H 11328 F

Heft 1
Februar 1993
27. Jahrgang

Pädagogische
Zeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

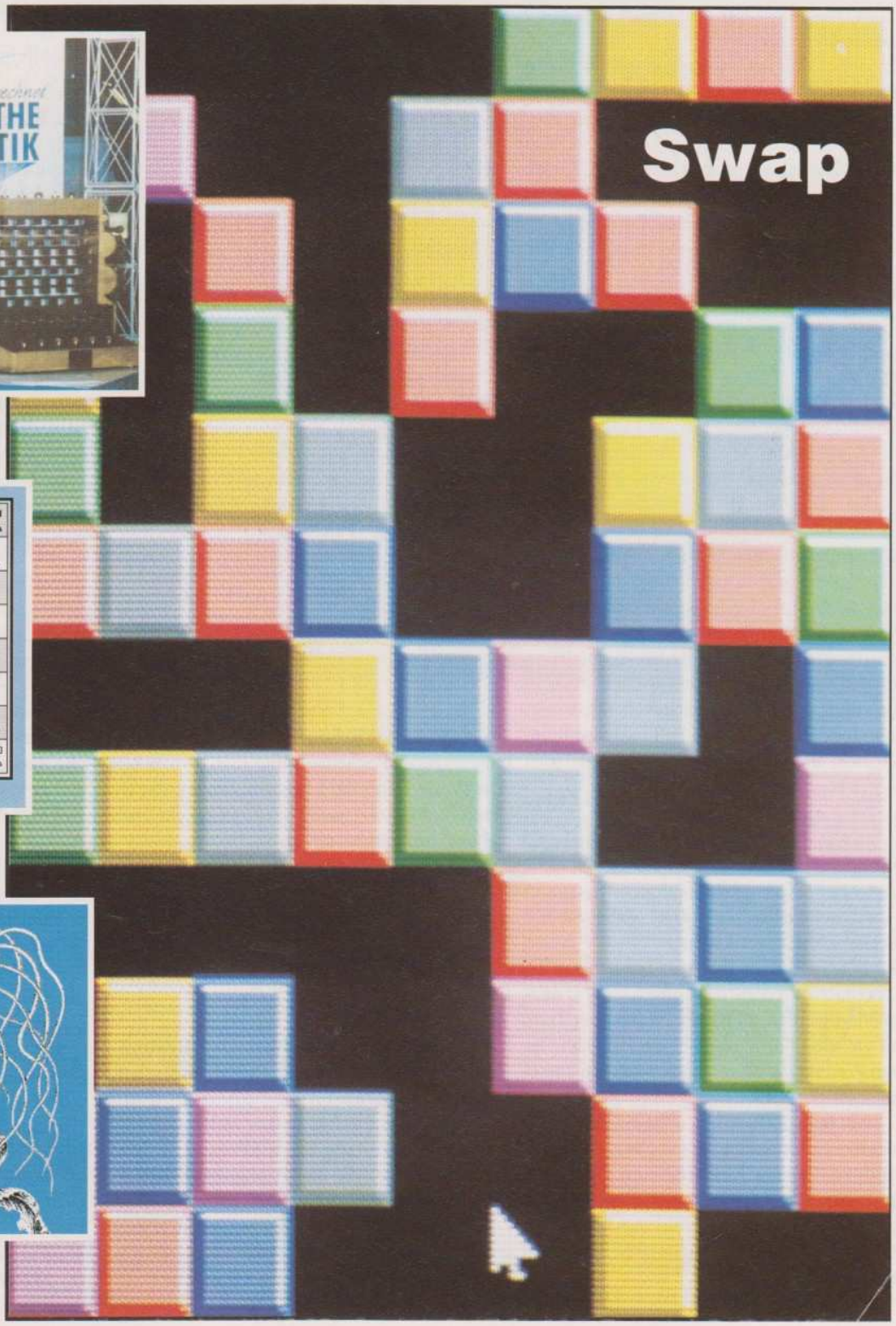
Alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Aktion „Ausgerechnet Mathematik“

Was geschah auf dem Schachbrett?

Regelmäßige Kreisteilung in der Pflanzenwelt



Werte Redaktion!

In Heft 6/90 von "alpha" wurde gleich in zwei Artikeln das Problem der "pythagoräischen Zwillinge" erwähnt, seine Lösung allerdings auf die Berechnung der ersten "Zwillinge" mittels Computer beschränkt. Dabei ist auch eine weitergehende mathematische Behandlung interessant und führt zudem zu einer entscheidenden Verringerung des Rechenaufwandes. Versuchen wir es: Gesucht sind also (möglichst alle) ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^2 + (x + 1)^2 = z^2$. Äquivalente Umformungen ergeben:

$2x^2 + 2x + 1 = z^2$

$2z^2 - (2x + 1)^2 - 1 = 0$. Wir setzen $2x + 1 = v$ und erhalten schließlich

$2z^2 - v^2 = 1$. Diese Gleichung können wir auch schreiben:

$$\left(z\sqrt{2} + v\right)\left(z\sqrt{2} - v\right) = 1.$$

Unsere Aufgabe führt uns also dazu, Zahlen der Form $a\sqrt{2} + b$ zu betrachten, wobei a und b ganze Zahlen sind. Auch die Zahl 1 können wir als eine solche Zahl ansehen (a = 0, b = 1).

Wir wollen den Term $N(a, b) = 2a^2 - b^2$ als "Norm" des Terms $a\sqrt{2} + b$ bezeichnen. Unser Problem läßt sich dann auch so formulieren:

Gesucht sind alle Zahlen der Form $a\sqrt{2} + b$ *mit ganzzahligen Koeffizienten a und b, deren Norm gleich Eins ist.*

Bei der Betrachtung der Gleichung

$$\left(z\sqrt{2} + v\right)\left(z\sqrt{2} - v\right) = 1$$

fällt auf, daß die beiden Faktoren links (wenn es sie gibt) die Norm 1 haben, das Produkt aber die Norm - 1 hat (wieso?), die als zum Produkt der Normen der Faktoren entgegengesetzte Zahl betrachtet werden könnte.

Nun ist dieser Einzelfall sehr speziell, es ist jedoch nicht schwer, eine entsprechende Beziehung für den allgemeinen Fall nachzuweisen.

Gegeben seien die Terme

$a\sqrt{2} + b$ mit $2a^2 - b^2 = p$

$c\sqrt{2} + d$ mit $2c^2 - d^2 = q$. Dann ist

$\left(a\sqrt{2} + b\right)\left(c\sqrt{2} + d\right) = (2ac + bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$ (*)

Wir bilden die Norm des Produktes:

$2(ad + bc)^2 - (2ac + bd)^2$

$= 2a^2d^2 + 4abcd + 2b^2c^2 - 4a^2c^2 - 4abcd - b^2d^2$

$= -(2a^2 - b^2)(2c^2 - d^2) = -pq$.

Wir können hieraus folgern:

1. Wenn zwei Terme der Form $a\sqrt{2} + b$ multipliziert werden, so ist das Produkt ein Term der gleichen Form; seine Norm ist gleich der zum Produkt der Normen der Faktoren entgegengesetzten Zahl.

2. Sind die Koeffizienten der Faktoren nichtnegative ganze Zahlen, so gilt das auch für das Produkt. Dessen Koeffizienten sind dann größer als die entsprechenden Koeffizienten der Faktoren.

Hieraus ergibt sich die wichtige Schlußfolgerung:

Wenn eine Zahl die Norm 1 hat, so haben auch alle ihre ungeraden Potenzen die Norm 1.

Haben wir also eine Lösung unserer Ausgangsgleichung, so haben wir zugleich eine unendliche Menge von Lösungen gefunden. Zum Glück brauchen wir, um eine solche Lösung zu finden, kaum einen Computer. Betrachtet man die Gleichung $2z^2 - v^2 = 1$ aufmerksam (oder beginnt man bei den kleinsten natürlichen Zahlen zu probieren), so sieht man, daß $z_1 = v_1 = 1$ eine solche Lösung ist.

Alle Potenzen $\left(\sqrt{2} + 1\right)^n$ mit *ungeradem* n sind also Lösungen unseres Problems. Setzen wir $n = 2i - 1$, so nehmen diese Lösungen die Gestalt.

$\left(\sqrt{2} + 1\right)^{2i-1} = z_i\sqrt{2} + v_i \quad (i = 1, 2, 3 \ldots)$ an.

Die (i + 1) - te derartige Lösung kann aus der i - ten nach der Formel (*), einfacher noch direkt berechnet werden:

$z_{i+1}\sqrt{2} + v_{i+1} = \left(\sqrt{2} + 1\right)^{2(i+1)-1}$

$= \left(\sqrt{2} + 1\right)^{2(i-1)+2}$

$= \left(z_i\sqrt{2} + v_i\right)\left(\sqrt{2} + 1\right)^2$

$= \left(z_i\sqrt{2} + v_i\right)\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$

$= \left(3z_i + 2v_i\right)\sqrt{2} + \left(4z_i + 3v_i\right)$,

d. h. $v_{i+1} = 4z_i + 3v_i$

$z_{i+1} = 3z_i + 2v_i \qquad$ mit $z_1 = v_1 = 1$

Schließlich setzen wir wieder $v_i = 2x_i + 1$:

$2x_{i+1} + 1 = 6x_i + 3 + 4z_i$

$x_{i+1} = 3x_i + 2z_i + 1$

$z_{i+1} = 4x_i + 3z_i + 2$.

Wir können zusammenfassen:

Eine Menge von pythagoräischen Zwillingen (x_i, x_{i+1}) *mit* $x_i^2 + (x_i + 1)^2 = z_i^2$, x_i, z_i *ganzzahlig, wird durch die Koeffizienten des Terms*

$$\left(\sqrt{2} + 1\right)^{2i-1} = \left(2x_i + 1\right) + z_i\sqrt{2}$$

erzeugt. Für sie gelten die Rekursionsformeln

$x_1 = 0, z_1 = 1$

$x_{i+1} = 3x_i + 2z_i + 1$

$z_{i+1} = 4x_i + 3z_i + 2$ (i = 1, 2, 3, ...).

Auf Grund der Rekursionsformeln kann man ohne großen Rechenaufwand auch für sehr hohe Werte somit die Lösungen finden; die ersten fünf Lösungspaare kann man leicht "von Hand" bestimmen:

i	x_i	$x_i + 1$	z_i
1	0	1	1
2	3	4	5
3	20	21	29
4	119	120	169
5	696	697	985

...

Aufgabe: Beweise die folgenden Rekursionsbeziehungen zwischen pythagoräischen Zwillingszahlen:

$x_{i+2} = 6x_{i+1} - x_i + 2 \quad (x_1 = 0, x_2 = 3)$

$z_{i+2} = 6z_{i+1} - z_i \quad (z_1 = 1, z_2 = 5)$!

Wende hierbei die oben gefundenen Rekursionen auf i + 1 und i + 2 an!

Eine Frage ist bis jetzt offen geblieben: Haben wir mit den gefundenen Formeln auch alle Lösungen erfaßt, oder gibt es noch weitere?

Die Vollständigkeit der gefundenen Lösung zu beweisen, dauert etwas länger, ist aber auch nicht sehr schwer:

Es sei $w = r\sqrt{2} + s$ ein Term mit ganzzahligem r, s und es gelte $2r^2 - s^2 = 1$. O. B. d. A. können wir auch voraussetzen, daß r und s nichtnegative Zahlen sind (warum?).

Es sei dann

$$w_1 = \frac{r\sqrt{2} + s}{\sqrt{2} + 1} = \left(r\sqrt{2} + s\right)\left(\sqrt{2} - 1\right) = r_1\sqrt{2} + s_1.$$

Gemäß (*) gilt dann $2r_1^2 - s_1^2 = -1$; r_1 und s_1 sind offensichtlich ganzzahlig (nicht mehr notwendig positiv).

Setzen wir diese Operation fort, so erhalten wir eine Folge von Zahlen

$$w_n = \frac{r\sqrt{2} + s}{\left(\sqrt{2} + 1\right)^n} = r_n\sqrt{2} + s_n$$

mit $2r_n^2 - s_n^2 = (-1)^n$, r_n, s_n ganz.

Aus Formel (*) ergibt sich die Rekursion (für $a = r_n$, $b = s_n$, $c = 1$, $d = -1$)

$r_{n+1} = s_n - r_n$

$s_{n+1} = 2r_n - s_n$.

Sind r_n und s_n nicht negativ, so gilt $r_n < r_n - 1 < \ldots < r$, entsprechend für s_n. (Warum?)

Da die Anzahl der natürlichen Zahlen unterhalb einer gegebenen Schranke aber begrenzt ist, müssen wir bei der Fortsetzung des Prozesses zu einem w_k kommen, für das gilt:

$0 \le r_k$, $0 \le s_k$, aber entweder $r_{k+1} < 0$, $s_{k+1} \ge 0$ oder $s_{k+1} < 0$, $r_{k+1} \ge 0$. (Warum können nicht beide Koeffizienten negativ sein?) Außerdem kann die Norm von w_k gleich 1 oder gleich - 1 sein. Zunächst untersuchen wir den Fall $r_{k+1} < 0$, $s_{k+1} \ge 0$: Aus $r_{k+1} < 0$ folgt $s_k - r_k < 0$, d. h. $s_k < r_k$. Da s_k und r_k nichtnegativ sind, gilt auch $s_k^2 < r_k^2$. Die letzte Ungleichung läßt sich äquivalent zu $s_k^2 < 2r_k^2 - s_k^2$ umformen.

Wäre nun die Norm $2r_k^2 - s_k^2$ gleich - 1, so müßte gelten $s_k^2 < -1$, was für kein reelles s_k erfüllbar ist. Die verbleibende Möglichkeit $2r_k^2 - s_k^2 = +1$ hätte $s_k^2 < 1$ zur Folge. Diese Ungleichung wird nur durch $s_k = 0$ erfüllt. Dann müßte aber $2r_k^2 = 1$ sein, was durch keinen ganzzahligen Wert von r_k erfüllt ist. Der hier betrachtete Fall kann also nicht eintreten.

Es bleibt der Fall $s_{k+1} < 0$, $r_{k+1} \ge 0$.

Aus $s_{k+1} < 0$ folgt $2r_k - s_k < 0$, $2r_k < s_k$, $4r_k^2 < s_k^2$, $4r_{k+1}^2 - 2s_k^2 < -s_k^2$ und schließlich $2(2r_k^2 - s_k^2) < -s_k^2$. Ist die Norm gleich + 1, so ist diese letzte Ungleichung nicht durch reelle Zahlen erfüllbar. Ist jedoch $2r_k^2 - s_k^2$ gleich - 1, so erhalten wir die Bedingung $s_k^2 < 2$. Dem entsprechen die ganzzahligen Werte $s_k = 0$ oder $s_k = 1$. Der Wert $s_k = 0$ ergibt keinen reellen Wert für r_k. Für $s_k = 1$ erhalten wir hingegen $r_k = 0$.

Demzufolge muß gelten

$$w_k = \frac{r\sqrt{2} + s}{\left(\sqrt{2} + 1\right)^k} = 1 \text{ bzw. } r\sqrt{2} + s = \left(\sqrt{2} + 1\right)^k.$$

Damit ist gezeigt, daß die gefundene Lösung auch vollständig ist.

Prof. Dr. Michael Benjamin,
Mojakowskiweg 18/20,
O - 1110 Berlin - Hohenschönhausen

Inhaltsverzeichnis

Leserbrief 2

Eine Zuschrift von *Prof. Dr. Michael Benjamin* zum Problem der „pythagoräischen Zwillinge".
Übrigens: Leserbriefe sind sehr willkommen, wir werden sie – soweit möglich und von allgemeinem Interesse – auch in Zukunft veröffentlichen.

Zeitungsschnipsel 4

Aufgaben zum Gummihandschuh, zu einem Riesenhühnerei und zum Kauf einer Ostseeinsel sowie Informationen über Swap und das Sonderheft CHIP INSIDE „Komplizierte Funktionen einfach erklärt".

Komisches, Kniffliges und Knackiges 6

Schlaglichter auf aktuelle Themen wie die Zinsabschlagsteuer, den „Generationenvertrag" und die neuen Postleitzahlen.

Was geschah auf dem Schachbrett? 8

Bereits nach wenigen Zügen gibt es sehr viele mögliche Stellungen – so kann es sehr reizvoll sein zu versuchen, eine Eröffnung nachzuvollziehen, meint *Harald Rüdiger.*

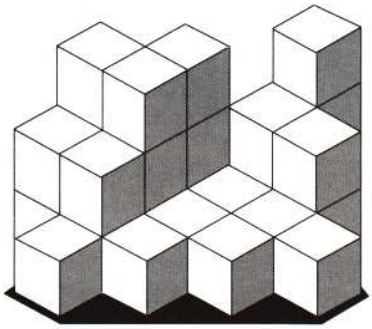
alpha-Preisausschreiben 8

Ab jetzt in jedem Heft: das alpha-Preisausschreiben. Zu gewinnen gibt´s zwei Taschenrechner von Texas Instruments.

Alphons logische Abenteuer 9

„Ein Wanderer kam an eine Kreuzung. Dort saßen zwei Männer, ein lügt immer..." Wie erfährt er den richtigen Weg, fragt *Prof. Dr. L. Kreiser.*

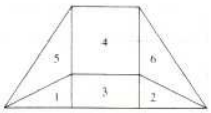
Würfelstapelei 10



alpha-Gewinner 11

alpha-Wettbewerb 1991/92 12

Wir geben die Gewinner der zahlreichen Preise bekannt und hoffen auf wiederum rege Beteiligung beim nächsten alpha-Wettbewerb.



alpha-Wettbewerb 1993 22

Den ersten Teil des alpha-Wettbewerbs findet Ihr in diesem Heft – der zweite folgt im April.

Kettenbriefe 22

Eine Einführung in „Kettenbriefe" von *H. Walter.*

Internationales Kinderspiel – mathematisch beleuchtet 24

Weitere Informationen zu Kettenbriefen von *Hans-Jürgen Schmidt.*

Aufgaben zum „Pythagoras" und „Euklid" zur Weiterarbeit und zum Aufzeigen von Zusammenhängen ... 26

Heinz Günter Kirchhoff hat einige Aufgaben zusammengestellt, die in Mathematikbüchern selten so zu finden sind.

Regelmäßige Kreisteilung in der Pflanzenwelt 28

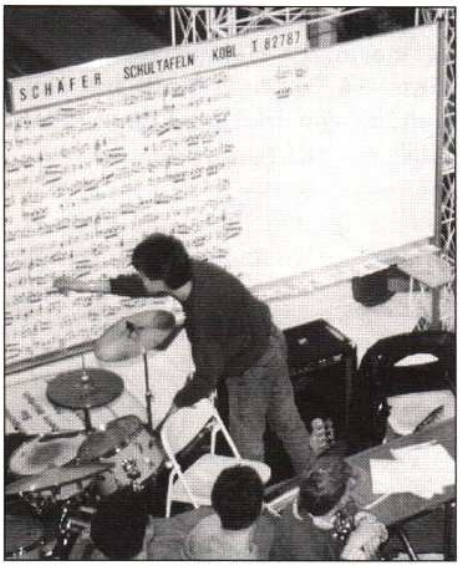
Die Simson-Gerade, die bei Robert Simson (1687 bis 1768) nicht vorkommt 29

Ein anspruchsvolles Problem mit einer überraschenden Lösung von *J. Buhrow.*

Der längste und kürzeste Tag in Deutschland 30

Im Norden sind die Nächte länger als im Süden (im Winter) zeigt *Arnold Zenkert.*

Aktion „Ausgerechnet Mathematik" 31



Rückblick auf eine äußerst ungewöhnliche Ausstellung von *Paul Jainta.*

Lösungen 34

Marktecke 36

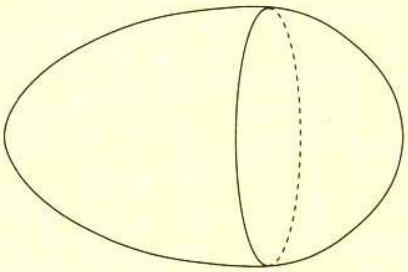
Zeitungs-schnipsel

Mit Gummihandschuh

Petra muß bei allen häuslichen Arbeiten, bei denen ihre Hände mit Wasser in Berührung kommen, wegen eines Hautekzems ihre linke Hand durch einen Gummihandschuh schützen. Im Geschäft werden Gummihandschuhe nur paarweise verkauft. Muß Petra, wenn der linke Gummihandschuh defekt wird, ein neues Paar kaufen oder kann sie mit dem rechten Gummihandschuh weiter arbeiten?
Dr. W. Träger, Döbeln

Ein Riesenhühnerei

Döbelner Allgemeine Zeitung, 10. Juni 1992
Am 10.6.92 verbreiteten Zeitungen die folgende dpa-Meldung aus Madrid: "Ein 180 Gramm schweres Ei war zu viel für ein spanisches Huhn: Die Besitzerin mußte die Henne nach mehreren vergeblichen Legeversuchen notschlachten. Das Tier quälte sich zu sehr mit dem Riesenei, das die dreifache Größe eines normalen Eies hatte...."
Aufgabe: Der größte auf der Schale eines normalen Hühnereies mit 60 g Masse verlaufende Kreis hat einen Umfang von 14,5 cm Länge. (Siehe Bild!)



Wie lang ist der Umfang des größten Kreises auf der Schale des Rieseneies?
Dr. W. Träger, Döbeln

Swap

Das jüngste Spiel von Palace/Microids nennt sich SWAP. Es entpuppt sich als reines Denkspiel mit einfacher Spielidee und vielen bunten Steinen. Nichts Neues, denkt man. Doch die Mannen von Microids haben sich bemüht, aus dieser einfachen Idee etwas mehr zu machen.
Beim Spiel bekommt man einen Bildschirm voller Spielsteine: Dreiecke, Vierecke oder Sechsecke, in maximal sechs verschiedenen Farben. Punkte gibt's, wenn man die Steine verschwinden läßt. Dazu klickt man mit der Maus auf die Nahtstelle zweier Steine, worauf beide den Platz tauschen. Liegen anschließend Steine gleicher Farbe nebeneinander, lösen diese sich auf. Kritisch sind die Eckfelder, die man vor allem bei den Dreiecken nicht immer leer bekommt.
Bei jeder der drei Spielsteinformen stellt sich ein anderes Spielgefühl ein. Kann man die Dreiecke an drei möglichen Seiten drehen, sind es bei den Quadraten schon vier Möglichkeiten. Hier erscheint das Tauschen um die Vertikale oder Horizontale noch einfach. Das räumliche Denkvermögen wird hauptsächlich bei den Drei- und Sechsecken beansprucht. Hat man den Bildschirm leer geräumt, wird man mit Punkten, acht Sternen und dem nächsten Level belohnt. Hat man dies aber geschickt getan, hat man mit einem Minimum an Drehungen ein Maximum an Feldern abgeräumt, dann überspringt man eine ganze Menge Levels. Nach dem Startlevel 1 kann man durchaus in der nächsten Runde 10 Levels höher starten. Im Spielverlauf wird dieser anfangs kolossale Sprung immer bescheidener. Die Programmierer waren nett, sie

Ein schönes Stück Ost-Deutschland kommt unter den Hammer

Ostsee-Insel: 2,8 Mio. – und sie gehört Ihnen

Sanft schlägt der Wind die Ostseewellen an den Sandstrand. Aus dem wogenden Uferschilf krächzen Kormorane, im Schnabel des Fischreihers zappelt ein Barsch. Verwunschen unter mächtigen Eichen ein verfallendes Fachwerkhaus – Insel Libitz im Kubitzer Bodden (Mecklenburg-Vorpommern). Kein Mensch lebt seit über 40 Jahen hier. Ein wunderschönes Stück Ost-Deutschland. Für 2,8 Millionen Mark gehört es Ihnen.
"Die Erben des früheren Eigentümers bekamen Libitz zurück. Jetzt ist es Deutschlands einzige private Insel", sagt der Hamburger Makler Farhad Vladi (47).
Naturschutz ist auf dem 41-Hektar-Eiland oberstes Gebot. "Ein Baulöwe, der auf Libitz eine Feriensiedlung hochziehen will,

haben Hilfsfunktionen eingebaut. Man kann aus einem Vorrat Steine nehmen und im Spielfeld einsetzen. Man kann alle Steine an den unteren Bildschirmrand fallen lassen, wo sich gleichfarbige Paare sofort auflösen. Dieser Tetris-Effekt kostet, wie das Einsetzen von Hilfssteinen, wertvolle Punkte. Wenn man in jenen Leveln swapt, in denen Punkte schwer zu ergattern sind, überlegt man sich schon, ob man den Punktevorrat anknabbert. Erschwerend kommt im Laufe des Spieles noch ein Zeitlimit hinzu – und ein recht vertracktes Bonussystem. Bei jedem Level wird man sich deshalb um eine andere Taktik bemühen. Kommt man nicht weiter, sollte man den Spielstand abspeichern, sich eine längere Ruhepause gönnen und zu einem späteren Zeitpunkt restoren. Wer nicht die Gabe hat, in emsiger Gedankenarbeit unterschiedlich geformte Plättchen um eine von mehreren möglichen Achsen zu drehen, der wird trotz einfachster Maus-Bedienung bei diesem Geometrie-Leckerbissen nicht weit kommen. Zum Schluß noch ein weiterer Pluspunkt: Auf dem PC kann man die Soundeffekte abstellen. Durch wieviele Level man sich bei diesem Spiel tatsächlich arbeiten kann, haben wir noch nicht raus. Wir knabbern gerade mal wieder an unseren Dreiecken in sechs unterschiedlichen Farben mit Zeitlimit und ohne jeglichen Bonus. Was das Programm nach diesem 188. Level noch bietet, haben wir noch nicht in Erfahrung bringen können.

SWAP, Palace 1991, Genre: taktisches Denkspiel mit vielen symmetrischen Überlegungen, 512 KB RAM, CGA/EGA/VGA Maus, Distributor: United Software, erhältlich im Fachhandel, Preis ca.: 70 DM. ***H. Seitz***

„Komplizierte Funktionen einfach erklärt"

Der Elektronikkonzern CASIO, Hersteller des ersten Taschenrechners der Welt, hat jetzt in Zusammenarbeit mit dem Vogel Verlag ein CHIP INSIDE Heft publiziert, das am Beispiel der technisch-wissenschaftlichen Rechner von CASIO mathematische Probleme aufgreift und den Lösungsweg per Taschenrechner erklärt.
Ob komplexe Zahlen, Matrizen oder Integrale, für technisch-wissenschaftliche Taschenrechner ist heute fast jedes mathematische Problem lösbar.
Die Fülle von Funktionen kann – wenn man nicht über die nötigen Hintergrundinformationen verfügt – auch Verwirrung stiften.
Abhilfe schafft jetzt die Sonderausgabe CHIP INSIDE "Komplizierte Funktionen einfach erklärt". Anhand verschiedener Taschenrechner von CASIO, unter anderem auch mit Hilfe des Grafikrechners FS-7700G, der über insgesamt 315 technisch-wissenschaftliche Funktionen verfügt und außerdem durch "zoomen" die vergrößerte Darstellung der Graphiken ermöglicht, werden Schritt für Schritt und in leicht verständlicher Weise Lösungswege zu mathematischen Aufgaben erklärt. Effektive Nachhilfe im A-4 Format, so kann fehlendes Basiswissen ergänzt werden.
Das Sonderheft CHIP INSIDE ist zum Preis von DM 34,— (ab 10 Stück je DM 25,—) direkt über CASIO zu beziehen.

Für weitere Informationen wenden Sie sich bitte an:
Manfred Großert CASIO Pressestelle Kleine Bahnstraße 8 • 2000 Hamburg 54 • Telefon (040) 85 366 (0) – 128

hat keine Chance", sagt Vladi bestimmt. "Das Bauernhaus kann wiederaufgebaut werden." Im Pferdewagen geht's locker durch die 50 Zentimeter tiefe Furt nach Rügen.
100 Inselns hat Vladi im Angebot, die teuerste für 38 Millionen Mark. "Die billigste vor Kanadas Ostküste kommt nur 26000 Mark." Ob die Erben von Libitz, die über Nacht zu Millionären werden, mit einem kleineren Modell in der Ferne liebäugeln, will Vladi nicht verraten.

Die Insel Libitz im Kubitzer Bodden
"Bild Leipzig" berichtete am 7.7.92 über die einzige private Insel Deutschland: "2,3 Kilometer Naturufer mit idyllischen Buchten hat Libitz bei Rügen. ... Aus dem wogenden Uferschilf krächzen Kormorane, .. Naturschutz ist auf dem 41 – Hektar – Eiland oberstes Gebot. ..."
Aufgabe: Um wieviel Prozent wäre die Fläche von Libitz größer, wenn ihr Naturufer bei gleicher Länge ein Kreis wäre?
Dr. W. Träger, Döbeln

Komisches, Kniffliges und Knackiges

Der „Generationenvertrag" in der Krankenversicherung

Grafik: Globus

Die „Döbelner Allgemeine" berichtete am 24.9.92:

Auch in der Gesetzlichen Krankenversicherung gibt es einen „Generationenvertrag": Die jüngeren Mitglieder bezahlen höhere Beiträge, als sie an Leistungen wieder herausbekommen. Die Rentner hingegen brauchen umgekehrt altersbedingt höhere Versicherungsleistungen, zu deren Deckung ihre Beiträge nicht ausreichen. Die Jüngeren zahlen also für die Älteren.

Aufgabe: Mit möglichst kleinen natürlichen Zahlen ist das Verhältnis m:n der Zahl m der Rentner zur Zahl n der Berufstätigen für den Fall anzugeben, daß sich ihre Versicherungsleistungen und Beiträge gegenseitig kompensieren.

Dr. W. Träger, Döbeln

Die Zinsabschlagsteuer

Für jeden Bürger unseres Landes gilt ab 1.1.93:

1. Die 0,5 % Jahreszinsen für Guthaben auf Girokonten sind zinssteuerfrei.
2. Von den jährlichen Zinsen auf Sparguthaben ist ein Betrag von 6100 DM zinssteuerfrei. Überschreiten diese Jahreszinsen den genannten Freibetrag, so hat die Bank von der Differenz aus diesen Jahreszinsen und dem Freibetrag 30 % als Zinsabschlagsteuer abzuziehen und abzuführen.

Aufgabe: Ein Bürger B unseres Landes hat, abgesehen von einem Restbetrag auf seinem Girokonto, seine sämtlichen Ersparnisse mit dem Betrag G (Guthaben) zu Jahresbeginn bei seiner Sparkasse als Festgeld mit halbjähriger Kündigung zum Jahreszinssatz 7,75 % angelegt.

Geldanlage
Festgeld

	ab 3.000,- DM	10.000,- DM
ab 30 Tage	6,25 %	7,00 %
ab 60 Tage	6,50 %	7,25 %
ab 90 Tage	6,75 %	7,50 %
ab 180 Tage	7,00 %	7,75 %

1.) B hat am Jahresende keine Zinsabschlagsteuer zu entrichten. Wie hoch ist sein Festgeldguthaben G höchstens?

2.) Es gilt G = 300000 DM. Wieviel Prozent vom Festgeldguthaben G betragen die am Jahresende nach Abzug der Zinsabschlagsteuer dem B verbliebenen Restzinsen?

W. Träger, Döbeln

Neue Postleitzahlen kommen!

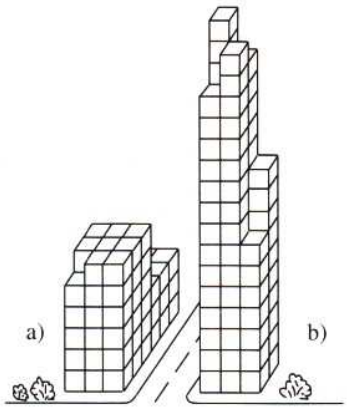
Ab 1.7.93 sollen neue Postleitzahlen das Zustellen von Briefen, Päckchen und Paketen der Post einfacher, schneller und billiger machen.

Die neuen Postleitzahlen

Die erste Ziffer der geplanten fünfstelligen Postleitzahlen gilt für diese Regionen:

Aufgabe: Peter färbte die Gebiete mit gleicher erster Ziffer der neuen Postleitzahlen so mit 3 Farben, daß zwei gleichfarbig gefärbte Gebiete nie einen gemeinsamen Randpunkt haben. Welche dieser Gebiete sind dann jeweils gleichfarbig gefärbt?

Dr. W. Träger, Döbeln



Zwei Architekten bewarben sich mit einem Entwurf für ein Bürohochhaus. In jedem würfelförmigen Block kann ein Büro eingerichtet werden. Den Auftrag erhielt der Architekt, der mehr Büros in seinem Hochhaus unterbringen konnte. Welcher war es?

Export und Bruttosozialprodukt

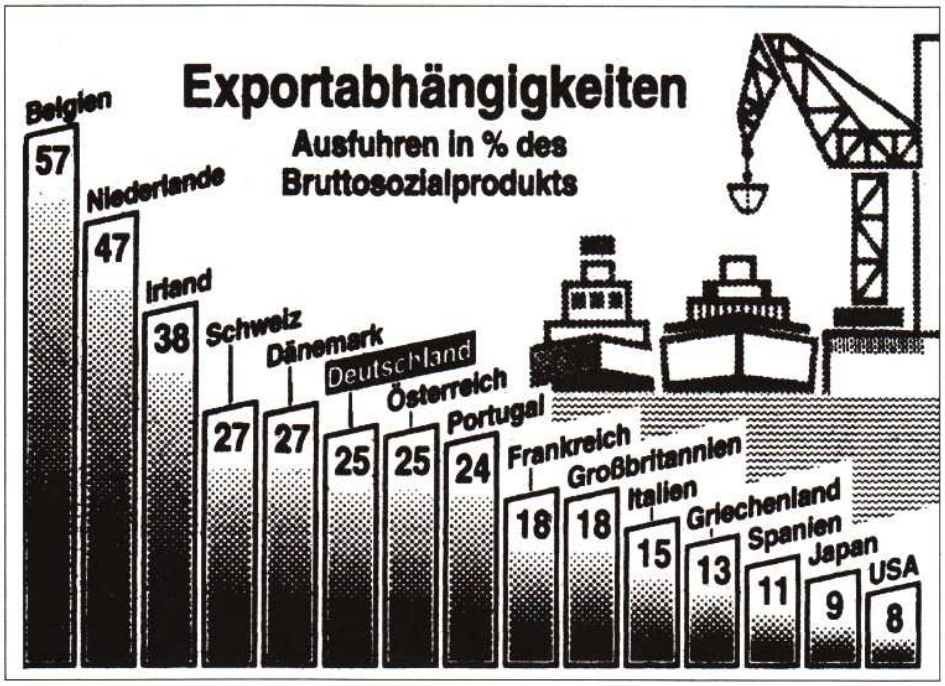
Die „Döbelner Allgemeine" veröffentlichte am 25.5.92 zu der abgebildeten Graphik den folgenden Text:

Kleine Industrienationen exportieren einen Großteil ihrer Produkte, weil der heimische Markt nur begrenzt aufnahmefähig ist.
So erwirtschaftete Belgien zum Beispiel 1991 mehr als die Hälfte seines Bruttosozialprodukts auf fremden Märkten. Zwar exportierte das Königreich nur Waren im Wert von 118 Milliarden Dollar, die USA kamen auf 422 Milliarden Dollar, aber die Ausfuhren pro Kopf lagen in Belgien bei 11 359 Dollar, in den Vereinigten Staaten hingegen bei 1677 Dollar.

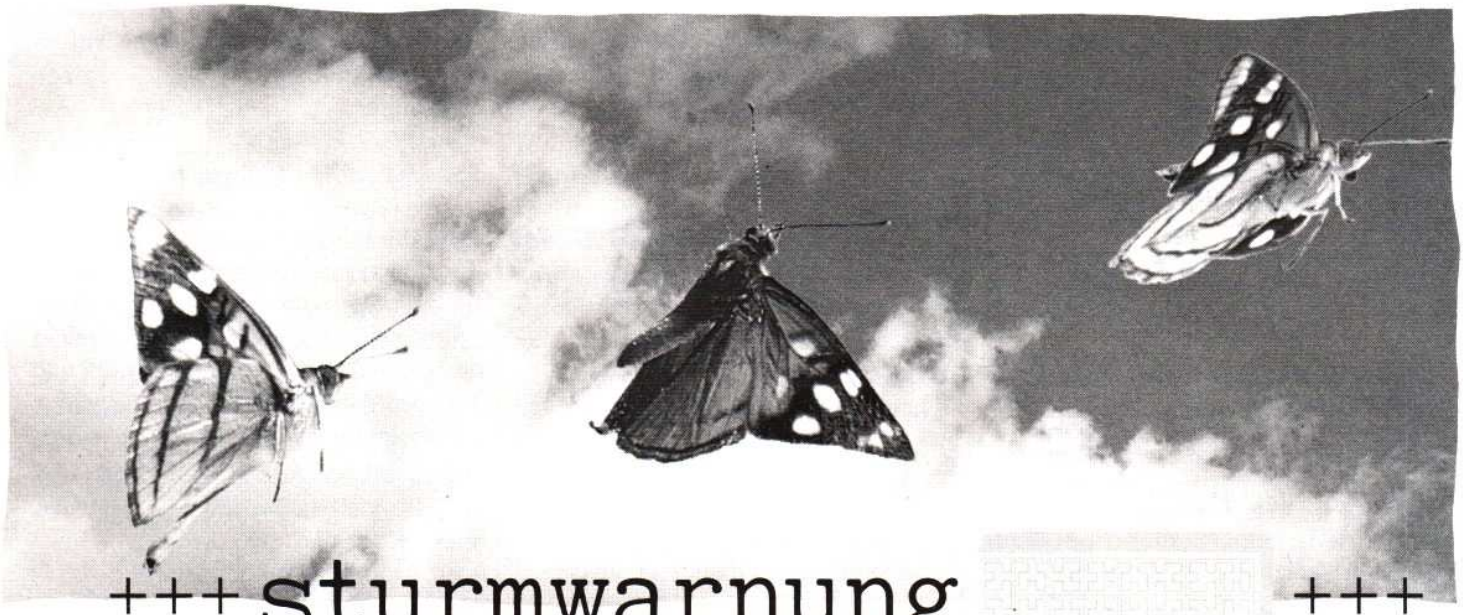
Aufgabe: Wieviel Dollar betrug im Jahr 1991 das erwirtschaftete Bruttosozialprodukt a) Belgiens und b) der USA pro Kopf der Bevölkerung?

Dr. W. Träger, Döbeln

Exporte für kleine Nationen am Wichtigsten



Quellen: IMF OFCD Stat. Bundesamt IW



Chaos weit und breit: eine neue Wissenschaft revolutioniert unser Weltbild. Was dabei ein Schmetterling auslösen kann, ist nicht die einzige Erkenntnis, die Sie überraschen wird. 532 Seiten. 68,– DM.

Klett-Cotta/
Springer-Verlag

alpha-Preisausschreiben 1

Ab jetzt findet Ihr in jedem alpha-Heft ein kleines Preisausschreiben.

Zu gewinnen gibt es diesmal zwei Taschenrechner von Texas Instruments.

Aufgabe:
Die Ziffern von 1 bis 9 sind so in die leeren Felder des Gitters unten einzutragen, daß gültige Gleichungen resultieren. Es gibt eine einzige Lösung.

	:		=		–	1
*	■	–	■	:	■	*
	+		=		*	$\sqrt{9}$
=	■	=	■	=	■	=
	+		=		+	9
+	■	–	■	:	■	:
1	*	9	=	$\sqrt{9}$	*	3

Die Aufgabe wurde erdacht von Dr. Stefan Bondeli, Zürich.

Bitte schickt mir (Erhard Friedrich Verlag, Postfach 10 01 50, 3016 Seelze 6, Redaktion alpha, Herrn J. Ricke) Eure Lösung bis zum 15. März zu. Unter den richtigen Einsendungen werden die Taschenrechner verlost.

Die Bekanntgabe der Gewinner und der richtigen Lösung erfolgt im nächsten alpha-Heft.

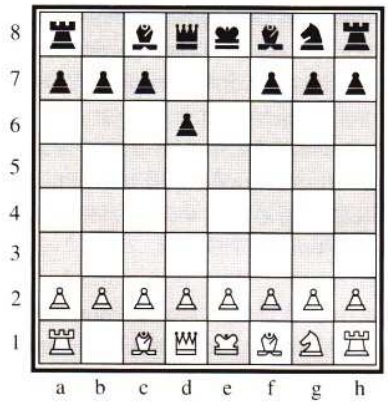
Was geschah auf dem Schachbrett?

Die Zahl der für das Schachspiel in Betracht kommenden Eröffnungen ist recht groß. So sind theoretisch nach dem 1. weißen Zug 20 verschiedenartige Eröffnungen möglich, und zwar 16, in denen ein Bauer gezogen hat und 4 mit einem Springerzug. Die entsprechenden Züge kann Schwarz ebenso ausführen, so daß sich nach dem 1. schwarzen Zug schon $20 \cdot 20 = 400$ verschiedene Möglichkeiten für die erreichte Stellung ergeben könnten.

Bereits die Berechnung der Stellungsmöglichkeiten nach dem 2. Zug von Weiß und Schwarz wird kompliziert, deshalb muß an dieser Stelle darauf verzichtet werden. Nach dem 2. Zug von Weiß sind 5.362 und nach dem 2. Zug von Schwarz 72.084 Stellungen möglich. Ziehen Weiß und Schwarz zum 3. Mal, so würde man ca. 9.000.000 mögliche verschiedene Stellungen finden.

Zur Freude der Schachspieler sind jedoch nur ein winziger Bruchteil der theoretisch in Betracht kommenden Partieöffnungen wirklich spielbar.

In Anlehnung an diese Betrachtung folgt eine Aufgabe, die verdeutlicht, welche kuriosen Positionen ebenfalls Bestandteil solcher Berechnungen sind.



Das abgebildete Diagramm ist aus der Partieanfangsstellung nach dem 4. Zug von Weiß und Schwarz entstanden. Welche Zugfolge führte zur Diagrammstellung?
PS: Versucht mal selbst, solche Aufgaben auszuknobeln!
H. Rüdiger

Sprachecke

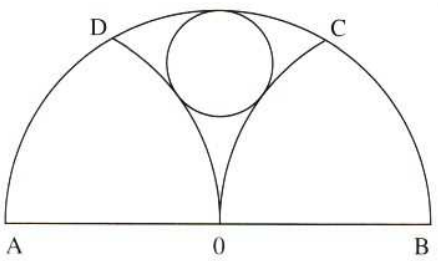
But: égalisation!
Vous devez replacer les signes manquants (+, –, · ou :) dans ces égalites mathématiques.

1. 16 13 16 6 = 99
2. 6 15 7 13 = 84
3. 17 1 14 3 = 58
4. 3 18 3 14 = 11
5. 5 4 14 16 = 45

(Logigram, France)

Найдите таки два числа что при умножении первого на 2 получится квадрат второго а при умножении первого на 3 – куб второго

Find the Radius
The drawing shows a semicircle with centre O, and segment AB = 2R as diameter. Using points A and B as centres, we draw arcs OC and OD with radius AO = OB = R. We then draw a circle that is tangent to the semicircle and to each of the two arcs.



Question: Find the radius r of the small circle.
Hint: Use the theorem: A straight line that connects the centres of two tangent circles passes through the point of tangency.

Erhard
Friedrich
Verlag
Velber

Pädagogische Zeitschriften in Zusammenarbeit mit Klett

Themenübersicht
Januar/ Februar 1993

PRAXIS DEUTSCH
Briefe (Januar)

DER DEUTSCHUNTERRICHT
Zeitgenössische Autorinnen (Februar)

DER FREMDSPRACHLICHE UNTERRICHT/ ENGLISCH
New Horizons (Januar)

DER FREMDSPRACHLICHE UNTERRICHT/FRANZÖSISCH
Bilingualer Unterricht (Februar)

DER ALTSPRACHLICHE UNTERRICHT
Ficta - Facta - Monumenta (Januar)

DIE GRUNDSCHULZEITSCHRIFT
Schreibkonferenzen II (Januar)
Geometrie (Februar)

KUNST+UNTERRICHT
Wasser (Januar)

MUSIK UND UNTERRICHT
Wirkungen von Musik (Januar)

SPORTPÄDAGOGIK
Kraft (Januar)

ZUSAMMEN
Angst (Februar)

GESCHICHTE LERNEN
Imperialismus (Januar)

GEOGRAPHIE HEUTE
Welt-Ende oder Wende (Januar)

ARBEITEN+LERNEN/WIRTSCHAFT
Arbeitsmarkt (Februar)

Bestellkarten finden Sie auf dem Beihefter.

Alphons logische Abenteuer

„Du hast wohl wieder ein aus der Antike stammendes Problem gefunden?", fragte Alphons Berti, als dieser in das Zimmer kam. „Wie bist du darauf gekommen?", wundert sich Berti. „Weil du nicht wie sonst um diese Zeit deine Schultasche bei dir hast", antwortete Alphons. „Stimmt. Da wir aber heute nicht viel Hausaufgaben haben, las ich in dem alten Buch und fand etwas, das ich für dich abgeschrieben habe." Bei diesen Worten zog Berti ein Stück Papier aus einer Jackentasche, entfaltete es und las vor:

„Ein Wanderer kam an eine Kreuzung. An jedem der beiden weiterführenden Wege saß ein Mann. Der Wanderer wußte, daß beide den richtigen Weg zur Stadt, in die er wollte, kannten, der eine aber immer lügt, der andere dagegen nur die Wahrheit spricht. Wer der eine und wer der andere ist, das wußte er nicht. Dem Wanderer war aber bekannt, daß er genau eine Frage an nur einen Mann stellen darf, um den richtigen Weg zu erfahren."

Berti schaute auf Alphons: „Nun, kommst du darauf, welche Frage der Wanderer zu stellen hat, falls es überhaupt eine solche Frage gibt?" So auf die Schnelle wußte er auch nicht, wie die Frage lauten könnte. Nach einigen Grübeleien einigten sie sich zum Zwecke abkürzender Redeweise darauf, einen Weg mit „α", den an diesem Weg sitzenden Mann mit „a" und demgemäß den anderen Weg mit „β" und den an ihm sitzenden Mann mit „b" zu bezeichnen. Spricht a bzw. b wahr, soll das durch „a_w" bzw. „b_w" angezeigt werden, entsprechend mit „a_l" bzw. „b_l", daß a bzw. b lügt. Nun ging es hin und her mit „a" und „α", „a_l" und „β" und anderen Kombinationen, eine Lösung ergab sich daraus aber nicht. Alphons riß die Geduld, er holte sein Logikbuch heraus und schlug nach, ob sich darin etwas zum Thema fände. Er hatte Glück, die Aufgabe war angegeben, zusammen mit einer Lösung und einer Erklärung zur Lösung.

Eine Aussage ist wahr nur dann, wenn das, was sie behauptet, auch so ist, wie sie behauptet; anderenfalls ist sie falsch. Legt man der Lösung diese Wahrheitsdefinition zugrunde, wird erstens der Wahr-Sprecher von einer wahren Aussage sagen, sie ist wahr, der Lügner aber, sie ist falsch. Von einer falschen Aussage wird ersterer sagen, daß sie falsch ist, letzterer aber, sie ist wahr, vorausgesetzt, sie wissen beide, daß die Aussage wahr bzw. falsch ist. Fragt man zweitens denWahr-Sprecher, ob der andere die Wahrheit sagt, wird er das verneinen. Fragt man den Lügner, ob der andere die Wahrheit sagt, wird er das auch verneinen. Fragt man aber, ob der jeweils andere lügt, werden beide das bejahen. Die ebenfalls als erfüllt anzunehmende Voraussetzung ist hier, daß beide voneinander um ihr Verhältnis zur Wahrheit wissen.

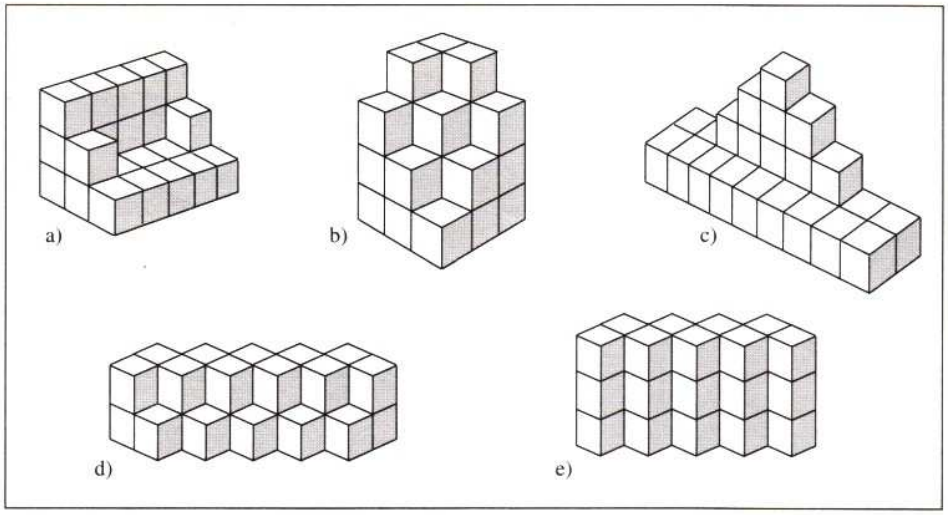
Beide Eigenschaften der Sprecher kann man zur Lösung des Problems nutzen. Die Frage ob z. B. a der richtige Weg ist, wird der Wahr-Sprecher bejahen, der Falsch-Sprecher verneinen, wenn a der richtige Weg ist. Dieser Ansatz berücksichtigt nur die erste Eigenschaft der Sprecher. Die zweite wird einbezogen, wenn unterstellt wird, der eine hat sie als Antwort gegeben, nun soll der andere sagen, ob sie wahr ist. Ist sie wahr, wird diese Frage, gleich an welchen Sprecher gerichtet, verneint; ist sie aber falsch, wird diese Frage, gleich an welchen Sprecher gerichtet, bejaht.

Eine Frage, die das leistete, ist: Wird der der andere sagen, dein Weg ist der richtige?

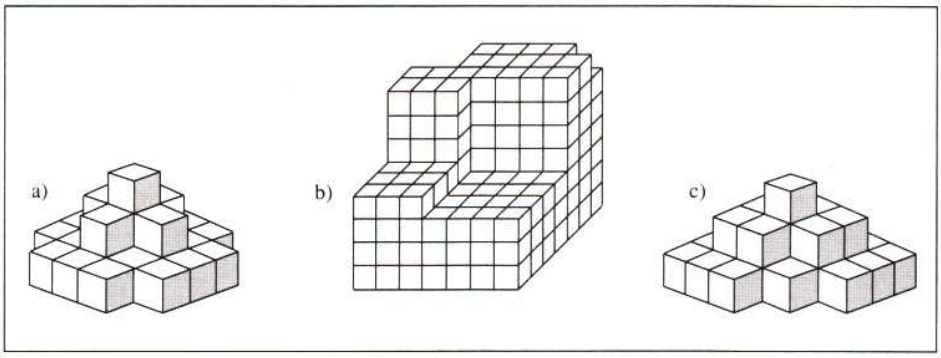
"Nehmen wir also an", sagte Alphons,"a wird diese Frage gestellt und a sagt: nein. Ist a der Wahr-Sprecher, lügt b, was a weiß, b kann nur sagen, daß α nicht der richtige Weg ist, wenn er der richtige Weg ist. Ist aber b der Lügner, so verneint er, was a sagt. a wird sagen, daß α der richtige Weg ist, da nur dann b mit "nein" antworten kann. Hätte a mit "ja" geantwortet, weißt du nun, wie du sie zu verstehen hast."

Prof. Dr. L. Kreiser

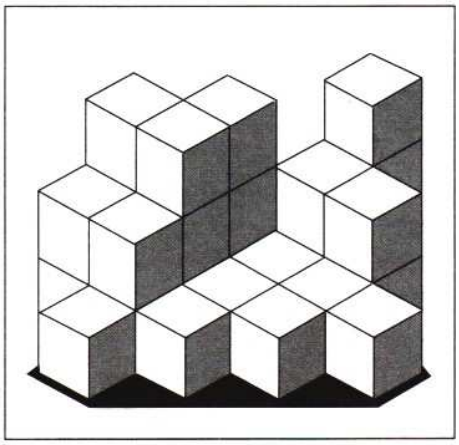
Würfelstapelei



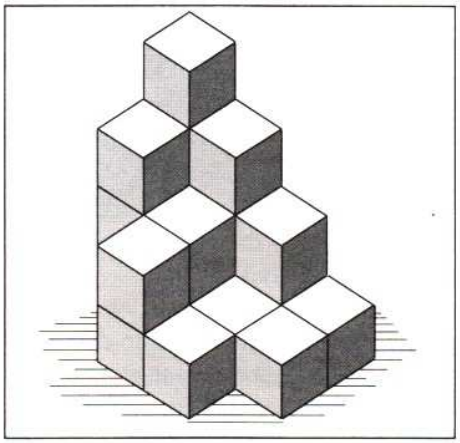
1. Lars behauptet, mit seinen 27 Holzwürfeln aus der Spielzeugkiste seines kleinen Bruders alle fünf Figuren bauen zu können, Vera widerspricht.



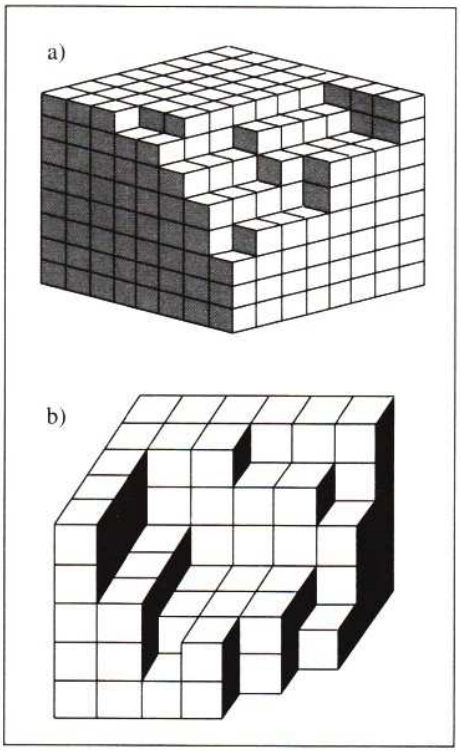
2. Aus wieviel Würfeln bestehen diese Bauwerke mindestens, wie viele sind es höchstens?



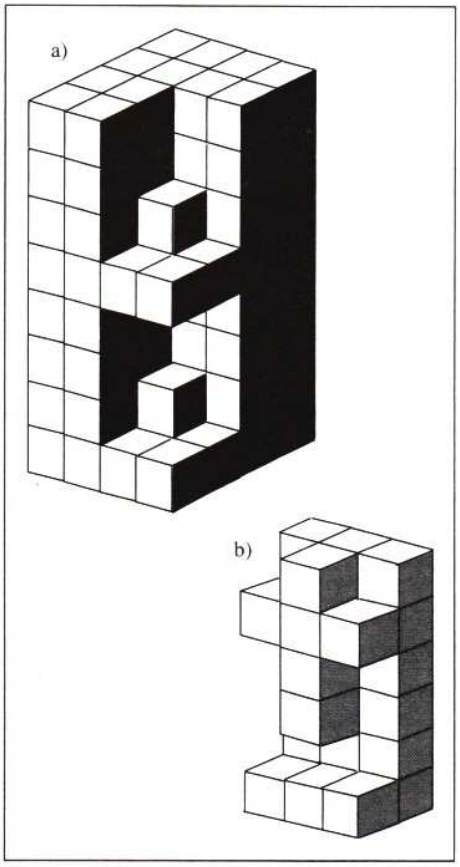
3. Aus 27 Einheiten (0 Würfeln) soll ein modernes Wohn- und Bürogebäude gebaut werden. in wie viele Einheiten kann man keine Fenster (auch keine Dachfenster) einbauen?



4. Wie viele Bauklötze braucht die kleine Angela für diesen Turm?



5. Von einem Stapel aus 512 (b: 150) Bierkästen wurden schon einige weggefahren. Wie viele?



6. Moderne Kunst. Wie viele Würfel hat der Künstler aus der Vorderseite des Steinquaders schon herausgemeißelt?

Heinz Siegler

Die Gewinner im alpha-Wettbewerb 1991/92

Allen Gewinnern herzlichen Glückwunsch.
Die Preise werden in den den nächsten Tagen zugeschickt.

• Ein Vegas Computer CE 0808 mit 20 MB Festplatte, Tastatur und Bildschirm. Hantarex Deutschland Vertriebsges. mbH., W-5230 Altenkirchen:
Angela Wiesjahn, 0-2151 Holzendorf

• Vier Software-Programme des CoMet Verlages für Unterrichtssoftware, 4100 Duisburg: Cabri Geométre, Derive 2.0. Treffer!, Graphix. Erforderliche Hardware: jeweils PC mit MS-DOS ab unterschiedlichen Versionen 2,11; 3,2; 3,3; 512 bzw. 648 KB Hauptspeicher und Graphikkarte (Hercules, CGA, EGA, VGA):
Stefan Hermann, 0-9201 Wegefarth
Bodo Schmidt, 0-4800 Naumburg
Christine Mühle, 0-7031 Leipzig
Stefan Eisenblätter, 0-7270 Delitzsch

• Ein Graphik-Rechner FX-7700 G von Casio Computer Co. GmbH, 2000 Hamburg:
Martin Friederichs , 0-1402 Bergfelde

• Zehn Electronic-Rechner unterschiedlicher Ausstattung von Texas Instruments Deutschland GmbH, 8050 Freising:
Claudia Schreiber, 0-7030 Leipzig
Manuela Foth, 0-2150 Strasburg
Lionel Winkelmann, W-4044 Kaarst-Büttgen
Anne-Katrin Walter, 0-2000 Neubrandenburg
Jens Grundmann, W-5820 Gevelsberg
Andrea Englisch, 0-7030 Leipzig
Verena Höcherl, W-8900 Augsburg
Silvio Baier, 0-8019 Dresden
Andrea Striegnitz, 0-7281 Laußig
Holger Kunze, W-8520 Erlangen

• Fünfzehn Spiele unterschiedlicher Ausstattung vom Otto Maier Verlag Ravensburg AG, 7980 Ravensburg:
Mathe AG R8 z. H. Hr. Jessen, Realschule Amrum, W-2278 Süddorf
Stefan Kaundinya, W-2100 Hamburg 90
Ulrike Müller, 0-9291 Fischheim
Andrea Beil, 0-7543 Lübbenau
Bettina Recknagel, 0-6219 Bad Salzungen
Maik Fellmann, 0-8060 Dresden
Robert Ullmann, 0-1261 Reichenberg
André Hengst, 0-9003 Chemnitz
Stefan Graf , W-8880 DLG-Steinheim
Susanne Dräbenstedt, 0-4351 Aderstedt
Kay Pfennighaus, 0-2000 Neubrandenburg
Andrea Weigl, 0-6218 Bad Salzungen
Ivonne Lüker, 0-2041 Grischow
Eva Maria Gutschera, W-7052 Schwaikheim
Christian Beuter, W-6760 Rockenhausen

• Zehnmal die Bände I-III „Internationale Mathematik-Olympiade" für die Oberstufe vom Manz Verlag, 8000 München:
Roland Voigt, 0-7202 Böhlen
Birgit Elßner, 0-1298 Werneuchen
Thomas Hübner, 0-5603 Dingelstädt
Johann Wasmaier, W-8261 Marktl/Inn
Welina D. Kolewa, Bul 6009 Stara Zagora
Manuela Schlamm, 0-2021 Burow
Bruno Korn, W-8051 Nandlstädt
Wolfgang Barthel, 0-4070 Halle
Horst Rex, 0-4851 Wählitz
Katja Schimkus, 0-4700 Sangerhausen

• Fünf Electronic Translators mit Währungsrechner und sechs Weltsprachen im Griff von Conrad Electronic, 8452 Hirschau:
Sigrun Deweß, 0-7065 Leipzig
B. Bremer, 0-4044 Kaarst 2
Diemo Klingenberg, 0-2091 Hammelspring
Katharina Meyer, W-2082 Moorrege
Martin Michalk, 0-5085 Erfurt

• Zwei Bände Schülerduden, Mathematik I und II vom Bibliographischen Institut & Fa. Brockhaus AG, 6800 Mannheim:
Matthias Bergholz, 0-7500 Cottbus

• Ein Schülerduden „Die Informatik". Bibliographisches Institut & Fa. Brockhaus AG, 6800 Mannheim:
Nico Rumpler, 0-5400 Sondershausen

• Jeweils fünf Arbeitshefte und Lösungsbände der „Aufgabensammlung für mathematisch interessierte Schüler": 5.-7. Jahrgangsstufe, 8.-10. Jahrgangsstufe und 11.-13. Jahrgangsstufe. Manz Verlag, 8000 München:
5.-7.
Anja Gürtner, 0-7031 Leipzig
Susann Fellenberg, 0-7290 Torgau
Ina Heyer, 0-9021 Chemnitz
Daniel Armbruster, W-7590 Achern
Madlen Piper, 0-2051 Dahmen

8.-10
Matthias Räncker, 0-8020 Dresden
Thomas Feldmann, 0-2031 Trantow
Lydia Franck, 0-1597 Potsdam
Lars-Peter Müller, 0-7022 Leipzig
Tomi Fröhlich, 0-1273 Petershagen

11.-13.
A. Jacob, 0-1910 Kyritz
Thomas Nopp, 0-1200 Frankfurt/Oder
Peter Hörnich, 0-1330 Schwedt
Sven Aßmus, 0-1034 Berlin
Rolf Kamieth, 0-7022 Leipzig

• Fünfzehn Bücher unterschiedlicher Ausstattung vom Otto Maier Verlag Ravensburg AG, 7980 Ravensburg:
Felizitas Novotny, W-8540 Schwabach
Michael Oster, 0-6092 Wernshausen
Jörg Schüßler, W-6320 Alsfeld
Rebecca Schilbach, 0-6220 Vacha
Stephanie Rätzke, 0-3231 Kl.-Oschersleben
Stephan Nopp, 0-1200 Frankfurt/Oder
Sarah Bardy, W-5902 Netphen 2
Berit Gschwender, 0-2001 Brohm
Jens Gärtner, 0-5210 Arnstadt
Carsten Klotz, 0-4271 Quenstedt
Norbert Schröder, 0-1280 Bernau
Andreas Willnow, 0-7142 Lindenthal
Gudrun Thäter, W-4790 Paderborn
Carsten Lehmann, W-8000 München

An dieser Stelle möchten wir den Sponsoren herzlich für die zahlreichen Preise danken.

Red.

alpha-Wettbewerb 1991/92
Abzeichen in Gold

Für 3-jährige Teilnahme

Alexander Albrecht	Berlin
Heike Aßmus	Berlin
Marcus Axthlem	Erfurt
Linda Baier	Dresden
Wolfgang Barthel	Halle
Andrea Beil	Lübbenau
Markus Bloß	Görlitz
Mike Brodhagen	Ueckermünde
Sigrun Deweß	Leipzig
Kerstin Dittrich	Werneuchen
Andrea Englisch	Leipzig
Lydia Franck	Potsdam
Robert Friederichs	Bergfelde
Thomas Gaube	Jüterbog
Franka Graetsch	Nimritz
Jens Groschke	Cottbus
Anett Gschwender	Brohm
Marco Güldner	Potsdam
Daniel Häfner	Fambach
Andre Hengst	Chemnitz
Ulrich Hertel	Chemnitz
Diana Hörnicke	Werneuchen
Rico Jänicke	Prenzlau
Andrea Josiger	Chemnitz
Christiane Karsch	Stadt Wehlen
Regine Kerber	Saal
Ulrike Kittner	Schmalkalden
Doreen Köhler	Cottbus
Marco Krause	Hohen-Demzin
Michael Krüger	Jena
Kerstin Liebschner	Chemnitz
Johannes Martin	Hermsdorf
Stephanie Möder	Schmalkalden
Thomas Müller	Klaffenbach
Anita Otto	Bismark
Christine Poerschke	Dömitz
Stephanie Rätzke	Kl. Oschersleben
Gaby Rothe	Eggesin
Marika Schartow	Anklam
Philipp Schleinitz	Lommatzsch
Christian Schuster	Grünhain
Ines Spenke	Berlin
Antje Wagner	Stöckey
Nicole Wagner	Werneuchen
Kathrin Wenzel	Hoyerswerda
Anke Wolf	Mittweida
Anke Wolfert	Söllichau

Für 4-jährige Teilnahme

Kerstin Amthor	Meiningen
Sarah Bardy	Netphen
Katharina Bräutigam	Görlitz
Christiane Dammann	Freital
Stefanie Danz	Schweina
Kristian Debrabant	Eisleben
Susann Fellenberg	Torgau
Carsten Ficker	Leubetha
Anja Friederichs	Bergfelde
Martin Friederichs	Bergfelde
Matthias Hamm	Suhl
Ina Hänsgen	Glashütte
Bert Häßler	Dresden
Peter Heinke	Karlsburg
Erik Herrmann	Rothemühl
Stefan Herrmann	Wegefarth
Michael Hinz	Arnstadt
Christiane Hirndorf	Erfurt
Florian Hoffmann	Zerbst
Andreas Jacob	Kyritz
Christina Jurke	Cottbus
Christin Kacan	Dahmen
Birgit Kenner	Blumenhagen
Diemo Klingenberg	Hammelspring
Karen Köhler	Chemnitz
Martin Kragl	Erfurt
Holger Kunze	Erlangen
Yvonne Langer	Eisenach
Christian Loos	Geschwenda
Thomas Mann	Bautzen
Christian Martin	Unterpörlitz
Lars-Peter Müller	Leipzig
Astrid Neidhardt	Brotterode
Thomas Rathmann	Meura
Ulrike Richter	Piesteritz-Wittenbg.
Christina Rübsam	Vacha
Christine Sänger	Greifswald
Christiane Schmack	Dresden
Anja Schmidt	Oschatz
Bodo Schmidt	Naumburg
Silva Schröder	Wolgast
Marika Schubert	Calau
Andreas Schütze	Beelitz
Enrico Stoll	Herzberg
Antje Vogt	Worbis

Für 5-jährige Teilnahme

Karsten Andrae	Suhl
Ariane Bähr	Halle-Neustadt
Michael Beier	Görlitz
Antje Braun	Torgau
Dietrich Clauß	Possendorf
Christiane Czech	Magdeburg
Susanne Dräbenstedt	Aderstedt
Andreas Glaser	Großdeuben
Jörg Häfner	Fambach
Franziska Hambsch	Zerbst
Falk Hänel	Freiberg
Kersten Harborth	Sondershausen
Michael Karsch	Stadt Wehlen
Jan Kasper	Herzberg
Cornelia Kitte	Weißwasser
Jana Krauß	Bautzen
Ursula Lenk	Essen 11
Kathleen Leuenberg	Iden
Hartmut Melzig	Greifswald
Boris Messerschmidt	Berlin
Thomas Morchel	Finsterwalde
Christiane Mühle	Leipzig
Frank Müller	Berlin
Heike Müller	Gutow
Ulrike Müller	Fischheim
Anja Nehrig	Vacha
Frank Neumann	Bad Salzungen
Thomas Nopp	Frankfurt/Oder
Kathrin Ola	Harzgerode
Sven Peyer	Weimar
Isabella Reiß	Langewiesen
Andreas Richter	Naundorf
Torsten Schmack	Dresden
Juliane Scholz	Völklingen
Ralf Schubert	Vacha
Bernd Schwarzer	Guben
Anja Sippel	Erfurt
Andreas Stolle	Wittenberg
Sebastian Vogt	Ilmenau
Roland Voigt	Böhlen
Mario Wagner	Aschersleben
Andrea Weigl	Bad Salzungen
Pia Weißenberg	Zschortau
Andreas Willnow	Lindenthal

Für 6-jährige Teilnahme

Andreas Beleites	Bleicherode
Antje Berndt	Chemnitz
Heike Bernsee	Sallgast
Dirk Borsch	Erfurt
Antje Brämer	Rathenow
Sandra Engelke	Magdeburg
Ronny Ficker	Leubetha
Lars Freitag	Schwarzheide 1
Jens Gärtner	Leipzig
Swen Geißler	Lomnitz
Michael Gronau	Greifswald
Lars Hartmann	Klein-Quenstedt
Matthias Hirschfeld	Eilenburg
Lutz Kratzsch	Sömmerda
Matthias Loesdau	Landshut
Ulrich Müller	Fischheim
Ingolf Näther	Wilschdorf
Silke Rudolph	Großröhrsdorf
Marko Saft	Sondershausen
Jörg Schreiber	Leipzig
Daniel Wolf	Mittweida

Für 7-jährige Teilnahme

Alexander Blacha	Niederorschel
Sebastian Clauß	Possendorf
Birgit Elßner	Werneuchen
Andre Gärtner	Leipzig
Anja Goldschmidt	Halle
Andreas Hamm	Suhl
Willi Jacobs	Saurasen
Thomas Lotze	Suhl
Peggy Marx	Clausthal-Zellerfeld
Beate Pohler	Brand-Erbisdorf
Torsten Schreiber	Leipzig
Norbert Schröder	Bernau
Mirko Stolle	Wittenberg
Jan Strischek	Berlin
Jana Strischek	Berlin
Lothar Tischer	Kamenz
Silvia Wachholz	Görlitz
Angela Wiesjahn	Holzendorf

Für 8-jährige Teilnahme

Sylke Ahrend	Rakow
Käthe Bäckmann	Chemnitz
Cornelia Bär	Greifendorf
Alois Belter	Hagenow
Edith Bombach	Dresden
Maik Denner	Empfertshausen
Rigo Hinkelmann	Neuenbeuthen
Torsten Kaiser	Oranienbaum
Mario Menger	Lauterbach
Astrid Mirle	Kleindehsa
Matthias Müller	Klaffenbach
Ronald Peters	Wismar
Martin Schreiter	Leinefelde
Christian Tiedt	Leipzig
Ulrich Voigt	Böhlen
Andreas Winter	Leinefelde

Für 9-jährige Teilnahme

Stefan Erb	Schwallungen
Rene Franke	Gersdorf
Thomas Freier	Creuzburg
Göran Glockmann	Jena
Elke Heidemann	Halberstadt
Peter Hörnich	Schwedt
Felix Kraenz	Picher
Kay Pfennighaus	Neubrandenburg
Thomas Prüver	Bad Freienwalde
Horst Rex	Wählitz
Kerstin Schuster	Taubenheim
Sven Völker	Bad Salzungen

Für 10-jährige Teilnahme

Detlef Bartmuß	Burow
Hardy Dömpke	Löderburg
Claudia Heret	Zwickau
Beate Schreiber	Elsterwerda
Markus Spindler	Sangerhausen
Andrea Thiele	Rackwitz
Andreas Vogt	Worbis
Norbert Wölfel	Limbach-Oberfrohna

Für 11-jährige Teilnahme

Sven Aßmus	Berlin
Bertram Bracher	Schwarzheide
Steffen Eisenblätter	Delitzsch
Eva Faßmann	Dessau
Andre Kratzert	Dürröhrsdorf
Reiner Möwald	Sömmerda
Christian Pigorsch	Eisleben
Angela Schmidt	Bürgel
Stefan Warnest	Neuruppin

Für 12-jährige Teilnahme

Frauke Apel	Berlin
Birgit Bremer	Kaarst 2
Jens Haufe	Dresden
Petra Heiliger	Leuna
Dirk Jahn	Rostock
Karsten Kattner	Pasewalk
Alice Kraneis	Bernburg
Frank Müller	Klaffenbach
Hanka Pruditsch	Geithain
Ulrike Rößner	Erfurt
Sven Rudolph	Großröhrsdorf

Für 13-jährige Teilnahme

Henrik Hodam	
Achim Kröber	Schönbach
Annegret Schädlich	Auerbach
Steffen Scheithauer	Parey
Hellmut Schenk	Pirna
Matthias Tittel	Berlin
Bert Winkler	Wilkau-Haßlau
Ulf Winkler	Frankenberg

Für 14-jährige Teilnahme

Ralf Heidenreich	Sömmerda
Andreas Israel	Chemnitz
Ronald Kaiser	Eisenach
Carsten Leibnitz	Hohenstein-Ernstthal
Uwe Martin	Crossen
Bert Minske	Berlin
Heike Morgner	Falkenstein
Carsten Schreiber	Dresden
Helmut Schreiber	Dresden
Ingolf Thurm	Dresden
Katja Uhlemann	Prausitz
Delia Wolfert	Leipzig

Für 15-jährige Teilnahme

Jens Grundmann	Gevelsberg
Irene Michallik	Waren
Kerstin Müller	Dresden
Erika Schreiber	Zella-Mehlis
Erhard Zilinske	Stralsund

Für 16-jährige Teilnahme

Hartmus Boettcher	Weimar
Karl-Heinz Gora	Lohsa
Uwe Schütze	Camin

Für 17-jährige Teilnahme

Torsten Eidner	Jena
Volker Gorgy	Erfurt
Manfred Hille	Riesa 4
Dr. Karsten Milek	Hohen Neuendorf
Matthias Schreiber	Elsterwerda
Susanne Schreiber	Elsterwerda
Gudrun Thäter	Paderborn
Tilman Völzke	Böhlen

Für 18-jährige Teilnahme

Hans Creutzburg	Thal
Rüdiger Düsing	Osterburg
Horst Fliegner	Jarmen
Harry Höfer	Dorndorf
Karl-Heinz Jünger	Dresden
Uwe Maaz	Konstanz
Jens Pönisch	Chemnitz
Rene Schüpppel	Hoyerswerda
Heidrun Tiedt	Teterow
Claudia Trochold	Reichenbach
Guntram Türke	Auerbach
Eva-Maria Wabbel	Wolfen
Jörn Wittig	Dresden

Für 19-jährige Teilnahme

Ina Büttner	Berlin
Uwe Ebert	Dippoldiswalde
Rolf Kamieth	Leipzig
Siegrid Kretschmann	Schlagsdorf
Udo Kretzschmann	Markneukirchen
Matthias Weser	Großenhain

Für 20-jährige Teilnahme

Eberhard Georgy	Erfurt
Lothar Gruber	Wien
Andreas Gude	Berlin

Für 21-jährige Teilnahme

Hans-Dietrich Schwabe	Sondershausen
Gerald Werner	Meiningen

Für 22-jährige Teilnahme

Dr. Frank Aßmus	Oranienburg

Für 24-jährige Teilnahme

Dr. Guido Blosfeld	Halle

Beteiligung im Team am Wettbewerb 1991/92

Albert-Schweitzer-Schule	Alsfeld
Sekundarschule	Bismark
Mathe-AG Realschule	Blumenhagen
Mathe-AG Burghardt-Gymnasium	Buchen
Obere Luisenschule	Chemnitz
Reichenhainer Schule	Chemnitz
Realschule	Dassow
St.-Bonaventura-Gymnasium	Dillingen
Grundschule Mitte	Eberswalde-Finow
Station alpha	Fürstenwalde
Helene-Lange-Gymnasium	Fürth
Matheclub Sekundarschule	Iden
Realschule	Ivenack
Landrat-Lucas-Schule	Leverkusen
Grundschule	Lommatzsch
Sekundarschule	Mieste
alpha-club Gymnasium	Nienburg
Staatliches Gymnasium	Oberdorla
Alfred-Wirth-Schule	Osternienburg
Gymnasium	Rackwitz
Realschule	Schorssow
mit Grundschulteil	
Staatliches Gymnasium	Schwallungen
Staatl. Regelschule „Glückauf"	Sonderhausen-Stockhausen
Hansa-Gymnasium	Stralsund
Freizeitzentrum	Strausberg
Realschule Amrum	Süddorf
Staatliches Gymnasium	Vacha
Städtisches Gymnasium Dülken	Viersen
Wilhelm-Erb-Gymnasium	Winnweiler
Heinrich-Heine-Schule	Wörmlitz
Sekundarschule	Wulfen
Grundschule	Wust
Real- und Grundschule	Züssow

Alphawettbewerb 1/93

5/1
Nicole, Anja und Jens wiegen sich. Nicole und Anja wiegen zusammen 55 kg. Nicole und Jens wiegen zusammen 80,5 kg. Alle drei wiegen zusammen 112,5 kg. Jens ist doppelt so alt wie Anja, zusammen sind beide 30 Jahre alt. Anja ist drei Jahre älter als Nicole. Wieviel Kilogramm wiegt jeder dieser drei Freunde? Wie alt ist jeder von ihnen?

Mandy Körner, Nünchritz

5/2
Anja, Robert, Heike und Andrea betreuen jeder eine ältere Frau, deren Familienname Meier, Braun, Baumann bzw. Kreher lautet. Wir wissen folgendes:

a) Anja hilft weder Frau Meier noch Frau Braun.
b) Robert hilft Frau Baumann.
c) Heike hilft nicht Frau Kreher.
d) Andrea betreut Frau Braun.

Welche älteren Frauen werden von welchem Kind betreut?

S. Parton, Chemnitz

5/3
Zeichne ein Quadrat ABCD; konstruiere nun nur mit Hilfe von Lineal und Zeichendreieck ein Quadrat EFGH, dessen Flächeninhalt doppelt so groß ist wie der des Quadrates ABCD.

OStR Theodor Scholl, Berlin

5/4
Bei einem 100-m-Lauf kamen die sieben gestarteten Läufer wie folgt im Ziel an:

(1) Bernd direkt vor Joachim, aber unmittelbar hinter Roger.
(2) Dieter direkt hinter Jürgen.
(3) Herrmann erzielte den mittleren der sieben Plätze.

Von diesen Läufern ist ferner folgendes bekannt:

(4) Bernd und Dieter kommen aus Greifswald.
(5) Den zweiten Platz schaffte ein Rostocker.
(6) Uwe hat blonde Haare.

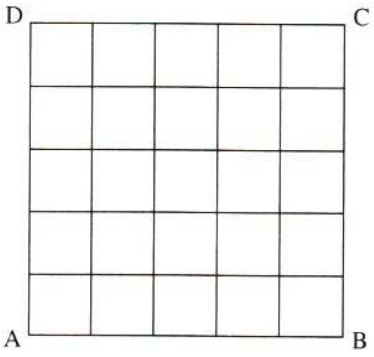
Welche Plätze erreichten die sieben Läufer?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

5/5
Würfelt man mit drei Spielwürfeln und legt man sie nebeneinander, so können die Würfelaugen als dreistellige natürliche Zahl aufgefaßt werden. Wieviel solcher Zahlen gibt es, wenn die Summe der Augenzahlen der drei Würfel zehn betragen soll? Schreibe alle Zahlen auf! Ordne Sie!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

5/6
Kreuze 10 der 25 Felder der abgebildeten Figur so an, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte (also waagerecht wie senkrecht) genau zwei angekreuzte Felder sind, aber in den beiden Diagonalen (also von A nach C und von B nach D) kein angekreuztes Feld liegt!



StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

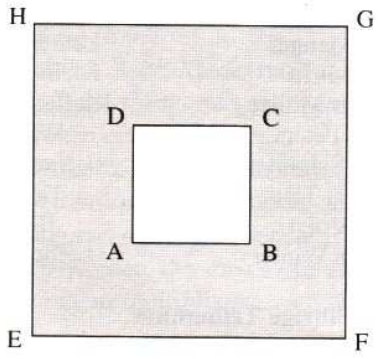
5/7
Frank hat Hefte zu 7 Pf., 10 Pf. und 30 Pf. je Stück gekauft. Er bezahlte dafür 1,16 DM. Wie viele Hefte zu 10 Pf. das Stück sind darunter?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/1
Jörg und Andy sind zusammen 24 Jahre alt; das Lebensalter jedes dieser beiden Jungen stellt eine Primzahl dar. Das Produkt aus den Lebensaltern von Jörg, Lars und Andy beträgt 2145. Jörg ist älter als Andy, aber jünger als Lars. Wie alt ist jeder von ihnen?

Maren Abschner, Gr.-Beuchow

6/2
Es ist der Flächeninhalt der in der Abbildung schraffierten Fläche zu bestimmen. Die Figur ABCD ist ein Quadrat, dessen Flächeninhalt 8 m^2 beträgt. Die Figur EFGH ist ebenfalls ein Quadrat, und es gilt $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = 1$ m.



StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/3
Jemand hat zwei Spielwürfel neu beschriftet.

a) Auf den Würfelflächen stehen jeweils sechs aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, und zwar stehen auf Würfel A die Zahlen von 15 bis 20 und auf Würfel B die Zahlen von 35 bis 40. Wie viele verschiedene Ergebnisse können mit diesen beiden Würfeln gewürfelt werden?
b) Trifft deine Aussage zu a) auch dann noch zu, wenn ganz beliebige sechs aufeinanderfolgende natürliche Zahlen auf jedem der Würfel stehen, wobei aber keine zwei Zahlen einander gleich sind?

Begründe deine Antwort!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/4
Ein alter Ackerwagen hat unterschiedlich große Räder. Jedes Hinterrad hat 4 m, jedes Vorderrad 3,50 m Umfang.
Wieviel Meter hat der Ackerwagen zurückgelegt, wenn das Hinterrad zehn Umdrehungen weniger als das Vorderrad gemacht hat?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/5
Aus den Ziffern 2, 4, 6, 8 lassen sich durch unterschiedliche Anordnungen vierstellige natürliche Zahlen bilden, in denen jede der vier Ziffern genau einmal vorkommt. Wie viele solcher vierstelliger

Zahlen sind mindestens zu addieren, um eine Summe zu erhalten, die durch 9 teilbar ist?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/6

Man hat ein bis zum Eichstrich mit Wasser gefülltes 7-Liter-Gefäß und zwei leere, ebenfalls geeichte Gefäße, die 3 Liter bzw. 2 Liter fassen. Durch Umfüllen will man jede ganzzahlige Literzahl von 1 bis 6 Liter erreichen. Gib eine Möglichkeit der Umfüllungen an, um diese Literzahlen zu erreichen!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/7

Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit, wenn ein PKW 1 Stunde lang mit einer Geschwindigkeit von 40 km/h und dann eine Stunde lang mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h fährt!

7/1

In einem Kasten liegen 40 gleichgroße und gleichschwere Kugeln in fünf verschiedenen Farben.
Es sind doppelt so viele blaue wie grüne, doppelt so viele weiße wie blaue und halb so viele rote wie blaue Kugeln. Schließlich sind noch gelbe Kugeln im Kasten. Um ohne hinzusehen mit Sicherheit fünf Kugeln von gleicher Farbe herausnehmen zu können, mußte Lars, der die Verteilung der Farben kannte, mindestens 19 Kugeln herausnehmen. Wie viele Kugeln von jeder Farbe befinden sich in diesem Kasten?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

7/2

Doris meint: "Jede natürlich Zahl $z \geq 100$, die auf Null endet, läßt sich entweder als Summe von zehn aufeinanderfolgenden ungeraden oder als Summe von zehn aufeinanderfolgenden geraden natürlichen Zahlen darstellen." Hat Doris recht? Die Antwort ist zu begründen!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

7/3

Ein Kreis mit dem Mittelpunkt M ist nur mit Hilfe eines Zirkels in zwei flächengleiche Teilfiguren zu zerlegen.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

7/4

Es ist nachzuweisen, daß die Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen durch 10 teilbar ist, wenn keine dieser Zahlen durch 5 teilbar ist!

Yvonne Langer, Eisenach

7/5

Bernds Lebensalter ist gleich dem um 10 verminderten dreifachen Lebensalter von Anton. Christian ist ein Jahr jünger als Bernd, Daniel doppelt so alt wie Anton. Zusammen sind sie 42 Jahre alt. Wie alt ist jeder von ihnen?

Stefan Golsisch, Falkenhagen

7/6

300 g Blei ($\rho = 11{,}3$ g/cm^3) werden in ein Überlaufgefäß gelegt. Wieviel Wasser fließt aus?

7/7

Ein Pyknometer (kleines Fläschchen mit genau bestimmten Rauminhalt) wiegt leer 12,82 g, mit Wasser ($\rho = 1$ g/cm^3) gefüllt 65,43 g und mit Kalilauge gefüllt 74,56 g. Welche Dichte hat die Kalilauge?

8/1

Ein Hotel verfügt über 52 Zwei- bzw. Vierbettzimmer mit insgesamt 144 Betten.
Wieviel Zweibettzimmer und wieviel Vierbettzimmer gibt es in diesem Hotel?

Daniela Berlt, Grimma (Sachsen)

8/2

In die folgende Gleichung sind für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern einzusetzen, so daß stets wahre Aussagen entstehen.

$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{BBB}$

Es sind alle Möglichkeiten zu finden.

H.-J. Kerber, Neustrelitz

8/3

Ich denke mir eine Zahl. Nun dividiere ich sie durch 10. Zum Ergebnis addiere ich 10. Dieses Ergebnis multipliziere ich mit 10, und zum Schluß subtrahiere ich noch 10. Jetzt ist mein Ergebnis 10 mal so groß wie meine gedachte Zahl.
Welche Zahl habe ich mir gedacht?

H.-J. Kerber, Neustrelitz

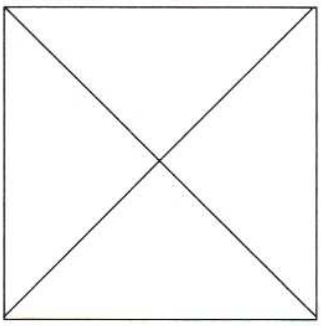
8/4

Es ist zu beweisen, daß in einem rechtwinkligen Dreieck ABC (C ist Scheitel des rechten Winkels) die Länge der Höhe h_c berechnet werden kann, indem man das Produkt der beiden Kathetenlängen durch die Länge der Hypotenuse des Dreiecks ABC dividiert.

Sabine Köhler, Dresden

8/5

Gegeben sei das abgebildete Quadrat, das durch seine beiden Diagonalen in vier gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke zerlegt wurde.
Zeichne dieses Quadrat auf ein Stück Zeichenkarton auf und zerschneide es in die angegebenen vier Teile.
Lege (immer unter Verwendung aller vier Teile!) 14 verschiedene Figuren! Beachte dabei, daß nur Seiten gleicher Länge aneinander gelegt werden dürfen!



8/6

Ein Schüler mit der Masse $m_1 = 40$ kg sitzt 3 m von der Achse einer Wippe entfernt. In welcher Entfernung muß ein anderer Schüler sitzen, dessen Masse $m_2 = 45$ kg beträgt, damit sich die Wippe im Gleichgewicht befindet?

8/7

Ein Kran hebt eine Palette Ziegel (Masse 600 kg) ins 5. Stockwerk eines Neubaus (Höhe 15 m) in 20 s. Wie groß muß die Leistung des Kranmotors mindestens sein?

9/1

In die folgende Gleichung sind für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für

verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern einzusetzen, so daß stets wahre Aussagen entstehen.

$\overline{XY} \cdot \overline{ZY} = \overline{WWW}$

Es sind alle Möglichkeiten zu finden.

H.-J. Kerber, Neustrelitz

9/2

Es ist zu beweisen, daß das Quadrat einer beliebigen zweistelligen natürlichen Zahl, vermindert um das Quadrat ihrer Quersumme, stets durch 9 teilbar ist.

Michael Enig, Crimmitschau

9/3

Das arithmetische Mittel zweier Zahlen sei 25, das geometrische Mittel sei 20.
Wie heißen die beiden Zahlen?

Michael Enig, Crimmitschau

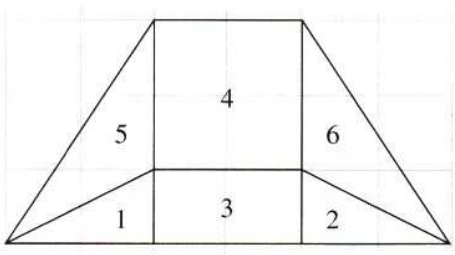
9/4

Gesucht sind zwei Zahlen für die gilt:
Das Quadrat ihrer Summe ist gleich dem Quadrat ihres Produktes und beträgt 20,25.
Wie heißen die beiden Zahlen?

Holger Laabs, Berlin

9/5

Zeichnen Sie das abgebildete gleichschenklige Trapez auf ein Stück Zeichenkarton auf und zerschneiden es in die angegebenen 6 Teile!
Legen Sie aus diesen 6 Teilen
a) ein Rechteck, das kein Quadrat ist,
b) ein Parallelogramm, das kein Rechteck ist,
c) ein Dreieck
Zeigen Sie jeweils eine Möglichkeit!
Es ist zu beachten, daß jedesmal alle 6 Teile verwendet werden müssen!



9/6

Ein Eisenbahnzug fährt mit einer Beschleunigung $a = 0{,}5\ m/s^2$ an. Welche Geschwindigkeit hat er nach 15 s? Welchen Weg legt er dabei zurück?

9/7

Ein Güterzug verringert durch gleichmäßiges Bremsen seine Geschwindigkeit von 54 km/h auf 36 km/h und legt dabei eine Strecke von 500 m zurück. Wie lange dauert der Bremsvorgang?

10/1

Es ist zu beweisen, daß Zahlen der Form

$z_1 = \overline{ababab}$ und $z_2 = \overline{aaaaaa}$

(dekadische Darstellung) durch 3, 7, 13 und 37 teilbar sind.

Uwe Neugebauer, Borne b. Staßfurt

10/2

Es ist die größte natürliche Zahl zu finden, durch die der Term $8n^3 + 24n^2 + 22n + 6$ teilbar ist $(n \in N)$

Bernd Dethloff, Waren (Müritz)

10/3

Welche natürlichen Zahlen a und n erfüllen die Gleichung

$\overline{aa}^n = \overline{aaaa}$,

deren Terme Ziffern in dekadischer Schreibweise darstellen?

Sch.

10/4

Zeichnen Sie eine Strecke von 10 cm Länge mit Zentimetereinteilung! Konstruieren Sie unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal eine Strecke der Länge

$s = \left(\sqrt{19} + \sqrt{85}\right)$

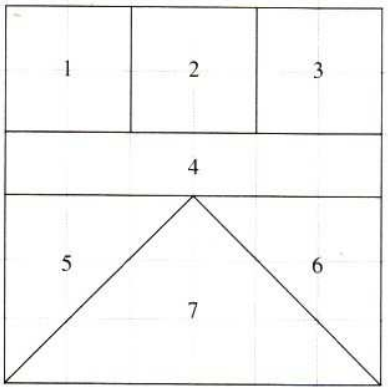
Beschreiben Sie die Konstruktion stichwortartig!

H.-J. Kerber, Neustrelitz

10/5

Zeichnen Sie das abgebildete Quadrat auf ein Stück Zeichenkarton auf und zerschneiden es in die angegebenen 7 Teile!
Legen Sie aus diesen 7 Teilen
a) ein Dreieck, b) ein Sechseck!

Es ist zu beachten, daß jedesmal alle 7 Teile verwendet werden müssen!



10/6

Ein PKW fährt mit konstanter Geschwindigkeit v = 36 km.h-1 an einem Motorradfahrer vorüber, der sich zur gleichen Zeit mit gleichmäßiger Beschleunigung in Bewegung setzt und den PKW nach 30 s überholt. Welche Beschleunigung hat das Motorrad und mit welcher Geschwindigkeit überholt es den Wagen?

10/7

Mittels eines Seiles, das bei 650 N reißt, wird eine Last, deren Masse 50 kg beträgt beschleunigt angehoben. Welche Hubgeschwindigkeit kann nach 3 s höchstens erreicht werden?

E/1

In welchem Zahlensystem stellt die Gleichung $525 + 34 = 25^2$ eine wahre Aussage dar?

Hartmut Boettcher, Weimar

E/2

Welche Wahrscheinlichkeit ist höher, mit 4 Würfeln auf einen Wurf 24 Augen zu haben oder 10 Münzen zu werfen, so daß alle Zahlen oben liegen?

Peter Wichmann, Rostock

E/3

Wieviele verschiedene gegenseitige Positionen können a) zwei gleiche, b) zwei verschiedene Spielsteine auf einem schachbrettähnlichen Spielbrett mit 49 quadratischen Feldern einnehmen?

Fr.

E/4

Welchen Rest läßt die Potenz 13^{169} bei Division durch 8?

Jörg Uhlig, Crimmitschau

E/5

Auf einem Kreis k liegen 6 verschiedene Punkte A, B, C, D, E, F beliebig verteilt. Es ist

a) die Anzahl der Dreiecke

b) die Anzahl der Sehnenvierecke und

c) die Anzahl der Fünfecke

zu ermitteln, die jeweils 3 bzw. 4 bzw. 5 dieser Punkte als Eckpunkte haben.

Bernd Tappe, Berlin

E/6

Auf einem Drehschemel sitzt eine Person, die bei angezogenem Armen 2 Hanteln hält, so daß diese von der Drehachse einen Abstand $r_1 = 10$ cm haben. Dann wird der Drehschemel in Rotation versetzt, und zwar soll er $n_1 = 1$ Umdrehung je Sekunde ausführen. Die Person streckt die Arme ruckartig aus, wobei der Abstand der Hanteln von der Drehachse auf $r_2 = 50$ cm zunimmt. Wie viele Umdrehungen je Sekunde führt der Schemel jetzt aus, wenn der Drehimpuls der Person und des Schemels gegenüber derjenigen der Hanteln vernachlässigt wird?

(O. Höfling: Phys.-Aufg. Sekundarst. II)

E/7

Auf eine 800 kg schwere Lore, die mit einer Geschwindigkeit von 1,5 m/s rollt, fallen senkrecht von oben 600 kg Schotter. Auf welchem Betrag sinkt dadurch die Geschwindigkeit der Lore?

Attraktive Preise im alpha-Wettbewerb 1993

Tolle Preise gibt es beim alpha-Wettbewerb 1993 zu gewinnen. Mitmachen lohnt sich also und bringt neben dem Spaß an der Mathematik auch die Möglichkeit, einen attraktiven Preis zu ergattern. Wir bedanken uns bei den Sponsoren des Wettbewerbs und wünschen uns eine rege Teilnahme.

Wettbewerbsbedingungen

1. Der Wettbewerb 1993 läuft über zwei Teilwettbewerbe in den Heften 1/93 und 2/93.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Anschrift, Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter) zu richten an:

Mathematische
Schülerzeitschrift alpha
Postfach 129
O-7010 Leipzig

Den Lösungen ist die frankierte und an Euch adressierte Antwortkarte beizulegen, welche Ihr im Mittelteil unserer Zeitschrift findet. Darauf erhaltet Ihr die Ergebnisse dieses Teilwettbewerbes mitgeteilt. Steht mehreren Schülern nur eine Zeitschrift zur Verfügung, so kopiert Euch die Auswertungsseite der Antwortkarte und klebt sie auf eine an Euch adressierte Postkarte (Porto nicht vergessen!).

Schulen beachten bitte, daß die gesammelte Rücksendung entsprechend mehr Porto verlangt.

3. Von dem Teilnehmer sind nur Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe zu lösen. Schüler ab Klassenstufe 10 und Erwachsene lösen die mit 10 und E gekennzeichneten Aufgaben.

4. Jeder Teilnehmer sollte einen Durchschlag seiner Lösungen anfertigen, um diese mit den jeweils zwei Heften später erscheinenden Lösungen zu vergleichen.

5. Diejenigen Teilnehmer, die insgesamt mindestens 8 Aufgaben richtig (gut oder sehr gut) gelöst haben, senden bis zum 10. September beide Antwortkarten, einen entsprechend frankierten und adressierten Rückumschlag und

a) bei mehr als dreimaliger Teilnahme die zuletzt erhaltene Urkunde bzw.

b) bei diesem Wettbewerb dreimaliger Teilnahme die beiden bereits vorhandenen Urkunden ein.

Bei erst- bzw. zweimaliger Teilnahme genügen die beiden Antwortkarten.

6. Alle erfolgreichen Teilnehmer erhalten eine Urkunde und einen alpha-Button. Pro Klassenstufe 5 bis 10 werden die 5 besten Teilnehmer ermittelt (entscheidend ist die Anzahl der sehr gut gelösten Aufgaben) und unter den Übrigen jeweils fünf Teilnehmer ausgelost.) (Außerdem prämieren wir 5 Frühstarter (Klassen 1 bis 4)).

Diesen Glücklichen winken attraktive Preise.

Beachtet bitte, daß wir Ensendungen ohne Rückporto nicht mehr bearbeiten können.

Einsendeschluß:
22. April 1993

Mitarbeiter/innen des Verlages und deren Angehörige können nicht am Wettbewerb teilnehmen. Der Rechtsweg ist ausgeschlossen. Die Verlosung erfolgt unter den Einsendern, die die Aufgaben richtig gelöst haben. Der Computer wird unter den fünf Besten aller Klassenstufen verlost.

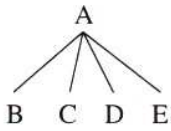
Kettenbriefe

Dies ist ein Kettenbrief.
Schicke bitte eine Ansichtskarte Deines Wohnortes an die erste Adresse.
Schreibe dann diesen Brief viermal ab. Diese vier Briefe schicke dann innerhalb von vier Tagen an vier Kinder, die Du kennst, die möglichst weit auseinander wohnen.
Aber wirklich in den nächsten vier Tagen, sonst ist die Kette unterbrochen. Die einzige Änderung: Du mußt die erste Adresse weglassen und als vierte Deine eigene angeben. Nach 30 Tagen erhältst Du eine Menge Ansichtskarten aus aller Welt.

Abb. 1

Von Zeit zu Zeit werden immer wieder sog. Kettenbriefe in Umlauf gesetzt, in denen dem Empfänger eine Liste mit vier Anschriften mitgeteilt wird. Der wichtigste Teil des Kettenbriefes ist die obenstehende Aufforderung.

Um die Folgen eines derartigen Kettenbriefes zu erkennen, verfolgen wir die lawinenartige Zunahme der Teilnehmerzahl anhand einer Skizze. Nehmen wir an, Annette startet einen Kettenbrief nach obigem Muster, sie schickt diesen Brief an Boris, Christian, Doris und Elke:



Diese Art der Darstellung nennt man ein Baumdiagramm. Da die Anzahl der Teilnehmer so schnell anwächst, daß bald die Namen und erst recht die Buchstaben des Alphabets nicht mehr ausreichen, bezeichnen wir den ersten Absender mit E und die ersten vier Empfänger mit E_1; E_2; E_3 und E_4.

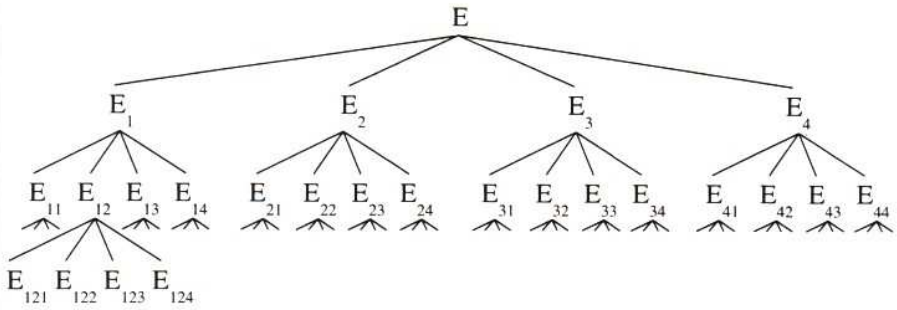
Das Diagramm zeigt uns die durch einen Kettenbrief ausgelöste Kettenreaktion: Immer mehr Menschen werden erfaßt, denn mit jeder Runde vervielfacht sich die Anzahl derer, die bereit seit müssen, sich an der Aktion zu beteiligen. Die Nummer eines beliebigen Empfängers des Kettenbriefes beschreibt eindeutig, auf welchem Weg der Kettenbrief zu ihm gelangt ist. Zum Beispiel hat E_{121} den Brief auf folgendem Weg erhalten:

$E \to E_1 \to E_{12} \to E_{121}$

Wir erkennen außerdem, daß aus der Anzahl der Stellen eine Indexnummer hervorgeht, in welcher Runde ein Empfänger den Kettenbrief erhalten hat.

Es werden auch immer wieder Kettenbriefe gestartet, in denen die Empfänger aufgefordert werden, einen bestimmten Geldbetrag an die erste Anschrift zu schicken. Außerdem wird dann allen Teilnehmern versprochen, daß sie nach einer gewissen Zeit ein Vielfaches des eingesetzten Betrages erhalten werden. Tatsächlich ist es schon einigen wenigen Leuten gelungen, auf diese Weise reich zu werden. Man bezeichnet diese Methode des Gelderwerbs als Schneeballsystem, denn auch ein kleiner Schneeball kann eine ganze Lawine auslösen, wenn er auf einen stark geneigten Hang mit einer dicken Schneedecke geworfen wird.

Natürlich kann das Versprechen an alle Teilnehmer, daß sie ein Vielfaches ihres Einsatzes zurückbekommen, nicht eingehalten werden. (Begründe dies!) Man sollte sich daher keinesfalls an Kettenbriefen beteiligen, in denen der Einsatz



Dieses Baumdiagramm veranschaulicht die Folgen eines Kettenbriefes, wenn jeder Empfänger E vier neue Empfänger E_1; E_2; E_3 und E_4 finden muß, die bereit sind, sich an dem Kettenbrief zu beteiligen. Da diese vier Empfänger der nächsten Runde wieder jeweils vier neue Empfänger finden müssen, erhalten in der übernächsten Runde bereits $4 \cdot 4 = 4^2 = 16$ Personen den Kettenbrief. Die weitere Entwicklung zeigt folgende Tabelle:

Runde	Anzahl der Empfänger	Anzahl der Teilnehmer
0	$1 = 4^0$	1
1	$4 = 4^1$	$4 + 1 = 5$
2	$4 \cdot 4 = 4^2 = 16$	$16 + 4 + 1 = 21$
3	$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$	$64 + 16 + 4 + 1 = 85$
4	$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4 = 256$	$256 + 64 + 16 + 4 + 1 = 341$
5	$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 1024$	$1024 + 256 + 64 + 16 + 4 + 1 = 1365$

Nach vier Runden ist ein beliebig herausgegriffener Teilnehmer E am Kettenbrief an die erste Stelle der Adressenliste gerückt; er erhält somit von den 256 Empfängern E_{1111} bis E_{4444} die versprochene Ansichtskarte. Dieser Erfolg tritt aber nur ein, wenn jeder der 341 Beteiligten die gegebenen Anweisungen genau befolgt.

Abb. 2

von Geld gefordert wird. Die Auslöser derartiger Kettenbriefe müßten strafrechtlich wegen Betrug verfolgt werden.
Ebenso verwerflich sind Kettenbriefe mit okkultem Inhalt, die meist von Menschen mit religiösen Wahnvorstellungen verfaßt wurden und in denen die Empfänger mit Unglück oder sogar dem Tod bedroht werden, falls sie sich nicht an die gegebenen Anweisungen halten. Auch an derartigen Aktionen sollte man sich keinesfalls beteiligen. Leider mangelt es vielen Menschen an der Einsicht, daß die in einem Kettenbrief gegebenen Versprechungen für die meisten der Teilnehmer keinesfalls eingehalten werden können. Dies zeigt auch das folgende Beispiel:
In jeder Runde vervielfacht sich die Anzahl der Empfänger eines Kettenbriefes; der Mathematiker spricht dann von einer geometrischen Zahlenfolge. Um die Anzahl aller Teilnehmer zu berechnen, muß man diese Glieder der geometrischen Zahlenfolge addieren: Es entsteht eine geometrische Reihe.

Geometrische Zahlenfolge und geometrische Reihe

Eine (unendliche) Zahlenfolge $a_1; a_2; a_3; \ldots a_n; a_{n+1}; \ldots$ heißt eine geometrische Folge, wenn zwei beliebige unmittelbar aufeinanderfolgende Glieder der Folge den gleichen Quotienten $q \neq 1$ besitzen:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

Aus dieser Gleichung folgt: $a_{n+1} = a_n \cdot q$, d. h. jedes Glied einer geometrischen Zahlenfolge ist das q-fache seines Vorgängers. Bezeichnen wir das erste Glied einer geometrischen Folge mit a, so gilt: $a_1 = a$; $a_2 = a \cdot q$; $a_3 = a \cdot q^2$; ... $a_n = a \cdot q^{n-1}$; ...
Wie bei jeder Zahlenfolge kann auch bei der geometrischen Folge durch

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 &&= a \\ s_2 &= a_1 + a_2 &&= a + a \cdot q \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 &&= a + a \cdot q + a \cdot q^2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \\ &a + a \cdot q + \ldots + a \cdot q^{n-1} \quad (1) \end{aligned}$$

eine neue Folge, die sog. Folge der Teilsummen gebildet werden. Diese Folge $s_1; s_2; \ldots s_n; \ldots$ wird auch als geometrische Reihe bezeichnet und s_n als die n-te Teilsumme dieser Reihe.
s_n ist das n-te Glied der Reihe bzw. die n-te Teilsumme der Folge. Es ist nicht schwer, s_n zu berechnen: Wird die Gleichung (1) mit q multipliziert, so erhält man

$$s_n \cdot q = a \cdot q + a \cdot q^2 + \ldots + a \cdot q^n \quad (2)$$

und die Differenz der Gleichungen (2) und (1) lautet:

$$s_n \cdot q - s_n = a \cdot q^n - a$$

bzw. $s_n \cdot (q - 1) = a \cdot (q^n - 1)$
und somit ist

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

und diese Formel ist gültig für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $q \in \mathbb{R}$, wenn $q \neq 0$ und $q \neq 1$.

Die in dem Buch „Buch der Rekorde" gemachten Angaben veranlassen uns zu folgenden Überlegungen:
- Da der Brief sechsmal abgeschrieben werden soll, muß für jede folgende Runde die sechsfache Anzahl von Empfängern gefunden werden.
- Wenn wir für jede Runde eine Zeit von einem Monat annehmen, so ist von Juli 1975 bis Mai 1982 die 82. Runde erreicht.
- Die Anzahl der Teilnehmer in den einzelnen Runden beträgt: 1; 6; 36; 216; 1296; 7776; ... und bereits in der 14. Runde wäre mit $6^{13} = 13\,060\,694\,016$ Teilnehmern mehr als die gesamte Erdbevölkerung erfaßt.
- Sollte tatsächlich die 82. Runde erreicht werden, so müßten sich

$$1 + 6 + 36 + 216 + \ldots + 6^{81} = \frac{1 - 6^{82}}{1 - 6}$$

das sind $1{,}286\,567\,354 \cdot 10^{63}$ Menschen an dem Kettenbrief beteiligen.

H. Walter, Fürth

Drohung des anonymen Verfassers: Wer das Schreiben aufhält, der stirbt

Post stoppte mysteriösen Kettenbrief

Anstelle einer Marke steht der Vermerk „Widobet 183 R" auf dem Umschlag

Bonn (AP) – Die Verantwortlichen des Deutschen Postdienstes leben gefährlich: Sie stoppten nämlich einen Kettenbrief, und das soll – so die Verfasser des mysteriösen Textes – den Tod bringen.
Wie der Postdienst berichtete, haben die sich massenhaft im Umlauf befindlichen Briefe keine Absenderangaben und tragen dort, wo die Marke hingehört, den Vermerk „Widobet 183 R". Wer einen solchen Brief erhält, muß 1,80 Mark Nachporto zahlen, sofern er die Annahme nicht verweigert.
Der Inhalt besteht aus einem Text, der den Empfänger auffordert, 20 Kopien anzufertigen und diese ebenso innerhalb von 96 Stunden zu versenden. Dann sei Glück, etwa ein Lottogewinn, zu erwarten. Wer aber die Kette aufhalte, werde bestraft: „Devon Mikanuja warf den Brief weg, weil er nicht an ihn glaubte und starb nach zehn Tagen."
Die Generaldirektion Postdienst ließ sich davon nicht beeindrucken und wies die Postämter an, derartige Briefe nicht mehr auszutragen.

Fürther Nachrichten vom 11.3.1992

Abb. 3

Der längste Kettenbrief

Am 11. Mai 1982 erreichte die Redaktion von „Tatsachen – Das Schneider Buch der Rekorde" folgender Brief:

Dies ist ein Kettenbrief.
Schicke bitte eine Ansichtskarte an die erste Adresse. Auf die schreibst Du Grüße. Dann schreibe diesen Brief sechsmal ab. Diese sechs Briefe schicke dann innerhalb von vier Tagen an Freunde oder Bekannte, die möglichst weit auseinander wohnen.
Aber wirklich in den nächsten vier Tagen, sonst ist die Kette unterbrochen.
Die einzige Änderung: Du mußt die erste Adresse weglassen und als sechste Deine eigene angeben. Nach 44 Tagen erhältst Du eine Menge Ansichtskarten aus dem Ausland bzw. der Bundesrepublik. Die Kette ist am 1.7.1975 in Bremen angefangen und nicht unterbrochen worden. Wenn sie bis zum 1.7.1982 nicht unterbrochen wird, kommen wir in das Buch der Rekorde.
Die Redaktion beteiligte sich an diesem ausgefallenen Rekordversuch und nimmt ihn an dieser Stelle in das „SchneiderBuch der Rekorde" mit auf.

Schneider-Buch der Rekorde (1984) S. 136

Abb. 4

Internationales Kinderspiel – mathematisch beleuchtet

oder wie Kettenbrief-Postkartenberge entstehen

Es wird ermittelt, wieviel Postkarten man beim internationalen Postkartenspiel erhalten kann und wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, überhaupt eine Postkarte zu erhalten.

Seit Jahrzehnten kursieren Briefe und Postkarten eines sogenannten „internationalen Kinderspiels", und es gibt regelmäßig Diskussionen darüber, wie so etwas „funktionieren" kann. Zwei Fragen stehen dabei hauptsächlich zur Debatte: Erstens, wie viele Postkarten erhalte ich wirklich, wenn sich alle Spieler an die Spielregeln halten? Zweitens, und das ist erheblich schwieriger zu beantworten, wie ist es überhaupt möglich, daß so ein Spiel über längere Zeit hinweg „läuft", da doch bei formaler Rechnung schon nach wenigen Wochen ein Vielfaches der Weltbevölkerung daran teilnehmen müßte? Mit dieser Frage hängt die Frage nach der Wahrscheinlichkeit zusammen, ob ich überhaupt jemals eine Postkarte erhalte. Die erste Frage ist rein kombinatorischer Art, bei der zweiten Frage muß man noch Zusatzannahmen darüber machen, wie oft das Spiel regelgemäß fortgesetzt wird.

Die Spielregel: Man erhält irgendwann einen Brief mit folgendem oder einem ähnlichen Text:

Hallo!

Hier kommt ein Kettenbrief, der Spaß machen soll. Sei bitte so nett und befolge nachstehende Anweisungen, damit unser Kettenbrief weitergeht. Nur so kommen wir in das Buch der Rekorde! Also sende an die erste Adresse eine Ansichtskarte Deiner Stadt mit folgendem Text: Viele Grüße vom Kettenbrief, er ist noch nicht unterbrochen. Dann schreibe diesen Brief sechs Mal und sende ihn an sechs Kinder, die Du kennst. Laß auf der Adressenliste die erste Adresse weg und schreibe Deine Adresse an die letzte Stelle. In den nächsten 14 Tagen wirst Du viele Ansichtskarten erhalten und wirst staunen, woher sie alle kommen. Bitte sei kein Spielverderber und unterbrich die Kette nicht.

Viele Grüße von N.N.

Schließlich folgt noch eine Liste von sechs Adressen. Meist enthält der Brief auch noch eine Angabe darüber, wieviel Postkarten man erhalten wird, falls niemand das Spiel unterbricht. Übrigens: Diese Angabe habe ich schon in den verschiedensten Varianten gesehen, sie waren aber alle unkorrekt. Deshalb beantworten wir also zunächst die erste Frage.

Die erste Frage: Wie viele Postkarten erhalte ich maximal? Und wann? Für diese Zusatzfrage machen wir die Durchschnittsannahme, daß die Zeit für Postbeförderung plus die Zeit für Schreiben des nächsten Briefes etwa eine Woche beträgt. Die Zahl der Adressen im Kettenbrief sei n, also ist n = 6 in unserem Beispiel. Die Zahl der Kinder, an die man den Brief senden soll, sei m, also m = 6 im interessierenden Fall. Sei x die Anzahl der Postkarten, die ich danach erhalte. x hängt von m und n ab, wir schreiben x = x(m,n), wobei der letztlich interessierende Wert x = x(6,6) ist. Sei ferner t die Zahl der Wochen, die ich warten muß, bis ich die Postkarten habe, also t = t(m,n).

Wir lösen das Problem Schritt für Schritt und beginnen mit dem einfachsten Fall n = 1. Dann schreibe ich also meine eigene Adresse gleich an erste Stelle und erhalte innerhalb von zwei Wochen m Postkarten. In Formeln heißt das

$$x(m,1) = m, \quad t(m,1) = 2. \tag{1}$$

Selbst für m = 0 sind diese Formeln richtig: Wenn ich null Briefe versende, erhalte ich null Postkarten, und die innerhalb von zwei Wochen.

Für den nächsten Schritt nehmen wir jetzt an, daß wir für ein bestimmtes $n \geq 1$ bereits wissen, wie groß x(m,n) und t(m,n) sind. Daraus wollen wir herleiten, wie groß x(m,n+1) und t(m,n+1) sind. Für t ist das ganz einfach: Es muß einfach eine Runde weitergehen, ehe ich an erster Stelle der Adressenliste stehe, also

$$t(m,n+1) = t(m,n) + 1. \tag{2}$$

Daraus ergibt sich zusammen mit Formel (1), daß t(m,n) = n + 1 ist, also in unserem Beispiel t(6,6) = 7.

1. Ergebnis: Beim Kinderspiel wird der Hauptteil der Postkarten nach etwa sieben Wochen eintreffen.

Etwas komplizierter wird die Berechnung für x. Wir müssen dazu beachten, daß der Übergang von n zu n + 1 bedeutet, daß die Zahl der Kinder, die meine Adresse erhalten, mit m multipliziert wird. Es gilt also

$$x(m,n+1) = m \cdot x(m,n), \tag{3}$$

woraus sich zusammen mit Formel (1) ergibt:

$$x(m,n) = m^n, \tag{4}$$

Bemerkung: Das hier angewendete Beweisverfahren des Schritt-für-Schritt-Vorgehens wird „Beweis durch vollständige Induktion" genannt.

Für unser Beispiel setzen wir m = n = 6 in Formel (4) ein und erhalten:

$$x(6,6) = 6^6 = 46656. \tag{5}$$

2. Ergebnis: Beim Kinderspiel erhalte ich 46656 Postkarten, falls niemand das Spiel unterbricht.

Da eine Postkarte etwa 0,3 mm dick ist, sind das 14 meterhohe Postkartenstapel. Kein Wunder also, daß die Post ihren Beitrag an der Durchführung solcher Kinderspiele, nämlich ordentliche Beförderung aller Briefe und Postkarten, nur solange leisten kann und will, wie diese theoretisch denkbare Zahl praktisch niemals auch nur annähernd erreicht wird. Mit anderen Worten: Sollte einmal der Fall eintreten, daß tatsächlich etwa 10 Wochen lang kein Kind das Spiel abbricht, dann müßte die Post das Spiel verbieten. Anderenfalls würde nämlich die Zustellung „normaler Briefe" gefährdet sein. So ist also gerade die Tatsache, daß regelmäßig Kinder diesen Brief erhalten aber nicht fortsetzen, Voraussetzung dafür, daß dieses Spiel über Jahre hinweg funktioniert.

Nun zur zweiten Frage: Wieviele Postkarten erhalte ich wirklich? Ich selbst habe in meinem Leben fünfmal an diesem Kinderspiel teilgenommen und habe insgesamt sechs Postkarten erhalten. Ist das typisch? Folgender Schluß ist völlig kor-

rekt: Es können insgesamt nicht mehr Postkarten ankommen als abgesandt wurden. Weil pro Teilnehmer nur eine Postkarte versendet wird, kann im Durchschnitt auch nicht mehr als eine Postkarte ankommen. Bei zuverlässiger Postbeförderung kann man sogar „genau eine" sagen. Da es aber gelegentlich vorkommt, daß man mehr als eine Postkarte erhält, folgt daraus zwingend, daß es zumindest gelegentlich vorkommt, daß man überhaupt keine Postkarte erhält, da anderenfalls der Durchschnitt der erhaltenen Postkarten doch größer als eins wäre. Das Erstaunliche an diesem Schluß besteht darin, daß gar nicht vorausgesetzt werden mußte, daß das Spiel gelegentlich unterbrochen wird. Daraus folgt aber auch, daß die oft behauptete Schlußweise: „Wenn kein Kind das Spiel unterbricht, erhält man pro Teilnahme 46656 Postkarten, also auf jeden Fall mehr als eine im Durchschnitt." unkorrekt ist. Woran liegt das? Wir haben oben, ohne dies ausdrücklich zu erwähnen, von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß es nur endlich viele Kinder gibt und jedes Kind nur endlich oft an diesem Spiel teilnimmt. Die zitierte falsche Schlußweise beachtet diese Tatsache nicht.

Man kann aber der zitierten Schlußweise auch eine positive Interpretation geben: In der Anfangsphase des Spiels, also dann, wenn die Zahl der daran insgesamt beteiligten Kinder noch wesentlich kleiner als die Gesamtkinderzahl ist, (also wenn man „Gesamtkinderzahl ist uneingeschränkt groß" noch als gute Näherung verwenden kann,) kann man durchaus noch damit rechnen, wesentlich mehr als eine Postkarte zu erhalten.

Wir können das Ganze als einen Zufallsprozeß modellieren. Wir machen dazu die Annahme, daß jedes Kind nur mit einer Wahrscheinlichkeit $p < 1$ spielregelgemäß weiterspielt und in den übrigen Fällen überhaupt nicht reagiert. Man kann sich dann leicht überlegen, daß man dann statt m nur im Durchschnitt $y = (p \cdot m)^n$ Postkarten erhält. Da wir aber schon auf anderem Wege $y = 1$ hergeleitet hatten, folgt daraus $p = 1/m$, also $p = 1/6$ in unserem Beispiel.

3. Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit p, daß ein Kind, das dieses Kinderspiel bekommt, weiterspielt, beträgt p = 16,7 %.

Wir wollen uns jetzt klar machen, daß diese 16,7 %, genauer $16\frac{2}{3}$ %, recht stabil sind. Wäre etwa zwei Jahre (also 104 Wochen) lang p = 18 %, würde sich die Zahl der daran beteiligten Kinder um den Faktor $[18/(16 + 2/3)]^{104} \approx 3000$ vergrößern, was Verbreitung von Unlust am Weiterspiel und damit wieder eine Verringerung von p zur Folge hätte. Der Exponent 104 ist die Zahl der Wochen, die im Laufe der angenommenen zwei Jahre vergehen.

Andererseits, wäre $p < 16\frac{2}{3}$ %, würde die Zahl der beteiligten Kinder exponentiell (also sehr schnell) abnehmen und das Spiel bald ganz einschlafen. Das ist aber, wie die Erfahrung zeigt, nicht der Fall.

Als Letztes soll uns nun die Frage beschäftigen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß ich überhaupt eine (oder mehrere) Postkarte(n) erhalte. Dazu bezeichnen wir mit q die Wahrscheinlichkeit, daß ich eine ganz bestimmte der 46656 theoretisch denkbaren Postkarten erhalte, Sie beträgt 1/46656, da ja die Gesamtzahl im Durchschnitt 1 beträgt; d. h., die Wahrscheinlichkeit, daß ich eine bestimmte Postkarte nicht erhalte, beträgt z = 46655/46656. Wären nun alle diese Ereignisse voneinander abhängig, würde man

$$q = z^{46656} \approx 1/e \approx 36{,}79\ \% \qquad (6)$$

erhalten. Dabei ist e = 2,7183 die Basis der natürlichen Logarithmen. Dem spricht aber die Erfahrung entgegen, welche besagt, daß man in mehr als der Hälfte aller Fälle überhaupt keine Postkarte erhält. Um diesen Widerspruch zu lösen, wollen wir den Einfluß der Voraussetzung „unabhängig" an einem einfach überschaubaren Fall testen: Sei m = n = 2: Es ist also p = 50 %. Ich schreibe an die Kinder a und b, die machen jeder mit 50 % Wahrscheinlichkeit mit; dann schickt a an A und B, b an C und D, und jeder von diesen vier macht mit 50 % Wahrscheinlichkeit mit. Wir können jetzt Unabhängigkeit derart voraussetzen, daß jeder, der einen Brief erhält, mit derselben, von der Entscheidung der anderen unabhängigen Wahrscheinlichkeit von 50 % entscheidet, ob er mitmacht; aber die Entscheidung, ob a mitmacht, beeinflußt natürlich die Antwort auf die Frage, ob A und B den Brief überhaupt erhalten. Die Wahrscheinlichkeit, daß ich von A eine Postkarte erhalte, beträgt 25 %.

Dasselbe trifft für B, C und D zu. Wären diese vier Ereignisse voneinander unabhängig, würde die Wahrscheinlichkeit q(i), daß ich genau i Postkarten erhalte, gerade durch die Binomialverteilung b(i) bestimmt sein. Für unser Beispiel gilt dabei

$$b(i) = \binom{4}{i} 3^{4-i} / 256 \qquad (7)$$

also b(0) = 81/256, b(1) = 108/256, b(2) = 54/256, b(3) = 12/256 und b(4) = 1/256. Das Zeichen

$$\binom{n}{i} = n!/(i! \cdot (n-i)!) \qquad (8)$$

ist der Binomialkoeffizient, und i! ist das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis i. Der Erwartungswert ist 1, die Streuung 0,75. Die Wahrscheinlichkeit, überhaupt eine Postkarte zu erhalten, betrüge dann $b(0) \approx 31{,}64$ %.

Jetzt soll dasselbe ohne die Voraussetzung der Unabhängigkeit ganz genau berechnet werden. Es sind $2^6 = 64$ Fälle zu unterscheiden, je nachdem, wer mitmacht und wer nicht. Durch Auszählen aller Fälle erhält man das genaue Ergebnis q(0) = 25/64, q(1) = 20/64, q(2) = 14/64, q(3) = 4/64, q(4) = 1/64. Erwartungswert und Streuung sind beide gleich 1.

Um mit den b(i) besser vergleichen zu können, erweitern wir die q(i) mit 4, also q(0) = 100/256, q(1) = 80/256, q(2) = 56/256, q(3) = 16/256 und q(4) = 4/256. Es geschieht also wesentlich seltener, daß ich genau durchschnittlich viele, nämlich *eine* Postkarte erhalte. Jedes andere Ergebnis tritt dagegen häufiger auf als bei der Binomialverteilung. Das ist Ausdruck der Tatsache, daß hier die Streuung größer ist.

Insbesondere ist q(0) = 39,0625 %, also ist die Wahrscheinlichkeit, überhaupt keine Postkarte zu erhalten, deutlich größer als dies zunächst abgeschätzt wurde. Wir können daher davon ausgehen, daß auch bei m = n = 6 die berechneten 36,79 % bei Berücksichtigung der Abhängigkeiten wesentlich größer ausfallen werden.

Wir wollen dies jetzt genau herleiten. Die Wahrscheinlichkeit, überhaupt keine Postkarte zu erhalten, werde mit r = r(m,n) bezeichnet, wobei wieder der Fall m = n = 6 von besonderem Interesse ist. Wir verwenden wieder die vollständige Induktion.

Induktionsanfang: Sei n = 1.

Für diesen Fall kann man tatsächlich von Unabhängigkeit ausgehen und erhält $r(m,1) = (1 - 1/m)^m$.

Induktionsschritt: r(m,n) möge bereits berechnet sein. Wir erhalten dann als Bi-

nomialverteilung

$$r(m,n+1) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (m-1)^{m-1} m^{-m} r(m,n)^i \qquad (9)$$

also

$$r(m,n+1) = [(r(m,n) + m - 1)/m]^m. \qquad (10)$$

Die genaue Herleitung dieser Formel ist recht aufwendig und soll hier weggelassen werden. Als Probe berechnen wir jetzt mittels dieser Formel den schon oben hergeleiteten Wert r(2,2): Laut Induktionsanfang erhalten wir r(2,1) = 1/4, also

$$r(2,2) = \sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i} 4^{-i-1} =$$

$$= 1/4 + 2/16 + 1/64 = q(0) \qquad (11)$$

Jetzt setzen wir m = 6 und benutzen die Abkürzung r(6,n) = s(n). Wir suchen also s(6). Es gilt $s(1) = (5/6)^6 = 0{,}334898$ und $s(n+1) = [(5 + s(n))/6]^6$, so daß mit 5 Iterationsschritten ermittelt werden kann (nachträglich kann man sogar von s(0) = 0 ausgehen und die Iterationsformel für n = 0 anwenden):

$$s(6) = 0{,}73504257. \qquad (12)$$

4. Ergebnis: Nur mir 26,5 % Wahrscheinlichkeit erhält man überhaupt eine Postkarte; wenn man aber überhaupt eine erhält, dann sogar im Durchschnitt 3 bis 4 Stück.

Hieraus sieht man, welch großen Fehler man machen kann (36,79 % statt der richtigen 73,50 %), wenn man fälschlich eine Unabhängigkeit zwischen Zufallsgrößen annimmt.

Für sehr große Werte n wird s(n) immer größer, es gilt

$$\lim_{n\to\infty} s(n) = 1 \qquad (13)$$

Also: Wenn man das Kinderspiel mit sehr langer Adressenliste spielen würde, würde nicht nur die Wartezeit auf die Postkarten sehr lang werden, sondern auch die Wahrscheinlichkeit, überhaupt eine Postkarte zu erhalten, verschwindend klein werden.

Ungeachtet dessen bleibt die Aussage, daß man im Durchschnitt genau eine Postkarte erhält, richtig. Es werden nämlich diejenigen, die überhaupt mindestens eine Postkarte erhalten, im Durchschnitt eine sehr große Anzahl davon erhalten.

Hans-Jürgen Schmidt

Aufgaben zum „Pythagoras“ und „Euklid“ zur Weiterarbeit und zum Aufzeigen von Zusammenhängen

Die Sätze des “Pythagoras” und des “Euklid” werden nach der Einführung hauptsächlich zur Lösung von praktischen Aufgaben (Feuerwehrleiter, Dachsparren u. a.) oder zur Bestimmung von fehlenden Seiten in geometrischen Figuren verwendet. Neben diesem anwendungsorientiertem Aspekt lassen sich auch weitere Betrachtungen über Zusammenhänge anstellen, die für Schüler weiterführend und interessant sein können und dennoch nicht ganz ohne Praxisbezug sind.

Dazu einige Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad, die man selten oder gar nicht in Mathematikbüchern findet.

Aufgaben und Anregungen:

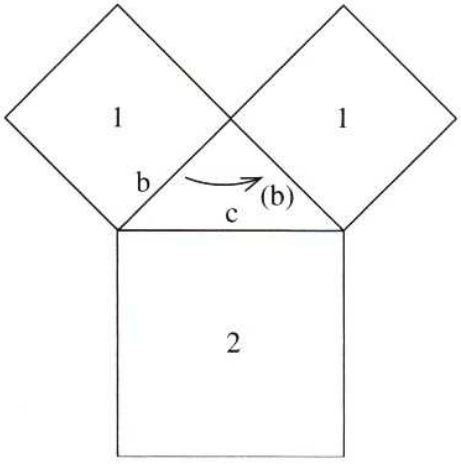
1. **Konstruiere mit Hilfe des Pythagoras aus einem Quadrat ein doppelt so großes Quadrat (nicht über der Diagonalen).**
2. **Konstruiere mit Hilfe des Pythagoras zu einem Quadrat das doppelt und das dreimal so große Quadrat in einer Zeichnung.**
3. **Bilde weitere Aufgaben, wo aus einem Quadrat bestimmte Vielfache hergestellt werden.**
4. **Falte aus einem DIN A4-Blatt ein Quadrat und bestimme durch Rechnung die Länge der Diagonale des Quadrats. Vergleiche das Ergebnis mit der Länge des Blattes. Drücke das Verhältnis von Länge und Breite auf möglichst einfache Weise aus.**
5. **Konstruiere mit Hilfe des Höhensatzes zu einem DIN A7-Blatt das flächengleiche Quadrat (oder im Maßstab mit größeren Formaten). Stelle die Größe der entstandenen Quadrate fest und berechne, den wievielten Teil eines Quadratmeters sie darstellen.**
6. **Konstruiere mit Hilfe des Höhensatzes aus dem Quadrat mit der Seitenlänge 12,5 cm das dazugehörige DIN A6-Format.**
7. **Konstruiere mit Hilfe des Höhensatzes im Maßstab 1 : 10 aus einem Quadratmeter das DIN A0-Format.**
8. **In welchem Würfel und welcher quadratischen Säule kommt die Fläche eines DIN A4-Blattes als Körperschnittfläche vor?**
9. **Gib das Verhältnis der Seiten und der Diagonale eines DIN A4-Format Blattes in der einfachsten Form an.**

Diese Aufgaben könnten als Anwendung und Vertiefung oder auch als Einzelaufgaben in Vertretungsstunden eingesetzt werden. Das Gesamtthema führt zu Einsichten und zeigt Zusammenhänge auf. Den Schülern viel Vergnügen bei den Lösungen!

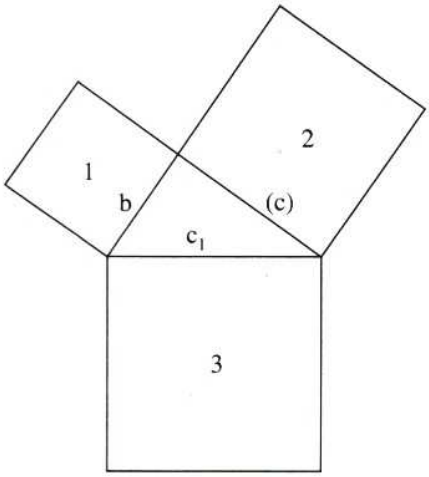
Heinz Günter Kirchhoff
Lennestadt

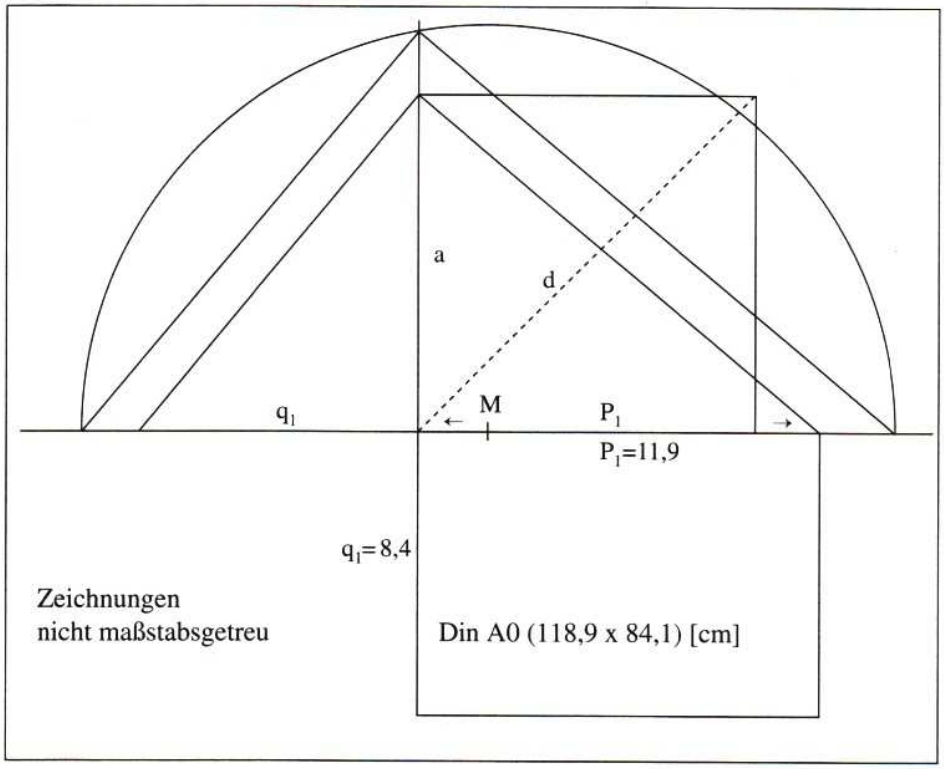
Lösungen:

Aufgabe Nr. 1



Aufgabe Nr. 2





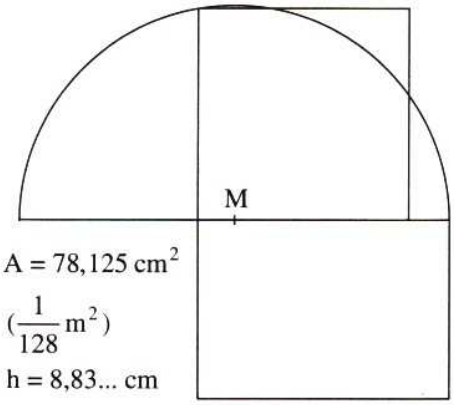
Aufgabe Nr. 3
analog

Aufgabe Nr. 4
Die Länge der Quadratseite:
a = 21,[02241 ... cm
a = 21 cm
$a^2 + b^2 = c^2$
$21^2 + 21^2 = 882$

$c = \sqrt{882}$ cm

$c \approx 29,7$ cm

Aufgabe Nr. 5



$A = 78,125\ cm^2$

$(\frac{1}{128}\ m^2)$

h = 8,83... cm

Aufgabe Nr. 6:
$12,5^2$ —> DIN A6

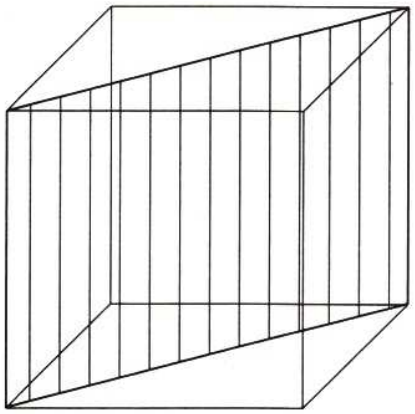
Lösung wie Nr. 7

Aufgabe Nr. 7

1) Zu dem Quadrat mit der Seite a rechtwinkliges Dreieck konstruieren mit q = a und $p = a\sqrt{2}$.

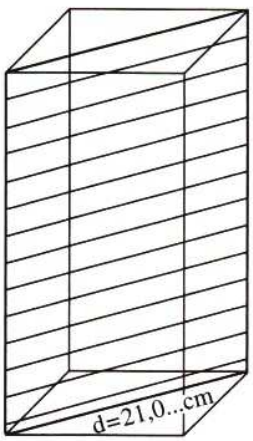
2) Dazu ähnliches Dreieck mit h = a.

Aufgabe Nr. 8
a) Würfel



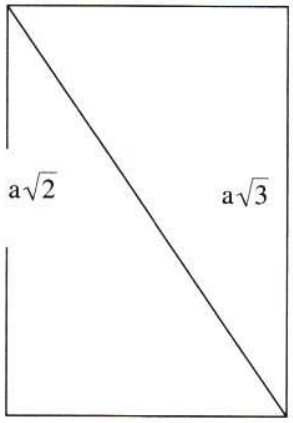
a= 21,0...cm

b) quadratische Säule



a=14,85 cm

Aufgabe Nr. 9

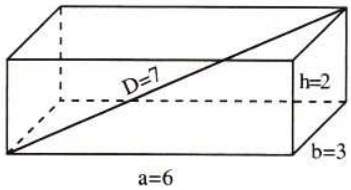


a

$a : a\sqrt{2} : a\sqrt{3} = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$

Augabe Nr. 10 (weitere Aufgabe)
Problemtransformation des "Cogito 3/92 – Preisrätsels" aus "Bild der Wirtschaft"
Diophant fragt an: Welches ist der kleinste Quader (mit s > 1 und $s_1 \neq s_2 \neq s_3$), dessen Körperdiagonale auch eine ganze Zahl ist?

Lösung:



a=6

Regelmäßige Kreisteilung in der Pflanzenwelt

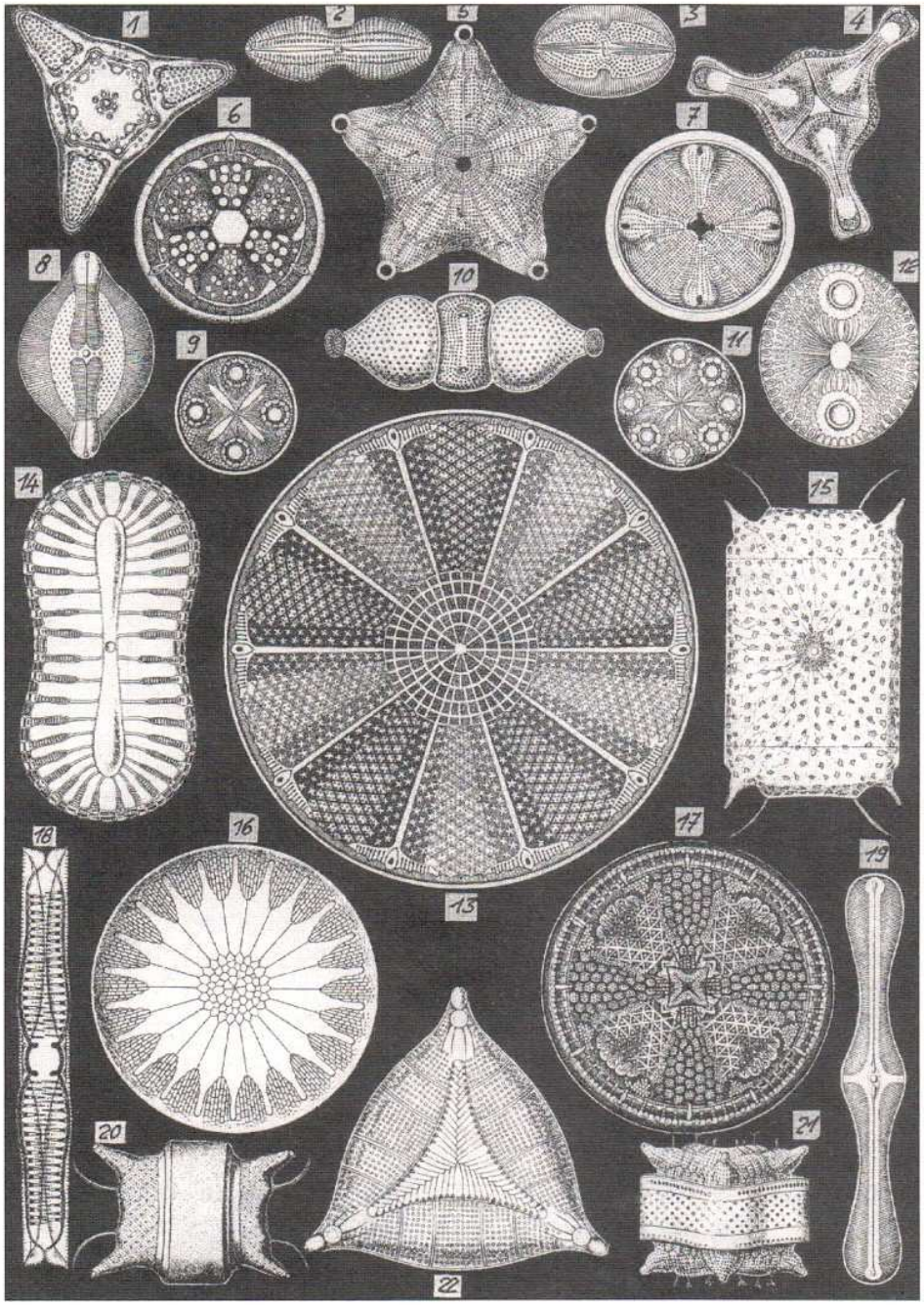


Abb. 1: Schachtellinge (Diatomea), Urpflanzen

Besonders die Blüten zahlreicher Pflanzen zeigen sehr schöne regelmäßige Kreisteilungen, wobei die Fünfer-Teilung in der Blumenwelt äußerst verbreitet ist. Schnittbilder fünfblättriger Blüten machen das sehr deutlich. So häufig fünfblättrige Blumen anzutreffen sind, so selten findet man dreiblättrige. Zu diesen geometrischen Raritäten der Natur gehören u. a. das Schneeglöckchen, der Gemeine Froschleiß, die Ananaspflanze. Auch vierblättrige Blumen sind nicht sehr häufig zu finden; die Kreuzblütler gehören dazu. Fast auf "Schritt und Tritt" begegnet man in der Natur der Sechsblättrigkeit; hierzu gehören neben vielen anderen die Vertreter aus der Familie der Anemonen und das Buschwindröschen.

