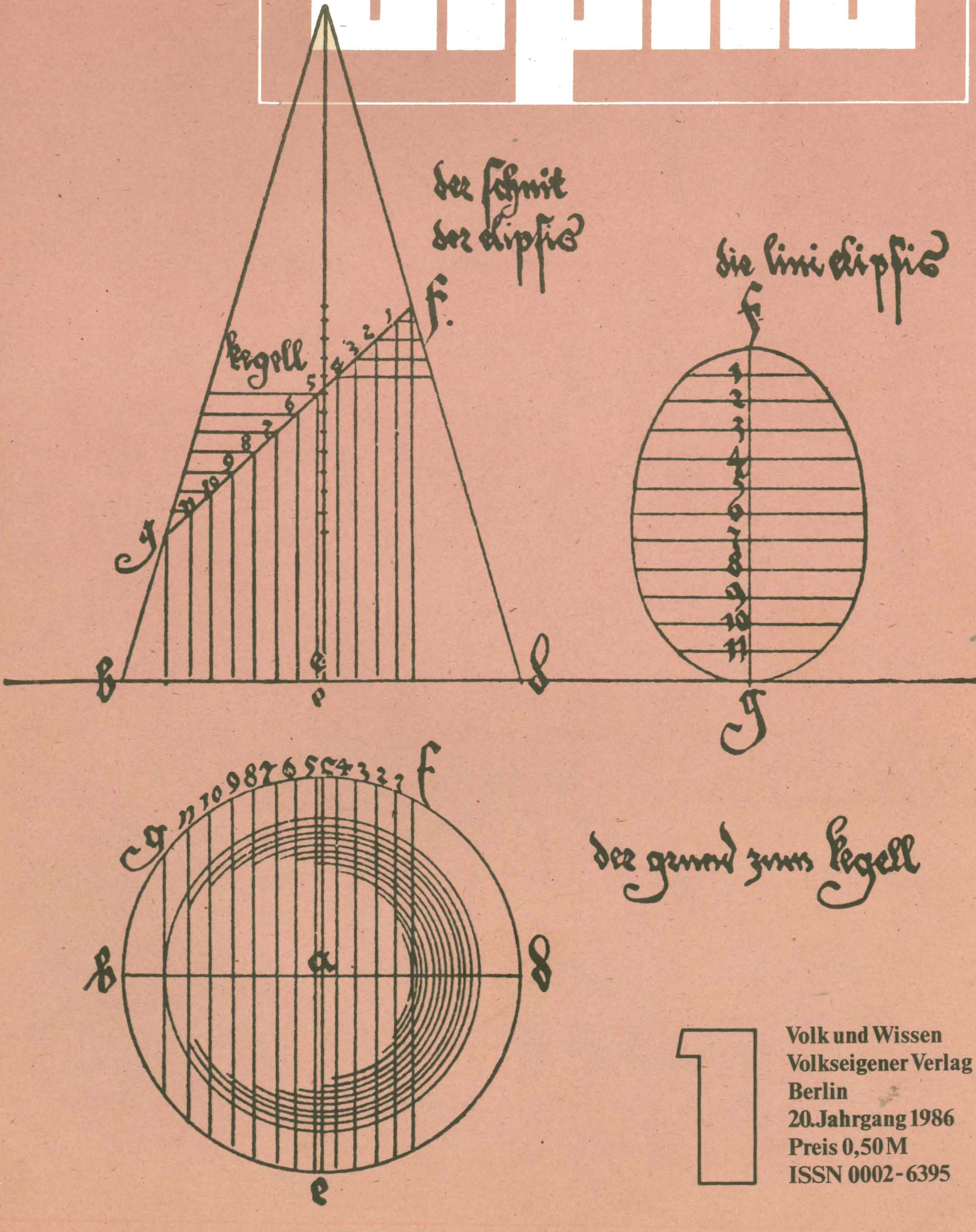
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



1

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
20. Jahrgang 1986
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
1086 Berlin, Krausenstr. 50, PSF 1213
Anschrift der Redaktion:
7027 Leipzig, PSF 14
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: ADN/Zentralbild (S. 5); G. Setzer, Greifswald (S. 6); J. Karsten, G. Stelzer (2×), Greifswald (S. 8/9); H. Parschau, Berlin (S. 15); P. Schreiber, Greifswald (S. 16)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig
Titelbild: Hyperbolischer Schnitt eines Drehkegels aus Dürers „Unterweysung", für *alpha* gestaltet von W. Fahr, Berlin

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 14. Oktober 1985
Auslieferungstermin: 15. Februar 1986

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

[1] bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben geeignet ab der angegebenen Klassenstufe

Dem Satz des Pythagoras auf der Spur

Euklid bewies den Satz des Pythagoras geometrisch. Er konstruierte über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks Quadrate und zeigte, daß die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse ist.

Im folgenden soll ein weiterer Beweis dieses Satzes angeführt werden. Anschließend seien noch einige Figuren gezeigt, für die dieselbe *pythagoreische Beziehung* erfüllt ist, wie sie für die obengenannten Quadrate gilt.

Der Beweis des Satzes des Pythagoras geht aus den Bildern 1a bis 1f hervor.

Er benutzt die Tatsache, daß die Höhe im rechtwinkligen Dreieck und die Diagonale des Rechtecks, das von den Verlängerungen der Seiten der Kathetenquadrate gebildet wird, auf ein und derselben Geraden liegen. (Dies läßt sich leicht mit Hilfe kongruenter Dreiecke beweisen.) Außerdem ist die Flächengleichheit von Parallelogrammen mit gleicher Grundlinie und Höhe zu beachten.

Verallgemeinert man den Satz des Pythagoras *Sind a und b die Längen der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks und c die Länge seiner Hypotenuse, so gilt* $a^2 + b^2 = c^2$, dann stellt man fest, daß für Figuren A, B, C mit den Flächeninhalten

$A_A = ka^2$, $A_B = kb^2$ und $A_C = kc^2$

die Beziehung

$A_A + A_B = A_C$ bzw. $ka^2 + kb^2 = kc^2$ gilt.

Insbesondere ist diese *pythagoreische Beziehung* auf die Flächeninhalte zueinander ähnlicher Figuren, die über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks konstruiert sind, anwendbar.

Über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks werden jetzt Kreissektoren (Bild 2), Halbkreise (Bild 3), Möndchen (Bild 4) und Kreisbogendreiecke (Bild 5) gezeichnet.

Durch Kombination von Kreissektoren, Kreisen, Möndchen und Kreisbogendreiecken erhält man die Bilder 6 und 7.

Auf ihnen ist jeweils wieder die Summe der Flächeninhalte der grauen Figuren gleich dem Flächeninhalt der schraffierten Figur. Dies läßt sich mit Hilfe der Bilder 2, 3, 4 und 5 nachweisen. Zum Beispiel ist im Bild 6

$\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{\pi}{4}b^2 = \frac{\pi}{4}c^2$ mit $k = \frac{\pi}{4}$.

Bild 2

$\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{\pi}{4}b^2 = \frac{\pi}{4}c^2$

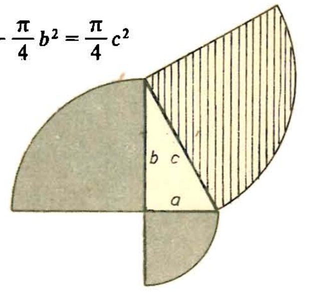


Bild 3

$\frac{\pi}{8}a^2 + \frac{\pi}{8}b^2 = \frac{\pi}{8}c^2$

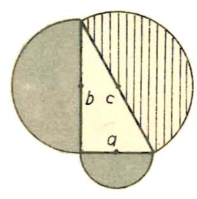


Bild 4a

$\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{\pi}{4}b^2 = \frac{\pi}{4}c^2$

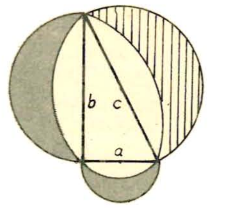


Bild 4b

$A = \frac{a^2}{4}$

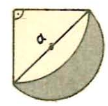


Bild 5a

$\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{\pi}{4}b^2 = \frac{\pi}{4}c^2$

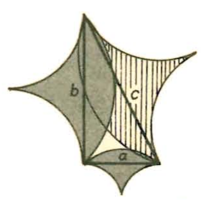


Bild 5b

$A = \frac{a^2}{4}$

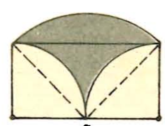


Bild 6a

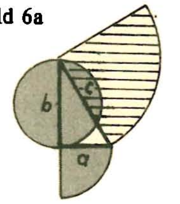


Bild 6b

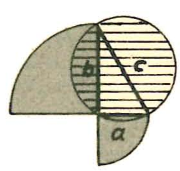


Bild 7a

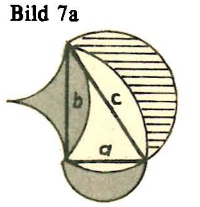


Bild 7b

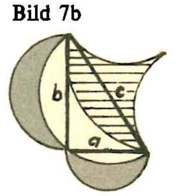
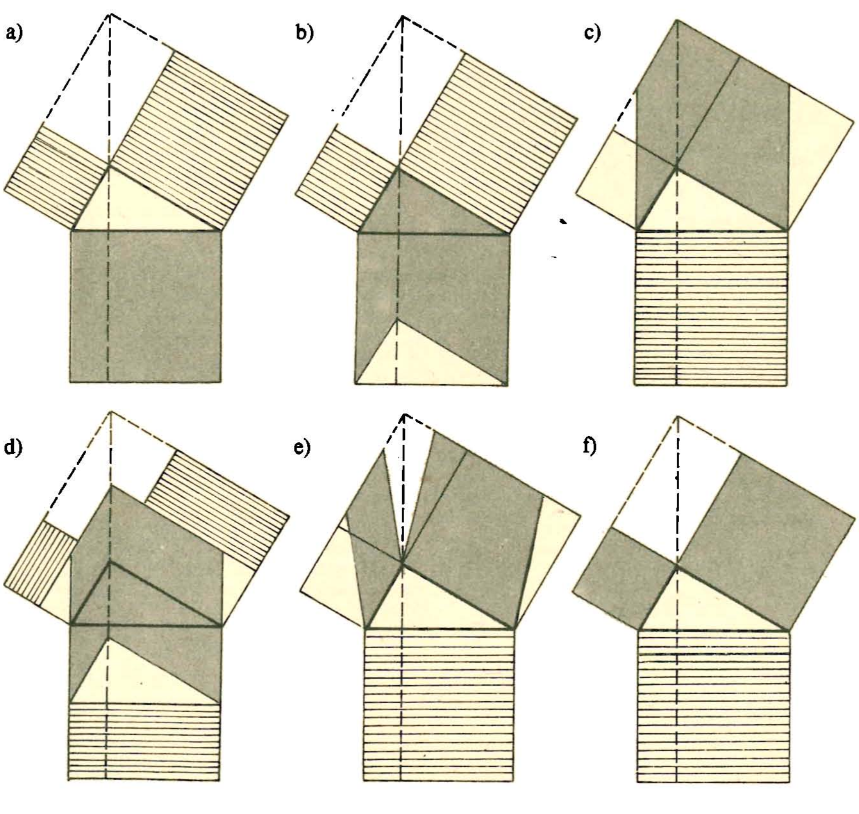


Bild 1



Auf den Bildern 8 bis 11 sind jeweils drei flächeninhaltsgleiche Figuren gezeichnet. Ist a die Seitenlänge des Quadrates, so gilt für alle Figuren von

Bild 8
$A = a^2$

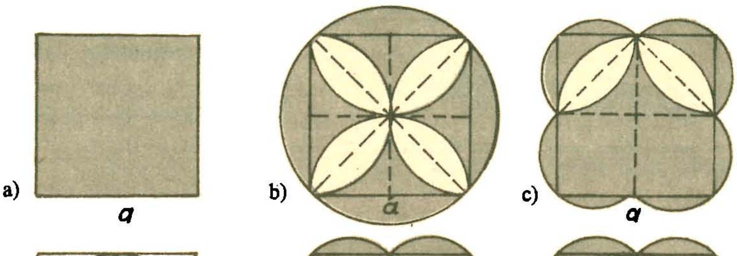


Bild 9
$A = \frac{a^2}{2}$

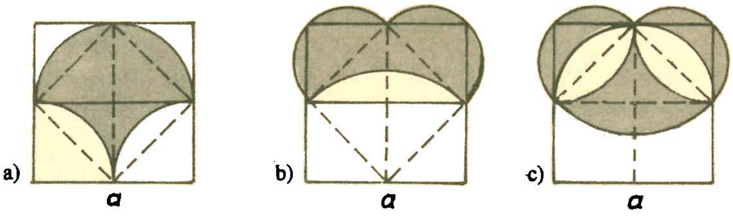


Bild 10
$A = \frac{3a^2}{4}$

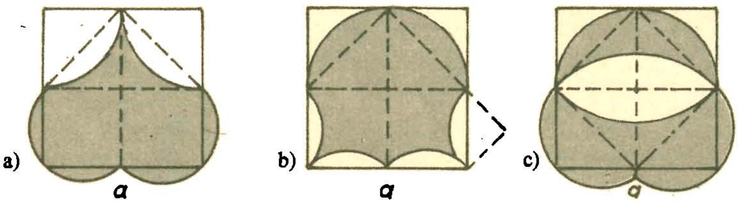
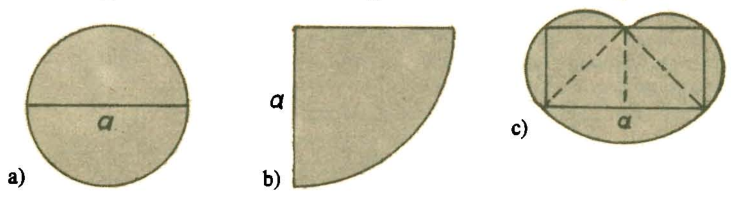


Bild 11
$A = \frac{\pi a^2}{4}$



Diese Beziehungen kann man nachweisen, indem man die schraffierten Teile in günstige Teilflächen zerlegt, die man dann leichter berechnen kann. Ein Beispiel für eine mögliche Zerlegung ist für Bild 8c) gezeichnet worden. Nach Bild 12 gilt

$$A = 2A_1 + A_2 + A_3 + 2A_4,$$

$$A_1 = \frac{\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 \cdot \pi}{4 \cdot 2} = \frac{\pi}{16}a^2,$$

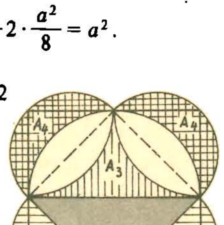
$$A_2 = \frac{\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2}{2} = \frac{a^2}{4},$$

$$A_3 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2 \cdot \pi}{4 \cdot 2} = \frac{a^2}{2} - \frac{\pi}{8}a^2,$$

$$A_4 = \frac{\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2}{4} = \frac{a^2}{8},$$

$$A = 2 \cdot \frac{\pi}{16}a^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} - \frac{\pi}{8}a^2 + 2 \cdot \frac{a^2}{8} = a^2.$$

Bild 12



Kombiniert man diese Figuren mit den Katheten und der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, so erhält man die Bilder 13 bis 16.

Bild 13

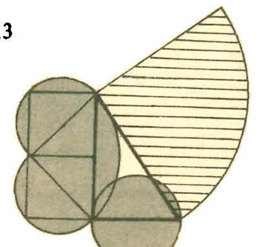


Bild 14

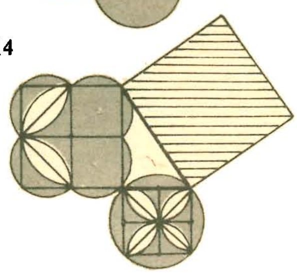


Bild 15

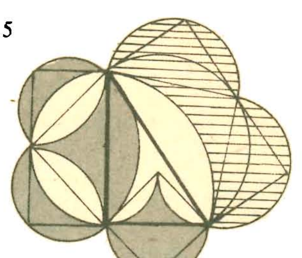
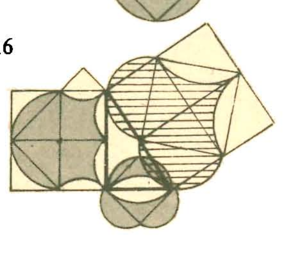


Bild 16



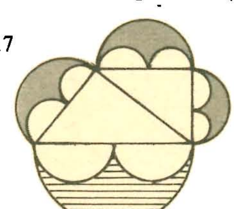
Eine Aufgabe von Prof. Dr. L. G. Aslamasow und Dr. I. S. Slobodezki

Hochschule für Stähle und Legierungen/ Institut für Hochdruckphysik der Akademie der Wissenschaften, Moskau

▲2635▲ In einer Filmkamera und in einem Filmprojektor laufen 16 Bilder pro Sekunde ab. Auf der Leinwand bewegt sich ein Auto, dessen Räder in Wirklichkeit einen Durchmesser von 1 m haben. Die auf die Leinwand projizierten Räder führen 4 Umdrehungen pro Sekunde aus. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Autos?

Zum Abschluß soll nun bewiesen werden, daß die Summe der Flächeninhalte der drei grauen Bogendreiecke, die über den Seiten eines rechtwinkligen Trapezes konstruiert sind und dessen eine Diagonale senkrecht auf einem seiner Schenkel steht, gleich dem Flächeninhalt des schraffierten Bogendreiecks über der größeren der parallelen Seiten des Trapezes ist (Bild 17).

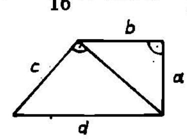
Bild 17



Lösung:
Bezeichnet man die Seiten des Trapezes wie in Bild 18, so gilt die Gleichung

$\frac{\pi}{16}a^2 + \frac{\pi}{16}b^2 = \frac{\pi}{16}e^2$,

$\frac{\pi}{16}e^2 + \frac{\pi}{16}c^2 = \frac{\pi}{16}d^2$ bzw. $\frac{\pi}{16}a^2 + \frac{\pi}{16}b^2 + \frac{\pi}{16}c^2 = \frac{\pi}{16}d^2$ mit $k = \frac{\pi}{16}$.



Nach einem Artikel von *R. Rubinow* aus der sowj. math. Schülerzeitschrift *Quant*, Moskau; bearbeitet von *H. Begander*, Leipzig

alpha-Wettbewerb 1984/85

Preisträger

Wolfram Schubert, Ulrich Egermann, Matthias und Beatrice List, alle Altenburg; Birger Strauch, Anklam; Veneta Türke, Auerbach; Evelyn Peter, Bad Liebenstein; Ute Partsch, Bad Salzungen; Oliver Maspfuhl, Dörthe Malzahn, Peter Zülsdorff, Anita Winter, Sven Hartmann, Holger Laabs, Jörg Reichenberger, Christian Korner, Katja Geißler, Denise Gemeinhard, alle Berlin; Alice Kraneis, Bernburg; Ingrid und Ulrich Voigt, Böhlen; Christina Werner, Bötzow; Michael Kremmer, Breitungen; Mario Leibitzki, Frank Wolf, beide Brotterode; Thomas Gerlach, Buhla; Hendrik Roeke, Thomas Reißner, Silvio Löffler, alle Cottbus; Thomas Kaufhold, Dingelstädt; Karsten Simnon, Leonhard Karsch, beide Dresden; Maik Denner, Empfertshausen; Andreas Hoger, Ehnes; Jana Reinhardt, Katharina Hildebrandt, beide Fambach; Falk Berger, Glienicke; Michaela Große, Gohrau; Michael Hanke, Gräfenhainichen; Thilo Kuessner, Greifswald; Frank Schneegaß, Großbodungen; Karsten Hennig, Großörner; Sven Rudolph, Großröhrsdorf; Alois Belter, Hagenow; René Thonfeld, Hammerbrücke; Schulclub der EOS W. Pieck, Birgit Bremer, beide Heiligenstadt; Mathias Hascher, Heinrichsort; Stefan Heiber, Heyda; Henry Wiesjahn, Holzendorf; Steffen Kowalick, Hoyerswerda; Marco Ringel, Jänickendorf; Jan Rüdiger, Niels Neumann, beide Jena; Klaus Erdmann, Joachimsthal; Markus Glück, Jößnitz; Nico Schmidt, Jüdenberg; Henrik Hodam, Klatennordheim; Torsten Thieme, Olaf Vogel, beide Kamenz; Astrid Mirle, Kleindehsa; Carsten Blech, Kl. Rodensleben; Torsten Schütze, Klettenberg; Marco Rogozia, Ladeburg; Jaqueline Echhorn, Lauscha; Kathrin Asche, Leimbach; Henrik Holke, Andreas Englisch, beide Leipzig; Hardy Dömpke, Löderburg; Anke Harnisch, Lützen; Giselher Schütze, Magdeburg; Marco Lisker, Nachterstedt; Jens Burmann, Manuela Grewe, beide Neuhaus; Torsten Westphal, Neuruppin; Jürgen Nicolai, Ortrand; Carola Walter, Ottendorf-Okrilla; Carola Sachs, Dörte Schappler, beide Parchim; Jan Fricke, Pasewalk; Felix Kraenz, Picher; Karen Meyer, Daniela Wulft, Holger Stasch, Mark Bludszuweit, alle Rostock; Matthias Kittner, Schmalkalden; Tobias Franke, Schrebitz; Reiner Möwald, Sömmerda; Jörg Büchner, Axel Bichler, beide Sondershausen; Una Brock, Stralsund; Claudia Schwartz, Suhl; Marco Treichel, Unterbreizbach; Frederik Schiller, Voigtsgrün; Claudia Nehring, Edith und Hartmut Boettcher, alle Weimar; Silvio Ladusch, Weißwasser; Cornelia Kurtz, Karin Kurtz, beide Wittenburg; Ralf Klötzer, Wilkau-Haßlau; Dana Wengrzik, Zwickau; Susan Huschke, Grimma

Vorbildliche Leistungen
Uta Schmidt, Altenburg; Frank Gembus, Altentreptow; Claudia Raßbach, Bad Liebenstein; Michael Henning, Marcus Markardt, beide Bad Salzungen; Michael Sternberg, Bärenwalde; Frank Wagner, Silke Baars, Marit Rigow, Nadja Baron, Petra Döring, Robert Krüger, Tom Pfeifer, Martin von Löwis, alle Berlin; Angela Herrmann, Jens Baumann, beide Bernsbach; Winfried Reßler, Bernburg; Alexander Tauchnitz, Borna; Dirk Feuerherdt, Brandenburg; Torsten Peter, Frank Wolff, beide Brotterode; Susan Dreyer, Cottbus; Wolfgang Jäckel, Demitz-Thumitz; Birga Schroeder, Demmin; Angela Hahn, Stefan Diez, Sabine Hermsdorf, Birgit Jeske, alle Dresden; André Kratzert, Dürröhrsdorf; Corinna Mäder, Fambach; Thomas Mittelstädt, Freiberg; Andreas Wahren, Freienhufen; Nadine Koch, Gehofen; Henry Schlosser, Yvette Vogelsberger, Thomas Gießmann, alle Greifswald; Maike Thiele, Grimma; Astrid Gärtner, Großröhrsdorf; Kristin Stöbe, Guben; Jörn Pamperin, Hagenow; Entje Ecksturm, Halberstadt; Gunar Thoß, Hammerbrücke; Antje Stehfest, Havelberg; Volker Reck, Heiligenstadt; Maik Otto, Holzthaleben; Bert Frenzel, Horka; Jan Richling, Hohen Neuendorf; Petra Koglin, Hoyerswerda; Dirk Hübel, Ilmenau; Claudia Docter, Ilsenburg; Andreas Gutsch, Kahla; Jana Hodam, Kaltennordheim; Conny Weschenfelder, Lauscha; Kirsten Schröter, Katrin Anton, beide Leegebruch; Martin Schreiter, Leinefelde; Jens Grundmann, Limbach-O.; Marco Schmidtgen, Luckenwalde; Sven Pfeffer, Magdeburg; Steffen Scharnowski, Möser; Mirko Naumann, Mügeln; Sven Saar, Mühlhausen; Thomas Engel, Nachterstedt; Tobias Otto, Niederwiesa; Torsten Müller, Ohrdruf; Uwe Anke, Pappendorf; Susanne Kraenz, Picher; Thomas Kuschel, Prenzlau; Susanne Wollanke, Riesa; Silvio Teubner, Martin Wolff, beide Rostock; Christoph Weidling, Riethnordhausen; Sven Ungelenk, Saalfeld; Marcus Spindler, Sangerhausen; Tino Sander, Springen; Carsten Bühner, René Scheerschmidt, beide Steinbach-Hallenberg; Sabina Kaiser, Chris Janssen, beide Tornau; Silvano Storch, Trusetal; Daniela Scholich, Ueckermünde; Mario Gimpel, Unterbreizbach; Wim Fleischhauer, Andreas Walter, beide Vacha; Michael Fardun, Veltin; Birte Roloff, Vogelsang; Jürgen Rietz, Wehlen; Sven Langer, Weißwasser; Horst Rißmann, Wesenberg; Christiane Harth, Wittenburg; Franziska Röher, Susanne Breiting, beide Worbis; Diana Michler, Zschortau; Christian Dorschner, Karl-Marx-Stadt; Steffen Ewert, Neuhaus

Abzeichen in Gold

Für achtzehnjährige Teilnahme
Lutz Püffeld, Halberstadt

Für siebzehnjährige Teilnahme
Guido Blosfeld, Halle; Bernd Hanke, Löbau

Für sechzehnjährige Teilnahme
Ulrich Riedel, Flöha

Für fünfzehnjährige Teilnahme
Arno Feuerherdt, Brandenburg; Rainer Seifert, Dessau; Thomas Jakob, Gera; Ursula Märker, Greifswald; Norbert Littig, Kleinröhrsdorf; Uwe Bormann, Magdeburg; Frank Aßmus, Oranienburg; Bernhard Tschada, Weimar;

Für vierzehnjährige Teilnahme
Andreas Fittke, Berlin; Bengt Nölting, Greifswald; Wolfgang Seeber, Jena; Rolf Kuhn, Leipzig; Lothar Gruber, Linz (Österreich); Gerald Werner, Meiningen; Volker Schulz, Nauen; Katrin Richter, Wittenberg

Für dreizehnjährige Teilnahme
Andreas Gude, Berlin; Frank Regensburger, Dresden; Eberhard Georgy, Erfurt; Andrea Ziegenbein, Eichicht; Wolfhart Umlauft, Freital; Steffen Langbein, Lichte; Rainer Bauer, Mittweida; Wilfried Röhnert, Radebeul; Torsten Löwe, Schleiz; Heinz-Olaf Müller, Schmalkalden; Hans-Dietrich Schwabe, Sondershausen; Ralf Becker, Wolmirstedt

Für zwölfjährige Teilnahme
Annet Körner, Dresden; Daina Semper, Eisleben; Bernd Dübe, Forst; Matthias Weser, Großenhain; Hubert Steinmetz, Grüningen; Rüdiger Düsing, Halle; Ruth Jacobs, Halle-N.; Rolf Kamieth, Kakerbeck; Jörg Pöhland, Klingenthal; Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich); Armin Körner, Leipzig; Udo Kretzschmann, Markneukirchen; Sigrid Planke, Premnitz; Jana Walther, Röbel; Ina und Uwe Ebert, Ruppendorf; Bernd Hartwig, Thaldorf; Sylvia Kunze, Weißenfels; Frank Erdmann, Zeitz

Für elfjährige Teilnahme
Dieter Koch, Uwe Maaz, beide Arnstadt; Guntram Türke, Auerbach; Karsten Schlutter, Babelsberg; Claudia Reichardt, Berlin; Maik Weide, Callenberg; Harry Höfer, Borndorf; Jörn Wittig, Carolin Engel, Karl-Heinz Jünger, Ingolf Körner, Andreas Winkler, alle Dresden; Dirk-Thomas Orban, Thomas Mittelbach, beide Erfurt; Jörg Butter, Freiberg; Angela Illing, Gersdorf; Heike Klietz, Grimmen; Michael Katzer, Greußen; Volker Reck, Heiligenstadt; René Schüppel, Hoyerswerda; Horst Fliegner, Jarmen; Thomas Mader, Jens Pönisch, Marko Hanke, Conchita Röske, Andreas Hengst, alle Karl-Marx-Stadt; Per Witte, Königs Wusterhausen; Steffen Rieth, Klostermansfeld; Knut Hantschel, Neuenkirchen; Karsten Woike, Neustadt; Anett Schulzensohn, Oberseifersdorf; Claudia Trochold, Reichenbach; Klaus-Detlef Gehrke, Rostock; Eva-Maria Wabbel, Schönfeld; Roland Goldenbogen, Stralsund; Heidrun Tiedt, Teterow; Hans Creutzenburg, Thal; Gudrun Thäter, Weimar; Birgit Schultheiß, Wüstenbrand; Olaf Seidel, Weißwasser

Für zehnjährige Teilnahme
Frank Baumgart, Aschersleben; Marc Schewe, Berlin; Werner König, Berlingerode; Tilman Völzke, Böhlen; Stefanie Begau, Breitenworbis; Uta Boldt, Burg Stargard; Royald Lenk, Cottbus; Petra Sarodnick, Dallgow; Stefan Edelmann, Dresden; Siegfried Obst, Reinhard Weißnicht, beide Eberswalde; Thomas Pigorsch, Eisleben; Susanne und Matthias Schreiber, Elsterwerda; Volker Georgy, Erfurt; Wilfried Schleinitz, Greifswald; Veit-Thomas Meyen, Grimmen; Dieter Seifert, Hagenow; Günter Schielinsky, Halle-N.; Heinz Wickner, Hermannsdorf; Karsten Milek, Hohen Neuendorf; Matthias Bauer, Genthin; Ralf Häntsch, Köthen; Jörg Drechsel, Leinfelde; Lutz Hübschmann, Lößnitz; Thomas Eller, Meiningen; Uwe Würker, Mülsen; Hans-Dieter Büchler, Neustadt; Ralph Gruber, Plauen; Tim Planke, Premnitz; Manfred Hille, Ina Köhler, beide Riesa; Thomas Merten, Stralsund; Klaus Pfeiffer, Taubach; Birgit Schmidt, Weißwasser; Rolf Heubner, Wolfen; Steffen Klimpel, Wolgast; Birgit Schmidt, Worbis; Karl Oertel, Zeitz; Thorsten Eidner, Zeulenroda; Uta Escher, Zwickau

Für neunjährige Teilnahme
Michael Elte, Ahlum; Jens Fache, Altenburg; Silke Rechner, Baruth; Andreas Jock, Blankenfelde; Christine Pompe, Cottbus; Uwe Schütze, Camin; Roland Damm, Cottbus; Frank Sarodnick, Dallgow; Ulrich Schuster, Demitz-Thumitz; Georg Kirchner, Dermbach; Lutz und Heike Lauter, Titus Ziegler, Catherin Engel, Brigitte Rotter, alle Dresden; Uwe Wollert, Edderitz; Britta und Achmed Schulz, Greifswald; Bettina Weser, Großenhain; Michael Schulze, Anke Misch, beide Halberstadt; Frank Siebert, Dany Lindenberg, beide Halle; Hagen Fritsch, Hosena; Claus Janke, Ilmenau; Heiko Schinke, Leuna; Karl-Heinz Gora, Lohsa; Sabine Oestreich, Oschersleben; Dietmar Polster, Parchim; Gudrun Zirnstein, Pirna; Frank Berndt, Radeburg; Jürgen Schmalisch, Reuden; Ronald Bojarski, Saßnitz; Kurt Schulze, Schernberg; Jens Hoffmann, Sebnitz; Ruth Backhaus, Silberhausen; Birgit Lorenz, Waren; Hartmut Boettcher, Weimar; Christina Voß, Zepernick; Frank Pampel, Zeulenroda

Die Träger des **Abzeichens in Gold** für acht-, sieben-, sechs-, fünf- und vierjährige Teilnahme am alpha-Wettbewerb veröffentlichen wir im Heft 2/86.

Mathematik durchdringt unser Leben

In der Schule nimmt der Mathematikunterricht einen bedeutenden Teil der Zeit in Anspruch. Grundlegende Kenntnisse und Fähigkeiten mathematischer Natur, so das Rechnen und einige geometrische Begriffe, gehören zu jenen Elementen des Wissens und Könnens, die man ähnlich wie das Lesen und Schreiben nicht vergessen darf.
Viele Berufe erfordern weit höhere Fertigkeiten in der Mathematik. Unser Bildungssystem trägt dem Rechnung, indem in Berufsschule, Fachschulen und Hochschulen vor allem in Ausbildungseinrichtungen ökonomischer und technischer Art die Vermittlung vertiefter und berufsspezifischer mathematischer Kenntnisse einen wichtigen Platz einnimmt. Im Gegensatz zu dieser das Alltagsleben stark durchdringenden Rolle der Mathematik steht die Tatsache, daß die Mehrzahl der Menschen keine oder falsche Vorstellungen vom Beruf des Mathematikers und seiner Notwendigkeit hat.
Weit verbreitet ist die Ansicht, daß der Berufsmathematiker nur an ganz wenigen Stellen und in erster Linie an wissenschaftlichen Einrichtungen sinnvoll eingesetzt werden kann. Dies führt nicht selten dazu, daß junge Menschen, denen Mathematik Spaß macht, die sich in mathematischen Zirkeln neue Gebiete der Mathematik aneignen und durch ihre Teilnahme an den *Olympiaden Junger Mathematiker* in ihrer Beschäftigung mit der Mathematik bestätigt werden, abgeraten wird, Mathematik zu studieren. Dadurch wird es immer schwerer, den Bedarf unserer Volkswirtschaft an Mathematikern qualitätsgerecht zu erfüllen.

Spitzenleistungen erfordern Schöpfertum

Wir wollen einige Ursachen betrachten, die zu diesen Erscheinungen führen, und durch einige Überlegungen klarzumachen versuchen, daß die Bewältigung des wissenschaftlich-technischen Fortschritts nicht nur einen verstärkten Einsatz von Mathematik verlangt, sondern auch und insbesondere für Spitzenleistungen in zunehmendem Maße die Arbeit schöpferisch begabter Mathematiker notwendig macht.
Noch bevor sich die Mathematik vor mehr als zweitausend Jahren als Wissenschaft und Theorie konstituierte, existierte sie in ihren Anwendungen. Bis heute ist die Anwendbarkeit der Mathematik vor allem durch zwei Umstände begrenzt, aber zugleich auch gefordert. Die Anwendung der Mathematik auf eine bestimmte reale Erscheinung setzt einmal voraus, daß diese hinreichend gut mathematisch modelliert werden kann. Das bedeutet eine spezifische theoretische Durchdringung der Erscheinung. Zum anderen muß die Möglichkeit bestehen, die auf Grund der Theorie notwendigen Rechnungen auch tatsächlich durchführen zu können.
Bezüglich beider Gesichtspunkte haben sich in den letzten Jahrzehnten in gegenseitiger Abhängigkeit qualitative Veränderungen vollzogen. Die Mathematik wird nicht mehr fast ausschließlich nur bei mechanischen und physikalischen Problemen und statistischen Auswertungen eingesetzt, sie erobert sich immer mehr spezielle Gebiete in den verschiedenartigsten technischen, naturwissenschaftlichen und gesellschaftswissenschaftlichen Disziplinen.
Hinsichtlich des ersten Umstandes spricht man deshalb heute etwas zugespitzt von der Mathematisierung der Wissenschaft.
Selbstverständlich muß man sich dabei immer bewußt bleiben, daß in Abhängigkeit von der Spezifik einer Wissenschaft Grad und Bedeutung der Nutzung der Mathematik sich sehr unterscheiden und keine Wissenschaft durch Mathematik ersetzt wird und ersetzt werden kann.
Hinsichtlich des zweiten Umstandes wurde durch das Entstehen der modernen Rechentechnik eine grundsätzliche Umwandlung eingeleitet. Die Rechengeschwindigkeit moderner Rechner übertrifft die des Menschen oder eines mechanischen Rechners um viele Größenordnungen und kann noch weiter gesteigert werden. Durch die Entwicklung der Mikroelektronik werden – bezogen auf eine feste Leistung – die Dimensionen der Rechner immer kleiner und die Herstellungskosten immer niedriger. Sehr schnell wurde klar, daß der programmierbare Rechner nicht nur – und nicht einmal in erster Linie – numerisch rechnen kann. Vielmehr kann alles, was diskret und endlich ist, exakt auf einem Rechner erfaßt werden.
Damit wurde aus einem technischen Hilfsmittel zur Anwendung der Mathematik ein ungeheuer vielfältig einsetzbares Instrument, das die gesamte moderne Produktion entscheidend umzugestalten hilft. Die grundsätzlich erweiterten Anwendungsmöglichkeiten haben bei unveränderter Grundstruktur auch zu neuen Bezeichnungen wie Mikroprozessor oder informationsverarbeitendes System geführt. Unabhängig von der Spezifik des Einsatzes eines Rechners steckt hinter jedem Programm zugleich eine mehr oder weniger komplizierte mathematische Modellierung. Daher haben die neuen Anwendungsmöglichkeiten der Rechner sehr befruchtend auf den Mathematisierungsprozeß eingewirkt.

Unbegrenztes Arbeitsfeld

Die veränderten Anwendungsbedingungen der Mathematik, die durch die moderne Rechentechnik geschaffen wurden, haben dazu geführt, daß die Anzahl der Mathematiker in der Industrie sich absolut und relativ im Vergleich zur ersten Hälfte unseres Jahrhunderts sprunghaft erhöhte. Der Berufsmathematiker hat sich seinen festen Platz in der Volkswirtschaft errungen. Dieser Prozeß verlief aber nicht reibungslos und ohne Widersprüche.
In der Anfangsphase wurden vorwiegend die in langer Entwicklung gesammelten theoretischen Erkenntnisse und Näherungsprinzipien in Verfahren umgesetzt, deren Durchführung mit Hilfe eines Programms dem Rechner übertragen werden konnte. Dadurch wurde die heute überholte und falsche, sich aber hartnäckig haltende Vorstellung hervorgerufen, daß das Programmieren ein abschließender, und zwar aufwendiger, aber mechanischer Teil der Nutzung von Rechentechnik und Mathematik sei und daß der Mathematiker im Grunde genommen seine Tätigkeit mit der Erarbeitung numerischer Algorithmen abschließen kann. Dieser Phase entsprach die Einteilung der Mathematiker eines Rechenzentrums in Problemanalytiker und Programmierer. Auch heute noch spielt die Aufbereitung neuer Erkenntnisse und Verfahren der Mathematik in Form von Programmen und Programmsystemen eine wichtige Rolle. Dabei werden immer höhere Ansprüche an die Programmgestaltung gestellt, um die Nutzung mathematischer Verfahren auch Nichtspezialisten möglich zu machen. Neben diesen Anwendungen sind aber andere getreten und haben sie überflügelt.
Bald wurde die Rechentechnik auch für die Organisation und Verwaltung großer Datenmengen und deren elementare, aber massenhafte Verarbeitung mit Erfolg eingesetzt. Hierbei stellte die mathematische Modellierung normalerweise keine besonderen Ansprüche. Hingegen mußten neue Verfahren zur Behandlung von Informationen im Rechner entwickelt werden, die nicht Gegenstand einer herkömmlichen Mathematik waren. Dadurch entstand der Eindruck, daß für die Masse der Anwendung der Rechentechnik tiefere Kenntnisse der Mathematik überflüssig sind. Es konsolidierte sich die Informationsverarbeitung als eigenständige Wissenschaft, und es bildete sich der Beruf des Informatikers heraus, der in den meisten Fällen besser auf die Nutzung von Rechnern vorbereitet war als der Mathematiker.

Heute wird der Einsatz der Rechentechnik vor allem dadurch geprägt, daß komplizierte Prozesse auf Grund einer sachgerechten mathematischen Formulierung durch Rechner im wesentlichen selbständig gesteuert werden und daß geistige Tätigkeiten wie Entwicklung und Konstruktion zunehmend mit Hilfe von Rechnern verbessert und beschleunigt werden können. Der Schwerpunkt der Anwendungen der Rechentechnik verschiebt sich damit erneut.

Erst im Rahmen des neuen Einsatzgebietes wird der Rechner zu einem Organ vergleichbar dem Hirn von Lebewesen, das über geeignete „Sinnesorgane" Informationen aufnimmt, sie logisch verarbeitet und auf Grund der Ergebnisse durch Impulse zweckmäßige Eingriffe in die Umwelt auslöst. Damit ist eine Revolution in der Technik in Gang gesetzt worden, die den unmittelbaren Anteil der Menschen an der materiellen Produktion weiter vermindert und zugleich die Anforderungen an die ideelle Vorbereitung der Produktion wesentlich erhöht. Der Mensch muß in der Gestalt von Software, von Programmen, dem Gerät, der Maschine, dem Produktionsprozeß einen arbeitsfähigen „Hirninhalt" liefern.

Modernste Technik will beherrscht sein

Durch diese Entwicklung ist die Erzeugung von Software zu einer Massenaufgabe geworden und bildet bereits heute einen Engpaß. Es ist deshalb sehr wichtig, die Ansprüche zu kennen, die beim Entwurf von Software zu stellen sind, und sich Klarheit darüber zu verschaffen, wer Software erarbeiten kann und muß. Wir stehen zwar erst am Anfang einer Entwicklung, in der die Software zum Massenprodukt wird, es lassen sich aber einige Züge deutlich erkennen. Dabei wird auch der spezifische Anteil des Mathematikers an diesem Prozeß sichtbar.

Die Ansprüche an die Software-Entwicklung variieren außerordentlich breit. Glücklicherweise gibt es darunter auch sehr viele Aufgaben, die sich bei Gewöhnung an die Hilfsmittel leicht lösen lassen. In nicht zu ferner Zukunft werden wohl die Grundkenntnisse zur Erarbeitung von Programmen die einfache Prozesse in unserem Alltag steuern, genauso zur Allgemeinbildung gehören wie Lesen, Schreiben und Rechnen. Auch viele Prozesse und Maschinen in der Industrie erfordern keine allzu komplizierte Steuersoftware. Zu ihrer Erarbeitung werden vor allem gründliche Kenntnisse des konkreten Prozesses gebraucht. In Zukunft muß darum jeder Fachingenieur in der Lage sein, die Software-Erarbeitung in nicht zu komplizierten Fällen selbst zu vollziehen. Die Grundlagenkenntnisse des Ingenieurs müssen um eine neue Komponente bereichert werden. Es werden auch Fachingenieure heranwachsen mit vertieften Kenntnissen über die Einsatzmöglichkeiten der Mikroelektronik, die zu Spezialisten für Software-Entwicklung auf ihrem Fachgebiet werden und wesentlich kompliziertere Probleme bearbeiten können.

Es gibt Prozesse, Geräte, Maschinen, deren Steuerung eine viel härtere Nuß darstellt. Jede Software setzt voraus, daß der Grundprozeß in den für die Steuerung wesentlichen Aspekten mathematisch modelliert werden kann. Bei vielen Prozessen ist das zunächst nicht gegeben. Eine ausreichende mathematische Modellierung kann in komplizierten Fällen nur das gemeinsame Werk von Spezialisten und Mathematikern sein. Oft treffen in konkreten Prozessen sehr verschiedenartige Wirkprinzipien aufeinander. Ihr Zusammenwirken muß komplex erfaßt werden. Gerade dabei werden spezifische intellektuelle Fähigkeiten des Mathematikers zur Synthese in Anspruch genommen. Die Erfahrung zeigt, daß man aber nicht erst ein mathematisches Modell im klassischen Sinne entwickeln darf, sondern nach Möglichkeit von Anfang an nach einem inneren Modell des Rechners und nicht des Menschen suchen muß. Das zwingt dort, wo die mathematische Modellierung die Software-Entwicklung zum Ziele hat, häufig zu neuen Denkweisen. Bei aller Vielfalt und Individualität der einzelnen Aufgaben zeichnet sich für die Erarbeitung von Programmen in komplizierten Fällen die Notwendigkeit zur interdisziplinären Zusammenarbeit, zur führenden Mitwirkung von Mathematikern und zur strikten Beachtung der dialektischen Einheit von Hardware und Software ab. Bei Neuentwicklungen der Zukunft darf man nicht mehr nachträglich die Software auf eine vorgegebene Hardware aufpfropfen, sondern muß davon ausgehen, daß eine zur Erfüllung einer vorgegebenen Funktion notwendige Software eine bestimmte Hardware verlangt.

Kollektive Leistungen sind gefragt

Diese Ausführungen sollten deutlich machen, daß unsere Industrie den Mathematiker gerade dort braucht, wo die kompliziertesten Aufgaben beim Einsatz von Mikroelektronik und von Rechnern zu lösen sind. Seine Hauptaufgabe ist die softwaregerechte mathematische Modellierung in der Zusammenarbeit mit Fachleuten. An ihn werden mit fortschreitender Zeit immer höhere schöpferische Anforderungen gestellt. Seine Aufgabe wird immer interessanter. Sie erfordert immer mehr die Fähigkeit, im Kollektiv nicht nur mitzuwirken, sondern vor allem integrierend über die verschiedenen Spezialdisziplinen zu wirken. Damit wächst auch der Anspruch, jede zu lösende Aufgabe aus gesamtgesellschaftlicher Sicht zu verstehen und zu bearbeiten.

Unsere Absicht war, die Rolle nicht nur der Mathematik, sondern vor allem auch des Mathematikers auf einem Gebiet klarzumachen, das einerseits für den Nachweis der Überlegenheit des Sozialismus und die Sicherung des Friedens von besonderer Bedeutung ist und bei dem andererseits kaum jemand an Mathematik und den Mathematiker denkt. Mathematische Modellierung in komplizierten Fällen wird in Zukunft sicher auch die wichtigste Aufgabe des Mathematikers in der Industrie sein. Trotzdem muß man darauf hinweisen, daß das hier entworfene Bild die Wirkungsmöglichkeiten der Mathematik und des Mathematikers keineswegs vollständig erfaßt. Das war hier nicht möglich. Eine Wissenschaft, die schöpferisch wirksam werden soll, muß auch in sich und in fruchtbarer Wechselwirkung mit ihren Anwendungen weiterentwickelt werden.

J. Kerstan

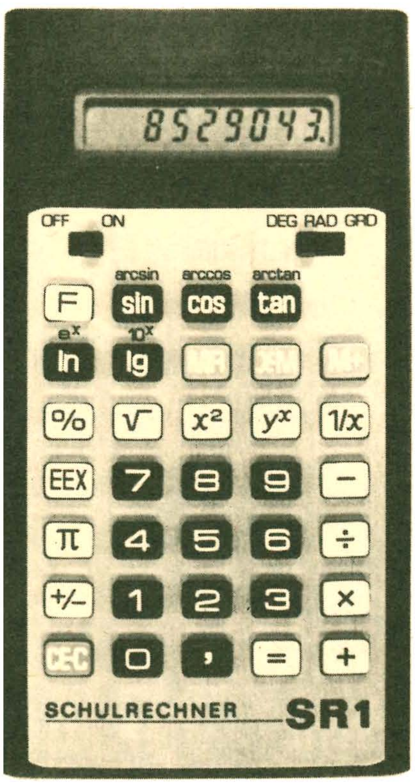
Manipulator zum Eingeben und Entnehmen von Teilen an Drehmaschinen

Rund um den SR 1 Die $\boxed{\%}$-Taste

Auf dem Schulrechner SR 1 – wie auch auf vielen anderen Taschenrechnern – findet man die Taste $\boxed{\%}$. Offensichtlich soll sie helfen, Aufgaben zur Prozentrechnung mit dem Taschenrechner noch leichter zu lösen. Zunächst wollen wir erkunden, was die Taste $\boxed{\%}$ leistet, indem wir nacheinander folgende Tasten betätigen:

▲1▲ a) $\boxed{5}$ $\boxed{\%}$
b) $\boxed{12}$ $\boxed{\%}$
c) $\boxed{2737}$ $\boxed{\%}$

Mit der Tastenfolge $\boxed{a}$ $\boxed{\%}$ (auch Rechenablaufplan genannt) wird stets $\frac{a}{100}$ ermittelt. Für a = 5 zeigte der SR 1 0.05, für a = 12 zeigte der Taschenrechner 0.12 und für a = 2737 erhielt man 27.37.
Nachdem wir das wissen, können wir mit dem SR 1 unter Nutzung der $\boxed{\%}$-Taste Grundaufgaben der Prozentrechnung lösen.



▲2▲ a) Berechne den Prozentwert (W)!
3,7 % von 721 M
b) Berechne den Prozentsatz (p)!
49,50 M von 242 M
c) Berechne den Grundwert (G)!
25,75 M sind 5,4 % des Grundwertes.

Gib für jede dieser Aufgaben einen Rechenablaufplan an!
Verwende dabei die $\boxed{\%}$-Taste!
Zu all diesen Ablaufplänen trat neben der Prozenttaste auch die Operationstaste $\boxed{\times}$ bzw. $\boxed{\div}$ auf.
Nun wollen wir noch feststellen, welche Aufgabe man u. a. mit Hilfe der Operationstaste $\boxed{+}$ bzw. $\boxed{-}$ im Zusammenhang mit der Taste $\boxed{\%}$ lösen kann.

▲3▲ Welcher Term wird durch den jeweiligen Ablaufplan ermittelt?
a) $\boxed{200}$ $\boxed{+}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\%}$ $\boxed{=}$
b) $\boxed{400}$ $\boxed{-}$ $\boxed{8}$ $\boxed{\%}$ $\boxed{=}$
c) $\boxed{a}$ $\boxed{+}$ $\boxed{p}$ $\boxed{\%}$ $\boxed{=}$
d) $\boxed{a}$ $\boxed{-}$ $\boxed{p}$ $\boxed{\%}$ $\boxed{=}$

▲4▲ Berechne 96,7 % von 478,50 M!
Gib einen Rechenablaufplan
a) unter Verwendung der Tasten $\boxed{\times}$, $\boxed{\%}$;
b) unter Verwendung der Tasten $\boxed{-}$, $\boxed{\%}$
an!

▲5▲ Im Rahmen der Konsumgüterproduktion stellt ein Betrieb Bratpfannen her. Im September verlassen pro Tag *a* Bratpfannen den Betrieb. Durch Aufdeckung innerbetrieblicher Reserven konnte die Produktion im Oktober um 3 % und im November um 2 % (jeweils bezogen auf die Produktion des Vormonats) gesteigert werden.
a) Wieviel Bratpfannen verließen im November täglich den Betrieb, wenn *a* = 567 beträgt?
b) Gib einen allgemeinen Rechenablaufplan an, indem du die Variable *a* verwendest!

▲6▲ Klaus aus der Kl. 7b und Ina aus der 7a ermitteln mit dem SR 1 den prozentualen Anteil der Teilnehmer ihrer Klassen an den Arbeitsgemeinschaften Mathematik, Sport, Biologie, Foto und Chor.

AG	7a (23 Schüler)	7b (22 Schüler)
Sport	12	8
Chor	5	3
Foto	2	7
Mathe	6	3
Bio	4	4

Ina gibt nur einmal den Grundwert 23 in den Taschenrechner ein und ermittelt dann durch Eingabe der Werte 12; 5; 2; 6; 4 den jeweils zugehörigen Prozentsatz. Sie nutzt also die Konstantenautomatik des SR 1.
Gib einen entsprechenden Rechenablaufplan an!

▲7▲ In die Schiller-Schule gehen 537 Schüler.
81,9 % von ihnen nehmen an der Schulspeisung teil.
72,1 % der Schüler nehmen an der Trinkmilchversorgung teil.
11,9 % der Schüler trainieren in einer Sportgemeinschaft.
6,9 % der Schüler erhielten am Jahresende im Fach Mathematik die Note 1.
Gib jeweils die zugehörigen Prozentwerte an! Nutze dazu die Konstantenautomatik des SR 1! Gib einen entsprechenden Rechenablaufplan an!

▲8▲ Für Sparguthaben bekommt man von der Sparkasse jährlich $3\frac{1}{4}$ % Zinsen.
Der große Bruder von Anja hat am 1. Januar 1985 ein Guthaben von 800 M auf seinem Sparbuch.
Wieviel Jahre muß Anjas Bruder warten, damit sich sein Sparguthaben allein durch die jährlichen Zinsen verdoppelt? (Er will in dieser Zeit kein Geld von diesem Sparguthaben abheben.)
Überlege zunächst!
a) Wieviel Geld hat Anjas Bruder nach einem Jahr auf seinem Konto?
b) Wieviel Geld hat Anjas Bruder nach zwei Jahren auf seinem Konto?
c) Wieviel Geld hat Anjas Bruder nach drei Jahren auf seinem Konto?

L. Flade

Lösungen:

▲2▲
a) z. B. $\boxed{721}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{3{,}7}$ $\boxed{\%}$ $\boxed{=}$ (26.677)
W = 26,68 M
b) z. B. $\boxed{49{,}5}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{242}$ $\boxed{\%}$
$\boxed{=}$ (20.454546)
p = 20,5 %
c) z. B. $\boxed{25{,}75}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{5{,}4}$ $\boxed{\%}$
$\boxed{=}$ (476.85185)
G = 476,85 M

... Das habe ich vergessen, aber ich kann schon selber einen Rechner basteln ...!!! *Aus: Rohác, Praha*

▲3▲

a) $200 + \frac{200 \cdot 3}{100}$
(das entspricht 103 % von 200)

b) $400 - \frac{400 \cdot 8}{100}$
(das entspricht 92 % von 400)

c) $a + \frac{a \cdot p}{100}$
(das entspricht (100 + p) % von a)

d) $a - \frac{a \cdot p}{100}$
(das entspricht (100 − p) % von a)

▲4▲

a) Z. B. $\boxed{478{,}50}\ \boxed{\times}\ \boxed{96{,}7}\ \boxed{\%}\ \boxed{=}$
(462.7095)

b) $\boxed{478{,}50}\ \boxed{-}\ \boxed{3{,}3}\ \boxed{\%}\ \boxed{=}$
(462.7095)
W = 462,71 M

▲5▲

a) Etwa 596 Bratpfannen.

b) Z. B. $\boxed{a}\ \boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{\%}\ \boxed{=}\ \boxed{+}\ \boxed{2}\ \boxed{\%}\ \boxed{=}$

▲6▲

$\boxed{12}\ \boxed{\div}\ \boxed{23}\ \boxed{\%}\ \underset{(52.17..)}{\boxed{=}}\ \boxed{5}\ \underset{(21.7..)}{\boxed{=}}\ \boxed{2}$

$\underset{(8.6..)}{\boxed{=}}\ \boxed{6}\ \underset{(26.0..)}{\boxed{=}}\ \boxed{4}\ \underset{(17.3..)}{\boxed{=}}$

▲7▲

$\boxed{81{,}9}\ \boxed{\%}\ \boxed{\times}\ \boxed{537}\ \underset{(439.803)}{\boxed{=}}\ \boxed{72{,}1}$

$\boxed{\%}\ \underset{(387.177)}{\boxed{=}}\ \boxed{11{,}9}\ \boxed{\%}\ \underset{(63.903)}{\boxed{=}}\ \boxed{6{,}9}\ \boxed{\%}\ \underset{(37.053)}{\boxed{\ }}$

Es geht auch noch kürzer!

440 Schüler nehmen an der Schulspeisung teil.
387 Schüler nehmen an der Trinkmilchversorgung teil.
64 Schüler trainieren in einer Sportgemeinschaft.
37 Schüler erhielten am Jahresende im Fach Mathematik die Note 1.

▲8▲

a) $G_1 = 800 + \frac{800 \cdot 3{,}25}{100}$
$= 800\left(1 + \frac{3{,}25}{100}\right) = 826$, also 826 M.

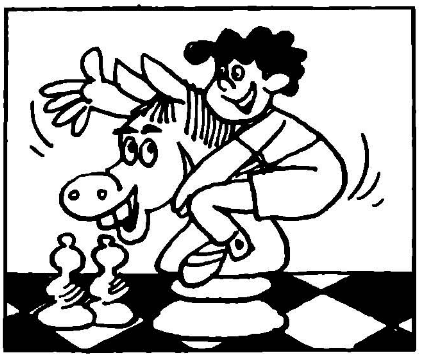
b) $G_2 = G_1 + \frac{G_1 \cdot 3{,}25}{100} = G_1\left(1 + \frac{3{,}25}{100}\right)$
$= 852{,}845$, also 852,85 M.

c) $G_3 = G_2\left(1 + \frac{3{,}25}{100}\right) = 880{,}56763$,
also 880,57 M.

Mit dem SR 1 kann man die Berechnung wie folgt durchführen.
(Man vernachlässigt die jeweilige Rundung auf Hundertstel!)

$\boxed{800}\ \boxed{\times}\ \boxed{1{,}0325}\ \underset{(826.)}{\boxed{=}}\ \underset{(852.845)}{\boxed{=}}\ \ \underset{(880.56246)}{\boxed{=}}$

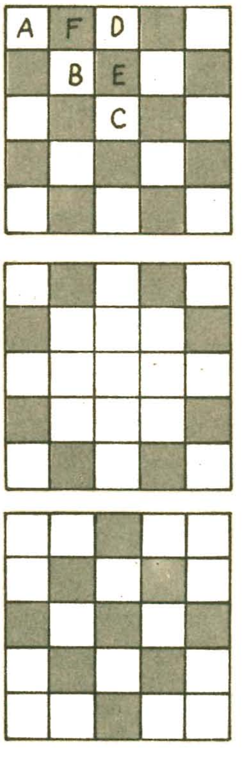
Nach 22 Jahren hat sich das Guthaben verdoppelt.



Ein hüpfender Springer

Bild 1a zeigt ein 5×5-Mini-Schachbrett, auf dem sechs Felder mit A, B, C, D, E, F gekennzeichnet sind. Ein Springer, der in der Mitte auf C plaziert ist, könnte sich nach jedem der 8 abgetönten Feldern (Bild 1b) bewegen, die ein symmetrisches Muster mit vier Symmetrielinien bilden. Eine zweite Bewegung könnte den Springer nach jedem der 9 abgetönten Felder (Bild 1c) bringen, die ein anderes Muster mit vier Symmetrielinien bilden.

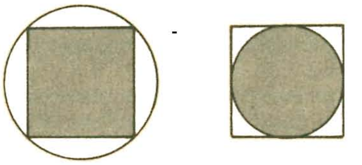
Bild 1
a)
b)
c)



Finde die Muster, die durch die abgetönten Felder, die der Springer in zwei Zügen erreicht, entstehen, wenn er von A, B, D, E oder F startet! Finde die Anzahl der Symmetrielinien in jedem Falle!
Zeige, daß drei Bewegungen von A, B, C, D oder vier Bewegungen von E oder F aus das gleiche abgetönte Muster wie Bild 1a ergeben! Finde die Ergebnisse von vier Bewegungen von A, B, C, D und drei Bewegungen von E oder F aus!

Aus: Mathematics in school, London

▲1▲ Круг и квадрат имеют одинаковые площади. В круг вписали квадрат, а в квадрат вписали круг. Что больше – площадь квадрата, вписанного в круг, или площадь круга, вписанного в квадрат?



▲2▲ The number 1 has only one divisor, the number itself.
Any prime number has *two* different divisors, 1 and itself. (Note: 1 is not considered to be prime, as it has only one divisor.)
Any integer that is a product of two different primes has *four* different divisors. If, for instance, the number is pq (where p and q are the prime factors), the divisors are 1, p, q, and the number itself pq.
Any product of three different primes has *eight* different divisors. If the number is pqr, the divisors are 1, p, q, r, pq, pr, qr, and the number itself pqr.
(I) What can you say about the number of divisors of:
(a) the square of a prime?
(b) the cube of a prime?
(c) the square of any composite integer?
(II) Can you find an integer that is equal to the number of divisors of its square?

▲3▲ Parmi les diamants célèbres, le diamant Orloff fut trouvé aux Indes au XVII^e siècle. Il est actuellement conservé au Kremlin. Non taillé, sa masse était 300 carats; une fois taillé, sa masse est 189,6 ct. Calculez en grammes la masse de ce diamant avant et après la taille.

▲4▲ Стальной шарик плавает в ртути. Увеличится или уменьшится глубина погружения, если повысится температура?

Vorbildliche Hilfe

Unser Dank gilt den Verlagen, die Bücher im Werte von 1500 M für die fleißigsten Wettbewerbsteilnehmer zur Verfügung stellten: BSB B. G. Teubner, Leipzig; VEB Fachbuchverlag Leipzig; Der Kinderbuchverlag Berlin; Militärverlag der DDR, Berlin; Sportverlag, Berlin; transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin; VEB Verlag Technik, Berlin; VE Verlag Volk und Wissen, Berlin; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin. Siehe Seite 3!

Karsten – Mathematiker in Mecklenburg

Zur Erinnerung an Adlige, an Helden und auch an Dichter errichtete man im 19. Jahrhundert viele Denkmäler, Vertreter der Wissenschaft ehrte man seltener. Dennoch sind zuweilen auch Wissenschaftler auf solchen Denkmälern mit dargestellt, entsprechend dem ihnen damals zugewiesenen Platz in der gesellschaftlichen Rangfolge natürlich kleiner als die Hauptpersonen.

In Schwerin ist 1893 ein Denkmal des Großherzogs Friedrich Franz II. aufgestellt worden. Es befindet sich hinter dem Schweriner Schloß am Anfang des Schloßgartens und zeigt den Großherzog hoch zu Roß in der militärischen Ausrüstung des Krieges 1870/71. Am Postament befinden sich zwei figurenreiche Reliefs, auf dem rechten ist die Einweihung des (heutigen) Hauptgebäudes der Universität Rostock (27. 1. 1870) dargestellt. Eine Figur dieses Reliefs stellt den Rostocker Professor für Mathematik und Physik *Hermann Karsten* (geb. 1809 in Breslau, gest. 1877 in Bad Reinerz) dar (Bild 1).

H. Karsten studierte in Bonn und Berlin und promovierte 1829 in Berlin. Anschließend beschäftigte er sich unter Anleitung des Astronomen Bessel in Königsberg mit Astronomie. 1830 habilitierte er sich in Rostock als Privatdozent für Mathematik und Mineralogie, 1832 wurde er außerordentlicher Professor. Von 1836 bis zu seinem Tode war H. Karsten ordentlicher Professor in Rostock. Seit 1862 (?) leitete er auch die Navigationsschule. Seine Verdienste liegen in Anwendungen der Mathematik. Er veröffentlichte astronomische, meteorologische und mineralogische Arbeiten. So gab er den für Seefahrer bestimmten *Kleinen Astronomischen Almanach* von 1830 bis 1850 heraus.

Hermann Karsten gehörte einer alten mecklenburgischen Familie an, die viele Gelehrte hervorbrachte. Einige von ihnen hatten enge Beziehungen zur Mathematik: *Gustav Karsten* (1820 bis 1900), ein Bruder von H. Karsten, war Professor für Physik und Mineralogie in Kiel. Zu seinen Lehrern zählten *Dirichlet*, *Steiner* und *Plücker*. Als Mitbegründer und erster Vorsitzender der Physikalischen Gesellschaft verkehrte er mit *Joly*, *Joule*, *Faraday*, *Stokes*, *du Bois-Reymond*, *Helmholtz*, *Kirchhoff* und *Virchow*.

Bernhard Lorenz Georg Karsten (1858 bis 1909), ein Sohn von G. Karsten, wirkte von 1894 an als Lehrer für Physik und Mathematik am Technikum Bremen und wurde 1908 zum Professor berufen.

Der Großvater von Hermann und Gustav Karsten, der Professor *Franz Christian Lorenz Karsten* (1751 bis 1829), hat sich durch die Errichtung einer landwirtschaftlichen Lehr- und Versuchsstation in Rostock verdient gemacht. Seine erste wissenschaftliche Arbeit war das Büchlein *Die Rechenkunst* (1775, Nachauflagen 1786 und 1805).

Für uns ist der Bruder des zuletzt erwähnten Karsten am interessantesten. Es handelt sich um den Mathematikprofessor *Wenceslaus Johann Gustav Karsten*, den man zu seiner Zeit zu den bedeutenden Mathematikern zählte.

W. J. G. Karsten wurde am 15. 12. 1732 in Neubrandenburg im damaligen Land Mecklenburg-Strelitz als Sohn eines Apothekers geboren. Als eine Feuersbrunst 1737 seine Geburtsstadt fast völlig zerstörte, nahm der Großvater den kleinen Wenceslaus J. Gustav zu sich nach Güstrow und erzog ihn bis 1743. Hier konnte *W. J. G. Karsten* die Fürstliche Domschule besuchen, auf der ein bescheidener, vor allem auf das Erlernen von Sprachen ausgerichteter Unterricht erteilt wurde. Seine frühen Neigungen zur Mathematik und den Naturwissenschaften förderte die Schule nicht. Aus Karstens Aufzeichnungen erfahren wir z. B., wie er sich als Schüler erfolglos bemühte, Sonnenuhren zu bauen:

„Ich fing an, mir allein außer meinen Schulstunden Sonnenuhren zu machen, Gläser zu schleifen und dergleichen mehr, erfuhr aber immer mit Betrübnis, daß der Erfolg mit meiner Erwartung nicht überein kam. Ich hatte z. B. gelernt, daß die Sonne binnen 24 Stunden gleichförmig um die Erde liefe. Hieraus schloß ich, wenn ein Kreis in 24 gleiche Theile getheilt sey, so müßte der Schatten eines senkrechten Stifts die Stunde richtig zeigen. Ein kleiner Handzirkel war mir in die Hände gefallen. Daher machte ich Sonnenuhren nach meiner Theorie, ohne sie anders als horizontal zu stellen. Und wenn meine Uhr zu geschwinde oder zu langsam ging, so war ich anfangs wohl dreist genug, die Schuld der Stadtuhr beyzumessen, wenn sie mit meiner Sonnenuhr nicht übereintreffen wollte."

Ein verständnisvoller Lehrer unterwies ihn 1748 in der Naturlehre und erläuterte ihm auch das kopernikanische Weltsystem, so daß Karsten im gleichen Jahr eine Sonnenfinsternis mit *halbastronomischen* Augen beobachten konnte. Es war ein glücklicher Umstand, daß ihm der ältere Bruder eines Mitschülers Privatunterweisungen in Mathematik nach dem Lehrbuch von *Christian Wolff* erteilte.

Obwohl Karstens Vater in dürftigen Verhältnissen lebte, ermöglichte er 1750 seinem Sohn, in Rostock Theologie, Philosophie und Mathematik zu studieren. Von 1752 bis 1754 setzte dieser die Studien an der *ausländischen* (!) Universität Jena fort.

In Rostock promovierte Karsten 1755 mit einer mathematischen Arbeit zum Magister. Kurze Zeit später habilitierte er sich, und er begann, als Privatgelehrter Vorlesungen über Mathematik, Logik, Metaphysik, Naturrecht und Sittenlehre zu halten. Daneben studierte er viele Bücher und Aufsätze, um sich weiterzubilden. 1758 wurde er als Professor für Logik an die Universität Rostock berufen.

Als Streitigkeiten zwischen dem Herzog und der Stadt Rostock zur Spaltung der Universität führten, ging Karsten an die 1760 neugeschaffene Universität Bützow (sie wurde 1789 wieder mit der Rostocker vereinigt). Die schlechten materiellen Bedingungen und der an mangelnder Disziplin und zu geringen Studentenzahlen krankende Universitätsbetrieb befriedigten ihn nicht. Trotzdem schlug er eine Berufung an die Petersburger Akademie aus. Erst 1778 verließ er Bützow, um als Nachfolger von *Andreas Segner* die Professur für Mathematik und Physik in Halle zu übernehmen. Karsten wechselte damit von der unbedeutenden, konservativen Universität Bützow zu der damals neben Göttingen den modernen Hochschultyp darstellenden Universität Halle über.

Karsten unterhielt einen regen Briefwechsel mit *L. Euler*, *J. A. Euler*, *Th. Aepinus*, *Lagrange*, *Kästner* und *Lambert*. *Leonhard Euler* würdigte wiederholt die Arbeiten von *W. J. G. Karsten*, insbesondere dessen Lehrbücher, die Karstens Ruf als Mathematiker begründeten. Sie zeichnen sich durch Deutlichkeit, Kürze und mathematische Strenge aus. In seinem Hauptwerk, dem zwischen 1767 und 1777 verlegten achtbändigen *Lehrbegriff der gesamten Mathematik*, behandelte Karsten neben der theoretischen Elementarmathematik u. a. auch Statik, Mechanik, Pneumatik und Photometrie. Er befaßte sich auch mit Chemie, Mineralogie und vielfältigen Anwendungen der Mathematik. 1765 gab er Eulers *Mechanik der festen oder starren Körper* und 1779 Lamberts *Pyrometrie* heraus. In seinen Vorlesungen bemühte sich Karsten um eine klare Vortragsweise, bei welcher die Studenten auf das Wesentliche gelenkt wurden und den Lösungsweg verfolgen konnten. Er forderte, lieber weniger zu behandeln, aber dafür den ausgewählten Lehrstoff ausführlicher darzustellen. Die meisten Studenten beschäftigten sich nämlich nur zur Vorbereitung auf das Magisterexamen mit Mathematik, für sie war Mathematik ein Nebenfach.

W. J. G. Karsten war Mitglied mehrerer wissenschaftlicher Gesellschaften. Er starb am 17. 4. 1787 in Halle.


Auszug
aus den
Anfangsgründen
und dem Lehrbegriffe
der
Mathematischen
Wissenschaften.

Aufgesetzt von
Wencesl. Johann Gustav Karsten,
der Phil. Doctor, Hofrath und Professor der Mathematik und Naturlehre auf der Universität in Halle, der Churf. Academie der Wissenschaften in München, der Holländischen Gesellschaft der Wissenschaften in Harlem, und der Königl. Dänischen Gesellschaft in Copenhagen, auch der ökonomischen Gesellschaft in Leipzig Mitgliede.

Greifswald,
gedruckt und verlegt von Anton Ferdinand Röse, 1781

Aufgaben

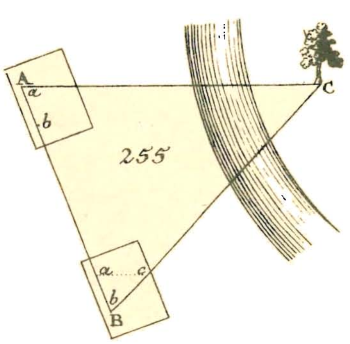
Einige Aufgaben von W. J. G. Karsten sollen hier mitgeteilt werden:

1. *Beweise: Im Dreyeck ABC verhält sich die Summe zwoer Seiten* $\overline{AC} + \overline{CB}$ *zu ihrer Differenz* $\overline{AC} - \overline{CB}$, *wie die Tangente der halben Summe der gegenüber stehenden Winkel* $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ *zur Tangente ihrer halben Differenz.*

(Tangente bedeutet hier die Tangens-Funktion, d. A.)

2. *Beweise: Die Zahl der Ziffern, woraus die Quadratzahl bestehet, ist nie grösser als die doppelte Anzahl der Ziffern der Wurzeln; auch nicht kleiner als die doppelte Zahl der Ziffern der Wurzel weniger Eins.*

3. *Aufgabe aus der Feldmeßkunst: Man soll die Entfernung von A nach C messen, wenn man nach C aber nicht hinkommen kann.*



Karsten löst die Aufgabe so:

Man wähle eine Standlinie $\overline{AB}$, *die man messen kann. Man setze den Meßtisch gehörig über A, visire nach B und C, bringe so den Winkel a auf den Meßtisch, und mache* $\overline{ab}$ *nach dem vergnügten Maaßstabe so groß, als* $\overline{AB}$ *nach dem grossen Maaßstabe ist. Nun trage man den Tisch nach B, stelle ihn wieder wagrecht und so, daß b lothrecht über B und ba in der Richtung der Standlinie* $\overline{BA}$ *zu liegen komme: so läßt sich auch der Winkel b = B auf den Tisch bringen. Alsdenn erhält man das Dreyeck abc = ABC und* $\overline{ac}$ *ist nach dem verjüngten Maaßstabe so lang, als* $\overline{AC}$ *nach dem grossen Maaßstabe. Das Astrolabium kann auf ähnliche Art gebraucht werden, beyde Winkel an A und B zu messen, da dann* $\overline{AC}$ *trigonometrisch weit genauer und zuverläßiger gefunden wird.*

Welche Möglichkeiten sind euch bekannt, die Streckenlänge $\overline{AC}$ zu bestimmen, wenn man wegen des eingezeichneten Flusses nicht zum Punkt C gelangen kann? Mehr über solche Aufgaben findet ihr in dem Buch „Unterhaltsame Geometrie“ von *J. I. Perelman*, das erstmals 1963 beim Verlag Volk und Wissen erschien.

4. *Die Erfahrung: Ein schwerer Körper, der sich völlig selbst überlassen frey bewegt, fällt in 2 Secunden Zeit viermal tiefer, in 3 Secunden 9 mal tiefer als in 1 Secunde; und überhaupt verhalten sich die Höhen des Falles wie die Quadratzahlen der verflossenen Zeiten. Die Höhe aber, wovon ein schwerer Körper in der ersten Zeitsecunde frey fällt, beträgt* $15\frac{5}{8}$ *Rheinländische Fuß.*

Könnt ihr angeben, wieviel Rheinländische Fuß einem Meter entsprechen?

5. *Aufgabe: Es ist eine Zahl m gegeben, welche um etwas sehr wenig größer als Eins ist. Man soll in und um den Kreis ein Paar ähnliche reguläre Polygone von so vielen Seiten verzeichnen, daß der Quotient des Verhältnisses der Peripherie des äussern gegen die Peripherie des innern Polygons noch kleiner als jene Zahl m wird. Anschließend ist die Länge der Peripherie des Kreises für den Halbmesser = 1 so genau zu finden, daß der Fehler kleiner sey, als ein gegebener Bruch, so klein man will.*

(Vergleiche auch *alpha* 2 (1985) S. 42 und *alpha* 2 (1984) S. 44.)

Karsten berechnet z. B. bei vorgegebener Genauigkeit von 0.0001 die Zahl π zu 3.1415. In seinem Lehrbuch ist der halbe Umfang des Einheitskreises, also die Zahl π, mit 33 Ziffern angegeben. Er bemerkt dazu: *„Statt des aufgezeigten sehr mühsamen Weges, die Rechnung zu führen, lehrt die höhere Mathematik weit kürzere Methoden, wodurch eben diese Zahl gefunden wird.“*

Herrn Dr. Pieper, Berlin, und meinem Schwiegervater *J. Karsten* danke ich für wertvolle Hinweise, die für das Entstehen des vorliegenden Beitrages förderlich waren.

Mit dem Artikel über Karsten soll auch an den Aufruf *Auf den Spuren von Mathematikern* von *J. Lehmann* und *H. Pieper* (*alpha* 1, 1984, 3. U.-S.) erinnert werden:

Mitarbeiter gesucht

Schaut euch in eurem Heimatgebiet nach *Spuren* von Mathematikern um (Denkmal, Gedenktafel, Grabstein; aber auch Namen von Straßen, Schulen, Instituten)! Ihr werdet überrascht sein, wie viele Bezüge zur Mathematik und zu Mathematikern es gibt. Beachtet bitte, daß auch viele Astronomen und Physiker auf dem Gebiet der Mathematik tätig gewesen sind.

Über eure Entdeckungen schreibt bitte an die
Mathematische Schülerzeitschrift *alpha*
7027 Leipzig
Postfach 14
Kennwort: Auf den Spuren von Mathematikern.

W. Schmidt

Mathematik und Technik

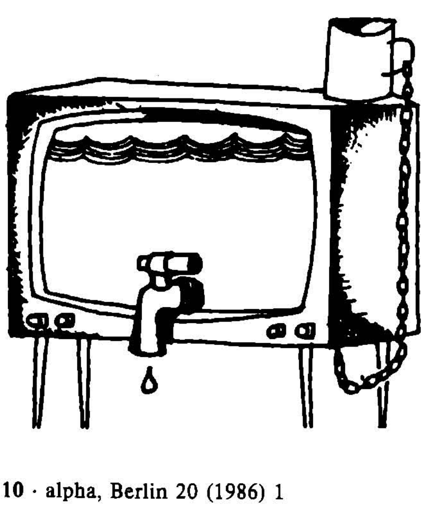
Klasse 5

▲1▲ Um die Wassermenge zu bestimmen, die eine Quelle hergibt, stellen Touristen fest, daß eine Büchse mit zwei Litern Fassungsvermögen in vier Sekunden gefüllt war.
Wieviel Liter Wasser gibt die Quelle in 24 Stunden?

▲2▲ In einem Klassenraum sind sechs Lampen. Die Schüler, die den Raum verließen, vergaßen das Licht auszuschalten, und es wurde erst nach 15 Minuten ausgeschaltet. Dieses Versäumnis kostete die Schule 0,06 M.
Welche Mehrausgabe ergäbe sich im Monat (30 Tage), wenn in der Schule 210 solcher Lampen sind und diese täglich 5 Minuten unnötig brennen?

▲3▲ Zwei Kraftfahrer hatten den Auftrag, mit ihrem Lastkraftwagen 170 Tonnen Konsumgüter vom Bahnhof ins Auslieferungslager zu transportieren. Der erste Fahrer, dessen LKW jedesmal mit 4 Tonnen Ware beladen wurde, machte zwanzig Fahrten.
Wieviel Fahrten entfielen auf den zweiten Fahrer, wenn dessen LKW stets mit 5 Tonnen Ware beladen wurde?

▲4▲ In einem 10-Liter-Kanister befindet sich ein Kraftstoffgemisch im Mischungsverhältnis 1 : 33. Das bedeutet, daß ein Liter Öl mit 33 Litern Benzin gemischt wurde.
Wieviel Liter Öl sind in diesem Kanister enthalten?



▲5▲ Zu einer Modelleisenbahn der Spur H0 (Maßstab 1 : 87) gibt es Brücken, Autos und Personen.
Wie groß müßte ein Mensch von 1,74 m Körpergröße im Modell sein?

▲6▲ Damit der Zuschauer eines Filmes das Gefühl hat, die Figuren eines Trickfilmes würden sich bewegen, müssen in einer Sekunde 24 gering veränderte Bilder gezeigt werden.
Wieviel einzelne Bilder müssen für eine Trickfilmsendung von drei Minuten Dauer aufgenommen werden?

▲7▲ In einer Gießerei fertigen zwei Gießer zusammen 280 Gußstücke. Der erste Gießer stellt 50 Stück mehr her als der zweite.
Wieviel Stück gießt jeder?

▲8▲ Entlang einer Straße stehen auf beiden Seiten insgesamt 51 Laternen. Von Laterne zu Laterne beträgt der Abstand 30 m. Die Laternen der einen Straßenseite stehen auf der Lücke zu den Laternen auf der anderen Straßenseite.
Wie lang ist diese Straße, wenn die Straßenseite mit den meisten Laternen mit einer Laterne beginnt und mit einer Laterne endet?

▲9▲ Ein Düsenflugzeug legt in 3 Stunden die Flugstrecke von 2 250 km zurück, ein Propellerflugzeug schafft dagegen in einer Flugzeit von 5 Stunden nur eine Strecke von 2 125 km.
Wievielmal so groß ist die Geschwindigkeit des Düsenflugzeuges im Vergleich zu der des Propellerflugzeuges?

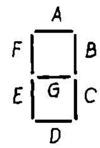
▲10▲ Wenn man die Maßzahlen der Austauschflächen zweier Kondensatoren A und B miteinander multipliziert, so ergibt das 12.
Wieviel Quadratmeter Austauschfläche besitzt jeder der beiden Kondensatoren, wenn Kondensator B eine um 4 m^2 größere Austauschfläche als Kondensator A hat?

▲11▲ Das Kettenblatt von Franks Fahrrad hat 54 Zähne. Der Zahnkranz des Hinterrades hat 18 Zähne.
Wie viele Umdrehungen macht das Hinterrad dieses Fahrrades bei fünf Umdrehungen des Kettenblattes? (Das Fahrrad habe keinen Freilauf.)

Klasse 6

▲1▲ Wassertiefen können mit einem Echolot bestimmt werden. Dabei wird der Zeitunterschied zwischen dem Senden und Empfangen eines Schallsignals gemessen. Im Meerwasser breitet sich der Schall mit einer Geschwindigkeit von $1\,500\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ aus.
Wie tief ist das Wasser, wenn die gesendeten Schallwellen nach 7,5 s empfangen werden?

▲2▲ Bei Taschenrechnern oder Digitaluhren sehen alle Ziffern eckig aus. Das liegt an dem Sieben-Segment-Anzeiger. Sieben gerade Teilstücke (Segmente) sind in Form einer eckigen Acht angeordnet. Jedes Segment kann ein- oder ausgeschaltet sein.
a) Welche Segmente werden für die Darstellung der Ziffern 1 bzw. 2 bzw. 9 benötigt?
b) Welche Ziffer erscheint, wenn die Segmente A, B, C, D, E, F bzw. die Segmente A, B, C, D, G eingeschaltet sind?



▲3▲ Der Lokführer muß die Lokomotive abhängen und an den dritten Wagen des Zuges ankoppeln.
Wie ist das auf kürzestem Wege zu machen?

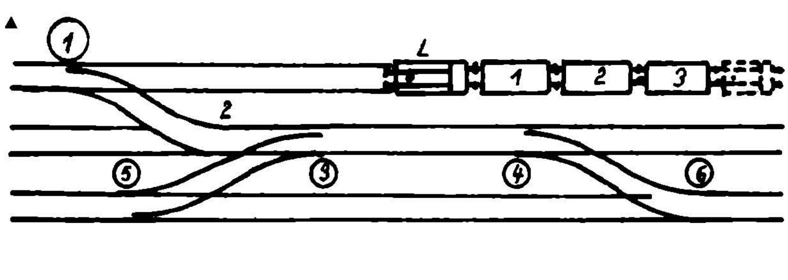
▲4▲ Wie lang erscheint ein Gegenstand von a) 0,10 mm,
b) 0,70 mm wirklicher Länge unter einem Mikroskop mit 120facher Vergrößerung?

▲5▲ Auf der Fernverkehrsstraße F 6 wurde wegen Bauarbeiten auf einer Strecke von 2 km die Geschwindigkeit auf $30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ begrenzt. Herr Meyer durchfuhr mit einem Skoda diese Strecke in 3 Minuten.
Hat sich Herr Meyer an die Geschwindigkeitsbegrenzung gehalten?

▲6▲ Bei einer Verkehrskontrolle am Wochenende wurden 160 Kraftfahrzeuge durch die Verkehrspolizei überprüft. Von diesen Kraftfahrzeugen waren 105 ohne Mängel. Bei 16 Fahrzeugen waren die Reifen nicht in Ordnung. An 40 Fahrzeugen wurden Beleuchtungsmängel festgestellt. Bei 15 Fahrzeugen traten andere Mängel auf.
Wie viele Fahrzeuge hatten Mängel an der Beleuchtung und zugleich an der Bereifung?

▲7▲ Im Rahmen des Wiederaufbaues der Leipziger Innenstadt entstanden moderne Wohnkomplexe. Vor den Häusern wurden Rasenflächen, Blumenbeete und Terrassen angelegt. Für eine der rechteckigen Terrassen wurden genau 400 Sandsteinplatten verwendet. Die Platten bedeckten lückenlos den Boden. Jede dieser

zu ▲3▲



Platten ist 60 cm lang und 40 cm breit. Die Länge dieser Terrasse beträgt 10 m. Ermittle die Breite dieser Terrasse!

▲8▲ Bei einer Verkehrskontrolle in einer geschlossenen Ortschaft durchfuhr ein Motorradfahrer die 100 m lange Teststrecke in einer Zeit von 5 s. Entspricht seine Geschwindigkeit den Vorschriften der Straßenverkehrsordnung?

▲9▲ Wie lang kann eine Glühlampe von 40 W Leistung brennen, bis $2\frac{\text{kW}}{\text{h}}$ (1 000 W = 1 kW) verbraucht sind?

▲10▲ In einer Werkstatt wurden aus einer rechteckigen Zinkblechplatte, die 240 mm lang und 150 mm breit war, an den vier Ecken je ein Quadrat von 40 mm Seitenlänge herausgeschnitten. Die verbliebenen Ränder wurden umgebogen und ohne Überlappung zusammengelötet, so daß ein oben offener quaderförmiger Kasten entstand.
Wieviel Quadratzentimeter Zinkblech wurden nach Wegfall der herausgeschnittenen quadratischen Blechstücke zur Herstellung des Kastens benötigt?
Wieviel Liter Flüssigkeit faßt dieser Behälter?

▲11▲ Es ist die Leistungsaufnahme P einer halbautomatischen Waschmaschine zu berechnen, wenn eine Spannung $U = 220$ V anliegt und dabei ein Strom von $I = 9{,}1$ A fließt! (Beachte: $P = I \cdot U$.)

▲12▲ Ein Kompressor drückt die Luft in einen Behälter. Damit der Druckluftbehälter und die gesamte Druckluftanlage vor Überlastung geschützt wird, muß der Druckluftbehälter nach den gesetzlichen Bestimmungen mit einem Sicherheitsventil versehen sein. Der einarmige Hebel des Sicherheitsventils ist 40 cm lang. Am Ende des Hebels ist ein Gewicht von 5 kp befestigt.
Welche Kraft drückt auf das Ventil, wenn es 8 cm vom Drehpunkt des Hebels entfernt ist?

Geschwindigkeiten in Natur und Technik

Der sowjetische Wissenschaftler *B. Lishewski* hat in Heft 4/84 der Zeitschrift *Nauka i shisn* eine umfangreiche Auflistung von Geschwindigkeiten vorgenommen. Eine Auswahl davon sei hier wiedergegeben.
Beginnen wir beim Menschen. Die Schnellsten von uns erreichen beim Lauf etwa 10 m/s. Beim Schwimmen sind es etwa 2 m/s. Die Nervenimpulse in den Neuronenfasern breiten sich mit 120 m/s aus. Das Blut wird mit 0,2 m/s in die Aorta gedrückt. In den feinsten Kapillaren beträgt die Geschwindigkeit aber nur noch $3 \cdot 10^{-4}$ m/s (0,3 mm/s). Im ersten Lebensjahr wachsen wir noch mit 10^{-8} m/s. Unsere Fingernägel wachsen mit 10^{-9} m/s und die Haare mit $4 \cdot 10^{-9}$ m/s (0,35 mm/Tag).
Viele Tiere können sich erheblich schneller als wir fortbewegen. Spitzenreiter auf dem Land ist der Gepard mit 33 m/s (120 km/h). Der Schwertfisch erreicht im Wasser gar 37 m/s (135 km/h). Und der Goldadler erreicht im Sturzflug bis zu 44 m/s (160 km/h). Aber es gibt auch das Gegenteil. Sprichwörtlich ist die Langsamkeit der Schildkröte ($5 \cdot 10^{-2}$ m/s) und der Schnecke ($1{,}6 \cdot 10^{-3}$ m/s).
Bedeutend langsamer als die Fortbewegungsgeschwindigkeiten der Tiere sind die Wachstumsgeschwindigkeiten der Pflanzen. Sogar der Bambus, der bis zu 40 cm pro Tag wachsen kann, erreicht nur $4{,}5 \cdot 10^{-8}$ m/s. Spitzenreiter unserer heimischen Pflanzen sind die Pilze mit bis zu $2 \cdot 10^{-7}$ m/s. Gräser erreichen nur die Hälfte.
Und in der unbelebten Natur? Schnee fällt mit einer Geschwindigkeit bis zu 0,2 m/s aus den Wolken, bei Regen können es bis zu 8 m/s sein. Die Wolken selbst erreichen bis zu 20 m/s. Die Luft in einem Orkan bis zu 70 m/s. Luftmoleküle bei ihrer thermischen Bewegung erreichen dagegen bei normaler Temperatur und normalem Druck etwa 400 m/s.
Während die bisher genannten Geschwindigkeitswerte nur annähernd angegeben werden konnten, lassen sich viele Geschwindigkeiten im Kosmos auf mehrere Stellen hinter dem Komma genau angeben. Die Geschwindigkeit, mit der sich ein Punkt auf dem Äquator in Meereshöhe durch die Erdrotation bewegt, beträgt $4{,}65 \cdot 10^2$ m/s. Mit $2{,}98 \cdot 10^4$ m/s bewegt sich die Erde auf ihrer Bahn um die Sonne. Auf die Konstanz dieser Geschwindigkeiten stützt sich von alters her die Zeitmessung. Damit ein Körper, der sich auf Meereshöhe befindet, zum Erdsatelliten wird, muß ihm eine Geschwindigkeit von $7{,}9 \cdot 10^3$ m/s verliehen werden. Soll er die Erdanziehung überwinden, müssen es $11{,}18 \cdot 10^3$ m/s sein. Die dritte kosmische Geschwindigkeit – die zum Verlassen unseres Sonnensystems erforderlich ist – beträgt $16{,}67 \cdot 10^3$ m/s.
Noch einige Beispiele, aus dem Bereich der Technik. Der Schall breitet sich in Luft mit etwa $3 \cdot 10^2$ m/s aus. In Eisen ist er wesentlich schneller – $5{,}2 \cdot 10^3$ m/s. Der Elektronenstrahl rast mit $4 \cdot 10^6$ m/s über den Schirm unseres Fernsehempfängers. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Flamme an einer Zündschnur beträgt 1 cm/s (10^{-2} m/s). Indem der Sprengmeister die Länge der Zündschnur in cm mißt, ermittelt er die Zeit, in der er in Deckung gehen muß. Bis zu 80 m/s beträgt die Geschwindigkeit, mit der Synthesefasern aus der Spinndüse gezogen werden. Zum Schluß noch ein Beispiel aus dem Verkehrswesen. Die Geschwindigkeit des Flugzeuges wuchs in 80 Jahren um das 60fache. Der Höchstwert liegt jetzt bei 980 m/s (= 3 529,56 km/h).

Es gibt jedoch noch einen anderen Grund für die hohe Wertschätzung der Mathematik: sie allein bietet den Naturwissenschaften ein gewisses Maß an Sicherheit, das ohne Mathematik nicht erreichbar wäre.
Albert Einstein

ARBEITS-
GEMEINSCHAFTEN
IM BLICKPUNKT

Mathematisches Schülerkabinett – ein Jugendobjekt

Seit September 1984 besteht in der Sektion Mathematik der Pädagogischen Hochschule *Karl Friedrich Wilhelm Wander* in Dresden das neue Jugendobjekt „Mathematisches Schülerkabinett".

Ziel dieses Jugendobjektes ist es, eine Sammlung mathematischer Unterrichtsmittel, Spiele und Materialien für Schüler anzulegen, die die Schüler zur Beschäftigung mit mathematischen Problemen anregen sollen und zur selbständigen Aneignung mathematischer Kenntnisse beitragen. Bis jetzt arbeiten Jugendfreunde an diesem Objekt mit und erste Arbeiten im Rahmen des *Wissenschaftlichen Studentenwettstreites* liegen vor. Diese Ergebnisse konnten wir am 2. Mai 1985 im Rahmen des *dies academicus* der Öffentlichkeit vorstellen. So führte *Sybille Eckhardt* ihre Nachbildung des *Galton-Brettes* vor, mit dem sehr anschaulich Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung dargestellt werden können. *Silke Schlegel* demonstrierte ihr *Zerlegespiel*, mit dessen Hilfe Schüler der Unter- und Mittelstufe ihr geometrisches Vorstellungsvermögen auf unterhaltsame Weise schulen können. *Rainer Heinrich* stellte Teile seiner Aufgabensammlung vor, mit deren Hilfe Schüler selbständig die Arbeitsweise und Einsatzmöglichkeiten des Schulrechners SR 1 und anderer Taschenrechner kennenlernen können.

Die angefertigten Exponate können von Schülern, AGs, Klubs Junger Mathematiker usw. an unserer Hochschule benutzt werden, bzw. könnten Mathematiklehrern und AG-Leitern als Anregung dienen. In Zukunft wollen wir auch Lehrplanabschnitte gezielt untersuchen, um deren Potenzen für den Einsatz von Anschauungsmitteln, Materialien usw. aufzudecken und solche Materialien dann herstellen.

Großes Interesse fand auch der im Rahmen des Jugendobjekts organisierte Vortrag mit *J. Lehmann*, dem Chefredakteur der *alpha*, der in seiner kurzweiligen humorvollen Art über 90 Minuten seine Begeisterung für die Mathematik auf das Publikum übertrug.

Student Rainer Heinrich

Ein Besuch in der Knobelwerkstatt

Teil 6: Wir spielen mit Spielen

Liebe Freunde! In den Teilen 2 bis 4 unserer Beitragsserie hatten wir uns mit der Ideenfindung für mathematische Knobelaufgaben aus der Umwelt, der Mathematik sowie der deutschen Sprache beschäftigt, und Teil 5 war dem Anlaß „Jahreswechsel 1985/1986“ gewidmet.
Heute wollen wir nun die Ideen für Knobelaufgaben den bekannten Unterhaltungsspielen, wie Brettspielen, Tischspielen, Kartenspielen, Schiebespielen, Würfelspielen oder Spielen anderer Art, entlehnen. Sicher kennt ihr schon manches dieser Spiele und die entsprechenden Spielregeln. Denkt nur an Brettspiele wie Schach, Go, Dame, Mühle oder Halma; an Tischspiele wie Domino, Lege-Puzzles, Münzspiele oder Streichholzspiele; an Kartenspiele wie Skat, Sechsundsechzig, Rommé, Schwarzer Peter, Canasta oder Bridge; an Schiebespiele wie das Fünfzehnerspiel oder an die verschiedensten Würfelspiele. Viele dieser Spiele, allen voran sicherlich Schach und Go, sind anspruchsvolle Strategiespiele, die in hohem Maße logisches Denkvermögen, Kombinationsgabe und Abstraktionsvermögen abverlangen. Bei unserer Zielstellung geht es uns natürlich weniger um die Spiele selbst, sondern vielmehr um die Konstruktion von Problemen, die aus diesen Spielen erwachsen, die sich also durch Variation der Spielregeln, des Spielmaterials oder der Aufgaben- bzw. Zielstellung aus solchen Spielen konstruieren lassen. Wir wollen und können das nur an einigen Beispielen veranschaulichen:

Beispiel 1: Schach

Das Schachspiel, als dessen Heimat Indien gilt, und das Johann Wolfgang von Goethe als „ein Probierstein des Gehirns“ und Wladimir Iljitsch Lenin als „Gymnastik des Geistes“ bezeichneten, kennt sicher jeder von euch. Zumindest werdet ihr wissen, wie sich die Akteure, nämlich der König, die Dame, die Türme, die Läufer, die Springer und die Bauern, auf den 64 Feldern eines Schachbrettes bewegen und wie sie gegnerische Figuren schlagen dürfen, und wann der König, die wichtigste Figur des Spiels, im „Schach“ steht bzw. „matt“ ist. Das Schachspiel, das einerseits hinreichend einfach, andererseits aber schier unerschöpflich ist, war seit jeher Ausgangspunkt zu zahlreichen Problemkompositionen. Beispielsweise schuf der amerikanische Mathematiker Samuel Loyd (1841 bis 1911) eine Vielzahl origineller und phantasiereicher Schachaufgaben und -probleme. Die Vielfältigkeit des Schachs erlaubt es aber, daß man sich hierzu immer wieder neue Probleme ausdenken kann. Eine Reihe typischer, aus dem Schachspiel erwachsender Aufgaben ergeben sich beispielsweise durch die folgenden Methoden:
1. Nutzung der Geometrie des Schachbrettes; denkt an das „zersprungene Schachbrett“ (*s. Aufgabe 1*), an Teilungsaufgaben (*s. Aufgabe 2*) oder an Aufgaben, die durch Verbindung der Schachbrett-Geometrie mit Zahlen, Münzen (*s. Aufgabe 3*), anderen Spielsteinen bzw. Würfeln entstehen.
2. Konstruktion mathematischer Probleme, die auf den Bewegungsmöglichkeiten einer bestimmten Figur auf dem Schachbrett basieren (*s. Aufgabe 4*).
3. Abänderung der Felderanzahl eines Standard-Schachbrettes; denkt an Minischach-Probleme (*s. Aufgabe 5*) oder an sich hieraus ergebende Probleme mathematischer Natur (*s. Aufgabe 6*).
4. Abänderung der Quadratform bzw. der Schwarz-Weiß-Färbung eines Schachbrettes z. B. im Zusammenhang mit Rösselsprung-Aufgaben (*s. Aufgabe 7;* vgl. hierzu auch die Rösselsprünge in den Knobel-Wandzeitungen (1) und (5)).
5. Konstruktion eigentlicher Schachprobleme, z. B. Vorgabe einer Spielsituation mit dem Ziel, den König einer bestimmten Farbe in einer vorgegebenen Anzahl von Zügen matt zu setzen; denkt an Aufgaben vom Typ „Matt in 2 Zügen“ (Zweizüger), „Matt in 3 Zügen“ (Dreizüger) usw. (s. hierzu den alpha-Schachwettbewerb 1984, Heft 6/1984).

Beispiel 2: Domino

Das Dominospiel, als dessen Erfinder die Chinesen gelten, ist euch sicher bekannt. Die gebräuchlichste Form des Spiels besteht aus 28 jeweils aus 2 quadratischen Halbteilen zusammengesetzten rechteckigen Spielsteinen mit den Augenpaaren von 0–0 bis 6–6, d. h. auf jedem Stein ist eine der möglichen Kombinationen der 7 Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 zur Klasse 2 in Form von Punkten dargestellt. Das Dominospiel, bei dem die Standardregel darin besteht, daß an ein Halbteil eines ausgelegten Steins nur ein Halbteil mit gleicher Augenzahl angelegt werden darf, ist selbst sehr einfach und birgt kaum mathematische Probleme in sich. Doch lassen sich mit einem vollständigen Satz von Dominosteinen bzw. mit einer bestimmten Teilmenge hiervon allerhand interessante Denksportaufgaben konstruieren. Einige Aufgabentypen seien genannt:
1. Das Zusammenlegen quadratischer oder rechteckiger Rahmen (Quadratringe oder Rechteckringe) mit gleicher Augensumme auf jeder Seite (*s. Aufgabe 8*).
3. Das Zusammenlegen von Quadrillen, d. h. Figuren, die nur aus quadratischen Blöcken von 4 augengleichen Halbteilen bestehen (*s. Aufgabe 10*).
4. Aufzeichnung der 56 Quadrate (Halbteile) aller 28 Spielsteine etwa in Rechteckform mit dem Ziel, die Lage der Spielsteine zu rekonstruieren (*s. Aufgabe 11*). Bei der Lösung solcher Aufgaben muß man systematisch vorgehen, d. h. man stellt zunächst fest, an wieviel Stellen ein Stein plaziert sein könnte, und findet man für einen bestimmten Stein nur 1 Möglichkeit, so hat man damit einen sicheren Ausgangspunkt für die weitere Rekonstruktion gefunden.
5. Aufgaben mit abgeänderten Dominosteinen, etwa mit solchen, bei denen man die Augenpaare durch geometrische Figuren (*s. Aufgabe 12*), Buchstaben, Silben oder Worte (*s. Aufgabe 13*) ersetzt.
Weitere Aufgaben mit Dominosteinen wären etwa Ratespiele mit verdeckt liegenden Dominosteinen, geometrische Probleme an zusammengelegten Dominosteinen, Probleme an Domino-Ketten u. a.

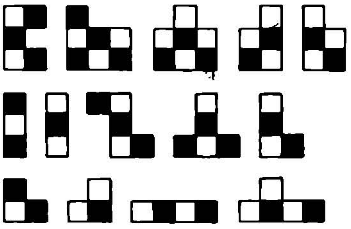
Beispiel 3: Schiebe-Puzzles

Jeder von euch kennt sicher das bekannte Fünfzehnerspiel (Boss-Puzzle), das nach seiner Erfindung in der zweiten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts durch S. Loyd rasche Verbreitung fand und eines der beliebtesten Geduldsspiele wurde. Es besteht aus 15 gleichgroßen, quadratischen und von 1 bis 15 durchnumerierten Täfelchen, die in einen quadratischen Rahmen gegeneinander verschiebbar eingelagert sind, wobei ein Leerkästchen frei bleibt. Die Aufgabe besteht nun darin, die Täfelchen (d. h. die Zahlen von 1 bis 15) aus einer beliebigen Anordnung durch vertikale und horizontale Verschiebung in eine bestimmte Reihenfolge zu bringen (vgl. hierzu auch alpha-Heft 3/1983). Man kann nun durch Abänderung der Quadratstruktur und der Größe der Schiebesteine sowie durch Verwendung anderer Aufschriften (Buchstaben, Worte, Bildausschnitte o. ä.) eine Reihe interessanter Schiebe-Puzzles konstruieren. Die *Aufgaben 14 und 15* unserer Knobelwandzeitung mögen euch Anregung geben zum Entwurf solcher Schiebe-Puzzles.
Viel Spaß beim Spielen mit Spielen wünscht euch

R. Mildner

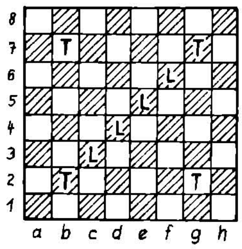
Knobel-Wandzeitung

▲ 1 ▲ Schachbrett-Puzzle



Ein Standard-Schachbrett wurde in die abgebildeten 14 Teile zerlegt.
Versucht nun, das Schachbrett wieder zusammenzusetzen!

▲ 2 ▲ Schachbrett-Teilung



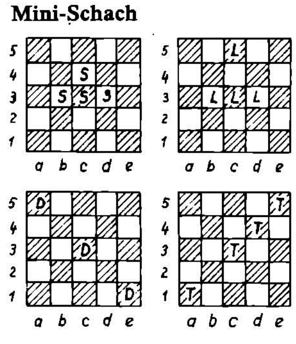
Zerlegt das abgebildete Schachbrett derart in 4 kongruente Teile, daß sich in jedem Teil ein Turm und ein Läufer befinden!

▲ 3 ▲ Schachbrett mit Münzen
Ordnet auf einem Standard-Schachbrett 16 Pfennige, 16 Fünfer, 8 Groschen, acht 20-Pfennig-Münzen, acht 50-Pfennig-Münzen und acht 1-Mark-Münzen so an, daß sich auf jedem Feld genau eine Münze befindet, und daß der Geldwert in jeder Zeile, Spalte und Diagonale jeweils 1,92 Mark beträgt!

▲ 4 ▲ Mit 4 Springern
Stellt 4 Springer so auf einem Standard-Schachbrett auf, daß diese zusammen 28 Felder des Schachbrettes beherrschen und sich gegenseitig nicht gefährden!

▲ 5 ▲ Mini-Schach

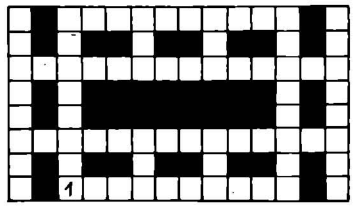
a) b) c) d)



Auf den abgebildeten Mini-Schachbrettern stehen bei a) 4 weiße Springer, bei b) 4 weiße Läufer, bei c) 3 weiße Damen und bei d) 4 weiße Türme. Auf welches Feld muß in jedem Falle der schwarze König gesetzt werden, damit er nicht im „Schach" steht?

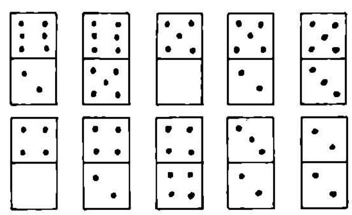
▲ 6 ▲ Damen-Problem
Stellt euch vor, ihr hättet ein Riesenschachbrett mit $1986 \times 1986 = 3944196$ Feldern. Könnte man dann auf diesem Schachbrett 1983 Damen so aufstellen, daß alle Felder des Brettes von ihnen beherrscht werden? (Hinweis: Versucht zunächst einmal, auf einem Standard-Schachbrett 5 Damen so aufzustellen, daß alle Felder von ihnen beherrscht werden, und schließt dann induktiv weiter!)

▲ 7 ▲ Rösselsprung



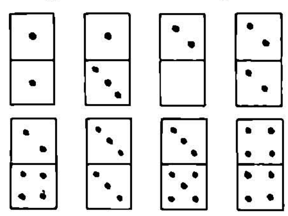
Zieht einen Springer (Gangart wie beim Schach) vom Feld 1 derart zum Feld 1 zurück, daß er zwischendurch jedes weiße Feld der Figur genau einmal betritt! Die schwarzen Felder dürfen dabei übersprungen, aber nicht betreten werden.

▲ 8 ▲ Domino-Rahmen



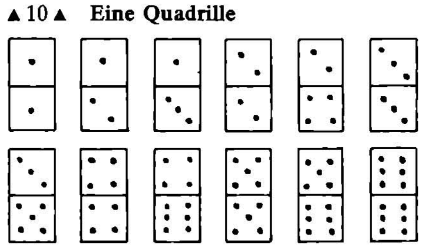
Legt die abgebildeten 10 Domino-Steine derart zu einem quadratischen Rahmen zusammen, daß die Augensumme auf jeder Seite 20 beträgt!

▲ 9 ▲ Magisches Domino-Quadrat



Legt die abgebildeten 8 Domino-Steine so zu einem lückenlosen Quadrat zusammen, daß die Augensumme in jeder waagerechten, senkrechten und diagonalen Reihe jeweils 10 beträgt!

▲ 10 ▲ Eine Quadrille



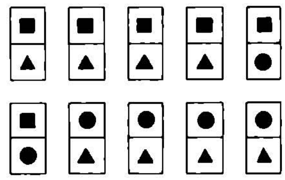
Legt die abgebildeten 12 Domino-Steine zu einer rechteckförmigen Quadrille zusammen!

▲ 11 ▲ Lage-Rekonstruktion

4	2	4	2	1	6	2	5
0	1	5	0	5	5	0	5
4	5	4	6	6	0	3	3
4	4	1	3	2	0	3	3
1	6	6	6	2	6	2	0
0	4	3	5	2	0	2	4
5	6	1	3	1	1	1	3

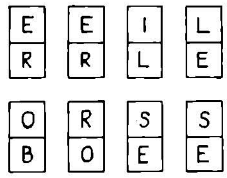
Die Abbildung zeigt die 56 Halbteile eines vollständigen Domino-Spielsatzes, wobei die Augenwerte durch Ziffern ersetzt wurden. Wie sind die 28 Domino-Steine zusammengelegt?

▲ 12 ▲ Kinderleicht



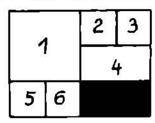
Legt die abgebildeten 10 Figurendomino-Steine so zu einem quadratischen Rahmen zusammen, daß sich auf jeder Seite 2 Dreiecke, 2 Quadrate und 2 Kreise befinden!

▲ 13 ▲
Magisches Domino-Wort-Quadrat



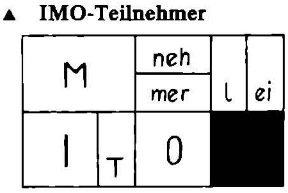
Legt die abgebildeten 8 Buchstabendomino-Steine derart zu einem lückenlosen Quadrat zusammen, daß ein magisches Wortquadrat zu lesen ist!

▲ 14 ▲ Schiebe-Puzzle



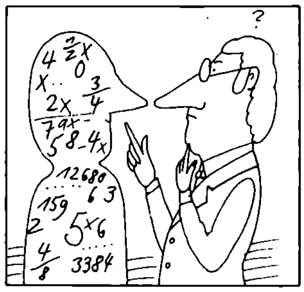
Bringt durch horizontale bzw. vertikale Verschiebung der abgebildeten 6 Spielsteine innerhalb des rechteckigen Rahmens den Stein 1 (großes Quadrat) in die rechte untere Ecke, und das mit möglichst wenig Zügen!

▲ 15 ▲ IMO-Teilnehmer



Die abgebildeten 8 Spielsteine (mit den entsprechenden Aufschriften) sollt ihr so innerhalb des rechteckigen Rahmens horizontal bzw. vertikal gegeneinander verschieben, daß man am Schluß „IMO" (in der oberen Zeile) und „Teilnehmer" (in der unteren Zeile) lesen kann. Wer schafft es mit 16 Zügen?

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1986

Mathematik

Ma 5 ■ 2636 Egon hat einen Bücherscheck im Werte von 50,– M erhalten. Von einer Buchserie, in der Bücher zu 3,– M und 4,– M je Exemplar angeboten werden, möchte er möglichst viele Bücher erwerben. Wie viele Bücher zu 3,– M bzw. 4,– M kann er mit dem Bücherscheck kaufen, wenn der Betrag restlos verbraucht wird? *Sch.*

Ma 5 ■ 2637 Ein Vater ist gegenwärtig 55 Jahre, sein Sohn 23 Jahre alt. Vor wieviel Jahren war der Vater dreimal so alt wie sein Sohn? *Sch.*

Ma 5 ■ 2638 In einer Kiste befinden sich vier verschiedene Sorten Äpfel, von jeder Sorte gleichviel. Insgesamt sind es 100 Äpfel. Wie viele Äpfel muß man der Kiste wahllos entnehmen, um mit Sicherheit zehn Äpfel der gleichen Sorte zu erhalten? *Sch.*

Ma 5 ■ 2639 Auf wieviel Arten ist es möglich, ein 1-Mark-Stück in 10-Pf-, 20-Pf- oder 50-Pf-Stücke zu wechseln? *Sch.*

Ma 5 ■ 2640 Wie viele dreistellige natürliche Zahlen mit der Quersumme 10 gibt es? Stelle sie alle zusammen! *Sch.*

Ma 5 ■ 2641 Welche Grundziffern müssen für a, b, c eingesetzt werden, damit wir aus $12a76:23b = c2$ eine richtig gelöste Divisionsaufgabe erhalten? *Sch.*

Ma 6 ■ 2642 Man verknüpfe eine beliebige Anzahl aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge durch die Operationszeichen der vier Grundrechenarten so, daß man als Ergebnis stets die Zahl 20 erhält. Dabei dürfen auch Klammern gesetzt werden. (Beispiel: $5 \cdot 6 + 7 - 8 - 9 = 20$.) Gib mindestens weitere acht Beispiele an!

Schülerin Heike Simmank, Niesky

Ma 6 ■ 2643 Welche natürlichen Zahlen, a, b, c erfüllen die Gleichung $a \cdot (b + c) = b \cdot (a + c)$, wenn $a = 9$ gelten soll und

(1) c der Nachfolger von b sein soll?

(2) b der Nachfolger von c sein soll?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2644 Von einem Faß Gurken blieben am 1. Tag 8 kg Gurken mehr übrig als verkauft wurden. Am 2. Tag verkaufte man die Hälfte der noch vorhandenen Gurken; am 3. Tag verkaufte man die übriggebliebenen 22 kg Gurken. Wieviel Kilogramm Gurken waren anfangs im Faß? Begründe deine Feststellung!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2645 Altstoffe sind wertvolle Rohstoffe für unsere Volkswirtschaft. Die Klassen 6a, 6b und 6c einer Schule führten einen Wettbewerb beim Altpapiererfassen durch. Dabei erreichte die Klasse 6b 40 kg weniger als das Doppelte der Klasse 6a; die Klasse 6c die Hälfte des Sammelergebnisses der Klasse 6b.
Insgesamt erfaßten die drei Klassen 4,8 dt Altpapier. Wieviel Kilogramm entfallen auf jede dieser Klassen?

K. Wagner, Plauen

Ma 6 ■ 2646 Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck ABC. Zeichne eine Parallele zu $\overline{AB}$, die $\overline{BC}$ in E und $\overline{AC}$ in D derart schneide, daß $\overline{AD} + \overline{BE} = \overline{DE}$ gilt! *Sch.*

Ma 7 ■ 2647 Die Sternchen in Bild 1 wurden in Bild 2 durch natürliche Zahlen ersetzt. Dabei beträgt die Summe S dieser Zahlen in der linken und rechten Spalte,

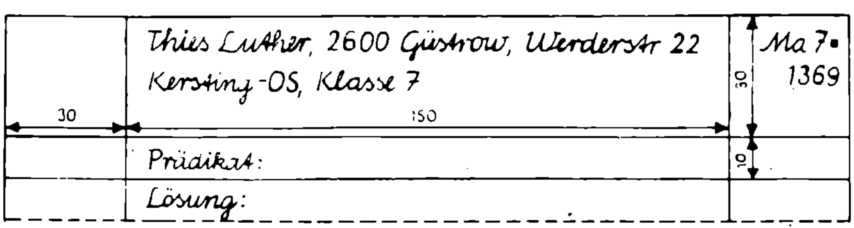
*	*	*
*		*
*	*	*

Bild 1

1	7	2
7	·	7
2	7	1

Bild 2

aber auch in der oberen und unteren Zeile jeweils 10. Die Gesamtsumme G aller Zahlen beträgt 34. Welche natürlichen Zahlen muß man einsetzen, wenn gelten soll
a) $S = 10$ und $G = 35$?



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha
7027 Leipzig,
Postfach 14

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1985/86 läuft von Heft 5/1985 bis Heft 2/1986. Zwischen dem 1. und 10. September 1986 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/85 bis 2/86 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/86 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/85 bis 2/86) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1985/86 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

b) $S = 50$ und G die kleinstmögliche Zahl?

c) $G = 50$ und S die kleinstmögliche Zahl?

(Es genügt jeweils die Angabe einer Lösung.)

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

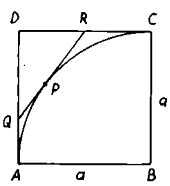
Ma 7 ■ 2648 Über der Seite $\overline{AB}$ eines Quadrates $ABCD$ ist ein gleichseitiges Dreieck ABE derart zu konstruieren, daß der Punkt E des Dreiecks im Innern des Quadrates liegt. Es ist die Größe φ des Winkels CED zu bestimmen!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ■ 2649 Zeichne ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ derart, daß $\overline{AB}$ länger ist als $\overline{CD}$. Ziehe die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, fälle von C das Lot auf $\overline{AB}$; sein Fußpunkt sei F. Es möge $\overline{CF}$ die Diagonale $\overline{BD}$ in G schneiden, und es sei E der Schnittpunkt der Diagonalen. Weise nach, daß das Dreieck CEG gleichschenklig ist!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ■ 2650 Dem abgebildeten Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a wurde ein Viertelkreis einbeschrieben, dessen Mittelpunkt mit B zusammenfällt und dessen Radius gleich der Seitenlänge a des Quadrates ist. An einen von A und C verschiedenen Punkt P des Viertelkreises wurde die Tangente gelegt, die $\overline{AD}$ in Q und $\overline{CD}$ in R schneidet. Es ist nachzuweisen, daß der Umfang des Dreiecks QRD gleich dem halben Umfang des Quadrates $ABCD$ ist! *Sch.*



Ma 8 ■ 2651 Es ist zu beweisen, daß die Summe zweier positiver rationaler Zahlen, deren Produkt gleich 1 ist, niemals kleiner als 2 sein kann. *Schüler M. Jurke, Cottbus*

Ma 8 ■ 2652 Es ist zu entscheiden, ob man lieber eine Apfelsine kaufen sollte, die einen Durchmesser von 12 cm hat, dafür aber eine 1 cm dicke Schale oder 7 Apfelsinen, deren jeweiliger Durchmesser und auch die Schale halb so dick sind wie bei der großen Apfelsine. (Man nehme an, daß die Apfelsinen kugelförmig und von gleicher Qualität sind.)

Dipl.-Ing. H. Miethig, Dresden

Ma 8 ■ 2653 Auf welche Weise kann man einen Betrag von 500,00 M in 100-Mark-Scheinen, 50-Mark-Scheinen und 20-Mark-Scheinen erhalten, wenn man mehr 20-Mark-Scheine als 50-Mark-Scheine, mehr 50-Mark-Scheine als 100-Mark-Scheine und sonst keine weiteren Banknoten oder Geldmünzen ausgehändigt erhält. *Sch.*

Ma 8 ■ 2654 In einem Quadrat sei die Diagonale einen Zentimeter länger als eine Seite. Wie groß ist der Flächeninhalt dieses Quadrates? Wie viele Quadrate mit dieser Eigenschaft gibt es?

K. Richter, Karl-Marx-Stadt

Ma 9 ■ 2655 Es ist nachzuweisen, daß die Summe $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ für jede Belegung der Variablen n mit einer natürlichen Zahl ganzzahlig ist! *Sch.*

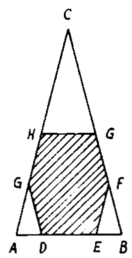
Ma 9 ■ 2656 Es ist zu beweisen, daß unter allen natürlichen Zahlen, deren Quersumme im dekadischen Positionssystem 33 beträgt, keine Quadratzahl ist!

G. Jeschke, Schwarzheide

Ma 9 ■ 2657 Es seien $n^2 = \overline{abcd}$ und $(k \cdot n)^2 = \overline{dcba}$ zwei natürliche Zahlen in dekadischer Darstellung. Welche Zahlen n erfüllen diese Gleichungen?

Nach der sowjetischen mathematischen Schülerzeitschrift „Quant", Moskau

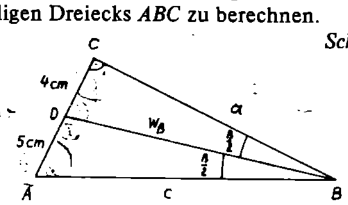
Ma 9 ■ 2658 Dem abgebildeten gleichschenkligen Dreieck ABC, dessen Basis $\overline{AB}$ halb so lang ist wie dessen Schenkel $\overline{AC}$, wurde ein gleichseitiges Sechseck $DEFGHK$ einbeschrieben. Wieviel Prozent des Flächeninhalts A_0 des gleichschenkligen Dreiecks ABC beträgt der Flächeninhalt des ihm einbeschriebenen Sechsecks? *Sch.*



Ma 10/12 ■ 2659 Der Term $\sqrt{99 + 70\sqrt{2}} - \sqrt{99 - 70\sqrt{2}}$ ist soweit wie nur möglich zu vereinfachen! *Sch.*

Ma 10/12 ■ 2660 Die Brüche $\frac{19}{95}$, $\frac{199}{995}$ und $\frac{1999}{9995}$ ergeben, soweit wie möglich gekürzt, $\frac{1}{5}$. Es ist zu untersuchen, ob auch $\frac{199\ldots9}{99\ldots95} = \frac{1}{5}$ gilt. *Sch.*

Ma 10/12 ■ 2661 Im abgebildeten rechtwinkligen Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ teilt die Winkelhalbierende w_β die Kathete $\overline{AC}$ so, daß $\overline{AD}$ 5 cm und $\overline{CD}$ 4 cm lang ist. Es sind die Seitenlängen des rechtwinkligen Dreiecks ABC zu berechnen. *Sch.*



(Zeichnung nicht maßstäblich)

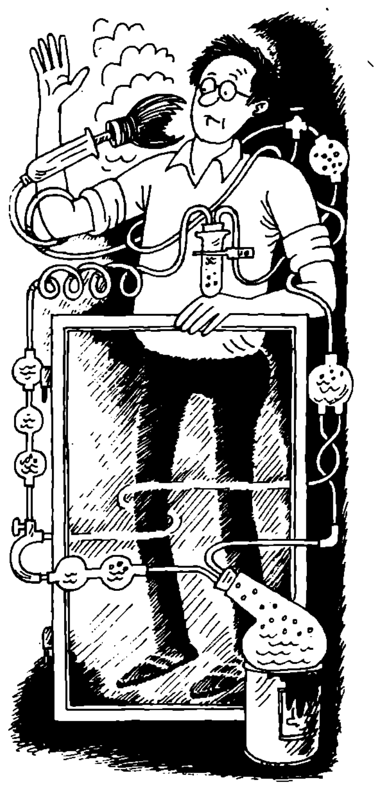
Ma 10/12 ■ 2662 Es sei n die Basis eines Zahlensystems. Für welche $x, y, z, n \in N$; $x \neq 0$; $x, y, z < n$ gilt

$$[xyz]_n = (n + 1)^2$$

Schülerin H. Bernsee, Sallgast

Chemie

Ch 7 ■ 153 Wieviel Kilogramm Phosphor und Kalziumoxid sind im menschlichen Skelett enthalten, wenn man davon ausgeht, daß es durchschnittlich 12 kg Knochensubstanz, deren Gehalt an Kalziumphosphat etwa 62 % beträgt, enthält?



„Was habt ihr denn heute in der Chemiestunde gemacht?"
„Wir haben Sprengstoff hergestellt."
„Und was macht ihr morgen in der Schule?"
„In welcher Schule?"

Ch 8 ■ 154 In einem Heizhaus eines Betriebes werden stündlich 100 kg Anthrazit mit der Zusammensetzung 93,2 % Kohlenstoff, 3,8 % Wasserstoff und 3,0 % Sauerstoff verbrannt. Berechne die Gesamtmolzahl des Sauerstoffs!

Ch 9 ■ 155 Von einem Gasgemisch, das aus 15 Vol.-% Schwefeldioxid und 85 Vol.-% Sauerstoff besteht, sollen 90 % des Schwefeldioxids nach dem Kontaktverfahren in Schwefeltrioxid umgewandelt werden. Berechne

a) die im Gleichgewicht vorliegenden Stoffmengen in Liter,

b) das Gesamtvolumen im Gleichgewicht!

Ch 10/12 ■ 156 Für die katalytische Hydrierung von 0,229 g einer ungesättigten organischen Verbindung mit der Molaren Masse von 148 g mol^{-1} wurden 149 ml Wasserstoff von 20 °C und 101,3 kPa verbraucht. Berechne die Zahl der Doppelbindungen, die die unbekannte Verbindung enthielt!

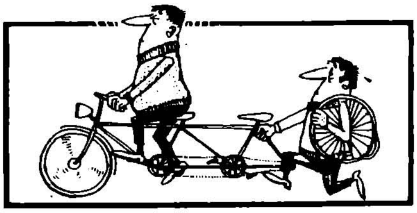
Physik

Ph 6 ■ 192 Ein Mühlenrad wird durch einen Wasserlauf angetrieben. Der kleine Kanal, durch den das Wasser zufließt, hat eine Breite von 1,30 m und eine Tiefe von 0,5 m. In einer Sekunde strömen 0,4 m der Länge des Kanals Wasser über das Mühlenrad. Wieviel m^3 Wasser fließen in einer Stunde durch den Kanal?

Ph 7 ■ 193 In der Wasserleitung eines Gebäudes herrscht ein Druck von 0,3 MPa. Mit welcher Kraft drückt das Wasser auf die Hahnöffnung, wenn ihr Durchmesser 8 mm beträgt?

Ph 8 ■ 194 Zur Beheizung einer Produktionshalle wird eine Wärmemenge von $P = 165$ kWh/h benötigt. Als Brennstoff wird Braunkohle mit einem Heizwert $W_H = 1{,}18 \cdot 10^4$ kJ/kg eingesetzt.
Bestimme den Jahresbedarf an Braunkohle in kg, wenn durchgängig im Dreischichtbetrieb gearbeitet und mit durchschnittlich 150 Heiztagen im Jahr gerechnet wird!

Ing. K. H. Milde, Dresden

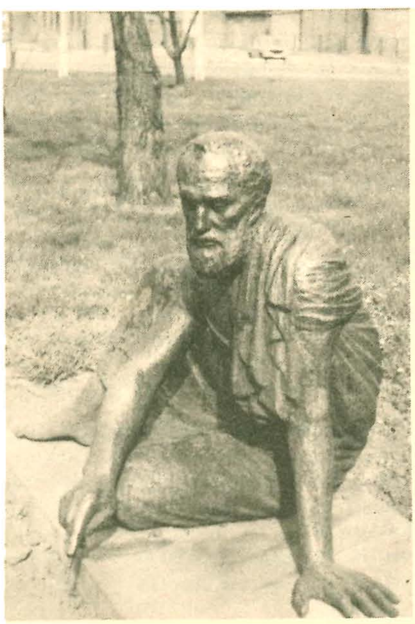


Ph 9 ■ 195 Ein frei fallender Körper legt in der letzten Sekunde ein Drittel seines Weges zurück. Bestimmen Sie die Fallzeit und die Fallhöhe!

Ph 10/12 ■ 196 Welche Energie wird bei der Spaltung von 1 Gramm reinem $^{235}_{92}U$ frei, wenn die Kernspaltung nach der Reduktionsgleichung

$^1_0n + ^{235}_{92}U \xrightarrow{\beta} ^{140}_{58}Ce + ^{94}_{40}Zr + 2(^1_0n)$

verläuft? Wie vielen Tonnen Steinkohle entspricht diese Energie, wenn deren Heizwert 30 MJ/kg beträgt?



Plastik des Archimedes an der TH Magdeburg

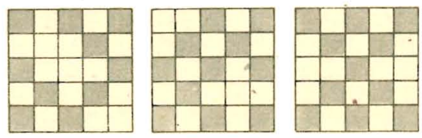
Diese von dem Bildhauer *Gerhard Thieme* geschaffene Plastik wurde 1978 vor der Bibliothek der Technischen Hochschule *Otto von Guericke* in Magdeburg aufgestellt. (Eine Kopie befindet sich auf dem Marktplatz in Güstrow.) Obwohl die Plastik keine Bezeichnung trägt, sieht man sofort, daß es sich nur um Archimedes handeln kann, und diese eindeutige Identifizierbarkeit schließt ein großes Lob für den Künstler ein.
Die Legende berichtet ja bekanntlich, daß Archimedes während der Eroberung seiner Heimatstadt Syrakus im Jahre 212 v. u. Z. durch die Römer von einem römischen Soldaten beim Zeichnen geometrischer Figuren in den Sand angetroffen worden sein soll.
Störe mir meine Kreise nicht! – sollen seine letzten Worte gewesen sein, bevor der Soldat ihn erschlug. Er tat dies vermutlich aus Angst vor dem vermeintlichen Zauberer, obwohl der römische Feldherr Marcellus strengen Befehl gegeben hatte, den Gelehrten unversehrt zu ihm zu bringen. Es war wesentlich dem technischen Genie des Archimedes zu verdanken, daß Syrakus sich zwei Jahre lang erfolgreich gegen die römische Übermacht verteidigen konnte, bevor es durch Verrat in die Hände der Römer fiel. Die von Archimedes erfundenen und in die Tat umgesetzten Verteidigungsmaschinen hatten den abergläubischen und ungebildeten römischen Soldaten als übernatürliche Kräfte erscheinen müssen.
Archimedes hat uns durch sein Leben und Werk drei große Beispiele gegeben:
Er war ein hervorragender Mathematiker,
er verstand es hervorragend, die Mathematik in der Praxis anzuwenden, und
er setzte alle seine Kräfte und Fähigkeiten für die Verteidigung seiner Heimat ein.
So hätte die TH *Otto von Guericke* keine bessere Wahl eines Sujets für ein Kunstwerk zum Schmuck ihres Geländes treffen können.

P. Schreiber

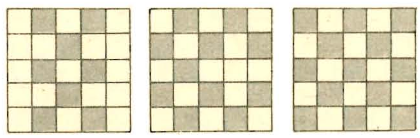
Lösungen

Lösung zu:
Ein hüpfender Springer

Die Muster mit zwei Bewegungen von A und B aus haben je eine diagonale Symmetrielinie, und diejenigen von D aus haben zwei Symmetrielinien. Wenn aber von E oder F gestartet wird, hat das Muster eine Symmetrielinie. Das Muster mit vier Symmetrielinien ist das Ergebnis von vier Bewegungen von A, B, C, D oder drei Bewegungen von E und F aus.



1 2 3



4 5 6

Lösungen zu: Sprachecke

▲1▲ Ein Kreis und ein Quadrat haben denselben Flächeninhalt. Dem Kreis wurde ein Quadrat und dem (ursprünglichen) Quadrat ein Kreis einbeschrieben. Was ist größer – der Flächeninhalt des dem Kreis einbeschriebenen Quadrats oder der Flächeninhalt des dem Quadrat einbeschriebenen Kreises?
Lösung: Sei a die Seitenlänge des Quadrats und r der Radius des gegebenen Kreises. Dann wird die Flächengleichheit ausgedrückt durch $a^2 = \pi r^2$. Der Radius des dem Quadrat einbeschriebenen Kreises ist $\frac{a}{2}$, und die Seitenlänge des dem Kreis einbeschriebenen Quadrats ist $r\sqrt{2}$. Die Flächeninhalte sind $\frac{\pi a^2}{4}$ und $2r^2$ bzw. (wegen $a^2 = \pi r^2$) $\frac{\pi^2 r^2}{4}$ und $2r^2$. Es ist $\pi^2 > 9$, also $\frac{\pi^2}{4} r^2 > 2r^2$, d. h. der Flächeninhalt des einbeschriebenen Kreises ist größer als der des einbeschriebenen Quadrats.

▲2▲ Die Zahl 1 hat nur einen Teiler, die Zahl selbst. Jede Primzahl hat zwei verschiedene Teiler, 1 und sich selbst.
(*Bemerkung:* 1 ist nicht als Primzahl anzusehen, da sie nur einen Teiler hat.)

Jede ganze Zahl, die ein Produkt von zwei verschiedenen Primzahlen ist, hat vier verschiedene Teiler. Wenn z.B. die Zahl pq ist (wobei p und q Primfaktoren sind), sind die Teiler 1, p, q und die Zahl pq selbst. Jedes Produkt von drei verschiedenen Primzahlen hat acht verschiedene Teiler. Wenn die Zahl pqr ist, sind die Teiler 1, p, q, r, pq, pr, qr und die Zahl pqr selbst.

(I) Was ist über die Anzahl der Teiler von
(a) dem Quadrat einer Primzahl,
(b) der 3. Potenz einer Primzahl,
(c) dem Quadrat einer zusammengesetzten Zahl zu sagen?
(II) Kannst du eine ganze Zahl ermitteln, die gleich der Anzahl der Teiler ihres Quadrates ist?

Lösung: Das Quadrat jeder Primzahl p hat 3 Teiler 1, p und p^2. Die 3. Potenz jeder Primzahl p hat 4 Teiler 1, p, p^2, p^3. Das Quadrat jeder zusammengesetzten ganzen Zahl hat eine ungerade Anzahl von Teilern. Die einzige ganze Zahl, die gleich der Anzahl der Teiler ihres Quadrates ist, ist 3. Die Zahl 9, das Quadrat von 3, hat 3 Teiler 1, 3, 9.

▲3▲ Von den berühmten Diamanten wurde der Diamant Orlow in Indien im 17. Jahrhundert gefunden. Er wird gegenwärtig im Kreml aufbewahrt. Ungeschliffen betrug die Masse 300 Karat; einmal geschliffen betrug sie 189,6 Karat. (1 Karat = 0,20 g) Berechne die Masse dieses Diamanten vor und nach dem Schliff in Gramm!

Lösung: $300 \cdot 0{,}20\,\text{g} = 60\,\text{g}$;
$189{,}6 \cdot 0{,}20\,\text{g} = 37{,}92\,\text{g}$.
Die Masse des Diamanten betrug 60 g vor und 37,92 g nach dem Schliff.

▲4▲ Eine Stahlkugel schwimmt in Quecksilber. Vergrößert oder verkleinert sich die Eintauchtiefe, wenn die Temperatur erhöht wird?

Lösung: Beim Erwärmen dehnt sich Quecksilber stärker aus als Stahl. Dabei verringert sich die Auftriebskraft, und die Kugel sinkt tiefer ein.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

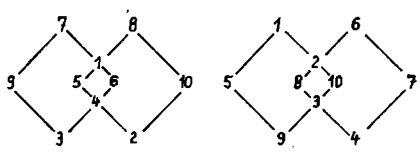
Anschauen – Denken – Lösen
Aus den Gleichungen (1) und (6) folgt:
(1′) $\beta = 2\alpha$
(1′) in (6) eingesetzt:
$9\alpha^2 = 9\alpha^3 \qquad (\alpha \neq 0)$
$\alpha = 1$
$\beta = 2$
und weiter: $\gamma = 3$, $\delta = 4$
Die Proben bestätigen die Richtigkeit der Lösung
(1) $3 = 1 + 2$
(2) $6 = 1 + 2 + 3$
(3) $10 = 1 + 2 + 3 + 4$
(4) $100 = 1 + 8 + 27 + 64$
(5) $36 = 1 + 8 + 27$
(6) $9 = 1 + 8$

In einem TEE-Zug
$1986 = 2 \cdot 3 \cdot 331$.
Es sind also 331 Fahrgäste und $2 \cdot 3 = 6$ Schaffner.

Magisches Quadrat

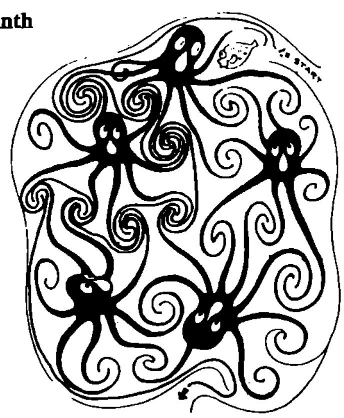
2	7	6
9	5	1
4	3	8

Zahlenspiel

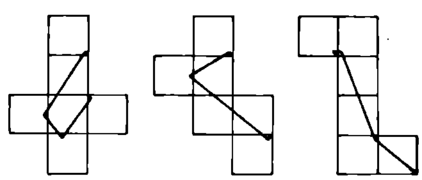


Königszug
Ihr glücklichen Augen,
was je ihr gesehn,
es sei wie es wolle,
es war doch so schön.

Labyrinth

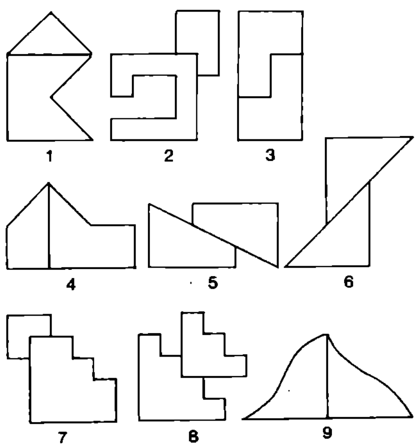


Die Ameise auf dem Würfel
Beispiele:



Geometrischer Körper gesucht
Lösung vom Schüler Hans v. d. Berg, Venlo: Bezeichnet man den Mittelpunkt des regelmäßigen Sechsecks mit C, dann kannst du die Figur aus einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide mit dem Quadrat als der Grundfläche und C als der Spitze (wobei alle Kanten die Länge 1 haben) und zwei regelmäßigen Vierflachs (dreiseitigen Pyramide, deren Kanten ebenfalls alle die Länge 1 haben) aufbauen. Der Inhalt einer Pyramide ist gleich $\frac{1}{3}$ × Höhe × Grundfläche, und eine einfache Berechnung liefert für den Inhalt der vierseitigen Pyramide $\frac{\sqrt{2}}{6}$ und für den der Vierflachs jeweils $\frac{\sqrt{2}}{12}$. Der Gesamtinhalt ist somit $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Mit einem Schnitt

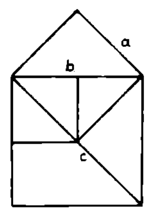


Einfach fabelhaft
Die Lösung sei dem Leser überlassen.

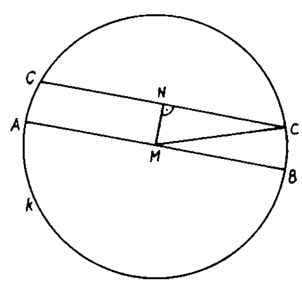
Beweis gefordert
Die beiden dreistelligen natürlichen Zahlen seien
$\overline{abc} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$
und $\overline{def} = d \cdot 100 + e \cdot 10 + f$.
Ihre Summe ist $\overline{abc} + \overline{def} = (a + d) \cdot 100 + (b + e) \cdot 10 + c + f = (a + d) \cdot 99 + (b + e) \cdot 9 + a + b + c + d + e + f$
$\cdot\, a + b + c + d + e + f$ ist die Summe der Quersummen beider natürlichen Zahlen. Für diese gilt $a + b + c + d + e + f = n \cdot 9$ mit $n \in N$. Damit gilt $\overline{abc} + \overline{def} = [(a + d) \times 11 + b + e + n] \cdot 9$, d.h. $\frac{9}{\overline{abc} + \overline{def}}$.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb,
Heft 2/85

Ma 8 ■ 2567 Nach dem Satz des Pythagoras gilt $a^2 + a^2 = b^2$
bzw. $2a^2 = b^2$ bzw. $b = \sqrt{2}$.
Es gilt weiter $2b^2 = c^2$,
d.h. $c^2 = 4a^2$ bzw. $c = 2a$.
Wegen $a \in N$, so $2a \in N$, w.z.b.w.



Ma 8 ■ 2568 Aus der nicht maßstabgerechten Skizze ist erkennbar, daß nach dem Satz des Pythagoras gilt:
$\overline{ND}^2 = \overline{MD}^2 - \overline{MN}^2$,
$\overline{ND} = \sqrt{9^2 - 3^2}$ cm,
$\overline{ND} = \sqrt{72}$ cm,
$\overline{ND} \approx 8{,}5$ cm.



Nun gilt aus Symmetriegründen
$\overline{CD} = 2\overline{ND}$, also $\overline{CD} \approx 17$ cm. Die Länge s der Sehne $\overline{CD}$ beträgt etwa 17 cm.

Ma 9 ■ 2569 Es sei aaa eine dreistellige natürliche Zahl mit gleichen Ziffern in dekadischer Schreibweise, wobei $1 \leqq a \leqq 9$ gilt. Dann gilt weiter

$$\frac{n}{2} \cdot (n+1) = 111a,$$
$$n(n+1) \quad = 222a,$$
$$n^2 + n - 222a = 0,$$
$$n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{888a + 1}\,.$$

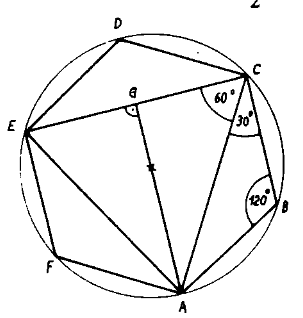
Nur für $a = 6$ erhalten wir unter den einschränkenden Bedingungen eine Lösung, nämlich

$$n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 73\,,\ \text{also } n = 36.$$

Probe: $1 + 2 + 3 + \ldots + 36$
$$= \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 37 = 666\,.$$

Ma 9 ■ 2570 Es ist zu zeigen:
$$4 \leqq ab\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2;$$
$a,\ b \in P$ und $a \neq 0,\ b \neq 0$.
Man formt äquivalent um und erhält
$$4 \leqq ab \cdot \frac{(b+a)^2}{(ab)^2},$$
$$4 \leqq \frac{(b+a)^2}{ab},$$
$$4ab \leqq a^2 + 2ab + b^2,$$
$$0 \leqq a^2 - 2ab + b^2,$$
$$0 \leqq (a-b)^2.$$
Diese Aussageform ist allgemeingültig. (Das Quadrat einer reellen Zahl ist niemals negativ.)
Da nur äquivalent umgeformt wurde, ist die Behauptung bewiesen.

Ma 9 ■ 2571 Die erste Zuführung füllt an einem Tag 1 Becken, die zweite $\frac{1}{2}$ Becken,



die dritte $\frac{1}{3}$ Becken und die vierte $\frac{1}{6}$ Bekken. Wenn alle gleichzeitig laufen, füllen sie an einem Tage $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2$ Becken.
Es würde also genau einen halben Tag dauern, bis das Becken gefüllt ist.

Ma 9 ■ 2572 Die Dreiecke ABC, ECD und AEF sind paarweise kongruente gleichschenklige Dreiecke. Daraus folgt, daß das Dreieck ACE gleichseitig ist und somit Innenwinkel von je 60° hat. Da die Innenwinkel des regelmäßigen Sechsecks je 120° betragen, gilt für die Basiswinkel der drei gleichschenkligen Dreiecke je 30°.

Daher betragen die Größen der Winkel $\sphericalangle FEG$ und $\sphericalangle BCG$ je 90°, d. h. die Sechseckseiten $\overline{FE}$ und $\overline{BC}$ sind parallel zur Höhe $\overline{AG}$.
Die weiteren Beweise verlaufen analog.

Ma 10/12 ■ 2573 Die drei Grundziffern seien mit x, y und z bezeichnet. Mit diesen drei Ziffern lassen sich die folgenden sechs dreistelligen natürlichen Zahlen bilden:

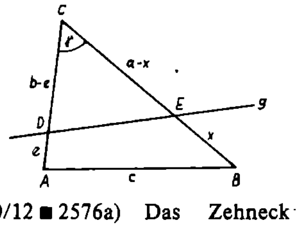
$$\begin{aligned} 100x + 10y &+ z,\\ 100x + y &+ 10z,\\ 10x + 100y &+ z,\\ x + 100y &+ 10z,\\ x + 10y &+ 100z,\\ 10x + y &+ 100z. \end{aligned}$$

Die Summe aller dieser Zahlen beträgt $222x + 222y + 222z$ bzw. $222(x + y + z)$. Nun ist 74 ein Teiler von 222, denn $74 \cdot 3 = 222$; also ist 74 auch ein Teiler von $222(x + y + z)$, w. z. b. w.

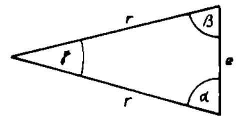
Ma 10/12 ■ 2574 Da dem größten Winkel die längste Seite gegenüber liegt, ist der Winkel $\sphericalangle ACB$ mit der Größe γ der größte Winkel in diesem Dreieck.

Nach Aufgabenstellung gilt $b = \frac{4}{3}a$ und $c = \frac{4}{3}b = \frac{16}{9}a$. Nun ist
$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \text{ d. h.}$$
$$\cos\gamma = \frac{a^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{16}{9}\right)^2}{2a \cdot \frac{4}{3}a},$$
$$\cos\gamma = \frac{3\left(a^2 + \frac{16}{9}a^2 - \frac{256}{81}a^2\right)}{8a^2},$$
$$\cos\gamma = \frac{-31a^2 \cdot 3}{8a^2 \cdot 81};$$
$$\cos\gamma \approx -0{,}1435; \quad \gamma \approx 98{,}25°.$$
Der größte Innenwinkel dieses Dreiecks beträgt etwa 98,25°.

Ma 10/12 ■ 2575 Es habe $\overline{BE}$ die Länge x, also $\overline{CE}$ die Länge $a - x$ und $\overline{CD}$ die Länge $b - e$. Ferner habe Winkel ACB die Größe γ. Dann gilt für die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle DEC$ und $\triangle ABC$
$$2 \cdot A_{DEC} = A_{ABC} \text{ bzw.}$$
$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (a - x)(b - e) \cdot \sin\gamma$$
$$= \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma,$$
$$2(a - x)(b - e) = ab,$$
$$a - x = \frac{ab}{2(b - e)},$$
$$x = a - \frac{ab}{2(b - e)} = \frac{a(b - 2e)}{2(b - e)},$$
also $$x = \frac{6 \cdot (4 - 2 \cdot 1)}{2 \cdot (4 - 1)}\text{cm} = 2 \text{ cm}.$$



Ma 10/12 ■ 2576a) Das Zehneck läßt sich in 10 paarweise kongruente gleichschenklige Dreiecke mit den Basiswinkeln der Größe $\alpha = \beta = 72°$ und dem Winkel an der Spitze mit der Größe $\gamma = 36°$ zerlegen.
Das Bild zeigt ein solches Dreieck:
Nach dem Sinussatz gilt
$$\frac{e}{\sin\gamma} = \frac{r}{\sin\alpha} \quad \text{bzw.} \quad e = \frac{r\sin\gamma}{\sin\alpha},$$
$$e = \frac{3{,}5\text{ cm} \cdot 0{,}5878}{0{,}9511},$$
$$e = 2{,}16\text{ cm}.$$



Der Umfang des Zehnecks beträgt also $u_Z = 21{,}6$ cm. Der Umfang des Kreises ist $u_K = 2\pi r$, $u_K = 22$ cm.

b) $$\frac{u_Z}{u_K} = \frac{21{,}6}{22} = 0{,}9818\,.$$
Der Umfang des Zehnecks ist also um etwa 1,8 % kürzer als der Umfang des Kreises.
c) Für den Flächeninhalt des Zehnecks gilt
$$A_Z = 10\frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\gamma),$$
$$A_Z = 36\text{ cm}^2.$$
Der Flächeninhalt des Kreises beträgt
$$A_K = \pi \cdot r^2, \quad A_K = 38{,}5\text{ cm}^2.$$
Nun gilt
$$\frac{A_Z}{A_K} = \frac{36}{38{,}5} = 0{,}9351\,.$$
Der Flächeninhalt des Zehnecks ist also um etwa 6,5 % kleiner als der Flächeninhalt des Kreises.

Auf die Lösung der Aufgaben der Physik-Chemie-Wettbewerbs müssen wir aus Platzgründen verzichten.

Lösungen zu:
Wolf, Ziege und Kohlköpfe
Heft 6/85

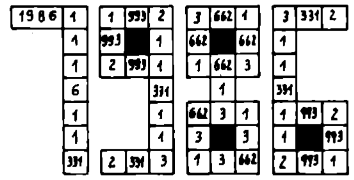
Der Mann brachte zuerst die Ziege an das andere Ufer. Darauf holte er den Wolf und brachte anschließend die Ziege wieder zurück. Am Ausgangsufer angekommen, nahm er die Kohlköpfe in den Kahn und ließ die Ziege dort. Die Kohlköpfe brachte er zum Wolf an das andere Ufer. Abschließend holte er die Ziege.

Lösungen zu:
Knobel-Wandzeitung, Heft 6/85

Lieber guter Weihnachtsmann
Gesuchter Weg:
$(3 \cdot 4 + 9) \cdot 8 \cdot 12 - 11 - 21 - 23 + 24 = 1985$

Rechenspaß zum Jahreswechsel
7 mögliche Gleichungen sind:
$1 \cdot 9 - 8 + 5 = 1 - 9 + 8 + 6 \ (= 6)$
$1 + 9 - 8 + 5 = 1 \cdot 9 - 8 + 6 \ (= 7)$
$1 \cdot 9 + 8 - 5 = 1 \cdot 9 \cdot 8 : 6 \ (= 12)$
$1 \cdot 9 + 8 - 5 = 1 + 9 + 8 - 6 \ (= 12)$
$1 + 9 + 8 - 5 = 1 + 9 \cdot 8 : 6 \ (= 13)$
$1 + 9 + 8 + 5 = 1 \cdot 9 + 8 + 6 \ (= 23)$
$1 + 9 \cdot 8 + 5 = 1 \cdot 9 \cdot 8 + 6 \ (= 78)$

Im neuen Jahr
Es ist $1986 = 1 \cdot 1986 = 2 \cdot 993 = 3 \cdot 662 = 6 \cdot 331 = 2 \cdot 3 \cdot 331$.
Die Abbildung zeigt eine mögliche Eintragung.

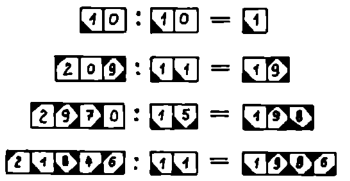


Zerlegte Jahreszahl
Aus $1986 = x + 2x + 3x = 6x$
folgt $x = 331$. Man erhält:
$1986 = 331 + 662 + 993$.

Kryptarithmetik

a)
$$\begin{array}{r} \underline{1985 \cdot 1986} \\ 11910 \\ 15880 \\ 17865 \\ \underline{1985} \\ 3942210 \end{array}$$

b) Durch einfache arithmetische Überlegungen und Fallunterscheidungen findet man aus der ersten Gleichung die Ziffer 1, aus der zweiten Gleichung die Ziffern 2, 0 und 9, aus der dritten Gleichung die Ziffern 5, 7 und 8 und aus der vierten Gleichung die Ziffern 4 und 6. Die Abbildung zeigt die (eindeutige) Lösung des Kryptogramms:



c) Dieses Kryptogramm ist mehrdeutig lösbar. Unter den zahlreichen Lösungen, wie z.B. $1035 + 1036 = 2071$, $2015 + 2017 = 4032$, $3024 + 3029 = 6053$ oder $4015 + 4019 = 8034$, befindet sich auch die Lösung $1985 + 1986 = 3971$.

Positionssysteme
Die dekadisch dargestellten Zahlen 19, 198, 1985, 1986, 986 und 86 haben in den jeweiligen anderen Positionssystemen folgende Darstellung:

$19 = 10011$ (Basis $g = 2$)
$198 = 21100$ (Basis $g = 3$)
$1985 = 30420$ (Basis $g = 5$)
$1986 = 13110$ (Basis $g = 6$)
$986 = 33122$ (Basis $g = 4$)
$86 = 10012$ (Basis $g = 3$)

Mit römischen Ziffern Zahl gesucht

M+CM+C XXX+VI=MCMLXXXVIII

Aus $\frac{(331x - 5)6}{5} = 391$ ergibt sich
$x = \frac{1985}{1986}$.

Eine harte Nuß
Angenommen, es gäbe (mindestens) eine Zahl $n = 10^3a + 10^2b + 10c + d$
($a, b, c, d \in N$, $1 \leqq a \leqq 9$, $0 \leqq b, c, d \leqq 9$), welche die vier Eigenschaften hat.
Dann gelten die folgenden Gleichungen:

$$a + b + c + d = 24 \quad (1)$$
$$a - b + c - d = -6 \quad (2)$$
$$abcd = 432 \quad (3)$$
$$cd - ab = 39. \quad (4)$$

Durch Addition bzw. Subtraktion von (1) und (2) ergeben sich

$$a + c = 9 \quad (5)$$
und $$b + d = 15. \quad (6)$$

Setzt man $cd = ab + 39$ aus (4) in (3) ein, so erhält man $ab(ab + 39) = 432$, also mit $x = ab$ die quadratische Gleichung $x^2 + 39x - 432 = 0$, welche die Lösungen $x_1 = -48$ ($ab = -48$ entfällt) und $x_2 = ab = 9$ besitzt. Es gilt also

$$ab = 9 \quad (7)$$
und $$cd = 48. \quad (8)$$

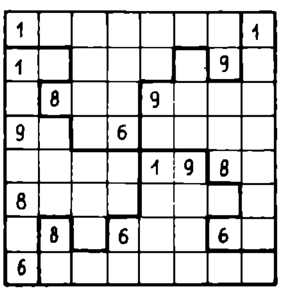
Aus den Zerlegungen $9 = 1 \cdot 9 = 9 \cdot 1 = 3 \cdot 3$ und $48 = 6 \cdot 8 = 8 \cdot 6$ in ein Produkt mit zwei einstelligen Faktoren erhält man nach (7) und (8) folgende Möglichkeiten:

a	b	c	d
1	9	8	6
1	9	6	8
9	1	8	6
9	1	6	8
3	3	8	6
3	3	6	8

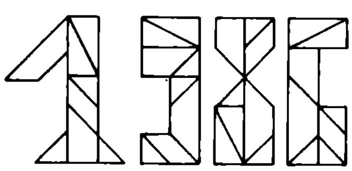
Die fünf letzten Möglichkeiten aber widersprechen den Gleichungen (5) bzw. (6). Es gibt also nur eine Zahl, welche die geforderten Eigenschaften besitzt, nämlich $n = 1986$, wovon man sich durch Einsetzen in (1) bis (4) leicht überzeugt.

Jahreszahl in Prozenten
Das Rechteck hat einen Flächeninhalt von 128 FE (1 FE = 1 Kästchenfläche), die Jahreszahl 1986 beansprucht 39,5 FE; das sind rund 30,9 Prozent der Rechteckfläche.

Gerechte Teilung



Legespiel



Umordnung
Die Abbildung zeigt eine mögliche Umordnung:

1	9	8	6
6	8	9	1
9	1	6	8
8	6	1	9

Das geheimnisvolle x
Es ist $x = 1986 = 6 \cdot 331$, denn jede Zahl ist gleich dem Produkt der Eckenanzahl des umgrenzenden Vielecks mit 331.

Kniffliger Rösselsprung

10	7	2	5		31	26	29	56	59	54	67	64	69
1	4	11	8		28		32	53		57	70	61	66
12	9	6	3		25	30	27	58	55	60	65	68	63
	22	13	24			33	42		52		62	71	
	19	16	21		41	36	39	44	49	46	77	74	79
	14	23	18		38	43	34	47		51	72		76
	17	20	15		35	40	37	50	45	48	75	78	73

Zusatzaufgabe 1: $2048 = 2^{11}$.
Zusatzaufgabe 2: Bekanntlich erhält man alle pythagoreischen Tripel (x, y, z), also alle Lösungen der diophantischen Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ durch den Ansatz $x = k(m^2 - n^2)$, $y = 2kmn$, $z = k(m^2 + n^2)$, wobei k, m und n ganze Zahlen sind. Bei unserer Gleichung $x^2 + y^2 = 1985^2$ ist $z = k(m^2 + n^2) = 1985$ vorgegeben. Da $1985 = 1 \cdot 1985 = 5 \cdot 397 = 397 \cdot 5 = 1985 \cdot 1$ und nur nichtnegativ-ganzzahlige Paare (x, y) gesucht sind, so kann man o. B. d. A. k positiv, also $k = 1$, 5, 397 oder 1985, und $m \geqq n$ annehmen. Durch systematisches Durchrechnen (Fallunterscheidung!), am besten mit Hilfe eines Taschenrechners, findet man die folgenden Zerlegungen von 1985:
$1985 = 1 \cdot (44^2 + 7^2) = 1 \cdot (32^2 + 31^2)$
$= 5 \cdot (19^2 + 6^2) = 397 \cdot (2^2 + 1^2)$
$= 1985 \cdot (1^2 + 0^2)$.
Man erhält also die folgende Tabelle:

k	m	n	$x = k(m^2 - n^2)$	$y = 2kmn$
1	44	7	1887	616
1	32	31	63	1984
5	19	6	1625	1140
397	2	1	1191	1588
1985	1	0	1985	0

Da mit jedem Paar (x, y) auch das Paar (y, x) Lösung von $x^2 + y^2 = 1985^2$ ist, so erhält man die folgenden 10 Lösungspaare (x, y) unserer Ausgangsleichung:
(1887,616), (616,1887), (63,1984), (1984,63) (1625,1140), (1140,1625), (1191,1588), (1588,1191), (1985,0), (0,1985). (Geometrisch gesehen sind das alle Punkte $P(x, y)$ mit ganzzahligen Koordinaten auf dem Viertelkreis $x^2 + y^2 = 1985^2$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$.)

