weitere Aufgabenstellungen werden dem Tüftler geboten.

Foto: Ravensburger

Mathematische Schülerbücherei (MSB)

Interessenten der Mathematischen Schülerbücherei (MSB) sollten in ihrer Buchhandlung nach folgenden Titeln des ***Teubner Verlages Leipzig*** fragen:

Herbert Kästner/Peter Göthner
Algebra – aller Anfang ist leicht
ISBN 3-322-00382-5, MSB 107
Interessante Analogien und überraschende Zusammenhänge zwischen scheinbar weit auseinanderliegenden Gebieten der Mathematik ermöglichen dem Leser, mathematische Gebiete zu ordnen und zu systematisieren, führen in die strukturelle Denkweise ein und wecken Appetit auf die weiterführende Beschäftigung mit algebraischen Strukturen. Aufgaben kommen dabei nicht zu kurz.

Eberhard Schröder
Mathematik im Reich der Töne
ISBN 3-322-00476-7, MSB 106
Der Band gibt einen Überblick über den mathematischen Aufbau der Tonleitern nach dem pytharoreischen, dem diatonischen und dem temperierten Stimmungsprinzip; sie werden in der Reihenfolge ihrer historischen Entwicklung betrachtet.

Eberhard Schröder
Kartenentwürfe der Erde
ISBN 3-322-00479-1, MSB 128
Daß die informative Weltkarte der Gegenwart das Endprodukt eines über Jahrtausende währenden Forschungs- und Erkenntnisprozesses ist und die Mathematik in der Kartografie eine wichtige Anwendung findet, wird hier dargestellt.

Lösungen

• Das Tetraeder

1. BD liegt auf der Symmetrieachse der Kanten BC und BA, ist also Winkelhalbierende des Winkels ABC (Abb. 10). Die Faltkante EG verläuft senkrecht zu BD, also gilt

$$\sphericalangle\, EGB = 180° - 90° - \frac{45°}{2} = 67{,}5°.$$

Der gefragte Winkel AGE ist Nebenwinkel zu $\sphericalangle$ EGB und damit 112,5° groß.

2. Mit etwas Phantasie modellieren wir den Becher als *Kreiskegel*. Wir wissen aber, daß sich die sogenannten Mantellinien nicht in einem Punkt, sondern in einer Kante schneiden. Unsere mathematische Modellierung wird also etwas zu kleine Werte liefern.

$\overline{DE} \approx 11{,}7$cm —> Umfang des Grundkreises $U \approx 23{,}4$cm

Grundkreisfläche $A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{U}{2\pi}\right)^2 = \frac{U^2}{4\pi}$

Höhe des Körpers: $h = \overline{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{DE} \approx 8{,}3$ cm

Volumen $V = \frac{1}{3}Ah = \frac{U^2 h}{12\pi} \approx 120$ cm^3

Den Vergleich dazu liefert ein *physikalisches* Experiment, bei dem Wasser, das den Becher bis zum Rand füllt, ein Volumen von ca. 150 cm^3 einnimmt. Überlegt beim Experimentieren, womit die Abweichung außerdem zu begründen ist!

3. Errichtet man über einer Strecke, nennen wir sie $\overline{AD}$, die Mittelsenkrechte und zeichnet einen Kreisbogen um D mit $r = \overline{AD}$, so wird die Mittelsenkrechte in einem Punkt geschnitten, der gleichweit von A und D entfernt ist. Man erhält so drei Punkte, die paarweise gleichen Abstand haben. Sie bilden die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks.
In jedem Dreieck liegen gleichlangen Seiten gleichgroße Winkel gegenüber, also haben im gleichseitigen Dreieck alle Winkel die Größe 60°.
Beim Falten des Punktes A auf die Mittelsenkrechte haben wir genau diese Konstruktion "gekniffen" und somit Winkel von 60° (und von 90°-60°=30°) erhalten.

4. $\overline{NG} = \frac{\overline{AB}}{2}\tan 60° -\!>$

$\overline{MG} = h = \overline{NG} - \overline{AE} \approx 7{,}3$ cm

$\overline{GI} = a = \frac{\sqrt{12}}{3}h \approx 8{,}5$ cm

$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 = \frac{2\sqrt{6}}{27}h^3 \approx 71$ cm^3

Das Volumen des Tetraeders beträgt etwa 71 cm^3.

5. Ein Bogen mit doppelt so großer Kantenlänge führt auch zu einer Verdoppelung der Dreieckshöhe h, somit zu einem achtmal so großen Volumen. Man muß einen Bogen von $\sqrt[3]{2}\cdot 20\text{ cm} \approx 25{,}2$ cm Kantenlänge wählen.

• Neues von der Bahn

• Die vollständige Loknummer lautet 155 029-2

• Änderung einer Ziffer
Die Ziffer an der 1., 3. oder 5. Stelle würde durch eine Ziffer ersetzt, die sich um mindestens 1, höchstens aber 9 von ihr unterscheidet.
An der 2., 4. oder 6. Stelle muß bei sich infolge der Verdoppelung ergebenden gleichen Einerziffern stets noch die Ziffer 1 der Zehnerstelle addiert werden.
Damit bemerkt das Prüfverfahren in jedem Fall einen Fehler.

• Vertauschung zweier benachbarter Ziffern
Seien a und b zwei beliebige, benachbarte Ziffern der Loknummer ($a, b \in N$) Dann geht zunächst $2 \cdot a + 1 \cdot b$, nach der Vertauschung $2 \cdot b + 1 \cdot a$ in die Quersumme ein. Das Prüfverfahren würde genau dann versagen, wenn gilt: $2 \cdot a + b = 2 \cdot b + a$.
Dies tritt aber nur für den Fall a = b ein, und eine Vertauschung gleicher Ziffern ist unerheblich (analog für $1 \cdot a + 2 \cdot b$).
Auch hier werden stets fehlerhafte Loknummern aufgedeckt.

• Vertauschung zweier beliebiger Ziffern
In die Quersumme können vier Fälle eingehen (a, b beliebig, $a, b \in N$)

1. $1 \cdot a + 2 \cdot b$, nach Vertauschung
   $1 \cdot b + 2 \cdot a$ (Verfahren zeigt Fehler an)
2. $2 \cdot a + 1 \cdot b$, nach Vertauschung
   $2 \cdot b + 1 \cdot a$ (Verfahren zeigt Fehler an)
3. $1 \cdot a + 1 \cdot b$, nach Vertauschung
   $1 \cdot b + 1 \cdot a$ (Da sich gleiche Summen ergeben, versagt das Verfahren.)
4. $2 \cdot a + 2 \cdot b$, nach Vertauschung
   $2 \cdot b + 2 \cdot a$ (Verfahren versagt)

Bemerkt werden muß noch, daß das Prüfverfahren nur einen Fehler anzeigt, nicht aber die Fehlerquelle.

• Autofahren wird teurer

$$\frac{603\ DM}{3 \cdot 20000\ km} \approx 0{,}12\ DM\,/\,km$$

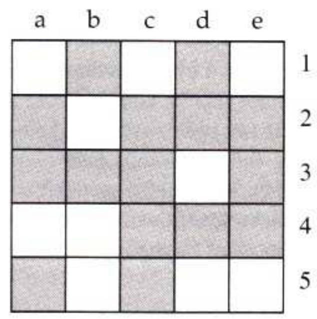
Zum Vergleich: 1991 kostete eine Fahrt mit der Eisenbahn pro Person und pro Kilometer bei der DB 0,22 DM und der DR 0,12 DM.

• Wäßrige Melonen

Am Morgen enthalten die Melonen 99 Zentner Wasser und 1 Zentner Substanz.
Am Abend enthalten die Melonen noch 98 Prozent Wasser, das heißt, daß der eine Zentner Substanz 2 % der Gesamtmasse ausmacht. Diese beträgt somit 50 Zentner.
Am Abend kann Großhändler Hinterbichler (nur noch) 50 Zentner Wassermelonen verkaufen (was einen Verlust von 50 Zentnern oder von 50 Prozent bedeutet).

• Vorschrift zum Färben

Beginnt man mit b2 ungefärbt oder mit d3 ungefärbt, so ist das weitere Färben nicht schwer. Beginnt man jedoch mit d2, c3 oder c4 ungefärbt, so führt dies zu einem Widerspruch zu den Vorgaben.



• Hölzchentricks

• Von X nach Y

Die 13 Felder sind:
11 – 13 – 31 – 43 – 59 – 67 – 73 – 19 – 17 – 23 – 97 – 89 – 83

• Wie heißt die Pflanze?

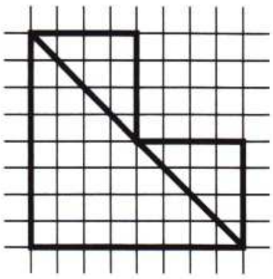
Kompaßdistel (Anfangsbuchstabe: K; m=3)
Bemerkung: Die Kompaßdistel, auch Stachellattich genannt, ist eine spezielle Kompaß- bzw. Meridianpflanze. Bei diesen Pflanzen sind als Anpassung an stark besonnte Standorte die Blätter vertikal aufgerichtet und in Nord-Süd-Richtung gedreht. Durch diese Blattstellung und durch zusätzliche Blattbewegungen

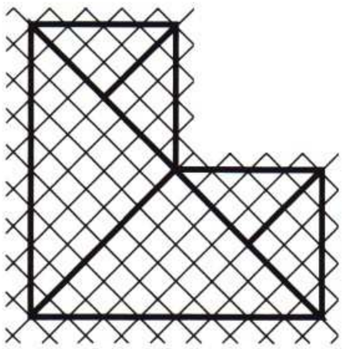
(Photo- bzw. Thermotropismus) wird erreicht, daß die Blattflächen zur Zeit der stärksten Sonnenstrahlung, also mittags, parallel zur Strahlenrichtung sind und die Blattflächen nur von der schwächeren Morgen- und Abendsonne voll getroffen werden.

• Durcheinander

Summe, Bruch, Minus, Gerade, Quotient, Plus, Mathematik

• Flächenverwandlung





• Fix nachgedacht

2	x	2	x	2	=8
x		+		x	
1	+	9	-	2	=8
+		-		+	
4	+	5	-	1	=8
=6		=6		=5	

2	+	3	-	4	=1
:		:		x	
2	x	3	+	2	=8
+		+		-	
6	-	0	:	3	=2
=7		=1		=5	

1	x	5	+	3	=8
-		+		+	
1	+	9	-	7	=3
+		:		-	
4	+	7	-	9	=2
=4		=2		=1	

• Nummernsalat

2494 (Die 2. Ziffer mußte 4 sein, weil es nur eine Zahl gibt, deren Quadrat und das Doppelte gleich sind. Das ist die 2. Daraus ergibt sich alles Übrige rechnerisch.)

• Begriffe gesucht

Produkt, Minuend, Differenz, Dividend, Summand, Divisor, Quotient, Subtrahend, Faktor, Summe

• Den letzten beißen die Hunde

1.

a) ... A -(23); B -, da B 4 freie Plätze hat
b) ... A -(34); B -, siehe a)
c) ... A -(23); B -, siehe a)
d) ... A -(12); B -, siehe a)

2.

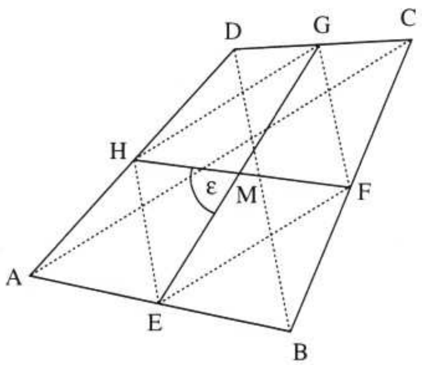
Fall c) A -(33); B -(12); A -(23); B -(13);
A -(24); B -(34); ...
falls A -(41); B -(21); A -(32); B +
A -(31); B -(21); A -(32); B +
A -(21); B -(31); A -(41); B +
A -(32); B -(31); A -(21/41); B +

Fall d) ... A -(44); B -(42);
falls A -(41); B -(21); A -(32); B +
A -(31); B -(21); A -(32); B +
A -(21); B -(31); A -(41); B +
A -(32); B -(31); A -(21/41); B +

• Sprachecke

In einem konvexen Viereck mit dem Flächeninhalt S sind Strecken gezogen, welche die Mitten gegenüberliegender Seiten verbinden. Findet den kleinstmöglichen Wert des Produktes der Längen dieser Strecken.

Lösung: ABCD sei das gegebene konvexe Viereck, und E, F, G und H seien die Seitenmitten der Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ bzw. $\overline{DA}$, dann sind $\overline{EF}$ und $\overline{HG}$ Mittellinien der Dreiecke ABC bzw. ACD und $\overline{FG}$ und $\overline{EH}$ sind Mittellinien der Dreiecke BCD bzw. ABD.



Somit ist

$$\overline{EF} \| \overline{AC} \| \overline{HG} \text{ und } \overline{FG} \| \overline{BD} \| \overline{EH},$$

$$\overline{EF} = \overline{HG} = \frac{1}{2}\overline{AC} \text{ und } \overline{FG} = \overline{EH} = \frac{1}{2}\overline{BD}.$$

Das Viereck EFGH ist deshalb ein Parallelogramm, dessen Seiten halb so lang wie die Diagonalen des Vierecks ABCD sind. Ist S der Flächeninhalt von ABCD und sind h_A und h_C Höhen auf $\overline{BD}$ in den Dreiecken ABD bzw. BCD, so ist

$$S = \frac{1}{2}\overline{BD}\cdot h_A + \frac{1}{2}\overline{BD}\cdot h_c = \frac{1}{2}\overline{BD}(h_A + h_c),$$

und der Flächeninhalt des Parallelogramms EFGH ist

$$\frac{1}{2}S = \overline{EH}\cdot\frac{1}{2}(h_A + h_c) = \frac{1}{2}\overline{BD}\cdot\frac{1}{2}(h_A + h_D).$$

Der Flächeninhalt des Parallelogramms EFGH ist aber auch

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\overline{EG}\cdot\overline{FH}\cdot\sin\varepsilon$$

wobei $\sphericalangle$ HME $= \varepsilon$ ist. Hieraus errechnet man

$$\overline{EG}\cdot\overline{FH} = \frac{S}{\sin\varepsilon}.$$

Da $\frac{S}{\sin\varepsilon}$ am kleinsten ist, wenn $\sin\varepsilon$ den höchsten Wert einnimmt, also wenn $\varepsilon = 90°$ ist, folgt das Produkt $\overline{EG}\cdot\overline{FH}$ ist bei konstantem S minimal, wenn $\overline{EG} \perp \overline{FH}$ ist.

Es wird dich nicht lange beschäftigen

Wieviel ist $\frac{1}{2}$ von $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ von $\frac{4}{5}$ von 150?

Lösung: 30

Schwierige Rechenoperation

Füllt die leeren Felder aus und achtet darauf, daß die angegebenen Rechenoperationen alle richtig sind!

Lösung:

999	–	5	=	994
:		+		-
27	·	34	=	918
37	+	39	=	76

Bestimmt den größtmöglichen Wert des Quotienten bei der Division einer dreistelligen Zahl durch ihre Quersumme!

Lösung: Es sei

$\overline{xyz} = a(0 < x \leq 9; 0 \leq y, z \leq 9; x, y, z \in N)$ der Dividend, dann ist $x + y + z$ der Divisor und

$$q = \frac{100x + 10y + z}{x + y + z} = 100 - \frac{90y + 99z}{x + y + z}$$

der zu bildende Quotient.

Wenn $\frac{90y + 99z}{x + y + z} = 0$ gilt, wird q maximal.

Dann gilt $90y + 99z = 0$ und $x + y + z \neq 0$.

Man folgert deshalb $0 < x \leq 9$; $y = 0$ und $z = 0$.

Damit ist $q_{max} = 100$.

• Hier gibt´s nur eine Lösung

1) 95 785
+ 12 569
108 354

2) 26 956
+ 26 956
+ 26 956
+ 26 956
+ 26 956
134 780

3) 5 · 2471
+ 2 · 2439215
9769215

• Sommerschule Junger Mathematiker 1991

zu **1)**
Die Vermutung, daß sich der größte Flächeninhalt ergibt, wenn der Punkt D mit dem Mittelpunkt der Seite BC zusammenfällt, kann bewiesen werden, wenn man zeigt, daß für einen anderen Punkt D' eine größere Restfläche entsteht (Abb. 1).

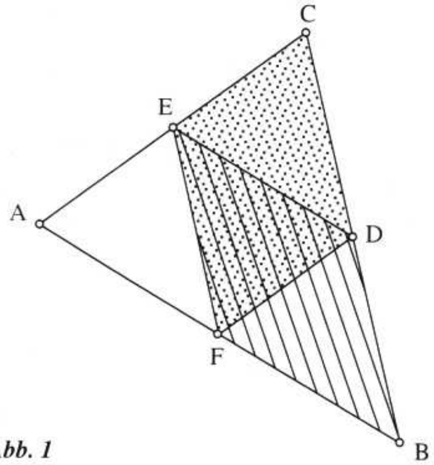


Abb. 1

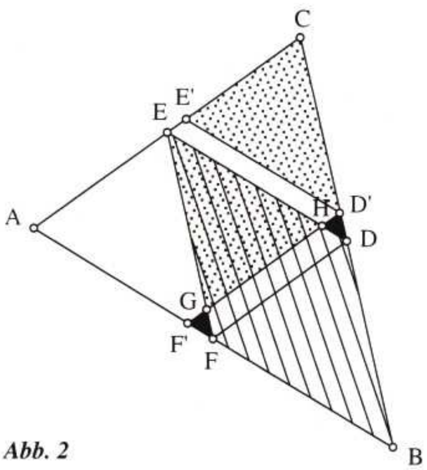


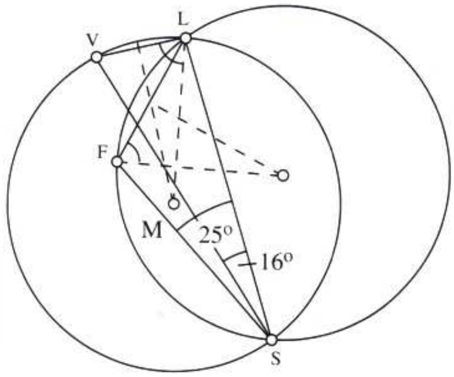
Abb. 2

Betrachten wir den Fall, daß $2 \cdot \overline{BD} = \overline{BC}$ gilt. Die gepunkteten Dreiecke FDE und DCE sind kongruent (Winkel an geschnittenen Parallelen und eine gemeinsame Seite) und damit flächengleich. Das schraffierte Parallelogramm hat damit einen Flächeninhalt, der mit der Restfläche übereinstimmt.
Ebenfalls kongruent sind die gepunkteten Dreiecke GHE und E'D'C in Abb. 2.
Die hier entstehende Restfläche ist um den Flächeninhalt der schwarz gefärbten Dreiecke F'FG und HDD' größer, damit – um zum Aufgabentext zurückzukehren – das parallelogrammförmige Grundstück flächenkleiner als bei einem Teilpunkt D, der mit dem Mittelpunkt von BC zusammenfällt.

zu **2)**
Logarithmisch berechnete Näherungswerte aller hundertstelligen Zahlen, die 37. Potenzen natürlicher Zahlen sind, gibt die folgende Übersicht an:

474	$1{,}008 \cdot 10^{99}$	490	$3{,}446 \cdot 10^{99}$
475	$1{,}091 \cdot 10^{99}$	491	$3{,}715 \cdot 10^{99}$
476	$1{,}179 \cdot 10^{99}$	492	$4{,}006 \cdot 10^{99}$
477	$1{,}274 \cdot 10^{99}$	493	$4{,}319 \cdot 10^{99}$
478	$1{,}377 \cdot 10^{99}$	494	$4{,}655 \cdot 10^{99}$
479	$1{,}487 \cdot 10^{99}$	495	$5{,}016 \cdot 10^{99}$
480	$1{,}607 \cdot 10^{99}$	496	$5{,}405 \cdot 10^{99}$
481	$1{,}735 \cdot 10^{99}$	497	$5{,}824 \cdot 10^{99}$
482	$1{,}874 \cdot 10^{99}$	498	$6{,}273 \cdot 10^{99}$
483	$2{,}023 \cdot 10^{99}$	499	$6{,}756 \cdot 10^{99}$
484	$2{,}184 \cdot 10^{99}$	500	$7{,}276 \cdot 10^{99}$
485	$2{,}357 \cdot 10^{99}$	501	$7{,}834 \cdot 10^{99}$
486	$2{,}544 \cdot 10^{99}$	502	$8{,}434 \cdot 10^{99}$
487	$2{,}745 \cdot 10^{99}$	503	$9{,}079 \cdot 10^{99}$
488	$2{,}962 \cdot 10^{99}$	504	$9{,}771 \cdot 10^{99}$
489	$3{,}195 \cdot 10^{99}$		

zu **3)**



Der Zentriwinkel ist doppelt so groß wie jeder Peripheriewinkel über dem selben Bogen (über der selben Sehne). Für den Winkel VSL soll die Konstruktion des sogenannten Faßkreisbogens erläutert werden. Der Zentriwinkel liegt (zumindest für Peripheriewinkel kleiner als 90°) in einem gleichschenkligen Dreieck, dessen Basis die betreffende Sehne ist und dessen gleichlange Schenkel Radien sind. Somit kann man die Winkel zwischen Sehne und den Radien leicht konstruieren. Z. B. für $\sphericalangle$ MVL gilt:
$2 \cdot \sphericalangle MVL + \sphericalangle VML = 180°$ (Winkelsumme)
$2 \cdot \sphericalangle MVL + 2 \cdot \sphericalangle VSL = 180°$ (Zentri-Peripheriewinkelsatz)
$\sphericalangle MVL + \sphericalangle VSL = 90°$, also
$\sphericalangle MVL = 90° - \sphericalangle VSL$..
Durch Subtraktion des Peripheriewinkels von einem rechten erhalten wir also die bei V bzw. L an die Sehne anzutragenden Winkel.
Damit ist die Position des Schiffes schon stark eingeschränkt. Das Verfahren für den anderen Winkel FSL wiederholt, liefert den exakten Punkt S, das heißt hier die Position des Schiffes auf der Seekarte.

Hier gibt´s nur eine Lösung

1. Eine Sehne in einem Kreis teilt diesen stets in zwei konvexe Flächen:

S E H N E
+ K R E I S
K O N V E X

2. Bei einem Fünfeck gilt für die Berechnung des Umfangs:

S E I T E
+ S E I T E
+ S E I T E
+ S E I T E
+ S E I T E
U M F A N G

3. Ganz einfach auf zwei Arten addieren:

Z W E I
Z W E I
Z W E I
Z W E I
Z W E I
Z W A N Z I G
Z W A N Z I G
Z W A N Z I G
Z W A N Z I G
Z W A N Z I G
N E U N Z I G

Dr. Stefan Bondeli, Zürich

• Schachecke

Neben der Diagrammstellung, die sich 7x verschieben läßt, gibt es desweiteren folgende Grundmodelle mit den Damen auf den Feldern:

a) a1, a3, a5, c2, c3, c4, e1, e3, e5 (15 Verschiebungen).

b) a1, a3, a5, b2, b3, b4, c1, c3, c5 (23 Verschiebungen).

c) a1, a3, a5, d3, d4, d5, g3, g5, g7 (3 Verschiebungen).

d) a3, a5, a7, d3, d4, d5, g1, g3, g5 (3 Verschiebungen).

e) a3, c1, c3, c4, d4, e3, e5, e7, g5 (3 Verschiebungen).

Diese 60 Möglichkeiten muß man noch verdoppeln, denn jedes Grundmodell kann in jeder Stellung um 90 Grad gedreht werden, so daß es also 120 Möglichkeiten insgesamt gibt.

ISBN 3-617-34007-5 Einzelpreis: 2,50 DM Einzelpreis im Abo: 2,00 DM

H 113228

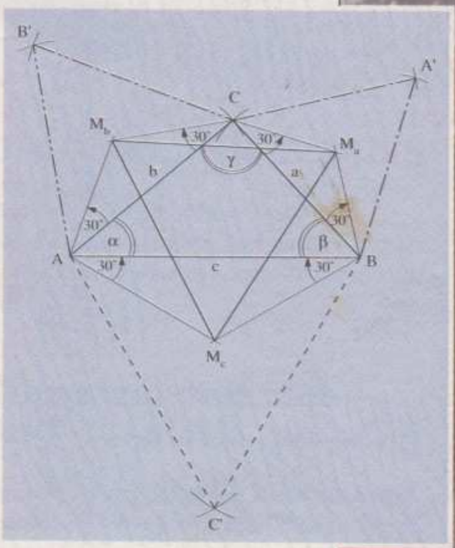
Heft 2
April 1992
26. Jahrgang

Fachzeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

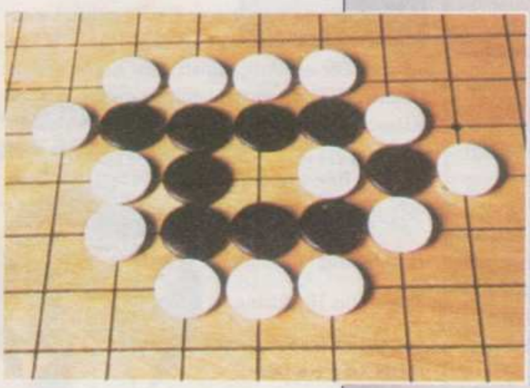
Rückschau auf Olympia ´92:

Der Viererbob von Wolfgang Hoppe auf dem Weg zur Silbermedaille

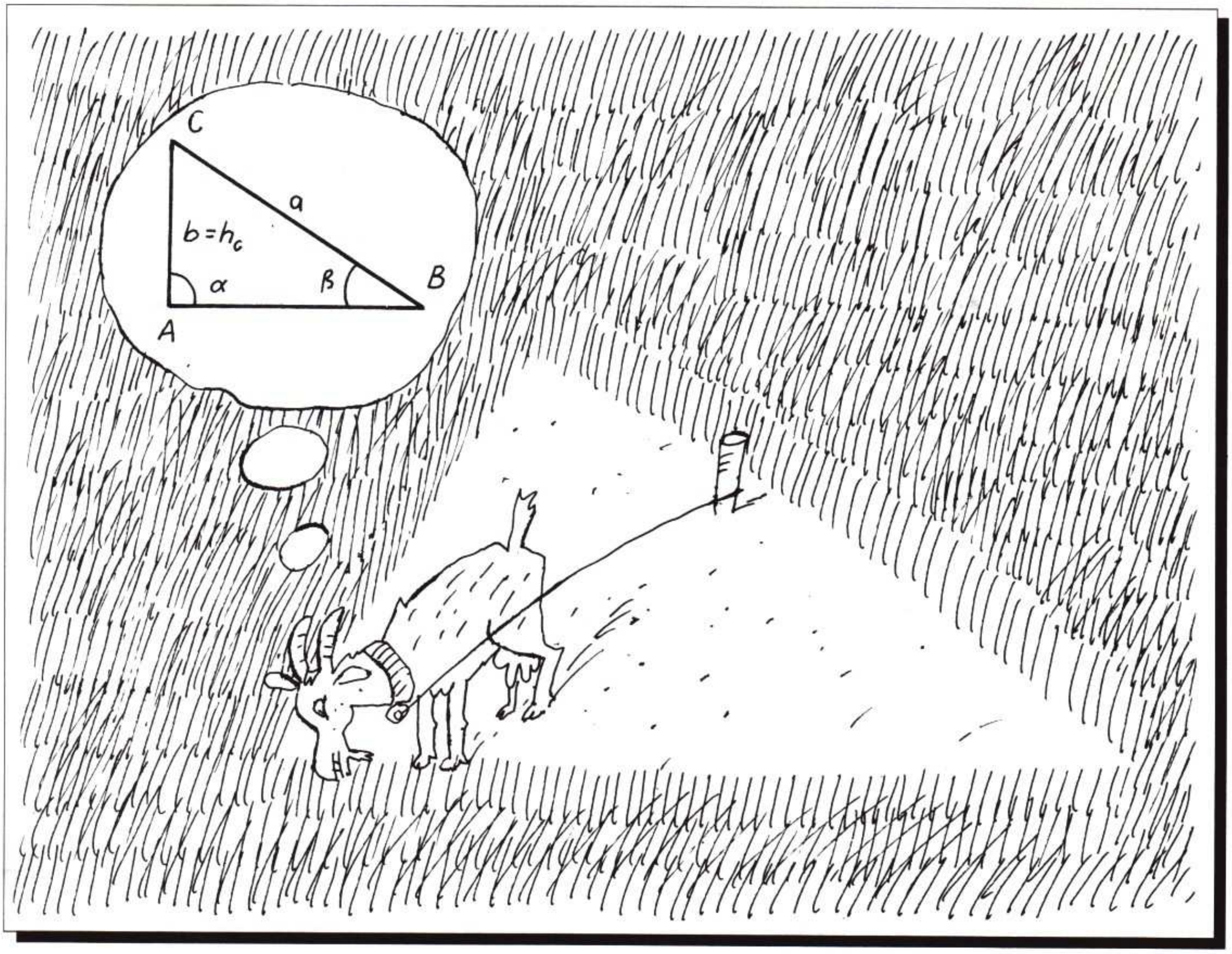


Napoleons Satz

Gefalteter Alfkopf



Go



Karikatur von:
Lothar Otto, Leipzig

Alphonsvignetten:
Lothar Otto
(Leipzig)

Alphons weist Euch auf Artikel mit geringerem Schwierigkeitsgrad hin. Das heißt aber nicht, daß alle anderen Beiträge für mathematische Anfänger ungeeignet sind. Probiert es selbst!

alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett.
Redaktion:
Dr. Gabriele Liebau, Tel. (Leipzig) 58 18 54,
Einsendungen an:
Erhard Friedrich Verlag, Herrn J. Ricke, Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6

Anzeigenleitung: Bernd Schrader
Anzeigenabwicklung:
Telefon (05 11) 4 00 04-23
Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01.01.1990
Vertrieb und Abonnement:
Telefon (05 11) 4 00 04-50
Verlag:
Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG,
Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6
Telefon (05 11) 4 00 04-0
Telefax: 4 00 04-19
Das Jahresabonnement für alpha besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt DM 12,00, im Einzelbezug DM 2,50. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten.
Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).

alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV Klett Cotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, CH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.

Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschrift im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.

Herstellung: Pädagogika Zentrale

Titel: Jens Hinzmann

Druck: Druckerei Schröer, Seelze
ISBN 3-617-34008-3

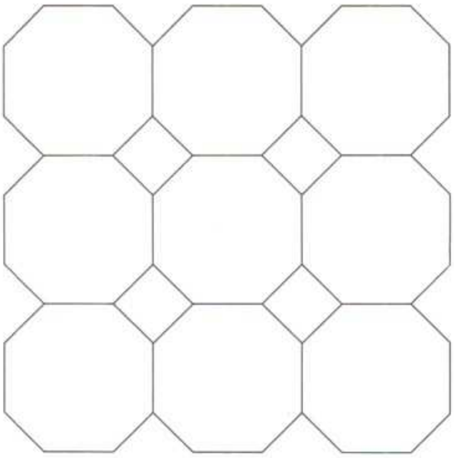
Inhaltsverzeichnis

Titelfotonachweis:
Das Titelbild zeigt den Viererbob von Wolfgang Hoppe (vergl. dazu auch den Beitrag „Wenn Zentimeter über Hop oder Top entscheiden" auf S. 29).
Das Foto wurde uns freundlicherweise von SC Johnson, Autopflege zur Verfügung gestellt.

Komisches, Kniffliges und Knackiges

Nachbarschaft

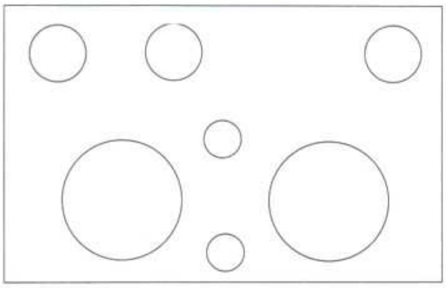
Die natürlichen Zahlen von 1 bis 13 sind so in die quadratischen und achteckigen Felder einzusetzen, daß die in jedem Quadrat stehende Zahl gleich dem arithmetischen Mittel der vier Zahlen in den angrenzenden Achtecken ist.



Walter Träger, Döbeln

Kurz nachgedacht

Trenne die sieben Kreise mit nur drei Linien!



aus: Füles, Budapest

Ein Mathe-As

In ein Lotteriegeschäft kommt ein Mann und fragt, ob er das Los mit der Nummer 48 haben könne. Er will nur die "48". Der Losverkäufer durchsucht die noch freien Lose und findet auch tatsächlich das mit der Nummer 48. Nach vier Wochen kommt Nummer 48 mit dem Hauptgewinn heraus. "Sie haben das wohl geahnt, Sie Glücklicher?" fragt der Losverkäufer bei der Gewinnauszahlung. "Ich kann mich noch ganz genau erinnern, daß Sie unbedingt die Nummer 48 haben wollten!"
"Das war eigentlich ganz einfach", erwidert der Gewinner. "Ich habe drei Nächte hintereinander immer wieder dasselbe geträumt: Sechs mal sieben ... sechs mal sieben ... sechs mal sieben ... Da habe ich mir dann gesagt, sechs mal sieben ist 48 – das Los kaufst du dir!"

Elke Loose
aus: LVZ, Leipzig

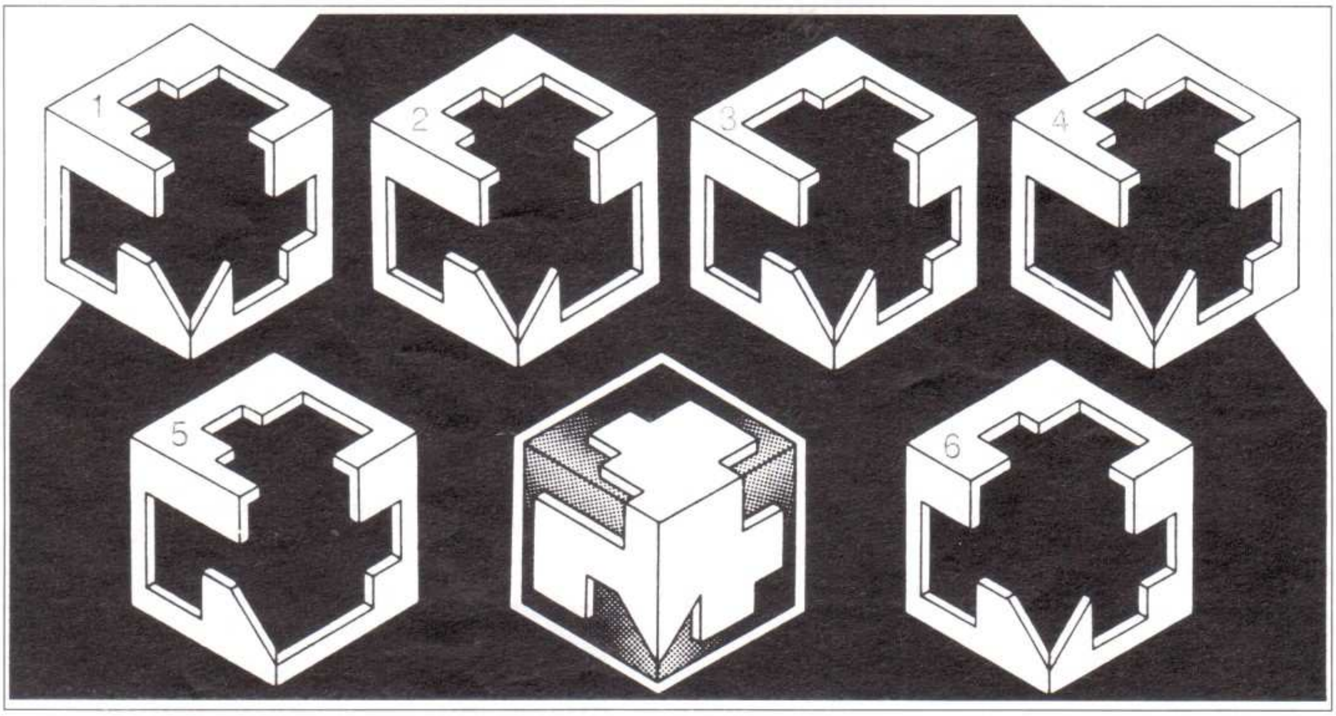
Eine der merkwürdigsten Zahlen ist die Zahl 2592. Setzt man die erste als Grundzahl (Basis), die zweite als Hochzahl, (Exponent), die dritte wieder als Grundzahl und die vierte als Hochzahl, so erhält man $2^5 \times 9^2 = 32 \times 81$.
Und das ist – 2592!
Es dürfte kaum eine zweite Zahl dieser Art geben. Jedenfalls ist sie nicht bekannt.

mitgeteilt von H.-J. Böhland, Wallroda

Gleichungsrätseleien

In diesem Rätsel ist der Wert jedes Buchstaben gemäß der vorliegenden Gleichungen in

Klug kombiniert Suche die richtige Ergänzung!



aus: Füles, Budapest

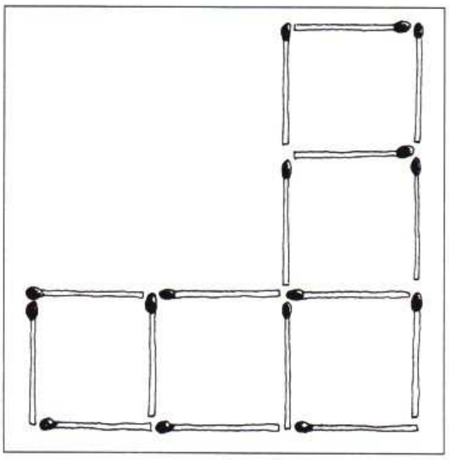
den Zeilen und Spalten zu bestimmen. Jeder Buchstabe entspricht dabei einer Ziffer zwischen 1 und 9. Darüber hinaus gilt: Z=2N und H=K–S

E	+	D	−	N	+	H	+	D	=	K
+	■	+	■	+	■	+	■	+	■	+
R	+	E	−	H	+	E	−	R	=	N
−	■	+	■	+	■	+	■	−	■	−
N	+	E	+	Z	−	R	−	E	=	D
+	■	+	■	−	■	−	■	+	■	+
D	+	N	+	R	−	Z	−	H	=	R
−	■	−	■	+	■	+	■	−	■	−
E	+	S	−	N	−	R	+	Z	=	S
=	■	=	■	=	■	=	■	=	■	=
Z	−	D	+	K	−	S	+	E	=	R

aus:
Logigram, Paris

Trick mit Streichhölzern

Durch Wegnehmen von zwei Streichhölzern kannst Du aus dieser Figur 4 Quadrate bilden.



Hölzchensymmetrie

I ** + * · * = * · * + **
II ** + ** + ** = ** + ** + **

Werden die Ziffern durch die angegebenen Hölzchenanordnungen dargestellt, so läßt sich in jede beider Gleichungen so mit Hölzchen eine Ziffer anstelle jedes Sternchens legen, daß wahre Gleichungen entstehen, deren linke und rechte Seite Spiegelbilder voneinander sind. Dabei soll in keiner Gleichung dieselbe 2stellige Zahl mehrfach enthalten sein.

Walter Träger, Döbeln

Die Olympiade-Ecke

Menschen stellen sich gern Problemen "because they are there", nur zur eigenen Erbauung also. So beschrieb einmal der Vorsitzende des Komitees zur Ausrichtung der amerikanischen Mathematik-Olympiade, Murray Klamkin, den Spaß, den man beim Knacken eines mathematischen Problems hat.
Wer von Euch schon einmal an einer Wandzeitung mitgearbeitet, an Knobelrunden in der Klasse, an der Schule, am Wohnort teilgenommen oder sich gar an einem regionalen oder überregionalen Mathewettbewerb versucht hat, der wird die Eingangsworte sicher bestätigen können und mir zustimmen: der freiwillige Umgang mit Mathematik sorgt für ziemlich viel Kurzweil.
Problemlösendes Denken und Mathematik-Olympiaden haben daher rund um den Globus Konjunktur. Tendenz: Steigend.
Auf dem Gebiet der ehemaligen DDR hat es eine vergleichbar lange Tradition der Förderung junger mathematischer Talente gegeben. Es existierte ein feinmaschiges Netz von Kreis- und Bezirksklubs, in denen begabte Schüler sich ausreichend mit Mathematik beschäftigen konnten. Die besten Nachwuchsmathematiker wurden in Zirkeln der Mathematischen Schülergesellschaft zusammengefaßt, die oft von Universitäten betreut wurden. Es ist zu hoffen, daß davon noch möglichst viel erhalten bleibt.
Für das alte Bundesgebiet gilt das Gesagte leider nicht. Da liegt großer Nachholbedarf vor. Von einigen Schulen weiß ich aber, daß nun zusehends Bewegung in die Förderungslandschaft kommt und erfreulicherweise wächst auch an anderen Schulen die Neigung, sich auf die Kunst des Problemlösens einzulassen. Das Besondere an diesen Förderwettbewerben ist die Freiwilligkeit, mit der sich Schüler solchen Herausforderungen stellen. Vielleicht habt Ihr es selbst schon einmal erlebt, wenn Mitschüler nur ein mitleidiges Kopfschütteln dafür übrig hatten, wieso ein ganz normaler Mensch völlig ohne Zwang eine mathematische Aufgabe bearbeiten und auch noch Freude daran empfinden kann. Sie vermuten dahinter wieder nur eine neue Spielart von Strebertum, vergessen darüber jedoch häufig, daß Problemlösen durchaus neugierig machen kann und überaus viel Fantasie erfordert.
Seit über zehn Jahren führe ich selbst in meinen Klassen Knobelrunden durch, betreue Problemecken. Stets wiederholt sich das gleiche Bild: eine Gruppe Schüler steht vor der Anschlagsäule, eine andere diskutiert vor dem Schwarzen Brett. Gelegentlich verweilen Schüler einzeln davor, die Stirn in tiefe Falten gelegt, und grübeln. Obwohl keine guten Noten winken, finden sich genug Interessenten, die sich von einem Problem angesprochen fühlen. Sogar Kollegen ertappe ich nicht selten beim Tüfteln.
Leider wird diese Form der Heranführung an die Mathematik derzeit von vielen Gruppen und Einzelpersonen getragen, die wenig oder nichts voneinander wissen. Dabei leben besonders Lehrer von der Resonanz, die sie auszulösen vermögen. Um diesem Informationsdefizit ein wenig abzuhelfen und um dem ständigen Schülerwunsch nach originellen Problemen entgegenzukommen, hat sich die Redaktion von alpha entschlossen, eine neue Rubrik einzurichten, **Die Olympiade-Ecke**. Diese Seite soll ein Forum zum Austausch von Ideen und Erfahrungen aus den unterschiedlichsten Varianten nationaler und internationaler Mathematikförderung werden. Es ist geplant, in regelmäßigem Turnus eine Wettbewerbsart in Kurzform vorzustellen und natürlich sollen darin charakteristische Aufgaben aus den einzelnen Runden einen breiten Raum einnehmen.
Diese Einrichtung steht und fällt aber mit der Bereitschaft von Lesern der alpha zur Mitarbeit. Wenn Ihr also der Meinung seid, daß an Eurer Schule, in Eurer Stadt oder dem Bundesland etwas Berichtenswertes in Sachen Mathematik geschieht, dann schreibt mir (Paul Jainta, Werkvolkstr. 10, W-8540 Schwabach) oder an die Redaktion. Und vergeßt bitte nicht, mir/uns einige Aufgaben mit Lösungen mitzuschicken, damit andere alpha-Leser auch etwas zum Kopfzerbrechen haben.
Darüber hinaus möchte die Redaktion alle in der außerunterrichtlichen Mathematikförderung Tätigen dazu einladen, in Artikeln von ihrer Arbeit in Zirkeln, Arbeitsgemeinschaften, Mathematik-Tagen usw. zu berichten. Bitte helfen Sie uns durch Mitteilung origineller Wettbewerbsaufgaben (plus einschlägiger Lösungen) den riesigen Fundus wenig genutzter Olympiadeaufgaben einem größeren Publikum zugänglich zu machen.
Denn Schüler wollen basteln und knobeln, forschen und konstruieren können. Nur dies befördert später auch die Liebe zur Wissenschaft und das Interesse für Technik.
Zum Auftakt sollen 5 Probleme vorgestellt werden, die unterschiedlichen Formen (inter)nationaler Schülerförderung entnommen worden sind.

Diese 5 Aufgaben findet Ihr auf der übernächsten Seite in der rechten Spalte!

StR Paul Jainta, Schwabach, Gymnasiallehrer für Mathematik und Physik

Eins zwei drei vier fünf...

Besuch im MMK Frankfurt/M.

Abb. 1: Das MMK in Frankfurt Foto: R. Nagel, Frankfurt/M.

Frankfurt am Main, 6. Juni 1991, ein neues Museum wird eröffnet: das Museum für Moderne Kunst. Baugrund ist wohl nirgendwo in der Bundesrepublik so teuer zu erkaufen wie in der Innenstadt von Frankfurt am Main, und so sollte auf einem sehr spitzwinkligen Grundstück ein Optimum an Raum und äußerer Gestaltung entstehen. In der Frankfurter Bevölkerung hieß das Gebäude bald das "Tortenstück".

Trotz einer gewissen Befangenheit im Umgang mit moderner Kunst (verständlich für einen Menschen, der sich viel mehr mit Mathematik als mit Kunstgeschichte beschäftigt?) ist der Gesamteindruck überaus anregend. Die Neugier hatte zu einem Abenteuer ganz eigener Art geführt.

Aus der Fülle der Exponate sollen zwei herausgegriffen werden, die in gewisser Weise einen *mathematischen Zugang* haben. Da ist Hanne Darbovens "Ein Jahrhundert – Johann Wolfgang von Goethe gewidmet". Das Werk besteht aus 884 DIN A4-Seiten, die im wesentlichen mit Schreibmaschine getippte Zahlwörter enthalten (daher die Überschrift). Die Seiten hängen, jede vollständig sichtbar, in 9 Reihen übereinander in einem der Räume mit spitzwinkliger Ecke.

Was könnte man sich nun vorstellen hinter diesen Zahlenkolonnen? Die Fülle all der Ereignisse in einem ganzen Jahrhundert, die genutzten und ausgelassenen Möglichkeiten vieler, vieler Menschen, nicht eines konkreten, sondern eines beliebigen Zeitraums zwischen einem 1. Januar eines Jahres ..00 und dem 31. Dezember des entsprechenden Jahres ..99 soll künstlerisch verdeutlicht werden. Da lag doch nahe: Veranschaulichung mit mathematischen Mitteln.

Hanne Darboven berechnete zu jedem Tag des Jahrhunderts eine "Quersumme", z. B. dem Weihnachtstag '91 wird die Zahl 24+12+9+1 = 46 zugeordnet. Dazu wird mit Sorgfalt die Zahlwortfolge notiert, die in Abb. 3 zu sehen ist. Diese "Quersummen" gliedern ebenso wie die Kapitel I bis XII für die jeweiligen Monate im ganzen Jahrhundert das Werk, das natürlich nicht vollständig *gelesen*, sondern *als Ganzes betrachtet* werden muß. Der zweite Teil des Titels rührt von einer Ergänzung des Kunstwerks, die 1982 anläßlich des 150. Todestages Goethes entstand, durch den Wortlaut eines ausführlichen Enzyklopädie-Artikels über JWG her. Auf einigen Blättern notiert die Künstlerin dann wiederum "Quersummen", nämlich die jedes der 150 Todestage 22.3.(18)32 bis 22.3.(19)82 des großen Sohnes der Stadt Frankfurt.

Ein zweites Werk ist *mathematisch* sehr leicht zu entschlüsseln: *Walter De Marias* Arbeit "4–6–8 Series". Großzügig, aber sehr regelmäßig sind 27 gleichartig erscheinende Metallkonstruktionen im Fußboden verankert.

Sieht man genauer hin, erkennt man gleichlange Vierkant-, Sechskant- und Achtkantstäbe in sehr regelmäßiger Anordnung, die jeweils in Dreiergruppen zusammengefaßt sind. Keine zwei der 27 Einzelteile sind gleich, zumindest in der Anordnung entlang des Grundbleches unterscheiden sie sich voneinander. Nun ist längst klar geworden, daß mit diesen 27 Teilen *alle Möglichkeiten*, drei verschiedene Objekte in einer bestimmten Reihenfolge anzuordnen, vom Künstler erfaßt worden sind (in der Mathematik wird dies als *Variation ohne Wiederholung unter Berücksichtigung der Reihenfolge* bezeichnet). Die zugehörige Anzahl zu bestimmen ist einfach. Für den

```
              elf zwölf dreizehn vierzehn fünfzehn sechzehn siebze
              hn achtzehn neunzehn zwanzig einundzwanzig zweiundzw
              anzig dreiundzwanzig vierundzwanzig fünfundzwanzig s
              echsundzwanzig siebenundzwanzig achtundzwanzig neunu
18/9/30 - 30  ndzwanzig dreißig
              eins zwei drei vier fünf sechs sieben acht neun zehn
              elf zwölf dreizehn vierzehn fünfzehn sechzehn siebze
              hn achtzehn neunzehn zwanzig einundzwanzig zweiundzw
              anzig dreiundzwanzig vierundzwanzig fünfundzwanzig s
              echsundzwanzig siebenundzwanzig achtundzwanzig neunu
              ndzwanzig dreißig einunddreißig zweiunddreißig dreiu
              nddreißig vierunddreißig fünfunddreißig sechsunddrei
              ßig siebenunddreißig achtunddreißig neununddreißig  39 - 18/9/39
              eins zwei drei vier fünf sechs sieben acht neun zehn
              elf zwölf dreizehn vierzehn fünfzehn sechzehn siebze
              hn achtzehn neunzehn zwanzig einundzwanzig zweiundzw
              anzig dreiundzwanzig vierundzwanzig fünfundzwanzig s
              echsundzwanzig siebenundzwanzig achtundzwanzig neunu
18/9/40 - 31  ndzwanzig dreißig einunddreißig
              eins zwei drei vier fünf sechs sieben acht neun zehn
              elf zwölf dreizehn vierzehn fünfzehn sechzehn siebze
              hn achtzehn neunzehn zwanzig einundzwanzig zweiundzw
              anzig dreiundzwanzig vierundzwanzig fünfundzwanzig s
              echsundzwanzig siebenundzwanzig achtundzwanzig neunu
              ndzwanzig dreißig einunddreißig zweiunddreißig dreiu

                                   538
```

Abb. 2: Ausschnitt eines Blattes zu Hanne Darboven, „Ein Jahrhundert…"

eins zwei drei vier fünf sechs sieben acht neun zehn elf zwölf dreizehn vierzehn fünfzehn sechzehn siebze hn achtzehn neunzehn zwanzig einundzwanzig zweiundzw anzig dreiundzwanzig vierundzwanzig fünfundzwanzig s echsundzwanzig siebenundzwanzig achtundzwanzig neunu ndzwanzig dreißig einunddreißig zweiunddreißig dreiu nddreißig vierunddreißig fünfunddreißig sechsunddrei ßig siebenunddreißig achtunddreißig neununddreißig v ierzig einundvierzig zweiundvierzig dreiundvierzig v ierundvierzig fünfundvierzig sechsundvierzig

Abb. 3: „Quersumme" = 46

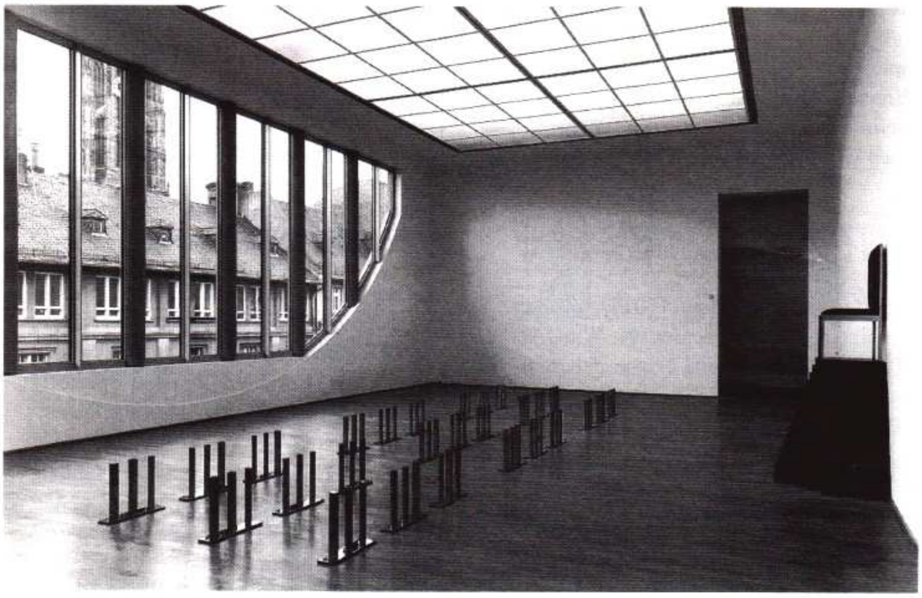


Abb. 4: Walter De Maria, „4 – 6 – 8 Series" Foto: R. Nagel, Frankfurt/M.

linken Platz stehen *drei* Stabformen zur Auswahl, ebenso für den mittleren und den rechten: *3 mal 3 mal 3 sind 27.* Über die künstlerische Aussage dieses Werkes sollte sich jeder bei einem Besuch im Museum für Moderne Kunst an Ort und Stelle selbst ein Urteil bilden. Dazu muß man hoch unters Dach des "Tortenstücks" steigen, in den hellen großen Raum mit Blick auf den Dom.

- Welches ist die größte bei H. Darboven auftauchende „Quersumme", und zu welchem Tag eines Jahrhunderts gehört sie? An welchen Tagen beträgt diese "Quersumme" nur 3?
- Die Künstlerin ergänzte ihr "Jahrhundert" u. a. durch die Veranschaulichung der Todestage 21.3. .. J.W.v.Goethes. In welchem Jahr zwischen 1832 und 1982 entsteht die längste Zahlwortkolonne?
- Notiere alle *Variationen* der Elemente {4; 6; 8} *zur 3. Klasse mit Wiederholung*! Wieviel Teile umfaßte das Werk, hätte sich der Künstler für die vier Elemente {4; 6; 8; 10} entschieden und jeweils vier davon in einem dieser Teile zusammengefaßt (Beispiele: [4; 4; 8; 6], [8; 6; 6; 6])?

MMK in Zahlen

Baubeginn:	Juni 1987
Eröffnung:	6. Juni 1991
Architekt:	Hans Hollein

Das Problem für den Architekten bestand darin, auf dem schmal zulaufenden Stück des in der Frankfurter Innenstadt sehr teuren Baugrundes eine optimale Raumnutzung zu erreichen.

Grundstücksfläche:	2140 m^2
Ausstellungsfläche:	4100 m^2
Umbauter Raum:	50 530 m^3
Kosten	48 000 000 DM
Öffnungszeiten:	Di – So: 10.00 – 17.00 Uhr Mi: 10.00 – 20.00 Uhr *Montag geschlossen* *Eintritt frei*

Führungen von größeren Gruppen sind zwei Wochen vorher anzumelden

Dr. Christian Werge
Mathematik- und Physiklehrer, Assistent im Wissenschaftsbereich Didaktik der Sektion Mathematik der Universität Leipzig

Olympiade-Ecke: Die Aufgaben

5. Jahrgangsstufe
Nach einem Scheibenschießen vergleichen Elke (E), Regina (R), Gert (G) und Joachim (J) ihre Ergebnisse im Schießen. Der Vergleich ergab:
a) Joachim erzielte mehr Ringe als Gert.
b) Elke und Regina erreichten gemeinsam dieselbe Ringzahl wie Joachim und Gert zusammen.
c) Elke und Joachim erzielten zusammen weniger Ringe als Regina und Gert zusammen.
Ermittle die Reihenfolge der Schützen nach fallender Ringzahl. (Arbeitsgemeinschaft für Schüler der Klassenstufe 5 in der ehemaligen DDR)

6. – 7. Jahrgangsstufe
Denke Dir eine Kurzschreibweise für große Zahlen auf folgende Weise hergestellt: Es bezeichne z_n einen Ziffernblock von n aufeinanderfolgenden gleichen Ziffern z mit $0 \leq z \leq 9$. Es bedeutet z. B. $1_4 9_5 8_2 3_6$ die Zahl 11119999988333333. Für welche natürlichen Zahlen x, y und z gilt folgende Gleichheit: $2_x 3_y 5_z + 3_z 5_x 2_y = 5_3 7_2 8_3 5_1 7_3$ (Australian Mathematics Competition 1983)

8. Jahrgangsstufe
Über die Anzahl x der Schüler einer 8. Klasse ist folgendes bekannt: (1) Die Zahl x ist eine Primzahl. (2) Genau 9 Schüler dieser Klasse können schlittschuhlaufen. (3) Genau 12 Schüler dieser Klasse können skilaufen. (4) Genau 4 Schüler dieser Klasse können weder schlittschuhlaufen noch skilaufen.
Untersuche, ob sich aus diesen Angaben die Schülerzahl x eindeutig ermitteln läßt! (29. OJM, 2. Stufe)

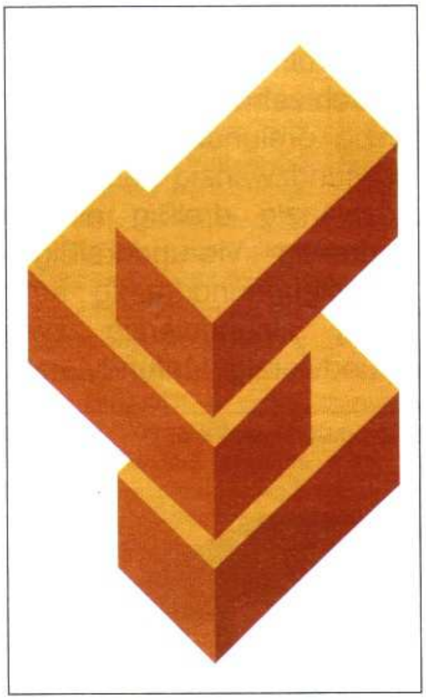
9. Jahrgangsstufe
Gegeben ist das Zahlentripel $(1,\ 2,\ \sqrt{2})$. Man darf zwei Zahlen davon (a und b) durch die Terme $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$, $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$ ersetzen.
Kann man durch Wiederholung dieses Schrittes jemals das Tripel $(1,\ 2,\ 1+\sqrt{2})$ erhalten? (Problem des Monats Oktober/November 1985, Hamburger Schülerzirkel Mathematik)

9. – 10. Jahrgangsstufe
Es sei N eine vierstellige Quadratzahl, deren Ziffern alle kleiner als sieben sind. Jede der vier Ziffern wird nun um drei erhöht und man erhält wieder eine Quadratzahl. Bestimme die Zahl N.
(Ungarische Mathematik-Olympiade 1987)

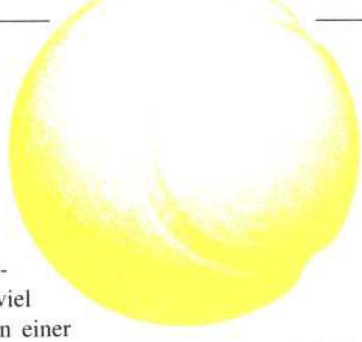
Die 4. Stufe der Olympiade Junger Mathematiker findet vom 3. bis 6. Mai in Erfurt statt. Nähere Informationen können von den Kultusministerien der Länder erhalten werden.

Zeitungsschnipsel

Auch ein flüchtiger Zeitungsleser wird immer wieder auf Meldungen stoßen, die etwas mit Mathematik zu tun haben. Wenn Ihr einen solchen Schnipsel findet, schneidet ihn doch bitte aus und sendet ihn an uns!
Vergeßt aber bitte nicht, die Quelle anzugeben.

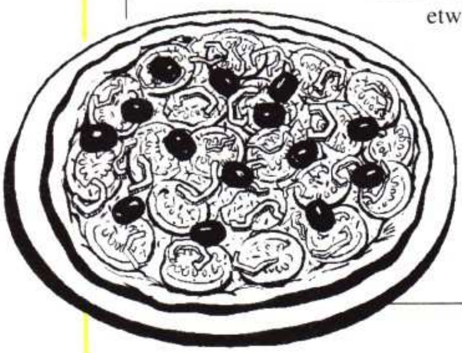


Wetten daß...?



Den härtesten Tennisaufschlag hat der Mathematiker und Tennislehrer Horst Göpper aus Weinheim. Die Geschwindigkeit eines von ihm servierten Balles wurde beim Erreichen des gegnerischen Feldes mit 321,12 km/h gemessen. Keiner der Weltranglisten-Profispieler kommt auf einen ähnlich hohen Wert. Wieviel Reaktionszeit bleibt dem Gegenspieler, der in einer Entfernung von 25 Metern den Ball annehmen will? (Es sei vorausgesetzt, daß die Ballgeschwindigkeit konstant bleibt.)

Die größte Pizza der Welt wurde 1991 in Florida (USA) gebacken. 150 Pizzabäcker arbeiteten 7 Stunden lang an der Riesenpizza mit einem Durchmesser von 47 m. Als Zutaten wurden 8178,3 kg Mehl, 2900 kg Tomatensoße und eine Tonne Peperoniwurst verarbeitet. Wir wollen nun eine Pizza in "Normalgröße", etwa mit einem Durchmesser von 25 cm nach demselben Rezept backen, wie es die Rekord-Bäcker benutzten. Die Dicke unserer Pizza soll der der Riesenpizza entsprechen. Welche Menge der genannten Zutaten müssen wir für unsere Pizza verwenden?



Herausgesucht aus der Sammlung kurioser Rekorde von Ralf Laue, selbst Superlativ-Weltrekordler aus Leipzig

Die "Struwwelpetra"

Die Hände der Struwwelpetra sind praktisch funktionsunfähig. Ihre Nägel werden also durch den Gebrauch der Hände nicht abgenutzt. Miss Nail muß sogar Tag und Nacht dafür Sorge tragen, daß sie sich keinen Nagel abbricht. Wieviel Monate nach dem Auftreten der Struwwelpetra in einer japanischen TV-Show werden die Nägel von Miss Nail 50 cm lang sein?

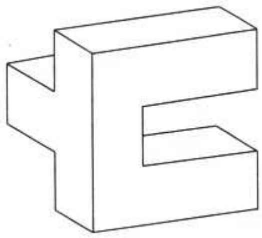
Walter Träger, Döbeln

Foto: AMW, München

48 cm lang waren die seit 12 Jahren nicht geschnittenen Nägel der „Miss Nail" bei ihrem TV-Auftritt.

Enttarnung eines Logos

Auf der Baufachmesse "Leipzig '91", einer der größten in Europa, stellten 1400 Firmen aus 19 Ländern auf über 76 000 m² Ausstellungsfläche Baumaterialien und Baustoffe sowie Verarbeitungsmethoden und Dienstleistungen vor.
Das Emblem der Baufachmesse "Leipzig '91" stellt einen ebenflächigen Körper dar, der entsteht durch Aneinandersetzen von 3 backsteinförmigen Quadern:



1. Die Flächen dieses Körpers sollen mit möglichst wenig Farben so gefärbt werden, daß stets zwei Flächen, die die Punkte einer Strecke als gemeinsame Randpunkte besitzen, verschiedenartig gefärbt sind. Wieviel Farben werden benötigt?
2. Ist dieser Körper ein Polyeder? Falls ja, so sind die Zahl e seiner Ecken, die Zahl k seiner Kanten und die Zahl f seiner Flächen anzugeben.

Walter Träger, Döbeln

In den Zeitungen blätterte für Euch: Walter Träger aus Döbeln.

Was war los?

Eine Chronologie ausgewählter Ereignisse über Jahrhunderte

1142 Petrus Abaelard, Logiker, Philosoph und Theologe am 21. April gestorben. Abaelard ist auch außerhalb seiner Fachgebiete weltbekannt geworden durch die Liebesbeziehung zu seiner Schülerin Heloise. Diese Geschichte ist vielfach in der schöngeistigen Literatur behandelt worden, zuletzt in L. Rinser: Abaelards Liebe, Frankfurt/M. 1991.

1592 am 22. April Wilhelm Schickard geboren (siehe Text)

1667 Erscheinen von Antoine Arnaulds (1612 – 1694) „Neue Elemente", die zu einer Reform des geometrischen Anfangsunterrichts entscheidend beitrugen – Arnauld forderte einfache und direkte Schlußweisen und einen genetischen Aufbau der Geometrie

1742 nach sehr langer Druckzeit erschien endlich Colin Maclaurins (1698 – 1746) Verteidigung der Infinitesimalrechnung und der infinitesimalen Methoden. Maclaurin berief sich dabei auf Archimedes (um 287 v. u. Z. – 212 v. u. Z.)

1842 Entdeckung des Energieerhaltungssatzes durch Julius Robert Mayer

1867 Erscheinen von Hermann Hankels „Theorie der complexen Zahlensysteme" mit der Formulierung des Permanenzprinzips (siehe Text)

1867 Christian von Staudt am 1. Juni gestorben. Staudt beschließt durch fundamentale Arbeiten die Entwicklung der synthetischen Geometrie

1917 Sergej Natanowitsch Bernstein (1880 – 1968) veröffentlicht den ersten systematischen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung

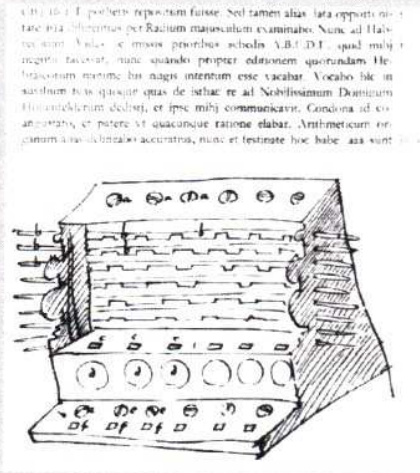
Christian von Staudt beschäftigte sich unter anderem mit Konstruktionen mit Hilfe des Lineals.
Eine solche Aufgabe, allerdings von Jacob Steiner (1796 – 1863), stellen wir euch hier vor:

Es ist $\overline{AC} \parallel \overline{KF}$ gegeben. Man halbiere eine der Strecken, z. B. $\overline{AC}$, nur mit Hilfe des Lineals.

Hans Joachim Ilgauds,
Sudhoff-Institut der Universität Leipzig

Wilhelm Schickard

Der am 22. April 1592, also vor 400 Jahren, in Herrenberg (Württemberg) geborene Schickard (auch Schickardt) studierte Theologie und orientalische Sprachen. Nach seinem Studium wurde er Diakon (niederer Geistlicher) in Nürtingen und Tübingen. Seit 1617 war er mit dem später so berühmten Astronomen und Mathematiker Johannes Kepler (1571 – 1630) befreundet. Kepler weckte das Interesse Schickards an Mathematik und Astronomie. Schickard starb am 23. Oktober 1635 in Tübingen an der Pest.
Schickard war außerordentlich vielseitig interessiert und „übertrieb" das Arbeiten. In einem alten Buch von 1751 wurde dazu bemerkt, daß sein rechtes Auge „durch subtile Arbeit verderbt oder blöde gemacht" worden ist. Schickard schrieb Abhandlungen über Optik, Astronomie, Astrologie, Sprachen des Nahen Ostens, Meteorologie und Kartographie. Er gehörte zu den eifrigsten Anhängern der Lehren seines Freundes Kepler und hat viel für deren Verbreitung getan. Auch möglicherweise für Kepler entwarf er eine Rechenmaschine (1623/24). Aus Schickards Notizbüchern und aus einem Brief an Kepler von 1624 konnte man die Konstruktion seiner Rechenmaschine entnehmen und die Maschine 1957/58 nachbauen (siehe Abbildung). Es war eine Maschine, die auf unbeholfene Art Addition, Subtraktion und auch Multiplikation (wie bei den Neperschen Rechenstäbchen) ermöglichte. Die Rechenmaschine von Schickard war die erste wirkliche Rechenmaschine.



Beschreibung und Skizze der Rechenmaschine im Brief Schickards an Kepler vom 20. 9. 1624.

Herman Hankel

und das Permanenzprinzip

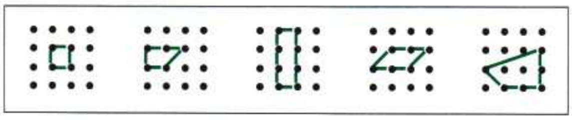
Im Jahre 1867 erschien in Leipzig ein dünnes Buch mit dem Titel „Theorie der complexen Zahlensysteme...". Verfasser des Buches war der junge Professor der Mathematik in Leipzig Hermann Hankel (1839 – 1873). In diesem Buch behandelte Hankel nicht nur den Aufbau des Zahlensystems, sondern auch die Frage, auf welche Weise man den Bereich der reellen und der gewöhnlichen komplexen Zahlen zu sogenannten hyperkomplexen Zahlensystemen erweitern kann. Hankels Grundidee der Erweiterung der Zahlensysteme ist gewesen, daß die definierten Verknüpfungsgesetze zwischen Zahlen den Zahlbereich erst schaffen und nicht etwa die Verknüpfungsgesetze Eigenschaften der Zahlen selbst sind. Und es soll das „selbstverständliche" Prinzip gelten, daß bei der Erweiterung des alten zu einem neuen Zahlenbereich die Rechengesetze des alten Bereiches auch im neuen Bereich gelten sollen. Das ist Hankels „Princip der Permanenz formaler Gesetze": „Wenn zwei in allgemeinen Zeichen der arithmetica universalis ausgedrückte Formen einander gleich sind, so sollen sie einander auch gleich bleiben, wenn die Zeichen aufhören, einfache Grössen zu bezeichnen, und daher auch die Operationen einen irgend welchen anderen Inhalt bekommen." Dieses Prinzip, vielfach auch im Schulunterricht verwendet, ist natürlich kein Gesetz, sondern nur ein heuristisches Prinzip. Die Art des Vorgehens von Hankel, nämlich, daß die Verknüpfungsgesetze und die daraus abgeleiteten Rechenregeln die Zahlen erst definieren, war ein wichtiger Schritt auf dem Wege zur modernen axiomatischen Methode.

Mathematik am Nagelbrett

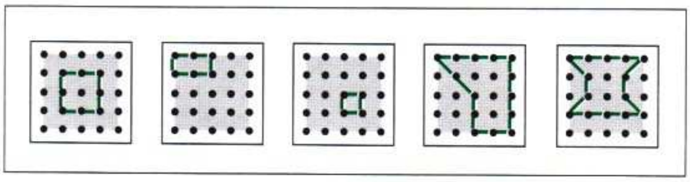
In diesem Beitrag lernt Ihr keineswegs, wie Ihr durch starke Konzentration und Autosuggestion gegenüber Schmerzen unempfindlich und damit zum Fakir werdet. Vielmehr wird das Nagelbrett umfunktioniert und nun kann an diesem sehr gut Mathematik betrieben werden.

Ein Nagelbrett besteht im allgemeinen aus einem quadratischen Brettchen, auf dem in gleichen Abständen sowohl senkrecht als auch waagerecht kleine Nägel eingeschlagen sind. Mit Hilfe von Gummiringen, die man um die Nägel spannt, kann man verschiedene Figuren "abstecken".

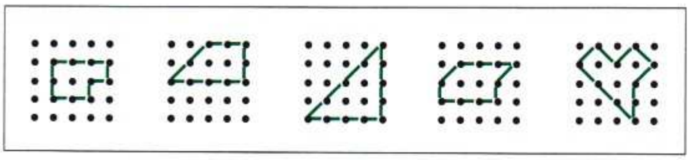
1. Welche der Figuren sind a) Trapeze, b) Rechtecke?



2. Welcher Bruchteil des grau gefärbten Nagelbrettes ist vom Gummiring umspannt?

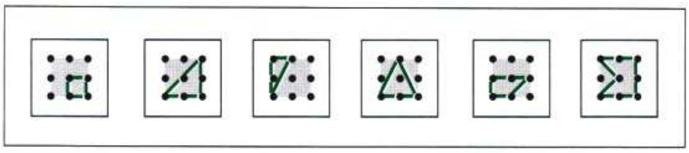


3. Ermittle jeweils den Flächeninhalt der vom Gummiring umspannten Fläche!

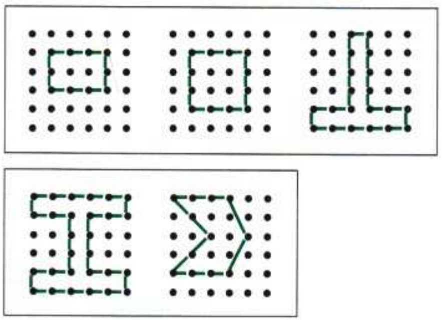


$A_1 = 5F_E$ $A_2 = ...F_E$ $A_3 = ...F_E$ $A_4 = ...F_E$ $A_5 = ...F_E$

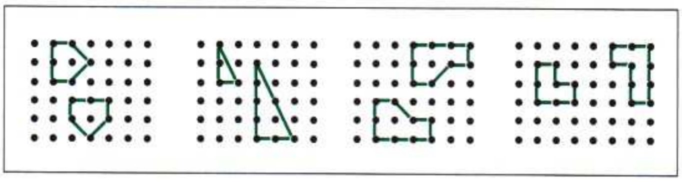
4. Wieviel Prozent der grau gefärbten Fläche des Nagelbrettes sind jeweils vom Gummiring umspannt?



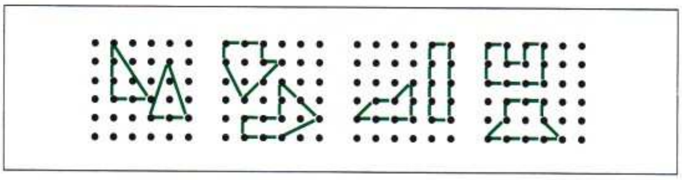
5. Trage jeweils in die vom Gummiring umspannte Figur alle Symmetrieachsen ein!



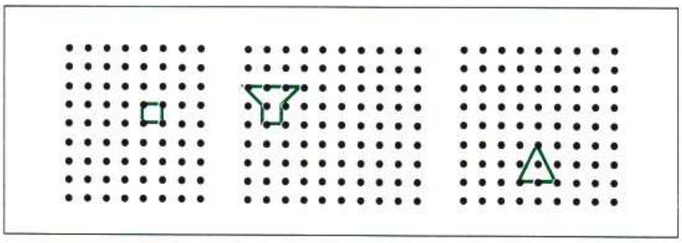
6. Auf welchem Nagelbrett findet man zueinander kongruente Figuren, die durch Gummiringe aufgespannt sind?



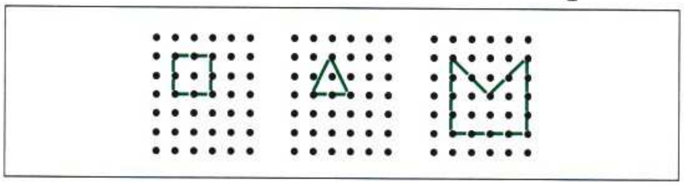
7. Auf welchem Nagelbrett findet man zueinander flächengleiche Figuren, die durch Gummiringe aufgespannt sind?



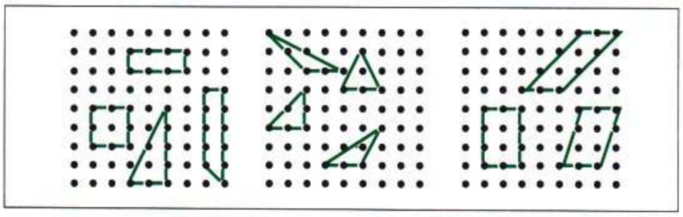
8. Vergrößere jede Figur im Maßstab 1 : 3!



9. Verkleinere jede Figur mit dem Verkleinerungsfaktor $\frac{1}{2}$!



10. Welche Figur hat auf dem Nagelbrett jeweils den größten Flächeninhalt?



Dr. Lothar Flade, Hochschuldozent für Didaktik des Mathematikunterrichts an der Martin-Luther-Universität Halle, Mitglied des Redaktionskollegiums der alpha

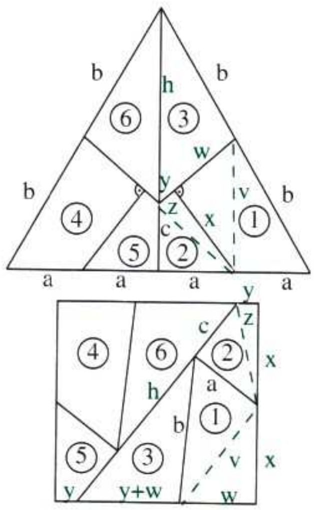
Oh, diese Wurzeln!

Eine Nachbetrachtung

In alpha, Heft 3/1991, S. 54 / S. 71, war unter der Überschrift **„Quadratur des gleichseitigen Dreiecks", (W. Träger)**, folgende interessante Übung zu lesen.

Man zeichne ein gleichseitiges Dreieck mit s=2·b=4·a=10 cm. Laut Abbildung zeichne man die Teilflächen ein, schneide sie aus und bilde mit ihnen eine Quadratfläche!
Dabei sei $c = \frac{s}{4}\left(\sqrt{3} - \sqrt{\sqrt{3} - 1}\right)$

Mit s=10 cm gilt dann c≈2,19... cm.
Die Abbildungen zeigen Dreieck und Quadrat.



So mancher Leser wird sich über die etwas verzwickte Angabe von c gewundert haben. Es liegt nun nahe, die Richtigkeit bzw. die Notwendigkeit dieser Angabe nachzuweisen. Mit Hilfe von "Pythagoras" und der Kenntnis der Rechenregeln mit Wurzeln ist dies möglich, obwohl man sicher Obacht geben muß, daß nicht beim Umformen Flüchtigkeitsfehler entstehen.

(1) Vorausgesetzt, daß mit allen Teilflächen des Dreiecks eine zur Dreiecksfläche inhaltsgleiche Quadratfläche gebildet werden kann, soll nun c berechnet werden.
(2) Danach möge der Leser selbst mit Hilfe der gefundenen Strecken die Inhalte der sechs Teilflächen bestimmen, um dann zu zeigen, daß die Summe dieser Inhalte der Teilflächen den Flächeninhalt des Quadrates ergibt. Notwendige Hilfslinien und Bezeichnungen sind im Bild 1 grün eingezeichnet.

(1) Im Dreieck – und damit im Quadrat – gilt für den Flächeninhalt $A = \frac{s \cdot h}{2}$ mit $h = \frac{s}{x}\sqrt{3}$, $A = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$ und so für die Seite des Quadrats $q = \frac{s}{2}\sqrt[4]{3}$. Dann gilt $2x = \frac{s}{2}\sqrt[4]{3}$, $x = \frac{s}{4}\sqrt[4]{3}$.

Da das Dreieck mit den Seiten $\frac{s}{2}, \frac{s}{4}$, v rechtwinklig ist (Strahlensatz), gilt

$$v^2 = \frac{s^2}{4} - \frac{s^2}{16} = \frac{3}{16}s^2, \text{ d. h. } v = \frac{s}{4}\sqrt{3}.$$

Man erhält dies auch sofort aus $h = \frac{s}{2}\sqrt{3}$, wenn man h : v = 2 : 1 beachtet.
Dann ist $w^2 = v^2 - x^2 =$

$$= \frac{3}{16}s^2 - \frac{1}{16}s^2\sqrt{3} = \frac{s^2}{16}\left(3 - \sqrt{3}\right)$$

$$w = \frac{s}{4}\sqrt{3 - \sqrt{3}}$$

Nun gilt für das Quadrat 2x = 2(y+w) und somit y = x - w.
Nach weiterer Verwendung des Lehrsatzes des Pythagoras ergibt sich dann

$$z^2 = x^2 + y^2,\ c^2 = z^2 - \frac{s^2}{16},\ c^2 = x^2 + y^2 - \frac{s^2}{16}$$

$$c = \sqrt{x^2 + y^2 - \frac{s^2}{16}}$$

Es ergeben sich folgende Rechnungen

$$y = \frac{s}{4}\sqrt[4]{3} - \frac{s}{4}\sqrt{3 - \sqrt{3}}$$

$$c^2 = \frac{s^2}{16}\sqrt{3} + \left[\frac{s^2}{16}\sqrt{3} + \frac{s^2}{16}\left(3 - \sqrt{3}\right) - \frac{2s^2}{16}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{3 - \sqrt{3}}\right] - \frac{s^2}{16}$$

$$c^2 = \frac{s^2}{16}\left(2\sqrt{3} + 3 - \sqrt{3} - 2\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{3 - \sqrt{3}} - 1\right)$$

Nun ist $2\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{3 - \sqrt{3}} =$

$$= 2\cdot\sqrt{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3 - \sqrt{3}} = 2\cdot\sqrt{\sqrt{3}\cdot\left(3 - \sqrt{3}\right)}$$

$$= 2\cdot\sqrt{3\cdot\left(\sqrt{3} - 1\right)} = 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{\sqrt{3} - 1}$$

Durch geringfügige Umformung läßt sich der rechtsseitige Term als Quadrat erkennen:

$$c^2 = \frac{s^2}{16}\left[3 + \left(\sqrt{3} - 1\right) - 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{\sqrt{3} - 1}\right]$$

Damit ist mit Hilfe der Binomischen Formel
$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$

$$|c| = \frac{s}{4}\left(\sqrt{3} - \sqrt{\sqrt{3} - 1}\right)$$

und die Übereinstimmung mit dem angegebenen Termin erreicht.
Nun seid Ihr mit dem 2. Problem an der Reihe!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz
Mitglied des Redaktionskollegiums der alpha

Ich kann nicht leugnen, daß mir,
als ich zum ersten Male sah,
daß man nun in meinem
Vaterlande anfange zu wissen,
was Wurzelzeichen sind,
die klaren Freudentränen
in die Augen gedrungen sind.
Lichtenberg 1775

Zur Entwicklung des Wurzelzeichens

Ka6Ka5	$\sqrt{6} + \sqrt{5}$	frühes Indien
radix de 4	$\sqrt{4}$	Leonardo Fibonacci 1228
$\frac{7.}{60}$	$\sqrt{60}$	al-Qalasādi (†1486)
6 -· 9	$6 - \sqrt{9}$	Dresdner Kodex (um 1486)
√44	$\sqrt{44}$	M. Stifel 1544
℞ √(℞ 24 men ℞ 12)	$\sqrt{\sqrt{24} - \sqrt{12}}$	N. Tartaglia 1556
√. 2 – √. 2	$\sqrt{2 - \sqrt{2}}$	R. Descartes um 1620
√q	$\sqrt{q}$	W. Oūghtred 1631
$\overbrace{\sqrt{}ccc + \sqrt{}cccccc}$	$\sqrt[3]{c^3 + \sqrt{c^6}}$	T. Harriot 1631
$\sqrt{a^2 + b^2}$	$\sqrt{a^2 + b^2}$	R. Descartes 1637

Zusammengestellt von H. J. Ilgauds, Leipzig

Im Raum konstruiert: das Oktaeder

Nun haben wir schon zwei platonische Körper "in Falten gelegt". Bitte lest über Würfel und Tetraeder in den alpha-Heften 5/'91 und 1/'92 nach oder studiert besonders genau das folgende lustige Beispiel, die Konstruktion eines Alf-Kopfes, denn dann soll der dritte Körper folgen, das Oktaeder (griechisch, Achtflächner), ebenfalls ohne Schere und ohne jedes Tröpfchen Leim.

Wiederum wird – wie gewohnt – mit der Exaktheit der Konstruktionen mit Zirkel und Lineal vorgegangen, gemäß den Forderungen des griechischen Philosophen Platon, dessen Namen die fünf regelmäßigen Körper tragen. (Pentagon-Dodekaeder – 12-Flächner und Ikosaeder – Zwanzigflächner werden wir auf diese Weise nicht falten).

Stellen wir uns vor, uns läge der vollständig gefaltete Kopf (**Abb. 1**) bereits vor und wir wollten die Faltungen möglichst genau nachvollziehen, ohne daß jede Hilfsfaltung genügend deutlich ist. (Genau dies war – nebenbei bemerkt – die Situation des Autors, als er begann, über exakte Papierfaltkonstruktionen nachzudenken.)

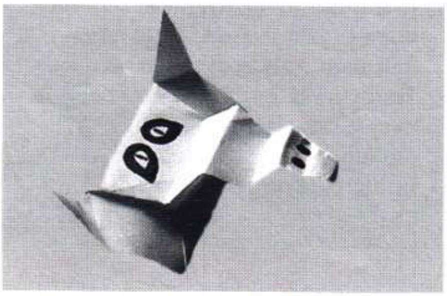


Abb. 1: Der fertig gefaltete Alfkopf
Foto: Dr. B. Liebau, Leipzig

Offensichtlich entsteht der Außerirdische aus einem über die Diagonale gefalteten quadratischen Bogen. Die Schnauze des Wesens wird durch sechs exakt aufeinander liegende Lagen Papier gebildet, d. h. der rechte Winkel bei R muß gedrittelt werden (**Abb. 2**). Dies könnte man erreichen, indem man entweder einen 30°- oder einen 60°-Winkel erzeugt.

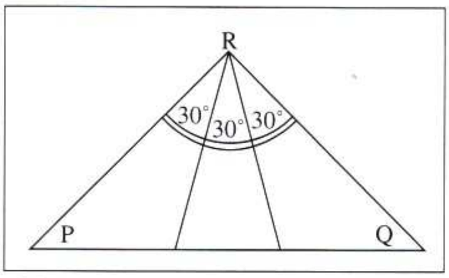


Abb. 2

Sollten wir einen 60°-Winkel mit Zirkel und Lineal konstruieren, fiele uns sicher das *gleichseitige Dreieck* ein. Es hat drei Stück davon und ist bekanntlich aus drei gleichlangen (kongruenten) Seiten bequem zu zeichnen. Wenn man sich aber überlegt, daß bei der gewöhnlichen Konstruktion zwei Kreisbögen einander schneiden, so fiele das Falten schwer. In solcher Situation verlieren wir weder Mut noch Phantasie, sondern *suchen nach anderen Eigenschaften* des gleichseitigen Dreiecks, die gegebenenfalls in einer Falt-Konstruktion verwendbar wären. Dem etwas geübteren Problemlöser unter euch kommen die Symmetrieachsen in den Sinn (bei anderen Problemen könnte es auch die Eigenschaft sein, daß eine Drehung von 120° oder 240° um einen bestimmten Punkt im Innern des Dreiecks die Eckpunkte jeweils aufeinander abbildet). Eine Mittelsenkrechte als Symmetrieachse ist aber sehr leicht zu falten. Ein Hilfskniff bei H legt mit $\overline{HR}$ die Seitenlänge s des gleichseitigen Dreiecks fest. Dabei kann H im Prinzip beliebig auf $\overline{QR}$ gewählt werden, am besten in der Mitte dieser Seite (**Abb. 3**).

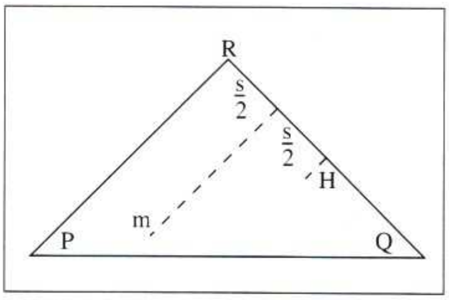


Abb. 3

Falten wir nun R auf H, ist die Mittelsenkrechte m rasch fertiggestellt. Nun kommt der schwierigste Schritt für den Anfang. Dazu legen wir H "um R herum" auf m, das heißt, wir kniffen eine scharfe Falte, die durch R verläuft, wobei H auf m fällt (**Abb. 4**).

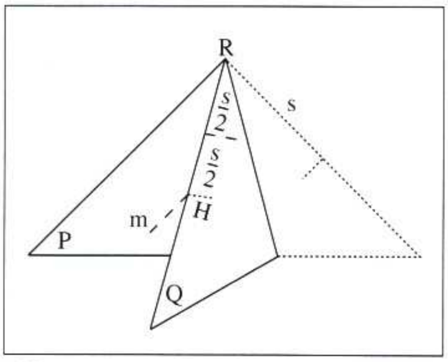


Abb. 4

1 Bezeichnen wir den Punkt auf m, der nach dem Falten mit H zusammenfällt, mit S. Begründe, warum ΔHRS tatsächlich gleichseitig ist!

Damit sind bei R ein 30°- und 60°-Winkel entstanden. Schließlich braucht nur noch die Ecke bei P darübergefaltet zu werden, und Ohren und Schnauze sind fertig. Zur Vollendung des weitgereisten Fernsehstars faltet die Ohren (Ecken P und Q) nach oben sowie die Schnauze (Ecke R) nach unten.

2 Ein Alfkopf wird aus einem quadratischen Stück Papier mit 16 cm Kantenlänge gefertigt. Wie breit ist sein Kopf an der dicksten Stelle? Welche "Ohrenspannweite" hat das Geschöpf?

Das **Oktaeder** ist aus acht gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzt, so daß es keinen verwundert, die gerade gelernte Erzeugung eines 60°-Winkels schon zu Beginn der Oktaeder-Konstruktion anwenden zu müssen: Wir benutzen, wie schon gewohnt, ein quadratisches Blatt (ABCD) mit mindestens 20 cm Seitenlänge und falten es entlang einer seiner Diagonalen, D auf B, danach C auf A, so daß wir das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck CBM vor uns haben. Bei M wird nun ein 60°-Winkel benötigt, den wir mittels der schon bekannten Hilfsfalten (s. o.) exakt konstruieren. H wird als Mitte von BM markiert, die Hilfsfalte m liegt auf der Mittelsenkrechten von HM und entsteht, wenn M auf H gefaltet wird. Um M wird schließlich H auf m gefaltet. Nun wird wieder entfaltet, bis C an seiner alten Position ist. Entlang der gerade entstandenen 60°-Falten werden C nach unten und A nach rechts darüber gelegt. Die vier oberen Lagen werden nach links oben umgelegt (**Abb. 5**) und die Arbeit anschließend wieder vollständig entfaltet.

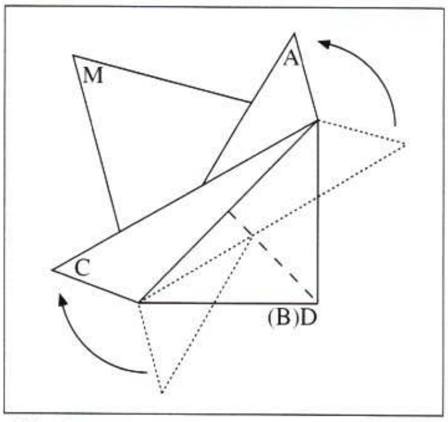


Abb. 5

Die Vorschrift wiederholt sich jetzt, nur wird vorher das Blatt um 90° gedreht. (Bei der Konstruktion der 60°-Winkel könnt ihr durch Halbieren des schon vorhandenen 60°-Winkels etwas Mühe sparen.) Wiederum nach

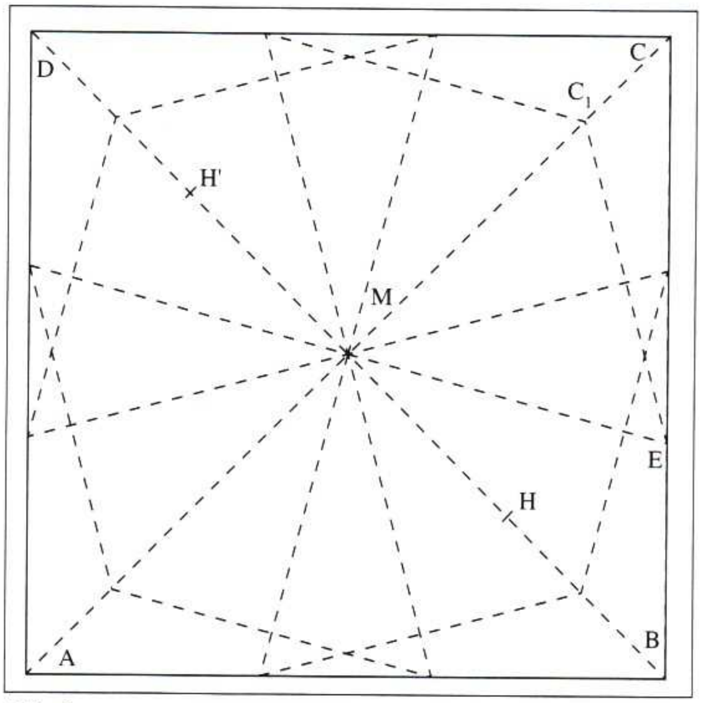


Abb. 6

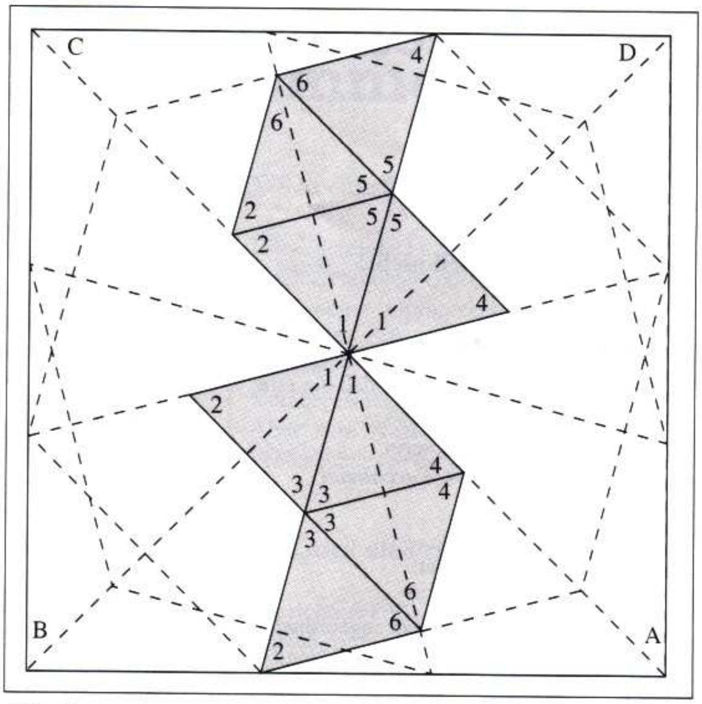


Abb. 9

vollständigem Entfalten ist ein geordnetes Gewirr von Falten wie in **Abb. 6** entstanden.

3 Begründe, weshalb sechs gleichseitige Dreiecke (z. B. ΔC_1EM) entstanden sind!

Inzwischen ist das Schwerste geschafft, obwohl wir von einem *Körper* ja noch weit entfernt sind. Diejenigen, die die Aufgaben **2** und **3** schon gelöst haben, gewinnen jetzt ohne Mühe den Umriß eines regelmäßigen Sechsecks, indem sie die Ecken B und D gerade bis an die 60°-Faltlinien heran nach innen knikken. (Dabei fallen Abschnitte der ursprünglichen Diagonalen zusammen.) Danach werden die übrigen beiden Ecken entlang der 15°-Linien (z. B. $\overline{C_1E}$) nach innen gebracht und an diesen Stellen die infolge dessen gerade entstandenen Ecken ebenso. Ein regelmäßiges Sechseck ist fertig. Jetzt muß eine Art Sternvieleck entstehen: Abwechselnd, beginnend bei FG, werden alle 15° Tal- und Bergfalten gelegt, und zwar auf den schon vorhandenen Faltlinien (**Abb. 7**).

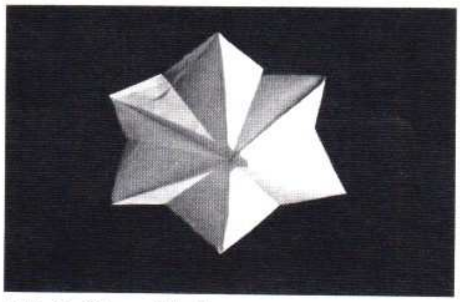


Abb. 7: Sternvieleck

Foto: Dr. B. Liebau, Leipzig

Dieses Gebilde wird jetzt so zusammengelegt, daß ein gleichseitiges Dreieck JKM entsteht, wobei in den Eckpunkten J und K jeweils drei Spitzen übereinander liegen (**Abb. 8**). Wenn die rechte (untere) Spitze K_1 an die Mitte der linken Kante gefaltet wird und anschließend zuerst die obere linke (J_1), dann die mittlere linke Spitze (J_2) in die entstandene "Tüte" gesteckt (Vorfalten empfiehlt sich!) und angedrückt und dieser Vorgang nach dem Wenden der Faltarbeit wiederholt wird, ist das Oktaeder fertig.

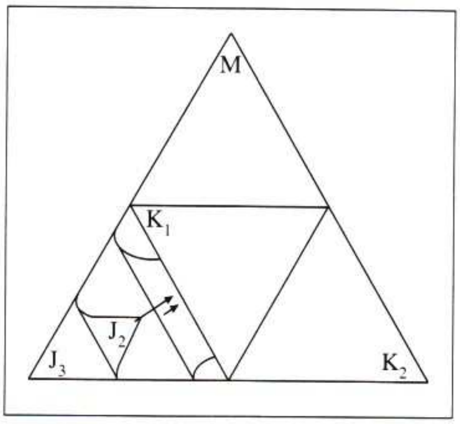


Abb. 8

4 Welche Eigenschaften haben die Dreiecke, die durch Umlegen der Spitze K_1 neu entstehen?

Fertig? werden die "Neulinge" unter Euch zu Recht fragen. Die versierten "Falter" dagegen wissen, daß nur noch ein vorsichtiger Puster in die Öffnung des Gebildes fehlt, um es zu ganzer Schönheit zu entfalten.

Zum Beweis unserer Konstruktion "im Raum" können wir uns diesmal kürzer fassen, ist doch einerseits durch die Lösung der Aufgaben viel Vorarbeit geleistet und andererseits das Prinzip von den beiden vorangegangenen Arbeiten bekannt. Wir markieren wieder die außen liegenden Figuren (Dreiecke) und entfalten das Gebilde in die Ebene (**Abb. 9**).

(1) Jede der Seitenflächen ist gemäß der in der Lösung von **4** und zuvor angestellten Überlegungen ein gleichseitiges Dreieck.

(2) In jedem der Eckpunkte des Körpers stoßen genau vier Dreiecke zusammen.

Aus (1) und (2) folgt, daß der Körper von acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird und sechs gleichartig gebaute Ecken aufweist, also exakt ein Oktaeder ist, q.e.d.

Mit dem Oktaeder und phantastischen Vorstellungen von unserer Welt schließt sich jetzt der Kreis zu Alf vom fernen Planeten Melmac. Johannes Kepler (1571 – 1630), der die Bewegung der Planeten sehr präzis beschrieb, hat darüber hinaus versucht, die Zahl der Planeten unseres Sonnensystems sowie ihre unterschiedlichen Abstände von der Sonne zu erklären:

"Die Sphäre der Erde ist das Maß für alle anderen. Zeichne ein Dodekaeder um sie! Die diesem Dodekaeder umschriebene Sphäre ist die des Mars. Zeichne jetzt ein Tetraeder um die Marssphäre! Die diesem Körper umschriebene Sphäre gehört dem Jupiter. Schreibe jetzt einen Würfel um des Jupiters Sphäre! Die ihm umschriebene Sphäre ist die des Saturnus. Zeichne nun ins Innere der Erde ein Ikosaeder! Die ihm eingeschriebene Sphäre gehört der Venus. Zeichne ein Oktaeder in diese Sphäre! Die diesem Oktaeder eingeschriebene Sphäre gehört endlich dem Merkur. Und siehe, somit ist die Zahl der Planeten erklärt."

Mysterium Cosmographicum (erschien 1596)

Dr. Christian Werge, Leipzig

Eine Variation des Faltens von Würfel, Tetraeder und Oktaeder sandte uns Dr. Peter Gallin (Bauma/Schweiz) ein. Bei Einsendung eines frankierten und adressierten Rückumschlages könnt Ihr sie von uns erhalten.

Komisches, Kniffliges und Knackiges

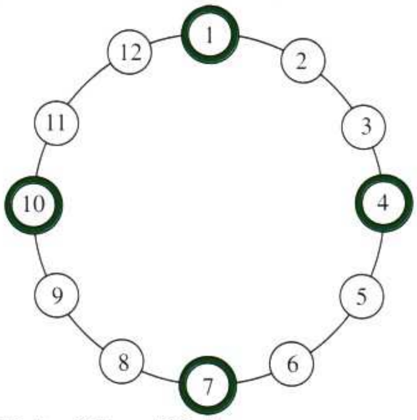
Verflixt, das geht doch nicht!

$\frac{XXII}{VIII} = II$

Forme diese Gleichung so um, daß sie eine wahre Aussage ist!
Eingesandt von unserer Leserin
Ina Maria dos Remedios, Forchheim

Stapeln von Spielsteinen

Auf jedes der auf einem Kreis angeordneten 12 Spielfelder ist ein Spielstein zu setzen (1-Pfennig-Stück, Damestein). Aus diesen Spielsteinen sind mit 8 Zügen 4 Stapel mit je drei Steinen zu bilden, wobei diese Stapel auf den doppelt umrandeten Feldern liegen. Ein Zug besteht im Springen eines Steines von einem Feld auf ein anderes Feld im oder entgegen dem Uhrzeigersinn über genau drei Spielsteine hinweg. Die übersprungenen Steine können einzeln oder gestapelt liegen.



Walter Träger, Döbeln

Idiotisch

Der Mathelehrer ist wieder einmal total entrüstet über die Rechenkünste von Alphons: "Tut mir leid, Alphons, aber einer von uns beiden ist ein Vollidiot!" Alphons gibt keinen Kommentar dazu. Am nächsten Tag legt er gleich zu Beginn der Stunde einen Briefumschlag auf das Lehrerpult. "Was ist denn da drin?", fragt der Lehrer verblüfft.
Alphons: "Ein Attest vom Schularzt, daß ich völlig normal bin!"

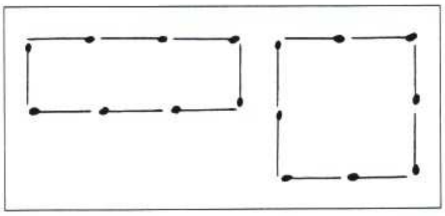
Sprachecke

Les polygones

Deux polygones ont, à eux deux, 89 diagonales. A eux deux, combien ont-ils de côtés?
aus: Tangente, Paris

Same perimeter but different areas

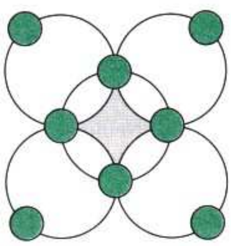
The drawing shows two shapes with the same number of matches (eight) in their perimeters. However, their areas are in the ratio of 3 : 4.



Construct two other shapes in the plane so that one of them is a rectangle, they are each composed of twentyfour matches, and their areas are in the ratio of 5 : 6.
aus: Fun with mathematics, Toronto

Арифмéтика

Расставьте числа от 1 до 8 в кружки фигуры, изображенной на рисунке, так, чтобы сумма чисел на каждой окружности была одной и той же.



aus: Quant, Moskau

Übersetzt von Peter Hofmann, Dr. Gabriele Liebau (beide Leipzig) und Rainer Bergmann (†), Döbeln.

Alphons logische Abenteuer (9)

"Berti lügt"; sagte Alphons' Schwester. "Wie kommst Du darauf", fragte Alphons. "Er hat es mir vorhin selber gesagt", antwortete seine Schwester.
Was er denn gesagt habe, wollte Alphons nun genauer wissen. "Ich lüge", das hat er auf sich zeigend gesagt, erwidert sie darauf. Alphons wollte schon seiner Schwester Gegenbeispiele angeben, da glaubte er, einen besseren Weg zur Ehrenrettung von Berti gefunden zu haben. "Wenn Berti von sich behauptet, daß er lüge, so ist doch auch diese Behauptung von ihm gelogen, also nicht wahr. Ist es aber nicht wahr, daß er lügt, lügt er nicht. Berti spricht die Wahrheit", argumentiert Alphons und fügt noch hinzu, daß Berti damit aber ganz schön angebe.
Alphons dachte dabei an Situationen, in denen Berti wider besseren Wissens etwas behauptete, also gelogen hatte. "Du, Alphons", tippte ihn seine Schwester vorsichtig an, "wenn aber wahr ist, was Berti sagt, dann ist doch auch wahr, was er mir gesagt hat, nämlich daß er lügt."
In der Tat, mußte Alphons zugeben, seine Schwester hatte seine eigene Argumentation nur zu Ende gedacht. Wenn Berti lügt, dann ist auch das eine Lüge und somit lügt Berti nicht. Lügt Berti nicht, so hat er, wenn er behauptet, er lüge, nicht gelogen, also lügt er. Berti lügt somit genau dann, wenn er nicht lügt. Statt "lügt" kann man auch sagen "nicht wahr", so daß wir zu dem Resultat kommen: Berti sagt die Wahrheit genau dann, wenn er nicht die Wahrheit sagt. Seine Schwester deutete sein ratloses Gesicht anders: "Sei nicht traurig, Berti redet eben manchmal so dahin, ich kann ihn aber trotzdem auch gut leiden." War es wirklich nur komische Rede? Nein, das war es ganz und gar nicht, wie Alphons seinem Logikbuch entnehmen konnte, das er zu Rate zog.
Zu beweisen, daß eine Aussage zugleich wahr und falsch ist, das hieß eine Antinomie zu beweisen. Eine Antinomie ist ein beweisbarer logischer Widerspruch. Die Antinomie, auf die man durch Bertis Aussage kommt, war schon in der Antike bekannt. Auch im späten Mittelalter hat man diese Lügner-Antinomie zu lösen versucht und war dabei schon auf einen Lösungsweg gekommen, den man in unserem Jahrhundert in allen seinen Konsequenzen für den Aufbau einer wissenschaftlichen Theorie untersuchte.
Das Antinomienproblem wird deshalb heute so intensiv untersucht, weil man sowohl innerhalb der Mengenlehre als auch bei dem Versuch, Arithmetik auf ein logisches Axiomensystem zurückzuführen, von den jeweiligen begrifflichen oder axiomatischen Voraussetzungen ausgehend Antinomien beweisen konnte.

Der zunächst gefundene Weg zur Vermeidung logischer Antinomien (wie z. B. der Lügner-Antinomie) ist nicht trivial. Da er von sehr starken Voraussetzungen Gebraucht macht, ist er auch nicht unumstritten.
"Wenn man den ganzen Scharfsinn von Jahrhunderten braucht, um auf eine Lösung zu kommen, brauche ich mich nicht zu schämen, daß ich mich schachmatt gesetzt fühlte", dachte Alphons. Besonderes Aufsehen habe, so las er weiter, eine Anfang unseres Jahrhundertes von B. Russell gefundene Antinomie erregt. Man denke sich die Menge M aller der Mengen gebildet, die sich nicht selbst als Element enthalten.
Die Antwort auf die Frage, ob M sich selbst als Element enthält oder nicht, ist eine Antinomie. Alphons beschloß, diese Frage Berti vorzulegen.

Prof. Dr. L. Kreiser
Institut für allgemeine Logik
der Universität Leipzig

Die Logik ist die Hygiene,
deren sich der Mathematiker bedient,
um seine Gedanken
gesund und kräftig zu erhalten.
H. Weyl

Für Freunde der Zahlenjongliererei – eine zu harte Nuß?

Im Heft 5/91 stellten wir Euch vor das Problem, die Zahlen 1 – 100 mittels der Ziffern in den Jahreszahlen 1991 und 1992 darzustellen. Dabei sollte die gegebene Ziffernfolge eingehalten und möglichst einfache Ausdrücke, also ohne die Funktion ganzzahliger Ausdruck, verwendet werden.
Die Problemzahlen waren für die 1991 die 39, 51, 66, 68, 69, 74, 75 und 77.
„Geknackt hat unser Leser Ingo Maaß aus Berlin folgende Zahlen:

$$39 = 1 \cdot \sqrt{9} + (\sqrt{9}\,!)^2$$

$$66 = 1 \cdot \sqrt{9!} \cdot (9+2)$$

$$68 = -((1+\sqrt{9})!) + 92$$

$$74 = (1+\sqrt{9})! \cdot \sqrt{9} + 2$$

$$75 = -1 \cdot \sqrt{9}\,! + 9^2$$

$$77 = (1+\sqrt{9}\,!) \cdot (9+2)$$

Bei der 51 und 69 mußte auch er passen! Die beiden Zahlen stehen also weiterhin zur Debatte.

Nummernsalat

„Was liest du denn da?"
„Die 3-426-04175-8!"
„Das Buch fand ich toll. Aber jetzt habe ich ein noch spannenderes, die 3-328-00349-5, kennst du das schon?"

Nein, also ganz so schlimm ist es doch nicht mit den Nummern in unserem Leben. Wir haben zwar schon festgestellt, daß die Nahrungsmittel, technischen Geräte, sogar die Lokomotiven Nummern haben, aber das? Nein!
Trotzdem, fast alle Bücher, die nicht älter als 20 Jahre sind, tragen auf der Rücktitelseite die zehnstellige Internationale Standard-Buchnummer (ISBN). Nehmen wir die ISBN-Nummer der alpha:

3 - 617 - 34005 - 9

- 9 – Prüfziffer
- 34005 – Titelnummer
- 617 – Verlagsnummer
- 3 – Sprache, Land

Der Übergang zwischen Titel- und Verlagsnummer ist fließend. Große Verlage erhalten eine zwei- oder dreistellige Verlagsnummer, kleinere Verlage hingegen mehrstellige Verlagsnummern, da sie entsprechend weniger Buchtitel herausgeben. Ebenso variabel ist die Ländernummer. Gibt ein Land sehr viele Bücher heraus, so erhält es eine einstellige Nummer, anderenfalls wird die Verlagsnummer mit einbezogen. Bücher mit der 3 an erster Stelle weisen übrigens lediglich darauf hin, daß diese Titel im deutschsprachigen Raum, also in der Bundesrepublik Deutschland, in der Schweiz oder in Österreich erschienen sind.

ISBN-Sprachgruppen

0 – englisch	91 – schwedisch
2 – französisch	92 – UNESCO
3 – deutsch	951 – finnisch
84 – spanisch	963 – ungarisch
86 – jugoslawisch	977 – ägyptisch
87 – dänisch	978 – nigerianisch
90 – niederländisch	979 – indonesisch

Wozu eine ISBN?

Diese vereinfacht das Bestellsystem Kunde-Buchhändler-Verlag wesentlich, denn statt langer bibliographischer Angaben genügt die ISBN zur eindeutigen Angabe des Titels.
Vorausgesetzt, sie enthält keine Fehler! Aber zum Ausschließen der häufigsten Fehler gibt es ja die Prüfziffer.

Wie wird die Prüfziffer ermittelt?

Die richtige Prüfziffer ergibt sich durch Ergänzen zum nächsten Vielfachen der 11 (s. Abbildung unten).
Da im 11er-System gerechnet wird, kommen für die Prüfziffer alle Reste beim Teilen durch 11 in Frage, also die Zahlen von 0 bis 10. Statt der zweistelligen 10 benutzt man den Buchstaben X als Prüfziffer, in Anlehnung an das entsprechende römische Zahlzeichen.

Aufgabe 1:
Bei diesen ISBN fehlt die Prüfziffer.
a) 3-453-00548- ?
b) 3-425-07081- ?
c) 0-45-283527- ?
d) 0-912843-08- ?

Aufgabe 2:
Der häufigste Fehler ist eine falsch geschriebene Ziffer. Wird dieser Fehler mittels des 11er-Systems immer entdeckt?

Aufgabe 3:
Während das 11er-System die Vertauschung von Nachbarziffern stets erkennt (im Gegensatz zum 10er-System der EAN-Nummer, siehe alpha Heft 1/92), führen Vertauschungen von benachbarten Zweierblöcken nicht immer zu Fehlermeldungen. Versuche ein solches Beispiel zu finden!

nach: Wilfried Herget "Prüfziffer und Strichcode – "Computermathematik" auch ohne den Computer", mathematik lehren, Friedrich Verlag

3 -	6	1	7 -	3	4	0	0	5 -	9		
↓·10	↓·9	↓·8	↓·7	↓·6	↓·5	↓·4	↓·3	↓·2	↓·1		
30 +	54 +	8 +	49 +	18 +	20 +	0 +	0 +	10 +	9	= 198	: 11 = 18

Die Mitternachts-dämmerung

Täglich können wir beobachten, wie es am Morgen ganz allmählich hell und am Abend wieder dunkel wird. Die Dämmerung ist für uns eine selbstverständliche Erscheinung, und wer denkt schon daran, daß die Erdatmosphäre die Ursache dafür ist. Befänden wir uns auf dem Mond, der bekanntlich keine Lufthülle besitzt, so könnten wir beobachten, daß Licht und Dunkelheit, Tag und Nacht, ganz plötzlich ineinander übergingen. Für uns Erdbewohner ist die Dämmerung eine durchaus angenehme Erscheinung, da diese den lichten Tag verlängert. Maßgeblich für die Dämmerungshelligkeit ist der Stand der Sonne unter dem Horizont, die Sonnentiefe. Ist die Sonne z. B. gerade untergegangen, merkt man kaum eine Helligkeitsabnahme. Erst nach etwa 45 Minuten hat die Helligkeit so weit abgenommen, daß es nicht mehr möglich ist, ohne Zuhilfenahme von künstlichem Licht, etwas zu lesen. Bald erscheinen auch die ersten hellen Sterne, denen immer mehr folgen. Nach 1,5 Stunden ist selbst der geringste Rest der Dämmerung am Horizont verschwunden, es ist dunkle Nacht. Der Astronom unterscheidet drei Dämmerungsstufen (s. **Tabelle 1**).

Sonnentiefe	Erscheinung
0° bis 6,5°	Bürgerliche Dämmerung: Gegenstände sind noch deutlich erkennbar. Lesen ohne künstliches Licht ist noch möglich.
6,5° bis 12°	Nautische Dämmerung: Hellere Sterne sind zu sehen. Der Verlauf des Horizontes (Kimm) ist noch erkennbar.
12° bis 18°	Astron. Dämmerung: Die Dunkelheit nimmt zu, am Horizont ist noch eine mehr oder weniger leichte Aufhellung zu bemerken. Am Ende der astron. Dämmerung sind alle Sterne am Himmel zu sehen.

Tabelle 1

Breite		Mitternachts-dämmerung	Anzahl der Tage
55°	Insel Sylt, dänische Grenze	8.5.- 5.8.	89
54°	Lübeck, Wismar, Rostock, Usedom	13.5.- 1.8.	80
53°	Bremen, Wittenberge, Angermünde	17.5.-28.7.	72
52°	Münster, Bielefeld, Magdeburg Jüterbog, Guben	21.5.-24.7.	67
51°	Köln, Erfurt, Dresden	26.5.-18.7.	58
50°	Mainz, Frankfurt/M., Bayreuth	2.6.-12.7.	40

Tabelle 2

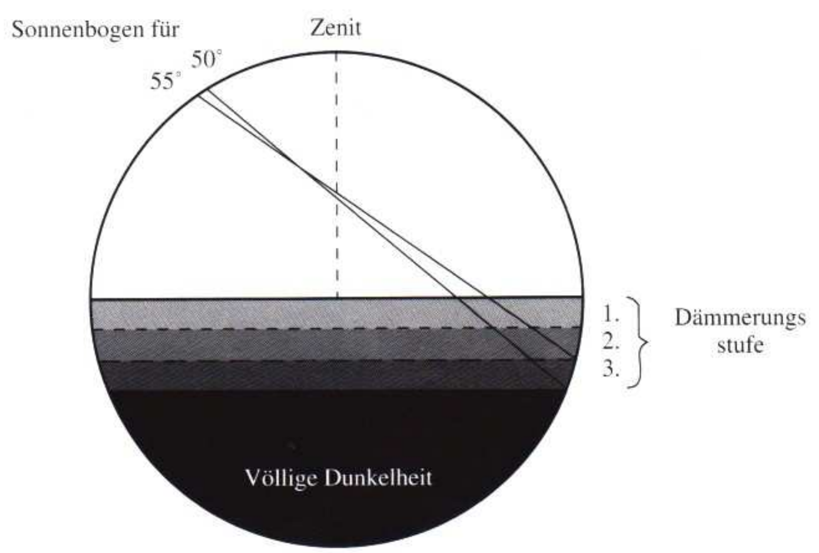


Abb. 1

Die hellen Nächte im Norden Deutschlands

Um die Zeit der Sommersonnenwende (21.6.) bemerkt man im Norden des Landes, daß es nachts nicht ganz dunkel wird. Selbst um Mitternacht ist am Nordhorizont eine leichte Aufhellung zu beobachten, die umso stärker ist, je mehr wir uns der Nord- und Ostseeküste nähern. Die 3. Dämmerungsstufe, die astronomische Dämmerung, bleibt für einige Wochen erhalten. Mit anderen Worten: Die Abenddämmerung geht in die Morgendämmerung über. Ein Dichter hat diese Erscheinung poesievoll in folgende Worte gekleidet: "Lieblich sind die Juninächte, wenn des Abendrots Verglühen und des Morgens frühe Lichter dämmernd ineinanderschwimmen."
Um genau zu sein: Ganz im Norden (Flensburg, Insel Sylt) bleibt die Sonne sogar vom 10. Juni bis 1. Juli innerhalb der nautischen Dämmerung.
Da die Sonnenbögen im Norden flacher als im Süden verlaufen, kann die Sonne südlich der Linie Mainz-Frankfurt/M.-Bayreuth um Mitternacht niemals weniger als 18° unter dem Horizont stehen, d.h. eine Mitternachtsdämmerung ist dort nicht mehr möglich. Die Sommernächte sind südlich von 50° Breite auffallend dunkel.
Die Übersicht zeigt die Abhängigkeit der Dauer der Mitternachtsdämmerung von der geographischen Breite (s. **Tabelle 2**).
Dabei ist zu berücksichtigen, daß in der zeitlichen Nähe der Sommersonnenwende die Mitternachtsdämmerung deutlicher ausgeprägt ist als nahe der Grenztage. Die **Abb. 1** zeigt im Meridianschnitt die 3 Dämmerungszonen mit der Sonnenbahn als Gerade am 21.6. für die Breite von 55° und 50°.

Die "Weißen" Nächte

Reisen wir noch weiter nach Norden, geht die Mitternachtsdämmerung in die sogen. weißen Nächte über. Den Touristen gut bekannt, ist diese eindrucksvolle Erscheinung von Stockholm oder St. Petersburg. In diesem Falle verbleibt die Sonne noch nahe im Bereich der 1. Dämmerungsstufe, der bürgerlichen Dämmerung. Es ist dann dort so hell, daß man mühelos etwas lesen kann, am Himmel sind nur die hellsten Sterne erkennbar. **Abb. 2** zeigt in

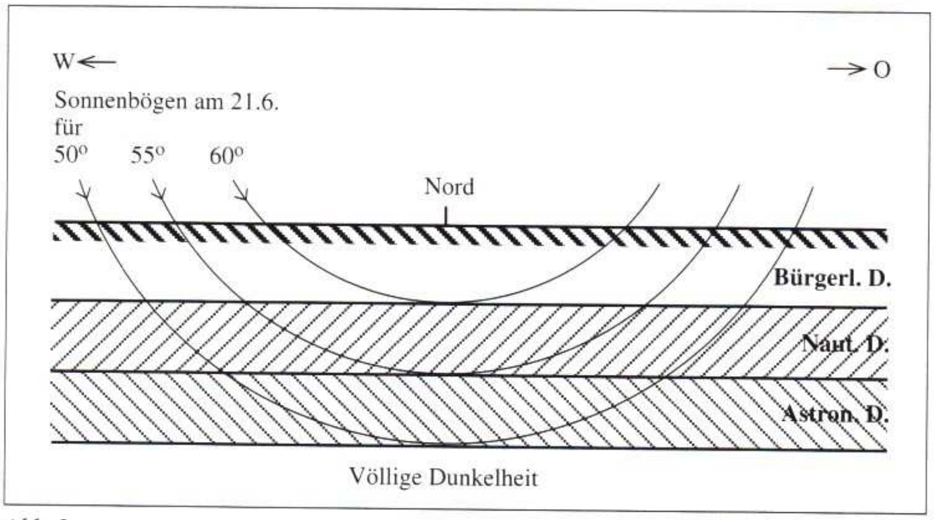
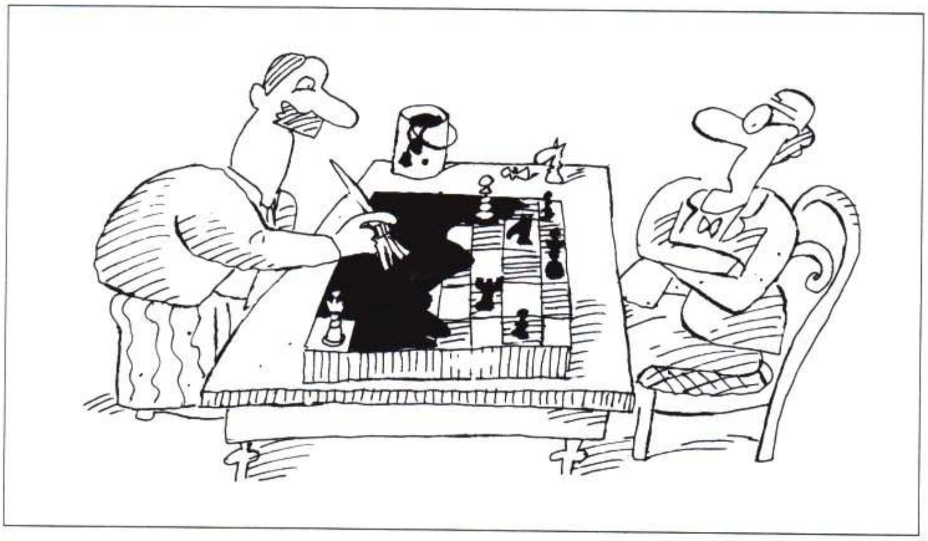


Abb. 2

einer schematisierten Darstellung des Nordhorizontes die Dämmerungsverhältnisse in 3 verschiedenen geographischen Breiten.
Dehnen wir unsere Reise noch weiter nach Norden aus, muß logischerweise auf einer bestimmten geographischen Breite die Sonne um Mitternacht nicht mehr untergehen. Wir haben damit den nördlichen Polarkreis auf der Breite von 66,5° erreicht, wo die Mitternachtssonne zu beobachten ist. Die hier gemachten Ausführungen über die Mitternachtsdämmerung und die weißen Nächte gelten selbstverständlich sinngemäß auch für die Zeit um den 22.12. auf der Südhalbkugel. Wie ein Blick auf den Globus zeigt, gibt es südlich der Breite von 50° (Südpatagonien; Feuerland) nur sehr wenige Siedlungsgebiete.

StR Arnold Zenkert, Potsdam

Schachecke

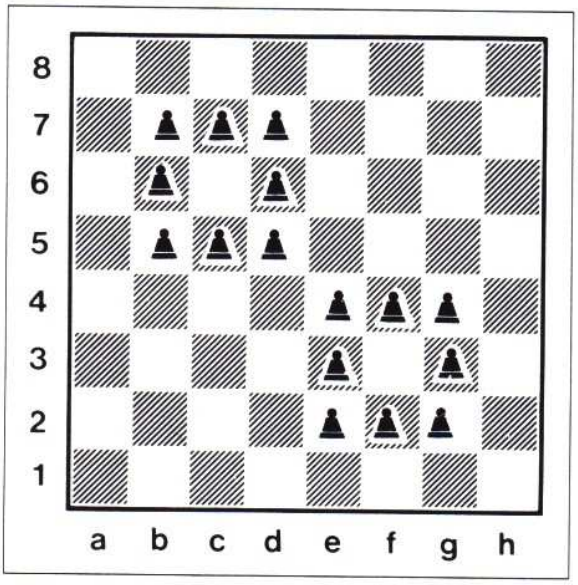


Lothar Otto, Leipzig

Jeder Zug ein Treffer

Der bekannte Berliner Schachschriftsteller und Internationale Meister Kurt Richter (1900 – 1969) bezeichnete den Springer unter den Schachfiguren als die schillerndste Figur im königlichen Spiel. Während König, Dame, Turm und Läufer sich in geraden Bahnen bewegen, zieht der Springer dagegen zwei Felder vor und eins zur Seite. Im Prinzip zieht er nicht, sondern er springt vielmehr, was auch schon sein Name ausdrückt. In dem Diagramm sind zweimal 8 schwarze Bauern in Quadratform aufgestellt. Nun soll ein weißer Springer, der auf ein beliebiges freies Feld gesetzt werden darf, in möglichst wenigen Zügen alle Bauern schlagen. Es gibt mehrere richtige Lösungswege. Finde einen davon!

Harald Rüdiger, Werk für Fernsehelektronik Berlin



Lösungen zum alpha-Wettbewerb Heft 6/91

5/1
Aus (1) folgt: Bernd hat nicht den Familiennamen Lange.
Aus (3) folgt: Christian hat nicht den Familiennamen Lange.
Deshalb heißt einer der drei Freunde Andre Lange.
Aus (2) folgt: Christian hat nicht den Familiennamen Neumann.
Deshalb heißt er Christian Meier und der dritte Bernd Neumann.

5/2
Die kleinste dreistellige natürliche Zahl mit der Quersumme 10 ist 109, die größte 910.

5/3
Wir stellen eine Tabelle auf:
Lebensalter (in ganzen Zahlen)

Sohn	Tochter	Vater	Mutter	Summe
7	11	28	25	71
8	12	32	29	81
9	13	36	33	91
10	14	40	37	101

Nur für die Zahlenangaben der vierten Zeile beträgt die Summe 101. Der Vater ist 40, die Mutter 37, die Tochter 14, der Sohn 10 Jahre alt.

5/4
Aus (1) folgt: Falk hat nicht den Nachnamen Krause.
Aus (2) folgt: Weder Falk noch Ingmar haben den Nachnamen Lumnitz.
Einer der drei Freunde heißt deshalb Ronny Lumnitz, ein weiterer Ingmar Krause, der dritte Falk Schettler.

5/5
Zunächst gilt O = 1. Wegen A + A = OP gilt $A \geq 5$. Wegen E + E = A muß A eine gerade Zahl, also 6 oder 8 sein. Es existiert genau eine Lösung, nämlich 6948 + 6948 = 13 896.

5/6
Beate sei x Jahre alt; dann ist Christian (x-2) Jahre und Axel (x+2) Jahre alt. Zusammen sind sie $3 \cdot x$ Jahre alt. Nun gilt 3x=24, also x=8. Christian ist 6, Beate 8 und Axel 10 Jahre alt.

5/7
Angenommen, das Hotel habe nur Zweibettzimmer; dann wären $20 \cdot 2 = 40$ Betten vorhanden. Da es aber 40 – 32 = 8 Betten weniger sind, verfügt das Hotel über 8 Ein- und 12 Zweibettzimmer.

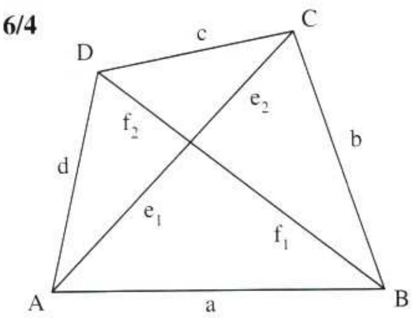
6/1
Aus (1) und (2) folgt: Weder Rico, weder Mark noch Lars haben den Nachnamen Stöwesand. Deshalb heißt ein Junge Dirk Stöwesand. Aus (3) und (4) folgt: Mark heißt nicht Jakobi, aber auch nicht Fischer. Deshalb heißt er Mark Wagenknecht.
Aus (3) folgt: Lars heißt nicht Jakobi. Deshalb heißt er Lars Fischer, und der vierte Junge heißt Rico Jakobi.

6/2
Aus $A = a \cdot b = 1 \cdot 40\ \text{cm}^2 = 2 \cdot 20\ \text{cm}^2 = 4 \cdot 10\ \text{cm}^2 = 5 \cdot 8\ \text{cm}^2$

und $\frac{u}{2} = a + b = 26\ \text{cm} : 2 = 13\ \text{cm} = 5\ \text{cm} + 8\ \text{cm}$

folgt a = 8 cm und b = 5 cm.

6/3
$$\frac{131313}{656565} = \frac{13 \cdot 10101}{65 \cdot 10101} = \frac{13}{65} = \frac{1}{5}$$

6/4


Der Zeichnung ist folgendes zu entnehmen:
Nach der Dreiecksungleichung gilt
$e_1 + f_1 > a$ und $e_2 + f_1 > b$,
$e_2 + f_2 > c$ und $e_1 + f_2 > d$,
$e_1 + e_2 + f_1 + f_2 > a + c$ und
$e_1 + e_2 + f_1 + f_2 > b + d$,
also $e + f > a + c$ und $e + f > b + d$.