Aber auch in anderen Bereichen der Pflanzenwelt finden wir regelmäßige Kreisteilungen. Auf den Abbildungen werfen wir einen Blick in die geheimnisvolle Welt kleinster Lebewesen des Meeres. Unter der immensen Vielzahl großer und kleiner Geschöpfe sind es gerade die winzigsten, die Schwebewesen des Planktons, die die wichtigste Rolle in der Nahrungskette des Meeres zu spielen haben. Die einzelligen Pflanzen des Planktons (Plankton heißt griechisch 'das Umhergetriebene') füllen die oberflächennahen Meeresschichten aus und bilden die Nahrungsgrundlage für alle Meeresbewohner. Die abgebildeten Lebewesen gehören zum Stamm der Urpflanzen. Es sind mirkroskopisch kleine einzellige Pflanzenwesen, Kieselalgen, genannt Diatomea oder zu deutsch Schachtellinge. Sie kommen massenweise sowohl im Süßwasser als auch in den Meeren vor. Ernst Haeckel kannte gegen Ende des letzten Jahrhunderts schon über 2000 verschiedene Arten. Von E. Haeckel stammen auch die Zeichnungen. Die Schachtellinge bestehen aus einer zweiklappigen Kieselschale, deren zwei Hälften sich wie eine Schachtel und ihr Deckel verhalten; daher denn auch ihr Name. Der lebendige, weiche Zellenkörper ist in der Schale eingeschlossen und enhält in der Mitte einen Zellkern. Von der ihn umgebenden feinen Plasmaschicht strahlen Plasmafäden aus. Im Plasmanetz zerstreut befinden sich grüne Farbkügelchen (Chlorophyll). Wir erkennen in den Figuren 6, 7, 9, 11, 13, 16 und 17 runde Formen, in den Figuren 3, 8 und 12 ovale, in 1, 4 und 22 dreieckige, in 15, 20 und 21 rechteckige, in 2, 14, 18 und 19 stäbchenförmige und in Figur 5 gar fünfeckige Kontur. Alle Figuren sind stark vergrößert (etwa 50- bis 500fach) gezeichnet. Welche regelmäßigen Kreisteilungen zu erkennen sind, kann jeder Leser selbst herausfinden.

Dr. G. Liebau, Leipzig

siehe auch Buchbesprechung auf Seite 36!

Die Simson-Gerade, die bei Robert Simson (1687 bis 1768) nicht vorkommt

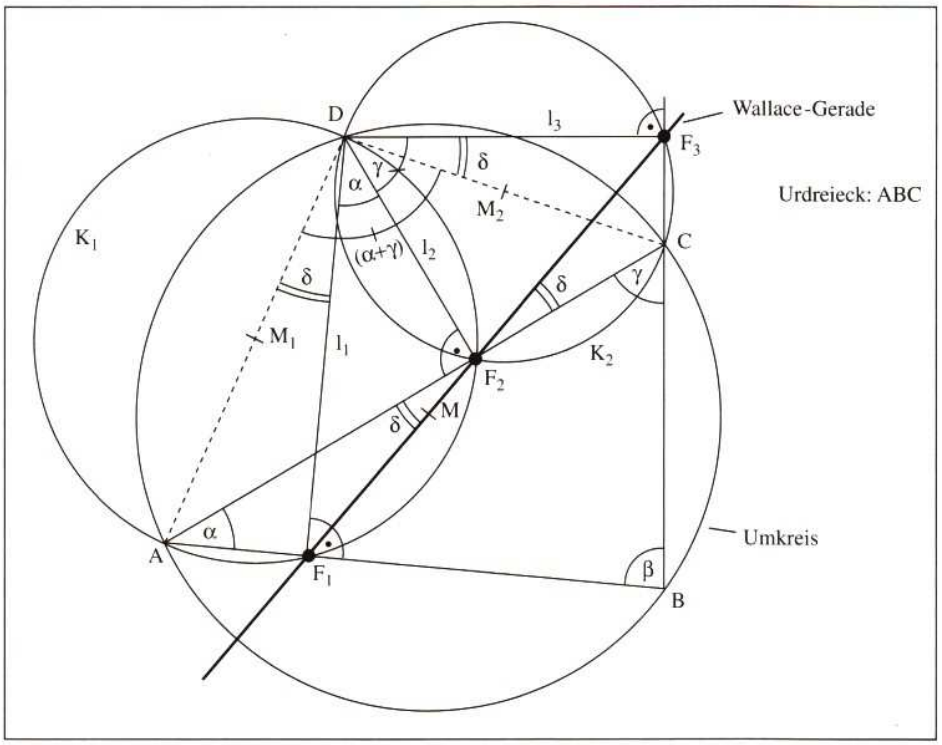


Abb. 1

Problem

Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC und (nach üblicher Konstruktion) der zugehörige Umkreis. Von einem beliebigen Punkt D des Umkreises sind die Lote l_1, l_2, l_3 auf die Begrenzungsgeraden des Dreiecks zu fällen. Die Fußpunkte F_1, F_2, F_3 der Lote liegen immer auf einer Geraden!

Seit Poncelet wird diese bis in die heutige Zeit irrtümlich als Simson-Gerade bezeichnet. In Wahrheit findet sich die *Simson-Gerade* erst bei *William Wallace* (1768 bis 1843) in einem Aufsatz aus dem Jahre 1799, wie *Mackay* 1890 in Edinburgh mitteilte. Man sollte also gerechterweise von der *Wallace-Geraden* reden. Wie kann man nun beweisen, daß die Fußpunkte F_1, F_2 und F_3 immer auf einer Geraden liegen?

Ein Beweis benutzt das Sehnenviereck und den Peripheriewinkelsatz.

Beweis (Abb. 1)

Im Sehnenviereck ABCD ist der Winkel bei D Supplement von Beta, d. h. $\alpha + \gamma$. Andererseits schließen die Lote l_1 und l_2 bei D den Winkel α ein und l_2 und l_3 bei D den Winkel γ. Ihre Schenkel stehen paarweise aufeinander senkrecht. Damit sind $\sphericalangle ADF_1$ und $\sphericalangle CDF_3$ einander gleich. Diese lassen sich als Peripheriewinkel in zwei weiteren Kreisen verstehen. Der erste hat AD als Durchmesser, auf ihm liegen nach dem Satz von Thales die Punkte F_1 und F_2. Der zweite mit dem Durchmesser DC enthält die Punkte F_2 und F_3. Über der Sehne AF_1 im 1. Kreis sind die beiden Winkel bei D und F_2 Peripheriewinkel, also gleich groß. Genau so verhält es sich über der Sehne CF_3. Wenn aber die beiden Peripheriewinkel im Punkt F_2 gleich sind, lassen sie sich andererseits als Scheitelwinkel verstehen, also liegen die Punkte F_1, F_2 und F_3 auf einer Geraden, wie wir zeigen wollten.

Aufgaben

1 Suche einen anderen Beweis für diesen Satz (Wallace-Gerade)!

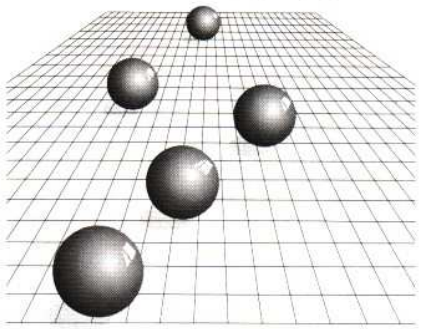
2 Kann eine Dreiecksseite (schon) selbst Wallace-Gerade sein?

3 Wann geht die Wallace-Gerade durch eine Seitenmitte des Dreiecks?

J. Buhrow

Westfalenhallen Dortmund

iNTERSCHUL LEIPZIG '93



22. - 26. 3. 1993

Messegelände · Hallen 20 und 12

Konzepte für Bildung

iNFORMATIONEN:

Die INTERSCHUL LEIPZIG ist die erste Bildungsmesse in den neuen Bundesländern. Mit Informationen zu fünf Schwerpunkten.

- Allgemeinbildendes und berufliches Schulwesen.
- Berufliche Aus- und Weiterbildung in Schule und Beruf.
- Einrichtung und Ausstattung für das Bildungswesen.
- Technik und Organisation für Ausbildung und Unterricht.
- Erwachsenenbildung.

iNHALTE:

300 Aussteller zeigen Schulbücher, Unterrichtsmedien, Ausstattungen und Organisationshilfen.
Und: Ideen und Konzepte für Schule, Aus- und Weiterbildung in der Marktwirtschaft.

iNITIATIVEN:

Die INTERSCHUL LEIPZIG braucht Ihre Initiative: Bei Fachgesprächen mit Ausstellern und mit Vertretern von Organisationen, Verbänden und Bildungsvereinen, zu den „Berufsbildungstagen Leipzig", zum Fachteil „Berufliche Qualifizierung" oder zum „Schulbuch-Forum".

iNTERESSEN:

Die INTERSCHUL LEIPZIG wendet sich an alle, die mit Unterricht und Bildung zu tun haben. Nur miteinander können neue Ideen und Konzepte für Bildung erfolgreich sein.

Darum freuen wir uns auf Ihren Besuch.

Bei der INTERSCHUL LEIPZIG.

Leipziger Messe GmbH
Postfach 720
O-7010 Leipzig
Telefon: (03 41) 2 23-0

Der längste und kürzeste Tag in Deutschland

An den Tagen der Sonnenwenden kann man in den Zeitungen lesen, daß der längste oder kürzeste Tag soundsoviel Stunden dauert. Gemeint ist damit der sog. lichte Tag, also die Zeitdauer der Sonne über dem Horizont. So ist z. B. der kürzeste Tag dieses Jahres, der 22. Dezember, 7 Stunden 40 Minuten lang. – Dies ist durchaus richtig, doch fehlt hier eine wichtige Bemerkung, nämlich, für welche geographische Breite trifft diese Angabe zu.

Wir wissen, daß die Sommertage im Norden länger als im Süden sind, bei den Wintertagen liegen die Verhältnisse umgekehrt (s. "Das Fußballspiel auf der Insel Malta", Jahrg. 23 (1989), Nr. 3). Man mag vielleicht der Ansicht sein, daß die verhältnismäßig geringe Nord-Süd-Ausdehnung von knapp 900 km in Deutschland darauf keinen Einfluß habe. Das Gegenteil ist hier der Fall, wie aus den folgenden Darlegungen hervorgeht: Der nördlichste Punkt befindet sich auf der Nordspitze der Insel Sylt: Geogr. Breite: 55° 03'.

Der südlichste Punkt liegt im Stillachtal südlich Oberstorf: Geogr. Breite: 47° 16,5'.

Daraus ergibt sich ein Breitenunterschied von 7° 46,5', der sich beträchtlich auf die Tageslängen in den Sommer- und Wintermonaten auswirkt. Die unten folgende Übersicht zeigt deutlich diese Unterschiede.

Daraus geht hervor, daß der längste Tag im Norden um 1 h 27 min länger als im Süden ist, dagegen ist der kürzeste Tag im Süden um 1 h 29 min länger. Mit anderen Worten: Was im Norden im Winter fehlt, kommt im Sommer hinzu – bzw. umgekehrt.

Ganz anders liegen die Verhältnisse an den Tagen der Tag- und Nachtgleiche (21.3. und 23.9.). Hier spielt die geographische Breite keine Rolle, von den Polen abgesehen, sind die Tage und Nächte jeweils 12 Stunden lang. Das bedeutet, daß die Licht-Schattengrenze auf unserer Erde meridional, d. h. entlang der Meridiane verläuft. Es ist daher gleich, ob man sich in Schweden, in Nordafrika oder auf dem Äquator befindet, die Sonne geht um 6 Uhr auf und um 18 Uhr unter. Die Refraktion (Strahlenbrechung) sei hier unberücksichtigt.

Je weiter man sich im Datum vom 21.3. bzw. 23.9. entfernt und sich den Sonnenwenden nähert, desto größer werden die Tageslängendifferenzen zwischen Nord und Süd. Es sei hier noch einmal auf den Verlauf der Licht-Schattengrenze auf der Erde verwiesen, die an den Sonnenwendtagen die größte Schräge aufweist und die Meridiane schneidet. Es ist überaus aufschlußreich, den Verlauf dieser Grenze einmal auf einer Landkarte zu verfolgen:

Längster Tag, 21.6.

Sonnenaufgang: Östl. Flensburg-Wismar-Neuruppin-Strausberg b. Berlin-Guben.

Sonnenuntergang: Frankfurt/Oder-Leipzig-Ochsenfurt-Stuttgart-Basel.

Kürzester Tag, 22.12.:

Sonnenaufgang: Strausberg b. Berlin-Leipzig-Coburg-Stuttgart-östl. Basel.

Sonnenuntergang: Insel Fehmarn-Rostock-Eisenhüttenstadt.

Für den Verlauf der Licht-Schattengrenze wurde das Beispiel für die Sonnenaufgänge und -untergänge im Gebiet von Berlin ausgewählt, die übrigen Linien verlaufen parallel dazu. Die hier genannten Orte liegen auf einer Linie, wo die Sonne zur gleichen Zeit auf- bzw. untergeht.

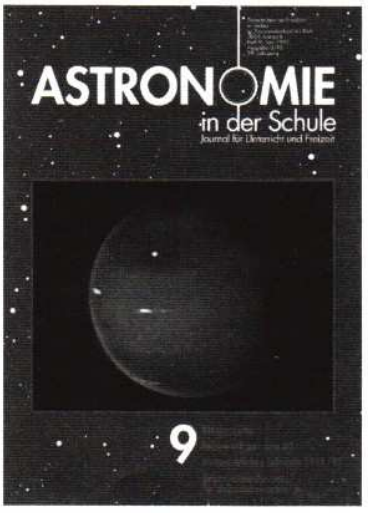
Interessant ist auch die unterschiedliche Dauer der Dämmerung, die am 21.6. im Norden 64 Minuten, im Süden dagegen nur 44 Minuten dauert. Am 22.12. dauert sie im Norden 50 Minuten, im Süden nur 39 Minuten. Auffallend sind im Sommer die hellen Nächte im Norden Deutschlands, die sogen. Mitternachtsdämmerung. Diese dauert auf Sylt vom 8. Mai bis 5. August (89 Tage), nimmt aber in Richtung Süden ab und endet bei 50° Breite (Mainz, Frankfurt/M.-Schweinfurt). Südlich von 50° sind die Sommernächte auffallend dunkel, am nördlichen Horizont ist die Aufhellung durch die Dämmerung nicht mehr zu beobachten.

Wer sich von den hier gemachten Fakten überzeugen möchte, kann sich mit einem Telefonpartner verständigen, um den Zeitpunkt des Sonnenunterganges festzustellen. Um die Ortszeitdifferenz von 4 Min. pro Längengrad auszuschalten, ist zu empfehlen, sich einen Partner zu suchen, der etwa auf demselben Längenkreis wohnt. Man sollte auch auf einen möglichst freien Horizont achten.

Arnold Zenkert

Geogr. Breite	Tagesdauer	
	Längster Tag (21.6.)	Kürzester Tag (21.12.)
55° 03' Insel Sylt	17 h 22 min	7 h 10 min
51° Köln, Erfurt	16 h 23 min	7 h 55 min
47° 16,5' Oberstdorf	15 h 55 min	8 h 29 min

Abb. 1



Eine Fundgrube für astronomisch Interessierte ist die Zeitschrift **„Astronomie + Raumfahrt".**
Ein kostenloses Probeheft ist beim Erhard Friedrich Verlag zu bestellen.

Aktion „Ausgerechnet Mathematik“

Ausstellung und Wettbewerbe in Koblenz

„Ausgerechnet Mathematik“ – der sonst nur von Kummer gewöhnten Schülern und verständnisvollen Eltern ausgestoßene Seufzer, war im Frühjahr 1991 das Motto einer äußerst ungewöhnlichen

Ausstellung im rheinland-pfälzischen Koblenz. Als Schauplatz dieser wohl einmaligen Darbietung von Mathematik diente, in der Zeit vom 2. bis 11. Mai, ein großes Einkaufszentrum in der Stadt an Rhein und Mosel. „Mathe live und zum Anfassen“ – das hat es in der Bundesrepublik in dieser Form noch nie auf einem der Schule so fernen Gelände gegeben. Dort, wo Kunden üblicherweise ihren täglichen Einkäufen nachgehen, gab es zehn Tage lang, die meist als spröde empfundene Ware Mathematik, zum Gekauften umsonst dazu.

Die Idee zu diesem seltenen Experiment, die von vielen sonst nur aus der Ferne respektvoll gegrüßte Mathematik mitten unter Kunden und Verkaufsflächen zu streuen, ging übrigens von der Vorstandsebene des Koblenzer Einkaufsriesen aus. Im Frühjahr 1990 wandte sich die Verkaufsleitung mit dem Vorschlag an die Fachschaft Mathematik des ansässigen Max-von-Laue Gymnasiums, doch einmal auszuprobieren, wie sich ihr Schulfach innerhalb einer Einkaufs-Center-Aktion verkaufen ließe. Die Mathe-Lehrer mußten nicht lange gebeten werden. Schon bald fand sich eine Crew aus Kollegen und Schülern des Gymnasiums um den unermüdlichen Antreiber, StD Dietrich Lissautzki. Ein ganzes Jahr dauerte die Vorbereitungsphase, währte der Kampf der über 40 mathebesessenen Pennäler mit Fourier-Transformationen, Vektorräumen und übergroßen Wurzelzeichen. Projektleiter Lissautzki bereist die halbe Republik, überredete Behörden, überzeugte Firmen, an dieser Großaktion mitzuwirken. Er klapperte Museen und Universitäten ab, bis er schließlich genügend Schaustücke und Angebote beisammenhatte, um das Thema „Mathematik“ durchsichtiger zu machen. „Meine Telefonrechnung stieg damals auf ein globales Maximum“, atmet Studiendirektor Lissautzki heute noch kurz durch, zumal er so nebenbei auch noch den Job des regionalen Fachberaters für Mathematik ausübt(e).

Als Ergebnis dieser vielen Mühen ist daraus ein mathematisches Menü für jedermann entstanden, das neben den Denkmuskeln auch alle Sinne muntermachte. Es gibt keinen besseren Ort als die vertraute Einkaufsstätte, um dem Normalbürger die Berührungsängste zu nehmen, die ihn bei dem Gedanken an die Mathematik beschleichen. „Diese Sorgen zu vertreiben, dazu muß die Schule in die Welt des einfachen Bürgers kommen. Mehr wollten wir nicht bezwecken und es ist uns ganz gut gelungen“, meint StD D. Lissautzki rückblickend, der übrigens schon wieder ein neues Betätigungsfeld für sich entdeckt hat. Er gehört nun dem Organisationskomitee des Wettbewerbs Mathematik Rheinland-Pfalz an.

Die munteren Zahlenspiele im Koblenzer Einkaufszentrum haben auch ihr Echo in der Öffentlichkeit gefunden. „Mit uns können Sie rechnen!“ meldeten die Zeitungen. Sogar dem Regionalfernsehen des Südwestfunks war die Mathe-Show einen Filmbericht wert. Da wollte auch Kultusminister Dr. Georg Gölter nicht abseits stehen, obwohl er sich wenige Wochen zuvor noch bei der Landtagswahl schwer verrechnet hatte. Trotz verlorener Wahl besuchte er als Schirmherr die Ausstellung. Bei seinem Rundgang durch die Sammlung lag der Politiker zur Freude vieler (jüngerer) Ausstellungsgäste wieder knapp daneben, so als er die Zahl der Zwischenräume auf einer Allee mit 119 Bäumen auf 120 schätzte. (Ihr kennt sicher die richtige Antwort, oder?). Nicht minder belustigt war das Publikum von der *menschlichen* Seite der Zahlenwelt. Auf ihrem Einkaufsbummel erfuhren die Neugierigen auf Schautafeln, warum es in Dortmund mindestens zwei Einwohner mit genau gleich vielen Haaren auf dem Kopf geben muß (siehe Aufgabe 1). Oder die Besucher konnten mit einem präparierten Würfel, dem gesunden Men-

Abb. 1: Dr. Georg Gölter (damaliger) Kultusminister von Rheinland-Pfalz in der Schulbank neben Projektleiter D. Lissautzki und (stehend) Center-Manager H.-J. Ebel.

Abb. 2: Eine von 18 Schautafeln (Restaurant „Pythagoras" in der Koblenzer Altstadt

schenverstand völlig zuwider, gewinnen. An anderer Stelle vergnügten sich Spielernaturen an einem Original-Roulettetisch aus der Spielbank in Bad Neuenahr – nur die Spielchips waren, wenig stilecht, aus Kartoffeln hergestellt!

Wer schon immer einmal als Turnierleiter seines Tennisclubs eine Stadtmeisterschaft durchführen wollte, der hatte dazu Gelegenheit. Dazu mußte er nur wissen, wieviele Einzelspiele im K.O.-System bei 60 Teilnehmern insgesamt notwendig wären. Wer von euch kennt die Antwort? Als Fußballfans wißt ihr natürlich, daß der Lederkugel ein Ikosaeder-Muster zugrunde liegt. Aber wem ist wohl bekannt, daß der 20. Präsident der Vereinigten Staaten, James Garfield (4.3. – 19.9.1881), zusammen mit einigen seiner republikanischen Kongreßfreunde einen überraschend einfachen Beweis für den Satz von Pythagoras gefunden hatte.

In einer anderen Abteilung konnte, wer wollte, „spielend denken" lernen. Neben den üblichen Knobeleien aus der Unterhaltungsmathematik (Spiele mit Riesenstreichhölzern, Kartentricks) verwirrten Möbiusbänder zahlreiche Wettgruppen, gab das NIM-Spiel sein mathematisches Geheimnis preis und verzauberte ein Zahlenmagier sein Publikum. Wem diese Mixtur noch nicht genügte, der erhielt Gelegenheit, sich bei „Mathe zum Anfassen" zu bewähren. Mittels einer Pi-Maschine kam man dann der Kreiszahl π durch hemmungsloses Füttern mit Kugeln auf die Schliche. Daneben entwickelte Prof. Dr. A. Beutelspacher von der Universität Gießen in einem Workshop für jugendliche Verschlüsselungsfanatiker, Geheimcodes.

Mit Mozart Mut zu Mathe machen

Großen Zulauf erfuhr zweifellos im Mozartjahr 1991 ein Beitrag des Musikus zur Mathematik. Das „Wolferl" kam nämlich auf die Idee eines Kompositionsspiels. Hierzu ersann er eine Methode, 176 Takte würfelnd beliebig aneinanderzureihen, um damit eine harmonische Melodie im Dreivierteltakt zu bilden. Insgesamt 46 Milliarden Musikstücke hätten unermüdliche Hobbymusiker auf diese Weise durchprobieren können. Um alle Klangmuster auszuspielen, würden 437 Milliarden Jahre gerade ausreichen.

Wem der Sinn aber nach Theater stand, der war bei Mathematik auf der Bühne gut aufgehoben. Dort konnte er dann miterleben, wie eine Mathestunde in den USA oder in Frankreich abläuft. Zur Erholung spielte man anschließend Tangram und Solitär. Ein ganzes Lichthofteil des Einkaufkomplexes war der „Schönheit der Mathematik" vorbehalten. Das Siemens-Museum in München stellte dort vor allem Computergraphik vor. Zudem haben ganztätig Videofilme aus der Spektrum-Videothek mit ihrer dreidimensionalen Farbenpracht („Dynamisches Chaos", „Fraktale Geometrie") nicht nur Laien in ihren Bann gezogen. Neben den spektakulären Ergebnissen moderner Mathematik bestanden aber auch historische Zeitzeugen aus den Anfängen der Mathematik unter den Augen der Besucher. Ein Nachdruck des ersten Rechenbuchs von Adam Ries oder bahnbrechende Originalveröffentlichungen von Leibniz, Euler und Gauß gab es zu bestaunen. Sogar die erste Rechenmaschine der Welt von 1623 haben die Koblenzer Aussteller herangeschafft, zusammen mit dem Vorläufer moderner Rechenhilfen, den der deutsch-amerikanische Wissenschaftler und Tüftler, Konrad Zuse, 1941 entwickelt hatte.

Wer immer noch nicht genug hatte von den vielen Angeboten der Ausstellung, der durfte ein Denksport-Brevier mit 20

Abb. 3: Nachbau der ältesten Rechenmaschine der Welt von Prof. W. Schickard, Tübingen (1653)

Abb. 4: Eine von 18 Schautafeln (Testaurant „Pythagoras" vin der Koblenzer Altstadt

Abb. 5: Mozart´s Würfelwalzer zur Eröffnung der Ausstellung

Aufgaben (aus dem Alltagsleben) mit nach Hause nehmen. Ihm sind die folgenden drei Beispiele entnommen, damit auch ihr etwas zum Knobeln habt.

1) **Dortmund hat mehr als 540 000 Einwohner. Man weiß, daß der Mensch weniger als 540 000 Haare auf dem Kopf hat. Gibt es in Dortmund mit Sicherheit *mindestens zwei Bürger* mit gleich viel Haaren auf dem Kopf?**
2) **Eine Flasche Wein kostet 10 DM. Der Wein selbst kostet 9 DM mehr als die (leere) Flasche. Wie teuer ist die Flasche?**
3) **Bei Einberufung zu Reserve-Übungen der Bundeswehr hat man im allgemeinen mit 40 % Ausfällen zu rechnen. Dies führte den Inspektor des Heeres zu der naheliegenden (?) Anweisung, dann müsse man „eben 140 % anfordern".**

Hättet ihr das auch getan?

Denksport in einem Einkaufszentrum

Die wohl ungewöhnlichsten Einzelaktionen innerhalb des Gesamtprojekts waren zwei mathematische Denksportwettbewerbe an zwei verschiedenen Vormittagen im Foyer des Centers. Dabei kämpften jeweils 4 Schüler der Klassenstufen 5 und 6 bzw. 7 bis 10 aus verschiedenen Koblenzer Schüler um den Titel des beeten Rateteams. Aus dem Rahmen fiel dieser Programmteil deshalb, weil er während eines regen Publikumverkehrs stattfand.

Die Wettkämpfer selbst zerstreuten eindrucksvoll alle Bedenken, ob in solch unruhiger Umgebung überhaupt anspruchsvolle Aufgaben gelöst werden können. Eifer und Konzentration jedoch hielten über die gesamte Wettkampfdauer (eine Stunde) an.

Die Problem(chen) zusammengestellt hat Dieter Bennewitz, ebenfalls Mathelehrer am Max-von-Laue Gymnasium und selbst – wie er gern von sich sagt – „ein süchtiger Problemlöser".

Leider konnte Quizmaster Bennewitz seine Begeisterung für Matheprobleme nicht auf die Umstehenden übertragen. „Denksport ist eben kein Zuschauersport, man muß es schon selbst tun", behauptet er. Dazu sollt ihr jetzt Gelegenheit bekommen. Ich habe 7 Beispiele aus der Koblenzer Raterunde für euch ausgewählt. In den Klammern steht die jeweilige Klassenstufe.

4) **Das Produkt der Alter von 3 Kindern beträgt 1664. Das jüngste Kind ist mindestens halb so alt wie das älteste. Der Vater ist 50 Jahre alt. Wie alt sind die Kinder? (5 – 6)**
5) **Wie viele Zahlen zwischen 1 und 100 gibt es, bei deren Primfaktorzerlegung die Zahl 7 der kleinste Primfaktor ist? (5 – 6)**
6) **Der Mittelwert einer Menge von 50 Zahlen ist 38. Wenn zwei Zahlen, nämlich 45 und 55, weggelassen werden, berechne für diesen Fall den Mittelwert der übrigen Zahlen (7 – 10).**
7) **Die Summe aus einer zweiziffrigen Zahl und der Zahl, die man bei Vertauschung der Ziffern erhält, ist eine Quadratzahl. Wie viele solcher Zahlen gibt es? (7 – 10)**
8) **In einer Schublade liegen 28 Taschentücher, 6 sind rot, 5 sind blau und der Rest ist weiß. Wenn Thomas blind ein Taschentuch aus der Schublade zieht, wie viele Taschentücher muß er dann mindestens aus dem Fach ziehen, damit er mit Sicherheit 3 Taschentücher der *gleichen* Farbe hat? (9 – 10)**
9) **Berechne die Summe**

$$\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

Es ergibt sich eine ganze Zahl! (9 – 10)

Übrigens: Zur Verblüffung vieler Anwesender erreichte eine zehnte Hauptschulklasse den ersten Platz. Sie bestand dabei gegen vier Gymnasien und eine Realschule. Das beste gymnasiale Rateteam (aus der Wettkampfgruppe 7 – 10) bildeten drei Mädchen (darunter zwei Töchter des Ministerpräsidenten von Rheinland-Pfalz) und ein Junge. Mädchen können Mathematik, wenn man sie nur läßt!

Paul Jainta

Lösungen

Zeitungsschnipsel

Der Gummihandschuh
Lösung: Der rechte Gummihandschuh kann auch über die linke Hand gestülpt werden, nachdem dieser gewendet ist. Das Wenden ist möglich, weil der Gummihandschuh sich beim Wenden verformt und auch nach dem Wenden verformt bleibt. Denn nach dem Wenden ist der äußere Teil des Handschuhs zum inneren geworden und umgekehrt.
Bemerkung: Ein rechter Gummihandschuh wird durch eine räumliche Spiegelung an einer Ebene auf einen linken abgebildet. Es ist jedoch unmöglich, einen unsymmetrischen Körper wie einen Gummihandschuh durch Verschieben oder Drehen im Raum mit seinem Spiegelbild in Deckung zu bringen.

Ein Riesenhühnerei
Lösung: Unter der Annahme, das Riesenei sei zu einem Normalei in Form und Stoffverteilung ähnlich, ist die gesuchte Länge

$$14,5cm \cdot \sqrt[3]{3} \approx 20,9cm$$

Die Insel
Lösung: Dann wäre die Fläche von Libitz

$$A = \frac{u^2}{4\pi} = 41,1\,ha$$

groß. Sie wäre dann um

$$\frac{A - 41\,ha}{41\,ha} \cdot 100\% = 2,7\%$$

größer.

Der Generationenvertrag

Lösung: Ein Berufstätiger zahlt jährlich 1209 DM = $3 \cdot 13 \cdot 31$ DM mehr an die Krankenversicherung als er Leistungen von ihr erhält.
Ein Rentner erhält jährlich für 3312 DM = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 23$ DM Leistungen mehr, als seine Beiträge abdecken. Das k.g.V. von 1209 und 3312 ist $2^4 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 31 = 1334736$. Hieraus folgt $m = 13 \cdot 31 = 403$, $n = 2^4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 23 = 1104$
und m:n = 403 : 1104.
Bemerkung: Die Erfüllung dieses „Generationenvertrages" fällt in einem Land mit überalterter Bevölkerung schwer.

Die Zinsabschlagsteuer

1.) Würden die Festgeldzinsen des B 6100,02 DM oder mehr betragen, so hätte er 0,01 DM oder mehr Zinsabschlagsteuer zu entrichten. Denn bereits

$$0,02\text{DM} \cdot \frac{30\%}{100\%} = 0,006\text{DM}$$

würde die Bank zu 0,01 DM Zinsabschlagsteuer aufrunden. Hingegen wäre für 6100,01 DM Festgeldzinsen wegen

$$0,01\text{DM} \cdot \frac{30\%}{100\%} = 0,003\text{DM} \approx 0,00\text{DM}$$

keine Zinsabschlagsteuer abzuziehen. Die noch nicht auf volle Pfennige gerundeten Festgeldzinsen des B müssen also kleiner als 6100,015 DM sein. Aus

$$G \cdot \frac{7,75\%}{100\%} < 6100,015\text{DM}$$

folgt

$$G < 6100,015\text{DM} \cdot \frac{100\%}{7,75\%}$$

$$= 78709,8709..\text{DM}$$

und damit G ≤ 78709,87 DM.
2.) Jahreszinsen:

$$300000\text{DM} \cdot \frac{7,75\%}{100\%} = 23250\text{DM}$$

Zinsabschlagsteuer:

$$(23250 - 6100)\text{DM} \cdot \frac{30\%}{100\%} = 5145\text{DM}$$

Restzinsen:
(23250 – 5145) DM = 18105 DM
gesuchter Prozentsatz:

$$\frac{18105\text{DM}}{300000\text{DM}} \cdot 100\% = 6,035\%$$

Bemerkung: Wird das Festgeldguthaben immer größer angenommen, so strebt der Prozentsatz der Restzinsen vom Guthaben G beim Zinssatz p = 7,75 % gegen den Grenzwert

$$\frac{70\%}{100\%} \cdot p = \frac{7}{10} \cdot 7,75\% = 5,425\%.$$

Postleitzahlen

Gleichfarbig sind jeweils gefärbt die Gebiete mit den ersten Ziffern der neuen Postleitzahlen 0, 2, 6 und 8, 1, 4 und 9 sowie 3,5 und 7.
W. Träger, Döbeln

Export und Bruttosozialprodukt

$$\text{a)}\ 11359 \cdot \frac{100\%}{57\%} = 2,0 \cdot 10^4$$

$$\text{b)}\ 1677 \cdot \frac{100\%}{8\%} = 2 \cdot 10^4$$

Schachecke

1. Sc3 d6
2. Sd5 Sd7
3. S:e7 Sdf6
4. S:g8 S:g8.

Sprachecke

Ziel: Gleichheit!
Setzt die fehlenden Zeichen (+, -, · oder :) in die vorgegebenen mathematischen Gleichungen ein, so daß wahre Aussagen entstehen!
Lösungen:
1. 16 – 13 + 16 · 6 = 99
2. 6 · 15 + 7 – 13 = 84
3. 17 – 1 + 14 · 3 = 58
4. 3 – 18 : 3 + 14 = 11
5. 5 + 4 · 14 – 16 = 45
Übersetzung: Peter Hofmann

Найдите таки два числа что при умножении первого на 2 получится квадрат второго а при умножении первого на 3 – куб второго

Findet zwei solche Zahlen, daß bei Multiplikation der ersten mit 2 das Quadrat der zweiten entsteht und bei Multiplikation der ersten mit 3 die 3. Potenz der zweiten.

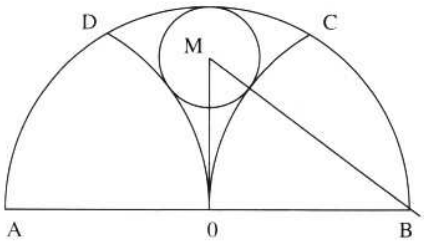
Lösung
Es sei x die erste der gesuchten Zahlen, y die zweite. Laut Aufgabe gilt dann
$2x = y^2$ und $3x = y^3$
woraus wir das Gleichungssystem
($2x = y^2$
(
($3x = 2xy$
folgern. Es wird erfüllt, wenn

$x = y = 0$ oder

$x = \frac{9}{8}$ und $y = \frac{3}{2}$ ist.

Finde den Radius

Die Zeichnung zeigt einen Halbkreis mit dem Mittelpunkt O und dem Durchmesser AB = 2R.
Wir zeichnen die Bögen OC und OD mit den Radien AO = OB = R und den Mittelpunkten A und B ein.
Dann zeichnen wir einen Kreis, welcher den Halbkreis und jeden der zwei Bögen berührt.
Frage: Finde den Radius des kleinen Kreises.
Hinweis: Nutze den Satz: Eine Strecke, welche die Mittelpunkte zweier sich berührender Kreise verbindet, geht durch den Berührungspunkt.
Lösung: x sei der Radius und M der Mittelpunkt des Kreises.



Dann geht die Linie BM durch den Berührungspunkt.
Das Dreieck OMB ist rechtwinklig mit:
OB = R
OM = R – x
BM = R + x

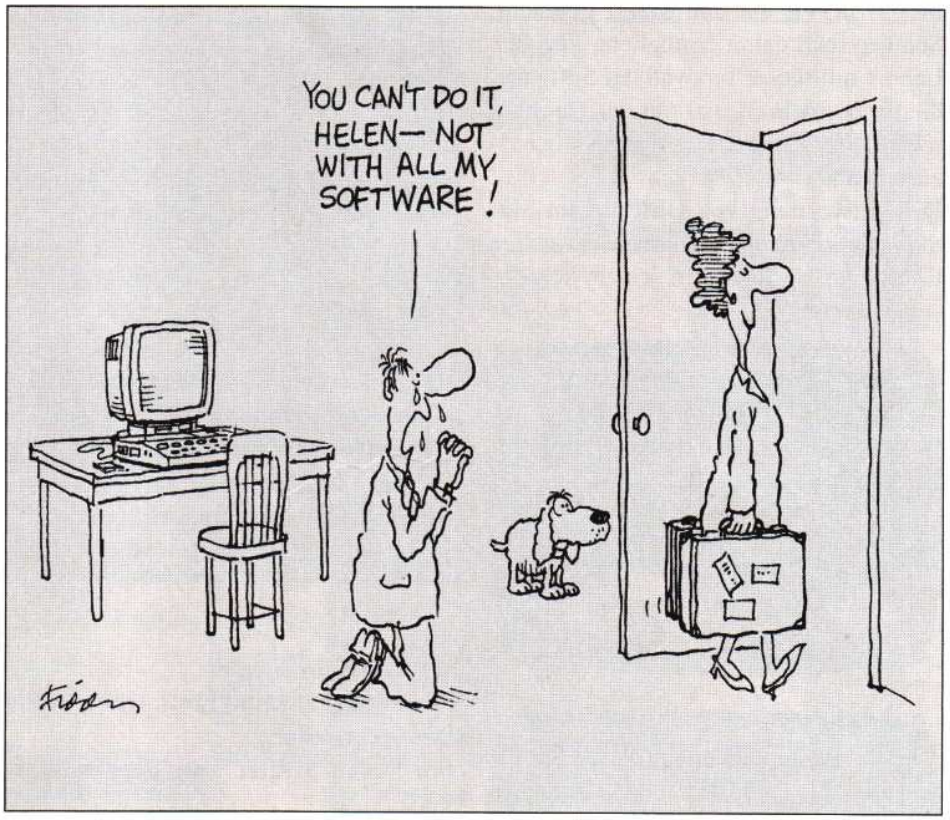
Es gilt: $BM^2 = OM^2 + OB^2$
$(R + x)^2 = (R - x)^2 + R^2$

Daraus folgt: $x = \frac{R}{4}$

G. Liebau

Würfelstapelei

1. b besteht aus 26 Würfeln, a, d, e aus 27 und c aus 28 Würfeln und kann deswegen als einzige Figur nicht von Lars gebaut werden.
2. a) mindestens 24, höchstens 28
   b) mindestens 223, höchstens 247
   c) mindestens 24, höchstens 31
3. Zwei Einheiten sind völlig ummauert.
4. 22 Klötze
5. a) 52 Kästen b) 54 Kästen



alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett und in Verbindung mit Dr. Gabriele Liebau, Dr. Claus Peter Helmholtz und Herbert Kästner.

Redaktion:
Jürgen Ricke, Tel.: (05 11) 4 00 04-42
Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6
Redaktionskollegium:
StR F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), OL Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pliezhausen), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OStR J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. W. Schmidt (Greifswald), OStR G. Schulze (Herzberg), W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

Anzeigenleitung: Bernd Schrader
Anzeigenabwicklung:
Telefon: (05 11) 4 00 04-23
Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01. 01. 1990
Vertrieb und Abonnement:
Telefon: (05 11) 4 00 04-50
Verlag:
Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG,
Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6
Telefon: (05 11) 4 00 04-0
Telefax: 4 00 04-19
Das Jahresabonnement für **alpha** besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt 12,90 DM, im Einzelbezug 3,00 DM. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten.
Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).

alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV KlettCotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, DH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.
© Beiträge sind urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte vorbehalten. Auch unverlangt eingesandte Manuskripte werden sorgfältig geprüft. Unverlangt eingesandte Bücher werden nicht zurückgeschickt. Die als Arbeitsblatt oder Kopiervorlage bezeichneten Unterrichtsmittel dürfen bis zur Klassen- bzw. Kursstärke vervielfältigt werden.

Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschriften im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.

Herstellung: PZ Pädagogika Zentrale GmbH
Gestaltung: Jens Hinzmann
Druck: Druckerei Schröer, Seelze
ISBN 3-617- 34013-X

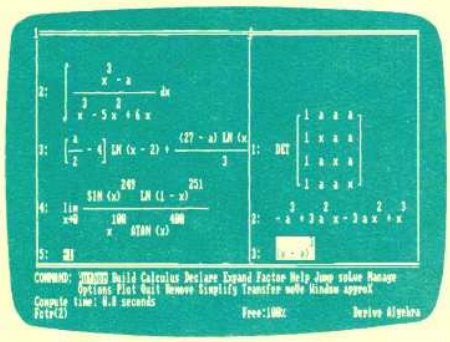
Marktecke

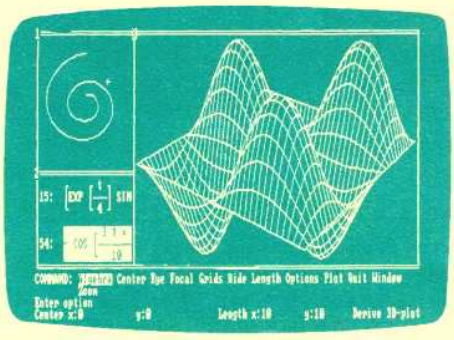
Derive

A mathematical Assistant

Damit Mathematikunterricht in der Schule Spaß machen kann, hat die hawaiianische Firma Soft Warehouse, Inc. School Lab Packs ihres PC-Programmes DERIVE auf den Markt gebracht. Schulen wird damit ermöglicht, ihre PC-Labors mit dieser innovativen Software, die für Formeln das ist, was der Taschenrechner für Zahlen ist, kostengünstig auszustatten.

Die Verwendung von DERIVE im Mathematikunterricht eröffnet die einmalige Chance, dieses Fach von seinem Schrek-





ken zu befreien und die Qualität des Unterrichtes entscheidend zu verbessern. In Österreich hat man sich bereits zu einem flächendeckenden Einsatz an allen Gymnasien und Höheren Technischen Lehranstalten entschlossen.

Der neue Lizenztyp wird ausschließlich über „Educational Specialist Dealers" vertrieben. Nähere Informationen und ein Verzeichnis aller „Educational Specialist Dealers" sind erhältlich bei: **Soft Warehouse GmbH Europe, Softwarepark Hagenberg, A-4232 Hagenberg, Tel. +43-7236-3297-81, Fax +43-7236-3769.**

Symmetrien, Ornamente, Kreisteilungen und Kreisketten

Hierzu seien zwei empfehlenswerte Bücher vorgestellt:

Das häufige Vorkommen der Symmetrie in der Natur hat zur Folge, daß der Mensch symmetrische Formen als wohltuend, als harmonisch empfindet. So war schon im Altertum die Schönheit an Symmetrie gebunden. Und betrachtet man die Bauten, den Schmuck und die Kleidung der Menschen über die Jahrhunderte, fallen immer wieder vielseitige Symmetrien auf. Vielfältige Beispiele solcher Symmetrien und die mathematische Interpretation dieser Strukturen findet Ihr in einem empfehlenswerten Büchlein der Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig:

Flachsmeyer/Feiste/Manteuffel
Mathematik und ornamentale Kunstformen
ISBN 3-332-00679-4
Mathematische Schülerbücherei Nr. 148

Aufwendig gestaltet und mit zahlreichen Beispielen ausgestattet ist das Buch von Harry Blaser (vgl. hierzu auch den Beitrag auf Seite 28).

Verlag Paul Haupt
ISBN 3-258-04206-3

MS-Word für Kinder
Eine unterhaltsame Einführung in die Textverarbeitung
von Susan Müller und Verena Weigand
1992.
185 Seiten. Kartoniert DM 12,80
ISBN: 3 406 36817 4
Beck EDV-Berater im dtv, Band 50114

Kindern im Alter von etwa 10 bis 14 Jahren eine sinnvolle Beschäftigung mit dem Arbeitsmittel Computer auf unterhaltsame und altersgemäße Weise nahezubringen, ist das Ziel dieses Buches. Aufgrund seiner weiten Verbreitung wurde das Textverarbeitungsprogramm MS-Word 5.5 gewählt. Anhand einer Einladung zur Faschingsparty, eines Tagebuchs oder eines Adressenverzeichnisses der Freunde lernt der jugendliche Anwender spielend, das Programm angemessen zu bedienen und für seine privaten und schulischen Zwecke effektiv einzusetzen. Die Autorinnen sind als Leiterin eines Schülertagesheimes und als Erzieherin pädagogisch besonders erfahren.

Erste Schritte am PC
Funktionsweise und Bedienung des Personal Computer
von Klaus-Peter Körner
1992.
327 Seiten. Kartoniert DM 19,80
ISBN: 3 406 36816 6
Beck EDV-Berater im dtv, Band 50117

Wer hat eigentlich den Computer erfunden? – Kann man eine mechanische Rechenmaschine bereits „Computer" nennen? Das vorliegende Buch geht vom historischen Hintergrund aus und zeigt die Entwicklung von den Anfängen bis zu den modernsten Rechnern. Ganz nebenbei wird der Leser auch in deren Funktionsweise und Bedienung eingeführt:
Dieser Band erklärt den Aufbau des PC und seiner Zusatzgeräte. Anschaulich wird deren Funktionsweise und Bedienung beschrieben. Dabei werden ebenso grundlegende Befehle des Betriebssystems MS-DOS, wie auch Fragen zum Anlegen von Verzeichnissen und der Handhabung von Festplatte und Disketten erläutert.

ISBN 3-617-34013-X Einzelpreis: 3,– DM Einzelpreis im Abo: 2,15 DM

H 11328 F

Heft 2
April 1993
27. Jahrgang

Pädagogische
Zeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

Alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Logische Abenteuer im „Castle of Dr. Brain"

Taschenrechner zu gewinnen im alpha-Preisausschreiben 2

Buchempfehlung „Kraft & Bewegung"

Leserbriefe

Sehr geehrte Damen und Herren,
als kleinen Nachtrag zu dem Thema: „Mathematische Spielereien mit der Jahreszahl 1993" übersende ich Ihnen – völlig unabhängig von Ihren Ergebnissen – folgende Lösungen eines Mathematik Leistungsfach Kurses der 12.Jahrgangsstufen und ihres Lehrers:

1. $1 + 99 + 3 = 1 + 9 + 93$
2. $1^{993} = 1 + (9 - 9) \cdot 3$
3. $\sqrt{199 - 3} = -1 + 9 + 9 - 3$
4. $\int_{1+9}^{9+3} x\,dx = 1 + 9 + 9 + 3$
5. $\int_{1}^{9} x\,dx + \int_{9}^{3} x\,dx = 1 - 9 + 9 + 3$
6. $\int_{0}^{1+9+9+3} x\,dx = -1 + 9 \cdot 9 \cdot 3$
7. Die quadrat. Gleichung
$x^2 - (1 + 9 + 9 + 3)\,x + (1 + 9) \cdot (9 + 3) = 0$
hat die Lösung $x_1 = 1 + 9$ und $x_2 = 9 + 3$.

Th. Schüßler, M. Orth, D. Schroft, Th. Hach, OStR M. Seeger

Betrifft: „Ein seltsamer Beweis" in alpha 4/92, S. 21
Leider ist mir erst vor kurzem dieser Beitrag aufgefallen: vorsichtig geworden durch ähnliche „Beweise" war mir ziemlich schnell klar, daß der Fehler in der Zeichengenauigkeit liegen mußte. Dies hat sich dann auch bestätigt: es zeigt sich, daß ∢ (ADM) in diesem Dreieck kein Innenwinkel ist, sondern ein Außenwinkel. Interessant in diesem Zusammenhang erschien mir aber, daß eine Rechnung zeigte, daß ∢ (CDM) genau (?) 85° zu sein schien. Es läßt sich zeigen, daß stets

$\sphericalangle(CDM) = 90° - \frac{\alpha}{2}$ ist, wenn ∢ (CDA) $= 90° + \alpha$ ist. Ist dies eine Zusatzaufgabe wert oder bereits bekannt?

Aufgaben dieser Art beleben häufig den ansonsten manchmal recht trockenen Unterrichtsalltag, daher kann es gar nicht genügend davon geben. Vielleicht ist der alpha-Redaktion folgendes Problem schon längst bekannt: Für welche Einsetzungen von $n \in \mathbb{N}$ stellt $n^4 + 4$ eine Primzahl dar?

$n^4 + 4 = n^4 + 4 \cdot n^2 + 4 - 4 \cdot n^2$
$= (n^2 + 2)^2 - 4 \cdot n^2$
$= (n^2 + 2 - 2n) \cdot (n^2 + 2 + 2 \cdot n)$
Der Term ist genau dann prim, wenn genau einer der beiden Faktoren den Wert 1 hat. Dies ist nur für $n = 1$ (oder $n = 1 \notin \mathbb{N}$) der Fall. Ich muß natürlich zugeben, daß ich diese Aufgabe auch „nur" gefunden habe beim Besuch einer Vorlesung mit meinem Mathematik-Kurs.

P. Garrecht

Ihrer freundlichen Anforderung von Leserpost im Heft 3/92 auf S. 2 komme ich gern nach, zumal es dazu einen ernsten mathematischen Anlaß gibt. Im Bericht über den Essener Mathematikwettbewerb wird in Heft 3/92 auf S. 31 mehrfach ein „Beweisverfahren" durchgeführt, was gar keinen Beweis darstellt und welches ich leider sogar schon in Lehrbüchern aus den Altbundesländern gefunden habe. Ausgegangen wird von der „Behauptung" und mit dem „Äquivalenzzeichen" auf weitere Aussagen aus dieser geschlossen bis eine offensichtlich wahre Aussage entstanden ist. So kommt es S. 31 in Spalte 1 am Ende der Lösung der 1. Aufgabe und auch am Ende der Lösung der 2. Aufgabe zur Angabe von „q. e. d." (quod erat demonstrandum = was zu beweisen war) unsinniger Weise hinter einer Identität, die ja bestimmt nicht zu beweisen war. Von dieser zweiten mathematischen Todsünde (nächst der Division durch Null) habe ich „junge Mathematiker" früher immer schnell befreit durch folgendes Beispiel: Beh.: $2 = 3$
Bew.:
Wir gehen aus von der Behauptung $2 = 3$. Auf Grund der Symmetrie der Gleichheitsrelation (Seiten einer Gleichung dürfen vertauscht werden) ist die folgende Aussage äquivalent $3=2$
Wegen der Monotonie der Addition (Gleiches zu Gleichem gibt Gleiches) entsteht die zu diesen beiden äquivalente Aussage $5 = 5$.
Da dies offensichtlich eine „wahre" Aussage ist, wurde der Beweis erbracht von $2 = 3$ q. e. d. Im Übrigen wird in jenem Beitrag mit der „Äquivalenz" recht sorglos umgegangen. So werden in der dritten Spalte im „Beweis" die Aussagen

$k + 0,5 > \sqrt{k(k+1)}$

und $k^2 + k + 0,25 > k^2 + k$ als äquivalent bezeichnet, obwohl für $k = -3$ die erste eine falsche die zweite aber eine wahre Aussage ist. Und es werden in der 3. Spalte von S. 31 unter „bzw." als äquivalent bezeichnet die Aussagen

$\sqrt{k(k+1)} > k - 0,5$

und $k^2 + k > k^2 - k + 0,25$ obwohl die erste etwa für $k = -3$ eine wahre und die zweite eine falsche Aussage ist. Erst die Beschränkung auf positive natürliche Zahlen garantiert Äquivalenz, was an einer solchen Stelle aber erwähnt werden muß. Sogar die Aufgabenstellung ist deshalb nicht korrekt, denn für $n = 0$ ergibt sich Null, was aber eine Quadratzahl ist.
Um den jungen Mathematikern in Essen und anderen schnell zu helfen, schlage ich die Veröffentlichung folgender Anleitung vor.
Zum Führen eines (direkten) Beweises.
Ausgegangen wird von einer gesicherten Aussage. Diese kann sein eine Identität wie $5 = 5$, ein Grundgesetz wie $a + b = b + a$, eine ausdrücklich genannte oder sich von selbst verstehende Voraussetzung oder eine bereits früher bewiesene Aussage. Nun wird durch logische Schlüsse, Implikationen (Folgerungen), Umformungen die Aussage der Behauptung angestrebt. Ist dies gelungen, kann dahinter „q. e. d." gesetzt werden. Freilich wird der Beweisungeübte fragen, woher soll ich wissen, von welcher „gesicherten Aussage" habe ich im Einzelfalle auszugehen? Hier hilft eine Vorüberlegung, eine „Analysis", die mit diesem Wort angekündigt wird.
Hierbei wird von der Behauptung ausgegangen und diese solange umgeformt, bis eine als wahr zu erkennende Aussage entsteht.
Diese ist dann die gesuchte „gesicherte Aussage". Schreibfaule glauben nun zuweilen, auf die Notation des eigentlichen Beweises verzichten zu können. Die Analysis kann aber nur dann als Beweis anerkannt werden, wenn sie mit folgenden „überprüftem" Text schließt: „Jede einzelne Schlußfolgerung kann auch in umgekehrter Richtung durchgeführt werden, so daß von der gesicherten Aussage .... auf die Behauptung .... geschlossen werden kann. q. e. d." Ob dadurch Schreibarbeit eingespart wurde, mag jeder für sich entscheiden.
Kein Lernender darf nun aber bedrückt sein, wenn ihm trotz Beherzigung vorstehender allgemeiner Anleitung das Beweisen nicht leicht fällt, denn gerade beim Beweisen gilt: „Übung macht den Meister".

H.-D. Schwabe

Inhaltsverzeichnis

Leserbriefe 2

Die Resonanz auf alpha ist erfreulich. Wir freuen uns auch weiterhin auf Eure Post.

Zeitungsschnipsel 4

Wie immer eine bunte Mischung mit Informationen und Aufgaben u. a. zum Völkerschlachtdenkmal, Ötzi, Napoleon, dem Schiefen Turm und dem kalten Geysir.

Rechenoperationen gesucht 6

Die Lösung ist bekannt – aber welche Rechenoperation führt zum Ziel, fragt *Theodor Scholl*.

Das wird Folgen haben 7

Jochen Kreusch stellt Aufgaben, wie mathematische Folgen „folge-richtig" fortzusetzen sind.

alpha-Preisausschreiben 2 8

Nach dem großen Erfolg mit sehr vielen Einsendungen folgt hier eine weitere Aufgabe. Zu gewinnen gibt es wieder zwei Taschenrechner von Texas Instruments.

Impressum 8

Alphons logische Abenteuer 9

Gedanken von *Prof. Kreiser* über die Rückkehr der Untoten...

Stimmt hier etwas nicht? 10

An gleich langen Tagen müßte die Sonne zur gleichen Zeit auf- und untergehen. *Arnold Zenkert* berichtet über den „Störenfried" Zeitgleichung.

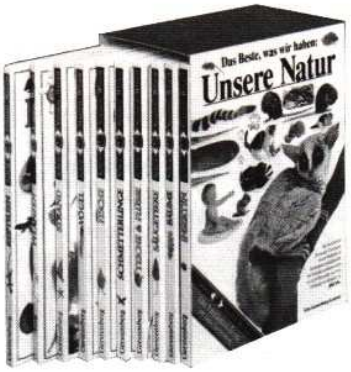
Der Völlersche Satz 11

Dieter Bauke beweist diesen Satz für den Spezialfall des Kreises.

alpha-Wettbewerb 2/93 12

Der zweite Teil bringt wieder zahlreiche Aufgaben für alle Altersstufen. Für die Zusammenstellung bedanken wir uns bei *Dr. W. Fregin, Dr. W. Riehl* und *OStR Th. Scholl*.

Preise im alpha-Wettbewerb 16



Auch diesmal haben uns Firmen zahlreiche lukrative Preise gestiftet – herzlichen Dank.

Eine Fallunterscheidung bei der Erzeugung bemerkenswerter Körper aus den Platonischen Körpern 22

Auf die 5 Platonischen Körper werden Pyramiden gleicher Höhe aufgesetzt. Welche neuen Körper entstehen beschreibt *Frank Heinrich*.

Was geschah vor ... Jahren 26

Ein weiterer Teil der mathematischen Chronologie mit besonderem Augenmerk auf Julius Plücker und „De revolutionibus" von *H.-J. Ilgauds*.

100 Jahre Mitteleuropäische Zeit 27

Hintergründe für die Einrichtung der MEZ, aufgespürt von *Arnold Zenkert*.

Labyrinthe 27

Wir stellen drei Labyrinthe vor, die uns von Schülern geschickt wurden.

Die Olympiade-Ecke: Der bulgarische DRUSCHBA-Wettbewerb 28

Marktecke 32

Neben dem Buch „Kraft & Bewegung" wird der Computerspiel-oldie Ishido vorgestellt.

alpha und BOMICO verlosen Computerspiele 33

Lösungen der Aufgaben aus Heft 1/93 („Ausgerechnet Mathematik") Die Olympiade-Ecke 34

Lösungen 35

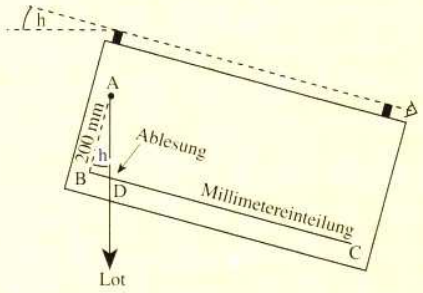
10. alpha-Schachwettbewerb 36

Wir bitten das verspätete Erscheinen dieser Ausgabe zu entschuldigen und verlängern die Einsendefrist für die Wettbewerbe dieses Heftes auf den 1. Juli 1993.

Zeitungs-schnipsel

Gestirnshöhenmessung mittels der Tangensfunktion

Für die Messung der Gestirnshöhen hat sich der Pendelquadrant gut bewährt. Dabei erfolgt – wie es die Bezeichnung ausdrückt – an einem Viertelkreis mit der Einteilung von 0° bis 90° die Ablesung der Höhe. Auf dem Gebiete der Höhenmessung führen ebenfalls viele Wege nach Rom. So möchten wir eine Möglichkeit vorstellen, die als Grundlage die Tangensfunktion hat, eine Winkeleinteilung ist daher nicht erforderlich. Auf einem rechteckigen Brett von 250 x 500 Größe wird bei A ein Lot angebracht. Von A bis B wird eine Strecke von 200 mm aufgetragen. Rechtwinkelig dazu die Strecke BC, auf der sich eine Millimetereinteilung (Millimeterpapier) befindet. Zum Anvisieren des Gestirns dient eine einfache Visiereinrichtung mit Kimme und Korn oder mit einem kleinen Fadenkreuz. Bei der Bestimmung der Sonnenhöhe verwende man zum Schutze der Augen ein Blendglas bzw. dunkles Filmmaterial.



Für den Winkel bei A, der bei dem Neigungswinkel der Visiervorrichtung identisch ist, ergibt sich folgende Winkelfunktion:

$$\tan x = \frac{BD}{AB}$$

z. B.: Fällt das Lot auf 350 mm, beträgt der Tangens 1,75 = 60,25°. Dies entspricht schon beinahe der Maximalhöhe der Sonne zu Mittag am 21.6. (61°) für Berlin. In den südlichen Gebieten muß man berücksichtigen, daß dort die Sonne noch um 5,5° höher steht. Die Meßstrecke muß daher bis 460 mm reichen. Auch dieses, kaum bekannte Verfahren zeichnet sich durch eine große Genauigkeit aus. Man sollte es einmal probieren!

Arnold Zenkert

Mit einem fast 10 m hohen Bauwerk aus Getränkekisten wollen Mitarbeiter einer Getränkefirma ins Guinness Buch der Rekorde. In Leipzig errichteten sie im September 1992 einen „Nachbau" des im Original 91 m hohen Völkerschlachtdenkmals.

Mit Gabelstaplern, Hebebühnen und viel Muskelkraft wurden auf einer Grundfläche von 120 m² nicht weniger als 12000 Getränkekisten verbaut. Damit wurden klar die alten Weltrekordhalter übertroffen, die „nur" 6628 Bierkisten zu einer Pyramide gestapelt hatten.

Sollten sich nun neue Rekordbrecher finden, so müßten sie mehr als 12000 Kisten stapeln. Nehmen wir einmal an, ein Weltrekord-Team würde nun 18000 Kisten verbauen, um eine neue Bestleistung zu erzielen. Und setzen wir weiterhin voraus, der neue Rekordbau erhielte ebenfalls die Form des Völkerschlachtdenkmals. Um wieviel Prozent wäre dann dieses Bauwerk etwa höher als das der Leipziger Rekordhalter? (Einzelheiten wie Bauweise oder Kistenhöhe sollen unberücksichtigt bleiben.)

R. Laue, Leipzig

Ötzi – Der tote Steinzeitmensch vom Hauslabjoch

Diesem Toten, der am 19.9.1991 vom Nürnberger Ehepaar Simon im hintersten Winkel des Ötztales in 3210 m Höhe über dem Meeresspiegel entdeckt wurde, gaben die Österreicher den Spitznamen Ötzi. Wissenschaftler vermuten,

Der Schiefe Turm von Pisa

Der „Döbelner Anzeiger" berichtete am 25.4.92 und am 20.5.92 über den Schiefen Turm von Pisa: „... Inzwischen fürchten die Wissenschaftler aber weniger, daß der Turm fällt, aber vielmehr das weitere Zerbröseln des alten Gemäuers vor allem im unteren Teil des Bauwerkes – und das dann der Turm in sich zusammenfällt. ... Seit über zwei Jahren ist der 58,36 Meter hohe Turm auf der „piazza dei miracoli" (Platz der Wunder) für die Öffentlichkeit geschlossen. Früher bestiegen jährlich rund 600000 Touristen den Turm ..." „Das ... Bauwerk ... soll in der Höhe des ersten Stockwerkes mit insgesamt 18 Ringen zunächst stabilisiert werden, ... Die Spezialringe aus rostfreiem Stahl haben eine Stärke von zwei Zentimeter und eine Länge von 40 Metern. ..."
Der von 1173 bis 1350 mit Unterbrechung erbaute Turm begann sich bereits während der Bauzeit durch Bodensenkung nach Südosten zu neigen und neigt sich seitdem ständig geringfügig weiter. Mit an diesem Turm ausgeführten Versuchen entdeckte Galileo Galilei 1610 die Fallgesetze.

1. Aufgabe: Durch Messung an einem Foto ermittelte ein Schüler den Neigungswinkel des Schiefen Turms gegen die Senkrechte zu 4,5°. Nach dieser Messung sägte er von einer Holzleiste, deren quadratischer Querschnitt die Seitenlänge a hat, eine Säule der Länge h mit folgender Eigenschaft ab: Wird diese auf ihre quadratische Grundfläche gestellte Säule um eine Kante ihrer Grundfläche um einen Winkel α gekippt und dann losgelassen, so gilt: Ist α kleiner als 4,5°, so kehrt die Säule in ihre Ausgangslage zurück, ist α größer als 4,5°, so kippt sie um und kommt auf einer rechteckigen Seitenfläche zu liegen.
Das Verhältnis h:a ist zu ermitteln!

2. Aufgabe: Wie groß ist das Verhältnis h:d der Gesamthöhe h und des Durchmessers d des ersten Stockwerkes beim Schiefen Turm?

Dr. W. Träger, Döbeln

daß Ötzi vor etwa 5000 Jahren tödlich verunglückte oder verhungerte und daß seine Leiche in der Höhenluft in kürzester Zeit mumifiziert wurde. (Döbelner Anzeiger vom 31.10./1.11.1992). Auf dem Foto links sind Ötzis Beil mit Kupferklinge, sein Dolch mit Steinklinge, sein Feuerschläger und sein an Lederbändern hängender Anhänger abgebildet.

Aufgabe: Welcher Luftdruck herrscht in 3200 m Höhe über dem Meeresspiegel, wenn der Luftdruck in der Höhe 0 m ü. M. 760 Torr beträgt und für die Abnahme des Luftdruckes mit wachsender Höhe genähert gilt: In der Höhe h m ü. M. ist der Luftdruck um 1,0% kleiner als 80 m tiefer, in der Höhe (h – 80) m ü. M.
Dr. W. Träger, Döbeln

Der kalte Geysir von Herlany

Laut einer Bechreibung im Reiseführer „Tschechoslowakei" von Ctibor Rybár [1] gilt: In Herlany (CSFR), 22 km nordöstlich von Kosice, schleudert ein Geysir alle 32 Stunden für die Dauer von 30 Minuten einen Wasserstrahl mit einer Temperatur von 12 bis 14° C aus einer Tiefe von 405 m 30 bis 35 Meter hoch.
[1] 1982 im Olympia Verlag Prag erschienen.

Aufgabe: Mit welcher Geschwindigkeit müßte das Wasser dieses Geysirs aus der Erdoberfläche hevorquellen, damit es unter der Annahme, der Luftwiderstand sei nicht vorhanden, 35 m hoch steigen würde?

Dr. W. Träger, Döbeln

Napoleon und die Cheopspyramide

Im Buch „Die Cheopspyramide" von Georges Goyon 1) wird berichtet: Napoleon Bonaparte überlegte sich im Jahre 1798 bei einem Besuch der Pyramiden von Giseh, einem der sieben Weltwunder der Antike, daß sich aus den Steinen der Cheopspyramide oder denen aller Pyramiden von Giseh eine ganz Frankreich umschließende Mauer von 3 m Höhe errichten ließe.

1. Aufgabe: Die ursprünglichen Maße der um 2700 v. Chr. errichteten Cheopspyramide, die die Gestalt einer quadratischen Pyramide hat, sind:
Länge der Grundkante a = 230 m
Länge der Höhe h = 147 m
Welche Dicke d hat eine h = 3 m hohe Mauer, die eine Kreisfläche mit dem gleichen Flächeninhalt A = 549430 km² wie das heutige Territorium von Frankreich umschließt und die das gleiche Volumen wie die Cheopspyramide hat?
2. Aufgabe: Eine Kugelkappe auf der Erdkugel mit dem Radius R = 6370 km hat den gleichen Flächeninhalt wie das Territorium des heutigen Frankreich. Wie lang ist der Rand dieser Kugelkappe?

Dr. W. Träger, Döbeln

Rechenoperationen gesucht

Wir stellen unseren Lesern vier Rechenaufgaben vor, deren Lösung bereits bekannt ist, von denen wir aber nicht wissen, welche Rechenoperationen zur Lösung geführt haben.

(1) $\frac{7}{3}?\frac{7}{4}=\frac{49}{12}$ (2) $\frac{3}{4}?\frac{3}{7}=\frac{9}{28}$

(3) $\frac{16}{45}?\frac{4}{9}=\frac{4}{5}$ (4) $\frac{64}{15}?\frac{8}{5}=\frac{8}{3}$

Bei der ersten Aufgabe führt die Addition, aber auch die Multiplikation zum Ergebnis; denn

$$\frac{7}{3}+\frac{7}{4}=\frac{28+21}{12}=\frac{49}{12}$$

und

$$\frac{7}{3}\cdot\frac{7}{4}=\frac{49}{12}$$

ergeben die gleiche Lösung.
Bei der zweiten Aufgabe führt die Subtraktion, aber auch die Multiplikation zum Ergebnis; denn

$$\frac{3}{4}-\frac{3}{7}=\frac{21-12}{28}=\frac{9}{28}$$

und

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{7}=\frac{9}{28}$$

ergeben die gleiche Lösung.
Bei der dritten Aufgabe führt die Addition, aber auch die Division zum Ergebnis; denn

$$\frac{16}{45}+\frac{4}{9}=\frac{16+20}{45}=\frac{36}{45}=\frac{4}{5}$$

und

$$\frac{16}{45}:\frac{4}{9}=\frac{16\cdot 9}{45\cdot 4}=\frac{4}{5}$$

ergeben die gleiche Lösung.
Bei der vierten Aufgabe führt die Subtraktion, aber auch die Division zum Ergebnis; denn

$$\frac{64}{15}-\frac{8}{5}=\frac{64-24}{15}=\frac{40}{15}=\frac{8}{3}$$

und

$$\frac{64}{15}:\frac{8}{5}=\frac{64\cdot 5}{15\cdot 8}=\frac{8}{3}$$

ergeben die gleiche Lösung.
Dem Leser drängen sich nun vielleicht zwei Fragen auf: Wie viele positive reelle Zahlenpaare mit diesen Eigenschaften mag es geben? Wie lassen sich solche Aufgaben, die mit Hilfe zweier verschiedener Rechenoperationen gelöst werden können, ermitteln?
Diese Fragen wollen wir nun klären.

Es seien a und b zwei positive reelle Zahlen; den vier vorangestellten Aufgaben entsprechen dann folgende Darstellungen:

Aufgabe (1):
$a + b = a\cdot b$, $b = a\cdot b - a$, $b = a\cdot(b-1)$,

$$a = \frac{b}{1-b} \text{ für } b > 1.$$

Aufgabe (2):
$a - b = a\cdot b$, $a - a\cdot b = b$, $a\cdot(1-b) = b$,

$$a = \frac{b}{1-b} \text{ für } b < 1.$$

Aufgabe (3):

$$a + b = \frac{a}{b},\ ab + b^2 = a,\ b^2 = a - ab,$$

$b^2 = a\cdot(1-b)$,

$$a = \frac{b^2}{1-b} \text{ für } b < 1.$$

Aufgabe (4):

$$a - b = \frac{a}{b},\ ab - b^2 = a,\ ab - a = b^2,$$

$a\cdot(b-1) = b^2$,

$$a = \frac{b^2}{b-1} \text{ für } b > 1.$$

Damit ist die erste Frage bereits beantwortet; es gibt beliebig viele solcher geordneten Zahlenpaare (a; b), deren Komponenten a und b positive reelle Zahlen sind, die den geforderten Bedingungen genügen. Wie sich weitere solcher Aufgaben ermitteln lassen, geht aus der allgemeingültigen Darstellung mit Hilfe von Variablen hervor. Abschließend wollen wir für jede der vorangestellten Aufgaben (1) bis (4) weitere Zahlenbeispiele ermitteln.

Zu (1): Es sei $b = \frac{7}{5}$, also

$a = \frac{7}{5}:\left(\frac{7}{5}-1\right) = \frac{7}{5}:\frac{2}{5} = \frac{7}{2}$ dann gilt

$\frac{7}{2}+\frac{7}{5}=\frac{35+14}{10}=\frac{49}{10}$ und $\frac{7}{2}\cdot\frac{7}{5}=\frac{49}{10}$

Zu (2): Es sei $b = \frac{3}{8}$, also

$a = \frac{3}{8}:\left(1-\frac{3}{8}\right) = \frac{3}{8}:\frac{5}{8} = \frac{3}{5}$ dann gilt

$\frac{3}{5}-\frac{3}{8}=\frac{24-15}{40}=\frac{9}{40}$ und $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{8}=\frac{9}{40}$

Zu (3): Es sei $b = \frac{2}{9}$, also

$a = \frac{4}{81}:\left(1-\frac{2}{9}\right) = \frac{4}{81}:\frac{7}{9} = \frac{4}{63}$ dann gilt

$\frac{4}{63}+\frac{2}{9}=\frac{4+14}{63}=\frac{18}{63}=\frac{2}{7}$

und $\frac{4}{63}:\frac{2}{9}=\frac{2}{7}$

Zu (4): Es sei $b = \frac{5}{3}$, also

$a = \frac{25}{9}:\left(\frac{5}{3}-1\right) = \frac{25}{9}:\frac{2}{3} = \frac{25}{6}$;

dann gilt

$\frac{25}{6}-\frac{5}{3}=\frac{25-10}{6}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$ und

$\frac{25}{6}:\frac{5}{3}=\frac{5}{2}$

Nun möge der interessierte Leser selbst weitere Beispiele zusammenstellen.

Theodor Scholl, Berlin

Zahlenspielereien I

$133 = (1+3+3)(1^2+3^2+3^2)$
$315 = (3+1+5)(3^2+1^2+5^2)$
$803 = (8+0+3)(8^2+0^2+3^2)$

$1148 = (1+1+4+8)(1^2+1^2+4^2+8^2)$
$1215 = (1+2+1+5)(1^3+2^3+1^3+5^3)$
$1547 = (1+5+4+7)(1^2+5^2+4^2+7^2)$
$2196 = (2+1+9+6)(2^2+1^2+9^2+6^2)$
$3700 = (3+7+0+0)(3^3+7^3+0^3+0^3)$

$153 = 1^3+5^3+3^3$
$370 = 3^3+7^3+0^3$
$371 = 3^3+7^3+1^3$
$407 = 4^3+0^3+7^3$

$1634 = 1^4+6^4+3^4+4^4$
$4150 = 45+15+55+05$
$4151 = 45+15+55+15$
$8208 = 8^4+2^4+0^4+8^4$

Dieter Bauke, Gera

Das wird Folgen haben

Jeder kennt diese Redeweise. Ein vorhergegangenes Ereignis führt nahezu logisch zwingend zu einem weiteren Ereignis. In der Mathematik wird die Folge als eine (meist unendliche) Menge von Zahlen definiert, die in einer bestimmten Reihenfolge angeordnet sind. Das Einmaleins besteht aus Folgen, zum Beispiel 0, 7, 14, 21, 28, 35, ... Diese Malfolgen sind sogenannte arithmetische Folgen. Arithmetische Folgen zeichnen sich durch eine konstante Differenz zweier benachbarter Folgeglieder aus. Sie begegnen uns täglich. Zum Beispiel beim Einkaufen: Nehmen wir immer 100 g unserer Lieblingswurst mehr, müssen wir auch entsprechend mehr zahlen. Menge und Preis ergeben dann je eine arithmetische Folge. Ausnahmen sind natürlich die meist billigeren Großabpackungen.

Ein anderes Beispiel: 80; 40; 20; 10; 5; 2,5; ...

Derartige Folgen nennt man **geometrische Folgen**. Jedes Folgeglied geht aus dem vorhergehenden durch Multiplikation mit einem bestimmten Faktor hervor.

Wie man sieht, gibt es **wachsende** und **fallende Folgen** u. v. a. m. Wir erinnern uns an die Folge der Wochentage. Sie stellen ebenso wie die Monate eine **zyklische Folge** (regelmäßig wiederkehrende Folgeglieder) dar.

Schließlich scheint beim letzten Beispiel kein „Bauprinzip" erkennbar:

0; 1; 3; 6; 10; 15; ... Oder doch?

Die Pünktchen sollen andeuten, daß sich die Folge beliebig fortsetzt – also eine **unendliche Folge**.

Daraus folgt, daß es auch **endliche** Folgen, z. B. die der Quadratzahlen von 1 bis 20, gibt. Wir wollen uns nun lieber mehr spielerisch mit Folgen beschäftigen. Mal sehen, was das für Folgen hat.

Ergänze „folge"-richtig:

1 a) 1; 5; 9; 13; ; ; ; 29 ;

b) 0; 13; 26; 39; ; ; ; 91

c) 2; 5; 8; 11; ; ; 20 ; ;

d) 0; 0,5; 1,5; 3,0; 5,0; 7,5; 10,5; ; ; 22,5 ;

3

	3	10	17		31	38
		15			42	
					53	
	15	30			75	

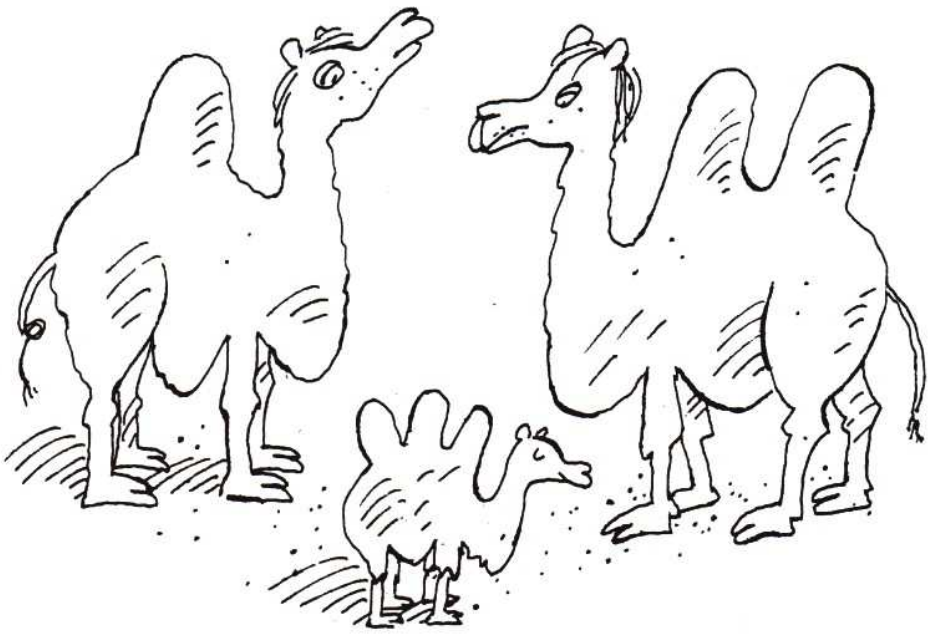
0	3	6				
2	5				17	20
4		10				22
		18	21			

4

0	1	3	6	10	15			
	6						33	
3		12				30		
			18					
6							42	
	16,5	21						

OStR Jochen Kreusch
Staatliches Seminar
für das Lehramt an
Mittelschulen Löbau

2

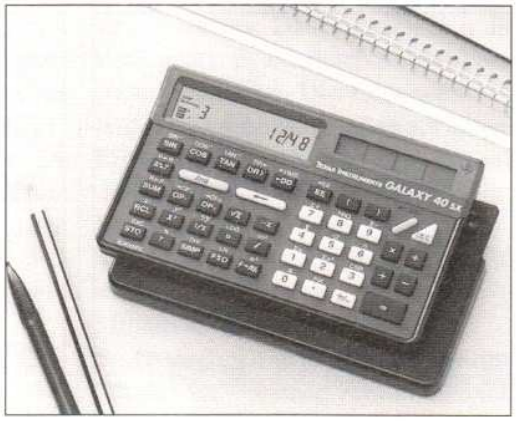


Lothar Otto, Leipzig

alpha-Preisausschreiben 2

Das alpha-Preisausschreiben 1 hatte eine hervorragende Resonanz – sogar Schulklassen beteiligten sich. Hierüber haben wir uns sehr gefreut. Richtige Lösungen erhielten wir von über 300 Einsendern, aus Platzgründen können wir leider die Namen nicht aufführen – aber alle erhalten diese Ausgabe von alpha als Dank.

Von Texas Instruments wurden dankenswerterweise zwei Taschenrechner zur Verfügung gestellt. Aus allen richtigen Einsendungen wurden die Gewinner gezogen. Den TI-81 erhielt Christoph Späth, 8900 Augsburg, den Galaxy 40X Solar erhielt Marion Wollschläger, O-5001 Erfurt! Auch diesmal werden je ein TI-81 und Galaxy 40X Solar verschickt.



Die neue Aufgabe:

Ein Astronaut befindet sich in 100 km Höhe über der Erdoberfläche.

a) Wie groß ist seine Sichtweite bis zum Erdhorizont in km?

b) Wie groß ist seine Sichtfläche auf der Erdoberfläche in km²?

Foto: ESA

Bitte schickt mir (Erhard Friedrich Verlag, Postfach 10 01 50, 3016 Seelze 6, Redaktion alpha, Herrn J. Ricke) Eure Lösung bis zum 12. Juni zu.

Unter den richtigen Einsendungen werden die Taschenrechner verlost.

Die Bekanntgabe der Gewinner und der richtigen Lösung erfolgt im nächsten alpha-Heft.

Die Lösung des Preisrätsel 1:

9	:	3	=	4	−	1
*	■	−	■	:	■	*
1	+	5	=	2	*	√9
=	■	=	■	=	■	=
8	+	7	=	6	+	9
+	■	−	■	:	■	:
1	*	9	=	√9	*	3

alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett und in Verbindung mit Dr. Gabriele Liebau, Dr. Claus Peter Helmholtz und Herbert Kästner.

Redaktion:
Jürgen Ricke, Tel.: (05 11) 4 00 04-42
Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6

Redaktionskollegium:
StR F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), OL Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pliezhausen), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OStR J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. W. Schmidt (Greifswald), OStR G. Schulze (Herzberg), W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)
Anzeigenleitung: Bernd Schrader
Anzeigenabwicklung:
Telefon: (05 11) 4 00 04-23
Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01. 01. 1990
Vertrieb und Abonnement:
Telefon: (05 11) 4 00 04-52/53
Verlag:
Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG,
Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6
Telefon: (05 11) 4 00 04-0
Telefax: 4 00 04-19

Das Jahresabonnement für **alpha** besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt 12,90 DM, im Einzelbezug 3,00 DM. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten.
Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).
alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV KlettCotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, DH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.

© Beiträge sind urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte vorbehalten. Auch unverlangt eingesandte Manuskripte werden sorgfältig geprüft. Unverlangt eingesandte Bücher werden nicht zurückgeschickt. Die als Arbeitsblatt oder Kopiervorlage bezeichneten Unterrichtsmittel dürfen bis zur Klassen- bzw. Kursstärke vervielfältigt werden.

Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschriften im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.

Herstellung: PZ Pädagogika Zentrale GmbH
Gestaltung: Jens Hinzmann
Druck: Druckerei Schröer, Seelze
ISBN 3-617- 34014-8

Alphons logische Abenteuer

Auf dem Weg zur Schule kamen Alphons und Berti an einem Filmtheater vorbei, dessen Reklame sie immer interessierte. Heute warb ein Plakat in düsteren Farben zum Besuch eines Filmes mit dem Titel: Die Rückkehr der Untoten. „Klingt ja schauerlich-spannend", sagte Alphons zu Berti. Während sie sich die ausgehängten Szenenfotos anschauten, trat mit gleicher Absicht ein Ehepaar hinzu.

Die Frau fragte ihren Mann etwas, er aber reagierte nicht. Sie stieß ihn leicht an: „Du hörst ja gar nicht zu. Ich habe dich gefragt, was für Wesen denn die Untoten sind. Eine ungerade Zahl ist eine Zahl, die nicht gerade ist. Demnach müßte ein Untoter ein Wesen sein, das nicht tot, also lebendig ist. Freilich: Die Rückkehr der Lebendigen, das klingt nicht mehr spannend." Er fand das auch, hatte aber Zweifel wegen der unspezifizierten Wesen. „Man meint doch einen Menschen, wenn man einfach von einem Toten spricht. Sind aber Tote Menschen könnten wir ja auch statt ‚Untote' sagen ‚Unmenschen', somit kämen die Unmenschen zurück."

Mit dieser Erklärung war sie nicht einverstanden: „Ungerade ist nicht gerade, dementsprechend ist ein Unmensch kein Mensch und du kannst nicht von ‚Untoten' zu ‚Unmenschen' übergehen, weil du dann von Toten, die Menschen sind, zu denselben Toten kommst, die keine Menschen sind, und das widerspricht sich!" – „Moment mal", wehrte er sich. „Ein Unmensch ist nicht kein Mensch, sondern eben gerade ein Mensch, allerdings von besonders übler Sorte." In einem freundlich einlenkenden Tonfall unterbrach sie ihn. „Einverstanden, ein Unmensch ist kein Nichtmensch. Trotzdem ist es falsch zu sagen, Tote sind Menschen, eher wohl, daß Tote tote Menschen sind. Hättest du recht, ergäbe sich aus den Aussagen: Tote sind Menschen, und: Menschen leben zeitlich begrenzt, die Aussage: Tote leben zeitlich begrenzt, was doch in sich so widersprüchlich ist, wie die Aussage: Über die menschenleere Straße eilen Scharen von Jugendlichen."

Der Mann sagte nach kurzer Überlegung: „Da muß ich dir zustimmen. Gehen wir nun von dem aus, was mit ‚Unmensch' gemeint ist und begreifen wir Tote im Sinne von tote Menschen, so ist ‚Un' in ‚Untote' so zu verstehen, daß tote Menschen gemeint sind, die auf besondere Weise tot, also etwas Drittes zwischen Tod und Leben sind. Tod und Leben bilden – dem Filmtitel zufolge – keinen Gegensatz in der Weise, daß bei einem Menschen notwendig genau eines von beiden zutrifft, sie bilden keinen kontradiktorischen Gegensatz. Beide Zustände stehen in einem konträren Gegensatz, wie er z. B. auch zwischen dem Süßen und dem Bitteren besteht. Etwas kann seinem Geschmack nach weder süß noch bitter sein, sondern für Menschen einen Geschmack haben, der dazwischen liegt. ‚Untote' ist der Name für etwas, was weder tot noch lebendig ist, und so etwas kehrt zurück – schöne Aussichten!"

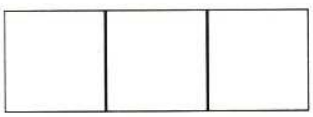
Alphons, mehr von dem ungewollt mit hörbaren Gespräch, als den Szenenfotos angezogen, meinte zu Berti, ihn dabei auf den Schulweg drängend: „Ein Unmensch ist ein besonderer Mensch, ein Unglück dürfte aber kaum ein besonderes Glück sein." Berti nickte. „Bei diesem Thema, Alphons, war es mir nicht geheuer. Kann ich aber nunmehr sagen, bei diesem Thema war es mir ungeheuer?" Nicht der Film, sondern diese Frage beschäftigte sie bis zum Erreichen des Schulgebäudes.

Prof. Dr. L. Kreiser

Sprachecke

Discover your own theorem

Draw a 3x1 rectangle, as in the drawing below (but make it a little larger than ours).



Divide the rectangle into three unit (1x1) squares. Now from the upper left hand corner, draw the following three diagonals:
(i) the diagonal of the first square;
(ii) the diagonal of the 2x1 rectangle; and
(iii) the diagonal of the 3x1 rectangle.

Measure the angles made by these diagonals with the bottom line. How are these three angles related? Repeat the drawing and the measurements with 3x1 rectangles of different sizes. Do you always get the same relationships? Formulate a conjecture!

aus: Fun with mathematics, Toronto

Из наЪора гирек с массами в 1г, 2г, ... 101г ерясь гирька массой 19г. Можно пи оставшиеся 100 гирек разложить на дв кучки по 50 гитук в каждой так, чтоЪы массы кучек Ъыли одинаковы?

aus: Quant, Moskau

L'échelle au mur

Lorsqu'une échelle est posée verticalement, tout contre le mur, le sommet de l'échelle dépasse de 10 cm de sommet du mur. Il faut alors écarter de 70 cm de pied de l'échelle pour que leurs sommets coincident. Quelle est la hauteur du mur?

aus: Tangente, Paris
Übersetzung: Dr. G. Liebau, Leipzig

Stimmt hier etwas nicht?

Eine unterhaltsame Kalenderbetrachtung

Jährlich erleben wir die Zu- und Abnahme der Tageslänge, d. h. die Dauer von Tag und Nacht. An zwei Tagen werden wir besonders darauf aufmerksam gemacht: Am 21.6., dem Tag der Sommersonnenwende, wenn die Tage wieder kürzer werden und am 21.12., dem Tag der Wintersonnenwende, wenn wir freudig die Zunahme der Tageslänge zur Kenntnis nehmen. Die Länge der Tage nimmt somit vom 22.12. bis 20.6. zu und vom 22.6. bis 20.12. wieder ab. Hier liegt doch der Gedanke nahe, daß in dieser Zeit jeweils zwei Tage gleich sein müssen, daß es immer einen „Gegentag", einen „Doppelgänger", geben muß. So entspricht z. B. der 21.5. dem 21.7. oder der 21.10. dem 21.2. In beiden Fällen ist der zeitliche Abstand von der Sommer- bzw. Wintersonnenwende gleich groß. Zwei solcher „Gegentage" sind uns vertraut, nämlich der 20.3. (Frühlingsbeginn) und der 22.9. (Herbstbeginn), Tage und Nächte sind mit je 12 Stunden gleich lang. Bei diesen Tagespaaren stimmen überein:

- Länge von Tag und Nacht
- Größe des Tagbogens der Sonne
- Mittagshöhe der Sonne
- Punkte am Horizont, wo die Sonne auf- oder untergeht.

Also müßte an diesen Tagen die Sonne auch zur gleichen Zeit auf- und untergehen! – Entnimmt man aber einmal einem Kalender oder einem astronomischen Jahrbuch die Auf- und Untergangszeiten der Sonne, so bemerkt man, daß hier etwas nicht stimmt. Betrachten wir einmal die Verhältnisse am 9.2. und 2.11.! Es handelt sich um „Gegentage", astronomisch ausgedrückt um Tage mit der gleichen Sonnendeklination (Deklination: Winkelabstand vom Himmelsäquator, **Abb. 1**).
Bei westlich von Görlitz gelegenen Orten muß die Ortszeitdifferenz (Längendifferenz) addiert werden, so für die Länge von Erfurt, Nürnberg, Augsburg 16 Minuten, für Essen, Köln, Saarbrücken 32 Minuten.

Der Unterschied zwischen den beiden Tagen beträgt jeweils 31 Minuten. Das bedeutet, daß im Februar die Abende um rund eine halbe Stunde länger als im November sind, was natürlich auf Kosten der Sonnenscheindauer am Morgen geht. Wie oft hört man im Februar bei Unterhaltungen: „Ja, an den Abenden merkt man es schon deutlich, doch am Morgen will es nicht heller werden!" Und im Herbst: „Jetzt wird es aber am Abend schnell dunkel!" Die Beispiele derartiger „Gegentage" lassen sich beliebig fortsetzen, wobei die Unterschiede meist geringer sind (**Abb. 2**).
Wie kommt es zu dieser Unstimmigkeit bei gleich langen Tagen?

	Sonnenaufgang	Sonnenuntergang (für Görlitz, 15° Ost)
9.2.	7.25 Uhr	17.04 Uhr
2.11.	6.54 Uhr	16.33 Uhr

Abb. 1

	Sonnenaufgang	Sonnenuntergang	
14.5.	4.11 Uhr	19.43 Uhr	Unterschied: 12 bzw.
30.7.	4.23 Uhr	19.49 Uhr	6 Minuten.

Abb. 2

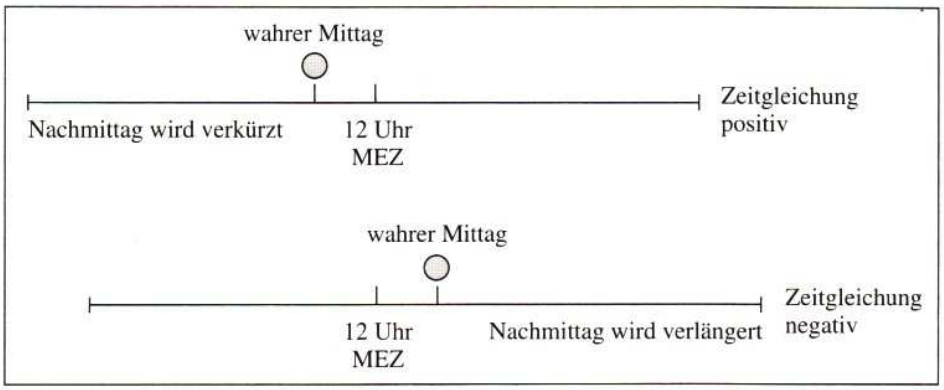


Abb. 4: Die Auswirkungen der Zeitgleichung auf die Länge des Vor- und Nachmittags

„Störenfried" Zeitgleichung

Wir haben es heute mit dem Kalender und der seit 100 Jahren gültigen Zonenzeit (MEZ), die sich nach dem 15. Meridian ö. v. Gr. (Görlitz) richtet, einfach und wer denkt schon einmal darüber nach, daß unser zeitgebendes Gestirn, die Sonne, gar nicht so gleichförmig und exakt läuft, wie wir das gerne möchten. Wer sich mit Sonnenuhren beschäftigt, wird bemerken, daß diese im Februar eine Viertelstunde nachgehen, Ende Oktober/Anfang November um diesen Betrag vorgehen. Dies ist keineswegs ein Fehler an der Sonnenuhr oder beim Lauf der Sonne. Dieses Vor- und Nachgehen einer Sonnenuhr ist naturbedingt und ist auf die elliptische Erdbahn um die Sonne zurückzuführen. Unsere Erde bewegt sich in Sonnennähe Anfang Januar rascher als in Sonnenferne Anfang Juli, und zwar um 2 km pro Sekunde. Hinzu kommt noch ein Effekt, der letztlich auf die Schrägstellung der Erdachse zurückzuführen ist: Die scheinbare Sonnenbahn (Ekliptik) schneidet den Himmelsäquator unter einem Winkel von 23,44°. Beides ergeben die sogen. Zeitgleichung, ein Begriff der nichts mit einer mathematischen Gleichung zu tun hat, sondern zutreffender mit Zeitausgleich bezeichnet werden müßte.
Die Abbildung 3 zeigt das je zweimalige Vorgehen und Nachgehen der Sonnenuhr im Laufe des Jahres. Richteten wir uns nach der Sonnenzeit, wie sie uns die Sonnenuhren anzeigen, gäbe es diese Unstimmigkeiten bei den Gegentagen nicht. Erst durch die Zonenzeit, die weder auf die Zeitgleichung noch auf die Längenunterschiede (zwischen Görlitz und Aachen: 36 Minuten!) Rücksicht nimmt, kommt es zu diesen Verschiebungen der Auf- und Untergänge der Sonne. Betrachten wir in diesem Zusammenhang auch den Zeitpunkt, des sogen. wahren Mittags, wenn die Sonne im Süden am

Zeitpunkt des wahren Mittags (für Görlitz)

1.1.	12.03 Uhr	jeweils MEZ
1.2.	12.14 Uhr	
1.3.	12.12 Uhr	
1.4.	12.04 Uhr	
1.5.	11.57 Uhr	
1.6.	11.58 Uhr	
1.7.	12.04 Uhr	
1.8.	12.04 Uhr	
1.9.	12.00 Uhr	
1.10.	11.50 Uhr	
1.11.	11.44 Uhr	
1.12.	11.49 Uhr	

höchsten steht und die Sonnenuhr 12 Uhr Sonnenzeit (wahre Ortszeit) anzeigt. Dieser Zeitpunkt fällt nur in seltenen Fällen mit 12 Uhr MEZ zusammen.
Dieses Hin und Her des Zeitpunktes für den wahren Mittag verursacht eine Verlängerung oder Verkürzung des Vor- oder Nachmittags und damit die Unterschiede für die Auf- und Untergänge der Sonne, die bis zu 31 Minuten betragen können

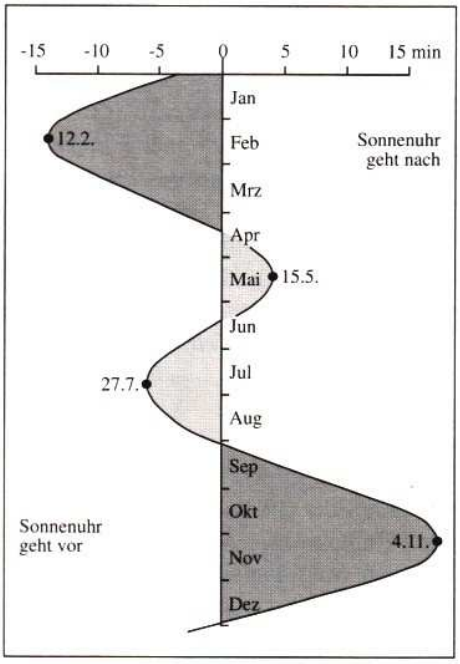


Abb. 3: Die Zeitgleichung

(siehe **Abb. 4**). Geht die Sonnenuhr vor (Zeitgleichung +, z. B. 4.11.), tritt der wahre Mittag vor 12 Uhr MEZ ein, der Nachmittag wird verkürzt. Geht sie nach (Zeitgleichung –, z. B. 12.2.), tritt der wahre Mittag nach 12 Uhr MEZ ein, der Nachmittag wird verlängert.

Arnold Zenkert, Potsdam

Der Völlersche Satz

„Zieht man in einer beliebigen Kurve eine Sehne, so ist, wenn die letztere unendlich klein wird, das Verhältniß des Flächensegments zu dem Dreiecke, welches von der Sehne und den dazugehörigen Tangenten gebildet wird, wie 2:3."

Andreas Völler (geboren am 11.9.1833 in Helba bei Meiningen, gestorben am 27. 7. 1859 in Saalfeld) wirkte seit 1857 an der Realschule und am Gymnasium zu Saalfeld als Mathematiklehrer. Daneben beschäftigte er sich mit der Untersuchung der Kegelschnitte und mit geometrischen Grenzwertsätzen. Ein solcher Satz ist der jetzt nach ihm benannte Völlersche Satz. Zum Beweis bemerkt er: „Es ist nicht schwer, für bestimmte Kurven das Verhältniß eines Flächensegments zu dem dazugehörigen Tangentendreiecke anzugeben. Wird aber die Aufgabe allgemein gefaßt, dann läßt sich das weittragende Gerüst der höheren Analysis nicht mehr gut entbehren." (Grunerts Archiv XXXI, 1858, S. 449)
Wir wollen versuchen, diesen Satz für den Spezialfall des Kreises zu beweisen: Nach dem Völlerschen Satz sollen sich die Inhalte der Kreisabschnittsfläche $\sphericalangle ADB = F_K$ zur Dreiecksfläche $\Delta ACB = F_D$ wie 2:3 verhalten, je kleiner die Sehne $s = \overline{AB}$ ist. (Für diese Konstruktion am Kreis gilt:

$\overline{AB} \perp \overline{CM}, \overline{AC} \perp \overline{AM}, \overline{CB} \perp \overline{BM}$.)

Daß die Sehne s immer kleiner wird, ist für diese Konstruktion gleichbedeutend damit, daß der Zentriwinkel α ebenso kleiner wird. Beide Größen hängen (über die Sinus-Definition im Dreieck Δ AEM) zusammen:

$$s = 2r \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \qquad (1)$$

Wir werden versuchen, die Flächenmaße im Abhängigkeit vom Radius r und vom Zentriwinkel α (im Bogenmaß) darzustellen.
Dem Tafelwerk entnehmen wir für die Kreisabschnittsfläche:

$$F_K = (\alpha - \sin\alpha) \cdot r^2/2 \qquad (2)$$

Für die Dreiecksfläche stellen wir mit $x = \overline{EC}$ fest: $F_D = s \cdot x/2$, wobei s mit (1) schon bestimmt ist. Zur Bestimmung von x erhalten wir $\left(\text{mit } \overline{AC} = u\right)$ aus der Ähnlichkeit der Dreiecke Δ AEM und Δ CEA (Beweis!) $x = \frac{us}{2r}$ und aus dem Dreieck Δ AEC noch $u^2 = x^2 + (s/2)^2$. Durch Elimination von u ergibt sich

$$x = s^2 / 2\sqrt{4r^2 - s^2}$$

Damit ist F_D bestimmt. Nutzen wir (1) und berücksichtigen (mit $\beta = \alpha/2$, daß

$\sqrt{1-\sin^2\beta} = \cos\beta, \sin\beta / \cos\beta = \tan\beta,$

$\sin^2\beta = (1 - \cos\alpha)/2$
und

$\tan\beta = (1 - \cos\alpha) / \sin\alpha$

so erhalten wir

$$F_D = r^2(1 - \cos\alpha)^2 / 2\sin\alpha \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) ergibt sich für das Verhältnis V der Flächen:

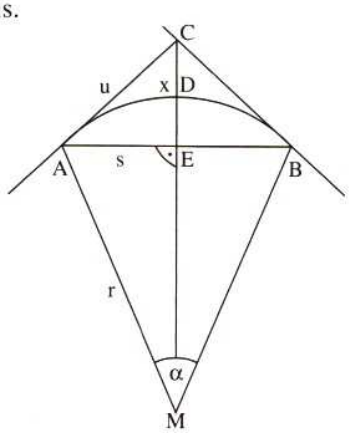
$$V = \frac{F_K}{F_D} = \frac{\sin\alpha(\alpha - \sin\alpha)}{(1 - \cos\alpha)^2}$$

Um diesen Ausdruck ohne „höhere Mathematik" weiter umformen zu können, nutzen wir Näherungsformel für die sin- und cos-Funktion. (Diese beiden Formeln sind um so genauer, je kleiner der Winkel α ist; und hier soll ja α immer kleiner werden!):

$\sin\alpha = \alpha - \alpha^3 / 6$

$\cos\alpha = 1 - \alpha^2 / 2$

Werden diese Ausdrücke eingesetzt, erhalten wir umgeformt:
$V = 2/3 - \alpha^2/9$, und damit, wenn s und damit α immer kleiner wird, die Bestätigung des Völlerschen Satzes für den Kreis.



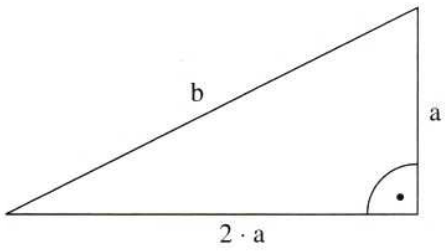
Alphawettbewerb 2/93

Fortsetzung aus Heft 1/93

5/8
Welche Zahlen (in dezimaler Schreibweise) erfüllen die Gleichung
$\overline{b} + \overline{aab} + \overline{aba} + \overline{baa} + \overline{b} = \overline{b00b}$?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

5/9
Zeichne auf quadratischem Gitterpapier 20 rechtwinklige Dreiecke, bei denen die eine Kathete doppelt so lang ist wie die andere. Schneide diese 20 rechtwinkligen Dreiecke aus und versuche, sie zu einem Quadrat lückenlos zusammenzufügen.



OStR Th. Scholl, Berlin

5/10
Siegfried, Peter, Bernd und Lutz führten einen Wettbewerb im Angeln durch. Sie vereinbarten, gefangene Fische mit Punkten zu bewerten, und zwar einen Zander mit fünf, einen Brassen mit vier, einen Flußbarsch mit zwei Punkten und einen Kaulbarsch mit nur einem Punkt. Den einzigen Zander fing Siegfried. Insgesamt wurden drei Flußbarsche geangelt. Zusammen kamen die vier Angler für ihre Fänge auf 18 Punkte. Peter erreichte die wenigsten Punkte, obwohl er die meisten Fische gefangen hatte. Bernd und Peter erzielten zusammen die gleiche Punktezahl wie Siegfried und Lutz zusammen. Alle vier Angler erreichten unterschiedliche Punktezahlen. Welchen Fang hatte jeder dieser vier Angler gemacht?

Schülerin Steffi Mögenburg, Gützkow

5/11
Genau 14 Schüler einer Schulklasse besuchen die Arbeitsgemeinschaft (AG) Mathematik, genau 13 Schüler die AG Handball und genau 17 Schüler die AG Fußball. Genau 3 Schüler nehmen sowohl an der AG Handball als auch an der AG Fußball teil; genau 7 Schüler besuchen keine dieser drei Arbeitsgemeinschaften. Wie viele Schüler gehören zu dieser Schulklasse?

Schüler Torsten Zimmermann, Breitungen

5/12
In einer Kiste befinden sich sieben weiße, drei blaue, fünf schwarze, eine gelbe, zwei rote, vier grüne und sechs braune Kugeln. Wie viele Kugeln muß man bei völliger Dunkelheit dieser Kiste entnehmen, um mit Sicherheit fünf Kugeln der gleichen Farbe zu erhalten?

Schüler Timm Wenzel, Staßfurt

5/13
Hans, Peter und Ursula gingen in den Wald, um Pilze zu sammeln. Hans sammelte fünf Pilze mehr als Ursula, Peter sammelte zehn Pilze weniger als Hans und Ursula zusammen. Insgesamt haben diese drei Schüler 84 Pilze gesammelt. Wie viele Pilze hat jeder von ihnen gesammelt?

Schülerin Ina Haas, Gerstungen

5/14
Angenommen, aus den drei Ziffern 2, 4 und 6 wurden alle möglichen dreistelligen Zahlen gebildet, in denen jede dieser drei Ziffern genau einmal vorkommt. Es ist die Summe aus allen diesen dreistelligen Zahlen zu ermittelt, ohne die Zahlen zu notieren und anschließend zu addieren.

Schüler Jens Treßelt, Großbreitenbach

6/8
Notiere eine beliebige dreistellige natürliche Zahl; schreibe die gleiche Zahl noch einmal rechts neben die bereits notierte Zahl, so daß du eine sechsstellige Zahl erhältst, bei der die drei ersten mit den drei letzten Ziffern übereinstimmen. Ermittle, welche Teiler eine solche sechsstellige Zahl hat!

Schüler Timm Wenzel, Staßfurt

6/9
Sebastian fährt mit der Eisenbahn zu seiner Tante. Als er den zehnten Teil der Gesamtstrecke zurückgelegt hat, schläft er ein. Nachdem er die Hälfte der Gesamtstrecke gefahren ist, wacht er wieder auf. Wieviel Kilometer beträgt die gesamte Bahnfahrt, wenn Sebastian 36 km davon geschlafen hat?

Schülerin Christine Lange, Perleberg

6/10
In einem Nähkästchen befinden sich 15 weiße, 15 gelbe und 15 schwarze Knöpfe von gleicher Form und Größe. Wie oft muß Anita im Dunkeln in das Nähkästchen greifen, wenn sie jeweils nur einen Knopf entnimmt, um zehn Knöpfe der gleichen Farbe mit Sicherheit zu erhalten?

Schüler Tobias Gerlach, Friedeburgerhütte

6/11
Auf der Fernverkehrsstrecke F 6 wurde wegen Bauarbeiten auf einer Strecke von 2 km Länge die Höchstgeschwindigkeit auf 30 km/h begrenzt. Herr Meyer durchfuhr diese Strecke mit seinem Skoda in 3 Minuten. Hat sich Herr Meyer an diese Geschwindigkeitsbegrenzung gehalten?

Schüler Andreas Kellner, Halberstadt

6/12
Die fünf Schülerinnen Astrid, Britta, Christin, Elke und Sandra wohnen (in anderer Reihenfolge) in den Städten Berlin, Potsdam, Suhl, Dresden und Wismar.

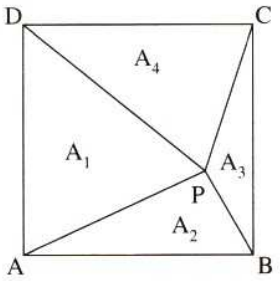
Von ihnen ist folgendes bekannt:
(1) Christin wohnt nicht in Berlin.
(2) Britta, Christin und Elke fahren im Sommer mit dem Mädchen aus Suhl ins Ferienlager.
(3) Astrid und das Mädchen aus Suhl gehen gern zum Schwimmen.
(4) Astrid, Britta, Christin und das Mädchen aus Wismar waren zusammen im Ferienlager.
(5) Das Mädchen aus Berlin ist so alt wie Britta, die nicht in Dresden wohnt.

In welcher Stadt wohnt jede dieser fünf Schülerinnen?

Schülerin Nicole Schüler, Zickeritz

6/13

Die Abbildung zeigt ein Quadrat ABCD. Ein innerer Punkt P dieses Quadrates wurde mit den Eckpunkten A, B, C und D verbunden. Es seien A_1, A_2, A_3, A_4 die Flächeninhalte der dabei entstandenen Dreiecke. Es ist nachzuweisen, daß $A_1 + A_3 = A_2 + A_4$ gilt.



OStR Th. Scholl, Berlin

6/14

Olaf Römer schloß aus der Beobachtung der Zeiten der Verfinsterung des inneren Jupitermondes bei verschiedenen Stellungen der Erde auf ihrer Umlaufbahn um die Sonne, daß das Licht 1000 s benötigt, um den Durchmesser der Erdumlaufbahn zu durchqueren. Welche Geschwindigkeit hat das Licht? (Nehmt vereinfacht an, daß sich die Erde auf einer Kreisbahn bewegt. Entnehmt den Erdbahndurchmesser aus einem Tafelwerk. Rechne mit einem auf eine Ziffer gerundeten Wert!)

Dr. W. Riehl, Leipzig

7/8

Bestimme bei folgenden Divisionsaufgaben die fehlenden Ziffern der jeweils sechsstelligen Zahl so, daß der Quotient eine natürliche Zahl ist!

a) 1987❑❑ : 86 b) ❑❑1986 : 87

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

7/9

Welche durch 25 teilbaren natürlichen Zahlen haben sowohl als Quersumme als auch als Querprodukt die Zahl 10?

StR. H.-J. Kerber, Neustrelitz

7/10

Zeichne ein Rechteck ABCD mit den Seitenlängen $\overline{AB} = 6$ cm und $\overline{BC} = 4$ cm. Zeichne zu $\overline{AB}$ eine parallele Gerade, die $\overline{AD}$ bzw. $\overline{BC}$ in einem inneren Punkt H bzw. F schneidet. Zeichne zu $\overline{AB}$ eine parallele Gerade, die $\overline{AD}$ bzw. $\overline{BC}$ in einem inneren Punkt H bzw. F schneidet. Es sei S der Schnittpunkt der Geraden HF und EG. Weise nach, daß der Flächeninhalt des Vierecks EFGH unabhängig von der Lage der beiden Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{HF}$ ist!

StR. H.-J. Kerber, Neustrelitz

7/11

Anläßlich des Karnevalumzuges sind 225 Schüler einer Schule zum Abmarsch in gleichlangen Querreihen angetreten. Wegen einer Straßenverengung sollen nun vier äußere Längsreihen stehen bleiben und sich dann dem Marschblock, der noch aus mehreren Längsreihen besteht, anschließen. Dabei stellt sich heraus, daß auch nach dieser Umstellung der ganze Marschblock aus gleichlangen Querreihen besteht. Um wieviel Querreihen verlängerte sich der Marschblock?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

7/12

Erika, Irene und Karin kaufen für insgesamt 17 Mark Briefmarken. Erika kauft 10 Marken der Sorte A und 20 Marken der Sorte B. Irene kauft 40 Marken der Sorte B und 30 Marken der Sorte C. Jedes dieser beiden Mädchen bezahlt dafür gleichviel. Karin kauft 10 Marken der Sorte A und 30 Marken der Sorte C. Sie bezahlt dafür 7 Mark. Welche Werte haben die drei Briefmarkensorten A, B bzw. C?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

7/13

Der Magdeburger Bürgermeister Otto von Guericke ließ zu beiden Seiten seiner ausgepumpten Kugel je 8 Pferde anspannen, um zu zeigen, wie stark die beiden Kugelhälften durch den Luftdruck zusammengepreßt werden. Mit wievielen Pferden hätte dieselbe Wirkung demonstriert werden können?

Dr. W. Riehl, Leipzig

7/14

Ein 12 m langer und 27 t schwerer Güterwagen mit einem Achsstand von 8 m ist mit einem Räderpaar entgleist. Mit welcher Kraft kann der Wagen durch einen Kran wieder eingegleist werden, wenn der Kranhaken am vorderen Wagenende angreift?

Dr. W. Riehl, Leipzig

8/8

Auf Katrins Frage, wie alt seine Großmutter sei, antwortet Karl: „Das Alter meiner Großmutter ist in ganzen Zahlen eine durch 3 teilbare Zahl. Der Vorgänger ist eine durch 4 und der Nachfolger eine durch 5 teilbare Zahl. Du kannst voraussetzen, daß meine Großmutter älter als 30 und noch nicht 100 Jahre alt ist."
Darauf sagt Kartin: „Also ist der Nachfolger des Alters deiner Großmutter durch 10, aber nicht durch 20 teilbar."

a) Hat Karin recht?

b) Ermittle das Alter von Karls Großmutter!

Claudia, Schwartz, Ilmenau/Thür.

8/9

Gesucht werden drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.

Für deren Produkt soll gelten:

(1) Es ist eine vierstellige Zahl, die genau zwei gleiche Ziffern hat und

(2) ihre erste Ziffer ist halb so groß wie die dritte, aber größer als die zweite und auch größer als die vierte Ziffer.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

8/10

Addiert man zur Summe zweiter natürlicher Zahlen ihren Quotienten, so erhält man 35. Es sind alle Lösungen dieser Aufgabe zu ermitteln!

OStR Th. Scholl, Berlin

8/11

Es ist ein Parallelogramm ABCD aus $\overline{AD} = 3$ cm, $\sphericalangle DAH = 70°$ und $\sphericalangle HAB = 10°$ zu konstruieren, wobei H der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ ist.

Die Konstruktion ist stichwortartig zu beschreiben!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

8/12

Die zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks gehörende Höhe mit der Länge h = 6 cm teilt die Hypotenuse im Verhältnis 1 : 4.

Es sind der Flächeninhalt und der Umfang dieses Dreiecks zu berechnen.

OSt. J. Kreusch, Löbau

8/13
In einem Geschäft sind täglich 10 Stunden lang 15 Leuchtstoffröhren (mit je 40 Watt + 8 Watt für Vorschaltgerät) und 10 Lampen mit je 100 Watt eingeschaltet. Wie groß ist die Energieaufnahme in 30 Tagen?

Dr. W. Riehl, Leipzig

8/14
Welche Gewichtskraft hat ein 6 m langes Stahlrohr von 55 mm Außendurchmesser und einer Wandstärke von 2 mm?

Dr. W. Riehl, Leipzig

9/8
Die vier Grundziffern der vierstelligen Zahl x^2 stellen vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen dar, die nicht notwendig geordnet sind.
Es ist die Zahl x zu bestimmen, wenn die Quersumme von x^2 18 beträgt. Die Zahl x muß eine natürliche Zahl sein.

Claudia Schwartz, Ilmenau/Thür.

9/9
Anke sucht alle vierstelligen Quadratzahlen z, deren erste und dritte sowie deren zweite und vierte Ziffer einander gleich sind.
Zeigen Sie (ohne Verwendung von Zahlentafeln oder Taschenrechner), daß Anke keine solche Zahl finden kann!

StR. H.-J. Kerber, Neustrelitz

9/10
Wie groß ist der Rauminhalt eines Würfels, dessen Raumdiagonale 3 cm lang ist?

Claudia Möller, Rudolstadt/Thür.

9/11
Wie groß ist der Rauminhalt eines Würfels, wenn jede Flächendiagonale seiner Quadratflächen 3 cm lang ist?

Claudia Möller, Rudolstadt/Thür.

9/12
Gegeben sei ein Trapez ABCD mit $\overline{AB} \| \overline{CD}$. Die Mittellinie schneide die Trapezseiten in E und F. Auf den zueinander parallelen Seiten lege man je einen Punkt (G; H) beliebig fest. Wieviel Prozent der Trapezfläche wird von der Fläche des Vierecks EGFH eingenommen?

André Meckel, Friesen/Vogtl.

9/13
Ein PKW soll von der Anfangsgeschwindigkeit v = 80 km/h auf horizontaler Strecke gleichmäßig durch eine Vierradbremse zum Stillstand gebracht werden, ohne daß die Räder dabei ins Rutschen kommen. Die Haftreibungszahl der Räder beträgt $\mu = 0{,}3$. Welche kürzeste Bremszeit und welcher kürzester Bremsweg sind möglich?

Dr. W. Riehl, Leipzig

9/14
Ein elektrisches Heizgerät wird erst mit 55 V, dann mit 220 Volt betrieben. Um wieviel steigt die abgegebene Wärme (unter sonst gleichen Bedingungen)?

10/8
In einem Zylinder mit einem Volumen von 3,927 cm^3 sind 5 Kugeln so angeordnet, daß sie sich gegenseitig berühren und auch die Grund- und Deckfläche sowie den Mantel des Hohlzylinders berühren.
Wieviel Gramm Stahl braucht man für die Herstellung der Kugeln?

$\left(\rho = 7{,}85 \frac{g}{cm^3}\right)$.

Bert Jüttler, Dresden

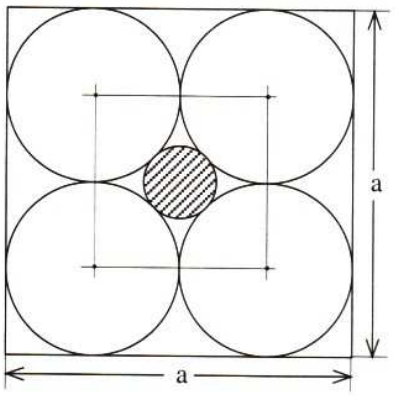
10/9
Einem Kreis ist ein gleichschenkliges Trapez umbeschrieben. Die kürzere der parallelen Seiten hat die Länge des Radius des Kreises.
Es ist der Umfang dieses Trapezes zu berechnen.

StR. H.-J. Kerber, Neustrelitz

10/10
In einem rechtwinkligen Koordinatensystem schneidet das Bild der Funktion $y = f(x) = x^2 - 6x + 8$ die Gerade mit der Gleichung $y = g(x) = x - 4$.
a) Es sind die Koordinaten der Schnittpunkte zu berechnen.
b) Welche Gleichungen haben die Geraden mit dem Anstieg $-\frac{1}{2}$, die durch diese Schnittpunkte gehen?

Elfriede Krawietz, Wolkenburg/Sa.

10/11
Gegeben sei die folgende Abbildung.
Es ist der Flächeninhalt des schraffierten Kreises durch die Länge a der Quadratseite auszudrücken.



Bert Jüttler, Dresden

10/12
Gegeben sei ein Rechteck ABCD, das einen Flächeninhalt von 40 cm^2 hat. Teilen Sie die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ jeweils in drei gleiche Teile und die Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ jeweils in zwei gleiche Teile!
Zeichnen Sie einen Rhombus EFGH, der die Mittelpunkte von $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ als Eckpunkte hat und dessen Seiten durch die anderen Teilungspunkte verlaufen!
Es ist der Flächeninhalt des Rhombus EFGH zu ermitteln.

StR. H.-J. Kerber, Neustrelitz

10/13
Welche Auftriebskraft erfährt ein Mensch mit m = 69 kg Gewicht, dessen Volumen V = 69,0 dm^2 beträgt, wenn er im Meer (e_w = 1,03 g / cm^3) untertaucht?

Dr. W. Riehl, Leipzig

10/14
Ein ohmscher Widerstand R = 10 Ω, eine Spule (L = 2H) und ein Kondensator sind in Reihe geschaltet. Wie groß muß seine Kapazität sein, damit im Stromkreis ein Strom von 1 A fließt, wenn an diese Reihenschaltung eine Wechselspannung von 220 V gelegt wird?

Dr. W. Riehl, Leipzig

E/8
Das 3.Glied einer arithmetischen Folge ist $3\frac{1}{4}$, das 12. Glied ist $16\frac{3}{4}$.
a) Es sind die ersten 5 Glieder der Folge aufzuschreiben.
b) Es ist für alle Glieder a_n ein Term f(n) anzugeben.
c) Es ist das 100. Glied der Folge zu berechnen.
d) Es ist die Summe aller Folgenglieder

vom 1. bis zum 100. Glied zu berechnen (100. Partialsumme).

Dr. W. Fregin, Naundorf

E/9

Jemand verlangt, die Länge des Erdäquators, die wir mit rund 40 000 km angeben, auf ± 5,50 m genau zu messen (größtmögliche Abweichung, die noch als genau gilt).

a) Um welche Strecke dürfte man sich höchstens vermessen, wenn man bei gleicher Genauigkeitsforderung eine Strecke von 1,50 m messen sollte?

b) Um welche Strecke dürfte man sich höchstens vermessen, wenn bei gleicher Genauigkeitsanforderung die Entfernung Erde-Sonne, die wir mit 150 000 000 km angeben wollen, zu bestimmen wäre?

Dr. W. Fregin, Naundorf

E/10

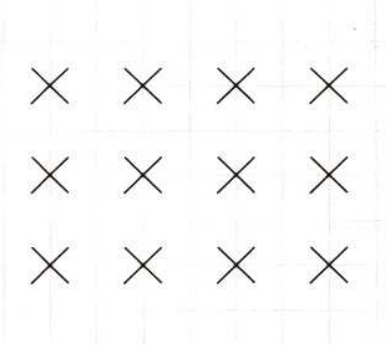
Eine vierzeilige 117 mm lange Zeitungsanzeige kostet inclusive 14% Mehrwertsteuer 181,40 DM.

Wieviel kostet eine siebenzeilige 83 mm lange Anzeige exclusive Mehrwertsteuer?

Dr. W. Fregin, Naundorf

E/11

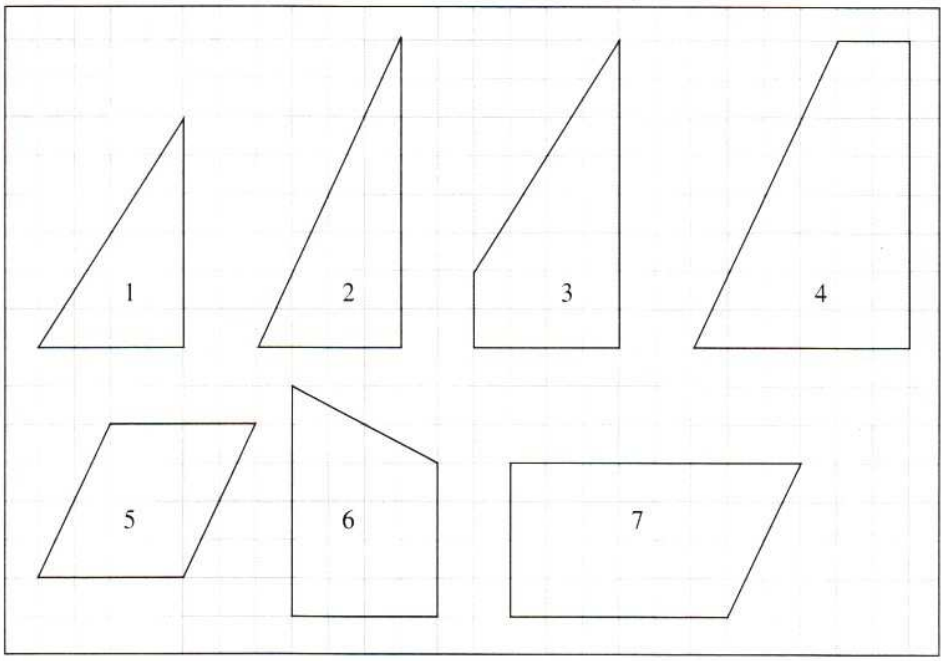
Zwölf voneinander verschiedene Punkte seien so in einem quadratischen Raster angeordnet, wie die Abbildung zeigt. Wieviele voneinander verschiedene Dreiecke kann man durch Verbinden von jeweils drei dieser Punkte zeichnen? (Wir wollen Figuren nur als gleich ansehen, wenn sie identisch sind, also zusammenfallen).



Dr. W. Fregin, Naundorf

E/12

Welche Entfernung von der Erde muß ein Nachrichtensatellit haben, der über einem bestimmten Punkt des Äquators stillzustehen scheint? (Erdradius 6378 km)



E/12

Setzen Sie aus allen oben abgebildeten Figuren ein Quadrat zusammen!

E/13

Eine Anordnung, bei der die Feldlinien eines magnetischen Feldes (Stärke $B = B_y$) und die Feldlinien eines elektrischen Feldes Stärke $E = E_x$) senkrecht aufeinander stehen, wirkt als Geschwindigkeitsmonochromator für geladene Teilchen, z. B. Elektronen, die sich senkrecht zu den elektrischen und magnetischen Feldlinien mit der Geschwindigkeit v_z bewegen. Bei einer bestimmten Stärke und Orientierung beider Felder ist die resultierende Kraft durch beide Felder auf das bewegte Elektron gleich Null. Stellen Sie für diesen Fall eine Beziehung zwischen den Feldstärken und der Bahngeschwindigkeit auf!

E/14

In ein Silberkalorimeter mit der Masse $m_{Ag} = 0{,}75$ kg und der spezifischen Wärmekapazität $c_{Ag} = 0{,}234$ kJ/kg·K, gefüllt mit $m_w = 1$ kg Wasser ($c_w = 4{,}19$ kJ/kg·K) von $t_1 = 15°$ C, werden $m_{Al} = 0{,}3$ kg Aluminium ($c_{Al} = 0{,}869$ kJ/kg·K) der Temperatur $t_2 = 100°$ C gebracht. Bestimmen Sie die Mischungstemperatur t_m des Wassers!

Dr. W. Riehl, Leipzig

Wettbewerbsbedingungen

1. Der Wettbewerb 1993 läuft über zwei Teilwettbewerbe in den Heften 1/93 und 2/93.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Anschrift, Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter) zu richten an:
   Mathematische Schülerzeitschrift alpha
   Postfach 129
   O-7010 Leipzig
   Die neue Postleitzahl ab 1. 7. lautet 04001 Leipzig.

   Den Lösungen ist die frankierte und an Euch adressierte Antwortkarte beizulegen, welche Ihr im Mittelteil unserer Zeitschrift findet. Darauf erhaltet Ihr die Ergebnisse dieses Teilwettbewerbes mitgeteilt. Steht mehreren Schülern nur eine Zeitschrift zur Verfügung, so kopiert Euch die Auswertungsseite der Antwortkarte und klebt sie auf eine an Euch adressierte Postkarte (Porto nicht vergessen!). Schulen beachten bitte, daß die gesammelte Rücksendung entsprechend mehr Porto verlangt.
3. Von dem Teilnehmer sind nur Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe zu lösen. Schüler ab Klassenstufe 10 und Erwachsene lösen die mit 10 und E gekennzeichneten Aufgaben.

(Fortsetzung folgende Seite)

4. Jeder Teilnehmer sollte einen Durchschlag seiner Lösungen anfertigen, um diese mit den jeweils zwei Heften später erscheinenden Lösungen zu vergleichen.

5. Diejenigen Teilnehmer, die insgesamt mindestens 8 Aufgaben richtig (gut oder sehr gut) gelöst haben, senden bis zum 10. September beide Antwortkarten, einen entsprechend frankierten und adressierten Rückumschlag und
a) bei mehr als dreimaliger Teilnahme die zuletzt erhaltene Urkunde bzw.
b) bei diesem Wettbewerb dreimaliger Teilnahme die beiden bereits vorhandenen Urkunden ein.
Bei erst- bzw. zweimaliger Teilnahme genügen die beiden Antwortkarten.

6. Alle erfolgreichen Teilnehmer erhalten eine Urkunde und einen alpha-Button. Pro Klassenstufe 5 bis 10 werden die 5 besten Teilnehmer ermittelt (entscheidend ist die Anzahl der sehr gut gelösten Aufgaben) und unter den Übrigen jeweils fünf Teilnehmer ausgelost.) (Außerdem prämieren wir 5 Frühstarter (Klassen 1 bis 4)).
Diesen Glücklichen winken attraktive Preise.

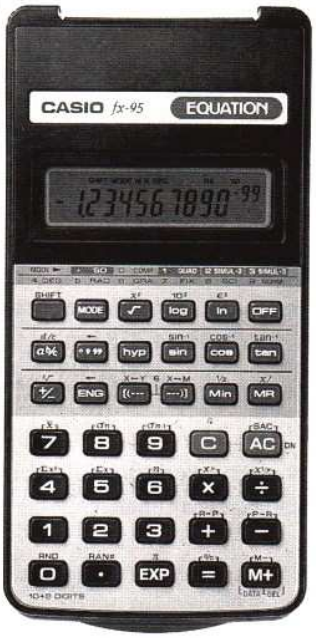
Beachtet bitte, daß wir Einsendungen ohne Rückporto nicht mehr bearbeiten können.

Einsendeschluß:
22. Juni 1993

Mitarbeiter/innen des Verlages und deren Angehörige können nicht am Wettbewerb teilnehmen. Der Rechtsweg ist ausgeschlossen. Die Verlosung erfolgt unter den Einsendern, die die Aufgaben richtig gelöst haben. Der Computer wird unter den fünf Besten aller Klassenstufen verlost.

Preise und Sponsoren des alpha-Schülerwettbewerbes 1993/94

Auch in diesem Jahr haben zahlreiche Sponsoren dazu beigetragen, den alpha-Schülerwettbewerb mit wertvollen Preisen noch attraktiver zu gestalten. Die Gewinner können sich freuen auf:



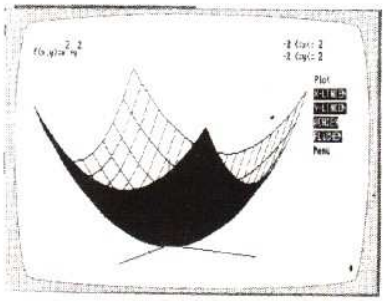
1 Graphik-Rechner FX 7700 GB
4 Technisch-wissenschaftliche Rechner
Die Rechner kommen von Casio Deutschland GmbH, Hamburg

2 Kassetten Sehen – Staunen – Wissen mit 10 großformatigen Sachbüchern vom Gerstenberg Verlag, Hildesheim

5 weitere Bücher aus der Reihe Sehen – Staunen – Wissen

5 Pons Schülerwörterbücher, Englisch
5 Pons Schülerwörterbücher, Französisch,
beide aus dem Klett Verlag für Wissen und Bildung, Stuttgart

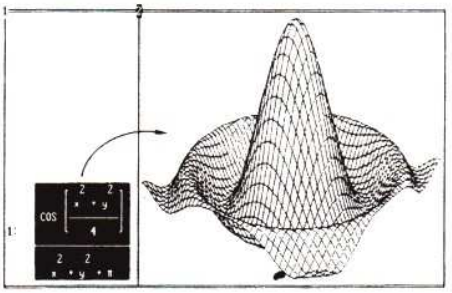
3 Software Programme aus dem Comet Verlag, Duisburg



10 Bücher „Bausteine des Chaos – Fraktale" aus dem Verlag Klett-Cotta, Stuttgart

1 Software-Programm „Derive" (Regeln und Verfahren der Mathematik)
3 Softwareprogramme Ali (Experten- und Tutorensystem für Algebra und Analysis)
Die Programme sind gestiftet von Klett Schulbuchverlag, Stuttgart

10 Rechner für Schule und Freizeit (mit unterschiedlicher Ausstattung) von Texas Instruments, 8050 Freising



Eine Fallunterscheidung bei der Erzeugung bemerkenswerter Körper aus den Platonischen Körpern

Name des Körpers	Räumliche Darstellung	E	F	K	n	α	Legende
Tetraeder		4	4	6	3	≈ 70,5°	E: Eckenanzahl
Hexaeder		8	6	12	4	90°	F: Kantenanzahl
Oktaeder		6	8	12	3	≈ 109,5°	K: Flächenanzahl
Dodekaeder		20	12	30	5	≈ 116,6°	α: Flächenwinkel des Körpers
Ikosaeder		12	20	30	3	≈ 138,2°	n: Anzahl der Seiten einer jeden Seitenfläche des Körpers

Abb. 1

In vielen interessanten Beiträgen wird über das Zusammensetzen geometrischer Figuren berichtet. So findet man auch häufig Betrachtungen zu Körpern, die durch Aufsetzen von Pyramiden auf andere Körper entstehen. Doch Vorsicht! Aufsetzen ist nicht gleich Aufsetzen!

Hiermit wollen wir uns im folgenden befassen. Dazu betrachten wir aber zunächst die Platonischen Körper und einige ihrer Eigenschaften (vgl. Tabelle, **Abb. 1**)

Platonische Körper sind konvexe Körper mit lauter zueinander kongruenten und regelmäßigen n-Ecken als Seitenflächen. Ein Körper wird konvex genannt, wenn die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte des Körpers stets zum Körper gehört (vgl. **Abb. 2**). Regelmäßige n-Ecke zeichnen sich durch kongruente Seiten und Innenwinkel aus. Jeder Platonische Körper besitzt zudem gleich große Flächenwinkel. Als Flächenwinkel werden die Neigungswinkel zweier benachbarter Flächen eines Körpers bezeichnet.

Die Platonischen Körper sind, wie überhaupt alle konvexen Körper, durch den Euler'schen Polyedersatz charakterisiert. Dieser fundamentale Satz beschreibt die Beziehung zwischen E, F und K durch E+F -K=2.

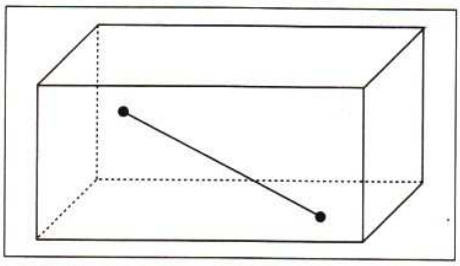


Abb. 2a: konvexer Körper

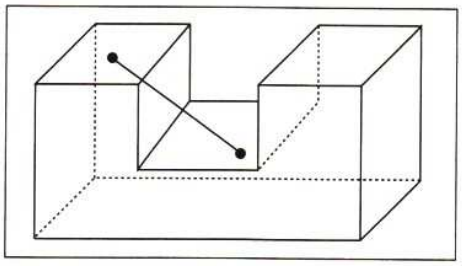


Abb. 2b: nicht konvexer Körper

Aufsetzen gerader Pyramiden

Nachdem wir nun für das bessere Verständnis der weiteren Ausführungen wichtige Begriffe erläutert haben, werden wir auf die 5 Platonischen Körper gerade Pyramiden gleicher Höhe so aufsetzen, daß die Seitenflächen der Platonischen Körper gleichzeitig die Grundflächen der Pyramiden sind. Sodann wollen wir untersuchen, was für neue Körper durch die Konstruktion entstehen. Dies ist nicht so leicht zu beantworten, wie es zunächst den Anschein haben könnte. Beginnen wir zur Beantwortung dieser Frage deshalb mit einer Vorbetrachtung. Dazu greifen wir uns von den Platonischen Körpern das Hexaeder heraus. Auf jede seiner 6 Seitenflächen wird eine Pyramide im beschriebenen Sinn aufgesetzt. Aus Übersichtsgründen beschränken wir uns in der Darstellung (**Abb. 3**) auf 2 dieser Pyramiden, die eine Kante k_1 gemeinsam haben. Anschließend denken wir uns den neu entstandenen Körper durch eine Ebene E so zerschnitten, daß der Schnitt durch die beiden Pyramidenspitzen S_1 und S_2 sowie durch den Mittelpunkt M_1 der Kante k_1 verläuft. Die Kantenmittelpunkte M_2, M_3 und M_4 der zu k_1 parallelen Kanten k_2, k_3 und k_4 sind ebenfalls Punkte dieser Schnittebene. Der Winkel α repräsentiert den Flächenwinkel des Hexaeders, β den Neigungswinkel der Seitenflächen der aufgesetzten Pyramiden.

Das so Dargestellte kann auf jeden der weiteren Platonischen Körper übertragen werden. Gehen wir nun von einem verall-

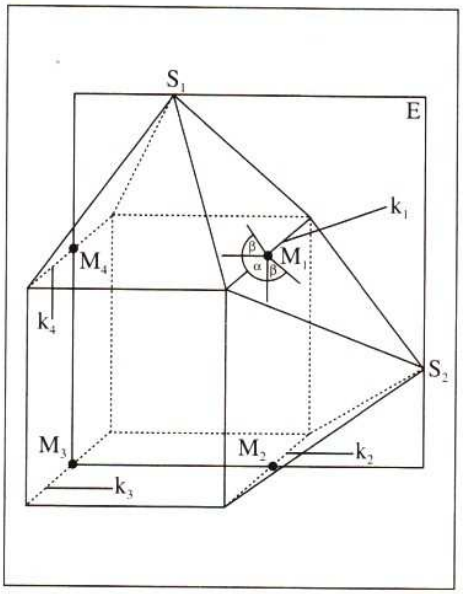


Abb. 3

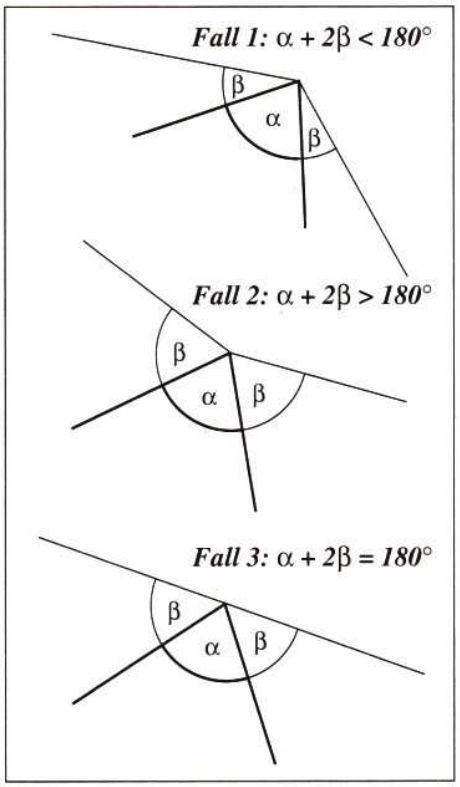


Abb. 4

gemeinerten Schnittbild des Aufsetzens von zwei benachbarten Pyramiden auf einen beliebigen Platonischen Körper aus (**Abb. 4**), erkennen wir, daß die Art des neu entstehenden Körpers offensichtlich von der Größe β abhängt. Für β muß, da es sich ja um den Neigungswinkel einer geraden Pyramide handelt, $0°<\beta<90°$ gelten. Der Flächenwinkel α eines jeden Platonischen Körpers genügt der Beziehung $0°<\alpha<180°$ (vgl. auch Tabelle, **Abb. 1**). Fassen wir diese beiden Beziehungen zusammen, dann gilt auch stets $\alpha+2\beta<360°$. Für die Größen von α und β lassen sich daraus die folgenden 3 interessanten Fälle unterscheiden, siehe **Abb. 4**.
Wir werden feststellen, daß diese Fallunterscheidung zur Beantwortung unserer Fragestellung notwendig, sinnvoll und zweckmäßig ist.