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 5/85

Ma 5 ■ 2580 Wir rechnen $320 - 40 = 280$, $280 : 2 = 140$, $140 + 40 = 180$, $2 \cdot 140 = 280$, $2 \cdot 280 + 10 = 570$. Dieter besitzt 140 Marken aus Ungarn, 180 aus Polen, 280 aus der ČSSR, 570 aus der UdSSR, also insgesamt 1170 Marken aus Freundesland.

Ma 5 ■ 2581 $A = c^2 - b^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2$
$= c^2 - b^2 - 2a^2$;
$A = (15^2 - 5^2 - 2 \cdot 6^2)\,\text{cm}^2$
$= (225 - 25 - 72)\,\text{cm}^2 = 128\,\text{cm}^2$.

Ma 5 ■ 2582 Aus a) folgt: Peter hilft entweder Frau Dahlke oder Frau Fuhrmann.
Da nach b) Frau Dahlke von Volkmar be-

treut wird, hilft Peter somit Frau Fuhrmann.
Aus c) folgt dann weiter: Michael hilft Frau Anders, Rüdiger somit Frau Beier.

Ma 5 ■ 2583 Die Strecke $\overline{AB}$ sei x cm lang; die Strecke $\overline{BC}$ ist dann $3 \cdot x$ cm, die Strecke $\overline{CD}$ $4 \cdot x$ cm lang. Nun gilt
$x + 3x + 4x = 168$, $8x = 168$, $x = 21$.
Die Strecke $\overline{AB}$ ist 21 cm, die Strecke $\overline{BC}$ 63 cm und die Strecke $\overline{CD}$ 84 cm lang.

Ma 5 ■ 2584 Angenommen, Frau C kaufte n Brötchen; dann kaufte Frau A $2 \cdot n$ und Frau B $3 \cdot n$ Brötchen. Das sind zusammen $6 \cdot n$ Brötchen, und es gilt $6 \cdot n = 30$, also $n = 5$. Frau A kaufte 10, Frau B 15 und Frau C 5 Brötchen.

Ma 5 ■ 2585 Vor 8 Jahren war das Lebensalter der Mutter ein Vielfaches von 4 und 9, also betrug es 36 Jahre; denn $36 < 40$. Vor 8 Jahren war deshalb die jüngste Tochter $36 : 9 = 4$ Jahre, die älteste Tochter $36 : 4 = 9$ Jahre alt. Gegenwärtig ist die Mutter $36 + 8 = 44$ Jahre, die jüngste Tochter $4 + 8 = 12$ Jahre, die älteste Tochter $9 + 8 = 17$ Jahre alt; somit ist die dritte Tochter gegenwärtig $44 - 12 - 17 = 15$ Jahre alt.

Ma 6 ■ 2586 Da kein Kaffee nachgegossen wurde, hat Frau L. genau eine volle Tasse Kaffee getrunken. An Milch wurde nachgegossen $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$ Tasseninhalt. Frau L. hat also genau soviel Kaffee wie Milch getrunken, je eine Tasse voll.

Ma 6 ■ 2587 Angenommen, Robert steuert für das Geschenk x Mark bei; dann gibt Elvira $5 \cdot x$ M und Peter $2{,}5 \cdot x$ M dafür aus. Nun gilt $x + 5x + 2{,}5 \cdot x = 51$, $8{,}5x = 51$, also $x = 6$.
Robert gibt 6 M, Elvira 30 M, Peter 15 M für das Geschenk aus.

Ma 6 ■ 2588 Angenommen, an diese Kaufhalle wurden x kg Äpfel, also $2x$ kg Birnen, $(2x + 10)$ kg Tomaten und $(x - 20)$ kg Pfirsiche geliefert. Das sind insgesamt $(6x - 10)$ kg Obst. Nun gilt $6x - 10 = 290$, $6x = 300$, $x = 50$. Somit wurden 50 kg Äpfel, 100 kg Birnen, 110 kg Tomaten und 30 kg Pfirsiche an diese Kaufhalle geliefert.

Ma 6 ■ 2589 Eine solche zweistellige natürliche Zahl läßt sich durch $10a + b$ mit $1 \leqq a \leqq 9$ und $1 \leqq b \leqq 9$ wegen $b \neq 0$ darstellen. Nun gilt $10a + b - (10b + a) = a + b$, $10a + b - 10b - a = a + b$,
$8a = 10b$, $4a = 5b$, also $a = 5$ und $b = 4$. Es existiert genau eine solche Zahl; sie lautet 54, und es gilt $54 - 45 = 5 + 4$.

Ma 6 ■ 2590 Die erste Person schälte in x Minuten $3 \cdot x$ Kartoffeln; die zweite Person schälte in $(x + 25)$ Minuten $2 \cdot (x + 25)$ Kartoffeln. Nun gilt $3x + 2(x + 25) = 400$, $5x = 350$, $x = 70$. Die erste Person arbeitete 70 min, die zweite 95 min.

Ma 7 ■ 2591 Es sei x die erste der getippten Zahlen, also $3x$ die dritte, $(3x - 2)$ die zweite, $(3x + 7)$ die vierte und y die fünfte Zahl. Dann gilt $10x + y + 5 = 84$,
$10x + y = 79$.
Nun könnte y eine der beiden Primzahlen 23 oder 29 sein. Nur für $y = 29$, also $x = 5$ erhalten wir eine ganzzahlige Lösung. Anja hat die Zahlen 5, 13, 15, 22 und 29 getippt.

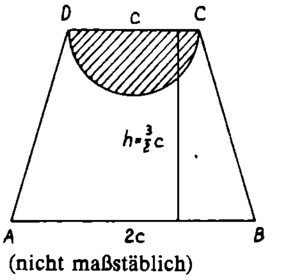
Ma 7 ■ 2592 Es soll gelten $\frac{1}{4} < \frac{x}{17} < \frac{1}{3}$.
Daraus folgt $17 \cdot 1 < 4 \cdot x$ und $3 \cdot x < 17 \cdot 1$ bzw. $x \geqq 5$ und $x \leqq 5$, also $x = 5$. Die gebrochene Zahl $\frac{5}{17}$ erfüllt die gestellten Bedingungen.

Ma 7 ■ 2593 Angenommen, an diesem Obststand wurden x kg Kirschen, also $2x$ kg Pflaumen, $(2x + 180)$ kg Birnen, $(2x + 240)$ kg Äpfel und $(2x - 20)$ kg Bananen gekauft. Das sind insgesamt $(9x + 400)$ kg Obst. Nun gilt $9x + 400 = 850$, also $x = 50$. An diesem Obststand wurden 50 kg Kirschen, 100 kg Pflaumen, 280 kg Birnen, 340 kg Äpfel und 80 kg Bananen gekauft.

Ma 7 ■ 2594 Auf Grund der Konstruktion ist das Viereck $EDCF$ ein Parallelogramm, und es gilt $\overline{CF} = \overline{ED}$. Aus $AC \parallel ED$ folgt $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ADE = \frac{\alpha}{2}$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen). Aus $\sphericalangle EAD = \sphericalangle EDA = \frac{\alpha}{2}$ folgt $\overline{AE} = \overline{ED}$. Aus $\overline{CF} = \overline{ED}$ und $\overline{AE} = \overline{ED}$ folgt $\overline{AE} = \overline{CF}$.

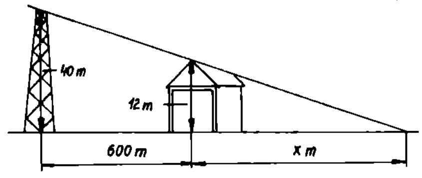
Ma 8 ■ 2595 Sinnvolle Zerlegungen der Zahl 112 in Produkte aus jeweils drei Faktoren, die der Aufgabenstellung entsprechen, sind
$112 = 2 \cdot 8 \cdot 7$ und $112 = 4 \cdot 4 \cdot 7$.
Das Problem ist nur dann eindeutig lösbar, wenn der Hinweis auf Zwillinge gegeben wird.
Da kein Kind älter als 13 Jahre ist, muß ein Kind 7 Jahre alt sein. Die anderen beiden könnten dann entweder jedes 4 Jahre alt oder eins 2 Jahre und das andere 8 Jahre alt sein.

Ma 8 ■ 2596 Es sei c die Länge von $\overline{CD}$. Für den Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ gilt:
$$A_T = \frac{2c + c}{2} \cdot \frac{3c}{2}, \quad A_T = \frac{9c^2}{4}$$
und für den Flächeninhalt des Halbkreises mit dem Durchmesser $\overline{CD}$ gilt:
$$A_{HK} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2}{2}, \quad A_{HK} = \frac{\pi \cdot c^2}{8}.$$
Nun ist $\frac{\pi}{8} : \frac{9}{4} \approx 0{,}1745$.



Skizze (nicht maßstäblich)
Der prozentuale Anteil der Halbkreisfläche an der Trapezfläche beträgt etwa 17,5%.

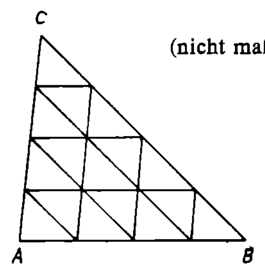
Ma 8 ■ 2597 Skizze (nicht maßstäblich)



Nach dem Strahlensatz gilt für die Maßzahlen
$$40 : 12 = (600 + x) : x;$$
$$40x = 12x + 7200;$$
$$28x = 7200;$$
$$x \approx 257.$$
Der Beobachtungsposten kann ein etwa 257 m langes Stück der Straße nicht einsehen.

Ma 8 ■ 2598 Man verbindet zunächst die Mittelpunkte der drei Seiten des Dreiecks ABC, so daß 4 paarweise kongruente Dreiecke entstehen. Es gilt der Satz *Die Strecke, deren Randpunkte zwei Seitenmittelpunkte eines Dreiecks sind, ist parallel zur dritten Seite und halb so lang wie diese.* Danach verfährt man mit jedem der 4 Teildreiecke in gleicher Weise, so daß die Fläche von ABC in 16 paarweise kongruente Dreiecksflächen zerlegt wird. Die Länge einer jeden Seite eines solchen kleinen Dreiecks beträgt ein Viertel der Länge der ihr gegenüberliegenden Seite des Dreiecks ABC. Für den Umfang eines der 16 Dreiecke erhalten wir also
$$u = 2{,}5\text{ cm} + 3\text{ cm} + 3{,}25\text{ cm};$$
$$u = 8{,}75\text{ cm}.$$

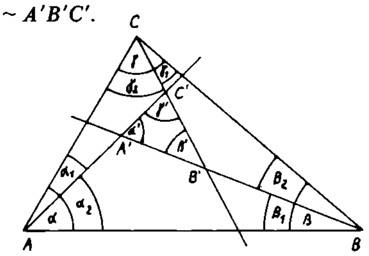
Skizze (nicht maßstäblich)



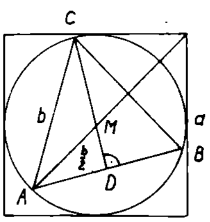
Ma 9 ■ 2599 Sicher gilt $x \neq 0$ und $y \neq 0$ (wegen (2)). $x = 4$ oder $y = 4$ sind nicht möglich, da für $x = 4$ und $y = 1$ die Ungleichung (2) nicht erfüllt würde und für $x = 4$ und $y = 2$ die Ungleichung (1) nicht, für jedes größere y erst recht nicht.
$x = 3$ und $y = 3$ ist wegen (1) nicht möglich. $x = 3$ und $y = 2$ erfüllt beide Ungleichungen; $x = 3$ und $y = 1$ hingegen erfüllt (2) nicht.
Nach weiteren Untersuchungen erkennt man, daß die geordneten Paare (1; 1), (2; 2), (2; 3) und (3; 2) und nur diese die beiden gegebenen Ungleichungen erfüllen.

Ma 9 ■ 2600 Jede der Zahlen 5291 und 3913 muß in ein Produkt aus drei Faktoren derart zerlegt werden, daß jeder Faktor das Alter eines Familienmitgliedes in vollen Jahren angeben kann. Es ergeben sich die Produkte
$5291 = 11 \cdot 13 \cdot 37$
und $3913 = 7 \cdot 13 \cdot 43$.
Daraus folgt, daß die 13jährigen Zwillinge unterschiedlichen Geschlechts sind.

Ma 9 ■ 2601 Nach dem Außenwinkelsatz gilt $\alpha_2 + \beta_1 = \alpha'$ und wegen $\beta_1 = \alpha_1$ gilt weiter $\alpha_2 + \alpha_1 = \alpha'$, also $\alpha = \alpha'$. Nach dem Außenwinkelsatz gilt $\beta_2 + \gamma_1 = \beta'$ und wegen $\beta_1 = \gamma_1$ gilt weiter $\beta_2 + \beta_1 = \beta'$ also $\beta = \beta'$. Nach dem Außenwinkelsatz gilt $\alpha_1 + \gamma_2 = \gamma'$ und wegen $\alpha_1 = \gamma_1$ gilt weiter $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma'$, also $\gamma = \gamma'$. Nach dem Hauptähnlichkeitssatz (www) folgt
$ABC \sim A'B'C'$.



Ma 9 ■ 2602 Bezeichnet man die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks ABC mit b, so gilt für den Flächeninhalt $A_{ABC} = \frac{b^2}{4} \cdot \sqrt{3}$. Die Höhe $\overline{CD}$ des gleichseitigen Dreiecks ABC hat die Länge $\frac{3}{4}a$, denn es gilt $d = a$; $\overline{CM}$ hat die Länge $\frac{d}{2} = \frac{a}{2}$; $\overline{DM} : \overline{CM} = 1:2$, folglich hat $\overline{DM}$ die Länge $\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{4}$, also $\overline{CD}$ die Länge $\frac{a}{2} + \frac{a}{4} = \frac{3}{4}a$.



Nun gilt im rechtwinkligen Dreieck ADC

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = b^2 - \left(\frac{3}{4}a\right)^2,$$

$$\frac{b^2}{4} = b^2 - \frac{9}{16}a^2,$$

$$\frac{3}{4}b^2 = \frac{9}{16}a^2,$$

$$b^2 = \frac{3}{4}a^2 \quad \text{bzw.} \quad b = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Das setzt man nun in die Flächenformel für das gleichseitige Dreieck ein und erhält

$$A = \frac{\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2}{4} \cdot \sqrt{3}; \quad A = \frac{3\sqrt{3}}{16}a^2.$$

Ma 10/12 ■ 2603 $T_1 < T_2$ wird eine wahre Aussage, wenn man die gegebenen Terme einsetzt.
Begründung:
Wir formen T_1 um und erhalten
$T_1 = (3\,125 \cdot 256 \cdot 27 \cdot 4)^{120}$,
$T_1 = 86\,400\,000^{120}$
Wir rechnen: $\lg 86\,400\,000 \approx 7{,}9$
$\lg 86\,400\,000^{120} \approx 948$.
T_1 hat mehr als 948 Stellen, da abgerundet wurde.
Wir formen T_2 um und erhalten
$T_2 = 5^{4^9}$; $T_2 = 5^{262\,144}$.
Wir rechnen: $\lg 5 \approx 0{,}698$.
$\lg 5^{262\,144} \approx 182\,977$.
T_2 hat mehr als 182 977 Stellen, da abgerundet wurde. Da T_1 nicht mehr als 960 Stellen haben kann, gilt in diesem Fall $T_1 < T_2$.

Ma 10/12 ■ 2604 Da unter den vier Kindern Drillinge sind, müssen entweder zwei der Mädchen oder zwei der Jungen Drillingskinder sein. Es muß deshalb eine Zerlegung der Art $a + b + b = 61$ geben, wobei a die Anzahl der Lebensjahre des Vaters oder der Mutter und b die Anzahl der Lebensjahre eines Drillingskindes bedeuten. Nach Aufgabenstellung und aus biologischen Gründen gilt $28 < a < 61$. Da a eine Primzahl ist, muß a ein Element der Menge $A = \{29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59\}$ sein.
Nur für $a = 47$ ist eine Zerlegung im angegebenen Sinne möglich:
$47 + 7 + 7 = 61$.
Daraus folgt, daß das Alter eines Drillingkindes 7 Jahre und das des Vaters 47 Jahre ist.
Für die Anzahl der Lebensjahre der Mutter (c) und des vierten Kindes (d) gilt: $c + d + 7 = 61$, also $c + d = 54$.
Unter Berücksichtigung aller Bedingungen gibt es nur die Möglichkeit $c = 37$. Daraus folgt, daß das älteste Kind der Familie 17 Jahre alt ist.

Ma 10/12 ■ 2605 Wegen der Einschränkung $x \neq \frac{\pi}{2} \cdot k$; $k \in G$ ist sowohl $\tan x$ als auch $\cot x$ stets definiert. Es ergeben sich die folgenden äquivalenten Gleichungen:
$\sin x \cdot \cos x = \tan x \cdot \cot x$,
$\sin x \cdot \cos x = \tan x \cdot \frac{1}{\tan x}$,
$\sin x \cdot \cos x = 1$,
$2 \cdot \sin x - \cos x = 2$,
$\sin 2x = 2$.
Das ist ein Widerspruch. Es gilt $\sin 2x \leqq 1$ für alle $x \in P$. Die Gleichung hat keine Lösung. Es gibt also kein $x \in P$, das die gegebene Gleichung erfüllt.

Ma 10/12 ■ 2606 Wir bezeichnen die Flächeninhalte der Dreiecke ADC mit A_1, DEC mit A_2, EBC mit A_3 und ABC mit A.
Dann gilt $A = A_1 + A_2 + A_3$ (1) und
$A_1 = \frac{1}{2}ad \cdot \sin 45°$; $A_2 = \frac{1}{2}de \cdot \sin 45°$;
$A_3 = \frac{1}{2}eb \cdot \sin 45°$; $A = \frac{1}{2}ab \cdot \sin 45°$.
$(\sin 135° = \sin(180° - 135°) = \sin 45°)$.
Es ist weiter
$A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{2}\sin 45°\,(ad + de + eb)$
und wegen (1) $\frac{1}{2}\sin 45°\,(ad + de + eb)$
$= \frac{1}{2}\sin 45°$ ab. Daraus folgt

$$ad + de + eb = ab \quad \text{bzw.}$$
$$de + eb = ab - ad, \quad \text{d. h.}$$
$$e(d + b) = a(b - d)$$

und wegen $a \neq 0$ und $e \neq 0$ folgt

$$\frac{b + d}{a} = \frac{b - d}{e}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Ph 6 ■ 182 Es handelt sich um einen Quader mit den Kantenlängen 250 cm, 150 cm und 0,009 cm. Demzufolge ist das Volumen
$V = 2 \cdot a \cdot b \cdot c$,
$V = 2 \cdot 250\,\text{cm} \cdot 150\,\text{cm} \cdot 0{,}009\,\text{cm}$,
$V = 675\,\text{cm}^3$.
Es werden 675 cm^3 Lack gebraucht.

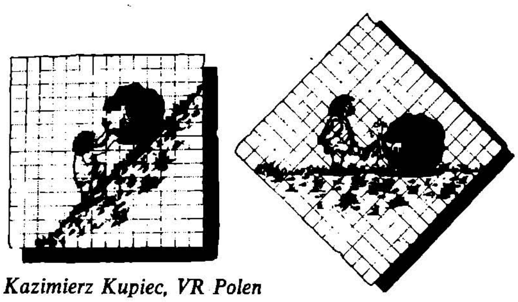
Ph 7 ■ 183
$W_1 = 1{,}5\,\text{m} \cdot 13{,}5\,\text{m} = 20{,}25\,\text{m}^2$
$W_2 = 4\,\text{m} \cdot 5\,\text{m} \quad = 20 \quad \text{m}^2$
$W_3 = 4{,}5\,\text{m} \cdot 4{,}5\,\text{m} \quad = 20{,}25\,\text{m}^2$
W_1 und W_3 sind gleich groß, und W_2 die kleinste Hubarbeit.

Ph 8 ■ 184 Zunächst ist $L = P + Q$. Unter Gleichgewichtsbedingung gilt das Gleichungssystem
(1) $P \cdot a = R \cdot b$
(2) $R \cdot b + Q \cdot a = G \cdot 10a$.
(1) in (2) eingesetzt ergibt
$P \cdot a + Q \cdot a = G \cdot 10a$,
$a(P + Q) = a \cdot 10 \cdot G, \qquad a \neq 0$
$L = P + Q = 10G$, w. z. b. w.

Ph 9 ■ 185
Geg.: $P_{AB} = 294\,\text{W}$
$U_{AB} = 210\,\text{V}$
$R_1 : R_2 : R_3 = 1:2:5$
Ges.: R_1; R_2; R_3
Für die parallel geschalteten Widerstände gilt $\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_2}$,
$R_{AB} = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$.
Dann folgt $R_1R_3 + R_2R_3 = R_1R_{AB} + R_2R_{AB} + R_3R_{AB}$ und mit $R_2 = 2R_1$ sowie $R_3 = 5R_1$
$5R_1^2 + 10R_1^2 = R_{AB}R_1 + 2R_{AB}R_1 + 5R_{AB}R_1 \qquad (R_1 = 0)$
bzw. $15R_1 = 8R_{AB}$. $\qquad (R_1 = 0)$
Da für die Leistung $P_{AB} = \frac{U_{AB}^2}{R_{AB}}$ gilt,
ist $R_{AB} = \frac{U_{AB}^2}{P_{AB}} = \frac{4\,410\,\text{V}^2}{294\,\text{VA}} = 15$.
Schließlich folgt $R_1 = \frac{8}{15}R_{AB} = 8\,\Omega$,
$R_2 = 2R_1 = 16\,\Omega$ und $R_3 = 5R_1 = 40\,\Omega$.

Ph 10/12 ■ 186
Geg.: $m_1 = 785\,\text{kg}$; $\varrho_W = 0{,}09\,\text{kg/m}^3$;
$m_2 = 150\,\text{kg}$; $V = 2\,200\,\text{m}^3$;
$\varrho_L = 1{,}3\,\text{kg/m}^3$; $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$
Ges.: Dichte der erwärmten Luft ϱ_G;
Tragkraft F
a) Damit der Ballon schweben kann, muß die Gleichung $F_A = G$ gelten; d. h. Auftriebskraft gleich dem Gewicht des Körpers.
In unserem Fall ist $F_A = V \cdot \varrho_L \cdot g$
und $G = m_1g + m_2g + V \cdot \varrho_G \cdot g$.
Demzufolge erhält man
$V \cdot \varrho_L \cdot g = m_1g + m_2g + V \cdot \varrho_G \cdot g$,
$\varrho_G = \varrho_L - \frac{m_1 + m_2}{V}$,
$\varrho_G = 1{,}3\,\text{kg/m}^3 - \frac{785 + 150}{2200}\,\text{kg/m}^3$,
$\varrho_r \approx 0{,}875\,\text{kg/m}^3$.
Die Luft muß auf eine Dichte von etwa 0,875 kg/m^3 gebracht werden.
b) Es könnten etwa 25 Personen getragen werden.

In freien Stunden · alpha-heiter



Kazimierz Kupiec, VR Polen

Anschauen – Denken – Lösen

Welche von Null verschiedenen natürlichen Zahlen α, β, γ, δ erfüllen das Gleichungssystem?

(1) $3\alpha = \alpha + \beta$

(2) $6\alpha = \alpha + \beta + \gamma$

(3) $10\alpha = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

(4) $(10\alpha)^2 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3$

(5) $(6\alpha)^2 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

(6) $(3\alpha)^2 = \alpha^3 + \beta^3$

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

In einem TEE-Zug

In einem TEE-Zug zählen die Schaffner die Anzahl der Passagiere und stellen fest, daß diese Zahl kleiner als 600 ist. Zu ihrem Erstaunen gibt diese Zahl, multipliziert mit der Zahl der Schaffner, die Jahreszahl 1986. Wie viele Fahrgäste und wie viele Schaffner sind im Zug?

Schuldirektor W. Förg, Schwaz (Österreich)

Magisches Quadrat

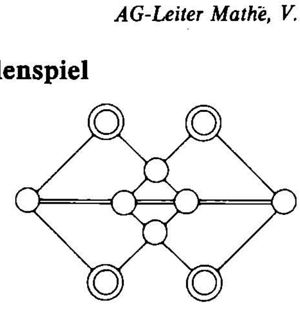
$1+(9-8)^6$	$1+\sqrt{9}-\mathrm{ld}\,8+6$	$(1+\sqrt{9})\cdot\mathrm{ld}\,8-6$
$1+\sqrt[\sqrt{9}]{8}+6$	$1\cdot(\sqrt{9}+8-6)$	1^{986}
$-1-9+8+6$	1^9+8-6	$1+9-8+6$

$\hat{=}$

?	?	?
?	?	?
?	?	?

AG-Leiter Mathe, V. Pöschel, Haus d. JP B. Kühn

Zahlenspiel



Trage die Zahlen von 1 bis 10 so ein, daß die Summe in den Quadraten und entlang der Doppellinie 30 beträgt und die Summe der Zahlen in den Doppelkreisen 20 beträgt. *AG-Leiter V. Pöschel*

Königszug

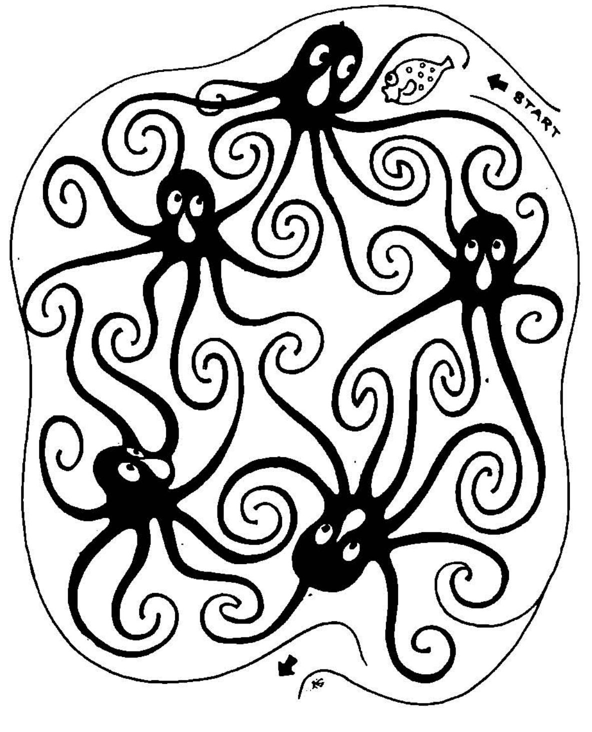
Der Schachkönig darf immer nur von einem Feld auf das nächste, also nach links, rechts, oben, unten oder schräg. In unserer Rätselfigur sind alle 64 Felder mit Buchstaben versehen, und wenn man sie – oben links beginnend – im Königszug miteinander verbindet, ergibt sich ein Zitat oder Sprichwort. Würden alle Buchstaben des Zitats durch Striche verbunden, so muß die Linie symmetrisch sein. In unserem Beispiel wird ein Zitat aus Goethes *Faust* gesucht.

Aus: NBI, Berlin

I	H	R	G	I	W	S	W
K	C	O	L	E	I	E	A
L	W	A	S	S	E	E	R
I	N	S	E	N	E	L	D
C	E	J	H	E	S	L	O
H	G	E	E	S	W	O	C
E	U	I	G	S	O	S	H
N	A	H	R	C	H	O	N

Labyrinth

Aus: Füles, Budapest



Die Ameise auf dem Würfel

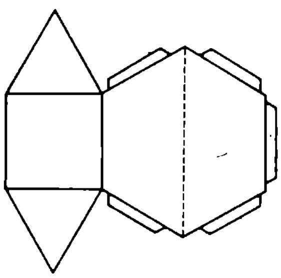
Gegeben sei ein Würfel. An einer Würfelecke sitze eine Ameise, die sich auf der Oberfläche dieses Würfels frei bewegen kann. Diese Ameise möchte jede Seitenfläche betreten und anschließend an einem benachbarten Eckpunkt ankommen, wobei zwei Eckpunkte als benachbart gelten, die genau eine Kantenlänge voneinander entfernt sind.
Gibt es einen Weg, der kürzer als der Umfang einer Seitenfläche ist? Wenn ja, so gebe man einen möglichen Weg auf einem Würfelnetz an. Eine Begründung wird nicht verlangt.

Mathematikfachlehrer G. Roesch, Apolda

Geometrischer Körper gesucht

Wie groß ist der Inhalt derjenigen Figur, die du erhältst, wenn du das dargestellte Bastelbild verwirklichst? (Die Figur ist aus einem Quadrat, einem in der Mitte zu faltenden regelmäßigen Sechseck und zwei gleichseitigen Dreiecken aufgebaut, deren aller Seiten die Länge 1 haben.)

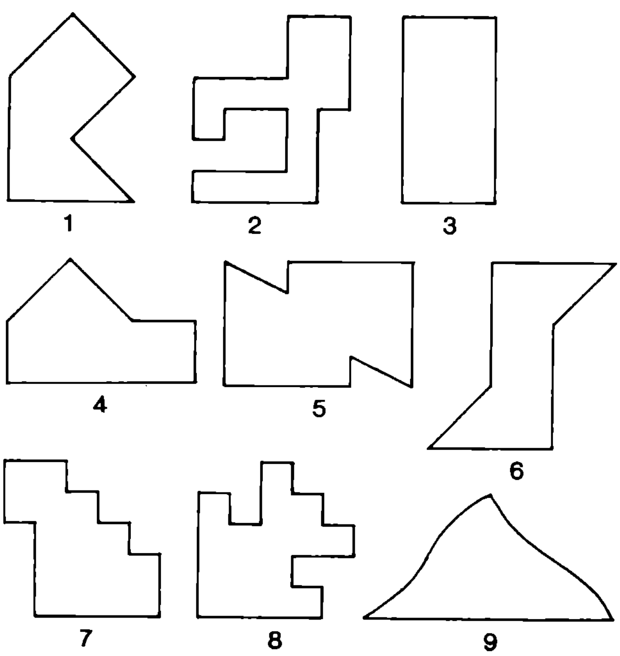
Aus: Pythagoras, Niederlande



Mit einem Schnitt

Zerschneide jede der neun Flächen so in zwei Teile, daß du ein Quadrat aus ihnen legen kannst.

Math. in School, London



Einfach fabelhaft

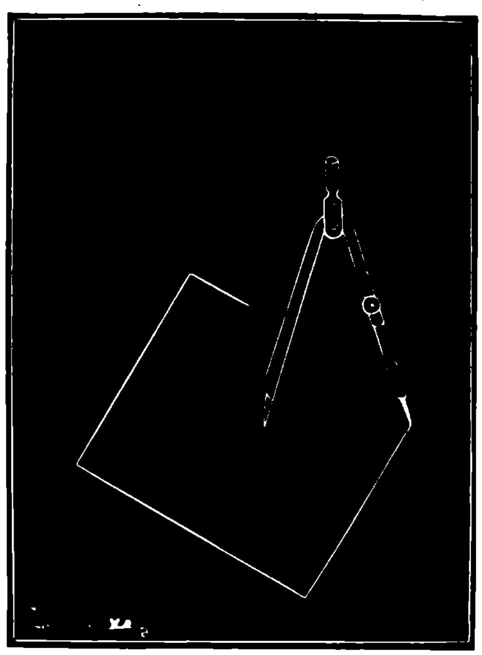
So ähnlich wie unsere Darstellung es zeigt, könnte es sich bei der Fabel vom Fuchs und dem Raben abgespielt haben. Unsere Zeichnungen wimmeln von Fehlern.
Gelingt es dir, mindestens ein Dutzend Unterschiede zu finden?

Beweis gefordert

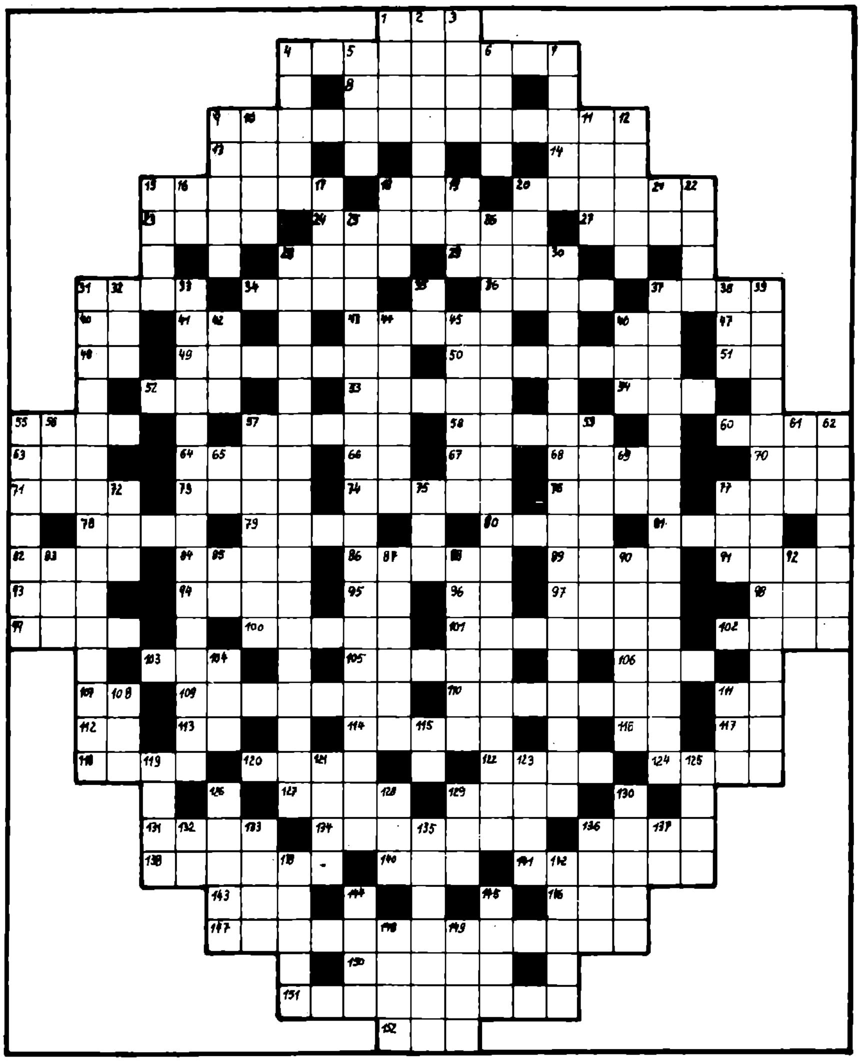
Zeige: Ist die Summe der Quersummen zweier dreistelliger natürlicher Zahlen durch 9 teilbar, so ist die Summe der beiden natürlichen Zahlen auch durch 9 teilbar.

Mathematikfachlehrer W. Träger, Döbeln

Giokas Panaiotis, Griechenland



Anspruchsvolles Kreuzzahlrätsel



Hinweise:

Bei Brüchen sind die Ergebnisse in Dezimalstellen umzurechnen. Alle Aufgaben müssen so genau wie möglich gelöst und evtl. gerundet werden. (Z. B. ist π mit mindestens 4 Dezimalstellen anzugeben.) Rechenstabgenauigkeit genügt nicht.

Bei Gleichungen ist stets der Wert von x bzw. α usw. zu berechnen. Wie international üblich, werden die Kommas in die Felder nicht mit eingetragen. (Statt 0,49 ist 049 zu schreiben.) Die Anzahl der Ziffern wird durch die Zahl der Felder bestimmt.

Waagerecht:

1) $(112:14+17\cdot 4)\cdot 3+52$;
4) die größte Potenz, die durch zwei Ziffern auszudrücken ist;
8) Umrechnungskoeffizient von Torr in Pascal;
9) $11\,111^3$;
13) dritte astronautische Geschwindigkeit in km/s;
14) $1:5^{-3}$;
15) Quadrat der größten dreistelligen Zahl;
18) Schallgeschwindigkeit in der Luft bei 20 °C und 1 013 hPa in m/s;
20) Lichtgeschwindigkeit im Vakuum in km/s;
23) Carl Friedrich Gauß geb.;
24) $14^0\cdot 14^1\cdot 14^2\cdot 14^3-4\cdot 14^4-2\cdot 14^5$;
27) Johannes Kepler geb.;
28) MCDXVII;
29) $\tan 795{,}2°$;
31) $\operatorname{arc}\alpha=0{,}9$;
34) positive reelle Lösung der Gleichung $x^4+x^2=156$;
36) Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski geb.;
37) Blaise Pascal geb.;
40) $\binom{12}{10}$;
41) eine Nullstelle der Funktion $y=50x^2-21x+1{,}6$;
43) Summe der ersten 32 Quadratzahlen um 558 vergrößert;
46) eine Primzahl;
47) positive Lösung der Gleichung $x^2-3x-180=0$;
48) geometrisches Mittel von 8 und 72;
49) $14\,041:90\,909$;
50) $88\,077+2\,222\cdot 3\,678$;
51) durch welche Zahl muß man 595 teilen, um 17 zu erhalten?
52) mittlere Proportionale von 729 und 841;
53) Summe der ersten 24 Kubikzahlen vergrößert um 2 008;
54) $\operatorname{ld}x=8{,}3219$;
55) Fläche eines Quadrates mit der Seite 57 cm;
57) Wert der Funktion $y=x^3-2$ an der Stelle $x=45$;
58) $6^6+66\,666:6+66\cdot 66-(6+6)$ $[6\cdot 6+(6+6):6]-6:6$;
60) Evariste Galois geb.;
63) DCIL;
64) Vielfaches von 907;
66) Zahl ist durch 13 und 5 teilbar;
67) Umfang eines Quadrates mit der Fläche 289 cm²;
68) Umfang eines Kreises mit $r=69$ cm;
70) kleinstes gemeinsames Vielfaches von 42, 399, 114 und 266;
71) Produkt der Ziffern der Zahl ist 405;
73) Fläche eines Zylindermantels in cm² mit $r=10$ cm, $h=97$ cm;
74) Quersumme der Zahl beträgt 27;
76) geometrisches Mittel zweier Zahlen beträgt 900. Die eine ist 180. Und die andere?
77) $\frac{68}{x-20}-\frac{35}{x+80}=\frac{33}{x-120}$;
78) Länge des Thaleskreises über $\overline{AB}=33$ cm;
79) Isaac Newton geb.;
80) Fläche eines Rechteckes mit den Seiten 36 cm und 241 cm;
81) Fläche eines Kreises in cm² mit $r=1{,}6$ cm;
82) 43° 19′ 12″ in Grad;
84) Quersumme der Zahl beträgt 17;
86) Produkt der Ziffern der Zahl beträgt 700;
89) Volumen eines Quaders mit den Kanten 49 cm, 16 cm, 10 cm;
91) Länge einer Seemeile in km;
93) Raumdiagonale eines Quaders mit den Kanten 216 cm, 72 cm, 54 cm;
94) $\cot 190{,}9°$;
95) $6\frac{4}{27}\cdot 4\frac{1}{11}\cdot 3\frac{3}{10}$;
96) Hypotenuse 53 cm, eine Kathete 28 cm, andere Kathete?
97) $1\frac{1}{36}+1\frac{1}{4}+1\frac{1}{16}+1\frac{11}{36}+1\frac{1}{48}$;
98) andere Nullstelle von 41) waager.;
99) $\sqrt{x+88}-\sqrt{x-19}=1$;
100) Fläche eines Kreises in m² mit $d=0{,}996$ m;
101) $\left(\frac{2}{3}+\frac{14}{27}\right)\cdot 33\frac{3}{16}$;
102) $\sin 1\,146{,}2°$;
103) IV · XXXIX;
105) Würfel mit Oberfläche 229 154 400 mm², Summe aller Kanten in mm?
106) $10:6^{-2}$;
107) Gleichungssystem $\begin{matrix}2x+3y=102\\3x+2y=123\end{matrix}$, Wert von x?
109) $185\cdot(186\cdot 187-20)+24$;
110) $2^3\cdot 8^3\cdot 11^3-12^3+10$;
111) Summe der ersten 5 natürlichen Zahlen;
112) Wert von y in 107) waager.;
113) eine Lösung der Gleichung $x^2-105x+2\,106$;
114) Summe von 3 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $10\,434\leqq n\leqq 10\,436$;
116) andere Lösung der Gleichung von 113) waager.;
117) $\binom{8}{4}$;
118) $[4\,095{,}5+(9{,}25-1{,}5)\cdot 125{,}5-25\cdot 0{,}225]:2{,}5$;
120) Raumdiagonale eines Würfels mit 26,05 cm Kantenlänge;
122) Wert der Ordinate für $x=20$ in $y=f(x)=x^3+2x^2-3x-113$;
124) jemand erhält bei 3,25 % Verzinsung in 1 Jahr 275,60 M Zinsen, Höhe des Sparguthabens?
127) $\operatorname{arc}25°=x$;
129) 17. Glied der arithmetischen Folge 1,025; 0,98; 0,935; …;
131) Leonhard Euler geb.;
134) $1\,234\cdot 4\,321+1\,583\cdot 1\,592$;
136) Galileo Galilei geb.;
138) $\sqrt{2\pi}$;
140) eine vollkommene Zahl;
141) Zahl hat am Anfang und am Ende je 3 gleiche Ziffern;
143) spezifische Verdampfungswärme des Wassers in kcal/kg;
146) Schmelztemperatur des Zinns in °C;
147) Länge eines Lichtjahres in km bei

$c = 300\,000$ km/s und 365 Tagen;
150) mittlere Bahngeschwindigkeit der Erde in km/s;
151) Produkt von 4 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $137 < n < 142$;
152) Summe der ersten 23 ungeraden Zahlen.

Senkrecht:
1) $\frac{x}{15} + \frac{x}{18} + \frac{x}{27} = 387$;
2) $444\,444 + 2\,222 \cdot 3\,333 + 380\,470$;
3) Ordinate des Scheitelpunktes der Funktion $y = x^2 - 0{,}52x + 0{,}106\,6$;
4) $\lg 9\,440$;
5) größte Fläche einer geometrischen Figur mit Umfang 300,3 cm in cm^2;
6) Umfang eines Rechteckes mit den Seiten 530 cm und 1 600 cm;
7) eine symmetrische Zahl;
9) $(109 - \sqrt{2})(109 + \sqrt{2})$;
10) Dualzahl LLLO OOOL OLLL im Dezimalsystem;
11) $\tan 253{,}1°$;
12) Summe der ersten 177 natürlichen Zahlen vermindert um 3;
15) Länge der Diagonale eines Quadrates mit der Seite 644,5 cm;
16) größte zweistellige Primzahl;
17) Gottfried Wilhelm Leibniz geb.;
18) arithmetisches Mittel von 239 und 375;
19) Produkt zweier Primzahlzwillinge;
20) $\frac{829}{x} = \frac{1}{3}$;
21) $9\,409^{0{,}5}$;
22) $\cot 25{,}3°$;
25) π;
26) Eulersche Zahl e;
28) $\sqrt{2}$;
30) 5^{24};
31) 2^{49};
32) $(x + 16) : (x - 44) = 3 : 2$;
33) $88\,825^3$;
35) Dichte von Kupfer in g/cm^3;
37) $\sqrt{3}$;
38) $\frac{x + 87}{x - 63} = 2$;
39) $17!$;
42) Dichte von Blei in g/cm^3;
44) die ersten 6 Glieder der Fibonaccischen Folge;
45) Normalfallbeschleunigung auf der Erde in m/s^{-2};
46) Dichte von Gold in g/cm^3;
55) Länge eines Tropischen Jahres in Dezimalschreibweise in Tagen (365 d; 5 h; 48 min; 46 s);
56) CCIL;
57) Produkt der ersten 8 Primzahlen vermindert um $8 \cdot 10^3$;
59) Erdradius an den Polen in km (Stand 1972);
61) harmonisches Mittel von 144 und 288;
62) $25 \cdot 81 \cdot 889$;
65) $(x + 12)(2x + 22) = (2x + 13)(x + 18)$;
69) Wert von $10x$, wenn $x^x = 27$;
72) planetare Fluchtgeschwindigkeit in km/s;
75) drei gleiche Ziffern;
77) teilbar durch 31;
83) Doppeltes einer Quadratzahl;
85) LLLL + LOOOO;
87) Anzahl der verschiedenen Wettscheine beim Fußballtoto für 12 Spiele;
88) Äquatordurchmesser des Jupiters in km (Stand 1971);
90) LOLLLO;
92) $\sqrt{281\,961}$;
104) Siedepunkt des Methanols bei 1 013 hPa in °C;
106) Siedepunkt des Quecksilbers in °C;
108) $\frac{x}{64} = 5$;
111) Dichte von Helium bei 1 013 hPa und 20 °C in g/m^3;
115) Produkt zweier Primzahlzwillinge;
119) XXIV · LXXXVIII;
121) Nikolaj Kopernikus geb.;
123) wieviel Stellen hat die größte bekannte Primzahl $2^{19\,937} - 1$?
125) $\frac{x^3}{11} = 8$;
126) $1{,}18 : x = 200$;
128) die 4. Proportionale zu 175; 763 und 150;
129) Abszisse des Scheitelpunktes von 3) senkr.;
130) $\ln 722$;
132) harmonisches Mittel zweier Zahlen ist 60, die eine ist 50, die andere?
133) Mantisse zum $\lg 58$;
135) $1\,750^2 - 319^2 + 13$;
136) die ersten 3 Glieder einer arithmetischen Folge sind 5; 30; 55. Wie heißt das 50. Glied?
137) größter gemeinsamer Teiler von 3 060 und 1 904;
139) $3 \cdot [100\,(435 - 91{,}5) - 2\,000 - 10\,(238 + 673{,}9)]$;
142) kleinstes gemeinsames Vielfaches von 16; 11; 125;
144) $0{,}1\,(8 + 7 \cdot 5^{-2})$;
145) $\frac{1\,000}{x-1} + \frac{500}{x+1} = \frac{584}{x^2-1}$;
148) Wert von $\sin\alpha$, wenn $\cos\alpha = 0{,}262\,2$;
149) $\frac{829 + x}{1\,001} = x$.

Lösung

Waagerecht:
1) 280; 4) $9^9 = 387\,420\,489$; 8) 133,32;
9) 1 371 700 960 631; 13) 16,5; 14) 125;
15) $999^2 = 998\,001$; 18) 343; 20) 299 792;
23) 1 777; 24) 6 300 244; 27) 1 571; 28) 1 417;
29) 3,785; 31) 51,57; 34) 3,464; 36) 1 792;
37) 1 623; 40) 66; 41) 0,1; 43) 11 998; 46) 17;
47) 15; 48) 24; 49) 0,154 451; 50) 8 260 593;
51) 35; 52) 783; 53) 92 008; 54) 320; 55) 3 249;
57) 91 123; 58) 61 666; 60) 1 811; 63) 649;
64) 8 163; 66) 65; 67) 68; 68) 433,5; 70) 798;
71) 5 991; 73) 6 095; 74) 58 752; 76) 4 500;
77) 3 420; 78) 51,84; 79) 1 643; 80) 8 676;
81) 8,042; 82) 43,32; 84) 6 362; 86) 55 714;
89) 7 840; 91) 1 852; 93) 234; 94) 5,193; 95) 83;
96) 45; 97) 5,667; 98) 0,32; 99) 2 828;
100) 0,779 1; 101) 39,333; 102) 0,915; 103) 156;
105) 74 160; 106) 360; 107) 33; 109) 6 430 994;
110) 5 450 058; 111) 10; 112) 12; 113) 27;
114) 31 305; 116) 78; 117) 70; 118) 2 025;
120) 45,12; 122) 8 627; 124) 8 480; 127) 0,436;
129) 0,305; 131) 1 707; 134) 7 852 250;
136) 1 564; 138) 2,506 63; 140) 496;
141) 222 888; 143) 539; 146) 232;
147) 9 460 800 000 000; 150) 29,785;
151) 378 652 680; 152) 529.

Senkrecht:
1) 2 430; 2) 8 230 840; 3) 0,039; 4) 3,9750;
5) 7 176; 6) 4 260; 7) 91 619; 9) 11 879;
10) 3 607; 11) 3,291; 12) 15 750; 15) 911,5;
16) 97; 17) 1 646; 18) 307; 19) 323; 20) 2 487;
21) 97; 22) 2,116; 25) 3,141 592 653 589 793 238;
26) 2,718 281 828 459 045 835;
28) 1,414 213 562 373 095 0;
30) 59 604 644 775 390 625;
31) 562 949 953 421 312; 32) 164;
33) 700 818 646 515 625; 35) 8,9;
37) 1,732 050 807 568 88; 38) 213;
39) 355 687 428 096 000; 42) 11,3; 44) 112 358;
45) 9,806 65; 46) 19,3; 55) 365,242 2; 56) 249;
57) 9 691 690; 59) 6 356,863; 61) 192;
62) 1 800 225; 65) 10; 69) 30; 72) 11,2; 75) 777;
77) 341; 83) 338; 85) 31; 87) 531 441;
88) 143 650; 90) 46; 92) 531; 104) 64,7;
106) 357; 108) 320; 111) 178; 115) 35;
119) 2 112; 121) 1 473; 123) 6 002; 125) 4,448;
126) 0,005 9; 128) 654; 129) 0,26; 130) 6,582 0;
132) 75; 133) 7 634; 135) 2 960 752; 136) 1 230;
137) 68; 139) 69 693; 142) 22 000; 144) 0,828;
145) 0,056; 148) 0,965; 149) 0,829.

Flinke Zahlenzauberei

Spiel mit dem Taschenrechner

Man fordert den Mitspieler auf, sich eine beliebige ganze Zahl von 1 bis 99 zu denken. Die Zahl gibt er in den Rechner ein, ohne daß der *Gedankenleser* sie sehen kann. Auch alle nachfolgenden Rechenoperationen sind von dem Partner verdeckt auszuführen. Der *Gedankenleser* fordert, nacheinander folgende Operationen mit der jeweils in der Anzeige des Rechners stehenden Zahl auszuführen: Multipliziere mit 2; multipliziere mit 3; multipliziere mit 5; multipliziere mit 9; multipliziere mit 27; addiere die gedachte Zahl; multipliziere mit 5,5. Nun wird der Mitspieler aufgefordert, die in der Anzeige des Rechners stehende Zahl zu zeigen. Der *Gedankenleser* nennt nach einem kurzen Blick auf die sehr große Zahl die gedachte Zahl.

Beispiel:
Der Mitspieler denkt sich die 53.
Er rechnet $53 \cdot 2 = 106$;
$106 \cdot 3 = 318$; $318 \cdot 5 = 1\,590$;
$1\,590 \cdot 9 = 14\,310$; $14\,310 \cdot 27 = 386\,370$;
$386\,370 + 53 = 386\,423$;
$386\,423 \cdot 5{,}5 = 2\,125\,326{,}5$.

Der Trick ist schnell erklärt: Durch die vorgeschriebenen Rechenoperationen wird die gedachte Zahl mit 40 100,5 multipliziert. Dadurch erscheint (bei maximal zweistelligen Zahlen) bei der Endzahl von der 4. und 3. Stelle vor dem Komma immer die gedachte Zahl, die der *Gedankenleser* nur abzulesen braucht. Bei einstelliger Zahl erscheint an der 4. Stelle vor dem Komma eine Null. Falls Ihnen der Trick noch zu durchsichtig ist, können Sie für gedachte Zahlen von 1 bis 99 auch folgende Methode verwenden, die am Beispiel der gedachten Zahl 73 erläutert werden soll:
$73 \cdot 3 = 219$; $219 \cdot 5 = 1\,095$;
$1\,095 \cdot 7 = 7\,665$; $7\,665 \cdot 11 = 84\,315$;
$84\,315 \cdot 13 = 1\,096\,095$;
$1\,096\,095 : 30 = 36\,536{,}5$.

Nach Multiplikation der gedachten Zahl mit den Faktoren 3, 5, 7, 11 und 13 und Division durch 30 erscheint in der 2. und 1. Stelle vor dem Komma (bei ungeraden Ausgangszahlen ist auch die Stelle nach dem Komma zu berücksichtigen) die halbe gedachte Zahl. Der Trick beruht darauf, daß die gedachte Zahl durch die Rechenoperationen insgesamt mit 500,5 multipliziert wird.

Aus: ND, Dr. H.

Unterhaltsame Figuren zur Satzgruppe des Pythagoras

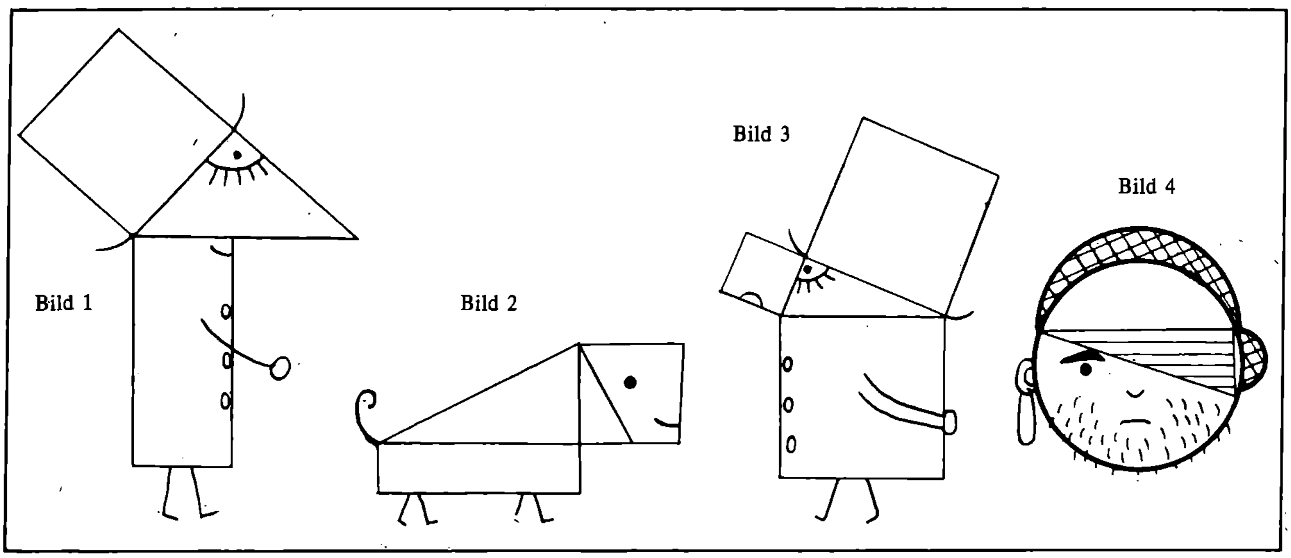


Bild 1 Bild 2 Bild 3 Bild 4

Beweise!

▲1▲ Die Frau hat einen riesengroßen Hut: er ist genauso groß wie ihr Mantel. (Bild 1)

▲2▲ Der Hund ist wohl sehr klug: er hat im Kopf genausoviel Platz wie im Bauch. (Bild 2)

▲3▲ Der Mann ist dicker als die Frau: bei ihm sind Hut und Nase zusammen gerade so groß wie der Mantel. (Bild 3)

▲4▲ Bei diesem Seeräuber ist das Kopftuch (karierte Fläche) ebensogroß wie die Augenklappe (schraffierte Fläche, Bild 4).

Elke Goldberg

Lösungen

▲1▲ Hutfläche: $A_1 = b^2$; Mantel: $A_2 = q \cdot c$; $b^2 = q \cdot c$ (Kathetensatz) also: $A_1 = A_2$ w. z. b. w.
Voraussetzung: (Bild 1a)

▲3▲ Hut: $A_1 = a^2$; Nase: $A_2 = b^2$; Bauch: $A_3 = c^2$; $c^2 = a^2 + b^2$ (Satz des Pythagoras)
also: $A_1 + A_2 = A_3$ w. z. b. w.
Voraussetzung: (Bild 3a)

▲2▲ Kopf: $A_1 = h^2$; Bauch: $A_2 = p \cdot q$; $h^2 = p \cdot q$ (Höhensatz)
also: $A_1 = A_2$ w. z. b. w.
Voraussetzung: (Bild 2a)

▲4▲ Die Inhalte der Teilflächen seien folgendermaßen bezeichnet:
Kopftuch (karierte Fläche): A_1; Augenklappe (schraffierte Fläche): A_2; Halbkreis über $\overline{AB}$: A_3; Halbkreis über $\overline{AC}$: A_4; Halbkreis über $\overline{BC}$: A_5.
Behauptung: $A_1 = A_2$
Beweis $A_1 = A_2 + A_4 + A_5 - A_3$

$$\to A_1 = A_2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}b^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}a^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}c^2$$

$$\to A_1 = A_2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\underbrace{(b^2 + a^2 - c^2)}_{0}$$

$$\to A_1 = A_2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot$$ (Satz des Pythagoras)

$\to A_1 = A_2$ w. z. b. w.
Voraussetzung: (Bild 4a)

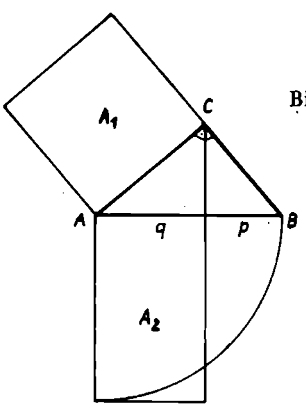


Bild 1a

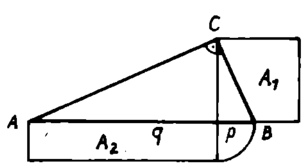


Bild 2a

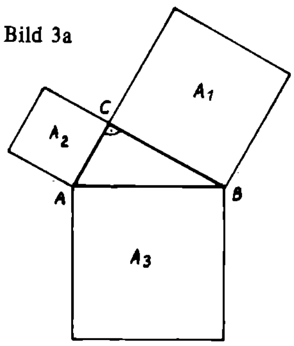


Bild 3a

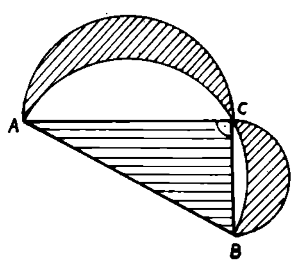


Bild 4a

ISSN 002-6395 · alpha · Berlin · 20 (1986) 1 · Seiten 1 bis 24

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
20. Jahrgang 1986
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

2

OJM
DDR

25
JAHRE
OLYMPIADEN
JUNGER MATHEMATIKER

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
1086 Berlin, Krausenstr. 50, PSF 1213
Anschrift der Redaktion:
7027 Leipzig, PSF 14
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: J. Lehmann, Leipzig (S. 26, 27, 37); Eigenfoto P. Bachmann, Dresden (S. 27); Repro, zur Verfügung gestellt von den Nachfahren Gentzens (S. 29); ADN (ZB) (S. 30); Franz Fricke, Berlin (S. 34); Louis Rauwolf (S. 36); Archiv, BG Teubner (S. 42); U. Pullwitt, Leipzig (S. 26)
Titelblatt: W. Fahr, Berlin
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß 12. Dezember 1985
Auslieferungstermin: 15. April 1986

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

[1]) bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

25 Jahre Olympiaden Junger Mathematiker

Nach 25 Jahren erfolgreicher Durchführung unserer Mathematikolympiaden können wir mit Stolz auf ein Gebiet der außerunterrichtlichen Tätigkeit blicken, auf welchem viele Schüler Bewährungsproben bestanden haben und immer wieder neu bestehen. Ist es doch das Ziel der Olympiaden *Junger Mathematiker*, bei vielen Schülern Interesse für die Mathematik zu wekken bzw. zu vertiefen, besonders befähigte Schülerinnen und Schüler rechtzeitig zu erkennen und ihre systematische Förderung in vielfältiger Weise zu ermöglichen.

Die Erfolge in der Mathematikolympiade sind natürlich Ergebnis vielfältiger Anstrengungen und intensiven Lernens.

Wie auf vielen Gebieten unserer Entwicklung waren es auch bei den Mathematikolympiaden sowjetische Genossen, die uns zum ersten Mal mit derartigen Wettkämpfen vertraut machten.

Wir erhielten Einblick in die langjährigen Erfahrungen bei der Gestaltung dieser Wettbewerbe in der Sowjetunion, und zugleich wurde uns Aufgabenmaterial für den Auftakt unserer Olympiade zur Verfügung gestellt. Ähnlich wirksame Unterstützung wurde uns durch rumänische und ungarische Kollegen zuteil.

Doch aller Anfang war schwer. Das merkten zuerst unsere Teilnehmer an den ersten Internationalen Olympiaden (die es schon seit 1958 gibt), aber auch die 167 Teilnehmer an der I. Olympiade Junger Mathematiker der DDR im Jahre 1962.

In der Olympiadeklasse 10 gab es z. B. folgende Aufgabe, die aus heutiger Sicht sicher vielen keine besonderen Schwierigkeiten bereitet, aber damals entscheidend die Preisverteilung beeinflußte:

Es sei

$$s = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

Berechnen Sie s^2 und s^3, und versuchen Sie, einen rationalen Wert für s zu finden!

Die Wurzelwerte dürfen nicht durch Näherungswerte ersetzt werden.

Die beiden Schüler, die in der Olympiadeklasse 10 einen 1. Preis erringen konnten, bewältigten diese Aufgabe als einzige Teilnehmer erfolgreich.

Diese Preisträger sind heute beide erfolgreiche Mathematiker. Dr. *Peter Beckmann* und Dozent Dr. *Hans-Ulrich Schwarz* arbeiten an der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig.

Die Leser der *alpha* sollten sich an dieser Aufgabe auch einmal versuchen.

Die Erkenntnis, daß eine hohe mathematische Bildung wesentlicher Bestandteil der Bildung der Menschen in unserer Gesellschaft ist und daß die Wissenschaft Mathematik mehr und mehr zur unmittelbaren Produktivkraft wird, veranlaßte das Politbüro des Zentralkomitees der SED 1962, einen bedeutsamen Beschluß zur Verbesserung des Mathematikunterrichts zu fassen.

In wenigen Jahren gelang es, dank der unermüdlichen Tätigkeit vieler Pädagogen, zahlreicher Funktionäre des Jugendverbandes und einer engen Zusammenarbeit mit vielen Wissenschaftlern, die *Olympiaden Junger Mathematiker* zu einem Massenwettbewerb zu entwickeln. Die Olympiaden sind zu Höhepunkten in der außerunterrichtlichen Tätigkeit geworden.

Gestützt auf eine gründliche mathematische Ausbildung im Unterricht und ständiges Üben, Vertiefen und Erweitern der Kenntnisse in Arbeitsgemeinschaften, Klubs *Junger Mathematiker*, in Mathematischen Schülergesellschaften und in Spezialistenlagern, erreichen heute unsere *Jungen Mathematiker* hervorragende Leistungen in den verschiedenen Stufen der Olympiade.

Sehr viele unserer heutigen Mathematiker in Hochschulen und Betrieben sind erfolgreiche Teilnehmer unserer nationalen Olympiade gewesen oder haben sogar erfolgreich an einer Internationalen Mathematikolympiade teilgenommen.

Unsere Gesellschaftsordnung schafft für alle interessierten Schüler Möglichkeiten, ihre Interessen zu vertiefen und ihre Talente zu entfalten. Es ist aber ein weiter Weg vom interessierten *Jungen Mathematiker* bis zum Preisträger der Olympiaden. Noch als Schüler der 9. Klasse konnte sich *Ulrich Meister* aus Ludwigsfelde nicht vorstellen, gemeinsam mit den „Großen" zu trainieren. Durch intensive Arbeit, nie das Ziel aus dem Auge verlierend, erreichte er 1985 neben dem Prädikat „Ausgezeichnet" im Abitur auch einen 2. Preis bei der *Internationalen Mathematikolympiade* in Helsinki.

Der berühmte Erfinder *Thomas Edison* sagte einmal: „Die anderen begehen den Fehler, zu früh aufzuhören. Ich höre nie auf."

Diese Arbeitsauffassung ist sicher eine Grundlage zum Erfolg, denn nicht jede Aufgabe wird man sofort bewältigen, und auch einen Wettbewerb wird man nicht immer als Preisträger beenden.

In wenigen Wochen findet die XXV. DDR-Olympiade *Junger Mathematiker* statt. In der Jubiläumsolympiade sehen wir unseren spezifischen Beitrag in der breiten Volksbewegung, den XI. Parteitag der SED mit hervorragenden Leistungen zu würdigen.

Alle Leser der *alpha*, die an der vergangenen Bezirksolympiade erfolgreich teilgenommen haben, möchten wir noch nachträglich beglückwünschen, den Teilnehmern an der nächsthöheren Stufe aber wünschen wir viel Erfolg und erlebnisreiche Tage in Erfurt, dem Austragungsort der Jubiläums-DDR-Olympiade.

H. Bausch/D. Müller

Über die Mathematikolympiaden zum Beruf

Von der 4. bis zur 8. Klasse besuchte ich, Geburtsjahr 1947, eine Oberschule auf dem Lande. Mein Interesse in dieser Zeit galt vielen Fächern; Mathematik war eines von diesen. Die außerschulische Förderung an der Schule war einseitig auf den Sport zugeschnitten. Sportliche Erfolge bei Wettkämpfen fanden an der Schule große Anerkennung, bei einigen Lehrern weit mehr als gute schulische Leistungen. An Förderungsmöglichkeiten in anderen Fächern kann ich mich nicht erinnern.

Mein Interesse an der Mathematik verstärkte sich ab 9. Klasse an der EOS *Ernst Schneller* Torgau. Durch das regelmäßige Lösen der *Aufgaben der Woche* an der Schulwandzeitung und durch Erfolge bei Mathematikolympiaden wurde ich zur außerschulischen Beschäftigung mit der Mathematik angeregt. In der Regel habe ich dabei das Lösen von Aufgaben, z. B. von früheren internationalen Mathematikolympiaden, geübt. Stark beeinflußt haben mich in dieser Zeit die kontinuierliche Förderung durch meine Mathematiklehrerin an der EOS und die zweiwöchigen Lager, die jährlich für die Besten der Kreisolympiade zur Vorbereitung auf die Bezirksolympiade durchgeführt wurden. Die Förderungsmaßnahmen am damaligen *Mathematischen Institut* der Leipziger Karl-Marx-Universität, die in dieser Zeit gerade begannen, kamen für mich wegen der ungünstigen Verkehrsverbindungen nicht in Betracht.

Nach meinem 2. Preis bei der DDR-Olympiade in der 11. Klasse habe ich begonnen, mich in die Bücher von *Fichtenholz* zur *Differential- und Integralrechnung* einzuarbeiten. Obwohl ich dadurch viele Fakten des Stoffes im 1. Studienjahr schon kannte, war ich von der Grundvorlesung bei Professor Focke an der KMU Leipzig stark beeindruckt, weil hier der Stoff in der erforderlichen Strenge und als eine schöne einheitliche Theorie dargeboten wurde und sich dabei meine bisherige Auffassung von der Mathematik änderte.

Aus heutiger Sicht auf meinem Entwicklungsweg zu meinem Beruf möchte ich auf folgende Gesichtspunkte aufmerksam machen:

Ich halte es für wichtig, in den Mathematikzirkeln an den Schulen und in der Mathematischen Schülergesellschaft sowohl mathematische Theorie zu entwickeln als auch konkrete Aufgaben mit Hilfe der Theorie und/oder auf originelle Weise zu lösen. Mathematische Zirkel, in denen nur das *Olympiadetraining* im Mittelpunkt steht, führen zu falschen Vorstellungen von der Wissenschaft Mathematik. Ich kann mich noch deutlich erinnern, wieviel Freude ich als Schüler daran hatte, zu schwierigen Aufgaben einen oder mehrere elegante Lösungswege zu finden. Zirkel, die zu sehr auf die Darlegung von mathematischer Theorie orientieren, bringen die Schüler um diese Freude.

Der sowjetische Nobelpreisträger Budker hat einmal gesagt:

Das Wertvollste, was ein Land besitzt, seien die Talente und die Schöpferkraft seiner Jugend. Meine Lehrerin an der EOS hatte dieses wohl erkannt und mir auf meinem Weg die Richtung gegeben. Ich bin der Richtung treu geblieben.

Prof. Dr. Konrad Schmüdgen,
Karl-Marx-Universität Leipzig –
Wissenschaftsbereich
Mathematische Physik

Ein Teilnehmer der 1. Olympiade Junger Mathematiker erinnert sich

25 Jahre *Olympiaden Junger Mathematiker* bedeuten für mich 25 Jahre engste Verbundenheit mit den Olympiaden.

1962 fand die 1. Olympiade statt. Damals ging ich gerade in die 5. Klasse – die unterste Klassenstufe, die in die Olympiaden einbezogen ist. Acht Jahre lang, bis zur 12. Klasse, nahm ich an Olympiaden teil. Gerne denke ich an die Erfolge zurück, die zunächst z. B. mit einem 3. Platz bei der Kreisolympiade in der 6. Klasse noch recht bescheiden waren und später durch eine sehr gute Förderung im *Bezirksklub Junger Mathematiker Neubrandenburg* mit einem Preis der XI. Internationalen Mathematik-Olympiaden 1969 in der SR Rumänien ihren Höhepunkt fanden.

Gleich danach begann ich u. a. als persönlicher Mentor im Bezirksklub Neubrandenburg und als AG-Leiter im Pionierhaus Rostock, jüngere Schüler auf die Olympiaden vorzubereiten. In den vergangenen 17 Jahren kamen viele weitere Aufgaben hinzu, u. a. als *Korrektor* und später als *Koordinator* bei den DDR-Olympiaden und in der Vorbereitung unserer IMO-Mannschaft. 1984 wurde ich fachlicher Leiter im Bezirksklub Neubrandenburg und Leiter der Mathematischen Schülergesellschaft Rostock. Mit all diesen Funktionen ist natürlich ein erheblicher Aufwand verbunden. Warum dieses Engagement?

Anfangs vor allem weil es Spaß machte und weil ich etwas von dem, was ich als Schüler an Förderung erfahren hatte, zurückgeben wollte. Später kam aus der eigenen Erfahrung immer mehr die Überzeugung zum Tragen, daß eine gute und frühzeitige Förderung eine sehr wesentliche Rolle in der Persönlichkeitsentwicklung von besonders begabten Schülern spielt. So konnten mehrere meiner ehemaligen Schüler nicht nur Preise bei DDR- und internationalen Olympiaden erreichen, sondern leisten als Studenten oder in der Praxis Überdurchschnittliches – Karl-Marx-Stipendien, wissenschaftliche Publikationen als Studenten oder sehr erfolgreiche Abschlüsse von Promotionen mögen das belegen.

Doch auch meine eigene wissenschaftliche Entwicklung ist ein Beispiel dafür. Ohne das frühzeitige Wecken der Begeisterung für die Mathematik und die Förderung während der Schulzeit im Bezirksklub durch StR *H. Birken,* StR *H.-J. Kerber,* StR *W. Kempcke* und OL *H. Pätzold* und später im Studium an der *Wilhelm-Pieck*-Universität Rostock u. a. durch Prof. Dr. *G. Burosch,* Prof. Dr. *W. Engel* und Doz. Dr. *M. Tasche* hätte ich sicher länger für die wissenschaftlichen Qualifikationen gebraucht und wäre nicht bereits 1985 mit 34 Jahren zum ordentlichen Professor für *Diskrete Mathematik* an die *Ernst-Moritz-Arndt-Universität* Greifswald berufen worden. Ich wünsche den *Olympiaden Junger Mathematiker,* daß sie für viele Schüler auch in den nächsten 25 Jahren eine ähnliche positive Rolle in der eigenen Entwicklung spielen werden. Ich werde nach Kräften daran mitarbeiten. *H.-D. Gronau*

Von den Schülern der DDR errungene Preise bei Internationalen Mathematikolympiaden

IMO	Gastgeber	Jahr	1. Preis	2. Preis	3. Preis
I	Rumänien	1959	–	–	–
II	Rumänien	1960	–	–	–
III	Ungarn	1961	–	–	1
IV	ČSSR	1962	–	1	–
V	Polen	1963	–	–	3
VI	UdSSR	1964	–	1	2
VII	DDR	1965	–	2	3
VIII	Bulgarien	1966	3	3	–
IX	Jugoslawien	1967	3	3	1
X	UdSSR	1968	5	3	–
XI	Rumänien	1969	–	4	4
XII	Ungarn	1970	1	2	4
XIII	ČSSR	1971	1	1	4
XIV	Polen	1972	1	3	4
XV	UdSSR	1973	–	3	4
XVI	DDR	1974	–	5	2
XVII	Bulgarien	1975	–	4	4
XVIII	Österreich	1976	–	2	3
XIX	Jugoslawien	1977	2	1	1
XX	Rumänien	1978	nicht teilgenommen		
XXI	Großbritannien	1979	–	2	2
XXII	USA	1981	nicht teilgenommen		
XXIII	Ungarn	1982	2	1	1*)
XXIV	Frankreich	1983	–	–	5
XXV	ČSSR	1984	1	2	3
XXVI	Finnland	1985	–	2	4

1980 fand keine IMO statt.

*) 1982 wurde die Höchstteilnehmerzahl pro Mannschaft von vorher 8 auf 4 Schüler, ab 1983 auf 6 Schüler begrenzt.

Kleine Statistik: An den Kreisolympiaden *Junger Mathematiker* der DDR nehmen rund 25 000, an den Bezirksolympiaden rund 2 500 und an der DDR-Olympiade rund 250 Schüler teil. Die sechs Besten der DDR-Olympiade werden zur IMO delegiert. Unser Foto: Wettbewerbsatmosphäre

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Hans-Dietrich Gronau

Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

▲2662▲ Ein Bankdirektor hat einen neuen Tresor mit 6 Schlössern. Zu jedem Schloß kann er beliebig viele Schlüssel anfertigen lassen. Er möchte möglichst vielen seiner Angestellten Schlüssel geben, um ihnen sein Vertrauen zu bekunden. Damit sich jedoch niemand überflüssig vorkommt, soll keiner nur solche Schlüssel erhalten, die ein anderer mindestens auch erhält.

Aus Sicherheitsgründen dürfen je drei Kollegen den Tresor noch nicht öffnen können, d. h., ihnen fehlt zusammen mindestens ein Schlüssel. Und schließlich müssen natürlich alle zusammen den Tresor öffnen können.

Wie vielen Angestellten kann der Direktor in diesem Sinne höchstens Schlüssel übergeben?

Bemerkung: Bezeichnen $S_1, S_2, \ldots, S_6$ die Schlösser, so könnte er zu jedem Schloß genau einen Schlüssel bestellen und diese auf 6 Angestellte verteilen. Man prüft leicht nach, daß dann alle Bedingungen erfüllt sind. Auch könnte er 8 Angestellte ins Vertrauen ziehen, wenn er Schlüssel zu folgenden Schlössern verteilt: $\{S_1, S_2\}$, $\{S_1, S_3\}$, $\{S_1, S_4\}$, $\{S_1, S_5\}$, $\{S_1, S_6\}$, $\{S_2, S_3\}$, $\{S_2, S_4\}$, $\{S_3, S_4\}$. Doch auch das ist noch nicht das Maximum! Das tatsächliche Maximum bietet dem Direktor, wenn er sich selbst einbezieht, eine besondere Situation. Welche?

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Peter Bachmann

Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden

▲2690▲ Frank und Franzi finden sich sehr sympathisch. Sie wollen sich Nachrichten austauschen, die andere nicht so leicht lesen können. Als Codierung schlägt Frank die Permutation der Buchstaben vor, d. h. eine eineindeutige Abbildung p des Alphabetes auf sich. Umlaute wollen sie nicht benutzen. Jede Codierung p soll als hintereinander auszuführende Folge $p_1 p_2 \ldots p_n$ *einfacher* Vertauschungen des Buchstaben A mit einem anderen Buchstaben des Alphabets beschrieben werden. Jedes p_i ist somit eine Permutation, die den Buchstaben A mit einem Buchstaben b vertauscht und alle anderen Buchstaben fest läßt. Die p_i werden durch den Buchstaben b, mit dem A zu vertauschen ist, beschrieben. So wird mit C die Vertauschung von A mit C bezeichnet. Die Permutation *CKW* entsteht, indem hintereinander die Vertauschungen A mit C, A mit K, A mit W ausgeführt werden.

Frank übersendet Franzi die Nachricht *DHNITBTGSOUR* mit dem Codewort BUCHSTABENRECHNUNG. Franzi freut sich über das Kompliment. Zugleich entdeckt sie, daß einige Codeworte wie OTTO, RETTER und auch MAMA zum Codieren nicht taugen. Außerdem beschreiben verschiedene Codeworte die gleiche Codierung, z. B. ROTOR und TOT. Sie bekommt Zweifel, ob mit dieser Methode alle Codierungen beschrieben werden können. Frank beruhigt sie und zeigt ihr sogar, wie lang die Codeworte dazu höchstens werden müssen.

Wie lautet das Kompliment an Franzi, warum kann jede Permutation auf die angegebene Weise beschrieben werden, und wie lang müssen die Codeworte dazu sein?

Kurzbiographie

Prof. Peter Bachmann wurde 1942 in Freital geboren und besuchte dort von 1957 bis 1961 die Erweiterte Oberschule. Die Lehrer *Bellmann* und *Umlauft* organisierten die Olympiadebewegung an der Schule und im Kreis und begeisterten auch den Schüler *Peter Bachmann* dafür. Er konnte 1961 beim Endausscheid der DDR-offenen 1. Berliner Mathematik-Olympiade einen 1. Preis erringen und wurde dadurch in die Delegation zur III. Internationalen Mathematikolympiade nach Ungarn aufgenommen. Dort belegte er einen mittleren Platz.

Von 1961 bis 1966 studierte er bei den Professoren Engel, Kochendörffer, Schmidt und Fenyö Mathematik, I. O. Kerner interessierte ihn für Informatik. Von 1966 bis 1974 arbeitete P. Bachmann im Kombinat Robotron in Dresden an Problemen der Compilertechnik und Betriebssysteme, von 1975 bis 1980 war er als Bereichsleiter im damaligen *Zentrum für Rechentechnik* der AdW in Berlin für Anwendungen der Rechentechnik, unter anderem in der Röntgenkristallstrukturanalyse und im Interkosmos-Programm zuständig. Die Ergebnisse seiner Dissertationen A und B konnte er 1971 in Ljubljana und 1977 in Toronto auf Weltkongressen der IFIP erfolgreich vorstellen. 1980 wurde er als Dozent und 1982 als ordentlicher Professor an die TU Dresden berufen. Hier forscht er auf dem Grenzgebiet von Algebra und Informatik. Er verfaßte bisher drei Bücher (bei zweien als Mitautor) und 30 wissenschaftliche Artikel.

Rundreise der Freundschaft: XI. IMO, SR Rumänien (1969): Die erfolgreichen IMO-Teilnehmer H.-D. Gronau (l.), A. Felgenhauer (r.) und der Chefred. der *alpha* (M.) bei einer Wanderung durch die Karpaten (Bild links). *14 Jahre später:* Dr. H.-D. Gronau, stellv. Delegationsleiter der DDR-Mannschaft und der Chefred. der *alpha* (r.) zur XXV. IMO in Prag (Bild rechts). (Siehe Beiträge v. Prof. Gronau S. 26/27!)

Ein Brief Gerhard Gentzens an seinen Großvater*)

Der mathematischen Fachwelt ist *Gerhard Gentzen* (1909 bis 1945) durch seine Leistungen auf dem Gebiet der mathematischen Logik bekannt. Von ihm stammen die Regeln des „natürlichen Schließens“, d. h. logische Schlußformen, die mehr der Praxis des mathematischen Denkens entsprechen als die bis dahin fixierten. Gentzen entwickelte auch das Sequenzenschließen, mit dessen Hilfe er neues Licht in die Beziehungen zwischen klassischer und intuitionistischer Logik brachte. Das Sequenzenschließen ist zu einem wesentlichen Bestandteil der Beweistheorie geworden, eines Spezialgebietes, das für den weiteren Fortschritt der Computer-Wissenschaften immer mehr an Bedeutung gewinnt. Von Gentzen stammt auch ein Beweis für die Widerspruchsfreiheit der elementaren Zahlentheorie, ein sehr schwieriger Beweis, dessen Bedeutung allerdings von einigen Logikern bestritten wurde.

Auf diese Fragen jedoch und deren philosophische Hintergründe soll hier nicht eingegangen werden. Uns geht es um den Schüler, um den Gymnasiasten Gerhard Gentzen.

Die Eltern lebten in Bergen auf Rügen, wo der Vater seit 1905 als Rechtsanwalt tätig war. Die Mutter hat zeitweise als Handelsschullehrerin gearbeitet. Am 24. 11. 1909 ist Gerhard Gentzen in Greifswald geboren. Seine frühe Kindheit verlebte er in Bergen, den ersten Unterricht erhielt er von seiner Mutter. Ostern 1918 wurde er Schüler der Realschule in Bergen, die er nur zwei Jahre besuchte. Im Frühjahr 1919 starb der Vater, und so entschloß sich die Mutter, mit den beiden Kindern zur Großmutter nach Stralsund überzusiedeln. Gerhard besuchte nun das dortige Gymnasium. Zu Hause herrschte eine weltoffene Atmosphäre. Die Großmutter, die einer Hugenottenfamilie entstammte, sprach Englisch und Französisch, sie besaß eine Bibliothek in beiden Sprachen.

Einen herzlichen Kontakt gab es zu dem Großvater Alfons Bilharz aus Sigmaringen am Bodensee. Alfons Bilharz ist jüngerer Bruder des bekannten Arztes und Forschers Theodor Bilharz, der jahrelang in Kairo wirkte und sich große Verdienste um die Bekämpfung der nach ihm benannten Bilharziose, einer von einem Saugwurm hervorgerufenen Krankheit, erwarb. Alfons Bilharz, ebenfalls Arzt, arbeitete über 10 Jahre in den USA, war danach Leiter des Krankenhauses in Sigmaringen und schrieb im Alter eine Reihe philosophischer Bücher. Er kümmerte sich sehr um seinen Enkel Gerhard Gentzen, und es ist anzunehmen, daß er auf den jungen Gentzen einen spürbaren Einfluß hatte. Der Brief, den wir hier abdrucken, ist an ihn gerichtet. Gentzen hat ihn höchstwahrscheinlich im Dezember 1922, also als 13jähriger Schüler, geschrieben.

Den Lehrern des Stralsunder Gymnasiums fiel Gentzen bald als besonders talentiert auf. Er fertigte 1926 und 1927 besondere Studienarbeiten an, woraufhin der Mutter jeweils eine Erziehungsbeihilfe von 1 000 Mark gewährt wurde – eine Unterstützung, die sehr willkommen war, denn die Familie lebte in ziemlich bescheidenen Verhältnissen. Diese Studienarbeiten sind offenbar nicht erhalten geblieben. Mit welchem Thema sich Gentzen hierin beschäftigte, können wir der „Meldung des Oberprimaners Gerhard Gentzen zur Reifeprüfung Ostern 1928“ entnehmen. Er schreibt: „Von den Unterrichtsgegenständen hat mich die Mathematik am meisten gefesselt, und ich habe mich viel mit ihr beschäftigt. 1922 begeisterte ich mich für die Sternkunde und versuchte bald, die Stellungen der Planeten am Himmel vorausbestimmen zu können. 1924 bearbeitete ich das Problem mathematisch und löste es nach vielen Versuchen. In demselben Jahre wandte ich mich der analytischen Geometrie zu, worüber ich in Unterprima (1926/27) eine Studienarbeit anfertigte. Ich möchte demnach Mathematik studieren.“

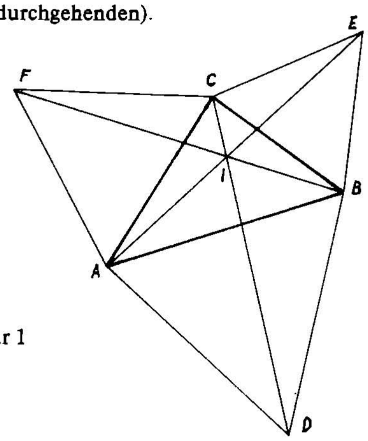
Gentzen beteiligte sich am wahlfreien englischen Unterricht und an philosophischen, griechischen und geschichtlichen Arbeitsgemeinschaften. Die Lehrer schrieben in der Abschlußbeurteilung über ihn: „Er ist der begabteste Schüler, den die Anstalt seit langem gehabt hat.“ *G. Robbel*

*) Für die diesem Artikel zugrunde liegenden Materialien und Informationen möchte ich Frau *W. Student*, der Schwester *G. Gentzens*, und dem *Stadtarchiv Stralsund* danken. Frau Student stellte freundlicherweise auch den Brief und die Fotografie zur Publikation zur Verfügung.

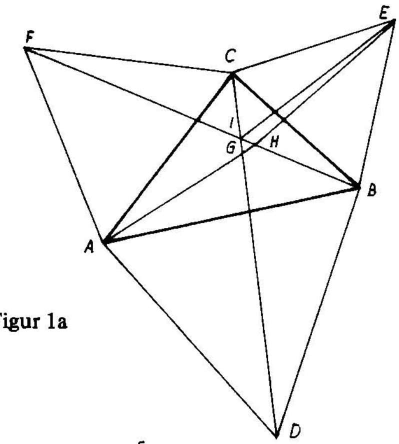
Lieber Großpapa!

Da ich weiß, daß Du Dich für meine mathematischen Fortschritte interessierst, schicke ich Dir folgende selbstgefundenen und selbstbewiesenen Lehrsätze:

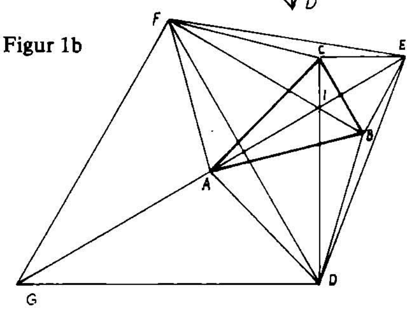
Ich zeichne über den Seiten eines beliebigen Dreiecks die gleichseitigen Dreiecke (Figur 1) und verbinde ihre Spitzen mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks. Diese Linien nenne ich der Kürze halber Pereunten (pereuntes, die Hindurchgehenden).



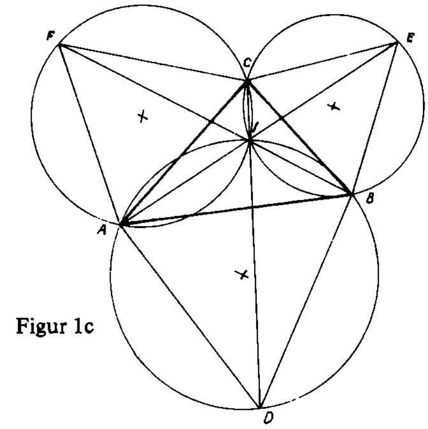
Figur 1



Figur 1a



Figur 1b

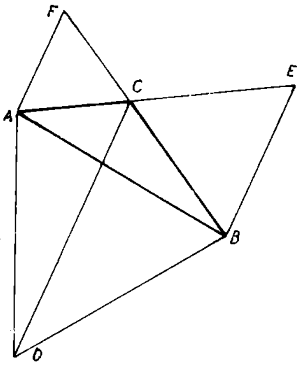


Figur 1c

Lehrsatz 1:
Zeichne ich in einem Dreieck, dessen einer Winkel gleich 120° ist, über der gegenüberliegenden Seite das gleichseitige

Dreieck, so halbiert die Pereunte den Winkel.

Zum Beweis zeichne ich auch über den beiden anderen Seiten die gleichseitigen Dreiecke (Figur 2)



Figur 2

Nun ist
$$\left.\begin{array}{l} AF = AC \\ AD = AB \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{nach} \\ \text{Voraussetzung}\end{array}$$ 1)
$$\underline{\sphericalangle FAB = CAD \quad (60° + \mathrm{CAB})}$$
$$\triangle FAB \cong \triangle CAD$$

(Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel einander gleich, so sind sie kongruent.)

Also ist auch $\sphericalangle AFB = \sphericalangle ACD$
$\sphericalangle AFB = 60°$
$\sphericalangle ACD = 60°$,

also die Hälfte von $\sphericalangle ACB$, was zu beweisen war.

Lehrsatz 2:

Die Pereunten eines Dreiecks sind gleich, schneiden sich in einem Punkte und bilden um diesen lauter Winkel von 60°.

Beweis (Figur 1):

$$AF = AC \quad \text{und} \quad CE = CB$$
$$AB = AD \quad \text{und} \quad CA = CF$$
$$\underline{\sphericalangle FAB = \sphericalangle CAD \quad \text{und} \quad \sphericalangle ECA = \sphericalangle BCF} \quad ^{2)}$$
$$\triangle FAB \cong \triangle CAD \quad \text{und} \quad \triangle ECA \cong \triangle BCF$$
wie oben
$$FB = CD \qquad EA = BF$$

Also ist $CD = FB = EA$, was zu beweisen war.

Ebenso ist $\sphericalangle CEA = CBF$ und $\sphericalangle BEA = BCD$ als gleiche Stücke in kongruenten Dreiecken.

$$\underline{\sphericalangle CEA + \sphericalangle BEA = 60°}$$
$$\sphericalangle CBF + \sphericalangle BCD = 60°$$
$$\sphericalangle CBF + BCD + BIC = 180°$$

(die Summe der Winkel eines Dreiecks)

$$\sphericalangle BIC = 120° \; (180° - 60°) \quad ^{3)}$$
$$\sphericalangle CIE = \; 60° \text{ (Lehrsatz 1)}$$

Auch ist (angenommen, EA ginge nicht durch I, so würde es die anderen Pereunten vielleicht in G und H schneiden)

$$\sphericalangle GCE + \sphericalangle CEG + \sphericalangle EGC = 180°$$
$$\underline{\sphericalangle GCE = 60° + \sphericalangle BCG}$$
$$\sphericalangle BCG + CEG + EGC + 60° = 180°$$
$$\underline{\sphericalangle BCG = \sphericalangle BEA \text{ wie oben}}$$
$$\sphericalangle BEA + CEG + EGC + 60° = 180°$$
$$\underline{\sphericalangle BEA + \sphericalangle CEG = 60°} \quad ^{4)}$$
$$\underline{60° + EGC + 60° = 180°}$$
$$\sphericalangle EGC = 60°$$

Oben ist auch $\sphericalangle CIE = 60°$

$$\sphericalangle EGC = \sphericalangle CIE$$
$$\sphericalangle EGC = CIE + IEG$$

(ein Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden Innenwinkel, die nicht seine Nebenwinkel sind)5). Also ist $\sphericalangle IEG = 0°$, oder EIA und $EGHA$6) decken sich, was zu beweisen war.

Nun bleibt noch zu beweisen, daß alle Winkel um I gleich 60° sind.

$\triangle FAB \cong CAD$ und $\triangle ECA \cong BCF$ wie oben bewiesen ist. Ebenso läßt sich beweisen, daß $\triangle CDB \cong EAB$ ist. Dann ist

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle AFB \qquad \sphericalangle CBF = \sphericalangle CEA$$
$$\underline{\sphericalangle EAC = \sphericalangle BFC} \qquad \underline{\sphericalangle DCB = \sphericalangle AEB}$$
$$\sphericalangle CIA = \sphericalangle 120° \qquad \sphericalangle BIC = 120°$$

$$\sphericalangle BAE = \sphericalangle BDC$$
$$\underline{\sphericalangle FBA = \sphericalangle CDA}$$
$$\sphericalangle AIB = 120°$$

wie oben. Dann sind nach Lehrsatz 1 alle Winkel um I gleich 60°, was zu beweisen war.

Lehrsatz 3:

Verbinde ich die Spitzen der über den Seiten eines Dreiecks gezeichneten gleichseitigen Dreiecke miteinander, so decken sich die Pereunten des so entstandenen Dreiecks mit denen des Grunddreiecks.

Beweis: Verbinde ich in Figur 1 F mit D und zeichne über FD das gleichseitige Dreieck,7) so ist $\sphericalangle FID = 120°$ und wird von IA halbiert (Lehrsatz 2, 3. Teil), also geht nach Lehrsatz 1 IA durch die Spitze des Dreiecks über FD, oder, die Pereunte AE ist ebenfalls Pereunte in $\triangle FED$. Ebenso ist dies für die anderen beiden zu beweisen.

Lehrsatz 4:

Die Umkreise der drei über den Seiten eines Dreiecks gezeichneten gleichseitigen Dreiecke schneiden sich im Schnittpunkt der Pereunten.

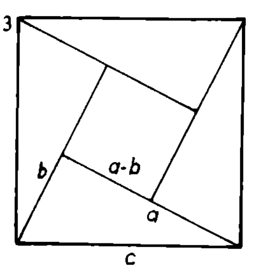
Beweis (Figur 1):

$\underline{\sphericalangle ADB = 60°, \; \sphericalangle AIB = 120° \text{ (Lehrs. 2)}}$ 8)

Viereck $AIBD$ ist ein Sehnenviereck, da die Summe zweier gegenüberliegender Winkel $2R$ beträgt. Also geht der Kreis um ABD durch I. Dasselbe ist ebenso für $AICF$ und $BICE$ zu beweisen.

In der Schule sind wir in Geometrie gerade bis zum pythagoreischen Lehrsatz gekommen. Für diesen habe ich selbst einen eigenen Beweis gefunden (Figur 3):

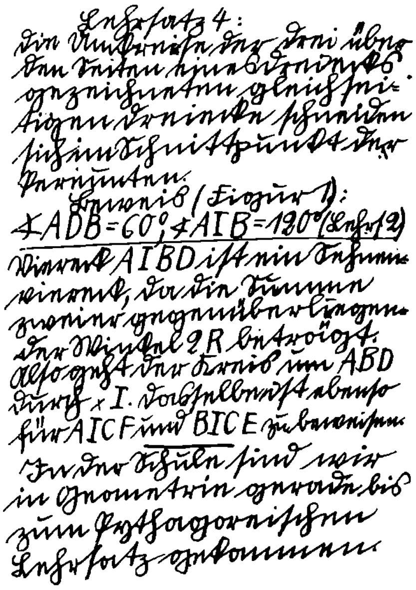
Figur 3



Die Winkel an den Ecken dieser Figur sind rechte, denn die Winkel eines Dreiecks sind $2R$ und der dritte Winkel des Dreiecks mit den Seiten a, b und c ist gleich R. Also sind a und b die Katheten, c die Hypotenuse, die ganze Figur ist c^2, das Quadrat in der Mitte $(a-b)^2$, der Inhalt jedes der Dreiecke $\frac{ab}{2}$. Also ist

$$c^2 = \frac{4ab}{2} + (a-b)^2$$
$$c^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Ein Fröhliches Weihnachtsfest wünscht
Gerhard


Lehrsatz 4: Die Umkreise der drei über den Seiten eines Dreiecks gezeichneten gleichseitigen Dreiecke schneiden sich im Schnittpunkt der Pereunten.
Beweis (Figur 1): ∢ADB=60°, ∢AIB=120° (Lehrs. 2)
Viereck AIBD ist ein Sehnenviereck, da die Summe zweier gegenüberliegender Winkel 2R beträgt. Also geht der Kreis um ABD durch I. Dasselbe ebenso für AICF und BICE zu beweisen.
In der Schule sind wir in Geometrie gerade bis zum pythagoräischen Lehrsatz gekommen

Auszug aus dem Brief des 13jährigen G. Gentzen an seinen Großvater

Fußnoten zum Brief

1) Es wird stillschweigend die Tatsache verwendet, daß die Strecke CF Fortsetzung der Strecke BC ist.
2) In analoger Weise folgt $\triangle ABE \cong DBE$ und hieraus die Gleichheit $\sphericalangle BEA = BCD$. Dies aufzuschreiben hielt Gentzen offensichtlich nicht für notwendig.
3) Der Schnittwinkel von 60° zwischen den Pereunten ergibt sich auch unmittelbar aus der Tatsache, daß die als kongruent nachgewiesenen Dreiecke auseinander durch eine Drehung von 60° um den jeweiligen Dreieckseckpunkt hervorgehen. Gentzen hält sich jedoch streng an die Kongruenzsätze.
4) Zur besseren Verdeutlichung des jetzt folgenden indirekten Beweises wird die Figur 1 noch einmal als Figur 1a dargestellt. Gentzen bezeichnet, ohne es ausdrücklich zu erwähnen, mit I den Schnittpunkt der Pereunten DC und FB.
5) Der Satz über Stufenwinkel hätte auch herangezogen werden können. Aber Gentzen scheint Wert darauf zu legen, vor allem Sätze der Dreieckslehre zu benutzen.
6) Die oben angegebene Winkelgleichheit $\sphericalangle BCG = BEA$ verlangt, daß G auf der Strecke CD liegt. Deshalb sollte hier besser $EHGA$ stehen.
7) siehe Figur 1b. 8) siehe Figur 1c.

In diesem Beitrag wurden (teilweise) nicht die üblichen Symbole für Winkel, Dreiecke und Strecken verwendet.

Schulolympiaden in der MVR

In der Mongolischen Volksrepublik werden jährlich in der Schule Mathematikolympiaden für die Klassen 5 bis 7 in zwei Stufen durchgeführt: Die *Klassenolympiade* und die *Schulolympiade*.
Die fünf besten Schüler der Klassenolympiade nehmen an der zweiten Stufe, der Schulolympiade, teil. Dort wird dann der *Schulmeister der jeweiligen Klassenstufe* ermittelt.
Unser langjähriger Freund, Herr Dipl.-Math. *P. Altanzog*, Institut für Physik und Technik, Akademie der Wissenschaften der Mongolischen Volksrepublik, Ulan Bator, sandte der Redaktion *alpha* eine Auswahl von Aufgaben des Wettbewerbsjahres 1985. Wir wollen euch Aufgaben davon vorstellen und dazu Bemerkungen zum Lösen und Weiterdenken machen.

Klassenstufe 5
(Klassenolympiade, 1. Stufe)

5.1.1. Gesucht sind vier natürliche Zahlen. Ihre Summe und auch ihr Produkt soll 8 sein.
Bemerkung: Es gibt a) 2, b) 3 natürliche Zahlen, deren Summe und Produkt gleich sind. Wie lauten sie? Und hast du die 5.1.1. gelöst, so findest du auch bald die fünf natürlichen Zahlen, deren Summe und Produkt 8 betragen.

5.1.2. Vor einer Katze waren genau zwei Katzen; auch hinter einer waren genau zwei. Wieviel Katzen waren es, wenn zwischen diesen beiden Katzen genau eine Katze war?
Bemerkung: Mit nur einer Lösung hast du die Aufgabe auch nur halb gelöst. Anders wäre es, wenn auch zwischen beiden genau zwei Katzen wären. – Eine Zeichnung hilft sofort!

5.1.3. Wie findet man beliebig viele Zahlen, die durch 5 geteilt einen Rest 2 haben und gerade sind?
Bemerkung: Hier kann verschieden formuliert werden. Überlege das! – Wie lautet die Antwort, wenn die Zahlen statt gerade ungerade sein sollen?

5.1.4. Wie müßte man einige Zahlen vertauschen, damit man in jeder Spalte die gleiche Summe erhält?

2	3	4
5	6	12
7	10	13
15	11	14

Bemerkung: Es gibt als Lösung verschiedene Möglichkeiten. Sicher eine leichte Aufgabe.

Klassenstufe 6
(Klassenolympiade, 1. Stufe)

6.1.1. Gib alle natürlichen Zahlen n an, für die $\frac{3 \cdot n^2 + 2 \cdot n - 20}{n}$ auch eine natürliche Zahl ist!
Bemerkung: Da ein Durchprobieren viel Zeit kostet, bedenke: Man dividiert eine Summe (Differenz) durch eine Zahl, indem man jeden Summanden durch diese Zahl dividiert.

6.1.2. Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen beträgt 3024. Wie lauten diese Zahlen?
Bemerkung: Kann eine der Zahlen 10 sein? Können alle vier Zahlen größer als 10 sein?

6.1.3. Welche Potenz ist größer, 3^{21} oder 9^{10}?
Bemerkung: Um vergleichen zu können, schreibt man die Potenzen als Produkte! Etwas schwerer wäre z. B. die Untersuchung von 4^8 und 8^4.

6.1.4. Welche Primzahlen p erfüllen die Ungleichung
$$45 \leqq 2 \cdot p - 1 \leqq 60?$$
Bemerkung: Beachte als erstes nur das Gleichheitszeichen!

Klassenstufe 5
(Schulolympiade, 2. Stufe)

5.2.1. Löse die Gleichung
$\overline{abc} + \overline{bc} + c = 687$,
wenn $\overline{abc}$ bzw. $\overline{bc}$ drei- bzw. zweistellige natürliche Zahlen sind!
Bemerkung: Mancher löst die Aufgabe lieber, wenn Summanden und Ergebnis untereinandergeschrieben werden. Ansonsten gilt das, was schon bei Aufgabe 5.1.2. anfangs angedeutet wurde.

5.2.2. Gesucht sind dreistellige natürliche Zahlen. Dabei sollen ihre Ziffern geradzahlig und verschieden sein. Faßt man die drei Ziffern als Zahlen auf, so sollen die gesuchten Zahlen durch das Produkt aus diesen drei Zahlen teilbar sein.
Bemerkung: Es gibt doch sicherlich nur vier Möglichkeiten für den Divisor. Welche?

5.2.3. Löse die Multiplikationsaufgabe!
$$\begin{array}{r} \underline{xxx \cdot x8x} \\ xxxx \\ xxx \\ \underline{xxxx} \\ xxxxx5 \end{array}$$
Bemerkung: Sie sieht schwerer aus, als sie ist. Die ersten Überlegungen macht man wohl sicher mit den beiden schon bekannten Ziffern.

5.2.4. In einer Familie ist der Vater zwei Jahre älter als die Mutter und der Sohn drei Jahre älter als die Tochter. Addiert man das Alter von allen, so erhält man 73. Vor vier Jahren betrug diese Summe 58. Wie alt ist jetzt jeder?
Bemerkung: Beachte, daß $73 - 4 \cdot 4 = 57$!

Klassenstufe 6
(Schulolympiade, 2. Stufe)

6.2.1. In einem Kasten liegen 24 Kugeln, und zwar rote, blaue, grüne und weiße. Es sind doppelt so viele rote wie blaue und doppelt so viel blaue wie grüne. Wieviel waren es von jeder Farbe, wenn es nicht mehr weiße als grüne Kugeln waren?
Bemerkung: Eine Gleichung (oder Ungleichung) hilft da sicher weiter. Beginne mit den grünen Kugeln!

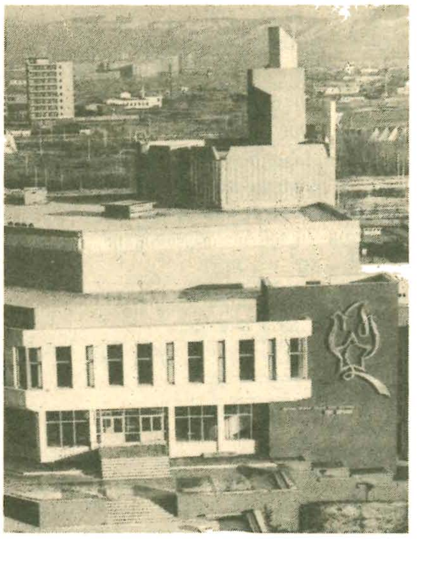
6.2.2. Ein Schüler hat vier Aufgaben der 1. Stufe und drei Aufgaben der 2. Stufe gelöst und insgesamt 60 Punkte erhalten. Wieviel Punkte bekam er für jede Aufgabe, wenn er in jeder Stufe für jede Aufgabe gleich viel Punkte erhielt und in der 1. Stufe für jede Aufgabe einen Punkt mehr erhielt als für jede Aufgabe in der 2. Stufe?
Bemerkung: Auch hier hilft sicher eine Gleichung weiter. Oder man fragt sich: Wieviel Punkte hätte er bekommen, wenn er bei der 1. Stufe genau so viele Punkte je Aufgabe erhalten hätte wie bei der 2. Stufe?

6.2.3. Die fünfstellige Zahl $\overline{42x4y}$ soll durch 72 teilbar sein.
Wie lauten die Ziffern x und y?
Bemerkung: Es ist $72 = 9 \cdot 8$. Und die Teilbarkeitsregeln muß man kennen!

6.2.4. Schreibe die Zahl 91 als Summe von natürlichen Zahlen so, daß das Produkt aus diesen Zahlen ebenfalls 91 beträgt!
Bemerkung: Diese Aufgabe lösen wir sofort, wenn wir schon Aufgabe 5.1.1. richtig gelöst haben.

D. Altanzog/H.-J. Kerber

Der neue Pionierpalast in Ulan Bator wurde 1985 eingeweiht.



Über Vielecke und Kreise in der Taxi-Geometrie

Im folgenden möchte ich euch, liebe Mathematik-Knobelfreunde, mit einer leicht verständlichen, aber ungewohnten Geometrie vertraut machen. Jeder von euch kann ihre Struktur auf einem karierten Blatt Papier studieren und leicht neue Sätze entdecken. Diese Geometrie wollen wir *T-Geometrie* oder *Taxi-Geometrie* nennen, denn man kann sie durch Taxifahrstrecken in einer idealisierten *Stadt* wie folgt modellieren:

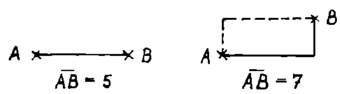
Die *T-Ebene*, d. h. die *Stadt*, in der das Taxi fährt, ist das karierte Blatt Papier. Die *Häuserblöcke* sind die Quadrate des quadratischen Gitters des Blattes.

T-Geraden, d. h. *Taxi-Fahrstraßen*, sind die Horizontal- und Vertikalgeraden des Gitters von Quadraten.

T-Punkte sind die Schnittpunkte dieser Horizontal- und Vertikalgeraden des Gitters *(Straßenkreuzungen)*.

Um den T-Abstand $\overline{AB}$ zweier T-Punkte A und B ($\neq A$) zu messen, unterscheiden wir zwei Fälle: (Bild 1)

Bild 1



1. A und B liegen auf derselben T-Geraden $g(AB)$. Dann wird der T-Abstand $\overline{AB}$ gemessen, indem wir die *Häuserblöcke* abzählen, die zwischen A und B liegen.
2. Wenn A und B nicht zur selben T-Geraden gehören, so finden wir den T-Abstand $\overline{AB}$ als Anzahl der *Häuserblöcke*, die ein Taxi auf kürzestem Wege umfahren muß, um von A nach B (beziehungsweise von B nach A) zu gelangen.

In der ebenen Geometrie existiert zu zwei Punkten A und B ($\neq A$) genau eine kürzeste Verbindung $\overline{AB}$. Demgegenüber gibt es in der T-Geometrie mehrere kürzeste Wege, durch die zwei Punkte A und B verbunden werden können, wenn A und B nicht auf einer T-Geraden liegen. Im folgenden bezeichnet *Weg* jeden Fahrweg eines Taxis, der von einem zum anderen Punkt führt bei minimaler Anzahl der dabei zu passierenden Häuserblöcke.

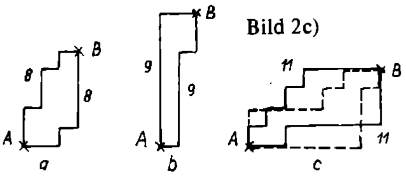
Wir wollen einige Begriffe der ebenen Geometrie in die T-Geometrie übertragen und neue Begriffe der T-Geometrie erklären.

Ein *Punkt X liegt zwischen A und B* ($\neq A$) d. h. $Zw(AXB)$, wenn das Taxi auf einem kürzesten Weg von A nach B die Punkte A, X und B in dieser Reihenfolge passiert ($X \neq A$ und $X \neq B$). Sind A, B zwei Punkte, so wird die Menge $\{X: \{Zw(AXB)$ oder $X = A$ oder $X = B\}$ die *T-Strecke* $\overline{AB}$ genannt. Die T-Strecke $\overline{AB}$ ist demnach die Punktmenge, die die Endpunkte A, B und alle zwischen A und B liegenden Punkte, *innere Punkte* genannt, enthält.

Ein *T-Streckenzug* ist die Vereinigung von n-T-Strecken, in der je zwei aufeinanderfolgende Strecken genau einen Endpunkt gemeinsam haben. Ein geschlossener T-Streckenzug $A_1A_2 \ldots A_nA_1$, dessen n Eckpunkte in der T-Ebene liegen, heißt *T-Vieleck* (oder T-n-Eck oder T-Polygon). Wir vereinbaren, daß in einem T-Vieleck drei benachbarte Eckpunkte nicht auf einer T-Geraden liegen. Die Verbindungsstrecke zweier benachbarter Eckpunkte heißt *T-Vieleckseite* (oder T-n-Eckseite oder T-Polygonseite). Eine T-Verbindungsstrecke zweier nichtbenachbarter Eckpunkte eines T-n-Ecks ($n > 3$) heißt Diagonale des T-n-Ecks.

In der Menge der T-n-Ecke sind die T-Zweiecke enthalten, die es in der ebenen Geometrie nicht gibt. Ein T-n-Eck mit $n = 2$ heißt *T-Zweieck*. Bild 2 zeigt einige Varianten von T-Zweiecken.

Bild 2a) Bild 2b) Bild 2c)



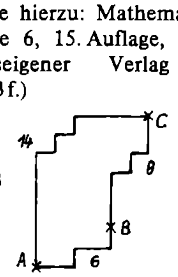
Zwei verschiedene T-Zweiecke können das gleiche Paar von T-Eckpunkten haben (Bild 2c). Die zwei Seiten eines beliebigen T-Zweiecks müssen gleich lang sein, da sie kürzeste Wege zwischen denselben Punkten darstellen.

Aufgaben

▲1▲ Zeichne ein Zweieck P_1P_2 mit der Seitenlänge 7!

Ein ungleichseitiges T-Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C und den Seitenlängen 14, 8 und 6 zeigt Bild 3. Die Seiten eines T-Dreiecks müssen Wege des Taxis sein. Diese Wege, die ein T-Dreieck mit gegebenen Seitenlängen bilden, können verschiedene Formen haben, sind aber gleich lang. Typisch für die Taxi-Geometrie ist die wichtige Erkenntnis, daß die *Dreiecksungleichung nicht gilt* (Bild 3). (Siehe hierzu: Mathematik, Lehrbuch für Klasse 6, 15. Auflage, Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1983; S. 113f.)

Bild 3



▲2▲ Ermittle ein gleichseitiges T-Dreieck $P_1P_2P_3$ mit der Seitenlänge 8!

Bild 4

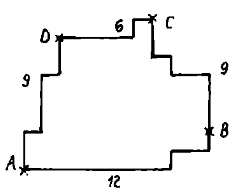


Bild 4 zeigt ein *T-Viereck* mit den Seitenlängen 9, 6, 9 und 12. Drei *T-Quadrate*, alle mit der Seitenlänge 6, sind in Bild 5 dargestellt. Der Satz: *Die Diagonalen eines Quadrates sind gleich lang* gilt in der T-Geometrie im allgemeinen nicht.

▲3▲ Für welches Quadrat des Bildes 5 gilt dieser Satz?

Bild 5a) Bild 5b)

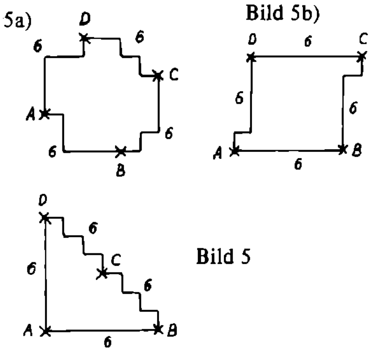
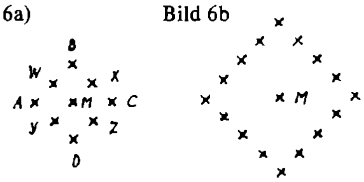


Bild 5

Aus Bild 5 ist ersichtlich, daß T-Quadrate sehr vielfältige Formen annehmen können.

Ein *T-Kreis* ist die Menge aller T-Punkte, die von einem gegebenen T-Punkt M, dem Mittelpunkt des T-Kreises, den gleichen T-Abstand $\overline{MP} = r (r > 0)$ haben. Das überraschende Resultat (für $r = 2$) zeigt Figur 6a. Der T-Kreis besteht aus 8 Punkten. Ein T-Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r (r > 0$ und r ganz) wird aus $4r$ T-Punkten gebildet. Der Kreisumfang ist $8r$.

Bild 6a) Bild 6b



▲4▲ Ermittle zwei T-Kreise mit den Radien $r_1 = 3$ und $r_2 = 5$! Bestimme die Anzahl der Kreispunkte, und berechne den Kreisumfang!

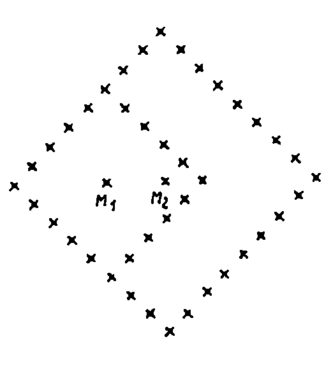
Übertragen wir die Definition von π (das Verhältnis des Kreisumfanges zu seinem Radius), so hat π in der T-Geometrie exakt den Wert 4.

Die Menge der T-Kreispunkte enthält als Teilmenge Eckpunkte von T-n-Ecken.

▲5▲ Suche T-Kreispunkte in Bild 6a, die Eckpunkte eines T-Zweiecks, gleichseitigen T-Dreiecks, T-Quadrates, regulären T-Fünfecks, regulären T-Sechsecks, regulären T-Siebenecks, regulären T-Achtecks sind!

In der euklidischen Geometrie gilt bekanntlich der Satz, daß sich zwei Kreise in

Bild 7



höchstens zwei Punkten schneiden können. Wie Bild 7 zeigt, gilt dieser Satz in der T-Geometrie nicht. Das heißt: Zwei T-Kreise können sich in einer beliebigen Anzahl von T-Punkten schneiden. Je *größer* die T-Kreise sind, um so größer ist die mögliche Anzahl von Schnittpunkten.

▲6▲ Ermittle zwei T-Kreise mit den Radien $r_1 = 4$ und $r_2 = 7$, die sich nicht schneiden, in einem Punkt berühren, in 9 Punkten schneiden!

Abschließend sei bemerkt:

Nach dieser anschaulichen Skizzierung des Gegenstandes der Taxi-Geometrie können, z. B. in Schülerzirkeln, weiterführend folgende Problemkreise untersucht werden:

- Übertragung von Begriffsbildungen, Sätzen und Relationen der Schulgeometrie (z. B. Mittelsenkrechte, Parallelität) in die T-Geometrie,
- geometrische Konstruktionen in der T-Geometrie,
- Ausdehnung der T-Geometrie auf Gitter, die aus regelmäßigen n-Ecken, statt Quadraten bestehen.

Bei allen Betrachtungen ist nur zu sichern, daß der *Taxi-Chauffeur* immer den *Straßen* folgt und den kürzesten Weg nimmt, um zum Bestimmungsort zu gelangen.

P. Knabe

Jakob Steiner irrte sich

Ebene Figuren gleichen Umfangs mit größtem Flächeninhalt

Im Jahre 1841 legte der Geometer *Jakob Steiner* (1796 bis 1862), Professor an der 1810 gegründeten Berliner Universität, der Pariser Akademie zwei seiner bedeutendsten Abhandlungen vor, in denen er die Ergebnisse seiner langjährigen Untersuchungen „über Maximum und Minimum bei den Figuren der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raum überhaupt“ niedergelgt hat.

Darin beschreibt *Steiner* auch eine einfache geometrische Konstruktion, die es ermöglicht, zu jeder geschlossenen und nicht kreisförmigen ebenen Kurve K eine neue Kurve C zu konstruieren, die wieder eben und geschlossen ist, ferner gleichen Umfang, aber größeren Flächeninhalt hat wie K.

Schon der Grieche *Zenodoros* (2. Jh. v. u. Z.) hatte vermutet, daß es der Kreis ist, der von allen ebenen Figuren gleichen Umfangs den größten Flächeninhalt hat. Er konnte dieses nur für den Spezialfall beweisen, daß er den Kreis mit Polygonen verglich. *Steiner* meinte nun, diese Vermutung allgemein bewiesen zu haben. Aus der Konstruktion der Kurve C aus der Kurve K folgerte er nämlich: „Unter allen ebenen Figuren von gleichem Umfang hat der Kreis den größten Inhalt.“ *Dirichlet*, ebenfalls Professor der Berliner Universität, soll *Steiner* auf die Lückenhaftigkeit seiner Schlußweise hingewiesen haben.

Worin besteht diese? *H. Pieper*

Überlegung zu einer Aufgabe der Mathematikolympiade

In der XVIII. Mathematikolympiade *Junger Mathematiker* der DDR lautete eine Aufgabe der dritten Stufe für die Klasse 9: *Man ermittle die größte natürliche Zahl n, für die die folgende Aussage wahr ist: „Es gibt n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, unter denen sich keine befindet, deren Quersumme durch 4 teilbar ist.“*

1. Indem wir zunächst einmal die Quersumme einiger aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen auf die Teilbarkeit durch 4 untersuchen, wollen wir Hinweise zum Lösungsweg gewinnen.

natürliche Zahl k	Quersumme $Q(k)$	$Q(k)$ ist durch 4 teilbar	Rest, der bei der Division von $Q(k)$ durch 4 bleibt
17324	17	nein	1
17325	18	nein	2
17326	19	nein	3
17327	20	ja	0
17328	21	nein	1
17329	22	nein	2
17330	14	nein	2
17331	15	nein	3
17332	16	ja	0
17333	17	nein	1
17334	18	nein	2
17335	19	nein	3
17336	20	ja	0
17337	21	nein	1

Wir stellen fest:

Solange bei den aufeinanderfolgenden Zahlen k kein „Zehner“ (Vielfaches von 10) überschritten wird, sind auch deren Quersummen $Q(k)$ aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Deshalb gibt es in diesen Fällen jeweils drei aufeinanderfolgende Zahlen, deren Quersumme nicht durch 4 teilbar ist. Abweichungen von dieser Regelmäßigkeit treten offenbar beim Übergang zu einem neuen „Zehner“, „Hunderter“, „Tausender“ usw. auf. In unserem Fall gibt es an dieser Stelle eine Serie von vier aufeinanderfolgenden Zahlen, deren Quersumme nicht durch 4 teilbar ist.

▲1▲ Untersuche, ob bei jedem Übergang zu einem neuen „Zehner“ (die „Hunderter“ sollen unverändert bleiben) eine Serie von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen auftritt, deren Quersumme nicht durch 4 teilbar ist!

2. Der oben stehenden Tabelle entnehmen wir:

Während die bei der Division durch 4 auftretenden Reste immer um 1 wachsen bis auf 3, um dann wieder auf 0 zu fallen, bleibt beim Übergang zum neuen Zehner der Rest unverändert. Daß das immer so ist, zeigt folgende Überlegung: Ist z eine natürliche Zahl mit genau einer Null am Ende, so hat die Zahl $z - 1$ am Ende eine 9. Für die Quersumme von z, die wir wieder mit $Q(z)$ bezeichnen, gilt:

$Q(z) = Q(z-1) - 9 + 1 = Q(z-1) - 8$.

Läßt $Q(z-1)$ bei der Division durch 4 den Rest r, d. h. ist

$Q(z-1) = 4 \cdot t + r$,

so ist

$Q(z) = Q(z-1) - 8$

$= 4 \cdot t + r - 8 = 4 \cdot (t-2) + r$.

$Q(z)$ läßt also bei der Division durch 4 ebenfalls den Rest r. Immer, wenn dieser Rest verschieden von Null ist, gehört die Zahl z zu einer Serie von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren Quersumme nicht durch 4 teilbar ist.

3. Die Serie von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren Quersumme nicht durch 4 teilbar ist, kann nur dann verlängert werden, wenn beim Übergang zu einem neuen „Hunderter“ bzw. „Tausender“ bzw. „Zehntausender“ usw. der bei der Division der Quersumme durch 4 auftretende Rest vermindert wird. Der günstigste Fall ist der folgende:

	natürliche Zahl	der bei der Division der Quersumme durch 4 auftretende Rest
	$z-4$	0
	$z-3$	1
	$z-2$	2
Übergang <	$z-1$	3
	z	1
	$z+1$	2
	$z+2$	3

Wir schließen daraus: Mehr als sechs aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, deren Quersumme nicht durch 4 teilbar ist, kann es nicht geben.

▲2▲ Begründe, weshalb der oben beschriebene Fall der günstigste ist!

4. Kann dieser günstigste Fall auftreten? Dazu sind zwei Probleme zu untersuchen:

a) Gibt es Übergänge von $z-1$ zu z, bei denen der Rest, der bei der Division der Quersumme durch 4 auftritt, um 2 vermindert wird?

b) Gibt es unter den Zahlen z, die wir vielleicht bei der Beantwortung der Frage a) finden, solche, deren Quersumme bei der Division durch 4 den Rest 1 läßt?

▲3▲ Untersuche bei einigen Übergängen zu neuen „Hundertern“ bzw. „Tausendern“ bzw. „Zehntausendern“, um wieviel sich der bei der Division der Quersumme durch 4 auftretende Rest vermindert!

5. Zur Beantwortung der Frage a) verschaffen wir uns einen Überblick darüber, um wieviel die bei den verschiedenen Übergängen auftretenden Reste vermindert werden:

Anzahl der Neunen am Ende von $z-1$	die Quersumme vermindert sich beim Übergang zu z um	der bei der Division der Quersumme durch 4 auftretende Rest vermindert sich um
1	$1 \cdot 9 - 1 = 8$	0
2	$2 \cdot 9 - 1 = 17$	1
3	$3 \cdot 9 - 1 = 26$	2
4	$4 \cdot 9 - 1 = 35$	3
5	$5 \cdot 9 - 1 = 44$	0
6	$6 \cdot 9 - 1 = 53$	1
7	$7 \cdot 9 - 1 = 62$	2
⋮	⋮	⋮
p	$p \cdot 9 - 1$	

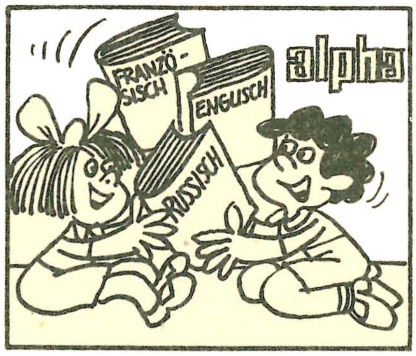
Wir stellen fest, daß der fragliche Rest beim Übergang von $z-1$ zu z genau dann um 2 vermindert wird, wenn z eine Zahl mit genau 3 Nullen am Ende oder genau 7 Nullen am Ende oder genau 11 Nullen am Ende usw. ist (allgemein mit genau $(4n-1)$ Nullen; $n = 1, 2, 3, \ldots$).

6. Wenden wir uns nun der Frage b) zu. Die Nullen am Ende von z liefern keinen Beitrag zur Quersumme von z. Wählen wir also irgendeine natürliche Zahl m, die nicht auf Null endet und deren Quersumme bei der Division durch 4 den Rest 1 läßt, so gehört jede der Zahlen $m \cdot 10^3$, $m \cdot 10^7$, $m \cdot 10^{11}$ usw. zu einer Serie von sechs aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren Quersumme nicht durch 4 teilbar ist.

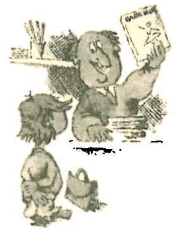
Die kleinste Zahl m, deren Quersumme bei der Division durch 4 den Rest 1 läßt, ist die Zahl 1. Die Zahl $m \cdot 10^3$ ist dann die Zahl 1000, die entsprechende Serie ist 997, 998, 999, 1000, 1001, 1002. Mit $m \cdot 10^7$ erhalten wir die Serie 9 999 997, 9 999 998, 9 999 999, 10 000 000, 10 000 001, 10 000 002. Weitere Zahlen m sind 5, 9, 14, 18, 23, 27, ...

Damit haben wir die in der Aufgabenstellung gesuchte natürliche Zahl n gefunden. Es ist $n = 6$.

Darüber hinaus haben wir aber sogar einen Überblick über alle Stellen in der Folge der natürlichen Zahlen gewonnen, an denen eine Serie von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen auftritt, deren Quersumme nicht durch 4 teilbar ist.



▲1▲ „Николай Иванович, – спросил Вадик у знакомого продавца магазина, – сколько стоит блокнот?“ „16 блокнотов стоят столько же рублей, сколько блокнотов можно купить на 1 рубль“, – с улыбкой ответил продавец. Сколько же стоит один блокнот?



▲2▲ Choose a pair of integers between 0 and 10. (E. g. 5 and 8) and find their sum S $(5 + 8 = 13)$. Next find the sum, T, of the two numbers formed by the two integers, $(58 + 85 = 143)$. Can you explain why T is always a multiple of S? Find the quotient $Q = T/S$.

▲3▲ La combinaison du coffre de l'oncle Archibald comporte quatre chiffres, tous différents.

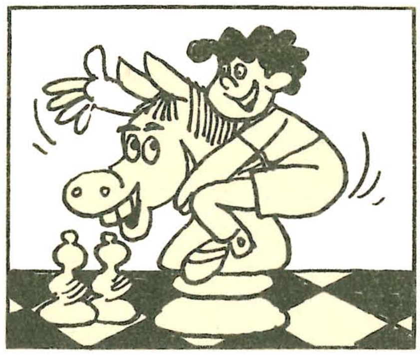
(1) Le premier est pair.
(2) La somme des deux premiers est 7.
(3) Le 3ᵉ est plus petit que le 2ᵉ.
(4) Le produit du 2ᵉ et du 3ᵉ se termine par 5.
(5) On peut diviser tous les nombres naturels par le 4ᵉ.

▲4▲ *Aus: A. H. Rieß, Rechenbuch für niedere und bes. Landschulen (Magdeburg 1801):* Eine gewisse Arznei wird aus mehreren Sachen bereitet; von der ersten kommen 12 Loth, von der zweiten 13 Loth, von der dritten 8 Loth, von der vierten 7 Loth, wieviel von jeder Ingredienz (Zutat) wird zu 10 Pfund erfordert? (1 Pfund = 32 Loth)

▲4▲ Ermittle alle Stellen in der Folge der natürlichen Zahlen, an denen eine Serie von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen auftritt, deren Quersumme nicht durch 4 teilbar ist!

▲5▲ Gib zwei Beispiele dafür an, daß von drei aufeinanderfolgenden Zahlen nur die Quersumme der mittleren nicht durch 4 teilbar ist!

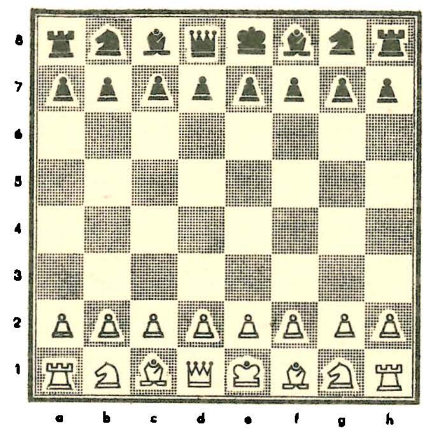
W. Stoye



Schach und Mathematik

Zwischen dem Spiel Schach und der Wissenschaft Mathematik bestehen zahlreiche Beziehungen, angefangen mit der Legende von den Weizenkörnern, die als Belohnung für den Erfinder des Schachspiels auf dem Brett angehäuft werden sollten (*alpha* 3/84), über das berühmte Achtdamenproblem (*alpha* 2/84) bis zu der Frage, wie Turnierergebnisse am gerechtesten zu bewerten sind, und dem Einsatz von Computern zum Lösen von Schachproblemen.

Als Anfänger sitzt man zögernd vor dem Schachbrett und betrachtet sinnend seine 16 Figuren. Mit welchem Zug soll man beginnen, mit welchem Zug wird der Gegner antworten? Deshalb bietet sich gerade die Partieanfangsstellung zu zahlreichen Knobeleien an. Zwei Aufgaben des finnischen Problemkomponisten *Eero Bonsdorff* seien als Beispiele genannt und zu lösen:

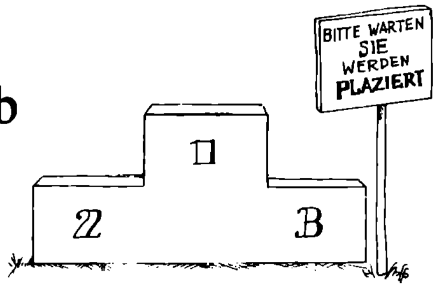


▲1▲ Wie groß ist die Anzahl der kürzesten Zugfolgen aus der Partieanfangsstellung, die zu einem Schachgebot durch einen Bauernzug führen?
Eine mögliche Lösung ist z. B.: 1. g4 d5, 2. Lh3 Kd7, 3. g5+.

▲2▲ Wie groß ist die Anzahl der kürzesten Zugfolgen aus der Partieanfangsstellung, die zu einem Schachgebot durch einen Turmzug führen?
Eine mögliche Lösung ist z. B.: 1. d3 a5, 2. Kd2 Ta6, 3. Kc3 Tc6+.

H. Rüdiger

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Aufgaben aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR vergangener Jahre

Letzter Einsendetermin: 12. Juni 1986

Ma 5 ■ 2663 Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 968. Ein Summand endet mit einer Null. Streicht man diese Null, so erhält man die andere Zahl. Bestimme diese beiden Zahlen!

Ma 5 ■ 2664 Zwei Pioniergruppen wollen an einem Sonntag eine Wanderung nach dem 12 Kilometer entfernten Neuendorf machen. Die erste Gruppe will um 8.00 Uhr aufbrechen. Sie legt in jeder Stunde 4 km zurück. Die andere Gruppe macht eine Radwanderung und kann in jeder Stunde 12 km schaffen. Wann muß sie aufbrechen, wenn beide Gruppen gleichzeitig in Neuendorf eintreffen wollen?

Ma 5 ■ 2665 An einem Tisch sitzen sieben Schüler. Einer hört auf den Vornamen Fred, einer heißt Willi, vier heißen Lutz und einer heißt Christian. Weiter wissen wir nur, daß unter ihnen zwei Brüder mit dem Familiennamen Scheibner, einer mit dem Zunamen Franke und vier Schüler mit dem Namen Schulz sind.
a) Von wem können wir mit absoluter Sicherheit Vor- und Zunamen angeben?
b) Warum muß er so heißen?

Ma 5 ■ 2666 Nach der Kreisolympiade *Junger Mathematiker* wurde ein Pionier gefragt, wieviel Punkte er bekommen habe. Scherzhaft sagte er: „Wenn man zu der Zahl meiner Punkte 10 hinzufügt und die Summe verdoppelt, so fehlen mit noch 10 Punkte an 100."
a) Wieviel Punkte erzielte der Thälmann-Pionier?
b) Wie hast du das Ergebnis gefunden?

Ma 5 ■ 2667 In drei Abteilen eines Eisenbahnwagens befinden sich 90 Fahrgäste. Würden aus dem ersten Abteil 12 Fahrgäste in das zweite und aus dem zweiten 9 Fahrgäste in das dritte umsteigen, dann wären in allen drei Abteilen gleich viel Personen. Wie viele Fahrgäste waren ursprünglich in den einzelnen Abteilen?

Ma 5 ■ 2668 Ermittle zwei natürliche Zahlen a und b, die gleichzeitig folgenden Bedingungen genügen!
(1) Die Differenz $a - b$ der beiden natürlichen Zahlen beträgt 3.
(2) Das Produkt dieser beiden natürlichen Zahlen beträgt 180.

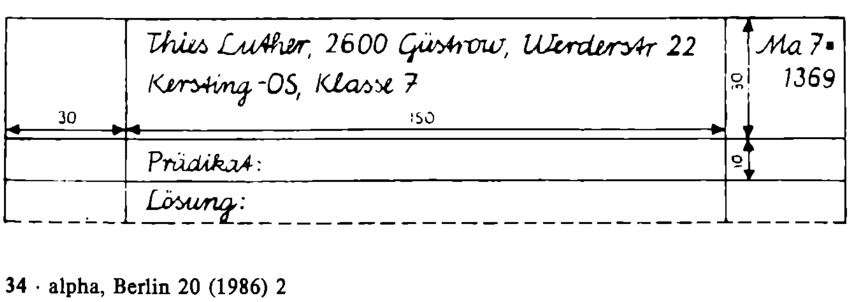
Ma 6 ■ 2669 Kann eine Summe von vier beliebigen, aber aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen (z. B. 11, 12, 13, 14 oder 27, 28, 29, 30) eine Primzahl sein? Begründe die Antwort!

Ma 6 ■ 2670 Eine Expedition legte am ersten Tage $\frac{2}{5}$ des Weges, am zweiten Tage $\frac{1}{3}$ des Weges und am dritten Tag die restlichen 1000 km zurück.
a) Welche Strecken wurden an den beiden ersten Tagen zurückgelegt?
b) Wie groß war die Gesamtstrecke?

Ma 6 ■ 2671 Paul erzählt: „Mein Bruder Emil ist 3 Jahre älter als ich, meine Schwester Lotte ist 4 Jahre älter als Emil, und mein Vater ist dreimal so alt wie Lotte. Meine Mutter ist 5 Jahre jünger als mein Vater und ist gestern 40 Jahre alt geworden." Wie alt ist Paul? Die Antwort ist zu begründen!

Ma 6 ■ 2672 Fritz gibt Heinz folgendes Rätsel auf: „In unserer Klasse können 26 Schüler radfahren und 12 Schüler schwimmen. Jeder Schüler kann mindestens eins von beiden. Multipliziert man die Schülerzahl mit 5, so ist die Quersumme dieses Produkts doppelt so groß wie die Quersumme der Schülerzahl. Außerdem ist das Produkt durch 6 teilbar. Wieviel Schüler besuchen die Klasse?"

Ma 6 ■ 2673 In den Ferien war Klaus auf dem Lande. Aus seinen Beobachtungen ergab sich folgende Scherzaufgabe:
$1\frac{1}{2}$ Hühner legen in $1\frac{1}{2}$ Tagen $1\frac{1}{2}$ Eier.
Ermittle die Anzahl aller Eier, die bei gleicher Legeleistung 7 Hühner in 6 Tagen legen würden!



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha
7027 Leipzig,
Postfach 14

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1985/86 läuft von Heft 5/1985 bis Heft 2/1986. Zwischen dem 1. und 10. September 1986 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/85 bis 2/86 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/86 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/85 bis 2/86) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1985/86 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

Ma 7 ■ 2674 In einem Haus mit 28 Fenstern sollen einige fehlende Fensterländen beschafft werden, so daß an jedem Fenster 2 Läden vorhanden sind. Einige Fenster haben noch 2 Läden, bei der gleichen Anzahl von Fenstern fehlen beide, der Rest hat je einen Laden. Wie viele neue Fensterläden braucht man? Begründe die Antwort!

Ma 7 ■ 2675 Bei einem Preisschießen der GST gaben Günther und Heidrun je 5 Schuß ab. Auf den Scheiben wurden folgende Treffer ermittelt: Einmal die 3, zweimal die 5, zweimal die 6, zweimal die 7, einmal die 8, einmal die 9, einmal die 10.
Günther erzielte mit seinen letzten vier Schüssen neunmal so viele Ringe wie mit seinem ersten Schuß. Heidrun dagegen erreichte mit ihren ersten vier Schüssen fünfmal so viele Ringe wie mit ihrem letzten Schuß; ihre beiden ersten Schüsse ergaben zusammen genau so viele Ringe wie ihre beiden letzten zusammen. Günther schoß die 9.
a) Wer gewann den Wettkampf?
b) Wer schoß die 10?
Die Antworten sind zu begründen!

Ma 7 ■ 2676 Wie kann man ohne Ausführung der angegebenen Rechenoperationen feststellen, ob die Zahl
$\frac{378 \cdot 436 - 56}{378 + 436 \cdot 377}$ größer oder kleiner als 1 ist?

Ma 7 ■ 2677 In einer 7. Klasse erhielt zum Abschluß des letzten Schuljahres im Fach Mathematik kein Schüler die Zensur „5“, jeder neunte Schüler erhielt die Zensur „1“, jeder dritte die Zensur „2“ und jeder sechste die Zensur „4“. Über die Schülerzahl n ist bekannt: $20 < n < 40$. Wie viele Schüler erhielten die Zensur „3“?

Ma 8 ■ 2678 Es ist ein Kreis zu konstruieren, der eine gegebene Gerade g in dem gegebenen Punkt B berührt und durch einen gegebenen Punkt A geht, der nicht auf der Geraden g liegt.
Die Konstruktion ist zu begründen!

Ma 8 ■ 2679 Eine Gruppe von Schülern einer Klasse hat Kastanien gesammelt. Als ein Mitschüler fragt, wieviel Schüler die Klasse hat und wieviel beim Sammeln teilgenommen haben, erhält er folgende Antworten:
1. Wären 12 Schüler mehr dabeigewesen, dann hätten wir 75% mehr sammeln können.
2. Wenn 75% der Schüler unserer Klasse teilgenommen hätten, dann hätten wir das Eineinhalbfache sammeln können.
3. Es soll vorausgesetzt werden, daß jeder Schüler die gleiche Anzahl Kastanien sammelt.
a) Wieviel Schüler haben teilgenommen?
b) Wieviel Schüler hat die Klasse?

Ma 8 ■ 2680 Aus 77prozentigem und 87prozentigem Spiritus und nur daraus soll durch Mischen genau 1000 g 80prozentiger Spiritus hergestellt werden. Ermittle die dafür genau benötigten Massen! (Die Prozentangaben beziehen sich auf die Massen.)

Ma 8 ■ 2681 In einer 8. Klasse sind 40 Schüler. Jeder von ihnen lernt mindestens eine der Fremdsprachen: Englisch, Deutsch, Französisch. 34 Schüler lernen mindestens eine der beiden Sprachen: Englisch und Deutsch. 25 Schüler lernen mindestens eine der Sprachen: Deutsch, Französisch. 6 Schüler lernen nur Deutsch. Genau zwei Sprachen, Englisch und Deutsch, lernen drei Schüler mehr als Französisch und Deutsch. Kein Schüler lernt Englisch und Französisch. Wie viele Schüler lernen genau eine bzw. genau zwei Sprachen?

Ma 9 ■ 2682 Geben Sie alle geordneten Paare $(a; b)$ reeller Zahlen an, deren Summe, Produkt und Quotient untereinander gleich sind!

Ma 9 ■ 2683 Bei einem Spiel verstecken drei Schülerinnen Anna, Brigitte und Claudia in ihren Handtaschen je genau einen Gegenstand, und zwar einen Ball, einen Bleistift und eine Schere. Dieter soll feststellen, wer den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere hat.
Auf seine Fragen erhält er folgende Antworten, von denen verabredungsgemäß nur eine wahr, die beiden anderen aber falsch sind:
(1) Anna hat den Ball.
(2) Brigitte hat den Ball nicht.
(3) Claudia hat die Schere nicht.
Wer hat den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere?

Ma 9 ■ 2684 Mit welcher Ziffer endet die Zahl 2^{100}?

Ma 9 ■ 2685 Konstruieren Sie ein gleichschenkliges Trapez aus seiner Grundseite $\overline{AB}$ mit der Länge $a = 6$ cm und dem Radius des einbeschriebenen Kreises mit der Länge $r = 1{,}8$ cm!

Ma 10/12 ■ 2686 a) Beweisen Sie, daß die Zahl $2^{256} - 1$ keine Primzahl ist!
b) Geben Sie mindestens drei Primfaktoren dieser Zahl an!

Ma 10/12 ■ 2687 Auf der Kleinmesse liegen in einer Würfelbude 3 Würfel bereit. Jeder Wurf (mit den 3 Würfeln zugleich) kostet einen bestimmten Betrag. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, mit einem Wurf einen der Hauptgewinne (1, 2, 3, 18, 17, 16 Augen) zu erreichen? (Die Wahrscheinlichkeiten sind für jeden Fall einzeln anzugeben!)

Ma 10/12 ■ 2688 Es ist ein beliebiges Dreieck ABC zu zeichnen. Dieses Dreieck soll durch eine zu keiner der Dreieckseiten parallelen Geraden so geschnitten werden, daß das abgeschnittene dem ursprünglichen Dreieck ABC ähnlich ist. Die Konstruktion ist zu begründen!

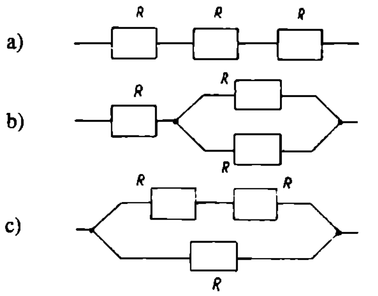
Ma 10/12 ■ 2689 Konstruieren Sie ein rechtwinkliges Dreieck ABC $(\gamma = 90°)$ aus den Seitenhalbierenden s_a und s_c! Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion!

Physik

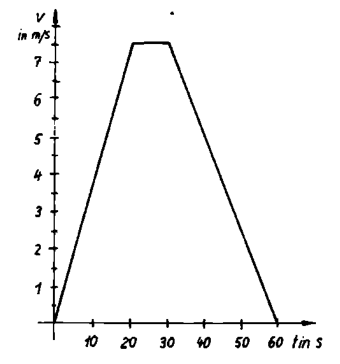
Ph 6 ■ 197 Ein Fußgänger macht je Minute 90 Schritte. Die Länge eines Schrittes beträgt 75 cm. Bestimme die Geschwindigkeit des Fußgängers in km/h!

Ph 7 ■ 198 Die Stoßfugen zwischen den 10 m langen und 20 cm dicken Betonplatten einer Fernverkehrsstraße sind bei 10 °C 10 mm breit und werden mit Teer ausgegossen. Wieviel Teer quillt bei einer Plattenbreite von 3,5 m heraus, wenn sich im Sommer die Platten auf 30 °C erwärmen? (Der lineare Ausdehnungskoeffizient für Beton beträgt $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ 1/K und der räumliche Ausdehnungskoeffizient für Teer $\beta = 55 \cdot 10^{-5}$ 1/K. Die Höhen- und Breitenausdehnung der Platten bleibe unberücksichtigt.)

Ph 8 ■ 199 Ein Elektroherd besteht aus drei Heizvorrichtungen mit je gleichen Widerständen R. Sind alle drei Widerstände parallel geschaltet, so siedet das Wasser in einem Kessel in 12 Minuten. Nach welcher Zeit siedet die gleiche Wassermasse bei dem im folgenden Bild angegebenen Schaltungen der Heizvorrichtung des Herdes? *U. Iben, Magdeburg*



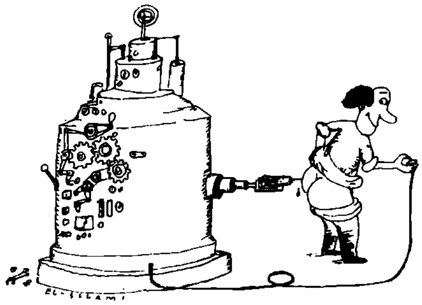
Ph 9 ■ 200 Entwickle das zum Bild gehörige a-t- und s-t-Diagramm! *P. Brill, Schwerin*



Ph 10/12 ■ 201 Die seit 1983 in Großbritannien stationierten Spionageflugzeuge vom Typ Lockheed haben eine Operationsflughöhe von etwa 27 500 m und eine Reichweite von etwa 6450 km.
a) Bis in welche Tiefe kann ein solches Flugzeug optische Spionage betrieben, wenn es bei seinem Einsatz 5 km westlich und parallel der Staatsgrenze der DDR fliegt? (Erdradius 6370 km)
b) Welche Fläche kann ein solches Flugzeug während eines Einsatzes fotografieren?

(Dabei soll angenommen werden, daß das Flugzeug einen geradlinigen Kurs einschlägt und die fotografierte Fläche zum Teil als ein Rechteck betrachtet wird.)

Th. Baumann, Meißen



Chemie

Ch 7 ■ 157 Bei der technischen Zersetzung von Bariumperoxid wird pro Molekül ein Sauerstoffatom abgespalten.
Wieviel ml Sauerstoff entstehen, wenn 2,1 g Bariumperoxid zur Reaktion gebracht werden und 1 l Sauerstoff 1,429 g wiegt?

Ch 8 ■ 158 Aus Phosphortrichlorid sollen 8,1 g Phosphorpentachlorid dargestellt werden. Berechne die Menge Kaliumpimanganat, die zur Darstellung der notwendigen Menge Chlor erforderlich ist!

Ch 9 ■ 159 Äthin ist ein wichtiger Ausgangsstoff für die chemische Industrie und wird in unserer Republik aus Kalziumkarbid durch Umsetzung mit Wasser hergestellt.
1 t Karbid enthält 85,5 % Kalziumkarbid; zur Erzeugung dieser Menge sind 3 900 kWh erforderlich. Ermitteln Sie den Verbrauch an Elektroenergie i. N. für die Herstellung von 5 m^3 Äthin, wenn 95 % Kalziumkarbid reagieren!

Ch 10/12 ■ 160 65 mg eines Gemisches aus Natriumchlorid und Kaliumchlorid wurden zur Analyse eingewogen. Nach dem Auflösen der Einwaage wurden die Chloride mit Silbernitrat als Silberchlorid gefällt, wobei sich als Auswaage 141,1 mg ergaben.
Wieviel Prozent der beiden Chloride waren in der Einwaage enthalten?

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Mathematiklager des Bezirkes Gera

Es ist schon zu einer guten Tradition geworden, daß sich die auf mathematischen Gebieten talentierten Schüler des Bezirkes Gera als Mitglieder des Klubs *Junger Mathematiker* zu Ferienlagern besonderer Art zusammenfinden.
In jedem Schuljahr werden zwei Ferienlager zu je zehn Tagen durchgeführt; ein Winterlager, das sich unmittelbar an die Bezirksolympiade *Junger Mathematiker* anschließt und ein Sommerlager, das mit dem ersten Ferienmontag beginnt. Der Unterricht wird in vier, den Schulklassen 8 bis 11 entsprechenden Leistungsklassen durchgeführt, die von den Schülern in der Regel altersgerecht durchlaufen werden.
Neben Herrn *Werner Krügel* vom Rat des Bezirkes, der sich als Lagerleiter um die technische Absicherung und die Schaffung optimaler Bedingungen für die Freizeitgestaltung bemüht, und Herrn *Günther Scheuermann*, Mathematiklehrer an der Betriebsschule *Ernst Thälmann* des Kombinates Carl Zeiss Jena, der schon seit vielen Jahren den entscheidenden Beitrag zur fachlichen Leitung des Bezirksklubs leistet, nehmen Studenten und Mitarbeiter der Friedrich-Schiller-Universität, vor allem gegenwärtige und ehemalige Mitglieder des FDJ-Jugendobjektes *Studienwerbung – Studienvorbereitung*, dem sich auch die *Wurzel* zugehörig zählt, die fachliche und erzieherische Betreuung wahr. Von diesem Jugendobjekt ging auch vor 22 Jahren die Initiative zur Gründung der Klubs aus. Anfangs stand vor allem die Aufgabe, die Schüler auf die mathematischen Wettbewerbe besonders vorzubereiten. Mit dieser Forderung verband sich zunächst ein Vielseitigkeitstraining besonderer, in der Schule nicht praktizierter Aufgabentypen aus den Randgebieten des Lehrplans oder aus weiterführenden Lehrstoffen. Das geschah zunächst sporadisch, glich sich den in den ersten Olympiaden vorherrschenden Aufgabenstellungen an und litt im ganzen gesehen an Systematik. Seit etwa zehn Jahren wird in den Lagern nach einem Themenplan, der von Mitarbeitern der *Friedrich-Schiller*-Universität Jena und erfahrenen Lehrern ausgearbeitet wurde, unterrichtet.
In jedem Lager werden in jeder Klassenstufe 17 Stunden Unterricht erteilt, wobei neben dem für 16 Stunden im Stoffverteilungsplan festgelegten Themenkreis in den Winterferien ein Seminar zu aktuellen mathematisch-naturwissenschaftlichen Problemen und im Sommerlager eine Lagerolympiade mit Aufgaben zum behandelten Stoff durchgeführt werden.
Die Arbeit des Klubs beschränkt sich indes nicht auf die Aktivitäten in den Mathematiklagern. So werden in der Zeit zwischen den Lagern seit einigen Jahren die besten und seit diesem Jahr alle Schüler des Klubs durch *Korrespondenzzirkel* betreut, deren Aufgabenstellungen sich auf den im vergangenen Lager erarbeiteten Lehrstoff konzentrieren. Spitzentalente unter den Klubmitgliedern werden außerdem von den Mitarbeitern der Sektion Mathematik der *F.-Schiller*-Univ. gefördert. Die Mathematiklager sind nicht als Fortsetzung der intensiven Lernarbeit in der Ferienzeit gedacht, sondern als spezielle Form der Feriengestaltung zu verstehen und mit einem in Bildung und erholsamer Freizeit ausgewogenen Programm zu gestalten.

G. Scheuermann/Th. Gundermann
gekürzt aus: Wurzel, Jena

Jünger W. Blaschkes

An der Sektion Mathematik der *Karl-Marx*-Universität findet alljährlich zu Ehren eines bekannten Mathematikers ein Preisausschreiben statt. Begonnen wurde diese Tradition mit dem Gauß-Wettbewerb anläßlich des 200. Geburtstages von Gauß im Jahr 1977. In diesem Jahr wurde nun *Wilhelm Blaschke* geehrt, dessen Geburtstag sich am 13. September zum 100. Male jährte. Blaschke war ein bedeutender Geometer und trat insbesondere mit seinen Arbeiten zur Differentialgeometrie hervor. Für den Blaschke-Wettbewerb stellten Wissenschaftler der Sektion Mathematik vier Aufgaben, deren Lösungen, auch einzeln, eingereicht werden sollten. 39 Studenten beteiligten sich an diesem Preisausschreiben. Einer von denen, die alle Aufgaben lösten, war *Steffen Zopf*, damals noch Student in Szeged. Wir fragten ihn:
Wodurch wurde Ihr mathematisches Interesse geweckt?
Vor allen Dingen durch meine Mathematiklehrer und die ersten Erfolge bei den Mathematikolympiaden, an denen ich später (9. und 10. Klasse) auch als Frühstarter teilnahm.
Was waren Ihre schönsten Erfolge bei den Olympiaden Junger Mathematiker?
Erste Preise bei den DDR-Olympiaden und natürlich die Auszeichnung, 1979 mit zur IMO nach London fahren zu können.
Waren Sie auch in der Schule bei den Prüfungen ein sogenannter Frühstarter?
Ja, als ich mein Abitur im Fach Mathematik vorzeitig in der 10. Klasse ablegte.
Seit wann hatten Sie den Wunsch, Mathematik zu studieren?
Mathematik war eigentlich seit jeher mein Studienwunsch.
Was untersuchten Sie in Ihrer Diplomarbeit?
Ein spezielles Gebiet der Differentialgeometrie, das ich jetzt als befristeter Assistent an der KMU weiterbearbeite.

Raum-Mühle

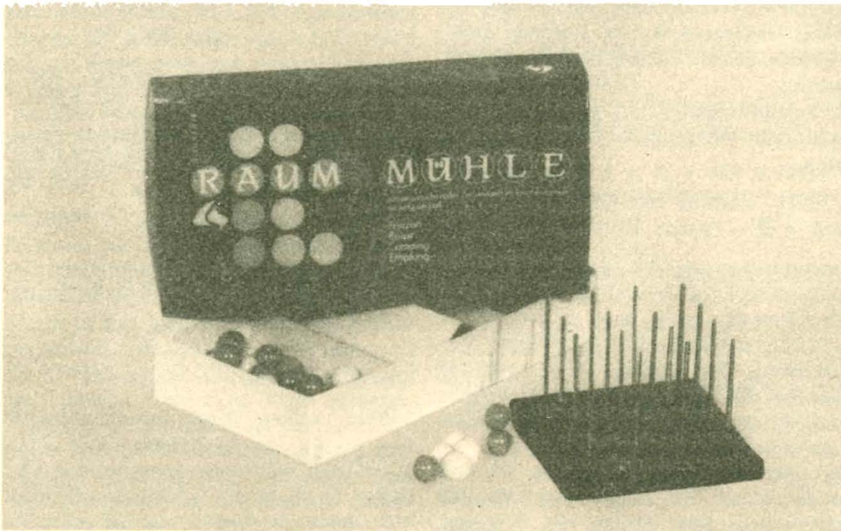


Bild 1

Seit einiger Zeit ist ein neues kombinatorisches Denkspiel mit der Bezeichnung *Raum-Mühle* vom *VEB Thüringer Schmuck Waltershausen* (EVP etwa 12,– M) auf dem Markt.

Wir wollen dieses interessante und vielfältige Spiel unseren Lesern vorstellen und einige Anregungen geben.

Das Spiel besteht aus einer Platte mit 16 quadratisch angeordneten Stäben (Bild 1) und 64 durchbohrten Kugeln, 32 gelben und 32 roten. Wenn zwei Spieler spielen wollen, so erhält jeder die Kugeln einer Farbe. Beide Spieler beginnen jetzt abwechselnd, ihre Kugeln beliebig auf einen der 16 Stäbe zu stecken. Ziel ist es dabei, möglichst bald eine Mühle zu setzen.