6/5
Für den Bruch gilt $\frac{n}{n + 3521} = \frac{4}{11}$
Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so $a \cdot d = b \cdot c$.
Deshalb gilt
$11 \cdot n = 4 \cdot (n + 3521)$, $11n = 4n + 14084$,
$7n = 14084$, $n = 2012$. Daraus folgt weiter
$\frac{2012}{5533} = \frac{4 \cdot 503}{11 \cdot 503}$
Der Bruch wurde somit durch 503 gekürzt.

6/6
Es sei 2n eine gerade natürliche Zahl; die ihr unmittelbar aufeinanderfolgenden weiteren vier Zahlen sind dann 2n + 1, 2n + 2, 2n + 3 und 2n + 4. Die Summe dieser fünf Zahlen beträgt 10n + 10 = 10(n + 1). Die Summe ist somit ein Vielfaches von 10, also durch 10 teilbar.

6/7
Er legt in 1 Stunde 4 km zurück, in einer halben (30 min) die Hälfte, also 2 km.

7/1
Wegen $\frac{1}{2} \cdot (88 - 48) = 20$ sind Sohn und Tochter zusammen 20 Jahre alt.
Angenommen, die Tochter ist x Jahre, der Sohn also (20–x) Jahre alt; dann gilt $3 \cdot (20 - x) + (20 - x) + 4x + x = 88$, $4 \cdot (20 - x) + 5x = 88$, also x = 8. Der Vater ist 36, die Mutter 32, der Sohn 12 und die Tochter 8 Jahre alt.

7/2
Es sei $z = \overline{19xy}$ die Zahl des Geburtsjahres von Tobias ($0 \leq x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$). Dann gilt $1900 + 10 \cdot x + y + (1 + 9 + x + y) = 2000$, $1910 + 11x + 2y = 2000$, $11x + 2y = 90$. Nur für x = 8 und y = 1 wird diese Gleichung unter den einschränkenden Bedingungen erfüllt. Tobias wurde im Jahre 1981 geboren.

7/3
Aus der Aussage der Schwester folgt, daß ihr Bruder zwei Äpfel mehr als sie selbst hat. Angenommen, der Bruder hat x Äpfel, seine Schwester also (x–2) Äpfel; dann gilt $x + 1 = 2 \cdot (x - 3)$, $x + 1 = 2x - 6$, x = 7. Axel hat sieben, Beate fünf Äpfel.

7/4
Angenommen, Axel ist gegenwärtig x Jahre alt; dann gilt $x + 2 = 2 \cdot (x - 2)$, $x + 2 = 2x - 4$, x = 6. Axel ist gegenwärtig sechs Jahre alt.

7/5
Es sei $z = \overline{abc}$ eine dreistellige natürliche Zahl in dezimaler Schreibweise, dann gilt $100a + 10b + c + 297 = 100c + 10b + a$, $99c - 99a = 297$, $c - a = 3$, $c = a + 3$. Daraus folgt $1 \leq a \leq 6$, $0 \leq b \leq 9$, $4 \leq c \leq 9$. Somit existieren 60 solcher Zahlen. Die kleinste lautet 104, die größte 699.

7/6
Das Fahrzeug legt eine Strecke von insgesamt 30 km zurück, dazu wird die Zeit (0,5 + 0,2) h benötigt. Die Durchschnittsgeschwindigkeit berechnet sich aus 30 km/0,7 h. Sie beträgt rund 43 km/h.

7/7
Da die Masse eines Körpers nicht vom Ort abhängt, beträgt sie auch auf dem Mond 240 kg.

8/1

Das Ziehen der Quadratwurzel aus $\left(4-\frac{9}{2}\right)^2$ ist keine äquivalente Umformung, da $4-\frac{9}{2}=-\frac{1}{2}$, aber sowohl $\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ als auch $\left(+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ ist.

8/2

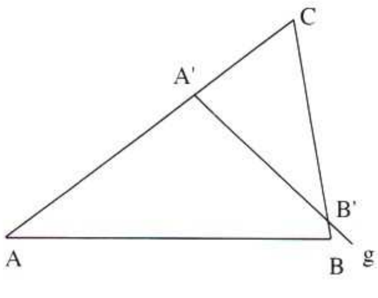
a) Die Zahl muß durch $3^2 \cdot 2^2$, also durch 4 und durch 9 teilbar sein, d. h., die letzten beiden Ziffern müssen in der vorgegebenen Reihenfolge eine durch 4 teilbare Zahl darstellen und die Quersumme der Zahl muß durch 9 teilbar sein. Für die letzte Ziffer kommt nur eine 0, 4 oder 8 in Frage. Ist es eine 0, so kann die mittlere Ziffer 0 oder 9 sein; ist es eine 4 bzw. eine 8, so kann die mittlere Ziffer nur eine 5 bzw. 1 sein.

Alle gesuchten Zahlen sind: 52020, 52920, 52524 und 52128.

b) Eine natürliche Zahl a ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme von a durch 11 teilbar ist. Es muß also $\square-2+\square-2+5$ durch 11 teilbar sein. In die Leerstellen können nur Ziffern eingesetzt werden, die, als einstellige Summanden aufgefaßt, die Summe 10 ergeben. Alle gesuchten Zahlen sind: 52129, 52228, 52327, 52426, 52525, 52624, 52723, 52822 und 52921.

8/3

In einem beliebigen Punkt A' der Seite $\overline{AC}$ wird der Winkel $\sphericalangle ABC$ angetragen, so daß ein Schenkel auf $\overline{AC}$ liegt und der andere Schenkel die Seite $\overline{BC}$ schneidet. Diesen Schnittpunkt bezeichnen wir mit B'. Wegen des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck sind $\sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle A'B'C$ kongruent. Nun stimmen die Innenwinkel im Dreieck ABC mit denen im Dreieck A'B'C überein, und damit sind nach dem Hauptähnlichkeitssatz die beiden Dreiecke zueinander ähnlich.



8/4

Für die zweistellige Zahl z soll gelten

$2 \cdot (10a + b) < 10b + a < 3 \cdot (10a + b)$. Wegen $a + b = 9$, also $b = 9 - a$ erhalten wir durch Einsetzen

$2 \cdot (9a + 9) < 90 - 9a < 3 \cdot (9a + 9)$,

$2 \cdot 9 \cdot (a + 1) < 9 \cdot (10 - a) < 3 \cdot 9 \cdot (a + 1)$,

$2a + 2 < 10 - a < 3a + 3$, daraus folgt weiter $3a < 8$ und $4a > 7$, also $a \leq 2$ und $a \geq 2$.

Deshalb gilt $a = 2$ und somit $b=7$.

Die gesuchte Zahl lautet 27.

8/5

Aus der Flächengleichheit der Dreiecke Δ ABD und Δ ABC folgt

$A_2 + A_3 = A_2 + A_4$, also $A_3 = A_4$.

Ferner gilt $A_3 : A_1 = \overline{AS}:\overline{SC}$

und $A_2 : A_4 = \overline{AS}:\overline{SC}$, also $A_3 : A_1 = A_2 : A_4$,

$A_3 \cdot A_4 = A_1 \cdot A_2$, $A_3^2 = A_1 \cdot A_2$,

$$A_3 = \sqrt{A_1 \cdot A_2}.$$

8/6

Der Betrag der erforderlichen Zugkraft ist gleich dem Betrag der Reibungskraft.

$F_R = \mu \cdot F_N$. Da die Fallbeschleunigung auf dem Mond 0,165g beträgt, ist auf dem Mond eine Zugkraft F' von $3{,}5 \cdot 0{,}165$ N = 0,58 N erforderlich. (g Fallbeschleunigung auf der Erde.)

8/7

Der lineare Ausdehnungskoeffizient α für Stahl beträgt $17 \cdot 10^{-6}\,K^{-1}$. Für die Längenzunahme von festen Stoffen gilt: $\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta T$.

$\Delta l = 0{,}52$ km.

9/1

Darstellung der ersten Zahl:

$z_1 = 100a + 10b + c$,

Darstellung der zweiten Zahl:

$z_2 = 100c + 10b + a$.

Die Differenz beider Zahlen:

$z_1 - z_2 = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a$

$= 99\,a - 99\,c$

$= 99\,(a - c)$.

Genau die folgenden natürlichen Zahlen sind Teiler von $|z_1 - z_2|$:

(1) Alle natürlichen Teiler von 99, d. s. 1, 3, 9, 11, 33, 99,

(2) Alle natürlichen Teiler von $|a-c|$ und

(3) Alle Produkte aus je einer unter (1) genannten mit je einer unter (2) genannten Zahl.

9/2

$z_1 = 10 \cdot a + b$; $z_2 = 10 \cdot c + d$;

$z_1 \cdot z_2 = (10a + b)(10c + d)$

$= 100ac + 10ad + 10bd + bd$.

Die durch Vertauschung der Ziffern entstandenen Zahlen seien

$z_1^* = 10 \cdot b + a$; $z_2^* = 10 \cdot d + c$ und für deren Produkt gilt

$z_1^* \cdot z_2^* = (10b + a)(10d + c)$

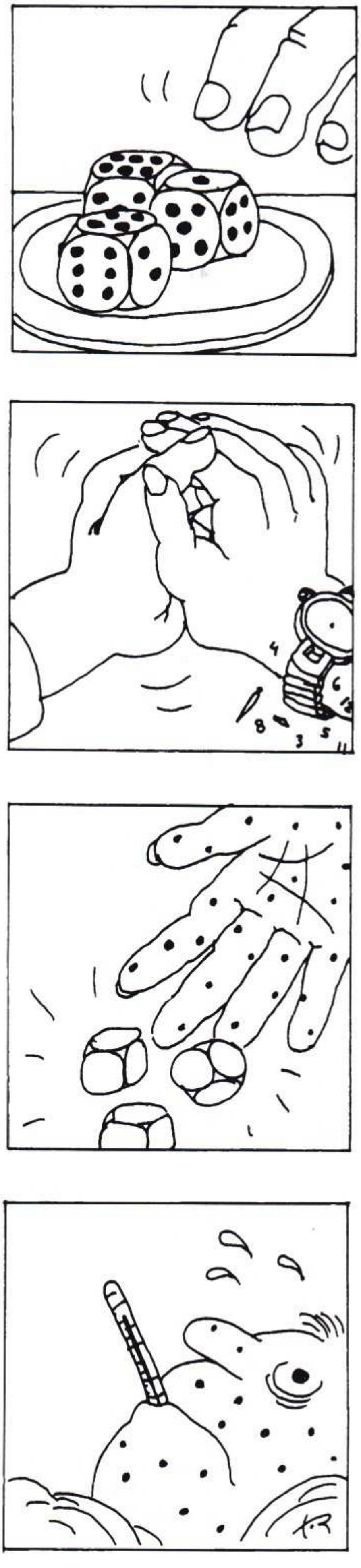
$= 100bd + 10bc + 10ad + ac$.

Setzt man beide Produkte gleich, so erhält man nach Vereinfachung $ac = bd$.

Beispiele dafür sind $36 \cdot 84 = 63 \cdot 48$ oder $32 \cdot 46 = 23 \cdot 64$.

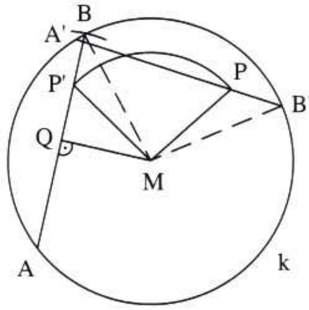
9/3

Wir schlagen um einen beliebigen Punkt A der Peripherie des Kreises k einen Kreis mit dem Radius von 6 cm Länge; er schneide k in B. Wir zeichnen um M einen Kreis k' mit dem Radius $\overline{MP}$, der $\overline{AB}$ in P' schneidet. Wir drehen die Gerade AB um M im mathematischen negativen Sinn um den Drehwinkel $\sphericalangle$ PMP'. Das Bild $\overline{A'B'}$ von $\overline{AB}$ ist die zu konstruierende Sehne. Die Konstruktion ist



aus: Funktio 3/87

nur ausführbar, wenn das Lot $\overline{MQ}$ auf $\overline{AB}$ gleich oder kürzer ist als $\overline{MP}$.



9/4

Das gleichseitige Dreieck habe die Seitenlänge a, das Quadrat die Seitenlänge x; für das rechtwinklige Dreieck ADG gilt dann nach dem Satz des Pythagoras

$$x^2 + \frac{1}{4} \cdot (a-x)^2 = (a-x)^2,$$

$$x^2 = \frac{3}{4} \cdot (a-x)^2,$$

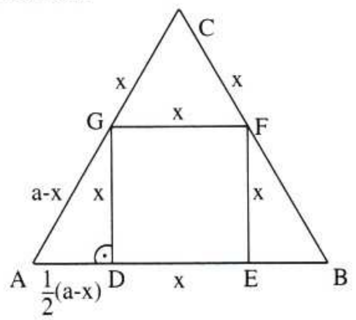
$$x^2 + 6ax - 3a^2 = 0,$$

$$x_1 = a \cdot \left(2 \cdot \sqrt{3} - 3\right).$$

(x_2 entfällt, da negativ).
Daraus folgt weiter

$$\frac{A_Q}{A_D} = \frac{\left(2 \cdot \sqrt{3} - 3\right)^2}{\frac{1}{4} \cdot \sqrt{3}} = 4 \cdot \left(7 \cdot \sqrt{3} - 12\right) \approx 0{,}4974.$$

Der Flächeninhalt des Quadrates macht etwa 50 % des Flächeninhaltes des gleichseitigen Dreiecks aus.



9/5

Es sei $A_{EFGH} = a^2$. Dann gilt

$$A_{EFI} = A_{HEJ} = \frac{1}{4} a^2 \quad \text{und} \quad A_{GJI} = \frac{1}{8} a^2.$$

Somit ist

$$A_{EIJ} = a^2 - \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{8} a^2; A_{EIJ} = \frac{3}{8} a^2.$$

Es gilt also $A_{EIJ} : A_{EFGH} = 3 : 8$.

9/6

Da sich bei parallel geschalteten Widerständen die Stromstärken umgekehrt wie die Widerstände verhalten, gilt:
$I_i : I_p = R_p : R_i$.
Mit I_p=297 mA und R_i=20 Ω ergibt sich R_p=0,202 Ω.

9/7

Die gesuchte Zeit t setzt sich aus der Laufzeit des Schalles und der Fallzeit zusammen. Der Fallweg h beträgt (152,3–12) m.
$t = h/c + \sqrt{(2h/g)}$. t = 5,8 s.

10/1

Die Quadratzahl b könnte gleich 0, 1, 4 oder 9 sein. Da $\overline{bca}$ eine dreistellige natürliche Zahl ist, entfällt b = 0. Die Zahlen $\overline{ac}$ könnten 16, 25, 36, 49, 64 oder 81 sein. Für $\overline{acb}$ wären dann die Zahlen 161, 164, 169, 251, 254, 259, 361, 364, 369, 491, 494, 499, 641, 644, 649, 811, 814, 819 möglich. Davon sind aber nur die Zahlen 169 und 361 Quadratzahlen. Nun müßte abc gleich 196 oder 316 sein. Davon ist nur 196 Quadratzahl. Die Zahl $\overline{bca}$ lautet deshalb 961 und ist ebenfalls Quadratzahl.
Es existiert somit genau eine Zahl, die die gestellten Bedingungen erfüllt; sie lautet 1969.

10/2

Wir formen äquivalent um:

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = m^2,$$

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha = m^2,$$

$$1 + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = m^2,$$

$$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = m^2 - 1,$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{m^2 - 1}{2}$$

10/3

$$\frac{\sqrt{8}}{b^2} \cdot a^{(a+a)} = \frac{\sqrt{2}}{50} \cdot a^{(3a)} \qquad \Big| \cdot \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$\frac{a^{(a+a)}}{b^2} = \frac{a^{(3a)}}{100} \qquad \Big| \cdot \frac{1}{a^{(2a)}}$$

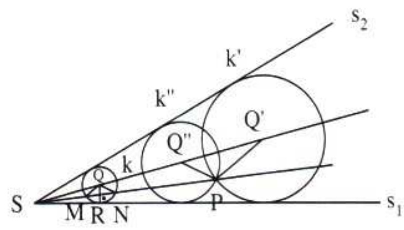
$$\frac{1}{b^2} = \frac{a^a}{100} \qquad \big| \cdot 100 b^2$$

$$100 = a^a \cdot b^2$$

Da a und b natürliche Zahlen sind, müssen sie Teiler von 100 sein. 100 = 2 · 2 · 5 · 5. Für b^2 kann 100 oder 25 in Frage kommen. Wenn b = 10 ist, dann folgt a = 1; wenn b = 5 ist, folgt a = 2. Die Gleichung hat zwei Lösungen (a; b), und zwar (1; 10) und (2; 5). Die Proben überlassen wir dem Leser.

10/4

Wir konstruieren die Halbierende des gegebenen Winkels, fällen von einem beliebigen Punkt Q dieser Halbierenden das Lot auf den Schenkel s_1, sein Fußpunkt sei R. Um Q zeichnen wir den Kreis mit dem Radius $\overline{QR}$, der beide Schenkel des gegebenen Winkels berührt. Wir zeichnen die Gerade SP; sie schneide den Kreis k in den Punkten M und N, und wir verbinden Q mit M und N.
Die Parallele zu $\overline{MC}$ bzw. zu $\overline{NQ}$ durch P schneide die Halbierende des gegebenen Winkels in Q' bzw. Q''. Auf Grund der vorgenommenen Ähnlichkeitsabbildung erfüllen die Kreise k' um Q' mit dem Radius $\overline{PQ'}$ und k'' um Q'' mit dem Radius $\overline{PQ''}$ die gestellten Bedingungen.



10/5

Es gilt $1900 < x^2$. Wegen $43^2 = 1849$ und $1849 < 1900 < x^2$ gilt $x \geq 44$.
Aus $x \cdot y + x = x^2$ folgt wegen $x \neq 0$ $y+1=x$, also $y = x - 1$.
Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:
$44 \cdot 43 + 44 = 1936$, Geburtsjahr $44 \cdot 43 = 1892$, entfällt; $45 \cdot 44 + 45 = 2025$, Geburtsjahr $45 \cdot 44 = 1980$, Lösung; $46 \cdot 45 + 46 = 2116$, Geburtsjahr $46 \cdot 45 = 2070$, entfällt.
Der Enkel von Herrn Meyer wurde im Jahre 1980 geboren.

10/6

Nach dem Energiesatz : $m \cdot v^2/2 = F \cdot 1$.
$F \approx 1$kN.

10/7

Aus $R_c = U/I = 1/2\pi \cdot f \cdot c$ folgt
$f = I/2\pi \cdot U \cdot C$. f = 50 Hz.

E 1

Es müssen mindestens 5 solcher Punkte für jeden Buchstaben festgelegt werden. Es handelt sich um Zusammenstellungen von zwei Elementen (weißer oder schwarzer Punkt) zu je 5 (zur fünften Klasse). Da weiß oder schwarz mehrfach auftreten, sind es Variationen mit Wiederholung.
$W_{v_2}^{(5)} = 2^5 = 32$ verschiedene Zeichen kann man auf diese Weise bilden.
Wenn die geringstmögliche Anzahl von Punkten gefordert ist und verschiedene Anzahlen für die einzelnen Buchstaben möglich sind, kommt man mit ein bis vier Punkten aus:
$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$.
Der Leser möge einmal systematisch alle Zeichen darstellen!

E 2

Nach Definition hat ein Parallelogramm zwei Paare zueinander paralleler Gegenseiten. Man muß also aus jeder der Parallelenscharen je zwei parallele Geraden auswählen, um ein Parallelogramm zu erzeugen.
Wählen wir zunächst aus 5 zueinander parallelen Geraden zwei aus. Es spielt sicher die Anordnung keine Rolle; auch Wiederholungen dürften nicht auftreten, denn es sind ja stets zwei verschiedene Geraden notwendig.
Es sind also Kombinationen von 5 Elementen zur 2. Klasse, und bei der zweiten Parallelenschar handelt es sich um Kombinationen von 7 Elementen zur 2. Klasse.

Da jedes Parallelenpaar aus der ersten Schar mit jedem Parallelenpaar aus der zweiten Schar ein Parallelogramm erzeugt, entstehen $K_5^{(2)} \cdot K_7^{(2)}$ Parallelogramme,

$$\text{d. s.} \binom{5}{2} \cdot \binom{7}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2}$$
$$= 10 \cdot 21$$
$$= 210 \text{ Parallelogramme.}$$

E 3

1. Quadrat: $a = 1 \cdot a^2 = 2^0\ cm^2$
2. Quadrat: $A = 2 \cdot a^2 = 2^1\ cm^2$
3. Quadrat: $A = 4 \cdot a^2 = 2^2\ cm^2$
4. Quadrat: $A = 8 \cdot a^2 = 2^3\ cm^2$

$\vdots$

n. Quadrat: $A = 2^{n-1} a^2 = 2^{n-1}\ cm^2$.

$1\ ha = 10\,000\ m^2 = 100\,000\,000\ cm^2 = 10^8\ cm^2$.
Das 28. Quadrat hat einen Flächeninhalt von $A=2^{27}\ cm^2 = 134\,217\,728\ cm^2$ und übertrifft als erstes die Fläche von einem Hektar.

E 4

Am günstigsten ist (4). Es sind Variationen von 100 Elementen zur 3. Klasse, wobei die Reihenfolge der ersten drei wichtig ist.

$$V_{100}^{(3)} = \binom{100}{3} \cdot 3! = 970200 \text{ Möglichkeiten.}$$

Es folgt (1). Das sind Kombinationen von 60 Elementen zur 8. Klasse.

$$K_{60}^{(8)} = \binom{60}{8} = 2558620845 \text{ Möglichkeiten.}$$

An 3. Stelle folgt (2). Hier handelt es sich um Variationen von 3 Elementen (gewonnen, verloren, unentschieden) zur 20. Klasse mit Wiederholung.

$$W_{V_3}^{(20)} = 3^{20} = 3486784401 \text{ Möglichkeiten.}$$

Am ungünstigsten ist (3). Da nach allen möglichen Reihenfolgen der 13 Springer gefragt ist, handelt es sich um Permutationen von 13 Elementen.

$P_{13} = 13! = 6\,227\,020\,800$ Möglichkeiten.

E 5

2 Geraden erzeugen höchstens $1 = \frac{2 \cdot 1}{2}$ Schnittpunkt,
3 Geraden erzeugen höchstens $3 = \frac{3 \cdot 2}{2}$ Schnittpunkte,
4 Geraden erzeugen höchstens $6 = \frac{4 \cdot 3}{2}$ Schnittpunkte,
5 Geraden erzeugen höchstens $10 = \frac{5 \cdot 4}{2}$ Schnittpunkte.

Daraus folgt die Vermutung:
n Geraden erzeugen höchstens $\frac{n(n-1)}{2}$ Schnittpunkte.

Die Vermutung ist für n=2 richtig, denn

$$\frac{2(2-1)}{2} = 1.$$

Aus der Richtigkeit der Vermutung für n=k folgt die Richtigkeit für n=k+1, denn

$$\frac{k(k-1)}{2} + k = \frac{k(k-1)+2k}{2} = \frac{(k+1)k}{2}.$$

Deshalb gilt die Vermutung für alle natürlichen Zahlen n. In einer Ebene haben also n Geraden höchstens $\frac{n(n-1)}{2}$ Schnittpunkte.

E 6

Nach der allgemeinen Gasgleichung $p \cdot V = m \cdot R \cdot T$ ergibt sich: $p_1 \cdot V_1 = m \cdot R \cdot T_1$ und $p_2 \cdot V_2 = m \cdot R \cdot T_2/2$. Daraus: $p_2 = p_2 \cdot T_2/2T_1$. Mit $T_1 = 300\ K$ und $T_2 = 285\ K$ erhält man gesuchten Druck $p_2 = 1{,}9\ MPa$.

E 7

Im Resonanzfall sind die Spannungen am Kondensator und an der Spule gleich groß, aber entgegengerichtet. Es ist dann nur der ohmsche Widerstand wirksam. $I = U/R$.
$I = 124\ V/12\ \Omega$. $I = 10{,}4\ A$.

Ein Nachtrag

Im Heft 1/92 hatte die Redaktion aus Platzmangel das zu dem Beitrag Historische mathematische Instrumente (Die Rechenmaschine von Johann Philipp Gruson, S. 30/31) gehörige Literaturverzeichnis gestrichen. Die beiden Autoren sind mit dieser drakonischen Maßnahme nicht einverstanden. Mit der Bitte um Entschuldigung holen wir damit an dieser Stelle die Veröffentlichung nach.

1. Allgemeine Deutsche Biographie. Zehnter Band. Berlin 1879, S. 65
(S. 30, 1. Spalte oben)

2. Brunow, E.: Eine Magdeburgische Erfindung. In: Patriotisches Archiv Nr. 11 vom 17. Dezember 1791, S. 178
(S. 30, 1. Spalte unten)

3. Gruson, J. P.: Beschreibung und Gebrauch einer neu erfundenen Rechenmaschine, Magdeburg 1791, S. 9
(S. 30, 2. Spalte)

4. Brunow, E.: Eine Magdeburgische Erfindung ..., S. 177
(S. 31, 1. Spalte)

5. Gruson, J. P.: Beschreibung und Gebrauch ..., o. S.
(S. 31, 1. Spalte)

6. Brunow, E.: Eine Magdeburgische Erfindung ..., S. 187
(S. 31, 3. Spalte)

Auf S. 30, 2. Spalte, 9. Zeile von oben muß es heißen: „... von Johann Philipp Gruson...“.

Mathematik am Billardtisch (3)

Welchen Weg muß eine Billardkugel rollen, um an den Ausgangspunkt zurückzukehren?

Nach dem Mittagessen hatte der Wind die Regenwolken vertrieben, und ich hatte mich mit meinem Skizzenblock auf die Terrasse zurückgezogen, um ein wenig zu zeichnen, während die meisten Schüler hinter dem Hause Fußball spielten.

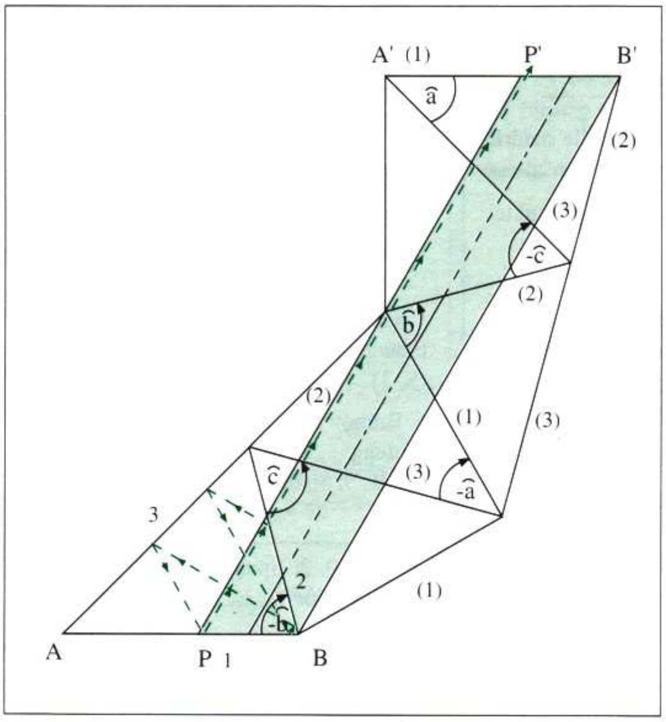


Abb. 1

Als ich einmal kurz hochschaute, bemerkte ich Hans am Nebentisch, der ganz vertieft in das Zeichnen von Dreiecken zu sein schien. "Das ist aber komisch", er schaute zu mir herüber und war offensichtlich brennend daran interessiert, das vormittägliche Gespräch über geschlossene Reflexionswege in Vierekken fortzusetzen, "erst wenn ich ein Dreieck an jeder Seite zweimal gespiegelt habe, liegt schließlich die Bildstrecke [A'B'] parallel zu [AB]; also kann es nach unserer bewährten Methode nur geschlossene Reflexionswege mit **zweifachem** Umlauf geben !?" (s. **Abb. 1**) – "In der Tat ergibt sich aus Deiner Zeichnung, mit den Überlegungen, die uns Eberhard heute vormittag zum Viereck vorgeführt hat, sofort $\sphericalangle$ ([AB], [A'B']) = $-\widehat{b}+\widehat{c}-\widehat{a}+\widehat{b}-\widehat{c}+\widehat{a}=0°$, und wenn wir zwischen allen Ecken 'durchkommen' wie im vorliegenden Fall, dann haben wir unendlich viele, gleichlange Reflexionswege mit zweifachem Umlauf." – Während ich solcherart laut dachte, war auf meinem Skizzenblock das folgende Bild entstanden (**Abb. 2**).

Inzwischen hatte sich unser Algebraiker Klaus auch wieder eingefunden. "Das Gleichungssystem, welches uns Lösbarkeit und Lösung bei Vierecken angezeigt hatte, läßt sich für das Dreieck ganz genauso aufstellen! (**Abb. 3**) Ihr seht die Beziehungen $\widehat{a}+90°-\alpha+90°-\beta=180°$, also
$\widehat{a}=\alpha+\beta$
und ganz analog
$\widehat{b}=\beta+\gamma$
und
$\widehat{c}=\alpha+\gamma$.
Auch die Auflösung funktioniert ganz leicht, denn wir bekommen $\widehat{c}+\widehat{a}-\widehat{b}=2\alpha$, $\widehat{a}+\widehat{b}-\widehat{c}=2\beta$, $\widehat{b}+\widehat{c}-\widehat{a}=2\gamma$, wenn wir die entsprechenden Gleichungen zusammenfassen.
Die bekannte Winkelsumme $\widehat{a}+\widehat{b}+\widehat{c}=180°$ im Dreieck verhilft uns nun aber zu einer einzigen Lösung unseres Gleichungssystems, nämlich $2\alpha=180°-2\widehat{b}$, also $\alpha=90°-\widehat{b}$, $\beta=90°-\widehat{c}$ und $\gamma=90°-\widehat{a}$. (*) Das zeigt uns aber doch, daß es **genau eine Lösung mit einem Umlauf** geben muß, wenn das Dreieck spitzwinklig war. Ein stumpfwinkliges Dreieck läßt dagegen keine solche Lösung zu, weil nur positive Werte für α, β und γ den gemachten Voraussetzungen entsprechen."
Mit solchen Schülern machte es ungeheuren Spaß; dieses Dreigestirn in einer Klasse zu haben war schon ein einzigartiger Glücksfall für einen Lehrer!
"Dann habe ich auch die geometrische Charakterisierung dieser einzigen Lösung!" – Jetzt hatte Hans das Blatt bereits aufgenommen und präsentierte seine Lösung: Er hatte einfach die Ergebnisse (*) von Klaus eingezeichnet und fuhr nun fort(**Abb. 4**)."Die Winkelhalbierenden in ΔDEF müssen demnach jeweils durch die Gegenecke des Grunddreiecks ΔABC hindurchgehen. Sie sind die Höhen dieses Dreiecks! 'Das Höhenfußpunktdreieck eines spitzwinkligen Dreiecks ist einfach geschlossener Reflexionsweg. Es gibt keinen weiteren Weg mit dieser Eigenschaft.' – Hough! Ich habe gesprochen!" ...
"Habt Ihr Penner eigentlich die Frage von Klaus von heute vormittag ..." – da zeigte es sich, daß unser Genie Eberhard auch nicht beim Fußball war! Nein, er legte einen Zettel vor uns hin und setzte seine Erklärung fort:
"... ernst genommen? Seht her! Für das Dreieck lautet sein Gleichungssystem ..." -
"So schlau waren wir selbst auch schon, sieh her!" -
"... Na gut. Für das Viereck sah es ganz ähnlich aus, und man kann es für ein n-Eck mit den Winkeln $\widehat{a}_1, \widehat{a}_2, \ldots, \widehat{a}_n$ ganz genauso aufschreiben, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ wie immer die 'Reflexionswinkel' sein sollen:
$\widehat{a}_1=\alpha_1+\alpha_2$
$\widehat{a}_2=\alpha_2+\alpha_3$
...
$\widehat{a}_{n-1}=\alpha_{n-1}+\alpha_n$
$\widehat{a}_n=\alpha_1+\alpha_n$.
Ich habe nun versucht, dieses System durch 'Aufrollen von hinten her' – aufzulösen, und dabei ist mir klar geworden, daß zwischen den Vielecken mit einer **geraden Eckenzahl** (n=2, 4, 6, ... 2k) und denen **ungerader Anzahl** (n=3, 5, 7, ... 2k+1) ein grundlegender Unterschied bestehen muß."
Gespannt verfolgten wir seine Erläuterungen, denen Hans und Klaus nur mit sichtlicher Mühe folgen konnten. Auf diesen Unterschied waren wir selbst ja im Spezialfall n = 3 schon gestoßen.
"Mit allgemeinem n schreibt sich das alles etwas umständlich, und deshalb rechne ich es Euch nur für n = 5 und n = 6 vor. Addiert und subtrahiert die entsprechenden Gleichungen,

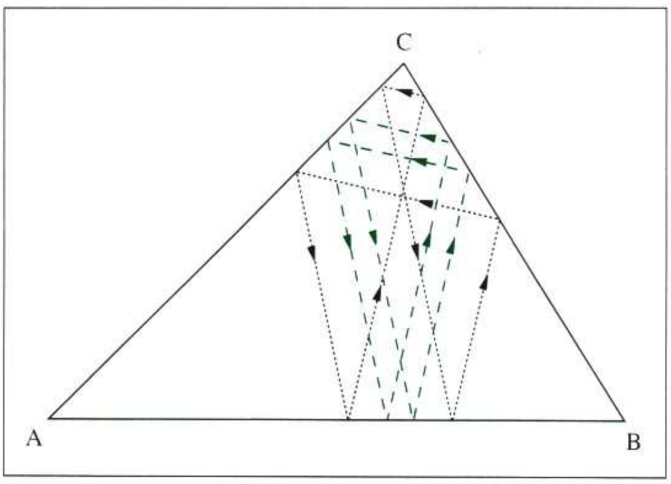


Abb. 2

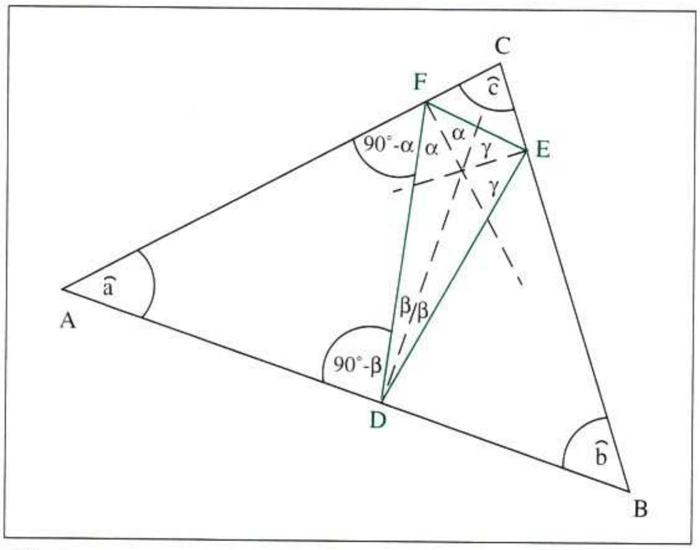


Abb. 3

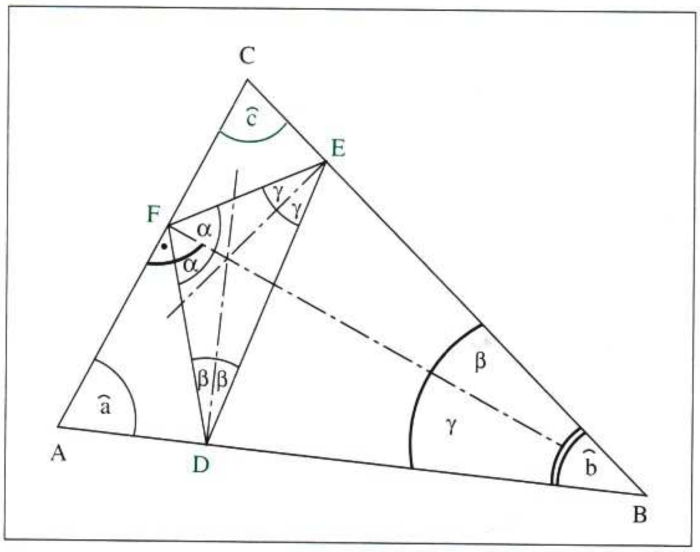


Abb. 4

dann bekommt Ihr für n = 5 die eindeutige Auflösung: $\widehat{a}_5-\widehat{a}_1+\widehat{a}_2-\widehat{a}_3+\widehat{a}_4=2\alpha_5$,

$$\widehat{a}_4-\alpha_5=\alpha_4,$$
$$\widehat{a}_3-\alpha_4=\alpha_3,$$
$$\widehat{a}_2-\alpha_3=\alpha_2,$$
$$\widehat{a}_1-\alpha_2=\alpha_1,$$

die allerdings nur dann geometrisch sinnvoll ist, wenn die berechneten Zahlen für α_k zwischen Null und 90° liegen!"

Das leuchtete allen ein, es erinnerte uns ja auch an unsere Rechnung beim Dreieck.

"Na, toll", das war Klaus, "ich hab' dasselbe für n = 6 versucht, und was finde ich?

$$\widehat{a}_6-\widehat{a}_1+\widehat{a}_2-\widehat{a}_3+\widehat{a}_4-\widehat{a}_5$$
$$=\alpha_1+\alpha_6-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_3-\alpha_4+\alpha_4+\alpha_5-\alpha_5-\alpha_6$$
$$=0°$$

Wenn die gegebenen Winkel diese Bedingung also **nicht** erfüllen, dann kann es überhaupt keine Lösung geben. Voraussetzung ist also, daß es ein **Sehnensechseck** ist:

$\widehat{a}_6+\widehat{a}_4+\widehat{a}_2=\widehat{a}_5+\widehat{a}_3+\widehat{a}_1=360°$".

"Ja, und wenn das so ist, dann fällt diese Gleichung weg, wir haben nur 5 Gleichungen für die 6 Unbekannten und damit entweder keine oder unendlich viele Lösungen", schloß Eberhard die Überlegungen ab.

Ich konnte nur staunen, wie er das alles herausbekommen hatte. Seine Kameraden hatten wohl doch nicht diesen Durchblick, aber sie glaubten ihm das, was geometrisch denkbar blieb.

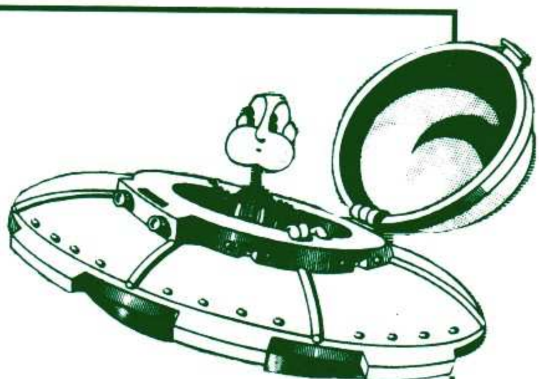
Glaubt Ihr es auch? – Arbeitet doch noch etwas weiter! Es gibt noch so viel zu denken und zu klären.

Wie lang ist der Weg mit doppeltem Umlauf im Falle ungerader Eckenzahl? Läßt sich der einzige Reflexionsweg mit einfachem Umlauf ähnlich wie im Dreieck geometrisch charakterisieren? Wenn im Falle des 2k-Ecks unendlich viele Lösungen vorhanden sind, so handelt es sich wieder um 2k-Ecke, und alle haben den gleichen Umfang (wie groß?)! Welche Lösung unter ihnen hat dann den größten Flächeninhalt?

Kann man ähnlich wie beim Dreieck die geometrischen Lösbarkeitsbedingungen angeben? Schreibt mir doch, wenn Ihr etwas herausbekommen habt. Ich möchte gern mit Euch weiterdiskutieren!

Dr. habil. Reinhard Hofmann
Gymnasiallehrer für Mathematik
Mitglied des Redaktionskollegiums der alpha

Utopische Knobeleien



Die folgenden Aufgaben wurden in Vorbereitung auf die Olympiade des Mathematikspezialistenlagers des Kreises Gotha 1989 gelöst. Elf Tage knobelten 30 Schüler der Klassenstufen 5-7 vormittags an mathematischen Problemen, die Nachmittage standen den Freizeitvergnügungen und zahlreichen Ausflügen zur Verfügung.

1. Auf einem Planeten nahe des schwarzen Lochs BH 13/4 in der Nähe des Toliman trafen sich vier Raumschiffe von den Planeten Bruton, Casson, Dora und der Erde, deren Kosmonauten Raumanzüge in den Farben rot, orange, grün und blau anhatten. Über sie ist folgendes bekannt:

(1) Die Kosmonauten von Casson und Erde sowie Rot und Grün kennen sich.
(2) Die Brutonier und Doraner können sich verständigen, ebenfalls Orange und Blau.
(3) Die Cassonarier sind größer als die Brutonier und die Menschen.
(4) Die Orangen sind größer als die Roten bzw. Grünen.
(5) Aus diesen Angaben läßt sich nicht ermitteln, wer der zweitgrößte ist.
(6) Die Brutonier sind grün.

Ordne den Raumanzügen der Kosmonauten die richtigen Farben zu!

2. Während einer Planetenerkundung wechseln sich die Raumfahrer jede Stunde in der Führung ab. Sie laufen bis zum Ziel in jeder möglichen Reihenfolge.
Wie lange sind sie unterwegs?

3. Sie verabreden sich regelmäßig zu treffen. Der Brutonier kann alle zwei Planetenumläufe, der Cassonarier alle drei Planetenumläufe, der Doraner alle fünf Planetenumläufe und der Mensch alle sieben Planetenumläufe kommen.
Wann treffen sich alle wieder?

Mitgeteilt von der Teilnehmerin Ina Rüdiger und dem Organisator Volker Pöschel

Faszination Go

Vor dem Vertiefen in dieses Spiel möchten wir ausdrücklich warnen, denn folgende chinesische Legende ist im Zusammenhang mit ihm überliefert!

Es lebte einmal ein Holzfäller, der auf dem Nachhauseweg vom Berg zwei alte Männer auf einem Felsen sah, welche Go spielten. Er schaute ihrem geistvollen Spiel mit begierigem Interesse zu, ganz in Bewunderung vertieft, fasziniert und alles um sich her völlig vergessend. Nachdem die Partie beendet war, verschwanden die beiden Alten, die in Wirklichkeit Götter waren. Der Holzfäller erwachte wie aus einem wunderschönen Traum. Seine Haare waren schlohweiß geworden und seine Axt, die neben ihm lag, war vermodert. Als er in das Dorf zurück kam, gab es niemanden mehr, der ihn noch gekannt hätte.

Das Go-Spiel, von einem klugen Chinesen vor etwa 4 000 Jahren ersonnen, von den Japanern übernommen und bis zur heutigen Form weiterentwickelt, begeistert immer mehr Menschen.

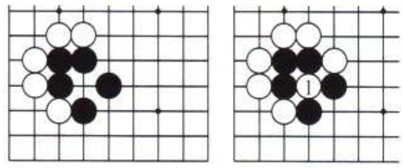
Ihr könnt Go in einer halben Stunde erlernen, aber ein Menschenleben ist zu kurz, um es wirklich meisterhaft zu beherrschen.

Go wird gespielt von zwei Spielern mit 181 schwarzen und 180 weißen Steinen auf den 361 Kreuzungspunkten eines Netzes von 19x19 sich rechtwinklig kreuzenden Linien. Für Anfänger sind kleinere Spielfelder (13x13 oder 9x9) günstiger. Die Spieler setzen abwechselnd ihre Steine auf freie Punkte des Netzes, wobei Schwarz beginnt. Jeder Spieler darf nach Belieben aussetzen, was erst in der Endspielphase sinnvoll ist. Nach dem Setzen wird kein Stein mehr bewegt. Vom Gegner vollständig umschlossene Steine werden im Augenblick ihrer Umschließung vom Brett entfernt und als Gefangene aufbewahrt.

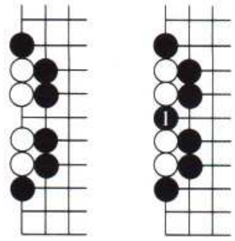
Die Partie ist beendet, wenn die Spielfläche vollständig unter den Spielern aufgeteilt ist, d. h. wenn es keinem Spieler mehr möglich ist, sein Gebiet zu vergrößern oder gegnerische Steine zu fangen.

Die Größe eines Gebietes entspricht der Anzahl der freien Punkte, welche von schwarzen oder weißen Steinen umschlossen sind. Bei der Abrechnung werden den Gebietspunkte und gefangene Steine beider Spieler miteinander verglichen. Der Sieger verfügt über die größere Anzahl dieser Punkte.

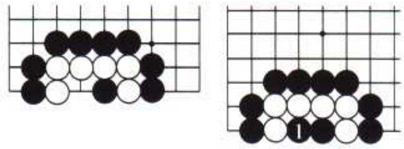
Fangt doch einfach einmal mit einem selbstgefertigten 9x9 Feld an. Dann sucht Ihr Euch einen geeigneten Ersatz für die 41 schwarzen und 40 weißen Spielsteine. Vielleicht findet Ihr im Hobbyladen um die Ecke etwas Passendes! Wir stellen Euch hier die Regeln und einige Kniffe vor.



Beispiel 1) und Lösung



Beispiel 2) und Lösung



Beispiel 3) und Lösung

Abb. 1

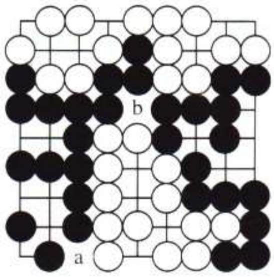


Abb. 2

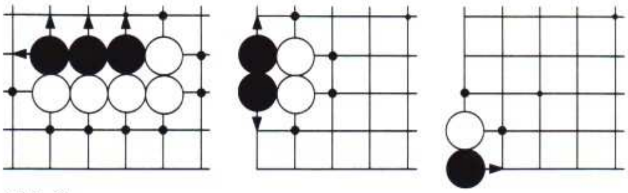


Abb. 3 a-c

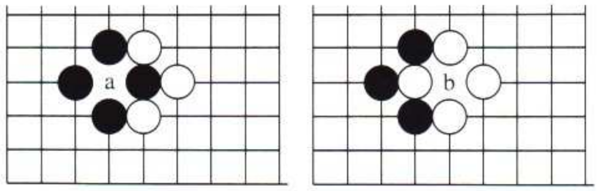


Abb. 4

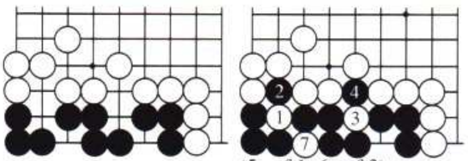


Abb. 5 mit Lösung (5 auf 1, 6 auf 3)

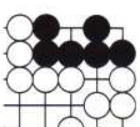


Abb. 6

Wenn Euch das Spiel Freude macht, dann solltet Ihr Euch ein richtiges Go-Spiel anschaffen, zum Beispiel von Ravensburger.

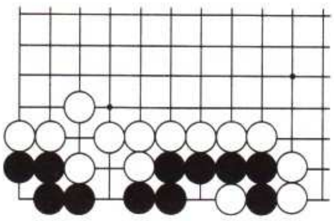
Ein weiterführendes Büchlein empfehlen wir in unserer Marktecke. **Abb. 1** zeigt eine Go-Partie auf einem 9x9 Feld. Die schwarzen und weißen Steine werden durch entsprechende Kreise auf einem Go-Brett dargestellt. Die Satzfolge wird mit 1 beginnend in der Reihenfolge des Setzens fortlaufend numeriert. Es ist auch möglich eine Go-Partie wie eine Schachpartie aufzuschreiben. Diese Partie gewinnt Schwarz mit 6 Punkten. Im folgenden Beispiel (**Abb. 2**) verfügt schwarz über 11 Gebietspunkte und weiß ebenfalls. Somit endet die Partie remis, was im Go sehr selten ist. Die unbesetzten Punkte a und b sind von keinem der Spieler vollständig umschlossen. Solche Punkte nennt man neutrale Punkte. Sie beeinflussen das Spielergebnis nicht und werden keinem von beiden angerechnet(**Abb. 2**). Wenn man einen Go-Spieler nach dem Sinn des Go-Spieles fragt, erhält man nicht selten die Antwort, daß es sich um einen Kampf um Leben und Tod handelt.. Eine Gruppe von Steinen lebt, wenn sie nicht mehr gefangen werden kann. Nimmt ein Satz einer Gruppe von Steinen gleicher Farbe die letzte Freiheit, werden diese Steine vom Brett entfernt und als Gefangene aufbewahrt. Jeder freie Punkt, der durch eine Brettlinie mit einem Stein oder einer Gruppe von Steinen verbunden ist, heißt Freiheit. In Bild 3 werden die Freiheiten der schwarzen Steine durch einen Pfeil und die der weißen Steine durch einen Punkt markiert. Wieviel Freiheiten haben Schwarz und Weiß in den Beispielen 3a – 3c?

Ein Stein darf nicht so gesetzt werden, daß er keine Freiheit mehr hat, wenn er nicht gegnerische Steine fängt. Dazu einige Beispiele.

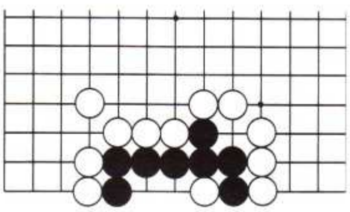
Beispiel 1)
Weiß am Satz fängt 3 schwarze Steine
Beispiel 2)
Schwarz am Satz fängt 4 weiße Steine
Beispiel 3)
Schwarz am Satz fängt 6 weiße Steine

In **Abb. 4** wird deutlich, daß Satzwiederholungen möglich sind. Diese Situation wird Ko genannt. Um solche Satzwiederholungen zu vermeiden, verbietet die Ko-Regel das sofortige Zurücknehmen.
Wie wichtig ein solches Ko sein kann, zeigt folgendes Beispiel (**Abb. 5**).
Weiß soll eine Folge von Sätzen finden, die es ihm unter Anwendung der Ko-Regel erlaubt, die schwarzen Steine zu fangen.
Eine Gruppe von Steinen lebt, wenn sie mindestens zwei Augen besitzt. Als Auge wird ein vollständig umschlossener Gebietspunkt bezeichnet. Dazu wieder ein kleines Beispiel (**Abb. 6**).

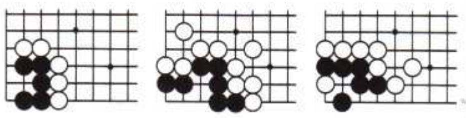
Zum Schluß noch einige kleine Go-Aufgaben.
1) Weiß ist am Satz:
Hier hat Weiß die Möglichkeit, ein Ko zu beginnen und damit die Schwarzen Steine zu fangen.



2) Wie kann Schwarz in einem Satz eine lebende Stellung bilden?



3) In den folgenden Stellungen ist Weiß am Satz und kann die schwarzen Steine töten.



Claudia Erdmann
Studentin der Mathematik an der Universität Leipzig

In unserer Marktecke findet Ihr zwei Tips zu Go.

Wenn Zentimeter über Hop oder Top entscheiden

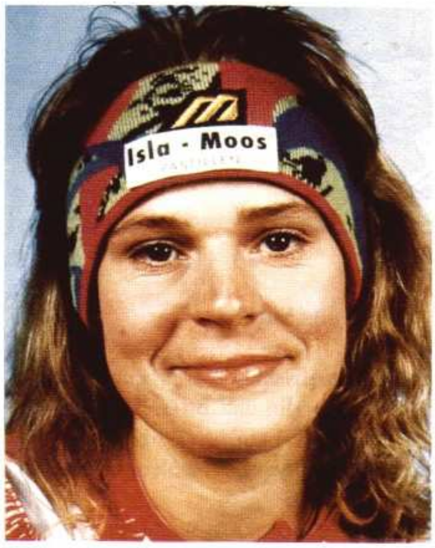
Zeitmessung und Abstände – Rückblick auf die Winterolympiade 1992

"Wasmeier um 15 Hundertstelsekunden an Bronze vorbei" oder "Silber ist nur Silber – dem Viererbob-Piloten Hoppe fehlten nur 2 Hundertstelsekunden zum Gold" so lauteten Überschriften von Tageszeitungen während der Olympiade in Albertville.
Die Angabe in Hundertstelsekunden ist nur schwer vorstellbar: die Belichtungszeit bei Fotoapparaten kann auf 1/100 Sekunde eingestellt werden, der sprichwörtlich kurzzeitige Wimpernschlag dauert etwa eine Zehntelsekunde. Da ist die Umrechnung von Zeitabständen in Längenabstände viel anschaulicher und "handfester": ein Fingernagel ist etwa einen halben Millimeter dick, ein Finger etwa einen Zentimeter, die Hand ist ungefähr zehn Zentimeter breit, die Länge der Handspanne beträgt ungefähr 20 Zentimeter. Der ausgestreckte Arm ist etwa 70 cm lang, der Abstand zwischen den Fingerspitzen der ausgestreckten Arme beträgt ungefähr 1,80 m. "Körpereigene" Maße sind also viel anschaulicher als Zeitmaße.
So sollen in den folgenden Aufgaben die Zeitabstände in Längenabstände umgerechnet werden. In den Aufgaben sind die benötigte Zeit und die Streckenlänge angegeben. Stillschweigend gehen wir davon aus, daß die Geschwindigkeit kurz vor Erreichen des Zieles konstant und auch etwa ebenso hoch wie die Durchschnittsgeschwindigkeit ist. Messungen auf den letzten Metern haben ergeben, daß diese Annahme statthaft ist, wenn kein außergewöhnlicher Endspurt oder ein eklatantes Nachlassen vorliegt.

Aufgaben:

1. Beim Rodeln (Einsitzer Herren) gewann Georg Hackl in 3 Minuten 2,363 Sekunden die Goldmedaille, Markus Prock in 3 Minuten 2,669 Sekunden die Silbermedaille und Marcus Schmidt in 3 Minuten 2,942 Sekunden die Bronzemedaille. "Diesmal", lobte Markus Prock, der im zweiten Lauf durch eine gebrochene Kufenaufhängung behindert wurde, aber dies nicht als Grund seiner Niederlage anführte, "diesmal war er uns allen um eine Schlittenlänge voraus."
War es wirklich nur "eine Schlittenlänge" Vorsprung, die der Hackl-Schorsch in den vier Läufen in dem 1500 m langen Eiskanal herausfuhr?

2. Im Viererbob war die Entscheidung noch knapper: nur zwei Hundertstelsekunden



Gunda Niemann Foto: Team Kommunikation

trennten die beiden besten Bobs: Österreich I benötigte 3:53,90 Minuten, Deutschland I 3:53,92 Minuten. Welchem Rückstand entspricht das (die vier Läufe wurden auf der Strecke der Rennschlittensportler ausgetragen).

3. Im Abfahrtslauf der Herren ergaben sich auf der 3048 m langen Strecke folgende Zeiten: 1. Patrick Ortlieb 1:50,37 Minuten, 2. Franck Piccard 1:50,42 Minuten, 3. Günther Mader 1:50,47 Minuten, 4. Markus Wasmeier 1:50,62 Minuten. Welchen Rückstand hatte Markus Wasmeier auf die Bronzemedaille?

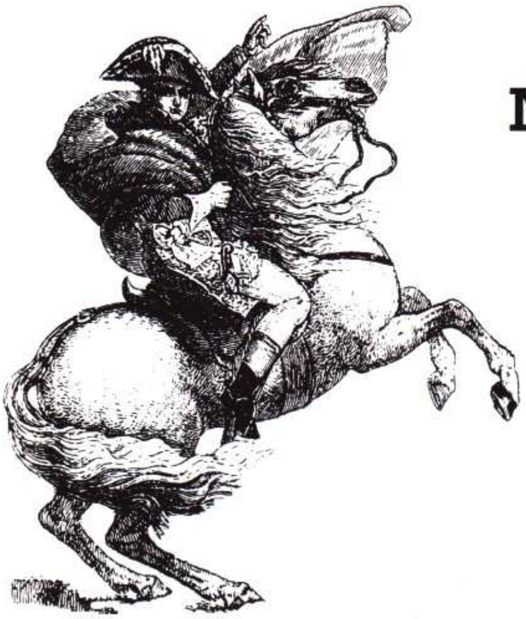
4. Berechne jeweils den Rückstand in cm auf die Siegerin im 5000 m-Eisschnellauf der Damen:

1. Gunda Niemann	7:37,51 Minuten
2. Heike Warnicke	7:37,59 Minuten
3. Claudia Pechstein	7:39,80 Minuten
4. Carla Zijlstra	7:41,10 Minuten

Jürgen Ricke, Redakteur der Zeitschrift mathematik lehren

Bitte um Mitarbeit

Die Olympischen Sommerspiele sind nicht mehr weit. Aus diesem Anlaß suchen wir Aufgaben zum Thema "Mathematik und Sport". Bitte schickt Eure Ideen an den Erhard Friedrich Verlag, Im Brande 15, W-3016 Seelze 6, Herrn Jürgen Ricke, Redaktion "mathematik lehren".



Napoleons Satz

1. Napoleons Satz

Im "Mathematischen Wörterbuch" (Akademie-Verlag Berlin und B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1961) findet man unter dem Stichwort "Napoleons Satz" folgende Auskunft:

"Die Mitten der über den Seiten eines beliebigen Dreiecks (nach außen oder nach innen) konstruierten gleichseitigen Dreiecke sind die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks."

Hier soll nun ein einfacher trigonometrischer Beweis für diesen Satz vorgestellt werden für den Fall der nach außen konstruierten gleichseitigen Dreiecke. Der andere Fall wird dem Leser überlassen. In Abschnitt 3 wird für Schüler, die noch keine Trigonometrie kennengelernt haben, ein Spezialfall diskutiert, der durchaus nicht trivial ist, wenn er unabhängig von Napoleons Satz behandelt wird. Diese Leser können Abschnitt 2 überspringen.

2. Trigonometrischer Beweis

Wir wollen den Fall der nach außen geklappten gleichseitigen Dreiecke betrachten (**Abb. 1a**).

In der Formulierung des Satzes erscheint der Begriff "Mitte eines gleichseitigen Dreiecks". Damit ist der Mittelpunkt des Umkreises, des Inkreises, des Schwerpunktes und des Höhenschnittpunktes gemeint, denn alle diese Punkte fallen im gleichseitigen Dreieck zusammen. Die Dreiecke $\Delta A'CB$, $\Delta B'AC$ und $\Delta C'BA$ sind nach Konstruktion gleichseitig. Ihre Mitten werden mit M_a, M_b und M_c bezeichnet.

Die Höhe h im gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a ist $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, der größere Höhenabschnitt ist $\frac{a}{3}\sqrt{3}$, der kleinere $\frac{a}{6}\sqrt{3}$, ihr Verhältnis 2:1.

Daher ist $\overline{M_aC} = \overline{M_aB} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$.

$\sphericalangle M_aCB = \sphericalangle M_aBC = 30°$,

weil Höhe und Winkelhalbierende im gleichseitigen Dreieck zusammenfallen.

Mit diesen Größen können wir nun nach dem Cosinussatz im Dreieck ΔM_aCM_b schreiben:

$$\overline{M_aM_b}^2 = \overline{M_aC}^2 + \overline{M_bC}^2 - 2\overline{M_aC}\,\overline{M_bC}\cos(\gamma + 60°)$$

$$= \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma + 60°)\right)$$

und analog ergibt sich für das Dreieck ΔM_aBM_c

$$\overline{M_aM_c}^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta + 60°)\right)$$

Die Differenz dieser Quadrate soll mit D bezeichnet werden:

$$D = \overline{M_aM_b}^2 - \overline{M_aM_c}^2 = \frac{1}{3}\left(b^2 - c^2 - 2ab\cos(\gamma + 60°) + 2ac\cos(\beta + 60°)\right)$$

Nach dem Additionstheorem der Cosinusfunktion

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

und unter Berücksichtigung von

$\cos 60° = \frac{1}{2}$ und $\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

ist

$\cos(x + 60°) = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin x$

Damit erhalten wir für D:

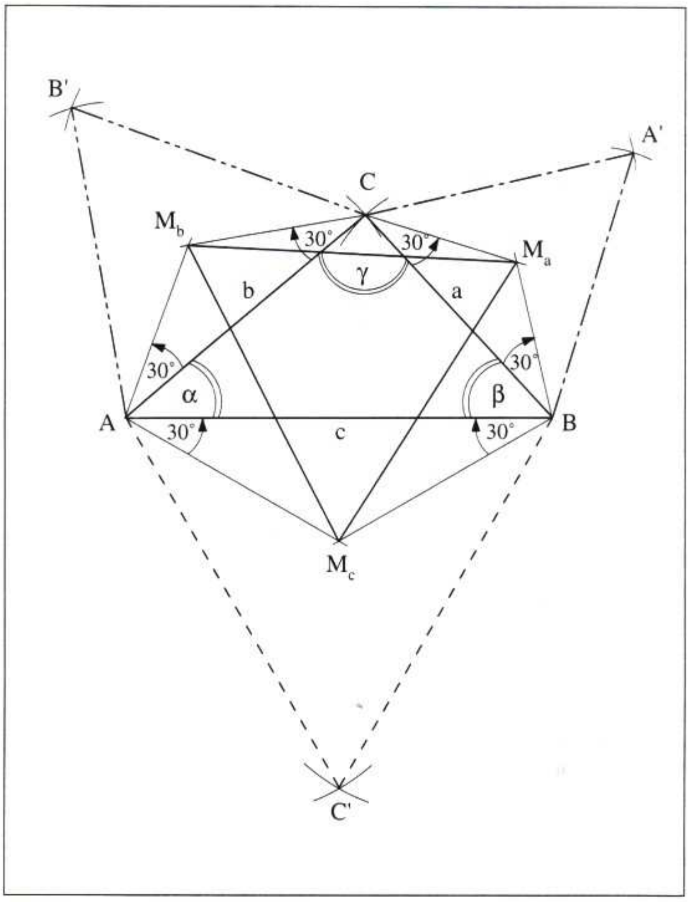


Abb. 1a

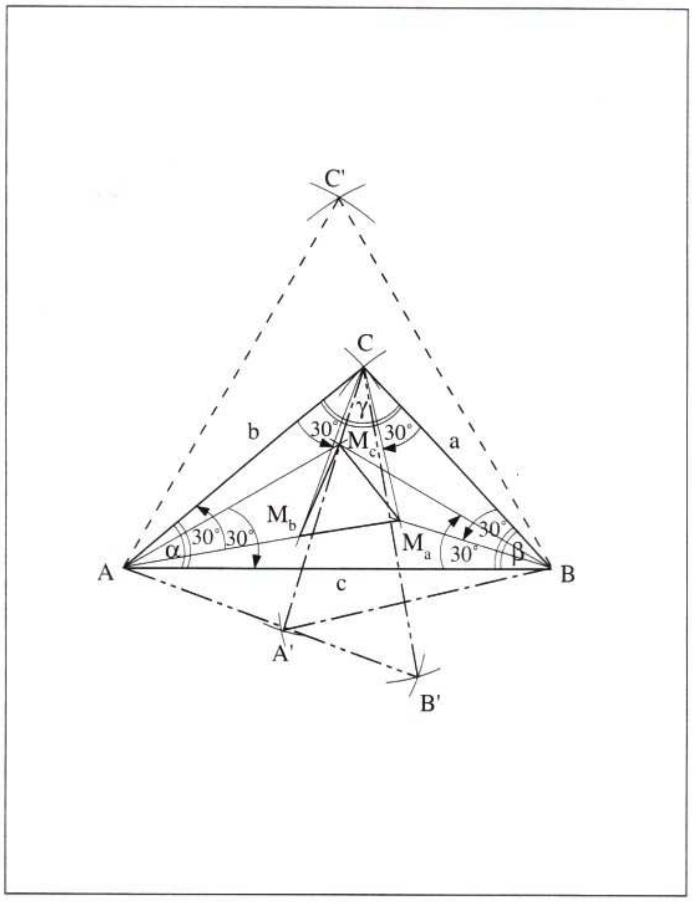


Abb. 1b

$$D=\frac{1}{3}\Big(b^2-c^2-ab\cos\gamma+ab\sqrt{3}\sin\gamma$$
$$+ac\cos\beta-ac\sqrt{3}\sin\beta\Big)$$

Nun denken wir an die trigonometrische Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC

$$F=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}ac\sin\beta$$

und an den Projektionssatz
$a=b\cos\gamma+c\cos\beta$.
Aus letzterem folgt z. B.
$ac\cos\beta=a^2-ab\cos\gamma$.
Daher erhalten wir

$$D=\frac{1}{3}\Big(b^2-c^2+a^2-2ab\cos\gamma\Big)$$ und dieser

Ausdruck ist gleich Null nach dem Cosinussatz für ΔABC, also ist $\overline{M_aM_b}=\overline{M_aM_c}$. Analog zeigt man $\overline{M_aM_b}=\overline{M_bM_c}$. Damit ist Napoleons Satz für den Fall der nach außen konstruierten gleichseitigen Dreiecke bewiesen.

Abb. 1b zeigt den Fall der nach innen konstruierten gleichseitigen Dreiecke.

Der Beweis verläuft analog und wird dem Leser überlassen, obwohl die Konstruktion für diesen 2. Fall höhere Ansprüche an das Vorstellungsvermögen stellt als der 1. Fall, da sich jetzt die gleichseitigen Dreiecke überlappen. Wer hier Schwierigkeiten hat, dem empfehle ich ein Klappmodell anzufertigen, bei dem die Mitten der drei gleichseitigen Dreiecke auf beiden Flächenseiten markiert werden.

Weiter beachte man, daß $\sphericalangle M_cAM_b=60°-\alpha$ oder $\alpha-60°$ ist usw. zyklisch, je nach Größe der Winkel. Das hat aber auf den Cosinuswert dieses Winkels natürlich keinen Einfluß, weil $\cos x=\cos(-x)$ ist.

3. Ein Spezialfall

Die Strecke $\overline{AB}$ werde im Innern geteilt durch einen beliebigen Punkt C. Wir errichten über $\overline{AB}$ ein gleichseitiges Dreieck $\Delta ABC'$. Dann konstruieren wir zwei gleichseitige Dreiecke, eines über $\overline{AC}$, das andere über $\overline{CB}$, deren Eckpunkte A', B' bezüglich $\overline{AB}$ auf der anderen Seite wie C' liegen.

Behauptung: Die Mitten dieser drei gleichseitigen Dreiecke bilden ein gleichseitiges Dreieck.

Wer Abschnitt 2 gelesen hat, erkennt in der Strecke $\overline{AB}$ ein entartetes Dreieck ΔABC mit $\overline{AC}=b$, $\overline{CB}=a$, $\overline{AB}=c=a+b$, $\alpha=\beta=0°$, $\gamma=180°$ und kann Napoleons Satz auf diesen Spezialfall anwenden.

Wir wollen dagegen den Spezialfall ohne Trigonometrie, nur mit Hilfe der Koordinatengeometrie beweisen. Dazu führen wir ein kartesisches Koordinatensystem ein (**Abb. 2**).

Die gleichseitigen Dreiecke sind: $\Delta A'CB$, $\Delta B'AC$, $\Delta C'BA$. Die Mitten sind die Höhenschnittpunkte. Die Höhenabschnitte eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge a sind:

$\frac{a}{6}\sqrt{3}$ und $\frac{a}{3}\sqrt{3}$, zusammen $\frac{a}{2}\sqrt{3}$.

Das Koordinatensystem wurde so gewählt, daß die Koordinaten der Eckpunkte sind:
$A=(0,0)$, $B=(a+b,0)$,
$C=(b,0)$

$$A'=\left(b+\frac{a}{2},\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$B'=\left(\frac{b}{2},\frac{b}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$C'=\left(\frac{a+b}{2},-\frac{a+b}{2}\sqrt{3}\right)$$

Die Mitten der gleichseitigen Dreiecke haben die Koordinaten:

$$M_a=\left(b+\frac{a}{2},\frac{a}{6}\sqrt{3}\right),$$

$$M_b=\left(\frac{b}{2},\frac{b}{6}\sqrt{3}\right),$$

$$M_c=\left(\frac{a+b}{2},-\frac{a+b}{6}\sqrt{3}\right)$$

Der Abstand d zweier Punkte mit den kartesischen Koordinaten $P_1=(x_1,y_1)$ und $P_2=(x_2,y_2)$ ist bekanntlich

$$d=\overline{P_1P_2}=$$
$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Damit findet man

$$\overline{M_aM_b}=\overline{M_aM_c}=\overline{M_bM_c}=\sqrt{\frac{1}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)}$$

q. e. d.

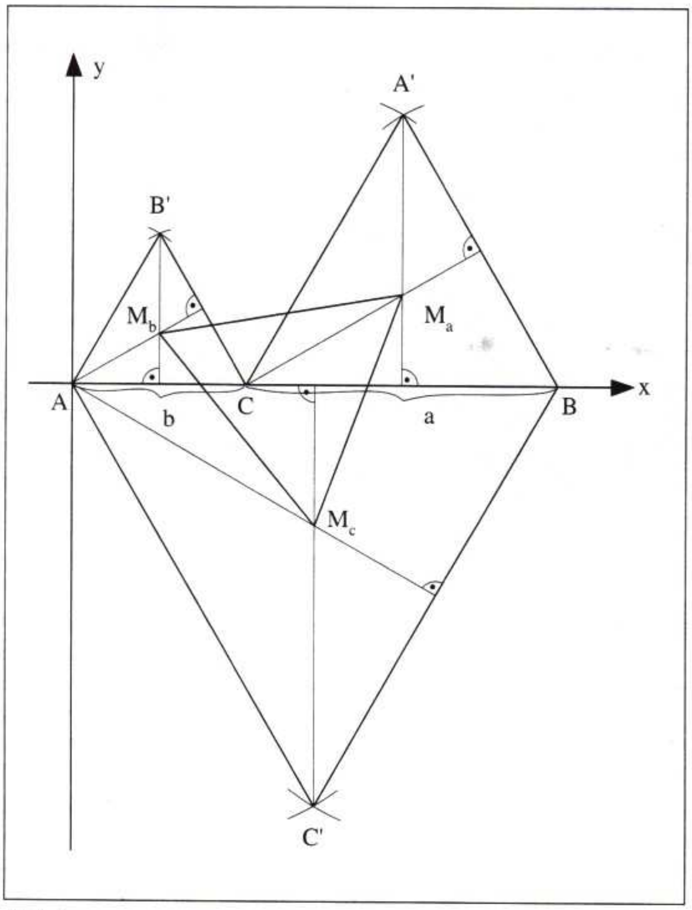


Abb. 2

4. Anmerkung

Was hat "Napoleons Satz" mit Napoleon I. Bonaparte (1769 – 1821), Kaiser der Franzosen zu tun? Der italienische Autor Faifofer behauptete in der 18. Auflage seines Geometrielehrbuches "Elementi di geometria", Venedig 1912, Napoleon habe diesen Satz Lagrange (1736 – 1813) zum Beweis überlassen. Der Mathematikgeschichte sind heute dafür aber keine Quellen bekannt. Der Satz selbst wird erstmals (soweit heute belegbar) bei Turner, "Elementi di geometria", Palermo 1843 erwähnt, aber ohne Hinweis auf Napoleon (Nach Fischer, Joachim: Napoleon und die Naturwissenschaften. Stuttgart: Franz Steiner Verlag Wiesbaden GmbH, 1988).

Tragen mathematische Begriffe oder Lehrsätze Namen von historischen Personen, so darf nicht automatisch vom Namen auf den Urheber geschlossen werden. Das gilt z. B. auch für so bekannte Namen wie Pythagoras oder Thales. Das Spektrum der Zueignungsskala ist sehr breit, es enthält viele Stufen, von denen beispielhaft nur erwähnt sein sollen: "Gesicherte Priorität" – "Erstveröffentlichung" – "Geistige Teilhabe" – "Völlige Unschuld" – "Verdacht auf Plagiat". Solche Namen fungieren in der Mathematik als Terminus technikus. Ihre historische Relevanz kann häufig nicht abschließend geklärt werden, weil Quellenbelege verloren gegangen sind oder nie vorhanden waren. Im Glücksfalle können aber auch neue Quellen gefunden werden. Bezüglich Napoleon sei angemerkt: Bekannt sind uns Zeitzeugen und Dokumente, die allgemein seine Begabung und sein Interesse für Mathematik bekunden.

Vergleiche dazu auch Schmidt, Fritz: 200 Jahre französische Revolution. Problem und Satz von Napoleon mit Variationen. Didaktik der Mathematik 1, 1990 (15 – 29), München. Hier wird auch eine Verallgemeinerung von Adriano Barlotti (1955) mitgeteilt, die zeigt, daß der Problemkreis immer noch bearbeitet wird.

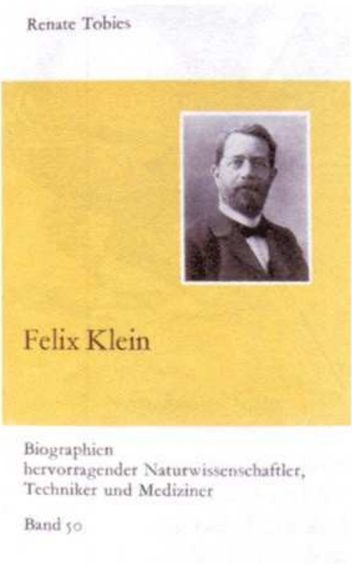
Für die Literatur danke ich den Professoren Johannes Böhm aus Jena und Rudolf Fritsch aus München.

Dr. Wolfgang Dörband, Greifswald

Bücher
Programme
Videos
Spiele

Die Marktecke

Lesens- und Sehenswertes vom Medienmarkt



Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner

Allen Freunden der Geschichte und ihrer herausragenden Persönlichkeiten können die Bändchen der Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner der Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig empfohlen werden.

Zu haben sind über Eure Buchhandlung die nebenstehenden Titel:

Band 15: *Carl Friedrich Gauß*
Hans Wußing, ***ISBN 3-322-00682-4***

Band 19: Galileo Galilei
Ernst Schmutzer/Wilhelm Schütz, ***ISBN 3-322-00661-1***

Band 27: Isaac Newton
Hans Wußing, ***ISBN 3-322-00752-9***

Band 47: Alexander von Humboldt
Kurt-R. Biermann, ***ISBN 3-322-00567-4***

Band 50: Felix Klein
Renate Tobies, ***Bestell-Nr. 666 026 6***

Band 60: Aristoteles
Fritz Jürß/Dietrich Ehlers ***ISBN 3-322-00664-6***

Band 79: Georg Cantor
Walter Purkert/Hans Joachim Ilgauds, ***Bestell-Nr. 666 252 8***

Adam Ries in Erfurt

Nur der Rechenmeister und seine Familie dürften alle diese Schriften kennen, die **vom 7. April bis 10. Mai 1992** in der **Ausstellung „Adam Ries in Erfurt"** zu sehen sind. Es ist gelungen, ein Original des 1. Rechenbuches von Ries (weltweit noch 3 Exemplare) in der Auflage von 1525, das 2. Rechenbuch in der 1. Auflage von 1522 (weltweit noch 1 Exemplar), davon die 2. Auflage von 1525 sowie das 3. Rechenbuch von Ries von 1550 (in Erfurt vorhanden) für die Ausstellung zu bekommen. Zusätzlich kann man einen direkten Eindruck vom handschriftlichen wissenschaftlichen Lehrbuch (Coß) von Ries und einer weiteren Handschrift aus der Erfurter Zeit erhalten. In der Coß nannte Ries einige von ihm vorher studierte Rechenbücher, sie werden ebenfalls zu sehen sein.

Vom Go-Fieber angesteckt?

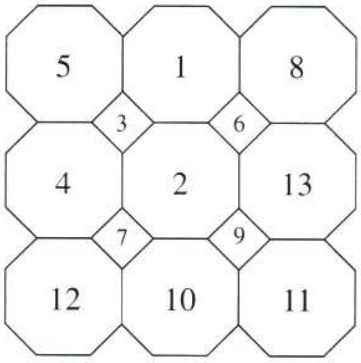
Dann kommen hier zwei Empfehlungen genau richtig!

• Das 19er-Brett, das Turnierbrett, ist die Krönung und das ersehnte Ziel aller echten Go-Fans.
Eine Trainingspartie dauert 1 bis 2 Stunden und eine Turnierpartie im Durchschnitt 3 bis 6 Stunden. Als 9er, 13er, aber auch 19er Brett nutzbar ist **Go** von ***Ravensburger.***

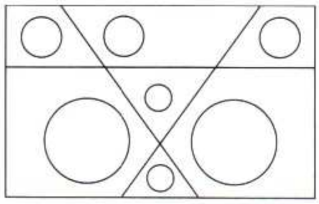
• Grundkurs, Taktik und Strategie und auf der Innenseite des Schutzumschlages ein selbstzufertigendes 9er-Brett mit Steinen zum Anfangen, aufgeschrieben vom Träger des 4. Dan Siegmar Steffens.
Sportverlag Berlin,
ISBN 3-328-00349-5, 24,80 DM

Lösungen

• Nachbarschaft



• Kurz nachgedacht



• Klug kombiniert

Teil 4 ergänzt den Quader richtig.

• Gleichungsrätseleien

D=4, E=2, H=1, K=8, N=3, R=5, S=7, Z=6

• Trick mit Streichhölzern

• Hölzchensymmetrie

Da die 0 ausscheidet, sind nur die Ziffern 1, 2, 5 und 8 zulässig. Mit diesen lassen sich 12 zweistellige Zahlen $\overline{ab}$ bilden, die nicht gleich ihrem Spiegelbild $\overline{\beta\alpha}$ sind, 85, 82, 81, 55, 51, 21 und deren Spiegelbilder. Wegen 85-28=57, 82-58=24, 81-18=63, 55-22=33, 51-12=39 und 21-15=6 sind die Differenzen $c\cdot d-\delta\cdot\gamma$ gleich ±63, ±57, ±39, ±33, ±24 oder ±6. Die von 0 verschiedenen Differenzen $\overline{ab}-\overline{\beta\alpha}$ aus dem Produkt zweier durch die Ziffern 1, 2, 5 und 8 dargestellten einstelligen Zahlen c und d und dessen Spiegelbild sind wegen 8·5-2·8=24, 5·5-2·2=21 und 5·1-1·2=3 gleich ±24, ±21 oder ±3.

Für eine wahre Gleichung $\overline{ab}+c\cdot d=\delta\cdot\gamma+\overline{\beta\alpha}$ vom Typ I muß $\overline{ab}-\overline{\beta\alpha}=\delta\cdot\gamma-c\cdot d$ gelten und für eine wahre Gleichung $\overline{ab}+\overline{cd}+\overline{ef}=\overline{\xi\varepsilon}+\overline{\delta\gamma}+\overline{\beta\alpha}$ vom Typ II $\overline{ab}-\overline{\beta\alpha}+\overline{cd}-\overline{\delta\gamma}=\overline{\xi\varepsilon}-\overline{ef}$. Hiermit ergeben sich die Lösungen

I: 82+8·2=5·8+58
II: 85+58+22=55+82+28
85+21+18=81+15+28
82+51+18=81+12+58
55+21+12=51+15+22

Alle weiteren Lösungen entstehen aus den angegebenen durch Vertauschen der beiden Seiten einer Gleichung oder durch Vertauschen der Faktoren der Produkte oder der Summanden der Summen.

• Eins zwei drei vier fünf ... – Besuch im MMK Frankfurt/M.

• Zwei Tage vor Sylvester stehen mit 29+12=41 zu Buche, das Jahr '99 mit weiteren 18. Die größte Quersumme ist somit 59. Die Quersumme 3 tritt nur an 4 Tagen auf: 1.2.'00; 2.1.'00; 1.1.'01 und 1.1.'10.
• Für das Jahr '99 ergibt sich die längste Zahlwortkolonne, sie reicht bis "... zweiundvierzig"
• 444, 446, 448, 464, 466, 468, 484, 486, 488, 644, 646, 648, 664, 666, 668, 684, 686, 688, 844, 846, 848, 864, 866, 868, 884, 886, 888

Analog wie für drei rechnet man: 4 (für die erste Position) mal 4 (für die zweite) mal 4 ... mal $4=4^4=256$.

• Olympiaecke

5. Jahrgangsstufe
Es bezeichne J ... Ringzahl von Joachim,
E ... Ringzahl von Elke,
R ... Ringzahl von Regina,
G ... Ringzahl von Gerd.
Aus dem Text der Aufgabe ergeben sich folgende Beziehungen:
a) $J > G$ b) $E + R = J + G$ c) $E + J < R + G$
Die Addition von a) und b) ergibt
$2E + R + J < 2\cdot G + R + J$
Daraus folgt: d) $E < G$
Aus b) und d) ergibt sich nun e) $R > J$.
Aus a), e) und d) folgt $R > J > G > E$.
Die Reihenfolge der Schützen nach fallender Ringzahl lautet damit Regina, Joachim, Gert und Elke.

6. – 7. Jahrgangsstufe
Vorbemerkung: In beiden Summanden ist die Anzahl der Ziffern gleich (da $x + y + z = z + x + y$).
Da die Anfangszweien der 1. Zahl und die Dreien zu Beginn der 2. Zahl im Ergebnis drei aufeinanderfolgende Fünfen liefern sollen und die nächsten Ziffern der Summe zweimal eine

Sieben ergeben, die nur von Zweien und Fünfen erzeugt werden können, muß gelten: $z = 3$.
Eine ähnliche Überlegung führt zu $x = 5$.
Auch läßt sich folgende Gleichheit aufstellen:
$$x + y + z = 3 + 2 + 3 + 1 + 3 = 12$$
Also gilt: $y = 12 - x - z = 12 - 5 - 3 = 4$
Somit erfüllen die Zahlen $(x, y, z) = (5, 4, 3)$ die Bedingungen der Gleichheit.

8. Jahrgangsstufe

	Schlittschuh	Ski	beide	keine
1. Möglichkeit:	1	4	8	4
2. Möglichkeit:	3	6	6	4

9. Jahrgangsstufe
Die Antwort lautet: Nein. Sind nämlich a, b zwei Zahlen des Tripels $(1, 2, \sqrt{2})$, die im nächsten Schritt durch $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ und $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$ ersetzt werden, so ist $\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2 =$

$$= \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} + \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2} = a^2 + b^2.$$

Die Summe der beiden Quadrate ändert sich somit nicht; sie bleibt immer gleich ihrem Anfangswert $1^2 + 2^2 + (\sqrt{2})^2 = 7$.
Da aber das Tripel $(1, 2, 1 + \sqrt{2})$ die Quadratsumme $1 + 2^2 + (1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 4 + 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 8 + 2\sqrt{2} \neq 7$ besitzt, wird es niemals in der mit $(1, 2, \sqrt{2})$ startenden Folge auftauchen.

9. – 10. Jahrgangsstufe
Im Dezimalsystem sei $N = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ und $1 \leq a \leq 6$, $0 \leq b, c, d, \leq 6$.
Nach Voraussetzung gilt $N = n^2$ für eine geeignete natürliche Zahl n.
Dann muß gelten: $n^2 = N \leq 6666$, also $n \leq 81$ $(81^2 = 6561 < 6666)$
Erhöht sich jede Ziffer von N um 3, ergibt sich $(a + 3) \cdot 10^3 + (b + 3) \cdot 10 + (d + 3) = m^2$ für eine passende natürliche Zahl m.
Für die Differenz $m^2 - n^2$ gilt:
$m^2 - n^2 = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d + 3000 + 300 + 30 + 3 - (a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d) = 3333$.
Wegen $m^2 - n^2 = (m + n)(m - n) = 3333 \Rightarrow$
$(m + n)(m - n) = 3 \cdot 11 \cdot 101$.
Da weiter $m + n > m - n$ und $n \leq 81$ gilt, muß $m + n = 101$ und $m - n = 33$ sein.
Also $(m + n) - (m - n) = 68$
$$2n = 68 \Rightarrow \underline{n = 34}$$
Die Zahl N ist somit die Quadratzahl $34^2 = 1156$.

• Zeitungsschnipsel

• Tennisaufschlag

Die Geschwindigkeit von 321,12 km/h entspricht 89,2 m/s. Um eine Strecke von 25 m zurückzulegen, braucht der Ball bei dieser Geschwindigkeit etwa 0,28 s.

• Riesenpizza

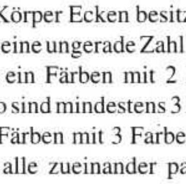
Die Oberfläche unserer Pizza beträgt $\pi/4\ (0{,}25\ m)^2 \approx 0{,}049\ m^2$, die der Rekordpizza $\pi/4\ (47\ m)^2 \approx 1735\ m^2$. Diese braucht also $1735 : 0{,}049 \approx 35400$mal soviel Zutaten wie unsere. Für unser Rezept brauchen wir 230 g Mehl, 30 g Peperoniwurst und 80 g Tomatensoße.

• Die „Struwwelpetra"

Pro Monat wachsen die Nägel der Struwwelpetra um $480\ mm : (12 \cdot 12) = \frac{10}{3}$ mm.
Um 2 cm wachsen ihre Nägel in
$20\ mm : \frac{10}{3}\ mm = 6$ Monaten

• Enttarnung eines Logos

1. Da dieser Körper Ecken besitzt, in denen 3 Flächen, also eine ungerade Zahl von Flächen, anstoßen, ist ein Färben mit 2 Farben nicht möglich. Also sind mindestens 3 Farben erforderlich. Das Färben mit 3 Farben gelingt, indem jeweils alle zueinander parallelen Flächen gleichfarbig gefärbt werden. Zu diesem Färben werden nur 3 Farben benutzt und es erfüllt die Färbungsvorschrift, denn zwei gleichfarbig gefärbte Flächen, also zwei zueinander parallele, haben höchstens einen Randpunkt gemeinsam. 3 ist also die gesuchte Minimalzahl.
2. Dieser Körper ist ein Polyeder. Da bei einem Polyeder allerdings von jeder an eine Ecke anstoßenden Fläche zwei Seiten in diese Ecke einmünden, müssen von diesem Körper zwei begrenzende Rechteckflächen als Fünfeckflächen und eine als Sechseckfläche aufgefaßt werden. Zu diesen zusätzlich eingeführten Eckpunkten der begrenzenden Flächen gehören gestreckte Winkel als Innenwinkel.



Vor dem Zusammensetzen besitzt jeder der 3 backsteinförmigen Quader 8 Ecken. Jede von 20 dieser $3 \cdot 8 = 24$ Ecken liefert nach dem Zusammensetzen jeweils eine Ecke des Körpers, während 4 dieser 24 Ecken nach dem Zusammensetzen zu keiner Ecke des Körpers gehören. Andererseits besitzt der zusammengesetzte Körper zwei Ecken, von denen keine gleichzeitig Ecke eines der 3 Quader ist. Mithin gilt $e = 24 - 4 + 2 = 22$. Entsprechend ergibt sich $k = 3 \cdot 12 - 6 + 4 = 34$ und $f = 3 \cdot 6 - 4 = 14$ (2 Achteck-, 1 Sechseck-, 2 Fünfeck- und 9 Rechteckflächen). Damit gilt $e - k + f = 2$, wie es nach dem Eulerschen Polyedersatz sein muß.

• Mathematik am Nagelbrett

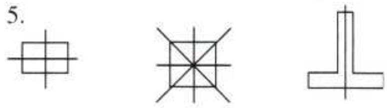
1. a) (1), (2), (3), (4) b) (1), (3)

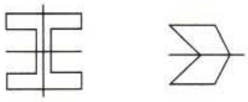
2. (1) $\frac{1}{4}$, (2) $\frac{1}{8}$, (3) $\frac{1}{16}$, (4) $\frac{5}{8}$, (5) $\frac{1}{2}$

3. (2) $A_2 = 6\ F_E$; (3) $A_3 = 8\ F_E$; (4) $A_4 = 6\ F_E$; (5) $A_5 = 7\ F_E$

4. (1) 25%, (2) 50%, (3) 25%, (4) 50%, (5) 37,5%, (6) 75%

5.

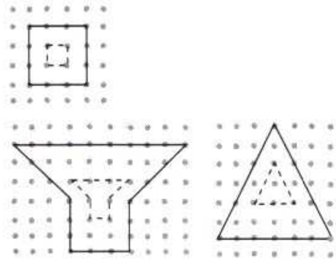




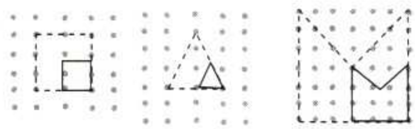
6. (1), (3)

7. (1), (2), (4)

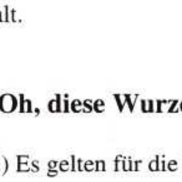
8.



9.



10.
(1)



(2) Alle Figuren haben denselben Flächeninhalt.
(3) Alle Figuren haben denselben Flächeninhalt.

• Oh, diese Wurzeln

(2) Es gelten für die Flächen 1, 2, 3

$$A_1 = \frac{1}{2}(x \cdot w + a \cdot v),$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(x \cdot y + a \cdot c),$$

$$A_3 = \frac{1}{2}(h - c) \cdot b \cdot \sin 30°$$

Um die Rechnung übersichtlicher zu machen, setze man

$$m = \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{3}},\ n = \sqrt{\sqrt{3} - 1}$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{4}\sqrt[4]{3} \cdot \frac{s}{4}\sqrt{3 - \sqrt{3}}\right) + \frac{s}{4} \cdot \frac{s}{4}\sqrt{3}$$

$$= \frac{s^2}{32}\left(m + \sqrt{3}\right)$$

$$A_2=\frac{1}{2}\left[\frac{s}{4}\sqrt[4]{3}\left(\frac{s}{4}\sqrt[4]{3}-\frac{s}{4}\sqrt{3-\sqrt{3}}\right)\right]$$
$$+\frac{s}{4}\cdot\frac{s}{4}\left(\sqrt{3}-\sqrt{\sqrt{3}-1}\right)$$
$$=\frac{s^2}{32}\left(\sqrt{3}-m+\sqrt{3}-n\right)$$

$$A_3=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{s}{4}\left(2\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{\sqrt{3}-1}\right)\right]\cdot\frac{s}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{s^2}{32}\left(\sqrt{3}+n\right)$$

$$A=2\cdot\left(A_1+A_2+A_3\right)$$
$$=2\cdot\frac{s^2}{32}\left[\left(m+\sqrt{3}\right)+\left(2\cdot\sqrt{3}-m-n\right)+\left(\sqrt{3}+n\right)\right]$$
$$=\frac{s^2}{16}\cdot 4\cdot\sqrt{3})=\frac{s^2}{4}\sqrt{3},$$

was dem Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks entspricht.
Ein anderer Lösungsweg vereinfacht ein wenig die Rechnung:

$$\ldots\ A=2\cdot\frac{1}{2}\left[x(y+w)+a(v+c)+\frac{1}{2}\cdot b(h-c)\right].$$

Wegen y+w=x und $\frac{1}{2}\cdot b=a$ folgt
$A=x^2+a\,(v+c+h-c)$,

$$A=\frac{s^2}{16}\sqrt{3}+\frac{s}{4}(v+h),$$
$$A=\frac{s^2}{16}\sqrt{3}+\frac{s}{4}\cdot\left(\frac{s}{4}\sqrt{3}+\frac{s}{2}\sqrt{3}\right),$$
$$A=\frac{s^2}{16}\sqrt{3}+\frac{s^2}{16}\cdot 3\sqrt{3},\quad A=\frac{s^2}{16}\left(4\sqrt{3}\right)$$
$$A=\frac{s^2}{4}\cdot\sqrt{3}.$$

• Das Oktaeder

zu 1) Die Mittelsenkrechte zu zwei Punkten hat die Eigenschaft, daß alle auf ihr liegenden Punkte von diesen Punkten jeweils gleichen Abstand haben. Damit gilt also nicht nur $\overline{RH}$=s (laut Voraussetzung) und $\overline{RS}$=s (gemäß Faltvorschrift), sondern auch $\overline{SH}=\overline{SR}$=s (gemäß der genannten Eigenschaft der Mittelsenkrechten m von $\overline{HR}$). Also ist ΔHRS gleichseitig, q. e. d.
zu 2) Der Kopf ist etwa 6,1 cm breit (maßstäbliche Konstruktion) oder $\sqrt{2}\cdot 16\text{ cm}\cdot\tan 15°$. Die Ohrenspannweite beträgt stolze 8,3 cm (maßstäbliche Konstruktion) oder 2 · 16 cm · sin 15°.
zu 3) Der Winkel ∢EMC ist 60° gemäß Konstruktion. Beim Umlegen der Ecken A und C (Abb. 4) entsteht eine Falte senkrecht zur Winkelhalbierenden dieses Winkels, also bei C_1 und E zwei gleichgroße Winkel. Ihre Größe beträgt 120°/2=60°. Damit hat ΔC_1EM drei gleichgroße Winkel, also drei gleichgroße Seiten, q. e. d.
zu 4) Alle vier neu entstehenden Dreiecke sind ebenfalls gleichseitig und haben die halbe Seitenlänge des Ausgangsdreiecks. Zur Begründung beachte man, daß nach dem Umlegen bei K_1 (Seitenmitte) aus Gründen der Symmetrie drei Winkel von 60° entstehen.

• Komisches, Kniffliges und Knackiges

• Verflixt, das geht doch nicht!

Hier hilft nur folgender Trick:

$$\frac{XXII}{VIII}=II,\text{ also }\frac{XXII}{VII}=\Pi,\text{ also }\frac{22}{7}=\pi$$

• Stapeln von Spielsteinen

9 -> 1; 3 -> 7; 2 -> 7; 8 -> 1; 12 -> 4; 11 ->4; 6 -> 10; 5 -> 10

• Sprachecke

• Vielecke

Zwei Vielecke haben zusammen 89 Diagonalen. Wie groß ist die Summe der Seiten beider Vielecke?
Lösung: Die Anzahl der Diagonalen eines Vielecks mit n Seiten ergibt sich nach $\frac{n(n-3)}{2}$. Danach kann man folgende Tabelle aufstellen:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Diagonalen	0	2	5	9	14	20	27	35	44	54	65	77	90

Daraus ergibt sich als Lösung: 35+54=89 für die Diagonalen, d. h. 10+12=22 für die Summe der Seiten. Es handelt sich also um ein Zehn- und ein Zwölfeck.

• Derselbe Umfang, aber verschiedene Flächen

Die Zeichnung zeigt zwei Figuren, deren Rand aus je 8 Streichhölzern besteht. Jedoch das Verhältnis der Flächen beträgt 3:4. Konstruiere zwei andere Figuren in einer Ebene so, daß eine davon rechteckig und jede aus 24 Streichhölzern gelegt ist, sowie die Flächen im Verhältnis 5:6 stehen.
Lösung: Die Rechteckseiten bestehen aus 2 bzw. 10 Hölzchen, die Fläche beträgt 20 Einheiten. Die andere Figur ist ein rechtwinkliges Dreieck aus 6, 8 bzw. 10 Hölzchen. Seine Fläche beträgt 24 Einheiten. 20:24=5:6.

• Arithmetik

Setzt die Ziffern von 1 bis 8 in die kleinen Kreise der Figur, die auf der Zeichnung dargestellt ist, so ein, daß die Summe der Zahlen auf jeder Kreislinie ein und dieselbe ist!
Lösung: Eine mögliche Lösung ist:

8 5
1
3 6
2
7 4

• Nummernsalat

1) a) 1 b) 9 c) 5 d) X
2) Ja, denn bei Veränderung einer Ziffer ändert sich die Prüfsumme um Vielfache von zu 11 teilerfremden Faktoren.
3) Zum Beispiel:
3-451-**3452**1-8 und 3-451-**5234**1-8

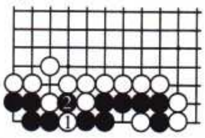
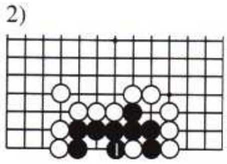
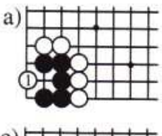
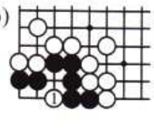
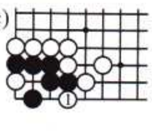
•Schachecke

Zum Beispiel:
1. S : f2, 2. S : g4, 3. S : e3, 4. S : g2,
5. S : f4, 6. S : e2, 7. S : g3, 8. S : e4,
9. S : d6, 10. S : b7, 11. S : c5, 12. S : d7,
13. S : b6, 14. S : d5, 15. S : c7, 16. S : b5.

• Utopische Knobeleien

1. Brutonier-grün; Doraner-rot; Cassonarier-orange; Menschen-blau.
2. Die Raumfahrer sind 24 h unterwegs.
3. kgV (2, 3, 5, 7)=210, d. h. sie treffen sich nach 210 Planetenumläufen wieder.

• Faszination Go

1)

2)

3) a)

b)

c)


• Wenn Zentimeter über Hop oder Top entscheiden

1. Georg Hackl hatte einen Vorsprung von 10 Metern und 6,7 Zentimetern auf den Zweitplazierten bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 118,44 Kilometern pro Stunde.
2. Der Rückstand beträgt 51,3 cm .
3. Wasmeier fuhr um 5,05 m an der Bronzemedaille vorbei.
4. 2. Heike Warnicke (7:37,59 Minuten)
Rückstand von 0,87 m
3. Claudia Pechstein (7:39,80 Minuten)
Rückstand von 24,90 m
4. Carla Zijlstra (7:41,10 Minuten)
Rückstand von 38,93 m

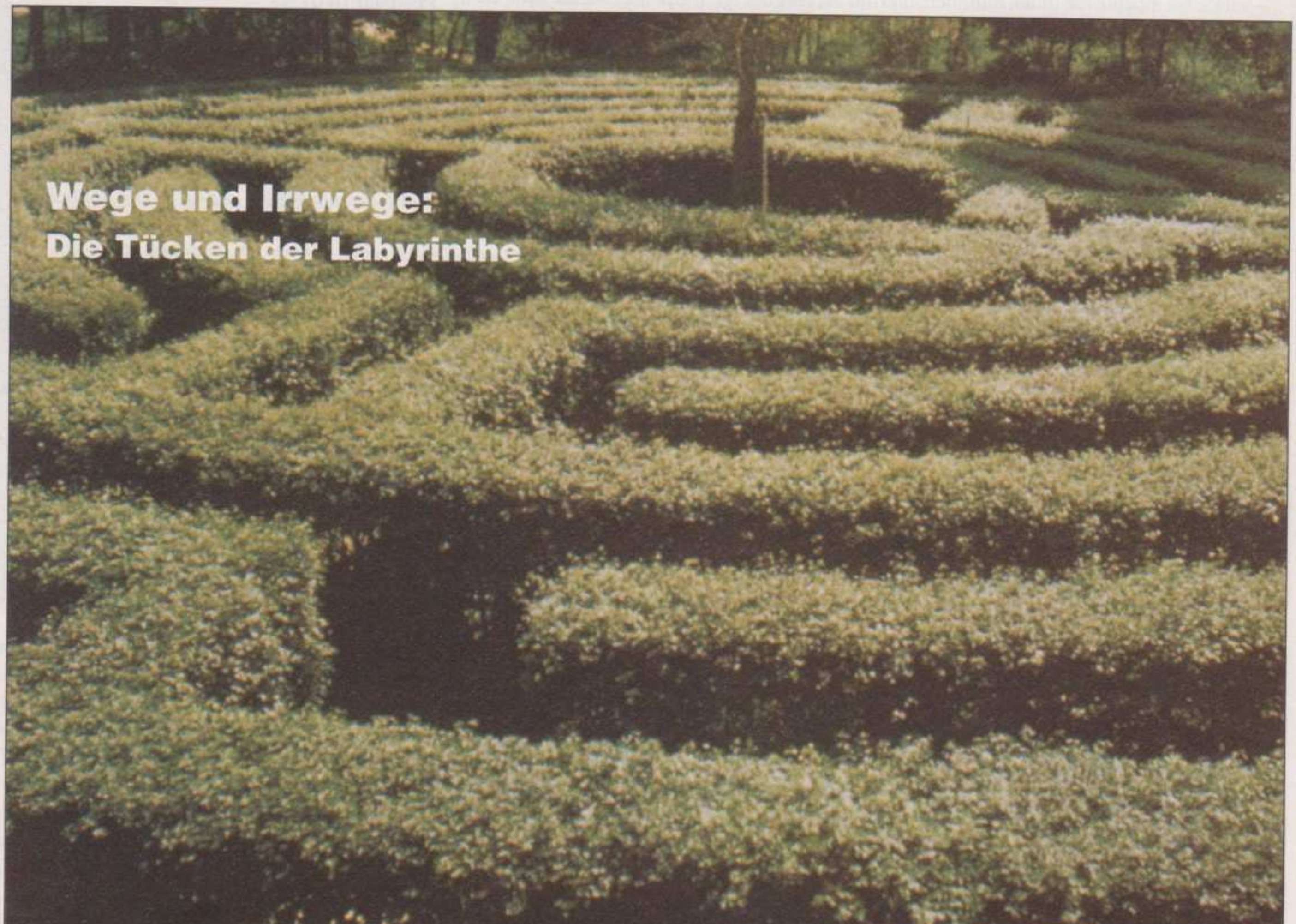
H 113228

Heft 3
Juni 1992
26. Jahrgang

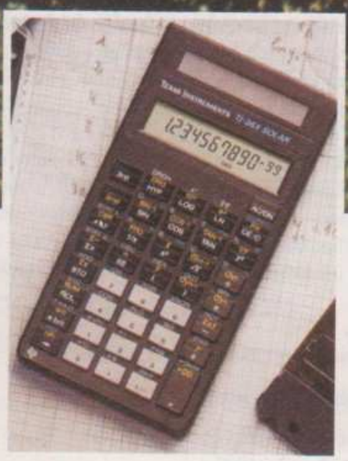
Fachzeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift



Wege und Irrwege:
Die Tücken der Labyrinthe



Experimente und Spielereien mit dem Taschenrechner

Vorhersage des Stabhochsprung-weltrekordes für das Jahr 1995

Computerprogramm: Castle of Dr. Brain

Leserbriefe

– Im neuesten alpha-Heft 2/1992 S. 15 erwähnen Sie, daß 51 und 69 noch nicht darstellbar sind durch die Ziffern von 1992.
Da ich auf diesem Gebiet eine gewisse Routine habe, kann ich zumindest eine Lücke schließen $51 = -1 + \cdot 9 - 2$, die 74 läßt sich etwas einfacher schreiben: $74 = (-1 + 9) \cdot 9 + 2$.
Mit freundlichen Grüßen *H. Siegler, Eschau*

– Nach 5 Minuten hatte ein Schüler die Lösung $69 = 1 + 9^2 - 9 - 2^2$. Alpha gefällt mir sehr gut. Lassen Sie sie ja in ml!
Mit freundlichen Grüßen *D. Pfeifle, Pfinztal*

– Zunächst möchte ich Ihnen mitteilen, daß mir als langjährigem alpha-Leser die neue Gestaltung der Hefte gut gefällt, wenn auch (meiner Meinung nach) die Übersichtlichkeit geringer geworden ist.
Beim Lösen der Aufgaben in Heft 6/91 fiel mir auf, daß in zwei Fällen Lösungen vergessen worden sind. Dies betrifft „Ohne Fleiß kein Preis!" (S. 5). Hier existieren außer den angegebenen noch folgende Möglichkeiten:

$1395 = 15 \cdot 93$
$1435 = 35 \cdot 41$
$6880 = 80 \cdot 86$
$1827 = 21 \cdot 87$
$2187 = 27 \cdot 81$

(Besonders interessant sind die beiden letzten Möglichkeiten mit den gleichen Ziffern.)

Bei „Ausblick auf Olympia" (S. 29) fehlt noch die folgende Variante:

5 2 7
9 6 3 8
4 1

Mit freundlichem Gruß *A. Hempler*

Red.: An der Gestaltung wird noch gefeilt, damit es bei allem Abwechslungsreichtum trotzdem übersichtlich bleibt.

Liebe Leserin und lieber Leser,

an dieser Stelle in alpha möchten wir in Zukunft gern Eure Leserpost veröffentlichen. Deshalb schreibt uns, wenn Ihr alte alpha-Hefte sucht, Ergänzungen zu vorgestellten Beiträgen mitteilen möchtet, allgemein interessierende mathematische Fragen stellen oder Eure Meinung zu alpha kundtun wollt.
Wir freuen uns auf Eure Post.
Erhard Friedrich Verlag
Jürgen Ricke
Redaktion alpha
Postfach 10 01 50
W – 3016 Seelze 6

Herzlichen Glückwunsch!

An der Verlosung von 10 Jahresabonnements der Zeitschrift „alpha" haben zahlreiche Leser teilgenommen; hier die Gewinner: A. Burow, Berlin; M. Blücher, Kusterdingen; S. Oguntke, Bielefeld; I. Kasten, Plettenberg; C. Rieß, Dillingen; P. Jastrow, Bremerhaven; E. Hoffmann, Aachen; G. Els, Pratz (Luxemburg).
Wir gratulieren und schicken Ihnen „alpha" ein Jahr lang kostenlos zu. Mögen die Beiträge Ihnen Unterhaltung, Kniffliges und Wissenswertes bringen.
Beste Grüße aus Velber
Erhard Friedrich Verlag, Werbeabteilung

Alphonsvignetten: Lothar Otto (Leipzig)

Druckfehlerberichtigung
In den Lösungen zur Olympiade-Ecke in Heft 2/92 S. 33 muß es jeweils richtig heißen
• Olympiade-Ecke (statt Olympiaecke)
• 5. Jahrgangsstufe. In Zeile 8: Die Addition von b) und c) ergibt: (Statt ... a) und b) ...)
• 9. Jahrgangsstufe. Es fehlt ein Einschub. Die Antwort lautet: Nein. Die Idee besteht darin, eine Größe zu finden, die bei jedem Schritt invariant (= unverändert) bleibt. Die Quadratsumme der Koordinaten leistet dies.
• 9. – 10. Jahrgangsstufe. In Zeile 9 muß es heißen: $(a+3)\cdot 10^3 + (b+3)\cdot 10^2 + (c+3)\cdot 10 + (d+3) = m^2$
(statt $(a+3)\cdot 10^3 + (b+3)\cdot 10 + (d+3) = m^2$)
Paul Jainta

alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett.
Redaktion:
Dr. Gabriele Liebau, Tel. (Leipzig) 58 18 54,
Einsendungen an:
Erhard Friedrich Verlag, Herrn J. Ricke, Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6
Redaktionskollegium:
StR F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), OL Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. C. P. Helmholz (Leipzig), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pliezhausen), Herbert Kästner (Leipzig), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OStR J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. W. Schmidt (Greifswald), OStR G. Schulze (Herzberg), W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

Anzeigenleitung: Bernd Schrader
Anzeigenabwicklung:
Telefon (05 11) 4 00 04-23
Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01.01.1990
Vertrieb und Abonnement:
Telefon (05 11) 4 00 04-50
Verlag:
Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG, Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6
Telefon (05 11) 4 00 04-0
Telefax: 4 00 04-19
Das Jahresabonnement für alpha besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt DM 12,00, im Einzelbezug DM 2,50. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten.
Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).

alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV Klett Cotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, CH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.

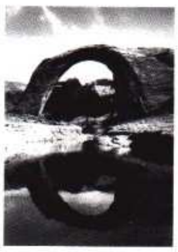
Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschrift im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.

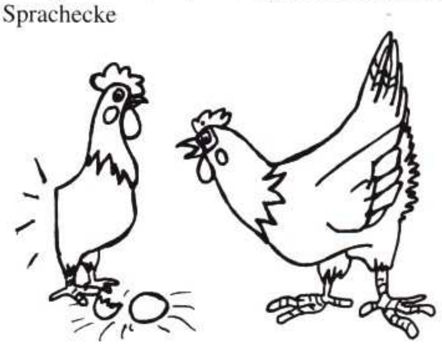
Herstellung: Pädagogika Zentrale

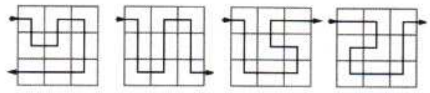
Titel: Jens Hinzmann

Druck: Druckerei Schröer, Seelze
ISBN 3-617-34009-1

Inhaltsverzeichnis







1 2 3 4

Titelfotonachweis:

Das Foto auf dem Titel stammt aus dem sehr empfehlenswerten Buch von Nigel Pennik „Das Geheimnis der Labyrinthe“ erschienen im Goldmann-Verlag 1990.

Wie wird der Stabhochsprungweltrekord im Jahre 1995 lauten?

Niemand vermag heute darauf eine gültige Antwort zu geben; man kann nur raten, schätzen oder Wetten abschließen. Wie mathematische Methoden helfen können, möglichst genaue Schätzungen zu erzielen, soll nachfolgend dargestellt werden.

Der frühere erfolgreiche Zehnkämpfer Siggi Wentz beim Stabhochsprung Foto: adidas

Als begeisterter Sportfan blättert Anna für ihr Leben gern in Sportstatistiken. So fällt ihr eines Tages das "Track & Field Annual" in die Hände, welches alle Leichtathletikrekorde verzeichnet. Unter der Rubrik Stabhochsprung findet Anna unter anderem die folgenden fünf Freiluft-Weltrekorde:

1968	***5,41m***	**R. Seagren**	**(USA)**
1973	***5,63m***	**R. Seagren**	
1978	***5,70m***	**D. Roberts**	**(USA)**
1983	***5,83m***	**T. Vigneron**	**(Frankreich)**
1988	***6,06m***	**S. Bubka**	**(UdSSR)**

Nun stellt sie sich die Frage, bei welcher Höhe wohl der Weltrekord im Jahre 1993 oder 1995 liegen könnte.

Zunächst einmal stellt sie die fünf Werte graphisch dar (s. **Abb. 1**).

Sie bemerkt, daß die eingezeichneten Punkte ungefähr auf einer Geraden liegen und schlußfolgert: "Wenn ich eine Gerade durch die "Punktwolke" lege, die die Punkte möglichst gut annähert, und dann auf dieser Geraden ablese, welcher Wert sich für 1993 (bzw. 1995) ergibt, erhalte ich zumindest eine relativ gute Schätzung für den künftigen Weltrekord." Das ist sicherlich richtig, solange man nicht allzuweit in die Zukunft "vorausschaut" (extrapoliert), denn die Weiterentwicklung des Stabmaterials und der Trainingsbedingungen einerseits sowie die sicher nicht unbegrenzte menschliche Leistungsfähigkeit andererseits lassen sich über große Zeiträume hinweg in ihrem Einfluß nur schlecht bewerten.

Was aber bedeutet eine "möglichst gute Annäherung"? Darauf hat der große Mathematiker C. F. Gauß im Rahmen der Ausgleichsrechnung bereits vor etwa 200 Jahren eine (aber nicht die einzig mögliche!) Antwort gegeben: Man lege die gesuchte Gerade in solch einer Weise durch die Punktwolke, daß die Summe der Quadrate aller Abstände von den gegebenen Punkten zu denjenigen Punkten auf der Geraden, die jeweils dieselbe Abszisse t haben, so klein wie möglich wird (s. **Abb. 2**).

Unter Verwendung des Summenzeichens

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = c_1 + c_2 + \ldots + c_N$$

und der Symbolik $f(y) \to \min$, die heißen soll: "Minimiere die Funktion f, d. h., suche denjenigen Wert $\overline{y}$, für den f(y) kleinstmöglich wird!" läßt sich das so formulieren:

$$\sum_{i=1}^{N} (z_i - y_i)^2 \to \min. \qquad (1)$$

Hier bedeutet N die Anzahl der gegebenen Punkte (statistische Daten oder Meßdaten). Die Differenzen z_i-y_i wurden quadriert, damit sich nicht positive und negative Abweichungen von der Geraden gegenseitig "auslöschen". Die Gerade selbst, die die Bedingung (1) erfüllt, kennt Anna noch nicht, sie weiß aber, daß sich jede Gerade (die nicht senkrecht zur t-Achse verläuft) in der Form

$$y=f(t)=a+bt \qquad (2)$$

darstellen läßt, wobei a und b zunächst unbekannt sind. Nun beachtet Anna noch, daß die Punkte (t_i, z_i) auf der (gesuchten) Geraden liegen, d. h., es gilt $z_i=a+bt_i$.

Damit läßt sich die Quadratsumme in (1) als Funktion der beiden Unbekannten a und b wie folgt ausdrücken:

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{N} (a + bt_i - y_i)^2$$
$$= (a+bt_1-y_1)^2+\ldots+(a+bt_N-y_N)^2 \to \min. \qquad (3)$$

Man beachte, daß hier a und b variabel sind, während y_i und t_i bekannte Größen darstellen. Für welche Werte a und b wird das Minimum in (3) angenommen? Die Antwort darauf läßt sich relativ leicht durch Umformung der Quadratsumme finden. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} F(a,b) &= \sum_{i=1}^{N} (a + bt_i - y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left(a^2 + b^2 t_i^{\,2} + y_i^{\,2} + 2abt_i - 2ay_i - 2bt_iy_i\right)^2 \\ &= Na^2 + b^2 \sum_{i=1}^{N} t_i^{\,2} + \sum_{i=1}^{N} y_i^{\,2} + \\ &\quad +2ab \sum_{i=1}^{N} t_i - 2a \sum_{i=1}^{N} y_i - 2b \sum_{i=1}^{N} t_i y_i \qquad (4) \\ &= Na^2 + Ab^2 + B + 2abC - 2aD - 2bE, \end{aligned}$$

wenn wir

$$A = \sum_{i=1}^{N} t_i^{\,2},\ B = \sum_{i=1}^{N} y_i^{\,2},\ C = \sum_{i=1}^{N} t_i,\ D = \sum_{i=1}^{N} y_i,$$

$$E = \sum_{i=1}^{N} t_i y_i$$

setzen. Die weitere Umformung sieht komplizierter aus als sie ist; genutzt wird lediglich die quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} F(a,b) &= N\left[\left(a + \frac{Cb-D}{N}\right)^2 - \left(\frac{Cb-D}{N}\right)^2\right] + \\ &\quad + Ab^2 - 2Eb + B \\ &= N\left(a + \frac{Cb-D}{N}\right)^2 - \frac{C^2b^2}{N} + \frac{2CDb}{N} - \\ &\quad - \frac{D^2}{N} + Ab^2 - 2Eb + B \end{aligned}$$

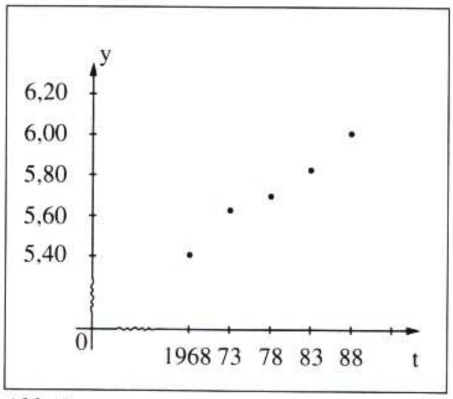


Abb. 1

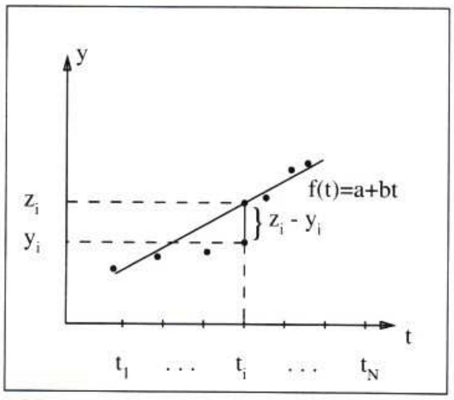


Abb. 2

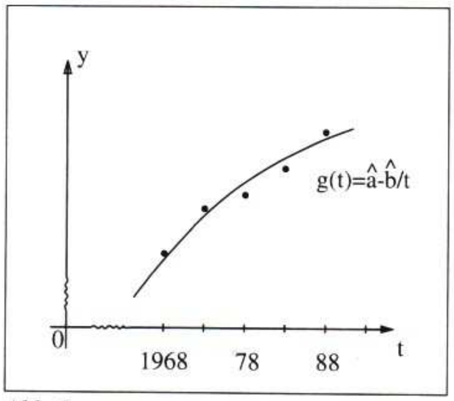


Abb. 3

$$= N\left(a+\frac{Cb-D}{N}\right)^2+\left(A-\frac{C^2}{N}\right)$$
$$\left[\left(b+\frac{CD/N-E}{A-C^2/N}\right)^2-\left(\frac{CD/N-E}{A-C^2/N}\right)^2\right]$$
$$+B-D^2/N$$
$$= N\left(a+\frac{Cb-D}{N}\right)^2+\left(A-\frac{C^2}{N}\right)$$
$$\left(b+\frac{CD-NE}{NA-C^2}\right)^2$$
$$+\left[B-\frac{D^2}{N}-\frac{(CD/N-E)^2}{A-C^2/N}\right].$$

Damit ist F(a,b) eine Summe aus zwei quadratischen Ausdrücken, in denen die Variablen a und b vorkommen, und einer Konstanten (in der letzten eckigen Klammer). Ihren kleinsten Wert nimmt die Funktion F genau dann an, wenn beide Quadrate Null werden, wozu man

$$b=\frac{NE-CD}{NA-C^2}$$

und

$$a=\frac{D-Cb}{N}=\frac{1}{N}\left(D-C\frac{NE-CD}{NA-C^2}\right)=\frac{AD-CE}{NA-C^2}$$

wählen muß. Demzufolge lauten a und b ausführlich geschrieben

$$a=\frac{1}{Z}\left[\sum_{i=1}^{N}t_i^2\sum_{i=1}^{N}y_i-\sum_{i=1}^{N}t_i\sum_{i=1}^{N}t_i\,y_i\right], \qquad (5)$$

$$b=\frac{1}{Z}\left[N\sum_{i=1}^{N}t_iy_i-\sum_{i=1}^{N}t_i\sum_{i=1}^{N}y_i\right], \qquad (6)$$

wobei

$$Z=\sum_{i=1}^{N}t_i^2-\left(\sum_{i=1}^{N}t_i\right)^2 \text{ ist.}$$

Um nun die konkreten Zahlenwerte für a und b zu ermitteln, stellt Anna folgende Tabelle auf (offensichtlich gilt N=5):

i	t_i	y_i	t_i^2	t_iy_i
1	68	41	4624	2788
2	73	63	5329	4599
3	78	70	6084	5460
4	83	83	6889	6889
5	88	106	7744	9328
$\sum_{i=1}^{5}$:	390	363	30670	29064

Hierbei hat sie für die y-Werte nur die Zentimeter über 5 m und für t_i nur die beiden letzten Ziffern der Jahreszahl eingesetzt, was sich durch Verschiebung der Koordinatenachsen (Variablentransformation) rechtfertigen läßt. Setzt man die so ermittelten Summen in die Ausdrücke (5) und (6) ein, ergibt sich a=-161,4 und b=3. Damit hat Anna die Gerade

$$y=f(t)=-161{,}4+3t \qquad (7)$$

als diejenige Gerade gefunden, die – im Sinne von Gauß – die bisherigen Weltrekordwerte am besten annähert (approximiert).

Fragt man nun nach der Schätzung für 1993, hat man in (7) den Wert t=93 einzusetzen (1900 wurde ja weggelassen), so daß sich y=117,6 ergibt, was 6,18 m entspricht (117,60 cm über 5 m). Für 1995 erhält man auf gleiche Weise y=123,6, also etwa 6,24 m.

Ob diese Werte realistisch sind, muß die Zukunft zeigen; Anna jedenfalls befriedigen sie nicht so recht: sie kommen ihr doch etwas zu groß vor (denn als sportbegeistertes Mädchen weiß sie natürlich, daß Ende 1991 der von Sergej Bubka gehaltene Freiluft-Weltrekord bei 6,10 m stand und Anfang Juni 1992 auf 6,12 m verbessert wurde.) "Vielleicht stellt die näherungsweise Beschreibung der Punktwolke durch eine Gerade nicht die günstigste Möglichkeit dar", grübelt sie. Denn dann würde sich ja im Jahre 2100 ein Wert von etwa 9,40 m ergeben, was schwerlich eintreten dürfte. Sicherlich gibt es eine "Schallmauer" für die menschliche Leistungsfähigkeit, der sich der Mensch nur langsam nähert. Doch wie groß könnte diese sein: 7 m, 8 m oder ...? Unter der Annahme, daß eine solche absolute Leistungsgrenze existiert, könnte man versuchen, die statistischen Daten durch eine Funktion der Art

$$y=g(t)=\hat{a}-\hat{b}/t \qquad (8)$$

zu beschreiben, denn für sehr großes t ($t\to\infty$) nähern sich hier die Funktionswerte y dem Wert â. Ferner wird mit wachsendem t auch y immer größer, d. h., die Funktion (8) ist (für positives $\hat{b}$) monoton wachsend, eine Eigenschaft, die für Weltrekorde per Definition erfüllt sein muß (s. **Abb. 3**).

Was ändert sich in den Berechnungen, verwendet man anstelle der linearen Ansatzfunktion (2) die neue Funktion (8)? Nicht viel, denn eine genaue Analyse aller oben durchgeführten Umformungen zeigt, daß lediglich in (3) das Glied bt_i durch $\hat{b}(-1/t_i)$ zu ersetzen ist, so daß die Größen A, C, E in (4) jetzt die Bedeutung

$$A=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{t_i^2},\qquad C=-\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{t_i},\qquad E=-\sum_{i=1}^{N}\frac{y_i}{t_i}$$

haben, während B und D unverändert bleiben. Für die aus dem Ansatz (8) zu bestimmenden Parameter â und $\hat{b}$ erhält man damit

$$\hat{a}=\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{t_i^2}\sum_{i=1}^{N}y_i-\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{t_i}\sum_{i=1}^{N}\frac{y_i}{t_i}\right]/\hat{Z}, \qquad (9)$$

$$\hat{b}=\left[-N\sum_{i=1}^{N}\frac{y_i}{t_i}+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{t_i}\sum_{i=1}^{N}y_i\right]/\hat{Z}, \qquad (10)$$

$$\hat{Z}=N\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{t_i^2}-\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{t_i}\right)^2.$$

i	t_i	y_i	$1/t_i$	$1/t_i^2$	y_i/t_i
1	68	41	0,014706	0,000216	0,602941
2	73	63	0,013699	0,000188	0,863014
3	78	70	9,012821	0,000164	0,897436
4	83	83	0,012048	0,000145	1,000000
5	88	106	0,011364	0,000129	1,204546
$\sum_{i=1}^{5}$:	390	363	0,06463	0,000842	4,567937
$\sum_{i=1}^{5}{}_{\text{exakt}}$:	390	363	0,064636855	0,000842572	4,5679362

Nun stellt Anna wieder eine Tabelle auf (s. vorige Seite). In der vorletzten Zeile stehen die Zahlenwerte, die sich bei Rundung der Zwischenergebnisse auf jeweils 6 Stellen ergeben, während die letzte Zeile die Werte zeigt, die Anna erhält, wenn sie die Genauigkeit ihres Taschenrechners voll ausnutzt (ohne zwischendurch zu runden).
Anna hat nämlich beim Rechnen festgestellt, daß es hier – aufgrund der sehr kleinen Zahlen – auf höchste Genauigkeit ankommt, da die durchzuführenden Rechenoperationen sehr "empfindlich" gegenüber Rundungsfehlern sind.
Mit den Werten der letzten Zeile, eingesetzt in (9) und (10), erhält man $\hat{a}$=303,3 und $\hat{b}$=17846,3.
Mit anderen Worten, unter allen Funktionen der Gestalt (8), wie eine in Abb. 3 dargestellt ist, beschreibt die Funktion

$$y=g(t)=303{,}3-17846{,}3/t \qquad (11)$$

die bisherige Weltrekordentwicklung am besten.
Nun ist Anna gespannt, welche Schätzungen sich für 1993 und 1995 mit Hilfe des zweiten Ansatzes ergeben. Sie setzt 93 bzw. 95 in die Beziehung (11) ein und ermittelt

$y_{1993} = 111{,}4 \mathrel{\hat{=}} 6{,}11$ m,
$y_{1995} = 115{,}4 \mathrel{\hat{=}} 6{,}15$ m.

Diese Voraussagen erscheinen ihr ziemlich realistisch, so daß sie mit ihrer Rechnung zufrieden ist. Abschließend überlegt sie sich noch, daß sich bei Verwendung der Ansatzfunktion (8) wegen $\hat{a}$=303,3 eine "Schallmauer" von 8,03 m ergibt.

Solltet Ihr Lust bekommen haben, ähnliche Untersuchungen für anderes Datenmaterial oder in anderen Sportarten selbst durchzuführen, könnt Ihr Euch z. B. dadurch üben, daß Ihr als Ausgangspunkt Eurer Prognose nur die vier Weltrekorde von 1968-1983 nehmt. Es müßte sich dann für 1993 beim linearen Ansatz 6,11 m und beim Ansatz (8) 6,08 m als Schätzung ergeben.

Buchtip

Übrigens wurde das beschriebene Problem unter Verwendung viel umfangreicherer Daten auch im Buch Sadovskij L. E., Sadovskij A. L.: Mathematik und Sport, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1991, untersucht.

Dr. Bernd Luderer
Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Chemnitz

Experimente mit dem SR1

Den Taschenrechner SR 1 optimal nutzen zu können, spart eine Menge Zeit. Einige Tips gibt der folgende Beitrag, der ohne weiteres auf andere Rechnertypen übertragen werden kann.

Ist das Produkt von unendlich vielen Faktoren

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\ldots$$

eine endliche Zahl? Und wenn ja, wie groß ist diese Zahl?

Oder anders formuliert:
Man gehe von den zwei Zahlen $x_0=0$ und $P_0=1$ aus und berechne

$x_1 = \sqrt{\frac{1+x_0}{2}}$, $P_1 = P_0 \cdot x_1$, also $x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und

$P_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Wenn x_i und P_i bereits berechnet sind, so bilde man

$x_{i+1} = \sqrt{\frac{1+x_i}{2}}$ und $P_{i+1}=P_i \cdot x_{i+1}$, $i=1,2,\ldots$

Man ermittle $x_1,\ldots,x_{10}$ und $P_1,\ldots, P_{10}$ sowie $\frac{2}{P_1},\ldots,\frac{2}{P_{10}}$ mit dem SR1, dazu stelle man einen Programmablaufplan auf! Kann aus den mit dem SR1 berechneten Werten eine Vermutung geäußert werden, welcher Zahl sich die Größen P_i bzw. $\frac{2}{P_i}$ annähern? (Lösung siehe unten)
Man erhält die Zahlenwerte

i	x	P	$\frac{1}{P}$
0	0	1	1
1	0,70710	0,70710	1,4142136
2	0,92387	0,65327	1,5307484
3	0,98078	0,6407176	1,56075
4	0,99518	0,63763	1,5683018
5	0,99879	0,63686	1,570199
6	0,99969	0,63666	1,5706769
7	0,9999247	0,63661	1,5708154
8	0,99998	0,63659	1,57085
9	0,99999	0,636587	1,5708772
10	0,99999	0,63658	1,5708791

Für i=7 stimmt der Wert $\frac{1}{P_7}$ gut mit der Zahl $\frac{\pi}{2}$ überein, die der SR1 ($\pi\div2$) als 1,5707963 anzeigt. In der Tat kann bewiesen werden, daß die Zahlen P_i gegen $\frac{2}{\pi}$ und die Zahlen $\frac{1}{P_i}$ gegen $\frac{\pi}{2}$ "streben" (konvergieren).
Die für i>7 in der Tabelle erkennbaren Abweichungen sind auf Rundungsfehler des Schulrechners zurückzuführen. Man erhält also mit einem Taschenrechner keine genaueren Näherungswerte, wenn man immer mehr Faktoren des Produkts berücksichtigt!
Daß die Teilprodukte gegen $\frac{2}{\pi}$ streben, wurde von dem französischen Mathematiker und Juristen ***Francois Vieta*** (1540 – 1603) bewiesen. Dieses Resultat ist aber erst nach seinem Tode veröffentlicht worden. Über F. Vieta, dessen Name den meisten Lesern im Zusammenhang mit einem Satz über die Nullstellen von Polynomen (Vietascher Wurzelsatz) bekannt sein dürfte, kann man Interessantes in /1/ erfahren.

Bei unserem Vorgehen müssen Zwischenwerte aufgeschrieben werden. Verzichtet man darauf, sich die Werte x und $\frac{1}{P}$ zu merken, so ist dennoch bei jedem Durchlaufen des Ablaufplanes der Wert P zu notieren und auch wieder in den SR1 einzutasten. Das braucht man bei Rechnern, die mehr als einen Speicher besitzen, nicht! Schematisch könnte dann so vorgegangen werden:
Man teilt dem Rechner die Anfangswerte $x_{alt}=0$, $P_{alt}=1$ und $i_{alt}=0$ mit. Anschließend berechne man

$x_{neu} = \sqrt{\frac{1+x_{alt}}{2}}$,

$P_{neu}=x_{neu}\cdot P_{alt}$ sowie $i_{neu}=i_{alt}+1$.