Neu entstehende Körper im Fall 1

Die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen der neu entstehenden Körper, also E', K' und F' lassen sich recht einfach aus E, K und F mittels unseres verwendeten Konstruktionsprinzips ermitteln. Offensichtlich gilt für E', da durch das Aufsetzen der Pyramiden auf jeder Seitenfläche des Ausgangskörpers eine neue Ecke entsteht und andererseits die Ecken des Ausgangskörpers selbst Ecken bleiben, die Gleichung E'=F+E. Die Anzahl der Flächen F' berechnet sich nach der Beziehung F'=F·n, da über jeder Seitenfläche, also über jedem regelmäßigen n-Eck eines Platonischen Körpers, genau n Seitenflächen des neuen Körpers entstehen. Für die Anzahl der Kanten K' gilt schließlich K'=K+F·n. Dies ergibt sich, da einerseits die Kanten des Ausgangskörpers als Kanten des neuen Körpers erhalten bleiben und andererseits aber noch so viele Kanten wie neu entstehende Flächen hinzukommen. Für E', F', K' gilt somit:

Ausgangskörper	neu erzeugter Körper		
	E'	F'	K'
Tetraeder	8	12	18
Hexaeder	14	24	36
Oktaeder	14	24	36
Ikosaeder	32	60	90
Dodekaeder	32	60	90

Die neu erzeugten Körper sind alle konvex. Ihre Seitenflächen sind kongruente gleichschenklige Dreiecke, deren Schenkel kürzer als ihre Basis sind. Der Neigungswinkel der aufgesetzten Pyramiden ist im hiesigen Fall durch $0°<ß<90° - \frac{\alpha}{2}$ aus $\alpha+2ß<180°$ bestimmt. Dies läßt für die Größe von ß mehrere Möglichkeiten zu. **Abb. 5** zeigt so den aus dem Hexaeder entstehenden neuen Körper, wenn ß=30° beträgt.

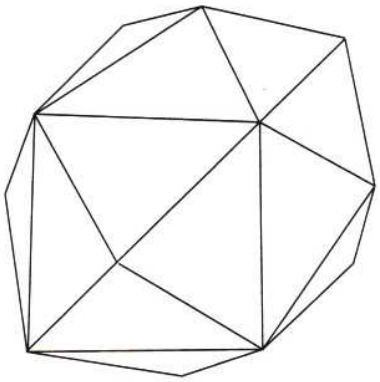


Abb. 5

Neu entstehende Körper im Fall 2

Es läßt sich unschwer das unter Fall 1 aufgezeigte Konstruktionsprinzip hier übertragen. Damit stimmen E', F', K' dieser neuen Körper mit E', F', K' der entsprechenden Körper von Fall 1 überein. Die Seitenflächen der neuen Körper sind erneut gleichschenklige Dreiecke, allerdings sind deren Schenkel nicht kürzer als deren Basis. Die erzeugten Körper von Fall 2 sind nicht konvex und werden in der Literatur infolge ihres sternförmigen Aussehens häufig als Sternkörper bezeichnet. Der Neigungswinkel der Pyramiden ß läßt im zweiten Fall Größen zu, die der Bedingungen $90° - \frac{\alpha}{2} <\beta<90°$ genügen.

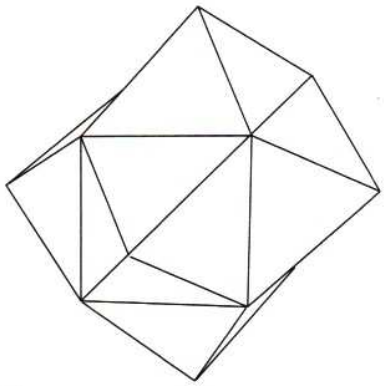


Abb. 6

Abb. 6 zeigt uns den aus dem Hexaeder erzeugten Körper, wenn $\beta=50°$ beträgt.

Neu entstehende Körper im Fall 3

Mit der Bedingung $\alpha+2\beta = 180°$ ist ß durch $\beta=90° - \frac{\alpha}{2}$ eindeutig bestimmt. Unsere Konstruktion im Fall 3 liefert nun ein ganz bemerkenswertes Resultat. Es verschwinden nämlich die Kanten der Ausgangskörper, da bezüglich ein und derselben Kante eines solchen die Seitenflächen der Pyramiden in einer gemeinsamen Ebene liegen. Wir wollen zuerst wieder Aussagen über die Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten der entstehenden Körper gewinnen. Durch das Aufsetzen der Pyramiden entsteht über jeder Seitenfläche eines Ausgangskörpers eine Ecke. Andererseits bleiben aber auch die Ecken des Ausgangskörpers erhalten. Damit ist die Anzahl der Ecken des neuen Körpers durch E'=F+E bestimmt. Die Anzahl der Kanten der neuen Körper läßt sich nach K'=F·n ermitteln, da von jeder aufgesetzten Pyramidenspitze bis zu den Ecken einer Seitenfläche des Ausgangskörpers genau n Kanten verlaufen. Weil der Ausgangskörper zudem F Flächen besitzt, muß K' das Produkt aus F und n sein. Weiter ist F'=K. Somit gilt:

Ausgangskörper	neu erzeugter Körper		
	E'	F'	K'
Tetraeder	8	6	12
Hexaeder	14	12	24
Oktaeder	14	12	24
Ikosaeder	32	30	60
Dodekaeder	32	30	60

Alle so entstandenen Körper sind konvex.

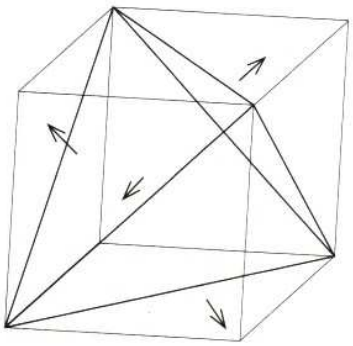


Abb. 7

Aus dem Tetraeder entstand durch diese Konstruktion das (regelmäßige) Hexaeder. Dieser Sachverhalt wird deutlich, wenn man einem Hexaeder ein Tetraeder einbeschreibt (**Abb. 7**) und sich von dieser Darstellung ausgehend, das Aufsetzen gerader Pyramiden auf das Tetraeder vorstellt, was zum Erhalt des Hexaeders führt. Aus den restlichen 4 Platonischen Körpern entstehen jeweils Körper mit kongruenten Seitenflächen. Diese Seitenflächen sind Rhomben und sind nicht regelmäßig. Auch im Fall 3 wollen wir denjenigen Körper darstellen, der aus dem Hexaeder entstand. (**Abb. 8**)

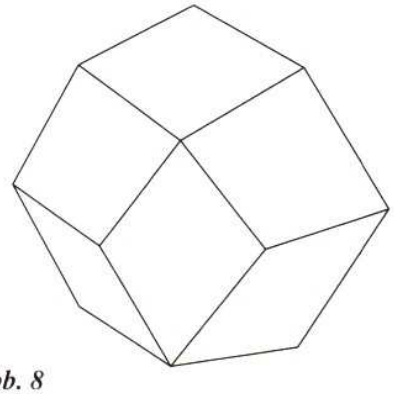


Abb. 8

Weitere Bemerkungen und Hinweise auf Sonderfälle

Wir hoffen gezeigt zu haben, daß Aufsetzen nicht gleich Aufsetzen ist. Um nicht den Rahmen dieses Beitrages zu sprengen, haben wir die neu entstandenen Körper hinsichtlich weniger Eigenschaften beschrieben. Es gäbe noch viel Interessantes darüber zu berichten, wie z. B. über Sonderfälle des Aufsetzens von Pyramiden auf die Platonischen Körper. Auf einen dieser Sachverhalte möchten wir aber noch hinweisen und damit dem interessierten Leser „Futter" für eine weitergehende Beschäftigung mit diesem Thema geben.

Wird nämlich im zweiten Fall ß so gewählt, daß $\alpha+\beta=180°$ ist, was ja der Bedingung $\alpha+2\beta>180°$ genügt, stellen wir fest, daß dies nur am Oktaeder, am Ikosaeder oder am Dodekaeder als Ausgangskörper der Konstruktion ausführbar ist. Da $ß<90°$ sein muß, ist α durch $\alpha>90°$ bestimmt. Dies ist nur bei den 3 genannten Körpern der Fall. Der interessierte Leser soll angesprochen sein, einmal die so neu entstehenden Körper näher zu untersuchen. Auf die angegebene weiterführende Literatur sei besonders hingewiesen.

Literatur

Böhm, J.; Quaisser, E.: Schönheit und Harmonie geoemtrischer Formen. Sphäroformen und symmetrische Körper; Akademieverlag Berlin, 1991.

Roman, T.: Reguläre und halbreguläre Polyeder. Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin, 1968.

Dr. Frank Heinrich
Friedrich-Schiller-Universität Jena

992 1742 1917 837

Was geschah vor...Jahren?

718 Zwischen 718 und 729 verfaßt der Inder Gautama Siddhata, der im Astronomischen Büro Chinas tätig war, eine Abhandlung über Astronomie und Astrologie. In dieser Abhandlung wird zum ersten Mal ein Symbol für die Null erwähnt, ein Punkt.

1143 Der Engländer Adelard von Bath (11./12. Jh.), der als Übersetzer in Toledo in Spanien tätig gewesen ist, übersetzt die Arithmetik des al-Hwarizmi (um 780 – um 850) ins Lateinische. Diese Übersetzung ist die älteste Übersetzung einer Schrift des berühmten mittelasiatischen Mathematikers in einer europäischen Sprache. Von „al-Hwarizmi" leitet sich das Wort „Algorithmus" her.

1543 In den ersten Monaten des Jahres wird „De revolutionibus" von Copernicus in Nürnberg gedruckt (siehe Text).

1543 Am 24. Mai stirbt Copernicus in Frombork (Frauenburg, Polen).

1543 Der italienische Astronom und Mathematiker Francesco Meurolico (1494 – 1575) stellt in seiner Weltbeschreibung die Erddrehung als unsinnig hin.

1693 Gottfried Wilhelm Leibniz (1946 – 1716) behandelt in einem Brief an den Marquis l'Hospital lineare Gleichungssysteme mit allgemeinen Koeffizienten, verwendet eine Indexschreibweise und führt die Determinanten ein.

1868 Am 22. Mai stirbt Julis Plücker in Bonn (siehe Text).

Julius Plücker

Es ist nicht ungewöhnlich, daß sich Mathematiker auch intensiv mit physikalischen Problemen befassen. Weniger oft kommt es jedoch vor, daß sich ein berühmter Mathematiker in „höherem Alter" noch der Experimentalphysik zuwendet. Das war bei Julius Plücker der Fall. Plücker, 1801 in Elberfeld geboren, wirkte in Berlin, Halle und Bonn. In Bonn wurde er 1835 Professor der Mathematik und 1836 übernahm er dort auch noch zusätzlich die Professur für Physik. In seinen wissenschaftlichen Arbeiten behandelte er auch nach 1836 fast ausschließlich mathematische Fragen. Seine Domäne war die analytische Geometrie. Mit dem Stettiner Gymnasialprofessor Hermann Graßmann (1809 – 1877) und dem Leipziger Sternwartendirektor August Ferdinand Möbius (1790 – 1868) bildete Plücker das führende Dreigestirn in der Weiterentwicklung der analytischen Geometrie, also der rechnerischen Bearbeitung z. T. auch sehr schwieriger geometrischer Probleme. Seit 1847 wandte sich Plücker auch der Experimentalphysik zu. Er arbeitete über Gasentladungen und entwarf zur Untersuchung dieser Gasentladungen die berühmte Geißlersche Röhre. Die Röhre baute ihm der Bonner Gasbläser und Instrumentebauer Johann Heinrich Wilhelm Geißler (1814 – 1879). Im Jahre 1858 bemerkte Plücker, daß jedes Gas ein charakteristisches Spektrum besitzt und stellte 1859 die Übereinstimmung einzelner Linien des Wasserstoffspektrums mit einzelnen Linien im Sonnenspektrum fest. Plücker gehörte mit diesen Entdeckungen zu den Vorarbeitern der hauptsächlich von Robert Bunsen (1811 – 1899) und Gustav Kirchhoff (1824 – 1887) entwickelten Spektralanalyse, die zu den wichtigsten physikalischen Fortschritten des 19. Jahrhunderts gehörte. Plücker starb am 22. Mai 1868, also vor 125 Jahren, in Bonn.

Vor 450 Jahren erschien „De revolutionibus ..."

Am 24. Mai 1543 starb Nicolaus Copernicus in Frauenburg (Frombork, Polen). An seinem Todestag gelangte ein Exemplar seines in Nürnberg 1543 gedruckten Hauptwerkes „De revolutionibus ..." in Frauenburg an. Copernicus, der seit längerer Zeit schwer erkrankt war, hat das Exemplar nicht mehr gesehen. „De revolutionibus ..." ist einer der wichtigsten Meilensteine auf dem Wege zu einer modernen Naturforschung gewesen, obwohl der lutherische Prediger Andreas Osiander (1498 – 1552) dem Druck ein Vorwort beifügte, in dem er behauptete, Copernicus stelle das heliozentrische Weltbild nur als Hypothese dar. Das von Copernicus verfaßte Vorwort ließ Osiander weg und verfälschte so den Sinn des gesamten Werkes. In „De revolutionibus ..." versuchte Copernicus das Weltsystem mit der Sonne im Mittelpunkt astronomisch und mathematisch zu begründen. Copernicus schrieb: „In der Weltmitte ruht die Sonne. Wer nämlich würde in diesem prächtigsten Tempel (die Welt als Schöpfung Gottes) die Lampe an einen anderen oder besseren Ort stellen, von wo aus sie alles zugleich erleuchten könnte ... So beherrschte die Sonne wie von einem Königsthron aus die umkreisende Familie der Gestirne." Das Werk des Copernicus, schon viele Jahre vor seinem Erscheinen niedergeschrieben, wurde von den Theologen nicht unfreundlich aufgenommen. Erst gegen Ende des 16. Jahrhunderts wurde die Lehre des Copernicus von beiden Kirchen heftigst angegriffen. Die Behauptungen des Copernicus widersprächen den Aussagen der Bibel und auch der Anschauung. Am 5.3.1616 wurden die Schriften des Copernicus auf den Index der von der katholischen Kirche verbotenen Bücher gesetzt. Das Verbot galt bis 1820. Erst 1992 wurde das Urteil der katholischen Kirche gegen Galileo Galiei (1564 – 1642) vom 22.6.1633 zurückgenommen: er habe die widernatürliche Lehre des Copernicus verteidigt. Über Leben und Werk des Copernicus kann man sich schnell informieren, z. B. in: Dobrzycki, J.; Biskup, M.: Nicolaus Copernicus, Leipzig 1983.

100 Jahre Mitteleuropäische Zeit

Bis zum Ende des 18. Jahrhunderts richtete man sich in jedem Ort nach seiner Sonnenuhr. Doch auch die Sonnenzeit hat ihre Tücken: Der Abstand zwischen zwei Längengraden beträgt im nördlichen Deutschland rund 70 km. Also müßte die Uhr bei einer Fahrt von Ost nach West alle 70 Kilometer um vier Minuten zurückgestellt werden. Nach der Sonnenuhr betrachtet, geht die Uhr eines Fußgängers nach jedem von Ost nach West bzw. umgekehrt zurückgelegten Kilometer um 3,5 Sekunden falsch!

Ferner kommt hinzu, daß das Zeitmaß der Sonne nicht ganz gleichmäßig ist. Die sogenannte Zeitgleichung bewirkt ein Vor- und Nachgehen der Sonnenuhr, das im Laufe des Jahres eine Differenz von rund 31 Minuten zur Folge hat.

Aus diesem Grunde schuf man eine gleichmäßige und exakte „mittlere" Sonnenzeit, zuerst 1780 in Genf, wo der Augenblick des „wahren" Mittags durch die Glocke der Kathedrale verkündet wurde.

In Berlin wurde diese mittlere Ortszeit 1810 eingeführt. Damit hatte man zwar den „Störenfried" Zeitgleichung ausgeschaltet, doch hatten Orte verschiedener geographischer Länge immer noch unterschiedliche Zeiten, was sich im Eisenbahnzeitalter sehr nachteilig auswirken sollte. Reiste man z. B. von Berlin nach Köln, mußte man die Uhr, die nach Berliner Ortszeit ging, in Köln um 32 Minuten zurückstellen. Wer von Erfurt nach Berlin reiste, hatte seine Uhr dort zum 16 Minuaten vorzustellen.

Landeszeit und Zonenzeit

So ist es verständlich, daß einige Länder zur „Landeszeit" übergingen, um größere Gebiete zu einer einheitlichen Zeit zusammenzufassen. Alle Orte richteten ihre Uhren nach der mittleren Ortszeit der Landeshauptstadt, was bereits ein großer Fortschritt war. So wurde bereits am 1. Juli 1891 von der norddeutschen Eisenbahn-Verwaltung die „Zonenzeit" eingeführt. Der gesamte Bahnverkehr richtete sich einheitlich nach der astronomischen Zeit des 15. Längengrades von Stargard in Pommern (jetzt Polen) und Görlitz. 1892 schlossen sich Bayern, Württemberg, Baden, Elsaß-Lothringen und die Norddeutsche Postdirektion an. Am 1. April 1893 war der Tag gekommen, an dem die Mitteleuropäische Zeit (MEZ) in Deutschland dem Wirrwarr ein Ende machte. Später wurde die MEZ auch in Österreich, Ungarn, Italien, Schweiz und in den skandinavischen Ländern eingeführt. Die so geschaffenen Zeitzonen richteten sich jeweils nach der mittleren Ortszeit jedes 15. Längengrades, wie 0° (London), 15° Görlitz, 30° St. Petersburg usw. Hier muß jedoch bemerkt werden, daß aus politischen und wirtschaftlichen Gründen die meridional verlaufenden, streifenartigen Zeitzonen Veränderungen erfahren haben. Hinzu kommen noch die Zeitverschiebungen durch die Einführung der Sommerzeit oder die sogen. Dekretstunde in den GUS-Staaten.

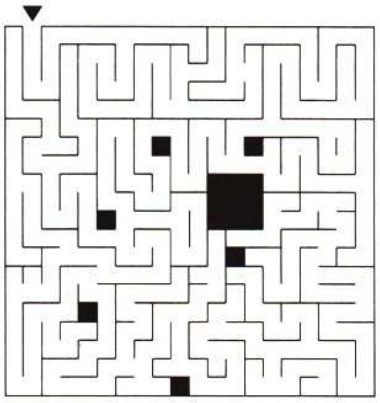
Arnold Zenkert, Potsdam

Labyrinthe

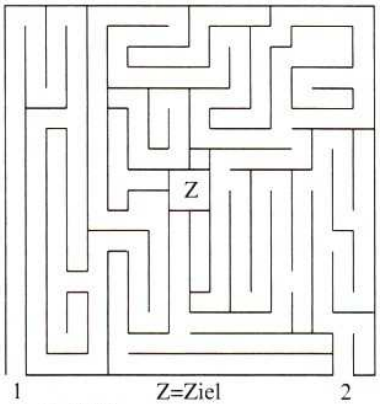
Im vorletzten alpha-Heft baten wir unsere Leser, uns selbsterdachte Labyrinthe zu schicken. An dieser Stelle möchten wir drei vorstellen, die wir vom Gymnasium Strasburg, Außenstelle Woldegk, erhielten.

Versucht doch selbst einmal, den Weg durchs Labyrinth zu finden. Eure Lösung könnt Ihr auf Seite 31 überprüfen.

Matthias Kruse



Ulrike Heimer



Katja Höft

Die Olympiade-Ecke
Der bulgarische DRUSCHBA-Wettbewerb

Im Revolutionsjahr 1989 entledigten sich die Völker Bulgariens, Rumäniens, der CSSR ihrer ungeliebten Staatsführungen. Vor vier Jahren auch begann der langsame Zerfall der kommunistischen Partei der UdSSR und die Mauer zwischen der Bundesrepublik und der DDR fiel. Was haben aber all diese geschichtlichen Ereignisse mit Mathematik zu tun?, werdet ihr wohl berechtigterweise fragen.

Nun, genau in diesen Zeitraum fiel auch die Geburt eines Wettbewerbstyps, der in der langen Zeit der Ost-West-Spannungen davor nur in den osteuropäischen Ländern bekannt und dort besonders beliebt war: Der **mathematische Fernwettbewerb**. Angefangen hat es vermutlich in Moskau 1979 mit der ersten Stadt-Olympiade. Im Lauf der Jahre kamen (fast) alle großen Städte der UdSSR hinzu; der Wettbewerb nannte sich nun **Turnir Gorodov** (= Städte-Turnier). Ab den Jahren 1984/85 weitete sich der Kreis der teilnehmenden Großstädte über die Grenzen der ehemaligen sowjetischen Republik hinaus. Aber erst der Einstieg der australischen Hauptstadt Canberra, verlieh dem Turnier im Jahr 1988 eine besondere, in diesem Fall, westliche Note. Zwei weitere Turnierjahre später, 1990, konkurrierte sogar eine deutsche Großstadt, nämlich Hamburg, mit anderen Metropolen der Welt. Ich werde Euch in einer der nächsten Ausgaben von alpha von diesem Wettbewerb noch mehr erzählen.

Ein ähnlicher, noch ganz junger Wettbewerb, ist der 1991 ins Leben gerufene **International Mathematical Talent Search**. Er wird getragen von der Zeitschrift *mathematics and informatics*, die es ebenfalls erst seit dem Frühjahr 1991 gibt. Auch dieser Wettbewerb – über den ich in der Olympiade-Ecke demnächst ebenso ausführlich berichten will – hat es sich zum Ziel gesetzt, ein Heer von Problemlösern, über alle Grenzen hinweg, zusammenzubringen, um sie, vom heimischen Sofa aus, ein wenig den Duft internationaler Wettbewerbsatmosphäre schnuppern zu lassen. Hinter solch weltweiten Bemühungen steckt die handfeste Absicht, die Menschheit auf technischem Gebiet weiterzubringen. Dazu bedarf es aber talentierter junger Menschen auf der ganzen Welt – und eben diese sollen in diesen Wettbewerben gefunden und gefördert werden.

Die Mathematik als Friedensbotschafter

Ein Wort steht immer häufiger solchen Talentfindungen voran. Sein Name lautet **Freundschaft**. Dies ist auch die deutsche Übersetzung für den bulgarischen Wettbewerb *Druschba*. Das Mittelschulzentrum für Mathematik und Informatik in Stara Zagora, veranstaltet seit dem Jahr 1986 alljährlich diesen dreistufigen, internationalen Mathe-Wettstreit. Druschba bietet von allen Fernwettbewerben das am breitesten aufgefächerte Angebot: er sucht sich seine Teilnehmer unter den 10-18jährigen Schülern aus (4.-11. Klasse). Neben den einheimischen, bulgarischen Jugendlichen, sind Schüler aus dem Ausland besonders zur Teilnahme eingeladen. Die weltumspannende Friedensidee züngelt auch als Flammenzeichen auf dem Emblem zum Wettbewerb, das Ihr oben abgebildet sehen könnt. Es ist einer Plastik des Sofioter Bildhauers Christo Haralampiev nachempfunden und ziert ebenso eine Seite der Medaille (in Gold, Silber und Bronze), die erfolgreichen Teilnehmern umgehängt wird.

Der Mann, der den Einfall zu diesem mathematischen Wettstreit hatte, heißt *Ljubomir Ljubenov*. Er ist der Leiter des Schulzentrums in der Bezirkshauptstadt Stara Zagora. Begonnen hat er nach seinem Mathematikstudium an der Universität Plovdiv, als Mathelehrer in Veliko Turnovo und in Stara Zagora. Seit geraumer Zeit gibt Herr Ljubenov auch eine, bisher leider nur in bulgarisch erscheinende, Zeitung heraus, die Mathematik Post. Ältere Leser von alpha werden ihn vielleicht noch in Erinnerung haben. Der sportbegeisterte Mathematiker, der noch aktiv Leichtathletik betreibt hat nämlich für alpha schon verschiedene Artikel geschrieben. Ein Probedurchlauf von Druschba in Stara Zagora 1986 geriet so vielsprechend, daß im heißen Sommer des Folgejahres die Drei-Stufen-Form des Wettbewerbs ausgebrütet wurde. Als erste gastgebende Stadt für die Finalrunde haben die Veranstalter Kazanlak im lieblichen Rosental ausgeguckt, genau dort, wo schon 1967 der erste bulgarische Wettbewerb überhaupt stattgefunden hatte. Hinzu kam, daß die örtliche Nikola Obreschkov-Schule für Mathematik schon eine Menge Erfahrung mit der Durchführung ähnlicher Veranstaltungen hat sammeln können. Erstaunlich viele (ca. 250) Schüler aus der früheren UdSSR, aus Polen, Rumänien, Kuba und natürlich aus Bulgarien, fanden Gefallen an dem mathematischen Dreikampf.

Mit Unterstützung der beiden bulgarischen Lokalzeitungen Septemvri und Schipka vergrößerte sich auch der Teilnehmerkreis an dem Fernwettbewerb. Exakt doppelt soviele Schüler (= 160) wie noch im Vorjahr überstanden die Qualifikationsrunden für das Finale 1988, diesmal in Stara Zagora. Ein gewitzter Einfall der Veranstalter während der 1988er Wettbewerbsrunde, ließ Druschba zu etwas Besonderem unter den Fernturnieren werden. Unter der Überschrift „Probleme von unseren Gewinnern" stellten die Vorjahressieger erstmalig dem Folgejahrgang eigene Aufgaben zur Bearbeitung. Diese Probleme wurden vor Beginn des 3. Druschba-Wettbewerbs im Dezember 1988, von zwei weiteren Tageszeitungen abgedruckt u. a. von der kasachischen Uchitel Kazahstana).

Der Einstieg der Zeitung aus dem Süden der (noch bestehenden) UdSSR geschah

Abb. 1

übrigens nicht zufällig. Auf Initiative des Mathematiklehrerverbands Kasachstans sollte nämlich die Endrunde des 3. Druschba-Turniers in deren Hauptstadt Alma-Ata stattfinden. Auch wenn es im fernen Süden der GUS – noch unter Präsident Michail Gorbatschow – schon reichlich gärte, erfüllte sich auch diesmal die ureigene Bedeutung des Wortes „Druschba". Unterhalb des Alatau, des Hausberges der Millionenstadt Alma-Ata, und 4400 Kilometer von Stara Zagora entfernt, wo Druschba ausgedacht worden ist, fand die kontinentüberspannende Idee ihre friedliche Fortsetzung.

Wie schwer es trotzdem sogar für die friedfertige Mathematik ist, in unruhigen Zeiten völkerverbindend zu wirken, das mußten L. Ljubenov und seine Helfer im vorletzten Jahr miterleben. Ihr könnt den täglichen Nachrichten selbst entnehmen, daß nach dem Zusammenbruch der großen UdSSR, in den südlichen Teilstaaten Mittelasiens, zahlreiche Bürgerkriege toben. Eine dieser unsicheren Gegenden ist Armenien – und eben dort, in deren Hauptstadt Eriwan, sollte die Endrunde des 1992er Wettbewerbs ausgetragen werden. Leider waren die politischen Verhältnisse nicht dazu geeignet, dieses Risiko einzugehen. Somit war nach der 2. Runde im Frühjahr, Schluß. Aber, trotz dieses unerfreulichen Ausganges von Druschba 1992: Heuer wird es mit Sicherheit wieder ein Finale des aktuellen Wettbewerbs geben. Nur der Finalort steht noch nicht fest. Fast hätte ich die Gastgeberstädte der Endrunden 1990 und 1991 vergessen. Hier sind sie: Stara Zagora (1990) und Legniza (Polen, 1991).

Teilnehmer aus der Bundesrepublik gesucht

Wettbewerbsmacher Ljubomir Ljubenov bedauert ein wenig die unausgewogene Verteilung der Teilnehmer auf die verschiedenen Herkunftsländer. Unter den 287 Einsendungen zur 1. Runde des letztjährigen Wettbewerbs kamen – wohl kaum überraschend – 185 aus Bulgarien, aber immerhin auch 62 aus der Volksrepublik China. Nur ganze vier Lösungen trudelten aus der westlichen Welt ein – und die wurden ausgerechnet in Deutschland abgestempelt. Herr Ljubenov wünscht sich deshalb ganz besonders, Druschba hierzulande noch bekannter zu machen. Was hiermit geschehen soll.

An dem bulgarischen Fernwettbewerb können Schüler der 4. bis 11. Klasse aller Nationalität teilnehmen. Pro Runde gibt es drei Aufgaben, die in deutscher bzw. englischer Sprache oder auf Bulgarisch gestellt sind. Die Probleme zur 1. Runde werden jeweils im Sommer verschickt. Wer sie haben möchte, der kann (auf deutsch) an folgende Adresse schreiben: **Mathematikwettbewerb Druschba, 6000 Stara Zagora, Bulgaria, P. O. box 288.**

Die erste Runde beginnt jeweils im Herbst, die zweite Runde folgt in den Monaten Februar/März. Die Punktbesten aus beiden Teilrunden werden zum eigentlichen Endturnier im Sommer eingeladen. Die Endsieger werden ausgezeichnet und alle Wettbewerber erhalten Urkunden. Druschba ist, ähnlich wie unser Bundeswettbewerb Mathematik, ein Hausaufgabenwettbewerb. Wer Lösungen einschickt, erhält rechtzeitig die Aufgaben zur zweiten Runde. Die Ergebnisse und Gewinner werden nach Abschluß der Finalrunde mitgeteilt. Da der Beginn des aktuellen Wettbewerbs 1993 vor dem Erscheinen dieses Heftes liegt, werde ich Euch rechtzeitig an den Startschuß für den 1994er Durchgang erinnern.

Übrigens: Ein deutscher Teilnehmer am 6. Druschba-Wettbewerb war Jörg Ramser, aus dem pfälzischen Alzey, der zur Zeit noch eine siebte Klasse am dortigen Elisabeth-Langgässer-Gymnasium besucht. Dem Computerfan aus der Nähe von Worms, hat der Wettbewerb ganz gut gefallen. Die Aufgaben fand er ziemlich originell, nur deren deutsche Übersetzung liest sich noch etwas holprig. Einmal erschienen die Aufgabentexte sogar in englischer Sprache. Ljubomir Ljubenov hat mich inzwischen gebeten, die deutsche Übersetzung künftiger Aufgaben auf sprachliche Richtigkeit hin zu überwachen. Interessenten für Druschba können sich somit auch an mich direkt wenden.

Die Beispiele, die ich Euch nun vorstellen werde, sind dem vorläufig letzten Wettbewerbsjahr sowie früheren Durchgängen entnommen. Ich habe sie nach Altersjahrgängen geordnet. Die Probleme 1 und 2 stammen von Jörg Ramser. Die Lösungen zu allen Aufgaben sollen Euch erst später verraten werden.

1 Aus den Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 werden alle vierstelligen Zahlen gebildet, in denen sich keine Ziffer wiederholt. Ermittle die kleinste und die größte unter diesen Zahlen, sowie die Summe aller so gebildeten Zahlen. (Druschba für 10-jährige)

2 Kann die Zahl 123456789101112..... 100101102 als Differenz zweier Quadratzahlen dargestellt werden? Die Antwort soll begründet werden! (Druschba für 11-jährige)

3 Ein magisches Quadrat ist ein quadratisch angeordnetes Zahlenschema, in dem die Summe der Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen gleich ist.
Zeige, daß diese Summe in einem 3x3 – Quadrat stets durch 3 teilbar ist. (Druschba für 12-jährige)

4 Setze in den mathematischen TGerm 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 Klammern derart, daß sich
a) der kleinste
b) der größte Wert ergibt.

5 Die drei natürlichen Zahlen a, b und c erfüllen die Bedingung $abc\cdot(a^3 + b^3 + c^3) = a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3$.
Zeige, daß mindestens eine der Zahlen, ab, bc oder ca eine Quadratzahl ist. (Druschba für 14-jährige)

6 Gegeben sind zwei Kreise. Jeder der beiden geht durch den jeweiligen Mittelpunkt des anderen. Eine Gerade durch einen der Kreisschittpunkte schneidet beide Kreise entsprechend in einem weiteren Punkt M bzw. N.
In den Punkten M und N werden die Tangenten an die Kreise gelegt.
Bestimme den Winkel, den die Tangenten miteinander bilden. (Druschba für 15-jährige)

7 Löse das Gleichungssystem
(1) $yz = 3y + 2z - 8$
(2) $zx = 4z + 3x - 8$
(3) $xy = 2x + y - 1$
(Druschba für 16-jährige)

8 Es seien a, b, c positive, reelle Zahlen. Weise die Gültigkeit der Ungleichung nach:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

(Druschba für 17-18-jährige)

Wenn Ihr von anderen Wettbewerben Aufgaben habt, schickt sie mir zur Veröffentlichung!

Paul Jainta, Schwabach

Lösungen zur Olympiade Ecke „DRUSCHBA“

1. Aufgabe
Lösung:
Die kleinste vierziffrige Zahl aus den Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5, in der sich keine Ziffer wiederholt, ist 1234; die größte derartige Zahl ist 5432. Die Anzahl der vierziffrigen Zahlen, bei denen genau eine Stelle unverändert bleibt, ist $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$. Somit ist die Quersumme aller dieser 24 Zahlen $24\cdot(1+2+3+4+5)=360$. Die Summe aller Zahlen, die der Bedingung in der Aufgabenstellung genügen, beträgt also $360\cdot(1000+100+10+1)=399960$.

2. Aufgabe
Lösung (nach Jörg Ramser, Alzey; Teilnehmer am 6. DRUSCHBA-Wettbewerb):
Da Quadratzahlen nur auf den Ziffern 0, 1, 4, 5, 6 oder 9 enden können, gibt es nur zwei Möglichkeiten, damit die Differenz zweier Quadratzahlen auf 2 enden kann: Entweder besitzen die beiden Quadratzahlen die Endziffern 6 und 4, oder sie enden entsprechend auf 1 und 9. Darüber hinaus muß eine Quadratzahl, die auf 6 endet, die vorletzte Ziffer 1, 3, 5, 7 oder 9 haben. Eine auf 4 endende Quadratzahl hat dagegen die vorletzte Ziffer 0, 2, 4, 6 oder 8. Die Differenz aus zwei Quadratzahlen (mit Endziffer 6 bzw. mit Endziffer 4) kann aber nie auf ... 02 enden. Besitzt andererseits eine Quadratzahl die Endziffer 1, dann kann sie als vorletzte Ziffer nur 0, 2, 4, 6 oder 8 annehmen. Desgleichen gilt für die vorletzte Ziffer einer auf 9 endenden Quadratzahl. Auch hier ist es unmöglich, daß die Differenz zweier Quadratzahlen mit unterschiedlicher Endziffer auf ... 02 endet. Somit läßt sich die Zahl 123456789101112 ... 100101102 nicht als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen.

3. Aufgabe
Lösung:

a	b	S-(a+b)
c		
S-(a+c)		

Abb. 1

Sei S die (gleiche) Summe der Zahlen in jeder Zeile, jeder Spalte und in jeder der beiden Hauptdiagonalen. Es bezeichnen a, b, c drei Einträge in obenstehendem Zahlenschema. Damit lassen sich die 1. Zeile und 1. Spalte durch S -(a+b) bzw. S -(a+c) ergänzen. Die fehlenden Felder lassen sich folgendermaßen auffüllen:
Mittelfeld: S -[S -(a+c)+S - (a+b]= -S+(2a+b+c);
Mittelfeld der 3. Spalte:
S - {c+[-S+(2a+b+c)]}=2S -2a -b -2c= =2S -(2a+b+2c);
Mittelfeld der 3. Zeile:
S - {b+[-S+(2a+b+c)]}=2S -(2a+2b+c).
Für das verbleibende Feld in der rechten unteren Ecke gibt es drei Berechnungsmöglichkeiten:
Zeilensumme:
S -[S -(a+c)+2S -(2a+2b+c)]= -2S+(3a+2b+2c);
Spaltensumme:
S -[S -(a+b)+2S – (2a+b+2c)]= -2S+(3a+2b+2c);
Diagonalensumme:
S -[a -S+(2a+b+c)]=2S -(3a+b+c);
Gleichsetzen liefert: -2S+(3a+2b+2c) =2S -(3a+b+c);
6a+3b+3c=4S
4S=3·(2a+b+c)
Da 3 kein Teiler von 4 ist, muß die Summe S ein Vielfaches von 3 sein.

4. Aufgabe
Lösung:
Den kleinsten Wert erhält man für folgende Beklammerung:

$$\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(\big((1:2):3\big):4\big):5\big):6\big):7\Big):8\Big):9\Big)=$$

$$=\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}$$

$$=\frac{1}{362880}$$

Der größte Wert des Terms ergibt sich bei folgender Klammersetzung:

$$1:\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(\big((2:3):4\big):5\big):6\big):7\Big):8\Big):9\Big)=$$

$$=\frac{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{2}=90720.$$

5. Aufgabe
Lösung:
Umstellung der Gleichung liefert:
$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 - abc(a^3+b^3+c^3)=0$
Äquivalente Termumformungen ergeben nacheinander
$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 -a^4bc -ab^4c -abc^4=$
$a^3b^3 -ab^4c+b^3c^3 -a^4bc+c^3a^3 -abc^4=$
$b^3a(a^2 -bc)+bc(b^2c^2-a^4)+c^3a(a^2-bc) =$
$b^3a(a^2-bc)+bc(a^2-bc)(-a^2+bc)+c^3a(a^2-bc)=$
$(a^2 -bc)[ab^3 -bc(bc+a^2)+c^3a]=$
$(a^2 -bc)[ab^3 -b^2c^2 -a^2bc+c^3a]=$
$(a^2 -bc)[b^2(ab -c^2) -ac(ab - c^2)]=$
$(a^2 -bc)(b^2 -ac)(ab -c^2)=0.$

Ein Produkt ist Null, wenn mindestens ein Faktor verschwindet E
$ab=c^2$ oder $ac=b^2$ oder $bc=a^2$.
Daraus folgt die Behauptung.

6. Aufgabe
Lösung:

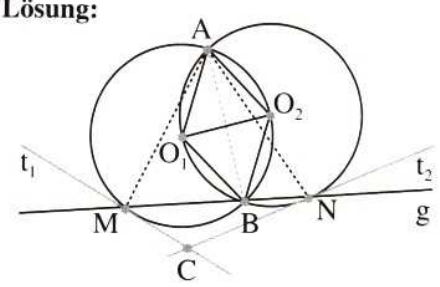


Abb. 2

Wir benutzen die nebenstehenden Bezeichnungen. Beide Kreise haben denselben Radius, da sie durch den Mittelpunkt des jeweils anderen gehen. Das Dreieck O_1O_2A ist somit gleichseitig.
$\Rightarrow \sphericalangle AO_1O_2=60°$, $\sphericalangle AO_1B=120°$ und wegen Symmetrie $\sphericalangle AO_2B=120°$. Zeichnet man die gemeinsame Sehne [AB], ergibt dies nach dem Umfangswinkelsatz

$$\sphericalangle AMB=\frac{1}{2}\cdot\sphericalangle AO_1B=60°$$

$$\sphericalangle ANB=\frac{1}{2}\cdot\sphericalangle AO_2B=60°$$

Das Dreieck AMN ist somit ebenfalls gleichseitig. Als Folgerung aus dem Umfangswinkelsatz gilt nun:
$\sphericalangle BMC=\sphericalangle MAB$ (Der Sehnen-Tangenten-Winkel $\sphericalangle BMC$ ist kongruent zum entsprechenden Umfangswinkel $\sphericalangle MAB$ über der Sehne [MB]) und entsprechend gilt auch $\sphericalangle BNC=\sphericalangle NAB$.
$\Rightarrow \sphericalangle MCN=180°-\sphericalangle BMC-\sphericalangle BNC$ (Winkelsumme im Dreieck MNC)
$=180°-\sphericalangle MAB-\sphericalangle NAB$
$=180°-\sphericalangle MAN=120°$
Die Tangenten t_1 und t_2 schneiden sich unter dem Winkel 120°.

7. Aufgabe
Lösung:
Da die linken Seiten der Gleichungen jeweils einen Produktterm haben, liegt es

nahe, links in den drei Teilgleichungen ein Produkt von Linearfaktoren herzustellen.

(1) Umgestellt => yz -2z=3y -8 <=>
z(y-2)=3y -6 -2 <=>
z(y-2) -3(y-2)= -2 <=> (y-2)(z-3)= -2 (1)

Ähnlich findet man (z -3)(x -4)=4 (2)
(x -1) (y -2)=1 (3)

Die linken Seiten von (2) bzw. (3) besitzen je einen Faktor der linken Seite von (1). Multiplikation beider Seiten von (2) mit (3) ergibt:

$(x-1)\underbrace{(y-2)(z-3)}_{-2}(x-4)=4 \Leftrightarrow -2\cdot(x-1)(x-4)=4$

oder $(x-1)(x-4)=-2 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0$
$\Leftrightarrow (x-2)(x-3)=0$

Diese Gleichung besitzt die Lösungen $x_1=2$ und $x_2=3$.

Für $x_1=2$ ergibt sich aus (3) $y_1=3$ und aus (2) $z_1=1$.

Für $x_2=3$ ergibt sich aus (3) $y_2=2{,}5$ und aus (2) $z_2=-1$.

8. Aufgabe

Lösung:

Wir führen die Abkürzungen ein: $b+c=2\alpha$, $c+a=2\beta$ und $a+b=2\gamma$.

Damit gilt: $a+b+c=\alpha+\beta+\gamma$; $a=\beta+\gamma-\alpha$; $b=\gamma+\alpha-\beta$ und $c=\alpha+\beta-\gamma$.

Die gegebene Ungleichung lautet dann in Abhängigkeit von α, β und γ folgendermaßen:

$$\frac{(\beta+\gamma-\alpha)^2}{2\alpha}+\frac{(\gamma+\alpha-\beta)^2}{2\beta}+\frac{(\alpha+\beta-\gamma)^2}{2\gamma}\geq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

Äquivalente Termumformungen ergeben der Reihe nach:

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma-2\alpha)^2}{\alpha}+\frac{(\alpha+\beta+\gamma-2\beta)^2}{\beta}+$$

$$+\frac{(\alpha+\beta+\gamma-2\gamma)^2}{\gamma}\geq \alpha+\beta+\gamma$$

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{\alpha}-4(\alpha+\beta+\gamma)+4\alpha+$$

$$+\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{\beta}-4(\alpha+\beta+\gamma)+4\beta+$$

$$+\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{\gamma}-4(\alpha+\beta+\gamma)+4\gamma\geq$$

$$\geq \alpha+\beta+\gamma.$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-9(\alpha+\beta+\gamma)\geq 0$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-9\right]\geq 0$$

Da nach Voraussetzung

$$\alpha+\beta+\gamma>0\Rightarrow(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\geq 9$$

Ausmulitplizieren und Umstellen liefert:

$$1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\alpha}+1+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}+1\geq 9$$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\geq 6 \quad *$$

Nun gilt für beliebige positive reelle Zahlen r, s die Ungleichung

$$\frac{r}{s}+\frac{r}{s}\geq 2$$

denn

$$\frac{r^2+s^2}{sr}\geq 2\Leftrightarrow r^2+s^2\geq 2rs$$

$$\Leftrightarrow r^2-2rs+s^2\geq 0\Leftrightarrow (r-s)^2\geq 0.$$

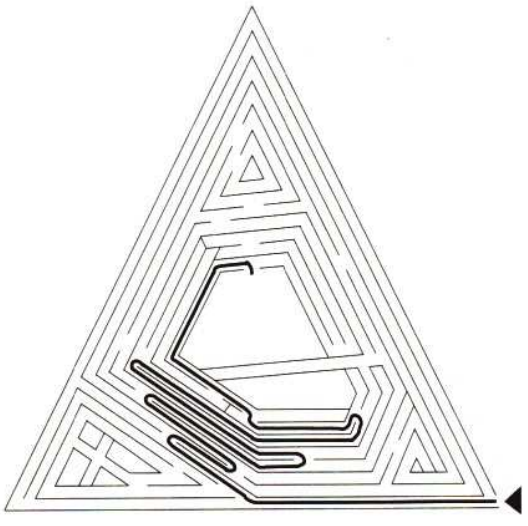
Somit läßt sich Ungleichung (*) nach unten abschätzen:

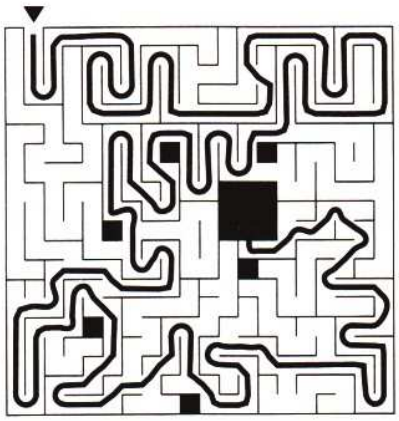
$$\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)+\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)+\left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\right)\geq$$

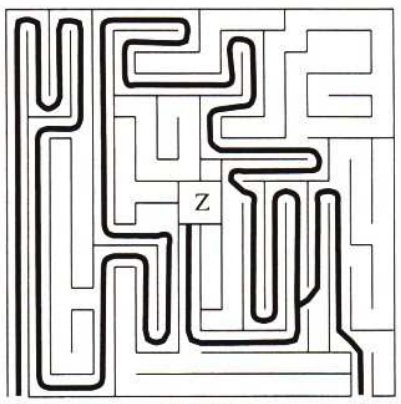
$$\geq 2+2+2=6$$

Dies beweist die Gültigkeit der gegebenen Ungleichung.

Labyrinthe







1 Z=Ziel 2

Marktecke

Kraft & Bewegung

Kraft & Bewegung, Buchreihe Faszinierende Forschung Sehen • Staunen • Wissen; übersetzt von Eva und Hans-Jürgen Schweikorb. Gerstenberg Verlag, Hildesheim 1993. ISBN 3-8067-4801-2; DM 36.–

Der schlichte Titel „Kraft & Bewegung" bekommt erst durch den Untertitel „Von den Kräften um Universum und den Maschinen zu ihrer Nutzung und Verstärkung" den „richtigen Dreh". In diesem zwar nicht besonders seitenstarken Buch (64 Seiten) wird mit Hunderten von eindrucksvollen Farbabbildungen anschaulich und spannend über Gesetze informiert, nach denen physikalische Vorgänge ablaufen – mit Versuchsanordnungen und Modellen, praktischen Beispielen und kurzen Abrissen der Wissenschaftsgeschichte. Darauf aufbauend wird an zahlreichen – auch ungewöhnlichen – Beispielen gezeigt, wie sich der Mensch diese Kräfte nutzbar gemacht hat. Fazit: Ein sehr empfehlenswertes Buch, besonders für Jugendliche zwischen 12 und 16 Jahren, die Freude am Stöbern und „Nach-Entdecken" haben.

In der Buchreihe „Faszinierende Forschung" sind bisher die Bände „Materie", „Kraft & Bewegung", „Licht" und „Elektrizität" erschienen. Im Herbst folgen „Chemie", „Energie" und „Evolution".

Ishido-Oldie

Ganz einfach, sieht Domino verdammt ähnlich. Korrekt. Wer sich bei den vielen Dominovarianten auskennt, wird ahnen, daß zunächst etwas anderes als das Spiel in den Vordergrund rückt: die RUHE.

Nachdem ISHIDO auf der Festplatte (knapp 1 MB) installiert ist, atmen wir tief durch. In aller Ruhe lösen wir mit der dreigeteilten Codescheibe das Sicherungssystem, bevor wir uns vor dem Spielbrett befinden. Das Spielbrett besteht aus 8 x 12 Feldern, von denen der äußerste Ring, das Jenseits, farblich hervorgehoben ist. Das Diesseits ist der Innenraum des Spielbretts. Sechs Steine werden auf den gekennzeichneten Feldern aufgedeckt, die restlichen noch aufzunehmenden 66 Steine sind noch im Topf, dem POUCH. Ausgelegt wird nach zwei Regeln: Entweder „Farbe an Farbe" oder „Symbol an Symbol". Am Anfang ist das einfach – ganz klar.

Da das Spielbrett mit jedem Zug mehr bevölkert wird, verringert sich der zur Verfügung stehende Raum für die Planung zunehmend. Steine werden in Kombinationen der beiden Regeln nebeneinander plaziert und endlich, nach vielen Überlegungen hat man ein Ziel vor Augen, eine Viererkombination erscheint möglich. Bonuspunkte winken.

ISHIDO ist im Prinzip sofort spielbar. Doch wer meint, ein einfaches Spiel vor sich zu haben, der wird rasch seine Meinung revidieren. Alleine die Fassung, möglichst alle 72 Steine auf dem Brett zu plazieren zeigt, welche geistigen Resourcen in dieser Spielidee steckten. Dank einer hervorragend gestalteten Spielanleitung erfährt man, wie man ISHIDO „richtig" spielen kann. Nicht die alleine Ablage aller Steine, sondern das Legen von 4ern ist das Bestreben der ISHIDO-Freunde. 4er (Four-Ways) sind Kombinationen, bei denen ein fünfter Stein passend als Mittelpunkt zwischen bereits vier liegende Steine plaziert wird. Rasch ist man von der Idee gepackt und beginnt, die Steine auf dem Brett zu verteilen.

In der Bearbeitung für den PC haben die Programmierer weiter gedacht, als in manch anderer Produktion. Sie haben einen Spielstein-Editor für jene eingebaut, denen weder Farbe noch Symbole der unterschiedlich wählbaren Spielsteine behagt. Das persönliche Spielstein-Set ist rasch gebastelt. Und wer die Spielanleitung wieder einmal verlegt hat, der kann sich per Menü in die Geheimnisse von ISHIDO einweisen lassen. Die Möglichkeit, auf unterschiedlichen Spielbrettern seine Steine zu plazieren, ist ebenfalls erwähnenswert. Holz-, Marmor- oder Elfenbein-Bretter stehen zur Wahl.

Und weil es bei ISHIDO japanisch zugeht, ist das Orakel nicht weit. Hat jemand eine persönliche Frage, kann diese vom Computer-Orakel beantwortet werden. Doch von der Frage bis zur Beantwortung ist es ein weiter Weg. Die Quittung für die eigene Neugier ist die Fortsetzung des Spieles mit einem höheren Schwierigkeitsgrad. Fünf Steine müssen in einer bestimmten Anordnung plaziert werden, erst dann antwortet das Orakel. Orakel hin, Orakel her, diese Beigabe ist ganz lustig – und ein Gag am Rande. Das Spiel ist so voll gepackt, daß es eigentlich keines Orakels mehr bedarf, um in der Hitliste ganz oben zu stehen.

ISHIDO ist ein tolles Spiel. Selbst Computermuffel werden bei dieser geistigen Akrobatik vor den Bildschirm gezwungen. Seit zwei Jahren auf der Festplatte – das ist ein Rekord, den bisher kein anderes Spiel erreichen konnte.

Wie alle Spielideen mit fernöstlichem Kolorit, besticht auch diese durch ihre Schlichtheit, durch die Komplexität, die sich in einer Idee schon nach wenigen Spielzügen zeigt. ISHIDO ist ein Computerspiel, bei dem man in aller Ruhe seinen Wein genießen kann, stilechter wäre es ja mit einem Saki. Den kann man auch mit einem Partner teilen, wenn man ISHIDO nicht alleine spielen möchte.

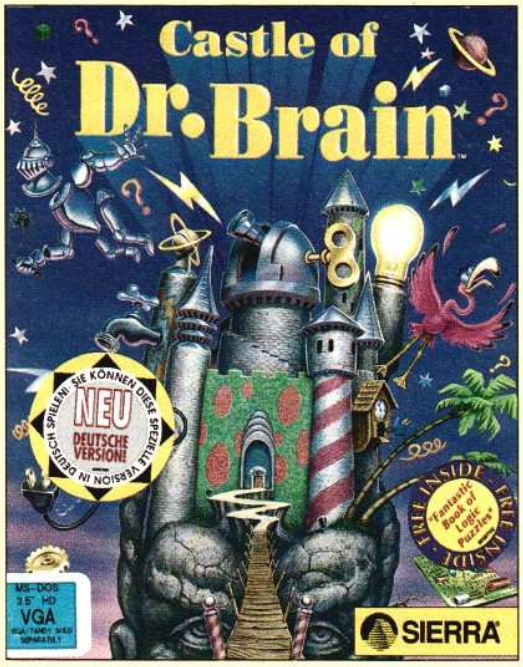
H. Seitz / -se

ISHIDO, Accolade 1990, Genre: Denkspiel Distributor: United Software, Hardware: PC AT, 640 KByte RAM, VGA, Festplatte, Soundkarte

Bücher Programme Videos Spiele Bücher Programme Videos Spiele Bücher Programme Videos Spiele

alpha und BOMICO verlosen Computerspiele

4 „Castle of Dr. Brain" zu gewinnen



Eines der erfolgreichsten Spiele von BOMICO ist „Castle of Dr. Brain" geworden. Das liegt sicherlich auch daran, daß recht hohe Anforderungen gestellt werden und logisch gedacht werden muß. So gilt es in Dr. Brains Schloß Rätsel aus den Bereichen „Bauen und Programmieren von Robotern", „Experimente mit der Zeit", „Entschlüsseln von Geheimcodes", „Tresorknacken", „Reagieren auf schlechte Wortspiele", „Kartographieren der Galaxis" zu lösen.
„Castle of Dr. Brain" ist ein Spiel von **BOMICO – Unterhaltungssoft- und hardware Vertriebs GmbH, Am Südpark 12, 6092 Kelsterbach.**

Ganz im Sinne von „Castle of Dr. Brain" möchten wir unseren Lesern Aufgaben stellen, die etwas Nachdenken erfordern – es wäre wohl zu einfach, nach der Anzahl der Buchstaben im Wort BOMICO zu fragen. Sendet Eure Lösungen bis zum 12. Juni bitte an:

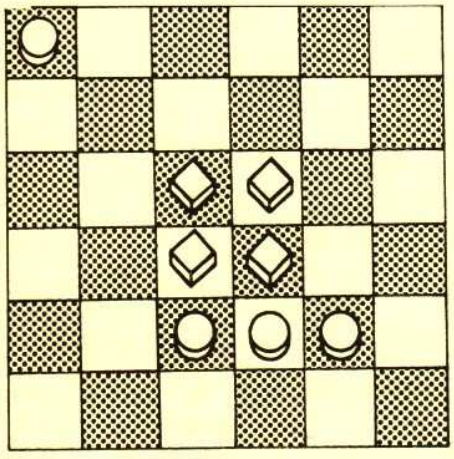
Erhard Friedrich Verlag,
Postfach 10 01 50,
3016 Seelze 6,
Redaktion alpha, Herrn J. Ricke.

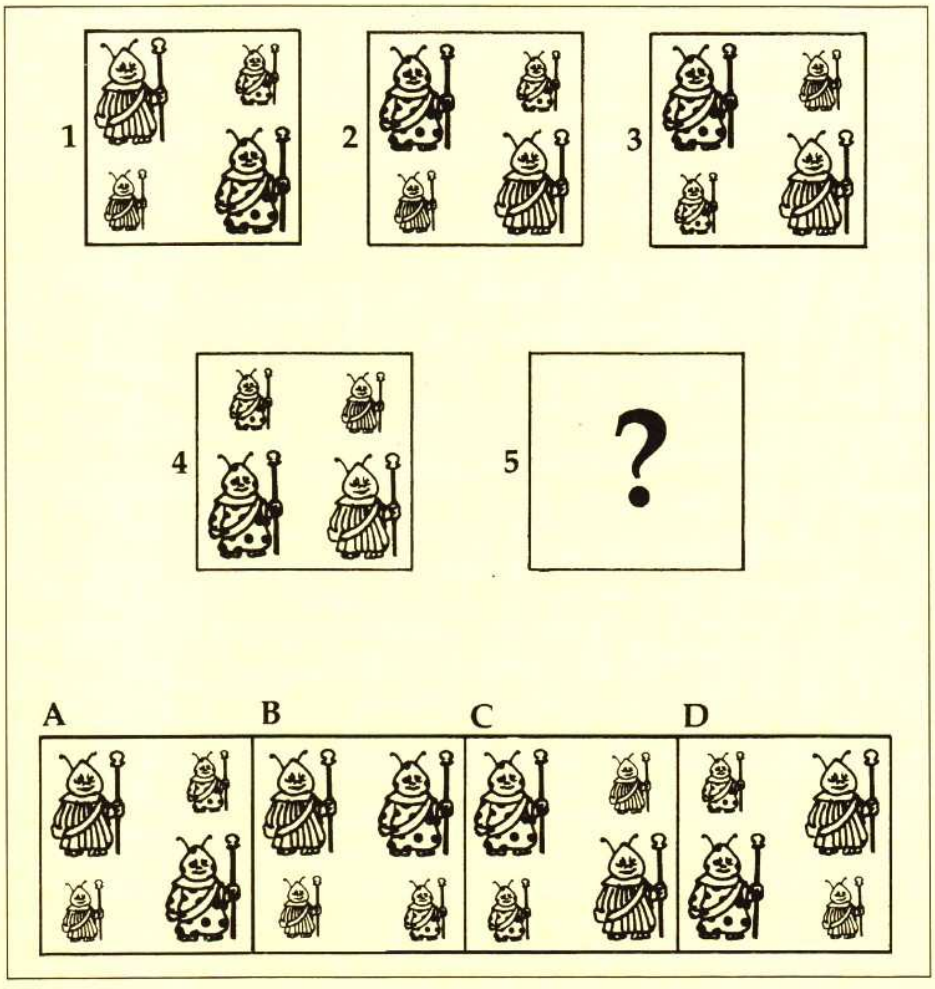
Unter den richtigen Einsendungen werden die Spiele verlost.

Die Aufgaben:

1. **Die Marsianer wechseln ihre Plätze beim Tanz (s. rechts). Die ersten vier Tanzfiguren sind aufgeführt. Welche ist logischerweise Figur 5, A, B, C, oder D?**

2. **Auf dem untenstehenden Brett mit 36 Quadraten liegen 4 runde Steine und 4 Würfel. Wie ist das Brett in 4 Bereiche aufzuteilen, die alle dieselbe Größe und Form haben und alle einen runden Spielstein und einen Würfel haben?**





Lösungen der Aufgaben aus Heft 1/93 alpha („Ausgerechnet Mathematik") Die Olympiade-Ecke

1) Dortmund hat mehr als 540 000 Einwohner. Man weiß, daß der Mensch weniger als 540 000 Haare auf dem Kopf hat. Gibt es in Dortmund mit Sicherheit mindestens zwei Bürger mit gleich viel Haaren auf dem Kopf?

Lösung:

Die Aufgabe ist eine einfache Anwendung des sog. „Schubfachprinzips". Stelle dir vor, die Einwohner Dortmunds werden nach der Zahl ihrer Haare sortiert. In Schubfach 1 kommt jemand, der nur 1 Haar auf dem Kopf hat, in Schubfach 2 befindet sich ein Einwohner mit 2 Haaren usw. In der letzten Schublade sitzt jemand mit 540 000 Haaren auf dem Kopf. Da Dortmund mehr Einwohner hat, als es Schubfächer gibt, muß es mindestens eine Nummer geben, in der mindestens zwei Dortmunder hineingehören. Also gibt es mindestens zwei Bürger in Dortmund mit gleich viel Haaren auf dem Kopf.

2) Eine Flasche Wein kostet 10 DM. Der Wein selbst kostet 9 DM mehr als die (leere) Flasche. Wie teuer ist die Flasche?

Lösung:

Die Flasche kostet x DM.
Dann ist für den Wein zu zahlen: x+9 DM
Zusammen gilt: x+x+9=10
2x=1
x=0,5
Die (leere) Flasche kostet 50 Pfennige.

3) Bei Einberufung zu Reserve-Übungen der Bundeswehr hat man im allgemeinen mit 40 % Ausfällen zu rechnen. Dies führt den Inspektor des Heeres zu der naheliegenden (?) Anweisung, dann müsse man „eben 140 % anfordern". Hättet ihr das auch getan?

Lösung:

Da das Verhältnis Ausfälle zu tauglichen Reservisten gleichbleiben soll

$$\left(\frac{40\%}{60\%}=\frac{2}{3}\right)$$

hätte der Heeresinspektor nicht 40 % mehr Reservisten anfordern sollen, sondern $\frac{2}{3}$ mehr $\left(\hat{=}\,66\frac{2}{3}\%\right)$.

4) Das Produkt der Alter von 3 Kindern beträgt 1664. Das jüngste Kind ist mindestens halb so alt wie das älteste. Der Vater ist 50 Jahre alt. Wie alt sind die Kinder? (5 – 6)

Lösung:

Es gilt: $1664=2^3\cdot 2^4\cdot 13$
$=8\cdot 16\cdot 13$
Die Alter der Kinder sind 8, 16 und 13. Dies ist die einzige, mit den gegebenen Bedingungen verträgliche Lösung.

5) Wie viele Zahlen zwischen 1 und 100 gibt es, bei deren Primfaktorzerlegung die Zahl 7 der kleinste Primfaktor ist? (5 – 6)

Lösung:

Es gibt vier Zahlen: 7, 49, 77 und 91. Es gilt nämlich: $7=7\cdot 1$, $49=7\cdot 7$, $77=7\cdot 11$, $91=7\cdot 13$.

6) Der Mittelwert einer Menge von 50 Zahlen ist 38. Wenn zwei Zahlen, nämlich 45 und 55, weggelassen werden, berechne für diesen Fall den Mittelwert der übrigen Zahlen (7 – 10).

Lösung:

Für das arithmetische Mittel der 50 Zahlen gilt:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{50}}{50}=38.$$

Läßt man die Zahlen 45 und 55 weg, verbleibt für die restlichen 48 Zahlen: $x_1+x_2+\ldots+x_{48}=38\cdot 50-100$;

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{48}}{48}=\frac{50(38-2)}{48}=37,5$$

7) Die Summe aus einer zweiziffrigen Zahl und der Zahl, die man bei Vertauschung der Ziffern erhält, ist eine Quadratzahl. Wie viele solcher Zahlen gibt es? (7 – 10)

Lösung:

Die zweiziffrige Zahl sei $\overline{ab}=10a+b$
$\Rightarrow 10a+b+10b+a=11a+11b=11(a+b)$
Damit diese Summe eine Quadratzahl wird, muß gelten:
a+b=11.
Für a=2, 3, ..., 9 gibt es 8 Zahlen mit dieser Bedingung.

8) In einer Schublade liegen 28 Taschentücher, 6 sind rot, 5 sind blau und der Rest ist weiß. Wenn Thomas blind ein Taschentuch aus der Schublade zieht, wie viele Taschentücher muß er dann mindestens aus dem Fach ziehen, damit er mit Sicherheit 3 Taschentücher der gleichen Farbe hat? (9 – 10)

Lösung:

Im ungünstigsten Fall sind 7 Griffe in die Schublade erforderlich. Angenommen, Thomas zieht bei den ersten drei Versuchen rot, blau und weiß. Dann sind nach 6 Zügen im ungünstigsten Fall 2 rote, 2 blaue und 2 weiße Taschentücher darunter. Erst der siebte Griff in die Schublade ergibt 3 Taschentücher einer Farbe.

9) Berechne die Summe

$$\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots$$
$$+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

Es ergibt sich eine ganze Zahl! (9 – 10)

Lösung:

Jeder der Summanden ist von der Form

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}=\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}$$

Durch Erweitern des jeweiligen Bruchterms findet man:

$$\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\right)\cdot\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{a+1-a}=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$$

das heißt, daß alle Summanden den Nenner 1 haben.
Somit vereinfacht sich die Summe zu

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots$$
$$+\sqrt{100}-\sqrt{99}=\sqrt{100}=10$$

Lösungen

Kisten stapeln

Da genau 1 1/2-mal soviele Kisten verbaut werden, würde das Volumen des neuen Bauwerks eineinhalbmal so groß sein wie das Volumen des derzeitigen Rekordbaus. Nehmen wir als Vereinfachung an, die geometrischen Gestalten beider Bauwerke seinen einander ähnlich. Dann müßten alle Abmessungen – da es sich um ein dreidimensionales Objekt handelt – etwa $\sqrt[3]{11/2} \approx 1{,}14$ mal so groß werden. Der neue Rekordbau wäre somit um 14 % höher.

Ötzi

Lösung: Wegen 3200m : 80m = 40 beträgt der Luftdruck in der Höhe von 3200 m ü. M. genähert 760 Torr · $0{,}990^{40}$ ≈ 510 Torr.
Bei einem Luftdruck von 510 Torr siedet Wasser bereits knapp unter 90°C.

Napoleon

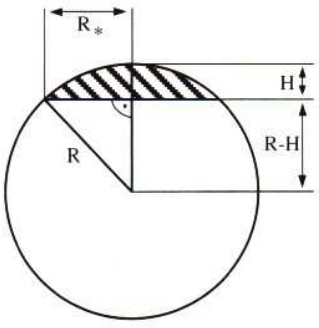
Lösung der 1. Aufgabe: Für den Umfang $u = 2\pi r$ und den Flächeninhalt $A = \pi r^2$ einer Kreisfläche mit dem Radius R gilt

$$u = 2\sqrt{\pi A}$$

Mit A = 549430 km² ergibt sich die innere Mauerlänge zu u = 2628 km. Das Volumen der Cheopspyramide ist $a^2h:3$ und das der Mauer (in guter Näherung, falls d sehr klein gegenüber u ist) duh. Aus $a^2h:3 \approx duh$ folgt

$$d \approx \frac{a^2h}{3uh} \approx 0{,}33\text{m}$$

Lösung der 2. Aufgabe:



Ist H die Höhe dieser Kugelkappe, so gilt $2\pi RH = 549430$ km² und damit H = 13,73 km. Ist R der Radius des Randkreises der Kugelkappe und und U seine Länge, so gilt laut Satz des Pythagoras

$$U = 2\pi R = 2\pi\sqrt{R^2 - (R-H)^2} =$$

$$= 2\pi\sqrt{H(2R-H)} \approx 2626\,\text{km}$$

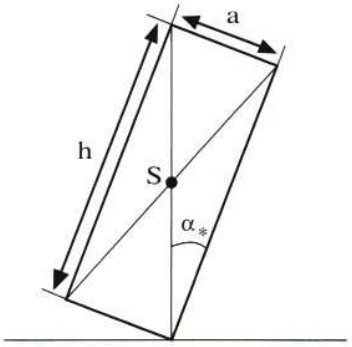
Bemerkungen: Wegen

$$\frac{u-U}{U} \cong 0{,}076\,\%$$

führt das Nichtbeachten der Erdkrümmung zu einer vernachlässigbaren Verlängerung der Mauer. Die in Aufgabe 1 errechnete Mauerdicke ist jedoch nur ein grober Näherungswert, weil die Grenzen Frankreichs kein Kreis ist, weil nur rund 85% des Volumens der Cheopspyramide Steine sind (15% sind Mörtel und Hohlräume), weil 1798 die Fläche des durch Eroberungen vergrößerten Frankreich 611100 km² maß und weil bereits zu Napoleons Zeiten die etwa 2 m dicke Kalksteinverkleidung der Cheopspyramide bis auf Reste nicht mehr vorhanden war.

Pisa

Lösung der 1. Aufgabe:



Bei dieser Säule muß sich beim Kippen um $\alpha = 4{,}5°$ um eine Kante der Grundfläche der Schwerpunkt S dieses Körpers, der Schnittpunkt seiner Raumdiagonalen, senkrecht über einem Punkt dieser Grundkante befinden. Demnach muß laut einer maßstäblichen Zeichnung oder laut der Formel $h:a = \cot 4{,}5°$ $h:a \approx 12{,}7$ gelten.

Lösung der 2. Aufgabe:

$$h:d = 58{,}36\text{m}:\frac{40\text{m}}{\pi} \approx 4{,}6\,.$$

Geysir

Lösung: Bei fehlendem Luftwiderstand bleibt für jeden Wassertropfen, der nicht mit anderen zusammenstößt, vom Zeitpunkt des Ausströmens bis zum Aufprall auf die Erde die Summe aus Bewegungsenergie und Energie der Lage konstant. An der Erdoberfläche hätte er nur Bewegungsenergie $\frac{m}{2}v^2$, wobei v die Ausströmgeschwindigkeit ist, und beim Erreichen der Steighöhe h = 35 m nur Energie der Lage mgh. Aus

$$\frac{m}{2}v^2 = mgh \quad \text{folgt mit}$$

$$g = 9{,}81\frac{m}{s^2} \quad v = \sqrt{2gh} \approx 26{,}2\frac{m}{s}.$$

Da jedoch der Luftwiderstand vorhanden ist, muß die Ausströmgeschwindigkeit des 35 m hoch steigenden Wassers größer als $26{,}2\frac{m}{s}$ sein.

Das wird Folgen haben!

1 a) 1; 5; 9; 13; **17**; **21**; **25**; 29; **33**
b) 0; 13; 26; 39; **52**; **65**; **78**; 91
c) 2; 5; 8; 11; **14**; **17**; 20; **23**; **26**
d) 0; 0,5; 1,5; 3,0; 5,0; 7,5; 10,5; **14,0**; **18,0**; 22,5; **27,5**

2

					9			
	5				**20**			
3	10	17	**24**		31	38	**45**	
	15				42			
	20				53			
	25				**64**			
0	15	30	**45**	**60**	75	**90**		

3 a)

0	3	6	**9**	**12**	**15**	**18**	
2	5				17	20	
4		10		**16**		22	
6			**15**			**24**	
8		**14**		**20**		**26**	
10	**13**				**25**	**28**	
12	**15**	18	21	**24**	**27**	**30**	

b)

0	1	3	6	10	15	**21**	**28**	**36**
	6						33	
3		12				30		**39**
			18		**27**			
6				**24**				42
			21		**30**			
9		**18**				**36**		**45**
	15						**42**	
12	16,5	21	**25,5**	**30**	**34,5**	**39**	**43,5**	**48**

10. alpha-Schachwettbewerb

Beim Eindringen in den vielfältigen Beziehungen zwischen Mathematik und Schach, deren sich alpha schon seit einigen Jahren widmet, kommt es zu einem kleinen Jubiläum. Zum 10. Mal ermöglicht alpha allen schachinteressierten Lesern und jenen, die es werden wollen, sich in dieser reizvollen Form des Denksports zu messen und an dem Wettbewerb teilzunehmen.

Es gilt wiederum eine oder bis zu acht Schachaufgaben mit wachsendem Schwierigkeitsgrad zu lösen. Aus Anlaß des Jubiläums dokumentieren die ausgewählten Aufgaben, angefangen von den zwanziger bis zu den neunziger Jahren dieses Jahrhunderts, einen Querschnitt durch 80 Jahre Problemschach.
In allen acht Aufgaben beginnt Weiß und setzt trotz bester Gegenwehr von Schwarz in der geforderten Zügezahl matt. Als vollständig gilt die Lösung, wenn alle Abspiele bis zum Matt angeführt werden.
Um auch weniger geübten Lösern eine Gewinnchance zu geben, wird noch folgendem Verlosungsmodus verfahren: Jeder Leser erhält pro korrekt gelöster Aufgabe ein Los. Dadurch nimmt man bereits mit nur einer gelösten Aufgabe an der Verlosung teil, kann aber mit jeder weiteren Lösung seine Chancen bis zum 8fachen steigern. Teilnehmer bis zu 16 Jahren erhalten pro gelöster Aufgabe 1 bis 4 einen Extrabonus von einem 1/2 Los. Wer alle Aufgaben vollständig gelöst hat, erhält zudem eine Urkunde.

Die Einsendung der Lösungen ist bitte bis zum 15. Juli 1993 unter Angabe von Name, Vorname und Alter zu richten an

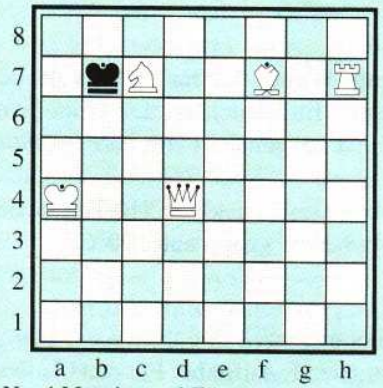
Harald Rüdiger
postlagernd
O-1252 Grünheide

Die Lösungen und die Gewinner werden in alpha 6/1993 veröffentlicht.

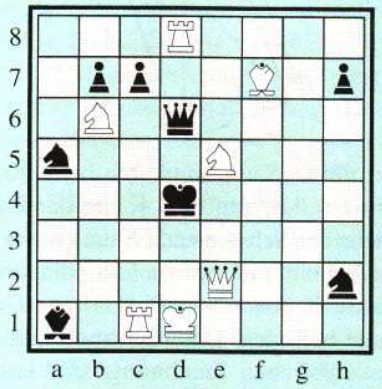
Nr. 1 Matt in zwei Zügen

Nr. 2 Matt in zwei Zügen

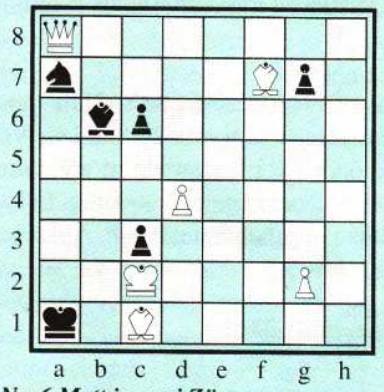
Nr. 3 Matt in zwei Zügen



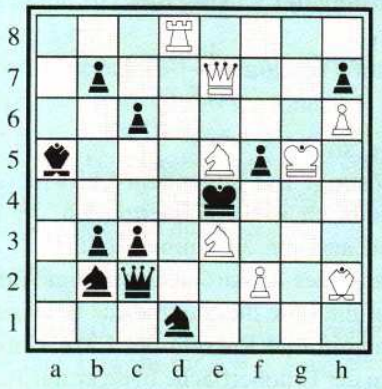
Nr. 4 Matt in zwei Zügen



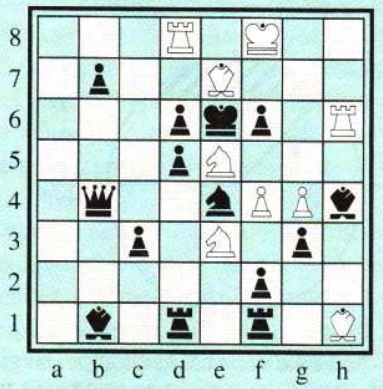
Nr. 5 Matt in zwei Zügen



Nr. 6 Matt in zwei Zügen



Nr. 7 Matt in zwei Zügen



Nr. 8 Matt in zwei Zügen

ISBN 3-617-34014-8 Einzelpreis: 3,– DM Einzelpreis im Abo: 2,15 DM

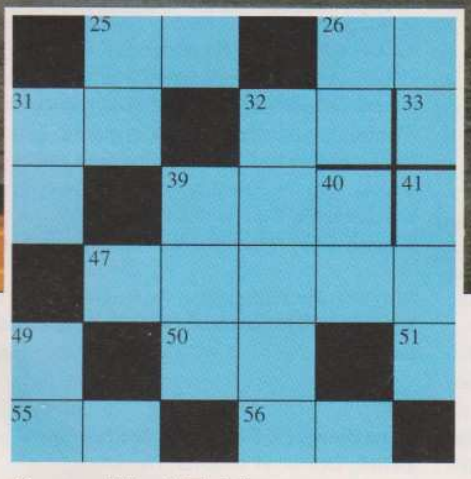
H 11328 F

Heft 3
Juni 1993
27. Jahrgang

Pädagogische
Zeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

Alpha

Mathematische Schülerzeitschrift



Kreuz-Wort-Zahl-Formel-Rätsel

Incredible Machine

Leserbriefe

Ich möchte Sie auf einen ärgerlichen Fehler im Heft 4/1992 von „alpha" aufmerksam machen. Es geht um die Abbildung 1 auf Seite 8. Wenn der Äquator als Ellipse zu sehen ist – sozusagen etwas „von oben" – dann können Nord- und Südpol nicht dort liegen, wo sie eingezeichnet sind, sondern etwas weiter vorn (N) bzw. hinten (S). Oder umgekehrt – wenn N und S richtig eingezeichnet sind, dann müßte der Äquator als Durchmesser (also als Strecke) gezeichnet werden (senkrecht zur Strecke NS).

Prof. Dr. W. Walsch, Halle

„Ein seltsamer Beweis"
alpha, Heft 4, 1992. Seite 21
Lösung:
Der Schnittpunkt M von m_1 und m_2 liegt auf der anderen Seite von ABCD.

Daniel Küpper
Dorfstr. 103
B-4761 Wirtzfeld

Korrektur

In alpha 6(92 ist auf Seite 27 in der oberen Zeichnung der Abb. 3 die Bezeichnung der Quadratseiten a und b miteinander vertauscht worden. Daraus ergibt sich ein Widerspruch zur Textangabe S. 26, 1. Spalte, vorletzte Zeile.
Wir bitten diesen Fehler nachzusehen.

alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett und in Verbindung mit Dr. Gabriele Liebau, Dr. Claus Peter Helmholtz und Herbert Kästner.

Redaktion:
Jürgen Ricke, Tel.: (05 11) 4 00 04-42
Postfach 10 01 50, 30917 Seelze
Redaktionskollegium:
StR F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), OL Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pliezhausen), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OStR J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Prof. Dr. P. Schreiber (Greifswald), Prof. Dr. W. Schmidt (Greifswald), OStR G. Schulze (Herzberg), Dr. W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

Anzeigenleitung: Bernd Schrader
Anzeigenabwicklung:
Telefon: (05 11) 4 00 04-23
Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01. 01. 1990
Vertrieb und Abonnement:
Telefon: (05 11) 4 00 04-50
Verlag:
Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG,
Postfach 10 01 50, 30917 Seelze
Telefon: (05 11) 4 00 04-0
Telefax: 4 00 04-19
Das Jahresabonnement für **alpha** besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt 12,90 DM, im Einzelbezug 3,00 DM. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten.
Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).

alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV KlettCotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, DH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.
© Beiträge sind urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte vorbehalten. Auch unverlangt eingesandte Manuskripte werden sorgfältig geprüft. Unverlangt eingesandte Bücher werden nicht zurückgeschickt. Die als Arbeitsblatt oder Kopiervorlage bezeichneten Unterrichtsmittel dürfen bis zur Klassen- bzw. Kursstärke vervielfältigt werden.

Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschriften im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.

Herstellung: PZ Pädagogika Zentrale GmbH
Druck: Druckerei Scherrer, Hannover
ISBN 3-617- 34015-6

Inhaltsverzeichnis

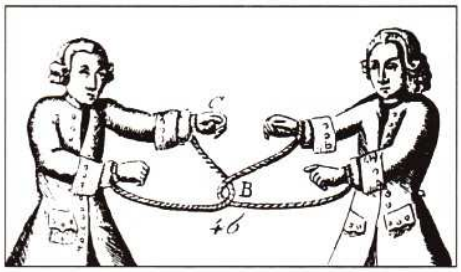
Leserbriefe 2

Der Irrgarten von Kleinwelka 4

Obwohl es vom Eingang bis zum Ausgang nur 51 m Luftlinie sind, können die Wege recht lang – bis zu 1300 Metern – werden; getestet und für interessant befunden von *W. Träger*.

Mathematische Spiele 6

Der Spaß mit Schnüren kann leicht zu fast unlösbaren Verwicklungen führen zeigen *Konrad Haase* und *Rüdiger Thiele*.



Zeitungsschnipsel 8

Aufgaben zum Emblem der Bau-Fachmesse, dem Wirtschaftswachstum und Firmensignets.

TOYOTA

Nichts ist unmöglich

MITSUBISHI

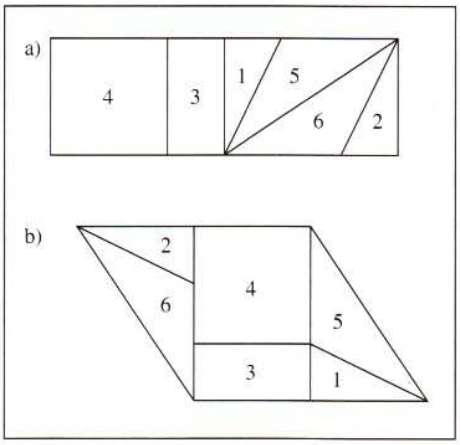
Alphons logische Abenteuer 8

Verdrehungen durch die Redewendung „nicht wahr?" deckt *Prof. Dr. L. Kreiser* auf.

Kreuz-Wort-Zahl-Formel- Rätsel 10

Ein mathematisch-naturwissenschaftlicher Leckerbissen für Denker und Tüftler von *Roland Mildner*.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb 1993 Teil I 12



Was geschah vor ... Jahren? 16

Die beliebte mathematische Chronologie von *H.-J. Ilgauds*.

Richard von Mises 16

Ein führer Vertreter der „angewandten Mathematik".

Eine Vorstufe des logarithmischen Rechnens 21

Christoph Clavius und die Prosthaphairese.

32. Mathematikolympiade 22

Aus guter Tradition stellen wir die Aufgaben der 3. Stufe (Landes-Olympiade) vor.

Lösungen und Gewinner des alpha-Preisauschreibens 2 und des BOMICO-Preisausschreibens 24

LOOPZ 25

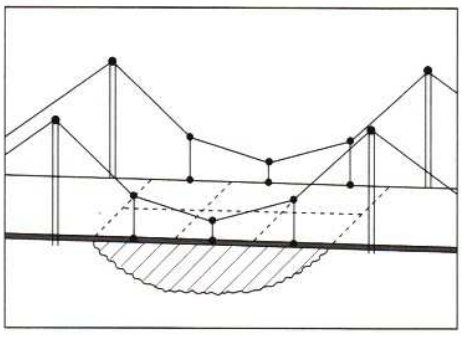
Ein Denk- und Geschicklichkeitsspiel mit zahlreichen Schiebe- und Drehmöglichkeiten – vorgestellt von *Hartmut Seitz*.

Die Olympiade-Ecke: Die Problem-Ecke – Probleme von L(o)esern für L(o)eser 26

Als Gegengewicht zu den sehr anspruchsvollen Olympiade-Aufgaben stellt *Paul Jainta* Probleme für Mittelstufen-Schüler vor; aber auch ihre Lösung erfordert Hartnäckigkeit und Phantasie.

Was ist beim Bau einer Modellhängebrücke zu bedenken? Teil I 28

Die Verteilung der Kräfte an Hängebrücken ist ein interessantes Thema zeigt *W. Träger*.



Die lebende Sonnenuhr 29

Anmerkungen zur analemmatischen Bodensonnenuhr und zur horizontalen Polstab-Sonnenuhr von *Arnold Zenkert*.

Marktecke 32

Lösungen 34

Der Irrgarten von Kleinwelka

Abb. 1: Noch sind die Tuja-Hecken im erst 1992 eröffneten Kleinwelkaer Irrgarten nicht hochgewachsen. An Wochenenden werden aber bereits über 1000 Besucher gezählt.

In Kleinwelka, einem Dorf bei Bautzen mit 1800 Einwohnern, befinden sich zwei Touristenattraktionen, der Saurierpark und der neu angelegte Irrgarten. Zum abgebildeten Wegeplan des Irrgartens (**Abb. 3**) sollen weitgehend in Form von Aufgaben dargebotene Überlegungen vorgestellt werden. In diesen Wegeplan ist ein Multigraph[1)] eingezeichnet, dessen Kanten auf den Mittellinien der Wege liegen. Die 35 Knoten dieses Multigraphen sind mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 35 kodiert, dem Eingang E ist dabei die Nummer 19 und dem Ziel Z die Nummer 16 zugeordnet. Die Kanten in Abb. 3 sind durch kleine Querstriche in Teilstrecken der Länge a = 2 m zerlegt. Jede Kante dieses Multigraphen denken wir uns mit der Anzahl dieser in ihr enthaltenen Teilstrecken kodiert. Der Multigraph der **Abb. 4** ist mit dem der Abb. 3 identisch: Denn beide Darstellungen enthalten 35 Knoten mit den Kodierungen von 1 bis 35. Und weiterhin sind in beiden Darstellungen die Knoten mit den Kodierungen i und k mit i, k ∈ {1; 2; ...; 35} durch dieselbe Anzahl von Kanten verbunden, und diese die Knoten i und k verbindenden Kanten tragen dieselben Kodierungen (Anzahl der Teilstrecken, in die sie in Abb. 3 zerlegt sind). Mithin sind beide Multigraphen isomorph und sie werden nicht voneinander unterschieden. Darüber hinaus haben beide Darstellungen dieses Multigraphen noch eine weitere Eigenschaft: In beiden Darstellungen folgen die in den Knoten i mit i ∈ {1; 2; ...; 35} einmündenden Kanten mit den gleichen zugeordneten Maßzahlen a, b, c, ... im gleichen Drehsinn aufeinander (**Abb. 5**). Mithin kann die Darstellung dieses Multigraphen in Abb. 3 durch eine Verformung (topologische Abbildung) in die der Abb. 4 überführt werden: Man denkt sich dazu Abb. 3 auf ein „elastisches Gummituch" gezeichnet. Durch geeignetes Dehnen und Stauchen wird dann Abb. 3 in Abb. 4 überführt. Dabei werden die Kanten im allgemeinen nicht längentreu verformt. 5 Schüler, Alphons, Bettina, Christian, Daniella und Erich, haben sich durch Betrachten der Darstellung des Wegeplanes in Abb. 4 vorgenommen, im Kleinwelkaer Labyrinth auf folgenden Wegen zu gehen:

1. Alphons will vom Eingang E (19) durch striktes Anwenden der „Rechte-Hand-Regel" zum Ziel Z (16) gelangen: Er will so laufen, daß seine rechte Hand stets entlang der lotrechten Wegbegrenzung (Hecke) streift.
2. Bettina will vom Eingang aus durch ständiges Anwenden der „Linke-Hand-Regel" das Ziel erreichen.
3. Christof hat sich für einen Weg kleinster Länge entschieden.
4. Daniella hat sich den längsten doppelpunktfreien Weg vom Eingang zum Ziel ausgewählt.

Abb. 2: Der Saurierpark von Kleinwelka ist mit seinen aus Stahl und Beton geschaffenen und mit einer wasserabweisenden Schicht versehenen Saurierplastiken der größte Urzoo Deutschlands.

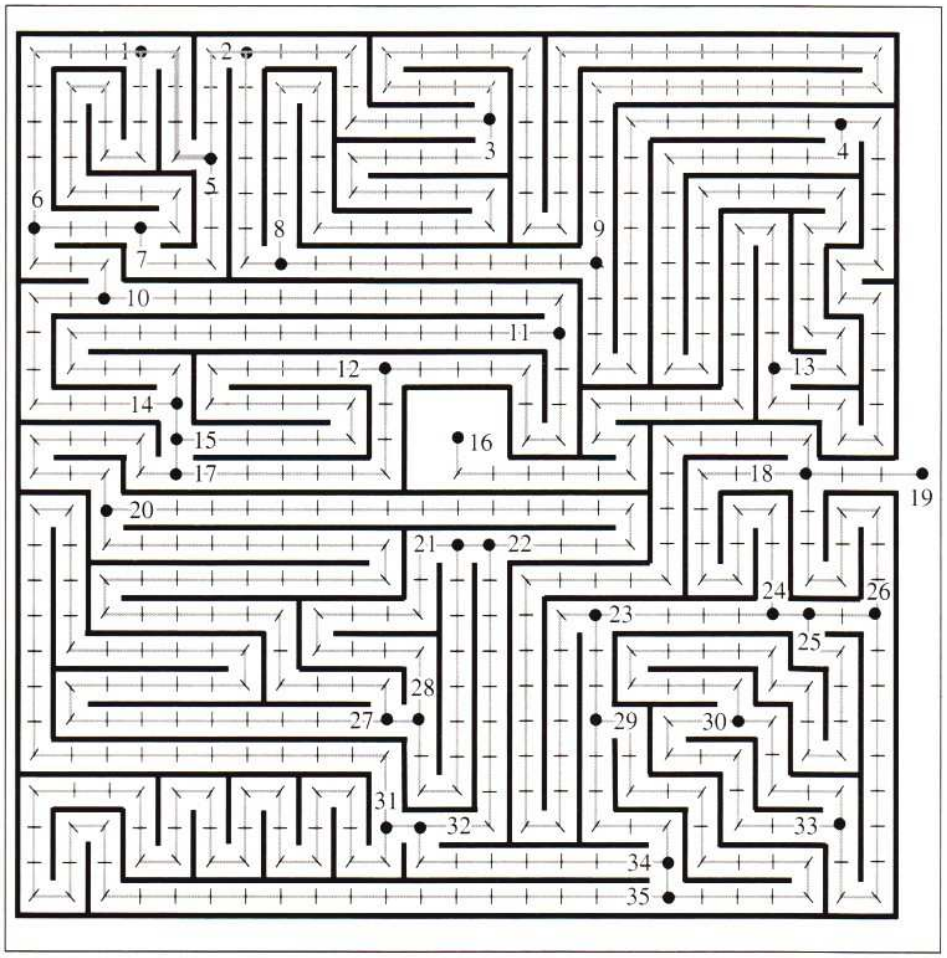


Abb. 3

Irrgarten Kleinwelka

Ein buchstäblich irrer Garten. Auf den ersten Blick sieht er ganz normal aus: saubere, 50 Zentimeter breite Wege, eingesäumt von kniehohen Koniferen-Hecken. Vom Eingang bis zum Ausgang sind es nur 51 Meter Luftlinie. Und doch können die Wege unendlich lang sein – bis zu 1300 Metern! Es handelt sich nämlich um den größten Irrgarten in den neuen Bundesländern.

„Wer nur 350 Meter schafft, muß schon sehr gut sein," sagt Regina Frenzel (36) aus Kleinbrösern. Ihr kam die Idee für den Irrgarten vor zwei Jahren. Bei Schwager Dr. Manfred Frenzel fand sie den richtigen Ansprechpartner. Der Doktor der Physik zeichnete, knobelte dafür am Computer.

Im April begannen dann die Arbeiten auf einem Freigelände neben dem berühmten Saurierpark. Verwandte, Freunde, halfen mit. Sie setzten drei Kilometer Rasenbordsteine, setzten 700 Zaunsäulen, zogen 1,7 Kilometer Maschendraht und pflanzten fast 3200 Koniferen.

Mit ihrem Bruder Steffen (9) testete Doreen Brückner (12) dann den Irrgarten. „Das kann doch so schlimm nicht sein", dachte sie, als sie reinspazierte. Aber: Immer wieder landete sie in der Sackgasse. Auf Zehenspitzen versuchte sie zu schauen, wo sie denn gehen könnte. Lachte: „Verdammt, ich kann doch alles sehen – und weiß doch nicht weiter." Nach acht Minuten hatte sie's geschafft: „Der Garten ist echt stark. Man sieht ihm gar nicht an, wie man sich darin verirren kann." Eintritt: Für Erwachsene eine Mark, Kinder 50 Pfennig.

*4. Juli 1992 * BILD*

5. Erich will im Labyrinth 25 mal im gleichen „Kreis" gehen. Dafür hat er sich den „kreisförmigen" (geschlossenen) Weg minimaler Länge ausgesucht.

Aufgabe:

Welchen Weg wählte jeder der 5 Schüler?

Wie lang ist der von ihm gewählte Weg?

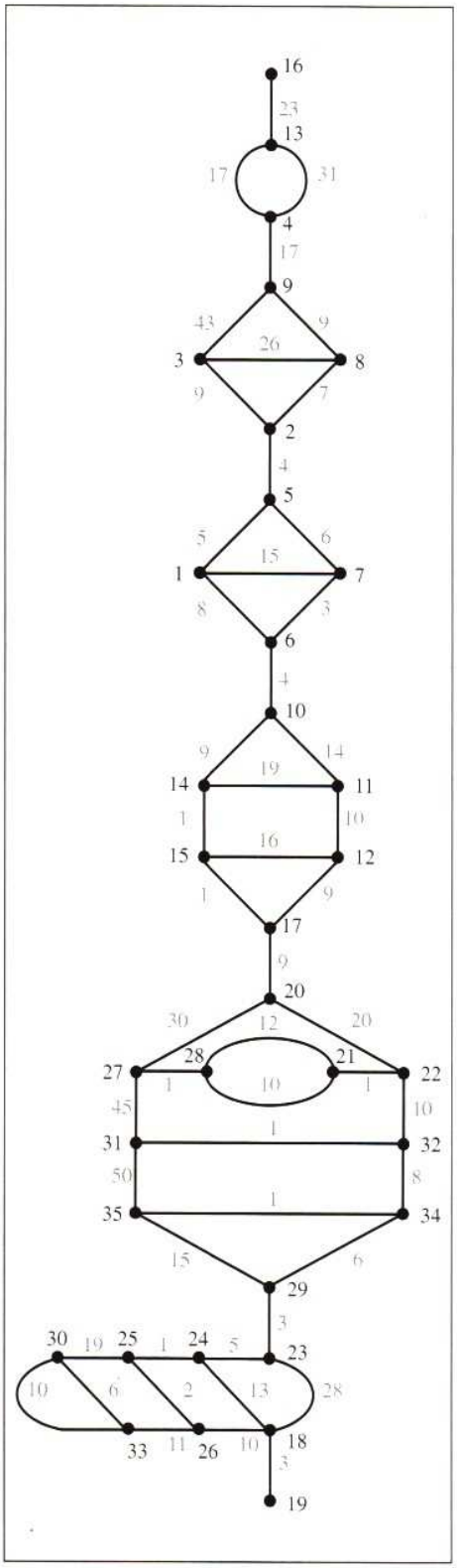


Abb. 4: Multigraph

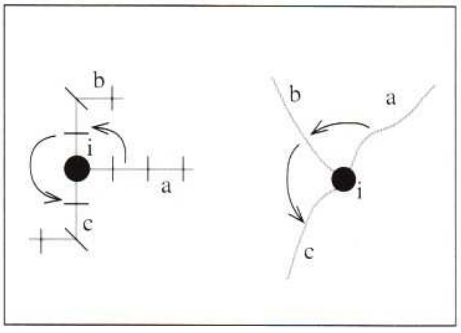


Abb. 5

Anmerkung

1) In einem Multigraph sind mindestens zwei Knoten durch mehr als eine Kante verbunden.

Dr. W. Träger, Döbeln

Mathematische Spiele

Spaß mit Schnüren

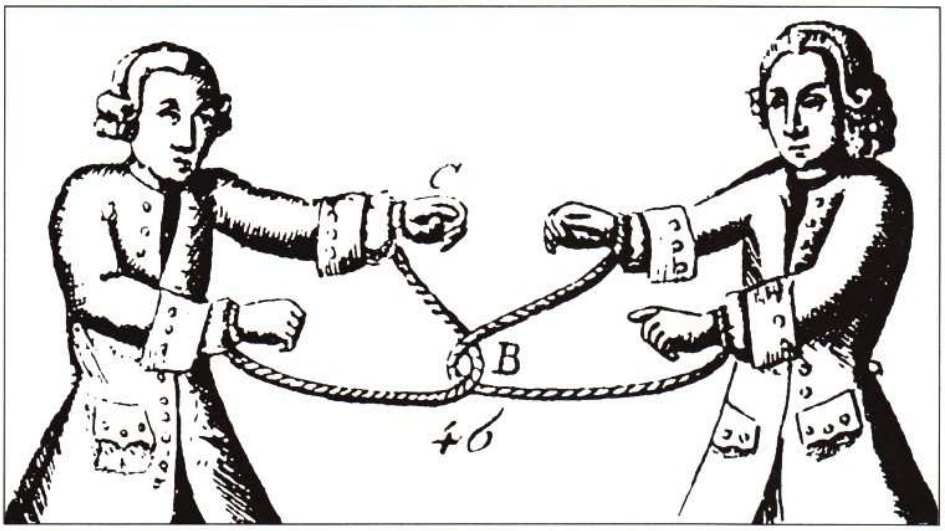


Abb. 1: Zwei Kavaliere beschäftigen sich um 1750 mit einem Schnurspiel.

Schnüre sind schon frühzeitig ein Hilfsmittel beim Problemlösen gewesen: in der griechischen Sage gab Ariadne ihrem Theseus einen Fadenknäuel in das verschlungene Labyrinth auf Kreta mit, so daß Theseus mit diesem Ariadnefaden sicher aus dem Irrgarten kommen konnte. Alexander der Große zerhieb den vom phrygischen König Gordios geflochtenen Knoten mit dem Schwert, anstatt ihn zu lösen. Die ungewöhnliche Methode Alexanders, sich den Preis zu sichern (der allerdings auch ungewöhnlich war, nämlich der Besitz von Asien), gehört eher dem Kraft- als dem Denksport an.

Nehmen wir einen zu Boden gefallenen und sich dort verheddernden Wollknäuel als Gordischen Knoten. Wie ist er zu lösen, d. h. zu entwirren? Zwei gegensätzliche Verfahren sind denkbar: Vorsichtig ein Ende des Fadens durch die Schlingen führen, bis sich alles aufgelöst hat, oder ungeduldig an den Enden zerren, bis man zum Erfolg kommt. Was ist besser?

Überraschenderweise ist die zweite Methode effektiver, auch wenn sie nach der Alexander-Lösung aussieht. Denn ein auf den Boden gefallener Knäuel kann keine Knoten haben, sofern er vorher keine hatte. Zieht man ständig die freien Enden durch Schlaufen, so schafft man sich selbst laufend neue Knoten, die man später wieder auflösen muß. Zerrt man andererseits (mit dem notwendigen Gefühl natürlich) an den Schnurenden und zerrt aus praktischen Gründen den Knäuel zwischendurch immer wieder auseinander, so können keine Knoten entstehen, aber das Ganze muß sich einmal auflösen.

Nach diesen Lockerungsübungen am Seil nun ein Gesellschaftsspiel für zwei, das schon im 18. Jahrhundert beliebt war. Die **Abbildung 1** zeigt zwei Kavaliere der galanten Zeit, die sich mit diesem einfach zu fertigenden Schnurspiel vergnügten. Worum geht es? Zwei Schnüre von etwa 1 m Länge werden an den Enden mit Schlaufen für die Hände versehen und in der in der Abbildung gezeigten Weise zwei Personen über die Hände geschoben. Danach sollen sich die beiden voneinander befreien (natürlich nicht durch Abstreifen der Fesseln!).

Geht das überhaupt? Lassen wir alles Überflüssige wie Kleidung, Beine, Kopf usw. an dem Problem weg, so führt die Aufgabe offenbar darauf hinaus, zwei ineinander hängende Ringe zu trennen (**Abb. 2**). Das ist unmöglich. Wir haben die Aufgabe zu schnell vereinfacht, denn die Ringe sind keine richtigen Ringe, da an den Händen Schlaufen vorhanden sind. Und das ist der springende Punkt! Bevor die Gefesselten diesen Sachverhalt nicht erkennen, können sie sich nicht befreien und erfreuen die Zuschauer durch ihre Verrenkungen und Verwirrungen –

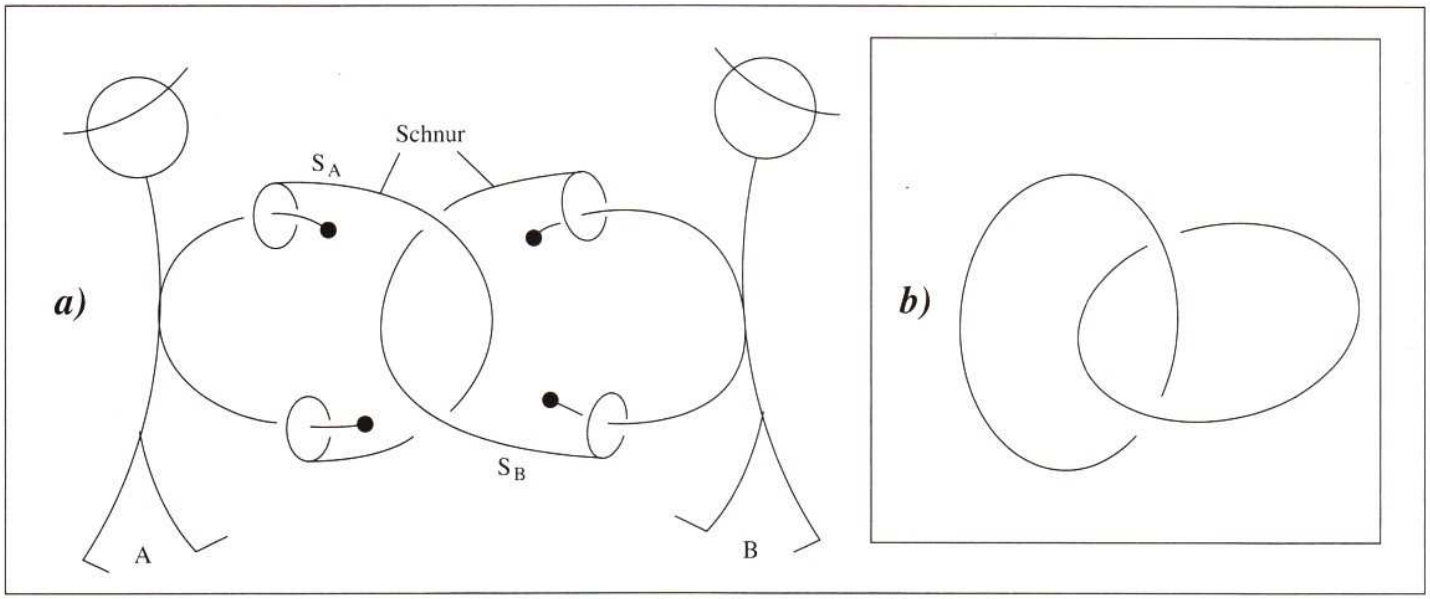


Abb. 2: Das Schnurspiel wird vereinfacht. a) Strichmännchen, b) das falsch vereinfachte mathematische Problem.

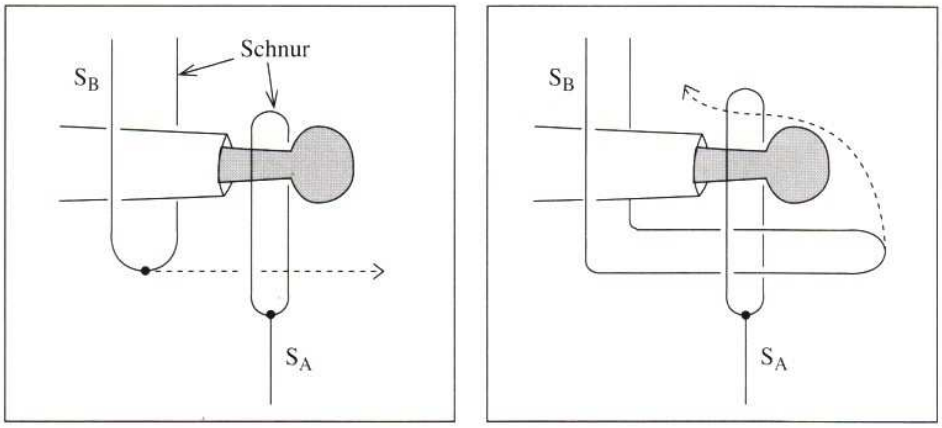


Abb. 3: Zum Lösungsverfahren. a) Schritt 1, b) Schritt 2.

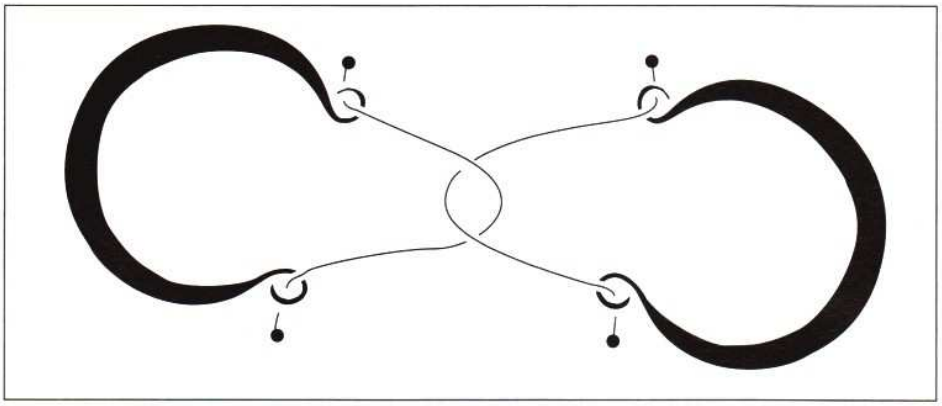


Abb. 4: Die Ein-Personen-Variante als Handschellenproblem.

also ein Spaß, der Stimmung in jede Geburtstagsfeier oder Gartenparty bringt.

Wie klappt der Entfesselungstrick? Hier ist die Anleitung zur Befreiung:

1. Schnur des Partners etwa in der Mitte greifen und zur eigenen Hand bringen;
2. Schnur durch die Schlinge der eigenen Hand in Richtung des Partners bis über die eigene Hand hinaus ziehen;
3. Schlinge nach oben über die eigene Hand führen;
4. Schlinge oberhalb der eigenen Hand zurückziehen;
5. Wenn man jetzt nicht frei ist, dann die Alexander-Methode praktizieren (hier: die Schnüre von den Händen abstreifen), sich neu fesseln und einen weiteren Versuch starten, bis alles wie am Schnürchen läuft.

Das Spiel hat auch eine Robinson-Variante für eine Person:

Trennt die in Abbildung 4 gezeigten Handschellen! Die Handschellen sind aus Draht gebogen (etwa 20 cm langer Draht, Fahrradspeiche) und entsprechen den Armpaaren der gefesselten Personen. Und nun viel Spaß!

Konrad Haase und Rüdiger Thiele

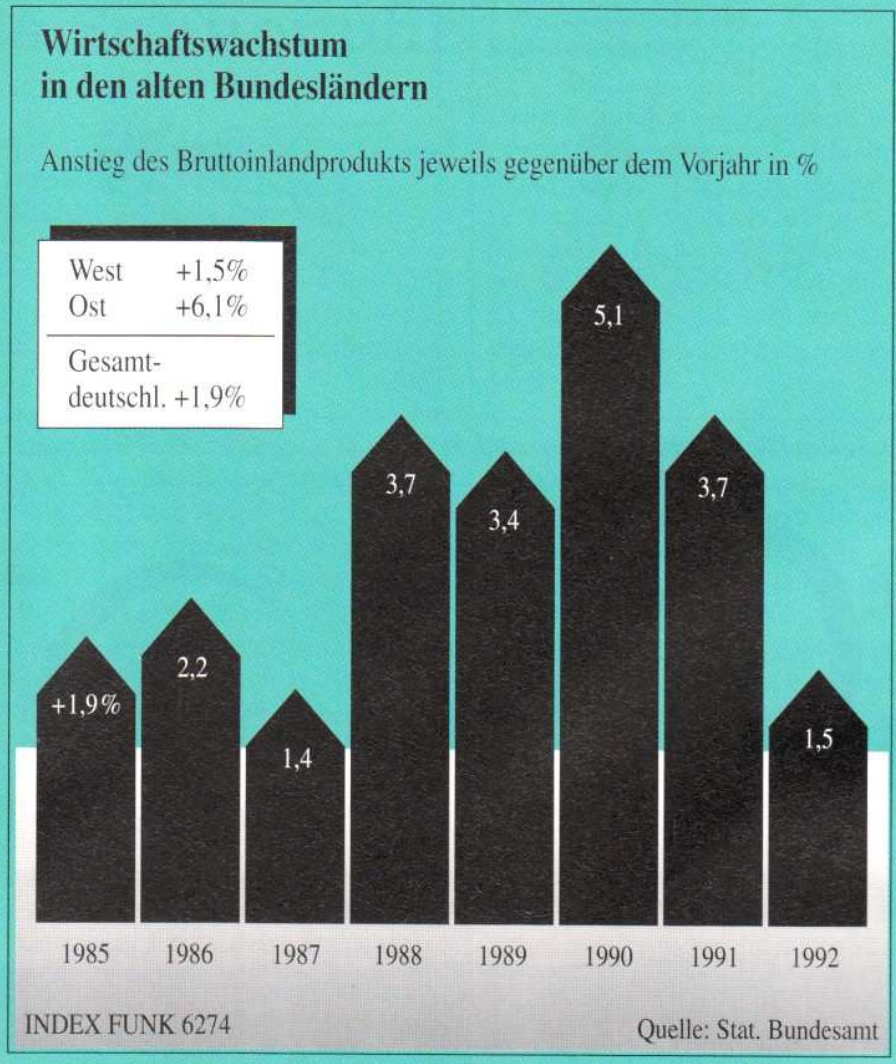
Zeitungs-schnipsel

Bau-Fachmesse Leipzig '92

Über 1.800 Aussteller aus dem In- und Ausland. 80.000 m² Informationen, Präsentationen und Vergleichsmöglichkeiten rund ums Bauen, Ausbauen, Modernisieren, Renovieren, Energiesparen.

Aufgabe: Das Emblem dieser Baufachmesse stellt ein Polyeder dar, das durch Aneinandersetzen von drei kongruenten backsteinförmigen Quadern entsteht:
Die konvexe Hülle dieses Polyeders, aufgefaßt als Menge seiner Punkte, ist a) in Kavalierprojektion und b) in Zweitafelprojektion zu zeichnen!
Hinweise: Eine Punktmenge (in der Ebene oder im Raum) heißt konvex, wenn sie zu je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke enthält. (Schülerduden Die Mathematik I, Dudenverlag Mannheim/Wien/Zürich 1990)
Die konvexe Hülle einer Punktmenge M ist die kleinste konvexe Punktmenge, welche M umfaßt. (Schülerduden Die Mathematik II, Dudenverlag Mannheim/Wien/Zürich 1991)

Dr. W. Träger, Döbeln



Die gesamtdeutsche Wirtschaft ist 1992 nur noch schwach gewachsen. Gemessen am Bruttoinlandsprodukt (BIP) nahm die Wirtschaftsleistung lediglich um 1,9 Prozent zu.

Aufgabe: Das Verhältnis des Bruttoinlandsproduktes 1991 der alten Bundesländer zu dem der neuen Bundesländer ist zu ermitteln!

Dr. W. Träger, Döbeln

Firmensignets – geometrisch betrachtet

Firmensignets sind häufig nach geometrischen Regeln aufgebaut, um schnell wiedererkannt zu werden und um möglichst lange im Gedächtnis zu bleiben. Wir würden uns freuen, wenn Ihr uns Aufgaben zu den abgebildeten oder auch anderen Signets zuschickt. Wir werden sie in der nächsten alpha veröffentlichen.

TOYOTA
Nichts ist unmöglich

CITROËN

Dresdner Bank

Deutsche Auto Leasing

MITSUBISHI

WESTFALENBANK

KÖNIG + NEURATH

Alphons logische Abenteuer

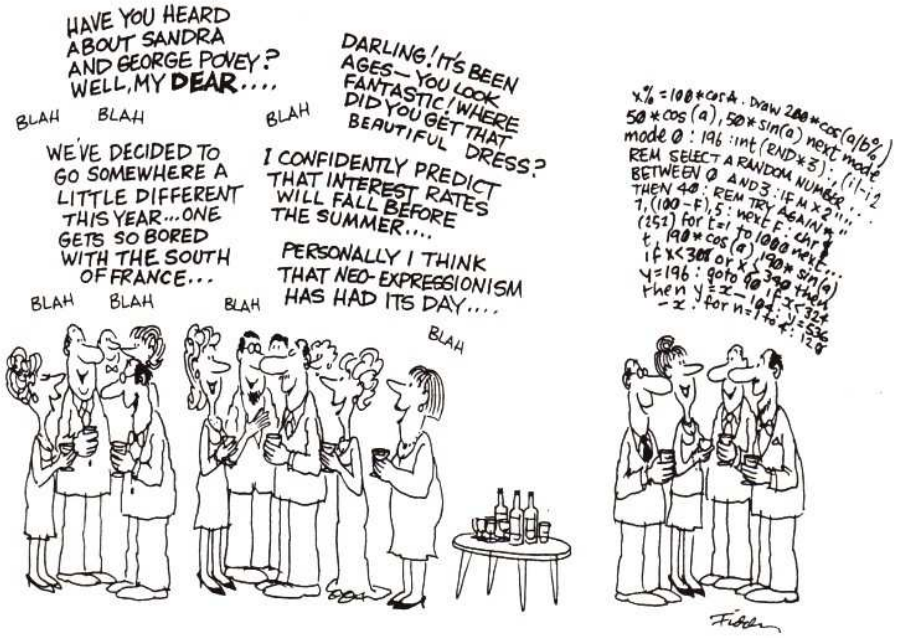
„Sie sind doch, nicht wahr, viel zu dicht aufgefahren," sagte der eine Mann, nur mit Mühe sich beherrschend zu dem anderen, der, ebenfalls um Fassung bemüht, erwiderte: „Aber Sie, nicht wahr, bremsten doch plötzlich scharf." Alphons, Zeuge der sich nun doch entwickelnden Auseinandersetzung, fragte sich erstaunt, warum jeder in einem Atemzug verneint, was er behauptet. Wenn der eine nicht so dicht aufgefahren ist und der andere nicht so scharf gebremst hat, wieso stießen dann ihre beiden Autos zusammen? Nachdenklich ging Alphons nach Hause. Dort kam seine Schwester auf ihn zu. „Nicht wahr, unsere Schule wird ein Gymnasium?" Alphons, noch mehr irritiert, erwiderte zögernd: „Nicht ganz so schnell..." – „Ja", unterbrach seine Schwester ihn, „da hast Du recht, so schnell wird das bestimmt nicht gehen, aber es wird so werden!" Alphons wollte seinen Redeansatz ganz anders beenden, aber er kam nicht mehr zu einer Korrektur, denn seine Schwester eilte rasch aus dem Haus.

Seine Schwester, so überlegte Alphons sich in seinem Zimmer, hat mit ihrer Frage nicht wissen wollen, ob unsere Schule kein Gymnasium wird, sondern gerade umgekehrt dafür, daß es ein Gymnasium wird, eine Bestätigung erwartet. Dann ist aber der Frageteil „nicht wahr" nicht als Verneinung, sondern als Erwartung auf Zustimmung zu einer fragend gefaßten Aussage zu verstehen. Demzufolge hätte seine Schwester ihre Frage auch so formulieren können: Es trifft doch zu, daß unsere Schule ein Gymnasium wird? Auf das „nicht wahr" in der Rede der beiden Männer übertragen, bedeutet das, daß keiner bestritt, was er sagte, sondern durch die sprachliche Form der fragend gefaßten Aussage andeuten will, daß er keine Verneinung erwartet. „Sie bestätigen mir doch (Sie sind doch mit mir einer Meinung), daß Sie zu dicht aufgefahren sind" bzw. „Sie werden mir bestätigen (Sie sind doch mit mir einer Meinung), daß Sie zu scharf gebremst haben" geben in jeder Variante diese Frageabsicht auch wieder.

Die Fassung ihrer Frage z. B. in der Form: „Sie sind mir doch zu dicht aufgefahren?" bzw. „Haben sie nicht zu scharf gebremst?" würde jedoch das unterdrücken, worauf es den Fragenden gerade ankommt, nämlich die für ihn außer Frage stehende und deshalb nur einzuholende Zustimmung des anderen.

Nach mehrmaliger Aufforderung folgte Alphons endlich dem Ruf seiner Mutter, zum Abendbrot zu kommen. „Alphons saß `mal wieder auf seinen Ohren," sagte seine Mutter und direkt an ihn gewandt fügte sie hinzu: „Nicht wahr?" Zum Erstaunen seiner Schwester nickte Alphons zustimmend. „Du sitzt auf Deinen Ohren? Mache es uns doch einmal vor!" sagte sie. Seine Mutter antwortet für ihn: „Es gibt Sätze, die meinen entgegen ihrem Wortlaut etwas anderes. Nun eßt aber endlich, Kinder!" Alphons mußte doch unwillkürlich schauen, was auf seinem Teller lag.

Prof. Dr. L. Kreiser



Sprachecke

In der letzten Ausgabe von alpha war der Text in russicher Sprache leider fehlerhaft. Wir drucken hier die korrekte Version ab und danken Frau Pietschmann für ihren berechtigten kritischen Hinweis.

Rectangle à reconstituer

Thomas, en fouillant dans la chambre de ses parents a trouvé un vieux puzzle. Celui-ci est constitué de neuf carrés de côtés respectifs: 18; 15; 14; 10; 9; 8; 7; 4 et 1. Une seule indication est donnée: „En utilisant tous ces carrés reconstitue un rectangle". A l'aide d'un schéma, pouvez-vous donner la solution à Thomas? (Tangente, Frankreich)

Из набора гирек с массами в 1 г, 2 г, ... 101 г терялась гирька массой 19 г. Можно ли оставшиеся 100 гирек разложить на две кучки по 50 штук в каждой так, чтобы массы кучек были одинаковы? (Quant, Moskau)

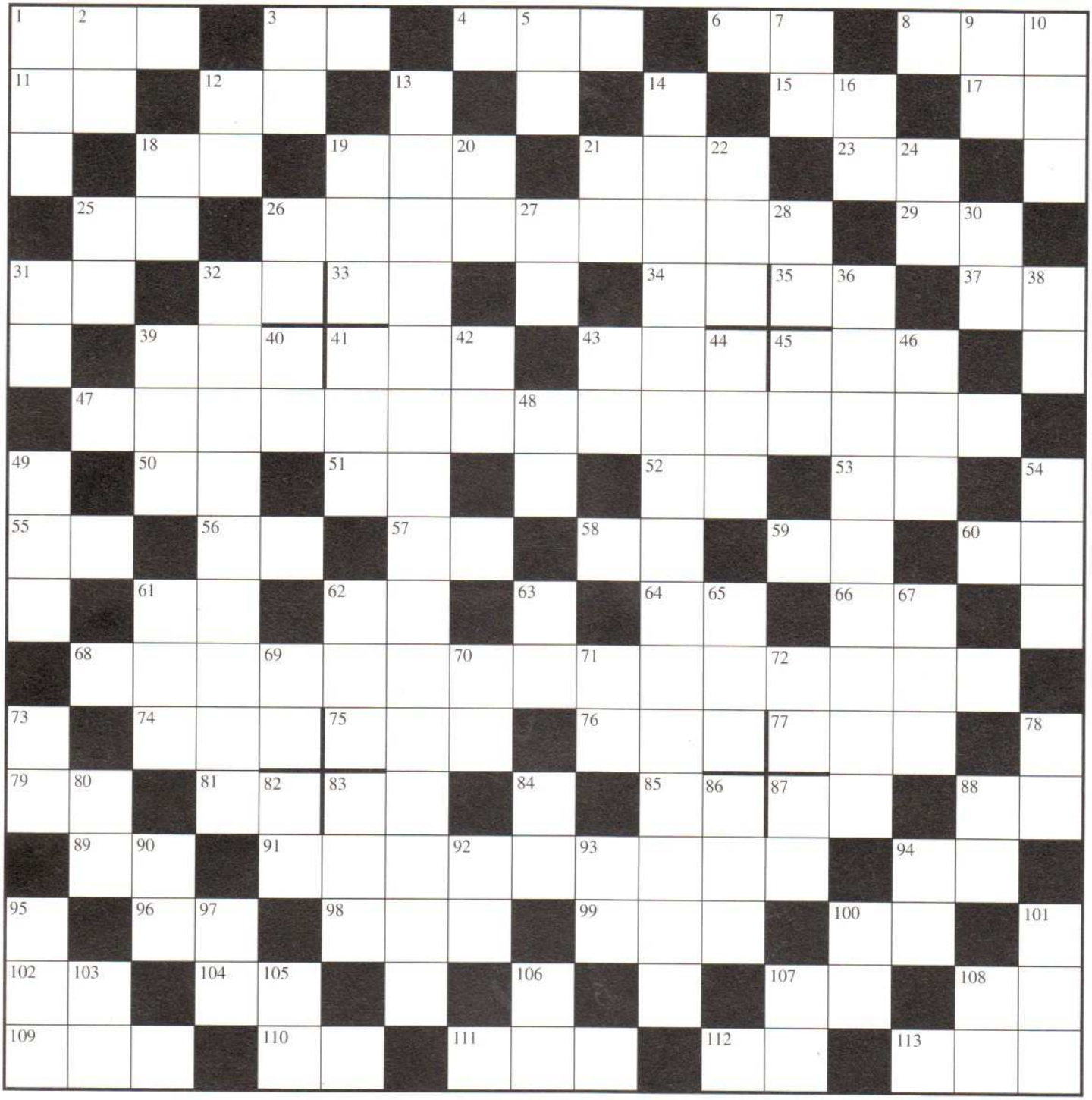
Kreuz-Wort-Zahl-Formel-Rätsel

Mathematisch-Naturwissenschaftliches Mosaik

Hinweise: Potenzen und Symbole mit Index sind jeweils in nur ein Kästchen zu schreiben. Chemische Elementsymbole, die aus zwei Buchstaben bestehen, können entweder ein oder zwei Kästchen beanspruchen. Bei Produkten ist die Reihenfolge der Faktoren geeignet zu wählen.
Verwendete Abkürzungen: (E)... Einheitenzeichen, (F)... Formelzeichen oder Formel, (K)... Kurzbezeichnung oder Abkürzung.

Waagerecht:
1. kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches der Zahlen 108 und 378,
3. größter gemeinsamer Teiler von 675 und 1050,
4. Internationale Mathematiker-Union (K),
6. die Geschwindigkeit v = 313,2 km/h in m/s,
8. Weg (in m), den ein mit einer Geschwindigkeit von 3 km/h geradlinig gleichförmig bewegter Körper in 11 Minuten und 42 Sekunden zurücklegt,
11. neuntes Glied der arithmetischen Folge (a_n) mit dem Anfangsglied $a_1 = -10$ und der Differenz d = 5,
12. Mersennesche Primzahl,
15. Krümmungsradius (in cm), den eine plankonvexe Linse (Brechzahl des Glases: 1,5) haben muß, damit sie eine Brennweite von 188 cm besitzt,
17. Ziffernkombination aus der kleinsten und größten Lösung der Gleichung $x^3 - 12x^2 + 35x = 0$,
18. Anstieg der Geraden $36x - 2y + 2 = 0$,
19. trigonometrische Funktion (K),
21. norwegischer Mathematiker (1842 – 1899),
23. Gerätewiderstand (in Ohm) eines Amperemeters, bei dem man durch Parallelschaltung eines Nebenwiderstandes von 1 Ohm eine Meßbereichserweiterung von 0,5 A auf 27 A erreicht,
25. Primzahl p, $p < 70$, bei der die Summe der Quadrate der einzelnen Grundziffern 50 beträgt,
26. unveränderliche Größe,
29. Ersatzwiderstand (in Ohm) für zwei parallelgeschaltete Widerstände $R_1 = 33$ Ohm und $R_2 = 2R_1$,
31. Basiszahl des Dezimalsystems,
32. unübliche Längeneinheit (E),
33. chemisches Element (F),
34. in Land- und Forstwirtschaft gebräuchliche Flächeneinheit (E),
35. (meist industrielle) Interessengemeinschaft (K),
37. Anfangsgeschwindigkeit (in m/s), die ein mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 10 m/s gleichmäßig verzögert bergan fahrender Zug besaß, wenn seine Endgeschwindigkeit 5 m/s beträgt,
39. nichtprogrammierbarer Nur-Lese-Speicher eines Mikrorechners (K),
41. SI-fremde Einheit der Äquivalentdosis (E),
43. Waldtier,
45. ein Halogenwasserstoff, wertvolles Lösungsmittel (K),
47. eine hyperbolische Differentialgleichung,
50. englisch: nein,
51. Schwermetall (F),
52. bleiähnliches Metall (F),
53. Begriff aus der Landesvermessung (K),
55. Hydroxylgruppe (F),
56. Längeneinheit (E),
57. Polyisoprenkautschuk (K),
58. chemisches Element, benannt nach dem Begründer der Relativitätstheorie (F),
59. Einheit der Energiedosis (E),
60. Metall, Ordnungszahl 45 (F),
61. sehr hartes Metall (F),
62. Alkalimetall (F),
64. chemisches Element aus der Gruppe der Lanthaniden (F),
66. radioaktives Edelmetall (F),
68. Konvergenzkriterium für unendliche Reihen,
74. lateinisch: Hoffnung (auch Zukunft),
75. physikalische Größe,
76. mineralischer Rohstoff,
77. Teil eines Baumes,
79. Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius r (F),
81. Volumeneinheit (E), 83. Schwermetall (F),
85. chemisches Element (F),
87. in einer grauen metallischen und einer gelben nichtmetallischen Modifikation auftretendes chemisches Element (F),
88. Wasser (F),
89. erforderliche Kraft, um einen Körper der Masse m die Beschleunigung a zu erteilen (F),
91. Laubbaum,
94. Schwefeldioxid (F),
96. Weg, den ein mit einer Geschwindigkeit v geradlinig gleichförmig bewegter Körper in der Zeit t zurücklegt (F),
98. Zinn-II-Oxid (F),
99. Technische Kontrollorganisation (K),
100. Säurerest der Kohlensäure (F),
102. die in einem Gleichstromkreis (Stromstärke I, Ohmscher Widerstand R) herrschende Spannung (F),
104. Gewicht eines Körpers der Masse m (F),
107. Stickstoffdioxid (F),
108. Ammoniak (F),
109. die in einem Gleichstromkreis (Stromstärke I, Ohmscher Widerstand R) in der Zeit t aufgebrachte elektrische Arbeit (F),
110. Volumen eines Prismas mit der Grundfläche A und der Höhe h (F),
111. Differentialoperation (K),
112. Blei-II-oxid (F),
113. Ammoniumchlorid (F).

Senkrecht:
1. Primzahl mit dreistelligem Querprodukt,
2. dividiert man das Dreifache der gesuchten Zahl durch 2, und subtrahiert man hiervon 60, so erhält man die Zahl 15,
3. Primzahl mit einstelliger Quersumme,
5. Spannungseinheit (E),
7. elektrische Ladung (in C), die ein Kondensator (Kapazität 79 mF) bei einer angelegten Spannung von 1000 V aufnimmt,
9. Brennweite (in cm) einer Sammellinse mit einer Brechkraft von 1,25 dpt.,
10. Weg (in m), den ein geradlinig gleichmäßig beschleunigter Körper (Beschleunigung sei 2 m/s²) nach einer Zeit von 24 s zurückgelegt hat,
12. Wert der mathematischen Größe $a = 1ne^2 + (\log_2 64)^2$,
13. Begriff aus der Differentialgeometrie,
14. Strecke, deren Länge als Maßeinheit für Längenmessungen dient,
16. Hangabtriebskraft (in N), die auf einen sich auf einer schiefen Ebene der Steigung 3:5 befindlichen Körper vom Gewicht 75 N wirkt,
18. Fermatsche Primzahl,
19. Abschnitt eines Literaturwerkes (K),
20. kleine Zeiteinheit (E),
21. zinnfarbenes Erdmetall (F),
22. griechischer Buchstabe,
24. Arbeit (in J), die ein Körper mit einer Masse von 400 kg bei einer Geschwindigkeit von 40 cm/s aufgrund seines Vorrats an kinetischer Energie verrichten kann,
25. Seitenlänge (in cm) eines gleichseitigen Dreiecks mit dem Flächeninhalt $A = 25\sqrt{3}\ cm^2$,
26. Entfernungseinheit (E),
27. Chalkogen, 1798 von Klaproth entdeckt (F),
28. tierisches Produkt,
30. Steighöhe (in m) eines Fahrstuhls, der mit einer Geschwindigkeit von 3 m/s sieben Sekunden lang aufsteigt,
31. eine Lösung der Gleichung $x^2 - 13x + 22 = 0$,
32. Eigenschaft bestimmter komplexer Funktionen,
36. Begriff aus der darstellenden Geometrie,
38. Zeit (in s), nach der ein Auto aus dem Stand heraus eine Geschwindigkeit von 36 km/h erreicht, wenn die Beschleunigung 0,2 m/s² beträgt,
39. Huftier,
40. SI-fremde Volumeneinheit (E),
41. Einheit des physikalischen Röntgenäquivalents (E),
42. Masseeinheit (E),
43. hartes Metall (F),
44. Chlorwasserstoff (F),
45. radioaktives chemisches Element (F),
46. Nebenfluß der Donau,
48. Alkalimetall (F),
49. elementare mathematische Funktion (K),
54. Zeitmesser,
61. Kupfer-II-oxid (F),
62. englisch: neu,
63. Metall, Ordnungszahl 40 (F),
65. mitteleuropäische Zeit (K),



67. Vertiefung, Einschnitt,
69. zum Exempel (K),
70. SI-Basiseinheit (E),
71. lateinisch: das ist, das heißt,
72. radioaktives Erdalkalimetall (F),
73. der Vollwinkel im Bogenmaß (F),
78. Kohlenmonoxid (F),
80. Trägheitsmoment einer im Abstand r vom Drehzentrum befindlichen Punktmasse m (F),
82. übliche Abkürzung für „Längeneinheit",
83. Bleiglanz (F),
84. ökonomisch wichtiges Schwermetall (F),
86. griechischer Buchstabe,
87. astronomische Entfernungseinheit (E),
88. Wasserstoffperoxid (F),
90. Geschwindigkeit, die ein geradlinig gleichmäßig beschleunigter Körper (Beschleunigung sei a) nach der Zeit t erreicht (F),
92. das dreifache Volumen einer Kugel, ausgedrückt durch ihre Oberfläche O und ihren Radius R (F),
93. SI-fremde Maßeinheit der kinematischen Viskosität (E),
94. Schwefeltrioxid (F),
95. die in einem Gleichstromkreis (Spannung U, Stromstärke I) in der Zeit t aufgebrachte elektrische Arbeit (F),
97. Impuls einer mit der Geschwindigkeit v bewegten Masse m (F),
100. Kohlendioxid (F),
101. Choräthen (F),
103. die in einem Gleichstromkreis (Stromstärke I, Ohmscher Widerstand R) aufgebrachte elektrische Leistung (F),
105. doppelter Flächeninhalt eines Dreiecks mit der Grundlinie g und der Höhe $h_g = h$ (F),
106. mathematische Konstante,
107. Stickstoffmonoxid (F),
108. Ammoniumion (F).

Lösungsworte: Bei richtiger Auslösung des Kreuz-Wort-Zahl-Formel-Rätsels ergeben die Buchstaben bzw. Ziffern aus den folgenden Kästchen den Namen und die Lebensdaten eines genialen Mathematikers und Naturwissenschaftlers des 18. Jahrhunderts:
21-22-55-62-81-87-92-111 28-54-82-85-86: 18-23. 16. 25-1-17-3 bis 31-9. 15. 37-7-6-11

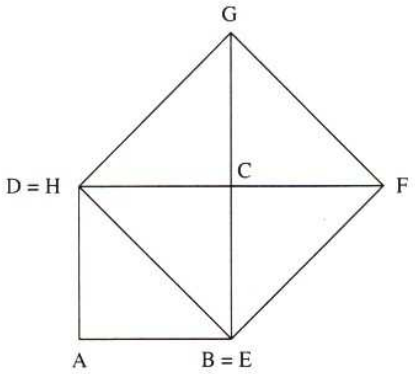
Viel Spaß beim Knobeln wünscht Euch
Dr. Roland Mildner, Leipzig

Lösungen Alphawettbewerb Teil I

5/1
Lösung:
Da alle drei zusammen 112,5 kg, Nicole und Anja zusammen 55 kg wiegen, muß Jens 112,5 kg - 55 kg = 57,5 kg wiegen. Da Nicole und Jens zusammen 80,5 kg wiegen, muß Nicole 80,5 kg - 57,5 kg = 23 kg und Anja 55 kg - 23 kg = 32 kg wiegen. Wegen 30 : 3 = 10 und 2 · 10 = 20 ist Anja 10 Jahre, Jens 20 Jahre alt. Also ist Nicole (10 - 3) Jahre = 7 Jahre alt.

5/2
Lösung:
Aus a), b) und c) folgt: Anja hilft Frau Kreher.
Aus b) und d) folgt: Heike hilft Frau Meier.

5/3
Lösung:
Die Diagonale $\overline{BD}$ zerlegt das Quadrat ABCD in zwei deckungsgleiche Dreiecke. Das Quadrat mit der Seite $\overline{BD}$ ist aus vier solcher Dreiecke zusammengesetzt; deshalb ist der Flächeninhalt des Quadrates EFGH doppelt so groß wie der des Quadrates ABCD.

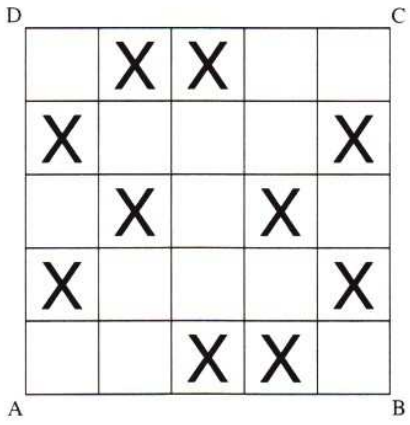


5/4
Lösung:
Aus (1) folgt: Roger kam vor Bernd, Bernd vor Joachim ins Ziel.
Aus (2) folgt: Jürgen kam vor Dieter ins Ziel.
Aus (4) und (5) folgt: Weder Bernd noch Dieter kamen auf den zweiten Platz.
Aus (3) folgt: Herrmann erzielte den vierten Platz.
Daraus ergibt sich folgender Zieleinlauf: Uwe, Jürgen, Dieter, Herrmann, Roger, Bernd, Joachim.

5/5
Lösung:
Für die Augenzahl z eines Würfels gilt $1 \le z \le 6$. Läßt man der Reihe nach die erste Ziffer 1, 2, 3, 4, 5 bzw. 6 sein, so erhält man nacheinander 4, 5, 6, 5, 4 bzw. 3 Möglichkeiten; das sind insgesamt 27 Möglichkeiten. Deshalb gibt es 27 solcher Zahlen. Es sind

136	226	316	415	514	613
145	235	325	424	523	622
154	244	334	433	532	631
163	253	343	442	541	
	262	352	451		
		361			

5/6
Lösung:
Eine mögliche Lösung ist die folgende:



5/7
Lösung:
Nur 8 · 7 = 56 endet auf die Ziffer 6. Deshalb kaufte Frank 8 Hefte zu je 7 Pf. Wegen 116 Pf - 56 Pf = 60 Pf und weil Hefte zu 10 Pf und 30 Pf gekauft wurden, kaufte Frank ein Heft zu 30 Pf und somit 3 Hefte zu 10 Pf.

6/1
Lösung:
Wegen 24 = 5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13 sind drei Möglichkeiten zu untersuchen. Von den Produkten 5 · 19 = 95, 7 · 17 = 119, 11 · 13 = 143 ist nur das letzte Teiler von 2145 (2145 : 143 = 15). Folglich ist Andy 11, Jörg 13, Lars 15 Jahre alt.

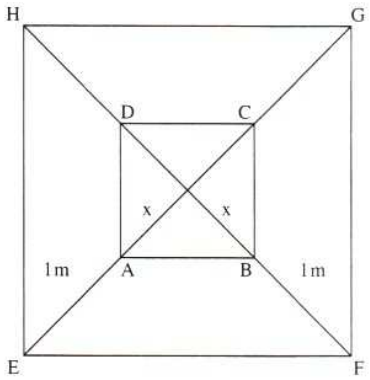
6/2
Lösung:
Zeichnet man die Diagonalen $\overline{EG}$ und $\overline{FH}$, so erhält man im Quadrat ABCD vier rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke von je 8 m² : 4 = 2 m² Flächeninhalt. Aus

$$\frac{x \cdot x}{2} = 2\text{m}^2$$

folgt x = 2 m. Die gezeichneten Diagonalen zerlegen das Quadrat EFGH ebenfalls in vier rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke, deren Katheten 2m + 1m = 3m lang sind. Wegen

$$4\frac{3 \cdot 3}{2}\text{m}^2 = 18\text{m}^2$$

und 18 m² - 8 m² = 10 m² hat die schraffierte Fläche einen Inhalt von 10 m².



6/3
Lösung:
a) Es können höchstens 11 verschiedene Summen gewürfelt werden; die kleinste Summe davon lautet 15 + 35 = 50, die größte 20 + 40 = 60.
b) Die kleinste Zahl auf Würfel A sei a, die größte also a + 5; die kleinste Zahl auf Würfel B sei b, die größte also b + 5; die kleinste Summe davon lautet a + b, die größte Summe a + 5 + b + 5 = a + b + 10. Das ergibt wiederum 11 verschiedene Summen.

6/4
Lösung:
Für 28 m zurückgelegte Wegstrecke hat das Vorderrad wegen 8 · 3,50 m = 28 m genau 8 Umdrehungen, das Hinterrad wegen 7 · 4 m = 28 m genau 7 Umdrehungen, also eine Umdrehung weniger als das Vorderrad gemacht. Deshalb hat der Ackerwagen 10 · 28 m = 280 m zurückgelegt, wenn das Hinterrad zehn Umdrehungen weniger als das Vorderrad gemacht hat.

6/5
Lösung:
Die Quersumme dieser vierstelligen Zahlen beträgt stets 20; erst 9 · 20 = 180 ist

durch 9 teilbar. Deshalb sind mindestens neun solcher vierstelliger Zahlen zu addieren.