Eine Mühle ist eine Anordnung von vier gleichfarbigen Kugeln auf einer Geraden. Um Kombinationen besser beschreiben zu können, bezeichnen wir die insgesamt 64 Plätze mit 3stelligen Zahlen. Entsprechend den Koordinaten in einem xyz-Koordinatensystem benutzen wir die erste Stelle für die x-Koordinate, die zweite für die y-Koordinate und die dritte Stelle für die z-Koordinate. Bild 2 gibt die Lage einiger Koordinaten an.

Es gibt nun 3 Typen von Mühlen:

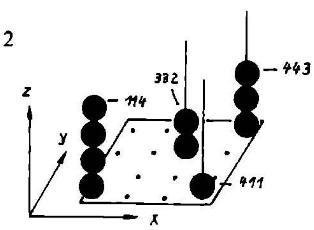
1. Die Mühle ist parallel zu jeweils einer dieser Koordinatenachse. Das wären die Mühlen ($1ab$, $2ab$, $3ab$, $4ab$) oder ($a1b$, $a2b$, $a3b$, $a4b$) oder ($ab1$, $ab2$, $ab3$, $ab4$) mit $a, b \in \{1,2,3,4\}$.

2. Die Mühle ist die Diagonale eines Quadrates parallel zu einer Koordinatenebene. Das wären die Mühlen ($11a$, $22a$, $33a$, $44a$), ($1a1$, $2a2$, $3a3$, $4a4$), ($a11$, $a22$, $a33$, $a44$), ($14a$, $23a$, $32a$, $41a$), ($1a4$, $2a3$, $3a2$, $4a1$), ($a14$, $a23$, $a32$, $a41$) mit $a \in \{1,2,3,4\}$.

3. Die Mühle ist eine Würfeldiagonale. Also (111, 222, 333, 444), (114, 223, 332, 441), (141, 232, 323, 414), (144, 233, 322, 411).

In der Spielanleitung werden nun drei mögliche Spielregeln vorgeschlagen: Sieger ist derjenige Spieler,

Bild 2



(1) der als erster eine Mühle hat,
(2) der die meisten Mühlen nach Setzen der 64 Kugeln erzielt hat,
(3) wie in (2) angegeben. Dabei wird jeweils bei Erreichung einer Mühle dem Gegenspieler von den aufgesteckten Kugeln eine entfernt.

Bevor wir uns aber diesem 2-Personen-Spiel zuwenden, wollen wir zunächst mit einigen Aufgaben andeuten, daß man bereits alleine sehr viele interessante und schwierige (!) Probleme stellen kann. Viel Spaß beim Knobeln!

Wir beginnen mit einer

Aufgabe 1

Wie viele verschiedene Mühlen sind insgesamt möglich?

Als nächstes versuchen wir den Würfel so zusammenzubauen, daß die beiden Parteien eine vorgegebene Anzahl von Mühlen haben. Eine komplette Übersicht, welche Anzahlen möglich sind, wäre zwar recht interessant, doch scheint dieses Problem sehr kompliziert zu sein. Für spezielle Anzahlen sind die Aufgaben aber schon reizvoll.

Aufgabe 2

Baue den Würfel so, daß jede Partei genau
a) 20 Mühlen
b) 18, 17, 16, ..., 10 Mühlen hat!

Nach dem Lösen der Aufgabe 2b) ergibt sich die Frage, ob es auch für 19 Mühlen bzw. für weniger als 10 Mühlen eine Lösung gibt. Besonders interessant ist die Frage nach der maximalen Anzahl von Mühlen, die eine Partei erreichen kann. Wir haben bisher keine Anordnung gefunden, bei der eine Partei mehr als 20 Mühlen hatte. Aber einen Beweis dafür haben wir auch noch nicht! Vielleicht schafft ihr es? Und auf der anderen Seite fragt man sich natürlich nach der minimalen Zahl von Mühlen.

Aufgabe 3

Baue den Würfel so, daß
a) keine Partei eine Mühle hat,
b) Rot genau eine und Gelb keine Mühle hat!

Wie bereits eingangs erwähnt, bieten sich im Zwei-Personen-Spiel vor allem zwei Spielvarianten an: Sieger ist, wer die erste bzw. wer die meisten Mühlen hat. Unserer Erfahrung nach wird das Spiel besonders dann spannend, wenn alle Kugeln benutzt werden. Deshalb erscheint den Autoren die zweite Variante für besonders reizvoll. Gerade mit den letzten Kugeln bieten sich oft recht interessante Konstellationen, bei denen Sieg und Niederlage dicht beieinander liegen. Selbstverständlich können auch bereits mit den ersten Kugeln Situationen geschaffen werden, die für die Schaffung von Mühlen günstig oder ungünstig sind. Doch dies ist für eine allgemeine Untersuchung schwer faßbar.

Natürlich stellt man sich bald die Frage nach der optimalen Gewinnstrategie. Im allgemeinen läßt sich diese Frage nur schwer beantworten. Aber es gibt eine recht einfache Strategie für den Nachziehenden, immer Remis (d. h. ein Unentschieden) zu erreichen. Der Anziehende kann also den Sieg nicht erzwingen.

Aufgabe 4

Man gebe eine Strategie für den Nachziehenden an, die ihm immer ein Remis sichert!

Bleibt die Frage: Kann der Nachziehende den Sieg erzwingen?

Zum Schluß machen wir noch den Vorschlag, mit sich selbst einen Wettstreit durchzuführen. (Unabhängig vom Problem der Aufgabe 3a) setzen wir zu Anfang 2 gelbe und 2 rote Kugeln in die Ecken der Ebene.) Dieses Solospiel ist deshalb recht reizvoll, da der Spieler ja die ständigen Absichten *beider Parteien* kennt. Ziel ist es, nach Setzen aller 64 Kugeln möglichst wenig Mühlen gesetzt zu haben.

Wir hoffen, daß diese wenigen Ausführungen bereits die Vielfältigkeit der Spielmöglichkeiten und der auftretenden mathematischen Probleme veranschaulichen und weitere Anregungen gegeben haben. Wir meinen, daß dieses Spiel eine neue Bereicherung der Palette von logisch-kombinatorischen Spielen darstellt.

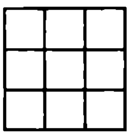
H.-D. Gronau/H.-J. Kerber

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Kreisolympiade

Olympiadeklasse 5

250521 In einem (3×3)-Felderbrett (siehe Bild) sind genau neun Quadrate enthalten, die aus einem Feld bestehen (□), außerdem genau vier Quadrate, die aus vier Feldern bestehen (⊞), und genau ein Quadrat, das aus neun Feldern besteht. Insgesamt sind in dem (3×3)-Felderbrett also 14 Quadrate enthalten.



Beantworte folgende Fragen:
a) Wieviel Quadrate sind insgesamt in einem (4×4)-Felderbrett enthalten?
b) Wieviel Quadrate sind insgesamt in einem (5×5)-Felderbrett enthalten?
c) Wieviel Quadrate sind insgesamt in einem (8×8)-Felderbrett enthalten?
Eine Begründung der Antworten wird nicht verlangt.

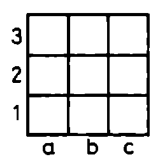
250522 Vom Bahnhof Mathestädt fährt zu jeder vollen Viertelstunde ein Bus ab und trifft nach 2 Stunden in Knobelhausen ein. Von dort fahren ebenfalls im Viertelstundenabstand Busse auf derselben Straße nach Mathestädt, wo sie nach 2 Stunden Fahrzeit eintreffen. Morgens fährt der erste Bus von Mathestädt um 5.00 Uhr und der erste Bus von Knobelhausen um 7.00 Uhr ab. Die Busfahrer grüßen einander jedesmal mit Kopfnicken, wenn sie sich unterwegs begegnen.
Wie viele ihm entgegenkommende Kollegen begrüßt der Busfahrer Franz Freundlich auf einer Fahrt von Mathestädt nach Knobelhausen, wenn diese Fahrt um 10.00 Uhr beginnt?

250523 Auf die Randlinie eines Quadrates sollen zwölf Damesteine so verteilt werden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Auf jeder Ecke des Quadrates liegen gleich viele Damesteine. Dabei ist es zulässig, daß die Ecken frei von Damesteinen sind; es dürfen aber auch mehrere Damesteine übereinander auf den Ecken liegen.
(2) Auf jeder Seite des Quadrates (einschließlich ihrer beiden Eckpunkte) sind gleich viele Damesteine. Dabei sollen alle Damesteine, die auf einer Quadratseite, aber zwischen deren Eckpunkten liegen, übereinander gestapelt sein.
a) Gib vier verschiedene Verteilungen der zwölf Damesteine an, so daß jede dieser Verteilungen die Bedingungen (1) und (2) erfüllt!
b) Begründe, daß es nicht mehr als vier verschiedene Verteilungen dieser Art geben kann!

250524 Zeichne ein Quadrat $A'B'C'D'$ mit $\overline{A'B'} = 5{,}0$ cm! Zeichne dann einen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$, der 6,5 cm lang ist und parallel zur Geraden durch B' und D' in Richtung von B' nach D' verläuft! Es soll nun zum Bild $A'B'C'D'$ bei dieser Verschiebung das Original $ABCD$ ermittelt werden. Bei der Lösung dieser Aufgabe darf die mm-Skala des Lineals nicht mehr verwendet werden.
a) Löse die genannte Aufgabe so, daß außer Zirkel und Lineal auch das Zeichendreieck zum Ziehen von Parallelen durch die Punkte A', B', C' und D' benutzt wird!
b) Löse (in einer neuen Zeichnung) die Aufgabe nur mit Zirkel und Lineal und so, daß weder die Gerade durch A und A' noch die Gerade durch C und C' gezeichnet wird!

Olympiadeklasse 6

250621 Auf einem (3×3)-Spielbrett (siehe Bild) sind sechs Spielsteine so aufzustellen, daß jede waagerechte und jede senkrechte Reihe genau zwei Steine enthält. Auf jedem Feld des Spielbrettes darf höchstens ein Spielstein stehen.



Zeichne alle möglichen Stellungen für diese sechs Spielsteine!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

250622 Gesucht sind vier Zahlen mit folgenden Eigenschaften:
(1) Die Summe der vier Zahlen beträgt 60.
(2) Es ergibt sich viermal dasselbe Ergebnis, wenn man
(2.1.) zur ersten Zahl 4 addiert,
(2.2.) zur zweiten Zahl 3 addiert,
(2.3.) von der dritten Zahl 2 subtrahiert,
(2.4.) von der vierten Zahl 1 subtrahiert.
Ermittle aus diesen Forderungen vier solche Zahlen! Überprüfe, ob die von dir gefundenen Zahlen die geforderten Eigenschaften haben!

250623 Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 14 cm. Die Punkte E, F, G und H seien die Mittelpunkte der Quadratseiten. Dabei liege E auf AB, F auf BC, G auf CD, H auf DA.
a) Konstruiere dieses Quadrat, und verbinde die Mittelpunkte E und F, F und G, G und H sowie H und E durch Strecken!
b) Ermittle den Flächeninhalt der Fläche $EFGH$!

250624 Anke, Bernd und Claudia wollen 21 Limonadeflaschen, von denen 7 voll, 7 halbvoll und 7 leer sind, untereinander verteilen. Dabei soll jedes Kind die gleiche Anzahl Flaschen und auch gleich viel Limonade erhalten, und es soll nichts umgegossen werden. Ferner soll Anke nicht weniger volle Flaschen als Bernd bekommen, und Bernd soll nicht weniger volle Flaschen als Claudia bekommen.
a) Gib zwei Verteilungen an, die diese Bedingungen erfüllen!
b) Weise nach, daß es keine weiteren Verteilungen geben kann, die diese Bedingungen erfüllen!

Olympiadeklasse 7

250721 Annett, Birgit und Cornelia haben in der letzten Klassenarbeit unterschiedliche Leistungen gezeigt; denn eine dieser Schülerinnen erhielt die Note 1, eine andere die Note 2 und die dritte die Note 3. Kerstin, eine Klassenkameradin, erzählt zu Hause: „Annett hat keine 1, Birgit keine 2, aber Cornelia hat eine 2."
Es stellt sich jedoch heraus, daß sich Kerstin bei genau zwei dieser drei Aussagen geirrt hatte.
Kann man aus diesen Angaben die Noten der einzelnen Schülerinnen eindeutig ermitteln? Ist dies der Fall, so gib die Notenverteilung an!

250722 Ein Quader habe das Volumen $V_1 = 0{,}216\ \mathrm{dm}^3$, die Kanten seiner Grundfläche seien 12 cm bzw. 60 mm lang.
Von einem zweiten Quader sei bekannt, daß er die gleiche Höhe wie der erste Quader hat und daß die längere Kante seiner Grundfläche noch um 2 cm länger ist als die längere Kante der Grundfläche des ersten Quaders und die kürzere noch um 10 mm kürzer ist als die kürzere des ersten Quaders.
Berechne die Differenz der Oberflächeninhalte der beiden Quader, und gib sie in Quadratzentimetern an!

250723 Es sei ABC ein Dreieck mit $\sphericalangle BAC = \alpha > 90°$. Ferner sei H der Schnittpunkt der Geraden, auf denen die Höhen dieses Dreiecks liegen.
Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets

$$\sphericalangle BHC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB \text{ gilt!}$$

250724 a) Gegeben seien die drei Ziffern 2, 7 und 9. Aus ihnen sollen alle diejenigen dreistelligen Zahlen gebildet werden, die jede dieser drei Ziffern genau einmal enthalten. Zeige, daß die Summe aus allen

diesen dreistelligen Zahlen durch 111 teilbar ist!
b) Gegeben seien drei paarweise verschiedene Ziffern, von denen keine die Ziffer 0 ist!
Beweise, daß die Summe aus allen denjenigen dreistelligen Zahlen, die jede dieser Ziffern genau einmal enthalten, stets durch 111 teilbar ist!

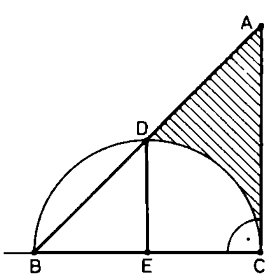
Olympiadeklasse 8

250821 Ermittle diejenigen zwölf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, die die Eigenschaft haben, daß die Summe der beiden größten dieser Zahlen gleich der Summe der zehn übrigen ist!

250822 Beweise folgenden Satz!
Das Produkt zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, die beide nicht durch 3 teilbar sind, läßt bei Division durch 9 stets den Rest 2.

250823 Ein Sicherheitsschloß besitze vier Rädchen, die jeweils mit den Ziffern 1 bis 9 versehen sind. Nur durch Einstellen genau einer Zahlenkombination (an jedem Rädchen eine bestimmte Ziffer) läßt sich das Schloß öffnen. Der Besitzer eines solchen Schlosses hat sich beim Kauf die genaue Zahlenkombination nicht gemerkt. Er weiß nur noch, daß in der Zahlenkombination jede der Ziffern 1, 4 und 6 genau einmal vorkommt. Die Reihenfolge der einzelnen Ziffern ist ihm ebenfalls entfallen.
a) Wie viele verschiedene Einstellungen sind im ungünstigsten Falle für das Öffnen des Schlosses auszuführen?
b) Wie viele verschiedene Einstellungen wären höchstens nötig, wenn der Besitzer noch weiß, mit welchem Rädchen er die Ziffer 4 einstellen muß?

250824 Es sei *ABC* ein gleichschenkligrechtwinkliges Dreieck mit *C* als Scheitel des rechten Winkels. Über *BC* als Durchmesser sei derjenige Halbkreis gezeichnet, der *AB* in einem Punkt *D* zwischen *A* und *B* schneidet (siehe Bild).



a) Beweise, daß die Gerade durch *D* und den Mittelpunkt *E* von *BC* senkrecht auf *BC* steht!
b) Berechne, wieviel Prozent der Fläche des Dreiecks *ABC* nicht von dem Halbkreis bedeckt sind! Der gesuchte Prozentsatz ist auf eine Dezimalstelle nach dem Komma anzugeben.
Hinweis: Benutze den Näherungswert $\pi \approx 3{,}142$!

Olympiadeklasse 9

250921 Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (a, b, c) von natürlichen Zahlen a, b, c, für die $a \leqq b \leqq c$ und
$$a \cdot b \cdot c = 19 \cdot 85$$
gilt!

250922 Es sei *ABCD* ein konvexes Viereck. Jede Seite dieses Vierecks werde durch zwei Teilpunkte in drei gleich lange Strecken geteilt.
Durch je zwei solche Teilpunkte, die jeweils auf ihrer Viereckseite ein und derselben Ecke des Vierecks *ABCD* am nächsten liegen, sei eine Gerade gezeichnet. Auf diese Art kann man genau vier Geraden zeichnen, deren Schnittpunkte ein weiteres Viereck *STUV* bilden.
Welches der beiden Vierecke *ABCD* bzw. *STUV* hat den größeren Flächeninhalt?

250923 Es seien a, b, x und y positive reelle Zahlen, und es gelte
$$\frac{a}{b} < \frac{x}{y}.$$
Beweisen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen stets
$$\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+y} < \frac{x}{y} \text{ folgt!}$$

250924 Untersuchen Sie, ob es rationale Zahlen a und b gibt, für die
$$\sqrt{3} = a + b\sqrt{2} \text{ gilt!}$$

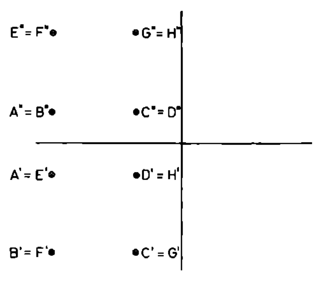
Olympiadeklasse 10

251021 Geben Sie alle Tripel (a, b, c) von ganzen Zahlen a, b, c mit $a \leqq b \leqq c$ und $a \cdot b \cdot c = 1985$ an!

251022 Man zeige, daß für beliebige positive reelle Zahlen a und b die Ungleichung $\sqrt{a} + \sqrt{a+3b} < \sqrt{a+b} + \sqrt{a+2b}$ gilt.

251023 Es sei *ABC* ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basislänge $\overline{AB} = 20\,\text{cm}$ und der Höhenlänge $\overline{CD} = 8\,\text{cm}$.
Diesem Dreieck soll ein Rechteck *EFGH* so einbeschrieben werden, daß *E* und *F* auf *AB*, *G* auf *BC* und *H* auf *AC* liegen und daß dabei der Flächeninhalt des Rechtecks möglichst groß ist.
Beweisen Sie, daß es genau ein Rechteck mit diesen Eigenschaften gibt!
Ermitteln Sie die Seitenlängen und den Flächeninhalt dieses Rechtecks!

251024 Die Punkte *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* seien im Raum so gelegen, wie es das Bild in Zweitafelprojektion zeigt. Zeichnen Sie in Kavalierperspektive und in Zweitafelprojektion einen zusammenhängenden, ebenflächig begrenzten Körper, der genau



diese acht Punkte als Eckpunkte besitzt, der kein Würfel ist, aber aus einem solchen durch „Herausschneiden" eines ebenflächig begrenzten Teilkörpers entstanden ist. Von Körperflächen verdeckte Kanten sind gestrichelt zu zeichnen.
Hinweis: Zwei Körper, die sich nur in einem Punkt oder einer Kante berühren, sollen nicht als zusammenhängend gelten. Als Lösung genügt ein gezeichnetes Beispiel ohne Begründung.

Olympiadeklassen 11/12

251221 Man ermittle alle diejenigen Paare (x, y) reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen!
$$x^2 + y^2 = 5, \quad (1)$$
$$x^2 + xy = 2. \quad (2)$$

251222 Beweisen Sie, daß in jedem Dreieck *ABC* für die Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$ und die Länge s_a der Verbindungsstrecke zwischen dem Punkt *A* und dem Mittelpunkt *M* der Strecke *BC* die Beziehung
$$s_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$
gilt!

251223
a) Es seien (a_n) und (b_n) die durch
$$a_n = 3n - 2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$
$$b_n = a_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
definierten Zahlenfolgen.
Beweisen Sie, daß dann die Folge der Differenzen
$$b_{n+1} - b_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
eine arithmetische Zahlenfolge ist!
b) Eine Verallgemeinerung der in a) zu beweisenden Aussage lautet:
Wenn (a_n) eine beliebige arithmetische Folge und (b_n) die durch
$$b_n = a_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
definierte Folge ist, dann ist die Folge der Differenzen
$$b_{n+1} - b_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
ebenfalls eine arithmetische Folge.
Beweisen Sie auch diese Verallgemeinerung!

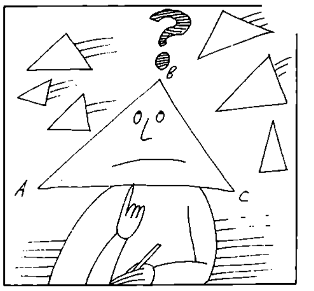
251224 Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen n, die die folgende Eigenschaft haben: Im abgeschlossenen Intervall $\langle 2^n, 2^{n+1} \rangle$ befindet sich mindestens eine durch n^3 teilbare natürliche Zahl.

---

alpha-Wettbewerb 1984/85
Abzeichen in Gold
Für vierjährige Teilnahme
(Fortsetzung)

Claudia Höhn, Stefan Knauf, Marco Kirchner, Roland Lückert, Björn Langlotz, Eric Schneider, Cornelia Thum, Manuela Stark, Wim Fleischhauer, Andreas Walter, Thomas Flatz, Anja Frank, Katja Ledderhos, Alexandra Schick, alle Vacha; Frederik Schiller, Voigtsgrün; Achim Nahler, Swen Hoffmann, Ben Forstreuter, alle Weimar; Uta Hotze, Weißenborn; René Voigt, Wernburg; Torsten Christophel, Wismar; Cordula Heymann, Wittstock; Carl Grosch, Wolferstedt; Katja Pietzner, Wolgast; Arno Barthelmes, Zella-Mehlis; Matthias Klinke, Zeulenroda; Gunnar Clausnitzer, Ivenack

In freien Stunden · alpha-heiter



Rolf Felix Müller, Gera

Silbenrätsel

de – der – e – ein – fel – funk – ga – ge – go – go – i – in – jek – ka – ko – ko – le – lo – me – me – mus – nal – ni – no – no – nu – null – nus – on – ons – or – pro – ra – rith – rus – sa – schief – si – stel – ta – te – te – ter – the – tho – ti – ti – tri – trie – un – us – vall – wer – wind.

1. Lagebeziehung zweier Geraden im Raum,
2. Strecke auf der Zahlengeraden,
3. Hilfsskale, z. B. eines Meßschiebers,
4. Winkelfunktion,
5. zeichnerische Darstellung auf eine Projektionstafel,
6. diejenige gesuchte Zahl c, mit der eine gegebene Zahl a potentiert werden muß, um eine ebenfalls gegebene Zahl b darzustellen,
7. Elemente des Wertebereichs einer Funktion,
8. Eigenschaft aller nicht ohne Rest durch 2 teilbaren natürlichen Zahlen,
9. Bezeichnung der Zahl b (siehe 6.),
10. Seite im rechtwinkligen Dreieck,
11. Dreiecksbezeichnung als mathematische Disziplin,
12. regelmäßiges Polyeder (Zwanzigflächner),
13. senkrecht,
14. die Abszissen der Punkte, in denen eine Kurve die Abszissenachse schneidet.

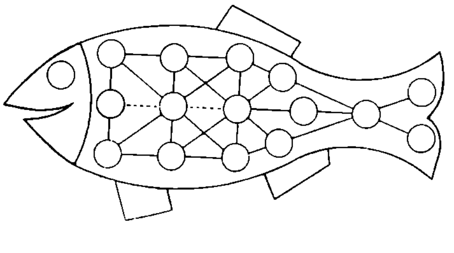
Die Anfangsbuchstaben der 14 Begriffe verkörpern in gegebener Reihenfolge Funktionen eines bestimmten Typs.

Diplom-Lehrer L. Clausnitzer, OS Cunnersdorf

Der Zauberfisch

Trage die Zahlen 1 bis 16 so ein, daß entlang jeder ausgezogenen sowie entlang der gestrichelten Geraden stets die Summe 33 erscheint!

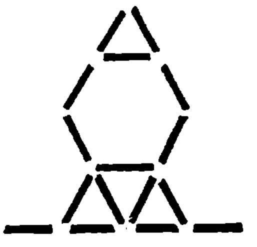
Mathematika List, Beograd



Regelmäßige Sechsecke

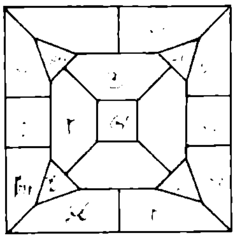
Lege in der abgebildeten Figur sechs Hölzchen so um, daß drei regelmäßige Sechsecke entstehen!

Dr. R. Mildner,
Sektion Math. der Karl-Marx-Universität Leipzig



Mit vier Farben

Stellt euch vor, die Teilgebiete der abgebildeten Figur seien Länder einer (frei erfundenen) Landkarte. Eure Aufgabe ist es nun, diese Landkarte mit Hilfe von vier verschiedenen Farben (etwa Rot, Gelb, Grün und Blau) so zu färben, daß je zwei beliebige benachbarte Länder unterschiedlich gefärbt sind.



Zusatzfrage: Könnte man diese Landkarte auch schon mit drei verschiedenen Farben in der geforderten Weise färben?

Dr. R. Mildner, KMU Leipzig

Hausnummer gefragt

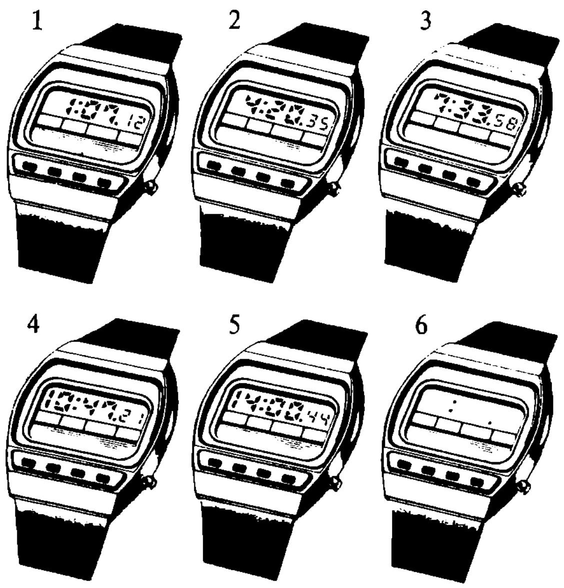
Zu einer Familie gehören Mutter und drei Kinder. Auf die Frage nach dem Alter ihrer drei Kinder antwortete die Mutter:
„Die Summe ihrer ganzen Alterszahlen ergibt unsere Hausnummer, das Produkt derselben ist 72, und – um das Ergebnis eindeutig zu machen – erwähnte ich noch, daß mein jüngstes Kind ein Mädchen ist."
Wie alt sind die Kinder? Dem Fragenden war die Hausnummer bekannt.

Diplom-Lehrer M. Freitag, Schwarzheide

Logelei

Betrachtet die fünf dargestellten Uhren! Sie sind nach einem bestimmten System eingestellt. Wie muß logischerweise die Zeit auf dem sechsten Chronometer eingestellt werden?

Aus: Füles, Budapest



Tele-Lotto (5 aus 35)

Uwe spielt Tele-Lotto. Auf die Frage seines Freundes, welche Zahlen er spielt, antwortet Uwe: „Alle meine Tips enthalten zwei Quadratzahlen und eine Primzahl. Verdoppelst du eine der Quadratzahlen, so erhältst du die vierte Zahl. Die fünfte Zahl ist um eins größer als die Primzahl. Die Summe der fünf Zahlen beträgt genau 100."

a) Wieviel Tips spielt Uwe?

b) Gib jeweils die fünf Zahlen an!

Student K. Wagner, Plauen

Videologika

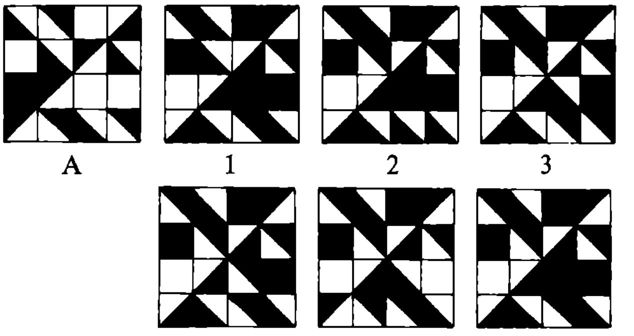
Die drei rechten Felder sind noch „unvollendet". Was muß man hineinzeichnen?

Aus: Füles, Budapest

Farbenverkehrt

A ist das Negativ einer Filmaufnahme. Welche der andern sechs Figuren ist dann das Positiv?

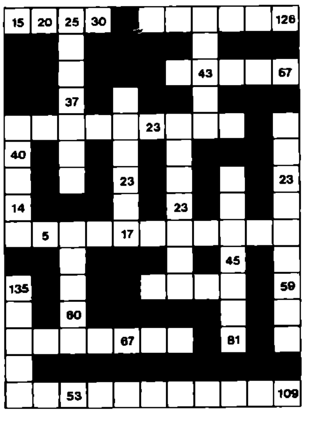
Oberlehrer O. Chromy, Coswig

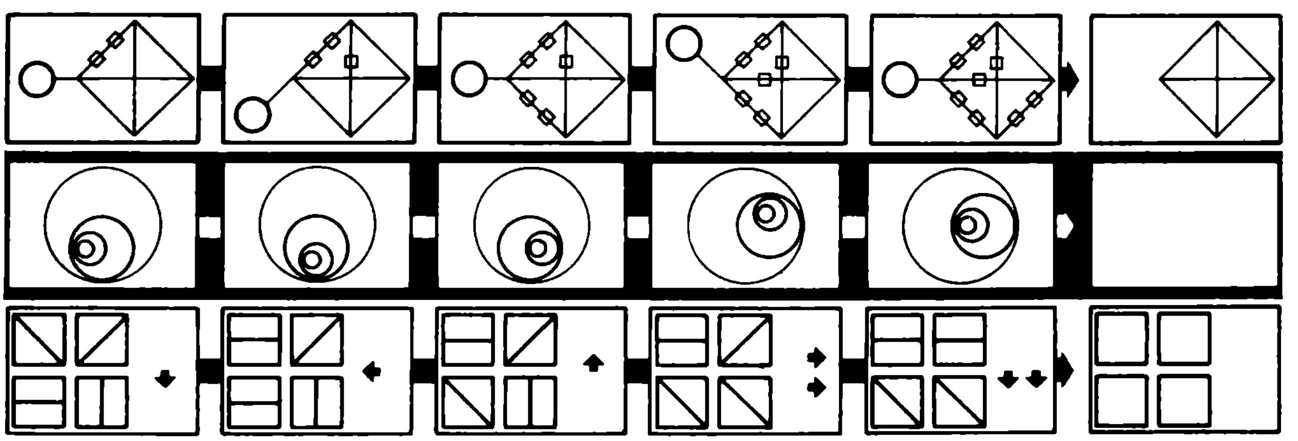


4 5 6

Zahlenrätsel

Man trage die richtigen Zahlen in die leeren Quadrate ein, daß diese mit den vorgegebenen Zahlen zusammen eine logische Zahlenreihe bilden. In jeder Reihe steigen die Zahlen oder nehmen sie ab, von links nach rechts bzw. von oben nach unten, und zwar in gleichem Maße innerhalb von einer Reihe. Man nehme als Beispiel die links oben abgebildete Reihe. Hier steigen die Zahlen von einem Quadrat zum anderen jeweils um 5. Man nenne die Größe der Steigerung oder die Abnahme der Schlüsselzahl. Diese kann natürliche in jeder Reihe unterschiedlich sein. Welches sind die richtigen Schlüsselzahlen?

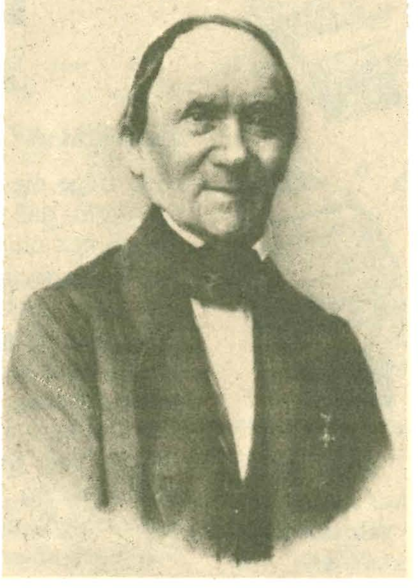




„... mit der Herausgabe einer Mathematischen Schülerbibliothek zu beginnen ...“

Populärwissenschaftliche mathematische Literatur im Teubner-Verlag Leipzig

Vor mehr als zwanzig Jahren beflügelte jene Forderung aus dem Mathematikbeschluß[1]) alle bereits vorhandenen Aktivitäten zur Entwicklung populärwissenschaftlicher mathematischer Literatur, und es dauerte nur wenige Monate, bis die ersten Bände der *Mathematischen Schülerbücherei* (MSB) vorlagen. Heute beteiligen sich sechs Verlage unseres Landes an dieser Reihe:
Deutscher Verlag der Wissenschaften, Fachbuchverlag, Kinderbuchverlag, Teubner-Verlag, Urania-Verlag, Verlag Volk und Wissen. Nahezu 120 Titel sind seither erschienen und davon etwa ein Drittel im Teubner-Verlag.
Mit diesen Bänden knüpft das Leipziger Verlagshaus an eigene, positive Traditionen an, denn bereits 1911 gehörte die populärwissenschaftlich orientierte *Mathematische Bibliothek*, aus der später die *Mathematisch-physikalische Bibliothek* hervorging, zum Editionsprogramm. Teubners 175jähriges Verlagsjubiläum sei im folgenden Anlaß für einige Anmerkungen zur Entwicklung des mathematischen Verlagszweiges:
Benedictus Gotthelf Teubner (1784 bis 1856) übernahm am 21. Februar 1811 die Leipziger Buchdruckerei seines Schwagers *J. C. Weinedel*. Als gelernter Schriftsetzer widmete er sich von Anfang an mit besonderer Vorliebe dem Satz und Druck altphilologischer Schriften. Schon bald galt Teubner als Meister der Herstellung technisch schwieriger fremdsprachiger Ausgaben, und noch heute erscheint im Verlag die von ihm 1849 ins Leben gerufene *Bibliotheca Teubneriana*, die inzwischen älteste und umfassendste Sammlung textkritischer Ausgaben von Werken griechischer und römischer Klassiker.
Als Mitte des vergangenen Jahrhunderts die enormen Fortschritte in den Naturwissenschaften mehr und mehr die Erkenntnis reifen ließen, daß den mathematisch-technischen Disziplinen wachsende Bedeutung zukommen wird, begann Teubner auch mit



Benedictus Gotthelf Teubner

dem Verlegen mathematischer Bücher. Anfangs stand ihm vor allem der Dresdner Mathematikprofessor *Oskar Schlömilch* (1823 bis 1901) beratend zur Seite; später wurde der Begründer und erste Direktor des Mathematischen Seminars der Leipziger Universität, *Felix Klein* (1849 bis 1925), wichtigster mathematischer Berater des Verlages. Zu Beginn unseres Jahrhunderts hatte Teubner neben der Altphilologie auch auf dem Gebiet der Mathematik eine im Weltmaßstab führende Rolle inne. Seine Kataloge verzeichneten Werke bedeutender Mathematiker verschiedener Epochen:
N. H. Abel, *J.* und *W. Bolyai*, *P. G. L. Dirichlet*, *L. Euler*, *C. F. Gauß*, *D. Hilbert*, *F. Klein*, *L. Kronecker*, *S. Lie*, *N. I. Lobatschewski*, *H. Minkowski*, *G. Peano*, *B. Riemann*, um nur einige zu nennen.
Neben hervorragenden Einzelarbeiten wie D. Hilberts *Grundlagen der Geometrie* oder H. Minkowskis *Geometrie der Zahlen* legte der Verlag auch die mehrbändigen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* von M. Cantor vor, ebenso die umfangreiche *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*.
Ein weiterer Autor jener Zeit soll hier noch kurz Erwähnung finden: *Wilhelm Ahrens* (1872 bis 1927): Mehrere Schriften dieses aus Lübz stammenden, später in Magdeburg und Rostock wirkenden Mathematikers zählen heute längst zu den *Klassikern der Unterhaltungsmathematik* und werden seit vielen Jahrzehnten immer wieder in populärwissenschaftlichen Abhandlungen zitiert.
Der Teubner-Verlag jedoch konnte seine führende Stellung nicht mehr lange behaupten. Mit der verstärkten Hinwendung zur Schulbuchproduktion ging leider die Vernachlässigung des mathematischen Verlagszweiges einher; vor allem während der Zeit des Faschismus sank das wissenschaftliche Niveau der Produktion rapide ab.
Nach fast völliger Vernichtung von Gebäuden, Einrichtungen, Beständen und Archiv im Jahre 1943 und schwerem Neuanfang begann man erst einmal mit Nachdrucken älterer bewährter Werke. Hauptsächlich Übersetzungen aus dem Russischen, aber auch eigene, neuentwickelte Hochschullehrbücher ermöglichten schließlich in den fünfziger Jahren die Neuprofilierung. Schon 1958 erschien erstmals die Übersetzung des seither aus Lehre und Forschung nicht mehr wegzudenkenden *Taschenbuches der Mathematik* von *I. N. Bronstein* und *K. A. Semendjajew*.
Doch bereits damals wurden auch einzelne Titel der einstigen *Mathematisch-physikalischen Bibliothek* neu aufgelegt, so daß der eingangs erwähnte *Mathematikbeschluß* auf äußerst fruchtbaren Boden fiel.
Zur MSB steuerte der Verlag neben den erfolgreichen Schriften von *W. Lietzmann* auch gleich zu Beginn Titel bei, die sich bis heute großer Beliebtheit erfreuen. So befindet sich zur Zeit die 9. Auflage des Bandes *Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik* von M. Hasse in Vorbereitung, und M. Millers *Rechenvorteile* werden im nächsten Jahr auch schon zum achten Male erscheinen. Außerdem liegen inzwischen zahlreiche Übersetzungen populärwissenschaftlicher Bücher aus dem Russischen, Tschechischen, Ungarischen und Polnischen vor. Hinzu kommen jene fachübergreifenden Titel, die unmittelbar an den Erfahrungsschatz des Lesers anknüpfen, wie P. Schreibers *Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie* oder E. Schröders Schrift *Mathematik im Reich der Töne*, die aus zwei gleichnamigen *alpha*-Beiträgen der Jahre 1972 und 1973 hervorgegangen ist. Besonders erfolgreich sind R. Thieles *Mathematische Beweise* und der bereits in *alpha* 2/84 ausführlich vorgestellte Band *Algebra – aller Anfang ist leicht* von H. Kästner und P. Göthner. Übrigens erscheint in diesem Jahr des Verlagsjubiläums auch der 125. Titel der MSB: *Summa summarum*, herausgegeben von M. und G. Deweß.
Abschließend sei aber noch ein langjähriger, tatkräftiger Verbündeter bei der Propagierung mathematischer Literatur genannt, der eigentlich schon viel weiter oben hätte erwähnt werden müssen: *Johannes Lehmann*, Chefredakteur der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha*. Gleich im ersten Heft, das Anfang 1967 veröffentlicht

[1]) Beschluß des Politbüros des ZK der SED und des Ministerrates der DDR vom 17. Dezember 1962 „Zur Verbesserung und weiteren Entwicklung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen der DDR“.

wurde, kam *Dorothea Ziegler* vom Teubner-Verlag zu Wort; seither haben immer wieder Autoren und Verlage die Möglichkeit, ihre Neuerscheinungen vorzustellen. *alpha*-Leser erhalten somit regelmäßig wertvolle Hinweise und Anregungen für die im *Mathematikbeschluß* des Jahres 1962 besonders hervorgehobene Verbesserung der außerunterrichtlichen Arbeit auf dem Gebiet der Mathematik, und der Teubner-Verlag freut sich bereits jetzt darauf, daß *J. Lehmann* das aktuelle MSB-Angebot 1987 erneut bereichern wird, mit seinem Buch *Mathematik – von der Pflicht zur Kür.*

J. Weiß

Die Bücher von heute sind die Taten von morgen.

Heinrich Mann

Der Geizige liest jedes gekaufte Buch aufmerksamer, er will etwas für sein Geld haben.

Jean Paul

Einige Bücher soll man schmecken, andere verschlucken und einige wenige kauen und verdauen.

Sean O'Casey

Lesen – das ist die beste Lehre.
Den Gedanken eines großen Menschen zu folgen, ist die unterhaltsamste Wissenschaft.

Alexander Puschkin

Mathematische Schülerbücherei –
Freund und Helfer der Olympiadebewegung

Band 100	Lehmann, 2×2 plus Spaß dabei (VWV)
Band 101	Drinfel'd, Quadratur des Kreises und Transzendenz von π (DVW)
Band 102	Hódi, Endre (Hrsg.), Mathematisches Mosaik 1. Aufl. 1977, 2. Aufl. 1980 (U)
Band 103	Quaisser/Sprengel, Räumliche Geometrie (DVW)
Band 104	Kufner, Raum und Entfernung (Übers. a. d. Tschech.) (BGT)
Band 105	Klotzek, Einführung in die Differentialgeometrie I (DVW)
Band 106	Schröder, Mathematik im Reich der Töne (BGT)
Band 107	Kästner/Göthner, Algebra – aller Anfang ist leicht (BGT)
Band 108	Klotzek, Einführung in die Differentialgeometrie II (DVW)
Band 109	Belkner/Brehmer, Riemannsche Integrale (DVW)
Band 110	Pieper, Komplexe Zahlen (Theorie – Praxis – Geschichte) (DVW)
Band 111	Lehmann, Mathematische Schatzkammer – 444 Historische Aufgaben aus 444 Jahrzehnten (Arbeitstitel) (U) (1987)
Band 112	Kudrjavzev, Gedanken über moderne Mathematik und ihr Studium (Übers. a. d. Russ.) (BGT)
Band 113	Belkner/Brehmer, Lebesguesche Integrale (DVW)
Band 114	Sprengel/Wilhelm, Funktionen und Funktionalgleichungen (DVW)
Band 115	Belski/Kaloujnine, Division mit Rest (DVW)
Band 116	Quaisser, Bewegungen in der Ebene und im Raum (DVW)
Band 117	Höfner/Klein, Wahrscheinlichkeit ganz einfach – Mathematik zwischen Astrologie und Trendrechnung (U)
Band 118	Péter, Das Spiel mit dem Unendlichen (Übers. a. d. Ungar.) (BGT)
Band 119	Krysicki, Keine Angst vor x und y *(Übers. a. d. Poln.)* (BGT)
Band 120	Bogdanovič, Mathematischer Regenbogen (Übers. a. d. Russ.) (VWV) (1986)
Band 121	Lehmann, 3 plus 8 und mitgemacht (VWV)
Band 122	Klotzek, B.; Letzel, E.; Lengtat, U.; Schröter, K.: Kombinieren, Parkettieren, Färben (DVW)
Band 123	Schäfer, Die Wunder der Rechenkunst (Herausg. J. Lehmann) (VWV)
Band 124	Kaloujnine/Suščanskij, Transformationen und Permutationen (Eine Einführung in die Graphentheorie) (1985)
Band 125	Deweß/Deweß, Summa summarum (BGT) (1986)
Band 126	Sominski/Golowina/Jaglom, Die vollständige Induktion (DVW) (1985)
Band 127	Quaisser/Sprengel, Extrema (DVW)
Band 128	Schröder, Kartenentwürfe der Erde (BGT)
Band 129	Boltjanskij/Jefremovich, Anschauliche kombinatorische Topologie (DVW)
Band 130	Lehmann, Mathematik – von der Pflicht zur Kür (BGT) (1987)

Es bedeuten:

VWV	Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
DVW	VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin
U	Urania-Verlag, Leipzig · Jena · Berlin
BGT	BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig

alpha-Wettbewerb 1984/85

Abzeichen in Gold

Für achtjährige Teilnahme

Eckhard Heinrich, Aschersleben; Steffen Hoffmann, Babelsberg; Heike Eckardt, Bad Liebenstein; Sabine Mantel, Kerstin Kantiem, Andris Möller, Susanne Krüger, Berit Kleinbauer, alle Berlin; Beate Weber, Bernburg; Peter Rößler, Bischofswerda; Andreas Heinze, Cottbus; Falk-Uwe Koppelt, Crostau; Ines Lauter, Gerald Eichler, Heiko Ringl, Kerstin Urban, Pedro Thiele, Rainer Schültke, alle Dresden; Thomas Böhme, Eisleben; Lars Mönch, Erfurt; Una Heinecke, Eisenberg; Jens Wackernagel, Falkenberg; Jan-Martin Hertzsch, Geringswalde; Sonnfried Lätsch, Görlitz; Ingolf Hintzsche, Gräfenhainichen; Ulrike Brandenburg, Greifswald; Birgit Seifert, Hagenow; Uwe Prochno, Halle; Annett Eichner, Halle-N.; Thomas Weiß, Jena; Andreas Paukert, Karbow; Norbert Neumann, Kleinmachnow; Andreas Helbig, Langenleuba-N.; Frank Herzog, Langenwolschendorf; Uta Mersiowsky, Sabine Pohlmann, beide Langewiesen; Ralf Laue, Petra Polster, Lutz Lämmer, alle Leipzig; Holger Schinke, Leuna; Jens Grundmann, Limbach-O.; Jörg Ladendorf, Lübtheen; Sven Saar, Mühlhausen; Norbert Fuchs, Meiningen; Uwe Knispel, Neuburxdorf; Carmen Meikies, Schlagsdorf; Ingo Lohde, Schönefeld; Erhard Zilinske, Stralsund; Ralf Gössinger, Unterbreizbach; Irene Michallik, Waren; Margret Boettcher, Stefan Thäter, beide Weimar; Agnes Jorzick, Wismar; Erika Schreiber, Kerstin Barthelmes, beide Zella-Mehlis; Mathias Goltzsche, Zschopau

Für siebenjährige Teilnahme

Anka Sommer, Augsdorf; Michael Simang, Bautzen; Norbert Dorn, Reinhard Wegener, Cornelia Wolf, Jens Prochno, Steffen Padelt, Beate und Stefan Müller, alle Berlin; Heidrun Boldt, Burg Stargard; Christian Sitz, Calau; Ramona Blank, Clingen; Jens Leberwurst, Manfred Roßius, Andreas Stenzel, alle Cottbus; Uwe Martin, Crossen; Bert Kühne, Dahme; Silke Riechen, Rolf Dach, Stefan Mattausch, Carsten und Helmut Schreiber, Matthias Winkler, Jens Fuchs, Michael Nitsche, Annegret Wustmann, alle Dresden; Bert Minske, Eberswalde; Claudia Pleyer, Eisenach; Elke Sühnholz, Erfurt; Thomas Nicklisch, Falkenberg; Heike Morgner, Falkenstein; Henry Mäder, Frohburg; Ingolf Thurm, Gößnitz; Karsten Sonnemann, Grabow; Dirk Wenzlaff, Grieben; Thomas Rauschenbach, Grochwitz; Henning Salz, Halle; Uta und Jutta Schumann, Havelberg; Carsten Leibnitz, Hohenstein-E.; Thomas Benusch, Hoyerswerda; Claudia Docter, Ilsenburg; Carla Umlauf, Sebastian Horbach, Andreas Israel, Annegret Schatte, alle Karl-Marx-Stadt; Heiko Witte, Friedhelm Reichert, beide Königs Wusterhausen; Gert Künzelmann, Krina; Helge Müller, Königsee; Bernd Fucke, Petra Gollewski, beide Leipzig; Ekkehard Ludwig, Lühmannsdorf; Tilo Grüneberger, Nerchau; Anja Voß, Neustadt; Irma Goßmann, Oranienburg; Hellmut Schenk, Pirna; Katja Uhlemann, Prausitz; Klaus-Peter Lindner, Rackwitz; Annette Schubert, Schalkau; Ronald Kaiser, Schleid; Sven Hader, Schlotheim; Winfried Ullrich, Babette Müller, beide Schmalkalden; Ralf Stentzel, Schwarzenberg; Matthias Herrmann, Schwerin; Delia Wolfert, Söllichau; Bernd Urbanek, Spremberg; Mike Selig, Stauchitz; Silvia Reinwarth, Teltow; Evelin Schott, Thalheim; Lars Brückner, Vacha; Uta Michallik, Waren; Claudia Tiersch, Weimar; Horst Rißmann, Wesenberg; Ralph Bock, Wolfen

Für sechsjährige Teilnahme
Beatrice List, Altenburg; Annegret Schädlich, Auerbach; Wolfgang und Ralf Beukert, Altenburg; Geertje Maeß, Bad Doberan; Markus Kostrzewa, Bad Liebenstein; Yvonne Selke, Matthias Tittel, Matthias Röder, Clemens Thielecke, alle Berlin; Eberhard Balzer, Bernburg; Frank-Jürgen Schwerin, Blumberg; Peter Sitz, Calau; Daniela Syrbe, Cottbus; Michael Rühling, Rainer Fabianski, Bernd Miethig, alle Dresden; Matthias Voigt, Eisenach; Olaf Krause, Eisenhüttenstadt; Jörg Simon, Engelsdorf; Martina Helms, Erfurt; Rainer Fabianski, Falkensee; Peter und Ulrich Wenschuh, Falkenstein; Ute Frank, Forst; Frank und Udo Schulte, Freienbessingen; Andreas Funk, Christiane Preuß, Volker Pohlers, alle Greifswald; Karsten Seliger, Greiz; Maike Thiele, Susanne Buchheim, Kai Streubel, Ragna Siol, alle Grimma; Kathrin Henker, Groitzsch; Jörg Blaurock, Guben; Beate Thomas, Halle; Christina Schmerlin, Antje Hüttig, beide Halle-Neustadt; Uta Reck, Heiligenstadt; Heidi Konarski, Hohenbucko; Silke Umbreit, Ilmenau; Steffi Gebauer, Jena; Henrik Hodam, Kaltennordheim; Gert Reifarth, Ingolf Knopf, Michael Tix, Volker Liebert, Jürgen und Michael Hoppe, Annette Brungräber, Grit Lohse, alle Karl-Marx-Stadt; Jens Steiniger, Kleinmachnow; Torsten Schütze, Klettenberg; Susan Hoffmann, Klingenthal; Simone Kauert, Kathleen Hentrich, beide Langenweddingen; Karola Funke, Leinefelde; Michael Weber, Uwe Werner, beide Leipzig; Simone Brungräber, Marxwalde; Michael Herrmann, Oberlichtenau; Henning Hetzer, Oettersdorf; Viola Thomala, Lobenstein; Michael Taeschner, Kay Leitz, beide Parchim; Jeanette Stahnke, Pasewalk; Antje Reichel, Pirna; Dorit Grulka, Pritzwalk; Steffen Scheithauer, Parey; Andreas Jöstel, Radebeul; Nils Grotrian, Ribnitz-D.; Lutz Marschner, Riesa; Steffen Dragesser, Christine Elberskirch, beide Roßdorf; Ulf Gebhardt, Anne und Heiner Ruser, Ulf Winkler, alle Rostock; Beate Walter, Röbel; Ronny Henschke, Schierke; Jörn Brückner, Schwarzenberg; Astrid Grulke, Schernberg; Achim Gröber, Schönbach; Pier Bierbach, Schwerin; Roland Drendel, Senftenberg; Jochen Wetzel, Sömmerda; Bert Liebmann, Ramona Dörre, beide Sondershausen; Gerald Schumann, Armin Singer, beide Teichwolframsdorf; Wolfgang Vogel, Thalheim; Lothar Matzker, Torno; Holger Nobach, Warnemünde; Volker Lehmann, Monika Rössler, Uta Langer, Johannes Thäter, alle Weimar; Lutz Grothe, Wiederitzsch; Bert Winkler, Wilkau-Haßlau; Mathias Schwenck, Wittenburg; Adrian Hackenberger, Zedlitz; Andrea Schmidt, Ute Barthelmes, beide Zella-Mehlis; Uwe Schulz, Zittau

Für fünfjährige Teilnahme
Kathrin Christ, Ammern; Uwe Döbler, Arnstadt; Frank Senf, Ines Sobanski, beide Bad Liebenstein; Marcus Markardt, Bad Salzungen; Stefan Bading, Stefan Rödel, Frauke Wendt, Sarah Plietzsch, Tom Pfeifer, alle Berlin; Alice Kraneis, Bernburg; Ralf Gröper, Biesenrode; Michael Kremmer, Breitungen; Antje Lück, Brieselang; Christian Gering, Steffen Gering, beide Beuditz; Catarina Bröcker, Bürgel; Manuela Herrmann, Thomas Jurke, beide Cottbus; Wolfgang Jäckel, Demitz-Thumitz; Annett Germann, Dörfel; AG Math. der OS K. Niederkirchner, Domersleben; Jens Haufe, Klaus-Horst Milde, Ulrich Hartung, alle Dresden; Jörn Quedenau, Eberswalde; Ulrike Rößner, Erfurt; Lutz Küch, Erlau; Kerstin Dötsch, Kristin Herbarth, Heide Ilgen, Beate Michel, Ines Möller, Angela Schellenberg, Carmen Wolf, Marko Schneider, alle Fambach; Kai Mettke, Alexander Schackow, beide Frankfurt (Oder); Anke Zimmermann, Hanka Pruditzsch, beide Geithain; Berit Schönrock, Goddin; Andrea Rueß, Goldberg; Kristina Böttger, Görlitz; Jens Czichowski, Marie-Luise Funk, Volker Bölter, alle Greifswald; Sven Rudolph, Großröhrsdorf; Regine Mollwitz, Holger Porath, beide Güstrow; Antje Ohlhoff, Anja Grafe, beide Halberstadt; Anja Botzon, Havelberg; Birgit Bremer, Heiligenstadt; Heike Scholz, Hermannsdorf; Ines Menzel, Hohndorf; Axel Müller, Hoyerswerda; Frank Lautenschläger, Stefan Lippmann, beide Ilsenburg; Britta Fliegner, Jarmen; Kathrin Kreusel, Kändler; Rainer Werner, Holger Illgen, Katrin Holzhaus, Heiko Frank, Gerd F. Reifarth, alle Karl-Marx-Stadt; Ronald Albrecht, Sven Anecke, Erik Baewer, Mario Baumbach, Peter Denner, Dennis Krug, Matthias Morgenzweck, Marco Niebergall, Silvio Schade, Pere Specht, Reni Finzel, Katja Flegel, Kathrin Gunia, Nicole Hauke, Yvonne Hillig, Kati Kister, Jana Kister, Sabine Pause, Bianca Schmidke, Jana Schwärzel, Susanne Zierd, alle Kieselbach; Frank Müller, Klaffenbach; Kerstin Trägenap, Klietz; Heike Deumeland, Annett Raue, beide Langenweddingen; Sören Leuckefeld, Udo Woitek, beide Leinefelde; Petra Heiliger, Leuna; Silke Perthel, Udo Wagner, Katrin Görsch, alle Lössau; Bert Stallbaum, Lössen; Jens Neumann, Luckau; Bernhard Schlegel, Mahlsdorf; Hanna Erler, Massanei; Christian Eisele, Mölkau; Steffen Scharnowski, Möser; Dirk Franke, Mülsen; Iris Schulze, Naunhof; Thomas Drobek, Andreas Suchanow, beide Neubrandenburg; Steffen Ewert, Martina Schulz, beide Neuhaus; Ulf Woike, Neustadt; Peter Schmedemann, Neustrelitz; Ingolf Wappler, Olbernhau; Karsten Kattner, Pasewalk; Ingo Schubert, Pfaffroda; Martina Schenck, Pitschen-Pikkel; Joachim Rothe, Pretzschendorf; Thams Handke, Pulsnitz; Wolfgang Schneider, Radeberg; Stefan Jung, Birgit und Dagmar Lenz, alle Reichenbach; Ines Barthel, Remse; Ines Schmidt, Reuth; Grit Marschner, Karen Jobst, beide Riesa; Grit Sündram, Ronneburg; Gunther Siebenhaar, Roßdorf; Martin Wolff, Rostock; Stephan Dittmann, Rostock; Sven Ungelenk, Saalfeld; Klara Töpfer, Sömmerda; Olaf Otto, Stolpe; Kerstin Emmrich, Spremberg; Claudia Schwartz, Suhl; Tanja Reinwarth, Teltow; Torsten Marx, Ueckermünde; Ina Gössinger, Sylvia Müller, Heidi Egle, Sabine Fuß, alle Unterbreizbach; Christiane Schröter, Vacha; Tom Boyks, Vietlübbe; Heike Bauer, Vitzenburg; alpha-Club, Kl. 5, 6, 7 der OS Vitzenburg; Regine Katzy, Waren; Edith Boettcher, Weimar; Rainer Schmidt, Wismar; Heintje Grosch, Wolferstedt; Kristin Neumann, Zella-Mehlis; Annett Hellwing, Zschornewitz; Olaf u. Kirsti Knobe, Sondershausen

Für vierjährige Teilnahme
Corinna Beutel, Ahlbeck; Matthias List, Christian Auer, beide Altenburg; Gerlind Krolop, Angern; AG Math. der W.-Pieck-OS Anklam; Veneta Türke, Auerbach; Jochen und Matthias Sommer, Augsdorf; Ute Partsch, Bad Salzungen; Veit Eska, Bad Sülze; Britta Guder, Marlis Berg, Thomas Götz, Claudia Lehmann, Eva-Christina Müller, Axel Schneider, Stephan Eckart, Petra Kuckuk, Wilko Wohlauf, Gerhard Haug, Sven Hartmann, Holger Laabs, Ralf Paeslack, alle Berlin; Brit Hennicke, Bernburg; Peter Grabs, Bibra; Andrea Hirschfeld, Bleicherode; Annette Scholz, Blumberg; Christina Werner, Bötzow; Ralf Schmidt, Breitungen; Angela Maier, Bürgel; Jörg Neubecker, Coswig; Iris Freitag, Rene Düring, Olaf Baur, Claudia Bielow, Rainer Lenk, alle Cottbus; Charis Förster, Crimmitschau; Henry Theuer, Crussow; Sylvia Besser, Dietlas; Tino Riethmüller, Dingelstädt; Hans Schwenke, Dohna; Michaele Meyer, Dorndorf; Kristina Kutzer, Thomas Rotter, Sebastian Schreiber, Sylvia Penz, Rita Dach, Christoph Reichl, alle Dresden; André Kratzert, Dürrröhrsdorf; Matthias Bruère, Eggesin; Christian Pigorsch, Eisleben; Ute Heinemann, Erfurt; Heike Koch, Falkensee; Susanne Heller, Sandro Heß, Rüdiger Öetzel, Nicole Möller, Yvonne Schindel, alle Fambach; Gudrun Warzel, Guido Strauch, beide Finsterwalde; Steffi Wirth, Iris Scholl, beide Floh; Gerd Kunert, Sven Schmitt, beide Freiberg; Jan Biebrach, Garz; Petra Rüdiger, Geschwenda; Lars Schiefner, Geseck; Wolfgang Sitte, Görlitz; Kathrin Pohle, Görzke; Katrin Herrmann, Gräfenhainichen; Thilo Kuessner, Gunthard Stübs, beide Greifswald; Katrin Haufe, Großröhrsdorf; Silke Trottnow, Groß-Kelle; Markus List, Grünbach; Daniela Burkhardt, Ralf und Ina Kühnel, alle Guben; Heinz Seifert, Ulf Schmiedel, beide Hagenow; Sören Freiwald, Halberstadt; Thomas Vetterling, Halle; Lutz Eichner, Alexander Schmerling, Karsten Müller, alle Halle-Neustadt; Ottilie Falk, Grit Keßner, beide Harzgerode; Schulclub der EOS W. Pieck, Heiligenstadt; Ingo Müller, Ulf Graubner, beide Hermannsdorf; Fred Krümmling, Nicole Krauste, beide Hillersleben; Hagen Reimann, Horka; Klaus Liesenberg, André Klinge, beide Ilsenburg; Ulf Prudlo, Jena; Frank Lampert, Michael Köhler, Jana Hodam, alle Kaltennordheim; Ricarda Baartz, Kandelin; Annett Zipfel, Uwe Pirl, Antje Lößner, Annett Przybycin, alle Karl-Marx-Stadt; Heidi August, Christiane Schulz, Christel Vorig, Yvonne Münch, Sybille Helm, Ute Rug, Diana Fladung, Antje Wehnelt, Rommy Preißel, Matthias Wohlfahrt, Michael Annecke, Matthias Berger, Mike Nehring, Jörg August, Sven Hiller, Martin Hundertmark, Hendrik Weber, Sandra Leinhos, Kirsten Mey, Sandra Oetzel, alle Kieselbach; Katja Hoffmann, Klingenthal; Kerstin Braune, Langenweddingen; Sven Juffa, Langewiesen; Bernd Schauer, Latdorf; Thomas Neuhaas, Leipzig; Falk Lindner, Lichtenberg; Claas Gennrich, Löwenberg; Jens Löw, Luisenthal; Antje Mißbach, Thomas Rolle, Simone Schönemann, alle Magdeburg; Dirk Jürgeleit, Malchin; Christiane Kitzmann, Möhlau; Manja Franke, Mülsen; Carsten Kühne, Neetzow; Dirk Plischka, Rosa Flint, Jens Burmann, alle Neuhaus; Bodo Braune, Neuburxdorf; Falk Thomas, Neukirch; Annett Kleider, Katrin Joran, beide Neundorf; Stefan Voß, Neustadt; Stefan Warnest, Neuruppin; Thomas Haase, Niederodewitz; Lars Abbe, Niederorla; Grit Heidrich, Nieder-Seifersdorf; Christian Usbeck, André Wachs, beide Oberschönau; Thomas Hummel, Olbersdorf; Susanne Taeschner, Parchim; Uwe Anke, Pappendorf; Yvonne Brüggemann, Claudia Methner, Anke Limpert, Kerstin Erbe, Tom Brüggemann, Ines Materna, alle Ribnitz-D.; Matthias Ketzel, Tobias Vetter, beide Riesa; Claudia Paschwitz, Räckelwitz; Birgit Klingbeil, Röbel; Lothar Fischer, Ronneburg; Monike Möller, Sigrid Engels, beide Roßdorf; Katja Grunow, Sangerhausen; Lutz Hertel, Schneckengrün; Jens Gläßer, Schönfels; Antje Blechschmidt, Schwarzenberg; Bertram Bracher, Schwarzheide; Gerhard Matthäs, Seyda; Gerit Holland-Moritz, Alexander Anschütz, Steffi Döll, Frank Holland, Thomas Reumschüssel, Bärbel Brock, Kathrin Gendera, Christiane Holland-Letz, Jutta Huhn, Sabine Humpa, Christiane Marr, Gesine Pfeffer, Mario Endter, Katrin Usbeck, Andrea Seruneit, Sandra Ebert, Manuele Reich, Michael Brückner, Isabell Wiegandt, Manuela Neuber, Beate König, Andrea Kurz, Katrin Brock, alle Steinbach-Hallenberg; Rüdiger Scheller, Teltow; Annett Wiesner, Töplitz; Sven Janssen, Tornau; Corinna Krische, Treben; Katrin Peter, Gitta Eichel, René Storch, Luise Bunge, Andre Storch, Astrid Brenn, Ronny Stengel, Katrin Bohn, Stefan Otto, Jörg Fischer, Christin Hobert, alle Trusetal.

Fortsetzung und Schluß siehe Seite 39!

Lösungen

Lösungen zu:
Schulolympiaden in der MVR

5.1.1. Es gilt $2+4+1+1 = 2\cdot 4\cdot 1\cdot 1$, *Bemerkung:* $2+2 = 2\cdot 2$; $3+2+1 = 3\cdot 2\cdot 1$; $2+2+2+1+1 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1$.

5.1.2. Entweder 3 oder 7 Katzen.
Bemerkung: Genau 8 Katzen.

5.1.3. Multipliziert man beliebig natürliche Zahlen mit 5 und addiert 2, so erhält man gerade und ungerade Zahlen. Man multipliziert daher nur gerade natürliche Zahlen mit 5 und addiert 2.
Oder anders: Man multipliziert natürliche Zahlen mit 10 und addiert 2. Oder noch kürzer: Alle natürlichen Zahlen, die auf 2 enden (und nur solche), erfüllen die Bedingung. *Bemerkung:* Alle natürlichen Zahlen, die auf 7 enden.

5.1.4. Zum Beispiel:

2	7	4
14	6	12
3	10	13
15	11	5

6.1.1. $S = \dfrac{3n^2+2n-20}{n} = 3n+2-\dfrac{20}{n}$.
Nur $n = 1, 2, 4, 5, 10, 20$ ergeben, in $\dfrac{20}{n}$ eingesetzt, natürliche Zahlen. $n = 1, 2$ entfällt.

n	4	5	10	20
S	9	13	30	61

6.1.2. Da kein Faktor 10 sein kann (das Produkt endet nicht auf Null) und alle Faktoren nicht größer als 10 sein können (das Produkt wäre sonst größer als 10000), sind alle Faktoren kleiner als 10. Sie lauten 6, 7, 8, 9. Ihr Produkt ist 3024.

6.1.3. Da 9^{10} zehnmal den Faktor 9 hat und $9 = 3\cdot 3$ gilt, hat 9^{10} als Produkt 20mal den Faktor 3. 3^{21} hat als Produkt 21mal den Faktor 3. Also gilt $3^{21} > 9^{10}$. *Bemerkung:* $4^8 > 8^4$,
da $8^4 = 4\cdot 2\cdot 4\cdot 2\cdot 4\cdot 2\cdot 4\cdot 2 = 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4 = 4^6$.

6.1.4. $23 \leqq p \leqq 30{,}5$; $p = 23$; 29.

5.2.1. Nur für $c = 9$ ergibt $3\cdot c$ die Endziffer 7. $c = 9$, $b = 8$, $a = 5$ und $c = 9$, $b = 3$, $a = 6$. Die Probe bestätigt die Richtigkeit.

5.2.2. $2\cdot 4\cdot 6 = 48$, $2\cdot 4\cdot 8 = 64$, $2\cdot 6\cdot 8 = 96$, $4\cdot 6\cdot 8 = 192$. Nur $624 : 48 = 13$ erfüllt die Bedingungen.

5.2.3.
Einzige Lösung $115\cdot 989 = 113\,735$.

5.2.4. Das jüngste Kind (Tochter) muß drei Jahre alt sein, denn $73 - 58 = 4+4+4+3$. Also ist der Sohn 6, die Mutter 31 und der Vater 33 Jahre alt. Die Probe bestätigt die Richtigkeit.

6.2.1. Da $w > 0$, gilt $4g + 2g + g < 24$. Aus $7g < 24$ folgt $g = 1, 2, 3$. Nur $g = 3$ erfüllt die Bedingungen. Also sind es 3 grüne, 6 blaue, 12 rote und 3 weiße Kugeln.

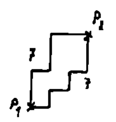
6.2.2. Hätte er in beiden Stufen je Aufgabe gleich viel Punkte erhalten, so wären es $60 - 4 = 56$, also 56 Punkte. Das wären für jede Aufgabe 8 Punkte. Er erreichte aber 4mal 9 Punkte und 3mal 8 Punkte. Das sind insgesamt 60 Punkte.

6.2.3. Wegen der Teilbarkeit durch 9 muß die Quersumme 18 oder 27 sein. Andere Quersummen sind nicht möglich, da $0 \leqq x + y \leqq 18$ gilt. $x + y = 17$ entfällt, da 948 nicht durch 8 teilbar ist. Für $x + y = 8$ erfüllen von den fünf möglichen Fällen ($y = 0, 2, 4, 6, 8$) nur 42840 und 42048 die Bedingungen.

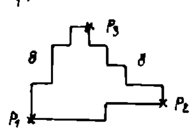
6.2.4. Wegen $91 = 13\cdot 7$ ergibt $13 + 7$ und 71 mal 1 hinzugefügt 91. Ebenso ist $13\cdot 7$ und 71 mal 1 hinzumultipliziert ebenfalls 91.

Lösungen zu:
Über Vielecke und Kreise in der Taxi-Geometrie

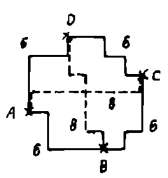
▲1▲



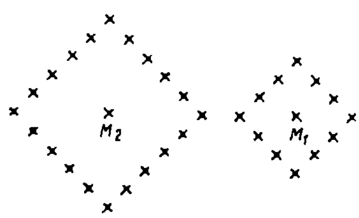
▲2▲



▲3▲



▲4▲



20 Kreispunkte $U_2 = 8r_2 = 40$ 12 Kreispunkte $U_1 = 8r_1 = 24$

▲5▲ Wir finden z. B. in Bild 6a das T-Zweieck DX; das gleichseitige T-Dreieck BCD; das T-Quadrat $ABCD$; das reguläre T-Fünfeck $AWXZY$; das reguläre T-Sechseck $AWBXZY$; und das reguläre T-Siebeneck $AWXCZDY$.
Die 8 Punkte des Kreises können als reguläres T-Achteck aufgefaßt werden.

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ „Nikolai Iwanowitsch", fragte Wadik einen ihm bekannten Verkäufer im Geschäft, „wieviel kostet ein Notizblock?" „16 Notizblöcke kosten genausoviel Rubel, wie man Notizblöcke für einen Rubel kaufen kann", antwortete der Verkäufer mit einem Lächeln.
Wieviel kostet denn nun ein Notizblock?
Lösung: Wenn 16 Blöcke x Rubel kosten und man für 1 Rubel x Blöcke bekommt, dann kostet 1 Block $\frac{x}{16}$ bzw. $\frac{1}{x}$ Rubel. Es gilt also $\frac{x}{16} = \frac{1}{x}$, d. h., $x^2 = 16$ und $x = 4$.
Ein Block kostet also 0,25 Rubel.

▲2▲ Wähle ein Paar ganzer Zahlen zwischen 0 und 10 (z. B. 5 und 8), und bilde deren Summe S $(5 + 8 = 13)$! Berechne dann die Summe T der zwei Zahlen, die durch die beiden ganzen Zahlen gebildet werden $(58 + 85 = 143)$! Kannst du erklären, warum T immer ein Vielfaches von S ist? Berechne den Quotienten $Q = \frac{T}{S}$!
Lösung: Sind x und y die beiden gewählten ganzen Zahlen, dann ist $S = x + y$. Die Zahlen, die durch diese beiden Ziffern gebildet werden können, sind $10x + y$ und $10y + x$, deren Summe ist dann $T = 11(x + y) = 11S$. Demzufolge ist immer
$Q = \frac{T}{S} = 11$.

▲3▲ Die Kombination von Onkel Archibalds Koffer umfaßt vier verschiedene Ziffern.
(1) Die erste ist gerade.
(2) Die Summe der beiden ersten ist 7.
(3) Die dritte ist kleiner als die zweite.
(4) Das Produkt der zweiten und der dritten endet auf 5.
(5) Man kann alle natürlichen Zahlen durch die vierte teilen.
Lösung: Wenn die erste Zahl gerade ist, muß die zweite wegen (2) ungerade sein. Wegen (4) sind die zweite und dritte ungerade, und die zweite Zahl ist eine 5. Dann ergibt sich für die erste Zahl aus (2) eine 2. Da die 4. Zahl wegen (5) nur eine 1 sein kann, muß infolge (3) die 3. Zahl eine 3 sein.
Die Kombination lautet demzufolge 2531.

Lösung zu: Schach und Mathematik

1. Es gibt 18 unterschiedliche Zugfolgen. Zum Beispiel: 1. d4 e5, 2. d5 Ke7, 3. d6+ oder 1. c4 f6, 2. Db3 Kf7, 3. c5+.

2. In 31 unterschiedlichen Zugfolgen gelingt es einem der schwarzen Türme, dem weißen König im 3. Zug Schach zu bieten. Sobald Weiß seinen d-, e- oder f-Bauern gezogen hat, kann der König in zwei Zügen auf die 3. Reihe vorrücken, so daß ihn einer der schwarzen Türme im 3. Zug bedrohen kann, z. B.:
1. f4 h5, 2. Kf2 Th6, 3. Kg3 Tg6+ oder 1. f3 a5, 2. Kf2 Ta6, 3. Ke3 Te6+. Es gibt 24 Lösungen von diesem Typ. Der Typ 1. f3 h5, 2. g4 h:g4, 3. Kf2 T:h2+ liefert vier weitere Lösungen. Zwei Lösungen entste-

hen nach 1. e4 h5(a5), 2. e5 Th6(Ta6), 3. e6 T:e6+. Außerdem gibt es noch die separate Lösung: 1. e4 h5, 2. D:h5 T:h5, 3. e5 T:e5+.

Lösungen zu: Raummühle

▲1▲ Typ 1 mit $3 \cdot 16$, also 48 Mühlen; Typ 2 mit $6 \cdot 4$, also 24 Mühlen; Typ 3 mit 4 Mühlen. Es gibt demnach 76 Möglichkeiten. (Siehe dazu auch die Angaben über die 3 Typen! Beliebig können a und b aus $\{1, 2, 3, 4\}$ gewählt werden.)

▲2▲ a) Eine Möglichkeit finden wir in der Lösung zur Auffgabe 4.
b) Man geht z. B. von der Lösung a) aus. Lösungsbeispiele wären für 18 Mühlen: Tausch von 213 mit 214; 17 Mühlen: Tausch von 113 mit 114; 16 Mühlen: Tausch von 113 und 213 mit 114 und 214; 15 Mühlen: Tausch von 113 und 413 mit 114 und 414; 14 Mühlen: Tausch von 113, 213, 413 mit 114, 214, 414. Die restlichen Fälle findet der Leser schnell.

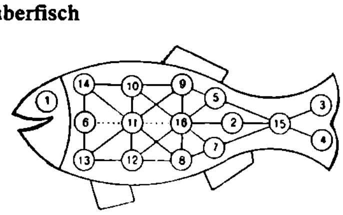
▲3▲ Die (z. B.) roten Kugeln sind: 211, 221, 321, 421, 131, 231, 331, 341 (1. Schicht). 112, 212, 412, 422, 132, 142, 342, 442 (2. Schicht). 313, 123, 223, 323, 233, 333, 433, 243 (3. Schicht). 114, 214, 414, 424, 134, 144, 344, 444 (4. Schicht). – Tauscht man in dieser Darstellung 111 mit 112, so erhält man ein 1:0 für Rot. (Tauscht man noch dazu 411 mit 412, so wäre es ein 2:0 für Rot.)

▲4▲ Der Nachziehende (Gelb) setzt seine Kugel stets auf die vom Anziehenden (Rot) gerade gesetzte. Auf diese Weise befinden sich die roten Kugeln genau in der 1. und 3. Schicht und die gelben in der 2. und 4. Schicht. Offenbar ist dieses Verfahren auch bis zum Ende ausführbar. Nun hat aber jeder genau 20 Mühlen, also endet die Partie remis.

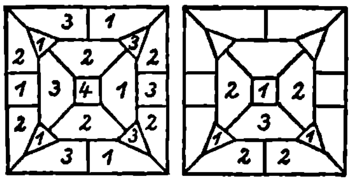
Lösungen zu: In freien Stunden · alpha-heiter

Silbenrätsel
1. windschief, 2. Intervall, 3. Nonius, 4. Kosinus, 5. Eintafelprojektion, 6. Logarithmus, 7. Funktionswerte, 8. ungerade, 9. Numerus, 10. Kathete, 11. Trigonometrie, 12. Ikosaeder, 13. orthogonal, 14. Nullstelle,
Lösungswort: Winkelfunktion.

Zauberfisch



Mit vier Farben
Das linke Bild zeigt eine mögliche zulässige Färbung, wobei die vier verschiedenen Farben durch 1, 2, 3 und 4 gekennzeichnet sind. Das rechte Bild verdeutlicht, daß eine zulässige Färbung mit nur drei verschiedenen Farben nicht möglich ist.



Hausnummer gefragt
Ohne Rücksicht auf biologische Möglichkeiten kann man die Zahl 72 auf folgende Weise in Produkte aus drei Faktoren zerlegen:
$1 \cdot 1 \cdot 72$, $1 \cdot 2 \cdot 36$, $1 \cdot 3 \cdot 24$,
$1 \cdot 4 \cdot 18$, $1 \cdot 6 \cdot 12$, $1 \cdot 8 \cdot 9$,
$2 \cdot 2 \cdot 18$, $2 \cdot 3 \cdot 12$, $2 \cdot 4 \cdot 9$,
$2 \cdot 6 \cdot 6$, $3 \cdot 3 \cdot 8$, $3 \cdot 4 \cdot 6$.
Da der Fragende die Hausnummer kannte, hätte er mit ihrer Hilfe aus diesen 12 Möglichkeiten die richtige herausfinden können, wenn die Hausnummer nicht mehrmals als Summe aufträte. Tatsächlich haben die Faktorenzerlegungen $2 \cdot 6 \cdot 6$ und $3 \cdot 3 \cdot 8$ die gleiche Faktorensumme 14, so daß bei dieser Hausnummer noch keine Eindeutigkeit besteht. Diese wird durch die Bemerkung über das jüngste Kind herbeigeführt. Die Kinder sind demnach 2 Jahre (Mädchen) und 6 Jahre (Zwillinge) alt.

Logelei
Die Uhr muß logischerweise 17:14:07 zeigen. Zu den Stunden muß man 3 addieren, zu den Minuten 13 und zu den Sekunden 23 Zeiteinheiten.

Tele-Lotto
Magische Quadratzahlen bis 35 sind: 1, 4, 9, 16, 25.
Folgende Fallunterscheidungen:

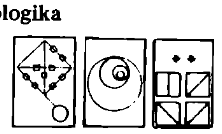
I.	II.	III.	IV.
1	4	1	9
4	1	9	1
2	8	2	18
93	87	<u>88</u>	<u>72</u>
/\	/\		
47 46	43 44	entf.	entf.
entf.	entf.	(ger.	(ger.
>35	>35	Zahl)	Zahl)

V.	VI.	XIII.
1	16	4
16	1	25
2	32	8
81	51	63
/\	/\	/\
40 41	40 41	$\boxed{31\ 32}$
entf.	keine	Bed.
>325	Primz.	erf.

XIX. 16, 25, 32, 27 → $\boxed{13\ 14}$
Bedingung erfüllt.
Es gibt 20 mögliche Kombinationen, von denen zwei Lösungen sind.
a) Uwe führt 4 Tips in Tele-Lotto aus;
b) Uwes Zahlen sind:

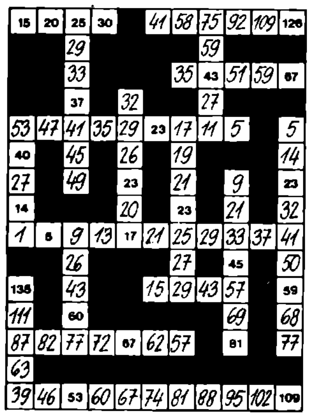
I	4	8	25	31	32;
II	13	14	16	25	32.

Videologika

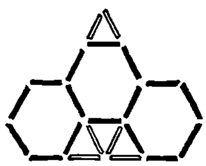


Farbenverkehrt
Nummer 6 ist das Positiv zum Negativ A.

Zahlenrätsel
Die Feststellung der richtigen Schlüsselzahl ist in jeder Reihe möglich, in der bereits zwei Zahlen bekannt sind. Man ziehe von der größeren Zahl die kleinere ab. Man stelle fest, wieviel leere Quadrate zwischen den beiden Zahlen liegen, und man addiere zu der Anzahl der leeren Quadrate eins. Man dividiere mit dieser Zahl das Ergebnis des Subtrahierens. Das Ergebnis der Dividierung ergibt die Schlüsselzahl. Die richtige Lösung ist folgende:



Regelmäßige Sechsecke



Lösungen zu: Mathematik und Technik
Heft 1/86

Klasse 5

▲1▲ Die Quelle liefert in 4 Sekunden 2 Liter Wasser, also in 2 Sekunden 1 Liter Wasser. Ein Tag hat $60 \cdot 60 \cdot 24 = 86\,400$ Sekunden. Aus $86\,400 : 2 = 43\,200$ folgt, daß die Quelle an einem Tag 43 200 Liter Wasser liefert.

▲2▲ Die Kosten für 6 Lampen betragen bei einer Brenndauer von 15 Minuten 6 Pf. Sie betragen für 210 Lampen in der gleichen Zeit 35mal soviel, das heißt 2,10 M. Brennen diese 210 Lampen 30 Tage lang täglich 15 Minuten, erhöhen sich die Kosten auf 63,00 M. Bei einer unnützen Brenndauer von 5 Minuten täglich ergibt sich demnach für die Schule eine Mehrausgabe von 21 M.

▲3▲ $20 \cdot 4 = 80$. Mit dem ersten LKW wurden 80 t Ware befördert. $170 - 80 = 90$. Mit dem zweiten LKW wurden 90 t Ware befördert. $90 : 5 = 18$. Der zweite Fahrer machte 18 Fahrten.

▲4▲ In 34 Liter Kraftstoffgemisch sind 1 Liter Öl und 33 Liter Benzin enthalten. Aus $10 : 34 \approx 0{,}3$ folgt, daß dieser Kanister etwa 0,3 Liter Öl enthält.

▲5▲ Der Maßstab 1 : 87 bedeutet, daß 1 cm im Modell 87 cm in der Wirklichkeit entspricht.
1,74 m = 174 cm; 174 : 87 = 2.
Ein Mensch von 1,74 m Körpergröße müßte im Modell 2 cm groß sein.

▲6▲ 3 min = 180 s; 180 · 24 = 4320. Für eine Trickfilmsendung von drei Minuten Dauer müssen 4320 einzelne Bilder aufgenommen werden.

▲7▲ Aus 280 − 50 = 230 und 230 : 2 = 115 und 115 + 50 = 165 folgt, daß der erste Gießer 165 Stück, der zweite 115 Stück herstellt.

▲8▲ Wir rechnen
51 − 1 = 50, 50 : 2 = 25, 25 + 1 = 26.
Auf der einen Straßenseite stehen 25, auf der anderen 26 Laternen. Nun gilt 25 · 30 m = 750 m. Die erste Straße ist 750 m lang.

▲9▲ Aus 2550 : 3 = 850 und 2125 : 5 = 425 und 850 : 425 = 2 folgt, daß die Geschwindigkeit des Düsenflugzeuges doppelt so groß wie die des Propellerflugzeuges ist.

▲10▲ Die Maßzahl der Austauschfläche des Kondensators A sei a; dann ist die Maßzahl der Austauschfläche des Kondensators B gleich $a + 4$. Wir entnehmen der nachfolgenden Tabelle, daß die Variable a nur mit 2 belegt werden darf.

a	$a + 4$	$a \cdot (a + 4)$
1	5	5
2	6	12
3	7	21
4	8	32

Der Kondensator A besitzt eine 2 m² große, der Kondensator B eine 6 m² große Austauschfläche.

▲11▲ Bei einer Umdrehung des Kettenblattes macht das Hinterrad 54 : 18 = 3 Umdrehungen; bei 5 Umdrehungen des Kettenblattes sind es 5 · 3 = 15 Umdrehungen des Hinterrades.

Klasse 6

▲1▲ $\frac{1500 \cdot 7{,}5}{2} = 5625$.
Das Wasser hat eine Tiefe von 5625 m.

▲2▲ a) 1 (B, C); 2 (A, B, G, E, D);
9 (F, A, A, G, C, D)
b) bzw. 3

▲3▲ Die Lok führt den Zug hinter die Weiche 6 über die Weichen 2 – 3 – 4 – 4 – 6 – 6. Auf dem Abschnitt zwischen den Weichen 5 und 6 bleibt der Zug stehen, die Lok selbst fährt vorwärts hinter die Weiche 5, hält an und fährt im Rückwärtsgang über die Weichen 5 – 3 – 4 – 6 hinter die Weiche 6. Sie fährt an den Zug heran, führt ihn nun hinter die Weiche 6 und schiebt ihn dann hinter die Weiche 1 (über die Weichen 6 – 4 – 3 – 2 – 1). Die Lok bleibt stehen und fährt den Zug auf die Endposition.

▲4▲ a) 0,10 · 120 mm = 12 mm;
b) 0,70 · 120 mm = 84 mm

▲5▲ $3\,\text{min} = \frac{3}{60}\,\text{h} = \frac{1}{20}\,\text{h}$;

$$v = \frac{s}{t} = \left(2 : \frac{1}{20}\right)\frac{\text{km}}{\text{h}} = 40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Herr Meyer fuhr mit einer Geschwindigkeit von 40 km/h. Er hat sich nicht an die Geschwindigkeitsbegrenzung gehalten.

▲6▲ 160 − 105 = 55. Von den 160 Fahrzeugen hatten 55 Fahrzeuge Mängel. 55 − 15 = 40. An 40 Fahrzeugen wurden Reifen- oder Beleuchtungsmängel festgestellt. 16 + 40 = 56; 56 − 40 = 16. An 16 Fahrzeugen wurden gleichzeitig Reifen- und Beleuchtungsmängel festgestellt.

▲7▲ Die Breite der Terrasse beträgt (400 · 0,6 · 0,4) : 10 m = 9,6 m.

▲8▲ $5\,\text{s} = \frac{5}{60}\,\text{min} = \frac{1}{12}\,\text{min} = \frac{1}{12 \cdot 60}\,\text{h} = \frac{1}{720}\,\text{h}$; $100\,\text{m} = \frac{1}{10}\,\text{km}$.

$$v = \frac{s}{t} = \left(\frac{1}{10} : \frac{1}{720}\right)\frac{\text{km}}{\text{h}} = 72\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Die Geschwindigkeit von 72 km/h entspricht nicht den Vorschriften der Straßenverkehrsordnung (50 km/h). Der Motorradfahrer gefährdet die übrigen Verkehrsteilnehmer.

▲9▲ 2 kW = 2000 W; 2000 : 40 = 50.
Eine Glühlampe von 40 W Leistung kann 50 Stunden brennen, bis $2\,\frac{\text{kW}}{\text{h}}$ verbraucht sind.

▲10▲ $A = (24 \cdot 15 - 4 \cdot 4^2)\,\text{cm}^2 = (360 - 64)\,\text{cm}^2 = 296\,\text{cm}^2$;
$V = 7 \cdot 16 \cdot 4\,\text{cm}^3 = 448\,\text{cm}^3$.
Zur Herstellung des Kastens werden 296 cm² Zinkblech benötigt; er faßt 448 cm³, das sind 0,448 Liter Flüssigkeit.

▲11▲ $P = I \cdot U = 220 \cdot 0{,}1\,\text{W} = 2002\,\text{W} = 2{,}002\,\text{kW}$.
Die Leistungsaufnahme der Waschmaschine beträgt rund 2 kW (Kilowatt).

▲12▲ Aus $8 \cdot x = 40 \cdot 5$ folgt $x = 25$.
Auf das Ventil drückt eine Kraft von 25 kp.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Slobodezki/Aslamasow

▲2635▲ Die auf der Leinwand abgebildeten Räder führen eine Umdrehung in der Zeit aus, in der vier Bilder durch den Projektor laufen. Deshalb muß sich das Rad auf jedem Bild im Vergleich zum vorhergehenden Bild um $\frac{1}{4}$ Umdrehung weitergedreht haben. Die Räder auf der Leinwand drehen sich *vorwärts*, wenn das Auto mit einer solchen Geschwindigkeit fährt, daß in der Zeit zwischen den Bildern $\tau = \frac{1}{16}\,\text{s}$ die Räder des Autos n ganze Umdrehungen und noch $\frac{1}{4}$ Umdrehung um die eigene Achse ausführen. Wenn aber in τ Sekunden die Räder n ganze und $\frac{3}{4}$ Umdrehungen machen, so drehen sich die auf der Leinwand abgebildeten Räder *rückwärts*. Also ist die Winkelgeschwindigkeit der Räder entweder

$$\omega_1 = 32\pi\left(n + \frac{1}{4}\right)\text{s}^{-1}$$

oder $\omega_2 = 32\pi \cdot \left(n + \frac{3}{4}\right)\text{s}^{-1}$.

Dies bedeutet, daß sich die Achsen der Räder und damit das Auto mit der Geschwindigkeit $v_2 = 32\left(n + \frac{3}{4}\right)\pi R \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (in diesem Falle drehen sich die abgebildeten Räder *rückwärts*) fortbewegen. Setzen wir in diesen Formeln $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, erhalten wir als Ergebnis

$$v_1 = 12{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 45\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

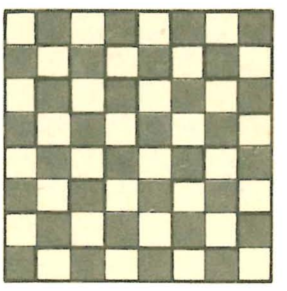
oder $v_1' = 223\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \ldots$ und

$$v_2 = 136\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \text{ oder } v_2' = 316\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \ldots$$

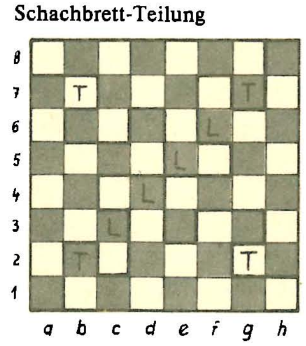
Da ja die Geschwindigkeit des Autos kaum größer als $140\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sein wird, ist sie gleich $45\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, wenn sich die Räder auf der Leinwand *vorwärts* drehen, oder gleich $136\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, wenn sie sich auf der Leinwand *rückwärts* drehen.

Lösungen zu: Knobelwandzeitung (6)
Heft 1/86

▲1▲ Schachbrett-Puzzle



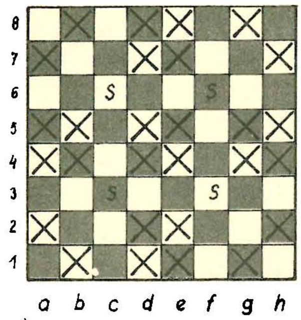
▲2▲ Schachbrett-Teilung



▲3▲ Schachbrett mit Münzen
Die Abbildung zeigt eine mögliche Anordnung der Münzen:

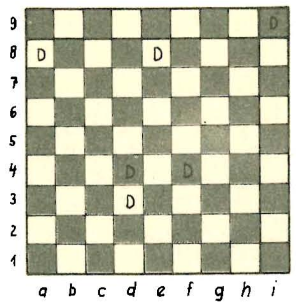
	a	b	c	d	e	f	g	h
8	1	20	5	50	1	100	5	10
7	10	1	100	5	50	1	20	5
6	100	1	5	20	5	50	10	1
5	5	10	50	5	100	1	1	20
4	20	100	1	1	10	5	5	50
3	50	5	1	10	1	20	100	5
2	1	5	10	100	20	5	50	1
1	5	50	20	1	5	10	1	100

▲4▲ Mit 4 Springern



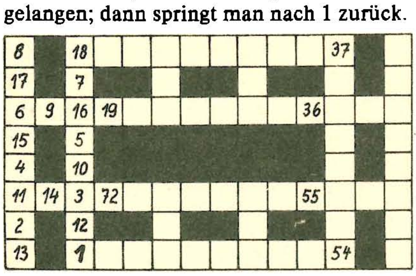
▲5▲ Mini-Schach
a) c2, b) c1, c) Die 3 Damen beherrschen das gesamte Spielfeld; der König stünde überall im „Schach“, d) b2.

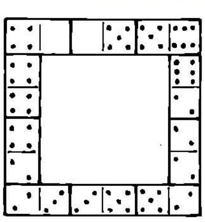
▲6▲ Damen-Problem
Ja! Auf einem 8×8-Schachbrett kann man 5 = 8-3 Damen so aufstellen, daß alle Felder von ihnen beherrscht werden. Geht man zu einem 9×9-Brett über, so kommen zwei sich in i9 kreuzende Reihen hinzu, die durch eine weitere Dame in i9 beherrscht werden. Zur Beherrschung eines 9×9-Brettes genügen also 6 = 9-3 Damen.



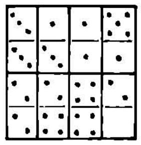
Analog schließt man weiter bis zur Aussage, daß ein 1986×1986-Brett durch 1983 = 1986 − 3 Damen beherrscht werden kann. Es gilt hiernach sogar für jede natürliche Zahl $n \geqq 8$: Ein $n \times n$-Schachbrett kann durch n-3 Damen vollständig beherrscht werden (Exakter Beweis durch „vollständige Induktion über n“, den unsere obige Schlußweise verdeutlicht).

▲7▲ Rösselsprung
Das Bild zeigt einen möglichen Weg von 1 bis 18. Auf die gleiche Weise kann man von 19 bis 36, von 37 bis 54, von 55 bis 72 gelangen; dann springt man nach 1 zurück.

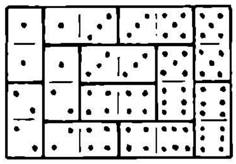


▲8▲  Domino-Rahmen

▲9▲ Magisches Domino-Quadrat



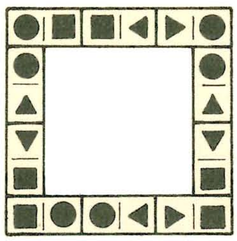
▲10▲ Eine Quadrille



▲11▲ Lage-Rekonstruktion

4	2	4	2	1	6	2	5
0	1	5	0	5	5	0	5
4	5	4	6	6	0	3	3
4	4	1	3	2	0	3	3
1	6	6	6	2	6	2	0
0	4	3	5	2	0	2	4
5	6	1	3	1	1	1	3

▲12▲ Kinderleicht

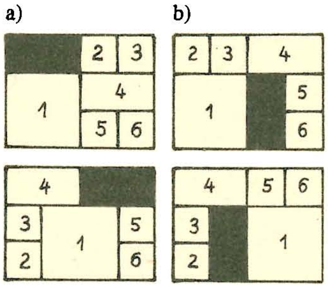


▲13▲ Magisches Domino-Wort-Quadrat

R	O	S	E
O	B	E	R
S	E	I	L
E	R	L	E

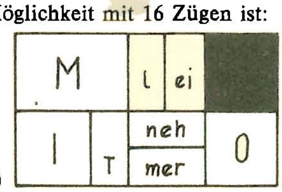
▲14▲ Schiebe-Puzzle
2 Möglichkeiten mit 14 Zügen sind:
1) 6, 5, 1 (Bild a), 2, 3, 4, 5 (Bild b), 1, 2, 3, 4 (Bild c), 5, 6, 1 (Bild d).
2) 4, 2, 1, 5, 6, 4, 2, 3, 1, 6, 4, 2, 3, 1.

a) b)

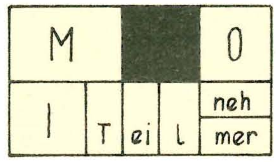


c) d)

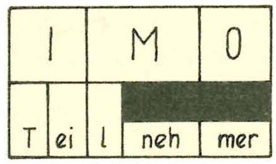
▲15▲ IMO-Teilnehmer
Eine Möglichkeit mit 16 Zügen ist:



a)



b)



c)

0, mer, neh, l, ei (Bild a),
0, mer, neh, l, ei (Bild b),
M, I, T, ei, l, neh (Bild c, Endstand).

Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 5/85 (Fortsetzung)

Ch 7 ■ 145 350 ml Lösung ≙ 12 g Kochsalz
40 ml Lösung ≙ m

$$m = \frac{40\,\text{ml} \cdot 12\,\text{g}}{350\,\text{ml}}$$

$$m = 1{,}4\,\text{g}$$

1,4 g Kochsalz sind in den 40 ml der Lösung enthalten.

Ch 8 ■ 146 150 g Asche ≙ 100 %
1 g Asche ≙ x

$$x = 0{,}667\,\%$$

Multiplikation der einzelnen Auswaagen mit dem Faktor 0,667:

$$2{,}6 \cdot 0{,}667 = 1{,}734 = 1{,}73$$
$$16{,}8 \cdot 0{,}667 = 11{,}206 = 11{,}21$$
$$18{,}1 \cdot 0{,}667 = 12{,}073 = 12{,}07$$
$$45{,}7 \cdot 0{,}667 = 30{,}482 \approx 30{,}48$$
$$51{,}2 \cdot 0{,}667 = 34{,}150 \approx 34{,}15$$
$$5{,}6 \cdot 0{,}667 = 3{,}735 \approx 3{,}74$$
$$10{,}0 \cdot 0{,}667 = 6{,}670 \approx 6{,}67$$

Die Asche besitzt demzufolge nachstehende Zusammensetzung:

Korngröße in mm			
1,0	1,0–0,75	0,75–0,5	0,5–0,25
Prozent			
1,73	11,21	12,07	30,48

0,25–0,1	0,1–0,75	0,075
34,15	3,74	6,67

Ch 9 ■ 147 a) Ermittlung des Verbrauchs einer genau 1n Salzsäure:
15,3 ml · 1,005 ≙ 15,377 ml
1 ml 1n Salzsäure ≙ 40 mg Natriumhydroxid
15,377 ml Salzsäure = m

$$m = \frac{15{,}377\,\text{ml} \cdot 40\,\text{mg}}{1\,\text{ml}}$$

$$m = 615{,}08\,\text{mg}$$
$$m = 0{,}62\,\text{g}$$

In den 0,02 dm^3 Natronlauge sind 0,62 g Natriumhydroxid enthalten.
b) Die Natronlauge enthält 0,775 Mol Natriumhydroxid im Liter.
c) Die Natronlauge enthält 3 % Natriumhydroxid.

Ch 10/12 ■ 148 Zur Herstellung einer 32,2 %igen Magnesiumsulfat-Lösung muß eine 27,9 %ige Schwefelsäure verwendet werden.

Eine Ungleichung

verschiedene Lösungswege – Verallgemeinerungen

In *alpha* Heft 1/1985, S. 5 wird von *L. Püffeld* folgende Aufgabe gestellt:
Man beweise: Für alle reellen Zahlen x und y gilt die Ungleichung

$$x^2 + y^2 - 1 \geqq x + y + xy. \qquad (1)$$

Die dort angeführte Lösung geht über den Schulstoff hinaus, da sie Kenntnisse über die Differentialrechnung zweier Veränderlicher voraussetzt. In diesem Beitrag wird die Ungleichung (1) mit elementaren Schulmitteln bewiesen. Er entstand infolge der Zuschriften auf den oben genannten Artikel von Mr. pharm. Doris Gollé (Wien), Prof. Nawrotzki (Jena), F. Rehm (Schönebeck) und des Autors.

1. Weg:
Im Lehrbuch Mathematik, Kl. 9, S. 111 finden wir: „Jede Funktion $y = x^2 + px + q$ nimmt also an der Stelle $x_s = -\frac{p}{2}$ ihren kleinsten Funktionswert $y_s = -D$ an.“ (D bezeichnet die Diskriminante.)
Um diesen Sachverhalt anwenden zu können, fassen wir $z = x^2 + y^2 + 1 - x - y - xy$ als quadratische Funktion in x auf. Dann ist

$$z = x^2 - x(y+1) + y^2 - y + 1$$
$$\geqq \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 - \frac{y+1}{2}(y+1) + y^2 - y + 1$$
$$= \frac{3}{4}(y-1)^2 \geqq 0$$

und damit (1) bewiesen.
Da z in x und y symmetrisch ist (d. h., vertauscht man x mit y, so erhält man das gleiche z), hätten wir z auch als quadratische Funktion in y auffassen können und wären zu dem gleichen Ergebnis gekommen.

2. Weg:
Wir verwenden aus dem gleichen Lehrbuch, S. 113: „Für jede Funktion f mit $f(x) = x^2 + px + q$ gilt: f hat genau dann Nullstellen, wenn $D = \frac{p^2}{4} - q \geqq 0$ ist.“
Nun gilt für die in x quadratische Funktion

$$f(x) = x^2 - x(y+1) + y^2 - y + 1, \text{ daß}$$
$$D = \frac{(y+1)^2}{4} - (y^2 - y + 1)$$
$$= -\frac{3}{4}(y-1)^2 \leqq 0 \text{ ist.}$$

Damit hat $f(x)$ nur für $y = 1$ eine Nullstelle und berührt in diesem Fall die x-Achse. Da aber

$$f(1) = 1 - (y+1) + y^2 - y + 1$$
$$= (y-1)^2 \geqq 0$$

ist, gilt damit für alle reellen x und y: $f(x) \geqq 0$.

3. Weg:
Mit $a = x - 1$, $b = y - 1$ geht (1) wegen

$$x^2 + y^2 + 1 - x - y - xy$$
$$= (x-1)^2 + (y-1)^2 - (x-1)(y-1)$$

in die äquivalente Ungleichung

$$a^2 + b^2 \geqq ab \qquad (2)$$

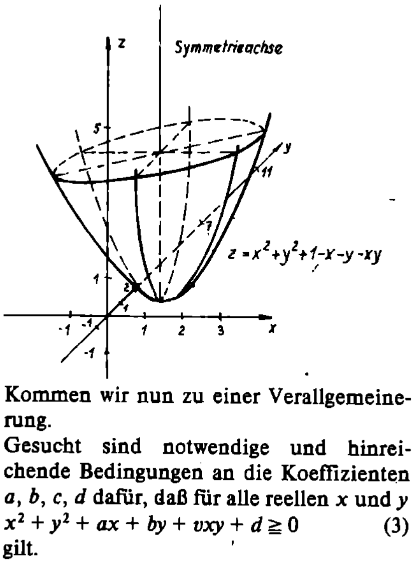
über.
Diese Ungleichung kann nun mit den Mitteln, die im 1. und 2. Weg dargestellt wurden, bewiesen werden. Dies überlassen wir dem Leser.
Wir zeigen noch zwei andere Methoden. Für $a = 0$ oder $b = 0$ gilt (2) offenbar. Haben a und b verschiedene Vorzeichen, so gilt (2) ebenfalls, da die linke Seite positiv und die rechte negativ ist. Es genügt daher, (2) für $a, b > 0$ zu beweisen. (Für $a, b < 0$ kompensieren sich die Minuszeichen.)
Nun folgen die beiden Beweise:
a) Es ist $(a-b)^2 \geqq 0$, also
$a^2 + b^2 \geqq 2ab > ab$.
b) Es sei $x = \frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$, dann entsteht aus (2) nach Division durch b^2 $(\neq 0)$ die äquivalente Ungleichung $x^2 + 1 \geqq x$. Es ist aber

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geqq \frac{3}{4} > 0.$$

4. Weg:
Wir geben einige äquivalente Darstellungen für $z = x^2 + y^2 + 1 - x - y - xy$ an, aus denen man die Nichtnegativität sofort ersieht, da Quadrate reeller Zahlen nichtnegativ sind. Es ist

$$z = \left(x - \frac{1+y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y-1)^2$$
$$= \frac{1}{6}(x - 2y + 1)^2 + \frac{1}{6}(2x - y - 1)^2 + \frac{1}{6}(x + y - 2)^2$$
$$= \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{2}(x-y)^2$$
$$= 3\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2} - 1\right)^2.$$

Derartige „mystische“ Lösungen (F. Rehm) kann man natürlich nur durch Probieren finden. Allerdings geht es bei langjähriger Erfahrung und vielfältigem Üben leichter.
Bevor wir die Ungleichung (1) verlassen, zeigen wir noch nebenstehendes Bild von $z = x^2 + y^2 + 1 - x - y - xy$.



Kommen wir nun zu einer Verallgemeinerung.
Gesucht sind notwendige und hinreichende Bedingungen an die Koeffizienten a, b, c, d dafür, daß für alle reellen x und y

$$x^2 + y^2 + ax + by + cxy + d \geqq 0 \qquad (3)$$

gilt.

Wir verfolgen den 1. Weg. Den 2. Weg überlassen wir dem Leser.
a) Es gelte für alle reellen x, y die Ungleichung (3). Dann ist

$$x^2 + x(a + cy) + y^2 + by + d$$
$$\geqq \left(\frac{a+cy}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+cy}{2}\right)(a+cy)$$
$$+ y^2 + by + d = y^2\left(1 - \frac{c^2}{4}\right)$$
$$+ y\left(b - \frac{1}{2}ac\right) + d - \frac{a^2}{4} \qquad (=).$$

(Das Gleichheitszeichen gilt nur für $x = \frac{a+cy}{2}$.) Damit nun diese in y quadratische Funktion nicht negativ wird, muß

$$1 - \frac{c^2}{4} > 0 \text{ und } D = \left(b - \frac{1}{2}ac\right)^2 \qquad (4)$$
$$-4\left(1 - \frac{c^2}{4}\right)\left(d - \frac{a^2}{4}\right) \leqq 0 \text{ sein.} \qquad (5)$$

Betrachten wir noch den Fall, daß der Koeffizient bei y^2 verschwindet.
(4a) Für $c = 2$ folgt aus (5) $a = b$. Damit

$$z = x^2 + y^2 + 2xy + ax + ay + d$$
$$= (x+y)^2 + a(x+y) + d \text{ nichtnegativ}$$

ist, muß ferner $\frac{a^2}{4} - d \leqq 0$ sein.
(4b) Für $c = -2$ folgt aus (5) $a = -b$. Damit $z = x^2 + y^2 + ax - ay - 2xy + d = (x-y)^2 + a(x-y) + d$ nichtnegativ ist, muß ferner $\frac{a^2}{4} - d \leqq 0$ gelten.
b) Die Bedingungen (4) und (5) bzw. (4a), (4b) sind hinreichend für das Bestehen der Ungleichung (3).
Für $c = 2$, $a = b$, $\frac{a^2}{4} - d \leqq 0$ ist

$$z = x^2 + 2xy + y^2 + ax + by + d$$
$$= (x+y)^2 + a(x+y) + d$$
$$= \left(x + y + \frac{a}{2}\right)^2 + d - \frac{a^2}{4} \geqq 0.$$

Für $c = -2$, $a = -b$, $\frac{a^2}{4} - d \leqq 0$ ist

$$z = x^2 - 2xy + y^2 + ax + by + d$$
$$= (x-y)^2 + a(x-y) + d$$
$$= \left(x - y + \frac{a}{2}\right)^2 + d - \frac{a^2}{4} \geqq 0.$$

Gelten nun (4) und (5), so ist

$$y^2\left(1 - \frac{c^2}{4}\right) + y\left(b - \frac{1}{2}ac\right) + d - \frac{a^2}{4} \geqq 0$$

und wegen (=) gilt (3).
Damit haben wir als notwendige und hinreichende Bedingungen für das Bestehen der Ungleichung (3) die Bedingungen (4) und (5) bzw. (4a), (4b) erhalten.
Wir haben also einen allgemeineren Sachverhalt als die ursprüngliche Ungleichung (1) gelöst.
Als Klausuraufgabe in einer Mathematikolympiade würde man versuchen, diesen allgemeinen Sachverhalt besonders attraktiv zu gestalten. Dies könnte z. B. wie folgt geschehen:
Man untersuche, ob für alle reellen Zahlen x und y die Ungleichung $x^2 + y^2 + xy - 19x - 84y + 1985 \geqq 0$ erfüllt ist.
(Antwort: Die Bedingungen (4) und (5) sind erfüllt, also gilt die Ungleichung für alle reellen Zahlen x und y.)
Weitere Verallgemeinerungen sind möglich, doch wollen wir diese dem interessierten Leser selbst überlassen. *W. Moldenhauer*

Ein mathematisches Spiel

Wir betrachten zunächst das folgende Zweipersonenspiel, das im englischen Sprachraum den Namen *Chomp* erhalten hat und vor reichlich 20 Jahren von dem amerikanischen Mathematiker *David Gale* erfunden wurde. Für *Chomp* benötigen wir ein rechteckiges Spielfeld mit quadratischen Feldern, z. B. ein Dame-Brett oder ein Go-Brett und die dazugehörigen Steine. Uns kommt es nicht darauf an, welche Farbe die Steine haben, da wir nur eine Sorte Steine benötigen. Vor Beginn des Spiels werden die Steine in Form eines $n \times m$-Rechtecks aufgebaut. Für den Anfang wählen wir ein 3×4-Rechteck (Bild 1). Ein Zug besteht nun darin, einen Stein auf dem Feld auszuwählen und diesen Stein und alle Steine zu entfernen, die sich auf der gleichen senkrechten Reihe nach oben und auf der gleichen waagerechten Reihe nach rechts befinden sowie auch alle die Steine, die sich im Inneren des so gebildeten rechten Winkels befinden. Die Spieler ziehen nun abwechselnd, und wer den letzten Stein (Schlußstein) links unten vom Brett nehmen muß, hat verloren. Ein möglicher Spielverlauf ist im Bild 1 dargestellt. Für einige spezielle Werte für n und m können wir uns überlegen, wie man spielen muß, um zu gewinnen. Für $n = 2$ kann der anziehende Spieler stets gewinnen, der Gewinnzug ist im Bild 2 dargestellt. Nach diesem Zug ist die untere Reihe um einen Stein länger als die obere. Der zweite Spieler ist gezwungen, diesen Zustand zu zerstören. Ihr könnt euch schnell überlegen, daß danach der erste Spieler wieder einen solchen Zug machen kann, daß wieder die untere Reihe um einen Stein länger ist als die obere. Schließlich bleibt nur der letzte Stein übrig, und den muß der zweite Spieler nehmen.

Betrachten wir nun ein quadratisches Spielfeld, d. h. $m = n$.

Auch hier kann der anziehende Spieler stets gewinnen, wenn er zuerst den Stein wählt, der zum Schlußstein diagonal benachbart ist. Es bleiben dann nur zwei gleich lange, rechtwinklig gelegene Streifen übrig. Jeder mögliche Zug des zweiten Spielers verkürzt genau einen der Streifen, der erste Spieler kann den zweiten Streifen entsprechend verkürzen. Nach höchstens $2n$ Zügen hat also der anziehende Spieler gewonnen.

Wählt man $n = 3$ und m beliebig ($m \geqq 4$), dann ist schon kein allgemeines zum sicheren Gewinn führendes Verfahren mehr bekannt, obwohl die Einzelfälle schon von D. Gale bis $m = 100$ auf einem Computer analysiert wurden. Die Gewinnzüge für den ersten Spieler bis $m = 10$ sind in Bild 3 angegeben.

In allen bisherigen Spezialfällen konnte der anziehende Spieler gewinnen, wir können auch recht kurz und elegant beweisen, daß dies bei beliebigen $n \times m$-Spielfeldern richtig ist. Dieser Beweis ist jedoch ein reiner Existenzbeweis, er gibt uns überhaupt keinen Hinweis, wie wir spielen müssen, um zu gewinnen. Wir nehmen nun an, der anziehende Spieler wählt im ersten Zug den Stein rechts oben in der Ecke. Dann gibt es genau zwei Möglichkeiten, nämlich:

1. Das ist der Gewinnzug, d. h., wie der zweite Spieler auch weiterspielt, stets wird der zweite Spieler verlieren.
2. Das ist nicht der Gewinnzug, und der zweite Spieler kann einen Gewinnzug machen.

Im ersten Fall ist alles gut. Im zweiten Fall hätte aber der erste Spieler zu Beginn statt des Steins rechts oben denjenigen Stein wählen können, den nun der zweite Spieler in seinem Antwortzug gewählt hat. Dadurch hätte sich gleich nach dem ersten Zug das Bild ergeben, das sich so erst im 2. Zug ergeben hat, also wäre das ein Gewinnzug gewesen. Damit ist bewiesen, daß stets für den anziehenden Spieler ein Gewinnzug existiert.

R. Lehmann/U. Quasthoff

Bild 1: Das Spiel Chomp auf einem 3× 4-Spielfeld

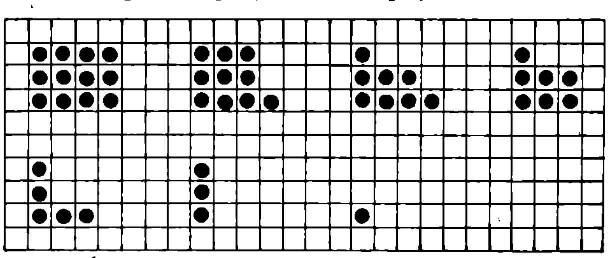


Bild 2: Gewinnzug für das $2 \times m$-*Spielfeld*

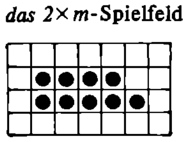
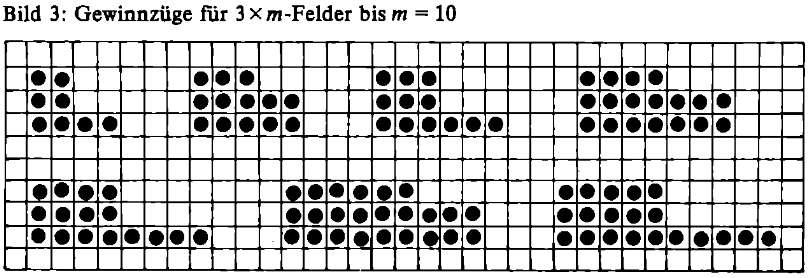


Bild 3: Gewinnzüge für $3 \times m$-Felder bis $m = 10$



Sternennacht

von Gerh. Gentzen, 15 J. alt, s. Beitrag Seite 28/29, Erstveröffentlichung

Blutig rot erglüht's im Westen,
Und die Sonne sinkt ins Meer.
Unter geht das Licht des Tages,
Dunkler wird es um uns her.

In des Himmels Dämmerscheine
Blitzt es auf: der erste Stern!
Venus ist's, der Erde Nachbar,
Und dennoch so fern, so fern.

Dunkler wird's am Firmamente,
Leuchtend flüchtet der Planet.
Seine Stunde ist vorüber,
Wenn die Dämmerung vergeht.

Dunkle Nacht! Die Sterne leuchten
Hoch am Himmel klar und hell,
Und in weitem Bogen fliegen
Meteore, flink und schnell.

Ruhig wandeln die Planeten
In der festgesetzten Bahn.
Leuchten uns mit ihrem hellen
Ruhig sanften Schimmer an.

Um des Himmels größten Bogen
Schlingt sich hell ein Sternenband
Wie ein großer Nebelstreifen.
Die Milchstraße wird's genannt.

Tief im Süd am Horizonte
Zieht ein Komet durchs Sternenreich,
Und sein Schweif im langen Bogen
Eilt voraus ihm, matt und bleich.

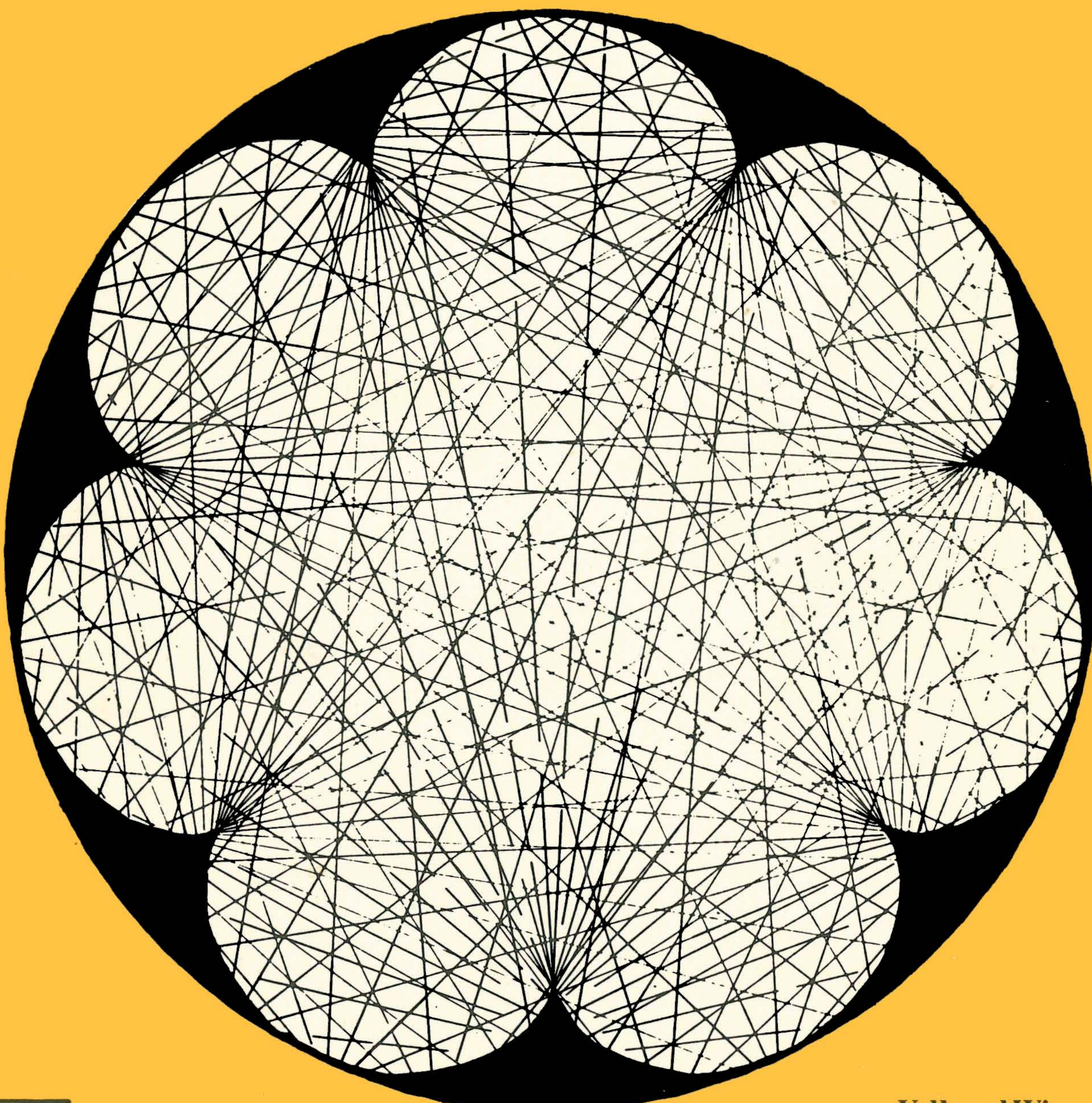
Eine Wolke zieht vorüber,
Hinter ihr strahlt's hell und klar;
Und des Mondes lichter Schimmer
Überstrahlt die Sternenschar.

Und im Osten wird es heller,
Sternenglanz vergeht zu Nichts;
Und ein roter Morgenschimmer
Kündet uns das Nahn des Lichts.

ISSN 002-6395 · alpha · Berlin · 20 (1986) 2 · Seiten 25 bis 48

Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



3

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
20. Jahrgang 1986
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
1086 Berlin, Krausenstr. 50, PSF 1213
Anschrift der Redaktion:
7027 Leipzig, PSF 14
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Eigenfoto H.-J. Voß, Dresden (S. 53); VEB Mantissa, Dresden (S. 55); Vignetten: R. Jäger aus *technikus* (S. 58/59)
Titelbild: Graphiken aus *Lapok*, Budapest gestaltet von H. Fahr, Berlin
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 17. Februar 1986
Auslieferungstermin: 20. April 1986

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben geeignet ab der angegebenen Klassenstufe

Gleichungen und komplexe Zahlen

Eine Anregung zur Beschäftigung mit komplexen Zahlen

Teil 1

Vor 500 Jahren, im Sommersemester 1486, hielt an der im Jahre 1409 eröffneten Universität zu Leipzig *Johannes Widmann* (geboren um 1460 in Eger, heute: Cheb/ČSSR) eine Algebra-Vorlesung in lateinischer Sprache. Es ist die älteste bekannte Vorlesung über die Gleichungslehre an einer deutschen Universität.
Ihre Vorlage, die sog. *Dresdner lateinische Algebra*, steht im Codex C80 der Landesbibliothek Dresden. Eine Leipziger Handschrift – Codex Lips. 1470 – ist das Kollegienheft eines Hörers dieser Vorlesung. Durch diese Handschriften sind wir ziemlich genau über den von Widmann vorgetragenen algebraischen Stoff unterrichtet. Widmann gelang es, eine ziemlich geschlossene Darstellung des algebraischen Wissens seiner Zeit zu geben.

Zur Algebra von al-Hwarizmi bis Vieta

Jene Zeit gehört zu der Periode des Übergangs von einer Wortalgebra (d. h.: ein algebraischer Text enthält keine Symbole, alles wird in ausführlichen Worten dargestellt) zu einer *symbolischen Algebra* (die sich einer Zeichensprache, einer Formelsprache bedient).
Als im 9. Jahrhundert der in Bagdad im *Haus der Weisheit* (eine Art Akademie nach antikem Vorbild) wirkende Mathematiker und Astronom *al-Hwarizmi* in einem seiner mathematischen Werke die Auflösung linearer und quadratischer Gleichungen (mit Zahlenkoeffizienten) lehrte, stellte er seine Überlegungen in Worten, ohne Symbole und Formeln, dar; die Beweise gab er geometrisch, durch Figuren.
Die von ihm verwendete Bezeichnung „alǧabr" für eine bestimmte Umformung quadratischer Gleichungen wurde später auf die Lehre von den Gleichungen ausgedehnt. So sprach im 11. Jahrhundert der persische Dichter und Wissenschaftler *al-Hayyam* (seit 1074 Leiter der Sternwarte in Isfahan) von den *Lösungsverfahren der Algebra* und von den Büchern und den Gepflogenheiten der *Algebraiker*. Al-Hwarizmis Schrift wurde im 12. Jahrhundert unter dem Titel *Algebra et Almucabala* ins Lateinische übersetzt. Allmählich verlor sich die zweite Hälfte des Titels (auch *almucabala* bezeichnet und eine bestimmte Vorschrift beim Lösen von Gleichungen), und man sprach von *Algebra* (so auch Widmann in seinem 1489 erschienenen deutschsprachigen Rechenbuch). Neben den Namen *Algebra et Almucabala* und *Algebra* (entstanden also aus gewissen Rechenvorschriften beim Lösen von Gleichungen) waren zeitweise auch andere üblich, wie *Ars rei et census*, *Arte della cosa* bzw. *Coß* (entstanden aus den Namen *res* und *census* für die ersten Potenzen der Unbekannten bzw. aus der italienischen Bezeichnung *cosa* für die Unbekannte; *ars* bzw. *arte* heißt *Kunst*).
Einen festen Platz innerhalb des mathematischen Unterrichts besaß die Algebra in Italien bereits seit dem 13. Jahrhundert (insbesondere durch eine Schrift von *Leonardo von Pisa*), im Deutschen Reich erst seit der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts.
Den Gelehrten vor 1450 war es nicht möglich gewesen, ihr algebraisches Wissen in prägnanter Form mitzuteilen. Es fehlten Rechensymbole, die Schreibweisen für die algebraische Unbekannte und für ihre Potenzen waren umständlich. Ab Mitte des 15. Jahrhunderts waren Algebraiker, wie *Regiomontanus* in Wien, *Widmann* in Leipzig, *Paciolo* in Venedig, *Chuquet* in Lyon, *Schreyber* und *Rudolff* in Wien, *Stifel* in Wittenberg, bestrebt, in ihren algebraischen Schriften eine algebraische Symbolik einzuführen. So finden wir in Widmanns Algebravorlesung die Zeichen + und –, ferner Symbole für die Unbekannte und einige ihrer Potenzen.
Als etwa 750 Jahre nach *al-Hwarizmis* Niederschrift seines algebraischen Werkes *Rafael Bombelli* in Bologna in seinem italienisch geschriebenen Buch mit dem Titel *L'algebra* (1572) die Lösung von bestimmten Gleichungen (mit einer Unbekannten) ersten, zweiten, dritten und vierten Grades (mit positiven Zahlenkoeffizienten) durch *Auflösungsformeln* und im Anschluß an *Diophants Arithmetika* (3. Jh.) die Lösung gewisser unbestimmter Gleichungen (mit zwei oder mehr Unbekannten) in gebrochenen und natürlichen Zahlen lehrte, konnte er in seiner Darstellung schon eine symbolische Ausdrucksweise verwenden. Die Potenzen $x, x^2, x^3, \ldots$ der Unbekannten x bezeichnete er mit $\overset{1}{\smile}, \overset{2}{\smile}, \overset{3}{\smile}, \ldots$. Die Operationen + und – wurden durch Abkürzen der Wörter *piu* und *meno* durch p. und m. gekennzeichnet. Für das Polynom $2x^2 - 20x + 22$ schrieb Bombelli also $2\overset{2}{\smile}$ m. $20\overset{1}{\smile}$ p. 22. Er verwendete die Abkürzung R. q. für Quadratwurzel (radice quadrata) und R. c. für Kubikwurzel (radice cubica). Für $\sqrt{6+\sqrt{3}} - 10$ schrieb er R. q. ⌊6 p. R. q. 3⌋ m. 10.

Die Koeffizienten der algebraischen Gleichungen waren auch im 16. Jahrhundert stets konkrete positive Zahlen. Erst der geniale Mathematiker *Vieta* konnte das symbolische Rechnen der zeitgenössischen Algebra mit der Verwendung von Buchstabenkoeffizienten in Verbindung bringen. Für Vietas Entwurf der *Neuen Algebra* (von 1591), der *symbolischen Algebra* und damit für die Entstehung einer mathematischen Formelsprache war auch seine Aneignung des Werkes von Diophant wichtig gewesen. Wenige Jahrzehnte nach Vieta identifizierte *Descartes* die *symbolische Algebra* mit der erstmalig von ihm als symbolische Wissenschaft gedeuteten Geometrie. Erst seit Descartes ist es übrigens üblich, für bekannte Größen die ersten Buchstaben, für die unbekannten Größen die letzten Buchstaben des Alphabets zu verwenden.

Quadratische Gleichungen

Bis zum Ende des 15. Jahrhunderts war Algebra im wesentlichen die Lehre von den algebraischen Gleichungen bis zum Grad 2.
Quadratische Gleichungen schreibt man heute meist in der Normalform

$$x^2 + px + q = 0. \tag{1}$$

Angenommen, x ist eine Lösung von (1). Dann gilt $x^2 + px = -q$,

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

(quadratische Ergänzung), also

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Hieraus folgt, vorausgesetzt $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ ist nicht negativ,

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \tag{2}$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: $x + \frac{p}{2} \geqq 0$.

Dann ist $\left|x + \frac{p}{2}\right| = x + \frac{p}{2}$ und aus (2) folgt

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \tag{3}$$

2. Fall: $x + \frac{p}{2} \leqq 0$.

Dann ist $\left|x + \frac{p}{2}\right| = -\left(x + \frac{p}{2}\right)$ und aus (2) folgt

$$x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \tag{4}$$

Ist also x eine Lösung von (1), so muß x notwendig von einer der Formen (3) und (4) sein. Durch Einsetzen von (3) bzw. (4) in (1) ist zu bestätigen, daß (3) und (4) der Gleichung (1) tatsächlich genügen. Aus den Lösungsformeln (3) und (4) erkennt man:

I. Ist p positiv und q negativ $\left(\text{somit } \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0\right)$, so gibt es genau eine positive Lösung (3).
II. Ist p negativ und q positiv und $\left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$, so gibt es zwei positive Lösungen.

III. Sind p und q beide negativ $\left(\text{somit } \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > \left(\frac{p}{2}\right)^2 > 0\right)$, so gibt es genau eine positive Lösung (3).
IV. Sind p und q beide positiv und $\left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$, so gibt es zwei negative Lösungen.

Bis ins 16. Jahrhundert setzte man bei der Betrachtung der Gleichungen positive Koeffizienten voraus und suchte positive Lösungen. Die quadratischen Gleichungen konnte man daher gar nicht in der Normalform (1) schreiben, denn eine positive Zahl kann nicht = 0 werden.

Neben den drei Gleichungstypen $x^2 = px$, $x^2 = q$, $x = q$ (lineare Gleichung) (mit positiven p, q), die jeweils genau eine positive Lösung besitzen ($x = p$, $x = \sqrt{q}$, $x = q$) hat man noch die folgenden drei Typen quadratischer Gleichungen zu unterscheiden (worin p, q positive Zahlen bedeuten):

(I) $x^2 + px = q$.
(II) $x^2 + q = px$.
(III) $px + q = x^2$.

Die Gleichung (I) hat die positive Lösung $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$.

Die Gleichung (III) hat die positive Lösung $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$.

Die Gleichung (II) hat für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$ die positive Lösung $x = \frac{p}{2}$, und für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$ die zwei positiven Lösungen

$$x_1 = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

$$x_2 = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 < q$ und jede positive Zahl x ist (wie man sich überlegen kann) stets $x^2 + q > px$. Es ist für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 < q$ also die Aufgabe, $x^2 + q = px$ in positiven Zahlen zu lösen, sinnlos. Das wußten die Algebraiker, und somit hatten sie bei der Betrachtung quadratischer Gleichungen keinen Grund, den zugrundegelegten Bereich positiver Zahlen (natürliche Zahlen, Brüche, positive irrationale Zahlen) in irgendeiner Weise zu erweitern. Eine Erweiterung wurde erst bei der Untersuchung kubischer Gleichungen notwendig.

Widman trug in seiner Algebravorlesung natürlich über die eben angegebenen sechs Formen von Gleichungen vor. Daß jede andere Gleichung bis zum Grad 2 durch die Umformungen *al-ǧabr* und *almukabalah* auf eine dieser 6 Normalformen gebracht werden kann, hatten die europäischen Mathematiker von al-Hwarizmi gelernt. Widmann gab auch Lösungsregeln für 18 kubische und biquadratische Gleichungen mit positiven Koeffizienten an. Dies waren jedoch nur solche Formen von Gleichungen 3. und 4. Grades, die auf Gleichungen vom Grad 2 zurückführbar sind oder darin bestehen, die dritte oder vierte Wurzel aus einer positiven Zahl zu ziehen.

Kubische Gleichungen

Was die kubischen Gleichungen mit positiven Koeffizienten betrifft, so lassen sich die zusammengesetzten Gleichungen 3. Grades, die kein von x freies Glied enthalten (also die 5 Typen $x^3 + rx^2 = px$, $x^3 + px = rx^2$, $x^3 = rx^2 + px$, $x^3 = px$, $x^3 = rx^2$) auf quadratische Gleichungen zurückführen, indem man die Gleichung durch die Unbekannte x dividiert. Außer der Gleichung $x^3 = q$ hat man dann noch folgende 13 Typen kubischer Gleichungen mit positiven Koeffizienten zu unterscheiden:

(1) $x^3 + px = q$,
(2) $x^3 + q = px$,
(3) $q + px = x^3$,
(4) $x^3 + rx^2 = q$,
(5) $x^3 + q = rx^2$,
(6) $q + rx^2 = x^3$,
(7) $x^3 + rx^2 + px = q$,
(8) $x^3 + rx^2 + q = px$,
(9) $x^3 + px + q = rx^2$,
(10) $rx^2 + px + q = x^3$,
(11) $x^3 + rx^2 = px + q$,
(12) $x^3 + px = rx^2 + q$,
(13) $x^3 + q = rx^2 + px$.

Diese insgesamt 25 Typen linearer, quadratischer und kubischer Gleichungen mit positiven Koeffizienten hatte bereits (natürlich noch in Worten ausgedrückt) *al-Hayyam* unterschieden. Für mehrere dieser Gleichungen konnte er die positiven Lösungen durch geometrische Konstruktionen mit Hilfe der Kegelschnitte (Kreis, Parabel, Hyperbel) angeben. Al-Hayyam bemühte sich auch, jedoch erfolglos, eine rechnerische Regel zur Lösung kubischer Gleichungen zu finden. Noch am Ende des 15. Jahrhunderts mußte *Pacioli* seine algebraischen Ausführungen mit der Bemerkung beenden, daß die rechnerische (algebraische) Lösung für kubische Gleichungen beim derzeitigen Stand der Wissenschaft genauso unmöglich wäre wie die Quadratur des Kreises. Anfang des 16. Jahrhunderts wurde endlich das ersehnte Lösungsverfahren gefunden. Dieses gelang einem Gelehrten an einer der größten und berühmtesten Universitäten jener Zeit, der 1119 gegründeten (ober)italienischen Universität Bologna. *Scipione del Ferro*, der seit 1496 (bis 1525) an der mathematischen Fakultät Geometrie und Arithmetik lehrte, entdeckte eine Methode zur Lösung von Gleichungen der Form $x^3 + px = q$ (p, q positiv). Er teilte sein Verfahren seinem Freund *Antonio Fior* mit. Dieser nutzte seine Kenntnisse, um 1535 dem Rechenmeister *Niccolo Tartaglia* (1499 bis 1557) in Venedig 30 Wettaufgaben, die auf kubische Gleichungen der angegebenen Form hinauslaufen, zu stellen. Tartaglia fand die Lösungen und überdies eine Methode zur Auflösung von Gleichungen der Form $x^3 = px + q$.

Im März 1539 teilte Tartaglia dem Privatgelehrten *Geronimo Cardano* (1501 bis 1576) in Mailand auf dessen Wunsch die Auflösungsregeln mit. In seinem im Jahre 1545 in Nürnberg erschienenen Buch (in lateinischer Sprache) mit dem Titel *Ars magna sive de regulis algebraicis* (Die große Kunst oder über die algebraischen Regeln) veröffentlichte Cardano, der seit 1543 Professor der Medizin in Padua war, die Lösungsmethoden für kubische Gleichungen.

H. Pieper

Einiges über regelmäßige und halbregelmäßige Polyeder

In diesem Beitrag wird dargestellt, wie man halbregelmäßige Polyeder aus regelmäßigen erzeugen kann.

Ein konvexes Polyeder heißt *regelmäßig*, wenn es von regelmäßigen und kongruenten n-Ecken begrenzt wird und in jeder Ecke gleich viele Kanten zusammenstoßen. Es läßt sich zeigen, daß nur fünf solche Körper, auch *platonische* Körper genannt, existieren. (Überlege, wie dieser Beweis über die Summe der Flächenwinkel der in einer Polyederecke zusammenstoßenden Polygonecken, die ja kleiner als 360° sein muß, zu führen ist! Die Bezeichnung platonische Körper geht auf den griechischen Gelehrten *Platon* zurück.)

Die folgende Übersicht stellt sie mit e ... Anzahl der Ecken, f ... Anzahl der Flächen, k ... Anzahl der Kanten, n ... Eckenzahl eines begrenzenden n-Ecks und p ... Anzahl der in einer Körperecke zusammenstoßenden n-Ecke vor.

Tabelle

Bezeichnung	e	f	k	n	p
regelmäßiges Tetraeder	4	4	6	3	3
regelmäßiges Oktaeder	6	8	12	3	4
regelmäßiges Hexaeder (Würfel)	8	6	12	4	3
regelmäßiges Ikosaeder	12	20	30	3	5
regelmäßiges Pentagondodekaeder	20	12	30	5	3

Die Bezeichnungen für die Körper kommen aus dem Griechischen und drücken die Anzahl der Flächen des jeweiligen Polyeders aus (tetra ... vier). Beim Pentagondodekaeder wird neben der Flächenzahl (dodeka ... zwölf) auch die Gestalt der Seitenflächen (Pentagon Fünfeck) beschrieben.

Faßt man die Mittelpunkte der Seitenflächen eines platonischen Körpers und nur diese als Eckpunkte eines konvexen Polyeders auf, so läßt sich jedem solchen Polyeder ein wiederum platonisches Polyeder zuordnen. Dieser als *Dualität* bezeichnete Zusammenhang zwischen zwei Polyedern ordnet also jeder Seitenfläche des Ausgangspolyeders einen Eckpunkt des entsprechend dualen Körpers zu und umgekehrt.

Die Pfeile in obiger Tabelle und Bild 1 (Dualität Tetraeder – Tetraeder sowie Oktaeder – Hexaeder) verdeutlichen dies.

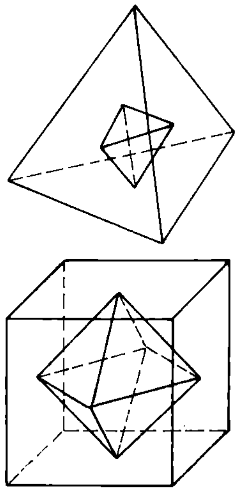
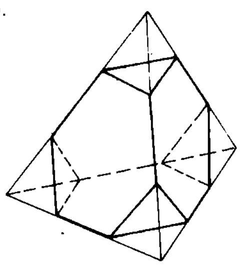


Bild 1

Demnach entspricht bei genauerem Hinschauen einer Polyederfläche mit n Ecken am dualen Körper eine Polyederecke mit $p = n$ in ihr zusammenstoßenden Seitenflächen, kurz Eckfigur genannt, und umgekehrt (vgl. hierzu die beiden rechten Spalten der Tabelle 1, und zeichne die Zuordnungspfeile ein).
Indem man z. B. in geeigneter Weise die Ecken (oder besser Eckpyramiden) der platonischen Körper abschneidet, gewinnt man halbregelmäßige konvexe Polyeder. So läßt sich aus dem regelmäßigen Tetraeder das abgestumpfte Tetraeder erzeugen, ein Polyeder, das von durchweg regelmäßigen n-Ecken, die aber nicht mehr zueinander kongruent sind, begrenzt wird (siehe Bild 2).

Bild 2



Halbregelmäßige Polyeder dieser Art, also mit regelmäßigen (aber nicht kongruenten) n-Ecken und kongruenten Eckenfiguren (die aber nicht regelmäßig sind, d. h., es stoßen unterschiedliche n-Ecke in den Polyederecken zusammen) heißen *eckengleich halbregelmäßig* oder *archimedisch*. Man kann sich leicht überlegen, daß neben den aus platonischen Körpern erzeugten archimedischen Polyedern unter anderem auch alle geraden Prismen mit quadratischen Mantelflächen und regelmäßigen n-Ecken als Grund- und Deckflächen (siehe Aufgabe 2) archimedisch sind. Allerdings ist zu beachten, daß für $n = 4$ der Würfel entsteht, der zwar auch Eigenschaften eines archimedischen Körpers besitzt, nach Definition jedoch platonisch und damit nicht archimedisch ist.
Wir wollen nun einen archimedischen Körper konstruieren, der durch Abschneiden von Ecken (bzw. Eckpyramiden) eines Würfels bzw. eines regelmäßigen Oktaeders entsteht. Verlaufen die entsprechenden Schnittflächen durch die Kantenmittelpunkte des platonischen Körpers, so erhält man in beiden Fällen das archimedische Mittelkristall (Bild 3).

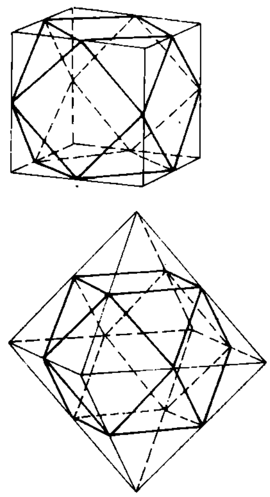


Bild 3

Also läßt sich, indem man jedem Eckpunkt dieser platonischen Körper geeignet eine Seitenfläche zuordnet, ein halbregelmäßiges Polyeder finden mit
$e = 12, f = 14, k = 24, n_1 = 3,$
$n_2 = 4$ und $p = 4$.
Aufgabe sei es nun, ein Polyeder zu finden, das auf dualem Wege aus Würfel und Oktaeder erzeugt werden kann und somit zum Mittelkristall dual sein muß. Duales Vorgehen würde bedeuten, jeder Seitenfläche des jeweiligen platonischen Körpers geeignet einen Eckpunkt zuzuordnen (oder besser: jeder Seitenfläche geeignet eine Pyramide aufzusetzen). Das Resultat müßte, ausgehend von den Werten des Mittelkristalls bei Anwendung der Dualität, ein Polyeder mit
$e = 14, f = 12, k = 24, n = 4,$
$p_1 = 3$ und $p_2 = 4$
sein. Dieses Polyeder existiert tatsächlich, es handelt sich um das Rhombendodekaeder (Bild 4).

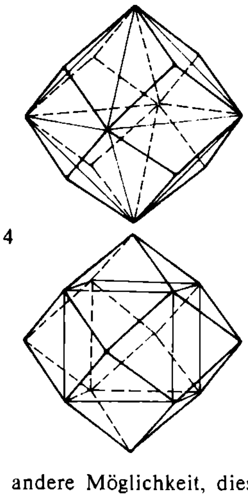
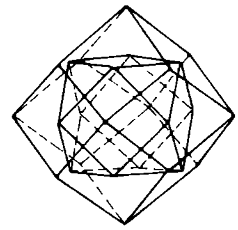


Bild 4

Eine andere Möglichkeit, dieses Polyeder aus platonischen Körpern zu konstruieren, findet ihr in der *alpha* 2/1982. Bild 5 zeigt die Dualität Rhombendodekaeder – Mittelkristall.

Bild 5



Körper wie das Rhombendodekaeder heißen *flächengleich halbregelmäßig* bzw. *dual-archimedisch*. Sie besitzen (vgl. Definition der archimedischen Polyeder) kongruente, nicht regelmäßige n-Ecke als Seitenflächen und regelmäßige, aber nicht kongruente Eckenfiguren. Geht man also von platonischen Körpern aus, so lassen sich archimedische Körper durch Abschneiden von Eckpyramiden, dual-archimedische Polyeder hingegen durch Aufsetzen von Pyramiden auf die Seitenflächen gewinnen. (Es sei bemerkt, daß auch halbregelmäßige Polyeder existieren, die sich so nicht erzeugen lassen. Man denke nur an die erwähnten Prismen.)
Eine wesentliche Eigenschaft der platonischen Polyeder ist die Tatsache, daß alle Eckpunkte auf einer Kugel (der sogenannten Umkugel) liegen und alle Seitenflächen eine weitere Kugel (die Inkugel) berühren.
Die archimedischen Körper besitzen nur noch eine Umkugel. Mit der Dualität folgt, daß die dual-archimedischen Polyeder lediglich eine Inkugel besitzen.
In der Natur treten uns neben platonischen insbesondere auch flächengleich halbregelmäßige Körper entgegen. Die Kristalle von Substanzen werden von ebenen Flächen begrenzt, die zumindest durch ihre Neigungen gegeneinander für solche Polyeder typisch sind. So kristallisiert z. B. der Diamant in der Form des dual-archimedischen Pyramidenoktaeders. Doch mehr über diese Körper erfahrt ihr in dem Büchlein *Reguläre und halbreguläre Polyeder* von Tiberiu Roman (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1968).

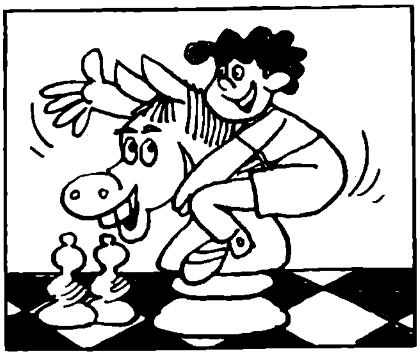
Aufgaben

▲1▲ Durch Abschneiden der Ecken des Würfels bzw. des regelmäßigen Oktaeders erhält man wie gezeigt das Mittelkristall. Welche beiden weiteren archimedischen Körper lassen sich noch auf diese Weise aus Würfel bzw. regelmäßigem Oktaeder konstruieren? Gib e, f, k, n_1, n_2 und p der gefundenen Polyeder an! (Beachte die Definition der archimedischen Körper!)

▲2▲ Versuche, allein durch die Dualität die zu den im Text erwähnten Prismen dualen (flächengleich halbregelmäßigen) Polyeder zu beschreiben!

(Lösungen siehe III. Umschlagseite!)

H. Martini/S. Schneider



Das Springer-Problem

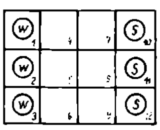
Die Aufgabe beim Springer-Problem besteht darin, die auf einem Schachbrett mit $m \times n$ Feldern aufgestellten weißen und schwarzen Springer in möglichst wenig Zügen auszutauschen. Dabei dürfen sich die Springer nicht schlagen, und auf jedem Feld darf nie mehr als ein Springer stehen. Es wird nicht verlangt, daß immer abwechselnd ein weißer und ein schwarzer Springer gezogen werden.

Das Springer-Problem wurde 1958 von *Henry E. Dudeney* formuliert und von *Robert F. Parkin* und *Ted Roth* diskutiert. Parkin und Roth gaben jeweils für 3 schwarze und 3 weiße Springer auf einem 3×4-Feld eine Lösung an. Roth zeigte durch Angabe einer 18-Zug-Lösung, daß Parkins 26-Zug-Lösung nicht minimal ist. *Harold Reiter* veröffentlichte 1983 eine Lösung in 16 Zügen und zeigte, daß sie minimal ist.

Dabei verwendete er graphentheoretische Mittel.

Ich möchte im folgenden die Grundidee bei der Verwendung der Graphentheorie zur Lösung des Springer-Problems erläutern und für alle Felder bis zum 5×5-Feld Lösungen angeben. Da mir nur sehr begrenzte Beweismittel zur Verfügung stehen, kann ich nicht bei allen Lösungen beweisen, daß sie minimal sind.

Bild 1

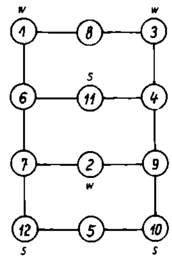


Betrachtet man die Aufstellung von 3 weißen (w) und 3 schwarzen (s) Springern auf einem 3×4-Feld (Bild 1) und versucht, durch Probieren eine Lösung zu finden, verliert man trotz des relativ kleinen Feldes schnell die Übersicht.

Wesentlich anschaulicher stellt dagegen ein Graph das Problem dar, in dem die einzelnen Felder die Knotenpunkte sind und zwei Knotenpunkte x und y genau dann durch eine Kante (x,y) verbunden sind, wenn man von x nach y (bzw. von y nach x) in einem Springerzug gelangen kann (Bild 2).

Außerdem wird durch w bzw. s gekennzeichnet, wo die weißen bzw. schwarzen Springer stehen. Ein Springerzug auf dem Brett von Feld x nach Feld y wird nun durch den Zug des Springers auf dem Graphen von Feld x entlang der Kante (x,y) nach Feld y veranschaulicht. Der Einfachheit halber wird für jeden Zug nur das Start- und das Zielfeld angegeben.

Bild 2



Die Lösung von H. Reiter ist folgende:
1 – 6, 6 – 7, 11 – 6, 6 – 1, 3 – 4, 4 – 11,
10 – 9, 9 – 4, 4 – 3, 2 – 9, 9 – 10, 7 – 6,
12 – 7, 7 – 2, 6 – 7, 7 – 12.

Es gibt noch mehrere andere Lösungen in 16 Zügen, aber keine, die den Austausch in weniger als 16 Zügen schafft.

An dieser Stelle sei bemerkt, daß *J. J. Gik* das Problem des Springeraustausches ebenfalls behandelt. Er verlangt dabei, daß immer abwechselnd ein weißer und ein schwarzer Springer gezogen werden. Für das 3×4-Feld mit der Aufstellung wie oben gibt er eine Lösung in 22 Zügen an. Dies ist jedoch nicht die Minimallösung, da der Austausch unter den geforderten Bedingungen in 18 Zügen zu schaffen ist (1 – 6, 10 – 9, 6 – 7, 9 – 4, 2 – 9, 11 – 6, 9 – 10, 6 – 1, 7 – 6, 4 – 9, 3 – 4, 12 – 7, 4 – 11, 7 – 2, 6 – 7, 9 – 4, 7 – 12, 4 – 3).

Das ist vermutlich auch die Mindestzugzahl.

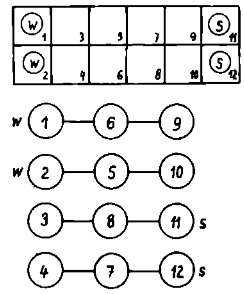
Es stellt sich nun die Frage nach der Verallgemeinerung des Problems auf beliebige Felder. Außerdem wurde bis jetzt stillschweigend vorausgesetzt, daß die Springer auf den gegenüberliegenden Grundlinien des Brettes angeordnet werden.

Grundsätzlich lassen sich die Springer beliebig aufstellen, es müssen nur gleich viel weiße und schwarze sein, und mindestens ein Feld muß selbstverständlich frei bleiben. Da sich aber der Graph für die Zugmöglichkeiten für das gleiche $m \times n$-Feld bei unterschiedlicher Aufstellung nicht ändert, sollen die Springer in Zukunft auf den beiden kürzeren (bei quadratischen Feldern auf zwei beliebig gegenüberliegenden) Grundlinien angeordnet werden, so daß auf einer Grundlinie nur gleichfarbige Springer stehen. Was die Verallgemeinerung auf beliebige Felder betrifft, so erkennt man, daß der Graph für größere Felder sehr schnell unübersichtliche Formen annimmt. Deshalb soll kein größeres als das 5×5-Feld untersucht werden.

Es werden also im folgenden alle $m \times n$-Felder betrachtet, für die $m, n \in N$, $m, n \leqq 5$ und trivialerweise $m, n > 0$ gilt. Man erkennt, daß Felder, für die $m < 3$ oder $n < 3$ gilt, für das Springer-Problem ungeeignet sind. Auf einem $1 \times n$-Feld könnte überhaupt kein Springerzug ausgeführt werden, der Graph bestünde aus n isolierten Knotenpunkten. Auf einem $2 \times n$-Feld mit $n \geqq 2$ werden laut Aufgabenstellung je zwei weiße und schwarze Springer auf den gegenüberliegenden Grundlinien aufgestellt. Durch einfache Beispiele lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

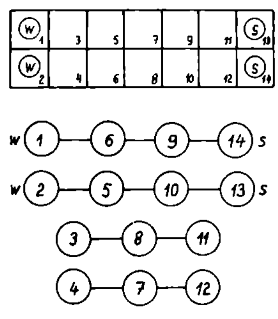
– n ist gerade (Beispiel $n = 6$, siehe Bild 3), dann kann ein Springer von einer Grundlinie niemals auf die gegenüberliegende gelangen, sondern nur auf die Reihe, die direkt vor der gegenüberliegenden Grundlinie liegt. Die Aufgabe ist dann unlösbar.

Bild 3



– n ist ungerade (Beispiel $n = 7$, siehe Bild 4), dann kann ein Springer von einer Grundlinie auf genau eine Art und Weise auf die gegenüberliegende gelangen. Da jedoch dort laut Voraussetzung auch ein Springer steht, müßten irgendwann einmal diese beiden Springer gemeinsam auf einem Feld stehen, was die Aufgabenstellung verbietet. Die Aufgabe ist auch dann unlösbar.

Bild 4



Es müssen jetzt also noch das 3×3-Feld, das 3×5-, das 4×4-, das 4×5- und das 5×5-Feld betrachtet werden.

Zunächst sei jedoch ein Satz vorangestellt, der zum Beweis der Minimalität einiger Zugfolgen dienen soll:

(I) Zu einem Feld F mit je n weißen und schwarzen Springern sei k eine natürliche Zahl ($k > 0$) derart, daß jeder Springer mindestens k Züge benötigt, um die gegenüberliegende Grundlinie zu erreichen. Dann ist $z = 2kn$ eine untere Schranke für die Lösung der Aufgabe auf F, d. h. in weniger als $2kn$ Zügen läßt sich die Aufgabe auf F sicher nicht lösen.

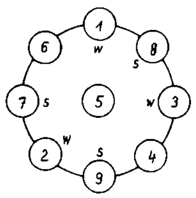
Die Gültigkeit des Satzes ist offensichtlich, denn wenn ein beliebiger Springer mindestens k Züge braucht, so brauchen $2n$ Springer insgesamt mindestens $2kn$ Züge, um die gegenüberliegende Grundlinie zu erreichen.

Das 3×3-Feld. Aufstellung und Graph siehe Bild 5. Interessant ist der isolierte Knotenpunkt 5 in der Mitte, er kann von keinem Feld aus erreicht werden.

Eine untere Schranke für die Zugzahl ist laut (I) $z = 6$. Betrachtet man jedoch die Aufstellung, so sieht man, daß die Springer in den Ecken in einem Zug jeweils nur das Mittelfeld der gegenüberliegenden Grundlinie erreichen. Es müßten dann zwei weiße bzw. zwei schwarze Springer auf einem Feld stehen. Demzufolge müssen mindestens ein weißer und ein schwarzer Springer zweimal bewegt werden. Die Mindestzugzahl beträgt demnach 8.

Bild 5

W 1	4	S 7
W 2	5	S 8
W 3	6	S 9

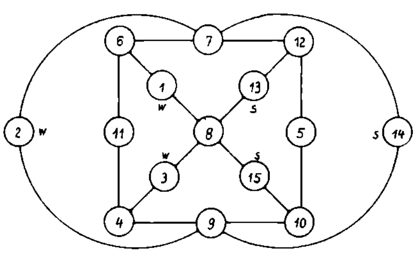


Eine Lösung dafür ist: 9 – 4, 1 – 6, 8 – 1, 2 – 9, 7 – 2, 3 – 8, 4 – 3, 6 – 7.

Das 3×5-Feld. Aufstellung und Graph siehe Bild 6.
Ohne Beweis soll eine (vermutlich minimale) Lösung in 14 Zügen angegeben werden (z ist hier 12):
14 – 7, 2 – 9, 7 – 2, 9 – 14, 15 – 10, 1 – 8, 8 – 15, 13 – 8, 8 – 1, 3 – 8, 8 – 13, 10 – 9, 9 – 4, 4 – 3.