Da die "alten" Zahlenwerte nun nicht mehr benötigt werden und ein Rechner die Rechen-

Lösung: Der Programmablaufplan für den SR 1 kann so aussehen:

0 + 1 = ÷ 2 = √   x → M ·   = $\frac{1}{x}$

Ergebnis ist x. Notieren!   Eingabe des jeweiligen P   Notiere P

MR

Notiere $\frac{1}{P}$

operationen im ***Rechenwerk*** ausführt, kann das Ergebnis an den gleichen Stellen des ***Speichers*** abgespeichert werden, an denen die entsprechenden "alten" (jetzt für die Rechnung nicht mehr benötigten) Werte stehen. Das führt zu der (anfangs ungewohnten) Schreibweise

$$x=\sqrt{\frac{1+x}{2}},\qquad P=x\cdot P,\qquad i=i+1.$$

(Lies: Das neue x ergibt sich als Quadratwurzel aus der halben Summe von 1 und dem alten x. Das neue P erhält man als Produkt des alten P mit dem (jetzigen, aktuellen) x-Wert. Der neue i-Wert ergibt sich aus dem alten i durch Addition von 1.)

Dieses Vorgehen kann in einem ***Flußdiagramm*** dargestellt werden. Hier soll / als Divisionszeichen und SQR(Y) für $\sqrt{Y}$ (square root) geschrieben werden:

Setze X = 0, P = 1, I = 0
↓
I = I+1
↓
X = SQR((1+X)/2)
↓
P = P X
↓
Q = 1/P
↓
Ausgabe von I, X, P, Q

Aufgabe: Stelle ein Flußdiagramm auf, mit dem die Werte $P_1,\dots,P_N$ berechnet werden! Modifiziere anschließend das Diagramm so, daß nur bei jedem 3. Durchlauf die Näherungswerte P und Q (also P_3, Q_3, P_6, Q_6 usw.) ausgegeben werden!

Das betrachtete Produkt kann man auch in anderer Form notieren.
Bekanntlich ist

$$\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{\frac{1}{2}}\text{ und }\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}\text{ für alle }\alpha.$$

Daher gilt auch

$$\frac{2}{\pi}=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\pi}{2^n}\cdot\ldots$$

Man kann sogar zeigen, daß die Produkte

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\alpha}{2^n}$$

mit wachsendem n sich dem Wert $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ "nähern".

Gegen $\frac{\pi}{2}$ strebt auch das folgende unendliche Produkt:

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

Dies wurde 1656 von dem englischen Philosophen und Mathematiker ***John Wallis*** (1616 – 1703) veröffentlicht.

Mit einem Computer können wir leicht Näherungswerte berechnen:

1. Setze i=0 und P=1.
2. i=i+1
3. Wenn i eine ungerade Zahl ist, setze
   $P=P\cdot\frac{i+1}{i}$.
4. Wenn i eine gerade Zahl ist, setze
   $P=P\cdot\frac{i}{i+1}$.
5. Notiere i und P.
6. Gehe zu 2.

Für jedes i ist entweder bei Anweisung 3 oder bei Anweisung 4 der Wert von P zu ändern. Faßt man benachbarte Faktoren zusammen, so erhält man die Formel

$$\frac{\pi}{2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{36}{35}\cdot\frac{64}{65}\cdot\ldots\cdot\frac{4n^2}{4n^2-1}\cdot\ldots$$

Näherungswerte erhält man nach dem Schema
1. Setze i=0 und P=1.
2. i=i+1
3. $P=P\cdot\frac{4\cdot i\cdot i}{4\cdot i\cdot i-1}$
4. Notiere i und P.
5. Gehe zu 2.

Die Folge der P-Werte ist ***echt monoton wachsend***.

Mit dem SR1 erhält man im ersten Fall die "Näherungen"
2 $1{,}3\overline{3}$ $1{,}7\overline{7}$ $1{,}42\overline{2}$ $1{,}706\overline{6}$ 1,463 1,672 1,486
bzw. im zweiten Fall
$1{,}3\overline{3}$ $1{,}42\overline{2}$ 1,463 1,486 1,501 1,512.
Man erkennt, daß die Näherungen nur langsam gegen $\frac{\pi}{2}$ "streben". Die Formeln sind deshalb für die Berechnung von π ungeeignet.

Eryk Lipinski
aus: Eulenspiegel, Berlin; 28/88

Teilnehmer unserer Arbeitsgemeinschaft "Kleinrechnertechnik" haben diese und andere Formeln in BASIC-Programme für den Kleincomputer KC 85/3 aus Mühlhausen und für den Commodore C 64 umgesetzt, um das Konvergenzverhalten zu untersuchen. ***Für programmierbare Rechner ist es leicht, gleiche Rechenwege mit immer neuen Zahlen***, so wie es in den geschilderten Ablaufplänen und Flußdiagrammen der Fall ist, ***zu durchlaufen***. Wegen der begrenzten Zahldarstellung treten jedoch laufend Rundungsfehler auf. Deshalb muß man auch für programmierbare Rechner nach effektiven Algorithmen suchen!

1. Schon Leibniz (1646 – 1716) wußte, daß die Summen

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots$$

gegen $\frac{\pi}{2}$ streben, allerdings sehr langsam! Gib einen Programmablaufplan für den Schulrechner SR1 an, benutze dabei den Speicher des Rechners! Bestätige, daß man nach Aufsummieren von 51 Gliedern (also bis $\ldots-\frac{1}{101}$) lediglich die Abschätzung $3{,}121<\pi<3{,}162$ erhält.

2. Überlege, wie man mit dem SR1 die Teilsummen der Reihe

$$\frac{1}{1\cdot3}-\frac{1}{3\cdot3^2}+\frac{1}{5\cdot3^3}-\frac{1}{7\cdot3^4}+\frac{1}{9\cdot3^5}-\frac{1}{11\cdot3^6}+\frac{1}{13\cdot3^7}-\frac{1}{15\cdot3^8}+\ldots$$

berechnen kann! Gib dafür einen Ablaufplan an! Wie könnte man diesen Programmablaufplan für einen Rechner mit zwei oder drei Speicherplätzen modifizieren?

Bestätige, daß man folgende Teilergebnisse (Anzeige mit 5 Stellen) erhält:

0,33333 0,29630 0,30370 0,30194

0,30239 0,30227 0,30230 0,30229

Man kann beweisen, daß die Teilsummen ***alternierend*** (von oben und unten) gegen $\frac{\pi}{6\cdot\sqrt{3}}$ streben. Aus den obigen Ergebnissen folgt dann:
$3{,}14153<\pi<3{,}14163$.

Literaturhinweise

/1/ H. Wußing, W. Arnold: Biographien bedeutender Mathematiker. Volk und Wissen. Berlin 1983
/2/ Schmidt / Wenzel: Chancen für Denkfaule? Taschenrechner und/oder Mathematik. alpha Heft 2, 1985

Uta Schmidt, Dr. Werner Schmidt
E.-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

Zeitungsschnipsel

Auch ein flüchtiger Zeitungsleser wird immer wieder auf Meldungen stoßen, die etwas mit Mathematik zu tun haben. Wenn ihr einen solchen Schnipsel findet, schneidet ihn doch bitte aus und sendet ihn an uns!
Vergeßt aber bitte nicht, die Quelle anzugeben.

Superlative

Das schnellste Auto, für das wohl eher die Bezeichnung "Rakete auf Rädern" angebracht wäre, steuerte der Brite Richard Noble über eine extra für den Rekord präparierte Strecke in einer Wüste in Nevada. Die Regeln für solche Rekordversuche schreiben vor, daß eine Strecke von einer Meile in beiden Richtungen (um den Windeinfluß auszuschalten) durchfahren werden muß. Für beide Fahrten werden die erzielten Zeiten gemessen. Als offizielle Rekordgeschwindigkeit wird dann die Durchschnittsgeschwindigkeit über die Gesamtstrecke (von zwei Meilen) gewertet.
Richard Noble erreichte mit seinem von einer Flugzeugturbine angetriebenen Wagen "Thrust 2" während der ersten Fahrt eine Geschwindigkeit von v_1=1004,403 km/h und während der zweiten Fahrt eine Geschwindigkeit von v_2=1034,540 km/h.

Wie hoch war die offizielle Rekordgeschwindigkeit v_R?

Auf der Jagd nach Superlativen war für Euch stud. math. und Weltrekordhalter Ralf Laue, Leipzig.

Der Schweizer Stefan Gauler erzielte im vergangenen Oktober einen neuen Weltrekord im **24 – Stunden – Einradfahren**. Nur von kurzen Pausen unterbrochen, radelte er auf einem Sportplatz in Kreuzlingen in 24 Stunden 279,274 km weit.
Sein Einrad hatte – den Regeln für solche Rekordversuche entsprechend – einen Raddurchmesser von 26 Zoll und eine Übersetzung von 1:1.

Wieviele Pedaltritte waren für den Rekord nötig?
(Hinweis: 1 Zoll=2,54 cm)

Die „Rainbow Bridge"

Eines der beeindruckendsten Naturwunder in den USA ist der größte Natursteinbogen der Welt, der mit 88 m Höhe und 84 m Breite das Tal des Flüßchens Colorado überbrückt. Der Colorado, der im Sommer oft austrocknet, hat in Millionen Jahren die weicheren Gesteinsschichten weggespült und ließ von einem massiven Felsen nur die "Regenbogenbrücke" stehen. Vor wenigen Jahrzehnten wurde ein Staudamm errichtet und der Colorado mit seinen Nebenflüssen auf einer Länge von 300 km zum "Lake Powell" angestaut.

Foto: A. Strick, Köln

• **Wieviel Stockwerke besitzt mindestens ein Wohnhochhaus mit den angegebenen Maßen, dessen Höhe h größer als die Höhe 88 m der "Rainbow Bridge" ist?**

Abb. 1

Das von der "Regenbogenbrücke" und ihrem Spiegelbild im "Lake Powell" umrandete Oval ähnelt einer Ellipse mit den Halbachsen a= 88 m und b= 42 m. Eine Ellipse ist eine ebene geschlossene Kurve mit zwei aufeinander senkrecht stehenden Symmetrieachsen, für deren Punkte X gilt: Die Summe der Abstände eines Kurvenpunktes X von zwei geeignet fest gewählten Punkten F_1 und F_2, den Brennpunkten, ist für alle Kurvenpunkte eine konstante Größe k.

$K = \overline{XF_1} + \overline{XF_2}$

• Für das als Ellipse aufgefaßte Oval der "Rainbow Bridge" und ihres Spiegelbildes ist der Abstand $\overline{F_1 + F_2}$ ihrer Brennpunkte F_1 und F_2 zu berechnen. (Üblicherweise wird $\overline{F_1 + F_2}$ mit 2e bezeichnet.)

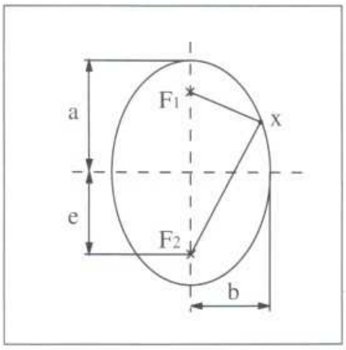


Abb. 2

Um ein ellipsenförmiges Gartenbeet anzulegen, schlägt der Gärtner an zwei Stellen, den Brennpunkten, Pfähle in die Erde und bindet die Enden eines Strickes an beide Pfähle. Ein angespitzter dritter Pfahl ritzt mit seiner Spitze die Ellipse in die ebene Gartenfläche, wenn dieser so bewegt wird, daß der um ihn gelegte Strick stets straff gespannt ist.

• Das als Ellipse aufgefaßte Oval der "Regenbogenbrücke" und ihres Spiegelbildes ist mittels "Gärtnerkonstruktion" im Maßstab 1:3000 zu zeichnen.

Spielereien mit dem Taschenrechner

Zwei-Drei

Ein Spiel zu zweit mit einem Taschenrechner
Am Anfang steht 1 auf der Anzeige. A darf wählen, ob er mal 2 (01) oder mal 3 (02) nehmen will. Dann wählt B zwischen 01 und 02, nachfolgend A usw. Gewonnen hat, wer als erster über 1000 kommt.

Zum Beispiel:

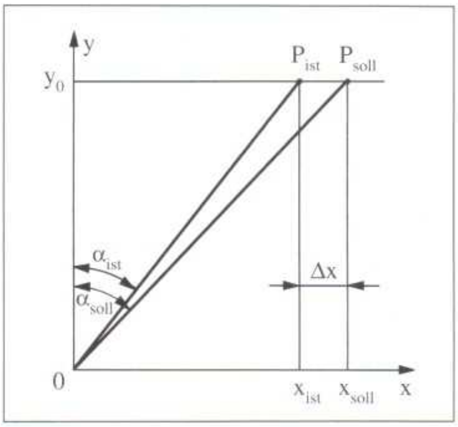
Operation		A:01	B:02	A:02	B:02	A:01
Anzeige	1	2	6	18	54	108

B:01	A:01	B:02
216	432	1296

B hat gewonnen.
Bei diesem Spiel gibt es nur 11 mögliche Endergebnisse. Wer Lust hat, sollte diese ermitteln!
Das Spiel stammt von Texas Instruments und wurde mitgeteilt von Claudia Erdmann, Leipzig.

Zielschießen

Ein Spiel zu zweit zur Förderung des Augenmaßes



Der Schütze befinde sich im Koordinatennullpunkt 0 (siehe Abb.) und ein Ziel befinde sich im Punkt P_{soll}, der auf der Geraden $y=y_0$ (Zielpunkt-Gerade) liegt. Die Koordinaten y_0 und x_{soll} seien bekannt. Für das Spiel kann man ein Koordinatennetz auf Millimeterpapier anordnen.
Der Spieler bestimmt nach Augenmaß den Zielwinkel. Gibt der Spieler einen Winkel α_{ist} (in Bezug auf die y-Achse) an, dann wird ein Punkt P_{ist} auf der Zielpunkt-Geraden getroffen, der in einem Abstand Δx von P_{soll} liegt. Überschreitet dieser Schußfehler einen vorgegebenen Wert nicht, dann ist das Ziel als getroffen anzusehen, und umgekehrt. Es gewinnt der, der mehr Ziele trifft.

Die vom Schiedsrichter mit dem Taschenrechner auszuführenden Rechnungen sind relativ einfach:
1. Die Abszisse x_{ist} des getroffenen Punktes P_{ist} nach der Formel $x_{ist}=y_0 \tan \alpha_{ist}$ berechnen.
2. Den Schußfehler $\Delta x=x_{ist}-x_{soll}$ berechnen. (Dieser Schritt kann oft im Kopf gemacht werden.)

Man vergleiche dann Δx mit dem vorgegebenen höchst zulässigen Fehler Δx, um zu entscheiden, ob das Ziel getroffen ist.
Zahlenbeispiel: Gegeben sind: $\Delta x=0{,}5$; $y_0=20$; $x_{soll}=30$.
Der Spieler schätzt den Zielwinkel auf $\alpha_{ist}=55°$.

Berechnungen:
$\tan\alpha_{ist} = \tan 55° = 1{,}428148$
$x_{ist} = y_0 \tan\alpha_{ist} = 20 \cdot 1{,}428148 = 28{,}56296$
$\Delta x = x_{ist}-x_{soll} = 28{,}56296 - 30 = -1{,}43704$
$|-1{,}43704| > 0{,}5 \rightarrow$ Fehlschuß
Bei einem zweiten Versuch wurde der Zielwinkel auf $\alpha_{ist}=56°$ geschätzt. Damit ergibt sich:

$\tan 56° = 1{,}4282561$
$20 \cdot 1{,}482561 = 29{,}65122$
$29{,}65122 - 30 = -0{,}34878$
$0{,}34878 < 0{,}5 \rightarrow$ Ziel getroffen.

Programmablauf für den SR1:

Eingabe α_{ist} | tan | x | Eingabe y_0 | = | Eingabe x_{soll} | =

Die Spielbedingungen können beliebig festgelegt werden. Etwa:
a) Die Anzahl der festgelegten Zielpunkte ist n.
b) Jeder Schütze hat bei jedem Zug k Schüsse frei.
c) Jedes getroffene Ziel wird entfernt.
d) Am Spiel können mehrere Schützen teilnehmen, und dgl. mehr.

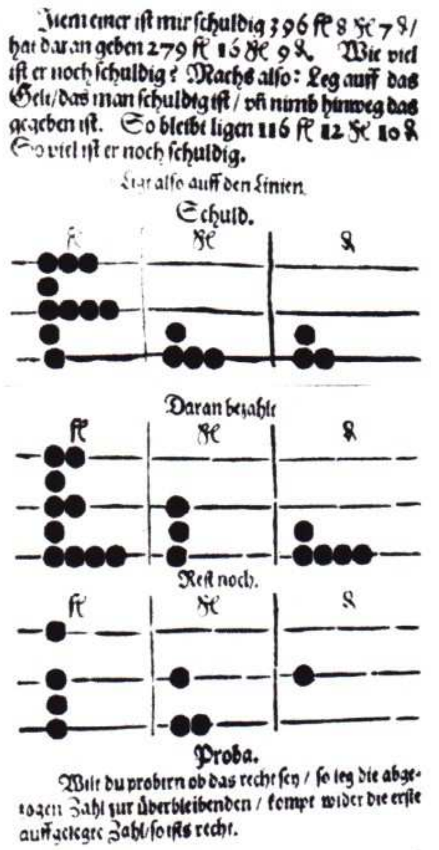
Bei gewisser Erfahrung kann ohne Papier gespielt werden.
Hinweis: Ihr könnt das "Zielschießen" zu einem Computerspiel ausbauen. Dazu laßt ihr euch vom Zufallszahlengenerator Zahlen x_{soll} und y_{soll} im Rechner erzeugen. Diese Zahlen sind den Spielern nicht bekannt! Auf dem Bildschirm wird der zugehörige Punkt P_{soll} in einem x-y-Koordinatensystem angezeigt. Nach der Eingabe des Schätzwertes für α_{ist} wird auch P_{ist} in die Grafik eingetragen. Es ist nun auch möglich, den Fehler Δx und eine Information über Treffer bzw. Fehlschuß auszugeben.

Ein Spiel von Leonid und Iwan Kryshanowski, für alpha bearbeitet von Dr. W. Schmidt

***alpha-historisch* wird in diesem Heft allein dem wohl allgemein bekanntesten Mathematiker Adam Ries anläßlich seines 500. Geburtstages gewidmet.**

Rechnen bei dem Rechenmeister Adam Ries (1492 – 1559)

Bis zur Wende vom 15. zum 16. Jahrhundert hatten sich in Europa verbreitet frühkapitalistische Wirtschaftsformen herausgebildet. Gewerbliche Produktion, Handel und Geldumlauf erreichten einen noch nicht gekannten Umfang. Rechenmeister, die in den Städten bei Waren- und Finanzgeschäften für die Bürger und die kommunalen Verwaltungen die Rechenarbeiten ausführten, vermittelten in Rechenschulen und durch Rechenbücher die notwendigen Rechenkenntnisse.


Item einer ist mir schuldig 396 fl 8 gr 7 ₰ / hat daran geben 279 fl 16 gr 9 ₰. Wie viel ist er noch schuldig? Machs also: Leg auff das Gelt/das man schuldig ist / vnd nimb hinweg das gegeben ist. So bleibt ligen 116 fl 12 gr 10 ₰ Soviel ist er noch schuldig.
Stet also auff den Linien.

Proba.
Wilt du probirn ob das recht sey / so leg die abgezogen Zahl zur überbleibenden / kompt wider die erste auffgelegte Zahl/so ists recht.

***Abb. 1:* Subtraktionsaufgabe auf den Linien, Rechenbuch von 1522, Auflage Nürnberg 1629**
Vollkreise = Rechenpfennige. Lage auf den Linien und in den Zwischenräumen von unten Einer, Fünfer, Zehner, Fünfziger, Hunderter. 5 Einer bündelt man zu 1 Fünfer, 2 Fünfer bündelt man zu 1 Zehner, ebenso umgekehrt. 1 fl (Gulden) = 21 g (Groschen), 1 g = 12 ₰ (Pfennige).

Von den deutschen Rechenmeistern erlangte der aus Staffelstein in Franken stammende Adam Ries besondere Volkstümlichkeit. Noch heute erinnert die sprichwörtliche Redensart "Das macht nach Adam Ries ..." an ihn, mit der die Richtigkeit eines Rechenergebnisses unterstrichen werden soll. Er schrieb hervorragende Rechenbücher mit systematischem Aufbau und klarer, verständlicher Darstellung des Inhalts in deutscher Sprache. Das Oktavbändchen von 1522 "Rechenung auff der linihen vnd federn" bezeichnete der Mathematiker Michael Stifel 1545 als "das aller gebreuchlist (allergebräuchlichste)". Es erschien bis 1656 an Druckorten zwischen Zürich und Stettin (heute Szczecin, Polen) in mindestens 108 Auflagen und übertraf damit die anderen Rechenbücher jener Zeit um ein Vielfaches.

Der Rechenmeister und seine Rechenweisen

Adam Ries ließ sich 1518 in Erfurt nieder. Im gleichen Jahr verfaßte oder vollendete er sein erstes Rechenbuch "Rechnung auff der linihen". Er behandelte das Rechnen mit den Rechenpfennigen, die durch ihre Anzahl und Lage auf den Linien eines Rechentisches, -brettes oder -tuches die Zahlen darstellen und beim Rechenvorgang hinzugelegt oder weggenommen werden (s. **Abb. 1**). Diese Rechenweise war durch den bisher üblich gewesenen Gebrauch der Zahlen mit römischen Ziffern entstanden, die zum Rechnen ungeeignet sind. Am Ende seines Buches kündigte Ries an, daß eine Arbeit über das schriftliche Rechnen ("auff der federnn") mit den indisch-arabischen Zahlzeichen nachfolge. Er erkannte die Zweckmäßigkeit und Gewandtheit der aufkommenden Rechenart, die zuerst in den Kontoren der Kaufleute das Rechnen auf den Linien verdrängte. Man konnte mit den Zahlen auch rechnen und die Rechnungen in einem Zuge mit den Schreibarbeiten durchführen.

Zugleich nahmen die Gedanken von Adam Ries Gestalt an, das Rechnen auf den Linien und das schriftliche Rechnen in Aufeinanderfolge als Einheit zu lehren. Es entstand 1522 in Erfurt das zweite Rechenbuch "Rechenung auff der linihen vnd federn", das wohl gerade auch wegen der methodischen Verbindung der beiden Rechenweisen eine so gute Aufnahme fand (s. o.) und mit dem Adam Ries einen sehr wesentlichen Anteil an der Verbreitung des schriftlichen Rechnens mit den indisch-arabischen Ziffern hatte. Später teilte der Rechenmeister in dem dritten, dem großen Rechenbuch "Rechenung nach der lenge auff den Linihen vnd Feder" von 1550 seine Erfahrungen und Ansichten mit: "Ich habe befunden in vnder weisung der Jugent das alle weg / die so auff den linihen anheben des Rechens fertiger vnd laufftiger werden / den̄ so sie mit den ziffern die Feder genant anfahen / In den Linien ... schöpffen sie einen besseren grund / Mügen als denn mit geringer mühe auff den ziffern jre Rechnung volbringen."

Ries gelang es in dem Rechenbuch von 1522, den Inhalt übersichtlich nach den Rechenverfahren und den Anwendungsgebieten und konsequent nach zunehmender Komplexität und Schwierigkeit der Aufgaben anzuordnen. Auf Beispiele zur Regula de tri (Dreisatz), die den breitesten Raum einnehmen, folgen Kapitel zur Regula falsi (doppelter falscher Ansatz) und zur Regula Cecis oder Virginum (Zechenaufgaben, im allgemeinen unbestimmt). "Regula De tri. Ist ein Regel vonn dreien dingen / setz hinden das du wissen wilt / würdt die frag geheyssen / Das jhm vnder den andern zweyen am namen gleich ist setz forn / vn̄ das ein ander ding bedeut mitten / Darnach multiplicir das hinden vnnd mitten steht durcheinander / das darauß kompt theyle ab mit dem fordern / so hastu wie thewer (teuer, bei der Frage nach dem Warenpreis, wie in dem anschließenden Exempel) das dritt kompt / vnnd das selbig ist am namen gleich dem mitteln. Item 32 eln (Ellen) tuchs für 28 fl (Gulden) / wie kom̄en 6 eln? facit 5 fl / 5 groschen / 3 (Pfennige) / setz also. Eln. fl. eln
32 28 6
(1 fl = 21 Groschen, 1 Groschen = 12 , es ist


Adam Risen. 52
Von Gesellschafften.
Item ihr drey machen ein Gesellschafft also / der erste legt 123. fl. Der ander 536. Vnd der dritt 141. haben gewunnen 130. fl. wie viel gebürt jeglichem? Facit dem ersten vom gewinn 19. fl. 19. ß. 9 hlr. Dem andern 87. fl. 2. ß. Vnd dem dritten 22. fl. 18. ß. 3. hlr. Machs also: Setz hinden wie viel ein jeder in sonderheit gelegt hat / summir solches / vnd was da kompt schreib forn / ist dein theiler / vnd den gewinn mitten/ also:

$$800 \quad 130.\,\text{fl.} \quad \left\{\begin{matrix}123\\536\\141\end{matrix}\right.$$

Rechen einen nach dem andern/so kompt einem jeden sein facit/wie oben bestimpt.
G iiij Item

***Abb. 2:* Aufgabe der Gesellschaftsrechnung, Rechenbuch von 1522, Auflage Frankfurt am Main 1574**
1 fl (Gulden) = 20 ß (Schillinge), 1 ß = 12 hlr (Heller).
Es ist zu rechnen:
$\frac{123\cdot 130}{800}$ **fl,** $\frac{536\cdot 130}{800}$ **fl und** $\frac{141\cdot 130}{800}$ **fl.**

zu rechnen $\frac{6 \cdot 28}{32}$ fl). Nach der Vorschrift des Dreisatzes lassen sich auch die Aufgaben aus der Gesellschaftsrechnung und aus der Münzberechnung auf S. 14 lösen (s. auch **Abb. 2**)

Das "Machs also" forderte auf, den vorgegebenen Weg zu beschreiten; eine theoretische Begründung war nicht üblich. Durch die Probe konnte man sich von der Richtigkeit des Ergebnisses überzeugen.

Wichtige Stationen im Leben von Adam Ries

Der Aufenthalt von Adam Ries in Erfurt war für seine wissenschaftliche Bildung ganz entscheidend. Der Gelehrte Georg Stortz regte ihn zu mathematischen Studien an und legte ihm die Herausgabe seiner Arbeiten über die Rechenkunst und die Algebra nahe. In der Bibliothek seines Förderers las der Rechenmeister die Rechenbücher von Johannes Widmann (s. alpha 4/1989, S. 86 – 87), Jakob Köbel und Heinrich Schreiber (Grammateus) und zwei Quellenschriften Widmanns, den heutigen Handschriftensammelband C 80 Dresdensis mit Algebratexten und ein von Ries nicht genauer bezeichnetes Werk, vielleicht die Regensburger Practica des Fridericus Gerhart. Die ursprüngliche Absicht, das schriftliche Rechnen "mit sampt den regelnn Algebre" zu behandeln, gab er auf. Ries hatte festgestellt, daß er die wenig erfahrenen Leser seiner Rechenbücher nicht mit den noch ungewohnten Denkweisen, Lösungsansätzen und Symbolen der Algebra, der man nach der gesuchten Unbekannten, dem Ding oder der Sache (ital. cosa), den Namen Coß gab, überfordern durfte. Er schrieb eine getrennte Arbeit zur Algebra, seine Coß, aus der er schon 1523 nach seiner Übersiedlung nach Annaberg unterrichtete und deren erste Fassung er 1524 in Annaberg vollendete (Beispiel S. 14). Da er sie aber niemals zum Druck bringen konnte, blieb ihr eine größere Verbreitung versagt, obwohl der Inhalt wie bei den Rechenbüchern gut erfaßt und dargestellt war. (1992 wird die Coß mit ihren beiden Fassungen erstmals vollständig veröffentlicht.) Die Rechenbücher und die Coß von Ries enthalten Aufgaben, die auf die in Erfurt eingesehenen Werke zurückgehen.

Bereits auf früheren Reisen hatte Adam Ries den Silberreichtum des Erzgebirges kennengelernt. Die Betriebsamkeit der Bergstädte und der Bergreviere zog ihn in ihren Bann und ließ befriedigende Arbeit für ihn erwarten. In Annaberg, das er wahrscheinlich Anfang 1523 zu seinem Wohnsitz nahm, kam er beim Rat und bei den Bürgern zu Ansehen. 1525 erwarb er das Haus in der Johannisgasse, in dem er seine Rechenschule einrichtete. (Heute befindet sich dort das Adam-Ries-Museum.) Auf Veranlassung des Rates der Stadt schuf Ries

Abb. 3: Titelblatt des Rechenbuches von 1550

eine Reihe von Tabellen zur Brotrechnung, die 1536 zusammen mit anderen Übersichten von Maßen, Gewichten und Preisen in dem "Gerechent Büchlein" erschienen (s. alpha 2/1988, S. 26 – 28).

Bald nach der Ankunft in Annaberg begann Adam Ries eine Tätigkeit im Bergrechnungswesen als Rezeßschreiber des Bergamtes. 1532 wurde er Gegenschreiber, und von 1533 bis 1539 erhielt er zusätzlich für das Bergrevier Geyer als Zehntner die oberste Leitung und Aufsicht der Verarbeitung der Silbererze zum Münzsilber, der Zehntabgabe und des Geldverkehrs. Aufgaben zur "Silberrechnung", zur "Schickung des Tigels" und zum "Müntzschlag" (s. Aufgabe der Münzberechnung S. 14) hatte der Rechenmeister schon in sein Rechenbuch von 1522 aufgenommen. Nach der Bergordnung seines Landesherren Herzog Georg von 1509 mußte Ries als Bergbeamter die schriftlichen Belege mit den römischen Zahlzeichen anfertigen, während er doch in seinen Rechenbüchern von Anfang an die indisch-arabischen Ziffern verwendete. In der Mitte des 16. Jahrhunderts setzte sich die neue Zahlenschrift im Bergrechnungswesen durch. Das Manuskript von Ries über die "Bergkrechnung", das 1554 oder wenig später entstand, enthält sie ebenfalls. 1539 war der Rechenmeister mit dem Titel eines Hofarithmeticus geehrt worden.

Die Herausgabe des dritten Rechenbuches gelang ihm erst 1550 mit dem von Kurfürst Moritz von Sachsen für die Druckkosten geborgten Geld. Auf dem Titelblatt befinden sich das einzige überlieferte Porträt von Adam Ries und das Wappen mit dem Probenkreuz der Neunerprobe (**Abb. 3**).

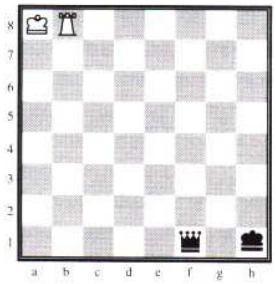
Man sagte über das Buch: "Wer Riesens Exempla solviret (löst), der soll für einen Meister in der Rechenkunst gelten."

Dr. Harry Beyrich, Chemnitz

Geometrie auf dem Schachbrett

In einem Längstzüger muß Schwarz immer seinen längsten Zug ausführen, d. h., der Abstand zwisschen dem Mittelpunkt des Ausgangsfeldes und des Zielfeldes muß so groß wie möglich sein. Bei mehreren gleich langen Zügen steht die Auswahl natürlich frei. Die Länge eines Feldes wird mit 1 definiert. Der kürzere Schrägzug hat die Länge von rund 1,41, resultierend aus $\sqrt{a^2+b^2}$. So ist z. B. der Zug vom Feld f1 nach a6 mit der geometrischen Länge von rund 7,07 ($\sqrt{5^2+5^2}$) länger als der Zug vom Feld a8 nach h8 mit 7. Ein Springerzug wird mit der Länge von rund 2,24 ($\sqrt{1^2+2^2}$) bewertet. Die Pflicht von Schwarz in einer Längstzüger-Aufgabe immer den geometrisch längsten Zug auszuführen, wird besonders im Selbstmatt ausgenutzt. Beim Selbstmatt zieht Weiß an und zwingt Schwarz, Weiß nach n Zügen matt zu setzen. Das Selbstmatt stellt somit eine Umkehrung des normalen Spielgeschehens dar, so wie etwa die Nullspiele im Skat.

In dem Viersteiner (Diagramm 1) von Manfred Zucker („Die Schwalbe" 1972) verläuft die Lösung wie folgt: 1. Tb7 Da6+ (längerer Zug als … Df8+), 2. Ta7 Df1, 3. Th7+ Dh3 (länger als … Kg2), 4. Ta7 Dc8 matt.



Selbstmatt in vier Zügen Längstzüger

Die Aufgabe von J. Sunyer („Chess Amateur" 1927) im Diagramm 2 sollte zum Lösen probiert werden. Zeichnet man hierbei den Lösungsverlauf auf dem Schachbrettdiagramm nach, dann ergibt sich durch die Züge der schwarzen Dame ein achtzakkiger Stern. Weiß beginnt mit 1. c4.

Selbstmatt in acht Zügen Längstzüger

Harald Rüdiger, Werk für Fernsehelektronik Berlin

Erfurt Foto: Christine Riesterer

Annaberg-Buchholz Foto: Hoffmann

Die Adam-Ries-Städte

Viele Schüler wissen aus dem Mathematikunterricht, Adam Ries lebte lange Zeit in Annaberg im Erzgebirge. In welcher Stadt wurde Ries geboren?
Meist nannte uns der Rechenmeister in den Titeln seiner Bücher die Geburtsstadt. So liest man auf dem Rechenbuch von 1525, "Rechnung auff der linihen gemacht durch Adam Riesen vonn Staffelsteyn ...".

Staffelstein

Wer mit Auto oder Eisenbahn von Coburg nach Bamberg fährt, wird auf die oberfränkische Kleinstadt Staffelstein aufmerksam. Einen Aufenthalt in der Stadt mit etwas mehr als 10000 Einwohner kann man nur empfehlen. Die wunderbaren Häuser rund um das Rathaus (s. Foto unten) versetzen den Betrachter beinahe ins Mittelalter. Links neben dem Eingang befindet sich ein lebensgroßes Sandsteinrelief. Dieses Ries-Denkmal wurde 1959 zu den Feiern anläßlich des 400. Todestag des Rechenmeisters eingeweiht. Im Heimatmuseum gibt es eine Ausstellung über den berühmtesten Sohn der Stadt. Es ist eine Kuriosität, daß der Annaberger Ries-Forscher Berlet vor etwa 150 Jahren die Staffelsteiner erinnern mußte, Adam Ries sei in ihrer Stadt geboren. Wer den Besuch in der Ries-Geburtsstadt plant, sollte das einzigartige Altstadtfest am letzten Sonntag im Juli und das herrliche Thermalbad einbeziehen. Bereits im frühen Mittelalter führten die Nord-Süd-Handelsstraßen von Nürnberg über Staffelstein nach Erfurt und Leipzig zur Nordsee. Staffelstein muß bereits ein bedeutender Handelsplatz gewesen sein, denn der Ort erhielt 1130 Markt-, Bann- und Zollgerechtigkeit.

Erfurt

Mit den nach Norden ziehenden Händlern könnte Ries nach Erfurt gelangt sein. Es gilt als sicher, daß Ries 1518 in Erfurt wohnte und bald eine Rechenschule eröffnete. Im gleichen Jahr wurde das erste Rechenbuch "Rechnen auf den Linien" fertig. Das zweite Rechenbuch ließ Ries 1522 mit dem "alten" und neuen Rechnen (Rechnen mit der Feder) in Erfurt bei Mathes Maler im Haus "Zum Schwarzen Horn" drucken. Diese Druckerei befand sich in der Nähe des Universitäthauptgebäude in der Michaelisstraße und druckte vor allem für den Rat der Stadt und die Universität, die damals eine der bedeutendsten deutschen Universitäten war; hier studierte auch Martin Luther. Heute ist Erfurt die Landeshauptstadt von Thüringen mit etwa 220000 Einwohnern. Zu den bekannten Bauwerken gehören Dom und Severikirche auf dem Petersberg, das Andreasviertel und der Fischmarkt mit dem Rathaus sowie ganz in dessen Nähe die Krämerbrücke (s. Foto oben links).
Sie war zur Zeit von Adam Ries der Schnittpunkt der wichtigen Handelsstraßen von Nord nach Süd und von Ost nach West. In diesem Jahr feiert man auch noch die erste urkundliche Erwähnung vor 1250 Jahren und das 600. Gründungsjahr der ehemaligen Universität.

Staffelstein Foto: Sabine Vogler

Annaberg

Warum Adam Ries Erfurt verließ, weiß niemand. Vielleicht hat der Universitätsgelehrte Stortz, der aus einer bedeutenden Annaberger Familie stammte, seinem Freund Ries geraten, in diese Stadt zu gehen. Nach umfangreichen Silbererzfunden wurde 1496 Annaberg gegründet. Der rasch zunehmende Bergbau ließ den Ort schnell wachsen. Man brauchte Leute, die die Abrechnung der Erzförderung der vielen Bergwerke durchführten. Ries wurde anerkannter Bergbeamter, 1539 ernannte ihn der sächsische Fürst zum "Hofarithmeticus". In der heutigen Kreisstadt Annaberg-Buchholz leben etwa 27000 Einwohner. 1991 erhielt eine Sandsteinbüste mit dem Ries-Porträt wieder einen würdigen Standort, nachdem 1943 die Bronzebüste eingeschmolzen worden war. Die Annenkirche ist noch immer das alles überragende Wahrzeichen, und im Wohnhaus des Rechenmeisters befindet sich das Adam-Ries-Museum (s. Foto oben rechts). Alle drei Städte konnten durch die politischen Veränderungen in Deutschland die Jubiläumsfeierlichkeiten gemeinsam vorbereiten.

Manfred Weidauer, Erfurt

Dem „... gemeinen man zu nutze ...“

schrieb Adam Ries seine Rechenbücher im damaligen Deutsch.

Item ſo das korn 14 groſchen gilt / begkt man ein pfennig brodt wigt 34 lot/wie ſchwer ſol man es bagken ſo es auff ſchlecht/ vnd 17 groſcheu gilt/ facit 28 lot/machs durch verkerung ſetz.

17 34.lot 14

Item

Euch zunutze übertrugen OStR Johannes Lehmann und StR Theodor Scholl 18 Aufgaben in unser heutiges Deutsch. Obige Aufgabe findet Ihr (mit veränderten Zahlenwerten) in Aufgabe 9 der Klassenstufe 7 wieder. Viel Spaß beim Lösen!

Klassenstufe 5

1) Ein Vater und sein Sohn wollen den Sankt-Peter-Dom in Rom besuchen. Der Sohn geht jeden Tag 9 Meilen, der Vater jeden Tag nur 6 Meilen. Weil der Vater früher aufgebrochen ist als sein Sohn, hat er ihm gegenüber 100 Meilen Vorsprung. In wieviel Tagen holt der Sohn den Vater ein?

2) Ein Hofmeister verleiht 12 Pferde für die Dauer eines Jahres an einen Wirt mit der Bedingung, daß dieser jedem Pferd pro Woche einen Scheffel Hafer, 40 Bund Heu und 10 Bund Stroh verabreicht. Welche Kosten entstehen dem Wirt, wenn ein Scheffel Hafer 4 Groschen, 40 Bund Heu 3 Groschen und 10 Bund Stroh 2 Groschen kosten? (1 Jahr = 52 Wochen)

3) Jemand beschäftigt 13 Arbeiter 17 Tage lang und zahlt jedem pro Tag 15 Pfennige. Wieviel Lohn muß er insgesamt zahlen?

Klassenstufe 6

4) Ein Vater liegt auf dem Totenbett und hinterläßt seine Frau, einen Sohn und zwei Töchter. Entsprechend seinem letzten Willen soll von dem vorhandenen Vermögen in Höhe von 3600 Gulden der Sohn zweimal soviel wie die Mutter und diese zweimal soviel wie jede Tochter erhalten. Wieviel Gulden erbt jede dieser vier Personen?

5) Jemand beschäftigt einen Arbeiter 30 Tage lang zu folgender Bedingung: Für fleißige Arbeit erhält er täglich 7 Pfennige, für Faulenzen (Feiern) werden ihm täglich 6 Pfennige abgezogen. Nachdem die 30 Tage vergangen waren ist keiner von beiden dem anderen etwas schuldig geblieben. Wieviel Tage hat der Arbeiter fleißig gearbeitet?

6) Drei Gesellen haben Geld gewonnen. Der erste nimmt davon den siebenten, der zweite den vierten Teil, der dritte die restlichen 17 Gulden.
Wieviel Gulden haben sie gewonnen?

Klassenstufe 7

7) Drei Personen betreiben gemeinsam ein finanzielles Geschäft, an dem die erste Person mit 123 Gulden, die zweite mit 536 Gulden und die dritte mit 141 Gulden beteiligt ist. Wieviel Gulden müßte jede dieser drei Personen anteilig vom Gewinn, der 130 Gulden beträgt, erhalten?

8) Ein Vater hat vier Söhne. Er vermacht dem ersten Sohn $\frac{1}{4}$, dem zweiten $\frac{1}{5}$, dem dritten $\frac{1}{6}$ seines Vermögens und dem vierten Sohn die danach noch verbleibenden 92 Gulden. Wie groß war das Vermögen ?

9) Bei einem Weizenpreis von 42 Groschen je Scheffel soll eine Doppelsemmel 12 Lot wiegen. Wieviel Lot müßte eine Doppelsemmel bei einem Weizenpreis von 64 Groschen je Scheffel wiegen?
(12 Lot = 48 Quent)

Klassenstufe 8

10) Landsknechte und Bauern, zusammen 1200 Personen, haben sich geeinigt, gemeinsam einen Beutezug zu machen. Addiert man zum vierten Teil der Anzahl der Bauern den halben Teil der Anzahl der Landsknechte, so erhält man die Anzahl der Landsknechte. Wie viele Bauern bzw. Landsknechte waren es?

11) Insgesamt 21 Personen, Männer und Frauen, haben in einem Wirtshaus eine Zeche von 81 Pfennigen gemacht.
Wie viele Männer bzw. Frauen sind es gewesen, wenn jeder Mann 5 Pfennige, jede Frau 3 Pfennige bezahlen soll?

12) Jemand hat Äpfel gekauft. Er begegnet drei Mädchen und gibt dem ersten Mädchen von den Äpfeln die Hälfte und zwei Äpfel dazu. Von den restlichen Äpfeln gibt er dem zweiten Mädchen die Hälfte und zwei dazu. Ebenso gibt er dem dritten Mädchen von den noch verbliebenen Äpfeln die Hälfte und noch zwei dazu. Danach ist ihm genau ein Apfel verblieben. Wie viele Äpfel hatte er gekauft?

Klassenstufe 9

13) 7 Pfund in Padua entsprechen 5 Pfund in Venedig; 10 Pfund in Venedig entsprechen 6 Nürnberger Pfund; 100 Nürnberger Pfund entsprechen 73 Pfund in Köln.
Wieviel Kölner Pfund entsprechen dann 1000 Pfund in Padua?

14) Zerlege die Zahl 32 so in vier Summanden a, b, c, d, daß a ein Siebentel von b und c, b ein Fünftel von c und d, c die Hälfte von a und d beträgt. Wie lauten diese vier Summanden?

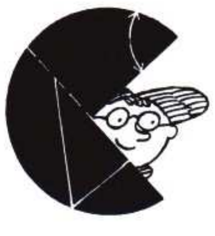
15) Jemand legt sein Geld gewinnbringend an, wodurch es sich verdoppelt. Nachdem er einen Gulden ausgegeben hat, legt er das restliche Geld wieder an, wodurch es sich abermals verdoppelt. Nachdem er zwei Gulden ausgegeben hat, legt er das restliche Geld abermals an, wodurch es sich erneut verdoppelt. Nachdem er drei Gulden ausgegeben hat, verbleiben ihm 10 Gulden. Wie viele Gulden hatte er anfangs?

Klassenstufe 10

16) Jemand hat 100 Gulden und will dafür 100 Stück Vieh kaufen, nämlich Ochsen, Schweine, Kälber und Ziegen. Wenn nun ein Ochse 4 Gulden, ein Schwein $1\frac{1}{2}$ Gulden, ein Kalb $\frac{1}{2}$ Gulden und eine Ziege $\frac{1}{4}$ Gulden kostet, wie viele dieser Tiere kann er dann für seine 100 Gulden kaufen?

17) Drei Mühlen mahlen gleichzeitig. So der Wind geht, werden in 8 Stunden auf der ersten Mühle 20 Scheffel Getreide, auf der zweiten 17 Scheffel, auf der dritten 15 Scheffel gemahlen.
In wieviel Stunden werden 24 Scheffel Getreide von den drei Windmühlen zusammen gemahlen?

18) Drei Gesellen zählen ihr Geld. Sagt der erste zu den beiden anderen: “Hätte ich noch 7 Gulden dazu, dann hätte ich viermal soviel Gulden wie ihr beide zusammen.” Sagt der zweite zu den beiden anderen: “Hätte ich noch 9 Gulden dazu, dann hätte ich fünfmal soviel Gulden wie ihr beide zusammen.” Sagt der dritte zu den beiden anderen: “Hätte ich noch 11 Gulden dazu, dann hätte ich sechsmal soviel Gulden wie ihr beide zusammen.”
Wieviel Gulden hatte jeder von ihnen?



Komisches, Kniffliges und Knackiges

𝔇𝔞𝔰 𝔪𝔞𝔠𝔥𝔱 𝔫𝔞𝔠𝔥 𝔄𝔡𝔞𝔪 ℜ𝔦𝔢𝔰(𝔢) ...

Adam Ries hob sich von den Rechenmeistern seiner Zeit durch die lebhafte Sprache, sein Darstellungsvermögen und pädagogisches Geschick hervor. Versetzt Euch doch einmal in seine Zeit und versucht, die beiden folgenden Beispiele nachzuvollziehen.

Münzberechnung

Die Aufgabe und ihre Lösung beinhalten folgendes: 21 Groschen einer Münzlegierung haben den Wert von 1 Gulden (flor.). 6 Groschen wiegen 1 Lot (Silber- bzw. Münzgewicht 1 Mark = 233,856 Gramm = 16 Lot), also haben 96 Groschen das Gewicht von 1 Mark. 1 Mark der Legierung enthält 9 Lot Silber (Feingehalt) und hat einen Wert von 96 Groschen bzw. $\frac{96}{21}$ Gulden. 1 Mark reines Silber (Feinsilber, Feingehalt 16 Lot) hat demnach einen Wert von $\frac{96 \cdot 16}{9}$ Groschen = $170\frac{2}{3}$ Groschen = 8 Gulden $2\frac{2}{3}$ Groschen.

Coß

Item Eyner komet Zwetzlichenn Jungkfrawenn sprechende, gut grus euch all 84. Antwurt eyne vnder in vnser ist nicht souil. So aber vnser noch souil vnd halbsouil wernn, so wernn vnser vber bemelte Zal sam itzt darunder. Nun frage ich, wiuil der Jungkfrawenn gewesenn sein. Machs, also setz ir sein gewesenn 1𝔯 Der ist nun wenig Dann 84, Hirumb Nim 1𝔯 von 84 pleiben 84 – 1𝔯. Nun spricht die ein Jungkfraw, Wen vnser noch souil vnd halb souil, sumir 1𝔯, 1𝔯 vnd $\frac{1}{2}$𝔯 werdn $2\frac{1}{2}$𝔯. Das ist nun vber 84 souil sam vor darunder. Nim 84 vonn $2\frac{1}{2}$𝔯 pleiben $2\frac{1}{2}$𝔯 – 84 ϕ gleich 84 ϕ – 1𝔯. Volfure es, komen dir 48, souil seint der Jungfrawen gewesenn.
(Nach Berlet, Bruno: Adam Riese. Leipzig und Frankfurt am Main 1892).
𝔯-Coß, Ding, ϕ-Dragma, Zahl.
Nach heutiger Schreibweise ist die Gleichung $2\frac{1}{2}x - 84 = 84 - x$ zu lösen.

Dr. Harry Beyrich, Chemnitz

Rechenbüchlin
Vom Müntzschlag.

Item man müntzet 21. groschen für ein flor. 6. auff ein loth / vnd helt die marck fein 9. loth/wie hoch wirdt ein marck fein gerechnet? Facit für 8. fl. 2. groschen/ vnd $\frac{2}{3}$. Machs also: Rechen wie viel groschen auff ein marck gehen/ Sprich/ein loth gibt 6. groschen/was geben 16. loth? Facit 96. groschen/die halten 9. loth fein/ Sprich derhalben fort/ 9. loth fein geben 96. groschen/was geben 16. loth fein? Multiplicir vnd diuidir/kommen groschen/die mach zu fl. mit 21. so kompt das facit wie oben.
Item man müntzt 7. groschen für ein fl. vnd 7 auff 2. loth / helt ein marck fein 14. loth/wie hoch kommet ein marck fein auß? Facit für 9. fl. vnd

Aufgabe zur Münzrechnung, Rechenbuch von 1522, Auflage Frankfurt am Main 1574

Adam Ries wettete einst mit einem Landmesser, wer in einer bestimmten Zeit die meisten rechten Winkel zeichne. Sein Gegenüber war hochmütig und trug einen silbernen Zirkel an seinem Hut. Der Rechenmeister hatte aber, während jener die Konstruktion erst richtig begann, schon längst einen Kreis mit einem Durchmesser aufs Papier gebracht und ... Wie fuhr er wohl fort? Welchen Lehrsatz nutzte Adam Ries? So war er der weitaus Schnellere und gab dem eingebildeten Landmesser das Nachsehen.

Dr. Harry Beyrich, Chemnitz

Verflixte regula de tri

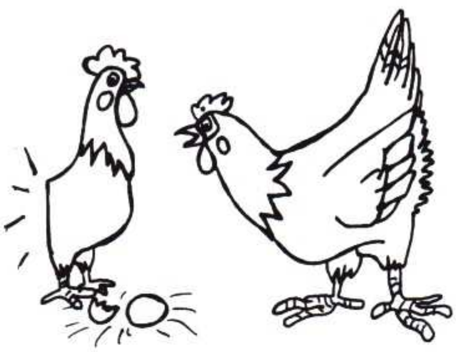
Die kennt Ihr nicht?!
Na klar! Oder habt Ihr noch nie vor dem Problem gestanden, wieviel Gramm Bonbons Ihr für Eure 3 DM kaufen könnt, wenn 100 g der begehrten Leckerei 2 DM kosten?
Gerechnet wird, obwohl es hier einfach im Kopf ginge:

$$\frac{2\,\text{DM}}{100\,\text{g}} = \frac{3\,\text{DM}}{x}, \quad x = \frac{3\,\text{DM} \cdot 100\,\text{g}}{2\,\text{DM}}, \quad x = 150\,\text{g}$$

Dieses zu gut deutsch auch als Dreisatzrechnung bezeichnete Rechenverfahren nahm nicht nur in Adam Ries' zweitem Rechenbuch breitesten Raum ein. Im Rechenunterricht vergangener Zeiten galt sie als "... das Hauptziel ..., zugleich Mittel zur Ausbildung und Prüfung der Intelligenz." (E. Fink, 1921).
Na, dann wollen wir mal!

In einem alten Scherzbuch heißt es:

Ein Bauer hatte dem Schulmeister eine hinter die Ohren gegeben. Nun stand der Täter vor dem Gericht. "Weshalb taten sie das?", fragte der Richter. "Er machte meinen Jungen und mich mit einer Aufgabe halb verrückt. Er wollte nämlich wissen, wie viele Eier 9 4/9 Hühner in 12 15/16 Tagen legen, wenn 4 3/4 Hühner in 6 6/19 Tagen 7 8/17 Eier legen." Da murmelte der Richter verständnisvoll: "Dem hätte ich auch eine gelangt!" Und sprach den Bauern frei.



Na, habt Ihr's raus?
Mittels zweifacher Anwendung der Regeldetri kommen die 9 4/9 Hühner auf 30 2/3 Eier.
Gleich noch so ein starkes Stück aus einem Büchlein von Lietzmann:

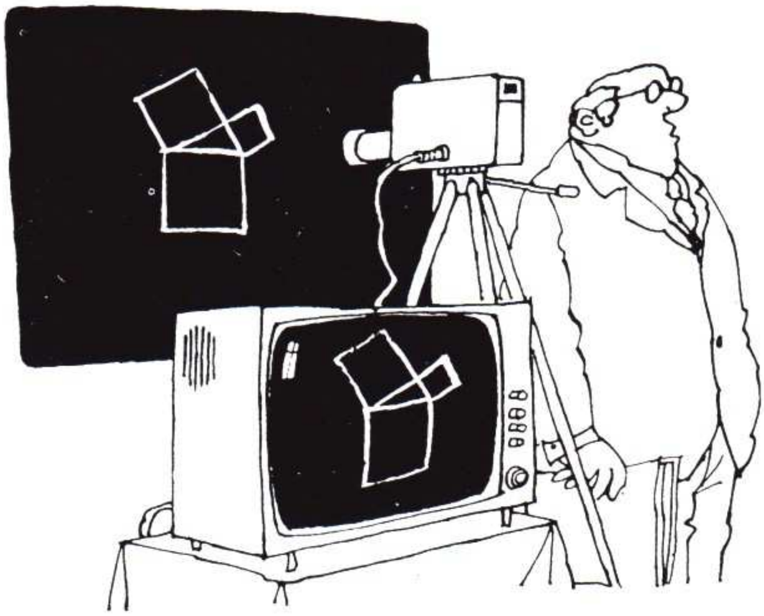
"Mein Sohn hatte eine Regeldetri-Aufgabe von der Schule heimgebracht: Wenn 10 Maurer bei 10stündiger Arbeitszeit in 150 Tagen ein Haus bauen, wieviele Maurer bauen dasselbe Haus bei 1stündiger Arbeitszeit in 30 Tagen? Mein Sohn setzte sich hin und rechnete nach Vorschrift:
$\frac{10 \cdot 150 \cdot 10}{30 \cdot 1} = 500.$
"Vater, ich hab's", rief mein Sohn, "500 Maurer können das Haus in 30 Tagen bauen."
"Hm", sagte ich zweifelnd, "es käme auf einen Versuch an."

Mein Sohn berichtete diesen Zweifel selbstverständlich seinem Lehrer. Und dieser läßt auf gleichem Wege wieder sagen, ich möchte doch gefälligst sagen, was ich an dem Beispiel auszusetzen hätte.
"Nichts, Herr Lehrer", schreibe ich in einem Briefe, "ich wollte nur bemerken, daß alsdann an 15000 Maurer dieses Haus in einem Tage bauen, vorausgesetzt, daß sie sich nicht gegenseitig auf ihre Hühneraugen treten. Und wissen Sie, Herr Lehrer, wenn ein Lehrer einen Jungen 7 Jahre unterrichtet, um einen tüchtigen Menschen aus ihm zu machen, wieviele Lehrer diese Arbeit in einem Tage vollbringen können? Nun, etwa 2100 Lehrer, Herr Lehrer ..."
Was geschieht? Der Lehrer will mich wegen Beleidigung verklagen. Und ich kann doch gar nichts dafür, sondern die Regeldetri.
Ihr Fritz Müller"

Und zum Schluß noch eine kleine Übung: Zwei Schüler gehen von Barby nach Schönebeck in 4 Stunden. Wie lange brauchen 3 Schüler?

mitgeteilt von Dieter Bauke, Gera

In einem Zug



„Hat noch jemand Fragen?"

aus: Pythagoras, Groningen

Sprachecke

cemmf

Среди натуральных чисел от 1 до 99 выбраны те, которые не делятся ни на 2, ни на 3. Найдите сумму этих чисел.
aus: Quant, Moskau

Mathematics and Poetry are the utterance of the same power of imagination, only that in the one case it is addressed to the head, and in the other to the heart.
Hill

Les cartes en forme de L

A l'aide de 21 cartes en forme de L (figure), pouvez-vous paver les 63 cases non hachurées de cet échiquier 8x8?
s. Abb. 1
Si oui, représentez une solution.
s. Abb. 2

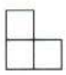


Abb. 1

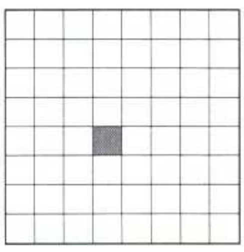


Abb. 2

aus: Tangente, Paris

Alphons logische Abenteuer (10)

"Alphons, ich habe eine sensationelle Entdekkung gemacht!", rief Berti seinem Freund zu, als sie sich auf dem Weg zur Schule trafen. Alphons fragte neugierig, was er denn entdeckt habe. "Stelle Dir vor, entgegen dem Augenschein hat eine Katze nicht vier, sondern mehr Beine. Denn: Eine Katze ist mehr als keine Katze. Keine Katze hat zehn Beine. Also hat eine Katze mehr als zehn Beine – da staunst Du!" Alphons staunte zunächst wirklich. Er blieb sogar stehen. Dann sagte er zu Berti, der auch stehen blieb: "Nun ja, ein Berti ist mehr als kein Berti, vor allem wenn der eine Berti Du bist. Kein Berti ist dumm, das wirst Du unbedingt für wahr halten. Wie aber steht es mit Deiner Schlußfolgerung: Ein Berti ist mehr als dumm?" Wenn es nun einmal kraft Logik so sei, müsse man sich eben auch in ein trauriges Schicksal fügen, moralisierte Berti heroisch. "Da ich mir schon gedacht habe, Du wirst Probleme mit meinem Beweis haben, denn die beiden Prämissen: Eine Katze ist mehr als keine Katze. Keine Katze hat mehr als zehn Beine, sind wahr, habe ich mir noch ein Beispiel überlegt: 3 ist größer als 2. 2 ist die kleinste Primzahl, also ist 3 größer als die kleinste Primzahl." Alphons fand dieses Beispiel nicht überzeugend. "Du hast Dich doch schon selber widerlegt. Ein Beweis setzt nicht nur wahre Prämissen, sondern auch die Anwendung gültiger Schlußregeln voraus. Du schließt mit Hilfe einer Schlußregel, die nicht gültig ist. Das, was Du für eine gültige Schlußregel ansiehst, besagt folgendes: Stehen zwei Gegenstände x und y in dieser Reihenfolge in einer Beziehung und hat y eine Eigenschaft, dann hat auch x diese Eigenschaft. Dein Zahlenbeispiel und Dein Katzenbeweis zeigen doch, daß es so sein kann, aber nicht so sein muß. Eine Schlußregel ist jedoch nur dann gültig, wenn in jedem Fall wahrer Prämissen auch die Konklusion, die Schlußfolgerung, wahr ist. Ich ändere Dein Zahlenbeispiel: 3 ist größer als 2. 2 ist eine natürliche Zahl, also ist 3 größer als eine natürliche Zahl. Da hast Du wieder zwei wahre Prämissen Deiner Schlußregel, aber die Konklusion ist falsch." Berti wandte ein: "Aber bei der Identität gilt doch meine Schlußregel!" Alphons schüttelte mit dem Kopf: "Das hilft Dir auch nicht. Die Identität ist ein Fall, bei der Deine Schlußregel für jede Eigenschaft von y zutrifft, die Größer-Relation ist ein Fall, bei der sie nicht für jede Eigenschaft von y zutrifft. Da ein Gegenbeispiel widerlegt, mußt Du akzeptieren, daß Deine Schlußregel nicht gültig ist. Doch nun Schluß damit, wir müssen uns beeilen, sonst kommen wir zu spät zum Unterricht."

Prof. Dr. Lothar Kreiser
Institut für allgemeine Logik der Universität Leipzig

Das Geheimnis des Zebrastreifens

Im Heft 6/91 wurde die Europäische Artikel-Nummer (EAN) erläutert, in den Heften 1 und 2/92 schoben wir die ISBN- und Lokomotivnummer ein, nun soll es endlich geknackt werden – das Geheimnis des Strichcodes oberhalb der EAN.

4 006508 200016

Die Strich-Codierung erfolgt in zwei Blöcken: Der linke Block enthält die Stellen 2 bis 7, der rechte Block die Stellen 8 bis 13 der EAN. (Die erste Stelle wird durch ein besonderes Verfahren "versteckt", das wir weiter unten beschreiben.) Je zwei schmale, nach unten etwas längere Striche dienen links und rechts als Randzeichen (101) sowie als Trennzeichen (01010) in der Mitte. Zum Codieren jeder Ziffer werden drei verschiedene Codetabellen verwendet (siehe **Tabelle 1**). Dabei bedeuten 1 bzw. 0 ein einfacher Strich bzw. eine einfache Lücke, 11 bzw. 00 ein doppelt breiter Strich bzw. eine doppelt breite Lücke usw. Für die rechte Hälfte der EAN wird ausschließlich der Code C verwendet. Bei der linken Hälfte geht es nicht ganz so einfach, denn dort wird zusätzlich die erste EAN-Ziffer "versteckt": In Abhängigkeit von der ersten Ziffer der EAN wird im linken Block (Ziffer 2 bis 7 der EAN) nach einem bestimmten Muster zwischen den beiden Codes A und B gewechselt (siehe **Tabelle 2**).

Tabelle 1: Codierung der Ziffern

Ziffer	Code A	Code B	Code C
0	0001101	0100111	1110010
1	0011001	0110011	1100110
2	0010011	0011011	1101100
3	0111101	0100001	1000010
4	0100011	0011101	1011100
5	0110001	0111001	1001110
6	0101111	0000101	1010000
7	0111011	0010001	1000100
8	0110111	0001001	1001000
9	0001011	0010111	1110100

Tabelle 2

1. Ziffer	Code-Muster für die linke Seite
0	AAAAAA
1	AABABB
2	AABBAB
3	AABBBA
4	ABAABB
5	ABBAAB
6	ABBBAA
7	ABABAB
8	ABABBA
9	ABBABA

Die Streifencodes von A und B sind alle voneinander verschieden – deshalb läßt sich umgekehrt aus den Streifen auch das verwendete Code-Muster und damit nach Tabelle 2 die erste Ziffer der EAN ermitteln.
Die umständliche Codierung der ersten EAN-Ziffer war erforderlich, damit EAN-Strichcode-Leser auch die in den USA verwendeten UPC-Strichcodes verarbeiten können: Diese erste Ziffer ist nämlich dem UPC-System hinzugefügt worden. Die (nur 12stelligen) UPC-Nummern verwenden in der linken Hälfte ausschließlich den Code A und erhalten daher im EAN-System automatisch als (zusätzliche) erste Ziffer die Null.
Der Tabelle 1 können wir entnehmen:

- Jede Ziffer wird durch sieben Dualziffern so codiert, daß zwei dunkle und zwei helle Streifen unterschiedlicher Breite entstehen.
- Der Code A ergibt sich aus Code C, indem man jeweils 0 durch 1 ersetzt und umgekehrt.
- Der Code B entsteht aus Code C, indem man die Reihenfolge der 0-1-Ziffern genau umkehrt.
- Dabei beginnen Code A und Code B mit einem hellen Streifen (0) und enden mit einem dunklen Streifen (1), bei Code C ist es genau umgekehrt.

Die Codes sind bewußt so gewählt, daß der Computer auch erkennen kann, ob die Streifen mit dem Lesegerät von rechts nach links oder umgekehrt gelesen werden – unterschiedliche Leserichtungen können also nicht zu Verwechslungen führen!

Nach Wilfried Herget: "Prüfziffern und Strichcode – ‚ComputerMathematik' auch ohne Computer", gekürzt aus "mathematik lehren" Heft 33/1989

Lösungen zum alpha-Wettbewerb Heft 1/92

5/8
Vom Endergebnis 27 ausgehend sind rückwärtsschreitend jeweils die Umkehroperationen anzuwenden. Mit Hilfe von Notizen rechnete Hans wie folgt: $27+9=36$; $36\cdot2=72$; $72+8=80$; $80:4=20$; $20-5=15$; $15\cdot2=30$; $30-4=26$; $26:2=13$. Martin hatte die Zahl 13 gedacht.

5/9
$126548+126548+126548=379644$
$236548+236548+236548=709644$

5/10
Es sind nur die drei Zahlen 31, 62 und 93 zu untersuchen. Wegen $31-13=18$, $62-26=36$, $93-39=54$ existiert genau eine solche Zahl, nämlich die 62.

5/11
Wäre das Dreieck gleichseitig, die Basis also um 2 cm länger, dann würde sein Umfang 28cm+2cm=30cm, jede Seite also 30cm:3= 10cm lang sein. Deshalb ist jeder der beiden Schenkel 10cm, die Basis 8cm lang.

5/12
Es seien h, k, l, p bzw. r die Körpergrößen von Herbert, Klaus, Lutz, Paul bzw. Richard; dann gilt $h > r$, $r>k$, $l > r$, $k > p$. Wegen (5) folgt daraus $h>l>r>k>p$. Die fünf Schüler stehen, mit dem größten beginnend, in folgender Reihenfolge: Herbert, Lutz, Richard, Klaus, Paul.

5/13
$1+2+3+...+24+25$
$=(1+24)+(2+23)+(3+22)+...+(12+13)+25$
$=13\cdot25=325$ und $325:5=65$. In jeder Zeile, Spalte und in den beiden Diagonalen muß also die Summe der fünf Zahlen 65 betragen. Deshalb sind folgende Zahlen zu vertauschen: 6 mit 7, 10 mit 11, 15 mit 20.

5/14
Aus (3) folgt: Claus hat nicht den Familiennamen König.
Aus (4) folgt: Claudia hat nicht den Familiennamen Spitzbart.
Deshalb heißt sie Claudia Rosenhain.
Aus (1) folgt: Franziska hat den Familiennamen König.
Deshalb hat Katharina den Familiennamen Spitzbart.

6/8
Das k.g.V. von 2, 3, 4, 5, 6 ist 60. Von den Zahlen 61, 121, 181, 241, 301, 361, 421, 481 ist nur die Zahl 301 ein Vielfaches von 7; denn es gilt $43\cdot7=301$.

6/9
Im rechtwinkligen Dreieck ist der Mittelpunkt der Hypotenuse zugleich Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks.
Deshalb gilt $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$; also hat die Hypotenuse $\overline{AB}$ die Länge $2 \cdot d$. Aus der Dreiecksungleichung folgt $2 \cdot d < a + b$, also auch
$d < \frac{1}{2} \cdot (a + b)$.

6/10
Mögliche Lösungen sind
$(1+2+3+4):5=2$,
$12:3+4-5=3$,
$12 \cdot 3:4-5=4$,
$1+2+3+4-5=5$,
$12+3-4-5=6$
$1 \cdot 2 \cdot 3-4+5=7$,
$12-3+4-5=8$,
$1+2-3+4+5=9$,
$12-3-4+5=10$.

6/11
Wegen $4^3 = 64 < 100$ und $10^3 = 1000 > 999$ gilt für die Quersumme
$q = a + b + c$ dieser Zahlen $5 \leq q \leq 9$. Wir erhalten somit
$5^3=125$ (entfällt, da $q=8$),
$6^3=216$ (entfällt, da $q=9$),
$7^3=343$ (entfällt, da $q=10$),
$8^3=512$ mit $q=8$,
$9^3=729$ (entfällt, da $q=18$).
Es existiert genau eine solche Zahl, nämlich $512=(5+1+2)^3=8^3$.

6/12
Es gilt $73 \cdot 137=10001$. Es sei a das vierstellige Geburtsjahr; dann lautet die achtstellige Zahl $10000 \cdot a+1 \cdot a=10001 \cdot a=73 \cdot 137 \cdot a$. Nach den beiden Divisionen erhält man also stets wieder das Geburtsjahr a.

6/13
Aus (4) und (5) folgt: Das rote Auto wurde in Rostock, das gelbe in Schwerin gekauft.
Aus (3) folgt weiter: Der Skoda hat eine rote Farbe.
Aus (1) folgt weiter: Herr Arndt hat ein gelbes Auto in Schwerin gekauft.
Aus (2) weiter: Herr Conrad hat einen blauen Wartburg in Neubrandenburg gekauft. Deshalb besitzt Herr Arndt einen Trabant, Herr Brandt einen Skoda.

Name	Autotyp	Farbe	Einkaufsort
Arndt	Trabant	gelb	Schwerin
Brandt	Skoda	rot	Rostock
Conrad	Wartburg	blau	Neubrandenburg

6/14
Das Volumen der Gefäße beträgt $100 cm^3$. Die Dichte von Wasser beträgt $e_1=1\ g \cdot cm^{-3}$, die von Quecksilber $e_2=13{,}6\ g \cdot cm^{-3}$. Unter Berücksichtigung von $m=e \cdot V$ erhält man die Masse des Wassers $m_1=100$ g und die Masse des Quecksilbers $m_2=1360$ g. Die Masse des Gefäßes beträgt $m_3=50$ g.

a) Es sind $m_1+m_2+m_3=1560$ g notwendig, um Gleichgewicht herzustellen.
b) Auf die Seite des mit Wasser gefüllten Gefäßes sind $m_2+m_3-(m_1+m_3)=m_2-m_1$, d. h. 1260g aufzulegen, um Gleichgewicht herzustellen.

7/8
Aus (1) folgt: Klaus heißt nicht Müller.
Aus (2) folgt: Weder Erwin noch Fritz heißen Müller. Deshalb heißt ein Schüler Hans Müller.
Aus (3) folgt: Fritz heißt nicht Meier.
Aus (2) folgt: Fritz heißt nicht Schmidt.
Deshalb heißt er Fritz Schulz.
Aus (2) folgt: Erwin heißt nicht Schmidt.
Deshalb heißt er Erwin Meier. Somit heißt der vierte Schüler Klaus Schmidt.

7/9
Die zu ermittelnden Primzahlen lassen sich darstellen durch $p=100a+10b+a=101a+10b$. Für deren Quersumme gilt $q=a+b+a=2a+b=19$, also $b=19-2a$. Daraus folgt durch Einsetzen $p=101a+10(19-2a)$, also $p=81a+190$. Ist a eine gerade Zahl, so sind auch $81a+190$ gerade Zahlen und somit p keine Primzahlen. Deshalb kann a gleich 1, 3, 5, 7 oder 9 sein.
Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:
(1) Es sei $a = 1$, also $p = 271$. Wegen $q = 10 \neq 19$ entfällt diese Möglichkeit.
(2) Es sei $a = 3$, also $p = 433$. Wegen $q = 10 \neq 19$ entfällt diese Möglichkeit.
(3) Es sei $a = 5$; dann endet die dreistellige Zahl auf 5, ist also durch 5 teilbar und deshalb keine Primzahl.
(4) Es sei $a = 7$, also $p = 757$ und $q = 19$. Dies stellt eine Lösung dar.
(5) Es sei $a = 9$, also $p = 919$ und $q = 19$. Dies ist eine weitere Lösung.
Es gibt genau zwei derartige Primzahlen; sie lauten 757 und 919.

7/10
Eine dreistellige natürliche Zahl läßt sich darstellen durch $z = 100a+10b+c$ mit $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$ und $0 \leq c \leq 9$. Nun gilt
$100a+10b+c+594=100c+10b+a$,
$99c-99a=594$,
$c-a=6$, also $c=a+b$.
Wegen der einschränkenden Bedingungen kann $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, also $c_1=7$, $c_2=8$, $c_3=9$ gelten. Die Quersumme der gesuchten Zahlen kann nur 9 oder 18 sein. Daraus folgt weiter $b_1=1$, $b_2=8$, $b_3=6$. Die zu ermittelnden Zahlen lauten 117, 288 und 369.

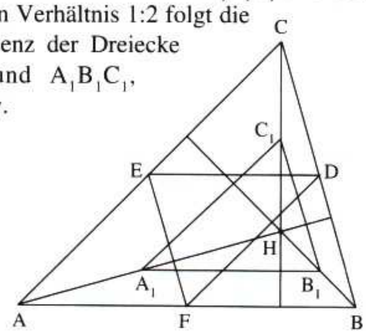
7/11
Nach dem Satz des Thales gilt $\sphericalangle ABC=90°$ und $\sphericalangle ABC=90°$; daraus folgt $\sphericalangle CBD=180°$, das heißt, die Punkte C, B und D liegen auf einer Geraden.

7/12
$$\frac{171717}{191919} = \frac{10000 \cdot 17 + 100 \cdot 17 + 1 \cdot 17}{10000 \cdot 19 + 100 \cdot 19 + 1 \cdot 19} = \frac{10101 \cdot 17}{10101 \cdot 19} = \frac{17}{19}$$

7/13
In beiden Fällen treffen sie sich in der Mitte.

7/14
Auf dem Mond beträgt die Masse des Sackes Kartoffeln 50,1kg, die Gewichtskraft 81,5N.

8/8
Nach dem Strahlensatz gilt:
$\overline{BF}:\overline{BA} = \overline{BD}:\overline{BC} = 1:2$.
Nach einem bekannten Satz ("Die Gerade durch die Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten ist parallel zur dritten Seite, und der von ihr erzeugte Abschnitt ist halb so groß wie die dritte Seite") ist dann $\overline{DF} \parallel \overline{AC}$, und es ist $\overline{DF}:\overline{AC} = 1:2$. Es folgt die Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und DEF.
Analog gilt auch
$\overline{HA_1}:\overline{HA} = \overline{HB_1}:\overline{HB} = \overline{HC_1}:\overline{HC} = 1:2$.
Aus $ABC \sim DEF$ und $ABC \sim A_1B_1C_1$ und dem gleichen Verhältnis 1:2 folgt die Kongruenz der Dreiecke EFD und $A_1B_1C_1$, w.z.b.w.

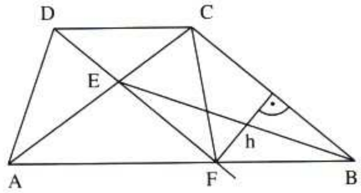


8/9
Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Zahlen 2, 3 und 5 ist 30. Somit gilt $320<30k+1<500$, wobei k eine natürliche Zahl ist.
Daraus folgt weiter $319 < 30k < 499$,
$330 \leq 30k \leq 480$,
$11 \leq k \leq 16$.
Von den Zahlen 331, 361, 391, 421, 451, 481 sind nur die Zahlen 331 und 421 Primzahlen; denn $361=19 \cdot 19$, $391=17 \cdot 23$, $451=11 \cdot 41$, $481=13 \cdot 37$.

8/10
Mit Hilfe der Flächeninhaltsformel $A = \frac{c \cdot h_c}{2}$ ermitteln wir c. Es ist $48\ cm^2 = \frac{c \cdot 6\ cm}{2}$ und damit $c=16$ cm. Nun wenden wir den Satz des Pythagoras an und erhalten $a^2 = {h_c}^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$;
$a^2=36\ cm^2+64\ cm^2$; $a^2=100 cm^2$; $a=10$ cm. (a sei die Bezeichnung für die Länge der Seite $\overline{BC}$).
In die Formel für den Umfang des Dreiecks setzen wir nun die entsprechenden Zahlen ein und erhalten $u=16\,cm+10\,cm+10\,cm$; $u=36cm$.
Der Umfang dieses Dreiecks beträgt 36cm.

8/11
Es seien $a-1$, a, $a+1$ $(a \geq 1)$ drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, ihre Summe beträgt $3a$, ihr Produkt $a \cdot (a^2-1)$. Nun soll gelten $a \cdot (a^2-1)=24a$, wegen $a \neq 0$ also $a^2-1=24$, $a^2=25$, $a=5$. Die Aussage trifft für die Zahlen 4, 5 und 6 zu. Es gilt $4 \cdot 5 \cdot 6=8(4+5+6)$.

8/12
Wir können $\overline{CB}$ als gemeinsame Grundseite der Dreiecke CEB und CFB auffassen. Das Lot von F auf die Seite $\overline{CB}$ ist Höhe beider Dreiecke $\left(\overline{EF} \parallel \overline{CB}\right)$.
Dreiecke mit gleicher Grundseite und gleicher Höhe sind flächengleich, w.z.b.w.

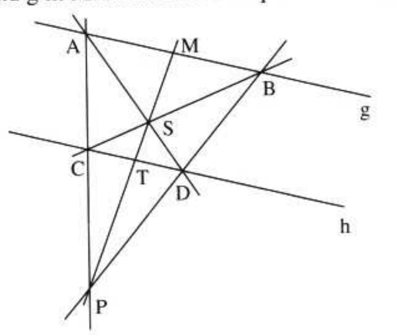


8/13 Die Umfangsgeschwindigkeit des Rades beträgt $3 m \cdot s^{-1}$ (unabhängig vom Raddurchmesser). Es muß eine Leistung von 3,6 W aufgebracht werden. Aus $P=F \cdot v$ folgt $F=P \cdot v^{-1}$.

$$F = \frac{3{,}6 N \cdot m \cdot s^{-1}}{3 m \cdot s^{-1}} \qquad F = 1{,}2 N.$$

8/14
Beim Eintauchen steht die Luft in der Flasche (Volumen V_1) unter dem Luftdruck (p_1= 1000 hPa). In 30 m Tiefe wirkt zusätzlich der Schweredruck des Wassers (3000 hPa), d. h. ein Gesamtdruck p_2=4000 hPa. Nach dem Gesetz $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$ ergibt sich, daß die Luft auf 1/4 des ursprünglichen Volumens V_1 zusammengedrückt wird.

9/8
Wir legen einen beliebigen Punkt P fest, der nicht zwischen g und h liegt und verbinden P mit A und B. Die Verbindungsgeraden schneiden h in C und D. Nun verbinden wir C mit B und D mit A, so daß der Schnittpunkt S entsteht. Die Gerade durch P und S schneidet h in T und g in M. M ist der Mittelpunkt von $\overline{AB}$.



Beweis der Konstruktion:
(1) Die Dreiecke CTS und SBM sind ähnlich; denn
$\sphericalangle SCT \cong \sphericalangle SBM$ und $\sphericalangle TSC \cong \sphericalangle MSB$
(Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen bzw. Scheitelwinkel)
(2) Die Dreiecke TDS und SMA sind ähnlich; denn
$\sphericalangle TDS \cong \sphericalangle MAS$ und $\sphericalangle DST \cong \sphericalangle ASM$
(Wechselw. a.g.P. bzw. Scheitelwinkel)
Da in ähnlichen Dreiecken die Verhältnisse je zweier entsprechender Seiten gleich sind, gilt

(3) $\overline{TC}:\overline{TS} = \overline{MB}:\overline{MS}$, u. (4) $\overline{TD}:\overline{TS} = \overline{MA}:\overline{MS}$,

(3) $\overline{TC} = \dfrac{\overline{MB} \cdot \overline{TS}}{\overline{MS}}$ (4) $\overline{TD} = \dfrac{\overline{TS} \cdot \overline{MA}}{\overline{MS}}$

Außerdem gilt nach dem Strahlensatz

(5) $\overline{TC}:\overline{MA} = \overline{TD}:\overline{MB}$.

Setzt man nun (3) und (4) in (5) ein, so erhält man

(6) $\dfrac{\overline{MB} \cdot \overline{TS} \cdot \overline{MB}}{\overline{MS}} = \dfrac{\overline{MA} \cdot \overline{TS} \cdot \overline{MA}}{\overline{MS}}$

Es folgt

(7) $\overline{MB} = \overline{MA}$

Das bedeutet: M ist Mittelpunkt von $\overline{AB}$, w.z.b.w.

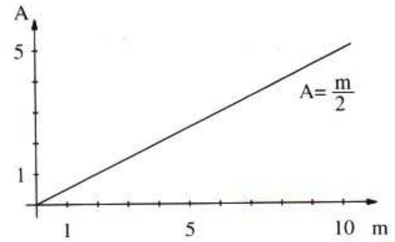
9/9
Wir lösen die Gleichung (2) nach y^2 auf und erhalten
$y^2=481-x^2$. Wir quadrieren die Gleichung (1) und erhalten $y^2=x^2+2x+1$.
Daraus folgt nun durch Gleichsetzen
$481-x^2 = x^2+2x+1$ bzw.
$0 = 2x^2+2x-480$,
$0 = x^2+x-240$.
Diese quadratische Gleichung lösen wir nun auf und erhalten
$x_1=15$ und $y_1=16$ bzw.
$x_2=-16$ und $y_2=-15$.
Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist demnach
$L= \{(15;16); (-16;-15)\}$.
Die Probe zeigt die Richtigkeit der Lösungsmenge.

9/10
Wir führen die folgenden Bezeichnungen für die Streckenlängen ein:

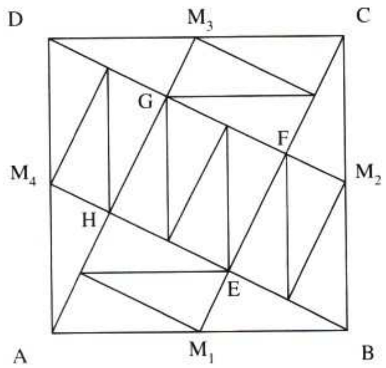
Strecke	$\overline{AB}$	$\overline{BC}$	$\overline{EB}$	$\overline{EC}$	$\overline{DC}$	$\overline{DA}$	$\overline{DE}$
Länge	a	b	c	d	a	b	e

Nach dem Satz des Pythagoras gilt im rechtwinkligen Dreieck EBC: $b^2=c^2+d^2$, $b^2=2^2+5^2$, $b^2=29$, $b \approx 5{,}39$cm.
Im rechtwinkligen Dreieck DBC gilt nach dem Höhensatz:
$d^2=e \cdot c$, $e = \dfrac{d^2}{c}$, $e = \dfrac{5^2}{2}$, e=12,5cm.
Im rechtwinkligen Dreieck DEC gilt nach dem Satz des Pythagoras: $a^2=e^2+d^2$, $a^2=12{,}5^2+5^2$, $a^2=181{,}25$, $a \approx 13{,}46$cm.
Die Rechteckseiten sind etwa 13,46 cm bzw. 5,39 cm lang.

9/11
Die Funktionsgleichung y=mx mit den genannten Bedingungen bezeichnet eine unendliche Schar aller derjenigen Geraden im rechtwinkligen Koordinatensystem, die durch den Ursprung gehen (n=0!) und im 1. und 3. Quadranten liegen ($m \geq 0$; $x \geq 0$!).
In einem rechtwinkligen Steigungsdreieck ist eine Kathete gleich der Einheit 1, die andere ist gleich m (m ist der Tangens des Winkels, den die Gerade – das Bild der Funktion – mit der x-Achse bildet).
Der Flächeninhalt eines solchen Steigungsdreiecks ist $A = \dfrac{1 \cdot m}{2}$. Die Funktion heißt $A = \dfrac{m}{2}$.
Graphische Darstellung:



9/12
Die Abbildung zeigt eine mögliche Zerlegung der Fläche des Quadrats ABCD in 20 kongruente rechtwinklige Dreiecke. Die Kongruenz der Dreiecke, die sich leicht durch Verschiebung und über die Nutzung von Diagonalen in Rechtecken und Parallelogrammen erbringen läßt, überlassen wir dem Leser.
Es verhalten sich die Flächen von ABCD zu EFGH wie 5:1.



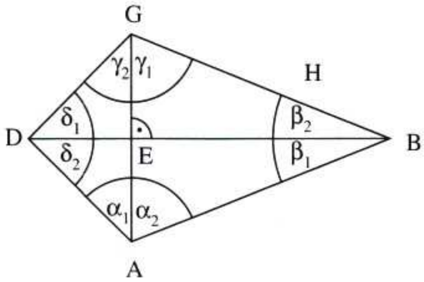
9/13
Dieser Flaschenzug hat 6 tragende Seile, d. h. die Last darf maximal 60 N betragen.

9/14
Spannungsmesser: Es muß ein Vorwiderstand R_v eingeschaltet werden. Nach dem Ohmschen Gesetz zeigt das Meßwerk Vollausschlag bei einer Spannung von $0{,}002 A \cdot 50\ \Omega = 0{,}1 V$. Am Vorwiderstand müssen demzufolge 9,9 V abfallen. Da sich die Spannungen wie die Widerstände verhalten, ergibt sich

$$R_v = \frac{9{,}9 V \cdot 50 \Omega}{0{,}1 V} \qquad R_v = 4950\ \Omega.$$

Strommesser: Es ist ein Nebenwiderstand (Shunt) R_p erforderlich. Durch den Shunt müssen 998 mA fließen. Da sich bei parallelgeschalteten Widerständen die Stromstärken umgekehrt wie die Widerstände verhalten,
ergibt sich $R_P = \dfrac{50 \Omega \cdot 2 mA}{998 mA}$ $R_p = 0{,}1\ \Omega$.

10/8
Weil ABCD ein Drachenviereck ist, entstehen durch die Diagonalen vier rechtwinklige Dreiecke.
Nun gilt im Dreieck BEA $\alpha_2+\beta_1=90°$ bzw. $\beta_1=90°-\alpha_2$.
Es ist also $\sin\beta_1=\cos\alpha_2$. Es ist demnach $\sin^2\alpha_2+\sin^2\beta_1=\sin^2\alpha_2+\cos^2\alpha_2=1$.
Analog gelten im Dreieck EBC:
$\sin^2\beta_2+\sin^2\gamma_1=1$,
im Dreieck CDE: $\sin^2\gamma_2+\sin^2\delta_1=1$ und
im Dreieck DAE: $\sin^2\delta_2+\sin^2\alpha_1=1$.
Es folgt die Behauptung
$\sin^2\alpha_1+\sin^2\alpha_2+\sin^2\beta_1+\sin^2\beta_2+\sin^2\gamma_1+\sin^2\gamma_2+\sin^2\delta_1+\sin^2\delta_2=4$, w.z.b.w.



10/9
Man kann die Anzahl durch systematisches Erfassen aller Fälle ermitteln:
a) Es sind also 20 Dreiecke
b) 15 Sehnenvierecke
c) 6 Fünfecke

Bemerkung:
Die Aufgabe ist ein Problem aus der Kombinatorik, und zwar ist es jedesmal ein Auswahlprogramm, bei dem es auf die Reihenfolge der Punkte nicht ankommt (ABC und ACB ist ein und dasselbe Dreieck). Die Aufgaben lassen sich auch wie folgt lösen:

a) $\binom{6}{3}$ (lies: 6 über 3) $=\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}=20$,

b) $\binom{6}{4}=\binom{6}{2}=\frac{6\cdot5}{1\cdot2}=15$,

c) $\binom{6}{5}=\binom{6}{1}=6$.

10/10
(1) p_1 läßt bei Division durch 3 stets den Rest 2 (Rest 1 ist nicht möglich, da dann p_2 durch 3 teilbar und damit keine Primzahl wäre. Es lassen sich p_1 und p_2 wie folgt darstellen:
$p_1=3k+2$ ($k\geq1$; $k\in\mathbb{N}$)
$p_2=3k+4$ ($k\geq1$; $k\in\mathbb{N}$)
Es ist dann $p_1+p_2=6k+6$.
Es gilt stets $6|6k+6$ mit $k\in\mathbb{N}$
(2) $p_2^2-p_1^2=(3k+4)^2-(3k+2)^2$
$=9k^2+24k+16-9k^2-12k-4$
$=12k+12$.
Es gilt stets $12|12k+12$ mit $k\in\mathbb{N}$
(3) $p_1^3+p_2^3=54k^3+162k^2+180k+72$
$=18(3k^3+9k^2+10k+4)$
Wenn ein Faktor eines Produktes aus natürlichen Zahlen durch 18 teilbar ist, so ist das Produkt durch 18 teilbar.
Nun folgt $18|p_1^3+p_2^3$.
Damit sind alle drei Aussagen bewiesen.

10/11
Für den Oberflächeninhalt des Quaders gilt
$A_O=2\,(ab+ac+bc)$, $A_O=2\,[ab+c(a+b)]$,

$\frac{A_O}{2}=ab+c(a+b)$, $c=\frac{\frac{A_O}{2}-ab}{a+b}$,

$c=\frac{\frac{500\,cm^2}{2}-5\,cm\cdot10\,cm}{5\,cm+10\,cm}$; c=15 cm.

Die Länge der Raumdiagonalen e berechnet man nach der Formel

$e=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ und erhält

$e=\sqrt{25\,cm^2+100\,cm^2+225\,cm^2}$,

$e=\sqrt{350\,cm^2}$, $e\approx18{,}7\,cm$.

Die Raumdiagonale des Quaders ist etwa 18,7 cm lang.

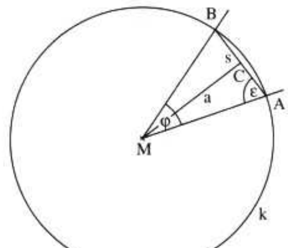
10/12
a) Im rechtwinkligen Dreieck ACM gilt

$\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\frac{s}{2}}{r}$, $s=2r\cdot\sin\frac{\varphi}{2}$, s=6,35 cm.

Die Sehne ist etwa 6,35 cm lang.
b) Im rechtwinkligen Dreieck ACM gilt

$\varepsilon=\frac{a}{r}$, $a=r\cdot\sin\varepsilon$, a=9,5 cm

Der Abstand dieser Sehne vom Kreismittelpunkt beträgt etwa 9,5 cm.



10/13
Im höchsten Punkt der Bahn müssen Gewichtskraft und Radialkraft gleich groß sein.

$\frac{m\cdot v^2}{r}=m\cdot g$ d.h. $v=\sqrt{g\cdot r}$

Mit $g=9{,}81\,m\cdot s^{-2}$ und $r=1{,}0\,m$ ergibt sich $v=3{,}1\,m\cdot s^{-1}$.

10/14
Aus $v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$ erhält man $r=\frac{v\cdot T}{2\pi}$. Mit $v=250\,km\cdot h^{-1}$ und T =3 min ergibt sich r = 1,989 km, d. h. der Durchmesser beträgt 4 km.

E/8
1. 8 Buchstaben: $\frac{8!}{2!}$ =20 160

2. Die Werte für 7 bis 2 Buchstaben ergeben sich entsprechend E12 zu 20 160 (7), 10 440 (6), 3 720 (5), 840 (4), 228 (3) und 43 (2). Damit ergeben sich insgesamt 55 771 Möglichkeiten.

E/9
Permutation ohne Wiederholung von 6 Elementen: 6! = 720 verschiedene Buchstabenfolgen.

E/10
Permutationen ohne Wiederholung von 9 Elementen, ein Element kommt zweimal vor:
$\frac{9!}{2!}$ = 181440 verschiedene Buchstabenfolgen.

E/11
Variationen von 6 Elementen zur 5. Klasse:
$V_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}=\frac{6!}{1!}=\underline{720}$

E/12
Folgen mit „NN" $\binom{5}{2}=10$, Anzahl der Permutation: $10\cdot\frac{4!}{2!}=120$
Folgen ohne „NN" $\begin{matrix}6\\4\end{matrix}=15$, Anzahl der Permutationen: $15\cdot4!=360$
Insgesamt: 480 verschiedene Folgen mit je 4 Buchstaben.

E/13
Die Kugel führt zwei Bewegungen aus: Eine gleichmäßig beschleunigte Fallbewegung und eine gleichförmige in waagerechter Richtung. Die Fallzeit t ergibt sich aus der Fallhöhe: $t=\sqrt{2h/g}$. Die Anfangsgeschwindigkeit $v_0=s/t$. t=1s. $v_0=20\,m\cdot s^{-1}$.

E/14
Die Lampe hat einen Widerstand von $R_L=12\,\Omega$. Es fließt bei einer Spannung U von 6 V ein Strom von 0,5 A.
a. Der Schleifkontakt steht in der Mitte : x=0,5.
b. Der Gesamtwiderstand R_{ges} setzt sich aus einer Parallelschaltung (Lampenwiderstand (R_L) und Teilwiderstand ($R'=x\cdot R$)) und dem anderen Teilwiderstand ($(1-x)\cdot R$) zusammen. $R_{ges}=18\,\Omega$. Die Spannung U' sinkt: U' = 4 V.
c. Es muß gelten:
$(1-x)\cdot R=x\cdot R\parallel R_L$

$\frac{x\cdot R\cdot R_L}{x\cdot R+R_L}=(1-x)\cdot R$; x=0,707

Der Kontakt steht an der Stelle x = 0,707
d. Fall a: $I_{ges}=12\,V/24\,\Omega$ $I_{ges}=0{,}5\,A$
b: $I_{ges}=12\,V/18\,\Omega$ $I_{ges}=0{,}67\,A$
c: $I_{ges}=12\,V/(2*0{,}707*24)\,\Omega$
$I_{ges}=0{,}85\,A$.

e. Nach Spannungsteilerregel:

$$\frac{U'}{U}=-\frac{\frac{x\cdot R\cdot R_L}{x\cdot R+R_L}}{(1-x)\cdot R+\frac{x\cdot R\cdot R_L}{x\cdot R+R_L}}$$

Durch Umformen:

$$U'=U\cdot\frac{x\cdot R_L}{x\cdot R+R_L-x^2\cdot R}$$

Herr Paddel und das Dualsystem

Diese Geschichte soll Euch etwas über Zahlensysteme verraten. Versucht, alle Aufgaben in der angegebenen Reihenfolge zu lösen. Bei einigen ist das leicht, bei anderen werdet Ihr etwas hartnäckiger sein müssen. Wenn Ihr verstehen wollt, wie Computer Daten verarbeiten, dann müßt Ihr neben dem Euch bekannten Zehnersystem auch andere Zahlensysteme kennen.

Von Einern, Zweiern, Vierern und Achtern

Der Ruderclub von 1893 bietet an jedem Dienstagnachmittag für Schüler der Albert-Schweitzer-Schule eine Arbeitsgemeinschaft im Rudern an. Zu dieser Veranstaltung darf kommen, wer Lust hat und rudern kann. Mal sind 3 Schüler da, ein anderes Mal wollen 14 Schüler rudern. Herr Paddel betreut die Boote im Vereinshaus. Er sagt immer: "In einen Achter gehören acht Ruderer, sonst wird das Boot nicht ausgeliehen." Und so handelt er nicht nur beim Achter, sondern bei allen Booten. Er verteilt die Boote nach ganz bestimmten Regeln, von den Schülern liebevoll "Paddel-Regeln" genannt. An seinem Arbeitsplatz im Vereinshaus kann jeder folgendes lesen:

Bootsausleihe der Ruder AG der Albert-Schweitzer-Schule

Regel 1: In jedem Boot, das an die Ruder-AG ausgeliehen wird, muß jeder Platz besetzt werden.

Regel 2: Von jeder Bootsgattung erhält die Boots-AG nur ein einziges Boot.

Regel 3: Boote mit Steuermann werden nicht ausgegeben.

Die Schüler freuen sich auf den Dienstagnachmittag. Weil sie vorher nie wissen, wieviel rudern wollen, und daher auch nicht, welche Boote ausgeliehen werden, gibt es immer Abwechslung. Und das macht Spaß. Der Ruder-AG stehen ein Einer (E), ein Zweier (Z), ein Vierer (V) und ein Achter (A) zur Verfügung.

Aufgabe 1: Herr Paddel notiert folgende Teilnehmerzahlen (Z):

Tag	**7.5.**	**14.5.**	**21.5.**	**28.5.**	**4.6.**	**11.6.**	**18.6.**
Z	**12**	**3**	**10**	**9**	**7**	**11**	**15**

Verteile sie nach den "Paddel-Regeln" auf die Boote!

Aufgabe 2: Wie kann man möglichst schnell festlegen, welche Boote nach den "Paddel-Regeln" besetzt werden? Versuche für die Schülerzahlen von Aufgabe 1 und dann allgemein ein Verfahren zu entwickeln!

Aufgabe 3: Wie viele Schüler können am Dienstagnachmittag höchstens zur Ruder-AG kommen, wenn alle einen Platz in einem der Boote bekommen sollen?
Ist bei allen kleineren Anzahlen eine Verteilung der Boote nach den "Paddel-Regeln" möglich?

Aufgabe 4: Herr Paddel notiert, welche Boote ausgeliehen sind:

Datum	**3.9.**	**10.9.**	**17.9.**	**24.9.**	**1.10.**
Boote	**A,V,E**	**V,E**	**V,Z**	**A,V,Z**	**A,V,Z,E**

Wie viele Schüler rudern an den einzelnen Tagen?

Aufgabe 5: Wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei (drei) Boote auszuleihen?

Aufgabe 6: Die Schüler wollen alle Kombinationen, Boote nach den "Paddel-Regeln" auszuleihen, ausprobieren. Stelle in einer Tabelle alle Kombinationen zusammen und schreibe zu jeder Kombination, wie viele Schüler rudern. Wie viele Wochen dauert es, wenn sie alle Kombinationen nacheinander ausführen wollen?

Aufgabe 7: Der Vierer wird repariert und kann wochenlang nicht benutzt werden. Bei welchen Schülerzahlen ist nun eine Verteilung der Boote nach den "Paddel-Regeln" nicht mehr möglich?

Der Leiter der Albert-Schweitzer-Schule, Herr Schulmeister, kommt am Bootshaus vorbei. Er möchte wissen, wie viele Schüler heute an der Ruder-AG teilnehmen. Auf dem See kann er die Ruderboote nicht entdecken. "Kein Problem, es sind 10 Schüler", sagt Herr Paddel und zeigt auf eine Tafel. Dort hat er mit Kreide in einer Tabelle notiert, welche Boote ausgeliehen sind. Heute kann man folgendes auf der Tafel lesen:

Achter	Vierer	Zweier	Einer
1	0	1	0

Du hast sicher entdeckt, daß Herr Paddel eine besondere Art hat, den Bootsverleih zu notieren.

Aufgabe 8: Fülle für die Schülerzahlen von Aufgabe 4 solche Tabellen aus!

Aufgabe 9: Formuliere eine Regel, wie aus dem Tafelanschrieb die Anzahl der rudernden Schüler berechnet werden kann!

Aufgabe 10: Fülle für die Schülerzahlen von Aufgabe 1 solche Tabellen aus und mache die Probe!

Herr Schulmeister möchte von jeder Bootsgattung ein zweites Boot anschaffen, damit mehr Schüler gleichzeitig rudern können. Herr Paddel ist damit nicht einverstanden. "Dann gibt es Streit, weil nicht immer eindeutig ist, welche Boote ausgeliehen werden", sagt er. Ihm kommt es vor allem darauf an, daß die Schüler immer nur auf eine Art auf die Boote verteilt werden können, die Verteilung also eindeutig ist.

Aufgabe 11: Es sollen zwei Vierer (Zweier) ausgeliehen werden können. Bei welchen Schülerzahlen kann man die Schüler auf verschiedene Weisen auf die Boote verteilen? Gib mehrere Beispiele an!

Aufgabe 12: Für Herrn Schulmeister ist es wichtig, schnell ausrechnen zu können, wie viele Schüler rudern, wenn man die ausgeliehenen Boote kennt.
Ist das noch möglich, wenn von jeder Bootsgattung zwei Boote vorhanden sind?

Aufgabe 13: Formuliere mit Deinen Worten, die Vorteile
a. in den "Paddel-Regeln",
b. im Vorschlag von Herrn Schulmeister.
Gibt es auch Nachteile?

Herr Paddel lacht: "Schaffen wir doch einen Sechzehner an! Es macht Spaß, ein solches Boot zu rudern, wir können mehr Schüler unterbringen. Außerdem gibt es dann keinen Streit, welche Boote ausgeliehen werden sollen." Die Schule schafft ein Boot mit 16 Plätzen, einen Sechzehner, an.

Aufgabe 14: Herr Paddel notiert folgende Teilnehmerzahlen (Z):

Tag	**7.5.**	**14.5.**	**21.5.**	**28.5.**	**4.6.**	**11.6.**	**18.6.**
Z	**21**	**6**	**27**	**18**	**29**	**31**	**13**

Verteile sie nach den "Paddel-Regeln" auf die Boote.

Aufgabe 15: Wie viele Schüler können nun am Dienstagnachmittag höchstens zur Ruder-AG kommen, wenn alle einen Platz in einem der Boote bekommen sollen?

Einmal notiert Herr Paddel die Ausleihe der Boote statt auf der Tafel folgendermaßen auf einem Zettel: 10010. Er liest Herrn Schulmeister vor: "Kein Einer, ein Zweier, kein Vierer, kein Achter und ein Sechzehner".

Aufgabe 16: Herr Paddel notiert:

Datum	**3.9.**	**10.9.**	**17.9.**	**24.9.**	**1.10.**
Ausleihe	**1001**	**11000**	**10110**	**11001**	**10011**

Welche Boote sind unterwegs und wie viele Schüler rudern an den einzelnen Tagen?

Herr Schulmeister überlegt, statt eines Sechzehners einen Vierzehner oder einen Achtzehner anzuschaffen.

Aufgabe 17: Es soll ein Vierzehner anstelle eines Sechzehners vorhanden sein. Wie groß muß die Anzahl der ruderwilligen Schüler sein, bei der eine Verteilung auf die Boote nach den "Paddel-Regeln" auf unterschiedlichen Arten möglich ist? Gib mehrere Lösungen an!

Aufgabe 18: Es soll ein Achtzehner anstelle eines Sechzehners vorhanden sein. Wie groß muß die Anzahl der ruderwilligen Schüler sein, bei der eine Verteilung auf die Boote nach den "Paddel-Regeln" gar nicht mehr möglich ist? Gib alle Beispiele an!

Die Ruder-Arbeitsgemeinschaft hat nie einen Vierzehner oder einen Achtzehner angeschafft, auch der Sechzehner ist nicht mehr einsatzfähig. Aber heute noch werden die Boote nach Herrn Paddels Regeln ausgeliehen. Diese Regeln müssen wohl etwas Besonders sein.

Vierer ohne Steuermann Foto: adidas

Die "Ruderbootzahlen"

Wir wollen uns einige von den mathematischen Inhalten anschauen, die in unserer Geschichte enthalten sind.
Herr Paddel kann aus seiner Schreibweise erkennen, welche Boote entliehen sind. Beim Tafelanschrieb 1001 sind es der Achter und der Einer, während der Vierer und der Zweier nicht gerudert werden. Herr Paddel benötigt nur die beiden Zeichen 0 und 1 als Ziffern seiner "Ruderbootzahlen". Dann kann er alle Informationen geben, die er beim Verleih der Boote und für Auskünfte an Herrn Schulmeister benötigt. Bei den "Ruderbootzahlen" hat jede Stelle für Herrn Paddel einen bestimmten Wert. Er redet von der Stelle für die Einer, den Zweier, den Vierer oder den Achter und liest dabei die Ziffern seiner Zahlen von rechts nach links. Wenn er weitere Boote benötigen würde, dann lautet für ihn die logische Fortsetzung Sechzehner, Zweiunddreißiger, Vierundsechziger, usw. In den Aufgaben 17 und 18 konntet Ihr lernen, warum eine andere Fortsetzung (Vierzehner oder Achtzehner statt eines Sechzehners) nicht sinnvoll ist.
Ihr habt sicher schon entdeckt, daß sich bis auf die Einerstelle alle Stellenwerte auf die Zahl 2 zurückführen lassen.

Nun könnt Ihr sicher nach größeren "Ruderbootzahlen" hin fortsetzen und einsehen, daß gilt : $32 = 2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2 = 2^5$, $64 = 2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2 = 2^6$, usw. Wenn Ihr die letzte Zeile der Tabelle von links nach rechts lest, könnt Ihr folgende Fortsetzung vermuten : $2^1 = 2$ und $2^0 = 1$. In Klasse 9 oder 10 werdet Ihr lernen, warum diese Fortsetzung sinnvoll ist.

Im Dualsystem

Der Tafelanschrieb 1001 für "Ruderbootzahlen" ist eine Schreibweise für Zahlen in einem Zahlensystem, das die Mathematiker Zweiersystem oder auch Dualsystem nennen. Wir benötigen nur die beiden Ziffern 0 und 1 und können dann alle Zahlen des Zweiersystems darstellen. In Aufgabe 11 konntet Ihr lernen, warum die Benutzung von weniger als 2 Ziffern zu Schwierigkeiten führt.
Herr Paddel kann auch ausrechnen, wie viele Schüler rudern. Nach den "Paddel-Regeln" müssen alle entliehenen Boote voll besetzt sein. Daher rudern beim Tafelanschrieb 1001 insgesamt 9 Schüler, 8 im Achter und 1 im Einer. Herr Paddel rechnet wie folgt:
$1{\cdot}8 + 0{\cdot}4 + 0{\cdot}2 + 1{\cdot}1 = 1{\cdot}2^3 + 0{\cdot}2^2 + 0{\cdot}2^1 + 1{\cdot}2^0 = 9$.

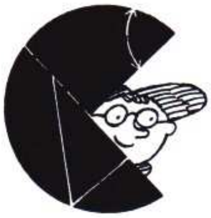
Aus der "Ruderbootzahl" oder Dualzahl 1001 können wir also die Zahl 9, die Anzahl der rudernden Schüler, ausrechnen.

Dualzahlen und Dezimalzahlen

Diese Schüleranzahl wird in dem Euch bereits bekannten Zahlensystem, den Zehner- oder Dezimalsystem, angegeben. Dem Zusammenhang zwischen der Dualzahl 1001 und der Dezimalzahl 9 machen wir durch folgende Redeweisen deutlich : "Zur Dualzahl 1001 gehört die Dezimalzahl 9." oder "Der Dualzahl 1001 wird die Dezimalzahl 9 zugeordnet." In Aufgabe 2 solltet Ihr ein Verfahren entwickeln, mit dem Ihr die Boote, die besetzt werden dürfen, finden könnt. 14 Kinder werden auf 1 Achter, 1 Vierer und 1 Zweier verteilt. Zur "Bootszahl" oder Zweierzahl 1110 gehört also die Dezimalzahl 14. Die nächsten drei Anweisungen beschreiben solch ein Verfahren:
(1) Besetze das größte Boot, von dem alle Plätze besetzt werden.
(2) Berechne die Anzahl der dann noch wartenden Schüler.
(3) Wiederhole die beiden Schritte (1) und (2) mit den nach (2) noch wartenden Schülern solange, bis alle Schüler in einem Boot sitzen.
Probiert dies Verfahren einmal aus!
Im nächsten Heft schauen wir einmal bei Herrn Rundlauf, einem Vetter von Herrn Paddel, vorbei.

StD Helmut Wirths,
Fachlehrer für Mathematik und Physik an der Cäcilienschule Oldenburg

Stelle	Sechzehner	Achter	Vierer	Zweier	Einer
Wert	16	8	4	2	1
andere Schreibweise	$2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2=2^4$	$2{\cdot}2{\cdot}2=2^3$	$2{\cdot}2=2^2$		



Komisches, Kniffliges und Knackiges

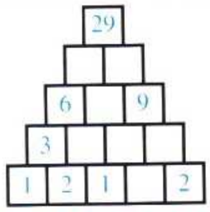
Zusammenstellung und Gestaltung:
OStR Johannes Lehmann, Leipzig

Erst staunen, dann wundern,
dann mitmachen

U+S+T=21	L:U=I
S·T=42	T=60:10
I+T=70:S	L+U+S+T+I+G=60

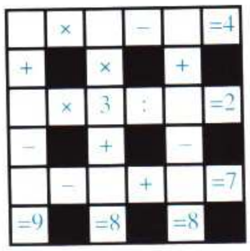
Spiel mit Zahlen

1. Die Summe aus zwei benachbarten Zahlen einer Zeile ergibt die Zahl darüber. Welche Zahlen müssen in die leeren Quadrate eingesetzt werden?

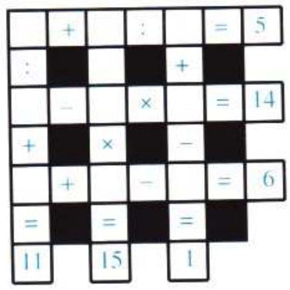


2. In diese beiden Figuren sind einstellige Zahlen so einzutragen, daß waagerecht und senkrecht richtig gelöste Aufgaben entstehen.

a)

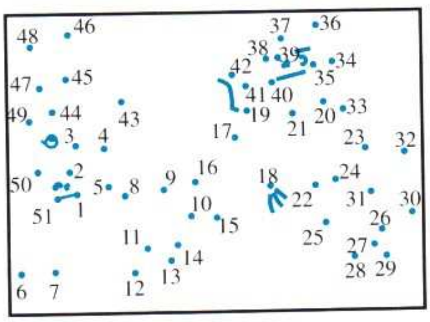


b)

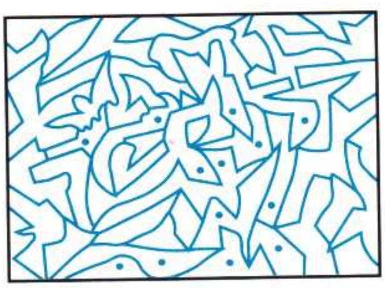


3. Wieviel Meter ist dieser seltsame Vogel bisher geschwommen?

Geduldsspiel



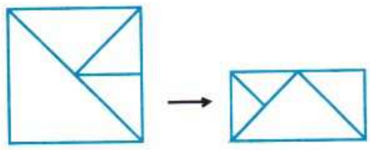
1. Die Punkte 1 bis 51 sind zu verbinden!

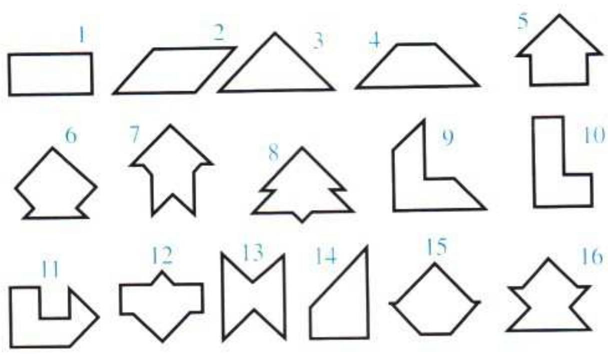


2. Die mit einem Punkt versehenen Flächen schwarz ausmalen!

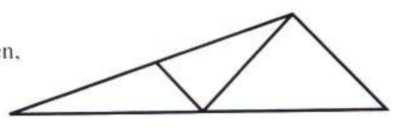
Zwei Geduldsspiele

1. Das abgebildete Quadrat ist abzupausen, auszuschneiden und entsprechend den eingetragenen Strecken in vier Dreiecke zu zerlegen. Aus diesen vier Teilfiguren sind die Figuren (1 – 16) unterschiedlicher Form zusammenzusetzen.

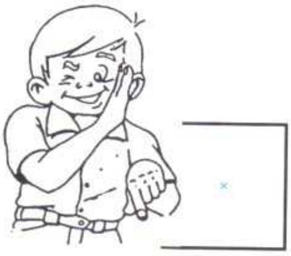




2. Abpausen, ausschneiden, zu einem Quadrat zusammensetzen!



Denksport



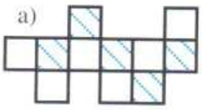
b)

c)

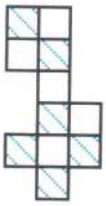
1. Zeichne drei weitere Quadrate d, e und f und trage, wie aus den vorgegebenen Quadraten ersichtlich, Kreuze ein! Wieviel Kreuze muß f enthalten?

2. Welche der drei Figuren gehört folgerichtig in das Schachbrett?

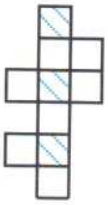
a)

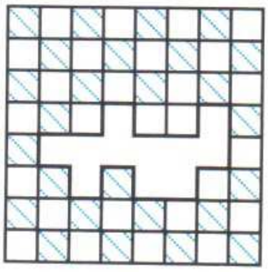


b)



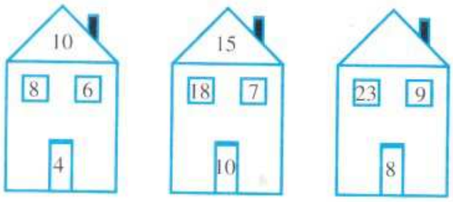
c)





Nachgedacht – mitgemacht

1. Um die Hausnummer des dritten Hauses zu finden, müßt ihr untersuchen, welche Beziehungen zwischen den beiden Zahlen in den Fenstern und der Tür bestehen.



2. Fünf Freunde wohnen in diesen Häusern der Parkstraße, in jedem Haus einer. Peter und Christel haben jeder nur einen Nachbarn.
Heidi ist zwischen Rainer und Thomas zu Hause, dagegen wohnen Thomas und Peter nicht nebeneinander. Rainers Hausnummer ist niedriger als Christels.
Wer wohnt in welchem Haus?

Labyrinthe

Das Wort „Labyrinth“ hat viele Bedeutungen: 1. Irrgarten; 2. bauliche Anlage mit verwirrend ineinandergehenden Gängen und Räumen; 3. aus beschnittenen Hecken angelegte Irrgänge im Barockgarten; 4. komplizierte geometr. Figur als Verzierung auf Fußböden; 5. knöchernes u. häutiges Innenohr; 6. zusätzl. Atmungsorgan des Labyrinthfisches; 7. enge Doppelkehre innerhalb einer Rennrodelbahn

aus: Großes Fremwörterbuch
Bibliograph. Inst. Leipzig

Es sind spezielle Labyrinthe, die wir untersuchen wollen. In der nebenstehenden Figur haben wir ein Labyrinth mit neun Feldern, die quadratisch angeordnet sind (**Abb. 1**).

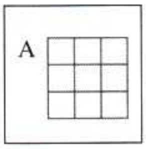


Abb. 1

Dieses Labyrinth soll nach folgender Vorschrift durchlaufen werden:

1) Beginne bei A und gehe dann vertikal oder horizontal, aber nie diagonal von Feld zu Feld.
2) Der Weg muß genau einmal durch jedes Feld gehen.

Aufgabe: Wieviel Möglichkeiten gibt es, das Labyrinth mit dieser Vorschrift zu durchlaufen?

Um alle Möglichkeiten zu erhalten und keine zu vergessen, ist es ratsam, systematisch vorzugehen.

Lars findet bei dieser Untersuchung folgende sechs Wege (**Abb. 2**).

Nach welchem Ordnungsprinzip ist er vorgegangen? Er hat mit einer Verzweigung in der ersten Spalte begonnen und die Fälle 1, 2 und 3 gefunden. Für die Verzweigung in der mittleren Spalte gab es nur einen Fall und schließlich für die dritte Spalte noch zwei.

Karin hat die sechs Möglichkeiten in der folgenden Reihenfolge gewonnen (**Abb. 3**).

Welches Ordnungsprinzip hat sie gewählt?

Ist es zufällig, daß die Ausgänge in allen sechs Fällen sich in den Eckfeldern befinden? Warum gibt es keinen Ausgang in den Mittelfeldern? An dieser Stelle wollen wir hierzu eine Untersuchung durchführen, die sich als grundsätzlich erweisen wird.

Dazu denken wir uns das Labyrinth schachbrettartig gefärbt (**Abb. 4**).

Die Vorschrift, daß man nur vertikal oder horizontal vorgehen kann, bedeutet, daß sich bei einem möglichen Wege immer schwarze und weiße Felder abwechseln müssen. Bei neun Feldern ist nur folgende Reihung möglich swswswsws.

Der Weg muß also in einem schwarzen Feld beginnen und in einem schwarzen Feld enden. Das sind aber gerade die Eckfelder. Es kann auch nicht in einem weißen Feld begonnen werden. Warum?

Diese Erkenntnis kann man verallgemeinern. Wenn die Anzahl der Felder ungerade ist, gilt diese Feststellung. Ist die Anzahl der Felder aber gerade, so muß beim Weg immer folgen-

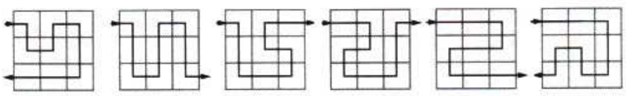


Abb. 2

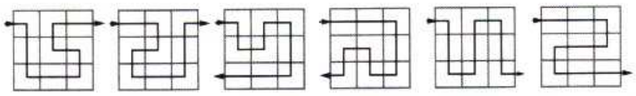


Abb. 3

Abb. 4

Abb. 5

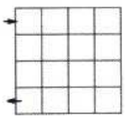


Abb. 7

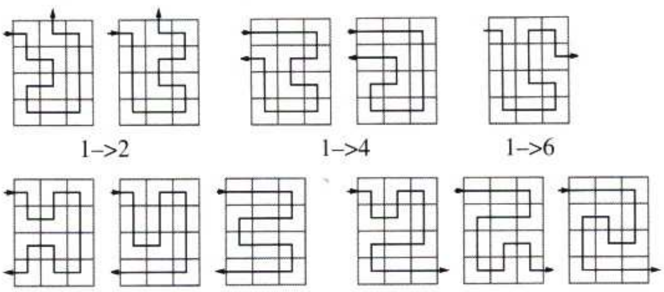


Abb. 6

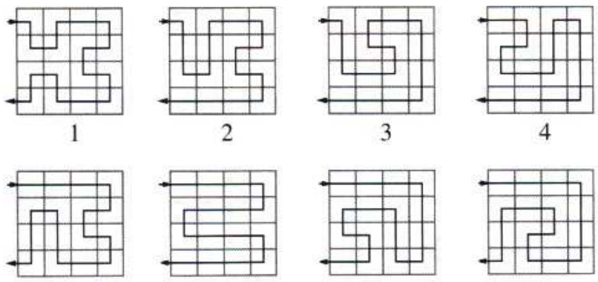


Abb. 8

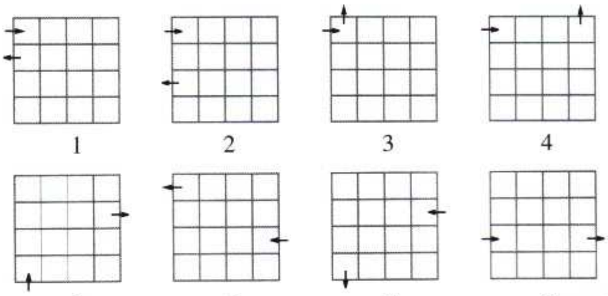


Abb. 9

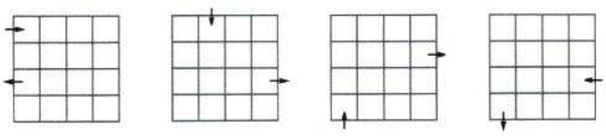


Abb. 10

de Reihung gewählt werden: swsw ... sw oder wegen der Umkehrbarkeit der Wege wsws ... ws.
Nun wollen wir alle Möglichkeiten für das Durchlaufen eines 3x4-Rechtecks ermitteln. Hierzu einige Anleitungen.
Es ist ratsam, in dem 3x4-Rechteck die Felder zu numerieren, um eine systematische und vollständige Untersuchung abzusichern (**Abb. 5**).
Die Symbolik 1 -> 2 soll bedeuten: Der Eingang befindet sich im Feld 1, der Ausgang im Feld 2. Folgende Fälle müssen dann untersucht werden:

1) 1 -> 2	9) 3 -> 10	17) 9 -> 4
2) 1 -> 4	10) 3 -> 12	18) 9 -> 6
3) 1 -> 6	11) 7 -> 2	19) 9 -> 10
4) 1 -> 10	12) 7 -> 4	20) 9 -> 12
5) 1 -> 12	13) 7 -> 6	21) 11 -> 2
6) 3 -> 2	14) 7 -> 10	22) 11 -> 4
7) 3 -> 4	15) 7 -> 12	23) 11 -> 6
8) 3 -> 6	16) 9 -> 2	24) 11 -> 10
		25) 11 -> 12

Nun müssen Lösungen für diese 25 Fälle ermittelt werden, wobei in den einzelnen Fällen auch mehrere Lösungen auftreten können. Für die ersten fünf Fälle sind sie angegeben (**Abb. 6**).
Wir stellen fest, daß mit einer geringen Vergrößerung des Labyrinthes von 3x3 auf 3x4 die Anzahl der Möglichkeiten, das Labyrinth zu durchlaufen, sich wesentlich vermehrt. Es wird deshalb empfohlen, für das 3x4-Labyrinth keine vollständige Lösung zu suchen, sondern noch die Aufgaben mit einem zweiten Eingang zu untersuchen oder einzelne bestimmte Fälle herauszusuchen und zu bearbeiten.
Um beim 4x4-Labyrinth die Anzahl der Möglichkeiten von vornherein einzuschränken, ist es ratsam, für die Untersuchung je ein Eingangs- und Ausgangsfeld auszuwählen, so wie es die **Abb. 7** zeigt.
Im 4x4-Labyrinth gibt es für diesen Fall acht Möglichkeiten, die in der **Abb. 8** dargestellt sind.
Nun gilt es, bei vorgegebenem Eingang und Ausgang, wie es die **Abb. 9** zeigt, die Lösungen zu ermitteln.
Gibt es noch andere Möglichkeiten? Warum ist es nicht möglich, die folgenden Labyrinthe mit den angegebenen Ein- und Ausgängen zu durchlaufen (**Abb. 10**)?
Wegen der Umkehrbarkeit der Wege können die Labyrinthe der Abb. 8 und 9 auch in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden.

OStR Gerhard Schulze, Herzberg, Mitglied des Redaktionskollegiums der alpha

Der Irrgarten von Altjeßnitz bei Wolfen

"Bild Leipzig" berichtete am 12.10.91 über diesen Irrgarten: "... Bis zu 8000 Besucher sind mitunter auf einmal im Irrgarten. ... Immer abends steigt er (der den Irrgarten betreuende Gärtner) auf die 3 Meter hohe Plattform (Ziel) im Mittelpunkt des Wirrwarrs, hält Ausschau nach Verirrten. ... Ein junges Paar wettete: Wer kommt zuerst 'raus? Klaus Rößler (der Gärtner) und der junge Ehemann holten die weinende Braut bei tiefster Dunkelheit von der Bank der Verzweifelten. ..."
Nach dem Erwerb einer Eintrittskarte kann man diesen auf einem quadratischen Flächenstück mit der Seitenlänge 50 m angelegten Irrgarten täglich von 10 bis 19 Uhr vom Eingang A aus betreten.

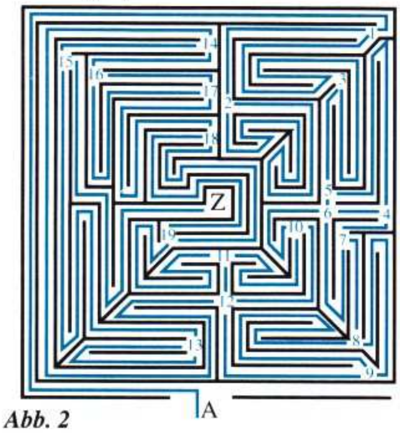


Abb. 2

Der Besucher soll versuchen, das Ziel Z zu erreichen und soll sich auch wieder aus dem Labyrinth herausfinden. Ein Markieren des eingeschlagenen Weges z. B. durch Auslegen eines "Ariadnefadens" ist nicht erwünscht. Auch wenn man den auf der Eintrittskarte abgedruckten Plan des Jeßnitzer Gartens zur Verfügung hat, ist ein Zurechtfinden im Garten ohne eine gründliche Analyse nicht leicht. Im hier abgedruckten Plan (**Abb. 2**) ist zusätzlich ein Multigraph[1] farbig markiert eingezeichnet. Die Kanten dieses Multigraphen verlaufen in der Mitte der einzelnen Wegstücke. Die Knoten sind neben A und Z die hier mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 19 kotierten Verzweigungspunkte der Wegemitten. Dieser Multigraph wird nun ein zweites Mal auf ein Blatt Papier gezeichnet:

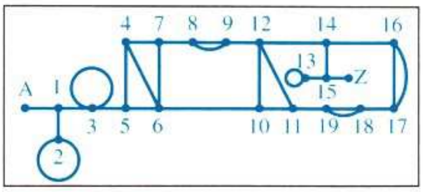


Abb. 3

Bei dieser zweiten Darstellung dieses Multigraphen sind die Kanten Strecken oder Kreisbögen. Weiterhin folgen in beiden Darstellungen dieses Multigraphen an jedem Knoten i (i=1, 2, ..., 19) die einmündenden Kanten bei Wahl des gleichen Umlaufsinnes in der gleichen Anordnung aufeinander:

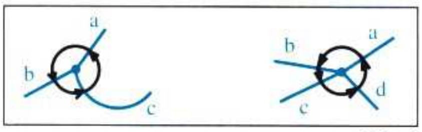


Abb. 4

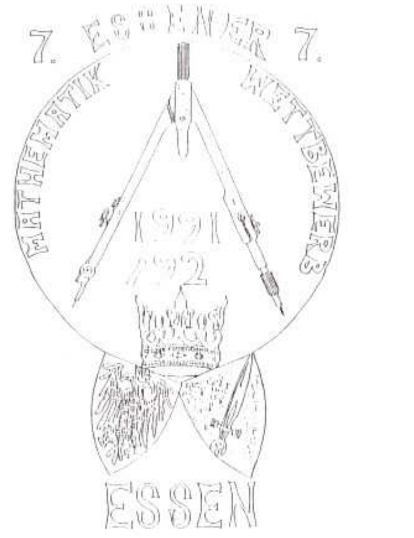
Die in **Abb. 3** angegebene Darstellung des Wegenetzes durch einen Multigraph ist zwar nicht maßstabgerecht, doch mit ihr ist ein Zurechtfinden im Irrgarten problemlos möglich.
1. Aufgabe: Wieviele doppelpunktfreie Wege führen im dem Jeßnitzer Irrgarten zugeordneten Multigraph von A nach Z? (Ein Weg heißt doppelpunktfrei, wenn er durch jede Kante und auch durch jeden Knoten des Multigraphen höchstens einmal führt.)
2. Aufgabe: Ein Besucher will im Jeßnitzer Garten den von A nach Z führenden Weg benutzen, der aus der kleinstmöglichen Zahl von Kanten (Wegstücken) besteht. Als einzige Orientierungshilfe hat er sich für jeden der von ihm zu überschreitenden Knoten eine natürliche Zahl eingeprägt oder diese auf einen Zettel geschrieben:
2;1;1;1;2;2;1;2
Wie legte der Besucher diese Zahlenfolge fest? Kann er sich mit dieser Zahlenfolge auch wieder von Z nach A zurückfinden?

Anmerkung:
[1] Während bei einem Graph stets zwei Knoten höchstens durch eine Kante verbunden sind, sind bei einem Multigraph mindestens zwei Knoten durch mindestens zwei Kanten verbunden.

Walter Träger, Döbeln

Olympiade-Ecke

Der Essener Mathematikwettbewerb



"Mathe macht Spaß!" Dies meinen jedenfalls (mindestens) sechs Mathematiklehrer aus verschiedenen Schulen der Ruhrgebietsmetropole, die nun schon zum siebten Male den Essener Mathematikwettbewerb (EMW) durchgeführt haben. Davon scheinen sie auch immer mehr Schüler überzeugen zu können. Warum sonst sollten diese an einem schulfreien Samstag freiwillig für mehrere Stunden in Klausur gehen, um über kniffligen Mathe-Problemen zu brüten?

Nicht einmal Klassen- und Studienfahrten stellen dann für ältere Schüler ein Hindernis dar, um auch die zweite (Klausur) – Runde des EMW erfolgreich meistern zu können. So durften jedenfalls zwei Schüler, während einer Studienfahrt nach Nizza, dieselben Aufgaben zeitgleich mit den übrigen Teilnehmern der Klausur des EMW '87 schreiben.

Wie steigert man nun die Lust an Mathematik, wo doch bei der Stoffülle des täglichen Unterrichts gerade der Spaß am Knobeln meist viel zu kurz kommt? Michael Rüsing, der von Anfang an dabei ist und als "Kopf" des Wettbewerbes gilt, nennt einige Beweggründe, die speziell zu dem Essener Modell geführt haben. Es sind möglicherweise die gleichen Motive, die auch den einen oder anderen von Euch vielleicht dazu bewogen haben, sich selbst einmal an einem Mathewettstreit der eigenen Schule zu versuchen: "Eine lokale Veranstaltung spricht eben eher an als eine regionale oder gar bundesweite, weil sie überschaubarer ist". In Gesprächen mit den Essenern Veranstaltern äußern sich fast alle Befragten übereinstimmend, daß ein konkreter Wettkampf zwischen Schulen am selben Ort als Konkurrenzsituation erlebt wird. Nach Beobachtungen von Herrn Rüsing, und auch meiner Erfahrung nach, bildet sportlicher Ehrgeiz d i e entscheidende Triebfeder für die Teilnahme an einem Mathewettstreit. Mithin gewinnt eine derartige Veranstaltung eine kämpferische oder spielerische Note – wer mißt seine (Geistes-)Kräfte nicht gern mit Gleichaltrigen aus bekannten Schulen seiner Heimatstadt?