6/6
Lösung:

Inhalte der Gefäße mit einem Fassungsvermögen von 7 l	3 l	2 l	erreichte ganzzahlige Literzahlen
7	0	0	
4	3	0	(4; 3)
4	1	2	(1; 2)
5	0	2	(5)
5	2	0	
4	3	0	
4	1	2	
6	1	0	(6)

6/7
Lösung:
Gesamtstrecke 100 km, Gesamtzeit 2 h, Durchschnittsgeschwindigkeit 50 $km \cdot h^{-1}$.

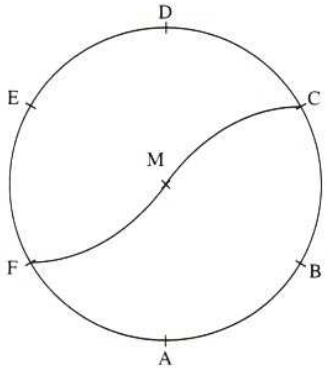
7/1
Lösung:
Angenommen, im Kasten befinden sich x grüne, also 2x blaue, 4x weiße, x rote und y gelbe Kugeln; dann gilt $8x + y = 40$, $y = 40 - 8x$, $y = 8 \cdot (5 - x)$. Daraus ergeben sich folgende Möglichkeiten:

Anzahl der blauen	grünen	weißen	roten	gelben	Kugeln
8	4	16	4	8	(1)
6	3	12	3	16	(2)
4	2	8	2	24	(3)
2	1	4	1	32	(4)

Für (1) müßten $5 \cdot 4 + 1 = 21$ Kugeln, für (2) müßten $(4 + 3 + 4 + 3 + 4) + 1 = 19$ Kugeln, für (3) müßten $(4 + 2 + 4 + 2 + 4) + 1 = 17$ Kugeln, für (4) müßten $(2 + 1 + 4 + 1 + 4) + 1 = 13$ Kugeln dem Kasten entnommen werden. Also gilt (2), es waren 6 blaue, 3 grüne, 12 weiße, 3 rote und 16 gelbe Kugeln im Kasten.

7/2
Lösung:
Die erste ungerade natürliche Zahl sei $2a + 1$, die erste gerade natürliche Zahl sei $2a$; die zehnte aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahl lautet dann $2a + 19$, die zehnte aufeinanderfolgende gerade natürliche Zahl $2a + 18$. Ihre Summe lauten $20a + 100$ bzw. $20a + 90$. Nun soll $20a + 100 = 10n$ bzw. $20a + 90 = 10n$ gelten für $n \geq 10$. Daraus folgt $2a = n - 10$, wenn n gerade, bzw. $2a = n - 9$, wenn n ungerade ist. Werden diese Bedingungen erfüllt, so gibt es stets zehn solcher Zahlen. Doris hat recht.

7/3
Lösung:
Der Radius des gegebenen Kreises läßt sich auf dem Kreisumfang sechsmal nacheinander abtragen; auf diese Weise lassen sich die Eckpunkte A, B, C, D, E, F eines regelmäßigen Sechsecks mit Hilfe eines Zirkels konstruieren. Der Kreis um B mit dem Radius r erzeugt den Kreisbogen MC, der Kreis um E mit dem Radius r den Kreisbogen MF. Der Durchmesser $\overline{CF}$ des Kreises halbiert die Kreisfläche. Da die Kreisabschnitte über den Sehnen $\overline{MC}$ und $\overline{MF}$ kongruent sind, erhält man auf diese Weise zwei flächengleiche Teilfiguren.



7/4
Lösung:
Es sei 5k eine durch 5 teilbare natürliche Zahl; dann sind $5k + 1$, $5k + 2$, $5k + 3$, $5k + 4$ vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, von denen keine durch 5 teilbar ist. Ihre Summe lautet $20k + 10 = 10 \cdot (2k + 1)$; sie ist stets durch 10 teilbar.

7/5
Lösung:
Angenommen, Anton ist x Jahre alt; dann ist Bernd $(3x - 10)$ Jahre, Christian $(3x - 11)$ Jahre, Daniel $2x$ Jahre alt. Das sind zusammen $(9x - 21)$ Jahre, und es gilt $9x - 21 = 42$, $9x = 63$, $x = 7$. Anton ist 7, Bernd 11, Christian 10, Daniel 14 Jahre alt.

7/6
Lösung:
Aus $\rho = m / v$ folgt $V = m / \rho \cdot V = 26{,}5\ cm^3$. Wegen der gegenseitigen Verdrängung der Körper fließen 26,5 cm^3 aus.

7/7
Lösung:
Volumen des Pyknometers $V = (65{,}43\ g - 12{,}82\ g) / 1\ g \cdot cm^{-3} \cdot V = 52{,}61\ cm^3$. Masse der Kalilauge $m = 74{,}56\ g - 12{,}82\ g \cdot m = 61{,}64\ g$. Dichte der Kalilauge = Masse/Volumen. $1{,}18\ g \cdot cm^{-3}$.

8/1
Lösung:
Es sei x die Anzahl der Zweitbettzimmer und y die Anzahl der Vierbettzimmer, dann gilt
(1) $x + y = 52$ und
(2) $2x + 4y = 144$.
Wir multiplizieren die Gleichung (1) mit 2 und subtrahieren sie von der Gleichung (2). Wir erhalten
(3) $2y = 40$,
$y = 20$.
Diesen Wert setzen wir in die erste Gleichung ein und erhalten $x = 32$.
Das Hotel verfügt über 20 Vierbettzimmer und 32 Zweibettzimmer.
Probe: $20 \cdot 4 + 32 \cdot 2 = 144$.

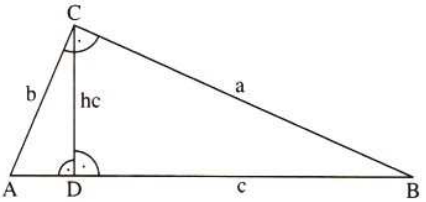
8/2
Lösung:
(1) $37 \cdot 21 = 777$
(2) $15 \cdot 37 = 555$

8/3
Lösung:
Den Text der Aufgabe kann man durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$\left(\frac{x}{10} + 10\right) \cdot 10 - 10 = 10x.$$

Wir formen äquivalent um und erhalten
$x + 100 - 10 = 10x$,
$90 = 9x$,
$10 = x$
Die gedachte Zahl ist 10; die Probe bestätigt die Richtigkeit der Lösung.

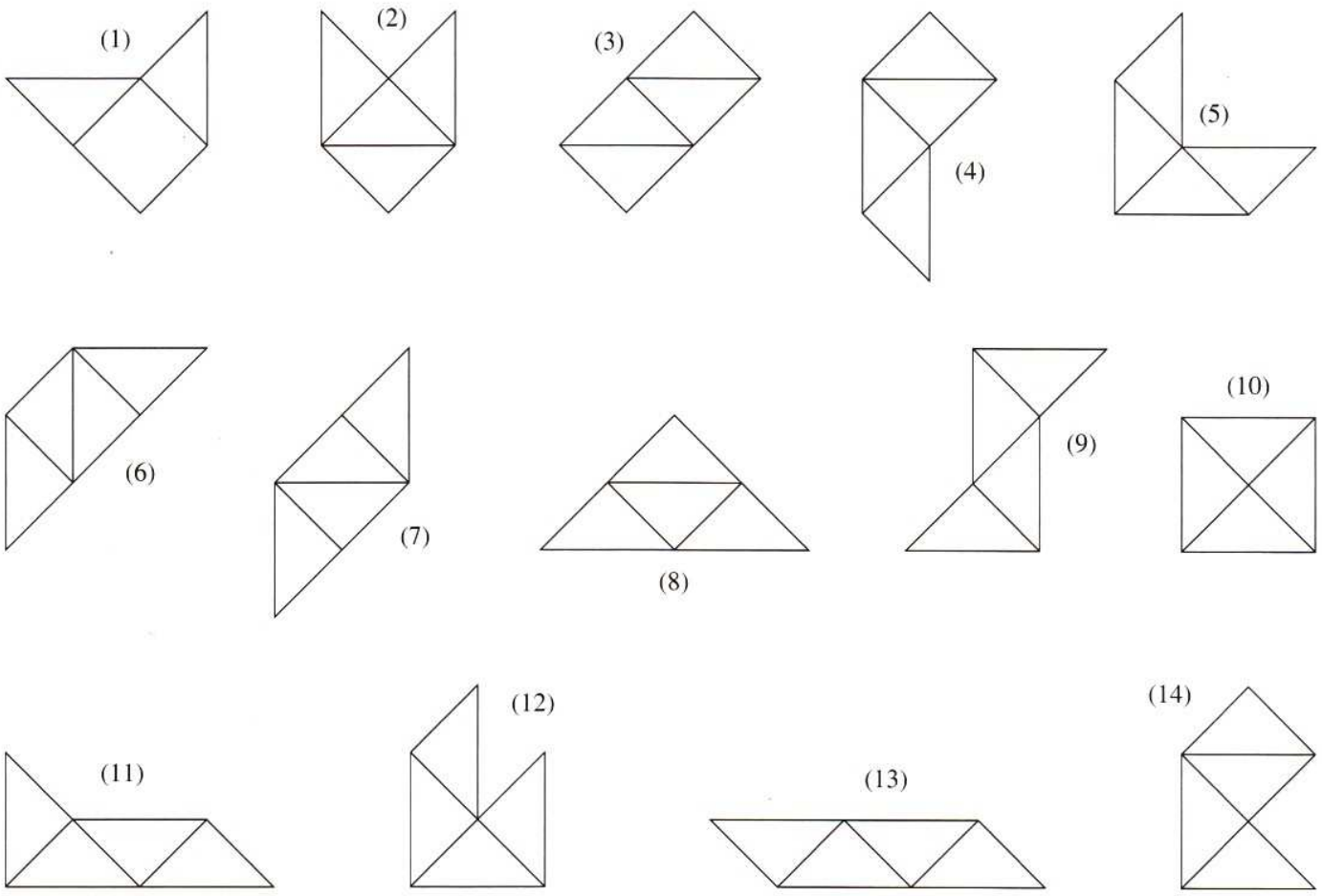
8/4
Lösung:



Die Höhe h_c zerlegt das Dreieck ABC in die beiden rechtwinkligen Teildreiecke ADC und DBC. Beide Dreiecke sind untereinander ähnlich, und jedes Teildreieck ist zum Dreieck ABC ähnlich.
Deshalb gilt

$h_c : a = b : c$ bzw. $h_c = \frac{a \cdot b}{c}$, w. z. b. w.

8/5
Lösung:



8/6
Lösung:
Aus Hebelgesetz $l_2 = 2{,}67$ m.

8/7
Lösung:
Leistung = Masse · Ortsfaktor · Höhe / benötigte Zeit. 4,5 kW.

9/1
Lösung:
(1) $37 \cdot 27 = 999$
(2) $27 \cdot 37 = 999$

9/2
Lösung:
Wir stellen eine beliebige zweistellige natürliche Zahl in der Form $10a + b$ dar. Ihr Quadrat ist dann $(10a + b)^2$ bzw. $100a^2 + 20ab + b^2$; ihre Quersumme ist $a + b$, das Quadrat ihrer Quersumme also $(a + b)^2$ bzw. $a^2 + 2ab + b^2$.

Nach den Bedingungen der Aufgabe soll nun
$100a^2 + 20ab + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$
stets durch 9 teilbar sein.

Wir formen den Term äquivalent um und erhalten
$100a^2 + 20ab + b^2 - a^2 - 2ab - b^2$
$= 99a^2 + 18ab$.
Da jeder Summand durch 9 teilbar ist, ist auch diese Summe durch 9 teilbar, und da wir nur äquivalent umgeformt haben, ist $(10a + b)^2 - (a + b)^2$ stets durch 9 teilbar, w. z. b. w.

9/3
Lösung:
Es gilt nach Aufgabenstellung
$\frac{a+b}{2} = 25$ und $\sqrt{ab} = 20$,
wobei a und b Variable für die beiden gesuchten Zahlen sind.

Aus $\frac{a+b}{2} = 25$ folgt $a + b = 50$ bzw. $b = 50 - a$.

Aus $\sqrt{ab} = 20$ folgt $ab = 400$. In diese Gleichung setzten wir $b = 50 - a$ ein und erhalten $a(50 - a) = 400$. Das formen wir um zu $a^2 - 50a + 400 = 0$.
Wir lösen diese quadratische Gleichung:

$a_{1,2} = 25 \pm \sqrt{625 - 400}$

$a_{1,2} = 25 \pm 15$
$a_1 = 40$, es folgt $b_1 = 10$ und
$a_2 = 10$, es folgt $b_2 = 40$.
Die beiden gesuchten Zahlen sind 40 und 10.
Die Probe, die wir dem Leser überlassen, bestätigt die Richtigkeit der Lösung.

9/4
Lösung:
Es seien a und b die beiden Zahlen, dann gilt

(1) $(a + b)^2 = 20{,}25$ und
(2) $(ab)^2 = 20{,}25$.
Aus (1) folgt durch Wurzelziehen
$a + b = 4{,}5$ bzw. $a = 4{,}5 - b$.
Aus (2) folgt durch Wurzelziehen

$a \cdot b = 4{,}5$ bzw. $a = \frac{4{,}5}{b}$.
Daraus folgt nun

(3) $4{,}5 - b = \frac{4{,}5}{b}$.

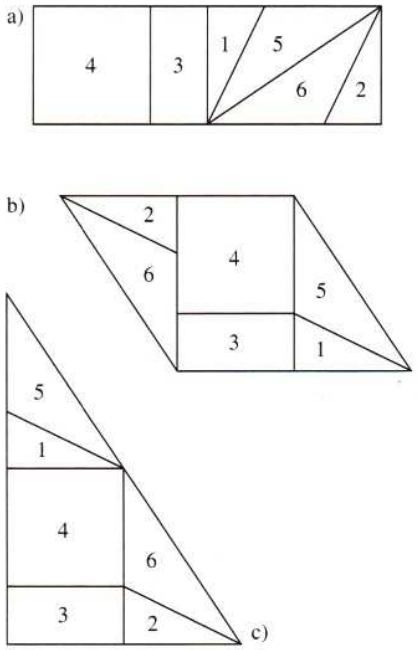
Wir formen diese Gleichung äquivalent um und erhalten
$4{,}5b - b^2 = 4{,}5$,
$b^2 - 4{,}5b + 4{,}5 = 0$.
Diese quadratische Gleichung lösen wir nach der bekannten Lösungsformel und erhalten

$$b_{1,2} = 2{,}25 \pm \sqrt{2{,}25^2} - 4{,}5$$

$$b_{1,2} = 2{,}25 \pm \sqrt{0{,}5625}$$

$b_{1,2} = 2{,}25 \pm 0{,}75$
$b_1 = 3$, es folgt $a_1 = 1{,}5$,
$b_2 = 1{,}5$, es folgt $a_1 = 3$.
Die beiden Zahlen heißen 3 und 1,5.
Probe: $(3 + 1{,}5)^2 = 4{,}5^2 = 20{,}25$ und $(3 \cdot 1{,}5)^2 = 4{,}5^2 = 20{,}25$.

9/5
Lösung:



9/6
Lösung:
$v = a \cdot t$. $s = (a / 2) \cdot t^2$. $v = 7{,}5\ m \cdot s^{-1}$ - 1. $s = 56{,}25$ m.

9/7
Lösung:
Zeit = Differenz der Geschwindigkeit / Weg. 40 s.

10/1
Lösung:
z_1 läßt sich in der Form 100000a + 10000b + 1000a + 100b + 10a + b darstellen ($1 \le a \le 9$ und $1 \le b \le 9$). Diesen Term vereinfachen wir zu 101010a + 10101b.
Nun ist $101010 = 3 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 37$ und $10101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$.
Da beide Summanden die geforderten Bedingungen erfüllen, erfüllt sie auch die Summe, w. z. b. w.
z_2 läßt sich in der Form 100000a + 10000a + 1000a + 100a + 10a + a, zusammengefaßt 111111a, darstellen.
Nun ist $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 = 111111$. Daraus folgt, daß z_2 die gestellten Bedingungen erfüllt, w. z. b. w.

10/2
Lösung:
Wir formen den Term wie folgt um:
$8n^3 + 24n^2 + 22n + 6 = 8n^3 + 12n^2 + 12n^2 + 18n + 4n + 6$
$= 8n^3 + 12n^2 + 4n + 12n^2 + 18n + 6$
$= (4n^2 + 6n + 2) \cdot 2n + (4n^2 + 6n + 2) \cdot 3$
$= (4n^2 + 6n + 2)(2n + 3)$
$= (4n^2 + 2n + 4n + 2)(2n + 3)$
$= ((2n + 1) \cdot 2n + (2n + 1) \cdot 2)(2n + 3)$
$= (2n + 1)(2n + 2)(2n + 3)$.
Nun stellen wir fest, daß der zuletzt erhaltene Term die Darstellung dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist, wenn gilt $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 0$ erhalten wir $1 \cdot 2 \cdot 3$, für $n = 1$ ergibt sich $3 \cdot 4 \cdot 5$ usw.
Von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist mindestens eine gerade (hier ist es die zweite Zahl) und stets genau eine durch 3 teilbar.
Daraus folgt, daß der Term stets durch 6 teilbar ist und wegen des möglichen Produktes $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ die 6 auch die größte natürliche Zahl mit der geforderten Eigenschaft ist.

10/3
Lösung:
Die gegebene Gleichung läßt sich darstellen durch
$(10a + a)^n = 1000a + 100n + 10n + a$,
$(11a)^n = 1001a + 11n$,
$11^n \cdot a^n = 11(91a + 10n)$.
Wegen $11^2 = 121 < 1221$ muß $n \ge 3$ sein.
Wegen $11^4 > 10^4 = 10000 > 9889$ kann nur $n = 3$ gelten.
Daraus folgt
$11^3 \cdot a^3 = 11(91a + 30)$,
$121a^3 = 91a + 30$,
$121a^3 - 91a - 30 = 0$,
$a(121a^2 - 91) = 30$.
Nur $a = 1$ erfüllt diese Gleichung. Es existiert genau eine Lösung, nämlich $11^3 = 1331$.

10/4
Lösung:
(1) Strecke $\overline{AB}$ mit Länge 10 cm zeichnen
(2) Thaleskreis über $\overline{AB}$
(3) Kreis um B mit r = 9 cm schneidet Thaleskreis in C
(4) Länge von

$\overline{AC} = \sqrt{10^2 - 9^2} = \sqrt{100 - 81} = \sqrt{19}$ cm

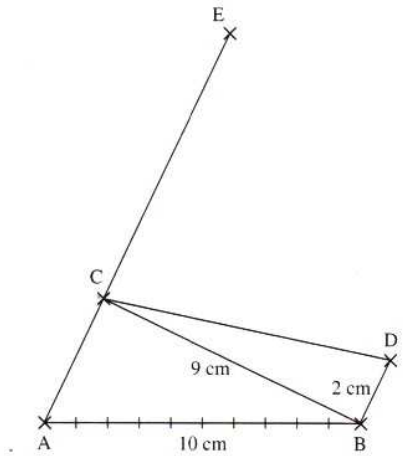
(5) $\overline{AC}$ über C hinaus verlängern
(6) Senkrechte durch B zu $\overline{CB}$ zeichnen und von B aus 2 cm abtragen; wir erhalten Punkt D
(7) Länge von

$\overline{CD} = \sqrt{9^2 - 2^2} = \sqrt{81 + 4} = \sqrt{85}$ cm

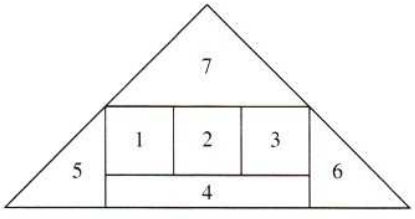
(8) An $\overline{AC}$ in C Strecke $\overline{CD}$ antragen; wir erhalten Punkt E
(9) $\overline{AE}$ ist die gesuchte Strecke mit der Länge

$\left(\sqrt{19} + \sqrt{85}\right)$ cm.

Skizze:



10/5
Lösung:



Alle anderen Lösungen folgen im nächsten alpha-Heft.

992 1742 1917 837

Was geschah vor...Jahren?

1593 Christoph Clavius veröffentlicht sein „Astrolabium" (siehe zugehörigen Beitrag)

1668 Der schottische Mathematiker J. Gregory (1637 – 1675) gibt in seiner „Geometria pars universalis" eine Zusammenfassung der englischen und italienischen Ergebnisse der neuen Differential- und Integralrechnung

1668 Der Engländer Isaac Barrow (1630 – 1677) beginnt in Cambridge mit seinen berühmten Vorlesungen über die geometrischen Probleme der Differential- und Integralrechnung. Er gewinnt die fundamentale Erkenntnis, daß das Tangentenproblem (Differentation!) und das Quadraturproblem (Flächenberechnung, Integration!) inverse Probleme sind. Das eine Problem ist also die Umkehrung des anderen. 1670 wird dazu Barrows Buch „Lectiones geometriae" veröffentlicht.

1693 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1718) führt den Multiplikationspunkt und die Proportionsschreibweise a:b=c:d ein.

1793 Am 15.8. ist Edward Waring gestorben. Der englische Mathematiker wurde wahrscheinlich 1734 geboren. Waring ist noch heute durch das „Waringsche Problem" bekannt. Bei Waring hatte es noch die sehr einfache Form: jede Zahl läßt sich aus höchstens 9 Kubikzahlen, höchstens 19 Biquadratzahlen usw. darstellen. 1909 löste der deutsche Mathematiker D. Hilbert (1862 – 1943) sensationell das Problem allgemein.

Richard von Mises

Vor vierzig Jahren, am 14.7.1953, starb in Boston Richard von Mises. Mises war einer der herausragenden Vertreter der angewandten Mathematik unseres Jahrhunderts. Geboren am 19.4.1883 in Lemberg (Lwow, Polen), das damals zu Österreich gehörte, studierte er in Wien und beendete seine Ausbildung in Brünn. Ein Bruder des Mathematikers war der bedeutende Volkswirtschaftler Ludwig von Mises (1881 – 1973). 1909 wurde Richard von Mises Professor in Straßburg, 1919 in Dresden und 1920 in Berlin. An der Berliner Universität übernahm er die Leitung des weltweit ersten Instituts für Angewandte Mathematik. Auch Mises wurde von den Nationalsozialisten aus Deutschland vertrieben. Er emigrierte 1933 erst nach Istanbul und dann in die USA. Dort wurde er an der Harvard-Universität Professor für Aerodynamik und Angewandte Mathematik.

Mises faßte den Gegenstand der „angewandten Mathematik" als alle mathematischen und physikalischen Gebiete, die ein wissenschaftlich arbeitender Ingenieur benötigt. Er verwahrte sich scharf gegen die Auffassung, daß die Mathematik der Techniker simpel und ungenau sein müsse – exakte Mathematik betrieben nur die Vertreter der reinen Mathematik. In seinem Gesamtwerk, das hauptsächlich Probleme der Flugtechnik, des Maschinenbaus, Untersuchungen von Grenzschichten, Stabilitätsuntersuchungen, numerische Integration und technisch wichtige geometrische Konstruktionen umfaßte, bewies er selbst, daß der Gegensatz zwischen reiner und angewandter Mathematik nur scheinbar ist. Von Fragen, die sich aus der ingenieurtechnischen Praxis ergeben, führt ein Weg zur Erforschung der mathematischen Grundlagen der Ingenieurwissenschaften. Weltweit großen Einfluß übten die Untersuchungen von Mises über Wahrscheinlichkeitsrechnung aus, die er auf den Begriff des „Kollektivs" gründete. Ein Kollektiv ist eine unendliche Folge von Beobachtungen. Jede Beobachtung endet dabei mit der Feststellung eines „Merkmals". Der Begriff „Kollektiv" war in der 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts besonders von dem Leipziger Physiker und Philosophen Gustav Theodor Fechner (1801 – 1887) und dem Leipziger Astronomen und Mathematiker Heinrich Bruns (1848 – 1919) als Ausgangspunkt ihres Zuganges zur Wahrscheinlichkeitsrechnung gewählt worden. Diese „Kollektivmaßlehre" ist über Jahrzehnte heftig umstritten gewesen, wird aber seit etwa 1960 in wesentlichen Teilen allgemein akzeptiert.

Als Kuriosum sei zum Schluß erwähnt, daß der erwähnte Fechner auch humoristische Schriften verfaßte. Als Pseudonym wählte Fechner für diese Werke „Dr. Mises".

H. J. Ilgauds, Universität Leipzig

Eine Vorstufe des logarithmischen Rechnens

1593 veröffentlichte Christoph Clavius (1537 – 1612) in Rom ein Buch mit dem Titel „Astrolabium". Ein Astrolabium ist ein astronomisches Gerät zur mechanischen Lösung von Aufgaben der Astronomie gewesen. An solchen und ähnlichen Geräten waren die Astronomen besonders interessiert, da sie damals als einzige zu sehr umfangreichen Rechnungen gezwungen waren.

Clavius, aus Bamberg stammend, war Mitglied des Jesuitenordens und galt als der bedeutendste Lehrer der Mathematik in seiner Zeit. Er hat sich große Verdienste um die Entwicklung von Schulbüchern, um die Kalenderreform und um die Herausgabe antiker mathematischer Werke erworben. Es war schon eine Ironie des Schicksals, daß ausgerechnet dieser berühmte Gelehrte in Rom auf der Straße von einem wildgewordenen Ochsen getötet wurde. In seinem „Astrolabium" behandelte Clavius auch abschließend die Prosthaphairese. Dieses eigenartige Wort bedeutet etwa „Vorwegnahme". Die Prosthaphairese war 1514 von dem Nürnberger Gelehrten Johann Werner (1468 – 1528) erfunden worden. Heute wissen wir aber, daß auch schon der Kairoer Gelehrte Ibn Yunis (≈ 950 – 1009) diese Rechenmethode kannte. Die Grundlage der Prosthaphairese bilden die drei bekannten trigonometrischen Formen

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}\big(\cos(x+y) - \cos(x-y)\big),$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\big(\sin(x+y) + \sin(x-y)\big),$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\big).$$

Wir wollen uns auf die erste Formel beschränken. Es sei die Rechenaufgabe $0{,}3584 \cdot 0{,}6428$ zu lösen. Hat man eine vierstellige Tafel der trigonometrischen Funktionen zur Verfügung, so sieht man: $0{,}3584 = \sin 21°$, $0{,}6428 = \sin 40°$. Nach der ersten Formel ist

$$\sin 21° \cdot \sin 40° = -\frac{1}{2}(\cos 61° - \cos(-19°)) =$$

$$-\frac{1}{2}(\cos 61° - \cos 19°) = -\frac{1}{2}(0{,}4848 - 0{,}9455) =$$

$$= 0{,}23035.$$

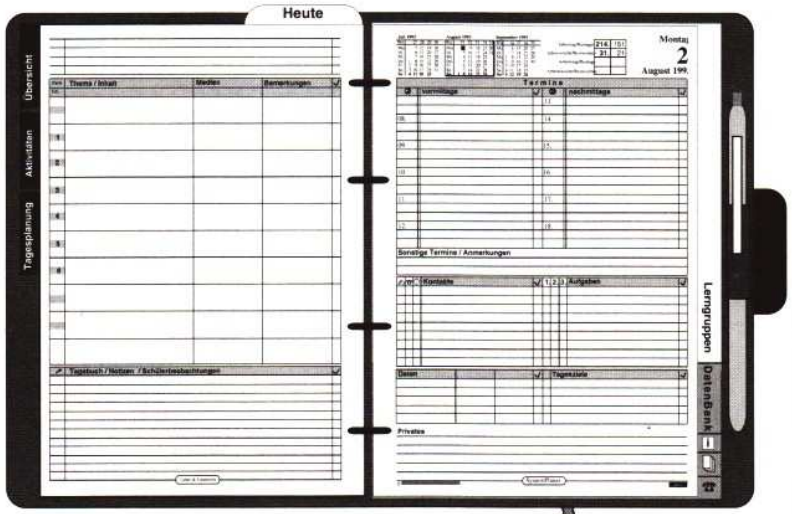
Also ist somit die Rechenaufgabe $0{,}3584 \cdot 0{,}6428 \approx 0{,}23035$ gelöst. Der Sinn dieser Rechenmethode war: man kann durch die verwendeten trigonometrischen Formeln die Multiplikation (linke Seite) durch die Addition bsw. Subtraktion (rechte Seite) ersetzen. Diese Methode leistet im Prinzip genausoviel wie die Logarithmen. Auch dort wird die Multiplikation durch eine Addition ersetzt. Allerdings ist die Prosthaphairese noch umständlicher als die logarithmische Rechnung und deshalb wurde dieses Verfahren seit etwa 1600 langsam durch das Rechnen mit Logarithmen ersetzt (J. Bürgi (1552 – 1632), J. Neper (1550 – 1617)).

H. J. Ilgauds, Universität Leipzig

Klett

WEG MIT ZEITFRESSERN.....

UND MIT VORSPRUNG IN DAS NEUE SCHULJAHR



Systemplaner? Gibt's schon viele - werden Sie sagen. Stimmt! Aber - dieser ist für Lehrerinnen und Lehrer entwickelt worden - und zwar von denen, die sich auskennen, den Lehrenden.

Grundlieferung (Ringbuch, Druckbleistift, Lesezeichen, Register, ausführliche Gebrauchsanleitung, mehrfarbige Karten) einschließlich der Jahreslieferung 1993/94 (Aug. 93 - Juli 94); Format DIN A 5.
Klettnummer 80023,
Subskriptionspreis DM 168,-- ☆ bis 30.6.93, danach DM 198,-- ☆

☆ unverb. Preisempfehlung
Preise freibleibend. Stand 1993

Systemplaner für Lehre & Unterricht
✏ **übersichtlich**
✏ **individualisierbar**
✏ **flexibel** ✏ **aktuell**

Nicht vergessen:
Sie können den Systemplaner, wenn er Ihnen nicht gefällt, innerhalb von 14 Tagen zurückschicken

Bitte senden Sie den Bestellcoupon an:
Ernst Klett Verlag für Wissen und Bildung, Bestellservice
Postfach 1170, W-7054 Korb

Ich bestelle zum angegebenen Preis
❒ **80023** Systemplaner Lehre & Unterricht (einschl. Jahreslieferung 93/94) zum **Subskriptionspreis von DM 168,--** bis 30.6.93, danach DM 198,--

Vorname, Name

Straße

Postleitzahl, Ort

AZ 417/93

D	☆		KWB AW/Af

32. Mathematik-Olympiade

3. Stufe (Landes-Olympiade)

Sie fand am 6. und 7. Februar 1993 statt. Falls Ihr Interesse an den Lösungen habt – schreibt uns, wir schicken sie gern zu.

Klassenstufe 7

320731

a) Vier rote Kugeln, zwei gelbe Kugeln und eine blaue Kugel sollen so auf zwei Kästen A und B verteilt werden, daß sich in A drei und in B vier Kugeln befinden. Wieviele derartige Verteilungen gibt es insgesamt?

b) Jetzt werden gleichfarbige Kugeln durch eine zusätzliche Numerierung voneinander unterschieden. Die Verteilungen unterscheiden sich dann nicht nur darin, wieviele Kugeln der einzelnen Farben in den Kästen A und B sind, sondern auch, welche Nummern sie tragen.
Wieviele solcher Verteilungen gibt es insgesamt?

320732

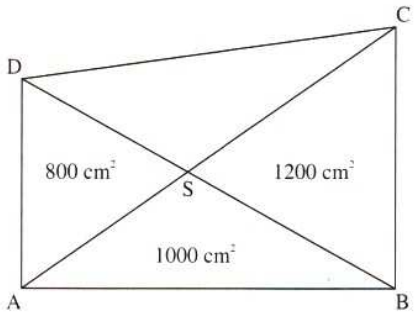


Abb. A 320732

Es sei ABDC ein Viereck, dessen Diagonalen AC und BD sich in einem Punkt S schneiden. Ferner sei vorausgesetzt, daß die Dreiecke ABS, DAS und BCS die Flächeninhalte 1000 cm², 800 cm² bzw. 1200 cm² haben, so wie dies in der Abb. A 320732 angegeben ist.
Weise nach, daß durch diese Voraussetzungen der Flächeninhalt F des Dreiecks CDS eindeutig bestimmt ist, und ermittle diesen Flächeninhalt!

320733

Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck, sein Umkreismittelpunkt sei M. Auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege ein Punkt P derart, daß $\overline{BP} = 2\text{cm}$ gilt. Auf der Verlängerung von BC über C hinaus liege ein Punkt Q mit $\overline{CQ} = 2\text{cm}$, und auf der Verlängerung von CA über A hinaus liege ein Punkt R mit $\overline{AR} = 2\text{cm}$. Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen, unabhängig von der Seitenlänge des Dreiecks ABC, stets die beiden folgenden Aussagen a) und b) gelten!
a) Das Dreieck PQR ist gleichseitig.
b) Es ist $MP \cong MQ \cong MR$.

320734

Ermittle die Anzahl aller derjenigen sechsstelligen natürlichen Zahlen, die durch 5 teilbar sind und deren Quersumme durch 9 teilbar ist!

320735

Es sei ABC ein Dreieck, in dem der Innenwinkel $\sphericalangle$ ACB die Größe 32° hat. Auf der Verlängerung von BA über A hinaus liege ein Punkt D derart, daß $\overline{AD} = \overline{AC}$ gilt; auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege ein Punkt E derart, daß $\overline{BE} = \overline{BC}$ gilt.
Beweise, daß durch diese Voraussetzungen, unabhängig von den sonstigen Eigenschaften des Dreiecks ABC, die Größe des Winkels $\sphericalangle$ DCE eindeutig bestimmt ist; ermittle diese Winkelgröße!

320736

Über ein Schwimmbecken wurden folgende Angaben gemacht:
Das Becken kann durch zwei getrennte Wasserleitungen gefüllt werden. Aus der zweiten Leitung strömen in jeder Minute 50 Kubikmeter mehr heraus als aus der ersten. Um das Becken vollständig zu füllen, werden 48 Minuten gebraucht, wenn beide Leitungen gleichzeitig geöffnet sind; dagegen 2 Stunden, wenn nur die erste Leitung geöffnet ist. Untersuche, ob das Volumen des Beckens durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, so ermittle dieses Volumen!

Klassenstufe 8

320831

Sind a, b, c die Hunderter-, Zehner- bzw. Einerziffer einer dreistelligen natürlichen Zahl, so sei diese Zahl kurz durch $\overline{abc}$ bezeichnet. Ebenso sei jeweils eine zweistellige Zahl mit Zehner- bzw. Einerziffer b und c durch $\overline{bc}$ bezeichnet.
Ermittle alle diejenigen a, b, c, für die $\overline{abc}$ eine dreistellige und $\overline{bc}$ eine zweistellige Zahl ist, so daß die Gleichung

$$\overline{abc} = \left(\overline{bc}\right)^b$$

gilt!

320832

Um einen Behälter mit Wasser füllen zu können, soll eine Anzahl Röhren angelegt werden. Durch jede Röhre soll das Wasser gleichmäßig strömen (d. h. in gleichen Zeiten gleichviel Wasser). In einer Stunde soll durch jede Röhre die gleiche Wassermenge zuströmen wie durch jede andere Röhre.
Für die Anzahl der Röhren gibt es drei Vorschläge.
Nach dem zweiten Vorschlag, zwei Röhren weniger als beim ersten Vorschlag zu nehmen, würde das Füllen des Behälters zwei Stunden länger dauern als beim ersten.
Nach dem dritten Vorschlag, vier Röhren mehr als beim ersten Vorschlag zu nehmen, würde das Füllen des Behälters zwei Stunden kürzer dauern als beim ersten.
Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der Röhren und die Zeit zum Füllen des Behälters beim ersten Vorschlag!

320833

Beweise die beiden folgenden Aussagen (a) und (b) für jedes spitzwinklige Dreieck ABC mit einem im Innern des Dreiecks gelegenen Punkt P! Dabei seien folgende Bezeichnungen verwendet:

Winkel	Größe
$\sphericalangle$ PBA	δ
$\sphericalangle$ PCA	δ'

Winkel	Größe
$\sphericalangle$ PCB	ε
$\sphericalangle$ PAB	ε'

Winkel	Größe
$\sphericalangle$ PAC	φ
$\sphericalangle$ PBC	φ'

(a) Wenn die Gleichungen $\delta = \delta'$ und $\varepsilon = \varepsilon'$ und $\varphi = \varphi'$ gelten, dann ist P der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC.

(b) Wenn P der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist, dann gelten die Gleichungen $\delta = \delta'$ und $\varepsilon = \varepsilon'$ und $\varphi = \varphi'$.

320834

Ein Radfahrer fuhr mit konstanter Geschwindigkeit über eine 100 m lange Brücke. Als er auf dieser Brücke 40 m zurückgelegt hatte, traf er einen zweiten Radfahrer, der ihm mit gleicher Geschwindigkeit entgegenkam. Ein Auto, das auf derselben Straße mit der Geschwindigkeit $70\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fuhr, begegnete dem zweiten Radfahrer in dem Augenblick, als dieser die Brücke verließ, und es überholte den ersten Radfahrer genau am anderen Ende der Brücke.

Ermittle aus diesen Angaben die Geschwindigkeit der Radfahrer!

320835

Beweise, daß für jedes Dreieck ABC die folgende Aussage gilt!

Das Verhältnis des Flächeninhalts des Dreiecks ABC zum Flächeninhalt seines Inkreises ist gleich dem Verhältnis des Umfangs des Dreiecks ABC zum Umfang seines Inkreises.

Hinweis: Als *Inkreis* eines Dreiecks bezeichnet man denjenigen Kreis, der alle drei Seiten dieses Dreiecks von innen berührt.

320836

In der linken Waagschale einer gleicharmigen Waage steht eine Kerze, in der rechten stehen drei Kerzen. Die vier Kerzen sind so beschaffen, daß jede von ihnen während je einer Minute Brenndauer die gleiche Masse verliert wie jede andere von ihnen. Die linke Kerze würde zum vollständigen Herunterbrennen 84 Minuten brauchen, von den drei rechten Kerzen die erste 70 Minuten, die zweite 63 Minuten, die dritte 35 Minuten.

Die vier Kerzen werden gleichzeitig angezündet. Wie lange danach ist die Waage erstmals im Gleichgewicht?

Klassenstufe 9

320931

In einem Land gibt es nur zwei Sorten von Menschen: Edelmänner und Schurken. Jeder Edelmann macht nur wahre Aussagen, jeder Schurke nur falsche Aussagen. Ein nicht aus diesem Land stammender Reporter berichtet, er habe folgendes Gespräch dreier Einwohner A, B und C dieses Landes gehört:

A sagt zu B: „Wenn C ein Edelmann ist, dann bist du ein Schurke."

C sagt zu A: „Du bist von anderer Sorte als ich."

Kann ein solches Gespräch stattgefunden haben? Wenn das der Fall ist, geht dann aus dem Gespräch für jeden der drei A, B, C eindeutig hervor, ob er Edelmann oder Schurke ist, und zu welchen Sorten gehören dann A, B und C?

320932

Wieviele Paare (x; y) natürlicher Zahlen, für die

$10x + y < 1993$

gilt, gibt es insgesamt?

320933

Gegeben ist eine Gerade g und auf ihr drei Punkte A, B, C, in dieser Reihenfolge angeordnet.

(a) Ermitteln Sie in Abhängigkeit von den Längen $a = \overline{AB}, b = \overline{BC}$ den Radius eines Kreises k, der durch A und B geht und eine durch C gehende Tangente besitzt, die auf g senkrecht steht!

(b) Beweisen Sie, daß es einen Kreis c um C gibt, auf dem alle Berührungspunkte der Tangenten liegen, die von C an alle diejenigen Kreise k gelegt werden, die durch A und B gehen!

320934

Ist p eine Primzahl, so sei M_p die Menge aller derjenigen Zahlen z, die sich mit positiven ganzen Zahlen x und y in der Gestalt $z = x^2 + p \cdot y^2$ darstellen lassen. Beweisen Sie, daß für jede Primzahl p die folgende Aussage gilt: Wenn eine Zahl z der Menge M_p angehört, dann gehört auch die Zahl z^2 der Menge M_p an.

320935

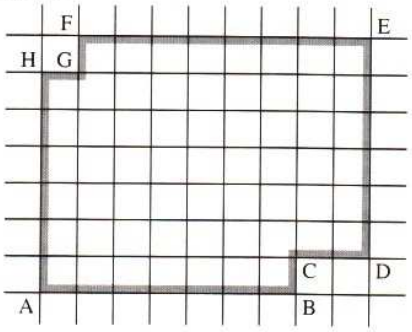


Abb. A 32095

Auf kariertem Papier (eingeteilt in quadratische Karos) ist ein Achteck ABCDEFGH wie in Abb. A 320935 gezeichnet. Jemand will es in zwei kongruente Teilflächen zerschneiden, und zwar sollen sich diese Teilflächen so miteinander zur Deckung bringen lassen, daß dabei A mit E zur Deckung kommt. Die Schnittkurve soll ein zusammenhängender Streckenzug sein, der sich selbst nicht überkreuzt und der nur aus Teilstrecken zusammengesetzt ist, die auf dem karierten Papier vorgegeben sind.

Beweisen Sie, daß es genau einen Streckenzug gibt, mit dem das Achteck wie gewünscht zerschnitten werden kann!

320936

a) Geben Sie drei ganze Zahlen x, y und z an, für die

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y - 14z - 57 = 0$ (1)

gilt!

b) Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Tripel (x; y; z) ganzer Zahlen x, y, z, die die Gleichung (1) erfüllen!

Klassenstufe 10

321031

Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare (x;y) ganzer Zahlen x, y, für die

$19 < x^2 + y^2 < 93$

gilt!

321032

Gegeben sei ein Quadrat und eine positive ganze Zahl n. Jemand möchte ein Rechteck konstruieren, das denselben Flächeninhalt, aber einen n mal so großen Umfang wie das Quadrat hat.

a) Beweisen Sie, daß es bis auf Kongruenz genau ein solches Rechteck gibt!

b) Beweisen Sie, daß ein solches Rechteck mit Lineal und Zirkel aus der Seitenlänge des gegebenen Quadrats konstruierbar ist!

321033

Zeigen Sie, daß es möglich ist, einer Kugel acht einander kongruente gerade Kreiskegel möglichst großer Höhe so einzubeschreiben, daß jeder dieser Kegel genau drei andere von ihnen jeweils längs einer gemeinsamen Mantellinie berührt!

Ermitteln Sie aus dem gegebenen Kugelradius R den Grundkreisradius r und die Höhe h solcher Kegel!

321034

Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (x; y; z) natürlicher Zahlen x, y, z, für die

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}$ gilt!

321035
Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl k > 1 die folgende Aussage gilt:
Wenn die im Positionssystem der Basis k mit genau n Ziffern 1 geschriebene Zahl

11...1

eine Primzahl ist, dann ist n eine Primzahl.

321036
Ermitteln Sie zu jedem spitzwinkligen Dreieck ABC alle diejenigen Punkte P, für die jedes der drei Spiegelbilder von P, gebildet durch Spiegelung an den Dreiecksseiten, auf dem Umkreis des Dreiecks liegt!

Klassenstufe 11 – 13

321231
Man untersuche, ob es eine positive ganze Zahl n gibt, für die die Zahl $\sqrt{n}+\sqrt{n+4}$ rational ist.
Hinweis: Als bekannter Sachverhalt kann die Aussage verwendet werden, daß für jede natürliche Zahl k, die keine Quadratzahl ist, die Zahl $\sqrt{k}$ nicht rational ist.

321232
Man beweise: Zu jeder Primzahl p gibt es eine reelle Zahl c, mit der die Zahlenfolge $(a_k)_{k=1,2,3,...}$, die durch
$a_1 = c$,
$a_{k+1} = a_k^2 + c$ (k = 1,2,3,...)
definiert wird, periodisch ist und die Zahl p als kleinste Periodenlänge hat.
Hinweis: Eine Zahlenfolge $(a_k)_{k=1,2,3,...}$ heißt genau dann *periodisch*, wenn es eine positive ganze Zahl n gibt, mit der für alle k = 1,2,3,... die Gleichung $a_k = a_{k+n}$ gilt. Ist das der Fall, so heißt jede positive ganze Zahl n, mit der das zutrifft, eine *Periodenlänge* der Zahlenfolge $(a_k)_{k=1,2,3,...}$

Von den nachstehenden Aufgaben 321233A und 321233B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

321233 A
Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$ und $x \neq 1$ definiert sind sowie für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$, $x^2 - x - 1 \neq 0$ und $x^2 + x - 1 \neq 0$ die folgende Gleichung (1) erfüllen:

$$2\cdot f\left(\frac{x^2+x-1}{x^2-x-1}\right)-3\cdot f\left(\frac{x^2-x-1}{x^2+x-1}\right)=$$

$$=5\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right) \qquad (1)$$

321233 B
Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ermittle man alle diejenigen n-Tupel $(x_1,x_2,...,x_n)$ positiver ganzer Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:
$x_1 \cdot x_2 = 3\cdot(x_1 + x_2)$,
$x_2 \cdot x_3 = 3\cdot(x_2 + x_3)$,
.....,
$x_{n-1} \cdot x_n = 3\cdot(x_{n-1} + x_n)$,
$x_n \cdot x_1 = 3\cdot(x_n + x_1)$.

321234
Von einer ungeraden natürlichen Zahl n und von n Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ werde vorausgesetzt, daß jede der Zahlen 1, 2, ..., n genau einmal unter den $a_1, a_2, ..., a_n$ vorkommt.
Man beweise, daß unter dieser Voraussetzung das Produkt
$(a_1 - 1)\cdot(a_2 - 2)\cdot...\cdot(a_n - a)$
stets eine gerade Zahl sein muß.

321235
Man beweise, daß es zu jeder positiven ganzen Zahl n eine reelle Zahl c gibt, so daß für alle reellen Zahlen a > o die Ungleichung
$a + a^2 + a^3 + ... + a^{2n} \leq c\cdot(1 + a^{2n+1})$
gilt. Man beweise auch, daß es zu jedem n unter allen solchen Zahlen c eine kleinste gibt, und ermittle jeweils zu n dieses kleinste c.

321236
Es seien k_1, k_2 und k_3 drei konzentrische Kreise mit den Radien $r_1 = 5$, $r_2 = 3\cdot\sqrt{2}$ bzw. $r_3 = 1$. Man ermittle den größtmöglichen Wert für den Flächeninhalt eines Dreiecks ABC mit der Eigenschaft, daß A auf k_1, B auf k_2 und C auf k_3 liegt.

Lösungen und Gewinner

alpha-Preisausschreiben 2

Aufgabe a:
Die Sichtweite bis zum Erdhorizont (bei Erdradius = 6 378 km) etwa 1134 km.

Aufgabe b:
Die Sichtfläche auf der Erdoberfläche beträgt etwa 3 945 550 km^2.

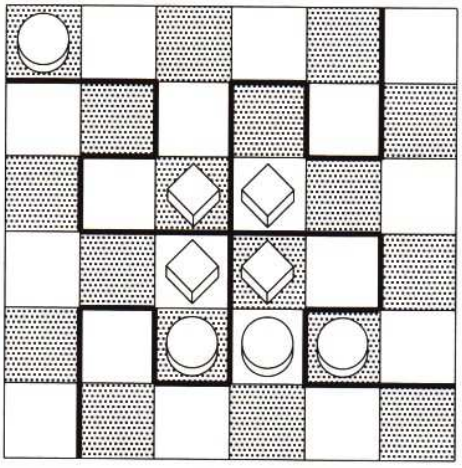
Aus allen richtigen Einsendungen wurden die Gewinner gezogen.
Den TI-81 erhielt Gunther Hosemann, Erfurt; den Galaxy 40X Solar erhielt Kerstin Sieber, Hemhofen.

BOMICO-Preisauschreiben

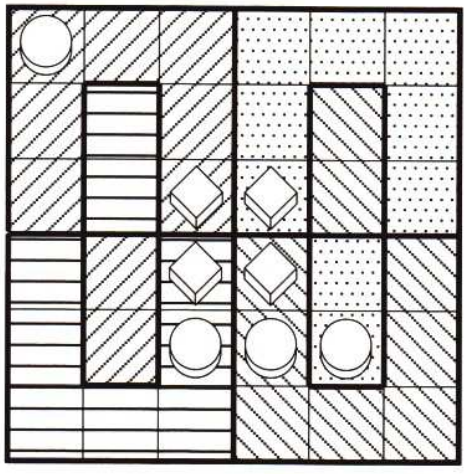
Auch beim BOMICO-Preisausschreiben erhielten wir zahlreiche richtige Lösungen.

Lösung 1. Aufgabe
Vorschlag D ist die gesuchte Figur 5.

Lösung 2. Aufgabe



Aus allen richtigen Einsendungen wurden die Gewinner gezogen.
Je 1 „Castle of Dr. Brain" geht an:
Martin Bohmeyer, Neuenhagen
Alexander Keck, Rostock
Thomas Strobel, Lappersdorf
Matthias Wagner, Deggendorf.
Allen Gewinnern unseren herzlichen Glückwunsch.
P.S.: von Michael Wilmsen, Halle/S. erhielten wir folgende ungewöhnliche, aber richtige Lösung:



Oldies: – Loopz

LOOPZ ist ein Denk- und Geschicklichkeitsspiel mit viel Schiebe- und Drehübung. Die Aufgabe erscheint dann auch äußerst einfach. Auf einem Spielfeld von 18 x 7 Feldern blinkt zu Spielbeginn der Cursor, der ein Bauelement frei gibt. Aus vielen verschiedenen Elementen soll ein geschlossener Körper, ein LOOPZ, gebildet werden. Je größer dessen Flächeninhalt, je größer dessen Umfang, desto höher die Punktzahl.
Mit der Tastatur bewegt man das Bauteil an eine beliebige Stelle, wobei man es mit der Space-Taste um einen vorgegebenen Punkt drehen kann. In die gewünschte Position gebracht, verankert man das Teilchen mit der Return-Taste fest auf den Spielplan. Gelingt es, das lineare Gebilde zu schließen, verschwindet es vom Spielplan, der Computer wertet die Punkte, die rechts unter der Spielfläche aufaddiert werden. Links unterhalb der Spielfläche werden die LOOPZe gezählt. Zwischen diesen beiden Anzeigen befindet sich eine weitere, die stets die zur Durchführung der Bewegung vorhandene Zeit verrinnen läßt. Schafft man es während der vorgegebenen Zeit nicht, sein Bauelement in Übereinstimmung mit den Spielregeln abzulegen, werden Versuche (Leben) abgezogen. Drei Versuche stehen einem zur Verfügung. Hat man Glück, taucht ein Bonusstein auf, eine Ratte, die begonnene, nicht zu beendende LOOPZe, löschen kann. Für 25 fertiggestellte LOOPZ-Figuren gibt es einen neuen zusätzlichen Versuch.
LOOPZ ist ein schnelles, zweidimensionales Bauspiel. Wer geometrische Formen gut zusammenstellen, wer unter Zeitdruck aufmerksam und zügig spielen kann, der wird halbwegs verwinkelte Figuren bauen und damit reichlich Punkte einfahren können. Die Steuerung für LOOPZ begrenzt sich alles in allem auf sechs Tasten, ist folglich außergewöhnlich bequem. Mit Mut zur Lücke, die am besten nie zwei Felder groß sein darf, lassen sich auch die verwinkeltsten Bauelemente in einen LOOPZ einpassen. Jammerschade, daß T-Stücke und wenigstens ab und zu mal ein Kreuzungs-Teil fehlt.
Ganz unerschrockene LOOPZer spielen LOOPZ natürlich auch zu Zweit. Dann gewinnt immer bloß der die Punkte, der einen LOOPZ vervollständigt – da läßt der Zweier-Modus von ATOMIX grüßen.
Dem ungeachtet ist LOOPZ ein eigenständiges Spiel. Es ist nicht alltäglich und bei uns sehr begehrt. Wer diese Kategorie Hirnzellen-Training liebt, wird viele LOOPZe bauen.
Hartmut Seitz / -se

LOOPZ, Audiogenic 1990, Genre: schnelles Denkspiel von Ian Upton für 1 oder 2 Spieler mit hoher Spielmotivation und niedlichem Sound. Vertrieb: BOMICO, Idealkonfiguration: VGA, 1 LW, Soundkarte.

Anzeige

UNTERRICHT OHNE MEDIEN?

Kinder und Jugendliche leben in der Medienwelt, Medien sind das Thema unserer Zeit. – Und wie reagiert die Schule? Welche Medien setzen Lehrer und Lehrerinnen im Unterricht ein, wie aktivieren sie ihre Schülerinnen und Schüler?

UNTERRICHTS-MEDIEN Friedrich Jahresheft XI 1993

Medien werden in allen Unterrichtsfächern gebraucht, für alle Fächer produziert, in verschiedensten Zusammenhängen „eingesetzt": um ein Problem zu entdecken, um einen Funktionsablauf zu analysieren, um an ein Ergebnis zu erinnern oder es zu diskutieren.
Medien sind nicht nachträglich Zutat zum Unterricht, sondern präsentieren, klären, visualisieren, woran was gelernt werden soll oder kann.
Medien helfen verstehen und fordern zur Stellungnahme heraus.
UNTERRICHTSMEDIEN – ein Heft voller Anregungen für Lehrerinnen und Lehrer – für die Praxis.
Am Ende des Heftes Medienkatalog, Hersteller und Bezugsquellen.

UNTERRICHTSMEDIEN
Friedrich Jahresheft XI
1993,
herausgegeben von
Gunter Otto,
Erhard Friedrich Verlag,
Velber,
160 Seiten, zahlreiche
zum Teil farbige
Abbildungen, DM 26,50,
Preis für Abonnenten
DM 19,50,
Best.-Nr. 3-617-00011

Bitte benutzen Sie die Bestellkarten in diesem Heft

GIBT ES NICHT!

Die Olympiade Ecke

*Die **ProblemEcke** – Probleme von L(o)esern für L(o)eser*

Es gibt rund um den Globus unzählige Mathematikzeitschriften. Einige kommen ziemlich ärmlich daher, andere, wie Eure alpha, gehören zur Luxusklasse ihrer Gattung. Aber gleichgültig ob Billigdruck oder Hochglanzpapier: jedes dieser Magazine besitzt (mindestens) eine Problemseite, mit der die Herausgeber ihre Leser zum Mittun auffordern wollen. Doch leider weisen die dargebotenen Aufgaben manchmal einen derart hohen Schwierigkeitsgrad auf, daß sie dann nur noch von Universitätsprofessoren und ihren Jüngern bewältigt werden können. Da Eure alpha aber weniger ein Hochschulblatt für kluge akademische Köpfe sein soll, sondern in erster Linie Euch Schüler ansprechen will, möchte ich mit dieser Ausgabe in der OLYMPIADE-ECKE eine zweite Unterabteilung eröffnen: *Die ProblemEcke*.

In dieser regelmäßigen Einrichtung werde ich Euch jeweils sechs Aufgaben vorstellen, die fortlaufend numeriert sind. Die Probleme sind unterteilt in drei Schwierigkeitsgrade:

Junior (für Löser bis Klasse 8 einschließlich), **M**ittel (für Tüftler bis einschließlich Jahrgangsstufe 10) und **O**ffene Probleme für jedermann. **Ihr seid eingeladen, zu einem oder mehreren Aufgabenvorschlägen, Lösungen einzureichen. Die elegantesten Auflösungen sollen jeweils in späteren Heften von alpha vorgestellt werden.**

Keine schon einmal gestellte Aufgabe ist dabei völlig abgeschlossen: neue, ungewöhnliche Lösungswege sind jederzeit willkommen. Die erfolgreichen Löser werden am Jahresende bekanntgegeben.

Schickt Eure Lösungen an: **StR Paul Jainta, Werkvolkstraße 10, 91126 Schwabach.** Vergeßt nicht, **Name, Schule** und **Alter** bzw. **Klasse** anzugeben.

Ich möchte Euch zu regelmäßigem Mitmachen ermuntern. Eine mathematische Zeitschrift lesen erschöpft sich nicht darin, nur oberflächlich in ihr zu blättern; besser wäre, ihr legt Euch Stift und Papier daneben, ganz im Sinne des ungarisch-amerikanischen Mathematikprofessors und Erfinders grundlegender Lösungsstrategien für mathematische Wettbewerbsaufgaben, Georg Pólya, der einmal gesagt hat: *Das Lösen von Aufgaben ist eine praktische Kunst wie das Schwimmen oder Klavierspielen. Sie läßt sich nur durch Nachahmung und Übung erlernen.* Die Aufgaben, die ich Euch zusätzlich anbieten möchte, erfordern nicht unbedingt den gesamten Mathe-Stoff der Schule. Mit ein wenig Phantasie, einem Schuß geradlinigem Denken, aber auch mit einer gehörigen Portion Hartnäckigkeit, werdet Ihr gut mit ihnen zurechtkommen. Laßt Eure Gehirnrädchen also schnurren, denn hier erfolgt das Startzeichen für

Die ProblemEcke

J 1. Wie viele natürliche Zahlen n zwischen 1 und 1993 einschließlich, besitzen 3 **oder** 5 **nicht** als Teiler?

J 2. Es gibt beliebig viele Paare ganzer Zahlen x und y, für welche der Term T = 2x+3y ein Vielfaches von 11 ist (z. B. x=1, y=3).
Zeige, daß für dieselben Zahlenpaare x, y der Term T* = 7x + 5y ebenfalls ein Vielfaches von 11 ist.

M 1. Die Seitenlängen a, b, c eines Dreiecks erfüllen die Bedingung

$$\frac{c-b}{a}+\frac{a-c}{b}+\frac{b-a}{c}=0.$$

Beweise: Das Dreieck ist gleichschenklig.

M 2. Finde alle vierstelligen natürlichen Zahlen $\overline{abcd}$ mit folgenden Eigenschaften:
1) Die vier Ziffern a, b, c und d sind verschieden.
2) Es gilt: a = b+c+d
3) Die Zahlen $\overline{cd}$ und $\overline{abcd}$ sind Quadratzahlen.

O 1. Eine Funktion f erfüllt die Bedingungen
(1) f(x,x) = x
(2) f(x,y) = f(y,x) und
(3) (x+y)f(x,y) = (2x+y)f(x,x+y)
für alle nichtnegativen ganzen Zahlen x und y. Man bestimme den Wert von f(19,93).

O 2. Vereinfache den folgenden Ausdruck

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{81}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3^8}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right)$$

Besonders ermutigen möchte ich auch mathematische Arbeitsgemeinschaften, Schülerzirkel und ausgesprochene Knobelgruppen, sich an der Bearbeitung einzelner (oder aller) Aufgaben zu beteiligen. Es soll ja an einigen Schulen richtige Spezialistenteams geben, die sich nur zu dem Zwecke treffen, neue Probleme zu knacken. Ich würde mich freuen, wenn alpha einen lebhaften Gedankenaustausch zwischen einzelnen Gruppen einleiten könnte.

Probleme von L(o)esern für L(o)eser

Wer meint, einige passende Aufgaben (mit den Lösungen dazu) zur Veröffentlichung beisteuern zu können, der möge mir ebenfalls schreiben. Erzählt mir, wie und womit Ihr Euch mathematisch betätigt (dazu Hobbys etc.). Wenn Ihr bei Eurer Beschäftigung mit Mathematik (etwa beim Lösen von Problemen) eine Entdeckung gemacht oder eine Idee verfolgt habt, laßt es mich wissen. Es gibt viele unterhaltende Leckerbissen auf diesem Gebiet, von denen andere Leser von alpha vermutlich auch gerne etwas abhaben wollen. Schickt mir ein Foto (oder anderes Bildmaterial) von Euch, dann kann ich Euch den alpha-Lesern vorstellen. Vielleicht wird daraus eine weitere neue Ecke in alpha: Probleme von L(o)esern für L(o)eser.

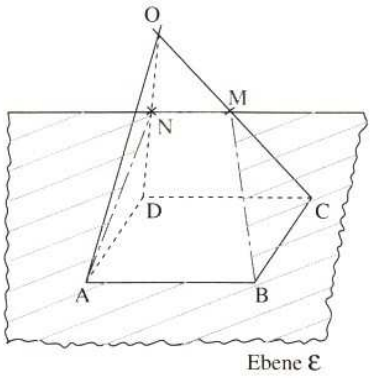
Wie Ihr an alpha mitwirken könnt, möchte ich am Beispiel von **Terpu Vlad** verdeutlichen, der in der rumänischen Hauptstadt Bukarest lebt. Terpu hat der Redaktion im Frühjahr des vergangenen Jahres einen längeren Brief geschrieben und gleichzeitig eine Auswahl von Aufgaben aus rumänischen Mathe-Wettbewerben mitgeschickt. Einige der Aufgabenbeispiele hat er selbst als Teilnehmer an der rumänischen Mathematik Olympiade bearbeiten müssen. Terpu ist 15 Jahre alt und besucht derzeit die 10. Klasse an der Deutschen Schule in seiner Landeshauptstadt. Ab der 9. Klasse ist er in

den mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig hinübergewechselt, an dem nach dem deutschen Lehrplan unterrichtet wird. Jeweils Mitte September beginnt in Rumänien ein neues Schuljahr.
Terpu nimmt nun schon zum zweiten Male an der rumänischen Mathe-Olympiade teil. Er hat mir den groben Ablauf dieses Landeswettbewerbes geschildert. Danach melden die Mathelehrer aller vierten bis zwölften Klassen dem Olympiade-Komitee alljährlich geeignete Schüler zur Teilnahme. Die Meldezahlen sind dabei gewöhnlich so hoch, daß sie allein in Bukarest auf 6 Distrikte verteilt werden. Aus diesen Stadtbezirken wird in der 1. Stufe, der Distriktphase, zum ersten Mal ausgesiebt. Die dabei erzielten Punktzahlen entscheiden über die weitere Zulassung zu höheren Stufen: wer zwischen 8 und 9 Bewertungseinheiten erreicht hat, steigt in die Bukarestphase auf; bei Wertungsnoten über 9 und unter 10 winkt die Landesstufe. Wer Traumwerte über 10 erzielen konnte, auf den wartet als besondere Belohnung die Teilnahme an einem internationalen Wettbewerb. Doch überstehen in der Regel nur 3 oder 4 Ausnahmetalente das harte Auswahlverfahren auf Landesebene. Terpu hat als Schüler der 8. Klasse an der Mathematikolympiade in Rumänien teilgenommen und die erste Runde glatt genommen. In Phase II, dem Ausscheid in Bukarest, hat er das beste Ergebnis seiner Schule erkämpft (47ster bei 137 Bewerbern). Leider reichte seine dabei erzielte Punktzahl nicht zur Teilnahme an der zweithöchsten Stufe. Aus seiner Vorbereitungsphase für die diesjährige nationale Olympiade in Mathematik hat mir Terpu mehrere landestypische Beispiele aufgeschrieben. Viel Spaß wünsche ich beim Lösen der folgenden Aufgaben!

1) Bestimme für $n \in \mathbb{N}$ die Lösungsmenge der Ungleichung
$(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot(n+n) < 1000$
(Distrikphase, Bukarest, 1989, 8. Klasse).
2) Welche natürlichen Zahlen x, y und z (> 0) erfüllen die (diophantische) Gleichung

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{30}{13}\,?$$

(Landesphase, 1986, 8. Klasse)
3) Gesucht sind zwei Polynome T(x) und S(x) höchstens zweiten Grades, mit reellen Koeffizienten, die folgender Bedingung genügen:
$T^2(x) + S^2(x) + 13 \le 4\,T(x) + 6\,S(x)$.
4) OABCD sei eine regelmäßige, vierseitige Pyramide mit der Spitze O. Durch die Kante AB legt man eine Ebene E, welche die Kanten OC, OD in den entsprechenden Punkten M und N schneidet.

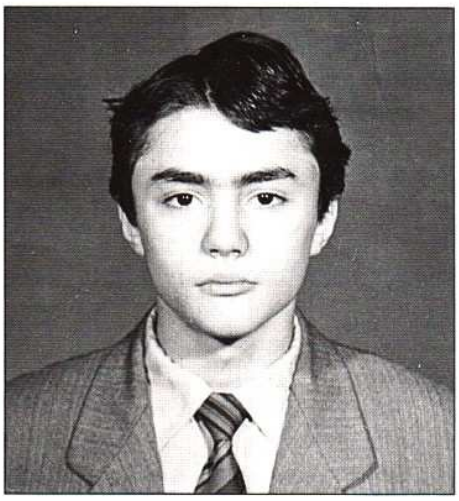


a) Zeige: das Viereck ABMN ist ein gleichschenkliges Trapez.
b) Es bezeichne A_1, A_2 und A_3 in dieser Reihenfolge, die Flächeninhalte der Dreiecke OBM, OMN und OAB. Weise die Gültigkeit der folgenden Beziehung nach:

$$A_1 = \sqrt{A_2 \cdot A_3}$$

(Landesphase, 1987, 8. Klasse)

Übrigens: Auch die Vorschläge M 1 und M 2 aus der ***ProblemEcke*** stammen von Terpu Vlad.
Ich freue mich schon auf Eure pfiffigen Lösungen!
StR Paul Jainta,
Schwabach



Terpu Vlad, Bukarest, macht in der neuen Reihe Probleme von L(o)esern für L(o)eser den Anfang mit Aufgaben aus rumänischen Mathe-Wettbewerben.

Was ist beim Bau einer Modellhängebrücke zu beachten? Teil I

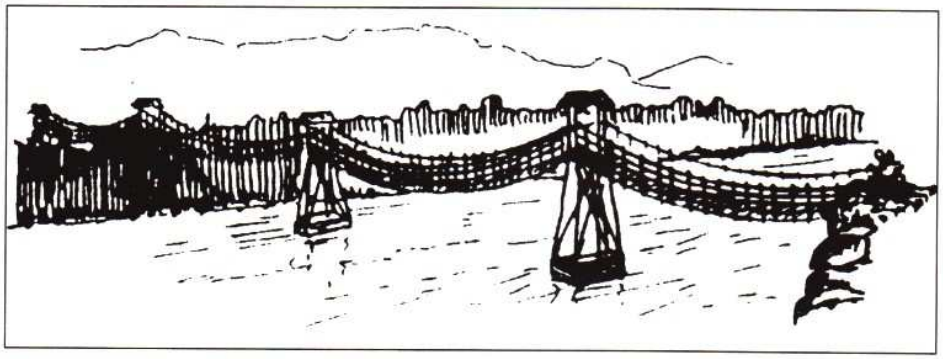


Abb. 1: Die „An-Lan"-Seilhängebrücke

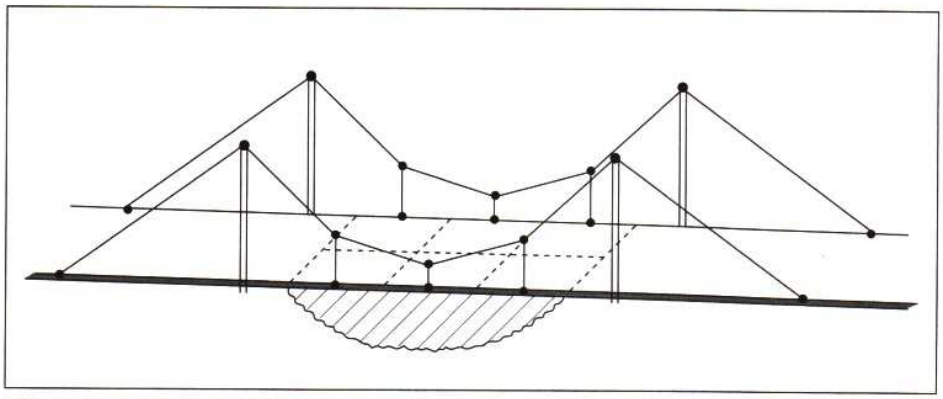


Abb. 2: Modellhängebrücke

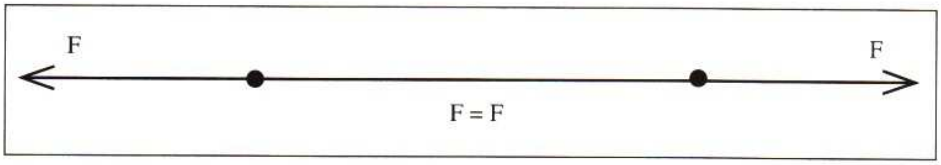


Abb. 3: Durch Kräfte gespanntes Seilstück

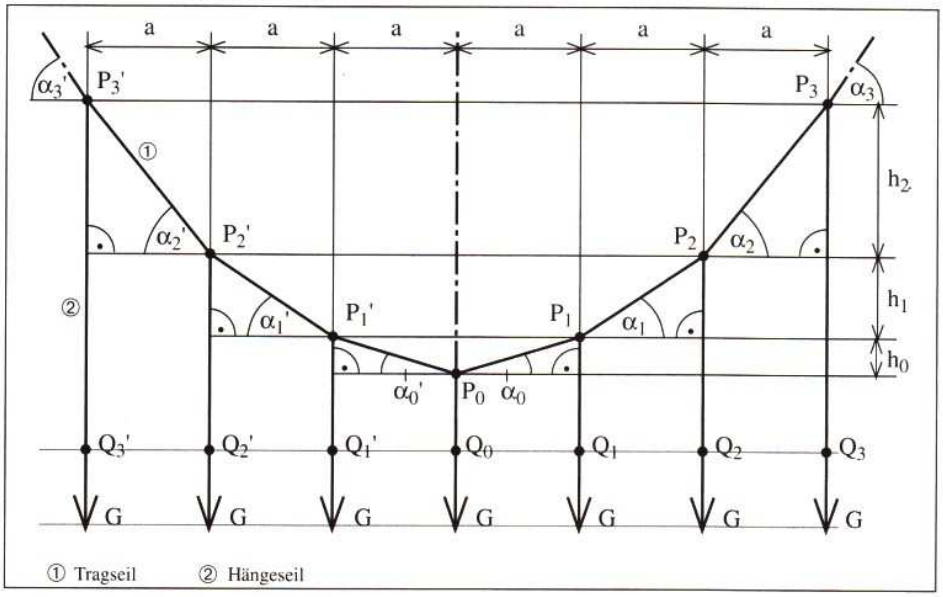


Abb. 4: Tragseil mit Hängeseilen

In alten Zeiten befestigten Gebirgsvölker aus Pflanzenfasern gefertigte Seile an sich gegenüberstehenden Felswänden und benutzten diese als Hängebrücken. Die älteste heute noch existierende Hängebrücke ist die in Kuanhsien (China) um 900 u. Z. erbaute „An-Lan", deren aus Hanf, Bambus und Holz bestehenden Teile immer wieder erneuert wurden und werden (**Abb. 1**). Während zum Bau der „An-Lan" und anderer Brücken kein Metall verwendet wurde, gab es im 6. Jahrhundert in China bereits Hängebrücken, bei denen die Tragseile durch handgeschmiedete Eisenketten ersetzt waren. Anfänglich waren bei den Hängebrücken wie z. B. der „An-Lan" die Hängeseile gleich lang. Dadurch bedingt war der Brückenbelag in gleicher Weise gebogen wie die Tragseile. Später wurde durch verschieden lange Hängeseile erreicht, daß der Brückenbelag ebenflächig war. In Deutschland wurde 1786 in Hanau die erste Hängebrücke mit Ketten gebaut. Auf Grund mangelnder Erfahrungen und Erkenntnisse stürzten auch einige Hängebrücken vor allem durch den Transport von Lasten (Fahrerschütterungen) und durch Windkräfte ein. So brach 1940 kurz nach ihrer Fertigstellung im USA-Bundesstaat Washington die „Tacoma Narrows Bridge", eine Hängebrücke mit 855 m Spannweite, zusammen: Vor ihrer Zerstörung hatte sich ihre Fahrbahn durch Windböen immer stärker wie eine Schlange hin und her gewunden.

Jetzt ist die Storbelt-Brücke (dän.: Storeboelt – Großer Belt), eine Hängebrücke mit einem freien Spann von 1624 m und einer Durchfahrthöhe von 65 m für Schiffe im Bau, mit der eine feste Verbindung der dänischen Hauptinseln Fünen und Seeland geschaffen wird. Die Storbelt-Brücke wird von einer internationalen Arbeitsgemeinschaft errichtet. Die deutsche Firma „Hochtief-AG Essen" führt die Betonarbeiten für die Gründungen und die 254 m hohen Pylone (Stützpfeiler) aus. Während für eine moderne Hängebrücke umfangreiche Berechnungen erforderlich sind, kommt es bei einer einfachen Modellhängebrücke vor allem und wohl auch nur darauf an, daß die Hänge- und Tragseile die richtigen Längen haben. (**Abb. 2**) Die hier betrachtete Modellhängebrücke mit 4 gleich hohen Pylonen und einer ungeraden Zahl von Hängeseilen auf jeder Seite besitzt zwei Symmetrieebenen. Die Abstände zwischen einem Pylon und dem benachbar-

Abb. 5: Die Akashi-Kaikyo-Brücke in Japan, hier eine Computersimulation, wird nach ihrer Fertigstellung 1998 die längste Hängebrücke der Erde sein.

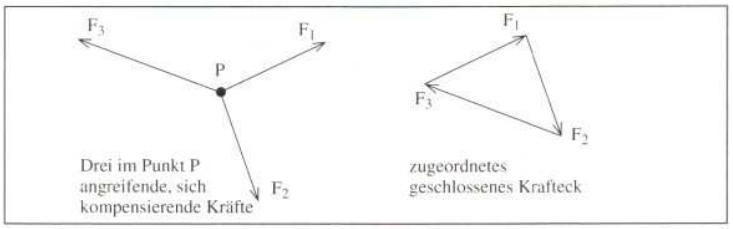


Abb. 6

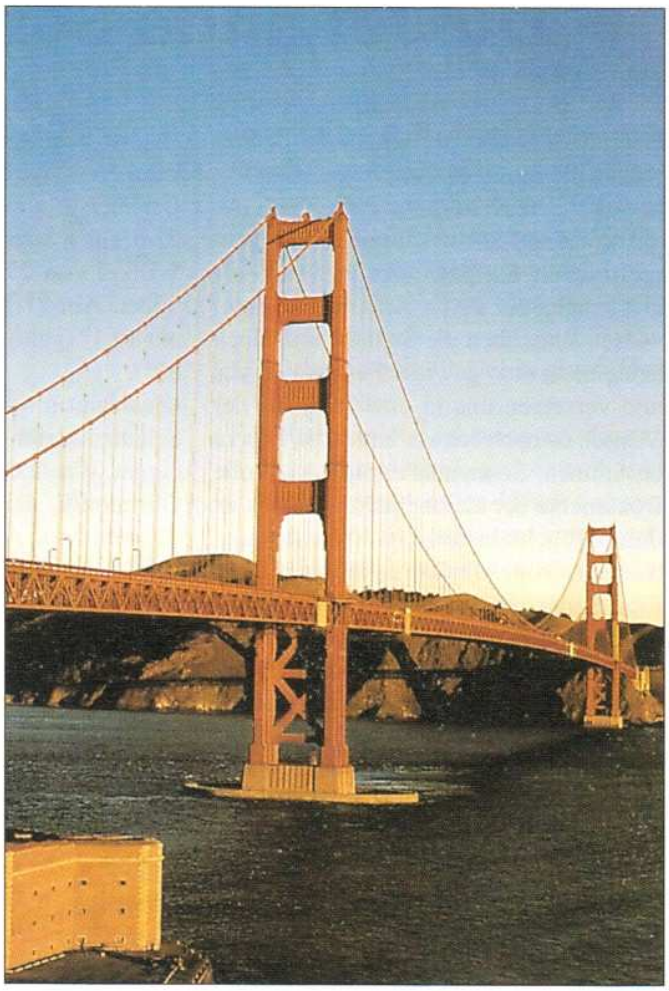


Abb. 7

ten Hängeseil sowie die Abstände zwischen zwei benachbarten Hängeseilen sind sämtlich gleich. Die als Trag- und Hängeseile verwandten Zwirns- oder dünnen Bindfäden können bei den folgenden Betrachtungen als masselos (ohne Eigengewicht), undehnbar (durch wirkende Kräfte und Temperaturschwankungen wird die Länge nicht verändert), biegeschlaff (ohne Kraftaufwand verbiegbar) und als durch die wirkenden Zugkräfte belastbar angenommen werden. In einer Gleichgewichtslage besteht ein durch wirkende Kräfte gespanntes derartiges Seil aus aneinander gereihten geradlinigen Seilstücken. Jedes dieser Seilstücke ist durch zwei an den Enden des Seilstückes angreifende, gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte, deren Wirkungslinie mit dem Seilstück zusammenfällt, gespannt. (**Abb. 3**) Die aus dünnen Holzstäben angefertigten Pylone werden als starre Körper (durch wirkende Kräfte nicht deformierbar) aufgefaßt.

Für die folgenden Betrachtungen denken wir uns die Brücke (Fahrbahn) so in kongruente und massegleiche Teile zerlegt, daß an jedem Hängeseil ein solches Teil mit der gleichen Gewichtskraft G hängt (In **Abb. 2** sind die erforderlichen Trennlinien gestrichelt).

In jedem unteren Ende Q_0, Q_1, Q'_1, Q_2, Q'_2, ... der Hängeseile greift je eine Gewichtskraft mit dem Betrag G an (**Abb. 4**). Jeder Seilknoten P_0, P_1, P'_1, P_2, P'_2, ... ist Angriffspunkt von drei Kräften, von denen jede zusammen mit ihrer Gegenkraft eines der drei in den Knoten einmündenden geradlinigen Seilstücke spannt. Da Gleichgewicht herrscht, muß die Summe der drei in einem Knoten angreifenden Kräfte 0 sein.

Diese drei Kräfte müssen also, wie sich durch Zusammensetzen von zwei dieser Kräfte mittels Kräfteparallelogramm ergibt, ein geschlossenes Krafteck bilden: Wird durch Parallelverschiebungen erreicht, daß die Spitze eines ersten Kraftpfeiles mit dem Schaft eines zweiten und die Spitze dieses zweiten mit dem Schaft des dritten zusammenfällt, so fällt auch die Spitze des dritten mit dem Schaft des ersten zusammen (**Abb. 6**).

Durch das Lösen der folgenden Aufgabe erwirbt der Leser die für den Bau einer einfachen Hängebrücke nötigen Kenntnisse.

Aufgabe: Für eine Hängebrücke mit 3 Hängeseilen auf jeder Seite (Abb. 2), bei der der Abstand der beiden Pylone auf jeder Brückenseite 4a = 16 cm beträgt und bei der der Winkel α_0 (Abb. 4) gleich 15° ist, sind die Kraftpfeile der in den Knoten P_0, P_1 und P'_1 angreifenden Kräfte zu konstruieren und ist die Seitenansicht der Modellhängebrücke maßstabsgerecht zu zeichnen! Wie groß ist der Winkel α_1 (Abb. 4)?

Anleitung: Die Kräftepfeile der Gewichtskräfte G können 2 cm lang gewählt werden. Dem Leser sei empfohlen, vor dem Lesen des Teiles II diese Aufgabe zu lösen. Im Teil II, im nächsten Heft, wird die Lösung dieser Aufgabe abgedruckt und es werden Berechnungen für eine Hängebrücke des betrachteten Typs vorgestellt.

Dr. W. Träger

Die lebende Sonnenuhr

Überall kann man sie sehen, die Schönwetter-Zeitanzeiger. An alten Gebäuden, in den Neubauvierteln, in Parks und Gärten sowie auf kunstvoll gestalteten geometrischen Körpern. Auch wenn wir nicht mehr auf deren Zeitanzeige angewiesen sind, üben die Sonnenuhren auch heute noch eine gewisse Faszination aus und versetzen uns in eine Zeit, als der Mensch es noch schwer hatte, die Zeit zu bestimmen. Sonnenuhren sind wertvolle Dokumente der Zeitmeßkunst, und es ist unsere Pflicht, historische sowie künstlerisch wertvolle Objekte zu erhalten.

Eine Sonnenuhr zu bauen ist eigentlich ganz einfach – man steckt einen Stab in die Erde und kennzeichnet die Uhrzeit mittels Steinchen oder sonstigem Materials, so wie man es auf Campingplätzen und am Strand immer wieder sehen kann. Einmal ganz ehrlich! Wir haben es alle schon irgendwann so gemacht. Eine Sonnenuhr ist dies aber nicht!

Zwar kann man für die Dauer des Urlaubes von 2-3 Wochen die Zeit einigermaßen ablesen, jedoch nicht länger.

Der Grund hierfür ist die wechselnde Höhe der Sonne im Laufe des Jahres. Der Schatten eines senkrechten Stabes fällt in den einzelnen Monaten in verschiedene Richtungen. Vielleicht habt Ihr schon einmal bemerkt, daß die Sonne den Balkon oder die Terrasse zu unterschiedlichen Zeiten im Sommer und Frühling/Herbst bescheint. Dieser Unterschied kann etwa eine Stunde betragen.

Beispiel: Ein senkrechter Stab wirft am 21.6. einen Schatten, der um 13 Uhr einen Winkel von 27,7° zur Nord-Süd-Linie bildet. Am 21.12. beträgt dieser Winkel nur 14,1° (gültig für die geogr. Breite von 52°).

Dies zeigt uns, daß sich ein senkrechter Schattenwerfer nicht für eine Sonnenuhr eignet. Wie überall, so gibt es auch in der Gnomonik, der Wissenschaft von den Sonnenuhren, Ausnahmen. Wird nämlich der Schattenwerfer nach einem bestimmten Schema versetzt, kann so die genaue Zeit abgelesen werden. Diese, seit dem 18. Jahrhundert bekannte Sonnenuhr wird als analemmatische Sonnenuhr bezeichnet, ist aber verhältnismäßig wenig bekannt.

Vor dem Raumflugplanetarium in Halle befindet sich eine derartige Sonnenuhr, jedoch wird man den senkrechten und verstellbaren Schattenwerfer vermissen. Man erkennt lediglich eine Monatseinteilung sowie die Stundenbezeichnungen. Das Überraschende an dieser Sonnenuhr ist, daß ein Jeder Schattenwerfer sein und Sonnenuhr „spielen" kann. Es ist daher nicht übertrieben, von einer lebenden Sonnenuhr zu sprechen.

Wir möchten die beiden Arten von Sonnenuhren vorstellen, die sich als lebende Sonnenuhren eignen:

1. Die analemmatische Bodensonnenuhr

Da der Schatten in verschiedene Richtungen fällt, kann es keine Stundenlinien, sondern nur Stundenpunkte geben. Diese Punkte findet man, indem man die Schattenwinkel (Schattenazimute) vom 21.6. und 21.12. aufträgt und die Richtungen bis zum Schnittpunkt verlängert. Der so ermittelte Schnittpunkt ist der betreffende Stundenpunkt.

Die Änderung der Winkel sind im Sommer um die Mittagszeit am größten. Die Stundenpunkte sind in einem Oval angeordnet, 12 Uhr befindet sich auf der Nord-Südlinie. Es handelt sich um den sogen. wahren Mittag (Sonnenhöchststand, Kulmination). Auf der Nord-Süd-Linie befindet sich die Einteilung entsprechend der Monate.

Die Größe der Sonnenuhr ist davon abhängig, wie weit man die Entfernung zwischen dem 21.6. und 21.12. wählt. Man muß immer davon ausgehen, daß der Schattenwurf möglichst den Stundenpunkt erreicht bzw. in dessen Nähe kommt. Die Sonnenuhr darf also nicht zu groß sein. Als Faustregel gilt: Die Entfernung 21.6....21.12. entspricht etwa der vom 21.6. bis zum Stundenpunkt 12.

Konstruktion der Sonnenuhr

Man zeichnet zuerst das Achsenkreuz Nord-Süd, Ost-West. Auf der Ost-West-Linie befinden sich die Markierungen für den 21.3. und 23.9. (Frühling- und

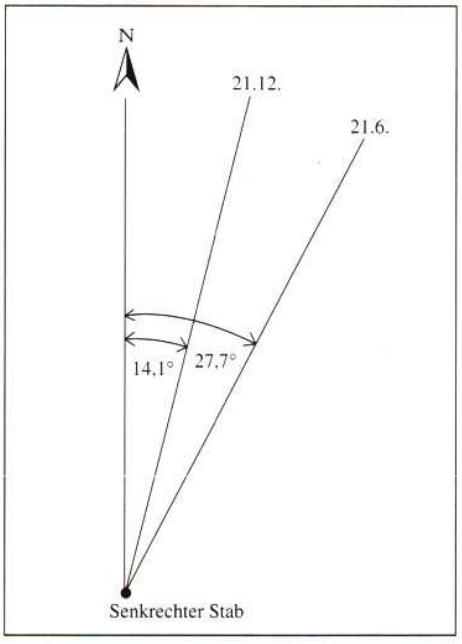


Abb. 1: Schattenwurf eines senkrechten Stabes um 13 Uhr im Sommer und Winter

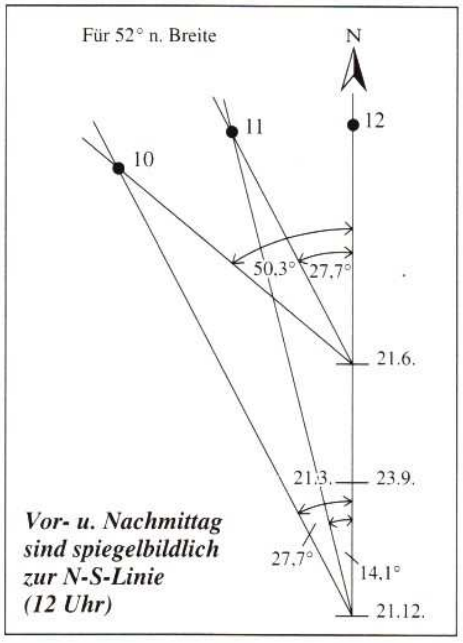


Abb. 2: Schema zur Konstruktion der Stundenpunkte (in Auswahl)

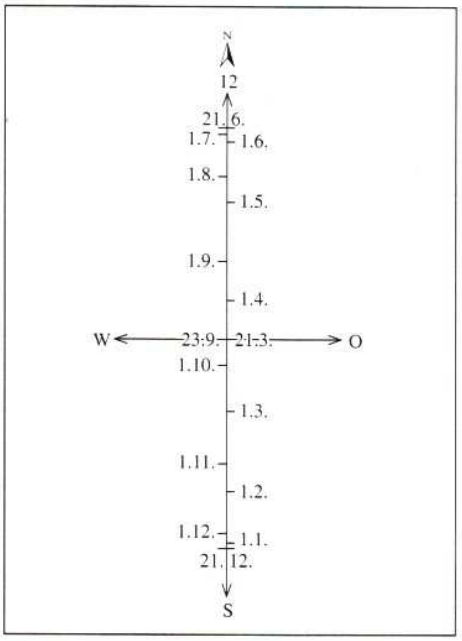


Abb. 3: Einteilung der Datumslinie zur maßstäblichen Übernahme

Herbstbeginn). Davon sind gleich weit entfernt die Markierungen für den 21.6. und 21.12. (Sommer- und Winterbeginn). Die Felder für die einzelnen Monate sind unterschiedlich groß: Das Schema für diese Datumseinteilung ist der Skizze zu entnehmen, die maßstäblich übertragen werden kann. Die Punkte für die Stunden werden nach dem beschriebenen Verfahren und mit Hilfe der Schattenwinkel ermittelt.

Ablesung der Zeit

Das Verfahren ist denkbar einfach. Man stellt sich auf den betr. Monat und verfolgt den Schattenwurf, in welche Richtung dieser fällt. Bei hohem Sonnenstand ist der Schatten kurz; durch Emporheben eines Armes wird der Schatten verlängert. Auf diese Weise kann Jeder selbst Sonnenuhr spielen und Schattenwerfer sein.

Daneben gibt es noch eine andere Möglichkeit, die kaum bekannt ist und selbst in den Büchern über Sonnenuhren nicht erwähnt wird.

2. Die horizontale Polstab-Sonnenuhr

Es handelt sich um eine ganz normale Horizontal-Sonnenuhr mit einem zum Himmelspol gerichteten und fest stehenden Stab. Die Linien für die Stunden haben von der Nord-Süd-Linie (12 Uhr wahre Ortszeit) die in **Tab. 2** aufgeführten Winkel.

Da sich die Winkel nur geringfügig unterscheiden, kann interpoliert werden.

Die Stundenlinien sind ihren Winkeln entsprechend auf dem Boden zu kennzeichnen.

Der um den Betrag der geographischen Breite geneigte Schattenwerfer (Polstab) wird hier nicht benötigt, auch hier dient der eigene Körper als senkrechter Schattenwerfer. Diese lebende Sonnenuhr unterscheidet sich aber dadurch, daß man sich beim Aufstellen nicht nach dem Datum zu richten hat, sondern nach der Körpergröße – die ja jeder kennt.

Angenommen, der Schattenwerfer wäre vorhanden, dann könnte man sich darunter stellen, so daß der Schatten des Kopfes (oberer Teil) mit den Schatten des Polstabes zusammen auf die betreffende Stundenlinie fällt. Der Schatten des Kopfes wandert somit immer entlang der jeweiligen Stundenlinie. Wie schon erwähnt, man kann also auf den Schattenwerfer verzichten. Es ist lediglich darauf zu achten, auf welche Stundenlinie der Schatten des Kopfes fällt.

Berechnung der Skala für die Körpergröße

Hierfür wird b (Entfernung vom Fußpunkt F) nach der Formel

$$b = \frac{a}{\tan \varphi}$$

a: Körpergröße

φ: geogr. Breite

berechnet.

Wer sich die Berechnung ersparen möchte, kann die Übersicht der **Tab. 3** verwenden.

Die Ferse muß auf der jeweiligen Marke der Körpergröße stehen. Da der Schatten des Kopfes ausschlaggebend ist, entfällt hier das Emporheben des Armes.

Wie genau ist die lebende Sonnenuhr?

Jede Sonnenuhr zeigt die wahre Ortszeit, die Sonnenzeit, an. Unsere Mitteleuropäische Zeit (MEZ) stimmt mit dieser nicht überein – ausgenommen in Görlitz, auf dem 15. Längengrad. In allen anderen Orten Deutschlands geht sie, da diese westlich von Görlitz liegen vor.

Mit anderen Worten: Die wahre Ortszeit ist später als die MEZ, der Unterschied richtet sich nach der Längendifferenz zwischen Görlitz und dem betreffenden Ort. Pro Längengrad gilt ein Zeitunterschied von 4 Minuten, d. h. für Potsdam 8 Minuten für Erfurt 16 Minuten und für Aachen 36 Minuten. Besonders in den westlichen Gebieten ist dies zu beachten. Während der Sommerzeit (MESZ) ist selbstverständlich die zur MEZ hinzugefügte Stunde zu berücksichtigen. Das bedeutet, daß zu dem Ortszeitunterschied entsprechend der Längendifferenz noch eine Stunde hinzukommt.

Dieser Beitrag soll auch eine Anregung sein, solche lebenden Sonnenuhren daheim, bei Schulen und Planetarien zu errichten. Schon die alten Römer sagten: UMBRA DOCET, der Schatten erteilt Lehren.

Arnold Zenkert, Potsdam

	Uhrzeit (wahre Ortszeit)	Geographische Breite 48°	50°	52°	54°
Für den 21.6.	12	0°	0°	0°	0°
	11/13	27,6	29,4	27,8	26,3
	10/14	50,3	52,5	50,3	48,4
	9/15	67,7	69,7	67,7	65,9
	8/16	81,7	83,2	81,7	80,3
	7/17	93,7	94,8	93,8	92,8
	6/18	105,0	105,7	104,9	104,3
	5/19	116,0	116,3	116,1	115,7
	4/20	127,6	127,5	127,4	127,3
	Uhrzeit (wahre Ortszeit)	**Geographische Breite 48°**	**50°**	**52°**	**54°**
Für den 21.12.	12	0°	0°	0°	0°
	11/13	14,4	14,3	14,1	14,0
	10/14	28,2	28,0	27,8	27,6
	9/15	40,9	40,8	40,6	40,5
	8/16 *	52,6	52,7	52,7	52,6
	7/17 *	63,5	63,7	64,1	64,3
	6/18 *	73,8	74,4	75,1	75,6
	5/19 *	84,2	85,2	86,3	87,2
	4/20 *	95,4	96,9	98,4	99,4

* Im Winter kein Sonnenschein, die Angaben gelten nur für die Ermittlung der Stundenpunkte.

Tab. 1

Uhrzeit	Geogr. Breite 51°	54°
12	0°	0°
11/13	11,8	12,2
10/14	24,2	25,0
9/15	37,9	39,0
8/16	53,4	54,5
7/17	71,0	71,7
6/18	90,0	90,0
5/19	109,0	108,3
4/20	126,6	125,5

Tab. 2

Körpergröße in cm	b (Entfernung von F) in cm 50°	52°	54°
		geogr. Breite	
190	159	148	138
180	151	140	131
170	143	133	124
160	134	125	116
150	126	117	109
140	117	109	102
130	109	102	94
120	101	94	87
110	92	86	80
100	84	78	73
90	76	70	65
80	67	62	58
70	59	55	51

Tab. 3

Marktecke

The Incredible Machine

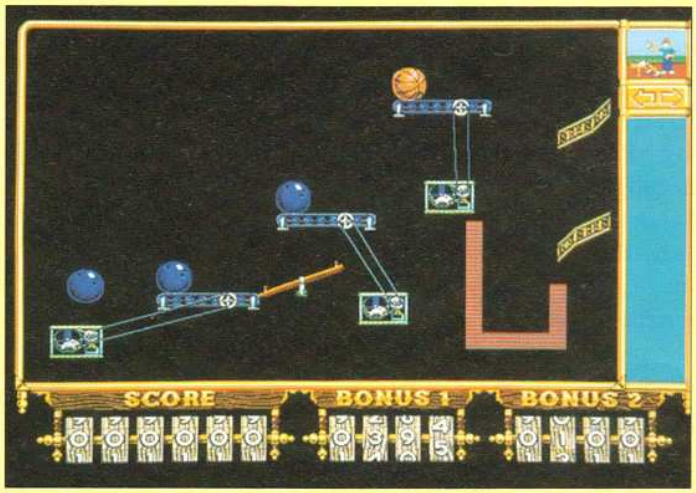
TIM, The Incredible Machine, macht jeder Erfindermesse Ehre, denn es gilt, 87 bisher unbekannte Maschinen zu erfinden. Damit stehen wir vor einer neuen Kategorie von Denk- und Tüftelspielen. Es geht ziemlich betulich zu. Jeder der 87 Level hat ein eigenes Ziel. Die Aufgabe besteht darin, Bauelemente so miteinander zu verbinden, daß man das vorgegebenen Ziel erreicht. Einfach, nicht!

Aber ganz so einfach ist es nicht. Zum Glück stellen die ersten 20 Level alle Maschinenteile vor, die man benutzen kann – oder muß. Grundlage sind Laufbänder, Trampolins und Bälle unterschiedlicher Größen, später kommen noch Generatoren hinzu, ferner Scheren, Fächer, Lupen oder Dynamit. Die Krönung sind radelnde Affen. Und alle Dinge können frei im Raum plaziert werden.

Schleudert man einen Ball gegen eine Wand oder fällt der auf ein Trampolin, springt er in einem bestimmten Winkel ab. Ein schwerer Basketball schleudert um so höher, je mehr Sprunghilfen man ihm gibt.

Das hört sich ziemlich einfach und vielleicht auch noch interessant an: Ein Spiel, bei dem es um Bewegung geht, platzende Ballons, radelnde Affen, das hat sicherlich eine Menge mit Spaß zu tun. Und bereits nach wenigen Leveln steht eines fest. Sobald man sich mit TIM, der Incredible Machine eingelassen hat, sitzt man vor dem Bildschirm und ist gefesselt.

Da hat man nun hochauflösliche VGA-Grafiken (640x480) sehr sauber gezeichnet und teilweise animiert, der Sound wartet mit 10 unterschiedlichen Musikstücken auf. Das muß doch ein perfektes Spiel sein! Zumal sogar bei den gesamten Planungen auf einen drängelnden Zeitfaktor verzichtet wurde, denn welcher Erfinder arbeitet schon unter Zeitdruck?



TIM, The incredible Machine, wird nicht jeden ansprechen. Es ist ein Spiel der Kategorie Denken & Tüfteln. Wenn sich die gebastelte Maschine nicht bewegt, bewegt sich auf dem ganzen Bildschirm absolut nichts. Da wird nicht geschossen, eingefangen oder gejagt. Bei TIM spielt sich die Action nicht auf dem Bildschirm ab, sondern nur in den Köpfen derer, die sich an TIM heranwagen. Man braucht mindestens einen 386er. Da man nur 87 Rätsel angeboten hat, hat man einen „Freiform-Level" mitgeliefert, in dem man eigene Maschinen basteln kann. Mit der bereits angekündigten Data-Disk werden weitere Bastelarbeiten und Musikstücke geboten.

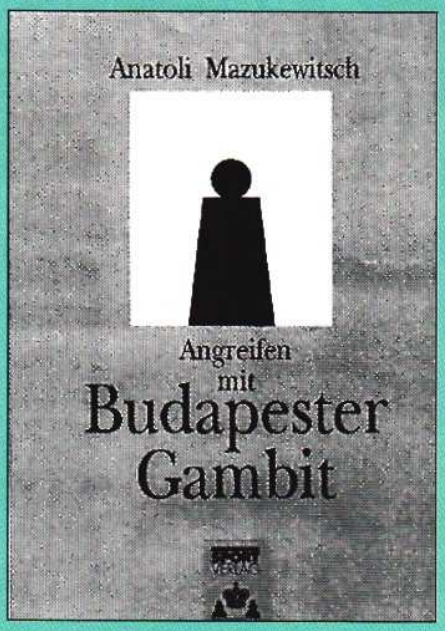
Damit wird The Incredible Machine wohl nie einen Spitzenplatz in der Verkaufshitliste einnehmen, denn es spricht nur einen bestimmten Kreis von Menschen an – und jene, die sich lieber der größeren Action zuwenden, haben selber schuld, wenn sie TIM nicht kennenlernen. Wer sich einen schnellen Rechner leisten kann, sollte sich TIM nicht verschließen und schon einmal anfangen zu sparen, denn mit 139 DM hat man einen recht hohen Preis gefunden.

The Incredible Machine, Sierra-on-Line / Jeff Tunnell 1993, Muster von: Bomico, Südpark 12, 6092 Kelsterbach, Denk & Tüftelspiel, Hardware: 386+, 640 KB RAM, VGA, HD, Maus, Soundkarte

H. Seitz

Geistreiche Eröffnung für Schwarz

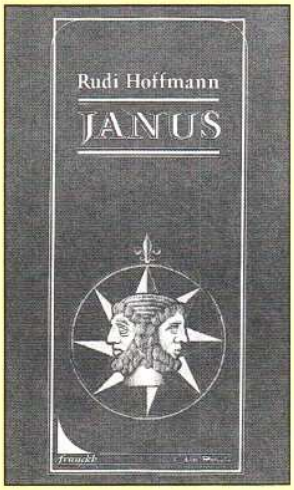
Das Budapester Gambit ist vor allem für kombinations- und risikofreudige Schachspieler ein echter Geheimtip. Wie sich die ideenreiche Eröffnung für Schwarz in der Praxis erfolgreich anwenden läßt, zeigt der Autor anhand von 60 aktuellen Meisterpartien.
Sachbücher über Gambitspiele stehen derzeit hoch im Kurs. Und das aus gutem Grund: „Gambitideen sind fruchtbare Voraussetzungen zur Erschließung neuer Möglichkeiten", schrieb einst Weltmeister Emanuel Lasker, „die Waffe des Gambits ist jederzeit stark genug, um sie auch gegen theoretisch bestens beschlagene Gegner in den Kampf zu führen!"
Angreifen mit Budapester Gambit ist der dritte Band in der Gambit-Reihe des Sportverlags, der bei den Schachfans große Resonanz findet. Diese geistreiche Eröffnung mit Schwarz, die von dem ungarischen Meister-Trio Abonyi, Barász und Breyer erstmals im Jahre 1917 präsentiert wurde, wird seitdem vor allem von kombinations- und risikofreudigen Schachspielern erfolgreich angewendet. Sogar Super-Großmeister wie Englands große WM-Hoffnung Nigel Short oder der Russe Wladimir Epischin haben das Budapester Gambit in ihrem Standard-Repertoire.
Wie auch bei den Titeln Angreifen mit Evans-Gambit und Angreifen mit Wolga-Gambit (beide 1991 erschienen), ist der theoretische Teil über diese mit zahlreichen Fallen gespickte ideenreiche Eröffnung durch 50 aktuelle Meisterpartien ergänzt. Ein Muß für jeden Gambit-Fan!



Anatoli Mazukewitsch:
Angreifen mit Budapester Gambit
Ca. 160 Seiten, ca. 120 Diagramme,
11,8 x 18,8 cm, gebunden
DM 24,80
ISBN 3-328-00587-0
Sportverlag 1993

Oldies: – Janus

Brettspiele für Denker? Neben allen Neuheiten darf man **Janus** nicht vergessen. Es stammt aus dem Ideenschatz von Rudi Hoffmann. Bevor er 1989 mit dem taktischen Legespiel **Cafe International** das Spiel des Jahres schuf, landete er 1988 bei Franckh/Kosmos mit Janus ein Topspiel. Aber auch 1988 war **Janus** nicht neu, denn **Janus** erschien früher bei Apex-Spear. Von der Spear-Ausgabe unterscheidet sich die Franckh-Ausgabe vor allem durch das schönere Spielmaterial und dem damit verbundenem höherem Preis.



Janus ist etwas für Tüftler und Denker – für den schnellen Spielespaß ist es nicht geeignet. Vor Spielbeginn werden 100 Richtungsplättchen auf dem rollbaren Skaiplan ausgelegt. Jedes Plättchen gibt an wieviele Schritte man in welche Richtung zu gehen hat. Im Spiel wird jedes „besetzte" Plättchen vom Feld genommen, nur die Janus-Kopf-Plättchen verbleiben im Besitz des entsprechenden Spielers. Jeder Kopf kommt in vier Farben zweimal vor. Sooft die eigene Spielfigur im Spiel ein Plättchen in der Farbe eines bereits gesammelten Januskopfes betritt, muß sofort nocheinmal gezogen werden. Janusköpfe zu erobern ist eine wichtige Aufgabe in diesem Spiel, aber die alles entscheidende ist es nicht. Es gilt abzuwägen, ob und welche Köpfe man erobern möchte. Zuviele dieser Bonuszüge zwingen einen sonst im Spielverlauf in Spielplanregionen, die man nicht wünscht.
Die 100 Spielplanfelder sind zu Vierer-Quadraten zusammengefaßt. Wer das letzte Plättchen eines Quadrates entfernen kann, gewinnt dieses Quadrat und besetzt es mit einem seiner eigenen Holzchips. Der Gewinn ist mit jeweils ein bis fünf Punkten verbunden. Zentrale Felder sind neben dem Mittelfeld die vier Eckfelder. Zieht im Spielverlauf ein Mitspieler auf ein besetztes Quadrat, muß er dem Besitzer einen seiner Chips abgeben. So kann man die Zahl seiner 15 Holzchips sehr rasch verringern.
Das Spiel ist beendet, sobald ein Spieler seine 15 Chips losgeworden ist. Spielsieger ist, wer in der Addition der belegten Quadratpunkte und der erhaltenen Chips die meisten Punkte errechnet. Da die Spielfelder nicht gleichwertig sind, ist vorausschauende Planung sehr wertvoll. Vorteile hat, wer unterschiedliche Janusköpfe ergattern kann – aber nicht zu viele. Janus ist ein faszinierendes Spiel. Uns ist es seit seinem Erscheinen 1988 bei Franckh nicht langweilig geworden, denn mit jeder Partie wird durch die Neuverteilung der kleinen Kärtchen ein neuer Spielplan gelegt. Janus ist ein Muß für alle, die raffinierte Taktikspiele mögen, die sich an einer hervorragenden Ausstattung erfreuen, die mehr als 30 Minuten Spaß am Spiel haben. Janus ist wegen seiner mathematischen Überlegungen auch in der Schule einzusetzen.

Janus, 1988 Franckh, von Rudi Hoffmann, (1975 Spear), taktisches Legespiel für 2-4 Personen ab 10, Spieldauer ca. 20 Minuten (2 Personen), erhältlich als Restposten im Spielwarenfachhandel oder auf Floh- und Sammlermärkten ***–se***

Lösungen

Lösungen **Der Irrgarten von Kleinwelka**

1. Alfons: 19 $\overset{3}{-}$ 18 $\overset{28}{-}$ 23 $\overset{3}{-}$ 29 $\overset{6}{-}$ 34 $\overset{8}{-}$ 32 $\overset{10}{-}$ 22 $\overset{20}{-}$ 20 $\overset{9}{-}$ 17 $\overset{9}{-}$ 12 $\overset{10}{-}$ 11 $\overset{14}{-}$ 10 | 4

Weglänge: 224 · a = 448 m

16 $\overset{23}{-}$ 13 $\overset{31}{-}$ 4 $\overset{17}{-}$ 9 $\overset{9}{-}$ 8 $\overset{7}{-}$ 2 $\overset{4}{-}$ 5 $\overset{6}{-}$ 7 $\overset{3}{-}$ 6

2. Bettina: 19 $\overset{3}{-}$ 18 $\overset{10}{-}$ 26 $\overset{11}{-}$ 33 $\overset{10}{-}$ 30 $\overset{19}{-}$ 25 $\overset{1}{-}$ 24 $\overset{5}{-}$ 23 $\overset{3}{-}$ 29 $\overset{15}{-}$ 35 $\overset{50}{-}$ 31 $\overset{45}{-}$ 27 $\overset{30}{-}$ 20 | 9

16 $\overset{23}{-}$ 13 $\overset{17}{-}$ 4 $\overset{17}{-}$ 9 $\overset{43}{-}$ 3 $\overset{9}{-}$ 2 $\overset{4}{-}$ 5 $\overset{5}{-}$ 1 $\overset{8}{-}$ 6 $\overset{4}{-}$ 10 $\overset{9}{-}$ 14 $\overset{1}{-}$ 15 $\overset{1}{-}$ 17

Weglänge: 352 · a = 704 m

3. Christof: 19 $\overset{3}{-}$ 18 $\overset{10}{\diagdown}$ 26 $\overset{2}{-}$ 25 $\overset{1}{\diagup}$ 24 $\overset{5}{-}$ 23 $\overset{3}{-}$ 29 $\overset{6}{-}$ 34 $\overset{8}{-}$ 32 $\overset{10}{-}$ 22 $\overset{20}{-}$ 20 | 9

(13)

16 $\overset{23}{-}$ 13 $\overset{17}{-}$ 4 $\overset{17}{-}$ 9 $\overset{9}{-}$ 8 $\overset{7}{-}$ 2 $\overset{4}{-}$ 5 $\overset{6}{-}$ 7 $\overset{3}{-}$ 6 $\overset{4}{-}$ 10 $\overset{9}{-}$ 14 $\overset{1}{-}$ 15 $\overset{1}{-}$ 17

Weglänge: 178 · a = 356 m

4. Daniella: 19 $\overset{3}{-}$ 18 $\overset{10}{-}$ 26 $\overset{11}{-}$ 33 $\overset{10}{-}$ 30 $\overset{19}{-}$ 25 $\overset{1}{-}$ 24 $\overset{5}{-}$ 23 $\overset{3}{-}$ 29 $\overset{15}{-}$ 35 $\overset{50}{-}$ 31 $\overset{45}{-}$ 27 | 1

5 $\overset{6}{-}$ 7 $\overset{15}{-}$ 1 $\overset{8}{-}$ 6 $\overset{4}{-}$ 10 $\overset{14}{-}$ 11 $\overset{19}{-}$ 14 $\overset{1}{-}$ 15 $\overset{16}{-}$ 12 $\overset{9}{-}$ 17 $\overset{9}{-}$ 20 $\overset{20}{-}$ 22 $\overset{1}{-}$ 21 $\overset{12}{-}$ 28

4 |

2 $\overset{7}{-}$ 8 $\overset{26}{-}$ 3 $\overset{43}{-}$ 9 $\overset{17}{-}$ 4 $\overset{31}{-}$ 13 $\overset{23}{-}$ 16

Weglänge: 458 · a = 916 m

5. Erich: 33 $\overset{10}{\frown}$ 30 $\underset{6}{\frown}$

Weglänge: 25 · 16 · a = 800 m

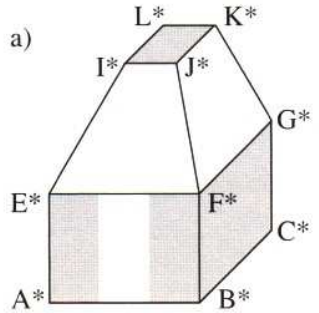
Bemerkungen: Nicht in jedem Labyrinth gelangt man beim Laufen nach der „Rechte-Hand-Regel" vom Eingang oder von einem Eingang zum Ziel. Doch stets findet man beim Laufen nach dieser Regel von einem Eingang wieder zu einem Ausgang (Eingang), man kann sich also so nicht hoffnungslos im Labyrinth verirren. Beim Kleinwelkaer Irrgarten läuft man nach dieser Regel zunächst wie Alfons vom Eingang zum Ziel und dann weiter in umgekehrter Richtung den Weg von Bettina ab.

Im Kleinwelkaer Labyrinth enthalten alle Wege vom Eingang zum Ziel die Kanten 19 – 18, 23 – 29, 20 – 17, 10 – 6, 5 – 2, 9 – 4 und 13 – 16. Durch Löschen einer dieser Kanten entsteht jeweils aus dem zusammenhängenden Multigraphen des Welkaer Labyrinthes ein nicht zusammenhängender Teilmultigraph. Kanten mit dieser Eigenschaft nennt man Brücken.

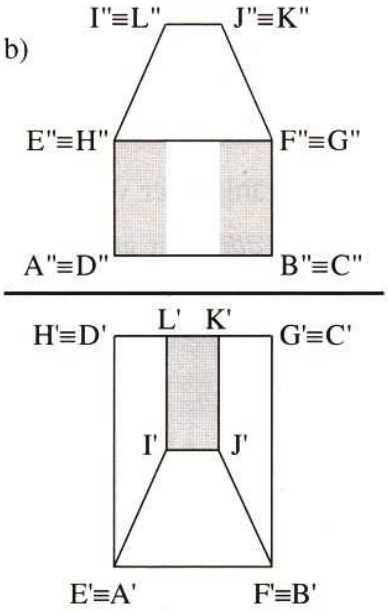
Als Kreise eines Graphen oder Multigraphen bezeichnet man die Teilgraphen, die nur Knoten mit genau zwei einmündenden Kanten (Knoten der Ordnung 2) besitzen. Erich läuft also 25 mal den gleichen Kreis im Welkaer Labyrinth ab. Die Brücken eines Graphen oder Multigraphen gehören nie einem Kreis an. Jeder Multigraph enthält mindestens einen Kreis. In einem Graphen, der keine Kreise enthält, sind alle Kanten Brücken. Ein derartiger Graph wird Baum genannt.

Bau-Fachmesse Leipzig `92

a)



b)



Bemerkung: Diese Hülle ist ein konvexes Polyeder, dessen 12 Ecken mit je einer der 22 Ecken des nichtkonvexen Ausgangspolyeders zusammenfallen.

Schwaches Wirtschaftswachstum

x – Bruttoinlandsprodukt 1991 der alten Bundesländer

y – Bruttoinlandsprodukt 1991 der neuen Bundesländer

Aus $x \cdot 1{,}015 + y \cdot 1{,}061 = (x + y) \cdot 1{,}019$ folgt

$x \cdot 0{,}004 = y \cdot 0{,}042$ und $x:y = 42:4 = 10{,}5 \approx 10$.

Diese graphische Darstellung war mit der folgenden Unterschrift am 14.1.93 in „Döbelns Anzeiger" abgedruckt.

Schwaches Wachstum: Die gesamtdeutsche Wirtschaft ist 1992 nur noch schwach gewachsen. Gemessen am Bruttoinlandsprodukt (BIP) nahm die Wirtschaftsleistung lediglich um 1,9 Prozent zu. Es ist das erste Mal, daß das Statistische Bundesamt gesamtdeutsche Zahlen vorlegt. Es gibt keine Vergleichswerte. Das BIP erfaßt die Produktion aller Waren sowie Dienstleistungen im Inland.

Mathematisch-Naturwissenschaftliches Mosaik von Dr. R. Mildner

Waagerecht:
1. 756,
3. 75,
4. IMU,
6. 87,
8. 585,
11. 30,
12. 31 (2^5-1),
15. 94,
17. 07,
18. 18,
19. tan (Tangens),
21. Lie,
23. 53,
25. 17,
26. Konstante
29. 22,
31. 10,
32. hm (Hektometer),
33. Mg (Magnesium),
34. ha (Hektar),
35. IG,
37. 15,
39. ROM,
41. rem (roentgen-equivalent-man),
43. Reh,
45. TRI (Trichloräthen),
47. Wellengleichung,
50. no,
51. Pt (Platin),
52. Tl (Thallium),
53. NN (Normalnull),
55. OH,
56. mm (Millimeter),
57. IR,
58. Es (Einsteinium),
59. rd (radiation absorbed dose),
60. Rh (Rhodium),
61. Co (Kobalt),
62. Na (Natrium),
64. Sm (Samarium),
66. Rn (Radon),
68. Wurzelkriterium,
74. spe,
75. Weg,
76. Erz,
77. Ast,
79. πr^2,
81. hl (Hektoliter),
83. Pb (Blei),
85. Er (Erbium),
87. As (Arsen),
88. H_2O,
89. ma,
91. Eberesche,
94. SO_2,
96. tv,
98. SnO,
99. TKO,
100. CO_3,
102. IR,
104. mg,
107. NO_2,
108. NH_3,
109. tI^2R,
110. hA,
111. div (Divergenz),
112. PbO,
113. NH_4Cl.

Senkrecht:
1. 739,
2. 50.
3. 71,
5. MV (Megavolt),
7. 79,
9. 80,
10. 576,
12. 38,
13. Tangentialebene,
14. Einheitsstrecke,
16. 45,
18. 17,
19. Tom (Tomus),
20. ns (Nanosekunde),
21. La (Lanthan),
22. Eta,
24. 32,
25. 10,
26. km (Kilometer),
27. Te (Technetium),
28. Ei,
30. 21,
31. 11,
32. holomorph,
36. Grundriss,
38. 50,
39. Ren,
40. ml (Milliliter),
41. rep (roentgen-equivalent-physical),
42. mg (Milligramm),
43. Re (Rhenium),
44. HCl,
45. Th (Thorium),
46. Inn,
48. Li (Lithium),
49. log (Logarithmus),
54. Uhr,
61. CuS,
62. new,
63. Zr (Zirkonium),
65. MEZ,
67. Nut,
69. z. E.,
70. kg (Kilogramm),
71. i. e. (id est),
72. Ra (Radium),
73. 2π,
78. CO,
80. r^2m,
82. LE,
83. PbS,
84. Fe (Eisen),
86. Rho,
87. AE (Astronomische Einheit),
88. H_2O_2,
90. at,
92. RO,
93. St (Stokes),
94. SO_3,
95. UIt,
97. vm,
100. CO_2,
101. C_2H_3Cl,
103. RI^2,
105. gh,
106. Pi,
107. NO,
108. NH_4.

Lösungsworte:
Leonhard Euler: 15.4.1707 bis 18.9.1783

H 11328 F

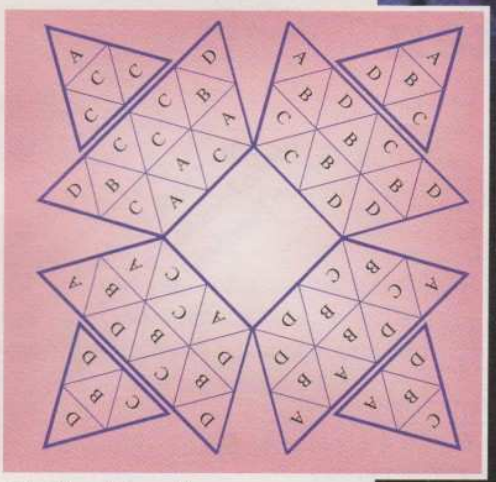
Heft 4
August 1993
27. Jahrgang

Pädagogische
Zeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

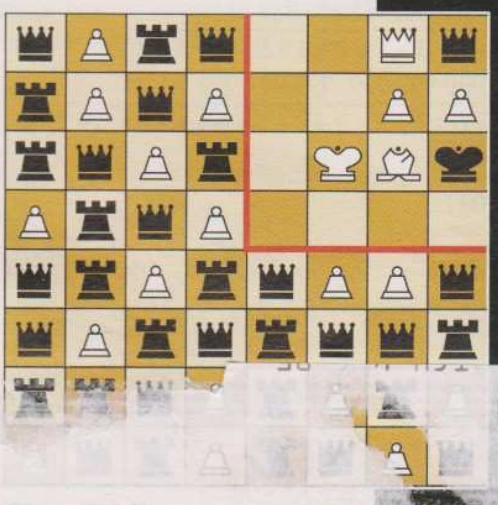
Alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Geometrisches am Polizei-Stern



Mathe-Puzzle



Toutatis on Tour

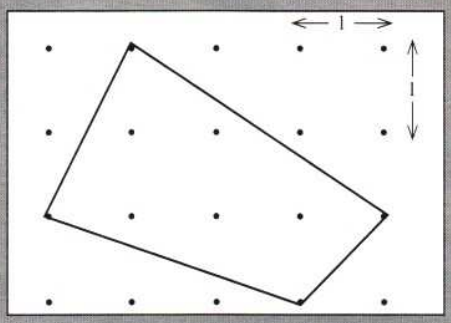
Problemecke

Die erst im letzten Heft neueingeführte Problem Ecke darf natürlich nicht fehlen. Wieder habe ich sechs Aufgaben aus aller Welt zusammengetragen.

J 3. Die Folge „22" ist *selbstbeschreibend,* da sie genau zwei Ziffern 2 aufweist. Ebenso ist „31 12 33 15" selbstbeschreibend, denn in der Ziffernfolge stehen drei Einsen, eine 2, dreimal die 3 und einmal die Ziffer 5. Welche der nachfolgenden Zahlenreihen sind *nicht* selbstbeschreibend?
a) 21 32 23 16
b) 31 12 33 18
c) 31 22 33 17 19
d) 21 32 33 24 15 und
e) 41 32 23 24 15 16 18.

J 4. In einem Brett befinden sich waagerecht nebeneinander und senkrecht untereinander Nägel, jeweils im gleichen Abstand 1.

In der nebenstehenden Figur ist ein Gummiband um vier Nägel gezeichnet, das ein Viereck bildet.



Bestimme seinen Flächeninhalt.

M 3. Konstruiere mit Zirkel und Lineal ein Sehnenviereck ABCD, von dem bekannt ist: $\overline{AB} = \overline{BC} = 10$, $\overline{CD} = 11$ und $\overline{DA} = 12$
Beschreibe die Konstruktion und weise nach, daß sie tatsächlich der Aufgabenstellung genügt.

M 4. Man löse folgendes Gleichungssystem:
$(x+y)\,(x+y+z) = 66$ (1)
$(y+z)\,(x+y+z) = 99$ (2)
$(x+z)\,(x+y+z) = 77$ (3)

O 3. Zwei Zahlen a und b haben den größten gemeinsamen Teiler 84 und das kleinste gemeinsame Vielfache 21 168. Bestimme die Werte a+b und |a-b|.

O 4. Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit Winkel 60° an der Spitze. Man zeige: Die Winkelhalbierende eines der beiden Winkel, welche die Höhen h_a und h_b miteinander einschließen, geht durch den Umkreismittelpunkt des Dreiecks.
Ich bin schon neugierig auf eure Lösungen zur ProblemEcke. Wenn ihr Aufgaben von anderen Wettbewerben habt, schickt sie mir zur Veröffentlichung!
Paul Jainta, Schwabach

Zahlenkuriositäten

$9 \cdot 9 = 81$
$99 \cdot 99 = 9801$
$999 \cdot 999 = 998001$
$9999 \cdot 9999 = 99980001$
$99999 \cdot 99999 = 9999800001$
$999999 \cdot 999999 = 99999800000001$
$9999999 \cdot 9999999 = 999999800000001$
etc.

Wir würden uns freuen, wenn Ihr uns weitere Beispiele für "Zahlenkuriositäten" senden könntet. Vielleicht entsteht so eine kleine Serie.

$$121 = \frac{22 \cdot 22}{1+2+1}$$

$$12,321 = \frac{333 \cdot 333}{1+2+3+2+1}$$

$$1\,234\,321 = \frac{4\,444 \cdot 4\,444}{1+2+3+4+3+2+1}$$

$$123\,454\,321 = \frac{55\,555 \cdot 55\,555}{1+2+3+4+5+4+3+2+1}$$

$$12\,343\,654\,321 = \frac{666\,666 \cdot 666\,666}{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1}$$

$$1\,234\,567\,654\,321 = \frac{7\,777\,777 \cdot 7\,777\,777}{1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1}$$

$$123\,456\,787\,654\,321 = \frac{88\,888\,888 \cdot 88\,888\,888}{1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1}$$

$$12\,345\,678\,897\,654\,321 = \frac{999\,999\,999 \cdot 999\,999\,999}{1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1}$$

$7 \cdot 7 = 49$
$67 \cdot 67 = 4489$
$667 \cdot 667 = 444889$
$6667 \cdot 6667 = 44448889$
$66667 \cdot 66667 = 4444488889$
$666667 \cdot 666667 = 444444888889$
etc.

$4 \cdot 4 = 16$
$34 \cdot 34 = 1156$
$334 \cdot 334 = 111556$
$3334 \cdot 3334 = 11115556$
$33334 \cdot 33334 = 1111155556$
etc.

$11122233344455566677788 9 \cdot 3 = 33366700033366700033367$
$11122233344455566677788 9 \cdot 333 = 37037037037037037037037037$

$1 \cdot 1 = 1$
$11 \cdot 11 = 121$
$111 \cdot 111 = 12321$
$1111 \cdot 1111 = 1234321$
$11111 \cdot 11111 = 123454321$
$111111 \cdot 111111 = 12345654321$
$1111111 \cdot 1111111 = 1234567654321$
$11111111 \cdot 11111111 = 123456787654321$
$111111111 \cdot 111111111 = 12345678987654321$

$7 \cdot 9 = 63$
$77 \cdot 99 = 7623$
$777 \cdot 999 = 776223$
$7777 \cdot 9999 = 77762223$
$77777 \cdot 99999 = 7777622223$
$777777 \cdot 999999 = 777776222223$
etc.

$1 \cdot 8 + 1 = 9$
$12 \cdot 8 + 2 = 98$
$123 \cdot 8 + 3 = 987$
$1234 \cdot 8 + 4 = 9876$
$12345 \cdot 8 + 5 = 98765$
$123456 \cdot 8 + 6 = 987654$
$1234567 \cdot 8 + 7 = 9876543$
$12345678 \cdot 8 + 8 = 98765432$
$123456789 \cdot 8 + 9 = 987654321$

Auszüge aus: The Australian Mathematics Teacher 43 (1987)1.

Inhaltsverzeichnis

Problemecke 2
Aufgaben aus aller Welt von *Paul Jainta*

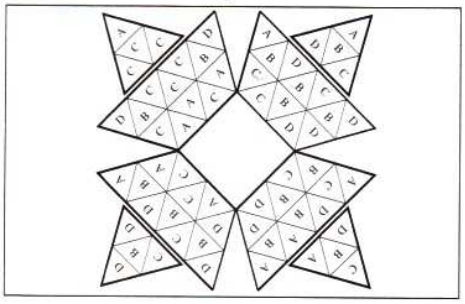
Zahlenkuriositäten 2

Zeitungsschnipsel 4

Das Polizei-Abzeichen „California Highway Patrol", ein „Zerbrechlicher Rekord", Überlegungen zum „Vorsorgesparen" und zu einer „Zeitungsente".

Mathematisches Puzzle 6

erdacht von *H. Neugebauer.*



Das Phänomen der Katzenaugen und die Drehspiegelungen 7

Überlegungen zu diesen speziellen Reflexionseigenschaften von *Erhard Quaisser.*

Alphons logische Abenteuer Sprachecke..... 9

Was geschah vor ... Jahren? 10

Die Entdeckung der Quaternionen durch Hamilton und Erinnerungen an August Ferdinand Möbius von *H.-J. Ilgauds.*

Lösungen Alphawettbewerb 2/93 Teil II ... 12

Spielstärkevergleich 22

Holgers Borchers beschreibt, wie die Berechnung der Wertzahlen im Schach erfolgt.

Mode und Mathematik 24

Berechnungen zur Erstellung eines Wickelrocks von *Johanna Heller.*

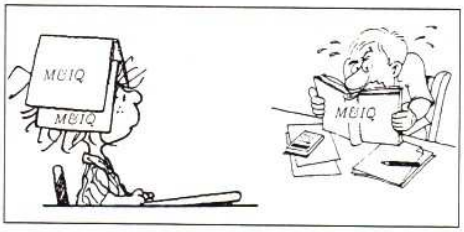
Knobeleien..... 25
Primzahlen, Tennis und Bortschtsch sind u. a. Inhalte von *Werner Keyms* Knobeleien.

Was ist beim Bau einer Modellhängebrücke zu bedenken? Teil II 26

Fortsetzung aus dem letzten Heft von *W. Träger.*

International Mathematical Talent Search 28

Die weltweite Suche von mathematischen Talenten vorgestellt durch *Paul Jainta.*



32. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe .. 30

Marktecke 32

Zahlenrätsel für Kenner..... 33

Der Sonnenring 34

Neben dem Pendelquadranten und dem Sextanten ist der Sonnenring eine weniger bekannte Möglichkeit zur Bestimmung der Sonnenhöhe zeigt *Arnold Zenkert.*

alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett und in Verbindung mit Dr. Gabriele Liebau, Dr. Claus Peter Helmholtz und Herbert Kästner.

Redaktion:
Jürgen Ricke, Tel.: (05 11) 4 00 04-42
Postfach 10 01 50, 30917 Seelze
Redaktionskollegium:
StR F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), OL Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pliezhausen), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OStR J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. W. Schmidt (Greifswald), OStR G. Schulze (Herzberg), Dr. W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

Anzeigenleitung: Bernd Schrader
Anzeigenabwicklung:
Telefon: (05 11) 4 00 04-23
Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01. 01. 1990
Vertrieb und Abonnement:
Telefon: (05 11) 4 00 04-52/53/85
Verlag:
Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG,
Postfach 10 01 50, 30917 Seelze
Telefon: (05 11) 4 00 04-0
Telefax: 4 00 04-19
Das Jahresabonnement für **alpha** besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt 12,00 DM, im Einzelbezug 2,50 DM. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten.
Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).

alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV KlettCotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, DH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.

© Beiträge sind urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte vorbehalten. Auch unverlangt eingesandte Manuskripte werden sorgfältig geprüft. Unverlangt eingesandte Bücher werden nicht zurückgeschickt. Die als Arbeitsblatt oder Kopiervorlage bezeichneten Unterrichtsmittel dürfen bis zur Klassen- bzw. Kursstärke vervielfältigt werden.

Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschriften im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.

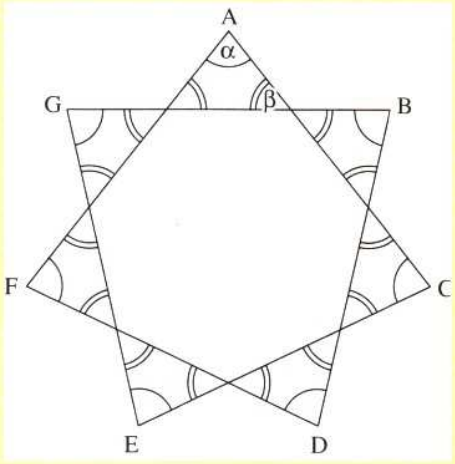
Herstellung: PZ Pädagogika Zentrale GmbH
Gestaltung: Véronique Sparacello
Druck: Scherrerdruck, Hannover
ISBN 3-617- 34016-4

Zeitungs-schnipsel

Das Polizei-Abzeichen „California Highway Patrol"

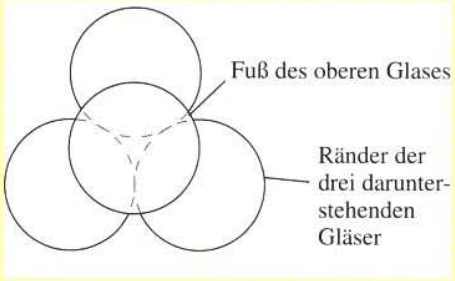
Das Polizei-Abzeichen Kaliforniens, des zweitgrößten Staates der USA, zeigt die römische Göttin Minerva (Göttin der Künste und des Handwerkes) mit einem Grizzly-Bären.

Aufgabe:
Wie groß sind die Winkel α und β der abgebildeten Figur, wenn A, B, C, D, E, F, und G die Eckpunkte sind?
Dr. W. Träger, Döbeln



Zerbrechlicher Rekord

In der am Ostermontag ausgestrahlten MDR-Fernsehsendung „Außenseiter – Spitzenreiter" wurde ein origineller Rekord aufgestellt. In einem Dresdener Hotel gab es die größte Sektglaspyramide Deutschlands zu bestaunen. Wie auf dem Foto zu erkennen ist, wurden die Gläser derart zu einer „Dreiecks-Pyramide" gestapelt, daß jedes Glas der höheren Schichten auf genau drei Gläsern der jeweils niedrigeren „Etage" stand:



Wieviele Gläser wurden zum Bau der 18stöckigen „Pyramide" gebraucht?
Ralf Laue

Vorsorgesparen

Sparkassen bieten ihren Kunden auch das Vorsorgesparen an. Bei der Kreissparkasse Döbeln ist dies unter folgenden Bedingungen möglich:

Monatliche Raten ab: 50,- DM
Laufzeit: 3 – 25 Jahre
Zinssatz: 5 %
zusätzlich einmalige S-Prämie auf die Summe der eingezahlten Sparbeträge beim Vertragsende abhängig von der Laufzeit:

1 – 3	Jahre	keine
4 – 6	Jahre	5 % Prämie
7 – 9	Jahre	10 % Prämie
10 – 14	Jahre	20 % Prämie
15 – 19	Jahre	30 % Prämie
20 – 24	Jahre	40 % Prämie
25	Jahre	50 % Prämie

1. Aufgabe: Bürger X läßt sich als Teilnehmer am Vorsorgesparen am 1. jeden Monates per Dauerauftrag durch die Kreissparkasse Döbeln von seinem Girokonto automatisch die Rate R = 50 DM auf sein Vorsorgesparbuch umbuchen, erstmals am 1. 1. 93.

a) Welcher Sparbetrag K_1, die Zinsen eingeschlossen, doch ohne die am 1. 1. 94 eingebuchte 50 DM Rate, befindet sich auf seinem Vorsorgesparbuch am 1. 1. 94?

b) Nach einer Laufzeit von 20 Jahren beendet Bürger X mit dem Stichtag 1. 1. 2013 sein Vorsorgesparen. Welcher Geldbetrag befindet sich nach dem Einbuchen der Prämie P_{20} am 1. 1. 2013 auf seinem Vorsorgesparbuch?

2. Aufgabe: Bürger X hat sich vor dem Abschluß seines Vorsorgesparvertrages (Siehe 1. Aufgabe!) die folgende Frage beantwortet: Mit welchem Zinssatz p*% müßten die 20 Jahre lang jeweils am Monatsanfang auf ein Sondersparbuch eingezahlten Monatsraten R = 50 DM verzinst werden, damit sich danach auf dem Sondersparbuch, auf das keine Prämie eingezahlt wird, das gleiche Guthaben befindet wie auf dem Vorsorgesparbuch (des Bürgers X) nach 20 Jahren?

p* ist, gerundet auf eine Dezimalstelle nach dem Komma, zu ermitteln!

Dr. W. Träger, Döbeln

Eine Zeitungsente

Eine Zeitung schrieb im Dezember 1992 über den Planetoiden Toutatis:
„...-Toutatis fliegt in 100 000 km Entfernung an der Erde vorbei: Er saugt mit seiner Anziehungskraft das Wasser aus dem Meer. Menschen ertrinken in gigantischen Flutwellen. – Toutatis zieht in 1000 km Entfernung vorbei: Er hebt die Erde aus der Achse, sie taumelt. Die Sonne steht in einer anderen Bahn, Klima-Kollaps. ...“ Um diese Zeilen mit einer Aufgabe als Schauermärchen zu entlarven, nehmen wir eine zur gleichen Zeit veröffentlichte dpa-Meldung aus Genf zur Kenntnis:

Mond ärgert Atomphysiker

Genf (dpa). Der Mond ärgert die Wissenschaft: Seine Gezeitenkräfte stören die Experimente der Kernpysiker im Europäischen Laboratorium für Teilchenphysik (CERN) in Genf. Lange hatten die Wissenschaftler über die Ursachen minimaler Schwankungen in den Umlaufbahnen von Elektronen und Positronen in dem CERN-Beschleuniger LEP gerätselt. Wie CERN mitteilt, konnten die Abweichungen auf winzige Deformationen der Erdkruste zurückgeführt werden, die im selben Rhythmus wie Ebbe und Flut schwanken.

· Gravitationsgesetz: Zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2, die voneinander den Abstand r haben, ziehen sich gegenseitig mit der Kraft

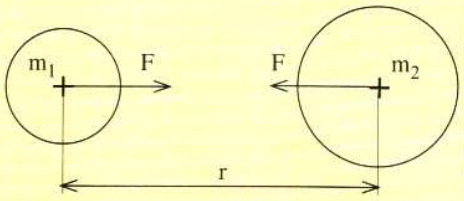
$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

an, wobei

$$G = 6{,}67259 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

die Gravitationskonstante ist.
· Für die kugelförmige Erde gilt:
Radius ... $r_E = 6370$ km
· Für den (Erd-)Mond (Kugelgestalt) gelten:
Mittlere Entfernung von der Erde
$e = 3{,}844 \cdot 10^5$ km
Radius $r_M = 1{,}738 \cdot 10^3$ km

Dichte $\delta_M = 3{,}341 \frac{g}{cm^3}$



Aufgabe: Wie groß muß der Radius R eines kugelförmigen Himmelskörpers sein, der beim Vorbeifliegen in 200 km Entfernung von der Erdoberfläche auf eine Masse m_0 am ihm nächstgelegenen Erdpunkt die gleiche Anziehungskraft ausübt wie der Erdmond auf eine gleiche Masse m_0 am ihm nächstgelegenen Punkt der Erde? Dieser Himmelskörper habe die gleiche Dichte wie der Erdmond.
Dr. W. Träger, Döbeln

Klarer Blick auf „Toutatis“

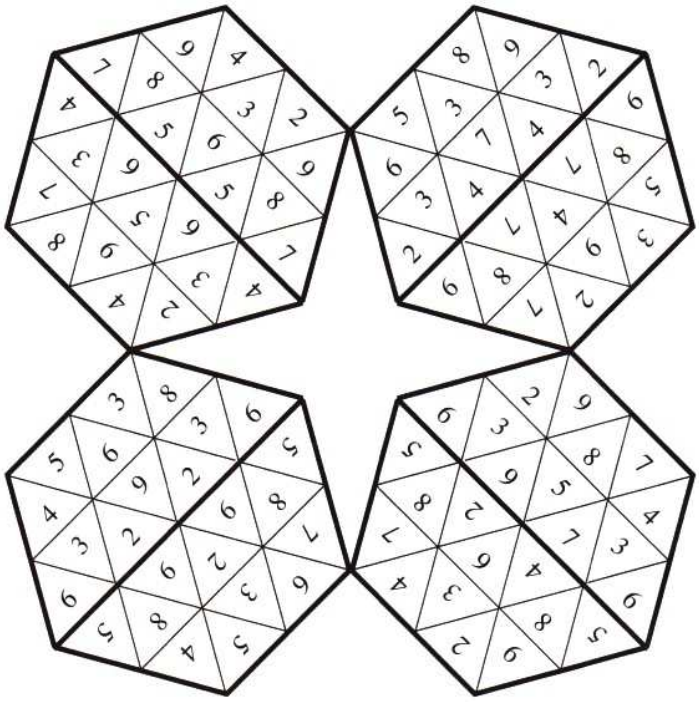
Pasadena (dpa). Die bisher genauesten Aufnahmen eines Asteroiden haben US-Wissenschaftler mit eine Radarantenne gemacht. Es handelt sich dabei um den Himmelskörper „4179 Toutatis“, der sich der Erde Anfang Dezember bis auf etwa 3,5 Millionen Kilometer genähert hatte. „Das ist unser erster klarer Blick auf einen der vielen tausend Asteroiden, die die Bahn der Erde kreuzen können“, sagte Projektleiter Steven Ostro vom „Jet Propulsion Laboratory“ in Pasadena (Kalifornien). Die Aufnahmen hätten ergeben, daß „Toutatis“ aus zwei miteinander verbundenen, unregelmäßig geformten Körpern bestehe. Die Oberflächen der im Durchmesser etwa vier und 2,6 Kilometer großen Hälften seien von Kratern und Zerklüftungen gekennzeichnet, hieß es. Das deute auf Zusammenstöße mit anderen Objekten hin.
DAZ Döbelner Allgemeine Zeitung Montag, 8. Februar 1993

Die Erde entging fast unbemerkt der Katastrophe

Washington (AP). Gestern um 6.35 Uhr MEZ ist die Erde nach galaktischen Maßstäben nur knapp einer Katastrophe entgangen. Zu diesem Zeitpunkt raste in einer Entfernung von 3,5 Millionen Kilometern der Asteroid „Toutatis“ mit einer Geschwindigkeit von rund 140 000 Stundenkilometern an uns vorbei. Nach Angaben von Astronomen ist das im All nur eine Haaresbreite.
Ein direkter Einschlag des Asteroiden würde nach Angaben der Fachleute eine globale Katastrophe auslösen. „Er würde genügend Material aufwerfen, um die Sonne zu verdunkeln und die Pflanzen absterben zu lassen“, sagte der Washingtoner Astronom Don Yeomans.
„Er hätte alles ausradiert, Millionen von Menschen wären umgekommen“, fügte er hinzu. Aber die Gefahr ist noch nicht vorüber: In zwölf Jahren wird der kleine Planet erneut und dann noch näher an der Erde vorbeikommen.
Der kleine Planet ist auf einer Umlaufbahn, die die der Erde alle vier Jahre in unterschiedlichen Entfernungen kreuzt, sagte Yeomans. 1996 und 2000 werde dies in großer Entfernung sein. Aber 2004 kommt „Toutatis“ auf 1,6 Millionen Kilometer an die Erde heran, die geringste Entfernung für die nächsten 200 Jahre, sagte Yeomans.
Die Energieexplosion, die bei einem Einschlag auf der Erde eintreten würde, sei schwer vorstellbar, sagen Fachleute. Nach Angaben des Astronomen Eugene Shoemaker würde „Toutatis“ einen Krater von fast 50 Kilometern Durchmesser reißen. Einiges Material würde verdampfen während der in die Atmosphäre geschleuderte Staub dort sehr lange bleiben würde. Falls der Asteroid einen Ozean träfe, würde gigantische Flutwellen praktisch alle Kontinente treffen und weit in das Landesinnere schwemmen.
„Toutatis“ ist nicht der einzige Asteroid, der die Erde bedroht. „Es gibt etwa 3000 Objekte von einem Kilometer Durchmesser oder mehr, die die Umlaufbahn der Erde kreuzen“, sagte Brian Marsden von Astrophysischen Observatorium in Cambridge, Massachusetts. „Und es gibt viele in dieser Größe, die wir nicht einmal kennen. Früher oder später wird einer davon auf der Erde einschlagen. Dann wird es gefährlich für die Zivilisation“, sagte Marsden. Nach einer Theorie gab es vor 65 Millionen Jahren schon einmal einen verheerenden Asteroideneinschlag auf der Erde, der das Aussterben der Dinosaurier verursacht haben soll.
„Döbelner Allgemeine Zeitung“ 9.12.92

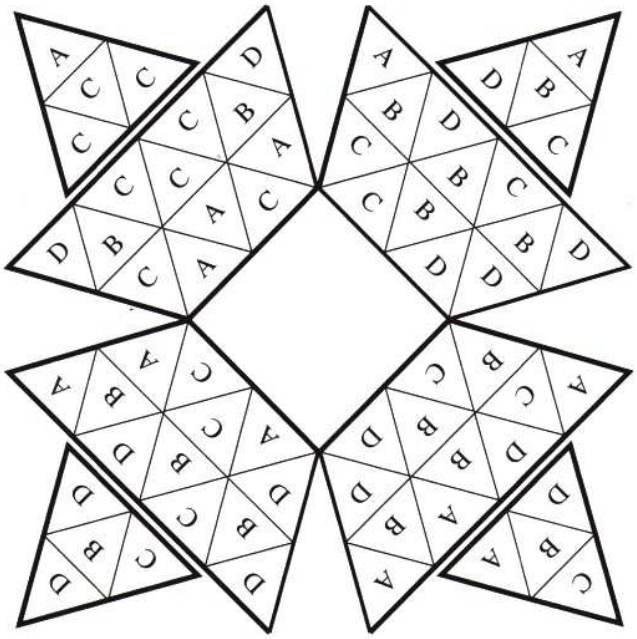
Mathematisches Puzzle (I)

Die abgebildeten 8 Trapeze sind in den 4 Sechsecken so zusammengefügt, daß die Summe der an den stark ausgezogenen Seitenlinien sich gegenüberliegenden Zahlen jeweils 11 ergibt. Die Trapeze sind auszuschneiden und in dieses Sechseck so zu sammenzusetzen, daß die Summe der an den Seitenlinien sich gegenüberliegenden Zahlen wiederum 11 ergibt.