Bild 6

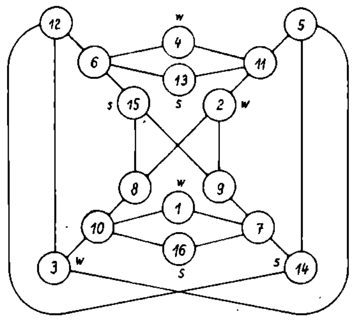
W 1	4	7	10	S 13
W 2	5	8	11	S 14
W 3	6	9	12	S 15



Das 4×4-Feld. Aufstellung und Graph siehe Bild 7.
Wegen (I) ist $z = 16$.
Eine Lösung in 16 Zügen, und also eine minimale, ist:
16 – 7, 1 – 10, 7 – 1, 10 – 16, 13 – 11, 4 – 6, 11 – 4, 6 – 13, 15 – 8, 2 – 9, 8 – 2, 9 – 15, 14 – 12, 3 – 5, 12 – 3, 5 – 14.

Bild 7

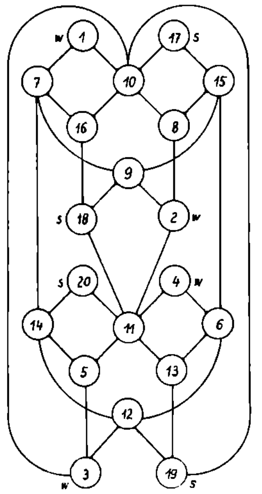
W 1	5	9	S 13
W 2	6	10	S 14
W 3	7	11	S 15
W 4	8	12	S 16



Das 4×5-Feld.
Aufstellung und Graph siehe Bild 8.
Hier ist $z = 16$, eine minimale Lösung ist:
18 – 9, 4 – 11, 11 – 18, 20 – 11, 11 – 4, 2 – 11, 11 – 20, 9 – 2, 19 – 12, 1 – 10, 10 – 19, 17 – 10, 10 – 1, 3 – 10, 10 – 17, 12 – 3.

Bild 8

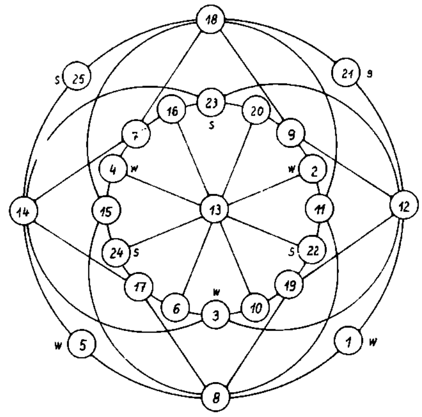
W 1	5	9	13	S 17
W 2	6	10	14	S 18
W 3	7	11	15	S 19
W 4	8	12	16	S 20



Das 5×5-Feld.
Aufstellung und Graph siehe Bild 9.
Es ergibt sich wegen (I) $z = 20$.
Eine vermutlich minimale Lösung ist:
2 – 11, 22 – 13, 13 – 2, 11 – 22, 4 – 15, 24 – 13, 13 – 4, 15 – 24, 3 – 14, 21 – 12, 12 – 3, 1 – 12, 12 – 21, 23 – 12, 12 – 1, 14 – 23, 25 – 14, 14 – 17, 5 – 14, 14 – 25, 17 – 14, 14 – 5 (22 Züge).

Bild 9

W 1	6	11	16	S 21
W 2	7	12	17	S 22
W 3	8	13	18	S 23
W 4	9	14	19	S 24
W 5	10	15	20	S 25

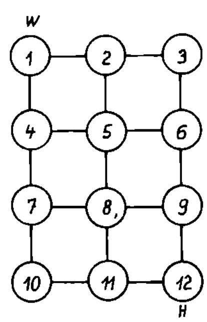


Zum Abschluß sei noch bemerkt, daß Harold Reiter in der schon mehrfach erwähnten Veröffentlichung das Springer-Problem für je 10 weiße und schwarze Springer auf einem 5×5-Feld behandelt.
Die weißen Springer stehen hierbei auf den Feldern 1 bis 10, die schwarzen auf den Feldern 16 bis 25 (vgl. Bild 9).
H. Reiter beweist, daß $z = 32$ eine untere Schranke ist und vermutet, daß die von ihm angegebene 36-Zug-Lösung minimal ist
(23 – 14, 1 – 12, 12 – 23, 21 – 12, 12 – 1, 3 – 12, 12 – 21, 14 – 3, 2 – 11, 22 – 13, 13 – 2, 11 – 22, 24 – 15, 4 – 13, 13 – 24, 15 – 4, 17 – 14, 8 – 17, 5 – 8, 14 – 5, 18 – 11, 9 – 18, 20 – 9, 25 – 14, 18 – 25, 7 – 18, 16 – 7, 6 – 13, 13 – 20, 10 – 13, 13 – 16, 19 – 10, 8 – 19, 11 – 8, 3 – 6, 14 – 3).

Schüler M. Nitsche

Eine Aufgabe von Prof. Dr. H.-J. Voß

▲ 2606 ▲ Auf dem abgebildeten Graphen spielen zwei Spieler mit zwei Steinen, einen Wolf W und einen Hasen H darstellend, das folgende Spiel:
Beginnend mit W werden beide Steine abwechselnd gezogen (ein Zug besteht im Übergang auf ein benachbartes Feld).



W gewinnt, wenn er nach spätestens 20 Zügen auf ein von H besetztes Feld gelangt, andernfalls hat H gewonnen.
In welcher der zwei Ausgangsstellungen a) und b) gewinnt W, und wieviel Züge benötigt er im ungünstigsten Fall, um H zu fangen?

a) W auf Feld 1, H auf Feld 12;
b) W auf Feld 1, H auf Feld 3.
Man untersuche dasselbe auf dem Graphen des Bildes 2 des nebenstehenden Beitrags von *M. Nitsche* mit der Ausgangsstellung: W auf Feld 1 und H auf Feld 10.

Kurzbiografie

Geboren am 10. 2. 1938 in Brehna, Kreis Bitterfeld
– Schulbesuch in Brehna und Bitterfeld, 1956 Abitur an der Oberschule II in Bitterfeld
– 1956 bis 1961 Mathematikstudium an der Technischen Universität Dresden, insbesondere bei den Professoren Heinrich, Landsberg, Lehmann, Opitz und Wentzel
– 1962 Beginn der Tätigkeit an der Technischen Hochschule Ilmenau als Assistent bei Prof. H. Sachs, seitdem Forschung auf dem Gebiet der Graphentheorie
– 1966 Promotion zum Dr. rer. nat.
– 1972 Promotion zum Dr. sc. nat.
– 1979 Ernennung zum Hochschuldozenten für *Mathematische Methoden der Operationsforschung* an die Technische Hochschule Ilmenau, Auszeichnung mit der Verdienstmedaille der DDR
– 1979/80 zehnmonatiges Zusatzstudium an der Lenin-Universität Kischinjow
– 1983 Berufung zum ordentlichen Professor für Algebra an die Pädagogische Hochschule *K. F. W. Wander* Dresden, etwa 50 Publikationen, darunter das gemeinsam mit Dozent Dr. rer. nat. habil. Hansjoachim Walther von der TH Ilmenau geschriebene Buch *Über Kreise in Graphen* (VEB DVW Berlin 1974). Gegenwärtig Arbeit an einem zweiten Buch über Graphentheorie.
Seit 1966 Mitglied der National-Demokratischen Partei Deutschlands, Mitarbeit in verschiedenen verantwortlichen Funktionen seiner Partei, gegenwärtig Mitglied der Kreisvorstände Dresden-Stadt der NDPD und der DSF.

Lebensweisheiten der Römer

Lang ist der Weg durch Belehrungen,
kurz und wirksam durch Beispiele.
Seneca d. J.

Nichts kann ohne Beispiel
richtig gelernt oder gelehrt werden.
Columella

Eine Aufgabe aus der Praxis

VEB MANTISSA

Der VEB MANTISSA Dresden fertigt neben anderen Erzeugnissen auch geometrische Körpermodelle für den Mathematikunterricht an den allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen der DDR. Ein beträchtlicher Anteil wird exportiert.
Zur Fertigung der Körpermodelle wird PVC-h-Tafelmaterial verwendet.
Die Herstellung von Pyramidenmodellen erfolgt nun so, daß zunächst Grund- und Seitenflächen zugeschnitten werden. Das Fügen an den Körperkanten wird durch sogenannte Gehrungsschrägen ermöglicht. Hierbei werden die Zuschnitte längs der Kanten durch Fräsen zueinander passend abgeschrägt. Dazu ist unter anderem erforderlich, die Größe des jeweiligen Winkels zwischen zwei benachbarten Seitenflächen zu kennen.

Aufgaben

Die Aufgabe, die Schnittwinkel zwischen zwei benachbarten Seitenflächen einer Pyramide zu bestimmen, ist für den Fall
▲ 1 ▲ einer geraden quadratischen Pyramide;
▲ 2 ▲ einer geraden rechteckigen Pyramide;
▲ 3 ▲ einer geraden dreieckigen Pyramide, deren Grundfläche von einem gleichseitigen Dreieck gebildet wird

durchzuführen.
Die Abmessungen sind wie folgt:
- Kantenlänge der Grundfläche bei quadratischer und dreieckiger Pyramide $a = 160$ mm
- Kantenlänge der Grundfläche bei der rechteckigen Pyramide $a = 160$ mm; $b = 240$ mm
- Seitenkantenlänge bei allen drei Pyramiden $s = 240$ mm.

Lösungen

▲ 1 ▲ Gerade quadratische Pyramide

Die Gerade SC ist Schnittgerade der beiden Ebenen, in denen die benachbarten Seitenflächen SBC bzw. SDC liegen (Bild 1). Die gesuchte Größe des Winkels zwischen den beiden Seitenflächen wird dadurch bestimmt, daß der Scheitelpunkt auf der Schnittgeraden SC liegt und die beiden Schenkel in jeweils einer der beiden Ebenen liegen und senkrecht auf SC stehen. E ist in Bild 1 so gewählt, daß die Schenkel des Schnittwinkels durch B bzw. D verlaufen. DBE ist ein gleichschenkliges Dreieck.

Aus Bild 2 entnimmt man $\sin\frac{\delta}{2} = \frac{e}{2y}$. (1)

Ferner ist $e = a\sqrt{2}$. Für y findet man unter Verwendung von Bild 1 zunächst $\sin\alpha = \frac{y}{a}$, also $y = a\cdot\sin\alpha$.

Bild 1

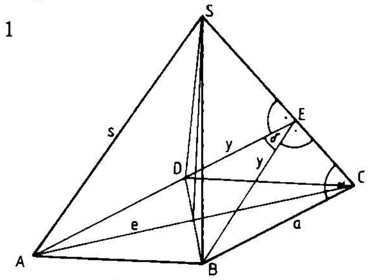
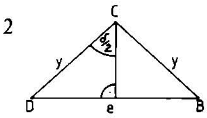


Bild 2



Setzen wir in (1) die gefundenen Terme für e und y ein, so ergibt sich:

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{a\cdot\sqrt{2}}{2\cdot a\cdot\sin\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2\cdot\sin\alpha} \qquad (2)$$

α läßt sich aus dem gleichschenkligen Dreieck BCS mit der Schenkellänge s und der Basislänge a ermitteln.

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{s}$$

Aus (2) ergibt sich hiermit:

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot s}{2\cdot\sqrt{s^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{s}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{s^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}} \qquad (3)$$

Setzt man in (3) für s und a die gegebenen Werte ein, so ist

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{240\text{ mm}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{240^2-80^2}\text{ mm}} = \frac{240}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{80^2\cdot(3^2-1^2)}} = \frac{3}{4}$$

und damit schließlich $\frac{\delta}{2} = 48{,}6°$,

also $\delta = 97{,}2°$

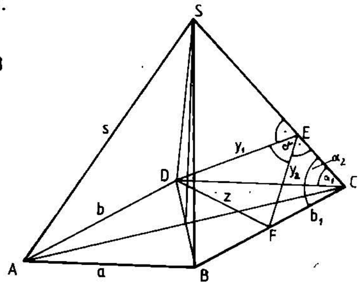
$\left(\text{denn offenbar ist } 0° < \frac{\delta}{2} < 90°\right)$.

▲2▲ Gerade rechteckige Pyramide

Wegen 1. betrachten wir nur solche Pyramiden, deren Grundfläche rechteckig, aber nicht quadratisch ist.

Wir versuchen, wie unter 1. zu verfahren. Wie man sich überlegen kann, gibt es auf SC keinen Punkt, der Scheitelpunkt des gesuchten Schnittwinkels ist und dessen Schenkel durch B und D gehen (Bild 3). δ liegt vielmehr in dem Dreieck DFE mit $F \neq B$.

Bild 3



Nach dem Kosinussatz gilt:

$$\cos\delta = \frac{y_1^2 + y_2^2 - z^2}{2y_1y_2} \qquad (1)$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck FCE ergibt sich

$$y_2 = b_1 \cdot \sin\alpha_2 \qquad (2.1)$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck DCE folgt

$$y_1 = a \cdot \sin\alpha_1 \qquad (2.2)$$

b_1 läßt sich berechnen, indem wir ausnutzen, daß die Strecke EC zu beiden rechtwinkligen Dreiecken gehört:

$$EC = b_1 \cdot \cos\alpha_2 = a \cdot \cos\alpha_1,$$

also $$b_1 = a \cdot \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} \qquad (3)$$

Aus den gleichschenkligen Dreiecken ABS bzw. BCS findet man

$$\cos\alpha_1 = \frac{a}{2 \cdot s}$$

bzw. $$\cos\alpha_2 = \frac{b}{2 \cdot s};$$

das liefert, in (3) eingesetzt

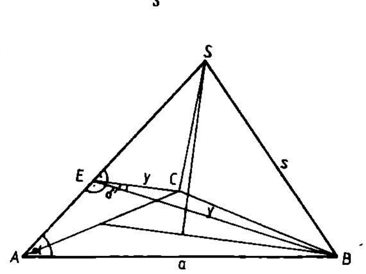
$$b_1 = a \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b}$$

Weiter gilt

$$\sin\alpha_1 = \frac{\sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{s}$$

und $$\sin\alpha_2 = \frac{\sqrt{s^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}}{s}$$

Bild 4



Nach Einsetzen in (2.1) und (2.2) erhalten wir

$$y_1 = \frac{a \cdot \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{s}$$

und $$y_2 = \frac{a^2\sqrt{s^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}}{bs} \qquad (4)$$

z ist leicht aus dem rechtwinkligen Dreieck DFC zu bestimmen:

$$z^2 = a^2 + b_1^2 = a^2 + \left(\frac{a^2}{b}\right)^2 \qquad (5)$$

Unter Verwendung von (4) und (5) folgt aus (1):

$$\cos\delta = -\frac{a \cdot b}{4\sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{s^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}} \qquad (6)$$

Aus (6) ist ablesbar, daß $\delta > 90°$ ist.

Setzt man die gegebenen Werte für a, b und s ein, so ergibt sich:

$$\cos\delta = -\frac{160\,\text{mm} \cdot 240\,\text{mm}}{4\sqrt{(240^2 - 80^2)\,\text{mm}^2} \cdot \sqrt{(240^2 - 120^2)\,\text{mm}^2}}$$

$$= -\frac{160 \cdot 240}{4\sqrt{80^2 \cdot (3^2 - 1) \cdot 240^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)}}$$

$$= -\frac{160 \cdot 240}{4 \cdot 80 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 240 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}}$$

$$\cos\delta = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{6}} \approx -0{,}2041$$

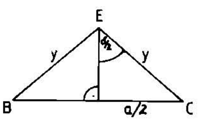
$$\delta = 180° - 78{,}2° = 101{,}8°$$

▲3▲ Gerade dreieckige Pyramide

Das Vorgehen kann wie unter ▲1▲ erfolgen.

Wir betrachten das gleichschenklige Dreieck BCE (Bild 5).

Bild 5



Es gilt

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{a}{2y} \qquad (1)$$

Für y findet man aus dem rechtwinkligen Dreieck ABE:

$$\sin\alpha = \frac{y}{a}, \text{ also } y = a \cdot \sin\alpha$$

Setzen wir das in (1) ein, so folgt:

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{a}{2 \cdot a \cdot \sin\alpha} = \frac{1}{2 \cdot \sin\alpha} \qquad (2)$$

$\sin\alpha$ bestimmen wir schließlich aus dem gleichschenkligen Dreieck ABS:

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{s}$$

Damit ist

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{s}{2 \cdot \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}$$

und für die gegebenen Werte folgt:

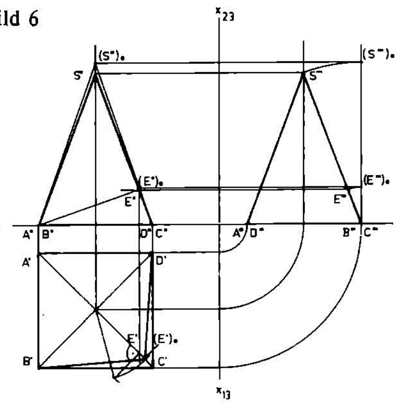
$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{240\,\text{mm}}{2\sqrt{240^2 - 80^2}\,\text{mm}} = \frac{240}{2 \cdot 80 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{4 \cdot \sqrt{2}} \approx 0{,}5303$$

$$\frac{\delta}{2} = 32{,}0°$$

$$\delta = 64{,}0°$$

Abschließend wird am Beispiel der quadratischen Pyramide angegeben, wie durch Mittel der darstellenden Geometrie der Schnittwinkel zweier Seitenflächen konstruktiv ermittelt werden kann (Bild 6).

Bild 6

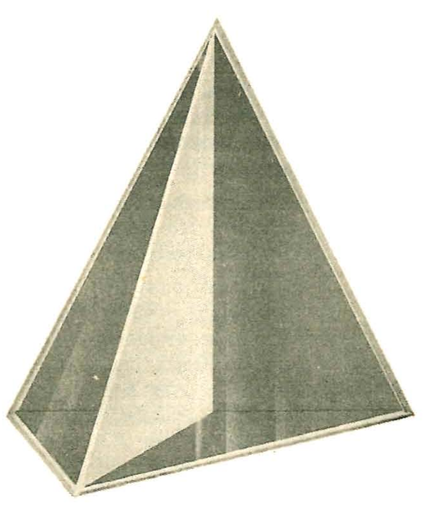


Beschreibung: Neben Grund- und Aufrißebene wird eine dritte Rißebene (Kreuzrißebene) benutzt, die auf jeder der beiden erstgenannten Ebenen senkrecht steht. Die gegebenen Längen der Pyramide werden im Maßstab 1 : 4 dargestellt.

In der Grundrißebene kann das Quadrat $A'B'C'D'$ unmittelbar gezeichnet werden, in der Aufrißebene zunächst das Dreieck $B''C''(S'')_0$, das eine Seitenfläche in wahrer Größe darstellt. Aus dem Kreuzriß entnimmt man den Winkel zwischen einer Seitenfläche und der Aufrißebene und kann damit den Aufriß $B''C''S''$ der betrachteten Seitenflächen angeben. Der Aufriß E'' des Scheitelpunktes E wird aus dem rechtwinkligen Dreieck $B''C''(E'')_0$ mit Hilfe des Kreuzrisses E'' gewonnen. Damit ist auch E' auf $S'C'$ bestimmt. Als Grundaufgabe der darstellenden Geometrie bleibt noch übrig, das Dreieck $B'E'D'$ in die Grundrißebene zu drehen, um die wahre Größe des gesuchten Schnittwinkels mit dem Scheitel in $(E')_0$ entnehmen zu können.

H. Giendarz/Ch. Knüpfer

Rechteckige Pyramide mit Einlegeteilen



„Sternchenaufgaben“

aus dem Lehrbuch Mathematik, Klasse 5

Aufgaben

▲1▲ Fülle die leeren Felder so aus, daß die Summen der Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte, von links oben nach rechts unten sowie von rechts oben nach links unten gleich sind!

13	8	12	1
	11	7	
3			15
16			

▲2▲ Von den 34 Schülern einer Klasse können 14 Schüler radfahren, 25 Schüler schwimmen und 9 Schüler beides.
Wieviel Schüler der Klasse können weder radfahren noch schwimmen?

▲3▲ Bei den folgenden Aufgaben sind Grundziffern durch * ersetzt. Versuche, die Aufgaben wiederherzustellen!

a) 5162 · ***
15486
***2
***2*
******4

b) 4*0* · ***
86*6
17***
****7
****

▲4▲ Auf einem Motorschiff fahren 100 Personen. 10 von ihnen sprechen weder Deutsch noch Russisch. 75 Personen sprechen Deutsch und 83 Russisch. Wieviel Personen sprechen sowohl Deutsch als auch Russisch?

▲5▲ Ein Hotel hat 30 Ein- und Zweibettzimmer mit zusammen 50 Betten. Wieviel Einbettzimmer und wieviel Zweibettzimmer hat das Hotel?

▲6▲ Wie lange braucht ein 500 m langer Zug zur Durchfahrt durch einen 500 m langen Tunnel mit einer Geschwindigkeit von 60 km pro Stunde?

▲7▲ Im Empfangsraum eines Gästehauses soll der Fußboden mit einem Steinmosaik verziert werden. Der Raum ist 12,30 m breit und 10,40 m lang. Das Mosaik soll in der Mitte des Raumes so liegen, daß an jeder Seite ein Streifen von 1,20 m keine Mosaikverzierung erhält. Wieviel Quadratmeter Mosaikfläche sind zu gestalten?

▲8▲ Sabines Aquarium ist 60 cm lang, 30 cm breit und 35 cm hoch. Der Wasserspiegel ist 7 cm vom oberen Rand entfernt. Sabine möchte die Jungfische aus ihrem Anzuchtbecken (Maße 20 cm, 12 cm, 15 cm) in das Aquarium geben. Um wieviel Zentimeter steigt der Wasserspiegel, wenn sie das Wasser mit hineingießt?

▲9▲ Ein Behälter für Regenwasser ist 1,2 m hoch und hat ein Fassungsvermögen von 0,2 m³. Wie viele Gießkannen mit 8 l Fassungsvermögen kann man aus ihm schöpfen, wenn er voll ist, aber $\frac{1}{5}$ seines Inhalts zurückbleiben soll?

▲10▲ Eine Schachtel enthält Kugeln verschiedener Farbe. Dabei haben Kugeln der gleichen Farbe auch die gleiche Masse.

a) 2 rote und 2 grüne Kugeln wiegen zusammen 18 g,
2 rote und 5 grüne Kugeln wiegen zusammen 30 g,
2 grüne und 3 schwarze Kugeln wiegen zusammen 29 g.

Wieviel wiegt eine schwarze Kugel?

b) 3 gelbe und 5 blaue Kugeln wiegen zusammen 58 g,
3 gelbe und 5 weiße Kugeln wiegen zusammen 58 g,
5 blaue und 6 weiße Kugeln wiegen zusammen 88 g.

Wieviel wiegt eine gelbe Kugel?

Zusammenstellung: J. Lehmann/Th. Scholl

Lösungen

▲1▲ Wegen 13 + 8 + 12 + 1 = 34 beträgt die Summe der Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte, von links oben nach rechts unten sowie von rechts oben nach links unten stets 34. Wegen 13 + 3 + 16 = 32 und 34 − 32 = 2 ist in das leere Feld der ersten Spalte 2 einzutragen. Wegen 2 + 11 + 7 = 20 und 34 − 20 = 14 ist in das leere Feld der zweiten Zeile 14 einzutragen. Wegen 1 + 14 + 15 = 30 und 34 − 30 = 4 ist in das leere Feld der letzten Spalte 4 einzutragen. Wegen 13 + 11 + 4 = 28 und 34 − 28 = 6 (gerechnet von links oben nach rechts unten) ist in das leere Feld 6 einzutragen. Wegen 3 + 6 + 15 = 24 und 34 − 24 = 10 ist in das leere Feld der dritten Zeile 10 einzutragen. Wegen 8 + 11 + 10 = 29 und 34 − 29 = 5 ist in das leere Feld der zweiten Spalte 5 einzutragen. Wegen 16 + 5 + 4 = 25 und 34 − 25 = 9 ist in das leere Feld der vierten Zeile 9 einzutragen.
(LB Kl. 5, S. 10, Aufg. 7)

▲2▲ Wegen 14 + 25 − 9 = 30 können 30 Schüler radfahren oder schwimmen. Wegen 34 − 30 = 4 können 4 Schüler weder radfahren noch schwimmen.
(LB Kl. 5, S. 11, Aufg. 20)

▲3▲ a) Die erste Grundziffer des zweiten Faktors ist 3, denn 5162 · 3 = 15486. Die zweite Grundziffer des zweiten Faktors könnte 1 oder 6 sein. Wegen 5162 · 6 > 30000 entfällt 6, denn das zweite Teilprodukt ist nur vierstellig. Da das Produkt auf die Grundziffer 4 endet, lautet das dritte Teilprodukt ***24. Die dritte Grundziffer des zweiten Faktors könnte 7 oder 2 sein. Wegen 62 · 7 = 434 entfällt 7, da das dritte Teilprodukt auf die Ziffernfolge 24, nicht aber auf 34 endet. Wir erhalten somit folgende Lösung:

5162 · 312
15486
5162
10324
1610544

b) Wegen 2 · 4 = 8 ist die erste Grundziffer des zweiten Faktors 2. Die vierte Grundziffer des ersten Faktors könnte 3 oder 8 sein. Da das dritte Teilprodukt auf die Grundziffer 7, aber kein Vielfaches von 8 auf die Grundziffer 7 endet, entfällt 8. Wegen 4303 · 2 = 8606 lautet der erste Faktor 4303. Die zweite Grundziffer des zweiten Faktors ist somit 4, denn 4303 · 4 = 17212. Von den Vielfachen von 3 endet nur 9 · 3 = 27 auf die Grundziffer 7. Deshalb ist die dritte Grundziffer des zweiten Faktors 9. Wir erhalten somit folgende Lösung:

4303 · 249
8606
17212
38727
1071447

(LB Kl. 5, S. 18, Aufg. 25)

▲4▲ 100 − 10 = 90
90 Personen sprechen Deutsch oder Russisch oder beide Sprachen.
75 + 83 − 90 = 68
68 Personen sprechen sowohl Deutsch als auch Russisch.
(LB Kl. 5, S. 43, Aufg. 29)

▲5▲ Angenommen, die 50 Betten sind nur auf Zweibettzimmer verteilt. Wegen 50 : 2 = 25 hätte das Hotel dann 25 Zweibettzimmer. Da das Hotel über 30 Zimmer insgesamt verfügt, müßten aus 5 Zweibettzimmern je ein Bett herausgenommen werden. Es verbleiben dann 20 Zweibett- und 5 + 5 = 10 Einbettzimmer.
(LB Kl. 5, S. 43, Aufg. 31)

▲6▲ Von der Einfahrt der Lokomotive in den Tunnel bis zur Ausfahrt des letzten Waggons aus dem Tunnel hat der Zug 500 m + 500 m = 1000 m, also 1 km zurückgelegt. Da die Geschwindigkeit 60 km pro Stunde, also 60 km pro 60 min beträgt, benötigt der Zug zur Durchfahrt durch den Tunnel 1 min.
(LB Kl. 5, S. 91, Aufg. 20)

▲7▲ Wir rechnen wie folgt:
2 · 1,20 m = 2,40 m;
12,30 m − 2,40 m = 9,90 m;
10,40 m − 2,40 m = 8,00 m;
9,90 m · 8,00 m = 79,20 m².
Es sind 79,20 m² Mosaikfläche zu gestalten.
(LB Kl. 5, S. 108, Aufg. 15)

▲8▲ Das Wasser aus dem Anzuchtbecken hat ein Volumen von 20 cm · 12 cm · 15 cm = 3600 cm³. Aus 60 · 30 · x cm² = 3600 cm³ folgt x = 2 cm. Der Wasserspiegel steigt um 2 cm.
(LB Kl. 5, S. 124, Aufg. 226)

▲9▲ 0,2 m³ = 200 l; 200 l : 5 = 40 l;
200 l − 40 l = 160 l; 160 : 8 = 20.
Man kann 20 Gießkannen mit 8 l Fas-

sungsvermögen aus dem Behälter für Regenwasser schöpfen, wenn $\frac{1}{5}$ seines Inhalts zurückbleiben soll.
(LB Kl. 5, S. 124, Aufg. 25)

▲10▲ a) 3 grüne Kugeln wiegen zusammen $30\,g - 18\,g = 12\,g$, eine grüne Kugel wiegt somit $12\,g : 3 = 4\,g$, 2 grüne Kugeln also $2 \cdot 4\,g = 8\,g$.
3 schwarze Kugeln wiegen zusammen $29\,g - 8\,g = 21\,g$, 1 schwarze Kugel wiegt somit $21\,g : 3 = 7\,g$.
b) 3 gelbe und 5 blaue Kugeln wiegen zusammen genausoviel Gramm wie 3 gelbe und 5 weiße Kugeln. Deshalb besitzen die blauen und die weißen Kugeln die gleiche Masse.
11 blaue Kugeln wiegen somit 88 g, 1 blaue Kugel 8 g, 5 blaue Kugeln $5 \cdot 8\,g = 40\,g$.
3 gelbe Kugeln wiegen $58\,g - 40\,g = 18\,g$, eine gelbe Kugel wiegt $18\,g : 3 = 6\,g$.
(LB Kl. 5, S. 128, Aufg. 53)

Flächen und nochmals Flächen

▲1▲ Welche der Figuren des Bildes 1 sind Trapeze?

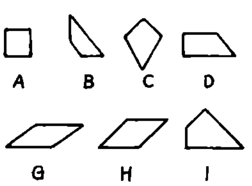


Bild 1

▲2▲ Mit welcher bzw. welchen der folgenden Formeln kann man die Fläche der einzelnen Figuren aus Bild 2 ermitteln?
a) $A = a^2$ b) $A = a \cdot b$
c) $A = \frac{a + c}{2} \cdot h$ d) $A = a \cdot h$
e) $A = \frac{a \cdot h}{2}$

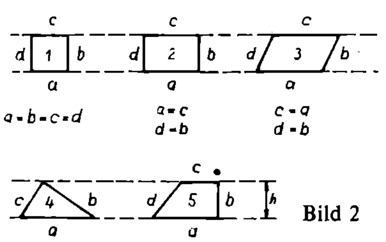
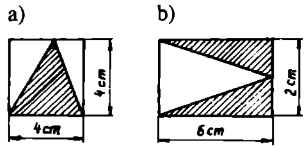


Bild 2

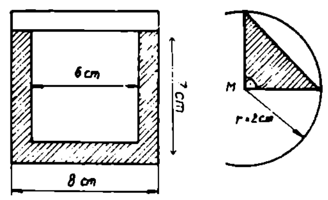
▲3▲ Der Flächeninhalt eines Rechtecks soll $16\,m^2$ und der Umfang desselben Rechtecks 16 m betragen. Ermittle die Seitenlängen a und b eines solchen Rechtecks!

▲4▲ Ermittle jeweils den Flächeninhalt der schraffierten Fläche (Bild 3)!

Bild 3 a) b)

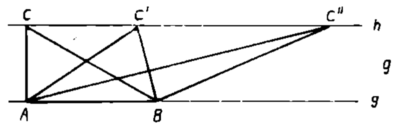


c) d)



▲5▲ Welches der Dreiecke ($\triangle ABC$; $\triangle ABC'$; $\triangle ABC''$) hat den größten Flächeninhalt (Bild 4)?

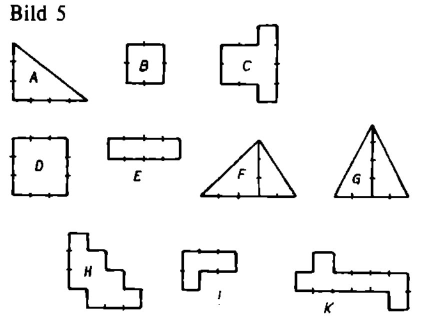
Bild 4



▲6▲ Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b betrage $36\,cm^2$.
a) Gib drei mögliche Seitenlängen für ein Rechteck mit solchem Flächeninhalt an!
b) Versuche, Seitenlängen a und b zu ermitteln, wobei ein Rechteck mit dem Flächeninhalt $36\,cm^2$ den kleinsten Umfang hat.

▲7▲ Welche Flächen (Bild 5) haben den gleichen Flächeninhalt?

Bild 5



▲8▲ Eine Fläche ist aus x Quadraten mit je $1\,dm^2$ Flächeninhalt zusammengesetzt. Dieselbe Fläche kann man mit 400 Quadraten (Flächeninhalt jeweils $1\,cm^2$) bedecken. Ermittle x!

▲9▲ Der Umfang eines Rechtecks beträgt 20 cm.
Kann der Flächeninhalt dieses Rechtecks
a) $30\,cm^2$ b) $25\,cm^2$ c) $10\,cm^2$
betragen?

▲10▲ Der Flächeninhalt eines Rechtecks beträgt $144\,cm^2$.
Kann der Umfang dieses Rechtecks
a) 290 cm b) 1152,5 cm c) 10 cm
d) 48 cm betragen?

▲11▲ Wie verändert sich der Umfang bzw. der Flächeninhalt eines Rechtecks, wenn man die Seitenlängen
a) halbiert b) verdreifacht?

▲12▲ Der Umfang des Rechtecks $ABCD$ beträgt 42 cm. Ermittle den Flächeninhalt des Rechtecks, wenn bekannt ist, daß die Länge der einen Rechtecksseite halb so groß ist wie die der anderen!

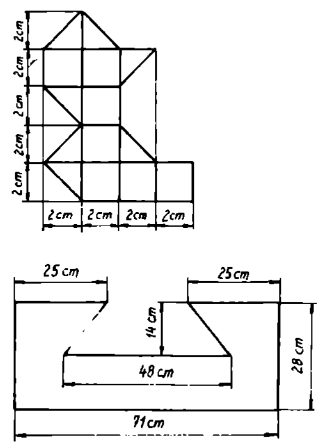
▲13▲ Die Familien Paul, Schmidt und Schnurpfeil bestimmen die Flächen ihrer rechteckigen Gärten. Für Länge und Breite werden folgende Werte ermittelt:

	Länge	Breite
Schnurpfeil	12,2 m	41,6 m
Paul	23,7 m	11,8 m
Schmidt	31,7 m	21,6 m

Als Flächeninhalt werden nachstehende Werte angegeben:
Schnurpfeil: $508\,m^2$; Schmidt $648{,}72\,m^2$;
Paul: $279{,}66\,m^2$.
Was sagst du dazu?

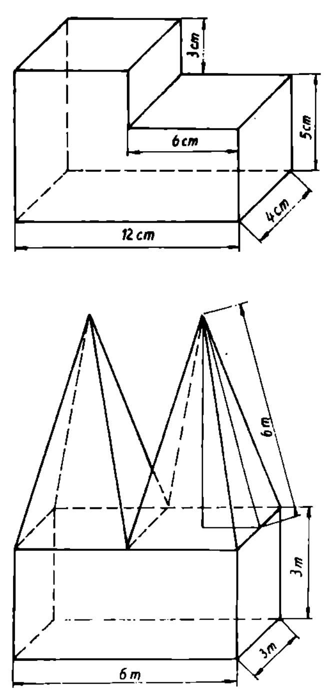
▲14▲ Ermittle den Flächeninhalt der Figuren (Bild 6)!

Bild 6



▲15▲ Ermittle die Oberfläche der Körper (Bild 7)!

Bild 7



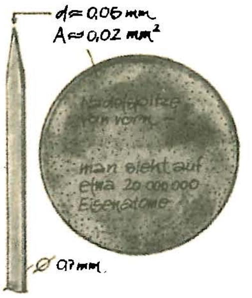
L. Flade/H. Knopf

Physik – auf die Spitze getrieben

Verlieren kann man sie schnell,
sie wiederzufinden ist mühsam.
Manche liegen lange auf dem Teppich,
bis sie uns daran erinnern, daß
man besser Hausschuhe anziehen sollte:
Stecknadeln

Wenn man sich die kleinen glänzenden Dinger unter einer guten Lupe betrachtet, wird man enttäuscht. Die gefürchtete Spitze ist gar nicht spitz, eher sieht sie wie ein winziger Stumpf aus. Dessen Durchmesser dürfte kaum kleiner als 0,05 mm sein. Die zugehörige Kreisfläche besitzt dann einen Inhalt von rund 0,002 mm². Auf ihr befinden sich nicht weniger als 20 Millionen Eisenatome (Bild 1).

Bild 1

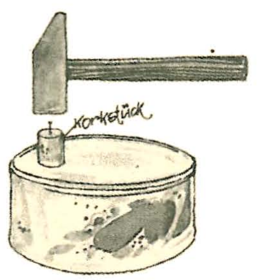


Freilich, zum Stechen langt dieser Stumpf allemal. Wenn nur eine Kraft von 0,1 kg (etwa 1 N) auf die Nadel wirkt, entsteht unter der Spitze ein Druck von

$$p = \frac{0{,}1\ \text{kp}}{0{,}00002\ \text{cm}^2} = 5000\ \text{at}\quad (\approx 500\ \text{MPa}).$$

Damit kann man nicht nur Papier durchstoßen, sondern sogar das Blech einer Konservendose. Der Trick dabei: Die Nadel wird durch einen Korken gesteckt. Der verhindert, daß sie sich bei dem erforderlichen Schlag mit einem Hammer seitlich wegbiegt (Bild 2).

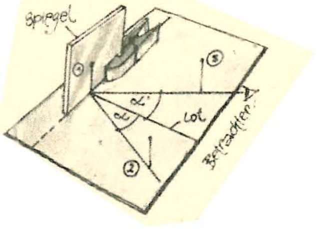
Bild 2



Befindet sich das Loch etwa in der Mitte des Dosenbodens, können wir aus der Konservenbüchse eine Lochkamera basteln. Dazu bekleben wir die große Öffnung mit Transparentpapier. Besonders gute Abbildungen erzeugt die Lochkamera von sehr hellen Objekten (z. B. Lampen und Fenstern).

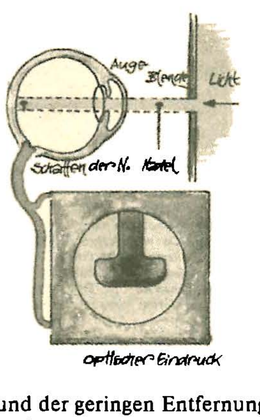
Bleiben wir noch etwas in der Optik. Mit Hilfe von Stecknadeln läßt sich das wichtige Reflexionsgesetz (Physiklehrbuch Kl. 6, S. 95 bis 96) bestätigen. Entsprechend Bild 3 stellen wir einen kleinen Spiegel auf ein Stück Pappe, dazu die Nadeln (1) und (2). Mit Nadel (3) visieren wir das Spiegelbild von (2) so an, daß es sich mit (1) deckt. An der gefundenen Stelle wird Nadel (3) in die Pappunterlage gesteckt. Nun haben wir drei Einstichstellen. Sie markieren den Strahlenverlauf (2) – (1) – (3). Wenn wir ihn mit einem Bleistift nachzeichnen, ergänzen wir auch das Einfallslot. Dadurch lassen sich Einfallswinkel α und Reflexionswinkel α' messen und vergleichen.

Bild 3



Noch einmal zurück zu unserer Lochkamera. Sie ergab umgekehrte, seitenvertauschte Bilder. Auch das Auge kann nichts anderes. Daß uns die Welt nicht nur auf dem Kopf zu stehen scheint, ist Gewohnheitssache. Im Bewußtsein wird das verkehrte Netzhautbild auf die Füße gestellt, ohne daß wir es noch bemerken würden. Wenn es gelänge, auf der Netzhaut ein aufrechtes Bild hervorzurufen, müßten wir es demnach verkehrt herum sehen! Die Nadel verhilft uns zu diesem Erlebnis. Zunächst stechen wir mit ihr ein Loch in eine Postkarte. Durch die kleine Öffnung sehen wir die Umgebung aufrecht. Nun schieben wir die Stecknadel mit der Kuppe von unten her zwischen Auge und Lochblende. Wir sehen freilich etwas anderes: Die Nadel wandert von oben her ins Bild, mit der Kuppe nach unten (Bild 4).

Bild 4



Aufgrund der geringen Entfernung (Gegenstandsweite) der Nadel vom Auge wird das Objekt nicht mehr reell von der Augenlinse auf der Netzhaut abgebildet. Das vom Loch kommende Licht wirft jedoch einen aufrechten Nadelschatten auf die Netzhaut. Unser aufs Umdrehen der optischen Eindrücke programmiertes Bewußtsein täuscht sich diesmal: Wir sehen die Nadel bzw. ihren Schatten verkehrt.

„Eine Nadel in einem Heuhaufen suchen" ist eine sprichwörtlich mühevolle Arbeit. Als man diesen Vergleich erdachte, wußte man noch nichts von starken Magneten. Solch ein Gerät erleichtert die Suche beträchtlich, wenn die Nadel aus Stahl besteht. Es ist freilich nur zum Teil richtig, wenn man meint, daß der Magnet die Nadel anzieht. Auch umgekehrt wirkt die Anziehungskraft, von der Nadel zum Magneten. Die Nadel wird nämlich im Magnetfeld selbst zu einem Magneten mit Nord- und Südpol. Deshalb kann man an sie noch eine zweite anhängen, vielleicht sogar noch eine dritte. Welche Länge die Nadelmagnetkette erhält, hängt vor allem von der Stärke des Dauermagneten ab.

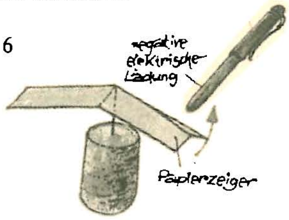
Streicht man mit dem Pol eines Magneten mehrmals in gleicher Richtung über eine Nadel aus gehärtetem Stahl, wird sie dauerhaft magnetisiert. Sie ist jetzt als „Kompaßnadel" zu verwenden. Damit sie sich leicht drehen kann, lassen wir sie auf Wasser schwimmen. Als Schwimmweste erhält sie ein Stück Kork oder Schaumpolystyrol. Die Nadel dreht sich sogleich in Nord-Süd-Richtung, wenn kein Magnet oder ein größeres Eisenstück in der Nähe ist. Parallel zur schwimmenden Nadel, in möglichst geringem Abstand, legen wir einen Metalllöffel über das Gefäß. Nun drücken wir die Kontakte einer Flachbatterie 2 s bis 3 s lang auf den Löffel (Bild 5). So stellen wir einen Kurzschluß her, ein starker elektrischer Strom fließt durch den Löffel. Die Nadel beginnt sich zu drehen und versucht, sich senkrecht zum Löffel zu stellen. Die Drehrichtung hängt von der Stromrichtung ab (Batteriepole vertauschen!).

Bild 5

Dieses Experiment wurde (mit anderen Geräten) erstmals 1820 von dem dänischen Forscher Oersted durchgeführt. Seitdem weiß man, daß elektrischer Strom und Magnetfeld untrennbar miteinander zusammenhängen. So begann die Erforschung elektromagnetischer Erscheinungen, ohne

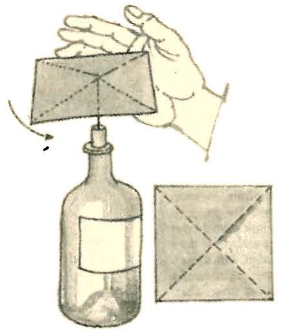
die unsere gesamte moderne Technik nicht existieren würde.
Magnetische Felder wirken durch Kräfte nur auf wenige Stoffe ein. Ein Stück Papier läßt sich mit einem Magneten nicht anheben. Mit Hilfe unserer Stecknadel können wir jedoch auch eine Art Kompaß für elektrische Felder bauen. Die Nadel hat hierbei die wichtige Funktion, die Reibung beim Drehen des Zeigers gering zu halten. Die „Kompaßnadel" besteht aus einem etwas gewinkelten Papierstreifen (längs und quer falten). Entsprechend Bild 6 hält sie sich leicht beweglich auf dem „Spitzenlager". Kommen wir mit einem elektrisch geladenen Körper, z. B. einem an Tuch geriebenen Plaststab, in die Nähe, so richtet sich der Papierzeiger aus. Er dreht sich bei einer Bewegung des geladenen Körpers folgsam hinterher.

Bild 6



Ganz anders, fast wie durch Zauberei, wird die Drehung des Papierblattes in Bild 7 erzeugt. Es besteht aus besonders leichtem Papier (z. B. Geschenkpapier). Entlang der Diagonalen wird das Papierquadrat gefaltet und dann auf der Nadelspitze drehbar abgelegt. Beschwörend führen wir eine Hand seitlich heran. Das Papier gehorcht. Es beginnt sich zu drehen, linksherum vor der rechten Hand, entgegengesetzt, wenn sich die linke Hand nähert.

Bild 7



Ursache dieses Effekts ist die an der warmen Handfläche entstehende Wärmeströmung der Luft. Sie erfolgt sowohl nach oben, als auch vom Handballen zu den Fingern hin, die eine etwas geringere Temperatur haben. So entsteht immer eine gleichartige Drehrichtung, je nach der benutzten Hand.
Fast könnte man über alledem die Stecknadel vergessen. Um sie und damit anzustellende Experimente ging es heute. Sorgen wir zum Schluß dafür, daß die physikalisch weniger Interessierten nicht nachträglich an unsere Versuche dadurch erinnert werden, daß sie mit einer vergessenen Nadel unverhofft Bekanntschaft schließen!

D. Wrobel
aus: technikus 1/81

Zum Berechnen algebraischer Produkte mit dem Schulrechner SR 1

Im Bereich Q_+ der gebrochenen Zahlen werden Divisionsaufgaben auf Multiplikationsaufgaben zurückgeführt. Deshalb sollen Aufgaben mit gebrochenen oder rationalen Zahlen, in denen nur Multiplikations- und Divisionszeichen auftreten, *algebraische Produkte* genannt werden. Mit dem Schulrechner SR 1 haben wir gelernt, Aufgaben des Typs $\frac{a}{b \cdot c}$ zu lösen (dabei sind a, b und c Dezimalbrüche), indem wir den Ablaufplan

$\boxed{a}\ \boxed{\div}\ \boxed{b}\ \boxed{\div}\ \boxed{c}\ \boxed{=}$

aufstellen und danach die Tasten des SR 1 betätigen. Von der Richtigkeit dieses Vorgehens überzeugten wir uns im Unterricht an einfachen Beispielen. In dem vorliegenden Beitrag soll diese Folge von Rechenoperationen begründet und weitere Ablaufpläne sollen aufgestellt werden.
Führt man bei zusammengesetzten Aufgaben nur Multiplikationen und Divisionen (keine Additionen oder Subtraktionen!) aus, so wird die Vorrangautomatik des SR 1 („Punktrechnung vor Strichrechnung") nicht wirksam. Andererseits besitzt der SR 1 keine Klammertasten, er löst derartige Aufgaben von „links nach rechts", wie das folgende Beispiel zeigt:

$\boxed{16}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{4}\ \boxed{\times}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$,

↗	↗	↗	↗	↗	↗	↗	↗
16	16	2	8	4	2	3	6

womit auf dem SR 1 die Aufgabe $((16:2):4) \cdot 3$ realisiert wird.
Mit der Festsetzung *Algebraischer Produkte, die von links nach rechts zu lösen sind, werden klammerfrei geschrieben* lautet diese Aufgabe $16:2:4\cdot 3$.
Der eingangs erwähnte Aufgabentyp $\frac{a}{b \cdot c}$ mit $b \neq 0$, $c \neq 0$, $a, b, c \in Q$ läßt sich, indem der Bruchstrich durch ein Divisionszeichen ersetzt wird, umformen zu $a:(b \cdot c)$. Hier ist zunächst $b \cdot c$ zu berechnen und danach ist a durch das Produkt $b \cdot c$ zu dividieren. Die Klammer darf nach der getroffenen Festsetzung *nicht* weggelassen werden. Nach dem angegebenen Ablaufplan muß gelten:

$$a:(b \cdot c) = a:b:c.$$

Dieses Beispiel veranlaßt uns, Regeln für das Auflösen von Klammern in algebraischen Produkten zu suchen.
Es seien a, b, c beliebige gebrochene Zahlen, aber $b \neq 0$, $c \neq 0$.
Es gibt dann natürliche Zahlen a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, so daß

$$a = \frac{a_1}{a_2},\ b = \frac{b_1}{b_2},\ c = \frac{c_1}{c_2} \text{ ist.}$$

Erinnert werden soll noch an die Multiplikation und Division in Q_+. Es ist

$$a \cdot b = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1 \cdot b_1}{a_2 \cdot b_2} \text{ und}$$

$$a : b = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_1 \cdot b_2}{a_2 \cdot b_1}.$$

(Eigentlich ist $a \cdot b$ die Menge von Brüchen, die auf dem Zahlenstrahl den gleichen Punkt darstellen, weil wir die Brüche durch Erweitern und Kürzen verändern können!
Analoges gilt für $a:b$.)
Es gelten nun folgende Formeln:

(1) $a \cdot (b:c) = a \cdot b : c$
(2) $a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$
(3) $a : (b:c) = a : b \cdot c$
(4) $a : (b \cdot c) = a : b : c$

Beweis:

(1) Es ist $a \cdot (b:c) = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1 \cdot c_2}{b_2 \cdot c_1}$
$= \frac{a_1 \cdot b_1}{a_2 \cdot b_2} \cdot \frac{c_2}{c_1} = a \cdot b : c$,

(2) $a \cdot (b \cdot c) = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1 \cdot c_1}{b_2 \cdot c_2}$
$= \frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1}{a_2 \cdot b_2 \cdot c_2} = \frac{a_1 \cdot b_1}{a_2 \cdot b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2}$
$= a \cdot b \cdot c$,

(3) $a : (b:c) = \frac{a_1}{a_2} : \frac{b_1 \cdot c_2}{b_2 \cdot c_1}$
$= \frac{a_1 \cdot b_2 \cdot c_1}{a_2 \cdot b_1 \cdot c_2} = \frac{a_1 \cdot b_2}{a_2 \cdot b_1} \cdot \frac{c_1}{c_2}$
$= a : b \cdot c$,

(4) $a : (b \cdot c) = \frac{a_1}{a_2} : \frac{b_1 \cdot c_1}{b_2 \cdot c_2}$
$= \frac{a_1 \cdot b_2 \cdot c_2}{a_2 \cdot b_1 \cdot c_1} = \frac{a_1 \cdot b_2}{a_2 \cdot b_1} \cdot \frac{c_2}{c_1}$
$= a : b : c$.

Unsere Überlegungen fassen wir zu zwei Regeln zusammen:
1. *In algebraischen Produkten darf eine Klammer, vor der ein Multiplikationszeichen steht, weggelassen werden.*
2. *In algebraischen Produkten darf eine Klammer, vor der ein Divisionszeichen steht, nur weggelassen werden, wenn gleichzeitig in der Klammer die Divisionszeichen durch Multiplikationszeichen und umgekehrt die Multiplikationszeichen durch Divisionszeichen ersetzt werden.*
Diese Regeln bleiben richtig, wenn a, b, c rationale Zahlen mit $b \neq 0$, $c \neq 0$ sind, da

beim Übergang von Q_+ zu Q die Beträge zu multiplizieren oder zu dividieren sind und anschließend das Vorzeichen festgelegt wird. In den Formeln (1) bis (4) haben aber die auftretenden Terme genau dann ein negatives Vorzeichen, wenn eine oder drei der Zahlen a, b, c negativ sind!

Wegen der Gültigkeit des Kommutativgesetzes der Multiplikation in Q gilt auch:

(1') $a \cdot (b : c) = a \cdot b : c$
$= b \cdot a : c = a : c \cdot b = b : c \cdot a,$

(2') $a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$
$= a \cdot c \cdot b = b \cdot c \cdot a = b \cdot a \cdot c$
$= c \cdot a \cdot b = c \cdot b \cdot a,$

(3') $a : (b : c) = a : b \cdot c$
$= a \cdot c : b = c \cdot a : b = c : b \cdot a$

(4') $a : (b \cdot c) = a : b : c = a : c : b.$

Für das Rechnen im Zahlbereich Q sind diese Umformungen naheliegend.

Nun beachten wir, daß der SR 1 (so wie jeder andere Rechner) nur mit endlich vielen Zahlen *arbeitet*. Es bezeichne Q_S die Menge der rationalen Zahlen, mit denen der Schulrechner *arbeitet*. Für $x \in Q_S$ und $x \neq 0$ gilt

$1 \cdot 10^{-99} \leqq |x| \leqq 9{,}99\,999\,994 \cdot 10^{99}$.

Offenbar besteht die Beziehung $Q_S \subset Q$. In Q_S brauchen Assoziativgesetz und Kommutativgesetz für Addition und Multiplikation nicht mehr (streng) erfüllt zu sein (siehe *alpha* 1985, Heft 2, S. 32 bis 34). So ist z. B.

$5{,}23\,455 : 16\,437 \cdot 32\,874 : 1{,}04\,691$
$= 9{,}9\,999\,999$ und
$5{,}23\,455 : 1{,}04\,691 \cdot 32\,874 : 16\,437 = 10$
für
$$\frac{5{,}23\,455 \cdot 32\,874}{1{,}04\,691 \cdot 16\,437} = 10.$$

Wenn die Zahlen nicht sehr große oder sehr kleine Beträge haben, erhält man immer (bis auf eventuelle Rundungsfehler) das gleiche Ergebnis unabhängig davon, welche der äquivalenten Formeln benutzt werden. Bei Zahlen mit sehr großen oder sehr kleinen Beträgen ist das nicht mehr richtig, und es kommt u. U. wesentlich darauf an, in welcher Reihenfolge die Rechnung organisiert wird.

So ist für $a = 1 \cdot 10^{-50}$,
$b = 1 \cdot 10^{50}$ und $c = 1 \cdot 10^{50}$
$a : b \cdot c$ nicht lösbar, was durch den Buchstaben E auf dem SR 1 angezeigt wird. *Diese Rechnung führt aus Q_S heraus!* Dagegen liefert die (in Q äquivalente Rechnung!) $a \cdot c : b$ im Bereich Q_S den Wert $1 \cdot 10^{-50}$.

Im folgenden werden einige Terme mit einem zugehörigen Ablaufplan für den SR 1 angegeben. Dazu wird jeweils ein konkretes Beispiel mit dem SR 1 gerechnet.

Aufgaben

1\. Term: $\frac{a}{b \cdot c \cdot d} = a : (b \cdot c \cdot d)$
$= a : b : c : d$

$\boxed{a}\ \boxed{\div}\ \boxed{b}\ \boxed{\div}\ \boxed{c}\ \boxed{\div}\ \boxed{d}\ \boxed{=}$

▲1▲ $\frac{74{,}22}{0{,}2814 \cdot 0{,}041 \cdot 1{,}28}$

2\. Term: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = (a : b) \cdot (c : d)$
$= a : b \cdot c : d$

$\boxed{a}\ \boxed{\div}\ \boxed{b}\ \boxed{\times}\ \boxed{c}\ \boxed{\div}\ \boxed{d}\ \boxed{=}$

▲2▲ $\frac{0{,}48\,128}{1{,}274} \cdot \frac{2{,}24}{43{,}71}$

3\. Term: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = (a : b) : (c : d)$
$= a : b : c \cdot d$

$\boxed{a}\ \boxed{\div}\ \boxed{b}\ \boxed{\div}\ \boxed{c}\ \boxed{\times}\ \boxed{d}\ \boxed{=}$

▲3▲ $\frac{0{,}7943}{3{,}8721} : \frac{198{,}47}{4{,}32\,861}$

4\. Term: $a : [b : (c \cdot d)]$
$= a : b \cdot (c \cdot d) = a : b \cdot c \cdot d$

Hier wurde zuerst die eckige Klammer aufgelöst. Man hätte ebensogut zuerst die runde Klammer auflösen können:
$a : [b : (c \cdot d)] = a : [b : c : d]$
$= a : b \cdot c \cdot d$

$\boxed{a}\ \boxed{\div}\ \boxed{b}\ \boxed{\times}\ \boxed{c}\ \boxed{\times}\ \boxed{d}\ \boxed{=}$

▲4▲ $5{,}84 : [2{,}71 : (0{,}2847 \cdot 42{,}78)]$.

▲5▲ Zu beiden Aufgabentypen ist je ein zugehöriger Ablaufplan für den SR 1 aufzustellen.

a) $\frac{a}{b} : \frac{c \cdot d \cdot e}{f}$;

b) $a : (b \cdot c : d) \cdot (e : f)$

W. Träger

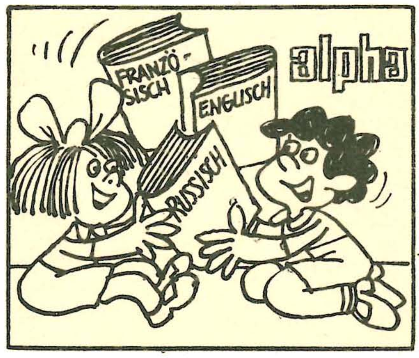
Aphorismen

- Die Zahl ist das Wesen aller Dinge. *Pythagoras*
- Manche orakeln um Dinge, die sie durch Zählen, Messen oder Wiegen in Erfahrung bringen könnten. *Xenophon*
- Das Große erscheint nur dadurch groß, wenn es mit etwas Kleinerem gemessen wird. *Lukian*
- Durch das Messen erbaut man die Welt. *Arabische Weisheit, um 1000*
- Zählen und Messen sind die Grundlagen der fruchtbarsten, sichersten und genauesten wissenschaftlichen Methoden, die wir überhaupt kennen. *Hermann von Helmholtz*

Magisches Quadrat

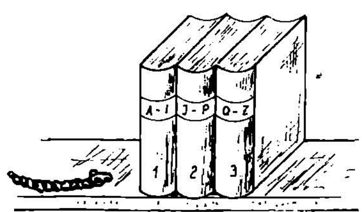
Susanne Noßke, Borna

1986	1986	1986	1986	1986	1986	1986	1986	1986	1986	1986	1986
1986	299	326	015	118	235	123	223	275	083	289	1986
1986	016	119	236	300	322	273	084	287	122	227	1986
1986	237	296	323	017	120	286	126	225	274	082	1986
1986	324	018	121	233	297	226	272	081	290	124	1986
1986	117	234	298	325	19	85	288	125	224	271	1986
1986	114	337	229	294	19	86	130	133	339	305	1986
1986	231	291	021	116	334	338	303	090	127	135	1986
1986	023	113	336	228	293	131	132	340	302	088	1986
1986	333	230	295	020	115	304	087	129	136	337	1986
1986	292	022	112	335	232	134	341	301	089	128	1986
1986	1986	1986	1986	1986	1986	1986	1986	1986	1986	1986	1986



▲1▲ The number 16 is the smallest integer greater than 1 that is, at the same time, a square and a fourth power of two other integers:
$16 = 4^2$ and $16 = 2^4$.
Can you find the two smallest positive integers which are, at the same time, the square and the cube of two other integers? Think it out. You can find a simple rule which will lead you to the correct solution.

▲2▲ Sur un rayon de bibliothèque sont rangés dans l'ordre les trois volumes d'une encyclopédie.
Chaque volume a une épaisseur de 8,6 cm; 8 cm pour les pages intérieures et deux fois 3 mm pour les deux couvertures.
Un affreux petit ver creuse une galerie de la première page du premier volume à la dernière page du troisième volume.
Quelle est la longueur de la galerie?



▲3▲ Поверхность кубика $1 \times 1 \times 1$ нельзя оклеить целиком полоской бумаги 1×6, не допуская разрывов. Можно ли такой кубик оклеить полоской бумаги 1×12 в два слоя?

▲4▲ Три школьных товарища купили 14 пирожков, причем Коля купил в 2 раза меньше Вити, а Женя больше Коли, но меньше Вити. Зколько пирожков купил каждый из товарищей?

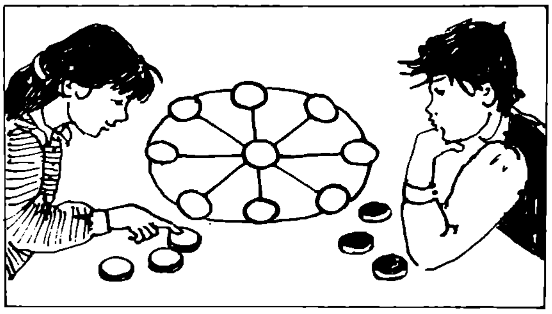
Spiel mit Hölzchen

Spiel doch einmal mit einem Partner folgendes Spiel: Man legt drei Häufchen von Streichhölzern auf den Tisch (mit z. B. 12, 10 und 7 Streichhölzern). Die Partner nehmen abwechselnd eine beliebige Anzahl von Streichhölzern weg, aber immer nur von einem Häufchen. Man kann auch ein ganzes Häufchen auf einmal wegnehmen. Gewonnen hat der, der als letzter noch Streichhölzer wegnehmen kann.

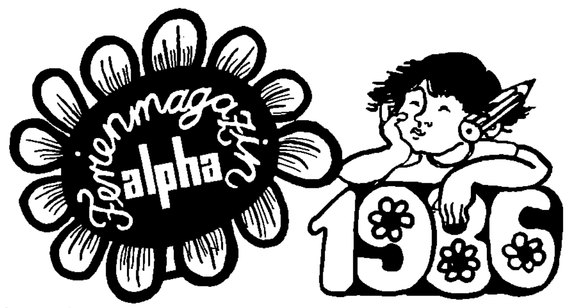
Kleine Mühle

Zeichnet euch eine runde Mühle! Gespielt wird mit drei weißen und drei schwarzen Steinen. Zuerst werden (abwechselnd) die sechs Steine gesetzt, dann wird gezogen. Springen ist nicht erlaubt. Drei Steine (gleicher Farbe) auf einem der Durchmesser bilden eine Mühle. Gewonnen hat, wer die erste Mühle bildet.

Bild 13



8



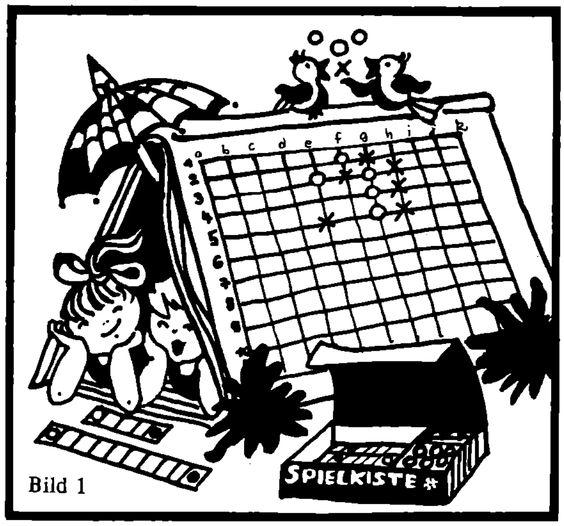


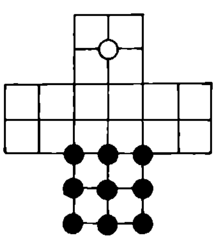
Bild 1

1

Neun Schafe und ein Wolf

Spielsteine nach Bild 10 auslegen. Ein Mitspieler übernimmt die „Schafe", der andere den „Wolf". Die Spielsteine sind nur auf den Linien zu bewegen, wobei der „Wolf" nach rechts oder links rücken kann. Er kann auch über ein „Schaf" springen, wenn der dahinterliegende Kreuzungspunkt frei ist. Die „Schafe" dürfen nach rechts, links oder geradeaus geschoben werden. Sie müssen den „Wolf" geschickt umzingeln, so daß er nicht mehr springen kann, oder schnell den Stall (das gegenüberliegende markierte Feld) erreichen. Dort darf der „Wolf" kein „Schaf" mehr fassen. Nach dem Spiel tauschen die Mitspieler ihre Rollen.

Bild 10



Sprungspiel

Fertige dir nach dem abgebildeten Muster eine Spieltafel und 16 durchnumerierte Pappscheiben! Mit jedem Stein darf man jeden anderen Stein in waagerechter oder senkrechter Richtung überspringen, wenn in dieser Richtung hinter ihm ein freies Feld ist (wie beim Damespiel) und

6

Alle acht

Für dieses Einmannspiel werden acht kleine Spielsteine und ein großer aufgelegt. Mit allen Steinen kann nach rechts, links und diagonal gesprungen werden. Nur der große Spielstein wird nicht übersprungen, kann aber mit gerückt werden. Er soll am Schluß, möglichst nach acht Zügen, allein übrig bleiben.

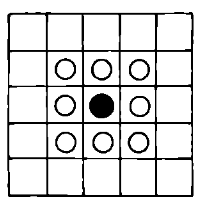


Bild 5

Vier Richtige

Bei diesem Spiel müssen vier Spielsteine einer Farbe eine waagerechte, senkrechte oder diagonale Linie ergeben. Zwei Spieler erhalten je 15 Steine, setzen diese abwechselnd und versuchen, so viel wie möglich gleichfarbige Linien aufzubauen. Im Spiel werden zwei verschiedene Farben eingesetzt.

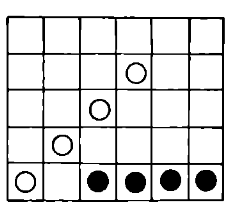


Bild 6

3

Japanisches Damespiel

Das auf der Titelseite gezeigte Damespiel ist 1 000 Jahre alt und stammt aus Japan. Man nehme Papier mit einem Quadrat (10 × 10), auf das die beiden Spieler Punkte oder Kreuzchen zeichnen. Die Mitspieler setzen immer abwechselnd ihr Zeichen auf einen Schnittpunkt der Linien. Ziel ist, Fünferketten zu bilden, d. h. jeweils fünf Kreuzchen (oder Kreise, bei einem dritten Mitspieler kleine Dreiecke) waagerecht, senkrecht oder diagonal in eine geschlossene Reihe zu setzen. Wem es zuerst gelingt, der ist Sieger. Jeder wird natürlich alles versuchen, um den Gegner bei der Kettenbildung zu behindern. Drei „Geheimtips", die zum Sieg führen können:

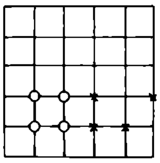


Bild 2

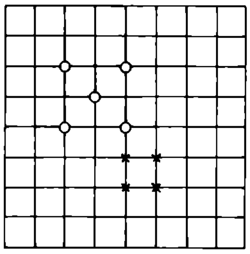


Bild 4

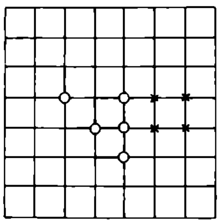


Bild 3

2

ihn dann vom Brett nehmen. Gilt diese Bedingung für mehrere Steine, so darf man beliebig viele Steine überspringen und entfernen. Auf diese Weise wird das Brett bald leer sein.
Aufgabe: Mit max. 8 Zügen ist das Brett so zu räumen, daß nur Stein 1 übrigbleibt.
Das ist nicht leicht zu schaffen!

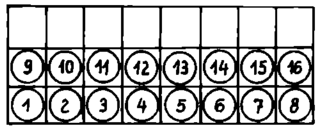


Bild 11

Schiebespiel

Baue dir nach der untenstehenden Vorlage ein Spiel (siehe Bild 12a)! Verschiebe dann die 10 Bausteine so, daß Bild 12b entsteht!
Leicht wird es nicht sein!

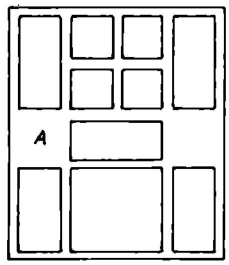
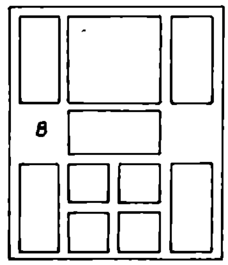
Bild 12a


Bild 12b


7

Groschenspiel

Zeichne zwei Bahnen mit je 10 bzw. 5 Feldern! Besetze die linken Enden beider Bahnen, die rechten dein Gegner mit je einer Münze! Beide ziehen nun abwechselnd nach Belieben eine ihrer Münzen so viele Felder vorwärts oder rückwärts, wie du es oder dein Gegner für günstig hältst. Züge sind nur bis zur gegnerischen Münze erlaubt. Gesprungen werden darf nicht. Versuche, deinen Gegner in seine Ecke zu treiben!
Varianten: Ändere die Bahnlänge und die Anzahl der Bahnen!

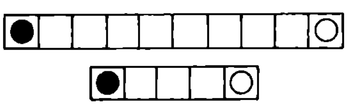


Bild 7

Schiebespiel

Jeder der beiden Spieler bekommt drei Knöpfe gleicher Farbe. Diese werden in Grundstellung aufgestellt. Es wird abwechselnd gezogen. Bei jedem Zug darf der Spieler einen seiner Knöpfe um ein Feld entlang der weißen Linien weiterziehen, natürlich immer nur auf freie Felder. Sieger ist, wer mit seinen Knöpfen die Grundstellung des Gegners zuerst besetzt hat.

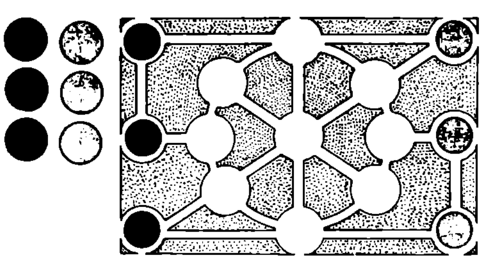
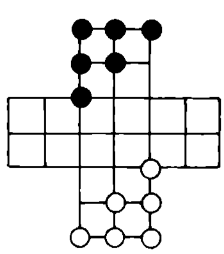


Bild 8

4

Eins-zwei-drei

Zwei Spieler erhalten je sechs Spielsteine in einheitlicher Farbe. Diese können nach rechts, links und nur vorwärts bis zum nächsten Kreuzungspunkt geschoben werden, um die gegenüberliegende Seite zu erreichen. Ist ein Kreuzungspunkt hinter einem Spielstein frei, muß er vom Gegner übersprungen werden. Jeder Spieler versucht, soviel Steine wie möglich vom Gegner zu bekommen und die eigenen mit Geschick übers Spielfeld zu bringen.
Das Spiel ist beendet, wenn einer der Mitspieler alle seine noch vorhandenen Spielsteine ins gegenüberliegende Feld gebracht und zuerst die Dreierreihe, dann die Zweierreihe usw. aufgebaut hat. Zuletzt werden die Spielsteine ausgezählt und der Sieger wird ermittelt.

Bild 9


5

Computer – Algorithmus – Algorithmische Spiele

Teil 1

Um Aufgaben einer bestimmten Art lösen zu können, benötigt ein Computer ein Programm. Beim Aufstellen solch eines Programms ist ein erster wichtiger Schritt das Auffinden bzw. Formulieren eines entsprechenden *Algorithmus*.
Das Wort *Algorithmus* ist aus dem Namen des großen mittelalterlichen Gelehrten *Al-Hwarizmi* abgeleitet, aber die große Bedeutung dieses Begriffs wurde erst in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts im Zusammenhang mit der Entwicklung der Rechentechnik und der Informatik deutlich. Auch in der Mathematik spielt dieser Begriff eine wesentliche Rolle: Die mathematische Algorithmentheorie grenzt an eines der grundlegenden Gebiete der Mathematik an – an die mathematische Logik. Aber auch im alltäglichen Leben begegnet man Algorithmen, etwa unter solchen Bezeichnungen wie *Vorschrift*, *Rezept* oder *allgemeines Lösungsverfahren*.
Genauer kann man sagen:
Ein Algorithmus ist eine verständliche und exakte Vorschrift für den Ausführenden, eine endliche Folge von Tätigkeiten auszuüben, die auf das Erreichen eines festgelegten Ziels oder auf die Lösung einer gestellten Aufgabe gerichtet sind.
Der *Ausführende* des Algorithmus kann ein Mensch oder eine Maschine (Computer, Taschenrechner, Roboter) sein. Er muß fähig sein, die Vorschrift zu verstehen und die in ihr angewiesenen Tätigkeiten auszuführen.
Beispiele für Algorithmen sind nicht nur viele der geläufigen mathematischen Verfahren, wie z. B. das schriftliche Multiplizieren von (endlichen) Dezimalbrüchen oder der Euklidische Algorithmus für die Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen, sondern auch Kochrezepte, Hinweise für den Durchgangsverkehr durch eine bestimmte Stadt, viele Bedienungsanleitungen, Anleitungen für die Benutzung eines öffentlichen Telefons im Selbstwählfernverkehr und auch gewisse militärische Vorschriften. Jedoch ist nicht jede Vorschrift ein Algorithmus. Oft ist eine Vorschrift zu ungenau und auch nicht verständlich genug, aus ihr geht nicht immer die konkrete Reihenfolge der Handlungen hervor. Dies trifft etwa zu auf den üblichen Befehl an einen Kundschafter:
„Handeln Sie je nach Lage der Dinge!"
Ein Algorithmus muß alle Situationen voraussehen, die bei seiner Abarbeitung auftreten können, und für jede dieser Situationen anweisen, was zu tun ist.
Betrachten wir einige Beispiele von Aufgaben und Algorithmen für deren Lösung:

Bestimmung des Restes bei Division natürlicher Zahlen

Aufgabe: Gegeben sind zwei natürliche Zahlen x und y, gesucht ist der Rest bei Division von x durch y.
Erster Algorithmus:
(Ausführende: Schüler ab Klasse 3)
- Schreibe die Divisionsaufgabe $x:y$ auf!
- Dividiere schriftlich bis zur Einerstelle!
- Nimm die letzte beim schriftlichen Dividieren auftretende Differenz als Lösung der Aufgabe!

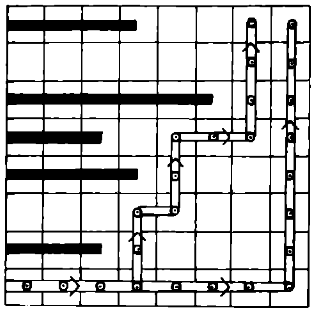
9734 : 37 = 263
<u>74</u>
233
<u>222</u>
114
<u>111</u>
3 Rest 3

Zweiter Algorithmus:
(Ausführende: Schüler ab Klasse 1)
- Vergleich x und y!
- Wenn $x < y$, dann nimm x als Lösung der Aufgabe!
- Sonst subtrahiere y von x, und merke dir die Differenz!
- Wenn die Differenz kleiner als y ist, so nimm sie als Lösung!
- Sonst subtrahiere von der Differenz nochmals y, und wiederhole das solange, wie die nächstfolgende Differenz nicht kleiner als y ist!
- Nimm die letzte Differenz als Lösung!

Diskussion: Der erste Algorithmus läßt sich kürzer aufschreiben und führt schneller zum Ziel als der zweite. Er setzt jedoch voraus, daß der Ausführende das schriftliche Dividieren beherrscht, und kann deshalb von Schülern der Klassen 1 und 2 noch nicht ausgeführt werden. Aus demselben Grund ist der zweite Algorithmus als Grundlage für ein Computerprogramm geeigneter als der erste.

Der vorsichtige Roboter

Aufgabe: In der linken unteren Ecke eines Schachbrettes steht ein kleiner Roboter. Auf dem Schachbrett sind über einige Felder Gruben ausgehoben worden. Die Gruben gehen vom linken Rand des Schachbretts aus und erstrecken sich zusammenhängend über höchstens 7 Felder. Der Roboter kann von einem beliebigen Feld zu jedem Nachbarfeld, auf dem sich keine Grube befindet, übergehen, d. h. nach oben, nach unten, nach rechts und nach links, aber nicht diagonal.



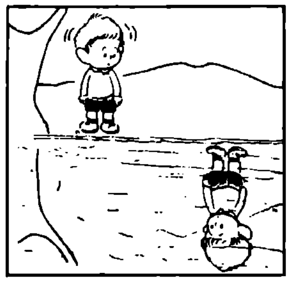
Wie gelangt der Roboter in die 8. Horizontale, ohne in eine Grube zu fallen?
Erster Algorithmus:
(für einen sehuntüchtigen Roboter)
- Gehe nach rechts, nach rechts, nach rechts, nach oben, nach oben, nach rechts, nach oben, nach oben, nach rechts, nach rechts, nach oben, nach oben, nach oben! Halt!

Zweiter Algorithmus:
(für einen sehuntüchtigen Roboter, der zählen kann)
- Gehe 7mal nach rechts, dann 7mal nach oben! Halt!

Dritter Algorithmus:
(für einen sehtüchtigen Roboter)
- Sieh nach oben!
- Wenn oben ein freies Feld ist, so tue einen Schritt nach oben, und führe dann wieder das erste Kommando aus!
- Sonst tue einen Schritt nach rechts, und führe dann wieder das erste Kommando aus!

Diskussion: Der erste Algorithmus ist einfach und gibt (bezüglich der Anzahl der vom Roboter zu gehenden Schritte) eine optimale Lösung der Aufgabe, aber er ist speziell auf die gegebene Lage der Gruben auf dem Schachbrett zugeschnitten – bei einer anderen Lage der Gruben kann der Roboter in eine von ihnen hineinfallen.
Der zweite Algorithmus ist universell in dem Sinne, daß er für ein beliebiges System von Gruben (das den Bedingungen der Aufgabe entspricht) tauglich ist, aber er liefert nicht immer die Lösung mit der kleinsten Anzahl von Schritten des Roboters. Der zweite Algorithmus kann leicht umgeschrieben werden für einen Roboter, der nicht zählen kann: Man braucht nur die Anweisungen *nach rechts* und *nach oben* je siebenmal zu wiederholen.
Der dritte Algorithmus ermöglicht es, die achte Horizontale bei einem *beliebigen* (der Aufgabe entsprechenden) Grubensystem mit einer optimalen Schrittzahl des Roboters zu erreichen, aber nach Erreichen der 8. Horizontale geht der Roboter evtl. noch nach rechts, nämlich solange er noch nicht in der rechten oberen Ecke des Bretts angelangt ist.
Fortsetzung siehe Seite 69!

In freien Stunden · alpha-heiter



Aus: Trommel, Berlin

Mathematik-Lyrik

In Parchim Edes Schwester wohnt.
Sie liebt den kleinen Klaus.
Doch Anke Label hat ihn satt
und zog aus seinem Haus.

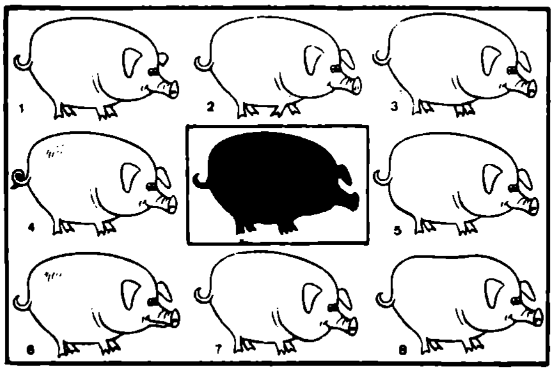
In diesem Verslein sind die Nachnamen von sechs bedeutenden Mathematikern vergangener Zeit versteckt. Wer findet diese Namen?

Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

Exakt beobachten!

Welches Schwein hat sich im Schattenriß verewigt?

Aus: Troll, Berlin



Grand mit Vieren

Vier Freunde treffen sich monatlich zu ihrem Skatabend. Ihre Spielergebnisse rechnen sie stets mit $\frac{1}{4}$ Pf je Punkt ab. Ein Beispiel dafür sieht so aus (relative Differenz mit jedem anderen Spieler):

Jürgen	Jochen	Dieter	Helmut	
+50	− 42	+110	− 14	
+92	− 92	+ 60	− 64	
−60	−152	+152	+ 28	
+64	− 28	+124	−124	
+96 : 4	−272 : 4	+336 : 4	−160 : 4	
+24	− 68	+ 84	− 40	(Pf)

Dieter meint: „Warum so umständlich? Bildet die Summe aus den vier Ergebnissen und subtrahiert jeweils ihren 4. Teil von jedem einzelnen Ergebnis!“ Also:

$$S = +50 - 42 + 110 - 14 = 104; \frac{1}{4}S = +26.$$

Und somit:

$+\ 50 - 26 = +24,\ -42 - 26 = -68,$
$+110 - 26 = +84,\ -14 - 26 = -40.$

Zeige, daß diese Kurzrechnung immer gilt!

Ing. A. Körner, Leipzig

Rund um die Zahl 1986

1. Wie oft wird jede der Ziffern 1, 9, 8 und 6 angeschrieben, wenn man alle Zahlen von 1 bis 1986 aufschreibt?

2. Bilde die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 1986!

3. a) Schreibe die Zahlen 450, 529, 583, 608, 662, 716, 741, 795 und 874 so in ein Dreierquadrat, daß ein magisches Quadrat entsteht! (Die waagerechten, senkrechten und diagonalen Dreiergruppen ergeben stets die gleiche Summe.)

b) Bilde aus den Zahlen 1, 9, 8 und 6 ein lateinisches Quadrat! (Schreibe in die freien Kästchen eines Viererquadrates die Zahlen 1, 9, 8 und 6 so, daß in keiner Zeile, in keiner Spalte und in keiner Diagonale zwei gleiche Zahlen stehen!)
Suche alle Möglichkeiten!

Schuldirektor H. Förg, Schwaz (Österreich)

1	9	8	6

Münzen vertauschen

Lege die Münzen durch zweimaliges Vertauschen so, daß in der oberen Reihe 0,55 Mark zuammenkommen und in der unteren 0,70 Mark! Bei einem Vertauschen darfst du zwei Münzen auswechseln, die gemeinsam Nachbarn in waagerechter oder senkrechter Richtung sind.

Aus: ND

50	10	5	20
5	10	20	5

Tiddlyball

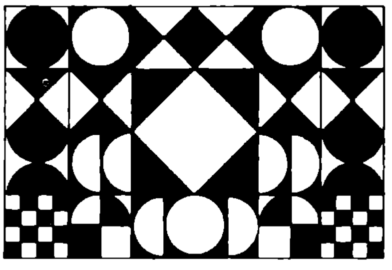
Tiddlyball ist ein Spiel für drei Spieler. In jeder Runde erhält der Gewinner a Punkte, der Zweite b Punkte und der Verlierer c Punkte, wobei $a > b > c$ positive ganze Zahlen sind.
Ein Spiel besteht aus mehreren Runden.
Xavier, Yvonne und Zachary spielen Tiddlyball und der Endstand lautet: Xavier 20 Punkte, Yvonne 10 Punkte, Zachary 9 Punkte.
Yvonne gewann die zweite Runde.
Wer gewann die erste Runde und, wieviel Punkte erhielt Zachary in der letzten Runde?

Aus: Parabola, math. Schülerzeitschrift der Universität von New South Wales

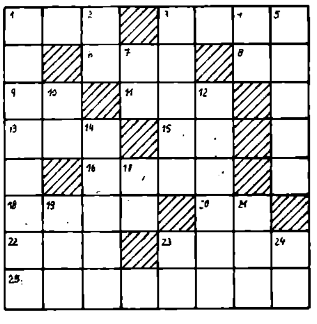
Schwarz oder Weiß?

Du sollst entscheiden, welche der beiden Farben – Schwarz oder Weiß – innerhalb des Rechtecks die größere Fläche einnimmt. Aber bitte, rate nicht nur, sondern begründe (sich selbst gegenüber) deine Antwort!

Aus einer Knobelseite des ND, Berlin



Kreuzzahlrätsel



Dr. L. Flade

Waagerecht:
Löse im Kopf!
1. 11^2
3. $4^2 \cdot 10^2 + 9^2$
6. 14^2
8. $9^3 : 9$
9. $3(\sqrt{64} + \sqrt{16})$
11. $30^2 + 3^4$
13. $19^2 + 40$
15. $\sqrt{121}$
16. $967 \cdot 3$
18. $80^2 + 6^2$
20. $\sqrt{361}$
22. $25^2 + 13^2$
23. $30^2 + 43 \cdot 4$
25. $8765 \cdot 10^4 + 4321$

Senkrecht:
Löse mit Taschenrechner!
1. $[(128\,624 + 99\,999) \cdot 3 + 2] \cdot 18$
2. $\sqrt{\sqrt{14\,641}}$
3. $10 \cdot \sqrt{2\,825\,761}$
4. $2200 : 5^2$
5. $1\,099\,989 : 99$
7. $\frac{40\,986}{23 \cdot 18}$
10. $\sqrt{3721} - 1$
12. $3 + 10^2 \cdot \sqrt{1\,234\,321}$
14. $234\,574 : (399 : 21)$
17. $27^2 - 211 \cdot 3$
19. $110\,334 : 222$
21. $9^2 \cdot 12$
23. $\sqrt{\sqrt{38\,416}}$
24. $1785 : (5 \cdot 17)$

Kryptarithmetik

$$\begin{array}{rr} & ABCDE \\ + & BCDE \\ + & CDE \\ + & DE \\ + & E \\ \hline & AAAAA \end{array}$$

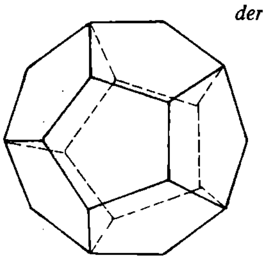
DVĚ
DVĚ
DVĚ
ČTYŘI
DESET

Aus der math. Schülerzeitschrift Rozhledy, Prag

Ein merkwürdiger Dodekaeder

Was kann nicht stimmen an dieser Darstellung eines Dodekaeders (des von 12 regelmäßigen Fünfecken begrenzten regulären Polyeders)?

Dr. W. Schmidt, Sektion Mathematik der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald



Ein fast unverlierbares Spiel

Wer zuerst 100 sagt, ist Sieger! Zwei Spielpartner A und B sagen abwechselnd eine Zahl von 1 bis 10 und addieren sie zur vorher vom anderen Spielpartner genannten Zahl. Beispiel: A beginnt mit 6; B: $6 + 8 = 14$; A: $14 + 1 = 15$; B: $15 + 10 = 25$ usw. Wer zuerst 100 sagt, ist Sieger.
Die Lösungsstrategie ist folgende: Um mit Sicherheit mit der nächsten Zahl auf 100 zu kommen, muß man auf 89 kommen, denn welche Zahl der andere Spielpartner auch sagt, man gelangt immer auf 100, denn die Summe der beiden gesagten Zahlen ist immer 11. Um aber mit Sicherheit an 89 zu kommen, muß man vorher auf 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12 kommen. Die erste wichtige Zahl, auf die man kommen muß, ist also die 12.
Beginnt man das Spiel selbst, so erreicht man das immer, wenn man mit 1 beginnt, im nächsten Schritt. Der „Gegner" gewinnt also das Spiel nur in dem einen Fall (vorausgesetzt, beide Partner kennen den Lösungsalgorithmus), wenn er mit 1 beginnt. Deshalb nennen wir ein solches Spiel ein *fast unverlierbares Spiel*.

Dr. P. Knabe, TU Dresden

Aus: NBI, El Solami, Berlin

Der Herzberger Quader

Wir setzen Würfelgruppen zusammen

Aus gleich großen handelsüblichen Würfeln aus Holz oder Plaste sollen Spielsteine so zusammengesetzt werden, daß die Flächen aller Würfel zueinander parallel oder senkrecht sind und aneinanderstoßende Würfel eine gemeinsame Fläche haben. Um alle Möglichkeiten zu erhalten, gehen wir systematisch vor.
Mit zwei Würfeln gibt es genau eine Möglichkeit (Bild 1).
Diesen Spielstein wollen wir Würfel-Zwilling nennen und für ihn die Abkürzung (2) einführen.

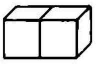


Bild 1
Würfelzwilling (2)

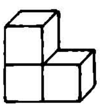


Bild 2a
Verzweigter Würfeldrilling
(3)

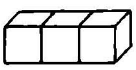
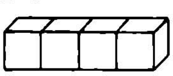


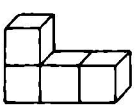
Bild 2b
Unverzweigter Würfeldrilling
(3)

Bei drei Würfeln hat man für eine Zusammensetzung unter den gegebenen Bedingungen genau zwei Möglichkeiten, die die Bilder 2a und 2b zeigen. Wir geben den Spielsteinen wieder Namen und führen auch Abkürzungen ein. Setzen wir nun Spielsteine aus vier Würfeln zusammen. Unser systematisches Vorgehen drückt sich darin aus, daß wir an die beiden Spielsteine aus drei Würfeln einen vierten ansetzen. Die Ergebnisse müssen auf „Übereinstimmung" (Kongruenz) geprüft werden. Es ergeben sich weitere acht verschiedene Spielsteine, die das Bild 3 zeigt.
Wir geben ihnen wieder Namen, die an der Anschauung orientiert sind und führen weitere Abkürzungen ein.

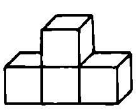
Bild 3



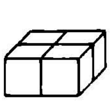
Stange (S)



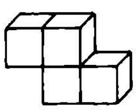
Haken (H)



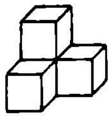
Auto (A)



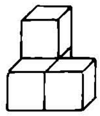
Platte (P)



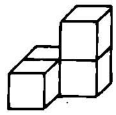
Treppe (T)



Dreibein (D)



Linke Hand (L)



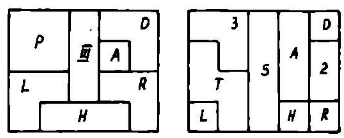
Rechte Hand (R)

Die Bausteine sind in schräger Parallelprojektion mit $\alpha = 45°$ und $q = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dargestellt. Auf kleinkariertem Papier können sie schon von Schülern der Klasse 4 nachgezeichnet werden. Es ist wichtig zu erkennen, daß die Bausteine *Linke Hand* und *Rechte Hand* nicht durch Schiebung oder Drehung ineinander überführt werden können. Die beiden Bausteine sind aber symmetrisch zueinander.

Wir setzen aus den Bausteinen Quader zusammen

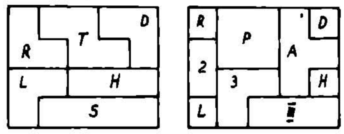
Aus diesen 11 Bausteinen, einem Zwilling, zwei Drillingen und acht Vierlingen, zu deren Zusammenbau man insgesamt 40 Würfel benötigt, wollen wir nun einen (5, 4, 2)-Quader zusammensetzen.
(5, 4, 2)-Quader bedeutet, der Quader ist 5 Würfel lang, 4 Würfel breit und 2 Würfel hoch, so daß für seine Zusammensetzung 40 Würfel ($5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$) gebraucht werden (vgl. Bild 5).
Im Bild 4 werden zwei solcher Zusammensetzungen angegeben. Dazu zeichnet man die beiden Schichten des Quaders und kennzeichnet die Bausteine mit den Abkürzungen ihrer Namen. Solche Darstellungen, die eine Zusammensetzung eindeutig festlegen, wollen wir eine „Lösung" nennen. Setze den Quader mit Hilfe des Bildes 4 zusammen!

Bild 4
1. Lösung



untere — obere Schicht

2. Lösung



untere — obere Schicht

In dieser Form können die 11 Spielsteine (alle Würfel-Zwillinge. -Drillinge und -Vierlinge) am einfachsten in einem Pappkarton verpackt werden. In Zukunft wollen wir den (5, 4, 2)-Quader *HERZBERGER QUADER* nennen.

Aufgaben

▲1▲ Ermittle drei weitere Lösungen für den *Herzberger Quader*, die von den angegebenen verschieden sind!
Lösungen heißen verschieden, wenn die Körper nicht durch Schiebung, Drehung oder Spiegelung auseinander hervorgehen können.
In den folgenden Aufgaben wollen wir den *Herzberger Quader* aus Teilquadern zusammensetzen. Dabei sollen stets die verschiedenen 11 Bausteine verwendet werden.

▲2▲ Setze den *Herzberger Quader* aus zwei (5, 2)-Quadern zusammen, so wie es die Bilder 5a, b, c zeigen!

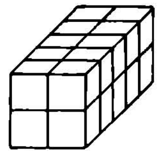


Bild 5a
(5, 2, 2)-Quader

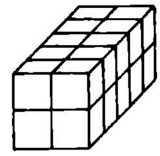
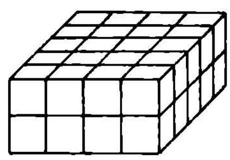


Bild 5b
(5, 2, 2)-Quader

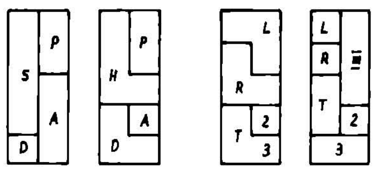
Bild 5a + 5b = 5c



Herzberger Quader

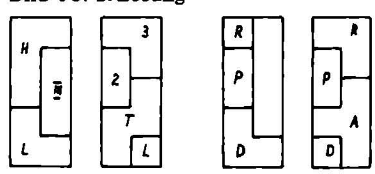
Im Bild 6a und 6b werden zwei Lösungen dafür angegeben.
Setze die Teilquader zusammen und schiebe sie zum *Herzberger Quader* zusammen!

Bild 6a: 1. Lösung



unten oben unten oben

Bild 6b: 2. Lösung

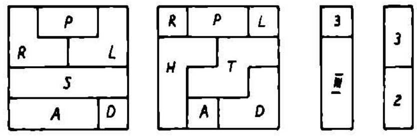


unten oben unten oben

▲3▲ Setze den *Herzberger Quader* aus
(1) einem (4, 4, 2)- und einem (4, 1, 2)-Quader
(2) einem (4, 2, 2)- und zwei (3, 2, 2)-Quadern zusammen!

In den Bildern 7, 8 und 9 werden je eine Lösung angegeben.

Bild 7:
Eine Lösung für die Zusammensetzung des *Herzberger Quaders* aus einem (4, 4, 2)- und einem (4, 1, 2)-Quader



unten oben u. o.

Bild 8:
Grundriß des *Herzberger Quaders*, zusammengesetzt aus einem (4, 2, 2)- und zwei (3, 2, 2)-Quadern

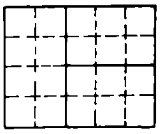
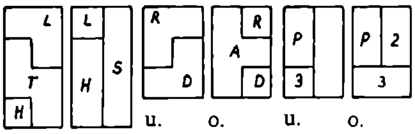


Bild 9:
Lösung für eine Zusammensetzung des *Herzberger Quaders* aus einem (4, 2, 2)- und zwei (2, 2, 2)-Quadern



u. o. u. o.

unten oben

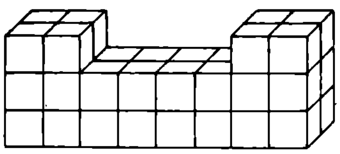
▲4▲ Versuche andere Lösungen zu finden!

▲5▲ Ermittle weitere Möglichkeiten, den *Herzberger Quader* aus Teilquadern zusammenzusetzen!

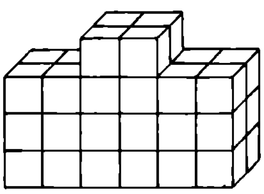
▲6▲ Setze aus diesen Teilquadern Körper zusammen, und versuche diese auch „im Verbund“ zusammenzusetzen!

Aus den Teilquadern (4, 2, 2) und (3, 2, 2) können auch andere Körper zusammengesetzt werden.
Das Bild 10 zeigt einige Bauwerke.

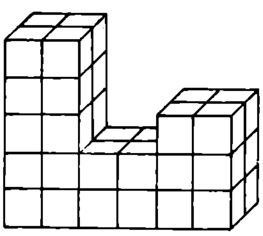
Bild 10:
Körper, zusammengesetzt aus einem (4, 2, 2)- und zwei (3, 2, 2)-Quadern



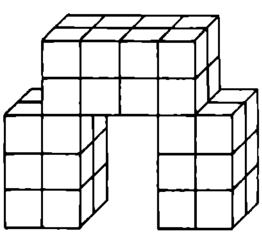
Bauwerk 1



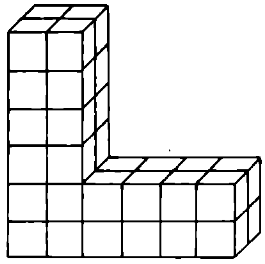
Bauwerk 2



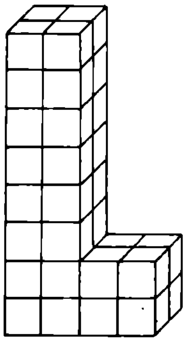
Bauwerk 3



Bauwerk 4

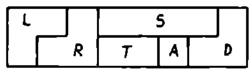


Bauwerk 5

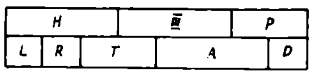


Bauwerk 6

Im Bild 11 ist eine Lösung für das Bauwerk 1 des Bildes 10 „im Verbund“ dargestellt.



untere Schicht

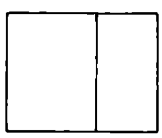


mittlere Schicht

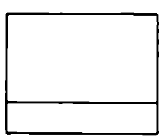
obere Schicht

Lösung zur Aufgabe ▲5▲

Es gibt noch weitere sechs Möglichkeiten, den Herzberger Quader aus Teilquadern zusammenzusetzen.

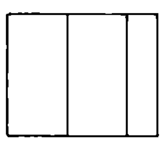


4. Fall

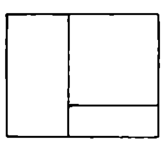


5. Fall

4. Fall: Zusammensetzung aus einem (4, 3, 2)- und einem (4, 2, 2)-Quader
5. Fall: Zusammensetzung aus einem (5, 3, 2)- und einem (5, 1, 2)-Quader

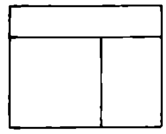


6. Fall

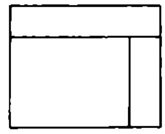


7. Fall

6. Fall: Zusammensetzung aus zwei (4, 2, 2)- und einem (4, 1, 2)-Quader
7. Fall: Zusammensetzung aus je einem (4, 2, 2)-, (3, 3, 2)- und (3, 1, 2)-Quader



8. Fall



9. Fall

8. Fall: Zusammensetzung aus je einem (5, 1, 2)-, (3, 3, 2)- und (3, 2, 2)-Quader
9. Fall: Zusammensetzung aus je einem (5, 1, 2)-, (4, 3, 2)- und (3, 1, 2)-Quader

G. Schulze

Zahlen, Zahlen

Prüfe mit dem SR 1!

Weil der Schulrechner einfach zu bedienen ist und schnell rechnet, kann man ihn manchmal benutzen, um in der Presse oder in Büchern angegebene *Zahlenwerte* und die Ergebnisse von damit durchgeführten *Berechnungen zu überprüfen*. Druckfehler schleichen sich nämlich gelegentlich ein und ein Autor ist vor Rechenfehlern nicht gänzlich gefeit. Das kann (zum Glück selten) auch in der *alpha* passieren. Im Heft 1, 1986, S. 11 habt ihr erfahren, daß Bambus bis zu 40 cm pro Tag wachsen kann. Die Wachstumsgeschwindigkeit von Pilzen ist mit $2 \cdot 10^{-7}$ m/s angegeben, die von Bambus mit $4{,}5 \cdot 10^{-8}$ m/s. Berechnet, wievielmal Pilze schneller wachsen als Bambus!
Ihr kommt auf den Faktor 4,4 (gerundet), folglich müßten diese Pilze ungefähr 1,78 m je Tag wachsen. Bevor ihr euch aufmacht, diese Wunderpilze zu sammeln, laßt uns die Zahlenwerte mit dem Schulrechner überprüfen!
Wenn Bambus wirklich in 1 s um $4{,}5 \cdot 10^{-8}$ m wächst, so wird es an einem Tag (gleichmäßiges Wachstum wird hier angenommen) um $l = 4{,}5 \cdot 36 \cdot 24 \cdot 10^{-6}$ m größer. Aufmerksamkeit ist bei der Eingabe des letzten Faktors in den SR 1 geboten!
Ihr erhaltet als Ergebnis $l \approx 3{,}9$ mm. Setzen wir aber voraus, daß Bambus 40 cm pro Tag wächst, so ist die Wachstumsgeschwindigkeit

$$v = \frac{0{,}4}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 4{,}6 \cdot 10^{-6}\,\text{m/s}.$$

Welche Annahme richtig ist, kann die Mathematik nicht entscheiden! Herr Dr. Witt von der Sektion Biologie der Universität Greifswald hat mehrere Jahre in der SR Vietnam wissenschaftlich gearbeitet. Er versicherte uns, daß Bambus unter günstigen Bedingungen in der Tat 40 cm am Tag wachsen kann. Daher ist die Wachstumsgeschwindigkeit auf $4{,}6 \cdot 10^{-6}$ m/s zu korrigieren!

W. Schmidt

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen zu Aufgaben der Kreisolympiade, Teil 1

Olympiadeklasse 5

250521 a) In einem (4×4)-Felderbrett sind insgesamt

$$16 + 9 + 4 + 1 = 30$$

Quadrate enthalten.

b) In einem (5×5)-Felderbrett sind insgesamt

$$25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55$$

Quadrate enthalten.

c) In einem (8×8)-Felderbrett sind insgesamt

$$64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204$$

Quadrate enthalten.

250522 Als ersten begrüßt Franz Freundlich denjenigen Kollegen, der als erster nach 8.00 Uhr in Knobelhausen abgefahren ist; als letzten denjenigen, der als letzter vor 12.00 Uhr in Knobelhausen abfährt. Also begrüßt er alle diejenigen Kollegen, die zu einer der folgenden Zeiten in Knobelhausen abfahren:

8.10, 8.25, 8.40, 8.55,
9.10, 9.25, 9.40, 9.55,
10.10, 10.25, 10.40, 10.55,
11.10, 11.25, 11.40, 11.55 Uhr.

Das sind insgesamt 16 Kollegen.

250523 a) Die folgenden Verteilungen erfüllen die Bedingungen (1) und (2):

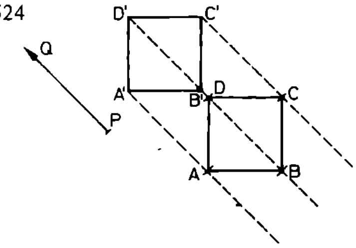
030	121	212	303
3 3	2 2	1 1	0 0
030	121	212	303

b) Für jede Verteilung der geforderten Art gilt: Wenn auf einer Ecke genau x Damesteine liegen, dann nach (1) auf jeder Ecke. Wenn ferner auf einer Seite außer den $2 \cdot x$ Damesteinen, die auf beiden Endpunkten liegen, noch genau y Damesteine vorhanden sind, dann gilt das nach (2) auf jeder Seite mit derselben Anzahl y.
Daher sind insgesamt $4 \cdot x + 4 \cdot y$ Damesteine verteilt, also ist

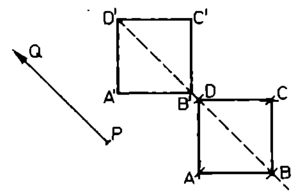
$$4 \cdot x + 4 \cdot y = 12,$$
$$4 \cdot (x + y) = 12,$$
$$x + y = 3.$$

Dies kann aber mit den Anzahlen x und y nur durch
$0 + 3 = 3$, $1 + 2 = 3$, $2 + 1 = 3$
oder $3 + 0 = 3$
erfüllt werden. Daher kann es nur die vier in a) genannten Verteilungen geben.

250524
a)

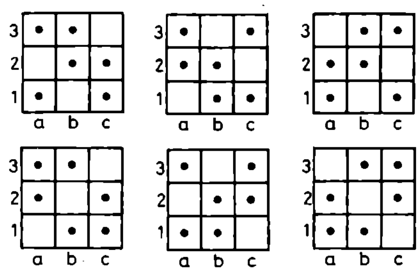


b)



Olympiadeklasse 6

250621



250622 I. Wenn vier Zahlen die geforderten Eigenschaften haben und dabei e das in (2) genannte Ergebnis ist, so ist
$e - 4$ die erste Zahl,
$e - 3$ die zweite Zahl,
$e + 2$ die dritte Zahl,
$e + 1$ die vierte Zahl.
Nach (1) gilt daher

$$e - 4 + e - 3 + e + 2 + e + 1 = 60,$$
$$4e - 4 = 60,$$
$$4e = 64,$$
$$e = 16;$$

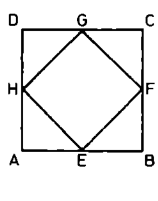
also lauten die vier gesuchten Zahlen:
12, 13, 18, 17.

II. Für die Zahlen gilt

$$12 + 13 + 18 + 17 = 60,$$

also ist (1) erfüllt, und es gilt
$12 + 4 = 16$, $13 + 3 = 16$, $18 - 2 = 16$, $17 - 1 = 16$, also ist (2) erfüllt.

250623
a)



b) Die Strecken EG und FH zerlegen das Quadrat $ABCD$ in vier inhaltsgleiche Quadrate. Jedes dieser Quadrate wird durch die eingezeichnete Diagonale in zwei (gleichschenklig-rechtwinklige) inhaltsgleiche Dreiecke zerlegt.
Das Quadrat $ABCD$ ist aus acht solchen Dreiecken zusammengesetzt, die Fläche $EFGH$ aus vier solchen Dreiecken, ihr Flächeninhalt ist daher halb so groß wie der von $ABCD$. Wegen $14 \cdot 14 = 196$ hat $ABCD$ den Flächeninhalt $196\,\text{cm}^2$. Wegen $196 : 2 = 98$ hat somit $EFGH$ den Flächeninhalt $98\,\text{cm}^2$.

250624 a) Die in den folgenden Tabellen genannten Verteilungen erfüllen alle gestellten Bedingungen; denn bei diesen Verteilungen bekommt jedes der drei Kinder genau 7 Flaschen und soviel Limonade, wie in $3\frac{1}{2}$ Flaschen paßt. Außerdem ist ersichtlich, daß jeweils 7 volle, 7 halbvolle und 7 leere Flaschen verteilt werden und daß für die Anzahlen der an Anke, Bernd und Claudia verteilten vollen Flaschen $3 \geqq 3 \geqq 1$ bzw. $3 \geqq 2 \geqq 2$ gilt.

	voll	halbvoll	leer
A	3	1	3
B	3	1	3
C	1	5	1

	voll	halbvoll	leer
A	3	1	3
B	2	3	2
C	2	3	2

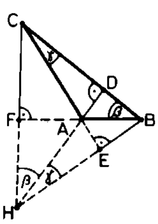
b) Für jede Verteilung, die die geforderten Bedingungen erfüllt, gilt: Da 21 Flaschen und der Inhalt von $7 + \frac{7}{2} = \frac{21}{2}$ Flaschen Limonade zu verteilen sind, bekommt jedes Kind 7 Flaschen und den Inhalt von $\frac{7}{2}$ $= 3\frac{1}{2}$ Flaschen Limonade. Daher folgt weiter: Anke könnte höchstens 3 volle Flaschen erhalten, da sie sonst mehr Limonade bekommen würde, als in $3\frac{1}{2}$ Flaschen paßt. Anke kann aber auch nicht weniger als 3 volle Flaschen erhalten, weil dann eines der beiden anderen Kinder von den verbleibenden mindestens 5 vollen Flaschen mehr Flaschen bekommen müßte als Anke.
Also muß Anke genau 3 volle Flaschen erhalten. Als einzige Möglichkeiten, die restlichen 4 vollen Flaschen so zu verteilen, daß von ihnen Anke nicht weniger als Bernd und Bernd nicht weniger als Claudia bekommt, ergeben sich die Verteilungen gemäß $4 = 3 + 1$ und $4 = 2 + 2$ (Spalte „voll" der obigen Tabellen).
Aus den Anzahlen der vollen und halbvollen Flaschen, die jedes Kind erhält, ergibt sich schließlich eindeutig, wieviel leere Flaschen es bekommen muß, um insgesamt 7 Flaschen zu erhalten (Spalte „leer").
Damit ist gezeigt, daß nur die beiden in a) angegebenen Verteilungen alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Olympiadeklasse 7

250721 Wäre Kerstins erste und zweite Aussage falsch und die dritte wahr, dann hätten Birgit und Cornelia eine 2, was der Voraussetzung widerspricht, daß die drei Schülerinnen unterschiedliche Noten haben. Wäre Kerstins erste und dritte Aussage falsch und die zweite wahr, dann hätte Annett eine 1, Birgit und Cornelia keine 2, was der Voraussetzung widerspricht, daß die Note 2 erteilt wurde.
Damit bleibt nur noch die Möglichkeit: Kerstins zweite und dritte Aussagen sind falsch, und die erste Aussage ist wahr. Das führt auf die Notenverteilung: Birgit 2, Annett (daher keine 2 und auch) keine 1, also Annett 3; und folglich Cornelia 1. Damit sind die Noten eindeutig ermittelt.

250722 Für den ersten Quader gilt:
Seine längere Grundkante beträgt $a_1 = 12$ cm, seine kürzere Grundkante $b_1 = 6$ cm. Sein Volumen ist $V_1 = 216\ \text{cm}^3$; wegen $216 : (12 \cdot 6) = 3$ beträgt seine Höhe daher $h_1 = 3$ cm.
Für den zweiten Quader gilt:
Seine längere Grundkante beträgt $a_2 = 14$ cm, seine kürzere Grundkante $b_2 = 5$ cm und seine Höhe $h_2 = h_1 = 3$ cm.
Der Oberflächeninhalt des ersten Quaders beträgt somit
$$A_1 = 2(12 \cdot 6\ \text{cm}^2 + 12 \cdot 3\ \text{cm}^2 + 3 \cdot 6\ \text{cm}^2) = 252\ \text{cm}^2.$$
Der Oberflächeninhalt des zweiten Quaders beträgt
$$A_2 = 2(14 \cdot 5\ \text{cm}^2 + 14 \cdot 3\ \text{cm}^2 + 5 \cdot 3\ \text{cm}^2) = 254\ \text{cm}^2.$$
Die Differenz der Oberflächeninhalte der beiden Quader beträgt somit 2 cm².

250723 Es seien D, E bzw. F die Fußpunkte der zu A, B bzw. C gehörenden Höhen, ferner sei $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle ACB = \gamma$. Da das Dreieck ABC bei A stumpfwinklig ist, also bei B und C spitze Innenwinkel hat, liegt D auf der Seite BC, während E, F und H außerhalb des Dreiecks liegen (siehe Bild).



Hiernach gilt $\sphericalangle DCH = \sphericalangle FCB$. Ferner ist, da D und F Höhenfußpunkte sind, $\sphericalangle CDH = \sphericalangle CFB = 90°$. Folglich stimmen die Dreiecke CDH und CFB in zwei Innenwinkeln überein; nach dem Innenwinkelsatz gilt daher auch $\sphericalangle DHC = \sphericalangle FBC$. Wegen der Lage von F ist hierbei $\sphericalangle FBC = \sphericalangle ABC = \beta$; damit ist
$$\sphericalangle DHC = \beta \qquad (1)$$
bewiesen.
Entsprechend beweist man durch Betrachtung der Dreiecke BDH und BEC
$$\sphericalangle DHB = \gamma. \qquad (2)$$
Schließlich gilt wegen der Lage von D zwischen B und C die Gleichung
$$\sphericalangle BHC = \sphericalangle DHB + \sphericalangle DHC$$
und somit nach (1) und (2)
$$\sphericalangle BHC = \beta + \gamma, \text{ w. z. b. w.}$$

250724 a) Aus den Ziffern 2, 7, 9 lassen sich genau die folgenden sechs dreistelligen Zahlen bilden, die jede dieser Ziffern genau einmal enthalten:
279, 297, 729, 792, 927, 972.
Die Summe dieser sechs Zahlen beträgt 3996. Wegen $3996 = 36 \cdot 111$ ist diese Summe durch 111 teilbar.
b) Es seien a, b, c drei paarweise verschiedene Ziffern, unter denen sich nicht die Ziffer 0 befindet. Dann lassen sich genau die folgenden sechs dreistelligen Zahlen bilden, die jede dieser Ziffern genau einmal enthalten:
$$100a + 10b + c,\ 100a + 10c + b,$$
$$100b + 10a + c,\ 100b + 10c + a,$$
$$100c + 10a + b,\ 100c + 10b + a.$$
Die Summe dieser sechs Zahlen beträgt
$$222a + 222b + 222c. \qquad (1)$$
Wegen $222 = 2 \cdot 111$ ist jede der drei Zahlen $222a$, $222b$, $222c$ durch 111 teilbar, mithin auch ihre in (1) genannte Summe, w. z. b. w. Fortsetzung erfolgt in Heft 4/86.

Fortsetzung von Seite 63.
Wir bemerken noch folgendes: Im dritten Algorithmus setzen wir voraus, daß bei Unmöglichkeit der Ausführung einer Anweisung (im vorliegenden Fall der Anweisung *Schritt nach rechts* vom Feld h8 aus) der Roboter die Arbeit einstellt. Wenn dies nicht zutrifft, läuft sich der Roboter tot. Er tritt auf dem Feld h8 hin und her und versucht erfolglos, das erste, zweite und dritte Kommando auszuführen, dann wieder das erste, zweite ....

Aufgaben

▲1▲ Beschreibt einen Algorithmus für das Kürzen von Brüchen $\frac{a}{b}$ $(a, b \in N)$!

▲2▲ Beschreibt einen Algorithmus für die Division und einen Algorithmus für die Addition zweier gebrochener Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ $(a, b, c, d \in N)$! Ergebnis soll ein nicht kürzbarer Bruch sein!

▲3▲ Auf einem Schachbrett sind auf irgendwelchen Feldern Gruben gegraben, die nicht überschritten werden können.
Beschreibt einen Algorithmus für den Marsch eines Roboters von der ersten Horizontalen zur letzten
a) unter der Voraussetzung, daß ein Weg existiert,
b) im allgemeinen Fall, wobei *Marsch unmöglich* ausgegeben wird, falls die Aufgabe keine Lösung hat!

▲4▲ Unser Roboter hat das Bergsteigen gelernt. Auf dem Schachbrett sind auf jeder der ersten sieben Horizontalen bis zu 7 Felder schraffiert, die zusammenhängend vom rechten Rand ausgehen. Sie bilden zusammen einen Berg.
Wie erklimmt der bergsteigende Roboter den vorliegenden Berg?

A. P. Jerschow, aus Quant 9, Moskau

Lösungen

Lösungen zu: Sprachecke

▲1▲ Die Zahl 16 ist die kleinste ganze Zahl größer als 1, die gleichzeitig eine Quadratzahl und eine 4. Potenz von zwei verschiedenen ganzen Zahlen ist: $16 = 4^2$ und $16 = 2^4$.
Kannst du die zwei kleinsten positiven ganzen Zahlen ermitteln, die gleichzeitig das Quadrat und die dritte Potenz von zwei verschiedenen ganzen Zahlen sind?
Überlege genau! Man kann eine einfache Regel finden, die zur richtigen Lösung führt.
Lösung: Um eine Quadratzahl und eine dritte Potenz zu sein, muß jede Zahl eine 6. Potenz sein. Eine Zahl ist $2^6 = 64 = 8^2 = 4^3$, und die andere Zahl ist $3^6 = 729 = 27^2 = 9^3$.

▲2▲ In einer Bibliothek sind drei Bände einer Enzyklopädie der Reihe nach aufgestellt.
Jeder Band hat eine Stärke von 8,6 cm, und zwar 8 cm für die Innenseiten und zweimal 3 mm für die beiden Einbände.
Ein schrecklicher kleiner Bücherwurm frißt einen Tunnel von der ersten Seite des ersten Bandes bis zur letzten Seite des dritten Bandes.
Wie lang ist dieser Tunnel?
Lösung: Die erste Seite des ersten Bandes ist laut Zeichnung ganz rechts und die letzte Seite des dritten Bandes links. Demzufolge ist der Tunnel 3 mm + 8,6 cm + 3 mm = 9,2 cm lang.

▲3▲ Man kann einen Würfel mit der Kantenlänge 1 cm nicht mit einem zusammenhängenden Streifen Papier von 1 cm × 6 cm bekleben, ohne Schnitte anzubringen.
Kann man aber den Würfel mit einem Papierstreifen von 1 cm × 12 cm doppelt bekleben?
Lösung: Bild 1a zeigt einen Streifen von 1 cm × 12 cm. Faltet man diesen Streifen längs der gestrichelten Linien, so erhält man einen doppelten zickzackförmigen Streifen, wie er im Bild 1b dargestellt ist.

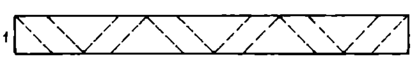


Bild 1a

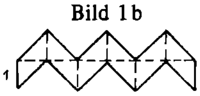


Bild 1b

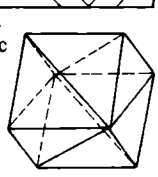


Bild 1c

Mit diesem Streifen kann der Würfel wie in Bild 1c beklebt werden.

▲4▲ Drei Schulfreunde kauften 14 Piroggen, wobei Kolja halb so viele wie Witja und Shenja mehr als Kolja, aber weniger als Witja kaufte.
Wie viele Piroggen kaufte jeder?
Lösung: Kolja: 3; Witja: 6; Shenja: 5

Lösungen zu: In freien Stunden · alpha-heiter

Mathematik-Lyrik

In der Reihenfolge des Textes waren versteckt: Archimedes (von Syrakus, etwa 287 bis 212 v.u.Z.), Lie (Sophus, 1842 bis 1899), Klein (Felix, 1849 bis 1925), Hankel (Hermann, 1839 bis 1873), Abel (Niels Henrik, 1802 bis 1829) und Gauss (Carl Friedrich, 1777 bis 1855).

Exakt beobachten!

Bild 3 ist identisch.

Grand mit Vieren

Sind a, b, c, d die 4 Ergebnisse der Spieler A, B, C, D, so ergibt sich z.B. für
A $(a-b)+(a-c)+(a-d)$
$=3a-b-c-d$.
Oder $4a-a-b-c-d=4a-S$,
mit $S=a+b+c+d$.
A: $(4a-S):4=a-\frac{S}{4}$.

Rund um die Zahl 1986

1.	1	9	8	6
als E	199	198	198	199
als Z	200	190	197	200
als H	200	187	200	200
als T	987	0	0	0
zus.	1586	575	595	599

2. $1+\ \ 2+\ldots+1985+1986+$
$\underline{1986+1985+\ldots+\ \ 2+\ \ 1}$
$1987+1987+\ldots+1987+1987$
(1986 Summanden)
$1987\cdot 1986:2=1\,973\,091$

3.

a) 583 874 529	b)	1986 od.	1986
608 662 716		8619	6891
795 450 741		6891	9168
		9168	8619

Münzen vertauschen

Nach dem 1. Tausch:
oben − 50 10 20 20;
unten − 5 10 5 5.
Nach dem 2. Tausch:
oben − 5 10 20 20;
unten − 50 10 5 5.

Tiddy ball

1. Durch systematisches Probieren findet man $a=8$, $b=4$ und $c=1$. Xavier gewann die erste Runde und Zachary erhielt in der letzten Runde 4 Punkte.
2. Vollständige Lösung mit ausführlichen Begründungen:
Im Spiel wurden insgesamt $20+10+9=39$ Punkte vergeben, davon $a+b+c$ in jeder Runde. Also ist $a+b+c=13$, und es wurden 3 Runden gespielt. ($a+b+c=3$ und 13 Runden verstößt gegen $a>b>c$.)
Aus $a+b+c=13$ und $a>b>c$ ergeben sich genau folgende Möglichkeiten:

a	10	9	8	8	7	7	6	6
b	2	3	4	3	5	4	5	4
c	1	1	1	2	1	2	2	3

Xavier hat im günstigsten Falle zweimal gewonnen und ist einmal Zweiter geworden, also ist $20\leqq 2a+b<3a$ und damit $a>6$. Yvonne hat in der zweiten Runde a Punkte erhalten und hat in den beiden anderen Runden mindestens 2 Punkte erhalten, also ist $a+2\leqq 10$ und damit $a\leqq 8$.
Ist $a=7$, so hat Yvonne in zwei Runden zusammen drei Punkte erhalten, also gilt $b=2$ und $c=1$. Dies ist aber nicht möglich, da $a+b+c$ nur 10 ergibt.
Ist $a=8$, so hat Yvonne in zwei Runden zusammen zwei Punkte erhalten, also gilt $c=1$ und es folgt $b=4$.
Damit gewann Xavier die erste Runde, und Zachary erhielt in der letzten Runde 4 Punkte.

Schwarz oder Weiß?

In elf Rechtecken nehmen Schwarz und Weiß die gleiche Fläche ein. Nur im mittleren der unteren drei Rechtecke wird die Frage entschieden. Es besteht aus zwei Quadraten mit weißer Kreisfläche.
Im Quadrat ist die weiße Kreisfläche größer als die schwarze Restfläche. Also ist insgesamt die weiße Fläche größer.

Kreuzzahlrätsel

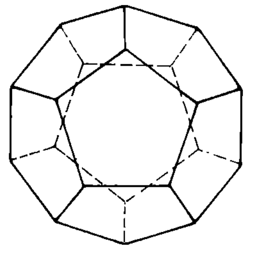
1	2	1		1	6	8	1
2		1	9	6		8	1
3	6		9	8	1		1
4	0	1		1	1		1
5		2	9	0	1		1
6	4	3	6		1	9	
7	9	4		1	0	7	2
8	7	6	5	4	3	2	1

Kryptarithmetik

$52\,487+2487+487+87+7=55\,555$
$365+365+365+29\,714=30\,809$
(zwei + zwei + zwei + vier = zehn)

Ein merkwürdiger Dodekaeder

Es ist unmöglich, daß zwei verschiedene Fünfecke mehr als eine Kante gemeinsam haben. So könnte er aussehen:



Lösungen zu: Ein rundes Dutzend

Berechnungen mit dem SR 1 auf drei gültige Ziffern ($r=1$)

▲1▲ $\frac{1}{2}\pi r^2-\frac{(\sqrt{2}\,r)^2}{2}=\frac{r^2}{2}(\pi-2)$
$\approx 0{,}571$ 18,2 %

▲2▲ $\frac{1}{2}\pi r^2\approx 1{,}57$ 50 %

▲3▲ $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2+\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2=\frac{r^2}{4}(\sqrt{3}+\pi)$
$\approx 1{,}22$ 38,8 %

▲4▲ $2\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}r^2\approx 1{,}57$ 50 %

▲5▲ $\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}\,r}{2}\right)^2=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)r^2$
$\approx 0{,}285$ 9,08 %

▲6▲ $r^2-\frac{\pi}{3}r^2-2\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$
$=\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r^2\approx 1{,}23$ 39,1 %

▲7▲ $\frac{1}{2}\pi(\sqrt{3}\,r)^2-3\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}\,r)^2$
$=3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)r^2\approx 0{,}815$ 26,0 %

▲8▲ $\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}\,r)^2-\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2$
$=\frac{1}{4}(3\sqrt{3}-\pi)r^2\approx 0{,}514$ 16,3 %

▲9▲ $\pi\left(\frac{r}{4}\right)^2+\pi\left(\frac{\sqrt{3}\,r}{4}\right)^2=\frac{\pi}{4}r^2\approx 0{,}785$
25 %

▲10▲ $6\cdot\pi\left(\frac{r}{3}\right)^2=\frac{2}{3}\pi r^2\approx 2{,}09$
$66\frac{2}{3}$ %

▲11▲ $\frac{2}{3}(\sqrt{3}\,r)^2\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{6}\pi(\sqrt{3}\,r)^2$
$-(\sqrt{3})^2\frac{\sqrt{3}}{4}+2\pi\left(\frac{r}{4}\right)^2$
$=\left(\frac{5}{8}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2\approx 1{,}53$ 48,7 %

▲12▲ $\frac{1}{6}\pi r^2+\frac{1}{3}\pi r^2-\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$
$=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2\approx 1{,}14$ 36,2 %

Lösung zu: Ebene Figuren gleichen Umfangs mit größtem Flächeninhalt

Heft 1/86

Steiners Konstruktion beweist nur: Keine andere geschlossene ebene Kurve als der Kreis kann die geforderte Maximaleigenschaft haben. Er hat einen Beweis für den Satz „Unter allen ebenen Figuren von gleichem Umfang hat der Kreis den größten Inhalt" nur unter der Voraussetzung gegeben, daß es überhaupt eine Figur gibt, die unter allen betrachteten den größtmöglichen Inhalt hat. Da diese Voraussetzung aber ihrerseits eines Beweises bedarf (und darin besteht – wie sich zeigte – die Hauptschwierigkeit), muß also Steiners Beweis ergänzt werden.
Steiner bewies nur: Eine geschlossene nicht kreisförmige Kurve kann nicht von allen ebenen geschlossenen Kurven den größten Flächeninhalt umgrenzen. Gezeigt werden muß überdies: Für den Kreis wird das Maximum des Flächeninhalts solcher Kurven wirklich erreicht. (Der Beweis gelang erst 1882.)

Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 6/85

Ma 5 ■ 2608 Wir rechnen $21 + 3 = 24$; $24 : 3 = 8$, $2 \cdot 8 = 16$; der AG gehörten anfangs 8 Jungen und $16 - 3 = 13$ Mädchen an.

Ma 5 ■ 2609 Der Vorgänger von 1985 lautet 1984. Die Hälfte von 1984 ist 992. Wegen $31 \cdot 32 = 992$ lauten die beiden gesuchten Zahlen 31 und 32.

Ma 5 ■ 2610 Es sind insgesamt 11 Wege, und zwar die folgenden:
ABCDE, *ABDE*, *ACBDE*, *ACDE*, *BACDE*, *BCDE*, *BDE*, *CABDE*, *CBDE*, *CDE*, *DE*.

Ma 5 ■ 2611 $60 : 4 = 15$; es ist zu vermuten, daß die vier aufeinanderfolgenden geraden Zahlen 12, 14, 16, 18 lauten. Die Probe $12 + 14 + 16 + 18 = 60$ bestätigt die Vermutung.

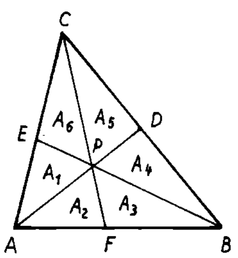
Ma 5 ■ 2612 $90\ \text{min} = 1\frac{1}{2}\ \text{h}$; in $1\frac{1}{2}\ \text{h}$ legt der Trabant $(80 + 40)\ \text{km} = 120\ \text{km}$ zurück. In der gleichen Zeit legt das Moped $(60 + 30)\ \text{km} = 90\ \text{km}$ zurück. $120\ \text{km} - 90\ \text{km} = 30\ \text{km}$. Für diesen Rückstand von 30 km benötigt das Moped 30 min; das sind mehr als 25 min. Deshalb wird der Mopedfahrer den Trabantfahrer nicht mehr auf dem Rastplatz *C* antreffen.

Ma 5 ■ 2613 Wegen $x \cdot y = 10$ gilt $10 \cdot z = 70$, also $z = 7$ und somit $x = 2$ und $y = 5$.

Ma 6 ■ 2614 Das k.g.V. der Zahlen 36, 48 und 54 ist 432. Nun gilt $1000 \leqq 432 \cdot z < 4000$. Daraus folgt *z* gleich 3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9. Folgende vierstellige natürliche Zahlen erfüllen die gestellten Bedingungen: 1296, 1728, 2160, 2592, 3024, 3456 und 3888.

Ma 6 ■ 2615 Eine Zahl ist durch 24 teilbar, wenn sie durch 8 und durch 3 teilbar ist. Die gesuchten vierstelligen natürlichen Zahlen haben in der dekadischen Schreibweise die Form $\overline{x22y}$. Da 1000 durch 8 teilbar ist, braucht man nur die Zahl $\overline{22y}$ auf ihre Teilbarkeit durch 8 zu untersuchen. Nur 224 ist durch 8 teilbar. Die Quersumme von $\overline{x224}$ ist $x + 2 + 2 + 4 = x + 8$. Nur für *x* gleich 1, 4 oder 7 ist die Quersumme durch 3 teilbar. Die gesuchten Zahlen sind 1224, 4224 und 7224.

Ma 6 ■ 2616 Jede Seitenhalbierende eines Dreiecks zerlegt das Dreieck in zwei flächengleiche Dreiecke. Darum gilt $A_{AFC} = A_{ABE}$ bzw. $A_1 + A_2 + A_6 = A_1 + A_5 + A_6$, also $A_2 = A_5$. Analog dazu gilt $A_1 = A_4$ und $A_3 = A_6$. Es gilt aber auch $A_2 = A_3$, also $A_2 = A_3 = A_5$ und wegen $A_4 = A_5$ auch $A_2 = A_3 = A_4$. Daraus folgt schließlich $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6$



$= 18\ \text{cm}^2 : 6 = 3\ \text{cm}^2$. Folglich besitzt das Viereck *AFPE* einen Flächeninhalt von $2 \cdot 3\ \text{cm}^2 = 6\ \text{cm}^2$.

Ma 6 ■ 2617 Angenommen, Annett ist *n* Jahre alt; dann ist Dorit $(n + 5)$ Jahre, die Mutter $4 \cdot n$ Jahre, der Vater $(n + 4 \cdot n)$, also $5 \cdot n$ Jahre alt, und es gilt $n + (n + 5) + 4n + 5n = 93$, $11n + 5 = 93$, $11n = 88$, $n = 8$. Annett ist 8, Dorit 13, die Mutter 32, der Vater 40 Jahre alt.

Ma 6 ■ 2618 Der Winkel CBD hat die Größe $180° - \beta = 180° - 50° = 130°$, der Winkel CBE somit die Größe $130° : 2 = 65°$. Nun gilt

$$\delta = 180° - \left(\frac{1}{2} \cdot \alpha + \beta + \frac{1}{2} \cdot \varphi\right)$$
$$= 180° - (30° + 50° + 65°) = 35°.$$

Ma 7 ■ 2619 Es soll gelten
$\frac{1}{4} < \frac{x}{17} < \frac{1}{3}$.
Daraus folgt $17 \cdot 1 < 4 \cdot x$ und $3 \cdot x < 17 \cdot 1$ bzw. $x \geqq 5$ und $x \leqq 5$, also $x = 5$. Die gebrochene Zahl $\frac{5}{17}$ erfüllt die Bedingungen.

Ma 7 ■ 2620 Angenommen, Paul ist $5x$ Jahre, sein Bruder Ralf $4y$ Jahre alt. Dann ist seine Mutter $(5x + 20)$ Jahre alt. Nun gilt $5x + (5x + 20) + 4y + 35 = 89$, $10x + 4y = 34$, $5x + 2y = 17$. Wegen der einschränkenden Bedingung $5x > 4y$ existiert genau eine Lösung, nämlich $x = 3$ und $y = 1$. Paul ist 15 Jahre, sein Bruder Ralf 4 Jahre, seine Mutter 35 Jahre alt.

Ma 7 ■ 2621 Angenommen, es sind *x* 10-Pf-Münzen, also $(109 - x)$ 20-Pf-Münzen; dann gilt $10x + 20 \cdot (109 - x) = 1330$, also $x = 85$. Die Sparbüchse enthält 85 Münzen zu 10 Pf und 24 Münzen zu 20 Pf.

Ma 7 ■ 2622 Angenommen, Herr Schulz wurde im Jahre $\overline{19ab}$ geboren; dann gilt $1984 - (1900 + 10a + b) = 4 \cdot (1 + 9 + a + b)$, $84 - 10a - b = 40 + 4a + 4b$, $14a + 5b = 44$.
Diese Gleichung wird unter den einschränkenden Bedingungen nur für $a = 1$ und $b = 6$ erfüllt. Herr Schulz wurde im Jahre 1916 geboren.

Ma 8 ■ 2623 Angenommen, es wurden *x* Tische und *y* Stühle geliefert; dann gilt

$$113x + 51y = 4190,$$
$$51y = 82 \cdot 51 + 8 - 102x - 11x,$$
$$y = 82 - 2x - \frac{11x - 8}{51}.$$

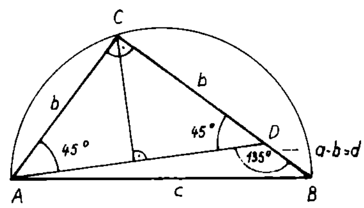
Nur für $x = 10$ und somit für $y = 60$ existiert eine positive ganzzahlige Lösung. Es wurden 10 Tische und 60 Stühle geliefert.
Probe: $10 \cdot 113\ \text{M} = 1130\ \text{M}$;
$60 : 51\ \text{M} = 3060\ \text{M}$; zusammen 4190 M.

Ma 8 ■ 2624 Es seien v, m, s, t die natürlichen Zahlen, die jeweils das Alter von Vater, Mutter, Sohn und Tochter bedeuten. Dann gilt

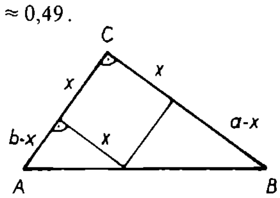
(1) $v + m + s + t = 111$,
(2) $m + s - 1 = v + t$,
(3) $v = 4t$ und
(4) $m - 1 = 4(t - 1)$.

Aus (4) folgt (4)': $m = 4t - 3$ und aus (2) folgt (2)': $s = v + t + 1 - m$.
Nun setzen wir (3) und (4)' in (2)' ein und erhalten
(2)'': $s = 4t + t + 1 - 4t + 3$
bzw. $s = t + 4$.
Anschließend setzen wir (2)'', (3) und (4)' in (1) ein. Wir erhalten
(1)': $4t + 4t - 3 + t + 4 + t = 111$
bzw. $t = 11$.
Durch weiteres Einsetzen folgen nun $s = 15$, $v = 44$ und $m = 41$. Der Vater ist 44 Jahre, die Mutter 41 Jahre, der Sohn 15 Jahre und die Tochter 11 Jahre alt.

Ma 8 ■ 2625 Aus $a - b = d$ folgt $a \geqq b$. Für $a = b$ erhalten wir ein gleichschenkligrechtwinkliges Dreieck. Wir zeichnen über $\overline{AB}$ als Durchmesser einen Halbkreis. Die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ schneidet diesen Halbkreis (Thaleskreis) im Punkte *C*. Es sei $a > b$. Wir nehmen an, das Dreieck *ABC* sei bereits konstruiert. Der Kreis um *C* mit *b* als Radius schneidet $\overline{BC}$ in einem inneren Punkt *D*. Das Dreieck *ADC* ist dann gleichschenklig und zugleich rechtwinklig. Der Winkel *ADC* hat deshalb die Größe 45°; somit hat der Winkel *ADB* die Größe 135° als Nebenwinkel. Es läßt sich also das Teildreieck *ABD* aus *c*, *d* und der Winkelgröße 135° konstruieren. Die Mittelsenkrechte von $\overline{AD}$ schneidet den Halbkreis über $\overline{AB}$ als Durchmesser im Punkte *C*.



Ma 8 ■ 2626 Aus $\triangle ADF \sim \triangle ABC$ folgt $x : (b - x) = a : b$, also
$x = \frac{ab}{a + b}$ und somit
$A_{DECF} = x^2 = \frac{a^2 b^2}{(a + b)^2}$. Ferner gilt
$A_{ABC} = \frac{a \cdot b}{2}$. Daraus folgt weiter
$A_{DECF} : A_{ABC} = \frac{2ab}{(a + b)^2} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{49}$
$= \frac{24}{49} \approx 0{,}49$.



Der Flächeninhalt des Quadrates *DECF* beträgt 49 % des Flächeninhalts des Dreiecks *ABC*.

Ma 9 ■ 2627 Angenommen, es waren *x* Pampelmusen zum Verkauf vorhanden. Die erste Kundin verlangte
$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x + 1}{2}$ Pampelmusen; es verblieb ein Rest von $x - \frac{x + 1}{2} = \frac{x - 1}{2}$ Pampelmusen.
Die zweite Kundin kaufte
$\frac{x - 1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x + 1}{4}$ Pampelmusen; es ver-

blieb ein Rest von $\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{4}=\frac{x-3}{4}$ Pampelmusen.
Die dritte Kundin kaufte
$\frac{x-3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{8}$; es verblieb eine Pampelmuse. Nun gilt $\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{4}+\frac{x+1}{8}+1=x$, also $x=15$.
Die erste Kundin kaufte $7\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=8$, die zweite Kundin $3\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=4$, die dritte Kundin $1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2$ Pampelmusen.

Ma 9 ■ 2628 Angenommen, Anton, Bruno bzw. Christian hätten a, b bzw. c Mark bei sich und eine Chrysantheme kostet x Mark; dann gilt
(1) $a+b=5x$,
(2) $b+c=6x$,
(3) $a+c=7x$.
Wir subtrahieren (2) von (3) und erhalten
(4) $a-b=x$.
Wir addieren (1) und (4) und erhalten $2a=6x$, $a=3x$, also $b=2x$ und $c=4x$. Wegen $a<4$ und $c>5$ gilt ferner $3x<4$ und $4x>5$, also $x<\frac{4}{3}=1{,}33$ und $x>\frac{5}{4}=1{,}25$. Da weder Ein- noch Fünf-Pfennig-Münzen dabei sind, gilt $x=1{,}30$. Der Preis für eine Chrysantheme beträgt 1,30 M. Der Mutter wurden 9 Chrysanthemen überreicht.

Ma 9 ■ 2629
(1) $2=1\cdot 2$; $4=1\cdot 4=2\cdot 2$;
$6=1\cdot 6$; $8=1\cdot 8=2\cdot 4$;
$10=1\cdot 10$; $12=1\cdot 12=2\cdot 6$;
$14=1\cdot 14$; $16=1\cdot 16=2\cdot 8=4\cdot 4$;
$18=1\cdot 18$.
Nur die Zahlen 2, 6, 10, 14, 18 besitzen genau zwei Teiler, sind folglich Primzahlen in M.
(2) Es entfallen alle vierstelligen Zahlen $\overline{ab00}$ (Dezimalschreibweise) aus M, die auf zwei Grundziffern $\overline{00}$ enden; denn diese Zahlen sind Teiler von sich selbst, sie haben ferner die Teiler 1 und 10, also mindestens drei Teiler, sind also keine Primzahlen. Da die zu ermittelnde vierstellige Primzahl möglichst groß sein soll, zweimal die Grundziffer Null enthalten soll, müßten die beiden anderen Grundziffern 9 sein. Die Zahl $9090=1\cdot 9090$ besitzt genau zwei Teiler, ist also Primzahl. $9090=2\cdot 4545$ entfällt, da 4545 nicht Element von M ist, usw.
(3) 1230, 1302, 2130, 2310, 3102, 3210 sind Primzahlen; somit existieren sechs solcher Primzahlen.

Ma 9 ■ 2630 Nach Aufgabenstellung gilt $z=10a+b$ und $a+b=9$, also
$z=10a+9-a$; $z=9a+9$; $z=9(a+1)$.
$z'=10(9-a)+a$; $z=90-9a$;
$z=9(10-a)$.
$z^2=81(a+1)^2$;
$(z')^2=81(10-a)^2$; $3z=3\cdot 9(a+1)$.
Daraus folgt
$$\frac{z^2+(z')^2}{3z}=\frac{81(a+1)^2+81(10-a)^2}{3\cdot 9\cdot(a+1)}=73;$$
$3[(a+1)^2+(10-a)^2]=73(a+1)$,
$3(a^2+2a+1+100-20a+a^2)=73a+73$,
$3(2a^2-18a+101)=73a+73$,
$6a^2-54a+303 \quad =73a+73$,
$6a^2-127a+230 \quad =0$,
$a^2-\frac{127}{6}a+\frac{115}{3}=0$,
$$a_{1,2}=\frac{127}{12}\pm\sqrt{\left(\frac{127}{12}\right)^2-\frac{115}{3}},$$
$a_1=\frac{230}{12}$ entfällt; $a_2=2$.
Es folgt $b=7$. Das Zahlenpaar heißt (27;72). Durch die Probe wird die Richtigkeit bestätigt.

Ma 10/12 ■ 2631 Angenommen, es sind x Schüler in genau einer, y Schüler in genau zwei und z Schüler in genau drei Arbeitsgemeinschaften tätig; dann gilt $x+y+z=26-6=20$ und $x+2y+3z=25$. Subtrahieren wir die erste von der zweiten Gleichung, so erhalten wir $y+2z=5$. Da x, y und z natürliche Zahlen sind, gibt es nur folgende Lösungen:

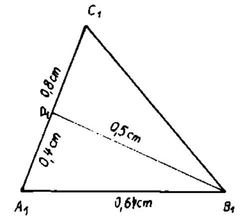
x	y	z
17	1	2
16	3	1
15	5	0

Jede dieser drei Lösungen steht im Widerspruch zu den Meinungen der drei Schüler, also sind alle drei Meinungen falsch.

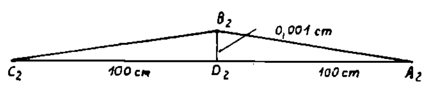
Ma 10/12 ■ 2632
Es muß das Gleichungssystem
(1) $f(p)=p^2+pp+q=0$
(2) $f(q)=q^2+pq+q=0$
gelten. Wir formen noch um:
(1) $2p^2+q=0$
(2) $q(q+p+1)=0$.
Wir unterscheiden die zwei Fälle $q=0$ und $q\neq 0$:
1. Fall: Es sei $q\neq 0$.
Damit ist (2) erfüllt. Für (1) folgt $2p^2=0$, also $p=0$. $f_1(x)=x^2$ ist somit eine Lösung, wie die Probe bestätigt.
2. Fall: Es sei $q=0$. Aus (2) folgt nach Division durch q
(2)' $q+p+1 \quad =0$,
$q=-(p+1)$.
Setzt man das in (1) ein, erhält man
(1)' $2p^2-p-1=0$
mit den Lösungen $p_1=1$, $q_1=-2$ und
$p_2=-\frac{1}{2}$, $q_2=-\frac{1}{2}$.
Daraus folgen die Lösungen
$f_2(x)=x^2+x-2$ und
$f_3(x)=x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.
Probe für $f_2(x)$:
(1) $f(p)=1^2+1\cdot 1-2=0$;
$f(p)=0$.
(2) $f(q)=(-2)^2+1(-2)-2=0$;
$f(q)=0$.
Probe für $f_3(x)$ ist analog.

Ma 10/12 ■ 2633 Im Dreieck ABC gilt
$\cos 60°=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$,
also $a^2+bc=b^2+c^2$. Nun gilt
$A_1+A_2=\frac{1}{2}bc\cdot\sin 60°+\frac{1}{4}a^2\cdot\sqrt{3}$
$=\frac{1}{4}bc\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{4}a^2\cdot\sqrt{3}$,
$A_1+A_2=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}\cdot(a^2+bc)$
$=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}\cdot(b^2+c^2)$ und
$A_3+A_4=\frac{1}{4}b^2\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{4}c^2\cdot\sqrt{3}$
$=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}\cdot(b^2+c^2)$ und somit
$A_1+A_2=A_3+A_4$.

Ma 10/12 ■ 2634 Es ist möglich. Es sei $A_1B_1C_1$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{A_1B_1}\cong\overline{B_1C_1}$ und $\overline{A_1C_1}$ sei 0,8 cm lang. Die Höhe von B_1 auf $\overline{A_1C_1}$ sei 0,5 cm lang. Dann hat die Seite $\overline{A_1B_1}\cong\overline{B_1C_1}$ eine Länge von etwa 0,64 cm < 1 cm.
Der Flächeninhalt des Dreiecks $A_1B_1C_1$ beträgt $\frac{0{,}8\cdot 0{,}5}{2}$ cm², also 0,2 cm².



Es sei $A_2B_2C_2$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{A_2B_2}\cong\overline{B_2C_2}$ und $\overline{A_2C_2}$ sei 200 cm lang. Die Höhe von B_2 auf $\overline{A_2C_2}$ sei 0,001 cm lang. Dann ist die Länge der Seite $\overline{A_2B_2}\cong\overline{B_2C_2}$ sicher größer als 100 cm, da $\overline{A_2B_2}$ Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck $A_2B_2D_2$ ist (siehe Bild).



Der Flächeninhalt des Dreiecks $A_2B_2C_2$ beträgt $\frac{200\cdot 0{,}001}{2}$ cm², d. s. 0,1 cm²;
also gilt $A_{A_1B_1C_1}>A_{A_2B_2C_2}$.

Ph 6 ■ 187 Die Masse des Trägers berechnet man nach der Gleichung
$m=A\cdot l\cdot\varrho$. Dann ist
$A=\frac{m}{l\cdot\varrho}$.
Da nun die Maßzahl x der Masse gleich der Maßzahl der Länge ist, gilt
$A=\frac{x\,\text{kg}\cdot\text{m}^3}{x\,\text{m}\cdot 750\,\text{kg}}=0{,}0013\ \text{m}^2$
$\approx 13{,}33\ \text{cm}^2$.
Der Querschnitt des Trägers beträgt etwa 13,33 cm².
Fortsetzung in Heft 4/86.

Maß und Spruchweisheit

- Siebenmal messen – einmal abschneiden.
- Besser einmal selber messen, als dreimal anders glauben.
- Gutes Maß braucht keinen Glauben.
- Mancher suchet eyn pfennig und verbrinnt darbey drey lichte.

Auf den Spuren von Mathematikern

Ehrenfried Walter von Tschirnhaus
ein sächsischer Mathematiker

„Der redliche alte Herr von Tschirnhausen ist ganz tot, seine merita (Verdienste) vergessen und seine Wissenschaften und Vermögen zu Staub."
(Weck an Leibniz 2.4.1715)

Wer war dieser Ehrenfried Walter von Tschirnhaus?
Er wurde am 10. April 1651 in Kießlingswalde bei Görlitz (heute VR Polen) geboren. Wie es in jenen Jahren unter Adligen üblich war, bekam der junge Ehrenfried zuerst Privatunterricht. Mit 15 Jahren kam er in das Görlitzer Gymnasium. Dort interessierte er sich sehr für die Naturwissenschaften.
1668 begab sich der 17jährige Ehrenfried nach Leiden. Er wurde ein sehr guter Mathematiker und Physiker, studierte aber auch Philosophie und andere Wissenschaften. 1675 lernte E. W. v. Tschirnhaus in Paris den jungen G. W. Leibniz kennen. Beide wurden Freunde und arbeiteten gemeinsam an mathematischen Problemen. In dieser Zeit entwickelte Tschirnhaus u. a. seine Ideen der Gleichungstransformation.

Aufgabe

▲1▲ Ein Polynom $y = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ soll mittels einer Substitution $x = az + b$ so „transformiert" werden, daß das Glied $a_{n-1}x^{n-1}$ verschwindet.
a) Wie sind a und b zu wählen?
b) Löse die Gleichung $y = x^2 - 2x - 8$ mittels solcher Transformation!

Tschirnhaus und Leibniz überlegten, wie in Deutschland eine Akademie nach dem Vorbild der Pariser Académie oder der englischen Royal Society gegründet werden könne. (Es gelang aber erst im Jahre 1700 durch Leibniz in Berlin, eine Akademie nach Tschirnhaus' Ideen zu gründen.)
In Paris wurden auch verschiedene physikalische und chemische Experimente unternommen und wissenschaftliche Literatur studiert.
1676 reiste Tschirnhaus nach Italien und kehrte 1679 über Paris in seine Heimat zurück. Der Wunsch seiner Eltern war es, Ehrenfried möge ein Hofamt in Dresden ausüben. Aber er ging nicht an den Hof August des Starken, sondern führte seine praktischen Versuche (Brennspiegel, Linsen u. a.) und theoretischen Untersuchungen (Algebra, Philosophie) weiter. Sein ganzes Leben blieb er mit Dresden und seiner sächsischen Heimat verbunden. Er stellte sein Wissen in den Dienst des Herrschers, um so seinem Vaterland zu dienen.
1682 gelang es Tschirnhaus, Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften zu werden.
Im Jahre 1687 erscheint das philosophische Hauptwerk E. W. v. Tschirnhaus'. Darin legt er dar, daß die Erfahrung und das logische Schließen die wichtigsten Quellen für die menschliche Erkenntnistätigkeit sind. Dazu müssen aber beide zusammenwirken. Wer dies richtig handhabt, dem werden viele Entdeckungen gelingen und Geheimnisse sich offenbaren. Dieses Streben nach Wissen muß aber frei sein von Eitelkeit und Selbstsucht. Dazu gehört auch, daß man körperlich frei von Leiden ist. Mit diesem Werk bringt er die Ideen Spinozas nach Deutschland und wird neben Leibniz zum Begründer der Aufklärung in Mittel- und Osteuropa.
Im Jahre 1693 stirbt die Frau Tschirnhausens, die auch sein Gut verwaltet hatte. Mit geringer Unterstützung des Dresdner Hofes experimentiert Tschirnhaus weiter, berechnete die größten und stärksten damals bekannten Brenngläser (Linsen und Spiegel) und baute sie in eigens dafür errichteten Werkstätten. Diese optischen Geräte waren so stark, daß nasses Holz sofort entflammte, Metalle schmolzen usw. Mit diesen Geräten führte er umfangreiche Versuchsreihen zum Schmelzen von Sand, Glas u. a. Materialien durch.
Für die Mathematik und Physik ist wichtig, daß er hierbei die Brennlinien von Linsen und Spiegeln entdeckte und außerdem auch berechnete. Denn der ideale Brennpunkt wird praktisch nicht erreicht, aber nun findet man die Stelle, wo es „am heißesten" ist.

Aufgabe

▲2▲ Sei $y = mx\ (m > 0, x \geqq 0)$ der einfallende Strahl auf eine optische Fläche $(y = 0)$. Dann ist die y-Achse das Lot im Einfallspunkt. Reflexionsgesetz: Der Winkel zwischen Lot und einfallendem Strahl ist gleich dem Winkel zwischen Lot und reflektiertem Strahl.
a) Gib die Gleichung des reflektierten Strahls an!
Brechungsgesetz: Für den Winkel α' zwischen Lot und einfallendem Strahl und dem Winkel β' zwischen Lot und gebrochenem Strahl gilt:
$\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'} = n$ (n = Brechungszahl).
b) Gib die Gleichung des gebrochenen Strahls an!

Das Jahr 1702 wird für Tschirnhaus eines der bedeutendsten. Er besucht Glasmanufakturen in Frankreich, heiratet zum zweiten Mal und kommt auch mit J. F. Böttger zusammen, als dessen Aufseher und wissenschaftlicher Berater er von König August eingesetzt wird. Auf Betreiben Tschirnhausens wird in Dresden ein Laboratorium errichtet, in dem nach der Rezeptur für das Porzellan geforscht wird. Die Schmelzversuche und das Wissen Tschirnhausens und die chemischen Kenntnisse Böttgers fügten sich ineinander.
So muß der Schluß gezogen werden, daß während dieser gemeinsamen Tätigkeit das Porzellan von Tschirnhaus und Böttger erfunden wurde.
Getreu seinen Vorstellungen und Erfahrungen von der wissenschaftlichen Forschung und Lehre schrieb er unter dem Einfluß der Lehren von Comenius ein Büchlein zur Umgestaltung des Schulunterrichts. Nach dieser Vorlage wurde der naturwissenschaftliche, insbesondere der Mathematikunterricht umgestaltet. Zu den ersten Schulen, die Tschirnhaus' Ideen in die Praxis einführten, gehörten die Franckeschen Stiftungen in Halle, die Fürstenschule St. Afra in Meißen sowie das Görlitzer Gymnasium. Tschirnhaus Leben war ausgefüllt mit wissenschaftlicher Tätigkeit am Schreibtisch und im Labor. Für seine Forschungen setzte er sein ganzes Vermögen ein. Am 11. Oktober 1708 wird er durch den Tod aus seinem Schaffen gerissen. Zu Unrecht ist er einige Jahre darauf vergessen. Erst in der heutigen Zeit wird sein Wirken gewürdigt.

D. Bauke

Lösungen zu:
Einiges über regelmäßige und halbregelmäßige Polyeder
(Siehe S. 50/51!)

▲1▲ Durch Abschneiden der Eckpyramiden des Würfels mit kleineren Pyramidenhöhen als bei der Konstruktion des Mittelkristalls entsteht der von regelmäßigen Drei- und Achtecken begrenzte abgestumpfte Würfel ($e = 24$, $f = 14$, $k = 36$, $n_1 = 3$, $n_2 = 8$, $p = 3$).
Schneidet man in geeigneter Weise die Eckpyramiden des platonischen Oktaeders ab, so liegt das von regelmäßigen Vier- und Sechsecken begrenzte abgestumpfte Oktaeder vor ($e = 24$, $f = 14$, $k = 36$, $n_1 = 4$, $n_2 = 6$, $p = 3$).

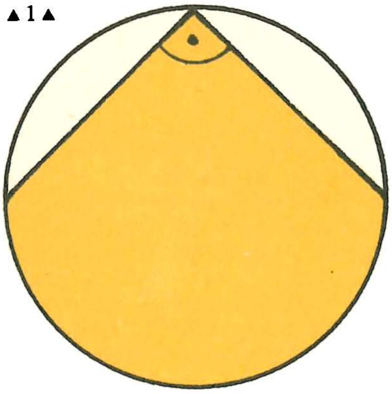
▲2▲ Es handelt sich um Doppelpyramiden. Beim quadratischen Prisma (Würfel!) entsteht das als Doppelpyramide interpretierbare platonische Oktaeder.

Ein rundes Dutzend

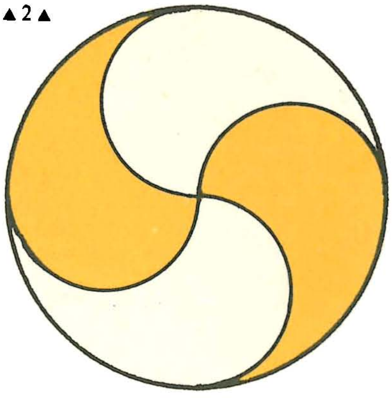
Berechne jeweils den Flächeninhalt der Figuren, die aus den farbigen Kreisen geschnitten wurden ($r = 1$)!
Wieviel Prozent des jeweiligen Kreises macht er aus?