Um ein solch mathematisches Kräftemessen wurde der Essener Wettbewerb behutsam herumgebaut. "Unsere lokale Aktion soll auch die Scheu vor hohen Hürden, wie etwa dem Bundeswettbewerb Mathematik, langsam abbauen helfen," läßt Michael Rüsing nebenbei durchblicken. Die Schwelle ist aber bewußt niedriger angesetzt als bei einer Mathe-Olympiade, macht er zögernden Interessenten Mut. Seit Beginn des Essener Wettbewerbs bemühen sich die Wettbewerbsmacher um einen ständigen Kontakt zur Essener Lokalpresse, eingedenk der Tatsache, daß zu einem guten Gelingen eines Unternehmens stets die öffentliche Aufmerksamkeit gehört. Die Öffentlichkeit solle nämlich bemerken, daß es Schülerinnen und Schüler mit besonderen Fähigkeiten gibt, die keineswegs zu einer hochnäsigen Elite zählen; denen man viel eher mit kniffligen Fragen eine große Freude bereiten kann. Stolz verweist M. Rüsing an dieser Stelle auf den hohen Anteil von Mädchen (40%) am Essener Wettbewerb. "Eine vergleichbare Mädchenquote gibt es unserer Kenntnis nach bei keinem der bestehenden inländischen Mathematikwettbewerbe".

Die mathematische Talentförderung hat in Essen schon lange Tradition. Seit mehreren Jahren werden an einigen Essener Gymnasien regelmäßig neben dem Unterricht Mathematikprobleme zur freien Bearbeitung angeboten (z. B. die Aufgabe des Monats). Anfang 1985 vereinbarten drei Lehrer ein gemeinsames Vorgehen als Versuch auf Stadtebene. Unter dem Namen "Essener Mathematikwettbewerb" wurde besagter Schülerwettbewerb ins Leben gerufen. In den Anfangsjahren richtete sich dieser Wettbewerb nur an Schüler der Sekundarstufe II. Nachdem in den folgenden Jahren die Zahl der Organisatoren zugenommen und sich der Wettbewerb an den Schulen etabliert hatte, wurde eine Ausweitung auch auf die Sekundarstufe I beschlossen. Dies geschah im Jahre 1988.

Nach einigen Verbesserungen in den letzten fünf Jahren hat sich mittlerweile ein fester Ablauf für den Essener Mathematikwettbewerb bewährt. Der jährliche Wettbewerb setzt sich aus zwei Runden zusammen. Zur ersten Runde im Herbst (kurz nach Beginn des Schuljahres) werden an alle Essener Schulen Aufgaben verschickt. Interessierte Schülerinnen und Schüler können diese dann in einem festen Zeitraum von etwa einem Monat bearbeiten. Die zurückgesandten Lösungen werden von den Organisatoren des Wettbewerbs korrigiert. Dabei soll ein möglicher Lösungsweg von allen Altersstufen gefunden werden können. "Kein leichtes Unterfangen übrigens", betont Michael Rüsing.

Alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer mit guten Leistungen in der ersten Runde, werden zur zweiten Runde eingeladen. Sie findet als Klausur an einem schulfreien Samstag im Frühjahr des jeweils folgenden Jahres statt. Nach den Ergebnissen der Klausurrunde werden die Preisträger ausgewählt. Im Rahmen einer Feierstunde im Essener Rathaus erfahren die Punktbesten am Ende des Schuljahres eine Auszeichnung. Als Belohnung winken Urkunden und wertvolle Buchgutscheine, für die verschiedenen Essener Firmen gestiftet haben.

Ein kleiner Wermutstropfen trübt dennoch die sonst makellose Erfolgsbilanz der Wettbewerbsmacher aus der Ruhrgebietsmetropole. So hat M. Rüsing einräumen müssen, daß von anderen Schularten weniger Resonanz auf den Wettbewerb komme. Zur 5. Doppelrunde dieser Art etwa sind "leider nur Lösungen von Schülern aus Gymnasien eingegangen". Dabei werden die Aufgaben der jeweiligen Runden wirklich nicht für ausgesprochene Mathe-Genies ausgesucht.

Das Lehrerteam hat jedes Jahr die vertrackte Aufgabe, Probleme für jeden Geschmack auszutüfteln. Daß ihm diese schwierige Balance bei der Aufgabenfindung noch jedes Mal gelungen ist, dafür spricht wohl eine typische Teilnehmerantwort: "Beim einfacheren ersten Durchgang wird weniger Rechnen als Denken verlangt."

Damit Ihr Euch selbst eine Vorstellung von Umfang und Anspruchsniveau der Probleme des EMW machen könnt, folgen Aufgaben des 7. Essener Mathematikwettbewerbs.

Wenn Ihr noch mehr über den Essener Wettbewerb erfahren wollt, dann bitte schreibt an GEMW Gesellschaft Essener Mathematikwettbewerb e. V., Herrn Michael Rüsing, B.M.V.-Schule, Bardelebenstraße 9 in W-4300 Essen 1.

Herr Rüsing wird sich über jede Zuschrift freuen.

Paul Jainta, Schwabach
Gymnasiallehrer für Mathematik und Physik

7. Essener Mathematikwettbewerb

Sekundarstufe I / Erste Runde

Aufgabe:

Betrachte die folgenden numerierten Gleichungen:

1) $3^2+4^2=5^2$
2) $5^2+12^2=13^2$
3) $7^2+24^2=25^2$
4) $9^2+40^2=41^2$
…

n) $(2\cdot n+1)^2+\ldots=\ldots$

a) Wie lauten die Gleichungen 5), 6) und 7)?
b) Ergänze die fehlenden Ausdrücke in Gleichung n).
c) Beweise die Richtigkeit der ergänzten Gleichung n).

Lösung:

a) 5) $11^2+60^2=61^2$
6) $13^2+84^2=85^2$
7) $15^2+112^2=113^2$

b) n) $(2\cdot n+1)^2+(2n^2+2n)^2=(2n^2+2n+1)^2$

c) $(2\cdot n+1)^2+(2n^2+2n)^2=(2n^2+2n+1)^2$
/Klammern ausrechnen <=>
$4n^2+4n+1+4n^4+8n^3+4n^2=4n^4+4n^3+2n^2+4n^3+4n^2+2n+2n^2+2n+1$ /Zusfg.
<=> $4n^4+8n^3+8n^2+4n+1=4n^4+8n^3+8n^2+4n+1$
q. e. d.

Aufgabe:

Durch die folgenden Gleichungen wird eine Gesetzmäßigkeit vorgegeben:

$6^2-5^2=11$
$56^2-45^2=1111$
$556^2-445^2=111111$
$5556^2-4445^2=11111111$

a) Prüfe, ob sich die Gesetzmäßigkeit in den nächsten vier Gleichungen fortsetzt.
b) Formuliere die Gesetzmäßigkeit und beweise sie.

Lösung:

a)
$55556^2-44445^2=1111111111$
$555556^2-444445^2=111111111111$
$5555556^2-4444445^2=11111111111111$
$55555556^2-44444445^2=1111111111111111$
Die Gesetzmäßigkeit setzt sich fort.

b)

$$\left(\frac{5}{9}\cdot 10^n+\frac{4}{9}\right)^2-\left(\frac{4}{9}\cdot 10^n+\frac{5}{9}\right)^2=\frac{1}{9}\cdot 10^{2n}-\frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{81}\cdot 10^{2n}+2\frac{20}{81}\cdot 10^n+\frac{16}{81}-\left(\frac{16}{81}\cdot 10^{2n}+2\frac{20}{81}\cdot 10^n+\frac{25}{81}\right)=\frac{1}{9}\cdot 10^{2n}-\frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{81}\cdot 10^{2n}-\frac{9}{81}=\frac{1}{9}\cdot 10^{2n}-\frac{1}{9}$$

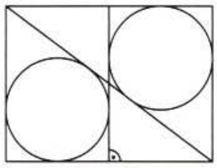
$$\Leftrightarrow \frac{1}{9}\cdot 10^{2n}-\frac{1}{9}=\frac{1}{9}\cdot 10^{2n}-\frac{1}{9}$$

q. e. d.

Offene Runde
Zweite Runde

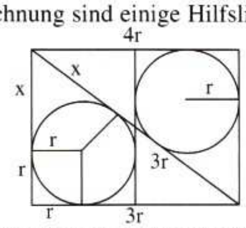
Aufgabe:

Zwei Kreise mit gleichem Radius r werden wie unten dargestellt in ein Rechteck gezeichnet. Geben Sie die Seitenlängen des Rechtecks in Abhängigkeit von r an.



Lösung:

In die Zeichnung sind einige Hilfslinien eingetragen.



Da die Kreise die senkrechte Linie im Rechteck berühren, sieht man sofort, daß die längere Rechteckseite die Länge 4r hat.
Betrachtet wird der linke Kreis. Die Diagonale und die Rechteckseiten sind Tangenten an den Kreis. Die Entfernungen von den Schnittpunkten zu den Berührpunkten sind daher – wie in der Zeichnung dargestellt – gleich. Der Satz des Pythagoras liefert:

$(x+r)^2+(4r)^2=(x+3r)^2$
<=> $x^2+2xr+17r^2=x^2+6xr+9r^2$
<=> $x=2r$

Also hat die kürzere Seite die Länge r+x=3r.

Aufgabe:

Gesucht sind alle vierstelligen Zahlen mit der folgenden Eigenschaft: Die Summe aus der betreffenden Zahl selbst, ihrer Quersumme und der zwei einstelligen Zahlen, die durch die erste und die letzte Ziffer dargestellt werden, beträgt 5900.

Lösung:

Seien a, b, c, d die Ziffern der gesuchten Zahl. Die Bedingung der Aufgabe lautet dann
$1000\cdot a+100\cdot b+10\cdot c+d+a+b+c+d+a+d=5900$
<=> $1002\cdot a+101\cdot b+11\cdot c+3\cdot d=5900$
Es folgt, daß a höchstens den Wert 5 hat. Angenommen, a=4. Dann ist $101\cdot b+11\cdot c+2\cdot d=1892$. Das ist aber nicht möglich, selbst wenn b=c=d=9. a kann damit erst recht nicht kleiner als 4 sein. Also a=5.
Damit gilt:
$101\cdot b+11\cdot c+3\cdot d=890$
Es folgt nun, daß b höchstens den Wert 8 haben kann. Wie oben sieht man, daß b auch nicht kleiner als 8 sein kann, da $11\cdot c+2\cdot d$ nicht mehr den Rest ausmachen kann. Damit gilt:
$11\cdot c+3\cdot d=82$
c kann höchstens den Wert 7 haben. Dann wäre $3\cdot d=5$, also $d\notin\mathbb{N}$.
Wenn c=6, dann wäre $3\cdot d=16$, also $d\notin\mathbb{N}$
Wenn c=5, dann wäre $3\cdot d=27$, also d=9.
c kann aber nicht kleiner als 5 sein, da sonst d>9.
Es gibt nur eine Zahl, die die Bedingung erfüllt, nämlich 5859.

Aufgabe:

Zeige, daß $\left[n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$ für alle $n\in\mathbb{N}$ die natürlichen Zahlen mit Ausnahme der Quadratzahlen durchläuft.
Hinweis:
[..] ist dabei die Gauss-Klammer. [x] ist die größte natürliche Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Beispiele: [3,56]=3; [5,24]=5; [7]=7.

Lösung:

Es ist $\left[n+\sqrt{n}+0{,}5\right]=n+\left[\sqrt{n}+0{,}5\right]$.
Betrachtet wird die folgende Tabelle:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\left[\sqrt{n}+0{,}5\right]$	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4
$n+\left[\sqrt{n}+0{,}5\right]$	2	3	5	6	7	8	10	11	12	13	14	15	17

Die Folgenglieder in der zweiten Zeile wachsen bei n=2, 6, 12 um 1. Das sind Zahlen, die sich in der Form k(k+1) schreiben lassen. Es wird bewiesen, daß das stets der Fall ist.

Behauptung: Es ist $k+1>\sqrt{k(k+1)}+0{,}5>k$

Beweis: $k+1>\sqrt{k(k+1)}+0{,}5$

$$\Leftrightarrow k+0{,}5>\sqrt{k(k+1)}$$
$$\Leftrightarrow k^2+k+0{,}25>k^2+k$$
$$\Leftrightarrow 0{,}25>0$$

bzw. $\sqrt{k(k+1)}+0{,}5>k$

$$\Leftrightarrow \sqrt{k(k+1)}>k-0{,}5$$
$$\Leftrightarrow k^2+k>k^2-k+0{,}25$$
$$\Leftrightarrow 2k>0{,}25$$

Nun folgt aus der Behauptung, daß
$\left[\sqrt{k(k+1)}+0{,}5\right]=k.$
Genauso zeigt man, daß
$\left[\sqrt{k(k+1)+1}+0{,}5\right]=k+1.$
Damit wachsen die Werte in der zweiten Zeile der Tabelle gerade um 1, wenn n von k(k+1) auf k(k+1)+1 wächst. Die Werte in der 3. Zeile unterscheiden sich an diesen Stellen um 2, es wird also genau eine Zahl beim Durchlaufen ausgelassen.
Es wird nun untersucht, welche Zahlen ausgelassen werden.

Für $n=k(k+1)$ ist $\left[n+\sqrt{n}+0{,}5\right]$
$$=k(k+1)+k=k^2+2k=(k+1)^2-1$$
für $n=k(k+1)+1$ ist $\left[n+\sqrt{n}+0{,}5\right]$
$$=k(k+1)+1+k+1=k^2+2k+2$$
$$=(k+1)^2+1$$

Es entsteht also eine Zahl, die um 1 kleiner als eine Quadratzahl, bzw. um 1 größer als eine Quadratzahl ist, d. h. die Quadratzahl wird gerade ausgelassen.

Bücher
Programme
Videos
Spiele

Die Marktecke

Lesens- und Sehenswertes vom Medienmarkt

Bildmappen zu Leben und Werk von Adam Ries

Die drei Adam Ries-Bildmappen von Dr. Harry Beyrich, die 1984 zum 425. Todestag des Rechenmeisters erschienen waren, werden im Verlag H. C. Schmiedicke, Leipzig, wieder aufgelegt. Sie behandeln das Leben und das Wirken als Rechenmeister und Bergbeamter im erzgebirgischen Annaberg, stellen die Rechenbücher mit ihren Titelholzschnitten vor und bringen Rechenaufgaben aus dem verbreitetsten Rechenbuch, der "Rechenung auff der linihen vnd federn" von 1522, meist mit den Lösungswegen von Adam Ries und den Ergebnissen ("facit"). Die Mappen enthalten erläuternde Texte zur Einführung. Der Vertrieb erfolgt durch die Büros Adam-Ries-Jubiläum in den Adam-Ries-Städten Annaberg-Buchholz, Erfurt und Staffelstein und durch die Jütte Druck GmbH Leipzig, Kreuzstr. 20. Das 2. Rechenbuch von Adam Ries, in der Wissenschaftlichen Allgemeinbibliothek Erfurt als 10. Auflage von 1532 bei Mathes Maler in Erfurt vorhanden, wurde vom Büro Erfurt 2000 als fotomechanischer Nachdruck, versehen mit einem Nachwort, herausgegeben.

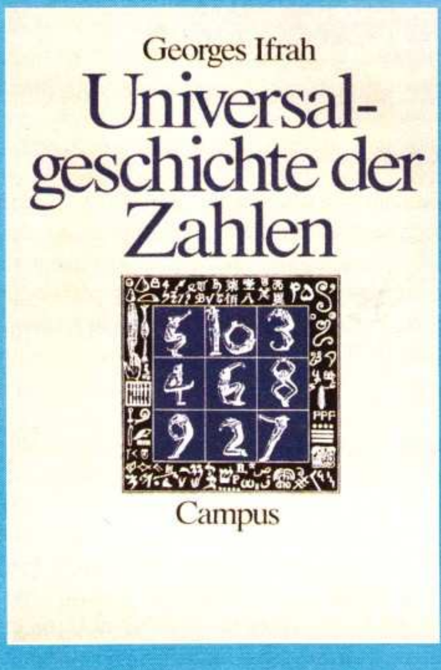
Es ist über das ***Fremdenverkehrsamt, Krämerbrücke 3, 0-5020 Erfurt***, für 9,50 DM im Einzelpreis, bei Versand plus Portokosten, zu erwerben.

Friedrich Wille:
Eine mathematische Reise in Cantors Paradies, Zenons Hölle und andere Erholungsgebiete
Kleine Vandenhoeck-Reihe 1505
Vandenhoeck & Ruprecht 1984

Das Ehepaar war im Cantor-Land angekommen. In Bad-Omega gingen sie zum Hilbertschen Hotel. Dieses Hotel hat unendlich viele Zimmer, die mit den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... durchnumeriert sind. Aus Gründen rationeller Verwaltung gibt es nur Einzelzimmer. Zum Glück bekamen sie zwei nebeneinander liegende Einzelzimmer, die letzten, dann war das Hotel ausgebucht. Das heißt, an diesem Abend wurden noch ein weiterer sehr erschöpfter Reisender sowie eine vierzigköpfige Reisegesellschaft untergebracht. Die Ankunft eines Busses mit abzählbar unendlich vielen Insassen brachte zwar wieder Unruhe im Hilbertschen Hotel, dieses aber nicht zum Überlaufen. Wie das möglich ist und eine weitere Menge interessanter Erlebnisse im Cantor-Land, Friedrich Wille in dem Bändchen "Eine mathematische Reihe" erzählt es. Der Auszug möge Appetit machen auf die Reise zu einem perfekten Fleckchen Erde mit abzählbar vielen Bergen, wohlgeordneten Städten und reellen Preisen. Ein Beispiel dafür, daß man Mathematik erzählen kann!

Georges Ifrah:
Universalgeschichte der Zahlen

(Aus dem Französischen von A. von Platen) 1989, 2. Auflage 1991.
Campus Verlag Frankfurt/New York, ISBN 3-593-34192-1, 600 Seiten, DM 48,–



Dieses Buch liefert ein Beispiel dafür, welch positive Folgen gute Fragen von Schülern an ihren Mathematiklehrer haben können. Der Verfasser, selbst einst Mathematiklehrer, wurde, wie er in der Einführung berichtet, durch die Frage eines Schülers dazu angeregt, sich in jahrelangen Studien zu einem international bekannten Fachmann für die Geschichte der Zahlen und der Zahlbezeichnungssysteme zu entwickeln und schließlich die vorliegende „Universalgeschichte" zu schreiben, die auch schon ins Englische übersetzt wurde. Es geht nur um die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, ... und so ist es schon erstaunlich, wieviel es darüber zu wissen gibt: Von den instinktiven Zählfähigkeiten mancher Tierarten über die Methoden unserer frühen Vorfahren, mittels Fingern, Gebärden, gekerbter Knochen und anderer Hilfsmittel zu zählen und zu rechnen bis zu den Zahlschriften der Sumerer, Ägypter, Griechen, Chinesen, Inkas, ... und schließlich den im 9. – 10. Jahrhundert von Indien über islamische Länder nach Europa gelangten heutigen „arabischen" Dezimalzahlen. Von Büchern ähnlicher Thematik (wie z. B. K. Menningers schon klassischem Buch „Zahlwort und Ziffer") unterscheidet sich Ifrah nicht nur durch die überwältigende Fülle der Details sondern auch durch die Einbeziehung entlegener kulturhistorischer Quellen und Gesichtspunkte. So gibt es ein Kapitel über die Rolle von Zahl und Ziffer im Bereich von Magie und Mystik. Als kurioses Beispiel sei ein Algorithmus angeführt, den der islamische Historiker Ibn Chaldun im 14. Jahrhundert angab, um aus den zuvor in Zahlenwerte übersetzten Namen zweier Könige oder Feldherren zu errechnen, welcher von beiden in einem Krieg bzw. einer Schlacht siegen wird:

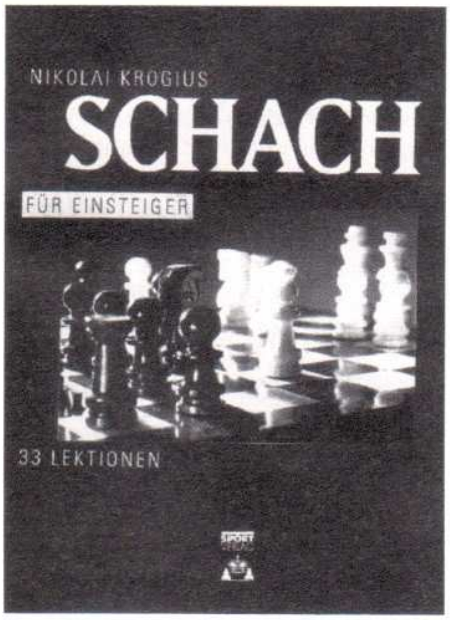
„Man addiert die Zahlenwerte der Buchstaben, aus denen der Name des jeweiligen Königs besteht... Nach dieser Addition zieht man von jeder Summe so oft neun ab, bis der Rest kleiner als neun ist. Man vergleicht diese Restsummen miteinander; sind beide zugleich entweder gerade oder ungerade Zahlen, so wird der König, dessen Name die kleinere Restsumme aufweist, siegreich sein. Ist eine der Restsummen eine gerade, die andere eine ungerade Zahl, so wird der König mit der höheren Zahl gewinnen. Sind beide Summen gleich und gerade Zahlen, wird der König, der angegriffen worden ist, den Sieg davontragen; sind die Restsummen einander gleich und ungerade, wird der König siegen, der angegriffen hat."

Aus heutiger Sicht ist es ganz leicht, diese Anweisung in ein Computerprogramm zu übersetzen. Man beachte jedoch, daß Ibn Chaldung hier eine trotz mehrfacher Verzweigung vollständige Fallunterscheidung bewältigt hat, was selbst berühmten Mathematikern im 19. Jahrhundert gelegentlich noch schwerfiel.

Dr. Peter Schreiber, Greifswald

Nikolai Krogius:
Schach für Einsteiger – 33 Lektionen

ca. 256 Seiten, ca. 250 Diagramme,
19,5 x 22,0 cm, gebunden; DM 34,80
ISBN 3-328-00432-7



In den ersten 13 Lektionen erfährt der Schacheinsteiger alles über die Spielregeln. Auf diesem Grundkurs aufbauend, vermittelt Krogius, konsequent nach Erkenntnissen über optimales Lernen vorgehend, vielseitiges, strategisches und taktisches Grundwissen.

Mathematik zum Frühstück?

Die unterhaltsamen mathematischen Knobeleien, jeweils mit ausführlichen Lösungen versehen, sind verschieden schwierig. Eins haben sie alle gemeinsam: Der richtige Kniff führt ohne viel Rechenaufwand zur Lösung. Obwohl die verschiedensten Gebiete der Mathematik durchstreift werden, reichen meistens die Grundkenntnisse der Mathematik zur Lösung aus.
Alle Aufgaben und Lösungen enthalten ausführliche Quellenangaben. Vor einem will der Autor die voreiligen Knobler auf jeden Fall warnen: Bei Aufgaben, die keine Lösungen haben, kann man auf der Lösungssuche graue Haare bekommen. Ratsam ist also in jedem Fall, zunächst zu überprüfen, ob es überhaupt eine Lösung geben kann! Und wie kommt es nun zu diesem Titel? Ganz einfach! Die Kollegen des Autors während seiner Tätigkeit an der Universität Osnabrück mußten während des Frühstücks Denksportaufgaben lösen.

Eine Kostprobe:

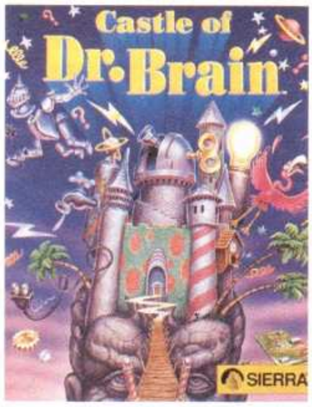
***Die Händedrücke** Jeder Mensch, der jemals auf der Welt lebte, hat in seinem Leben eine bestimmte Zahl Händedrücke gewechselt. Die Anzahl der Menschen, die eine ungerade Zahl Hände gedrückt haben, ist gerade, Warum?*

Castle of Dr. Brain

Kreative Person für Labor gesucht, die die Zusammenhänge von Raum, Zeit und Realität in Zusammenarbeit erforschen will! Grundvoraussetzung für Bewerber: Wissensdurst, Humor und Pizza essen. Wer sich für diesen Job fit wähnt, sollte sich sofort persönlich bei Dr. Brain bewerben. Wer den Schließmechanismus des Haupttores überlistet und so Einlaß in das Spiel findet, wird in vielen Aufgaben auf die Probe gestellt.
Mit etwas Überlegung, sicherem Auge oder gutem Gehör ist dieses Hindernis bald genommen. Was folgt? Mathematische Problemstellungen, 3D-Labyrinthe, Schaltpläne, programmierbare Computer, Sternkarten, Logikrätsel, diverse Worträtsel – und Entschlüsselungstechniken, mit deren Hilfe Anleitungen zu lesen sind, mit deren Hilfe Aufgaben zu lösen sind.
Der Schwierigkeitsgrad ist dem Niveau der Bewerber in drei unterschiedlichen Stufen anpaßbar. Schon der Level Novize verlangt genügend Geist, um die Aufgabenstellungen zwischen 3D-Animation, handgemalten digitalisierten Grafiken und Soundtrack zügig zu lösen.

Wer Dr. Brain erforschen will und ein herkömmliches Grafik- oder Text-Adventure aus dem Hause Sierra erwartet, wird sich wundern. Das Spiel gehört in das weite Feld amerikanischer Lernspiele, ist mit deutschen Lernspielen in keiner Weise vergleichbar.
Das erfolgreiche Sierra-Team Ken Williams/ Corey Cole entwickelte ein Computerprogramm, daß mit etwas Schulenglisch unter Zuhilfenahme eines Wörterbuches Spaß machen kann. Zu bedenken ist jedoch: Sierra hat mit Dr. Brain ein Lernprogramm für amerikanische Kids produziert, trifft deren Mentalität, deren Neugierde. Sollte in einer Schule fremdsprachlicher Frühunterricht bereits so weit eine Rolle spielen, daß man mit diesem relativ leicht verständlichen Englisch mit beratender Unterstützung arbeiten kann, dann gehört dieses Spiel zum Pflichtprogramm, wenn die User wegen der Aufgabenstellungen mindestens 12 Jahre alt sind.
Andere sollten sich an der Hintergrundstory orientieren, um vielleicht eines Tages einmal ein ähnliches Programm für deutschsprachige Schüler zu programmieren, ein Programm, das gut verpackt, fernab aller Monster, fernab aller Run'n'Jump-Geschicklichkeit kindgerecht, Können, Geschick und Wissen verlangt.

Der deutsche Distributor sollte dieses Programm für hiesige Verhältnisse nur dann eindeutschen, wenn das Ergebnis der Englisch-Deutschen Umsetzung der Spiele von Monkey Island entspricht.



H. Seitz / -se

Castle of Dr. Brain, Sierra 1991,
Vertrieb: Bomico
Typ: amerikanisches Lernspiel
Handbuch: E – Game-Manual, trotz Kartonaufdruck war kein deutsches Handbuch zu finden, Beilagen: TB Fantastic Book of Logic Puzzles
Hardware: PC AT8 MHz, 640 KB RAM, Maus, Festplatte, EGA, VGA; SOUNDkarten, zwei 3.5"-Disketten
Preis: 139,50 DM

Lösungen

•Experimente mit dem SR 1 (Seiten 6/7)

1. Ein möglicher Programmablaufplan ist

1 x→M ↑ ↕ 2 M+ MR 1/x

abwechselnd - bzw. + ; Zwischenergebnis notieren

Im Speicher des SR1 werden die jeweils benötigten Nenner (die Zahlen 1+k·2) berechnet. Aufpassen muß man beim Eintippen des richtigen Operationszeichens (+ bzw. -). Um Irrtümer zu vermeiden und die Abarbeitung weiter zu formalisieren, könnte man die beiden Möglichkeiten $\begin{smallmatrix}-\\+\end{smallmatrix}$ untereinander schreiben und vereinbaren, mit einem kleinen Pappkärtchen jeweils ein Feld, zuerst +, zuzudecken. Beim Befehl «Vorzeichenwechsel» verschiebe man das Kärtchen, beim ersten Mal also nach oben. Dann ist - verdeckt und + sichtbar. Kommt man beim nächsten Durchlauf zu diesem Befehl, wird + zugedeckt usw. Daher hat man:

1 x→M $\begin{smallmatrix}-\\+\end{smallmatrix}$ ↕ 2 M+ MR 1/x ↑

Zwischenergebnis notieren ; Vorzeichenwechsel

Man findet mit dem SR1

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-+\ldots-\frac{1}{99}=0{,}78039 \quad \text{und}$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-+\ldots-\frac{1}{99}+\frac{1}{101}=0{,}79029$$

und daher $0{,}7803 \cdot 4<\pi<0{,}7903 \cdot 4$, hieraus folgt die angegebene Abschätzung.

2. 1. Variante

Wir merken uns die Teilsummen im Speicher des SR1, einige Zwischenrechnungen sind aber außerhalb des Rechners (etwa im Kopf) auszuführen. Mit MR lassen wir uns die Teilsummen als Zwischenergebnisse anzeigen:

Eingabe	Tastenfolge
1 x 3 =	1/x x→M
3 x 9 =	1/x +/- MR+ MR
5 x 27 =	1/x MR+ MR
7 x 81 =	1/x +/- MR+ MR
usw.	

2. Variante

Es bezeichne $s_k=(-1)^{k+1}\frac{1}{(2k-1)}\frac{1}{3^k}$, dann ist die n-te Teilsumme $T_n=s_1+...+s_n$. Wir notieren uns jeweils T_n und berechnen die Summanden s_n mit dem SR1. Das fortwährende Aufschreiben und erneute Eintippen von T_n bedeutet natürlich einen Genauigkeitsverlust!

Beachte $s_{k+1}=-\frac{2k-1}{2k+1}\frac{1}{3}s_k, \quad s_1=\frac{1}{3}$.

Dann kann man so vorgehen:

Merke n=1, $T_0=0$

3 1/x x→M + ↑ = ↕

Eingabe notieren T_{n-1} ; Notiere T_n

MR +/- x ↑ : ↑ : 3 =

Eingabe 2n - 1 ; Eingabe 2n + 1

Merke: Erhöhe n um 1

Jetzt wollen wir uns einen Taschenrechner vorstellen, der Speicher M1 und M2 besitzt und über Tasten x → M1, x→M2, MR1, MR2, M1+ und M2+ in Analogie zum SR1 verfügt. Auf M1 können dann die Summanden s_n und auf M2 die Teilsummen T_n gespeichert werden:

Merke n=1, $T_0=0$

0 x→M2 3 1/x x→M1 + MR2

= x→M2 MR1 +/- ↑ : ↑ : 3 =

Eingabe 2n - 1 ; Eingabe 2n + 1

Merke: Erhöhe n um 1

Schließlich soll noch ein dritter Speicher und entsprechende Tasten x→M3, MR3, M3+ vorhanden sein, auf denen die Zahlen (2n-1) festgehalten werden:

1 x→M3 0 x→M2 3 1/x x→M1

= x→M2 MR1 +/- x MR3 x→M1

2 MR3+ MR1 : MR3 : 3 =

•Zeitungsschnipsel (Seiten 8/9)

•Das schnellste Auto

Bezeichnen wir mit t_1 und t_2 die für die erste bzw. zweite Fahrt benötigten Zeiten. Dann gilt:

v_1 = 1 Meile : t_1. v_2 = 1 Meile : t_2.

v_R = 2 Meilen : (t_1+t_2)

Stellen wir die ersten beiden Gleichungen nach t_1 bzw. t_2 um und setzen das Ergebnis in die dritte Gleichung ein, so bekommen wir:

$$v_R=\frac{2\text{ Meilen}}{\frac{1\text{ Meile}}{v_1}+\frac{1\text{ Meile}}{v_2}}=\frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}$$

$$=\frac{2}{\frac{1}{1004.403\,\text{km/h}}+\frac{1}{1034.540\,\text{km/h}}}$$

$$=1019{,}25\,\text{km/h}.$$

Zusatzfrage: Warum ist v_R etwas kleiner als das arithmetische Mittel von v_1 und v_2?

•24-Stunden-Einradfahren

Mit jedem Pedaltritt legt der Einradfahrer die Strecke zurück, die gleich dem Umfang seines Rades ist. Für ein Rad mit 26 Zoll Raddurchmesser sind das $\pi \cdot 26 \cdot 2{,}54$ cm≈207,5 cm.

Um eine Strecke von 279,274 km = 27927400 cm zu fahren, sind also 27927400 cm: 207,5 cm≈134600 Tritte erforderlich.

•Die «Rainbow Bridge»

1. Aus h=a+(n+2)b folgt mit h≥88 m, a=0,5 m und b=c=d=2,80m $m \geq \frac{88\text{m}-a}{b}-2=29{,}25.$

Das Hochhaus hat mindestens 30 Stockwerke. Das höchste Hochhaus der Welt, ein Verwaltungshochhaus ist der rund 443 m hohe «Sears Tower» in Chicago/USA.

2. Zum Berechnen werden auf den Symmetrieachsen liegende Punkte P, P' und Q der Ellipse benutzt.

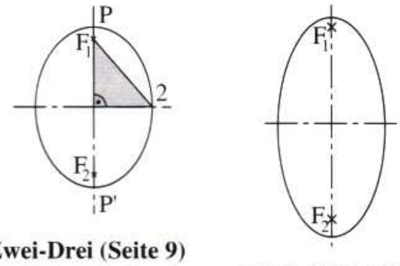
Aus $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=k$ folgt mit $\overline{PF_1}=\overline{P'F_2}$

$$k=\overline{P'F_2}+\overline{PF_2}=\overline{P'P}=2a=2\cdot 88\text{m}.$$

Wegen $\overline{F_1Q}=\overline{F_2Q}$ folgt aus $\overline{QF_1}+\overline{QF_2}=k$, $\overline{QF_1}=\frac{k}{2}=a.$ Aus der Pythagoreischen Gleichung $e^2+b^2=\left(\frac{k}{2}\right)^2$ ergibt sich

$$\overline{F_1F_2}=2e=\sqrt{k^2-(2b)^2}$$

$$=\sqrt{(176\text{m})^2-(84\text{m})^2}\approx 155\text{m}.$$



•Zwei-Drei (Seite 9)

Die Endergebnisse lauten: 2187, 1458, 2916, 1944, 1296, 2592, 1728, 1152, 2304, 1536 und 1024.

•Geometrie auf dem Schachbrett (Seite 11)

1. c4 Df8, 2. c:d5 Da3, 3. d6 Dh3, 4. Ke2 Dc8, 5. d7 Dc1, 6. d8T Dh6, 7. Td2 Da6+, 8. Kd1 Df1 matt.

•Dem«...gemeinen man zu nutze...»(Seite 13)

1) Der Sohn nähert sich dem Vater je Tag um 9-6=3 Meilen. Wegen 100=33·3+1 holt der Sohn den Vater im Verlaufe des 34. Tages ein.

2) Die Kosten für den Wirt betragen 52·12·(4+3+2) Groschen = 5616 Groschen.

3) Der Lohn beträgt insgesamt 13·17·15 Pfennige = 3315 Pfennige.

4) Jede Tochter erbt x, die Mutter also 2x, der Sohn 4x; das sind zusammen x+x+2x+4x=8x (Gulden). Nun gilt 8x=3600, x=450. Jede Tochter erbt 450 Gulden, die Mutter 900 Gulden, der Sohn 1800 Gulden.

5) Für 30 Tage fleißige Arbeit würde man 30·7 Pfennig = 210 Pfennig erhalten. Für jeden gefeierten Tag vermindern sich diese 210 Pfennige um 7 + 6 = 13 Pfennige. Nun gilt 13·x=210, also $x=16\frac{2}{13}\approx 16$. Folglich hat der Arbeiter an 16 Tagen gefeiert und nur an 14 Tagen gearbeitet.

6) Wir rechnen $1-\frac{1}{7}-\frac{1}{4}=\frac{17}{28}$; wegen $\frac{17}{28}\cdot x=17$ gilt x=28. Die drei Gesellen haben 28 Gulden gewonnen.

7) Wegen 123+536+141=800 erhalten diese drei Personen vom Gewinn

$\frac{123}{800}\cdot 130$ Gulden $=19\frac{79}{80}$ Gulden,

$\frac{536}{800}\cdot 130$ Gulden $=87\frac{1}{10}$ Gulden

bzw. $\frac{141}{800}\cdot 130$ Gulden $=22\frac{73}{80}$ Gulden.

8) Das Vermögen des Vaters betrage x Gulden; dann gilt $\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+\frac{x}{6}+92=x$, also $x=240$. Das Vermögen betrug 240 Gulden.

9) $x:12=42:64$, $x=7\frac{7}{8}$. Eine Doppelsemmel muß dann $7\frac{7}{8}$ Lot wiegen; das sind 7 Lot und $3\frac{1}{2}$ Quent.

10) Angenommen, es waren x Landsknechte, also (1200-x) Bauern; dann gilt

$\frac{1}{4}\cdot(1200-x)+\frac{1}{2}\cdot x=x$,

also x=400. Somit waren es 400 Landsknechte und 800 Bauern.

11) Angenommen, es waren m Männer, also (21-m) Frauen; dann gilt 5 m+3·(21-m)=81, also m=9. Es waren 9 Männer und 12 Frauen.

12) Rückwärtsschreitend ergibt sich folgendes: Vom Rest 1 ausgehend erhält man schrittweise (1+2)·2=6, (6+2)·2=16, (16+2)·2=36. Es wurden 36 Äpfel gekauft.

13) Es gilt $x=\frac{5\cdot 6\cdot 73\cdot 1000}{7\cdot 10\cdot 100}=\frac{2190}{7}=312\frac{6}{7}$.

1000 Pfund in Padua entsprechen $312\frac{6}{7}$ Pfund zu Köln.

14) Für die vier Summanden a, b, c, d gilt $a+b+c+d=32$ und $a=\frac{b+c}{7}$ und $b=\frac{c+d}{5}$ und $c=\frac{a+d}{2}$. Dieses Gleichungssystem hat die Lösung a=2, b=5, c=9, d=16.

15) Angenommen, diese Person hatte anfangs x Gulden; dann gilt [(2x-1)·2-2]·2-3=19, also $x=2\frac{5}{8}$. Anfangs hatte diese Person $2\frac{5}{8}$ Gulden.

16) Angenommen, es wurden a Ochsen, b Schweine, c Kälber und d Ziegen gekauft; dann gilt $4a+1\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{4}d=100$ und $a+b+c+d=100$. Daraus folgt durch entsprechende Umformungen $b=3\cdot(20-a)-\frac{c}{5}$.

Es muß also c ein Vielfaches von 5 sein. Dieses diophantische Gleichungssystem hat endlich viele Lösungen; davon seien vier angegeben:

a	b	c	d
1	56	5	38
2	53	5	40
5	43	10	42
10	25	25	40

17) In einer Stunde werden auf den drei Mühlen $\frac{20}{8}$, $\frac{17}{8}$ bzw. $\frac{15}{8}$ Scheffel Getreide gemahlen. Für x Stunden gilt somit

$\frac{20}{8}\cdot x+\frac{17}{8}\cdot x+\frac{15}{8}\cdot x=24$,

20x+17x+15x=192, 52x=192, also

Folglich werden 20 Scheffel Getreide von den drei Mühlen zusammen in Stunden gemahlen.

18) Es seien a, b bzw. c die einzelnen Geldbeträge; dann gilt a+7=4·(b+c) und b+9=5·(a+c) und c+11=6·(a+b). Dieses Gleichungssystem hat die Lösung a=b=c=1. Jeder dieser drei Gesellen hatte also einen Gulden.

•Komisches, Kniffliges und Knackiges (Seite 14)

•Adam Ries

Er zeichnete nach dem Satz des Thales viele rechte Winkel als Peripheriewinkel über dem Durchmesser des Kreises.

•Sprachecke (Seite 15)

Summe

Unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 99 wählte man die, welche nicht durch 2 und nicht durch 3 teilbar sind. Findet die Summe dieser Zahlen!

Lösung:

Aufgrund der Aufgabenstellung sind die ausgewählten Zahlen sämtlich ungerade. Die Summe der ungeraden natürlichen Zahlen von 1 bis 99 ist

Von diesen ungeraden natürlichen Zahlen sind 3, 9, 15, ..., 93, 99 durch 3 teilbar, und ihre Summe ist

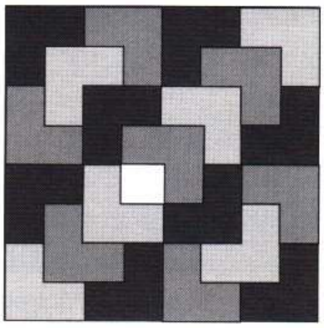
$t=\frac{(3+99)\cdot 17}{2}=867.$

Somit ist die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 99, welche nicht durch zwei und nicht durch drei teilbar sind, gleich 2500-867=1633. Mathematik und Poesie sind Äußerungen derselben starken Vorstellungskraft, nur daß sie in dem einen Fall an den Kopf, im anderen Fall an das Herz adressiert ist.

•Karten in L-Form

Kann man mit Hilfe von 21 Kärtchen in L-Form (siehe Abbildung) die 63 nicht schraffierten Felder eines 8x8 Schachbretts belegen? Wenn ja, dann gib eine Lösung an!

Lösung:



•Komisches, Kniffliges und Knackiges (Seiten 26/27)

•Erst staunen, ...

T=6; S=7; U=8; I=4; L=32; G=3

•Spiel mit Zahlen

1. 1,2,1,3,2; 3,3,4,5; 6,7,9; 13,16; 29

2a) 9·1-5=4; 6·3:9=2; 6-5+6=7 (waagr.)

2b) (6+4):2=5; (3-1)·7=14; 9+5-8=6 (waagr.)

3. (1+8+2+3+6+7) m=27 m

•Geduldsspiel

1.

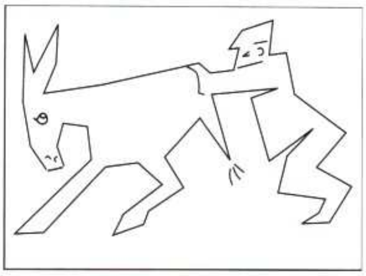


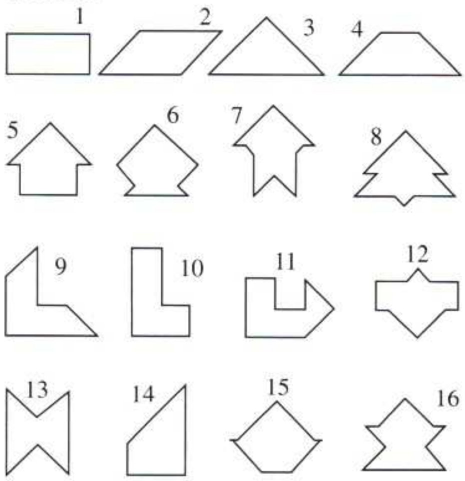
Abb. 1

2.

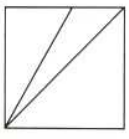
Abb. 2

•Zwei Geduldsspiele

1. Abb. 3



2. Abb. 4



•Denksport

1. 2 · (1 + 3 + 5 + 7 + 9) + 11 = 61 (Kreuze)
2. Figur a)

•Nachgedacht – mitgemacht

1. 8 - 4 + 6 = 10; 18 - 10 + 7 = 15; 23 - 8 + 9 = 24 (3. Haus)
2. Nr. 1: Peter; Nr. 2: Rainer; Nr. 3: Heidi; Nr. 4: Thomas; Nr. 5: Christel

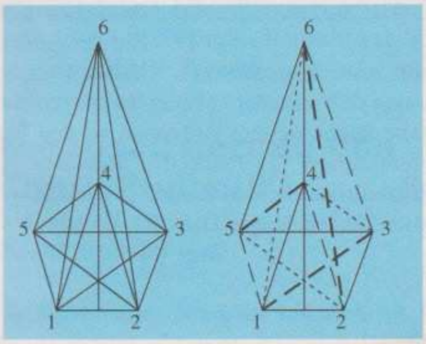
H 113228

Heft 4
August 1992
26. Jahrgang

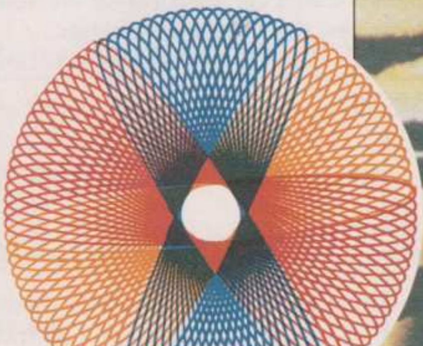
Pädagogische Zeitschriften bei Friedrich in Velber in Zusammenarbeit mit Klett

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift



Entwicklung von Turnierplänen



Spirographisches

Hinterm Horizont geht´s weiter...
Erdkrümmung und Sichtweite

Leserpost

Als langjähriger alpha Leser und Teilnehmer am alpha-Wettbewerb (seit 1975) möchte ich erst einmal die Hoffnung aussprechen, daß sowohl alpha als auch alpha-Wettbewerb erhalten bleiben.
Beim Durchblättern alter alpha Hefte stieß ich auf das Spiel – live – (Heft 3,4/79).
Da ich die Problematik sehr interessant fand, habe ich auch ein Basic-Programm für den Sharp – PC 1403 H geschrieben. Ich kann auf einem Spielfeld von maximal 161 x 161 Felder spielen. Die Berechnung einer Generation dauert (je nach Größe) zwischen 2 Minuten und mehreren Stunden.
Unter anderem habe ich festgestellt, daß im „Glider Gun" ein Druckfehler vorliegen muß.
Zur Zeit berechne ich das Pentomino

```
 xx
xx
 x
```

für das Conway nach 430 Generationen kein Schicksal gefunden hat. Zur Zeit bin ich bei der 154. Generation (nach 48 h). Ich möchte Sie bitten, mir mitzuteilen, ob zu dieser Problematik «Live» Literatur erhältlich ist und gleichzeitig anregen, dieses Thema im Zuge heutiger moderner Computer nochmals aufzugreifen. Das Problem ist sehr interessant als Computerprogramm.

Jens Grundmann, Gevelsberg

Liebe alpha-Redaktion, in alpha 3/92 haben Sie eine Kniffel-Aufgabe abgedruckt, welche das folgende Gleichungssystem mit der zusätzlichen Gleichung t = 60 : 10 (6) enthält.

Problem
(aus ALPHA 3/90): g, i, l, s, t, u $\in \mathbb{Z}$;
u + s + t = 21 (1)
s · t = 42 (2)
i + t = 70 : s (3)
l : u = i (4)
l + u + s + t + i + g = 60 (5)
Löse das Gleichungssystem!
Durch diese letzte Gleichung ist leider der 'Reiz' der Aufgabe weg!

Wie wäre es ohne diese letzte Gleichung?
Man müßte aus (2) und (3) schließen, daß s ein gemeinsamer Teiler von 42 und 70 sein muß; also kommen für s nur die Werte ± 1, ±2, ± 7 und ± 14 in Frage. Die restlichen Variablen sind mit s eindeutig bestimmt. Ein Programm hilft beim Ausrechnen (s. Kasten). Übrigens lassen sich nach dem Muster der obigen Aufgabe leicht weitere Aufgaben zu den Problemkreisen 'Teilbarkeit', 'Rechnen mit ganzen (natürlichen) Zahlen', 'Gleichungen lösen' finden. Vielen Dank für den Hinweis.

Jörg Wachtler, Wernau

```
Program Raetsel;   { Turbo Pascal 4.0 }
uses    crt;
const c = 8;
var i, l, g, u, s, t: integer;
begin
   clrscr;
   writeln('g':c, 'i':c, 'l':c, 's':c, 't':c, 'u':c); writeln;
   for s:= -42 to 42 do
    if s<>0 then
     if (42 mod s = 0) and (70 mod s = 0 ) then
        begin
        t:= 42 div s;
        u:= 21-s-t;
        i:= 70 div s -t;
        l:= u*i;
        G:= 60-l-i-u-t-s;
        writeln(g:c,i:c,l:c,s:c,t:c,u:c);
        readln
        end;
   readln;
end.
```

P. S.: alpha lese ich gerne – machen Sie weiter so!
Vielleicht gelingt es Ihnen, die Zeitschrift noch etwas übersichtlicher zu gestalten; gelungen erscheint mir diesbezüglich die Seite 'Komisches, Kniffliges und Knackiges'.

Lösungen

g	i	l	s	t	u
117	-2	-76	-14	-3	38
179	-4	-136	-7	-6	34
669	-14	-616	-2	-21	44
1859	-28	-1792	-1	-42	64
627	28	-616	1	42	-22
53	14	-28	2	21	-2
3	4	32	7	6	8
29	2	8	14	3	4

Mitteilung

An dieser Stelle möchten wir der ehemaligen Redakteurin von alpha, **Frau Dr. Gabriele Liebau**, unseren ganz herzlichen Dank für Ihre richtungsweisende redaktionelle Arbeit aussprechen. Sie wird der Zeitschrift erhalten bleiben und als Mitherausgeberin die Inhalte auch weiterhin mitbestimmen. *Verlag und Redaktion*

Alfons-Vignetten: Lothar Otto

alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett und in Verbindung mit Dr. Gabriele Liebau, Dr. Claus Peter Helmholtz und Herbert Kästner.

Redaktion:
Jürgen Ricke, Tel.: (05 11) 4 00 04-23
Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6
Redaktionskollegium:
StR F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), OL Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pliezhausen), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OStR J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. W. Schmidt (Greifswald), OStR G. Schulze (Herzberg), W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

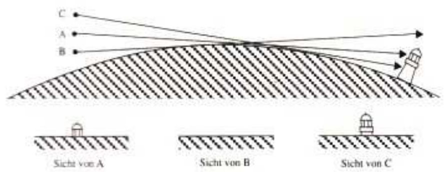
Anzeigenleitung: Bernd Schrader
Anzeigenabwicklung:
Telefon: (05 11) 4 00 04-23
Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01. 01. 1990
Vertrieb und Abonnement:
Telefon: (05 11) 4 00 04-50
Verlag:
Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG,
Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6
Telefon: (05 11) 4 00 04-0
Telefax: 4 00 04-19
Das Jahresabonnement für **alpha** besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt 12,00 DM, im Einzelbezug 2,50 DM. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten. Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).

alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV KlettCotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, DH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.

Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschriften im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.

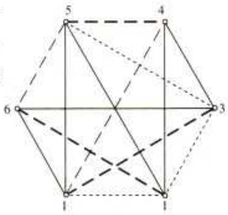
Herstellung: PZ Pädagogika Zentrale GmbH
Gestaltung: Jens Hinzmann
Druck: Druckerei Schröer, Seelze
ISBN 3-617- 34010-5

Inhaltsverzeichnis



Die Wölbung unserer kugelähnlichen Erde läßt Schiffe unter dem "Wasserberg" verschwinden. Doch "hinter'm Horizont geht's weiter" zeigt ***Walter Träger***.

Betrachtung von Turnierplänen aus mathematischer Sicht von ***Dr. U. Feiste.***



Die Wege des amerikanischen Wanderfalters Monarch und Anmerkungen zur neu entdeckten Primzahl $2^{756839}-1$ von ***Walter Träger***.

Claudia Erdmann bereitete dieses wirklichkeitsnahe Logikspiel für alpha auf.

In Fortführung des Beitrags *"Herr Paddel und das Dualsystem"* aus dem letzten alpha-Heft erläutert ***StD Helmut Wirths*** das Dreiersystem.

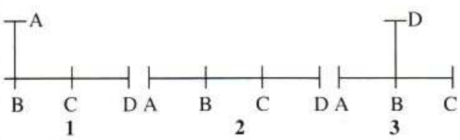
Eine Aufgabe nicht nur für Musizierende – Verwurzeltes – Treffender Vergleich – Komplizierte Heimkehr

Dritter Teil der Chronologie von 1992 sowie Anmerkungen zu Johann I. Bernoulli und Carl Friedrich Gauß – zusammengestellt von ***H.-J. Ilgands.***

Aufruf zum diesjährigen Wettbewerb Jugend forscht – gerade für alpha-Leser eine interessante Herausforderung.

Erläuterungen zum Lineal und anderen historischen Zeichengeräten von ***Dr. Klaus Schillinger***.

Alphons logische Abenteuer (11), Sprachecke, zur Entdeckung Amerikas

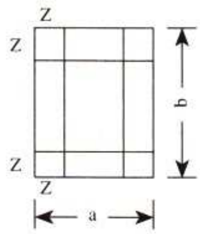


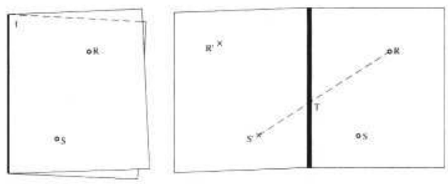
Wie gleichlange Stecken zusammengesetzt werden können untersucht ***Gerhard Schulze***.

Der Beschreibung des Bundeswettbewerbs Mathematik von ***Paul Jainta*** hat der ehemalige Teilnehmer ***Markus Bisanz*** persönliche Anmerkungen hinzugefügt.

fand der 9. alpha-Schachwettbewerb. Kommentierte Lösungen und Anmerkungen von ***Harald Rüdiger***.

Diese – besonders für Milch, Kakao und Fruchtsaft – sehr verbreiteten Verpackungen sind für ***Werner Schmidt*** Anlaß für Extremwertberechnungen.





Den kürzesten Weg eines Marienkäfers zu einer Blattlaus auf einem quadratischen Prisma (und vieles mehr) beschreibt ***Christian Werge***.

Das Schachgenie Aljechin – Oh no! More lemmings – Spirograph – Die Geburt des Meters

Der „Wasserberg"

Wer hat nicht schon einmal an der Küste die Beobachtung gemacht, wie ein weit entferntes Schiff nur noch mit seinen Aufbauten aus dem Wasser ragt und damit den Eindruck erweckt, als sei es schon halb versunken. Es sieht aus, als läge ein "Wasserberg" zwischen uns und dem Schiff. Die Ursache dafür ist bekannt: Es ist die Wölbung unserer kugelähnlichen Erde!

Unsere Beobachtung an der Küste ist einleuchtend: Unser Blick geht über eine weite Strecke, so daß sich die Erdwölbung deutlich bemerkbar macht. Wie aber verhält es sich über eine kleinere Entfernung, wenn wir z. B. an einem See stehen? Kann man hier auch von einem "Wasserberg" sprechen? Selbstverständlich werden wir vom Ufer eines Sees aus das allmähliche Verschwinden eines Schiffes nicht beobachten können, dazu ist die Entfernung zu kurz. Es ist jedoch immerhin erstaunlich, daß sich selbst bei einem verhältnismäßig kleinen See die Erdwölbung auswirkt, so daß man auch hier von einem mehr oder weniger großen "Wasserberg" sprechen kann. So war ich nicht wenig erstaunt, daß ich für den 1350 m langen Hl. See in Potsdam, in dessen Nachbarschaft sich meine Wohnung befindet, einen "Wasserbuckel" von immerhin 3,57 cm berechnete.

Die Berechnung

Dafür benötigen wir die Länge des Sees sowie die Kenntnis des Erdradius, der den Mittelwert zwischen Äquator und Pol von 6367,645 km ergibt. Die Abplattung der Erde kann dabei vernachlässigt werden. Mathematisch geht es um die Berechnung des Krümmungshalbmessers für jede beliebige Richtung (Azimut). Bei der angenommenen Kugelgestalt unserer Erde spielt somit die Himmelsrichtung keine Rolle.

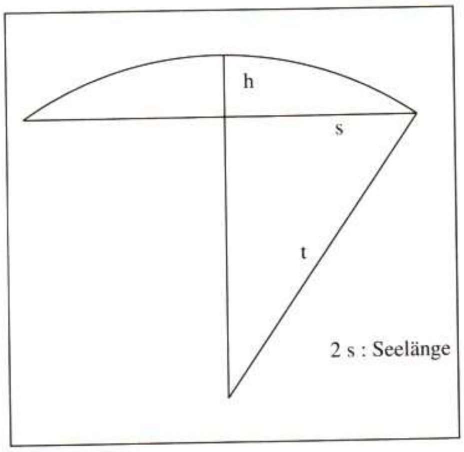


Abb. 1

Der Leuchtturm auf Amrum ist mit einer Höhe von 64 m der höchste an Deutschlands Nordseeküste.

Die Höhe h gehört zur Sehne 2 s eines Kreises mit dem Radius r. Demnach ist

$$s = \sqrt{r^2 - (r-h)^2} = \sqrt{2rh - h^2}\ .$$

Wird h als sehr klein angenommen, kann man mit der bekannten Näherungsformel arbeiten:

$$h = \frac{s^2}{2r}$$

s bedeutet die Halbierung der Seelänge, ferner ist zu empfehlen, den Erdradius in Metern anzugeben, um beim Ergebnis Umrechnungen zu vermeiden (s. **Abb. 1**).

Wählen wir einen größeren See mit 2450 m Länge (s = 1225 m), wie z. B. den Sacrower See östlich von Potsdam, dann beträgt die Höhe des "Wasserberges" immerhin schon 11,8 cm. Noch deutlicher wird dies beim Müggel-See in Berlin mit 4375 m Länge (s = 2187,5 m). Hinter dem 37,6 cm hoher Wasserbuckel kann ein Wasservogel bereits verschwinden. Betrachten wir die Verhältnisse bei dem zweitgrößten See Deutschlands, der Müritz in Mecklenburg-Vorpommern, so ähneln diese bereits denen an der Küste. Bei dem 16000 m langen See (s = 8000 m) entsteht ein stattlicher "Wasserberg" von 5,025 m!

Diese Beispiele zeigen, daß die Höhe rasch zunimmt:

Länge des Sees	Höhe des „Wasserberges"
1000 m	1,9 cm
2000 m	7,8 cm
4000 m	31,4 cm
8000 m	125,6 cm
16000 m	502,5 cm
32000 m	2010,2 cm (= 20,10 m)

Eine Verdoppelung der Seelänge hat eine Vervierfachung der Wasserberghöhe zur Folge.

Unser Thema steht im engen Zusammenhang mit der sog. **Aussichtsweite**. Diese ist von der Höhe unseres Standpunktes abhängig und läßt sich mit Hilfe der nachstehenden Näherungsformel mühelos berechnen:

$$A = \sqrt{2rh}\ .$$

Für r gilt wieder: 6367645 m. *Leite Dir diese Formel selbst her.* Mathematisch betrachtet geht es hierbei um das Abbiegen von der Berührungsebene. Befinden wir uns z. B. in 2 m Höhe unmittelbar am Meeresufer, so beträgt die Aussichtsweite nur 5046 m. Weiter entfernte Gegenstände befinden sich unter der Kimm (Horizont) und sind nicht mehr sichtbar.

Die folgende Übersicht zeigt den Anstieg der Aussichtsweite bei zunehmender Höhe:

Höhe in m	Aussichtsweite in km
1	3,570
3	6,181
5	7,980
10	11,285
50	25,234
100	35,690

Nimmt man eine Augenhöhe von 1,5 m an, so beträgt die Aussichtsweite in ebenem Gelände nur 4,370 km. Auf dem Mond ist sie infolge des größeren Krümmungsradius bedeutend geringer. Der Mondhalbmesser beträgt nur 1738 km. Bei einer Augenhöhe von 1,5 m ist die Aussichtsweite bedeutend kleiner als auf der Erde: 2,283 km. Selbst hohe Mondberge verschwinden rasch unter dem Horizont. Bei einem Aufenthalt in einem der großen Mondkrater könnte man die 2000 bis 3000 m hohen Gebirgswälle nicht mehr sehen. – Was mit Hilfe der Formel leicht nachzuprüfen ist!

StR Arnold Zenkert, Potsdam

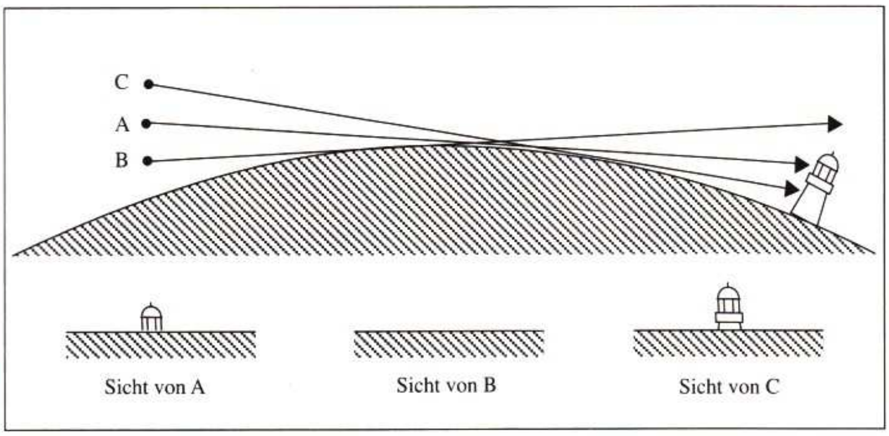
Die „Humber Estuary Bridge"

Das Gewicht einer Hängebrücke wird vollständig von ihren Pylonen (Stützpfeiler) getragen, die sehr genau senkrecht stehen müssen. – Laut "Guinness Buch der Rekorde 1991" ist die 1981 fertiggestellte "Humber Estuary Bridge" in England zur Zeit noch die Hängebrücke mit der längsten Spannweite. Der Abstand ihrer 162,5 m hohen Pylone beträgt 1410 m. **Um wieviel Zentimeter ist infolge der Erdkrümmung – die Erde ist in guter Näherung eine Kugel mit einem Radius von rund 6370 km – der Abstand der Spitzen (oberen Enden) ihrer Pylone größer als deren Fußpunkte, den lotrechten Projektionen der Pylonenspitzen auf die Erdoberfläche?**

W. Träger, Döbeln

Die Kimm

Wegen der Kugelgestalt der Erde ist die Meeresoberfläche gekrümmt. Dadurch ist die Sichtweite begrenzt. Der scheinbare Horizont, den ein Seefahrer rund um sich wahrnimmt, heißt **Kimm**. Taucht ein Objekt gerade am scheinbaren Horizont auf, befindet es sich in der Seemannssprache gerade in der Kimm.



Aufgaben:

a) Wie weit ist die Kimm von einem Beobachter auf freier See entfernt, dessen Augen sich 1,5 m über dem Wasserspiegel befinden?

b) Beim Segeln in der Nacht kann es vorkommen, daß man plötzlich ein Leuchtfeuer sieht, wenn man sich im Boot aufrichtet. Setzt man sich wieder hin, ist das Leuchtfeuer verschwunden. Wie ist diese Erscheinung zu erklären?

c) Kann man die Sichtweite, d. h. den Abstand bis zur Kimm, durch ein Fernrohr vergrößern?

d) Warum gibt es an Land keine Kimm?

verkürzt aus: Werner Schmidt: Mathematikaufgaben 7 – 10, Anwendungen aus der modernen Technik und Arbeitswelt, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1989

Rund ums Loch

Für dieses Spiel für zwei Mitspieler benötigt ihr vier Einpfennigstücke, vier Fünfpfennigstücke und einen Würfel.

So werden die Münzen verteilt:

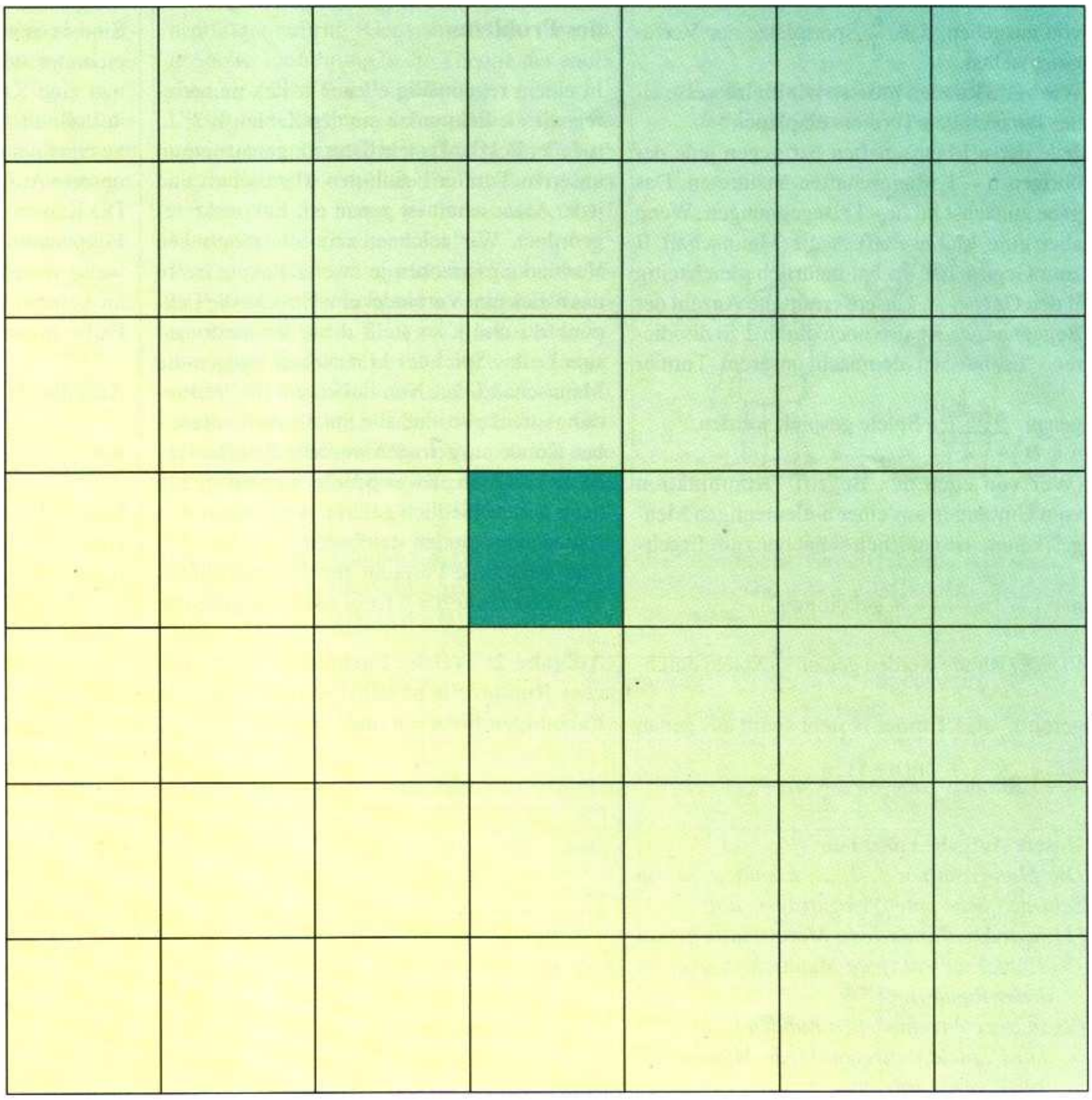
	1				5	
1						5
			■			
1						5
	1				5	

Ziel ist es, zwei gegenüberliegende Felder am schwarzen Loch zu besetzen.
Die gewürfelte Augenzahl bestimmt, um wieviele Felder die Münzen verschoben werden dürfen.

Folgende Regeln gelten:
1 und 4 auf dem Würfel
= 1 Kästchen weiter
2 und 5 auf dem Würfel
= 2 Kästchen weiter
3 und 6 auf dem Würfel
= 3 Kästchen weiter
Gezogen wird nur waagerecht oder senkrecht.

Besetzte Felder müssen umgangen und dürfen nicht übersprungen werden. Gelangt man auf ein besetztes Feld, wird die gegnerische Münze irgendwohin verwiesen (ganz an den Rand).

J. Ricke



Eine Idealisierung von „König Fußball"

Wir wollen Turnierpläne aus mathematischer Sicht betrachten und dabei von folgenden Voraussetzungen ausgehen:

- die Anzahl n der am Turnier teilnehmenden Mannschaften ist gerade ($n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, n gerade);
- im Verlauf des Turniers hat jede Mannschaft gegen jede andere genau einmal zu spielen.

Die notwendige Anzahl der Sportplätze ist leicht zu finden.
Wir haben n teilnehmende Mannschaften, auf jedem Sportplatz können jeweils genau zwei Mannschaften gegeneinander spielen – wir benötigen also $\frac{n}{2}$ Sportplätze $\left(\frac{n}{2} \in \mathbb{N}\right)$.

Für die weiteren Betrachtungen wollen wir davon ausgehen, daß $\frac{n}{2}$ Sportplätze zur Verfügung stehen.
Wie viele Runden müssen wir im Interesse eines kurzzeitigen Turniers einplanen?
Jede der n Mannschaften hat gegen jede der übrigen n – 1 Mannschaften anzutreten. Das gäbe zunächst $n \cdot (n-1)$ Begegnungen. Wenn aber eine Mannschaft A die Mannschaft B zum Gegner hat, so hat natürlich gleichzeitig B den Gegner A. Unsere ermittelte Anzahl der Begegnungen ist also noch durch 2 zu dividieren. Es müssen demnach unserem Turnier genau $\frac{n(n-1)}{2}$ Spiele gespielt werden.

(Wer von euch den Begriff "Kombination vom Umfang m aus einer n-elementigen Menge" kennt, ist natürlich schneller zum Ergebnis $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ gekommen.)

In jeder Runde werden genau $\frac{n}{2}$ Spiele durchgeführt – das Turnier besteht somit aus genau n – 1 Runden $\frac{n(n-1)}{2} : \frac{n}{2} = n - 1$.

Unsere Aufgabe lautet nun:
Die Mannschaften 1, 2, ..., n sind so in ein Schema (siehe unten) einzutragen, daß
(1) in jeder Runde jede Mannschaft genau einmal auftritt (jede Mannschaft spielt in jeder Runde);
(2) in zwei verschiedenen Runden keine gleichen Spiele auftreten. (Jede Mannschaft spielt gegen jede andere genau einmal.)

Als gleich gelten auch Spiele $\boxed{i|j}$ und $\boxed{j|i}$! (vgl. **Abb. 1**)

Für 4 bzw. 6 teilnehmende Mannschaften finden wir z. B. folgende mögliche Turnierpläne:

$\boxed{1\|2}$	$\boxed{3\|4}$	$\boxed{1\|4}$	$\boxed{2\|3}$	$\boxed{5\|6}$
$\boxed{1\|3}$	$\boxed{2\|4}$	$\boxed{1\|5}$	$\boxed{2\|4}$	$\boxed{3\|6}$
$\boxed{1\|4}$	$\boxed{2\|3}$	$\boxed{1\|6}$	$\boxed{2\|5}$	$\boxed{3\|4}$
n = 4		$\boxed{1\|2}$	$\boxed{3\|5}$	$\boxed{4\|6}$
	n = 6	$\boxed{1\|3}$	$\boxed{2\|6}$	$\boxed{4\|5}$

Aufgabe 1: Sucht noch andere Pläne für n = 6! Versucht selbst, einen Turnierplan für n = 8 zu finden! Fragt Euren Sportlehrer, wie er derartige Turnierpläne aufstellt!

2. Mathematische Formulierung des Problems

In einem regelmäßig ebenen n-Eck numerieren wir die Eckpunkte mit den Zahlen 1, 2, ..., n. Jeder Eckpunkt steht dann für genau eine an unserem Turnier beteiligten Mannschaft und jeder Mannschaft ist genau ein Eckpunkt zugeordnet. Wir zeichnen nun alle möglichen Verbindungsstrecken je zweier Eckpunkte in das n-Eck ein. Verbindet eine Strecke die Eckpunkte i und j, so stellt diese Verbindungsstrecke das Spiel der Mannschaft i gegen die Mannschaft j dar. Nun färben wir die Verbindungsstrecke so, daß alle Spiele, die in derselben Runde ausgetragen werden, dieselbe Farbe bekommen. Zwei Spiele werden genau dann unterschiedlich gefärbt, wenn sie in verschiedenen Runden stattfinden.
Eine mögliche Färbung für unseren obigen Turnierplan für n = 6 ist in Abb. 2 angegeben.

Aufgabe 2: Welche Farbe entspricht welcher Runde? Sucht selbst weitere mögliche Färbungen für n = 6 und n = 8!

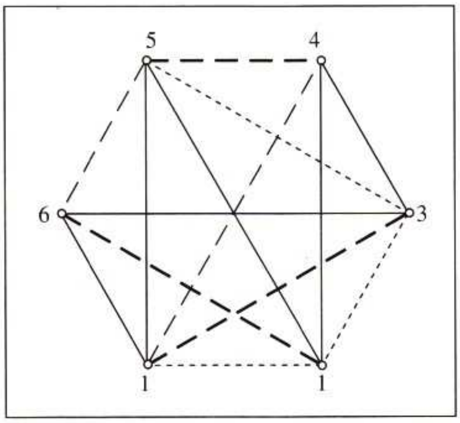


Abb. 2

Da die Menge der Runden eindeutig auf die Menge der verwendeten Farben abgebildet wurde, benötigen wir zum Färben der Verbindungsstrecke genau n – 1 paarweise verschiedene Farben. Wenn eine Färbung einen möglichen Turnierplan darstellen soll, so müssen die Bedingungen (1) und (2) der Aufgabenstellung im 1. Abschnitt erfüllt sein. Dies ist der Fall, wenn an keinen Eckpunkt zwei Verbindungsstrecken gleicher Farbe zusammenstoßen. Ein Objekt aus Eckpunkten und Verbindungslinien dieser Eckpunkte nennt man in der Mathematik einen Graph. Für die Verbindungslinien ist die Bezeichnung Kante üblich. Sind in einem Graph je zwei beliebige voneinander verschiedene Eckpunkte durch genau eine Kante verbunden, so ist der Graph vollständig. Mit diesen Begriffen kommen wir zu einer ersten mathematischen Formulierung unserer Aufgabenstellung:
Die Kanten eines vollständigen Graphen mit n Eckpunkten (n gerade) sind mit n – 1 paarweise verschiedenen Farben so zu färben, daß an keinem Eckpunkt zwei Kanten gleicher Farbe zusammenstoßen.

Aufgabe 3: Überlege, daß dann jeweils genau $\frac{n}{2}$ Kanten dieselbe Farbe enthalten!

Das "Färben" ist noch der Umgangssprache entnommen. Zur rein mathematischen Formulierung unseres Problems müssen wir noch einen Schritt weiter gehen.
Aus unserem vollständigen Graphen konstruieren wir weitere Graphen – diese werden wir **Linearfaktoren** nennen: Die Menge der Eckpunkte eines solchen Linearfaktors stimmt mit

	Sportplatz 1	Sportplatz 2	...	Sportplatz $\frac{n}{2}$
1. Runde	$\boxed{\ \|\ }$	$\boxed{\ \|\ }$		$\boxed{\ \|\ }$
2. Runde	$\boxed{\ \|\ }$	$\boxed{\ \|\ }$		$\boxed{\ \|\ }$
...	...	...		...
(n – 1) Runde	$\boxed{\ \|\ }$	$\boxed{\ \|\ }$		$\boxed{\ \|\ }$

Abb. 1

der Eckpunktmenge des vollständigen Graphen überein. Die Menge der Kanten des Linearfaktors ist eine Teilmenge der Kantenmengen des vollständigen Graphens. Sie wird so gebildet, daß von jedem Eckpunkt des Linearfaktors genau eine Kante ausgeht.

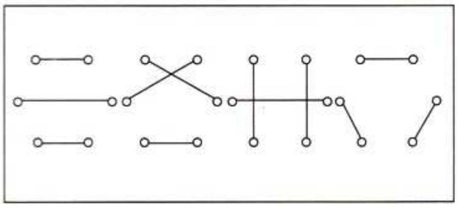


Abb. 3

Die **Abb. 3** zeigt als Beispiel vier Linearfaktoren eines vollständigen 6punktigen Graphen an.

Wir können nun jeden Linearfaktor eines vollständigen Graphen mit n Eckpunkten als eine Runde unseres Turniers für n Mannschaften auffassen. Damit erhalten wir eine weitere Formulierung unserer Aufgabenstellung:

Ein vollständiger Graph mit n Eckpunkten ($n \in \mathbb{N}$, n gerade, $n \neq 0$) ist in $n - 1$ Linearfaktoren so zu zerlegen, daß jede Kante des vollständigen Graphen in genau einem Linearfaktor auftritt.

Eine solche Zerlegung für n = 6 stellt **Abb. 3** dar, wenn wir die Menge der Kanten einer Farbe mit der zugehörigen Eckpunktmenge als einen Linearfaktor ansehen.

Zum Abschluß dieses Abschnitts sollen die Begriffe der verschiedenen Formulierungen unserer Aufgabenstellung noch einmal gegenübergestellt werden:

Mannschaft	Eckpunkt	
Spiel	Kante	
Runde	Menge der Kanten derselben Farbe mit der Menge der zugehörigen Eckpunkte	Linearfaktor

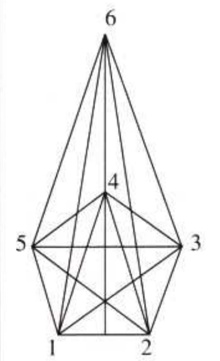


Abb. 4

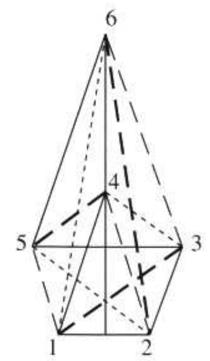


Abb. 5

Aufgabe 4: Wie spiegelt sich der Begriff "Sportplatz" in der mathematischen Formulierung wider?

3. Ein Verfahren zum Aufstellen eines Turnierplanes

Im Jahre 1947 wurde von dem Mathematiker *W. T. Tutte* bewiesen:

Satz: Jeder vollständige Graph mit n Eckpunkten ($n \in \mathbb{N}$, n gerade) läßt sich so in $n - 1$ Linearfaktoren zerlegen, daß jede Kante des vollständigen Graphen in genau einem Linearfaktor auftritt. (Genaueres könnt ihr z. B. in Sachs, Einführung in die Theorie der endlichen Graphen, Teil I nachlesen.)

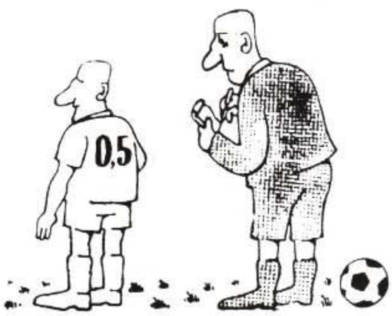
Dieser Satz sagt aus, daß es eine Lösung für unsere Aufgabenstellung gibt. Da der Beweis dieses Satzes konstruktiv geführt wird, gibt er Antwort auf die Frage, wie man solche $n - 1$ Linearfaktoren erhalten kann:

Wir betrachten eine regelmäßige $(n - 1)$-seitige Pyramide. Die Eckpunkte der Pyramide bezeichnen wir mit 1, 2, ..., n. Zu den schon vorhandenen Kanten fügen wir noch alle Diagonalen der Grundfläche hinzu (**Abb. 4** – n = 6). Dadurch erhalten wir einen vollständigen Graphen mit den Eckpunkten 1, 2, ..., n. Wir nehmen nun eine beliebige Seite der Grundfläche der Pyramide (regelmäßiges $(n - 1)$-Eck) und alle zu dieser Seite parallelen Diagonalen. Durch diese $\frac{n}{2}$-1-Strecken werden alle Eckpunkte der Grundfläche bis auf einen erfaßt. Die Menge der Kanten eines Linearfaktors besteht nun aus diesen $\frac{n}{2}$-1-Strecken und der Strecke, die den noch "freien" Eckpunkt der Grundfläche mit der Spitze der Pyramide verbindet. Durch die Wahl einer Seite der Grundfläche der Pyramide wird nach obiger Vorschrift genau ein Linearfaktor bestimmt. Es gibt $n - 1$ Seiten der Grundfläche, also auch $n - 1$ Linearfaktoren. Diese zerlegen den vollständigen Graphen auch wirklich, denn zu jeder Kante gibt es genau einen Linearfaktor, zu dem sie gehört.

Abb. 5 zeigt eine solche Zerlegung, die den oben angegebenen Turnierplan für n = 6 liefert.

Aufgabe 5: Welche Farbe entspricht welcher Runde?
Stellt nach diesem Verfahren selbst Spielpläne für n = 4, n = 6 und n = 8 auf!
Sucht selbst andere Verfahren zum Aufstellen von Spielplänen!

Dr. U. Feiste
Fachrichtungen Mathematik/Informatik
der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald



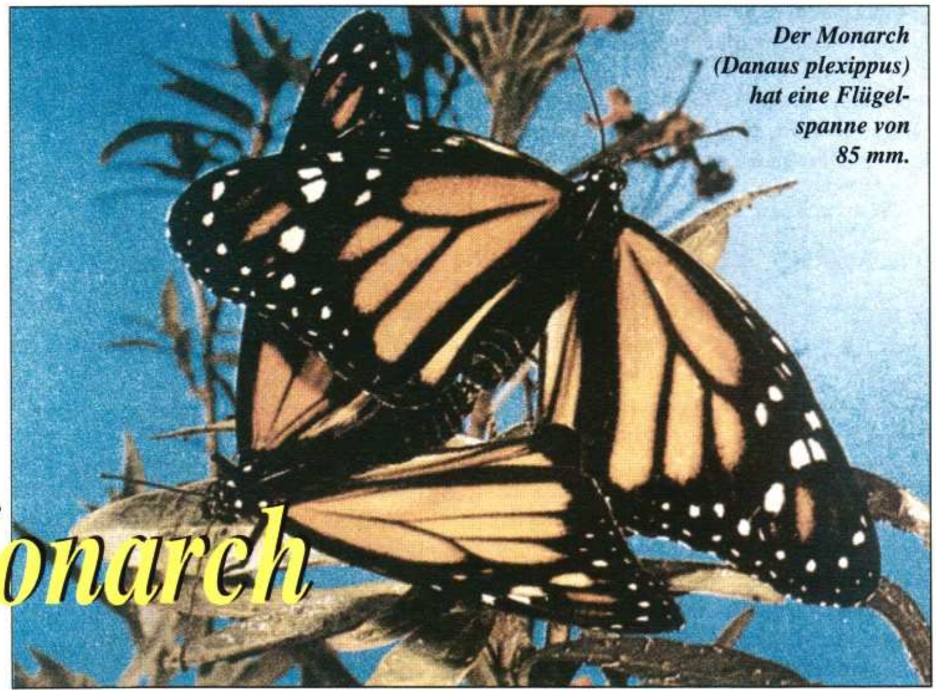
Leichtathletik im Sonnensystem

Olympische Disziplinen auf den Mitgliedsplaneten der Interplanetarischen Sportvereinigung im Jahre 2092. In die Berechnungen gehen zahlreiche vereinfachende Annahmen ein; insbesondere wurde generell der Luftwiderstand vernachlässigt.

Planet	Schwerebeschleunigung in Metern pro Sekundenquadrat	Hochsprung Höhe in Metern Herren	Damen	Kugelstoßen Weite in Metern	optimaler Winkel in Grad	Weitsprung Weite in Metern	optimaler Winkel in Grad	Speerwurf Weite in Metern	optimaler Winkel in Grad
Merkur	3,70	4,66	3,73	56,46	43,99	23,60	71,17	193,66	53,16
Venus	8,85	2,53	2,14	24,70	42,69	9,87	71,17	82,50	52,56
Erde	9,81	2,38	2,03	22,47	42,46	8,90	71,17	74,68	52,45
Mond	1,62	9,36	7,24	126,45	44,50	53,89	71,17	438,86	53,41
Mars	3,72	4,61	3,72	56,17	43,89	23,47	71,17	192,63	53,16
Jupiter	26,39	1,51	1,38	9,43	39,01	3,31	71,17	29,34	50,67
Saturn	11,67	2,16	1,87	19,17	42,02	7,48	71,17	63,19	52,24
Uranus	11,48	2,18	1,88	19,46	42,07	7,61	71,17	64,19	52,26
Neptun	11,97	2,13	1,84	18,74	41,95	7,29	71,17	61,67	52,20
Pluto	1,96	7,91	6,15	104,86	44,45	44,54	71,17	363,19	53,37

entdeckt in *Spektrum der Wissenschaft*, Juli 1992

Zeitungs-schnipsel



Der Monarch (Danaus plexippus) hat eine Flügelspanne von 85 mm.

Der amerikanische Wanderfalter Monarch

Schwärme mit Millionen Monarchen flattern jedes Jahr im Herbst von Westkanada nach Mexiko und im Frühjahr des Folgejahres auf der gleichen Route wieder zurück nach Westkanada.
Jeder dieser Schwärme von Monarchen überquert im Herbst die längs des 49ten nördlichen Breitengrades verlaufende Grenze zwischen Westkanada und den USA in einem Punkte P und erreicht erst nach dem Überfliegen des 33ten nördlichen Breitengrades in einem Punkt Q Mexiko.
Das Wegstück zwischen den Punkten P und Q dieser Wanderroute ist also nicht kürzer als die Länge $\overset{\frown}{PQ}$ des die Punkte P und Q verbindenden, über das Territorium der USA verlaufenden Kreisbogens $\overset{\frown}{PQ}$, dessen Mittelpunkt mit dem Erdmittelpunkt zusammenfällt.

Bei den folgenden Aufgaben ist die Erdoberfläche als Kugelfläche mit dem Radius r = 6370 km aufzufassen.
Während in einer Ebene die kürzeste Verbindung zweier ihrer Punkte die diese Punkte verbindende Strecke ist, ist in einer Kugeloberfläche die kürzeste Verbindung zweier ihrer Punkte A und B ein Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ mit folgenden Eigenschaften: A und B sind die Endpunkte von $\overset{\frown}{AB}$. Der Kugelmittelpunkt M ist zugleich der Mittelpunkt des Kreises k, auf dem $\overset{\frown}{AB}$ liegt.
Der Radius r der Kugel ist also gleich dem Radius von k. Und weiterhin ist die Länge von $\overset{\frown}{AB}$ nicht größer als πr. – Sind die Punkte A und B nicht die Endpunkte eines Kugeldurchmessers, liegen also A, B und M nicht auf einer Geraden, so ist der die kürzeste Verbindung der Punkte A und B darstellende Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ eindeutig bestimmt.

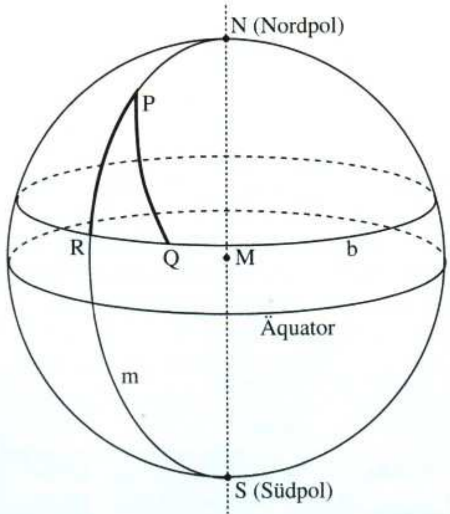


Abb. 1

Aufgabe 1: P sei ein Punkt der Erdoberfläche mit der nördlichen geographischen Breite φ_1, b sei der Breitenkreis mit der nördlichen geographischen Breite φ_2 mit $\varphi_2 < \varphi_1$, m sei der durch den Punkt P verlaufende Meridian, m schneide b im Punkte R und Q sei ein von R verschiedener Punkt von b. Es ist zu zeigen, daß in der Erdoberfläche die kürzeste Verbindung der Punkte P und R kleiner ist als die der Punkte P und Q.

Aufgabe 2: Wie lang ist in der Erdoberfläche die kürzeste Verbindung der Punkte P und R (siehe 1. Aufgabe!) mit $\varphi_1 = 49°$ und $\varphi_2 = 33°$?

Die neu entdeckte Primzahl

Numerus primus, linearis, eine einfache Zahl oder Linienzahl, ist diejenige, die sich durch keine andere Zahl als durch 1 völlig dividieren läßt, also 3, 5, 7, 29.

Ende März 1992 wurde in Fernsehen und Zeitungen gemeldet: Britische Mathematiker des Harwell-Labors in Oxfordshire entdeckten die bisher größte bekannte Primzahl. Sie wiesen mit einem Supercomputer CRAY-2 nach, daß die natürliche Zahl $p = 2^{756839} - 1$ eine Primzahl ist. Schon Euklid (um 300 v. Chr.) war bekannt, daß es unendlich viele Primzahlen gibt und daß es damit keine größte Primzahl gibt. Da bis heute nur endlich viele Primzahlen bekannt sind, gibt es unter diesen eine größte. Die nebenstehende, den heutigen Anforderungen nicht genügende, Definition der Primzahl steht in einem 1716 in Leipzig gedruckten „Mathematischen Lexicon". Laut einem lateinischen Wörterbuch gilt: numerus = Zahl; primus = vorderster, erster, haupt-, ursprünglich

Aufgabe 1: Wieviele Seiten sind zum Abdrucken dieser Zahl p mit ihren 227832 Stellen in einem Buch erforderlich, wenn jede Seite 32 Zeilen mit je 62 Ziffern faßt?
Aufgabe 2: Welche Ziffer steht bei der Darstellung dieser Zahl p im Dezimalsystem an der Einerstelle?
Aufgabe 3: Welches sind die beiden letzten Ziffern in der Darstellung dieser Zahl p im Dezimalsystem?
Aufgabe 4: Es ist zu zeigen, daß die Darstellung der natürlichen Zahl $p = 2^{756839} - 1$ im Dezimalsystem aus 227832 Ziffern besteht. Hinweis: Zur Lösung darf benutzt werden, daß die für alle positiven reellen Zahlen erklärte Funktion mit der Gleichung $y = 10^x$ und auch deren Umkehrfunktion streng monoton wachsende Funktionen sind. *W. Träger, Döbeln*

Autorennen

Der Erfinder dieses so wirklichkeitsnahen Logikspiels ist leider nicht bekannt. Das Spiel entstand in den sechziger Jahren, höchstwahrscheinlich in Nordamerika.
In einigen Spielbüchern ist es unter sehr verschiedenen Namen, wie z. B. "Karo-Rennen" oder "Grand Prix", zu finden. Die Spielregeln sind recht einfach.
Das Spiel können zwei bis drei Spieler spielen. Natürlich können auch mehr Autofahrer antreten, was aber das Spiel sehr in die Länge zieht.

Bevor es losgeht, sollte sich jeder Fahrer ein "Auto", welches hier nur ein Farbstift ist, organisieren. Die Rennstrecke wird auf kariertes Papier gezeichnet, wobei die Fahrbahnbreite für Anfänger zwischen 3 – 5 Kästchen liegen sollte (**Abb. 1**).

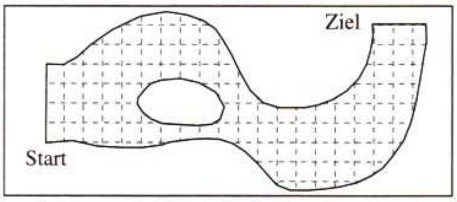


Abb. 1

Unsere "Verkehrsordnung" ist innerhalb von wenigen Minuten erlernbar.
Jeder Fahrer stellt sein Auto (d. h. setzt einen Punkt) auf die Startlinie. In **Abb. 2** treten unsere Spieler A (dicke Linie) und Spieler B (dünne Linie) zur Wettfahrt an und Spieler A darf als erster starten.

Die Verkehrsordnung

Die Rennfahrer bewegen sich abwechselnd weiter. Sie müssen sich bei der Wahl der Fahrtgeschwindigkeit und Fahrtrichtung an folgende Regeln halten:
Ein Fahrzeug bewegt sich bei jedem Zug in vertikaler Richtung um v Kästchen und in horizontaler Richtung um h Kästchen. Von Zug zu Zug dürfen sich v und h jeweils nur um + 1, – 1 oder 0 ändern. Dazu zwei Beispiele (**Abb. 3**).
a) Das Auto hat sich um 2 Karos nach vorn und um 3 Karos nach rechts bewegt ($v = 2$; $h = 3$). Beim nächsten Zug kann es somit 1 bis 3 Karos nach vorn und 2 bis 4 Karos nach rechts fahren ($v = 1, 2, 3$; $h = 2, 3, 4$).
b) Das Auto bewegte sich in vertikaler Richtung um 3 Karos nach vorn, d. h. $v = 3$ und $h = 0$. Beim nächsten Zug kann es 2 bis 4 Karos vorwärts fahren und gleichzeitig nach links ($h = 1$), nach rechts ($h = + 1$) oder gerade aus ($h = 0$) fahren.
Die neun Punkte zeigen die möglichen Standorte des Autos nach diesem Zug.
Nun einige Regeln, die das Verhalten auf der Rennstrecke betreffen.
Ein Fahrzeug, das auf ein Hindernis auffährt, den Rand der Rennbahn streift oder die Rennbahn verläßt, scheidet sofort aus. Dies betrifft nicht nur den neuen Standort, sondern auch den Weg dorthin. Im Zweifelsfall muß ein Lineal angelegt werden, da jeder Weg eine Gerade sein sollte. Es ist ebenfalls verboten, andere Autos zu rammen. D. h. im gleichen Zug dürfen nicht zwei Fahrzeuge auf einem Punkt stehen. Erlaubt hingegen ist das Kreuzen einer anderen Fahrstrecke, auch im gleichem Zug.
Hier einige Beispiele für Züge, die ein Ausscheiden zur Folge hätten (**Abb. 4**).
Ein solches Autorennen gewinnt der Fahrer, der als erster die Zielgerade erreicht. D. h., daß der Sieger mindestens einen Zug früher als die Gegner das Ziel erreichen muß. Das Rennen (**Abb. 2**) von Spieler A und B gewinnt B.

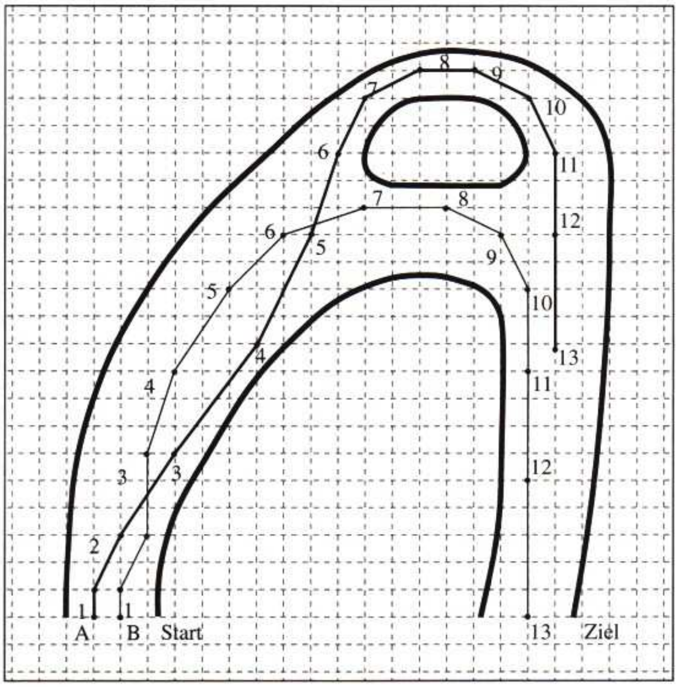


Abb. 2

Der Sieger bekommt eine Anzahl von Punkten gut geschrieben. Diese errechnet sich wie folgt.
Siegerpunkte = Maximale Zuganzahl · Anzahl der Karos des Gegners, der als Nächster das Ziel erreicht.
Jedes Ausscheiden wird mit einer Strafe von 10 Minuspunkten geahndet. Die Anzahl der Spieler entscheidet, ob weitergespielt wird oder eine neue Runde gestartet werden muß.

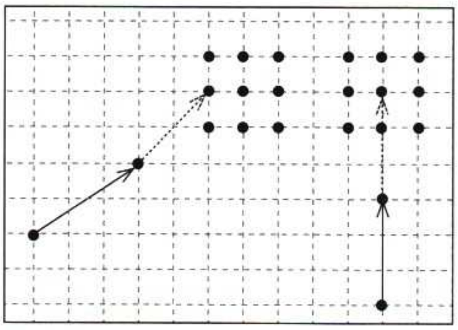


Abb. 3 a) *Abb. 3 b)*

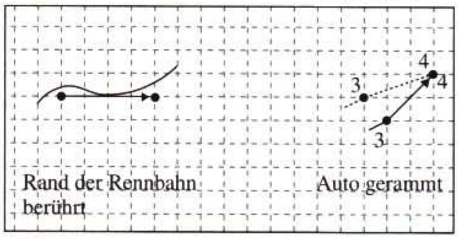


Abb. 4 a) *Abb. 4 b)*

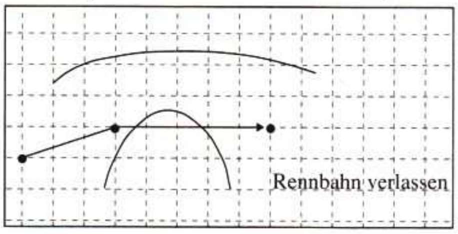


Abb. 4 c)

Ein „Beispielrennen"

Schauen wir uns das Rennen von A und B in **Abb. 2** an. Zunächst scheint, daß A durch entschlossene Tempofahrt B abschüttelt. Sehr spät bemerkt A, daß er viel zu schnell fährt. Zwar versucht er zu bremsen und kriegt noch knapp die Kurve, aber er verliert wertvolle Zeit (Züge) durch das Bremsen und erneute Beschleunigungen. Spieler B verfolgt eine andere Fahrtaktik. Im 2. Zug beschleunigt er von $v = 2$ auf $v = 3$ und behält diese Geschwindigkeit bis zum 5. Zug bei. Er geht rechtzeitig in die weite Rechtskurve, kommt am Hindernis unterhalb vorbei und braust dann, nach kurzer Bremsung in der zweiten Kurve, mit Vollgas auf das Ziel zu.
B gewinnt und erhält 20 Punkte (= 2 Züge · 10 Karos).
Beim Autorennen gewinnt also wie beim echten Autorennen derjenige Fahrer, der den richtigen Bogen raus hat.

Claudia Erdmann;
Stud. der Mathematik, Universität Leipzig

Das Rundlauf'sche Dreiersystem

Auf der Kirmes

Auf den folgenden Seiten wird der Beitrag aus dem letzten Heft „Herr Paddel und das Dualsystem" fortgesetzt.

Herr Rundlauf besitzt auf der Kirmes mehrere Fahrgeschäfte und Buden. Er möchte gern ein neues Karussell für kleine Kinder bauen lassen. Er denkt sich: Auf dem neuen Karussell müssen Fahrräder fest montiert werden. Auf jedem Fahrrad kann ein Kind nach Lust und Laune die Pedale vorwärts oder rückwärts treten und auch klingeln. Jedes Fahrrad ist also ein Einerfahrzeug (E). Außerdem sollen Motorräder mit Seitenwagen auf dem Karussell aufgebaut sein. Zwei Kinder finden auf jedem Motorrad Platz, dazu eins im Seitenwagen. Damit ist jedes Motorrad ein Dreierfahrzeug (D). Und große Feuerwehrwagen mit Blaulicht, Glocke und Hupe dürfen nach Ansicht von Herrn Rundlauf auch nicht fehlen. In jedem Feuerwehrwagen können auf drei Bänken insgesamt 9 Kinder sitzen. Jeder Feuerwehrwagen ist also ein Neunerfahrzeug (N).

Donnerstags ist Familientag auf der Kirmes. Alle Kinder dürfen an diesem Tag zu ermäßigten Preisen fahren. Aber am Familientag besetzt Herr Rundlauf das Karussell nach besonderen Regeln, wir wollen sie "Rundlauf-Regeln" nennen. Er sagt immer: "Ein Fahrzeug muß voll besetzt sein, sonst macht die Karussellfahrt am Familientag keinen Spaß." Solche Regeln müssen in der Familie wohl üblich sein, Herr Rundlauf ist ja ein Vetter von Herrn Paddel.

Karussellfahrt am Familientag

Regel 1
Ein leeres Fahrzeug darf erst dann bestiegen werden, wenn alle seine Plätze von Kindern, die noch warten, besetzt werden können.

Regel 2
Alle auf eine Karussellfahrt wartenden Kinder müssen einen Platz besetzen.

Auf dem Karussell sind zwei Fahrräder, zwei Motorräder mit Seitenwagen und zwei Feuerwehrautos aufgebaut.

(Die Aufgaben 1 bis 18 sind im Beitrag "Herr Paddel und das Dualsystem" enthalten.)

Aufgabe 19: *Herr Rundlauf notiert folgende Teilnehmerzahlen:*

Uhrzeit:	*14.00*	*14.10*	*14.20*	*14.30*
Kinderzahl:	*24*	*13*	*5*	*17*
Uhrzeit:	*14.40*	*14.50*	*15.00*	
Kinderzahl:	*10*	*19*	*15*	

Verteile sie nach den "Rundlauf-Regeln" auf die Fahrzeuge des Karussells.

Aufgabe 20: Wie kann man möglichst schnell festlegen, welche Fahrzeuge auf dem Karussell nach den "Rundlauf-Regeln" besetzt werden? Versuche für die Schülerzahlen von Aufgabe 19 und dann allgemein ein Verfahren zu entwickeln!

**Aufgabe 21: Wieviele Kinder können am Familientag höchstens am Karussell auf eine Fahrt warten, wenn alle einen Platz auf dem Karussell bekommen sollen?
Ist bei allen kleineren Anzahlen eine Verteilung der Plätze nach den "Rundlauf-Regeln" möglich?**

Aufgabe 22: *Herr Rundlauf notiert, welche Fahrzeuge voll besetzt sind:*

Uhrzeit:	*17.00*	*17.10*	*17.20*	*17.30*
Fahrzeuge:	*N,D,E*	*D,E*	*N,D*	*N,E*

Wieviele Kinder fahren auf dem Karussell?

Aufgabe 23: Wieviele Möglichkeiten gibt es, zwei (drei) Fahrzeuge zu besetzen?

Aufgabe 24: Die Kinder sollen alle Kombinationen, Fahrzeuge nach den "Rundlauf-Regeln" zu besetzen, ausprobieren. Stelle in einer Tabelle alle Kombinationen zusammen und schreibe zu jeder Kombination, wie viele Kinder Karussell fahren. Wie lange dauert es, wenn sie alle Kombinationen nacheinander ausführen wollen und eine Karussellfahrt 5 Minuten dauert?

Aufgabe 25: Ein Motorrad muß repariert werden und wurde abgebaut. Bei welchen Schülerzahlen ist nun eine Verteilung der Fahrzeuge den "Rundlauf-Regeln" nicht mehr möglich?

Herr Übersicht ist als Leiter des städtischen Ordnungsamtes für einen geordneten Betrieb der Kirmes zuständig. Er kommt bei Herrn Rundlauf vorbei und möchte wissen, wieviele Kinder gerade auf dem Karussell fahren. Er schafft es nicht, sie bei fahrendem Karussell zu zählen. "Kein Problem, es sind 15 Kinder", sagt Herr Rundlauf und zeigt auf eine Tafel. Dort hat er mit Kreide in einer Tabelle notiert, welche Fahrzeuge besetzt sind. Im Moment kann man folgendes auf der Tafel lesen:

Neuner	Dreier	Einer
1	2	0

Herr Rundlauf notiert die Besetzung der Fahrzeuge auf eine ähnliche Art wie sein Vetter Herr Paddel die Bootsausleihe.

Aufgabe 26: Fülle für die Kinderzahlen von Aufgabe 22 solche Tabellen aus!

Aufgabe 27: Finde eine Regel, wie aus dem Tafelanschrieb die Anzahl der Karussell fahrenden Kinder berechnet werden kann!

Aufgabe 28: Fülle für die Schülerzahlen von Aufgabe 19 solche Tabellen aus und mache die Probe!

Aufgabe 29: *Herr Rundlauf notiert:*

Uhrzeit	*16.00*	*16.10*	*16.20*	*16.30*
Besetzung	*102*	*110*	*021*	*122*

Uhrzeit	*16.40*	*16.50*
Besetzung	*201*	*012*

Welche Fahrzeuge auf dem Karussell sind besetzt und wie viele Kinder fahren mit?

Das Karussell von Herrn Rundlauf hat regen Zulauf, es ist meist gut besetzt. Die Kinder fahren vor allem am Familientag gern mit. Herr Übersicht schlägt Herrn Rundlauf folgende Neuerung vor: Es sollen 3 Fahrräder oder, was nach Meinung von Herr Übersicht noch besser sei, drei Motorräder auf dem Karussell eingebaut werden. Herr Übersicht denkt dabei an die Marktgebühren, die er bei Herrn Rundlauf kassiert.
Wenn das Karussell mehr Plätze hat, muß Herr Rundlauf auch mehr Geld auf der Kirmes als Standgebühr bezahlen. Herr Übersicht weiß, daß noch Platz für ein weiteres Fahrrad oder Motorrad auf dem Karussell vorhanden ist. Herr Rundlauf ist damit nicht einverstanden. "Dann gibt es zu oft Streit, weil nicht immer klar ist, welche Fahrzeuge besetzt werden sollen", sagt er.
Ihm kommt es vor allem darauf an, daß die Kinder immer nur auf eine Art auf die Fahrzeuge verteilt werden können, die Verteilung also eindeutig ist.

Aufgabe 30: Auf dem Karussell sollen drei Fahrräder (Motorräder) sein. Gib verschiedene Kinderzahlen an, bei denen es mehrere Möglichkeiten gibt, die Kinder nach den "Rundlauf-Regeln" auf die Fahrzeuge zu verteilen!

Herr Übersicht überlegt auch, das Feuerwehrauto nicht mehr als Neunerfahrzeug, sondern als Fahrzeug mit 7 Plätzen auszurüsten.

Aufgabe 31: Das Feuerwehrauto soll 7 Sitze anstelle von 9 Sitzen haben. Bei wievielen wartenden Kindern ist eine Verteilung auf die Fahrzeuge nach den "Rundlauf-Regeln" auf verschiedene Arten möglich? Gib mehrere Lösungen an!

Herr Übersicht zieht seinen Vorschlag zurück, aber nicht, weil ihn die Gründe von Herrn Rundlauf überzeugen, sondern weil Herr Rundlauf dann weniger Standgeld bezahlen würde. Wen wundert es, wenn Herr Übersicht nun ein Feuerwehrauto mit 11 Plätzen vorschlägt?

Aufgabe 32: Das Feuerwehrauto soll 11 Sitze anstelle von 9 Sitzen haben. Bei wievielen wartenden Kindern ist eine Verteilung auf die Fahrzeuge nach den "Rundlauf-Regeln" gar nicht mehr möglich? Gib alle Möglichkeiten an!

Bis heute wird bei Herrn Rundlauf das Karussell nach den "Rundlauf-Regeln" besetzt. Ist es eine Überraschung, wenn das Feuerwehrauto immer noch 9 Sitze hat und wenn von jedem Fahrzeug zwei Exemplare vorhanden sind? Die Kinder kommen gern zu Herrn Rundlauf. Sie wissen jedoch nie, welche Fahrzeuge bei der nächsten Karussellfahrt besetzt werden. Darin liegt für sie am Familientag der große Reiz bei einer Fahrt mit Herrn Rundlaufs Karussell.

Die "Karussellzahlen"

Herr Rundlauf kann bei seiner Schreibweise erkennen, welche Fahrzeuge auf dem Karussell voll besetzt sind. Bei 102 sind es ein Feuerwehrauto und zwei Fahrräder. Er benötigt nur die drei Zeichen 0, 1 und 2 als Ziffern seiner "Karussellzahlen". Dann kann er alle Informationen geben, die er über die Belegung seines Karussells und für Auskünfte an Herrn Übersicht benötigt. Bei den Karussellzahlen hat jede Stelle für Herrn Rundlauf einen bestimmten Wert. Er redet von der Stelle für das Einer-, das Dreier- und das Neunerfahrzeug und liest dabei die Ziffern seiner Zahlen von rechts nach links. Wenn er weitere Fahrzeuge benötigen würde, lautet für ihn die logische Fortsetzung ein Fahrzeug mit 27, 81, 243, usw. Plätzen. In den Aufgaben 31 und 32 konntet Ihr lernen, warum eine andere Fortsetzung (im Feuerwehrauto 7 oder 11 Sitze statt 9 Sitze) nicht sinnvoll ist. Ihr habt sicher schon entdeckt, daß sich bis auf die Einerstelle alle Stellenwerte auf die Zahl 3 zurückführen lassen.

Stelle	Siebenundzwanziger	Neuner	Dreier	Einer
Wert	27	9	3	1
andere Schreibweise	$3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$	$3 \cdot 3 = 3^2$		

Nun könnt Ihr sicher nach größeren "Karussellzahlen" hin fortsetzen und einsehen, daß gilt: $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$, $243 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$, usw. Wenn Ihr die letzte Zeile der Tabelle von links nach rechts lest, könnt Ihr folgende Fortsetzung vermuten: $3^1 = 3$ und $3^0 = 1$. In der Klasse 9 oder 10 werdet Ihr lernen, warum diese Fortsetzung sinnvoll ist.

Herr Rundlauf stellt seine "Karussellzahlen" in einem Zahlensystem dar, das die Mathematiker Dreiersystem oder auch Ternärsystem nennen. Wir benötigen nur die drei Zeichen 0, 1, und 2 als Ziffern und können damit aller Dreierzahlen darstellen. In Aufgabe 30 konntet Ihr lernen, warum die Benutzung von mehr als 3 Ziffern, in Aufgabe 26, warum die Benutzung von weniger als 3 Ziffern zu Schwierigkeiten führt.

Herr Rundlauf kann auch ausrechnen, wieviele Schüler insgesamt auf dem Karussell fahren. Nach den "Rundlauf-Regeln" müssen Fahrzeuge voll besetzt sein. Daher fahren beim Tafelanschrieb 102 insgesamt 11 Kinder Karussell, 9 mit einem Feuerwehrauto und 2 auf den beiden Fahrrädern. Herr Rundlauf rechnet wie folgt:

$1 \cdot 9 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 11$. Aus der "Karussellzahl" oder die Dreierzahl 102 können wir also Zahl 11, die Zahl der auf dem Karussell befindlichen Kinder, ausrechnen. Diese Anzahl der auf dem Karussell fahrenden Kinder ist eine Zahl aus dem Euch bereits bekannten Zahlensystem, dem Zehner- oder Dezimalsystem. Den Zusammenhang zwischen der Dreierzahl 102 und der Dezimalzahl 11 machen wir durch folgende Redeweisen deutlich: "Zur Dreierzahl 102 gehört die Dezimalzahl 11." oder "Der Dreierzahl 102 wird die Dezimalzahl 11 zugeordnet."

In Aufgabe 20 solltet Ihr ein Verfahren entwickeln, mit dem Ihr die Fahrzeuge, die besetzt werden dürfen, finden könnt. 23 Kinder werden auf 2 Neunerfahrzeuge, 1 Dreierfahrzeug und 2 Einerfahrzeuge verteilt. Zur Dreierzahl oder "Karussellzahl" 212 gehört also die Dezimalzahl 23. Die nächsten drei Anweisungen beschreiben solch ein Verfahren:

(1) Besetze auf dem Karussell das größte Fahrzeug, das voll besetzt werden kann, so oft wie möglich.

(2) Berechne die Anzahl der dann noch wartenden Kinder.

(3) Wiederhole die beiden Schritte (1) und (2) mit den nach (2) noch wartenden Kindern solange, bis alle Kinder auf dem Karussell Platz gefunden haben.

Probiert dieses Verfahren einmal aus!

Abschluß

Wir sind mit der Auswertung der Geschichten da angekommen, wo die fertige Mathematik anfängt. Euch ist sicher aufgefallen, daß das Zweier- und das Dreiersystem ähnlich aufgebaut sind. Vielleicht habt Ihr Lust und schreibt eine eigene Geschichte über Zahlen in einem anderen Zahlensystem und versucht dann, das was Ihr hier über den Aufbau von Zahlensystemen sowie über die Umrechnung in das Zehnersystem gelernt habt, auf das neue Zahlensystem zu übertragen. Wenn Ihr verstehen wollt, wie ein Computer mit Zahlen rechnet, müßt Ihr Euch neben dem Zweiersystem z. B. auch mit dem Achtersystem (auch Oktalsystem genannt) oder dem Sechzehnersystem (auch Hexadezimalsystem genannt) vertraut machen. Diese Zahlensysteme sind ähnlich wie das Zweier- oder das Dreiersystem aufgebaut. Im Achtersystem benötigt Ihr die acht Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, um alle Zahlen darstellen zu können. Im Sechzehnersystem ist es üblich, die 16 Zeichen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und die Buchstaben A, B, C, D, E, F als Ziffern zu verwenden.

Unter Zweierzahlen haben wir uns in den Geschichten "Bootszahlen", unter den Dreierzahlen "Karussellzahlen" vorgestellt, die dazu gehörenden Dezimalzahlen haben wir als Anzahl der insgesamt Boot oder Karussell fahrenden Kinder verstanden. Die "Paddel-Regeln" und die "Rundlauf-Regeln" waren Hilfen beim Umrechnen von Zweier(Dreier)-zahlen in Dezimalzahlen und umgekehrt. Wenn Ihr später einmal mit Zweier- oder Dreierzahlen und der Umrechnung in die dazu gehörigen Dezimalzahlen zu tun habt, ist es sehr hilfreich, wenn Ihr Euch weiter diese Zahlen so konkret wie in den Geschichten vorstellt.

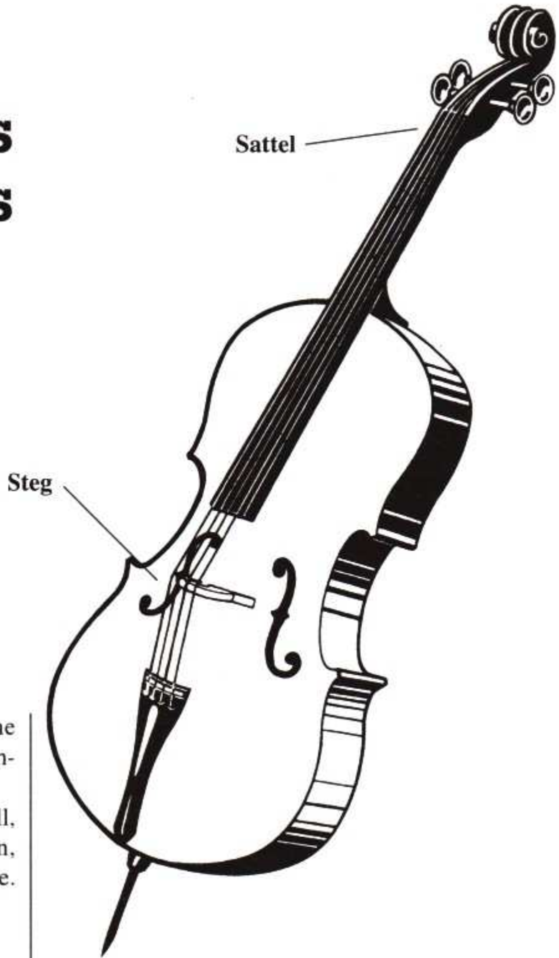
StD Helmut Wirths
Fachlehrer für Mathematik und Physik an der Cäcilienschule Oldenburg

So zählt man auf...

von Heinz Siegler, Eschau

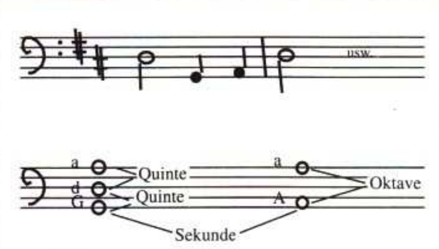
	indonesisch	englisch	finnisch
1	satu	one	yksi
2	dua	two	kaksi
3	tiga	three	kolme
4	empat	four	neljä
5	lima	five	viisi
6	enam	six	kuusi
7	tujuh	seven	seitsemän
8	delapan	eight	kahdeksan
9	sembilan	nine	yhdeksän
10	sepuluh	ten	kymmenen
11	sebelas	eleven	yksitoista
12	dus belas	twelve	kaksitoista
13	tiga belas	thirteen	kolmetoista
14	empat belas	fourteen	neljätoista
15	lima belas	fifteen	viisitoista
16	enam belas	sixteen	kuusitoista
17	tujuh belas	seventeen	seitsemäntoista
18	delapan belas	eighteen	kahdeksantoista
19	sembilan belas	nineteen	yhdeksäntoista
20	dua puluh	twenty	kaksikymmentä
21	dua puluh satu	twenty-one	kaksikymmentäyksi
22	dua puluh dua	twenty-two	kaksikymmentäkaksi
23	dua puluh tiga	twenty-three	
24	dua puluh empat	twenty-four	
25	dua puluh lima	twenty-five	
26	dua puluh enam	twenty-six	

Komisches, Kniffliges und Knackiges



Eine Aufgabe nicht nur für Musizierende

Markus spielt erst seit wenigen Wochen Cello, soll aber schon beim nächsten Elternabend die Gitarrenbegleitung seines Freundes durch Baßtöne verstärken. Sein Gehör und die Treffsicherheit seiner Finger sind noch so wenig geschult, daß sein Spiel oft gräßlich unsauber klingt. (Im Gegensatz zu den Zupfinstrumenten haben die Streichinstrumente ja keine Bünde, durch die die Tonhöhe von Halbtonschritt zu Halbtonschritt festgelegt ist.)
Das Lied, das Markus' Klasse vortragen will, steht in D-Dur, und um es zu begleiten, braucht man nur die drei Hauptdreiklänge. Deren Grundtöne soll Markus spielen:



Für die Töne d und G streicht Markus nur leere Saiten; aber das A muß auf der G-Saite schnell und sicher getroffen werden. Deshalb will sich Markus die Stelle, wo er den Finger aufsetzen muß, mathematisch genau kennzeichnen. Er weiß: Je kürzer der schwingende Teil der Saite ist, umso höher ist die Schwingungsfrequenz. Halbiert man die Saite, so entsteht ein Ton mit doppelter Frequenz: die Oktave. Die Freuqenzen zweier Töne im Quintabstand verhalten sich wie 2 : 3.
Der Abstand zwischen Sattel und Steg beträgt bei Markus' Cello 64,8 cm. Um wieviel muß die Saite verkürzt werden, damit ein Ganztonschritt erklingt?

Johanna Heller, Erfurt

Verwurzeltes

In den folgenden Kryptogrammen sind Buchstaben durch Ziffern zu ersetzen (gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern), so daß die entstehenden arithmetischen Identitäten erfüllt sind!

1. Bio = Wurzelballen "liefert" die Aufgabe

$$\mathrm{BIO} = \sqrt{\mathrm{BALLEN}}$$

2. Teep, der Wurzelfüßer, soll uns zu dem Kryptogramm

$$\mathrm{TEEP} = \sqrt{\mathrm{FUESSER}}$$

führen.

3. Wurzelwerk: Für welche dem Wort WERK zugeordnete vierstellige natürliche Zahlen mit der Einschränkung $0<W<E<R<K$ ist

$$\sqrt{\mathrm{WERK}}$$

eine natürliche Zahl?

4. Es soll die Wurzel aus dem Kiefer eines Wales gezogen werden:

$$\mathrm{WAL} = \sqrt{\mathrm{KIEFER}}$$

5. Das AS ist die Kubikwurzel:

$$\mathrm{AS} = \sqrt[3]{\mathrm{KUBIK}}$$

Wie groß ist das AS?

Hinweis: *Die Kryptogramme 3 und 5 können leicht durch Probieren mit einem Taschenrechner gelöst werden: Man beachte etwa, daß $(AS)^3 = KUBIK$ sein muß. In den übrigen Fällen empfehlen wir, einen Computer zu benutzen.* **W. Schmidt**

Treffender Vergleich

Der Philosoph Demonax aus Kypros traf eines Tages zwei Kollegen, die sich in ungebildeter Weise über ein Thema stritten. Während einer Fragen stellte, die nicht am Platze waren, gab der andere Antworten, die nicht zur Sache gehörten. Demonax hörte ihnen eine Weile geduldig zu. Dann sagte er:
"Freunde, kommt es euch nicht so vor, als wenn der eine einen Bock melkt und der andere ihm dabei ein Sieb darunterhält?"

aus: Oetzel/Polte: Der gescholtene Thales, Urania-Verlag Leipzig

Komplizierte Heimkehr

Andreas, Benno und Claus müssen abends um 18.00 Uhr zuhause sein. Der Heimweg ist genau 9,5 km lang.
Sie haben ein Fahrrad ($v = 15$ km/h) und einen Tretroller ($v = 9$ km/h). Alle drei gehen mit einer Geschwindigkeit $v = 5$ km/h. **Wann müssen Sie aufbrechen, wenn sie ihr Fahrzeug auf dem Weg einfach abstellen können und kein Fahrzeug mehr als eine Person befördern kann?**

OStR Anton Hammerschmitt, Herder-Gymnasium, Forchheim

1742

1917

837

Was geschah vor... Jahren?

1992 Chronologie Teil III

992 In China wird ein dezimales Maßsystem für Massen (Gewichte) eingeführt 1592 der Astronom, Astrologe und Mathematiker Giovanni Antonio Magini (1555 – 1617) aus Bologna verwendet erstmals das Dezimalkomma.

1592 Am 13.9. stirbt der französische Philosoph Michel Montaigne. Montaigne vertrat im Gegensatz zu seinen Zeitgenossen einen mathematischen Skeptizismus: es werden zwar viele wertvolle mathematische Einzelergebnisse erzielt, aber es fehlt eine durchgreifende allgemeine Methode, um diese Resultate zu ordnen.

1667 Am 6.8. wurde Johann I. Bernoulli geboren (weitere Informationen im folgenden kurzen Beitrag).

1692 Der Marquis L'Hospital (1661 – 1704) rechnet die Länge eines Stücks der logarithmischen Kurve aus.

1742 Der Schweizer Mathematiker Gabriel Cramer (1704 – 1752) stellt die Aufgabe: in einen Kreis ist ein Dreieck so einzubeschreiben, daß die Seiten des Dreiecks durch drei vorgegebene Punkte gehen. Lösungen der Aufgabe gaben u. a. von J. L. Lagrange (1736 – 1813) 1776 und L. Euler (1707 – 1783) 1780.

1792 C. F. Gauß (1777 – 1855) erkennt: das Parallelenpostulat ist nicht denknotwendig (Näheres auf dieser Seite).

1842 Lord W. P. Rosse (1800 – 1867) stellt seinen berühmtesten Teleskopspiegel mit einem Durchmesser von 1,8 m her.

1892 Es erscheint das berühmte Buch: Vorlesungen über die Theorie der Irrationalzahlen von P. Bachmann (1837 – 1920).

1917 Am 3.8. stirbt der bedeutende Mathematiker Georg Frobenius (* 1849), Frobenius war Professor in Berlin.

Johann I. Bernoulli

Am 6.8.1667 wurde als 10. Kind eines Basler Ratsherrn Johann Bernoulli geboren. Er gehört ohne Zweifel in die kurze Reihe der "ganz großen Mathematiker". Bernoulli studierte in seiner Heimatstadt Medizin, wurde von seinem Bruder Jakob I. Bernoulli (1654 – 1705) in die Mathematik eingeführt. 1690 erschien Bernoullis erste medizinische Publikation, 1691 seine erste mathematische. Ab 1695 war er Professor in Groningen (Niederlande), ab 1705 in Basel. In seiner Heimatstadt starb der Mathematiker am ersten Tag des Jahres 1748.

Bernoulli war der wichtigste Vertreter der von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) erfundenen Methode, Probleme der Differential- und Integralrechnung zu behandeln. Er hat Wichtiges zum Funktionsbegriff beigetragen, arbeitet über höhere Kurven, über Differentialgleichungen, zur Zahlentheorie. Besonders wichtig sind die Versuche Johann I. Bernoullis gewesen, die Mathematik auf die Physik anzuwenden. Er fand eine spezielle Form des Energiesatzes, arbeitete zur Hydraulik, zur Theorie des Schiffes. Johann I. Bernoulli war ein sehr streitbarer Herr, lag in heftigen literarischen Fehden mit englischen Mathematikern und seinem Bruder Jacob I. Für die Entwicklung der Mathematik ist neben seiner Forschungstätigkeit seine Lehrtätigkeit von höchster Bedeutung gewesen. Zu den Schülern von Johann I. Bernoulli gehörten die sehr bedeutenden Mathematiker Leonhard Euler (1707 – 1783), Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698 – 1759), Gabriel Cramer (1704 – 1752), Alexis Claude Clairaut (1713 – 1765).

Vor 200 Jahren: Carl Friedrich Gauß „entdeckt" die nichteuklidische Geometrie

In einem Brief vom 28.11.1846 an den Astronomen Heinrich Christian Schumacher (1780 – 1850) schrieb der weltbekannte Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855): "Es enthält die Grundzüge derjenigen Geometrie, die statt finden müßte und strenge consequent statt finden könnte, wenn die Euklidische nicht die wahre ist ... Sie wissen, daß ich schon seit 54 Jahren (1792) dieselbe Überzeugung habe ..." Mit "Es" war ein Büchlein des russischen Mathematikers N. J. Lobatschewski (1792 – 1856) gemeint: Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, Berlin 1840. Als Gauß sich also mit der nichteuklidischen Geometrie zu beschäftigen begann, war er 15 Jahre alt! Bei dem Problem der verschiedenen Arten von Geometrie ging es um eine uralte Frage. Kann man zweifelsfrei beweisen, daß durch einen Punkt außerhalb einer Geraden nur genau eine Gerade gezeichnet werden kann, die die ursprüngliche Gerade nicht schneidet? In der Geschichte der Mathematik hat es viele Versuche gegeben, diesen Satz zu beweisen. Alle diese Beweise beruhten auf Irrtümern. Die Quelle dieser Irrtümer ist immer gewesen, daß man zum Beweis des Satzes Behauptungen verwendete, die mit dem zu beweisenden Satz gleichwertig sind. Z. B. ist der Satz: die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180° mit dem Satz über die Parallelen gleichwertig. Eine Geometrie, in der der Satz gilt, heißt "euklidische Geometrie" (nach Euklid (um 365 v. Chr. – um 300 v. Chr.)). Gauß war der erste, der erkannte, daß es Geometrien (nichteuklidische Geometrien) gibt, die zur "euklidischen Geometrie" gleichwertig sind. In einer dieser Geometrie wäre beispielsweise der Satz richtig: zu einer gegebenen Geraden gibt es durch einen Punkt außerhalb dieser Geraden beliebig viele Parallelen.

Man kann also nicht zweifelsfrei beweisen, daß es zu einer Geraden und durch einen Punkt außerhalb einer Geraden genau eine Parallele gibt. Die Entscheidung, welche der Geometrien in unserer Welt richtig ist, ist keine Aufgabe der Mathematik, sondern eine Aufgabe für die Physik und die Astronomie. Genaueres über das Thema kann man nachlesen bei Reichardt, H.: Gauß und die Anfänge der nichteuklidischen Geometrie, Leipzig 1985.

Zusammengestellt von H.-J. Ilgauds, Sudhoff-Institut der Universität Leipzig

Abenteuer Forschung

Vor hundert Jahren gab es auf der Landkarte die sogenannten ‚weißen Flecken' – unerforschte, unbekannte Gebiete der Erde, Herausforderung für Entdecker, Weltenbummler und Wissenschaftler. Weiße Flecken gibt es noch heute, zum Beispiel in zahllosen Gebieten der Naturwissenschaft und Technik; denn die Forschung löst nicht nur Probleme, sondern wirft auch ständig neue auf – z. B. Umweltprobleme: Lärmbelästigung, Smog, verschmutzte Gewässer etc.
JUGEND FORSCHT ist eine Herausforderung für alle, die selber aktiv werden sollen. – dabei geht es nicht darum, den Forschungsinstituten oder der Industrie ein Stück Arbeit abzunehmen, sondern darum, selber Fragen zu stellen, Probleme zu erkennen, neue Ideen und Lösungen – oder Lösungswege – zu entdecken.

Die Teilnehmer

Seit dem Start des Wettbewerbs, 1965, haben rund 44.000 Mädchen und Jungen bei JUGEND FORSCHT den Spaß am Experimentieren und Forschen entdeckt. Teilnehmen können alle Nachwuchsforscher unter 21 Jahren: Schülerinnen und Schüler, Auszubildende, Wehr- und Zivildienstleistende, Studentinnen und Studenten im ersten Studiensemester. Für die Teilnehmerinnen und Teilnehmer unter 16 Jahren heißt der Wettbewerb SCHÜLER EXPERIMENTIEREN, damit der Fünftkläßler nicht mit der 20jährigen Abiturientin konkurrieren muß! Man kann allein oder als ‚Gruppendynamiker' in einer Forschergemeinschaft bis zu drei Leuten loslegen. Das Thema denkt sich jeder – bzw. jede Gruppe – selbst aus.

Die Fachgebiete

Das selbstgewählte Thema der Wettbewerbsarbeit muß aber in eines der sieben JUGEND FORSCHT-Fachgebiete passen: Biologie, Chemie, Geo- und Raumwissenschaften, Mathematik/Informatik, Physik, Technik und Arbeitswelt.

Die Wettbewerbsarbeit

Der schriftliche Teil der Arbeit darf nicht länger sein als 15 Seiten; dazu gehört eine einseitige Kurzfassung, die die wichtigsten Fakten kurz skizziert. Bei den Wettbewerben gestaltet jeder Teilnehmer seinen Ausstellungsstand so anschaulich wie möglich. Zielsetzung, Methoden und Ergebnisse der Arbeit sollen klar erkennbar sein. Da sind Phantasie und Kreativität gefragt!