Mathematisches Puzzle (II)

Die 4 Trapeze und 4 Dreiecke sind so zusammengesetzt, daß sich an den stark ausgezogenen Linien immer gleiche Buchstaben gegenüberliegen. Die Trapeze und Dreiecke sind auszuschneiden und zu einem großen Dreieck zusammenzusetzen, so daß sich an den gegenüberliegenden Seiten jeweils wieder gleiche Buchstaben gegenüberliegen.



H. Neugebauer

Das Phänomen der Katzenaugen und die Drehspiegelungen

„Katzenaugen" sind eine bekannte Erscheinung. Sie haben die Eigenschaft, einen Lichtstrahl stets zum Aussender hin zu reflektieren. Wir finden sie insbesondere an Fahrzeugen und Verkehrsschildern. Aber auch Personen, die bei Dunkelheit im Straßenverkehr rechtzeitig bemerkt werden sollen oder möchten, tragen an ihrer Kleidung oder Ausrüstung reflektierende Streifen mit „Katzenaugen".
Wie ist diese spezielle Reflexionseigenschaft möglich, die offenbar unabhängig von der Lage zwischen Lichtquelle und den „Katzenaugen" ist?
Der geometrische Sachverhalt läßt sich im Rahmen spezielle Abbildungen im Raum, den *Drehspiegelungen*, einordnen.

Begriffsklärung

Die beiden Bestandteile „Dreh-" und „-spiegelung" des Wortes führen uns direkt zu einer genauen Beschreibung des Begriffs.
Eine *Drehung* im Raum ist immer eine Drehung um eine Achse. Wir begegnen derartigen Abbildungen bei vielen Drehvorgängen im täglichen Leben. Bei einer Drehung um eine Achse a liegen ein Punkt P außerhalb von a und sein Bildpunkt P' auf einem gemeinsamen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Achse a liegt und dessen Kreisebene senkrecht zu der Achse a ist. Die Drehung läßt sich beschreiben durch die Achse a und den Drehwinkel α, den man in einer zu a senkrechten Ebene durch eine übliche Winkelmessung bestimmen kann (**Abb. 1**). Die Punkte auf der Achse a werden auf sich abgebildet.

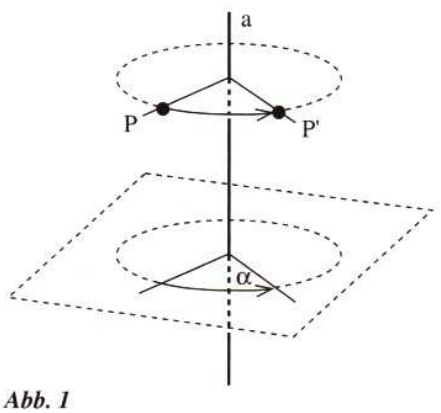


Abb. 1

Der zweite Bestandteil des Wortes bezieht sich auf eine *Spiegelung an einer Ebene* ε. Auch diese Abbildung ist gut bekannt. Die Punkte der Ebene ε, an der gespiegelt wird, bleiben fest. Und das Bild P' jedes anderen Punktes P läßt sich in bekannter Weise konstruktiv beschreiben: Man fällt das Lot von P auf die Ebene ε, bestimmt den Schnittpunkt F dieses Lotes mit der Ebene und erhält das Bild P' als denjenigen Punkt, für den F der Mittelpunkt der Strecke PP' ist (**Abb. 2**).

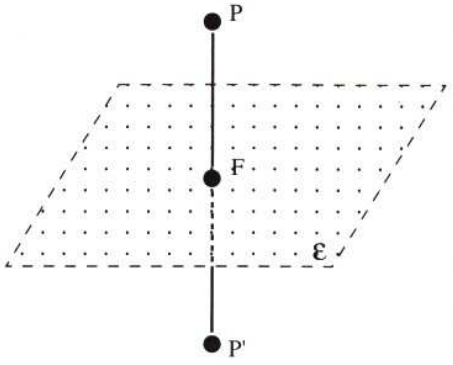


Abb. 2

Eine Drehspiegelung ist nun einfach die Nacheinanderausführung einer Drehung ρ um eine Gerade a und der Spiegelung an einer Ebene ε, die zu a senkrecht ist. (Man beachte, daß als Nebenbedingung $a \perp \varepsilon$ gefordert wird! Man überlege ferner, daß es unter diesen Voraussetzungen gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge Drehung und Spiegelung nacheinander ausgeführt werden.)

Überlegungen zu Drehspiegelungen

1. Hat diese zusammengesetzte Abbildung neben der Drehung und der Ebenenspiegelung überhaupt eine eigenständige Bedeutung? Das wollen wir an einem einfachen praxisorientierten Sachverhalt zeigen:
Die **Abb. 3** veranschaulicht das Kerngerüst eines Allen-Moleküls, bestehend aus 3 C und 4 H-Atomen. Um die räumliche Lage der Atome zueinander deutlicher auszuweisen, ist ein Quader mit quadratischer Grundfläche zur Hilfe genommen worden.

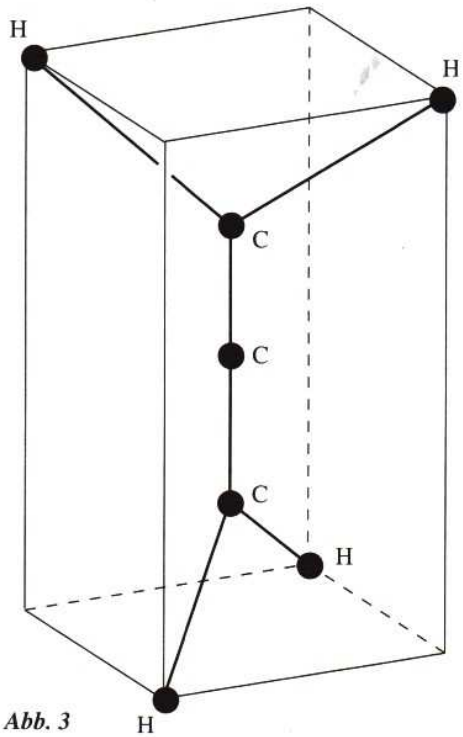


Abb. 3

Von Interesse ist in der Physik und Chemie, durch welche Bewegungen des Raumes dieses Kerngerüst auf sich abgebildet werden kann. Dabei müssen natürlich C-Atome wieder auf C-Atome und entsprechend H-Atome auf sich zu liegen kommen.
Man erkennt leicht, daß die Nacheinanderausführung einer Drehung ρ von 90° um die Gerade a, die die C-Atome enthält und die anschließende Spiegelung σ an derjenigen Ebene ε, die senkrecht zu a ist und durch das mittlere der C-Atome geht, das Kerngerüst des Allen-Moleküls auf

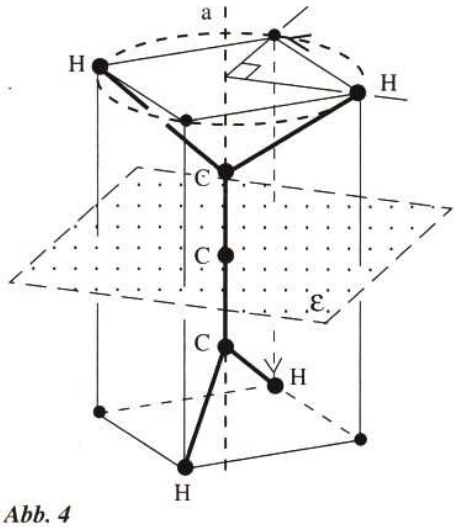


Abb. 4

sich abbildet (**Abb. 4**). Die Drehspiegelung $\rho=\sigma \circ \rho$ ist hier also eine sogenannte *Deckabbildung*. (Mit „o" beschreiben wir die Nacheinanderausführung.)
Aber weder die Drehung ρ noch die Spiegelung σ selbst besitzen diese Eigenschaft!

2. Wenn man zwei Deckabbildungen einer Figur F nacheinander ausführt, dann erhält man wieder eine Deckabbildung von F. Wir wollen hier konkret die Nacheinanderausführungen der obigen Drehspiegelung φ mit sich betrachten und sehen, zu welchen Deckabbildungen des Allen-Moleküls wir dabei kommen. Da es bei der Drehspiegelung φ nicht auf die Reihenfolge der Ausführung der Drehung und Spiegelung ankommt, ergibt die Nacheinanderausführung $\varphi \circ \varphi$ von φ mit sich selbst
$(\sigma \circ \rho) \circ (\sigma \circ \rho) = \sigma \circ \sigma \circ \rho \circ$.
Bei der Nacheinanderausführung der Spiegelung σ mit sich selbst wird aber jeder Punkt auf sich abgebildet, und damit ist $\sigma \circ \sigma$ die identische Abbildung. Folglich ist $\varphi \circ \varphi = \rho \circ \rho$, also die Drehung um a mit dem Drehwinkel $2 \cdot 90° = 180°$.
Führen wir nochmals die Drehspiegelung φ aus, dann erhalten wir
$\varphi \circ \varphi \circ \rho = \rho \circ \rho$,
also eine Drehspiegelung, die aus der Drehung um a mit 270° und der Spiegelung besteht. Dieser Drehung um 270° erzeugt offensichtlich von jedem Punkt das gleiche Bild wie die Drehung um a, die entgegengesetzt zum Drehsinn von ρ um 90° ausgeführt wird. (Aus diesem Grunde sind diese beiden Drehungen als Abbildungen gleich.)
Wird nochmals die Drehspiegelung φ ausgeführt, dann wird schließlich jeder Punkt auf sich abgebildet. Die Nacheinanderausführungen $\varphi \circ \varphi \circ \varphi \varphi \circ$ ist die identische Abbildung.

3. Gibt es weitere Deckabbildungen dieses Moleküls, etwa Ebenenspiegelungen? 4. Im Raum gibt es zwei verschiedene Orientierungssinne, die sich durch eine Rechts- bzw. Linksschraube charakterisieren lassen.
Bei der Drehspiegelung geht die Orientierung in die entgegengesetzte über. Der Drehanteil läßt zwar die Orientierung unverändert, doch bei der Spiegelung an einer Ebene wird sie vertauscht: Das Bild einer Rechtsschraube ist eine Linksschraube (**Abb. 5**).

5. Wie viele Drehspiegelungen gibt es, die ein regelmäßiges Tetraeder auf sich abbilden?

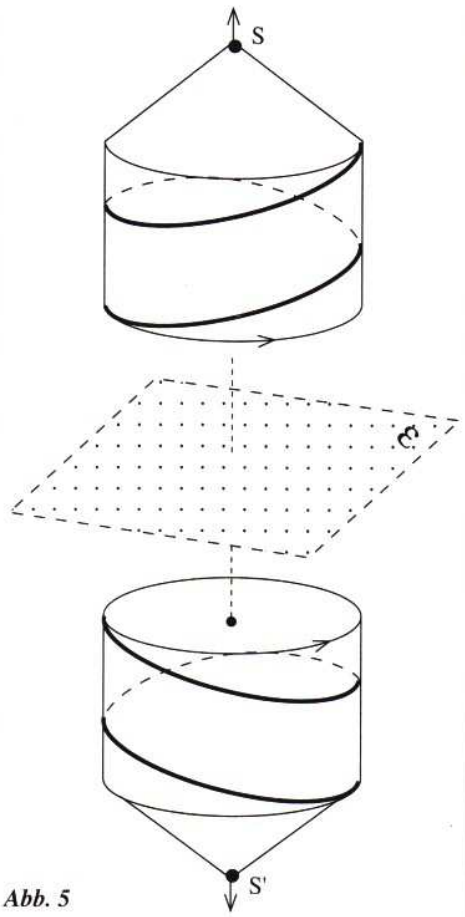


Abb. 5

6. Die *Spiegelung an einem Punkt* Z im Raum läßt sich konstruktiv wie in der Ebene erklären: Der Punkt Z bleibt fest und jeder andere Punkt P wird auf denjenigen Punkt P' abgebildet, für den Z der Mittelpunkt von PP' ist.
Es ist recht einfach zu erkennen, daß jede Punktspiegelung (im Raum) eine Drehspiegelung ist. Wir wählen dazu eine Ebene ε durch Z und eine Gerade a durch Z, die zu ε senkrecht ist. Nun drehe man um a mit 180° und spiegele anschließend an der Ebene ε. Jeder Punkt P, der weder auf a noch auf ε liegt, wird auf denjenigen Punkt P' abgebildet, für den Z Mittelpunkt von PP' ist. (**Abb. 6**).Im Gegensatz zur ebenen Geometrie ist also eine Punktspiegelung im Raum eine Bewegung, die die Orientierung vertauscht.

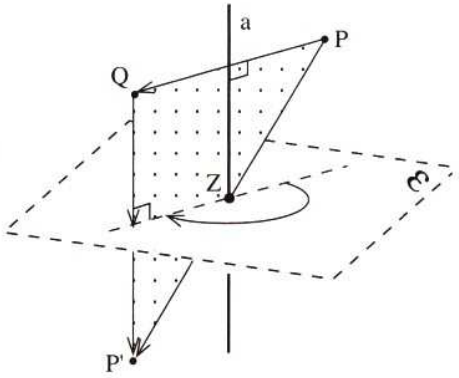


Abb. 6

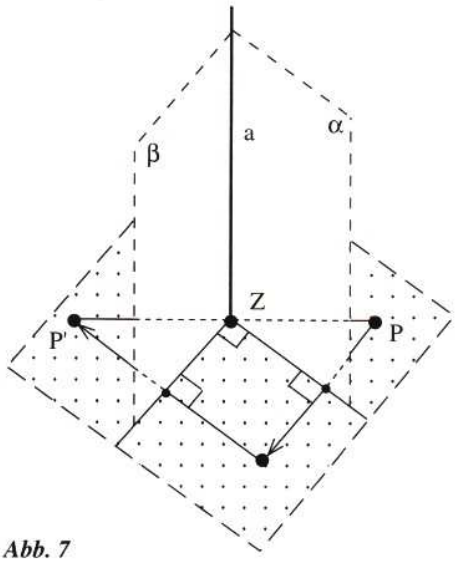


Abb. 7

7. Ein *Dreikantspiegel* ist ein System von drei spiegelnden Ebenen, die paarweise senkrecht aufeinander stehen. Sie werden auf Grund ihrer speziellen Reflexionseigenschaften z. B. als „Katzenaugen" bei Fahrzeugen oder bei der Funkortung (mit reflektierenden Metallflächen) verwendet. Es seien α, β und γ drei derartige Ebenen. Dann ist zunächst die Nacheinanderausführung der Spiegelungen an den Ebenen α und β die Drehung um ihre Schnittgerade a mit 180° (**Abb. 7**). Die anschließende Spiegelung an der Ebene γ

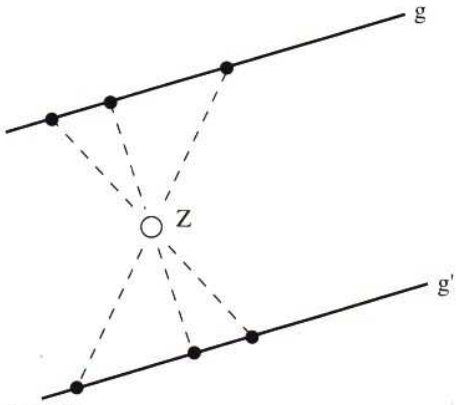


Abb. 8

ergibt nun die *Spiegelung an dem Schnittpunkt* Z von a und γ, da die Gerade a senkrecht auf der Ebene steht. Folglich ist das Bild g' einer Geraden g bei einer solchen Nacheinanderausführung von Ebenenspiegelungen eine Gerade, die mit Z und g zusammen in einer gemeinsamen Ebene liegt und zu g parallel ist (**Abb. 8**).
Und damit ist geometrisch die *wesentliche Eigenschaft des Dreikantspiegels* begründet: Ein einfallender Lichtstrahl wird durch die Spiegel so reflektiert, daß er parallel zu diesem verläuft und damit zur Lichtquelle (Sender) zurückkommt.

Dr. Erhard Quaisser

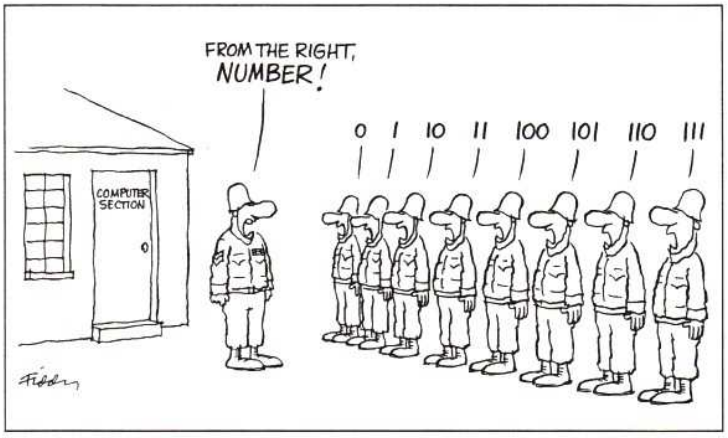
Alphons logische Abenteuer

Alphons' Eltern hatten sich zum Kauf einer neuen Schrankwand entschlossen. Zum Wegwerfen schienen ihnen die alten Schränke jedoch zu schade zu sein. Der Vater schlug vor, eine Anzeige aufzugeben, es könnten sich vielleicht doch Interessenten finden. „Ich kenne gleich in der Nähe ein Geschäft, das Anzeigen für alle Zeitungen annimmt, " sagte Alphons. Seine Schwester widersprach: „Eine Anzeige gleich an alle Zeitungen? Das wird doch viel zu teuer! Ich weiß schon, warum Du das vorschlägst. Der Bruder Deiner heimlichen Flamme arbeitet in diesem Geschäft." Alphons wunderte sich zwar, wie seine Schwester das wieder herausbekommen hatte, entschloß sich aber, seine Erklärung auf eine rein sachliche Grundlage zu stellen. „Das, „für alle Zeitungen" verstehe ich so, daß Anzeigen aufgenommen werden, die man in einer, einigen oder gar in allen Zeitungen mit einem Anzeigenteil veröffentlichen lassen kann." Seine Schwester hatte nicht vergessen, wie Alphons einst ihren Traum von einer Hochzeit, bei der alle Menschen staunen sollten, demontiert hatte. „In allen solchen Zeitungen, also die auch in Australien erscheinenden?" fragte sie spöttisch. Alphons wußte gleich, worauf seine Schwester anspielte. Da er sachlich bleiben wollte, antwortete er ruhig. „Dem Versprechen nach müßte das möglich sein, aber eben auch, die Anzeige hier einer Zeitung zu geben, etwa einer Regionalzeitung."

Nun, da man sich ja einig sei, sollte man einen Text entwerfen, schlug die Mutter vor. Das erwies sich als gar nicht so einfach. Immer wieder wurde eine Formulierung verworfen, sei es, weil sie zu lang, sei es, weil sie zu kurz oder überhaupt nicht informativ war.

„Viele Köche verderben den Brei", seufzte die Mutter. „Dann müssen in dem Ausflugslokal, in dem wir letzten Sonntag zu Mittag gegessen haben, die Köche Jahresversammlung gehabt haben, denn das Essen war furchtbar," ließ sich Alphon's Schwester hören. Das war wieder etwas für Alphons: „So ein Unsinn"!, murrte er. „Daß viele Köche den Brei verderben heißt nichts anderes, als daß es Köche gibt, und zwar nicht wenige, die keinen Brei zu kochen verstehen." Seine Schwester schaute ihn erstaunt an, auch seine Mutter schüttelte mit dem Kopf. Alphons versuchte sich zu verteidigen: „Wenn in der heutigen Zeitung steht, viele Deutsche trinken Bier, ist doch auch nicht gemeint, daß sie sich zum Bier trinken an einem Ort versammeln." In die nun einsetzende gutmütige Kabbelei der Kinder griff der Vater nach einer Weile beschwichtigend ein. „Was Du aus der Zeitung zitiert hast, ist eine Aussage, was Mutti gesagt hat, ist keine Aussage, sondern ein Sprichwort, also eine Lebensweisheit in bildlicher Form: Erfahrungsgemäß erleichtert es nicht, sondern erschwert Entscheidungsfindung, je mehr gleichgestellte Personen an ihr beteiligt sind. Ihr könnt euch einmal überlegen, was das Sprichwort „Viele Hunde sind des Hasen Tod" bedeutet. Die Anzeige aber schreibe ich nun und ihr könnt mich am Erfolg loben oder kritisieren." Man wurde sich rasch einig, genau das auch zu tun.

Prof. Dr. L. Kreiser



Sprachecke

Pair, impair

P peut être 2 ou 4 ou 8. I peut être 3 ou 5 ou 7 ou 9. Pourriez-vous reconstituer ces deux multiplications? (Remarque: Dans le même nombre P ou I on peut remplacer des chiffres differents.)

a) IPI x PI	· · · x · ·
IIP	· · ·
IIPI	· · · ·
PI2I	· · 2 ·
b) IPI x PP	· · · x · ·
IIPP	· · · ·
I9IP	· 9 · ·
PIPIP	· · · · ·

(Aufgabe aus „Logigram" 26/87)

1. В равенстве 101 – 102 = 1 передвиньте одну цифру так, чтобы оно стало верным.

aus: Quant, Moskau

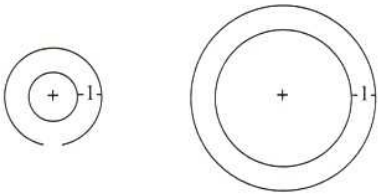
Circles with a common centre

The drawing shows two pairs of concentric circles (circles with a common centre). As you can see, the radii of one pair are much larger than the radii of the other pair. However, the difference between the two radii is the same in both pairs, 1 unit of length.

Question:

Which of the two pairs has the greater difference between the two cirumferences.

aus: Fun with mathematics, Toronto



992 1742 1917 837

Was geschah vor...Jahren?

1643 Unter den französischen Mathematikern entwickelt sich ein heftiger Streit darum, mit welchen mathematischen Mitteln die Perspektive richtig beschrieben werden kann. Hauptkontrahenten waren P. Alleaume und der berühmte Geometer G. Desargues (1591 – 1661). Im Ergebnis dieses Streites mußte 1665 A. Bosse (1602 – 1676), ein Anhänger des Desargues, sein Lehramt an der Pariser Kunstakademie aufgeben.

1718 Es erscheinen letztmalig spezielle russische Zahlzeichen auf Kupfermünzen.

1843 W. R. Hamilton entdeckt die Quaternionen (siehe Text).

1868 Am 26. September starb in Leipzig der berühmte Mathematiker und Astronom August Ferdinand Möbius (siehe Text).

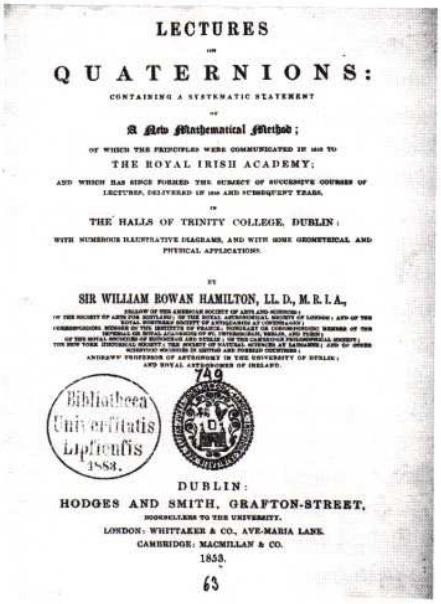
1893 Italien und Deutschland nehmen den Vorschlag des kanadischen Ingenieurs Sanford Fleming (1827 – 1915) von 1874 an: die Erde wird in 24 Zeitzonen eingeteilt und der Meridian von Greenwich soll der „Ausgangspunkt" der Zeitzonen sein. 1893 nahm Italien als erstes Land auch den Flemingschen Vorschlag an, die Stunden des Tages mit 0(24) bis 23 Uhr zu bezeichnen.

1893 Am 26. (oder 25.) 9. wurde Alexander Markowitsch Ostrowski (gest. 1986) geboren. Ostrowski war Professor in Basel. Er arbeitete zur Algebra und Analysis.

1918 In einer Arbeit begründet der berühmte deutsche Mathematiker Hermann Weyl (1885 – 1955) die Möglichkeit, die verschiedenen Geometrien aus den physikalischen Eigenschaften des Raumes (Gravitationsfeld, „Äther", Materie, Elektrizität) herzuleiten.

Die Entdeckung der Quaternionen durch Hamilton

1858 erinnerte sich der irische Mathematiker, Physiker und Astronom Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865): „Morgen wird der fünfzehnte Geburtstag der Quaternionen sein. Sie traten ins Leben oder ans Licht, voll erwachsen, am 16. Oktober 1843, als ich mit Lady Hamilton nach Dublin wanderte und heraufkam zur Broughambrücke... bereits in diesem Moment fühlte ich, daß es der Mühe wert sein könnte, die Arbeit (zur Forschung der Quaternionen) für wenigstens 10 (oder auch 15) kommende Jahre aufzubringen."


LECTURES
ON
QUATERNIONS:
CONTAINING A SYSTEMATIC STATEMENT
OF
A New Mathematical Method;
OF WHICH THE PRINCIPLES WERE COMMUNICATED IN 1843 TO
THE ROYAL IRISH ACADEMY;
AND WHICH HAS SINCE FORMED THE SUBJECT OF SUCCESSIVE COURSES OF
LECTURES, DELIVERED IN 1848 AND SUBSEQUENT YEARS,
IN
THE HALLS OF TRINITY COLLEGE, DUBLIN:
WITH NUMEROUS ILLUSTRATIVE DIAGRAMS, AND WITH SOME GEOMETRICAL AND
PHYSICAL APPLICATIONS.
BY
SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON, LL. D., M. R. I. A.,
Bibliotheca Universitatis Lipsiensis 1888.
DUBLIN:
HODGES AND SMITH, GRAFTON-STREET,
LONDON: WHITTAKER & CO., AVE-MARIA LANE.
CAMBRIDGE: MACMILLAN & CO.
1853.
65

Erklärung zu den neuendeckten Quaternionen

Was sind die Quaternionen, die Hamilton für so wichtig hielt? Es sind viergliedrige „Zahlen" der Form a+bi+cj+dk, wobei a, b, c, d „gewöhnliche" reelle Zahlen bedeuten sollen und für die „Einheiten" i, j, k gilt: $i^2=j^2=k^2=-1$, ij=k. Betrachtet man die letzte Gleichung ij=k. Dann gilt auch: iij=ik. Betrachtet man die letzte Gleichung ij=k. Dann gilt auch: iij=ik und unter Berücksichtigung der ersten Gleichung: -j=ik. Nimmt man wiederum die zweite Gleichung und multipliziert von rechts mit j: ijj = kj, also -i = kj. Multipliziert man die beiden Ergenisse:

(-j)(-i) = (ik)(kj) = ikkj = i(-l)j = -ij.

Es gilt also ji = -ij. Die Multiplikation der Quaternionen wird im Allgemeinen also nicht mehr kommutativ sein, d. h. die Faktoren dürfen bei der Multiplikation nicht mehr vertauscht werden, ohne damit gleichzeitig das Rechenergebnis zu verändern. Eine Folgerung von Hamilton daraus ist: für Quaternionen gelten im Allgemeinen die „binomischen Formeln" nicht.

Hamiltons Theorie der Quaternionen

In zwei dickleibigen Abhandlungen von 1853 und 1866 entwickelte Hamilton die Theorie der Quaternionen das Gleiche wie die gewöhnlichen komplexen Zahlen in der Ebene. Die Hamiltonschen Arbeiten führten in den englischsprachigen Ländern zu einem „Quaternionenkult": die gesamte Mathematik sollte mit Hilfe der Quaternionen behandelt werden.

Integration dieser neuen Theorie

Durch die Untersuchungen von Georg Frobenius (1849 – 1917), Henri Poincaré (1854 – 1912) und Elie Cartan (1869 – 1951) wurden die Quaternionen, ebenso wie die ähnlichen Überlegungen des deutschen Mathematikers Hermann Graßmann (1809 – 1877) in die moderne Algebra integriert.

1983 Am 26.10. starb in Berkeley/Kalifornien Alfred Tarski (geb. 1902). Der aus Polen stammende Gelehrte gehörte zu den bedeutendsten Vertretern der mathematischen Logik.

1993 V. Heuring und H. Jordan von der Universität Colorado stellen den ersten Computer vor, der seine Daten optisch speichert und mit Licht rechnet.

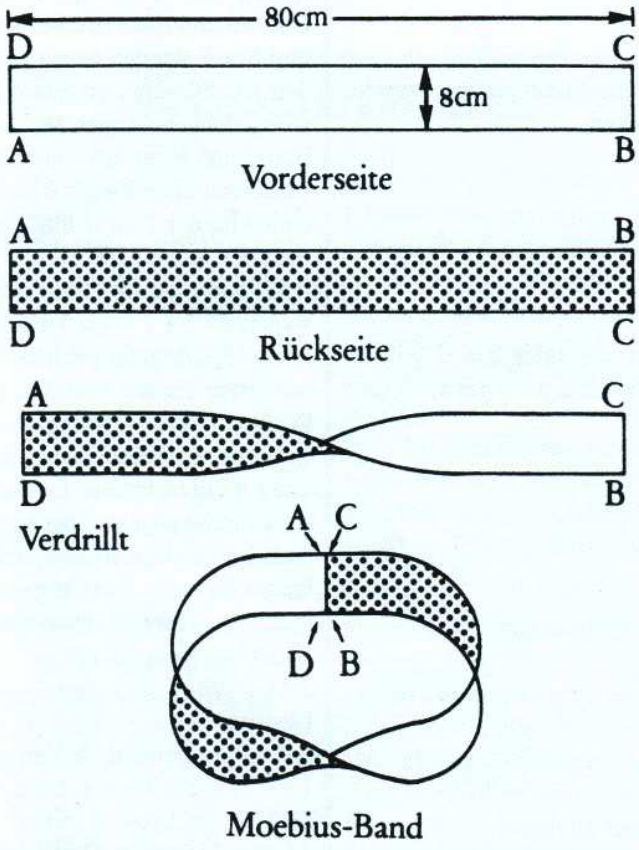
August Ferdinand Möbius

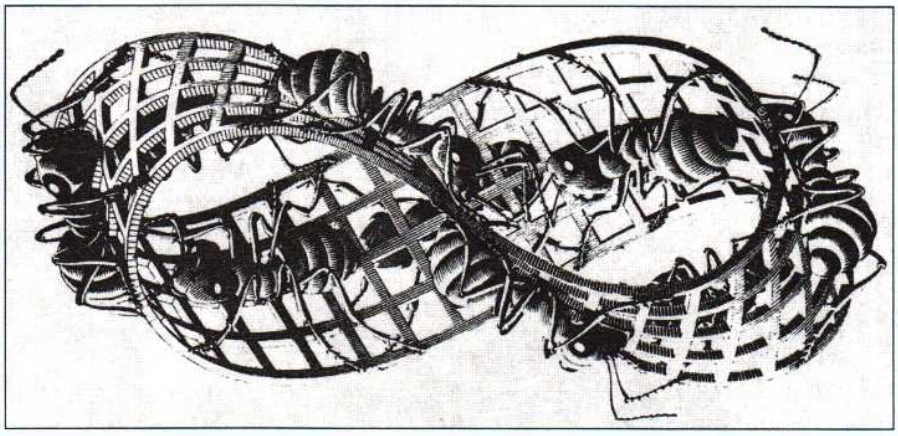
A. F. Möbius.

Am 26. September 1868, also vor 125 Jahren, starb in Leipzig der Astronom und Mathematiker August Ferdinand Möbius. Der Sohn eines Tanzlehrers an der Fürstenschule Schulpforte wurde am 17. November 1790 in Schulpforte geboren. Möbius studierte in Leipzig erst Jura, dann Mathematik. Aus den Geldern einer Leipziger Stiftung unterstützt, konnte er in Halle und Göttingen seine Studien fortsetzen. In Göttingen studierte er auch bei Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855). Gauß empfahl Möbius als hoffnungsvollen Gelehrten der Leipziger Universität. Nach einer astronomischen Studienreise, die ihn nach Gotha, Tübingen, München und Wien führte, trat Möbius 1816 sein Amt als außerordentlicher Professor und Observator an der Leipziger Universitätssternwarte an. In dieser bescheidenen Stellung blieb Möbius 1844. Erst dann wurde er ordentlicher Professor der Mathematik und höheren Mechanik an der Leipziger Universität. Sogar erst 1848 wurde er offiziell Direktor der Sternwarte, die er seit 1825, nach den Tode des bedeutenden Mathematikers und Astronomen Carl Brandan Mollweide (1774 – 1825) schon tatsächlich geleitet hatte. Möbius war ein sehr fleißiger und gewissenhafter Gelehrter. Seine „Gesammelten Werke" (Leipzig 1885 – 87) umfassen mehr als 2500 Druckseiten, wobei viele seiner populären Schriften darin nicht aufgenommen wurden. Möbius hat in Leipzig zwei Generationen von Gymnasiallehrerin in den naturwissenschaftlichen und mathematischen Fächern ausgebildet. Das wissenschaftliche Hauptarbeitsgebiet von Möbius was die analytische Geometrie. Er entwickelte eine Theorie der geometrischen Verwandtschaften (ab 1827). Solche (einfachen) Verwandtschaften sind z. B. Kongruenz und Ähnlichkeit geometrischer Figuren. Erst seit etwa 1880 wurde bemerkt, welche grundlegende Bedeutung die Möbiusschen geometrischen Arbeiten für einen systematischen Aufbau der modernen Geometrie haben. Eine hübsche geometrische Entdeckung von Möbius war 1858 das „Möbiussche Band" – eine einseitige Fläche. Neben seinen geometrischen Arbeiten verfaßte Möbius auch astronomische und statische Abhandlungen.

H.-J. Ilgauds

Bastelanleitung für das Möbiussche Band





Lösungen Alphawettbewerb 2/93 Teil II

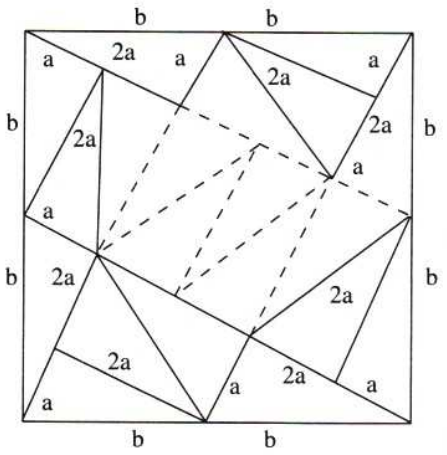
5/8
Lösung:
Wir schreiben die Summanden untereinander und erhalten

```
    b
+ aab
+ aab
+ baa
+   b
-----
 b00b
```

Nun könnte b = 1 oder b = 2 gelten. Für b = 1 gilt a = 4, für b = 2 gilt a = 8, also

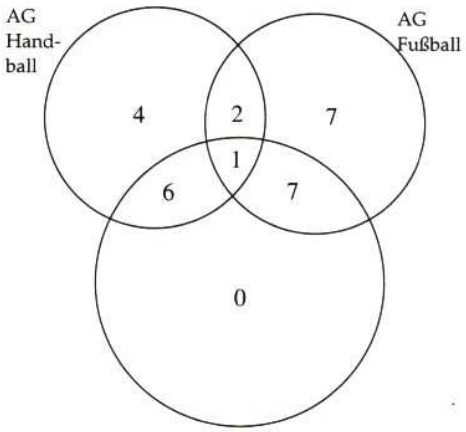
```
    1
+ 441
+ 414
+ 144
+   1
-----
 1001

    2
+ 882
+ 828
+ 288
+   2
-----
 2002
```

5/9
Lösung:
Die Abbildung zeigt, wie die 20 rechtwinkligen Dreiecke zusammenzufügen sind, um aus ihnen ein Quadrat zu legen.



5/10
Lösung:
Für den einzigen Zander gab es 5 Punkte, für die drei Flußbarsche 3 · 2 = 6 Punkte; es verbleiben 18 – 5 – 6 = 7 Punkte für Brassen und Kaulbarsche. Wegen 2 · 4 = 8 und 8 > 7 wurden genau ein Brassen und drei Kaulbarsche, insgesamt also acht Fische gefangen. Wegen 18 : 2 = 9 erreichten Bernd und Peter, aber auch Siegfried und Lutz zusammen jeweils 9 Punkte. Siegfried erhielt für den Zander fünf Punkte; deshalb entfallen auf Lutz höchstens vier Punkte. Peter hatte die meisten Fische gefangen; wegen 2 + 1 + 1 + 1 = 5 und 5 < 8 muß Peter drei Fische gefangen haben. Da Peter die wenigsten Punkte erreichte, hat Peter drei Punkte für drei Kaulbarsche erhalten. Dann entfallen auf Bernd sechs, auf Siegfried 5 und auf Lutz 4 Punkte. Da Bernd höchstens zwei Fische angelte, aber sechs Punkte erhielt, hat er einen Brassen und einen Flußbarsch gefangen. Der Fang von Lutz besteht deshalb aus zwei Flußbarschen.

5/11
Lösung:
An Arbeitsgemeinschaften nehmen 14 + 13 + 17 – 3 – 7 – 8 + 1 = 27 Schüler teil; deshalb gehören zu dieser Schulklasse 27 + 4 = 31 Schüler. Das abgebildete Venn-Diagramm veranschaulicht den Sachverhalt.



5/12
Lösung:
Entnimmt man der Kiste 22 Kugeln, so sind es im ungünstigsten Fall eine gelbe, zwei rote, drei blaue, vier grüne, vier weiße, vier schwarze und vier braune Kugeln. Entnimmt man der Kiste eine weitere Kugel, insgesamt also 23 Kugeln, so hat man mit Sicherheit entweder fünf weiße oder fünf schwarze oder fünf braune Kugeln, also fünf Kugeln der gleichen Farbe.

5/13
Lösung:
Angenommen, Ursula hatte x Pilze, Hans also (x + 5) Pilze gesammelt; zusammen sind es (2x + 5) Pilze. Dann hat Peter (2x – 5) Pilze gesammelt. Die drei Schüler haben zusammen 4x Pilze gesammelt, und es gilt 4x = 84, also x = 21. Ursula hat 21, Hans 26, Peter 37 Pilze gesammelt.

5/14
Lösung:
Jede der Ziffern 2, 4 bzw. 6 kann jeweils zweimal an der Hunderter-, Zehner- und Einerstelle stehen; deshalb gilt 2 · 100 · (2 + 4 + 6) + 2 · 10 · (2 + 4 + 6) + 2 · 1 · (2 + 4 + 6) = 222 · 12 = 2664.

6/8
Lösung:
Es sei $\overline{abcabc}$ eine solche sechsstellige natürliche Zahl in dezimaler Schreibweise. Setzen wir $\overline{abc} = x$, dann gilt 1000 · x + x = 1001 · x = 7 · 11 · 13 · x. Deshalb haben solche sechsstelligen Zahlen die Teiler 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001.

6/9
Lösung:
Wir rechnen $\frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10}$; nun gilt $\frac{4}{10} \cdot x = 36$, x = 90. Die Bahnfahrt beträgt 90 km.

6/10
Lösung:
Wenn Anita dem Nähkästchen 27 Knöpfe entnommen hat, könnte sie im ungünstigsten Fall 9 schwarze, 9 gelbe und 9 weiße Knöpfe haben. Deshalb muß Anita 28mal ins Nähkästchen greifen, um mit Sicherheit 10 Knöpfe der gleichen Farbe zu erhalten.

6/11
Lösung:
$3\ \text{min} = \frac{3}{60}\,\text{h} = \frac{1}{20}\,\text{h}$; nun gilt $v = \frac{s}{t} = \left(2 : \frac{1}{20}\right)\frac{\text{km}}{\text{h}} = 40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Herr Meyer hat sich nicht an die Geschwindigkeitsbegrenzung gehalten; denn die Geschwindigkeit seines Skoda betrug $40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

6/12
Lösung:
Aus (2) und (3) folgt: Keines der Mädchen Britta, Christin, Elke und Astrid

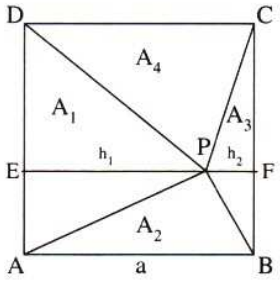
wohnt in Suhl. Folglich wohnt Sandra in Suhl.
Aus (4) folgt: Keines der Mädchen Astrid, Britta und Christin wohnt in Wismar. Folglich wohnt Elke in Wismar.
Aus (5) folgt: Britta wohnt weder in Berlin noch in Dresden. Folglich wohnt Britta in Potsdam.
Aus (1) folgt: Da Christin nicht in Berlin wohnt, muß sie in Dresden, also Astrid in Berlin wohnen.

6/13
Lösung:
Die Parallele zu $\overline{AB}$ durch P schneide $\overline{AD}$ in E und $\overline{BC}$ in F. $\overline{AB}$ habe die Länge a, $\overline{EP}$ die Länge h_1 und $\overline{FP}$ die Länge h_2; dann gilt $A_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1$ und

$A_3 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_2$,

also $A_1 + A_3 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (h_1 + h_2)$ und wegen $h_1 + h_2 =$ somit $A_1 + A_3 = \frac{1}{2} \cdot a^2$.

Dann muß auch $A_2 + A_4 = \frac{1}{2} \cdot a^2$ gelten. Daraus folgt $A_1 + A_3 = A_2 + A_4$.



6/14
Lösung:
Der Erdbahndurchmesser ist angenähert doppelt so groß wie die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, also rund 300.000.000 km. Da Geschwindigkeit = Weg/Zeit ist, ergibt sich als Lichtgeschwindigkeit 300000 km/s.

7/8
Lösung:
a) Die größtmögliche sechsstellige Zahl wäre 198799.
Wegen 198799 = 86 · 2311 + 53 lautet die gesuchte Zahl 198799 – 53 = 198746.
b) Die letzte Ziffer des Quotienten muß 8 lauten, denn nur 8 · 7 = 56 endet auf die Ziffer 6. Die vorletzte Ziffer des Quotienten muß 7 lauten, denn nur 87 · 7 endet auf 9. Die drittletzte Ziffer des Quotienten muß 6 lauten, denn nur 87 · 6 endet auf 2. Die viertletzte, also erste Ziffer des Quotienten muß 9 lauten, denn nur 87 · 9 endet auf 3. Wegen 9678 · 87 = 841986 ist 849186 die gesuchte Zahl.

7/9
Lösung:
Da das Querprodukt verschieden von Null ist, muß jeder Faktor ungleich Null sein. Wegen 5 · 2 = 10 enthält das Querprodukt die Faktoren 5 und 2 und weitere Faktoren 1. Für die Quersumme gilt deshalb 10 = 5 + 2 + 1 + 1 + 1. Nur die Zahl 11125 ist durch 25 teilbar.

7/10
Lösung:
Nach Ausführung der Konstruktion setzt sich das Rechteck ABCD aus vier Rechtecken AESH, EBFS, HSGD und SFCG zusammen. Die vier Seiten $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ und $\overline{HE}$ des Vierecks EFGH halbieren jeweils eines dieser vier Rechtecke. Deshalb gilt $A_{EFGH} = \frac{1}{2} \cdot A_{ABCD}$, d. h. A_{EFGH} ist konstant und unabhängig von der Lage der Strecken $\overline{HF}$ und $\overline{EG}$.

7/11
Lösung:
Angenommen, anfangs waren es L_1 Längs- und Q_1 Querreihen, nach der Umstellung also $(L_1 - 4)$ Längs- und Q_2 Querreihen; gilt $L_1 \cdot Q_1 = (L_1 - 4) \cdot Q_2 = 225 = 9 \cdot 25 = 5 \cdot 45 = 5 \cdot (25 + 20)$. Der Marschblock verlängert sich daher um 20 Querreihen.

7/12
Lösung:
Wegen (17 – 7) : 2 = 5 haben Erika und Irene jede für 5 Mark Briefmarken gekauft. Es gilt 10 · A + 60 · B + 30 · C = 10 und 10 · A + 30 · C = 7, also 60 · B = 10 – 7 = 3, $B = \frac{1}{20}$. Aus $10 \cdot A + \frac{20}{20} = 5$ folgt $A = \frac{2}{5}$. Aus $\frac{40}{20} + 30 \cdot C = 5$ folgt $C = \frac{1}{10}$. Briefmarken der Sorte A hatten $\frac{2}{5}$ M = 40 Pf, der Sorte B $\frac{1}{20}$ M = 5 Pf der Sorte C $\frac{1}{10}$ M = 10 Pf Wert.

7/13
Lösung:
Wegen Kraft = Gegenkraft, hätten 8 Pferde auf einer Seite ausgereicht, wenn man die andere Seite der Kugel im Erdboden verankert hätte.

7/14
Lösung:
Einseitiger Hebel, nicht entgleiste Achse als Drehpunkt. Lastarm 4 m, Last 270 kN, Kraftarm 10 m. Daraus erf. Kraft am Zugseil 108 kN.

8/8
Lösung:
Es sei a eine natürliche Zahl und $30 < a < 100$.
Dann gilt:
(1) 3|a, (2) 4|a – 1, (3) 5|a + 1.
Aus (2) folgt (4) 2|a + 1.
Aus (3) und (4) folgt (5) 10|a + 1.
Aus (2) folgt (6) 4|a + 1.
Aus (5) und (6) folgt (7) 20|a + 1.
Katrin hat recht.
b) Wegen (5) und (7) kommen 49, 69, 89 in Frage. Wegen (1) gilt 69.
Karls Großmutter ist 69 Jahre alt.

8/9
Lösung:
Für die erste und dritte Ziffer kann nur gelten: 1 und 2; 2 und 4; 3 und 6; oder 4 und 8.
Da das Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen stets durch 2 und auch durch 3 teilbar ist, sind nur 1020, 2040, 3060 und 4080 möglich.
Wären die zweite sowie vierte Ziffer 1, 2 oder 3, so wäre das Produkt entweder nicht durch 2 oder nicht durch 3 teilbar. Das Produkt endet also auf 0: Daraus folgt, daß einer der Faktoren durch 5 teilbar sein muß.
Es könnten demnach nur 13, 14, 15 oder 14, 15, 16 oder 15, 16, 17 die gesuchten Zahlen sein.
Tatsächlich erfüllen nur die Zahlen 15, 16, 17 mit 4080 als Produkt alle in der Aufgabe gestellten Bedingungen.

8/10
Lösung:
Es seien m und n zwei von Null verschiedene natürliche Zahlen. Entsprechend der Aufgabenstellung gilt dann

$(a + b) + \frac{a}{b} = 35$,

$\frac{a}{b} = 35 - a - b$,

$a = b \cdot (35 - a - b)$

$a = 35b - ab - b^2$

$a + ab = 35b - b^2$,

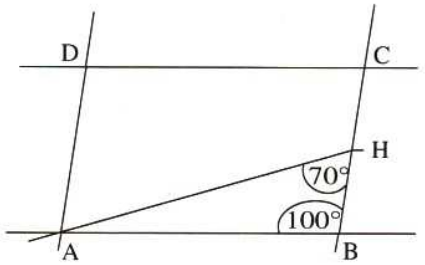
$a \cdot (1 + b) = b \cdot (35 - b)$,

$a = \frac{b \cdot (35 - b)}{b + 1}$.

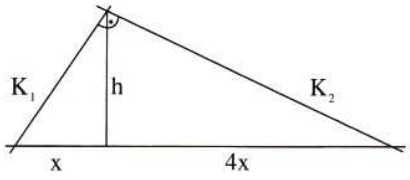
Diese Aufgabe hat 7 Lösungen. Sie lauten (als geordnete Paare (a;b) geschrieben):

(17;1), (22;2), (24;3), (25;5), (24;8), (22;11), (17;17).

8/11
Lösung:
(1) Winkel von 100° mit Scheitelpunkt B zeichnen.
(2) Von B aus 1,5 cm abtragen (auf dem Strahl, auf dem der Punkt C liegt; man erhält H.
(3) In H Winkel von 70° antragen, so daß freier Schenkel den anderen Strahl in A schneidet.
(4) Parallele zu $\overline{BH}$ durch A zeichnen und auf ihr von A aus 3 cm abtragen; man erhält D.
(5) Parallele zu $\overline{AB}$ durch D schneidet die Verlängerung von $\overline{BH}$ in C.
Skizze (nicht maßgerecht!):



8/12
Lösung:



Die Längen der Hypotenusenabschnitte seien mit x und 4x bezeichnet. Dann gilt nach dem Höhensatz

$h^2 = x \cdot 4x$,
$h^2 = 4x^2$,
$36\ cm^2 = 4x^2$
$9\ cm^2 = x^2$
$3\ cm = x$.

Die Hypotenusenabschnitte sind 3 cm bzw. 12 cm lang. Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt

$$A = \frac{15 \cdot 6}{2},\ A = 45\ cm^2$$

Die Kathetenlängen berechnet man nach dem Lehrsatz des Pythagoras:

$k_1 = \sqrt{3^2 + 6^2}$ $\quad k_2 = \sqrt{6^2 + 15^2}$

$k_1 = \sqrt{45}$ $\quad k_2 = \sqrt{180}$

$k_1 = 6{,}7$ cm $\quad k_2 = 13{,}4$ cm. (Näherungswerte)

Der Umfang des Dreiecks ist u = 15 cm + 13,4 cm + 6,7 cm; u = 35,1 cm. (Näherungswert)

8/13
Lösung:
(48 · 15 + 100 · 10) Watt Leistungsaufnahme. In 10 · 30 Stunden insgesamt 516 kWh.

8/14
Lösung:
Nimmt man die Dichte des Stahls $\delta = 7{,}8 g \cdot cm^{-3}$, so ergibt sich: $m = \pi \cdot 1 \cdot (r_a^2 - r_i^2) \cdot \delta$. Mit $r_a = 2{,}75$ cm, $r_i = 2{,}55$ cm, $l = 600$ cm ergibt sich m = 15,6 kg, daraus $F_G = 156$ N.

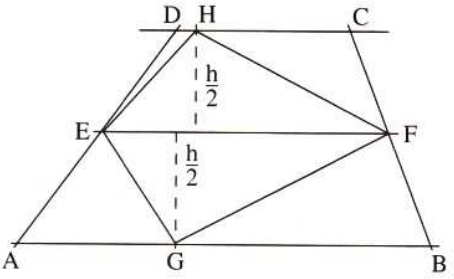
9/8
Lösung:
Die kleinste der vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sei mit a bezeichnet; dann sind die anderen Zahlen a + 1, a + 2, a + 3.
Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt weiter:
a + a + 1 + a + 2 + a + 3 = 18, d. h. 4a + 6 = 18 bzw. a = 3.
Die Zahl x^2 besteht also aus den Grundziffern 3, 4, 5, 6. Es gibt nun 24 mögliche vierstellige Zahlen mit diesen Grundziffern (Permutationen von 4 Elementen ohne Wiederholung!). Die einzige vierstellige Zahl von diesen 24 Zahlen, deren Wurzel eine natürliche Zahl ist, ist die Zahl $4356 = x^2$, und es ist x = 66.

9/9
Lösung:
Die Zahl z mit den geforderten Eigenschaften ist in dekadischer Darstellung $z = \overline{abab}$.
Sie läßt sich in der Form z = 1000a + 100b + 10a + b (a ≠ 0) schreiben. Das läßt sich zu 1010a + 101b = 101 · (10a + b) zusammenfassen.
Da 101 eine Primzahl ist und 10a + b < 100 gilt, kann es keine Quadratzahl von der geforderten Art geben.

9/10
Lösung:
Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck, das durch die Raumdiagonale, eine Flächendiagonale und eine Kante des Würfels gebildet wird. Bezeichnen wir die Flächendiagonale mit d und die Würfelkante mit a, so gilt nach dem Satz des Pythagoras $d^2 = 2a^2$ bzw. $d = a \cdot \sqrt{2}$. Für die Länge der Raumdiagonalen e gilt dann $e^2 = a^2 + \left(a \cdot \sqrt{2}\right)^2$ bzw. $e = a^2 + 2a^2$ bzw. $e^2 = 3a^2$, d. h. $3^2 = 3a^2$, $a^2 = 3$, $a = \sqrt{3}$.
Nun gilt für das Volumen dieses Würfels $V = a^3$, $V = \left(\sqrt{3}\right)^3$, $V \approx 5{,}2$
Das Volumen dieses Würfels beträgt etwa 5,2 cm^3.

9/11
Lösung:
Wir bezeichnen die Länge einer Quadratseite mit a. Nach dem Satz des Pythagoras gilt dann
$a^2 + a^2 = 3^2$; $2a^2 = 9$; $a^2 = 4{,}5$;
$a = \sqrt{4{,}5}$
$V = \left(\sqrt{4{,}5}\right)^3$;
Das Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge a ist $V = a^3$.
Also gilt in unserer Aufgabe $V \approx 9{,}546$.
Der Rauminhalt dieses Würfels beträgt etwa 9,5 cm^3.

9/12
Lösung:



Die Mittellinie $\overline{EF}$ des Trapezes geht auch durch die Mitte der Höhe h. Das Viereck EGFH wird durch die Mittellinie in zwei Dreiecke zerlegt. Für den Flächeninhalt eines jeden dieser Dreiecke gilt:

$$A = \frac{m \cdot \frac{h}{2}}{2}$$; also für beide Dreiecke zusammen $A = m \cdot \frac{h}{2}$. Da der Flächeninhalt des Trapezes A = m·h ist, nimmt das Viereck EGFH genau 50% der Fläche des Trapezes ein. Es spielt keine Rolle, wo die Punkte G auf $\overline{AB}$ und H auf $\overline{DC}$ festgelegt werden, da Dreiecke mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe flächengleich sind.

9/13
Lösung:
Aus Verzögerungskraft = Reibungskraft folgt $a = \mu \cdot g$ (g = Fallbeschl., a = maximale Verzögerung). Aus v/t = a folgt $t = v/\mu \cdot g \cdot t = 7{,}6$ s. Mit $s = a \cdot t^2/2$ ergibt sich s = 84,4 m.

9/14

Lösung:

Die abgegebene Wärmeleistung ist gleich der zugeführten Leistung. $P_{el} = U \cdot I = U^2/R$. Die abgegebene Wärme steigt um das 16fache (in der gl. Zeit).

10/6

Lösung:

Das Motorrad erreicht den PKW nach 300 m. Beschleunigung des Motorrades $0{,}816\ m \cdot s^{-2}$. Geschwindigkeit $88{,}2\ km \cdot h^{-1}$.

10/7

Lösung:

Auf die Last wirken die Fallbeschleunigung und die Beschleunigung, die durch das Anheben hervorgerufen wird $a = 3\ m \cdot s^{-2}$. Maximale Geschwindigkeit nach 3 s beträgt $9\ m \cdot s^{-1}$.

10/8

Lösung:

Das Volumen eines Zylinders ist

$$V = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot h}{4}.$$

$$V = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot 5d}{4};\ 3{,}927 = \frac{5 \cdot \pi \cdot d^3}{4};$$

$$d^3 = \frac{3{,}927 \cdot 4}{5 \cdot \pi};\ d = \sqrt{\frac{3{,}927 \cdot 4}{5 \cdot \pi}};\ d = 1\ cm.$$

Nach den Bedingungen der Aufgabe ist der Durchmesser der Zylindergrundfläche gleich dem Kugeldurchmesser einer solchen Kugel und die Höhe des Zylinders gleich dem fünffachen Kugeldurchmesser.

Somit ergibt sich $V = \frac{4 \cdot \pi r^3}{3}$;

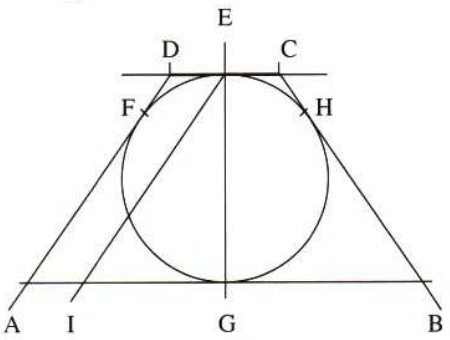
Das Volumen einer solchen Kugel ist

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot 0{,}5^3}{3};\quad V = 0{,}5236\ cm^3.$$

Für die Herstellung der 5 Kugeln benötigt man $0{,}5236 \cdot 5 \cdot 7{,}85 = 20{,}55$ g Stahl.

10/9

Lösung:



Es seien E, F, G, H die Berührungspunkte der Trapezseiten $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ mit dem Kreis. Eine Parallele zu $\overline{BC}$ durch E schneide $\overline{AD}$ in I. Es sei die Länge von $\overline{AD} = s$.. Wegen des Satzes über gleichlange Tangentenabschnitte gilt $\overline{DE} = \overline{DF}$, $\overline{AF} = \overline{AG}$ wegen gleichlanger Gegenseiten im Parallelogramm EDAI ist $\overline{AI} = \overline{DE}$. Im rechtwinkligen Dreieck EIG gilt nach dem Satz des Pythagoras $s^2 = (2r)^2 + (s-r)^2$; $s^2 = 4r^2 + s^2 - 2rs + r^2$; $5r^2 = 2rs \quad | :2r$

$$\frac{5}{2}r = s.$$

$$\overline{AG} = s - \frac{r}{s} = \frac{5}{2}r - \frac{r}{2} = 2r.$$

Es folgt $\overline{AB} = 4r$.

Der Umfang des Trapezes ist somit

$$u = r + 4r + \frac{5}{2}r + \frac{5}{2}r;\ u = 10r.$$

10/10

Lösung:

Wir erhalten die Koordinaten der Schnittpunkte von Parabel und Gerade, wenn wir $x^2 - 6x + 8 = x - 4$ setzen und nach x auflösen: $x^2 - 7x + 12 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$x_1 = 4$, es folgt $y_1 = 0$

$x_2 = 3$, es folgt $y_2 = -1$.

Die Koordinaten der Schnittpunkte sind (4;0) und (3; – 1).

Wenn eine Gerade mit dem Anstieg $-\frac{1}{2}$ durch $P_1 = (4;0)$ geht, dann schneidet sie die y-Achse bei 2; die Gerade hat die Gleichung $y = -\frac{1}{2}x + 2$; wenn sie durch $P_2 = (3; -1)$ geht, schneidet sie die y-Achse bei $\frac{1}{2}$ und hat die Gleichung

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Den Schnittpunkt mit der y-Achse erhält man, indem man in die allgemeine Gleichung $y = mx + n$ für

$m = -\frac{1}{2}$ für $x = 4$ und $y = 0$ setzt:

$0 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + n;\ n =$ wenn die Gerade

durch (3;–1) geht: $-1 = -\frac{1}{2} \cdot 3 + n;\ n = \frac{1}{2}$

10/11

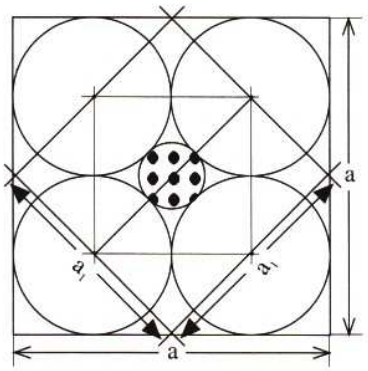
Lösung:

(1) Der Durchmesser des schraffierten Kreises sei x, dann ist der Flächeninhalt $A = \frac{\pi \cdot x^2}{4}$

(2) Berechnung von x:

$x = a_1 - r - r;\ x = a_1 - 2r$

(r sei der Radius eines der vier Kreise)



Wegen $r = \frac{a}{4}$ gilt nun $x = a_1 - \frac{a}{2}$

(3) Berechnung von a_1:

Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$a_1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2;$$

$$a_1^2 = \frac{a^2}{2};$$

$$a_1 = a\sqrt{\frac{1}{2}}$$

(4) Nach Einsetzen folgt $x = a\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{a}{2}$

(5) Nun setzen wir den Term für x in die Flächenformel ein und erhalten

$$A = \frac{\pi}{4} \cdot x^2;\ A = \frac{\pi}{4} \cdot \left(a\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{a}{2}\right)^2;$$

$$A = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{a^2}{2} - a^2\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{a^2}{4}\right);$$

$$A = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{3a^2}{4} - a^2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$A = \frac{\pi}{4}a^2\left(\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right);$$

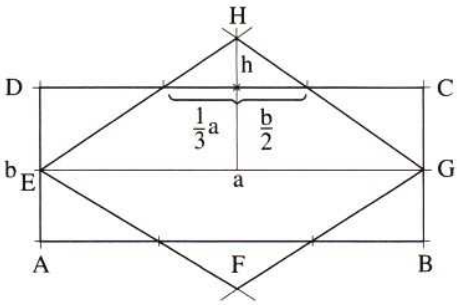
$$A \approx 0{,}7854a^2 \cdot 0{,}043$$

$$A \approx 0{,}034a^2$$

10/12

Lösung:

Es seien $\overline{EG} = a$ und $\overline{AD} = b$. Die Höhe



des Dreiecks, das außerhalb des Rechtecks liegt, sei mit h bezeichnet. Dann gilt nach dem Strahlensatz:

$$h : \left(h + \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{3}a : a = 1 : 3.$$

$$3h = h + \frac{b}{2}; \quad h = \frac{b}{4}.$$

Der Flächeninhalt des Rhombus ist dann $A' = a \cdot \frac{3}{4}b$ Wegen $a \cdot b = 40\ cm^2$ ist

$A' = 30\ cm^2$.

10/13

Lösung:

Die Auftriebskraft beträgt $V \cdot \delta \cdot g = 697$ N. Da die Gewichtskraft nur 677 N beträgt, taucht er nicht ganz unter.

10/14

Lösung:

Aus $R_{ges} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ mit $X_L = 2\pi \cdot f \cdot L$ und $X_c = 1/2\pi \cdot f \cdot C$ erhält man für die Kapazität des Kondensators C_1 = 3,8 µF und C_2 = 7,8 µF, wenn man R_{ges} = 220 V/1 A = 220 Ω setzt.

E/1

Lösung:

Es sei a die Basis unseres gesuchten Zahlensystems.

Dann gilt die folgende Darstellung der Gleichung:

$5 \cdot a^2 + 2 \cdot a + 5 + 3 \cdot a + 4 = (2 \cdot a + 5)^2$,

$5a^2 + 2a + 5 + 3a + 4 = 4a^2 + 20a + 25$,

$a^2 - 15a - 16 = 0$.

Diese quadratische Gleichung lösen wir nach a auf und erhalten

$$a_{1,2} = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{225 + 64}{4}}$$

$$a_{1,2} = \frac{15}{2} \pm \frac{17}{2}$$

$a_1 = 16$

$a_2 = -1$ (entfällt, da als Basis eines Zahlensystems nicht definiert)

Die gegebene Gleichung stellt im Sechzehnersystem eine wahre Aussage dar. Probe:

$5 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16 + 5 + 3 \cdot 16 + 4 = (2 \cdot 16 + 5)^2$

$1280 + 32 + 5 + 48 + 4 = 37^2$

$1369 = 1369$

E/2

Lösung:

Für einen Würfel gibt es 6 mögliche Ausgänge des Ergebnisses, für zwei Würfel $6^2 = 36$, ..., für vier Würfel $6^4 = 1296$ verschiedene Ausgänge. Man hat nun die Anzahl der günstigen Ausgänge des Ergebnisses durch die Anzahl aller möglichen Ausgänge zu dividieren und erhält $\frac{4}{1296} = \frac{1}{324}$, d. i. 0,003086 ... bzw. etwa 0,31 %.

Beim Werfen von 10 Geldstücken gibt es für jede Münze zwei Ausgänge des Ergebnisses, wovon einer günstig ist, für zwei Münzen gibt es 2^2, für 3 Münzen 2^3, ..., für zehn Münzen 2^{10} verschiedene Ausgänge, wovon 10 günstig sind. Wir erhalten nun $\frac{10}{1024} = 0{,}00976 ...$ bzw. etwa 0,98 %.

Beim Münzwurf dieser Art liegt also eine höhere Wahrscheinlichkeit vor, 10 Zahlen oben liegen zu haben, als mit 4 Würfeln viermal die 6 zu erreichen.

E/3

Lösung:

a) Ein Stein kann 49 verschiedene Positionen einnehmen. Kommt ein zweiter Stein hinzu, bleiben für diesen noch 48 mögliche Positionen. Insgesamt gibt es also $49 \cdot 48 = 2352$ verschiedene Positionen. Wenn die Spielsteine gleich sind, kann man die beiden bei jeder Position vertauschen, ohne daß diese verschieden sind. Es sind demnach $2352 : 2 = 1176$ verschiedene Positionen.

b) Sind die Spielsteine verschieden, so ergeben sich 2352 verschiedene Positionen.

E/4

Lösung:

$13 : 8 = 1$ Rest 5,

13 läßt bei Division durch 8 den Rest 5,

13^2 läßt bei Division durch 8 den Rest 1;

13^{2n} $(n \in N)$ läßt bei Division durch 8 den Rest 1,

$13^{2 \cdot 84} = 13^{168}$ läßt bei Division durch 8 den Rest 1,

$13^{168} \cdot 13^1 = 13^{169}$ läßt bei Division durch 8 den Rest $1 \cdot 5 = 5$.

E/5

Lösung:

Das Problem besteht darin, aus 6 verschiedenen Punkten jeweils 3 bzw. 4 bzw. 5 auszuwählen. Kein Punkt darf bei einer derartigen Auswahl mehrfach genommen werden. Auf die Anordnung der Punkte kommt es nicht an, denn ABC ist z. B. dasselbe Dreieck wie ACB usw.

Es handelt sich also jedesmal um Kombinationen ohne Wiederholung.

a) Kombinationen von 6 Elementen zur 3. Klasse:

$$\binom{6}{3} \text{ (gelesen : 6 über 3)} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= 20 \text{ Dreiecke.}$$

b) Kombinationen von 6 Elementen zur 4. Klasse:

$$\binom{6}{4} \text{ (gelesen : 6 über 4)} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$= 15 \text{ Vierecke.}$$

c) Kombinationen von 6 Elementen zur 5. Klasse:

$$\binom{6}{5} \text{ (gelesen : 6 über 5)} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$= 6 \text{ Fünfecke.}$$

n. b.: Es gibt folgende Vereinfachungen:

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{6-4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15 \quad \text{und}$$

$$\binom{6}{5} = \binom{6}{6-5} = \binom{6}{1} = 6$$

E/6

Lösung:

Da der Drehimpuls bei diesem Vorgang erhalten bleibt, gilt:

$m \cdot r_1^2 \cdot \omega_1 = m \cdot r_2^2 \cdot \omega_2$. Da $\omega = 2\pi n$ folgt $n_2 = r_1^2 \cdot n_1 / r_2^2 = 0{,}04\ s^{-1}$.

E/7

Lösung:

Der Impuls bleibt erhalten.

$v = 1{,}5\ m \cdot s^{-1} \cdot 800\ kg / (600\ kg + 800\ kg) = 0{,}86\ m \cdot s^{-1}$.

E/8

Lösung:

Für jede arithmetische Folge gilt: $a_n = a_1 + (n - 1)d$,

in unserem Falle also

(1) $a_3 = a_1 + (3 - 1)d$ und

(2) $a_{12} = a_1 + (12 - 1)d$. Wir setzen ein und vereinfachen:

$$(1)\ 3\frac{1}{4} = a_1 + 2d$$

$$(2)\ 16\frac{3}{4} = a_1 + 11d. \text{ Wir subtrahieren (1) von (2):}$$

$$(3)\ 13\frac{1}{2} = 9d,\ d = 1\frac{1}{2}. \text{ Wir setzen in (1) ein:}$$

$$(4)\ 3\frac{1}{4} = a_1 + 3,\ a_1 = \frac{1}{4}.$$

Die ersten 5 Glieder der Folge sind: $\frac{1}{4}, 1\frac{3}{4}, 3\frac{1}{4}, 4\frac{3}{4}, 6\frac{1}{4}, ...$

b) Wir setzen in die Gleichung $a_n = a_1 + (n-1)d$ die gefundenen Werte ein und erhalten

$$a_n = \frac{1}{4} + (n-1)\cdot 1\frac{1}{2},\quad a_n = 1\frac{1}{2}n - 1\frac{1}{4}.$$

c) $a_{100} = a_1 + 99d$, $a_{100} = \frac{1}{4} + 99 \cdot 1\frac{1}{2}$,

$$a_{100} = 148\frac{3}{4}.$$

d) Für die n. Partialsumme einer arithmetischen Folge gilt

$$s_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n),\ \text{also}\ s_{100} =$$

$$50\left(\frac{1}{4} + 148\frac{3}{4}\right), s_{100} = 50 \cdot 149 = 7450.$$

E/9
Lösung:

a) 40 000 000 m : 5,50 m = 1,50 m : x,

$$x = \frac{5{,}50\ \text{m} \cdot 1{,}50\ \text{m}}{40\,000\,000\ \text{m}};\ x = 0{,}000.000.206$$

$\approx$ 0,000.000.2 m;

$$x \approx 0{,}0002\ \text{mm};\ x \approx \frac{1}{5000}\ \text{mm}.$$

Man dürfte sich höchstens um $\pm\frac{1}{5000}$ mm vermessen.

b) 40 000 km : 0,0055 km
= 150 000 000 km : x;

$$x = \frac{0{,}0055\ \text{km} \cdot 150\,000\,000\ \text{km}}{40\,000\ \text{km}};$$

$x = 20{,}625$ km.

Man dürfte sich höchstens um 20,625 km vermessen.

E/10
Lösung:

Es handelt sich um einen erweiterten Dreisatz. Man kann zunächst auf die zwei Einheiten schließen: Ein einzeilige 1 mm lange Anzeige kostet $\frac{181{,}40\ \text{DM}}{4 \cdot 117}$.

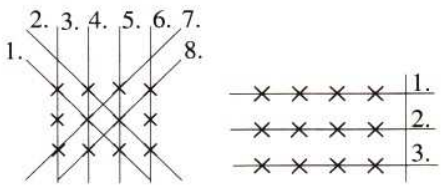
Eine siebenzeilige 83 mm lange Anzeige kostet $\frac{181{,}40\ \text{DM} \cdot 7 \cdot 83}{4 \cdot 117} = 225{,}20$ DM incl. MWSt.

Nun gilt 225,20 : x = 114 : 100,

$$x = \frac{225{,}20 \cdot 100}{114},$$

x = 197,54 DM

E/11
Lösung:



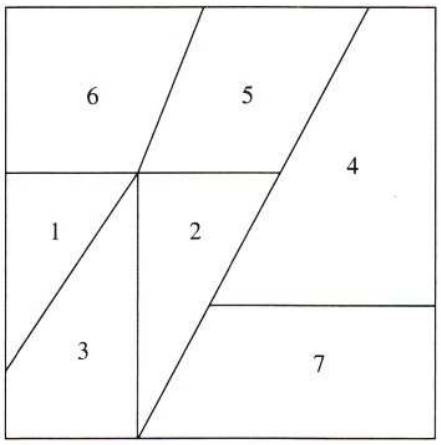
Wir erkennen an der Skizze, daß achtmal je drei Punkte auf einer Geraden liegen, deren Verbindungsgeraden bestimmen kein Dreieck. Es liegen weiterhin dreimal vier Punkte auf einer Geraden. Jede beliebige Auswahl von drei aus diesen vier Punkten führt ebenfalls zu keinem Dreieck. Es fallen also außer den 8 noch weitere

$$3\cdot\binom{4}{3} = 3\cdot\binom{4}{4-3} = 3\cdot\binom{4}{1} = 3\cdot 4 = 12$$

Fälle weg.

Nun berechnet man alle Möglichkeiten, aus 12 Punkten 3 Punkte auszuwählen, d.s. $\binom{12}{3} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 220$ und subtrahiert davon die 20 Auswahlen, die zu keinen Dreiecken führen. Somit kann man auf die angegebene Weise 200 verschiedene Dreiecke zeichnen.

E/12
Lösung:



Es muß gelten: $F_R = F_G$ (F_R - Radialkraft, F_G - Gravitationskraft)

Daraus folgt: $v^2 = \chi \cdot \frac{M_E}{r}$.

Ersetzung der Bahngeschwindigkeit v durch die Winkelgeschwindigkeit ω ($v = \omega \cdot r$) führt zu: $r = \sqrt[3]{\chi \cdot \frac{M_E}{\omega^2}}$.

Unter Nutzung von $\omega = \frac{1}{24\,\text{h}} \cdot 2\pi$ und $r = r_E + h$

erhält man: $h = \sqrt[3]{\chi \cdot \frac{M_E}{4\pi^2} \cdot 24\text{h}} - r_E$

$$\underline{h = 35\,870\ \text{km}}$$

E/13
Lösung:

Damit keine ablenkenden Kräfte auf das bewegte Elektron wirken, muß die Lorentzkraft entgegengesetzt gleich der Kraft durch das elektrische Feld sein. $e \cdot v_z \cdot B_y = e \cdot E_x$. Daraus: $v_z = E_x/B_y$.

E/14
Lösung:

Aufgenommene Wärme = abgegebene Wärme.

$m_{Al}c_{Al}(t_2 - t_m) = m_{Ag}c_{Ag}(t_m - t_1) + m_w c_w(t_m - t_1)$. $t_m = 20°$ C.

Buchrezension

Die neue Reihe über die jungen Supertalente

In der neuen Reihe *Challengers – So spielt ...* soll die erfolgreiche Karriere junger Großmeister der absoluten Weltspitze unverwechselbar dokumentiert werden. Der erste Band ist Nigel Short gewidmet, dem derzeit besten Schachspieler des Westens.

Auf Wunderkindern lastet stets der Fluch hoher Erwartungen. Nigel Short hat sie erfüllt: Mit 14 teilte er den Sieg bei der Britischen Meisterschaft; mit 15 wird er Jugendvizeweltmeister hinter Garri Kasparow; mit 19 ist er Großmeister; mit 22 wird er WM-Kandidat und die Nummer drei der Schachwelt hinter K & K. Aus der großen Hoffnung des Westens wurde der Beste des Westens. Plötzlich aber der Karriereknick! Doch Nigel Short hat diese unerwartete Stagnation glänzend überwunden. Im April 1992 wirft er keinen Geringeren als Exweltmeister Anatoli Karpow aus dem Rennen um das Recht, mit Titelverteidiger Garri Kasparow um die Schachkrone zu spielen. Und seine Großmeisterkollegen attestieren ihm, daß er sich noch gehörig steigern kann.

Übrigens: Weltmeister Kasparows Tip für das WM-Finale 1993 lautet: „My Challenger will be Short!" Deshalb unser Tip an alle Schachfans: Nehmt diese Herausforderung an und studiert das Spiel von Nigel Short. Gewinnbringende Ideen für die eigene Praxis sind mit diesen ungewöhnlichen Schachbuch garantiert!

Stefan Löffler (Hrsg.): Challengers – So spielt Nigel Short
Ca. 128 Seiten, ca. 10 Fotos, ca. 70 Diagramme, 13,8 x 22,5 cm, Broschur
DM 24,80
ISBN 3-328-00586-2
Sportverlag 1993

Spielstärkevergleich

Die Berechnung der Wertzahlen im Schach

Was für die Tennisprofis die ATP-Rangliste, ist für die deutschen Schachamateure (und die wenigen Profis) die Rangliste nach DWZ. Jeder Spieler, der sich an Wettkämpfen, die gewissen Normen unterliegen, beteiligt, erhält eine Wertzahl – seine relative Spielstärke zu einem bestimmten Zeitpunkt ausdrückend. Wie erfolgt nun die Berechnung?

In fast allen Ländern der Welt werden modifizierte Wertungssysteme, die eine Klassifizierung der Schachspieler ermöglichen, nach dem vom amerikanischen Prof. Arpad E. Elo entwickelten Verfahren – deshalb auch ELO-System genannt – angewendet.

Das ELO-System ist nach wissenschaftlichen Methoden der Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie aufgebaut. In Deutschland wurden auf der Basis des ELO-Systems die Deutschen Wertzahlen (DWZ) eingeführt.

In den weiteren Ausführungen werden folgende Abkürzungen verwendet:

Ro: eigene DWZ vor Auswertung des Turniers
Rh: Turniererfolgszahl
Rc: Durchschnitt der DWZ der Gegner
D: Differenz zwischen eigener DWZ und Rc
P (D): Gewinnerwartung pro Partie in Punkten bezogen Ro des jeweiligen Gegners
D (P): Differenz der Wertungszahl abhängig vom Punktergebnis P (P=W/n) aus Wahrscheinlichkeitstabellen (Umkehrung von P(D))
W: Summe der erzielten Punkte
We: Summe der Punktwerte der Gewinnerwartung
n: Anzahl der wertbaren Partien
Rn: neue Wertzahl nach Auswertung des Turniers
E: Entwicklungskoeffizient (abhängig von Alter und Spielstärke)
K: Entwicklungskoeffizient (in Formel (4) und (8))
J: Alterskonstante

Für Spieler ohne DWZ

Es wird eine Turniererfolgszahl Rh berechnet:

(1) Rh= Ro+((W-We) · 800/n).

Die Gewinnerwartung P(D) kann einer Wahrscheinlichkeitstabelle entnommen werden, wobei bei gleicher angenommener Spielstärke P(D)=0.50 ist und z. B. bei einer Differenz von +-100 DWZ-Punkten P(D)=0.64 bzw. 0.36 ist. Bei einer Differenz über 735 wäre P(D)=1.00 bzw. 0.00, woraus sich erklärt, daß diese Extremergebnisse zu keiner Auswertung (neue Zahl) führen. Die positiven Ergebnisse werden aber gespeichert und später berücksichtigt. P(D) kann auch mit folgender, hinreichend genauen Näherungsformel berechnet werden:

(2) P(D)=1/(1+10-d/400).

Die Berechnung von Rh erfolgt durch ein Iterationsverfahren, in dem mit einem Schätzwert für Ro begonnen wird. Mit diesem Schätzwert, in die Gleichung (1) eingesetzt, erhält man einen ersten Näherungswert für Rh. Dieser wird dann als Ro in die Gleichung eingesetzt, und man erhält eine verbesserte Näherung für Rh. Selbstverständlich muß man bei jedem neuen Berechnungsvorgang auch den neuen Wert für We, bezogen auf den letzten Näherungswert von Rh, verwenden. Dieses Verfahren wird solange wiederholt, bis sich die auf eine ganze Zahl gerundete Turniererfolgszahl nicht mehr ändert. Diese Zahl ist dann die gesuchte Turniererfolgszahl. Sie erfüllt dann mit Rh=Ro die Gleichung (1).

Beispiel: Für den Spieler X soll gelten

Punkte	Gegner	DWZ
0	A	2250
0	B	2000
0.5	C	1800
0	D	1700
1	E	1400
1.5		9150

Einen für den Beginn der Iterationsrechnung brauchbaren Näherungswert erhält man durch folgende Formel:

(3) Rh=Rc+D(P)

W=1.5

n=5

P=W/n=1.5/5=0.3

D=-149

Rc=9150/5=1830

Rh=1830-149=1681 : Näherungswert für den Beginn der Iterationsrechnung

Dieser Wert wird als Ro in Formel (1) eingesetzt (siehe Tabelle links).

Tabelle der Iterationsrechnung

	1. Durchg. Ro = 1681		2. Durchg. Ro = 1633		3. Durchg. Ro = 1617		4. Durchg. Ro = 1612		5. Durchg. Ro = 1609	
Pkt/Gegn	D	P(D)	D	P(D)	D	P(D)	D	P(D)	D	P(D)
0 A 2250	-569	0.02	-613	0.02	-633	0.01	-638	0.01	-641	0.01
0 B 2000	-319	0.13	-367	0.10	-383	0.09	-388	0.09	-391	0.09
0.5C 1800	-119	0.34	-167	0.28	-183	0.26	-188	0.26	-191	0.25
0 D 1700	-19	0.47	-67	0.41	-83	0.39	-88	0.38	-91	0.38
1 E 1400	281	0.84	233	0.79	217	0.78	212	0.78	209	0.77
Summe P(D)=We=	1.80		1.60		1.53		1.52		1.50	
W-We=	-0.3		-0.1		-0.03		-0.02		0	
Rh= Ro+(W-We)*160=	1633		1617		1612		1609		1609	

Somit ist Rh=Ro=1609 die erste Wertungszahl für den Spieler X.

Tabelle

Berechung einer neuen Wertungszahl

Die neue Wertungszahl Rn kann aus dem Turnierergebnis und der alten Wertungszahl Ro mit folgender, von der FIDE

(Weltschachbund) verwendeten Formel berechnet werden:
(4) Rn=Ro+(W-We) · K
wobei K durch
(5) K=800/(E+n)
bzw. E=800/k-n definiert ist und E mit der Formel (10) berechnet wird. Aus Formel (4) und (5) ergibt sich dann
(6) Rn=Ro+(w-We) · 800/(E+n)
Soll die neue Wertzahl Rn aus der Turniererfolgszahl Rh und der alten DWZ Ro berechnet werden, so können mit folgenden 2 Formeln mathematisch identische Ergebnisse wie mit Formel (4) erzielt werden:
(7) Rn=E · Ro+n · Rh/(E+n)
oder
(8) Rn=Ro+Rh-Ro · k · n/800
wobei wiederum Formel (5) für die Beziehung zwischen K und E gelten muß. Formel (8) kann somit auch folgendermaßen geschrieben werden:
(9) Rn=Ro+(Rh-Ro) · n/(E+n)
Der Entwicklungskoeffizient E (Neuerung gegenüber dem ELO-System) wird abhängig vom Alter und der Spielstärke berechnet:
(10) $E=(Ro/1000)^{+J}$ wobei gilt:
J=5 für Jugendliche bis 20 Jahre
J = 10 für Junioren von 21 bis 25 Jahre
J = 15 für alle Spieler ab 26 Jahren
Dieses bevorzugt jüngere Spieler bei ihrer Leistungsentwicklung.
Berechnungsbeispiel für Spieler NN gilt:
18 Jahre alt Ro=1800

Pkt P(D)	Gegner	DWZ	D
1 A	2300	-500	0.04
0 B	2100	-300	0.15
1 C	2000	-200	0.24
0.5 D	1900	-100	0.36
1 E	1800	0	0.5

W=3.5
We=Summe (P(D))=1.29
n=5
Mit diesen Werten erhält man nach Gleichung (1) die Turniererfolgszahl Rh:
Rh=1800+((3.5-1.29) · 800/5)
Rh=2153.6
Rh=2154
Die neue DWZ erhält man mit E=15 (aus Tabellen zu entnehmen oder mit Formel (10) zu berechnen) z. B. nach Gleichung (4):
Rn=Ro+(W-We) · K (K=800/(E+n))
Rn=1800+(3.5-1.29) · (800/(15+5))
Rn=1888.4
Der gerundete Wert ergibt Rn=1888, also einen Zuwachs um 88, was auch logisch ist, denn gegen einen DWZ-Durchschnitt Rc=2020 wurden 70%der Punkte erzielt.
Spielstärkebewertung nach DWZ

0..700	– Anfänger/Lernender
700..1000	– fortgeschr. Anfänger
1000..1500	– Vereinsspieler
1500..1800	– guter Vereinsspieler
1800..2150	– starker Vereinsspieler
2150..2300	– Nationaler Meister
2300..2400	– Internationaler Meister
2400..2500	– Großmeister
über 2500	– Weltklassespieler

Holger Borchers,
Vizepräsident des Berliner Schachverbandes

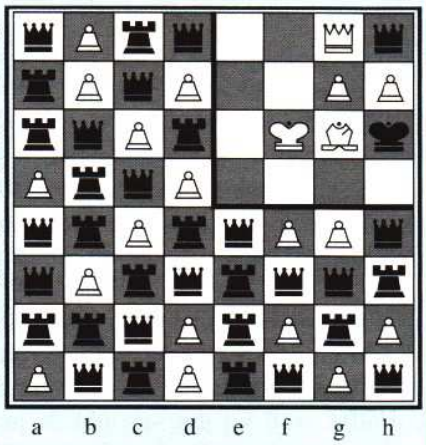
Buchrezension

Wie schlägt man Bobby Fischer?
Edmar Mednis hat alle Verlustpartien des elften Schachweltmeisters (1972-1975), der am 2. September 1992 sein unerwartetes Comeback feierte, untersucht und gibt damit Antwort auf die Frage: Wie schlägt man Bobby Fischer?
Edmar Mednis, selbst Großmeister, hat im Jahr 1974 das kühne Wagnis unternommen, alle 61 Verlustpartien des Exzentrikers aus Pasadena/USA im Zeitraum vom 17.12.1957 bis zum Gewinn der Schachkrone am 2.9.1972 akribisch zu untersuchen. Das Ergebnis ist die verblüffende Antwort auf die alle Schachfans bewegende Frage: Wie schlägt man Bobby Fischer? Mednis, der selbst zu den insgesamt 33 „Auserwählten" gehört, denen dieses schachliche Wunder bisher gelungen ist, hat seine geniale Idee in diesem aufsehenerregenden, unterhaltsamen Buch veröffentlicht. Er bestätigt nachhaltig, was der Engländer Raymond Keene einmal treffend über das heute 49jährige „Superhirn" Bobby sagte: „Fischer macht Schach einfach zu einer aufregenden Sache, wann immer er sich ans Brett setzt."

Edmar Mednis: Wie schlägt man Bobby Fischer?
Originaltitel: How To Beat Bobby Fischer, Bantam Books Inc., New York.
Deutsche Erstausgabe
Ca. 256 Seiten, ca. 200 Diagramme, ca. 14 Fotos, 13,8 x 22,5 cm, gebunden
ca. DM 29,80
ISBN 3-328-00488-9
Sportverlag 1993

2 in 1

Unsere schachliche Knobelaufgabe beinhaltet diesmal zwei Aufgaben unterschiedlicher Art auf einem Schachbrett. Bei der ersten Aufgabe ist in dem abgegrenzten Teilquadrat des Schachfeldes ein Zweizüger von T. Schönberger zu lösen. **Wie beginnt Weiß und setzt den schwarzen König im 2. Zug matt?**
Für die zweite Aufgabe sind im übrigen Teil des Schachfeldes weiße Bauern, schwarze Türme und schwarze Damen scheinbar planlos angeordnet. **Hier ist zu versuchen, den dargestellten Teil des Schachfeldes in mehrere Teile zu zerlegen. Die zerlegten Teile sollen geometrisch identisch sein und die gleichen Schachsteine enthalten. Ist dies möglich?** *Harald Rüdiger*

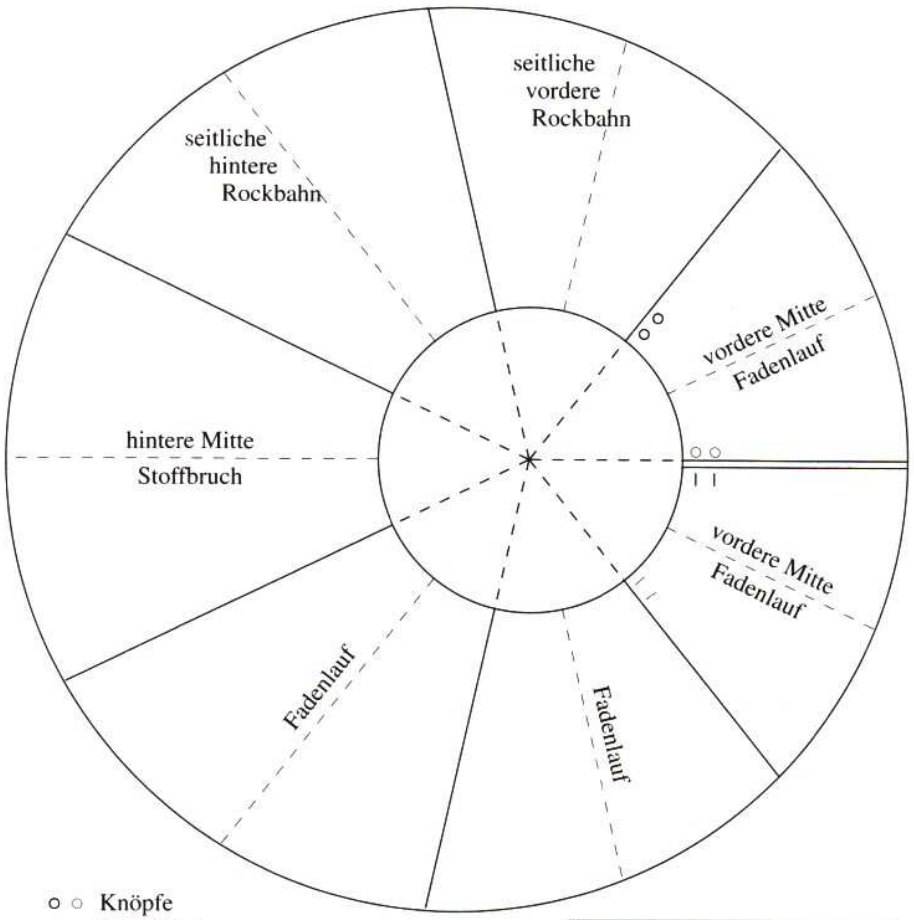


Mode und Mathematik

Eine Aufgabe für künftige Couturiers

Hella hat in einem Modegeschäft einen Rock gesehen, der ihr ausnehmend gut gefällt. Aber er ist zwei Nummern zu groß für sie. Also beschließt sie, ihn nachzuarbeiten. Die Herstellung des extravaganten Wickelrocks, der hinten doppelt so lang ist wie vorn, erfordert aber mathematische Kenntnisse.

Wenn man den Rock flach ausbreitet, bilden Saum- und Taillenlinie zwei exzentrische Kreise. Wo die Entfernung der beiden Peripherien am kürzesten ist, wurde die Fläche auseinandergeschnitten. Die sechs Nähte, die die Rockbahnen verbinden, stellen Verlängerungen von Taillenkreisradien dar und sind am Bund gleich weit voneinander entfernt. Nur die beiden Vorderteile sind oben etwa 1,5 cm breiter. Daraus schließt Hella: Der Zentriwinkel, den die Verlängerungen von Naht und Kante je eines Vorderteils bilden, ist schätzungsweise um 5° größer als die fünf restlichen Zentriwinkel.



Die Markierungen geben an, wo die Teilungsnähte auf den Bund treffen.

Vorüberlegungen

Zieht man den Rock nun an und knöpft die beiden Vorderteile übereinander, dann überdecken sie sich so weit, daß die kurze Kante des Über- bzw. des Untertritts jeweils die nächste Teilungsnaht berührt. Bundstreifen und Kreisumfang müssen also entsprechend größer sein als Hellas Taillenweite.

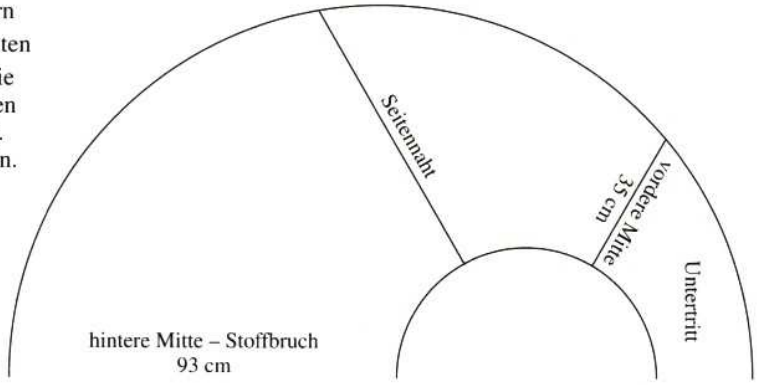
Sie geht von folgenden Maßen aus:

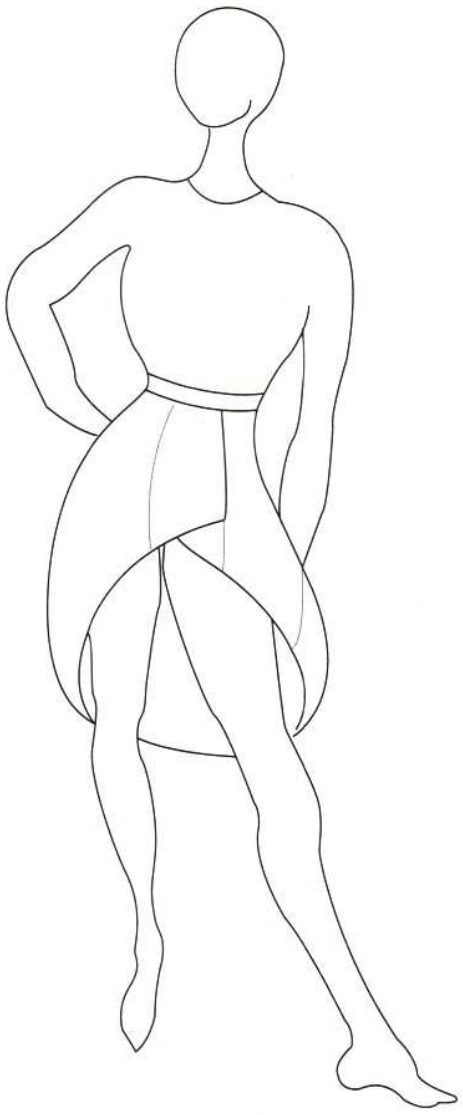
- Taillenweite (locker gemessen, weil nur der Bund straff sitzen muß): 65 cm
- straff gemessene Taillenweite 63 cm
- Rocklänge in der vorderen Mitte 40 cm
- Rocklänge in der hinteren Mitte 80 cm

Das Ergebnis der Bund- und Radiusberechnung rundet Hella auf ganze Zentimeter auf und konstruiert den Schnitt nur als Hälfte, weil sie ihn, wie üblich, auf den längs gefalteten Stoff auflegen will. Als Probe fertigt sie den Rock erst einmal im Maßstab 1:5 für die schlanke Puppe ihrer kleinen Schwester.

Schnitt für einen Wickelrock (Hälfte) gegeben sind:

Taillenweite
Rocklänge vorn
Rocklänge hinten
Winkel, den die Verlängerungen der beiden o.g. Strecken bilden.





Aufgabenstellungen

Die Aufgaben, die Hella im einzelnen lösen muß, könnt Ihr Euch nun eigentlich selbst stellen. Enscheidet also, ob Ihr gleich ans Knobeln geht oder – als Arbeitsanleitung – erst noch die folgenden Fragen lest.

1. **Wie lang muß der Bund werden?**
2. **Wie groß ist der Radius des Taillenkreises?**
3. **Wie groß ist der Winkel, in dem sich die Verlängerungen von vorderer und hinterer Mitte treffen?**
4. **Wo liegt der Mittelpunkt des Saumkreises? (Bestimmungslinien!)**
5. **Konstruiere den Schnitt (Hälfte) und gib bei jeder Rockbahn den Fadenlauf (Mittellinie, Winkelhalbierende) an!**
6. **Schneide die vier Schnitt-Teile aus und lege sie so auf den 1,50 m breiten, längs gefalteten Stoff, daß Du**

a) **den Fadenlauf beachtest (Fadenlauf = Parallele zur Webekante – Augenmaß genügt)**

b) **für Nähte und Säume rundum ca. 1 cm zugibst (auch hier genügt das Augenmaß);**

c) **an der Webekante einen 8 cm breiten Bundstreifen übrigbehältst, der aus zwei oder drei Teilen so zusammengesetzt sein darf, daß Bundnähte auf Rockbahnnähte treffen;**

d) **und daß wenig Verschnitt entsteht.**

7. **Wieviel Meter Stoff muß Hella kaufen? Meßt auf Eurer Skizze nach und rundet auf volle Dezimeter auf!**

Johanna Heller

Knobeleien

Größte Primzahl!?

Welches ist die größte Primzahl, aus der durch alle möglichen Streichungen ihrer Ziffern stets wieder Primzahlen entstehen?

Lösung

Da 1 und 9 keine Primzahlen sind und eine oder mehr mehr als 1 Ziffer gestrichen werden darf, kommen nur die Ziffern 2, 3, 5 und 7 in Frage, wobei 2 oder 5 jeweils nur an erster Stelle stehen dürfen. Keine der dreistelligen Primzahlen 233, 277, 337, 373, 533, 577, 733 und 773 bleibt nach der Streichung einer bestimmten Ziffer prim. Also ist die gesuchte Zahl zweistellig, nämlich 73!

Wörter-Maximum

Gesucht wird ein einzelnes Wort mit möglichst vielen Buchstaben. Nimmt man an irgendeiner Stelle dieses Wortes einen Buchstaben weg, so ergibt sich ein neues Wort. Mit dem gekürzten Wort verfährt man wieder so usw. Schließlich bleibt ein Wort mit nur noch zwei Buchstaben übrig. Alle Wörter (ggf. Abkürzungen) sollen im Rechtschreibe-Duden vorkommen. Wieviel Buchstaben hat das längste Wort, wenn gebeugte Wortformen (z. B. Eier, ist, lachend) und Abkürzungen (z. B. DIN) a) nicht zugelassen b) zugelassen sind?

Lösung

Das bisherige Maximum zu a) hat 9 Buchstaben: abblassen, ablassen, blassen, blasen, Blase, Base, Ase, As, zu b) 14: verstehenderen, verstehendere ... verstehe, versteh, ersteh, erste, Este, Ste., St. (z. B.: Sie sah es mit verstehenderen Blicken als er.). Wer übertrifft diese „Rekorde"?

Gewinn trotz geringerer Punktezahl!

Tennis ist doch ein sonderbares Spiel! In einem ungewöhnlich spannenden Match gewann Steffi Fürst nach schwachem Start gegen Jana Bukova in drei Sätzen (ohne Tie-Break). Ungewöhnlich war das Match auch deswegen, weil die Verliererin zwei Drittel mehr Einzelpunkte (z. B.: „40:30" bedeutet 3 zu 2 Einzelpunkte) erzielt hatte als die Siegerin. Wie verlief das Match?

Lösung

Steffi Fürst gewann das Match mit 0:6, 6:4, 6:4. Sie gewann ihre Spiele jeweils „zu 30", also mit 4 zu 2 Einzelpunkten, Jana Bukova aber jeweils mit „zu 0", also mit 4 zu 0 Einzelpunkten. Für Steffi ergab das $12 \cdot 4 = 48$, für Jana $12 \cdot 2 + 14 \cdot 4 = 80$. Also erzielte Jana 32 Einzelpunkte (das sind zwei Drittel) mehr als Steffi und verlor doch!

Die verflixte 13!

Welches ist die kleinste Zahl, die genau 13 Teiler hat?

Lösung

Es ist $64^2 = 4096$.

Vokal- und Konsonanten-Rekorde

Welches nichtzusammengesetzte deutsche Wort hat eine Höchstzahl von aufeinanderfolgenden Konsonanten bzw. Vokalen? Beide Wörter dürfen in konjugierter oder deklinierter Form stehen.

Lösung

Das Wort „(du) herrschst" hat 7 aufeinander folgende Konsonanten, das aus dem Russischen stammende Fremdwort „Borschtsch", laut Duden eine Kohlsuppe, sogar 8. Das Wort „miauen" hat vier aufeinander folgende Vokale. Wer überbietet diese „Rekorde"?

Werner Keym, Meisenheim

Was ist beim Bau einer Modellhängebrücke zu beachten? Teil II

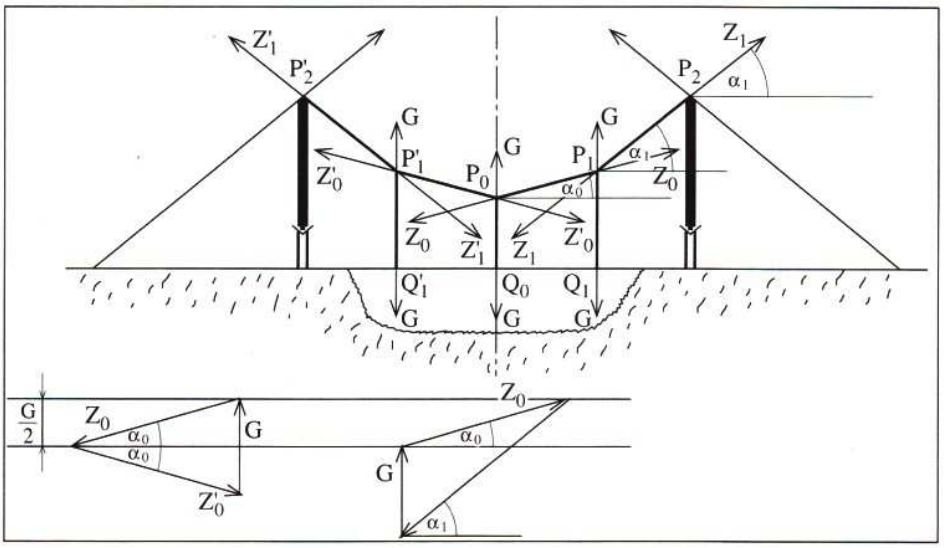


Abb. 7

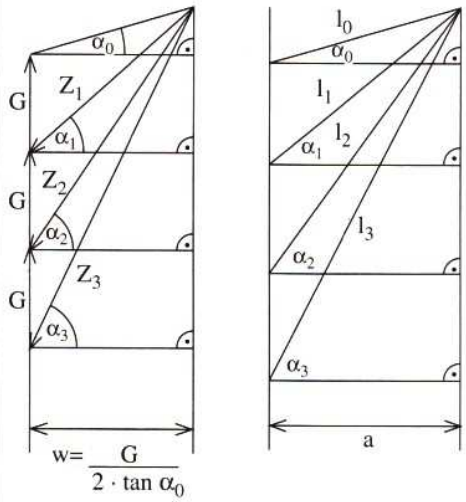


Abb. 8 und Abb. 9

Die gemeinsame Kathete w der rechtwinkligen Dreiecke in Abb 8 läßt sich mittels der Definition des Tangens eines spitzen Winkels (der Tangens eines spitzen Winkels im rechtwinkligen Dreieck ist der Quotient aus Gegenkathete und Ankathete) darstellen durch $w = \frac{G}{2 \cdot \tan \alpha_0}$

Weiterhin sind die geradlinigen Tragseilstücke $l_i = \overline{P_i + P_{i+1}}$ (i=0,1,2,...,n) mit ihren Stützdreiecken **(Abb. 5)** unter Beibehaltung ihres Neigungswinkels so aufzuzeichnen, daß ihre Endpunkte P_{i+1} zusammenfallen **(Abb. 9)**. Da die rechtwinkligen Dreiecke der Abb. 8 und 9 mit gleicher Kathete w sind, ergibt sich

$$l_0 = \frac{Z_0}{w}, \quad l_1 = \frac{Z_1}{w}, \quad l_2 = \frac{Z_2}{w}, \quad l_3 = \frac{Z_3}{w}$$

Dieser Beitrag ist eine Fortsetzung aus dem letzten Heft.

Aus den gemäß der in Teil I gestellten Aufgabe angefertigten Zeichnungen **(Abb. 7)** wird der Winkel α_1 zu 39°, die Länge L eines Tragseiles (von Pylon zu Pylon) zu 18,6 cm und der Durchhang H eines Tragseiles zu 4,3 cm bestimmt.

Genauere Ergebnisse und weitere Erkenntnisse als die konstruktive Lösung ergibt die rechnerische Lösung. Diese wird für einen beliebigen Abstand a zweier benachbarter Hängeseile und allgmein für eine ungerade Zahl 2n+1 ($n \in \mathbb{N}$) von Hängeseilen auf jeder Brückenseite sowie einen beliebigen Neigungswinkel α_0 ($0° < \alpha_0 < 90°$) erarbeitet.

Die den Seilknoten $P_1, P_2, ..., P_n$ zugeordneten geschlossenen Kraftecke, die die von ihnen umrandeten Flächen mit negativem Umlaufsinn umgeben, werden so aneinander gelegt, daß jeweils bei den beiden gleich langen und entgegengesetzt gerichteten Kraftpfeilen mit dem Beitrag Z_i die Spitzen mit den Schäften zusammenfallen. **(Abb. 8)** Der Übersichtlichkeit wegen ist in Abb. 8 von beiden Kraftpfeilen mit dem Betrag Z_i nur einer eingezeichnet. Aus dieser Zeichnung sind mit der Definition des Sinus eines spitzen Winkels (der Sinus eines spitzen Winkels im rechwinkligen Dreieck ist der Quotient aus Gegenkathete und Hypotenuse) und dem Pythagoreischen Lehrsatz die folgenden Formeln abzulesen:

$$\sin \alpha_0 = \frac{G}{2} : Z_0 \qquad Z_0 = \frac{G}{2 \cdot \sin \alpha_0}$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{3G}{2} : Z_1 \qquad Z_1 = \frac{3G}{2 \cdot \sin \alpha_1} = \sqrt{w^2 + \left(\frac{3G}{2}\right)^2}$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{5G}{2} : Z_2 \qquad Z_2 = \frac{5G}{2 \cdot \sin \alpha_2} = \sqrt{w^2 + \left(\frac{5G}{2}\right)^2}$$

$$\sin \alpha_n = \frac{(2n+1)G}{2} : Z_n \qquad Z_n = \frac{(2n+1)G}{2 \cdot \sin \alpha_n} = \sqrt{w^2 + \left(\frac{(2n+1)G}{2}\right)^2}$$

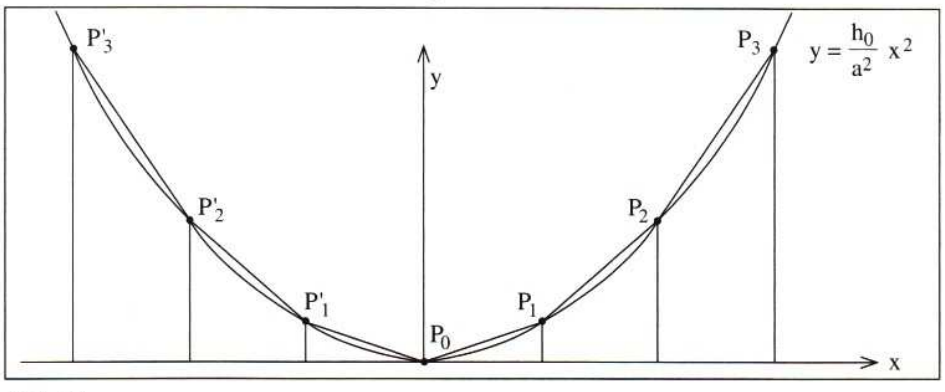


Abb. 10

chen Winkeln α_i jeweils einander ähnlich sind, gilt für die Höhen h_i der Stützdreiecke $h_1 = 3h_0$, $h_2 = 5h_0$, ... $h_n = (2n+1)h_0$. Mit der Definition des Tangens und des Kosinus eines spitzen Winkels (der Kosinus eines spitzen Winkels im rechtwinkligen Dreieck ist der Quotient aus Ankathete und Hypotenuse) und dem Pythagoreischen Lehrsatz ergeben sich die folgenden Formeln:

$$\tan\alpha_0 = \frac{h_0}{a} \qquad l_0 = \frac{a}{\cos\alpha_0}$$

$$\tan\alpha_1 = \frac{h_1}{a} = \frac{3h_0}{a} \qquad l_1 = \frac{a}{\cos\alpha_1} = \sqrt{a^2 + (3h_0)^2}$$

$$\tan\alpha_2 = \frac{h_2}{a} = \frac{5h_0}{a} \qquad l_2 = \frac{a}{\cos\alpha_2} = \sqrt{a^2 + (5h_0)^2}$$

$$\tan\alpha_n = \frac{h_n}{a} = \frac{(2n+1)h_0}{a} \qquad l_n = \frac{a}{\cos\alpha_n} = \sqrt{a^2 + [(2n+1)h_0]^2}$$

Die rechnerische Lösung der in Teil I gestellten Aufgabe (a = 4cm, n = 1, $\alpha_0 = 15°$) lautet damit:

Formel:	Ergebnis (mit Taschenrechner)
$\tan\alpha_1 = 3\cdot\tan\alpha_0$	$\alpha_1 = 38{,}79°$
$l_0 = \frac{a}{\cos\alpha_0}$	$l_0 = 4{,}14$cm
$l_1 = a\sqrt{1+(3\cdot\tan\alpha_0)^2}$	$l_1 = 5{,}13$cm
$L = 2(l_0+l_1)$	L= 18,55cm
$h_0 = a\cdot\tan\alpha_0$	$h_0 = 1{,}07$cm
$h_1 = 3a\cdot\tan\alpha_0$	$h_1 = 3{,}22$cm
$H = h_0+h_1 = 4a\cdot\tan\alpha_0$	H = 4,29 cm

Nun soll noch nachgewiesen werden, daß die Seilknoten und die Spitzen der Pylone Punkte einer Parabel sind. **(Abb. 10)** Dazu werden in der Eben eines Tragseiles zwei aufeinander senkrecht stehende orientierte Geraden, x- und y-Achse genannt, eingeführt. Die y-Achse fällt mit der Symmetrieachse des Tragseiles zusammen. Die x-Achse verläuft durch den tiefsten Punkt P_0 des Tragseiles. Jeder Punkt der Ebene des Tragseiles ist durch Angeben seines mit x bezeichneten vorzeichenbehafteten Abstandes von der y-Achse und seines mit y bezeichneten Abstandes von der x-Achse bestimmt. Zunächst seien die Abstandspaare (x; y) der Seilknoten P_i (i = 0,1,2,...,n) und der Pylonspitze P_{n+1} in einer Tabelle fixiert.

Punkt	Abstand x von y-Achse	Abstand y von x-Achse
P_0	0	0
P_1	a	h_0
P_2	2a	$h_0+h_1 = 1h_0+3h_0 = 4h_0$
P_3	3a	$h_0+h_1+h_2 = 1h_0+3h_0+5h_0 = 9h_0$
.	.	.
P_i	ia	$h_0+h_1+h_2+...+h_i = 1h_0+3h_0+5h_0+...+(2i-1)h_0 = i^2h_0$
.	.	.
P_{n+1}	(n+1)a	$(n+1)^2h_0$

Daß die Summe $1+3+5+...+(2i-1) = i^2$ ist, läßt sich durch die in Abb 11 dargestellte Folge von aus Einheitsquadraten zusammengesetzten Quadraten belegen. Die Abstandspaare $(ia; i^2h_0)$ der Punkte P_i (i = 0,1,2,...,n+1) erfüllen die Gleichung $y = \frac{h_0}{a^2}\cdot x$. Die Punkte P_i sind also Punkte der Parabel genannten Kurve mit der Gleichung $y = \frac{h_0}{a^2}\cdot x^2$.

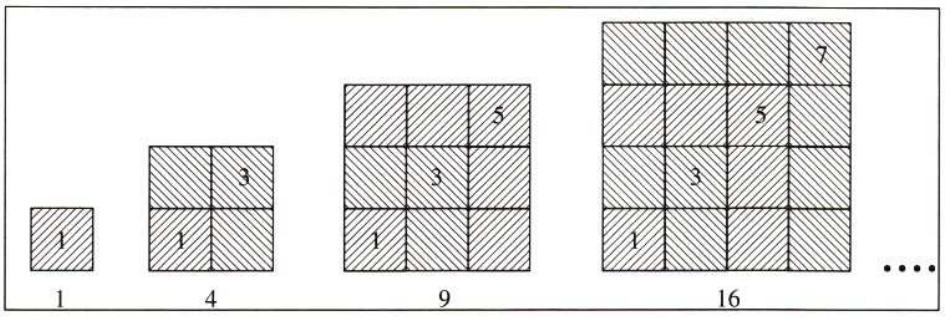


Abb. 11

Für den Bau einer Modellhängebrücke mit gleich hohen Pylonen und 2n+1 Hängeseilen auf jeder Brückenseite wird man vermutlich den Abstand A der Pylone und den Durchhang H der Tragseile vorgeben. Mit den Formeln $A = 2(n+1)\,a$ und

$$H = (n+1)^2 h_0 = (n+1)^2 a\cdot\tan\alpha_0 = \frac{A(n+1)}{2}\cdot\tan\alpha_0$$

werden dann nach Wahl von n zunächst a und α_0 ermittelt.

Auch eine in gleicher Weise idealisierte Modellhängebrücke mit einer geraden Zahl von Hängeseilen auf jeder Brückenseite läßt sich konstruktiv und rechnerisch betrachten.

Abschließend sei noch mitgeteilt, daß sich mittlererweile ein weiterer Typ von Stahlkabelbrücken durchgesetzt hat, die Schrägseilbrücken. Die erste in einer solchen Konstruktion ausgeführten Brücke war eine in England 1817 errichtete Fußgängerbrücke mit 34m Spannweite. Die älteste bis heute erhalten gebliebene Brücke ist die um 850 v. u. Z. aus Steinplatten erbaute Einzelbogenbrücke über den Fluß Meles in Izmir (Türkei).

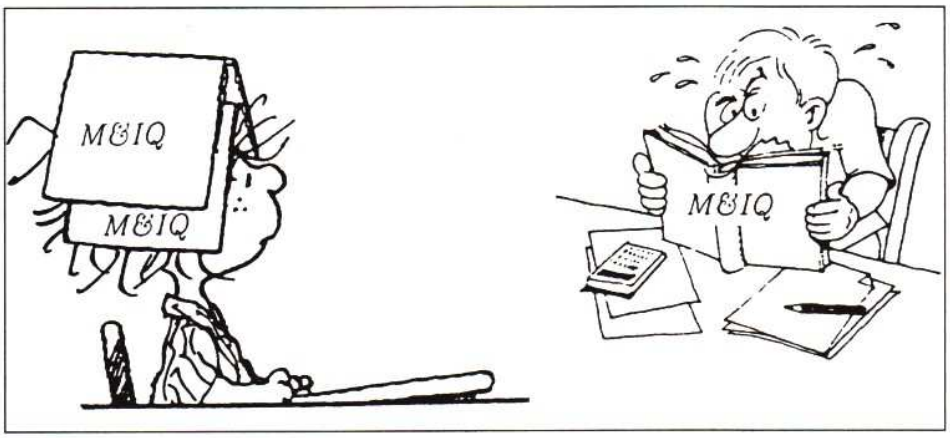
Für Hinweise möchte ich Herrn Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig) danken.

Dr. W. Träger

International Mathematical Talent Search

Die Olympiade-Ecke

Die Welt ist ein Dorf. Nicht aus dem Grund, weil man im Urlaub den Schulfreund getroffen hat, oder die Nachbarin nebenan am Strand liegt. Nein, die Welt ist kleiner geworden: Mit dem Flieger ist es nur ein Katzensprung bis in die hinterste Ecke des Globus. Selbst Computernutzer mit weniger Erfahrung klicken sich mühelos durch internationale Datennetze. Via Satellit könnt ihr euch den halben Erdball ins vertraute Wohnzimmer hereinholen. Seit zwei Jahren macht sich nun ein völlig anderer Zeitvertreib aus den USA auf den Weg zur Erdumrundung: Der ***International Mathematical Talent Search (IMTS)***.



Vignetten aus der Zeitschrift M & IQ

Dahinter verbirgt sich der eigenwillige Versuch, weltweit mathematische Begabungen einmal auf ganz andere Weise zu finden, nämlich ohne den üblichen Drill und den andauernden Prüfungsstreß. Verkürzt läßt sich dies auf die Forderung bringen: *Macht Problemlösen zum Nationalsport für Mathe-Begeisterte!* In beinahe allen Mathematik-Wettbewerben müssen zu viele Probleme in viel zu kurzer Zeit an einem unbehaglichen Ort gelöst werden. Solche Wettkampfbedingungen sind beim IMTS Nebensache: Mitmachen allein genügt schon! Aus diesem Grund gibt es auch keine offizielle oder inoffizielle Rangliste. Jeder Teilnehmer darf sich als (heimlicher) Sieger fühlen. Die Organisatoren hoffen aber dennoch, auf diesem Weg ein weltumspannendes Geflecht von Problemlösern zusammenknüpfen zu können. Jeder Teilnehmer darf sozusagen vom behaglichen Sofa aus den Reiz des Neuen und den Prickel internationaler Wettbewerbsatmosphäre erleben.

Sucht ihr also ein fremdes Abenteuer, dann tretet ein in das unbekannte Land IMTS und seid nicht bange, wenn dort in einer anderen Zunge geredet wird. Die Aufgabentexte sind in englischer Sprache abgefaßt; doch sollten Schüler ab der 8. Jahrgangsstufe damit gut zurechtkommen können. Englisch ist nun einmal **die** führende Sprache in Wirtschaft, Wissenschaft und Forschung. Es kann nur von Vorteil sein, möglichst früh die internationale Umgangssprache einzuüben.

Willkommen beim internationalen Mathe-Messen

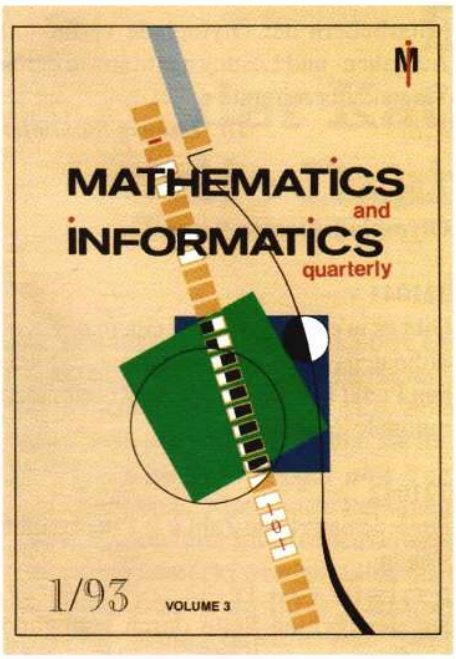
Ich möchte euch nun willkommen heißen, zusammen mit Schülern aus den USA, Bulgarien, Ungarn, Lettland, Litauen oder Singapur, zur mittlerweile schon 8. Runde des IMTS. Die Idee dazu hatten mehrere Hochschulprofessoren und Mathelehrer aus den USA. Der amerikanische Mathematical Talent Search (USAMTS) hat allein im Jahr 1992 über 1100 Neugierige aus Übersee angezogen. Das Original aus den USA gab auch den Entwurf ab für die internationale Variante, die ich euch nun näherbringen möchte.

Der IMTS ist ein sogenannter Endloswettbewerb für Liebhaber des Problemlösens. In jeder Runde werden fünf Aufgaben vorgestellt, bei der je gelöster Fragestellung bis zu fünf Punkte eingeheimst werden können. Die einzelnen Runden sind durchnumeriert. Die erfolgreichsten unter allen Teilnehmern **an vier aufeinanderfolgenden Runden** gewinnen Preise (Bücher, Abos mathematischer Zeitschriften, Urkunden). Nach Abschluß jeder Runde erhalten alle Teilnehmer eine Kopie mit der Bewertung ihrer eingereichten Lösungen. Dazu gibt es noch in loser Folge das Newsletter zur USAMTS, mit Tabellen zum Vergleich und allgemeinen Informationen für Schüler der Sekundarstufe II.

Getragen wird der IMTS von der wahrlich internationalen Schülerzeitschrift *Mathematics & Informatics Quarterly.* Sie erscheint viermal im Jahr und richtet sich besonders an Schüler und Lehrer, die sich in Zirkeln mit Mathematik oder Informatik beschäftigen, die Mathematikwettbewerbe leiten oder an ihnen teilnehmen. Der Neuling unter den Schülermagazinen (erstmals erschienen im Februar 1992) kommt in englischer Sprach heraus und kostet im Abonnement für Schüler im Jahr nur 12 US-Dollar (Sonstige 18 Dollar). M & IQ ist das wohl erste Magazin, das nicht eine spezielle nationale Leserschaft bedient, sondern sich seine Leser rund um den Globus zusammensucht.

Jede weitere Ausgabe von M & IQ bringt fünf ebenfalls neue Probleme mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad für Schüler ab Jahrgangsstufe 8. Interessenten können ihre Lösungen zu den unten abgedruckten Aufgaben (in deutsch) an folgende Adresse zur Bewertung einschicken: **Herrn Dieter Bennewitz, Plankenweg 16, 56070 Koblenz.**

Herr Bennewitz ist Mathelehrer am Koblenzer Max-von-Laue-Gymnasium und der deutsche Statthalter im internationalen Gutachtergremium des IMTS. Er verschickt auf Anfrage die Probleme der jeweils letzten Runde. **Die Lösungen sind bis spätestens 6 Wochen nach Erhalt der Aufgaben an obige Adresse einzusenden.** Legt jeder Einsendung ein Deckblatt bei, auf dem ihr Name, Anschrift,



Klassenstufe, Schule und den Namen eures Mathelehrers vermerkt. Alle Lösungen müssen vollständig ausgearbeitet und leserlich geschrieben sein.

Mathe macht mobil

Teilnehmer an diesem Wettbewerb können sich rühmen, zu einer besonderen Gattung von Problemlösern zu gehören. Sie messen sich mit Gleichgesinnten aus aller Welt jeweils an denselben Problemen. Spätere Musterlösungen zu den Aufgaben erlauben eine persönliche Einschätzung eigener Fortschritte durch selbständige Vergleiche – und so lernt man voneinander. Auch bei dem vergeblichen Versuch eine Fragestellung zu lösen, gelangt man oftmals zu bemerkenswerten Einsichten. Die Organisatoren des IMTS bemühen sich übrigens auch um eine Unterstützung durch die UNESCO, einer Unterorganisation der Vereinten Nationen. Die UNESCO fördert die Zusammenarbeit ihrer Mitgliedsstaaten auf den Gebieten der Erziehung, Wissenschaft und Kultur. Zur Verbesserung der Lebensbedingungen auf der Erde genügt es nämlich nicht, ausschließlich Nahrung und Medikamente bereitzustellen. Beides gehört zu einer gesunden körperlichen Entwicklung dazu. Die Fortentwicklung des gesamten Menschen erfordert aber auch eine Stärkung seiner geistigen Anlagen durch Geistesnahrung – neben Büchern satt zur passiven Auseinandersetzung mit angehäuftem Wissen auch Angebote wie IMTS, die Neugierige zur Betätigung in unbekanntes, zerklüftetes Gelände locken sollen.

So, nun habe ich euch lange auf die Folter gespannt. Hier sind die fünf Aufgaben aus der jüngsten Runde 8. Problem Nummer 1 könnt ihr im Original lesen, die übrigen Aufgabentexte habe ich durch Übersetzung (hoffentlich) etwas entschärft.

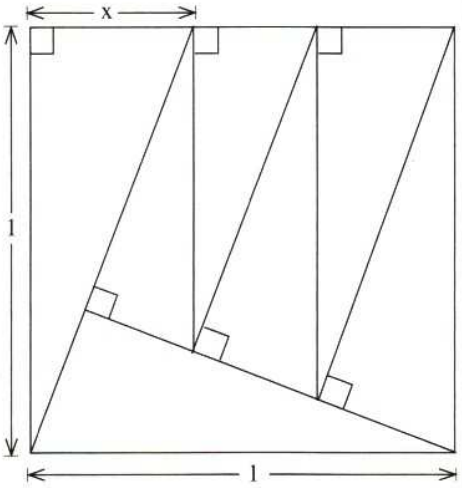
IMTS Probleme – Runde 8

Problem 1/8

Prove that there is no triangle whose altitudes are of length 4, 7, and 10 units.

Problem 2/8

Es sei x eine reelle Zahl, $0 < x < 1$. Die nebenstehende Figur zeigt eine Zerlegung des Einheitsquadrates in sieben ähnliche rechtwinklige Dreiecke in Abhängigkeit von x.



Es ergibt sich, daß dieses x Lösung eines normierten Polynoms vom Grad 5 ist. Bestimme dieses Polynom. (Hinweis: Eine Polynomfunktion p(x) heißt normiert, wenn der Koeffizient des höchsten Potenzterms 1 ist. p(x) besitzt also die Darstellung: $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{R}$.)

Problem 3/8

i) Ist es möglich, die Zahlen 1, 2, 3,...9 in a(1), a(2), a(3), ..., a(9) so umzubenennen, daß alle Beträge |a(1)-1|,|a(2)-2|, |a(3)-3|, ..., |a(9)-9| verschiedene Werte annehmen?

Beweise die Vermutung!

ii) Wiederhole i) für die Zahlen 1, 2, 3, ..., 9, 10.

Problem 4/8

Anita, Bob und Carol laufen gegeneinander.

Erhält Bob in einem 50-Meter-Rennen von Anita einen Vorsprung von maximal 4 Metern zugestanden, holt sie ihn trotzdem noch auf der Ziellinie ein. Gewährt dagegen Bob seiner Gegnerin Carol über 200 Meter einen Vorsprung von höchstens 15 Metern, hat Bob sie dennoch am Ende des Rennens eingeholt.

Die drei Läufer sollen sich mit untereinander verschiedener aber sonst gleichbleibender Geschwindigkeit fortbewegen.

Wie viele Meter Vorsprung kann Anita ihrer Mitläuferin Carol in einem 1000-Meter-Rennen höchstens zugestehen, damit beide dennoch gleichzeitig ins Ziel kommen?

Problem 5/8

Gegeben sind die reellen Zahlen a, b, x und y sowie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a + b &= 23 \quad (1)\\ ax + by &= 79 \quad (2)\\ ax^2 + by^2 &= 217 \quad (3)\\ ax^3 + by^3 &= 691 \quad (4) \end{aligned}$$

Berechne den Wert des Terms $ax^4 + by^4$.

StR Paul Jainta, Schwabach

32. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe

Deutschland-Olympiade 2. - 5. 5. 1993 in Magdeburg

Information über die Mathematik-Olympiaden in Deutschland

Die Mathematik-Olympiaden sind ein mehrstufiger Wettbewerb, der zur Förderung mathematisch interessierter Schülerinnen und Schüler von Klasse 5 an genutzt werden kann. Das Angebot dieses Wettbewerbs wird getragen von einer Interessengemeinschaft in der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV) und im Deutschen Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts (MNU). Die Olympiaden bieten eine Möglichkeit, anderen Förderungsformen (Arbeitsgemeinschaften, Schülerseminaren, Korrespondenzzirkeln, dem Bundeswettbewerb Mathematik usw.) in gegenseitiger Stützung zur Seite zu treten. Die Aufgabenserien sind in folgender Weise aufgebaut:

1. Stufe zu Beginn eines Schuljahres
Die Aufgaben dieser Stufe werden an die Schulen versandt. Sie können z. B. von allen Schülern zu Hause gelöst werden (einzeln oder in Gruppen, auch in Betreuung eines Lehrers oder in zwanglos angesetzten örtlichen Wettbewerben); sie sind auf leichte Zugänglichkeit hin konzipiert, enthalten auch Anregungen zu weiterer mathematischer Beschäftigung und bieten einen ersten Einblick in die Gestaltung von Wettbewerbsaufgaben. Zugleich mit den Aufgaben erhalten die Schulen auch ausgearbeitete Lösungstexte.

2. Stufe (10. November 1993)
Diese Aufgaben können zu einem regionalen Klausurwettbewerb genutzt werden, den benachbarte Schulen z. B. eines Kreises austragen können. Die Lösungstexte sind daher zu Vergleichszwecken auch mit Vorschlägen für die Vergabe von Punktzahlen (für ganz oder teilweise richtig gelöste Aufgaben) versehen.

3. Stufe (5./6. Februar 1994)
Mit diesen Aufgaben kann in jedem Bundesland, das daran interessiert ist, ein Wettbewerb ausgerichtet werden, zu dem Schüler aus diesem Bundesland eingeladen werden.

4. Stufe (Deutschland-Olympiade)
Mai 1994; aus dem Land Sachsen-Anhalt wurde das Interesse angekündigt, (ebenso wie im Jahr 1993) nach Magdeburg einzuladen.
Zu diesem Wettbewerb werden von einem Bundesland Schüler ab Klasse 8 aus allen Bundesländern eingeladen. Dabei ist (in der vom Einladenden ermöglichten Anzahl) an die Entsendung von Schülern nach Maßgabe ihres Interesses und ihrer persönlichen mathematischen Fähigkeiten gedacht, also nicht an Voraussetzungen formaler Art (z. B. nicht an ein obligatorisches Durchlaufen der ersten drei Stufen). Die konkrete Gestaltung einer Beteiligung an den Mathematik-Olympiaden kann sich somit den unterschiedlichen Schulformen und einem jeweils insgesamt oder regional angestrebten Vorgehen zur Förderung interessierter Schüler anpassen. Inhaltlich sind die Aufgaben mit den mathematischen Anforderungen der jeweiligen Klassenstufe abgestimmt. Sie regen zugleich an, diesen Schulstoff mit geistiger Beweglichkeit und Ausdauer zu nutzen und sich um eine korrekte und sorgfältige Ausdrucksweise zu bemühen.
Es werden Adressen in den einzelnen Bundesländern zusammengestellt, bei denen dann Informationen über die Gestaltung des Wettbewerbs in dem betreffenden Bundesland erfragt werden können. Insbesondere werden dort auch Aufgabenserien – speziell nur 3. und 4. Stufe, die zunächst an diese Adressen gehen –, anzufordern sein. Vorläufig kann beim Autor dieser Beschreibung nach Informationen gefragt werden, z. B. auch über mögliche Mitwirkung bei der Erarbeitung von Aufgaben. (Über Redaktion alpha, PSF 129, 04001 Leipzig).
Für das Schuljahr 1993/94 (die 33. Mathematik-Olympiade) wurde vereinbart, daß der Schroedel Schulbuchverlag die drucktechnische Herstellung der (von Mitarbeitern der Olympiade verfaßten) Aufgaben- und Lösungstexte sowie deren Versand übernimmt.

Dr. Ludwig Stammler

Aufgaben
Olympiadeklassen 9 und 10

321041
Gibt es in einer Ebene mit einem x, y-Koordinatensystem eine Kreislinie, die keinen Punkt hat, für den beide Koordinaten rationale Zahlen sind?

321042
Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ denke man sich in
$p_n(x) = (x^2 + x + 1)^n$
auf der rechten Seite durch genügend häufiges Ausmultiplizieren alle Klammern beseitigt und den entstehenden Ausdruck nach Potenzen von x geordnet, so daß in dem (so geschriebenen) Polynom jede Potenz von x genau einen *Koeffizienten* erhält (eine Zahl, die als Faktor bei dieser Potenz steht).
a) Beweisen Sie, daß für *jede* natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: Bei dieser Darstellung von $p_n(x)$ sind *mindestens drei* Koeffizienten ungerade.
b) Beweisen Sie, daß es *unendlich* viele natürliche Zahlen n gibt, für die gilt: Bei dieser Darstellung von $p_n(x)$ sind *genau drei* Koeffizienten ungerade.

Von den nachstehenden Aufgaben 320143A und 321043B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

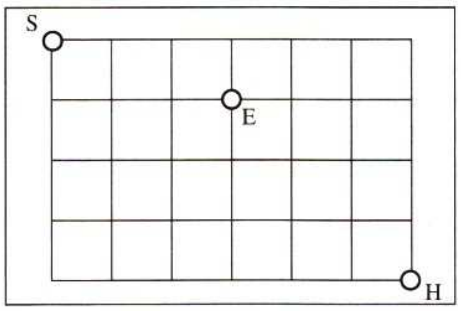
321043A
Zeigen Sie, daß es ein ebenes Vieleck $P_1P_2P_3...P_{n-1}P_n$ gibt, für das folgende Aussagen gelten:
(1) Die Randlinie des Vielecks hat keine Selbstüberschneidung, d. h.: Außer den gemeinsamen Eckpunkten aufeinanderfolgender Seiten P_1P_2, P_2P_3; P_2P_3, P_3P_4;...; $P_{n-2}P_{n-1}$, $P_{n-1}P_n$; $P_{n-1}P_n$, P_nP_1; P_nP_1, P_1P_2 gibt es keine gemeinsamen Punkte von irgend zwei Seiten.
(2) Es gibt zwei aufeinanderfolgende Ecken P_k, P_{k+1} $(2 < k < n-1)$, für die Folgendes gilt:
(2.1) Bei einer geeigneten Drehung um P_1 geht der Streckenzug $P_1P_2...P_{k-1}P_k$ in den Streckenzug $P_1P_n...P_{k+2}P_{k+1}$ über.
(2.2) Bei der Punktspiegelung an einem geeigneten Punkt Q wird der Streckenzug $P_1P_2...P_kP_{k+1}$ auf sich selbst (in umgekehrter Durchlaufung, also auf den Strecken-

zug $P_{k+1}P_k...P_2P_1$) abgebildet.
Als Lösung genügt eine Zeichnung, an der diese Aussagen genügend genau zu bestätigen sind. Eine Beschreibung oder Begründung wird nicht verlangt. (Freilich können Sie genaues Zeichen auch durch – dann lückenlos zu gebende – Konstruktionsbeschreibung ersetzen.)

321043B
Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen a, b, für die sich bei Division des Polynoms $f(x) = x^4 + 2ax^3 + 2x^2 + x - 2$ durch das Polynom $g(x) = x^2 + ax + b$ erweist, daß ohne Rest ein Polynom h(x) entsteht (mit dem also für jede Zahl x, für die $g(x) \neq 0$ ist, die Gleichung $f(x) : g(x) = h(x)$ gilt).

321044
Jemand stellt durch Ausrechnen genügend vieler Ziffern der Zahlen 2^n für alle natürlichen Zahlen n = 10, 11, 12,..., 108, 109 fest:
(*) Als Zifferngruppe der letzten drei Ziffern (Hunderter-, Zehner- und Einerziffer) tritt bei keiner der Zahlen 2^n mit n = 11, 12,..., 108, 109 die Zifferngruppe 024 auf, die bei $2^{10} = 1024$ auftritt.
Danach hat er die einzelnen Ziffern von Zahlen 2^n aus seinen Aufzeichnungen (und, soweit er sie sich gemerkt hatte, auch aus seinem Gedächtnis) verloren. Nur die Feststellung (*) ist ihm noch bekannt. Nun wird folgende Frage gestellt:
(**) Gibt es unter den Zahlen 2^n (n = 11, 12,..., 108, 109) zwei, die in der Zifferngruppe der letzten drei Ziffern miteinander übereinstimmen?
Beweisen Sie, daß die Frage (**) mit, „Nein" zu beantworten ist, wenn man die Feststellung (*) zur Verfügung hat, jedoch ohne daß man zur Begründung doch noch die Zifferngruppe der letzen drei Ziffern aller einzelnen Zahlen 2n (n = 11, 12,..., 108, 109) wieder berechnen müßte!