Ch. Werge

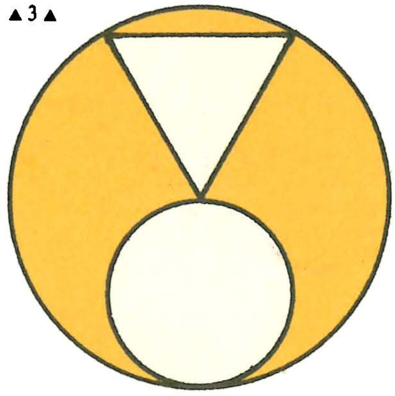
▲1▲



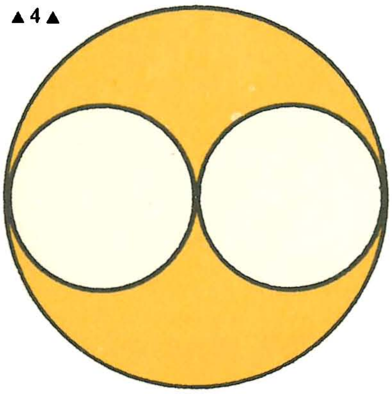
▲2▲



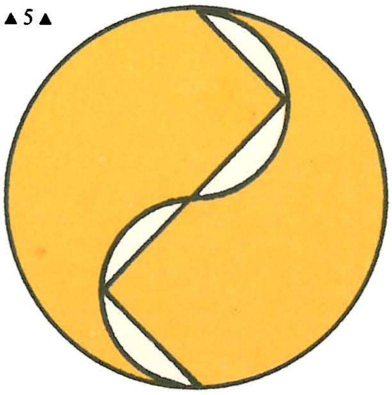
▲3▲



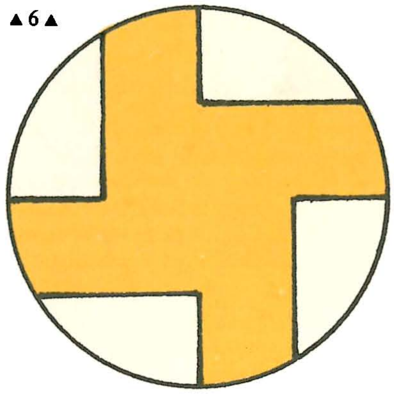
▲4▲



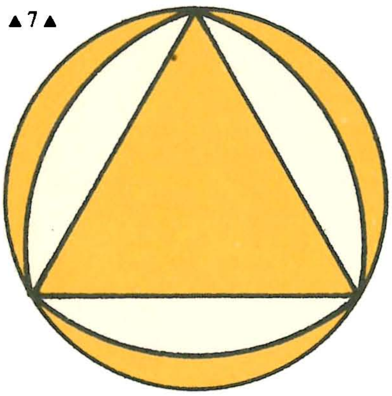
▲5▲



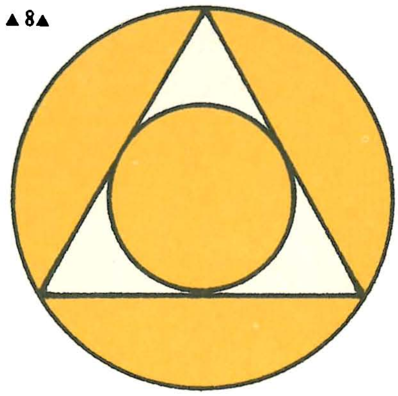
▲6▲



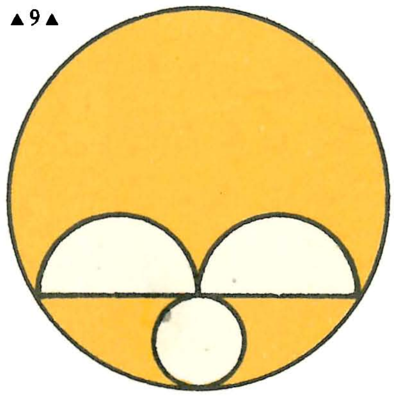
▲7▲



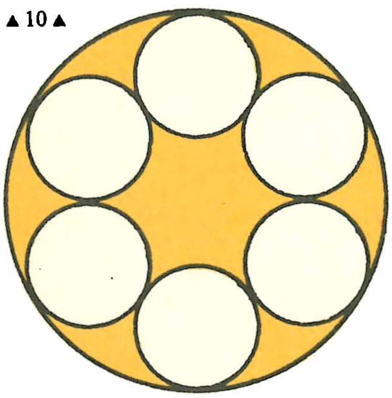
▲8▲



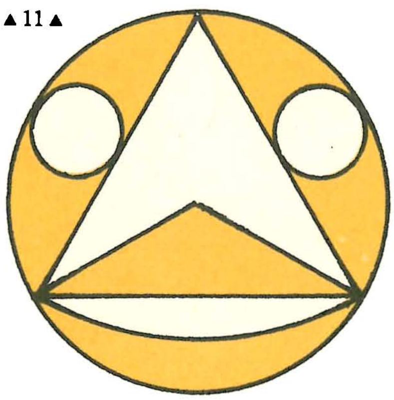
▲9▲



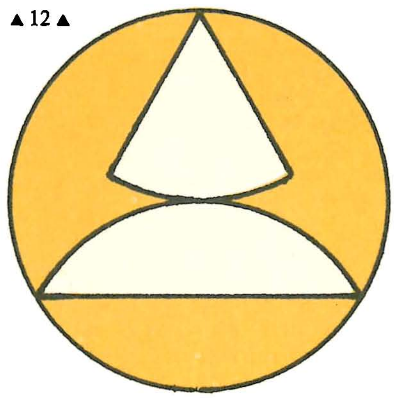
▲10▲



▲11▲



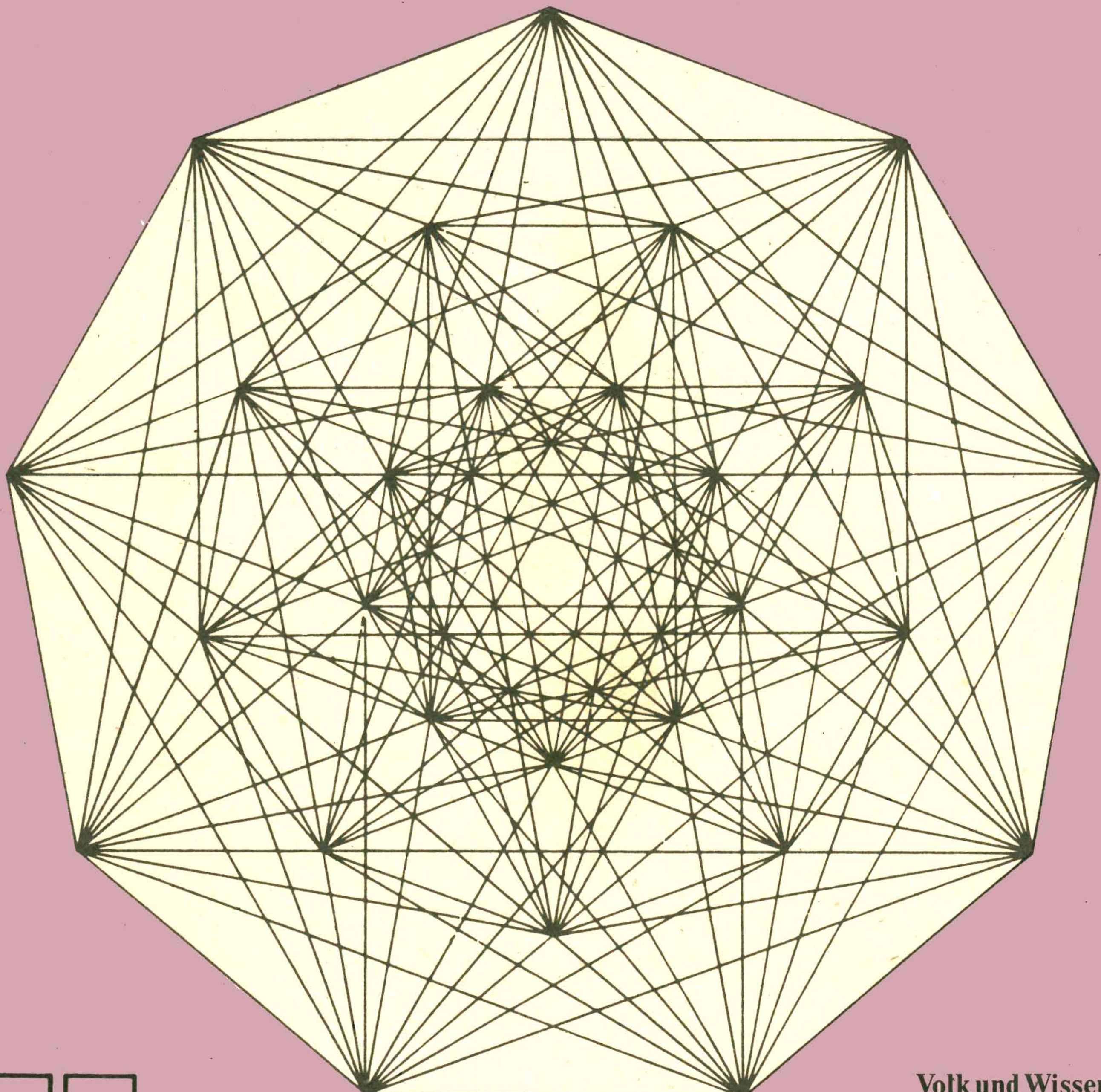
▲12▲



ISSN 002-6395 · alpha · Berlin · 20 (1986) 3 · Seiten 49 bis 72

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



4

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
20. Jahrgang 1986
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold
Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
1086 Berlin, Krausenstr. 50, PSF 1213
Anschrift der Redaktion:
7027 Leipzig, PSF 14
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Münze von Regiomontanus, Archiv P. Schreiber, Greifswald (S. 89); U. Pullwitt, Leipzig (S. 76); ADN/Zentralbild, Berlin (S. 77), Reproduktion, Archiv H. Pieper, Berlin (S. 92); *IV. U.-Seite*, Graphik, gestaltet nach Vorlagen finnischer Schüler, H. Teske, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, gestaltet nach einer Vorlage aus math. Schülerzeitschrift *Lapok*, Budapest
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 14. April 1986
Auslieferungstermin: 14. Juni 1986

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

[1] bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Clusteranalyse und Informationsverdichtung beim Damenproblem

Einführung

Eine wichtige Aufgabe der Informationsverarbeitung ist die Informationsverdichtung und damit eine Reduktion der Informationsmenge. Diese Problematik soll an der kombinatorischen Lösungsmannigfaltigkeit des bekannten Damenproblems behandelt werden, das sehr instruktiv in dem Beitrag von Posthoff: *Die Lösung kombinatorischer Probleme mit Hilfe von Computerprogrammen* in *alpha*, Heft 1/1985, dargestellt wurde.

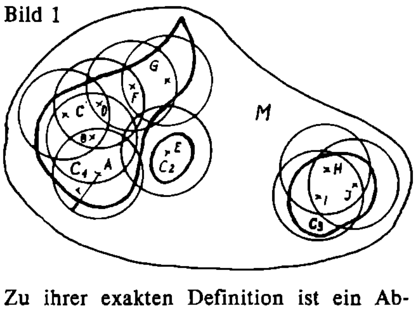
Es wird hier die in jenem Artikel besprochene Methode, das Backtrack-Verfahren, zur Erzeugung aller kombinatorischen Lösungen als bekannt vorausgesetzt. Es soll die Frage behandelt werden, wie diese Informationsmenge verdichtet und damit reduziert werden kann, ohne *etwas zu verschenken*. Eine bekannte Methode zur Informationsverdichtung ist die Clusteranalyse.

Clusteranalyse

Heuristische Betrachtungen

Endliche Punktmengen haben die Eigenschaft, daß sie in charakteristische Untermengen zerlegt werden können, deren Elemente sich durch ihre Lage zueinander auszeichnen, die sich gruppieren oder an einigen Stellen zusammenballen oder Klumpen bilden. Solche Untermengen heißen Cluster (Bild 1).

Bild 1



Zu ihrer exakten Definition ist ein Abstandsbegriff erforderlich. Bild 1 zeigt eine Punktmenge M von zehn Punkten, die mit den ersten zehn Buchstaben des Alphabets bezeichnet wurden. Jeder Punkt wurde mit einer kreisförmigen r-Umgebung (r ist der Radius des Kreises) versehen, $r > 0$, beliebig, aber konstant. Bei dem angenommenen Wert für r zerfällt M in drei Untermengen C_1, C_2, C_3:

$M = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$
$C_1 = \{A, B, C, D, F, G\}$
$C_2 = \{E\}$
$C_3 = \{H, I, J\}$
$M = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, $C_i \cap C_k = \{\emptyset\}$ für $i \neq k$.

Das Ermitteln dieser Untermengen heißt Clusteranalyse. Man beginnt die Clusteranalyse mit einem beliebigen Punkt aus M (Die Punkte einer Menge müssen alle gleichberechtigt sein!) und eröffnet mit ihm den ersten Cluster C_1, z. B. wenn man mit D beginnt: $\{D\} \subseteqq C_1$. Nun werden weiter alle neuen Punkte in den Cluster aufgenommen, die in der r-Umgebung des Punktes D liegen, das sind: B, C, F. C_1 wird also erweitert um diese Punkte: $C_1 \supseteqq \{D, B, C, F\}$. (Hätten wir den Prozeß mit dem Punkt E begonnen, so wäre $C_1 = \{E\}$ geworden, denn E enthält keinen weiteren Punkt von M in seiner r-Umgebung. Ein isolierter Punkt kann also auch einen Cluster bilden.) Fahren wir jedoch mit $C_1 \supseteqq \{D, B, C, F\}$ fort: Von allen neuen Punkten werden wieder die Umgebungen untersucht, ob sie Punkte von M enthalten, die noch nicht in C_1 integriert wurden: für B ist es A, (C und D sind schon vorhanden) für C kein Punkt, für F ist es G, also werden A und G noch in C_1 gesteckt: $C_1 = \{D, B, C, F, A, G\}$. In den r-Umgebungen von A und G werden keine neuen Punkte gefunden, damit ist der Aufbau des Clusters C_1 abgeschlossen. Nun nimmt man einen beliebigen Punkt aus der Differenzmenge $M \setminus C_1$ und beginnt damit den Cluster C_2 nach dem gleichen Prinzip zu füllen, wie eben beschrieben. Ist auch der Aufbau von C_2 abgeschlossen, so ist mit irgendeinem Punkt aus
$M \setminus (C_1 \cup C_2)$ fortzufahren,
bis schließlich die Differenzmenge
$M \setminus (C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n)$ leer ist.

Dann war C_n der letzte Cluster. Die Numerierung der Cluster hängt offensichtlich von der Wahl der Startpunkte ab, die Cluster selbst dagegen nicht. Sie hängen aber vom Umgebungsbegriff und seiner Größe ab. Wählt man z. B. bei der r-Umgebung den Radius r klein genug, etwa kleiner als das Minimum der Abstände von je zwei Punkten der zu untersuchenden Menge, so bildet jeder Punkt der Menge für sich einen Cluster, ist er groß genug, so beseht die ganze Menge nur aus einem Cluster. Beide Extremfälle sind jedoch im allgemeinen für die Clusteranalyse uninteressant. Für die Wahl eines *vernünftigen* Abstandes sind häufig fachspezifische Kenntnisse aus dem jeweiligen Anwendungsgebiet erforderlich, ebenso für eine sachgerechte Interpretation von ermittelten Clustern. Zur automatischen Durchmusterung von endlichen Mengen in mehrdimensionalen Räumen wurden leistungsfähige Computerprogramme entwickelt.

Mathematisierung

Es sei M eine nichtleere, endliche Punktmenge mit einem Abstandsbegriff $d(A, B)$ für je zwei Elemente A, $B \in M$.

Definition: Eine nichtleere Teilmenge C von M heißt r-Cluster von A, wenn $A \in C$ und für jedes Element $X \in M$ gilt: $X \in C$ genau dann, wenn es eine (endliche) Folge $X = X_0, X_1, \ldots, X_n = A$ von Elementen $X_i \in M$ gibt, von denen je zwei benachbarte einen Abstand $< r$ haben, also
$d(X_i, X_{i+1}) < r$ für $i = 0(1)n-1$.

(Scheinbar ist das Clusterelement A bei der Definition des r-Clusters C ausgezeichnet. Weiter unten wird sich jedoch zeigen, daß das nicht der Fall ist.)

Behauptung: Für jedes feste $r > 0$ und je zwei beliebige Punkte A und $B \in M$ gilt: Die r-Cluster von A und B sind entweder identisch oder elementefremd.

Beweis: C sei r-Cluster von A und C' sei r-Cluster von B. Ist $C \cap C' = \{\emptyset\}$, so ist nichts weiter zu zeigen. Es sei $C \cap C' \neq \{\emptyset\}$. Dann gibt es ein Element, nennen wir es D, mit
$D \in C \cap C'$, d. h. $D \in C$ und $D \in C'$.
Aus $D \in C$ folgt nach der Clusterdefinition: es gibt notwendig eine Folge
$D = D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}, D_n = A$ mit
$D_i \in M$, $d(D_i, D_{i+1}) < r$, $i = 0(1)n-1$.
Analog existiert eine Folge
$D = D'_0, D'_1, \ldots, D'_k = B$ mit $D'_i \in M$,
$d(D'_i, D'_{i+1}) < r$, $i = 0(1)k-1$.

(1) Es sei $X \in C$. Dann gibt es wieder nach der Clusterdefinition eine Folge
$X = X_0, X_1, \ldots, X_{l-1}, X_l = A$ mit
$X_i \in M$, $d(X_i, X_{i+1}) < r$, $i = 0(1)l-1$.
Nun ist aber
$X = X_0, X_1, \ldots, X_{l-1}, A, D_{n-1}, \ldots,$
$D_1, D, D'_1, \ldots, D'_{k-1},$
$D'_k = B$ eine Folge, in der zwei benachbarte Elemente einen Abstand $< r$ haben. Die Elemente gehören alle zu M. Die Folge führt von X nach B, ihre Existenz ist hinreichend für $X \in C'$. Damit hat man $C \subseteqq C'$, denn X war beliebig.

(2) Die Umkehrung beweist man ganz analog: Es sei $Y \in C'$, also gibt es eine Folge
$Y = Y_0, Y_1, \ldots, Y_{s-1}, Y_s = B$ mit
$Y_i \in M$, $d(Y_i, Y_{i+1}) < r$, $i = 0(1)s-1$.
Die Folge
$Y = Y_0, Y_1, \ldots, Y_{s-1}, B, D'_{k-1}, \ldots,$
$D'_1, D, D_1, \ldots, D_n = A$
liefert uns $Y \in C$ und damit $C' \subseteqq C$.

Beide Ergebnisse zusammen ergeben die Behauptung $C = C'$. Der eben bewiesene Satz zeigt insbesondere: Ist C r-Cluster von A und $B \in C$, so ist der r-Cluster von B gleich C. A ist also bei der Definition von C als Clusterelement nicht ausgezeichnet, wenn es neben A noch andere Elemente in C gibt.

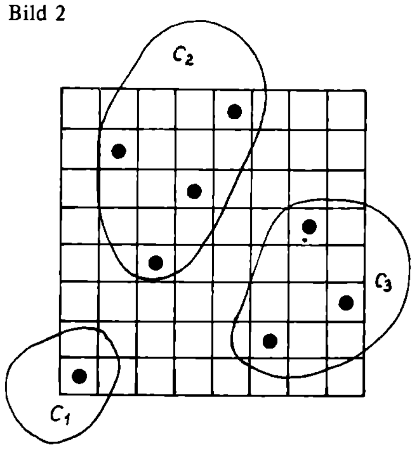
Hat man paarweise verschiedene r-Cluster $C_1, C_2, \ldots, C_n$ von M mit der zusätzlichen

Eigenschaft $M = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$, so liegt eine spezielle (d. h. für ein bestimmtes $r > 0$) Zerlegung von M vor, die Clusterzerlegung von M heißt. Die Clusterzerlegung ist für jedes feste r eindeutig.

Das Damenproblem

Auf einem quadratischen Schachbrett mit n^2 Feldern sind n Damen so zu plazieren, daß keine Dame eine andere schlagen kann. Der minimale Abstand zweier Damen ist offenbar ein Springerzug, oder, wenn wir die Damen auf die Kreuzungspunkte eines quadratischen Gitters mit der Maschenweite 1 postieren, $\sqrt{5}$. Alle kombinatorischen Lösungen des Damenproblems kann man, wie schon gesagt, nach dem Backtrack-Verfahren erhalten. Hat man eine Lösung, so kann man sie als Punktmenge auffassen und einer Clusteranalyse unterwerfen, z. B. mit einer Kreisscheibenumgebung vom Radius $r = 3$ (nach $\sqrt{5}$ ist der nächstgrößere mögliche Abstand zweier Damen $\sqrt{10}$, $\sqrt{5} < 3 < \sqrt{10}$), also liefert $r = 3$ Cluster, in denen die Damen durch Springerzüge gekoppelt sind, das scheint für dieses Problem der sachlich angemessene Abstand zu sein. Eine solche Clusteraufteilung ist unabhängig von der Seite, von der das Schachbrett angesehen wird, und auch das Spiegelbild läßt sich von allen vier Seiten betrachten. Spiegeln kann man eine Stellung z. B. an einer Mittelsenkrechten des Brettes, einer Diagonalen oder Kante. Hat die Stellung keine Symmetrieeigenschaften, so wird sie bei der kombinatorischen Aufzählung achtmal vorkommen (Bild 2). Man kann also die Hoffnung haben, daß sich die Lösungsmenge erheblich reduzieren läßt, wenn man statt der kombinatorischen Lösung auf die innere Struktur oder Geometrie der Lösung achtet, die ihren Ausdruck findet in der Zahl der Cluster, ihrer Größe, ihrer Form und Lage auf dem Schachbrett. Sie sollen hier eigentliche Lösungen genannt werden. So erhält man bei $n = 8$ statt 92 kombinatorische Lösungen nur noch 12 eigentliche Lösungen, was den Überblick wesentlich erleichtert, aber verschenkt wurde auch keine.

Bild 2



Ergebnisse zum Damenproblem

Tabelle 1: Die eigentlichen Lösungen für $n = 8$

Lösungsnummer	Position A	B	C	D	E	F	G	H	Kombinat. Lösungen	Clusteranzahl	Clusterbelegung
L1	1	5	8	6	3	7	2	4	8	3	1+3+4
L2	1	6	8	3	7	4	2	5	8	3	1+3+4
L3	2	4	6	8	3	1	7	5	8	3	2+2+4
L4	2	5	7	1	3	8	6	4	8	4	1+2+2+3
L5	2	5	7	4	1	8	6	3	8	5	1+1+1+2+3
L6	2	6	1	7	4	8	3	5	8	3	2+3+3
L7	2	6	8	3	1	4	7	5	8	3	1+2+5
L8	2	7	3	6	8	5	1	4	8	3	1+2+5
L9	2	7	5	8	1	4	6	3	8	4	1+1+3+3
L10	3	5	2	8	1	7	4	6	4	2	4+4
L11	3	5	8	4	1	7	2	6	8	4	1+2+2+3
L12	3	6	2	5	8	1	7	4	8	5	1+1+2+2+2
									= 92		

Bild 3

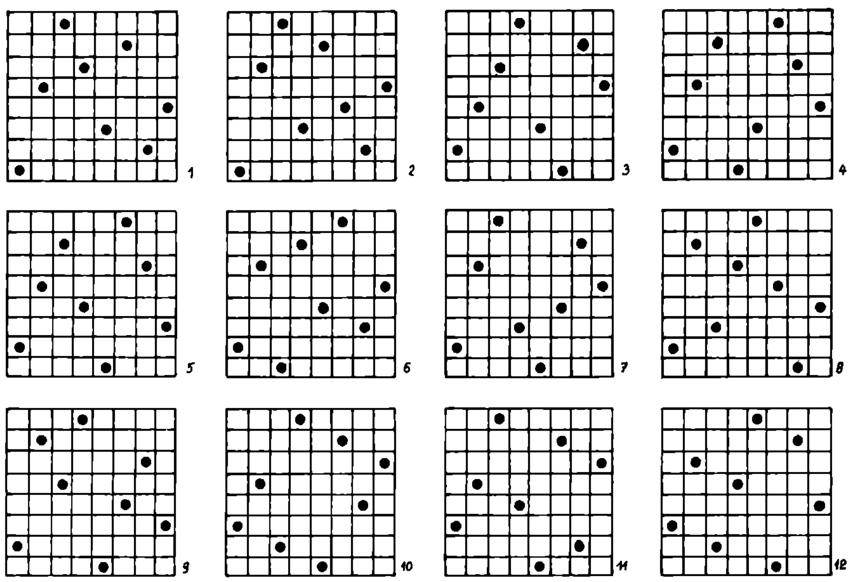


Tabelle 2: Anzahl der kombinatorischen und eigentlichen Lösungen für die ersten n-Werte

n	Anzahl der kombin. Lösungen	Anzahl der eigentl. Lösungen	Anzahl der Cluster	Clusterbelegung
1	1	1	1	1
2	0	0	–	–
3	0	0	–	–
4	2	1	1	4
5	10 { 8	2	1	5
	2		1	5
6	4	1	2	3+3
7	40 { 8	6	2	3+4
	8		3	1+3+3
	4		3	1+1+5
	8		3	1+2+4
	8		2	3+4
	4		3	2+2+3
8	92	12	siehe Tabelle 1	
9	352	?	?	?

W. Dörband

Eine Aufgabensammlung aus dem Jahre 1475

Zum 550. Geburtstag des Johannes Müller, genannt Regiomontanus

Am 6. Juni 1436 wurde in dem Städtchen Königsberg in Franken (oder vielleicht in dem nahe gelegenen Dorf Unfinden) Johannes Müller geboren, der sich später, der Sitte seiner Zeit folgend, den klangvollen Gelehrtennamen Regiomontanus (svw. der Mann aus Königsberg) zulegte. Regiomontanus gilt heute allgemein als der bedeutendste europäische Mathematiker des 15. Jh. Zugleich ist er in seinem Leben und Wirken ein so typisches Kind seiner Zeit, daß er geradezu als Symbolfigur der Renaissance gelten kann.

Regiomontanus begann sein Studium 1447 in Leipzig (also im Alter von 11 Jahren, das war damals üblich) und setzte es ab 1450 in Wien fort, wo er der Schüler des Georg Peurbach (1423 bis 1461) wurde, der ein umfangreiches Programm zur Erneuerung der rechnenden Astronomie und ihrer mathematischen Hilfsmittel aufgestellt hatte.

Regiomontanus erwarb mit 15 Jahren den akademischen Grad eines Baccalaureus, 1457 den Magistertitel. Zu dieser Zeit übte er bereits selbst eine Lehrtätigkeit an der Wiener Universität aus, auch dies war damals üblich. Nach dem Tode seines Lehrers 1461 reiste er in Begleitung des Kardinals Bessarion, eines Förderers von Astronomie und Mathematik, nach Rom und vollendete dort 1462 die Bearbeitung des astronomischen Standardwerkes Syntaxis (auch als „Almagest" bekannt) des spätantiken Astronomen Klaudios Ptolemäos (um 80 bis um 160), die Peurbach im Auftrag Bessarions begonnen hatte. Während seines etwa sechsjährigen Aufenthaltes in Italien vollendete Regiomontanus 1463 sein Hauptwerk „Fünf Bücher über Dreiecke aller Art", in dem er als erster Europäer die ebene und sphärische Trigonometrie als selbständige mathematische Disziplin aus ihrem Hauptanwendungsgebiet, der Astronomie, herauslöste und wesentlich vorantrieb, u. a. durch die explizite Formulierung von Sätzen nach Art des Cosinus- und Sinussatzes (freilich noch mit anderen Bezeichnungen und bezogen auf andere als die heute üblichen trigonometrischen Funktionen) und den Übergang zu dezimal (statt sexagesimal) geteilten Bruchteilen der Tabellenwerte für die Winkelfunktionen. Regiomontanus erwarb hervorragende Kenntnisse der klassischen Sprachen Griechisch und Latein und interessierte sich sehr für die Wiedererschließung des antiken wissenschaftlichen Erbes. Er entdeckte z. B. ein bis dahin unbekanntes Werk des spätantiken Zahlentheoretikers Diophant (um 250) und hielt 1463 an der Universität in Padua einen Vortrag, der später gedruckt wurde (Melanchthon nahm ihn in eine Sammlung berühmter Reden auf) und den man als die erste Vorlesung über Geschichte der Mathematik bezeichnen könnte.

Nach kurzer Lehrtätigkeit an der Universität Preßburg (Bratislava) übersiedelte Regiomontanus 1471 nach Nürnberg, dem Zentrum des aufstrebenden, nach praktikabler Wissenschaft, technischem und künstlerischem Fortschritt strebenden deutschen Bürgertums, und gründete eine Werkstatt zur Herstellung von Kunstuhren, astronomischen und mathematischen Geräten sowie eine Druckerei, in der er teils fremde, insbesondere antike Werke in eigenen Übersetzungen und Bearbeitungen, teils auch seine eigenen Werke herausgeben wollte. Wem solcher Broterwerb eines Wissenschaftlers befremdlich erscheint, der möge sich erinnern, daß z. B. der Maler Lucas Cranach d. Ä. (1472 bis 1553) in Wittenberg neben seiner Malerwerkstatt eine Apotheke betrieb. Kunst und Wissenschaft in engster Verbindung mit bürgerlichem Geschäft, das ist das Antlitz der Renaissance, der Zeit der frühbürgerlichen Revolution. Über das geplante Verlagsgeschäft Regiomontanus' informiert ein zweispaltiges Flugblatt, in dem in der linken Spalte die zu druckenden fremden, in der rechten die eigenen Schriften angekündigt werden. Unter den ersteren befinden sich die Hauptwerke von Ptolemäos (einschließlich seiner pseudowissenschaftlichen Fundierung Tetrabiblos der Astrologie), Euklid, Archimedes und Apollonios, unter den letzteren die bereits erwähnte Dreieckslehre, astronomische Tafeln, Kalender, Jahrbücher (sogenannte Almanache), Ephemeriden (Tafeln von Planetenörtern), Kommentare, Streitschriften u. a. Zur Ausführung kam nur ein sehr geringer Teil dieser Drucke. Schon 1475 wurde Regiomontanus erneut nach Rom gerufen, um als Experte an der von der katholischen Kirche geplanten Kalenderreform mitzuwirken. Im Sommer 1476 starb er in Rom, vermutlich an einer damals dort umgehenden Seuche. Es gibt aber auch Gerüchte, wonach er von Neidern und Konkurrenten vergiftet worden sein soll. So war selbst sein Tod typisch für die Renaissance.

Vom Entwurf zu einem unvollendeten Werk des Regiomontanus ist erst in unserem Jh. eine Abschrift entdeckt und 1956 in deutscher Übersetzung erstmals gedruckt worden. Das Manuskript trägt den Titel

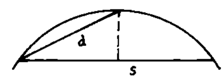
Geometrische Probleme aller Art;
ein Werk ergiebigen Vergnügens
(oder auch Commensurator)

und enthält 396 Sätze und Aufgaben (die Sätze ohne Beweise, die Aufgaben ohne Lösungen, vieles ist noch skizzenhaft). Es ist in 13 Kapitel gegliedert, die Überschriften tragen wie z. B. Über die Multiplikation, Division und das Ausziehen von Wurzeln – Über die Sehnen von Kreisbögen – Über die Maße geradliniger Flächen – Über die regelmäßigen Körper – Über das Maß unregelmäßiger Körper.

Nachfolgend geben wir einige Kostproben aus dem Commensurator zum ergiebigen Vergnügen der *alpha*-Leser. (Die zum Teil nur flüchtig und nicht eindeutig formulierten Aufgaben wurden nicht wörtlich übersetzt, sondern sinngemäß wiedergegeben.)

II.9. Es ist eine Formel für die Abhängigkeit der Sehne d des halben Bogens von der Sehne s eines beliebigen Kreisbogens (Radius 1) aufzustellen (Bild 1).

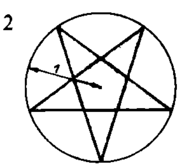
Bild 1



II.14. Sei d_n die Seite des dem Einheitskreis einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks. Dann gilt $d_{10}^2 + 1 = d_5^2$. (Man wende II.9 an!)

V.104. Man bestimme den Flächeninhalt des dem Einheitskreis einbeschriebenen Sternfünfecks (damals als Pentagramm oder als Salomonisches Pentagon bezeichnet, Bild 2).

Bild 2



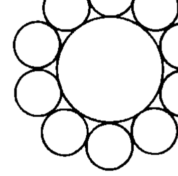
V.131. Durch einen gegebenen Punkt P außerhalb eines gegebenen Dreiecks ABC ist (mit Zirkel und Lineal) eine Gerade zu konstruieren, die das Dreieck in zwei flächengleiche Teile zerschneidet.

V.140. Ein rechtwinkliges Dreieck ist (mit Zirkel und Lineal) aus der gegebenen Länge der Hypotenuse und der Differenz der beiden Kathetenlängen zu konstruieren.

VI.42. Einen gegebenen Kreis berühren 10 untereinander gleiche Kreise von außen wie in Bild 3 gezeigt. Wie kann man die äußeren Kreise bei gegebenem inneren Kreis mit Zirkel und Lineal konstruieren? Nach welcher Formel läßt sich der Radius der äußeren Kreise in Abhängigkeit vom Radius des inneren Kreises berechnen?

VII.29. Warum gibt es nicht zu jeder natürlichen Zahl $n \geqq 4$ und gegebener Kugel K n untereinander gleiche Kugeln, die K von außen und sich untereinander zu je dreien so berühren, daß sie eine geschlossene Hülle um K bilden (räumliche Analogie zu Bild 3)?

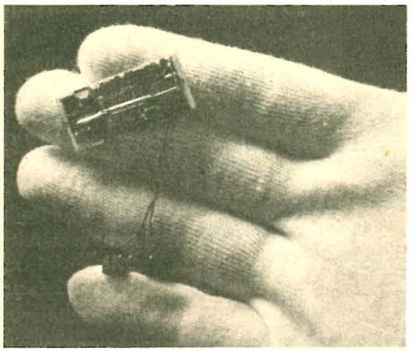
Bild 3



Für welche Anzahlen n ist eine solche Konfiguration möglich?

P. Schreiber

Mathematik und wissenschaftlich-technischer Fortschritt



Die Mathematisierung eines beliebigen Gebietes der Wissenschaften oder Technik geht immer einher mit einer theoretischen Vertiefung auf diesem Feld. Eine derartige mathematisch-theoretische Durchdringung entfernt es aber keineswegs von der Praxis, sondern macht eine umfassendere praktische Nutzung in einer neuen Qualität überhaupt erst möglich. Insbesondere moderne Technologien erfordern ein hohes Maß an Grundlagenwissen, was am Beispiel der Mikroelektronik oder Robotertechnik sofort deutlich wird. So hat die Mathematik wesentlichen Anteil am wissenschaftlich-technischen Fortschritt, der Voraussetzung für die weitere Entwicklung unserer Gesellschaft ist.

„Alles was meßbar ist, messen und alles, was nicht meßbar ist, meßbar machen", so lautete der Grundsatz, mit dem Galileo Galilei (1564 bis 1642) das Zeitalter der modernen Naturwissenschaften einleitete. Heute, 300 Jahre später, ist dieser Grundsatz aus der Naturwissenschaft aktueller denn je. Neben den nicht zu unterschätzenden Bereichen, wo der Techniker, Brigadier, Arbeiter, Verkäufer usw. unmittelbar mit dem Bleistift in der Hand oder dem Taschenrechner etwas berechnet, erreicht die Mathematik ihre Wirksamkeit bei der Gestaltung des wissenschaftlich-technischen Fortschritts auch mittelbar durch die Natur- und Gesellschaftswissenschaften. Dabei sind die Technikwissenschaften zu einem entscheidenden Bindeglied zwischen Natur- und Gesellschaftswissenschaften einerseits und der Produktion andererseits geworden. Diese Entwicklung war und ist bis heute verbunden mit der natur- und gesellschaftswissenschaftlichen Durchdringung der technischen Wissenschaften und der Herausbildung spezieller technischer Wissenschaftsdisziplinen. Eine dieser neuen Wissenschaftsdisziplinen ist die Informatorik.

Wie kein anderer Industriezweig bestimmt die Mikroelektronik die Möglichkeiten zur Nutzung theoretischer Erkenntnisse in der Technik. Die Produktion leistungsfähiger Computer, die Konstruktion von Robotern und die Automatisierung ganzer Produktionsprozesse verlangen integrierte mikroelektronische Schaltkreise, die wiederum Entwicklungs- und Herstellungsverfahren mit hochentwickelter Rechentechnik zur Voraussetzung haben.

Eine weitere Grundlage dafür, wie überhaupt für die moderne Technik und für die wissenschaftliche Arbeit, ist die Präzisionsmeßtechnik und die damit verbundene Definition der Normale für die Basiseinheiten des Maßsystems. Es zeigt sich, daß ein enger Zusammenhang zwischen dem Stand der theoretischen Erkenntnisse und den erzieherischen Meßgenauigkeiten bestehen. Die Präzisionsmeßtechnik ist ein weiteres Beispiel für den engen Zusammenhang zwischen mathematisierter Wissenschaft und technischem Fortschritt.

Wir wollen im weiteren erläutern, wie die Präzisionsmeßtechnik, die eine Voraussetzung für moderne Technologie bildet, nur auf der Grundlage der Quantentheorie möglich ist, die eine fundamentale naturwissenschaftliche Errungenschaft unseres Jahrhunderts darstellt. Dabei werden wir veranschaulichen, welche prinzipielle Bedeutung die Mathematik hat, indem sie nicht nur eine Berechnung, sondern die Formulierung der Naturzusammenhänge überhaupt erst ermöglicht.

Wir nehmen zum Ausgangspunkt die fundamentalen Naturkonstanten c (Lichtgeschwindigkeit), h (Plancksches Wirkungsquantum) und e (Elementarladung).

Seit der Jahrhundertwende wissen wir, daß die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum eine Naturkonstante ist. Die Versuche (1881) von A. Michelson (1852 bis 1931) wiesen zwar schon auf die Tatsache hin, doch konnten erst die mathematisch-theoretischen Ergebnisse (1905) von A. Einstein (1879 bis 1955) diese Tatsache in den Rang einer naturwissenschaftlichen Gesetzmäßigkeit erheben. Die von ihm entwickelte spezielle Relativitätstheorie, in der die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ein zentrales Element ist, gehört zu den größten Geistesleistungen in der gesamten Menschheitsgeschichte.

Die eigentliche Naturkonstante der Quantentheorie ist das Plancksche Wirkungsquantum h. M. Planck (1858 bis 1947) wurde durch mathematische Überlegungen zu der Tatsache geführt, daß bei Schwingungsprozessen von der Frequenz v die Energie nur in Form kleinster Portionen, in Form von Quanten der Energie ε, abgegeben wird, wobei $\varepsilon = hv$ gilt. $h = 6{,}62\ldots 10^{-34}$ Js ist das Plancksche Wirkungsquantum.

Es ist im Hinblick auf die Rolle der Mathematik bei der Entwicklung der Naturwissenschaften bemerkenswert, daß Planck selbst sich mehr als ein Jahrzehnt dagegen sträubte, diesen von ihm auf mathematischem Weg gefundenen Zusammenhang als ein wirkliches Naturgesetz anzuerkennen. Wieder war es A. Einstein, der im gleichen Jahr der Schaffung der Relativitätstheorie (1905) auch die Quantennatur des Lichts als ein Naturgesetz formulierte. Das Licht besteht aus Quanten, den Photonen, wobei die Energie eines Photons der Frequenz v durch die Formel $\varepsilon = hv$ gegeben wird. Einstein hat für diese Entwicklung den Nobelpreis erhalten.

Die dritte fundamentale Naturkonstante der Quantentheorie ist die Elementarladung. Woher weiß man, daß die Elementarladung eine Naturkonstante ist? Das Problem liegt hier wieder ähnlich wie bei der Lichtgeschwindigkeit. Natürlich kann man durch experimentelle Untersuchungen untermauern, daß alle Elektronen die gleiche Ladung haben sollten, aber man kann auf diesem Wege keine absolute theoretische Sicherheit darüber erlangen. Die Lösung dieses Problems ergibt sich wiederum aus der Quantentheorie.

Als wesentliche Schlußfolgerung aus dem Gesagten soll hervorgehoben werden, daß wir nur deshalb von Naturkonstanten c, h, e sprechen können, weil die Konstanten die Basis einer mathematisierten Theorie bilden, deren Gültigkeit experimentell beweisbar ist. Ohne die moderne Mathematik, die in diese Theorie eingeht, wäre eine genaue Bestimmung dieser Naturkonstanten gar nicht möglich.

Was hat das nun alles mit der für die Mikroelektronik notwendigen Präzisionsmeßtechnik zu tun? Der Zusammenhang entsteht dadurch, daß die technologische Praxis niemals eine höhere Genauigkeit haben kann als die fortgeschrittenste Wissenschaft. Auf der Grundlage der Quantentheorie lassen sich mit den gegenwärtigen Methoden die Naturkonstanten bis zu einer Genauigkeit bestimmen, die gerade an der Grenze der für die Mikrolelektronik notwendigen Genauigkeit liegt. Für die drei genannten Naturkonstanten konnten durch internationale Abstimmungen einer Vielzahl von Experimenten folgende Werte ermittelt werden:

$c = 2{,}997\,924\,58\,(1{,}2) \cdot 10^{8}$ m/s
$h = 6{,}626\,176 \quad (36) \cdot 10^{-34}$ Js
$e = 1{,}602\,189\,2 \quad (46) \cdot 10^{19}$ C

Die Zahlen in der Klammer schätzen die möglichen Korrekturen in den letzten beiden Ziffern ab. Es liegt also insgesamt eine

Genauigkeit von 10^8 vor, wie wir sie mindestens für die Mikroelektronik benötigen.
Das System der Naturkonstanten ist, soweit diese nicht dimensionslos sind, auf eine bestimmte Festlegung von Maßeinheiten angewiesen. Im SI-System gibt es drei mechanische Einheitennormale: für die Masse, für die Länge und für die Zeit. Wir wollen als Beispiel nur das Normal für die Zeit herausgreifen. Das Zeitnormal spielt auch deshalb eine fundamentale Rolle, weil es mit der höchsten bisher überhaupt erzielbaren Genauigkeit reproduzierbar ist und über einen fixierten Wert für die Vakuumsgeschwindigkeit auch zur Definition des Längennormals benutzt werden kann.
Historisch bildete der Sonnentag oder das Sonnenjahr mit den daraus abgeleiteten Teilen Stunde, Minute und Sekunde die Grundlage für das Zeitnormal. Die Gezeitenwechselwirkung, verursacht durch den Mond und die Sonne und die Störeinflüsse der anderen Planeten auf die Bewegung der Erde, führen zu Veränderungen in der Tages- und Jahreslänge und zu einer stetigen Verlangsamung der Erdrotation. Neben diesen theoretisch und damit auch rechnerisch zugänglichen Einflüssen gibt es auch andere, plötzlich auftretende Veränderungen in der Tageslänge. Solange das Zeitnormal durch eine astronomische Pendeluhr mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{1000}$ Sekunde pro Tag repräsentiert wurde, waren die Gangänderungen der „Erduhr" nicht unmittelbar zu erfassen. Erst die Einführung der Quarzuhr in die Zeitmeßtechnik brachte einen bedeutenden Fortschritt in der Genauigkeit.
Da auch der Schwingquarz als immer noch „mechanischer Schwinger" Alterungsprozessen unterliegt, die zu Gangänderungen führen können, ist man zu atomaren Schwingungsnormalen übergegangen. Das heutige Zeitnormal ist die Internationale Atomzeit (IAT), repräsentiert durch ein weltweit verbundenes System von Atomuhren. Die DDR ist mit einer Atomuhr im Zentralinstitut für Physik der Erde der Akademie der Wissenschaften an diesem System beteiligt.
Auf welchen Gesetzmäßigkeiten beruht die Arbeitsweise einer Atomuhr? Um dies zu erklären, benötigt man die Quantentheorie, und damit kommen wir auf die oben erläuterten Probleme zurück. Das Entscheidende ist die Quantennatur der Energie im atomaren Bereich. Es stellt sich heraus, daß die Elektronen im Atom nur diskrete Energiewerte E_n ($n = 1, 2, \ldots$) annehmen können. Wenn ein Übergang zwischen den Energieniveaus E_n und E_m erfolgt, so wird Licht abgestrahlt. Die Frequenz des Lichtes, d.h. die der einzelnen Photonen, ist dabei

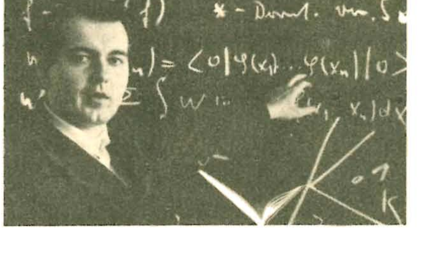
$$v_{nm} = \frac{1}{h} | E_n - E_m | .$$

Die Energieniveaus und damit die Frequenzen sind ganz scharf definiert und deshalb als Frequenz- oder Zeitnormale hervorragend geeignet.
Wenn auch die klassische Vorstellung von dem das Photon umkreisenden Elektron mit den wahren Verhältnissen des Mikrokosmos nicht verträglich ist, so hat doch dieses Bild die historische Herangehensweise bestimmt und letztlich zu dem heutigen abstrakten Bild geführt.
Der Übergang von der Mathematik der klassischen Physik zu der Quantenphysik ist ganz und gar unanschaulich. Er besteht darin, daß die klassischen Größen durch Operatoren ersetzt werden. Die Quantentheorie erfordert zur mathematischen Beschreibung der Energieniveaus den Apparat der Funktionalanalysis, eines Teilgebietes der Mathematik, dessen stürmische Entwicklung noch nicht abgeschlossen ist.
Der Einsatz mathematischer Methoden höchsten Abstraktionsgrades liefert beispielsweise bei der Feinstruktur der Linien des Wasserstoffs bereits eine Übereinstimmung mit der Realität auf fünf geltende Stellen.
Dieser Prozeß der immer feineren Strukturierung der Spektrallinien setzt sich fort und wird bei immer höherem Auflösungsvermögen sichtbar. Seine mathematische Beschreibung erfordert den Einsatz immer komplizierterer Methoden. Die Quantenelektrodynamik erlaubt die Berechnung von sog. Strahlungskorrekturen zu den Atomniveaus. Die magnetische Wechselwirkung zwischen dem Elektron und dem Proton im Wasserstoffatom verursacht eine Hyperfeinstruktur der Energieniveaus. Befindet sich das Elektron auf dem niedrigsten Energieniveau E_1, dann entspricht der Übergang zwischen den beiden Niveaus der Hyperfeinstruktur des Grundzustandes der Abstrahlung einer elektromagnetischen Welle mit 21 cm Wellenlänge. Diese Wasserstofflinie liegt im Radiofrequenzbereich bei 1420 MHz, und sie spielt in der Radioastronomie eine hervorragende Rolle beim Nachweis neutralen Wasserstoffs im kosmischen Raum.
Die Frequenz dieses Übergangs gehört zu den im Labor am genauesten bestimmbaren Werten $v = 1\,420\,405\,751{,}766\,2\,(3)$ Hz. Mit dieser Frequenz arbeitet der Wasserstoffmaser, ein Frequenznormal analog der Caesium-Atomuhr, bei der ebenfalls der Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes des äußersten Elektrons im Caesiumatom als Frequenznormal benutzt wird.
In unseren Darlegungen kam es darauf an, deutlich zu machen, daß man die Quantentheorie und ihre abstrakte Mathematik allein schon dafür benötigt, um die für die Produktion von mikroelektronischen Bauelemente notwendige Präzisionstechnik zu ermöglichen. Unverkennbar ist der Zusammenhang zwischen notwendiger Genauigkeit in der fortgeschrittensten Technik und den quantitativen Aussagen der Theorie. Beim heutigen Stand der Technik liegen beide im gleichen Bereich. Der Zwang zur engen Verknüpfung von Theorie und Praxis ist eines der Wesensmerkmale der wissenschaftlich-technischen Revolution und bestimmend für den technischen Fortschritt.

Prof. Dr. sc. nat. Gerd Laßner,
Karl-Marx-Universität Leipzig,
nach einer Vorlesung
für den Druck bearbeitet
von Dipl.-Phys. Lothar Ehrenberg

Praxisbezogene Lehrlingsausbildung im VEB Mikroelektronik Mühlhausen

Komplexlabor an der IH für Elektronik/Keramik Hermsdorf



Gleichungen und komplexe Zahlen

Eine Anregung zur Beschäftigung mit komplexen Zahlen

Teil 2

Weder von del Ferro noch von Tartaglia sind Beweise für die Lösungsverfahren erhalten. Cardano kannte sie wahrscheinlich auch nicht. Die in seinem Buch „Ars magna" gegebenen Beweise hat er wohl selbst gefunden.
Die Vorschrift zur Auflösung der kubischen Gleichung $x^3 + px = q$ (p, q positiv) beschrieb Cardano im 11. Kapitel der „Ars magna" so:
„Erhebe den dritten Teil der Anzahl der $x[p]$ in den Kubus; zu diesem addiere das Quadrat der Hälfte des konstanten Gliedes $[q]$ und ziehe aus der Summe die Quadratwurzel. Diese merke dir und addiere einmal die Hälfte der konstanten Zahl, die du eben quadriert hattest, ein anderes Mal subtrahiere diese Hälfte. Dadurch erhältst du ein Binomium $\left[\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}\right]$ und die zugehörige Apotome $\left[\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}\right]$. Zieht man nun die Kubikwurzel der Apotome von der Kubikwurzel des Binomiums ab, so ist der Rest, der hierbei übrig bleibt, der Wert der Unbekannten."
Unter der Voraussetzung $p > 0$, $q > 0$ $\left(\text{wir brauchen zumindest} \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 > 0\right)$ ist also

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}} \qquad \text{(A)}$$

eine (positive) Lösung der Gleichung $x^3 + px = q$. (Bei den dritten Wurzeln handelt es sich um die eindeutig bestimmten positiven reellen Kubikwurzeln aus den positiven reellen Radikanden.)
Cardano erläuterte die Auflösungsregel am Beispiel $x^3 + 6x = 20$. Cardano schrieb: „Cubus p̄. 6. rebus aequalis 20" und gab die Lösung:
„R_x v. çu. R_x 108 p̄. 10 | m̄.
R_x v. cu. R_x 108 m̄. 10"
(radix universalis cubica radicis ex 108 plus 10, minus radice universalis cubica radicis ex 108 minus 10), also:
$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$.
Im 12. Kapitel der „Ars magna" wird die Gleichung $x^3 = px + q$ (p, q positive Zahlen) durch die positive Zahl

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad \text{(B)}$$

gelöst. Dabei wird vorausgesetzt, daß $\left(\frac{q}{2}\right)^2 \geqq \left(\frac{p}{3}\right)^3$ ist (damit unter der Quadratwurzel nicht negative Zahlen stehen).
Die Lösung der übrigen 11 wesentlichen Typen kubischer Gleichungen wurde von Cardano auf die Lösung der eben beschriebenen 2 Typen zurückgeführt.
Die Auflösungsformel (B) sei an zwei Beispielen (aus Eulers Buch „Vollständige Anleitung zur Algebra") erläutert:
1) $x^3 = 6x + 9$. Hier ist $p = 6$, $q = 9$, $q^2 = 81$, $p^3 = 216$

$$\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} = \frac{1}{4}\left(q^2 - \frac{4}{27}p^3\right) = \frac{1}{4}\left(81 - \frac{4}{27}216\right) = \frac{1}{4}(81 - 32) = \frac{49}{4}.$$

Daher ist eine Wurzel der gegebenen Gleichung

$$x = \sqrt[3]{\frac{9 + \sqrt{49}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9 - \sqrt{49}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3.$$

2) $x^3 = 6x + 40$. Hier ist $p = 6$, $q = 40$, $q^2 = 1600$, $p^3 = 216$,
also $q^2 - \frac{4}{27}p^3 = 1600 - 32 = 1568$,

$$\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(q^2 - \frac{4}{27}p^3\right)} = \frac{\sqrt{1568}}{2} = \frac{\sqrt{4 \cdot 4 \cdot 49 \cdot 2}}{2} = \frac{28\sqrt{2}}{2} = 14\sqrt{2}.$$

Eine Lösung der gegebenen Gleichung ist
$x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$.
Da aber $(2 + \sqrt{2})^3 = 20 + 14\sqrt{2}$,
so ist $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$
und ebenso $\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$.
Somit ist $x = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$.
Der Fall $x^3 = px + q$ ($p > 0$, $q > 0$) mit $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3$ bereitete sowohl Tartaglia als auch Cardano unüberwindliche Schwierigkeiten. In diesem Fall würden sich, wenn man die Formel (B) benutzt, Quadratwurzeln aus negativen Zahlen ergeben.
Beispiel. Für die Gleichung $x^3 = 15x + 4$ mit $p = 15$, $q = 4$, also
$q^2 = 16$, $p^3 = 3375$, $q^2 - \frac{4}{27}p^3 = 16 - 500 = -484 = 4(-121)$ würde

$$\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \frac{1}{2}\sqrt{q^2 - \frac{4}{27}p^3} = \frac{1}{2}\sqrt{-484} = \sqrt{-121} \text{ und somit}$$

$$„x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}\text{"} \qquad \text{(C)}$$

werden. Die Gleichung besitzt aber die drei reellen Lösungen $x_1 = 4$ (die positive Lösung), $x_2 = -2 - \sqrt{3}$, $x_3 = -2 + \sqrt{3}$, wie man leicht bestätigt. (Beachte $x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1)$.)
Es sei nochmals angemerkt, daß die Formel (B) zunächst nur für $\left(\frac{q}{2}\right)^2 \geqq \left(\frac{p}{3}\right)^3$ gültig ist, also etwa auf die Gleichung $x^3 = 15x + 4$ gar nicht angewendet werden darf. (Die Zeichen $\sqrt{m}$, $\sqrt[3]{n}$ sind nur für nicht-negative m, n erklärt!)
Natürlich darf man mit Zahlenbeispielen Versuche anstellen. Gesucht ist eine positive Lösung der kubischen Gleichung $x^3 = px + q$, egal ob nun $\left(\frac{q}{2}\right)^2 \geqq \left(\frac{p}{3}\right)^3$ ist oder nicht. Heutzutage kann man, sofern man komplexe Zahlen kennt und benutzt, die Formel (B) auch auf den Fall der Gleichung $x^3 = px + q$ mit $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3$ übertragen. Die Kubikwurzeln müssen aber erst im Bereich der komplexen Zahlen geeignet definiert werden.
(Darauf soll hier nicht näher eingegangen werden. Darum steht die Formel (C) in Anführungszeichen.)
Es gibt nämlich drei komplexe Zahlen u_1, u_2, u_3 mit $u^3 = 2 + \sqrt{-121}$.
Die Zahlen
$u_1 = 2 + \sqrt{-1}$, $u_2 = \frac{1}{2}\left(-2 - \sqrt{3} + (2\sqrt{3} - 1)\sqrt{-1}\right)$,
$u_3 = \frac{1}{2}\left(-2 + \sqrt{3} - (2\sqrt{3} + 1)\sqrt{-1}\right)$
leisten das Verlangte.
Ebenso gibt es drei komplexe Zahlen v_1, v_2, v_3 mit $v^3 = 2 - \sqrt{-121}$, nämlich
$v_1 = \frac{1}{2}\left(-2 + \sqrt{3} + (2\sqrt{3} + 1)\sqrt{-1}\right)$,
$v_2 = 2 - \sqrt{-1}$,
$v_3 = \frac{1}{2}\left(-2 - \sqrt{3} - (2\sqrt{3} - 1)\sqrt{-1}\right)$.
Die drei Lösungen der Gleichung $x^3 = 15x + 4$ ergeben sich wie folgt:
$x_1 = u_1 + v_2 = 4$, $x_2 = u_2 + v_3 = -2 - \sqrt{3}$,
$x_3 = u_3 + v_1 = -2 + \sqrt{3}$.
Weiteres Beispiel. Für die Gleichung $x^3 = 6x + 4$ mit $p = 6$, $q = 4$ ergibt die Formel (B) mit

$$„x = \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{-1}}\text{"} \qquad \text{(D)}$$

eine Lösung der gegebenen Gleichung.
Es sei erwähnt, daß Leonhard Euler in seiner „Vollständigen Anleitung zur Algebra" (1770) im zwölften Kapitel (§ 188) des ersten Abschnittes des zweiten Teiles auch (D) findet und an (D) anmerkt: „was sich nicht anders ausdrücken läßt". Hier irrte Euler sich, die (geeignet zu definierenden) Kubikwurzeln in (D) lassen sich ausrechnen.
Es gibt drei komplexe Zahlen u_1, u_2, u_3 mit $u^3 = 2 + 2\sqrt{-1}$:

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)\sqrt{-1}\right),$$
$$u_2 = -1 + \sqrt{-1},$$
$$u_3 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3} - (\sqrt{3} + 1)\sqrt{-1}\right).$$

Ebenso gibt es drei komplexe Zahlen v_1, v_2, v_3 mit $v^3 = 2 - 2\sqrt{-1}$:

$$v_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3} + (\sqrt{3} + 1)\sqrt{-1}\right),$$
$$v_2 = -1 - \sqrt{-1},$$
$$v_3 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1)\sqrt{-1}\right).$$

Die drei Lösungen der Gleichung $x^3 = 6x + 4$ sind

$x_1 = u_1 + v_3 = 1 + \sqrt{3}$ (die positive Lösung),

$x_2 = u_1 + v_2 = -2$, $x_3 = u_3 + v_1 = 1 - \sqrt{3}$.

Cardano vermied in der „Ars magna" Aufgaben dieser Art. Erst in späteren Schriften beschäftigte er sich damit, wahrscheinlich erst, nachdem er die „Algebra" von Bombelli (schon in Manuskriptform während seines Aufenthaltes zwischen 1562 und 1570 in Bologna oder erst in gedruckter Form nach 1572) gelesen hatte.

Die ideenreiche „Algebra" von Rafael Bombelli (Bild 2) erschien 1572. Der Verfasser ist 1526 in Bologna geboren worden und starb dort kurz nach Erscheinen seiner „Algebra". Über Bombellis Leben wissen wir fast nichts. Er soll als Ingenieur bei einem römischen Adligen gearbeitet haben. Zwischen 1551 und 1560 war er zeitweise bei der Urbarmachung der Sümpfe im Val di Chiani, 1561 bei dem Versuch, in Rom eine der Tiberbrücken zu reparieren, beteiligt. Er hatte sein mathematisches Wissen wahrscheinlich autodidaktisch erworben. Ob es persönliche Beziehungen zu Cardano gegeben hat, ist nicht bekannt.

Die von Bombelli in seinem Buch gegebene systematische Behandlung der Gleichungen von Grad 4 (die vom Cardano-Schüler Ferrari gefundenen Auflösungsverfahren hatte Cardano schon in der „Ars magna" publiziert) war für die Nachfolger richtungsweisend. Die kubischen Gleichungen werden im wesentlichen wie bei Cardano behandelt. Doch kann Bombelli darüber hinaus den Fall

$x^3 = px + q$ (p, q positiv) mit $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3$

lösen, soweit die dabei nach (B) auftretenden Kubikwurzeln $\sqrt[3]{a + \sqrt{-b}}$ (a, b positiv, vgl. (C), (D)) von der Art sind, daß sie durch ein von ihm angegebenes Verfahren gefunden werden können. Mit diesem Verfahren zur Bestimmung solcher Kubikwurzeln, das zwar nicht immer, aber in vielen praktischen Fällen anwendbar ist, fand er beispielsweise

$\sqrt[3]{52 + \sqrt{-2209}} = 4 + \sqrt{-1}$, oder

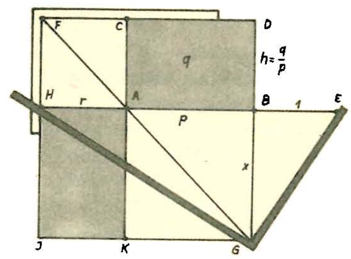
$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$; überdies konnte er z. B. für $x^3 = 15x + 4$ *die Lösung* $x = 4$ nach (C) berechnen (um die anderen Wurzeln kümmerte er sich nicht).

Durch seine Untersuchungen wurde es klar, daß die Kubikwurzeln der Auflösungsformel (B) kubischer Gleichungen der Form $x^3 = px + q$ mit $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3$ ausgerechnet werden können und daß sich damit die Quadratwurzeln aus negativen Zahlen weghoben. Bombelli schrieb: „Ein ausschweifender Gedanke nach der Meinung vieler. Ich selbst war eine Zeitlang der gleichen Ansicht. Die Sache schien mir auf Sophismen mehr als auf Wahrheit zu beruhen, aber ich suchte so lange, bis ich den Beweis fand."

Doch was geschieht, wenn es mit dem praktischen, jedoch nicht allgemeinen Verfahren Bombellis zur Bestimmung von Kubikwurzeln nicht möglich ist, die geforderten Kubikwurzeln auszurechnen?

Durch die folgende geometrische Konstruktion (Bild 3) unter Benutzung von Zirkel, Lineal und Rechtwinkelhaken konnte Bombelli (am Beispiel $x^3 = 6x + 4$) nachweisen, daß eine kubische Gleichung $x^3 = px + q$ (für positive p und q) stets $\left(\text{also auch im Fall} \left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3\right)$ eine positive Lösung hat. (Im Beispiel $x^3 = 6x + 4$ ist die positive Lösung $1 + \sqrt{3}$.)

(Bild)



Gegeben sei eine Strecke AB der Länge p; diese sei eine Seite eines Rechtecks $ABCD$ mit dem Flächeninhalt q $\left(\text{Höhe } h = \frac{q}{p}\right)$.

Man verlängere die Strecke AB über B hinaus bis zum Punkt E, so daß BE die Länge 1 hat, und wähle G auf der über B hinaus verlängerten Strecke DB passend als Scheitel eines Rechtwinkelhakens durch E. Dieser treffe die über A hinaus verlängerte Strecke BA in H. Wird der Abstand $\overline{BG}$ mit x bezeichnet, dann ist (nach dem Höhensatz, Dreieck HEG, Höhe BG) $\overline{BH} = x^2$. Nun werde zum Rechteck $GBHI$ ergänzt. (H und I hängen also von der Wahl von G ab!) Dieses Rechteck hat den Flächeninhalt x^3. Das Teilrechteck $GBAK$ (K ist der Schnittpunkt der über A hinaus verlängerten CA mit GI) hat den Flächeninhalt px.

Wählt man nun den Punkt G so, daß die verlängerte GA durch den Scheitel F eines zweiten Rechtwinkelhakens geht, dessen Schenkel an FD und FI anliegen, so ist der Flächeninhalt von $AHIK$ gleich dem Flächeninhalt des gegebenen Rechtecks $ABCD$, also gleich q. (Benutze den Satz von Ergänzungsparallelogrammen, oder Ähnlichkeitssätze: Die ähnlichen Dreiecke FGD und FAC ergeben $\frac{h + x}{p + r} = \frac{h}{r}$ (mit $r = \overline{FC} = \overline{HA}$). Die ähnlichen Dreiecke FIG und AKG ergeben $\frac{h + x}{p + r} = \frac{x}{p}$.

Somit ist $\frac{h}{r} = \frac{x}{p}$, d. h. $xr = hp = q$.)

Das Rechteck $GBHI$ hat also einerseits den Flächeninhalt x^3, andererseits den Flächeninhalt $px + q$, somit gilt $x^3 = px + q$. Die Strecke BG hat somit die Länge x mit $x^3 = px + q$.

Einerseits führt die Suche nach positiven Lösungen der Gleichung $x^3 = px + q$ (mit positiven p, q) auf die Formel (B), die in bestimmten Fällen jedoch „Zahlen" der Form $a + \sqrt{-b}$ enthält. Andererseits hat eine solche Gleichung stets eine positive Lösung, die sich überdies in bestimmten Fällen nach der Formel (B) auch dann ausrechnen läßt, wenn „Zahlen" der Form $a + \sqrt{-b}$ auftreten.

Dieses könnte für Bombelli das Argument für eine eingehendere Beschäftigung mit solchen Ausdrücken, in denen Quadratwurzeln aus negativen Zahlen auftreten, gewesen sein. Bombelli nannte sie „sophistische Größen". Cardano gestand 1576 ein, daß er nicht wisse, was diese Größen wirklich wären, die so viele Wunder tun. Schon in seiner „Ars magna" löste er die Aufgabe, die Zahl 10 in zwei Summanden zu zerlegen, deren Produkt 40 ist. Er erkannte $5 + \sqrt{-15}$, $5 - \sqrt{-15}$ als Lösungen (nannte sie jedoch „wahrhaft sophistische Lösungen"):

$$5 + \sqrt{-15} + 5 - \sqrt{-15} = 10$$
$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 5^2 - (\sqrt{-15})^2$$
$$= 25 - (-15) = 40.$$

Diejenigen Fälle, in welchen die „Lösungsformeln" für kubische Gleichungen unter der Kubikwurzel Quadratwurzel aus negativen Zahlen enthalten, beschäftigten die Mathematiker nach Cardano und Bombelli noch für lange Zeit. Das Verfahren Bombellis zur Berechnung von $\sqrt[3]{a + \sqrt{-b}}$ wurde wenig beachtet und sicher bald vergessen, da bereits 1591 Francois Viète (auch Vieta genannt) ein neues Verfahren, die kubischen Gleichungen $x^3 = px + q$ im Fall $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{q}\right)^3$ aufzulösen, entdeckte.

Wie Bombelli gab auch René Descartes eine geometrische Konstruktion für die positive Lösung der Gleichung $x^3 = px + q$. Er bezeichnete „Zahlen" der Form $a + \sqrt{-b}$ als „imaginäre Größen".

Bombelli gab in seiner „Algebra" die erste Einführung in das Rechnen mit, wie wir sagen, komplexen Zahlen. Er bezeichnet $\sqrt{-1}$ als „piu di meno", $-\sqrt{-1}$ als „meno di meno" (abgekürzt: p. di m., m. di m.) und sieht die komplexen Zahlen als „Linearkombinationen" (mit positiven Zahlenkoeffizienten) der vier Grundgrößen 1 („piu"), -1 („meno"), $\sqrt{-1}$ (p. di m.) und $-\sqrt{-1}$ (m. di m.) an, wobei sich „piu" und „piu di meno" nicht addieren lassen. Bombelli behandelte die Multiplikation, die Division, das Kubikwurzelziehen, die Addition, die Subtraktion komplexer Zahlen. Bei der Behandlung quadratischer Gleichungen findet sich das Beispiel $x^2 + 20 = 8x$ mit den „sophistischen" Lösungen $4 + \sqrt{-2}$, $4 - \sqrt{-2}$.

H. Pieper

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Schulolympiade

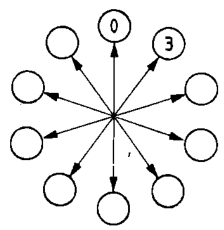
Abgabe beim Mathematiklehrer: Ende September 1986

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen werden im Oktober 1986 veröffentlicht.
Hinweis: Unter den Aufgaben der 1. Stufe befinden sich auch solche (in der Regel ist es die 4. Aufgabe), die aus mehreren Teilaufgaben von steigendem Schwierigkeitsgrad bestehen. Dabei ist Teil a) meist recht einfach zu lösen und gibt in der Regel Hilfe für die Lösung der anderen Teilaufgaben. Die Lösung der letzten Teilaufgabe stellt bewußt hohe Anforderungen. Diese Teilaufgabe ist vorwiegend für die leistungsstärkeren Schüler gedacht. Es wird empfohlen, über diese anspruchsvollen Aufgaben in Klassen und Arbeitsgemeinschaften zu diskutieren.
Anmerkung: $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B, während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

260511 Die Mädchen Grit, Regina und Beate tragen jede eine einfarbige Bluse. Von diesen drei Blusen ist eine gelb, eine rot und eine blau.
Grit stellt fest, daß keines der Mädchen eine Bluse von der Farbe trägt, die den gleichen Anfangsbuchstaben wie der Vorname des Mädchens hat. Das Mädchen mit der roten Bluse antwortet darauf: „Das hatte ich noch gar nicht bemerkt, aber du hast recht, Grit!"
Welche Bluse trägt jedes der Mädchen?

260512 a) Die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sollen so in die kleinen Kreise des Bildes eingetragen werden, daß jedes Paar benachbarter Kreise dieselbe Summe wie das Paar an den beiden entgegengesetzten Pfeilspitzen ergibt.
Jede der zehn Zahlen soll genau einmal vorkommen. Die Zahlen 0 und 3 sollen wie angegeben eingetragen werden.
Gib eine Eintragung an, die alle diese Forderungen erfüllt!



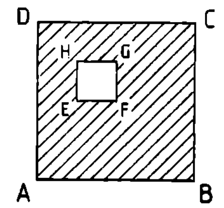
b) Für die Zahlen 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 läßt sich eine entsprechende Aufgabe stellen. Wie kann man für sie auf einfache Weise eine Lösung aus der Lösung von a) gewinnen?
c) Löse die entsprechende Aufgabe für die natürlichen Zahlen
n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$, $n+6$, $n+7$, $n+8$, $n+9$!
d) Begründe deine Lösung von c)!

260513 Jörg bewundert Holgers Kaninchen und Tauben. Er möchte gern wissen, wieviel Kaninchen und Tauben Holger besitzt, und fragt ihn deshalb danach. Dieser antwortet: „Ich habe insgesamt 24 Tiere, die zusammen 62 Beine haben. Andere Tiere als Kaninchen und Tauben habe ich nicht."
Wieviel Kaninchen und wieviel Tauben besitzt Holger?
Begründe deine Antworten!

260514 Der Pionier Klaus Knobler tritt als Zauberkünstler vor seiner Pioniergruppe auf. Nachdem ihm die Augen verbunden wurden, bittet er einen Zuschauer, aus einer Streichholzschachtel eine beliebige ungerade Anzahl von Hölzern, jedoch mindestens 13, zu entnehmen. Diese Hölzer sollen in zwei parallelen Reihen auf den Tisch gelegt werden, wobei die obere Reihe genau ein Streichholz mehr enthalten soll als die untere.
Nachdem dies geschehen ist, läßt Klaus Knobler
(1) irgendeine von ihm selbst genannte Anzahl a (mindestens 1, jedoch weniger als 7) Streichhölzer aus der oberen Reihe fortnehmen, dann
(2) aus der unteren Reihe so viele Streichhölzer wegnehmen, wie oben noch liegen, und dann
(3) aus der oberen Reihe alle übrigen Streichhölzer entfernen. Danach nennt Klaus Knobler den staunenden Zuschauern die Anzahl der auf dem Tisch verbliebenen Hölzer. Wie groß ist sie?
Durch welche Überlegung kann Klaus Knobler sie finden, ohne die Anzahl der zu Beginn auf dem Tisch liegenden Hölzer zu kennen?

Olympiadeklasse 6

260611 In ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 8 cm ist ein Quadrat $EFGH$ mit der Seitenlänge 2 cm so eingezeichnet, wie es das Bild zeigt. HG und DC sind zueinander parallele Strecken mit dem Abstand 2 cm voneinander. EH und AD sind zueinander parallele Strecken mit dem Abstand 2 cm voneinander.
a) Berechne den Flächeninhalt der im Bild schraffierten Fläche!
b) Die schraffierte Fläche soll in fünf Teile zerlegt werden. Diese Teile sollen so gestaltet sein, daß man je zwei von ihnen durch Drehen oder Verschieben miteinander zur Deckung bringen kann. Zeichne eine solche Aufteilung der schraffierten Fläche!



260612 Zur Durchführung eines Geländespiels war es nötig, daß jeder Teilnehmer ein Schreibgerät bei sich hatte. Es waren nur folgende Sorten Schreibgeräte von Teilnehmern mitgebracht worden: Kugelschreiber, Rotstifte und Grünstifte; keine dieser drei Sorten kam doppelt bei einem der Teilnehmer vor.
Im einzelnen wurde festgestellt:
(1) Es waren insgesamt 100 Teilnehmer bei diesem Geländespiel.
(2) Genau 20 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber keinen Rotstift.
(3) Genau 15 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber keinen Grünstift.
(4) Genau 5 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber weder einen Rotstift noch einen Grünstift.
(5) Genau 65 der Teilnehmer hatten keinen Kugelschreiber.
(6) Genau 55 der Teilnehmer hatten keinen Rotstift.
(7) Genau 40 der Teilnehmer hatten keinen Grünstift.
(8) Genau 15 der Teilnehmer hatten weder einen Rotstift noch einen Grünstift.
a) Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl derjenigen Teilnehmer, die wenigstens ein Schreibgerät mitgebracht hatten!
b) Reichten die mitgebrachten Schreibgeräte aus, um bei geeigneter Verteilung jeden der 100 Teilnehmer mit einem Schreibgerät zu versorgen?

260613 Die Verbindungsstraßen dreier Orte A, B, C bilden ein Dreieck. In der Mitte der Verbindungsstraße von B nach C liegt ein weiterer Ort D. Von A über B nach C beträgt die Entfernung 25 km, von B über C nach A dagegen 27 km und von C über A nach B schließlich 28 km. Eine Pioniergruppe wandert auf den genannten Straßen auf kürzestem Wege vom Ort A zum Ort D.

a) Über welchen der beiden Orte B oder C läuft die Pioniergruppe? Begründe deine Entscheidung!

b) Wieviel Zeit spart sie gegenüber dem längeren der beiden möglichen Wege von A nach D ein, wenn sie stündlich 4 km zurücklegt?

c) Wie lang ist der von ihr insgesamt zurückgelegte Weg?

260614 Auf einem Kreis werden wie beim Zifferblatt einer Uhr zwölf Punkte eingetragen. Auf jeden der Punkte wird genau ein Spielstein gelegt. Zwei Spieler A und B sollen abwechselnd jeweils entweder genau einen Stein oder genau zwei Steine, die auf benachbarten Punkten liegen, wegnehmen. Spieler A beginnt. Gewonnen hat der Spieler, der den letzten Spielstein wegnimmt.

Wie kann Spieler B vorgehen, um in jedem Fall zu gewinnen?

Olympiadeklasse 7

260711 Ermittle für jede der nachfolgenden Teilaufgaben a) bis e) jeweils alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die die angegebene Forderung erfüllen!

Forderung a): Die Summe $\left(\frac{7}{32}+\frac{n}{12}\right)$ ist ein echter Bruch.

Forderung b): Die Summe $\left(\frac{7}{32}+\frac{n}{12}\right)$ ist ein echter Bruch, der sich nicht mehr durch Kürzen vereinfachen läßt.

Forderung c): Die Aufgabe, die Differenz $\left(\frac{7}{12}-\frac{n}{12}\right)$ zu berechnen, ist im Bereich der gebrochenen Zahlen nicht lösbar.

Forderung d): Die Differenz $\left(\frac{7}{12}-\frac{n}{12}\right)$ ist ein echter Bruch.

Forderung e): Die Summe $\left(\frac{7}{12}+\frac{n}{12}\right)$ ist eine natürliche Zahl.

260712 In der Materialausgabe eines Betriebes sind durch ein Mißgeschick die Schlüssel von zwölf Vorhängeschlössern durcheinandergekommen. Da zu jedem Vorhängeschloß von den insgesamt zwölf Schlüsseln nur einer paßt und zu jedem Schlüssel nur eines der Vorhängeschlösser, die sich äußerlich nicht voneinander unterscheiden, muß herausgefunden werden, welcher Schlüssel zu welchem Schloß gehört. Lehrling Bernd, der mit dieser Aufgabe betraut wurde, dachte: „Jetzt muß ich zwölf Schlüssel an zwölf Schlössern ausprobieren, muß also, wenn ich Pech habe, $12 \cdot 12 = 144$ Proben ausführen." Sein Freund Uwe meinte jedoch, daß man mit viel weniger Proben auskommt.

Ermittle die kleinste Anzahl von Proben, mit der man mit Sicherheit (d. h. auch noch im ungünstigsten Fall) zu jedem Vorhängeschloß den passenden Schlüssel findet!

260713 Für die Klassen 2, 3 und 4 einer Schule steht ein Schulgarten mit einem Flächeninhalt von genau 800 Quadratmetern zur Verfügung. Ein Viertel dieser Fläche wird für einen Spielplatz und für das Anlegen von Wegen vorgesehen, die übrige Fläche soll zur Bearbeitung auf die drei Klassen aufgeteilt werden. Da den einzelnen Klassen unterschiedlich viele Schüler angehören, nämlich der 2. Klasse 25 Schüler, der 3. Klasse 20 Schüler und der 4. Klasse 30 Schüler, wird vereinbart, daß jedem Schüler der genannten Klassen eine gleich große Fläche zur Bearbeitung zugewiesen wird.

Wieviel Quadratmeter Gartenland hat demnach jede der drei Klassen zu bearbeiten?

260714 Ein *Junger Mathematiker* zeichnet ein Rechteck und halbiert die Seiten. Er vermutet, daß die vier Seitenmittelpunkte Eckpunkte eines Rhombus sind.

Untersuche, ob diese Vermutung für jedes Rechteck wahr ist!

Olympiadeklasse 8

260811 In das nachstehende Kryptogramm sind für die Buchstaben die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so einzutragen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und daß alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gelöst sind.

$$\begin{array}{ccccc} ABC & - & DB & = & ECC \\ : & & - & & - \\ FG & \cdot & CH & = & DIH \\ \hline KC & + & CK & = & DD \end{array}$$

a) Gib eine Eintragung an und zeige, daß sie den oben angegebenen Bedingungen genügt!

b) Untersuche, ob es außer der von dir gefundenen Eintragung weitere Möglichkeiten gibt. Ist dies der Fall, dann ermittle alle Eintragungen, die den Bedingungen genügen!

260812 Uwe möchte mit einem Taschenrechner feststellen, ob 37 ein Teiler von 45 679 091 ist. Wenn er dabei den Rechner SR 1 verwendet, könnte er folgendermaßen vorgehen: Er dividiert 45 679 091 durch 37. Der Rechner SR 1 zeigt 1 234 570 an, also ein ganzzahliges Ergebnis. Zur Kontrolle multipliziert Uwe dieses Ergebnis, ohne es neu einzutippen, wieder mit 37. Der Rechner zeigt als Ergebnis wieder 45 679 091 an. (Du kannst dies mit einem SR 1 selbst ausprobieren.)

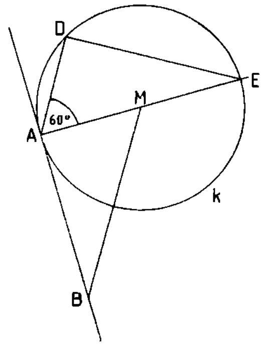
Kann Uwe nun schließen, daß 37 ein Teiler von 45 679 091 ist?

260813 Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Vier Punkte A, C, E und D seien in dieser Reihenfolge auf k so gelegen, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind (siehe Bild):

(1) A, M und E liegen auf ein und derselben Geraden.

(2) Es gilt $\sphericalangle MAD = 60°$.

(3) Die Gerade durch M und C schneide die in A an k gelegte Tangente in einem Punkt B derart, daß $\overline{MC} = \overline{BC}$ gilt.



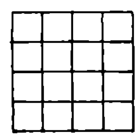
Untersuche, ob unter diesen Voraussetzungen die Strecken AB und DE die gleiche Länge haben!

260814 Es sei $ABCDEF$ ein gerades dreiseitiges Prisma. Alle drei Seitenflächen $ABED$, $BCFE$, $CADF$ sowie die Grund- und die Deckfläche ABC bzw. DEF seien sämtlich einander umfangsgleich. Gegeben sei die Länge h der Strecke AD.

Ermittle in Abhängigkeit von h die Längen der Strecken BC, CA und AB!

Olympiadeklasse 9

260911 In dem abgebildeten Quadrat mit 4×4 Teilquadraten sollen 8 von diesen 16 Teilquadraten so gekennzeichnet werden, daß in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen genau zwei Teilquadrate gekennzeichnet sind.



Geben Sie fünf voneinander verschiedene Lösungen der Aufgaben an, d.h. Lösungen, von denen sich keine zwei durch Spiegelung oder Drehung ineinander überführen lassen! Eine Begründung wird nicht verlangt.

260912 Es seien a, b, s drei gegebene Streckenlängen. Peter soll eine Strecke der Länge s im Verhältnis $a^2 : b^2$ teilen. Er gibt folgende Konstruktion an:

(1) Man konstruiert ein rechtwinkliges Dreieck aus $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ und $\sphericalangle ACB = 90°$.

(2) Von C fällt man das Lot auf AB, sein Fußpunkt sei p.

(3) In B trägt man an BA einen Winkel an, dessen Größe zwischen 0° und 180° liegt. Auf dem freien Schenkel dieses Winkels wird von B aus die Strecke der Länge s abgetragen, ihr anderer Endpunkt sei E.

(4) Die Parallele zu EA durch D schneide BE in einem Punkt, der F genannt sei.

a) Führen Sie die beschriebene Konstruktion durch!

b) Beweisen Sie: Wenn eine Strecke BE und ein Punkt F nach Peters Beschreibung konstruiert werden, dann teilt F die Strecke BE im Verhältnis $\overline{BF} : \overline{FE} = a^2 : b^2$.

260913 Ermitteln Sie die Anzahl aller verschiedenen Tripel ganzer Zahlen (x, y, z), für die

$x \leqq y \leqq z$ (1)

und $xyz = 1986$ gilt! (2)

Hinweis: Zwei Tripel (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) heißen genau dann voneinander verschieden, wenn mindestens eine der Ungleichungen

$x_1 \neq x_2$ · $y_1 \neq y_2$ · $z_1 \neq z_2$ gilt.

260914 Untersuchen Sie, ob es natürliche Zahlen n derart gibt, daß die Lösung x der Gleichung

$$17x + n = 6x + 185$$

ebenfalls eine natürliche Zahl ist!

Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie die kleinste derartige Zahl n und die zugehörige Lösung x der gegebenen Gleichung!

Olympiadeklasse 10

261011 Auf welche Ziffer endet die Zahl

$$z = 4444^{444^{44^{4}}} \quad ?$$

261012 Martin erzählt seinem Freund Jörg, er habe ein Parallelogramm $ABCD$ gezeichnet, bei dem das von B auf die Gerade durch A und D gefällte Lot BE durch den Schnittpunkt S verläuft, den die Mittelsenkrechte s von AB mit der Winkelhalbierenden w des Winkels $\sphericalangle BAD$ hat. Jörg behauptet, daß sich allein aus diesen Angaben die Größe des Winkels $\sphericalangle CBA$ ermitteln läßt.

Untersuchen Sie, ob Jörgs Behauptung wahr ist! Ist das der Fall, so ermitteln Sie die Größe des Winkels $\sphericalangle CBA$!

261013 Man denke sich durch den Mittelpunkt einer Kugel drei (nicht notwendig voneinander verschiedene) Ebenen gelegt.

In wie viele Teilflächen kann die Kugeloberfläche durch solche Ebenen zerlegt werden?

Nehmen Sie eine Fallunterscheidung vor, um alle Möglichkeiten für die gesuchte Anzahl von Teilflächen zu erhalten!

261014 Jürgen behauptet, daß es ein Positionssystem mit der Basis m gibt, in dem die folgende Rechnung richtig ist:

$$\begin{array}{r} \underline{701 \cdot 34} \\ 2503 \\ \underline{3404} \\ 30434 \end{array}$$

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen m, für die das zutrifft!

Hinweis: In einem Positionssystem mit der Basis m gibt es genau die Ziffern $0, 1, \ldots, m-2, m-1$.

Jede natürliche Zahl wird als Summe von Produkten aus jeweils einer Potenz von m mit einer der Ziffern dargestellt; dabei werden die Potenzen nach fallenden Exponenten geordnet. Geschrieben wird dann die Folge der Ziffern, so wie es für $m = 10$ bei der dekadischen Schreibweise natürlicher Zahlen bekannt ist.

Fortsetzung Kl. 11/12 siehe S. 96!

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Liebe Redaktion *alpha*!

Wie ich aus den schon zahlreichen *alphas* entnehmen konnte, nehmt Ihr auch eingesandte Aufgaben von Schülern bzw. Lesern entgegen. Mit einem kleinen Beitrag möchte auch ich mich daran beteiligen. Diese Aufgaben entnahm ich der Lagerolympiade des Spezialistenlagers des Bezirkes Dresden – Nossen 1984 der Klassenstufen 7/8. Ebenfalls entstammen Aufgaben aus meinem kleinen Buch über Aufgaben, welches ich mir vor einigen Jahren anlegte.

Schüler Maik Mühle
Spezialschule Mathematik, Riesa

Aufgaben

▲1▲ Gegeben sei ein Kreis k mit einem Radius der Länge r und dem Mittelpunkt M. Es sei eine Sehne $\overline{AB}$ eingezeichnet, die nicht Durchmesser von k ist. Die Sehne $\overline{AB}$ werde über B hinaus verlängert bis C, und es gelte: Länge von $\overline{BC}$ ist gleich r. Der Strahl CM schneide den Kreis k in D.

Es ist zu beweisen, daß der Winkel $\sphericalangle AMD$ dreimal so groß wie der Winkel $\sphericalangle ACM$ ist!

▲2▲ Es ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ aus folgenden Stücken zu konstruieren:

$r = 2{,}5$ cm

(r sei die Länge des Inkreisradius),

$\alpha = 50°$

(α sei die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$).

Die Konstruktion ist zu beschreiben!

▲3▲ Durch einen Punkt P im Inneren eines Quadrates $ABCD$ seien zwei senkrecht aufeinander stehende Geraden so gezeichnet, daß die Seiten $\overline{AD}$ in E, $\overline{AB}$ in F, $\overline{BC}$ in G und $\overline{CD}$ in H geschnitten werden. Die Schnittpunkte seien sämtlich von den Eckpunkten des Quadrates verschieden.

Es ist zu beweisen, daß die Strecken $\overline{EG}$ und $\overline{HF}$ kongruent sind!

▲4▲ Die unterschiedlichen Telefonnummern zweier Mathematiker weisen folgende Gemeinsamkeiten auf:

(1) Beide Nummern sind dreistellige Primzahlen.

(2) Jede einzelne Grundziffer in beiden Nummern stellt eine Primzahl dar.

(3) Die mittlere Ziffer stimmt in beiden Nummern überein.

(4) Die Ziffer an der ersten Stelle der einen Nummer ist gleich der Ziffer an der letzten Stelle der anderen Nummer und umgekehrt.

Es sind beide Telefonnummern zu ermitteln, und es ist nachzuweisen, daß diese Telefonnummern die einzigen sind, die den geforderten Bedingungen entsprechen!

Liebe Redaktion *alpha*!

Wir sind eine kleine Schule und möchten heute einmal etwas über unser Mathematikleben berichten. Die *alpha* gibt es in unserem Mathematik-Kabinett vom Jahrgang 1967 an. Seit dieser Zeit ist unsere Mathematiklehrerin, Frau Preuß, in Domersleben, denn wir waren ja damals noch gar nicht geboren.

Seit dieser Zeit gibt es auch eine AG Mathematik unter ihrer Leitung. In unserem Mathe-Schrank haben wir von der *alpha* aus den Jahren 1970 und 1972 Briefe gefunden. Viel Spaß macht es uns, mit der *alpha* zu knobeln, besonders mit *alpha*-heiter. Regelmäßig haben wir jeden Montag AG. Dort gestalten wir auch eine Wandzeitung für unser Mathe-Kabinett. Letzthin machten wir eine über „40 Jahre Bodenreform" mit Aufgaben aus der Landwirtschaft aus alten und neuen Lehrbüchern. Dazu verwendeten wir die *alpha* 4/85 und blätterten ebenfalls in alten *alpha*-Jahrgängen. Jedes Jahr führen wir auch eine Schulolympiade Mathematik durch. Sie findet immer in unserer Schulgedenkwoche zu Ehren von Katja Niederkirchner (27. Sept. bis 7. Okt.) statt. Die besten Schüler werden dann zur Kreisolympiade delegiert. Guido und Karsten haben bereits zweimal die 1. Plätze belegt. Karsten besucht auch den Försterclub an der Technischen Hochschule in Magdeburg. Wir stellen auch Knobelaufgaben für den Hort oder für Wissensstraßen zusammen. Aus der *practic* basteln wir Spiele oder denken uns mathematische Rätsel aus. Die Rätsel- und Knobelaufgaben im ND lösen wir auch.

Zwei Aufgaben haben wir für Euch, liebe *alpha*-Leser, ausgedacht.

Es grüßt Euch im Namen aller AG-Teilnehmer Guido

Aufgaben

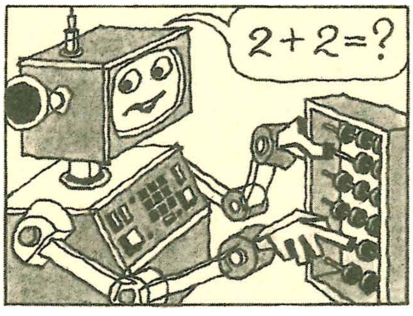
▲1▲ Gegeben ist ein regelmäßiges Sechseck mit der Diagonale FC und der Strecke AE. Es soll bewiesen werden, daß die Strecke FS stets halb so groß ist wie die Seitenlänge EF des Sechsecks.

▲2▲ In einer 7. Klasse besteht der 3. Teil der Schüler aus Mädchen. Der 4. Teil hat die 1. Schwimmstufe. Die 2. Stufe wurde vom 6. Teil der Schüler abgelegt. Die Gesamtschülerzahl liegt zwischen 20 und 30. Wieviel Schüler gehören zur 7. Klasse?

Computer – Algorithmus – Algorithmische Sprache, Teil 2

Ein Algorithmus muß so formuliert sein, daß derjenige, der ihn abarbeiten soll, die einzelnen Anweisungen versteht und in der Lage ist, sie auszuführen. Ist der Ausführende ein Mensch (evtl. mit einem Taschenrechner), so kann – wie im Teil 1 unseres Beitrags – weitgehend die Umgangssprache in Verbindung mit der in der Mathematik üblichen Terminologie und Symbolik benutzt werden. Will man den Algorithmus jedoch von einem Computer ausführen lassen, so muß man genau beachten, welche Tätigkeiten dieser Computer beherrscht, und den Algorithmus in einer dem Computer verständlichen Sprache aufschreiben. Wir wenden uns deshalb der Frage zu

Was muß ein Computer mindestens können?

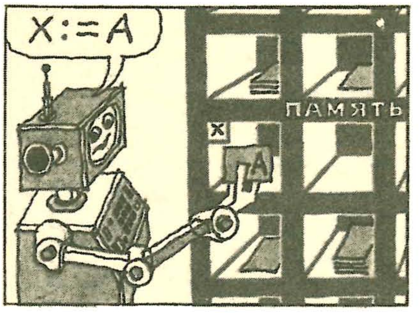


1. *Rechnen*
Dabei geht es nicht nur um das schnelle und fehlerfreie Ausführen der vier Grundrechenoperationen, sondern auch um das Erkennen der Reihenfolge der auszuführenden Operationen, um das Berücksichtigen von Klammern und das Einsetzen von Zahlenwerten für Variable. So teilt ein Computer fast sofort mit, daß für $x = 0{,}17$ und $y = 1{,}32$ der Term

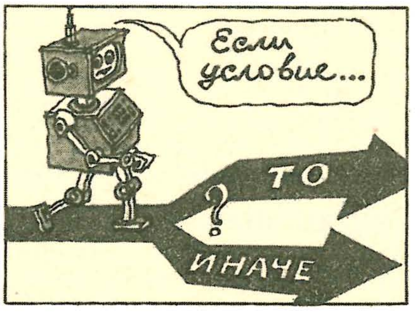
$$\frac{(x^2 + 3x)(y^3 + 5xy)}{\sqrt{x^2 + xy}}$$ den Wert 3,664 095 5

annimmt. Für ihn sind weder große Zahlen noch umfangreiche Rechnungen ein Problem.

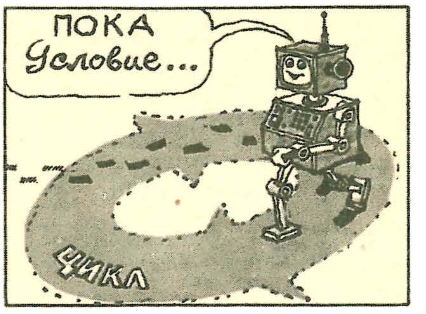
2. *Speichern*
Der Computer kann ihm mitgeteilte Daten (Zahlen oder auch Zeichenfolgen, z. B. Wörter der deutschen Sprache) in seinem Gedächtnis – dem *Speicher* – aufbewahren. Insbesondere kann er auch *Kommandos* bzw. Kommandofolgen speichern. Bei Bedarf kann er diese Daten löschen, ersetzen oder sie verändern.



In diesem Zusammenhang werden *Variable* in einem etwas anderen Sinne gebraucht, als ihr das aus dem Mathematikunterricht gewohnt seid. Eine Variable bezeichnet hier einen *Speicherplatz*, auf dem eine Zahl oder eine Zeichenfolge abgelegt werden kann. Die Schreibweise $X := 5$ bedeutet: Lege die Zahl 5 auf dem Speicherplatz X ab! $X := A$ bedeutet: Nimm den Inhalt vom Speicherplatz A, und bringe ihn auf den Speicherplatz X! (Siehe Bild 2.) In beiden Fällen geht der vorherige Inhalt des Speicherplatzes X verloren, er wird *überschrieben*. Dagegen bleibt der Inhalt von Platz A erhalten. Man kann sich dies am SR 1 veranschaulichen:
X ist das Anzeigefeld.
M ist der gewohnte Speicher des Taschenrechners (der nur aus einem einzigen Speicherplatz besteht).
$M := X$ entspricht dem Betätigen der Taste $\boxed{X \rightarrow M}$.
Die etwas ungewohnte Schreibweise $X := X + 1$ bedeutet: Nimm den Inhalt vom Speicherplatz X, addiere zu ihm die Zahl 1, und lege das Ergebnis zurück auf den Platz X.
Auch das tritt am SR 1 auf:
Mit den bereits benutzten Bezeichnungen entspricht das Betätigen der Taste $\boxed{M+}$ der Anweisung $M := M + X$.

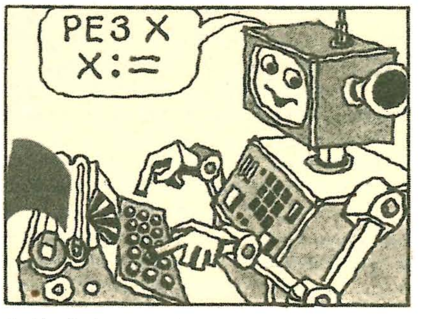


3. *Entscheidungen treffen*
Der Computer muß in bestimmten Situationen Entscheidungen für sein weiteres Vorgehen treffen. Dabei überprüft er, ob eine im Algorithmus angegebene *Bedingung* erfüllt ist.
Wenn sie erfüllt ist, *dann* führt er eine vom Algorithmus vorgeschriebene Folge von Kommandos aus, *sonst* eine andere (ebenfalls vom Algorithmus vorgeschriebene) Folge. Solch eine Stelle im Algorithmus nennen die Programmierer eine *bedingte Verzweigung*. Natürlich muß der Computer die angegebene Bedingung verstehen und sie überprüfen können.



4. *Schritte wiederholen*
Der Computer wiederholt (schnell und gegebenenfalls sehr oft) ein und dieselbe Folge von Kommandos (man sagt: er durchläuft einen *Zyklus*), *solange* eine bestimmte Bedingung (die Zyklenbedingung) erfüllt ist. Diese Bedingung muß er vor jedem Durchlaufen des Zyklus überprüfen. Stellt er fest, daß sie nicht (mehr) erfüllt ist, so geht er zum unmittelbar auf den Zyklus folgenden Kommando über.

5. *Sich an Hilfsalgorithmen erinnern*
Der Computer muß seinem Speicher bei Bedarf die dort abgelegten Daten (Zahlen, Zeichenfolgen) entnehmen können. Insbesondere kann im Speicher ein *Hilfsalgorithmus* abgelegt sein. Bei Erwähnung des *Namens* eines Hilfsalgorithmus erinnert sich der Computer an ihn und führt ihn aus, ohne daß ihm noch einmal alle Kommandos des Hilfsalgorithmus mitgeteilt werden müssen. So etwas nennen die Programmierer *Unterprogrammaufruf*.



6. *Ergebnisse ausgehen*
Die Lösung der ihm gestellten Aufgabe schreibt der Computer auf einen Bildschirm oder (z. B. mit einer elektrischen Schreibmaschine) auf einen Bogen Papier. Darüber hinaus dienen im *Dialogbetrieb* der Bildschirm und die Schreibmaschinentastatur der Verständigung zwischen Benutzer und Computer während der Abarbeitung des Algorithmus.

A. P. Jerschow/C.-P. Helmholz

Spaß mit „Sternchen“

In den zurückliegenden Jahren waren unter den Aufgaben der Mathematikolympiaden und unter den Wettbewerbsaufgaben der Schülerzeitschrift *alpha* sogenannte *Sternchenaufgaben* zu finden.
Wir stellen eine solche Aufgabe vor:
In der Multiplikationsaufgabe

6* · ***
**
 **
  **
***6

ist jedes Sternchen (*) so durch eine der Grundziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Aufgabe entsteht. Dabei muß jede Zeile mit einer von 0 verschiedenen Grundziffer beginnen.
Die Lösung dieser recht einfachen Aufgabe lautet:

66 · 111
66
 66
  66
7326

Diese Lösung kann wie folgt begründet werden:
Wegen $60 \cdot 2 = 120$ und $120 > 99$ muß jede Grundziffer des zweiten Faktors eine 1 sein. Da an der letzten Stelle des Ergebnisses die Grundziffer 6 steht, muß die zweite Grundziffer des ersten Faktors eine 6 sein.
Solche Sternchenaufgaben werden, wie uns bekannt ist, gern von Schülern gelöst. Deshalb wurden Aufgaben dieser Art auch in die neuen Mathematiklehrbücher für Schüler der Klassen 4 und 5 aufgenommen. Um alle Schüler zu befähigen, solche Aufgaben möglichst schnell und sicher zu lösen und den Lösungsweg zu begründen, stellen wir zunächst einmal die Sternchenaufgaben des *Mathematiklehrbuches für Klasse 4* vor und erläutern die Lösungswege. In einem der folgenden Hefte wenden wir uns solchen Aufgaben aus dem Mathematiklehrbuch für Klasse 5 zu.
Und nun heißt es:

Mitarbeiten – Mitdenken – Begründen!

▲1▲ Bei folgenden Zahlen sind Grundziffern unleserlich geworden und durch Sternchen ersetzt. Versuche, diese Zahlen trotzdem miteinander zu vergleichen!
a) 5*** und 4***
b) 9** und 1***
c) **** und *99
d) 63*** und 67***
e) ****0 und 87**
f) 1**1 und *99*

▲2▲ Bei einigen der folgenden Zahlen sind Grundziffern unleserlich geworden und durch * ersetzt. Versuche, diese Zahlen dennoch der Größe nach zu ordnen!
a) 2**37**, 3**7**, 1*91***, 9*****;
b) 2*76*, 2*75*, *2*76*, 2*7**;
c) 1*3, 3**1, **94*.

▲3▲ Ersetze das Zeichen * jeweils durch die richtige Grundziffer!

a) **4*4 − 913* = 6*51
b) *206* − 18**5 = 2*347
c) 8*6*3 − 17581 = *5*6*
d) *93*2 − 25*6* = 2*515

▲4▲ Ersetze in den folgenden Aufgaben die Zeichen * durch passende Grundziffern!

a) 8318 · * = 16***
b) 8** · 9 = *389
c) 76*8 · 4 = **47*
d) **06 · * = 64442
e) 48*3 · 8 = **82*
f) **27 · * = 66*5
g) 2*74 · * = *24*4
h) 562* · * = 16**7

▲5▲ Ersetze die Zeichen * so durch Grundziffern, daß die Rechnungen stimmen!

a)
57 · 6*
34*
 **4
****

b)
95 · *3
1*0
 ***
****

c)
4* · 36
1**
 **6
****

d)
263 · *7
**6
 **6
****

e)
728 · 4*
****
 2***
****4

Wir arbeiten mit Resten Teil 1

Ein Arbeitsmaterial für Schülerzirkel ab Klasse 6

Im Unterricht habt ihr eine Regel für die Teilbarkeit natürlicher Zahlen durch 9 kennengelernt (↗ LB 6, S. 20):
Jede Zahl, deren Quersumme durch 9 teilbar ist, ist durch 9 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 9 teilbar.

▲1▲ Erläutere die Sprechweise *a ist durch 9 teilbar*!
Benutze dazu die Definition des Begriffs *Teiler* (↗ LB 6, S. 7)!
Gib andere Sprechweisen für denselben Sachverhalt an! Nenne Beispiele und Gegenbeispiele!

Die genannte Teilbarkeitsregel wurde im Unterricht nicht bewiesen. Sie folgt unmittelbar aus dem *Satz*:
Läßt die Quersumme einer natürlichen Zahl bei Division durch 9 den Rest r, so läßt auch die Zahl selbst bei Division durch 9 den Rest r.
Beim Beweis dieses Satzes (der schon einmal in einer Aufgabe der Olympiade *Junger Mathematiker* gefordert wurde) sind *Reste* bei Division natürlicher Zahlen durch eine bestimmte natürliche Zahl zu untersuchen. Schreibweisen wie $13 : 5 = 2$ Rest 3 sind dabei meist umständlich oder sogar ungeeignet, da man sie nicht wie Gleichungen behandeln kann.
Ihr wißt schon, daß man jede ungerade Zahl n in der Form $n = 2k + 1$ ($k \in N$) schreiben kann. Dies kann man auch wie folgt lesen: „Die natürliche Zahl n läßt bei Division durch 2 den Rest 1.“ Wir übertragen diese Schreibweise auf beliebige Divisoren:

13 läßt bei Division durch 5 den Rest 3.
$13 = 2 \cdot 5 + 3$

27 läßt bei Division durch 7 den Rest 6.
$27 = 3 \cdot 7 + 6$

34 läßt bei Division durch 17 den Rest 0.
$34 = 2 \cdot 17 + 0$
(34 ist durch 17 teilbar.)

n läßt bei Division durch 4 den Rest 1.
Es gibt eine natürliche Zahl k, so daß gilt $n = k \cdot 4 + 1$.

a läßt bei Division durch b den Rest 2.
Es gibt eine natürliche Zahl k, so daß gilt $a = k \cdot b + 2$.

a läßt bei Division durch b den Rest r.
Es gibt eine natürliche Zahl k, so daß gilt $a = k \cdot b + r$ ($r < b$).

▲2▲ a) Beweise: Lassen zwei natürliche Zahlen a und b bei Division durch 9 denselben Rest, und ist $a \leqq b$, so ist die Differenz $b - a$ durch 9 teilbar!
b) Formuliere einen entsprechenden Satz für *beliebige* Divisoren, und beweise ihn!
c) Bilde die Umkehrung des Satzes in a) bzw. b), und untersuche, ob sie wahr ist!

Wir beweisen nun den eingangs genannten Satz über den Rest bei Division durch 9:
Voraussetzung: $n \in N$, $Q_n = k \cdot 9 + r$, $0 \leqq r < 9$
(Q_n bezeichne die Quersumme von n.)
Behauptung: Es gibt eine natürliche Zahl l, so daß $n = l \cdot 9 + r$.
Beweis: Im dekadischen Positionssystem (↗ LB 4, S. 35) hat n die Darstellung
$n = 10^m \cdot a_m + \ldots + 100 \cdot a_2 + 10 \cdot a_1 + a_0$.
Die Quersumme von n ist dann
$Q_n = a_m + \ldots + a_2 + a_1 + a_0$.
Wir bilden $n - Q_n = (10^m - 1) \cdot a_m + \ldots + 99 \cdot a_2 + 9 \cdot a_1$.
In der erhaltenen Summe ist jeder Summand durch 9 teilbar, also auch die Summe selbst. (Welcher Satz aus LB 6 wird hier angewendet?)
Nach Aufgabe ▲2▲ gilt: Da $n - Q_n$ durch 9 teilbar ist, lassen n und Q_n bei Division durch 9 denselben Rest. Nach Voraussetzung läßt Q_n bei Division durch 9 den Rest r; folglich gibt es auch eine natürliche Zahl l, so daß gilt $n = l \cdot 9 + r$, w. z. b. w.

Der Nachfolger einer Quadratzahl ist niemals durch 3 teilbar.

Diesen Satz kann man bekanntlich nicht beweisen, indem man die Gültigkeit der Behauptung nacheinander für alle Quadratzahlen einzeln überprüft. Da aber eine Aussage über die Teilbarkeit durch 3 gemacht wird, liegt es nahe, sich auf die Reste bei Division durch 3 zu konzentrieren. Es sind dann nur drei Fälle zu unterscheiden.

Voraussetzung: $a \in N$

Behauptung: $3 \nmid a^2 + 1$

Beweis: Jede natürliche Zahl a läßt sich in der Form $a = k \cdot 3 + r$ darstellen, wobei $k \in N$ und r eine der Zahlen 0, 1, 2 ist.

Es ist dann

$a^2 = a \cdot a = a \cdot (k \cdot 3 + r)$ (Einsetzen)

$= a \cdot k \cdot 3 + a \cdot r$ (Distributivgesetz)

$= (k \cdot 3 + r) \cdot k \cdot 3 + (k \cdot 3 + r) \cdot r$ (Einsetzen)

$= k^2 \cdot 3 \cdot 3 + r \cdot k \cdot 3 + k \cdot 3 \cdot r + r^2$ (Distributivgesetz)

$= (k^2 \cdot 3 + r \cdot k + k \cdot r) \cdot 3 + r^2$ (Distributivgesetz)

und

$a^2 + 1 = (k^2 \cdot 3 + 2 \cdot k \cdot r) \cdot 3 + r^2 + 1$.

Die folgende Tabelle enthält alle Möglichkeiten für r:

r	0	1	2
$r^2 + 1$	1	2	5

Es gilt also stets $3 \nmid r^2 + 1$.

Andererseits ist

$(k^2 \cdot 3 + 2 \cdot k \cdot r) \cdot 3$ stets durch 3 teilbar. Folglich gilt immer

$3 \nmid a^2 + 1$ (LB 6, S. 18, Satz 5), w. z. b. w.

▲3▲ Beweise: Wenn p eine Primzahl größer als 3 ist, dann ist genau eine der Zahlen $p - 1$ und $p + 1$ durch 6 teilbar!

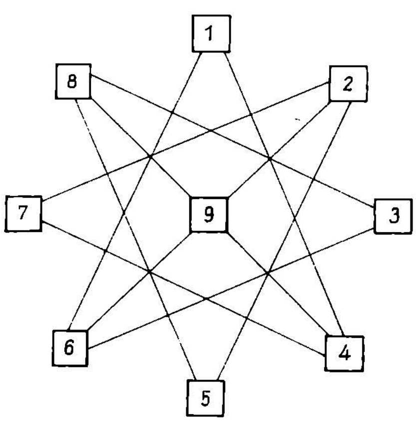
▲4▲ Beweise: wenn p eine Primzahl größer als 3 ist, dann ist das Produkt $(p - 1)(p + 1)$ stets durch 24 teilbar!

C.-P. Helmholz

- Die Erfahrung ist eine bessere Lehrmeisterin als der Kalkül.
- Nichts ist der Natur gemäßer: man muß rechnen wissen oder das Lehrgeld bezahlen.

W. L. Wekholius (1739 bis 1792)

Abb. zu ▲2691c▲ →



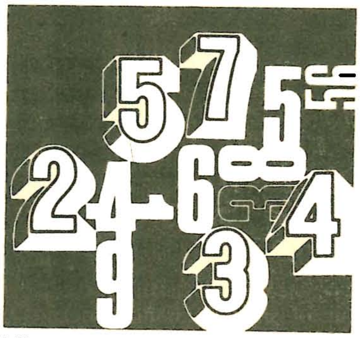
Eine Aufgabe von Prof. Dr. L. A. Kaloujnine und Prof. Dr. V. I. Suščanskij

Universität Kiew

Aus dem neu erschienenen Buch:

Transformationen und Permutationen

L. A. Kaloujnine · V. I. Suščanskij



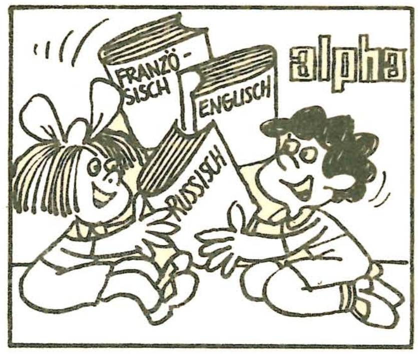
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

▲2691▲ a) Auf wieviel Arten kann man acht Damen derselben Farbe auf einem Schachbrett so anordnen, daß keine zwei von ihnen einander schlagen können?

b) Zwölf Kinder werfen verschiedenfarbige Bälle hin und her, jedes Kind wirft seinen Ball immer ein und demselben Partner zu, alle Bälle werden gleichzeitig geworfen, und niemals werfen zwei Kinder den Ball zu ein und demselben Spieler. Nach welcher kleinsten Anzahl von Würfen befinden sich alle Bälle in den Händen derselben Kinder wie am Anfang?

c) Wieviel verschiedene Armbänder kann man aus zwei blauen, zwei weißen und zwei roten Perlen zusammenstellen?

d) Das Spiel *Kastanie* wird auf einer Tafel mit neun Feldern gespielt, die durch geradlinige Strecken verbunden sind. Auf jedem der acht Spielsteine befindet sich einer der Buchstaben k, a, s, t, a, n, i, e. Die Steine werden beliebig auf die Felder verteilt, die in den Ecken des Vielecks angeordnet sind. Das Mittelfeld bleibt zunächst leer. Das Ziel des Spiels besteht darin, sie in die richtige Reihenfolge zu bringen, so daß sich beim Lesen im Uhrzeigersinn, wenn man beim ersten Feld beginnend, das Wort Kastanie ergibt. Dabei sollen die Steine auf den Verbindungsgeraden verschoben werden. Man beweise, daß man von jeder Anfangsverteilung zur richtigen Anordnung der Steine gelangen kann.

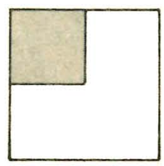


▲1▲ Prove that among all quadrilaterals of given sides the one of maximum area is inscribable in a circle.

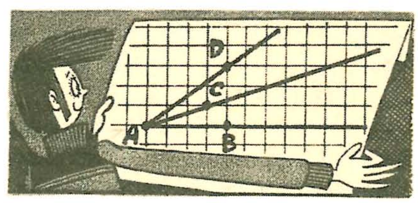
▲2▲ Determine all of the roots of the quartic equation $x^4 - 4x = 1$.

▲3▲ Le testament du vieux Léon est formel: «Je lègue mon champ carré à mes cinq fils. L'aîné aura le quart, de forme carrée, dans un angle. Les quatre autres devront se partager le reste en quatre parties identiques, de même forme et de même grandeur.»

Les quatre cadets ont réussi à se partager le reste, selon les désirs du père. Comment ont-ils fait?



▲4▲ На клетчатой плоскости из точки A проведены три луча AB, AC и AD (см. рисунок). Докажите, что угол BAC равен углу CAD, используя свойства квадратной сетки.



▲5▲ Недавно я нашел прошлогоднюю таблицу хоккейного турнира между 6-ми классами нашей школы. На ней сохранилась лишь небольшая часть записей. Попробуйте восстановить таблицу.

In freien Stunden · alpha-heiter

Zusammenstellung von Knobeleien aus dem ND (1985)

Wie heißen die drei Schüler?

Am ersten Schultag des neuen Schuljahres stellte ein Klassenlehrer seiner Klasse drei neue Schüler vor. „Eure neuen Mitschüler heißen Peter, Wolfgang und Michael“, erklärte er, „und ihre Familiennamen sind Hase, Koch und Schlosser. Zwei von ihnen, nämlich Wolfgang und euer neuer Mitschüler Schlosser, kommen aus Erfurt. Der Schüler Koch ist jünger als Wolfgang. Peter, der aus Eisenach kommt, heißt übrigens nicht Schlosser.“
Wie heißen die drei Schüler?

Stimmt die Tabelle?

Vier Mannschaften bestritten eine Aufstiegsrunde. Es spielte jeder gegen jeden ein Hin- und ein Rückspiel. Alle Spiele endeten entweder mit Sieg, Niederlage oder Unentschieden.
Die folgende Abschlußtabelle wurde in der Kreiszeitung veröffentlicht. Durch ein Versehen in der Setzerei enthält sie einige Fehler.

1. A-Stadt	6	5	0	1	5:6	10: 2
2. B-Dorf	6	3	2	1	9:1	8: 4
3. C-Burg	6	2	2	2	2:2	6: 6
4. D-Berg	6	0	1	5	0:6	1:11

Wie viele nachweisbare Fehler enthält diese Tabelle? Welche sind es?

Drei Achten

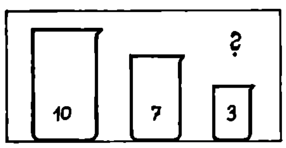
Stelle die natürlichen Zahlen von Null bis Zwölf unter Verwendung von jeweils drei Achten und beliebigen Rechenzeichen dar. Dabei ist für eine Zahl nur eine Näherungslösung möglich.
Für welche?

Wer rasiert den Barbier?

Denke ganz genau nach, wenn du die Titelvignette (rechts oben) betrachtest! Diese Aufgabe stammt übrigens von *Bertrand Russell*, dem berühmten englischen Physiker. Was hat er sich dabei gedacht? Wer rasiert den Barbier?

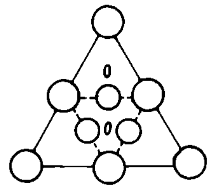
Richtiges Maß

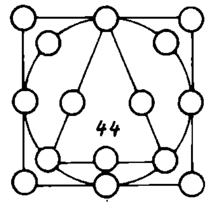
Sie besitzen drei Meßgefäße, eins umfaßt drei Liter, eins sieben Liter und eins 10 Liter. Das Dreiliter- und das Siebenlitermaß sind mit Milch bis zum Rand gefüllt. Wie kann man nun ohne Zuhilfenahme weiterer Gefäße durch bloßes Hin- und Herschütten der Milch von einem Gefäß in das andere jede gewünschte Literzahl von ein bis zehn Liter ausschenken?



Magische Figuren

a) In die leeren Felder sind die ganzen Zahlen von -4 bis $+4$ so einzutragen, daß die Summe der auf dem großen und dem kleinen Dreieck liegenden Zahlen jeweils 0 beträgt.

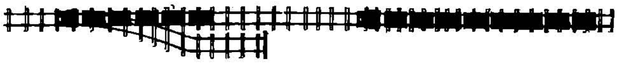




b) In die leeren Felder sind die Zahlen von 0 bis 14 so einzusetzen, daß die Summe der auf dem Quadrat, dem Kreis und dem Dreieck liegenden Zahlen jeweils 44 beträgt.

Kann der Personenzug vorbeifahren?

Ein Bauzug will am Abzweigpunkt Material entladen. Dazu braucht er eine gewisse Standzeit. Der Zug besteht aus der Lokomotive und fünf Wagen. (Die Lok ist so lang wie ein Wagen.)
Jetzt nähert sich dem Abzweigpunkt ein Personenzug mit acht Wagen (jeder Wagen und die Lok dieses Zuges ist so lang wie ein Wagen des Bauzuges). Der Personenzug soll vorbeigelassen werden.
Auf dem kurzen Abzweiggleis haben aber nur drei Wagen und eine Lok Platz. Ist eine Vorbeifahrt des Personenzuges am Bauzug möglich?



Kurzkrimi: Geheimnisvolle Runde

Im verschlossenen Hinterzimmer der Pitti-Grilli-Bar herrscht betroffenes Schweigen. Es ist kurz nach Mitternacht. Auf dem grünbezogenen Tisch liegen die Karten. Unbeachtet. Sechs Männer sitzen um einen runden Tisch herum. Der alte Frisky, John Dalmas, George Hawkins, Allan Cunneway, Fred Buster und Tom Snider. Genauer gesagt: Fünf sitzen und einer, von dem sie alle wußten, daß er ihnen mit Falschspiel das Geld aus der Tasche gezogen hatte, ist leblos vornüber auf die Tischplatte gekippt. In der Hand hält er noch ein leeres Whiskyglas. Keiner von ihnen hatte den ganzen Abend den Raum verlassen. Einer mußte also dem Leblosen das Betäubungsmittel in den Becher gegeben haben.
Folgendes steht fest:

(1) George sitzt links vom Onkel des Mannes, der George direkt gegenübersitzt.
(2) Der Täter hatte keine Verwandten am Tisch.
(3) Der alte Frisky bittet Allan neben ihm um eine Zigarette.
(4) Der Täter sitzt nicht neben Onkel und Neffe, der Leblose befindet sich zwischen beiden.
(5) Der Mann an Freds rechter Seite, er heißt nicht George, sitzt links vom Täter.
(6) Frisky sitzt Tom gegenüber, der nervös in die Runde blickt und an seiner Zigarette zieht.

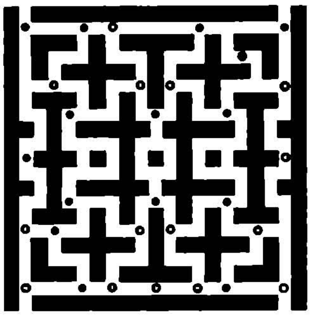
Wer ist der Täter und wer der leblose Falschspieler?

Fotozirkel

Die Mitglieder eines Fotozirkels trafen sich im Tropenhaus des Zoos, um die Schildkröten zu fotografieren. Außer vier von ihnen waren alle mit einem Stativ gekommen. Einer sagte, daß die Zahl der Schildkröten genau mit der der Fotofreunde übereinstimmte. Daraufhin meinte ein zweiter, sie selbst und ihre Stative hätten ja auch genau so viele Beine wie alle Schildkröten zusammen.
Wie viele Fotofreunde waren gekommen?

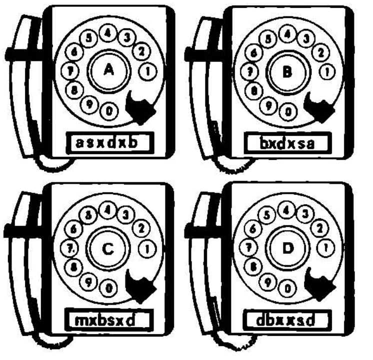
Labyrinth

Suche einen Weg durch das Labyrinth, auf dem du abwechselnd immer einen vollen und einen hohlen Punkt passierst. Jeder Punkt darf höchstens einmal berührt werden, und die Gesamtzahl der durchlaufenen Punkte muß gerade sein.



Frisch gewählt ist halb verbunden

Die auf den Apparaten dargestellten Buchstabengruppen entsprechen sechsstelligen Telefonnummern; jeder Buchstabe ersetzt eine bestimmte Ziffer. – Bei der Telefonnummer A beträgt die Quersumme 42. – Die Telefonnummer B ist durch 5 teilbar. – Die Telefonnummer C ist halb so groß wie die Telefonnummer A. – Bei der Telefonnummer D ist die Quersumme durch 11 teilbar. Wie lauten die vier Nummern?



Wer nahm am Sportfest teil?

Beim Blättern in der Betriebschronik fand Susanne einen Bericht über ein Betriebssportfest. Der Verfasser muß ein Freund der Statistik gewesen sein, denn er hatte die Durchschnittsalter aller verschiedenen Teilnehmergruppen errechnet:
Männer: 42 Jahre, Frauen: 33 Jahre,
Erwachsene: 38 Jahre; Jungen: 14 Jahre,
Mädchen: $11\frac{3}{4}$ Jahre; Gesamtdurchschnittsalter: 33 Jahre.
Außerdem war vermerkt, daß insgesamt 900 Personen teilgenommen haben und daß die Anzahl der jugendlichen Teilnehmer 25 Prozent von der Anzahl der erwachsenen Teilnehmer betrug.
Vergeblich aber suchte Susanne nach den Teilnehmerzahlen der vier Teilnehmergruppen. Wer nahm am Sportfest teil?

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen der Kreisolympiade

Klassenstufe 8 bis 10

Olympiadeklasse 8

250821 Es sei x die kleinste der zwölf Zahlen. Dann gilt laut Aufgabenstellung

$$x+x+1+x+2+x+3+x+4+x+5+x+6+x+7+x+8+x+9 = x+10+x+11,$$
$$10x+45=2x+21,$$
$$x=-3.$$

Tatsächlich ist die Summe der zehn aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen von -3 bis 6 gleich der Summe der beiden darauffolgenden Zahlen 7 und 8.

$-3-2-1+0+1+2+3+4+5+6 = 15$ und $7+8=15$.

Die Bedingungen der Aufgabe werden also genau von den Zahlen $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ und 8 erfüllt.

250822 Jede nicht durch 3 teilbare natürliche Zahl ist von einer der Formen $3k+1$, $3k+2$ mit $k \in N$. Hat eine solche Zahl die Eigenschaft, daß auch ihr Nachfolger nicht durch 3 teilbar ist, so muß sie von der Form $3k+1$ sein, da $3k+2$ die durch 3 teilbare Zahl $3k+3$ als Nachfolger hat. Der Nachfolger einer Zahl $3k+1$ ist $3k+2$, und das Produkt beider Zahlen ist

$$(3k+1)\cdot(3k+2) = 9k^2+3k+6k+2 = 9k^2+9k+2 = 9\cdot(k^2+k)+2.$$

Da k eine natürliche Zahl ist, ist auch k^2+k eine natürliche Zahl und $9\cdot(k^2+k)$ das Neunfache einer natürlichen Zahl, also durch 9 teilbar. $9\cdot(k^2+k)+2$ läßt mithin bei der Division durch 9 den Rest 2, w. z. b. w.

250823 a) Man beginne mit denjenigen Zahlenkombinationen, bei denen die Ziffern 1, 4, 6 in dieser Reihenfolge auftreten. Außer ihnen tritt noch jeweils eine nicht bekannte Ziffer x auf. Da x nicht mit den Ziffern 1, 4, 6 identisch ist, gibt es für x insgesamt sechs Möglichkeiten. Weil x sowohl an der 1., 2., 3. bzw. 4. Stelle der Einstellungsfolge stehen kann, gibt es für die Reihenfolge 1, 4, 6 somit insgesamt $4\cdot 6=24$ Möglichkeiten.

Analog verfährt man bei den weiteren fünf möglichen Reihenfolgen 1, 6, 4; 4, 1, 6; 4, 6, 1; 6, 1, 4; 6, 4, 1. Im ungünstigsten Falle sind also $6\cdot 24=144$ Einstellungen auszuführen.

b) Man beginne mit denjenigen Zahlenkombinationen, bei denen die Ziffern 1, 6 in dieser Reihenfolge auftreten. Außer ihnen und der Ziffer 4 tritt noch jeweils eine nicht bekannte Ziffer x auf. Wieder gibt es für x insgesamt sechs Möglichkeiten. Weil für x genau diejenigen drei Plätze in der Einstellungsfolge frei sind, an denen die Ziffer 4 nicht steht, gibt es für die Reihenfolge 1, 6 somit insgesamt $3\cdot 6=18$ Möglichkeiten.

Analog verfährt man bei der anderen Reihenfolge 6, 1. Somit wären unter den Bedingungen der Aufgabe b) höchstens $2\cdot 18=36$ Einstellungen nötig.

250824 a) Da $\overline{BC}$ Durchmesser des Halbkreises ist, ist der Mittelpunkt E von $\overline{BC}$ auch der Mittelpunkt des Halbkreises. Die Punkte B und D liegen auf dem Halbkreis; also gilt $\overline{EB}=\overline{ED}$.

Daraus folgt $\overline{\sphericalangle DBE} = \overline{\sphericalangle BDE}$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck BDE). Andererseits ist $\overline{\sphericalangle DBE} = \overline{\sphericalangle ABC} = 45°$ (Basiswinkel im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ABC). Nach dem Innenwinkelsatz folgt somit

$$\overline{\sphericalangle BED} = 180° - (\overline{\sphericalangle DBE} + \overline{\sphericalangle BDE}) = 90°,$$

d. h. die Behauptung $DE \perp BC$.

b) Wegen $\overline{\sphericalangle BED} = \overline{\sphericalangle BCA} = 90°$ gilt nach der Umkehrung des Satzes über Stufenwinkel an geschnittenen Geraden $ED \parallel CA$, das Viereck $ACED$ ist daher ein Trapez. Seine Höhenlänge ist zugleich der Radius $r=\overline{EC}$ des Halbkreises; die parallelen Seiten des Trapezes haben die Längen $\overline{ED}=r$ und $\overline{CA}=\overline{BC}=2r$. Der Inhalt J der vom Halbkreis nicht bedeckten Fläche des Dreiecks ABC läßt sich als Differenz der Flächeninhalte des Trapezes $ACED$ und eines Viertelkreises mit dem Radius r darstellen:

$$J=\frac{r+2r}{2}\cdot r-\frac{1}{4}\pi r^2=\frac{3}{2}r^2-\frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{r^2}{4}(6-\pi).$$

Das Dreieck ABC hat den Flächeninhalt

$$F=\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot 2r=2r^2.$$

Der gesuchte Prozentsatz beträgt daher

$$p=\frac{100\,J}{F}=\frac{25r^2(6-\pi)}{2r^2} = 12{,}5\cdot(6-\pi).$$

Aus $\pi\approx 3{,}142$ ergibt sich $6-\pi\approx 2{,}858$ und damit auf eine Dezimalstelle genau $p\approx 35{,}7$.

Also sind 35,7 % der Fläche des Dreiecks ABC nicht von dem Halbkreis bedeckt.

Olympiadeklasse 9

250921 Die Primfaktorzerlegung von $19\cdot 85=1615$ lautet

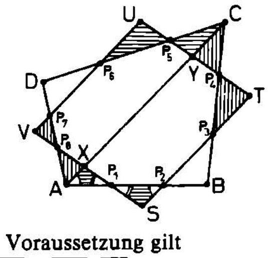
$$1615=5\cdot 17\cdot 19.$$

Für die zu ermittelnden Tripel gibt es daher genau die folgenden Möglichkeiten:

1. Genau die beiden Zahlen a und b sind gleich 1. Das führt genau auf das Tripel (1, 1, 1615).
2. Genau die eine Zahl a ist gleich 1. Dann enthält b mindestens einen der Primfaktoren 5, 17, 19. Enthielte b mehr als einen dieser Faktoren, so wäre $b \geqq 5\cdot 17=85$. Andererseits enthielte c dann nur noch höchstens einen dieser Faktoren, also wäre $c \leqq 19$. Das widerspricht der Bedingung $b \leqq c$.
Also enthält b genau einen der Primfaktoren 5, 17, 19, und c enthält die beiden anderen. Das führt (wegen $17\cdot 19=323$ und $5\cdot 19=135$) genau auf die Tripel (1, 5, 323), (1, 17, 135), (1, 19, 85).
3. Keine der drei Zahlen a, b, c ist gleich 1. Das führt genau auf das Tripel (5, 17, 19).

Somit sind genau die fünf in 1., 2., 3. angegebenen Tripel die gesuchten.

250922 Die in der Aufgabe genannten Teilpunkte $P_1, P_2, \ldots, P_8$ und Schnittpunkte S, T, U, V sowie die Schnittpunkte X, Y von AC mit VS bzw. TU seien wie im Bild bezeichnet.



Nach Voraussetzung gilt

$\overline{BP_2}:\overline{BA}=\overline{BP_3}:\overline{BC}=1:3$.

Nach Umkehrung des Strahlensatzes folgt hieraus $P_2P_3 \parallel AC$ und folglich $AX \parallel P_2S$.

Nach dem Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen folgt hieraus $\overline{\sphericalangle P_1AX}=\overline{\sphericalangle P_1P_2S}$.

Da ferner $\overline{\sphericalangle AP_1X}=\overline{\sphericalangle P_2P_1S}$ (Scheitelwinkel) und $\overline{AP_1}=\overline{P_1P_2}$ (nach Voraussetzung) ist, so folgt nach dem Kongruenzsatz (wsw) die Kongruenz der Dreiecke AP_1X und P_1P_2S und damit auch deren Flächengleichheit.

Analog folgt die Flächengleichheit der Dreiecke AP_8X und P_7P_8V, der Dreiecke CP_4Y und P_3P_4T sowie der Dreiecke CP_5Y und P_6P_5U. Die Vierecksflächen $ABCD$ und $STUV$ haben die Achtecksfläche $P_1P_2 \ldots P_8$ gemeinsam. Vergleicht man die außerhalb dieser Achtecksfläche liegenden Teilflächen, so zeigt sich, daß der Inhalt des Vierecks $ABCD$ um die Summe der Inhalte der Dreiecke P_2BP_3 und P_6DP_7 größer ist als der Inhalt des Vierecks $STUV$.

250923 Aus $\frac{a}{b}<\frac{x}{y}$ folgt durch Multiplikation mit der positiven Zahl by

$$ay<bx. \qquad (1)$$

Addiert man $a\cdot b$, so folgt

$$ay+ab<ab+bx,$$
$$a(b+y)<b(a+x).$$

Dividiert man dies durch die positive Zahl $b(b+y)$, so folgt

$$\frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+y}. \qquad (2)$$

Addiert man zu (1) aber xy, so folgt

$$ay + xy < bx + xy,$$
$$(a + x)y < x(b + y).$$

Dividiert man dies durch die positive Zahl $(b + y)y$, so folgt

$$\frac{a + x}{b + y} < \frac{x}{y}. \qquad (3)$$

Mit (2) und (3) ist, wie gefordert, die Beziehung

$$\frac{a}{b} < \frac{a + x}{b + y} < \frac{x}{y}$$

hergeleitet.

250924 Angenommen, es gäbe derartige Zahlen a und b. Aus dieser Annahme folgte dann

$$3 = a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2,$$
$$2ab\sqrt{2} = 3 - a^2 - 2b^2.$$

(1) Im Fall $a \neq 0$, $b \neq 0$ folgte weiter

$$\sqrt{2} = \frac{3 - a^2 - 2b^2}{2ab},$$

also der Widerspruch, daß $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl wäre. Daher scheidet dieser Fall aus.

(2) Im Fall $b = 0$ folgte aus $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ der Widerspruch, daß $\sqrt{3} = a$ eine rationale Zahl wäre. Also ist auch dieser Fall nicht möglich.

(Die Irrationalität von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ kann entweder als bekannter Sachverhalt zitiert oder (z. B. in entsprechender Weise wie oben in (3) durch Widerlegung von $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ bzw. $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$) bewiesen werden.)

(3) Im Fall $a = 0$ folgte $3 = 2b^2$ mit einer rationalen Zahl b, also mit $b = \frac{m}{n}$, wobei m und n natürliche Zahlen wären. Das führte auf

$$3 = 2 \cdot \frac{m^2}{n^2},$$
$$3n^2 = 2m^2.$$

Da in der Primfaktorzerlegung der Quadratzahlen n^2 und m^2 jeder Primfaktor in gerader Anzahl vorkommt, ergäbe sich der Widerspruch, daß der Primfaktor 3 auf der linken Seite in ungerader Anzahl vorkommen müßte, auf der rechten Seite aber in gerader Anzahl.

Die Annahme hat somit in jedem Falle auf einen Widerspruch geführt; damit ist bewiesen, daß es keine rationalen Zahlen a, b mit $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ gibt.

Olympiadeklasse 10

251021 Die Primfaktorzerlegung von 1985 lautet

$$5 \cdot 397 = 1985.$$

Nimmt man noch den Faktor 1 hinzu, so gibt es für natürliche Zahlen a, b, c genau die folgenden Darstellungen:

(1) $1 \cdot 5 \cdot 397 = 1985$

(2) $1 \cdot 1 \cdot 1985 = 1985$.

Da die Tripel aller ganzen Zahlen gesucht sind, sind noch die Fälle zu beachten, in denen genau zwei der Faktoren negatives Vorzeichen haben:

Aus (1) entstehen so genau die Darstellungen $(-1)(-5) \cdot 397$, d. h. $a = -5$, $b = -1$, $c = 397$,
$(-1) \cdot 5 \cdot (-397)$, d. h. $a = -397$, $b = -1$, $c = 5$,
$1 \cdot (-5)(-397)$, d. h. $a = -397$, $b = -5$, $c = 1$.

Aus (2)6entstehen genau die Darstellungen
$(-1) \cdot (-1) \cdot 1985$, d. h. $a = b = -1$, $c = 1985$,
$1 \cdot (-1) \cdot (-1985)$, d. h. $a = -1985$, $b = -1$, $c = 1$.

Insgesamt gibt es mithin genau folgende sieben Tripel, die die Aufgabenstellung erfüllen:

(1, 5, 397); (1, 1, 1985); (−5, −1, 397); (−397, −1, 5); (−397, −5, 1); (−1, −1, 1985); (−1985, −1, 1).

251022 Es gilt $a^2 + 3ab < a^2 + 3ab + 2b^2$, weil b positiv ist. Da die Wurzelfunktion streng monoton steigt und beide Terme positiv sind, gilt

$$\sqrt{a^2 + 3ab} < \sqrt{a^2 + 3ab + 2b^2}.$$

Nach Multiplikation mit 2, Anwendung von $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ $(x, y > 0)$ und Addition von $2a + 3b$ erhält man

$$a + (a + 3b) + 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a + 3b}$$
$$< (a + b) + (a + 2b) + 2\sqrt{a + b} \cdot \sqrt{a + 2b}.$$

Unter Benutzung der binomischen Formel $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ ergibt sich daraus

$$(\sqrt{a} + \sqrt{a + 3b})^2 < (\sqrt{a + b} + \sqrt{a + 2b})^2.$$

Weil aus $u^2 < v^2$ stets $|u| < |v|$ folgt, gilt weiter

$$|\sqrt{a} + \sqrt{a + 3b}| < |\sqrt{a + b} + \sqrt{a + 2b}|.$$

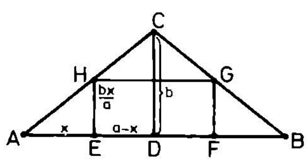
Da die Terme in den Beträgen positiv sind, gilt schließlich

$$\sqrt{a} + \sqrt{a + 3b} < \sqrt{a + b} + \sqrt{a + 2b},$$

w. z. b. w.

251023 Da die Höhe CD im gleichseitigen Dreieck ABC zugleich Seitenhalbierende ist, ist ihr Fußpunkt D der Mittelpunkt von AB; es gilt also $\overline{AD} = \overline{BD} = 10$ cm. Es sei $\overline{AD} = a$ und $\overline{DC} = b$ gesetzt (siehe Bild). Für jedes Rechteck $EFGH$, das dem Dreieck ABC (mit E und F auf AB, G auf BC und H auf AC) einbeschrieben ist, sei $\overline{AE} = x$ gesetzt. Wegen $EH \perp AB$ und $DC \perp AB$, also $EH \parallel DC$, folgt aus dem Strahlensatz

$$\overline{EH} : \overline{DC} = \overline{AE} : \overline{AD}, \text{ also } \overline{EH} = \frac{bx}{a}.$$



Da $EFGH$ ein Rechteck ist, gilt somit $\overline{FG} = \overline{EH} = \frac{bx}{a}$. Da auch $FG \parallel DC$ gilt, folgt aus dem Strahlensatz

$\overline{BF} : \overline{BD} = \overline{FG} : \overline{DC}$ und damit $\overline{BF} = x$.

Hiernach ergibt sich

$$\overline{EF} = \overline{ED} + \overline{FD} = 2(a - x).$$

Der Flächeninhalt J des Rechtecks $EFGH$ ist folglich

$$J = 2(a - x)\frac{bx}{a}$$
$$= \frac{2b}{a}(ax - x^2),$$
$$= \frac{2b}{a}\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + ax - x^2\right),$$
$$= \frac{ab}{2} - \frac{2b}{a}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2.$$

Daraus folgt:

Für $x \neq \frac{a}{2}$ ist $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 > 0$,

also $J < \frac{ab}{2}$; für $x = \frac{a}{2}$ ist $J = \frac{ab}{2}$.

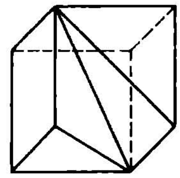
Somit wird genau für dasjenige Rechteck $EFGH$, das sich mit $x = \frac{a}{2} = 5$ cm ergibt, der Flächeninhalt J am größten. Die Seitenlängen dieses Rechtecks sind

$$\overline{EF} = 2(a - x) = 10 \text{ cm}, \ \overline{EH} = \frac{bx}{a} = 4 \text{ cm},$$

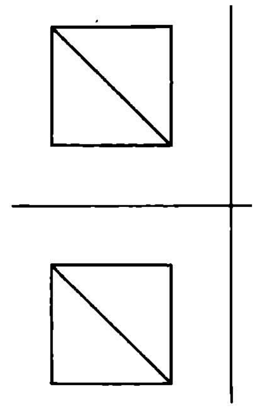
sein Flächeninhalt beträgt $J = 40 \text{ cm}^2$.

251024

a)



b)



Die abgebildete Kupfermedaille (Durchmesser 20 mm) wurde 1976 anläßlich des 500. Todestages Regiomontanus' von seiner Heimatstadt herausgegeben.

(Siehe Seite 75!)

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade

8./9. Februar 1986

Olympiadeklasse 7

250731 Ermittle zu jeder natürlichen Zahl $n > 0$ die Anzahl aller derjenigen natürlichen Zahlen, die Teiler der Zahl 2^n sind!

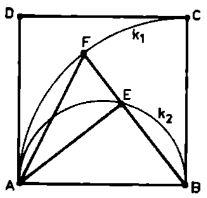
250732 Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels und mit $\overline{CA} = 4$ cm, $\overline{CB} = 20$ cm.
Von einer natürlichen Zahl x wird gefordert, daß sie die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt:
(1) Die Strecke CB kann um x cm verkürzt werden; d. h., zwischen C und B liegt ein Punkt B' mit $\overline{CB'} = \overline{CB} - x$ cm.
(2) Wenn zugleich die Strecke CA über A hinaus um x cm bis zu einem Punkt A' verlängert wird, dann beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C'$ genau 55 % des Flächeninhalts des Dreiecks ABC.
Untersuche, ob es genau eine natürliche Zahl x gibt, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt! Wenn das der Fall ist, so ermittle diese Zahl!

250733 Für ein Viereck $ABCD$ werden die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) gefordert:
(1) $ABCD$ ist ein Parallelogramm.
(2) Die Winkelhalbierenden von $\measuredangle BAD$ und $\measuredangle ABC$ schneiden sich in einem Punkt E, der auf der Geraden durch C und D liegt.
(3) Es gilt $\overline{AE} = 6{,}0$ cm und $\overline{BE} = 4{,}0$ cm.
a) Beweise, daß jedes Viereck $ABCD$, das diese Bedingungen erfüllt, aus den gegebenen Längen 6,0 cm und 4,0 cm konstruiert werden kann!
b) Schreibe eine solche Konstruktion!
c) Beweise, daß jedes Viereck $ABCD$, das nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!

250734 Ein Jagdflugzeug flog in einer halben Stunde 200 km weiter als ein Sportflugzeug in einer Stunde.
Wie groß war die Geschwindigkeit jedes dieser beiden Flugzeuge, wenn die des Jagdflugzeugs dreimal so groß war wie die des Sportflugzeugs?

250735 In einer Arbeitsgemeinschaft stellt Rainer seinen Klassenkameraden folgendermaßen eine Aufgabe:
Er nimmt drei Karten, auf denen zweiziffrige Zahlen stehen, so in die Hand, daß niemand anders als er die Zahlen sehen kann und daß sich die dreimal zwei Ziffern nebeneinandergehalten als eine sechsstellige Zahl lesen lassen. Dies macht er (mit denselben Karten) mehrere Male, bis er jede mögliche Reihenfolge der drei Karten genau einmal berücksichtigt hat. Die abgelesene sechsstellige Zahl notiert er jedesmal (ebenfalls so, daß nur er seine Notizen sehen kann). Anschließend bildet er die Summe aller notierten Zahlen.
Nun teilt er den Klassenkameraden mit: „Auf einer Karte steht die Zahl 15, auf einer die Zahl 23. Auf der dritten Karte steht eine zweistellige Zahl, die ich nicht verrate. Die Summe aller notierten Zahlen beträgt 1 373 736."
Untersuche, ob es genau eine zweistellige Zahl gibt, die unter den genannten Bedingungen nach Rainers Aussagen auf der dritten Karte stehen kann! Wenn das der Fall ist, so ermittle diese zweistellige Zahl!

250736 Es sei $ABCD$ ein Quadrat. Der im Innern von $ABCD$ gelegene Viertelkreisbogen um B mit dem Radius $\overline{AB}$ sei k_1, der im Innern von $ABCD$ gelegene Halbkreis mit AB als Durchmesser sei k_2. Ein von B ausgehender Strahl schneide k_2 in einem Punkt E und k_1 in einem Punkt F.



Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets $\overline{\measuredangle DAF} = \overline{\measuredangle EAF}$ folgt!

Olympiadeklasse 8

250831 Beweise folgenden Satz:
Es gibt keine Quadratzahl, die bei Division durch 3 den Rest 2 läßt!

250832 Brigade Schulz spielt im „Tele-Lotto (5 aus 35)" nach einem sogenannten „vollmathematischen System mit n Zahlen". Darunter versteht man, wenn n eine natürliche Zahl mit $5 < n \leqq 35$ ist, folgendes System:
Es werden von der Brigade genau n Zahlen 1, 2, ..., 35 ausgewählt, und dann werden in der Menge dieser n Zahlen alle verschiedenen Teilmengen aus je fünf Elementen ermittelt. Jede dieser Teilmengen wird als Tip abgegeben.
a) Die Brigade spielt nach einem „vollmathematischen System mit 6 Zahlen". Bei der nachfolgenden Ziehung im Tele-Lotto stellt sich heraus, daß genau vier der fünf Gewinnzahlen unter den sechs von der Brigade in ihrem System verwendeten Zahlen vorkommen.
Ferner werden nach dieser Ziehung folgende Gewinnquoten bekanntgegeben: Für jeden Tip mit genau drei richtig getippten Zahlen gibt es 20 M, für jeden Tip mit genau vier richtig getippten Zahlen gibt es 400 M, für jeden Tip mit fünf richtig getippten Zahlen 3000 M.
Ermittle den hiermit zustandekommenden Gewinn der Brigade!
b) Die Brigade spielt nach einem „vollmathematischen System mit 7 Zahlen". Bei einer Ziehung wird festgestellt: Genau vier der fünf Gewinnzahlen kommen unter den sieben von der Brigade verwendeten Zahlen vor. Die Gewinnquoten sind dieselben wie in a).
Ermittle ebenfalls den Gewinn der Brigade!
Hinweis: Die Kosten, d. h. der Spieleinsatz, sollen in beiden Aufgaben nicht berücksichtigt werden.

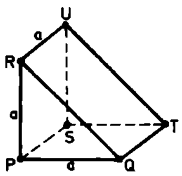
250833 Es sei g eine gegebene Größe. Ferner seien zwei Punkte A, B gegeben, die beide nicht auf g liegen, deren Verbindungsstrecke AB aber g schneidet und nicht auf g senkrecht steht.
Für einen Streckenzug $APQB$ seien folgende Bedingungen (1), (2), (3) gefordert:
(1) Die Punkte P und Q liegen auf g.
(2) Die Gerade durch A und P ist parallel zur Geraden durch B und Q.
(3) Die Strecke PQ hat die Länge $t = 6$ cm.
a) Beweise, daß jeder Streckenzug $APQB$, der die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, durch eine Konstruktion (aus gegebenen g, A, B und der gegebenen Länge $t = 6$ cm) erhalten werden kann!
b) Beschreibe eine solche Konstruktion!
c) Beweise, daß jeder Streckenzug $APQB$, der nach dieser Beschreibung konstruiert werden kann, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!
d) Wähle selbst eine Gerade g und Punkte A, B, wie oben beschrieben, und konstruiere dazu *alle* diejenigen Streckenzüge $APQB$, die die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen! (Ein Beweis, daß *alle* verlangten Streckenzüge konstruiert wurden, wird nicht gefordert.)

250834 Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Eine Sehne von k, die nicht Durchmesser ist, sei AB. Ferner sei t die in A an k gelegte Tangente, und C sei der Fußpunkt des von B auf t gefällten Lotes. Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen die Gerade durch A und B stets den Winkel $\measuredangle CBM$ halbiert!

250835 Von Lew Nikolajewitsch Tolstoi (1828 bis 1910), einem bedeutenden russischen Schriftsteller, stammt folgende Aufgabe:
Schnitter sollen zwei Wiesen mähen. Am Morgen begannen alle, die größere Wiese zu mähen. Vom Mittag dieses Tages an teilten sie jedoch die Arbeit anders ein: Die Hälfte der Schnitter verblieb beim Mähen der ersten Wiese, die sie bis zum

Abend fertig mähten. Die anderen Schnitter gingen zum Mähen der zweiten Wiese über, deren Flächeninhalt gleich dem der Hälfte der ersten war, und arbeiteten bis zum Abend. Nun blieb auf der zweiten Wiese ein Rest, für den ein Schnitter allein einen ganzen Tag benötigte. Wieviel Schnitter waren am ersten Tag bei der Arbeit?
Anmerkung: Es sei vorausgesetzt, daß jeder Schnitter an jedem Vormittag eine gleichgroße Fläche wie an jedem Nachmittag mäht und daß diese Arbeitsleistung aller Schnitter die gleiche ist.

250836 Es sei $PQRSTU$ ein gerades dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck PQR ist. Die Höhenlänge des Prismas sei gleich der Kathetenlänge a des Dreiecks PQR (siehe Bild).



Gesucht ist eine Ebene E, die parallel zu einer der quadratischen Seitenflächen F des Prismas verläuft und die das Prisma in zwei Teilkörper zerlegt, deren Volumina sich in irgendeiner Reihenfolge wie $9:16$ verhalten.
Ermittle zu gegebenem a alle diejenigen Werte, die der Abstand zwischen der Seitenfläche F und einer solchen Ebene E betragen kann!

Olympiadeklasse 9

250931 a) Beweisen Sie, daß es eine natürliche Zahl N gibt, für die die folgende Aussage (1) gilt!
(1) Für jede natürliche Zahl n, für die $n \geqq N$ ist, kann eine Quadratfläche F in genau n Teilquadrate $T_1, \ldots, T_n$ zerlegt werden. (Dabei sollen die Flächen $T_1, \ldots, T_n$ die Fläche F vollständig ausfüllen; sie brauchen nicht untereinander kongruent zu sein.)
b) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl N, für die die Aussage (1) gilt!

250932 Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (a, b) von zweistelligen Zahlen a und b, für die folgendes gilt:
Bildet man durch Hintereinanderschreiben von a und b in dieser Reihenfolge eine vierstellige Zahl z, so ist
$$z = (a + b)^2.$$

250933 Das Volumen eines regelmäßigen Tetraeders sei V_T, das Volumen seiner Umkugel sei V_K.
Berechnen Sie das Verhältnis $V_K : V_T$ und runden Sie es ganzzahlig (d. h., ermitteln Sie die zu $V_K : V_T$ nächstgelegene ganze Zahl)! Dabei können die (auf eine bzw. zwei Dezimalen nach dem Komma genauen) Näherungswerte $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ und $\pi \approx 3{,}14$ verwendet werden.

250934 Die acht Zahlen $1, 2, \ldots, 8$ sollen so auf die Eckpunkte eines Würfels verteilt werden, daß dabei folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Jedem Eckpunkt des Würfels wird genau eine der acht Zahlen zugeteilt, jede dieser Zahlen soll in der Verteilung vorkommen.
(2) Addiert man auf jeder Seitenfläche des Würfels die vier Zahlen an den Eckpunkten dieser Seitenfläche, so ergibt sich auf allen sechs Seitenflächen dieselbe Summe.
Es sollen möglichst viele Verteilungen der acht Zahlen auf die Eckpunkte so zusammengestellt werden, daß jede dieser Verteilungen die Bedingungen (1), (2) erfüllt und daß keine zwei dieser Verteilungen zueinander kongruent sind, d. h. durch Drehung oder Spiegelung ineinander übergeführt werden können.
Ermitteln Sie die Anzahl der Verteilungen, die in einer solchen Zusammenstellung auftreten!

250935 In einem beliebigen spitzwinkligen Dreieck ABC sei A' der Fußpunkt der durch A gehenden Höhe, B' der Fußpunkt der durch B gehenden Höhe und S der Schnittpunkt dieser beiden Höhen.
Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets
$\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AS} : \overline{SB'}$ gilt!

250936 a) Ist durch den Term
$z = \sqrt{192 + 96 \cdot \sqrt{3}} + \sqrt{192 - 96 \cdot \sqrt{3}}$
eine Zahl definiert?
b) Wenn dies der Fall ist, ist z rational?

Olympiadeklasse 10

251031 Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(a; b)$ von ganzen Zahlen a und b, die die Gleichung $a + b = (a - b)^2$ erfüllen!

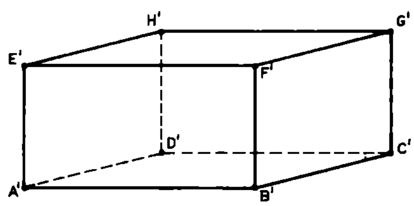
251032 a) Es sei a eine beliebige positive reelle Zahl, und es sei f die im Intervall
$$0 \leqq x \leqq a \qquad (1)$$
durch $f(x) = \sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}$ (2)
definierte Funktion.
Beweisen Sie, daß f im Intervall (1) streng monoton fallend ist!
b) Ermitteln Sie den größtmöglichen Definitionsbereich D, in dem durch (2) eine Funktion f definiert wird! Untersuchen Sie, ob f im gesamten Bereich D streng monoton fallend ist!
Hinweis: Eine Funktion f heißt genau dann in einem Bereich B streng monoton fallend, wenn für alle reellen Zahlen x_1, x_2 in B gilt:
Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) > f(x_2)$.

251033 Aus 27 Würfeln mit der Kantenlänge a wird ein Würfel mit der Kantenlänge $3a$ zusammengesetzt. Jeder der 27 kleinen Würfel ist entweder völlig weiß oder völlig schwarz angestrichen. Beim Zusammensetzen soll auf jeder der sechs quadratischen Seitenflächen des großen Würfels ein Muster entstehen, das in jeder Zeile und jeder Spalte genau ein schwarzes und genau zwei weiße Quadrate enthält.
Ermitteln Sie
a) die kleinste,
b) die größte
Anzahl schwarzer Würfel, mit der .diese Forderungen erfüllbar sind!

251034 Von einer natürlichen Zahl x wird gefordert, daß sie die folgenden Bedingungen (1) bis (5) erfüllt:
(1) Die Zahl x hat, im Zweiersystem (System mit der Basis 2) geschrieben, genau zehn Stellen.
(2) Schreibt man x im Dreiersystem, so steht an der zweiten Stelle die Ziffer 1.
(3) Schreibt man x im Vierersystem, so steht an der zweiten Stelle die Ziffer 0.
(4) Die Zahl x hat, im Fünfersystem geschrieben, genau vier Stellen.
(5) Schreibt man x im Zehnersystem, so steht an der letzten Stelle die Ziffer 2.
Beweisen Sie, daß es genau eine natürliche Zahl x gibt, die diese Bedingungen erfüllt, und ermitteln Sie diese Zahl!

251035 Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Darin sei F ein von B und C verschiedener Punkt der Strecke BC, und E sei ein von A und C verschiedener Punkt der Strecke AC.
Ferner sei P der Schnittpunkt der Strecken AF und BE.
Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen die Umkreise der drei Dreiecke AFC, EBC und PFB stets genau einen Punkt gemeinsam haben!

251036 Das Arbeitsblatt zeigt das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ eines Quaders $ABCDEFGH$ bei einer schrägen Parallelprojektion.



a) Konstruieren Sie das Bild S' des Schnittpunktes S der Strecke EC mit der Ebene, die durch A, F und H geht! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion und beweisen Sie, daß der nach Ihrer Beschreibung konstruierte Punkt S' das Bild des genannten Punktes S ist!
b) Ermitteln Sie alle diejenigen Quader $ABCDEFGH$, für die S mit dem Höhenschnittpunkt des Dreiecks AFH zusammenfällt!