Der Wettbewerbsablauf

Die Anmeldekarte, die in jeder JUGEND FORSCHT-Broschüre und im Taschenbuch zu finden ist, muß pünktlich abgeschickt werden. Anmeldeschluß ist in jedem Jahr der 30. November!
Anfang Januar erhalten alle, die sich angemeldet haben, eine Einladung zu einem der 48 Regionalwettbewerbe, die überall in der Bundesrepublik stattfinden. Die Wettbewerbe werden von Industrieunternehmen, den JUGEND FORSCHT-Patenfirmen, ausgerichtet und gemeinsam mit engagierten Lehrerinnen und Lehrer, die als Wettbewerbsleiter fungieren, organisiert. Den Jurys gehören Experten aus Schule und Hochschule, Forschung und Industrie an. Der Juniorwettbewerb SCHÜLER EXPERIMENTIEREN endet in fast allen Bundesländern auf der Regionalebene, besonders qualifizierte Arbeiten können allerdings zu JUGEND FORSCHT aufgestuft werden. Die Siegerinnen und Sieger der Regionalwettbewerbe JUGEND FORSCHT gehen weiter zum jeweiligen Landeswettbewerb. Wer auch diese Hürde überwindet, sprintet mit großen Schritten zur Endausscheidung – dem Bundeswettbewerb.

Die Preise

Experimentieren und Forschen, neue Freunde gewinnen, spannende Wettbewerbsatmosphäre genießen... das macht Spaß – dazu gibt es auf allen drei Wettbewerbsebenen tolle Preise: Geldpreise zwischen DM 100 auf der Regional- und DM 3.000 auf der Bundesebene, Sonderpreise für besondere Themenschwerpunkte, z. B. Umweltprobleme oder Ideen zur Energieeinsparung; Forschungspatenschaften in Firmen und Forschungsinstituten im In- und Ausland; Einladungen zu internationalen Wettbewerben außerdem zahlreiche Sachpreise: Bücher, Experimentierkästen und Zeitschriftenabonnements.

Übrigens: 1990 hatte ein neuer internationaler Jugendwettbewerb Premiere: ‚Europas JUGEND FORSCHT für die Umwelt' ist eine Initiative der Stiftung JUGEND FORSCHT und der Deutschen Bank. Beim 2. internationalen Umweltwettbewerb, im November '91, wetteiferten insgesamt 63 nationale Siegerinnen und Sieger aus 20 west- und osteuropäischen Ländern um Sieg und Platz. Die deutschen Vertreter auf internationalem Parkett sind ausgewählte Preisträger des JUGEND FORSCHT-Bundeswettbewerbs.

Für den großen naturwissenschaftlich-technischen Nachwuchswettbewerb JUGEND FORSCHT ist die Zeitschrift **junge wissenschaft**, die auch im Erhard Friedrich Verlag erscheint, eine ideale Ergänzung. – Denn: Die bereits aktiven und erfolgreichen Nachwuchsforscherinnen und Nachwuchsforscher haben in der **jungen wissenschaft** ein Forum, um ihre Wettbewerbsarbeiten einer großen Öffentlichkeit zu präsentieren. Auf der anderen Seite bietet die **junge wissenschaft** denjenigen, die gern wissen möchten, wie erfolgreiche Wettbewerbsarbeiten aussehen, konkretes Anschauungsmaterial. Die **junge wissenschaft** möchte noch mehr Jugendliche motivieren, das ‚Abenteuer Forschung' zu wagen! Übrigens: Die in der **jungen wissenschaft** veröffentlichten Wettbewerbsarbeiten sind zumeist auf der Landes- und Bundesebene mit einem Preis ausgezeichnet worden. Die Qualität dieser Arbeiten soll Ansporn sein – nicht ‚Maß aller Dinge'...

Die Stiftung JUGEND FORSCHT e.V.
Organisation und Kuratorium
Die Bundesgeschäftsstelle von JUGEND FORSCHT hat ihren Sitz in Hamburg, der Geburtsstadt des Wettbewerbs. Bundesgeschäftsführerin ist Dr. Uta Krautkrämer-Wagner. Ein zwölfköpfiges Kuratorium berät über das Wettbewerbsprogramm, über die Aktivitäten und Initiativen, die von JUGEND FORSCHT durchgeführt werden. Im Kuratorium sind alle JUGEND FORSCHT-relevanten Gruppen vertreten: Das Bundesministerium für Forschung und Technologie, das Bundesministerium für Bildung und Wissenschaft (Dr. Heinz Riesenhuber und Prof. Dr. Rainer Ortleb haben im jährlichen Wechsel den Kuratoriumsvorsitz), der STERN, das Verlagshaus Gruner + Jahr, die Kultusministerien, der Stifterverband der Deutschen Wissenschaft, der Gewerkschaftsbund, der Bundesverband der Deutschen Industrie, der Verein zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts, die Bundesjury, die Wettbewerbsleiter und die Patenfirmen.

Informationen und Wettbewerbsunterlagen sind zu erhalten bei der
Stiftung JUGEND FORSCHT e. V.
Beim Schlump 58
2000 Hamburg 13

Historische Entwicklung des Lineals

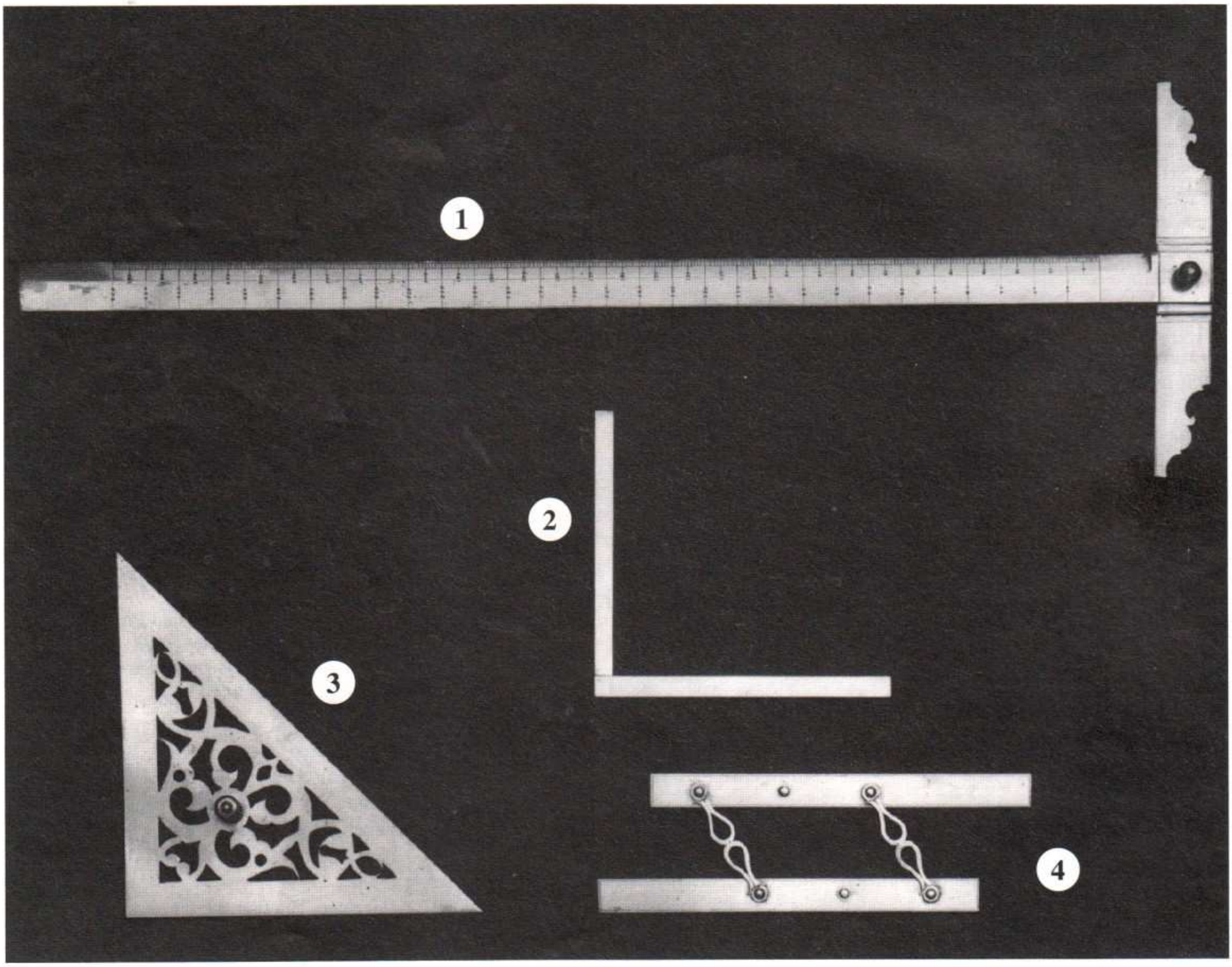
Die Grundform des uns allen geläufigen und oft gebrauchten Lineals ist bereits seit dem Altertum bekannt. Seine Entwicklung ist eng mit geometrischen Problemen bei der Landvermessung verbunden. So mußten im alten Ägypten nach den sich jährlich wiederholenden Nilüberflutungen die Felder neu vermessen werden. Die Entwicklung des Lineals und anderer Zeichenhilfsmittel läßt sich sehr gut nachvollziehen.

Neben mit Knoten versehenen Richtschnuren wurden auch Meßlatten eingesetzt. Letztere boten sich u. a. in verkürzter Form auch als Lineal zum Aufreißen oder Zeichnen gerader Linien an. Zusammen mit dem Zirkel bildeten sie in der griechischen Geometrie fast die einzige Möglichkeit, um ebene Figuren zu konstruieren. Die Entwicklung führte über das "Richtscheid" Albrecht Dürers mit ersten Maßeinteilungen zu einer Reihe von Arten und Kombinationen. So konnte das Lineal zum maßstabgerechten Zeichnen mit Skalen versehen sein. Sie entsprachen entweder den jeweils benutzten Längeneinheiten oder waren ihnen proportional.

Längeneinheiten

Hinsichtlich der benutzten Längeneinheiten und ihrer Werte gibt es, wie auch bei den anderen Maßeinheiten, eine fast unüberschaubare Vielfalt. Längeneinheiten wurden in der Regel vom menschlichen Körper abgeleitet. So waren beispielsweise eine Armlänge für die Festlegung der Elle, eine Fußlänge für den Fuß oder Schuh und eine Daumenbreite für den Zoll maßgebend. Ihre Werte schwankten bei den einzelnen Völkern und zu verschiedenen Zeiten. Obwohl es bereits im Altertum Bestrebungen einzelner Herrscher gab, in ihrem Reich ein einheitliches Maßsystem einzuführen und durchzusetzen, waren diese in vielen Staaten erst im 19. Jahrhundert von Erfolg gekrönt. In Deutschland unterschieden sich bis zur Einführung des metrischen Maßsystems am 01.01.1872 die benutzten Längeneinheiten und insbesondere deren Werte auf Grund der politischen Zersplitterung besonders stark voneinander, so daß eine große Zahl lokaler Maße existierte.

Diese Vielfalt spiegelt sich in den auf Maßstäben angegebenen Längeneinheiten wider. Handelte es sich um verkleinernde Maßstäbe, werden sie als Reduktions- oder verjüngte Maßstäbe bezeichnet. Ihr Hauptanwendungsgebiet war das kartographische Zeichnen. Der Abgriff der Strecken erfolgte in der Regel mit



Historische Zeicheninstrumente: 1 = Anschlaglineal, deutsch, um 1600; 2 = Winkelmaß (Anschlagwinkel), deutsch, um 1600; 3 = Dreieck, deutsch, um 1600;

dem Zirkel. Architektonische bzw. Bauzeichnungen wurden bis zum 18. Jahrhundert häufig in einem willkürlichen Maßstab gezeichnet, der meist neben der Zeichnung angegeben ist.

Beispiele für andere Zeichenhilfsmittel

Zum Aufzeichnen aufeinander senkrecht stehender Linien dienten Reißschiene, Winkelhaken bzw. Winkelmaß, oder rechtwinkliges Dreieck.
Die Reißschiene, auch Anschlag- oder Kreuzlineal, besteht aus einem Lineal, das mit einem dazu senkrechten, etwas überstehenden Lineal fest verbunden ist, so daß nach Anlegen an die Kante eines Zeichenbrettes die dazu Senkrechte gezogen werden konnte.
Das Querlineal konnte auch in einer Laufschiene bzw. auf einer Gleitschiene verschoben werden. Gleichzeitig konnten damit parallele Linien gezogen werden. Diese ließen sich auch mittels Lineal bzw. Maßstab und Dreieck oder mittels spezieller Parallellineale, die aus zwei, mitunter drei miteinander durch bewegliche Scharniere parallelogrammförmig verbundenen Linealen bestanden, zeichnen.
Eine spezielle Art stellten Roll-Parallel-Lineale dar. Sie bestehen aus einem auf zwei mit Skalen versehenen Rädchen laufenden Lineal, das bei sorgfältiger Handhabung parallel geführt werden kann. Sie wurden vor allem bei der Navigationsarbeit auf Seekarten angewendet.
Das Winkelmaß besteht aus zwei am Ende entweder beweglich (Winkelmaß) oder senkrecht fest (Winkelhaken) miteinander verbundenen Linealen. Damit konnten beliebige Winkel abgenommen und übertragen bzw. rechte Winkel gezeichnet werden.

Die Sammlung der Dresdner Kunstkammer

Viele Arten dieser Lineale sind bereits im Inventar von 1587 der 1560 gegründeten Dresdner Kunstkammer zu finden. So umfaßt der Bestand von ca. 400 Zeicheninstrumenten neben 218 Zirkeln und anderen Objekten 37 Lineale, 50 Maßstäbe einschließlich Reduktionsmaßstäbe, 19 Kreuzlineale, 47 Winkelmaße einschließlich Winkelhaken und 18 Dreiecke.
Einige Typen werden auch heute noch in fast unveränderter Form gefertigt und gehören zum unentbehrlichen Hilfsmittel im Schulunterricht.

Dr. Klaus Schillinger, Direktor des Staatlichen Mathematisch-Physikalischen Salons im Dresdner Zwinger

Ein seltsamer Beweis

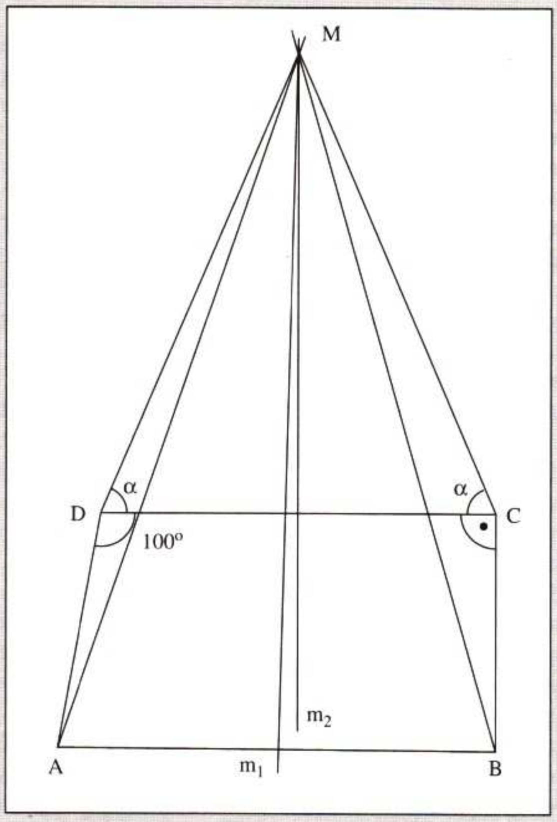
Behauptung: 90° = 100°

Gegeben ist das Viereck ABCD mit $\overline{BC} = \overline{DA} = 3\text{cm}$, $\overline{CD} = 5\text{cm}$, $\sphericalangle DCB = 90°$ und $\sphericalangle ADC = 100°$.

M liegt auf der Symmetrieachse m_1 zu A und B. M liegt auch auf der Symmetrieachse m_2 zu C und D. Dann sind die Dreiecke AMD und BCM kongruent, denn
$M \in m_1 \Rightarrow \overline{AM} = \overline{BM}$
$M \in m_2 \Rightarrow \overline{DM} = \overline{CM}$
$\overline{BC} = \overline{DA} = 3$ cm nach Voraussetzung.
Also gilt: $\sphericalangle MCB = \sphericalangle ADM$.
Nun ist aber $\sphericalangle CDM = \sphericalangle MCD = \alpha$ (Basiswinkel),
also $\sphericalangle BCM = 100° + \alpha =$
$= \sphericalangle ADM = 90° + \alpha$
$\Rightarrow 100° = 90°$, also $90° = 100°$

Was stimmt hier nicht? Wer es weiß, schreibt uns! Wir sind gespannt!

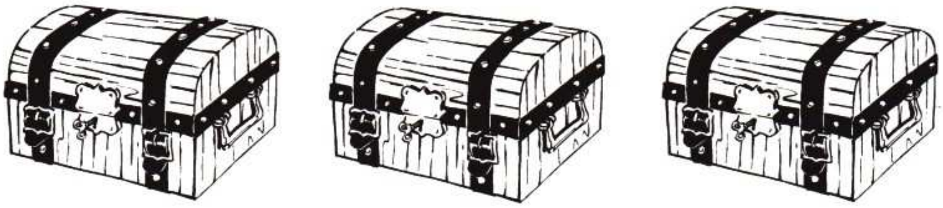
(Mitgeteilt bei einem mathematischen Colloqium der Universität Bayreuth)



OStR Anton Hammerschmitt, Herder-Gymnasium, Forchheim

Der Griff in das Schatzkästchen

Eines der drei Schatzkästchen enthält zwei schwarze Steine, eines zwei weiße und das dritte je einen weißen und einen schwarzen Stein. Leider sind alle Beschriftungen vertauscht angebracht, so daß jedes Schatzkästchen falsch markiert ist.
Es darf nacheinander (ohne hineinzuschauen) aus jedem Kästchen ein Stein entnommen werden, um herauszufinden, welche Beschriftung richtig wäre. Welche und wieviele Griffe sind notwendig?



Lösung:
Es genügt ein Griff in das mit S/W beschriftete Kästchen. Holt man einen weißen Stein heraus, ist es also das Kästchen mit den beiden weißen Steinen. Dann liegen im Kästchen W/W zwei schwarze und im Kasten S/S ein weißer und ein schwarzer Stein. Zieht man beim ersten Griff in S/W einen schwarzen Stein, so gilt alles entsprechend.

Komisches, Kniffliges und Knackiges

Alphons logische Abenteuer (11)

Trotz wohlgemeinter Warnung seiner Mutter hatte sich Alphons doch nicht beherrschen können. Die dunklen Süßkirschen waren zu verlockend gewesen, um auch nur eine von ihnen auf der Obstschale liegen zu lassen. Mit leichtem Magendrücken war er zu Bett gegangen.

Unruhig wälzte er sich im Bett hin und her, schließlich stand er auf, ging zur Tür und öffnete sie. Ein jäher Schreck durchfuhr ihn. Statt auf dem gewohnten Korridor stand er in einer zerklüfteten Höhle. Vor ihm richtete sich fauchend ein Ungeheuer auf. Alphons wich entsetzt zurück, aber hinter ihm war nicht mehr die rettende Tür, sondern ein Bergabhang, über den immer mehr Kirschen auf ihn herabrollten. „Du wirst unter den Kirschen begraben werden, es sei denn, Du löst zuvor folgende, Dich aus der Höhle befreiende Aufgabe." Bei diesen Worten hatte das Ungeheuer einen Arm ausgestreckt, der den Kirschenstrom stoppte. „Wenn ich zur Seite trete", sprach er weiter, „wirst Du drei Geister sehen. Der eine ist der Geist der Wahrheit. Er behauptet stets das Wahre als wahr und das Falsche als falsch. Ein anderer ist der Geist der Falschheit, der stets Wahres als falsch und Falsches als wahr behauptet. Der Dritte ist der Geist der Diplomatie, der, wie es ihm beliebt, mitunter Wahres als falsch, mitunter aber auch Wahres als wahr behauptet. Finde mit nur zwei Fragen an die Geister heraus, wer welcher Geist ist. Das sei Dir noch erlaubt. Du darfst dieselbe Frage höchstens drei Mal stellen. Viel Zeit bleibt Dir nicht, denn wenn mein Arm ermattet sinkt, begraben Dich die sich wieder in Bewegung setzenden Kirschen!"

Nach diesen Worten trat das Ungeheuer zur Seite. Alphons dachte verzweifelt an die Mahnung seiner Mutter. Doch dann faßte er sich ein Herz, atmete tief durch und trat dann an den links stehenden Geist mit der Frage heran: „Ist die Aussage „Ich stehe jetzt vor Dir, wahr?" Der Geist antwortete: „Ja." Alphons wandte sich mit derselben Frage an den in der Mitte stehenden Geist, der mit „Nein" antwortete. In gleicher Weise antwortete der rechts von ihm stehende Geist. Alphons wußte nun, daß der links stehende Geist der Geist der Wahrheit ist. Hätte der Geist der Diplomatie gleich dem Geist der Wahrheit mit „ja" geantwortet, der Geist der Falschheit, da er seine Frage verneinen mußte, wäre dann identifizierbar gewesen.

Alphons trat an den Geist der Wahrheit heran, zeigte auf den rechts stehenden Geist und fragte: „Ist das der Geist der Falschheit? Der Geist antwortete: „Nein." Daraufhin sagte Alphons zu dem Ungeheuer: „Links von mir steht der Geist der Wahrheit, in der Mitter der Geist der Falschheit und rechts der Geist der Diplomatie." Das Ungeheuer sah gar nicht mehr so furchterregend aus. Mit freundlicher Stimme sagte es:„Du bist frei." Aufatmend richtete Alphons sich auf und stieß dabei mit dem Kopf gegen etwas Hartes. Es war die Kante des Bücherbords über seinem Bett, die ihn sanft weckte.

Berti, dem Alphons am nächsten Tag seinen Alptraum erzählte, meinte mitfühlend: „Da sei nur froh, daß Du nicht unter denselben Bedingungen nur zwei Geister vor Dir gehabt hast, von denen der eine der Geist der Wahrheit und der anderer der Geist der Diplomatie ist." Alphons nickte: „Wenn der Geist der Diplomatie dem Geist der Falschheit in der Antwort gefolgt wäre und ich hätte sie identifizieren sollen, wäre ich auch in keiner besseren Lage gewesen." Berti klopfte seinem Freund auf die Schulter und bemerkte: „Ein Glück, daß manche Ungeheuer mit uns Menschen so human umgehen."

Prof. Dr. Lothar Kreiser, Institut für allgemeine Logik der Universität Leipzig

Zur Entdeckung Amerikas

Am 12.10.1492 erreichte nach gefahrvoller Reise Christoph Columbus mit seinen 3 Schiffen die Insel Guanahani (heutige Watling-Insel der Bahamas). Er war davon überzeugt, an der Ostküste Indiens gelandet zu sein. Er hatte den neuen Erdteil Amerika entdeckt.

	I	M	T	S	N	,	I
A	A	,	I		N	A	T
A	P	R		N	A	N	A

Die Namen seiner 3 Schiffe sind im abgebildeten Rechteck mit 24 Feldern in Form eines Rösselsprungs, d. h. in der Gangart eines Springers beim Schachspiel, enthalten. Der Springer betritt dabei jedes Feld genau einmal, auch die ein Komma tragenden Felder sowie die Leerfelder. Der Name des Admiralschiffes besteht aus 2 Worten, die im Rösselsprung durch ein Leerfeld getrennt sind. Die Namen zweier Schiffe sind im Rösselsprung jeweils durch 2 Felder getrennt, deren erstes ein Komma trägt und deren zweites ein Leerfeld ist. Wie heißen die 3 Schiffe des Columbus? Noch ein Hinweis: Würde man den Konsonanten N (gesprochen wie "nj") des spanischen Alphabetes durch N ersetzen, so wären 2 dieser 4 gesuchten Worte gleichzeitig bei uns gebräuchliche Vornamen.

W. Träger, Döbeln

Lösung:

13	I_{10}	M_7	T_4	S_1	N_{16}	,19	I_{22}
A_8	A_5	,12	I_{15}	20	N_{23}	A_2	T_{17}
A_{11}	P_{14}	R_9	6	N_3	A_{18}	N_{21}	A_{24}

Santa Maria (Heilige Maria), Pinta (Flecken, Tupfen), Nina (gesprochen "Ninja"; kleines Mädchen)

Sprachecke

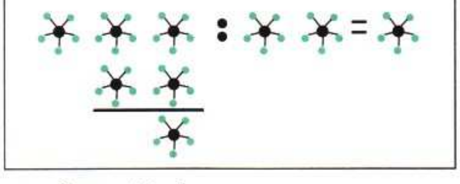
Echecs et maths

Au tournoi de Grenoble, chaque joueur rencontre une fois et une seule chacun des autres participants. Après chaque match, l'arbitre donne aux deux joueurs un carton de couleur. Ce carton est rouge pour le joueur victorieux, vert pour le perdant. En cas de nul, les deux joueurs ont un carton jaune. A l'issue du tournoi, il a été distribué exactement 752 cartons de chaque couleur. Quel est le nombre de participants au tournoi?

Peter Hofmann, Leipzig

Деление

В этом зашифрованном примере на деление все девять цифр различны. Расшифруйте его.



aus: Quant, Moskau

Prime Primes

The prime number 31 has an interesting property: if we drop its right-hand digit, we get the number 3, which is also a prime. The prime number 317 has the same property; if we drop the 7, we get 31, which is a prime; if we then drop the 1, we get another prime, 3.

Two American mathematicians named Walstrom and Berg have called integers which have this property prime primes.

Try to find all of the two-digit prime primes (remembering that 1 ist not a prime).

aus: Fun with mathematics, Toronto

Wir setzen gleichlange Strecken zusammen

Gleichlange Strecken sollen so zusammengesetzt werden, daß sie (1) in Verlängerung zueinander (Abb. 1) und (2) rechtwinklig zueinander sind (Abb. 2).

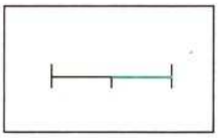


Abb. 1

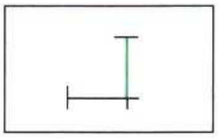


Abb. 2

Aufgabe 1: Wieviele Möglichkeiten gibt es, verschiedenen Figuren aus vier gleichlangen Strecken unter diesen beiden Bedingungen zusammenzusetzen.

Dabei gelten Zusammensetzungen als gleich, wenn sie durch Drehungen und Spiegelungen auseinander hervorgehen. Aus zwei Strecken gelten also die vier Zusammensetzungen, die

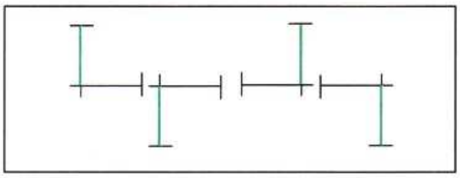


Abb. 3

die **Abb. 3** zeigt, als gleich. Die Figuren können auf kleinkariertem Papier gezeichnet werden.

Es ist aber auch möglich, sie zunächst aus gleichlangen Stäbchen zusammenzusetzen. Aus zwei Stäbchen können wir genau die beiden Figuren zusammensetzen, die in **Abb. 1** und **2** gezeigt wurden. Um das zu zeigen, nehmen wir eine vollständige Fallunterscheidung vor. Die Endpunkte der Strecken bezeichnen

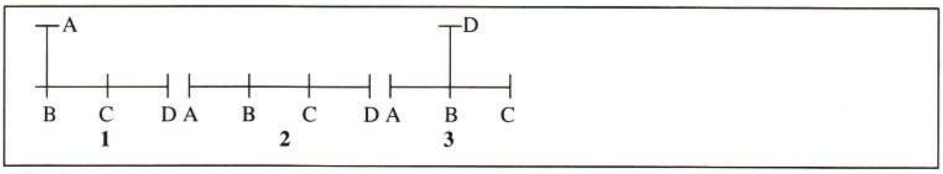


Abb. 6

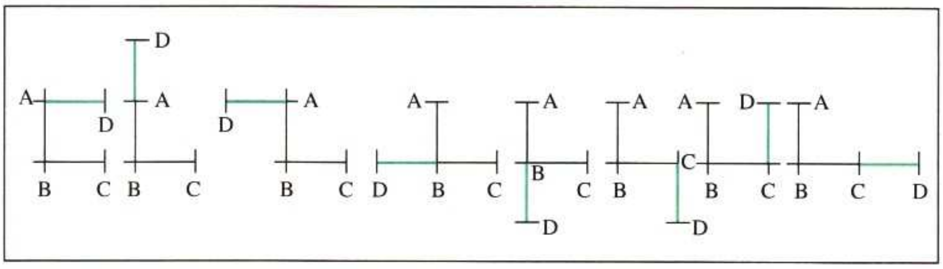


Abb. 7

wir, wie üblich, mit Großbuchstaben. Die systematische Untersuchung zeigt die **Abb. 4**. Es gibt genau sechs Möglichkeiten das zweite Stäbchen anzulegen, je drei an den Punkten A und B.

Um zu ermitteln, wieviele verschiedene Figuren aus vier Stäbchen zusammengesetzt werden können, ist es erforderlich, um systematisch vorgehen zu können, zunächst die Figuren aus drei Stäbchen zusammenzusetzen.

Wir gehen von der Figur der **Abb. 1** aus. Dann gibt es mit drei Stäbchen folgende Figuren, zusammengestellt in der **Abb. 5**.

Wir sondern die Fälle aus, die gleich sind. Es bleiben die drei verschiedenen Figuren, die die **Abb. 6** zeigt. Entsprechend untersuchen wir den Fall 2 aus zwei Stäbchen. Das Ergebnis zeigt die **Abb. 7**. Zu den drei Figuren der **Abb. 6** kommen noch zwei Figuren (**Abb. 8**) hinzu.

Aus drei gleichlangen Strecken kann man also unter den geforderten Bedingungen fünf Figuren zusammensetzen. Nun gilt es, die Figuren aus vier gleichlangen Strecken zu ermitteln.

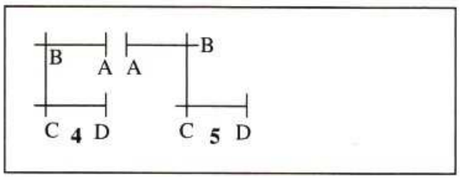


Abb. 8

Christopher, der diese Untersuchungen vorgenommen hat, hat die Figuren, die die **Abb. 9** zeigt, gefunden. Da er nicht systematisch vorgegangen ist, ist die Lösung nicht vollständig.

Aufgabe 2: Ermittle die fehlenden Figuren!

Gerhard Schulze, Herzberg

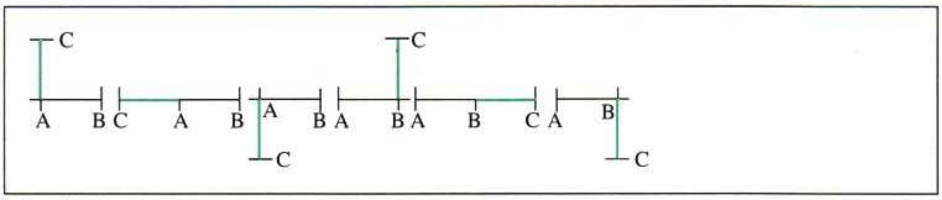


Abb. 4

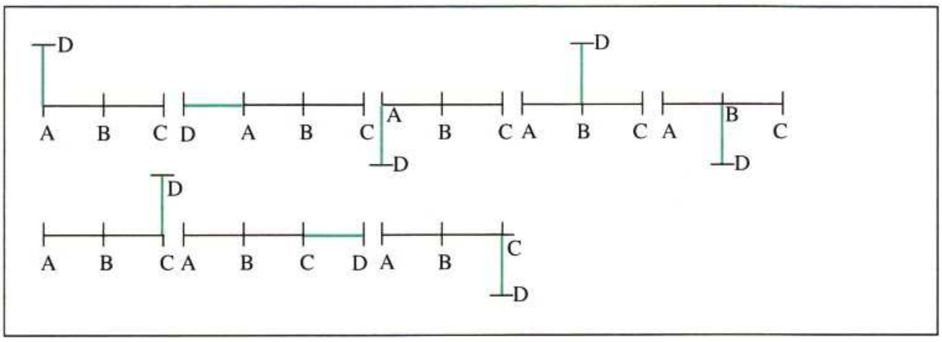


Abb. 5

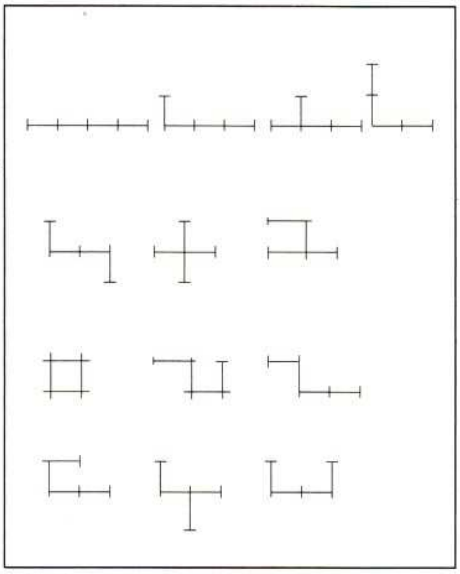


Abb. 9

Die Olympiade-Ecke

Der Bundeswettbewerb Mathematik – kein elitärer Treff für Wunderkinder

Der Bundeswettbewerb Mathematik (BWM) wurde im vergangenen Jahr zum 21. Mal ausgeschrieben und gehört damit wohl zu den Klassikern unter den Schülerwettbewerben. Seit seiner Gründung im Jahr 1970 will dieser Wettbewerb Interesse an der Mathematik wecken und Schülerinnen und Schüler zu intensiver Beschäftigung mit mathematischen Problemen anregen.

An der 1. Runde 1991 waren erstmals auch Schüler aus den neuen Bundesländern teilnahmeberechtigt. Insgesamt haben sich 315 Schülerinnen und Schüler aus diesen Ländern beteiligt. Das sind zwar weniger als sich die Organisatoren erhofft hatten, dennoch ist dies doch eine erfreulich hohe Beteiligung.
Bundesbildungsminister Dr. Rainer Ortleb rechnet sogar mit deutlich ansteigenden Anmeldungen aus den fünf neuen Bundesländern; deren Erfolgszahlen können sich schon jetzt durchaus sehen lassen. Nach einer Statistik zur 2. Runde des 1991er Wettbewerbs kommen allein aus Sachsen bzw. Thüringen bereits mehr Teilnehmer als aus Schleswig-Holstein und Hamburg zusammengenommen. Insgesamt waren zur Teilnahme an der zweiten Runde 1991 noch 888 Schülerinnen und Schüler berechtigt, von denen knapp die Hälfte, nämlich 394, eine Arbeit eingereicht haben. Dies ist für einen zweiten Durchgang eine bemerkenswerte Quote.
Leider läßt die Resonanz unter den Mädchen noch einige Wünsche offen – nur 35 der 394 eingesandten Lösungen gingen auf das Konto von Schülerinnen. Bundesminister Ortleb setzt jedoch in der Zukunft ganz auf den traditionell hohen Mädchenanteil bei Mathe-Wettbewerben im Ostteil der Republik. Gerade in mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern könne man auf gute Erfahrungen zurückgreifen, wo auch Mädchen in den Mannschaften für die internationalen Schülerolympiaden vertreten gewesen waren.
Also liebe Leserinnen von *alpha*, zeigt es den Jungens und wagt Euch an die Lösungen der Probleme der nächsten Wettbewerbsrunden heran!
Sicher wird sich die Gesamtbeteiligung am BWM noch weiter erhöhen, wenn auch in den neuen Bundesländern dessen Bekanntheitsgrad wächst. Der BWM und die Euch wohlbekannte Mathe-Olympiade aus der früheren DDR unterscheiden sich ja grundlegend voneinander. Ganz anders etwa als die vierglie-

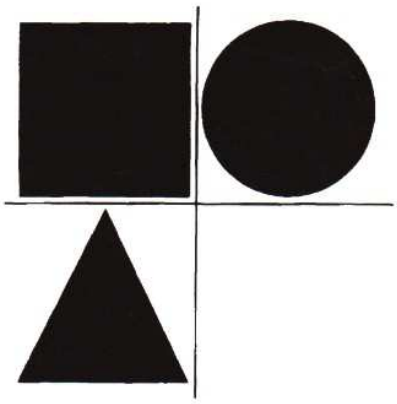


Abb. 1

drige Olympiade Junger Mathematiker (OJM), die in Klassenstufen unterteilt ist und einen Klausurwettbewerb darstellt, wird der BWM als Korrespondenzwettbewerb d. h. als Hausaufgabenwettbewerb organisiert. Während in der OJM die Aufgaben durchweg von höherem (schul)mathematischen Schwierigkeitsgrad sind, deren Lösung oft weniger "Erfinderreichtum" erfordert, stellt es sich beim BWM genau umgekehrt dar: dort lassen die Aufgaben der ersten Runde in der Regel unterschiedliche Lösungsansätze zu und fördern dadurch einen kreativen Umgang mit den mathematischen Vorkenntnissen. Die etwas geringeren mathematischen Anforderungen sind geradezu ein Kennzeichen der 1. Runde des BWM.
Dafür fehlt aber eine Aufteilung in Klassenstufen (wie bei der OJM üblich).
Veranstalter des BWM ist der Verein Bildung und Begabung e. V. in Bonn. Der Wettbewerb wird gemeinsam vom Bundesminister für Bildung und Wissenschaft und dem Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft gefördert und steht unter der Schirmherrschaft des Bundespräsidenten. Alle Schülerinnen und Schüler in der Bundesrepublik Deutschland, die eine zur allgemeinen Hochschulreife führende Schule besuchen, können sich beteiligen.
Der BWM findet jährlich statt und besteht aus drei Runden. Er beginnt jeweils im Dezember und dauert insgesamt etwa 13 Monate. Die Unterlagen der ersten Runde kommen Anfang Dezember an Eure Schule. Fragt Euren Fachlehrer rechtzeitig nach den Teilnahmecoupons. An vielen Schulen gibt es übrigens auch eine Kontaktperson als Ansprechpartner für Interessierte.

In der **ersten und zweiten Runde** sind jeweils vier Aufgaben zu Hause **selbständig** schriftlich zu bearbeiten. Dabei sind die Aufgaben in der zweiten Runde deutlich schwieriger als in der ersten Runde. Die Bearbeitungszeit beträgt jeweils etwa drei Monate. Die Verpflichtung zu eigenständiger Bearbeitung der Aufgaben besteht von Anfang an, also von der Ideenfindung über die Aufbauplanung bis zur Ausformulierung der Lösung. Es reicht daher **nicht** aus, nur einen Teil – selbst wenn er der überwiegende ist – allein bearbeitet zu haben.
Die Aufgabenkommission nennt im wesentlichen drei Grundregeln, die Ihr bei der Lösung einer Aufgabe beherzigen solltet.
Zunächst müßt Ihr den – meist eingekleideten – Aufgabentext aufbereiten, ihn nach möglichen Verfremdungen abklopfen. Danach gilt es, sein mathematisches Rüstzeug zurechtzulegen und es gegebenenfalls in völlig ungewohnter Art und Weise einzusetzen. Schließlich müßt Ihr noch die sauber formulierte Lösung auf logische Lücken oder notwendige Falluntersuchungen hin durchsehen.
Seit 1988 sind in der ersten Runde auch Gruppenarbeiten zugelassen. Diese durchlaufen das Korrekturverfahren allerdings außer Konkurrenz. Sie werden nicht mit Preisen versehen. Die Gruppen erhalten jedoch die Lösungsbeispiele und eine Mitteilung über die Einstufung ihrer Arbeit. Für die **dritte** Runde, ein Kolloquium, jeweils im Januar des übernächsten Jahres, haben sich die Gewinner(innen) erster Preise in der zweiten Runde qualifiziert. Jede(r) aus diesem Kreis der Preisträger(innen) führt dabei ein knapp einstündiges Fachgespräch mit Mathematikern aus Schule und Hochschule. Auf der Grundlage solcher Gespräche werden die Bundessieger(innen) ermittelt. Die Besten nach den drei Runden erwartet eine besondere Auszeichnung: Sie werden im Falle eines Studiums an einer wissenschaftlichen oder technischen Hochschule in die Förderung der Studienstiftung des deutschen Volkes aufgenommen.
Zu gewinnen gibt es in der 1. Runde Urkunden für erste, zweite und dritte Preise oder eine Anerkennungsurkunde, wenn mindestens eine Aufgabe richtig gelöst worden ist. Alle ersten bis dritten Preisträgerinnen und Preisträger dürfen an der 2. Runde teilnehmen. Hier gibt es erste, zweite und dritte Preise, die neben Urkunden mit Geldpreisen bis zu 200 DM verbunden sind.
Die ersten Preisträgerinnen und Preisträger der 2. Runde haben sich für die Teilnahme an der 3. Runde qualifiziert. In dieser Runde gibt es als Preisstufe nur den Bundessieg. Alle ersten Preisträger(innen) der 2. Runde, die zuvor schon einmal den Bundessieg errungen haben, sind automatisch wieder Bundessieger(innen). Für diese mehrmaligen Bundessieger (innen) setzt der Bundesminister einen Sonderpreis aus. Daneben winken Euren Schulen weitere attraktive Geldzuweisungen des Bundesministers, wenn Ihr in der ersten Runde be-

sonders erfolgreich gewesen wart. Als weitere Sonderpreise stellt der Verein Bildung und Begabung jedes Jahr für mehrere junge, qualifizierte Teilnehmer(innen) einen dreiwöchigen USA-Aufenthalt (einschließlich Sommerprogramm) bereit.

Wer noch mehr Informationen über den Wettbewerb – die Aufgaben, das Korrekturverfahren und die Bewertungsmaßstäbe – haben möchte, der kann an folgende Adresse schreiben: **Bundeswettbewerb Mathematik Geschäftsstelle**, Wissenschaftszentrum Ahrstraße 45 (oder Postfach 20 14 48), W-5300 Bonn 2.

Dort sind – gegen Einsendung eines adressierten und frankierten Rückumschlages (Drucksache 250 – 500 g) DIN C4 – auch die Ausschreibungsunterlagen und Lösungsbeispiele zu den Aufgaben erhältlich.

Die für Teilnehmer(innen) aus den neuen Bundesländern noch sehr ungewohnte Form des Ablaufs des BWM verursacht bei dem einen oder anderen von Euch manch zwiespältige Gefühle, wie erste Erfahrungen mit diesem Wettbewerb im Osten Deutschlands vermuten lassen. Eine kleine Ahnung davon gibt ein Bericht, den zwei erste Preisträger der 2. Runde aus Thüringen, **Sven Peyer** und **Dmitri Stübner** (von der Spezialschule Erfurt) an *alpha* geschickt haben. Beeindruckt erzählen sie darin vom ganzen Drumherum der Preisverleihung in Frankfurt/Main, wo sie – zusammen mit 20 anderen Siegern der 2. Runde aus Hessen, Rheinland-Pfalz und dem Saarland – einen Tag lang, großzügig von einem Tochterunternehmen einer großen Frankfurter Metallgesellschaft bewirtet worden sind.

Gefehlt hat es dort an nichts: Getränke zur Begrüßung, Werksbesichtigung, üppiges Mittagessen. Später dann mit Taxen zur Gesprächsrunde mit Teilnehmern, Lehrern und Verantwortlichen des BWM. Vor der eigentlichen Preisverleihung schnell noch ein Sektempfang. Zum Abschluß schließlich ein als "Imbiß" getarntes, prächtiges Abendessen.

Neu war für beide Teilnehmer sicher der Rummel um die Ehrung der Preisträger. Ungewohnt auch die – von beiden als "zu knapp" kritisierte – Art der Würdigung der eingereichten Arbeiten zu beiden Runden des Wettbewerbs. Aber eines scheint sich als verbindendes Merkmal von Teilnehmern aus Ost und West herauszuschälen, nämlich "immer erst auf den letzten Drücker mit der Bearbeitung der Aufgaben fertigzuwerden". Es ist nicht ohne Reiz, den ersten Eindrücken der beiden Erfurter Schüler einen ganz anderen Aufsatz gegenüberzustellen. Er stammt von Markus Bisanz aus Korntal bei Stuttgart. Der Württemberger ist mit dem BWM aufgewachsen, ist mehrmaliger Preisträger und Bundessieger gewesen und hat als Mitglied der deutschen Mannschaft bei der Internationalen Mathematik Olympiade in Peking 1990, einen dritten Preis erringen können.

Mittlerweile hat Markus Bisanz sein "Schülerdasein" beendet und studiert in Berlin Mathematik und Islamwissenschaften. Er möchte (noch) zögernden Interessenten unter Euch zur Teilnahme an kommenden Runden des BWM ermuntern.

Hier also sein launiger Bericht.

"Once upon a time ...".

Es war damals in der achten Klasse, als ich auf Anregung meines Mathe-Lehrers die Aufgaben der ersten Runde des BWM '85 in Händen hielt, um mich daran zu probieren. Je mehr es dem Einsendeschluß, dem 1. März, entgegen-

Die Bundessieger bei der Preisverleihung

Auf dem Bild sind zu sehen (von links nach rechts): Prof. Dr. Günter Pickert, Vorsitzender des Kuratoriums des Bundeswettbewerbs Mathematik, Senator a. D. Walter Rasch (zweite Reihe), Vorsitzender des Vereins Bildung und Begabung e. V., Prof. Dr. Rainer Ortleb, Bundesminister für Bildung und Wissenschaft, Thomas Gleim (zweite Reihe), Andreas Winter, Tomas A. Klenke, Marten Fels, Jan Kneißler, Hugo Leicht, Staatssekretär im Kultusministerium Baden-Württembergs, Michael Kuß, Markus Spitzweck, Dr. Hartmut Rahn, Generalsekretär der Studienstiftung des deutschen Volkes, Dr. Peter Weber, stellvertretender Hauptgeschäftsführer der IHK Karlsruhe, Bodo Laß, Bernhard Hanke, Christoph Bergemann, Michael Mengler, Marc Nardmann, Bernd Strüber, Walter Hofstetter. Soweit bei den Namen nichts dabei steht, handelt es sich um Bundessieger. ***Foto: Fotostudio Querbach***

Nun sollt Ihr Gelegenheit bekommen, Eure Fähigkeiten an Aufgaben früherer Runden des BWM auf die Probe zu stellen. Darunter befinden sich auch Trainingsaufgaben aus Klausuren zur Vorbereitung bundesdeutscher Mannschaften auf Internationale Mathematik-Olympiaden. Den Auftakt macht ein Problem aus der 1. Runde des Jahres 1987, "meine erste vollständig gelöste Aufgabe", wie Markus Bisanz schreibt.

1. Es sei p eine Primzahl größer als 3 und n eine natürliche Zahl; außerdem habe p^n in der Dezimalschreibweise 20 Stellen. Man zeige, daß hierin mindestens eine Ziffer mehr als zweimal vorkommt.

2. Gegeben ist ein Stück Papier. Es wird in acht oder zwölf beliebige Stücke zerschnitten. Jedes der entstandenen Stücke darf man wieder in acht oder zwölf Stücke zerschneiden oder unzerschnitten lassen, usw.
Kann man auf diese Weise 60 Teile erhalten? Zeige, daß man jede beliebige Anzahl, die größer als 60 ist, bekommen kann!
(1. Runde 1970)

3. Die Oberfläche eines Fußballs setzt sich aus schwarzen Fünfecken und weißen Sechsecken zusammen. An die Seiten eines jeden Fünfecks grenzen lauter Sechsecke, während an die Seiten eines jeden Sechsecks abwechselnd Fünfecke und Sechsecke grenzen. Man bestimme aus diesen Angaben über den Fußball die Anzahl seiner Fünfecke und seiner Sechsecke. (1. Runde 1983)

4. In einem Quadrat mit der Seite 7 sind 51 Punkte markiert. Es ist zu zeigen, daß es unter diesen Punkten stets drei gibt, die im Innern eines Kreises mit Radius 1 liegen. (2. Runde 1972)

5. Eine Kugel wird von allen vier Seiten eines räumlichen Vierecks berührt. Man beweise, daß alle vier Berührpunkte in ein und derselben Ebene liegen. (2. Runde 1984)

6. Gesucht werden drei natürliche Zahlen a, b, c, bei denen das Produkt von je zweien bei Division durch die dritte den Rest 1 läßt.
Man bestimme alle Lösungen. (2. Runde 1990)

7. Man entscheide durch Beweis, ob es möglich ist, neun quadratische Flächenstücke mit den Seitenlängen 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 und 18 lückenlos zu einem Rechteck aneinanderzulegen, ohne daß sich Flächenstücke überlappen. (Prüfungsjahrgang 1979)

8. Bestimme das Produkt aller Teiler von 1980^n für $n \in \mathbb{N}$ (a ist Teiler von b, wenn $b/a \in \mathbb{N}$).
(Prüfungsjahrgang 1981)

9. Zeige, daß $n^3 + m^3 + 4$ für $n, m \in \mathbb{N}$ keine Kubikzahl sein kann. (Prüfungsjahrgang 1985)

Die Lösungen findet Ihr im nächsten alpha-Heft!

Nachsatz: Schreibt mir, wenn es an Eurer Schule, in Eurer Stadt, in Eurem Bundesland, etwas Berichtenswertes in Sachen Mathematikwettbewerb gibt. Schickt mir auch Eure Aufgaben und Lösungen. Paul Jainta, Werkvolkstraße 10, W-8540 Schwabach.

ging, umso intensiver und zeitaufwendiger wurde meine Suche nach den Lösungen und später – nicht weniger intensiv- auch deren Ausformulierung. Es durfte nämlich kein Schritt fehlen, der zur Lösung notwendig war. Schlußendlich konnte ich dann doch voller Stolz meine eigenhändig getippten Lösungen zum letztmöglichen Termin in den Umschlag stecken. Ich lief noch schnell zur Post, um auch ja den richtigen Tagesstempel zu bekommen.
In jener Zeit hatte uns auch unser Lehrer immer mal wieder etwas über den Wettbewerb und seine damaligen Gewinner erzählt. Das führte auch dazu, daß mir diese "obere Schicht" der Wettbewerbssieger als "geistig" unerreichbar fern vorkam, so 'ne Art Wunderkinder, denen die Mathematik schon in die Wiege gelegt worden war. Aber ich wollte ja schließlich gar nicht die großen Erfolge, sondern nur mal ein bißchen auf der unteren Ebene ein Erfolgserlebnis haben.
Unterdessen wartete ich gespannt auf die Entscheidung der Korrektoren. Anfang Juni trudelte sie ein ... und ich war bitter enttäuscht: Alle von mir bearbeiteten Aufgaben waren in der Kommentarspalte "erhebliche Lücke oder schwerer Fehler" angekreuzt. Das dämpfte meinen Eifer erst einmal ungemein und im darauffolgenden Jahr konnte ich die Aufgaben überhaupt nicht lösen. Der "große Wurf" gelang mit dafür im Jahr 1987. Meine dreimonatige Beschäftigung mit den Aufgaben brachte mir erste Früchte ein: einen 1. Preis in der 1. Runde. Während ich aber vor der 2. Runde noch kapitulieren mußte, schaffte ich dann wieder ein Jahr später auch hier einen 1. Preis. Jedesmal war jedoch eine Menge Geduld vonnöten, um auch wirklich hart an der Lösung der Probleme dranzubleiben. Bisweilen kam es tatsächlich vor, daß mir der entscheidende Lösungsgedanke wie ein Geistesblitz im Traum oder bei irgendeiner anderen Tätigkeit einfiel. Je mehr ich aber andere Teilnehmer kennenlernte, denen es ähnlich wie mir erging, umso mehr verschwand auch der Mythos vom "Wunderkind". Fast jeder hatte sich seine Lösungen mühsam erarbeiten müssen, wobei man natürlich im Lauf der Zeit routinierter wird, ohne Zweifel. Seltsamerweise entwickelte nahezu jeder am Anfang die Vorstellung, unter den vielen "Intelligenzbestien" sich etwas deplaziert wiederzufinden, was dann aber glücklicherweise doch nicht eintraf. In der 3. Runde (bei mir erstmalig im Wettbewerbsjahr 88) war – statt der Bearbeitung von 4 Aufgaben – ein Gespräch mit meist zwei Prüfern angesagt. Diese hatten später über einen Bundessieg zu entscheiden. Den Reiz dieser dritten Runde macht weniger das mit Spannung erwartete Ergebnis aus. Er liegt vielmehr im Zusammentreffen mit all den anderen Kandidaten: Gemeinsam verbringt man zwei Tage im Januar in einer Unterkunft. Während dieser Zeit hört man Vorträge (anderer Teilnehmer), ansonsten steht die restliche Zeit – bis auf das Prüfungsgespräch – zur freien Verfügung (manche nutzen sie für Nachtwanderungen etc.). Die Prüfung findet über beide Tage verteilt statt, wobei die Glücklicheren ihren Gesprächstermin gleich zu Beginn haben. Dann ist der Kopf frei für all die schönen Dinge danach. Falls man mal zu Grüppchen stoßen sollte, in denen gefachsimpelt wird ... Nur keine Bange! Meist kennen die anderen gerade einmal zwei oder drei Fachwörter mehr und das ist dann auch schon ihr ganzer Vorsprung! In diesem Jahr 1989 gehörte ich zwar nicht zu den Bundessiegern, schaffte dafür aber im nächsten Jahr den Sprung in die bundesdeutsche Mannschaft zur Internationalen Mathematik Olympiade in Peking 1990. Aber das ist ein anderes umfangreiches Kapitel.
Zusammengefaßt läßt sich also sagen: Aller Anfang s c h e i n t schwer! Das Bilderbuch-Ideal von der mathematischen Elite gibt es nicht. Man muß nur genügend Sitzfleisch am Anfang entwickeln. Es ist nie zu spät, solange man noch Schüler ist, ein erstes Mal mitzumachen. Nur Mut also und keine Angst vor Mißerfolgen zu Beginn!

Markus Bisanz

Hinweis: Die Aufgaben der 1. Stufe der 32. OJM werden in der zweiten Septemberwoche vom Schroedel-Schulbuchverlag Hannover an die Schulen versandt.

Schach-Resonanz bei jung und alt

Beachtliche Resonanz bei jung und alt fand wiederum der 9. alpha-Schachwettbewerb unter den Schachfreunden der alpha-Leser. Die Aufgaben Nr. 1 bis 5 zeigten durch die Anordnung der Figuren auf dem jeweiligen Schachbrettdiagramm als Referenz an den Titel der Zeitschrift in symbolischer Form die Buchstaben A, L, P, H und A. Ein einfaches Beispiel dafür, daß Schachaufgaben nicht nur Wesensmerkmale des Rätsels und der Logik enthalten, sondern auch durch künstlerische Elemente geprägt werden. Deshalb sollte die Umsetzung des Wettbewerbs in Schach-AG's, wie sie Herr Norbert Bös in Ludwigshafen-Oggersheim oder Herr Hoft in Hohen-Demzin praktizierten noch mehr "Schule machen".

Lösungen

1 1. Da3 — K:f4
2. Df8 matt.
"A" – von J. Fokin ("64-Schachrundschau", 1981).

2 1. Sa5 — Ka1/Ka3
2. Lc3/Sc4 matt.
"L" – Diese Aufgabe stammt vom Autor (H. R.) als Urdruck für "alpha" nach einer Vorlage von H. Wagner ("Die Schwalbe", 1938).

3 1. Lf5 (droht 2. Tc5 matt)
1. ... — e:d3/S:f5
2. Tc5+/Dc4+ — K:d4/Kd6
3. Lf2+/S:e4+ — Te3/T:e4
4. Sb3/Lb4 matt

1. ... — Sb7
2. Db5+ — Kd6/K:d4
3. S:e4+/Tc4+ — T:e4/Kd3, Ke3
4. Dd7/Db3 matt.

"P" – Bereits im Jahre 1867 komponierte I. Schumow (1800-1893) diesen Vierzüger. Zu jedem Buchstaben des russischen Alphabets kreierte er eine Schachaufgabe. Eine bemerkenswerte Leistung zur damaligen Zeit.

4 1. Dd8 — d:e5/K:e5/Kc5
2. Db6/Df6/Db6/ matt.
"H" – Von J. Fokin ("64-Schachrundschau", 1981).

5 1. Db8 — Kc5
2. Db6 matt.
"A" – ebenso wie die Aufgaben Nr. 1 und Nr. 4 von Juri Fokin ("64-Schachrundschau", 1981).

6 1. Sg5 (droht 2. D:d5 matt)
1. ... — S:f3/Sf4/D:c5/d:c4
2. S:f3/D:f4/De3/De4 matt.
In der preisgekrönten Aufgabe von H. Hermanson ("Die Schwalbe", 1967) verführt der Se4 zu Scheinlösungen, z. B. 1. Sec3 S:f3/Sf4
2. Se2/D:e3 matt, aber 1. ... D:c5!,
oder
1. Sd2 S:f3/D:c5
2. Se2/D:e3 matt, aber 1. ... Sf4!

7 1. Df8 — Ke4/K:e5/Kg5/Kg4
2. Ke6/Dc5+/Db4/Dh6 — Kd4/Ke4/Kh5(Kf5)/Kf5
3. Db4/f3/Dh4(Df4)/Df4 matt.
Ein effektvoller Schlüsselzug, der dem schwarzen König drei weitere Fluchtfelder freigibt, zeichnet den mit einem 1. Preis bedachten Dreizüger von V. Cisar ("Hampstead and Highgate Express", 1909) aus.

8 1. Ta1 — e5/Kd5/Kc7
2 Tc1/Tc1/Tc1+ — e4/Ke5/Kb7
3. Tc6+/Df8/Db5+ — Kd5/Kd5, Kd4/Ka8
4. D:e4/Dc5, Dd6/Ta1 matt.

1. ... — Ke5/Kc5
2. Dd8/Tc1+ — Kf5/Kb bel., Kd bel.
3. Ta6/Db8+, Db8+ — Ke5J, e5/bliebig, Ke5
4. Ta5, Df6/Ta1, Tc5 matt.

In dieser Aufgabe von Günther Jahn ("Main-Post", 1971) kommt Sam Loyds Aussage "Wahre Schwierigkeit ist die Verkörperung des Unerwarteten in verhältnismäßig einfacher Form" gut zum Ausdruck. Die unerwartete Entfernung des Turmes im Schlüsselzug wirkt verblüffend auf den Löser.

Unter den Einsendern, die alle acht Aufgaben korrekt gelöst hatten, wurden folgende Gewinner ermittelt:
Michael Fritzsche (Burgdorf),
Sandra Geupel (Dresden),
Jens Körner (Luppa),
Yvonne Langer (Eisenach) und
Roland Voigt (Böhlen).

Desweiteren wurden Preise unter allen Teilnehmern verlost, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst hatten:
Jörg Dürr (Plochingen),
Simone Jörs (Groß-Köthel),
Matthias Loesdau (Landshut),
Michael Loos (Wansdorf) und
Daniel Wiegand (Essen 14).

Allen Gewinnern herzlichen Glückwunsch!

An dieser Stelle sei der Sportverlag GmbH Berlin gedankt, die als einer der populärsten Verlagsgesellschaften für Sport- und Schachliteratur wiederum interessante Bücher der "alpha" zur Verfügung stellte.
Zum Schluß noch ein Kompliment an den Nestor unter den "alpha"-Lösern, Herrn Fritz Rauhe! In seinem 88. Lebensjahr fand er wiederum Spaß und Freude am "alpha"-Schachwettbewerb.
In der Hoffnung, daß Ihr beim 10. Wettbewerb wieder mit von der Partie seid, verbleibt Euer Schachfreund *Harald Rüdiger*.

TETRAPACK – ein Extremalproblem

Wie muß ein quaderförmiger Behälter mit 200 ml Rauminhalt beschaffen sein, der aus einem möglichst kleinen rechteckigen Stück gefaltet wird?

Ralf und Reni aus Rostock genießen in der großen Pause ihre Erfrischungen: Fruchtsaft und Schokotrunk. Die Mutter hat ihnen die Getränke in den beliebten Pappkartons mit dazugehörigen Trinkröhrchen mitgegeben. Mit diesen Kartons, den sogenannten Tetrapacks, kann man so wunderbar knallen, nachdem sie leergetrunken sind. Ralf und Reni aber falten ihre Tetrapacks sorgfältig zusammen und nehmen die zusammengelegte Pappe immer mit nach Hause. Als Reni heute ihren Fruchtsaft getrunken hat, zieht sie die umgelegten Pappdreieecke des Tetrapacks hoch und sagt: "Diese Ohren an dem Tetrapack sind doch umsonst, die reinste Verschwendung!" Ralf meint, daß man die Form des Pappbehälters so gestalten müßte, daß die überstehenden "Ohren" eine möglichst kleine Fläche besitzen. "Nein", erwidert Reni, "darum kann es nicht gehen. Stell dir doch einmal einen Behälter von der Form einer Schokoladentafel vor, da sind die Ohren kleiner. Aber ich schätze, da steckt viel mehr Pappe drin als in unseren Tetrapacks!" "Okay", sagt Ralf, "laß uns überlegen, wie ein quaderförmiger Behälter beschaffen sein muß, damit in ihn 200 ml hineingehen und damit er aus einem möglichst kleinen rechteckigen Stück gefaltet werden kann. Die überstehenden Ohren beachten wir dabei mit." Reni erinnert sich an den Mathe-Zirkel. Dort hat ihnen ihr Lehrer einmal erklärt, daß bei vorgegebener Oberfläche unter allen Quadern der Würfel das größte Volumen besitzt. Ihrer Meinung nach sollte deshalb der Pappbehälter würfelförmig gestaltet werden. "Dann werden aber auch die Ohren ganz schön groß", gibt Ralf zu bedenken. Er legt dabei seinen Tetrapack zusammen und erhält folgende (doppelte) Pappfläche. Er bezeichnet die Stellen des Rechtecks mit a und b und die Breite der schmalen Streifen mit z. Ralf stellt fest: "Es geht darum, die Größen a, b, z (in cm) so festzulegen, daß $(a-2z)\cdot(b-2z)\cdot 2z = V$; $V = 200\ cm^3$ ist und $F = 2ab$ möglichst klein wird. Für 2z setze ich x, dann ist also $F(a,b) = 2ab$ möglichst klein zu machen unter der Bedingung $(a-x)\cdot(b-x)\cdot x = 200\ cm^3$. Von einer Überlappung der Pappe an den Klebestellen wollen wir absehen. Unser Tetrapack ist 6 cm breit, 8,35 cm hoch und 4 cm dick. Demnach gilt für ihn a = 10 cm und b = 12,35 cm, somit ist $V = 200{,}4\ cm^3$ und $F(a,b) = 247\ cm^2$.

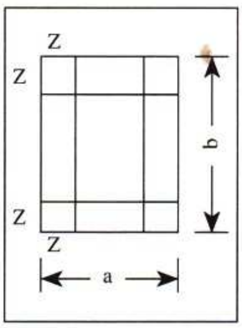


Abb. 1

Kann man es besser machen?

Ich schlage vor, die Variable b mit Hilfe der Variablen a und x auszudrücken:

$$b = x + \frac{200}{(a-x)x}.$$

Gesucht ist dann ein möglichst kleiner Wert von

$$f(a,x) = 2ab = 2ax + \frac{2\cdot 200a}{(a-x)x}.$$

Aus **Abb. 1** entnimmt man als Einschränkung für x = 2z: 0<x<a; 0<x<b. Damit ist der Nenner in der Darstellung von f(a,x) für die zulässigen x (0<x<a) definiert."

"Eine komplizierte Sache bleibt es trotzdem", verzweifelt Reni fast, "die Werte von f verändern sich ja laufend, und zwar sowohl mit a als auch mit x." Ralf probiert mit dem Taschenrechner: "Wenn der Tetrapack ein Würfel ist, so gilt

$$(a-x) = (b-x) = x = \sqrt[3]{200},$$

also ungefähr x = 5,85 cm. Mithin ist a = b = 11,70 cm und damit $F(a,b) \approx 273{,}60\ cm^2$. Das ist eine größere Fläche als die des zusammengefalteten Tetrapacks. Der Würfel stellt nicht die beste Lösung dar!"

Weil das viele Probieren aber ermüdet, schlägt Ralf vor, den Behälterbau mit verschiedensten Seitenlängen auf seinem Computer zu simulieren.

Dazu will er die Länge a aller Werte von 1 + h, 1 + 2h, 1 + 3h ... bis 20 und die Länge x aller Werte von 1, 1 + h, 1 + 2h, ... bis a-h annehmen lassen. Die Schrittweite h soll zuerst 0,1 (cm) sein.

Das jeweils zugehörige f(a,x) wird berechnet. Unter den endlich vielen berechneten Funktionswerten f(a,x) soll der Computer den kleinsten bestimmen und uns die entsprechenden Werte für a und x (und dazu b) anzeigen. Das realisiert folgendes BASIC-Programm:

```
10 MIN = 1000
20 INPUT H
30 FOR A = 1 + H TO 20 STEP H
40 FOR X = 1 TO A-H STEP H
50 B = X + 200/X/(A-X)
60 OB = A*B
70 IF OB>MIN THEN 120
80 MIN = OB
90 AM = A
100 BM = B
110 XM = X
120 NEXT X
130 NEXT A
140 PRINT "A = ";AM,"B = ";BM,
    "X = ";XM,"OB = ";MIN
```

Ralf erhält a = 11,1 cm, b = 11,0 cm, x = 3,7 cm und $f(a,x) = 244{,}30\ cm^2$. Dann läßt er das Programm noch einmal mit der Schrittweite h = 0,01 cm rechnen.

Dabei sind sehr viele Varianten zu berücksichtigen, sein Computer arbeitet die ganze Nacht und zeigt dann die besten Werte an: a = 11,05 cm, b = 11,054196 cm, x = 3,68 cm und $f(a,x) = 244{,}2977362\ cm^2$.

Ralf und Reni wenden sich an ihren Mathematiklehrer Herrn Richter. Sie möchten wissen, ob man dieses Ergebnis auch ohne Computer gewinnen kann. Herr Richter erklärt, daß die Bestimmungen von kleinsten und größten Funktionswerten Extremwertaufgaben genannt werden. Sie lassen sich mit Methoden der Differentialrechnung lösen, aber das ist noch zu schwierig für Ralf und Reni! Weil die Schüler aber so interessiert an dem Problem des Tetrapacks sind, erklärt der Lehrer ihnen diese Methode für das konkrete Beispiel:

Wir nehmen an, $\bar{a}$ und $\bar{x}$ realisieren das Minimum der Funktion f(a,x) unter der Bedingung 0<x<a. Dann vergleichen wir zuerst die Funktionswerte zu $\bar{a}, \bar{x}$ mit denen zu benachbarten Werten a, x. Dazu sei $h \neq 0$ eine beliebige, noch nicht genauer festgelegte reelle Zahl, mit der Einschränkung $\bar{a} + h > \bar{x}$. Als Vergleichswerte wählen wir $\bar{a} + h$ und $\bar{x}$

Folglich muß gelten $f(\bar{a}+h, \bar{x}) \geq f(\bar{a}, \bar{x})$.

Mithin ist

$$(\bar{a}+h)\bar{x} + 200\frac{\bar{a}+h}{(\bar{a}+h-\bar{x})\bar{x}} \geq \bar{a}\bar{x} + 200\frac{\bar{a}}{(\bar{a}-\bar{x})\bar{x}}$$

und daher

$$h\bar{x}^2(\bar{a}-\bar{x})(\bar{a}+h-\bar{x}) + 200(\bar{a}+h)(\bar{a}-\bar{x})$$

$$\geq 200\,\bar{a}(\bar{a}+h-\bar{x}).$$

Es folgt

$$h\left(\bar{a}^2\bar{x} - 2\bar{a}\bar{x}^2 + \bar{x}^3 - 200\right) + h^2\left(\bar{a}\bar{x} - \bar{x}^2\right) \geq 0.$$

Für h>0 ergibt sich

$$\bar{a}^2\bar{x} - 2\bar{a}\bar{x}^2 + \bar{x}^3 - 200 + h\left(\bar{a}\bar{x} - \bar{x}\right) \geq 0,$$

und, weil h beliebig klein gewählt werden kann, auch

$$\bar{a}^2\bar{x} - 2\bar{a}\bar{x}^2 + \bar{x}^3 - 200 \geq 0,$$

Für h<0, |h| genügend klein, folgt entsprechend

$$\bar{a}^2\bar{x} - 2\bar{a}\bar{x}^2 + \bar{x}^3 - 200 \leq 0.$$

Also ist

$$\bar a^2 - 2\bar a\bar x + \bar x^2 - \frac{200}{\bar x} = 0$$

und daher

$$\bar a = \bar x + \sqrt{\frac{200}{x}}.$$

Das zugehörige $\bar b$ wird dann

$$\bar b = \bar x + \frac{200}{\bar x\sqrt{\frac{200}{\bar x}}} = \bar a.$$

Jetzt versuchen wir, eine Bedingung für $\bar x$ herzuleiten:
Es ist

$$f(\bar a, x) = \bar a x + 200\frac{a}{x(\bar a - x)} = x^2 + \sqrt{200x} +$$

$$+ 200 + \frac{x + \sqrt{\frac{200}{x}}}{\sqrt{200x}} =$$

$$= x^2 + \sqrt{200x} + \frac{1}{x}\left(x + \sqrt{\frac{200}{x}}\right)\sqrt{200x}$$

$$= x^2 + 2\sqrt{200x} + \frac{200}{x}$$

$$= \left(x + \sqrt{\frac{200}{x}}\right)^2.$$

Daher wird $f(\bar a, x)$ genau für die x minimal, für welche die Funktion

$$g(x) = x + \sqrt{\frac{200}{x}}$$

den kleinsten Wert annimmt. Das ist für

$$\bar x = \sqrt[3]{50}$$

der Fall. Das folgt aus einem Satz, den ihr in der alpha 23 (1989) Heft 1, Seite 4 findet. Die Funktion g hat genau diese eine Minimumstelle. Der Satz ist mit elementaren Mitteln bewiesen worden!
Man kann dieses Resultat aber auch direkt herleiten. Dazu sei $k \neq 0$ eine beliebige reelle Zahl. Weil g das Minimum bei x annehmen soll, muß

$$\bar x + k + \sqrt{\frac{200}{\bar x + k}} \geq \bar x + \sqrt{\frac{200}{\bar x}}$$

sein. Hieraus folgt

$$k\sqrt{\bar x(\bar x + k)} + \sqrt{200\bar x} \geq \sqrt{200(\bar x + k)}$$

sowie

$$k^2(\bar x + k)\bar x + 2k\sqrt{200\bar x^2(\bar x + k)} \geq 200k.$$

Für $k > 0$

$$2\sqrt{200\bar x^2(\bar x + k)} \geq 200\text{cm}^3 - k(\bar x + k)\bar x$$

und

$$800\bar x^3 + k\left[800\bar x^2 + 400\bar x(\bar x + k) + k\bar x(\bar x + k)\right]$$
$$\geq 200^2\,\text{cm}^3.$$

Wir können k genügend klein wählen, daher muß $\bar x^3 \geq 50$ sein. Für $k < 0$ schließt man auf $\bar x^3 \leq 50$. Folglich muß

$$\bar x^3 = \sqrt[3]{50}\text{cm}$$

sein. Herr Richter erwähnt, daß eine minimale Fläche nur bei einem Tetrapack mit den Seiten

$$\bar x = \sqrt[3]{50} \approx 3{,}7\ (\text{cm})$$

und

$$a' = b' = \sqrt{\frac{200}{x}} \approx 7{,}41\ (\text{cm})$$

zu erwarten ist, wobei

$$a' = \bar a - \bar x \text{ und } b' = \bar b - \bar x$$

gesetzt wird. Besitzt allgemein das Tetrapack das Volumen V, so erhält man für den Fall minimaler Fläche

$$\bar x = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$$

und $a' = b' = \sqrt{\frac{200}{x}} \approx 7{,}41\ (\text{cm}).$

Offenbar ist dann

$$\bar x = \frac{a'}{2} = \frac{b'}{2}$$

Wenn es also einen Tetrapack mit der geforderten Minimaleigenschaft gibt, so muß es ein Quader mit quadratischer Ansicht sein, dessen Tiefe gerade die Hälfte von Höhe bzw. Breite ist. Man muß sich jedoch noch überlegen, daß wirklich ein Minimum der Pappfläche existiert. Das kann mit mathematischen Methoden geschehen, Ralf und Reni akzeptieren das aber auch aus der Anschauung heraus. Eines verblüfft sie jedoch, die kleinste Oberfläche eines Tetrapacks mit dem Volumen 200 ml beträgt 244,30 cm². Der handelsübliche Tetrapack hat eine Pappfläche von ca. 247 cm², das ist zwar nicht optimal, aber nur geringfügig größer als das Optimale. Einsparen kann man nur ungefähr 1 % der Pappe. Damit hatten Ralf und Reni nicht gerechnet.

Aufgabe: Wir haben einen Tetrapack mit 1 Liter Fruchtsaft mit den Abmessungen 6,2 cm · 9,5 cm · 17 cm gekauft. Wie ist ein Tetrapack mit 1 l Volumen zu gestalten, so daß möglichst wenig Pappe verbraucht wird?

Literatur:
W. Schmidt: Lösen von Extremwertaufgaben mit elementaren Mitteln. alpha Heft 1/89, Seite 3 – 7

Werner Schmidt

Gefaltete Maxima und Minima

Um Fragen nach "dem größten" oder "dem kleinsten" zu beantworten, braucht man in der Regel Kenntnisse aus dem Mathe-Unterricht der Sekundarstufe II. Die dort behandelten sogenannten Extremwertaufgaben werden mit einem Kalkül (einer abzuarbeitenden Vorschrift) gelöst, der – einmal verstanden – natürlich an Reiz verliert. Anders ist die Situation, wenn diese Methode nicht bekannt ist oder wenn sie nur sehr umständlich angewendet werden kann. Dann erweist sich, wer zu den wahren Problemlösern gehört, ist doch dann keine Vorschrift angehbar, nach der die Aufgaben "abgearbeitet" werden könnten.

Über verschiedene Methoden wurde in alpha schon berichtet, andere sind jedem vertraut, wenn sie vielleicht in diesem Zusammenhang auch nicht gleich auf der Hand liegen:

Die kürzeste Verbindung zweier Punkte A und B ist diejenige entlang der Geraden durch A und B. (*)

Besonders deutlich wird die Lösung derartiger Aufgaben, wenn man sie *faltend bearbeitet;* d. h. die einzelnen Schritte nicht nur aufzeichnet bzw. mit gespitztem Bleistift konstruiert, sondern Faltkonstruktionen (s. auch alpha 1 und 2, 1992) ausführt. Bestimmte Beziehungen zwischen einzelnen geometrischen Objekten können von ihrem Entstehen her besser verständlich werden.

Beginnen wir mit einem sehr einfach anmutenden Problem, *nämlich demjenigen, das vor einem Marienkäfer K steht, wenn er sich auf einem quadratischen Prisma befindet und auf kürzestem Wege eine Blattlaus L fangen will, die sich auf einer anderen Seitenfläche aufhält* (**Abb. 1**).

Untersuchen wir zuerst die Positionen der Laus L_1. Natürlich könnten diejenigen Leser, die das Differentialkalkül kennen, dem Käfer einen kürzesten Weg berechnen, aber warum so umständlich. Fertigen wir uns doch ein Papiermodell des Netzes des Prismas und denken an (*). **Abb. 2** zeigt die einfache Lösung, aus der wir noch – ganz nebenher – erkennen können, daß sich solche kürzesten Wege über den Mantel eines prismatischen Körpers durch gleiche Schnittwinkel mit den Kanten des Prismas auszeichnen.

Doch schon Position L_2, führt zu weiteren Schwierigkeiten, denn der Käfer kann auf zwei prinzipiell unterschiedlichen Wegen zum Ziel gelangen, indem er sich zuerst nach links oder nach rechts wendet. Die unbedachte Anwendung unserer Methode kann zu einem falschen Ergebnis führen, wenn das betreffende Netz des Körpers nicht geeignet gewählt wurde, oder anders ausgedrückt, wenn die Oberfläche des Körpers zur Erzeugung des Netzes an unbrauchbaren Stellen aufgeschnitten wurde. Prinzipiell müssen wir alle in Frage kommenden (Teil-)Netze nach der kürzesten Entfernung untersuchen.

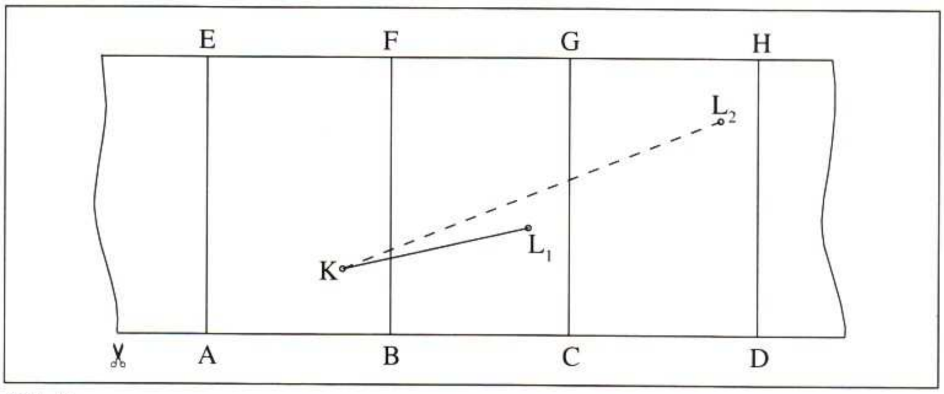


Abb. 2

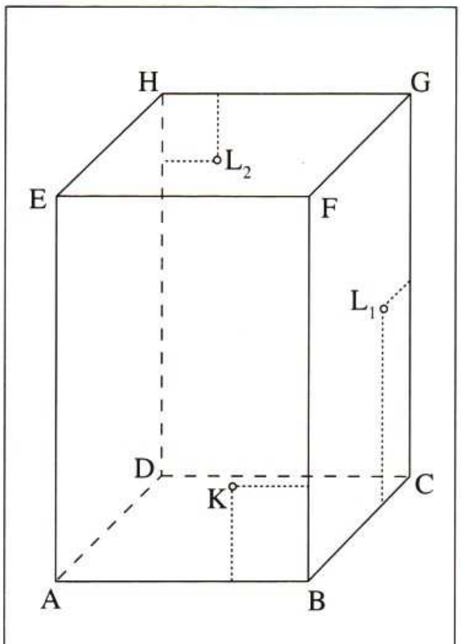


Abb. 1

Aufgabe 1: Wir denken uns ein quadratisches Prisma aus Kästchenpapier gefertigt, 4 cm hoch, 4 cm breit und 10 cm lang. K befinde sich auf der vorderen quadratischen Fläche 1 cm über der Mitte der unteren Seite. L ist auf der entgegengesetzten Seitenfläche zu finden, 1 cm unter der Mitte der oberen Kante.
Wie verläuft der kürzeste Weg von K nach L? (Beachte dabei die Symmetrie der Anordnung!)

Für das folgende Problem benötigen wir einen kleinen Bogen Papier, den wir etwa in der Mitte einmal falten. Darauf kennzeichnen wir zwei Punkte R und S, die für *einen erschöpften Reiter und sein Reittier R stehen, die auf kürzestem Wege dem Stall S zustreben, sich aber zwischendurch noch am nahegelegenen Fluß f, den die Faltkante veranschaulichen soll, erfrischen wollen* (**Abb. 3**).

Wenn die Markierungen für R und S auch auf dem darunterliegenden Teil des Blattes sichtbar sein sollten, liegt die mögliche Lösung im wahrsten Sinne des Wortes auf der Hand: Entfalte und verbinde R mit dem Bild von S (oder S mit dem Bild von R) entlang einer Geraden. Der entstehende Schnittpunkt T dieser Geraden mit f ist diejenige Stelle am Fluß, die angelaufen werden muß. Durch erneutes Falten überzeugt man sich, daß die Strecke ST mit der Strecke ST zusammenfällt, d. h. insbesondere, daß sie gleichlang sind.

Nachdem wir diese Aufgabe faltend gelöst und gründlich durchdacht haben, können wir uns an eine etwas komplexere wagen.

Durch zwei Falten f_1 und f_2, die einander in einem Punkt S schneiden, ist ein spitzer Winkel gegeben, in dessen Winkelraum ein Punkt P liegt.

Man falte das umfangskleinste Dreieck PQR mit $Q \in f_1$ und $R \in f_2$.

Unser Vorgehen wird sich am gerade beschriebenen orientieren. Es empfiehlt sich, nach dem Zusammenfalten bei f_1 und f_2 den Punkt P z. B. mit der Zirkelspitze *durchzustechen.* Damit sind die Spiegelbilder P' und P an f_1 und P" von P an f_2 nicht nur deutlich markiert, sondern es ist auch leichter, eine Falte exakt durch P' und P" zu legen. Sie ist der Schlüssel zur Lösung: Die Schnittpunkte Q und R dieser Falte mit f_1 bzw. mit f_2 sind die gesuchten Punkte des umfangskleinsten Dreiecks PQR. Darüber hinaus erkennt man, daß die Länge des Umfangs mit der Länge von P'P" übereinstimmt (**Abb. 4**) Zum *Beweis*, der –

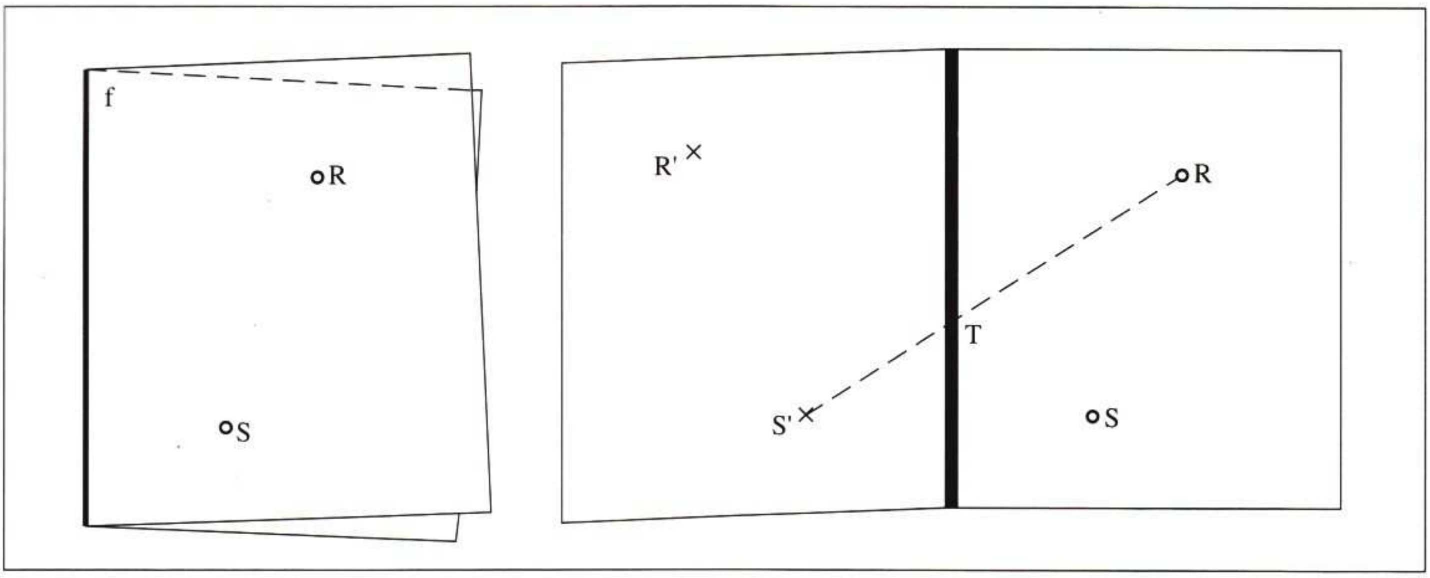


Abb. 3

wie man sagt – *indirekt* geführt wird, nehmen wir an, ein Punkt Q_1 habe die Eigenschaft, daß $\Delta\ PQ_1R$ einen kürzeren Umfang als $\Delta\ PQR$ hat. Anschließend wird sich ein *Widerspruch* (ein Fehler) zeigen. Dazu zeichnen wir Q_1 in unserer Faltarbeit ein, dazu die Strecken $P'Q_1$ und Q_1R. Damit ist ein Dreieck $P'Q_1R$ entstanden, in dem die Summe der Seitenlängen $P'Q_1$ und Q_1R *größer* als die Seitenlänge $P'R$ ist. Der Umfang von PQ_1R ist also größer als derjenige von $\Delta\ PQR$, was nun im Gegensatz zu unserer Annahme steht, daß Q_1 zu einem umfangskleineren Dreieck führt. Damit ist der indirekte Beweis geführt. Das Dreieck PQR ist tatsächlich dasjenige, das die geforderten Eigenschaften hat.

Beim abschließenden Faltproblem versagt allerdings die praktizierte Methode. Das Problem ist aber so einfach zu verstehen, daß es jeder experimentell (angenähert) lösen kann. Dazu nehmen wir *einen genormten Bogen, z. B. DIN A4, und legen eine Ecke auf die gegenüberliegende Längsseite. Wie entsteht die kürzeste Faltkante?*

Die experimentelle Lösung mit einem DIN A4-Blatt (21 cm x 29,7 cm) liefert einen Wert zwischen 27 cm und 27,5 cm. Für ein Vorgehen dieser Art ist auch ein interaktives Computer-Programm zur ebenen Geometrie vorzüglich geeignet. Ist eine Konstruktion für einen beliebigen Fall ausgeführt, können Ausgangsgrößen variiert werden, wobei die zu untersuchenden Objekte beobachtet (gemessen) werden. Als Beispiel sei hier GEOLOG (Autor G. Holland, Universität Giessen) angeführt. **Abb. 5** zeigt den Bildschirm mit dieser Konstruktion, wobei der Maßstab so gewählt wurde, daß das Rechteck ABCD Seitenlängen von 29,7 Einheiten und 21,0 Einheiten aufweist. Punkt P kann auf AB variiert werden. Die aktuellen Längen werden jeweils ausgegeben.

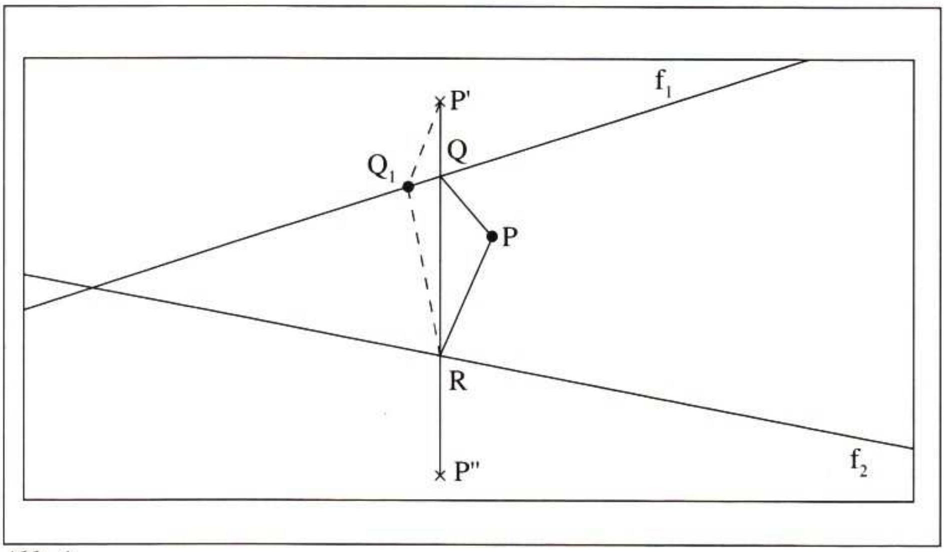


Abb. 4

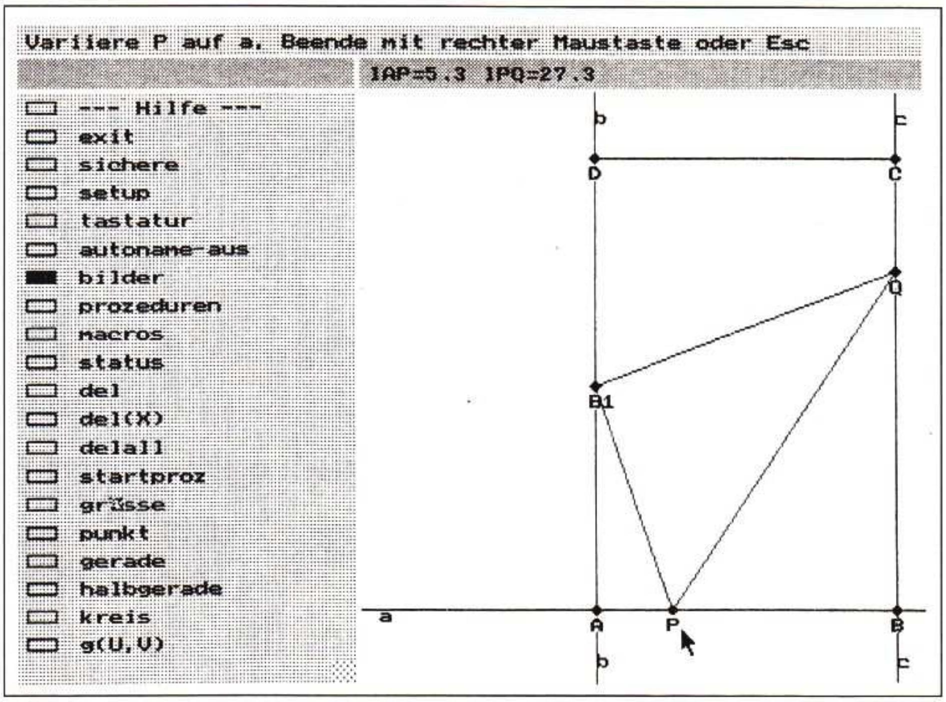


Abb. 5

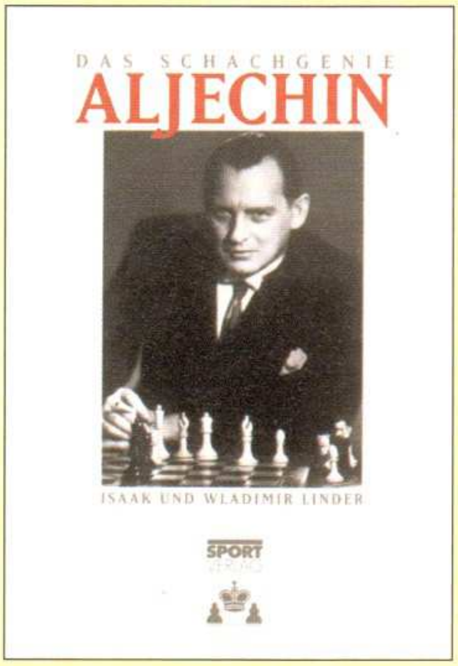
Aufgabe 2: Ermittele die Lage des Punktes auf der Schmalseite AB des DIN A4-Blattes, durch den die kürzeste Faltkante PQ verläuft, experimentell! Welche Vermutung über seine genaue Lage kann aufgestellt werden?

Christian Werge, Leipzig

Marktecke

Isaak und Wladimir Linder:

Das Schachgenie Aljechin



Der bekannte Großmeister und Schachjournalist Milan Matulović hat den wagemutigen Versuch unternommen, den besten Schachspieler aller Zeiten zu ermitteln. Das Ergebnis seiner wahrhaft titanischen Arbeit – der Jugoslawe hat u. a. jeweils 200 Partien der weltbesten Schachmeister analysiert – liegt jetzt vor: Dieser Rang im Schacholymp gebührt dem Russen Alexander Aljechin, der 1927 nach einem gigantischen Zweikampf über 34 Runden gegen den Kubaner José Raoul Capablanca den Weltmeistertitel erkämpfte und ihn dann – mit einer zweijährigen Unterbrechung (1935 – 1937) – bis zu seinem Tode behielt. In die Schachgeschichte ist Aljechin (1892 – 1946) vor allem als "Künstler" eingegangen. Seine tiefgründigen Pläne und seine unerschöpfliche Erfindungsgabe sind gewissermaßen die Visitenkarte des gebürtigen Moskauers, dessen Leben nicht nur am Schachbrett voller Höhenflüge und Abstürze war. In den Mittelpunkt ihrer fesselnden Biographie über Alexander Aljechin, der im November 1992 hundert Jahre alt geworden wäre, haben die Autoren deshalb nicht nur das schachliche Schaffen des unbestrittenen Genies gestellt.

Ihre geradezu besessene Spurensuche, vor allem in den russischen Archiven, ließ vielmehr das faszinierende Porträt eines einsamen Menschen – Alejechin starb im portugisischen Asyl – entstehen, dessen Charakter kompliziert und voller innerer Widersprüche war.

Mit der vorliegenden Aljechin-Biographie schließen Isaak und Wladimir Linder ihre aufsehenerregende Trilogie der Schachweltmeister in der "Geniereihe" des Berliner Sportverlages ab (José Raoul Capablaca, 1988, und Dr. Emanuel Lasker, 1991).

Isaak Linder, einer der vielseitigen Schachhistoriker der Gegenwart, hat bisher mehr als 20 Bücher veröffentlicht. Eine besonders positive Resonanz fand in Deutschland der Titel "Faszinierendes Schach" (Sportverlag 1986), in dessen Mittelpunkt ästhetische Probleme des königlichen Spiels stehen.

Isaak und Wladimir Linder:
Das Schachgenie Aljechin, Sportverlag, Berlin 1992;
272 Seiten, 150 Diagramme, 15 Tabellen, 12 Fotos, geb., DM 29,80,
ISBN 3-328-00495-5

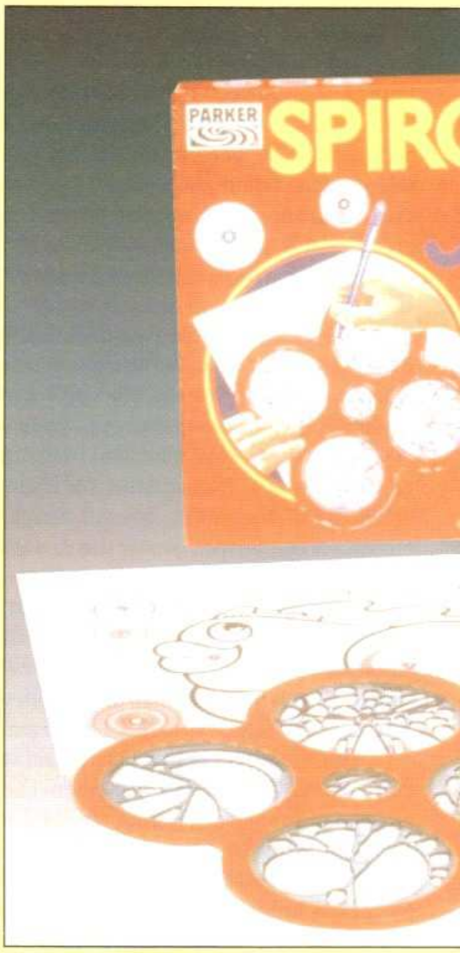
OH NO! MORE LEMMINGS

Endlich noch mehr Lemminge! 100 frische Denkaufgaben! Nach dem erfolgreichen Mathe-Denk-Knobel-Spaß LEMMINGS (s. alpha 1/92) gibt es OH NO! MORE LEMMINGS als Vollprogramm oder als Data-Diskette. Das Prinzip, den stur laufenden grünhaarigen Tierchen mittels Überlegung, gutem Auge oder Dreiecksberechnung den Weg zum Ziel zu ebnen, wurde beibehalten. Wieder Klettern, Springen, Bauen, Baggern, Graben und Sprengen sich die Lemminge mit Hilfe der vor dem Bildschirm sitzenden Knobel-Freaks den Weg frei.

Anfänger sollten sich zuerst LEMMINGS, das Urspiel, besorgen, denn der Schwierigkeitsgrad steigt bei Lemmings II sehr steil innerhalb der fünf Level. LEMMINGS-Profis wird das freuen. Den neuen 100 Rettungsversuchen dieser Staffel werden mit Sicherheit weitere Versuche folgen!

Hersteller: DMA 1991, Distributor: United Software, Typ: Denk-, Geometrie- und Geschicklichkeitsspiel, Handbuch: dreisprachig – das Spielprinzip wird in Form eines Comics erklärt. Hardware: 512 KB RAM, CGA, EGA, VGA,Tastatur, Soundkarte, Maus, Preis: 99,95 DM (als Vollprogramm, als Datendisk-Zusatz zum Ur-Programm vorr. 84,95 DM.

Text: H. Seitz/S. Hempel



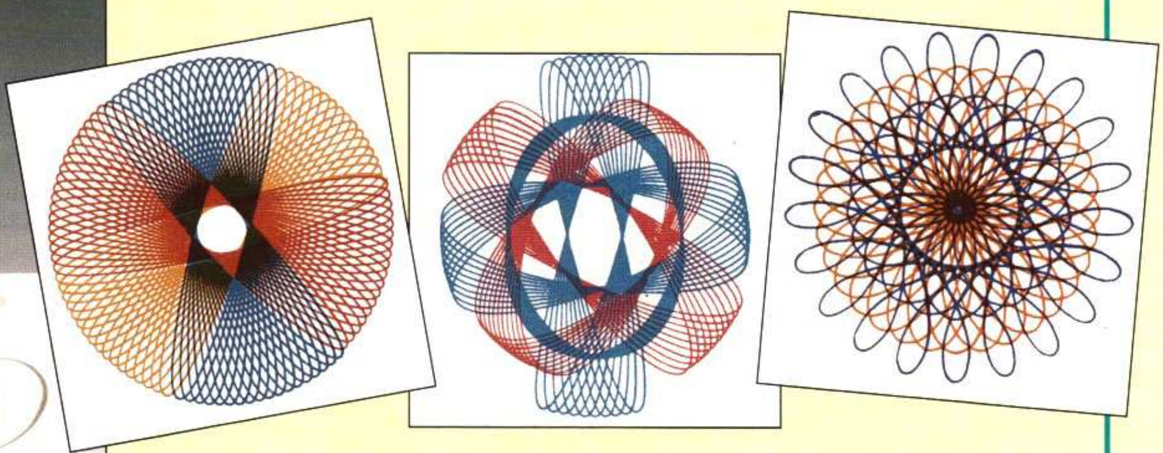
Jeder Mensch der heutigen Zeit wächst von Kindheit an ganz selbstverständlich in eine Welt hinein, in der alle Maßeinheiten international einheitlich, dezimal untergliedert und ihre Definitionen und gegenseitigen Beziehungen durch übersichtliche physikalische Sachverhalte geregelt sind.
Nur aus historischen Büchern kann man noch etwas über die Mühen früherer Zeiten mit ihren von Ort zu Ort verschiedenen Zoll, Spannen, Ellen, Ruten, Klaftern, Meilen, Werst, ... erfahren. Wer ein wenig historisch interessiert ist, weiß vielleicht, daß unser Meter, ursprünglich definiert als zehnmillionster Teil der Entfernung vom Nordpol zum Äquator, eine Errungenschaft der Französischen Revolution von 1789 ist. Die von den fortschrittsstrunkenen französischen Bürgern von Anfang an erstrebte Internationalität wurde freilich erst viel später und schrittweise erreicht.
Nachdem z. B. Brasilien "schon 1862" das metrische System eingeführt hatte, schlossen 1875 17 Staaten die Meterkonvention, der nach und nach fast alle Staaten der Erde beitraten, manche aber erst vor kurzer Zeit. Was weiß man aber von den fast unüberwindlichen Schwierigkeiten, in den Wirren der Jahre nach 1789 durch eine neue, die bislang präziseste Gradmessung zwischen Barcelona und Dünkirchen, quer durch Krieg und Bürgerkrieg, das Meter mit der erwünscht hohen Genauigkeit festzulegen?
Der Verfasser des vorliegenden Romans, Mathematiker an der Pariser Universität, führt uns in einer bis zur letzten Seite spannenden Handlung, aber fundiert durch genaue Quellenstudien, durch die Mühen jenes Unternehmens. Wer das Buch gelesen hat, hat nicht nur viel über die praktische Durchführung großräumiger geodätischer Messungen mit den Mitteln des ausgehenden 18. Jahrhunderts und über das persönliche Leben der vier Helden jenes Unternehmens gelernt, sondern er hat auch eine neue Sicht auf den Alltag der Jahre nach der Französischen Revolution gewonnen, wie sie kaum ein Geschichtsbuch zu vermitteln vermag.

Frankfurt/New York: Campus-Verlag 1991, 292 Seiten, DM 48,-
(Aus dem Französ. von K. Jöken)
ISBN 3-593-34429-7.

Dr. P. Schreiber, Greifswald

Für Ästhetiker

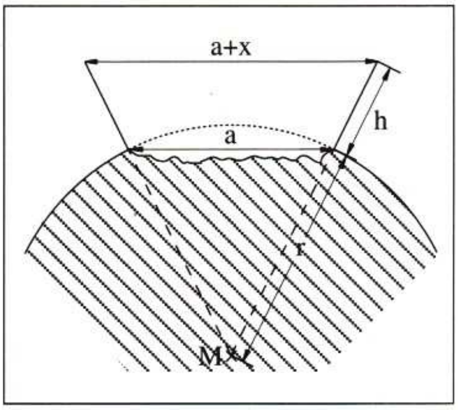
sind die Ergebnisse, welche man mit einem Spirographen erzielen kann, eine Augenweide.



Sowohl ein Juniorgerät als auch ein Spirograph für die fortgeschrittenen Künstler mit der ruhigen Hand sind von **Kenner Parker Toys Inc.** zu haben. Fragt doch einmal in den Spielwarenläden nach!

Lösungen

Die „Humber Estuary Bridge" (S. 4)

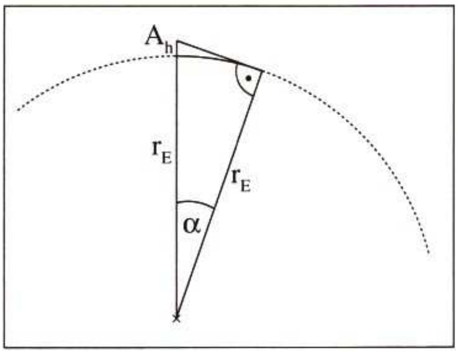


a = 1410 m
h = 162,5 m
r = 6370 km
Laut Strahlensatz gilt: $\frac{a+x}{a} = \frac{r+h}{r}$

Daraus folgt: $x = \frac{a \cdot h}{r} \approx 3{,}6$ cm.

Die Kimm (S. 5)

a) Mit dem Radius $r_E = (360 \cdot 60 \cdot 1852) : 2\pi$ m folgt nach der Skizze



$A = r_E \cdot \alpha$ (α in Radiant!).
Für kleine Winkel gilt:

$$\alpha \approx \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{r_E}{r_E + A_h}\right)^2}$$

$$A = \frac{r_E}{r_E + A_h}\sqrt{(r_E + A_h)^2 - {r_E}^2}$$

$$A \approx \sqrt{2r_E \cdot A_h} = 3570 \cdot \sqrt{A_h}$$

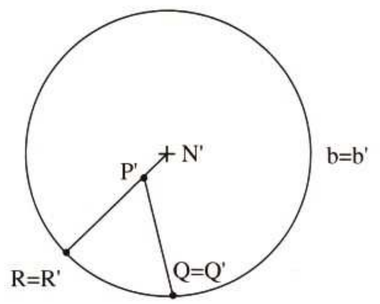
$$A = 3570 \cdot \sqrt{1{,}5\,m} = 4372\,m$$

Die Formel $A = 3{,}57\sqrt{A_h}$ (A in km; A_h Augenhöhe in m) wird übrigens in Seefahrerhandbüchern zur Bestimmung der Entfernung der Küste angegeben.
Entscheidend ist der Moment, in dem die weiße Brandung der Küste an der Kimm erscheint.

b) Die Kimm ist bei ruhiger See sehr scharf begrenzt, was sich bei nahezu punktförmigen Lichtquellen bemerkbar macht.
c) nein
d) Weil die Erdoberfläche an Land nicht die exakte Krümmung besitzt, von der Flora ganz abgesehen.

Der amerikanische Wanderfalter Monarch (S. 8)

1. Die Punkte P und N (Nordpol) und die durch das Innere der Erdkugel verlaufenen Strecken PQ und PR werden senkrecht in die Ebene des Breitenkreises b projeziert. Für die Längen $\overline{P'Q'}$ und $\overline{P'R'}$ der Bildstrecken P'Q' und P'R' gilt $\overline{P'Q'} > \overline{P'R'}$!



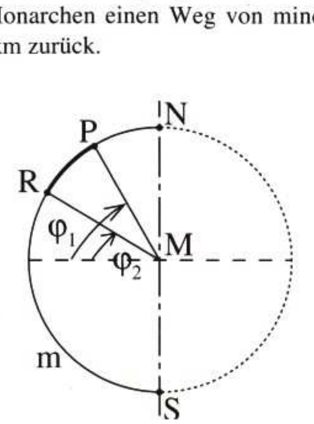
Hieraus und weil die Dreiecke PQP' und PRP' rechtwinklig sind, folgt mit dem Satz des Pythagoras

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{P'Q}^2 + \overline{P'P}^2} > \sqrt{\overline{P'R}^2 + \overline{P'P}^2} = \overline{PR}.$$

Da die Kreisbögen $\widehat{PQ}$ und $\widehat{PR}$ Teile von Kreisen mit dem gleichen Radius r sind und ihre Längen $\widehat{PQ}$ und $\widehat{PR}$ kleiner als πr sind, gilt damit $\widehat{PQ} > \widehat{PR}$.

$$l = 2\pi r \cdot \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{360°} \approx 2900\,km.$$

Bei jeder Wanderung legen diese Schwärme von Monarchen einen Weg von mindestens 2900 km zurück.



Bemerkung: Auch andere Tag- sowie auch Nachtfalter sind Wanderschmetterlinge. So wandert z. B. der Admiral im Frühjahr einzeln oder in kleinen Schwärmen über die Alpen zu uns oder weiter nordwärts bis zum 62ten Breitengrad.

Die neu entdeckte Primzahl (S. 8)

1. 227832:(32·62) = 114,84.. 115 Seiten sind erforderlich.
2. Steht an der Einerstelle eine Zahl 2^n mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 1$ die Ziffer z, so haben die Zahlen 2^{n+1} und $z \cdot 2$ an der Einerstelle die gleiche Ziffer.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
Ziffer an Einerstelle von 2^n	2	4	8	6	2	4	8	6	2	...
Ziffer an Einerstelle von 2^n-1	1	3	7	5	1	3	7	5	1	...

Die Ziffer an der Einerstelle von 2^n-1 ändert sich nicht, wenn n um ein Vielfaches von 4 vergrößert oder verkleinert wird. Wegen 756839 = 4 · 189709 + 3 haben die Zahlen $p = 2^{756839} - 1$ und $2^3 - 1 = 7$ im Dezimalsystem die gleiche Ziffer an der Einerstelle. p endet also im Dezimalsystem mit der Ziffer 7.

3.

n	4	5	6	7	8	9	10	...
letzten zwei Ziffern von 2^n	16	32	64	28	56	12	24	

n	19	...	23	24	25	...
letzten zwei Ziffern von 2^n	88		08	16	32	...

Die beiden letzten Ziffern von $2^n - 1$ ändern sich nicht, wenn n um ein Vielfaches von 20 vergrößert oder verkleinert wird. Wegen 756839 = 20 · 37841 + 19 haben die Zahlen $p = 2^{756839} - 1$ und $2^{19} - 1$ im Dezimalsystem an der Zehner- und Einerstelle gleiche Ziffern. p endet also im Dezimalsystem mit den Ziffern 87.

4. Jede im Dezimalsystem n-stellige natürliche Zahl m genügt der Ungleichung
$10^{n-1} \leq m < 10^n$ und damit auch
$n - 1 \leq \lg m < n$.
Aus $p + 1 \quad = 2^{756839}$
$\qquad = (10^{\lg 2})^{756839} = 10^{756839 \cdot \lg 2}$
folgt $\lg(p + 1) = 756839 \cdot \lg 2 = 227831{,}24 \ldots$ (mit dem Taschenrechner). Mithin hat zunächst wegen $227831 < \lg(p + 1) < 227832$ die Darstellung der natürlichen Zahl p + 1 im Dezimalsystem 227832 Stellen. Weil jedoch nicht $227831 = \lg(p + 1)$ gilt, besitzt die Darstellung von p im Dezimalsystem ebenfalls 227832 Stellen.

KKK (S. 13)

Die in der Aufgabe genannten Frequenzrelationen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

$$F_G : F_d : F_a = 4:6:9$$
$$F_A : F_a = 1:2$$
$$F_G : F_A = 8:9$$

Für die Länge der schwingenden Saite gilt das umgekehrte Verhältnis; für einen Sekundschritt muß die Saite folglich um ein Neuntel verkürzt werden, also um rund 7,2 cm.

Verwurzeltes (S. 13)

1. $958 = \sqrt{917764}$
2. $1663 = \sqrt{2765569}$
3. $37 = \sqrt{1369}$
4. $467 = \sqrt{218089}$
5. $43 = \sqrt[3]{79507}$

• **Sprachecke** (S. 22)

Schach und Mathematik

Bei einem Turnier in Grenoble trifft jeder Spieler genau einmal auf jeden anderen Teilnehmer.
Nach jedem Spiel gibt der Schiedsrichter jedem der beiden Spieler ein farbiges Kärtchen. Dieses ist rot für den siegreichen Spieler, grün für den Verlierer. Im Fall des Unentschiedens erhalten beide Spieler je ein gelbes Kärtchen. Am Ende des Turniers hat er genau 752 Kärtchen jeder Farbe verteilt. Wieviele Teilnehmer hat das Turnier?

Lösung:
752 rote und 752 grüne Kärtchen zeigen, daß dabei 752 Spiele ausgetragen wurden, wo es einen Sieger und einen Verlierer gab. 752 gelbe Kärtchen weisen auf 376 Spiele hin, da beim Unentschieden jeder eine gelbe Karte erhält. Also wurden insgesamt 1128 Spiele ausgetragen. Man rechnet $0{,}5\, n\, (n-1) = 11{,}28$, d. h. $n^2 - n - 2256 = 0$ Da $n>0$, hat die quadratische Gleichung die Lösung $n = 48$. 48 Spieler nahmen also am Turnier von Grenoble teil.

Division

In diesem verschlüsselten Divisionsschema sind alle neun Ziffern verschieden. Entschlüsseln Sie es!

Lösung
Aufgrund der Aufgabenstellung überlegt man sich zunächst

(1) $\overline{10a} : \overline{de} = f$
$\quad\ \ \overline{9b}$
$\quad\ \ \ \bar{c}$

wobei a, b, c, d, e, f sämtlich paarweise verschiedene Grundziffern sind und
(2) $2 \le a,b,c,d,e,f \le 8$ gilt.
Da $4 \cdot 25 = 2 \cdot 50 = 100 > \overline{9b} = f \cdot \overline{de}$
ist und wegen (1), (2) folgert man $2 \le d \le 4$.

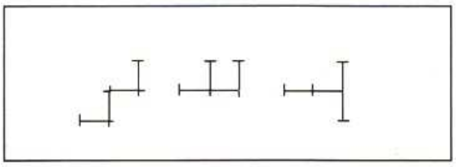
Hiervon kann nur d = 4 zutreffen, denn aus d = 2 folgt mit b = d = 2 und aus d = 3 mit f = d = 3 jeweils ein Widerspruch. Ist d = 4, so folgt f = 2 und wegen (1) und (2) kann nur noch e = 5, 6, 7, 8 gelten.
Da aus e = 5 im Widerspruch zu (2) b = 0 folgt, aus e = 6 mit b = f = 2 ebenfalls ein Widerspruch sich ergibt und desgleichen mit e = 7 der Widerspruch b = d = 4 eintritt, kann nur noch e = 8 zutreffen. Damit schließt man weiter, daß a = 3 und e = 7 gelten muß.
Ergebnis: $\underline{103} : 48 = 2$
$\qquad\ \ \underline{96}$
$\qquad\quad 7$

"Primprimzahlen"

Die Primzahl 31 hat eine interessante Eigenschaft: Streichen wir die rechte Zahl, erhalten wir 3, ebenfalls eine Primzahl. Die Primzahl 317 hat dieselbe Eigenschaft. Streichen wir die 7, erhalten wir die Primzahl 31, streichen wir dann die 1, erhalten wir eine andere Primzahl, die 3.
Die zwei amerikanischen Mathematiker Walstrom und Berg nannten Zahlen mit dieser Eigenschaft prime primes, man könnte es mit "Primprimzahlen" übersetzen.
Finde alle zweistellige "Primprimzahlen".
Lösung:
23, 29, 31, 37, 53, 59, 71, 73, 79

Wir setzen Strecken zusammen (S. 23)

Wir setzen gleichlange Strecken zusammen
Die drei fehlenden Figuren:



Tetrapack – ein Extremalproblem (S. 28)

Für den vorliegenden Tetrapack werden 728,5 cm² Pappe benötigt. Die optimalen Ausmaße sind 6,3 cm · 12,6 cm · 12,6 cm, die entsprechende Pappfläche beträgt 714,5 cm². Die Einsparung würde ca. 2 % ausmachen.

Gefaltete Maxima und Minima (S. 30)

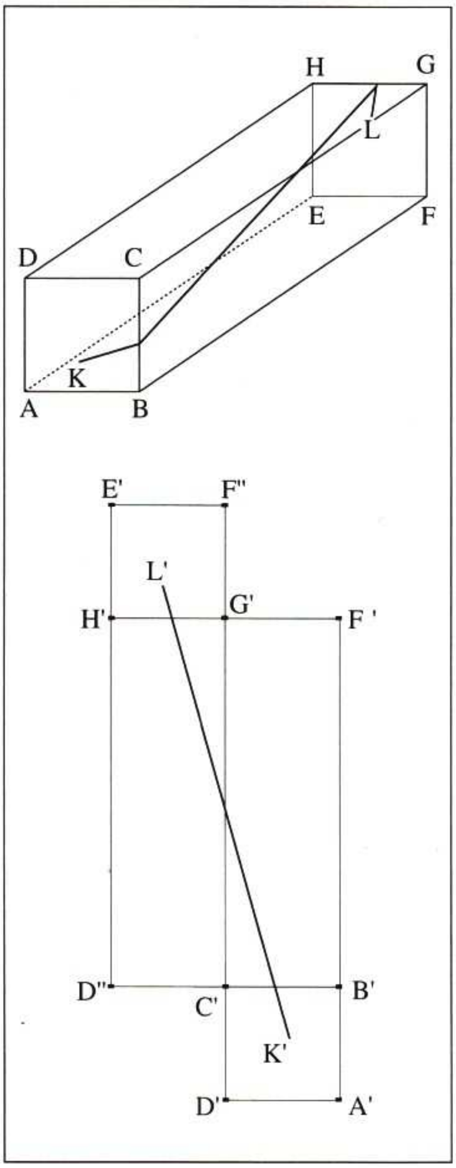
1. Die Bestimmung der Länge über die Ober- bzw. Unterseite ist einfach. Beide Wege sind genau 14 cm lang. Etwas weiter ist die Entfernung über die linke bzw. die rechte Seitenhälfte, wobei aus Symmetriegründen beide Wege gleiche Länge haben. Wer sehr genau gemessen hat, erhält 14,15 cm. Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras errechnet man

$\sqrt{200}cm \approx 14{,}142..cm$

Doch das ist *nicht die kürzeste Verbindung.* Läuft K z. B. über die rechte Seitenfläche und anschließend auch noch über die obere, kann er schneller am Ziel sein (s. Abb., die mit CABRI-Géomètre angefertigt wurde).
Dieser Weg ist nur etwa 13,9 cm lang

(exakt $\sqrt{197}cm \approx 13{,}928..cm$).

(Diese Lösung war auch für den Autor etwas überraschend!)



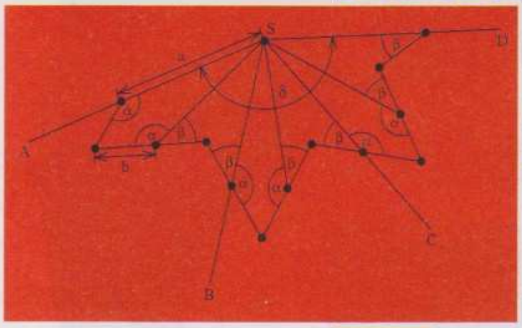
2. Beträgt die Seitenlänge exakt 21 cm, so liegt der Punkt P 21,0 cm/4 = 5,25 cm von A entfernt, das heißt, daß bei einem Blatt im DIN-Format (Seitenverhältnis $1:\sqrt{2}$) ein Viertel der Schmalseite markiert wird. Mit dem Differentialkalkül kann dies leicht bestätigt werden. Welcher Leser findet einen elementargeometrischen Beweis?

H 113228

Heft 5
Oktober 1992
26. Jahrgang

Pädagogische
Zeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

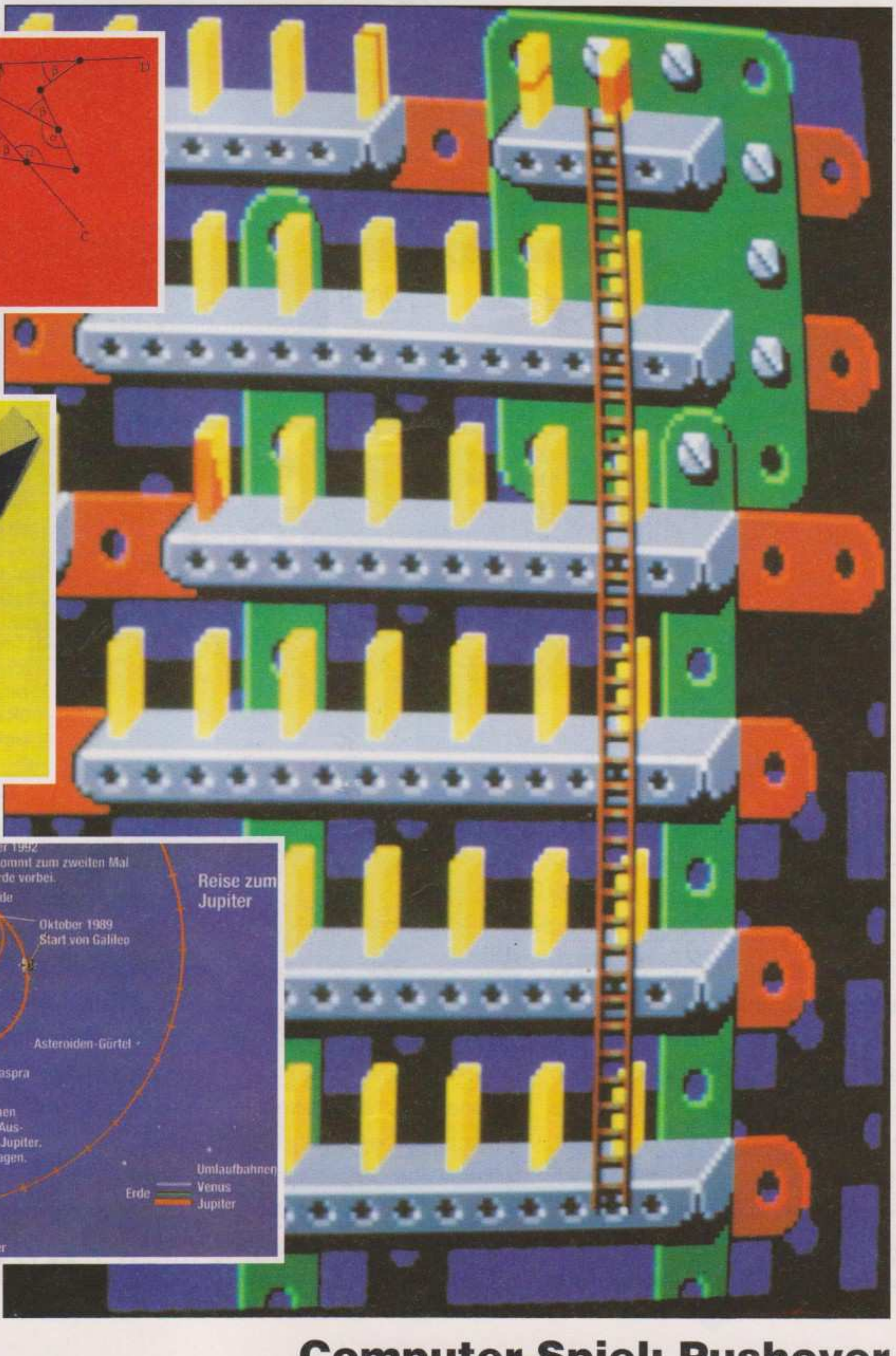
alpha
Mathematische Schülerzeitschrift



Streckenteiler und Winkelteiler

Olympiade-Ecke

Kepler und die Planetenbahnen



Computer-Spiel: Pushover

Inhaltsverzeichnis

Komisches, Kniffliges und Knackiges

In jeder der folgenden Aufgaben vertritt stets ein Buchstabe eine Ziffer, und die Null darf nie zuvorderst stehen. Bei jeder Addition gibt es genau eine Lösung.

1. Eine Sehne in einem Kreis teilt diesen stets in zwei konvexe Flächen:

```
  S E H N E
  K R E I S
-----------
K O N V E X
```

2. Bei einem Fünfeck gilt für die Berechnung des Umfangs:

```
  S E I T E
  S E I T E
  S E I T E
  S E I T E
  S E I T E
-----------
U M F A N G
```

3. Für Sportler dürfte sicher die folgende Aufgabe Gültigkeit haben:

```
S U R F E N
T E N N I S
-----------
F R E U D E
```

4. Ganz einfach auf zwei Arten addieren:

```
        Z W E I
        Z W E I
        Z W E I
        Z W E I
        Z W E I
Z W A N Z I G
Z W A N Z I G
Z W A N Z I G
Z W A N Z I G
-------------
N E U N Z I G
```

Die Buchstaben der folgenden Addition können auf zwei Arten zu einer korrekten Addition führen: Entweder man bildet gemäß den Regeln römische Zahlen, oder man ersetzt jeden Buchstaben durch eine Ziffer zwischen 0 und 9. Auf beide Arten entstehen korrekte Additionen.

5.

```
    D C X X I
M D X X X V I
-------------
M M C L V I I
```

6. Auch Städte lassen sich zu einer Addition vereinen:

```
    E S S E N
  B E R L I N
-------------
S T A E D T E
```

7. Oder auch drei Städte zusammen:

```
    B O N N
  M A I N Z
-----------
W E I M A R
```

Stefan Bondeli, Zürich

Logik in Potenzen, Produkten und Summen

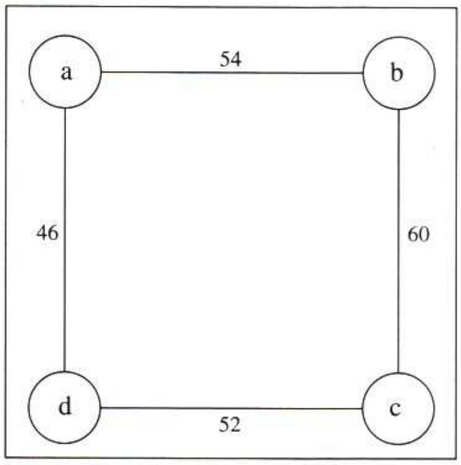
Jeweils drei der unten angeführten Zahlenfolgen sind nach dem gleichen Gesetz gebildet. Wer es erkennt, wird die letzen beiden Glieder der dritten und der sechsten Folge ergänzen können. Und er wird die beiden Bildungsgesetze als zwei Folgen von Termen darzustellen wissen, in denen n für die Anzahl der Glieder steht und die natürlichen Zahlen von 1 bis n verwendet werden. (Es genügt, die ersten drei Glieder einer Folge und das letzte so darzustellen; für die Zwischenglieder setzt man drei Punkte.)

A)	1	16	27	16	5		
B)	1	32	81	64	25	6	
C)	1	64	243	256	125	x	y
D)	6	24	36	24	10		
E)	7	42	93	76	35	12	
F)	8	76	258	272	140	x_1	y_1

Johanna Heller, Erfurt

Wer findet die Primzahlen?

Anstelle der Buchstaben a, b, c und d ist in jedem Kreis so eine Primzahl einzusetzen, daß



die Summe der beiden Zahlen, die in zwei durch eine Strecke verbundenen Kreisen stehen, gleich der an der verbindenden Strecke stehenden Zahl ist.

W. Träger, Döbeln

Sprachecke

Trois fois rien

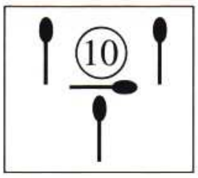
Reconstituez cette multiplicaton, sachant que:
- Un chiffre est toujours représenté par la même lettre.
- Une lettre ne peut représenter qu'un chiffre.
- Il n'y a pas d'autre chiffre 3 que celui déjà écrit.
- Le chiffre O est représenté par la lettre O.

Et, bien sûr, la multiplication est exacte!

```
    R I E N
  x       3
-----------
= C L O U S
```

aus: Tangente, Paris

A dime in the glass



The drawing shows four matches and a dime arranged so that it looks as if there is a wineglass with a dime in it.

Can you move only two matches to again have a wineglass, but with the dime outside it?

aus: Fun with mathematics, Toronto

Собираясь в путешествие на автомобиле, я обнаружил неисправность спидометра и заменил его спидометром от другой машины. Когда я отъезжал от дома, на счетчике спидометра было 131313 км. На шоссе у столба с отметкой 100 км он показывал 131460, еще через 70 км – 131558 км. Когда я добрался до места назначения, счетчик показывал 132713 км. Сколько километров я проехал?

aus: Quant, Moskau

Spiel: Zahlenlabyrinthe

Den Feldern unserer Labyrinthe (vgl. Spiel: „Wir untersuchen Labyrinthe" im Heft 3/1992, S. 28, 29 unserer Zeitschrift "alpha" ordnen wir Zahlen zu, den Wegrichtungen Rechenoperationen.

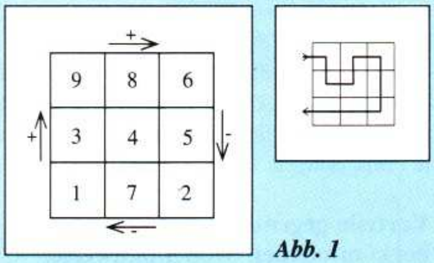


Abb. 1

Wir wollen ein Beispiel vorführen. In dem 3 x 3-Labyrinth haben wir natürliche Zahlen eingesetzt. Die Zeichen neben dem Rechteck geben die Rechenoperationen für die Richtungen des angegebenen Weges an (**Abb. 1**). Geht der Weg nach rechts bzw. nach oben, so werden die entsprechenden Zahlen addiert, in den beiden anderen Fällen nach links bzw. nach unten subtrahiert. In unserem Beispiel sind also folgende Additionen bzw. Subtraktionen durchzuführen: $9 - 3 = 6$ nach unten, $6 + 4 = 10$ nach

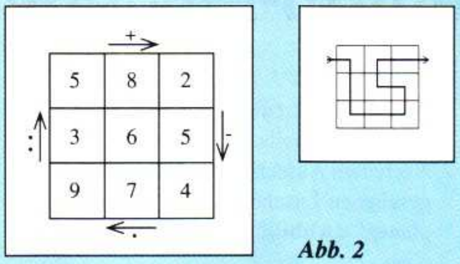


Abb. 2

rechts, $10 + 8 = 18$ nach oben, $18 + 6 = 24$ nach rechts, $24 - 5 = 19$ nach unten, $19 - 2 = 17$ nach unten, $17 - 7 = 10$ nach links und $10 - 1 = 9$ oder zusammenhängend:
$9 - 3 + 4 + 8 + 6 - 5 - 2 - 7 - 1 = 9$. Die Lösung, das Ergebnis des Zahlenlabyrinths ist also 9.
Man ermittle das Ergebnis für die nebenstehenden Vorgaben (**Abb. 2**). Wie zu erkennen ist, verwenden wir jetzt alle vier Grundoperationen.

Welchen Weg muß man im Zahlenlabyrinth der Abb. 2 beschreiten, wenn man das Ergebnis erhalten soll? Zeichne diesen Weg.

Nachdem wir bisher Aufgaben für das 3x3-Zahlenlabyrinth gelöst haben, wollen wir nun den Schwierigkeitsgrad etwas erhöhen und uns einem 4x4-Zahlenlabyrinth zuwenden. Als Zahlenbereich wollen wir den der gebro-

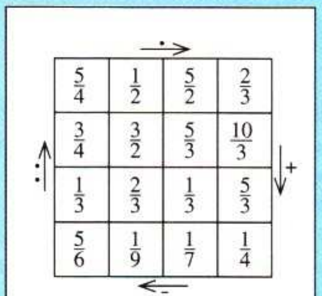
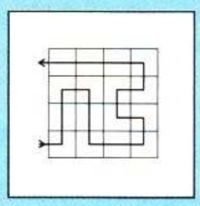


Abb. 3



chenen Zahlen verwenden. Ermittle das Ergebnis für die angegebenen gebrochenen Zahlen und den vorgegebenen Weg (**Abb. 3**).