321045
In Abb. A 321045 wird ein Stadtteil skizziert; die Linien stellen die Straßen dar. Robert wählt für seinen Weg von der Schule S nach Hause H an jedem Schultag einen der möglichst kurzen Wege. Kommt er an die Ecke E, so kauft er sich ein Eis. Auf die Bitte, dies möge nicht zu oft vorkommen, vereinbart er, an jeder (für möglichst kurze Wege) möglichen Abzweigung *durch Zufall* zu entscheiden, welche der zwei zu wählenden Richtungen er einschlägt, d. h. so, daß jede dieser zwei Richtungen, unabhängig von vorher getroffenen Entscheidungen, *im Durchschnitt gleich oft* vorkommt.
Nach so langer Zeit, daß derartige Zufallsaussagen sinnvoll sind, stellt sich heraus: Robert hat im Durchschnitt an einem Drittel aller Schultage ein Eis gekauft.
a) Er erklärt dazu: „Mehr als ein Drittel aller möglichst kurzen Wege von S nach H führen über die Ecke E." Trifft das zu?
b) Seine Mutter meint: „Dennoch müßte – bei Zufallsentscheidungen im vereinbarten Sinn – durchschnittlich an weniger als einem Drittel aller Schultage der Weg über E führen." Trifft das zu?



321046
Man beweise: Sind a, b, c die Seitenlängen und ist F der Flächeninhalt eines Dreiecks, so hat die Summe der Längen der drei Lote, die von je einer Seitenmitte aus die in der Gegenecke an den Umkreis gelegte Tangente gefällt werden, den Wert

$$2F \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$$

Olympiaklassen 11 – 13

321241
Von den Eckpunkten eines regelmäßigen 250-Ecks wurden genau 16 gelb und alle anderen blau gefärbt.
Beweisen Sie, daß es zu jeder solchen Färbung eine Drehung des 250-Ecks um seinen Mittelpunkt gibt, bei der alle gelben Ecken in blaue übergehen!

321242
Man beweise, daß ein Würfel für jede natürliche Zahl $n \geq 100$ in genau n Würfel zerlegt werden kann.

321243
Von 1993 Punkten $P_1,..., P_{1993}$ werde vorausgesetzt, daß keine drei P_i, P_j, P_k von ihnen ($i \neq j, i \neq k, j \neq k$) einer gemeinsamen Geraden angehören.
Ferner sei für gewisse Paare (i, j) mit $1 \geq i < j \geq 1993$ jeweils die Strecke P_iP_j konstruiert; dabei werde vorausgesetzt, daß jeder der 1993 Punkte P_i mindestens 1661 anderen dieser 1993 Punkte durch eine der konstruierten Strecken verbunden ist.
Man beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Unter den P_i gibt es 7 Punkte, von denen jeder mit jedem anderen dieser 7 Punkte durch eine der konstruierten Strecke verbunden ist.

321244
Man beweise: Wenn reelle Zahlen a, b, c das Gleichungssystem

$$a + b + c = 2,$$
$$ab + ac + bc = 1$$

erfüllen, so gilt

$$0 \leq a \leq \frac{4}{3}, 0 \leq b \leq \frac{4}{3}, 0 \leq c \leq \frac{4}{3}.$$

321245
Man ermittle die größtmögliche Anzahl von Dreiecken mit ganzzahligen Seitenlängen und mit dem Umfang 1993, unter denen sich keine zwei untereinander kongruenten Dreiecke befinden.

Von den nachstehenden Aufgaben 3212464A und 321246B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

321246A
Eine Bus-Bahn-Rundreise durch n Städte sei eine Reise, die in einer dieser Städte beginnt, jede andere von ihnen genau einmal erreicht, dann zum Ausgangspunkt zurückführt und insgesamt keine anderen Verkehrsmittel als Bus oder Bahn benutzt. Von n Städten $S_1,..., S_n$ werde vorausgesetzt, daß zwischen zwei von ihnen genau eine (in beiden Richtungen nutzbare) Verbindung besteht und daß diese jeweils nur entweder eine Bus- oder eine Bahnverbindung ist.
Man beweise für jede natürliche Zahl $n \geq 3$, daß es durch n Städte, die diese Voraussetzungen erfüllen, stets eine Bus-Bahn-Rundreise geben muß, bei der das Verkehrsmittel höchstens einmal gewechselt wird.

321246B
Eine Funktion f erfülle folgende Voraussetzungen: f ist für alle reellen Zahlen x definiert und stetig, alle Funktionswerte f(x) sind reelle Zahlen, und für jedes reelle x gilt $f(f(f(x))) = x$.
Man beweise: Diese Voraussetzungen werden nur von derjenigen Funktion f erfüllt, die für alle reellen x durch $f(x) = x$ definiert ist.
Die Lösungen senden wir Euch auf Wunsch zu.

Marktecke

Strategische Brettspiele

Battle Chess II – Chinese Chess

Allen, die von der Aufmachung eines Produktes auf den Inhalt rückschließen, macht ein Blick auf den Spielkarton deutlich, daß sich hinter dem martialischem Titel BATTLE CHESS II ein Schachprogramm verbirgt. Der Untertitel verrät dem geneigten Betrachter ferner, daß es sich um chinesisches Schach handelt. Schachexperten wissen, daß herkömmliches Schach mit der chinesischen Variante bereits in den Spielfiguren Unterschiede aufweist. Auf dem Brett von BATTLE CHESS stehen nicht König, Dame oder Turm, hier stehen Ritter, Minister und Streitwagen – alles in feinster 3-D-Grafik, wenn man es möchte.

Wenn man eine VGA-Karte besitzt, macht man sich auf jeden Fall mit dem 3-D-Spiel vertraut. Hat man über Maus oder Tastatur einen Zug getätigt, marschiert die Figur mit Sound-Unterstützung los. Je nach Figur unterscheiden sich die Zweikämpfe, deren Ausgang durch den Zug vorgegeben ist. Da im chinesischen Schach Figuren doppelgesichtige Bedeutungen haben (Minister/Elefant, Streitwagen/Drache), verwandeln sich die Figuren für die Kämpfe. Es kämpft die „Zweitbesetzung» – und das ist originell und gelungen. Da donnern Kanonen, klirren Säbel, schleudern Drachen geräuschvoll Feuerkugeln. Doch warum hat man sich mit der musischen Untermalung nicht deutlicher an originale Musik gehalten? Es kommt wohl daher, daß diese fernöstliche Melodien für unser Ohr zu ungewohnt sind.

Kampfszenen bringen es mit sich, daß man ihrer überdrüssig wird – entweder aus Prinzip, oder weil es mit der Zeit zeitraubend wird, diese Sequenzen beim Schlagabtausch immer wieder ansehen zu müssen. Deswegen können per Menü (F1) die allgemeinen Einstellungen verändert werden. Im 2-D-Spiel hantiert man mit „richtigen» Spielsteinen, verzichtet auf die Animation. Neun Schwierigkeitsgrade stehen zur Wahl. Spielgegner können ausgesucht werden: Ein menschlicher Partner oder der Computer. Fernschachduelle sind über Modemwahl möglich. Daß man Partien speichern und laden kann, ist selbstverständlich.

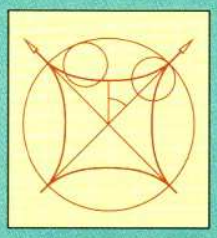
In der Reduktion auf das Wesentliche bleibt ein Schachprogramm. Ob es da bessere oder schlechtere gibt, muß jedem überlassen bleiben, der mit Hilfe eines Computers Schachfiguren bewegen möchte. Man muß sich nur vor Augen halten, daß hier chinesisches Schach gespielt wird, ein Spiel, daß vor allem im heutigen Vietnam zu einem Volkssport geworden ist. Dort spielt man es bisweilen mit lebenden Figuren im Freien. So gesehen darf ein Computer-Schach Animationen einsetzen, wenn diese der Spielideologie nicht entgegenwirken, wenn diese das Spiel nicht stören. Bei BATTLE CHESS II hat man den Vorteil, genau diese eventuellen Störfaktoren (nebst) Musik ausschalten zu können. Im Gesamturteil bleibt unter dem Strich: Nicht schlecht, diese Umsetzung.

Das Zeitalter der UPDATES geht auch an Battle Chess nicht vorüber. Inzwischen gibt es die Version BALTTLE CHESS 4000 SVGA – mit noch mehr Farbenpracht und noch mehr Animation.

BATTLE CHESS II – CHINESE CHESS, Interplay 1990, VGA, diverse Soundkarten, 640 K Ram, Mausunterstützung, Preis: etwa 100 DM, Genre: animiertes Strategiespiel, Ansichtsexemplar von Rushware, BATTLE CHESS 4000 SVGA Preis: DM 99,95

H. Seitz

Buchhinweise



Taschenbuch mathematischer Formeln
Von Dr. Hans-Jochen Bartsch
15., neubearbeitete Auflage 1993, ca. 700 Seiten, 430 Abbildungen, 19 cm x 12 cm, ISBN 3-343-00844-3, Broschur, ca. DM 28.-

Dieses Buch ist völlig neu bearbeitet und erweitert worden. Es richtet sich besonders an Studenten naturwissenschaftlich-technischer Fachrichtungen an Fachhochschulen und Hochschulen, Ingenieure, Lehrer.

Alle Themen wurden umfassend überarbeitet und aktualisiert. Es beinhaltet Integraltabellen mit fast 600 unbestimmten und bestimmten Integralen. Das Kapitel Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik enthält moderne stochastische Methoden. Es wird auch eine ausführliche Darstellung der Matrizenrechnung gegeben sowie ausgewählte Verfahren der numerischen Mathematik. Dieses handliche Taschenbuch ist an vielen Bildungsstätten zur Prüfung zugelassen.

Zahlenrätsel für Kenner

Die Beschäftigung mit Zahlenrätseln ist oftmals recht interessant und bereitet Rätselfreunden viel Freude. Wir wollen deshalb unseren alpha-Lesern mit diesem Beitrag eine Zahlenrätselart vorstellen, die weniger bekannt ist, und für deren Lösung folgende Regeln zu beachten sind:

(1) In jedes Leerfeld ist genau eine der Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 einzutragen.

(2) Die Null kommt weder als Einzelziffer noch als Einzelergebnis vor, sondern nur in der Darstellung zwei- und mehrstelliger natürlicher Zahlen.

(3) Die Ausführung der vorgeschriebenen Rechenoperationen in der ersten (zweiten, dritten, usw.) waagerechten Zeile ergibt dasselbe Ergebnis wie die Summe aus den Zahlen der ersten (zweiten, dritten, usw.) senkrechten Spalte.

(4) In den waagerechten Zeilen ist unabhängig von der jeweiligen Rechenart fortlaufend, also der Reihe nach von links nach rechts, zu rechnen.

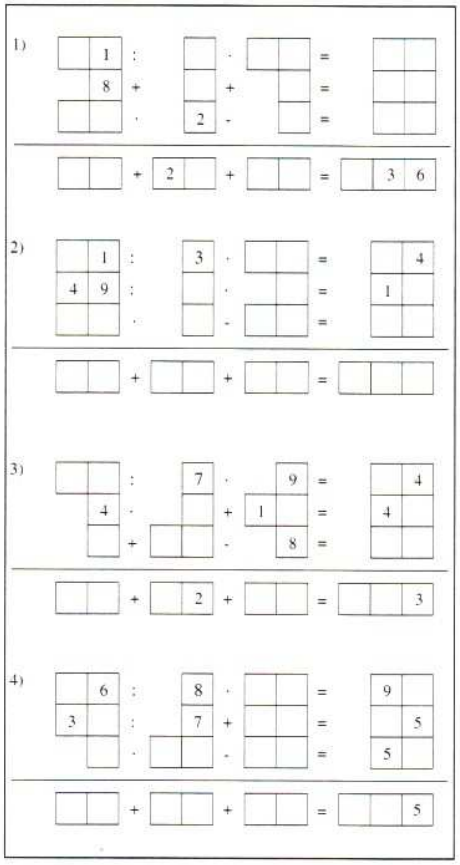
Wer die Lösung eines solchen Zahlenrätsels durch Probieren finden will, wird sehr viel Zeit benötigen. Die fehlenden, in die Leerfelder einzutragenden Ziffern sind vielmehr durch das Erkennen mathematischer Zusammenhänge und durch logisches Schließen zu ermitteln.

Die Lösung eines solchen Zahlenrätsels soll nun an einem Beispiel ausführlich dargestellt werden. Die in den Leerfeldern vorhandenen kleinen Buchstaben (a, b, c, d, ..., z) sind keine Variablen im mathematischen Sinne. Die alphabetische Reihenfolge dieser Buchstaben zeigt beim Nachvollzug des Lösungsweges nur die Reihenfolge der nacheinander einzusetzenden Ziffern an. Die kleinen Buchstaben dienen also zum Ansprechen eines Leerfeldes.

Entsprechend der Regel (3) muß die zweite waagerechte Zeile dasselbe Ergebnis haben wie die Summe der Zahlen der zweiten senkrechten Spalte, deshalb muß in das Leerfeld a die Ziffer 9, in das Leerfeld b die Ziffer 2 eingetragen werden. Aus dem gleichen Grunde gehört in das Leerfeld c die Ziffer 2. Wenn aber das Leerfeld c die Ziffer 2 enthält, dann kann in den darüberstehenden Leerfeldern d und e jeweils nur die Ziffer 1 stehen. Aus 8 : f in der zweiten waagerechten Zeile folgt, daß für den Buchstaben f eine der Ziffern 1, 2, 4 oder 8 eingesetzt werden könnte. Von diesen vier Möglichkeiten scheiden aber die ersten drei aus; denn für diese würde die Summe 29 in der zweiten senkrechten Spalte nicht erreicht werden. Es gilt also f = 8.

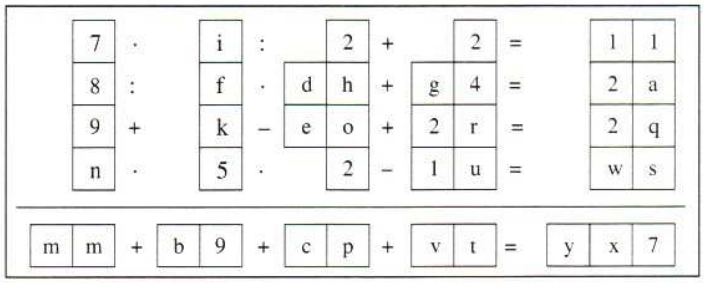
Nun wird ersichtlich, daß für g die Ziffer 1 einzusetzen ist. Denn ersetzt man in der zweiten waagerechten Zeile den Buchstaben h durch die niedrigste Ziffer Null, erhält man 8 : 8 · 10 + 14 = 24; für g = 2 würde wegen 8 : 8 · 10 + 24 = 34 das Ergebnis 29 bereits überschritten werden. Daraus folgt weiter h = 5. In das Leerfeld i muß eine gerade Zahl kommen; denn in der ersten waagerechten Zeile ist 7 · i : 2 nur für gerade Zahlen i ausführbar. Für i kommt nur die Zahl 8 in Betracht; denn schon die nächstniedrigere gerade Zahl 6 wäre zu klein, um in der zweiten senkrechten Spalte die Summe 29 zu erreichen. Aus i = 8 folgt aber auch k = 8. Nun folgt aus der ersten waagerechten Zeile die Summe 30; es gilt 7 · 8 : 2 + 2 = 30. Die Summe der ersten senkrechten Spalte lautet nach Regel (3) ebenfalls 30. Daraus folgt weiter n = 6. Die bisher gefundenen Zahlen der dritten senkrechten Spalte ergeben bereits 29; also muß in das Feld o die Ziffer 0 kommen. Die Summe aus den Zahlen der dritten senkrechten Spalte beträgt somit 29. Nach Regel (3) lautet das Ergebnis in der dritten waagerechten Zeile ebenfalls 29. Darauf folgt r = 2. Die noch fehlenden Zahlen lassen sich nun leicht bestimmen. Es gilt in dieser Reihenfolge t = 9, u = 1, v = 4, w = 4, s = 9, x = 3, y = 1. Die vollständige Lösung sei unten rechts angegeben.

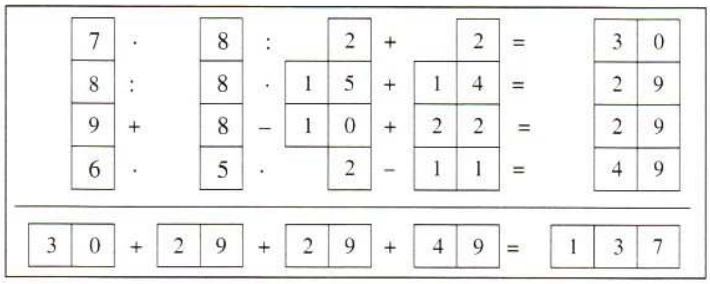
Zum Üben für den interessierten Leser wollen wir vier leichte Aufgaben dieser Art anfügen.
Dabei werden die kleinen Buchstaben in den Leerfeldern weggelassen. Das macht



die Lösung reizvoller, da die günstigste Reihenfolge der zu findenden Zahlen nicht mehr vorgegeben wird.
Weitere solcher Zahlenrätsel veröffentlichen wir in einem späteren Heft.

Theodor Scholl





Der Sonnenring

Eine Möglichkeit zur Bestimmung der Sonnenhöhe

Für die Höhenmessung der Gestirne gibt es eine Reihe von Möglichkeiten. Am bekanntesten sind der einfache Pendelquadrant sowie der Sextant in der Schiffahrt. In beiden Fällen muß das betreffende Gestirn angepeilt werden, um dessen Höhe über dem Horizont abzulesen.
Es gibt aber noch eine weitere, wenig bekannte Methode, mittels eines Ringes die Höhe der Sonne zu bestimmen. Dieser sogen. Haggesche Sonnenring hat den Vorteil, ohne direkte Anpeilung der Sonne durch Projektion eines kleinen Lichtfleckes deren Höhe abzulesen. Die Ablesung erfolgt somit an der Sonne abgewandten Seite, so daß die Augen in keiner Weise gefährdet sind.
Zur Herstellung wird ein 20 bis 30 mm breiter Ring aus Metall oder anderem stabilen Material (Plastik, starke Pappe) benötigt. Eine Aufhängeöse ermöglicht eine frei drehbare Bewegung. Der Durchmesser des Ringes ist nicht bindend, wir gehen aus später zu erläuternden Gründen von einem 115 mm großen Durchmesser aus.
Auf der einen Hälfte des Ringes wird in einem Abstand von etwa 60 mm von der Aufhängeöse in der Mitte der Ringbreite ein Loch von 1 bis 1,5 mm Durchmesser gebohrt. Es wird empfohlen, das Loch in Richtung Sonne zu versenken, um den Lichteinfall bei wechselnder Sonnenhöhe nicht zu behindern.
Wird der Rind an der Öse also frei aufgehängt und so gedreht, daß die durchbohrte Hälfte zur Sonne weist, dann liegt die Innenseite der anderen Hälfte im Schatten. Je nach der Sonnenhöhe sehen wir auf der beschatteten Innenseite deutlich den kleinen Lichtfleck.

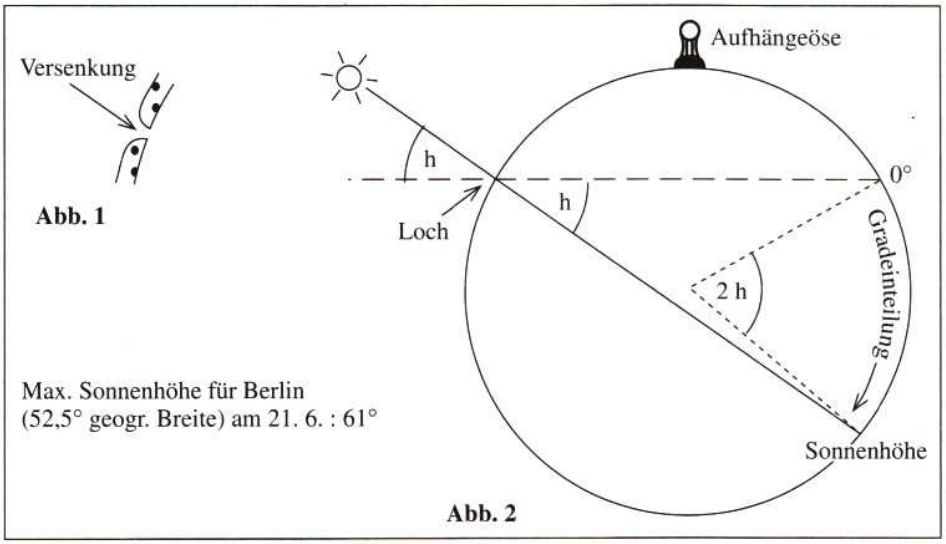
Anfertigung der Winkelteilung

Wählt man für den lichten Durchmesser des Sonnenrings 115 mm, so beträgt nämlich den Abstand von 1° genau 2 mm, das bedeutet, daß man sich bei der Verwendung von Millimeterpapier das mühsame Auftragen der Gradeinteilung ersparen kann.
Aus der **Abb. 2** geht hervor, daß einer Sonnenhöhe von h° über dem Horizont ein Mittelpunktswinkel von 2 h° entspricht. Ändert sich demnach die Höhe der Sonne um $\Delta h = 1°$, so ergibt sich der folgende Skalenabstand a:

$$a = \frac{2\pi \cdot r \cdot 2°}{360°} = \frac{\pi}{90} \cdot r = 0{,}03491 \cdot r$$

a = 2,007 mm (r: Radius der Innenseite des Ringes)
Wählt man einen größeren Ringdurchmesser, wird naturgemäß eine größere Genauigkeit erreicht. Ausgehend vom Durchmesser mit 115 mm kann dieser verdoppelt bzw. verdreifacht werden:
230 mm a: 4 mm (0,03491°r)
345 mm a: 6 mm
Etwas problematisch ist die Bestimmung des Punktes für 0°, um die Winkeleinteilung genau auf der Höhe der Bohrung anzubringen. Es wird empfohlen, den Sonnenring an einem Stativ frei aufzuhängen und mit Reißnadel und Richtplatte eines Feinmechanikers den Nullpunkt auf der gegenüberliegenden Seite der Bohrung anzubringen.
Wer sich in der Berechnung der Mittagshöhe (Kulminationshöhe) der Sonne auskennt, kann auf diese Weise die Gradzahl festlegen und von diesem Punkt ausgehen.
Mit Hilfe des Haggeschen Sonnenringes läßt sich die Sonnenhöhe verhältnismäßig genau festlegen. Bei Verwendung eines Ringes von 230 mm Durchmesser beträgt die Ablesegenauigkeit 0,25° und ist damit größer als bei einem Pendelquadranten. Neben der Ablesegenauigkeit kommt es aber auch darauf an, auch Schülern ein einfaches und leicht herstellbares Hilfsmittel in die Hand zu geben, um Grundbegriffe der Astronomie durch eigene Beobachtungen nahe zu bringen.

Arnold Zenkert

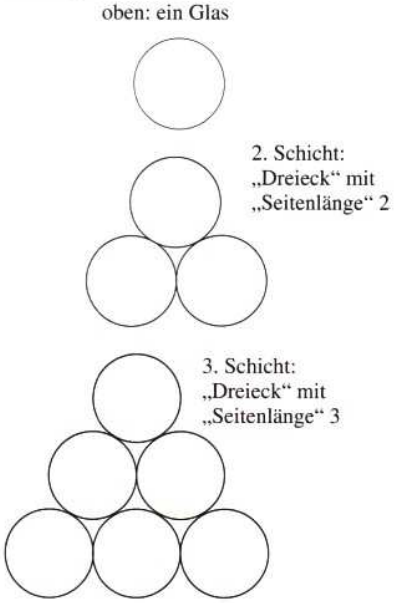


Buchhinweis
Ideen und Anregungen für eigene Experimente liefert das Buch „Astronomische Musterversuche".

Lösungen

Das Polizei-Abzeichen „California Highway Patrol", Seite 4
Lösung:
$\alpha = 77\ 1/7°,\ \beta = 51\ 3/7°$

Zerbrechlicher Rekord, Seite 4
Lösung:
An der Spitze steht ein einzelnes Glas, darunter 3 Gläser, in der dritten Schicht von oben ein „Gläserdreieck" mit „Seitenlänge" 3 u. s. w.:



Wir fragen uns zunächst, aus wieviel Gläsern ein „Gläserdreieck" der Seitenlänge n besteht. Nach der bekannten Summenformel sind dies genau $1+2+3+...$

$$...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}\ \text{Gläser.}$$

Nun haben wir aber 18 „Gläserdreiecke" übereinander, so daß sich für die Gesamtzahl die folgende Formel ergibt:

$$\sum_{n=1}^{18}\frac{n\cdot(n+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{18}\left(n^2+n\right)$$

Nutzt man die Summenformel

$$\sum_{n=1}^{N}n^2=\frac{2N^3+3N^2+N}{6}$$

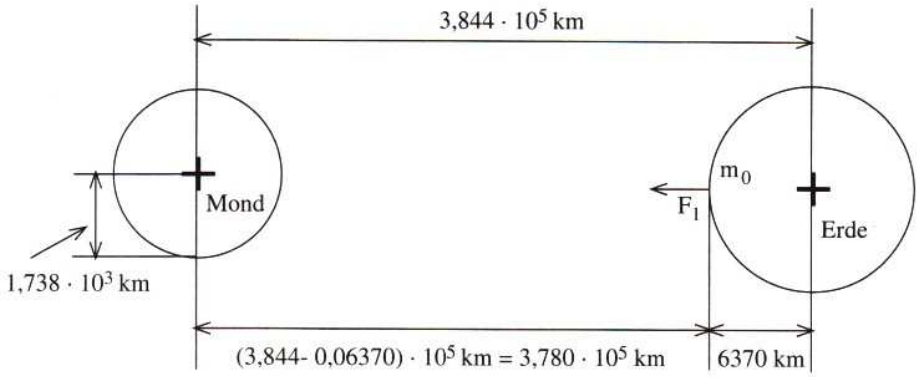
erhält man:

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{18}n^2+\sum_{n=1}^{18}n\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\cdot18^3+3\cdot18^2+18}{6}+\frac{18\cdot(18+1)}{2}\right)$$

$$=1140$$

Ralf Laue



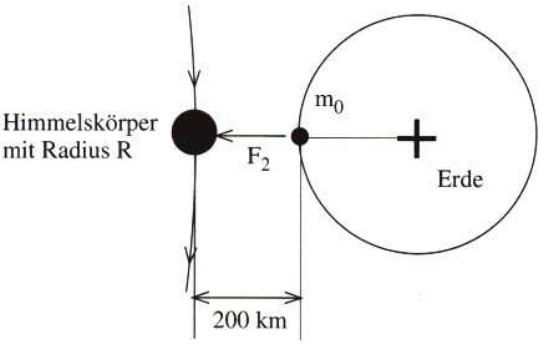


Abb. zur Lösung „Zeitungsente"

Vorsorgesparen
Lösungen:

1. Aufgabe:
a)

$$K_1=12R+R\cdot\frac{p}{100}\cdot\left(\frac{12}{12}+\frac{11}{12}+\frac{10}{12}+...+\frac{1}{12}\right)$$

$$=12R+R\cdot\frac{p}{100}\cdot\frac{13\cdot6}{12}=12R+R\cdot\frac{13p}{200}$$

Wegen p = 5 und R = 50 DM gilt

$$K_1=600\ \text{DM}+\frac{13\cdot5}{4}\ \text{DM}=616,25\ \text{DM}$$

b) Mit $q=1+\frac{p}{100}$ gilt

$$K_{20}=K_1\cdot q^{19}+K_1\cdot q^{18}+...+K_1\cdot q^1+K_1+P_{20}$$

$$=K_1\left(q^{19}+q^{18}+...+q^1+1\right)+P_{20}$$

$$=K_1\cdot\frac{q^{20}-1}{q-1}+P_{20}$$

Mit $K_1 = 616,25$ DM und

$$P_{20}=\frac{40}{100}\cdot12R\cdot20=96R=96\cdot50\ \text{DM}$$

und $q=1+\frac{5}{100}=1,05$ ergibt sich

$$K_{20}=616,25\ \text{DM}\cdot\frac{1,05^{20}-1}{0,05}$$

$$+4800\ \text{DM}=616,25\ \text{DM}\cdot33,065954+4800\ \text{DM}$$

$$=20376,89\ \text{DM}+4800\ \text{DM}=25176,89\ \text{DM}\approx25177\ \text{DM}$$

2. Aufgabe: Mit $q_*=1+\frac{p_*}{100}$ und $K_{*1}=12R+R\frac{13p_*}{200}=\left(6000+\frac{13p_*}{4}\right)\text{DM}$

gilt für das Guthaben K_{*20} auf dem Sondersparbuch nach der Laufzeit von 20 Jahren:

$$K_{*20}=K_{*1}\cdot\left(q_*^{19}+q_*^{18}+...+q_*^1+1\right)$$

$$=\left(600+\frac{13p_*}{4}\right)\cdot\left(q_*^{19}+q_*^{18}+...+q_*^1+1\right)=\left(600+\frac{13p_*}{4}\right)\cdot\frac{q_*^{20}-1}{q_*-1}\ \text{DM}$$

K_{*20} wächst, da $600+\frac{13p}{4}$ und $q_*^{19}+q_*^{18}+...q_*^1+1$ beide streng monoton mit p_* wachsen, ebenfalls streng monoton mit p_*.
Mit der für K_{*20} angegebenen Formel ergibt sich

P_*	K_{*20}
6,85	25096,00 DM
6,90	25239,71 DM

Laut Tabelle und gemäß der Lösung der 1. Aufgabe gilt also $p_*\approx6,9$.

Lösung zu „Zeitungsente":

$$F_1=G\cdot\frac{m_0\cdot\frac{4\pi}{3}\left(1,738\cdot10^3\text{km}\right)^3\cdot\delta_M}{\left(3,780\cdot10^5\text{km}\right)^2};$$

$$F_2=G\frac{m_0\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot R^3\delta_M}{(200\ \text{km})^2}$$

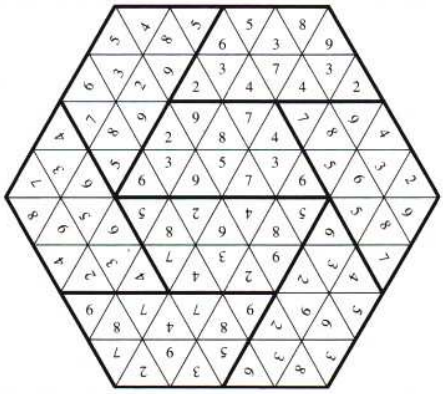
Auf $F_1 = F_2$ folgt

$$\frac{1,738^3\cdot10^9\cdot\text{km}^3}{3,780^2\cdot10^{10}\cdot\text{km}^2}=\frac{R^3}{4\cdot10^4\cdot\text{km}^2}$$

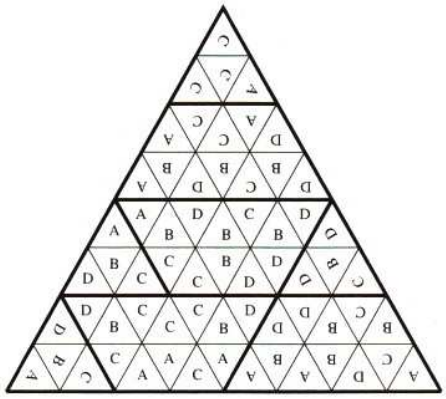
und weiter

$$R = \sqrt[3]{\frac{1{,}738^3 \cdot 4}{3{,}780^2}} \cdot 10\ \text{km} \approx 11{,}4\ \text{km}.$$

Lösung zu Mathematisches Puzzle 1:



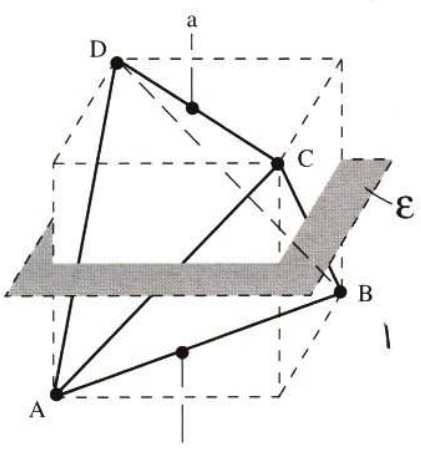
Lösung zu Mathematisches Puzzle 2:



Lösungen zu „Drehspiegelung"

zu 3. Jede der beiden Ebenen, die drei C-Atome und ein (und damit genau zwei) H-Atome enthält, ist eine Symmetrieebene des Allen-Moleküls. Damit gibt es zwei Ebenenspiegelungen als Deckabbildungen. Hinzu kommen die Drehung mit 180° um die Schnittgeraden der Ebene mit diesen beiden Ebenen. Das Allen-Molekül hat also insgesamt 8 Deckabbildungen.

zu 5. Jede Verbindungsgerade der Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten des regelmäßigen Tetraeders ist Achse von genau zwei Drehspiegelungen, die Deckabbildung sind. Die mögliche Einbettung des regulären Tetraeders in einen Würfel erleichtert diese Einsicht ganz erheblich (siehe Abb.). Es gibt demnach 6 derartige Drehspiegelungen.



Lösung zu Zahlenrätsel

1) 81+8+10=99; 9+9+2=20;
11+3+3=17; 99+20+17=136
2) 21+49+14=84; 3+7+4=14;
12+2+21=35; 84+14+35=133
3) 42+4+8=54; 7+8+27=42;
9+10+8=27; 54+42+27=123
4) 56+35+7=98; 8+7+10=25;
14+20+18=52; 98+25+52=175

Lösung zu Circles with a common centre

Die Differenz ist in beiden Fällen gleich. Hat der Innenkreis den Radius R, so beträgt sein Umfang $2\pi R$. Der größere konzentrische Kreis hat den Umfang $2\pi(R+1)$. Die Differenz ist dann $2\pi(R+1) - 2\pi R = 2\pi R + 2\pi - 2\pi R = 2\pi$. Damit ist die Differenz unabhängig von der Kreisgröße stets 2π.

Lösung von Pair, impair

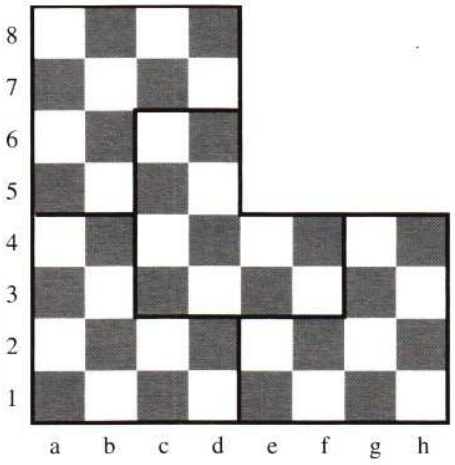
a: 129·49	b: 987·42
516	3948
1161	1974
6321	41454

Lösung zu Quant

Eine wahre Aussage läßt sich durch Umstellung von genau einer Eins nicht erreichen. Ebenso ist diese durch anderes Anordnen von genau einer Null nicht zu schaffen. Es bleibt somit nur eine andere Stellung der Zwei: $\mathbf{101 - 10^2 = 1}$

Lösung zu 2 in 1

1) 1. Df8 D:f8/Dg8/D:g7+/D:h7
2. g:f8D(L)/h:g8S/D:g7/g8S matt.



Lösung zu "Mode und Mathematik"

1.Für die Bundlänge b gilt die Proportion:
b : 63 cm = 360° : (6α + 5°)
Wenn $7\alpha + 5° = 360°$ sind, ist $\alpha = 50°$ und

$$b = \frac{360^0 \cdot 63\ \text{cm}}{305^0} = 74{,}361\ \text{cm}$$

Der Bund muß 75 cm lang werden.

2. $2r\pi \cdot \frac{305}{360} = 65\ \text{cm}$

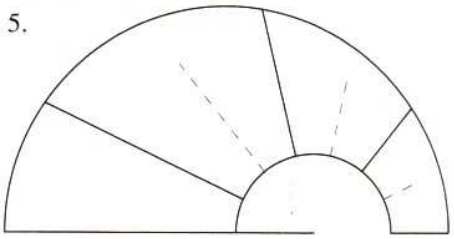
r = 12,211 cm

Der Taillenkreis wird mit dem aufgerundeten Radius 13 cm gezeichnet.

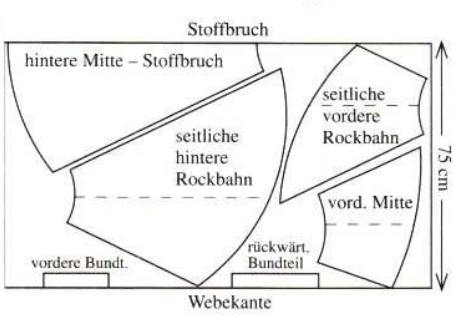
3.Der gesuchte Winkel beträgt 3 α + 2,5°, also 152,5°.

4.Nennen wir den Saumpunkt in der hinteren Mitte H, den in der vorderen Mitte V, und den Taillenkreismittelpunkt M, dann sind im Dreieck HMV zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt, $\overline{HM}$ ist Symmetrieachse des Rockes, also liegt auch der Saumkreismittelpunkt auf dieser Geraden. $\overline{HV}$ ist Sehne im Saumkreis. Die Mittelsenkrechte auf der Sehne schneidet $\overline{HM}$ im Mittelpunkt dieses Kreises.

5.



6.Die Abbildung zeigt eine Möglichkeit, den Schnitt auf den Stoff zu legen. Weil der Bund nicht in einem Stück übrigbleibt, hat Hella sich ausgerechnet, wie lang die drei Teile des Bundes sein müssen, wenn die Bundnähte auf die Seitennähte treffen sollen. Das mittlere Bundteil, das an die drei hinteren Rockbahnen genäht wird, schneidet Hella nur aus einer Stofflage zu, die beidseitig anzusetzenden Bundteile aber, die an je zwei Vorderbahnen genäht werden, schneidet sie aus doppeltem Stoff.



7.Bei einer Stoffbreite von 1,50 m kommt Hella mit 1,70 m aus, kauft aber sicherheitshalber 1,80 m.

Einzelpreis: 3,– DM Einzelpreis im Abo: 2,15 DM
ISBN 3-617-34016-4

H 11328 F

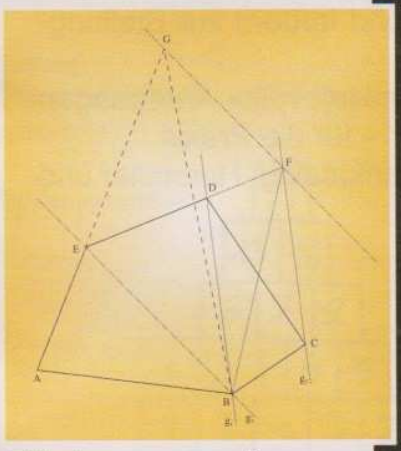
Heft 5
Oktober 1993
27. Jahrgang

Pädagogische
Zeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

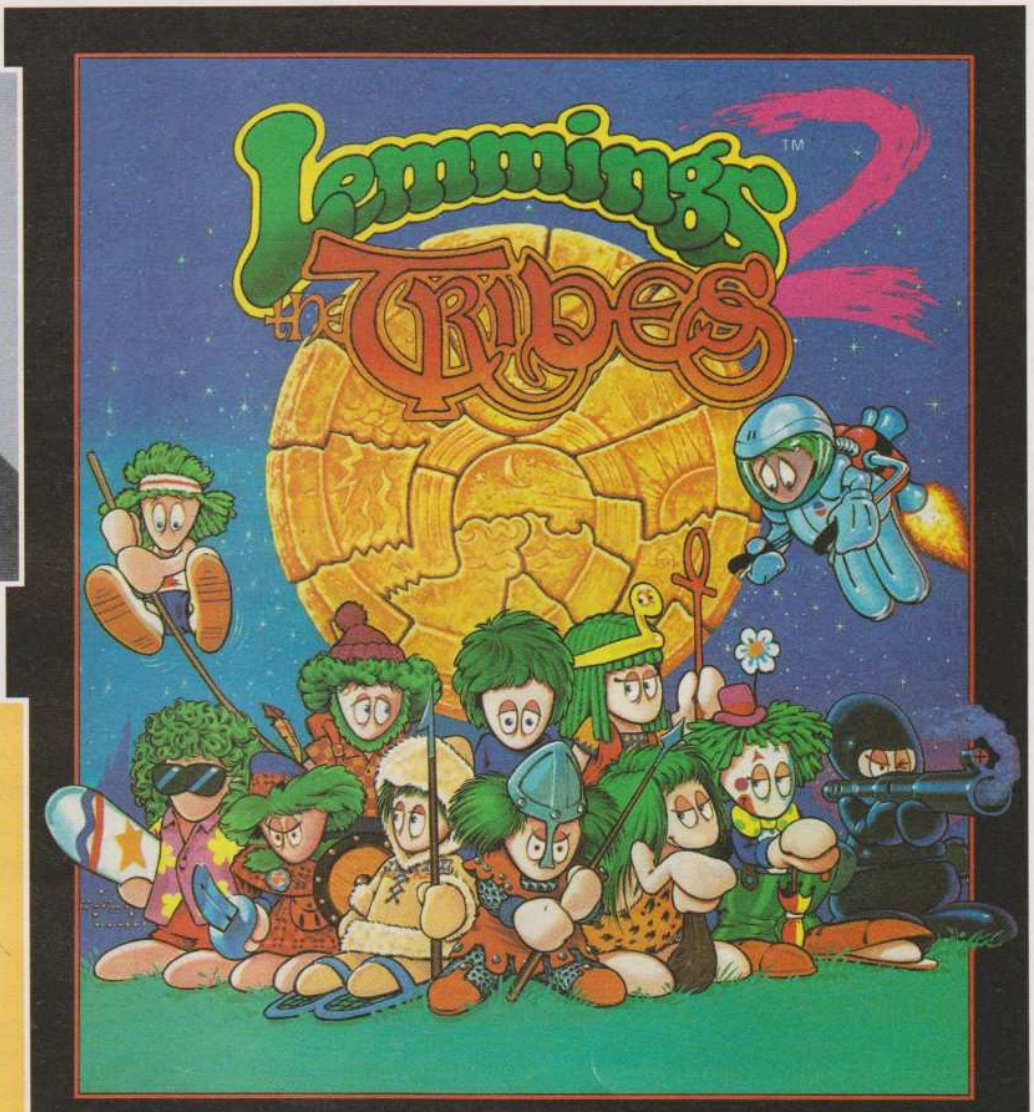
Alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Leben und Werk Georg Cantors



Flächenverwandlungen



Raupenwanderung als strategisches BRETTSPIEL

Bewegungen auf der Höllenschaukel

Inhaltsverzeichnis

Zeitungsschnipsel 4

Eine bunte Mischung von Informationen und Aufgaben zu einer Höllenschaukel, einer norwegischen Münze, zu Bundesschatzbriefen und der Alge „Caulerpa Taxifolia"

Der schnellste Weg – ein besonderes Stück Mathematikgeschichte 6

Johann Bernoullis berühmte Aufgabe – dargestellt von *Heinz Dabrock*.

Zahlenspielereien 7, 15

Dieter Bauke zeigt erstaunliche Gleichungen, die zu eigenen Tüfteleien anregen.

Der Komet Swift-Tuttle und die Erde..... 9

Horrormeldungen über Kometenaufschläge auf der Erde relativiert *Walter Träger*.

Vor 30 Jahren: Start des Nachrichtensatelliten „Telstar 2" 9

Rückblicke auf diesen frühen Satelliten von *Walter Träger*.

Komisches, Kniffliges und Knackiges 10

Alphons logische Abenteuer mit Antinomien, die Wege einer sportlichen (Schach)Dame sowie die Sprachecke.

Ein Kirschenpuzzle .. 11

Obwohl schon gut 250 Jahre alt, regt es noch immer zum Nachbauen und Probieren an, wie *Konrad Haase* und *Rüdiger Thiele* zeigen.

Flächenverwandlungen..... 12

Eine Verwandlung gradlinig begrenzter Flächen zu „entsprechenden Rechtecken" erleichtert Flächeninhaltsberechnungen ungemein, belegt *Jochen Kreusch*.

Sommerzeit – Sportzeit..... 14

Hartmut Boettcher verdeutlicht Zeitrückstände bei Sportresultaten durch Umrechnung in Streckenrückstände.

Zuschnitt eines Glockenrocks 15

Berechnungen zur optimalen Nutzung einer vorgegebenen Stoffbreite von *Bernd Luderer*.

Ein Ausflug in die räumliche Geometrie 16

Besonders die Beschreibung und Analyse eines um eine Raumdiagonale rotierenden Würfels interessiert *Bernd Wernicke*.

Ganz so einfach ist es mit dem Mond nicht 24

Astronomischen Unsinn mit Mondabbildungen auf Zeichnungen und Gemälden rückt *Arnold Zenkert* gerade.

Gedanken zum 75. Todestag von Georg Cantor 26

Vielseitig interessiert, widmete sich Georg Cantor besonders der Mengenlehre. *Walter Purkert* beschreibt die Person Georg Cantors und seine mathematischen Leistungen.

Interessante Aufgaben von Isaak Newton 28

Aus dem umfangreichen Werk des vor 350 Jahren geborenen Isaak Newton hat *Johannes Lehmann* einige „mathematische Bonbons" ausgewählt.

Marktecke 32

Im Vordergrund stehen diesmal strategische Brettspiele für den Computer – ausgewählt und ausprobiert von *Hartmuth Seitz* und *Christian Pape*.

Lösungen 30, 34

alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett und in Verbindung mit Dr. Gabriele Liebau, Dr. Claus Peter Helmholtz und Herbert Kästner.

Redaktion:
Hans Joachim Lemke, Tel.: (05 11) 4 00 04-42
Postfach 10 01 50, 30917 Seelze
Redaktionskollegium:
StR F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), OL Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pliezhausen), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OStR J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. W. Schmidt (Greifswald), OStR G. Schulze (Herzberg), Dr. W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

Anzeigenleitung: Bernd Schrader
Anzeigenabwicklung:
Telefon: (05 11) 4 00 04-23
Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01. 01. 1990
Vertrieb und Abonnement:
Telefon: (05 11) 4 00 04-52/53/85
Verlag:
Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG,
Postfach 10 01 50, 30917 Seelze
Telefon: (05 11) 4 00 04-0
Telefax: 4 00 04-19
Das Jahresabonnement für **alpha** besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt 12,00 DM, im Einzelbezug 2,50 DM. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten.
Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).

alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV KlettCotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, DH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.

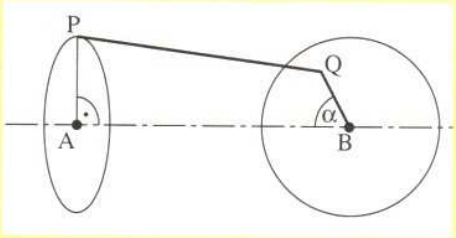
© Beiträge sind urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte vorbehalten. Auch unverlangt eingesandte Manuskripte werden sorgfältig geprüft. Unverlangt eingesandte Bücher werden nicht zurückgeschickt. Die als Arbeitsblatt oder Kopiervorlage bezeichneten Unterrichtsmittel dürfen bis zur Klassen- bzw. Kursstärke vervielfältigt werden.

Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschriften im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.

Herstellung: PZ Pädagogika Zentrale GmbH
Druck: Scherrerdruck, Hannover
ISBN 3-617- 34017-2

Zeitungs-schnipsel

Auf zum Münchner Oktoberfest!



1993 findet das Münchner Oktoberfest, das seinen Ursprung in den Hochzeitsfeierlichkeiten des Kronprinzen Ludwig, des späteren Königs Ludwig I. von Bayern, mit der Prinzessin Therese von Sachsen-Hildburghausen im Jahr 1810 hat, zum 160. mal statt. 24 Oktoberfeste mußten ausfallen (Kriegs- und Nachkriegsjahre, Cholera-Epidemien). Festplatz ist die Theresienwiese, das Oktoberfest wird deshalb auch „Wies'n" genannt. Seit 1835 findet am ersten Festsonntag der Trachten- und Schützenumzug statt. Auch in diesem Jahr wird wieder mit über 6 000 000 Besuchern gerechnet.

Die Gondel der „Stern von Rio" genannten Höllenschaukel, die auch in diesem Jahr wieder auf der „Wies'n" steht, bietet 48 Personen in 12 Reihen mit je 4 Sitzen Platz. Die Gondel ist an ihren Enden über Kardangelenke mit zwei von Hydraulikmotoren angetriebenen Rotoren verbunden. Beide Rotoren haben die gleiche Drehachse. Sie sind aber in ihrer Drehbewegung nicht miteinander gekoppelt, sie werden also separat gesteuert. Die maximale Drehzahl jedes Rotors beträgt 10 U/min. Dadurch wird eine große Vielfalt von Bewegungsmöglichkeiten erreicht. Denn mit der gegenseitigen Lage der Rotorenarme ändert sich der Winkel zwischen Rotorenachse und Gondelachse. Der dazu erforderliche Längenausgleich (der Abstand der Enden der Gondelachse ist konstant) wird dadurch erreicht, daß ein Rotorarm als Schwenkarm ausgebildet ist.

Aufgabe: Vereinfachend seien die Rotorarme AP und BQ und die Achse PQ der Gondel als Strecken aufgefaßt. Für ihre Längen gilt $\overline{AP} = \overline{BQ} = r = 4{,}8\text{m}$ und $\overline{PQ} = a = 15{,}0\text{m}$. Der Arm AP des starren Rotors steht senkrecht auf der Rotorenachse AB. Der Arm BQ des Gelenkrotors bildet mit der Rotorenachse einen sich ändernden Winkel $\alpha = \sphericalangle\,QBA$. Für jede Lage beider Rotorenarme gilt also: Der Punkt P (als Punkt idealisiertes Kardangelenk) ist ein Punkt des Kreises mit Mittelpunkt A und Radius r, dessen Ebene senkrecht auf AB steht. Der Punkt Q (als Punkt idealisiertes Kardangelenk) ist ein Punkt des Kreises mit Mittelpunkt B und Radius r. Der Minimal- und der Maximalwert des Winkels α sind zu ermitteln! Dabei soll zusätzlich gelten: Der Winkel α ist dann ein rechter Winkel, wenn BQ auf der Ebene durch die Punkte A, B und P senkrecht steht.

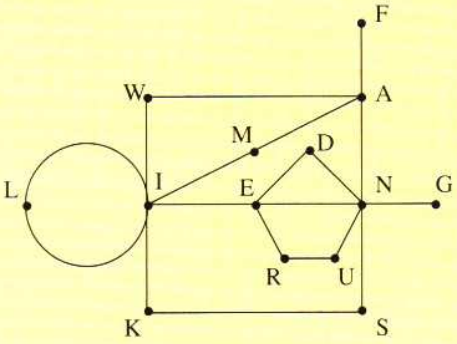
Dr. W. Träger

Die Höllenschaukel

Foto: Firma Zehle, München

Norwegische 50-Kronen-Silbermünze „Olympische Winterspiele 1994 Lillehammer"

Aufgabe: Das auf dieser Münze dargestellte Motiv wird durch einen Substantiv beschrieben. Dieser ist im abgebildeten Graphen versteckt:



Das Wortbild dieses gesuchten Substantivs entsteht, indem man beim Ablaufen eines geeigneten, jede Kante genau einmal enthaltenden Kantenzuges (Weges) nacheinander die den passierten Knoten zugeordneten Buchstaben aufschreibt.

Dr. W. Träger, Döbeln

Bundesschatzbriefe – eine lohnende Geldanlage

Bei Bundesschatzbriefen gibt es zwei Typen A und B. Beim Typ A beträgt die Geldanlage N (Nennwert) 100 DM oder ein Mehrfaches von 100 DM, erfolgt jährlich die Zinsauszahlung und nach der Laufzeit von 6 Jahren die Rückzahlung des Nennwertes. Beim Typ B beträgt die Geldanlage N 50 DM oder ein Mehrfaches von 50 DM, werden die Zinsen angesammelt und erfolgt nach einer Laufzeit von 7 Jahren die Rückzahlung des Nennwertes und der angesammelten Zinsen und Zinseszinsen.

Für die Bundesschatzbriefe 1992/11 mit Zinslaufbeginn am 1. 11. 92 gelten die folgenden Zinssätze:

Laufzeit	Zinssatz
1. Jahr	$p_1\% = 7{,}00\%$
2. Jahr	$p_2\% = 7{,}50\%$
3. Jahr (Typ A und B)	$p_3\% = 8{,}00\%$
4. Jahr	$p_4\% = 8{,}25\%$
5. Jahr	$p_5\% = 8{,}50\%$
6. Jahr	$p_6\% = 8{,}50\%$
7. Jahr (Typ B)	$p_7\% = 8{,}50\%$

1. Aufgabe:
Wieviel Prozent seiner Geldanlage N in einem Bundesschatzbrief 1992/11 vom Typ A erhält ein Erwerber während der Laufzeit vom 1. 11. 92 bis zum 1. 11. 98 insgesamt an Zinsen ausgezahlt?

2. Aufgabe:
Ein Sparer läßt sich die auf seine Geldanlage N jährlich zum gleichen Zinssatz p% erteilten Zinsen jeweils auszahlen: Wie groß muß dieser Prozentsatz p% sein, damit er nach 6 Jahren Laufzeit ebenso viel

Zinsen erhalten hat wie ein Erwerber eines Bundesschatzbriefes 1992/11 vom Typ A mit dem gleichen Nennwert bis zum 1. 11. 98?

3. Aufgabe:
Wieviel Prozent seiner Geldanlage N in einem Bundesschatzbrief 1992/11 vom Typ B erhält ein Erwerber am 1. 11. 1999 allein an Zinsen und Zinseszinsen zurückgezahlt?

4. Aufgabe:
Eine Geldanlage N wachse durch die jährlichen Zinsen und Zinseszinsen mit jeweils dem gleichen Zinssatz p%. Wie groß muß p sein, damit nach einer Laufzeit von 7 Jahren die angesammelten Zinsen und Zinseszinsen ebenso groß sind wie die bei einem Bundesschatzbrief 1992/11 vom Typ B mit dem gleichen Nennwert am 1. 11. 1999?

Dr. W. Träger, Döbeln

Killeralge erstickt das Mittelmeer

Die „Döbelner Allgemeine Zeitung" druckte am 3.11.92 mit obiger Überschrift einen Bericht von Christa Barth ab:

„Marseille. Sie ist für den Menschen ungefährlich, droht aber das gesamte Ökosystem des Mittelmeeres zu zerstören. Zu diesem Ergebnis sind Wissenschaftler nach mehrmonatigen eingehenden Beobachtungen der tropischen Killeralge „Caulerpa Taxifolia" gelangt, die entlang der französischen Küsten „mosaikartig" die heimischen Algenarten überwuchert und unter ihren Wedel gnadenlos alles andere Leben ersticken läßt. Der 1984 erstmals vor dem Ozeanographischen Museum in Monaco entdeckte Eindringling vermehrt sich exponentiell. Rund 400 Hektar des schmalen mediterranen Festlandsockels hat er bereits kolonisiert. Italien, Spanien und die Balearen sind inzwischen berührt. heißt es in dem Ende Oktober vorgelegten alarmierenden Bericht des Expertenkomitees.... Wie weit wird sich die tropische Wucheralge noch ausbreiten, die derzeit keinen natürlichen Feind im Mittelmeer besitzt? Von Roquebrune bei Monaco hat sich der grüne Teppich seit 1984 „jedes Jahr versechsfacht", betont Professor Meinesz vom Institut für Küstenumweltschutz der Universität Nizza."

Aufgabe: Wie groß war bei ihrer Entdeckung 1984 höchstens die von der Caulerpa Taxifolia überwucherte Fläche des küstennahen Mittelmeeres?

Dr. W. Träger, Döbeln

Der schnellste Weg – ein besonderes Stück Mathematikgeschichte

Der Mathematiker Johann Bernoulli (1667 – 1748) stellte im Jahre 1696 den Mathematikern seiner Zeit die folgende Aufgabe:
Zwei Punkte A und B, welche verschiedenen Abstand vom Erdboden haben und nicht senkrecht übereinander liegen, sollen durch eine Bahn verbunden werden, auf welcher ein reibungsfrei beweglicher Körper vom oberen Punkt ausgehend infolge der Schwerkraft in kürzester Zeit zum unteren der beiden Punkte gelangt.

Es ist naheliegend, die Verbindungsstrecke zwischen A und B als Lösung des Problems zu vermuten. Der Körper bewegt sich dann auf einer schiefen Ebene, die Bewegung ist gleichmäßig beschleunigt. Für solche geraden Wegstücke berechnet sich die Laufzeit t über die Formel $t = s / \bar{v}$ wobei s der zurückgelegte Weg und $\bar{v}$ das arithmetische Mittel aus der zum Wegstück gehörenden Anfangs- und Endgeschwindigkeit bedeuten. Für die Momentangeschwindigkeiten entlang der Bahn erhalten wir mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$, wobei g für die Erdbeschleunigung und h für die insgesamt durchfallene Höhe stehen.
Die Erdbeschleunigung ist in der folgenden Berechnung auf den Wert 10 m/s² gerundet. Längenangaben beziehen sich auf die Längeneinheit Meter und Zeitangaben auf die Zeiteinheit Sekunde. Im Sinne einer mathematisch ausgerichteten Betrachtung des Problems verzichten wir einfachheitshalber auf die Mitführung der Einheiten und begnügen uns bei konkreten Größenangaben mit den Maßzahlen.
Zunächst positionieren wir ein kartesisches Koordinatensystem mit horizontaler x-Achse und vertikaler, nach unten gerichteter y-Achse so, daß der Ursprung mit dem Anfangspunkt A der Bewegung zusammenfällt und der tieferliegende Endpunkt B positive Koordinaten hat. Ist dann A(0|0) und $B(x_B|y_B)$, ergeben die obigen Beziehungen für den direkten Weg AB die Laufzeit

$$t_{direkt} = 2 \cdot \sqrt{x_B^2 + y_B^2} \quad / \quad \sqrt{2 \cdot g \cdot y_B}$$

Konkret für B(9/3) erhalten wir hiermit $t_{direkt} \approx 2{,}45$.
Wir vergleichen jetzt den direkten Weg AB mit einem in **Abb. 1** gezeigten Knickweg APB. Die zugehörigen Laufzeit ist die Summe der Laufzeiten über die Teilwege AP und PB. Für einen Punkt P(x/y) (welche Koordinatenwerte x und y sind erlaubt?) erhalten wir als Gesamtlaufzeit $t_{Knick} = t_{AP} + t_{PB}$ die im Kasten aufgeführte Formel.
Konkret für B(9|3) wie oben und P(3|2) ergibt sich hieraus der Wert $t_{Knick} \approx 2{,}01$.
Vergleichen wir mit dem zuerst berechneten Wert $t_{direkt} \approx 2{,}45$, erkennen wir:
Der kürzeste Weg ist nicht der schnellste!
Johann Bernoullis Aufgabe ist offensichtlich nicht so einfach zu lösen, wie es auf den ersten Blick erscheint. Überraschend ist, daß auch Knickwege mit einem Knickpunkt P unterhalb des Niveaus des Punktes B schneller durchlaufen werden können als der kürzeste Weg.

$$\begin{aligned} t_{Knick} &= t_{AP} + t_{PB} \\ &= 2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \quad / \quad \sqrt{2 \cdot g \cdot y} \\ &\quad + 2 \cdot \sqrt{(x_B - x)^2 + (y_B - y)^2} \quad / \quad \left(\sqrt{2 \cdot g \cdot y} + \sqrt{2 \cdot g \cdot y_B}\right) \end{aligned}$$

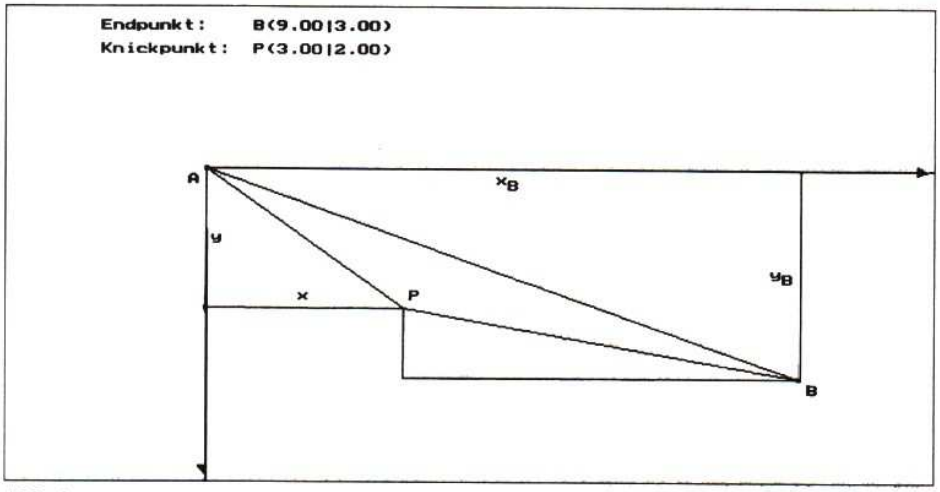


Abb. 1

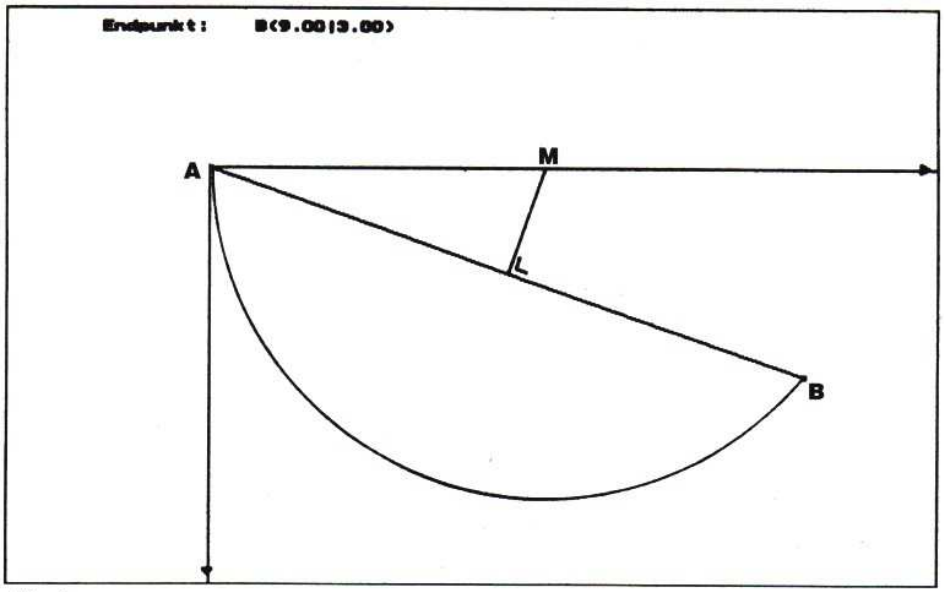


Abb. 2

Beispielsweise für P(7|5) erhalten wir unter Beibehaltung von B(9|3) die Laufzeit $t_{Knick} \approx 2{,}04$. Wo liegt der Knickpunkt des schnellsten Knickweges?

Forschungen Galileis

Galileo Galilei (1564 – 1642) hatte 1638 den Bogen des Kreises durch A und B mit Mittelpunkt auf der x-Achse als den schnellsten Weg bezeichnet (s. **Abb. 2**). Die Laufzeit längs des zu B(9|3) gehörenden Kreisbogens ist $t_{Kreis} \approx 1{,}81$. Man kann diesen Laufzeitwert beliebig genau bestimmen, indem man den Kreisbogen durch einen hinreichend fein untergliederten Sehnenzug annähert und die Laufzeiten für die Sehnen aufsummiert.

Berechnungen Bernoullis

Wie Johann Bernoulli zeigte, hatte sich auch Galilei in der Art der Bahn geirrt. Bernoulli wies nach, daß die gesuchte Kurve dieselbe Form besitzt wie die Bahn, welche ein Punkt auf dem Rand eines Rades beim Abrollen des Rades zurücklegt (s. **Abb. 3**). Wir leiten dieses Resultat und die weiteren Zusammenhänge nicht her, da hierbei u. a. eine Differentialgleichung gelöst werden muß.

Zykloide

Die durch die eingangs gestellte Frage gesuchte Bahnkurve ist eine sogenannte Radlinie oder Zykloide. Der Radius r und die konstante Winkelgeschwindigkeit w des Kreises (Rades) sind durch die Koordinaten von A und B eindeutig festgelegt. Die Koordinaten eines beliebigen Punktes P(x|y) der Zykloide lassen sich in Abhängigkeit vom Drehwinkel $\alpha = w \cdot t$ des Kreises aus seiner Ausgangslage erfassen und man erhält

$x = r \cdot (\alpha - \sin \alpha)$

$y = r \cdot (1 - \cos \alpha)$

Man bezeichnet ein derartiges Gleichungspaar auch als Parameterdarstellung der Kurve, hier mit Parameter α. Für die Laufzeit längs des zu B(9/3) gehörigen Zykloide ergibt sich $t_{Zykl} \approx 1{,}75$. Galileis Irrtum erschient angesichts des damals nicht meßbaren Unterschiedes von 0,06 Sekunden zum optimalen Wert verzeihlich.

„Brachistochrone"

Die Zykloide trägt in diesem Zusammenhang den Namen „Brachistochrone" (griech.: kürzeste Zeit). Es erstaunt, daß sowohl die Brachistochrone als auch Galileis Kreisbogen teilweise unterhalb des Niveaus des Endpunktes B verlaufen,

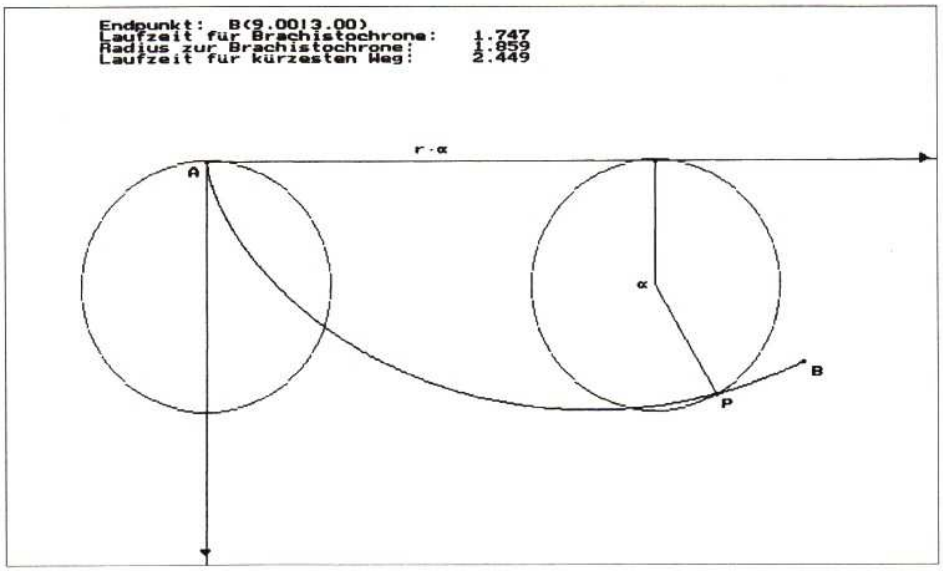


Abb. 3

wenn die Neigung der Verbindungsgerade AB hinreichend gering ist.

Das Brachistochronen-Problem markiert übrigens den Anfang einer mathematischen Disziplin, der sogenannten Variationsrechnung.

Variationsrechnung

Neben Johann Bernoulli selbst lösten auch sein Bruder Jakob Bernoulli sowie Gottfried Wilhelm Leibniz und der Marquis De L'Hospital die oben gestellte Aufgabe.

Eine weitere Lösung war von einem anoymen Verfasser eingegangen, den Johann Bernoulli an Hand der verwendeten Methode mit den Worten „ex ungue leonem" (den Löwen von der Pranke her) als Isaac Newton identifizierte.

StR Heinz Dabrock

Zahlen spielereien

1) Gibt es Zahlen, die Potenz ihrer Quersumme sind?

$(8+1)^2=81$

$(5+1+2)^3=512$

$(2+4+0+1)^4=2401$

$(4+9+1+3)^3=4913$

$(5+8+3+2)^3=5832$

$(1+7+5+7+6)^3=17576$

$(1+9+6+8+3)^3=9683$

$(2+3+4+2+5+6)^4=234256$

$(3+9+0+6+2+5)^4=39065$

$(6+1+4+6+5+6)^4=614656$

...

2) Für einige Kombinatinen gibt es garantiert nur endlich viele Lösungen:

$19=(1+9)+1\cdot9$

$29=(2+9)+2\cdot9$

...

$99=(9+9)+9\cdot0$

Es sind nur nur diese neun Lösungen unter der Bedingung möglich, daß eine Zahl gleich der Summe aus Quersumme und Querprodukt ist.

$135=(1+3+5)\cdot1\cdot3\cdot5$

$144=(1+4+4)\cdot1\cdot4\cdot4$

Jedoch gibt es nur diese beiden Lösungenunter der Bedingung, daß eine Zahl gleich dem Produkt aus Quersumme und Querprodukt ist.

Unendlich viele Lösungen gibt es jedoch bei

$71=7+1+7\cdot1+(7+1)\cdot71$

$119=1+1+9+1\cdot1\cdot9+(1+1+9)\cdot1\cdot1\cdot9$

$391=3+9+1+3\cdot9\cdot1+(3+9+1)\cdot3\cdot9\cdot1$

und für 1391, 2933, 5961, 25943, 31778, 34583, 39392,...

Dieter Bauke

Der Komet Swift-Tuttle und die Erde

Eine im Januar 1992 veröffentliche dpa-Meldung lautet:

> ***Eis-Bombe aus dem All***
> *New York (dpa). Der „Jüngste Tag" findet fast tausend Jahre später statt als noch vor kurzem angenommen – falls der Aufprall des Kometen Swift-Tuttle die Ursache für das Ende des Lebens auf der Erde sein sollte. Das haben US-Astronomen aufgrund neuer Berechnungen herausgefunden. Der Himmelskörper aus Eis und Dreck mit einem Durchmesser von etwa zehn Kilometern werde die Erde auf keinen Fall wie ursprünglich berechnet im Jahre 2126 treffen. Der gefährliche Zeitpunkt komme im Jahr 3044, präzise Vorhersagen für den Aufprall könne man noch nicht machen.*

• Nach Angaben von „Der Sternenbote" (Wien) errechnete D. K. Yeomans (USA) aus 237 Beobachtungen des Kometen Swift-Tuttle u. a. die Umlaufzeit dieses Kometen zu $U_K = 135{,}01$ Jahre.

• Die Erde umkreist die Sonne in einem (siderischen) Jahr einmal: $U_E = 1$ Jahr. Im sonnennächsten Punkt ihrer Bahn, ihrem Perihel, ist sie $\pi_E = 147{,}1 \cdot 10^6$ km und im sonnenfernsten Punkt, ihrem Aphel, ist sie $\alpha_E = 152{,}1 \cdot 10^6$ km von der Sonne entfernt.

• 1. Keplersche Gesetz: Die Planeten, Planetoide und Kometen bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

• Für jeden Punkt einer Ellipse genannten ebenen Kurve gilt: Die Summe seiner Abstände von zwei festen Punkten, den Brennpunkten, ist gleich der großen Achse 2a der Ellipse.

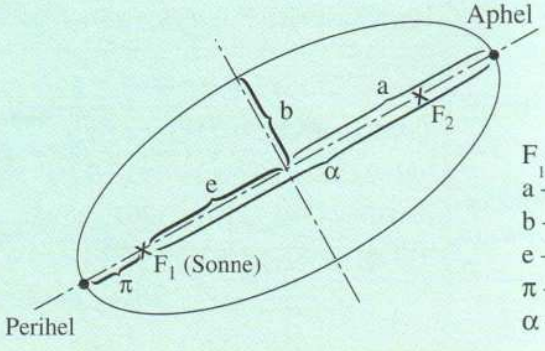
• 3. Keplersche Gesetz: Die Quadrate der Umlaufzeit zweier Planeten, Planetoide oder Kometen verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Bahnen.

Aufgaben

1. Aufgabe: Als Längeneinheit für astronomische Entfernungsangaben wird die als Astronomische Einheit (AE) bezeichnete Länge der großen Halbachse a_E der Erdbahn benutzt. 1 AE = a_E. Die Astronomische Einheit ist in Kilometer umzurechnen.

Bemerkung: Petrus Apianus (Peter Apian; 1495-1552), Professor an der Universität Ingolstadt und Berater von Kaiser Karl V. entdeckte, daß der sich bei einem Kometen in Sonnennähe bildende Schweif stets von der Sonne weggerichtet ist.
Sollte tatsächlich einmal ein Komet auf die Erdoberfläche zufliegen, so wird in der Erdatmosphäre zumindest teilweise seine Bewegungsenergie in Wärmeenergie umgewandelt, und dadurch bedingt wird zumindest teilweise das im Kometen enthaltene Eis verflüssigt oder in den Gaszustand überführt. Weiterhin würden die dadurch vom Kometen gelösten festen Bestandteile zum Teil wie Sternschnuppen in der Atmosphäre verglühen.

Ein Komet in Sonnennähe. Nach Meinung des Wiener Geologenehepaares Dr. Edith Kristan-Tollmann und Prof. Alexander Tollmann soll vor etwa 9500 Jahren der Einschlag eines solchen Schweifsternes auf der erde die biblische Sintflut (Meereswelle, Weltbeben, Sturzregen, „ewige" Nacht) ausgelöst haben.



F_1, F_2 – Brennpunkte
a – große Halbachse
b – kleine Halbachse
e – lineare Exzentrizität
π – Perihelabstand von der Sonne
α – Aphelabstand von der Sonne

2. Aufgabe: Die kleine Halbachse b_E der Erdbahn und das Verhältnis $b_E : a_E$ sind zu berechnen.

3. Aufgabe: Die große Halbachse a_K der Bahn des Kometen Swift-Tuttle ist zu bestimmen.

4. Aufgabe: Wie groß ist mindestens der Abstand α_K des Aphels der Bahn des Kometen Swift-Tuttle von der Sonne? Anleitung: Da eventuell mit einem Aufprall dieses Kometen auf die Erde zu rechnen ist, muß seine Bahn die Erdbahn schneiden.

5. Aufgabe: Wie groß sind höchstens die kleine Halbachse b_K der Bahn dieses Kometen und der Quotient $b_K : a_K$?

Dr. W. Träger

Vor 30 Jahren: Start des Nachrichtensatelliten „Telstar 2“

Mit dem am 7.5.63 mit einer Trägerrakete vom Typ Delta in Cape Canaveral auf eine Umlaufbahn um die Erde transportierten Satelliten „Telstar 2“ wurden Fernsehbilder und Ferngespräche zwischen den USA und zwei europäischen Stationen übertragen. Die Übertragungszeit betrug jeweils 15 Minuten. Denn nur so lange befanden sich jeweils Sende- und Empfangsstation über dem optischen Horizont des Satelliten.

Laut dem „1. Keplerschen Gesetz“ bewegte sich „Telstar 2“ auf einer Ellipse, für die der Mittelpunkt M der Erde ein Brennpunkt ist. Nach Beobachtungen gilt: Die Umlaufzeit von „Telstar 2“ betrug $T_T = 225{,}05$ min. Für zwei spezielle Punkte P_1 und P_2 der Bahnellipse galt:

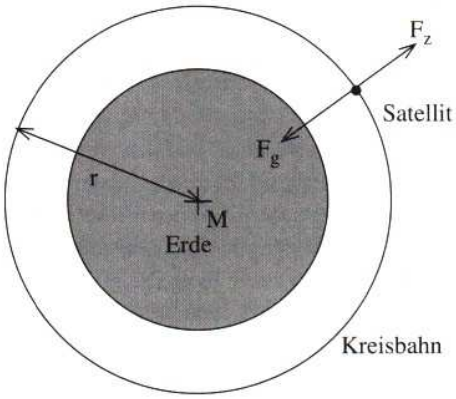
$\overline{MP_1} = 12868$ km

$\overline{MP_2} = 8572$ km und $\sphericalangle\ P_1MP_2 = 60^0$.

Aufgaben

1. Aufgabe: Die große Halbachse der Bahn von „Telstar 2“ ist zu berechnen!

Anleitung: Alle möglichen Erdsatelliten mit gleicher Umlaufzeit T_T wie „Telstar 2“ laufen nach dem „3. Keplerschen Gesetz“ auf Bahnellipsen um, deren große Halbachsen gleich der großen Halbachse a_T der Bahn von „Telstar 2“ sind. Also wird auch die Kreisbahn mit Radius $r = a_T$, deren Mittelpunkt mit dem Erdmittelpunkt M zusammenfällt, von jedem auf ihr umlaufenden Satelliten mit der gleichen Umlaufzeit T_T durchlaufen. Gemäß dem „2. Keplerschen Gesetz“ wird weiterhin diese Kreisbahn mit konstanter Bahngeschwindigkeit v durchlaufen. Im Falle der Kreisbahn müssen sich die auf den Satelliten wirkende Zentrifugalkraft F_Z und die Erdanziehungskraft F_G (Gravitationskraft), die beide entgegengesetzt gerichtet sind, gegenseitig kompensieren. Dabei gilt:



M – Mittelpunkt der Erde

$m_E = 5{,}977 \cdot 10^{24}$ kg – Masse der Erde

$r_E = 6371$ km – Erdradius

m_S – Masse des Satelliten

r – Abstand des Satelliten vom Erdmittelpunkt

$$G = 6{,}67295 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

– Gravitationskonstante

$$F_z = \frac{m_s \cdot v^2}{r}$$

– Zentrifugalkraft

$$F_G = G\frac{m_E \cdot m_S}{r^2}$$

– Gravitationskraft

Bemerkung:

Nachdem hinreichend leistungsstarke Trägerraketen zur Verfügung standen, wird für kommerzielle Nachrichtensatelliten im allgemeinen die geostationäre Bahn benutzt.

Die geostationäre Bahn ist eine in der Äquatorebene liegende Kreisbahn, die den mittleren Abstand 35730 km von der Erdoberfläche hat. Die zu dieser Bahn gehörende Umlaufzeit ist $T_T = 23$h 56 min; das ist die Zeit, in der sich die Erde einmal um ihre Achse dreht.

Bei entsprechender Wahl der Durchlaufrichtung bleibt ein Satellit auf geostationärer Bahn stets über einem Punkt der Erdoberfläche „stehen“. Ein geostationärer Satellit „sieht“ also etwa ein bestimmtes Drittel der Erdoberfläche.

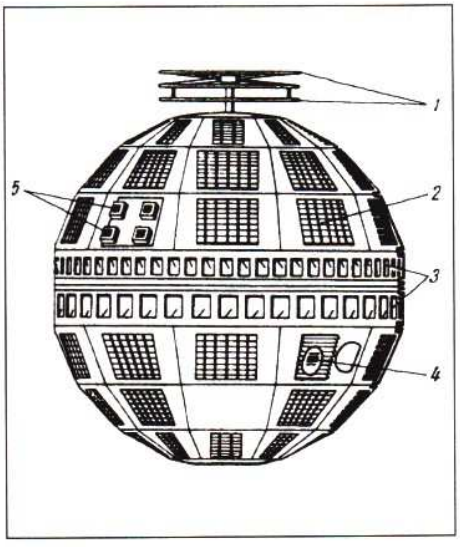
Drei geostationäre Satelliten, die in den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks „stehen“, können die ganze Erdoberfläche mit Ausnahme der Polgebiete versorgen. Dies hatte bereits 1945 A. C. Clark vorgeschlagen.

2. Aufgabe:

Durch eine Konstruktion im Maßstab 1:200 000 000 sind der zweite Brennpunkt, das Perihel (Perigäum – erdnächster Punkt der Bahn), das Aphel (Apogäum – erdfernster Punkt der Bahn) und die kleine Halbachse bT der Bahn von „Telstar 2“ zu ermitteln. Welche Abstände haben Perihel und Aphel dieser Satellitenbahn von der Erdoberfläche?

Anleitung: Die Summe der Abstände jedes Punktes einer Ellipse von ihren beiden Brennpunkten ist gleich der großen Achse 2a der Ellipse.

Dr. W. Träger, Döbeln



Telstar 2

Der vor 350 Jahren, am 5. 1. 1643 im Dorf Woolsthorpe (England) geborene Isaac Newton erfand die Differential- und Integralrechnung, entdeckte die Dispersion des Lichtes und das Gravitationsgesetz.

Alphons' logische Abenteuer

Während eines Urlaubs an der Nordsee nahmen Alphons, seine Eltern und seine Schwester an einer Bootsfahrt auf eine Insel teil. Der Kapitän des kleinen Schiffes unterhielt die Fahrgäste mit Berichten über reginonale Ereignisse aus Vergangenheit und Gegenwart. Am Schluß sagte er verschmitzt lächelnd: „Nehmen Sie das, was ich Ihnen erzählt habe, nicht so ernst. Wissen Sie, die Bewohner dieser Insel – höflich gesagt – flunkern gern, und ich bin ein Bewohner dieser Insel." Seine Worte lösten allgemeine Heiterkeit aus. Bei dieser oder jener Erzählung hatte man schon einen Verdacht in dieser Richtung gehabt. Durch geschickten Bezug auf augenscheinliche Tatsachen hatte der Kapitän die Zweifel des gesunden Menschenverstandes aber immer wieder zerstreuen können, so daß seine Erklärung nun in der Tat befreiende Erleichterung auslöste. Auch Alphons' Vater hatte mehrfach an der Wahrheit vorgetragener Geschichten gezweifelt. „Na", sagte er stolz zu seiner Familie, „mit meiner Skepsis saß ich doch auf dem richtigen Dampfer." Zu seiner großen Überraschung fragte ihn Alphons, warum er da so sicher sei? „Aber Alphons, Du hast doch gehört, was der Kapitän gesagt hat, seine Geschichten waren schlicht und einfach Lügen. Die Bewohner dieser Insel flunkern eben 'mal gern." „Genau das ist es", meinte darauf Alphons. „Wenn Sie gern flunkern, dann kann doch der Kapitän auch geflunkert haben, als er das sagte!?" Der Vater stöhnte: „Mein Sohn, Du hast schon eine Art einem jedes Selbstbewußtsein nehmen zu wollen. Du willst gern auf Dein Lieblingsthema, die Antinomien, hinaus. Daraus wird hier nichts. Denke doch an das Prinzip des indirekten Beweises. Wenn die Annahme der Wahrheit einer Aussage zu einem logischen Widerspruch führt, ist diese Aussage nicht wahr, sondern falsch. In unserem Fall ist also die Aussage des Kapitäns, alle Inselbewohner lügen, falsch." Alphons' Schwester unterbrach den Vater. „Dann hätte aber Alphons recht. Wenn es nicht so ist, daß alle Inselbewohner lügen, dann sagen eben alle die Wahrheit." Alphons, über die unerwartete Hilfe erfreut, nickte zustimmend. „Kinder", wehrte der Vater ab, „nicht alle lügen, das ist doch eine ganz andere Aussage als alle lügen nicht. Daß nicht alle Inselbewohner lügen besagt, mindestens ein Inselbewohner sagt die Wahrheit. Ob es nun alle Inselbewohner sind, die nicht lügen oder doch mindestens einer von ihnen lügt, das läßt die Aussage offen, im Gegensatz zu der Aussage, derzufolge alle Inselbewohner nicht lügen." Alphons mußte einsehen, daß sein Vater recht hatte. Eine als wahr gesetzte Aussage ist falsch, wenn diese Annahme zu einem logischen Widerspruch, und den schließt eine Antinomie ein, führt. Ist die Aussage des Kapitäns über die Inselbewohner nicht wahr, so ist sie falsch und damit ist die Möglichkeit, daß alle Inselbewohner die Falschheit sagen, ausgeschlossen. „Trotzdem, Vati, wenn auch diese allgemeine Aussage des Kapitäns falsch ist, so wissen wir doch nicht, ob er auch auf See gelogen hat. Daß er lügt heißt ja nicht, daß er immer lügt." Da mußte nun wieder der Vater Alphons zustimmen.

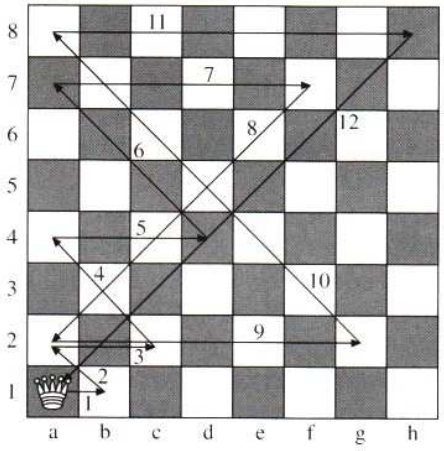
Prof. Dr.L. Kreiser

Wege einer Sportlichen Dame

Die Dame im Schachspiel zieht von ihrem Standfeld aus waagerecht, senkrecht oder diagonal beliebig weit über alle unbesetzten Felder. Wegen ihrer großen Beweglichkeit ist die Dame die stärkste Figur auf dem Schachbrett.

Eine schachbegeisterte, ältere Dame fährt zu einer 14tägigen Urlaubsreise in die Berge. Sie will an jedem Urlaubstag wandern, wobei sich ihre Wanderrouten täglich verlängern sollen.

Vor der Abreise legt sie ihr tägliches Wanderpensum anhand des Schachbretts mittels der weißen Dame fest. Als Bedingungen für ihre Überlegungen gelten, daß die weiße Dame von a1 hintereinander mehrere Züge ausführt, von denen jeder länger ist als der vorhergehende – entsprechend den Wanderrouten – und wieder nach a1 zurückkehrt.



Die Gesamtlänge der Damenzüge soll ein Maximum sein. Die schachspielende Dame ermittelt die im Diagramm oben dargestellte Lösung . Die Gesamtstrecke beträgt, wenn für die Länge eines Schachfeldes 2 km und für die Diagonale eines Feldes 2,3 km angenommen wird, genau 103,2 km.

Während der Zugfahrt zum Urlaubsort findet die Urlauberin auf ihrem Reiseschachspiel zu den genannten Bedingungen jedoch eine weitere Lösung, die ihre gesamte Wanderstrecke um 17 km übertrifft.

Aufgabe:

Welche Damezüge auf dem Schachbrett führen vom Feld a1 aus zum optimalem Ergebnis?

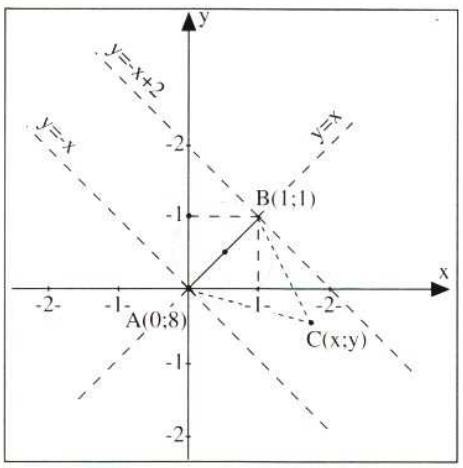
Harald Rüdiger

Sprachecke

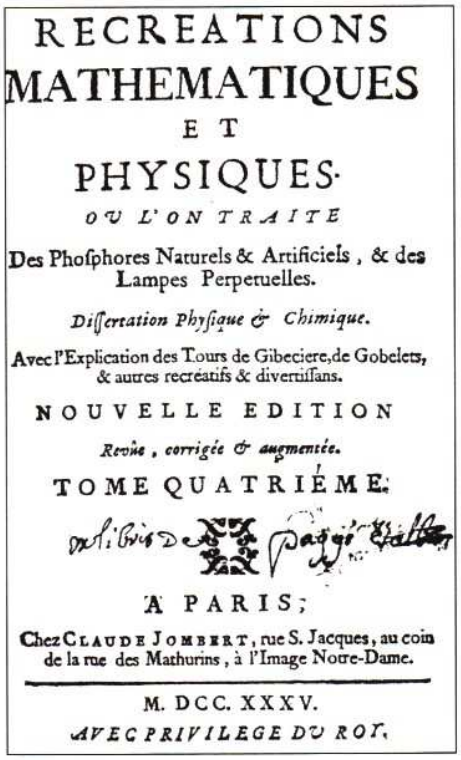
Треугольник

На координатной плоскости рассматриваются треугольники с вершинами в точках A (0,0), B (1,1) и C (x, y). Найдите и изобразите на рисунке множество таких точек C, что треугольник ABC — остроугольный.

aus: Quant, Moskau



Ein Kirschenpuzzle

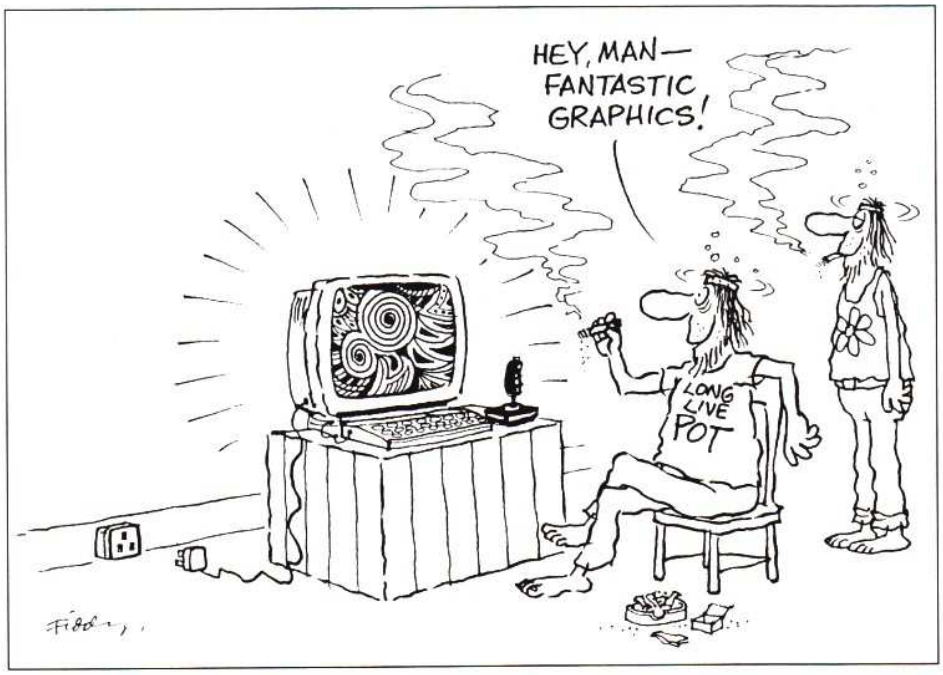


RECREATIONS
MATHEMATIQUES
E T
PHYSIQUES·
OU L'ON TRAITE
Des Phoſphores Naturels & Artificiels, & des Lampes Perpetuelles.
Diſſertation Phyſique & Chimique.
Avec l'Explication des Tours de Gibeciere, de Gobelets, & autres recréatifs & divertiſſans.
NOUVELLE EDITION
Revûe, corrigée & augmentée.
TOME QUATRIÉME.
A PARIS;
Chez CLAUDE JOMBERT, rue S. Jacques, au coin de la rue des Mathurins, à l'Image Notre-Dame.
M. DCC. XXXV.
AVEC PRIVILEGE DU ROY.

Abb. 1: Récréations mathématiques et physiques, ein französisches Buch über kurzweilige mathematische und physikalische Probleme aus dem 18. Jahrhundert (1735).

In einem alten französischen Buch über mathematische und physikalische Unterhaltungen (Abb. 1) aus dem18. Jahrhundert haben wir ein Kirschenpuzzle gefunden, das sich jeder mühelos selbst herstellen kann.
Die Lösung dieses „topologischen" Problems ist zwar verblüffend einfach, aber man muß sie erstmal gefunden haben.

Ein dauerhaftes Puzzle wird am besten aus Stoff- oder Lederresten gebaut, für weniger strapazierfähige Puzzles reicht auch Papier. Die ungefähren Maße sind in der **Abbildung 2** angegeben. Längs AA' und BB' ist ein etwa 14 cm langer und längs CC' und DD' ein etwa 3 cm langer Schnitt in das Material zu machen.
Das Problem besteht ganz einfach darin, wie hängt man das Kirschenpaar in das Puzzle bzw. wie holt man es später wieder heraus? (Anstelle des Kirschenpaares können auch zwei mit einem Faden verbundene Kugeln, Ringe usw. verwendet werden.)



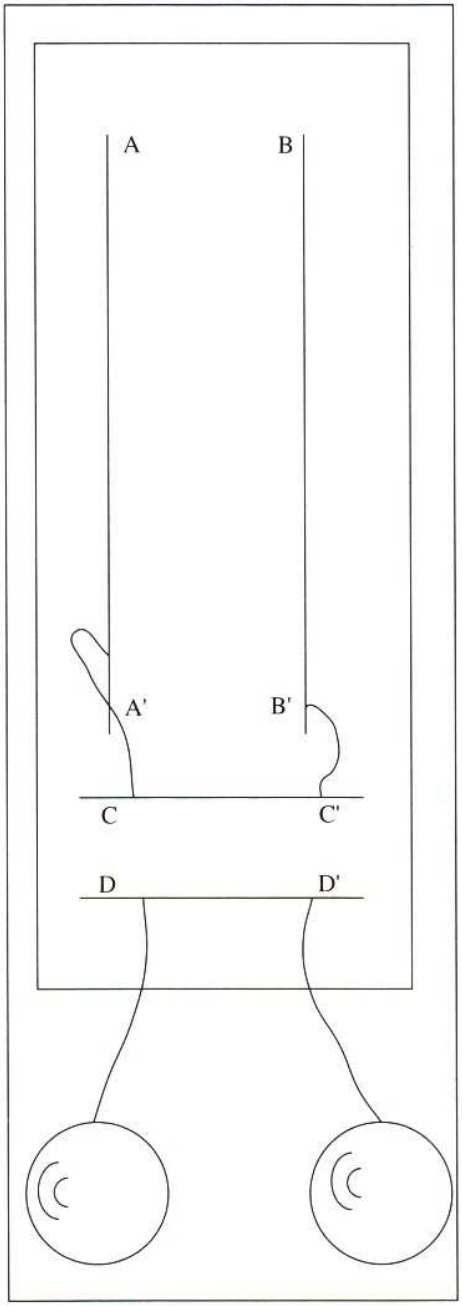


Abb. 2: Prinzipskizze des Puzzles. Das Rechteck hat etwa das Format 4 cm x 20 cm, die Schlitze AA' und BB' sind ungefähr 16 cm lang, die Schlitze CC' und DD' sind ungefähr 3 cm lang. Die Schlitze AA' und BB' sowie CC' und DD' sind jeweils etwa 1 cm voneinander entfernt.

Die Lösung: Bringt die Zunge AA'BB' in der Mitte zusammen und zieht sie unter der kleineren Zunge CC'DD' hindurch, so daß die Mitte der größeren Zunge bei DD' wieder heraus kommt. Jetzt läßt sich das Kirschenpaar durch die gebildete Schlaufe mühelos einführen oder herausnehmen. Danach zieht die Zunge AA'BB' (d. h. die Schlaufe) wieder in die Ausgangsstellung zurück.

Konrad Haase, Dr. Rüdiger Thiele

Flächenverwandlungen

Kaum jemand denkt darüber nach, daß man eigentlich jede Flächeninhaltsberechnung gradlinig begrenzter Figuren in der Ebene auf die Ermittlung des Inhaltes einer Rechteckfläche zurückführt.
Aus dieser Formel leitet man diejenige zur Berechnung des Flächeninhaltes für ein Dreieck, für ein Trapez, ... her.
Dabei entspricht der Flächeninhalt eines Dreiecks der Hälfte des Flächeninhaltes eines „entspechenden Rechteckes".
Was versteht man unter „entsprechenden Rechteck"?

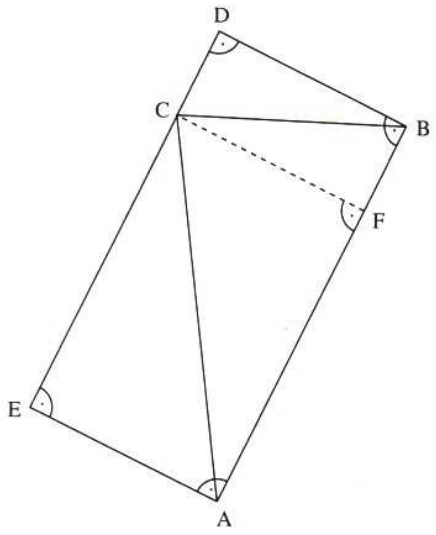


Abb. 1

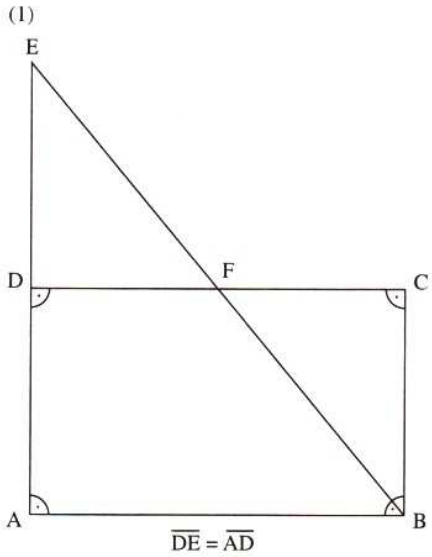


Abb. 2a

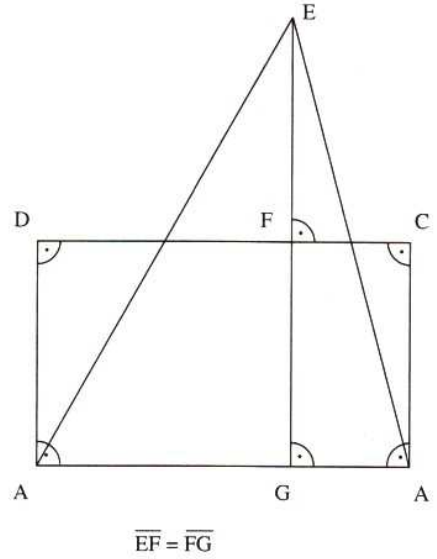


Abb. 2b

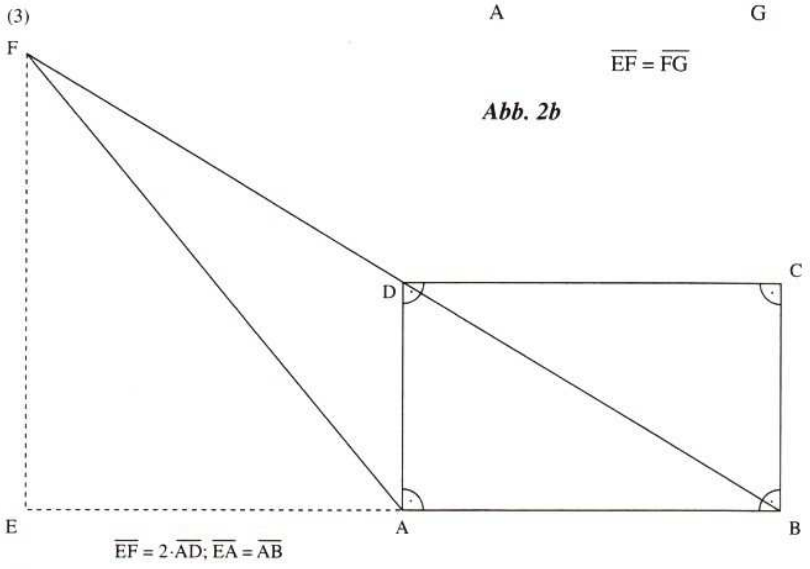


Abb. 2c

Nun, es ist ein solches Rechteck gemeint, das in einer seiner beiden Seiten mit einer der Dreieckseiten kongruent ist und in der anderen mit der zu dieser Dreieckseite gehörenden Höhe übereinstimmt.
Dieses zeigt **Abb. 1.**
Wie wir sehen, gilt:

(1) Δ AFC $\cong \Delta$ EAC wegen Ssw

(2) Δ FBC $\cong \Delta$ CBD wegen Ssw

$2 \cdot A_{ABC} = A_{ABDE}$
Selbstverständlich kann man auch jedes Rechteck zeichnerisch-konsruktiv in ein dazu flächeninhaltsgleiches Dreieck verwandlen und umgekehrt.
Hier drei Varianten: **Abb. 2**

Aufgabe 1:
Führe den Nachweis der Flächengleichheit in den Fällen (1) bis (3).
Mehr noch: man kann jedes beliebige (konvexe) Vieleck in ein dazu flächeninhaltsgleiches Dreieck verwandeln.
Wir zeigen das Prinzip an einem beliebigen Fünfeck, ABCDE.
(Siehe hierzu **Abb. 3**, rechte Seite.)
1. Schritt:
(1) g_1 durch B und D
(2) g_2 // g_1 durch C
(3) ED über D hinaus verlängern.
(4) Schnitt von g_{ED} mit g_2 ergibt F.
(5) B mit F verbinden.
Daraus folgt:
(I) $A_{BCD} = A_{BFD}$.
Gleiche Grundseite $(\overline{BD})$
und gleiche Höhe (g_1 // g_2).
(II) $A_{ABCDE} = A_{ABFE}$
2. Schritt: (1) g_1 durch B und E
(2) g_4 // g_3 durch F
(3) AE über E hinaus verlängern.
(4) Schnitt von g_{AE} mit g_4 ergibt G.
(5) B mit G verbinden.
Daraus folgt: (III) $A_{BFE} = A_{BGE}$; gleiche Grundseite $(\overline{BE})$
und gleiche Höhe (g_3 // g_4).
(IV) $A_{ABFE} = A_{ABG}$
Aus (II) und (IV) ergibt sich
$A_{ABCDE} = A_{ABG}$.

Aufgabe 2:
Gegeben ist ein Fünfeck ABCDE mit den Koordinaten seiner Eckpunkte (s. Abb. 4, rechte Seite).
A(1,5;1); B(6;1); C(7,5;3); D(3,5;5) E (1,5;2,5). Koordinateneinheit e = 25 m
a) Gib einen Maßstab an!
b) Berechne näherungsweise den Flächeninhalt des Fünfecks auf das Dreieck ABG, wobei G der Schnittpunkt von g_{AE} mit g_{BD} sein soll.

Jochen Kreusch

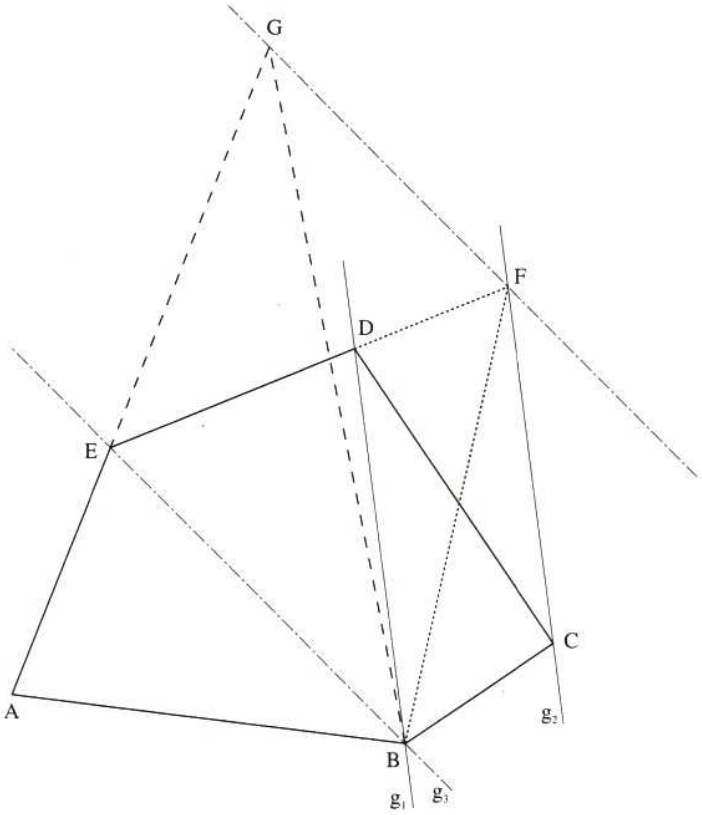


Abb. 3

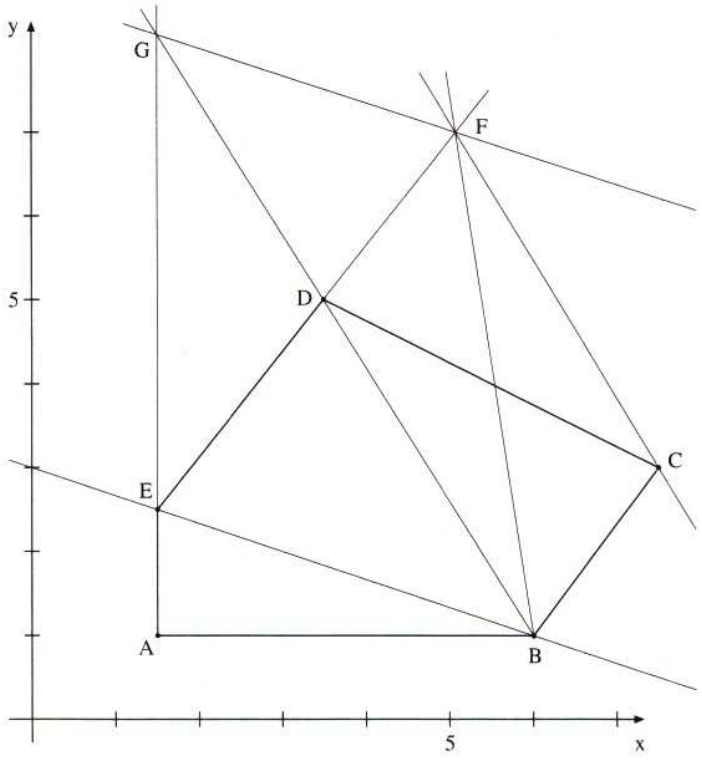


Abb. 4

Kleine Knobeleien

Wer ist zuerst an der Brandstelle?
An der Straßenkreuzung brennt es. Von den Punkten A und B fahren zur selben Zeit mit gleicher Geschwindigkeit Löschzüge ab. Welches Feuerwehrauto erreicht zuerst die Brandstelle? **(Abb. 1)**

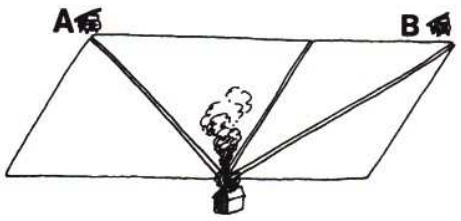


Abb. 1

Seilzug
Welche Seilstücke bewegen sich nach unten, wenn man an der Schlaufe A zieht? **(Abb. 2)**

Zahlenpyramide
Zwei Zahlen nebeneinander ergeben zusammengezählt die Zahl darüber. Welche Zahlen müssen eingesetzt werden? **(Abb. 3)**

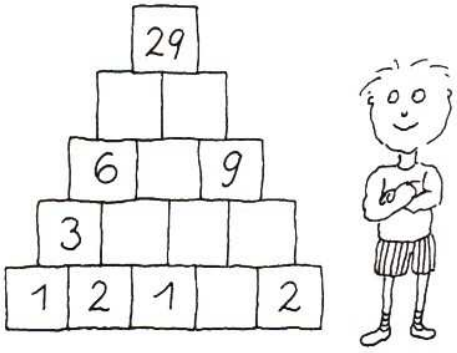


Abb. 3

Ergänzungen
Versuche die Lücken dieses Zahlenquadrats so auszufüllen, daß bei jeder waagerechten, senkrechten und diagonalen Reihe 12 herauskommt. **(Abb. 4)**

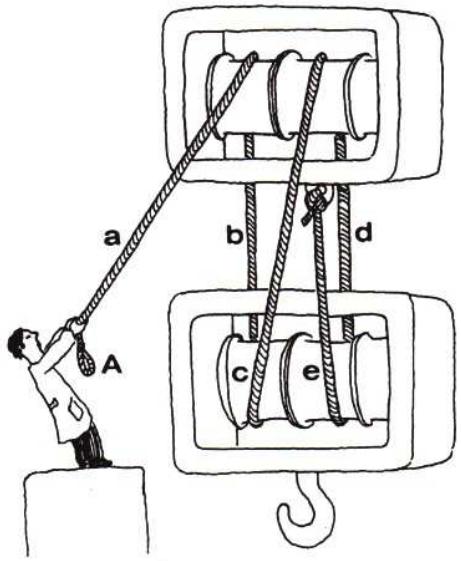


Abb. 2

$4\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$		$4\frac{1}{2}$
	$3\frac{1}{4}$		$2\frac{3}{4}$
		3	
$1\frac{3}{4}$	5		

Abb. 4

Sommerzeit – Sportzeit

Im Sport zählen nicht nur die Ergebnisse, wer Erster oder Zweiter wurde – interessant sind auch die Zeitunterschiede, die in Rückstände umgerechnet werden. Denn vorstellbar sind Meter und Zentimeter aber nicht Zehntel- oder gar Hundertstelsekunden. Hierzu ein paar Anregungen; bei der Berechnung wird angenommen, daß die Geschwindigkeit über die gesamte Strecke konstant bleibt.
Deswegen möchten wir Euch einige Aufgaben mit den zugehörigen Lösungswegen vorstellen, die sich auf aktuelle sportlich-mathematische Probleme einfach übertragen lassen.

Aufgabe:
Im Endlauf über 200 m Freistil der Frauen bei den 25. Sommerspielen in Barcelona wurde Franziska van Almsick in 1 Minute und 58,00 Sekunden Gewinnerin der Silbermedaille hinter Haislett (USA) in 1 Minute und 57,90 Sekunden. Welchen Abstand hatten die beiden Sportlerinnen am Ende des Laufes?
Lösung:
USA 1:57,90 = 117,90 s
D 1:58,00 = 118,00 s

$$\frac{117,90}{118,00} \cdot 200 = 199,83 \text{ m}$$

200 – 199,83 = 0,17 m.
Der Abstand betrug 17 Zentimeter.

Aufgabe:
Im Endlauf über 4 x 200 m Freistil der Herren bei den 25. Sommerspielen in Barcelona erreichte die Staffel der USA den 3. Platz in 7 Minuten und 16,27 Sekunden. Die deutsche Staffel wurde in 7 Minuten und 16,58 Sekunden Vierter. Um wie viele Zentimeter wurde die Bronzemedaille verloren?
Lösung:
USA 7 : 16,27 = 436,27 s
D 7 : 16,58 = 436,58 s

$$\frac{436,27}{436,58} \cdot 800 \text{ m} = 799,432$$

800 – 799,432 = 0,567 m
Die Bronzemedaille ging wegen 57 Zentimeter Rückstand zu der USA-Staffel verloren.

Aufgabe:
Beim Bahnradfahren im 1000 m-Zeitfahren wurde der Amerikaner Hartwell Dritter in 1 Minute und 4,753 Sekunden sowie der Deutsche Glücklich Vierter mit 1 Minute und 4,798 Sekunden. Welchem Abstand entspricht das?
Lösung:
Hartwell: 1:04,753 = 64,753 s
Glücklich 1:04,798 = 64,798 s

$$\frac{64,753}{64,798} \cdot 1000 \text{ m} = 999,3055 \text{ m}$$

1000 m – 999,31 m = 0,69 m

Aufgabe:
Bei der 25. Sommerolympiade in Barcelona erreichten im Ruderendlauf beim Vierer ohne Steuermann der Herren über 2000 m Australien den 1. Platz in 5 Minuten und 55,04 Sekunden, Slowenien den 3. Platz in 5 Minuten und 58,24 Sek. sowie Deutschland den undankbaren 4. Platz in 5 Minuten und 58,39 Sekunden. Um wie viele Zentimeter verpaßte Deutschland die Bronzemedaille?
Lösung:
Austr. 5:55,04 = 355,04 s
Slow. 5:58,24 = 358,24 s
2000 m : 358,24 s = 5,58285 m/s
Deutschl. 5:58,39 = 358,39 s
2000 m : 358,39 s = 5,5805 m/s
$s_{Sl} = t_A \cdot v_S$
355,04 x 5,58285 = 1982,135 m
$s_D = t_A \cdot v_D$
355,04 x 5,5805 = 1981,30 m
Abstand Slowenien/Deutschland:
1982,135 – 1981,30 = 0,835 m
Deutschland ruderte um 83,5 cm an der Bronzemedaille vorbei.

Aufgabe:
Bei der 25. Sommerolympiade in Barcelona erreichten beim Achter der Herren im Rudern über 2000 m Kanada den 1. Platz mit 5 Minuten und 29,53 Sekunden und Deutschland mit 5 Minuten und 31,00 Sekunden den 3. Platz. Um wie viele Meter verpaßte der Deutschlandachter die Goldmedaille?
Lösung:
Kanada: 5:29,53 = 329,53 s
2000 m : 329,53 s = 6,06925 m/s
Deutschl. 5:31,00 = 331,00 s
2000 m : 331,00 s = 6,0423 m/s
Weg von Deutschland = $\text{Zeit}_k \cdot \text{Geschw.}_D$
329,53 · 6,0423= 1991,12
Abstand 2000 – 1991,12 = 8,88 m
Der Deutschlandachter hat die Goldmedaille um fast 9 Meter verpaßt.

Aufgabe:
Auf der 9. Etappe der Tour de France 1992, einem Einzelzeitfahren über 64,989 km, siegte der Spanier Miguel Indurain in 1 Stunde, 18 Minuten und 31 Sekunden. Jens Heppner lag als bester Deutscher um 6 Minuten und 9 Sekunden hinter dem Sieger zurück. Welchem Abstand in Kilometern zum Sieger entspricht das?
Lösung:
Indurain: 1:19:31 Std sind 1,32528 Std
Heppner: 1:25:40 Std sind 1,42778 Std
v_H 64,989 km : 1,42778 h = 45,5175 km/h
$s_H = t_I \cdot v_H$= 1,32528 · 45,5175 km/h
s_H = 60,323
Abst. = 64,989 – 60,323 = 4,666 km
Jens Heppner lag um 4,666 Kilometer hinter dem Sieger zurück.

Aufgabe:
Bei der Tour de France 1992 benötigte der Sieger Miguel Indurain für die gesamte Strecke 100 Stunden, 49 Minuten und 30 Sekunden. Jens Heppner lag als bester Deutscher in der Gesamtwertung 25 Minuten und 30 Sekunden zurück und Olaf Ludwig, der die letzte Etappe gewann, in der Gesamtwertung 2 Stunden, 47 Minuten und 17 Sekunden zurück. Welchen Abstand in km zum Sieger hatten die beiden Deutschen in der Gesamtwertung, wenn man die Länge der Tour mit 4000 Kilometern unterstellt?
Lösung:
Indurain: 100:49:30 sind 100,825 Stunden
4000 km : 100,825 Stunden = 39,67 km/h
Heppner: 4000 km : 101,25 Stunden = 39,506 km/h
Weg von Heppner = Zeit von Indurain mal Geschwindigkeit von Heppner
$s_H = t_I \cdot v_H$ = 100,825 · 39,506
s_H = 3983 km
Ludwig: 4000 km : 103,613 Stunden = 38,6052 km/h
$s_L = t_I \cdot v_L$ = 100,825 · 38,6052
s_L = 3892,37 km
Abstand Heppners: 4000 – 3983 = 17 km
Ludwig 4000 – 3892,37 = 107,63 km
Jens Heppner lag zum Sieger etwa 17 Kilometer und Olaf Ludwig fast 108 km in der Gesamtwertung zurück.

Hartmut Boettcher

Zuschnitt eines Glockenrocks

Näherungsweise Lösung einer Bestimmungsgleichung

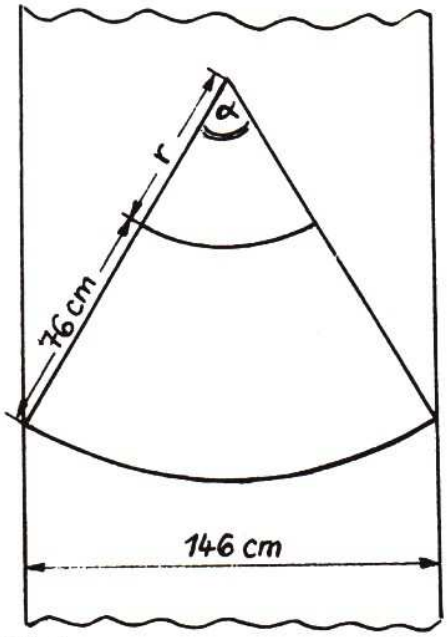
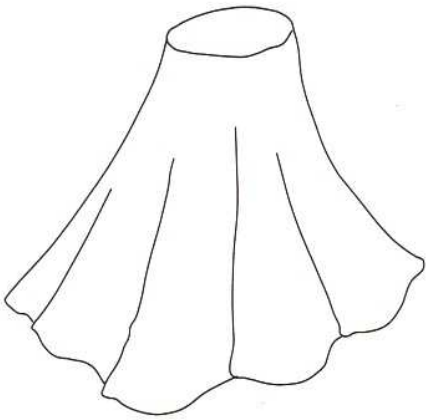


Abb. 1

Laura möchte sich selbst einen Glockenrock nähen und dabei aus der vorhandenen Stofffläche soviel wie möglich verwenden.
Aus diesem Grund soll die Stoffbreite von 146 cm vollständig ausgenutzt werden. Der Schnitt für einen Glockenrock ergibt sich als Teil eines Vollkreises (s. hierzu **Abb. 1**).
Aus einer Stoffbreite wird jeweils ein halber Rock zugeschnitten. Die Rocklänge soll 76 cm betragen, der Taillenumfang (einschließlich Zugabe für Nähte) 80 cm.

Aufgabenstellung
Wie sind der Winkel α und der Radius r zu wählen, und wieviel Stoff muß Laura kaufen?



Hinweis: Laura glaubt, durch Anwendung elementargeometrischer Methoden eine Beziehung herleiten zu können, aus der die gesuchten Größen leicht zu ermitteln sind. Es erweist sich aber, daß sie auf eine goniometrische Gleichung stoßen wird, die sich nicht exakt auflösen läßt, sondern nur mit Hilfe numerischer Näherungsverfahren lösbar ist.

Prof. Dr. Bernd Luderer

Zahlenspielereien

Verschiedene Buchstaben bedeuten verschiedene Ziffern

A·BC=AB·C
1·64=16·4
1·95=19·5
2·65=26·5
4·98=49·8

A·BCD=AB·CD
1·325=13·25
2·756=27·56
3·975=39·75
8·332=83·32
(Für D=0 kommen die 4 Lösungen oben analog dazu.)

A·BCD=ABC·D
1·664=166·4
1·995=199·5
2·665=266·5
4·998=499·8
4·847=484·7
6·545=654·5
7·424=742·4

A·BCDE=AB·CDE
7·9875=79·875

A·BCDE=ABC·DE
1·3325=133·25
1·5134=151·34
1·8145=181·45
2·2724=227·24
2·4235=242·35
2·7756=277·56
3·2725=327·25
3·9975=399·75
4·5448=454·48
6·8172=681·72
8·3332=833·32
9·8175=981·75

A·BCDE=ABCD·E
1·6664=1666·4
1·9995=1999·5
2·6665=2666·5
4·9998=4999·8
4·3243=4324·3
8·6486=8648·6
(Beachten Sie die bereits bekannten Lösungen vorn und folgend!)

AB·CDE=ABC·DE
16·664=166·64
19·995=199·95
26·665=266·65
49·998=499·98
21·775=217·75
24·996=249·96

AB·CDE=ABCD·E
14·848=1484·8
17·515=1751·5

ABC·DE=ABCD·E
keine Lösung

Dieter Bauke

Ein Ausflug in die räumliche Geometrie

Von windschiefen Geraden zum einschaligen Hyperboloid
– Ein Würfel rotiert um eine Raumdiagonale
– Analyse und Beschreibung des Rotationskörpers

Wir wollen den Drehkörper, der bei Rotation eines Würfels um eine seiner Raumdiagonalen entsteht, näher untersuchen (**Abb. 1**). Diese besondere Situation nutzen wir, um über einige grundlegende Beziehungen in der Raumgeometrie nachzudenken.

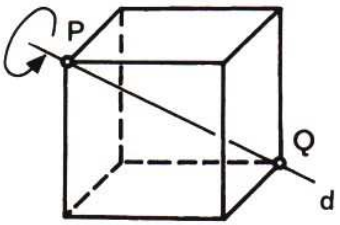


Abb. 1

Zunächst ist es sicherlich nützlich, den Würfel so in einem Schrägbild darzustellen, daß die ausgewählte Raumdiagonale PQ auf einer vertikalen Geraden d unseres Zeichenblattes liegt (**Abb. 2**).

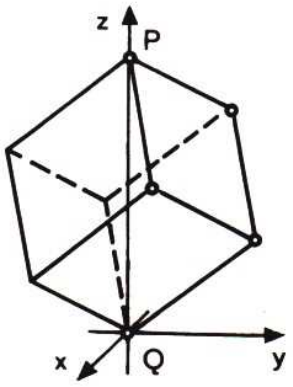


Abb. 2

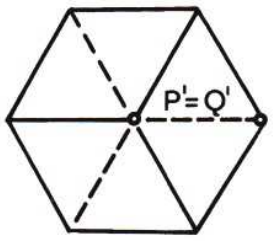


Abb. 3

Diese Gerade sei die z-Achse eines Koordinatensystems in kavalierperspektivischer Projektion ($\alpha = 45°$, $q = 1/2$). Projizieren wir den Würfel nun senkrecht auf die xy-Ebene (siehe hierzu **Abb. 3**), so wird sofort deutlich, daß jeweils 120°-Drehungen um die Achse d durch P und Q den Würfel auf sich abbilden. Da man hier 120°-, 240°- und 360°-Drehungen um d unterscheiden kann, spricht man bei d bezüglich des Würfels um eine 3zählige Drehachse.

Aufgabe:
Beschreibe weitere Achsen von Drehungen, die den Würfel auf sich abbilden, und gib ihre Zähligkeit an!

Aus dem um d rotierenden Würfel entsteht ein Drehkörper, von dem wir drei Teilkörper unterscheiden können. Die je drei Kanten, die von P bzw. Q ausgehen, erzeugen jeweils einen Kegel.

Aufgabe:
Welchen Teilkörper erzeugen die übrigen Kanten – die Kanten im Zwischenbereich – des Würfels?

Mit dieser Problemstellung wollen wir unseren eigentlichen Ausflug in die Raumgeometrie beginnen. Wir werden auf die besondere Lage der Kanten, die weder P noch Q als Endpunkt haben, aufmerksam:
Jede dieser Kanten liegt auf einer Geraden, die mit der Achse d keinen Punkt gemeinsam hat und auch nicht zu d parallel ist. Parallele Geraden liegen nämlich stets in einer Ebene, und dabei haben sie keinen Punkt gemeinsam oder fallen zusammen.

1. Windschiefe Geraden und räumliche Figuren mit windschiefen Geraden

Haben zwei Geraden g und h keinen Punkt gemeinsam und gibt es keine Ebene, die g und h enthält, so heißen g und h

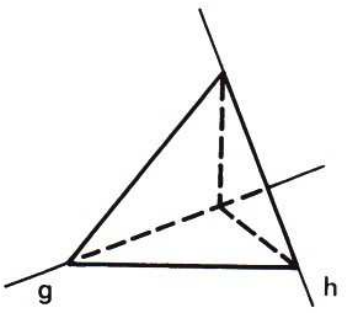


Abb. 4

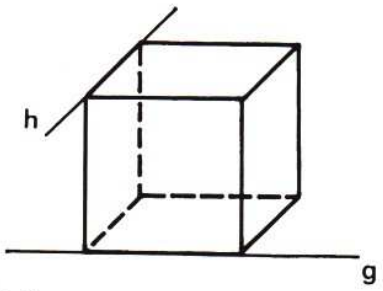


Abb. 5

windschief. Die **Abb. 4 und 5** zeigen windschiefe Geraden, die durch Kanten eines Tetraeders bzw. eines Würfels bestimmt sind.
Die nachfolgenden Abbildungen zeigen räumliche Figuren mit weiteren Paaren windschiefer Geraden.

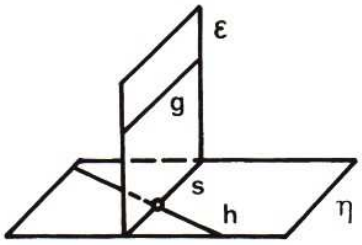


Abb. 6

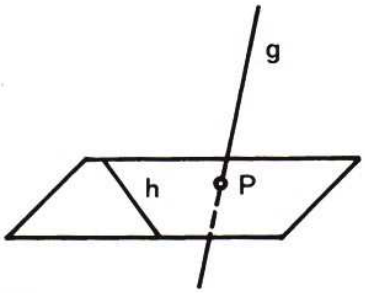


Abb. 7

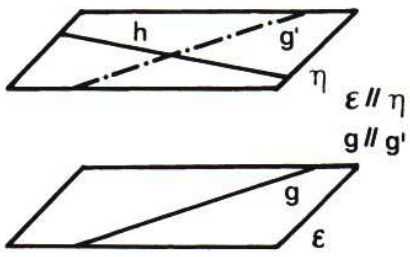


Abb. 8

Wir beziehen uns auf die dargestellten Vorgaben der jeweiligen Abbildung. Es gilt dann:

a) In der ersten Figur, **Abb. 6**: Jede Gerade h, die in η liegt und s schneidet, ist windschief zu g.

b) In der zweiten Figur, **Abb. 7**: Jede Gerade h, die in η liegt und nicht durch P geht, ist windschief zu g.

c) In der dritten Figur, **Abb. 8**: Jede Gerade h, die in η liegt und g' schneidet, ist windschief zu g.

Begründbar sind diese Aussagen mit Hilfe grundlegender Eigenschaften der Lagebeziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen (vgl. auch [3]).

Die Aussagen über die Verbindungsgerade zweier Punkte und über die Verbindungsebene dreier nicht auf einer Geraden liegenden Punkte sowie die Parallelenaussage sind wesentliche Grundeigenschaften der räumlichen Geometrie:

> ***Zu zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, die diese Punkte enthält.***
> ***Zu drei Punkten, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen, gibt es genau eine Ebene, die diese Punkte enthält.***
> ***Zu einer Geraden g und einem Punkt P gibt es genau eine Gerade h, die zu g parallel ist und durch P geht.***

Weitere Grundaussagen der räumlichen Geometrie werden durch die vollständigen Übersichten von Lagebeziehungen in den **Abb. 9, 10 und 11** veranschaulicht.

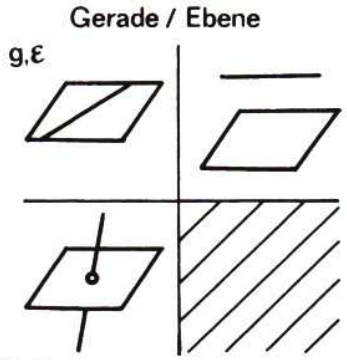


Abb. 9

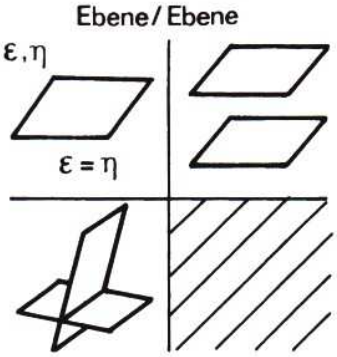


Abb. 10

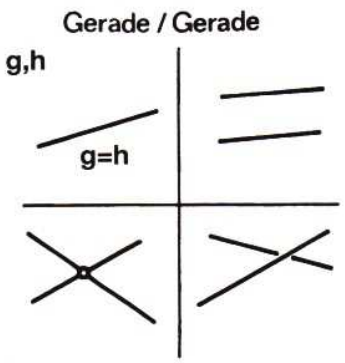


Abb. 11

2. Ein Satz wird erarbeitet

Die windschiefen Geraden g und h der **Abb. 8** liegen in zueinander parallelen Ebenen. Wir wollen uns überlegen, daß es zu zwei beliebig gegebenen windschiefen Geraden g und h stets genau zwei zueinander parallele Ebenen gibt, von denen jede eine der windschiefen Geraden enthält. Dazu betrachten wir die Menge aller Ebenen, die g enthalten (**Abb. 12**). Man nennt eine solche Menge von Ebenen anschaulich ein Ebenenbüschel.

Nun wählen wir auf g einen Punkt P und betrachten die Ebene ε (Ph), die sowohl die Gerade h als auch den Punkt P enthält. Wegen $P \notin h$ ist diese Ebene eindeutig bestimmt und gehört überdies nicht zum obigen Ebenenbüschel (warum?). Folglich schneidet jede Ebene des Büschels die Ebene ε (Ph) in einer (von g verschiedenen) Geraden durch P. In der Ebene ε (Ph) gibt es aber unter allen Geraden durch P genau eine zu h parallele Gerade h'. Infolgedessen ist die h' enthaltende Ebene ε des Büschels parallel zu h (und enthält zudem g). Analog überzeugt man sich von der eindeutigen Existenz einer Ebene η, die h enthält und zu g parallel ist.

Die beiden Ebenen ε und η sind zudem auch untereinander parallel. Würden sie sich nämlich in einer Geraden k schneiden, so folgte $g \parallel k$ und $k \parallel h$. Dies hätte $g \parallel h$ zur Folge; g, h sind aber windschief. Damit haben wir folgenden Satz bewiesen.

Satz: Sind g, h windschiefe Geraden, so existiert ein eindeutig bestimmtes paralleles Ebenenpaar ε, η, wobei g in ε und h in η enthalten ist.

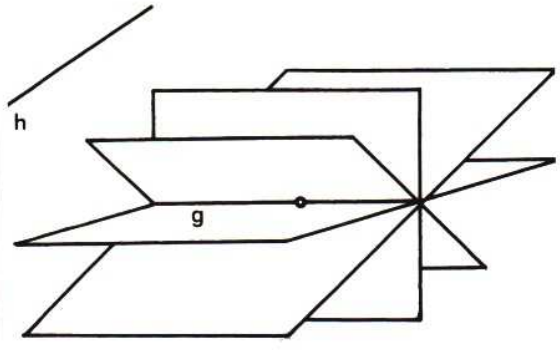


Abb. 12

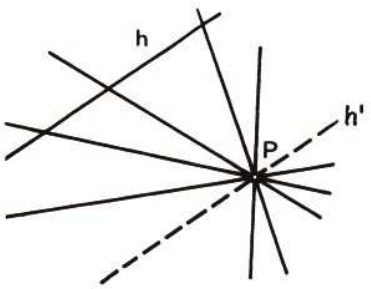


Abb. 13

3. Senkrechte Geraden

Zwei Geraden g und l heißen senkrecht genau dann, wenn g und l sich schneiden und zwei Nebenwinkel, die g und l einschließen, kongruent sind. Gleichwertig wird das Senkrechtsein von g und l dadurch beschrieben, daß die Spiegelung an g die Gerade l auf sich abbildet und $l \neq g$ ist (**Abb. 14**).

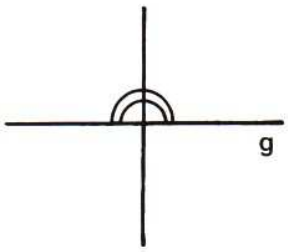


Abb. 14

Liegen mit g und h zwei verschiedene Geraden vor, so soll zunächst nach der Existenz und gegebenenfalls nach der Eindeutigkeit einer gemeinsamen Senkrechten gefragt werden.

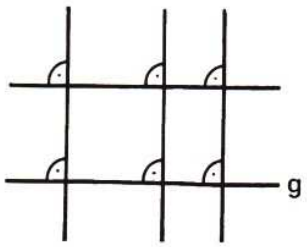


Abb. 15

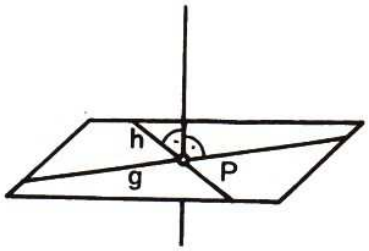


Abb. 16

Es sind die Fälle a) g, h parallel, b) g, h schneiden sich und c) g, h windschief zu unterscheiden. Sind g und h parallel, so ist jede Senkrechte zu g in der Ebene, die g und h enthält, auch eine Senkrechte zu h. Schneiden sich die Geraden g und h im Punkt P, so können wir die Verbindungsebene ε (gh) von g und h betrachten. Eine gemeinsame Senkrechte l von g und h muß durch P gehen und zugleich auch senkrecht zu ε (gh) sein. Damit ist l eindeutig bestimmt (**Abb. 15 und 16**).

Wie sieht nun die Situation aus, wenn g und h windschief sind? Wir betrachten das zu g und h gehörende parallele Ebenenpaar ε , η mit $g \subset \varepsilon$ und $h \subset \eta$ (**Abb. 8**). Die senkrechte Projektion von h auf ε ergibt eine Gerade h', wobei h' und g sich schneiden. Der Schnittpunkt P von g und h' ist das Bild einer projizierenden Geraden l; diese Gerade ist senkrecht zu g und h. Da eine

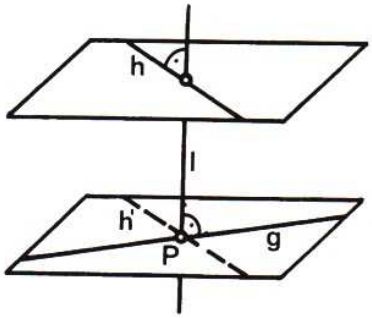


Abb. 17

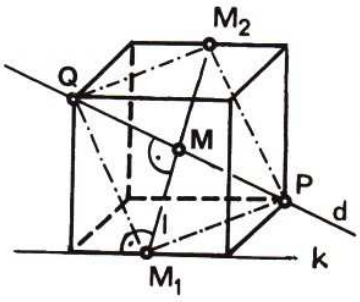


Abb. 18

senkrechte Gerade zu g und h auch senkrecht zu ε und η sein muß, ist l die zu g, h eindeutig bestimmte Senkrechte (**Abb. 17**).

Wir kehren zu einer Raumdiagonalen PQ eines Würfels zurück, die als Achse für eine Rotation dienen soll. Neben d=g(PQ) betrachten wir eine Kante, die keinen Endpunkt auf d hat (**Abb. 18**).

Diese Kante liegt auf einer Geraden k, die zu d windschief ist. Die Verbindungsgerade l von Kantenmittelpunkt M_1 und Mittelpunkt M_2 der im Würfel gegenüberliegenden Kante ist die gemeinsame Senkrechte von d und k: Zunächst schneiden sich l und d im Mittelpunkt M des Würfels, und außerdem sind die Dreiecke ΔM_1M_2P und ΔM_1M_2Q gleichschenklig, so

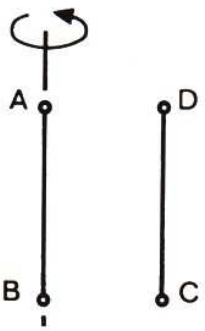


Abb. 19

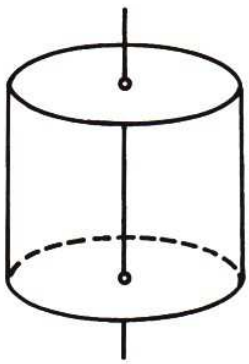


Abb. 20

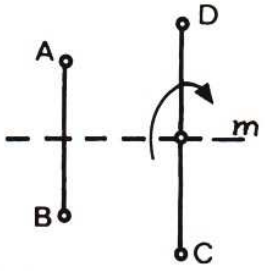


Abb. 21

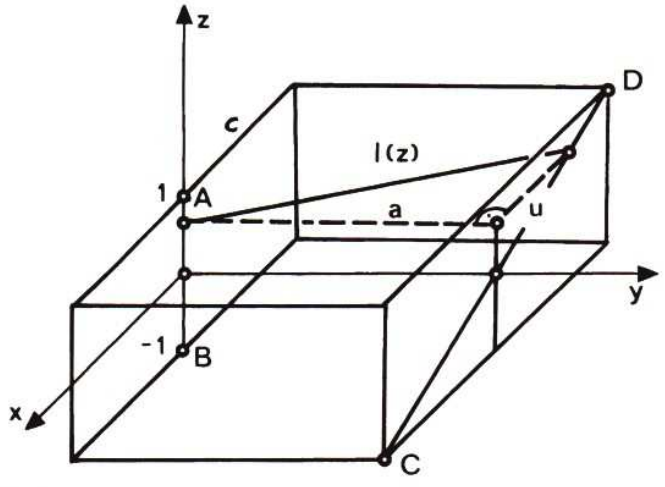


Abb. 22

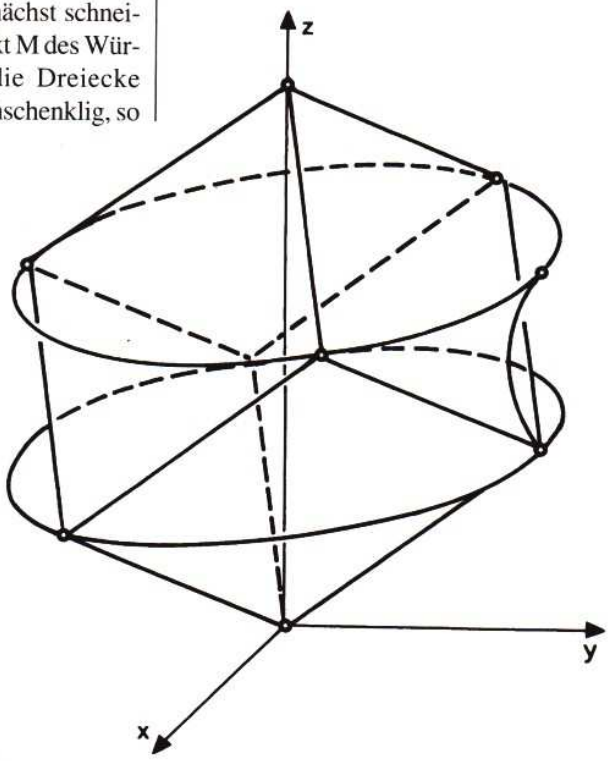


Abb. 23

daß d=g(PQ) die Mittelsenkrechte von M_1M_2 ist. Damit ist l=g(M_1M_2) senkrecht zu d. Die Konstruktion von l ergab schon, daß l zu k senkrecht ist.