Olympiadeklassen 11/12

251231 Man ermittle alle diejenigen Paare (m, n) natürlicher Zahlen m und n, für die die folgenden Bedingungen (1) und (2) gelten:
(1) $m + n$ und $m \cdot n$ sind zweistellige Zahlen.
(2) Vertauscht man die Ziffern der Zahl $m + n$ miteinander, so erhält man die (Zifferndarstellung der) Zahl $m \cdot n$.
251232 Für eine beliebige natürliche Zahl $n \geqq 3$ seien n Kreise $K_1, \ldots, K_n$ so in einer Ebene gelegen, daß sie folgende Be-

dingungen erfüllen (wobei der Kreis K_j auch mit K_{n+1} bezeichnet sei):
Es gibt einen Punkt 0, der auf allen Kreisen $K_1, \ldots, K_n$ liegt.
Für $i = 1, \ldots, n$ gilt: K_i und K_{i+1} haben noch genau einen von 0 verschiedenen Punkt A_i gemeinsam.
Die Punkte $A_1, \ldots, A_n$ sind paarweise verschieden; die Strahlen von 0 aus durch $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ sind in dieser Reihenfolge um 0 herum angeordnet.
Ferner seien $P_1, \ldots, P_{n+1}$ Punkte, die folgende Bedingungen erfüllen:
Für $i = 1, \ldots, n$ gilt: P_i liegt auf K_i und ist von 0 und A_i verschieden: P_{i+1} ist der von A_i verschiedene Schnittpunkt des Kreises K_{i+1} mit der Geraden durch P_i und A_i.
Die Strahlen von 0 aus durch $A_n, P_1, A_1, P_2, A_2, \ldots, P_n, A_n$ sind in dieser Reihenfolge um 0 herum angeordnet.
a) Beweisen Sie, daß für $n = 3$ aus diesen Voraussetzungen stets $P_4 = P_1$ folgt!
b) Untersuchen Sie, ob für jede natürliche Zahl $n \geqq 3$ aus den genannten Voraussetzungen stets $P_{n+1} = P_1$ folgt!

Von den nachstehenden Aufgaben 251233A und 251233B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

251233A Man untersuche, ob es keine, endlich viele oder unendlich viele 5-Tupel $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ von positiven ganzen Zahlen gibt, für die die folgende Gleichung (1) erfüllt ist:

$$x_1^3 + x_2^5 + x_3^7 + x_4^{11} = x_5^{13}. \qquad (1)$$

251233B Beweisen Sie, daß es unter allen Zerlegungen

$$100 \geqq z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n$$

der Zahl 100 in reelle Faktoren

$z_i = 2$ $(i = 1, \ldots, n;$
n positiv ganzzahlig)

eine Zerlegung gibt, für die die Summe

$$s = z_i + z_2 + \ldots + z_n$$

einen kleinstmöglichen Wert hat!
Ermitteln Sie eine solche Zerlegung!

251234 Acht Gegenstände, die mit $A_1, A_2, \ldots, A_8$ bezeichnet seien, sind in zwei Schränken S_1 und S_2 verschlossen worden. Zur Ermittlung der Verteilung der Gegenstände werden folgende Aussagen gemacht:
In dem Schrank S_1 befindet sich
(1) A_1 genau dann, wenn sich A_3 und A_5 beide in S_1 befinden;
(2) A_2 genau dann, wenn sich A_3 und A_6 beide in S_1 befinden;
(3) A_3 genau dann, wenn sich A_4 und A_8 beide in S_2 befinden;
(4) A_4 genau dann, wenn sich A_1 und A_8 beide in S_2 befinden;
(5) A_5 genau dann, wenn sich A_6 in einem anderen Schrank befindet als A_7;
(6) A_6 genau dann, wenn sich A_4 in einem ansderen Schrank befindet als A_5;
(7) A_7 genau dann, wenn sich A_1 in demselben Schrank befindet wie A_2;
(8) A_8 genau dann, wenn sich A_5 in demselben Schrank befindet wie A_7.
Ermitteln Sie alle diejenigen für eine Verteilung der acht Gegenstände auf die beiden Schränke bestehenden Möglichkeiten, bei denen alle Aussagen (1) bis (8) wahr sind!

251235 Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die die folgende Gleichung (1) gilt:

$$\frac{x^2 + 12x + 4}{x + 2} = 6\sqrt{x}. \qquad (1)$$

251236 Für eine beliebige natürliche Zahl $n \geqq 2$ seien $2n$ Punkte $P_1, \ldots, P_{2n}$ im Raum so gelegen, daß es keine Ebene gibt, auf der vier dieser Punkte liegen. Mit T sei die Menge aller derjenigen Tetraeder bezeichnet, deren vier Eckpunkte der Menge

$$M = \{P_1, \ldots, P_{2n}\}$$

angehören. Für jede Ebene ε, die keinen Punkt von M enthält, sei t_ε die Anzahl aller derjenigen Tetraeder aus T, die mit ε ein Viereck als Schnittfläche gemeinsam haben.
Ermitteln Sie zu jeder natürlichen Zahl $n \geqq 2$ den größtmöglichen Wert, den t_ε annehmen kann!

Zitiert
(Siehe Beitrag S. 78/79)
Bis zur Anerkennung der „imaginären Größen" als Zahlen und der Erkenntnis des Wesens der komplexen Zahlen mußten noch über drei Jahrhunderte vergehen.
Noch 1770 schrieb Leonhard Euler:
„So ist klar, daß die Quadratwurzeln von Negativzahlen nicht ... zu den möglichen [d. h. reellen] Zahlen gerechnet werden können. Folglich müssen wir sagen, daß dies unmögliche Zahlen sind. Und dieser Umstand leitet uns auf den Begriff von solchen Zahlen, welche ihrer Natur nach unmöglich sind, und gewöhnlich imaginäre oder eingebildete Zahlen genannt werden, weil sie bloß in der Einbildung vorhanden sind. Daher bedeuten alle diese Ausdrücke $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$ etc. solche unmögliche oder imaginäre Zahlen, weil dadurch Quadratwurzeln von Negativzahlen angegeben werden."

L'ALGEBRA
OPERA
Di Rafael Bombelli da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli Studiosi di detta professione.

IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori.

Lösungen

Lösungen zu:
Wir arbeiten mit Resten
(Teil 1)

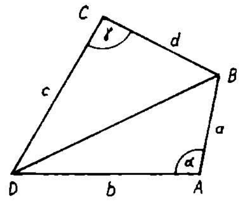
▲2▲ a) *Voraussetzung*:
$a \leqq b$, $a = k \cdot 9 + r$, $b = l \cdot 9 + s$,
$0 \leqq r, s < 9$, $r = s$.
Behauptung: $9 \mid b - a$.
Beweis: $b - a = (l \cdot 9 + s) - (k \cdot 9 + r)$
$= (l - k) \cdot 9 + (s - r)$
Wegen $a \leqq b$ ist $l - k \in N$.
Wegen $r = s$ ist $s - r = 0$.
Mit $m = l - k$ ist $b - a = m \cdot 9$,
$m \in N$, w. z. b. w.
b) Wie a), 9 durch z. B. c $(c \in N)$ ersetzen.
c) *Voraussetzung*: $a \leqq b$, $a = k \cdot 9 + r$,
$b = l \cdot 9 + s$, $0 \leqq r, s < 9$, $9 \mid b - a$.
Behauptung: $r = s$.
Beweis: $b - a = (l - k) \cdot 9 + (s - r)$
(vgl. a)).
Aus $9 \mid b - a$ folgt $9 \mid s - r$.
Wegen $0 \leqq s - r < 9$ gilt $9 \mid r - s$ nur dann, wenn $s - r = 0$, d. h. $r = s$,
w. z. b. w.

▲3▲ *Voraussetzung*: p Primzahl, $p > 3$.
Behauptung: Entweder $6 \mid p - 1$ oder $6 \mid p + 1$.
Beweis: Wegen $p > 3$ ist p ungerade, folglich ist $p - 1$ gerade und $p + 1$ gerade. Wegen $p > 3$ ist die Primzahl nicht durch 3 teilbar. p hat demnach die Form $p = 3m + 1$ oder $p = 3m + 2$ $(m \in N)$.
Fall 1: $p = 3m + 1$.
Wegen $p - 1 = 3m$ ist $3 \mid p - 1$, und wegen $p + 1 = 3m + 2$ ist $3 \nmid p + 1$.
Fall 2: $p = 3m + 2$.
Wegen $p - 1 = 3m + 1$ ist $3 \nmid p - 1$, und wegen $p + 1 = 3m + 3 = 3(m + 1)$ ist $3 \mid p + 1$.
Da 2 und 3 teilerfremd sind, ist entweder $2 \cdot 3 \mid p - 1$ oder $2 \cdot 3 \mid p + 1$, w. z. b. w.

▲4▲ *Voraussetzung*: p Primzahl, $p > 3$.
Behauptung: $24 \mid (p - 1)(p + 1)$.
Beweis: Nach ▲3▲ ist entweder
$3 \mid p - 1$ oder $3 \mid p + 1$.
Wegen $p > 3$ ist p ungerade, es gibt also ein $k \in N$, so daß $p = k \cdot 2 + 1$.
Dann ist
$(p - 1)(p + 1) = k \cdot 2 \cdot (k \cdot 2 + 2)$
$= k \cdot 2 \cdot 2(k + 1) = 4 \cdot k \cdot (k + 1)$.
Von den beiden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen k und $k + 1$ ist eine durch 2 teilbar. Also ist $(p - 1)(p + 1)$ durch 8 teilbar. Außerdem ist $(p - 1)(p + 1)$ durch 3 teilbar, insgesamt also durch $3 \cdot 8 = 24$ (3 und 8 sind teilerfremd), w. z. b. w.

Lösungen zu: Sprachecke

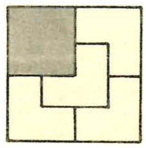
▲1▲ Beweise, daß von allen Vierecken mit gegebenen Seiten dasjenige mit der größten Fläche in einen Kreis einbeschrieben werden kann!
Lösung: Beachte, daß in dem abgebildeten Viereck die Gleichung $\alpha + \gamma = \pi$ gilt!



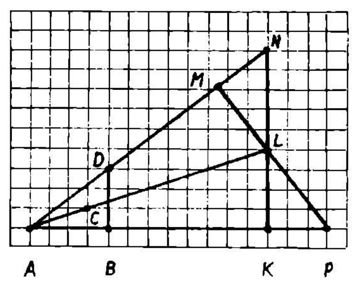
Bezeichnen wir die Fläche des Vierecks mit F, so erhalten wir
$$F = \left(\frac{1}{2}\right) ab \sin\alpha + \left(\frac{1}{2}\right) cd \sin\gamma.$$
Weiterhin berechnen wir die Diagonale DB auf zwei verschiedene Arten und stellen fest, daß $a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\gamma$. Aus diesen zwei Gleichungen erhalten wir nach einigen Umformungen
$$F^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 \sin\alpha + c^2d^2 \sin^2\gamma + 2abcd \sin\alpha \sin\gamma),$$
$$4F^2 = a^2b^2(1 - \cos^2\alpha) + c^2d^2(1 - \cos^2\gamma) + abcd[\cos(\alpha - \gamma) - \cos(\alpha + \gamma)],$$
$$4F^2 = a^2b^2 - a^2b^2\cos^2\alpha + c^2d^2 - c^2d^2\cos^2\gamma + abcd\cos(\alpha - \gamma) - abcd\cos(\alpha + \gamma), \qquad (1)$$
$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4(a^2b^2\cos^2\alpha + c^2d^2\cos^2\gamma - 2abcd\cos\alpha\cos\gamma$$
$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4(a^2b^2\cos^2\alpha + c^2d^2\cos^2\gamma - abcd[\cos(\alpha - \gamma) + \cos(\alpha + \gamma)],$$
$$\frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = a^2b^2\cos^2\alpha + c^2d^2\cos\gamma - abcd\cos(\alpha - \gamma) - abcd\cos(\alpha + \gamma),$$
$$abcd\cos(\alpha - \gamma) = -\frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + a^2b^2\cos^2\alpha + c^2d^2\cos^2\gamma - abcd\cos(\alpha + \gamma).$$
In (1) eingesetzt ergibt
$$4F^2 = (a^2b^2 + c^2d^2) - 2abcd \cdot \cos(\alpha + \gamma) - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2,$$
$$16F^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4(a^2b^2 + c^2d^2) - 8abcd\cos(\alpha + \gamma).$$
Folglich wird F maximal, wenn $\cos(\alpha + \gamma) = \cos\pi = -1$, w. z. b. w.

▲2▲ Bestimme alle Lösungen der Gleichung vierten Grades $x^4 - 4x = 1$.
Lösung: Beachte, daß
$$x^4 - 4x - 1 = x4 - 4x - 1 + 2x^2 - 2x^2,$$
$$= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 - 4x - 2,$$
$$= (x^2 + 1)^2 - 2(x + 1)^2!$$
Da $(x^2 + 1)^2 - 2(x + 1)^2 = 0$,
ist $(x^2+1)^2 = 2(x + 1)^2$,
$$x^2 + 1 = \pm\sqrt{2}\,(x + 1).$$
Die Lösungen dieser zwei quadratischen Gleichungen ergeben die gewünschten vier Lösungen.

▲3▲ Das Testament des alten Léon lautet:
„Ich vermache mein quadratisches Feld meinen fünf Söhnen. Der ältere erhält ein Viertel in quadratischer Form in einer Ecke (siehe Bild). Die vier anderen müssen sich den Rest in vier identische Teile von gleicher Form und gleicher Größe teilen." Den vier jüngeren ist es gelungen, sich den Rest nach den Wünschen des Vaters zu teilen. Wie haben sie dies gemacht?
Lösung: Der Rest ist so zu teilen, wie es das Bild zeigt.



▲4▲ Auf einem karierten Blatt Papier wurden vom Punkt A aus drei Strahlen AB, AC und AD gezeichnet. Zeigt, daß $\sphericalangle BAC$ kongruent $\sphericalangle CAD$ ist! Benutzt dazu Eigenschaften des Quadratnetzes!
Lösung: Jedes der Dreiecke MNL und LKP im Bild ist kongruent zum Dreieck ABD. Folglich ist der Strahl AL Winkelhalbierende von $\sphericalangle BAD$.



▲5▲ Kürzlich fand ich die vorjährige Tabelle des Hockeyturniers der 6. Klassen unserer Schule. In ihr ist nur ein kleiner Teil der Eintragungen erhalten. Versucht, die Tabelle zu rekonstruieren!
Lösung:

	$6^а$	$6^б$	$6^в$	$6^г$	Очки	Счет	Место
$6^а$		1:1	0:1	5:1	3	6:3	2
$6^б$	1:1		0:1	1:2	1	2:4	4
$6^в$	1:0	1:0		1:1	5	3:1	1
$6^г$	1:5	2:1	1:1		3	4:7	3

Lösungen zu: alpha-heiter

Wie heißen die drei Schüler?

Stimmt die Tabelle?
Fehler in der Tabelle:
1. 10 gewonnenen Spielen stehen nur 9 verlorene gegenüber. Ihre Zahl muß jedoch gleich sein.
2. Die Gesamtzahl der unentschiedenen Spiele muß durch zwei teilbar sein.
3. Gesamt-Plus-Tore müssen mit Minus-Toren übereinstimmen.
4. Gesamt-Plus-Punkte müssen den Minus-Punkten gleich sein.

Die korrekte Tabelle könnte so aussehen, daß die Zeile bei D-Berg geändert wird in:
6 0 0 6 0:7 0:12.

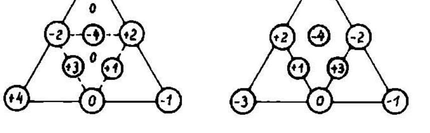
Drei Achten
$0 = 8(8 - 8)$
$1 = \sqrt{8 \cdot 8} : 8$
$2 = (8 + 8) : 8$
$3 = \sqrt{8 + 8 : 8}$
$4 = 8 - \sqrt{8 + 8}$
$5 \approx \sqrt{8 + 8} + \sqrt{\sqrt{\sqrt{8}}}$
$5 = \mathrm{INT}\sqrt{\sqrt{8}} + \sqrt{8 + 8}$
$5 = 8 : (0{,}8 + 0{,}8)$
$5 = \mathrm{ld}8 - (\mathrm{ld}8)! + 8$
$\mathrm{ld}8 = \lg_2 8 = 3.$
$6 = \sqrt{8 + 8 : 8}!$
$7 = 8 - 8 : 8$
$8 = 8 + 8 - 8$
$9 = 8 + 8 : 8$
$10 = 8 + \sqrt{\sqrt{8 + 8}}$
$11 = 88 : 8$
$12 = 8 + \sqrt{8 + 8}$

Bei der Fünf lassen sich durch weiteres Wurzelziehen am letzten Summanden Näherungswerte von beliebiger Genauigkeit erzielen.

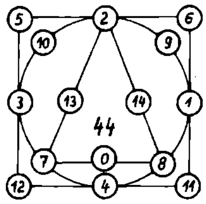
Wer rasiert den Barbier?
Den Barbier rasiert niemand, denn: gehört er zu der Menge von Männern, die sich selbst rasieren, kann er sich nicht rasieren, weil er nur die Männer behandelt, die sich nicht selbst rasieren, und nur diese. Gehört er aber zu der Menge, die sich nicht selbst rasieren, kann er sich ebenfalls nicht den Bart scheren lassen.

Richtiges Maß
Ein Liter: 3 in 10, 7 in 3, 3 in 10, 7 in 3. Bleibt 1 Liter in 7 zurück.
Zwei Liter: 3 in 10, 7 in 3, 3 in 10, 7 in 3, 3 in 10, 7 in 3, 10 in 7. Bleiben 2 Liter in 10.
Vier Liter: 3 in 10, 7 in 3. Bleiben vier in 7.
Fünf Liter: 3 in 10, 7 in 3, 3 in 10, 7 in 3, 3 in 10, 7 in 3, 10 in 7, 7 in 3. Bleiben 5 in 7.
Sechs Liter: 3 in 10, 7 in 3, 3 in 10. Sind 6 in 10.
Acht Liter: 3 in 10, 7 in 3, 3 in 10, 7 in 3, 3 in 10, 7 in 5, 10 in 7, 7 in 3, 3 in 10, 7 in 3, 3 in 10. Sind 8 in 10.
Neun Liter: 3 in 10, 7 in 3, 3 in 10, 7 in 3, 3 in 10. Sind 9 in 10.

Magische Figuren
a) Mögliche Lösungen:

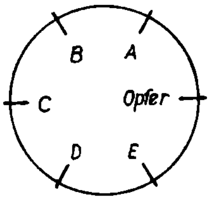


b) Lösung:



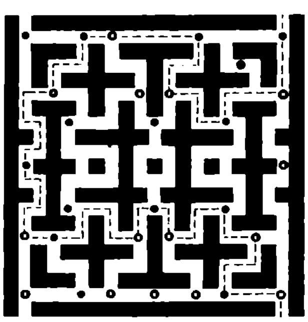
Kann der Personenzug vorbeifahren?
Zunächst werden die drei letzten Wagen des Bauzuges auf das Abzweiggleis geschoben. Sie werden vom Bauzug abgekoppelt und dieser fährt ein Stück vor. Der Personenzug rückt nun hinter den verbliebenen vorderen Teil des Bauzuges, stößt rückwärts und koppelt an sein Ende die drei abgestellten Wagen. Jetzt fährt er auf seinen alten Platz zurück und läßt dort die drei Bauwagen stehen. Der Rest des Bauzuges fährt nun auf das Abzweiggleis. Der Personenzug fährt vorbei.

Kurzkrimi
Aus (4) folgt, daß A und E Onkel bzw. Neffe sind. Aus (1) ergibt sich D = George. Aus (4) folgt, daß C der Täter ist. A = Fred ergibt sich aus (5). (6) wird nur durch E und B erfüllt. B = Frisky und E = Tom ergibt sich aus (3), außerdem muß C = Allan sein. Somit ist John Dalmas das Opfer und Allan Cunneway der Täter.



Fotozirkel
Anzahl der Fotofreunde
= Anzahl der Schildkröten; F = S.
Anzahl der Beine: 2F + 3(F − 4) = 4S;
F = 12. Es sind 12 Fotofreunde.

Labyrinth



Frisch gewählt ist halb verbunden
1) Wenn B durch 5 teilbar ist, dann ist $a = 0$ oder 5. Da a in A als erste Ziffer steht und Telefonnummern nicht mit 0 beginnen, ist $a = 5$. 2) Wenn $a = 5$, dann ist $m = 2$. 3) Da $a = 5$ und die Quersumme von $A = 42$ ist, ergibt sich $b + d + s + 2x = 37$. Diese Summe taucht auch in D auf; daraus ergibt sich $d = 7$, da die Quersumme von D durch 11 teilbar ist. 4) Wenn $d = 7$, dann ist $b = 4$, da $A = 2C$, $2x + S = 26$. Daraus ergibt als einzig mögliche Lösung $x = 9$ und $s = 8$. Die Telefonnummern lauten: A = 58 97 94; B = 49 79 86; C = 29 48 97; D = 74 99 87.

Wer nahm am Sportfest teil?
Es nahmen teil: 400 Männer, 320 Frauen, 100 Jungen, 80 Mädchen.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 6/85

Ph 7 ■ 188
Geg.: $W = 90\,\text{Nm}$ Ges.: Endkraft F_2
$F_1 = 500\,\text{N}$
$s = 0{,}12\,\text{m}$
Nach der Gleichung für die Federspannarbeit gilt

$$W = \frac{(F_1 + F_2)\cdot s}{2}.$$

Dann ist

$$F_2 = \frac{2W}{s} - F_1,$$

$$F_2 = \frac{2\cdot 90\,\text{Nm}}{0{,}12\,\text{m}} - 500\,\text{N},$$

$$F_2 = 1000\,\text{N}.$$

Die Endkraft beträgt 1000 N.

Ph 8 ■ 189 a) Drehzahl $n = \frac{v}{D\cdot\pi}\quad\left[\frac{1}{s}\right]$
Hierin sind v = Fahrgeschwindigkeit in m/s und D = Treibraddurchmesser in m. Ferner ist $c_m = 2\cdot s\cdot n$ in m/s mit n = Drehzahl der Treibräder. Demzufolge gilt

$$c_m = 2s\frac{v}{D\cdot\pi}.$$

Schließlich ist

$$v = \frac{\pi\cdot D\cdot c_m}{2\cdot s} \qquad (2)$$

mit den Grenzen $8\,\text{m/s} \leqq c_m \leqq 9\,\text{m/s}$.
1. Für $D = 2{,}00\,\text{m}$ und $s = 0{,}66\,\text{m}$ folgt

$$\frac{\pi\cdot 2\cdot 8\,\text{m}}{2\cdot 0{,}66\,\text{s}} \leqq v \leqq \frac{\pi\cdot 2\cdot 9\,\text{m}}{2\cdot 0{,}66\,\text{s}},$$

$$38{,}08\,\text{m/s} \leqq v \leqq 42{,}84\,\text{m/s}$$

bzw. $137{,}1\,\text{km/h} \leqq v \leqq 154{,}2\,\text{km/h}$.
2. Für $D = 2{,}300\,\text{m}$ und $s = 0{,}66\,\text{m}$ folgt

$$\frac{\pi\cdot 2{,}3\cdot 8\,\text{m}}{2\cdot 0{,}66\,\text{s}} \leqq v \leqq \frac{\pi\cdot 2{,}3\cdot 9\,\text{m}}{2\cdot 0{,}66\,\text{s}}$$

$$43{,}79\,\text{m/s} \leqq v \leqq 49{,}27\,\text{m/s}$$

bzw. $157{,}6\,\text{km/h} \leqq v \leqq 177{,}4\,\text{km/h}$.
Die zulässigen Höchstgeschwindigkeiten liegen bei Baureihe 01 zwischen 137,1 km/h und 154,2 km/h (tatsächlicher Wert 130 km/h),
Lok 18201 zwischen 157,6 km/h und 177,4 km/h (tatsächlicher Wert 175 km/h).
b) Aus Gleichung (2) erhält man mit
$v = 200{,}4\,\text{km/h} = 55{,}67\,\text{m/s}$,
$D = 2{,}300\,\text{m}$ und $s = 0{,}66\,\text{m}$

$$c_m = \frac{2\cdot s\cdot v}{\pi\cdot D}$$

$$c_m = \frac{2\cdot 0{,}66\,\text{m}\cdot 55{,}67\,\text{m}}{3{,}14\cdot 2{,}3\,\text{m}\cdot\text{s}}$$

$$c_m = 10{,}17\,\text{m/s}.$$

Die Kolbengeschwindigkeit beträgt 10,17 m/s.

Ph 9 ■ 190 Geg.: $s = 9{,}6\,\text{m}$ Ges.: m
$t = 4\,\text{s}$
$F = 1320\,\text{N}$
$g = 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
a) 15 % von 1320 N sind 198 N. Es wirkt also eine Zugkraft von 1122 N. Die Beschleunigung des Troges erhält man aus der Gleichung $s = \frac{1}{2}at^2$.

$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{19{,}2\,\text{m}}{16\,\text{s}^2} = 1{,}2\,\text{m/s}^2$$

Die Zugkraft am Haken setzt sich aus der Gewichtskraft und der Beschleunigungskraft zusammen.

$$F_{\text{Zug}} = F_{\text{Gew}} + F_{\text{Besch}}$$

$$1122\,\text{N} = mg + ma$$

$$m = \frac{1122\,\text{N}}{g + a} = \frac{1122\,\text{N}}{9{,}81\,\text{m/s}^2 + 1{,}2\,\text{m/s}^2}$$

$$= 101{,}9\,\text{kg} \quad 102\,\text{kg}$$

Der Trog hat eine Masse von etwa 102 kg.
b) $F = mg + 2ma = m(g + 2a)$
$= 101{,}9\,\text{kg}\,(9{,}81\,\text{m/s}^2 + 2{,}4\,\text{m/s}^2)$
$F = 1244{,}2\,\text{N} \quad 1244\,\text{N}$
Bei doppelter Beschleunigung wirkt eine Zugkraft von etwa
$1244\,\text{N}.\ 100 : p = G : P$

$$p = \frac{P\cdot 100}{G} = \frac{1244{,}2\,\text{N}\cdot 100}{1320\,\text{N}} = 94{,}2\ldots\,\%$$

Das sind 94,2 % der ausgeschriebenen Zugkraft. Es ist also nicht vertretbar, die Beschleunigung zu verdoppeln.

Ph 10/12 ■ 191
Geg.: $r_1 = 1{,}0821\cdot 10^8\,\text{km}$ Ges.: T_1 in d
$r_2 = 5{,}91\cdot 10^9\,\text{km}$
$T_2 = 248{,}4\,a$
Nach dem Keplerschen Gesetz gilt

$$T_1^2 : T_2^2 = r_1^3 : r_2^3,$$

$$T_1^2 = \frac{T_2^2\cdot r_1^3}{r_2^3}$$

$$T_1 = \sqrt{\frac{248{,}4^2\cdot(1{,}0821\cdot 10^8)^3}{(5{,}91\cdot 10^9)^3}\,a^2},$$

$$T_1 \approx 0{,}6154\,a.$$

$0{,}615\cdot 365 \approx 225$. Die Umlaufzeit der Venus beträgt etwa 225 Tage.

Aus Platzgründen müssen wir auf die Lösungen zu den Chemieaufgaben verzichten.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. P. Bachmann
Heft 2/86

▲2690▲ Wir betrachten zunächst ein Codewort
$c = b_1b_2\ldots b_{n-1}b_n$, in dem alle Buchstaben b_i voneinander verschieden sind und in dem der Buchstabe A nicht auftritt. Man erkennt leicht, daß c insgesamt die Permutation p mit
$p(\text{A}) = b_1$, $p(b_i) = b_{i+1}$ für
$1 \leqq 1 < n$ und $p(b_n) = \text{A}$ beschreibt.
Ein solches Codewort nennen wir *A-Zyklus*, da der Buchstabe A mit in die Permutation eingeht. Wollen wir A aus der Permutation ausschließen, so hängen wir an c den ersten Buchstaben b_1 hinten nochmals an. Dann beschreibt $cb_1 = b_1\ldots b_nb_1$ die Permutation $p(b_i) = b_{i+1}$ für $1 \leqq i < n$ und $p(b_n) = b_1$. A wird deswegen nicht verändert, weil am Anfang A nach b_1 und am Ende b_1 nach A überführt wird, insgesamt also $p(\text{A}) = \text{A}$. Wir nennen cb_1 einen *Zyklus*. Schließlich betrachten wir den Fall, daß ein $b_i = \text{A}$ ist. A beschreibt die Vertauschung A mit A, ist also ohne Wirkung und kann aus dem Codewort gestrichen werden.

Wird ein Zyklus bzw. ein A-Zyklus $c = b_1 b_2 \dots b_{n-1} b_n$ in umgekehrter Reihenfolge $c^{-1} = b_n b_{n-1} \dots b_2 b_1$ hingeschrieben, so wird die inverse Permutation p^{-1} mit $p^{-1}(b_{i+1}) = b_i$ beschrieben. Das Wort c^{-1} beschreibt also die Decodierung.
Jedes Codewort kann geeignet in Zyklen zerlegt werden, z. B. das Codewort BUCHSTABENRECHNUNG in (BUCHSTAB) (ENRE)
(CH) (NUN) (G). Diese Zerlegung ist im allgemeinen nicht eindeutig, z. B. ist
(BUCH) (STABEN) (RECHNU) (NG)
eine andere Zerlegung, in der zudem alle Zyklen A-Zyklen sind. Beide Zerlegungen beschreiben die gleiche Codierung. Das Wort zur Decodierung erhält man durch die inverse Reihenfolge der inversen Zyklen, also
GNUNHCERNEBATSHCUB. Die decodierte Nachricht lautet damit
DUBISTSCHOEN!
Aus dem oben Gesagten folgt sofort, daß ein symmetrisches Codewort cc^{-1} wirkungslos ist, da nach der Codierung mittels c sofort die Decodierung mittels c^{-1} erfolgt. OTTO und RETTER sind solche symmetrischen Codeworte und auch MAMA, da nach dem Streichen von A nur MM übrig bleibt.
Man sieht auch leicht ein, daß in einem Codewort die Reihenfolge von zwei Zyklen dann vertauscht werden kann, wenn es keinen Buchstaben gibt, der in beiden Zyklen verändert wird. Somit kann in ROTOR in der Zyklendarstellung (R) (OTO) (R) der A-Zyklus (R) auch nach dem Zyklus (OTO) angeordnet werden. Man erhält zu ROTOR das die gleiche Permutation beschreibende Codewort OTORR, das zu OTO verkürzbar ist. OTO beschreibt die Vertauschung O nach T und T nach O, die auch durch TOT beschrieben wird.
Schließlich wollen wir überlegen, welche Codeworte für beliebige Permutationen benötigt werden. Wir betrachten eine Permutation p, bei der alle 26 Buchstaben des Alphabets verändert werden. Es wird ein Buchstabe b in den Buchstaben $p(b)$ überführt. Nun beginnen wir mit der Konstruktion eines Codewortes $b_1 b_2 \dots b_n$, indem wir setzen:
$b_1 = p(\mathrm{A})$, $b_{i+1} = p(b_i)$ für $1 \leqq i < n$
und n sei der kleinste Index mit $p(b_n) = \mathrm{A}$. Somit haben wir einen A-Zyklus konstruiert. Wenn in diesen Zyklus alle Buchstaben eingehen, sind wir fertig und $n = 25$, da 26 Buchstaben existieren und alle b_i ungleich A sind. Wenn jedoch $m = 26 - (n+1)$ Buchstaben übrig bleiben, so konstruieren wir einen weiteren Zyklus $b_1 b_2 \dots b_r b_1$, wobei b_1 ein beliebiger übrig gebliebener Buchstabe ist und wieder gilt:
$b_{i+1} = p(b_i)$ für $1 \leqq i < r$,
sowie $p(b_r) = b_1$.
A kann in diesen Zyklus nicht eingehen, deshalb brauchen wir für die einbezogenen r Buchstaben ein Codewort der Länge $r + 1$. Sind jetzt keine weiteren Buchstaben übrig, so beschreiben beide Zyklen ein Codewort der Länge
$n + (26 - (n+1)) + 1 = 26$.
Anderenfalls setzen wir die Konstruktion fort. Die meisten Zyklen und damit das längste Codewort sind zu konstruieren, wenn in alle Zyklen nur zwei Buchstaben eingehen. Dann werden 13 Zyklen benötigt, dabei hat der A-Zyklus die Länge 1, die restlichen 12 Zyklen die Länge 3, insgesamt entsteht ein Codewort der Länge $1 + 12 \cdot 3 = 37$. Also kann jede Permutation mit einem Codewort der maximalen Länge 37 beschrieben werden.
Das nach dem hier beschriebenen Verfahren konstruierte Codewort der zu BUCHSTABENRECHNUNG gehörenden Permutation ist CGBNREUHSTB.

Lösungen zu:
Flächen und nochmals Flächen
Heft 3/86, Seite 57

▲1▲ A, B, D, F, G, H

▲2▲ a) -1 b) $-1; 2$ c) $-1; 2; 3; 5$ d) $-1; 2; 3$ e) -4

▲3▲ $a = b = 4$ m

▲4▲ a) 8 cm² b) 6 cm² c) 20 cm² d) 2 cm²

▲5▲ Der Flächeninhalt aller drei Dreiecke ist gleich.

▲6▲ a) a (in cm) 1 2 4
b (in cm) 36 18 9
b) $a = b = 6$ cm $U = 24$ cm

▲7▲ Die Flächen B, E und I, ebenso die Flächen C, G und K, aber auch die Flächen D und H haben den gleichen Flächeninhalt.

▲8▲ $x = 4$

▲9▲ a) Nein b) Ja c) Ja

▲10▲ a) Ja b) Ja c) Nein d) Ja

▲11▲ Alter Flächeninhalt: A;
alter Umfang: U
a) Neuer Flächeninhalt: $\frac{A}{4}$;
neuer Umfang: $\frac{U}{2}$
b) Neuer Flächeninhalt: $9A$;
neuer Umfang: $3U$

▲12▲ 7 cm · 14 cm = 98 cm²

▲13▲ Schmidts und Pauls Angaben täuschen eine Genauigkeit vor, die auf Grund der durchgeführten Messungen nicht gerechtfertigt ist. Die Eingangswerte haben je drei zuverlässige Ziffern. Das Ergebnis hat nicht mehr als drei zuverlässige Ziffern.

▲14▲ a) 38 cm² b) 1505 cm²
(Die Angaben in der Zeichnung wurden als genaue Werte angenommen.)

▲15▲ a) 316 cm² b) 144 cm²
(Die Angaben in der Zeichnung wurden als genaue Werte angenommen.)

Lösungen zu: Zum Berechnen algebraischer Produkte ...
Heft 3/86, Seite 59

Bei den ersten vier Aufgaben wurde die mit dem SR 1 ermittelte Zahl anschließend gerundet.

▲1▲ $5025{,}7749 \approx 5 \cdot 10^3$

▲2▲ $0{,}019359 \approx 0{,}0194 = 1{,}94 \cdot 10^{-2}$

▲3▲ $0{,}0044739 \approx 0{,}004474 = 4{,}474 \cdot 10^{-3}$

▲4▲ $26{,}246525 \approx 26{,}2 = 2{,}62 \cdot 10^1$

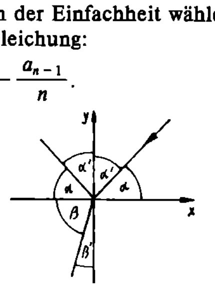
▲5▲
a) $\boxed{a}\ \boxed{\div}\ \boxed{b}\ \boxed{\div}\ \boxed{c}\ \boxed{\div}\ \boxed{d}$
$\boxed{\div}\ \boxed{e}\ \boxed{\times}\ \boxed{f}\ \boxed{=}$
b) $\boxed{a}\ \boxed{\div}\ \boxed{b}\ \boxed{\div}\ \boxed{c}\ \boxed{\times}\ \boxed{d}$
$\boxed{\times}\ \boxed{e}\ \boxed{\div}\ \boxed{f}\ \boxed{=}$

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. H.-J. Voß
Heft 3/86

Im Fall a) kann der Wolf W stets den Hasen H durch eine der folgenden drei (minimalen) Zugfolgen
$1-2-5-8-9$, $1-2-5-8-11$
oder $1-2-5-8-7$ fangen
(die möglichen Züge des Hasen sind nicht angegeben).
Auf jedem der beiden angegebenen Graphen wechselt bei jedem Zug die zu ziehende Figur von einem ungeraden Feld auf ein gerades und umgekehrt. Damit kann es im Fall b) keine Lösung geben, da immer dann, wenn W am Zuge ist, W und H beide auf einem ungeraden oder beide auf einem geraden Feld stehen. Ja, der Hase kann sich nicht einmal fangen lassen, selbst wenn er es wollte.
Im Spiel auf dem Graphen aus Bild 2 von M. Nitsche kann der Hase sich zwar fangen lassen, kann aber auch in jedem Zuge den Abstand zum Wolf auf mindestens 3 vergrößern. Das ist möglich, da immer dann, wenn H am Zuge ist, W und H beide auf einem ungeraden oder beide auf einem geraden Feld stehen.

Lösungen zu: Ehrenfried Walter von Tschirnhaus – Ein sächsischer Mathematiker
Heft 3/86

▲1▲ a) Einsetzen der Transformationsgleichung liefert:
$y = a_n(a^n z^n + n a^{n-1} z^{n-1} b + \dots)$
$+ a_{n-1}(a^{n-1} z^{n-1} + \dots) + \dots$
$= a_n a^n z^n + (a_{n-1} + nb)\, a^{n-1} z^{n-1} + \dots$
Also muß $a_{n-1} + nb = 0$ sein,
daraus ergibt sich: $b = \frac{a_{n-1}}{n}$.
Wegen der Einfachheit wähle $a = 1$!
Trf.-Gleichung:
$x = z - \frac{a_{n-1}}{n}$.



b) $a_{n-1} = -2$, $n = 2$, $x = z + 1$.
Daraus ergibt sich $y = z^2 - 9$.
Aus $z_1 = +3$ und $z_2 = -3$ ergeben sich die Lösungen $x_1 = 4$, $x_2 = -2$.
▲2▲ a) $y = mx = \tan \alpha \cdot x$.
Für den reflektierten Strahl gilt:
$y_r = \tan(180 - \alpha) \cdot x = -\tan \alpha \cdot x$
$= -mx$ $(m > 0,\ x \leqq 0)$

b) für den gebrochenen Strahl gilt:
$y_b = \tan(180 + \beta) \cdot x = \tan\beta \cdot x$
$(x \leqq 0)$.
Wenn in $\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'} = n$ die Winkel umgerechnet werden ihre Ergänzungswinkel α und β, erhält man: $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = n$.
Daraus ist b berechenbar und es ergibt sich:
$y_b = \tan\left(\arccos\left(\frac{\cos\alpha}{n}\right)\right) x$.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 1/86

Ma 5 ■ 2636 Angenommen, Egon kauft x Bücher zu 3,– M und y Bücher zu 4,– M; dann gilt $3x + 4y = 50$. Um möglichst viele Bücher zu erwerben, muß der Anteil an Büchern zu 3,– M so groß wie nur möglich sein.
Nun gilt $48 + 2 = 50$, $45 + 5 = 50$,
$42 + 8 = 50 = 14 \cdot 3 + 2 \cdot 4$.
Egon erwirbt 16 Bücher, und zwar 14 zu 3,– M und 2 zu 4,– M.

Ma 5 ■ 2637 Wir stellen eine Tabelle auf:

	Lebensalter des Sohnes	Vaters	
Gegenwärtig	23	55	$3 \cdot 23 > 55$
Vor 1 Jahr	22	54	$3 \cdot 22 > 54$
Vor 2 Jahren	21	53	$3 \cdot 21 > 53$
...			
Vor 6 Jahren	17	49	$3 \cdot 17 > 49$
Vor 7 Jahren	16	48	$3 \cdot 16 = 48$
Vor 8 Jahren	15	47	$3 \cdot 15 < 47$

Vor 7 Jahren war der Vater dreimal so alt wie sein Sohn, denn 16 Jahre · 3 = 48 Jahre.

Ma 5 ■ 2638 Entnimmt man der Kiste 36 Äpfel, so könnte man im ungünstigsten Falle von jeder der vier Sorten je 9 Äpfel erhalten. Entnimmt man der Kiste 37 Äpfel, so hat man mit Sicherheit von einer Sorte 10 Äpfel.

Ma 5 ■ 2639 Anzahl der Münzen im Wert von

10 Pf	20 Pf	50 Pf
10	–	–
8	1	–
6	2	–
5	–	1
4	3	–
3	1	1
2	4	–
1	2	1
–	5	–
–	–	2

Ein 1-Mark-Stück läßt sich auf zehnfache Art in 10-Pf-, 20-Pf- bzw. 50-Pf-Stücke wechseln.

Ma 5 ■ 2640
109, 118, 127, 136, 145, 154, 163, 172, 181, 190;
208, 217, 235, 244, 253, 262, 271, 280;
307, 316, 325, 334, 343, 352, 361, 370;
406, 415, 424, 433, 442, 451, 460;
505, 514, 523, 532, 541, 550;
604, 613, 622, 631, 640;
703, 712, 721, 730;
802, 811, 820;
901, 910; es gibt
$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 54$ dreistellige natürliche Zahlen mit der Quersumme 10.

Ma 5 ■ 2641 Wegen $23 \cdot 4 = 92$ und $92 < 120$ und $23 \cdot 6 = 138$ und $138 > 129$ gilt $c = 5$.
Wegen $2 \cdot b = 6$ und $2 \cdot b = 16$ könnte $b = 3$ oder $b = 8$ gelten.
Für $b = 3$ erhalten wir
$233 \cdot 52 = 12116 \neq 12a7$;
also entfällt $b = 3$. Für $b = 8$ gilt $238 \cdot 52 = 12376$, also $a = 3$.
Die Divisionsaufgabe lautet somit
$12376 : 238 = 52$.

Ma 6 ■ 2641
a) $4 \cdot 5 = 20$
b) $1 + 2 \cdot 3 \cdot 4 - 5 = 20$
c) $(1 + 2 + 3 + 4) : 5 - 6 + 7 + 8 + 9 = 20$
d) $(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) : 6 = 20$
e) $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$
f) $(2 + 3) \cdot 4 = 20$
g) $5 \cdot 6 + 7 - 8 - 9 = 20$
h) $10 + 11 + 12 - 13 = 20$
i) $21 + 22 - 23 = 20$
Es gibt noch viele weitere Beispiele.

Ma 6 ■ 2643
(1) $9 \cdot (b + b + 1) = b \cdot (9 + b + 1)$,
$9 \cdot (2b + 1) = b \cdot (10 + b)$; nur die natürliche Zahl $b = 9$ erfüllt diese Gleichung. Daraus folgt $c = 10$.
(2) $9 \cdot (c + 1 + c) = (c + 1) \cdot (9 + c)$,
$9 \cdot (2c + 1) = (c + 1) \cdot (c + 9)$.
Die natürliche Zahl $c_1 = 8$ erfüllt diese Gleichung; daraus folgt $b_1 = 9$. Aber auch $c_2 = 0$, also $b_2 = 1$ erfüllen die Gleichung.

Ma 6 ■ 2644 Am 3. Tag wurden 22 kg Gurken, am 2. Tag ebenfalls 22 kg Gurken verkauft. Am 1. Tag wurden $(2 \cdot 22 - 8)$ kg = 36 kg verkauft. Somit waren anfangs $(22 + 22 + 36)$ kg = 80 kg Gurken im Faß.

Speed (Geschwindigkeitsberechnung mit dem SR 1)

Marita Koch wurde auch 1985 als *Sportlerin des Jahres* von den Lesern der *„Jungen Welt"* gewählt. Am 1.1.1986 hielt sie auf fünf Distanzen die Hallenweltbestzeit. Sie lief die 50 m in 6,11 s und benötigte für 60 m die Rekordzeit von 7,04 s. Die 100 y schaffte Marita Koch in 10,25 s und die 100-m-Strecke legte sie in 11,15 s zurück. Schließlich hält sie mit 22,39 s den Hallenrekord über 200 m. Es werde einmal idealisiert angenommen, daß eine Läuferin mit konstanter Geschwindigkeit das Rennen vom Start bis zum Ziel durchläuft. Welche Geschwindigkeit in Stundenkilometern erzielte Marita Koch auf den fünf genannten Strecken? Benutze den SR 1!
Hinweis: 1 Yard ist ein englisches und nordamerikanisches Längenmaß, als Abkürzung benutzt man den Buchstaben y. Es gilt 1 y = 91,4 cm. *W. Sch.*
(Lösung siehe Heft 5/86!)

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Schulolympiade

Fortsetzung von Seite 82

Olympiadeklassen 11/12

261211 Man ermittle alle Tripel $(x; y; z)$ von Zahlen mit den folgenden Eigenschaften (1), (2):
(1) Die Zahlen x, y, z sind in dieser Reihenfolge aufeinanderfolgende ganze Zahlen.
(2) Es gilt: $x \cdot (x + y + z) = x \cdot y \cdot z$.

261212 Man beweise:
a) Für jedes Tripel (a, b, c) positiver reeller Zahlen, für das $c^4 = a^4 + b^4$ gilt, gibt es ein Dreieck mit a, b und c als Zahlenwerte seiner Seitenlängen.
b) Wenn für die Zahlenwerte a, b und c der Seitenlängen eines Dreiecks $a^4 + b^4 = c^4$ gilt, so ist das Dreieck spitzwinklig.

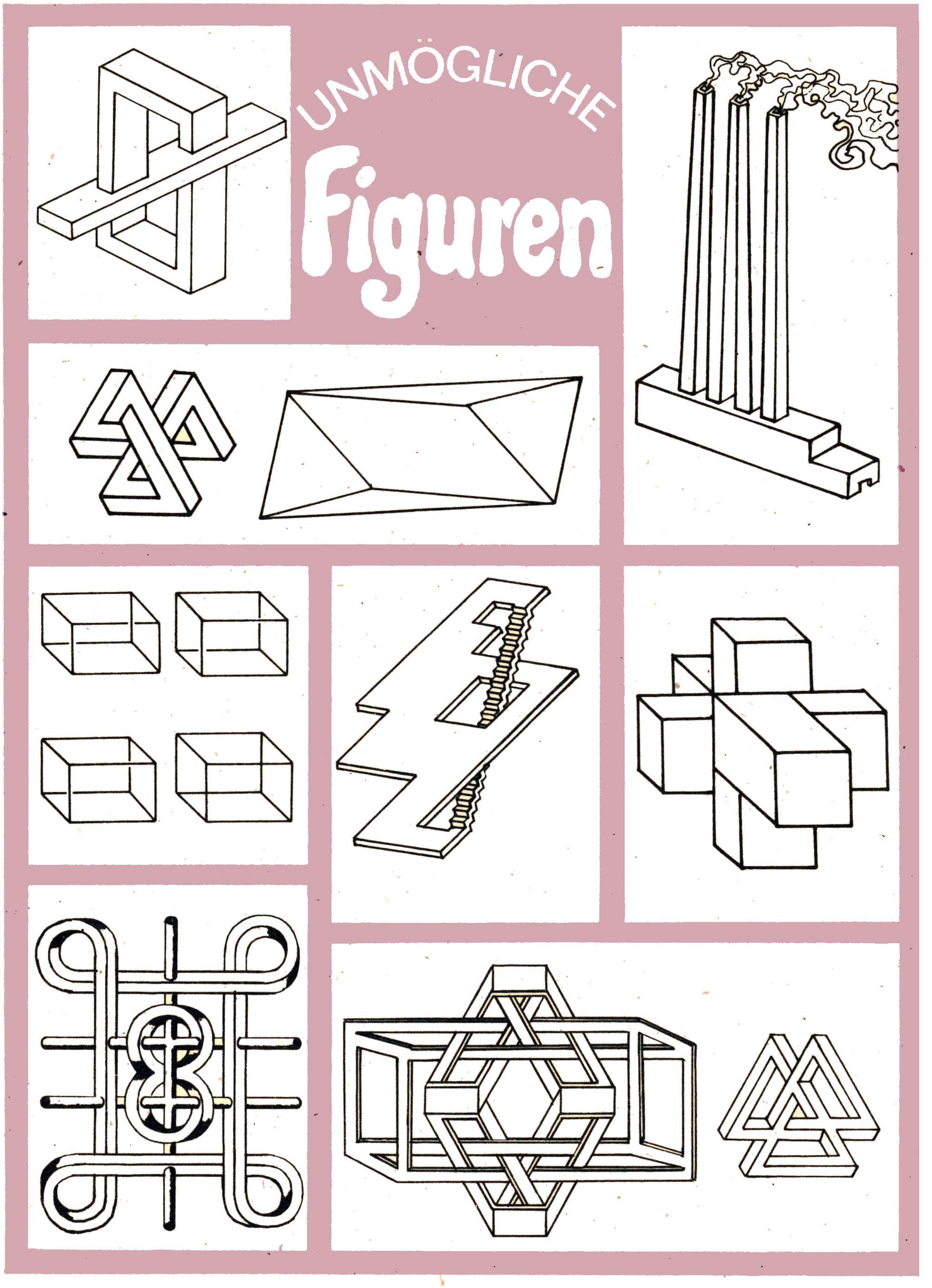
261213 An einer internationalen Tagung nahmen jeweils genau zwei Vertreter der Ungarischen Volksrepublik, der ČSSR, der VR Polen und der DDR teil.
Über diese acht Teilnehmer ist bekannt:
(1) Jeder dieser Teilnehmer spricht neben seiner Muttersprache wenigstens eine Sprache aus den anderen drei genannten Teilnehmerländern. (Die Sprachen aus den vier Ländern waren ungarisch, tschechisch, polnisch, deutsch; andere Sprachen aus diesen Ländern wie etwa slowakisch oder sorbisch kamen nicht vor.)
(2) Jede der vier Sprachen wird von Teilnehmern aus genau drei der genannten Länder gesprochen.
(3) Jeder der Teilnehmer, der polnisch spricht, spricht auch ungarisch, jedoch nicht deutsch.
(4) Die Sprachkenntnisse der beiden polnischen Teilnehmer unterscheiden sich in bezug auf die vier genannten Sprachen voneinander.
a) Man ermittle, wie viele der genannten Teilnehmer insgesamt deutsch sprechen und aus welchen Ländern diese Teilnehmer kamen.
b) Man ermittle, welche Sprachen die beiden Teilnehmer aus der UVR sprachen.

261214 Für jede reelle Zahl b sei (a_n) diejenige Zahlenfolge, die durch
$$a_n = \frac{3n + b}{2n - 1} \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (1)$$
definiert ist.
Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen b, für die die durch (1) definierte Zahlenfolge genau drei Glieder besitzt, die die Ungleichungen
$$1{,}45 < a_n < 1{,}47 \qquad (2)$$
erfüllen. Zu jeder so ermittelten Zahl b (falls es eine solche gibt) gebe man die drei Glieder a_n an, die (2) erfüllen.

Schreibt die Zahl 1986 auf jede der sechs Arten auf!

Ägypter, Babylonier, Majas, ein afrikanischer Stamm, Griechen, Römer

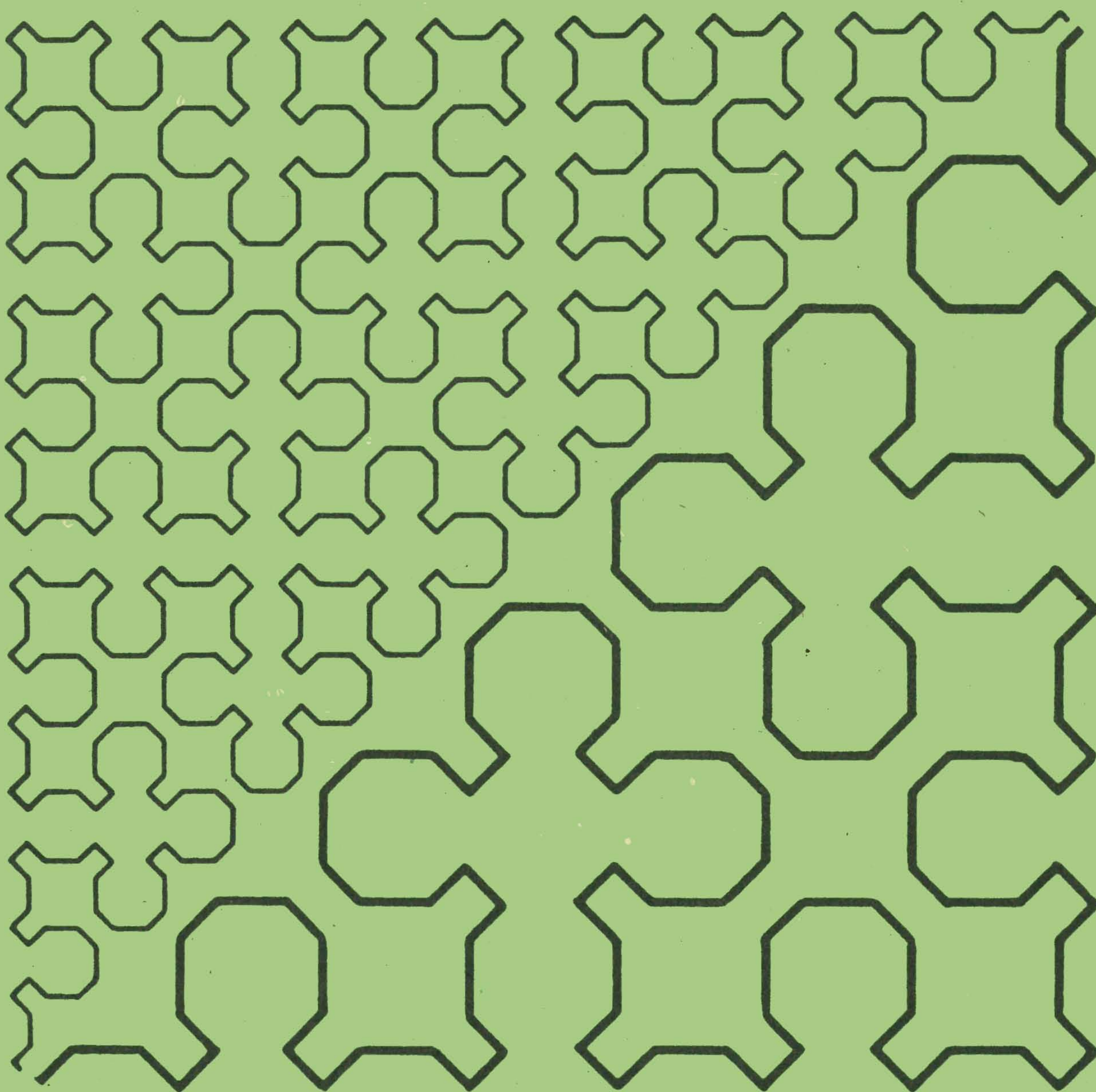
Diese Vignette entnahmen wir der mathematischen Schülerzeitschrift *Quant*, Moskau



ISSN 002-6395 · alpha · Berlin · 20 (1986) 4 · Seiten 73 bis 96

Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



5

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
20. Jahrgang 1986
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold
Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
1086 Berlin, Krausenstr. 50, PSF 1213
Anschrift der Redaktion:
7027 Leipzig, PSF 14
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.
Fotos: Tultan Pena aus *urcia*, Bukarest (S. 100); Universitätsbildstelle Halle, M. Hinrichsdorff (2×, S. 102); aus *Normat*, Upsala, Schweden (S. 110); Lothar Otto (2×), *Eulenspiegel*, Berlin; Diens Molnar, Budapest; Frank Lude, *E + S.*, Berlin (S. 112); E. Holz, Paris (S. 114); B. Henniger, *Eulenspiegel*, Berlin (III. U.-Seite)
Titelblatt: W. Fahr nach Vorlagen des polnischen Mathematikers W. Sièrpiński (1882 bis 1969)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 16. Juni 1986
Auslieferungstermin: 16. Oktober 1986

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

[1]) bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Pseudozufallszahlen

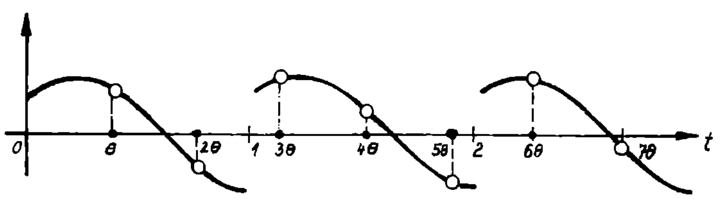
Teil 1

Bei vielen Taschenrechnern und Kleinstcomputern besteht die Möglichkeit, Zahlenfolgen mittels eines „Zufallszahlengenerators" (Kommando „RAND") in einer für den uneingeweihten Benutzer „zufällig" erscheinenden Weise zu erzeugen. Derartige „Zufallszahlen" haben z. B. Bedeutung für Computerspiele, es gibt aber auch zahlreiche Anwendungen in der Mathematik und bei technischen Fragestellungen. Einige Probleme, die bei konkreten praktischen Aufgaben aufgetreten sind, wurden 1984 in einem Kurs der Mathematischen Schülergesellschaft an der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald behandelt und sollen hier mitgeteilt werden.

1. Periodische Vorgänge

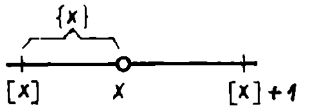
In der Elektrotechnik und in der Elektronik gibt es viele Vorgänge, die sich nach einem bestimmten Zeitabschnitt wiederholen. Man nennt einen solchen Zeitabschnitt *Periode*. Durch eine passende Wahl der Zeiteinheit kann die Periode gleich 1 gesetzt werden. Es bezeichne t die Zeit und $f(t)$ eine zu untersuchende, u. U. formelmäßig nicht bekannte Meßgröße zum Zeitpunkt t. Nun sei eine positive Zahl θ gewählt. Zu den Zeitpunkten θ, 2θ, 3θ, ... werde die Meßgröße (Funktion) $f(\bullet)$ „abgetastet", d. h. $f(\theta)$, $f(2\theta)$, $f(3\theta)$, ... werde registriert und $f(\bullet)$ daraus „aufgebaut". Es ist auch möglich, daß man sich für bestimmte Eigenschaften, Werte der Meßgröße interessiert, z. B. für die Vorzeichen von $f(\theta)$, $f(2\theta)$, $f(3\theta)$, ..., für das Integral, den Maximalwert u. a., und dann vor dem Problem steht, diese Werte aus den Abtastergebnissen zu ermitteln. (Bild 1)

Bild 1



Zu jeder reellen Zahl x wollen wir unter dem *Ganzteil* $[x]$ die größte ganze Zahl verstehen, die nicht größer als x ist, d.h. es sei $[x]$ ganz, $[x] \leqq x$, $x < [x] + 1$.

Bild 2



Als *Restteil* $\{x\}$ zu x wird die Zahl $x - [x]$ bezeichnet. (Bild 2)

Da wir die Periode 1 voraussetzen, gehört zu den Zeitpunkten $k\theta$ und $\{k\theta\}$ derselbe Meßwert, d. h. es ist $f(k\theta) = f(\{k\theta\})$ für alle $k \in N$. Wegen $0 \leqq \{k\theta\} < 1$ kann man sich folglich beim Studium der Werte $f(k\theta)$ auf das Intervall $[0,1[$ beschränken und braucht nur die Zeitpunkte $\{k\theta\}$ zu betrachten.

Die erste Frage betrifft die Wahl von θ. *Welche Punkte des Intervalles* $[0,1[$ *sind die Zahlen* $\{k\theta\}$ *für* $k = 1, 2, \ldots$? *Füllen sie das ganze Intervall aus? Liegen die* $\{k\theta\}$ *gleichmäßig verteilt, oder liegen sie an manchen Stellen dichter und an anderen dünner? Gibt es gar „weiße Flecken" in Gestalt von kleinen Intervallen, in welche keine Zahlen* $\{k\theta\}$ *fallen?*

2. Untersuchung der Weyl-Folge

Die Zahlenfolge mit den Elementen $x_k = \{k\theta\}$ werde *Weyl-Folge* genannt – nach dem Mathematiker Hermann Weyl (1885 bis 1955).

Ist θ eine natürliche Zahl, also $\theta \in N$, so ist stets $x_k = 0$ und die Folge ausgeartet, sie nimmt nur den Wert 0 an. Das Verhalten der Weyl-Folge wird wesentlich von der Wahl der Zahl θ abhängen!

Zunächst soll der Fall betrachtet werden, daß θ eine positive rationale Zahl ist. In diesem Fall existieren $p, q \in N$, so daß θ in der Form $\theta = \frac{p}{q}$ dargestellt werden kann.

Die Zahlen kp können (in eindeutiger Weise) als $kp = m_k q + r_k$ mit $m_k, r_k \in N$, $0 \leqq r_k < q$ geschrieben werden. Die r_k sind dabei gerade die Reste bei der Division von kp durch q. Man beachte

$$m_k = \left[\frac{kp}{q}\right] \text{ und } \frac{r_k}{q} = \left\{\frac{kp}{q}\right\} = \{k\theta\},\ k \in N.$$

Zur Untersuchung der Folge $(\{k\theta\})$ ist es nützlich, die Reste r_k zu betrachten. Ist z. B. $p = 3$ und $q = 5$, so findet man $r_1 = 3$, $r_2 = 1$, $r_3 = 4$, $r_4 = 2$, $r_5 = 0$, $r_6 = 3$, $r_7 = 1$, $r_8 = 4$, $r_9 = 2$, $r_{10} = 0$, ...

Satz 1: Es gibt eine kleinste natürliche Zahl w, *die (kleinste) Periode der* r_k, *so daß* $w \leqq q$ *und* $r_{k+w} = r_k$ *für alle* $k \in N$ *ist.*

Beweis: Da die r_k nur die Werte 0, 1, ..., $q - 1$ annehmen können, muß es wenigstens ein Paar r_k, r_l mit $r_k = r_l$ und $k \neq l$ geben. Sei r_j die erste Zahl, die mit einem r_i aus der Reihe $r_1, \ldots, r_{j-1}$ übereinstimmt, d. h. $r_i = r_j$ und $r_1, \ldots, r_{j-1}$ sind paarweise verschieden.

Dann muß $j - 1 \leqq q$ sein. Wegen $ip = m_i q + r_i$, $jp = m_j q + r_j$ mit $m_i, m_j \in N$ folgt

$$(i+1)p = m_i q + r_i + p = \left(m_i + \left[\frac{r_i + p}{q}\right]\right)q + \left\{\frac{r_i + p}{q}\right\} = m_{i+1}q + r_{i+1} \text{ sowie}$$

$$(j+1)p = \left(m_j + \left[\frac{r_i + p}{q}\right]\right)q + \left\{\frac{r_i + p}{q}\right\} = m_{j+1}q + r_{j+1}$$

und daher $r_{i+1} = r_{j+1}$ und mithin auch $r_{i+2} = r_{j+2}, \ldots$

Die Annahme $i > 1$ führt analog zu $r_{i-1} = r_{j-1}$, was der Definition von r_j widerspricht. Also ist $i = 1$. Sei $w = j - 1$. Dann sind $r_1, \ldots, r_w$ paarweise verschieden und die Zahlen $r_{w+1}, \ldots, r_{2w}$ bzw. $r_{2w+1}, \ldots, r_{3w}$ usw. bilden Wiederholungen von $r_1, \ldots, r_w$.

Satz 2: Wenn p *und* q *teilerfremd sind, so ist* $w = q$, *und es ist (abgesehen von der Reihenfolge)* $\{r_1, \ldots, r_w\} = \{1, \ldots, q-1, 0\}$. *Die Zahlen* $\{\theta\}$, $\{2\theta\}$, ... *stimmen (bis auf Umordnungen) mit* $\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q}, 0$ *überein.*

Beweis: Es ist $p = m_1 q + r_1$ und $(w+1)p = m_{w+1}q + r_{w+1}$. Wegen $r_1 = r_{w+1}$ folgt $(m_{w+1} - m_1)q = wp$, und daher ist q Teiler von pw. Weil p, q teilerfremd sind, kann q nur ein Teiler von w sein. Andererseits ist $0 < w \leqq q$, hieraus folgt $w = q$. Da q Reste $r_1, \ldots, r_q$ auftreten müssen und diese paarweise verschieden sind, kommen die q Werte 0, 1, ..., $q - 1$ auch tatsächlich als Reste vor.

Man überlege sich an einem Beispiel, daß $w = q$ *nicht* gelten muß, falls p und q nicht teilerfremd sind. Man kann folgende Aussage beweisen: *Wenn* t *den größten gemeinsamen Teiler von* p *und* q (Symbol: $\text{ggT}(p, q)$) *bezeichnet, so ist* $w = \frac{q}{t}$ *die Länge der Periode der Folge* $r_1, r_2, \ldots$

Im Fall $\theta = \frac{p}{q} \in R$ werden also durch die Weyl-Folge höchstens die Zahlen $0, \frac{1}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q}$ angenommen.

Wir führen einen neuen Begriff ein. Es seien $\alpha, \beta \in P$ mit $0 \leqq \alpha < \beta < 1$. Unter $A_n([\alpha, \beta], \theta)$ wollen wir die *Anzahl* derjenigen x_k aus der Reihe $x_1 = \{\theta\}$, ..., $x_n = \{n\theta\}$ verstehen, die in $[\alpha, \beta]$ liegen. Wenn θ festgehalten wird, soll dafür auch $A_n([\alpha, \beta])$ geschrieben werden.

Sind p, q teilerfremde natürliche Zahlen und $\theta = \frac{p}{q}$, so bezeichnet $A_q([\alpha, \beta])$ im Sinne der obigen Definition also die Anzahl derjenigen Zahlen aus der Reihe $0, \frac{1}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q}$, die in $[\alpha, \beta]$ liegen. (Bild 3)

Man beweist, daß dann

$A_{nq}([\alpha, \beta]) = nA_q([\alpha, \beta])$ sowie

$A_{nq+r}([\alpha, \beta]) = nA_q([\alpha, \beta]) + A_r([\alpha, \beta])$

für $n = 1, 2, \ldots$ und $0 \leqq r < q$, $r \in N$, ist.

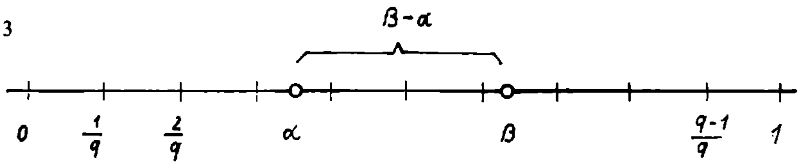
Es sei nun M eine große natürliche Zahl, die wir uns wieder darstellen als $M = nq + r$ mit $0 \leqq r < q$. Dann ist

$$\frac{A_M([\alpha, \beta])}{M} = \frac{nA_q([\alpha, \beta]) + A_r([\alpha, \beta])}{nq + r} = \frac{A_q([\alpha, \beta]) + \frac{1}{n}A_r([\alpha, \beta])}{q + \frac{r}{n}}$$

Bei großen Zahlen M wird auch n groß, so daß $\frac{1}{n}$ beliebig klein gemacht werden kann

durch die Wahl von genügend großen M. Da $A_r([\alpha,\beta]) \leqq q$ ist, unterscheidet sich $\frac{A_M([\alpha,\beta])}{M}$ für (hinreichend) große M (beliebig) wenig von $\frac{A_q([\alpha,\beta])}{q}$.
Benutzt man das Symbol lim für den *Grenzwert*, so kann dafür abkürzend
$$\lim_{M\to\infty} \frac{A_M([\alpha,\beta])}{M} = \frac{A_q([\alpha,\beta])}{q}$$
geschrieben werden.

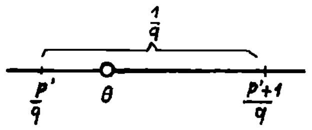
Bild 3



Wir zählen die Intervalle $\left[\frac{k}{q}, \frac{k+1}{q}\right]$, die ganz in $[\alpha,\beta]$ liegen, und die Intervalle $\left[\frac{k}{q}, \frac{k+1}{q}\right]$, welche mit $[\alpha,\beta]$ wenigstens einen Punkt gemeinsam haben, und finden
$$(A_q([\alpha,\beta]) - 1)\frac{1}{q} \leqq \beta - \alpha$$
$$(A_q([\alpha,\beta]) + 1)\frac{1}{q} \geqq \beta - \alpha.$$
Hieraus folgt
$$\beta - \alpha - \frac{1}{q} \leqq \frac{A_q([\alpha,\beta])}{q} \leqq \beta - \alpha + \frac{1}{q}.$$
Dafür können wir auch schreiben
$$\beta - \alpha - \frac{1}{q} \leqq \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} A_M([\alpha,\beta]) \leqq \beta - \alpha + \frac{1}{q}$$
Definition: Wir nennen eine Folge $x_1, x_2, \ldots$ *gleichmäßig verteilt* auf $[0,1[$, wenn für beliebige α, β mit $0 \leqq \alpha < \beta < 1$ die Beziehung $\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} A_M([\alpha,\beta]) = \beta - \alpha$ gilt.
Das bedeutet: Eine Folge (x_n) ist gleichmäßig verteilt, wenn mit wachsendem M die relative Anzahl derjenigen Elemente aus der Menge $\{x_1, \ldots, x_M\}$, die in $[\alpha,\beta]$ liegen, sich dem Wert $\beta - \alpha$ „nähert".
Ist $\theta = \frac{p}{q} \in R$ und hierbei q „groß", so wird $\frac{1}{q}$ klein. Die Folge der $x_k = \left\{k\frac{p}{q}\right\}$ ist somit für „große" q „fast" gleichmäßig verteilt.
Betrachten wir nun den Fall einer irrationalen Zahl $\theta > 0$ (d.h. θ werde durch einen unendlichen, nichtperiodischen Dezimalbruch dargestellt, bzw. es existiere keine Darstellung $\theta = \frac{p}{q}$ mit natürlichen Zahlen p, q). Es sind sicher einige spezielle irrationale Zahlen wie $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, π, $\sin 15°$, e bekannt; man weiß, daß es „viel mehr" irrationale Zahlen als rationale Zahlen gibt.

Satz 3: Wenn θ irrational ist ($\theta > 0$), so sind alle Elemente der Weyl-Folge $x_k = \{k\theta\}$ paarweise verschieden.
Beweis: Angenommen, es wäre $x_k = x_l$ für $k < l$. Dann gibt es $m_k, m_l \in N$, so daß $x_k = k\theta - m_k$ und $x_l = l\theta - m_l$ ist.
Hieraus folgt
$$(l-k)\theta = m_l - m_k \text{ und } \theta = \frac{m_l - m_k}{l-k}.$$
Damit wäre aber θ rational, was unserer Voraussetzung widerspricht.
In Computern lassen sich keine irrationalen Zahlen und nur endlich viele rationale Zahlen darstellen. Irrationale Zahlen können durch rationale Zahlen angenähert werden. Sei wieder θ eine positive irrationale Zahl und $q \in N$. Dann existiert ein $p' \in N$, so daß $\frac{p'}{q} < \theta < \frac{p'+1}{q}$ ist (siehe Bild 4).

Bild 4



Man setze $p = p'$, falls $\theta - \frac{p'}{q} < \frac{1}{2q}$ ist, und $p = p' + 1$ sonst.
Dann gilt: $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q}$.
Es bezeichne Q eine obere Schranke für die zugelassenen Nenner q. Wir betrachten nun alle rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ mit $1 \leqq q \leqq Q$ und $p = 0, 1, \ldots$ und suchen darunter eine solche, die θ möglichst gut approximiert, d.h. für die $\left|\theta - \frac{p}{q}\right|$ möglichst klein ist. Aus unseren Überlegungen folgt der

Satz 4: Unter den Zahlen $\frac{p}{q}$ mit $1 \leqq q \leqq Q$ und $p = 0, 1, 2, \ldots$ gibt es stets eine solche Zahl $\frac{p}{q}$, für die $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2Q}$ gilt.
Der Unterschied zwischen θ und $\frac{p}{q}$ kann durch hinreichend groß gewähltes Q vorgegeben klein gemacht werden. Insbesondere existiert zu jedem $n \in N$ ein $\frac{p_n}{q_n}$ mit $\left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{n}$.
Das bedeutet: $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \theta.$

Satz 5: Es seien θ eine positive irrationale Zahl und p_n, q_n natürliche Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \theta$. Dann können die Nenner q_n nicht beschränkt sein, es gibt also zu jeder Zahl $z \in P$ einen Index n_z, so daß $q_n \geqq z$ für alle $n \geqq n_z$ ist.
Beweis: Angenommen, es gäbe ein $Q \in N$ und unendlich viele $q_n \leqq Q$, etwa $q_{n_1}, q_{n_2}, \cdots \leqq Q$. Um die Bezeichnung zu vereinfachen, werde q_k statt q_{n_k} geschrieben. Für genügend große k ist sicher
$\left|\frac{p_k}{q_k} - \theta\right| < 1$ und daher $p_k - \theta q_k < q_k$,
also $p_k < (\theta + 1)q_k \leqq (\theta + 1)Q$.
Man setze $P' = [(\theta + 1)Q]$, dann muß $p_k \in \{0, 1, \ldots, P'\}$ sein. Folglich existieren $q^* \in \{1, \ldots, Q\}$ bzw. $p^* \in \{0, \ldots, P'\}$, so daß für unendlich viele Indizes k stets $q_k = q^*$ und $p_k = p^*$ ist. Mithin ist $\theta = \frac{p^*}{q^*}$, also $\theta \in R$. Das widerspricht der Voraussetzung der Irrationalität von θ.
Es sei θ irrational und $\theta = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$.
Vorher wurde
$$\beta - \alpha - \frac{1}{q_n} \leqq \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} A_M\left([\alpha,\beta], \frac{p_n}{q_n}\right)$$
$$\leqq \beta - \alpha + \frac{1}{q_n} \text{ hergeleitet.}$$
Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n} = 0$ finden wir
$$\lim_{n\to\infty} \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} A_M\left([\alpha,\beta], \frac{p_n}{q_n}\right) = \beta - \alpha.$$
Diese Aussage läßt vermuten, daß die Beziehung
$$\lim_{M\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{M} A_M\left([\alpha,\beta], \frac{p_n}{q_n}\right)$$
$$= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} A_M([\alpha,\beta], \theta) = \beta - \alpha \text{ besteht.}$$
Diese durchaus nicht offensichtliche Gleichung ist in der Tat richtig, sie wurde 1914 in einer allgemeineren Fassung von H. Weyl bewiesen.

Definition: Sei $(x_i)_{i=1,2,\ldots}$ eine Zahlenfolge. Es bezeichne wieder $A_M([\alpha,\beta])$ die Anzahl derjenigen Folgeglieder $x_1, \ldots, x_M$, die in $[\alpha,\beta]$ liegen. Dann heißt $\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} A_M([\alpha,\beta])$ *Dichte der Folge (x_i) im Intervall $[\alpha,\beta]$*. Ist speziell $x_k = \{k\theta\}$ die Weyl-Folge zu $\theta \in P$, so heißt $\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} A_M([\alpha,\beta])$ die *Dichte der Weyl-Folge*.
Wir können das Resultat (Spezialfall) von H. Weyl so formulieren:

Satz 6: Die Dichte der Weyl-Folge $\{\theta\}, \{2\theta\}, \ldots, \{k\theta\}, \ldots$ in einem beliebigen Intervall $[\alpha,\beta] \subseteqq [0,1]$ ist gleich der Intervalllänge $\beta - \alpha$, falls θ eine irrationale Zahl ist.

Definition: Eine beliebige Zahlenfolge $x_1, x_2, \ldots$ aus $[0,1]$ heißt *gleichmäßig verteilt*, wenn für jedes Intervall $[\alpha,\beta] \subseteqq [0,1]$ die zugehörige Dichte gleich der Intervalllänge ist.
Damit gilt also

Satz 7: Die Weyl-Folge $\{\theta\}, \{2\theta\}, \ldots, \{k\theta\}, \ldots$ zu einer Irrationalzahl θ ist gleichmäßig verteilt.

Dieser Satz beantwortet also die eingangs gestellte Frage nach weißen Flecken in $[0,1]$. Es gibt keine, wenn θ irrational ist! In jedem Teilintervall $[\alpha,\beta]$ positiver Länge liegt wenigstens ein Element der Folge; man sagt, die Folge *liegt dicht* in $[0,1]$.

3. Stückweise konstante periodische Funktionen – eine Anwendung

Es liege wieder die Periode 1 vor. Das Intervall $[0,1[$ zerfalle in links abgeschlossene, durchschnittsfremde Teilintervalle $I_1, \ldots, I_r$ (der Längen $l_1, \ldots, l_r$), über denen eine Funktion f die Werte $w_1, \ldots, w_r$ an-

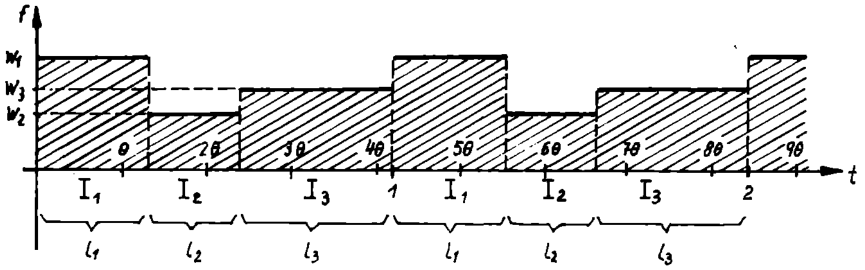


Bild 5

nimmt. Häufig ist nach dem Wert $l_1w_1 + \ldots + l_rw_r$ gefragt, der dem Flächeninhalt der schraffierten Figur in Bild 5 entspricht und mit dem Integral $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ übereinstimmt. Wie kann diese Größe bestimmt werden, wenn die Intervallängen $l_1, \ldots, l_r$ unbekannt sind?

Dazu seien die x_k Elemente einer auf $[0,1]$ gleichmäßig verteilten Zahlenfolge, z. B. der Weyl-Folge $x_k = \{k\theta\}$ mit irrationalem θ. An den Taststellen $x_1, x_2, \ldots$ werden die Werte $f(x_1), f(x_2), \ldots$ gemessen. Es sei daran erinnert, daß $A_M(\mathrm{I}_j)$ die Anzahl der $x_1, \ldots, x_M$ bezeichnet, die in I_j liegen. Für große M ist daher $\frac{1}{M}A_M(\mathrm{I}_j) \approx l_j$,
genauer: es ist $\lim\limits_{M\to\infty} \frac{1}{M}A_M(\mathrm{I}_j) = l_j$.

Durch Aufsummation erhalten wir

$$l_1w_1 + \ldots + l_rw_r \approx \frac{1}{M}(w_1A_M(\mathrm{I}_1) + \ldots + w_rA_M(\mathrm{I}_r)) = \frac{1}{M}(f(x_1) + \ldots + f(x_M)).$$

Genau genommen, gilt

$$l_1w_1 + \ldots + l_rw_r = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M}(f(x_1) + \ldots + f(x_M)).$$

Für die Weyl-Folge ist $f(x_k) = f(k\theta)$ und daher

$$\frac{1}{M}(f(\theta) + f(2\theta) + \ldots + f(M\theta)) \approx l_1w_1 + l_2w_2 + \ldots + l_rw_r.$$

Diese Beziehung wird um so besser erfüllt, je größer M ist!

In der Elektronik ist oft von den Meßgrößen bekannt, daß diese nur die Werte 0 und 1 (und eventuell -1) annehmen können. In diesem Fall lassen sich zur Summation sehr effektiv (*Vor-* und *Rückwärts-*) *Zähler* benutzen. Zum Schluß sei vermerkt, daß auch dann

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M}(f(x_1) + \ldots + f(x_M))$$

gilt,
wenn f eine beschränkte (Riemann-) integrierbare Funktion ist. Diese Formel erlaubt, das Integral (näherungsweise) zu berechnen, wenn zu f keine Stammfunktion bekannt ist.

4. Aufgaben

a) Man zeige: $\{\{x\}\} = \{x\}$ *und* $\{x + g\} = \{x\}$ für g ganz und $x \in P$.

b) Sei $\theta \in R$, $\theta > 0$ und n eine ganze Zahl. Wann gilt
$n\{\theta\} = \{n\theta\}$
$n\{\theta\} \geqq \{n\theta\}$
$[n\theta] \geqq n[\theta]$, $\{n\theta\} = \{n\{\theta\}\}$?

c) Man zeige, daß für die Glieder $x_k = \{k\theta\}$ der Weyl-Folge die *Rekursionsbeziehung* $x_{k+1} = \{x_k + \theta\}$, $k = 2, 3, \ldots$ gilt.

d) Es seien a, $\theta \in P$, $\theta > 0$ und
$y_k = \{a + k\theta\}$ für $k = 1, 2, \ldots$

Vergleiche mit der Weyl-Folge $x_k = \{k\theta\}$ und zeige:

(I) Wenn $\theta = \frac{p}{q}$ ein nichtkürzbarer Bruch ist, so ist die Folge der y_k periodisch mit der Periode q. Wenn θ irrational ist, so gilt $y_k \neq y_l$ für $k \neq l$.

(II) Wenn sich a, a' und θ, θ' jeweils nur um ganze Zahlen g bzw. h unterscheiden, so ist $\{a + k\theta\} = \{a' + k\theta'\}$.

(III) Es gilt die Rekursionsbeziehung $y_{k+1} = \{y_k + \theta\}$.

(IV) Man berechne $y_1, \ldots, y_6$ für $a = 1{,}5$ und $\theta = 2{,}71$.

e) Gegeben sei ein Winkel $\alpha = \theta 2\pi$, durch dessen Schenkel auf dem Einheitskreis um die Winkelspitze die Punkte P_0, P_1 ausgeschnitten werden. Die Punkte $P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$ zusammen mit P_0 mögen dementsprechend zu den Winkeln $2\alpha, 3\alpha, \ldots, n\alpha, \ldots$ gehören. Wann liegen diese Punkte dicht auf dem Einheitskreis?

f) Stelle die Funktionen $y = x$, $y = [x]$, $y = \{x\}$, $y = \sqrt{x}$, $y = \{\sqrt{x}\}$ und die Werte der Folge $y_k = \{\sqrt{k}\}$ grafisch in einem x-y-Koordinatensystem dar! Zeige, daß die Folge dieser y_k in $[0,1]$ dicht liegt!

Hinweis: Ist $[\alpha, \beta]$ irgendein Teilintervall von $[0,1]$ mit $\alpha < \beta$, so gibt es natürliche Zahlen n, so daß $(\beta + n)^2 - (\alpha + n)^2 > 1$ ist. Dazu braucht nur $n \geqq \frac{1}{2(\beta - \alpha)}$ gewählt zu werden! Folglich existiert $k \in N$, so daß $(\alpha + n)^2 \leqq k < (\beta + n)^2$ und daher $\alpha + n \leqq \sqrt{k} < \beta + n$ ist. Hieraus ergibt sich $[\sqrt{k}] = n$ und $\alpha \leqq \{\sqrt{k}\} < \beta$.

g) Berechne zu $\theta = \frac{3}{5}$ die Weyl-Folge.

Gib die Anzahlen
$A_i\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right)$ für $i = 1, \ldots, 9$ an!

Lösung: Es ist $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{1}{5}$, $x_3 = \frac{4}{5}$, $x_4 = \frac{2}{5}$, $x_5 = 0$, $x_6 = \frac{3}{5}$, $x_7 = \frac{1}{5}$, $x_8 = \frac{4}{5}$, $x_9 = \frac{2}{5}$ und daher

$A_i\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right) = 0$ für $i = 1, 2, 3$,

$A_i\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right) = 1$ für $i = 4, \ldots, 8$,

$A_9\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right) = 2$.

h) Eine periodische, stückweise konstante Meßgröße der Periode 1 nehme über den Teilintervallen I_1, I_2 der Längen l_1, l_2 die Werte w_1, w_2 an (siehe Bild 6). An den Stellen $\theta, 2\theta, \ldots$ wird $f(\theta), f(2\theta), \ldots$ gemessen. Der Tastabstand θ sei ein nichtkürzbarer Bruch $\theta = \frac{p}{q}$ mit „großem" Nenner q. Welcher Zusammenhang besteht zwischen $l_1w_1 + l_2w_2$ und (dem Grenzwert von)

$$\frac{1}{M}(f(\theta) + f(2\theta) + \ldots + f(M\theta))$$

für große M (für $M \to \infty$)?

Hinweis: Es ist bekanntlich

$$l_i - \frac{1}{q} \leqq \lim_{M\to\infty} \frac{A_M(\mathrm{I}_i)}{M} \leqq l_i + \frac{1}{q}, \quad i = 1, 2.$$

Das bedeutet

$$\lim_{M\to\infty} \frac{A_M(\mathrm{I}_i)}{M} - \frac{1}{q} \leqq l_i \leqq \lim_{M\to\infty} \frac{A_m(\mathrm{I}_i)}{M} + \frac{1}{q}.$$

Hieraus erhält man

$$w_i \lim_{M\to\infty} \frac{A_M(\mathrm{I}_i)}{M} - \frac{|w_i|}{q} \leqq l_iw_i \leqq w_i \lim_{M\to\infty} \frac{A_M(\mathrm{I}_i)}{M} + \frac{|w_i|}{q},$$

$i = 1, 2$, und deshalb

$$\lim_{M\to\infty} \frac{w_1A_M(\mathrm{I}_1) + w_2A_M(\mathrm{I}_2)}{M} - \frac{|w_1| + |w_2|}{q} \leqq l_1w_1 + l_2w_2 \leqq \lim_{M\to\infty} \frac{w_1A_M(\mathrm{I}_1) + w_2A_M(\mathrm{I}_2)}{M} + \frac{|w_1| + |w_2|}{q}$$

oder

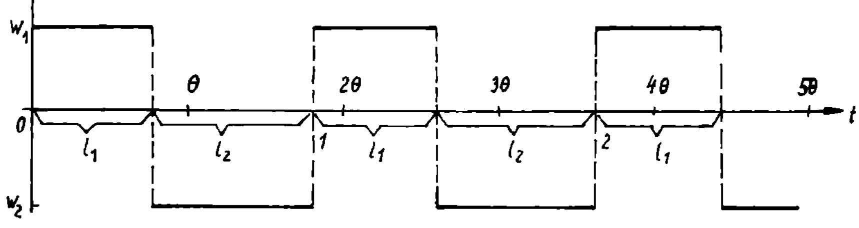
$$\lim_{M\to\infty} \frac{f(\theta) + \ldots + f(M\theta)}{M} - \frac{|w_1| + |w_2|}{q} \leqq l_1w_1 + l_2w_2 \leqq \lim_{M\to\infty} \frac{f(\theta) + \ldots + f(M\theta)}{M} + \frac{|w_1| + |w_2|}{q}.$$

Bei der praktischen Anwendung dieser Abschätzung könnte überall der lim für große M weggelassen werden! Für $w_1 = 1$, $w_2 = 0$ ist der Unterschied zwischen den interessierenden Größen dann $\leqq \frac{1}{q}$.

i) Man berechne das Integral $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ nach Abschnitt 3 mit Hilfe des Taschenrechners, indem man $\theta = \pi$ verwendet!

L. Bittner/W. Schmidt

Bild 6



Computer – Algorithmus – Algorithmische Sprache

Teil 3

Eine Sprache, die ein Computer verstehen soll, darf nur aus einer genau festgelegten Menge von Wörtern und Zeichen bestehen, die nur nach feststehenden Regeln verwendet werden dürfen. Mit solch einer Sprache müssen sich die im Teil 2 dieses Beitrages angegebenen Tätigkeiten beschreiben lassen, andererseits darf ein mit ihrer Hilfe formulierter Algorithmus nicht mehr Tätigkeiten fordern, als der jeweilige Computer ausführen kann.

Die im folgenden aufgeschriebenen Algorithmen sollen einen Eindruck von einer algorithmischen Sprache vermitteln. Diese einfache Sprache reicht zunächst aus, einige Grundprinzipien zu verstehen. Für die tatsächliche Arbeit mit einem Computer sind spezielle Programmiersprachen (z. B. PL-1, PASCAL, BASIC) geschaffen worden, die der Progammierer exakt beherrschen muß.

▲1▲ Seht euch die Algorithmen genau an, und untersucht, wie sie funktionieren! Spielt dabei die Rolle des Computers, und führt den jeweiligen Algorithmus für die gegebenen Daten aus! Wenn das nicht sofort gelingt, lest die nachfolgenden Erläuterungen, und kehrt dann zu den Beispielen zurück!

Lösen quadratischer Gleichungen
$ax + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

LÖSEN QUADRATISCHER GLEICHUNGEN
Eingabe a, b, c
Ausgabe C, x1, x2

Beginn
$d := b^2 - 4 \cdot a \cdot c$
wenn $d < 0$
dann C := „KEINE LOESUNG"
sonst C := „LOESUNG"
wenn $d = 0$
dann $x1 := -b/2/a$
$x2 := x1$
sonst $x1 := (-b + \sqrt{d})/2/a$
$x2 := (-b - \sqrt{d})/2/a$
Verzweigungsende
Verzweigungsende
Ende

Hinweis: Das Zeichen / bedeutet „geteilt durch".

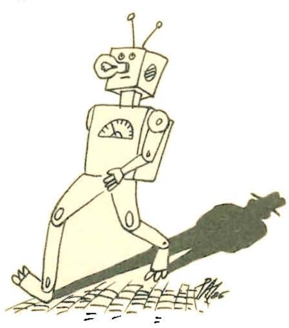
▲2▲ Führt diesen Algorithmus für die folgenden Zahlentripel (a; b; c) aus: (1; 2; 1), (2; 3; 7), (0; 4; 2)!

Der Roboter auf dem Schachbrett

In den folgenden Beispielen bewegt sich ein kleiner Roboter über ein Schachbrett. Mit (x; y) bezeichnen wir die Koordinaten seines Standortes. Beispielsweise beschreiben wir das Feld e2 durch (5; 2) und das Feld h5 durch (8; 5).
Ein Schritt nach oben erhöht y um 1, ein Schritt nach rechts erhöht x um 1.

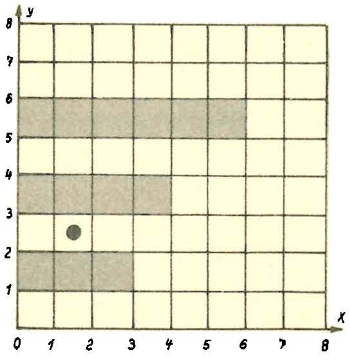
WANDERROBOTER
Eingabe x, y
Ausgabe C

Beginn
solange $x \leqq 7$
Zyklenbeginn
Schritt nach rechts
$x := x + 1$
Zyklenende
solange $y \leqq 7$
Zyklenbeginn
Schritt nach oben
$y := y + 1$
Zyklenende
C := „ANGEKOMMEN"
Ende



▲3▲ Wendet den Algorithmus auf die im Bild 1 dargestellte Situation an!
Hier ist (x; y) = (2; 3)!

Bild 1

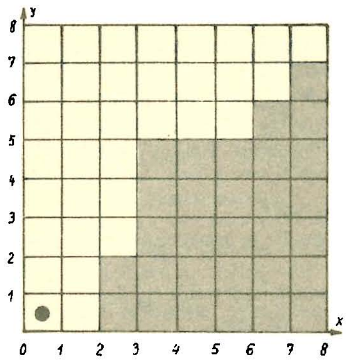


KLETTERROBOTER
Eingabe y
Ausgabe C

Beginn
solange $y \leqq 7$
Zyklenbeginn
solange rechts keine Felswand
Zyklenbeginn
Schritt nach rechts
Zyklenende
Schritt nach oben
$y := y + 1$
Zyklenende
C := „HURRA, ICH BIN OBEN!"
Ende

▲4▲ Wendet diesen Algorithmus auf die im Bild 2 dargestellte Situation an!

Bild 2



Teilbarkeit

REST BEI DIVISION
Eingabe x, y
Ausgabe C, r

Beginn
C := „DER REST IST"
solange $x > y$
Zyklenbeginn
$x := x - y$
Zyklenende
$r := x$
Ende

▲5▲ Wendet den Algorithmus auf folgende Zahlenpaare (x; y) an!
(14; 5), (100 000; 3), (27; 0)

PRIMZAHLTEST
Eingabe x
Ausgabe E

Beginn
E := „PRIMZAHL"
$y := 2$
solange $y \leq \sqrt{x}$
Zyklenbeginn
REST BEI DIVISION
wenn $r = 0$
dann E := „ZUSAMMENGESETZTE ZAHL"
$y := x + 1$
sonst $y := y + 1$
Verzweigungsende
Zyklenende
Ende

▲ 6 ▲ Wendet den PRIMZAHLTEST auf die Zahlen 7, 15 und 49 an!

```
HINDERNISLAUF-ROBOTER
Eingabe x, y
Ausgabe C, g

Beginn
    solange y ≦ 7
    Zyklenbeginn
    wenn oben keine Grube
    dann Schritt nach oben
            y := y + 1
            g := y
    sonst wenn x ≦ 7
            dann Schritt nach rechts
                    x := x + 1
            sonst g := y
                    y := 8
            Verzweigungsende
    Verzweigungsende
    Zyklenende
    C := „ICH BIN AUF DER HORIZON-
        TALEN NR."
Ende
```

Man beachte die Anweisungen $g := y$ und $y := 8$. Sie garantieren einen Ausgang aus dem Zyklus.

▲ 7 ▲ Wendet diesen Algorithmus auf die Situation im Bild 1 an, und vergleicht mit dem Algorithmus WANDERROBOTER!

Erläuterungen

Am Anfang der Niederschrift eines Algorithmus steht der KOPF. Dieser beginnt mit dem (in Großbuchstaben geschriebenen) NAMEN des Algorithmus. Nach dem Wort *Eingabe* folgt die Angabe der Variablen, deren Werte man zu Beginn dem Computer mitteilen muß. Der Kopf wird abgeschlossen mit dem Wort *Ausgabe* und der Aufzählung der Variablen, deren Werte mit Hilfe des Algorithmus bestimmt werden sollen. Für Variable, deren Werte Zahlen sind, haben wir kleine Buchstaben benutzt; ein Großbuchstabe zeigt an, daß der Variablen eine Zeichenfolge (ein Text) zugewiesen wird.

Nach dem *Kopf* steht der *Hauptteil* des Programms. Er fängt mit dem Wort *Beginn* an, dann kommen alle *Kommandos*, den Abschluß bildet das Wort *Ende*.

Im Hauptteil des Programms haben wir alle Verzweigungen und Zyklen zusätzlich grafisch hervorgehoben. *Verzweigungen* wurden durch Pfeile gekennzeichnet. Die Niederschrift einer Verzweigung beginnt mit dem Wort *wenn* und endet mit dem Wort *Verzweigungsende*. Nach dem Wort *wenn* steht die *Bedingung*, danach das Wort *dann*, dahinter die erste Folge von *Kommandos*, schließlich das Wort *sonst* und die zweite Folge von *Kommandos*. Wir erinnern uns, daß bei einer Verzweigung das Erfülltsein der Bedingung überprüft und danach entweder die erste Kommandofolge (wenn die Bedingung erfüllt ist) oder die zweite Folge von Kommandos (im entgegengesetzten Fall) ausgeführt wird. Der Computer wählt also die von ihm benötigte Kommandofolge aus. Ist diese ausgeführt, so geht er zum nächstfolgenden Kommando über.

Zyklen haben wir zusätzlich mit grauen Kreisen gekennzeichnet. Jeder Zyklus wird eröffnet durch das Wort *solange* und abgeschlossen durch das Wort *Zyklenende*. Nach *solange* steht die *Zyklenbedingung*, dann das Wort *Zyklenbeginn* und danach die Folge von Kommandos, die im Zyklus zu durchlaufen sind.

Wir erinnern uns, daß vor dem Abarbeiten eines Zyklus der Computer zunächst das Erfülltsein der Zyklenbedingung überprüft. Ist diese erfüllt, so führt er die Folge der Kommandos des Zyklus aus und überprüft aufs neue das Erfülltsein der Bedingung. Ist diese wiederum erfüllt, so wird der Zyklus nochmals durchlaufen usw. Das geht solange, wie die Bedingung nicht verletzt ist. Anschließend geht der Computer zu dem Kommando über, das auf das Wort *Zyklenende* folgt. Wenn die Bedingung niemals verletzt wird, kommt der Computer aus dem Zyklus nicht heraus, er läuft sich tot. Man muß deshalb stets für einen Ausgang aus dem Zyklus sorgen.

Ein *Hilfsalgorithmus (Unterprogramm)* wird durch seinen Namen aufgerufen. Die Bezeichnungen der in ihm auftretenden Variablen müssen mit den entsprechenden Bezeichnungen im Algorithmus übereinstimmen.

Wenn alle Kommandos des Programms ausgeführt sind (nach dem Wort *Ende*), druckt der Computer der Reihe nach die aktuellen Werte derjenigen Variablen aus, die im Kopf des Algorithmus hinter dem Wort *Ausgabe* stehen (falls sie berechnet wurden).

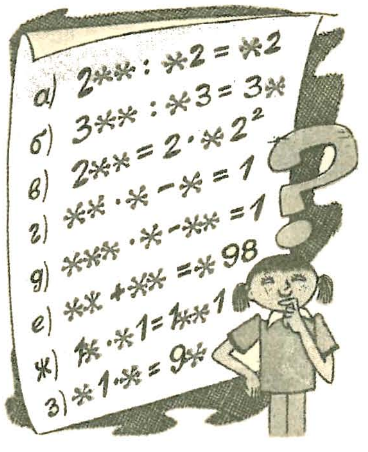
▲ 8 ▲ Schreibt die Algorithmen, die ihr beim Lösen der Aufgabe im Teil 1 gefunden habt, mit Hilfe unserer algorithmischen Sprache auf!

A. P. Jerschow, aus der math. Schülerzeitschrift Quant, Moskau, für alpha bearbeitet von Dr. C.-P. Helmholz, KMU Leipzig

▲ 1 ▲ Peter, Paul, Penny, Philip and Patricia are brothers and sisters. Each of them has a savings account.

One evening, they were sitting together, talking about their accounts and complaining how little they had. Suddenly, Penny, who liked to juggle numbers, remarked: "How interesting! Each account shows a different whole number of dollars, and the product of all the numbers is still only 12." Suggest what amounts might be showing in each of the five accounts.

▲ 2 ▲ Восстановите продущенные цифры в равенствах на рисунке.



▲ 3 ▲ Однажды в Артеке за круглым столом оказались пятеро ребят родом из Москвы, Ленинграда, Горького, Перми и Свердловска – Юра, Толя, Леша, Коля и Витя.

Москвич сидит между свердловчанином и Витей, ленинградец – между Юрой и Толей, а напротив него сидят пермяк и Леша. Коля никогда не был в Ленинграде, Юра бывал в Горьком, но не был в Свердловске, а свердловчанин с Толей регулярно переписываются. Определите, кто из ребят где живет.

▲ 4 ▲ On a commandé 1000 bouteilles de jus de pomme pour la fête de l'école. Elles sont livrées en caisses de 12 bouteilles, par une petite voiture qui peut transporter 15 caisses à la fois au maximum.

Combien faudra-t-il de voyages à la petite voiture pour transporter les 1000 bouteilles commandées?

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Mini-BASIC für alpha-Leser

Die stürmische Entwicklung und breite Anwendung informationsverarbeitender Maschinen ist charakteristisch für den wissenschaftlich-technischen Fortschritt unserer Zeit. Computer steuern Produktionsprozesse, stellen Fahrkarten aus, berechnen den Kurs von Raumschiffen ....
Neben Großcomputern dringen vor allem Klein- und Bürocomputer immer mehr in unseren Alltag ein und helfen den Menschen, sich von stereotypen geistigen Arbeiten zu befreien.

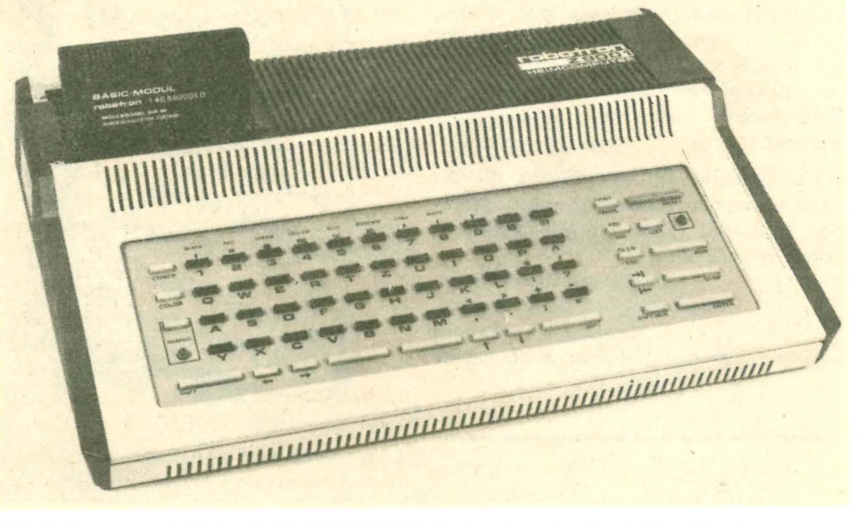
Seit März 1985 ist an der Sektion Mathematik der *Martin-Luther*-Universität Halle ein Computerkabinett mit Kleincomputern des Typs KC 85/1 eingerichtet worden, in dem auch interessierte Schüler im Rahmen von mathematischen Arbeitsgemeinschaften Kleincomputer zur Lösung von Problemen nutzen können.
Eine wichtige Voraussetzung für eine sinnvolle Nutzung von Kleincomputern ist das Beherrschen einer Programmiersprache.
Im folgenden wollen wir interessierte *alpha*-Leser mit Elementen der Programmiersprache BASIC vertraut machen.
BASIC ist eine Programmiersprache, in der viele Kleincomputer, so auch die in der DDR produzierten Kleincomputer KC 85/1 und KC 85/2 programmiert werden können.

Aller Anfang ist nicht schwer! Oder: Wie arbeitet ein Computer?

▲1▲

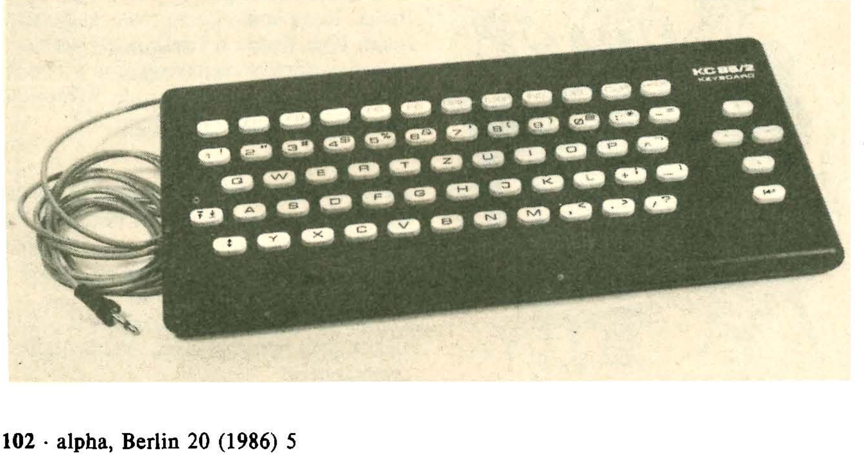
1. Zahl	8	4	5
2. Zahl	3	7	12
Ergebnis			

Fülle die letzte Zeile der Tabelle nach folgender Vorschrift aus!



KC 85/1 – hergestellt im VEB ROBOTRON-Meßelektronik *Otto Schön*, Dresden

Key board des KC 85/2 – hergestellt im VEB Mikroelektronik *Wilhelm Pieck*, Mühlhausen



(1) Multipliziere die erste Zahl mit der zweiten Zahl!
(2) Dividiere das Ergebnis durch 2!
(3) Schreibe das so erhaltene Ergebnis in die letzte Zeile der Tabelle!

Mit obiger Vorschrift kann man z. B. den *Flächeninhalt eines Dreiecks* berechnen, wenn der eine Eingabewert der Zahlenwert für die Länge einer Dreiecksseite und der andere der Zahlenwert der zugehörigen Höhe ist. (Die Maßeinheiten der Eingabewerte müssen natürlich vernünftig gewählt werden! Im genannten Fall müssen sie übereinstimmen.)

▲2▲ Überlege, was man mit obiger Vorschrift noch berechnen kann! Gib die Bedeutung der Eingabewerte an!

Wenn du die Aufgabe 1 gelöst hast, so hast du Eingabewerte entsprechend einer Vorschrift (Algorithmus) in Ausgabewerte umgeformt. Das kann man, wenn es sich bei den Eingabedaten um Zahlen handelt, in vielen Fällen auch mit Hilfe des Taschenrechners machen. Wenn man z. B. in den Taschenrechner SR 1 $\boxed{16}$ $\boxed{\sqrt{}}$ „einsetzt", dann berechnet er nach einem bestimmten Algorithmus, den er „kennt" und nicht „vergißt", den Wert von $\sqrt{16}$.
Das Besondere beim Computer besteht nun darin, daß man ihm immer wieder andere Algorithmen „eingeben" kann, die er sich – solange wie wir es wollen – merkt und damit den Ablauf seiner Tätigkeit selbst steuert. Der Algorithmus muß allerdings in einer für den Computer verständlichen Sprache geschrieben sein. Zu diesem Zweck hat man *Programmiersprachen* entwickelt. Als *Programm* bezeichnet man dann einen Algorithmus, der in einer Programmiersprache notiert ist.
Nun wollen wir – wie schon angekündigt – endlich beginnen, den *alpha*-Leser mit Elementen der leicht erlernbaren Programmiersprache BASIC (BASIC – Abkürzung für *B*eginners *A*ll-purpose *S*ymbolic *I*nstruction *C*ode, zu deutsch: Allzweck-Programmiersprache für Anfänger) bekannt zu machen, so daß er kleine Programme in dieser Programmiersprache verstehen und selbst entwickeln kann. Die Wörter dieser Programmiersprache sind dem Englischen entlehnt.

Computer als Taschenrechner

Um z. B. den Kleincomputer KC 85/1 wie einen Taschenrechner zu nutzen, muß man wissen, daß er wie der Taschenrechner SR 1 Vorrangregeln beachtet und man außerdem noch Klammern verwenden kann. Die BASIC-Symbole für einige wichtige Operationen, Funktionen und Konstanten sind nachstehender Übersicht zu entnehmen.
Mit der Anweisung
PRINT 7 + 4 (print (engl.) – drucken), die über die Tastatur des Computers eingegeben wird, „druckt" er nach Betätigung der Taste ENTER (enter (engl.) – eintragen) den Wert des Terms 7 + 4 auf dem Bildschirm des Computers aus. (Der KC 85/1 hat keinen eigenen Bildschirm. Er

Übliche mathematische Darstellung	BASIC Darstellung	Bemerkungen
+	+	
−	−	Kein Unterschied zwischen Vorzeichen und Operationszeichen
$\cdot$	*	
: oder Bruchstrich	/	
$\sqrt{x}$	*SQR*(*X*)	Variable werden in BASIC mit Großbuchstaben geschrieben
a^b ·	*A* ∧ *B*	
π	PI	
$\vert x \vert$	*ABS*(*X*)	

kann mit einem Koaxialkabel an den Bildschirm eines Fernsehgerätes angeschlossen werden.) Auf dem Bildschirm erscheint nun folgendes Bild.

```
OK
>PRINT 7 + 4
 11
OK
>□
```

Will man den Term $\frac{3{,}07 - 0{,}03}{3\pi}$ berechnen, so muß man folgende Anweisung „eintippen“:
PRINT (3.Ø7–.Ø3) / (3 * PI)
An den Beispielen ist ersichtlich, daß
– bei Zahlendarstellungen an Stelle eines Kommas ein Punkt zu setzen ist;
– als Null das Zeichen Ø (zur Unterscheidung vom Buchstaben O) verwendet wird;
– für Zahlen zwischen −1 und 1 die Vorkomma-Null weggelassen werden kann;
– das Operationszeichen * stets angegeben werden muß;
– erst die Betätigung der Taste ENTER das Rechnen und die Ergebnisanzeige veranlaßt.
Mit diesem Wissen ausgerüstet, können wir an das Lösen folgender Aufgaben gehen.

Aufgaben

▲3▲ Gib für folgende Ausdrücke eine BASIC-Darstellung an!
a) $9{,}31^3$
b) $\sqrt{24{,}02 \cdot 0{,}32}$
c) $\sqrt{3{,}2^2 + 4{,}3^2}$
d) $\frac{5{,}3}{2{,}3 \cdot 7{,}2}$
e) $2\pi \cdot 2{,}7^2$
f) $-3{,}72 : |2{,}9 - 10{,}8|$

▲4▲ Welchen Term kann man jeweils mit folgender BASIC-Anweisung ermitteln? Gib den Term in mathematischer Schreibweise an!
a) PRINT 3.7 * 9.81 ∧ 2
b) PRINT 2.Ø9/3.7 * .21/7.3
c) PRINT (2.Ø9 * .21)/(3.7 * 7.3)
d) PRINT 4/3 * PI * 2 ∧ 3
e) PRINT SQR (ABS (2.Ø3 * −5.3))
Nun wollen wir noch eine neue Funktion kennenlernen, die uns beim Programmieren große Dienste erweisen wird. Dazu geben wir in einer Tabelle für einige Eingabewerte jeweils die zugehörigen Ausgabewerte an.

Eingabewert	−7,9	−3,1	−2,1	−1,7
Ausgabewert	−8		−3	−2
Eingabewert	−1	0	0,7	1,89
Ausgabewert	−1	0	0	1
	2,1	3,9	5,2	

▲5▲ a) Vervollständige obige Tabelle!
b) Versuche anzugeben, wie man jeweils aus dem Eingabewert den zugehörigen Ausgabewert erhält!
Man nennt diese Zuordnung „Integer-Funktion“ (integer (engl.) – ganzzahlig). Als Symbol verwendet man in der üblichen mathematischen Schreibweise eckige Klammern ($y = [x]$).
Beispiele: $[1{,}8] = 1, [4] = 4$,
$[-7{,}9] = -8$, $[-1] = -1$
$[x]$ ist die größte ganze Zahl, die kleiner, höchstens gleich x ist. In BASIC schreibt man für diese Funktion INT(X).

▲6▲ Berechne im Kopf, und gib jeweils eine BASIC-Darstellung für die Berechnung der Terme an!
a) $[3{,}7] : |-6|$
b) $[-3{,}7] : (-6)$
c) $4 : 3 - [4 : 3]$
d) $8 : 2 - [8 : 2]$

▲7▲ Was ist hier falsch?
a) PRINT 3 (4 * 7,5)
b) PRINT 0.2/(7.1–5.89)
c) PRINT SQR 7.2 * Ø.9
d) PRINT 2PI * (−3)

Wir beginnen zu programmieren!

▲8▲ Berechne das Volumen und die Mantelfläche eines geraden Kreiszylinders, von dem der Grundkreisradius r und die Höhe h bekannt sind!
a) Stelle für den Taschenrechner SR 1 einen entsprechenden Rechenablaufplan auf!
b) Fülle folgende Tabelle aus! (Runde auf Einer!)

Eingabewerte	r (in cm)	3,0	2,7	7,4
	h (in cm)	5,0	4,8	3,2
Ausgabewerte	V (in cm^3)			
	A_M (in cm^2)			

Um die Ausgabewerte zu ermitteln, muß man den gleichen Rechenablauf mit dem SR 1 stets von neuem, nur mit anderen Eingabewerten abarbeiten.
Bei einem Computer ist das anders. Er kann sich „merken“, wie jeweils die Eingabedaten zu „verarbeiten“ sind, wenn man ihn mit einem Programm „gefüttert“ hat. In einem solchen Computerprogramm treten für die Ein- und Ausgabedaten zunächst Variable auf. (Variable werden in BASIC mit Großbuchstaben bezeichnet.)
Ein BASIC-Programm zur Berechnung des Volumens und der Mantelfläche eines geraden Kreiszylinders aus Grundkreisradius und Höhe könnte wie folgt aussehen:

Programm 1:

```
1Ø INPUT R            } Dateneingabe
2Ø INPUT H            }
3Ø LET V = PI*R*R*H   } Daten-
4Ø LET M = 2*PI*R*H   } bearbeitung
5Ø PRINT V            } Datenausgabe
6Ø PRINT M            }
7Ø END
```

Dieses Programm besteht aus sieben *Programmzeilen*. Jede dieser Programmzeilen beginnt mit einer *Zeilennummer*.
Den Zeilennummern folgen *Anweisungen*. Die Zeilennumerierung wird gewöhnlich in Zehnerschritten vorgenommen, um bei Bedarf weitere Zeilen einzufügen. Der Computer arbeitet das Programm mit aufsteigenden Zeilennummern ab. Bei der Eingabe des Programms muß man nach jeder Zeile die ENTER-Taste betätigen. Ist das Programm „eingetippt“, kann man es mit dem Kommando RUN (run (engl.) – laufen, rennen) „starten“. In unserem Falle trifft der Computer als erstes auf eine INPUT-Anweisung (input (engl.) – Eingabe): Er verlangt die Eingabe von Daten, denn auf dem Bildschirm erscheint ein Fragezeichen. Die Eingabe des Zahlenwertes für den Grundkreisradius (z. B. 3,0) wird mit der ENTER-Taste abgeschlossen. Nun erscheint auf dem Bildschirm erneut ein Fragezeichen. Es ist der Zahlenwert für die Zylinderhöhe einzugeben (z. B. 5.Ø). Nachdem die Taste ENTER betätigt wurde, erscheinen auf dem Bildschirm zwei Zahlen. Die erste ist die Maßzahl für das Volumen und die zweite die für die Mantelfläche des Kreiszylinders.

```
? 3.Ø
? 5.Ø
  141.372
   94.2478
CK
>□
```

Was ist passiert?
Auf Grund der zwei LET-Anweisungen (let (engl.) – es sei), hat der Computer den Wert des Terms $\pi r^2 h$ (bzw. $2\pi rh$) ermittelt und diesen Wert der Variablen V (bzw. M) *zugewiesen*. Man spricht in einem solchen Fall von einer *Wertzuweisung*. Durch die PRINT-Anweisungen (Zeile 5Ø, Zeile 6Ø) wird der Computer angewiesen, die *Werte* der jeweils angegebenen Variablen (in unserem Beispiel V und M) auf dem Bildschirm auszudrucken.

L. Flade/M. Pruzina

Der physikalische Glaskasten

Manchem war die Arbeit mit den Fischen zu umständlich, andere haben sich inzwischen einen größeren Swimmingpool für die Stichlinge zugelegt. So kommt es vor, daß hier und da ein Aquarium verstaubt. Für diesen Fall haben wir etwas anzubieten. Wem für die folgenden Beobachtungen und Experimente der Glaskasten fehlt, der kann sich mit einer quaderförmigen Plastdose aus der Küche behelfen.

Wasserwaagenkontrolle

Selbst ein kleines Aquarium hat es in sich, Wasser nämlich. Nehmen wir eine Grundfläche wie ein A4-Blatt (rund 600 cm^2) und eine Höhe von 25 cm an, so faßt dieses Gefäß 15 l oder den Inhalt von anderthalb Wassereimern. Rechnet nach, ob es stimmt! Solch gefüllter Kasten bringt über 15 kg auf die Waage. Wie schön feucht, wenn er uns aus der Hand rutscht, weil die Scheiben noch naß und deshalb glatt waren! Unebenheiten der Unterlage sollte man vermeiden, der Auflagedruck könnte an solchen Stellen Werte annehmen, die der Glasboden verübelt.

Steht das Aquarium schief, so zeigt der Wasserspiegel dies unerbittlich an. Er stellt sich in jedem Fall horizontal, bildet eine waagerechte Ebene. Damit läßt sich sogar eine Wasserwaage prüfen. Halten wir sie exakt an die Wasserlinie (Bild 1), so läßt sich eine Stahlkugel oder Münze darauf legen, ohne daß diese wegrollen. Die Wasserwaage kann auch durch ein Lineal ersetzt werden.

Wandernde Drucksonde

Ein Aquarium ist zumeist aus Glasscheiben zusammengekittet. Man staunt jedesmal über die Festigkeit der schmalen Klebstellen. Hier leistet die Adhäsion ganze Arbeit. Die Belastung der Scheiben ist nicht überall gleich. Der durch die Gewichtskraft des Wassers hervorgerufene Schweredruck nimmt mit der Tiefe zu, vgl. Physiklehrbuch Kl. 7, S. 102 bis 106.

Zur genaueren Untersuchung bauen wir eine Drucksonde mit angeschlossenem U-Rohr-Manometer. Es entsteht eine Kompakt-Anlage aus drei Trinkröhrchen und etwas Wasser. Zuerst stecken wir die drei Röhrchen zusammen. Jeweils ein Ende wird dazu trichterförmig geweitet, indem man einen gespitzten Bleistift hineindrückt und leicht dreht. Ein Tropfen Duosan oder besser Plastkleber (Mökopur) stabilisiert die Verbindungsstelle. Damit das fertige Rohr wie in Bild 2 aussieht, müssen wir es an zwei Stellen biegen. In der Nähe einer Flamme oder in heißem Wasser wird die erforderliche Krümmung vorsichtig hergestellt. Abkühlen in Wasser sorgt für schnelles Erstarren des Plastmaterials.

Wir saugen etwas dunkle Flüssigkeit – Kaffee oder tintengefärbtes Wasser, jeweils mit einem Tropfen Fit – in das U-Rohr. Durch Blasen entfernen wir so viel, daß sie sich etwa auf die eingezeichnete Nullmarke einstellt. Das offene Ende B ist die Drucksonde. Wir tauchen es in Wasser. Nun muß sich ein Druckunterschied p ablesen lassen, wenn die Röhrchen dicht ineinander passen. 1 mm Höhenunterschied zwischen C und D in Bild 2 entspricht einem Druck von 10 Pa bei B. Wir verändern systematisch die Tiefe h des Meßpunktes und erfassen die zugehörigen Druckwerte in einer Tabelle. Mit den Meßwertpaaren zeichnen wir ein Diagramm (Bild 3).

Bei gleicher Tiefe erhalten wir stets gleiche Druckwerte, in welcher Ecke des Gefäßes wir auch die Drucksonde ansetzen. Man könnte das Aquarium gegen eine Weinflasche auswechseln, die mit Wasser gefüllt ist. Nur die Höhe des Wasserstandes, nicht die Gefäßform bestimmt, wie groß der Schweredruck im Wasser ist.

Anders ist die Sache mit den infolge des Druckes wirkenden Kräften. Sie wachsen im gleichen Verhältnis wie die Scheibenfläche. Es gilt für sie $F = p \cdot A$. Da sich p von oben nach unten gleichmäßig ändert, setzen wir den mittleren Druck in die Formel ein, der in halber Wassertiefe wirkt. In Bild 4 wären das 1000 Pa. Beträgt die Fläche der Scheibe z. B. 400 cm^2, so wirkt auf sie eine Gesamtkraft von $F = 1000\,\text{Pa} \times 400\,\text{cm}^2 = 1000\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0{,}0400\,\text{m}^2 = 40\,\text{N}$.

Das hält die Glasscheibe aus, auch die Klebstelle.

Überlisteter Auftrieb

Eine der nützlichsten Wirkungen des Schweredrucks ist der Auftrieb. Wir binden eine Kartoffel an einen Gummifaden (sog. Hutgummi) und messen die Länge des durch die Gewichtskraft der Kartoffel gedehnten Fadens. Wir tauchen dann die Knolle in Wasser (Bild 5). Der Faden verkürzt sich so, als ob nichts mehr an ihm hinge. Er dehnt sich erneut, wenn die Kartoffel an ihm aus dem Wasser gezogen wird.

Die Gewichtskraft F_G der Kartoffel scheint in deren eingetauchtem Zustand kleiner zu werden. Ihr wirkt die Auftriebskraft F_A entgegen. Der Gummifaden hat nur noch die Differenz $F_G - F_A$ auszuhalten. Für dies alles ist der Schweredruck verantwortlich. Unterhalb des Körpers ist der Druck größer als an der Oberseite. So entstehen Kraftwirkungen von unten nach oben (Bild 6a). Schaltet man den Schweredruck unten aus, gibt es keinen Auftrieb mehr.

Dieser Fall tritt ein, wenn sich zwischen Körper und Gefäßboden kein Wasser befindet. Die sich berührenden Flächen müssen dazu genau aneinandergrenzen, möglichst eben sein. Eine leere Filmdose z. B. hat einen ziemlich ebenen Deckel. Wir fetten seine Fläche noch etwas ein. Im wassergefüllten Aquarium drücken wir die Dose fest auf den sauberen Glasboden. Die Verbindung wird durch leichtes Drehen noch verbessert. Die leere Dose bleibt am Boden haften, der Auftrieb ist überlistet (Bild 6b).

Schwimmblase als Auftriebsregler

Der Auftrieb hängt auch von der Dichte der Flüssigkeit ab, in die der Körper eintaucht. Eine Kartoffel, die in normalem Wasser sinkt, kann in Salzwasser schwimmen, da dieses eine größere Dichte hat. Für das Aquarium wäre eine Salzwasserfüllung zu aufwendig. Wir ändern die Dichte mit Hilfe der Temperatur.

Ein Luftballon wird mit warmem Wasser gefüllt, als Verschluß ein Zehnpfennigstück eingeklemmt. Befindet sich im Aquarium Wasser derselben Temperatur, so sinkt der Ballon auf den Gefäßboden. Ist das Wasser im Aquarium deutlich kälter, so schwebt der Ballon unter der Wasseroberfläche (Bild 7).

Ballonflieger erwärmen die Luft im Ballon mit Hilfe eines Brenners. Die Außenluft ist kälter, so kommt ein ausreichender Auftrieb zustande.

Ganz gleich, wodurch der Auftrieb beeinflußt wird, immer gilt das Gesetz des Archimedes: *Die Auftriebskraft ist gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit bzw. des verdrängten Gases.* Wieviel Flüssigkeit ein Körper verdrängt, ist mit einem Überlaufgefäß zu bestimmen. Hängen wir ein gebogenes Trinkröhrchen über den Rand des Aquariums, ist ein solcher Apparat fertig. Wir achten darauf, daß das äußere Rohrstück 3 cm länger als das innere ist. Letzteres muß ins Wasser eintauchen (Bild 8). Wir saugen am äußeren Ende Wasser an. Ist das Röhrchen gefüllt, wirkt es als *Heber*, das Wasser läuft von selbst weiter, bis der Wasserspiegel im Aquarium die Höhe der inneren Rohröffnung erreicht hat. Jetzt ist das Überlaufgefäß betriebsbereit. Wir bestimmen mit seiner Hilfe das Volumen einer großen Kartoffel oder unserer Faust. Beim Eintauchen wird der Wasserspiegel angehoben. Der Heber fängt wieder an zu arbeiten. Die auslaufende Flüssigkeit fangen wir in einem Meßbecher oder -zylinder auf. Ihr Volumen entspricht dem des eingetauchten Körpers. Mit Hilfe dieses Verfahrens könnte man auch das Volumen eines ins Aquarium gesetzten Fisches bestimmen. Der regelt übrigens seinen Auftrieb selbständig. Mit Hilfe der Schwimmblase kann er sein Volumen geringfügig vergrößern oder verringern. Im ersten Fall verdrängt er mehr Wasser, erhält einen größeren Auftrieb und steigt nach oben. Abwärts geht es bei kleinerer Schwimmblase; und dies alles, ohne von Archimedes je gehört zu haben.

Versetzte Kanten

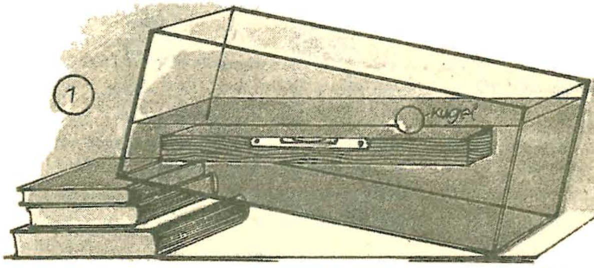
Blickt man von oben in ein Aquarium, scheint es wesentlich flacher als in Wirklichkeit zu sein. Der Boden bzw. die schwimmenden Fische wirken angehoben. Legt man einen langen Stab schräg ins Wasser, wirkt der Unterwasserteil abgeknickt. Auch in der Seitenansicht bietet das Aquarium solche Effekte. Es wirkt viel schmaler. Regelrecht konfus kann man werden, wenn man schräg von oben in ein mit klarem Wasser gefülltes Aquarium blickt, denn alle Kanten unter Wasser sind verschoben, hören irgendwo auf, um seitlich versetzt an anderer Stelle wieder aufzutauchen.

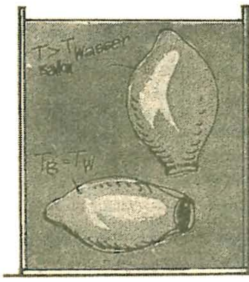
An alldem ist die Lichtbrechung schuld. Mit einer Taschenlampe kann man diese Erscheinung direkt beobachten. Das Wasser im Aquarium soll leicht getrübt sein, z. B. durch etwas eingerührte Milch. Dann ist der Lichtweg gut zu verfolgen. Besonders gelungene Ergebnisse erhalten wir mit einer Versuchsanordnung wie in Bild 9. Man erkennt die Brechung beim Übergang von Luft in Wasser, sieht aber auch, daß ein Teil des einfallenden Lichtes reflektiert wird. Hierbei gilt das Reflexionsgesetz $\alpha = \alpha'$. Das Brechungsgesetz ist mathematisch komplizierter $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}$. In unserem Beispiel wäre c_1 die Lichtgeschwindigkeit in Luft und c_2 jene in Wasser. Im Tafelwerk, S. 39, findet man hierfür rund $300\,000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ und $225\,000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Somit müßte für die Lichtbrechung an der Wasserfläche

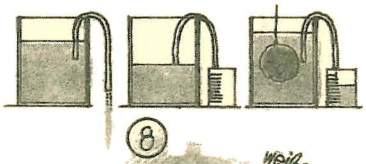
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{300\,000\ \text{km/s}}{225\,000\ \text{km/s}} = 1{,}33 \text{ sein.}$$

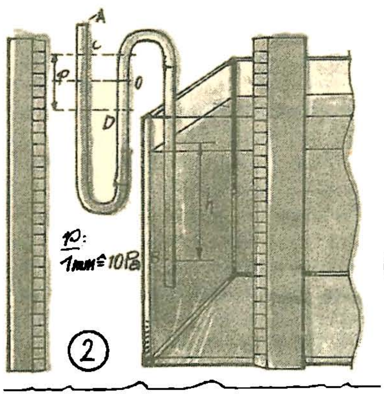
Diese Zahl überprüfen wir im Experiment (Bild 10). Gebraucht werden ein Stück feste Pappe, zwei Wäscheklammern und Bindfaden. Auf die Pappe zeichnen wir einen Kreis. Zwei gegenüberliegende Viertel erhalten eine in 10°-Schritten geteilte Winkelskale. In den Kreismittelpunkt stechen wir ein Loch ein, stecken den Bindfaden durch und bewahren ihn durch einen Knoten vor dem Durchrutschen. Das Aquarium ist bis dicht unter den Rand mit klarem Wasser gefüllt. Wir stellen die Pappe hinein, klemmen sie am Glasrand fest und beginnen sofort mit der Messung.

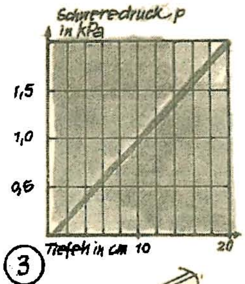
Der Faden wird entlang der Pappe leicht gespannt und jeweils einer der unter Wasser befindlichen Skalenstriche anvisiert. Wenn Strich und Faden eine Gerade ergeben, lesen wir am Faden den Winkel ab. In Bild 10 wird z. B. $\beta = 50°$ anvisiert, und der Faden muß dazu bei $\alpha = 70°$ angehalten werden. So ermitteln wir zu den Brechungswinkeln die Einfallswinkel. Die Si-



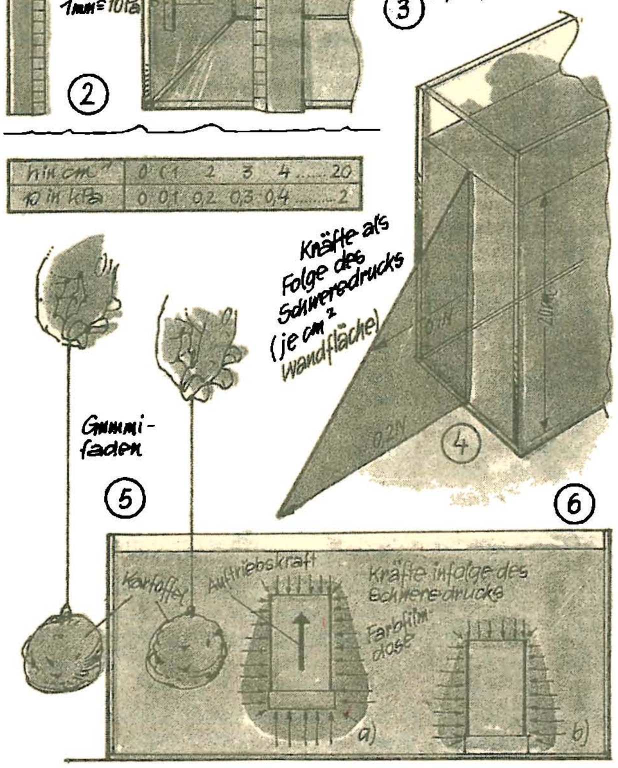


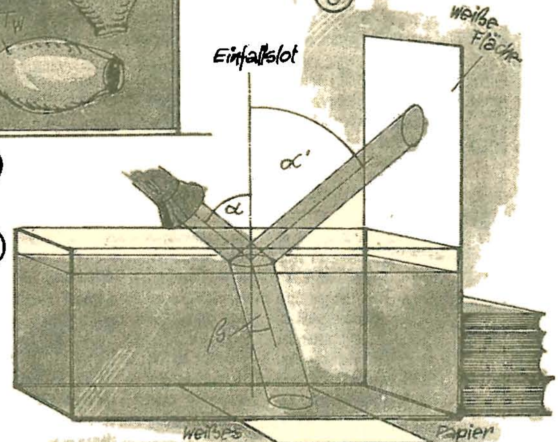


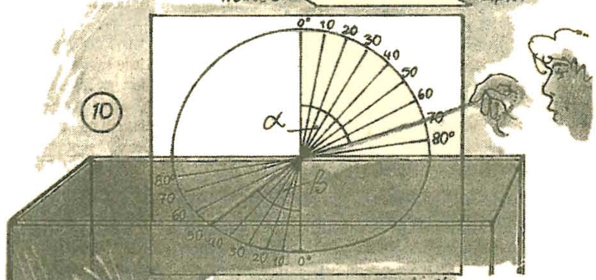




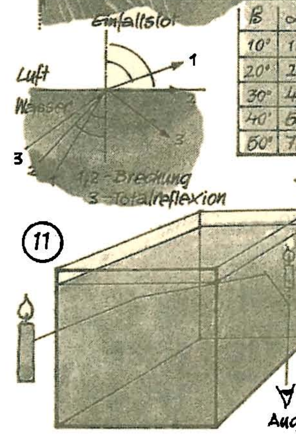
h in cm	0	1	2	3	4 20
p in kPa	0	0,1	0,2	0,3	0,4 2

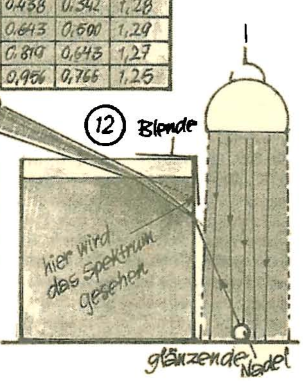






β	α	$\sin\alpha$	$\sin\beta$	$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$
10°	13°	0,225	0,174	1,29
20°	26°	0,438	0,342	1,28
30°	40°	0,643	0,500	1,29
40°	55°	0,819	0,643	1,27
50°	73°	0,956	0,766	1,25





Eine Aufgabe von Akademiemitglied Prof. Dr. A. N. Kolmogorow

Sektion Mathematik der Staatlichen Lomonossow-Universität Moskau

▲2693▲ (1) Die Menge M bestehe aus drei Elementen, die Menge N aus zwei Elementen. Wie viele eindeutige Abbildungen existieren: a) von M in N; b) von M auf N; c) von N in M; d) von N auf M?
(2) Die Menge M besteht aus m Elementen, die Menge N aus n Elementen. Wie viele auf M definierte Funktionen existieren, welche zu N gehörige Werte besitzen?

nuswerte liefert das Tafelwerk oder ein Taschenrechner. Wie es das Brechungsgesetz behauptet, ist der Quotient $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ annähernd konstant. Unser Ergebnis kommt dem aus den Tabellenangaben berechneten Wert (1,33) sehr nahe, die Messungen waren nicht schlecht.

Farbiger Abschluß

Blickt man unter größerem Winkel ins Aquarium, kann man nicht aus den Seitenflächen heraussehen. Sie glänzen wie ein Spiegel und zeigen seitenverkehrte Abbildungen von Dingen, die sich hinter dem Aquarium befinden (Bild 11). Verantwortlich hierfür ist die Totalreflexion. Sie entsteht nur, wenn Licht aus Wasser oder Glas in Luft übertritt. Weil hier der Brechungswinkel β immer größer als der Einfallswinkel α ist, erreicht β vor α den Wert 90°. Weiter geht es nicht, und statt aus dem Wasser in Luft überzutreten, wird das Licht wieder nach innen reflektiert.
Blickt man durch eine Kante des Aquariums, kann man helle Gegenstände in allen Regenbogenfarben sehen. Besonders gut läßt sich solch ein Spektrum erzeugen, wenn man wie in Bild 12 eine kräftig beleuchtete, glänzende Stricknadel betrachtet. Der dunkel gezeichnete Teil des Wassers wirkt wie ein Prisma. Die einzelnen Farbanteile des weißen Glühlampenlichtes werden unterschiedlich stark gebrochen und somit voneinander getrennt.

Mit unserem Aquarium ließe sich noch viel Physikalisches anstellen. Die Technik zum Beleuchten, zur Temperaturregelung oder Belüftung des Wassers erfordert z. B. weit mehr als nur jene grundlegenden Kenntnisse, die wir heute aufgefrischt haben. Und was die Fische betrifft – wir sollten uns überlegen, ob sie nicht doch eine prächtige Freizeitbeschäftigung abgeben könnten! *D. Wrobel*

Knobeleien mit dem Taschenrechner

▲1▲ Die Mutter hat vier Zahlen notiert:
91 553 704 3571 0.5
Als die Tochter aus der Schule kommt, nimmt sie schnell ihren Schulrechner SR 1 und *schreibt* vier Wörter, aus denen sie einen Auftrag ihrer Mutter abliest. Wißt ihr, um welchen Auftrag es sich handelt? Wie heißt das Mädchen?

▲2▲ Ermittle die Ergebnisse der einzelnen Aufgaben, *schreibe* diese auf dem SR 1, und trage die Lösungswörter in einen Rhombus ein:

$98 - (3 \cdot 33 - 2) =$
$3^2 + 2^2 =$
$3 \cdot 5 \cdot 9 =$
$(40^2 + 7 \cdot 9) \cdot 5 =$
$15 \cdot 2581 =$
$49\,945 : 7 =$
$10^3 - (3 \cdot 10^2 - 13) =$
$3 + 4 \cdot 7 =$
$\sqrt{9} =$

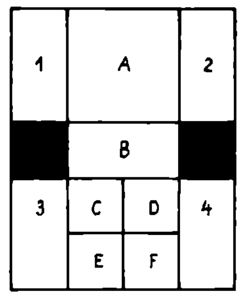
▲3▲ *Schreibt* man die Ergebnisse der folgenden Aufgaben mit dem SR 1 (wie in alpha Heft 6/1985, S. 123), so erhält man nacheinander jeweils einen Begriff aus dem Verkehrswesen, der Geographie, der Musik, der Münzkunde, der Chemie, der Literatur und der Zoologie. Die Anfangsbuchstaben dieser Wörter ergeben einen Beruf, die Endbuchstaben dieser Wörter nennen euch eine Versteinerung.

$3 \cdot 17 \cdot 10^3 + 17^2 + 90 =$
$(3 \cdot 13 - 1) \cdot 100 + 9^2 + 2 =$
$3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^1 =$
$12^2 - 7 =$
$302^2 + 526 =$
$100 \cdot \sqrt{12\,602\,500} + 79 =$
$85 \cdot 86 + 6 \cdot 7 + 1 =$

Dr. W. Schmidt, Greifswald
(Lösungen siehe Heft 6/86, d. Red.)

Die Barrikade

Das Spiel *Ohne Fleiß kein Preis* (auch *Schiebefax* genannt) sei in folgender Abwandlung betrachtet:



In einem Rahmen der Größe 5 mal 4 seien Teile A, B, C, D, E, F und 1, 2, 3, 4 wie folgt in Ausgangsposition:
Dabei ist links und rechts vom Teil B je ein freies Feld der Größe 1 mal 1. Durch Verschieben sind diese Teile so umzugruppieren, daß Teil A unten in der Mitte (obige Position der Teile C, D, E, F) erscheint. Das wesentliche Problem ist hierbei, die Teile A und B aneinander vorbei zu bewegen. Entsprechend nenne ich das Spiel *Die Barrikade*.
Ein Zug ist jeweils die Bewegung eines Teiles um *eine* Einheit nach links, rechts, oben oder unten. Zum Beispiel könnten die ersten zehn Züge wie folgt aussehen: *BL* (Teil B nach links, *DO*, *DR*, *FO*, *FO*, *4L*, *DU*, *DU*, *FR*, *FU*. Das Spiel erfordert Geduld zu seiner Lösung!
(Dieses Spiel wurde in einem Berliner Schülerzirkel als *Computerspiel* realisiert.)
Wer sendet an die Redaktion *alpha* möglichst kurze Lösungen in traditioneller Form oder aber mit einem Computer?

Dr. R. Klette,
Akademie der Wissenschaften der DDR
Zentralinstitut für Kybernetik
und Informationsprozesse, Berlin

Zitiert

- Der echte Schüler lernt aus dem Bekannten das Unbekannte entwickeln.
J. W. v. Goethe

- Drei Dinge richtig begriffen zu haben bedeutet mehr, als von Dutzend Dingen oberflächlich gehört zu haben.
H. Duncker

- Man muß mehr sehen als sich sagen lassen.
G. Chr. Lichtenberg

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Erfurt, 20. bis 23. Mai 1986

Olympiadeklasse 10

251041 Beweisen Sie, daß

$$\frac{1281^3+1282^3+1283^3+1284^3+1285^3+1286^3+1287^3}{639\cdot 640+641\cdot 642+642\cdot 643+644\cdot 645}$$

eine durch 7 teilbare natürliche Zahl ist!

251042 Es sei *ABCD* ein Quadrat; sein Flächeninhalt sei $F(ABCD)$; sein Umkreis sei k. Beschreiben Sie eine Konstruktion für ein (nicht notwendig regelmäßiges) konvexes Sechseck *PQRSTU*, dessen sämtliche Eckpunkte auf k liegen und dessen Flächeninhalt gleich $F(ABCD)$ ist! Beweisen Sie, daß jedes Sechseck, das nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, diese Forderungen erfüllt!

Von den nachstehenden Aufgaben 251043A und 251043B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

251043A Kurt möchte auf einer Holzkugel K vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 konstruieren, die die Bedingungen

$$\overline{P_1P_2}=\overline{P_1P_3}=\overline{P_1P_4}=\overline{P_2P_3}=\overline{P_2P_4}=\overline{P_3P_4}$$

erfüllen. Folgende Hilfsmittel stehen ihm zur Verfügung:

– Ein ebenes Zeichenblatt B, auf dem eine Strecke DE gegeben ist, deren Länge gleich dem Durchmesser d der Kugel K ist,

– ein Zirkel, mit dem man sowohl auf B als auch auf der Oberfläche der Kugel K Kreise zeichnen kann (der Zirkel besitzt zu diesem Zweck einknickbare, genügend lange Schenkel),

– ein Lineal (wie üblich nur zum Konstruieren gerader Linien auf B zu verwenden, nicht zur Skalenbenutzung).

Beschreiben Sie eine Konstruktion, die sich mit diesen Hilfsmitteln ausführen läßt! Beweisen Sie, daß durch die von Ihnen beschriebene Konstruktion vier Punkte der geforderten Art erhalten werden!

Hinweis: Unter $\overline{P_iP_j}$ ist die Länge der im Raum geradlinig (nicht auf der Kugeloberfläche) verlaufenden Verbindungsstrecke der Punkte P_i, P_j zu verstehen. Ebenso wird beim Konstruieren eines Kreises auf K die Zirkelspanne als geradlinige Streckenlänge festgelegt.

251043B Gegeben seien reelle Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4. Man ermittle zu jedem möglichen Fall für diese $a_1, \ldots, a_4$ jeweils alle diejenigen Tripel (b_1, b_2, b_3) reeller Zahlen (bzw. beweise gegebenenfalls, daß es keine solchen Tripel gibt), für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1x_1^2+a_2x_2^2+x_3^2 &= b_1,\\ x_2^2+a_3x_3^2 &= b_2,\\ x_1^2+a_4x_3^2 &= b_3 \end{aligned}$$

genau ein Tripel (x_1, x_2, x_3) reeller Zahlen als Lösung hat.

251044 Ermitteln Sie alle diejenigen von 0 verschiedenen reellen Zahlen r, für die die Gleichung

$$\frac{2x}{r(x+r)}+\frac{1}{x-2r}=\frac{4x-r+6}{r(x-2r)(x+r)}$$

a) genau zwei verschiedene reelle Lösungen,
b) genau eine reelle Lösung,
c) keine reelle Lösung

besitzt!

251045 Stellen Sie fest, ob es möglich ist, einen Würfel mittels einer Ebene so zu schneiden, daß als Schnittfigur
a) ein regelmäßiges Dreieck,
b) ein regelmäßiges Viereck,
c) ein regelmäßiges Fünfeck

entsteht!

251046 Es sei $F=(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ diejenige unendliche Folge natürlicher Zahlen, die durch die Festsetzungen (1), (2) definiert ist:

(1) Die ersten vier Glieder der Folge F lauten $a_1=1$, $a_2=9$, $a_3=8$, $a_4=6$; sie bilden also die Teilfolge $(1, 9, 8, 6)$.

(2) Für jedes $n \geqq 5$ ist a_n die Einerziffer der Summe der vier Glieder, die dem Glied a_n in der Folge F unmittelbar vorangehen.

Man untersuche, ob es in der Folge F außer der Teilfolge (a_1, a_2, a_3, a_4) noch eine weitere Teilfolge gibt, die aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden Gliedern von F besteht und $(1, 9, 8, 6)$ lautet.

Olympiadeklassen 11/12

251241 Zu einer Feier erschienen fünf Gäste. Der Gastgeber stellte fest, daß unter je drei von diesen Gästen stets zwei sind, die sich wechselseitig kennen, und zwei, die sich nicht kennen.
Man beweise, daß der Gastgeber seine fünf Gäste so an einen runden Tisch setzen kann, daß an beiden Seiten jedes Gastes Bekannte dieses Gastes sitzen.

251242 Es seien $q_1, q_2, \ldots, q_n$ $(n \geqq 2)$ paarweise verschiedene Primzahlen.
Man beweise, daß aus dieser Voraussetzung stets

$$\frac{q_1^3+1}{q_1^3-1}\cdot\frac{q_2^3+1}{q_2^3-1}\cdot\ldots\cdot\frac{q_n^3+1}{q_n^3-1}<\frac{36}{25}$$

folgt.

251243 Gibt es eine Funktion f, die für alle reellen Zahlen definiert ist, reelle Funktionswerte hat und die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt?
(1) Für alle reellen Zahlen x und y gilt

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}.$$

(2) Es gilt $f(1)=\frac{1}{2}$.

251244 Es sei $A_1A_2A_3A_4$ ein Tetraeder mit gegebenen Kantenlängen
$\overline{A_1A_2}=a$, $\overline{A_1A_3}=b$, $\overline{A_1A_4}=c$,
$\overline{A_2A_3}=d$, $\overline{A_2A_4}=e$, $\overline{A_3A_4}=f$.
Man untersuche, ob es einen Punkt P im Raum gibt, so daß die Summe s der Quadrate der Abstände des Punktes P von den Eckpunkten des Tetraeders einen kleinsten Wert annimmt. Falls das zutrifft, ermittle man jeweils zu gegebenen a, b, c, d, e, f diesen kleinsten Wert von s.

251245 Es sei (p_n) die Folge der ihrer Größe nach geordneten Primzahlen, d. h., es sei $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, $p_4=7, \ldots$ Man untersuche, ob es eine natürliche Zahl N derart gibt, daß für alle natürlichen Zahlen n mit $n>N$ die Ungleichung $p_n>4_n$ gilt.

Von den nachstehenden Aufgaben 251246A und 251246B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

251246A Eine im dekadischen Positionssystem dargestellte natürliche Zahl sei „Spiegelzahl" genannt, wenn ihre Ziffern symmetrisch aufgebaut sind, d. h., wenn die erste und die letzte, die zweite und die vorletzte usw. Ziffer übereinstimmen.
Zum Beispiel sind die Zahlen 358 853, 27 672, 44 444 Spiegelzahlen. Man untersuche, ob es zu jeder zweistelligen natürlichen Zahl a, deren letzte Ziffer von 0 verschieden ist, eine von 0 verschiedene Spiegelzahl gibt, die durch a teilbar ist.

251246B Für jedes Dreieck *ABC* bezeichne d die Länge des Inkreisdurchmessers, g die größte Seitenlänge und ε die Größe des kleinsten Winkels dieses Dreiecks *ABC*.
a) Man beweise: Es gibt eine Konstante K, so daß für jedes Dreieck *ABC* die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$\frac{1}{d}<\frac{K}{g\cdot\sin\varepsilon}. \qquad (1)$$

b) Unter allen Konstanten K, für die die in a) zu beweisende Aussage gilt, ermittle man die kleinste Konstante, falls diese existiert.

Ein Besuch in der Knobelwerkstatt

Teil 7: Hölzchen-Knobeleien

Liebe Freunde! Wir wollen an unser „Spiel mit Spielen“, das im Teil 6 unserer Beitragsserie im Mittelpunkt stand, anknüpfen und Anregungen zum Eigenbau von Hölzchenspielen (oder Streichholzspielen) geben. Ein Bündel gleich langer Hölzchen oder eine Schachtel mit Streichhölzern sind zwar finanziell gesehen sehr billig, aber durchaus nicht billig im Sinne von primitiv sind diejenigen Knobeleien, die man mit den Hölzchen gestalten kann; denn sie erfordern eine gute Auffassungsgabe, logisches Denkvermögen, Findigkeit und Ausdauer. Wir wollen hier nicht eingehen auf die Funktion der Hölzchen als Baumaterial oder als Spielsteine, obwohl sie letztere Funktion etwa bei den interessanten Nimspielen und ihren Varianten ausgezeichnet erfüllen. Wir wollen mit den Hölzchen Knobeleien geometrischer, arithmetischer und wortspielerischer Natur gestalten.

Da man mit den Hölzchen alle möglichen geradlinig begrenzten und unterteilten ebenen Figuren auflegen und diese durch Umlegen, Wegnahme oder Hinzufügen von Hölzchen verändern kann, so sind die Hölzchen-Knobeleien natürlicherweise in der ebenen Geometrie (Planimetrie) angesiedelt. Man kann mit den Hölzchen auch Kongruenz- und Ähnlichkeitsgeometrie betreiben sowie geometrische Konstruktionen ausführen. Die *Grundannahme* dabei ist, daß alle Hölzchen gleich lang und (im Idealfall) vom Querschnitt Null sind, was bei Streichhölzern annähernd erfüllt ist. Dadurch sind sie in einem Punkt zusammenlegbar, und jedes Hölzchen kann die Rolle der Einheitsstrecke übernehmen (1 Hölzchenlänge = 1 LE). Der Flächeninhalt eines Hölzchen-Quadrats der Seitenlänge 1 LE (Einheitsquadrat) wäre dann die Flächeneinheit (1 FE = 1 (LE)^2). Weiterhin fordert man, daß nur ganze (nicht zerbrochene oder geknickte) Hölzchen aufgelegt werden dürfen.

Die häufigsten Vertreter geometrischer Hölzchen-Knobeleien sind solche, bei denen man vorgegebene Hölzchen-Figuren, denen man die stilisierte Form realer Objekte (z. B. Häuser, Fahrzeuge, Tiere, Gegenstände) geben kann, in andere (eindeutig zu beschreibende) geometrische Figuren (z. B. bestimmte Vielecke) verwandelt werden sollen, und dies durch Wegnahme, Hinzufügen oder Umlegen einer bestimmten Anzahl Hölzchen *(s. Aufg. 1 bis 4)*. Aufgaben dieser Art lassen sich relativ leicht gestalten, indem man markante Hölzchenfiguren auflegt und Umlegemöglichkeiten durchprobiert. Auf diese Weise kann man auch Teilungsaufgaben *(s. Aufg. 5)* und „Zaubereien“ *(s. Aufg. 6)* gestalten. Bei anderen Knobeleien fragt man nach der Anzahl der für eine Figur notwendigen Hölzchen bzw. gibt diese vor: So kann man etwa mit einer bestimmten Anzahl Hölzchen rechtwinklige Dreiecke auflegen, nämlich genau diejenigen, deren (ganzzahlige) Seitenlängen a, b und c der pythagoreischen Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ genügen *(s. Aufg. 7)*. Bei weiteren Aufgaben, z. B. den bekannten „Weideproblemen“, verringert man die für das Auflegen bestimmter Figuren erforderliche Hölzchenanzahl schrittweise *(s. Aufg. 8)*. Auch kann man das Problem stellen, wieviel geometrische Figuren einer bestimmten Art mit einer vorgegebenen Anzahl Hölzchen höchstens auflegbar sind *(s. Aufg. 9)*. Bei Aufgaben zur Bewegungsgeometrie fordert man eine Verschiebung, Drehung, Spiegelung, Gleitspiegelung oder irgendeine (daraus zusammengesetzte) Bewegung einer Figur durch Umlegen von Hölzchen *(s. Aufg. 10 und 11)*. Und schließlich kann man auch die Flächeninhalte aufgelegter Hölzchenfiguren ermitteln lassen *(s. Aufg. 12)*.

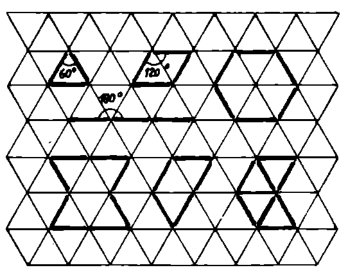


Bild 1
Trigonales Hölzchen-Gitter mit (stark hervorgehobenen) Elementardreieck, Elementarrhombus, Elementarsechseck und anderen Teilfiguren

Es ist wohl leicht einzusehen, daß es prinzipiell unmöglich ist, mit Hölzchen frei Hand einen rechten Winkel, ein aus mindestens 2 Hölzchen bestehendes Geradenstück und somit Quadrate, Rechtecke und andere Figuren mit rechten bzw. gestreckten Winkeln exakt aufzulegen. Offenbar lassen sich aber (abgesehen von Ungenauigkeiten, die aus der Stärke und der leichten Verschiebbarkeit der Hölzchen resultieren) ein aus 3 Hölzchen bestehendes gleichseitiges Dreieck (Elementardreieck) und somit ein Winkel von 60° exakt auflegen (konstruieren), denn die o.g. Grundannahme sichert die Gleichseitigkeit des Dreiecks und damit die 60°-Größe seiner Innenwinkel. Folglich ist jede Hölzchenfigur, die Teilfigur eines (aus Elementardreiecken bestehenden) trigonalen Gitters ist, exakt auflegbar (konstruierbar), z. B. der Elementarrhombus und das Elementarsechseck, ebenso der gestreckte Winkel und somit ein aus mindestens 2 Hölzchen bestehendes Geradenstück *(s. Abb. 1)*. Konstruiert nun einmal in diesem Sinne die in *Aufg. 13* genannten Hölzchenfiguren (als Konstruktionsschritte seien nur das Auflegen von Elementardreiecken erlaubt), indem ihr ausreichend viele Hölzchen als Hilfsmittel verwendet, die ihr nach Ausführung der Konstruktion wieder entfernt!

Wir wollen nun noch einige geometrische Konstruktionen, die auch mit Zirkel und Lineal ausführbar sind, „mit Hölzchen und Lineal“ (wie üblich mit Bleistift auf einem Blatt Papier) durchführen. Dabei konstruieren wir aus gegebenen Punkten die neuen Punkte mit Hilfe (ausreichend vieler) Hölzchen, und das Lineal dient zum Ziehen einer Geraden durch zwei gegebene Punkte. Bei unserer Konstruktion „mit Hölzchen und Lineal“ seien also die folgenden Konstruktionsschritte erlaubt: 1. Das Ziehen einer Geraden durch zwei gegebene Punkte (mit dem Lineal), 2. das Auflegen von Hölzchen auf eine gegebene Gerade an einen gegebenen Punkt dieser Geraden, 3. das Anlegen von 2 Hölzchen an 2 gegebene Punkte A und B mit $\overline{AB} < 2$ LE derart, daß die beiden Hölzchen die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks ABC werden (hieraus folgt auch die Konstruierbarkeit von Elementardreiecken und beliebigen Rhomben der Seitenlänge 1 LE). Versucht nun einmal, die in *Aufg. 14* geforderten geometrischen Grundkonstruktionen „mit Hölzchen und Lineal“ auszuführen!