Berechne das Zahlenlabyrinth für zwei andere mögliche Wege bei gleichem vorgegebenen Ein- und Ausstieg. Stelle ein weiteres 3x3-Zahlenlabyrinth auf. Verwende wieder alle vier Grundrechenarten.

Da keine negativen Zahlen auftreten sollen, kann man nicht beliebige Zahlen verwenden. Nimm erst natürliche Zahlen, später auch gebrochene Zahlen.

Gerhard Schulze, Herzberg

Auf wieviel verschiedene Arten kann man LÖSUNGSWEG lesen?

(siehe Abbildung)

L
Ö Ö
S S S
U U U U
N N N N N
G G G G G G
S S S S S S S
W W W W W W W W
E E E E E E E E E
G G G G G G G G G G

Das Nummernschild eines Autos ist folgendermaßen aufgebaut:

Abkürzung des Ortes – höchstens 2 Buchstaben – eine Zahl bis 999
Bsp: SÖM-AB 123 oder SÖM-P 6 usw.
Errechne, wieviele Autos ein Ort höchstens haben kann.

Lutz Kratzsch, Sömmerda

1fälle für 2fellos 1fallsreiche

Die Wörter Weihn**acht**en, Run**drei**se und St**eins**chlag enthalten deutsche Zahlwörter, man könnte sie Weihn**8**en, Run**3**se und St**1**chlag schreiben. Mit solchen Wörtern kann man sich einige Spielereien ausdenken (siehe alpha 4/91 S. 19/7)

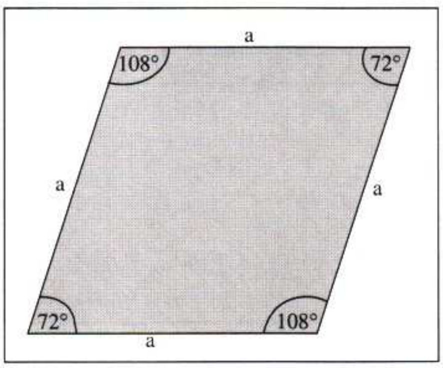
1) Suche für jede Ziffer mindestens ein Wort (die Ziffer soll nicht am Anfang oder Ende stehen wie bei Kla4)!
2) Suche in anderen Sprachen nach solchen Wörtern! (z. B. al**one**)
3) Elf mal elf
   Wo fehlt in den folgenden elf Wortfragmenten das Wort elf?

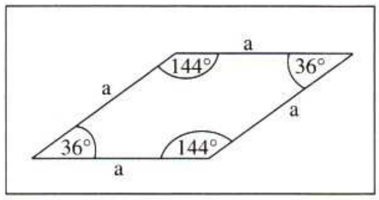
Her	Wenkönig
Bast	Grusilm
Nebront	Dt
Diesahrer	Spargeld
Simpranse	Camilter
Himmahrt	

Heinz Siegler, Eschau

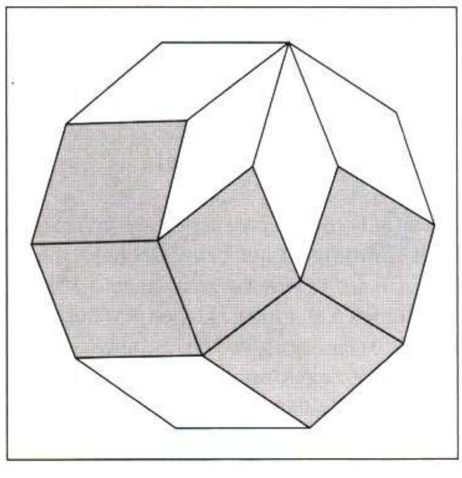
Ein Legespiel

10 Flächenstücke, von denen 5 zu Figur 1 und die anderen 5 zu Figur 2 kongruent sind, sollen auf 6 verschiedene Weisen zu einem regelmäßigen Zehneck so aneinander gelegt werden, daß nie zwei solche Parkettierungen durch eine Bewegung aufeinander abgebildet werden können.





Eine Möglichkeit wollen wir hier zeigen.



Walter Träger, Döbeln

Pop-Up-Modelle

Wollt Ihr Eure Mathelehrer durch in Sekundenschnelle aufgeklappte Modelle von Pyramiden oder Prismen, Würfel oder Quader überraschen? Dann müßt Ihr die folgende Anleitung lesen, wie man mit geringen Mitteln reizvolle Modelle bauen kann! (Natürlich dürfen dies auch die Lehrer tun – die Schüler werden überrascht sein...)

In folgenden Zeilen wird beschrieben, wie man diese Modelle herstellen kann, die ohne Probleme – einfach zusammengeklappt – transportiert werden können und wenn man sie braucht, im Nu "aufgeklappt" sind. Es handelt sich um sogenannte Pop-Up-Modelle. Die Anregung dazu fand ich in einem englischen "Bastelheft" [1]. Manche Kindermärchenbücher, die auf ähnliche Weise entsprechende Kulissen beim Aufschlagen der Seiten für die einzelnen Geschichten erzeugen, habt Ihr vielleicht schon einmal gesehen – ebenso wie Glückwunschkarten...

Und das benötigt Ihr zur Herstellung

- Als Grundlage einen **Schuhkarton Format A 4**, in der Mitte einmal falten (ev. in einer Buchbinderei stanzen und gleich knicken lassen, erhöht die Lebensdauer beträchtlich), oder man wählt einen im Vergleich zum Schuhkarton etwas dünneren **Zeichenkarton**.
- **Zum Bau der eigentlichen Modelle einen Zeichenkarton.**
- **Klebstoff**, Klebeband (zur Verstärkung der Faltkanten!).

Die vorliegenden Modelle nehmen nicht mehr Platz ein als ein DIN A 5-Umschlag, aufgeklappt ergeben sie ein auf dem A 4-Karton stehendes Modell von ca. 10 cm Höhe. (**Abbildung 1**) (Für Lehrer: Selbstverständlich kann man bei Demonstrationsmodellen auch eine Basis des Formates A 3 – geknickt dann A 4 – nehmen und die Modelle entsprechend größer ausführen.)

Die Herstellung ist einfach:

- Man überträgt zunächst die Netzvorlagen (**Abbildung 2**) auf den Zeichenkarton in den in der Tabelle vorgeschlagenen Maßen. (Werden z. B. größere Höhen gewählt, dann kann es passieren, daß das gefaltete Modell aus der zugeklappten Basis, die ja als Schutzhülle dient, hervorragt und dadurch leicht beschädigt wird.)
- Danach ritzt man die Knickkanten vorsichtig an und sichert sie am besten mit einem Stück Klebestreifen auf der späteren Innenseite des Modells.
- Nach dem Ausschneiden klebt man die vorgesehenen Laschen auf die in den "Klebeplänen" (**Abbildung 3**) schraffierten Flächen.
- Vor den ersten Auf- und Zuklappversuchen den Kleber gut antrocken lassen.

Hinweise zu günstigen Maßen der Modelle:

Die Maße beziehen sich auf die in den Netzen angegebenen Seitenlängen (vgl. **Abbildung 2**):

Zu Klebeplan 1: (Sechsseitige Basis)
Regelmäßiges sechsseitiges Prisma:
$a = 4{,}5$ cm, Höhe $h = 8$ cm
Regelmäßige sechsseitige Pyramide:
$a = 4{,}5$ cm, Seitenk. $s = 9$ cm
Prismenstumpf und Pyramidenstumpf:
Nach Wahl am besten aus projizierendem Schnitt entnehmen (lassen); Modell für Parallelperspektivität, Perspektivität.

Zu Klebeplan 2: (Quadratische Basis)
Würfel $a = 7{,}5$ cm
Quader mit quadratischer Basis
$a = 7{,}5$ cm, Höhe $h = 6$ cm
Regelmäßige vierseitige Pyramide
$a = 7{,}5$ cm, Seitenk. $s = 10$ cm
Würfelschnitte (z. B. nach gleichseitigem Dreieck...).

Zu Klebeplan 3: (Rechteck)
Quader mit rechteckiger Basis
$a = 10$ cm, $b = 4{,}5$ cm, $h = 6$ cm
Pyramide mit rechteckiger Basis
$a = 10$ cm, $b = 4{,}5$ cm, $s = 10$ cm

Achtung: Vor dem Ankleben muß man die Größe des Winkels zwischen Knickkante und Rechteckseiten bestimmen; sie beträgt bei den eingegebenen Werten für a, h und s rund 38° für den Winkel zur kurzen Rechteckseite.

Bemerkung:
Auch andere Körper, z. B. regelmäßige Oktaeder, lassen sich in Pop-Up-Bauweise herstellen, lediglich diese Basisplatte ist nicht realisierbar. Beim "Normoktaeder" ABCD EF denke man sich dieses zum Beispiel längs der Kanten AE und AF "aufgeschlitzt". Das Oktaeder läßt sich dann (ohne Gewalt) in eine platte Form bringen.

Vorteile gegenüber der herkömmlichen Modellbauweise:

Vorteil 1: Ihr (die Schüler) könnt diese Modelle immer ohne viel Platzaufwand mitnehmen und vor allem ohne fürchten zu müssen, die Modelle beim Transport zu beschädigen oder gar zu zerstören.
Für die Lehrer: Denken Sie daran, wie oft die Schüler der unteren Klassen das in manchen Schulbüchern angebotene Quader- oder Würfelfaltnetz beschädigen und wie lange es bei manchen Schülern dauert, diese Modelle in der Schulstunde zusammenzubauen, wenn sie gebraucht werden.
Vorteil 2: Auch über längere Zeiträume können diese Modelle bequem (im Bücherregal) aufbewahrt werden – ohne zu verstauben. Dieser Vorteil ist vor allem bei Platzmangel zu Hause oder in der Schule gewichtig!
Vorteil 3: (v. a. für Lehrer) Man kann diese Modelle mitnehmen, ohne gleich von vornherein durch die mitgebrachte Modellsammlung die Schüler vor dem festgelegten Zeitpunkt abzulenken. (Praktisch günstig, wenn man noch nicht weiß, ob man in der folgenden Stunde wirklich so weit kommt...)

von Thomas Müller, Krems/Donau

Literatur

[1] Mathematical Curiosities 3 von Gerald Jenkins und Anne Wild.
Tarquin Publications, Stradbroke, 1990.

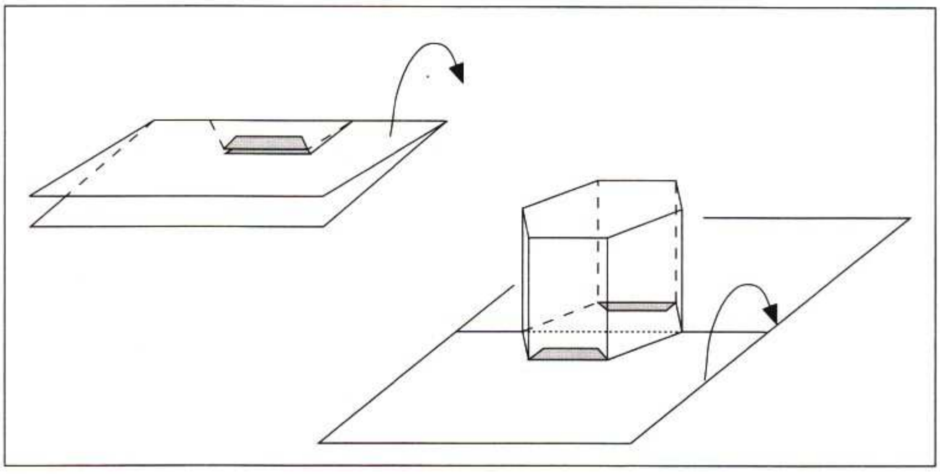


Abb. 1

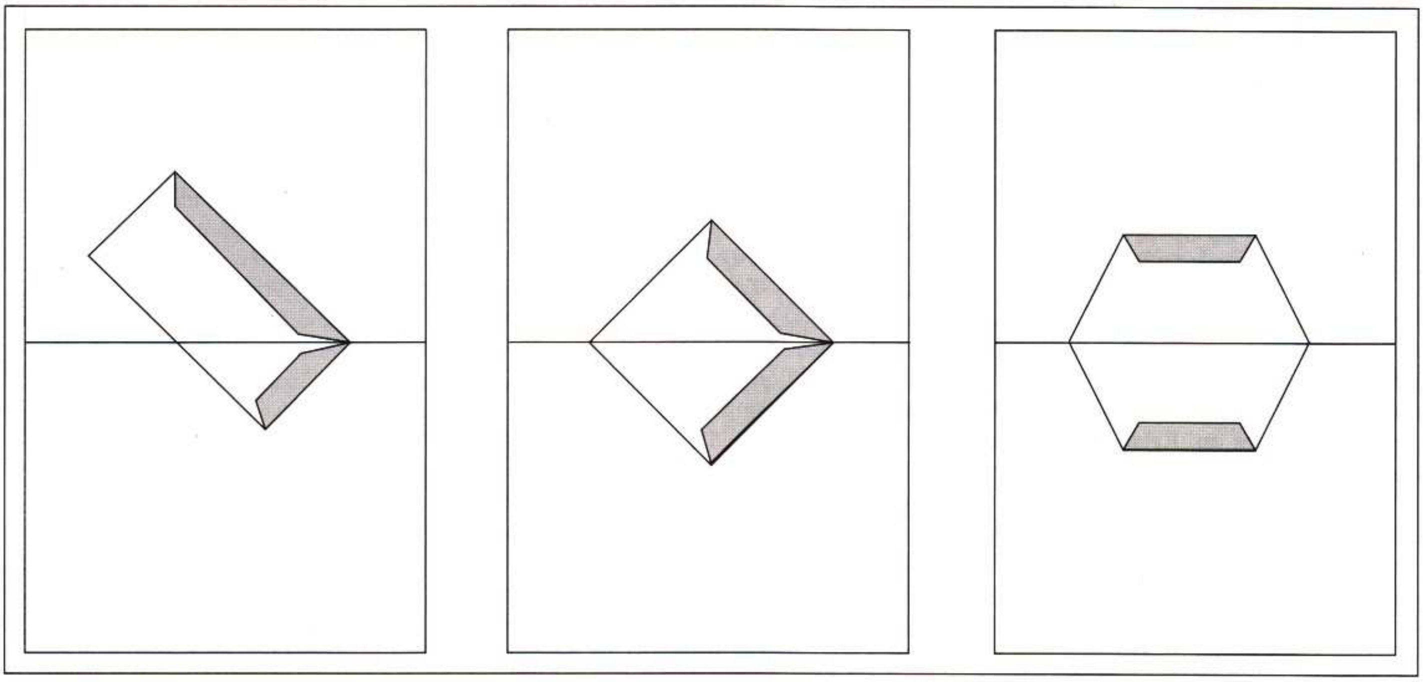


Abb. 2

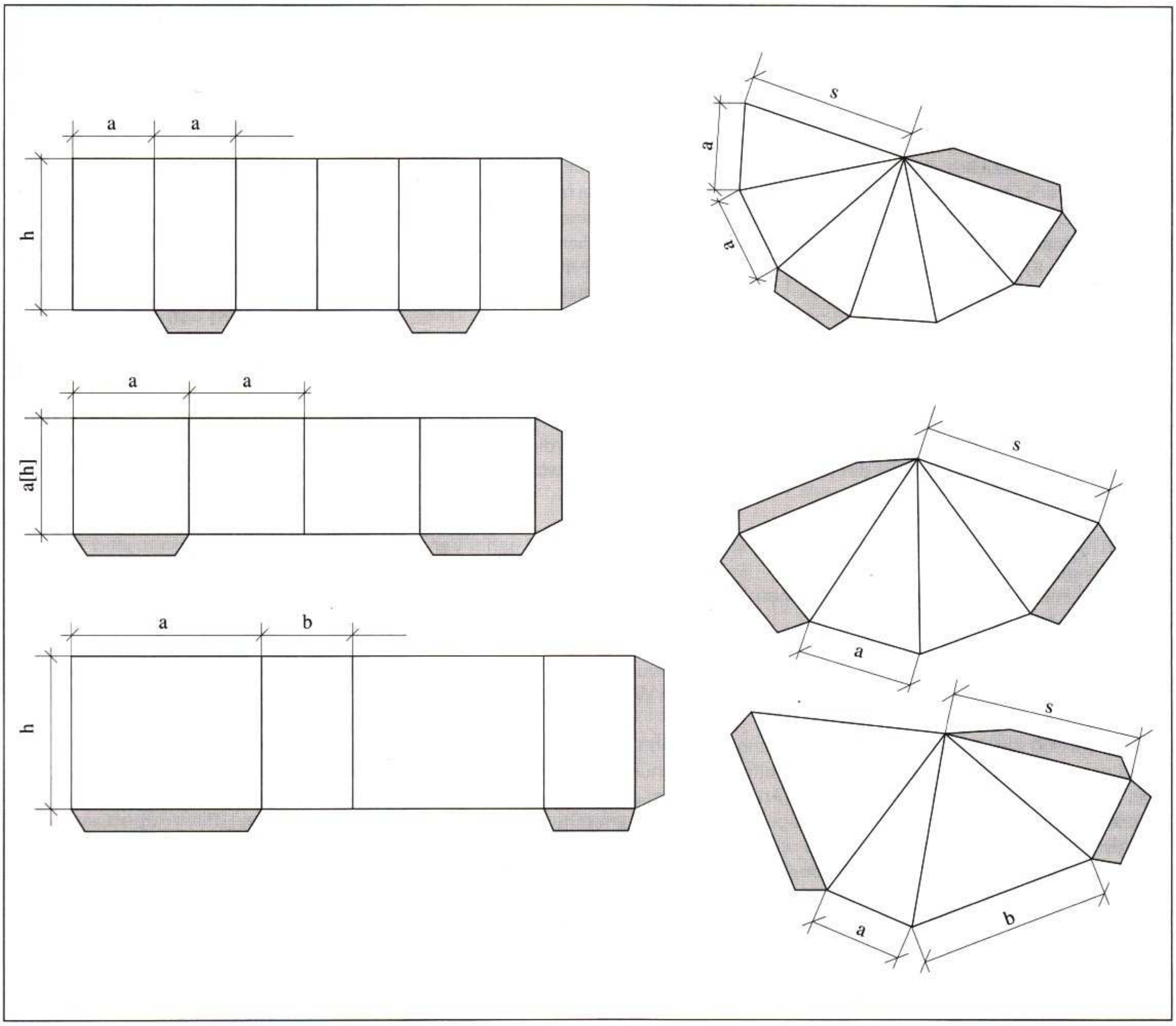


Abb. 3

Komisches, Kniffliges und Knackiges

Nadeln im Heuhaufen

Primzahlen spielen eine grundlegende Rolle bei der Untersuchung der Teilbarkeit natürlicher Zahlen. Bücher bieten zur Ermittlung von Primzahlen häufig das Sieb des Eratosthenes an. Relativ unbekannt, aber bedeutend effektiver ist das hier vorgestellte Sieb des Sundaram.

Teilerarme Zahlen

Die Zahl 12 hat sechs Teiler: 1, 2, 3, 4, 6 und 12. Beispielsweise ist 4 ein Teiler von 12, denn 12 kann als Produkt aus 4 und einer weiteren natürlichen Zahl (hier: 3) geschrieben werden: $12 = 4 \cdot 3$. Hingegen ist 5 kein Teiler von 12, denn die Gleichung $12 = 5 \cdot x$ hat keine natürliche Zahl x zur Lösung.
Die Aussage "4 ist ein Teiler von 12" schreibt man in der Mathematik kurz so: $4 \mid 12$, und $5 \nmid 12$ (Teilbarkeitszeichen durchgestrichen) bedeutet natürlich "5 ist nicht Teiler von 12".
Allgemein kann man also sagen: Die natürliche Zahl a ist ein Teiler der natürlichen Zahl b (in Zeichen $a \mid b$) genau dann, wenn es eine natürliche Zahl x so gibt, daß $b = a \cdot x$ ist.

Welche Teiler hat die Zahl 1? Welche Zahlen haben 1 als Teiler? Welche Teiler hat die Zahl 0? Welche Zahlen haben 0 als Teiler? Hinweis: Man benutze die oben angegebene Definition der Teilbarkeit.
Jede natürliche Zahl a>1 hat mindestens zwei Teiler, nämlich 1 und a selbst. Zahlen, die außer diesen beiden Teilern keine weiteren Teiler besitzen, heißen **Primzahlen**. Sie sind also gewissermaßen die "teilerärmsten" Zahlen. Die kleinste unter ihnen ist die Zahl 2, weitere Primzahlen sind 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23... **Suche noch weitere Primzahlen, vielleicht auch eine, die größer ist als 100 (oder 500 oder 1000).**

Die Primzahlen als Bausteine aller natürlichen Zahlen

Schon die alten Griechen wußten, daß jede natürliche Zahl >1 entweder eine Primzahl ist oder sich als Produkt von Primzahlen schreiben läßt; die Primzahlen mithin sozusagen die Bausteine sind, aus denen man durch Multiplikation alle natürlichen Zahlen gewinnen kann. Deswegen **nennt man die Nichtprimzahlen auch zusammengesetzte Zahlen**.

Diese Erkenntnis ist freilich nicht sehr tiefliegend, weil sofort einzusehen: Ist a keine Primzahl, so hat a mindestens einen (von 1 und a verschiedenen) Teiler t; also $a = t \cdot s$. Nun sind entweder s und t beides Primzahlen – dann ist die gewünschte Zerlegung von a bereits erreicht –, oder sie sind es nicht. Dann wendet man dieselbe Überlegung auf die einzelnen Faktoren t und/oder s an und erhält etwa $a = t \cdot s = (t_1 \cdot t_2) \cdot (s_1 \cdot s_2)$, usw. Da bei jedem Schritt mindestens ein Faktor in ein Produkt echt kleinerer Faktoren zerfällt (der Faktor 1 tritt nicht auf!), muß das Verfahren nach einer gewissen Anzahl von Schritten zur gewünschten Zerlegung führen.
Zerlege die Zahl 60 auf diese Weise!
Wesentlich interessanter ist nun die Tatsache, daß es zu jeder Zahl a ($a > 1$) nur eine solche Primfaktorzerlegung gibt, auf welchem Wege und über welche "Zwischenschritte" man sie auch immer gewinnen mag. (Die Reihenfolge der Faktoren ist freilich beliebig; man könnte sie z. B. nach der Größe ordnen.) Man kann also sagen: Jede Zahl $a > 1$ ist entweder eine Primzahl oder auf eindeutige Weise als Produkt von Primzahlen darstellbar.

Die Suche nach den Primzahlen

Um die Primfaktorzerlegung etwa von 1386 zu gewinnen, rechnen wir vielleicht so: $1386 = 9 \cdot 154 = (3 \cdot 3) \cdot (77 \cdot 2) = (3 \cdot 3) \cdot (11 \cdot 7) \cdot 2 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$, und damit sind wir fertig, denn nun sind alle Faktoren Primzahlen. Schwieriger ist es schon, zu erkennen, daß $72\,775\,727 = 7\,151 \cdot 10\,177$ bereits die gewünschte Zerlegung ist, denn 7 157 und 10 177 sind beides Primzahlen. Es ist verständlich, daß Primzahlen beim Durchlaufen der Zahlengeraden immer seltener auftreten (warum?), die Suche nach ihnen schließlich vergleichbar wird mit jener nach der "Nadel im Heuhaufen".
Das wirft die Frage auf: Wie kann man auf möglichst effektive Weise zu einer möglichst weit reichenden Primzahl-Liste kommen?
Das Prüfen jeder Zahl auf ihre Teilbarkeitseigenschaften, ob nun "von Hand" oder mit dem Computer, ist gewiß wenig effektiv, und bei größeren Zahlen kommt selbst der Computer ins Schwitzen. Die Bücher bieten häufig das sogenannte **Sieb des Eratosthenes** an; es ist zwar sehr leicht zu verstehen, aber doch ziemlich unhandlich [Eratosthenes war ein griechischer Gelehrter, der etwa von 275 v. u. Z. bis 195 v. u. Z. lebte]. Ein wenig bekanntes, aber recht wirkungsvolles Verfahren ist das **Sieb des Sundaram** [indischer Mathematiker]. Es beruht auf folgenden Überlegungen: Außer 2 ist offenbar jede Primzahl ungerade. Warum? Könnte man nun alle ungeraden Nicht-Primzahlen (bis zu einer beliebig vorgegebenen Schranke) aufschreiben, wüßte man: alle nicht notierten ungeraden Zahlen sind Primzahlen. Mit anderen Worten: Sundarams Sieb filtert

Eratosthenes von Kyrene

Eratosthenes von Kyrene war ein Universalgelehrter. Seine Verdienste liegen aber vor allem auf dem Gebiet der mathematischen Geographie, wo er zum Beispiel eine Erdkarte anfertigte.

Dazu teilte er die Erde in Vierecke ein, bestimmte den Erdumfang und nahm Vermessungen der Erdkugel vor.
Mit Archimedes führte Eratosthenes einen brieflichen wissenschaftlichen Meinungs- und Gedankenaustausch.
Etwa um 246 v. u. Z. wurde er an den Königshof von Alexandria gerufen, um dort als Prinzenerzieher und Direktor der Bibliothek zu wirken.
Alexandria war zu dieser Zeit das Zentrum der antiken Wissenschaft.

Noch vor 300 v. u. Z. wurde dort das sogenannte Museion ins Leben gerufen. Dieses erste staatlich begründete und unterhaltene Forschungszentrum besaß Hörsäle, Arbeitszimmer, Speiseräume, eine Art Sternwarte, zoologische und botanische Gärten. Angegliedert war eine riesige Bibliothek. Sie umfaßte etwa 400 000 Papyrusrollen, gesammelt wurden die wissenschaftlichen, philosophischen und schöngeistigen Schriften der Völker des Mittelmeeres und des vorderen Orients. Gewirkt haben am Museion so bedeutende Naturforscher und Mathematiker wie Euklid, Archimedes, Apollonius, Diophantos, Heron von Alexandria und Ptolemaios.
Leider wurde diese Bibliothek durch die Römer vernichtet. Unter anderem beheizten sie mit den wertvollen Schriften ihre Bäder.

Das 7. Weltwunder der Antike – der Leuchtturm auf der Insel Pharos vor Alexandria

Im Jahr 279 v. u. Z. wurde dieser sagenumwobene Turm gebaut. Das zwischen 120 und 140 m hohe Bauwerk wurde zunächst als Landmarke errichtet, später als Leuchtturm umgerüstet.
Er wurde Vorbild für alle später errichteten Leuchttürme. Im 14. Jahrhundert zerstörte ein Erdbeben das Bauwerk. Nun soll er wieder aufgebaut werden. Allerdings nicht genau an der historischen Stelle, denn dort errichteten die Mamluken aus den Kalksteinquadern des zerstörten Turmes eine Seefestung. Gebaut wird anhand einer Zeichnung des deutschen Archäologen und Architekten Friedrich von Thiersch (siehe oben). Das genaue Aussehen konnte nicht rekonstruiert werden.
Kosten soll das lukrative Projekt 35 bis 50 Millionen Mark, genügend Finanziers haben Interesse bekundet.

genau die ungeraden Nichtprimzahlen heraus! Die erste ungerade Nichtprimzahl (>1) ist 9, die zweite ungerade Nichtprimzahl ist 15. Mit diesen beiden Zahlen beginnt man das untenstehende Schema aufzubauen: Die erste Zeile beginnt mit den genannten Zahlen 9 und 15 und wird gleichabständig fortgesetzt; jede folgende Zahl geht aus der vorangegangenen also durch Addition von 6 hervor. Sodann soll das Schema symmetrisch sein, d. h., mit der ersten Zeile hat man auch die erste Spalte und damit die Startzahlen für die 2., 3., usw. Zeile.

Das Schema des Sundaram

9	15	21	27	33	39	45	...
15	25	35	45	55	65	75	...
21	35	49	63	77	91	105	...
27	45	63	81	99	117	135	...
33	55	77	99	121	143	165	...
39	65	91	117	143	169	195	...
45	75	105	135	165	195	225	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Auch in diesen Zeilen erhält man jede Zahl aus der vorangegangenen durch Addition einer festen Größe, die bei der 2. Zeile 10, bei der 3. Zeile 14, bei der 4. Zeile 18 usw. beträgt, allgemein: die konstante Differenz zweier benachbarter Zahlen der i-ten Zeile beträgt $4i + 2$ ($i = 1, 2, 3...$) Dieses Schema kann man nun nach rechts und nach unten so weit fortsetzen (oder vom Computer ausrechnen lassen – wer schreibt ein einfaches Programm?), wie man es für wünschenswert erachtet. Wer Zeit sparen will, nutzt die Symmetrie des Schemas und notiert nur die Zahlen oberhalb bzw. unterhalb der Diagonalen, wie im angegebenen "verkürzten Sundaram-Schema" für die Nichtprimzahlen kleiner als 100 ausgeführt. Wie erhält man dann die "Startzahlen" in der Diagonale?
Nun müssen wir zeigen: a) das Sundaram-Schema enthält nur zusammengesetzte Zahlen; b) jede zusammengesetzte (ungerade) Zahl kommt in diesem Schema vor. Dann sind die Primzahlen ($\neq 2$) genau die im Schema fehlenden (ungeraden) Zahlen.
Zu a) Wir berechnen das in der i-ten Zeile und k-ten Spalte stehende Element a_{ik}: Zu ihm gelangt man, ausgehend vom ersten Element a_{i1} dieser Zeile, in $(k - 1)$ Schritten der konstanten Schrittweite $4i + 2$,
also: $a_{ik} = a_{i1} + (k - 1)(4i + 2)$. Nun ist das erste Element der i-ten Zeile gleichzeitig das i-te Element der 1. Zeile (Symmetrie!), und dieses erhält man aus dem ersten Element "9" der 1. Zeile nach $(i - 1)$-Schritten der gleichen Schrittweite 6 (für die 1. Zeile);
also $a_{i1} = 9 + (i - 1)6 = 6i + 3$. Insgesamt erhält man damit:

$$\begin{aligned} a_{ik} &= 6i + 3 + (k - 1)(4i + 2) \\ &= 4ik + 2i + 2k + 1 \\ &= (2i + 1)(2k + 1). \end{aligned}$$

Nun sieht man, daß a_{ik} eine zusammengesetzte Zahl ist!
Zu b) Ist z eine beliebige (ungerade) zusammengesetzte Zahl, so besitzt z (mindestens) zwei (von 1 und z verschiedene) ungerade Teiler, die wir etwa mit $2r + 1$ und $2s + 1$ bezeichnen.
Also ist $z = (2r + 1)(2s + 1)$ und steht nach a) in unserem Schema in der r-ten Zeile und s-ten Spalte. Damit ist alles bewiesen.

Herbert Kästner, Sektion Mathematik der Universität Leipzig

Verkürztes Sundaram-Schema für die ungeraden Nichtprimzahlen < 100

9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69	75	81	87	93	99
	25	35	45	55	65	75	85	95							
		49	63	77	91										
			81	99											

Das Delische Problem

Auf eine Erfindung des Dichters Eratosthenes geht folgende Geschichte zurück:
Auf der griechischen Insel Delios befand sich ein würfelförmiger Altar des Apollon, Sohn des höchsten griechischen Gottes Zeus. Dort gab eine Priesterin, die Pythia, Weissagungen (Orakel). Als sich die Delier zur Abwendung einer Seuche an das Orakel wandten, erhielten sie die Aufgabe, den Altar Apollons unter Beibehaltung seiner Form zu verdoppeln.
Eratosthenes hat sich sehr ausführlich mit der Würfelverdoppelung beschäftigt und auch ein Instrument (Mesolab) zur mechanischen Lösung gefunden. Da die Rechentechniken der alten Griechen sehr gering entwickelt waren, versuchten sie alle wesentlichen mathematischen Probleme durch geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal zu lösen.
Allein mit diesen beiden Hilfsmitteln die Seite eines Würfels zu konstruieren, dessen Volumen doppelt so groß ist wie das Volumen des gegebenen Würfels, ist jedoch unmöglich.
nach: H. Pieper: Heureka, Deutscher Verlag der Wissenschaften, MSB Nr. 135

Die rechnerische Lösung überlassen wir nun Euch!

Das dritte Planetengesetz von Kepler – einmal ganz anders

Jeder Schüler lernt spätestens im Astronomieunterricht die drei Planetengesetze von Kepler. Mit Recht, denn mit ihnen hat Kepler die zu seiner Zeit noch vorhandenen Mängel des kopernikanischen Weltsystems beseitigt. 1609 kam sein berühmtes Buch «Astronomia nova» (Neue Astronomie) zum Druck und begründete seinen Ruhm als Astronom. Darin sind die ersten beiden nach ihm benannten Planetengesetze enthalten:

1. ***Jeder Planet läuft auf einer Ellipsenbahn um die Sonne, die in einem der beiden Brennpunkte steht.***
2. ***In gleichen Zeitabschnitten überstreicht die Strecke Sonne-Planet gleichgroße Flächenstücke, daher ist die Geschwindigkeit der Planeten in Sonnennähe größer als in Sonnenferne.***

Über Jahrzehnte unternommene genaue Messungen der Marsbahn von Tycho de Brahe waren das wissenschaftliche Erbe, das dieser seinem Nachfolger als kaiserlicher Astronom in Prag bei seinem Tod 1601 hinterließ.
Um nun Keplers Leistung bei dieser riesigen Arbeit richtig einzuschätzen, muß der Leser wissen, daß die Planetenbahnen mit wenigen Ausnahmen sich kaum von idealen Kreisbahnen unterscheiden (alpha, Heft 1/88).
Zehn Jahre nach der «Astronomia nova» erschien 1619 Keplers zweites Hauptwerk mit dem Titel «Harmonices mundi» (Die Weltharmonien). Darin ist neben zahlreichen mathematischen Entdeckungen sein drittes Planetengesetz enthalten, es besagt (etwa) folgendes:

3. ***Die dritten Potenzen der Abstände aller Planeten von der Sonne stehen im gleichen Verhältnis, wie die Quadrate ihrer Umlaufzeiten.***

Für die mittleren Abstände ist damit ein genauer Zusammenhang zu den Umlaufzeiten im Sonnensystem erkannt worden, wieder hat Kepler ein gewaltiges Beobachtungsmaterial seiner Vorgänger genial zu einem mathematisch formulierten Gesetz zusammengefaßt. Wir wollen einmal einen ganz anderen Weg einschlagen, um zu seinem dritten Gesetz zu gelangen: Wegen der riesigen Entfernungen der Planeten von der Sonne führten die Astronomen die mittlere Entfernung Sonne-Erde als astronomische Einheit AE = $149{,}6 \cdot 10^6$ km ein. In **Tabelle 1** sind die Abstände in der 1. Spalte also auf die Erde bezogen. In der 4. Spalte sind die Umlaufzeiten in Jahren angegeben.

Aufgaben

1 Man berechne das 3. Kepler-Gesetz im doppeltlogarithmischen Diagramm mit den Entfernungen der 3. Spalte!
2 Man berechne den Proportionalitätsfaktor aus dem Achsenabschnitt!
3 Man berechne den Mittelwert des Anstiegs für alle Planeten!

Um nun alle Daten der Tabelle in ein Diagramm zu zeichnen, muß die Abszissenachse für die Entfernungen bis 40 und die Ordinatenachse für die Umlaufzeiten sogar bis 250 reichen. Man trägt daher solche Tabellen im logarithmischen Maßstab auf, dazu werden die Entfernungen und die Umlaufzeiten logarithmiert (vgl. Spalte 2 und 5). In **Abb. 1** liegen die Wertepaare für alle Planeten, auch für diejenigen, die Kepler noch nicht kannte, sehr gut auf einer geraden Linie. Mit den Achsen logU und loga hat der mittlere Anstieg den Zahlenwert 1,5. Die Verbindungsgerade läuft genau durch den Ursprungspunkt, in dem die Erde mit den beiden Koordinaten 1, das heißt log 1 = 0 eingezeichnet werden muß. Soweit das überraschende Ergebnis der graphischen Auswertung für alle Planeten nach Tab. 1.
Die Gleichung für diese Gerade durch den Nullpunkt heißt jetzt:

$$\log U = m \cdot \log a \text{ mit dem Anstieg } m = 1{,}5 \quad (1)$$

multipliziert man auf beiden Seiten mit dem Faktor 2, so folgt

$$2 \cdot \log U = 3 \cdot \log a \text{ oder } \log U^2 = \log a^3. \quad (2)$$

Auf der Erde mit den Koordinaten 1 bezogen erhalten wir entlogarithmiert aus Gleichung (2) das dritte Gesetz von Kepler

$$U^2 : 1 = a^3 : 1. \quad (3)$$

Nicht auf die Erde bezogen gilt dann für die Planeten untereinander

$$U_1^2 : U_2^2 = a_1^3 : a_2^3. \quad (4)$$

Wenn wir das Planetengesetz nicht als Verhältnisgleichung schreiben wollen, müssen wir einen Proportionalitätsfaktor K einführen

$$U^2 = k \cdot a^3. \quad (5)$$

Wie in Abb. 1 zu sehen ist, erfüllen auch die weit von der Sonne entfernten Planeten Uranus, Neptun und Pluto sehr gut das 3. Gesetz von Kepler, obwohl er diese noch nicht kennen konnte. Mehr noch: In der Neujahrsnacht 1801 hat der italienische Astronom Piazzi den ersten Planetoiden Ceres entdeckt. Planetoiden sind sehr kleine Planeten, bis 1810 wurden die vier größten unter ihnen gefunden, es sind Ceres mit 1025 km Durchmesser, Pallas mit 560 km, Vesta mit 525 km und Juno mit 190 km. Für den ersten hat der Mathematiker Carl Friedrich Gauss, er war damals 23 Jahre alt, aus nur wenigen Beobachtungsdaten von Piazzi mit seinen ganz neuen mathematischen Methoden die genaue Ellipsenbahn berechnet. In der Neujahrsnacht 1802 fand dann der Arzt und Astronom Olbers Ceres an der vorausberechneten Stelle wieder. Heute kennen die Astronomen weit über 1000 solcher kleiner Himmelskörper, deren Bahnen fast alle zwischen der des Mars und des Jupiters liegen. Für den Mittelwert aller Abstände von der Sonne hat man 2,9 AE und für die mittlere Umlaufzeit U = 4,5 Jahre berechnet. Selbst diese Mittelwerte liegen noch recht gut auf der Geraden in **Abb. 1**. Obwohl Kepler schon nahe dran war, hat erst Newton das allgemeine

Tabelle 1: Abstand von der Sonne und Umlaufzeiten der Planeten

Planet	Symbol	$\frac{a}{AE}$	log a	$\frac{a}{km \cdot 10^8}$	$\frac{U}{Jahre}$	log U	$\frac{\log U}{\log a}$
Merkur		0,387	- 0,41229	0,5791	0,241	- 0,61979	1,499
Venus		0,723	- 0,14086	1,0821	0,615	- 0,21112	1,4988
Erde		1,0	0,	1,496	1,0	0,	—
Mars		1,524	0,18298	2,279	1,881	0,27439	1,4995
Jupiter		5,203	0,71625	7,783	11,862	1,07416	1,4997
Saturn		9,546	0,97982	14,28	29,458	1,46920	1,4995
Uranus		19,18	1,28285	28,72	84,02	1,92438	1,5000
Neptun		30,09	1,47842	44,98	164,78	2,21690	1,4995
Pluto		39,7	1,59879	59,46	247,7	2,39393	1,4973
Planetoiden		2,9	0,46239	4,338	4,5	0,65321	1,413

Gravitationsgesetz gefunden, aus dem die drei Kepler-Gesetze zwangsläufig folgen. Es steht in seinem Hauptwerk «Principia mathematica philosophiae naturalis» (Mathematische Prinzipien der Naturphilosophie), das 1687 in England gedruckt wurde. Demnach ist in K aus Gleichung (5) sowohl die allgemeine Gravitationskonstante als auch die Sonnenmasse enthalten. Bei genauerer Berechnung gehen noch die Planetenmassen ein, aber im Vergleich zur Sonne können diese vernachlässigt werden, damit bleibt Keplers 3. Gesetz eine sehr gute Näherung, wie auch Abb. 1 zeigt. In der wissenschaftlichen Arbeit wird nicht nur der Astronom, sondern jeder Naturforscher doppeltlogarithmische Diagramme benutzen, wenn er für seine Messungen ein allgemeines Potenzgesetz erwarten kann.

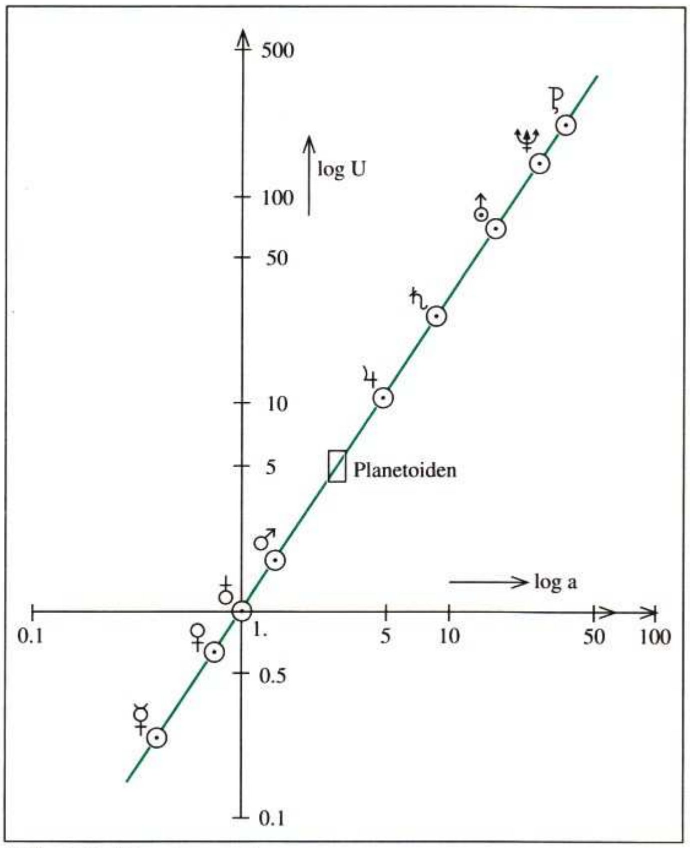


Abb. 1: 3. Planetengesetz

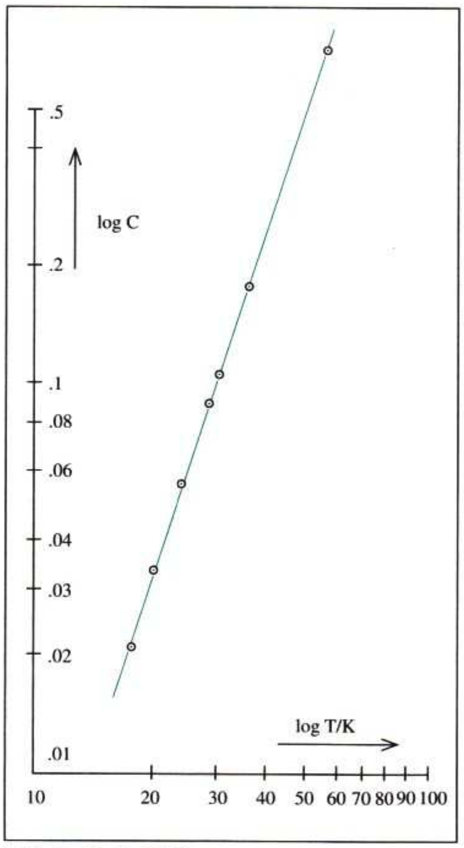


Abb. 2: CaF_2 Flußspat

Mit dem Ansatz

$$y = K \cdot x^n \tag{5}$$

ergibt sich eine Geradengleichung, wenn man auf beiden Seiten logarithmiert

$$\log y = \log K + n \cdot \log x. \tag{6}$$

Trägt man nun als Ordinate log y und als Abszisse log x auf, so kann aus dem Anstieg im Falle eines linearen Verlaufs der gegebenen Wertetabelle der Exponent n aus Gleichung (5) sehr genau ermittelt werden, n muß dabei keineswegs ganzzahlig sein. Aus Physik und Chemie lassen sich zahlreiche Beispiele solcher Diagramme in doppellogarithmischen Koordinaten angeben. Der Handel hält für diesen Zweck entsprechend vorgedruckte logarithmisch eingeteilte Millimeterpapiere bereit. Wir wollen hierfür ein Beispiel aus der Thermochemie erläutern: 1912 hat der bedeutende niederländische Physiker Peter Debye für den Verlauf der Molwärmen C fester Körper bei sehr tiefen Temperaturen T theoretisch ein T^3-Gesetz nach der Formel

$$C = K \cdot T^3 \tag{7}$$

vorausgesagt. Später ist dieses Potenzgesetz an zahlreichen einfachen Kristallen nichtmetallischer Art bestätigt worden, nachdem man mit Hilfe des flüssigen Heliums Messungen bei sehr tiefen Temperaturen durchführen konnte. Die Molwärme C eines Stoffes ist dabei diejenige Wärmemenge, die man zur Temperaturerhöhung um ein Grad benötigt, wenn ein Mol gemessen wird. Nach Gleichung (7) muß die Molwärme C steil abfallen, wenn die Temperatur auf sehr kleine Werte erniedrigt wird. **Tabelle 2** enthält eine sehr genaue Messung für Flußspat CaF_2, die wir logarithmisch auswerten wollen, um Gleichung (7) zu überprüfen.

Tabelle 2: Molwärme von Flußspat bei sehr tiefen Temperaturen, (Temperaturangaben in Kelvin)

$\frac{T}{\text{in Kelvin}}$	lg T	Molwärme C	lg C	lg $C_{theor.}$	$C_{theor.}$
17,5	1,2430	0,022	-1,6575	-1,636	0,023
19,9	1,2988	0,034	-1,4685	-1,470	0,034
23,5	1,3711	0,056	-1,2518	-1,255	0,055
27,6	1,4409	0,092	-1,0362	-1,047	0,089
29,15	1,4646	0,110	-0,9586	-0,977	0,104
36,0	1,5563	0,179	-0,7471	-0,745	0,180
55,1	1,7411	0,68	-0,1675	-0,154	0,668

Aufgaben

4 Man zeichne die Molwärme C gegen die Temperatur T als kubischen Graph.

5 Man berechne die Anstiegswerte aus dem logarithmischen Diagramm jeweils zwischen den benachbarten Punkten und bilde den Mittelwert für die Steigung.

Abb. 2 gibt den sehr guten linearen Verlauf in doppeltlogarithmischen Koordinaten an. Die Rechnung liefert einen Anstieg mit dem Wert m = 2,98, also aufgerundet 3, wie es Gleichung (7) verlangt. Der Achsenabschnitt berechnet sich zu

$$\log K = -5 \cdot 34, \text{ d. h. } K = 4{,}6 \cdot 10^{-6}. \tag{8}$$

Auch dieser Wert steht in guter Übereinstimmung mit der theoretischen Formel von Debye, die wir hier aber nicht erläutern wollen. Auch nach Erfindung der Taschenrechner lohnt die Beschäftigung mit Logarithmen. Man kann nun mit den Mitteln der höheren Mathematik aus dem Minimum der Fehlerquadratsummen bei jeder Messung nach Gauss noch eine genaue Ausgleichsrechnung für die ermittelten Geraden durchführen. Für die Güte der jeweiligen Messung und Berechnung wird dann ein Korrelationskoeffizient definiert, der im theoretischen Idealfall, d. h. wenn sämtliche Fehler verschwindend klein ausfallen, den Wert eins annimmt. In unserem Beispiel für die Planeten beträgt er 0,99995, eine glänzende Bestätigung für den großen Astronom Johannes Kepler, der die Planetengesetze vor 380 Jahren genial erkannt hat.

J. Buhrow

Die Olympiade-Ecke

Der Landeswettbewerb Mathematik Baden-Württemberg

Überregionale Mathematikrunden, die sich als eigenständige Fördermaßnahmen für die Jüngeren unter Euch (etwa aus den 8. und 9. Klassen) verstehen, sind in den alten Bundesländern noch sehr spärlich gesät. Soweit mir bekannt ist, gibt es davon nur drei. Der älteste und über lange Zeit auch einzige Wettbewerb dieser Art, ist der Mathematik-Wettbewerb des Landes Hessen, der im Schuljahr 1969/70 zum ersten Mal ausgetragen wurde. Genau 20 Jahre später hat der Landeswettbewerb Rheinland-Pfalz das Laufen gelernt. Gegen diese beiden Konkurrenten konnte sich nur noch ein dritter Vertreter dieser Gattung behaupten: der Landeswettbewerb Mathematik Baden-Württemberg. Gerade mal zwei Jahre älter als sein rheinischer Vetter, geht nun die baden-württembergische Variante mit Beginn des Schuljahres 1992/93 bereits in die sechste Runde.

Ursprünglich sollte der Wettbewerb im Süd(west)en Deutschlands die bisher vernachlässigte Zielgruppe der Schüler bis einschließlich Klassenstufe 9 ansprechen. Aber schon in seinem zweiten Austragungsjahr wurden auch Schüler der Jahrgangsstufe 10 zugelassen, so daß nun zwei Wettbewerbe sozusagen parallel laufen. Um die unterschiedlichen Vorkenntnisse zu berücksichtigen, können sich alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer der ersten Runde bis hinauf zur Klassenstufe 9 vier der sechs gestellten Aufgaben auswählen, während für Schülerinnen und Schüler der 10. Klassen nur die Aufgaben 3 bis 6 gewertet werden können. Einzelheiten darüber kann Euch aber viel genauer StD Franz Amann aus Mannheim erzählen, der uns den nachfolgenden Bericht zugeschickt hat. Franz Amann, der seit vielen Jahren in der Förderung mathematisch Begabter tätig ist, gehört (als geschäftsführendes Mitglied) der Arbeitsgruppe an, die vom baden-württembergischen Ministerium für Kultus und Sport mit der Durchführung des Landeswettbewerbs beauftragt worden ist.

Die Beschäftigung mit Mathematik: Eine Mausefalle für Problemlöser

Das Kultusministerium Baden-Württemberg lädt seit 1987 alle Schülerinnen und Schüler von Realschulen und Gymnasien bis einschließlich Klassenstufe 10 zur Teilnahme am Landeswettbewerb Mathematik ein. Dieser Wettbewerb soll zur Beschäftigung mit mathematischen Problemen anregen und bietet Freunden kniffliger Aufgaben die Möglichkeit, ihre Fähigkeiten zu erproben und weiterzuentwickeln.
Auch die jüngeren Leser von alpha haben sicherlich schon selbst die Herausforderung erlebt, die von einer scheinbar leicht lösbaren Aufgabe gerade dann ausgeht, wenn der erste oder zweite Lösungsversuch gescheitert ist. Der österreichische Schriftsteller Egmont von Colerus hat in einem seiner populär-mathematischen Bücher diese Situation mit einer Mausefalle verglichen, in der man dann gefangen ist. Bei der Auswahl der Aufgaben gehen wir deshalb davon aus, daß die Problemstellungen den Schülern nicht fremdartig und die Lösung – wenn auch unter Schwierigkeiten – erreichbar erscheinen sollen. Auf verfremdende Einkleidungen wird in der Regel bewußt verzichtet. Zu jeder der Aufgaben 1 bis 4 muß es mindestens eine Lösung geben, zu der die erforderlichen Kenntnisse zum Zeitpunkt des Wettbewerbs normalerweise auch bei den Schülern der Klassenstufe 8 vorhanden sind.
In welchem Umfang uns die Realisierung dieser Zielsetzungen bei den Aufgaben des Wettbewerbs 1991 gelungen ist, möchte ich dem Urteil der Leser überlassen.

Aufgabe 1
Bei einem Trapez sind drei Seiten gleich lang; die vierte Seite hat die doppelte Länge.
Unter welchem Winkel schneiden sich die Diagonalen?

Aufgabe 2
Addiert man die Einerziffern aller Teiler von 1991^{1990}, so erhält man ein Vielfaches von 1991.
Welches Vielfache ist es?

Aufgabe 3
Gegeben ist ein Dreieck ABC. Der Kreis k_1 geht durch C und berührt die Gerade (AB) in A, der Kreis k_2 geht durch C und berührt die Gerade (AB) in B.
Für welche Dreiecke ABC liegen C und die Mittelpunkte der Kreise k_1 und k_2 auf einer Geraden?

Aufgabe 4 (Zeichnung)
Ein Quadrat ABCD wird in vier Teilflächen zerlegt (siehe Figur).

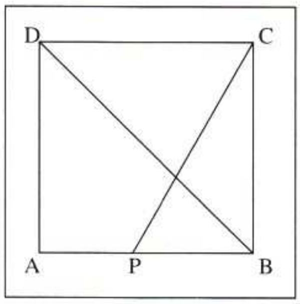


Abb. 1

Kann man den Punkt P auf der Strecke AB so wählen, daß sich die Inhalte der vier Teilflächen wie 1:2:3:4 verhalten?

Aufgabe 5
Zeige: Für jede natürliche Zahl n (n>0) läßt sich 9^n als Summe von 3^n aufeinanderfolgenden Zahlen darstellen.

Aufgabe 6
Gegeben sind sechs Punkte. Je drei dieser Punkte bilden ein Dreieck. Die Seiten dieser Dreiecke sollen rot oder grün angemalt werden.
Kann man vermeiden, daß eines dieser Dreiecke nur gleichfarbige Seiten hat?

Die Vorstellung der Rahmenbedingungen möchte ich mit einem kurzen Rückblick auf die vergangenen Jahre verknüpfen.
Bei der Planung, Vorbereitung und Durchführung arbeitet eine Gruppe von etwa zehn Mathematikern zusammen. So können die anfallenden Arbeiten auf mehrere Schultern verteilt und eine vielfältige Palette von Erfahrungen aus der praktischen Arbeit an verschiedenen Schulen genutzt werden.
In den ersten vier Jahren haben bis zu 600 Jugendliche die Herausforderung des Wettbewerbs angenommen. Die jüngsten Teilnehmer kamen bereits aus Klassenstufe 6 - der jüngste erste Preisträger aus Klassenstufe 7. Mit ungefähr 30 % ist der Anteil der Mädchen für einen mathematischen Wettbewerb erfreulich hoch. Die hervorragenden Arbeiten von Teilnehmerinnen in den vier abgeschlossenen Wettbewerben haben das Vorurteil widerlegt, daß Mathematik nichts für Mädchen sei.
In diesem Jahr haben 400 Schüler an der ersten Runde teilgenommen. Bei der Abfassung dieses Berichts lagen die Ergebnisse der Korrektur noch nicht vor.
Die erste Runde des Wettbewerbs beginnt jeweils Ende September. Einsendetermin ist etwa eine Woche nach Ende der Herbstferien. In dieser Zeit sind vier Aufgaben zu Hause selbständig zu bearbeiten. Um die unterschiedlichen Vorkenntnisse zu berücksichtigen, werden insgesamt sechs Aufgaben von unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad gestellt. Jüngere Schüler können aus diesen sechs Aufgaben vier auswählen, während für Teilnehmer der Klassenstufe 10 nur die Aufgaben 3 bis 6 gewertet werden. Für einen ersten Preis ist die Bearbeitung von vier Aufga-

ben notwendig. Die ersten, zweiten und dritten Preisträger erhalten jeweils eine Urkunde und einen Buchpreis. Für die Anzahl der Preisträger gibt es keine obere Grenze. Trotzdem war in den vergangenen Jahren die Anzahl der ersten Preisträger unabhängig von der Teilnehmerzahl mit ca. 90 recht stabil.

Für diese ersten Preisträger der ersten Runde besteht die Möglichkeit, sich durch die Teilnahme an einer zweiten Runde für ein mehrtägiges mathematisches Seminar zu qualifizieren. Die Aufgaben zu dieser zweiten Runde werden den Jugendlichen Ende Januar persönlich zugesandt.

Die Zielsetzung dieser viertägigen Seminare umfaßt drei Bereiche:

- intensive Beschäftigung mit einem mathematischen Thema außerhalb oder am Rande der Schulmathematik
- Schaffung von Kontaktmöglichkeiten zwischen Jugendlichen mit ähnlich gelagerten Interessen
- Anregungen zur Beschäftigung mit außermathematischen Fragestellungen durch Besichtigungen und Vorträge auch aus dem Kreis der Teilnehmer

Die mathematischen Themen werden so gewählt, daß die erforderlichen Vorkenntnisse aus der Schulmathematik möglichst gering sind. Wir sind darüber hinaus immer gerüstet, durch zusätzliche Materialien anfängliche Unterschiede rasch aufzufangen.

Neben besonderen Themen aus Zahlentheorie und Geometrie, wie das Rechnen mit Kongruenzen, Eulersche φ-Funktion, Randwinkelsatz und Umfeld etc., haben wir uns bereits mit Problemlösestrategien und Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt.

Das charakteristische Merkmal der Seminarwochen liegt aber nicht in der Themenwahl, sondern in der Arbeitsweise.

Jede Arbeitsphase umfaßt einen Zeitraum von circa drei Zeitstunden. In einer kurzen Einführung von 20 bis 30 Minuten werden die Schüler auf die Problemstellung vorbereitet und ziehen sich dann für etwa 1 1/2 Stunden in Einzel- und Gruppenarbeit zurück. Während dieser Zeit stehen die betreuenden Lehrer und auch zwei ältere Schüler oder Studenten für die Beantwortung von Fragen bereit. Selbstverständlich gehen wir auch zu den einzelnen Gruppen und geben Anregungen, falls dies gewünscht oder erforderlich wird. Nach jeder Arbeitsphase werden die Ergebnisse im Plenum diskutiert. Dadurch wird sichergestellt, daß alle Teilnehmer die erforderlichen Vorkenntnisse für die weitere Arbeit haben.

Begünstigt durch einen großzügigen Zeitrahmen und losgelöst vom 45-Minuten-Takt des Unterrichts, versuchen wir auch, die Schüler selbst schöpferisch tätig werden zu lassen. Dazu geben wir zusätzlich zu den konkreten Übungsaufgaben auch offene Fragestellungen oder Leitfragen vor. Auf dieser Grundlage sollen sich die Teilnehmer in das Thema einarbeiten. Wir ermuntern sie auch, selbst weitergehende Fragestellungen aufzuspüren, zu formulieren und schließlich zu beantworten. Den Schülern soll damit die Möglichkeit gegeben werden, sich im wissenschaftlichen Arbeiten zu erproben.

Ein Beispiel soll dies abschließend erläutern. Nach einer Einführung zur Kongruenzenrechnung mit anschließenden Grundaufgaben, Beweisübungen und Anwendungen bei Problemen aus der Zahlentheorie lautet ein "Forschungsauftrag" zum Thema Zyklen bei der Multiplikation.

a) Als Grundlage für das nachfolgende Beispiel dient die Multiplikation mod 7. Stellt man die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 als Punkte dar und deutet durch Pfeile an, in welche Zahl jede dieser Zahlen bei Multiplikation z. B. mit 2 übergeht, so erhalten wir die beiden Zyklen

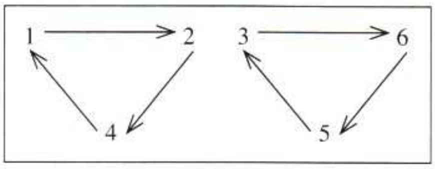


Abb. 2

Bestimme auch für die Multiplikation mit 3, 4, 5 und 6 mod 7 die Zyklen.

b) Untersuche nun die Zerlegung in Zyklen bei der Multiplikation mod 12. Welche Unterschiede fallen Dir auf?

c) Führe die Untersuchung auf Zyklen bei der Multiplikation für weitere Primzahlmoduln und Nichtprimzahlmoduln durch. Versuche möglichst viele Eigenschaften der Zerlegungen herauszufinden.

Wie Ihr dem Aufsatz von Herrn Amann habt entnehmen können, erhalten die erfolgreichsten Teilnehmer des baden-württembergischen Wettbewerbs am Ende noch einige seltene Einblicke in ihnen unbekannte Bereiche der Mathematik. Aber auch zu Beginn eines jeden neuen Wettbewerbsjahres versuchen die Veranstalter, mathematisch interessierte Schüler mit ungewöhnlichen Ausschnitten aus dem weiten Feld der Rechenkunst zu ködern. Am liebsten locken die Organisatoren auf ihren Plakaten mit besonders dekorativen Lösungsbeispielen aus früheren Aufgabenrunden. So zeigt etwa das Plakatmotiv zur 1. Runde des Jahres 1990 eine graphische Darstellung der Lösung zu Aufgabe 1 des 1989er Wettbewerbs (siehe Abb. 3):

Schneide aus Papier zwei kongruente, konvexe Vierecke aus. Zerschneide das eine längs der einen, das andere längs der anderen Diagonalen. Kannst Du die vier entstandenen Dreiecke *immer* zu einem Parallelogramm zusammenlegen? Begründe Deine Antwort! *(Hinweis: Ein Viereck heißt konvex, wenn seine Diagonalen vollständig im Innern verlaufen.)*

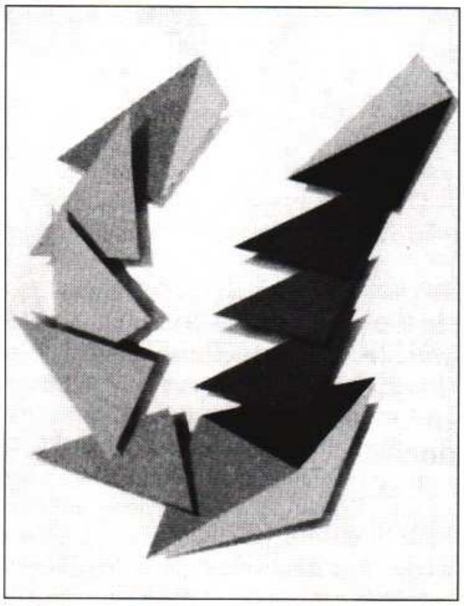


Abb. 3

Der Schmetterlingssatz

Selbst auf dem begleitenden Wettbewerbsprospekt warten die Ausrichter noch mit überraschenden Querverweisen auf. Manchmal machen sie sogar Anleihen aus dem Naturreich, hinter denen wohl nur die wenigsten unter Euch tiefere mathematische Zusammenhänge vermuten. So war auf dem Plakat des 3. Landeswettbewerbs ein westafrikanischer Segelfalter der Spezies *Graphium tynderaeus Fabricius* zu bewundern. Seine ausgebreiteten Flügel dienten der Veranschaulichung einer sonderbaren Eigenschaft von Kreissehnen, die unter dem Namen **Schmetterlingssatz** in die Geometrie eingegangen ist.

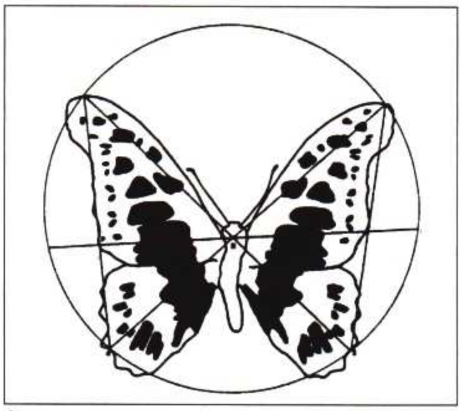


Abb. 4

Sind CD und EF zwei beliebige Kreissehnen, die sich im Mittelpunkt M einer gegebenen Sehne AB schneiden, so sind die Strecken MP und MQ gleich lang. Dabei sind P bzw. Q die Schnittpunkte der Sehne AB mit den Strecken CF bzw. DE.

Der mathematische Kern des Schmetterlingssatzes wird durch Abb. 5 auf der folgenden Seite verdeutlicht. Es gibt eine Reihe von Beweisen dieses Satzes. Der folgende ist zwar nicht der kürzeste, er erfordert dafür aber nur Kenntnisse aus der Mittelstufe.

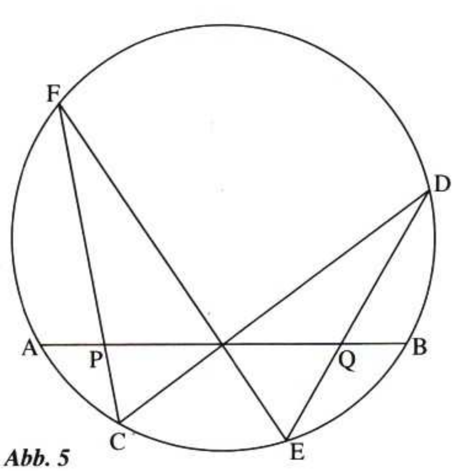


Abb. 5

Beweis

Spiegelt man den Punkt F an der Mittelsenkrechten m der Strecke AB, so entsteht das gleichschenklige Dreieck FF'M. Da sowohl AB als auch FF' zu dieser Mittelsenkrechten m orthogonal sind, sind sie zueinander parallel. Aus der Gleichschenkligkeit von FMF' und der Parallelität von AB und FF' ergibt sich

$\sphericalangle MFF' = \sphericalangle FF'M = \sphericalangle FMP = \sphericalangle QMF' = \varphi$ (1)

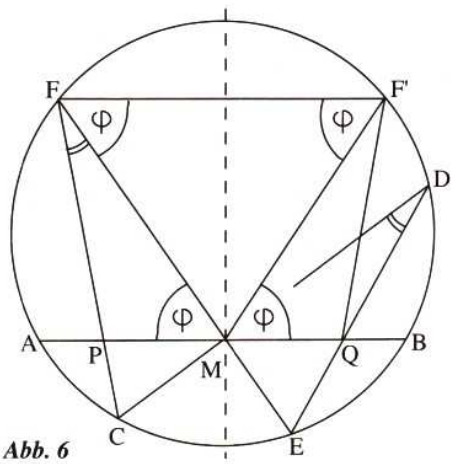


Abb. 6

Es soll nun gezeigt werden, daß die Dreiecke PMF und MQF' kongruent sind.

Da die Strecken FM und F'M gleich lang und die Winkel FMP und QMF' gleich groß sind, genügt dazu der Nachweis, daß in den beiden Dreiecken PMF und MQF' zusätzlich die Winkelmaße bei F und F' übereinstimmen.

In dem Sehnenviereck EDF'F ergänzen sich die Innenwinkel bei F und D zu 180°. Da nach (1) der Winkel QMF' ebenso groß ist wie der Winkel MFF', gilt auch

$\sphericalangle F'DQ + \sphericalangle QMF' = 180°$.

Nach der Umkehrung des Satzes über Sehnenvierecke liegen die Punkte D, F', M und Q auf einem Kreis (siehe Abb. 7).

Als Randwinkel im gleichen Bogen über der Sehne CE gilt (Abb. 6)

$\sphericalangle CFE = \sphericalangle CDE$ (2).

Im kleinen Kreis (Abb. 6) gilt als Randwinkel über der Sehne QM entsprechend

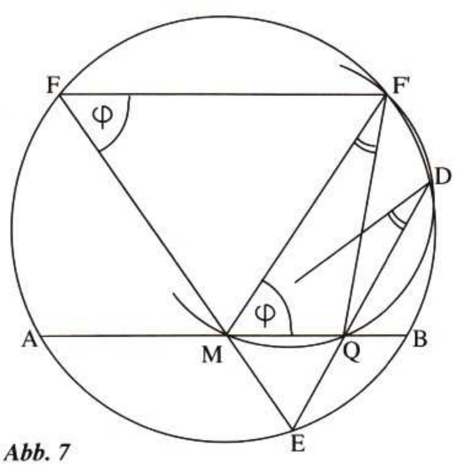


Abb. 7

$\sphericalangle MF'Q = \sphericalangle MDQ$ (3).

Da der Punkt M auf der Strecke CD und der Punkt Q auf der Strecke ED liegen, folgt

$\sphericalangle CFE = \sphericalangle CDE$

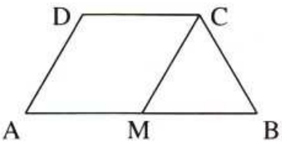
$= \sphericalangle MDQ = \sphericalangle MF'Q$

Faßt man zusammen, so stimmen in den Dreiecken PMF und MQF' eine Seitenlänge und die Winkelmaße der beiden anliegenden Winkel paarweise überein. Die beiden Dreiecke sind damit kongruent.

Dies bedeutet, daß die Strecken PM und MQ gleich lang sind, womit die Behauptung bewiesen ist.

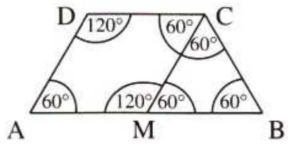
Landeswettbewerb Baden-Württemberg 1991

Lösung zu Aufgabe 1:



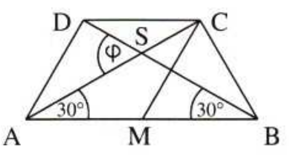
Verbindet man den Mittelpunkt M der Seite AB mit dem Punkt C, so wird das Trapez in ein Dreieck MBC und ein Viereck AMCD zerlegt. Die Seiten AM und CD des Vierecks AMCD sind gleich lang und parallel. Das Viereck AMCD ist deshalb ein Parallelogramm, woraus dann folgt, daß auch die Seiten MC und AD parallel und gleich lang sind. Dies bedeutet aber

$\overline{AM} = \overline{MB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = \overline{MC} = x$.



Das Trapez wird also in ein gleichseitiges Dreieck MBC und eine Raute AMCD zerlegt. Daraus ergeben sich die im obenstehenden Bild eingetragenen Winkelmaße. Zeichnet man in die Raute AMCD die Diagonale AC ein, so entstehen zwei gleichschenklige, kongruente Dreiecke AMC und CDA. Die Diagonale AC ist die Winkelhalbierende in der Raute AMCD. Deshalb gilt $\sphericalangle MAC = 30°$.

Aus Symmetriegründen ist dann auch $\sphericalangle DBM = 30°$. Der Schnittwinkel der beiden Diagonalen ist Außenwinkel des Dreiecks ABS, und es gilt: $\varphi = 60°$.



Lösung zu Aufgabe 2:

Die Zahl 1991 hat die Primfaktorzerlegung $11 \cdot 181$, deshalb gilt für die Primfaktorzerlegung von 1991^{1990}

$1991^{1990} = (11 \cdot 181)^{1990} = 11^{1990} \cdot 181^{1990}$.

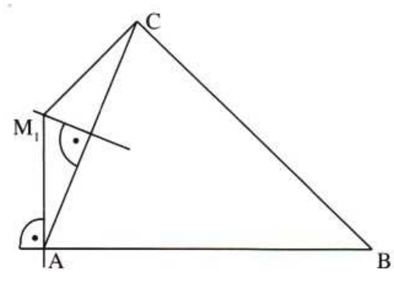
Jeder Teiler von 1991^{1990} hat deshalb die Form $11^a \cdot 181^b$ mit $0 \leq a, b \leq 1990$. Jeder dieser Teiler besitzt die Einerziffer 1. Die Summe der Einerziffern aller Teiler ist deshalb gleich der Anzahl der Teiler von 1991^{1990}. Um diese Anzahl der Teiler zu bestimmen, überlegt man so:

Man weiß, daß für eine Zahl n mit der Primfaktorzerlegung

$p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots p_k^{r_k}$

die Anzahl T(n) der Teiler $T(n) = (r_1+1) \cdot (r_2+1) \cdot \ldots \cdot (r_k+1)$ beträgt. Durch Vergleich mit $1991^{1990} = 11^{1990} \cdot 181^{1990}$ erhält man dann $r_1 = r_2 = 1990$ und damit $T(1991^{1990}) = 1991 \cdot 1991 = 1991^2$. Die Summe der Einerziffern aller Teiler ist also das 1991-fache von 1991.

Lösung zu Aufgabe 3



Damit der Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 die Gerade (AB) im Punkt A berührt, muß die Gerade (AM_1) orthogonal zu (AB) sein.

Damit der Kreis k_1 durch die Punkte A und C geht, muß sein Mittelpunkt M_1 auf der Mittelsenkrechten von AC liegen. Das Dreieck ACM_1 ist dann gleichschenklig.

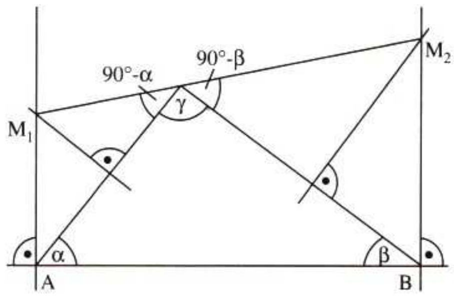
Der Mittelpunkt M_1 ist also der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AC mit der Orthogonalen zur Geraden (AB) im Punkt A. Entsprechendes gilt für den Mittelpunkt M_2 des Kreises K_2.

1. Fall ($\alpha, \beta < 90°$)

Aus diesen Vorüberlegungen ergeben sich für die Winkel in den Dreiecken ACM_1 und BM_2C die Eigenschaften

$\sphericalangle CAM_1 = \sphericalangle M_1CA = 90° - \alpha$

$\sphericalangle M_2BC = \sphericalangle BCM_2 = 90° - \beta$.



Die Punkte M_1, C und M_2 liegen genau dann auf einer Geraden, wenn der Winkel M_1CM_2 ein gestreckter Winkel ist, d. h. wenn gilt:

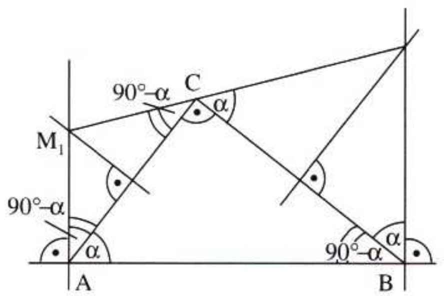
$90° - \alpha + \gamma + 90° - \beta = 180°$

Daraus folgt $\gamma = \alpha + \beta$.

Da andererseits wegen der Winkelsumme im Dreieck ABC auch $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ gilt, erhält man $\gamma = \alpha + \beta = 90°$.

Nachweis der Umkehrung

Hat das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel, so liegen die Punkte M_1, M_2 und C auf einer Geraden. In der untenstehenden Figur sind die Dreiecke ACM_1 und BM_2C wieder gleichschenklig mit den Basen AC bzw. BC.

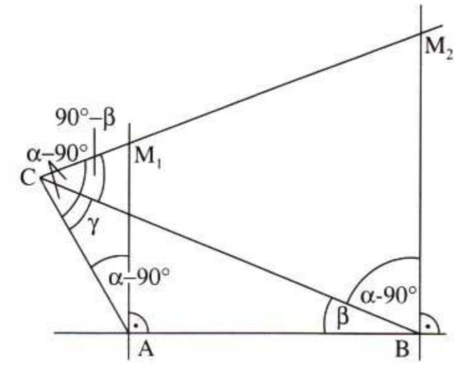


Da das Dreieck ABC nach Voraussetzung rechtwinklig ist, gilt $\beta = 90° - \alpha$. Daraus ergeben sich die in der nebenstehenden Figur eingetragenen Winkelmaße. Die drei Teilwinkel bei C ergänzen sich zu 180°. Die drei Punkte M_1, M_2 und C liegen also auf einer Geraden. Damit ist gezeigt, daß für $0° < \alpha, \beta < 90°$ die drei Punkte genau dann auf einer Geraden liegen, wenn das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel hat.

2. Fall ($\alpha = 90°$ oder $\beta = 90°$)

Die Punkte C und M_1 liegen auf der Orthogonalen o_A zu (AB) im Punkt A. Da der Kreis um M_1 durch die Punkte A und C geht, sind die Punkte M_1 und C verschieden. Die Gerade (CM_1) stimmt also mit der Orthogonalen o_A überein. Der Punkt M_2 liegt auf der Orthogonalen o_B zu (AB) im Punkt B. Diese beiden Orthogonalen sind parallel zueinander und verschieden. Deshalb können M_1, C und M_2 nicht auf einer Geraden liegen.

3. Fall (a > 90° oder b > 90°)



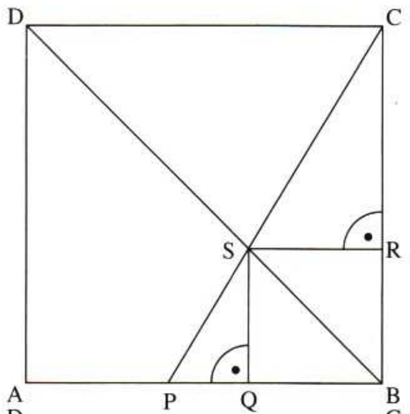
Es sei $\alpha > 90°$. Der Punkt M_1 liegt dann zwischen C und M_2, wenn $\sphericalangle ACM_1 = \sphericalangle ACM_2$ gilt. Entsprechend der obenstehenden Skizze muß dann die Bedingung

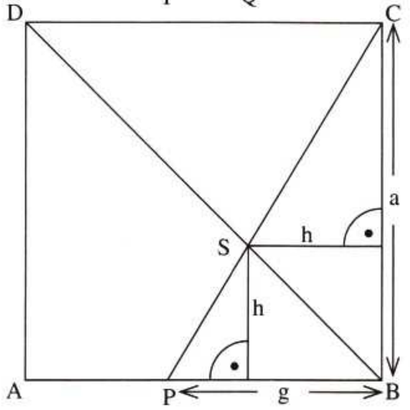
$\alpha - 90° = 90° - \beta + \gamma$

$\alpha + \beta - \gamma = 180°$ erfüllt sein. Dies steht aber im Widerspruch zu $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ als Winkelsumme im Dreieck ABC. Entsprechend zeigt man, daß auch $\beta > 90°$ zum Widerspruch führt.

Lösung zu Aufgabe 4:

Beh.: Die Lage des Punktes P kann *nicht* in der gewünschten Weise festgelegt werden.





Da die Diagonale BD die Winkelhalbierende im Quadrat ist, gilt $\sphericalangle PBS = \sphericalangle SBC = 45°$. Zeichnet man vom Schnittpunkt S der Strecken PC und BD die Lote auf die Quadratseiten AB und BC, so entsteht ein Rechteck SQBR. Dieses Rechteck ist sogar ein Quadrat, da die Teildreiecke SQB und BRS jeweils gleichschenklig-rechtwinklig sind. Zunächst wird die Lage des Punktes P so bestimmt, daß der Flächeninhalt des Dreiecks BCS doppelt so groß wie der Inhalt des Dreiecks PBS ist. Es wird nachgewiesen, daß diese Eigenschaft nur dann erfüllt ist, wenn P der Mittelpunkt der Strecke AB ist. Die Höhen SQ und SR in den Dreiecken PBS und BCS über den Grundseiten PB bzw. BC sind gleich lang, da QBRS ein Quadrat ist. Das Dreieck BCS hat den doppelten Flächeninhalt wie das Dreieck PBS, wenn die Seite BC doppelt so lang wie PB ist. Also ist P der Mittelpunkt der Strecke AB. Der Flächeninhalt des Dreiecks PBC ist dann ein Viertel der Quadratfläche. Auf das Teildreieck PBS entfällt ein Drittel dieser Fläche. Der Flächeninhalt des Dreiecks PBS ist damit ein Zwölftel der Quadratfläche. Da das Dreieck PBS und das Viereck APSD zusammen halb so groß sind wie der Flächeninhalt des Quadrats, bleibt für den Flächeninhalt des Vierecks noch fünf Zwölftel der Quadratfläche. Der Inhalt des Vierecks APSD ist also fünfmal so groß wie der des Dreiecks PBS, im Widerspruch zur Aufgabenstellung. Man kann den Teilpunkt P auf der Strecke AB nicht so wählen, daß gleichzeitig das Dreieck SBC doppelt und das Viereck APSD viermal so groß ist wie das Dreieck PBS.

Lösung zu Aufgabe 5

Versucht man einen Nachweis der Behauptung für kleine natürliche Zahlen n, so erhält man gegebenenfalls durch Probieren

n=1 2+3+4 = 9

n=2 5+6+7+8+9+10+11+12+13=81

n=3 14+ ... ... +26+27+28+ ... ... +40=729

Aus diesen Beispielen kann man die Idee für die folgende allgemeine Lösung ableiten: Die Zahl 9^n ist stets durch 3^n teilbar, denn es gilt $9^n : 3^n = 3^n$. Die Zahl 9^n läßt sich also als Summe von 3^n Summanden darstellen, wobei jeder Summand den Wert 3^n hat.

$$\underbrace{3^n + 3^n + 3^n + ... + 3^n + ... + 3^n + 3^n + 3^n}_{3^n \text{ Summanden}} = 9^n$$

Da 3^n für alle natürlichen Zahlen n ungerade ist, besteht die Summe aus einer ungeraden Anzahl von Summanden. Geht man von dem gekennzeichneten mittleren Summanden 3^n aus, so kann man die restlichen jeweils zu Paaren zusammenfassen.

Vermindert man die Summanden links von 3^n um 1, 2, 3, ... und vermehrt gleichzeitig den Wert der Summanden rechts von 3^n um 1, 2, 3, ..., so wird der Wert der Gesamtsumme nicht verändert und man erhält eine Summe von aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen.

$...+(3^n - 3) + (3^n - 2) + (3^n - 1) + 3^n + (3^n + 1) + (3^n + 2) + (3^n + 3) + ...$

Die Anzahl der Zahlen kleiner als 3^n und größer als 3^n ist jeweils

$$\frac{1}{2}\cdot\left(3^n-1\right)$$

Der kleinste Summand ist also

$$3^n-\frac{1}{2}\cdot\left(3^n-1\right)=\frac{1}{2}\cdot 3^n+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(3^n+1\right)>0$$

Die Zahl 3^n+1 ist für alle $n \in N$ gerade. Deshalb ist der kleinste Summand eine ganze Zahl größer als Null und alle Summanden sind natürliche Zahlen.

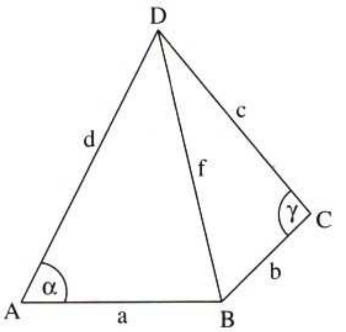
Lösung zu Aufgabe 6

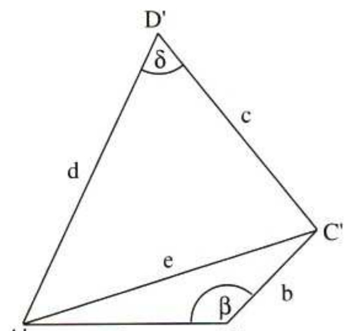
Von jedem der sechs Punkte gehen fünf Verbindungsstrecken zu den übrigen Punkten aus. Greift man sich z. B. den Punkt A heraus, so gibt es mindestens drei Strecken die gleich gefärbt sind. Ohne Einschränkung kann man annehmen, daß dies die Farbe "rot" ist und die anderen Endpunkte dieser rot gefärbten Strecken die Punkte B, C und D sind. Es gibt nun zwei Möglichkeiten: Färbt man eine oder mehrere der Verbindungsstrecken BC, BD und CD rot, so entsteht mindestens ein vollständig rot gefärbtes Dreieck ABC, ABD oder ACD. Färbt man keine dieser Verbindungsstrecken rot sondern alle drei grün, so entsteht das vollständig grün gefärbte Dreieck BCD. Da einer dieser beiden Fälle eintreten muß, läßt es sich nicht vermeiden, daß ein gleich gefärbtes Dreieck entsteht.

Lösung der Zusatzaufgabe

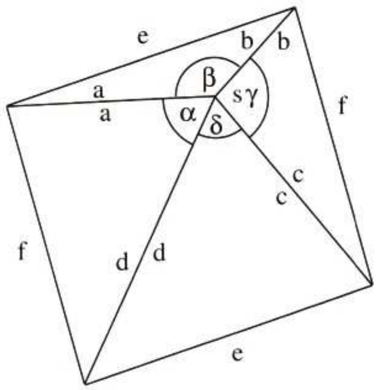
Behauptung: Es ist immer möglich, aus den vier bei der Zerlegung entstandenen Dreiecken ein Parallelogramm zu legen.

Beweis: Die beiden kongruenten Vierecke werden entsprechend der Aufgabenstellung zerlegt und wie unten angegeben benannt.



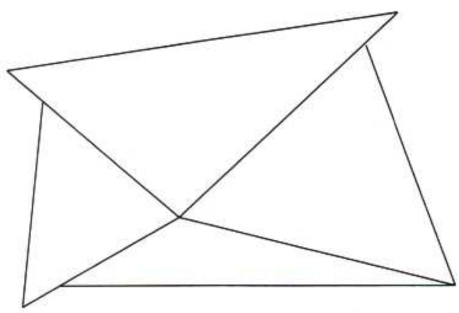


Nun legt man die vier Dreiecke so zusammen, daß die Punkte A, B', C und D'im Punkt S zusammenfallen.



Die neue Figur ist ein Viereck, denn es gelten folgende Eigenschaften:

Die Summe der Winkel bei S beträgt 360°, denn es tritt dort jeder Winkel des ursprünglichen Viereckes genau einmal auf. Die Winkelsumme in jedem Viereck beträgt 360°. Also liegen die Kanten der vier Dreiecke lückenlos und überschneidungsfrei nebeneinander.
Die aneinanderstoßenden Kanten der Teildreiecke sind gleichlang, da sie bei den beiden gegebenen Vierecken einander entsprachen. Beim Zusammenfügen der Teildreiecke kann also nicht die Situation eintreten, wie sie in der folgenden Abbildung dargestellt ist.



Es bleibt zu zeigen, daß die neue Figur ein Parallelogramm ist.
Die jeweils einander gegenüberliegenden Seiten der neuen Figur entsprechen den Diagonalen der ursprünglichen Vierecke und sind deshalb gleich lang. Ein Viereck aber, bei dem die Längen der gegenüberliegenden Seiten paarweise übereinstimmen, ist ein Parallelogramm.

Schickt mir originelle Aufgaben und Lösungen von mathematischen Wettbewerben, an denen Ihr teilgenommen habt. Schreibt auf, wenn Berichtenswertes in Sachen Mathematik in Eurer Stadt, in Eurem Bezirk oder Bundesland geschehen ist.

Paul Jainta,
Werkvolkstraße 10, 8540 Schwabach

Leserpost

(2.3) (11.13) (17.19) (29.31) (41.43) (59.61) (71.73) (101.103)

Wanted!

(3.5.7) (3.13.23) (7.13.19) (7.19.31.43) (41.47.53.59) (43.61.79.97)

Primzahlmehrlinge gesucht!

(47.59.71.83) (5.11.17.23.29) (7.37.67.97.127.157)

Was Primzahlzwillinge sind, weiß jeder (3,5) oder (29,31). Auch den Primzahldrilling findet man schnell: (3,5,7). Wir verallgemeinern nun den Begriff des Primzahlmehrlings dahingehend, daß jedes n-Tupel $(p_1, p_2, ...p_n)$ von Primzahlen $p_1, p_2, ..., p_n$ "n-ling" genannt wird genau dann, wenn $p_2 - p_1 = p_3 - p_2 = ... = p_{i+1} - p_i = ... = p_n - p_{n-1} = d$ ist. Kurz gesagt kann ein "n-ling" als arithmetische Folge mit n Gliedern und der Differenz d aufgefaßt werden, wobei sämtliche Glieder Primzahlen sind.
Hinsichtlich der Differenz d, der Startzahl p_1 und der dafür maximal möglichen Länge n_{max} gibt es einen interessanten Zusammenhang. Beispielsweise sind für $p_1 = 3$ höchstens "Drillinge" zu erwarten. Denn entweder ist d durch 3 teilbar, dann wäre $p_2 = 3 + d$ keine Primzahl, oder d ist nicht durch 3 teilbar, dann wäre spätestens $p_4 = 3 + 3d$ keine Primzahl. Analog findet man für $p_1 = 5$ den Wert $n_{max} = 5$. Dabei muß man allerdings voraussetzen, daß hier d durch 3 teilbar sein muß (Warum?).
Es ergeben sich nun folgende Fragestellungen:

a) Für welche Differenzen d kann man mit großen "n-lingen" rechnen? (Ein "n-ling" heiße groß, wenn n groß ist).

b) Wie kann man einen möglichst großen "n-ling" effektiv finden? Eine Frage, die geradezu danach drängt, mit einem Computer bearbeitet zu werden!

c) Wer findet den größten "n-ling"?

Schreibt mir Eure Lösungen!

Einsendungen an: Dr. W. Schöbel, Fr.-Engels-Str. 11, O-1560 Potsdam

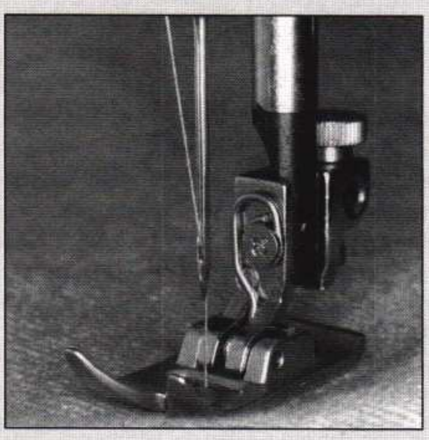
25. Mathe-Lager 2.7.1992

Auch in diesen Sommerferien trafen sich begabte Schüler der Klassenstufen 5 – 8 zum Mathematik-Lager in Strausberg.
Wie im vergangenen Jahr waren wir dort kostenfrei in der Clara-Zetkin-Schule untergebracht. Um der Hitze dieser sonnigen Tage auszuweichen, wurden uns für den Unterricht einige angenehm kühle Räume des Freizeithauses bereitgestellt. Außerdem hatten wir am Nachmittag die Möglichkeit, hier das umfangreiche Angebot an Computer- und Freizeitspielen, Büchern, Schallplatten, Cassetten und Sportgeräten zu nutzen. Ebenso vergnügten wir uns am Bötzsee bei einem erfrischenden Bad und beim Fossiliensammeln im Tagebau von Rüdersdorf. Abends wurden in der Turnhalle der Schule Fußball- und Volleyballwettkämpfe oder Tischtennisturniere ausgetragen. Ohne die große Mühe unserer Lehrer, die das Lager organisierten und ihre freie Zeit mit uns teilten, hätten wir diese erlebnisreichen Tage nicht verbringen können. Ein Dankeschön möchte ich auch der Clara-Zetkin-Schule und dem Freizeithaus für ihre freundliche Unterstützung aussprechen. Ich freue mich auf das nächste Mathematiklager und hoffe auf staatliche Finanzierung, damit diese gute Fördereinrichtung auch zukünftig weiterbestehen kann.

Gundula Heinen, Klasse 6

Die rasende Nadel

Geschwindigkeit ist keine Hexerei. Und doch würde es noch unseren Großeltern wie Zauberei vorkommen, würde man ihnen vorführen, mit welchem Tempo heutzutage ein Kleidungsstück fertiggestellt wird. Möglich wurde dies durch die Entwicklung von Hochleistungs-Maschinen, deren "Herzstücke", also Antrieb und Nadel, enormen Anforderungen genügen müssen.
"Normale" Schnelläufer unter den Maschinen zur Herstellung von Anzügen, Kleidern, Hemden etc. nähen etwa 6.000 Stiche pro Minute. Eine dem höchsten Stand der Technik entsprechende Profi-Nähmaschine bringt es auf bis zu 160 Stiche pro Sekunde.



Wieviel Stiche schafft eine Nähmaschine pro Arbeitstag; angenommen, sie würde fünf Stunden ohne Unterbrechung laufen? Wieviele Stiche im Jahr (220 Arbeitstage)?

Presse-Information des Stahl-Informations-Zentrums

alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett und in Verbindung mit Dr. Gabriele Liebau, Dr. Claus Peter Helmholtz und Herbert Kästner.

Redaktion:
Jürgen Ricke, Tel.: (05 11) 4 00 04-42
Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6
Redaktionskollegium:
StR F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), OL Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pliezhausen), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OStR J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. W. Schmidt (Greifswald), OStR G. Schulze (Herzberg), W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

Anzeigenleitung: Bernd Schrader
Anzeigenabwicklung:
Telefon: (05 11) 4 00 04-23
Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01. 01. 1990
Vertrieb und Abonnement:
Telefon: (05 11) 4 00 04-50
Verlag:
Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG,
Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6
Telefon: (05 11) 4 00 04-0
Telefax: 4 00 04-19
Das Jahresabonnement für **alpha** besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt 12,00 DM, im Einzelbezug 2,50 DM. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten. Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).

alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV KlettCotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, DH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.

Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschriften im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.

Herstellung: PZ Pädagogika Zentrale GmbH
Gestaltung: Jens Hinzmann
Druck: Druckerei Schröer, Seelze
ISBN 3-617- 34011-3

992 1742 1917 837

Was geschah vor...Jahren?

1992 Chronologie Teil IV

1542 in Wittenberg erscheint die "Trigonometrie" des Nicolaus Copernicus (1473-1543). Die Hauptbeiträge zur Entwicklung der Trigonometrie waren die Neuentdeckung des sphärischen Sinussatzes und die Aufstellung der ersten Sekantentafel

1692 der französische Gelehrte Laurent Pothenot gibt eine Darstellung des Rückswärtseinschneidens nach drei Punkten (siehe Text)

1717 am 17. November Jean Baptiste le Rond d'Alembert in Paris geboren. d'Alembert lieferte fundamentale Beiträge zur Analysis, über den Fundamentalsatz der Algebra, über theoretische Mechanik – er war Mitherausgeber der berühmten "Encyclopédie" [Enzyklopädie oder nach Vernunftgründen geordnetes Wörterbuch der Wissenschaften, Künste und Gewerbe].

1842 am 12. November John William Strutt [Lord Rayleigh] geboren (siehe Text)

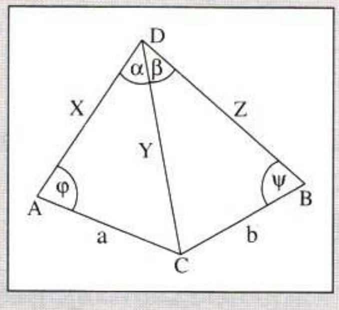
1942 der deutsche Mathematiker Robert Remak stirbt im Konzentrationslager Auschwitz. Remak war der Verfasser bedeutender algebraischer Arbeiten

1972 am 5. Oktober starb der bedeutende amerikanische Mathematiker Solomon Lefschetz. Lefschetz arbeitete über algebraische Geometrie, Topologie, über Differentialgleichungen

1992 das Weltraumteleskop "Hubble" liefert die ersten klaren Aufnahmen eines superheißen Sterns im Milchstraßensystem. Der Stern NGC 2440-Nucleus ist 33mal so heiß wie die Sonne und damit der heißeste Stern, der bekannt ist

1992 in New York wird mit Hilfe eines Computers die 32. Mersennsche Primzahl berechnet. Mersennsche Primzahlen (Mp) sind Zahlen der Form $Mp=2^p-1$, wobei p selbst Primzahl ist. Die gefundene Zahl hat 227853 Ziffern.

Die Pothenotsche Aufgabe



Der Franzose Laurent Pothenot war vom 1711 bis zu seinem Tode im Jahre 1732 Professor der Mathematik in Paris. Seit 1682 war er auch Mitglied der dortigen Akademie der Wissenschaften. Im Jahre 1699 wurde er aus ihr wegen oftmaligen Fehlens bei den Sitzungen der Akademie ausgeschlossen. Die sogenannte "Pothenotsche Aufgabe" löste er in einer Akademieabhandlung im Jahre 1692. Die Aufgabe ist einfach zu erläutern (siehe Zeichnung). In der Figur sind a, b, α, ß bekannt. Gesucht wird x, y, z. Offenbar hat die Aufgabe praktische Bedeutung. Man stelle sich z. B. vor, daß sich zwischen dem Punkt D und dem Streckenzug ACB ein Sumpfgebiet befindet. Die Strecken x, y, z sind dann möglicherweise direkt überhaupt nicht bestimmbar. Die Aufgabe ist elementar erläuterbar und sie ist sogar elementar lösbar. "Elementar" bedeutet hier und in ähnlichen Fällen aber nicht "einfach". Man benötigt zur Lösung der Aufgabe Kenntnisse der ebenen Trigonometrie und einen "Trick". Der Trick besteht darin, daß man einen völlig unanschaulichen Winkel durch $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \cos\eta$ einführt und mit Hilfe dieses Winkels und $\tan\frac{\varphi+\psi}{2}$ den Ausdruck $\tan\frac{\varphi-\psi}{2}$ bestimmt.

Da $\varphi + \psi$ bekannt ist und $\varphi - \psi$ ausrechenbar ist, sind φ und ψ einzeln bestimmbar. Eine ausführliche Lösung findet sich in dem bekannten Buch: Bronstein, J. N., Semendjajew, K. A., Taschenbuch der Mathematik, z. B. Moskau / Leipzig 1979, S. 256-257.
Die Aufgabe ist noch in anderer Hinsicht interessant. Sie ist nämlich völlig unsinnigerweise nach Pothenot benannt. Die Aufgabe und ihre Lösung kannte bereits der Wiener Stadtbaumeister Augustin Hirschvogel (gest. 1560?): Eine eigentliche und gründliche Anweisung in die Geometrie, Nürnberg 1543, und ebenso der Entdecker des Brechungsgesetzes Willebrod van Royen Snell (1580-1620) im Jahre 1617 ("Eratosthenes Batavus")

John William Strutt (Lord Rayleigh)

Am 12.11.1842 wurde in Langford Grove in der Grafschaft Essex im Südosten von England John William Strutt als ältester Sohn des Barons Rayleigh of Terling Place geboren. John William Strutt war seit 1873 selbst (der dritte) Baron Rayleigh. Seit 1861 studierte J. W. Strutt in Cambridge, u. a. bei so berühmten Gelehrten wie E. J. Routh (1831-1907) und G. G. Stokes (1819-1903). Nach dem Studium zog sich Strutt auf das Landgut Terling Place zurück. Hier richtete er sich ein mit den modernsten Hilfsmitteln ausgestattetes Laboratorium ein. Im Jahre 1879 starb unerwartet der berühmte Physiker und Mathematiker James Clerk Maxwell. Nach seinem Tode wurde Rayleigh gebeten, die Nachfolge Maxwells als Leiter des Cavendish-Laboratoriums in Cambridge zu übernehmen. Rayleigh leitete das Laboratorium nur bis 1884, zog sich wieder als Privatgelehrter zurück, lehrte dann jedoch von 1884 bis 1905 an der Royal Institution in London. 1905-1908 war Rayleigh Präsident der Royal Society, der englischen Akademie der Wissenschaften. Im Jahre 1904 erhielt Rayleigh den Nobelpreis für Physik. Er teilte ihn mit William Ramsay (1852-1916). Der Anlaß der Verleihung des Nobelpreises an Ramsay und Rayleigh war die von beiden 1894 gemachte Entdeckung des Edelgases Argon. Rayleigh starb am 30.6.1919 in Terling Place. Rayleigh hat 446 Arbeiten veröffentlicht. Reine Mathematik war nur in den Jahren um 1875 gelegentlich sein Thema, aber angewandte Mathematik war seine Domäne. Aus physikalischer Sicht arbeitete er vorwiegend über Akustik und Optik (1871 klärte er die Frage: warum ist der Himmel blau?), später auch zur Strahlungstheorie. Der große Spielraum seiner Interessen wird aus zwei Arbeiten deutlich: 1877 veröffentlichte Rayleigh eine Untersuchung über den "irregulären Flug eines Tennisballes", 1906 ahnte er auf rechnerischem Wege und durch physikalische Überlegungen das Bohrsche Atommodell (Niels Bohr, 1913) voraus.

Zusammengestellt von H.-J. Ilgauds, Sudhoff-Institut der Universität Leipzig

Streckenteiler und Winkelteiler

Im Deutschen Museum ist auf 55000 m² Ausstellungsfläche die Entwicklung von Technik und Naturwissenschaften von den Anfängen bis zum modernsten Stand mit historischen Originalen (erste Automobil, Magdeburger Halbkugeln, erster Dieselmotor), mit Modellen, Experimenten und mit Demonstrationen zum Selbstbestätigen von Hand oder durch Knopfdrücken dargestellt. Das Deutsche Museum ist mit wenigen Ausnahmen täglich von 9 bis 17 Uhr geöffnet. Der Eintrittspreis beträgt für Erwachsene 8,– DM und für Studenten und Schüler 2,50 DM.

Daß zum Verstehen der Wirkungsweise vieler Ausstellungsstücke mathematische Kenntnisse nützlich sind, sollen die beiden folgenden Aufgaben zu zwei ausgestellten Gelenktrieben zeigen.

1. Aufgabe: Beim abgebildeten Streckendreiteiler (**Abb. 1**) haben 13 mal benachbarte Gelenklöcher eines Stabes bzw. die Spitze vom benachbarten Gelenkloch eines Stabes den gleichen Abstand a. Beim längsten Stab haben die beiden Gelenklöcher voneinander den Abstand 3a und die Spitze hat vom benachbarten Gelenkloch den Abstand 2a. Beim zweitlängsten Stab haben die beiden nicht zur Stabspitze benachbarten Gelenklöcher den Abstand 2a. Es ist zu zeigen, daß bei jeder Lage dieses Streckendreiteilers die mit P, Q, R und S bezeichneten Spitzen der Stäbe äquidistante Punkte einer Geraden sind.

2. Aufgabe: Beim abgebildeten Winkeldreiteiler (**Abb. 2**) haben auf den längsten und den zweitlängsten Stäben die beiden Gelenklöcher voneinander den gleichen Abstand a. Auf den kurzen Stäben haben die beiden Gelenklöcher und auf den zweitkürzesten Stäben haben jeweils benachbarte Gelenklöcher voneinander der gleichen Abstand b. Dabei gilt $b < a$. Es ist zu zeigen, daß bei jeder Einstellung des Winkeldreiteilers $\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC = \sphericalangle CSD$ gilt.

Lösung zur 1. Aufgabe: Durch zusätzliches Einzeichnen von 12 geeigneten rot markierten Strecken der Länge a in den idealisierten Streckendreiteiler (Die Stäbe wurden durch Strecken ersetzt) sind 12 kongruente Rhomben entstanden, von denen je zwei durch eine Verschiebung aufeinander abbildbar sind. Die grün markierten Diagonalen e dieser Rhomben sind gleich lang und zueinander parallel. Da jede der Diagonalen PQ, QR und RS mit einer anderen dieser drei einen Punkt gemeinsam hat, liegen diese 3 Diagonalen auf einer Geraden und die Punkte P, Q, R und S sind äquidistante Punkte.

Lösung zur 2. Aufgabe: Der idealisierte Winkeldreiteiler (Die Stäbe sind durch Strecken ersetzt) enthält 6 Drachenvierecke mit den Seiten a und b, für deren Winkel α und β laut Nebenwinkelsatz $\beta = 180° - \alpha$ gilt. Einerseits sind das erste, dritte und fünfte und andererseits das zweite, vierte und sechste Sehnenviereck zueinander kongruent. Wegen dieser Kongruenzeigenschaften gilt $\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC = \sphericalangle CSD$. Zusätzlich sei vermerkt: Mit dem idealisierten Streckendreiteiler lassen sich theoretisch wegen $0 \leq e \leq 2a$ alle Strecken der Länge l mit $0 \leq l \leq 6a$ dreiteilen. Mit einem realen Streckendreiteiler lassen sich wegen der Stabbreite die Grenzwerte 0 und 6a nicht erreichen.

Mit einem idealisierten Winkeldreiteiler lassen sich theoretisch alle Winkel δ dreiteilen, für die $0 \leq \delta \leq 6\gamma$ gilt, wobei γ der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Basis 2b und der Höhe a ist. $\delta = 6\gamma$ ist gleichbedeutend mit $\alpha = \beta = 90°$. Da mit einem realen Winkeldreiteiler höchstens Winkel gedreiteilt werden können, die nicht größer als 360° sind, wird zweckmäßig ein realer Winkeldreiteiler für $\gamma = 60°$, also mit $a = b\sqrt{3}$ konzipiert.

Zu jeder natürlichen Zahl n mit $n \geq 2$ lassen sich Gelenktriebe konstruieren, die eine gegebene Strecke in n gleichlange Teilstrecken bzw. einen gegebenen Winkel in n gleichgroße Teilwinkel zerlegen können. Die alten Griechen suchten vergebens nach einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal, durch die ein beliebiger Winkel in drei gleich große Teilwinkel zerlegt wird. Sie konnten keine Lösung für dieses Problem finden, weil die Dreiteilung eines Winkels durch Zeichnen von endlich vielen Geraden und Kreisen nur für spezielle Winkel möglich ist.

W. Träger

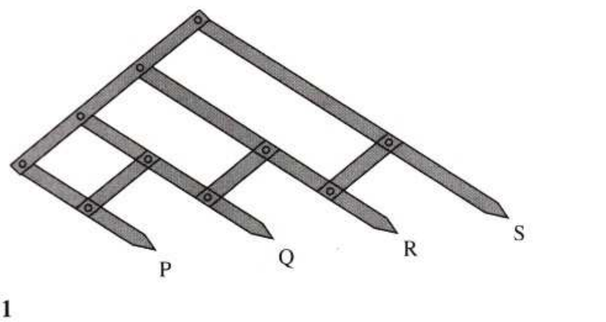


Abb. 1

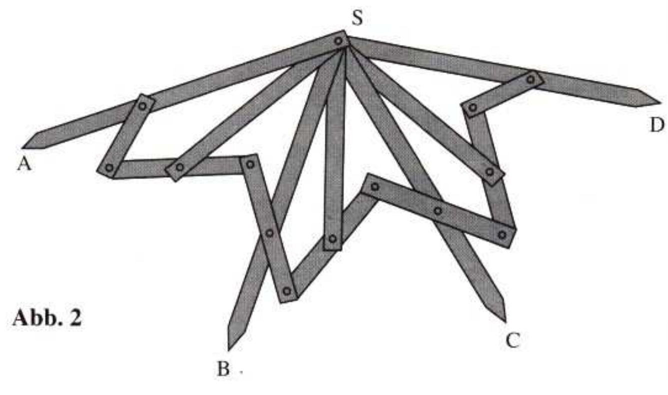
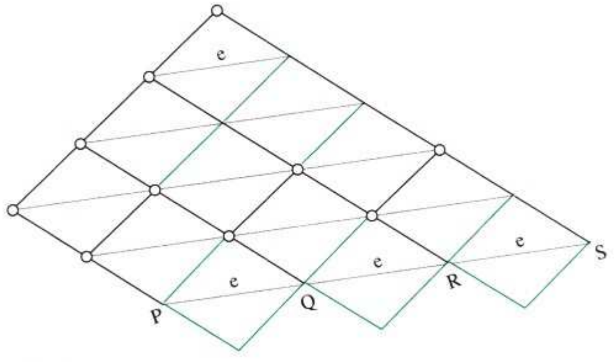
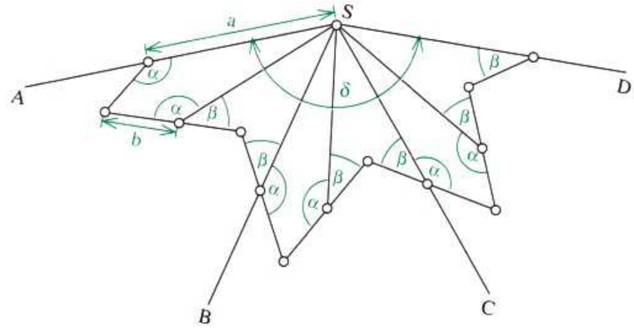


Abb. 2



zu Abb. 1



zu Abb. 2

Flächeninhaltsvergleiche

Das Vergleichen der Flächeninhalte verschiedener geometrischer Figuren erscheint häufig als eine "harte Nuß", zumal wenn die Möglichkeit, diese Flächeninhalte numerisch auszudrücken, nicht besteht. Durch vorteilhafte Hilfskonstruktionen können aber solche Aufgaben manchmal überraschend einfach gelöst werden.

Das Lösen folgender Aufgaben erfordert Grundkenntnisse über Kongruenz und Ähnlichkeit von Dreiecken, Mittellinien im Dreieck bzw. im Trapez, Schwerpunkt eines Dreiecks, wie auch folgende Kenntnisse über Flächeninhalte:

- kongruente Dreiecke haben gleiche Flächeninhalte;
- ist AM Seitenhalbierende im Dreieck ABC, so haben die Dreiecke ABM und ACM gleiche Flächeninhalte (**Abb. 1**);

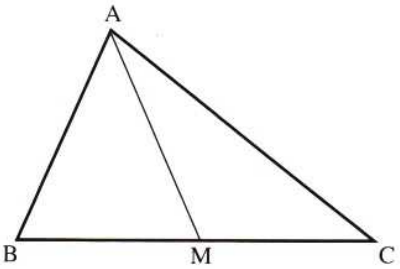


Abb. 1

- das Verhältnis der Flächeninhalte zweier ähnlicher Dreiecke ist gleich dem Quadrat des Ähnlichkeitsfaktors (auch für ähnliche Vielecke gültig).

Einige der folgenden Beispiele zeigen, daß man auf verschiedenen Wegen zu einer Lösung gelangen kann. Vielleicht findet ihr noch einfachere und schönere Lösungsmethoden? Zunächst einige Hilfsaufgaben:

Hilfsaufgabe 1: Ist ABCD ein Parallelogramm, so ist $A_{ABC} = A_{ADC}$, wobei z. B. A_{ABC} den Flächeninhalt des Dreiecks ABC bezeichnet.

Hilfsaufgabe 2: Es sei ABCD ein Viereck. Die Schnittpunkte der Parallelen durch A und C bzw. B und D zu den Diagonalen BD bzw. AC seien mit T, X, Y, Z bezeichnet (**Abb. 2**).

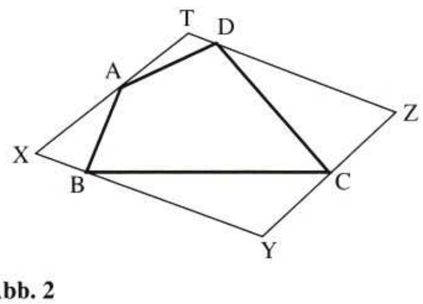


Abb. 2

Zeige, daß $A_{TXYZ} = 2 \cdot A_{ABCD}$.

Anleitung: Das Parallelogramm TXYZ wird von AC und BD in vier Parallelogramme eingeteilt; weiter mit **Hilfsaufgabe 1**.

Hilfsaufgabe 3: Ist G der Schwerpunkt des Dreiecks ABC, dann ist

$$A_{GAB} = A_{GBC} = A_{GCA} = \frac{1}{3} A_{ABC}.$$

Anleitung: Die zur Seite AB im Dreieck GAB gehörende Höhe ist ein Drittel der Höhe, die zur Seite AB im Dreieck CAB gehört.

Hilfsaufgabe 4: Sind M bzw. N die Mitten der Seiten AB bzw. AC im Dreieck ABC, so ist

$$A_{AMN} = \frac{1}{4} A_{ABC} \text{ und } A_{AMN} = \frac{1}{3} A_{MBCN}.$$

Anleitung: Die erste Gleichung ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und AMN (Ähnlichkeitsfaktor 2), die zweite Gleichung ist eine Folge der ersten (Flächenaddition!).

In den folgenden Aufgaben werden die vorkommenden Vierecke als konvex vorausgesetzt.

Aufgabe 1: Es sei ABCD ein Viereck und es seien E, F, G, H die Mitten seiner Seiten. Dann ist

$$A_{EFGH} = \frac{1}{2} A_{ABCD}$$

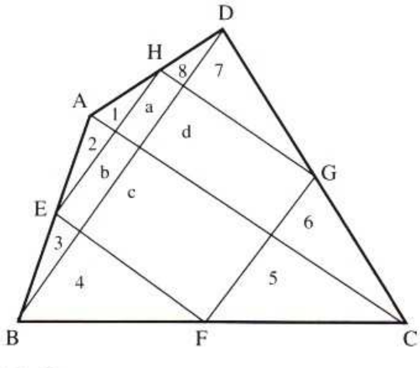


Abb. 3

Lösung I: Bezeichnet man die Dreiecke und Parallelogramme, die nach dem zusätzlichen Zeichnen der Diagonalen entstehen, so wie **Abb. 3** zeigt, erhält man nach **Hilfsaufgabe 4**:

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{3}(A_3 + A_8 + A_a + A_b)$$

$$A_3 + A_4 = \frac{1}{3}(A_5 + A_2 + A_c + A_b)$$

$$A_5 + A_6 = \frac{1}{3}(A_7 + A_4 + A_d + A_c)$$

$$A_7 + A_8 = \frac{1}{3}(A_1 + A_6 + A_a + A_d)$$

Nach dem Addieren dieser vier Beziehungen und Ordnen des Ergebnisses erhält man:

$A_a + A_b + A_c + A_d = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8$ Also:

$$A_{EFGH} = \frac{1}{2} A_{ABCD}.$$

Lösung II: Es sei M die Mitte der Diagonale BD (**Abb. 4**).

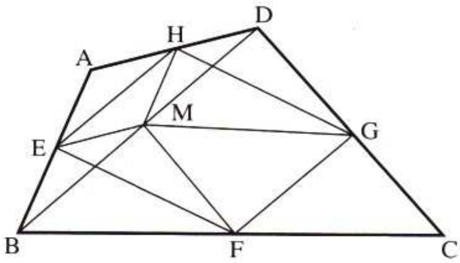


Abb. 4

Zieht man in Betracht, daß HM und EM Mittellinien im Dreieck ABD sind, so kann mit Leichtigkeit die Kongruenz der Dreiecke AEH und MHE festgestellt werden. Kongruent sind auch die Dreieckpaare DHG und MEF; CGF und MFG; BEF und MHG.

Dann ist: $A_{AEH} + A_{DHG} + A_{CGF} + A_{BFE} = A_{MHE} + A_{MEF} + A_{MFG} + A_{MGH} = A_{EFGH}$

Folglich ist

$$A_{EFGH} = \frac{1}{2} A_{ABCD}.$$

Lösung III: Baut man als Hilfskonstruktion das Parallelogramm TXYZ aus **Hilfsaufgabe 2 (Abb. 5)** und berücksichtigt man, daß die Parallelogramme EFGH und XYZT ähnlich sind, wobei das Ähnlichkeitsverhältnis $\frac{1}{2}$ beträgt, erhält man:

$$A_{EFGH} = \frac{1}{4} A_{TXYZ} = \frac{1}{4} \cdot 2 A_{ABCD} = \frac{1}{2} A_{ABCD}.$$

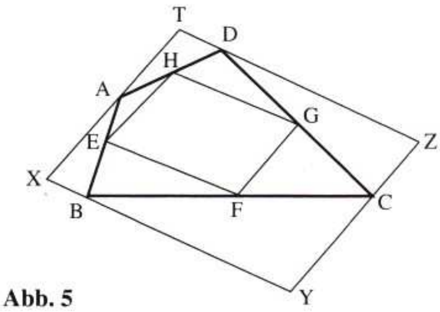


Abb. 5

Eine vierte Lösung kann noch aus folgender Aufgabe erhalten werden:

Aufgabe 2: Es sei ABCD ein Viereck. Man verlängere die Seiten AB, BC, CD bzw. DA auf AT, BX, CY bzw. DZ (**Abb. 6**) so, daß gleiches Streckungsverhältnis $k>1$ vorliegt (d. h. $\overline{AT}:\overline{AB} = \overline{BX}:\overline{BC} = \overline{CY}:\overline{CD} = \overline{DZ}:\overline{DA} = k$). Drücke A_{TXYZ} mit Hilfe von A_{ABCD} aus.

Lösung I: Verlängert man AC $(k-1)$ mal bis F, so sind die Dreiecke ABC und ATF ähnlich und haben das Ähnlichkeitsverhältnis $\frac{1}{k}$. Also:

$A_{ATF} = k^2 A_{ABC}$ und somit

$A_{BTFC} = (k^2-1)A_{ABC}$. (1)

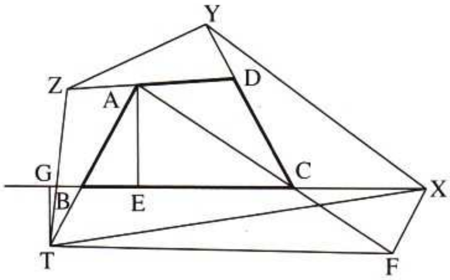


Abb. 6

Die Dreiecke ABC und FXC sind auch ähnlich und ihr Ähnlichkeitsverhältnis beträgt

$\frac{1}{k-1}$ denn $\overline{BX} = k\cdot\overline{BC} = \overline{BC} + \overline{CX}$, mithin

$\overline{CX} = (k-1)\overline{BC}$.

Also ist $A_{FXC} = (k-1)^2 A_{ABC}$. (2)

Aus (1) und (2) folgt

$A_{BTFX} = ((k^2-1) + (k-1)^2)A_{ABC}$.

Zieht man noch in Betracht, daß BTFX ein Parallelogramm ist, so folgt:

$$A_{BTX} = \frac{1}{2}A_{BTFX} = k\cdot(k-1)A_{AB} \quad (3)$$

Auf ähnliche Art kann man erhalten:

$A_{CXY} = k\cdot(k-1)A_{BCD}$ (4)

$A_{DYZ} = k\cdot(k-1)A_{CDA}$ (5)

$A_{AZT} = k\cdot(k-1)A_{DAB}$. (6)

Addiert man die Beziehungen (3), (4), (5), (6) und fügt A_{ABCD} hinzu, so erhält man:

$A_{TXYZ} = (2k^2 - 2k + 1)A_{ABCD}$.

Lösung II: In den Dreiecken ABC und BTX zeichnet man die Höhen AE bzw. TG (**Abb. 6**). Man erhält:

$$A_{BTX} = \frac{BX\cdot TG}{2} = \frac{k\cdot BC\cdot(k-1)\cdot AE}{2}$$
$$= k\cdot(k-1)A_{ABC}$$

und weiter geht es wie in **Lösung I**.

Bemerkung: Auf ähnliche Weise kann man den Beweis durchführen, wenn die Seiten des Vierecks nicht verlängert sondern verkürzt werden, also wenn sich die Punkte T, X, Y, Z innerhalb der Vierecksseiten befinden, d. h., wenn k<1 ist.

Aufgabe 3: Es sei ABCD ein Viereck, M bzw. N die Mitten der Seiten AD bzw. BC; P bzw. Q die Schnittpunkte der Strecken AN und BM bzw. CM und DN.

Zeige, daß $A_{PMQN} = A_{ABP} + A_{CDQ}$.

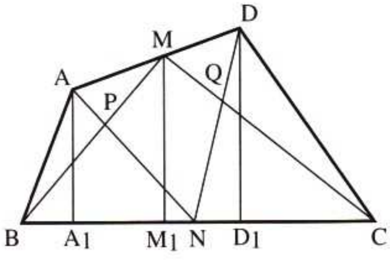


Abb. 7

Lösung: Bezeichnet man mit A_1, M_1 bzw. D_1 die Fußpunkte der Senkrechten von A, M bzw. D auf BC (**Abb. 7**), so erhält man:

$$MM_1 = \frac{AA_1 + DD_1}{2}$$

und somit $A_{BMC} = A_{BAN} + A_{CDN}$.

Zieht man nun von beiden Seiten dieser Gleichheit $A_{BPN} + A_{CQN}$ ab, so ist die Aufgabe gelöst.

Aufgabe 4: Es seien K, L, M, N die Mitten der Seiten des Vierecks ABCD (**Abb. 8**).

Zeige, daß $A_{BGDH} = \frac{1}{3}A_{ABCD}$ (8)

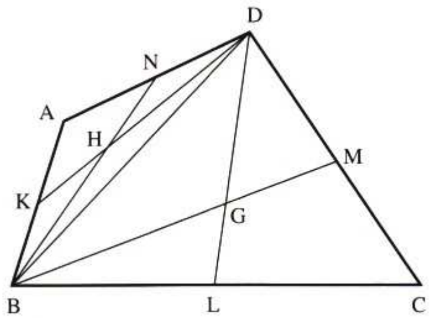


Abb. 8

Lösung: Verbindet man B mit D, so kann man leicht feststellen, daß G bzw. H die Schwerpunkte der Dreiecke BCD bzw. BAD sind.

Also ist $A_{BGD} = \frac{1}{3}A_{BCD}$

und $A_{BHD} = \frac{1}{3}A_{BAD}$

und durch Addition erhält man die Beziehung (8).

Bemerkungen: (1) Der Flächeninhalt des Vierecks BGDH ist gleich der Summe der Flächeninhalte der seinen Seiten anliegenden Dreiecke.

(2) $A_{BGDH} = A_{AKHN} + A_{CMGL}$.

Aufgabe 5: Es seien K, L, M, N die Mitten der Seiten des Vierecks ABCD (**Abb. 9**). Zeige, daß der Flächeninhalt des Vierecks in der Mitte gleich der Summe der Flächeninhalte der vier Dreiecke ist.

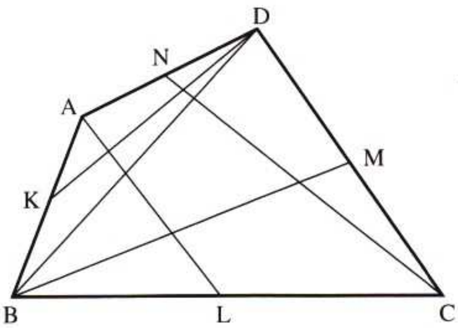


Abb. 9

Lösung: Verbindet man B mit D, so bemerkt man:

$A_{BDK} = \frac{1}{2}A_{BDA}$ und $A_{DBM} = \frac{1}{2}A_{DBC}$

und durch Addition:

$A_{DKBM} = \frac{1}{2}A_{ABCD}$.

Ähnlich erhält man auch

$A_{ALCN} = \frac{1}{2}A_{ABCD}$

und somit ist $A_{DKBM} + A_{ALCN} = A_{ABCD}$.

Aufgabe 6: Liegen die Parallelogramme ABCD und AEFG so, wie **Abb. 10** zeigt, so ist $A_{ABCD} = A_{AEFG}$.

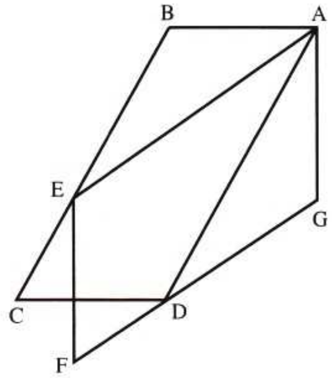


Abb. 10

Anleitung: Zeichnet man durch E eine Parallele zu AB bzw. durch D eine Parallele zu AG, so kann leicht gezeigt werden, daß

$A_{AED} = \frac{1}{2}A_{ABCD}$ und $A_{AED} = \frac{1}{2}A_{AEFG}$.

Aufgabe 7: Es sei ABCD ein Viereck; M, N bzw. P die Mitten der Strecken BD, AC bzw. MN. Zeige, daß $A_{PBC} + A_{PAD} = A_{PAB} + A_{PCD}$.

Anleitung: Es seien A_1, M_1, P_1, N_1 bzw. D_1 die Fußpunkte der Senkrechten von A, M, P, N bzw. D auf BC (**Abb. 11**). Dann ist

$$PP_1 = \frac{MM_1 + NN_1}{2} = \frac{AA_1 + DD_1}{4}$$

und somit

$$A_{PBC} = \frac{1}{4}\cdot(A_{ABC} + A_{DBC}).$$

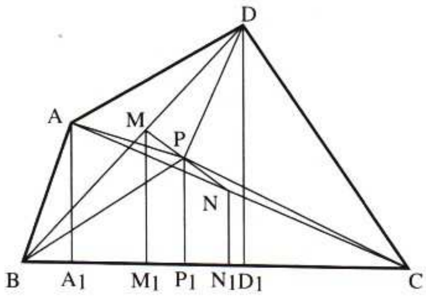


Abb. 11

Ähnlich erhält man auch

$$A_{PAD} = \frac{1}{4}\cdot(A_{BAD} + A_{CAD}).$$

Addiert man diese zwei letzten Beziehungen, erhält man

$$A_{PBC} + A_{PAD} = \frac{1}{2}A_{ABCD}.$$

Aufgabe 8: Es seien E, F, G bzw. H die Mitten der Seiten AB, BC, CD bzw. DA im Viereck ABCD und es sei P der Schnittpunkt der Strecken EG und FH. Zeige, daß

$A_{PHAE} + A_{PFCG} = A_{PEBF} + A_{PGDH}$.

Anleitung: Bezeichnet man mit M bzw. N die Mitten der Diagonalen BD bzw. AC **(Abb. 12)** und zieht man in Betracht, daß EFGH und EMGN Parallelogramme sind, so folgt daraus, daß P auch die Mitte von MN ist.

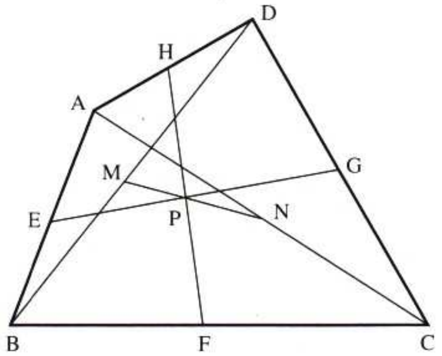


Abb. 12

Aufgabe 9: Durch die Mitte jeder Diagonalen eines Vierecks zeichnet man eine Parallele zur anderen Diagonale. Den Schnittpunkt dieser Parallelen verbindet man mit den Mitten der Seiten des Vierecks. Zeige, daß dadurch das Viereck in vier flächengleiche Teile geteilt wird.

Anleitung: Es seien E, F, G, H die Mitten der Seiten; M und N die Mitten der Diagonalen des Vierecks ABCD. Seien OM bzw. ON parallel zu AC bzw. BD **(Abb. 13)**.

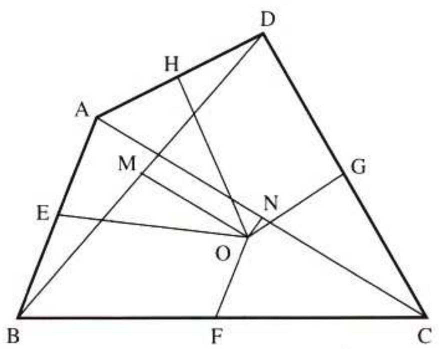


Abb. 13

Dann ist $A_{AND} = A_{CND}$ und $A_{ANB} = A_{CNB}$ und somit

$$A_{ADNB} = A_{CDNB} = \frac{1}{2} A_{ABCD}.$$

Weiterhin ist $A_{DGN} = A_{CGN}$ und $A_{BFN} = A_{CFN}$ und somit

$$A_{CGNF} = \frac{1}{4} A_{ABCD}.$$

Aufgabe 10: Im Viereck ABCD sind K, L, M bzw. N die Schwerpunkte der Dreiecke DAB, ABC, BCD bzw. CDA. Zeige, daß

$$A_{KLMN} = \frac{1}{9} A_{ABCD}.$$

Anleitung: Wenn E, F, G, H die Mitten der Seiten sind **(Abb. 14)**, so bemerkt man leicht,

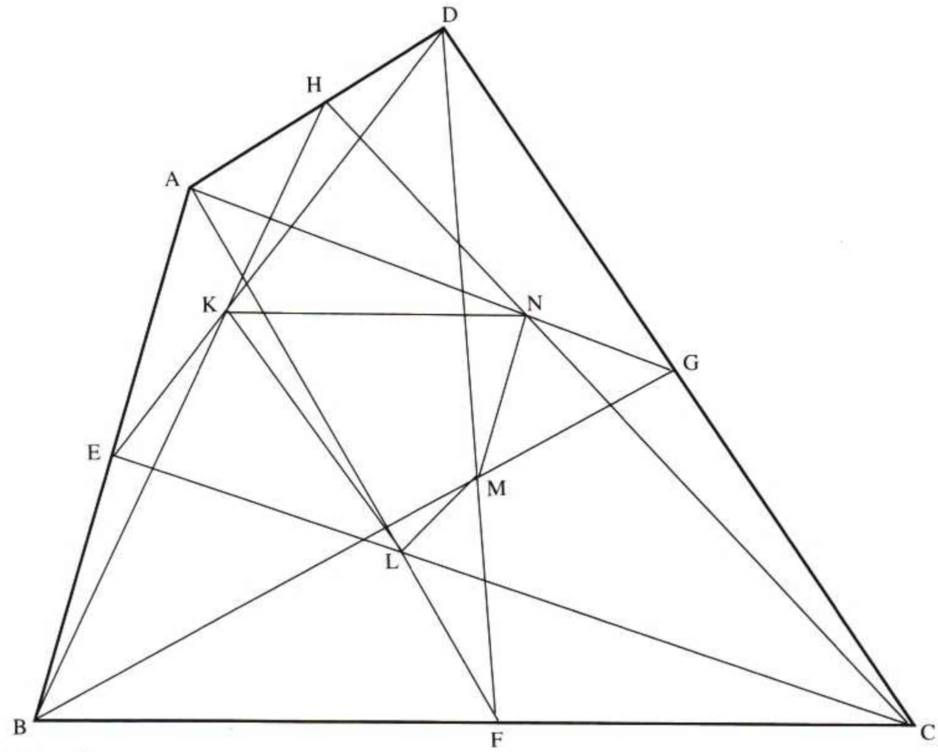


Abb. 14

daß die Vierecke KLMN und ABCD ähnlich sind, und ihr Ähnlichkeitsverhältnis beträgt $\frac{1}{3}$.