4. Ein einschaliges Rotationshyperboloid entsteht

Wir haben schon festgestellt, daß bei der Rotation eines Würfels um eine Raumdiagonale PQ die Kanten, die von P bzw. Q ausgehen, jeweils einen Kegel erzeugen. Nun werden wir die restlichen Kanten bei der Drehung um die Achse d=g(PQ) untersuchen. Dabei vereinfachen wir zuvor und geben uns zwei Strecken AB, CD vor, so daß ABCD ein Rechteck ist (**Abb. 19**). Rotiert die Strecke CD um g(AB), so entsteht ein Zylinder (**Abb. 20**). Betrachten wir die Strecken AB und CD, die die Gerade m als gemeinsame Mittelsenkrechte haben (**Abb. 21**), so können wir uns CD um m gedreht derart vorstellen, daß g(CD) und g(AB) windschief sind. Jetzt haben wir die Lagebezeichnung von Raumdiagonale und entsprechender Kante.

Für die analytische Beschreibung der Rotationsfläche, die bei der Rotation von CD um g(AB) entsteht, werden wir in einem xyz-Koordinatensystem vieles geeignet normieren. Dies zeigt **Abb. 22**.

Die Strecke AB fällt mit dem Intervall [-1, 1] auf der z-Achse zusammen, und g(AB) ist zugleich Mittellinie einer Seitenfläche eines Quaders. Diese Seitenfläche sei in der xz-Ebene enthalten. In der gegenüberliegenden Seitenfläche sei CD eine Flächendiagonale. Der Quader habe neben der Höhe 2 (=AB) eine Breite von a(y-Richtung) und eine Tiefe von 2c (x-Richtung). Jeder Punkt von CD beschreibt bei der Drehung um die z-Achse einen Kreis auf einem Niveau zwischen -1 und 1 der z-Achse. Hierfür gilt

$x^2 + y^2 = [l(z)]^2$, (1)

wobei l(z) der Abstand des Punktes von der z-Achse ist. Bezeichnet u den Abstand dieses Punktes von der yz-Ebene, so gilt

$[l(z)]^2 = a^2 + u^2$. (2)

Mit der z-Koordinate aus dem Intervall [-1, 1] ergibt sich für den Abstand u aus der Proportionalität c:1=u:z die folgende Gleichung

$u = c \cdot z$. (3)

Aus den Gleichungen (1) bis (3) folgt

$x^2 + y^2 = a^2 + c^2z^2$,

$x^2 + y^2 - c^2z^2 = a^2$

und mit der Einführung von b=a/c die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

Die Rotationsfläche mit dieser Gleichung heißt (einschaliges) Rotationshyperboloid. Rotiert also ein Würfel um eine seiner Raumdiagonalen, so besteht die Rotationsfläche aus einem (einschaligen) Rotationshyperboloid mit beiderseitig angesetzten Kreiskegeln, wie **Abb. 23** zeigt.

Literaturhinweise

[1] Flachsmeyer, J.: Zur räumlichen Geometrie – windschiefe Geraden. Math. in der Schule 27(1982), Heft 6, 375 – 387.

[2] Hajós, G.: Einführung in die Geometrie. BSB B. G. Teubner, Leipzig 1970.

[3] Quaisser, E. und H.-J. Sprengel: Geometrie in Ebene und Raum. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1989.

Dr. B. Wernicke, PH Erfurt

Anzeige

Sehen Staunen · Wissen

DIE JUNIOR-BIBLIOTHEK

Die besondere Sachbuchreihe für Kinder im Vor- und Grundschulalter. Attraktiv gestaltete Doppelseiten machen jeden der 24 Bände zu einem großartigen Lese- und Sehvergnügen.
Band für Band 34 farbige Seiten.
DM 16,80.

Folgende Titel sind lieferbar:
Affen · Autos · Bären · Boote · Fahrräder und Motorräder · Fische · Fledermäuse · Echsen · Flugmaschinen · Giftige Tiere · Frösche und Kröten · Reptilien · Greifvögel und Eulen · Katzen · Käfer · Säugetiere · Schlangen · Schmetterlinge · Spinnen · Die Tarnung der Tiere · Vögel · Tropische Vögel · Die Waffen der Tiere · Wölfe und Füchse.

*bei Gerstenberg

Gerstenberg Verlag
Rathausstr 18-20 3200 Hildesheim
Telefon: 05121/106-0

Ganz so einfach ist es mit dem Mond nicht!

Sehe ich doch neulich in einer Zeitschrift ein Bild, das den Zweck hat, die Menschen zur Frühgymnastik aufzufordern. Ein Mann macht im Schlafanzug fröhlich seine Übungen, durch das offene Fenster ist der Mond zu sehen. Dagegen ist gewiß nichts einzuwenden, doch es handelt sich um die Sichel des zunehmenden Mondes. – Hier handelt es sich ohne Zweifel um astronomischen Unsinn, denn am Morgen kann nur der abnehmende Mond am Himmel stehen!

Betrachtet man aufmerksam Gemälde, so kann man diese Fehler ebenfalls feststellen. Wenn ein Bild mit „Abendstimmung am Meer" bezeichnet wird so kann nur der zunehmende Mond am Himmel stehen – falls der Künstler den Mond überhaupt darstellen wollte. Auch in der Literatur findet man derartige Fehler. Es ist völlig unmöglich, daß z. B. bei Sonnenuntergang der Vollmond hoch am Himmel stehen kann. Bei Gemälden mit historischem Inhalt lohnt es sich oft, nachzuprüfen, ob an dem betreffenden Tag auch wirklich diese Mondphase zu dieser Zeit am Himmel stehen konnte. Bei kritischer Überprüfung kann man zahlreiche derartige „astronomische Schnitzer" entdecken.

Wenden wir uns wieder dem Lauf und der Stellung bestimmter Mondphasen am Himmel zu. Was ist möglich und nicht? – Betrachten wir zunächst den Lauf des Mondes am Himmel innerhalb eines Monats! Als Trabant unserer Erde läuft er in 27,3 Tagen um unseren Planeten. Das bedeutet, daß der Mond innerhalb dieser Zeit am Himmel sich von einem bestimmten Stern bis wieder zu demselben Stern bewegt. Dieser Zeitspanne wird als siderischer Monat bezeichnet. Da sich aber während dieser Zeit die Erde um die Sonne weiterbewegt, beträgt die Zeit z. B. von Vollmond bis zum nächsten Vollmond 29,5 Tage, was als synodischer Monat bezeichnet wird.

Die Bahn des Mondes ist gegenüber der Erdbahnebene um rund 5° geneigt. Am Himmel bewegt er sich in der Nähe der Ekliptik, der scheinbaren Jahresbahn der Sonne, von der um ±5° abweichen kann. Dieser Unterschied ist verhältnismäßig klein, so daß man etwas großzügig auch sagen kann: Die Mondbahn am Himmel fällt fast mit der Ekliptik zusammen.

Ein scheinbarer Umlauf der Sonne am Himmel dauert 1 Jahr, der Mond bewältigt dies bereits in einem Monat. Das bedeutet, daß er der Sonne zeitlich vorauseilt: Sehen wir z. B. zum Frühlingsbeginn den zunehmenden Mond (Halbmond), so befindet sich dieser etwa an der Stelle, wo die Sonne zum Sommerbeginn sein wird. Das bedeutet, daß der Mond einen großen Sichtbarkeitsbogen und damit große Höhen erreicht. Anders liegen die Verhältnisse zum Herbstbeginn. Der zunehmende Mond wird am Abend sehr tief stehen, da er die Stellung der Sonne zu Winterbeginn einnimmt. Wir müssen bei unseren Überlegungen den Sichtbarkeitsbogen (Tagbogen) der Sonne uns vorstellen. Die unterschiedlichsten Stellungen des Mond lassen sich am besten im Frühjahr und Herbst am Abendhimmel verdeutlichen:

Frühjahr: Die zunehmende Mondsichel steht hoch am westlichen Himmel, auffallend ist die „Rückenlage" des Mondes. Er geht spät, zeitweise sogar erst nach Mitternacht, unter. Eine Bauernregel besagt: „Liegt der Mond auf dem Rücken, läuft das Wasser über die Brücken", ein Hinweis auf das Tauwetter. Der Mond läuft zeitlich der Sonne voraus und befindet sich am Himmel, wo die Sonne in den Monaten Mai bis August sein wird.

Herbst: Die zunehmende Mondsichel steht tief am südwestlichen Himmel. Die Mondfigur steht gerade und weist nicht mehr die „Rückenlage" auf. Der Mond ist nicht lange zu sehen und geht bald nach der Sonne unter. Im Volksmund spricht man „vom Mond, der das Wasser nicht halten kann", ein Hinweis auf die Regenfälle im Herbst. Der Mond beschreibt nur einen kleinen Bogen und befindet sich dort, wo die Sonne von November bis Februar steht.

Die unterschiedliche Lage der Mondfigur ist darauf zurückzuführen, daß die scheinbare Jahresbahn der Sonne im Frühjahr sehr steil verläuft, im Herbst dagegen flach.

Für den abnehmenden Mond am Morgenhimmel gilt dies sinngemäß. So werden wir den hoch stehenden und auf dem Rücken liegenden Mond im Herbst sehen, während der tief stehende Mond, der nur kurze Zeit vor der Sonne aufgeht, im Frühjahr anzutreffen ist.

Zum Vollmond muß grundsätzlich folgendes erwähnt werden: Der Vollmond steht der Sonne gegenüber, was auch als Opposition bezeichnet wird. Von der Erde aus gesehen, beträgt der Winkelabstand 180°. Von ganz geringen Unterschieden abgesehen, geht der Vollmond

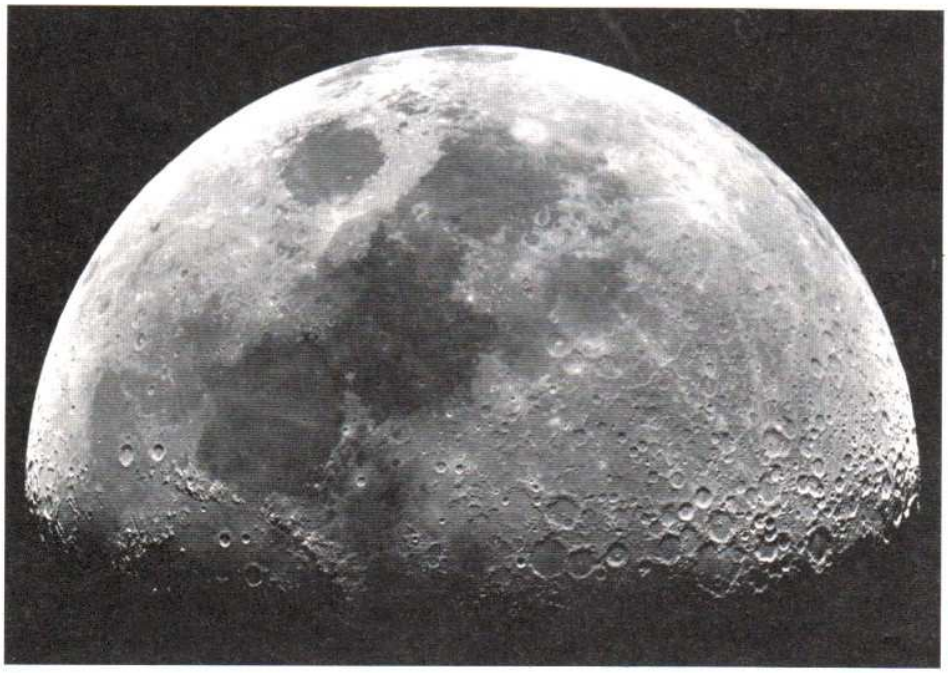
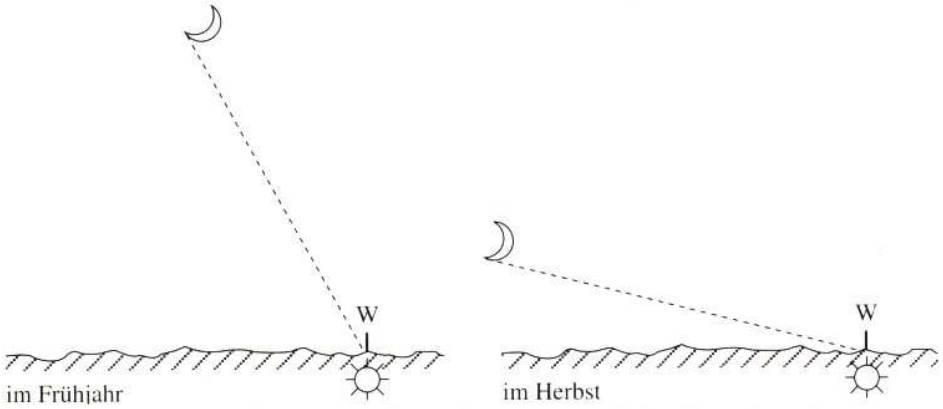


Foto: Hans Bernhard

auf, wenn die Sonne untergeht, steht um Mitternacht im Süden (Kulmination) und geht unter bei Sonnenaufgang. eine Schilderung, wonach bei Sonnenuntergang der „Vollmond hoch am Himmel steht" ist daher völlig unsinnig.

Vielen ist schon aufgefallen, daß der Vollmond im Sommer sehr tief steht, im Winter dagegen hoch am Himmel seine Bahn zieht. Dieser Unterschied ist leicht zu erklären: Im Sommer beschreibt die Sonne große Tagbögen und erreicht große Höhen. Da der Vollmond der Sonne stets gegenübersteht, muß er die Bahn der Sonne vom Winter beschreiben, die klein ist und geringe Höhen aufweist. Der Wintervollmond beschreibt den großen Bogen der Sonne im Sommer.

Von allen Gestirnen ist der Mond der schnellste Läufer am Himmel. Seine tägliche Bewegung am Himmel von West nach Ost (rechts nach links) beträgt stattliche 13° im Durchschnitt. In der Stunde bewegt sich der Mond am Himmel um seinen scheinbaren Durchmesser (0,5°) weiter.

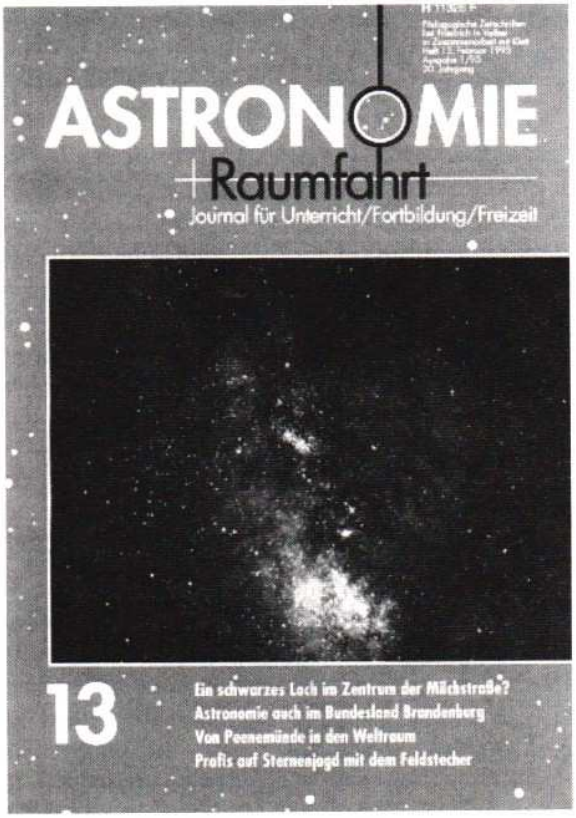


Die Lage der zunehmenden Mondsichel am Abendhimmel. Die Sonne befindet sich unterhalb des Horizontes.
——— Scheinbare Jahresbahn der Sonne (Ekliptik)
Neigung gegenüber dem Horizont: Im Frühjahr 61°, im Herbst 14°.

Bei der Sonne ist es nur 1°, bei den Planeten ist die Eigenbewegung bedeutend geringer und kann von Tag zu Tag nicht wahrgenommen werden. Beim Mond dagegen lohnen sich Beobachtungen, die deutlich zeigen, wie sich unser Trabant am Sternhimmel weiterbewegt. Bereits innerhalb von 24 Stunden ist zu erkennen, daß der Mond in der Nähe hellerer Sterne oder eines Planeten seine Position verändert.

Schließlich entspechen 13° immerhin 26 Vollmonddurchmessern – und das dürfte kaum zu übersehen sein. Für diese einfach Beobachtung wird nur ein Blatt Papier und ein Bleistift benötigt – und etwas Zeit für unseren treuen Erdbegleiter!

StR Arnold Zenkert



ASTRONOMIE+RAUMFAHRT
erscheint 6mal jährlich, Abonnement-Preis DM 39,00/43,20*
für Studenten und Schüler DM 27,00/30,00*
zuzüglich Versandkosten. *Preise 1994

ASTRONOMIE+RAUMFAHRT

ist eine Zeitschrift, die Fragen der astronomischen und astronautischen Bildung besonders der Jugend, aus der Sicht der Fachwissenschaft, der Technik, der Didaktik und der Beobachtungspraxis publiziert. Astronomie+Raumfahrt ist in fünf Rubriken gegliedert:

Astronomie informiert die Leser über neue Ergebnisse und Methoden der Weltallforschung und gibt Einblick in die Geschichte der Astronomie.

Raumfahrt unterrichtet über Strategien und Entwicklungstendenzen der Weltraumfahrt, präsentiert Einsichten in das aktuelle Raumfahrtgeschehen und den damit verbundenen Nutzen für die Erdbevölkerung.

Lehren und Lernen gibt vielseitige Anregungen, wie Wissen über das Weltall und über ausgewählte Sachverhalte der Raumfahrt Schülern erfolgreich vermittelt werden kann.

Beobachtungen beschreibt ausführlich aktuelle Erscheinungen und Vorgänge am Sternenhimmel, stellt lohnende kosmische Beobachtungsobjekte vor und gibt interessante Anregungen für die Tätigkeit der Hobbyastronomen.

Das **Magazin** enthält Informationen rund um die Astronomie und Raumfahrt, berichtet u. a. über die Arbeit von Sternwarten und Planetarien, über Exkursionen, Tagungen und Ausstellungen.

Bitte richten Sie Ihre Bestellung an:

Erhard Friedrich Verlag, Vertrieb,
Postfach 10 01 50, 30917 Seelze

Gedanken zum 75. Todestag von Georg Cantor (1845 - 1918)

„Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt der Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig."

Diese Worte David Hilberts (1862-1943), eines der bedeutendsten Mathematiker der Neuzeit, könnten als Leitmotiv über Leben und Werk Georg Cantors gestanden haben, dessen Todestag sich am 6. Januar 1993 zum 75. Male jährte. Cantor gilt als der Schöpfer der Mengenlehre, die heute unbestritten das Fundament der gesamten modernen Mathematik ist.
Hört man als Schüler das Wort Mengenlehre, so denkt man zunächst an das Arbeiten mit Begriffen wie Durchschnitt, Vereinigung oder Komlement von Mengen. Auch diese Begriffe hat Cantor eingeführt; allerdings gibt dieses elementare Operieren mit Mengen auch nicht annähernd eine Vorstellung davon, was Mengenlehre tatsächlich ist, was Cantor also tatsächlich geleistet hat. Bevor versucht werden soll, dies an einem Beispiel zu erläutern, seien einige biographische Angaben vorangestellt.

Der Lebensweg Georg Cantors
Georg Cantor wurde am 3. März 1845 in Petersburg als Sohn eines sehr erfolgreichen und vermögenden Kaufmanns geboren und besuchte dort auch die Elementarschule. 1856 siedelte die Familie nach Frankfurt/Main über.
Cantor besuchte das Gymnasium in Wiesbaden, wo bereits sein Wunsch entstand, Mathematik zu studieren. Der Vater hielt aber den Ingenieurberuf für wirtschaftlich sicherer und schickte den Sohn auf die Realschule, die der höheren Gewerbeschule Darmstadt angeschlossen war. Schließlich erlaubte er das Studium der Mathematik.

Das Studium der Mathematik
Cantor studierte ab 1862 ein Semester in Zürich und dann vor allem in Berlin. Die Berliner Universität war damals durch das Wirken von Karl Weierstraß, Ernst Eduard Kummer und Leopold Kronecker das bedeutendste mathematische Zentrum der Welt. Nach Promotion (1867) und Habilitation (1869) wurde Cantor Privatdozent an der Universität Halle/Saale. 1879 wurde er dort zum ordentlichen Professor berufen. Er wirkte als Hochschullehrer in Halle bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1913.

Revolutionäre mathematische Ideen
Den entscheidenden Anstoß für seine revolutionären Ideen empfing Cantor nicht aus abstrakten Spekulationen über das Unendliche, sondern aus einem konkreten mathematischen Problem, nämlich aus der Frage nach der Eindeutigkeit der Entwicklung einer Funktion in eine trigonometrische Reihe, welches z. B. auftritt, wenn man fragt, ob ein Ton eindeutig als Überlagerung von Grundton und Obertönen dargestellt werden kann. Bereits 1872 war Cantor im Besitz wesentlicher Grundgedanken seiner Theorie. Sein gesamtes Leben als mathematischer Forscher widmete er dann dem Ausbau und der weiteren Ausgestaltung der Mengenlehre. Dabei entbehrt es nicht einer gewissen Tragik, daß Cantor viele Jahre nur sehr wenig Anerkennung fand, ja daß sogar große Mathematiker wie sein ehemaliger Lehrer Kronecker die Mengenlehre für bedeutungslos oder gar für schädlich hielten. Erst gegen Ende seines Lebens war die Wichtigkeit der Mengenlehre für die gesamte Mathematik so offensichtlich geworden, daß Cantor nun die verdiente Anerkennung und zahlreiche akademische Ehrungen zuteil wurden.

Nachruf von Edmund Landau
Edmund Landau, Professor in Göttingen und damals schon ein sehr bekannter Gelehrter, gab den Gefühlen vieler Mathematiker Ausdruck, als er anläßlich des Todes von Cantor an dessen Frau schrieb: „Mit tiefem Schmerz erfahre ich, daß Ihr Mann gestorben ist. Ihre Trauer teilt die ganze mathematische Welt. Er gehörte zu den größten und genialsten Mathematikern aller Länder und aller Zeiten."

Gründung der DMV
Die Mathematiker verdanken Cantor aber nicht nur faszinierende und grundlegende Ideen. Er war auch ein glänzender Organisator: auf seine Initiative hin wurde 1890 die Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV) in Bremen gegründet.
Auf ihrer Jahrestagung 1990, die an der Universität Bremen stattfand, konnte die DMV ihr einhundertjähriges Bestehen feierlich begehen. Auch am Zustandekommen einer internationalen Mathematikervereinigung hatte Cantor wesentlichen Anteil. Diese Internationale Mathematische Union (IMU) veranstaltet alle vier Jahre einen Weltkongreß der Mathematiker.

Weitere Interessen
Cantors Interessengebiete waren über die Mathematik hinaus weit gespannt. Er war bestens in der Philosophie und in der Philosophiegeschichte bewandert und kannte auch die Schriften der bedeutenden theologischen Denker vom heiligen Augustinus (4./5. Jahrhundert n. Chr.) bis in die frühe Neuzeit. Besonders interessierten ihn natürlich dabei die Ansichten der Philosophen und Theologen zur Unendlichkeitsproblematik. Cantor war der Meinung, daß er selbst mit seiner mathematischen Theorie des Unendlichen einen wichtigen Beitrag zur Philosophie geleistet habe, und dem kann man nur zustimmen, kommt doch kein philosophisches System an der Unendlichkeitsproblematik vorbei.
Cantors literarische Interessen und Aktivitäten bewegten sich auf einem schon damals sehr umstrittenen und heute als Fehlentwicklung betrachteten Gebiet: er war ein entschiedener Anhänger und aktiver Verfechter der sogenannten Bacon-Shakespeare-Theorie, nach der Shakespeare nicht der Verfasser der unter seinem Namen berühmt gewordenen Dramen gewesen sein könne. Diese müßten vielmehr von einer gesellschaftlich hochrangigen, mit allen Kenntnissen des Hoflebens im damaligen England ausgestatteten Persönlichkeit verfaßt sein. Als eine solche Persönlichkeit wurde Francis Bacon angesehen. Cantor hat zur Verteidigung

Georg Cantor

der Bacon-Shakespeare-Theorie sogar zwei kleine Schriften und einen Zeitschriftenartikel verfaßt. Die Beschäftigung mit der Bacon-Shakespeare-Theorie schrieb man gelegentlich, aber fälschlicherweise, Cantors Krankheit zu. Er litt seit 1884 an manisch-depressiven Zuständen, die immer wieder auftraten und seine Arbeit unterbrachen. Es wurde auch mehrfach behauptet, die Krankheit sei u. a. durch die hartnäckigen und erfolglosen Versuche Cantors ausgelöst worden, das sogenannte Kontinuumproblem zu lösen, ein Problem, das erst 1963 in gewissem Sinne gelöst werden konnte. Die archivalischen Quellen zeugen jedoch vom Gegenteil: sein Hausarzt rät dazu, Cantor während seiner Krankheitsphasen zur Wiederaufnahme seiner mathematischen Arbeit zu bewegen. Wenn das gelänge, wäre die Krankheitsphase bald überwunden.

Wie kann man nun mit dem Unendlichen Mathematik treiben? Kann es denn im Unendlichen noch Unterschiede geben, etwa in dem Sinne, daß eine Menge einen höheren Grad, eine höhere Stufe von Unendlichkeit hat als eine andere? Oder kann man gar über unsere natürlichen Zahlen „hinauszählen", etwa so, daß man ein erstes, zweites, drittes, ... Objekt hat, und hinter allen diesen Objekten mit natürlicher Ordnungszahl ein Objekt mit der Ordnungszahl „Unendlich" kommt (Cantor nannte diese erste unendliche Ordnungszahl ω), auf das dann wiederum Objekte mit den (unendlichen) Ordnungszahlen $\omega+1$, $\omega+2$, usw. folgen? Das scheinen doch zunächst ziemlich absurde Ideen zu sein. Cantor hat uns gezeigt, daß diese Ideen nicht nur nicht absurd sind, sondern daß man sie exakt mathematisch fassen und begründen kann, und daß sie zudem für die Mathematik äußerst fruchtbar sind. Wir wollen uns das an dem Problem verschiedener Stufen der Unendlichkeit klarmachen.

Überlegungen zur Mengenlehre

Fassen wir zunächst endliche Mengen ins Auge. Ein Maß für die „Größe" oder den „Umfang" einer endlichen Menge ist die Anzahl ihrer Elemente (von der Art bzw. konkreten Bedeutung der Elemente sehen wir völlig ab). Wie kann man nun feststellen, ob zwei endliche Mengen gleich viele Elemente haben? Wir nennen zwei Mengen M und N gleichmächtig oder äquivalent, wenn man eine Zuordnungsvorschrift zwischen den Elementen von M und den Elementen von N derart angeben kann, daß bei dieser Zuordnung jedem Element von M genau ein Element von N zugeordnet wird und umgekehrt jedem Element von N genau ein Element von M. Man sagt auch, zwischen M und N ist eine eineindeutige Abbildung möglich, oder M ist auf N bijektiv abgebildet. Hat man z. B. eine Menge M von Stühlen und eine Menge N von Personen, und stellt man nach dem Platznehmen der Personen fest, daß jede Person auf genau einem Stuhl sitzt und kein Stuhl übriggeblieben ist, so weiß man, daß die Anzahl der Personen gleich der Anzahl der Stühle ist. Das Platznehmen hat in diesem Falle der gleichen Anzahl von Stühlen und Personen eine eineindeutige Zuordnung beider Mengen hergestellt. Wäre die Anzahl der Elemente in beiden Mengen verschieden, so wäre eine eineindeutige Zuordnung der Elemente der einen Menge zu den Elementen der anderen Menge unmöglich: es würden entweder Personen oder Stühle übrigbleiben. Gleichmächtig zu sein, bedeutet also für endliche Mengen, daß sie dieselbe Anzahl von Elementen haben.

Die Untersuchung solcher eineindeutiger Zurodnungen oder Bijektionen auch bei unendlichen Mengen lieferte Cantor den Schlüssel dafür, im Reiche des Unendlichen Abstufungen erkennen und mathematisch charakterisieren zu können. Das nächstliegende Beispiel einer unendlichen Menge ist die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. Eine Menge M, die zu dieser Menge gleichmächtig ist, nennt man abzählbar. Die Elemente einer abzählbaren Menge M kann man demnach eineindeutig den natürlichen Zahlen zuordnen, mit anderen Worten, man kann M durchnumerieren bzw., was dasselbe ist, M läßt sich als Folge schreiben: $M = \{m_1, m_2, m_3, ...\}$. Hier tritt uns bereits eine Besonderheit der unendlichen Mengen entgegen, die bei endlichen Mengen niemals auftreten kann: Eine echte Teilmenge einer unendlichen Menge kann zur Gesamtmenge gleichmächtig sein. So bilden die Quadratzahlen 1, 4, 9, 16,... offenbar eine echte Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen; zwischen beiden Mengen ist aber eine eineindeutige Zuordnung möglich, etwa so:

1	2	3	4	...	n	...
1	4	9	16	...	n^2	...

Man sieht, daß bei dieser Zuordnung jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen Menge entspricht und umgekehrt, obwohl die eine Menge eine echte Teilmenge der anderen ist. Diese bemerkenswerte und scheinbar paradoxe Besonderheit unendlicher Mengen, die für unendliche Mengen geradezu charakteristisch ist, hatte schon G. Galilei bemerkt; er verfolgte das Problem aber nicht weiter.

Ebenso findet man abzählbare Mengen, von denen $\mathbb{N}$ eine echte Teilmenge ist. So ist die Menge der ganzen Zahlen $\{... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ abzählbar; man erkennt das an folgender eineindeutiger Zuordnung zu $\mathbb{N}$:

1	2	3	4	5	6	7	8	...
0	1	-1	2	-2	3	-3	4	...

Ferner hat bereits Cantor zeigen können, daß auch die Menge der rationalen Zahlen und sogar die noch viel „umfangreichere" Menge der algebraischen Zahlen abzählbar sind. Sind am Ende vielleicht alle unendlichen Mengen abzählbar, d. h. zu $\mathbb{N}$ gleichmächtig? Dann gäbe es keine Abstufungen im Unendlichen im Sinne einer Verallgemeinerung des Anzahlbegriffs, denn M gleichmächtig zu N war ja für endliche Mengen gerade gleichbedeutend mit „M und N haben die gleichen Anzahl von Elementen!"

Den Durchbruch und damit eine grundlegend neue Auffassung vom Unendlichen in der Mathematik erzielte Cantor mit dem Beweis, daß es unendliche Mengen gibt, die nicht mehr abzählbar sind. 1874 zeigte er nämlich, daß die Menge aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1, die wir abkürzend mit (0, 1) bezeichnen wollen, nicht abzählbar ist. Um diesen Beweis zu verstehen, erinnern wir uns daran, daß jede reelle Zahl zwischen 0 und 1 ein unendlicher Dezimalbruch der Form $0,b_1b_2b_3...$ ist, wobei b_1 die erste Ziffer nach dem Komma, b_2 die zweite Ziffer

usw. darstellt. Dabei vereinbaren wir, daß etwa 0,5 als 0,4999..., 0,732 als 0,731999... usw. geschrieben wird. Diese Vereinbarung vorausgesetzt, ist jede reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig durch die Folge der Ziffern nach dem Komma bestimmt: Zwei Zahlen x, y mit $x, y \in (0, 1)$ sind genau dann gleich, wenn sie in allen entsprechenden Ziffern übereinstimmen. Der Beweis, daß (0, 1) nicht abzählbar ist, wird indirekt geführt: Angenommen, die Menge (0, 1) wäre abzählbar, müßte sie sich als Folge schreiben lassen: $(0, 1) = \{w_1, w_2, w_3, ...\}$. Jede beliebige reelle Zahl zwischen Null und 1 müßte in dieser Folge vorkommen, d. h. gleich einem der w_j sein. Notieren wir zunächst die Dezimalbruchentwicklung der w_j:

$$w_1 = 0{,}a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14} \ldots$$
$$w_2 = 0{,}a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24} \ldots \qquad (1)$$
$$w_3 = 0{,}a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{33} \ldots$$

Wir haben uns hier zur Charakterisierung der Ziffern zweckmäßigerweise Doppelindices bedient: a_{13} etwa ist die dritte Ziffer des ersten Dezimalbruchs w_1, a_{34} die vierte Ziffer von w_3 usw.; allgemein ist a_{mn} die n. te Ziffer von w_m. Wir konstruieren jetzt eine Zahl $\alpha = 0{,}b_1b_2b_3...$ folgendermaßen: Wir setzen $b_1 = a_{11} \pm 1$, $b_2 = a_{22} \pm 1$, $b_3 = a_{33} \pm 1$, ..., $b_n = a_{nn} \pm 1$, ... Dabei ist das ± 1 so zu verstehen, daß man die „Diagonalelemente" a_{jj} in dem Ziffernschema (1) abändert, indem man in der Regel 1 addiert; nur wenn die Ziffer $a_{jj} = 9$ ist, subtrahiert man 1. Die so abgeänderten Diagonalelemente verwendet man als die Ziffern der neuen Zahl α. α beginnt mit 0,..., gehört also zu (0, 1). Nach unserer Annahme, (0, 1) sei abzählbar, muß α also einem der Folgenglieder gleich sein, etwa $\alpha = w_k$. Diese Gleichung ist aber unmöglich für jedes k, denn die k.te Ziffer von α ($a_{kk} \pm 1$) unterscheidet sich gewiß von der k.ten Ziffer von w_k (a_{kk}). Unsere Annahme hat demnach auf einen Widerspruch geführt; sie ist also falsch und somit ist (0, 1) nicht abzählbar. Da (0, 1) aber in Gestalt der Folge 1/2, 1/3, 1/4 eine abzählbare Teilmenge enthält, kann sie nur eine „höhere Mächtigkeit" als die der abzählbaren Mengen haben. Wir haben damit bereits zwei wesentlich verschieden Stufen im Unendlichen gefunden, die abzählbaren Mengen einerseits und die Mengen, die zu (0, 1) gleichmächtig sind (die sogenannten Mengen mit Kontinuumsmächtigkeit) andererseits. Cantor konnte sogar zeigen, daß man zu beliebig großen Mächtigkeiten aufsteigen kann, daß man also immer wieder Mengen findet, die eine höhere Mächtigkeit haben als bereits vorhandene Mengen. Cantor hat auch gelehrt, wie man mit diesen Mächtigkeiten ähnlich wie mit Zahlen rechnen kann.

Darauf und auf die großartige Theorie der unendlichen Ordnungszahlen (d. h. auf das „Zählen über die natürlichen Zahlen hinaus") kann hier nicht eingegangen werden. Hilbert hat diese Theorien als „die bewundernswerteste Blüte mathematischen Geistes und eine der höchsten Leistungen rein verstandesmäßiger menschlicher Tätigkeit" bezeichnet. Man kann sie sich nur durch ein eingehenderes Studium der Mathematik erschließen.

Prof. Dr. Walter Purkert

Interessante Aufgaben von Isaak Newton (1643-1727)

Vor 350 Jahren wurde Isaak Newton geboren. Zur Erinnerung einige Aufgaben. Sie stammen aus: "Universal Arithmetic: or a Treatise of Arithmetical Composition and Resolution". Written in Latin by Sir Isaac Newton.

1 Drei Arbeiter können eine gewisse Arbeit in gewissen Zeiten erledigen, nämlich A einmal in drei Wochen, B dreimal in acht Wochen und C fünfmal in zwölf Wochen. Es wird verlangt zu wissen, in welcher Zeit sie die Arbeit gemeinsam beendigen können.

2 Jemand kaufte 40 Bushel Weizen, 24 Bushel Gerste und 20 Bushel Hafer, zusammen für 15 Pfund und 12 Schilling. Er kaufte wiederum von demselben Getreide 26 Bushel Weizen, 30 Bushel Gerste und 50 Bushel Hafer, zusammen für 16 Pfund. Und ein drittes Mal kaufte er von derselben Art Getreide 24 Bushel Weizen, 120 Bushel Gerste und 100 Bushel Hafer, zusammen für 34 Pfund. Es wird gefragt, zu welchem Preis je ein Bushel der verschiedenen Getreidearten zu veranschlagen ist.

3 Drei Wiesen, die mit Gras gleicher Dichte bedeckt sind, das mit gleicher Geschwindigkeit wächst, besitzen die Flächen $3\frac{1}{3}$, 10 und 24 ha.
Auf den Wiesen weiden Rinder und fressen das Gras, das während des Abweidens nachwächst. Auf der ersten Wiese können 12 Rinder 4 Wochen lang weiden, auf der zweiten 24 Rinder 9 Wochen. Wie viele Rinder kann man auf die dritte Wiese lassen, damit diese sämtliches Gras in 18 Wochen fressen?

4 Eine geometrische Folge hat drei Glieder. Die Summe dieser Glieder ist 19, und die Summe ihrer Quadrate ist 133. Man bestimme die Glieder.

5 Eine geometrische Folge hat vier Glieder. Die Summe der beiden äußeren Glieder ist 13, die Summe der beiden mittleren ist 4. Man bestimme die Glieder.

6 Gegeben sei der Inhalt A und der Umfang u eines rechtwinkligen Dreiecks. Es ist die Länge c der Hypotenuse zu bestimmen.

7 Aus den Seitenlängen a und b eines Parallelogramms und aus der Länge e einer seiner Diagonalen ist die Länge f der anderen Diagonale zu ermitteln.

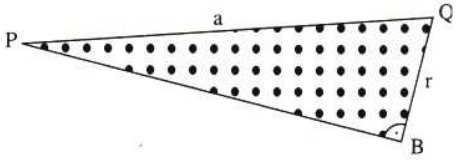
8 Zwei Boten A und B, zwischen denen 59 Meilen liegen, fahren am Morgen aufeinander zu. Bote A legt in 2 Stunden 7 Meilen zurück, B in 3 Stunden 8 Meilen; dabei begibt sich B eine Stunde später als A auf die Reise. Wieviel Meilen legt A bis zum Treffen mit B zurück?

9 Einem Kreis mit dem Durchmesser d sei ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis b und dem Schenkel s einbeschrieben. Man stelle eine Gleichung auf, welche die Variablen d, b und s enthält und löse diese jeweils nach d, b bzw. s auf.

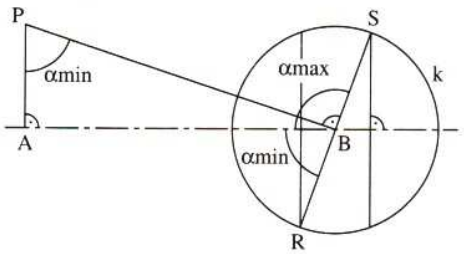
Johannes Lehmann

Lösungen

Auf zum Münchner Oktoberfest!; S. 4
Lösung: Laut Zusatzannahme gilt für $\alpha = 90°$ $\sphericalangle$ QBP = 90° und damit laut Pythagoreischem Lehrsatz $\overline{PB} = \sqrt{a^2 - r^2}$.



O. B. d. A. kann für die weiteren Überlegungen neben A und B auch P als fester Punkt betrachtet werden. (Der Beobachter rotiert dann in gleicher Weise wie der Arm AP um die Achse AB). Wegen $\overline{PQ} = a$ liegt Q auf der Kugel mit Radius a und Mittelpunkt P und wegen $\overline{BQ} = r$ auf der Kugel mit Radius r und Mittelpunkt B. Q liegt also auf der Schnittlinie beider Kugeln, auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Geraden PB liegt und dessen Ebene auf der Geraden PB senkrecht steht. Da für $\alpha = 90°$ neben $BQ \perp AB$ auch $BQ \perp BP$ gilt, kann der Mittelpunkt dieses Schnittkreises nur der Punkt B sein. Die senkrechte Projektion dieses Schnittkreises in die Ebene durch A, B und P ist der auf PB senkrecht stehende Durchmesser RS des Kreises k mit Mittelpunkt B und Radius r dieser Ebene:



Könnte der Schwenkarm BQ mit konstantem Winkel α um die Achse AB rotieren, so würde sich Q dabei auf einem Kreis bewegen, dessen Mittelpunkt auf der Geraden AB liegt und dessen Ebene auf dieser Geraden senkrecht steht. Die senkrechte Projektion jedes solchen Kreises in die Ebene ABP ist eine auf AB senkrecht stehende Sehne des Kreises k. Somit ergibt sich aus maßstabtreuen Zeichnungen oder aus den Formeln

$$\cos\alpha_{min} = \frac{r}{\overline{BP}} = \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} \text{ c}$$

$$\alpha_{max} + \alpha_{min} = 180°$$

$$\alpha_{min} = \sphericalangle ABR = \sphericalangle APB \approx 70°$$

und $\alpha_{max} \approx 110°$.

Norwegische 50-Kronen-Silbermünze „Olympische Winterspiele 1994 Lillehammer"; Seite 5
Lösung: Familienskiwanderung

Bundesschatzbriefe; Seite 5
Lösungen:
1. Aufgabe: $(p_1+p_2+...+p_6)\% = 47{,}75\%$

2. Aufgabe: $p = \frac{p_1 + p_2 + ...p_6}{6} = 7{,}96$

Der gesuchte Zinssatz ist das arithmetische Mittel der sechs Zinssätze eines Bundesschatzbriefes 1992/11 vom Typ A.

3. Aufgabe:

$$100 \cdot \left[\left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \cdot ... \cdot \left(1 + \frac{p_7}{100}\right) - 1 \right] \% = 71{,}76\%$$

4. Aufgabe:

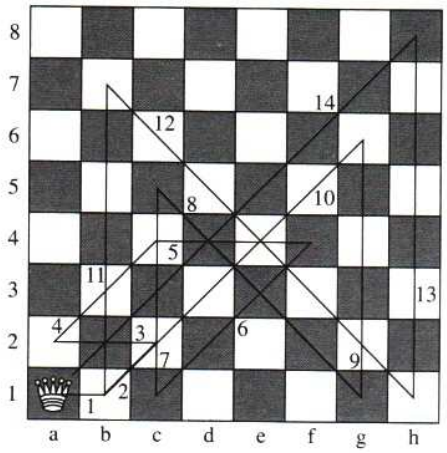
$$\text{Aus } N \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^7 = N \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \cdot ... \cdot \left(1 + \frac{p_7}{100}\right) \text{ folgt}$$

$$1 + \frac{p}{100} = \sqrt[7]{\left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \cdot ... \cdot \left(1 + \frac{p_7}{100}\right)} \text{ und}$$

$$p = 100 \cdot \left[\sqrt[7]{\left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \cdot ... \cdot \left(1 + \frac{p_7}{100}\right)} - 1 \right] \approx 8{,}034$$

Der gesuchte Zinsfaktor $1 + \frac{p}{100}$ ist das geometrische Mittel der sieben Zinsfaktoren eines Bundesschatzbriefes 1992/11 vom Typ B.
Bemerkungen: Ein Erwerber von Bundesschatzbriefen kann sich nach dem ersten Laufzeitjahr jederzeit monatlich bis zu 10000 DM seines Guthabens zurückzahlen lassen.

Lösung zu „Sportliche Dame"; S. 10



Killeralge erstickt das Mittelmeer; S. 5

Lösung: Da seit der Entdeckung dieser Alge im Mittelmeer mindestens 7, vielleicht sogar 8 Jahre vergangen sind, war 1984 der Inhalt der überwucherten Fläche nicht größer als $400\text{ha}:6^7 = 4000000\text{m}^2/6^7 \approx 14{,}3\ \text{m}^2$, vielleicht sogar nicht größer als $400\text{ha}:6^8 \approx 2{,}4\ \text{m}^2$.

„Der Komet Swift-Tuttle und die Erde", S. 8

1.) $1\text{AE} = a_E = \frac{147{,}1 + 152{,}1}{2} \cdot 10\text{ km} = 149{,}6 \cdot 10^6\text{ km}$

2.) $e_E = a_E - \pi_E = (149{,}6 - 147{,}1) \cdot 10^6\text{ km} = 2{,}5 \cdot 10^6\text{ km}$

$b_E = \sqrt{a_E^2 - e_E^2} = 149{,}58 \cdot 10^6\text{ km}$ (Pythagoreische Gleichung)

$b_E : a_E = 0{,}999$

3.) Aus $\left(\frac{a_K}{a_E}\right)^3 = \left(\frac{U_K}{U_E}\right)^2$ folgt mit $U_E = 1$ Jahr, $a_E = 1A_E$ und $\frac{U_K}{U_E} = 135{,}01$

$a_K = \sqrt[3]{135{,}01^2} \cdot 1\text{AE} = 26{,}32\text{AE}$

4.) Wegen $\pi_K \le 1\text{AE}$ gilt $\alpha_K = 2a_K - \pi_K \ge 2 \cdot 26{,}32\text{AE} - 1\text{AE} = 51{,}64\text{AE}$

5.) $e_K = a_K - \pi_K \ge 25{,}32\text{ AE}$

$b_K = \sqrt{a_K^2 - e_K^2} \le \sqrt{26{,}32^2 - 25{,}32^2}\text{ AE} = 7{,}2\text{AE}$

$b_K : a_K \le 0{,}28$

Lösungen zu „Telstar 2“

1.) Der Umfang der Kreisbahn mit Radius $r = a_T$ ist $2\pi r$. Da die Umlaufzeit auf dieser Kreisbahn T_T ist, ist die konstante Bahngeschwindigkeit auf dieser Kreisbahn gleich $\frac{2\pi r}{T_T}$. Die auf einen Satelliten auf dieser Kreisbahn wirkende Zentrifugalkraft ist

$$F_Z = \frac{m_S \cdot v^2}{r} = \frac{m_S \cdot (2\pi r)^2}{r \cdot T_T^2}$$

$$= \frac{m_S \cdot 4\pi^2 \cdot r}{T_T^2}$$

Auf $F_Z = F_G$ folgt damit

$$G \cdot \frac{m_E}{r^2} = \frac{4\pi^2 \cdot r}{T_T^2}, r^3 = \frac{G \cdot m_E \cdot T_T^2}{4\pi^2}$$

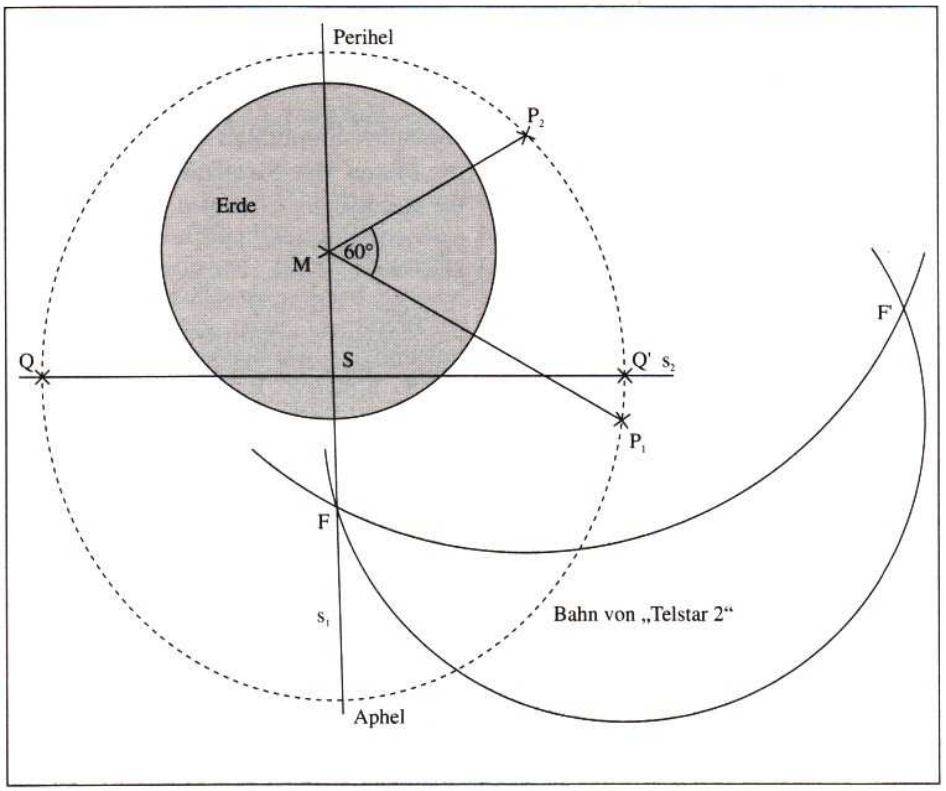
und $r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot m_E \cdot T_T^2}{4\pi^2}} = 12260 \text{ km}.$

Die große Halbachse der Bahn von „Telstar 2“ war $a_T = r = 12260$ km.

2.) Eine Strecke von 2000 km Länge wird in der maßstäblichen Zeichnung durch eine Strecke von 1 cm Länge dargestellt.

Zuerst werden die Punkte M, P_1 und P_2 in der Zeichenebene in der angegebenen gegenseitigen Lage gezeichnet. Der zweite Brennpunkt F der Bahnellipse von „Telstar 2“ muß wegen $\overline{MP_1} + \overline{FP_1} = \overline{MP_2} + \overline{FP_2} = 2a_T$ einer der Schnittpunkte des Kreises mit Radius $2a_T - \overline{MP_1}$ und Mittelpunkt P_1 mit dem Kreis mit Radius $2a_T - \overline{MP_2}$ und Mittelpunkt P_2 sein. Der mit F' bezeichnete Schnittpunkt beider Kreise scheidet aus, weil dann das Perihel der zugehörigen Ellipse im Innern der Erde liegen würde. Der in der Zeichnung mit F bezeichnete Schnittpunkt ist der gesuchte zweite Brennpunkt. Die Gerade $MF = s_1$ und die Mittelsenkrechte s_2 der Strecke MF sind die Symmetrieachsen der Bahnellipse von „Telstar 2“. Perihel und Aphel der Lösungsellipse sind die Punkte von s_1, die vom Schnittpunkt S der Symmetrieachsen s_1 und s_2 den Abstand a_T haben. Die Punkte Q und Q' der Gerade s_2, die von M den Abstand a_T haben, bestimmen die kleine Halbachse b_T der Bahnellipse: $b_T = \overline{SQ} = \overline{SQ'}$. Laut Zeichnung gilt $b_T \mathrel{\hat{=}} 5{,}6$ cm.

Hieraus folgt $b_T = 11200$ km. In der Zeichnung haben Perihel und Aphel von der Erdoberfläche die Abstände 0,4 cm und 3,6 cm, in Wirklichkeit sind damit diese Abstände gleich 1000 km und 10800 km.



Übersetzung und Lösung Sprachecke; S. 10

Übersetzung:

Im Koordinatensystem werden Dreiecke mit den Eckpunkten A(0;0), B(1;1)und C(x;y) betrachtet. Bestimmt und stellt in einer Zeichnung die Menge der Punkte C dar, für die das Dreieck ABC spitzwinklig ist.

Lösung:

Damit ABC ein spitzwinkliges Dreieck ist, müssen die folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein:

1) $x \neq y$; denn C darf nicht der Geraden AB angehören,

2) $-x < y < -x + 2$; denn C muß innerer Punkt des Streifens sein, welcher von den zu AB senkrechten Geraden durch A und B begrenzt wird.

3) $\left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \triangleright \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$;

denn C muß ein außerhalb des Kreises durch A und B mit dem Radius $r = \frac{1}{2}\overline{AB}$ liegender Punkt sein.

Marktecke

Strategische Brettspiele

Creepers

Nach den Lemmingen begleiten wir bei Creepers lauter kleine Raupen auf ihrem Weg vom Schlüpfen bis zum Entpuppen als Schmetterlinge.

Die kleinen grünen Würmer sind etwas dummelig, sie klettern und krabbeln, und wir steuern sie. Da hilft ein Föhn, eine Leiter, ein Trampolin oder gar ein kleines Bömbchen. Diese und andere Werkzeuge stehen in einer Icon-Leiste zur Verfügung. Sie lassen sich beliebig oft auf- und abbauen. Ähnlich TIM, der Incredible Machine, kann man richtige "Wurm-Wegbereitungs-Maschinen" konstruieren. Bei allen Aktionen gilt nur zu bedenken, daß jede Aktion Energie verbraucht – und die ist nun mal nicht endlos vorhanden.

In den einzelnen Levels stehen nicht immer alle Werkzeuge gleichzeitig zur Verfügung, das schreit geradezu nach überlegter Planung. Machen sich die kleinen Würmer zu einem hervorragendem Sound auf den Weg, hält sie nichts mehr auf. Deswegen sollte man zu Beginn jedes Levels die Pausentaste drücken, um sich erst einmal einen Level-Überblick zu verschaffen.

Der große Bildschirm kann durch Kamera-Optionen geteilt werden. So kann man immer auf Creeper-Höhe sein, oder schwierige Passagen im Auge behalten. Insgesamt sind vier unterschiedliche Schwierigkeitsgrade zu meistern, um alle Creepers durch die abwechslungsreichen Bildschirme zu begleiten. Dank flotter Musik, passabler Grafik und sehr guter Steuerung ist ein hoher Motivationsgrad schnell erreicht. Die stetig ansteigenden Problemstellungen entmutigen auch Wurm-Anfänger nicht. Ein Manko des Spieles darf nicht unerwähnt bleiben: Teilweise arbeiten sich die kleinen Raupen im Originaltempo über den Bildschirm. Bei einigen Bildern reicht das immerhin aus, die noch fehlenden Hausaufgaben fristgerecht zu erledigen.

Mit einem Paßwortsystem ausgerüstet, können die Creepers jederzeit wieder an beliebiger Stelle gestartet werden. Schade nur, daß die Creepers gegen harte Lemmings-Konkurrenz anzukämpfen haben.

CREEPERS, Psygnosis 1993, Denk- & Tüftelspiel der Marken Incredible Machine und Lemmings, Muster von: Sellings Points, Hardware: AT, 20 MHz, 256-VGA, Sounkdarte, Maus, LW, Preis: 119.95 DM

H. Seitz /-se

Colossus X

Die Spielesammlung Colossus X enthält die besten vier Strategie-Programmen für den PC.

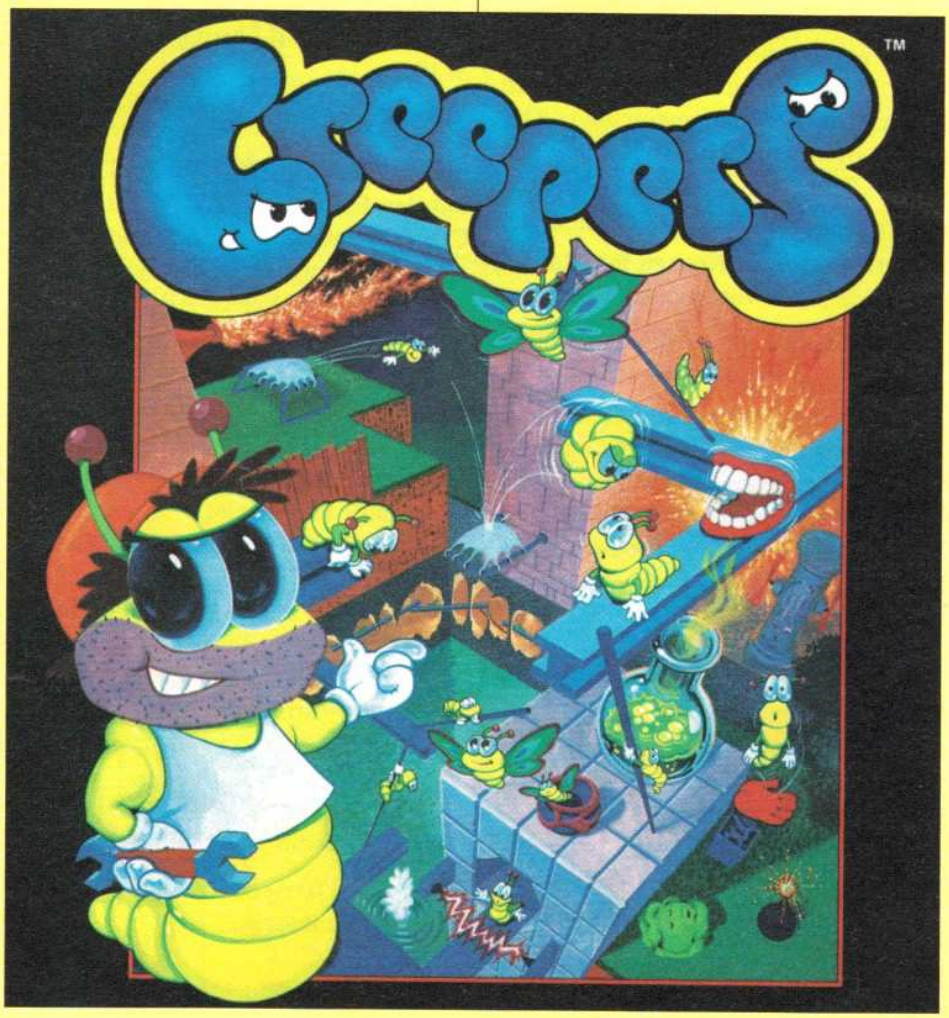
Colossus Chess X bietet unter einer recht guten EGA-Grafik vier verschiedene Figurensätze, beliebig einstellbare Blickwinkel auf Brett und Figuren, sechs verschiedene Spielmodi, sowie hunderte unterschiedlicher Eröffnungen. Ein weiterer Vorteil ist, Partien abspeichern und bei Bedarf neu laden zu können. Zudem kann Chess X selbstlernend arbeiten.

Backgammon, enthält das komplette Regelwerk des modernen Backgammon, u. a. das für andere Simulationen unübliche Verdoppeln. Auch bei diesem Spiel gibt es viele zusätzlich anwählbare Funktionen, z. B. Spielsicherung, Lernprogramm (Regeln) und frei wählbare Würfelzahlen.

Draughts (Dame) ist nach Chess eines der beliebtesten Strategiespiele dieser Serie. Nachteilig auf den Spielgenuß wirkt sich hier die EGA-Grafik aus, jedoch wird sich kein Dame-Fan davon beeinflussen lassen, da letztlich die Spielstärke eines jeden Programmes entscheidend ist. C-Draughts gilt momentan als stärkstes Dame-Programm. Es sichert sogar auf bescheidenster Hardware hohes Spielniveau, was man an der Vielzahl der Eröffnungen (mehr als 4000 Varianten) merkt, die durch die Lernfähigkeit des Programmes noch ausbaufähig sind. Im Gegensatz zu den anderen Simulationen ist ***Bridge*** unter VGA lauffähig, sorgt aber deshalb noch lange nicht für mehr Spaß. Trotzdem muß man anerkennen, daß diese Simulation einzigartig ist, denn auch dieses Strategie-Programm enthält Funktionen, die sonst nirgendwo zu finden sind. Sehr vorteilhaft für Einsteiger ist der Spiellehrer, der anhand verschiedenen Blätter das Grundprinzip von Bridge erklärt.

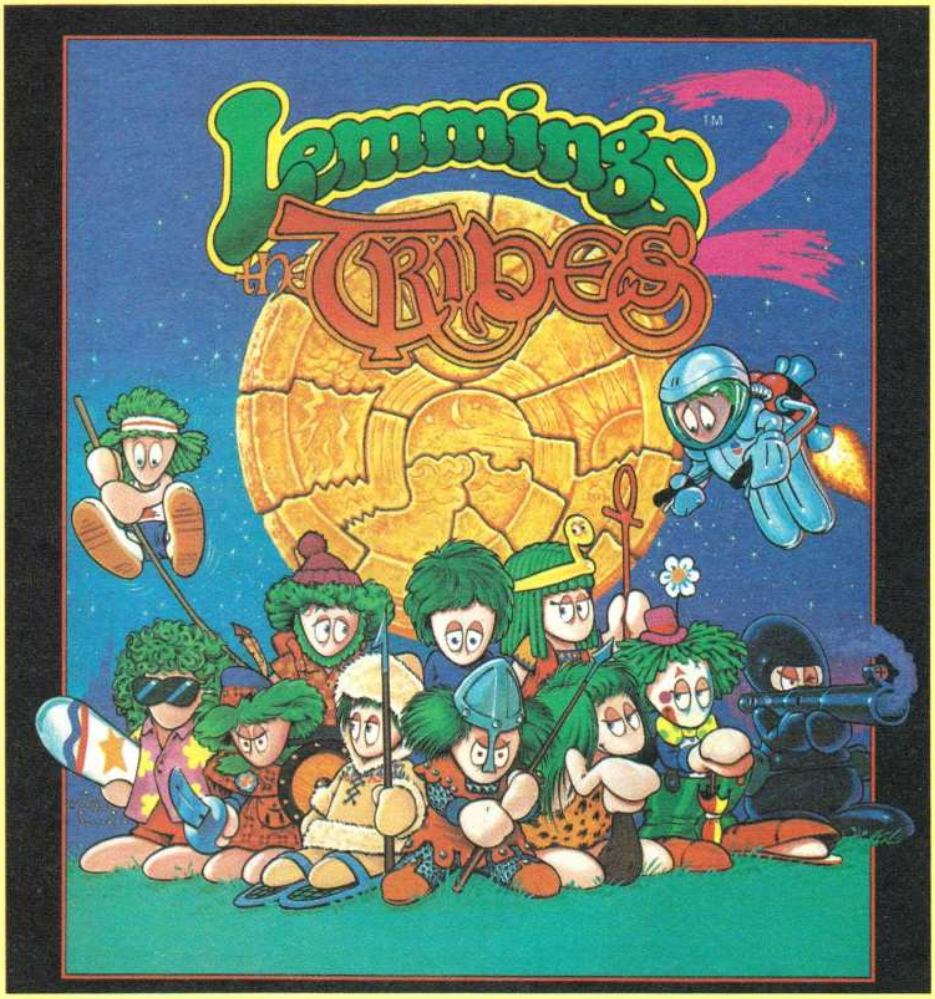
COLOSSUS – COLLECTION OF STRATEGY GAMES, CDS Software, Muster von: Rushware, Hardware: 286+, 640 KB RAM, EGA/VGA, Übungsprogramm für Schach, Dame, Bridge, Backgammon. Preis: 79,95 DM

Christian Pape/ -se



Lemming II – The Tribes

Sie sind wieder da. Zwölf neue Stämme von Lemmingen haben eine Menge Ärger. Sie sind zwar sehr talentiert, aber immer noch ziemlich dummelig. Sie brauchen unsere Hilfe.



Die Lemminge durch die Level zu führen ist schwieriger, als man sich denkt, denn die kleinen Freunde der Selbstzerstörung scheuen sich nicht, bereits am Anfang eines Levels von der Klippe zu springen. Um die Lemminge zu zähmen, genügt ein Mausklick auf eine Palette von Eigenschaften, anschließend ein Klick auf einen der Lemminge, und schon widmet sich dieser eine seiner gerade ihm zugewiesenen Aufgabe.

Seit der letzten Lemming-Manie haben sich die Tierchen spezialisiert. Es gibt nun mehrere Arten, ein Loch zu graben, ein Hindernis zu überqueren, eine Lücke zu füllen oder sich durch die Luft zu bewegen. Beach-Lemminge können standesgemäß surfen, Polar-Lemminge werfen Schneebälle, Zirkus-Lemminge lieben die Ballons und die mittelalterlichen Lemminge können gut mit dem Bogen umgehen.

Wenn man alle 12 Stämme sicher durch die Levels bringt, winkt einem statt einer Bronzemedaille eine in Gold. Na, ist das kein Anreiz? Unbestritten bleibt, daß die Lemminge weiterhin viel Spaß machen. Für mich haben sie aber nicht mehr den Reiz der ersten Lemminge. Trotz über bis zu acht Bildschirmen scrollende Levels, trotz eine Vielzahl neuer Eigenschaften (die sich aber immer wieder auf das bekannte Minimum reduzieren lassen), trotz zwölf neuer Songs stellt sich das erwartete Lemmings-Großfieber nicht in dem Maße ein, wie es damals war, als die grünhaarigen Dummköpfe zum ersten Mal über den Monitor trollten – schließlich haben wir damals schon genügend Lemminge gerettet. Wer die Vorgänger aber nicht kennt, der sollte sich LEMMINGS: THE TRIBES sofort besorgen.

LEMMINGS II, Psygnosis 1993, Denk- und Tüftelspiel mi 120 scrollenden Levels, Muster von Selling Points; Hardware: 286+, 12 MHz+, 640 KB RAM, HD (3,8), Soundkarte, Maus, Preis: 119,95 DM.

H. Seitz /-se

Buchhinweis

Andrej G. Konforowitsch: Logischen Katastrophen auf der Spur - Mathematische Sophismen und Paradoxa
2. Aufl. 1992, 250 S., 122 Abb., 178 Aufgaben mit Lös., 19 cm x 12 cm,
ISBN 3-343-00831-1, Broschur,
DM 16,80; ÖS 131,-; sFr 17,80

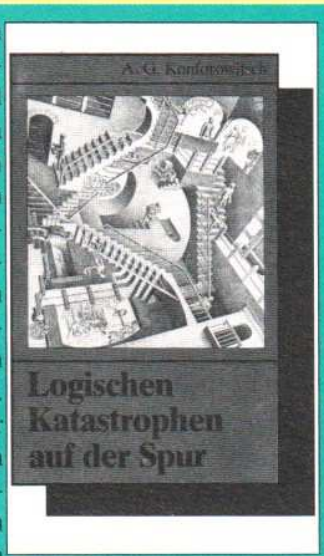
Kurzbeschreibung:

- Aufgaben aus Arithmetik, Algebra und Analysis, Geometrie und Logik
- jede Aufgabe enthält einen versteckten logischen Fehler, der auf einer Stufe der Überlegungen entstand und widersinnige Ergebnisse bedingte
- die bekanntesten Paradoxa aus der Geschichte
- Illustrationen von Maurits Cornelis Escher

Es ist besonders zu empfehlen für Oberschüler, Lehrer, Studenten, Mathematiker.

Auszüge aus einigen Rezensionen geben einen guten Einblick in das Buch: ... „eine originelle, aber auch anstrengende Reise auf den verschlungenen Wegen menschlichen Denkens." (*Handelsblatt, Technische Linie, Düsseldorf und Frankfurt*)

„Dies ist ein Buch von der Logik, dem folgerichtigen Denken also, und von den Seltsamkeiten, die einem dabei begegnen können. Mit Paradoxa und Antinomien hat man sich schon in der Antike beschäftigt, und das Interesse daran hat bis auf den heutigen Tag nicht abgenommen. Solche verwirrenden mathematischen Sophismen und Paradoxa sind in diesem Band zusammengetragen und ausführlich behandelt. ... Wer sich gern mit mathematischen Aufgaben und Denkvermögen solcher Art befaßt, findet hier viel Spaß, und zwar preiswert." (*Technische Mittelungen, Essen*)



Lösungen

Lösung von Zuschnitt eines Glockenrocks; S. 15

Zunächst stellen wir Beziehungen zwischen den gegebenen Größen Stoffbreite, Rocklänge und Taillenumfang sowie den gesuchten Werten r und α auf, wobei wir entsprechend den Bezeichnungen aus Abb. 1 die Hilfsgrößen R, a, b, L verwenden:

$R = r + 76$ (1)

$a = 73 = R \sin\beta$ (2)

$2r\beta = 40$ (3)

$b = r \cos\beta$ (4)

$\alpha = 2\beta$ (5)

$L = R - b$ (6)

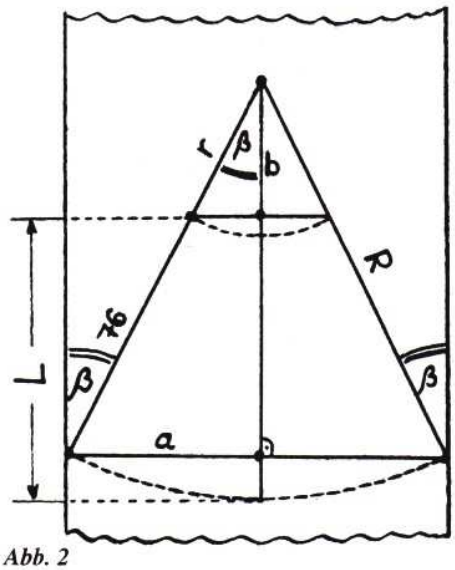


Abb. 2

Offenbar gilt $0 < \beta < \frac{\pi}{2} \hat{=} 90^0$. Gleichung (3) ist ein Ausdruck für den Taillenumfang; hierbei tritt β im Bogenmaß auf. Die in (6) vorkommende Größe L entspricht der Stofflänge für einen halben Rock; zu kaufen ist demnach eine Länge von 2L.

Aus den Gleichungen (1) – (3) ergibt sich nach einfachen Umformungen die Beziehung

$$\beta = \frac{20 \sin\beta}{73 - 76 \sin\beta} \quad (7)$$

eine goniometrische Gleichung, in der neben β im Bogenmaß auch $\sin\beta$ auftritt. Derartige Gleichungen – wie auch Polynomgleichungen höheren Grades – lassen sich i. allg. nicht in geschlossener Form lösen, d. h., es ist nicht möglich, (7) durch elementare Umformungen, Anwendung von Winkelbeziehungen usw. nach β aufzulösen. es mag für manchen eine neue Erkenntnis und vielleicht auch eine Enttäuschung sein, aber mit der Tatsache, daß nicht jede Bestimmungsgleichung geschlossen lösbar ist, muß man sich einfach abfinden. Man kann jedoch Gleichung (7) mit beliebiger Genauigkeit näherungsweise lösen. Die numerische Mathematik stellt dafür eine Vielzahl effektiver Verfahren (wie etwa das Newtonverfahren) bereit.

Es gibt aber auch sehr einfache Methoden zur Lösung von (7), die jedermann – unter Zuhilfenahme eines Taschenrechners – leicht nachvollziehen kann. Eine davon soll jetzt kurz beschrieben werden.

Zunächst bezeichnen wir die rechte Seite in (7) mit $f(\beta)$ und stellen diese Funktion mit Hilfe einiger Wertepaare graphisch dar (s. Abb. 3). Aus Abb. 3 erkennt man, daß die für das vorliegende Problem sinnvolle Lösung von (7) bei etwa $\beta = 0{,}8$ (ca. 45°) liegt. Nun wenden wir die Methode des gezielten Probierens bzw. der linearen Interpolation an (vgl. Tab. 1). Dazu führen wir die Funktion $g(\beta) = f(\beta) - \beta$ ein und suchen in der Nähe von 0,8 eine Nullstelle von g, d. h. einen solchen Wert $\bar{\beta}$, für den $g(\bar{\beta}) = 0$, mithin $f(\bar{\beta}) = \bar{\beta}$ gilt (Abb. 3).

β	$f(\beta)$	$g(\beta)$
0,8	0,7763	-0,0237
0.9	1,1633	0,2633
0,81	0,8068	-0,0032
0,82	0,8388	0,0188

Tabelle 1: Funktionswerte

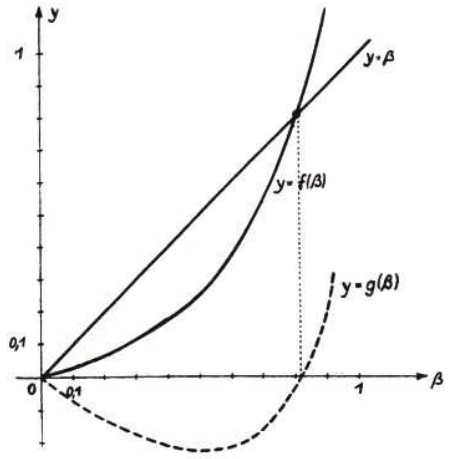


Abb. 3

Aus Abb. 3 erkennt man, daß $g(0{,}8) < 0$ und $g(0{,}9) > 0$ gilt. Die Funktion g besitzt im Intervall [0,8;0,9] keine Sprünge oder nicht definierte Stellen (man spricht in diesem Fall von einer stetigen Funktion), denn sie ist Quotient aus der stetigen Zählerfunktion $g_1(\beta) = 20 \sin\beta$ und der ebenfalls stetigen Nennerfunktion $g_2(\beta) = 73 - 76 \sin\beta$, die im betrachteten Intervall nicht Null wird (Überprüft dies!). Damit gibt es tatsächlich mindestens einen Wert $\bar{\beta}$ mit $g(\bar{\beta}) = 0$

Um diesen zu finden, nähern wir im Intervall [0,8;0,9] die Funktion g durch eine lineare Funktion an. Dies bedeutet, der Graph von g wird durch eine Gerade ersetzt, die durch die Punkte P1(0,8;g(0,8)) und P2(0,9;g(0,9)) verläuft und die β-Achse an der Stelle β_1 schneidet (dieses Vorgehen nennt man lineare Interpolation). Unter Nutzung der Beziehungen zwischen ähnlichen Dreiecken (vgl. Abb. 4) erhält man

$$\frac{\beta_1 - 0{,}8}{0{,}9 - 0{,}8} = \frac{0 - g(0{,}8)}{g(0{,}9) - g(0{,}8)}, \quad (8)$$

woraus sich

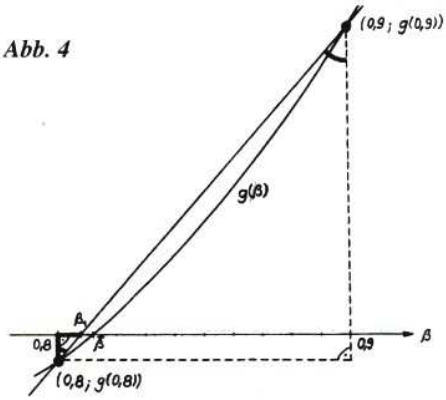
$$\beta_1 = 0{,}8 - 0{,}1 \frac{g(0{,}8)}{g(0{,}9) - g(0{,}8)}$$

$$= 0{,}8083 \approx 0{,}81$$

ergibt. Für diesen Wert gilt $g(\beta_1) = -0{,}0032$, er stellt damit bereits eine sehr gute Näherung für $\bar{\beta}$ dar. Genügt einem die erzielte Genauigkeit aber noch nicht, muß man die Prozedur der linearen Interpolation wiederholen, indem man etwa eine neue Gerade durch die Punkte P3(0,81;g(0,81)) und P4(0,82;g(0,82)) legt. Deren Nullstelle lautet $\beta_2 = 0{,}8115$ und besitzt einen Funktionswert von g(0,8115) = -0,00008 (Überprüft dies!). Somit ist β_2 eine sehr gute Näherung für die gesuchte Größe $\bar{\beta}$, so daß wir das Verfahren an dieser Stelle abbrechen und $\alpha = 2\beta_2 = 1{,}623 \hat{=} 93^0$ als Lösung unseres Problems betrachten können.

Übrigens ist die beschriebene Vorgehensweise eng verwandt mit dem sog. Sekantenverfahren, das ebenfalls ein Iterationsverfahren zur näherungsweisen Nullstellenbestimmung darstellt.

Abb. 4



Aus den Beziehungen (3), (4), (1), (6) kann man leicht die gesuchten Größen r = 24,65, b = 16,97, R = 100,65 und L = 83,68 ermitteln, Laura muß also 1,68 m Stoff kaufen. Aus Abb. 2 ist erkennbar, wie der Zuschnitt des Stoffs tatsächlich erfolgen kann, da der Winkel β nicht nur an der Spitze sondern auch am Stoffrand auftritt.

Prof. Dr. Bernd Luderer

Lösungen zu Flächenverwandlung; S. 12

Aufgabe 1: (siehe dazu Abb. 2)

Fall (1)
$\Delta DFE \cong \Delta BCF$: (a) $\overline{DE} \cong \overline{BC}$; laut Voraussetzung
(b) $\sphericalangle CDE \cong \sphericalangle DCB$; laut Voraussetzung
(c) $\sphericalangle DFE \cong \sphericalangle CFB$; Scheitelwinkel

Fall (2)
$\Delta AID \cong \Delta IFE$; analog Fall (1); wegen wsw und $\Delta FHE \cong \Delta BCH$; analog Fall (1); wegen wsw.
In den Fällen (1) und (2) folgt die Flächengleichheit aus der Kongruenz entspr. Dreiecke.

Fall (3)
(a) $A_{\Delta ABD} = A_{\Delta BCD}$ wegen Kongruenz
(b) $A_{\Delta ADF} = A_{\Delta ABD}$ wegen gemeinsamer Grundseite $\overline{AD}$ und $h_1 = h_2$, laut Voraussetzung, wobei $h_1 = \overline{EA}$ und $h_2 = \overline{AB}$

Aus (a) und (b) folgt: $A_{ABF} = A_{ABCD}$

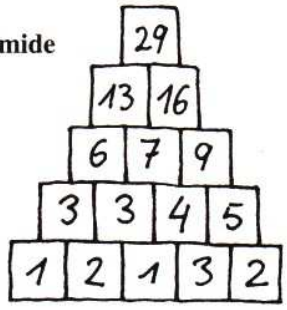
Aufgabe 2: Man rechnet annähernd $10200\ m^2 \approx 1$ ha.

Knobeleien; S. 13

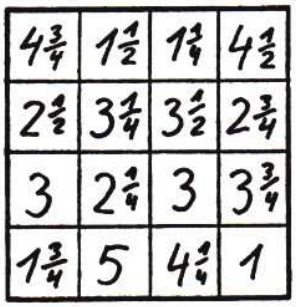
Wer ist zuerst an der Brandstelle?
Feuerwehr A hat den kürzeren Weg.

Seilzug
Die Seilstücke a, c und e bewegen sich nach unten.

Zahlenpyramide



Ergänzungen



Lösungen der Aufgaben von Isaac Newton; S. 26

1 In einer Woche erledigt
$A\frac{1}{3}, B\frac{3}{8}$ und $C\frac{5}{12}$ der Arbeit. Für die Zeit von x Wochen gilt
$\frac{x}{3} + \frac{3x}{8} + \frac{5x}{12} = 1$, also
$x = \frac{8}{9}$.

Die Arbeit wird gemeinsam in $\frac{8}{9}$ Wochen beendigt sein.

2 1 Pfund hat 20 Schillinge, also 12 Schillinge entsprechen 0,6 Pfund. Es seien w, g bzw. h jeweils der Preis für einen Bushel Weizen, Gerste bzw. Hafer; dann gilt
$40w + 24g + 20h = 15{,}6$;
$26w + 30g + 50h = 16$;
$24w + 120g + 100h = 34$.
Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen $w = \frac{1}{4}$, $g = \frac{3}{20}$ und $h = \frac{1}{10}$.
Je ein Bushel Weizen, Gerste bzw. Hafer kostet 0,25; 0,15 bzw. 0,1 Schilling.

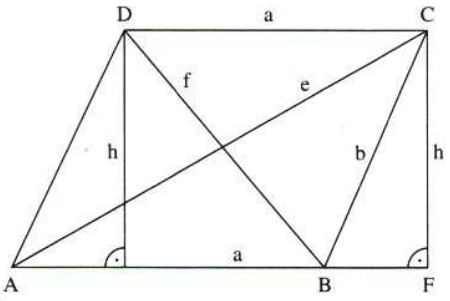
3 Es sei y der Teil des vorhandenen Vorrats an Gras, das auf der Fläche von 1 ha in 1 Woche heranwächst. Auf der ersten Wiese wächst in vier Wochen
$3\frac{1}{3} \cdot y \cdot 4 = \frac{40}{3}y$ des anfänglichen Vorrates an Gras heran. Dies ist gleichbedeutend damit, daß sich die Fläche der Wiese vergrößert und $\left(3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}y\right)$ ha beträgt. In einer Woche fraß ein Rind das Gras auf der Fläche
$\left(\frac{10}{3} + \frac{40}{3}y\right) : 48 = \frac{10 + 40y}{144}$ ha.
Analog gilt für die zweite Wiese
$\frac{10 + 90y}{189}$ ha.
Beide Weidenormen sind gleich, deshalb gilt
$\frac{10 + 40a}{144} = \frac{10 + 90y}{189}$, also $y = \frac{1}{12}$.
Nun bestimmen wir die Wiesenfläche, deren Vorrat an Gras für das Weiden eines Rindes im Verlaufe einer Woche ausreichend ist:
$(10 + 40y) : 144$
$= \left(10 + \frac{40}{12}\right) : 144 = \frac{5}{54}$ (ha)
Wir bezeichnen die gesuchte Zahl der Rinder mit x; dann gilt
$\left(24 + 24 \cdot 18 \cdot \frac{1}{12}\right) : (18x) = 5 : 54$,,
also x = 36.
Auf der dritten Wiese reicht das Gras, um 36 Rinder 18 Wochen weiden zu lassen.

4 Es seien a, aq, aq^2 drei aufeinanderfolgende Glieder einer geometrischen Folge. Nun gilt $a + aq + aq^2 = 19$ und $a^2 + a^2q^2 + a^2q^4 = 133$.
Dieses Gleichungssystem hat die Lösung $a = 4$ und $q = \frac{3}{2}$. Die drei Glieder lauten somit 4, 6, 9.

5 Es seien a, aq, aq^2, aq^3 vier aufeinanderfolgende Glieder einer geometrischen Folge. Nun gilt $a + aq^3 = 13$ und $aq + aq^2 = 4$. Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen $a_1 = 0{,}2$ und $q_1 = 4$bzw. $a_2 = 12{,}8$ und $q_2 = \frac{1}{4}$. Die beiden geometrischen Folgen 0,2; 0,8; 3,2; 12,8 und 12,8; 3,2; 0,8; 0,2 erfüllen die gestellten Bedingungen.

6 Aus $u = a + b + v$ und $A = \frac{a \cdot b}{2}$ und $c^2 = a^2 + b^2$ folgt schrittweise $(u - c)^2$
$= (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$= c^2 + 2ab$, $u^2 - 2cu - c^2$
$= c^2 + 2ab$, $u^2 - 2cu$
$= 4 \cdot A$, also $c = \frac{u^2 - 4 \cdot A}{2u}$.

7 Dem Bild sind folgende Beziehungen zu entnehmen:



Aus $(a + x)^2 + h^2 = e^2$ und $x^2 + h^2 = b^2$ folgt $a^2 + 2ax = e^2 - b^2$; aus $(a - x)^2 + h^2 = f^2$ und $x^2 + h^2 = b^2$ folgt $a^2 - 2ax = f^2 - b^2$. Durch Addition erhalten wir daraus $2a^2 = e^2 + f^2 - 2b^2$ bzw.
$a^2 + b^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(e^2 + f^2\right)$.

8 Aus $s_A + s_B = 59$, also
$v_A \cdot t_A + v_B \cdot t_B = 59$ und
$v_A = \frac{7}{2}\frac{\text{Meilen}}{\text{h}}$,

$v_B = \frac{8}{3}\frac{\text{Meilen}}{\text{h}}$, $t_A = t_B + 1$ folgt weiter

$\frac{7}{2}\cdot(t_B+1)+\frac{8}{3}\cdot t_B = 59$,

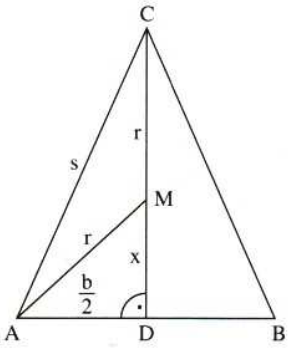
also $t_B = 9$ (h) und

$t_A = 10$ (h). Deshalb gilt

$s_A = \frac{7}{2}\cdot 10$ Meilen $= 35$ Meilen .

Bote A legt 35 Meilen bis zum Treffen mit B zurück.

9 Dem Bild sind folgende Beziehungen zu entnehmen:



Es gilt $(x+r)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2 = s^2$

und $x^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2 = r^2$.

Durch Subtraktion erhalten wir

$2rx + r^2 = s^2 - r^2$,

$x = \frac{s^2-2r^2}{2r}$,

$x + r = \frac{s^2-2r^2}{2r}+\frac{2r^2}{2r} = \frac{s^2}{2r}$.

Durch Einsetzen erhalten wir

$\frac{s^4}{4r^2}+\frac{b^2}{4} = s^2, s^4 + b^2r^2 = 4r^2s^2$,

$s^4 = r^2\cdot(4s^2-b^2)$,

$r^2 = \frac{s^4}{4s^2-b^2}; r = s\cdot\sqrt{\frac{1}{(2s-b)(2s+b)}}$,

$d = 2s\cdot\sqrt{\frac{1}{(2s-b)(2s-b)}}$.

Johannes Lehmann

Lösungen zur Problemecke aus Heft 3

Aufgabe 1
Lösung:
Durch Probieren findet man schnell für
n = 1: 1+1 < 1000
n = 2: (2+1)·(2+2) = 3 4 < 1000
n = 3: (3+1)·(3+2) · (3+ 3) = 4·5·6 < 1000
n = 4:
(4+1)·(4+2)·(4+3)·(4+4) = 1680 > 1000
Damit ergibt sich als Lösungsmenge
L = {1, 2, 3}

Aufgabe 2
Lösung:
Wir vereinfachen algebraisch weiter:

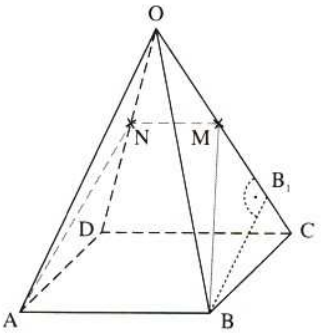
$x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}} = \frac{30}{13}z \quad x+\frac{z}{yz+1} = \frac{30}{13}$

oder $x+\frac{z}{yz+1} = 2+\frac{4}{13}$, also ist x = 2.

Da z und yz + 1 teilerfremd sind (ihr ggT ist 1), muß weiter gelten: z = 4 und yz + 1 = 13.
Dies liefert 4y + 1 = 13 oder 4y = 12 und damit y = 3.

Aufgabe 3
Lösung:
Wir stellen die Ungleichung etwas um:
$(T^2(x) - 4\cdot T(x) + 4) + (S^2(x) - 6\cdot S(x) + 9) \le 0$ (beachte: 13 = 4 + 9)
$\Leftrightarrow (T(x) - 2)^2 + (S(x) - 3)^2 \le 0$
Da die Summe zweier Quadratterme nicht negativ sein kann, tritt nur Gleichheit ein.
Also gilt T(x) - 2 = 0 und S(x) - 3 = 0.
Somit erfüllen nur die konstanten Polynome T(x) = 2 und S(x) = 3 die geforderte Bedingung.

Aufgabe 4
Lösung:
a) AB||CD und CD liegt in der Dreiecksebene ODC.
MN ist Schnittgerade von Ebene ε mit der Dreicksebene ODC.
Demnach gilt auch MN||AB, also ist ABMN ein Trapez.
Weiter gilt:
OB ≡ OA und ∢BOM ≡ ∢AOAN da die Pyramide regulär ist.
Somit sind die Dreiecke OBM und OAN kongruent und damit auch die Seiten BM und AN.
Dies ergibt: Viereck ABMN ist ein gleichschenkliges Trapez.
b) Wir kürzen die Flächeninhalte wie folgt ab:



$A_1 = A_{\Delta OBM}$, $A_2 = A_{\Delta OMN}$, $A_3 = {}_{\Delta OAB}$,
$A_4 = A_{\Delta OBC}$, $A_5 = A_{\Delta ODC}$.

Betrachte das Flächenverhältnis $\frac{A_1}{A_4}$:

$\frac{A_1}{A_4} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\overline{OM}\cdot\overline{BB_1}}{\frac{1}{2}\cdot\overline{OC}\cdot\overline{BB_1}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OC}}$,

wobei $\overline{BB_1}$ mit $B_1 \in OC$ gemeinsame Höhe der Dreiecke AOBM bzw. OBC ist.

Also gilt: $A_1^2 = \left(\frac{\overline{OM}}{\overline{OC}}\right)^2\cdot A_4^2$ (1)

Da MN||DC sind die Dreiecke ONM und ODC ähnlich. Nach einem Satz der Ähnlichkeitslehre verhalten sich ihre Flächeninhalte wie die Quadrate entsprechender Strecken.

Somit gilt: $\frac{A_2}{A_5} = \frac{\overline{MN}^2}{\overline{DC}^2} = \frac{\overline{OM}^2}{\overline{OC}^2}$,

da ähnliche Dreiecke in entsprechenden Seitenverhältnissen übereinstimmen.

Also folgt: $A_2 = \left(\frac{\overline{OM}}{\overline{OC}}\right)^2\cdot A_5$ (2)

Aus (1) ergibt sich nun mittels (2):

$A_1^2 = \left(\frac{\overline{OM}}{\overline{OC}}\right)^2\cdot A_4\cdot A_4 =$

$= A_2\cdot A_4$, da $A_5 = A_4$ (aufgrund der Tatsache, daß eine regelmäßige Pyramide kongruente Seitenflächen besitzt).
Da auch $A_3 = A_4$ gilt, folgt schließlich $A_1 = A_2\cdot A_3$ und daraus die Beziehung

$A_1 = \sqrt{A_2\cdot A_3}$.

ISBN 3-617-34017-2

H 11328 F

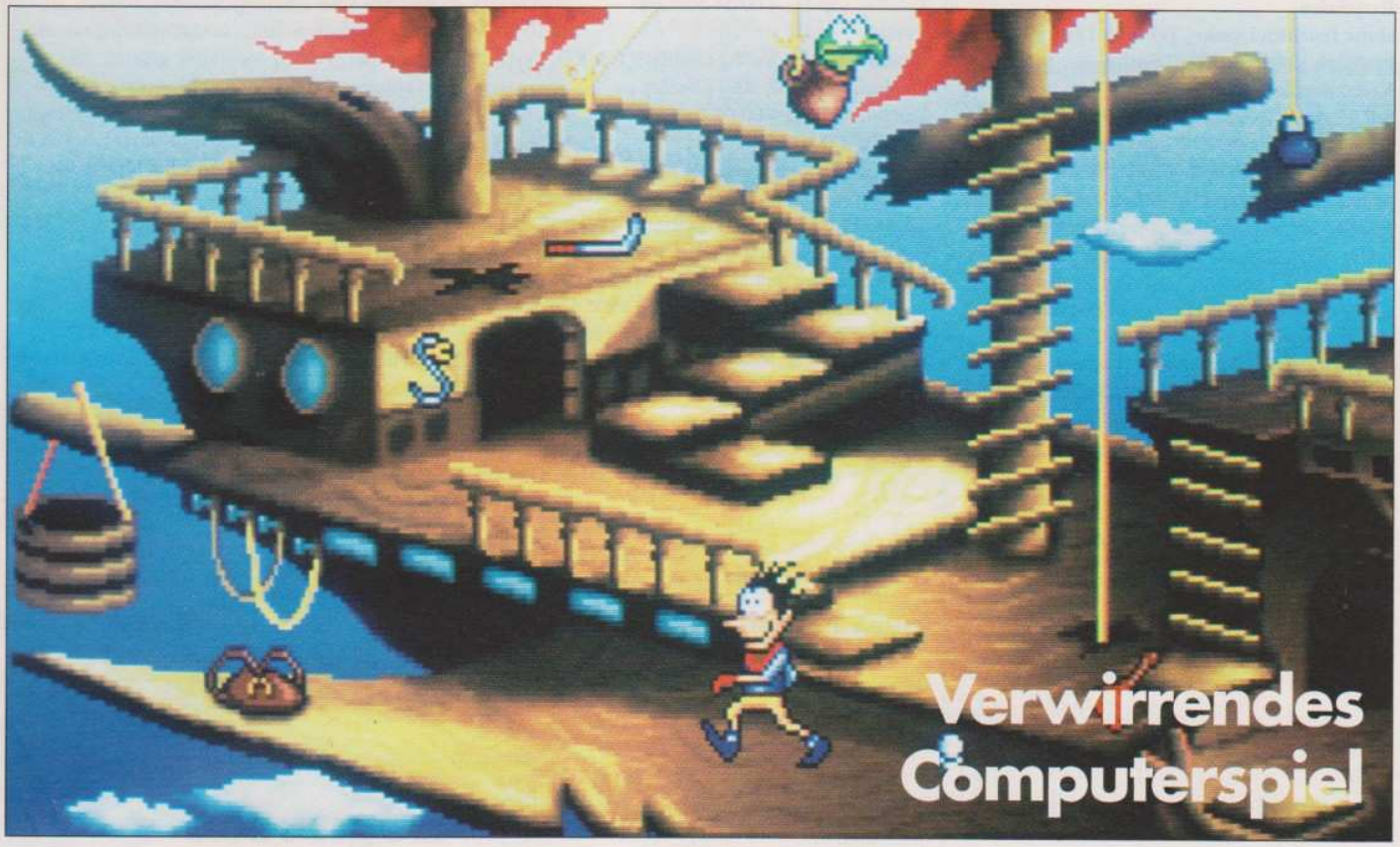
Heft 6
Dezember 1993
27. Jahrgang

Pädagogische
Zeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

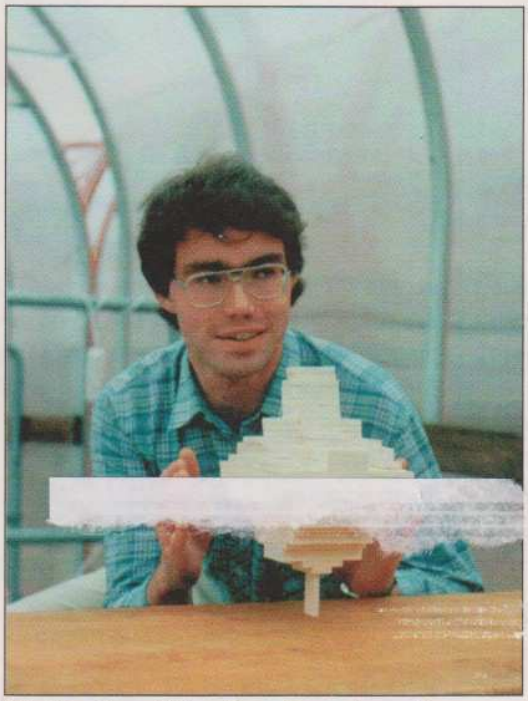
Best.- Nr. 34017

Alpha

Mathematische Schülerzeitschrift



Verwirrendes Computerspiel



Weltrekord im Dominostapeln

Die deutsche IMO-Mannschaft

Liebe Freunde und liebe Bezieher von *alpha*,
vom 01. 01. 1994 an erscheint *alpha* im
Reinhardt Becker Verlag; Luisenstraße 45; 16727 Velten

Die Abonnements werden automatisch vom Reinhardt Becker Verlag weitergeführt; das nächste Heft wird aus Velten in Brandenburg zu seinen Lesern kommen. Der Erhard Friedrich Verlag hofft, daß Ihr und Sie *alpha* treu bleiben und dankt seinen bisherigen Abonnenten.

Korrektur
Im Heft 6 des Jahres 1992 erschien ein Artikel „Spinnennetze". Als Autorin war Claudia Erdmann angegeben. Dieser Artikel ist jedoch vollständig dem Buch von Rüdiger Thiele „Das große Spielvergnügen", Hugendubel-Verlag, München, entnommen.

alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett und in Verbindung mit Dr. Gabriele Liebau, Dr. Claus Peter Helmholtz und Herbert Kästner.

Redaktion:
Hans Joachim Lemke, Tel.: (05 11) 4 00 04-42
Postfach 10 01 50, 30917 Seelze
Redaktionskollegium:
StR F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), OL Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pliezhausen), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OStR J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. W. Schmidt (Greifswald), OStR G. Schulze (Herzberg), Dr. W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

Anzeigenleitung: Bernd Schrader
Anzeigenabwicklung:
Telefon: (05 11) 4 00 04-23
Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01. 01. 1990
Vertrieb und Abonnement:
Telefon: (05 11) 4 00 04-52/53/85
Verlag:
Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG,
Postfach 10 01 50, 30917 Seelze
Telefon: (05 11) 4 00 04-0
Telefax: 4 00 04-19
Das Jahresabonnement für **alpha** besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt 12,00 DM, im Einzelbezug 2,50 DM. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten.
Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).

alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV KlettCotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, DH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.
© Beiträge sind urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte vorbehalten. Auch unverlangt eingesandte Manuskripte werden sorgfältig geprüft. Unverlangt eingesandte Bücher werden nicht zurückgeschickt. Die als Arbeitsblatt oder Kopiervorlage bezeichneten Unterrichtsmittel dürfen bis zur Klassen- bzw. Kursstärke vervielfältigt werden.

Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschriften im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.

Herstellung: PZ Pädagogika Zentrale GmbH
Druck: Scherrerdruck, Hannover
ISBN 3-617- 34018-0

Inhaltsverzeichnis

Zeitungsschnipsel 4

Wie gewohnt, eine bunte Mischung von Informationen und Aufgaben zur mexikanischen „1-Onza-Sammlermünze", zu einem Weltrekord im Dominosteinstapeln, zum Durchmesser von Hagelkörnern.

Was war damals für ein Wochentag?.....5

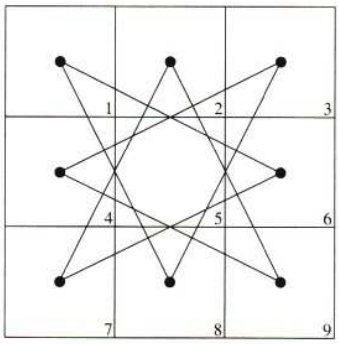
Martin Walter zeigt, wie durch Kopfrechnen oder mit Hilfe von Tabellen der Wochentag zu einem gegebenen Datum ermittelt werden kann.

Chronologie von November 1993 bis Februar 1994 9

Fortführung der beliebten Serie von *H.-J. Ilgauds*, der diesmal besonderes Augenmerk auf den 200. Jahrestag der Eröffnung der Leipziger Universitätssternwarte und auf Felix Hausdorff legt.

Die Knopf-und Schnur-Methode von Sam Loyd.....10

Wie weiße und schwarze Springer mit möglichst wenigen Zügen ihre Plätze tauschen können, zeigen *Konrad Haase* und *Rüdiger Thiele*.



Komisches, Kniffliges und Knackiges.....11

Mit dem Redeteil „eine...keine" führt *L. Kreiser* in eins von „Alphons logischen Abenteuern". Mit einem Tischtennisball und einer außergewöhnlichen Reihe ganzer Zahlen beschäftigt sich die Sprachecke.

Wenn die Tage wieder länger werden 12

Arnold Zenkert zeigt „Unstimmigkeiten" im Kalender, die auf den „Störenfried" Zeitgleichung zurückzuführen sind.

Was hat die Zahl π mit der Stochastik zu tun?.....13

Eine ungewöhnliche Betrachtungsweise von *Bernd Dethloff*.

Ein Gerät für die Winkeldreiteilung.....14

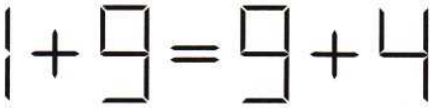
Nur mit Zirkel und Lineal kann ein beliebiger Winkel nicht in drei gleichgroße Teilwinkel zerlegt werden. Da hilft den von *Branislaw Čabrić* entwickelte „Trisektor".

Für 6 Schüler rechnet sich die Mathematik ..15

Eine Rückblick auf die FÜMO, eine Aufgabe über Dreiecke und die Problemecke – zusammerngestellt von *Paul Jainta*.

Im Blickpunkt: Das Jahr 1994 16

Interessante Knobelaufgaben – erdacht von *Roland Mildner*.



34. Internationale mathematik-Olympiade (IMO).....18

Neben einem Rückblick vom Delegationsleiter *Hans-Dietrich Gronau* auf das erfolgreiche Abschneiden der deutschen Mannschaft werden die Wettbewerbsaufgaben vorgestellt.

Die Olympiade-Ecke ..19

Unter dem Motto „Leser forschen für Leser" ruft *Paul Jainta* auf, eigene Forschungsergebnisse vorzustellen.

Alpha-Wettbewerb (Teil I) 20

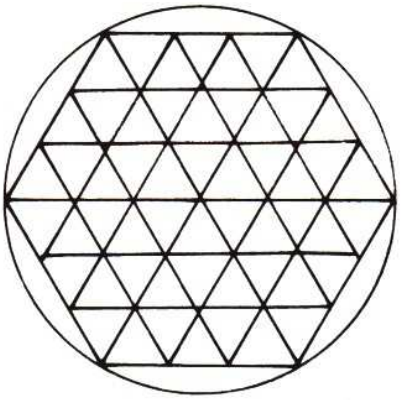
Die Aufgaben 5/1 bis 7/5 stammen von *Theodor Scholl*; die Aufgaben 8/1 bis 8/5, 9/1 bis 9/5, 10/1 bis 10/5 und E/1 bis E/5 erdachte *Christine Riehl*, alle anderen sind von *W. Riehl*. Wir hoffen, daß die Leserbeteiligung wieder so groß ist, wie beim letzten alpha-Wettbewerb.

Die zusammenhängenden Graphen und Multigraphen mit 4 Knoten vom Grad 4 und 8 oder 6 Knoten vom Grad 1 23

Eine interessante Betrachtung mit Bezügen zur Chemie von *Walter Träger*.

Geometrie – im täglichen Leben entdeckt 26

25 geometrische Vignetten – ausgesucht und zusammengestellt von *Johannes Lehmann*.



Marktecke 28

Leserbrief.....30

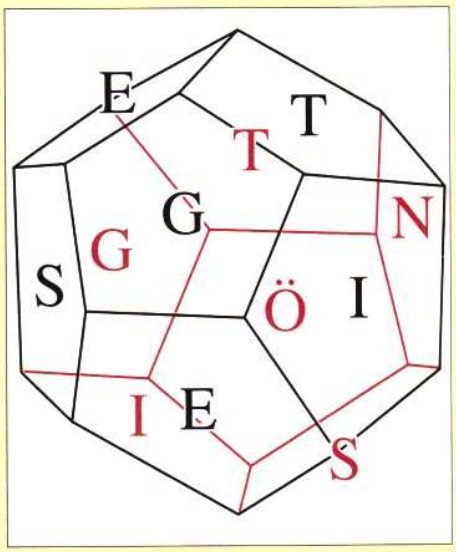
Lösungen.....31

Zeitungs-schnipsel

Eine mexikanische „1-Onza-Sammlermünze" in purem Silber

Auf dieser Münze ist eine Figur dargestellt. Ihr Name ist ein Wort, dessen Buchstaben den Flächen eines Dodekaeders zugeordnet. Die Reihenfolge der Buchstaben dieses Wortes ergibt sich durch Ablaufen eines geeigneten, zwei Flächen verbindenden Weges, der durch keine Ecke des Dodekaeders führt und der jede der übrigen 10 Flächen genau einmal überquert.

Dr. W. Träger, Döbeln



Neuer Weltrekord

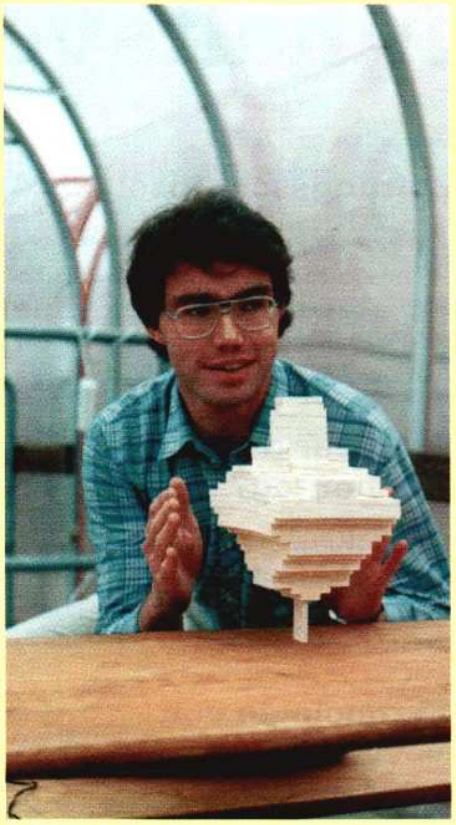
Neuer Weltrekord durch Ralf Laue, bekannt durch das größte magische Quadrat (91er Heft). Kommt ins Guinness-Buch der Rekorde, aufgestellt am 11. Juli 1993 in Leipzig.

396 Dominosteine sind hier übereinander gestapelt – nur gestützt von einem einzigen hochkant stehenden Stein und selbstverständlich nicht geklebt! Dieser „Turm" wird als neue Bestleistung ins Guinness Buch der Rekorde eingehen (Bisheriger Rekordhalter war David Coburn mit 391 gestapelten Dominos.) Passend dazu zwei kleine Aufgaben zum Thema „Dominospiel": Zur Erinnerung: Ein Dominostein trägt auf jedem seiner beiden Teile eine Punktzahl von 0 bis 6 und zwar so, daß im Spiel jede Kombination zweier Punktzahlen auf einem Stein genau einmal vorkommt. Das ganze Spiel besteht somit aus 28 Steinen (Nachrechnen!). Beim Spiel dürfen zwei Steine, deren Punktzahl auf einer der beiden Hälften übereinstimmt, an dieser Hälfte zusammengelegt werden.

a) Der deutsche Mathematiker Reiss berechnete, daß es auf 142 129 105 920 Arten möglich ist, alle 28 Steine so aneinanderzulegen, daß eine geschlossene Kette entsteht.
Ist es auch möglich, eine geschlossene Kette zu bilden, wenn ein Stein aus dem Spiel entfernt wird?
b) Zwei Mathematiker A und B spielen ein Spiel: Ein Schiedsrichter wählt zufällig einen Dominostein aus einem vollständigen Spiel aus, den er den beiden Spielern nicht zeigt. Er verrät aber Spieler A das Produkt der beiden Punktzahlen auf dem Stein, während Spieler B die Gesamtzahl der Punkte auf dem Stein erfährt. Die beiden sollen herausfinden, welcher Stein gezogen wurde. Es ergibt sich der folgende interessante Dialog:
A: „Ich weiß nicht, welcher Stein gezogen wurde."
B: „Ich weiß auch nicht, welcher Stein gezogen wurde."
A: „Ich weiß immer noch nicht, welcher Stein gezogen wurde."
B: „Dann weiß ich's auch noch nicht."
A: „Aha – jetzt ist alles klar: ich kenne den Stein."

Welcher Stein wurde gezogen?

R. Laue



Der Weltrekord ist geschafft – 396 Dominosteine bilden einen Turm! (Foto: R. Laue)

Hagelkörner 600 Gramm schwer

Der Döbelner Anzeiger meldete am 30. 6. 1993 unter obiger Überschrift:
Lannemezan. Bei einem Unwetter in den Pyrenäen sind am Montagabend Hagelkörner von einem Gewicht von bis zu 600 Gramm niedergegangen, wie die Feuerwehr am Dienstag berichtete. Die Eisklumpen hätten in dem Städtchen Saint-Laurent de Neste die 3 500 Quadratmeter Ausstellungsfläche eines Elektro-Marktes verwüstet. In anderen Ortschaften wurden Dächer von mehr als 50 Häusern beschädigt.
Aufgabe:
Welchen Durchmesser hat ein kugelförmiges Hagelkorn mit 600 g Masse? Hinweis: Beim Erstarren einer Wassermenge zu Eis vergrößert sich das Volumen um 9 %.

Dr. W. Träger, Döbeln

Was war damals für ein Wochentag?

Ermittlung des Wochentages zu einem gegebenen Datum

Es gibt mehrere Tage im Leben eines Menschen, deren Datum er auswendig weiß. So z. B. Geburtsdatum, Tag der Schuleinführung, Hochzeitstag usw.
Aber auch die Geburtsdaten von Freunden und Verwandten sind manchen geläufig. Fragt man aber „Was war damals für ein Wochentag?", so bleibt die Antwort meistens aus. Genauso ist es mit dem Datum besonderer Ereignisse in der Geschichte und im Zeitgeschehen. Wer kann schon auf Anhieb sagen, welcher Wochentag der 21.7.1969 gewesen ist? An diesem Tag betrat der erste Mensch den Mond.
Es gibt verschiedene Verfahren, die eine schnelle Berechnung eines Wochentages zu einem Datum ermöglichen. Auch mit Hilfe von Tabellen lassen sich gefragte Wochentage ermitteln. In beiden Fällen muß aber den Eigenarten unseres Kalenders Rechnung getragen werden. Dazu gehören Schaltjahre und verschieden lange Monate.

Gemeine Jahre – Schaltjahre

Die Grundlage des Kalenderjahres ist das sogenannte tropische Jahr – eine Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen der Sonne durch den Frühlingspunkt – mit 365,2422 Tagen. Die Überlänge von 0,2422 Tagen hat bereits Julius Cäsar 46 v. u. Z. durch Einführung eines neuen Kalenders (Julianischer Kalender) unter Zugrundelegung eines Jahres mit 365,25 Tagen mittels Schalttagen weitestgehend ausgeglichen. Auf drei gemeine Jahre folgt ein Schaltjahr. Cäsar setzte auch den Jahresbeginn auf den 1. Januar fest. Die Abweichung von 0,0078 Tagen vom tropischen Jahr hat bis zum 16. Jahrhundert zum Vorrücken des Frühlingsanfangs um mehr als 10 Tage geführt.
Papst Gregor XIII. führte 1582 eine Kalenderreform durch. Der Fehler wurde durch Weglassen der Tage zwischen dem 4.10. und 15.10.1582 ausgeglichen. Auf den 4.10.1582 folgte unmittelbar der 15.10.1582. Der Frühlingsanfang wurde damit wieder der 21. März. Die Folge der Schaltjahre wurde anders definiert. Jahre, deren Ordnungszahl durch 100, aber nicht durch 400 teilbar ist, sind keine Schaltjahre mehr (1700, 1800, 1900, 2100 usw.), wogegen 1600, 2000, 2400 usw. Schaltjahre sind. Die Länge des Gregorianischen Jahres beträgt 365,2425 Tage. Der Fehler ist jetzt so gering, daß die Abweichung vom tropischen Jahr (365,2425 – 365,2422 = 0,0003) erst nach über 3000 Jahren 1 Tag ausmacht.

Monate mit 28 (29), 30 oder 31 Tagen

Monate mit 30 Tagen sind: April, Juni, September, November.
Monate mit 31 Tagen sind: Januar, März, Mai, Juli, August, Oktober, Dezember.
Der Monat Februar hat in gemeinen Jahren 28 und in Schaltjahren 29 Tage.

Wochen

Eine Woche hat sieben Tage. Diese Festlegung hat ihren Ursprung im Alten Testament (Genesis, 1. Buch Mose).

Lösung der Aufgabe durch Kopfrechnen

Die Grundlage der Berechnung ist die Tatsache, daß die Anzahl der Tage eines Jahres – 165 bzw. 366 – nicht durch 7 teilbar ist. Bei gemeinen Jahren erhalten wir einen Rest von 1 und bei Schaltjahren einen Rest von 2. Das bedeutet, daß ein bestimmtes Datum in aufeinanderfolgenden Jahren mit jedem Jahr auf den folgenden Wochentag fällt. So z. B. war der 1. Januar 1900 ein Montag, im Jahre 1901 ein Dienstag, in 1902 ein Mittwoch, 1903 ein Donnerstag und im Jahre 1904 ein Freitag. Da das Jahr 1904 ein Schaltjahr war, so verschoben sich die Wochentage durch den Schalttag um 2 Tage. Deshalb war der 1. Januar 1905 ein Sonntag. Die Verschiebung läßt sich in der Januarspalte der Monatstafel leicht verfolgen. (Diese Tabelle wird zur Berechnung nicht herangezogen!)
Da der 1.1.1900 ein Montag gewesen ist, können wir den Wochentag zu dem 1.1. jedes Kalenderjahres im 20. Jahrhundert aus der Anzahl der Jahre nach 1900 und der bis dahin vergangenen Schaltjahre berechnen. So z. B. erhalten wir für den 1.1.1989
89 Jahre über 1900 also 89 Tage Verschiebung
22 Schaltjahre (89 : 4 = 22 + Rest) also 22 Tage Verschiebung
1 Tag laut Angabe (1. Januar)
112 Tage Verschiebung
Dividiert man diese Summe durch 7, so erhält man durch den Rest die Kennzahl des Wochentages (Mo 1, Di 2, Mi 3, Do 4, Fr. 5, Sa 6 und So 0). Es ist also 112 : 7 = 16 Rest 0. Der 1.1.1989 war ein Sonntag.
Will man den Wochentag zu einem anderen Datum ermitteln, so muß man noch die Verschiebung der Tage durch die verschiedenen Längen einzelner Monate berücksichtigen. Ist nämlich beispielsweise der 1. Januar eines gemeinen Jahres ein Montag, so fällt der 1. Februar desselben Jahres auf einen Donnerstag, da der Januar 31 Tage hat. Der 1. März ist ebenfalls ein Donnerstag, weil durch die 31 Märztage eine weitere Verschiebung von 3 Tagen zu der bisherigen hinzukommt. Der April hat 30 Tage. Es kommen also 2 weitere Tage zur Verschiebung hinzu. Somit ist der 1. Mai ein Dienstag ... usw. Den Überhang erhält man als Rest bei der Division der Anzahl von Tagen der einzelnen Monate durch 7. Diese Reste sind in der folgenden Tabelle in der 1. Zeile unter den Monatszeichen in Klammern

Monate	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Übergänge	(3)	(0)	(3)	(2)	(3)	(2)	(3)	(3)	(2)	(3)	(2)	(3)
Summen		3	3	6	8	11	13	16	19	21	24	26
Restklassen der 7	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5

Die Kennzahlen der Monate sind:

Januar	0	April	6	Juli	6	Oktober	0
Februar	3	Mai	1	August	2	November	3
März	3	Juni	4	September	5	Dezember	5

Tabelle 1

angegeben. In der 2. Zeile befinden sich die Summen wirksamer Reste für jeden Monat. In der 3. Zeile stehen schließlich die kleinsten Repräsentanten der Restklassen der 7. Man erhält sie, wenn man die Zahlen der 2. Zeile durch 7 dividiert und den Rest aufschreibt. Beispiele: In 3 ist die 7 nicht enthalten, Rest 3. In 6 ist die 7 nicht enthalten, Rest 6. In 8 ist die 7 einmal enthalten, Rest 1. In 13 ist die 7 einmal enthalten, Rest 6. ... usw.
Mit Hilfe dieser Kennzahlen können die Wochentage zu einem Datum gemeiner Jahre im 20. Jahrhundert leicht zugeordnet werden. Beispiel: 28.4.1950

50 Jahre über 1900
12 Schaltjahre bis 1950
6 Kennzahl von April
28 Der 28. Tag des Monats
96

Die Summe 96 wird durch 7 dividiert. Der Rest beträgt 5. Der 28.4.1950 war ein Freitag.
In Schaltjahren beginnt die Wirksamkeit des Schalttages erst am 1. März. Deshalb wird die Rechnung bei einem Datum vom 1. Januar bis 29. Februar mit dem Schaltjahresanteil des vergangenen Jahres durchgeführt. Beispiel: 21.1.1960

60 Jahre über 1900
14 Schaltjahre (nicht 15) 0 Kennzahl von Januar
21 Der 21. Tag in Januar
95

Die Summe 95 wird durch 7 dividiert. Der Rest beträgt 4.
Der 21.1.1960 war ein Donnerstag.

Beispiel: 16.6.1964

64 Jahre über 1900
16 Schaltjahre
4 Kennzahl für Juni .
16 Der 16. Tag von Juni
100

Die Summe 100 wird durch 7 dividiert. Der Rest beträgt 2. Der 16.6.1964 war ein Dienstag
Die Rechnung wird noch einfacher, wenn man die vier Angaben (Jahre über 1900, Schaltjahre, Monatskennzahl, Tage) gleich durch 7 dividiert und die Summe der Reste bildet, die durch 7 dividiert die Nummer des gesuchten Tages (Rest der Division) liefert. Man rechnet also mit Restklassen der 7. Beispiele:

11.12.1946		28.4.1950		21.1.1960		16.6.1964	
46	4	50	1	60	4	64	1
11	4	12	5	14	0	16	2
5	5	6	6	0	0	4	4
11	4	28	0	21	0	16	2
73	17	96	12	95	4	100	9
Rest: 3		Rest: 5		Rest: 4		Rest: 2	
Mittwoch		Freitag		Donnerstag		Dienstag	

Tabelle 2

In den anderen Jahrhunderten verläuft die Rechnung genauso auf der Basis von 1600, 1700, 1800, 2000, ... usw. Um den gesuchten Wochentag zu ermitteln, muß man noch zu dem charakteristischen Rest im 17. Jahrhundert 6, im 18. Jahrhundert 4, im 19. Jahrhundert 2 im 21. Jahrhundert 6 addieren. Beispiel: 31.3.1891

91 0 Rest 0, 19. Jahrhundert. Es wird zum Rest 2 addiert:
22 1
3 3 0 + 2 = 2
31 3 Der 31.3.1891 war ein Dienstag
7
Rest 0

Nach entsprechender Übung lassen sich die vier Eingangswerte aus dem gegebenen Datum leicht aufstellen und die Operationen in wenigen Sekunden ausführen. Viel Spaß!

Lösung der Aufgabe mit Hilfe von Tabellen
Zum Aufbau der Tabellen

a) Jahrestabelle von 1600 bis 2100
Die Jahreszahlen sind in der Tabelle fortlaufend in Spalten angeordnet, wobei Zeilen nur mit Jahreszahlen von Schaltjahren und Zeilen ausschließlich mit Jahreszahlen von gemeinen Jahren entstehen. 1700, 1800, 1900 und 2100 haben eine besondere Position, weil diese Jahre keine Schaltjahre sind.

b) Monatstabelle
Diese Tabelle enthält nur kleinste positive Repräsentanten der Restklassen von 7. In der 1. Zeile finden wir

J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2

In dieser Zeile gibt es nur Jahreszahlen von gemeinen Jahren, deren 1. Januartag auf einen Donnerstag fiel. Diese Tatsache wird durch die Zahl 4 in der 1. Spalte ausgedrückt. Addiert man zu 4 die Anzahl der Januartage über 28, so erhält man 4 + 3 = 7. 7 : 7 = 1 Rest 0. Den Rest 0 trägt man in die Spalte F ein. Addiert man jetzt zu 0 die Anzahl der Februartage über 28, so erhält man 0 + 0 = 0. Bei der Division 0 : 7 erhält man den Rest 0, der in die Spalte M eingetragen wird. In der Aprilspalte steht 3, da 0 + 3 = 3 ist und 3 : 7 ergibt den Rest 3. In der Maispalte steht 5, da 3 + 2 = 5 und 5 : 7 ergibt den Rest 5. Für die anderen Monate verfährt man ähnlich.

In der 5. Zeile von unten, die ebenfalls mit 4 beginnt, finden wir andere Werte:

J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
4	0	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3

In dieser Zeile sind nur Jahreszahlen von Schaltjahren. Februar hat dann 29. Tage. Deshalb erscheint in der Märzspalte eine 1. Dieser Schalttag und die 3 Märztage über 28 ergeben die Summe 4, die in der Aprilspalte auftritt usw.

c) Wochentagstafel
In der Eingangsspalte befinden sich die Kurzzeichen der 7 Tage einer Woche. Die spaltenweise Durchnummerierung von 1 bis 37 wird zum Auffinden des gesuchten Wochentages verwendet. (S. dazu Handhabung der Tabellen.).

Die Tabellen befinden sich auf der folgenden Seite.

JAHRESTAFEL

1583 – 1699				1700 – 1799				1800 – 1899				1900 – 1999				2000 – 2099			
	09	37	65 93		05	33	61 89		01	29	57 85			25	53 81		09	37	65 93
	10	38	66 94		06	34	62 90		02	30	58 86			26	54 82		10	38	66 94
1583	11	39	67 95		07	35	63 91		03	31	59 87			27	55 83		11	39	67 95
84	12	40	68 96		08	36	64 92		04	32	60 88			28	56 84		12	40	68 96
85	13	41	69 97		09	37	65 93		05	33	61 89		01	29	57 85		13	41	69 97
86	14	42	70 98		10	38	66 94		06	34	62 90		02	30	58 86		14	42	70 98
87	15	43	71 99		11	39	67 95		07	35	63 91		03	31	59 87		15	43	71 99
88	16	44	72		12	40	68 96		08	36	64 92		04	32	60 88		16	44	72
89	17	45	73		13	41	69 97		09	37	65 93		05	33	61 89		17	45	73
90	18	46	74		14	42	70 98		10	38	66 94		06	34	62 90		18	46	74
91	19	47	75		15	43	71 99		11	39	67 95		07	35	63 91		19	47	75
92	20	48	76		16	44	72		12	40	68 96		08	36	64 92		20	48	76
93	21	49	77		17	45	73		13	41	69 97		09	37	65 93		21	49	77
94	22	50	78		18	46	74		14	42	70 98		10	38	66 94		22	50	78
95	23	51	79		19	47	5		15	43	71 99		11	39	67 95		23	51	79
96	24	52	80		20	48	76		16	44	72		12	40	68 96		24	52	80
97	25	53	81		21	49	77		17	45	73		13	41	69 97		25	53	81
98	26	54	82		22	50	78		18	46	74		14	42	70 98		26	54	82
99	27	55	83	**1700**	23	51	79		19	47	75		15	43	71 99		27	55	83
1600	28	56	84		24	52	80		20	48	76		16	44	72	**2000**	28	56	84
01	29	57	85		25	53	81		21	49	77	**1900**	17	45	73	01	29	57	85
02	30	58	86		26	54	82		22	50	78		18	46	74	02	30	58	86
03	31	59	87		27	55	83	**1800**	23	51	79		19	47	75	03	31	59	87
04	32	60	88		28	56	84		24	52	80		20	48	76	04	32	60	88
05	33	61	89	01	29	57	85		25	53	81		21	49	77	05	33	61	89
06	34	62	90	02	30	58	86		26	54	82		22	50	78	06	34	62	90
07	35	63	91	03	31	59	87		27	55	83		23	51	79	07	35	63	91
08	36	64	92	04	32	60	88		28	56	84		24	52	80	08	36	64	92

MONATSTAFEL

J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
0	3	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
5	1	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
3	6	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
1	4	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
6	2	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
4	0	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
2	5	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1

WOCHENTAGSTAFEL

So	1	8	15	22	29	36
Mo	2	9	16	23	30	37
Di	3	10	17	24	31	
Mi	4	11	18	25	32	
Do	5	12	19	26	33	
Fr	6	13	20	27	34	
Sa	7	14	21	28	35	

HANDHABUNG DER TABELLEN – Erläuterung an einem Beispiel:

An welchem Wochentag wurde Uschi geboren? Ihr Geburtsdatum ist der 11.12.1946.

Ausgehend von der Jahreszahl 1946 in der Jahrestafel findet man in derselben Zeile in der Monatstafel unter Dezember die Zahl 0. Addiert man dazu 11, so erhält man 0 + 11 = 11. In der Wochentagstafel steht die Zahl 11 in der Zeile Mi. Uschi wurde also an einem Mittwoch geboren.

Martin Walter, Meiningen

Chronologie November 1993 bis Februar 1994

1143: Hermann von Kärnten (genauere Daten unbekannt) übersetzte die berühmte Algebra des al-Hwarizmi (780-um 850) aus dem Arabischen ins Lateinische

1693: Prinz Ruppert von der Pfalz (1619 – 1682) stellte und löste die Aufgabe: Man stecke durch einen Würfel einen zu ihm kongruenten Würfel hindurch.

1693: Der als Astronom weltbekannte Gelehrte Edmond Halley (1656? – 1743) berechnete auf der Basis von Geburts- und Sterbelisten aus Breslau von 1687/91 eine Sterblichkeitsstafel für den Fall einer konstanten Bevölkerung

1694: Geburtsjahr des englischen Mediziners und Physikers Henry Pemberton. Pemberton (gest. 1771) gehörte zu den eifrigsten Anhängern Isaac Newtons und gab 1728 eine erste Darstellung der Newtonschen Philosophie

1743: Der französische Mathematiker und Astronom Alexis Claude Clairault (1713 – 1765) veröffentlichte seine „Theorie de la figure de la terre". Darin wird die Theorie der Erdgestalt nach französischen Meridianmessungen von 1735 – 1737 entwickelt. Hauptresultat war: Die Erde ist an den Polen abgeplattet.

1793: Am 15. November wurde Michel Chasles (gest. 1880) in Épernon bei Paris geboren. Chasles war Professor in Paris und lieferte bedeutende Arbeiten zur Geometrie, Geodäsie und Geschichte der Mathematik

1794: Am 3. Februar wurde die Leipziger Universitätssternwarte eröffnet (siehe Text)

1794: Adien-Marie Legendres (1752 – 1833) berühmtes Geometrielehrbuch „Éléments de géométrie" erschien. Darin unternahm Legendre den vergeblichen Versuch, das Parallelenpostulat von Euklid zu beweisen.

1868: Am 8. November wurde Felix Hausdorff (gest. 1942) in Breslau geboren (siehe Text)

1868: Am 24. Dezember wurde Emmanuel Lasker in Berlinchen geboren. Lasker arbeitete an algebraischen Themen. Er war von 1894 bis 1921 Schachweltmeister. Lasker starb 1941 in New York.

Vor 200 Jahren: Eröffnung der Leipziger Universitätssternwarte

Am 3. Februar 1794 wurde nach jahrelangem Zögern die Leipziger Universitätssternwarte endlich an die Leipziger Universität übergeben. Diese Sternwarte befand sich im oberen Teil des Turmes der Pleissenburg. Auf dem Gelände der Pleissenburg befindet sich jetzt das Leipziger Neue Rathaus. Der Pleissenburgturm steht noch heute, aber durch bauliche Veränderungen ist von der Sternwarte nichts mehr erhalten. Auf diesem Turm der Pleissenburg residierten als Direktoren des sehr bescheidenen Observatoriums Christian Friedrich Rüdiger (1760 – 1809), Carl Brandan Mollweide (1774 – 1825) („Mollweidesche Formeln") und August Ferdinand Möbius (1790 – 1868) („Möbiussches Band"). Die Namen der Direktoren verraten schon die Tatsache, daß die Tätigkeit der Mitarbeiter der Leipziger Sternwarte sehr oft stark mathematisch ausgerichtet war. Bedeutendster Astronom auf der Pleissenburg ist Heinrich Louis d'Arrest (1822 – 1875) gewesen. D'Arrest war 1846 noch als Student in Berlin an der Entdeckung des Planeten Neptun beteiligt gewesen. Seit 1856 war der Neubau einer großzügigeren Leipziger Universitätssternwarte ernsthaft im Gespräch. Mit dem Bau einer neuen Sternwarte wurde 1860 begonnen – bereits im November 1861 konnte der Neubau im Leipziger Johannistal eröffnet werden. Unter den Direktoren Carl Christian Bruhns (1830 – 1881) und Heinrich Bruns (1848 – 1919) entwickelte sich die neue Leipziger Sternwarte schnell zu einem sehr bedeutenden Ausbildungszentrum für angehende Gelehrte. Die Forschungsarbeiten erstreckten sich von der Meteorologie über Geodäsie und Astronomie bis hin zur Mathematik. Die damalige internationale Vereinigung der Astronomen, die „Astronomische Gesellschaft", führte ihre Geschäfte von der Leipziger Sternwarte aus. In die Zeit des Direktorats von Bruhns fiel auch die Begründung der

Die Leipziger Sternwarte von Süden, Aufnahme um 1909; Quelle: Festschrift zur Feier des 500jährigen Bestehens der Universität Leipzig, Bd. 4/2, Leipzig 1909, Tafel IV 2

Astrophysik als wissenschaftlicher Disziplin durch Friedrich Zöllner (1834 – 1882) in Leipzig. Nach dem Ende des 1. Weltkrieges nahm die wissenschaftliche und pädagogische Bedeutung der Leipziger Sternwarte ab. Die Nachfolger von H. Bruns, J. Bauschinger (1860 – 1934) und J. Hopmann (1890 – 1975) konnten nur noch bescheidene Forschungsaufgaben durchführen. Im Dezember 1943 wurde durch Bombenangriffe der größte Teil der Leipziger Universitätssternwarte zerstört. Das „Turmhaus" der Sternwarte steht als Relikt einer großen Vergangenheit noch an der Stephanstraße zu Leipzig.

Felix Hausdorff

Am 8. November 1868 wurde in Breslau (heute: Wroclaw, Polen) als Sohn eines jüdischen wohlhabenden Textilkaufmanns Felix Hausdorff geboren. Bald siedelte die Familie Hausdorff nach Leipzig um. In Leipzig, Berlin und Freiburg/Breslau studierte Hausdorff Mathematik und Astronomie. Nach einer Tätigkeit als Rechner an der Leipziger Sternwarte wirkte Hausdorff als Privatdozent an der

F. Hausdorff, Frau Schur, Ibbai Schur, Frau Hausdorff, Frau Szegö (von links); Aufnahme 1922 in Leipzig; Quelle Pólya, G.: The Pólya Picture Album, ed. by G. L. Alexanderson, Boston – Basel 1987, S. 61.

Leipziger Universität. Von 1901 – 1910 war er außerordentlicher Professor in Leipzig. 1910 wurde Hausdorff nach Bonn berufen. 1913 nach Greifswald und 1921 wieder nach Bonn. Am 26. 1. 1942 schieden Felix Hausdorff, seine Gattin und seine Schwägerin durch Selbstmord aus dem Leben, um der bevorstehenden Deportation in ein Konzentrationslager zu entgehen.

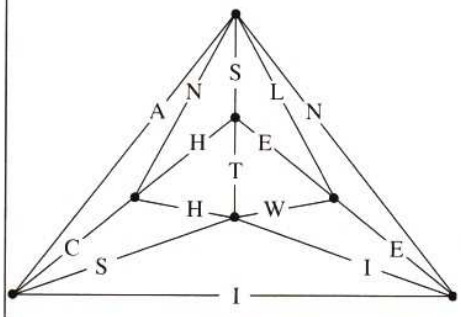
Unter den direkten Einfluß der Bekanntschaft mit Georg Cantor (1845 – 1918) beschäftigte sich Felix Hausdorff seit 1901 intensiv mit der Mengenlehre, hielt 1901 vor drei Zuhörern in Leipzig die erste Vorlesung über Mengenlehre. Neben grundsätzlichen Einzelbeiträgen zur Entwicklung der Mengenlehre verfaßte Hausdorff mit dem 1914 erschienenen Werk „Grundzüge der Mengenlehre" eine klassische Schrift, die auch heute noch zu den berühmtesten Werken der mathematischen Weltliteratur zählt. Die zweite Auflage dieses Buches (1928) stellte eine neue Zusammenfassung der Mengenlehre dar. Weitere Arbeiten von grundsätzlicher Bedeutung hat Hausdorff vor allem zur Wahrscheinlichkeitsrechnung geliefert.

Hausdorff hatte sich anfangs nicht eindeutig für ein Studium der mathematischen Wissenschaften entscheiden können. Er wollte ursprünglich Musiker werden, verkehrte viel in Künstlerkreisen Leipzigs und schrieb schöngeistige Werke. Unter dem Pseudonym Paul Mongré veröffentlichte er Gedichte, Aphorismen, Essays und zeitkritische Schriften. Sein 1904 gedrucktes Theaterstück „Der Arzt seiner Ehre", eine Satire auf das Duellunwesen, wurde ein großer Erfolg, besonders in Berlin. Außerdem gab Hausdorff seit 1896 eine Zeitschrift für die Textilindustrie heraus.

H.-J. Ilgauds

Zwei Inseln mit gleichem Namen

Die eine dieser beiden gleichnamigen Inseln liegt im Indischen, die andere im Stillen Ozean. Ihr Name ist im abgebildeten Graph versteckt: Das Wortbild dieses Namens entsteht, indem man einen geeigneten, orientierten und jede Kante genau einmal enthaltenden Kantenzug (Weg) abläuft und dabei die den nacheinander durchlaufenden Kanten zugeordneten Buchstaben nebeneinander aufschreibt.



Dr. W. Träger, Döbeln

Lösung: Weihnachtsinsel

Bemerkung: Die 400 km südlich der Insel Java gelegene und 135 km^2 große Weihnachtsinsel, eine Vulkaninsel, entdeckte am 24. 12. 1643 der Niederländer W. Mynors. Die zu den Linieninseln gehörende und 575 km^2 große Weihnachtsinsel, ein Korallenatoll, entdeckte am 24. 12. 1777 der Engländer J. Cook. Beide Inseln sind bewohnt, und auf beiden werden Kokospalmen angebaut.

Geisterstunde

Es ist rabenschwarze Neumondnacht. Auf der Flucht vor unheilbringenden geisterhaften Gestalten müssen vier Freunde den Grenzfluß auf einer verfallenen Brücke überqueren, von der das Orakel sagt, daß diese um Mitternacht zusammenfällt. Den Gesellen bleibt genau eine Stunde, genau eine dringend nötige Taschenlampe und die Sicherheit, daß zwei von ihnen so gut zu Fuß sind, daß sie die Brücke in fünf bzw. zehn Minuten überwinden können. Die beiden anderen dagegen benötigen mindestens 20 bzw. 25 Minuten. Klar ist auch, daß sich über die baufällige Brücke jeweils nur zwei Personen gleichzeitig auf den Weg machen können, wobei einer von ihnen die Taschenlampe zurückbringen muß. Wie kann sich die verschworene Vier vor den teuflischen Mächten in Sicherheit bringen?

nach einer mündlichen Überlieferung eingesandt von Dr. Christian Werge, Leipzig

Lösung:

Die entscheidenden fünf Minuten werden gespart, wenn die beiden langsamen Leute gemeinsam über die Brücke gehen. Zum Zurückbringen der Taschenlampe jedoch kann dies nicht beim ersten Paar und nicht beim letzten Paar geschehen. Also gehen die Schnellsten zuerst, von ihnen kehrt <10> (oder <5>) zurück. Danach überqueren die langsamen beiden die Brücke und <5> (oder <10>) kehrt zurück. Die beiden Schnellsten überwinden schließlich die Brücke gemeinsam zum zweiten Mal.

Die Knopf-und-Schnur-Methode von Sam Loyd

Zunächst ist in unserer Aufgabe nicht von Knöpfen und Schnüren die Rede, sondern von Minischachbrettern. Auf einem Brett vom Format 3 x 3 stehen einander in den Ecken je zwei weiße und schwarze Springer gegenüber, die ihre Plätze tauschen sollen (Abb. 1).

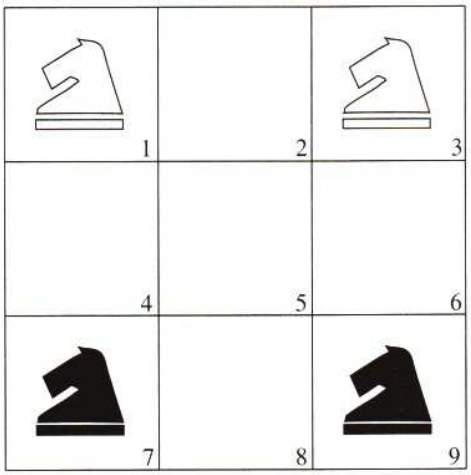


Abb. 1: Ein Problem, auf dem 3 x 3-Brett die Positionen der weißen und schwarzen Springer zu vertauschen.

Die Springer ziehen dabei wie im bekannten Schachspiel, und wie üblich darf ein Feld nur von einer Figur besetzt werden. Wem diese Aufgabe keine Schwierigkeiten mehr bereitet, der kann sich die in (Abb. 2) gezeigte Aufgabe vornehmen: auf einem Brett vom Format 3 x 4 stehen einander je zwei weiße und schwarze Springer in den Ecken gegenüber (Felder 1 und 3 bzw. 10 und 12), b) je drei weiße und schwarze Springer (Felder 1, 2 und 3 bzw. 10, 11 und 12). Wie viele Züge sind mindestens zu einem Tausch nötig? Für das letzte Problem, das 1974 gestellt wurde, ist die minimale Zugzahl einige Jahre mit 26 angegeben worden. Dann bemerkte ein Problemlöser, daß die bereits um die Jahrhundertwende von dem amerikanischen Puzzleerfinder Sam Loyd für die einfache Aufgabe (Abb. 1) benutzte Lösung sich auch hier erfolgreich verwenden läßt, und er reduzierte die Zugzahl damit mühelos auf 16. Wie funktioniert Loyds Lösung?

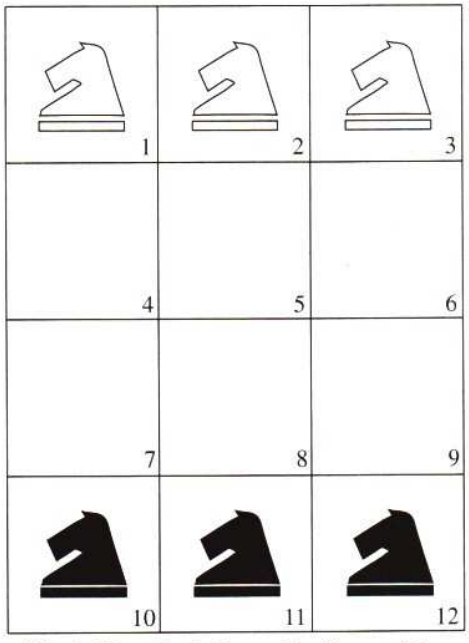


Abb. 2: Ein schwierigeres Problem auf dem 3 x 4-Brett. Es sind wiederum die Positionen von je zwei weißen und schwarzen Springern (Felder 1 und 3 sowie 10 und 12) oder je drei schwarze und weiße Springer (Felder 1, 2 und 3 sowie 10, 11 und 12) zu vertauschen.

Lösung:

Loyd denkt sich das Brett in einzelne Felder zersägt und dabei alle von den Springern erreichbaren Felder untereinander durch Fäden verbunden (Abb. 3).

Dann entwirrt Loyd das Feldernetz und erhält eine übersichtliche Struktur für die Aufgabe (Abb. 4). Die Springer ziehen in Loyds Aufgabe einfach am Rand des Vierecks aus Abb. 4 herum. Eine der vielen Zugmöglichkeiten wäre: Weiß 1 – 6, Weiß 3 – 8 – 1, Schwarz 9 – 4 – 3 – 8, Schwarz 6 – 7 – 2 – 9, Weiß 1 – 6 – 7,

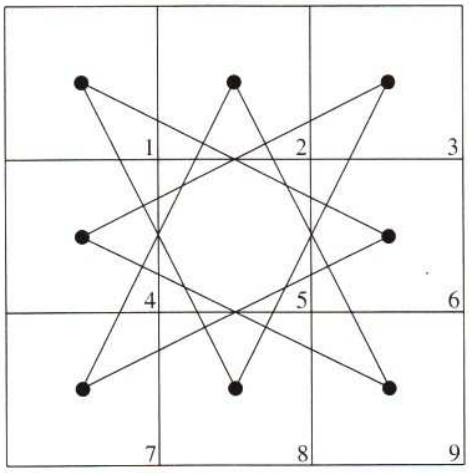


Abb. 3: Die Felder, die von den Springern auf dem 3 x 3-Brett erreicht werden können, sind durch Fäden verbunden. Die Felder selbst hängen nicht mehr zusammen, so daß sich die Anordnung der Felder in die einfachere Struktur der Abbildung 4 entwirren läßt. Dieses Vorgehen erklärt den Namen Knopf-und-Schnur-Methode, den Loyd für die Lösungsmethode gewählt hat.