Nun noch zu anderen Hölzchen-Knobeleien: Da man mit den Hölzchen auch die Grundziffern des Dezimalsystems (entsprechend den Anzeigeziffern eines Taschenrechners bzw. einer Digitaluhr), die Grundziffern des römischen Zahlensystems, die Zeichen für die rationalen Rechenoperationen, Relationszeichen, somit Gleichungen und Ungleichungen, aber auch Buchstaben und damit Worte und Sätze auflegen kann, so läßt sich mit ihnen ganz ausgezeichnet Arithmetik und Wortspielerei betreiben *(s. Abb. 2)*. Beispiele für Knobeleien hierzu sind das Richtigstellen falscher Gleichungen *(s. Aufg. 15 und 16)* bzw. Ungleichungen *(s. Aufg. 17)* und das Verwandeln von Brüchen in andere Brüche *(s. Aufg. 18)*.

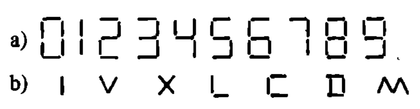


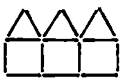
Bild 2
Hölzchenziffern und -zeichen:
a) arabische Ziffern,
b) römische Ziffern,
c) Operations- und Relationszeichen,
d) Hölzchen-Schrift

R. Mildner

Knobel-Wandzeitung

Geometrische Vielfalt

▲1▲ Legt in der Figur 2 Hölzchen so um, daß a) 5 Dreiecke und 2 Quadrate, b) 5 Dreiecke und 1 Rechteck, c) 3 Dreiecke, 1 Rechteck und 1 Rhombus, d) 2 Dreiecke, 3 Quadrate und 1 Trapez sowie e) 2 Dreiecke, 3 Quadrate und 1 Rhombus entstehen!

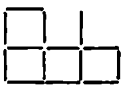


Hölzchen-Lokomotive

▲2▲

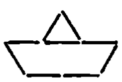
a) Legt in der Figur 3 Hölzchen so um, daß 3 kongruente Rechtecke entstehen! Findet dafür 3 verschiedene Umlegemöglichkeiten!

b) Wieviel Hölzchen müssen in der Figur umgelegt werden, damit die Lokomotive die entgegengesetzte Fahrtrichtung einnimmt?



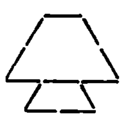
Schiffchen-Spiel

▲3▲ Legt in der Figur a) 2 Hölzchen, b) 4 Hölzchen und c) 6 Hölzchen so um, daß jeweils 1 Dreieck und 2 Rhomben entstehen!



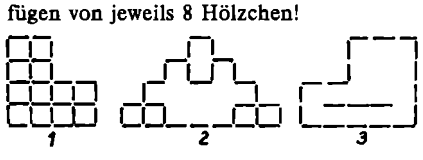
Hölzchen-Tischlampe

▲4▲ Legt in der Figur jeweils 4 Hölzchen so um, daß a) 1 Dreieck und 1 Trapez, b) 1 Dreieck und 2 Trapeze, c) 2 Dreiecke und 1 Trapez, d) 2 Dreiecke und 2 Trapeze, e) 3 Dreiecke und 1 Trapez sowie f) 3 Dreiecke und 1 regelmäßiges Sechseck entstehen!



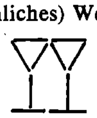
Gerechte Teilung

▲5▲ Zerlegt die Randpolygone der 3 Figuren in je 4 kongruente Teilfiguren, und zwar bei Figur 1 durch Wegnahme, Figur 2 durch Umlegen und Figur 3 durch Hinzufügen von jeweils 8 Hölzchen!



Aus 2 mach 1

▲6▲ Legt in der Figur 6 Hölzchen so um, damit aus den beiden Weingläsern nur 1 (ähnliches) Weinglas wird!

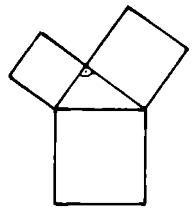


Rechtwinklige Dreiecke

▲7▲

a) Legt aus 12 sowie aus 30 Hölzchen jeweils ein rechtwinkliges Dreieck (pythagoreisches Dreieck) auf!

b) Wieviel Hölzchen benötigt man mindestens, um die abgebildete Standardfigur zum Satz des Pythagoras auflegen zu können?



Fünf Vierecke

▲8▲ In der Abbildung wurden mit 16 Hölzchen 5 kongruente Quadrate aufgelegt.

a) Wie kann man bereits mit 15 Hölzchen 5 kongruente Quadrate auflegen?

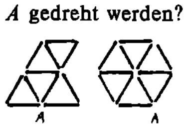
b) Wie kann man schon mit 14 Hölzchen 5 kongruente Rhomben auflegen?

Mit 12 Hölzchen

▲9▲ Wieviel Quadrate kann man mit 12 Hölzchen höchstens auflegen (wobei das Übereinanderlegen von Hölzchen erlaubt ist)?

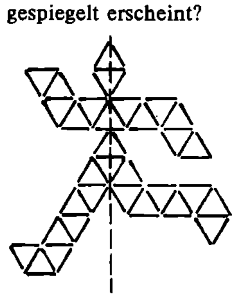
Verschiebung und Drehung

▲10▲ Wieviel Hölzchen muß man in den beiden Figuren mindestens umlegen, damit diese a) um 1 LE nach rechts verschoben werden bzw. b) um 60° in mathematisch negativer Richtung um den Punkt A gedreht werden?



Spiegelung

▲11▲ Wieviel Hölzchen müssen mindestens umgelegt werden, damit die abgebildete Hölzchenfigur an der eingezeichneten Achse gespiegelt erscheint?



Flächenberechnung

▲12▲ Ermittelt die Flächeninhalte der Randpolygone der in den Aufgaben 1, 3, 4, 5, 8, 10 und 11 dieser Knobelwandzeitung angegebenen Hölzchenfiguren!

Geometrische Konstruktionen mit Hölzchen

▲13▲ Konstruiert mit Hilfe von Elementardreiecken (s. Text!) die folgenden Hölzchenfiguren: a) eine Strecke der Länge 3 LE, b) ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 3 LE, c) ein regelmäßiges Sechseck der Seitenlänge 2 LE, d) die Figuren der Aufgaben 3 und 4 dieser Knobelwandzeitung, e) die Mittellinie eines gleichschenkligen Trapezes (Grundseiten: 3 LE und 1 LE, Schenkel: 2 LE) und f) mindestens vier verschiedene (nicht kongruente) Polygone, die Teilfiguren eines trigonalen Gitters sind und jeweils 5 Elementardreiecke umfassen!

Grundkonstruktionen mit Hölzchen und Lineal

▲14▲ Führt die folgenden Grundkonstruktionen mit Hölzchen und Lineal (s. Text!) aus und begründet ihre Richtigkeit: a) das Halbieren einer gegebenen Strecke $\overline{AB}$ (für die Streckenlängen 1,5 LE; 3 LE; 4,5 LE), b) das Halbieren eines gegebenen Winkels mit dem Scheitel A, c) das Errichten der Senkrechten in einem Punkt P einer gegebenen Geraden g und d) das Zeichnen einer Parallelen g' zu einer gegebenen Geraden g im Abstand 2 LE.

Hölzchen-Gleichungen

▲15▲ Legt in jeder der (offenbar falschen) Gleichungen genau 1 Hölzchen so um, daß diese zu wahren Aussagen werden!

7 + 6 = 16	V − IV = III
8 + 2 = 5	XII + VIII = V
9 + 4 = 10	C − XLI = X

Zerlegung der 18

▲16▲ Die abgebildete Hölzchengleichung ist offenbar falsch. Entfernt nun von 3 Ziffern 8 auf der linken Seite der Gleichung a) 2 Hölzchen, b) 3 Hölzchen, c) 4 Hölzchen, d) 6 Hölzchen, e) 7 Hölzchen und f) 11 Hölzchen derart, daß jeweils wahre Gleichungen entstehen! Wieviel verschiedene Gleichungen, die nicht nur durch Vertauschen derselben Summanden entstehen, sind in jedem Falle erhältlich?

8+8+8=18

Hölzchen-Ungleichungen

▲17▲ Legt in jeder der (offenbar falschen) Ungleichungen genau 1 Hölzchen so um, daß diese zu wahren Aussagen werden! Dabei darf das Ungleichheitszeichen nicht verändert werden. Findet in jedem Falle mindestens 4 verschiedene Umlegemöglichkeiten!

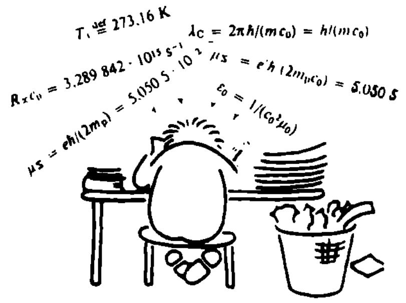
a	5 − 3 > 8 − 6
b	8 + 4 < 6 + 1
c	7 − 2 > 9 − 3

Hölzchen-Brüche

▲18▲ Durch Umlegen von je 1 Hölzchen sollt ihr die drei abgebildeten Brüche (in römischen Ziffern) umwandeln, und zwar 1/9 in 1/5, 1/17 in 1/8 und 1/101 in 2/51.

$\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{IX}}$ $\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{XVII}}$ $\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{CI}}$

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 11. Januar 1987

Aufgaben aus sowjetischen Mathematikolympiaden

Ma 5 ■ 2694 In ein Pionierlager fuhren drei Freunde: Mischa, Wolodja und Petja. Es ist bekannt, daß jeder von ihnen einen der Familiennamen Iwanow, Semenow, Gerassimow führt. Mischa heißt nicht Gerassimow. Der Vater von Wolodja ist Ingenieur. Wolodja geht in die 6. Klasse. Der Pionier mit dem Familiennamen Gerassimow geht in die 5. Klasse. Der Vater des Pioniers mit dem Familiennamen Iwanow ist Dreher. Welchen Familiennamen haben die Pioniere?

Ma 5 ■ 2695 Eine Mutter beauftragt die Kinder – den Bruder und die Schwester – ein Paket Pralinen so aufzuteilen, daß am nächsten Tag zum Mittag für die Gäste die Hälfte der Pralinen angeboten werden kann und noch drei Stück übrigbleiben. Zum darauffolgenden Frühstück sollten für die ganze Familie die Hälfte der restlichen Pralinen und noch drei Stück und zum darauffolgenden Abendessen die Hälfte der verbleibenden Pralinen und noch drei Stück vorhanden sein. Die Kinder teilten die Pralinen so auf, wie es ihnen die Mutter auftrug, und sie behielten noch vier Pralinen übrig, die sie selber essen durften. Wieviel Pralinen waren im Paket?

Ma 5 ■ 2696 Ergänze die fehlenden Grundziffern, die durch * gekennzeichnet sind, und begründe, wie du sie gefunden hast!

785 · ***
***
1***
***
*****

Ma 5 ■ 2697 Eine Raupe kriecht auf einen Apfelbaum. In der ersten Stunde klettert sie 10 cm hoch; in der zweiten Stunde sinkt sie um 4 cm herunter; in der dritten Stunde kriecht sie erneut 10 cm hoch, und in der vierten rutscht sie wieder 4 cm herunter. Auf diese Weise klettert die Raupe weiter. Um wieviel Zentimeter ist die Raupe in 11 Stunden hinaufgeklettert?

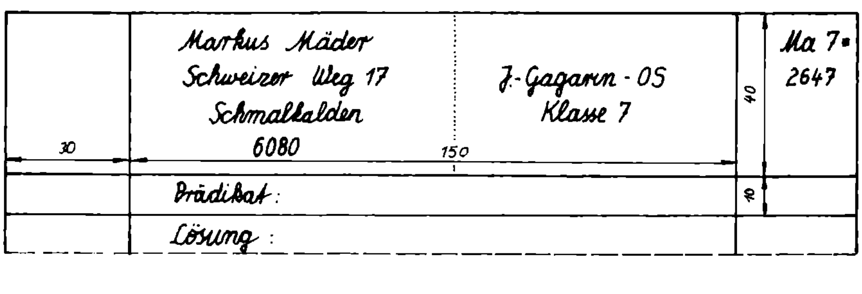
Ma 5 ■ 2698 Ergänze die fehlenden Grundziffern, und begründe, wie du sie gefunden hast!

63 · **
**
**
***

Ma 5 ■ 2699 Auf einem Kolchos gab es einige Ferkel gleichen Gewichts und einige Lämmer gleichen Gewichts. Ein Pionier fragte einen Kolchosbauern, wieviel ein Ferkel und ein Lamm wiegen. Der Kolchosbauer antwortete, daß 3 Ferkel und 2 Lämmer 22 kg, aber 2 Ferkel und 3 Lämmer 23 kg wiegen. Wieviel Kilogramm wiegt ein Ferkel, wieviel ein Lamm?

Ma 6 ■ 2700 Aus zwei Neubausiedlungen, die 36 km voneinander entfernt sind, gehen sich zwei Freunde entgegen. Der erste geht mit einer Geschwindigkeit von $5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, der zweite mit $4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Gleichzeitig mit dem ersten fährt ein Junge mit einem Fahrrad aus dessen Stadt dem zweiten entgegen. Er fährt mit einer Geschwindigkeit, die gleich der Summe der Geschwindigkeiten der Freunde ist. Wenn er den zweiten Freund trifft, wendet er und fährt zum ersten zurück. Trifft er den ersten, dann wendet er und fährt zum zweiten zurück usw. Auf diese Weise fährt der Radfahrer zwischen dem ersten und dem zweiten Freund hin und her, bis sie sich treffen. Wieviel Kilometer fuhr der Radfahrer in dieser Zeit?

Ma 6 ■ 2701 Ein Gemüseladen erhielt 5 Kisten Zitronen und Apfelsinen. In jeder Kiste waren nur Früchte einer Sorte. In der ersten Kiste waren 100 Stück, in der zweiten 105, in der dritten 110, in der vierten 115 und in der fünften 130 Stück. Als eine Kiste verbraucht war, waren dreimal weniger Zitronen als Apfelsinen übriggeblieben. Wieviel Früchte waren übriggeblieben?



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Na/Te (Naturwissenschaft und Technik) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12 oder Na/Te 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1986/87 läuft von Heft 5/1986 bis Heft 2/1987. Zwischen dem 1. und 10. September 1987 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/86 bis 2/87 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/87 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/1986 bis 2/87) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1986/87 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

Ma 6 ■ 2702 Zur Ernährung benötigen 6 Pferde und 40 Kühe täglich 472 kg, aber 12 Pferde und 37 Kühe täglich 514 kg Heu. Wieviel Kilogramm Heu benötigten bei dieser Ernährung 30 Pferde und 90 Kühe vom 15. Oktober bis zum 25. März einschließlich?
(Das Jahr ist kein Schaltjahr.)

Ma 6 ■ 2703 Bei der Addition von vier unleserlich geschriebenen Zahlen wurde bei der ersten Zahl die Hunderterziffer 2 als 5, bei der zweiten Zahl die Tausenderziffer 3 als 8, bei der dritten Zahl die Einerstelle 9 als 2 und bei der vierten Zahl die Zehnerziffer 7 als 4 gelesen. Das Ergebnis der Addition war 28 975. Bestimme den Fehler, den das Ergebnis hat, und die richtige Summe!

Ma 6 ■ 2704 Aus einem Korb mit Eiern entnahm man die Hälfte aller Eier, danach die Hälfte des Restes, dann die Hälfte des neuen Restes und zum Schluß noch einmal die Hälfte des letzten Restes. Danach verblieben im Korb 10 Eier. Wieviel Eier waren zu Anfang im Korb?

Ma 7 ■ 2705 Das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Zahlen beträgt 240, und ihr größter gemeinsamer Teiler ist 8. Bestimme beide Zahlen, wenn bekannt ist, daß die kleinere der Zahlen nur einmal den Faktor 5 enthält und die größere die 5 nicht enthält!

Ma 7 ■ 2706 Von einer Stadt A zu einer Stadt B fuhr ein Zug 16 Stunden. Auf der Rückfahrt fuhr dieser Zug mit einer um $20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ höheren Geschwindigkeit und war 4 Stunden schneller. Mit welcher Geschwindigkeit fuhr der Zug von A nach B, und wie weit sind die beiden Städte voneinander entfernt?

Ma 7 ■ 2707 Auf einer Seite einer Waage liegen sechs gleich schwere Teebeutel und ein 50-g-Stück. Auf der anderen Seite der Waage liegen ein gleicher Teebeutel, ein Gewicht von 100 g und ein Gewicht von 200 g. Die Waage befindet sich im Gleichgewicht. Bestimme, wieviel Gramm ein Teebeutel wiegt!

Ma 7 ■ 2708 Rekonstruiere die fehlenden Grundziffern bei folgender Multiplikation!

```
***·***
 *0**
  **5
*1**
*****8
```

Ma 8 ■ 2709 Ein Reisender fährt mit einem Zug, der mit einer Geschwindigkeit von $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt. Er sieht, daß am Fenster ein entgegenkommender Zug innerhalb von 4 s vorbeifährt. Welche Geschwindigkeit hat der Gegenzug, wenn seine Länge 120 m beträgt?

Ma 8 ■ 2710 In einem konvexen Viereck *ABCD* verbindet man die Seitenmitten nacheinander und erhält das Viereck *EFGH*. Bestimme, welchen Flächeninhalt das Viereck *ABCD* im Vergleich zum Flächeninhalt des Vierecks *EFGH* einnimmt!

Ma 8 ■ 2711 Auf einem Tisch liegen drei Schachteln. In der ersten liegen 2 schwarze Kugeln, in der zweiten eine schwarze und eine weiße, in der dritten zwei weiße Kugeln. Die Schachteln tragen die Aufschriften „Zwei schwarze“, „Weiß und schwarz“ und „Zwei weiße“. Doch ist bekannt, daß keine Aufschrift richtig ist. Wie kann man durch Herausnehmen nur einer Kugel aus einer Schachtel die Verteilung der Kugeln bestimmen?

Ma 8 ■ 2712 Man ermittle alle positiven ganzen Zahlen, für die der Bruch $\frac{19n+17}{7n+11}$ eine ganze Zahl ist.

Ma 9 ■ 2713 Den Siegern einer Mathematik-Olympiade werden 1., 2. und 3. Preise überreicht. Die Anzahl der 1. Preise ist um 12 kleiner als die der 2. Preise. 3. Preise erhielten genau doppelt so viele Teilnehmer wie erste und zweite zusammen, doch diese Anzahl ist genau um 104 kleiner als das Produkt von den Anzahlen der 1. und 2. Preise. Wie viele Schüler erhielten Preise?

Ma 9 ■ 2714 Um ein gleichseitiges Dreieck *ABC* mit der Seitenlänge $a = 12$ cm wird der Umkreis gezeichnet und diesem wird ein regelmäßiges Sechseck umbeschrieben. Über jeder Seite des Sechsecks wird ein Halbkreis mit der Seitenlänge als Durchmesser nach außen konstruiert. Man berechne den Flächeninhalt der so entstehenden Rosette.

Ma 9 ■ 2715 In einer 8. Klasse sind 40 Schüler. Jeder von ihnen lernt mindestens eine der Fremdsprachen: Englisch, Deutsch, Französisch. 34 Schüler lernen mindestens eine der beiden Sprachen: Englisch, Deutsch. 25 Schüler lernen mindestens eine der beiden Sprachen: Deutsch, Französisch. 6 Schüler lernen nur Deutsch. Genau zwei Sprachen, Englisch und Deutsch, lernen 3 Schüler mehr als Französisch und Deutsch. Kein Schüler lernt Englisch und Französisch. Wie viele Schüler lernen genau eine bzw. genau zwei Sprachen?

Ma 9 ■ 2716 Im Innern eines rechtwinkligen Dreiecks *ABC* mit dem rechten Winkel bei *C* sei ein Punkt *M* derart gegeben, daß die Dreiecke *AMB*, *BMC* und *CMA* flächengleich sind. Man zeige, daß dann $5 \times \overline{MC}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MA}^2$ gilt.

Ma 10/12 ■ 2717 Zwei Radfahrer fahren zur selben Zeit los und mit konstanter Geschwindigkeit, einer von A nach B und einer von B nach A. Das erste Mal treffen sie sich in einer Entfernung von 40 km von B. Nachdem sie am Endpunkt angekommen sind, fahren sie sofort zurück und treffen sich ein zweites Mal, 8 Stunden nach dem ersten Treffen, in einer Entfernung von 20 km von A. Man ermittle die Entfernung von A und B und die Geschwindigkeit jedes Radfahrers.

Ma 10/12 ■ 2718 In einem Dreieck stehen zwei Seitenhalbierende senkrecht aufeinander und haben eine Länge von 18 cm bzw. 24 cm. Man bestimme den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

Ma 10/12 ■ 2719 Man zeige, daß man unter beliebigen 39 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets eine findet, deren Quersumme durch 11 teilbar ist. Man gebe ein Beispiel an, in dem die Differenz von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen, deren Quersumme durch 11 teilbar ist, genau 39 ist.

Ma 10/12 ■ 2720 In einem spitzwinkligen Dreieck *ABC* sei $\overline{AH}$, die längste der Höhen, gleich lang der Seitenhalbierenden $\overline{BM}$. Man zeige, daß der Winkel $\sphericalangle ABC$ kleiner oder gleich 60° ist.

Aus Naturwissenschaft und Technik

Seit 1974 wurden regelmäßig neben dem Mathematikwettbewerb Aufgaben zu Physik und Chemie veröffentlicht. Insgesamt gingen zu den 361 gestellten Problemen rund 95 000 Lösungen ein.
Mit diesem Wetttbewerb erweitern wir den Inhalt, indem wir Aufgaben aus den Naturwissenschaften und der Technik anbieten. Viel Freude und Erfolg beim Knobeln!

Na/Te 6 ■ 362 30 kg des Materials A und 40 kg des Materials B kosten insgesamt 320 M. Ein Kilogramm des Materials B ist um 1 M teurer als 1 kg des Materials A. Wieviel kostet 1 kg jeden Materials?

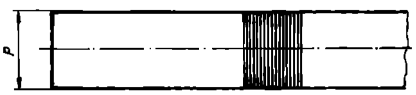
Na/Te 7 ■ 363 Wir haben einen 6 m langen Kupferdraht in zwei Teile zu unterteilen, so daß der eine Teil 60 cm länger ist als der andere.

Na/Te 7 ■ 364 Löse die folgende Aufgabe mit dem Taschenrechner! In welchem Verhältnis steht die relative Atommasse von Silber (Ag) zur relativen Atommasse von Kalium (K)? (Sinnvolle Genauigkeit beachten!)

Na/Te 8 ■ 365 Die Entfernung zwischen den Orten C und D beträgt 174 km. Von C nach D fährt ein Zug mit einer Geschwindigkeit von 30 km/h, von D nach C ein anderer Zug mit einer Geschwindigkeit von 57 km/h. Beide Züge fahren 10.30 Uhr ab. Wann treffen sie sich?

Na/Te 8 ■ 366 Löse die folgende Aufgabe mit dem Taschenrechner! Es werden 40 g Kupfer(II)-oxid umgesetzt. Berechne die Masse des entstehenden Oxids!

Na/Te 9 ■ 367 Berechnen Sie die Geschwindigkeit v, mit der ein Draht von einer Walze (siehe Bild) mit einem Durchmesser $d = 20$ mm abgewickelt wird, wenn die Drehzahl der Stange, die in die Spindel einer Maschine eingespannt wurde, $n = 160\ \mathrm{min}^{-1}$ beträgt!



Na/Te 9 ■ 368 Bei 300 °C werden 1 g Benzol in einem abgeschlossenen Behälter mit 4 dm³ Sauerstoff vollständig verbrannt. Welcher Druck herrscht in dem Behälter nach der Verbrennung, wenn der Anfangsdruck 127 kPa und die Anfangstemperatur 0 °C betrugen?

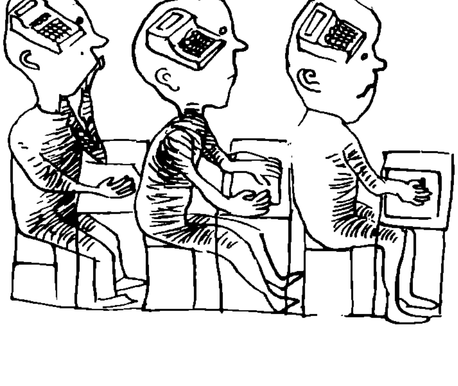
Na/Te 10/12 ■ 369 Auf einer Fotografie hat ein Gebäude eine scheinbare Höhe von 7 cm. Welches ist die tatsächliche Höhe des Gebäudes, wenn es aus einer Entfernung von 80 m fotografiert wurde und das Objektiv des Fotoapparates eine Brennweite von 20 cm aufweist?
(Die Linsengleichung ist $\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$.)

Na/Te 10/12 ■ 370 Ammoniummagnesiumphosphat entsteht durch Umsetzung eines Magnesiumsalzes mit Ammoniumphosphat und Ammoniak. Wird Ammoniummagnesiumphosphat erhitzt, bildet sich Magnesiumpyrophosphat. Welche Gleichungen beschreiben diese Reaktionen?

Computer in Tips, Fibeln und Lexika

Kleiner Streifzug durch populäre Angebote 1986 zur Mikroelektronik

Viele Leser fragen uns häufig nach Literatur zur Mikroelektronik und meinen vor allem Populäres über Computer, konkret Kleincomputer. Die Skala der Wünsche ist vielgestaltig. Wir haben uns im für 1986 vorgesehenen Angebot umgesehen und fanden dies:
Viele Bücher werden ausgewiesen *sowohl für Einsteiger als auch für Fortgeschrittene*, wie beispielsweise der Verlag *Volk und Wissen* seinem Titel *Peter Heblik, Wissensspeicher* BASIC (304 S., 13,50 M), nachsagt, der die Programmiersprache beschreibt, Sprachelemente vorstellt und Programme zu Mathematik, Physik, Technik sowie Spiele anbietet. Ausdrücklich zum neuen Rahmenprogramm Mikroelektronik für Schüler bietet der Verlag an:
Burmeister/Höppner, Elektronik (Grundlagen und Anwendung in Meß- und Nachrichtentechnik sowie Digitalrechnung, 160 S., 3,40 M).
Der *Verlag Technik* kündigt an eine systematische Einführung in BASIC samt Methoden der Programmentwicklung und zahlreichen Beispielen für Ingenieure wie Amateure (*Dieter Werner*, BASIC für Mikrorechner; 260 S., 27 M), in der Lexikonreihe außerdem:
Mikroelektronik und deren Bauelemente (240 S., 19,50 M).
An Leser, die sich noch nicht mit Programmieren befaßt haben, wendet sich der *Fachbuchverlag* mit *Hopfer/Müller*, BASIC – *Einführung in das Programmieren* (160 S., 12 M). Das Buch erläutert die wichtigsten Befehle, an kleinen Beispielen ist zu erleben, wie ein Programm aufgestellt wird.



Ein Anhang enthält Programme für mathematische Aufgaben (Funktionen, Gleichungen), Vokabeltrainer, Lottozahlengenerator, die alphabetische Sortierung und Würfelspiele. Selbstverständlich sind auch 1986 zwei Hefte *Kleincomputer-Tips* vorgesehen – mit besonderem Augenmerk auf die in Schule und Berufsausbildung eingesetzten Kleincomputer.
Im *Akademie-Verlag* bringt *Jürgen Groh* eine *Kleincomputer-Fibel* (200 S., 19,80 M), die beim absoluten Neuling beginnt, Ratschläge fürs Strippenlegen zu geben und den KC in Gang zu bringen; ihm dann BASIC beibringt (ausreichend, um selbst ausarbeiten zu können) und neben Programmen, die mathematische Probleme anschaulich machen, auch das einer Mondlandung anbietet.

Mit den Anwendungsmöglichkeiten und eventuellen Grenzen der Mikroelektronik befaßt sich das *akzent*-Heft des *Urania-Verlags Walter Conrad, Chips, Sensoren, Computer* (128 S., 4,50 M) in der für die Reihe typischen Popularität. Um Prinzipien, technologische Verfahren und Anwendung geht es auch bei *Rolf Enderlein, Mikroelektronik* im *Verlag der Wissenschaften*, dazu besonders um die physikalischen Grundlagen und die dadurch gesetzten Grenzen. Im *Verlag Die Wirtschaft* analysiert ein Ökonom Softwareprobleme für Fachleute und Laien (*Eberhard Prager, Software – was ist das?* 80 S., 5,80 M).
Elektronikamateure wissen selbst, daß sie Spezialliteratur beim *Militärverlag* suchen müssen. Wir fanden:
Schlenzig/Bläsing, Elektronikbasteln mit dem Alleskönner 555, Schlenzig/Jung, Neue Halbleiterbauelemente; Hertzsch, CMOS-*Schaltkreisliste*.

Wir arbeiten mit Resten

Teil 2

Ein Arbeitsmaterial für Schülerzirkel ab Klasse 6

Sind zwei natürliche Zahlen a und b mit $a > b$ und $b \neq 0$ gegeben, so kann man den Rest r bestimmen, den a bei Division durch b läßt. Man erhält dann die Darstellung $a = k \cdot b + r$ ($k \in N$; $r \in N$, $r < b$). Bisher haben wir diese Darstellungsmöglichkeit genutzt, um Beweise zu führen. Jetzt lernen wir ein Verfahren zur *Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers* d zweier gegebener natürlicher Zahlen a und b kennen, das im wesentlichen auf der Bestimmung von Resten beruht. Solch ein Verfahren ist nützlich, wenn wir später z.B. *diophantische Gleichungen* lösen wollen. Zwar habt ihr auch im Unterricht gelernt, wie man den g.g.T. zweier Zahlen bestimmen kann (↗ LB6, S. 23), aber für größere Zahlen wird das recht umständlich.

▲5▲ Erläutere an einem geeigneten Beispiel: Ein gemeinsamer Teiler von a und b ist genau dann der *größte*, wenn er von allen gemeinsamen Teilern von a und b geteilt wird.

Man kann den g.g.T. d zweier natürlicher Zahlen a und b. auch wie folgt definieren: d ist der g.g.T. von a und b. ($d = \mathrm{ggT}(a, b)$) *bedeutet*

1. $d \mid a$ und $d \mid b$ und 2. Für jede Zahl $d' \in N$ gilt:
Wenn $d' \mid a$ und $d' \mid b$, so $d' \mid d$.

In dieser Definition wird nur die Relation *ist Teiler von* benutzt.

Wir beweisen nun:
Ist $a = k \cdot b + r$ ($k \in N$; $r \in N$, $r < b$), so ist jeder gemeinsame Teiler t von a und b auch ein Teiler von r.

Voraussetzung:
1. $a = k \cdot b + r$ ($k \in N$; $r \in N$, $r < b$)
2. $t \mid a$ und $t \mid b$ ($t \in N$)

Behauptung: $t \mid r$

Beweis: Wegen $t \mid a$ gibt es ein $u \in N$, so daß $a = u \cdot t$,
wegen $t \mid b$ gibt es ein $v \in N$, so daß $b = v \cdot t$.
Einsetzen in Voraussetzung 1 liefert
$u \cdot t = k \cdot v \cdot t + r$.
Daraus folgt $r = u \cdot t - k \cdot v \cdot t$
(Subtraktion als Umkehrung der Addition), und durch Anwendung des Distributivgesetzes erhält man $r = (u - k \cdot v) \cdot t$, wobei $u - k \cdot v \in N$ ist.
Also gilt $t \mid r$, w.z.b.w.

Beispiel: $345 = 9 \cdot 36 + 21$
Alle Teiler von 345 sind 1, 3, 5, 15, 23, 69, 115, 345. Alle Teiler von 36 sind 1, 2, 3, 6, 9, 12, 18, 36.
Die gemeinsamen Teiler von 345 und 36 sind 1 und 3. 1 und 3 sind auch Teiler von 21.

Da *alle* gemeinsamen Teiler von a und b ein Teiler von r sind, ist auch der *größte* gemeinsame Teiler von a und b ein Teiler von r: Wenn $a = k \cdot b + r$ ($k \in N$; $r \in \mathrm{N}$, $r < b$) und $d = \mathrm{ggT}(a, b)$, so $d \mid r$. Daraus folgt aber: d ist ein *gemeinsamer* Teiler von b und r.

Im Beispiel:
$d = \mathrm{ggT}(345, 36) = 3$, $3 \mid 21$,
3 ist gemeinsamer Teiler von 36 und 21.
Ob d wohl der *größte* gemeinsame Teiler von b und r ist?
Wir überprüfen dies mit Hilfe der Definition:
Es sei t ein weiterer gemeinsamer Teiler von b und r: $t \mid b$ und $t \mid r$.
Wegen $a = k \cdot b + r$ ist t dann auch ein Teiler von a, also ein gemeinsamer Teiler von a und b: $t \mid a$ und $t \mid b$. Dann gilt aber $t \mid \mathrm{ggT}(a, b)$, d.h. $t \mid d$.
Wir haben damit nachgewiesen: $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(b, r)$.
Im Beispiel: $\mathrm{ggT}(345, 36) = \mathrm{ggT}(36, 21)$
Es ist $a > b > r$. Setzen wir der Übersicht halber $r = r_1$, und bestimmen wir den Rest r_2, den b bei Division durch r_1 läßt, so ist $a > b > r_1 > r_2$, und es gilt $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(b, r_1) = \mathrm{ggT}(r_1, r_2)$. Je kleiner zwei Zahlen sind, um so leichter findet man i.a. ihren g.g.T. Wir setzen deshalb unser Verfahren weiter fort. Da die entstehenden Reste $r_1, r_2, r_3, \ldots$ immer kleiner werdende natürliche Zahlen sind, muß nach endlich vielen Schritten der Rest 0 auftreten. Der letzte von 0 verschiedene Rest sei r_k. Es ist dann $\mathrm{ggT}(a, b) = \ldots = \mathrm{ggT}(r_k, 0)$.
Der größte gemeinsame Teiler von r_k und 0 ist aber r_k.

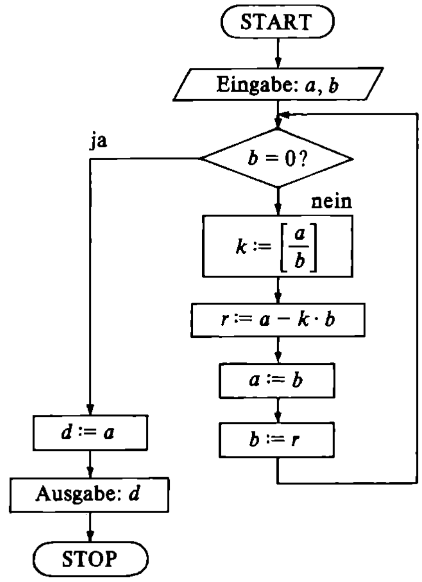
Im Beispiel:

$$\begin{array}{rcl|l}
& & & \mathrm{ggT} \\
345 &=& 9 \cdot 36 + 21 & (345, 36) = \mathrm{ggT}(36, 21) \\
36 &=& 1 \cdot 21 + 15 & = \mathrm{ggT}(21, 15) \\
21 &=& 1 \cdot 15 + 6 & = \mathrm{ggT}(15, 6) \\
15 &=& 2 \cdot 6 + \underline{3} & = \mathrm{ggT}(6, 3) \\
6 &=& 2 \cdot 3 + 0 & = \mathrm{ggT}(3, 0) = \underline{3}
\end{array}$$

Damit haben wir den *Euklidischen Algorithmus*[1] zur Bestimmung des g.g.T. zweier natürlicher Zahlen a und b ($a > b$, $b \neq 0$) erarbeitet.

▲6▲ Bestimme mit Hilfe des *Euklidischen Algorithmus* den g.g.T. von a) 39 und 15, b) 127 und 45, c) 1953 und 168, d) 195 und 15! Für kleine Zahlen a und b ist das Finden der Darstellung $a = k \cdot b + r$ kein Problem. Ansonsten kann man die Algorithmen zur Bestimmung des Restes r benutzen, die in dem der Fußnote 1) angegebenen Artikel beschrieben sind. Steht ein Taschenrechner zur Verfügung, so ist folgendes Vorgehen effektiv; es liefert auch den Faktor k: Bezeichnet man mit $[x]$ die größte natürliche Zahl, die kleiner oder gleich x ist $\left(\text{z.B. } \left[\frac{7}{3}\right] = 2, [4{,}05] = 4, [7{,}91] = 7, [10] = 10\right)$, so ist $k = \left[\frac{a}{b}\right]$ und $r = a - \left[\frac{a}{b}\right] \cdot b$.

Den Euklidischen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers d zweier natürlicher Zahlen a und b kann man auch durch ein *Flußbild* beschreiben[2]:



Wir nehmen wieder die Zahlen 345 und 36 und arbeiten die im Flußbild angegebenen Schritte ab. Die jeweiligen Werte der Variablen halten wir in einer Tabelle fest:

		1.	2.	3.	4.	5. Durchlauf
k		9	1	1	2	2
r		21	15	6	3	0
a	345	36	21	15	6	3
b	36	21	15	6	3	0
d						$\underline{3}$

▲7▲ Arbeite das Flußbild für die Eingabewerte
a) $a = 345$, $b = 60$ b) $a = 7$, $b = 0$ c) $a = 0$, $b = 12$ ab!
Fülle jeweils eine entsprechende Tabelle aus!

Falls eure Arbeitsgemeinschaft über einen Kleincomputer verfügt, könnt ihr ihn den im Flußbild beschriebenen Algorithmus nach folgendem BASIC-Programm ausführen lassen:

```
 10  CLS
 20  INPUT „Eingabe A und B:“; A, B
 30  PRINT
 40  IF B = 0 THEN GOTO 110
 50  LET K = INT(A/B)
 60  LET R = A - K*B
 70  PRINT A; „=“; K; „*“; B; „+“; R
 80  LET A = B
 90  LET B = R
100  GOTO 40
110  PRINT
120  PRINT „GGT/:“; A
130  END
```

[1]) Zum Begriff „Algorithmus“ siehe Jerschow, A.P.; *Computer – Algorithmus – Algorithmische Sprache, alpha* 3/86

[2]) Die Bedeutung des hier verwendeten Zeichens := ist im Teil 2 des in der Fußnote 1) angegebenen Artikels erläutert.

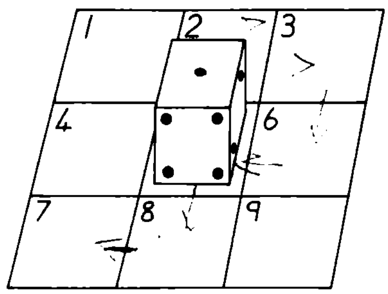
C.-P. Helmholz

In freien Stunden · alpha-heiter

„Hauen Sie endlich ab! Wir sind nicht vom Fernsehen, wir sind Landvermesser!“

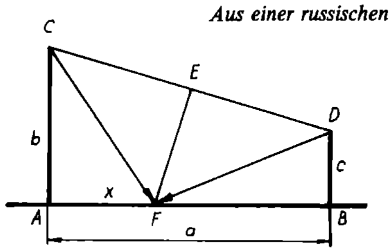
Mit sechs Bewegungen

Man gelange mit dem Würfel durch 6 Vierteldrehungen zum Feld 7 so, daß auf dem oberen Quadrat die Augenzahl sechs steht. Der Würfel darf nach oben und nach unten, nach links bzw. rechts jeweils eine Vierteldrehung machen. Welcher Weg führt zum Ziel? *Aus: Füles, Budapest*



Zwei Raben und ein Käse

Auf den Spitzen der Säulen AC und BD sitzt je ein Rabe. An welcher Stelle auf dem Erdboden AB müßte sich ein weggeworfenes Stück Käse befinden, wenn die Vögel es bei gleicher Fluggeschwindigkeit zur gleichen Zeit erreichen sollen?
Achtung!
Der Satz des Pythagoras ist hier im Spiel!
Aus einer russischen Zeitschrift (1902)

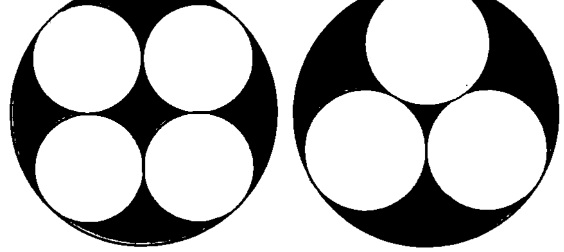


Interessante Logelei

Albert, Bertram, Carol und Denise, deren Familiennamen in anderer Reihenfolge Edwards, Ford, Grant und Hanks lauten, gehen in die Klassen 3, 4, 5 und 6 ihrer Schule. Bei der letzten Prüfungsarbeit im Fach Englisch waren ihre Punktzahlen 55, 60, 65 und 70.
Bestimme aus den folgenden Angaben Klasse, Punktzahl, Vor- und Zuname von jedem der vier Schüler!
1. Grant ist in einer höheren Klasse als Hanks.
2. Die Jungen erhielten zusammen mehr Punkte in Englisch als die Mädchen.
3. Der Schüler bzw. die Schülerin aus der 3. Klasse hatte die höchste Punktzahl in Englisch.
4. Als Albert und Hanks ihre Punktzahlen mit der eines dritten Mitgliedes dieser vier verglichen, erklärten sie: „Wenn jeder von uns seine Klassennummer mit seiner Punktzahl in Englisch multipliziert, dann überschreiten wir beide die Zahl 260.“
5. Bei einem Schachwettbewerb spielte Bertram gegen Edwards, und Denise schlug Hanks.
Aus: Parobla, N. S. W./Australien

Unterhaltsame Kreisfiguren

a) Einem Kreis k mit dem Radius r werden vier kongruente Kreise mit dem Radius x so einbeschrieben, daß jeder der vier zwei andere von außen und den Kreis k von innen berührt. Bestimme x und den Flächenanteil für $r = 1$! (Taschenrechner erlaubt!)
b) Löse die analoge Aufgabe für drei Kreise vom Radius x!
Dipl.-Lehrer Ch. Werge, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig



Spiel mit dem Taschenrechner

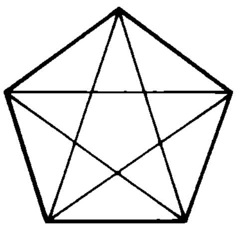
In das folgende Lösungsschema sind senkrecht vierbuchstabige Wörter einzutragen, die folgende Bedeutung haben:
1. Küchengerät $= 5\,(2^7 \cdot 13 - 1)$;
2. Kleidungsstück $= 2^4 \cdot 3 \cdot 73$;
3. Saugwurm $= (2 \cdot 43)^2 - 3$;
4. altes Längenmaß $= 7^3 \cdot 11$;
5. svw. Schlag $= 2\left[(2^4)^3 + \sqrt{3721}\right]$;
6. Strick, Leine $= (5 \cdot 18)^2 - 5 \cdot 18 - 2 \cdot 5^2 \cdot 18 + 5^2$.
Bei richtiger Lösung ergibt sich in der markierten Waagerechten ein umgangssprachlicher Ausdruck für eine Dummheit
$(= X)$. $X = 52^3 - 5\,(5-2)\,(5+2)\,(5^2+6)$.

Lösungsschema: (Die Lösungswörter ergeben sich, wenn man die Aufgaben ausrechnet und dann den Rechner um 180° dreht.)

1	2	3	4	5	6

Magisches Fünfeck

Setzt in die Teilflächen dieses Fünfecks die Zahlen 1, 2, ..., 11 so ein, daß in allen Dreiecken, in denen eine Höhe gleich der „Höhe“ des Fünfecks ist, die jeweils eingetragenen Zahlen dieselbe Summe haben!



Dr. Sawin, Mitglied des Redaktionskollegiums der mathematischen Schülerzeitschrift Quant, Moskau

Wortspiele selbst gefunden

Kennt man bei einem Wortspiel das erste und das letzte Wort (wie im ersten Beispiel HASE und POET), so findet man sehr schnell den Lösungsweg. Man braucht ja nur die letzten Buchstaben der Reihe nach durchzuprobieren.
Nun sind in fünf Wortspielen jeweils das erste Wort vorgegeben. Sucht selbst das letzte Wort! Um zum richtigen Ziel zu kommen, ist das letzte Wort scherzhaft angedeutet.

H	A	S	E
H	O	S	E
P	O	S	E
P	O	S	T
P	O	E	T

Z	E	H	N

Von Zehn zum Fressen

K	A	R	O

Vom Karo zum Zerhacken

E	C	K	E

Von Ecke zu vielen Mädchen

B	I	L	D

Vom Bild zum Aussuchen

B	E	T	A

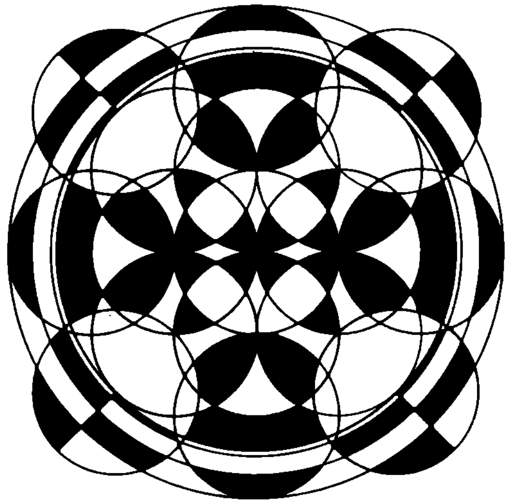
Von Beta bis beinahe

Schüler Matthias Kerber, Saal

Wie viele Kreise?

Finde heraus, wieviel Kreise dieses schöne Ornament enthält!

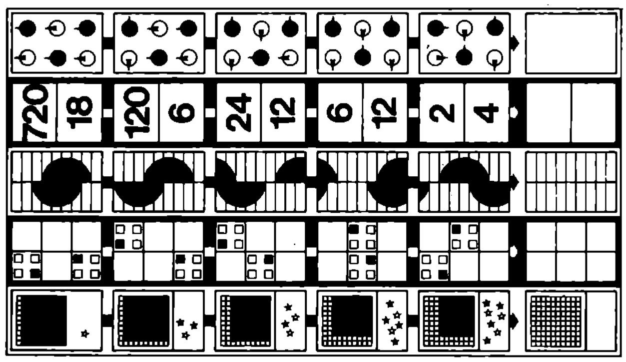
Aus: In freien Stunden, Verlag für die Frau, Leipzig



Video-Logik

Welche Figur muß logischerweise in das jeweils ganz rechts stehende Rechteck eingezeichnet werden?

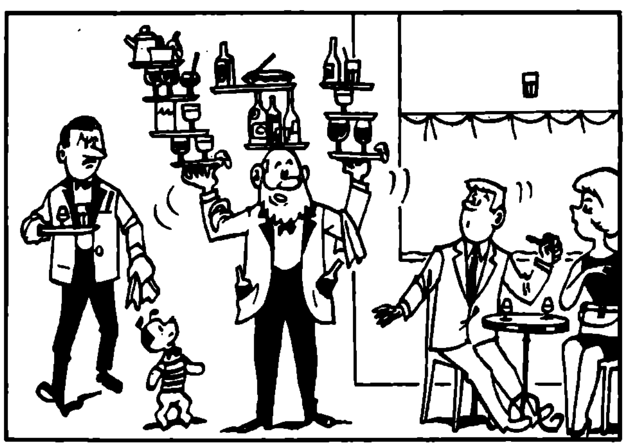
Aus: Füles, Budapest



Sieben mal drei

Auf dem Bild kommen sieben Gegenstände je dreimal vor. Finde diese!

Aus: Troll, Berlin



Lösungen

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Peter, Paul, Penny, Philip und Patricia sind Brüder und Schwestern. Jeder von ihnen hat ein Sparkonto.
Eines Abends saßen sie zusammen, sprachen über ihre Ersparnisse und beklagten sich, wie wenig sie hatten. Plötzlich bemerkte Penny, die gern mit Zahlen jonglierte: „Wie interessant! Jedes Konto zeigt eine andere ganze Zahl von Dollar, und das Produkt aller Zahlen ist doch nur 12.“ Welchen Betrag könnte jedes der fünf Konten zeigen?
Lösung: Einige von ihnen müssen einen Minusbetrag haben. Die Beträge könnten sein: -2, -1, 1, 2, 3.

▲2▲ Ersetzt die fehlenden Ziffern in den Gleichungen auf der Zeichnung.
Lösung: a) $264 : 12 = 22$
oder $264 : 22 = 12$
b) $390 : 13 = 30$
c) $288 = 2 \cdot 12^2$
d) $10 \cdot 1 - 9 = 1$
e) $99 + 99 = 198$
f) $11 \cdot 91 = 1001$
g) $11 \cdot 1 = 9 + 2$

▲3▲ Eines Tages befanden sich in Artek an einem runden Tisch fünf Kinder, aus Moskau, Leningrad, Gorki, Perm bzw. Swerdlowsk:
Jura, Tolja, Ljoscha, Kolja und Witja.
Der Moskauer sitzt zwischen dem Swerdlower und Witja, der Leningrader, zwischen Jura und Tolja, und ihm gegenüber sitzen der Permer und Ljoscha. Kolja war niemals in Leningrad, Jura war schon in Gorki, aber noch nicht in Swerdlowsk, und der Swerdlower schreibt sich regelmäßig mit Tolja. Stelle fest, welches Kind wo wohnt!
Lösung: Jura – Moskau, Tolja – Gorki, Ljoscha – Swerdlowsk, Kolja – Perm, Witja – Leningrad.

▲4▲ Für eine Schulfeier wurden 1000 Flaschen Apfelsaft bestellt. Sie werden in Kisten zu 12 Flaschen mit einem kleinen Wagen, der höchstens 15 Kisten auf einmal transportieren kann, angeliefert. Wievielmal muß der kleine Wagen fahren, um die 1000 bestellten Flaschen zu transportieren?
Lösung: Es können jedesmal $12 \cdot 15 = 180$ Flaschen befördert werden. $1000 : 180 = 5$ Rest 100. Der kleine Wagen muß also 6mal fahren.

Lösungen zu: Mini-BASIC für alpha-Leser

▲1▲

1.Zahl	8	4	5
2.Zahl	3	7	12
Ergebnis	12	14	30

▲2▲ *Beispiel:*
1. Zahl: Zahlenwert des Bogens b eines Kreisausschnittes mit dem Winkel α.
2. Zahl: Zahlenwert des Radius r des entsprechenden Kreises.
Ergebnis: Zahlenwert des Flächeninhalts A_α des Kreisausschnittes.

▲3▲
a) PRINT 9.31*9.31*9.31
oder PRINT 9.31 ∧ 3
b) PRINT SQR (24.Ø2*.32)
c) PRINT SQR (3.2*3.2 + 4.3*4.3)
oder PRINT SQR (3.2 ∧ 2 + 4.3 ∧ 2)
d) PRINT 5.3/2.3/7.2
oder PRINT 5.3/(2.3*7.2)
e) PRINT 2*PI*2.7*2.7
oder PRINT 2*PI*2.7 ∧ 2
f) PRINT −3.72/ABS (2.9 − 1Ø.8)
Potenzen x^2 bzw. x^3 sollte man bei Verwendung des Computers als Produkt berechnen lassen, da damit eine größere Genauigkeit erzielt wird.

▲4▲
a) $3{,}7 \cdot 9{,}81^2$
b), c) $\frac{2{,}09 \cdot 0{,}21}{3{,}7 \cdot 7{,}3}$ d) $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3$
e) $\sqrt{|2{,}03 \cdot (-5{,}3)|}$

▲5▲ a)

E	$-3{,}1$	$2{,}1$	$3{,}9$	$5{,}2$
A	-4	2	3	5

b) Den Ausgabewert erhält man, indem man zum Eingabewert x die größte ganze Zahl sucht, die kleiner oder gleich x ist.

▲6▲
a) 0,5; PRINT INT (3.7)/ABS (−6)
b) $\frac{2}{3}$; PRINT INT (−3.7)/−6
c) $\frac{1}{3}$; PRINT 4/3 − INT (4/3)
d) 0; PRINT 8/2 − INT (8/2)

▲7▲
a) Operationszeichen vor der Klammer fehlt! Falsche Darstellung der Zahl 7,5 (in BASIC 7.5).
b) Falsche Eingabe der Null.
c) Nach SQR fehlen Klammern.
d) Operationszeichen vor PI fehlt.

▲8▲
a) $\boxed{\pi}\ \boxed{\times}\ \boxed{r}\ \boxed{\times}\ \boxed{h}$
$\boxed{=}\ \boxed{x \to M}\ \boxed{\times}\ \boxed{r}$
$\boxed{=}\ \boxed{MR}\ \boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{=}$
$\downarrow V$ $\downarrow A_M$

b)

r	3,0	2,7	7,4
h	5,0	4,8	3,2
V	141	110	551
A_M	94	81	149

▲9▲ Eine Möglichkeit:

```
1Ø INPUT R
2Ø LET V=4/3*PI*R*R*R
3Ø LET O=4*PI*R*R
4Ø PRINT V
5Ø PRINT O
6Ø END
```

Lösung zu: Eine Aufgabe von A. N. Kolmogorow

▲2635▲ (1) a) 8; b) 6; c) 9; d) 0.
(2) n^m

Lösung zu: Barrikade

Lösung in 152 Schritten:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
BL	DU	DR	FU	FU	4L	DD	DD	FR	FD
BR	BR	CU	CL	EU	EU	FL	FL	FD	BD
BR	ER	CR	CR	3U	4U	FL	FL	DL	DL
BD	ED	EL	2D	2D	AR	4U	4U	DU	DU
FR	FU	BL	BL	2D	CR	EU	2L	CD	ER
2U	BR	BR	FD	FL	DD	DD	2L	EL	CU
BU	DR	DR	FR	FR	3D	2D	EL	EL	CL
CL	BU	FU	FR	2R	CD	4D	CD	4D	1R
BU	EU	3U	CL	4D	3U	CU	1D	ER	3U
CU	4L	1D	1D	CR	CU	3D	EL	CU	1U
1U	2L	FL	FD	BD	AD	CR	CR	ER	ER
1U	3U	4U	2U	FL	FL	DL	DL	BD	AD
ED	ER	1R	2U	2U	AL	ED	ED	CD	CD
1R	2R	3R	4U	4U	AL	EL	EU	BU	DR
DR	FR	FR	AD	EL	EL	CL	CL	BU	FU
151.	152.								
FR	AR								

Lösungen zu: Wir arbeiten mit Resten (Teil 2)

▲5▲ Wir wählen $a = 20$ und $b = 12$.
Die gemeinsamen Teiler von 20 und 12 sind 1, 2 und 4. Der größte gemeinsame Teiler von 20 und 12 ist 4. Es gilt $1|4$, $2|4$ und $4|4$.
4 ist der *einzige* gemeinsame Teiler von 20 und 12, der durch jede der Zahlen 1, 2 und 4 teilbar ist.

▲6▲ a) 3 b) 1 c) 21 d) 15

▲7▲
a)

		1.	2.	3.
k		5	1	3
r		45	15	0
a	345	60	45	15
b	60	45	15	0
d				15

b)

k	
r	
a	7
b	0
d	7

c)

		1.	2.
k		0	1
r		12	0
a	0	12	12
b	12	12	0
d			12

Lösungen zu: In freien Stunden · alpha-heiter

Zwei Raben und ein Käse

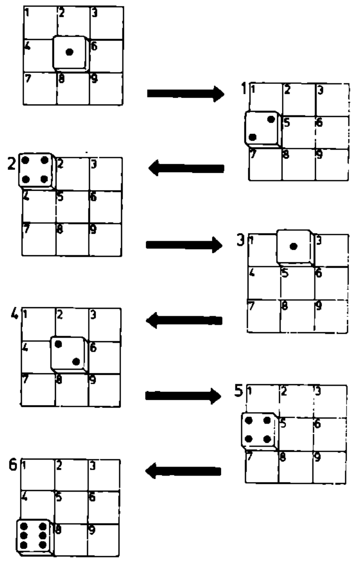
Wir verbinden zunächst die Punkte C und D und fällen in der Mitte von $\overline{CD}$ die Senkrechte EF. Der Schnittpunkt F auf der Linie AB ist die Stelle, wo das weggeworfene Stückchen Käse liegen müßte, denn bei den Dreiecken CFE und DFE, die eine gemeinsame Kathete haben, ist auch die zweite Kathete gleich: $\overline{CE} = \overline{ED}$. Folglich sind die Hypotenusen $\overline{CF}$ und $\overline{FD}$, das heißt die Fluglinien der Raben, ebenfalls gleich. Jetzt kennen wir den Punkt F, auf dem der Käse liegen muß, und wollen die Entfernung vom Punkt A ausrechnen. Wir kennzeichnen die Entfernung $\overline{AB}$ mit a, $\overline{AC}$ mit b, $\overline{BD}$ mit c, $\overline{AF}$ mit x. Dann ergibt sich aus den rechteckigen Dreiecken ACF und BDF, in denen die Hypotenusen $\overline{CF}$ und $\overline{DF}$ gleich sind, daß

$b^2 + x^2 = c^2 + (a - x)^2$ und damit

$x^2 = (a^2 + c^2 - b^2) : 2a$ ist.

Mit sechs Bewegungen

Man kann z. B. den im Bild gezeigten Weg wählen:



Interessante Logelei

Weil die Jungen mehr Punkte als die Mädchen erhielten, bekam einer von ihnen 70 Punkte (2). Dieser Junge ist in der 3. Klasse (3). Das Mädchen, bei dem das Produkt von Klasse und Punktzahl 260 ist, muß in Klasse 4 sein (4). Hanks ist in Klasse 5, weil er in einer niedrigeren Klasse als Grant ist (1), aber in einer höheren Klasse als das Mädchen aus der 4. Klasse (4). Demzufolge ist Grant in Klasse 6, heißt Albert und hat 60 Punkte (4) und (2). Der Schüler aus der 3. Klasse heißt dann Bertram (2). Der Rest ist aus (5) leicht zu erkennen. Klasse 3 Bertram Ford 70 Punkte; Klasse 5 Carol Hanks 55 Punkte; Klasse 4 Denise Edwards 65 Punkte; Klasse 6 Albert Grand 60 Punkte.

Unterhaltsame Kreisfiguren

Mit dem Taschenrechner auf drei gültige Ziffern genau

a) x sei der unbekannte Radius:

$$x^2 + x^2 = (r - x)^2 \qquad 0 < x < \frac{r}{2}$$

$$x^2 + 2rx - r^2 = 0$$

$$x_{1,2} = -r \pm \sqrt{r^2 + r^2}$$

$$= -r + r\sqrt{2}$$

$$= (\sqrt{2} - 1)\,r$$

$$A = 4\pi(\sqrt{2} - 1)^2 r^2 \approx 2{,}16$$

$$\approx 68{,}6\,\%$$

b) x sei der unbekannte Radius:

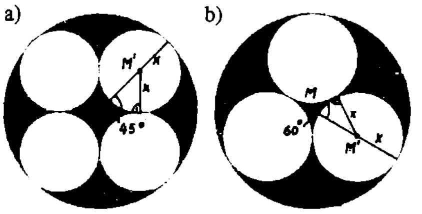
$$x^2 + \left(\frac{r - x}{2}\right)^2 = (r - x)^2 \qquad 0 < x < \frac{r}{2}$$

$$x_{1,2} = (-3 \pm \sqrt{12})\,r$$

$$A = 3\pi(-3 + \sqrt{12})^2 r^2 \approx 2{,}03$$

$$\approx 64{,}6\,\%$$

a) b)

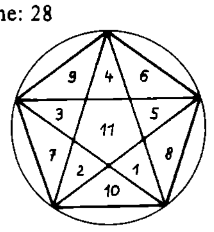


Spiel mit dem Taschenrechner

1. 8315 → SIEB; 2. 3504 → HOSE; 3. 7393 → EGEL; 4. 3773 → ELLE; 5. 8314 → HIEB; 6. 7135 → SEIL.
Markierte Waagerechte:
137353 → ESELEI.

Magisches Fünfeck

Summe: 28



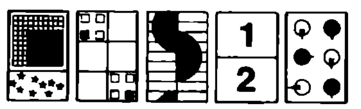
Wortspiele selbst gefunden

ZEHN	KARO	ECKE
ZAHN	KARL	ELKE
ZAHL	KERL	ELLE
MAHL	KEIL	ELLA
MAUL	BEIL	ULLA
BILD	BETA	
WILD	BETT	
WALD	FETT	
WALL	FEST	
WAHL	FAST	

Wie viele Kreise?

Die Figur enthält 21 Kreise.

Video-Logik



Sieben mal drei

1. Schleife am Hals der beiden Kellner und des Hundes;
2. Likörgläser auf dem Tisch und dem Tablett des linken Kellners;
3. Trinkbecher auf diesem Tablett auf dem obersten rechten Tablett des anderen Kellners und auf dem Fenster;
4. Strohhalm im Glas auf dem vorletzten linken Tablett und in der Torte auf dem Kopf des älteren Kellners sowie in der Brusttasche des jüngeren;
5. kleiner Kreis als Knopf des jüngeren Kellners, als Deckelgriff der Teekanne ganz oben in der rechten Hand des älteren und auf dem Etikett der Flasche auf seinem Kopf;
6. Hörnchen auf drei Tabletts des älteren Kellners;
7. Gläser mit hellem Inhalt auf drei Tabletts des älteren Kellners.

Lösung zu: Logische Kitty

IV. Umschlagseite

Für 20 Meilen brauchen die beiden 7 Stunden, also fahren sie mit einer Geschwindigkeit von $\frac{20}{7}$ Meilen/h. Dann sind die Entfernungen

	Start 8.30	1. Schleuse 10.00	
Meilen	$\frac{20}{7}\cdot\frac{3}{2}=\frac{30}{7}$	$\frac{20}{7}\cdot 2=\frac{40}{7}$	
	Pizzastube 12.00	Nachmittag 17.00	Ankerplatz 19.00
Meilen	$\frac{20}{7}\cdot 5=\frac{100}{7}$	$\frac{20}{7}\cdot 2=\frac{40}{7}$	

$$\frac{30 + 40 + 100 + 40}{7}\ \text{Meilen} = 30\ \text{Meilen}.$$

Kitty und Michelle sind 30 Meilen gefahren.

Lösungen der Aufgaben aus dem Commensurator von Regiomontanus

Heft 4/86, S. 75

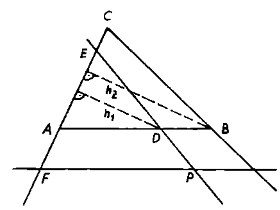
II.9. $d = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s^2}}$ V.131. Es liege etwa P im Inneren des Winkels $\sphericalangle ACB$ (Bild 1). Die gesuchte Gerade durch P schneide $c = \overline{AB}$ in D und $b = \overline{AC}$ in E. Mit A, B, C und P ist auch die Parallele durch P zu c und deren Schnittpunkt F mit der Verlängerung von $\overline{CA}$ bekannt. Ferner bezeichne h_1 die Höhe des gesuchten Dreiecks bezüglich der Grundseite $\overline{AE}$, h_2 die Höhe des gegebenen Dreiecks bezüglich der Grundseite b und x die Strecke $\overline{AD}$. Offenbar genügt es x zu kennen, um die Aufgabe lösen zu können. Nun gilt:

(1) $\frac{h_1}{h_2} = \frac{x}{c}$,

(2) $h_2 \cdot b = 2 \cdot h_1 \cdot \overline{EA}$,

(3) $\frac{\overline{EA}}{\overline{EF}} = \frac{x}{\overline{PF}}$.

Bild 1

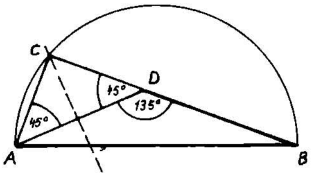


Aus diesen Gleichungen ergibt sich $x^2 = \frac{\overline{PF}}{2 \cdot \overline{EF}} \cdot bc$, woraus sich x nach den Regeln der flächengleichen Verwandlung von Rechtecken und Quadraten leicht mit Zirkel und Lineal konstruieren läßt.

V.140. Man konstruiere zunächst Dreieck ABD auf übliche Weise aus der Hypotenuse c, der Differenz der Katheten $\overline{DB}$ und dem Winkel von 135° bei D (Bild 2, hier ist der Fall $b < a$ angenommen). Die Verlängerung von $\overline{BD}$ über D hinaus schneidet den Thaleshalbkreis über c (und auch die

Mittelsenkrechte der Punkte A, D) in C. Im Spezialfall $a - b = 0$ erhält man mit $D = B$ so den Punkt C ebenfalls.

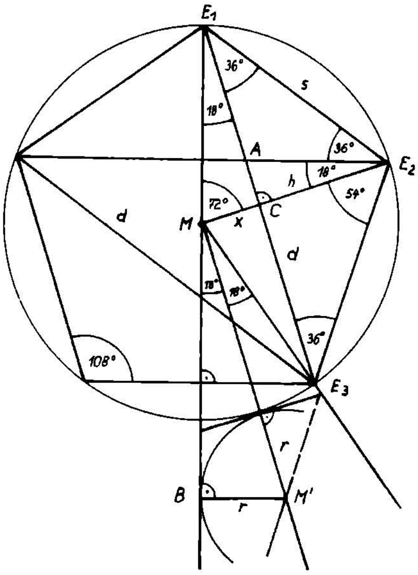
Bild 2



VII.29. Die Berührungspunkte von je drei gleichen, einander berührenden äußeren Kugeln mit der inneren Kugel bilden auf der Oberfläche der inneren Kugel ein gleichseitiges Dreieck. Im Fall einer geschlossenen Hülle von äußeren Kugeln um die innere Kugel müssen sich diese Dreiecke zu einem der inneren Kugel einbeschriebenen regulären, von gleichseitigen Dreiecken begrenzten Polyeder schließen.
Solche Polyeder existieren aber nur für $n = 4$ (Tetraeder), $n = 8$ (Oktaeder) und $n = 20$ (Ikosaeder).
Um die Aufgaben II.14, V.104 und VI.42 zu lösen, ist es nötig, sich zunächst mit den Verhältnissen einiger Strecken am regulären Fünfeck und dem ihm einbeschriebenen Sternfünfeck (Pentagramm) vertraut zu machen. Da der Winkel $\sphericalangle E_1ME_2$, den zwei benachbarte Eckpunkte E_1E_2 mit dem Mittelpunkt M des Umkreises bilden, gleich $\frac{2\pi}{5}$, also gleich 72° ist, findet man leicht die Größe einer Reihe anderer Winkel zu 108°, 36° usw., woraus sich insbesondere die Ähnlichkeit der Dreiecke der Form $E_1E_2E_3$ zwischen drei aufeinanderfolgenden Eckpunkten mit den Dreiecken E_1AE_2 ergibt, die zwei benachbarte Eckpunkte mit einem Diagonalenschnittpunkt A bilden (Bild 3). Daher gilt für die Seitenlänge s des Fünfecks und die Diagonalenlänge d

$$\frac{d-s}{s} = \frac{s}{d}, \text{ woraus folgt}$$

Bild 3



$$d = \frac{s}{2}(1+\sqrt{5}).$$

Übrigens besagt diese Beziehung, daß die Diagonalen des Sternfünfecks sich gegenseitig harmonisch teilen und daß Sternfünfecke mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind. Um die absolute Größe von s und d bei vorgegebenem Radius des Umkreises (den wir der Einfachheit halber gleich 1 setzen) zu erhalten, betrachten wir noch die in Bild 3 eingetragenen Hilfsstrecken x und h. Für sie gilt:

$$1 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2, \qquad x = 1 - h,$$

$$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}.$$

Setzt man in die letzte Gleichung die schon gefundene Formel für d ein, so ergibt sich

$$h = \frac{s}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

und daraus

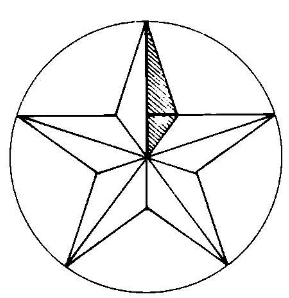
$$s = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2} \approx 1{,}175 \text{ und}$$

$$d = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\,(1+\sqrt{5}) \approx 1{,}902.$$

Die Fläche des Sternfünfecks denkt man sich zweckmäßig aus 10 kongruenten Dreiecken zusammengesetzt, von denen in Bild 4 eines schraffiert ist. Seine Grundseite ist gleich dem Radius des Umkreises, also gleich 1, seine Höhe gleich $s - \frac{d}{2}$. Damit ergibt sich für die Gesamtfläche die exakte Formel

$$5\left(s - \frac{d}{2}\right) = \frac{5}{8}(3 - \sqrt{5})\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$
$$\approx 1{,}1226.$$

Bild 4



Der untere Teil von Bild 3 deutet an, wie man den Mittelpunkt M' eines der 10 kongruenten Kreise, die einen gegebenen Kreis umhüllen, als Schnittpunkt eines vom inneren Kreismittelpunkt M ausgehenden Strahls mit der Winkelhalbierenden zwischen dem um 18° benachbarten Strahl und einer Tangente an den inneren Kreis konstruieren kann. Um den Radius r der äußeren Kreise zu berechnen, stellen wir fest, daß wegen des gemeinsamen Winkels von 18° die Dreiecke MBM' und E_1CM ähnlich sind. Daher gilt

$$\frac{r}{r+1} = \frac{x}{1}.$$

(Der Radius des inneren Kreises wurde wieder gleich 1 gesetzt.)
Daraus folgt

$$r = \frac{1-h}{h} = \frac{2\sqrt{5} - 2}{10 - 2\sqrt{5}} \approx 0{,}447.$$

P. Schreiber

Lösung zu: Speed
Heft 4/86, Seite 96

Ist l die Länge der Strecke in Metern und z die in Sekunden gemessene Zeit, so erhält man die Geschwindigkeit v in km/h nach der Formel

$v = \frac{l}{z} \cdot 3{,}6$. Im einzelnen ist

(auf 2 Dezimalstellen gerundet)

$l =$ 50 m	$v = 29{,}46$ km/h
$l =$ 60 m	$v = 30{,}68$ km/h
$l = 100$ y	$v = 32{,}12$ km/h
$l = 100$ m	$v = 32{,}29$ km/h
$l = 200$ m	$v = 32{,}16$ km/h.

Die größte Geschwindigkeit erreichte Marita Koch demnach über 100 m.

Lösungen zu: Spaß mit Sternchen
Heft 4/86, Seite 84

▲1▲ a) In 5*** ersetzen wir die Sternchen so durch Grundziffern, daß die dargestellte Zahl möglichst klein wird. Das trifft zu für 5000. In 4*** ersetzen wir die Sternchen so durch Grundziffern, daß die dargestellte Zahl möglichst groß wird. Das trifft zu für 4999. Wegen $5000 > 4999$ gilt 5*** > 4*** für jede beliebige Ersetzung der Sternchen durch Grundziffern.
b) Die größte dreistellige Zahl (999) ist kleiner als die kleinste vierstellige Zahl (1000). Deshalb gilt 9** < 1*** für jede Ersetzung der Sternchen durch Grundziffern.
c) **** > *99, denn 1000 > 999.
d) Wegen 63 999 < 67 000 gilt
63*** < 67***.
e) Wegen 10 000 > 8 799 gilt
****0 > 87**.
f) Es sind drei Fälle möglich:
(1) Wegen 1991 = 1991
könnte 1**1 = *99* gelten.
(2) Wegen 1001 < 1991
könnte 1**1 < *99* gelten.
(3) Wegen 1991 > 1990
könnte 1**1 > *99* gelten.
Deshalb lassen sich diese Zahlen nicht für jede beliebige Ersetzung der Sternchen durch Grundziffern vergleichen.

▲2▲ a) Die erste und dritte Zahl sind siebenstellig; die zweite und vierte Zahl sind sechsstellig. Wir vergleichen zunächst die beiden sechsstelligen Zahlen. 3**7** < 9*****, denn 399 799 < 900 000. Nun vergleichen wir die beiden siebenstelligen Zahlen. 1*91*** < 2**37**, denn 1 991 999 < 2 003 700. Deshalb gilt für alle möglichen Ersetzungen der Sternchen durch Grundziffern 3**7** < 9***** < 1*91*** < 2*37**.
b) Die dritte Zahl (*2*76*) ist sechsstellig, also größer als die übrigen fünfstelligen Zahlen. Wegen 20 760 < 21 750 und wegen 21 760 > 20 750 lassen sich die Zahlen 2*76* und 2*75* nicht so ordnen, daß für jede mögliche Ersetzung der Sternchen durch Grundziffern nur eines der beiden Zeichen <, >, und zwar stets dasselbe Zeichen gilt.
c) Wegen 193 < 3001 < 10 940 gilt stets 1*3 < 3**1 < **94*.

▲3▲ a) Wir rechnen $1+\underline{3}=4$; $5+3=\underline{8}$; $\underline{3}+1=4$; $6+9=\underline{1}5$ und erhalten $15\,484-9133=6\,351$.

b) Wir rechnen $7+5=1\underline{2}$ (Übertrag 1); $1+4+\underline{1}=6$; $3+\underline{7}=10$ (Übertrag 1); $1+\underline{3}+\underline{8}=12$ (Übertrag 1); $1+\underline{2}+1=\underline{4}$ und erhalten $42\,062-18\,715=23\,347$.

c) Wir rechnen $\underline{2}+1=3$; $6+8=1\underline{4}$ (Übertrag 1); $1+\underline{0}+5=6$; $5+7=1\underline{2}$ (Übertrag 1); $1+\underline{6}+1=8$ und erhalten $82\,643-17\,581=65\,062$.

d) Wir rechnen $6+\underline{7}=12$ (Übertrag 1); $1+1+6=\underline{8}$; $5+\underline{8}=13$ (Übertrag 1); $1+\underline{3}+5=\underline{9}$; $2+2=\underline{4}$ und erhalten $49\,382-25\,867=23\,515$.

▲4▲ a) Wegen $8000\cdot 2=16\,000$ kann der zweite Faktor nur 2 sein.
Daraus folgt $8318\cdot 2=16\,636$.

b) Wegen $9\cdot 1=9$ ist die dritte Grundziffer des ersten Faktors 1. Wegen $9\cdot 2=1\underline{8}$ ist durch zweite Grundziffer des ersten Faktors 2.
Daraus folgt $821\cdot 9=7389$.

c) Wegen $4\cdot 8=32$ endet das Produkt auf die Grundziffer 2. Es bleibt der Übertrag 3. Wegen $4\cdot\underline{1}+3=7$ ist die dritte Grundziffer des ersten Faktors 1.
Daraus folgt $7618\cdot 4=30\,472$.

d) Wegen $6\cdot 2=1\underline{2}$ und $6\cdot 7=4\underline{2}$ könnte der zweite Faktor 2 oder 7 sein. Da das Produkt auf die Grundziffernfolge 42 endet, kann der zweite Faktor nur 7 sein.
Daraus folgt $64\,442:7=9206$,
also $9206\cdot 7=64\,442$.

e) Wegen $8\cdot 3=24$ endet das Produkt auf die Grundziffer 4. Wegen $8\cdot\underline{0}+2=2$ und $8\cdot\underline{5}+2=4\underline{2}$ könnte die dritte Grundziffer des ersten Faktors 0 oder 5 sein. Wegen $8\cdot 8=6\underline{4}$ und $4\neq 8$ entfällt die Grundziffer 0.
Daraus folgt $4853\cdot 8=38\,824$.

f) Wegen $\underline{5}\cdot 7=35$ ist der zweite Faktor 5. Wegen $5\cdot 27=13\underline{5}$ ist die dritte Grundziffer des Produkts 3.
Daraus folgt $6635:5=1327$,
also $1327\cdot 5=6635$.

g) Wegen $\underline{6}\cdot 4=24$ ist der zweite Faktor 6. Wegen $6\cdot 74=44\underline{4}$ ist die vierte Grundziffer des Produkts 4. Wegen $6\cdot\underline{5}+4=34$ und $6\cdot\underline{0}+4=4$ könnte die zweite Grundziffer des ersten Faktors 5 oder 0 sein. Wegen $2574\cdot 6=15\,444$ entfällt die 5.
Daraus folgt $2074\cdot 6=12\,444$.

h) Wegen $56\cdot 3=168$ kann der zweite Faktor nur 3 sein. Wegen $3\cdot\underline{9}=27$ kann die vierte Grundziffer des ersten Faktors nur 9 sein.
Daraus folgt $5629\cdot 3=16\,887$.

▲5▲ a) Das zweite Teilprodukt endet auf die Grundziffer 4. Wegen $\underline{2}\cdot 7=14$ ist die zweite Grundziffer des zweiten Faktors 2.
Daraus folgt $57\cdot 62=3534$.

b) Wegen $\underline{2}\cdot 95=190$ kann die erste Grundziffer des zweiten Faktors nur 2 sein.
Daraus folgt $95\cdot 23=2185$.

c) Das zweite Teilprodukt **6 endet auf die Grundziffer 6. Wegen $6\cdot\underline{1}=6$ und $6\cdot\underline{6}=36$ kann die zweite Grundziffer des ersten Faktors 1 oder 6 sein.
Wir erhalten zwei Lösungen

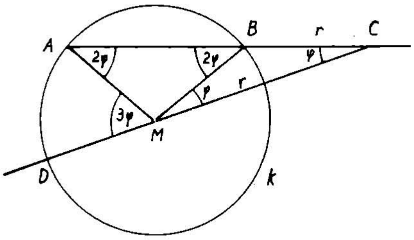
$41\cdot 36$	und	$46\cdot 36$
123		138
246		276
1476		1656

d) Das zweite Teilprodukt **6 endet auf die Ziffer 6. Wegen $7\cdot 3=21$ müßte das zweite Teilprodukt auf die Grundziffer 1 enden. Deshalb besitzt diese Aufgabe keine Lösung.

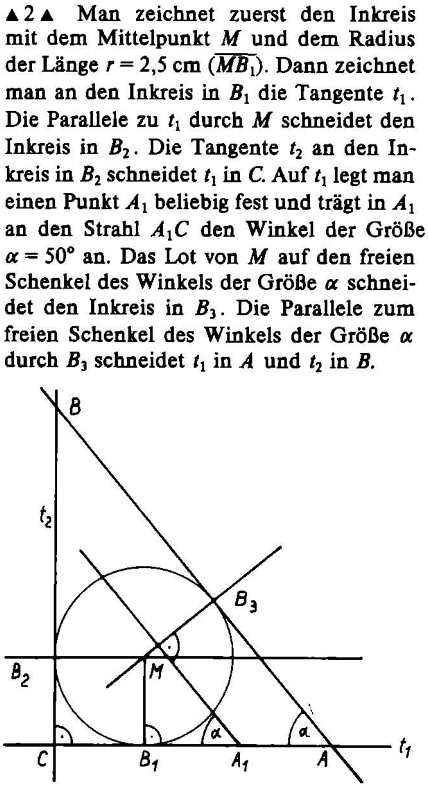
e) Das Produkt ****4 endet auf die Grundziffer 4. Deshalb endet auch das zweite Teilprodukt auf 2*** auf die Grundziffer 4 und lautet somit 2**4. Wegen $\underline{3}\cdot 8=24$ ist die zweite Grundziffer des zweiten Faktors 3.
Daraus folgt $728\cdot 43=31\,304$.

Lösungen zu den Aufgaben von Maik Mühle, Riesa
Heft 4/86, Seite 82

▲1▲ *MCB* ist ein gleichschenkliges Dreieck, daher ist $\sphericalangle BCM\cong\sphericalangle BMC$. Die Größe des Winkels sei mit φ bezeichnet. Die Größe des Winkels $\sphericalangle MBA$ beträgt dann 2φ (Außenwinkelsatz); die Größe des Winkels $\sphericalangle MAB$ beträgt ebenfalls 2φ (Dreieck *AMB* ist gleichschenklig).
Für die Größe des Winkels $\sphericalangle AMD$ gilt dann $\varphi+2\varphi=3\varphi$ als Außenwinkel des Dreiecks *AMC*, q. e. d.



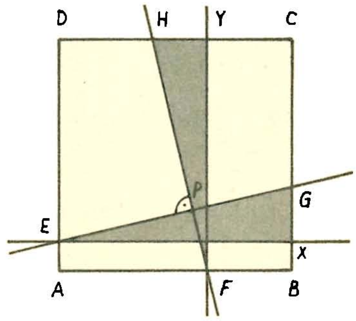
▲2▲ Man zeichnet zuerst den Inkreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius der Länge $r=2{,}5$ cm ($\overline{MB_1}$). Dann zeichnet man an den Inkreis in B_1 die Tangente t_1. Die Parallele zu t_1 durch M schneidet den Inkreis in B_2. Die Tangente t_2 an den Inkreis in B_2 schneidet t_1 in C. Auf t_1 legt man einen Punkt A_1 beliebig fest und trägt in A_1 an den Strahl A_1C den Winkel der Größe $\alpha=50°$ an. Das Lot von M auf den freien Schenkel des Winkels der Größe α schneidet den Inkreis in B_3. Die Parallele zum freien Schenkel des Winkels der Größe α durch B_3 schneidet t_1 in A und t_2 in B.



▲3▲ Man zeichnet durch E die Parallele zu $\overline{AB}$ und durch F die Parallele zu $\overline{BC}$. Diese schneiden $\overline{DC}$ in Y und $\overline{BC}$ in X. Man führt den Nachweis, daß die Dreiecke *EXG* und *FYH* kongruent sind:

(1) $\sphericalangle HYF\cong\sphericalangle EXG$ (rechter Winkel),
(2) $\overline{FY}\cong\overline{EX}$ (Quadratseite),
(3) $\sphericalangle HFY\cong\sphericalangle GEX$ (Winkel, deren Schenkel paarweise senkrecht aufeinander stehen, sind kongruent: $\overline{FH}\perp\overline{EG}$ und $\overline{FY}\perp\overline{EX}$).

Es folgt die Kongruenz der Dreiecke *EXG* und *FYH* (wsw).
Daraus folgt: $\overline{EG}\cong\overline{HF}$, q. e. d.

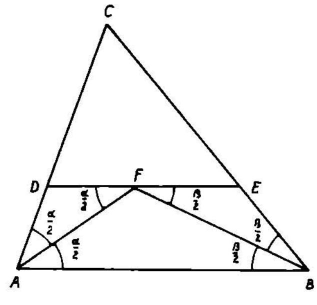


▲4▲ Wegen (2) kommen die Ziffern 2, 3, 5, 7 in Frage. Alle Zusammenstellungen (Variationen) mit den Ziffern 2, 3, 7 und 3, 5, 7 entfallen, da sie alle keine Primzahlen sind (Quersumme 12 bzw. 15!).
Die Ziffern 2 und 5 können nicht an erster bzw. letzter Stelle stehen, da sonst keine Primzahlen entstehen würden. Nun bleiben nur noch die Zahlenpaare 377; 773 und 337; 733 übrig. Da 377 keine Primzahl ist, sind 337 und 733 die einzig möglichen Telefonnummern.

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb
Heft 1/86, Fortsetzung

Ma 6 ■ 2645 Angenommen, die Schüler der Klasse 6a erreichten x kg Altpapier, die Schüler der Klasse 6b also $(2x-40)$ kg, die der Klasse 6c hingegen $(2x-40)\,\text{kg}:2=(x-20)\,\text{kg}$.
Das sind zusammen $(4x-60)$ kg. Nun gilt $4x-60=480$, $4x=540$, $x=135$.
Die Schüler der Klasse 6a sammelten 135 kg, die der Klasse 6b 230 kg, die der Klasse 6c 115 kg Altpapier.

Ma 6 ■ 2646 Wir halbieren die Innenwinkel $\sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle CBA$; die Halbierungslinien dieser Winkel mögen sich in F



schneiden. Wir zeichnen die Parallele zu $\overline{AB}$ durch F, die $\overline{AC}$ in D und $\overline{BC}$ in E schneide. Auf Grund der Konstruktion gilt $\sphericalangle DAF\cong\sphericalangle FAB$ und $\sphericalangle FAB\cong\sphericalangle DFA$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, also auch $\sphericalangle DAF \cong \sphericalangle DFA$. Deshalb ist das Dreieck AFD gleichschenklig, und es gilt $\overline{AD} = \overline{DF}$. Analog dazu gilt $\overline{BE} = \overline{FE}$, also auch $\overline{AD} + \overline{BE} = \overline{DE}$.

Ma 7 ■ 2647

a)

1	7	2
8		7
1	8	1

b)

49	0	1
0		0
1	0	49

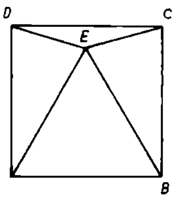
$G = 100$

c)

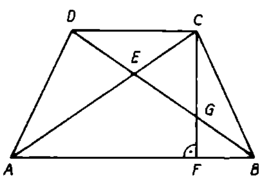
6	9	1
9		9
1	9	6

$S = 16$

Ma 7 ■ 2648 Winkel ABE hat die Größe 60°, Winkel ABC die Größe 90°; folglich hat Winkel CBE die Größe 30°. Wegen $\overline{BE} = \overline{BC}$ ist das Dreieck CBE gleichschenklig. Jeder der beiden Winkel BEC und BCE hat somit die Größe 75°. Also hat Winkel DCE die Größe 15° und somit Winkel CED die Größe $\varphi = 150°$.



Ma 7 ■ 2649 Winkel FBG habe die Größe φ; dann hat Winkel BGF die Größe $90° - \varphi$. Die Winkel BGF und EGC sind Scheitelwinkel; folglich hat Winkel EGC auch die Größe $90° - \varphi$. Wegen $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle DBA$ hat Winkel CAB die Größe φ, also hat Winkel ACF die Größe $90° - \varphi$. Somit gilt $\sphericalangle ECG \cong \sphericalangle EGC$, also auch $\overline{EC} \cong \overline{EG}$, d. h.,
Dreieck CEG ist gleichschenklig.



Ma 7 ■ 2650 $\overline{AQ}$ habe die Länge x, $\overline{RC}$ die Länge y, also $\overline{QD}$ die Länge $a - x$ und $\overline{DR}$ die Länge $a - y$; dann gilt für den Umfang des Dreiecks QRD

$$u_{QRD} = (a - x) + (a - y) + x + y$$
$$= 2 \cdot a = \frac{1}{2} \cdot u_{ABCD};$$

denn $\overline{QA} \cong \overline{QB}$ und $\overline{RP} \cong \overline{RC}$.

Ma 8 ■ 2651 Nach Voraussetzung gilt $a \in R$, $b \in R$, $a > 0$, $b > 0$ und $a \cdot b = 1$.
Es wird behauptet, daß stets gilt
$a + b \geqq 2$.

Aus $a \cdot b = 1$ folgt $b = \frac{1}{a}$.

Nun ist zu zeigen, daß $a + \frac{1}{a} \geqq 2$ ist.

Für alle rationalen Zahlen gilt
$(a-1)^2 \geqq 0$ bzw. $a^2 - 2a + 1 \geqq 0$,

$a^2 + 1 \geqq 2a | : a \; (a \neq 0)$, $a + \frac{1}{a} \geqq 2$,

w. z. b. w.

Ma 8 ■ 2652
Offenbar ist ausschlaggebend, wieviel Fruchtfleisch zur Verfügung steht. Das beträgt bei der großen Apfelsine

$V = \frac{1}{6}\pi d^3$; $V = \frac{1}{6}\pi \cdot 10^3\,\text{cm}^3$;
$V = 523{,}6\,\text{cm}^3$.
7 kleine Apfelsinen haben insgesamt ein Volumen von

$V = 7 \cdot \frac{1}{6}\pi \cdot 5^3\,\text{cm}^3$;

$V = 7 \cdot \frac{1}{6}\pi \cdot 125\,\text{cm}^3$; $V = 458{,}1\,\text{cm}^3$.

Es ist also besser, die eine große Apfelsine zu kaufen.

Ma 8 ■ 2653 Angenommen, man erhält x 20-Mark-Scheine, y 50-Mark-Scheine und z 100-Mark-Scheine ausgehändigt;
dann gilt
$20x + 50y + 100z = 500$ und $z < y < x$.
Daraus folgt weiter

$$2x + 5y + 10z = 50,$$
$$5y = 50 - 10z - 2x,$$
$$y = 10 - 2z - \frac{2x}{5}.$$

Da x, y und z natürliche Zahlen sind, muß x ein Vielfaches von 5 sein.
Aus $x = 5$
folgt $y = 8 - 2z = 2(4 - z)$,
also $z = 1$, 2 oder 3.
Aus $x = 10$
folgt $y = 6 - 2z = 2(3 - z)$,
also $z = 1$ oder 2.
Aus $x = 15$
folgt $y = 4 - 2z = 2(2 - z)$,
also $z = 1$.
Wegen der Einschränkung $z < y < x$ besitzt diese Aufgabe drei Lösungen

x	y	z
5	4	2
10	4	1
15	2	1.

Man erhält entweder fünf 20-Mark-Scheine und vier 50-Mark-Scheine und zwei 100-Mark-Scheine oder zehn 20-Mark-Scheine und vier 50-Mark-Scheine und einen 100-Mark-Schein oder fünfzehn 20-Mark-Scheine und zwei 50-Mark-Scheine und einen 100-Mark-Schein.

Ma 8 ■ 2654 Bezeichnet man die Maßzahl der Länge der Quadratseite mit x, so ist $x + 1$ die Bezeichnung für die Maßzahl der Länge der Diagonalen in einem Quadrat mit der geforderten Eigenschaft.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt dann $(x+1)^2 = x^2 + x^2$ bzw. $x^2 - 2x - 1 = 0$.
Diese quadratische Gleichung hat nur eine positive Lösung, nämlich $x = 1 + \sqrt{2}$.
Der Flächeninhalt dieses Quadrates hat die Maßzahl $3 + 2\sqrt{2}$. Es gibt genau ein derartiges Quadrat; seine Seite ist etwa 2,41 cm lang; sein Flächeninhalt beträgt rund 5,83 cm².

Ma 9 ■ 2655 Es gilt

$$\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6} = \frac{2n + 3n^2 + n^3}{6}$$
$$= \frac{n}{6} \cdot (n^2 + 3n + 2) = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2).$$

Von den drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen n, $n+1$, $n+2$ ist genau eine durch 3 und wenigstens eine durch 2 teilbar. Deshalb ist das Produkt $n(n+1)(n+2)$ durch 6 teilbar und somit die Summe $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ für jede Belegung von n mit einer natürlichen Zahl ganzzahlig.

Ma 9 ■ 2656 Unter der Voraussetzung, daß eine beliebige natürliche Zahl n die Quersumme 33 hat, behaupten wir, daß es keine natürliche Zahl k mit der Eigenschaft $k^2 = n$ gibt. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, es gäbe ein solches k.
Da die Quersumme 33 durch 3 teilbar ist, müßte nach der bekannten Teilbarkeitsregel auch n und damit auch k^2 durch 3 teilbar sein; also gilt auch $3 | k$.
Aus $3 | k$ folgt $9 | k^2$, also $9 | n$. Wenn n durch 9 teilbar ist, so muß auch die Quersumme von n durch 9 teilbar sein. Nun gilt aber $9 \nmid 33$. Damit ist ein Widerspruch zur Annahme, es gäbe ein $k \in N$ mit $k^2 = n$, erreicht. Daraus folgt, daß die Annahme falsch, die Behauptung wahr ist, q. e. d.

Ma 9 ■ 2657
Wegen $31^2 = 961 < 1000$ gilt $n \geqq 32$.
Wegen $100^2 = 10\,000 > 999$ gilt
$2 \leqq k \leqq 3$, also wegen
$(2 \cdot 50)^2 = 10\,000 > 999$ gilt
$32 \leqq n \leqq 49$. Ferner gilt

$n^2 - (k \cdot n)^2 = 1000a + 100b + 10c + d - 1000d - 100c - 10b - a$,
$n^2(1 - k^2) = 999a + 90b - 90c - 999d$,
$n^2(1 - k^2) = 9 \cdot (111a + 10b - 10c - 111d)$. Analog dazu gilt
$n^2(1 + k^2) = 11 \cdot (91a + 10b + 10c + 91d)$.
Für $k = 2$ gilt demnach
$n^2 \cdot (-3) = 9(111a + 10b - 10c - 111d)$
und
$n^2 \cdot 5 = 11(91a + 10b + 10c + 91d)$.
Für $k = 3$ gilt
$n^2 \cdot (-8) = 9(111a + 10b - 10c - 111d)$
und
$n^2 \cdot 10 = 11(91a + 10b + 10c + 91d)$.

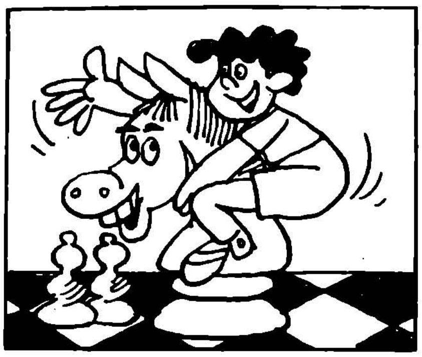
Daraus folgt weiter, daß n sowohl durch 3 als auch durch 11 teilbar sein muß. Deshalb existiert genau eine Lösung, nämlich $n = 33$,
und es gilt $n^2 = 1089$
und $(3 \cdot 33)^2 = 99^2 = 9801$.

Ma 9 ■ 2658 Der Flächeninhalt des dem gleichschenkligen Dreieck ABC einbeschriebenen Sechsecks $DEFGHK$ beträgt 62,5 % des Flächeninhalts des Dreiecks ABC.

Ma 10/12 ■ 2659

$$\sqrt{99 + 70\sqrt{2}} - \sqrt{99 - 70\sqrt{2}}$$
$$= \sqrt{49 + 70\sqrt{2} + 50} - \sqrt{49 - 70\sqrt{2} + 50}$$
$$= \sqrt{(7 + 5\sqrt{2})^2} - \sqrt{(7 - 5\sqrt{2})^2}$$
$$= 7 + 5\sqrt{2} - 7 + 5\sqrt{2}$$
$$= 10\sqrt{2}$$

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. A. N. Kolmogorow
(1) a) 8; b) 6; c) 9; d) 0. .
(2) n^m.



Schach – beliebt bei jung und alt

Die 526 Einsendungen zum 3. *alpha*-Schachwettbewerb erbrachten wiederum den Beweis, daß das Schachspiel gleichermaßen bei jung und alt beliebt ist. Zu den jüngsten Teilnehmern zählten T. Körner (Dingelstädt), A. Märker (Greifswald), beide 6 Jahre, R. Anschütz (Dorndorf) und L. Starck (Dresden), beide 8 Jahre. Axel Märker erlernte das Schachspiel bereits mit vier Jahren. Er beteiligt sich aktiv in der AG Schach der *Käthe-Kollwitz*-OS Greifswald. Als älteste Teilnehmer konnten wir S. Hase (Zwickau), 83 Jahre, und O. Götz (Eisenach), 90 Jahre, begrüßen.
Wir danken allen Einsendern herzlich für ihr Mitmachen!

Lösungen

▲1▲	1. T:e5+	T:e5/S:e5/g5	
	2. Sf4	matt	(1 P.).
▲2▲	1. D:f7+	K:f7	
	2. Lc4	matt	(1 P.).
	1. ...	Kh8	
	2. Dg7/Lg7/Lg5	matt	(1 P.).
▲3▲	1. Le5	S:e5	
	2. b4	matt	(2 P.).
	1. ...	beliebig	
	2. Lc7	matt	(1 P.).

Der von mehreren Einsendern angegebene Versuch 1. Ld4 (2. Lb6 matt) wird durch die schwarze Verteidigung 1. ... Lb7 pariert.

▲4▲	1. Sg7	g4	
	2. Dd8	matt	(1 P.).
	1. ...	Lg4	
	2. De1	matt	(1 P.).
	1. ...	Lf7	
	2. Sf5	matt	(1 P.).
	1. ...	beliebig	
	2. Dh5	matt	(1 P.).

In der Aufgabe von *H. le Grand* („Probleemblad“, 1953) scheitern die Verführungen 1. Sf6 und 1. Sg3 aufgrund weißer Selbstbehinderung an 1. ... g4 bzw. 1. ... Lg4.

▲5▲	1. Dg8	D:c6+	
	2. S:c6	matt	(1 P.).
	1. ...	D:e7+	
	2. L:e7	matt	(1 P.).
	1. ...	De6	
	2. De:6	matt	(1 P.).
	1. ...	beliebig	
	2. Sf5	matt	(1 P.).

Dieser preisgekrönte Zweizüger (*Freie Presse*, 1969) stammt von dem ersten DDR-Meister im Problemschach, *Fritz Hoffmann* (Weißenfels).

▲6▲	1. D:f6	g:f6	
	2. Lh6+	Kg8	(2 P.).
	3. Te4	d4/d:e4/f5	
	4. Se7	matt	(2 P.).
	3. ...	D:c6/Db7/Ta7	
	4. Tg4	matt	(2 P.).

Das Damenopfer, welches die Mattdrohung 2. D:f7 beinhaltet, erzwingt die Öffnung der schwarzen Stellung für das Läuferschach. Mit dem eleganten Opferzug 3. Te4, der gleichzeitig das Feld e7 für den Springer freimacht, wird die unparierbare Doppeldrohung 4. Se7 und 4. Tg4 aufgestellt.

▲7▲	1. Tg1	Lg6	
	2. T:g6	a6/a5	
	3. T:a6/Ta6	matt	(2 P.).
	1. ...	a6/a5	
	2. Ta1	L beliebig	
	3. T:a6/T:a5	matt	(2 P.).
	1. ...	Lf5	
	2. Tg8+	Lc8	
	3. T:c8	matt	(2 P.).

Interessant ist es, welche verborgene Widerlegungen in dieser sparsamen Stellung von *W. von Holzhausen* (*Deutsches Wochenschach*, 1910) stecken.
Zum Beispiel: 1. Th1? Lg8!; 1. Ta1? Ld3 2. b6? La6!; 1. b6? a5!

▲Z▲	1. Tb7 (droht	2. Sd4+	e:d4
	3. Tb5	matt).	
	1. ...	Sg4	
	2. Tb5	c2	
	3. L:e4	matt.	
	1. ...	c2	
	2. Tbb6	Sg4	
	3. L:e4	matt.	

Die Versuche 1. Tc7 und 1. Td7 führen nach 1. ... c2 bzw. 1. ... Sg4 infolge weißer Selbstbehinderung (der weiße Turm verstellt jeweils dem weißen Läufer auf a8 den Weg nach e4) nicht zum Ziel. Dieses Meisterwerk der Problemkunst komponierte der sowjetische Großmeister für Schachkompositionen Lew I. Loschinski.

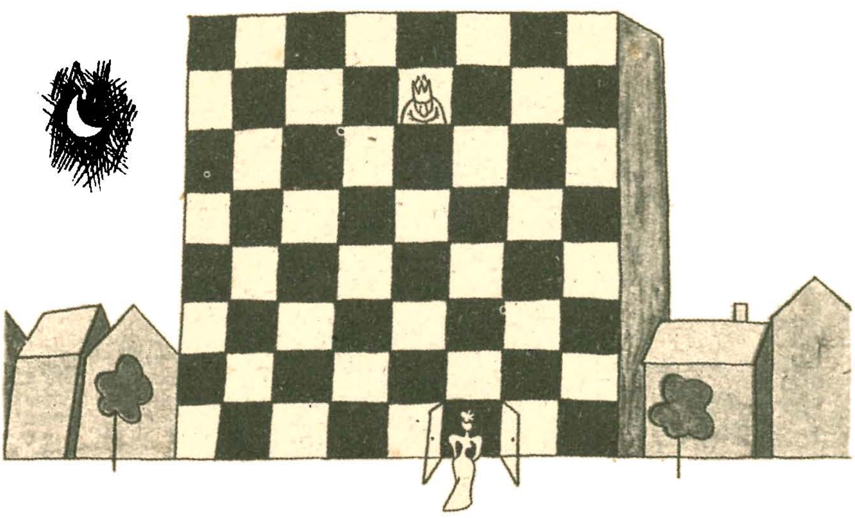
Die volle Punktzahl erreichten 163 Einsender. Unter ihnen sowie unter jenen bis zum Alter von 14 Jahren, welche die Aufgaben Nr. 1 bis 4 richtig gelöst hatten, wurden folgende Gewinner ermittelt:
Michael Engel (Thal),
Anne Heyl (Eisenach),
Tanja Kruscha (Greifswald),
Marco Möller (Rotterode),
Michael Potthoff (Dresden).
Weiterhin wurden Preise unter allen Einsendern verlost, die zumindest eine Aufgabe korrekt gelöst hatten:
Petra Gollewsky (Leipzig),
Jana Herrmann (Schorrsow),
Udo Jungnickel (Geithain),
Reiner Mönwald (Sömmerda),
Torsten Schulze (Dahme).
Die zwei Buchpreise für die Teilnehmer, welche alle Aufgaben einschließlich der Zusatzaufgabe richtig gelöst haben, gehen an:

Johannes Böhmer (Görlitz) und
Hartmut Völkel (Pretzschendorf).
Allen Gewinnern unseren herzlichen Glückwunsch!

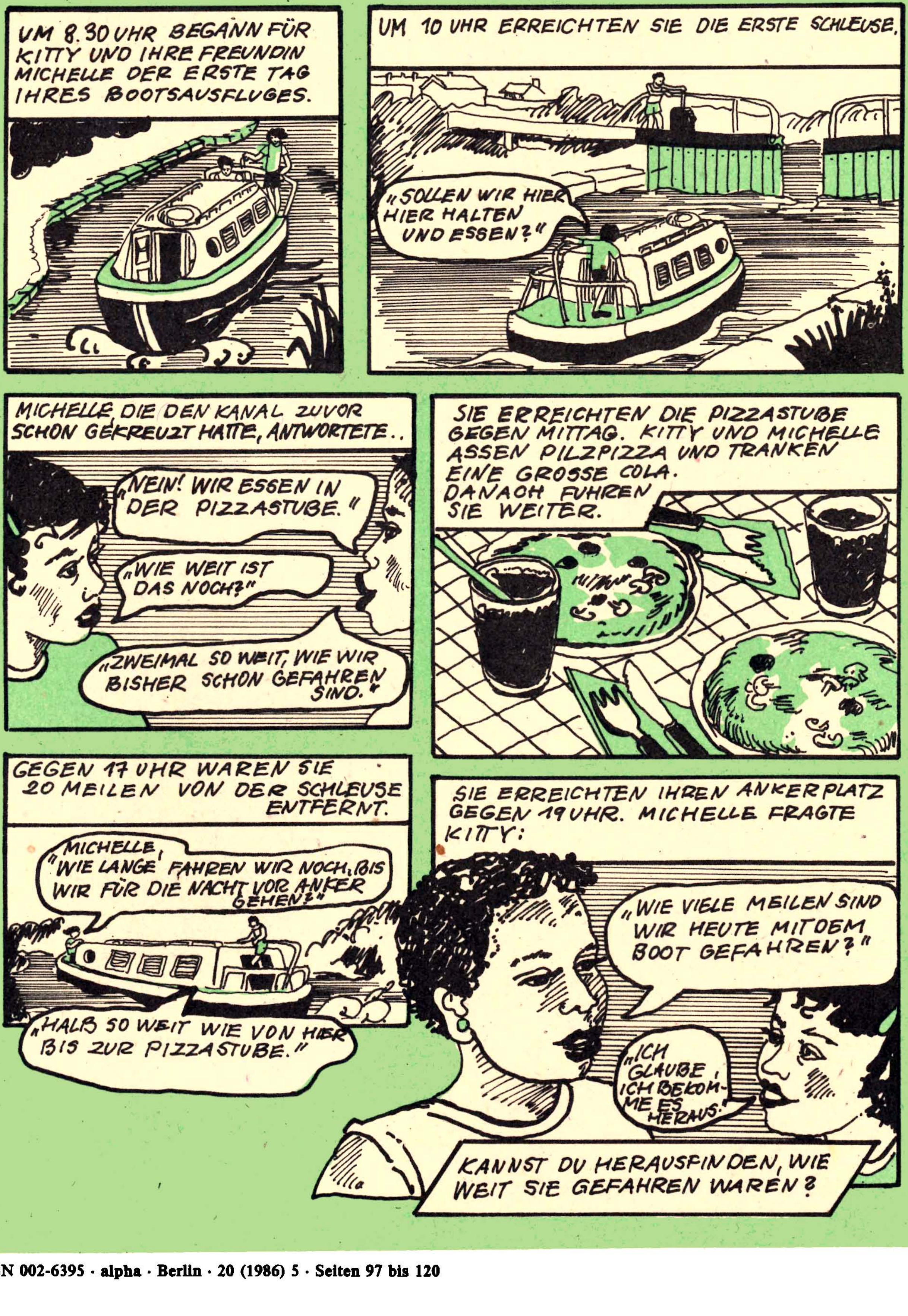
„Es hat mir sehr großen Spaß gemacht“ (S. Hoffmann, Potsdam).
„Ich befasse mich schon seit 40 Jahren mit dem Problemschach, aber dieses Turnier hat mir einen ganz besonderen Genuß verschafft“ (K. Pohlheim, Leipzig).
„Macht weiter so, ich freue mich schon auf den nächsten Schachwettbewerb“ (M. Kühne, Ortrand).
Diese und ähnliche Fazite zogen viele Teilnehmer, ob sie nun schon zum dritten oder erst zum ersten Mal dabei waren, ob sie nun alle oder nur einige Aufgaben lösten.
„Ein Schachwettbewerb in dieser Zeitschrift – das war, ist und bleibt eine gute Idee!“ (M. Würker, Mülsen St. Micheln)

Dieser Idee bleibt die *alpha*-Redaktion treu und startet in Heft 6/1986 den 4. Schachwettbewerb. Alle *alpha*-Leser sind dazu wiederum recht herzlich aufgefordert mitzumachen!

J. Lehmann/H. Rüdiger



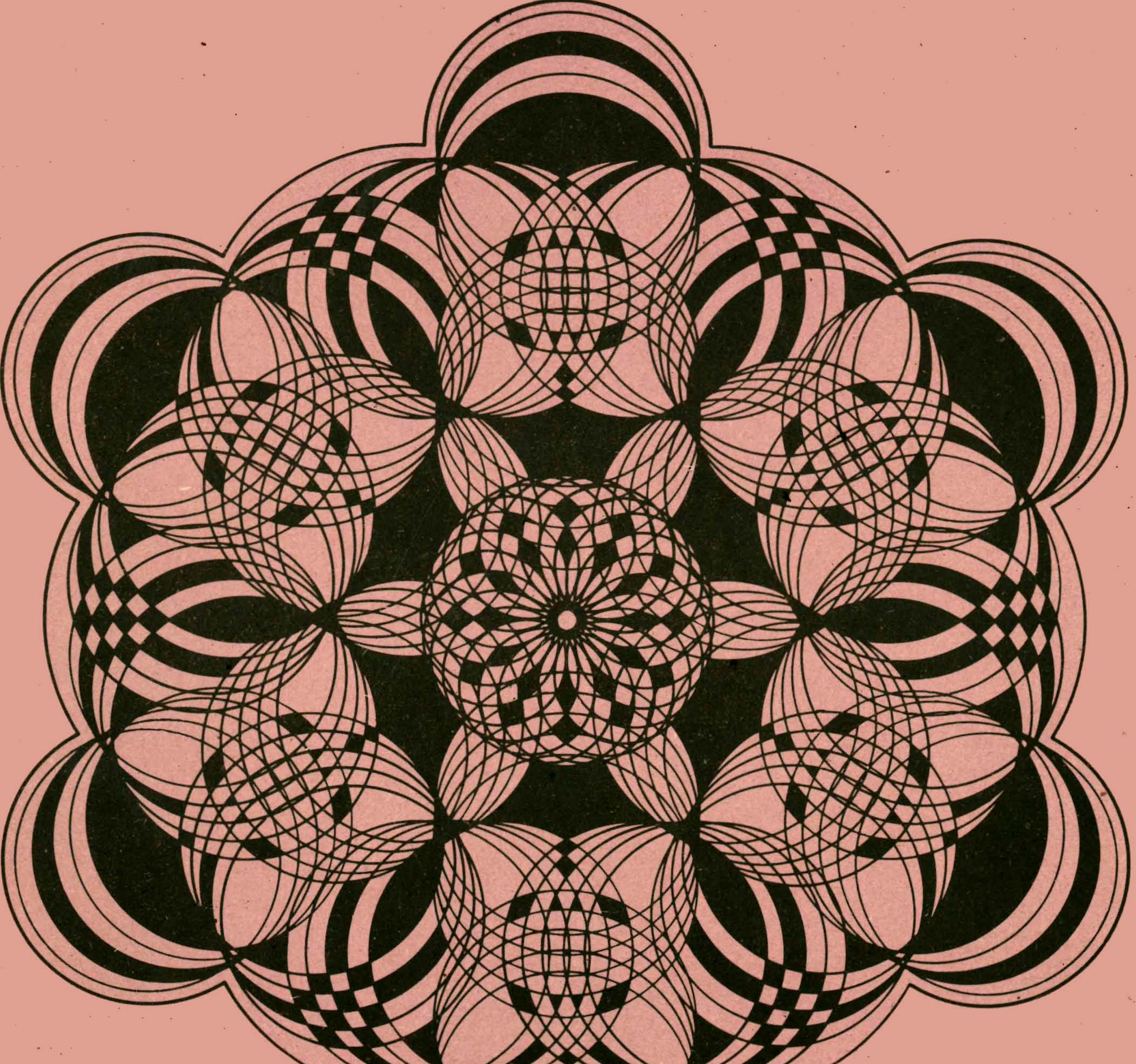
LOGISCHE KITTY



ISSN 002-6395 · alpha · Berlin · 20 (1986) 5 · Seiten 97 bis 120

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



6

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
20. Jahrgang 1986
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold
Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
1086 Berlin, Krausenstr. 50, PSF 1213
Anschrift der Redaktion:
7027 Leipzig, PSF 14
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Vignette, mittl. Spalte, H. Teske, Leipzig (S. 123); Rolf F. Müller, Gera (S. 128); Louis Rauwolf aus Eulenspiegel, Berlin (S. 130); aus Krokodil, Moskau (S. 131); Bildarchiv Red. *alpha* (S. 133); V. Heinz, aus DLZ (S. 136)

Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage aus der math. Schülerzeitschrift Lapok, Budapest

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 16. August 1986
Auslieferungstermin: 10. Dezember 1986

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

[1] bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben geeignet ab der angegebenen Klassenstufe

Minimum – Wege – Strukturen

1. Einführung

Eines der mathematischen Erkenntnisse, denen wir recht früh im Leben begegnen, besagt, daß die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten die Strecke ist. Jeder andere Weg hat eine größere Länge. Will man nun dieses Ergebnis verallgemeinern und den kürzesten Weg bestimmen, der drei oder vier oder mehr Punkte verbindet, so wird das Problem schnell komplizierter. Derartige Aufgaben sind jedoch wichtig, wie z. B. beim Bau von Straßen, die eine Anzahl von Städten miteinander verbinden, oder bei der Verlegung von Pipelines oder Kabeln, die eine Anzahl von Zentren versorgen sollen. In all diesen Fällen sind die Baukosten proportional zur Länge.

Unsere Betrachtungen wollen wir im folgenden auf den Wegebau beschränken und die Eigenschaften der Minimum-Wege-Strukturen herleiten, die eine Anzahl von Städten verbinden. Sind diese z. B. durch irgendein Wegesystem (siehe Bild 1a) miteinander verknüpft, so steht fest, daß diese Minimum-Wege-Strukturen keine sich krümmenden Wege haben können, da jeder gekrümmte Wegabschnitt durch eine kürzere geradlinige Wegelänge ersetzt werden kann (siehe Bild 1b).

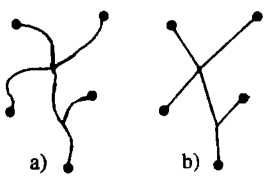
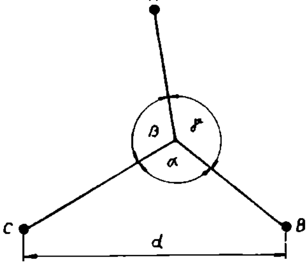


Bild 1 a) b)

2. Drei-Städte-Strukturen

Um einen weiteren Einblick in das Problem zu erhalten, untersuchen wir zunächst die Drei-Städte-Struktur. Die einfachste Aufgabe entsteht, wenn alle Städte A, B und C an den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks (siehe Bild 2) mit den Seiten der Länge d angebracht sind und die kürzeste Verbindung zwischen den drei Punkten gesucht wird.

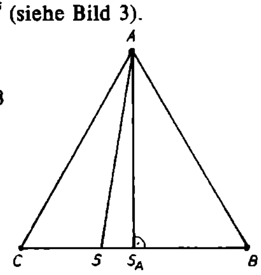
Bild 2



Nun gibt es verschiedene Möglichkeiten, die drei Städte durch Strecken zu verbinden. Man könnte

- entlang zweier Seiten gehen mit $l = 2d$, oder
- entlang dreier geradliniger Wege, die sich in einem Punkt S treffen mit verschiedenen Winkeln α, β und γ zwischen den Wegen (siehe Bild 2) oder
- entlang einer Seite und einem Weg, der einen beliebigen Punkt dieser Seite mit dem gegenüberliegenden Punkt verbindet, also A, B und C mit S auf $\overline{BC}$ (siehe Bild 3).

Bild 3



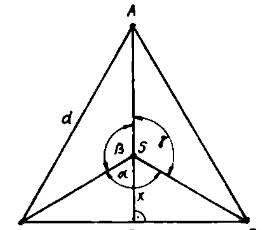
Die Mindestlänge in diesem Fall findet man, wenn S auf S_A, dem Mittelpunkt von $\overline{CB}$, liegt. Dies ergibt $l = \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) d = 1{,}866 \ldots d$, was deutlich kürzer als die Zweiseitenlösung mit $l = 2d$ ist.

Betrachten wir jetzt das Drei-Wege-System mit S auf $\overline{AS_A}$ (siehe Bild 4). Mit $\overline{SS_A} = x$ ist dann die gesamte Länge l des Weges angegeben mit

$$l = \overline{AS} + 2 \cdot \overline{CS},$$

$$l = \left(\frac{1}{2} d\sqrt{3} - x\right) + 2\sqrt{x^2 + \frac{1}{4} d^2}. \qquad (1)$$

Bild 4



Diese Länge wird minimiert, wenn man differenziert

$$\frac{dl}{dx} = -1 + 2x\left(x^2 + \frac{1}{4} d^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 0,$$

$$x = \frac{1}{6}\sqrt{3} \cdot d.$$

Folglich ist $\alpha = 120°$ und wegen der Symmetrie $\beta = \gamma = 120°$.

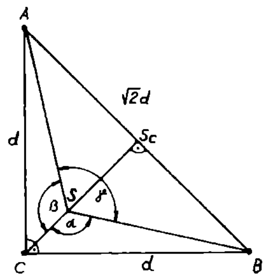
Der Wert von x, in (1) eingesetzt, ergibt das Minimum von

$$l = \sqrt{3} \cdot d = 1{,}73 \ldots d.$$

Dieses Ergebnis beweist nicht, daß dies wirklich der absolute Mindestweg ist, aber es zeigt, daß dies wohl der Fall sein kann. Dieser Mindestweg ist sicherlich kürzer als irgendein anderer mit S an einem anderen Punkt der Winkelhalbierenden des Dreiecks. Weitere Analysen sind notwendig, um zu beweisen, daß es *das* wahre Minimum ist.

Bevor wir einen allgemeinen Beweis für das Drei-Städte-Problem bringen, wollen wir ein weiteres Beispiel untersuchen und die Städte an den Ecken eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks mit den Seiten der Länge d und $\sqrt{2}\, d = 1{,}41 \ldots d$ wie in Bild 5 betrachten. Dann zeigen ähnliche Argumente, die für das gleichseitige Dreieck dargelegt wurden, daß die Lage von S entlang der Winkelhalbierenden $\overline{CS_c}$ sein könnte, wobei S_c *der Mittelpunkt von* $\overline{AB}$ ist. Wir erhalten wieder einen allgemeinen Ausdruck für die gesamte Länge l des Weges entlang $\overline{CS_c}$ als eine Funktion von $x = \overline{SS_c}$ und minimieren l mit Bezug auf x. Wir finden wiederum $\alpha = \beta = \gamma = 120°$.

Bild 5

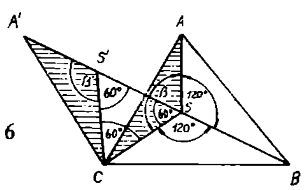


Aufgabe

▲1▲ Berechnen Sie in diesem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck die Mindestweglänge!

In diesem Stadium können wir vermuten, daß bei irgendeiner Anordnung von drei Städten der Mindestweg diese 120°-Eigenschaft hat. Zum Beweis betrachtet man ein beliebiges Dreieck ABC mit einem *Wege*-System der Länge l, das von drei Geraden, die sich in S treffen, gebildet wird (siehe Bild 6).

Bild 6



Dann dreht man das schraffierte Dreieck entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn um C und um 60°, so daß A jetzt auf A' und S auf S' abgebildet werden. Dann ist $\overline{S'C} = \overline{SC}$ und $\sphericalangle S'CS = 60°$, und $\triangle CSS'$ ist ein gleichseitiges Dreieck. Jetzt ist

$$l = \overline{AS} + \overline{BS} + \overline{CS} = \overline{A'S'} + \overline{S'S} + \overline{BS},$$

da nach der Definition $\overline{A'S'} = \overline{AS}$ und wegen des gleichseitigen Dreiecks CSS' auch $\overline{S'S} = \overline{CS}$ gilt. Nun sind A' und B feste Punkte. Da S beliebig verändert werden kann, wird $l = \overline{A'S'} + \overline{SS'} + \overline{SB}$ minimiert, wenn $\overline{A'B}$ eine gerade Linie ist (siehe Bild 7). In Bild 7 ist $\alpha = \sphericalangle CSB$, und $S'SB$ ist eine gerade Linie. Dann gilt

$$\alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ. \qquad (2)$$

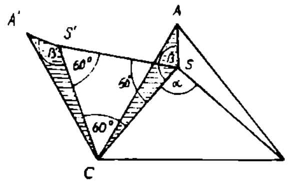


Bild 7

Unter Verwendung der Bezeichnung in Bild 7 ergibt sich demzufolge

$\beta = \beta'$ durch Definition,
$\beta = 180^\circ - 60^\circ$, da $A'B$ eine gerade Linie ist, und
$\beta = 120^\circ$. (3)

Schließlich folgt aus (2) und (3) $\gamma = 360^\circ - \alpha - \beta = 120^\circ$. Auf diese Weise sind die drei 120°-Winkel eine allgemeine Eigenschaft des Mindestweges, der A, B und C verbindet, w.z.b.w.

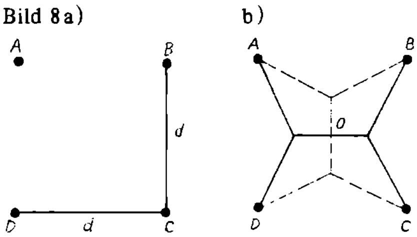
Dieser Beweis ist jedoch nur gültig, wenn die Winkel der Dreiecke kleiner oder gleich 120° sind und wenn S innerhalb oder auf dem Dreieck liegt. Bei Dreiecken mit einem Winkel von 120° beträgt die Mindest-Wege-Länge die Summe der zwei kürzesten Seiten des Dreiecks, d.h. derjenigen, die dem größten Winkel anliegen. Dieses Ergebnis kann auch für Dreiecke mit einem Winkel, der größer als 120° ist, bewiesen werden.

Zusammengefaßt: In einem Dreieck mit keinem Innenwinkel größer als 120° gibt es einen Mindestweg, der durch drei Linien gebildet wird, die sich im Punkt S innerhalb des Dreiecks unter einem Winkel von 120° treffen. Alle anderen Dreiecke haben einen Mindestweg, der durch die beiden dem größten Winkel des Dreiecks anliegenden Seiten gebildet wird.

3. Viel-Städte-Strukturen

Betrachten wir zuerst das Vier-Städte-Problem. Die vier Punkte sollen mit Seiten der Länge d quadratisch angeordnet sein (siehe Bild 8a). Auf Grund der Symmetrie könnte man annehmen, daß der Mindestweg eine x-Struktur mit der Länge $l = 2\sqrt{2}\cdot d$ hat. Wir wissen jedoch, daß der Wegeschnittpunkt aus drei Wegen unter einem Winkel von 120° bestehen muß. Infolgedessen sind die einzig möglichen Lösungen die zwei in Bild 8b gezeigten. In beiden Fällen treffen sich die Linien, sowohl die durchgezogenen als auch die gestrichelten, unter Winkeln von 120°.

Bild 8a) b)



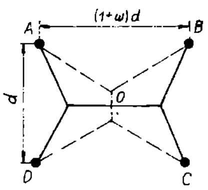
Aufgabe

▲2▲ Berechnen Sie die Länge dieser beiden Wege!

Das Ergebnis ist also kürzer als die X-Struktur der Länge $l = 2\sqrt{2}\cdot d = 2{,}82\ldots d$. Es wäre nun interessant zu ermitteln, wie sich die Minimum-Wege-Strukturen verändern, wenn die Städte rechteckig mit $\overline{AD} = d$ und $\overline{AB} = (1+\omega)\cdot d$ angeordnet sind.

Ist $0 < \omega < (\sqrt{3} - 1)$, haben die zwei Strukturen in Bild 9 verschiedene Länge. Die gestrichelte Länge nennt man ein relatives Minimum und die andere ein absolutes Minimum.

Bild 9



Aufgabe

▲3▲ Berechnen Sie die Länge beider Wege!

Erreicht ω den Wert $\sqrt{3} - 1$, so treffen sich die gestrichelten Drei-Wege-Schnittpunkte in 0, und es ist keine Minimum-Wege-Struktur mehr. Wir bilden den Weg mit der kürzeren Länge, indem wir $\overline{A0}$ und $\overline{D0}$ durch drei Wege, die sich unter den Winkeln von 120° treffen, ersetzen. Diese Struktur ist dann das absolute Minimum. Ist $\omega > \sqrt{3} - 1$, gibt es ebenfalls nur einen Mindestweg.

Aufgabe

▲4▲ Berechnen Sie die absolute Mindestlänge des Weges in einem Rhombus $ABCD$ mit $\alpha = 60^\circ$!

4. Seifenfilme

Will man nun eine Lösung finden, die auf eine beliebige Anzahl von Punkten angewandt werden kann, so helfen uns die Eigenschaften von Seifenfilmen. Ein Seifenfilm hat die Eigenschaft, daß seine Energie proportional zu seiner Fläche ist. Es wird sich z.B. ein Seifenfilm, der durch einen Kreisring begrenzt ist, im Gleichgewicht nicht ausbauchen, sondern die kleinste Oberfläche bilden, nämlich die durch den Kreisring begrenzte Fläche.

Um diese Minimum-Flächen-Eigenschaft für die Lösung unserer Minimum-Wege-Strukturen zu benutzen, müssen wir die Minimum-Flächen-Eigenschaft in eine Minimum-Wege-Eigenschaft umwandeln. Dazu wollen wir uns erst dem einfachsten Problem zuwenden, dem Minimum-Weg, der zwei Punkte verbindet. Betrachtet man einen Seifenfilm, der sich zwischen zwei parallelen klaren Plexiglasplatten befindet und von zwei Nadeln begrenzt wird, die senkrecht zu diesen Platten stehen, dann ist auch der Film infolge der Symmetrie senkrecht zu diesen Platten. Er hat die Form eines Bandes mit konstanter Breite, die gleich dem Abstand zwischen den Platten ist. Seine Fläche ist proportional zu seiner Länge, und wenn er ins Gleichgewicht kommt, hat er seine kleinste Fläche und damit auch seine kleinste Länge. Auf diese Weise endet das Band mit der geradlinigen Struktur wie in Bild 10.

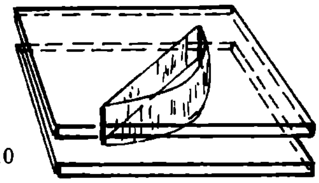


Bild 10

(Die gekrümmte Oberfläche zeigt einen Seifenfilm, der sich nicht im Gleichgewicht befindet.)

Die analoge Lösung kann mit der gleichen Begründung auf jede beliebige Anordnung von Nadeln und Punkten angewandt werden. Die Seifenfilm-Lösung zu dem Vier-Städte-Problem wird in Bild 11 gezeigt.

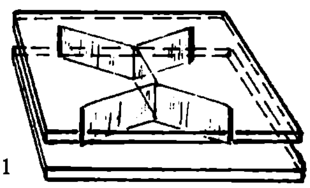


Bild 11

Wir haben gesehen, daß das Vier-Städte-Problem zwei Minimum-Strukturen haben kann. Um das absolute Minimum zu bestimmen, müssen wir die Länge eines jeden Weges berechnen und denjenigen mit der kürzesten Länge unter Verwendung der 120°-Eigenschaft bestimmen. Bei Problemen mit vielen Städten kann es viele Minimum-Strukturen geben. Diese findet man, indem man wieder Seifenfilme zwischen zwei Platten erzeugt. Man taucht die Platten unter verschiedenen Winkeln in ein Bad mit Seifenlösung, oder man stört das Gleichgewicht des Seifenfilms, indem man ihn in eine andere Gleichgewichtsstruktur bläst. Es gibt aber keine einfache analytische Methode, um alle Minimum-Strukturen zu bestimmen.

Ein interessantes Beispiel, wie man drei verschiedene Minimum-Strukturen erhält, zeigt uns die Aufgabe, den Minimum-Weg zu suchen, der sechs Städte verbindet, die in den Eckpunkten eines regelmäßigen

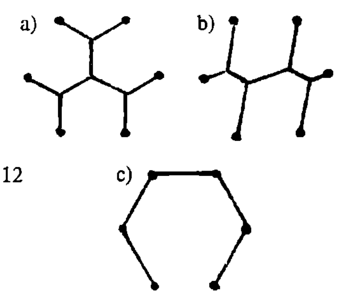


Bild 12

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Jonas Kubilius

Seit 1958 Rektor der Staatlichen V.-Kapsukas-Universität Vilnius (Litauische SSR), Prof. für Mathematik

▲2721▲ Für welche Primzahlen p ist die Zahl $p^4 - 5p^2 + 4$ durch 360 teilbar?

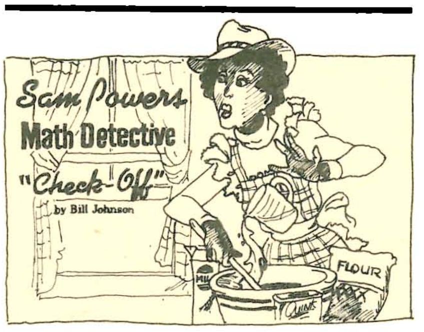
Sechsecks angeordnet sind. Die drei Strukturen, die unter Benutzung von Seifenfilmen leicht entstehen, sind in Bild 12 gezeigt.
Da die Seiten des Sechsecks die einheitliche Länge d haben, können die Längen der Minima unter Benutzung der 120°-Eigenschaft berechnet werden.

Aufgabe

▲5▲ Berechnen Sie die Länge der Mindestwege in den drei Wegestrukturen des Bildes 12!
Die Struktur der kleinsten Länge ist in diesem Fall Bild 12c. In anderen Strukturen kann es jedoch auch einer der inneren Wege sein.

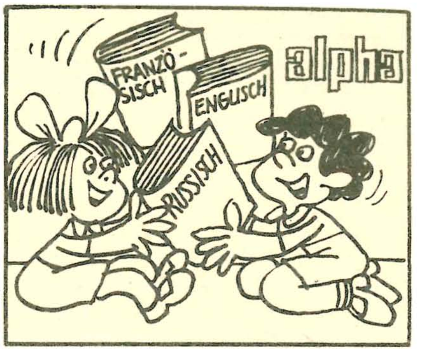
Bild 13

Zum Schluß wollen wir nun diese Methode an einem praktischen Beispiel zeigen. Die Städte London, Bristol, Manchester, Glasgow und Aberdeen sollen durch die kürzesten Wege verbunden werden. Es ist notwendig, eine Karte von Britannien auf eine der parallelen Plexiglasplatten zu zeichnen und bei diesen Städten Nadeln senkrecht zwischen den Platten anzubringen. Nachdem man die Platten in eine Seifenlösung getaucht hat, erhält man die Wege-Struktur, wie sie in Bild 13 gezeigt ist, mit einem Drei-Wege-Punkt östlich von Glasgow und einem südlich von Manchester. Bei dieser Aufgabe gibt es nur eine Minimum-Wege-Struktur. *Cyril Isenberg*



Die Detektivin Sam hatte ihren freien Tag und war gerade dabei, für ihre Freundin Geburtstagstörtchen zu backen. Es war ein ruhiger Tag, bis Sam den Ruf hörte: „Halt! Haltet ihn! Ein Dieb!" Sam öffnete das Küchenfenster und sah gerade noch, wie ein Mann um die Häuserecke verschwand. Sie rannte zur Tür.
Ein Auto mit vier jungen Männern hielt draußen an. Die vier Teenager halfen einer alten Frau beim Aufstehen.
„Er entriß mir meine Handtasche", schluchzte die Frau. „Als ich um Hilfe rief, schlug er mich nieder und rannte weg."
„Wir sahen den Kerl um die Ecke...", sagte einer der jungen Männer. „Das mußte er sein", fügte ein anderer hinzu. „Er rannte in ein Haus auf dieser Seite der Straße – aber in welches Haus?"
Die vier begannen alle gleichzeitig zu reden. Dann unterbrach sie Sam. „Moment mal! Laßt uns um die Ecke gehen und Haus für Haus ansehen!"
Es gab sechs Häuser auf dieser Seite des Blocks. Alle sechs hatten ungerade Hausnummern von 21 bis 31.
„Es war kein Haus am Ende der Reihe", sagte der Fahrer. „Richtig", fügte ein anderer junger Mann hinzu. Er zeigte auf Nr. 21. „Aber es hatte eine rote Tür wie jenes Haus." „Es stand ein Baum davor", sagte ein anderer. „Und oben war ein Fenster offen", sagte der vierte.
Jetzt war ein Streifenwagen eingetroffen. Sam und die Polizisten sahen die Häuserreihe entlang. Die Häuser Nr. 21, 25 und 29 hatten rote Haustüren. Vor Nr. 27, 29 und 31 standen Bäume. In Nr. 23, 27 und 29 standen oben Fenster offen.
„Es ist zu verwirrend", sagte einer der Polizisten. „Wir müssen jedes Haus durchsuchen." „Vielleicht nicht", sagte Sam. Sie holte ein Notizbuch hervor und entwarf schnell eine Tabelle. „Wir setzen ein Zeichen unter jedes Haus für jedes zutreffende Merkmal", sagte Sam. „Wenn wir Glück haben, finden wir ein Haus mit allen vier Merkmalen."
Verwende Sams System, und suche das Haus, in dem sich der Dieb versteckt hält!

Haus Nr.	21	23	25	27	29	31
Nicht am Ende						
Rote Tür						
Baum davor						
Offenes Fenster						



▲1▲ An uncle came to visit his nieces. Before leaving, he gave them a certain number of dollars, suggesting that the eldest get half the amount, the middle get a fourth, and the youngest get a fifth. The children tried to divide the money, but they didn't succeed because of the fractions. When their dad lent them a dollar, they carried out the division according to the fractions suggested by their uncle, and they even paid back one dollar to their dad. What "certain number of dollars" would fit these requirements?

▲2▲ Un photographe demande 3 Fr. pour le développement d'un film noir/blanc, puis 0,80 Fr. pour le tirage de chaque photographie de format 9/13.
Un deuxième photographe développe gratuitement le film, mais le tirage de chaque photographie de même format coûte 0,90 Fr.
Mathieu désire faire développer un film de 20 poses et Amélie un film de 36 poses.
Où irais-tu à leur place? Combient vont-ils payer?

▲3▲ Решите пять „географических" ребусов (см. рисунок). В каждом ребусе одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным – разные.

Pseudozufallszahlen

Teil 2

Bei Glücksspielen in elektronischen Rechenanlagen benutzt man Pseudozufallszahlen: eine für den Benutzer scheinbar zufällig erzeugte (möglichst gleichmäßig verteilte) Zahlenfolge, die in der Rechenanlage jedoch nach einer vorgegebenen Vorschrift gebildet wird. Wie im ersten Teil (Heft 5/86) dargelegt wurde, können Pseudozufallszahlen beispielsweise als Elemente der Weyl-Folge $x_k = \{k\theta\}$ berechnet werden. Für irrationale Zahlen $\theta > 0$ ist die Weyl-Folge gleichmäßig verteilt, jedoch können irrationale Zahlen in Rechnern nicht dargestellt werden (vgl. *alpha* 2, 1985). Jede irrationale Zahl θ kann aber durch rationale Zahlen $\frac{p}{q}$ mit großem q approximiert werden, und die zugehörige Weyl-Folge besitzt dann „recht gute" Eigenschaften (siehe Heft 5/86). Ein Beispiel verdeutlicht noch einmal die Bildung dieser Folge. Es sei $\theta = \frac{5}{13}$, dann lauten die ersten Glieder der Weyl-Folge

$\frac{5}{13}, \frac{10}{13}, \frac{2}{13}, \frac{7}{13}, \frac{12}{13}, \frac{4}{13}, \frac{9}{13}, \frac{1}{13}, \frac{6}{13}, \frac{11}{13}, \frac{3}{13}, \frac{8}{13}, 0, \ldots$

Nach der Vorschrift $z_k = [6x_k + 1]$ lassen sich aus Pseudozufallszahlen x_k „Würfelzahlen" z_k berechnen. In unserem Beispiel sind dies

3, 5, 1, 4, 6, 2, 5, 1, 3, 6, 2, 4, 1, ...

Wie bereits bekannt, müssen sich diese Zahlen in diesem Beispiel nach $q = 13$ „Würfen" wiederholen.

In numerischen Experimenten hat sich die Weyl-Folge nicht immer als effektiv erwiesen. Besser ist häufig die

5. Holton-Folge

Es sei $B \in N, B \geqq 2$. Jede natürliche Zahl k läßt sich in eindeutiger Weise in der Form
$k = k_0 + k_1B + k_2B^2 + \ldots + k_rB^r$
darstellen, wobei $0 \leqq k_i < B$ für $i = 1, \ldots, r$ und $k_r > 0$ gilt, dabei hängt r von der jeweiligen Zahl k ab. B wird als Basis eines Zahlensystems aufgefaßt. Die *Positionsschreibweise* für k im Zahlensystem der Basis B ist
$k = k_rk_{r-1} \ldots k_1k_0|_B$.
Die fortlaufenden Zahlen $k = 1, 2, \ldots$ in der Darstellung mit der Basis B sind

0;	1;	2;	...; $B-1$;
10;	11;	12;	...; $1(B-1)$;
20;	21;	22;	...; $2(B-1)$;
.	.	.	. .
.	.	.	. .
$(B-1)0$;	$(B-1)1$;	$(B-1)2$;	...; $(B-1)(B-1)$;
100;	101;	102;	...; $10(B-1)$;
.	.	.	
.			

Wir kommen nun zur *Definition der Holton-Folge*. Dazu stellen wir den Index k von x_k im B-System dar:
$k = k_r \ldots k_1k_0|_B$. Nun setze man $x_0 = 0$ und
$x_k = 0, k_0k_1 \ldots k_r|_B$, d. h.
$x_k = k_0B^{-1} + k_1B^{-2} + \ldots + k_rB^{-r-1}$ für $k \geqq 1$.
Für die Holton-Folge soll eine *Rekursionsformel* hergeleitet werden. Man setze
$k_{r+1} = k_{r+2} = \ldots = 0$. Dann ist
$k = \ldots k_{r+1}k_r \ldots k_1k_0|_B$ und
$x_k = 0, k_0k_1 \ldots k_rk_{r+1} \ldots|_B$.
Es bezeichne $l = l(k)$ den niedrigsten Index, für den $k_l < B-1$ ist (wenn $l > 0$ ist,
so muß $k_0 = \ldots = k_{l-1} = B-1$ sein). Also ist
$k = \ldots k_l(B-1) \ldots (B-1)|_B$ und folglich
$k+1 = \ldots (k_l+1)0 \ldots 0|_B$ sowie
$x_k = 0,(B-1) \ldots (B-1)\, k_l \ldots|_B$,
$x_{k+1} = 0,0 \ldots 0\,(k_l+1)|_B$. Mithin ist

$$\begin{aligned} x_{k+1} = {} & 0,(B-1) \ldots (B-1)\; k_l \ldots|_B \\ & + 0,0 \quad \ldots 0 \quad 1 \ldots|_B \\ & + 0,0 \quad \ldots 1 \quad 0 \ldots|_B \\ & - 1,0 \quad \ldots 0 \quad 0 \ldots|_B \end{aligned}$$ d. h.

$x_{k+1} = x_k + B^{-l-1} + B^{-l} - 1$ für $k = 0, 1, \ldots$
Sei z. B. $B = 5$.
Entsprechend der Definition ist

Tabelle 1

$k\|_{10}$	$k\|_5$	$x_k\|_5$	$x_k\|_{10}$
0	0	0	0
1	1	0,1	0,2
2	2	0,2	0,4
3	3	0,3	0,6
4	4	0,4	0,8
5	10	0,01	0,04
6	11	0,11	0,24
7	12	0,21	0,44
8	13	0,31	0,64
9	14	0,41	0,84
10	20	0,02	0,08

Die Rekursionsformel liefert im 5-er System

$x_1 = 0 \quad + 5^{-1} + 5^{-0} - 1 = 0,1|_5$
$x_2 = 0,1 \quad + 5^{-1} + 5^{-0} - 1 = 0,2|_5$
$x_3 = 0,2 \quad + 5^{-1} + 5^{-0} - 1 = 0,3|_5$
$x_4 = 0,3 \quad + 5^{-1} + 5^{-0} - 1 = 0,4|_5$
$x_5 = 0,4 \quad + 5^{-2} + 5^{-1} - 1 = 5^{-2} = 0,01|_5$
$x_6 = 0,01 + 5^{-1} + 5^{-0} - 1 = 0,01 + 0,1 = 0,11|_5$

. . .
. . .
. . .

Wir geben hier (aus Platzgründen ohne Beweis) an:
Satz 8: Die Holten-Folge ist gleichmäßig verteilt.

6. Die Lehmer-Folge

Es sei $a \in N, a \geqq 2$ und θ eine positive reelle Zahl. Die Zahlen
$x_k = \{a^k\theta\}, k = 0, 1, \ldots$ heißen Elemente der *Lehmer-Folge*. Es werde zuerst wieder der Fall θ rational ($\theta \in R$) betrachtet, d. h.
$\theta = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden $p, q \in N$. Es soll auch a und q als teilerfremd vorausgesetzt werden. Wir bilden die Zahlen p, ap, a^2p, ..., a^kp, ... und dazu die Reste dieser Zahlen bei der Division durch q:
$r_0, r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots$ Es sei also
$a^kp = m_k \cdot q + r_k$ mit $0 \leqq r_k < q$, m_k ganz.
Ist z. B. $a = 3$, $p = 5$, $q = 7$, so erhält man die Restefolge 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, ...

Satz 9: Es gibt eine kleinste natürliche Zahl $w < q$, die (kleinste) Periode, so daß $r_{k+w} = r_k$ für alle $k \in N$ ist. Die Periode w ist gekennzeichnet als kleinste natürliche Zahl ($\geqq 1$), so daß $a^w - 1$ durch q teilbar ist. w ist ein Teiler der Euler-Funktion

$$\varphi(q) = q\left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{q_r}\right),$$

wobei $q = q_1^{n_1} \ldots q_r^{n_r}$ die Primzahlzerlegung von q darstellt.

Beweis: Wegen $r_k \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ für alle $k \in N$ gibt es wenigstens zwei Indizes k und l mit $r_k = r_l$. Es sei j der kleinste Index, zu dem ein $i < j$ mit $r_i = r_j$ existiert. Mithin sind $r_1, \ldots, r_{j-1}$ paarweise verschieden, und es ist $j - 1 \leqq q$. Aus den Darstellungen

$a^ip = m_iq + r_i, \qquad a^jp = m_jq + r_j,$
$a^{i+1}p = am_iq + ar_i, \qquad a^{j+1}p = am_jq + ar_j,$
$a^{i+1}p = m_{i+1}q + r_{i+1}, \quad a^{j+1}p = m_{j+1}q + r_{j+1}$

folgt $r_{i+1} =$ (Rest von $ar_i = ar_j$ bei Division durch q) $= r_{j+1}$, analog $r_{i+2} = r_{j+2}$ usw. Die Annahme $i > 0$ führt zu

$a^{i-1}p = m_{i-1}q + r_{i-1}, \quad a^{j-1}p = m_{j-1}q + r_{j-1},$
$a^ip = am_{i-1}q + ar_{i-1}, \quad a^jp = am_{j-1}q + ar_{j-1},$
$a^ip = m_iq + r_i, \qquad a^jp = m_jq + r_j.$

Dann ist aber $a^ip - a^jp$,
daher $a(r_{j-1} - r_{i-1})$ und folglich auch $(r_{j-1} - r_{i-1})$ durch q teilbar.
Wegen $r_{j-1} - r_{i-1} \in \{-(q-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, q-1\}$ ist $r_{j-1} = r_{i-1}$, was der Definition von j widerspricht.
Also ist $i = 0$.
Sei $w = j$. Aus $r_0 = p - m_0q, r_w = a^wp - m_wq$ und $r_0 = r_w$ ergibt sich
$(a^w - 1)p = (m_w - m_0)q$.
Daher ist $a^w - 1$ durch q teilbar.
Wenn v irgendeine natürliche Zahl und $a^v - 1$ durch q teilbar ist, d. h. es ein $g \in N$ gibt, so daß $a^v - 1 = gq$ ist, ergibt sich zunächst

$a^v p = (1 + gq)p = m_v q + r_v$, daraus
$r_v = (1 + gq)p - m_v q = p - (m_v - gp)q$ und mit
$r_0 = p - m_0 q$, daß $r_v - r_0$ teilbar durch q ist.
Es folgt $r_v = r_0$ und wie vorher $r_{v+1} = r_1, \ldots$.
Mithin ist w, die (kleinste) Periode, die kleinste natürliche Zahl, so daß $a^w - 1$ durch q teilbar ist.
Aus der Zahlentheorie ist bekannt, daß $a^{\varphi(q)} - 1$ durch q teilbar ist, falls a und q teilerfremd sind (*Satz von Euler*).
Daher finden wir
$a^{\varphi(q)}p = m_{\varphi(q)}q + r_{\varphi(q)}$, $p = m_0 q + r_0$ und
$(a^{\varphi(q)} - 1)p = (m_{\varphi(q)} - m_0)q + (r_{\varphi(q)} - r_0)$.
Folglich ist $r_{\varphi(q)} - r_0$ durch q teilbar
und daher $r_0 = r_{\varphi(q)}$.
Da aber nur $r_0 = r_w = r_{2w} = \ldots$ gilt,
muß $\varphi(q)$ ein Vielfaches von w sein.

Folgerung: Ist q eine Primzahl, so ist $\varphi(q) = q - 1$ und w ein Teiler von $q - 1$.

Für die Lehmer-Folge $\{a^k\theta\}$, $k = 0, 1, \ldots$, ergeben sich im oben betrachteten Fall
$\theta = \frac{p}{q}$ die Elemente
$\frac{r_0}{q}, \frac{r_1}{q}, \frac{r_2}{q}, \ldots, \frac{r_{w-1}}{q}, \frac{r_0}{q}, \frac{r_1}{q}, \ldots$
In dem Beispiel mit $a = 3$, $p = 5$, $q = 7$ sind dies
$\frac{5}{7}, \frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \ldots$
und es ist $w = 6$.

Satz 10: Wenn θ irrational ist, so sind alle Elemente x_k der Lehmer-Folge verschieden und ungleich 0.

Beweis: Angenommen, es wäre $x_k = x_l$ und $k \neq l$.
Dann ist $x_k = a^k\theta - [a^k\theta]$ sowie $x_l = a^l\theta - [a^l\theta]$
und folglich $\theta = \frac{[a^k\theta] - [a^l\theta]}{a^k - a^l}$,
d.h. $\theta \in R$. Widerspruch.

Rekursionsformel:
Für beliebige reelle θ ist $x_0 = \{\theta\}$,
$x_{k+1} = \{ax_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Beweis: Es ist $x_0 = \{a^0\theta\} = \{\theta\}$.
Die Rekursionsbeziehung folgt aus der Darstellung
$a^k\theta = [a^k\theta] + \{a^k\theta\} = m_k + x_k$ und
$a^{k+1}\theta = am_k + a\{a^k\theta\} = am_k + ax_k$
$= am_k + [ax_k] + \{ax_k\}$
$a^{k+1}\theta = m_{k+1} + \{a^{k+1}\theta\} = m_{k+1} + x_{k+1}$.

Satz 11: Es gilt auch die Umkehrung: Aus $x_0 = \{\theta\}$ und $x_{k+1} = \{ax_k\}$ folgt $x_k = \{a^k\theta\}$ für $k = 0, 1, \ldots$

Den Beweis kann man durch vollständige Induktion führen. Die Aussage des Satzes sei für $k = 0, \ldots, l$ bereits richtig, speziell gelte $x_l = \{a^l\theta\}$. Dann ist
$ax_l = a(a^l\theta - [a^l\theta]) = a^{l+1}\theta - a[a^l\theta]$.
Wegen $a[a^l\theta] \in N$ ist $\{ax_l\} = \{a^{l+1}\theta\}$,
d.h. $x_{l+1} = \{a^{l+1}\theta\}$.
Bei der Bildung der Lehmer-Folge kann man sich immer auf $\theta \in [0, 1[$ beschränken. Dies folgt aus dem

Satz 12: Ist $g \in N$ und $\theta' = \theta + g$, so gilt $\{a^k\theta\} = \{a^k\theta'\}$ für alle $k = 0, 1, 2, \ldots$

Der Beweis ist elementar. Die folgende Aussage zu beweisen bereitet etwas mehr Mühe, aus Platzgründen geben wir nur das Resultat an:

Satz 13: Sei $a \in N$, $a \geqq 2$. Es gibt irrationale Zahlen θ, so daß die Lehmer-Folge $\{a^k\theta\}$ auf $[0, 1]$ dicht ist, d. h. zu jedem Teilintervall $[c, d] \subseteqq [0, 1]$ gibt es wenigstens ein Element $x_l = \{a^l\theta\} \in [c, d]$.

Die Rekursionsvorschrift zur Bildung der Lehmer-Folge wird z. B. im Tischrechner K 1002 und K 1003 benutzt (siehe *alpha* 2, 1985). Nach dem Einsetzen des Funktionsblockes STATISTIK in den Tischrechner ist in ein bestimmtes Datenregister die Zahl θ einzugeben. Empfohlen wird, θ als 10stelligen Dezimalbruch zu wählen, bei dem alle Ziffern von 0 bis 9 in möglichst willkürlicher Reihenfolge enthalten sein sollen. Im Rechner wird immer $a = 29$ gesetzt. Die Berechnung der einzelnen Pseudozufallszahlen erfolgt jeweils nach dem Betätigen der Taste ZUF, wobei für die Berechnung die Rekursionsformel
$x_{k+1} = \{29x_k\}$ zugrunde liegt.
Beispiel: Eingabe $\theta = 9{,}038157264$
$x_0 = 0{,}038157264$
Ausgabe auf dem Thermodruckstreifen des K 1003 für $x_1, x_2, \ldots$

Tabelle 2

k	x_k	k	x_k
1	0,1065607	11	0,4634919
2	0,0902590	12	0,4412638
3	0,6175117	13	0,7966509
4	0,9078392	14	0,1028760
5	0,3273363	15	0,9834035
6	0,4927537	16	0,5187025
7	0,2898586	17	0,0423738
8	0,4058987	18	0,2288395
9	0,7710624	19	0,6363456
10	0,3608101	20	0,4540229

7. Aufgaben

a) Zeige, daß im B-System gilt:
(i) $a_r \ldots a_1\ a_0 < a_{r+1}0\ldots0$ mit $a_{r+1} = 1$
(ii) $(B-1)\ldots(B-1)(B-1) = 1\,0\ldots0 - 1$
(iii) $0, c_1c_2\ldots c_rc_{r+1}\ldots \leqq 0,\ c_1c_2\ldots c_{r-1}c_r + 0,\ 0\ 0\ \ldots 0\ 1$
Wann steht das Gleichheitszeichen?
b) Es seien $B = 2$ die Basis des Dualsystems, $k = k_r\ldots k_1k_0|_2$ die Dualdarstellung der natürlichen Zahl k und $\alpha = 0{,}01|_2$ sowie $\beta = 0{,}11|_2$ die Grenzen eines Intervalls $[\alpha, \beta]$ (als Dualzahlen geschrieben). Berechne die ersten elf Elemente der Holton-Folge und ermittle die Anzahl A_{11} derjenigen x_k dieser elf Elemente $x_0, \ldots, x_{10}$, die in das Intervall $[\alpha, \beta]$ fallen!
c) Berechne die ersten zehn Elemente der Holton-Folge für $B = 7$.
d) Es sei B eine beliebige Basis eines Zahlensystems, und es seien p, q natürliche Zahlen mit $q \geqq 2$. Zeige, daß $\frac{p}{q}$ stets ein endlicher oder periodischer Bruch im B-System ist.
e) Berechne die ersten fünf Elemente der Lehmer-Folge für
(i) $a = 3$; $\theta = 0{,}5$
(ii) $a = 3$; $\theta = 0{,}2$
(iii) $a = 5$; $\theta = 0{,}2$
f) Für $a = 5$ und $\theta = \frac{2}{9}$ ist die Lehmer-Folge zu bilden (bis zum Eintritt der Periodizität).
Berechne parallel dazu $A_N\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$.
g) Wann gilt für $a \in N$ die Ungleichung $[a^k\theta] \leqq [a^l\theta]$?
h) Es sei a rational und θ irrational, $a \neq 1$, $a \neq 0$.
Beweise, daß die Folgenelemente $x_k = \{a^k\theta\}$ für $k = 0, 1, \ldots$ paarweise verschieden und stets ungleich 0 sind!
i) Beweise Satz 12!
j) Die meisten für praktische Zwecke verwendeten Algorithmen zur Berechnung von Pseudozufallszahlen benutzen eine *Rekursionsformel (erster Ordnung)*
$x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots$
mit gegebenem x_0. Wie ordnen sich hier die Weyl-Folge, die Lehmer-Folge und die Holton-Folge ein?
k) Die folgende Vorschrift zur Erzeugung von Pseudozufallszahlen geht auf J. v. Neumann (1903 bis 1957) zurück: Gegeben sei der 2-$k$stellige Dezimalbruch $x_n = 0, a_1\ldots a_{2k} \in [0, 1[$. Um x_{n+1} zu erhalten, bilde man den $4k$-stelligen Dezimalbruch $x_n^2 = 0, b_1\ldots b_{4k}$ und benutze die mittleren $2k$ Ziffern dieses Quadrates zur Darstellung von x_{n+1} in der Form
$x_{n+1} = 0, b_{k+1}\ldots b_{3k}$. x_0 wird beliebig angenommen, $x_1, x_2, \ldots$ daraus, wie beschrieben, erzeugt.
Zeige, daß die Rekursionsformeln
$x_{n+1} = 10^{-2k}[10^{2k}\{10^k x_n^2\}]$ bzw.
$x_{n+1} = \{10^{-2k}[10^{3k}x_n^2]\}$
bestehen! (Die v. Neumann-Folge ist nicht gleichmäßig verteilt. Es zeigt sich, daß zu viele „kleine" Zahlen erzeugt werden. Diese Folge kann auch ausarten, d. h. es kann $x_n = 0$ auftreten, in diesem Fall sind auch alle $x_{n+m} = 0$ für $m = 0, 1, \ldots$)

Gleichverteilte Zufallszahlen oder gleichmäßig verteilte Pseudozufallszahlen (zwischen ihnen besteht ein prinzipieller Unterschied) verwendet man bei speziellen numerischen Verfahren zur Lösung verschiedenartiger mathematischer Probleme. Diese Verfahren werden *Monte-Carlo-Methoden* genannt, sie sind leicht zu programmieren und für die Anwendung auf Computern sehr geeignet. (Das Roulett in den Spielkasinos von Monte Carlo in Monaco kann als Zufallszahlengenerator aufgefaßt werden.)

L. Bittner/W. Schmidt

ARBEITS-GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Mini-BASIC für alpha-Leser, Teil 2

Exquisit-Programm

Betrachten wir nochmals den ausgedruckten Bildschirmtext unseres ersten Programms (siehe Bild 4):

```
? 3.Ø
? 5.Ø
141.372
94.2478
OK
<■
```

Bild 4

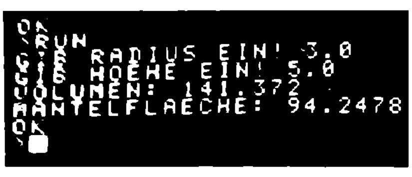
Für den Uneingeweihten sind die Zahlen auf dem Bildschirm wenig informativ. Der Bildschirmtext gibt weder Auskunft darüber, was eigentlich berechnet wurde, noch welche Bedeutung die einzelnen Zahlen haben. Deshalb ist es günstig, wenn auf dem Bildschirm Erläuterungen erscheinen. Diese müssen natürlich auch programmiert werden. Solche Texte sind in einem BASIC-Programm stets in Anführungszeichen zu setzen und von der Variablen durch ein Semikolon zu trennen. Hier nun unser erstes Programm mit erläuternden Texten.