Aufgabe 11: Im Viereck ABCD sind K, L, M bzw. N die Schwerpunkte der Dreiecke AOB, BOC, COD bzw. DOA, wobei O der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD ist. Zeige, daß

$$A_{KLMN} = \frac{2}{9} A_{ABCD}.$$

Anleitung: Es seien E, F, G, H die Mitten der Strecken OA, OB, OC, OD **(Abb. 15)**.

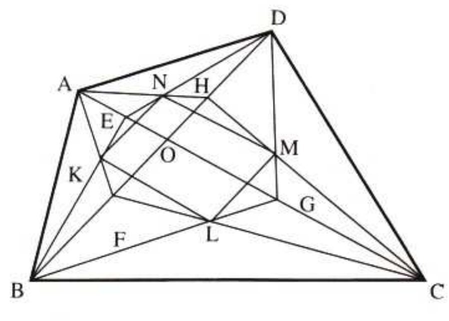


Abb. 15

Man bemerkt leicht, daß KLMN ein Parallelogramm ist, ähnlich dem Parallelogramm TXYZ aus der **Hilfsaufgabe 2**.

Ihr Ähnlichkeitsverhältnis beträgt $\frac{1}{3}$.

Aufgabe 12: Es sei ABCD ein Viereck. Die Punkte K und N bzw. L und M teilen die Seiten AD bzw. BC in drei gleiche Teile **(Abb. 16)**. Zeige, daß

$$A_{KLMN} = \frac{1}{3} A_{ABCD}.$$

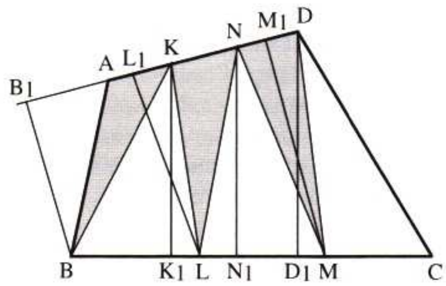


Abb. 16

Anleitung: Es seien K_1, N_1 bzw. D_1 die Fußpunkte der Senkrechten von K, N bzw. D auf BC und es seien B_1, L_1 bzw. M_1 die Fußpunkte der Senkrechten von B, L bzw. M auf AD. Zieht man in Betracht, daß

$$NN_1 = \frac{KK_1 + DD_1}{2} \text{ und } LL_1 = \frac{BB_1 + MM_1}{2},$$

folgt

$$A_{NLM} = \frac{1}{2} \cdot (A_{KLB} + A_{DMC}),$$

$$A_{LKN} = \frac{1}{2} \cdot (A_{BAK} + A_{MND})$$

und somit

$$A_{KLMN} = \frac{1}{2} \cdot (A_{ABLK} + A_{DCMN}).$$

Aufgabe 13: Im Viereck ABCD sei O der Schnittpunkt der Seiten AD und BC und seien M bzw. N die Mitten der Diagonalen AC bzw. BD. Zeige, daß

$$A_{OMN} = \frac{1}{4} A_{ABCD}.$$

F. Bodnar

Geometrie ohne Irrationalzahlen

Im Mathematikunterricht sollten die Schülerinnen und Schüler zu den bis dahin bekannten rationalen Zahlen auch irrationale Zahlen kennenlernen. $\sqrt{2}$ ist eine solche. Um zu Irrationalzahlen hinzuführen stellten wir fest, daß ein Quadrat über einer Diagonalen eines Quadrates der Seitenlänge 1 den Flächeninhalt 2 hat. Ohne die Zahl $\sqrt{2}$ kann man die Länge einer solchen Diagonalen nicht exakt angeben. Daher muß $\sqrt{2}$ eingeführt werden.

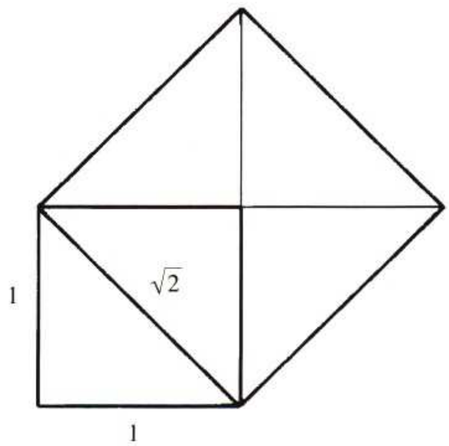


Abb. 1

Hier meldete sich Ralph: "In der Praxis kann man die Länge einer Strecke niemals beliebig genau messen, denn jede Messung hat einen Meßfehler. Beim Messen mit einem Maßstab hat noch kein Mensch jemals $\sqrt{2}$ gemessen. (Im vorliegenden Fall wird man ein Quadrat der Seitenlänge 1 zeichnen und mit großer Sorgfalt für die Länge einer Diagonalen $d \approx 1{,}41$ cm ermitteln. Das bedeutet, daß $1{,}405 \text{ cm} \leq d < 1{,}415$ cm erfüllt ist.) Daher kann man in der Geometrie, in der es um das Messen geht, durchaus auf $\sqrt{2}$ verzichten." Gefragt waren überzeugende Argumente, die es zwingender erscheinen lassen, zu den rationalen Zahlen die irrationalen Zahlen dazuzunehmen.

Unsere Vereinbarung

Bekanntlich kann man mit Hilfe eines (kartesischen) Koordinatensystems die Menge der Punkte der Ebene umkehrbar eindeutig auf die Menge der geordneten Paare reeller Zahlen abbilden. Die Menge der reellen Zahlen zerfällt in die Teilmenge der rationalen Zahlen und die Teilmenge der irrationalen Zahlen. Weil die Irrationalzahlen Schwierigkeiten bereiten (sie haben weder eine abbrechende noch eine periodische Dezimalzahldarstellung) beschränken wir uns möglichst lange auf die Betrachtung rationaler Zahlen. In dieser Absicht treffen wir nun die folgende Vereinbarung: Zugrunde liege eine auf ein (kartesisches) Koordinatensystem bezogene Ebene. Wir betrachten nur solche Punkte P(x; y), für die x und y rationale Zahlen sind. Eine Gerade wird als Menge ihrer Punkte aufgefaßt. Ein Punkt gehört genau dann zu einer Geraden, wenn seine Koordinaten die Geradengleichung erfüllen. Wir betrachten nun nur Geraden g: y = mx + b beziehungsweise Geraden h: x = c, bei denen m, b und c rationale Zahlen sind. Insgesamt sagen wir im folgenden kurz: Wir betrachten die **rationale Ebene**.

Einige angenehme Eigenschaften der rationalen Ebene

Sind $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ zwei verschiedene Punkte, so gibt es zu beiden eine Verbindungsgerade: Ist $x_1 = x_2$, so liegen P_1 und P_2 auf der Geraden h: $x = x_1$; und ist $x_1 \neq x_2$, so liegen P_1 und P_2 auf der Geraden g:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}.$$

Entscheidend ist dabei, daß mit zwei rationalen Zahlen u und v stets auch die Summe u + v und das Produkt uv rationale Zahlen sind und daß zu jeder rationalen Zahl u auch die entgegengesetzte Zahl (die additiv inverse Zahl) – u und für $u \neq 0$ auch die reziproke Zahl (multiplikativ inverse Zahl) $\frac{1}{u}$ jeweils wieder rationale Zahlen sind. Daher sind mit x_1, y_1, x_2 und y_2 auch $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ und $\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}$ jeweils rationale Zahlen. So kommt es, daß nicht nur h, sondern auch g tatsächlich eine zugelassene (rationale) Gerade ist.

Zwei Geraden g_1: $y = m_1x + b_1$ und g_2: $y = m_2x + b_2$ haben im Falle $m_1 \neq m_2$ den Schnittpunkt

$$T\left(\frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2}; \frac{m_1b_2 - m_2b_1}{m_1 - m_2}\right),$$

denn mit m_1, b_1, m_2 und b_2 sind auch die Koordinaten von T rationale Zahlen.

Sind g eine Gerade und P ein Punkt, so gibt es zu g durch $P(x_1; y_1)$ eine Senkrechte.

(Ist m = 0, so handelt es sich um h: $x = x_1$. Ist $m \neq 0$, so ist mit m auch $-\frac{1}{m}$ rational.)

Diese schneidet g im Punkt $F(x_F; y_F)$. Spiegelt man den Punkt P an der Geraden g, so ergibt sich der Bildpunkt $\overline{P}(2x_F - x_1; 2y_F - y_1)$. Wir stellen fest: Jede Gerade kann als Achse einer Geradenspiegelung benutzt werden.

Zu den Punkten einer Geraden

Jede Gerade g: y = mx + b enthält unendlich viele Punkte, denn ist z eine ganze Zahl, so ist P(z; mz + b) ein Punkt der Geraden g. Wir betrachten zwei Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$. Der Mittelpunkt

$$M\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2); \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right)$$

hat auch rationale Koordinaten. Daher gibt es zu jeder Strecke einen Mittelpunkt. Ist $P_1(x_1; y_1)$ ein Punkt von g, so ist "$y_1 = mx_1 + b$" (wahr); ist $P_2(x_2; y_2)$ ein Punkt von g, so ist "$y_2 = mx_2 + b$" (wahr). Dann ist auch

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{1}{2}(mx_1 + b + mx_2 + b) =$$

$$= m \cdot \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + b$$

wahr. Daher liegt auch der Mittelpunkt M auf der Geraden g.

Zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 einer Geraden g gibt es stets mindestens einen weiteren Punkt. Es gibt sogar mehr als endlich viele solche Punkte, denn zur Strecke $[P_1P_2]$ gibt es den Mittelpunkt M_1, zu $[P_1M_1]$ gibt es den Mittelpunkt M_{12} und zu $[M_1P_2]$ gibt es den Mittelpunkt M_{21} und so fort ... Alle diese Punkte sind verschieden und sie liegen alle auf der Geraden g zwischen den Punkten P_1 und P_2. Analoges gilt auch für die zur y-Achse parallelen Geraden. h: x = a ist eine solche Gerade. Die Punkte $P_1(a; y_1)$ und $P_2(a; y_2)$ liegen auf ihr. Da auch $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ eine rationale Zahl ist, ist auch der Mittelpunkt $M\left(a; \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right)$ der Strecke $[P_1P_2]$ ein zugelassener Punkt der Geraden h. Zwischen zwei Punkten einer Geraden der rationalen Ebene liegen stets unendlich viele weitere Punkte – die Punkte einer Geraden liegen auf dieser dicht.

Eine Eigenschaft von Kreisen

Wir betrachten den Kreis k: $x^2 + y^2 = 4$ vom Radius 2 mit dem Mittelpunkt M(0/0). Dieser trägt Punkte mit rationalen Koordinaten; als Beispiele seien nur P(2; 0) und Q(1,2; 1,6) genannt. Die erste Winkelhalbierende w: y = x ist eine (zugelassene) Gerade. Uns interessieren die Schnittpunkte der Geraden w mit dem Kreis k. Ein solcher Schnittpunkt $S(x_s; y_s)$ muß auf der Geraden w liegen. Dann ist $y_s = x_s$ (wahr). Ein solcher Schnittpunkt $S(x_s; y_s)$ muß auch auf dem Kreis k liegen. Dann ist

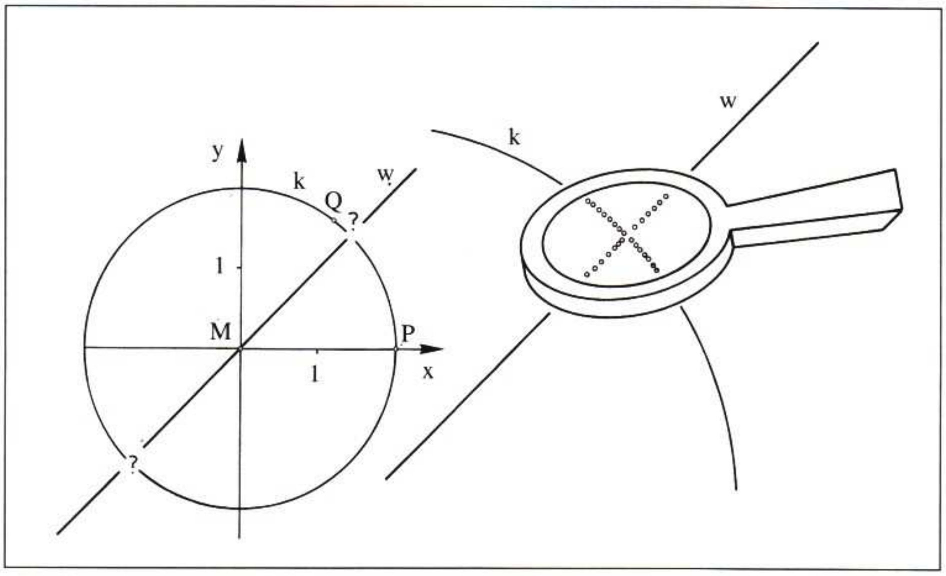


Abb. 2

$x_s^2 + y_s^2 = 4$ (wahr). Aus diesen beiden Aussagen folgt $x_s^2 + x_s^2 = 4$ und somit auch $x_s^2 = 2$. Eine solche rationale Zahl x_s gibt es nicht, denn $\sqrt{2}$ ist irrational. Dann gibt es aber für uns gar keinen Schnittpunkt S. Das bedeutet, daß die Gerade w, obwohl sie durch den Mittelpunkt M des Kreises k geht, den Kreis k nicht schneidet.

Wir "betrachten die Situation mit der Lupe". Die Durchmessergerade w und der Kreis k haben Löcher. Es gelingt der Durchmessergeraden durch die Kreislinie "hindurchzuschlüpfen".

Allerdings kann man nicht sagen, daß keine Durchmessergerade den zugehörigen Kreis schneidet. Die x-Achse und die y-Achse schneiden den Kreis k. Auch die Durchmessergerade

$n: y = \frac{4}{3}x$

schneidet den Kreis k: $x^2 + y^2 = 4$ in den Punkten Q(1,2; 1,6) und R(-1,2; -1,6).

Wir fassen zusammen:

In der rationalen Ebene muß eine Durchmessergerade eines Kreises diesen nicht schneiden.

Einige Folgerungen

Zu zwei Punkten $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ der rationalen Ebene gibt es den Mittelpunkt

$M\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2); \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right)$

der Strecke $[P_1P_2]$. Weiter gibt es durch den Punkt M die Senkrechte g zur Verbindungsgeraden von P_1 und P_2. Diese Gerade g ist die Mittelsenkrechte der Strecke $[P_1P_2]$. In der rationalen Ebene gibt es zu jeder Strecke eine Mittelsenkrechte. Dagegen muß es in der rationalen Ebene zu zwei sich schneidenden Geraden keine Winkelhalbierende geben. Da in der rationalen Ebene jede Gerade als Achse einer Geradenspiegelung benutzt werden kann, charakterisieren wir die Winkelhalbierenden wie folgt: Zugrunde liegen zwei sich schneidende Geraden a und b. Wird bei der Spiegelung an der Geraden w die Gerade a auf b abgebildet, so ist w eine Winkelhalbierende. Dann ist auch die zu w senkrechte Gerade $\overline{w}$ durch den Schnittpunkt von a und b eine Winkelhalbierende.

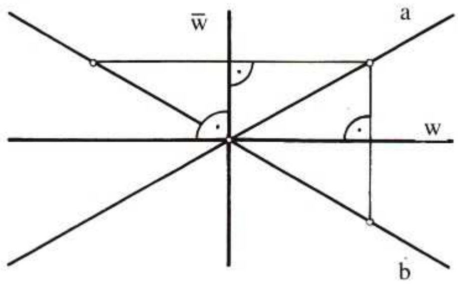


Abb. 3

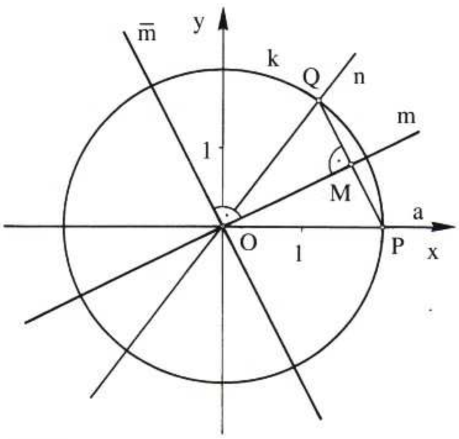


Abb. 4

Wir betrachten die x-Achse a: y = 0 und die Gerade b: y = x. Die Geraden a und b schneiden sich in O(0/0). Die Gerade a schneidet den Kreis k um O(0; 0) vom Radius 2 in P(2; 0). Dagegen existiert kein Schnittpunkt S der Geraden b mit diesem Kreis. Gäbe es zu den Geraden a und b eine Winkelhalbierende s, so könnte man den Punkt P(2; 0) an s spiegeln. Bei dieser Spiegelung müßte P auf den nicht vorhandenen Schnittpunkt des Kreises k mit der Geraden b abgebildet werden. Daher kann es die Spiegelung nicht geben. Da man aber an jeder vorhandenen Geraden spiegeln kann, bedeutet dies, daß es schon die Winkelhalbierende s nicht gibt. **Wir haben in der rationalen Ebene zwei sich schneidende Geraden gefunden, zu denen es keine Winkelhalbierende gibt.**

Allerdings gibt es auch sich schneidende Geraden, zu denen Winkelhalbierende existieren.

Die x-Achse a und die Gerade $n: y = \frac{4}{3}x$ bestätigen dies. Auf der x-Achse liegt der Punkt P(2/0) und auf der Geraden n liegt der Punkt Q(1,2; 1,6). Der Mittelpunkt M(1,6; 0,8) der Strecke [PQ] existiert. Auch die Verbindungsgerade $m: y = \frac{1}{2}x$ der Punkte O (0; 0) und M(1,6; 0,8) existiert. Bei der Spiegelung an der Geraden m wird P auf Q abgebildet. Weiter ist bei dieser Spiegelung der Schnittpunkt O(0; 0) von a und n ein Fixpunkt. Dann wird aber die Gerade a auf die Gerade n abgebildet. Damit ist die Gerade m als Winkelhalbierende erkannt. Die zweite Winkelhalbierende geht durch O(0/0) und ist zu m senkrecht; daher handelt es sich um $\overline{m}: y = -2x$.

In der rationalen Ebene muß es zu zwei sich schneidenden Geraden keine Winkelhalbierende geben.

Aufgaben

1. **Schneidet die Durchmessergerade $m: y = \frac{1}{2}x$ den Kreis um O (0; 0) vom Radius 2?**
2. **Untersuche, ob tan 22,5° rational ist.**
3. **Zeige: Schneiden sich zwei Geraden, so muß es keine Drehung um den Schnittpunkt geben, bei der eine Gerade in die andere übergeführt wird.**

Weitere Eigenschaften

Zwei nicht zur y-Achse parallele Geraden g_1: $y = m_1x + b_1$ und g_2: $y = m_2x + b_2$ schließen einen nicht-stumpfen Winkel der Größe α ein. Dabei ist $\alpha = 90°$ oder

$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}$ mit $0° \le \alpha < 90°$.

Sind m_1 und m_2 rational, so ist im Falle $m_1m_2 \neq -1$ auch $\tan\alpha$ rational. Andererseits ist $\tan 60° = \sqrt{3}$ irrational. Dann kann es aber keine zwei Geraden g_1 und g_2 geben, welche einen Winkel der Größe 60° einschließen. Weil es in der rationalen Ebene auch keine Geraden mit der Steigung $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ und keine Geraden mit der Steigung $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ gibt, schließt auch keine Gerade mit einer Parallelen zur y-Achse einen Winkel der Größe 60° ein. Gleichseitige Dreiecke haben Winkel der Größe 60°. Weil es keinen solchen Winkel gibt, stellen wir fest:

In der rationalen Ebene gibt es kein einziges gleichseitiges Dreieck.

Zunächst haben wir ein Quadrat der Seitenlänge 1 betrachtet und festgestellt, daß man seinen Diagonalen keine rationale Zahl als Maßzahl der Länge zuweisen kann. Nun erhebt sich schon gar nicht die Frage, ob ein gleichseitiges Dreieck eine Höhe rationaler Länge hat, denn solche Dreiecke gibt es in der rationalen Ebene nicht.
Aus der Nichtexistenz eines 60°-Winkels lassen sich viele weitere Folgerungen ziehen. Zwei Kreise vom gleichen Radius haben gewiß dann keinen Schnittpunkt, wenn der Mittelpunkt des einen auf dem anderen Kreis liegt. Dann läßt sich auch die jedem bekannte Konstruktion eines regelmäßigen Sechsecks nicht durchführen. Übrigens gibt es in der rationalen Ebene gar kein regelmäßiges Sechseck. Denn ein solches könnte man in sechs gleichseitige Dreiecke zerlegen.

Zusammenfassung

Wenn es nur Punkte mit rationalen Koordinaten gibt, dann existieren auch Durchmessergeraden von Kreisen, welche diese nicht schneiden; dann müssen sich schneidende Geraden keine Winkelhalbierende haben; dann gibt es weder gleichseitige Dreiecke noch regelmäßige Sechsecke. Da dies alles in der Anschauungsebene nicht wahr ist, müssen wir feststellen: Die rationale Ebene beschreibt die Anschauungsebene nicht. Möchte man analytische Geometrie der Anschauungsebene treiben, so muß man auch Punkte zulassen, welche irrationale Koordinaten haben.

Anmerkung

Die rationale Ebene hat viele weitere merkwürdige Eigenschaften. Suchen Sie weitere? Teilen sie uns solche mit – wir werden in einem späteren Heft berichten.

Dr. Klaus Ulshöfer
Stiftsgymnasium Sindelfingen

Alphons logische Abenteuer

Den ganzen Nachmittag schon probierte Berti die "Protagoras-Lösung". Er hatte in dem alten Buch ein weiteres, aus der Antike überliefertes Problem gefunden. Wie er es auch anstellte, die Aufgabe war nicht durch irgendeine Einschränkung lösbar. Er las nochmals den Text: "Eine Ägypterin sah, wie ihr am Nil spielendes Kind von einem Krokodil angegriffen wurde. Die Mutter eilte an das Ufer und bat das Krokodil, das Kind frei zu geben. Das Tier antwortete, daß es das Kind zurückgebe, wenn die Mutter errate, was es tun werde. Die Mutter sagte: Du wirst mir mein Kind nicht zurückgeben. Das Krokodil erwiderte darauf: Du magst wahr oder falsch gesprochen haben, ich brauche dir auf keinen Fall das Kind zurückgeben; dann ist deine Rede wahr, so erhälst du es nicht wieder nach deiner eigenen Aussage, ist sie aber falsch, so gebe ich es nicht zurück kraft unserer Übereinkunft.
Die Mutter widersprach: Ich mag wahr oder falsch gesprochen haben, du mußt mir mein Kind zurückgeben. Denn ist meine Aussage wahr, so mußt du es mir geben laut unserer Übereinkunft; ist sie aber falsch, so ist das Gegenteil wahr: Du wirst mir mein Kind zurückgeben."
Die Lösung wird man wohl nicht auf unbestimmte Zeit vertagt haben können, dachte Berti, und darin wird man ihm recht geben müssen, das folgende aber, was Berti murmelte, als seine subjektive Meinung ansehen: "Muß dieses gefräßige Tier die armen Menschen obendrein noch mit einem solchen Dilemma schachmatt setzen!"
Alphons, den Berti noch am Abend aufsuchte, meinte zu Bertis mitfühlender Äußerung, daß durch das Dilemma auch das Krokodil in seinem Tun betroffen sei. Nach einigem Für und Wider kam Berti auf die Idee, einen analogen Fall zu konstruieren. Er nahm die Schultasche von Alphons und sagte: "Alphons, Du bekommt die Tasche zurück, wenn Du errätst, was ich als nächstens tun werde."
Dieser überlegte und fand, daß damit nicht genau die Problemlage getroffen ist. "Trotzdem kommen wir einen wichtigen Schritt weiter. Du hast Dir – hoffentlich – etwas vorgenommen. Ich soll das in Form einer Aussage erraten. Der Springpunkt ist, ob das, was ich behaupte, gerade das ist, was Du tun willst. Meine Aussage ist wahr, wenn sie mit dem übereinstimmt, was zu tun Du beabsichtigst. Die Wette lautet also: Ist wahr, daß Du das gedacht hast, was ich durch meine Aussage vermute, nicht aber, ob das, was Du gedacht hast, wenn ich es errate, wahr ist."
Berti bat Alphons, ihm das letztere nochmals zu erklären. "Die Mutter hat zwischen zwei Aussagen zu entscheiden, (a) Ich gebe das Kind zurück, (b) Ich gebe das Kind nicht zurück. Beide Aussagen betreffen ein mögliches Tun des Krokodils, von dem dieses eins sich nach Voraussetzung ausgewählt hat. Das beabsichtigte Tun hat die Mutter zu erraten, indem sie entweder (a) oder (b) wählt. Die gewählte Aussage ist wahr, wenn sie mit jener übereinstimmt, gemäß der das Krokodil zu handeln beabsichtigt. Der Gegenstand der Wette ist also das Übereinstimmen einer Aussage mit einer Aussage. Ich denke mir eine von zwei bekannten Aussagen und Du hast recht, wenn Du die von mir gedachte Aussage errätst, dabei ist völlig gleichgültig, ob die von mir gedachte Aussage wahr oder falsch ist.
Die von mir gedachte Aussage ist wahr, wenn sie mit ihrem Sachverhalt übereinstimmt. Um ihren Sachverhalt geht es bei der Wette aber gar nicht. Ein logischer Fehler wird begangen, wenn man den Bezug einer Aussage auf eine Aussage mit deren Sachverhalt Bezug auf ihren Sachverhalt vertauscht. Der Gegenstand der Wette ist, ob eine Aussage mit einer Aussage übereinstimmt, nicht aber, ob letztere mit ihrem Sachverhalt übereinstimmt."
Berti las den Text nochmals laut durch und stellte dann zutreffend fest: "Das Dilemma entsteht somit dadurch, daß sowohl das Krokodil als auch die Mutter denselben logischen Fehler begehen."

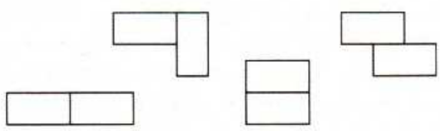
Prof. Dr. L. Kreiser

Systematische Untersuchung:

Zusammensetzung von drei Dominosteinen

Ein Rechteck im Format 2 x 1 sei der Einfachheit halber "Dominostein" genannt; wie ein solcher zerfällt es in zwei Quadrate.
Es ist zu untersuchen, auf wieviele Arten drei kongruente "Dominosteine" zusammengesetzt werden können, wenn jeweils nur die Quadratseite des einen Steines an die Quadratseite eines zweiten Steines gelegt werden darf.
Zusammensetzungen, die sich durch Drehung oder Spiegelung unterscheiden, gelten nicht als verschieden, sondern als identisch.

Nachstehend die vier möglichen Zusammensetzung von 2 solchen Dominosteinen.



Hermann Oehl, München

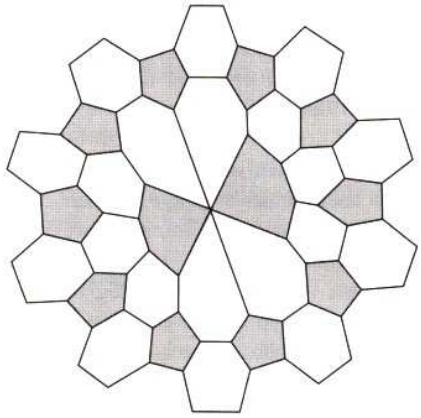
Lösungen zur Olympiade-Ecke in Heft 4/92

(Der Bundeswettbewerb Mathematik)

Aufgabe 1
Es sei p eine Primzahl größer als 3 und n eine natürliche Zahl; außerdem habe p^n in der Dezimalschreibweise 20 Stellen. Man zeige, daß hierin mindestens eine Ziffer mehr als zweimal vorkommt.
Lösung: Die Primzahlpotenz p^n sei vorgelegt. Da p^n in Dezimalschreibweise 20 Stellen besitzt und es im Zehnersystem genau 10 verschiedene Ziffern gibt, muß jede Ziffer in der Dezimaldarstellung von p^n genau zweimal auftreten. Für die Quersumme q von p^n gilt daher: $q = 2 \cdot (0 + 1 + 2 + ... + 9) = 90$. Die Quersumme ist somit Vielfaches von 3, also ist auch p^n durch 3 teilbar, kann somit keine Potenz einer von 3 verschiedenen Primzahl sein. Wenn p eine von 3 verschiedene Primzahl ist, tritt daher mindestens eine Ziffer in der Dezimaldarstellung von p^n mehr als zweimal auf.

Aufgabe 2
Gegeben ist ein Stück Papier. Es wird in acht oder zwölf beliebige Stücke zerschnitten. Jedes der entstandenen Stücke darf man wieder in acht oder zwölf Stücke zerschneiden oder unzerschnitten lassen, usw. Kann man auf diese Weise 60 Teile erhalten? Zeige, daß man jede beliebige Anzahl, die größer als 60 ist, bekommen kann! (1. Runde 1970)
Lösung: Zerschneidet man das Papierstück auf beiderlei Arten kommen stets 7 bzw. 11 Stücke hinzu. Die jeweilige Stückzahl ergibt sich somit aus dem Wertevorrat W der Funktion $(m,n) \longrightarrow 1 + 7 \cdot m + 11 \cdot n$ $(m,n \in \mathbb{N}_0)$.
Man kann auf diese Weise nicht 60 Stück bekommen. Es müsste gelten: $1 + 7m + 11n = 60$ $\Leftrightarrow 7m + 11n = 59$ mit $n<6$, $m<9$ -> $7m \in (59, 48, 37, 26, 15, 4)$, was nicht möglich ist.
Auf ähnliche Weise oder durch Probieren findet man jedoch Darstellungen für die Anzahlen 61, 62, ..., 67: (7,1) -> 61, (4,3) -> 62, (1,5) -> 63 (9,0) -> 64, (6,2) -> 65, (3,4) -> 66 und (0,6) ->67.
Mit den Zahlen 61 bis 67 gehören auch alle weiteren natürlichen Zahlen zu W; sie lassen sich durch die weitere Benützung nur der einen Zerschneidungsart (= Zerschneidung in 8 Stücke) erreichen.

Aufgabe 3
Die Oberfläche eines Fußballs setzt sich aus schwarzen Fünfecken und weißen Sechsecken zusammen. An die Seiten eines jeden Fünfecks grenzen lauter Sechsecke, während an die Seiten eines jeden Sechsecks abwechselnd Fünfecke und Sechsecke grenzen. Man bestimme aus diesen Angaben über den Fußball die Anzahl seiner Fünfecke und seiner Sechsecke. (1. Runde 1983)
Lösung:



Die oben dargestellte Figur zeigt die "Vorderseite" der zugehörigen Fußballoberfläche. Die "Rückseite" hat dieselbe Struktur wie die Vorderseite. Vorder- und Rückseite können entlang der 40 Anschlußkanten passend aneinandergefügt werden.
Der Fußball besteht aus einer ganzzahligen Anzahl von 5- und 6-Ecken. Da nach Voraussetzung jedes 5-Eck von fünf 6-Ecken und jedes 6-Eck von drei 5-Ecken umgeben ist, besteht der Fußball aus 3n Fünfecken und 5n Sechsecken ($n \in \mathbb{N}$), insgesamt also aus 8n Flächen. Jedes 5-Eck weist nun genau fünf Ecken und Kanten auf, jedes 6-Eck genau sechs. Da jede Ecke im Fußball gleichzeitig drei Flächen angehört, hat dieser genau

$$\frac{3n \cdot 5 + 5n \cdot 6}{3} = 15n \quad \text{Ecken.}$$

Da jede Kante im Fußball genau zwei Flächen angehört, besitzt er

$$\frac{3n \cdot 5 + 5n \cdot 6}{2} = \frac{45}{2}n \quad \text{Kanten.}$$

Für jedes Polyeder mit e Ecken, f Flächen und k Kanten gilt der EULERsche Polyedersatz: e + f = K + 2. Demnach gilt

$$15n + 8n = \frac{45}{2}n + 2 \quad \text{woraus } n = 4 \text{ folgt.}$$

Der Fußball hat demnach $15 \cdot 4 = 60$ Ecken, $\frac{45}{2} \cdot 4 = 90$ Kanten und besteht aus $8 \cdot 4 = 32$ Flächen, nämlich aus $3 \cdot 4 = 12$ Fünfecken und $5 \cdot 4 = 20$ Sechsecken. (Dieses Lösungsbeispiel stammt übrigens von einem bayerischen Teilnehmer am 1983er Wettbewerb.)

Aufgabe 4
In einem Quadrat mit der Seite 7 sind 51 Punkte markiert. Es ist zu zeigen, daß es unter diesen Punkten stets drei gibt, die im Innern eines Kreises mit Radius 1 liegen. (2. Runde 1972)
Lösung: Man unterteilt das gegebene Quadrat in 25 Teilquadrate mit der Seitenlänge $\frac{7}{5}$.

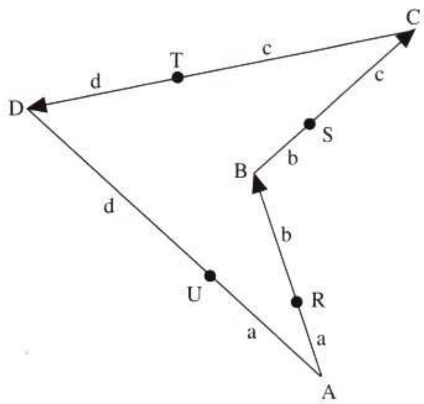
Die Verteilung der 51 markierten Punkte auf die Teilquadrate (deren Ränder den Quadraten zugerechnet werden sollen), kann nach dem "Schubfachprinzip" nur so sein, daß auf mindestens ein Teilquadrat mehr als 2 Punkte kommen. Die Diagonale eines derartigen Teilquadrates beträgt (nach dem Satz von Pythagoras):

$$d^2 = \left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{5}\right)^2; \quad d = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^2};$$

$$d = \frac{7}{5} \cdot \sqrt{2} \approx 1{,}98 < 2$$

Also liegt dieses Teilquadrat (zusammen mit den mindestens 3 markierten Punkten) ganz in einem Kreis mit Radius 1 um den Quadratmittelpunkt.

Aufgabe 5
Eine Kugel wird von allen vier Seiten eines räumlichen Vierecks berührt. Man beweise, daß alle vier Berührungspunkte in ein und derselben Ebene liegen. (2. Runde 1984)
Lösung:



Vorbemerkungen zur Bezeichnung.
Die Ecken des räumlichen Vierecks seien A, B, C, D. Die Berührpunkte der Kugel mit den einzelnen Viereckseiten sind R, S, T und U. Die Länge des Streckenabschnitts zwischen Ecke des Vierecks und entsprechendem Berührpunkt sind

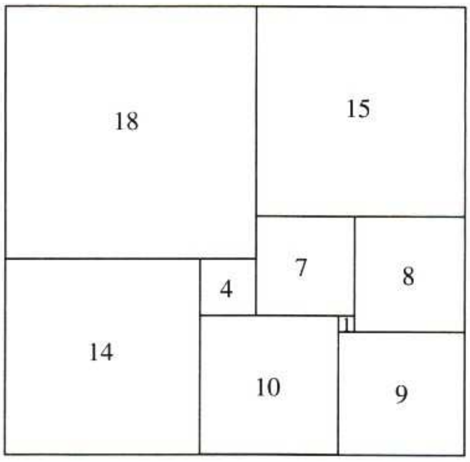
$\overline{AU} = \overline{AR} = a$, $\overline{BR} = \overline{BS} = b$, $\overline{CS} = \overline{CT} = c$, $\overline{DT} = \overline{DU} = d$

Es wird eine vektorielle Lösung angegeben. Ecke A sei der Nullpunkt des dreidimensionalen Punktraumes. AD habe die normierte Länge 1. Betrachte die normierten Vektoren $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{z} = \overrightarrow{CD}$.

Für die Ortsvektoren $\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}$ (zu den Punkten R, S, T) gilt nacheinander:
$\vec{r} = a \cdot \vec{x}, \vec{s} = \vec{r} + b\,(\vec{x} + \vec{y}), \vec{t} = \vec{s} + c\,(\vec{y} + \vec{z})$
Für den Ortsvektor von U ergibt sich damit:
$\vec{u} = a\,(\vec{t} + d \cdot \vec{z}) = a\,(\vec{s} + c\,(\vec{y} + \vec{z}) + d\vec{z}) =$
$= a\,(a\vec{x} + b\,(\vec{x} + \vec{y}) + c\,(\vec{y} + \vec{z}) + d\vec{z}) =$
$= a\,((a + b)\,\vec{x} + (b + c)\,\vec{y} + (c + d)\,\vec{z})$
R, S und T bestimmen eine Ebene (als paarweise verschiedene Punkte einer Kugel können sie nicht alle auf einer Geraden liegen). Als Parameterdarstellung eines Punktes P dieser Ebene erhält man:
$\vec{P} = \vec{r} + v\,(\vec{s} - \vec{r}) + w\,(\vec{t} - \vec{s}) = a\vec{x} + bv\,(\vec{x} + \vec{y}) +$
$+ cw\,(\vec{y} + \vec{z}) = (a + bv)\,\vec{x} + (bv + cw)\,\vec{y} + cw.$
Für die speziellen Parameter
$v := \frac{ab - ad}{b}, \quad w := \frac{ac + ad}{c}$
erhält man dann
$\vec{P} = (a\,(1 + b - d)\,\vec{x} + a\,(b - d + c + d)\,\vec{y} +$
$+ a\,(c + d)\,\vec{z} = a\,(a + b)\vec{x} + a\,(b + c)\,\vec{y} +$
$+ a\,(c + d)\,\vec{z} = \vec{u}.$
U liegt also in der von R, S und T bestimmten Ebene.

Aufgabe 6
Gesucht werden drei natürliche Zahlen a, b, c, bei denen das Produkt von je zweien bei Division durch die dritte den Rest 1 läßt. Man bestimme alle Lösungen. (2. Runde 1990)
Lösung: Alle Zahlen a, b, c seien größer als 1 (da andernfalls mindestens eine der drei betrachteten Divisionen ohne Rest bliebe).
O. B. d. A. gelte: $1<a<b<c$. Nach Voraussetzung gibt es ganze Zahlen α, β, γ mit $ab - 1 = \gamma \cdot c$, $bc - 1 = \alpha \cdot a$, $ca - 1 = \beta \cdot b$.
Durch Multiplikation ergibt sich hieraus
$\alpha\beta\gamma abc = (ab - 1)\,(bc - 1)\,(ca - 1) =$
$= a^2b^2c^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2 + ab + ac + b \cdot c - 1$
Subtraktion der ersten vier Summanden der rechten Seite und Ausklammern von abc erg.
$abc \cdot (\alpha\beta\gamma - abc + a + b + c) = ab + ac + bc - 1,$
somit teilt abc die Summe $ab + ac + bc - 1$.
Da diese Summe positiv ist (nach Vorbemerkung), folgt
(1) $abc<ab + bc + ca$.
Wegen $a < b < c$ folgt aus (1):
$abc < 3bc$, also $a < 3$ und somit $\underline{a = 2}$
Einsetzen von $a = 2$ in (1) liefert:
(2) $2bc < 2b + bc + 2c$
Hieraus folgt $bc < 2b + 2c < 4c$, also $b < 4$ und somit $\underline{b = 3}$
Einsetzen von $b = 3$ in (2) liefert:
(3) $6c < 6 + 3c + 2c$
Hieraus folgt $c<6$ und somit $\underline{c = 5}$ (weil a und c teilerfremd sind).
Durch Nachrechnen bestätigt man, daß (2, 3, 5) tatsächlich ein Lösungstripel ist: $2 \cdot 3 = 1 \cdot 5 + 1$, $3 \cdot 5 = 7 \cdot 2 + 1$, $2 \cdot 5 = 3 \cdot 3 + 1$.
Als Gesamtheit der Lösungen ergibt sich daher {(2, 3, 5), (2, 5, 3), (3, 2, 5), (3, 5, 2), (5, 2, 3), (5, 3, 2)}.

Aufgabe 7
Man entscheide durch Beweis, ob es möglich ist, neun quadratische Flächenstücke mit den Seitenlängen 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 und 18 lückenlos zu einem Rechteck aneinanderzulegen, ohne daß sich Flächenstücke überlappen. (Prüfungsjahrgang 1979)



Lösung:
Das gesuchte Rechteck besitzt die Flächenmaßzahl $A = 1^2 + 4^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 14^2 + 15^2 + 18^2 = 1056$. Die kürzere Rechteckseite muß mindestens die Länge 18 haben. Deshalb kommen nur die folgenden Rechtecksformen in Betracht: (48; 22), (44; 24), (33; 32). Da 18 + 15 = 33, scheint eine Pflasterung des Rechtecks mit den Abmessungen 32x33 aussichtsreich. In der Tat führt die Plazierung des größten Quadrats in eine der Ecken des Rechtecks zu einer möglichen Lösungsfigur.

Aufgabe 8
Bestimme das Produkt aller Teiler von 1980^n für $n \in \mathbb{N}$ (a ist Teiler von b, wenn
$\frac{b}{a} \in \mathbb{N}$. (Prüfungsjahrgang 1981)

Lösung: Vorbemerkung. Besitzt eine Zahl n die Primfaktorenzerlegung
$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k}$, so beträgt die Anzahl T(n) seiner Teiler
$T(n) = (r_1 + 1) \cdot (r_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (r_k + 1)$
Es ist $1980^n = (2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11)^n =$
$= 2^{2n} \cdot 3^{2n} \cdot 5^n \cdot 11^n.$

Die Anzahl der Teiler von 1980^n ist somit
$T(1980^n) = (2n + 1)(2n + 1) \cdot (n + 1) \cdot (n + 1)$
$= (2n + 1)^2 \cdot (n + 1)^2$

Wir unterscheiden zwei Fälle:
i) n ist ungerade. Dann ist $T(1980^n)$ gerade, da n + 1 gerade. Da sich je zwei Komplementärteiler multiplikativ zu 1980^n zusammenfassen lassen, beträgt daher das Produkt aller Teiler $(1980^n)^{\frac{m}{2}}$

ii) n ist gerade. Jetzt ist $T(1980^n)$ ungerade, da 2n + 1 und n + 1 ungerade sind. Je zwei Teiler außer $1980^{\frac{n}{2}}$ ergänzen sich wie bei i) und können daher durch $1980^{\frac{n}{2}} \cdot 1980^{\frac{n}{2}}$ ersetzt werden. Daher beträgt das gesuchte Produkt wie vorher $(1980^{\frac{n}{2}})^m$. In beiden Fällen ist daher das Produkt aller Teiler von 1980^n gleich $1980^{\frac{nm}{2}}$.

Aufgabe 9
Zeige, daß $n^3 + m^3 + 4$ für $n, m \in \mathbb{N}$ keine Kubikzahl sein kann. (Prüfungsjahrgang 1985)
Lösung: Es gilt folgende Identität:
$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3(a^2b + ab^2)$. Deshalb liegt eine Betrachtung der verschiedenen Restklassen mod 3 nahe. Jede Zahl $x \in \mathbb{N}$ ist eindeutig auf eine der Arten $x = 3k$, $x = 3k - 1$ oder $x = 3k +$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ darstellbar.

Für $a = 3k$ und $b = 0$
ist $(3k + 0)^3 = 27k^3 \equiv 0 \mod 9$.
Für $a = 3k$ und $b = -1$
gilt $(3k - 1)^3 = 27k^3 - 27k^2 + 9k - 1 \equiv -1 \mod 9$.
Für $a = 3k$ und $b = 1$
gilt entsprechend $(3k + 1)^3 \equiv 1 \mod 9$.

Also kann x^3 für $x \in \mathbb{N}$ nur die Reste -1, 0 oder 1 mod 9 haben. Da nun $n^3 + m^3 + 4$ aus demselben Grund bei der Division durch 9 nur die Reste 2, 3, 4, 5 oder 6 läßt, kann dieser Term keine Kubikzahl darstellen.

Buchbesprechung

Walter Krämer: Statistik verstehen. Eine Gebrauchsanweisung

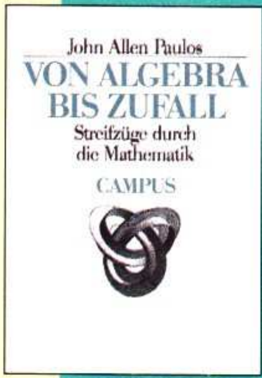
Reihe Campus Band 1062. 1992. 163 S., mit vielen Abbildungen, Grafiken und Tabellen, DM 19,80; ISBN 3-593-34719-9.

Wer erfahren hat, wie man mit Statistik lügt, will wohl auch wissen, wie man's "ehrlich" macht. Walter Krämer, bekannt für seine flott geschriebene Statistik-Kritik, führt in seinem neuen Buch die Grundbegriffe vor. Aber anders als herkömmliche Statistiklehrbücher hält sich Krämer nicht lange mit Definitionen und mathematischen Ableitungen auf. Er erklärt ohne viele Formeln, wie ein Preisindex entsteht, oder aus welchen Bestandteilen sich das Sozialprodukt zusammensetzt. Bei Krämer erfahren wir, was der Deutsche Aktienindex (DAX) ist, was wir im sogenannten Warenkorb finden und warum wir immer länger leben, aber dafür häufiger an Krebs sterben.

Das Buch ist ein unentbehrlicher Ratgeber für alle, die Zahlen und Ziffern nicht nur lesen, sondern auch verstehen wollen

Marktecke

Von Algebra bis Zufall

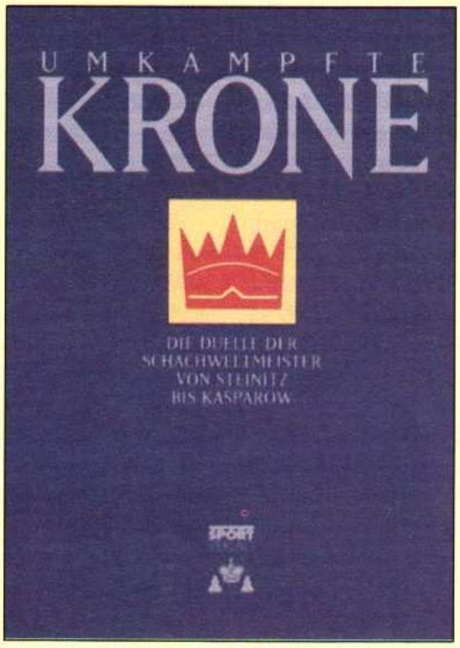


Streifzüge durch die Mathematik (Originaltitel: Beyond Numeracy) von John Allen Paulos Aus dem Englischen von Thomas M. Niehaus, 1992. 291 S., geb. , DM 48,—, ISBN 3-593-34713-X

"Man kann von Montaigne, Flaubert und Camus etwas lernen, ohne Französisch zu können, und genauso kann man auch etwas von Euler, Gauß und Gödel lernen, ohne Differentialgleichungen lösen zu müssen" So lautet die Maxime von John Allen Paulos, der ein breites Spektrum der Mathematik von Algebra bis Zufall bespricht. Dieses Buch ist jedoch kein Nachschlagewerk. Knapp und nicht ohne Witz werden in den Beiträgen Teilbereiche der Mathematik behandelt, Biografisches und Historisches von Gödel, Pythagoras oder die nicht-euklidische Geometrie erzählt. Viele Anekdoten und Beispiele beweisen, daß die Beschäftigung mit Mathematik, mit Ziffern und Zahlen durchaus unterhaltend sein kann. Von Algebra bis Zufall ist eine Einladung zur Mathematik, die auch mit dem Mißverständnis aufräumen will, daß Mathematik eine streng hierarchisch strukturierte Disziplin ist. Paulos' Buch ist deshalb nicht nur für Kenner und Kennerinnen, sondern auch für Ahnungslose.

Raymund Stolze

Umkämpfte Krone



Raymund Stolze: Umkämpfte Krone, Sportverlag, Berlin 1992; 224 Seiten, 220 Diagramme, 300 Fotos, geb., DM 29,80, ISBN 3-328-00526-9

Der Kampf um die Schachkrone brachte stets Impulse für die weitere Entwicklung dieser Sportart – so Weltmeister Garri Kasparow in seinem Vorwort zu „Umkämpfte Krone", dem Band, der seinerseits den Impuls auslöste, Schachweltmeisterschaften immer wieder zum Buchthema zu machen.
„Eines der schönsten Bücher der Schachgeschichte", lautete die anerkennende Einschätzung der in- und ausländischen Fachpresse nach Erscheinen der ersten Auflage 1987.
Diesem Urteil läßt sich nichts hinzufügen, denn nie vorher hat es einen solchen Prachtband über die Duelle der Schachweltmeister von Steinitz bis Kasparow von 1886 bis 1990 gegeben. Der ebenso lesens- wie anschauenswerte Band ist für Schachfreunde, die ein Spieldiagramm stundenlang sezieren, genauso interessant wie für die Freunde des königlichen Spiels die sich beispielsweise unter Caro-Kann nichts vorstellen können.

Der Inhalt spricht für sich:

- 36 Stories – spannend und unterhaltsam – über alle bisherigen Auseinandersetzungen um den WM-Titel.
- 75 % aller gespielten Gewinnpartien, kommentiert von Welt- und Großmeistern.
- Das faszinierende Bildmaterial: mehr als 300 Fotos, viele zum erstenmal veröffentlicht.
- Der lückenlose Statistikteil.

Ein vorzügliches Werk, ein einzigartiges Geschenk.

CABRI-Géomètre – Chancen auf Entdeckungen

Die Situation ist hoffnungslos. Dabei haben wir die Lösungsskizze ganz deutlich auf unserem Konzeptblatt ...

Die Rede ist von Aufgaben, die fordern, ein bestimmtes geometrisches Gebilde in eine vorgegebene Zeichnung gleichsam "einzupassen", wobei der Zusatz "Konstruiere mit Zirkel und Lineal" die eigentlichen Schwierigkeiten bereitet.
Neben den schon klassischen Aufgaben wie "Konstruiere die einem Dreieck einbeschriebenen Quadrate!" oder "Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck, dessen Eckpunkte je auf einer von drei parallelen (nicht zusammenfallenden) Geraden liegen!" tauchen unter

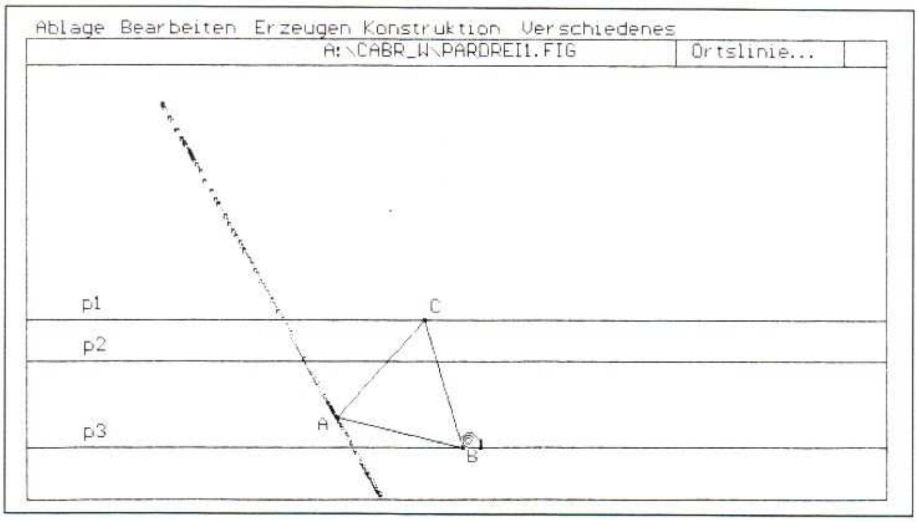


Abb. 1: Δ ABC ist ein gleichseitiges Dreieck mit $B \in p_3$ und $C \in p_1$. A jedoch erfüllt die geforderte Bedingung $A \in p_2$ nicht. B kann auf p_3 variiert werden, wobei A eine verblüffende (?) Ortslinie beschreibt.

Einführung in die Gruppentheorie

Die Gruppentheorie stellt eine geeignete Möglichkeit für eine Einführung in typisch mathematische Arbeits- und Denkweisen dar. Im Gegensatz zum historisch ersten Beispiel für eine axiomatisierte Disziplin gelangt der Leser hier von nur wenigen Axiomen ausgehend relativ schnell zu einfachen, aber interessanten Sätzen.

Das nun bereits in der 10. Auflage vorliegende Buch Einführung in die Gruppentheorie stellt eine Einführung in die elementare Algebra und Gruppentheorie dar, die in Mathematik und Physik, in Kristallographie, Festkörperphysik und Elementarteilchenphysik breite Anwendung findet. Alle eingeführten Begriffe werden ausführlich an einfachen geometrischen Beispielen erläutert. Die Überlegungen werden stets untermauert und ergänzt durch Erörterungen über spezielle Gruppen, wie z. B. Transformationsgruppen, Bewegungsgruppen, Faktorgruppen. Die nun vorliegende, überarbeitete Auflage wurde um einen Anhang von J. P. Solowjew über Bewegungsgruppen der Ebene und des Raumes und ihre Untergruppen erweitert.

Das Buch wendet sich an Schüler, Lehramtskandidaten und Fachlehrer für Mathematik. Es ist darüber hinaus bestens geeignet, Studenten der Physik und Ingenieurwissenschaften mit dem fundamentalen Begriff der Gruppe vertraut zu machen.

Aus dem Inhalt:

1. Der Gruppenbegriff
2. Permutationsgruppen
3. Isomorphe Gruppen. (Der Satz von Cayley)
4. Zyklische Gruppen
5. Einfachste Kongruenzgruppen
6. Invariante Untergruppen
7. Homomorphe Abbildungen
8. Klasseneinteilung von Gruppen nach einer gegebenen Untergruppe. Faktorgruppen.

Pavel S. Alexandroff. 10., überarbeitete und erweiterte Auflage 1992. 152 Seiten mit 20 Abbildungen. Kartoniert. DM 24,– Johann Ambrosius Barth Leipzig – Berlin – Heidelberg, Edition Deutscher Verlag der Wissenschaften
ISBN 3-335-00320-9

Wettbewerbsaufgaben für Schüler auch neue auf wie "Einem gegebenen Dreieck ABC mit $D \in BC$ und $E \in DC$ ist ein Parallelogramm DEFG einzubeschreiben!

Moderne Geometriesoftware, z. B. der CABRI-Géomètre, bieten für die Lösung solcher Aufgaben bemerkenswerte Mittel an, die Variations- und die Ortslinienfunktion Sie seien am zweiten Beispiel erläutert.

1. Man begnügt sich bei der (vorläufigen) Konstruktion einer Lösung damit, daß nur der größte Teil der geforderten Bedingungen erfüllt ist.
2. Man variiert die Bildschirmfiguren (s. **Abb. 1**). Die Darstellung, bei der die gegenseitigen Beziehungen der computererzeugten Geraden, Kreise und Schnittpunkte erhalten bleiben, durchläuft dann (alle) möglichen Lagen.
3. Darunter befindet sich bei fehlerfreiem Vorgehen auch die gesuchte, bei der die außer acht gelassenen Bedingungen erfüllt sind. Um bei dieser Variation bessere Übersicht behalten zu können, ist vorgesehen, einzelne Punkte "mit einem Zeichenstift zu versehen", so daß während der Variationen eine Ortslinie gezeichnet wird.

In vielen Fälle führt diese Ortslinie unweigerlich zur konstruktiven Lösung des Problems. In unserem Beispiel kann aus dem Sonderfall $C \in p_1$ und $A \in p_1$ auf die Eigenschaft der Ortslinie (hier Gerade im 60°-Winkel zu den Parallelen) geschlossen werden.

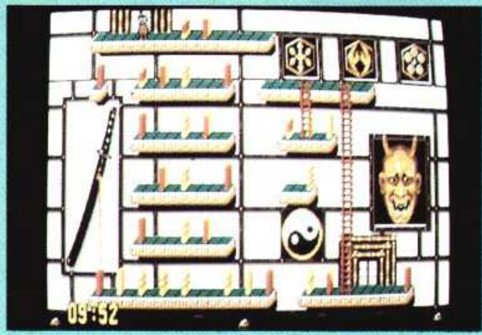
Das Programm CABRI-Géomètre ist die Entwicklung einer Gruppe von Didaktikern und Informatikern der Universität Grenoble (Frankreich) und kostet 228,00 DM, als Schullizenz 598,00 DM. Es ist für IBM-kompatible und Macintosh-Rechner lieferbar.

Durch die übersichtliche Menüsteuerung benötigt man kaum Einarbeitungszeit und wird bald auch solche Möglichkeiten wie das Messen einzelner Objekte (Meßergebnisse werden im Zugmodus, d. h. beim Variieren, stets aktualisiert) oder die Makro-Konstruktionen beherrschen. Neben der Beschriftung von Punkten, Kreisen usw. stehen vier Farben zur Gestaltung der Zeichnungen zur Verfügung.

Aufgabe: Man löse die beiden übrigen Probleme durch gedankliches Nachahmen der Ortslinienfunktion, indem mehrere (in beschriebener Weise unvollkommene) Figuren gezeichnet werden und eine Vermutung über die Eigenschaften der herausgelösten Punkte aufgestellt wird.

Dr. Christian Werge, Abt. Didaktik des Fachbereichs Math. und Informatik der Universität Leipzig

PUSHOVER



Wer hat nicht schon einmal sein Dominospiel herausgeholt, die Steine hochkant hintereinander aufgebaut, angestoßen und zugesehen, wie sie in einer Kettenreaktion umfielen?

Wem das zu monoton ist, kann es nun schwieriger haben. Um für das in England bekannte Produkt Quavers zu werben, bedienten sich die Werbefachmänner von Smith Crisp Ltd dieses alten Vergnügens und des Computerspieles PUSHOVER – oder war es umgekehrt?

Colin Curly, kraftprotziger Hund, hat dummerweise seine Quaverstüten verstolpert. Um die verlorenen Tüten aus einem unterirdischen Gängesystem zu holen, muß die G. I. Ant, die stärkste Ameise der Computerwelt, in jedem Level Steine in einer bestimmten Reihenfolge aufstellen, damit am Ende als Folge einer Kettenreaktion der Schlußstein umfällt und sich die Tür zum nächsten Level öffnet. Im Computer sind die Steine, anders als in unserer Tischvariante, häufig auf mehreren Ebenen angeordnet, so daß Sondersteine wie der Aufsteiger, Überschlagblöcke, Teiler, Stopper, Überbrücker oder Explosionsblöcke in das Spiel eingebaut wurden. Leider hat man innerhalb einer vorgegebenen Zeitspanne nur einen einzigen "Schubs", um alle Steine den Regeln gemäß umzuwerfen. Doch clevere Ameisen lassen sich etwas einfallen. Flink sausen sie über die vorhandenen Treppen zu den verschiedenen Ebenen, um dort aktiv zu werden. G. I. Ant, der Schwarzenegger im Ameisen-Digi-Land, läßt neben den Muskeln verstärkt die grauen Zellen spielen. Der Devise erst Denken, dann handeln, bleiben alle Wege offen.

Damit alles seine Ordnung hat, liefert PUSHOVER ein Blatt zum Aufschreiben für die Levelcodes gleich mit. Da das alles noch in einen flotten Sound verpackt ist und die Zeitspanne wahrhaftig ausreicht, wenn man letztendlich eine der vielen Lösungsmöglichkeiten gefunden hat, hat die Tütensuche einen Stammplatz auf der Festplatte, denn dann kann man so eben „Zwischendurch mal" die Suchaktion fortsetzen.

PUSHOVER ist ein Logikrätsel mit Zeitfaktor, bei dem die einzelnen Aufgaben vielfältige Lösungsmöglichkeiten zulassen – und der Spaß kommt wahrlich nicht zu kurz.

Hersteller: Ocean / The Red Rat 1992. Distributor: Bomico. Typ: taktisches Umbauspiel. Handbuch: D-E-F brauchbar. Hardware: AT+, 640 KB RAM, 16-F-VGA, Soundkarte, Tastatur, Joystick. Preis: DM 89

Berit Seitz

Lösungen

Sprachecke

• Dreimal nichts

Ermittelt werden soll die vorliegende Multiplikation, von der man weiß, daß eine Ziffer immer durch den gleichen Buchstaben ersetzt wird und ein Buchstabe nur für eine bestimmte Ziffer steht. Die Ziffer 3 kommt nicht noch einmal vor. Die Ziffer 0 wird durch den Buchstaben O vertreten.
Die Multiplikation ist eindeutig.

Lösung:
5694 x 3 = 17082

• Mich auf eine Autoreise vorbereitend, bemerkte ich die Unmöglichkeit einer Tachometerreparatur und ersetzte ihn durch einen Tachometer eines anderes Autos. Als ich von zu Hause losfuhr, standen 131313 km auf dem Kilometerzähler. Auf der Chaussee zeigte er bei der Säule mit der 100 km Markierung 131460 km und nach 70 km 131558 km. Als ich am Ziel ankam, zeigte der Zähler 132713 km. Wieviel Kilometer fuhr ich?

Lösung
Aufgrund der Aufgabenstellung bildet man die Gleichung

$$\frac{132713 - 131313}{131558 - 131460} = \frac{x}{70\text{ km}}$$

und errechnet hieraus

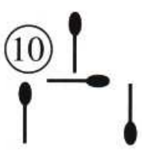
$$x = \frac{1400 \cdot 70\text{ km}}{98}$$

$$x = 1000\text{ km}$$

Meine Fahrstrecke betrug 1000 km.

• Ein Zehncentstück im Glas

Das Bild zeigt vier Streichhölzer und ein Zehncentstück. Es sieht aus, als ob sich das Zehncentstück im Weinglas befindet. Kannst Du zwei Streichhölzer so umlegen, daß wieder ein Weinglas entsteht, aber ohne das Zehncentstück darin?



Buchstaben und Zahlen

1. Lösung:
$$\begin{array}{r} 95785 \\ \underline{12569} \\ 108354 \end{array}$$

2. Lösung:
$$\begin{array}{r} 26956 \\ 26956 \\ 26956 \\ 26956 \\ \underline{26956} \\ 134780 \end{array}$$

3. Lösung:
$$\begin{array}{r} 140965 \\ \underline{765521} \\ 906486 \end{array}$$

4. Lösung:
$$\begin{array}{r} 5 \cdot \quad 2471 \\ \underline{4 \cdot 2439215} \\ 9769215 \end{array}$$

5. Lösung:
$$\begin{array}{r} 81330 \\ \underline{9833370} \\ 9914700 \end{array}$$

6. Lösung:
$$\begin{array}{r} 81184 \\ \underline{987324} \\ 1068508 \end{array}$$

7. Lösung:
$$\begin{array}{r} 6588 \\ \underline{97384} \\ 103972 \end{array}$$

Logik in Potenzen, Produkten und Summen

Die Folgen A, B und C bestehen aus Potenzen, deren Basis von 1 bis n wächst, während sich der Exponent von n bis 1 verringert.
$1^n \; 2^{n-1} \; 3^{n-2} \ldots n^1$
In der Folge C ist n = 7. Die letzten beiden Glieder müssen also lauten:
$(n-1)^2 = 36$ und $n^1 = 7$
Die Folgen D, E und F bestehen aus Summen, in denen zu der wie oben gebildeten Potenz jeweils noch das Produkt aus Basis und Exponent addiert wird:
$1^n + 1n \;\; 2^{n-1} + 2(n-1) \;\; 3^{n-2} + 3(n-2) \ldots n^1 + n$
Also fehlen in der Folge F die Terme bzw. Zahlen
$(n-1)^2 + (n-1) \cdot 2 = \underline{\underline{48}}$ und
$n^1 + n \cdot 1 = \underline{\underline{14}}$

Zusammenfassung:
$x = 36$; $y = 7$; $x_1 = 48$; $y_1 = 14$

Wer findet die Primzahlen?

Lösung: 46 läßt sich in vierfacher Weise als Summe von 2 Primzahlen darstellen: 46 = 3 + 43 = 5 + 41 = 17 + 29 = 23 + 23. a kann weder 3, 5 noch 29 sein, weil dann b = 54 – a gleich 51, 49 oder 25 sein müßte und damit keine Primzahl wäre. a kann auch nicht 43 sein, weil dann c = 60 – b = 60 – (54 – a) = 6 + a = 49 keine Primzahl ist. Für a gleich 41, 17 und 23 ergibt sich je eine Lösung:
1.) a = 41, b = 13, c = 47, d = 5
2.) a = 17, b = 37, c = 23, d = 29
3.) a = 23, b = 31, c = 29, d = 23

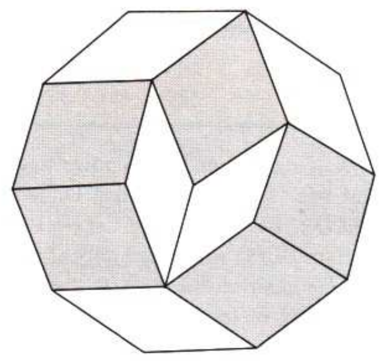
Auf wieviel verschiedene Arten kann man LÖSUNGSWEG lesen?

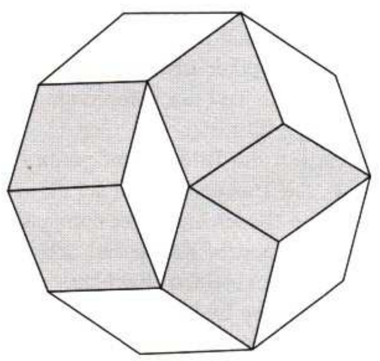
Lösung: Hierbei kann man das Pascalsche Dreieck zur Hilfe nehmen
1. Man rechnet es mit der Formel 2^9 aus daraus folgt $2^9 = 512$
2. Man zählt es aus mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks und kommt ebenfalls auf 512.

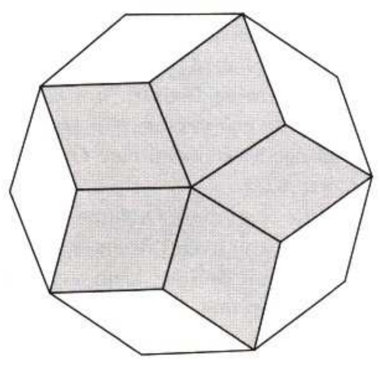
Das Nummernschild eines Autos

Lösung: Es gibt höchstens 27 · 26 = 702 Buchstabenkombinationen, die jeweils 999 verschiedene Zahlen besitzen können.
Daraus folgt: Es kann in einem Ort höchstens 999 · 702 = 701298 Autos geben.

Ein Legespiel

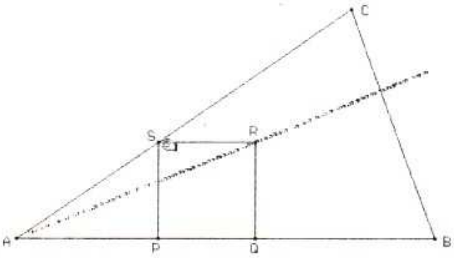




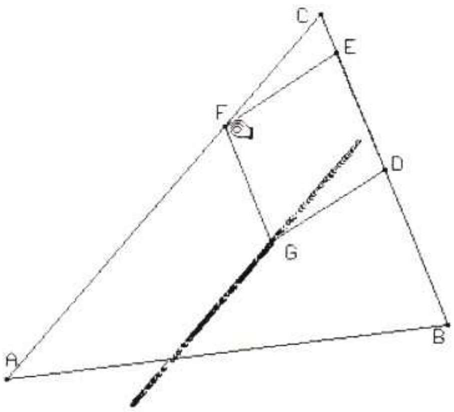


CABRI-Géomètre – Chance auf Entdeckungen

Zeichnet man in das Dreieck ABC ein Beliebiges Quadrat $P'Q'R'S'$ mit P' und Q' auf AB und S auf AC und variiert diese Figur unter den genannten Bedingungen, erkennt man eine „Ortslinie" des Punktes R', die eine Gerade durch A ist und BC im gesuchten Punkt R schneidet (Strahlensatz).



Analog wird beim dritten Problem verfahren: Zeichne ein beliebiges Parallelogramm DEF'G'. Variiere den Eckpunkt F' auf AC. Auch hier liegen alle Punkte G' auf einer Graden, die AC im gesuchten Punkt G schneidet.



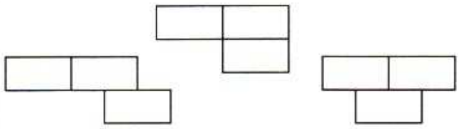
Geometrie ohne Irrationalzahlen

1. $\sqrt{5}$ ist nicht rational. Dann sind auch $\frac{4}{5}\sqrt{5}$ und $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ nicht rational. Diese Durchmessergerade schneidet den Kreis nicht.
2. Wäre tan 22,5° = q rational, so würde in der rationalen Ebene zu den sich schneidenden Geraden a: y = 0 und b: y = x die Winkelhalbierende w: y = qx existieren. Da es eine solche Winkelhalbierende aber nicht gibt, kann q = tan 22,5° nicht rational sein. Es ist tan 22,5° irrational.
Übrigens ist $\tan 22{,}5° = \sqrt{2} - 1$.
3. Beispielsweise gibt es keine Drehung um O(0; 0), welche die Gerade a: y = 0 in b: y = x überführt. Würde eine solche Drehung existieren, so würde der Kreis um O(0; 0) mit dem Radius 2 auf sich abgebildet werden. Insbesondere wäre der Bildpunkt des Punktes P(2; 0) von a der Schnittpunkt dieses Kreises mit der Geraden b. Da es diesen Schnittpunkt in der rationalen Ebene nicht gibt, kann es auch die Drehung nicht geben.

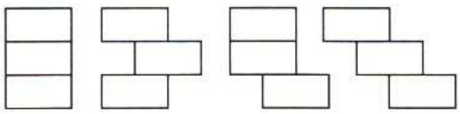
Zusammensetzung von drei Dominosteinen

Es sind nur folgende, einander ausschließende Fälle möglich:
I. Alle drei Steine liegen parallel zu einander
I,1) alle drei Steine liegen in einer Linie

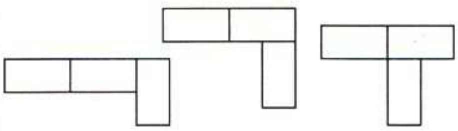
oder
I,2) sie liegen in zwei Linien untereinander



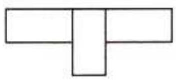
oder
I,3) sie liegen in drei Linien untereinander.



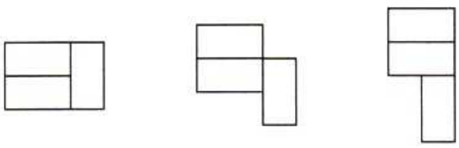
II. Zwei Steine liegen parallel zu einander, der dritte steht auf ihnen senkrecht.
II,1) Die beiden parallel liegenden Steine liegen in einer Linie
a) sich berührend,



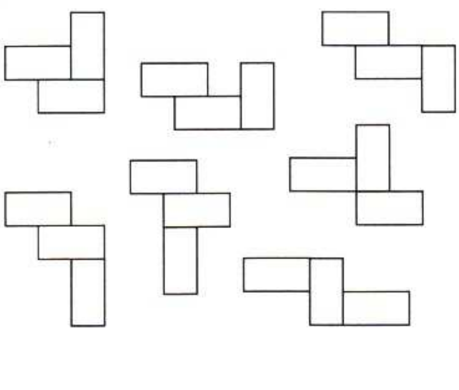
b) getrennt,



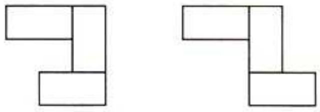
II,2) sie liegen in zwei Linien untereinander
a) ein Quadrat bildend,



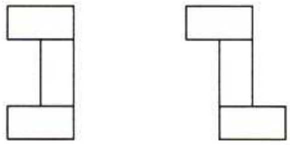
b) versetzt,



II,3) sie liegen in zwei von einander getrennten Linien
a) mit dem Abstand in Länge einer Quadratseite



b) mit dem Abstand in Länge zweier Quadratseiten.

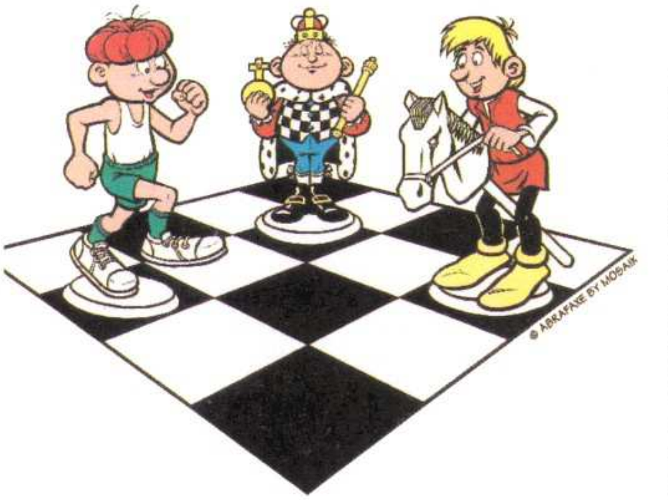


Die systematische Untersuchung (siehe unten) ergibt, daß es 26 verschiedene Zusammensetzungen der verlangten Art gibt.
P. S.: Hätte man anstatt nach den verschiedenen "Zusammensetzungen" nach verschiedenen "Figuren" (= Umrissen) gefragt, so wären es nur 23 Stück!

Die gleiche äußere Form (Figur, Umriß) tritt auf bei (3) = (15); (5) = (13) und (6) = (14), weil eine Teilfigur aus einem Quadrat 2 x 2 besteht, das in gespiegelter (oder um 90° gedrehter) Zusammensetzung verwendet wurde.

Deutsche Schulschachmeisterschaften 1992

Projekte, Pannen, Sensationen



Alljährlich tragen die Schachspieler nicht nur Vereinsmeisterschaften und Einzelwettkämpfe aus, ein beliebtes Turnier ist auch stets die Ermittlung des Deutschen Schulschachmeisters, der besten Schachschule Deutschlands.

Diese Meisterschaft findet in verschiedenen Altersklassen statt: Wk 1 (bis 13. Klasse), Wk 2 (bis 10. Klasse), Wk 3 (bis 8. Klasse), Wk M (Mädchen) und in diesem Jahr erstmalig als Pilotprojekt auch eine Wk 4 (bis 6. Klasse). Alle Schulen, an denen Arbeitsgemeinschaften Schach trainieren, bereiten sich lange und intensiv auf diesen Wettkampf vor. In den Länderturnieren werden bis März die Landesmeister ermittelt – nur sie haben das Recht, am Finale der jeweiligen Ak teilzunehmen. In Berlin beteiligten sich 1992 insgesamt rund 100 Schulen an diesen Vorausscheiden, in anderen Bundesländern ist das Echo trotz größerer Entfernungen noch intensiver – so kann insgesamt von einer Teilnahme von über 2000 Schulen in Deutschland ausgegangen werden. In diesem Jahr war es wieder zeitgleich zum Bundeswettbewerb "Jugend trainiert für Olympia" soweit – vom 7. bis 10. Mai fanden die Finalkämpfe statt. Mit der Mannschaft vom 5. Gymnasium Prenzlauer Berg Berlin war ich live in Karlsruhe dabei, weshalb ich hier näher über die Wettkampfklasse 3 berichten will. Eine kleine Sensation war schon die Teilnahme der Berliner Mannschaft, denn diese bestand komplett aus Jungen der 6. Klasse, die sich unter den um zwei Jahre Älteren den Landesmeistertitel erkämpft hatten. Die zweite Mannschaft des Gymnasiums startete übrigens in der Wk 4 in Leipzig. Traute man in Berlin dem doppelten Landesmeister schon so einiges zu, wurden die Zwerge von so manch anderem eher belächelt, außerdem hatte Berlin noch nie einen Deutschen Meistertitel geholt, die Hauptstätter blieben so sicher bei den meisten Planungen außen vor.

Fast hätte die Bundesbahn dafür gesorgt, daß es auch so geworden wäre – der Streiktermin war skandalöserweise nicht mit unserem Meisterschaftstermin abgestimmt. Doch nach dreimaligem Umsteigen kamen wir noch relativ gut in Karlsruhe an, auch die anderen Mannschaften blieben nicht auf der Strecke. So konnte die erste Runde der insgesamt 7 Spiele am Freitagmorgen ohne Störungen beginnen. Die Schulschachmeisterschaften werden im Schnellschach ausgetragen, d. h. pro Spieler stehen nur 60 Minuten Bedenkzeit zur Verfügung. Entsprechend werden alle Spiele zu Nervenschlachten, besonders für die Trainer, die wie gehetzte Rehe von einem Brett zum anderen jagen, um auch ja alles Wichtige mitzubekommen.

Am Abend des ersten Tages stand nach drei Runden Leipzig in Führung, doch viele andere Mannschaften lagen dicht auf, noch war gar nichts entschieden. Der Samstag sollte noch härter werden. Nach einem Sieg von Mainz über Leipzig rutschten die Sachsen vorerst ab, an die Spitze schoben sich völlig unerwartet die Berliner, die mit zwei Unentschieden gegen die Hamburger und Bad Schwartau bisher noch keinen Verlust quittieren mußten.

So sah der Stand auch nach 6 Runden aus – Berlin führte mit einem Mannschaftspunkt Vorsprung. Hart darauf folgten Hamburg und Mainz, beide noch mit Chancen auf den Meister, sowie Leipzig, welches sich durch hohe Siege wieder nach oben geschoben hatte. So hing alles am Sonntagmorgen. Berlin – Leipzig hieß das Schicksalsspiel – bei einem 2,5 – 1,5 für die Leipziger würde der Meister aus der Messestadt kommen. Nach 2 Stunden jedoch war die Sensation perfekt. Mit einem 2 : 2 wurde mit Berlin eine Mannschaft der 6. Klasse in der 8. Deutscher Schulschachmeister. Das gab es noch nie! Ein toller Erfolg für Thomas Neumann, Roland Bienert, Alexander Heinze und Henry Barth von Borussia Friedrichsfelde (übrigens fast alle auch eifrige alpha-Leser), die sich im komplett neuen Outfit des Sponsors Mosaik (wer kennt nicht die Abrafaxe?!) zeigten und sich stolz dem Blitzlichtgewitter stellten.

Natürlich wurde ebenso hart auch in den anderen Ak's gekämpft. In Leipzig wurde der Spieß umgedreht, hier ging der Prenzlauer Berg in Führung, konnte aber in der 3. Runde durch die Sportschule Dresden abgefangen werden – Sachsen vor Berlin und Hamburg. Hier waren sich die Trainer einig, dieses Finale für die Jüngeren muß auch im nächsten Jahr ins Programm. Leider waren die von den Veranstaltern gebotenen Bedingungen nicht die günstigsten – gerade für die Kleineren sollte man sich etwas mehr Mühe bei der Vorbereitung geben!

Zum Schluß noch ein Blick auf die anderen Ak's: in Halle kämpften die Mädchen mit nicht weniger Siegeswillen als die Jungen, die ortsansässigen Halloren gewannen dabei vor Leipzig und Weimar. In der Wk 2 in Bremerhaven siegte Winnenden vor Leipzig und Saarlouis (man beachte die stets hervorragenden Plätze der Sachsen!) und bei den Ältesten wurde Altensteig als einzige "Schachschule" der alten Bundesländer seiner Favoritenrolle voll gerecht (gekämpft wurde in Jena).

In relativ kurzer Zeit haben sich die neuen Bundesländer innerhalb der Schulschachbewegung ganz nach vorn gekämpft, auf die Ergebnisse des nächsten Jahres darf man gespannt sein. ***Markus Spindler***

Der Deutsche Meister Wk 3 bei der Partienanalyse (v. l. n. r.: Thomas Neumann, Alexander Heinze, Trainer Markus Spindler, Roland Bienert).

ISBN 3-617-34011-3 Einzelpreis: 2,50 DM Einzelpreis im Abo: 2,– DM

H 11328 F

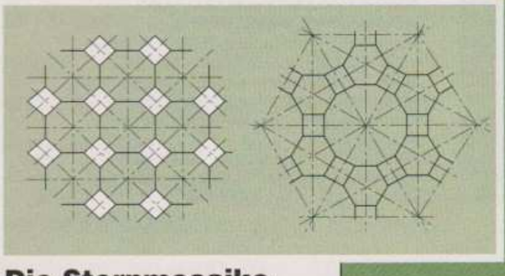
Heft 6
Dezember 1992
26. Jahrgang

Pädagogische
Zeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Sprachecke

Spinnennetze



Die Sternmosaike zweiter Art

Der Erdglobus

Inhaltsverzeichnis

Wichtiger Hinweis

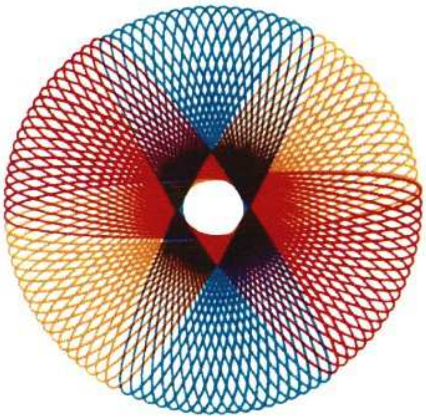
Im nächsten Heft werden die Aufgaben das neuen alpha-Wettbewerbs veröffentlicht und die Preise vorgestellt. Auch die erfolgreichen Teilnehmer des letzten alpha-Wettbewerbs und die Gewinner der zahlreichen Sachpreise befinden sich im Heft 1/1993.

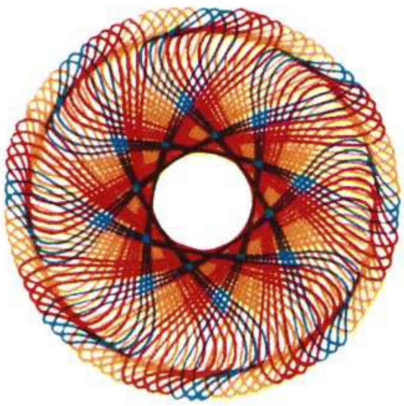
Neue Bezugspreise 1993

Liebe Leserin, lieber Leser, leider sind die Produktionskosten erneut gestiegen. Aus diesem Grund kommen auch wir an einer Preisanpassung nicht vorbei.
Ab 1.1.1993 kosten 6 alpha-Hefte im Abonnement nicht mehr 12,- DM sondern 12,90 DM.
Das Einzelheft kostet 3,00 DM (bisher 2,50 DM).
Die Preise verstehen sich ohne Versandkosten. Wir bitten um Ihr Verständnis.

Mit schönen Bildern kann man rechnen!

Ornamente mit dem Spirographen und Fadengrafiken





Wer gerne schöne Ornamente zeichnet, der findet mit dem Spirographen 1 einen Zeichenkasten, der ihn hierbei tatkräftig unterstützt. – Der Spirograph stellt eine Anzahl von kleinen Zahnrädern zur Verfügung, die innen oder außen an größeren Zahnrädern oder auf Zahnlinealen abgerollt werden. Dabei entstehen Ornamente durch einen Stift, der beim Abrollen in dem kleinen Zahnrad mitgeführt wird.

Aus diesem Grunde heißen diese Kurven auch Rollkurven (Zykloide). Im folgenden geht es um Kurven, die durch Abrollen von kleineren Rädern in größeren Zahnrädern entstehen. Ein großes Zahnrad mit a innenliegenden Zähnen wird auf einer Zeichenfläche befestigt. Ein kleineres Zahnrad mit b äußeren Zähnen wird im Inneren des großen abgerollt.

Das kleinere Zahnrad besitzt nun eine Reihe von Löchern, in die der Zeichenstift eingesetzt werden kann.

Bevor man weiter liest, ist es eigentlich unumgänglich, daß man eigene Erfahrungen beim Zeichnen solcher Kurven macht und dabei nicht nur erfährt, daß man sich stark konzentrieren muß, wenn die Kurven ohne Absetzer und Zeichenfehler entstehen sollen.

Durch Beobachten und etwas Nachdenken lassen sich folgende Aussagen aufstellen und begründen:

- Die Kurve kommt immer zum Anfangspunkt zurück.
- Vor- und Rückwärtsabrollen liefern dieselbe Kurve.
- Spitzen gibt es, wenn der Zeichenstift bei Abrollen dem Rand des großen Rades am nächsten ist.
- Spitzen, die beim Zeichnen nacheinander entstehen, sind b Zähne voneinander entfernt.
- Kurven, mit schärferen Spitzen entstehen durch Löcher nahe am Rande, kleinere mit glatteren Spitzen durch solche, die mehr zum Mittelpunkt hin liegen.
- Der Abstand benachbarter Spitzen (Spitzen, die nebeneinander liegen) ist gleich groß.

Wann schließt sich eine Kurve?

Sie schließt sich, wenn zum ersten Male dieselben Zähne wieder ineinandergreifen. Von einer Spitze bis zur nächsten, die beim Abrollen entsteht, hat sich das kleine Rad um b Zähne weiterbewegt, d. h. die Anzahl der Zähne a des großen Rades wird in Schritten der Länge b ausgemessen. Geht das ganz auf, schließt sich die Kurve schon nach dem ersten Umlauf. Bezeichnet man mit s die Anzahl der Spitzen der Figur, so ist das kleineren Rad $s \cdot b$ viele Zähne weiter und am selben Zahn des großen Rades wieder ausgekommen, also $s \cdot b = a$ bzw. $s \cdot b = u \cdot a$ bei u Umläufen im großen Rad und es stellt sich die Frage:

Wann ist ein Vielfaches von b einem Vielfachen von a gleich? Mathematisch ist das die Frage nach dem kgV (a, b).

Für alle Teiler von a schließt sich die Kurve nach dem ersten Umlauf. Das 24er- (32er-,

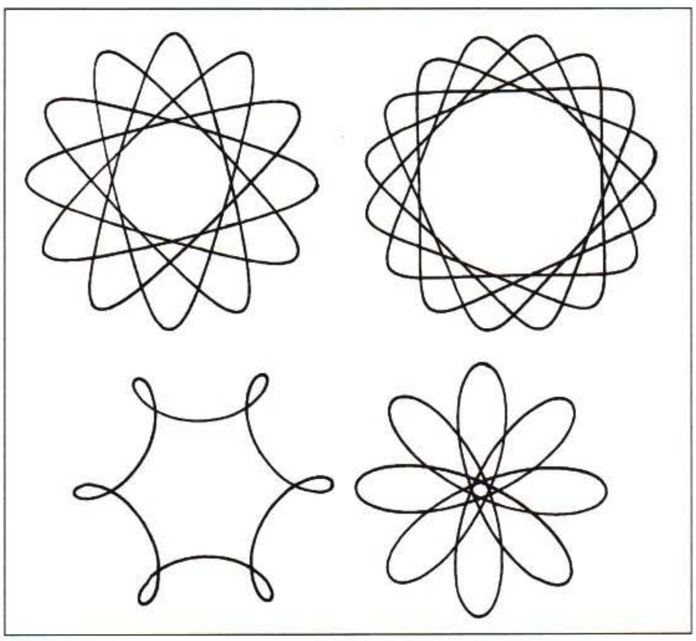


Abb. 1

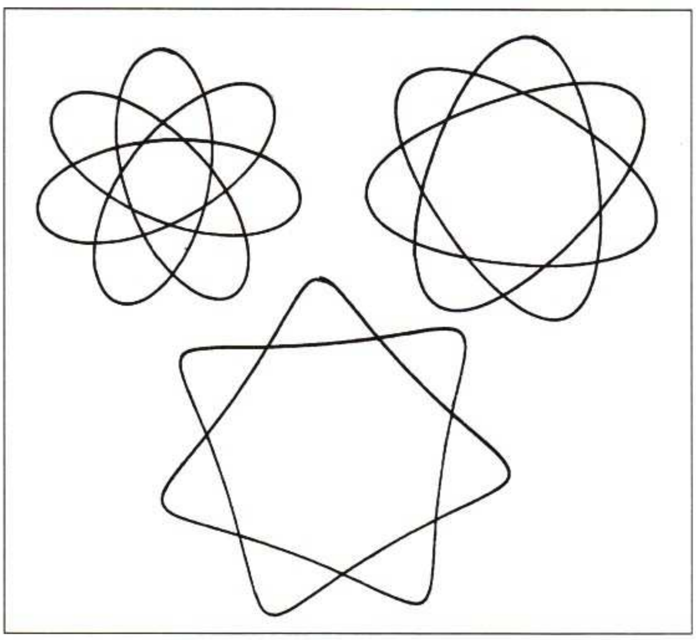


Abb. 2

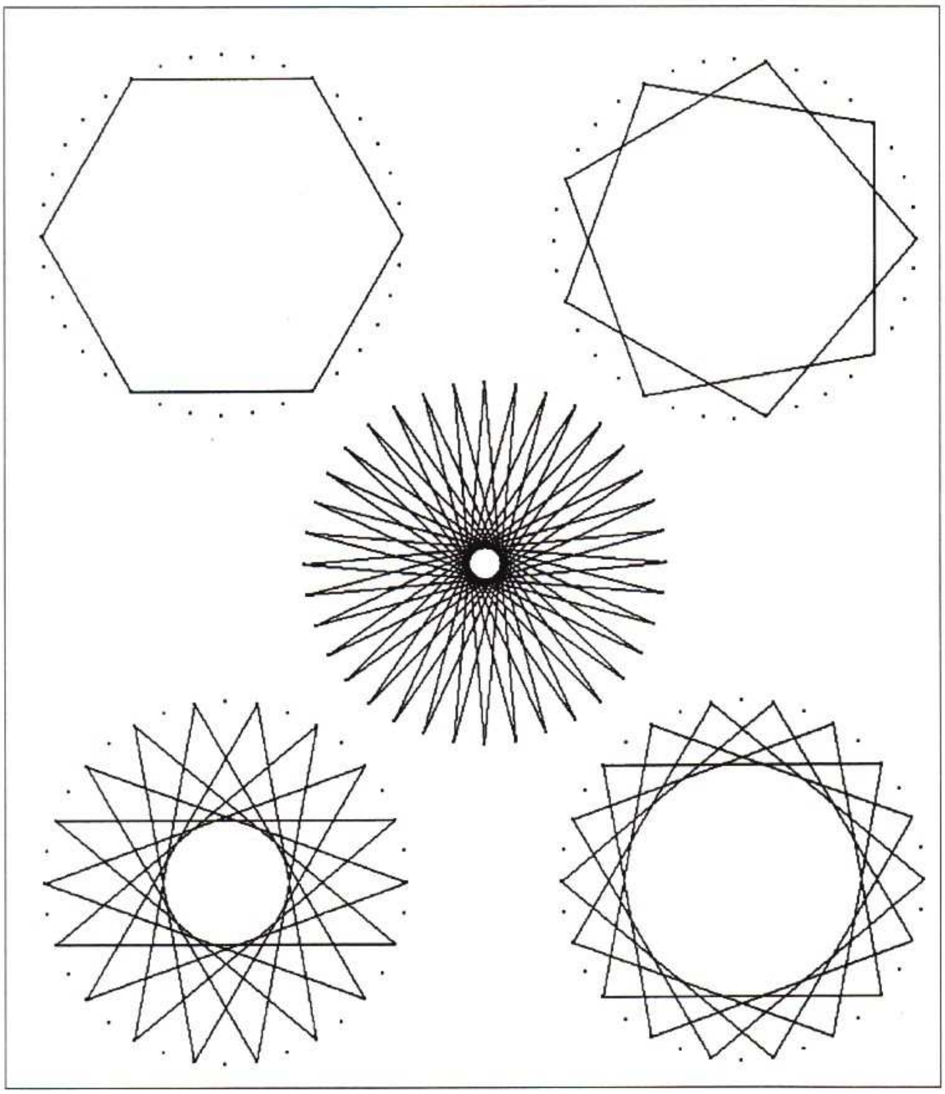


Abb. 3

48er-) Rad, im 96er-Rad abgerollt, ergibt einen "Vierspitz" (Dreispitz, Zweispitz).

Man bestimme die Anzahl der Spitzen und die zugehörigen Umlaufzahlen für a = 96 und b = 30, 40, 60, 80.

In **Abb. 1** ist diese Aufgabe zeichnerisch gelöst und man entscheide, welche Kurve mit welchen Rädern erzeugt wurde.

Jede Gerade durch eine Spitze und den Mittelpunkt einer Kurve ist eine Symmetrieachse, was man sich dadurch klarmacht, daß z. B. von einer Spitze durch Vor- bzw. Rückwärtsabrollen dieselbe Kurve entsteht. Aus dieser Symmetrie kann man auch den gleichen Abstand zwischen den Spitzen begründen.

Welcher Abstand, gemessen in Zähnen, stellt sich nun ein?

Es verteilen sich s Spitzen gleichmäßig über a Zähne, ihr Abstand ist damit a/s.

Einerseits gilt kgV (a, b) = s · b bzw. allg. kgV · ggT = a · b

s · b · ggT(a, b) = a · b oder a/s = ggT(a, b) oder s = a/ggT.

Analog bekommt man u = b(ggT(a, b). Mit diesen Formeln kann man die entstehenden Ornamente schon im Vorhinein beschreiben.

Für das 105er-Rad suche man alle kleinen Zahnräder, die Kurven mit 7 Spitzen entstehen lassen. (siehe Abb. 2)

Für das 96er-Rad entsprechende Räder, für die sich die Kurven nach 7 Umläufen schließen.

Diese Überlegungen an den Rollkurven lassen sich direkt übertragen auf sog. Fadengrafiken, die man sich im Gegensatz zum Spirographen selbst herstellen kann. In ein Holzbrett schlägt man in die Ecken eines regelmäßigen a-Ecks Nägel ein. Von einem Anfangsnagel aus spannt man einen (farbigen) Faden zu jedem b-ten Nagel, bis man wieder zum Anfang zurückkommt. Das a-Eck aus Nägeln entspricht dem äußeren Zahnrad, die Spannregel das sich abrollende, kleine Rad. Es entstehen ansprechende Ornamente (je nach Spannregel), die nicht nur den Klassenraum schmücken können. Zur Simulatin solcher Grafiken läßt sich auch leicht ein kleines Programm schreiben, wie das für die Fadengrafiken in **Abb. 4** gemacht wurde.

Manfred Möller
Akad. Oberrat am Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Dortmund

[1] In der Marktecke von Heft 4 wurde der Spirograph ausführlich vorgestellt.

Nasa gibt Asteroiden-Alarm

Globale Katastrophe denkbar – Genauere Beobachtung nötig

New York (EB) Ein Studienkreis unter NASA-Leitung hat in einem Bericht die US-Regierung von einer möglichen "globalen Katastrophe" durch Asteroideneinschlag gewarnt. Asteroiden sind Gesteinstrümmer im All, die von der Entstehung des Sonnensystems übriggeblieben sind. Die kleinsten von ihnen treffen oft auf die Erde und verglühen in der Atmosphäre als "Sternschnuppen".

Die Sorge der Wissenschaftler wurde vor zwei Jahren laut. Im März 1989 schrammte ein Asteroid von 800 Metern Durchmesser "knapp" an der Erde vorbei – im Abstand von 690 000 Kilometern (fast doppelte Entfernung Erde-Mond). 1991 kam einer der Erde gar auf 170 000 Kilometern nahe, allerdings ein deutlich kleineres Kaliber von 10 Metern. Dessen Aufschlag hätte "nur" die Wirkung des rätselhaften Tunguska-Meteoriten gehabt, der 1908 Dutzende Kilometer in Sibirien verwüstete.

Einen Brocken, der noch zehnmal größer als der von 1989 war, machen viele Forscher dagegen für das Aussterben der Saurier vor 65 Millionen Jahren verantwortlich – er habe soviel Staub aufgewirbelt, daß die Erde für Jahre im "nuklearen Winter" versank. Tatsächlich entspräche die Energie beim Aufprall eines solchen Asteroiden dem der Explosion von einer Millionen Wasserstoffbomben.

Nach den "Begegnungen" der letzten beiden Jahre beriefen Asteroidenforscher im Sommer 1991 einen Kongreß ein, um sich über die Größe der Gefahr einig zu werden. Das Ergebnis: Knapp 5000 Asteroiden sind bekannt, 128 von ihnen kommen der Erde nahe genug für eine Kollision, und 77 haben die richtige Größe (über 1000 Meter) für eine totale Katastrophe. Ihre Bahnen sind allerdings bekannt: keiner von ihnen wird die Erde in absehbarer Zeit rammen. Die Sorge besteht darin, daß wir noch nicht alle Asteroiden kennen könnten. Abhilfe böte also ein aufgestocktes Beobachtungssystem. Genau das schlägt die Forschungskommisssion, die nach dem Kongreß gebildet wurde, jetzt in ihrem Bericht vor: für 80 Millionen Mark (rund 16 Millionen jährlich Unterhalt) sechs weitere Teleskope zur Asteroidenbeobachtung zu installieren. Ein "Killer-Asteroid" könnte nämlich durch atomare Abfangraketen zertrümmert oder abgefangen werden. Aber ein paar Jahre Zeit zur Vorbereitung sollten wir schon haben, meinen die Forscher.

Döbelner Allgemeine Zeitung
Donnerstag, 9. April 1992

Aufgabe: Der 1871 entdeckte Meteorkrater bei Winslow im USA-Bundesstaat Arizona hat eine Tiefe von 180 m und einen Durchmesser von 1300 m. Er hat in guter Näherung die Gestalt eines Kugelsegmentes (Kugelabschnitt). Dieser vor etwa 22000 Jahren durch den Einschlag eines riesigen Meteoriten entstandene Krater ist noch viel zu jung und das Klima im Norden von Arizona viel zu trocken, so daß noch keine bemerkbare Einebnung stattfinden konnte. Wieviel Kubikmeter Gestein wurden beim Entstehen dieses Kraters beiseite geschleudert?

W. Träger, Döbeln

Zeitungsschnipsel

Eine Sonderprägung der UNITED STATES OF AMERIKA

Medaille "500 Jahre Wiederentdeckung Amerikas und 200 Jahre US-Dollar":

I. Feinsilbermedaille
Material: Feinsilber 999
Durchmesser: 35 mm
Masse: 15 g

II. Feingoldmedaille
Material: Feingold 999,9
Durchmesser: 35 mm
Masse: 22 g

Aufgabe:
Haben die hier vorgestellte Feinsilber- und Feingoldmedaille durchweg gleiche Abmessungen? Die Dichten von Feinsilber und Feingold mit höchstens 0,001 g Verunreinigungen in 1 g Masse sind

$\varphi_{Ag} = 10.5 \frac{g}{cm^3}$ und $\varphi_{Au} = 19.2 \frac{g}{cm^3}$.

W. Träger, Döbeln

Mehr

"Nach Schätzungen des Bundesumweltministeriums könnte eine Familie von fünf Personen 200 Mark im Jahr einsparen, wenn sie Getränke anstatt in Dosen ausschließlich in Mehrwegflaschen einkauft. Denn die Verpackungskosten liegen bei einer Weißblechdose im Schnitt bei 0,17 DM und bei einer Mehrwegflasche bei 0,03 DM." *(Info-Dienst Umwelt-Tip)*

Der Erdglobus

Laut literarischen Quellen fertigte um 150 v. Chr. der Grieche Krates einen Erdglobus (Kugel – lt.: globus) mit 4 längs des Äquators und des Hauptmeridians voneinander getrennten "Kontinenten".

Der älteste in Deutschland erhalten gebliebene, von Martin Behaim 1492 geschaffene Erdglobus befindet sich im Germanischen Nationalmuseum in Nürnberg. Auf diesem Globus ist Amerika nicht eingezeichnet, denn es wurde erst im gleichen Jahr 1492 von Kolumbus entdeckt. Auf der Weltausstellung 1992 in Sevilla war der in 20jähriger Arbeit von einem Handwerksmeister aus Wernigerode aus 578 rundgeklopften Messingplatten hergestellte Riesenglobus mit einem Durchmesser von 1,27 m ausgestellt.

1. Aufgabe:
Erhebungen und Vertiefungen der Erdoberfläche werden auf geographischen Karten u. a. durch Angeben ihrer Höhe über dem Meeresspiegel (Mittelwasser des Weltmeeres) beschrieben.
So hat der Mount Everest die Höhe 8872 m ü. M. Für die Herstellung eines Reliefglobus wird angenommen: Alle Punkte der Erde mit der Höhe 0 m ü. M. liegen auf einer Kugeloberfläche mit Radius 6370 km, und diese Kugelfläche wird durch eine räumliche Ähnlichkeitsabbildung auf die Kugelfläche des Reliefglobus abgebildet, in der das Bild des Weltmeeres liegt.
Welchen Abstand hätte auf einem Reliefglobus die Spitze des Mount Everest von der das Bild des Weltmeeres tragenden Kugelfläche mit dem Durchmesser 1,27 m, wenn die Höhen ü. M. durch die gleiche Ähnlichkeitsabbildung, die das Weltmeer auf den Reliefglobus abbildet, mit abgebildet werden?

2. Aufgabe:
Der Meeresspiegel des Weltmeeres liegt auf einer abgeplatteten Rotationsfläche (Rotationsellipsoid), deren Achse die Erdachse ist. Diese Rotationsfläche, deren Punkten der Höhe 0 m ü. M. zugeordnet ist, hat den Äquatorialdurchmesser 2 a = 12756 km und den Poldurchmesser 2 c = 12712 km. Welchen Abstand hätte auf einem zu diesem den Meeresspiegel enthaltenden Rotationskörper ähnlichen Modellkörper, dessen Äquatorialdurchmesser 1,27 m beträgt, ein Pol vom Mittelpunkt?

W. Träger, Döbeln

wegflasche statt Dose

Aufgabe:
Wieviele Weißblechflaschen muß ein Fünfpersonenhaushalt im Mittel pro Monat und pro Person beim Einkauf durch Mehrwegflaschen ersetzen, um so im Jahr 200 DM einzusparen?

W. Träger, Döbeln

Knobelecke

	a	b	c	d	e	f	g
1				■			
2		■				■	
3				■			
4				■			
5	■		■		■		■
6		■				■	
7				■			

waagrecht

1a: Quadratzahl
1e: um 7 größer als die kleinste dreistellige Quadratzahl
2c: Vielfaches von 175
3a: Vielfaches von 15
3e: $42 \cdot 362 - (16926 - 2617)$
4a: $25 \cdot 19$
4e: Vielfaches von 31
6a: kleinste natürliche Zahl
6c: $(2835 : 27) \cdot (648 : 72)$
7a: Vielfaches von 64
7e: Lösungszahl der Gleichung $x : 8 = 27$

senkrecht

1a: $251 \cdot (416 - 392)$
1c: Vielfaches von 55
1e: subtrahiert man von dieser Zahl 745, so erhält man 839
1g: $(12316 - 5501) + 8880 : 12$
3b: $(389 - 246) \cdot (544 : 136)$
3f: größte dreistellige Quadratzahl
5d: Lösungszahl der Gleichung $x \cdot 4 = 336$
6a: um 7 kleiner als eine Quadratzahl
6c: $(18240 - 3648) : (19 \cdot 8)$
6e: Vielfaches von 13
6g: $5806 - [(7256 - 5342) \cdot 3 - 12]$

Irina Kehrer, Weiden

Weihnachten als Superlativ

Zusammengestellt von Ralf Laue

☆ **Die größte Weihnachtsfeier** fand 1980 in einem Stadion in Seattle (USA) statt. 103154 Mitarbeiter von Boeing Co. nahmen teil. Im Stadion waren 1000 Weihnachtsbäume aufgestellt.

☆ Seit 1954 beschenkt Raymond Picard aus Kanada als Weihnachtsmann verkleidet die Kinder – Jahr für Jahr im **selben Klubhaus**.

☆ 47 Stunden Arbeitszeit waren 1985 in Frankreich nötig, um einen **Stoff-Weihnachtsmann von 12 Meter Höhe** herzustellen. Dabei verarbeite man 183 m^2 textiles Material.

☆ H. Levaufre aus Metz stellte 1987 den **größten Schokoladen-Weihnachtsmann** her. Er war 410 kg schwer und 2,58 m hoch.

☆ Der **höchste Weihnachtsbaum** war eine 67,36 hohe Douglastanne. Sie wurde 1950 in einem Einkaufszentrum in Seattle aufgestellt.

☆ Die **meisten Kerzen** erstrahlten 1988 an einem Weihnachtsbaum in Friendship (USA) – genau 45465 Stück.

☆ Der **teuerste Weihnachtsbaum** war 120 Millionen Französische Franc wert. Die Dekoration bestand aus 25 Kostbarkeiten von Pariser Juwelieren.

☆ Aus 4200 Lebkuchen wurde 1985 in Emmen (Schweiz) das **größte Pfefferkuchen-Haus** hergestellt. Es erreichte eine Höhe von 7,5 m.

☆ 216,80 m lang war ein Weihnachtsstollen, von 10 Konditoren 1986 in Ostrhauderfehn gebacken.

☆ Die **meisten Weihnachtskarten** verschickte Werner Erhard aus San Francisco im Jahre 1975. Er schrieb 62824 Stück.

☆ In Nordwalde bei Münster bauten Heimkinder den **größten funktionsfähigen Nußknacker**. Er ist 3,46 m hoch und 300 kg schwer.

☆ Die **größten Weihnachtskrippen** wurden in Valence und Marseille aufgestellt. Sie nehmen je eine Fläche von 300 m^2 ein.

Spinnennetze

Der 21. Februar 1967 ist ein bemerkenswertes Datum in der Geschichte der Spiele. In einem Cambridger College erfanden nachmittags beim Tee zwei Mathematiker, M. S. Paterson und J. H. Conway, ein neues Spiel: Sprouts (Sprößlinge). Wir wollen es Spinnennetze nennen.

Conway äußerte sich zu dem Spiel: "Am Tage, nach dem Sprouts geboren war, schien es, als ob alle Welt spielte. Bei Kaffee oder Tee saßen kleine Gruppen zusammen und starrten auf das Spielgeschehen. Einige begannen, die Spielzüge an Mauern und anderen Gegenständen aufzuzeichen, während andere bereits über eine mehrdimensionale Form des Spiels nachdachten. Selbst das Verwaltungspersonal war nicht immun gegen das Spiel, von dem man die Überreste an den unmöglichsten Plätzen antraf. Immer, wenn ich in diesen Tagen jemanden für das neue Spiel zu gewinnen suchte, schien es mir, als ob er schon davon gehört hatte."

Conway übte dabei angelsächsisches Understatement, denn die Sprouts sprossen bald im gesamten Vereinigten Königreich, und es wird behauptet, daß sie Englands Wirtschaft mehr als die Streiks zusetzten, was ja zuvor nur Loyds Fünfzehner-Puzzle vermocht hatte. In Europa ist den Sprößlingen das Klima nicht so gut bekommen, dabei haben sie wahrlich nichts typisch Britisches an sich. Als Spielmaterial benötigt man ein Blatt Papier und einen Stift. Zu Beginn eines Spieles wird eine bestimmte Anzahl von Punkten auf das Blatt gezeichnet, bereits ab drei Punkten ist ein interessantes Spiel möglich. Anfänger sollten sich nicht mehr als vier Punkte vorgeben. Die Regeln sind ganz einfach:

1. **Abwechselnd verbinden beide Spieler zwei Punkte durch eine beliebige Linie oder zeichnen eine Linie, die zum Ausgangspunkt zurückkehrt.**
2. **Keine Linie darf eine andere Linie oder sich selbst kreuzen sowie durch einen der gezeichneten Punkte gehen.**
3. **Kein Punkt darf mehr als drei Enden von Linien vereinigen.**
4. **Wenn ein Spieler eine Linie gezogen hat, dann markiert er auf ihr einen weiteren Punkt.**
5. **Sieger ist, wer die letzte Linie zeichnet.**

Ein Spiel mit 1 Punkt ist einfach, da die Züge eindeutig durch die Regeln festgelegt sind. Wie **Abb. 1** zeigt, ist das Spiel nach zwei Zügen beendet. Die beiden letzten Züge sind von ihren spielerischen Möglichkeiten her gleichwertig, obwohl vom optischen Eindruck einmal die Verbindung innerhalb und einmal außerhalb der geschlossenen Kurve verläuft. Bei der Analyse ist es wirksam, auf diesen Sachverhalt zurückzugreifen, um die Übersichtlichkeit zu wahren.

Abb. 2 zeigt die möglichen Eröffnungszüge für zwei Punkte A und B.

Die Varianten I und V sind im gerade erläuterten Sinne repräsentativ für die Möglichkeiten eines 2-Punkte-Spiels. In dieser abgekürzten Beschreibung zeigt **Abb. 3** das vollständige 2-Punkte-Spiel (nach Conway), das schon bemerkenswert kompliziert ist.

Das Spielergebnis hängt lediglich von der möglichen Anzahl von Zügen ab, die sich für die vorgegebenen Punkte ermöglichen lassen. Aber diese Anzahl hat sich bis heute einer allgemeinen Analyse entzogen. Jeder Punkt hat die Möglichkeit, bis zu drei Anfänge bzw. Enden einer Linie aufzunehmen. Bei n Punkten gibt es somit insgesamt bis zu 3n Anfänge bzw. Enden von Linien. Jede Linie verbraucht von diesem Vorrat 3n je einen Anfang und ein Ende, verringert also 3n um 2. Andererseits

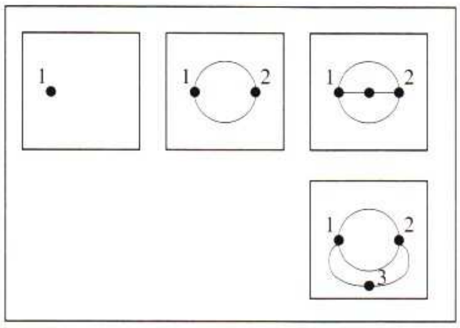


Abb. 1

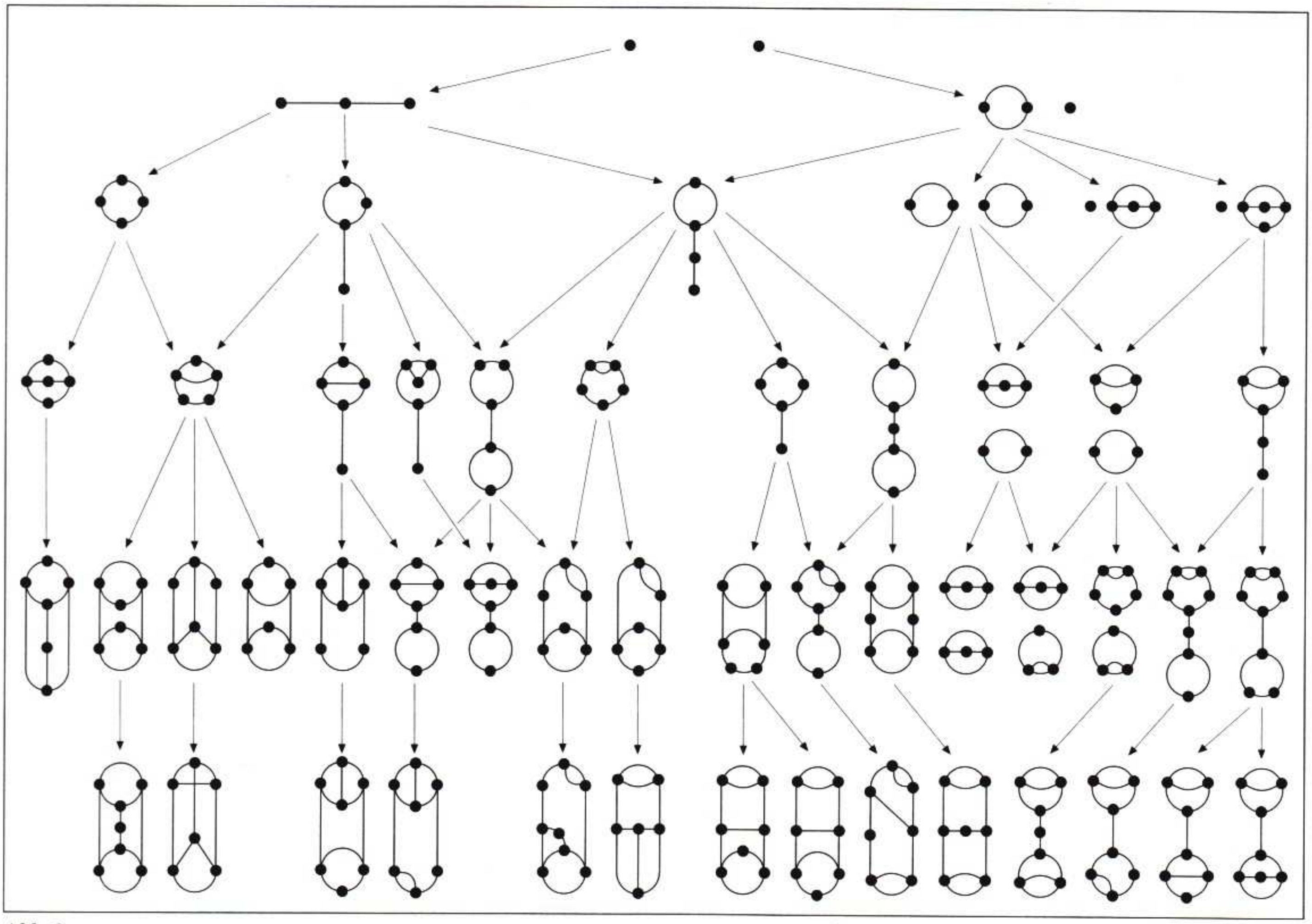


Abb. 3

enthält jede gezogene Linie einen neuen Punkt. Folglich reduziert jede gezogene Linie die Gesamtkapazität 3n nur um 1. Spätestens, wenn nur noch 1 Punkt übrigbleibt, an dem zwei Linienenden vorhanden sind, kann das Spiel nicht mehr fortgesetzt werden. Das heißt, daß nach höchstens 3n-1 Zügen das Spiel beendet sein wird. Andererseits lassen sich von jedem Punkt mindestens zwei Linien ziehen, also dauert ein Spiel wenigstens 2n Züge.

Wieviel Züge sind bei einem 3-Punkt-Spiel bzw. 4-Punkt-Spiel minimal bzw. maximal möglich? Versucht einmal, beim 3-Punkt-Spiel, die erreichbaren 8 Züge tatsächlich zu machen! Ihr werdet sehen, daß dies schon recht schwierig ist.

Ein mögliches 3-Punkt-Spiel seht Ihr in **Abb. 4**. Untersuchungen für 3, 4 und 5 Punkte haben ergeben, daß der erste Spieler stets gewinnen kann. Wie, das solltet Ihr selber ausprobieren. Bei 6 Punkten gewinnt der zweite Spieler bei optimalem Spiel. Größere Punktvorgaben konnten theoretisch noch nicht bewältigt werden.

Wenn Ihr einige Übung in diesem Spiel habt, solltet Ihr einmal versuchen, die Misère-Form zu spielen. Dabei siegt derjenige, der zuerst keine Linie mehr zeichnen kann.

Hier kann der zweite Spieler einen Sieg erzwingen, wenn 2, 3 oder 4 Punkte vorgegeben werden.

Ich wünsche Euch viel Spaß beim Spielen

Claudia Erdmann

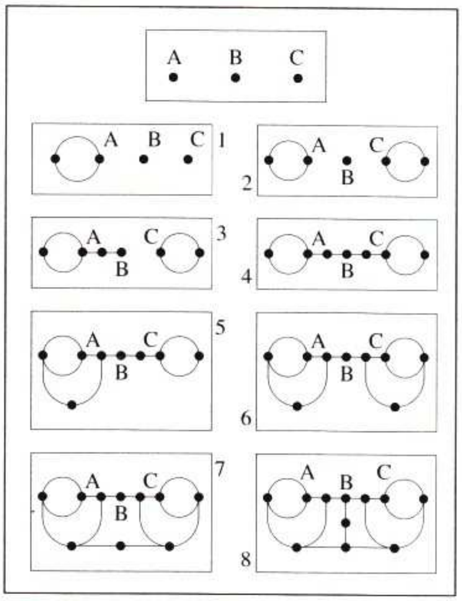


Abb. 4

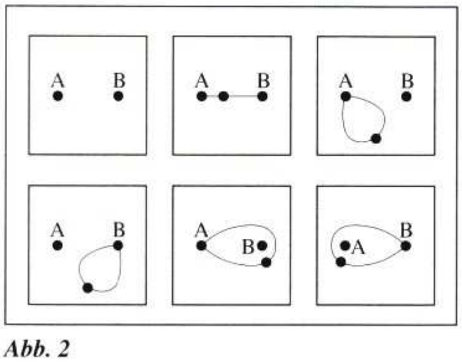
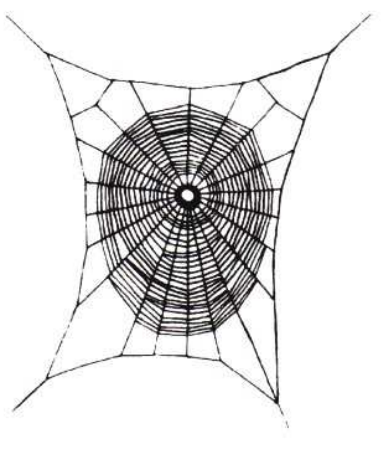
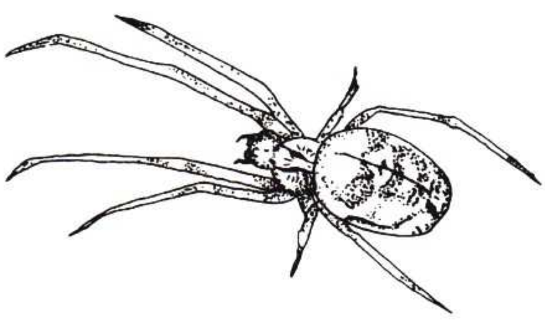


Abb. 2





1742

1917

837

Was geschah vor...Jahren?

1992 Chronologie Teil V

718 der Kalif Umar II befahl die Umsiedlung der Gelehrten des Museions in Alexandria nach Antiochia in Kleinasien

1193 das Wort "ciffre" tritt erstmals in einer Handschrift auf

1543 Druck des Hauptwerkes des N. Copernicus: "De revolutionibus ..."

1618 W. Harvey entdeckt den Blutkreislauf

1642 am 25. Dezember Isaac Newton geboren. Newton lieferte fundamentale Arbeiten zur Physik, zur Astronomie, zur Infinitesimalrechnung, zur Algebra und Geometrie. Sein Geburtsdatum wird oft auch als 4. 1. 1643 angegeben. Diese beiden Geburtsdaten erklären sich aus verschiedenen verwendeten Kalendern (julianisch und gregorianisch).

1718 Edmond Halley bemerkt beim Vergleich von Positionsangaben von Sternen nach Ptolemäus mit zeitgenössischen Positionsangaben, daß die Sterne am Himmelszelt eine Eigenbewegung zeigen

1718 "The Doctrine of Chances" von A. de Moivre erschienen. Das Buch enthielt Lösungen von Aufgaben, die mit Glücksspielen zusammenhängen

1842 am 17. Dezember Sophus Lie geboren. Lies Arbeiten waren vorwiegend der Algebra gewidmet.

1918 am 6. Januar Georg Cantor gestorben. Cantor war der Begründer der neueren Mengenlehre.

1943 am 14. Februar David Hilbert gestorben. Hilbert lieferte grundlegende Arbeiten zur Zahlentheorie, zur mathematischen Logik, zur Geometrie und zur mathematischen Physik.

1968 Entdeckung eines Pulsars im Zentrum des Krebsnebels.

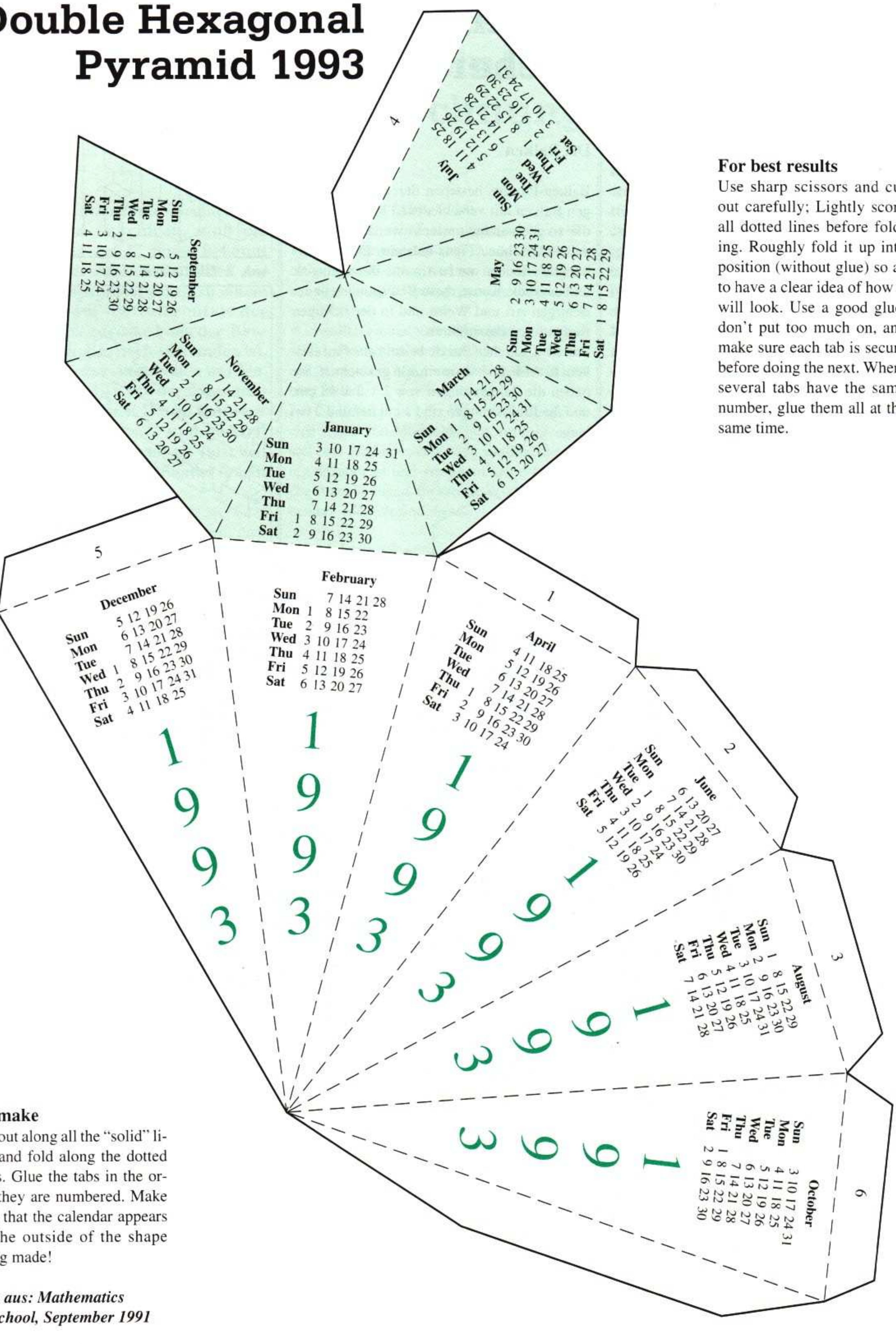
Eine Aufgabe für Vieta

Auch die Geschichte der Mathematik ist nicht frei von nationalen Überheblichkeiten. Beim Streit um die Erstentdeckung mathematischer Resultate wurde oft der sachliche Standpunkt verlassen und an seine Stelle traten Verdächtigungen. Es wurde behauptet, ein Gelehrter habe bei einem anderen abgeschrieben oder durch Hörensagen von den Resultaten anderer Kenntnis erhalten und diese fremden mathematischen Ergebnisse dann als seine eigenen ausgegeben. Besonders übel wurden solche Auseinandersetzungen, wenn sie mit nationalen oder religiösen Vorurteilen belastet wurden. Das bekannteste Beispiel eines solchen Streites war der Streit um die Entdeckung der Differential- und Integralrechnung zischen I. Newton (1643 – 1727) und G. W. Leibniz (1646 – 1716) und ihren Anhängern.

Im Jahre 1593, also vor 400 Jahren, gab es ein besonders dummes Beispiel für mathematisch gefärbten nationalen Übermut. In diesem Jahr erschien das Buch "Ideae mathematicae ..." des niederländischen Mathematikers Adriaan van Roomen (1561 – 1615). Darin gab van Roomen eine Übersicht über alle, nach seiner Meinung, wichtigen zeitgenössischen Mathematiker. In der Übersicht fand sich kein einziger französischer Mathematiker. Das Erscheinungsjahr des Buches fiel interessanterweise mit dem Jahr des Übertritts des französischen Königs Heinrich IV (1553 – 1610) zum katholischen Glauben zusammen. Van Roomen stellte in seinem Werk eine Aufgabe an alle Mathematiker: es sollte eine spezielle Gleichung 45. Grades gelöst werden. Der niederländische Gesandte in Frankreich hatte van Roomens Buch gelesen.
Am Hofe Heinrichs äußerte er sich äußerst abfällig über die Leistungsfähigkeit der französischen Mathematiker und behauptete, kein Franzose könne van Roomens Aufgabe lösen. Francois Viète (Vieta, 1540 – 1610), der dem König als Berater diente, wurde herbeigerufen, gab sofort eine Lösung und am nächsten Tag alle weiteren positiven Lösungen der Aufgabe. Vietas Überlegungen sollen an einer Gleichung 5. Grades erläutert werden. Man solle die Gleichung $A = 16x^5 - 20x^3 + 5x$ lösen. Setzt man $x = \sin y$, so ergibt sich $A = 16\sin^5 y - 20\sin^3 y + 5\sin y$. Vieta hätte sofort erkannt, daß die rechte Seite der Gleichung zusammengefaßt werden kann zu $16\sin^5 y - 20\sin^3 y + 5\sin y = \sin 5y$.
Diese Zusammenfassung kann man durch Rechnung aus den bekannten Formeln $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ und $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ gewinnen. Man setzt an $\sin 5x = \sin(x + 4x)$ und dann $\sin 4x = \sin(x + 3x)$ und $\cos 4x = \cos(x + 3x)$ usw. Die ursprüngliche Gleichung kann dann umformt werden zu $\sin 5y = A$.
Gilt für A: $-1 \leq A \leq +1$, so ist y bestimmbar und daraus wiederum $x = \sin y$. In dem einfachen Falle $A = 1/2$ haben wir zuerst die Gleichung $1/2 = \sin 5y$ zu lösen. Das ergibt für y die Winkel 6°, 30°, 78°, 102°, 150°, 174°, 222°, 246°, 294°, 318°.
Man erhält also insgesamt 10 Lösungen für y im Bereich $(0, 2\pi)$. Bildet man mit diesen Werten die Werte $x = \sin y$, so stellt man fest, daß nur fünf unterschiedliche Werte von x auftreten: $\sin 6° = \sin 174°$, $\sin 30° = \sin 150°$, $\sin 78° = \sin 102°$, $\sin 222° = \sin 318° = -\sin 42°$, $\sin 246° = \sin 294° = -\sin 66°$. Diese fünf Werte sind die Lösungen der Gleichung $1/2 = 16x^5 - 20x^3 + 5x$. Nach diesen angedeuteten Prinzipien war auch van Roomens Aufgabe 45. Grades lösbar. Vietas Scharfsinn zeigte sich im Erkennen der Tatsache, daß die Gleichung van Roomens "nur" eine Beziehung zwischen trigonometrischen Funktionen beschrieb. Das Leben Heinrichs IV und das Leben an seinem Hofe hat Heinrich Mann (1871 – 1950) in zwei berühmten Romanen beschrieben: Die Jugend des Königs Henri Quatre (1935), Die Vollendung des Königs Henri Quatre (1938).

H. Ilgands

Double Hexagonal Pyramid 1993



For best results

Use sharp scissors and cut out carefully; Lightly score all dotted lines before folding. Roughly fold it up into position (without glue) so as to have a clear idea of how it will look. Use a good glue, don't put too much on, and make sure each tab is secure before doing the next. Where several tabs have the same number, glue them all at the same time.

To make

Cut out along all the "solid" lines and fold along the dotted lines. Glue the tabs in the order they are numbered. Make sure that the calendar appears on the outside of the shape being made!