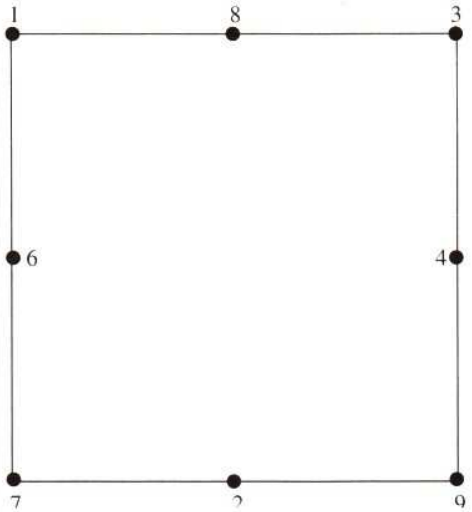


Abb. 4: Die Anordnung der Felder erhält mit der Knopf-und-Schnur-Methode diese einfachere Struktur (anstelle der einzelnen Felder ist nur noch deren Mittelpunkt aus der Abb. 3 übernommen worden).

Schwarz 8 – 1 (16 Züge). Entsprechend geht man auf der Struktur von Abb. 5 vor, wobei sich sowohl für die 4- als auch die 6 Springer ebenfalls nur 16 Züge ergeben.

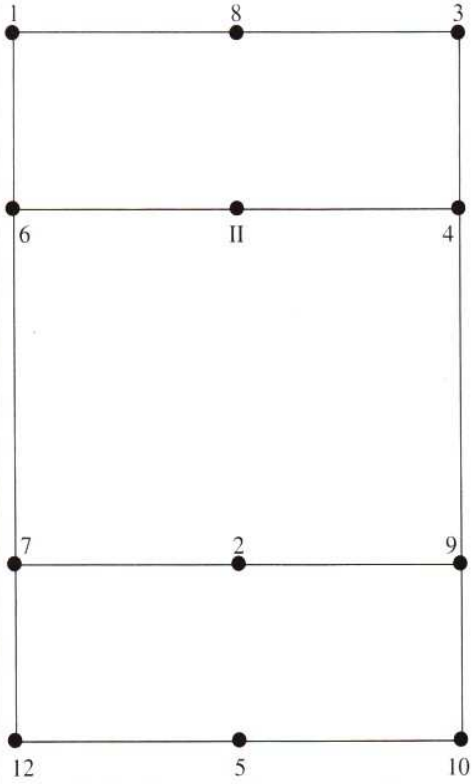


Abb. 5: Die übersichtliche Struktur für die schwierigeren Aufgaben.

Dr. Rüdiger Thiele und Konrad Haase

Komisches, Kniffiges und Knackiges

Alphons' logische Abenteuer

Besuch war gekommen, die ältere Schwester von Alphons' Mutter. Man saß gemütlich im Wohnzimmer und unterhielt sich über die ganze Verwandtschaft hinweg. Auch wenn man nicht zu sehr in das Detail ging, es war ein abendfüllendes Thema. Wer gefragt hatte, ob Onkel Ernst verreist war, war Alphons entgangen, die Antwort seiner Tante aber fiel sonderbar aus: „Eine Reise? ..., nein, eine Reise hat er keine gemacht." Was soll das denn heißen? Die Auslegung: Eine keine Reise hat er gemacht, fällt aus grammatischen Gründen weg. Wenn er keine eine Reise gemacht haben sollte, hat er dann mehr als eine Reise gemacht? Ist ferner das „nein" als Verneinung einer Aussage zu verstehen, also: Es ist nicht wahr, er hat mehr als eine Reise gemacht? Dann hätte der Onkel keine oder höchstens eine Reise unternommen. Vielleicht könnte aber mit dem Redeteil „eine ... keine" auch gemeint sein, daß er nicht eine Reise, somit keine einzige Reise gemacht hat! Die mit „es ist nicht wahr" unterstellte Bedeutung von „nicht" ergäbe dann die Verneinung dieser Aussage und somit die Behauptung: Er hat mindestens eine Reise gemacht. Nimmt man beide Auslegungen zusammen, so hat der Onkel genau eine Reise unternommen. Wenn das die Tante gemeint haben sollte, warum drückt sie sich dann so sonderbar aus?

Bei den anderen Familienmitgliedern löste Tantes Antwort keinen Wunsch auf Erklärung aus. Um nicht als Sprachnörgler zu erscheinen, unterdrückte er eine Rückfrage an seine Tante. Berti ahnte nicht, was er mit seiner nur so dahin gesprochenen Antwort auf eine Frage von Alphons auf sich nehmen mußte. Alphons fragte nämlich, ob der Mathematiklehrer während seiner Abwesenheit am Ende der Stunde noch eine Aufgabe besprochen hätte. „Eine Aufgabe? ..., nein, eine Aufgabe hat er keine besprochen." Alphons fragte schroff zurück: „Was denn nun, Berti, behandelte er eine oder keine Aufgabe?" Berti, nach einigem Zögern: „Was willst Du ? „Eine ... keine" ist dasselbe wie „eine ... nicht". „Das mache ich klüger", erwiderte Alphons und fuhr fort: „Eine Aufgabe hat er nicht gestellt. Das verneinst Du. Daß die Sonne scheint, das ist äquivalent mit: Es ist nicht wahr, daß die Sonne scheint. Eine nochmalige Verneinung führt dann zu der Aussage, daß die Sonne scheint. Analog dazu behauptest Du, daß er eine Aufgabe behandelt hat." Berti war nicht in der Stimmung, Alphons' Problem zu diskutieren. „Reden wir vom Wetter," schlug er vor. Er schaute zum Himmel und sagte: „Eine Schwalbe macht noch keinen Sommer." Alphons schwieg dazu. In der Deutschstunde trug Alphons sein Problem vor. „Das ist in der Tat eine in sich gedrehte Konstruktion, die man vermeiden sollte," sagte der Lehrer. „Das „nicht" bezieht sich auf die einleitend wiederholte Frage – hat der Onkel eine Reise gemacht? – und steht für eine verneinende Antwort: Der Onkel hat keine Reise gemacht. Der folgende Satz wiederholt diese Antwort auf unglückliche Weise. Was er ausdrücken will ist: Der Onkel ist nicht verreist."

Prof. Dr. L. Kreiser, Leipzig

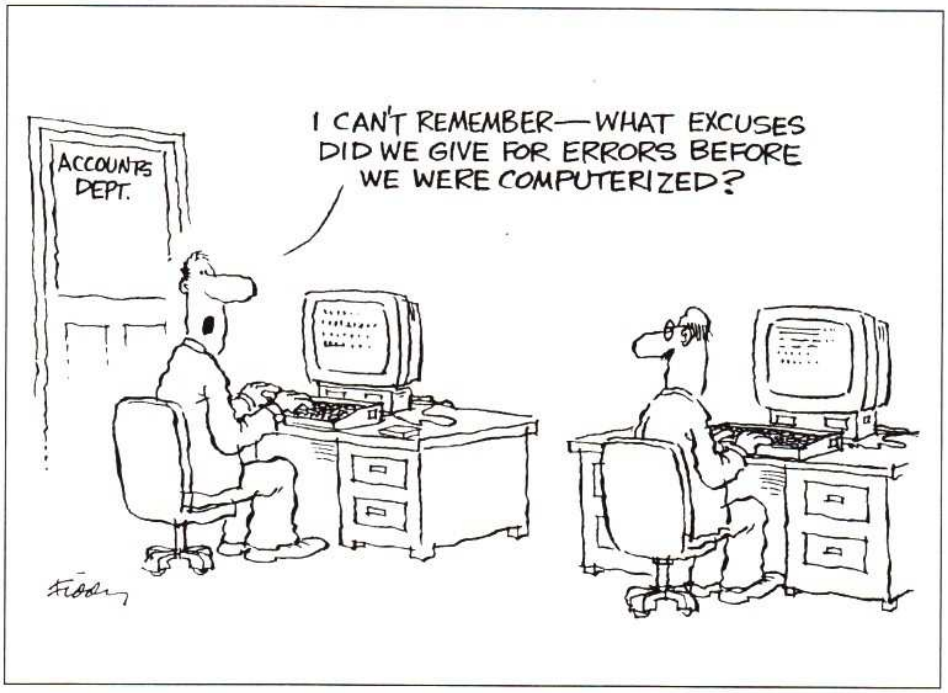
Sprachecke

Les périmètres

Une balle de ping-pong est entourée selon un grand cercle par une ficelle A. On a entouré la terre aussi selon son équateur par une ficelle B.
On décide de surélever chaque ficelle uniformément d'un mètre. Tout autour de la terre comme tout autour de la balle de ping-pong. Quelle ficelle aura besoin de plus de rallonge?
aus: Maximath, France

An unusual set of integers

Find three integers such that when you add any one of them to the product of the other two you always get 2.
(Think also of negative numbers!)
aus: Fun with mathematics, Toronto



Wenn die Tage wieder länger werden

Eine unumstrittene Tatsache ist, daß der kürzeste Tag, die Wintersonnenwende, am 21. Dezember oder auch – je nach dem Schaltjahreszyklus – am 22. Dezember ist. An diesem Tag beträgt die Länge des sogenannten lichten Tages 7 h 35 min auf der Breite von 52°. So lange bleibt also unser Tagesgestirn über dem Horizont. An diesem Tag wird mit 16 h 25 min die längste Nacht des Jahres erreicht. Ein halbes Jahr entfernt, am Tage der Sommersonnenwende, dem 21.6., liegen die Verhältnisse genau umgekehrt, – der lichte Tag währt 16 h 25 min.

Betrachten wir die Zeit um den 21. Dezember etwas genauer! Logisch ist, daß an diesem Tag die Sonne am spätesten aufgeht und am frühesten wieder untergeht. Wie sollte es wohl auch anders sein? Ein Blick auf den Kalender oder in das astronomische Jahrbuch zeigt uns jedoch etwas anderes:

	Sonnenaufgang	Sonnenuntergang
1.12.	7.46 Uhr	15.52 Uhr
5.12.	7.51	15.50
9.12.	7.56	15.49
13.12.	8.00	15.49 Frühester Sonnenuntergang
17.12.	8.04	15.49
21.12.	8.06	15.51 Kürzester Tag
25.12.	8.08	15.53
29.12.	8.08	15.56
1.1.	8.09	15.59 Spätester Sonnenaufgang
4.1.	8.08	16.02
8.1	8.07	16.07
12.1.	8.04	16.13

Angaben in Mitteleuropäischer Zeit (MEZ)
Für 52° nördl. Breite u. 15° östl. Länge.

Anscheinend stimmt in unserem Kalender etwas nicht – oder?? Unsere Astronomen und „Kalendermacher" haben sich selbstverständlich nicht geirrt, es hat seine Richtigkeit, auch wenn wir hier eine „Verschiebung" feststellen können. Wie sagte einmal ein berühmter Mann? Wenn er die Welt erschaffen hätte, liefen die Himmelskörper schön auf Kreisbahnen und nicht auf derartig verflixten und komplizierten Ellipsen, die den Astronomen das Leben erschweren. An diesem Ausspruch ist etwas dran! Unsere Erde bewegt sich ebenfalls auf einer elliptischen Bahn, in deren Brennpunkt unsere Sonne steht. Dies hat zur Folge, daß sich die Erde in Sonnennähe Anfang Januar ein wenig schneller um die Sonne bewegt als in Sonnenferne Anfang Juli. Der Unterschied beträgt zwar nur 2 km in der Sekunde, hat jedoch seine Auswirkungen. Am deutlichsten ist dies bei den Sonnenuhren zu bemerken, wenn diese Anfang Februar um 14 Minuten nachgehen und Anfang November um 16 Minuten vorgehen. Im Sommer gibt es dann nochmals zwei solcher Abweichungen, die aber nur wenige Minuten ausmachen. Die Ursache für dieses Vor- und Nachgehen der Sonnenuhren ist in der elliptischen Erdbahn zu suchen. Eine Sonnenuhr zeigt stets die wahre Sonnenzeit an. Nur an vier Tagen im Jahr geht die Sonnenuhr genau. Dieses Hin und Her wäre für das praktische Leben umständlich und so hat man sich eine mittlere Sonnenzeit ausgedacht, eine Sonne, die das ganze Jahr hindurch gleichförmig läuft. Anders ausgedrückt: Die Erde bewegt sich auf einer kreisförmigen Bahn!

Bis auf die vier erwähnten Tage im Jahr (15. 4., 13. 6., 31. 8. u. 25. 12.) besteht zwischen der wahren Sonnenzeit und der mittleren Sonnenzeit eine Differenz, die man als Zeitgleichung (oder auch als Zeitausgleich) bezeichnet. Wohlbemerkt, es handelt sich hier nicht um eine mathematische Gleichung, sondern um eine einfache Differenz!

Was hat das alles mit unserem Kalenderproblem um die Wintersonnenwende zu tun?

Der „Störenfried" Zeitgleichung ist dafür verantwortlich zu machen, daß der früheste Sonnenuntergang und der späteste Sonnenaufgang eben nicht auf den kürzesten Tag fallen. Wir können es alljährlich beobachten: Kurze Zeit vor und nach der Sonnenwende im Winter und Sommer ändert sich die Länge des Tages nur ganz wenig, und man hat den Eindruck, daß die Tageslängen gleich bleiben. Die Übersicht zeigt, daß sich zwischen dem 1. 12. und dem 21. 12. der Sonnenuntergang nur um eine Minute verändert, nachher aber bis zum 12. 1. um 22 Minuten. Müßte nicht der 21. 12. zeitlich symmetrisch in der Mitte liegen? Anders ist es beim Sonnenaufgang: Vom 1. 12. bis 21. 12. sind es immerhin 20 Minuten, nachher jedoch nur 2 Minuten. Man hat hier den Eindruck, als würde jemand bremsen oder beschleunigen. Dieser „Jemand" ist die Zeitgleichung, die sich in dieser Zeit stark ändert und so den Zeiten für den Sonnenaufgang und Sonnenuntergang entgegenwirkt.

Der wahre Mittag
– Kennzeichen für die Zeitgleichung

„Mittag ist um 12 Uhr!" – Dieser Satz ist oft zu hören, für uns Alltagsmenschen mag er genügen, nicht aber den Astronomen. Der wahre Mittag tritt dann ein, wenn die Mitte der Sonnenscheibe den Südmeridian passiert, wenn sie kulminiert (lat. culmen: Gipfel), also am höchsten steht. Ein Blick in das astronomische Jahrbuch zeigt, daß dieser Zeitpunkt zwischen 11h 45min und 12h 16min eintritt und nur an den schon erwähnten vier Tagen um 12 Uhr MEZ. Wir sehen auch hier wieder die Auswirkungen der Zeitgleichung!

Datum	Wahrer Mittag	
1.12.	+11.49^{h}	Sonnenuhr geht vor
5.12.	11.51	
9.12.	11.53	
13.12.	11.54	
17.12.	11.56	
21.12.	11.58	
25.12.	12.00	Zeitgleichung 0
29.12.	-12.02	Sonnenuhr geht nach
1.1.	12.03	
4.1.	12.05	
8.1.	12.06	
12.1.	12.08	

Angaben in MEZ

Durch diese Verlagerung des wahren Mittags kommt es zu einer Verkürzung oder Verlängerung des Vor- bzw. Nachmittags gegenüber unserer MEZ als Normalzeit. Wer die Zunahme der Tage im Januar und Februar aufmerksam beobachtet, wird bemerken, daß „die Abende rasch länger werden", jedoch auch, daß es „am Morgen nicht hell werden will – Aussprüche, die man oft hören kann. Es trifft zu, daß sich die Untergänge der Sonne schnell verspäten, während die Sonnenaufgänge sich nur wenig verändern. Auch diese Erscheinung ist eine Auswirkung der Zeitgleichung.

An einem Beispiel soll dies verdeutlicht werden:

Am 1. 11. und 11. 2. ist die Tageslänge gleich, die Zeiten für die Auf- und Untergänge der Sonne unterscheiden sich aber um 30 Minuten.

	1. 11.	12. 2.
Sonnenaufgang	6.54h	7.24h
Sonnenuntergang	16.33h	17.03h

Hier zeigt sich die Auswirkung der Zeitgleichung wohl am deutlichsten. Der Kalender ist für uns unentbehrlich und selbstverständlich geworden. Wer aber darin aufmerksam blättert, wird manche „Unstimmigkeiten" entdecken können, die sich mit Hilfe astronomischer Gesetzmäßigkeiten leicht aufklären. Es ist auch kaum zu glauben, daß sich unsere Kalendermacher irren!

Arnold Zenkert

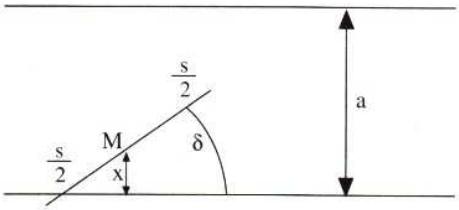
Was hat die Zahl π mit der Stochastik zu tun?

Die Mathematiker waren seit jeher bestrebt, die bei Berechnungen am Kreis auftretende Zahl π immer exakter zu bestimmen. In der „Mathematik in neun Büchern" – dem zentralen Werk der chinesischen mathematiker des ersten Jahrtausends v. Chr. – wurde für π der Näherungswert 3 angegeben. Der Astronom und Philosoph Zhang Heng (78 – 139) hat auf Grund unbekannter Überlegungen geschlossen, daß das Quadrat des Kreisumfanges sich zum Umfangsquadrat des dem Kreis unbeschriebenen Quadrates verhält wie 5 : 8 was dem Wert $\pi \approx \sqrt{10} = 3{,}162...$ entspricht (Fehler unter 1%!). Mit großer Genauigkeit wurde π durch den hervorragenden Astronomen, Mathematiker und Ingenieur ZU Chongzhi (439 – 501) berechnet, der die Ungleichung $3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$ bewies. Die in China erzielte Genauigkeit von π wurde erst tausend Jahre später durch den islamischen Mathematiker Ghyath ad-Din Gamsid al-Kasi übertroffen, der π auf 16 Dezimalstellen nach dem Komma genau berechnete.

Der Holländer Valentin Otho hat am Ende des 16. Jahrhunderts den Näherungswert $\frac{355}{113}$ für π erhalten, der auf 6 Dezimalen nach dem Komma genau ist, indem er vom Zähler bzw. Nenner des Nährungswertes des Ptolemäus $\frac{377}{120}$ den Zähler bzw. den Nenner des Näherungswertes des Archimedes $\frac{22}{7}$ abzog:

$$\frac{377-22}{120-7} = \frac{355}{113}$$

Eine zunächst überraschende Methode, die Zahl π näherungsweise zu ermitteln, basiert auf dem sogenannten „Buffonschen Nadelproblem" aus dem Jahre 1777: *In der Ebene sind parallele Geraden im Abstand a gezogen. Auf die Ebene wird zufällig eine Nadel der Länge s ($s \le a$) geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Nadel eine der Geraden schneidet? (Abb. 1)*



Es sei x der Abstand des Nadelmittelpunktes von der nächstgelegenen Geraden und δ der Winkel zwischen der Nadel und dieser Geraden. Beim zufälligen Werfen der Nadel möge gelten:

a) x ist gleichverteilt in $\left[0, \frac{a}{2}\right]$

b) δ ist gleichverteilt in $[0, \pi]$

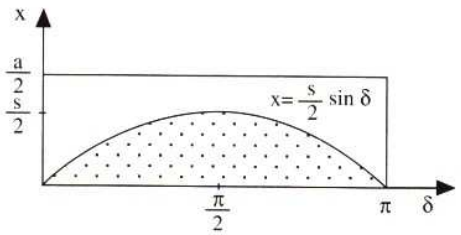
c) x und δ sind unabhängige Zufallsvariablen.

Man überlege sich leicht, daß die Nadel eine der beiden Geraden genau dann schneidet, wenn $x \le \frac{s}{2}\sin\delta$ ist. Dann kann man die Menge der Elementarereignisse Ω und das interessierende Ereignis E wie folgt beschreiben:

$$\Omega = \left\{(x,\delta); 0 < x < \frac{a}{2} \text{ und } 0 < \delta < 180°\right\}$$

$$E = \left\{(x,\delta); (x,\delta) \in \Omega \text{ und } x \le \frac{s}{2}\sin\delta\right\}$$

In Abb. 2 stellt das Rechteck die Menge Ω und die markierte Fläche das Ereignis E dar. Die Nadel schneidet eine der beiden Parallelen genau dann, wenn $x \le \frac{s}{2}\sin\delta$ ist, d. h. wenn der Ausgang des Versuchs in dem markierten Teil des Rechtecks liegt.



Auf Grund der Anwendbarkeit der klassischen Wahrscheinlichkeitsdefinition (Laplace-Wahrscheinlichkeit) ergibt sich folgende Rechnung:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

$$P(E) = \frac{\text{Inhalt der markierten Fläche}}{\text{Inhalt der Rechteckfläche}}$$

$$P(E) = \frac{\frac{s}{2}\int_0^{\pi} \sin\delta\, d\delta}{\pi\frac{a}{2}} \qquad P(E) = \frac{\frac{s}{2}\left[-\cos\delta\right]_0^{\pi}}{\pi\frac{a}{2}}$$

$$P(E) = \frac{\frac{s}{2}\left[-(-1)-(-1)\right]}{\pi\frac{a}{2}} \qquad P(E) = \frac{2s}{\pi a}$$

Um mit Hilfe des beschriebenen Experiments die Zahl π näherungsweise zu bestimmen, erweist es sich als günstig, $a = 2s$ zu wählen. Daraus ergibt sich $P(E) = \frac{1}{\pi}$. Man wirft nun die Nadel der Länge $s = \frac{a}{2}$ n mal und ermittelt die relative Trefferzahl:

$$\text{relative Trefferzahl} = \frac{\text{absolute Trefferzahl}}{n}$$

Die absolute Trefferzahl ist binomial verteilt mit der Wahrscheinlichkeit p und der Anzahl der Versuche n. Das „starke Gesetz der großen Zahlen" besagt, daß mit der Wahrscheinlichkeit 1 die relative Trefferzahl bei wachsendem n gegen die Wahrscheinlichkeit p konvergiert.

Schlußfolgerung: Bei genügend großen n erzielt man einen brauchbaren Näherungswert für n. Es gilt:

$$\pi^* = \frac{\text{Anzahl der Würfe}}{\text{Anzahl der Treffer}}$$

Bernd Dethloff

Ein Gerät für die Winkeldreiteilung

Die alten Griechen haben sich eingehend mit geometrischen Konstruktionen beschäftigt. Viele Probleme, die wir heute mit Mitteln der Algebra lösen, behandelten sie rein geometrisch. Dabei erlaubten sie nur den Gebrauch eines Lineals (ohne Längenskala) und eines Zirkels, d. h. nur das Zeichnen von Geraden und Kreisen. Diese Beschränkung geht auf Platon und seine Schüler zurück, für die nur Geraden und Kreise „perfekte" Linien waren.

Bereits damals bemerkte man, daß einige Konstruktionsaufgaben mit den genannten Mitteln allein nicht gelöst werden können. Im Laufe der Zeit wurden einige dieser Probleme berühmt. Eines von ihnen ist das Problem der Winkeldreiteilung. Es besteht darin, nur mit Zirkel und Lineal einen beliebigen Winkel in drei gleichgroße Teilwinkel zu zerlegen. Es gibt keine Lösung dieses Problems, d. h. es ist unmöglich, eine Konstruktionsvorschrift für die Dreiteilung eines beliebigen Winkels allein mit Zirkel und Lineal anzugeben. Diese Unmöglichkeit wurde erst im vorigen Jahrhundert bewiesen (P. Wentzell, 1837). Bis zu dieser Zeit haben viele berühmte Mathematiker und ebensoviele Hobbymathematiker versucht, dieses Problem zu lösen. Die letzteren taten es oft deshalb, weil für die Lösung dieses Problems hohe Belohnungen ausgesetzt waren. Heute beschäftigt sich kein Mathematiker mehr mit diesem Problem; es befassen sich nur diejenigen damit, die den Beweis Wentzells nicht kennen und sich für fähig halten, eine Lösung für etwas Unmögliches zu finden. Die Dreiteilung eines Winkels mit Hilfe anderer Geräte, die komplexere algebraische Kurven als nur Geraden und Kreise zeichnen können, ist jedoch möglich.

In der Elementargeometrie gibt es kein Verfahren, mit dem man feststellen kann, welches Konstruktionsproblem mit Zirkel und Lineal gelöst werden kann, und welches nicht. Eine Antwort auf diese Frage gibt die analytische Geometrie unter Verwendung der Theorie der algebraischen Gleichungen.

Analysiert man die Grundkonstruktion, so sieht man leicht, daß jedes Konstruktionsverfahren darauf reduziert werden kann, ausgehend von in einer Figur vorliegenden Punkten, Punkte mit geforderten Eigenschaften zu erzeugen. Jeder neue Punkt entsteht als Schnittpunkt zweier Geraden, einer Geraden und eines Kreises oder zweier Kreise. In der analytischen Geometrie werden Geraden durch lineare Gleichungen der Form

$$ax + by + c = 0 \qquad (1)$$

beschrieben, und Kreise sind durch quadratische Gleichungen der Form

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 \qquad (2)$$

gegeben.

Demzufolge können die Koordinaten von „neuen" Punkten durch Lösen eines Systems aus 2 Gleichungen ermittelt werden, von denen jede entweder vom Typ (1) oder vom Typ (2) ist.

Die analytische Lösung des Problems der Winkeldreiteilung führt auf die goniometrische Gleichung

$$\cos\alpha = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3} \qquad (3)$$

die durch die Substitution

$\cos\alpha = a$, $\cos\frac{\alpha}{3} = x$ übergeht in die algebraische Gleichung

$$4x^3 - 3x - a = 0 \qquad (4)$$

Es kann gezeigt werden, daß diese kubische Gleichung nicht für einen beliebigen Wert a (bzw. Winkel α) in ein System von Gleichungen des Typs (1) bzw. (2) überführt werden kann. Das bedeutet, daß nicht jeder Winkel mit Hilfe von Zirkel und Lineal in drei gleichgroße Teile zerlegt werden kann. Wenn aber der Winkel α die Größe $\frac{90°}{2^n}$ $(n \in \mathbb{N})$ hat, kann die Gleichung (4) in ein System von Gleichungen des Typs (1) bzw. (2) überführt werden, d. h. die Winkeldreiteilung kann mit Zirkel und Lineal erfolgen.

Es entsteht nun die Frage, ob irgendein anderes Instrument für den Zweck der Dreiteilung beliebiger Winkel gedacht werden kann. Bei der Suche nach einer Antwort auf diese Frage wurden spezielle Geräte – sogenannte Trisektoren (dt. Dreiteiler) – konstruiert. Abb. 1 zeigt einen vom Autor entworfenen Trisektor. Er besteht aus Stäben a und b der Länge r, die in derselben Ebene liegen und um einen gemeinsamen Punkt O gedreht werden können, und mit ihnen verbundene Stäbe c und d der Länge 3r, die Schlitze der Länge r haben, in denen die Stifte A bzw. B gleiten. Für die Abstände der Stifte A, B, C und O gilt: $|CB| = |OC| = |OA| = r$.

Wenn die Stäbe a *und* c *an einen Winkel* α *angelegt werden, so bilden die Stäbe* c *und* d *einen Winkel der Größe* $\frac{a}{3}$.

Beweis: Wegen $|CB| = |OC| = |OA|$ sind die Dreiecke AOC und OCB gleichschenklig (Abb. 2). Nach dem Innenwinkelsatz für Dreiecke, angewendet auf Δ OAC, gilt $2\beta + 2\beta = \alpha + \beta$, d. h. $\alpha = 3\beta$, also $\beta = \frac{a}{3}$.

Dr. Branislav Čabrić, Kragujevac
(übersetzt und bearbeitet v. Dr. C. P. Helmholz)

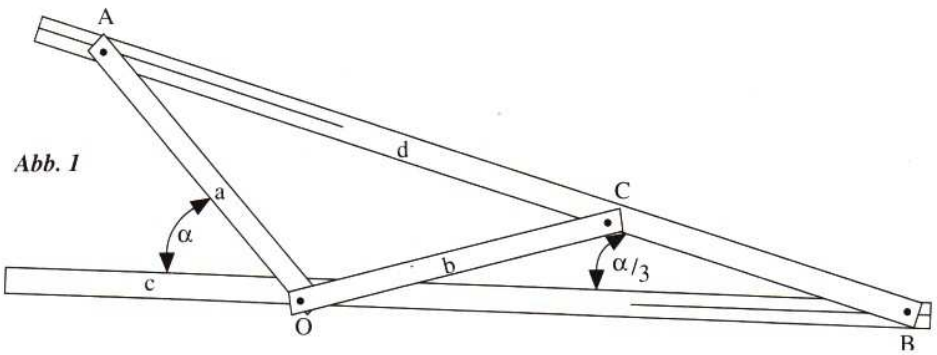


Abb. 1

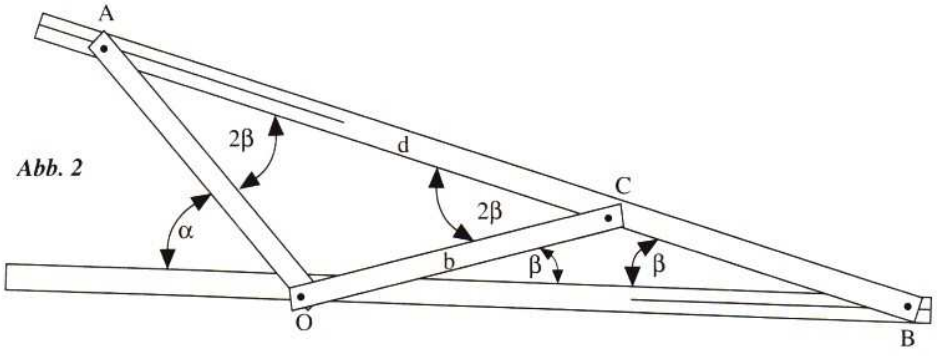
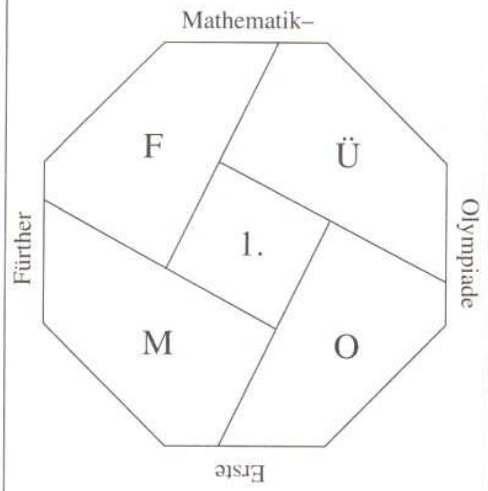


Abb. 2

Für sechs Schüler rechnet sich die Mathematik

Im Kalender der Mathewettbewerbe gibt es seit dem Schuljahr 1992/93 einen neuen Eintrag: FÜMO. Was ein wenig nach einer feuerfesten Knetmasse aus dem Bastelladen klingt, ist das Kürzel für die Fürther Mathematik Olympiade. Diese für Bayern und das übrige Süddeutschland wohl einmalige Wettbewerbsform gehört zur seltenen Klasse der Stadtolympiaden. Ausgebrütet wurde FÜMO von zwei Mathelehrern am Gymnasium Stein (bei Nürnberg). Der Fürther Mathewettstreit ist ein Parallelwettbewerb für Schüler der 7./8. bzw. 9./10. Jahrgangsstufen und wird in zwei Runden ausgetragen. Zugelassen sind alle Schülerinnen und Schüler, die eines der insgesamt 6 Gymnasien der Stadt und des Landkreises Fürth besuchen. In der 1. Runde (Anfang Oktober bis Anfang Dezember) müssen 3 (nahezu) gleichwertige Aufgaben zu Hause selbständig bearbeitet werden. Die Punktbesten werden zur 2. Runde eingeladen und müssen erneut 3 Probleme mit einem leicht erhöhten Schwierigkeitsgrad lösen (ab Mitte Februar bis Ende April). Die besten Ergebnisse aus beiden Runden werden am Schuljahresende prämiert. Einer der Gründe, die zu dieser Initiative geführt haben, ist die Tatsache, daß spezielle Neigungen mathematisch begabter Schüler in der Bundesrepublik zu wenig und wenn doch, dann zu spät eine Förderung erfahren. Insbesondere hatten sich auch die Teilnehmerinnen und Teilnehmer an der 1. FÜMO deutlich dafür ausgesprochen, viel früher Anregungen für eine vergnügliche außerunterrichtliche Beschäftigung mit mathematischen Fragestellungen zu bekommen. Denn: „Im Sport machen sich Athleten lange vor dem eigentlichen Wettbewerb warm, Musiker stimmen ihre Instrumente – nur in der Mathematik sollte alles auf Anhieb klappen!"



Der damalige bayerische Kultusstaatssekretär, MdL Hermann Leeb, hat in seinem Grußwort während des Festaktes der Preisverleihung zum Bundeswettbewerb Mathematik 1992 Ende April in Nürnberg, das Fürther Modell ausdrücklich als vorbildhaft gewürdigt.

Künftig soll eine Besonderheit hinzukommen. Die schlimmen Ereignisse von Mölln und Solingen nehmen die Initiatoren zum Anlaß, ab diesem Schuljahr FÜMO stärker als bisher für ausländische Schüler und Aussiedlerkinder zu öffnen. FÜMO soll nun verstärkt Jugendliche unterschiedlicher Herkunft zusammenbringen, sitzen doch in fast allen Klassen Schüler aus verschiedenen Kulturkreisen nebeneinander. Die Mathematik ist keine trennende Wissenschaft; sie überspringt Grenzen und kennt keine auserwählten Völker. Schließlich haben wir vor allem von „Ausländern" das Rechnen gelernt. Was wäre die Alltags-Mathematik ohne arabische Ziffern und die Geometrie ohne die Erkenntnisse der alten Griechen? Ab Herbst 1993 werden zusätzlich in beiden Runden je drei Aufgaben für die Jahrgangsstufen 5./6. angeboten, um mit der Talentsuche möglichst frühzeitig anzufangen. Darüber hinaus soll FÜMO durch wertvollere Preise noch verlockender auf Schüler wirken. Für eine besonders gelungene Lösung einer Aufgabe wird künftig ein Sonderpreis gestellt. Auch dies ist ein besonderes Markenzeichen für FÜMO. In vielen Situationen des Lebens, wo man mit Zahlen zu tun hat, kann man sich leicht verrechnen. Nicht so bei FÜMO: Hier rechnet sich die Mathematik.

Paul Jainta, Schwabach

Preisträger und Organisatoren von FÜMO

Die Problemecke

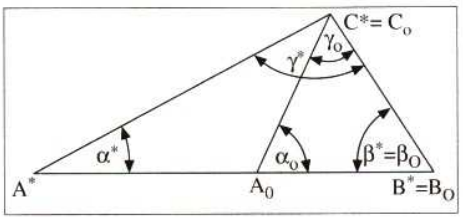
Eine Aufgabe über Dreiecke

Ein sehr ergiebiges Feld für unabhängige Untersuchungen ist zweifelsohne das Thema Dreiecke. Ich habe hieraus eine Folge von Kurzbeiträgen zusammengestellt, die von Dreiecken handeln, zwischen deren Winkeln bestimmte Beziehungen gelten. Das jeweils betrachtete Dreieck läßt sich stets durch eine Transversale in zwei Teildreiecke zerlegen, von denen eines zum Ausgangsdreieck ähnlich ist.

- Zu den im nachfolgenden Kurzbeitrag gestellten Aufgaben sollen in einem weiteren Beitrag von Lesern eingereichte, eventuell redaktionell überarbeitete Lösungen, abgedruckt werden, wobei die Einsender namentlich erscheinen.
- Von Lesern eingesandte, zum selben Problemkreis gehörende, passende Aufgaben werden mit dem Namen des Einsenders veröffentlicht.

Teil I der Forschungsreise beginnt heute mit einer für die Beitragsserie grundlegenden Aufgabe I

Aufgabe I. Es gelte: A_o ist ein innerer Punkt der Seite A^*B^* des Dreiecks $A^*B^*C^*$, und das Teildreieck $A^*A_oC^*$ ist ähnlich zu Dreieck $A^*B^*C^*$.



Wir führen für die Maßzahlen der Seitenlängen folgende Abkürzungen ein:

$\overline{B_oC_o} = a_o$, $\overline{A_oC_o} = b_o$, $\overline{A_oB_o} = c_o$

$\overline{B^*C^*} = a^*$, $\overline{A^*C^*} = b^*$, $\overline{A^*B^*} = c^*$

Es sind nun diejenigen Formeln herzuleiten, mit deren Hilfe

a) aus gegebenem a^*, b^*, c^* die Maßzahlen a_o, b_o und c_o oder

b) aus gegebenem a_o, b_o, und c_o die Maßzahlen a^*, b^* und c^* berechnet werden können.

Weiterhin ist nachzuweisen: c) Sind a^*, b^* und c^* positive rationale Zahle, so sind a_o, b_o und c_o ebenfalls positive rationale Zahlen und umgekehrt.

Eine erfolgreiche Mitarbeit wünscht

Dr. Walter Träger, Döbeln

Ebenfalls ein wenig Forschermut erfordern die neuen Knobelaufgaben. Also forsch ran an Problemecke.

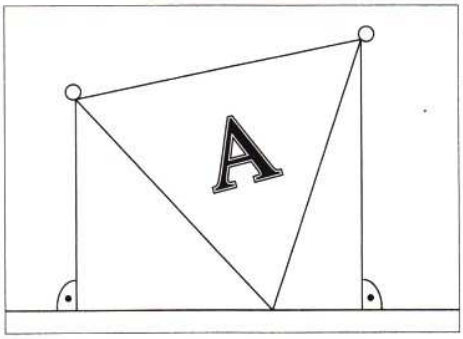
Die ProblemEcke

J 5. Auf wie viele verschiedene Arten kann man aus dem nebenstehenden Muster das Wort ALGEBRA lesen? Begründe das erhaltene Ergebnis!

```
        E
      G   B
    L   E   R
  A   G   B   A
    L   E   R
      G   B
        E
```

J 6. In einem Raum befinden sich 12 Personen. Einige sagen immer die Wahrheit, die restlichen lügen stets. Einer sagt: „Keiner von uns ist ehrlich!" Ein anderer meint: „Unter uns befinden sich nicht mehr als eine ehrliche Person!" ein dritter sagt: „Es sind nicht mehr als zwei ehrliche Personen in diesem Zimmer!" Dies geht reihum so weiter, bis schließlich der zwölfte sagt: „Es sind nicht mehr als elf ehrliche Personen anwesend!" Begründe, wie viele ehrliche Leute sich in dem Raum aufhalten!

M 5. Eine große Flagge hat die Form eines gleichseitigen Dreiecks. Sie hängt mit zwei Ecken an zwei 4 Meter bzw. 3 Meter hohen Mastspitzen. Die dritte Ecke berührt gerade den Boden (siehe Zeichnung). Bestimme die genauen Abmessungen der Flagge.



M 6. Es seien p, q und r beliebige (positive) rationale Zahlen, welche der Bedingung genügen: $pq + qr + pr = 1$.
Weise nach, daß die Zahl
$(1 + p^2) \cdot (1 + q^2) \cdot (1 + r^2)$ das Quadrat einer rationalen Zahl s ist.

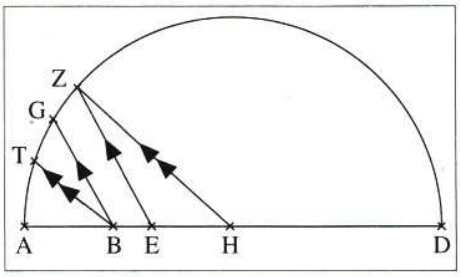
O 5. Piraten, die einen vergrabenen Schatz ausgehoben haben, verteilen nach getaner Arbeit anteilsmäßig ihre Beute. Der Schatz wird vollständig aufgeteilt, wobei der Käpt'n den größten Anteil behält, der Erste Offizier sich den zweitgrößten Batzen sichert usw. Der Schiffsjunge muß sich mit dem kleinsten Anteil begnügen. Da nun Piraten durchweg keine tollen Bruchrechner sind, teilen sie ihren Schatz nur in Brüche mit dem Zähler 1 auf (Seeräuber, die andere Anteile fordern, etwa 2/3 oder 4/7, müssen zur Strafe an Deck auf und ab gehen).

a) Zeige, daß es bei 3 Piraten nur eine Möglichkeit gibt, die Beute auf diese Weise aufzuteilen.

b) Finde die sechs verschiedenen Aufteilungen für vier Seeräuber.

c) Weise allgemein nach, daß es für n Piraten ($n > 2$) mindestens eine Möglichkeit gibt, den Schatz in der beschriebenen Weise unter die Schatzgräber zu verteilen.

O 6. Gegeben ist eine Stecke AB. Verlängere die Strecke über B hinaus bis zu Punkt D. (Die Länge BD sei dabei beliebig). Zeichne über AD den Halbkreis mit Mittelpunkt H. Wähle auf der (Halb)Kreislinie einen Punkt G so, daß $\sphericalangle$ABG spitz ist. Zeichne nun eine Strecke EZ parallel zu BG, wobei E folgender Bedingung genügt: $\overline{EH} \cdot \overline{ED} = \overline{EZ}^2$.
Verbinde nun Z mit H und wähle erneut einen Punkt T auf der Kreislinie mit TB ∥ ZH. (Vergleiche die nebenstehende Zeichnung).

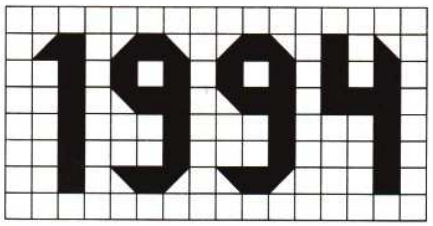


Beweise die folgende Winkelgleichheit:
$\sphericalangle$ ABG = 3 · $\sphericalangle$ TBG.
Ich bin gespannt auf Eure Lösungen! Schickt sie an folgende Adresse: Paul Jainta, Werkvolkstr. 10, 91126 Schwabach.

StR Paul Jainta, Schwabach

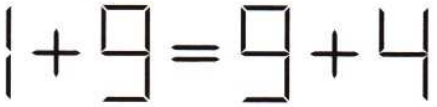
Im Blickpunkt: Das Jahr 1994

1. Jahreszahl in Prozenten



Wieviel Prozent der abgebildeten Rechteckfläche beansprucht die Jahreszahl 1994?

2. Hölzchenspiel



Legt mit Hilfe von gleich langen Hölzchen die abgebildete, offenbar falsche Gleichung auf! Es ist dann genau ein Hölzchen derart umzulegen, daß eine wahre Gleichung entsteht.

3. Zwei natürliche Zahlen

Gesucht sind zwei natürliche Zahlen. Subtrahiert man das 19-fache der zweiten Zahl vom 95-fachen der ersten Zahl, so erhält man 19. Subtrahiert man aber das 94-fache der ersten Zahl vom 20-fachen der zweiten Zahl, so erhält man 94. Wie lauten diese beiden Zahlen?

4. Summe und Produkt

Gesucht sind abermals zwei natürliche Zahlen. Ihre Summe beträgt 999, ihr Produkt beträgt 1994. Wie lauten diese beiden Zahlen?

5. Rechenspaß mit Jahreszahlen

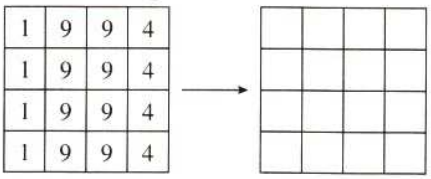
1 9 9 3 = 1 9 9 4

Setzt zwischen die Grundziffern der beiden Jahreszahlen Zeichen für rationale Rechenoperationen so ein, daß eine wahre Gleichung entsteht! Klammern dürfen nicht benutzt werden, also geht Punkt- vor Strichrechnung. Wer findet mindestens 8 verschiedene derartige Gleichungen?

6. Größenvergleich

Gegeben seien die gebrochenen Zahlen x=1992/1993 und y = 1993/1994. Welche von beiden ist die größere Zahl?

7. Umordnung



Ordnet die sich im linken Quadrat befindlichen Ziffern so in das rechte Quadrat ein, daß sich in jeder Zeile und jeder Spalte alle vier Grundziffern der Jahreszahl 1994 befinden!

8. Eine harte Nuß

Ermittelt alle Paare (x, y) natürlicher Zahlen x und y, die dem folgenden (nichtlinearen) Gleichungssystem genügen:

$x^3 - 78x - 57y = 19$

$376x^2 - 4x^2y + y = 94$

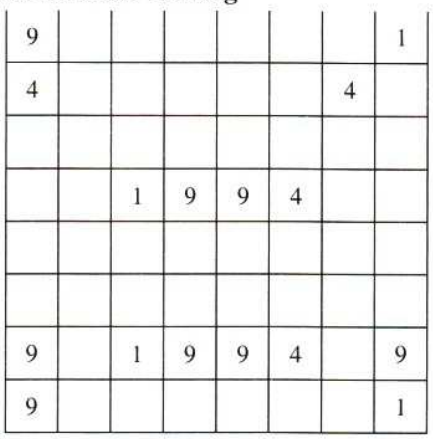
Hinweis: Um diese Aufgabe elegant und schnell zu lösen, solltet Ihr versuchen, die zweite Gleichung in Produktform u(x)v(y) = 0 darzustellen.

9. Kryptographie

Ersetzt in dem abgebildeten Kryptogramm die Sternchen so durch dezimale Grundziffern, daß eine richtig ausgeführte Multiplikationsaufgabe entsteht!

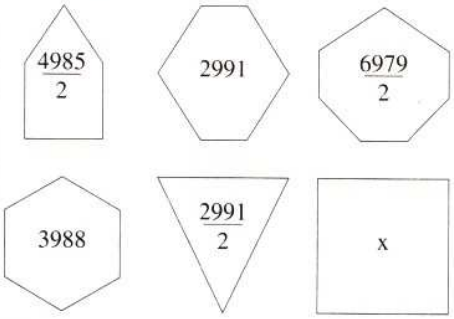
```
1 9 9 3 · * * * *
        7 * * *
      * 7 * * *
    * * * 3 *
    * * * 3
  * * * * * * *
```

10. Gerechte Teilung



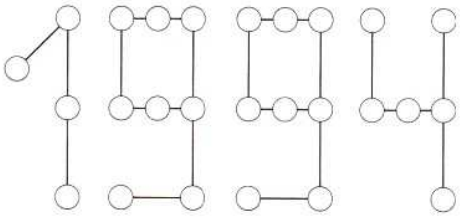
Zerlegt die abgebildete Quadratfläche derart in vier kongruente Flächenstücke, daß jedes dieser Flächenstücke alle Grundziffern der Jahreszahl 1994 enthält!

11. Geheimnisvolles x



Wie muß logischerweise die Zahl x lauten?

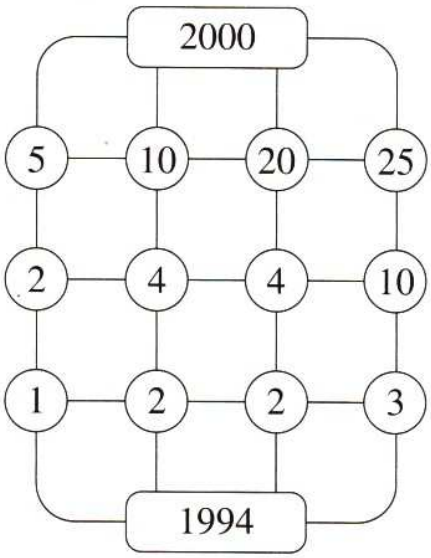
12. Magische Jahreszahl



Tragt die natürlichen Zahlen von 1 bis n (n = Anzahl der Kreisfelder) in jede einzelne Zahlen-Figur so ein, daß die Zahlensumme auf jedem geradlinigen Figurenabschnitt S (S = charakteristische Summe der Figur) beträgt! Es soll sein:

a) bei Figur 1 : n = 4, S = 6 oder 7;
b) bei Figur91 : n = 8, S = 12;
c) bei Figur 9r : n = 9, S = 15;
d) bei Figur 4 : n = 6, S = 8, 9 oder 10.

13. Jahr 2000 in Sicht



Findet in der Abbildung mindestens zwei Wege von 1994 nach 2000, bei denen das Produkt der längs dieser Wege überschrittenen Zahlen 2000 beträgt!

Viel Spaß beim Knobeln wünscht Euch

Dr. R. Mildner

34. Internationale Mathematik-Olympiade (IMO)

Istanbul, Türkei, 1993

Auswahl und Vorbereitung

Die Auswahl und Vorbereitung der deutschen Mannschaft verlief nach den eingespielten Verfahren des Vorjahres. Etwa 130 Schüler qualifizierten sich durch eine erfolgreiche Teilnahme an der 2. Runde des Bundeswettbewerbes Mathematik oder an Mathematik-Olympiaden für 2 Auswahlklausuren.

Die 16 erfolgreichsten Klausurteilnehmer bildeten den Kandidatenkreis für die deutsche Mannschaft. Für sie gab es Seminare an einem Wochenende in Rostock, an drei Wochenenden in Frankfurt/Main und die traditionelle Abschlußwoche in Oberwolfach. Die sechs Besten bildeten die IMO-Mannschaft (s. Tabelle 1). In diesem Jahr waren sechs ehemalige IMO-Preisträger unter den Kandidaten, wovon sich fünf wiederum qualifizieren konnten. Delegationsleiter war Herr Professor Hans-Dietrich Gronau, Greifswald, Stellvertreter Herr Thorsten Kleinjung, Bonn.

Ablauf

Die 34. IMO fand vom 13. bis 24. 7. 1993 in Istanbul statt. Die Olympiade fand bei Politikern große Beachtung. So nahm der Stellvertretende Ministerpräsident Prof. Inönü an der Eröffnungsveranstaltung persönlich teil.

Auch das Echo in den türkischen Medien war beachtlich (was man vom deutschen Nachrichtenwesen leider nicht behaupten kann).

Wettbewerb

Es gab eine Reihe von interessanten Aufgabenvorschlägen; die Einschätzung des Schwierigkeitsgrades durch die Kommission und Jury stimmte teilweise nicht mit den Ergebnissen der Schüler überein.

Diese Olympiade stellte sich als eine der schwierigsten in ihrer Geschichte heraus. So wurden durchschnittlich 12.6 Punkte (von 42), d. h. 30 % erreicht. Laut Reglement sollten nicht mehr as 50 % der Teilnehmer einen Preis erhalten und die Anzahl der ersten drei Preise das Verhältnis 1 : 2 : 3 haben. Die Jury hielt sich an diese Regel, wollte aber möglichst viele Schüler mit einem Preis ehren. Die Punktgrenzen werden in Tabelle 2 angegeben.

Die Koordination verlief hart, fair und sehr gründlich. Geplant war pro Aufgabe und Team eine halbe Stunde. Die deutsche Mannschaft benötigte insgesamt 10 Stunden!

Eike Lau	Hamburg Gymnasium Ohsmoor	Kl.-Stufe 13
Manuel Moos	Heidelberg Bunsen Gymnasium	Kl.-Stufe 13
Jan-Christoph Puchta	Waldkirch Geschwister-Scholl-Gymnasium	Kl.-Stufe 13
Stefan Schwarz	Erfurt Gymnasium 7	Kl.-Stufe 12
Jakob Stix	Stegen Kolleg St. Sebastian	Kl.-Stufe 13
Martin Wiechert	Erlangen Gymnasium Fridericianum	Kl.-Stufe 13

Tabelle 1: Die deutsche Mannschaft

Aufgabe	Gebiete	alle	Top 10	deutsches Team
1	Zahlentheorie/Polynome	29.0%	73.6%	69.0%
2	Geometrie	27.7%	60.2%	31.0%
3	Diskrete Mathematik	16.2%	43.8%	57.1%
4	Geometrie	33.0%	67.9%	97.6%
5	Funktionalgleichung	48.5%	85.2%	95.2%
6	Diskrete Mathematik	26.0%	59.3%	100.0%

Tabelle 4: Die Ergebnisse bzgl. der einzelnen Aufgaben

1994	Hong Kong	Austragung ist klar
1995	Canada	Austragung ist klar
1996	Indien	Austragung ist klar
1997	Argentinien	Austragung ist höchstwahrscheinlich
1998	Taiwan	Austragung ist höchstwahrscheinlich
1999	Rumänien	Interesse bekundet
2000	Südkorea	Interesse bekundet
2001	USA	Interesse bekundet
2002	?	
2003	Japan	Interesse bekundet

Tabelle 5: Die Gastgeber der nächsten IMOs

35	Goldmedaillen (von 42)	für ≥ 30 Punkte
66	Silbermedaillen	für ≥ 20 Punkte
97	Bronzemedaillen	für ≥ 11 Punkte
198	Medaillen	bei 412 Teilnehmern

Tabelle 2: Die Punktgrenzen für die Preise

Jakob Stix	39 Punkte	Gold
Martin Wiechert	37 Punkte	Gold
Stefan Schwarz	32 Punkte	Gold
Eike Lau	30 Punkte	Gold
Manuel Moos	27 Punkte	Silber
Jan-Christoph Puchta	24 Punkte	Silber

Tabelle 3: Die Ergebnisse der deutschen Mannschaft

Gesamtüberblick

An der 34. IMO nahmen 73 Länder aktiv mit 412 Schülern teil. Im Vergleich zu 1992 waren erstmals dabei: Albanien, Armenien, Aserbaidschan, Bosnien, Estland, Georgien, Kasachstan, Kirgisien, Kroatien, Lettland, Litauen, Makedonien, Moldawien, Nordzypern, Slowenien, Turkmenistan, Ukraine, Weißrußland. Ferner nahmen Algerien, Bahrain, Kuwait und Luxemburg nach einer Pause wieder teil. Die beiden Nachfolgestaaten der früheren Tschechoslowakei, Slowakei und Tschechei, schickten je ein Team nach Istanbul. Im Vergleich zu 1992 fehlten: Griechenland, Jugoslawien (bzw. Serbien und Montenegro), Nordkorea, Tunesien, Zypern. Eine übergreifende Mannschaft der GUS wie zuletzt noch, gab es nicht mehr. Als zusätzlicher Beobachter nahm Chile teil.

Die deutsche IMO-Mannschaft

Das Ergebnis der deutschen Mannschaft war sehr gut (Tabelle 3). Am zweiten Tag gelang der Mannschaft ein phantastisches Resultat. Der Vergleich der erreichten Ergebnisse (in Prozent) aller IMO-Teilnehmer, der Schüler der Top 10-Mannschaften sowie der deutschen Mannschaft gibt Aufschluß darüber, wie unsere Schüler die Aufgaben im Vergleich bewältigen (Tabelle 4). Auffällig viele deutsche Teilnehmer haben Schwächen in der reinen Geometrie (2. Aufgabe), obwohl in der

Vorbereitung gerade hierauf ein besonderer Schwerpunkt gelegt wurde.

Ausblick

Die gegenwärtige Situation über die Ausrichtung der nächsten IMOs ist in Tabelle 5 angegeben.

Prof. Dr. Hans-Dietrich Gronau, Greifswald
Delegationsleiter
der deutschen Mannschaft

Aufgaben der 34. IMO

1. Tag

1. Es seien $n > 1$ eine ganze Zahl und
$f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$
Man beweise, daß $f(x)$ nicht als Produkt zweier Polynome dargestellt werden kann, wobei beide Polynome jeweils ausschließlich ganzzahlige Koeffizienten haben und vom Grad mindestens 1 sind! *(Irland)*

2. Gegeben seien ein spitzwinkeliges Dreieck ABC und ein Punkt D innerhalb des Dreiecks, so daß $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACB + 90°$ und $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AD} \cdot \overline{BC}$ gilt.

a) Man berechne $\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}$!

b) Man beweise, daß die Tangenten an die Umkreise der Dreiecke ACD und BCD im Punkt C aufeinander senkrecht stehen! (Großbritannien)

3. Auf einem unendlichen Schachbrett wird folgendes Spiel gespielt: Zu Beginn sind n^2 Spielsteine auf dem Schachbrett in einem (n x n)-Quadrat von benachbarten Feldern so angeordnet, daß auf jedem dieser Felder ein Spielstein liegt. Ein Zug in dem Spiel ist ein Sprung eines Spielsteines in horizontaler oder vertikaler Richtung über ein belegtes Nachbarfeld auf ein unmittelbar dahinter liegendes unbelegtes Feld. Der übersprungene Stein wird anschließend entfernt.
Man bestimme diejenigen Werte von n, für welche das Spiel mit nur einem verbleibenden Spielstein beendet werden kann! (Finnland)

2. Tag

4. Sind P, Q und R drei Punkte einer Ebene, so bezeichnet man mit m (PQR) das Minimum der Längen der drei Höhen des Dreiecks PQR (wobei m (PQR) = 0, falls P, Q und R kollinear sind). Gegeben seien die Punkte A, B und C in der Ebene. Man zeige, daß für jeden Punkt X in der Ebene gilt:
$m(ABC) \leq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC)$.
(Makedonien)

5. Es sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. Man untersuche, ob es eine Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt, mit
$f(1) = 2$,
$f(f(n)) = f(n) + n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und
$f(n) < f(n + 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$
(Deutschland)

6. Es sei $n>1$ eine ganze Zahl. Weiter seien n Lampen $L_0, L_1, ..., L_{n-1}$ gegeben, die in einem Kreis angeordnet sind. Jede Lampe ist entweder AN oder AUS: Eine Folge von Operationen $S_0, S_1, ..., S_i, ...$ wird ausgeführt. Dabei beeinflußt die Operation S_j nur die Lampe L_j, alle anderen Lampen bleiben unverändert. Die Operation S_j wird wie folgt definiert:
Falls L_{j-1} AN ist, so wird der Status von L_j verändert, d. h. aus AN wird AUS bzw. aus AUS wird AN. Falls L_{j-1} AUS ist, so bleibt L_j unverändert.
Die Lampen sind modulo N angeordnet, d. h. $L_{-1} = L_{n-1}$, $L_0 = L_n$, $L_1 = L_{n+1}$, usw. Zu Beginn sind alle Lampen AN. Man beweise:
a) Es existiert eine positive ganze Zahl M (n), so daß nach M (n) Operationen alle Lampen wieder AN sind.
b) Falls n von der Form 2^k ist, so sind nach $n^2 - 1$ Operationen alle Lampen AN.
c) Falls n von der Form $2^k + 1$ ist, so sind nach $n^2 - n + 1$ Operationen alle Lampen AN.
(Niederlande)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden an jedem Tag.

Bei jeder Aufgabe waren 7 Punkte erreichbar.

Die Olympiade Ecke

Leser forschen für Leser

Zahlreiche Zeitgenossen halten die Mathematik für eine knochentrockene Wissenschaft. Viele geben der Schule die Schuld, in der die Vermittlung mathematischer Kenntnisse vorwiegend äußerste Perfektion anstreben soll. Da bleiben dann die fesselndsten Sachverhalten auf der Strecke. In der Mathematik schlummert ein reicher Schatz an Kostbarkeiten, der auch für euch Schüler verständlich ist und nur darauf wartet, gehoben zu werden. Es geschieht häufig, daß ein vom Lehrer dargebotenes Thema, das nicht unbedingt zum üblichen Lehrplan gehört, dennoch oder gerade deswegen ein besonderes Echo in der Klasse erfährt. Mitunter verdichtet sich bei dem einen oder anderen die erwachende Neugier zu spontan beginnender, selbständiger Auseinandersetzung mit mathematischen Fragestellungen.

In Heft 3/93 habe ich Euch aufgerufen, neben der Beteiligung an der ProblemEcke, mir auch von eigenen Entdeckungen bei Eurer Beschäftigung mit Mathematik zu schreiben. Es gibt in der Literatur eine ungeahnte Fülle von Problemen, die sich verallgemeinern lassen oder zu weiteren Forschungen (auch mit Taschenrechner oder Computer) geradezu einladen. Ich werde euch vereinzelt Themen vorschlagen, die zur eigenen Forschertätigkeit überreden sollen, so etwa Das Falten von pythagoräischen Dreiecken oder Eigenschaften von Palindromzahlen (Zahlen der Art 1991, 12 3 21, etc.). Diese Forschungsprojekte lassen genug Spielraum für eigenes Experimentieren, erfordern nur Schulmathematik und eignen sich auch als augenfälliges Plakat bzw. Blickfang für euer Klassenzimmer oder das Schwarze Brett in der Schule.

Wer ein wenig Aufhellung in ein undurchsichtiges Problem bringen kann, ist herzlich aufgerufen, seine Forschungsergebnisse den Lesern vorzustellen. Die Redaktion alpha möchte mit dieser Ecke eine gute alte Tradition wiederbeleben, und Euch Gelegenheit geben, selbst auf mathematische Entdeckungsreise zu gehen.

Paul Jainta

Alpha-Wettbewerb Teil I

5/1
Axel und Bernd sind begeisterte Schachspieler. Im vergangenen Monat trugen sie 21 Schachpartien miteinander aus. Dabei gewann Axel dreimal so viele Partien wie er verlor. Fünf Partien fielen „remis" aus. Wie viele Partien gewann Bernd?

5/2
Onkel Erich und sein Neffe Gerd sind zusammen 80 Jahre alt. Vor vier Jahren war der Onkel achtmal so alt wie sein Neffe. Wie alt ist jeder von ihnen gegenwärtig?

5/3
In einem Stall sind Kaninchen und Gänse. Alle zusammen haben 72 Füße und 20 Köpfe. Wieviel Kaninchen und wieviel Gänse sind in diesem Stall?

5/4
Von fünf Schülern einer Klasse ist folgendes bekannt:
(1) Karl ist kleiner als Rolf.
(2) Lutz ist größer als Rolf.
(3) Peter ist der kleinste, Hans der größte dieser fünf Schüler.
Ordne sie nach ihrer Größe, beginne mit dem Kleinsten!

5/5
Ein Mathematiklehrer wurde von seinen Schülern gefragt, an welchem Tag und in welchem Monat er Geburtstag habe. Seine Antwort lautete: „Wenn man die Zahl meines Geburtstages mit der Zahl meines Geburtsmonats multipliziert, so erhält man als Ergebnis 209. Nun findet ihr die Antwort auf eure Frage sicher selbst."

5/6
Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 836. Ein Summand endet mit einer Null. Streicht man diese Null, so erhält man den anderen Summanden. Es sind diese beiden Summanden zu ermitteln.

5/7
Eine Schulklasse will eine Wanderung nach einem 12 km entfernten Aussichtsturm machen. Ein Teil der Schüler will zu Fuß um 8 Uhr aufbrechen und in jeder Stunde 4 km Wegstrecke zurücklegen. Die übrigen Schüler wollen mit dem Fahrrad in jeder Stunde 16 km schaffen. Um wieviel Uhr müssen die Radwanderer aufbrechen, wenn beide Schülergruppen gleichzeitig am Zielort eintreffen wollen?

6/1
Es sind alle natürlichen Zahlen, die kleiner als 3000 sind, zu ermitteln, die folgende Bedingungen erfüllen: Bei Division durch 2 lassen diese Zahlen den Rest 1, durch 3 den Rest 2, durch 4 den Rest 3, durch 5 den Rest 4, durch 6 den Rest 5, durch 7 den Rest 6, durch 8 den Rest 7, durch 9 den Rest 8 und durch 10 den Rest 9.

6/2
In dem abgebildeten Schema sind die Sternchen so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Mulitplikationsaufgabe entsteht.

```
  * * * · * * *
  -------------
    * * *
  3 5 3 5
    * * *
  -------------
  * * * * * *
```

6/3
Die Quersumme einer dreistelligen natürlichen Zahl beträgt 15. Die Anzahl der Einer ist um 4 größer als die Anzahl der Zehner und um 5 größer als die Anzahl der Hunderter. Um welche Zahl handelt es sich?

6/4
Ein Winzer schenkt zwei Freunden eine 12-Liter-Flacshe Wein, den sie sich teilen sollen. Die Freunde haben aber nur ein 5-Liter-und ein 7-Liter-Maß zur Verfügung. Wie können sie unter alleiniger Benutzung dieser drei Gefäße den Wein gerecht teilen?

6/5
Es sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, deren Quersumme halb so groß ist wie deren Querprodukt. (Unter dem Querprodukt einer natürlichen Zahl verstehen wir das Produkt aus denjenigen Zahlen, die den Grundziffern entsprechen.)

6/6
Gegeben sei ein spitzer Winkel mit dem Scheitel S und den Schenkeln s_1 und s_2 sowie ein innerer Punkt P dieses Winkels. Durch den Punkt P ist eine Gerade zu konstruieren, die s_1 in M und s_2 in N derart schneidet, daß $\overline{PM} = \overline{PN}$ gilt. Die Konstruktion ist zu begründen.

6/7
Ein Eisenbahnzug fährt an einer Baustelle langsam mit einer Geschwindigkeit von 10 km/h. Im Zug geht eine Person vom ersten zum letzten Wagen mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s. Mit welcher Geschwindigkeit in km/h bewegt sie sich auf den Bahndamm bezogen?

7/1
Es sei $p = \overline{aba}$ eine in dikadischer Schreibweise dargestellte Primzahl, deren Quersumme 22 beträgt. Wie viele derartige Primzahlen gibt es, und wie lauten sie?

7/2
Hans möchte seiner Mutter zu ihrem Geburtstag ein Geschenk kaufen. Deshalb öffnet er seine Sparbüchse. Sie enthält nur 10-DM-Scheine, 5-DM-Stücke und 1-DM-Stücke, sonst keine anderen Geldscheine oder Münzen. Zu seinem Erstaunen stellt Hans fest, daß die Sparbüchse zusammen genau 50 Geldscheine oder Münzen enthält, die insgesamt einen Wert von 100 DM haben. Wie viele Geldstücke zu 1 DM enthält die Sparbüchse von Hans?

7/3
Heinz fordert Gerd auf: „Denke dir eine natürliche Zahl zwischen 0 und 500, multipliziere sie mit 54, danach noch mit 37 und nenne mir das Ergebnis!" Aus dem Ergebnis konnte Hans angeben, welche Zahl Gerd sich gedacht hatte. Gib dafür eine Begründung.

7/4
Auf einer Versammlung waren dreimal soviel Männer wie Frauen anwesend. Nachdem vier Ehepaare die Versammlung vorzeitig verlassen mußten, waren viermal soviel Männer wie Frauen noch anwesend. Wie viele Personen besuchten diese Versammlung?

7/5
Die Seitenlängen eines Dreiecks verhalten sich wie 9 : 10 : 15. Die längste Seite ist um 12 cm länger als die kürzeste Seite. Es sind die Seitenlängen dieses Dreiecks zu bestimmen.

7/6
Es ist gefährlich, im Sommer den Benzintank eines Autos randvoll zu füllen, da sich Flüssigkeiten beim Erwärmen ausdehnen. Wieviel Kraftstoff würde aus einem Tank mit einem Inhalt von 40 l austreten, wenn er bei 10 °C randvoll gefüllt und durch Sonneneinstrahlung auf 50 °C erwärmt wird? Der Volumenausdehnungskoeffizient γ von Benzin beträgt 0,001 K^{-1}.

7/7
Bei einer optischen Linse besteht zwischen der Gegenstandsweite g, der Bildweite b und der Brennweite f eine Beziehung (Linsengleichung). Wie lautet diese Beziehung:
a) $g \cdot b = f$
b) $(g \cdot b)^2 = f$
c) $g + b = f$
d) $1/f = 1/g + 1/b$

8/1
Skizziere alle nichtkongruenten Netze zu einem dreiseitigen Prisma, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck und dessen Höhe gleich der Seitenlänge dieses Dreiecks ist.

8/2
Ein Glaser soll 3 mm dicke Glasscheiben für einen oben offenen gläsernen Würfel mit einem Fassungsvermögen von 8 dm^3 zuschneiden. Gib alle möglichen Maß der 5 Scheiben an, wenn die Grundscheibe die größten Abmessungen hat.

8/3
Lydia darf sich eine Eistüte mit 2 Kugeln ihrer Wahl kaufen. Die Verkäuferin hat 3 Sorten Eis. Wieviele Möglichkeiten der Zusammenstellung hat das Mädchen?

8/4
Die Eltern haben für ihre Tochter Susi 5000 DM zu folgenden Konditionen angelegt (Zuwachssparen): Im ersten Jahr werden 5,75 % im zweiten 6,0 %, im dritten 6,25 % und im vierten 6,5 % Zinsen gezahlt. Die Zinsen werden jährlich gutgeschrieben und mit verzinst. Wie hoch ist Susis Sparguthaben nach 4 Jahren?

8/5
Kommt in der Zahlenfolge 3, 12, 21, 30, 39, 48, 57, 66 ... die Zahl 4755 vor?

8/6
Ein Gewichtheber (Schwergewicht) bringt beim „Reißen" (Anheben der auf dem Fußboden liegenden Hantel in einem Zug) 130 kg in 1 s zur Hochstrecke (2,2 m über dem Fußboden).
Beim „Drücken" stemmt er eine Hantel von 185 kg aus der Schulterhöhe (1,6 m) in 8 s in die Hochstrecke. Berechne in beiden Fällen die physikalische Leistung in PS! (nach Dorn, Arbeitsheft Physik f. Mittelstufe)

8/7
Ein Körper mit einer Gewichtskraft 6 N schwimmt in Petroleum ($e = 0{,}8\ kg \cdot dm^3$). Wie groß ist das untergetauchte Volumen V in dm^3? ($g = 10\ m \cdot s^{-2}$)

9/1
Einem Würfel mit einer Kantenlänge von a = 20,0 cm soll ein Tetraeder einbeschrieben werden. Wo liegen die Eckpunkte des Tetraeders und wie lang ist eine Kante s?

9/2
Das Zahlenschloß von Sebastian hat vier Ringe mit den Ziffern 0 bis 6. Er weiß nur noch, daß die zweite Ziffer die einzige 5 in seiner Geheimzahl war. Wieviele verschiedene Einstellungen des Schlosses erfüllen diese Bedingung?

9/3
Gegeben seien n verschiedene Geraden, die alle durch einen Punkt gehen. Die n Geraden zerlegen die Ebene in T_n Teilen. Bestimmen Sie T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 und versuchen Sie, eine „Formel" für T_n zu finden.

9/4
Marco hat nur 2-Pfennig- und 5-Pfennig-Stücke (in nahezu unbegrenzter Anzahl). Kann er damit jeden Betrag bis zu 3 DM bezahlen, ohne daß der Händler herauszugeben braucht?

9/5
Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $a(x + 1) = bx$ in Abhängigkeit von a und b an!

9/6
In der Stadt fährt ein Auto mit 36 km/h. Außerhalb des Ortes beschleunigt der Fahrer mit $a = 2\ m \cdot s^{-2}$ auf 90 km/h. Wie lange dauert die Beschleunigung?

9/7
Bei der Reparatur einer Kochplatte wird der Heizdraht um 5 % gekürzt. Das Leistungsschild hat die Aufschrift 220V/500W. Welche Leistung P_2 hat die Kochplatte nun? (Aufgabe von D. Kluge, 14552 Michendorf)

10/1
Einem Würfel mit der Kantenlänge a = 20 cm soll ein Oktaeder so einbeschrieben werden, daß die Eckpunkte des Oktaeders auf den Schnittpunkten der Flächendiagonalen des Würfels liegen. Wie lang ist eine Kante des Oktaeders?

10/2
Wieviel dreistellige Zahlen mit lauter ungeraden Ziffern gibt es?

10/3
Beim Fußballtoto wird für elf Spiele eine Vermutung über den Ausgang des jeweiligen Spieles (unentschieden, Mannschaft I gewinnt, Mannschaft II gewinnt) durch Ankreuzen der Ziffern 0; 1 oder 2 für jedes der 11 Spiele ausgesprochen. Wieviele verschiedene Tips sind möglich?

10/4
Einem Kreis mit dem Radius r = 5 cm soll ein Rechteck einbeschrieben werden, dessen eine Seite dieselbe Länge hat wie der Radius des Kreises. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks.

10/5
Eine Erbschaft fällt an fünf Nichten des Erblassers: Lisa erhält 1/5 des Vermögens, Maria 1/8, Anna 1/10, Katja 2/5 und Nora den Rest von 38 780 DM. Wieviel erhielten die einzelnen Erbinnen?

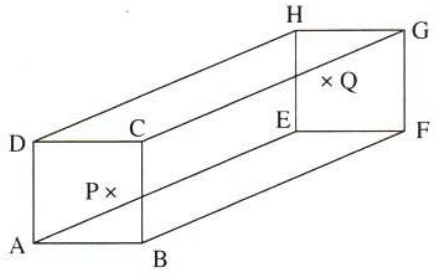
10/6
In einem Wechselstromkreis sind ein Kondensator ($C = 10\ \mu F$), eine Spule ($L = 1{,}2\ H$) und ein ohmscher Widerstand ($R = 5\ \Omega$) hintereinandergeschaltet. Wie groß ist die Phasenverschiebung φ bei $f = 50\ Hz$ und $U = 220\ V$? Wie lange dauert es, bis ein in den Stromkreis geschalteter Elektrizitätszähler 1,0 kWh anzeigt?

10/7
Ein Auto fährt mit der Beschleunigung von $a = 3\ m \cdot s^{-2}$ an. Welchen Weg s_{32} legt es in der 3. Sekunde, also zwischen $t_1 = 2s$ und $t_2 = 3\ s$ zurück?

E/1
Gegeben sind eine quadratische Pyramide und ein Tetraeder, dessen Begrenzungsflächen kongruent zu den Seitenlängen der Pyramide sind. Die beiden Körper werden so zusammengefügt, daß zwei dreieckige Begrenzungsflächen zur Deckung kommen. Wieviel Begrenzungsflächen hat der neu entstandene Körper?

E/2

Ein Quader ABCDEFGH hat folgende Maße: $a = \overline{AB} = 6cm$, $b = \overline{BC} = 6cm$, $c = \overline{AE} = 15cm$. Auf seiner Oberfläche soll ein Faden von einem Punkt P zu einem Punkt Q gespannt werden. P und Q liegen auf je einer der quadratischen Flächen ABCD und EFGH, in der Mitte zwischen denselben Seitenflächen ABFE und DCGH des Quaders: P liegt 0,5 cm von BC entfernt, Q liegt 0,5 cm von EH entfernt.



Genügt ein 20 cm langer Faden zum Verbinden der Punkte?

E/3

An einem Pferderennen nehmen 9 Pferde teil. Wieviele Möglichkeiten gibt es für die Besetzung der ersten drei Plätze?

E/4

Die finanziellen Mittel für den Bau eines Hauses werden aus verschiedene Quellen erbracht. Der Bauher beteiligt sich zu 2/7, Familie A zu 3/10, Familie B mit 75 000 DM an den Gesamtkosten und 1/5 werden über einen Kredit finanziert. Wieviel DM steuert der Bauherr bei?

E/5

n Scheiben mit unterschiedlichen Radien stecken ihrer Größe nach geordnet auf einer Stange. Die oberste Scheibe hat den kleinsten Radius. Der Scheibenstoß soll nach folgenden Regeln auf eine von zwei freien Stangen umgesetzt werden:

1) Die Scheiben dürfen nur einzeln von einer Stange auf eine andere umgesetzt werden.

2) Während des Umsetzens dürfen alle drei Stangen benutzt werden.

3) Es darf nie eine Scheiben auf eine kleinere gesetzt werden.

Wieviele Züge sind bei 2; 3; 4; 5; n Scheiben mindestens nötig, bis der Scheibenstoß unter Beachtung der Regeln umgesetzt ist?

E/6

Korpuskulare Eigenschaften des Photons

Teilchen, die alle mit derselben Geschwindigkeit v senkrecht gegen eine unbewegliche Wand stoßen, bewirken auf diese Wand den Druck $p = n \cdot v \cdot \Delta I$, wobei n die Teilchendichte und ΔI die Impulsänderung eines Teilchens beim Stoß ist. Leiten Sie diese Gleichung für den Druck her!

E/7

Berechnen Sie die Impulsänderung, die

a) ein Stickstoffmolekül bei $T = 3 \cdot 10^2$ K, Masse eines Moleküls $m = 4{,}65 \cdot 10^{-26}$ kg

b) ein Photon (Wellenlänge $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ m) bei Reflexion an einer Wand erfährt.

(Leistungskurs Abitur 1974, zit. nach Müller/Leitner/Dilg: Physik. Leistungskurs 3. Sem. Ehrenwirth 1985)

Anzeige

Die ESKIMOS wie sie früher lebten

Aus dem Inhalt:
- Tiere der Arktis,
- NANUK, der Eisbär,
- Jagen und Teilen,
- Hunde – starke und treue Freunde,
- Wenn ein Tier starb,
- Ein Haus aus Schnee,
- Religion und Zauberkräfte,
- Werkzeuge und Geräte der INUIT,
- Wie die INUIT sich die Arbeit teilten,
- Kinderspiele,
- Geschichten erzählen,
- Lieder

u.v.a.m.

Die ESKIMOS wie sie früher lebten ist ein Projektbuch für Kinder mit vielen Zeichnungen und Bildern, mit spannenden Texten zum Lesen und Nachdenken, mit interessanten Neuigkeiten und Informationen zum Entdecken und Forschen, mit Anregungen zum Basteln, Bauen, Kneten und Erfinden.

Bitte nutzen Sie die Bestellkarte auf dem Beiheftet.

UNTERRICHTSMATERIAL

Die GRUNDSCHUL-ZEITSCHRIFT

Mit Kindern Schule machen

Redaktion: Anneli Keßler
Paperback 45 Seiten DIN A4,
DM 12,00 zzgl. Versandkosten,
Bestellnr.: 3-617-32038-4

Bestellungen richten Sie bitte an:
Erhard Friedrich Verlag, Vertrieb,
Postfach 10 01 50, 30917 Seelze

Die zusammenhängenden Graphen und Multigraphen mit 4 Knoten vom Grad 4 und 8 oder 6 Knoten vom Grad 1

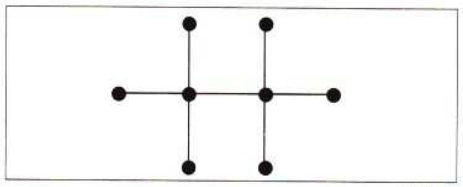


Abb. 1

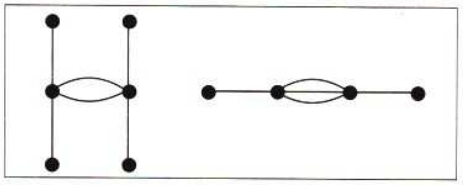


Abb. 2

Zunächst sollen 5 Begriffe erläutert werden: Während bei einem Graphen zwei Knoten höchstens durch eine Kante verbunden sind, sind bei einem **Multigraphen** mindestens zwei Knoten durch mindestens zwei Knoten verbunden. Die Zahl der in einen Knoten einmündenden Kanten eines Graphen oder Multigraphen heißt **Grad** des Knotens. **Zusammenhängend** heißt ein Graph oder Multigraph, wenn jeweils zwei seiner Knoten durch einen aus Kanten und Knoten bestehenden Weg verbunden sind. (Abb. 1 u. 2).

Zwei Graphen oder Multigraphen sind **isomorph**, wenn sich ihre Knoten und Kanten so einander eineindeutig zuordnen lassen, daß gilt: Einander zugeordnete Kanten münden in einander zugeordnete Knoten ein (Abb. 3).

Isomorphe Graphen bzw. Multigraphen, bei denen die einander entsprechenden Knoten und Kanten nicht oder in gleicher Weise bezeichnet (kodiert) sind, werden nicht unterschieden. In diesem Fall genügt es, aus jeder Klasse isomorpher Graphen oder Multigraphen ein Element, einen Repräsentanten, anzugeben. Ein Graph heißt **vollständig**, wenn jedes Paar seiner Knoten durch genau eine Kante verbunden ist (Abb. 4).

Werden beim Graphen der Abb. 1 und beim Multigraphen der Abb. 2 die Knoten vom Grad 4 mit dem Buchstaben C (Symbol für ein Kohlenwasserstoffatom) und die vom Grad 1 mit dem Buchstaben H (Symbol für ein Wasserstoffatom) kodiert, so können der Graph der Abb. 1 als die Konstitutionsformel[1)] (klassische Strukturformel) des Kohlenwasserstoffs Ethan und die beiden zusammenhängenden Teilmultigraphen, in die der Multigraph der Abb. 2 zerfällt, als die Konstitutionsformel der Kohlenwasserstoffe Ethen und Ethin aufgefaßt werden. In der Chemie werden üblicherweise diese und alle anderen Konstitutionsformeln wie in Abb. 5 aufgezeichnet.

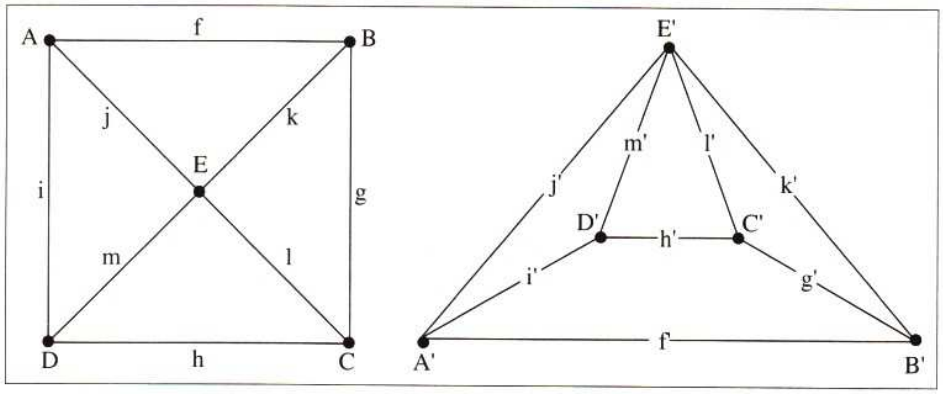


Abb. 3

In diesem Beitrag sollen alle zusammenhängenden Graphen oder Multigraphen mit 4 Knoten vom Grad 4 und 8 oder 6 Knoten vom Grad 1 ermittelt werden.

Das heißt, es ist aus jeder Isomorphieklasse dieser Graphen und Multigraphen ein Repräsentant anzugeben.

Nun wird festgesetzt: Bei allen gesuchten Graphen und Multigraphen G sollen die Knoten vom Grad 4 mit dem Symbol C

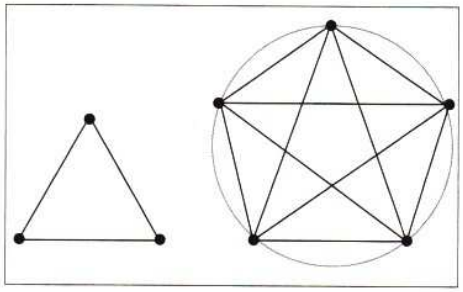


Abb. 4

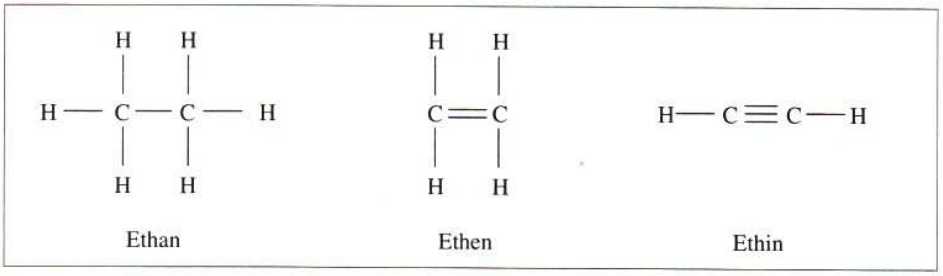


Abb. 5

(Kohlenstoff ist in organischen Verbindungen stets 4-wertig) und die vom Grad 1 mit dem Symbol H (Wasserstoff ist stets einwertig) zusätzlich kodiert sein. Durch diese Zusatzannahme sind die gesuchten Graphen und Multigraphen auffaßbar als Konstitutionsformeln aller denkbaren Kohlenwasserstoffe mit den Summenformeln C_4H_8 und C_4H_6.

Jedem gesuchten G ist durch die folgende Vorschrift ein eindeutig bestimmter Teilgraph T zugeordnet: In G sind alle Knoten vom Grad 1 (mit ihrer Kodierung H) und die in diese einmündenden Kanten zu

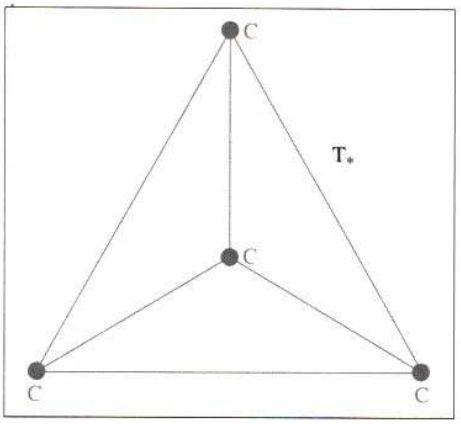


Abb. 6

löschen. Sind in G zwei Knoten (mit der Kodierung C) durch mehrere Kanten verbunden, so werden von diesen jeweils alle bis auf eine gelöscht. Jeder so erhaltene Teilgraph T eines gesuchten G ist kein Multigraph, enthält genau 4 Knoten (mit der Kodierung C) und ist zusammenhängend, da G zusammenhängend ist. Jeder dieser Teilgraphen T muß also auch ein Teilgraph des vollständigen Graphen T_* mit 4 (mit C kodierten) Knoten sein, in dem jeder Knoten durch genau eine Kante mit den drei anderen Knoten verbunden ist (Abb. 6).

Ist T ein echter Teilgraph von T_*, so entsteht T durch Löschen von Kanten aus T_*. Dieses zulässige Löschen der Kanten von T_* kann auch durch schrittweises Löschen jeweils einer Kante vollzogen werden. (Tabelle I) Jeder gesuchte Graph und Multigraph G mit 8 Knoten vom Grad 1 besitzt 8 Kanten, einen Knoten vom Grad 1 mit einem Knoten vom Grad 4 verbindet. Alle übrigen Kanten müssen jeweils zwei Knoten vom Grad 4 verbinden. Die Zahl dieser Kanten ist $(4 \cdot 4 - 8) : 2 = 4$. Jeder gesuchte Graph und Multigraph G mit 6 Knoten vom Grad 1 enthält $(4 \cdot 4 - 6) : 2 = 5$ Kanten, die zwei Knoten vom Grad 4 verbinden. Hiernach können zunächst die in Tabelle I aufgeführten Graphen mit mehr als 4 (5) Kanten nicht Teilgraphen eines gesuchten G mit 8 (6) Knoten vom Grad 1 sein. Weiterhin lassen sich nun alle gesuchten Graphen und Multigraphen G mit 6 Knoten vom Grad 1 als Obergraphen oder Obermultigraphen der in Tabelle I angegebenen Graphen T mit höchstens 5 Kanten ermitteln: Im ersten Schritt wird jeder Graph T der Tabelle I mit weniger als 5 Kanten auf jede zulässige Weise durch Aufnehmen weiterer Kanten zu Obermultigraphen mit 5 Kanten so erweitert, daß in jeden der 4 Knoten jedes Obermultigraphen höchstens 4 Kanten einmünden und daß in jedem Obermultigraphen nur die Knoten durch Kanten verbunden sind, die bereits in T durch eine Kante verbunden sind. In einem zweiten Schritt wird jeder durch dieses Erweitern gebildete Obermultigraph und auch der in Tabelle I enthaltene Graph T mit 5 Kanten wieder erweitert. Es werden 6 Knoten mit der Kodierung H aufgenommen, und jeder von diesen neuen Knoten wird mit einem bereits vorhandenen Knoten mit der Kodierung C durch eine neue Kante so verbunden, daß nunmehr in jeden Knoten mit der Kodierung C genau 4 Kanten einmünden. Analog sind sämtliche Graphen und Multigraphen G mit 4 Knoten vom Grad 4

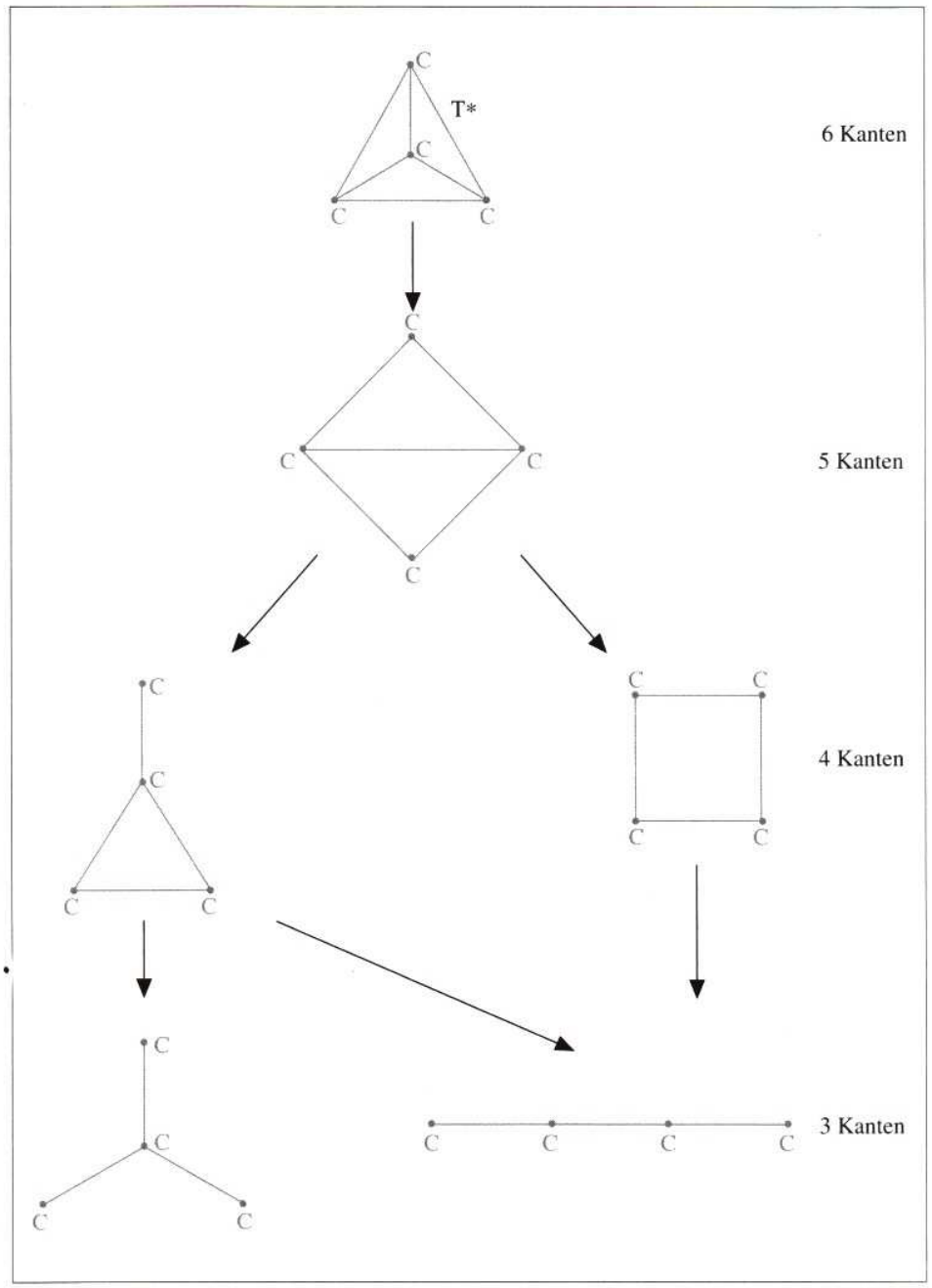


Tabelle I

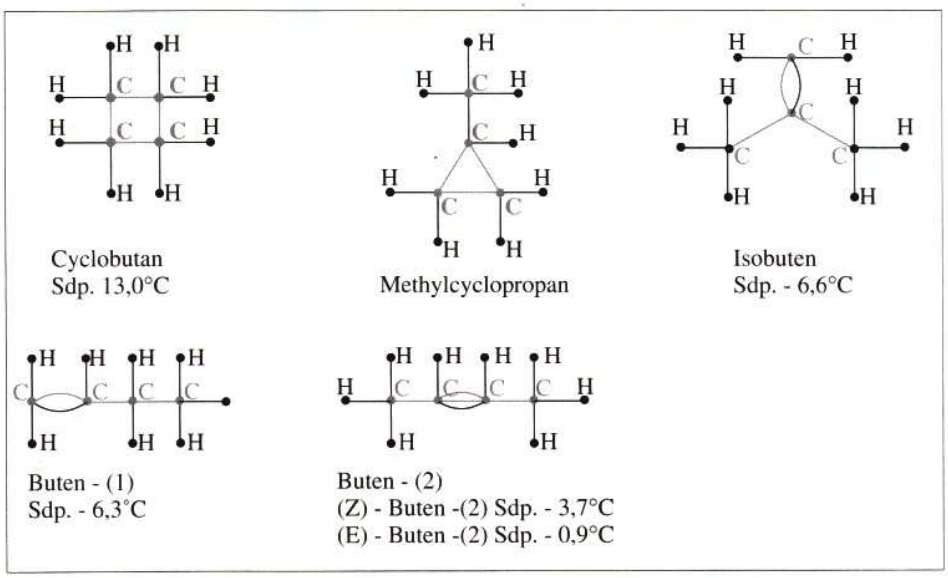


Tabelle II

und 8 Knoten vom Grad 1 zu gewinnen. Die so ermittelten Graphen und Multigraphen G sind in den Tabellen II und III in den fixierten Teilgraphen T grau markiert. Die angegebenen Repräsentanten sind paarweise nicht isomorph. Zusätzlich ist der Name der chemischen Verbindung angegeben, wenn G als chemische Konstitutionsformel aufgefaßt wird. Sofern dem Verfasser dieses Beitrags bekannt ist, daß eine oder mehrere chemischen Verbindungen mit einer dieser Konstitutionsformeln hergestellt und untersucht ist bzw. sind, sind deren Siedepunkte (Sdp) bei 760 Torr Luftdruck vermerkt.

Dr. W. Träger

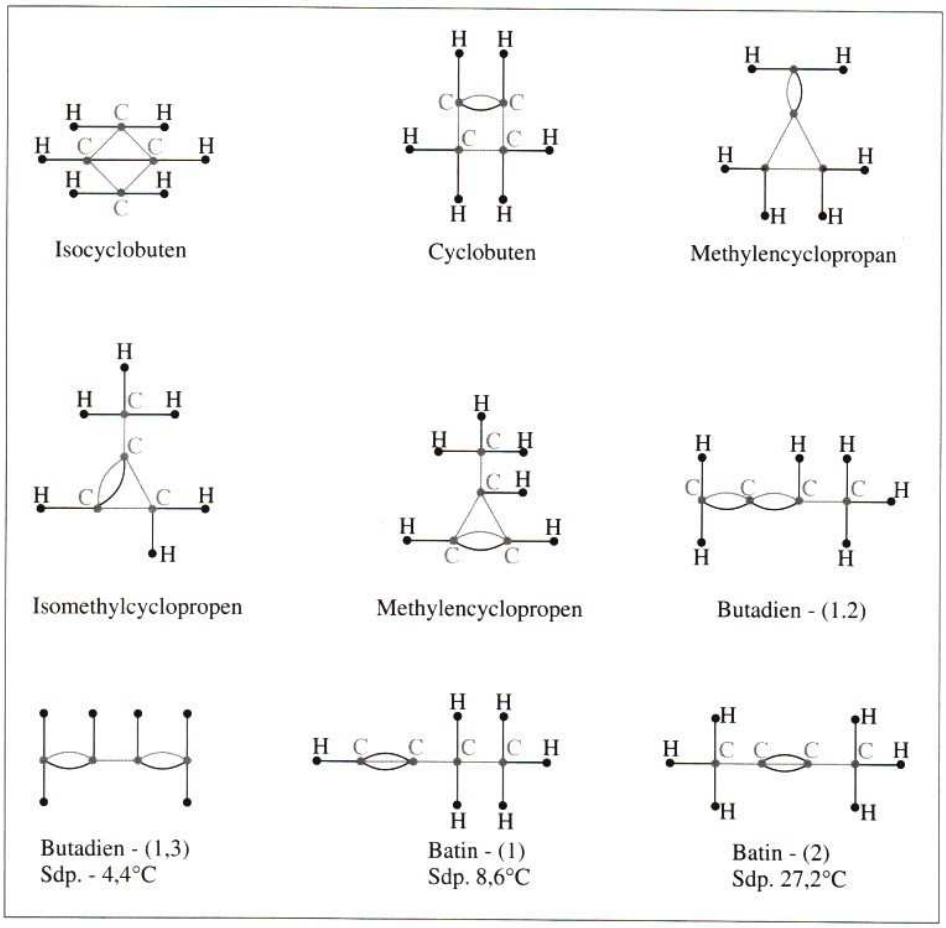


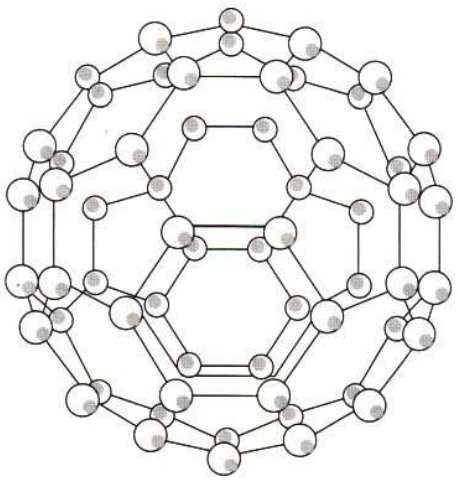
Tabelle III

Anmerkung

1) Die Moleküle chemischer Verbindungen sind dreidimensionale Gebilde. Die Summenformel einer chemischen Verbindung gibt Art und Zahl der in einem Molekül gebundenen Atome an. Die Konstitutionsformel einer chemischen Verbindung gibt zusätzlich durch ihre Valenzstriche die zwischen den in einem Molekül enthaltenen Atomen bestehenden Bindungen an. Chemische Verbindungen mit der gleichen Summenformel und verschiedenen Konstitutionsformeln heißten Konstitutionsisomere. Die beste Vorstellung der räumlichen Struktur der Moleküle einer chemischen Verbindung vermittelt ein maßstabgerechtes dreidimensionales Molekülmodell, das z. B. mit einem Molekülbaukasten herstellbar ist. Chemische Verbindungen mit gleicher Konstitutionsformel und unterschiedlicher räumlicher Anordnung der Atome im Molekül heißen Stereoisomere. So sind z. B. zwei Stereoisomere des Kohlenwasserstoffes Buten-(2) mit unterschiedlichen Siedepunkten bekannt (siehe Tabelle II).

Kugeln, hart wie Diamanten

– *Fullerene faszinieren die Chemiker*



Unter dieser Überschrift berichtete die „Döbelner Allgemeine Zeitung" in der 48. Woche/November 1992 in einem Beitrag von Bernd Schuh über das Fulleren genannte Kohlenstoffmolekül mit der Summenformel C_{60}:

Im Labor des Chemikers Smalley in Houston (USA) wurde 1985 mittels eines Massenspektrometers nachgewiesen, daß ein aus 60 Kohlenstoffatomen bestehendes Molekül existiert. Das Entschlüsseln der Struktur des C_{60} führte Smalley und seine Mitarbeiter zu der Annahme: Ordnet man jeder der 60 Ecken eines konvexen Polyeders, dessen Flächen regelmäßige Sechs- und Fünfecke sind und bei dem in jeder Ecke dieselbe Zahl von Sechs- und Fünfecken anstoßen, ein Kohlenstoffatom zu, so geben die Kanten dieses Polyeders die zwischen je zwei Kohlenstoffatomen das C_{60} bestehenden Einfach- und Doppelbindungen an.

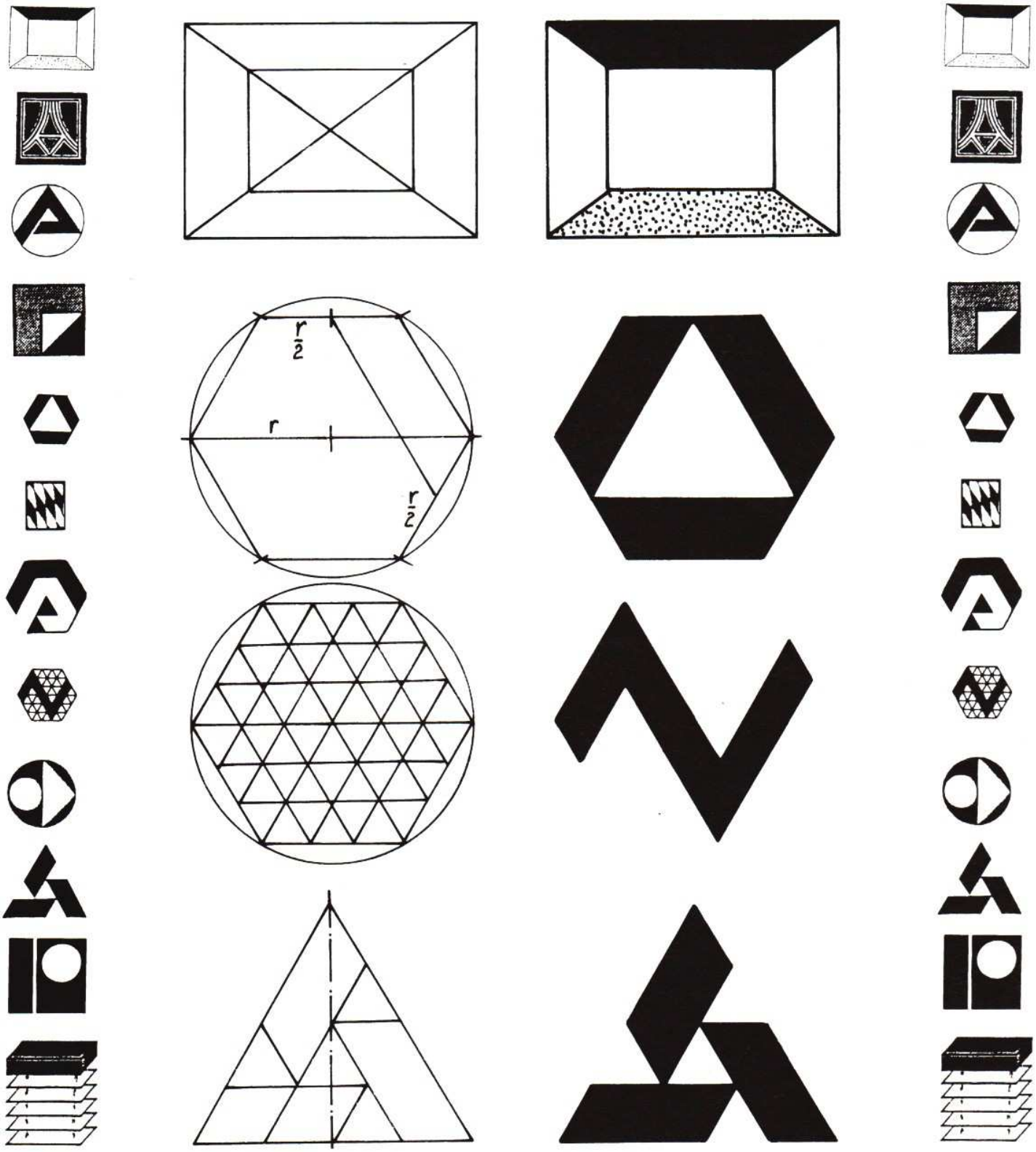
Diese Vermutung wurde zwei Jahre später von Donald Huffman (University of Arizona in Tucson) und Wolfgang Krätschmer (Max-Planck-Institut in Heidelberg) bestätigt.

Aufgabe: Wieviele Sechsecke und wieviele Fünfecke begrenzen dieses dem C_{60} zugeordneten Polyeder? Wieviele Kanten hat es?

W. Träger, Döbeln

Geometrie

– im täglichen Leben entdeckt

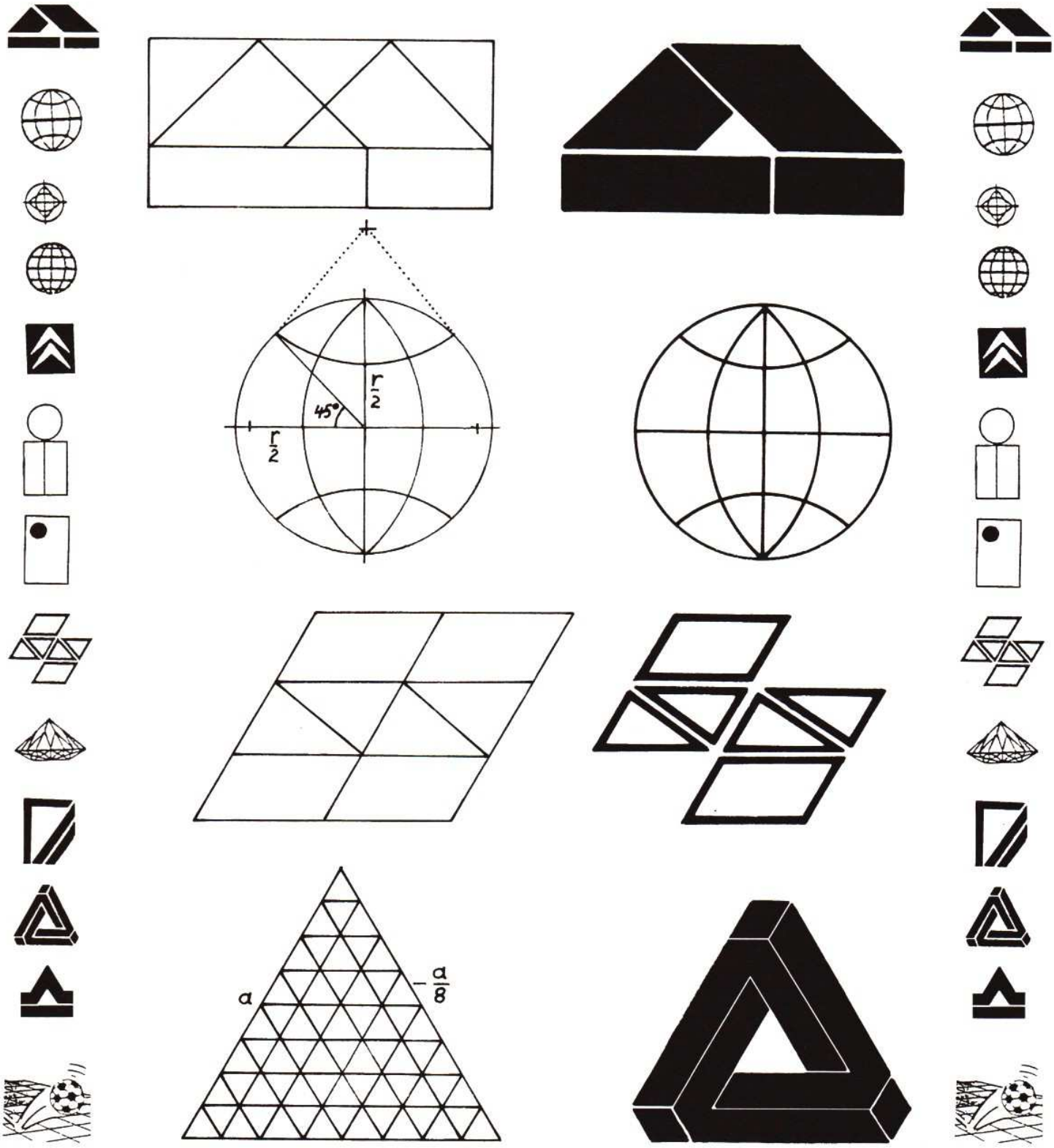


Aus einer Sonderausgabe der „Leipziger Volkszeitung“ wurden 25 geometrischen Vignetten ausgeschnitten (siehe die beiden Randleisten). Der Autor dieses Arbeitsblattes wählte fünf davon aus, vergrößerte sie und zeichnete sie neu. Links wurde jeweils eine Konstruktionsmöglichkeit zur rechts zugehörigen vollständigen Vignette gezeigt.

Zeichne diese Figurengruppen auf Zeichenkarton oder Transparentpapier nach! Wer Lust hat, kann sich weitere Beispiele auswählen oder in der Tagespresse aufspüren.

Viel Freude und Erfolg wünscht

OStR Johannes Lehmann, Leipzig



Marktecke

Goblins 3

Wie bei allen interessanten Spielen gehen die Meinungen wieder einmal weit auseinander. Der 3. Teil der GOBLINS-TRILOGIE hat es in sich. Entweder man mag diese Spektakel, oder man macht einen großen Bogen um diese Knobelei.

Das Konzept dieses dritten Teiles unterscheidet sich von seinen Vorgängern nicht. Mitnehmen und ausprobieren lautet die Devise, wobei man seit Teil 1 sicher sein kann, daß nicht die Logik an erster Stelle steht, sondern eher der überdrehte Witz – und der ist nun einmal nicht jedermanns Sache.

In diesem Teilepos müssen Blount, Reporter der Goblin News, die entzückende Wynonna befreien. Daß das Stoff für eine Menge Abenteuer ist, dürfte klar sein. Insgesamt steht der Gute vor 19 Rätseln, die teilweise über mehrere Bildschirme reichen. Doch unser Blunt steht allein. Dennoch fehlen die typischen Teamword-Puzzles nicht, denn Blount trifft auf allerlei freundliche Wesen, die ihm helfend zur Seite stehen.

Fünf Joker stehen allen wackeren Ratern zur Seite, man wird alle fünf nutzen. Doch hier hätte man jemand an die Teste setzen sollen, der wirklich kurze verständliche Texte schreiben kann. Manchmal kommen einem die Texte wie eigene kleine zum Spiele gehörige Puzzles vor. Da hat man vieles unnötig verkompliziert. Wie gesagt, die Puzzles haben mit Logik nur wenig zu tun. Da es mir nichts ausmacht, schnell einmal fünf Joker zu verbrauchen (schließlich kann man das Spiel in einem zweitem Pfad als „echtes Spiel" installieren), war immer wieder genügend Grund vorhanden, sich an den aberwitzigen Reaktionen, die sich auf manchen Mausklick auf dem Bildschirm abspielten, zu amüsieren.

Wer auf Spiele-Logik steht, sollte um diesen 3. Goblin einen großen Bogen machen. Wer sich an Teil 1 begeistern konnte und schon stöhnte, daß Teil 2 kaum innovativ war, der sollte selbst auf ein Goblin-Demo verzichten, denn neues wird hier in Sachen Goblin-Logik nicht geboten. Profi-Logik-Puzzler dürfen um diese Goblins deswegen einen großen Bogen machen.

Wer jetzt noch nicht abgeschreckt ist, den erwarten viele kauzige Gestalten, die bekannte Goblin-Cartoon-Grafik und zwischen den einzelnen Rätseln flotte Zwischensequenzen. Wer Goblins 3, wie oben beschrieben, im Doppelpack auf der Festplatte hat, kann sich durch Ausnutzen aller Jokermöglichkeiten immerhin auf eine Menge Gags freuen – und die sind genauso verrückt, wie sie bei den beiden ersten Teilen waren. Und deswegen sind diese Goblins für mich die besten Goblins – auch wenn mich jetzt einige am liebsten in die weite der Goblin-Landschaft verschwinden lassen möchten.

Hartmuth Seitz

The 7th Guest

Das erste nur für CD-ROM entwickelte Computerspiel beeindruckt. Multimedia vom Feinsten. Computergrafik und reale Filmaufnahmen machen mit einer Mischung aus gruseliger Musik und hervorragender Sprachausgabe auf den weiteren Spielverlauf neugierig.

Nach dem Vorspann lernt man als 7TH GUEST des Haus die Anwesenden kennen. Der Mauszeiger weist als knöchige Hand den Weg zum ersten Rätsel unseres Gastgebers Stauf. Selbst unbedarfte Denksportler haben das Problem, das mehrere Lösungen zuläßt nach kurzer Zeit gelöst und werden mit einer Abschlußsequenz belohnt.

Vor dem Puzzle auf der Eingangstür zeigen uns die Programmierer noch, was sie unter CD-ROM-Spiel verstehen. Den weiteren Weg können wir kaum verfehlen. Viele Zimmertüren geben ihre Rätsel erst preis, wenn man vorher erfolgreich war.

Macht das Haus des Spielzeugs, des Grusels und der Rätsel seinem Namen Ehre? 22 Logeleien sind zu entschlüsseln, doch nicht alles, was als Denksportaufgabe verkauft wird, ist eine. Das Wechselspiel der Gewürzdosen ist selbst für Menschen mit sehr guten Englischkenntnissen nur mit Lösungshilfe durchzuführen. Die ist, wie alle anderen Lösungen auch, in einem Rätselbuch in einem der Zimmer versteckt, dreimal nachlesen – und jedes Puzzle ist gelöst.

Buchstaben und Schachbretter sind für mehrere Logeleien gut, Verschiebebilder, Münzen- und Kartenpuzzle, Gedächtnistests. THE 7TH GUEST, ist pure DENKARBEIT – das ADVENTURE beschränkt sich auf die Einleitung und Zwischensequenzen.

Verpackt ist das Ganze in einer Buchkasette, gepackt ist es auf zwei CD-ROMS. Gepackt wird man von Grafik, Animation, Sound und Knobelzwang; bei letzterem mit Abstrichen. Die Diskrepanz zwischen leicht lösbar und gruselig schwierig ist groß, die Zahl der Rätsel klein. Inhaltlich wäre eine Streichholzschachtel angemessener, als zwei CD-ROMS.

Extreme Hardwarebedingungen, hoher Preis. Wer wird die gut 170 DM investieren? Wer es sich leisten kann! Wer CD's sammelt, für den wird dieses erste reine CD-Rom-Spiel eines Tages Sammelwert haben. Wer sich wirklich für Logeleien begeistert, der legt auf die buchartige Verpackung des Spieles keinen Wert, schließlich kann man für den Preis des Spieles mehrere gute Bücher dieses Genres anschaffen.

THE 7TH GUEST hinterläßt ein zwiespältiges Gefühl. Trotz aller optisch-akustischen Begeisterung gibt es als Gesamtnote eine „3". Das inhaltliche Preis-Leistungs-Verhältnis stimmt nicht. Bunte Bilder mit Sprachausgabe, da ist das Kino billiger.

H. Seitz

Kasparov's Gambit

Noch ein Schachspiel für den PC. Na, warum nicht, vor allem dann, wenn einer wie Weltmeister Kasparov seine Tips gibt. Schauen wir uns das Ganze einmal an.

KASPAROV'S GAMBIT ist von der Ausstattung her nicht mit Programmen wie CHINESE CHESS zu vergleichen. Derartige Figuren-Animationen fehlen hier völlig – hier werden nur plastische Figuren in drei wählbaren Grafikstilen in 2D- oder 3D-Sicht über das Brett geschoben. Zudem kann man den Bildschirm mit einigen nützlichen Fenstern füllen. Kasparov kommentiert den Spielverlauf – mit oder ohne Ton (mit russischem Einschlag) kann man hier erfahren, was der gute von dem gemachten Zug hält. Die einzelnen Züge werden in einem Notations-Fenster mitgeschrieben. Die Zugüberlegungen des Computers können bei Bedarf ebenfalls zugeschaltet werden. Das gilt auch für ein Analyse-Brett, auf dem der Computer versucht, den weiteren Spielverlauf vorauszuberechnen. Daß die Partien gespeichert und geladen werden können ist ebenso selbstverständlich, wie die Möglichkeiten der Zug-Rücknahme oder des Ausdrucks der Notation. Auf Wunsch gibt Kasparow sogar einen Tip, wie er das Spiel gestalten würde.

Antreten kann man gegen verschiedene Computergegner, die neben Namen wie Einstein, Mozart oder Picasso eine ebensolche Vielfalt von Spielstärken aufweisen. Forsche Angreifer sind darunter, vorsichtige Defensivkünstler – und Kasparov selber.

Spätestens wenn man sich die beiden zum Spiel gehörigen Handbücher anschaut, merkt man, wer mit diesem Produkt angesprochen wird. Recht knapp gehalten ist die 22seitige Verweiskarte, die in gebotener Kürze die technische Seite des Spiels erklärt. Den doppelten Umfang weist dagegen die Spielanleitung auf. Die Grundbegriffe des Schachspiels werden erklärt, in einem gesondertem Abschnitt wird man mit den grundlegenden Spielkonzepten vertraut gemacht – und in einem weiterem Kapitel erfährt man, wer Garri Kasparow ist und wie er spielt(e).

Man kann KASPAROVS GAMBIT deswegen in die Kategorie Computer-Lernprogramme einordnen. In 125 Tutorien beschäftigt man sich mit den Grundzügen der Strategie und Taktik des Schachspiels. An Schwierigkeiten kann man vom Anfänger bis zum Experten wählen. Der Anfänger wird dezent in das Spiel eingewiesen, Schachclubspieler könnten Partien nachspielen oder Turniere durchführen, der Experte kann sie trainieren, denn immerhin steckt in KASPAROV'S GAMBIT SOCRATES TT; der Gewinner der internationalen Schachcomputerweltmeisterschaften 1993.

Ist der legendäre CHESSMASTER ein Alleskönner der Spitzenklasse, gibt sich KASPAROV als solides Programm für Einsteiger und Fortgeschrittene, als Programm, das durch die Kasparov-Video-Clips stark aufgewertet wird und sich von solchen Flops wie TERMINATOR CHESS wohlwollend abhebt.

KASPAROV'S GAMBIT macht wirklich Spaß, wenn die nötige Hardware vorhanden ist. Super-VGA-Grafik mit 2MByte EMS-Speicher sollte man dem Programm schon anbieten.

Hartmuth Seitz

Die neue Reihe über die jungen Talente

In der neuen Reihe *Challengers – So spielt ...* soll die erfolgreiche Karriere junger Großmeister der absoluten Weltspitze unverwechselbar dokumentiert werden. Der erste Band ist Nigel Short gewidmet, dem derzeit besten Schachspieler des Westens.

Auf Wunderkindern lastet stets der Fluch hoher Erwartungen. Nigel Short hat sie erfüllt: Mit 14 teilte er den Sieg bei der Britischen Meisterschaft; mit 15 wird er Jugendvizeweltmeister hinter Garri Kasparow; mit 19 ist er Großmeister; mit 22 wird er WM-Kandidat und die Nummer drei der Schachwelt hinter K & K. Aus der großen Hoffnung des Westens wurde der Beste des Westens. Plötzlich aber der Karriereknick! Doch Nigel Short hat diese unerwartete Stagnation glänzend überwunden. Im April 1992 wirft er keinen Geringeren als Exweltmeister Anatoli Karpow aus dem Rennen um das Recht, mit Titelverteidiger Garri Kasparow um die Schachkrone zu spielen. Und seine Großmeisterkollegen attestieren ihm, daß er sich noch gehörig steigern kann.

Porträtiert hat den heute 27jährigen der Berliner Publizistikstudent Stefan Löffler, ein ausgewiesener Kenner der internationalen Schachszene. Ihm zur Seite steht der Leipziger Großmeister Rainer Knaak, der Shorts Partien kritisch unter die Lupe genommen hat, um so das Spiel des selbstbewußten Engländers auf seine Schwächen und Stärken abzuklopfen.

Übrigens: Weltmeister Kasparows Tip für das WM-Finale 1993 lautet: „My Challenger will be Short!" Deshalb unser Tip an alle Schachfans: Nehmt diese Herausforderung an und studiert das Spiel von Nigel Short. Gewinnbringende Ideen für die eigene Praxis sind mit diesen ungewöhnlichen Schachbuch garantiert!

Stefan Löffler (Hrsg.): Challengers – So spielt Nigel Short
Ca. 128 Seiten, ca. 10 Fotos, ca. 70 Diagramme, 13,8 x 22,5 cm, Broschur
DM 24,80, ISBN 3-328-00586-2
Sportverlag 1993

Leserbief

Mit meinen Freunden Karl Palma, Zürich und Hans Klauser, Rudolfstetten, beschäftigen wir uns mit den in alpha publizierten Themen und Aufgaben.
Im Heft vom Februar 1993 erwähnen Sie, daß Leserbriefe willkommen sind. Nun, ich möchte von dieser Gelegenheit einmal Gebrauch machen, und zwar bezugnehmend auf die Einsendung von Herrn Prof. Dr. Michael Benjamin betreffend „Pythagoräische Zwillinge". In den folgenden Ausführungen versuche ich nachzuweisen:

1.) daß die Pythagoräischen Zwillinge (Differenz der Katheten |a-b|=1 eine unendliche Reihe von Pell-Zahlen darstellen,
2.) daß es noch unendlich viele weitere Pythag. Zwillinge gibt, aber mit der Differenz |a-b| höher als 1 (7, 17, 23, 31, 41, ...). Auch diese lassen sich in unendlichen Reihen mit je identischer Differenz darstellen, wobei immer Pell-Zahlen involviert sind,
3.) daß ein enger Zusammenhang besteht zwischen den Tripeln mit der Summe a+b, und den Tripeln mit der Differenz |a-b| gleichen Wertes,
4.) daß zahllose Zusammenhänge bestehen zwischen den einzelnen Tripeln, wobei auch hier Pell-Zahlen involviert sind.

Diese Berechnungen habe ich unter Mitwirkung mit meinen oben genannten Freunden ausgearbeitet. In der Folge habe ich die einschlägige Literatur in den Bibliotheken der Zürcher Hochschulen konsultiert, aber keine Hinweise im Sinne meines Manuskripts gefunden.

Pythagoräische Zwillinge

Pythagor. Zwillinge, d. h. Pythagor. Tripel, bei denen die Differenz |a-b|=1 beträgt, und deren Katheten und Hypothenuse Pell-Zahlen entsprechen.

Pell-Zahlen: $P_{n+2}=2P_{n+1}+P_n$; $P_0=0$, $P_1=1$
$Q_{n+2}=2Q_{n+1}+Q_n$; $Q_0=1$, $Q_1=1$

$P_0 = 0$	$Q_0 = 1$
$P_1 = 1$	$Q_1 = 1$
$P_2 = 2$	$Q_2 = 3$
$P_3 = 5$	$Q_3 = 7$
$P_4 = 12$	$Q_4 = 17$
$P_5 = 29$	$Q_5 = 41$
.. ..	.. ..

Unendliche Reihe von Pythagor. Tripeln, bei denen die Katheten |a-b|=1 Pythagor. Zwillinge bilden und deren Werte Pell-Zahlen entsprechen.

n	a	b	c
	$\frac{Q_{3+2n}+(-1)^n}{2}$	$\frac{Q_{3+2n}+(-1)^{n+1}}{"}$	P_{3+2n}
0	4	3	5
1	20	21	29
2	120	119	169
3	696	697	985
4	4'060	4'059	5'741
..	...	...	...

Pythagor. Tripel, bei denen die Differenz der Katheten |a-b| den Wert von $|(1+2n)^2 - 2^{1+2m}|^*$ aufweist, und jeder dieser Werte in einer unendlichen Reihe von Tripeln vorkommt. * oder: $|(1+2n)^2 - 2\cdot m^2|$ n, m = 1, 2, 3, ..., (1+2n) m = coprime. Die Tripel mit solchen Differenzen lassen sich von Basis-Tripeln ableiten, deren Summe a+b identisch ist mit dem Wert der Differenzen |a-b|.

Beispiel I.
Basis-Tripel: a=120, b=119, c=169 (= Pell-Zahlen)
Summe der Katheten a+b=239.
Die nachfolgende unendliche Reihe mit dem Wert |a-b|=239 errechnet sich wie folgt. Zuerst die Tripel T_1 und T_2:
siehe Tabelle 1

Alle folgenden Tripel, bzw. Tripel-Paare, errechnen sich nach folgender Rekursions-Regel (dazu existieren noch weitere Berechnungs-Methoden):
1.) Vorerst S und D jedes Tripels berechnen, und zwar:
$S_{3+n}=2S_{1+n}+D_{1+n}$ $D_{3+n}=S_{1+n}$

2.) $a,b_{3+n} = \frac{S_{3+n}-S_{1+n}}{2}$

$c_{3+n} = \frac{S_{3+n}-S_{1+n}}{2}$

siehe Tabelle 2

Anmerkung: Bei Additionen und Multiplikationen verschiedener a, b, c, S, D, Werte ergeben sich überraschende Resultate, insbesondere in Bezug auf Pell-Reihen. Es bleibt dem Leser überlassen, entsprechende Berechnungen vorzunehmen.

1.) $2\cdot119-120=118$ Differenz $|a_1-a_2|=P_2\cdot118$
2.) $2\cdot120-119=121$ Differenz $|b_1-b_2|=P_2\cdot121$
3.) $2\cdot169=338$ Summen a_1+a_2 und b_1+b_2 $=P_2\cdot338$
Summe c_1+c_2 $=Q_2\cdot338$

T				+ c−b		+ c−b	
T	a	b	c	S	D	S	D
							2·
1	220(P_2·	459(P_2·	509(Q_2·	27^2	17^2	22^2	5^2
2	456(338	217(338	505(338	31^2	7^2	19^2	12^2

S = Summe c+a / c+b D = Differenz c−a / c−b

Tabelle 1

T	a	b	c	+ c−b S	+ c−b D	+ c−b S	+ c−b D
							2.
3	2'156(p_4·	1'917(P_4·	2'885(Q_4·	71^2	27^2	49^2	22^2
4	1'900(338	2'139(338	2'861(338	69^2	31^2	50^2	19^2
5	11'760(P_6·	11'999(P_6·	16'801(Q_6·	169^2	71^2	120^2	49^2
6	11'900(338	11'661(338	16'661(338	169^2	69^2	119^2	50^2
7	69'360(P_8·	69'121(P_8·	97'921(P_8·	409^2	169^2	289^2	120^2
8	69'544(338	68'783(338	97'105(338	407^2	169^2	288^2	119^2
..	...	...	...	..	..	..	..

Tabelle 2

1.) $2 \cdot 475 - 132 = \underline{818}$ Differenz $|a_1 - a_2| = P_2 \cdot 818$

2.) $|2 \cdot 132 - 475| = \underline{211}$ Differenz $|b_1 - b_2| = P_2 \cdot 211$

3.) $2 \cdot 493 = \underline{986}$ Summen $a_1 + a_2$ und $b_1 + b_2 = P_2 \cdot 986$

Summe $c_1 + c_2 = Q_2 \cdot 986$

$\underline{S}$ = Summe $\begin{matrix} c+a \\ c+b \end{matrix}$ $\underline{D}$ = Differenz $\begin{matrix} c-a \\ c-b \end{matrix}$

						+ $\underline{c-b}$		+ $\underline{c-b}$ 2.
T	a	b	c	S	D	S	D
1	$168(P_2 \cdot$	$775(P_2 \cdot$	$793(Q_2 \cdot$	31^2	25^2	28^2	3^2
2	$1'804(986$	$1'197(986$	$2'165(986$	63^2	19^2	41^2	22^2
3	$3'304(P_4 \cdot$	$2'697(P_4 \cdot$	$4'265(Q_4 \cdot$	87^2	31^2	59^2	28^2
4	$8'528(986$	$9'135(986$	$12'497(986$	145^2	63^2	104^2	41^2
5	$17'228(P_6 \cdot$	$17'835(P_6 \cdot$	$24'797(Q_6 \cdot$	205^2	87^2	146^2	59^2
6	$51'792(986$	$51'185(986$	$72'817(986$	353^2	145^2	249^2	104^2
..	...	...	...	..	..	..	..

Tabelle 3

Wenn die Differenz |a-b| eine Primzahl ist, so ergibt sich eine einzige Reihe. Wenn hingegen |a-b| eine zusammengesetzte Zahl ergibt, dann resultieren daraus zwei oder mehrere Reihen.

Beispiel II.
Basis-Tripel: a=132, b=475, c=493
Summe der Katheten a+b=607
Die unendliche Reihe mit dem Wert |a-b|=607 errechnet sich wie folgt: Zuerst die maßgebenden Werte für die Tripel T_1 und T_2 (*Tabelle 3*)

Anmerkung: Jedes Tripel ist nicht nur ein Term einer Reihe mit identischer Differenz |a-b| (Beispiel I und II), sondern auch ein Term mehrerer unendlicher Reihen mit steigenden Summen und Differenzen.

a	b	c	Summe a+b
24	7	25	31
60	91	109	151
96	247	265	343
132	475	**493**	**607**

M. Wachtel, Zürich

Lösungen

Lösungen S. 8: Zeitungsschnipsel

Lösung Sammlermünze:
SIEGESGÖTTIN

Lösung Hagelkörner: Da das Volumen von 660g Wasser $600cm^3$ beträgt, hat dieses Hagelkorn das Volumen $V = 600cm^3 \cdot 1{,}09 = 654cm^3$. Ist der Durchmesser dieses Hagelkornes, so folgt aus $V = \frac{\pi}{6} \cdot d^3$

(Volumenformel der Kugel) $d = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} \approx 10{,}8$ cm.

Lösungen S. 11: Sprachecke

Die Umfänge. Entlang des Umfangs eines Tischtennisballs bzw. des Äquators der Erde seien jeweils Fäden A und B gespannt. Um welche Länge nehmen diese zu, wenn man beschließt, den Abstand der Fäden von der Oberfläche des Tischtennisballs bzw. der Erde um gleichermaßen 1m zu vergrößern?

Lösung: Les périmètres. Die ursprünglichen Längen der Fäden sind:
Tischtennisball: $l_1 = \pi d_1$
Erde: $l_2 = \pi d_2$
Nach der Abstandsvergrößerung um 1m sind die Fäden:
Tischtennisball:
$L_1 = \pi (d_1 + 2) = \pi d_1 + 2\pi = l_1 + 2\pi$
Erde: $L_2 = \pi (d_2 + 2) = \pi d_2 + 2\pi = l_2 + 2\pi$

Aus der Rechnung ist zu erkennen, daß die Längenzunahme der Fäden in beiden Fällen gleich ist und 2π m beträgt. Wer hätte das gedacht?

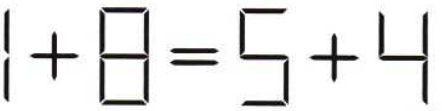
Eine außergewöhnliche Reihe ganzer Zahlen
Finde drei ganze Zahlen so, daß sich bei Addition irgendeiner dieser Zahlen zum Produkt der beiden anderen immer 2 ergibt. (Denke auch an die negativen Zahlen!)

Lösung: An unusual set of integers. Lösungen sind: (1, 1, 1) und (-2, -2, -2)

Lösung zu
Im Blickpunkt Das Jahr 1994 (von Dr. R. Mildner)

1. Jahreszahl in Prozenten
Das Rechteck hat einen Flächeninhalt von 128 FE (Flächeneinheit). Die Jahreszahl (schwarze Fläche) beansprucht 37 FE, das sind rund 28 Prozent der Rechteckfläche.

2. Hölzchenspiel



3. Zwei natürliche Zahlen
Seien a und b die beiden gesuchten Zahlen. Dann muß gelten:
$95a - 19b = 19$
$-94 + 20b = 94.$
Dieses lineare Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung: $a = 19$, $b = 94$.

4. Summe und Produkt
Seien x und y die beiden gesuchten Zahlen. Dann muß gelten:
$x + y = 999$(1)
$x \cdot y = 1994.$(2)
$y = 999 - x$ aus (1) in (2) eingesetzt ergibt die quadratische Gleichung

$$x^2 - 999x + 1994 = 0,$$

welche die beiden Lösungen $x = 2$ und $x = 997$ besitzt. Die zugehörigen y-Werte lauten dann $y = 997$ und $y = 2$. Die gesuchten Zahlen sind also 2 und 997. Bemerkung: Es ist $1994 = 2 \cdot 997$ die Primafaktorzerlegung der Zahl 1994.

5. Rechenspaß mit Jahreszahlen
$1 + 9 - 9 + 3 = 1 \cdot 9 - 9 + 4$ (= 4)
$1 + 9 : 9 + 3 = 1 \cdot 9 : 9 + 4$ (= 5)
$1 \cdot 9 - 9 : 3 = 1 + 9 : 9 + 4$ (= 6)
$1 \cdot 9 + 9 - 3 = 1 + 9 + 9 - 4$ (=15)
$1 + 9 + 9 + 3 = 1 \cdot 9 + 9 + 4$ (=22)

$1+9\cdot 9:3=1-9+9\cdot 4\ (=28)$
$1\cdot 9\cdot 9-3=1+9\cdot 9-4\ (=78)$
$1+9\cdot 9+3=1\cdot 9\cdot 9+4\ (=85)$

6. Größenvergleich

Wegen $1993\cdot 1993 > 1992\cdot 1994$, d. h. $3972049 > 3972048$, ist $y = 1993/1994$ größer als $x = 1992/1993$.

7. Umordnung

1	9	9	4
9	1	4	9
9	4	1	9
4	9	9	1

8. Eine harte Nuß

Das vorgelegte (nichtlineare) Gleichungssystem sieht nach äquivalenter Umformung wie folgt aus:

$x^3 - 78x - 57y = 19\ (1)$

$(y - 94)(1 - 4x^2) = 0\ (2)$

Gleichung (2) ist nur für $y = 94$, $x = 1/2$ oder $x = -1/2$ erfüllbar, wobei lediglich $y = 94$ eine natürliche Zahl, wie gefordert, ist. Für $y = 94$ geht Gleichung (1) über in $x^3 - 78x - 5377 = (x - 19)(x^2 + 19x + 283) = 0$. Diese Gleichung dritten Grades hat nur die reelle (natürliche) Lösung $x = 19$ (die beiden anderen Lösungen sind komplexe Zahlen). Also gibt es nur das eine Paar $(x, y) = (19,94)$ natürlicher Zahlen, das (1) und (2) und damit das ursprüngliche Gleichungssystem erfüllt, wie man durch die Probe leicht bestätigt.

Bemerkung: Das zu lösende Gleichungssystem dieser Aufgabe besitzt insgesamt, d. h. über dem Bereich der komplexen Zahlen, die folgenden 5 Lösungspaare (x, y): $(19,94)$ $(-1/2;-53/152)$, $(1/2; -463/456)$, $(-19/2+\sqrt{771}\,i/2;94)$ $(-19/2+\sqrt{771}\,i/2;94)$

Aber nur das Paar $(19,94)$ entspricht den Forderungen der Aufgabenstellung.

9. Kryptographie

$$\begin{array}{r} 1993*1994 \\ \hline 7972 \\ 17937 \\ 17937 \\ 1993 \\ \hline 3974042 \end{array}$$

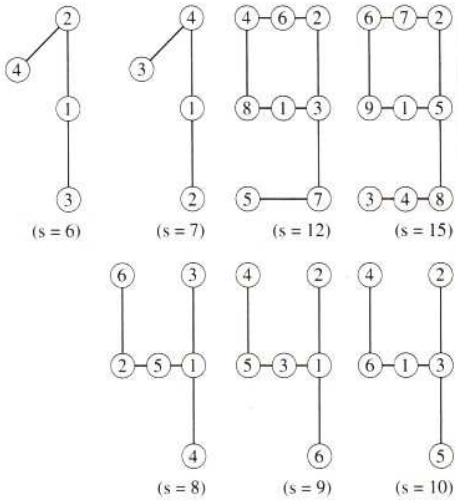
10. Gerechte Teilung

9							1
4						4	
		1	9	9	4		
9		1	9	9	4		9
9							1

11. Geheimnisvolles x

Es ist $x = 4\cdot 997/2 = 1994$, denn jede Zahl ist gleich dem Produkt der Eckzahl des umgebenden Vielecks mit 997/2.

12. Magische Jahreszahl



13. Jahr 2000 in Sicht

Es ist $2000 = 1\cdot 2\cdot 5\cdot 10\cdot 20$ (1. Weg) und $2000 = 2\cdot 4\cdot 10\cdot 25$ (2. Weg).

Lösungen zu „Fullerene faszinieren die Chemiker"

Da das Polyeder konvex ist, ist die Summe der Innenwinkel der begrenzenden Flächen, deren Scheitelpunkte mit einer Polyederecke koinzidieren, kleiner als 360°. Mithin können an jede Polyederecke entweder a) 2 Fünfecke und ein Sechseck oder b) ein Fünfeck und 8 Sechsecke anstoßen.

Der Fall a kann nicht vorliegen: Denn für ein derartiges Polyeder mit m Fünfecken und n Sechsecken müßte für die Zahl der Ecken $e = \frac{5m}{2} = 6n = 60$ gelten. Damit müßte $m = 24$ und $n = 10$ und die Zahl der Flächen $f = m + n = 34$ sein. Die Zahl der Kanten wäre $k = \frac{5m+6n}{2} = 90$. Und es würde im Widerspruch zum Eulerschen Polyedersatz $e-k+f = 4$ 2 gelten, was nicht möglich ist.

Also muß der Fall b vorliegen: Ist m die Zahl der begrenzenden Fünfecke und n die der Sechsecke, so ist die Zahl der Ecken $e = 5m = \frac{6n}{2} = 60$. Hieraus folgt $m = 12$ und $n = 20$ sowie $f = m+n = 32$.

Die Zahl der Kanten ist $k = \frac{5m+6n}{2} = 90$.

Da $e-k+f = 60-90+32 = R$ gilt, kann nach dem Eulerschen Polyedersatz ein derartiges Polyeder existieren. Es existiert und ist uns bekannt: Die Ecken eines derartigen Polyeders sind z. B. die Ecken der oft auf einem kugelförmigen Fußball farbig markierten Kugelflächen. Ein solches Polyeder entsteht durch geeignetes Abstumpfen (Abtrennen von 12 regelmäßigen fünfseitigen Pyramiden) aus einem regulären Ikoseader (von 20 gleichseitigen kongruenten Dreiecken begrenztes Polyeder).