Programm 2

```
1Ø INPUT „GIB RADIUS EIN!“; R
2Ø INPUT „GIB HOEHE EIN!“; H
3Ø LET V = PI*R*R*H
4Ø LET M = 2*PI*R*H
5Ø PRINT „VOLUMEN:“; V
6Ø PRINT „MANTELFLAECHE:“; M
7Ø END
```

Auf dem Bildschirm erscheint dann folgender Text (Bild 5):

Bild 5



▲10▲ Entwickle ein BASIC-Programm zur Berechnung des Volumens und des Oberflächeninhalts gerader Hohlzylinder (gegeben sind die Durchmesser d_1, d_2 mit $d_1 < d_2$)!

▲11▲ Versuche folgendes Programm zu verstehen!
Was kann man damit berechnen lassen?

```
1Ø INPUT „GIB EINE POSITIVE
   ZAHL EIN!“; Z
2Ø LET X = PI*Z
3Ø LET Y = PI*Z*Z/4
4Ø PRINT „ERGEBNISSE:“; X, Y
5Ø END
```

Wie man sieht, ist es möglich mit einer PRINT-Anweisung in Zeile 4Ø zwei Werte auszugeben. (Analog ermöglicht z. B. die Anweisung 8Ø INPUT A, B die Eingabe von zwei Zahlenwerten.)

Der Computer „läuft“

Wie wir bisher sahen, ist es gar nicht so schlimm, einem Computer in BASIC zu *sagen*, was er für uns tun soll. Man muß allerdings selbst den Lösungsweg kennen und ihn computergerecht aufbereiten. Bei den Aufgaben, die wir bisher mit dem Computer gelöst haben, lohnt sich das Programmieren natürlich nur dann, wenn man viele Aufgaben vom gleichen Typ mit unterschiedlichen Eingabewerten lösen muß. Der Vorteil besteht gegenüber einem (nichtprogrammierbaren) Taschenrechner darin, daß man lediglich die Eingabewerte neu eintippen muß. Den *Rest* erledigt der Computer. Betrachten wir eine andere Aufgabe:

▲12▲ Für die Funktion $y = x^2 - x - 0{,}75$ soll im Intervall $-2 \leqq x \leqq 2$ eine Wertetabelle mit der Schrittweite 0,25 aufgestellt werden. (Schrittweite 0,25 bedeutet, daß x-Werte beginnend mit -2 in Abständen von 0,25 zu nehmen sind.)

a) Gib zur Berechnung der y-Werte einen Rechenablaufplan für den Taschenrechner SR 1 an!

b) Fülle die ersten 5 Spalten der Tabelle aus!

x	-2	$-1{,}75$	$-1{,}5$	$-1{,}25$	...
y					
x	1,5	1,75	2		
y					

Mit dem SR 1 müßte man 17mal den Rechenablaufplan durchtippen, um die gesamte Wertetabelle aufzustellen. Die Arbeit ist sehr eintönig, denn außer den x-Werten ändert sich am Rechenablauf nichts, und selbst diese ändern sich ganz regelmäßig.

Mit einem Computer lassen sich solche Aufgaben sehr bequem lösen. Man programmiert dazu in BASIC eine sogenannte *Programmschleife*.

Programm 3

```
1Ø FOR X = -2 TO 2 STEP .25
2Ø     LET Y = X*X - X - Ø.75
3Ø     PRINT X, Y
4Ø NEXT X
5Ø END
```

Die neuen BASIC-Sprachelemente bedeuten:

1Ø Beginne mit $x = -2$ bis 2 in Schritten von 0,25!
Führe aus!

2Ø, 3Ø Schleifenanweisungen (Sie werden wegen der besseren Übersicht eingerückt geschrieben.)

4Ø Nimm das nächste x (solange bis der Endwert 2 erreicht ist)! Führe damit die Schleifenanweisungen aus!

Solche *FOR ... NEXT-Schleifen* werden auch *Laufanweisungen* genannt. Fügen wir im Programm 3 noch folgende Zeilen ein:

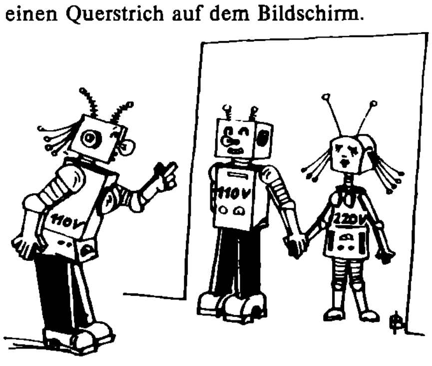
```
1 CLS
2 PRINT „WERTETABELLE FUER
  Y = X*X - X - Ø.75“
3 PRINT „===============“
4 PRINT
5 PRINT „X“, „Y“
6 PRINT „---------------“
```

so erhält man auf dem Bildschirm folgende Wertetabelle (Bild 6).

```
WERTETABELLE FUER
Y = XX - X - Ø.75
=============
X           Y
-------------
-2          5.25
-1.75       4.Ø625
-1.5        3
-1.25       2.Ø625
-1          1.25
-.75        .5625
-.5         Ø
-.25        -.4375
Ø           -.75
.25         -.9375
.5          -1
.75         -.9375
1           -.75
1.25        -.4375
1.5         Ø
1.75        .5625
2           1.25
```

Bild 6

Mit der Anweisung CLS in Zeile 1 (CLS – clean screen [engl.] – Bildschirm löschen) wird ein noch *unbeschriebener* Bildschirm erzeugt. Dem Bildschirmtext ist zu entnehmen, welche Wirkungen die Programmzeilen 2 bis 6 haben. Mit den Anweisungen in den Zeilen 2 und 3 wird die unterstrichene Überschrift ausgedruckt. Die Programmzeile 4 bewirkt auf dem Bildschirm eine Leerzeile. Schließlich sorgt die Anweisung in Zeile 5 dafür, daß die Buchstaben X und Y in zwei Spalten nebeneinander stehend erscheinen. Das Komma als Trennzeichen in einer PRINT-Anweisung bewirkt die Ausgabe in Spalten (siehe auch Programmzeile 3Ø!). Auf diese Weise ist ein Ausdruck in maximal drei Spalten nebeneinander möglich. Die Zeile 6 bewirkt wieder einen Querstrich auf dem Bildschirm.



„Mein Sohn, sie paßt nicht zu dir!“

Der ausgedruckten Wertetabelle ist zu entnehmen, daß die Funktion
$y = x^2 - x - 0,75$ bei $x_1 = -0,5$
und $x_2 = 1,5$ Nullstellen hat.

▲13▲ Für die Funktion $y = \frac{2}{3}x + 0,7$ soll im Intervall $-2 \leqq x \leqq 3$ (Schrittweite: 0,5) eine Wertetabelle aufgestellt werden. Erstelle ein entsprechendes BASIC-Programm!

▲14▲ Entwickle ein BASIC-Programm zum Ausdrucken einer Wertetabelle für x-Werte (0; 0,1; 0,2; 0,3 ... 1,8; 1,9; 2) sowie die zugehörigen y-Werte für
$y = x^2 - \sqrt{x}$ und $y = x - 2\sqrt{x}$
(drei Spalten).

▲15▲ Arbeite folgendes Programm ab! Was hast du jeweils berechnet?

```
10 LET S = 0
20 LET P = 1
30 FOR N = 1 TO 5
40      LET S = S + N
50      LET P = P*N
60 NEXT N
70 PRINT S, P
80 END
```

(In der Laufanweisung kann in Zeile 30 „STEP...“ weggelassen werden. Der Computer nimmt dann als Schrittweite automatisch 1.) Bei dem Programm der Aufgabe 15 tritt die Besonderheit der *Wertzuweisung* deutlich hervor.
Mit der Anweisung 10 LET S = 0 wird der Variablen S der Wert 0 zugewiesen, d. h., auf dem Speicherplatz mit dem *Namen* S wird 0 gespeichert.
Zeile 20 LET P = 1 führt dazu, daß der Computer den Zahlenwert 1 auf den Speicherplatz mit dem Namen P abspeichert.
Zeile 40 LET S = S + N bewirkt im ersten Durchlauf, daß der Computer zum Inhalt des Speicherplatzes S (in unserem Falle 0) den Inhalt des Speicherplatzes N (in unserem Falle 1) addiert und das erhaltene Ergebnis (0 + 1 = 1) auf den Speicherplatz mit dem Namen S abgespeichert wird. Damit wird der alte Wert des Speicherplatzes S gelöscht.
Im zweiten Durchgang bewirkt die Zeile 40, daß zum Inhalt des Speicherplatzes S (S = 1) der neue Inhalt des Speicherplatzes N (nämlich 2) addiert und das Ergebnis (1 + 2 = 3) auf den Speicherplatz mit dem Namen S abgespeichert wird.
Merke: In einer LET-Anweisung darf links vom Zeichen „=“ nur *eine* Variable stehen. Dieser wird der Wert des rechts vom Zeichen „=“ stehenden Ausdrucks zugewiesen.
Beispiele:
LET N = 1
Es soll der Zahlenwert 1 auf den Speicherplatz N abgespeichert werden.
LET P = A/B
Der Inhalt des Speicherplatzes A ist durch den Inhalt des Speicherplatzes B zu dividieren. Das erhaltene Resultat ist auf den Speicherplatz mit dem Namen P abzuspeichern.
LET N = N + 1
Zum Inhalt des Speicherplatzes N ist 1 zu addieren. Das erhaltene Ergebnis ist wieder auf den Speicherplatz mit dem Namen N abzuspeichern. Der Inhalt des Speicherplatzes N wird mit der Anweisung um 1 erhöht.
LET P = P*N
Der Inhalt des Speicherplatzes P ist mit dem Inhalt des Speicherplatzes N zu multiplizieren. Das erhaltene Resultat ist auf den Speicherplatz mit dem Namen P abzuspeichern. Der alte Wert des Speicherplatzes P wird damit gelöscht.
Das Symbol „=“ muß also in einer LET-Anweisung als *Zuweisungssymbol* verstanden werden.
Um im Umgang mit der LET-Anweisung sicher zu werden, wollen wir folgende Aufgaben lösen.

▲16▲ Betrachte folgende Programmteile! Gib jeweils an, mit welchen Werten die Variablen A, B, C nach Zeile 40 belegt sind, wenn für C der Wert 3 eingegeben wird!

a)
```
10 INPUT C
20 LET A = C/2
30 LET B = A ∧ 2
40 LET C = 4*A
```
b)
```
10 INPUT C
20 LET C = 2*C
30 LET A = 4
40 LET A = A + C
```
c)
```
10 INPUT C
20 LET C = C + 1
30 LET A = C
40 LET B = 2*C
```

▲17▲ Arbeite folgende BASIC-Programme mit den angegebenen Eingabedaten ab! Notiere jeweils den (bzw. die) Ausgabewert(e)!

a)
```
10 INPUT A               Eingabewert: A = 2
20 LET B = 5*A - 3/A
30 PRINT B
40 END                   Ausgabewert: B =
```
b)
```
10 INPUT A, B            Eingabewert A = 3
20 LET C = INT (A/B)                 B = 2
30 LET A = A + 1         Ausgabewert: A =
40 LET B = SQR(A)                    B =
50 PRINT A, B, C                     C =
60 END
```

L. Flade/M. Pruzina

Lösungen

▲10▲ Eine Lösungsmöglichkeit:
```
10 INPUT „GIB AUSSEN-
     DURCHMESSER EIN!“; A
20 INPUT „GIB INNEN-
     DURCHMESSER EIN!“; D
30 INPUT „GIB DIE HOEHE EIN!“; H
40 LET V = PI*H*(A*A - D*D)/4
50 LET O = PI*H*(A + D)
     + PI*(A*A - D*D)/2
60 PRINT „VOLUMEN:“; V
70 PRINT „OBERFLAECHE:“; O
80 END
```

▲11▲ Wenn man die Eingabe als Zahlenwert des Durchmessers eines Kreises auffaßt, wird mit X der Umfang und mit Y der Flächeninhalt des zugehörigen Kreises berechnet.

▲12▲
a) $x \boxed{x^2} \boxed{-} x \boxed{-} ,75 \boxed{=}$
b) Vergleiche mit der Wertetabelle Bild 6.

▲13▲ Programm (ohne erläuternden Text):
```
10 PRINT „X“, „Y“
20 FOR X = -2 TO 3 STEP .5
30      LET Y = 2/3*X + 0.7
40      PRINT X, Y
50 NEXT X
60 END
```

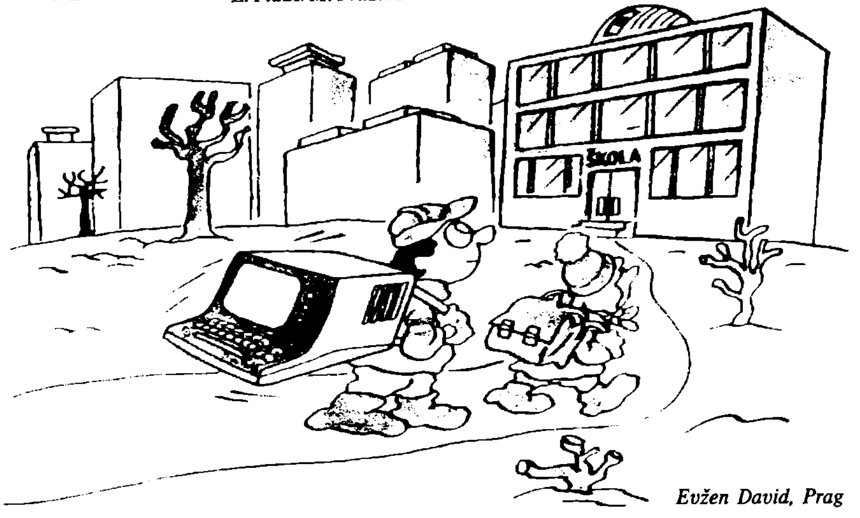
▲14▲ Beispiel:
```
10 CLS
20 PRINT „WERTETABELLE“
30 PRINT „————————————————“
40 PRINT „X“, „X*X - SQR(X)“,
     „X - 2*SQR(X)“
50 PRINT „- - - - - - - - - - - - - - -“
60 FOR X= 0 TO 2 STEP .1
70      PRINT X, X*X - SQR(X),
        X - 2*SQR(X)
80 NEXT X
90 END
```

▲15▲ $S = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
$P = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

▲16▲

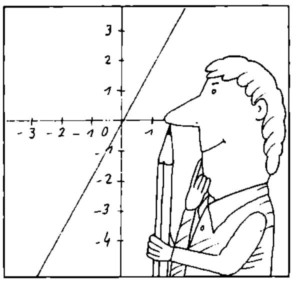
	A	B	C
a)	1,5	2,25	6
b)	10	–	6
c)	4	8	4

▲17▲ a) B = 8,5   b) A = 4, B = 2, C = 1



Evžen David, Prag

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 8. März 1987

Mathematik

Ma 5 ■ 2722 Vier Freunde, nämlich Dieter, Susanne, Heiko und Bärbel, mit den Familiennamen Müller, Schulze, Meier bzw. Lehmann betrachten gemeinsam Fotos, die während einer Klassenfahrt aufgenommen worden sind. Auf diesen Fotos ist folgendes zu erkennen:

(1) Zwei Schüler, der mit dem Familiennamen Müller und der mit dem Vornamen Dieter, angeln Fische.

(2) Vier Schüler mit den Familiennamen Müller und Lehmann und den Vornamen Heiko und Susanne baden in einem See.

(3) Zwei Schüler mit dem Familiennamen Meier und Vornamen Heiko stehen vor ihrem Zelt.

Wie heißen die vier Freunde mit vollem Namen? *Student P. Brill, Schwerin*

Ma 5 ■ 2723 Alfons, Bernd, Claus und Dieter sammelten in den Sommerferien zusammen 74 kg Altpapier. Alfons sammelte dreimal soviel Altpapier wie Bernd. Claus und Dieter gaben zusammen 34 kg Altpapier ab. Claus sammelte 8 kg Altpapier mehr als Bernd. Wieviel Kilogramm Altpapier konnte jeder von ihnen an den Altstoffhandel abführen?

Schülerin A. Mißbach, Magdeburg

Ma 5 ■ 2724 Die Ersparnisse der beiden Brüder Peter und Kurt betragen zusammen 205 M. Peter hat 25 M mehr gespart als Kurt. Wieviel Mark hat jeder der beiden Brüder gespart?

Schülerin S. Fiedler, Leinefelde

Ma 5 ■ 2725 Gegeben sei ein Rechteck mit einem Umfang von 140 cm. Eine Rechteckseite ist um 10 cm länger als ihre benachbarte Seite. Es ist der Flächeninhalt des Rechtecks zu ermitteln.

Schülerin C. Pleyer, Eisenach

Ma 5 ■ 2726 Peter soll im Konsum Getränke einkaufen, und zwar Limonade und Bier. Dafür erhält er von seiner Mutter 10 M. Peter kauft von beiden Getränkesorten die gleiche Anzahl Flaschen. Für Bier bezahlt Peter 1,56 M mehr als für Limonade. Von den 10 M verbleiben ihm 4 Pf. Wieviel Flaschen Limonade bzw. Bier hat Peter gekauft, wenn eine Flasche Limonade 35 Pf, eine Flasche Bier 48 Pf kostet und kein Flaschenpfand erhoben wird, da die Anzahl der gekauften Flaschen mit der Anzahl der mitgebrachten leeren Flaschen übereinstimmt?

Schüler M. Jödecke, Pützlingen

Ma 5 ■ 2727 Nach einem Wohnungsumzug probiert Herr A aus, welcher der vier äußerlich gleichartigen Schlüssel zu welcher der vier Türen seiner Schrankwand paßt. Genau jeder der vier Schlüssel paßt zu genau einer der vier Schranktüren. Wieviel Schlüsselproben muß Herr A im günstigsten, wieviel im ungünstigsten Fall machen, um für jede Tür den passenden Schlüssel herauszufinden? *Sch.*

Ma 6 ■ 2728 In einem Kindergarten gibt es 24 Bälle in den Farben blau, rot, gelb und weiß. Es sind doppelt soviel rote wie gelbe und dreimal soviel blaue wie weiße Bälle.

a) Wieviel Bälle sind es von jeder Farbe?

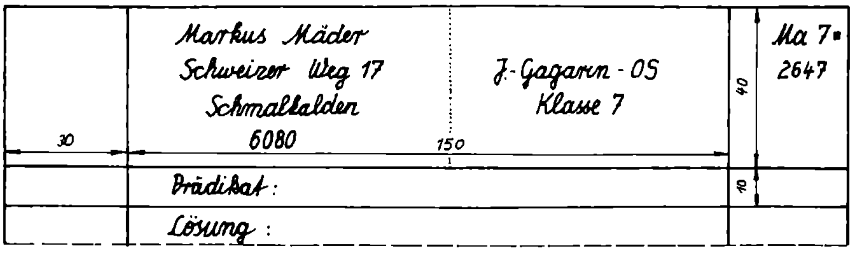
b) Weise nach, daß diese Angaben nur eine Lösung ergeben!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2729 Welche zweistellige natürliche Zahl ist gleich dem Fünffachen ihrer Quersumme? *Mathematikfachlehrer D. Kluge Michendorf*

Ma 6 ■ 2730 Die Figur stellt ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen a und b dar. Die Mittelpunkte E von $\overline{AD}$ und F von $\overline{CD}$ wurden mit dem Punkt B verbunden. Der Flächeninhalt A_V des Vierecks $BFDE$ ist durch den Flächeninhalt A_R des Rechtecks $ABCD$ auszudrücken!

Schüler Th. Thrun, Lodersleben



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Na/Te (Naturwissenschaft und Technik) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12 oder Na/Te 10/12 gekennzeichnet sind.

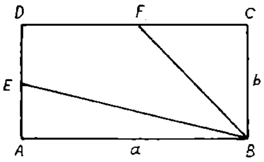
5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1986/87 läuft von Heft 5/1986 bis Heft 2/1987. Zwischen dem 1. und 10. September 1987 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/86 bis 2/87 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/87 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/1986 bis 2/87) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1986/87 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha



Ma 6 ■ 2731 Es ist nachzuweisen, daß die Summe von fünf aufeinanderfolgenden geraden natürlichen Zahlen stets durch 10 teilbar ist! *Schüler C. Drusla, Schwerin*

Ma 6 ■ 2732 Von einem Großvater wissen wir, daß sein Sohn soviel Wochen alt ist wie sein Enkel Tage alt ist. Der Enkel ist ferner soviel Monate alt wie der Großvater an Jahren alt ist. Alle drei zusammen sind 100 Jahre alt. Wie alt ist jeder von ihnen? *Schüler A. Burian, Neundorf*

Ma 7 ■ 2733 In einem Ferienheim gibt es 52 Zwei- und Vierbettzimmer mit insgesamt 144 Betten. Wieviel Zwei- bzw. Vierbettzimmer gibt es in diesem Ferienheim? *Schülerin D. Berlt, Grimma*

Ma 7 ■ 2734 Ein Straßenbahnzug, bestehend aus drei Wagen, ist wie folgt mit Fahrgästen besetzt: Im zweiten Wagen befinden sich drei Fahrgäste mehr als im ersten Wagen; im dritten Wagen befinden sich zwei Fahrgäste mehr als im zweiten Wagen.
An der nächsten Haltestelle steigt aus dem ersten Wagen die Hälfte der dort vorhandenen Fahrgäste, aus dem zweiten Wagen steigen sechs Fahrgäste aus. Aus dem dritten Wagen steigt kein Fahrgast aus; es steigen vielmehr drei Fahrgäste hinzu. Nun werden in allen drei Wagen zusammen 60 Fahrgäste befördert. Wie viele Fahrgäste befanden sich vor dem Aus- bzw. Einsteigen an dieser Haltestelle in jedem der drei Wagen? *Sch.*

Ma 7 ■ 2735 Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$. Es seien E, F bzw. G die Mittelpunkte der Trapezseiten $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CD}$. Wieviel Prozent des Flächeninhalts des Trapezes beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks EFG? *Schüler A. Meckel, Friesen*

Ma 7 ■ 2736 Vier Brüder wollen eine Anzahl Nüsse zu gleichen Teilen unter sich aufteilen. Da sich die Anzahl der Nüsse nicht durch 4 teilen läßt, schlägt einer der Brüder vor, einem gerade anwesenden Freund fünf Nüsse abzugeben, wodurch eine gleichmäßige Verteilung der Nüsse unter den Brüdern möglich sein würde. Nach der erfolgten Aufteilung macht ein weiterer Bruder den Vorschlag, daß jeder von ihnen dem Freunde außerdem noch den zehnten Teil seiner erhaltenen Nüsse abgeben sollte, weil dann der Freund ebensoviel Nüsse wie jeder der vier Brüder haben würde. Wie viele Nüsse waren es im ganzen? *Sch.*

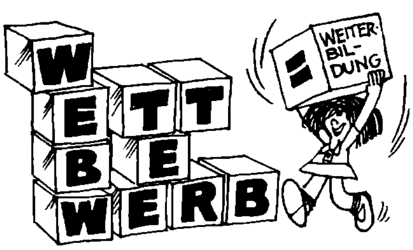
Ma 8 ■ 2737 Jede der Personen A, B und C macht über eine dreistellige natürliche Zahl n genau eine wahre und genau eine falsche Aussage. Die natürliche Zahl n ist zu ermitteln.

A: (1) n hat die Quersumme 18.
(2) n ist durch 5 teilbar.
B: (1) n ist durch 2, aber nicht durch 4 teilbar.
(2) n ist eine Primzahl.
C: (1) n besteht nur aus ungeraden Ziffern.
(2) Die Grundziffern von n stellen Zahlen dar, die von links nach rechts gelesen stets größer werden.
J. Grundmann, Limbach-Oberfrohna

Ma 8 ■ 2738 Begründe, warum die Summe aus einem positiven echten Bruch $\frac{a}{b}$ und seinem Kehrwert $\frac{b}{a}$ größer als 2 ist! *Sch.*

Ma 8 ■ 2739 Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit der 8 cm langen Seite $\overline{BC}$, der 6 cm langen Seite $\overline{AC}$ und dem rechten Winkel $\sphericalangle ACB$ seien durch den Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ die Parallelen zu den anderen Dreiecksseiten gezeichnet. Es sind Umfang und Flächeninhalt des entstandenen Parallelogramms zu berechnen. *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 8 ■ 2740 Gegeben ist ein Rechteck $ABCD$. Die Seite $\overline{AB}$ sei 60 m, die Seite $\overline{AD}$ sei 40 m lang. E sei der Mittelpunkt der Seite $\overline{CD}$. Eine Gerade g durch E soll die Fläche des Rechtecks so in zwei Teilflächen zerlegen, daß die eine Teilfläche halb so groß ist wie die andere. Es ist die Lage des Schnittpunktes der Geraden g mit der Rechteckseite $\overline{AB}$ zu beschreiben. *OL W. Melka, Neubrandenburg*



Ma 9 ■ 2741 Für zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gilt: Subtrahiert man von der Summe ihrer Quadrate ihr Produkt, so erhält man den Nachfolger dieses Produktes. Diese Aussage ist zu beweisen. *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 9 ■ 2742 Wenn der Preis von 9 Äpfeln, vermindert um den Preis einer Birne, 13 Denare beträgt und der Preis von 15 Birnen, vermindert um den Preis eines Apfels, 6 Denare beträgt, so frage ich, wie teuer ein Apfel und wie teuer eine Birne ist. (Aufgabe von *Johannes Butev* aus dem Jahr 1549) *mitgeteilt von Schülerin A. Klinger, Schwedt*

Ma 9 ■ 2743 Ein rechtwinkliges Dreieck hat einen Umfang von 84 cm. Die Summe aus den Quadraten seiner drei Seitenlängen beträgt 2450 cm^2. Wie lang sind die Seiten dieses rechtwinkligen Dreiecks? *Sch.*

Ma 9 ■ 2744 Ralf zeichnet zwei Parallelen g und h. Auf g legt er drei paarweise voneinander verschiedene Punkte A, B, C und auf h zwei voneinander verschiedene Punkte P und Q fest. Er verbindet jeden der beiden Punkte P und Q auf h mit jedem der drei Punkte A, B, C auf g. Er stellt fest, daß diese Verbindungsgeraden sich in genau drei Punkten R, S und T schneiden. Er stellt weiterhin fest: Bei vier statt drei Punkten auf g gibt es genau sechs Schnittpunkte.
a) Wieviel Schnittpunkte wären es, wenn auf g sieben Punkte liegen würden?
b) Es ist die Anzahl der Schnittpunkte zu ermitteln, wenn auf g vierzehn paarweise voneinander verschiedene Punkte liegen würden. *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 10/12 ■ 2745 Die erste Grundziffer einer natürlichen Zahl z ist 7. Nimmt man diese 7 als letzte Grundziffer, so entsteht eine natürliche Zahl z', die fünfmal kleiner als z ist. Es ist die kleinste natürliche Zahl z zu ermitteln, die diese Bedingung erfüllt. *Ch. Bittner, Mühlhausen*

Ma 10/12 ■ 2746 In einem Dreieck ABC seien die Längen der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ bekannt. Außerdem kennt man noch die Länge der Winkelhalbierenden des Winkels der Größe α, den die beiden Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ einschließen. Es ist eine allgemeine Lösung für α anzugeben. *J. Grundmann, Limbach-Oberfrohna*

Ma 10/12 ■ 2747 Ein rechtwinkliges Dreieck habe folgende Eigenschaften: Das Produkt aus den Längen seiner drei Seiten ist viermal so groß wie das Produkt aus den Längen seiner drei Höhen. Es sind die Größen der beiden spitzen Innenwinkel dieses rechtwinkligen Dreiecks zu bestimmen! *Sch.*

Ma 10/12 ■ 2748 Gegeben sind ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck und ein Rechteck, dessen eine Seite doppelt so lang ist wie die andere. Die Flächeninhalte von Dreieck und Rechteck sind gleich. Wenn das Dreieck um eine Kathete und das Rechteck um seine längere Seite rotieren, erhält man die Rotationskörper K_1 und K_2. Es ist zu zeigen, daß das Verhältnis der Volumina beider Rotationskörper konstant ist. *Ch. Bittner, Mühlhausen*

Naturwissenschaft und Technik

Na/Te 6 ■ 371 Ein Flugzeug fliegt von A nach B. Um 10 Uhr ist es 1200 km vom Ziel entfernt, um 11.30 Uhr 300 km. Wann wird es landen?

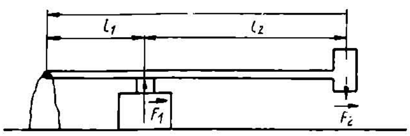
Na/Te 7 ■ 372 Für 332 M kauften wir 13 m Stoff zweier Sorten, und zwar für 27,50 M und 22,40 M je Meter. Wieviel Meter Stoff der einzelnen Sorten haben wir eingekauft?

Na/Te 7 ■ 373 5 h plus $3k$ Minuten ist das gleiche wie sechs Stunden minus $2k$ Minuten. Ermittle die Zahl k!

Na/Te 8 ■ 374 Ein 80 m langer Schnellzug, der eine Geschwindigkeit von 72 km/h hat, fährt an einem stehenden Personenzug vorbei. Marie-Luise stoppt die Zeit. Das Vorbeifahren dauert 10 s. Wie lang ist der Personenzug?

Na/Te 8 ■ 375 Berechne mit dem Taschenrechner und gib einen Ablaufplan! In welchem Verhältnis steht die relative Atommasse von Quecksilber (Hg = 200,5) zur relativen Atommasse von Kohlenstoff (C = 12)?

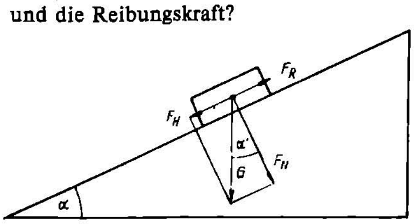
Na/Te 9 ■ 376 An einem Sicherheitsventil wirkt eine Ventildruckkraft von $F_1 = 40$ N. Das Gegengewicht ist mit $F_2 = 8$ N festgelegt. Die Gesamtlänge des Hebels beträgt $l = 12$ cm.
Wie groß sind die Abstände l_1 (vom Drehpunkt bis Ventil) und l_2 (vom Ventil bis zum Gegengewicht) einzustellen?



Na/Te 9 ■ 377 Aus einem slowakischen Mathematikbuch:
a) Berechne, um wieviel Prozent die Produktion absinken würde, wollten wir ohne Steigerung der Arbeitsproduktivität von der achtstündigen auf die siebenstündige Arbeitszeit übergehen.
b) Um wieviel Prozent müßte die Arbeitsproduktivität ansteigen, damit die Produktion nicht absinkt?

Na/Te 10/12 ■ 378 Ein Stahlrohr besitzt folgende Abmessungen: Nennweite 1200 mm, Wanddicke 28 mm, Baulänge 3 m und 2 cm starke Isolierschicht außen. Zur Bereitstellung des richtigen Hebezeugs muß das Gewicht des Rohres ohne Isolierung bestimmt werden. Wieviel Quadratmeter Blech zur Verkleidung der Isolierung ist für das angegebene Rohr notwendig?

Na/Te 10/12 ■ 379 Auf einer Ebene von 25 % Neigung gleite ein Körper von 500 N Gewicht mit gleichbleibender Geschwindigkeit abwärts. Wie groß sind die Druckkraft, die auf die Unterlage ausgeübt wird, und die Reibungskraft?



Die natürlichen Zahlen 1, 9, 8, 7 sollen durch jeweils vier *gleiche* Ziffern α, die durch Operationszeichen bzw. Klammern miteinander verbunden sind, dargestellt werden.

$$1 = (\alpha : \alpha)\cdot(\alpha : \alpha)$$
$$9 = \alpha + \alpha + \alpha : \alpha$$
$$8 = \alpha + \alpha + \alpha - \alpha$$
$$7 = \alpha + \alpha - \alpha : \alpha$$

Interessante Nachbetrachtung

In *alpha* 6/1985, Seite 137, sollten *Zum Jahreswechsel* alle natürlichen Zahlen x, y bestimmt werden, die die Gleichung

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1985} \qquad (1)$$

erfüllen.
Hans-Henning Wiesner, Merseburg, sandte uns seine interessante Lösung. (Er fand weitere Lösungspaare x, y; wegen der Symmetrieeigenschaften der Variablen sind es insgesamt 9.)
Wir wollen seine Lösungsidee nutzen und sie verallgemeinert für jede beliebige Jahreszahl j ($j \neq 0$) wiedergeben.
(Ähnliche Problematik stellten wir bereits bei den Magischen Quadraten in *alpha* 6/1984.)
Setzt man in (1) für die Jahreszahl die Variable j, so ist nach Multiplikation mit jxy $jy + jx = xy$. Wegen $x > j$, $y > j$ substituiert man

$$x = j + m,\quad y = j + n. \qquad (2)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} j(j+n) + j(j+m) &= (j+m)(j+n) \\ j^2 + nj + j^2 + mj &= j^2 + mj + nj + mn \\ j^2 &= m\cdot n \qquad (3) \end{aligned}$$

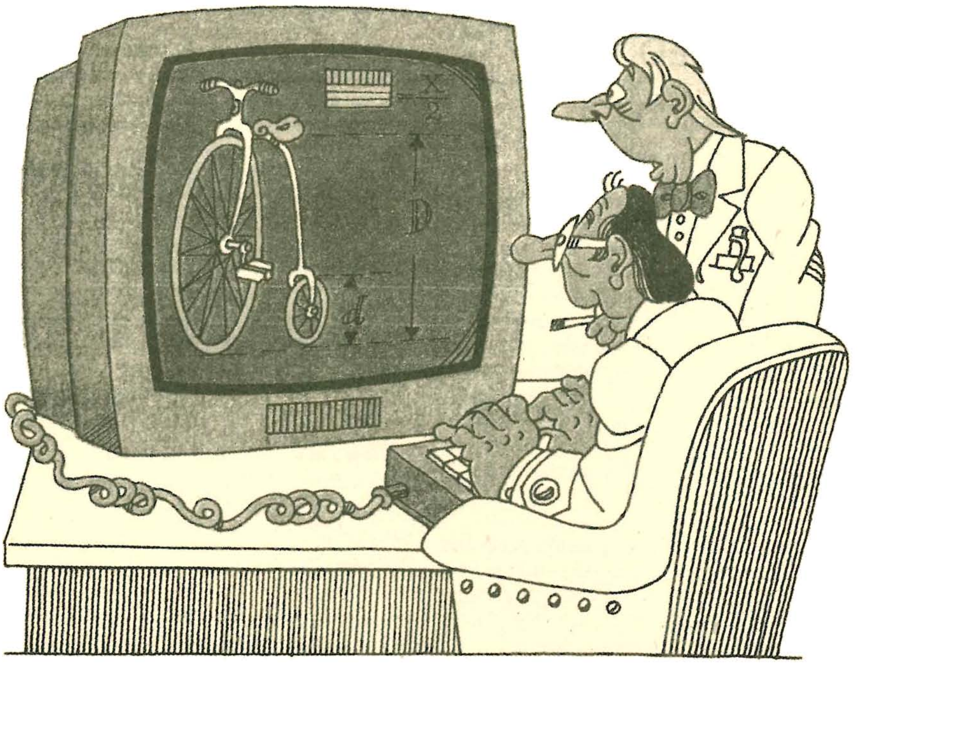
Für $j = 1985$ ergibt sich die Primfaktorenzerlegung $5\cdot 397$.
Sei $a = 5$, $b = 397$, so ergeben sich für m, n folgende Variationen:
Wegen (3) gilt

m	n
1	a^2b^2
a	ab^2
b	a^2b
a^2	b^2
ab	ab

Da sich die ersten vier Paare noch vertauschen lassen, ergeben sich insgesamt neun Paare und wegen (2) auch neun Lösungspaare für (1), was auch die Probe bestätigt.
Mit (2), (3) ist somit ein Algorithmus für die Lösungspaare aller Jahreszahlen $j(j \neq 0)$ gegeben.
Für 1986 ($1986 = 2\cdot 3\cdot 331$) gäbe es $2\cdot 13 + 1 = 27$ Lösungspaare. Für 1987 jedoch (wegen $j = p$, p Primzahl und $m\cdot n = 1\cdot p^2 = p^2\cdot 1 = p\cdot p$) sind es genau die drei Lösungen $(p+1, p^2+p)$, $(p^2+p, p+1)$, $(2p, 2p)$.
Bei einer Unterhaltung mit Prof. Dr. *Gronau*, Greifswald, kam es noch zu folgender Ergänzung:
Hat j die Primzahlzerlegung
$j = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_t^{\alpha_t}$,
so gibt es genau
$k = (2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1)\cdot\ldots\cdot(2\alpha_t + 1)$
geordnete Lösungspaare.
$\left(\text{Bis auf Symmetrie } \frac{k+1}{2}\right)$.
Daraufhin ergeben sich sofort einige Fragestellungen bei Betrachtung der Jahreszahlen von 1 bis 1987, wie z. B.:
a) Gibt es genau 2 bzw. mehr oder weniger als zwei Jahreszahlen, die gleich der Anzahl der Lösungspaare sind?
b) Gibt es nur vier Jahreszahlen (nämlich 2, 4, 6, 12), die kleiner sind als die Anzahl der dazugehörigen Lösungspaare?
c) Für welche Jahreszahl gibt es die meisten Lösungspaare? Ist es 1680 mit 243 Paaren?
Wann wird der *Rekord* erstmals überboten werden? Ist es im Jahre 2520 mit 315 Paaren?

H.-J. Kerber

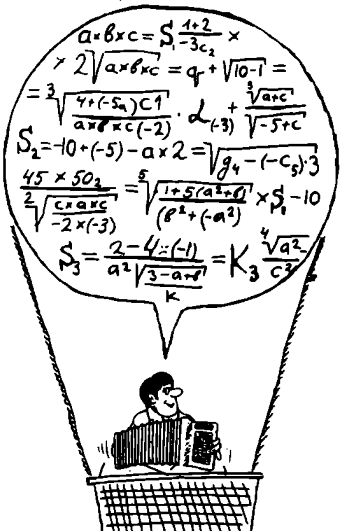
„Mensch, so was wurde doch schon konstruiert!"
„Aber noch nie von einem Computer."



alpha-Wettbewerb

Kollektive Beteiligung am alpha-Wettbewerb 1985/86

Pablo-Neruda-OS Ahlbeck; Fr.-Engels-OS, OS E. Mäder, Haus d. Jungen Pioniere, alle Altenburg; Fr.-Weineck-OS, Alsleben; Haus d. Jungen Pioniere Altentreptow; E.-Schneller-OS, Alt-Sührkow; W.-Pieck-OS, Anklam; OS Asbach; 7. OS Aschersleben; S.-Rädel-OS, Bad Gottleuba; R.-Schwarz-OS, Bad Liebenstein; Stat. Jg. Naturf. u. Techn., EOS E. Thälmann, O.-Grotewohl-OS, alle Bad Salzungen; H.-Duncker-OS, Bad Kleinen; Zentrale OS H. Beimler, Bärenklau; H.-Heine-OS, Barchfeld; O.-Nowack-OS, Bentwisch; M.-Poser-OS, Bad Salzungen; 10. OS, 25. OS Fr. Mehring, 26. OS L. Renn, 33. OS L. Grundig, 41. OS L. Weiskopf-Henrich, Pionierhaus W. Ulbricht, M.-A.-Nexö-OS, alle Berlin; A.-Becker-OS, Berlingerode; H.-Clement-OS Bernsbach; Geschw.-Scholl-OS, Bernsdorf; OS Beuren; OS Bischofferode; OS Bismarck; OS Fr. Schiller, Bleicherode; F.-Weineck-OS, Blumberg; OS Blumenthal; OS C. Wach, Bockendorf; A.-Bebel-OS, Boizenburg; OS W. Komarow, Boxberg; K.-Bürger-OS, Bredenfelde; OS B. Brecht, Brehme; W.-Seelenbinder-OS, OS H. Beimler, beide Breitungen; OS Dr. Th. Neubauer, Brotterode; M.-Poser-OS, Bürgel; W.-Pieck-OS, Burow; W.-Estel-OS, Buttlar; O.-Koschewoi-OS, Callenberg; 1. OS, Coswig; Stat. Jg. Naturf. u. Techn., 5. OS C. Blechen, beide Cottbus; OS B. Kühn, Dambeck; Fr.-Reuter-OS, Demmin; M.-Gorki-OS, Dermbach; OS Dersekow; OS Makarenko, OS K. Kollwitz, beide Dingelstädt; OS K. Niederkirchner, Domersleben; OS A. Matrossow, Dorndorf; O.-Grotewohl-OS, Dreitzsch; Pionierpalast W. Ulbricht, 30. OS, beide Dresden; E.-Weinert-OS, Deuna; M.-Curie-OS, Dohna; OS Dürröhrsdorf; W.-Pieck-OS, Eberswalde; OS Eckartsberga; OS Fr. Engels, Effelder; W.-Pieck-OS, Eichhof; OS Fr. Heckert, Eisleben; OS H. Grundig, Ellrich; 1. OS R. Arnstadt, Elsterwerda; E.-Weinert-OS, Empfertshausen; G.-Dobrowski-OS, Falkenberg; G.-Dimitroff-OS, Falkenstein; OS Th. Müntzer, Fambach; W.-Pieck-OS, Fehrbellin; 5. OS G. Dimitroff, Finsterwalde; alpha-Club, Flessau; B.-Brecht-OS, Floh; Spezialschule C. F. Gauß, Station Jg. Techn. u. Naturf., beide Frankfurt/O.; E.-Thälmann-OS, BBS Edelstahlwerk, beide Freital; OS Friedeburg; OS I Friedland; Station Jg. Naturf. u. Techniker alpha, Fürstenwalde; R.-Arnstadt-OS, Geisa; J.-Gagarin-OS, Geithain; Haus der Jungen Pioniere, Gadebusch; K.-Marx-OS, Gera; E.-Hartsch-OS, Gersdorf; Kalinin-OS, Geschwenda; OS Gielow; K.-Kräpler-OS, Gnoien; 7. OS, 13. OS, beide Görlitz; R.-Schulz-OS, Golzow; Haus d. Jungen Pioniere Br. Kühn, Gotha; Kreisklub Jg. Math. Gräfenhainichen; Kreisklub Jg. Math., E.-Thälmann-OS, beide Greifswald; OS Grabowhöfe; OS H. Beimler, OS J. Gagarin, beide Greußen; A.-Frank-OS, Grimma; OS W. Seelenbinder, Gröden; A.-Walther-OS, Gröditz; OS C. Zetkin, Groitzsch; OS Großbartloff; OS A. Kuntz, Großbodungen; OS E. Hoernle, Großfurra; alpha-Club Großbrückerswalde; J.-Gagarin-OS, Grünhain; Th.-Müntzer-OS, Gumpelstadt; OS Großschönau; OS H. Günther, Hachelbich; M.-Gorki-OS, Hainichen; Stat. Jg. Naturf. H. Rockmann, Marx-Engels-Schule, beide Halberstadt; Kreisklub Halle-Süd; OS f. Körperbehinderte, Halle; Stat. Jg. Techn. u. Naturf. Ziolkowski, W.-Koenen-OS, beide Halle-Neustadt; OS J. Marchlewski, Havelberg; OS Haynrode; OS Hammerbrücke; OS B. Koenen, Hedersleben; Schule der DSF, Heiligengrabe; EOS W. Pieck, Heiligenstadt; P-Schreier-OS, Hennigsdorf; OS Th. Müntzer, Hermannsdorf; M.-Gorki-OS, Hillersleben; OS Hiddensee; Goethe-OS, Hohenleipisch; OS Horka; 21. OS, Hoyerswerda; E.-Egert-OS, Hundeshagen; Goethe-OS, Ilsenburg; G.-Dimitroff-OS, Immelborn; G.-Ewald-OS, Ivenack; A.-Becker-OS, Jatznick; OS M. Poser, OS W. Pieck, beide Jena; OS Kaltennordheim; OS A. Becker, Kamsdorf; Cl.-Zetkin-OS, Kandelin; H.-Beimler-OS, Karbow; N.-Kopernikus-OS, OS f. Körperbehinderte Dr. F. Wolf, E.-Schneller-OS, A.-Matrossow-OS, E.-Thälmann-OS, Fr.-Matschke-OS, P.-Tschaikowski-OS, H.-Menzel-OS, alle Karl-Marx-Stadt; E.-Boberg-OS, Karlsburg; OS Katzow; OS Cl. Zetkin, Kaulsdorf; OS Th. Rybarczyk, Kemberg; OS Th. Neubauer, Kieselbach; OS Kirchworbis; Kreisklub Math. Kleinmachnow; OS Th. Müntzer, Klettenberg; H.-Matern-OS, Klietz; W.-Seelenbinder-OS, Könitz; OS Königsmark; OS E. Thälmann, Köthen; OS Küllstedt; OS Cl. Zetkin, Laage; OS Latdorf; Goetheschule, Lauscha; OS E. Weinert, Legefeld, R.-Teichmüller-OS, Leimbach; K.-Liebknecht-OS, Dr.-S.-Allende-OS, OS R. Luxemburg, 4. OS J. C. Fuhlrott, E.-Thälmann-OS, alle Leinefelde; Haus d. Jungen Pioniere A. Saefkow, O.-Schön-OS, beide Leipzig; M.-Poser-OS, Lengfeld; G.-E.-Lessing-OS, Lengefeld; G.-Dimitroff-OS, Lenzen; E.-Thälmann-OS, Leutenberg; OS Leutersdorf; W.-Pieck-OS, Lichte; O.-Grotewohl-OS, EOS Prof. Dr. Schneider, beide Lichtenstein; AG Math. Lieberose; Pestalozzi-OS, Löbau; OS W. Wallstab, Löderburg; W. Seelenbinder-OS, Lössau; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Lübz; Haus d. Jungen Pioniere Th. Körner, Goethe-OS, beide Ludwigslust; Lenin-OS, Magdeburg; W.-I.-Lenin-OS, Malchin; J.-Gagarin-OS, Meiningen; OS J. Gagarin, Merkers; Fr.-Heckert-OS, Milkau; OS Mittelstille; E.-Steinfurth-OS, Mittenwalde; OS H. Danz, Möser; Kinderheim Munzig; OS Nachterstedt; O.-Grotewohl-OS, Naumburg; OS H. Beimler, Naundorf; OS W. Bykowski, Neetzow; R.-Hallmeyer-OS, Neundorf; Goetheschule, Fr.-Schiller-OS, beide Neustadt; W.-Seelenbinder-OS, Niederlichtenau; Dr.-Th.-Neubauer-Schule, Niederorschel; W.-Pieck-OS, Niederwiesa; OS Niegripp; Haus d. Jungen Pioniere H. Matern, Nordhausen; AG Jg. Math., Nossentiner Hütte; OS Obhausen; OS Oberlichtenau; OS E. Weinert, Oberlichtenau; Humboldtschule, Oberlungwitz; H.-Warnke-Schule, Oederan; OS Olbersdorf; Haus d. Jungen Pioniere H. Coppi, Oranienburg; EOS K. Marx, Oschersleben; E.-Vogel-OS, 2. OS Pestalozzischule, beide Oschatz; OS Osternienburg; OS W. Pieck, Osterwieck; Haus d. Jungen Pioniere P. Göring, Parchim; Haus d. Jungen Pioniere E. Weinert, Pasewalk; OS Dr. Th. Neubauer, Pfaffschenda; Päd. Kreiskabinett, Plauen; OS G. Haak, Pirna; Makarenko-OS, Plessa; OS E. Schneller, Polleben; 5. OS A. S. Makarenko, 17. OS, beide Potsdam; EOS Pritzwalk; OS Pritzerbe; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Rackwitz; OS Pestalozzi, Radebeul; W.-I.-Lenin-OS, Radewege; OS Raßnitz; Fr.-Engels-OS, Rathenow; E.-Weinert-OS, Reichenbach; E.-Thälmann-OS, Reinberg; OS H. Rau, Rheinsberg; OS U. Steinhauer, G.-Hauptmann-OS, J.-Gagarin-OS, alle Ribnitz; Spezialschule Fr. Engels, Riesa; J.-Gagarin-OS, Riethnordhausen; J.-Curie-OS, Röbel; J.-Curie-OS, Ronneburg; H.-Matern-Schule, Rochlitz; Ziolkowski-OS, Roßdorf; Fr.-Schmenkel-OS, Roskow; Haus d. Jungen Pioniere, 66. OS O. Buchwitz, 34. OS M. Reichpietsch, alle Rostock; OS S. Kosmodemjanskaja, Rotterode; W.-Pieck-OS, Rotta; OS K. Niederkirchner, Saal; E.-Weinert-OS, Saalfeld; Stat. Jg. Techn. u. Naturf. Salzwedel; T.-Bunke-OS, Sanitz; W.-Pieck-OS, Stat. Jg. Naturf. u. Techn., beide Sangerhausen; OS H. Matern, Schernberg; OS Schlagsdorf; W.-Pieck-OS, Schlottwitz; G.-Hauptmann-OS, Schleusingen; OS M. Gorki, Schkölen; 4. OS, OS K. Marx, J.-G.-Seume-OS, OS H. Danz, alle Schmalkalden; Schule d. DSF, Schneidlingen; Haus d. Jungen Pioniere, Schönebeck; OS Kuba, Schorssow; OS Fr. Engels, Schwallungen; H.-Beimler-OS, Schwarzenberg; OS F. Fröbel, Schweina; Haus d. Jungen Pioniere, M.-May-OS, beide Sebnitz; Fr.-Reuter-OS, Siedenbollentin; OS Th. Müntzer, Silkerode; OS Sohland; OS J. R. Becher, OS W. Pieck, OS Glück-auf, alle Sondershausen; OS Sponholz; K.-Marx-OS, Spremberg; Kreisklub Jg. Math. Spremberg; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Stahnsdorf; OS K. Liebknecht, Stadtlengsfeld; J.-Fučik-OS, Steinbach; OS Steinsdorf; A.-Becker-OS, Stralendorf; Pionierhaus F. Weineck, Strausberg; Dr.-S.-Allende-OS, Stralsund; OS Ströbeck; OS E. Thälmann, Steinbach-Hallenberg; Schule d. DSF, Struppen; 12. OS Dr. R. Sorge, Suhl; H.-Beimler-OS, Tantow; OS E. Schneller, Taubenheim; J.-Gagarin-OS, Teistungen; OS G. Eisler, K.-Niederkirchner-OS, beide Teterow; K.-Liebknecht-OS, Teuchern; OS Fr. Mehring, Tiefenort; E.-Schneller-OS, Töplitz; A.-Einstein-OS, Pestalozzischule, beide Torgelow; E.-Thälmann-OS, OS W. Pieck, beide Trusetal; Ehm-Welk-OS, Goetheschule, A.-Nitz-OS, alle Ueckermünde; H.-Beimler-OS, Unterbreizbach; E.-Schneller-OS, Urnshausen; OS J. G. Seume, Vacha; OS Vitzenburg; A.-Bebel-OS, Vogelsang; OS Viernau; OS Völkershausen; R.-Luxemburg-OS, Waldau; Goetheschule, Waren; OS Wechmar; H.-Beimler-OS, Wefensleben; OS Weißenborn-L.; OS R. Luxemburg, Werbelow; J.-Gagarin-OS, Werneuchen; OS Wernshausen; OS Wesenberg; OS Westerengel; OS L. Fürnberg, Wegeleben; H.-Matern-OS, Weida; Karl-Marx-OS, Wilkau-Haßlau; OS H. Matern, Wipperdorf; Kreisklub Jg. Math. Wittenberg; Stat. Jg. Naturf. u. Techn., Fr.-Engels-OS, beide Wittstock; Winterlager d. Kreises, OS W. I. Lenin, H.-Werner-OS, alle Worbis; OS Th. Müntzer, Wulfen; OS E. Schultz, Wulkenzin; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Zembschen; OS W. Seng, Zepernick; OS Ziesar; OS J. H. Pestalozzi, Zschornewitz



Die Buchstaben sind so durch die Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Aufgabe entsteht. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

```
  A L L E S
  – G Ü T E
  –   F Ü R
  _________
    1 9 8 7
```

20 Jahre alpha

Aufruf

Seit 20 Jahren erscheint die Mathematische Schülerzeitschrift *alpha*. Herausgegeben von ihrem Chefredakteur OStR *J. Lehmann* (Ehrenmitglied der Mathematischen Gesellschaft der DDR) und einem erfahrenen Redaktionskollegium hat diese Zeitschrift entscheidenden Anteil an der mathematischen Bildung unserer Jugend, bei der Förderung der Olympiaden *Junger Mathematiker* und der Pflege des mathematischen Wettbewerbs schlechthin. Ein breiter Leser- und Autorenkreis fühlt sich mit dieser Zeitschrift eng verbunden, zum *alpha*-Wettbewerb gehen jährlich etwa 100000 Lösungen bei der Redaktion ein.
Dennoch sollte jeder Mathematiker und mathematisch interessierte Leser prüfen, ob er nicht in der Lage ist, durch eigene Beiträge (oder Aufgabenstellungen) das Angebot an interessanten Artikeln und Problemen zu stärken, neue Anwendungsbereiche der Mathematik aufzuzeigen und das Interessenfeld Mathematik noch vielseitiger dem Schüler verständlich darzulegen. Deshalb ruft der Vorstand der Mathematischen Gesellschaft der DDR (MGdDDR) alle Mitglieder dieser Gesellschaft, Lehrer, Hochschullehrer und in der Industrie und Volkswirtschaft tätigen Mathematiker der DDR sowie alle aktiven Leser der *alpha* auf, die erzieherische und publizistische Wirksamkeit dieser Schülerzeitschrift durch eigene Beiträge aktiv zu fördern. Besonders gute Einsendungen (an die *alpha*-Redaktion) wird die MGdDDR zu gegebener Zeit mit einer kleinen Anerkennung honorieren.

Prof. Dr. R. Klötzler
Vorsitzender der MGdDDR

Zitiert aus der alpha 1/1967

... Die Zeitschrift dient der Förderung der mathematisch Interessierten unter Euch, liebe Mädel und Jungen, und der Entwicklung eines breiten Interesses für die bedeutende und schöne Wissenschaft Mathematik...
Möge die Zeitschrift *alpha* dem großen und schönen Ziel dienen, Euch zu hohen mathematischen Leistungen zu befähigen und dafür zu begeistern, Euer Wissen und Können mit ganzem Herzen für die Sache des Sozialismus einzusetzen.
In diesem Sinne wünsche ich Eurer Zeitschrift viel Erfolg.

M. Honecker, Minister für Volksbildung

Die „Redaktion" besteht aus einem Chefredakteur und einer Redaktionsassistentin. Wertvollste Helfer waren in diesen beiden Jahrzehnten die Gutachter Dr. *R. Hofmann*, NPT *H. Kästner* und Dr. *C.-P. Helmholz* von der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig. Mit Rat und Tat half das Redaktionskollegium. In gemeinsamer Arbeit entstanden 120 *alpha*-Hefte für unsere 54000 Leser. Persönlicher Einsatz bei der Beschaffung und *alpha*-gerechten Bearbeitung zahlreicher Beiträge und Aufgabenzusammenstellungen garantierten ein hohes Niveau unserer Zeitschrift.

Unser Dank gilt den zahlreichen Wissenschaftlern, den Lehrern, den zahlreichen Mitstreitern aus der gesellschaftlichen Praxis und nicht zuletzt den Schülern. Durch ihre Artikel halfen sie tausenden *Jungen Mathematikern*, ihr Wissen und Können zu überprüfen, zu vertiefen und zu erweitern, gaben Impulse, sich mit spezieller, weiterführender Literatur zu beschäftigen. Arbeitsgemeinschaften, Kreis- und Bezirksklubs, Mathematische Schülergesellschaften, Korrespondenzzirkel nutzten in ihren Kollektiven das Material, stellten aber gleichzeitig ihre Arbeitsergebnisse zur Verfügung.

Zwischen den mathematischen Schülerzeitschriften der sozialistischen Bruderländer bestehen seit langem enge Patenschaftsbeziehungen, die sich besonders durch Austausch von Beiträgen, Literatur, durch Aufgabenzusammenstellungen und persönlichen Aussprachen, meist im Rahmen der Internationalen Mathematikolympiaden, mit dem Chefredakteur der *alpha* zeigten. Mit zahlreichen weiteren Zeitschriften besteht ein ständiger Austausch. Bild 1 zeigt einen Erfahrungsaustausch des Chefredakteurs der finnischen Schülerzeitschrift *Functio* (im Bild Mitte) mit dem der *alpha* (im Bild rechts).

Ein *alpha*-Schwerpunkt ist die Veröffentlichung aller gestellten Aufgaben der *Olympiaden Junger Mathematiker* der DDR und der Internationalen Mathematikolympiade (IMO). Darüber hinaus werden die reichen Erfahrungen besonders der sozialistischen Länder auf dem Gebiete der verschiedensten Wettbewerbe veröffentlicht. Sie wekken Interesse, fördern Talente in unserem Fachgebiet. Bild 2 zeigt einen Ausschnitt aus der Siegerehrung in dem Auditorium maximum der Humboldt-Universität anläßlich der IV. DDR-Olympiade.

alpha wird in 17 Ländern der Erde abonniert, besonders in der Sowjetunion und in Österreich. Im Jahr verlassen etwa 1400 Briefe die Redaktion, sei es in deutsch, russisch, englisch oder französisch. Sie sind ein Spiegelbild unserer Verbindung mit dem Leser. Aus dieser Korrespondenz entspringen ebenso viele Impulse wie anläßlich der zahlreichen Leserkonferenzen im Rahmen der Arbeitsgemeinschaften, der Olympiadebewegung und zahlreichen persönlichen Kontakten der Redaktionsmitglieder im In- wie im Ausland.

In zwanzig Jahren sorgten die Druckerei Frankenstein (Leipzig), die Staatsdruckerei der DDR (Berlin) und seit 1976 der Graphische Großbetrieb INTERDRUCK für eine *jederzeit* sach- und fachgerechte Herstellung, eine pünktliche Auslieferung der Hefte. Unser Dank gilt auch den Angestellten der Deutschen Post und dem seit zwei Jahrzehnten unermüdlich für die hervorragende graphische Gestaltung Verantwortlichen H. Tracksdorf sowie dem für die zahlreichen, oft nicht leichten technischen Zeichnungen tätigen OL G. Gruß (beide Leipzig). Bild 3 zeigt den Chefredakteur bei einer Beratung mit zwei Ingenieuren der Abt. Herstellung.

In unserer Republik gibt es Tausende von Arbeitsgemeinschaften und Interessengemeinschaften. *alpha* unterstützt ihre Teilnehmer kontinuierlich in vielfältiger Weise, sei es durch „mathematischen Speck", d.h., durch altersgerechte Fachartikel, durch Beispiele für eine lebendige außerunterrichtliche Tätigkeit. Aus zahlreichen Leserbriefen spricht das stete Interesse für unsere Wandzeitungsarbeit, durch die Sprach-, Schach-, Briefmarkenecke, lustige Knobeleien, Vignetten und Spiele. Am beliebtesten dabei ist die Doppelseite: In freien Stunden · *alpha*-heiter. Bild 5 zeigt die Wissensstraße Mathematik des *alpha*-Clubs der J.-Schehr-OS Leipzig auf dem Pressefest der Leipziger Volkszeitung.

Mit dem ersten *alpha*-Heft (1/67) wurde durch Initiative des Chefredakteurs der Wettbewerb ins Leben gerufen. Wir waren stolz, denn mit dem Jahrgang 1967 gingen 5100 Lösungen ein. Heute, zwei Jahrzehnte später, erreichen uns pro Jahr etwa 100000 Lösungen, d.h., in 20 Jahren wurden insgesamt 1386300 Lösungen eingesandt, sortiert, korrigiert und Antwortkarten geschrieben, eine stolze Bilanz.
Wir danken allen Wettbewerbsteilnehmern für ihre fleißige und gewissenhafte, meist ausdauernde Mitarbeit. Pro Jahr gehen rund 4500 Urkunden und Abzeichen in alle Teile der DDR und ins Ausland. Verlage unserer Republik unterstützen uns dankenswerterweise mit Buchpreisen im Werte von 2500 bis 3000 Mark. Der Verlag Volk und Wissen stellt jährlich 24000 Mark zur ökonomischen Sicherung dieses Wettbewerbs zur Verfügung. Unser Dank gilt den beiden Korrektoren J. Lehmann, Ch. Döhler, beide Leipzig, den fleißigen Helfern, welche die Antwortkarten schreiben, der stets emsigen Redaktionsassistentin, die alles termingerecht bewältigt und vor allem den beiden langjährigen Aufgabenexperten Dr. W. Fregin (Leipzig) und OStR Th. Scholl (Berlin), welche mit Herz und Sachverstand Heft um Heft lehrplangerecht, im Inhalt den Klassenstufen angemessen und interessant, eine bunte Palette von Problemen zusammenstellten aus der erfreulich hohen Zahl von Aufgabenvorschlägen aus der Leserschaft. Bild 4 zeigt den Chefredakteur und die Redaktionsassistentin. In Kleinarbeit haben sie (innerhalb einer Sero-Stelle) die 26332 Lösungen eines Heftes (6/1981) gestapelt.

Bild 1

Bild 4

Bild 2

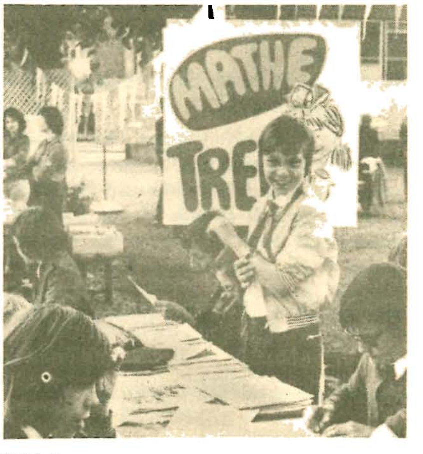


Bild 5

Bild 3

Ausblick

Wer die *alpha* aufmerksam studiert, wird eine stete inhaltliche Weiterentwicklung spüren. Seit 1975 z. B. gingen wir verstärkt auf naturwissenschaftliche Probleme ein, erweiterten den Wettbewerb aus eigener Initiative mit Physik- und Chemie-Aufgaben. Selbstverständlich unterstützen wir seit 1984 die Arbeit mit dem Schultaschenrechner.

Bald werden wir – Zug um Zug – durch Beiträge, Informationen und Literaturhinweise die Wechselwirkung zwischen der Rechentechnik und der Mathematik aufzeigen. Für 1987 liegen Aufgaben aus Natur und Technik, Komplexaufgaben, Beiträge, welche die Wechselwirkung von Mathematik und Praxis zeigen, historische Abrisse vor. Im Kollektiv entstand – in Auswertung der Beschlüsse des XI. Parteitages der SED – ein langfristiger Plan zur Weiterentwicklung der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha*.

XXVII. Internationale Mathematikolympiade

Warschau, 4. bis 15. Juli 1986

Aufgaben

1. Sei d eine positive ganze Zahl $\neq 2, 5, 13$.
Man zeige:
In der Menge $\{2, 5, 13, d\}$ gibt es zwei verschiedene Elemente a, b, für die $ab - 1$ keine Quadratzahl ist. (BRD)

2. In der Ebene ist ein Dreieck $A_1A_2A_3$ und ein Punkt P_0 gegeben. Wir setzen $A_s = A_{s-3}$ für alle $s \geqq 4$. Wir konstruieren die Folge $P_0, P_1, P_2, \ldots$ von Punkten, so daß P_{k+1} sich als Bild von P_k bei der Drehung um A_{k+1} um 120° im Uhrzeigersinn (mathematisch negativ) ergibt ($k = 0, 1, 2, \ldots$).
Man zeige:
Wenn $P_{1986} = P_0$ ist, dann ist das Dreieck $A_1A_2A_3$ gleichseitig. (China)

3. Den Eckpunkten eines regelmäßigen Fünfecks ist je eine ganze Zahl so zugeordnet, daß die Summe dieser fünf Zahlen positiv ist. Sind X, Y bzw. Z drei aufeinanderfolgende der fünf Punkte und x, y bzw. z die ihnen zugeordneten Zahlen, wobei $y < 0$ ist, so ist folgende Operation erlaubt: Die Zahlen x, y bzw. z werden in dieser Reihenfolge durch $x + y$, $-y$ bzw. $z + y$ ersetzt.
Diese Operation wird so oft wiederholt, wie sich ein $y < 0$ findet.
Man entscheide, ob man dabei stets nach endlich vielen Schritten abbrechen muß. (DDR)

4. Es seien A, B zwei benachbarte Ecken eines regelmäßigen n-Ecks ($n \geqq 5$) mit dem Mittelpunkt O. Es wird ein zu OAB kongruentes Dreieck XYZ zunächst mit dem Dreieck OAB zur Deckung gebracht und dann so bewegt, daß sich der Punkt X stets innerhalb des n-Ecks und die Punkte Y und Z stets auf den Seiten desselben befinden.
Man bestimme alle möglichen Lagen, die X einnehmen kann, wenn Y und Z gemeinsam den Rand des n-Ecks durchlaufen. (Island)

5. Man bestimme alle Funktionen f, die auf der Menge R_0^+ der nichtnegativen reellen Zahlen definiert sind, nur nichtnegative reelle Werte annehmen und die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

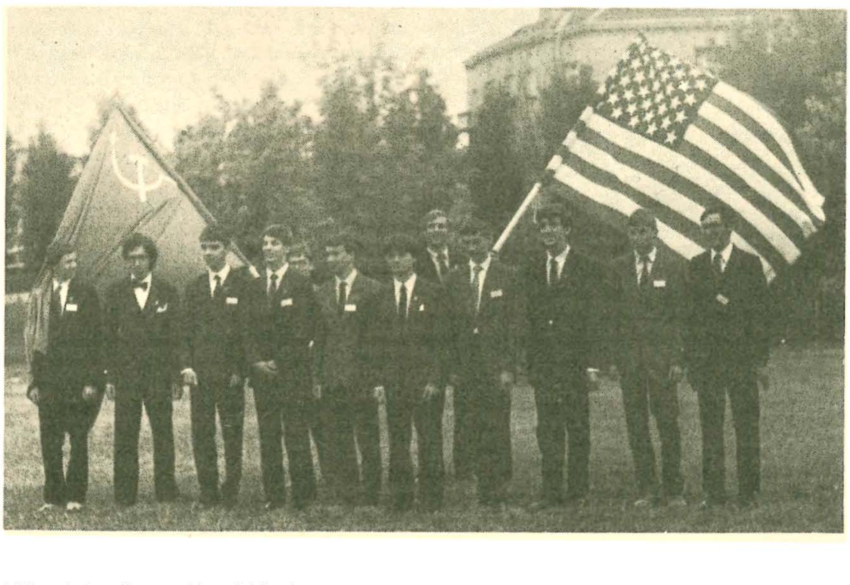
a) $f(x \cdot f(y)) \cdot f(y) = f(x + y)$ für alle $x, y \in R_0^+$
b) $f(2) = 0$
c) $f(x) \neq 0$ für $0 \leqq x \leqq 2$ (Großbritannien)

6. In der Ebene sei eine endliche Menge von Punkten gegeben, die bezüglich eines festen Koordinatensystems lauter ganzzahlige Koordinaten haben.
Man entscheide, ob es stets möglich ist, einige dieser Punkte rot und die übrigen dieser Punkte weiß zu färben, so daß sich für jede Gerade, die zu einer der Koordinatenachsen parallel verläuft, die Anzahl der auf ihr gelegenen roten Punkte von der Anzahl der auf ihr liegenden weißen Punkte um höchstens Eins unterscheidet. (DDR)

Unsere Mannschaft der IMO 86:

Prof. Dr. Burosch, Delegationsleiter
Prof. Dr. Gronau, stellv. Delegationsleiter
Jörg Jahnel, 1. Preis 41 Punkte
Stefan Günther, 2. Preis 31 P.
M.-Torsten Tok, 2. Preis 31 P.
Ingo Warnke, 2. Preis 26 P.
Günter Döge, 3. Preis 24 P.
Harald Heidler, 3. Preis 19 P.

Die zwei Siegermannschaften der USA und der UdSSR



Inoffizielle Länderwertung – Preisverteilung

Platz	Land	Punkte	1. Preis	2. Preis	3. Preis
1	USA	203	3	3	-*
	UdSSR	203	2	4	-
3	BRD	196	2	4	-
4	VR China	177	3	1	1
5	DDR	172	1	3	2
6	SR Rumänien	171	2	2	1
7	VR Bulgarien	161	1	3	2
8	Ungarische VR	151	1	2	2
9	ČSSR	149	-	3	3
10	SR Vietnam	146	1	2	2
11	Großbritannien	141	-	2	3
12	Frankreich	131	1	1	2
13	Österreich	127	-	2	2
14	Israel	119	-	2	2
15	Australien	117	-	-	5
16	Kanada	112	-	2	1
17	VR Polen	93	-	-	3
18	Marokko	90	-	1	2
19	Tunesien	85	-	-	1
20	Jugoslawien	84	-	-	2
21	Algerien	80	-	-	2
22	Belgien	79	-	1	2
23	Spanien (4)	78	-	1	2
24	Brasilien	69	1	-	-
25	Norwegen	68	-	1	-
26	Griechenland	63	-	-	2
27	Finnland	60	-	-	1
28	Kolumbien	58	-	-	-
29	Schweden	57	-	-	1
30	Türkei	55	-	-	-
31	Mongolische VR	54	-	-	-
32	Zypern	53	-	1	-
33	Kuba	51	-	-	-
34	Italien (3)	49	-	-	2
35	Kuweit (5)	48	-	-	-
36	Island (4)	37	-	-	-
37	Luxemburg (2)	22	-	-	-
			18	41	48

Jede Mannschaft bestand aus 6 Schülern bzw. aus der in Klammern angegebenen Anzahl von Schülern.
* Sowie ein Sonderpreis für die elegante Lösung einer Aufgabe.

Schriftliche Abschlußprüfung Fach Mathematik

Klassenstufe 10 – Schuljahr 1985/86

Pflichtaufgaben

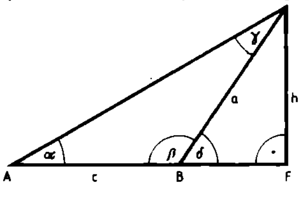
1. In der DDR werden jährlich erhebliche Mittel aus dem Staatshaushalt zur Sicherung stabiler und niedriger Preise für Waren des Grundbedarfs bereitgestellt.
a) Im Jahre 1982 betrugen die Gesamtausgaben des Staatshaushalts der DDR 182 Milliarden Mark. Davon wurden 11,7 Milliarden Mark zur Stützung von Lebensmittelpreisen ausgegeben. Wieviel Prozent der Gesamtausgaben sind das?
b) Für das Jahr 1983 wurde der Betrag von 11,7 Milliarden Mark um 3,4 Prozent erhöht. Wieviel Milliarden Mark wurden 1983 zur Stützung von Lebensmittelpreisen ausgegeben?

2. a) Lösen Sie die Ungleichung
$2(3x+5) > 9x - (5-2x) \quad (x \in P)$!
b) Geben Sie von den vier Zahlen
$-3{,}01;\ 0;\ 3;\ \frac{37}{10}$
diejenigen an, die diese Ungleichung erfüllen!

3. Durch die Gleichung
$y = x^2 + 2x - 1{,}25 \quad (x \in P)$
ist eine Funktion gegeben.
a) Berechnen Sie die Nullstellen dieser Funktion!
b) Der Graph dieser Funktion ist eine Parabel. Ihr Scheitelpunkt sei S.
Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten von S!
c) Zeichnen Sie die Parabel mindestens im Intervall $-3 \leqq x \leqq 1$!
d) Welche Zahl ist in die Gleichung $y = x^2 + 2x + q$ für q einzusetzen, damit die dadurch gegebene Funktion genau eine Nullstelle hat?

4. Um die Höhe $\overline{CF}$ eines Turmes zu ermitteln, dessen Fußpunkt F unzugänglich ist, kann man wie folgt vorgehen:

Skizze (nicht maßstäblich)

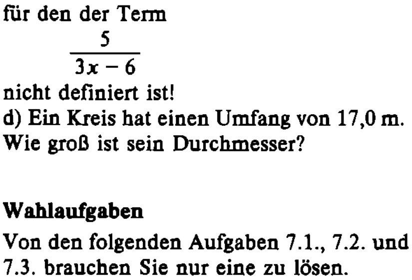


Man steckt eine Standlinie $\overline{AB}$ so ab, daß A, B und F auf einer Geraden liegen, und miß die Erhebungswinkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle FBC$ (siehe Skizze!).

Bei einer solchen Messung ermittelte man folgende Werte:
$$\overline{AB} = c = 65{,}0\,\text{m},$$
$$\sphericalangle BAC = \alpha = 35{,}0°,$$
$$\sphericalangle FBC = \delta = 62{,}0°.$$
a) Ermitteln Sie mit Hilfe einer maßstäblichen Konstruktion die Turmhöhe $\overline{CF} = h$! (Geben Sie diese Höhe in Metern an!)
b) Berechnen Sie
- die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB = \gamma$,
- die Länge der Strecke $\overline{BC} = a$,
- die Turmhöhe $\overline{CF} = h$!

5. Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit den Höhen $h_c = \overline{CD}$ und $h_a = \overline{AE}$.
a) Zeichnen Sie eine entsprechende Planfigur!
b) Beweisen Sie, daß die Dreiecke ABE und DBC einander ähnlich sind!

6. a) Schreiben Sie die Zahlen 625 000 und 0,074 in der Darstellung mit abgetrennten Zehnerpotenzen (d. h. in der Form $a \cdot 10^m$ mit $a \in R$; $1 \leqq a < 10$; $m \in G$)!
b) Die Abbildung zeigt den Graph einer Funktion mit der Gleichung $y = a \cdot \sin bx$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 4\pi$.
Geben Sie für diese Funktion a und b an!



c) Geben Sie denjenigen Wert von x an, für den der Term
$$\frac{5}{3x-6}$$
nicht definiert ist!
d) Ein Kreis hat einen Umfang von 17,0 m. Wie groß ist sein Durchmesser?

Wahlaufgaben

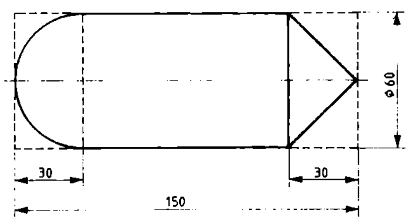
Von den folgenden Aufgaben 7.1., 7.2. und 7.3. brauchen Sie nur eine zu lösen.

7.1. Gegeben ist die Funktion $y = \frac{1}{x^2}$ $(x \in P;\ x \neq 0)$.
a) Übertragen Sie die folgende Tabelle auf Ihr Arbeitsblatt!
Berechnen Sie die fehlenden Funktionswerte!

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y								

b) Tragen Sie die so erhaltenen Wertepaare in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, und zeichnen Sie den Graph dieser Funktion!
c) Zeigen Sie, daß das Zahlenpaar $\left(\sqrt{50};\ \frac{1}{50}\right)$ zur Funktion gehört!
d) Geben Sie einen Wert für x an, so daß für den zugehörigen y-Wert gilt: $y > 4$!
e) Geben Sie alle positiven Werte für x an, so daß für die zugehörigen y-Werte gilt: $y < \frac{1}{100}$!

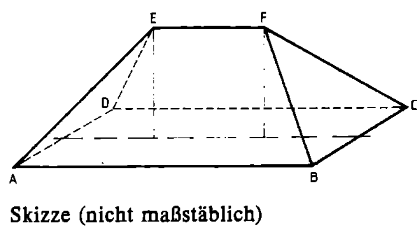
7.2. Aus einem zylinderförmigen Rundstahl mit dem Durchmesser $d = 60$ mm und der Länge $l = 150$ mm soll ein Werkstück hergestellt werden, das aus einer Halbkugel, einem Zylinder und einem Kegel besteht (siehe Skizze!).



Skizze (nicht maßstäblich)
(Maßangaben in Millimeter)

Wieviel Prozent beträgt der Materialabfall, der bei der Herstellung des Werkstücks entsteht?

7.3. Bei der Rekonstruktion eines Altbaus wird das Dach erneuert.
Die rechteckige Grundfläche $ABCD$ dieses Daches hat die Abmessungen $\overline{AB} = 16{,}0$ m, $\overline{BC} = 10{,}0$ m.
Der Dachfirst $\overline{EF}$ ist 6,0 m lang und liegt 5,0 m über der Grundfläche. Gegenüberliegende Seitenflächen des Daches sind kongruent (siehe Skizze!).



Skizze (nicht maßstäblich)

a) Stellen Sie dieses Dach in senkrechter Zweitafelprojektion im Maßstab 1 : 200 dar!
Bezeichnen Sie die Eckpunkte entsprechend der Skizze!
b) Konstruieren Sie die wahre Größe und Gestalt der trapezförmigen Seitenflächen $ABFE$ ebenfalls im Maßstab 1 : 200!
c) Berechnen Sie die Länge des Dachbalkens $\overline{BF}$!

Buchtips

für Mathematik, Naturwissenschaften und Technik

Kaden, Friedrich
Kleine Geschichte der Mathematik
176 S., zahlreiche Abbildungen
Bestell-Nr. 631 854 0 Preis: 12,50 M

Zilch, Reinhold
Auf Mark und Pfennig
112 S., zahlreiche Abb., Pappband
Bestell-Nr. 631 860 4 Preis: 6,80 M

Fiedler, Roland
Streifzüge durch die Mathematik
224 S., zahlr. Abb., Pappband
Bestell-Nr. 631 726 5 Preis: 6,80 M

Kleffe, Hans
Menschen messen Jahr und Tag
Aus der Geschichte der Zeitmessung und des Kalenders
77 S., zahlr. Abb., z. T. farbig
Bestell-Nr. 632 121 3 Preis: 8,20 M

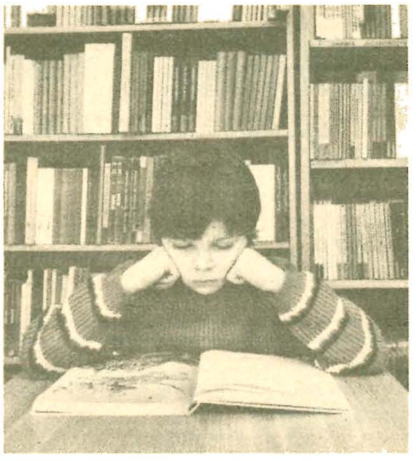
Alle 4 Titel: Der Kinderbuchverlag Berlin

Konforowitsch, Andrej G.
Guten Tag, Herr Archimedes
168 S., mit 94 Bildern und 1 Tabelle
Bestell-Nr. 547 006 5 Preis: 12,00 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

Grabow, Rolf
Simon Stevin
Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner, Bd. 77
116 S. mit 32 Abb.
Bestell-Nr. 666 250 1 Preis: 6,80 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig

Purkert, W./Ilgauds, H.-J.
Georg Cantor
Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner, Bd. 79
136 S. mit 16 Abb.
Bestell-Nr. 666 252 8 Preis: 6,80 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig

Gilde, Werner
Über Rekorde in der Technik
144 S. mit 40 Abb.
Bestell-Nr. 547 026 8 Preis: 5,50 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig



Lehmann, Johannes
3 plus 8 und mitgemacht
80 S., zahlr. mehrfarbige Abb.
Bestell-Nr. 707 857 7 Preis: 3,00 M
(Für Klassen 1 bis 5)
Verlag Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

Quaisser, Erhard
Bewegungen in der Ebene und im Raum
128 S. mit 99 Abb.
Bestell-Nr. 571 194 9 Preis: 10,00 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

Sprengel, H.-J./Wilhelm, O.
Funktionen und Funktionalgleichungen
80 S. mit 23 Abb.
Bestell-Nr. 571 195 7 Preis: 5,00 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

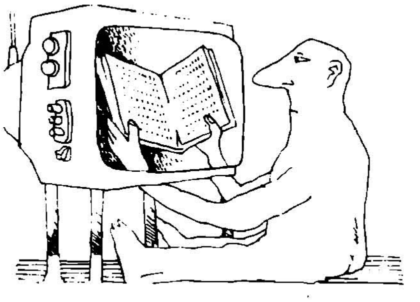
Klotzek, B.
Differentialgeometrie, Band II
140 S. mit 45 Abb.
Bestell-Nr. 571 050 8 Preis: 8,00 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

Quaisser, E./Sprengel, H.-J.
Extreme
130 S., 51 Abb., MSB Nr. 127
Bestell-Nr. 571 442 9 Preis: etwa 13,00 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

Boltjanskij, V. G./Efremovic, V. A.
Anschauliche kombinatorische Topologie
200 S., 210 Tafeln, MSB Nr. 129
Bestell-Nr. 571 501 8 Preis: etwa 18,00 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

Conrad, Walter
Technische Kuriositäten
216 S., 79 einfarbige und 62 zweifarbige Zeichnungen
Bestell-Nr. 653 875 0 Preis: 20,00 M
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Buchreihe:
Wir wiederholen Physik
Band 1: Bewegungen
Bestell-Nr. 547 012 9 Preis: 6,80 M
Band 2: Kräfte
Bestell-Nr. 547 014 5 Preis: 6,80 M
Band 3: Flüssigkeiten und Gase
Bestell-Nr. 547 013 7 Preis: 6,80 M
Band 4: Wärme
Bestell-Nr. 547 136 7 Preis: 6,80 M
Band 5: Elektrische Ströme
Bestell-Nr. 547 137 5 Preis: 6,80 M
Band 6: Schwingungen
Bestell-Nr. 547 138 5 Preis: 6,80 M
alle 6 Titel: VEB Fachbuchverlag Leipzig



Perelman, Jakow I.
Unterhaltsame Physik
462 S. mit zahlr., z. T. farbigen Bildern
Bestell-Nr. 547 028 4 Preis: 19,80 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

Haase, K./Lehmann, D.
Nanos Physik-Abenteuer
230 S. mit zahlr. Abb.
Bestell-Nr. 653 968 5 Preis: 12,00 M
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Kaden, Friedrich
Rund um die Astronomie
144 S. mit zahlr. mehrfarbigen Abb.
Bestell-Nr. 630 545 9 Preis: 17,80 M
Der Kinderbuchverlag Berlin

Ein Teil der Bücher ist durch Vorbestellungen bei den Verlagen vergriffen. Sie sind möglicherweise beim Buchhandel z. Z. noch vorrätig. Wir weisen auf die Möglichkeit der Ausleihe in Bibliotheken hin.

Kryptogramm

Die SU- und die USA-Delegationsleiter stellten allen IMO-Teilnehmern der XXVII. IMO folgende Aufgabe:

Es war für alle, die diese Aufgabe lösten, besonders beeindruckend, daß dieses Kryptogramm (verschiedene Buchstaben ≙ verschiedene Ziffern) *eindeutig lösbar* ist.

Aufgaben für Arbeitsgemeinschaften Junger Mathematiker, herausgegeben im Bezirk Rostock

▲1▲ a) In der Tabelle findest du jeweils drei bzw. vier Begriffe. Jedesmal ist ein unpassender dabei. Welcher?

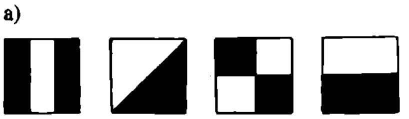
Hammer	Nagel	Zange		
Linde	Tulpe	Rose		
rot	dunkel	blau		
Reh	Rind	Gans	Hase	
Dreieck	Quadrat	Würfel	Trapez	
Meter	Kilometer	Gramm	Zentimeter	
45	103	82	78	
16	32	26	14	21

b) In der Tabelle ist jedesmal – wie in a) – ein Begriff der nicht dazugehört. Für jede der vier Gruppen gibt es aber hier zwei Lösungen für das Finden dieses Fremdlings:

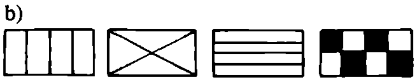
Ruderboot	Handwagen	Fahrrad	Auto	
36	26	15	18	
64	16	25	14	
Reh	Fuchs	Hund	Fasan	Dachs

▲2▲ Welches a) der Quadrate und b) der Rechtecke gehört nicht in diese Reihe?

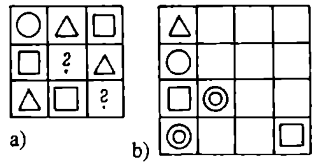
a)



b)

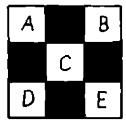


▲3▲ a) Welche Figur fehlt logischerweise?
b) Welche Figuren müssen logischerweise in die leeren Quadrate eingesetzt werden?



a) b)

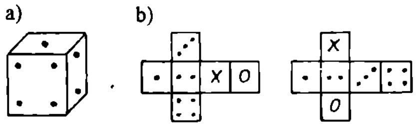
▲4▲ Ersetze die Buchstaben durch Zahlen!



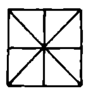
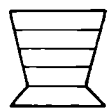
A ist die Hälfte von C;
B ist die größte einstellige Zahl;
B ist das Dreifache von A;
C ist die Differenz von B und A;
die Summe auf der Diagonalen DCB beträgt 27.
Die Summe aller Zahlen ist 35.

▲5▲ Welches der Würfelnetze gehört zum abgebildeten Würfel?

a) b)



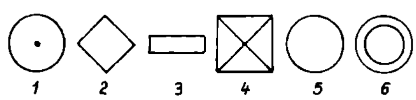
▲6▲ a) Wer findet die meisten Dreiecke und
b) wer die meisten Trapeze?

a)  b) 

▲7▲ a) Ein Rechteck hat die Seitenlänge $\overline{AB} = 40$ cm und $\overline{BC} = 30$ cm.
Wie lang ist die Seitenlänge eines Quadrates, das denselben Umfang hat wie das Rechteck $ABCD$?
b) Ein Rechteck hat einen Umfang von 18 cm. Welche verschiedenen Rechtecke gibt es mit diesem Umfang? Die Seitenlängen sollen dabei jedoch ganzzahlige Zentimeter sein.

▲8▲ Aus einem Stück Draht von 1,60 m Länge soll ein gleichschenkliges Dreieck gebogen werden. Alle Seitenlängen sollen Vielfache von 10 cm sein.
Welche verschiedene Möglichkeiten (verschiedene Dreiecke) gibt es?

▲9▲ Das Bild zeigt die Grundrisse von sechs Gegenständen. Es handelt sich um
a) einen Fußball,
b) einen leeren Blumentopf,
c) ein Zehnpfennigstück,
d) einen Würfel,
e) einen Kegel,
f) eine Pyramide.
Stelle fest, um welche Bilder es sich handelt!



1 2 3 4 5 6

▲10▲ Von den 27 Schülern einer Klasse können 14 radfahren, 19 schwimmen und 9 Schüler beides.
Wieviel Schüler können weder radfahren noch schwimmen?

▲11▲ Ulf, Ria, Beate, Astrid, Werner und Heiko vergleichen ihr Alter:
Astrid ist älter als Beate, aber jünger als Heiko. Ria wurde genau eine Woche früher als Heiko geboren. Ulf ist älter als Astrid. Heiko ist älter als Ulf. Werner ist der Jüngste. Schreibe die Vornamen nach dem Alter auf! Beginne mit dem jüngsten Kind!

▲12▲ Astrid, Bärbel, Cilli, Doris, Elke und Flora bilden eine Turnriege. Sie sollen sich nach der Größe aufstellen. Astrid ist größer als Doris, aber kleiner als Elke. Keine andere Schülerin ist größer oder so groß wie Cilli. Bärbel ist größer als Elke. Flora ist kleiner als Astrid; sie ist aber nicht die kleinste der Turnerinnen.
Finde heraus, in welcher Reihenfolge die Mädchen stehen!
Beginne mit dem größten Mädchen!

▲13▲ Wer wurde Sieger?
Petra, Ute und Renate belegten beim 60-m-Lauf die ersten drei Plätze. Die Siegerin und Renate trainieren in derselben Gruppe. Die Gewinnerin der Bronzemedaille ist Klassenkameradin von Ute, Renate wurde nicht Dritte.
Welchen Platz erhält jedes Mädchen?

▲14▲ Wer findet alle Wimpelarten?
Aus vier Sorten Stoff (rot, gelb, blau, schwarz) sollen zweifarbige Wimpel genäht werden.
Wieviel verschiedene Wimpelarten kann man herstellen?

▲15▲ a) Welche Zahl erhält man, wenn man die Differenz des Produkts der Zahlen 3 und 4 und des Quotienten der Zahlen 48 und 6 mit der Zahl 16 addiert?
b) Was ist größer,
- die Summe der Differenz der Zahlen 35 und 20 und der Zahlen 18 und 9 oder
- die Differenz der Summen der Zahlen 35 und 20 und der Zahlen 18 und 9?

▲16▲ Wir suchen alle Zahlen für die gleichzeitig gilt:
a) Die Zahlen sind zweistellig.
b) In allen Zahlen soll das Vielfache von 10 doppelt so groß sein wie das Vielfache von 1.
c) Die Zahlen sollen gerade sein.

▲17▲ Welche Zahlwörter enthält der folgende Satz?
Ein Seehund reißt ganz weit sein Maul auf, zeigt die Zähne und sagt: „Gute Nacht".

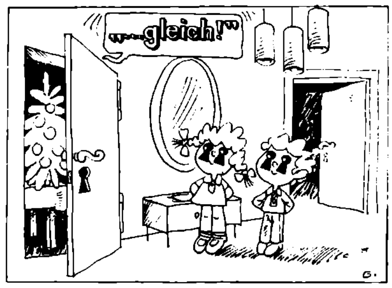
▲18▲ Zwei Radiergummis und zwei kleine Kalender kosten zusammen 2,40 M. Dabei ist ein Kalender genau 50 Pf teurer als ein Radiergummi.
Wie teuer ist jeder Gegenstand?

▲19▲ Ein Betrag von 300 M wird mit Geldscheinen zu 20 M und zu 50 M bezahlt. Es waren zusammen genau 9 Scheine.
Wieviel Scheine von jeder Art waren es?

▲20▲ Die 16 Busse eines Verkehrsbetriebes haben insgesamt 512 Plätze. Es sollen 160 Personen befördert werden.
Wieviel Busse werden benötigt?

Dr. M. Bendler/Dr. W. Luchtmann, IfL Jacques Duclos, Rostock

In freien Stunden · alpha-heiter

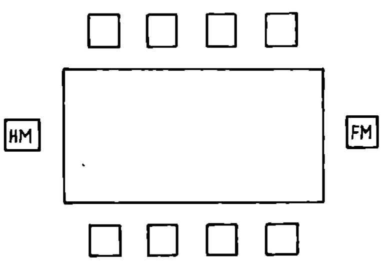


aus: LVZ, Guckuck

Sitzordnung

Zur Silvesterfeier hatte das Ehepaar Müller die vier Ehepaare A, B, C und D eingeladen und sie an den Längsseiten des Tisches plaziert. Herr Müller (HM) und Frau Müller (FM) hatten an den Stirnseiten des Tisches Platz genommen. Für die Sitzordnung der Gäste galt: Eheleute saßen stets nebeneinander; die Frau zur rechten Seite des Ehemannes. Herr A saß neben Frau C und ihm gegenüber saß Frau D. Herr C saß neben Frau Müller.

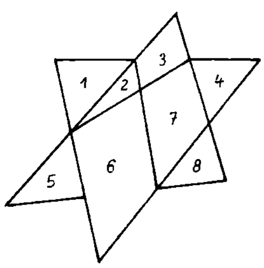
aus: Leipziger Volkszeitung



Weihnachtliches Vierfarbenproblem

Die Felder in diesem Stern sind mit vier Farben auszumalen. Benachbarte Felder dürfen aber nicht die gleiche Farbe erhalten.

aus: Rohacz, Prag



Das Weihnachtsgeschenk

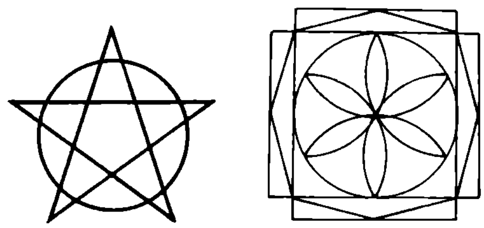
Maximilian und seine Schwester Franziska legen ihre Ersparnisse zusammen, um für die Mutter ein Geschenk zu kaufen. Dabei stellen sie fest, daß ihre Ersparnisse zusammen 72 Mark betragen und daß Franziska 8 Mark mehr als Maximilian gespart hat. Wieviel Mark hat jedes der beiden Geschwister gespart?

aus: Quant, Moskau

In einem Zug

Die beiden Figuren sind in einem Zug nachzuzeichnen ohne eine Linie mehrfach zu zeichnen.

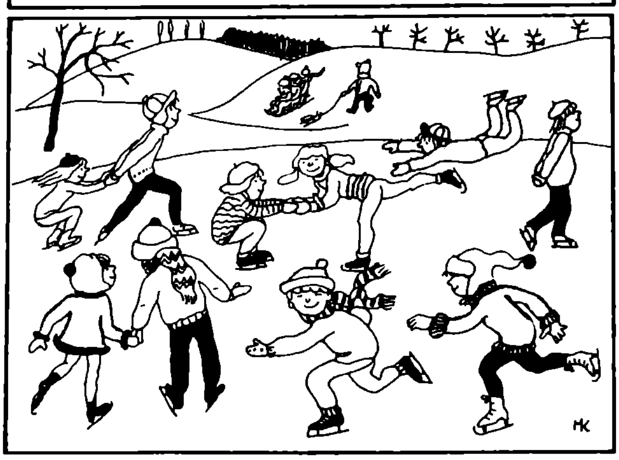
aus: Füles, Budapest



Wintersport

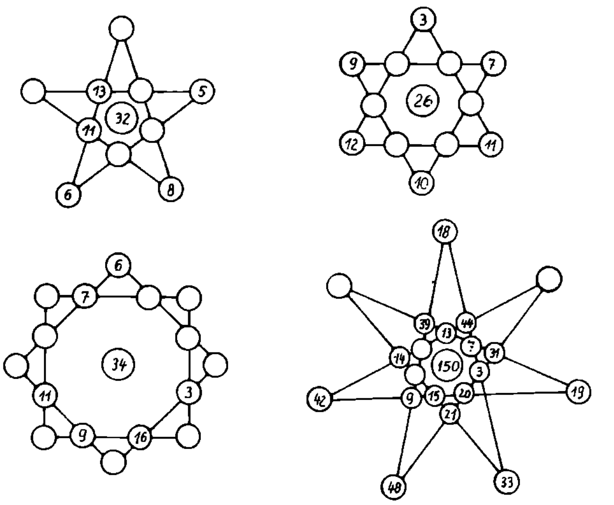
Zehn Dinge sind auf dem unteren Bild anders. Schaut genau hin! Bestimmt findet ihr sie heraus.

aus: NBI, Berlin



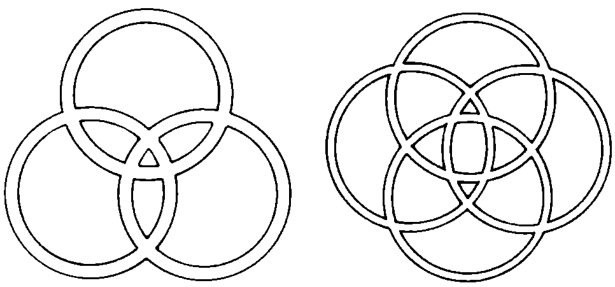
Magisches Zahlenspiel

Ergänze die beiden Sterne so, daß sich als Konstante die im Zentrum jedes Sterns stehende Zahl ergibt! *Kermeth Kelsey, London*



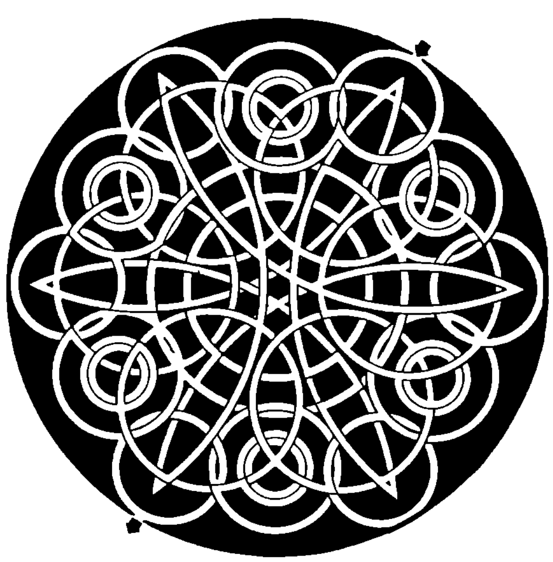
Wunderringe

Vervollständige die Ringe so, daß sie ineinandergehängt und nicht zu trennen sind, obwohl keiner von ihnen durch den anderen geht. *aus: urcina, Bukarest*



Labyrinth

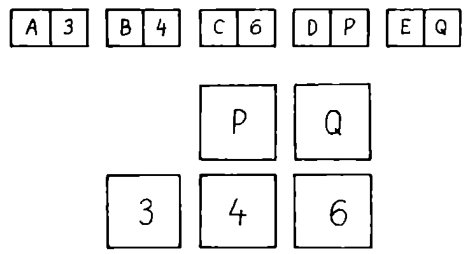
Wer findet am schnellsten den Weg durch dieses schöne Ornament? *aus: Füles, Budapest*



Mary und Jane im Disput

Fünf Karten liegen auf einem Tisch, wie das Bild zeigt. Jede Karte hat auf einer Seite einen Buchstaben und auf der anderen eine Grundziffer. Jane sagt: „Wenn sich ein Vokal auf einer Seite einer Karte befindet, dann befindet sich auf der anderen Seite eine gerade Zahl.“ Mary zeigt, daß Jane nicht recht hat, indem sie eine Karte umdreht. Welche Karte drehte Mary um?

aus einem finnischen Mathematikwettbewerb



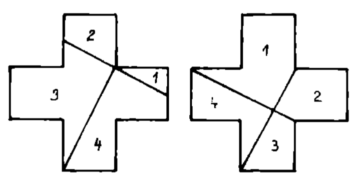
Süße Sache

Du sollst eine Tafel Schokolade, die aus 6 mal 8 Stücken besteht, in 48 Stückchen teilen. Brich immer entlang einer Riefe! Wieviel Brüche mußt du mindestens machen? *aus: Mathematical Spectrum, Sheffield*

Kreuz und quer

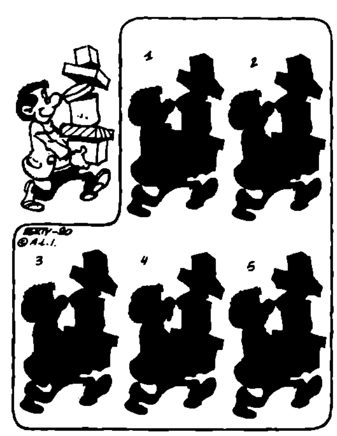
Zu Silvester teilt Marie-Luise zwei Legespiele aus. Wer ist wohl der Schnellste? Die jeweils vier Teile sind zu einem Quadrat zusammenzulegen.

aus: Matematicko Fizički List, Beograd



So eine Bescherung

Herr Lehmann kommt mit Weihnachtsgeschenken nach Hause. Von ihnen wurden Schattenrisse angefertigt. Aber nur einer davon ist genau übereinstimmend mit dem Original. Welcher? *aus: Troll, Berlin*



Edmund Halley –
der ungläubige Mathematiker

Das Wiedererscheinen des Halleyschen Kometen Anfang 1986 und seine erstmalige umfangreiche Erforschung durch mehrere Raumsonden haben den Namen des englischen Astronomen und Mathematikers E. Halley weltweit ins Blickfeld der Öffentlichkeit gerückt und – wie erwartet – auch eine gewisse philatelistische Resonanz[1]) gefunden. Halley hatte am Ende des 17. Jh. die Bahnen der in den Jahren 1531, 1607 und 1682 beobachteten Kometen (später bezog er auch noch die Kometenerscheinungen von 1305, 1380 und 1456 ein) mit Hilfe der von Newton geschaffenen neuen mathematischen Hilfsmittel berechnet, aus ihrer bemerkenswerten Ähnlichkeit die Hypothese abgeleitet, daß es sich in allen Fällen um den gleichen, die Sonne auf einer langgestreckten elliptischen Keplerbahn umlaufenden kleinen Himmelskörper handelt, und sein Wiedererscheinen für 1758 vorausgesagt. Als dies eintraf (der Komet wurde zuerst am 25. 12. 1758 von dem sächsischen Bauern und Amateurastronomen Johann Georg Palizsch gesehen), hieß der Komet fortan Halleyscher Komet. Nachdem Kometen jahrhundertelang als Zuchtruten Gottes und Unglücksbringer abergläubisch gefürchtet worden waren und sogar ein Galilei die Ansicht des Astronomen Tycho de Brahe, Kometen seien bewegliche Himmelskörper ähnlich den Planeten, verworfen und verspottet hatte, ist der exakte Nachweis der Bahneigenschaften der Kometen und ihrer periodischen Wiederkehr durch Halley ein bedeutender Schritt auf dem Weg zu einem materialistisch-naturwissenschaftlichen Weltbild gewesen. Damit ist jedoch die Bedeutung Halleys keineswegs ausgeschöpft, und wir wollen hier gerade den anderen Seiten seiner vielseitigen wissenschaftlichen Tätigkeit einige Bemerkungen widmen.

Edmund (oder Edmond) Halley wurde am 8. 11. 1656 als Sohn eines wohlhabenden Seifensieders in Haggerston nahe London geboren. Nach einem Studium in Oxford unternahm er 1676 eine Reise zur Insel St. Helena im Südatlantik, um den ersten Fixsternkatalog der südlichen Himmelshalbkugel zusammenzustellen. Diese Arbeit wurde 1678 mit der Aufnahme in die Royal Society, die britische Akademie der Wissenschaften, gewürdigt. 1698 bis 1700 unternahm er zwei weitere Forschungsreisen in den Atlantik, um die Deklination des Magnetkompasses, d. h. seine ortsabhängige Abweichung von der Nordrichtung, systematisch zu untersuchen. Als Ergebnis dieser Expeditionen erschien 1701 die erste Karte der Mißweisungen im Druck, auf der die Orte gleicher Abweichung übersichtlich durch Kurven verbunden waren. Übrigens gab Halley auch die erste Erklärung für den Erdmagnetismus durch die Annahme großer Metallmassen im Erdinnern und deutete 1718 das Nordlicht als erdmagnetisches Phänomen. Weitere Arbeiten Halleys betrafen u. a. die Ursache und Richtung von Winden und Meeresströmungen und die Herkunft des Salzgehaltes der Weltmeere. Die bis hier sichtbare Ausrichtung astronomischer und geographisch-geodätisch-geophysikalischer Forschung auf die Bedürfnisse der Schifffahrt ist – besonders in England – ganz typisch für die Naturwissenschaft im 17. und 18. Jh. Ebenso typisch ist auch die zwischenzeitliche Beschäftigung mit rein mathematischen Problemen, die manchmal, jedoch keineswegs immer von naturwissenschaftlich-technischen Fragen angeregt wurden. Auch Halley publizierte Arbeiten über Arithmetik, Algebra und Geometrie, bewies z. B. 1695 elementar die Reihenentwicklung

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad (|x| < 1),$$

leistete aber auch mit der Berechnung von Tabellen der Sterblichkeitsquote (in Abhängigkeit von Alter und Geschlecht) einen wichtigen Beitrag zum sich damals stürmisch entwickelnden Versicherungs- und Rentenwesen. 1703 wurde er als Nachfolger des bedeutenden Mathematikers John Wallis auf den berühmten Geometrielehrstuhl der Universität Oxford berufen. Während seiner 17 Jahre in diesem Amt übersetzte er auch antike Mathematiker aus dem Griechischen, insbesondere 1707 die sphärische Geometrie des Menelaos (um 100) und 1710 die Kegelschnittslehre des Apollonios von Perge (um 262 bis 190 v. u. Z.). 1720 wurde er als Nachfolger von John Flamsteed zum Royal Astronomer und Direktor der Sternwarte in Greenwich berufen (vgl. hierzu *alpha* Heft 2, 1985, S. 40 bis 42). Zieht man noch in Betracht, daß er von 1713 bis 1721 nebenamtlich Sekretär der Royal Society war, so hat Halley fast alle damals für einen Mathematiker und Astronomen erreichbaren höchsten Ämter innegehabt.

Die vielleicht wichtigste Seite im Leben und Schaffen Halleys betrifft seine Beziehungen zu Newton und seinen Anteil an der Entstehung von Newtons fundamentalem Buch „Mathematische Prinzipien der Naturphilosophie“. Gegen Ende des 17. Jh. lagen als bereits mathematisch formulierte Bewegungsgesetze die Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung, das Galileische Fallgesetz und das Huygenssche Pendelgesetz vor. Das Nachdenken über den gemeinsamen Kern aller dieser Gesetze war ein aktuelles Problem geworden, um dessen Lösung die führenden Gelehrten der damaligen Zeit rangen. Um 1679 wußten Halley, Christopher Wren und Robert Hooke bereits, daß die Anziehungskraft zwischen verschiedenen Massen dem Quadrat ihres Abstandes umgekehrt proportional sein muß. Es fehlte ihnen jedoch der mathematische Kalkül, um hieraus weiterreichende Schlußfolgerungen zu ziehen wie z. B. die Begründung der Ellipsengestalt der Planetenbahnen. Speziell für die Lösung dieses Problems setzte der wohlhabende Halley 1684 sogar einen Preis aus. Bekanntlich lösten Newtons „Pricipia“ (1686/87) das Problem in vorbildlicher Weise und wurden für Jahrhunderte zum Maßstab aller exakten Naturwissenschaft. Halley, der Newton immer wieder mit Fragen provoziert und zur Niederschrift seines umfangreichen Werkes gedrängt hatte, zahlte schließlich sogar die Druckkosten aus seiner eigenen Tasche. Im Vorwort der „Pricipia“ würdigte Newton Halleys Verdienst mit folgenden Worten:

Bei der Herausgabe dieses Werkes hat Edmond Halley, dieser höchst scharfsinnige und vielseitig gelehrte Mann, vielfache Mühe verwandt. Er hat nicht nur die Korrektur und die Holzschnitte besorgt, sondern war überhaupt auch derjenige, welcher mich zur Abfassung dieses Werkes veranlaßt hat. Da er nämlich von mir einen Beweis der Gestalt, welche die Bahnen der Himmelskörper haben, verlangt hatte; so bat er mich, ich möchte denselben der Königlichen Gesellschaft mitteilen. Diese bewirkte hierauf durch ihre Aufforderung und Oberleitung, daß ich anfing, an die Herausgabe des Werkes zu denken.

Der Sturz des mittelalterlichen Weltbildes durch die sich mathematischer Mittel bedienende Naturwissenschaft stieß auf erbitterte Feindschaft seitens kirchlicher und anderer reaktionärer Kräfte, und die begrifflichen Unklarheiten, die der Fluxionsrechnung Newtons (der heutigen Differentialrechnung entsprechend) anhafteten, boten einen willkommenen Angriffspunkt. Durch scharfe Kritik an den logisch nicht hinreichend fundierten „verschwindenden Zuwächsen“, „ersten und letzten Verhältnissen“ Newtons usw., die sich aber letztlich positiv auf die logische Durcharbeitung der Infinitesimalrechnung auswirkte, hat sich vor allem der englische Bischof George Berkeley hervorgetan. Seine berühmte Streitschrift von 1734 richtete sich aber nicht direkt gegen den inzwischen verstorbenen, durch ein Staatsbegräbnis geehrten und praktisch zum Nationalhelden gewordenen, überdies überaus fromm gewesenen Newton, sondern gegen seinen als Freigeist berüchtigten Mitstreiter Halley. Ihr Titel lautet in deutscher Übersetzung: Der Analytiker, oder eine Erörterung, gerichtet an einen ungläubigen Mathematiker, worin untersucht wird, ob der Gegenstand, die Prinzipien und die Schlußweisen der modernen Analysis deutlicher begriffen oder einleuchtender hergeleitet sind als die religiösen Geheimnisse und Glaubenspunkte.

Der zu dieser Zeit bereits 78jährige Halley, der auf ein Lebenswerk von rund 80 wissenschaftlichen Publikationen zurückblicken konnte, hat sich selbst nicht mehr zu den Vorwürfen Berkeleys geäußert. Er konnte darauf vertrauen, daß inzwischen eine neue Generation von Mathematikern und Naturwissenschaftlern herangewachsen war, die die Leistungsfähigkeit der von Newton und Leibniz geschaffenen Infinitesimalmethoden durch stete Anwendung überzeugend demonstrierten. Halley starb am 25. 1. 1742 in Greenwich. *P. Schreiber*

[1]) u. a. Großbritannien 4 Werte, Nikaragua 6 Werte, SR Vietnam 3 Werte

Fünf harte Nüsse

Aufgaben der Aufnahmeprüfung der Mathematischen Fakultät des Moskauer Staatlichen Pädagogischen Instituts V. I. Lenin (schriftliche Prüfung 1983)

1. Berechne!

$$\frac{8{,}4\cdot\left(1\frac{5}{8}+\frac{17}{18}\right)-15\frac{59}{60}}{646{,}8:21}$$

2. Löse die Ungleichung!

$$\left(\frac{2}{9}\right)^{x^2+x}\geqq(20{,}25)^{2x-7}$$

3. Löse die Gleichung!
$\sin x-\cos x=-1$

4. Die Grundfläche der Pyramide *SABCD* sei das Quadrat *ABCD*, dessen Seitenlänge sei a. Die Kante *BS* steht senkrecht auf der Grundfläche und habe die Länge $2a$. Bestimme den Umfang der Schnittfigur, die durch die Seite *AD* und die Mitte der Kante *BS* geht!

5. Einem Kreis mit dem Radius R sei ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Winkel von 120° umbeschrieben.
Bestimme die Länge der Dreiecksseiten!

Lösungen

Lösungen zur Sprachecke

▲ 1 ▲ Ein Onkel kam, um seine Nichten zu besuchen. Vor dem Weggehen gab er ihnen eine gewisse Anzahl Dollar mit dem Vorschlag, daß die Älteste die Hälfte, die Mittlere ein Viertel und die Jüngste ein Fünftel bekommt. Die Kinder versuchten, das Geld zu teilen, aber es gelang ihnen nicht wegen der Brüche. Als ihnen ihr Vater einen Dollar lieh, führten sie die Division nach den von ihrem Onkel genannten Brüchen durch und zahlten dann sogar noch den einen Dollar an ihren Vater zurück. Welche „gewisse Anzahl Dollar" würde diesen Bedingungen entsprechen?

Lösung: Die Summe der drei Brüche $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ ist $\frac{19}{20}$. Der Onkel gab seinen Nichten nicht den ganzen Betrag. Er ließ $\frac{1}{20}$ daran fehlen. Was er seinen Nichten gab, waren 19 Dollar.
Die Kinder konnten das Geld nicht teilen. Aber als der Vater ihnen 1 Dollar lieh, hatten sie 20 Dollar.

Die Älteste nahm $\frac{1}{2}\cdot\$\,20=\$\,10$,

die Mittlere nahm $\frac{1}{4}\cdot\$\,20=\$\,5$,

die Jüngste nahm $\frac{1}{5}\cdot\$\,20=\$\,4$.

$10+5+4=19$, so daß sie ihrem Vater den geliehenen $ 1 zurückgeben konnten.

▲ 2 ▲ Ein Fotograf verlangt 3 Fr. für die Entwicklung eines Schwarzweißfilms, dazu 0,80 Fr. für jeden Abzug eines Fotos im Format 9 × 13. Ein zweiter Fotograf entwickelt den Film kostenlos, aber der Abzug eines jeden Fotos im gleichen Format kostet 0,90 Fr.
Mathieu möchte einen Film mit 20 Aufnahmen und Amélie einen Film mit 36 Aufnahmen entwickeln lassen.
Wohin würdest du an ihrer Stelle gehen? Wieviel werden sie bezahlen müssen?

Lösung: Bei dem ersten Fotografen kosten 20 Aufnahmen

3 Fr. + 20 · 0,80 F. = 19 Fr.

und 36 Aufnahmen

3 Fr. + 36 · 0,80 Fr. = 31,80 Fr.

Bei dem zweiten Fotografen kosten 20 Aufnahmen

20 · 0,90 Fr. = 18 Fr.

und 36 Aufnahmen

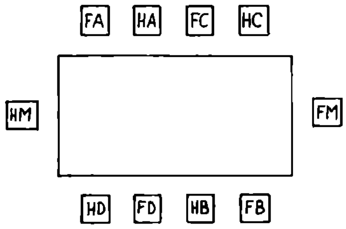
36 · 0,90 Fr. = 32,40 Fr.

Mathieu geht zum zweiten Fotografen und bezahlt 18 Fr., Amélie zum ersten und bezahlt 31,80 Fr.

▲ 3 ▲ Löst die fünf „geographischen" Zahlenrätsel (s. Bild)!
In jedem Rätsel entsprechen gleiche Buchstaben gleichen Ziffern, und verschiedene Buchstaben verschiedenen Ziffern.
Lösung: $2^7=128$; $19^2=361$; $289=17^2$; $87^2=7659$; $6084=78^2$.

Lösungen zu
In freien Stunden · alpha-heiter

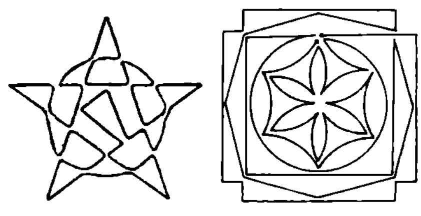
Sitzordnung



Weihnachtliches Vierfarbproblem
Es werden z. B. gezeichnet: 1 und 6 gelb; 3 und 4 rot; 2 und 8 blau; 5 und 7 grün.

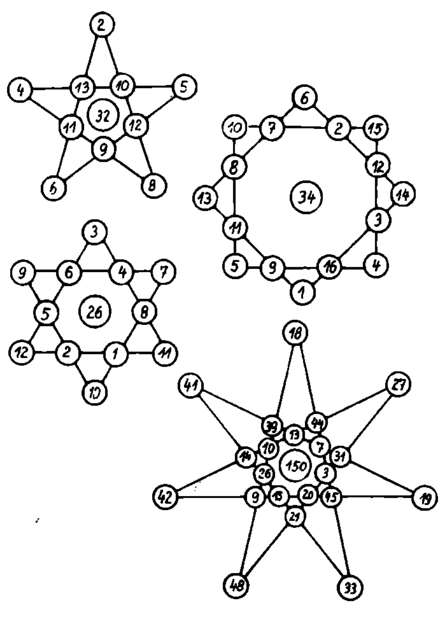
Das Weihnachtsgeschenk
$72-8=64$; $64:2=32$; $32+8=40$.
Maximilian hat 32 Mark, Inge 40 Mark gespart.

In einem Zug

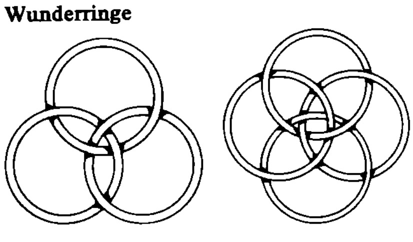


Wintersport
Die Lösung sei dem Leser selbst überlassen.

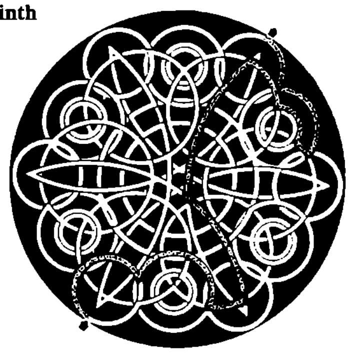
Magisches Zahlenspiel



Wunderringe



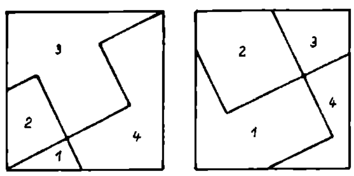
Labyrinth



Mary und Jane im Disput
Wenn Jane nicht recht hat, dann gibt es eine Karte, die auf einer Seite eine ungerade Zahl hat. Diese Karte kann also keinen Konsonanten und keine gerade Zahl auf einer der Seiten haben. Daher kann Jane als einzige Karte die „3" genommen haben. A ist also richtig.

Süße Sache
Es sind 47 Brüche zu machen.

Kreuz und quer



So eine Bescherung
Nur Schattenriß Nr. 2 stimmt genau mit dem Original überein.

alpha-Wettbewerb
Heft 1/86 (Fortsetzung)

Ma 10/12 ■ 2660

$$\frac{19}{95}=\frac{20-1}{100-5}=\frac{20-1}{5(20-1)}=\frac{1}{5}.$$

$$\frac{199\ldots9}{99\ldots95}=\frac{200\ldots00-1}{100\ldots00-5}=\frac{2\cdot10^n-1}{10^{n+1}-5}$$

$=\dfrac{5^n\cdot2^{n+1}-1}{5(5^n\cdot2^{n+1}-1)}=\dfrac{1}{5}$. Brüche dieser Art ergeben gekürzt stets $\frac{1}{5}$.

Ma 10/12 ■ 2661

Aus $\sin\frac{\beta}{2}=\frac{4}{w\beta}$ folgt $w_\beta=4:\sin\frac{\beta}{2}$.

Aus $w_\beta:5=\sin(90°-\beta):\sin\frac{\beta}{2}$

folgt $w_\beta=\dfrac{5\cdot\cos\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}$. Durch Gleichsetzen erhalten wir $4=5\cdot\cos\beta$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$.

Wegen $\cos\beta=\frac{a}{c}$ gilt $\frac{a}{c}=\frac{4}{5}$, also $a=\frac{4}{5}c$.

Ferner gilt $a^2+9^2=c^2$,

also $\left(\frac{4}{5}c\right)^2+81=c^2$, $c=15$. Daraus folgt

$a=\frac{4}{5}\cdot15=12$ und $b=4+5=9$.

Die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks ABC sind 12 cm, 9 cm und 15 cm lang.

Ma 10/12 ■ 2662 Wir übertragen die linke Seite der Gleichung ins dekadische Positionssystem und erhalten

$x\cdot n^2+y\cdot n^1+z\cdot n^0=(n+1)^2$ bzw.

$xn^2+yn+z\qquad=(n+1)^2$. Es folgt

$xn^2+yn+z=n^2+2n+1$.

Aus dieser Beziehung läßt sich ablesen:
$x=1$; $y=2$; $z=1$.
Also gilt: $[121]_n=(n+1)^2$.
Die vorgegebene Gleichung gilt nur für $x=1$, $y=2$ und $z=1$, aber für jedes $n>2$.
Beispiele:

(1) $[121]_4=(4+1)^2$
$1\cdot4^2+2\cdot4+1=25$

(2) $[121]_8=(8+1)^2$
$1\cdot8^2+2\cdot8+1=81$

Ph 6 ■ 192 In einer Stunde fließen 936 m^3 durch den Kanal.

Ph 7 ■ 193 Das Wasser drückt mit einer Kraft von 15 N auf die Öffnung.

Ph 8 ■ 194 Es werden rund 181 kg Braunkohle pro Jahr verbraucht.

Ph 9 ■ 195 Wird die Zeit in Sekunden und die Fallbeschleunigung in m/s^2 angegeben, erhält man für die Fallzeit etwa 5,45 Sekunden und für die Fallhöhe etwa 146 m.

Ph 10/12 ■ 196 Bei der Spaltung von 1 g Uran werden 85 520 MJ an Energie frei. Das entspricht dem Heizwert von etwa 2,85 Tonnen Steinkohle.

Ch 7 ■ 153 Das menschliche Skelett enthält 1,5 kg Phosphor und 4,0 kg Kalziumoxid.

Ch 8 ■ 154 Die Gesamtmolzahl des Sauerstoffs beträgt 8622,9 mol.

Ch 9 ■ 155 Im Gleichgewicht liegen folgende Stoffmengen vor: 1,5 l Schwefeldioxid, 78,25 l Sauerstoff, 13,5 l Schwefeldioxid. Das Gesamtvolumen im Gleichgewicht beträgt 93,25 l.

Ch 10/12 ■ 156 Das Molekül enthält 4 Doppelbindungen.

Lösungen zu:
Knobeleien mit dem Taschenrechner
(Heft 5, S. 106)

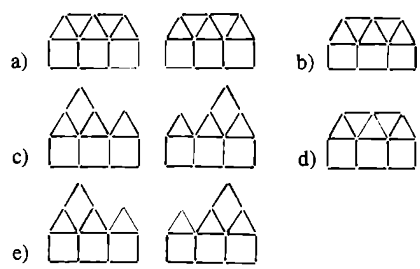
▲1▲ SO ILSE HOL ESSIG; ILSE

▲2▲
```
     I
    E I
    S E I
  S I E B
  S I L B E
  S E I L
    E I L
    I E
     E
```

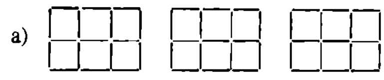
▲3▲ GLEIS, EBBE, OBOE, LEI, OELIG, GLOSSE, ESEL, GEOLOGE, SEEIGEL

Lösungen zu „Knobel-Wandzeitung"
Heft 5/86, S. 109

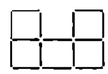
▲1▲ Geometrische Vielfalt



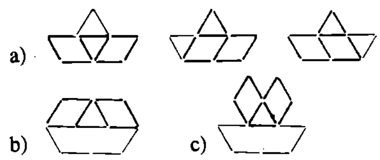
▲2▲ Hölzchen-Lokomotive



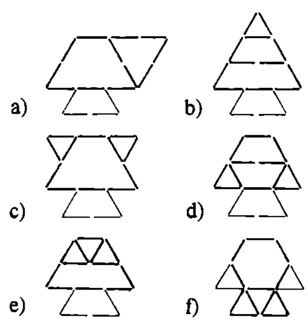
b) 2 Hölzchen sind umzulegen:



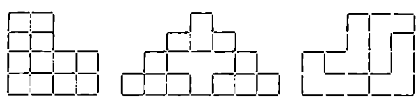
▲3▲ Schiffchen-Spiel



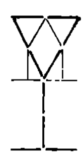
▲4▲ Hölzchen-Tischlampe Die Abbildungen zeigen je eine Legemöglichkeit:



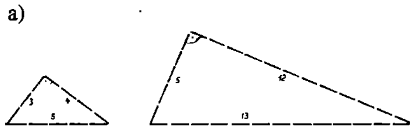
▲5▲ Gerechte Teilung



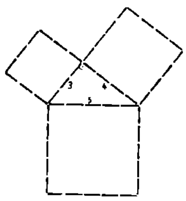
▲6▲ Aus 2 mach 1



▲7▲ Rechtwinklige Dreiecke
a)

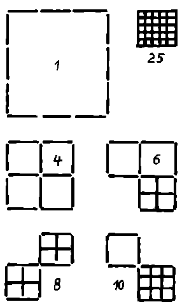


b) Das Tripel (3, 4, 5) ist offenbar unter den pythagoreischen Tripeln mit positiven Komponenten dasjenige mit der kleinsten Komponentensumme. Also benötigt man zum Auflegen der Figur mindestens $4(3+4+5)=48$ Hölzchen.

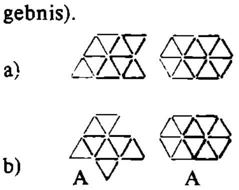


▲ 8 ▲ Fünf Vierecke

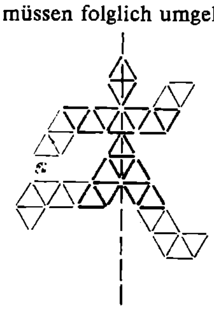
▲ 9 ▲ Mit 12 Hölzchen
Man kann mit 12 Hölzchen höchstens 25 Quadrate auflegen (rechnet man noch die 30 größeren in der Figur enthaltenen Quadrate hinzu, so sind es 55 Quadrate). Die anderen Abbildungen zeigen Legemöglichkeiten für weniger Quadrate.



▲ 10 ▲ Verschiebung und Drehung
Man muß im Falle a) jeweils 7 Hölzchen und im Falle b) 6 bzw. 7 Hölzchen umlegen (beim regelmäßigen Sechseck liefern Verschiebung und Drehung dasselbe Ergebnis).



▲ 11 ▲ Spiegelung
Hölzchenpaare bzw. Hölzchen, die bezüglich der Achse spiegelbildlich liegen (dick gezeichnet) können liegenbleiben. 30 Hölzchen aber besitzen kein Spiegelbild, müssen folglich umgelegt werden.



▲ 12 ▲ Flächenberechnung

$A_1 = 3 + \frac{3}{4}\sqrt{3} \approx 4{,}30$; $A_3 = \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2{,}60$;

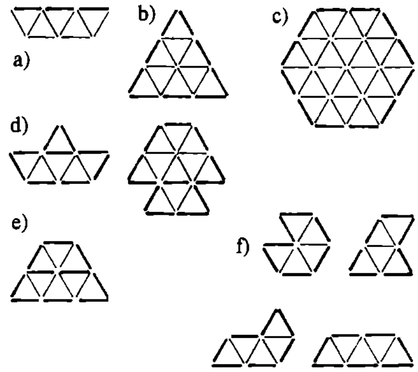
$A_4 = \frac{11}{4}\sqrt{3} \approx 4{,}76$; $A_{5,1} = 12$; $A_{5,2} = 16$;

$A_{5,3} = 16$; $A_8 = 5$; $A_{10,1} = \frac{5}{4}\sqrt{3} \approx 2{,}17$;

$A_{10,2} = \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2{,}60$; $A_{11} = 8\sqrt{3} \approx 13{,}86$

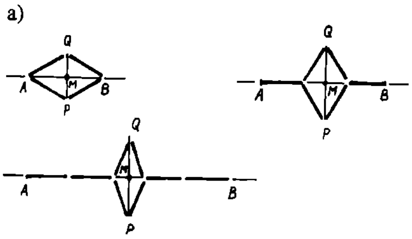
(Angaben in FE: 1 FE = 1 $(\text{LE})^2$)

▲ 13 ▲ Geometrische Konstruktionen mit Hölzchen



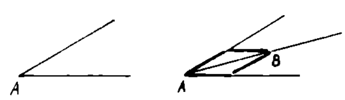
▲ 14 ▲ Grundkonstruktionen mit Hölzchen und Lineal

a)



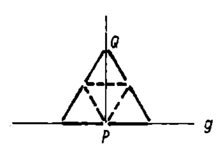
Mit Hölzchen ermittelt man die Punkte P und Q, die man markiert. Die Gerade PQ (die man nach Wegnahme der Hölzchen mit dem Lineal zeichnet) schneidet die Gerade AB im Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$. Begründung: Die Diagonalen im Rhombus halbieren einander.

b)



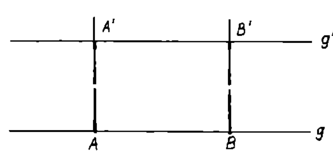
Mittels eines aufgelegten Hölzchen-Rhombus bestimmt man den Punkt B. Der Strahl AB ist die gesuchte Winkelhalbierende. Begründung: Die Diagonalen im Rhombus halbieren die Innenwinkel.

c)



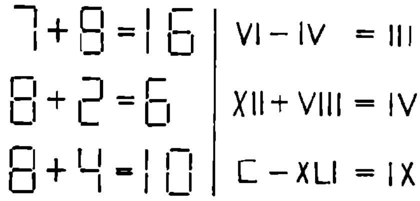
Mit Hilfe von Elementardreiecken bestimmt man den Punkt Q. Die Gerade PQ ist die gesuchte Senkrechte auf g. Begründung: Im gleichseitigen Dreieck gilt: Seitenhalbierende = Höhe.

d)



Man legt auf g zwei verschiedene Punkte A und B fest, errichtet in ihnen die Senkrechte (vgl. c)) und ermittelt mit je zwei Hölzchen die Punkte A' und B'. Die Gerade $A'B'$ verläuft parallel zu g.

▲ 15 ▲ Hölzchen-Gleichungen



▲ 16 ▲ Zerlegung der 18

a) $2+8+8=18$, b) $6+6+6=18$,
$0+9+9=18$, c) $3+6+9=18$,
$4+6+8=18$, $5+5+8=18$,
d) $1+8+9=18$, $3+7+8=18$,
$4+5+9=18$, e) $2+7+9=18$,
$5+6+7=18$, f) $4+7+7=18$.

▲ 17 ▲ Hölzchen-Ungleichungen

a) $5+3>8-5$
$9-3>8-5$
$5+3>6-6$
$6-3>6-6$
$9-3>6-6$
$9-3>9-6$
$5+3>9-6$

b) $8-4<8+1$
$8-4<6+7$
$0+4<8+1$
$0+4<6+7$
$6+4<6+7$

c) $7+2>3-3$
$7-2>3-9$
$7+2>5-3$
$7-2>6-3$

▲ 18 ▲ Hölzchen-Brüche

$\frac{II}{X}$ $\frac{II}{XVI}$ $\frac{II}{LI}$

Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 2/86

Ma 5 ■ 2663 Die letzte Grundziffer der kleineren Zahl muß 8 sein. Dann ist 8 aber auch die mittlere Grundziffer der größeren Zahl. Aus der angegebenen Summe erkennt man nun leicht, daß die beiden Summanden 88 und 880 lauten müssen.

Ma 5 ■ 2664 Die zweite Gruppe muß um 10.00 Uhr aufbrechen, da sie in einer Stunde die gleiche Strecke zurücklegt, für die die erste Gruppe 3 Stunden benötigt. Beide Gruppen treffen um 11.00 Uhr gleichzeitig in Neuendorf ein.

Ma 5 ■ 2665 a) Vom Schüler Lutz Schulz können wir mit absoluter Sicherheit Vor- und Zunamen angeben.
b) Es gibt vier Schüler, die mit Vornamen Lutz, aber nur drei Schüler, die mit Zunamen nicht Schulz heißen.

Ma 5 ■ 2666
a) Der Thälmann-Pionier erzielte 35 Punkte.
b) Wir rechnen rückwärts: $100 - 10 = 90$,

$90 : 2 = 45$, $45 - 10 = 35$.

Ma 5 ■ 2667 Insgesamt sind 90 Fahrgäste in den Abteilen. Wären in jedem Abteil gleich viele Personen, dann wären es je 30 Personen. Wegen $42-12=30$ waren ursprünglich im ersten Abteil 42 Personen. Wegen $27+12-9=30$ waren ursprünglich im zweiten Abteil 27 Personen. Wegen $21+9=30$ waren ursprünglich im dritten Abteil 21 Personen.

Ma 5 ■ 2668 Die Zahl 180 läßt sich nur wie folgt in zwei Faktoren a und b (mit natürlichen Zahlen a und b) zerlegen:

$$\begin{aligned}180 &= 180\cdot 1 = 90\cdot 2 = 60\cdot 3\\ &= 45\cdot 4 = 36\cdot 5 = 30\cdot 6 = 20\cdot 9\\ &= 18\cdot 10 = 15\cdot 12.\end{aligned}$$

Dabei ist wegen $15 - 12 = 3$ nur für $a = 15$ und $b = 12$ auch die Bedingung (1) erfüllt.

Ma 6 ■ 2669 Vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen bestehen stets aus zwei geraden und zwei ungeraden Zahlen. Die Summe zweier gerader, aber auch die Summe zweier ungerader Zahlen ist stets eine gerade Zahl. Deshalb ist die Summe aus vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets eine gerade Zahl, also keine Primzahl.

Ma 6 ■ 2670 a)

$1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$; 1000 km entsprechen $\frac{4}{15}$ des Weges.

$\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$; 1500 km entsprechen $\frac{6}{15}$ des Weges.

$\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$; 1250 km entsprechen $\frac{5}{15}$ des Weges.

b) Die Gesamtstrecke betrug
$(1500 + 1250 + 1000)$ km $= 3750$ km.

Ma 6 ■ 2671 Der Vater ist
$40 + 5 = 45$ Jahre alt. Lotte ist
$45 : 3 = 15$ Jahre alt. Emil ist
$15 - 4 = 11$ Jahre alt. Paul ist
$11 - 3 = 8$ Jahre alt.

Ma 6 ■ 2672 Da 26 Schüler radfahren und 12 Schüler schwimmen können und jeder Schüler mindestens eins von beiden kann, gehören der Klasse mindestens 26, höchstens 38 Schüler an. Da die Anzahl der Schüler durch 6 teilbar ist, könnten es 30 oder 36 Schüler sein. Von diesen beiden Zahlen erfüllt nur 30 alle Bedingungen. Diese Klasse besuchen 30 Schüler.

Ma 6 ■ 2673 In $1\frac{1}{2}$ Tagen würden 3 Hühner doppelt so viele Eier wie $1\frac{1}{2}$ Hühner, also 3 Eier legen. Ein Huhn würde in dieser Zeit den dritten Teil, also 1 Ei legen. Also würden 7 Hühner in $1\frac{1}{2}$ Tagen 7 Eier legen. Wegen 6 Tage gleich $4\cdot 1\frac{1}{2}$ Tage, würden 7 Hühner in 6 Tagen 28 Eier legen.

Ma 7 ■ 2674 Würde man die Fenster ohne Läden mit je einem Laden der kompletten Fenster versehen, dann fehlte an jedem Fenster ein Laden. Also braucht man 28 neue Fensterläden.

Ma 7 ■ 2675
a) Heidrun schoß $5 + 8 + 10 + 7 + 6 = 36$ Ringe und gewann; denn Günther schoß nur $3 + 5 + 6 + 7 + 9 = 30$ Ringe.
b) Heidrun schoß die 10. Begründung: Da Günther mit den letzten vier Schüssen die neunfache Ringzahl des ersten Schusses erzielte, muß sein erster Schuß die 3 gewesen sein, usw.

Ma 7 ■ 2676

$$\frac{378\cdot 436 - 56}{378 + 436\cdot 377} = \frac{377\cdot 436 + 436 - 56}{377\cdot 436 + 378} = \frac{377\cdot 436 + 380}{377\cdot 436 + 378};$$

da der Zähler größer ist als der Nenner, ist die Zahl größer als 1.

Ma 7 ■ 2677 Die Anzahl n der Schüler dieser Klasse muß ein Vielfaches von 9, 6 und 3 sein, also ein Vielfaches von 18 sein. Wegen $20 < n < 40$ gilt $n = 36$.

Zensur	1	2	3	4
Schüler	4	12	14	6

Ma 8 ■ 2678 Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises liegt sowohl auf der Symmetrieachse zu $\overline{AB}$ als auch auf der Senkrechten zu g durch B.

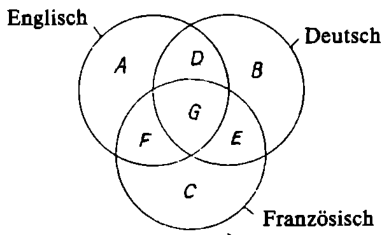
Ma 8 ■ 2679
$(x + 12) : x = 175 : 100$; $x = 16$
$\frac{175}{100} a : x = 3 : 2$; $a = 2x$; $a = 32$.
Es haben 16 Schüler teilgenommen; die Klasse hat 32 Schüler.

Ma 8 ■ 2680
$\frac{77}{100}x + \frac{87}{100}(1000 - x) = \frac{80}{100}\cdot 1000$;
$x = 700$.
Es kommen nur 700 g 77prozentiger und 300 g 87prozentiger Spiritus in Frage.

Ma 8 ■ 2681

$$\begin{aligned}A+B+C+D+E+F+G &= 40\\ A+B+D+E+F+G &= 34\\ B+C+D+E+F+G &= 25\\ B &= 6\\ D &= 3+E\\ F+G &= 0\end{aligned}$$

$A = 15$; $B = 6$; $C = 6$; $D = 8$; $E = 5$; $F = G = 0$.
Genau eine Sprache lernen 27 Schüler, genau zwei Sprachen lernen 13 Schüler.

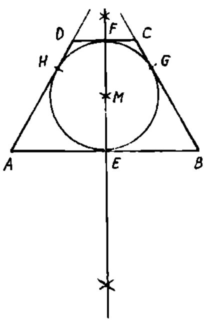


Ma 9 ■ 2682
$a + b = a\cdot b$ und $a\cdot b = \frac{a}{b}$ mit $b \neq 0$.
$\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ ist das einzige Paar, das die Bedingungen erfüllt.

Ma 9 ■ 2683 Durch logisches Schließen erhält man die einzige mögliche Lösung: Brigitte hat den Ball; Claudia hat den Bleistift und Anna hat die Schere.

Ma 9 ■ 2684
2^1 endet auf 2
2^2 endet auf 4
2^3 endet auf 8
2^4 endet auf 6
.
.
.
$2^{4\cdot m}$ ($m \in N$; $m \neq 0$) endet auf 6
$2^{4\cdot 25} = 2^{100}$ endet auf 6.

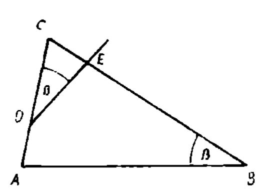
Ma 9 ■ 2685 $\overline{AB}$ mit 6 cm Länge zeichnen; Mittelsenkrechte auf $\overline{AB}$ errichten; einbeschriebenen Kreis zeichnen.
Die Kreise um A und B mit $r = 3$ cm schneiden den einbeschriebenen Kreis in G und H (Berührungspunkte der Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$). Die Parallele durch F zu $\overline{AB}$ schneidet die Strahlen BG und AH in C bzw. D.



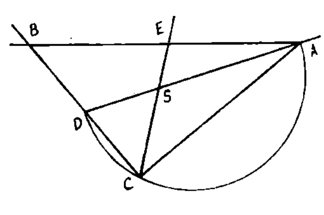
Ma 10/12 ■ 2686 Es ist
$2^{256} - 1 = (2^{128} + 1)(2^{128} - 1)$, also keine Primzahl. Primfaktoren sind 3, 5, 17, 257, ...

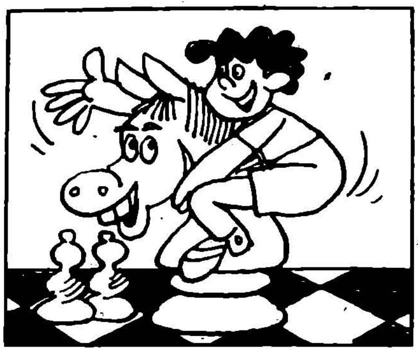
Ma 10/12 ■ 2687 a) 1 oder 2 Augen sind nicht zu erreichen: $W(1) = 0$; $W(2) = 0$.
b) 3 oder 18 Augen in genau einem aller 216 Fälle:
$W(3) = \frac{1}{216}$; $W(18) = \frac{1}{216}$.
c) 17 Augen in 3 von 216 Fällen:
$W(17) = \frac{1}{72}$
d) 16 Augen in 6 von 216 Fällen:
$W(16) = \frac{1}{36}$.

Ma 10/12 ■ 2688 ABC beliebig zeichnen; auf $\overline{AC}$ den Punkt D beliebig festlegen; an $\overline{AC}$ in D den Winkel $\sphericalangle ABC$ so antragen, daß sein freier Schenkel die Seite $\overline{BC}$ in E schneidet. Das Dreieck DEC ist zum Dreieck ABC nach dem Hauptähnlichkeitssatz (w, w, w) ähnlich.



Ma 10/12 ■ 2689 $\overline{AD}$ (Länge s_a) zeichnen; Thaleskreis über $\overline{AD}$. Auf $\overline{AD}$ liegt S mit $\overline{DS} = \frac{1}{3}\overline{DA}$. Um S Kreis mit $r = \frac{2}{3}s_c$, schneidet Thaleskreis in C. $\overline{CS}$ um $\frac{1}{3}$ verlängern bis E; Strahlen AE und CD schneiden einander in B.





alpha-Schachwettbewerb 1986

Erneut ruft *alpha* alle Schachfreunde zur Teilnahme an einem Lösungswettbewerb auf!

Acht Schachaufgaben von unterschiedlicher Schwierigkeit gilt es zu lösen. Auch wer nur eine Aufgabe oder einige Aufgaben löst, hat Gewinnchancen. Doch sollte der Wettbewerb vorrangig jedem einzelnen dazu dienen, Gefallen an den Knobeleien auf dem Schachbrett zu finden und sein Leistungsvermögen zu überprüfen.

In allen acht Aufgaben beginnt Weiß und setzt trotz bester Gegenwehr von Schwarz in der geforderten Zügezahl matt. Die jeweilige Punktzahl, die in etwa den Schwierigkeitsgrad wiedergibt und aus der Bepunktung der Abspiele resultiert, ist bei den Aufgaben mit angegeben. Als vollständig gilt die Lösung, wenn alle Abspiele bis zum Matt angeführt werden.

Unter allen Teilnehmern, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst haben, werden Bücher verlost.

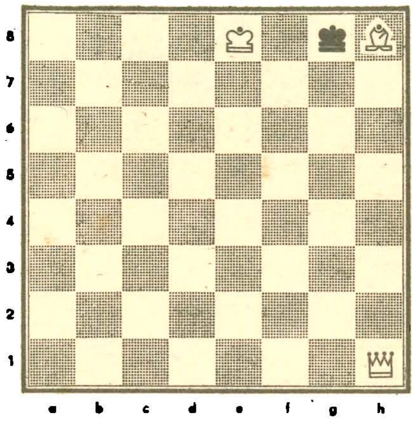
Die Teilnehmer, die die volle Punktzahl zu den Aufgaben Nr. 1 bis Nr. 7 erreichen, erhalten eine Urkunde und nehmen an einer weiteren Verlosung von Buchpreisen teil. Für Teilnehmer bis zum Alter von 14 Jahren reicht schon die volle Punktzahl zu den Aufgaben Nr. 1 bis Nr. 4 aus, um in diese Verlosung zu kommen.

Die Aufgabe Nr. 8 ist eine Zusatzaufgabe. Sie ist für leistungsstärkere Schachspieler gedacht. Diese Aufgabe bleibt zwar ohne Punktbewertung, jedoch ersetzt sie jede andere Aufgabe im Punktwert. Unter den Teilnehmern, die alle Aufgaben einschließlich der Zusatzaufgabe richtig gelöst haben, werden zwei Bücher verlost.

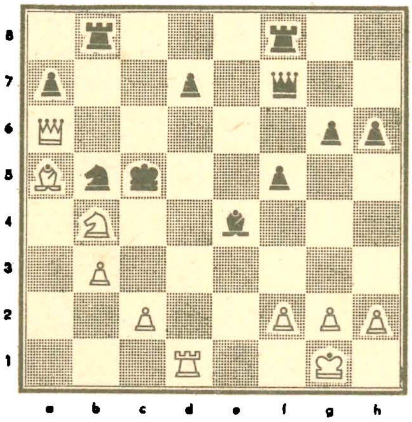
Teilnahmeberechtigt sind alle *alpha*-Leser. Die Einsendung der Lösungen (jeweilige Aufgaben-Nummer angeben) ist bitte bis zum 8. März 1987 unter Angabe von Name, Vorname, Alter und Adresse zu richten an

Redaktion alpha
PSF 14
Leipzig
7027

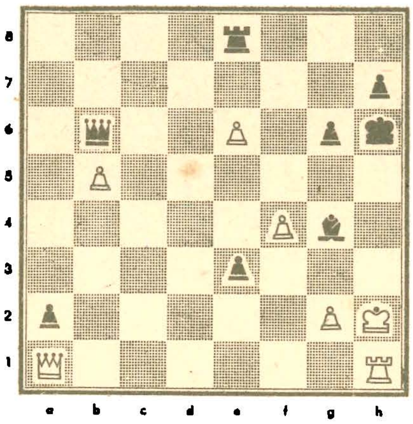
Die Lösungen sowie die Gewinner werden voraussichtlich in alpha 4/1987 veröffentlicht.



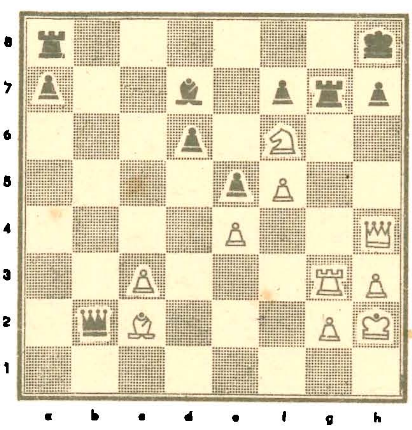
Nr. 1 Matt in zwei Zügen 2 Punkte



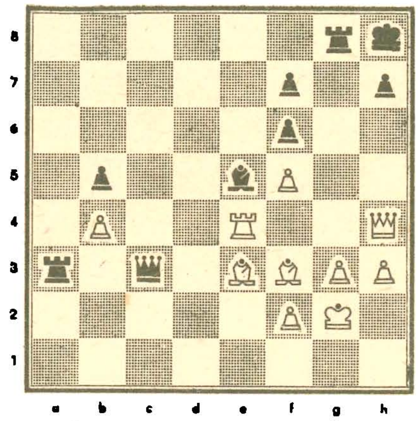
Nr. 2 Matt in zwei Zügen 2 Punkte



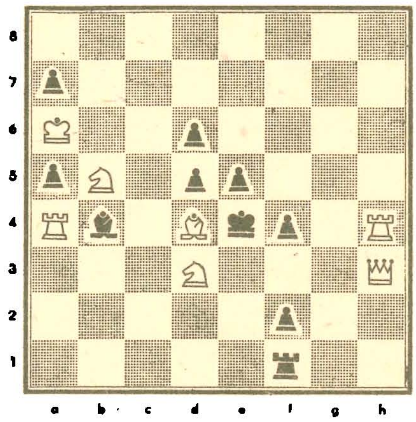
Nr. 3 Matt in drei Zügen 3 Punkte



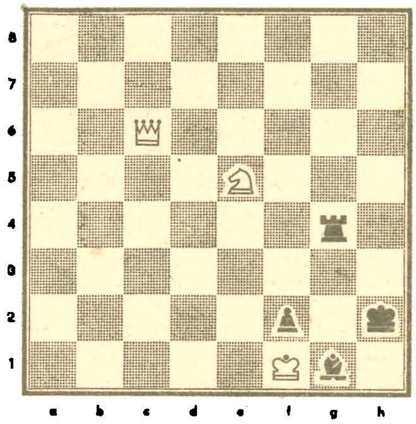
Nr. 4 Matt in drei Zügen 4 Punkte



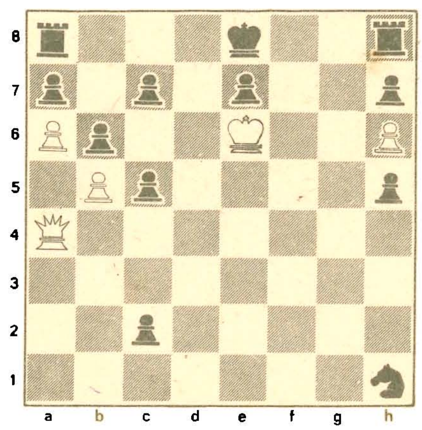
Nr. 5 Matt in vier Zügen 4 Punkte



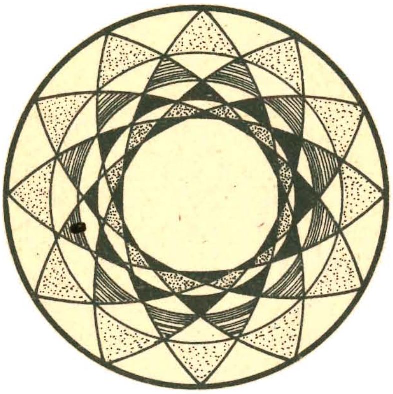
Nr. 6 Matt in zwei Zügen 5 Punkte

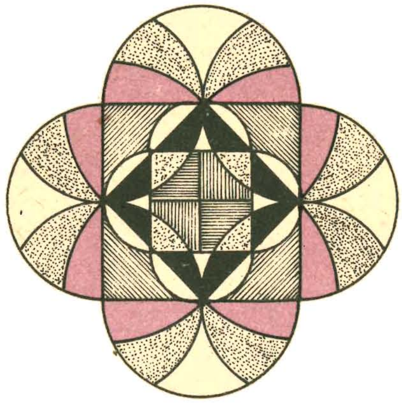


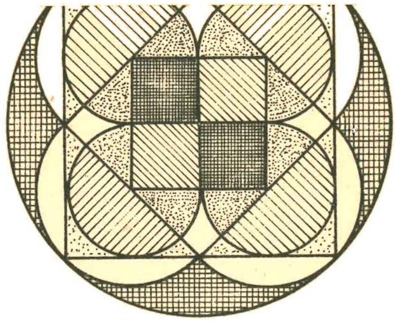
Nr. 7 Matt in drei Zügen 6 Punkte



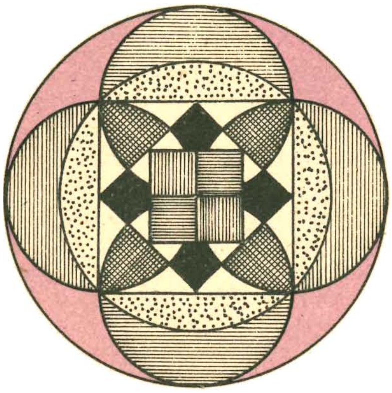
Zusatzaufgabe: Matt in vier Zügen

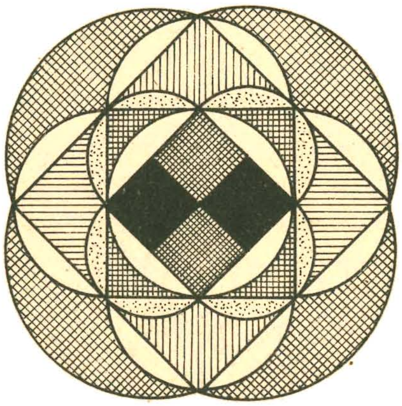


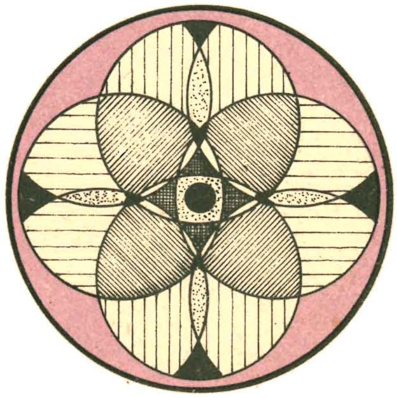




aus: *Matematicko Fizički List*, Beograd





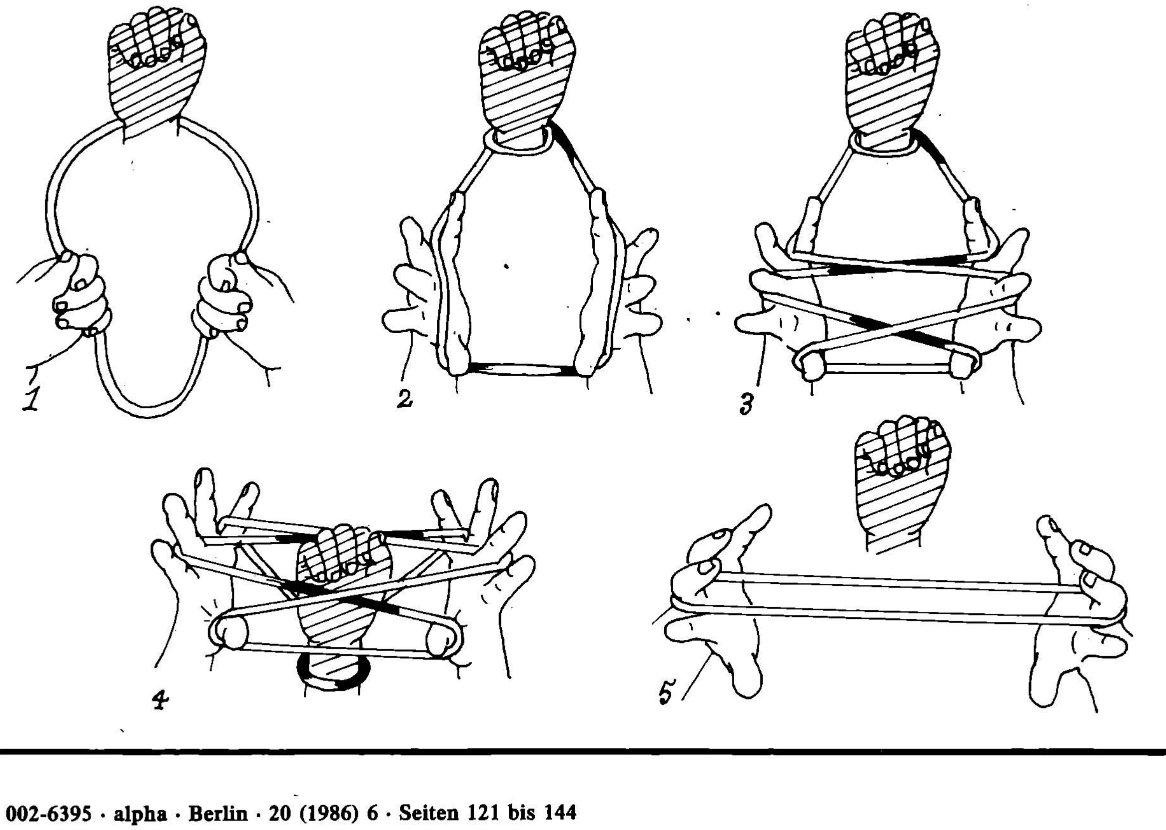


うできり

aus einem japanischen Unterhaltungsbuch

あやとり いととり

さいとう たま 採取・文　つじむら ますろう 絵　１２３



ISSN 002-6395 · alpha · Berlin · 20 (1986) 6 · Seiten 121 bis 144