Idee aus: Mathematics in School, September 1991

Das unmögliche Escher-Puzzle

Unmögliche Figuren lassen etwas erkennen, was nicht existieren kann. Ein räumliches Ding, das nicht stimmt. Man muß seine Phanatasie ein bißchen laufen lassen. Oskar van Deventer, weltbekannter Puzzler aus Voorburg, muß wohl über einige ganz fremde Hirnwendungen verfügen. Bei dem unmöglichen M. C. Escher-Puzzle (s. Abb. 1), das er sich ausgedacht und gezeichnet hat, ließ er sich von dem Puzzle mit den kleinen Balken inspirieren, das man vielleicht schon kennt. Und selbstverständlich von den "unmöglichen" Figuren des M. C. Escher.

Die Balken

Balken-Puzzles bestehen durchweg aus einigen Balken mit verschiedenen Einkerbungen, die so ineinander gesteckt werden müssen, daß eine schöne Figur entsteht. Die Einkerbungen erlauben nur bestimmte Bewegungen, und es ist die Kunst, diese Bewegungen in der richtigen Art und Weise und in der richtigen Reihenfolge auszuführen.

Das M. C. Escher-Puzzle besteht aus fünf Balken. In **Abb. 2** sind sie einzeln gezeichnet. Sie haben die Abmessungen von 2 x 2 x 18 cm, und die Einkerbungen sind 1 cm tief und 2 cm lang.

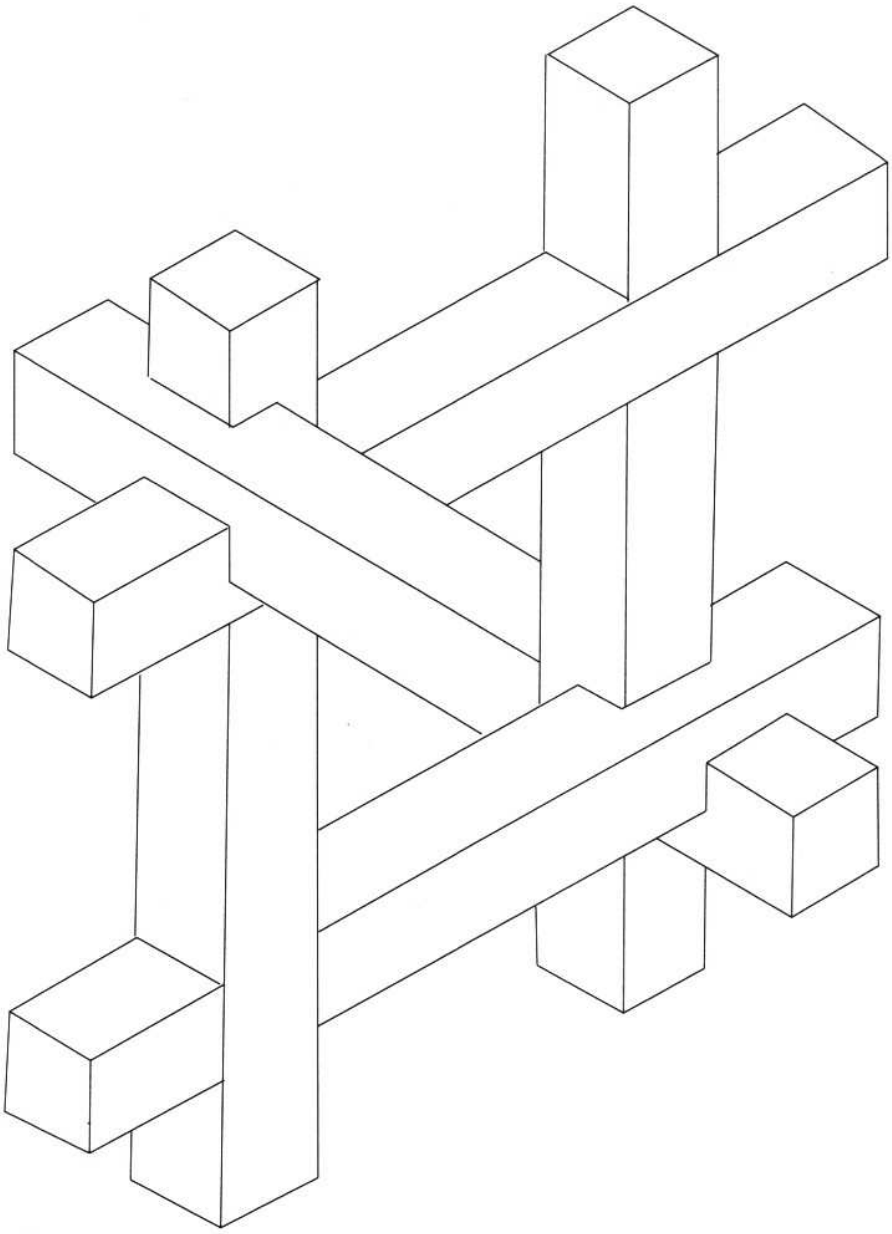


Abb. 1

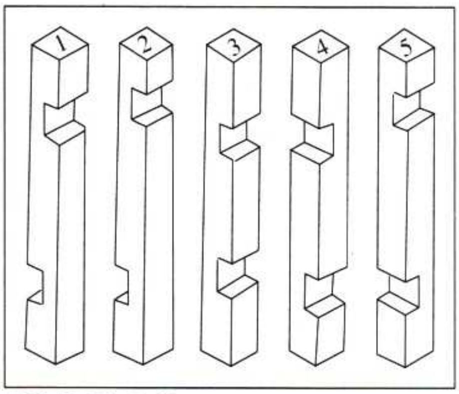


Abb. 2: Die Balken

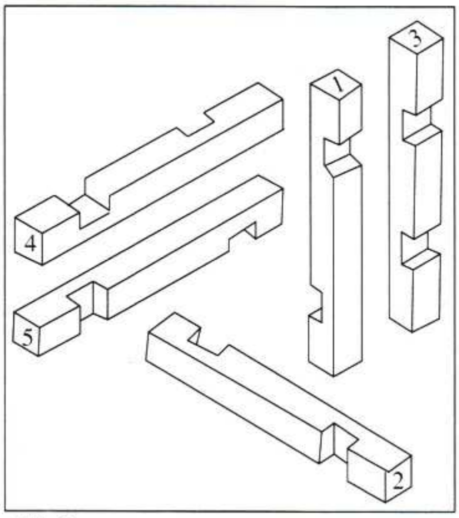


Abb. 3

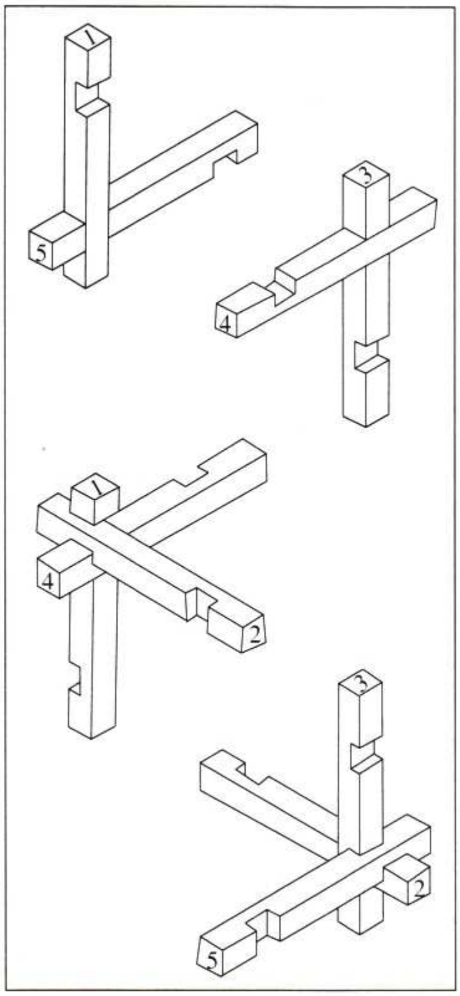


Abb. 4

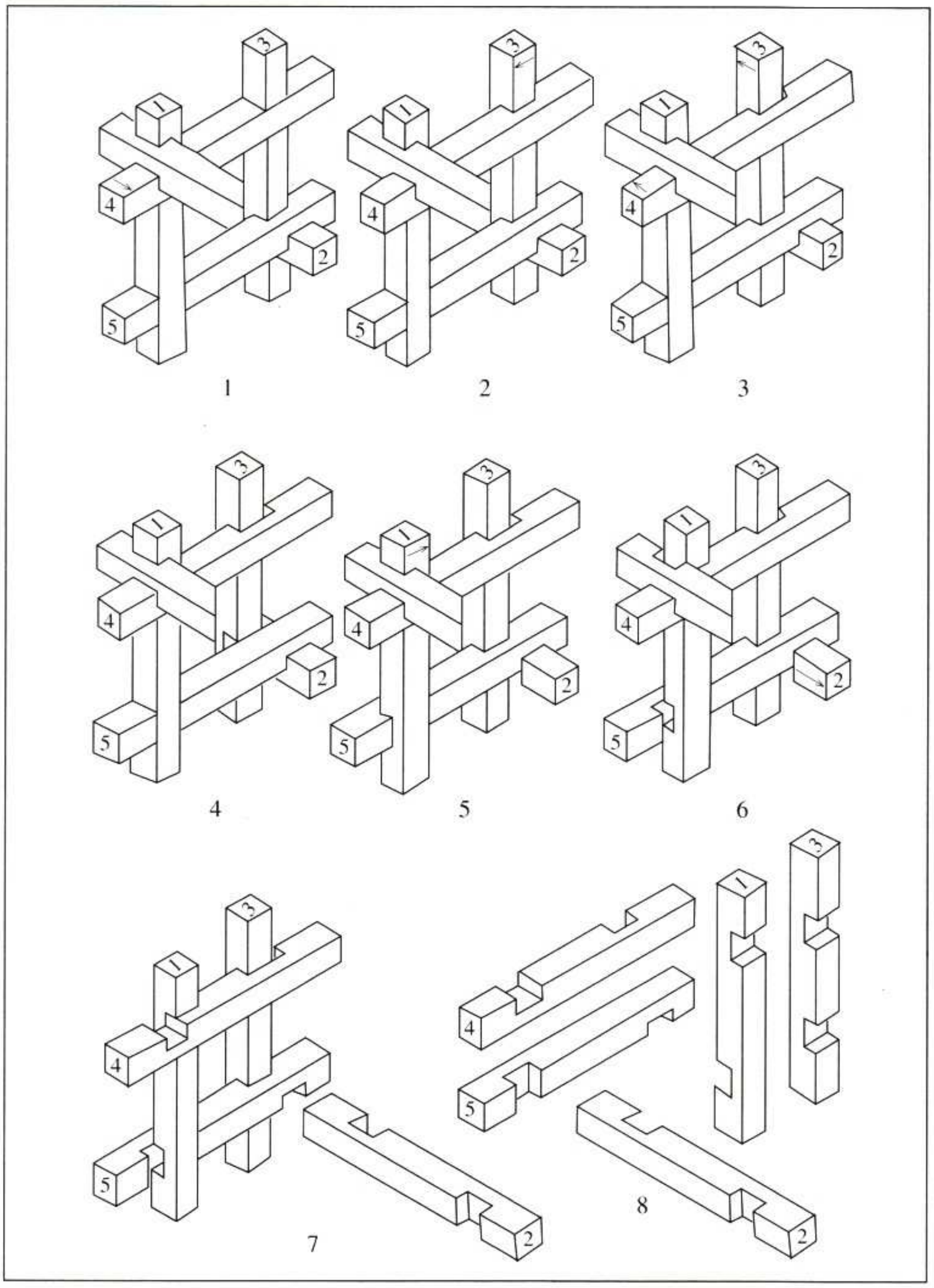


Abb. 5

In **Abb. 3** sieht man sie in der Stellung, in der sie in dem ineinandergesetzten Puzzle sitzen. Die vier Eckverbindungen sind in **Abb. 4** gesondert gezeichnet. Bis dahin liegt nichts Besonderes vor. Alles stimmt, man kann es mittels richtiger Balken, einer Säge, einem Hammer und einem Stemmeisen leicht nachbauen.

Wie auseinander und ineinander?

Jetzt gehen wir aber mit Oskar als Führer in die unwirkliche Welt des M. C. Escher.
Der fünfte Balken von **Abb. 1** kann nicht existieren, wir wissen es, aber in unserer Phantasie existiert er doch. Wir haben ihn in einem unwirklichen Puzzle-Geschäft gekauft, und er sitzt noch genauso ordentlich wie in **Abb. 1**. Wie bekommen wir das Puzzle auseinander? Welche Balken sitzen fest, welche Balken können verschoben werden?

Ohne Oskars Hilfe kommen wir nicht klar. Glücklicherweise hat er die Lösung Schritt für Schritt aufgezeichnet (**Abb. 5**). Und bei dem letzten Schritt ..., oh Wunder, ... sind wir plötzlich wieder in die normale Welt zurückgekehrt. Alle Balken sind gelöst, und man kann sie einfach vor sich auf den Tisch legen. Will man das Puzzle wieder ineinander setzen, dann führt man die einzelnen Schritte einfach (nun ja, einfach ...) in der umgekehrten Reihenfolge aus.
Oskar nannte solch ein unmögliches Puzzle zwar lösbar, aber nicht durchführbar. Man kann es nur in Gedanken lösen, zumindest wenn man auch solche fremden Hirnwendungen besitzt wie er.

nach: "De onmogelijke Escher-puzzle", von Jan van de Craats in Pythagoras, Amsterdam 1988

Alphons logische Abenteuer

Berti hatte in dem alten Buch ein weiteres, aus der Antike überliefertes Problem gefunden. Wie er es auch anstellte, die Aufgabe war nicht durch irgendeine Einschränkung lösbar. Er las nochmals den Text: "Eine Ägypterin sah, wie ihr am Nil spielendes Kind von einem Krokodil angegriffen wurde. Die Mutter eilte an das Ufer und bat das Krokodil, das Kind frei zu geben. Das Tier antwortete, daß es das Kind zurückgebe, wenn die Mutter errate, was es tun werde. Die Mutter sagte: Du wirst mir mein Kind nicht zurückgeben. Das Krokodil erwiderte darauf: Du magst wahr oder falsch gesprochen haben, ich brauche dir auf keinen Fall das Kind zurückgeben; dann ist deine Rede wahr, so erhältst du es nicht wieder nach deiner eigenen Aussage, ist sie aber falsch, so gebe ich es nicht zurück kraft unserer Übereinkunft. Die Mutter widersprach: Ich mag wahr oder falsch gesprochen haben, du mußt mir mein Kind zurückgeben. Denn ist meine Aussage wahr, so mußt du es mir geben laut unserer Übereinkunft; ist sie aber falsch, so ist das Gegenteil wahr: Du wirst mir mein Kind zurückgeben."
Berti murmelte: "Muß dieses gefräßige Tier die armen Menschen obendrein noch mit einem solchen Dilemma schachmatt setzen!"
Alphons, den Berti aufsuchte, meinte zu Bertis mitfühlender Äußerung, daß durch das Dilemma auch das Krokodil in seinem Tun betroffen sei. Nach einigem Für und Wider kam Berti auf die Idee, einen analogen Fall zu konstruieren. Er nahm die Schultasche von Alphons und sagte: "Alphons, Du bekommt die Tasche zurück, wenn Du errätst, was ich als nächstes tun werde." Dieser überlegte und fand, daß damit nicht genau die Problemlage getroffen ist. "Trotzdem kommen wir einen wichtigen Schritt weiter. Du hast Dir – hoffentlich – etwas vorgenommen. Ich soll das in Form einer Aussage erraten. Der Springpunkt ist, ob das, was ich behaupte, gerade das ist, was Du tun willst. Meine Aussage ist wahr, wenn sie mit dem übereinstimmt, was zu tun Du beabsichtigst. Die Wette lautet also: Ist wahr, daß Du das gedacht hast, was ich durch meine Aussage vermute, nicht aber, ob das, was Du gedacht hast, wenn ich es errate, wahr ist." Berti bat Alphons, ihm das letztere nochmals zu erklären. "Die Mutter hat zwischen zwei Aussagen zu entscheiden, (a) Ich gebe das Kind zurück, (b) Ich gebe das Kind nicht zurück. Beide Aussagen betreffen ein mögliches Tun des Krokodils, von dem dieses eins sich nach Voraussetzung ausgewählt hat. Das beabsichtigte Tun hat die Mutter zu erraten, indem sie entweder (a) oder (b) wählt. Die gewählte Aussage ist wahr, wenn sie mit jener übereinstimmt, gemäß der das Krokodil zu handeln beabsichtigt. Der Gegenstand der Wette ist also das Übereinstimmen einer Aussage mit einer Aussage. Ich denke mir eine von zwei bekannten Aussagen und Du hast recht, wenn Du die von mir gedachte Aussage errätst, dabei ist völlig gleichgültig, ob die von mir gedachte Aussage wahr oder falsch ist. Die von mir gedachte Aussage ist wahr, wenn sie mit ihrem Sachverhalt übereinstimmt. Um ihren geht es bei der Wette aber gar nicht. Ein logischer Fehler wird begangen, wenn man den Bezug einer Aussage auf eine Aussage mit deren Bezug auf ihren Sachverhalt vertauscht. Der Gegenstand der Wette ist, ob eine Aussage mit einer Aussage übereinstimmt, nicht aber, ob letztere mit ihrem Sachverhalt übereinstimmt." Berti stellte dann zutreffend fest: "Das Dilemma entsteht somit dadurch, daß sowohl das Krokodil als auch die Mutter denselben logischen Fehler begehen."

Prof. Dr. L. Kreiser

Die Sternmosaike zweiter Art

In dem vorangegangenem Aufsatz (alpha 2/1991, S. 28/29) wurde gezeigt, daß es 11 Sternmosaike gibt. Unter einem Sternmosaik wurde dabei eine die unendliche Ebene lückenlos ausfüllende Anordnung von regelmäßigen Vielecken verstanden, die Ecke an Ecke liegen derart, daß die an den Ecken sich bildenden Strahlenbüschel sämtlich kongruent sind. Die Abbildung unten zeigt nochmals eine Zusammenstellung dieser Sternmosaike erster Art: 3 regelmäßige und 8 unregelmäßige. Es gibt nun noch eine zweite Art von Sternmosaiken; hierunter wird verstanden eine die unendliche Ebene lückenlos ausfüllenden Anordnung kongruenter Vielecke, bei denen die an den Ecken sich bildenden Strahlenbüschel regelmäßige Sterne sind.
Unter einem regelmäßigen Stern wird dabei ein Strahlenbüschel mit lauter gleichlangen

Die drei regelmäßigen Sternmosaike.

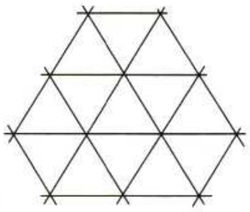


Abb. 1

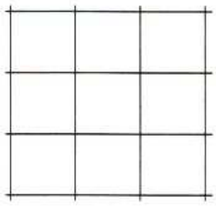


Abb. 2

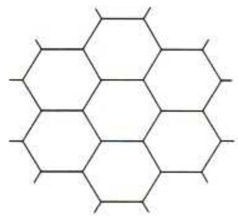


Abb. 3

Die acht halbregelmäßigen Sternmosaike.

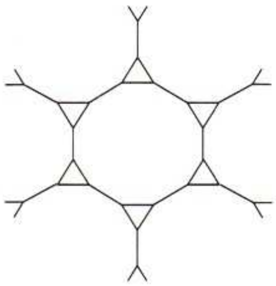


Abb. 4

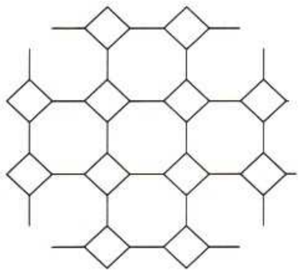


Abb. 5

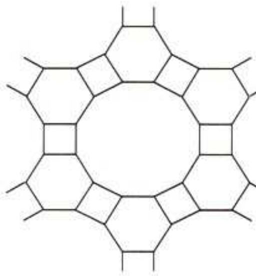


Abb. 6

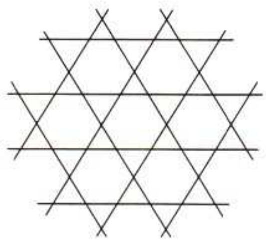


Abb. 7

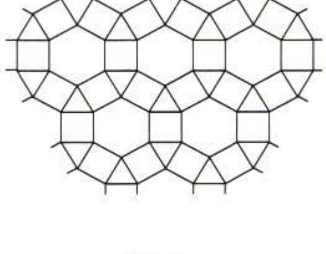


Abb. 8

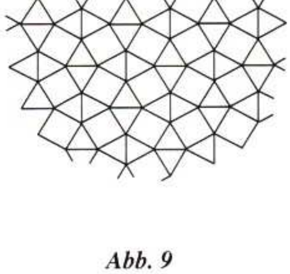


Abb. 9

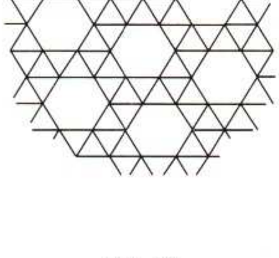


Abb. 10

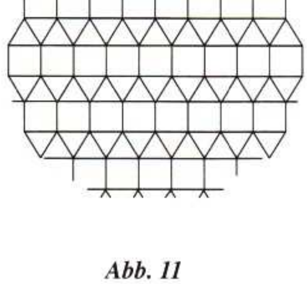


Abb. 11

Abb. 1

Strahlen und gleichen Winkeln verstanden. Für die Sternmosaiken zweiter Art gelten ganz ähnliche Überlegungen für jene erster Art.
a) Die gesuchten Vielecke können nur Vielecke mit 3, 4, 5 oder 6 Seiten sein, da einerseits schon ein Siebeneck ein Winkel in der Größe von mehr als 128° (900° : 7) hat und andererseits der kleinste regelmäßige Stern (3 Strahlen) nur die Winkel von 120° besitzt.
b) Es gelten für die Zahl der zum regelmäßigen Stern gehörenden Strahlen die gleichen Gleichungen wie wir sie bei der Untersuchung der Mosaike erster Art für die Seitenzahlen der regelmäßigen Vielecke gefunden haben. So z. B. erhalten wir, wenn wir die Form der Dreiecke suchen und jetzt mit n_1, n_2 und n_3 die Zahl der Strahlen an den drei Ecken bezeichnen, die Gleichung
$180° = 360°/n_1 + 360°/n_2 + 360°/n_3$
und wiederum
$1/n_1 + 1/n_2 + 1/n_3 = 1/2$.
Durch ähnliche Überlegungen wie damals erhalten wir dann ebenso wie damals 11 Lösungen, das sind die in **Abb. 2** durch gestrichelte Linien gekennzeichneten Mosaike. Diese **Abb. 2** zeigt auch, daß man die Sternmosaike zweiter Art aus den entsprechenden Sternmosaiken erster Art dadurch erhält, daß man in den regelmäßigen Vielecken die Inkreisradien vom Mittelpunkt des Vielecks zu den Berührpunkten mit den Seiten zieht.

Hermann Oehl

Die drei regelmäßigen Sternmosaike.

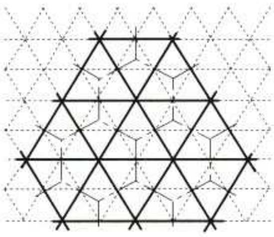


Abb. 1

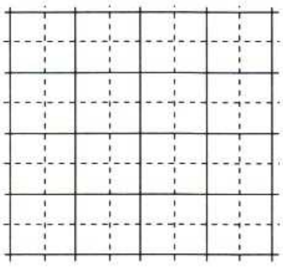


Abb. 2

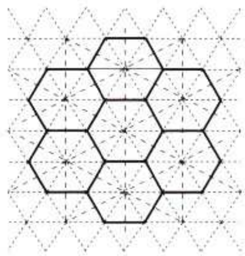


Abb. 3

Die acht halbregelmäßigen Sternmosaike.

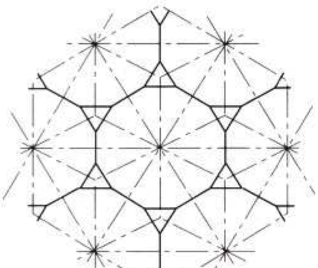


Abb. 4

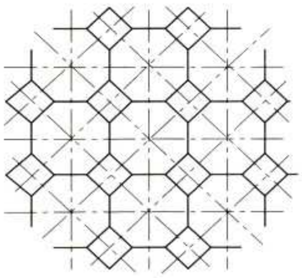


Abb. 5

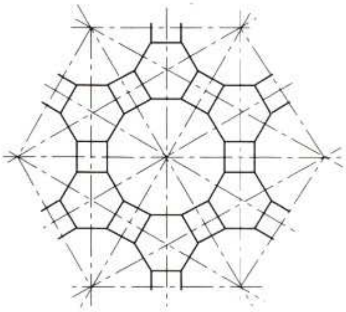


Abb. 6

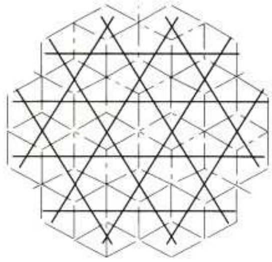


Abb. 7

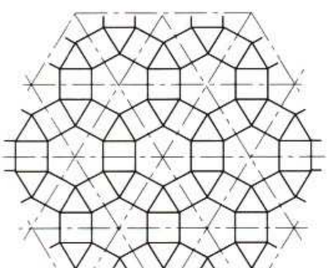


Abb. 8

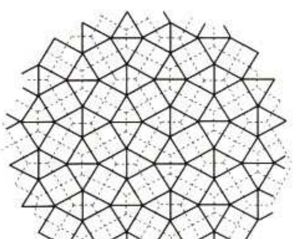


Abb. 9

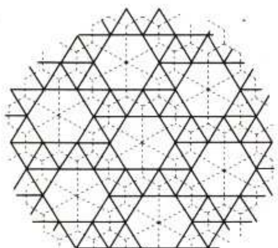


Abb. 10

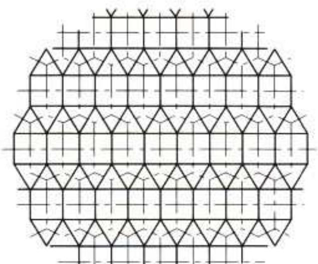


Abb. 11

Abb. 2

Komisches, Kniffliges und Knackiges

Aufgabe: Die Lottowürfel

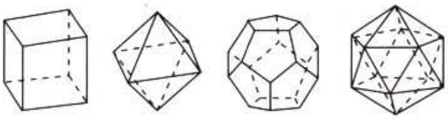


Abb. 1–4

Da man beim Würfeln das Ergebnis des Wurfes an der nach oben liegenden Fläche abliest, sind nur vier der fünf regelmäßigen Körper hierfür geeignet. Nach der Zahl ihrer Außenflächen heißen sie: Sechswürfel (gewöhnlicher Würfel), Achtwürfel, Zwölfwürfel und Zwanzigwürfel. Sie sind, mit den fortlaufenden Zahlen von 1 bis n versehen, in den meisten Spielwarengeschäften erhältlich (Abb. 1 bis 4).

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Abb. 5

Beim Spiel mit nur einem Würfel ist die Wahrscheinlichkeit des Treffens für jede der Würfelzahlen gleich groß. Anders ist die beim Spiel mit zwei oder mehr Würfeln. So können zwei Sechswürfel z. B. auf 36 ($= 6^2$) Arten fallen, aber nur 11 verschiedene Ergebnisse liefern (2 bis 12) und zwar jede mit unterschiedlicher Wahrscheinlichkeit (siehe Abb. 5).

Hans, der ein leidenschaftlicher Mitspieler beim Deutschen Lotto ist (dort muß auf das Erscheinen von mehreren Zahlen von 1 bis 49 gewettet werden), besitzt zwei gleiche Würfel; er hat sie selbst gefertigt und ihre Außenflächen auf unterschiedliche Weise mit Zahlen beschriftet. Er kann mit diesen zwei Würfeln alle Zahlen von 0 bis 49 erwürfeln und zwar jede mit gleicher Wahrscheinlichkeit (bei Erscheinen der Null muß er den Wurf wiederholen).

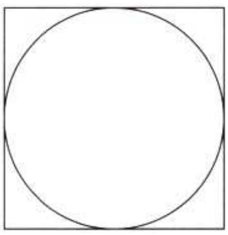
a) Welcher der genannten vier Arten sind seine beiden Würfel?

b) Mit welchen Zahlen hat er die beiden Würfel versehen (2 Lösungen!)?

Hermann Oehl, München

Sprachecke

How many are completely covered?



Consider a unit square. We inscribe in it a circular disc whose diameter is equal to the side of the square. We see immediately that the disc does not completely cover the square.

(i) How many unit squares of a 3 by 3 square will be completely covered by a disc whose diameter is equal to the side of the larger square?

(ii) Try the same problem with a chessboard (an 8 by 8 square) and a disc with a diameter equal to the side of the chessboard.

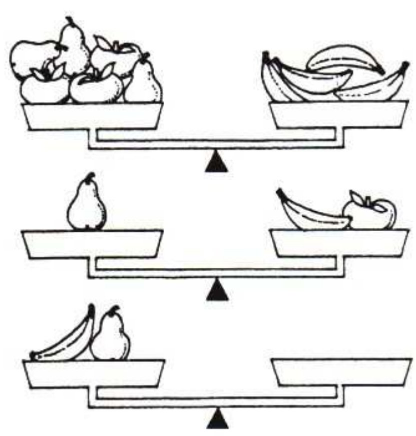
(Fun with Mathematics, Toronto, November 1987, No. 98)

Zeichnung: M. Tekla

Какие значения может принимать параметр c, если известно, что $|x^2 - x + c| \le 1$ при $0 \le x \le 1$?

Question d'équilibre

L'équilibre des plateaux de la 3^e balance ne sera obtenu que si l'on pose un certain nombre de pommes sur le plateau de droite. Quel est ce nombre?



(Maximath, France)

Extremaleigenschaften von Quadrat und Würfel

Mittels der im Beitrag “Die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel” hergeleiteten Ungleichungen

$$u_1u_2 = G_2^2 \le A_2^2 = \left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)^2 \quad \text{und}$$

$$u_1u_2u_3 = G_3^3 \le A_3^3 = \left(\frac{u_1+u_2+u_3}{3}\right)^3$$

mit positiven Zahlen u_1, u_2 und u_3, in denen die Gleichheitszeichen nur für $u_1 = u_2$ bzw. $u_1 = u_2 = u_3$ gelten, werden Extremaleigenschaften von Quadrat und Kubus (Würfel) ermittelt. Für die Maßzahlen x_1 und x_2 der in der Längeneinheit LE gemessenen Seitenlängen $a = x_1$ LE und $b = x_2$ LE eines Rechtecks gilt gemäß $G_2^2 \le A_2^2$ mit $u_1 = x_1$ und $u_2 = x_2$ die Ungleichung

$$x_1x_2 \le \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2,$$

in der das Gleichheitszeichen nur für $x_1 = x_2$ zutreffend ist, wenn also das Rechteck ein Quadrat ist. x_1x_2 und $x_1 + x_2$ sind die Maßzahlen des Flächeninhaltes und des halben Umfanges des Rechteckes mit den Seiten a und b: $A = ab = x_1x_2\,\text{LE}^2$; $u = 2(a + b) = 2(x_1 + x_2)$LE
Die Ungleichung

$$x_1x_2 \le \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \quad \text{ist also äquivalent mit}$$

$$A \le \frac{1}{16}u^2.$$

Damit ist bewiesen:
Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist nie größer als der 16-te Teil des Quadrates seines Umfanges. Nur bei einem Quadrat ist der Flächeninhalt gleich dem 16-ten Teil des Quadrates des Umfanges.
Hiernach gelten speziell:
Von allen Rechtecken mit gleichem Umfang hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.
Von allen Rechtecken mit gleichem Flächeninhalt hat das Quadrat den kleinsten Umfang.
Diese beiden Extremaleigenschaften sind äquivalent, denn jede von beiden folgt aus der anderen.
Informativ sei noch mitgeteilt: Die Extremaleigenschaft des Kreises, die als ioperimetrisches Problem der Ebene bezeichnet wird, wurde erstmals 1879 von K. Weierstraß bewiesen:
Von allen geschlossenen ebenen Kurven derselben Länge umschließt der Kreis die Fläche mit größtem Flächeninhalt.
Weitere Extremaleigenschaften des Quadrates sollen hergeleitet werden:

Laut einer binomischen Formel gilt $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$. Mit

$$x_1x_2 \le \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2$$

folgt

$$(x_1+x_2)^2 \le x_1^2 + x_2^2 + 2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2 \le x_1^2 + x_2^2$$

Damit genügen Umfang und Länge der Diagonale

$$d = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{x_1^2+x_2^2}\,\text{LE}$$

eines Rechtecks der Ungleichung

$$\frac{1}{8}u^2 \le d^2 \quad \text{bzw.} \quad u \le 2\sqrt{2}d.$$

Somit gelten:
In jedem Rechteck ist der Umfang höchstens gleich dem $2\sqrt{2}$*-Fachen der Länge der Diagonale.*
Von allen Rechtecken mit gleich langer Diagonale (diese lassen sich einem Kreis einbeschreiben) *hat das Quadrat den größten Umfang.*
Aus den Ungleichungen

$$A \le \frac{1}{16}u^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{8}u^2 \le d^2 \quad \text{folgt} \quad A \le \frac{1}{2}d^2.$$

Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist höchstens gleich dem halben Quadrat der Länge seiner Diagonale.
Von allen Rechtecken mit gleich langer Diagonale hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.
x_1, x_2 und x_3 seien die Maßzahlen der Kantenlängen $a = x_1$ LE, $b = x_2$ LE und $c = x_3$ LE eines Quaders. Die Formel für Volumen V, Oberflächeninhalt A_0, Gesamtkantenlänge k und Länge d der Diagonale des Quaders sind $V = abc = x_1x_2x_3\,\text{LE}^3$, $A_0 = 2(bc + ac + ab) = 2(x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2)\text{LE}^2$, $k = 4(a + b + c) = 4(x_1 + x_2 + x_3)$LE und

$$d = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,\text{LE}.$$

Da x_2x_3, x_1x_3 und x_1x_2 positive Zahlen sind, gilt gemäß der Ungleichung $G_3^3 \le A_3^3$ mit $u_1 = x_2x_3$, $u_2 = x_1x_3$ und $u_3 = x_1x_2$

$$x_1^2x_2^2x_3^2 = (x_2x_3)(x_1x_3)(x_1x_2)$$

$$\le \left(\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{3}\right)^3$$

und damit $6^3V^2 \le A_0^3$.

In dieser Ungleichung gilt das Gleichheitszeichen nur für $x_2x_3 = x_1x_3 = x_1x_2$, also nur für $x_1 = x_2 = x_3$, also nur wenn der Quader ein Würfel ist.
Laut Ungleichung $G_2^2 \le A_2^2$ gelten

$$x_2x_3 \le \left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)^2, \; x_1x_3 \le \left(\frac{x_1+x_3}{2}\right)^2$$

$$\text{und} \quad x_1x_2 \le \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2.$$

Durch Addition der linken und rechten Seiten dieser Ungleichungen ergibt sich

$$x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2$$

$$\le \frac{2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2(x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2)}{4},$$

$2(x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2) \le 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ und $A_0 \le 2d^2$. In dieser Ungleichung gilt das Gleichheitszeichen nur für $x_1 = x_2$, $x_1 = x_3$ und $x_1 = x_2$, also für $x_1 = x_2 = x_3$, also nur wenn der Quader ein Würfel ist.
Wegen $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2)$ gilt für jeden Quader

$\frac{k^2}{16} = d^2 + A_0$. Aus

$\frac{k^2}{16} = d^2 + A_0$ und $A_0 \le 2d^2$ folgt einerseits

$$\frac{k^2}{16} = d^2 + A_0 \ge \frac{A_0}{2} + A_0 = \frac{3A_0}{2}, \frac{3A_0}{2}$$

$$\le \frac{k^2}{16} \quad \text{und} \quad A_0 \le \frac{k^2}{24}$$

und andererseits

$$\frac{k^2}{16} = d^2 + A_0 \le d^2 + 2d^2 = 3d^2$$

$$\text{und} \quad \frac{k^2}{24} \le 2d^2.$$

Die Ungleichungen

$$6^3V^2 \le A_0^3, \; A_0 \le \frac{k^2}{24} \quad \text{und} \quad \frac{k^2}{24} \le 2d^2$$

lassen sich zu der “fortlaufenden” Ungleichung

$$6^3V^2 \le A_0^3 \le \frac{k^6}{24^3} \le 2^3d^6$$

zusammenfassen, die ihrerseits 6 Ungleichungen enthält. Von den hiernach gültigen Extremaleigenschaften des Würfels sei nur eine explizit angegeben:
Von allen Quadern mit gleichem Volumen hat der Würfel den kleinsten Oberflächeninhalt.
Die übrigen gemäß der aufgestellten Ungleichungen geltenden Extremaleigenschaften des Würfels möge der Leser selbst formulieren. Hier sei vermerkt, daß die als isoperimetrisches Problem des Raumes bezeichnete Extremaleigenschaft der Kugel 1884 von H. A. Schwarz bewiesen wurde:
Von allen geschlossenen Flächen, welche ein gegebenes Volumen einschließen, hat die Kugel die kleinste Oberfläche.

W. Träger, Döbeln

Kreise in der „rationalen Ebene"

Vereinbarung

Zugrunde liegt eine auf ein (kartesisches) Koordinatensystem bezogene Ebene. Wir betrachten nur solche Punkte P(x; y), bei denen x und y rationale Zahlen sind. Eine Gerade wird als Menge ihrer Punkte aufgefaßt. Ein Punkt gehört genau dann zu einer Geraden, wenn seine Koordinaten die Geradengleichung erfüllen. Wir betrachten nun nur solche Geraden g: y = mx + b beziehungsweise h: x = c, bei denen m, b und c rationale Zahlen sind.
Insgesamt sagen wir:
Wir betrachten die rationale Ebene.
In Heft 5, 1992 (Geometrie ohne Irrationalzahlen) haben wir einige Eigenschaften der rationalen Ebene kennengelernt. Vor allem gilt: *In der rationalen Ebene muß eine Durchmessergerade eines Kreises diesen nicht schneiden.*
Wir wissen schon, daß auf jeder Geraden der rationalen Ebene unendlich viele Punkte liegen. Nun interessiert uns, ob sich eine analoge Aussage für Kreise der rationalen Ebene machen läßt.

Zum Kreis mit dem Mittelpunkt M(0/0) und dem Radius 1

Wir betrachten den Kreis k mit dem Mittelpunkt M(0; 0) und dem Radius 1. Ein Punkt $P(x_0; y_0)$ ist genau dann ein Punkt dieses Kreises, wenn er vom Mittelpunkt M die Entfernung 1 hat. Genau dann ist das Entfernungsquadrat $1^2 = 1$. Demnach liegt ein Punkt $P(x_0; y_0)$ genau dann auf dem Kreis k, wenn die Aussage $x_0^2 + y_0^2 = 1$ wahr ist. So kommt man zu einer Darstellung des Kreises k durch eine Gleichung:
k: $x^2 + y^2 = 1$.
Die Gerade w: y = x geht durch den Mittelpunkt M(0; 0) des Kreises k. Schneidet sie den Kreis k?
Ein Schnittpunkt $S(x_S; y_S)$ muß auf der Geraden w liegen. Dann ist $y_S = x_S$ (wahr).
Ein solcher Schnittpunkt $S(x_S; y_S)$ muß auch auf dem Kreis k liegen. Daher ist auch $x_S^2 + y_S^2 = 1$ (wahr).
Aus beiden Aussagen folgt: $x_S^2 = \frac{2}{4}$.

Eine solche rationale Zahl x_S gibt es nicht, denn $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ist irrational.
Dann gibt es aber in der rationalen Ebene keinen Schnittpunkt S.
Das bedeutet: Obwohl die Gerade w durch den Mittelpunkt des Kreises k geht, hat sie mit dem Kreis keinen gemeinsamen Punkt. Allerdings trägt der Kreis k durchaus Punkte. A(1; 0), B(0; 1), C(-1; 0) und D(0; -1) sind seine Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.
Wegen $3^2 + 4^2 = 5^2$ ist

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

und daher

$$F\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$$

ein Punkt von k. Überdies liegt

$$G\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$$

auf k.
Wegen $12^2 + 5^2 = 13^2$ ist

$$\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1$$

und daher

$$K\left(\frac{12}{13}; \frac{5}{13}\right)$$

ein Punkt des Kreises k. Überdies liegt auch

$$L\left(\frac{5}{13}; \frac{12}{13}\right)$$

auf k.

Pythagoräische Zahlentripel

Sind a, b und c drei natürliche Zahlen, für die $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllt ist, so nennt man (a, b, c) ein pythagoräisches Zahlentripel. Zwei Zahlentripel (a, b, c) und (u, v, w), zu denen es eine natürliche Zahl n mit u = na und v = nb und w = nc gibt, nennt man proportionale Zahlentripel.

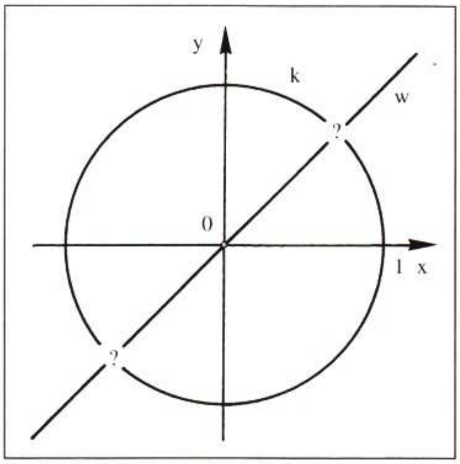


Abb. 1

Zu jedem pythagoräischen Zahlentripel (a, b, c) erhält man eine Menge von Punkten auf k:

$$P\left(\frac{a}{c}; \frac{b}{c}\right), P'\left(-\frac{b}{c}; \frac{a}{c}\right), P''\left(-\frac{a}{c}; \frac{b}{c}\right),$$

$$P'''\left(-\frac{a}{c}; -\frac{b}{c}\right), \ldots \text{ auf k.}$$

Nichtproportionale Zahlentripel liefern verschiedene Punktmengen auf k.
Benützt man die arithmetische Aussage, daß es unendlich viele (nichtproportionale) pythagoräische Zahlentripel gibt, so ist einfach einzusehen, daß der Kreis k unendlich viele Punkte besitzt. Allerdings ist diese arithmetische Aussage nicht ganz einfach zu beweisen. Daher wollen wir nun den geometrischen Sachverhalt mit Hilfe eines geometrischen Satzes beweisen. Überdies werden wir danach die arithemtische Aussage über die pythagoräischen Zahlentripel angenehm gewinnen können.

Vorbemerkung

Vielleicht ist nicht jedem Leser die folgende Aussage bekannt:

Hilfssatz:
Sind die Geraden
g: $y = m_1x + b$ und h: $y = m_2x + c$
zueinander senkrecht, so ist $m_1m_2 = -1$.

Beweis:
Da parallele Geraden die gleiche Steigung haben, genügt es, Geraden durch O(0; 0) zu betrachten. Die Gerade g*: $y=m_1x$ ist zu g parallel und sie geht durch O(0; 0). Auf g* liegt der Punkt $P(1; m_1)$.
Dreht man g* um O(0; 0) um 90°, so erhält man die zu h parallele Gerade h*: $y=m_2x$. Bei dieser Drehung wird der Punkt $P(1; m_1)$ auf den Punkt $P'(-m_1; 1)$ abgebildet. Da h* durch O(0; 0) und $P'(-m_1; 1)$ geht, hat h* die Steigung

$$m_2 = \frac{1 \quad -0}{-m_1 - 0} = -\frac{1}{m_1}.$$

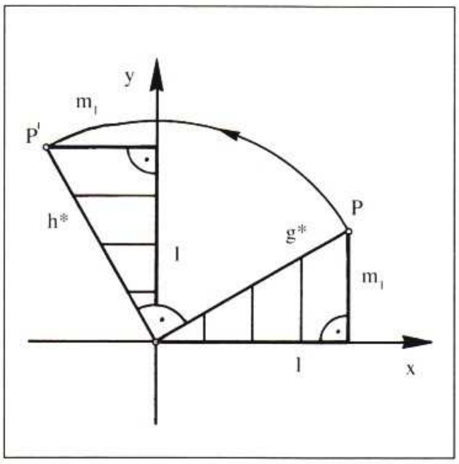


Abb. 2

Auf h*: $y = -\frac{1}{m_1}x$ liegen O(0; 0) und $P'(-m_1; 1)$. Dann ist aber $m_1 m_2 = -1$.
Nach dieser Vorbereitung kehren wir zum Problem zurück und beweisen:

Satz:
In der rationalen Ebene trägt der Kreis k mit dem Mittelpunkt M(0; 0) und dem Radius 1 unendlich viele Punkte.

Beweis:

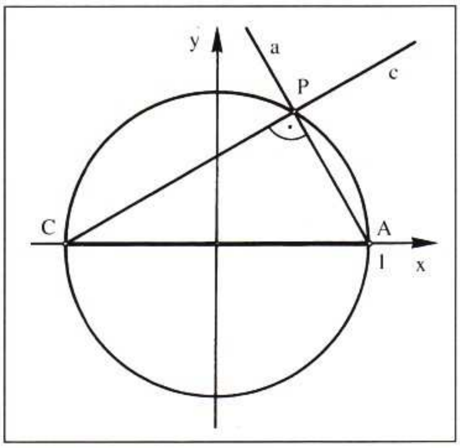


Abb. 3

Die Umkehrung des Satzes von Thales wird zum entscheidenden Hilfsmittel. Wir betrachten den Kreis k: $x^2 + y^2 = 1$. Dieser hat den Durchmesser [AC] mit den Endpunkten A(1; 0) und C(-1; 0). Wählt man eine feste rationale Zahl m, so gibt es dazu eine Gerade c: $y = mx + m$, welche durch den Punkt C(-1; 0) geht. Die zu c senkrechte Gerade a durch den Punkt A(1; 0) hat die Steigung $-\frac{1}{m}$.
Man erhält:

$$a: y = -\frac{1}{m_1}x + \frac{1}{m}.$$

Nach der Umkehrung des Satzes von Thales liegt der Schnittpunkt der Geraden a und c auf dem Kreis k. Nach kurzer Rechnung erhält man den Schnittpunkt

$$P\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}; \frac{2m}{1+m^2}\right).$$

Zu jeder rationalen Zahl m ergibt sich jeweils ein solcher Schnittpunkt P mit rationalen Koordinaten. Zu zwei verschiedenen rationalen Zahlen gibt es zwei verschiedene Geraden durch den Punkt C(-1; 0) und damit auch zwei verschiedene Punkte auf dem Kreis k. Umgekehrt gibt es zu jedem Punkt P des Kreises k in der rationalen Ebene die Verbindungsgerade der Punkte P und C und diese hat eine einzige rationale Steigung m. Dann liegen aber auf dem Kreis k so viele von C verschiedene Punkte, wie es rationale Zahlen gibt.

Anmerkung: Wählt man eine rationale Zahl m mit $0 < m < 1$, so ergibt sich ein Punkt P des Kreises k, der im 1. Quadranten liegt. Auf dem Kreis k liegen auch im 1. Quadranten unendlich viele Punkte.

Über pythagoräische Zahlentripel

Wir betrachten Punkte P(x; y) des 1. Quadraten, also Punkte P (x; y) mit $x > 0$, $y > 0$ und $x \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Q}$. Ist P(x; y) ein solcher Punkt, so können wir seine Koordinaten mit gleichem Nenner darstellen:

$$x = \frac{a}{c} \quad \text{und} \quad y = \frac{b}{c}.$$

Dabei sind a, b und c natürliche Zahlen.
Liegt P(x; y) auf dem Kreis k um M(0; 0) mit dem Radius 1, so ist

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

Gleichwertig ist $a^2 + b^2 = c^2$. Dann ist aber (a, b, c) ein pythagoräisches Zahlentripel. Zu verschiedenen im 1. Quadranten liegenden Punkten des Kreises k gehören nichtproportionale pythagoräische Zahlentripel. Da es unendlich viele solcher Kreispunkte gibt, gilt: Es gibt unendlich viele (nichtproportionale) pythagoräische Zahlentripel.
Man kann noch mehr feststellen: Wählt man eine rationale Zahl m mit $0 < m < 1$, so kann man $m = \frac{u}{v}$ mit Hilfe von zwei natürlichen Zahlen u und v darstellen. Dabei ist $u < v$. Zu m gibt es einen Kreispunkt P(x; y) mit den Koordinaten

$$x = \frac{1-m^2}{1+m^2} = \frac{v^2-u^2}{u^2+v^2}$$

und

$$y = \frac{2m}{1+m^2} = \frac{2uv}{u^2+v^2}.$$

Wir schließen:
Wählt man zwei natürliche Zahlen u und v mit $u < v$, so sind
$a = v^2 - u^2$
$b = 2uv$
$c = u^2 + v^2$
die Komponenten eines pythagoräischen Zahlentripels (a, b, c). Wählt man zwei Darstellungen der gleichen rationalen Zahl m, also $m = \frac{u}{v} = \frac{u^*}{v^*}$, so erhält man zwei proportionale pythagoräische Zahlentripel.
Beispielsweise ergibt sich zu

$$m = \frac{1}{5}$$

das Tripel (24; 10; 26); zu

$$m = \frac{2}{10}$$

erhält man das Tripel (96; 40; 104).
Wählt man zwei verschiedene rationale Zahlen m und $\overline{m}$, so erhält man zwei nichtproportionale pythagoräische Zahlentripel.

Kreise mit rationalem Radius

Der Kreis k mit dem Mittelpunkt M(0; 0) und dem Radius 1 trägt – wie wir gesehen haben – unendlich viele Punkte. Die zentrische Streckung mit dem Zentrum M(0; 0) und dem Streckungsfaktor r hat die Abbildungsgleichungen
$x' = rx$
$y' = ry$. (r rational und $r > 0$.)

Zu jeder festen rationalen Zahl r ergibt sich eine Abbildung der rationalen Ebene auf sich. Jedem Originalpunkt mit rationalen Koordinaten wird ein Bildpunkt mit rationalen Koordinaten zugeordnet. Der Kreis k mit dem Mittelpunkt M(0; 0) und dem Radius 1 wird auf den Kreis k' mit dem Mittelpunkt M'(0; 0) und dem Radius r abgebildet. Da verschiedene Originalpunkte von k verschiedene Bildpunkte von k' haben, stellen wir fest:
Jeder Kreis k' mit dem Mittelpunkt M(0; 0) und einem rationalen Radius r hat in der rationalen Ebene unendlich viele Punkte.
Die Parallelverschiebung mit den Abbildungsgleichungen
$x^* = x + s$
$y^* = y + t$ (s rational, t rational)
beschreibt eine Abbildung der rationalen Ebene auf sich. Sie bildet den Kreis um M(0; 0) mit dem Radius r auf den Kreis k* um M*(s; t) mit dem Radius r ab. Dabei wird jeder Punkt mit rationalen Koordinaten auf einen Punkt mit rationalen Koordinaten abgebildet. Verschiedene Originalpunkte haben verschiedene Bildpunkte. Dann besitzt aber auch k* unendlich viele Punkte.

Hat ein Kreis einen Mittelpunkt mit rationalen Koordinaten und einen rationalen Radius, so besitzt er in der rationalen Ebene unendlich viele Punkte.

Kreise mit rationalem Radiusquadrat

Der Kreis mit dem Mittelpunkt M(a; b) und dem Radius c wird durch die Gleichung
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$
beschrieben. In dieser Gleichung kommen die Koordinaten des Mittelpunktes, aber nur das Quadrat des Radiuses vor. Daher interessieren uns auch Kreise, bei denen nur gefordert wird, daß das Radiusquadrat rational ist.
Dann ist beispielsweise
k: $x^2 + y^2 = 2$ ein zugelassener Kreis. Dieser schneidet zwar die Koordinatenachsen nicht, er trägt aber beispielsweise den Punkt P(1; 1) der rationalen Ebene.
Wir interessieren uns für Kreise deren Mittelpunkt M(s; t) rationale Koordinaten hat und deren Radiusquadrat r^2 rational ist. r kann irrational sein.
Überführt die Parallelverschiebung mit den Abbildungsgleichungen
$x^* = x + s$

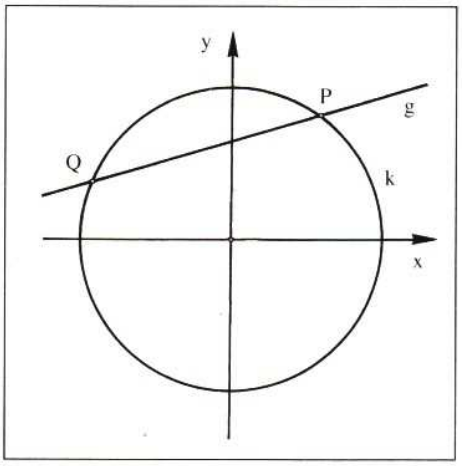


Abb. 4

$y^* = y + t$
den Kreis k mit dem Mittelpunkt M(0; 0) und dem Raidusquadrat r^2 in den Kreis k* mit dem Mittelpunkt M*(s; t) und dem Radiusquadrat r^2, so macht die Parallelverschiebung mit den Abbildungsgleichungen
$x = x^* - s$
$y = y^* - t$
dies rückgängig: k* geht über in k. Deshalb genügt es, im folgenden Kreise mit dem Mittelpunkt M(0; 0) zu betrachten.
Ist r^2 eine feste rationale Zahl, so ist
k: $x^2 + y^2 = r^2$
ein Kreis mit dem Mittelpunkt M(0; 0). Ist $P(x_0; y_0)$ ein Punkt dieses Kreises, so ist
$x_0^2 + y_0^2 = r^2$ wahr.
Wählen wir eine feste rationale Zahl m, so gibt es dazu eine Gerade
g: $y = mx + y_0 - mx_0$, die, wie man sofort nachrechnet, durch den Punkt P geht. Handelt es sich bei der Geraden g nicht um die Kreistangente mit dem Berührpunkt P, so schneidet g den Kreis k in einem weiteren Punkt Q. Uns interessiert, ob Q rationale Koordinaten hat. Die Abszissen (x-Koordinaten) der Schnittpunkte des Kreises k und der Geraden g sind die Lösungselemente der Gleichung
$x^2 + (mx + (y_0 - mx_0))^2 = r^2$ mit $r^2 = x_0^2 + y_0^2$.
Diese Gleichung wird umgeformt:
$(m^2 + 1)x^2 + 2m(y_0 - mx_0)x$
$+ x_0((m^2 - 1)x_0 - 2my_0)=0$.
Da $x_1 = x_0$ ein Lösungselement ist, kann man den Faktor $(x - x_0)$ abspalten. Mit Hilfe einer Polynomdivision oder durch "Probieren" erhält man
$(x - x_0)((m^2 + 1)x - (m^2 - 1)x_0 + 2my_0) = 0$.

1. Möglichkeit:
$x - x_0 = 0$, also $x_1=x_0$.
Dazu gehört $y_1=mx_0 + y_0 - mx_0 = y_0$.
So erhält man den Punkt $P(x_0; y_0)$.

2. Möglichkeit:
$(m^2 + 1)x - (m^2 - 1)x_0 + 2my_0 = 0$,
also

$$x_2 = \frac{\left(m^2 - 1\right)x_0 - 2my_0}{m^2 + 1}.$$

Dazu gehört

$$y_2 = mx_2 + y_0 - mx_0 = \frac{\left(1 - m^2\right)y_0 - 2mx_0}{m^2 + 1}.$$

So kommt man zum Punkt $Q(x_2; y_2)$ des Kreises k.
Ist

$$m = -\frac{x_0}{y_0},$$

so ist die Gerade g die Kreistangente mit dem Berührpunkt P. Dann ist P=Q.
Ist

$$m \neq -\frac{x_0}{y_0},$$

so ist Q ein von P verschiedener Punkt des Kreises k. x_0, y_0 und m sind rational. Auch Q hat rationale Koordinaten. Zu verschiedenen rationalen Zahlen m gibt es verschiedene Punkte. Daher stellen wir fest:
Besitzt ein Kreis mit rationalem Radiusquadrat mindestens einen Punkt, so hat er in der rationalen Ebene unendlich viele Punkte.

Beispiel:
Es ist $1^2 + 1^2 = 2$. Daher ist P(1; 1) ein Punkt des Kreises k: $x^2 + y^2 = 2$. Damit ist schon gesichert, daß auf diesem Kreis unendlich viele Punkte mit rationalen Koodinaten liegen.

Überraschen mag, daß es auch Kreise mit rationalem Radiusquadrat gibt, welche überhaupt keine Punkte besitzen. Beispielsweise trägt der Kreis
k: $x^2 + y^2 = 3$
keinen einzigen Punkt mit rationalen Koordinaten.

Wäre $P\left(\frac{a}{c}; \frac{b}{c}\right)$ ein Punkt von k, wobei a, b und c natürliche Zahlen sind, so müßte auch $a^2 + b^2 = 3c^2$ erfüllt sein.
Wir benützen nun, daß keine Quadratzahl bei der Division durch 3 den Rest 2 zuläßt. Dies kann man der folgenden Übersicht entnehmen:
Zu $z = 3n$ ist $z^2 = 9n^2$,
zu $z = 3n + 1$ ist $z^2 = 3(3n^2 + 2n) + 1$,
zu $z = 3n + 2 = z^2 = 3(3n^2 + 4n + 1) + 1$.

Mit dieser Kenntnis betrachten wir die Gleichung
$a^2 + b^2 = 3c^2$.

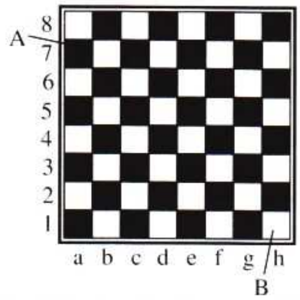
$a^2 + b^2$ enthält in der Primfaktorzerlegung die 3 nur dann, wenn sowohl a, als auch b Dreierzahlen sind. Dann enthält aber $a^2 + b^2$ die 3 sogar geradzahlig oft. So ergibt sich:
$a^2 + b^2$ enthält in der Primfaktorzerlegung entweder keine 3 oder die 3 geradzahlig oft.
$3c^2$ aber enthält in seiner Primfaktorzerlegung die 3 ungeradzahlig oft.
Da die Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl eindeutig ist, kann es keine natürlichen Zahlen a, b und c mit $a^2 + b^2 = 3c^2$ geben.

Wir fassen zusammen:
Wir betrachten nur solche Kreise, bei denen der Mittelpunkt rationale Koordinaten hat, denn nur ein solcher Kreis hat in der rationalen Ebene einen Mittelpunkt.
Fordert man von einem Kreis der rationalen Ebene, daß er einen Mittelpunkt und einen rationalen Radius hat, so liegen auf jedem Kreis unendlich viele Punkte.
Verlangt man von einem Kreis hingegen nur, daß er einen Mittelpunkt und ein rationales Radiusquadrat hat, so hat ein Kreis in der rationalen Ebene entweder uendlich viele Punkte oder keinen Punkt.

Dr. Klaus Ulshöfer
Stiftsgymnasium Sindelfingen

Das Schachbrett als Schalttafel

Die Phantasie von Hobbymathematikern wird durch schachbrettartige Muster (z. B. Fußboden) immer wieder in vielfältiger Form angeregt. Man kann wohl mit Sicherheit behaupten, daß kein anderes geometrisches Muster ähnlich oft für logische Denkspiele erforscht worden ist.
In der folgenden Aufgabe (nach Sam Loyd) hat ein Elektriker eine Schalttafel in der Form eines Schachbrettes zu verdrahten. Der Kupferdraht soll über alle 64 Kontaktpunkte (Felder des Schachbrettes) von Punkt A zum Punkt B führen, ohne daß ein Punkt zweimal für den Verlauf des Drahtes genutzt werden darf. Immer, wenn der Drahtverlauf seine Richtung ändert, muß er zusätzlich um eine Ecke des betreffenden Kontaktpunktes gewunden werden. Diese Richtungsänderung kostet doppelt so viel Draht, als wie für einen gerade verlaufenden Kontaktpunkt verbraucht wird. Der Elektriker ist angehalten, eine Lösung zu finden, die ohne diagonale Verbindungen möglichst wenige Richtungsänderungen hat (Turmwanderung über das Schachbrett!).



Mit wieviel Einheiten an Kupferdraht gelingt es ihm, wenn für einen Kontaktpunkt eine Einheit benötigt wird?

H. Rüdiger

Die Bestimmung der Wandabweichung – ganz einfach und ohne Berechnung

Will man eine Sonnenuhr an einer vertikalen Wand anbringen, muß die Wandrichtung auf 1° genau bekannt sein. Die leider zahlreichen falsch angelegten Sonnenuhren gehen zu einem großen Teil auf die Unkenntnis der Wandrichtung zurück. Falls der Bauplan des Gebäudes noch vorhanden ist, kann diese daraus entnommen werden. Man hüte sich aber vor der sogenannten Kompaßmethode! Die im Bauwerk befindlichen Eisenteile und elektrischen Leitungen führen zu falschen Ergebnissen, die Kompaßnadel macht da nicht mit.

Will man die Wandrichtung festlegen, muß man sich zuvor einig sein, wie die Winkel in Bezug auf die Himmelsrichtungen festzulegen sind. Am einfachsten ist es, die Richtung auf die Ost-West-Richtung festzulegen, also: um wieviel Grad weicht die Wand davon ab? Fällt z. B. die Wandrichtung mit der Ost-West-Richtung zusammen, so haben wir es mit einer Südwand zu tun und damit mit einer vertikalen Süduhr. Die Berechnung bzw. Konstruktion dieser Art von Sonnenuhren ist am einfachsten (**Abb. 1**).

Wer aber hat schon eine genau in der Ost-West-Richtung verlaufende Wand? Selbst die oft erwähnten alten Kirchen weisen Abweichungen bis zu 10° auf, man prüfe dies einmal nach.

Wir wollen einmal von den Schlaumeiern absehen, die die Ziffernblattfläche der Sonnenuhr "abwinkeln", d. h. in die Ost-West-Richtung stellen.

Für die Bestimmung der Wandrichtung gibt es eine Reihe von Möglichkeiten. Im folgenden soll eine Methode vorgestellt werden, die wenig bekannt ist und vor allem keine zusätzliche Berechnungen, für die die Winkelfunktionen erforderlich sind, benötigt.

Vorrichtung

Auch diese ist verhältnismäßig einfach und läßt sich mühelos herstellen. Wir benötigen dafür lediglich eine horizontale Fläche mit einem senkrechten Stab (Gnomon), für den wir eine Stricknadel verwenden können (**Abb. 2**). Die Fläche wird mit einer Gradeinteilung von zweimal 0° bis 90° versehen und wird im rechten Winkel an die vertikale Wand gelegt. Es ist hierbei darauf zu achten, daß die Vorrichtung nicht verkantet wird. Wer es also ganz genau haben möchte, sollte eine kleine Libelle* verwenden.

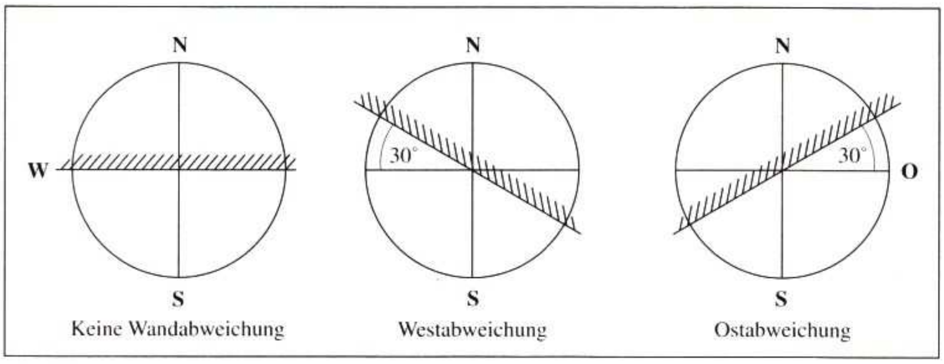


Abb. 1

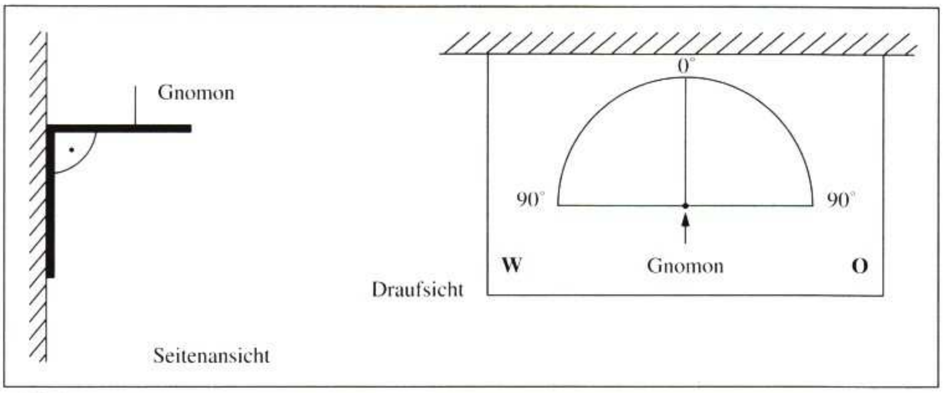


Abb. 2

Handhabung

Voraussetzung ist die Kenntnis des sogenannten wahren Mittags, wenn also die Sonne in der Südrichtung und damit am höchsten steht (Kulmination). Der wahre Mittag unterscheidet sich von unserem "normalen" Mittag, wenn es 12 Uhr mitteleuropäischer Zeit MEZ (13 Uhr MESZ) ist. Nur in ganz seltenen Fällen kann es vorkommen, daß beide zusammenfallen.

Maßgeblich für die MEZ ist der Längengrad von Görlitz (15° ö. L.). Für das gesamte Gebiet Deutschlands gilt: Der wahre Mittag ist stets später als der MEZ-Mittag. Diese Verspätung beträgt pro Längengrad 4 Minuten und ist bei der Kenntnis der geogr. Länge leicht zu bestimmen. Für Erfurt gilt: 11° Länge, Differenz zu Görlitz = 4°, Zeitunterschied: 15 Min.

Doch da gibt es einen "Störenfried", der uns die Bestimmung des wahren Mittags erschwert – die Zeitgleichung. Das bedeutet, daß die (wahre) Sonne mitunter um 16 min vorgeht (Anf. November) bzw. um 14 min (Mitte Februar) nachgeht. Es ist nicht so einfach, die Beträge für die Zeitgleichung im Kopf zu haben. Die astron. Jahrbücher sind dafür eine Hilfe, wie z. B. bei uns "Ahnerts Kalender für Sternfreunde", der jährlich erscheint und für jeden Tag die Zeitgleichung angibt. Wir finden diese im Kalenderteil für die Sonne, Spalte D). So für den 28.9.1991 den wahren Mittag (D) für Görlitz um 11 Uhr 51 min. Von diesem Betrag ist für einen bestimmten Ort die Zeitdifferenz zu bestimmen. Für Erfurt also 16 Minuten später, um 12 Uhr 07 min MEZ. Bestimmen wir den wahren Mittag für Osnabrück (8° ö. L.) am 5.2.1991: D für Görlitz: 12 Uhr 14 min, für Osnabrück (7 mal 4 min) 28 min später um 12 Uhr 42 min MEZ.

Wir brauchen also nur zu dem für Görlitz gültigen Zeitpunkt die Längendifferenz in die Zeitdifferenz umzurechnen.

Haben wir den wahren Mittag ermittelt, halten wir die Vorrichtung an die Wand und lesen ab, auf wieviel Grad der Schatten des Gnomon fällt. Die Gradzahl gibt sofort die Wandabweichung von der Ost-West-Richtung an. Fällt der Schatten auf die Seite links von 0° (Westen), handelt es sich um eine Westabweichung, rechts davon um eine Ostabweichung der Wand. Fällt z. B. der Schatten auf die 0°, haben wir es mit einer Ost-West-Wand zu tun.

StR Arnold Zenkert

* Libelle (lat. "kleine Waage": kleiner, mit Spiritus, Äther o. ä. gefüllter Glasbehälter mit eingeschlossener Luftblase. Viele Haushalte haben eine solche Libelle, allerdings unter der irreführenden Bezeichnung "Wasserwaage".

Geometrische Konstruktionen zum Satz des Pythagoras

Der berühmte Satz des PYTHAGORAS $a^2+b^2=c^2$ (a, b Längen der Katheten, c Länge der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks) wird in der Regel mit Hilfe des Kathetensatzes rechnerisch bewiesen. Geometrische Schlußweisen mit Hilfe der Kongruenzsätze kann man einfach finden in einigen Spezialfällen, so z. B. in jenem im **Abb. 1** bzw. **2**, in denen das Seitenverhältnis $a:b:c=3:4:5$ bzw. $a:b:c=1:1:\sqrt{2}$ (gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck) beträgt. Um auch im allgemeinen Fall einen solchen "geometrischen Beweis" zu finden, sind zwei zueinander inkongruente Quadrate (a^2 und b^2) in eine minimale Anzahl von Teilfiguren zu zerlegen, die auf entsprechende Teilfiguren eines dritten Quadrates (c^2) kongruent abgebildet werden können.

Lösungsansatz

siehe **Abb. 3**

Behauptung:

Eine aus zwei zueinander inkongruenten Quadraten (a^2 und b^2) bestehende Figur (**Abb. 3**) kann auf ein drittes Quadrat (c^2) flächengleich abgebildet werden, wenn sie in vier zueinander kongruente rechtwinklige Dreiecke mit den Seiten a, b und c und eine quadratische Restfigur (d^2), deren Seite d der Differenz der Katheten b und a entspricht, zerlegt wird.

Beweis:

(1) Von A aus wird a auf $\overline{AB}$ abgetragen (H) und in H eine Senkrechte auf $\overline{AB}$ bis zum Schnitt mit $\overline{FG}$ errichtet (J).
(2) $\overline{DE}$ wird über E hinaus bis zum Schnitt mit $\overline{HJ}$ verlängert (K).
(3) H wird mit D und G durch Geraden verbunden.
(4) Auf dem Strahl $\overline{EF}$ wird von E aus b abgetragen (L).
(5) L wird mit G und D durch Geraden verbunden.
Es gilt:

(1) $\overline{AH} = \overline{GJ} = \overline{HK} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{FL} = a$

(2) $\overline{AG} = \overline{HJ} = \overline{HC} = \overline{DK} = \overline{EL} = \overline{FG} = b$

(3) $\overline{GH} = \overline{HD} = \overline{DL} = \overline{LG} = c$
(Kongruenzsatz SWS)

(4) $\overline{KE} = \overline{EF} = \overline{FJ} = \overline{JK} = (b-a) = d$
(4) $\overline{KE} = \overline{EF} = \overline{FJ} = \overline{JK} = (b-a) = d$

(5) $\angle GAH = \angle HJG = \angle HCD = \angle DKH = \angle JKE = 90°$

Hieraus folgt:
(1) $DGAH \cong DHGJ \cong DHDC \cong DDKH \cong DLED \cong DGLF$
(2) HDLG und KEFJ sind Quadrate (mit den Seitenlängen c bzw. d).
Bezeichnet man die Flächeninhalte der Teilfiguren $T_1, ..., T_5$ bzw. $T'_1, ..., T'_5$ (vgl. **Abb. 3**) mit $A_1, ..., A_5$ bzw. $A'_1, ..., A'_5$, so gilt wegen der festgestellten Kongruenz:
$a^2 + b^2 = A_1 + A_2 + ... + A_5$
$= A'_1 + A'_2 + ... + A'_5 = c^2$ w. z. b. w.
Man kann auch rein geometrisch die Teilfiguren T_1 des "abgestuften Rechtecks" auf die Teilfiguren T'_1 des c-Quadrates kongruent abbilden: T_1 auf T'_1, T_4 auf T'_4 und T_5 auf T'_5 durch die identische Abbildung, T_2 auf T'_2 und T_3 auf T'_3 durch Parallelverschiebung und sieht ebenfalls $a^2 + b^2 = c^2$.

Wendet man die Konstruktion an auf den Spezialfall des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks (a = b), so erhält man die in **Abb. 4** gezeichnete Figur – die "quadratische Restfigur" verschwindet hier wegen $d = a - b = 0$. Offensichtlich ist diese Restfigur um so größer, je größer die Differenz $a - b$ der Kathetenlängen ist, was **Abb. 5** veranschaulicht. Genauer: Der Flächeninhalt d^2 des Restquadrates ist (bei festen Kathetenlängensummen $a + b$) umgekehrt proportional zum Flächeninhalt der (untereinander kongruenten) rechtwinkligen "Randdreiecke" (Beweis?)

Anmerkung:

Es empfiehlt sich, diese und die folgenden Konstruktionen auf Gitternetzpapier auszuführen und von ganzzahligen Einheiten des Quadratnetzes auszugehen.
Da in diesem Fall die Eckpunkte der zu konstruierenden Figuren mit den Rasterpunkten des Gitternetzes übereinstimmen, können zeichnerische Unstimmigkeiten unmittelbar überprüft und gegebenenfalls nachgebessert werden.

Ausführungsvarianten des Konstruktionsansatzes

Der vorgestellte Lösungsansatz läßt vielfältige Modifikationen zu, die sich insbesondere auf das Ordnungsschema der Flächenzerlegung, auf Anzahl und Form der Teilfiguren, den jeweiligen Teilungsmodus sowie auf die zur Abbildung erforderlichen geometrischen Operationen beziehen (vgl. dazu die **Abb. 6** und **7**).
Abb. 8 stellt eine 7teilige Variante dar, bei der die einzelnen Quadrate in herkömmlicher Weise über den Seiten des zugehörigen rechtwinkligen Dreiecks errichtet sind und die Parallelverschiebung teilweise ungleichsinnig, nach einer Drehung im positiven Richtungssinn über einem Winkel von 90° auszuführen ist.

Hinweis:

Die Anschaulichkeit der Beweisführung kann durch selbstgefertigte Legetafeln (Applikationen) unterstützt werden. Der Konstruktionsansatz gibt darüber hinaus Anregungen zur Entwicklung von Legespielen, die als mathematische Knobelaufgaben genutzt werden können (**Abb. 9**).

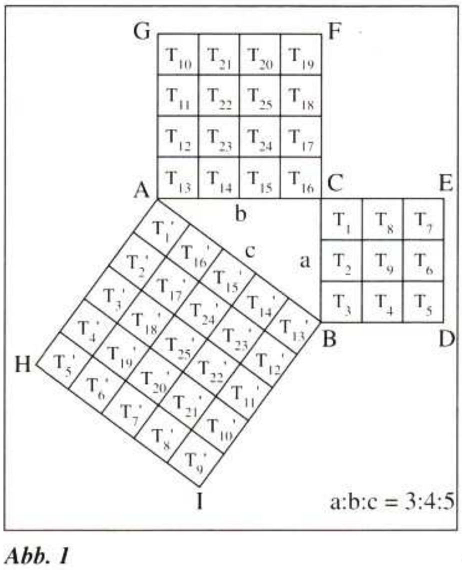


Abb. 1

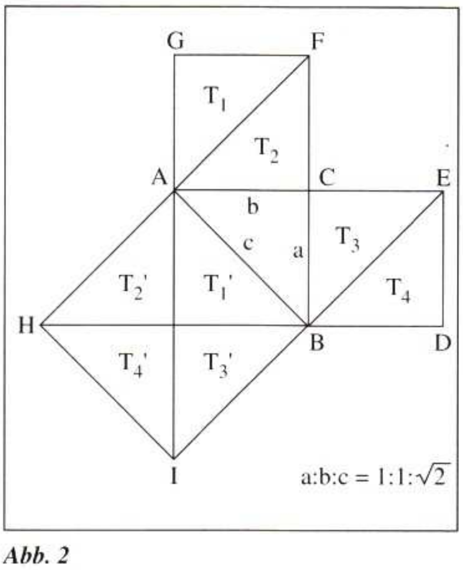


Abb. 2

Dr. Heinz Jura, Berlin

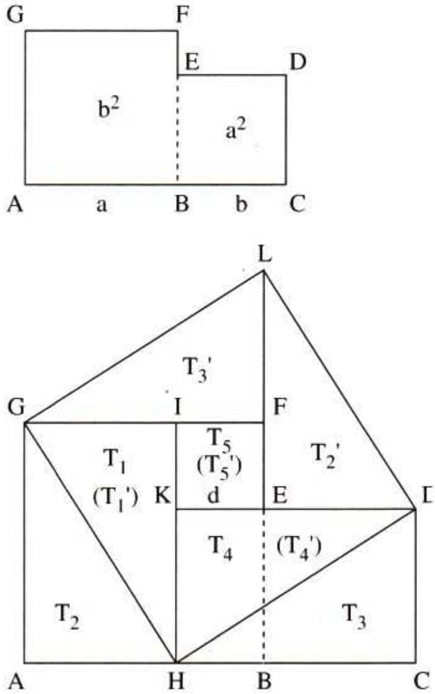


Abb. 3

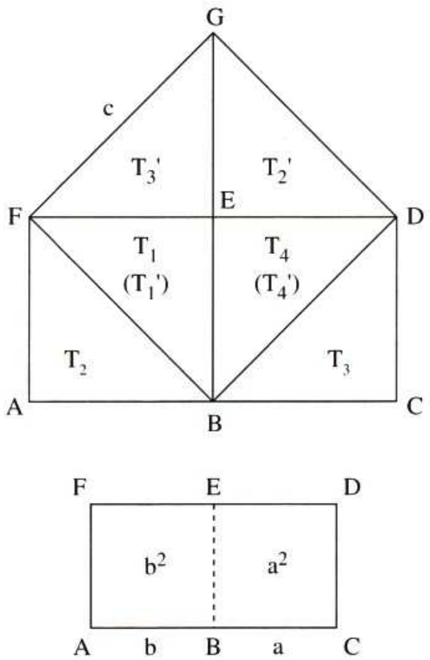
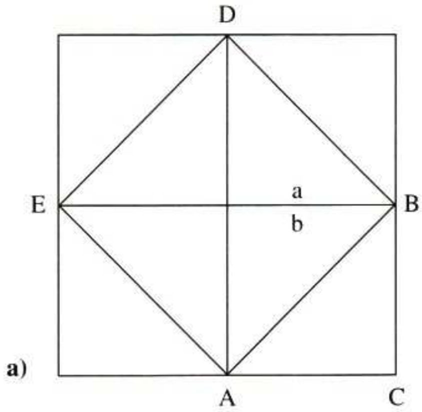
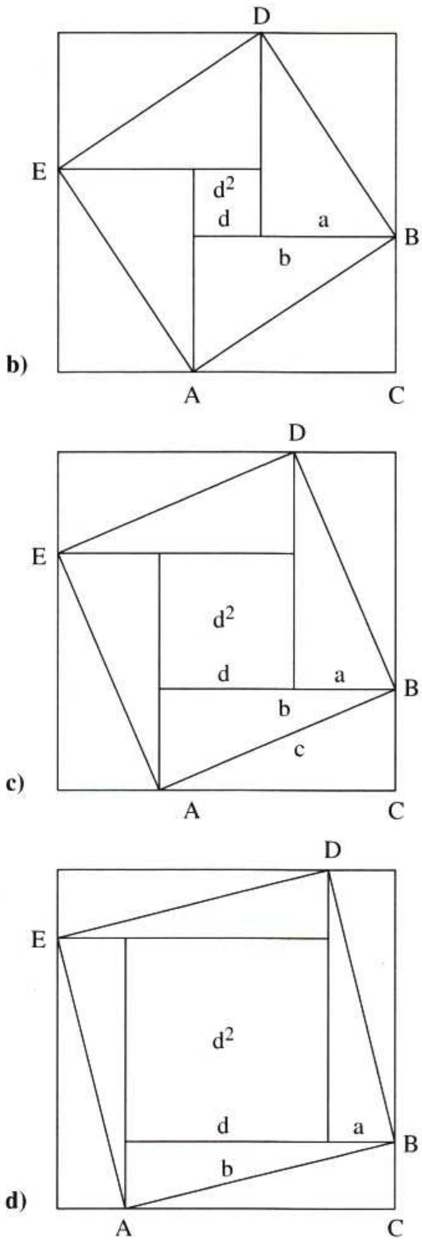


Abb. 4

Abb. 5





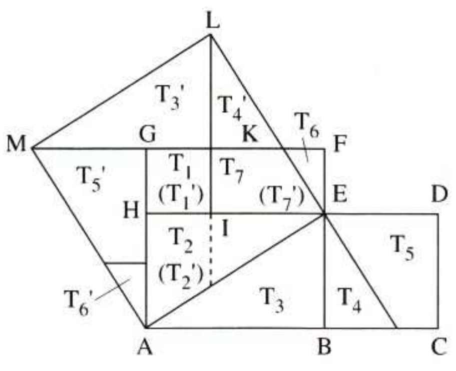


Abb. 6

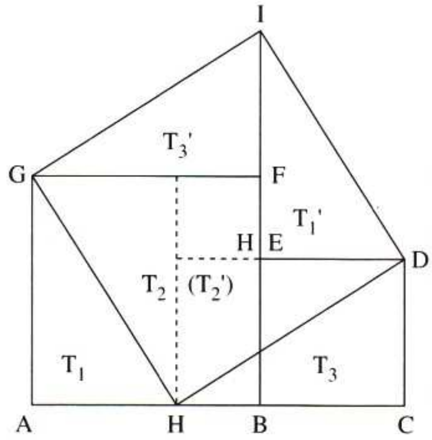


Abb. 7

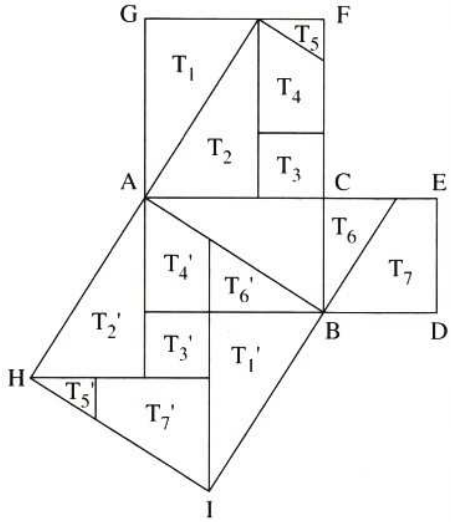


Abb. 8

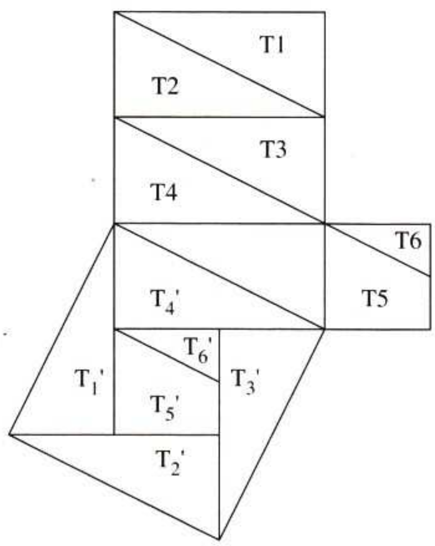


Abb. 9

Die Olympiade-Ecke

Die XXXIII. Internationale Mathematik-Olympiade

Im Jahr von Olympia trafen sich zur 33. Internationalen Mathematik-Olympiade (IMO) in Moskau 322 Teilnehmer aus 56 Nationen – gerade noch rechtzeitig vor der Eröffnung der Sommerspiele in Spanien. Zwischen dem 10. und 21. Juli ging es auch in der ehemaligen Hauptstadt der früheren UdSSR um Gold, Silber und Bronze – die dort allerdings für mathematische Bestleistungen vergeben worden sind. Und wie im katalonischen Barcelona, verzeichneten auch die russischen Gastgeber eine Rekordbeteiligung von Teilnehmerländern.
Das bundesdeutsche Team – in diesem Jahr hervorragend betreut durch die beiden Delegationsleiter Professor Dr. Hans-Dietrich Gronau (Greifswald) und Thorsten Kleinjung (Bonn) – erreichte mit vier zweiten und drei dritten Preisen einen beachtlichen 7. Platz in der Rangfolge der inoffiziellen Mannschaftspunktzahlen.

Die ersten 10 Ränge sind in der Regel von Profis besetzt. Unseren Amateuren aus Deutschland gelingt es aber ebenso regelmäßig in die (nahezu) geschlossene Reihe der generalstabsmäßig vorbereiteten Profiteams einzubrechen.
Jeder der sechs deutschen Teilnehmer hat eine Medaille mit nach Hause bringen können, was insgesamt nur sechs weiteren Mannschaften gelang.

Im einzelnen erzielten

Christoph Bergemann (Hamburg)
31 Punkte, Silber
Jakob Stix (Stegen)
30 Punkte, Silber
Norbert Hoffmann (Ellingstedt)
25 Punkte, Silber
Stefan Schwarz (Erfurt)
25 Punkte, Silber
Andreas Klein (Wettenberg)
19 Punkte, Bronze
Eike Lau (Hamburg)
19 Punkte, Bronze

Christoph Bergemann ist dabei mit 31 erzielten Punkten nur hauchdünn an einer Goldmedaille vorbeigeschliddert.
Zum zweiten Mal nun hat ein gesamtdeutsches Team an der IMO teilgenommen. Die Auswahl und Vorbereitung der Mannschaft gestaltete sich diesmal einheitlich. Rund 130 Schüler qualifizierten sich durch eine erfolgreiche Teilnahme an der 2. Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik oder an Mathematik-Olympiaden (auch eine Vorauswahl über Jugend forscht war möglich, wurde aber von keinem Schüler genutzt). In zwei Auswahlklausuren blieben noch 16 Schüler als Kandidaten für Moskau übrig – interessanterweise teilten sich die 16 Besten in zwei gleich große Teilgruppen aus 8 Wessis und 8 Ossis. In den abschließenden, vorbereitenden Seminaren, wechselten sich Kollegen aus Ost und West gleichmäßig ab. Die gesamte Auswahl und Vorbereitung entwickelte sich – in einem Augenblick, wo West und Ost in Deutschland wieder hart aufeinander stoßen – geradezu beispielgebend. Ein bißchen Wehmut schwingt auch im Rückblick mit. Früher

Aufgaben der 33. IMO

1. Tag

1. Man bestimme alle ganze Zahlen a, b, c mit $1<a<b<c$, so daß $(a-1)(b-1)(c-1)$ ein Teiler von $abc-1$ ist. (Neuseeland)

2. Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reelen Zahlen. Man bestimme alle Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so daß $f(x^2+f(y)) = y+(f(x))^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. (Indien)

3. Man betrachte neun Punkte in Raum, wobei keine vier in einer Ebene liegen. Je zwei Punkte sind durch eine Kante (=Verbindungsstrecke) verbunden, und jede Kante wird entweder blau gefärbt oder rot gefärbt oder sie bleibt ungefärbt.

Man bestimme den kleinsten Wert von n, so daß gilt: Wie immer man auch genau n Kanten färbt, so erhält man notwendigerweise ein Dreieck mit gleichgefärbten Kanten. (China)

2. Tag.

4. In der Ebene seien ein Kreis k, eine Tangente t an den Kreis k und ein Punkt M auf t gegeben. Man bestimme den geometrischen Ort aller Punkte P mit der folgenden Eigenschaft:

Es gibt zwei Punkte Q und R auf t, so daß M der Mittelpunkt der Strecke QR und k der Inkreis des Dreiecks PQR ist. (Frankreich)

5. Sei S eine endliche Menge von Punkten im dreidimensionalen Raum. Die orthogonale Projektion der Punkte von S auf die yz-, zx- bzw. xy-Ebene liefert die Menge S_x, S_y bzw. S_z.

Man beweise
$|S|^2 \le |S_x||S_y||S_z|$,
wobei $|S|$ die Anzahl der Elemente der endliche Menge S ist. (Italien)

6. Für jede positive ganze Zahl n bezeichne s(n) die größte ganze Zahl für die gilt:
Für jede ganze Zahl k, $1 \ge k \ge s(n)$, läßt sich die Zahl n^2 als Summe von genau k Quadraten positiver ganzer Zahlen schreiben.

a) Man beweise $s(n) \le n2 - 14$ für jedes $n \ge 4$.
b) Man gebe eine ganze Zahl n mit $s(n) = n^2 - 14$ an.
c) Man beweise, daß es unendlich viele ganze Zahlen n mit $s(n) = n^2 - 14$ gibt. (Großbritannien)

Arbeitszeit: 4.5 Stunden an jedem Tag
Bei jeder Aufgabe waren 7 Punkte erreichbar.

Die deutsche Delegation. Vordere Reihe, von links nach rechts: Jakob Stix, Norbert Hoffmann, Christoph Bergemann; hintere Reihe, von links nach rechts: Prof. Dr. H.-D. Gronau, Stefan Schwarz, Andreas Klein, Eike Lau und Thorsten Kleinjung

konnten aus Deutschland zwei Teams an den beiden Wettkampftagen über den Aufgaben brüten. Die Vereinigung beider Mannschaften zu einem Team wird leider erkauft mit einer Halbierung der Plätze für besonders qualifizierte deutsche Schüler.

Die sechs deutschen Mathe-Olympioniken haben mir ein (namentlich unterzeichnetes) Stimmungsbild von ihrem Moskauer Aufenthalt geschickt. In ihren «Statements zur IMO '92» zeigen sie sich beeindruckt von der mächtigen Kulisse der sehr geschichtsträchtigen russischen Hauptstadt, die nach den politischen Umwälzungen des letzten Jahres noch aufregender geworden ist. Trotz der daraus sich ergebenden Schwierigkeiten, haben es die moskowiter Veranstalter irgendwie doch geschafft, die IMO durchzuführen. Unterkunft und Verpflegung waren prima. Die gesamte Mannschaft wohnte im Hotel «Izmailova», das zu den Olympischen Spielen in Moskau 1980 ganz neu errichtet worden ist. Ein dickes Lob zollen die deutschen Teilnehmer insbesondere den stadtkundigen Mannschaftsbetreuern (den sog. guides), die ihre Aufgaben sehr ernst genommen haben. Allerdings mußten dennoch beträchtliche organisatorische Hindernisse überwunden werden, was u. a. zu einigen merkwürdigen Klausurbedingungen geführt hatte.

Das Rahmenprogramm erinnerte die Teilnehmer während der Eröffnungs- und Abschlußfeierlichkeiten durch ein Übermaß an Folkloredarbietungen doch sehr stark an die zaristische Vergangenheit Rußlands. Dazwischen boten nur Discoabende und eine Bootstour willkommene Gelegenheiten zum Kennenlernen und Knüpfen neuer Kontakte.

Leider zeigte sich wieder einmal, daß der Mädchenanteil weniger als 10 Prozent aller Teilnehmer ausmachte. Zum Leidwesen auch vieler wurde – anders als in den Vorjahren – von den Organisatoren ein Sportprogramm und das obligatorische Fußballturnier vergessen. Da war Eigeninitiative Trumpf. Wer den nötigen Einfallsreichtum hatte, der konnte auf den nahegelegenen Sportplätzen dem morgendlichen Kopftraining trotzdem ein abwechslungsreiches Fitness-Programm entgegensetzen.

Die auf der linken Seite abgedruckten Aufgaben der 33. IMO waren zu je dreien an zwei aufeinanderfolgenden Tagen in je viereinhalbstündiger Klausur zu bearbeiten. Dabei waren nur Zirkel und Linial als Hilfsmittel zugelassen. Das jeweilige Herkunftsland ist in Klammern gesetzt. Die Lösungen erscheinen in einem der nächsten Hefte von alpha. Ansonsten bleibt noch nachzutragen, daß die Zukunft der IMO bis ins nächste Jahrtausend gesichert ist. Feste Einladungen bzw. Austragungswünsche bis über das Jahr 2000 hinaus, liegen bereits vor: 1993 Türkei, 1994 Hongkong, 1995 Kanada, 1996 Brasilien, 1997 Indien, 1998 Mongolei, 1999 Rumänien, 2000 Südkorea und 2001 USA.

StR Paul Jainta

33. IMO-Länderübersicht

No.	Land	Punkte	G	S	B
1.	China	240	6	–	–
2.	USA	181	3	3	–
3.	Rumänien	177	2	2	2
4.	GUS	176	2	3	–
5.	Großbritannien	168	2	2	2
6.	Rußland	158	2	2	2
7.	Deutschland	149	–	4	2
8.	Japan	142	1	3	1
	Ungarn	142	1	3	1
10.	Frankreich	139	1	3	1
	Vietnam	139	1	2	3
12.	Jugoslawien	136	–	2	4
13.	Tschechoslovakei	134	–	2	3
14.	Iran	133	–	3	2
15.	Bulgarien	127	1	1	3
16.	Nordkorea	126	–	3	2
17.	Taiwan	124	–	3	2
18.	Südkorea	122	1	–	4
19.	Australien	118	1	1	2
20.	Israel	108	–	2	2
21.	Indien	107	–	1	4
22.	Canada	105	1	–	3
23.	Belgien	100	–	1	2
24.	Polen	90	–	1	3
	Schweden	90	–	2	–
26.	Hong Kong	89	–	1	2
	Singapur	89	–	1	3
28.	Italien	83	–	–	3
29.	Norwegen	77	–	1	2
30.	Niederlande	71	–	1	–
31.	Österreich	70	–	–	3
32.	Argentinien	67	–	1	1
33.	Tunesien (4)	64	1	–	1
34.	Türkei	63	–	–	2
35.	Kolumbien	55	–	–	1
36.	Mongolei	51	–	–	–
37.	Spanien	50	–	–	1
	Thailand	50	–	1	–
39.	Brasilien	48	–	–	1
40.	Marokko	45	–	–	–
41.	Dänemark (5)	42	–	–	–
	Irland	42	–	–	–
43.	Neuseeland	41	–	–	1
44.	Philippinen (4)	40	–	–	1
45.	Griechenland	37	–	–	–
46.	Macau	35	–	–	–
	Portugal	35	–	–	1
48.	Zypern	34	–	–	1
49.	Finnland	33	–	–	–
50.	Mexiko	32	–	–	–
51.	Schweiz (3)	30	–	–	–
52.	Trinidad	26	–	–	–
53.	Indonesien	22	–	–	–
54.	Südafrika	21	–	–	–
55.	Kuba (3)	17	–	–	–
56.	Island (3)	16	–	–	–

Jede Mannschaft bestand aus 6 bzw. der in Klammern angegebenen Anzahl von Schülern.

Leserpost

Zu alpha Heft 3, Juni 1992, Seite 4: Wie wird der Stabhochsprungweltrekord im Jahre 1995 lauten?

Das ist ja sagenhaft, welch wunderschönes Beispiel das Redaktionskollegium aus der Flut sportlicher Spitzenresultate herausgepickt hat.

Schade nur, daß Sie den Nullpunkt der Zeitachse nur gerade bis 1900 nach rechts verschoben haben. Ein Blick auf die Tabelle auf Seite 4 in der ersten Spalte zeigt, daß die Zeitintervalle konstant 5 Jahre betragen. Somit ist der Durchschnitt aus allen 5 Zeitwerten gleich 1978. Die Verschiebung des Nullpunktes der Zeitordinate bis 1978 bietet sich förmlich an, denn dadurch wird die Summe aller t_i gleich 0. (siehe Kasten 1!)

Daß wir negative Zeitwerte erhalten, mag unsern Schülern etwas fremd erscheinen. Doch wenn wir Ereignisse datieren, die vor unserer Zeitrechnung eingetreten sind, verwenden wir, mathematisch gesehen, auch negative Zahlen. [Daß die Kalendermacher das Jahr 0 "vergaßen", sei am Rande vermerkt. Ein Jahr 0 kam ihnen wahrscheinlich nicht geheuer vor. In unserer Transformation hat die Null ihren korrekten Platz bei 1978. (1978 minus 1978 gleich Null)].

Betrachten wir die Zahlenreihe t_i, so bietet sich eine Änderung des Zeitmaßtabes an. Das Jahr als Maßeinheit der Zeit ist eine physikalische natürliche Einheit. Es hindert uns jedoch nichts daran, als Zeiteinheit einer "provisorischen Zeitrechnung" (mit Nullpunkt bei 1978) ein halbes Dezenium, das heißt 5 Jahre festzusetzen. Die Tabelle auf Seite 5 in der 1. Spalte unten verändert sich dann wie in Kasten 1 ersichtlich.

Auf der untersten Zeile der Tabelle in Kasten 1 stehen die Großbuchstaben, welche bei der Umformung auf Seite 4 in der 3. Spalte verwendet werden. Die auf Seite 5 in der 1. Spalte aufgeführten Formeln für a und b vereinfachen sich stark dank der durchgeführten Koordinatentransformation (siehe Kasten 1!)

Diese Vereinfachung ist derart enorm, daß sich die Verschiebung des Nullpunktes auf der Koordinate der Sprunghöhe bis zur 5-Meter-Marke nicht lohnt. Setze ich für die in der 1. Spalte auf Seite 5 tabellierten y_i die Sprungwerte U_i ein, so erhalte ich als Summe statt 363 (in cm) 28,3 (in m). Daraus errechnet sich dann die Formel

$$\bar{z} = a + b\,T_i = 5{,}73 + 0{,}15\,T_i\,.$$

Extrapoliert auf das Jahr 1993 ($T_i = 3$) erhalten wir

$$\bar{z}_i = 5{,}73 + 0{,}15 \cdot 3 = 6{,}18$$

das heißt unmittelbar die Sprunghöhe.

Der Vorteil der beschriebenen Koordinatentransformation liegt darin, daß in der Funktion F(a,b) die Variablen a und b getrennt werden, wodurch die quadratische Ergänzung durchsichtiger wird.

Strapazieren wir das Abstraktionsvermögen unserer Schüler!

Wie wird der Stabhochsprungweltrekord im Jahre 1995 lauten?

i	T_i	Y_i	T_i^2	T_iY_i	Z_i
1	−2	41	4	−82	42.6
2	−1	63	1	−63	57.6
3	0	70	0	0	72.6
4	1	83	1	83	87.6
5	2	106	4	212	102.6
$\sum_{i=1}^{i=5}$	0	363	10	150	
	C	D	A	E	

$$b = \frac{NE - CD}{NA - C^2} = \frac{E}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{i=5} T_iY_i}{\sum_{i=1}^{i=5} T_i^2} = \frac{150}{10} = 15$$

$$a = \frac{D - Cb}{N} = \frac{D}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{i=5} Y_i}{N} = \frac{363}{5} = 72.6$$

$$Z_i = a + bT_i = 72.6 + 15 \cdot T_i$$

Kasten 1

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{i=N} (Y_i - a - T_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{i=N} Y^2 + Na^2 + b^2 \sum_{i=1}^{i=N} T^2$$

$$-2a\sum_{i=1}^{i=N} Y_i - 2b\sum_{i=1}^{i=N} Y_iT_i + 2ab\sum_{i=1}^{i=N} T_i$$

$$H_1(a,b_k) = \frac{F(a,b_k)}{N} = a^2 - 2a\frac{\sum_{i=1}^{i=N} Y_i}{N} + G_m$$

$$= \left(a - \frac{\sum_{i=1}^{i=N} Y_i}{N} \right)^2 + G_{m+1}$$

$H_1(a,b_k) \longrightarrow \min$, wenn

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} Y_i}{N}$$

Kasten 2

$$H_2(a_k,b) = \frac{F(a_k,b)}{\sum_{i=1}^{i=N} T_i^2}$$

$$= b^2 - 2b\frac{\sum_{i=1}^{i=N} Y_iT_i}{\sum_{i=1}^{i=N} T_i^2} + G_{m+2}$$

$$= \left(b - \frac{\sum_{i=1}^{i=N} Y_iT_i}{\sum_{i=1}^{i=N} T_i^2} \right)^2 + G_{m+3}$$

$H_2(a_k,b) \longrightarrow \min$, wenn

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} Y_iT_i}{\sum_{i=1}^{i=N} T_i^2}$$

Kasten 3

Die Funktion F(a,b) ist eine Funktion mit zwei voneinander unabhängigen Variablen a und b. Im dreidimensionalen Raum stellt sie eine gekrümmte Fläche dar. Auf dem Schreibblatt ist die Waagerechte die Ordinate a, die Senkrechte darauf die Koordinate F(a, b). Stelle ich auf den Kreuzungspunkt der beiden Geraden, auf den Nullpunkt einen Bleistift mit der Spitze nach oben, so zeigt der Bleistift der Koordinate b an.
Die gekrümmte Fläche gleicht einem Geißhirtenhut ohne Rand, der auf dem Gupf steht. Schneide ich diese Fläche mit einer Ebene, so entsteht auf der Ebene, dort wo sie die gekrümmte Fläche durchdringt, eine Parabel.
Mit der Funktion F(a,b) beschreibe ich eine solche Parabel, indem ich beispielsweise die Variable b konstant halte und a verändere. Für die Lösung unserer Aufgabe lautet die Frage: Bei welchem a hat die Parabel ihren tiefsten Wert?
Analoge Überlegungen gelten für die Variable b, indem a konstant gehalten wird.
Die minimalen Werte a und b finden wir, wie in Ihrem Artikel beschrieben, durch quadratische Ergänzung.
Ich meine, daß es mir gelungen ist, im Kasten 2 eine vereinfachte Darstellung dieser Ergänzung darzustellen.
Bemerkenswert, daß in der Funktion F(a,b) das einzige Glied, das sowohl a wie b enthält herausfällt, weil dank geeigneter Koordinatentransformation Summe aller T_i gleich 0 ist.
Ich definiere als Hilfsfunktion $H_l(a,b_k) = F(a,b_k)/N$ worin b als konstant angenommen wird. Diese teilt mit der Grundfunktion die Eigenschaft, daß sich bei beiden das Minimum der Funktion beim gleichen a befindet.
Da mich nicht der Wert der Funktion interessiert, sondern nur die Stelle, wo sie ihren tiefsten Wert hat, darf ich alle ihre konstanten Glieder, das heißt, alle Glieder, die nicht a enthalten, in einer Sammelkonstanten G_m zusammenfassen. In die Sammelkonstante packe ich auch das Ausgleichsglied.
Für die Bestimmung von b gehe ich analog vor.
Wie Sie sehen, hat mich Ihr Artikel zu Gedanken angeregt, die diskussionswürdig sind. Beim abschließenden Durchlesen meines Briefes, komme ich allerdings zum Schluß, daß meine Darstellung nicht unbedingt besser ist als die Ihre.

Karl Palma

alpha-Fehlliste

1967: 1, 2, 3, 4, 5, 6
1968: 1
1969: 1, 2, 3, 4, 5, 6
1970: 1, 2, 3, 4, 5, 6
1971: 1, 2, 3
1972: 1, 6
1973: 1, 2, 3, 4, 5
1974: 1, 2, 4, 6
1986: 1

Matthias Vogel, Ernst-Fink-Straße 23, W-7590 Achern, 07841-29292

Verlag und Redaktion wünschen allen alpha-Lesern ein Frohes Weihnachtsfest und ein erfolgreiches und gesundes Jahr 1993.

alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett und in Verbindung mit Dr. Gabriele Liebau, Dr. Claus Peter Helmholtz und Herbert Kästner.

Redaktion:
Jürgen Ricke, Tel.: (05 11) 4 00 04-42
Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6
Redaktionskollegium:
StR F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), OL Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pliezhausen), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OStR J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. W. Schmidt (Greifswald), OStR G. Schulze (Herzberg), W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

Anzeigenleitung: Bernd Schrader
Anzeigenabwicklung:
Telefon: (05 11) 4 00 04-23
Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01. 01. 1990
Vertrieb und Abonnement:
Telefon: (05 11) 4 00 04-50
Verlag:
Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG, Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6
Telefon: (05 11) 4 00 04-0
Telefax: 4 00 04-19
Das Jahresabonnement für **alpha** besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt 12,00 DM, im Einzelbezug 2,50 DM. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten. Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).

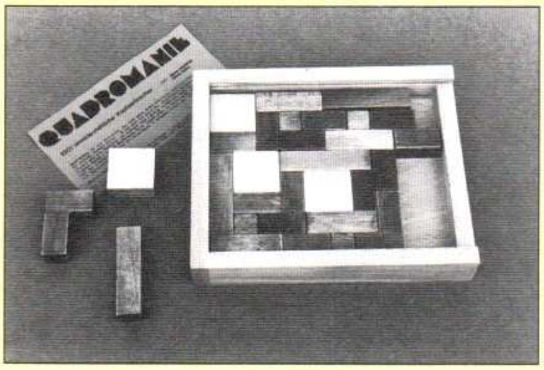
alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV KlettCotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, DH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.

Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschriften im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.

Herstellung: PZ Pädagogika Zentrale GmbH
Gestaltung: Jens Hinzmann
Druck: Druckerei Schröer, Seelze
ISBN 3-617- 34012-1

Marktecke

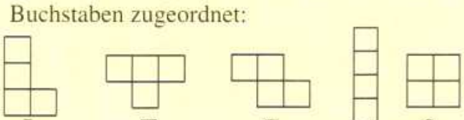
Quadromanie



1001 unwiderstehliche Kopfzerbrecher

Quadromanie ist ein Solo-Spiel, das eine ganze Reihe köstlicher Kopfzerbrecher für einsame Stunden bietet – ob man sich nun durch die vorgegebenen Aufgaben puzzelt oder mit Phantasie und Ausdauer neue flächige Formen und räumliche Figuren findet - die 20 Quadromanie-Teile lassen einen so leicht nicht wieder los! Der Schwierigkeitsgrad der beigefügten 74 Aufgaben reicht von "spielend" bis "haarsträubend".

Spielmaterial:
Mit vier Würfeln lassen sich fünf verschiedene flächige Figuren darstellen. Wir haben jeder Figur entsprechend ihrer Form einen Buchstaben zugeordnet:



L T Z I O

L und Z dürfen auch spiegelbildlich verwendet werden. Jede der fünf verschiedenen Figuren hat eine andere Farbe und ist viermal vorhanden.

Spielregel:
Ihre Aufgabe ist es, jeweils mit einer bestimmten Anzahl in Form und Farbe verschiedener Figuren eine Fläche vorgegebener Form und Größe auszulegen. Gleiche Figuren (=gleiche Farben) dürfen sich dabei nicht nebeneinander berühren. Diagnoalberührung ist jedoch erlaubt.

Aufgaben-Beispiel:
Bilden Sie ein 6 x 6 Felder (= Würfel) großes Quadrat mit: 2L/2T/2Z/2I/1O

Die Spiele **"Irrgendwie"** und **"Quadromanie"** stammen von PYRAMO. Prospekte können dort kostenlos angefordert werden:
PYRAMO-Spiele-Puzzles, Silvia Heinz, Sendbühl 1, W-8351 Bernried.

Geometrie und Kunst in früherer Zeit

Die Wechselwirkungen zwischen Geometrie und Kunst sind uralt.
Dieses Buch veranschaulicht anhand ausgewählter Beispiele aus dem Bauwesen und der Malerei die Anwendungen geometrischer Kenntnisse, beginnend im alten Ägypten bis hin zur Neuzeit.
So werden beispielsweise geometrische Konstruktionen am Grundriß des Tempels von Luxor, an der Fassade der Cancellaria in Rom, am Turm des Stephansdoms in Wien und an zahlreichen Details des Prager Veitsdoms sowie auch an der Entwicklung der Steinmetzzeichen erläutert.

Von Frantisek Kaderávek
Herausgegeben und mit Anmerkungen versehen von Z. Nádenik, Prag, und P. Schreiber, Greifswald
1992. 104 Seiten mit 77 Bildern. 13,7 x 20,5 cm. Kart. DM 16,80 ISBN 3-8154-2024-5
(Einblicke in die Wissenschaft – Mathematik)
B. G. Teubner Verlagsgesellschaft; Stuttgart – Leipzig

Irrgendwie

Verzwickt verzweigte Solo-Spurensuche

Spielmaterial:
Spielfeld mit "Startlöchern", 18 Spurensteine, 3 Mäuse und 3 Käsestücke
Die 18 Spurensteine sollen – je nach Aufgabenstellung oder auch gemäß eigenen Vorgaben – so angeordnet werden, daß jede Maus auf einer eigenen durchgehenden Spur zu ihrem Käse kommt. Bei den vorliegenden 76 Aufgaben ist das eine oftmals äußerst knifflige Angelegenheit, obwohl es für die meisten Aufgaben mehrere Lösungsmöglichkeiten gibt!
Ein kleiner Schrebergarten ist das bevorzugte Futterrevier zweier Mäuse-Spezies. Ein Stück Käse ist für beide ein willkommener Leckerbissen, den sie sich auf keinen Fall entgehen lassen – jede Maus findet immer einen eigenen Weg zu "ihrem" Käse.
Die beiden Arten sind an ihren Spuren zu unterscheiden:
Während die Wühlmaus stets an irgendeiner Stelle im Garten aus einem Loch auftacht, ihre Runde dreht und wieder im selben Loch verschwindet, betritt die Feldmaus den Garten immer am Rand ("Startloch"), rennt kreuz und quer darin herum und verschwindet wieder an anderer Stelle (bei ihrem Käse).
Die Spur der Feldmaus hat also immer einen Ein- und einen Ausgang – die Spur der Wühlmaus ist eine in sich geschlossene Linie.
Bei einem Teil der Aufgaben ist eine Spur schon vorgegeben (z. B. eine Wühlmaus-Spur) – wie aber die Spurensteine angeordnet sind und wo die anderen Spren verlaufen – das herauszufinden ist Ihr "Problem".

Lösungen

Sonderprägung United States of Amerika

Hätten beide Medaillen durchweg gleiche Abmessungen, so wären sie der Form nach kongruent und hätten das gleiche Volumen V. Für ihre Massen müßten dann $m_{Ag}=V\cdot\varphi_{Ag}$, $m_{Au}=V\cdot\varphi_{Au}$ und $m_{Au}:m_{Ag}=\varphi_{Au}:\varphi_{Ag}=19{,}2:10{,}5=1{,}83$ gelten. Da jedoch $m_{Au}:m_{Ag}=22:15=1{,}47$ gilt, haben beide Münzen nicht durchweg gleiche Abmessungen.

Globus

1. Aufgabe:
Der Ähnlichkeitsfaktor ist

$$k=\frac{0{,}635\ \text{m}}{6370\ \text{km}}=9{,}97\cdot 10^{-8}.$$

Die Höhe des Mount Everest auf dem Globus wäre
$h' = 8872\ \text{m}\cdot k = 8{,}8\cdot 10^{-4}\ \text{m} \approx 0{,}9\ \text{mm}$.

Bemerkung:
Auf Reliefgloben werden Erhebungen stark überhöht dargestellt.

2. Aufgabe:

$$c'=\frac{12756\ \text{km}-12712\ \text{km}}{2}\cdot\frac{1{,}27\ \text{m}}{12756\ \text{km}}$$
$$=2{,}2\cdot 10^{-3}\ \text{m}=2{,}2\ \text{mm}$$

Mehrwegflasche statt Dose

200 DM: [(0,17 DM - 0,03 DM)·5·12]=23,8
Es müssen im Mittel pro Monat und pro Person Getränke in 24 Mehrwegflaschen statt in Dosen eingekauft werden.
Bemerkung: Die Verpackungskosten bei einer Kunststofflasche betragen im Schnitt 0,22 DM.

	a	b	c	d	e	f	g
1	6	2	5		1	0	7
2	0		5	2	5		5
3	2	5	5		8	9	5
4	4	7	5		4	6	5
5		2		8		1	
6	1		9	4	5		7
7	8	9	6		2	1	6

Abb. zu: Knobelecke

Knobelecke

waagrecht

1a: Quadratzahl — $25\cdot 25=625$
1e: um 7 größer als die kleinste dreistellige Quadratzahl — $100+7=107$
2c: Vielfaches von 175 — $175\cdot 3=525$
3a: Vielfaches von 15 — $15\cdot 17=255$
3e: $42\cdot 362-(16926-2617)$ — $15204-14309=895$
4a: $25\cdot 19$ — $=475$
4e: Vielfaches von 31 — $31\cdot 15=465$
6a: kleinste natürliche Zahl — $=\ 1$
6c: $(2835:27)\cdot(648:72)$ — $105\cdot 9=945$
7a: Vielfaches von 64 — $64\cdot 14=896$
7e: Lösungszahl der Gleichung $x:8=27$ — $x=27\cdot 8\quad x=216$

senkrecht

1a: $251\cdot(416-392)$ — $251\cdot 24=6024$
1c: Vielfaches von 55 — $55\cdot 101=5555$
1e: subtrahiert man von dieser Zahl 745, so erhält man 839 — $x-745=839$; $x=839+745\quad x=1584$
1g: $(12316-5501)+8880:12$ — $6815+740=7555$
3b: $(389-246)\cdot(544:136)$ — $143\cdot 4=572$
3f: größte dreistellige Quadratzahl — $31\cdot 31=961$
5d: Lösungszahl der Gleichung $x\cdot 4=336$ — $x=336:4=84$
6a: um 7 kleiner als eine Quadratzahl — $25-7=18$
6c: $(18240-3648):(19\cdot 8)$ — $14592:152=96$
6e: Vielfaches von 13 — $13\cdot 4=52$
6g: $5806-[(7256-5342)\cdot 3-12]$ — $5806-[1914\cdot 3-12]$; $5806-[5742-12]$; $5806-5730=76$

Lotto

a) Hans hat den Zwanzigwürfel: Zwei gleichgestaltete Würfel können nur auf 36, 64, 144 oder 400 (= n^2) verschiedene Weisen fallen. Nur die Zahl 400 ist durch 50 teilbar.

b) Da die Würfel auf 400 Arten fallen können, aber nur 50 verschiedene Zahlen mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit erzeugen, muß jede mit 8 verschiedenen Würfen entstehen können.
Das bedeutet, da $8 = 4\cdot 2$ ist, daß der eine Würfel 5 verschiedene Zahlen (je 4 mal) und der andere Würfel 10 verschiedene Zahlen (jede 2 mal) enthalten muß. Dies ist auf 2 verschiedene Weisen möglich:

b_1) Der erste Würfel enthält die Zahlen 0, 10, 20, 30 und 40, der zweite die Zahlen 0, 1, 2, ..., 9, je 4 bzw. 2 mal.

b_2) Der erste Würfel enthält die Zahlen 0, 1, 2, 3 und 4, der zweite die Zahlen 5, 10, 15, 20, 25, ..., 45 je 4 bzw. 2 mal.

Sprachecke

Wie viele Quadrate sind komplett bedeckt?

Betrachte ein Einheitsquadrat. Wir zeichnen in dieses einen Kreis mit einem Durchmesser gleich der Seitenlänge des Quadrates ein. Dann sehen wir sofort, daß die Kreisscheibe das Quadrat nicht vollständig bedeckt.

1. Wieviele Einheitsquadrate eines 3 x 3-Quadrates werden von einer Kreisscheibe bedeckt, deren Durchmesser gleich der Seitenlänge des großen Quadrates ist.
2. Überlege dieses Problem für ein Schachbrett (8 x 8 Quadrat).

Gleichgewichtsfrage

Das Gleichgewicht der 3. Waage erhält man, wenn man eine bestimmte Anzahl Äpfel auf die rechte Waagschale auflegt.
Wieviele sind es?
Lösung:
13 Äpfel müssen aufgelegt werden.
Drücken wir die ersten zwei Gleichgewichtslagen durch Gleichungen aus, indem wir die Birnen mit x, die Bananen mit y und die Äpfel mit z bezeichnen:
1. Gleichgewichtslage: $3x + 3z = 4y$
2. Gleichgewichtslage: $1x = 1y + 1z$

Wenn man die zweite Gleichung mit 3 multipliziert und sie dann von der ersten Gleichung subtrahiert, erhält man die Beziehung $1y = 6z$. Setzt man diese Beziehung für y in die zweite Gleichung ein, erhält man $1x = 7z$. Wenn wir nun beide Beziehungen für x und y für die 3.

Gleichgewichtslage verwenden, erhalten wir die Lösung $1x + 1y = 7z + 6z = 13z$.

Aufgabe

Welche Werte kann der Parameter c annehmen, wenn bekannt ist, daß
$|x^2 - x + c| \leq 1$ für $0 \leq x \leq 1$ ist?

Lösung

Aus $|x^2 - x + c|$
folgt $x^2 - x + c$ oder $-x^2 + x - c$.
Die Funktionen

$$y = f_1(x) = x^2 - x + c = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + c - \frac{1}{4},$$

$$y = f_2(x) = -x^2 + x - c = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - c + \frac{1}{4}$$

haben bei einem Definitionsbereich
$0 \leq x \leq 1$
den Wertebereich

$$c - \frac{1}{4} \leq y \leq c \quad \text{bzw.} \quad -c \leq y \leq -c + \frac{1}{4};$$

denn

$$S_1\left(\frac{1}{2}; c - \frac{1}{4}\right) \quad \text{und} \quad S_2\left(\frac{1}{2}; -c + \frac{1}{4}\right)$$

sind Scheitelpunkt von f_1 bzw. f_2.
Da $f_1(x) \leq 1$ oder $f_2(x) \leq 1$ ist, folgt

$$c - \frac{1}{4} \leq y \leq 1 \quad \text{oder} \quad y \leq -c + \frac{1}{4} \leq 1$$

$$c \leq \frac{5}{4} \quad \text{oder} \quad -c \leq \frac{3}{4}.$$

Somit gilt $\frac{3}{4} \leq c \leq \frac{5}{4}$.

Nasa gibt Asteroiden-Alarm

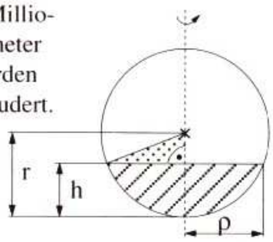
Die Formel für das Volumen eines Kegelsegmentes ist

$$V = \frac{h^2}{3}(3r - h)$$

Mit $r^2 = (r-h)^2 + \rho^2$, $h = 180$ m und $\rho = 650$ m ergibt sich

$$V = \frac{h}{6}\left(h^2 + 3\rho^2\right) \approx 1{,}3 \cdot 10^8\,m^3 = 130000000\,m^3$$

Rund 130 Millionen Kubikmeter Gestein wurden weggeschleudert.



Das Schachbrett als Schalttafel

Der Kupferdraht wird über 64 Kontaktpunkte bei 20 Richtungsänderungen geführt, was einem Verbrauch von 84 Einheiten entspricht. Die Turmwanderung (Drahtverlauf) erfolgt über die Felder:

a7 – a8 – f8 – f2 – b2 – b5 – c5 – c6 – d6 – d4 – c4 – c3 – e3 – e7 – b7 – b6 – a6 – a1 – g1 – g8 – h8 – h1.

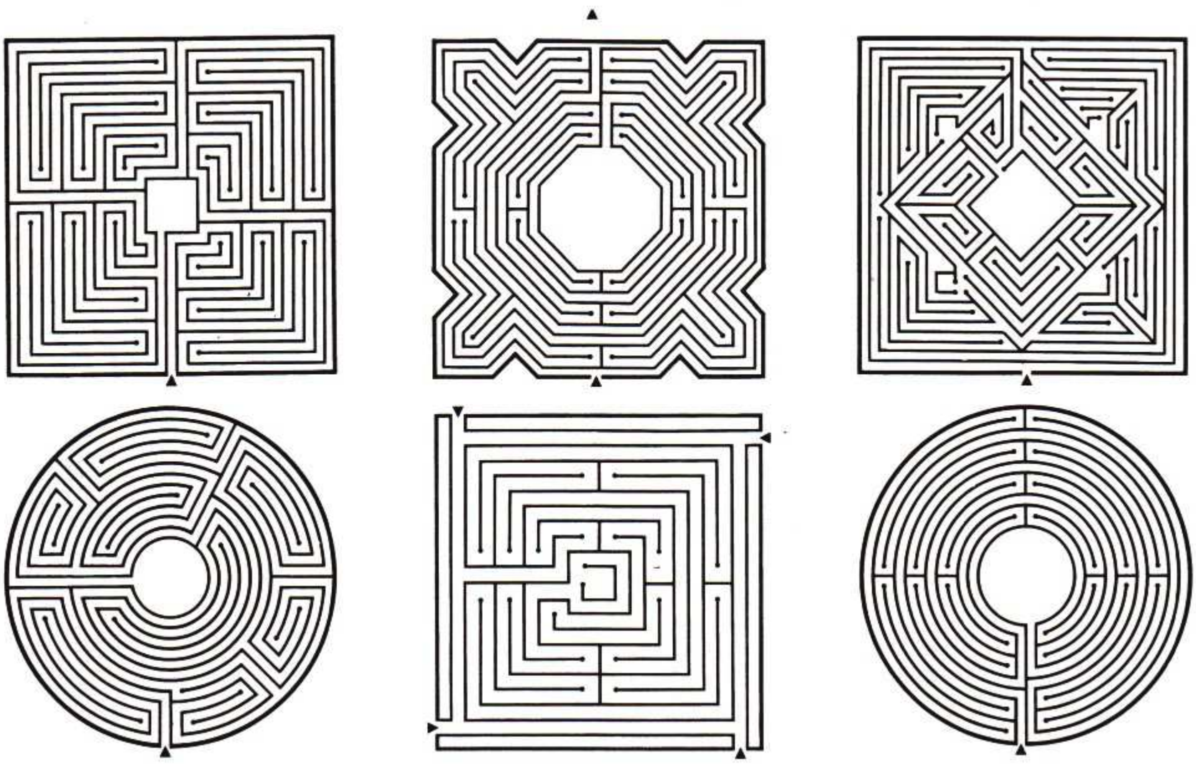
Ein Weihnachtsstern

Der Zentralkörper wird begrenzt von m gleichseitigen Dreieck- und n Quadratflächen mit der Seitenlänge b. Jede Kante des Zentralkörpers ist gleichzeitig Seite einer Dreieck- und einer Quadratfläche des Zentralkörpers. In einer Ecke des Zentralkörpers stoßen also gleichviele Dreieck- und Quadratflächen an. Da der Zentralkörper konvex ist, kann die Summe der Flächenwinkel einer Ecke nicht größer als 360° sein. Da andererseits mindestens drei Flächen in eine Ecke eines Polyeders einmünden müssen, stoßen in jeder Ecke des Zentralkörpers genau zwei Dreieck- und zwei Quadratflächen an. Sind E, K und F die Zahlen der Ecken, Kanten und Flächen des Zentralkörpers, so gilt $F = m + n$, $K = 3m = 4n$ und

$$E = \frac{3m \cdot 2}{4} = \frac{4n \cdot 2}{4}.$$

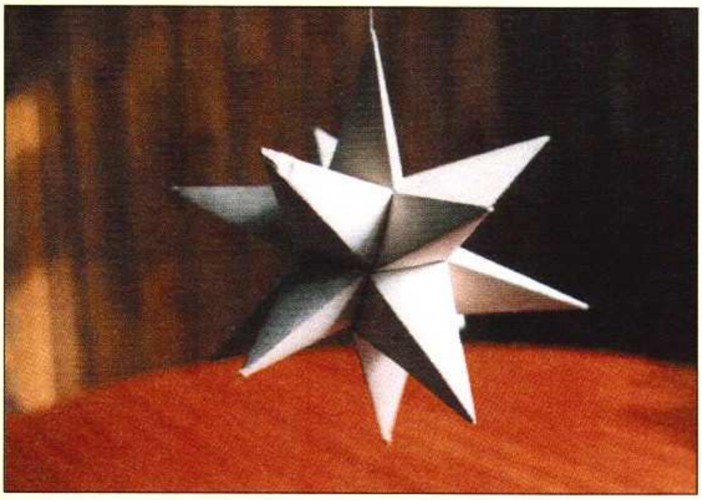
Laut Eulerschem Polyedersatz muß $2 = E - K + F = 2n - 4n + m + n$ und damit $m - n = 2$ gelten. Aus $3m = 4n$ und $m - n = 2$ ergibt sich $m = 8$, $n = 6$, $E = 12$, $K = 24$ und $F = 14$. Für das Sternpolyeder muß damit $e = E + m + n = 26$, $k = K + 3m + 4n = 72$ und $f = 3m + 4n = 48$ gelten.

Sucht den Weg durchs Labyrinth!



Falls Ihr Lust habt, eigene Labyrinthe zu entwickeln, schickt sie uns (mit Lösung). Wir werden in den nächsten Heften einige veröffentlichen.

Ein Weihnachtsstern



Die Oberfläche des abgebildeten Weihnachtssternes besteht aus den Flächen kongruenter gleichschenkliger Dreiecke, deren Schenkellänge s doppelt so groß wie ihre Basislänge b ist: s = 2b. Die "Zacken" dieses Sternpolyeders sind die Mantelflächen regelmäßiger dreiseitiger und quadratischer Pyramiden. Von den beiden längs einer Kante der Länge b des Sternpolyeders anstoßenden Dreiecksflächen gehört die eine zur Mantelfläche einer dreiseitigen und die andere zur Mantelfläche einer quadratischen Pyramide (Zacke). Die gedachten Grundflächen dieser Pyramiden (Zacken) begrenzen für sich einen konvexen Teilkörper der Sternpolyeders, Zentralkörper genannt. Wie groß ist die Zahl e der Ecken, die Zahl k der Kanten und die Zahl f der Flächen dieses Sternployeders?

W. Träger, Döbeln

Mathematische Spielereien mit der Jahreszahl 1993

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}=(1\cdot 9-9+3)^{-(1+9/9+3)}$$

$$\frac{1}{1}:\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}:\frac{1}{3}=1^{9-9}\cdot 3$$

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1^{99}+3}{1\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}\cdot 3}$$

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1\cdot\sqrt{9\cdot 9}-3}{1\cdot 9\cdot\sqrt{9}\cdot 3}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\frac{1+9(9+3)}{1\cdot 9\cdot\sqrt{9}\cdot 3}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{9}:\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\frac{1+\sqrt{9\cdot 9}-3}{1\cdot 9-9+3}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\sqrt{\frac{199-3}{1\cdot\sqrt{9}\cdot 9\cdot 3}}$$

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}=\sqrt{\frac{19-9:3}{1\cdot 9\cdot\sqrt{9}\cdot 3}}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\sqrt{\frac{1\cdot 9+9\cdot 3}{1\cdot 9\cdot 9:3}}$$

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}=\sqrt{\frac{1}{1}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}=\sqrt{\frac{\sqrt{(19-\sqrt{9})^3}}{1\cdot 9\cdot\sqrt{9}\cdot 3}}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}=\sqrt{\frac{1+9+9-3}{1\cdot(9+\sqrt{9})\cdot 3}}$$

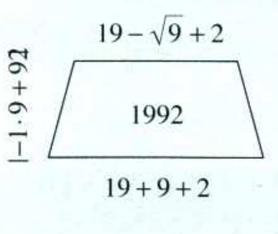
$$1\cdot 9\cdot 9\cdot 3=(1+9/9\cdot 3)^{1+9/9+3}$$

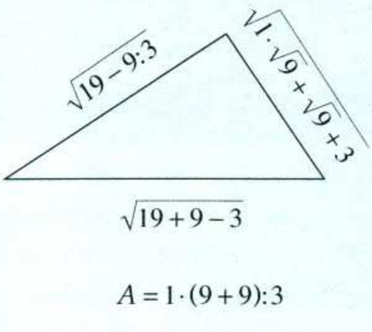
$$19+93=199-3-1\cdot 9\cdot 9-3$$

$$19\cdot 93=(19+9+3)(19\cdot 9:3)$$

$$\sqrt{199-3}=\frac{1^9+9\cdot 3}{-1+9-9+3}$$

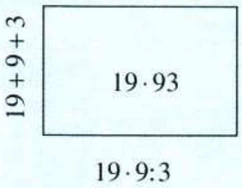
$$\frac{1+9+9+3}{19-9-3}\approx\pi$$





$$A=1\cdot(9+9):3$$

$$U=1\cdot 9+9:3$$



$$1993=12^{2+1}+12^2+121$$

$$1993=12^3+123+1213+12+3+12:3$$

$$\sqrt[-1-9+9+3]{19+9-3}=$$

$$-1+\sqrt{9\cdot 9}-3=-1^9+9-3$$

19__9__93:1993 =______

$$19\cdot 94=(1-9-9-\sqrt{4})(1-99+4)\cdot 1995$$

$$19:95=1:9\cdot 9:5\cdot 1996$$

$$19\cdot 96=(1+9\cdot 9-6)(1\cdot 9+9+6)$$

$$1997\ 19\cdot 97=1997-(19+\sqrt{9})\cdot 7\cdot 1998$$

$$19\cdot 98=1998+(1-9)(9+8)\cdot 1999$$

$$19\cdot 99=1999-19-99$$

$$2000\ 2000=(2\cdot 22)^2+(2\cdot 2\cdot 2)^2$$

Ing. Heinz Decker, Köln und
OStR. Johannes Lehmann, Leipzig

ISBN 3-617-34012-1 Einzelpreis: 2,50 DM Einzelpreis im Abo: 2,– DM