Mathematische

alpha

Schülerzeitschrift

1

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
21. Jahrgang 1987
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold
Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: G. Wildenhain, Rostock, Eigenfoto (S. 2); Torsten Tock, Leipzig (S. 5); W. Aschmanow, Moskau (S. 7); Archiv: Mönchguter Heimatmuseum; Archiv: Universität Greifswald, Bibliothek (S. 12); Briefmarken: P. Schreiber, Stralsund (S. 13)
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage des Originalbuches (siehe S. 11/13, Archiv: W. Träger, Döbeln)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 13. Oktober 1986
Auslieferungstermin: 15. Februar 1987

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

[1] bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben geeignet ab der angegebenen Klassenstufe

Einige Bemerkungen über Extremalprobleme

Teil 1

Seit eh und je sind Extremalprobleme in Mathematik, Physik oder Technik Gegenstand mathematischer Betrachtung gewesen. Bereits im Altertum formulierte man eine Vielzahl solcher Fragestellungen, die noch heute lehrreich und interessant sind. Auch im täglichen Leben entstehen immer wieder Probleme, die auf die Ermittlung von in gewissem Sinne *besten* oder *optimalen* Lösungen hinauslaufen. Im folgenden sollen an Hand von charakteristischen Beispielen verschiedene Typen solcher Problemstellungen vorgestellt werden. Eine tiefergehende Beschreibung der allgemeinen Lösungsmethoden übersteigt natürlich die Möglichkeiten dieses Artikels, schon deshalb, weil er im wesentlichen auch für Leser ohne Kenntnisse über Differential- und Integralrechnung verständlich sein soll. Unser Ziel besteht darin, einen Eindruck davon zu vermitteln, welche Rolle Extremalprobleme für die Entwicklung und für die Anwendung der Mathematik von der Antike bis zur Gegenwart gespielt haben. Wir beginnen mit der Formulierung einiger sehr einfacher Beispiele von Extremalaufgaben, von denen zwar die teilweise auf der Hand liegende Lösung auch ohne eine allgemeine Theorie gefunden werden kann, wobei aber jede Aufgabe einen speziellen Problemtyp repräsentiert.

Beispiel 1
Gesucht ist ein Dreieck mit maximalem Flächeninhalt, wenn die Längen a und b zweier Seiten vorgegeben sind.

Beispiel 2
Es sind diejenigen Punkte in der xy-Ebene gesucht, in denen die Funktion

$$\begin{aligned} z &= f(x,y) \\ &= x^2 + xy + y^2 + 3x + 2 \end{aligned}$$

ihren kleinsten Wert annimmt.

Beispiel 3
Gesucht ist ein Rechteck gegebenen Inhalts, für das die Summe der Seitenlängen minimal wird.

Beispiel 4
Gegeben seien zwei Punkte A und B im Raum. Gesucht ist unter allen A und B verbindenden Kurven diejenige mit der kleinsten Länge.

Das Bedürfnis, allgemeine Methoden zu entwickeln, die es gestatten, Extremwertaufgaben in weitgehend einheitlicher Weise zu behandeln, war eine der ersten Motivationen für die Entwicklung der Differentialrechnung. Insbesondere war es *P. Fermat* (1601 bis 1665), der noch vor *Newton* und *Leibniz* wichtige Schritte in dieser Richtung unternahm.

Die einfachsten Extremalaufgaben (vgl. Beispiel 1) stellen sich so dar, daß von einer Funktion f, die von einer Variablen x abhängt ($y = f(x)$), Extremwerte (Maxima oder Minima) zu bestimmen sind. Dabei geht es in der Regel um relative Extrema. Die Funktion f besitzt bei $x = x_0$ ein relatives Minimum, wenn $f(x_0)$ kleiner als alle *benachbarten* Werte $f(x)$ ist, d. h., wenn $f(x) - f(x_0) > 0$ für $|x - x_0| < \varepsilon$ und ein geeignet gewähltes $\varepsilon > 0$ gilt (Bild 1).

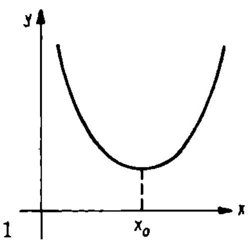


Bild 1

Betrachtet man nun den sogenannten Differenzenquotienten $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, der offenbar den Anstieg der durch die Kurvenpunkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ verlaufenden Sekante darstellt, und läßt die Variable x im Sinne wachsender x das Intervall $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ durchlaufen, so gilt unter der Annahme eines relativen Minimums in x_0 die Ungleichung

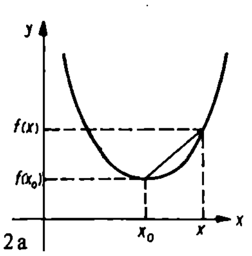


Bild 2a

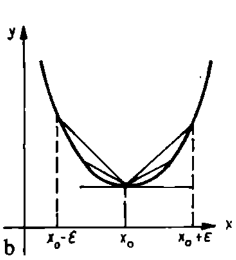


Bild 2b

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \text{ für } x < x_0 \text{ und}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \text{ für } x > x_0. \text{ (Bild. 2 a, b)} \quad (1)$$

Nehmen wir nun ferner an, daß die Funktion f im Punkt x_0 differenzierbar ist, d. h., daß der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

(Anstieg der Tangente an die Kurve $y = f(x)$ in x_0)

existiert, so folgt unter Beachtung von (1) die Gleichung $f'(x_0) = 0$. $f'(x_0)$ heißt Ableitung von f im Punkt x_0. Nähern wir uns der Stelle x_0 nämlich von links, so erhalten wir $f'(x_0) \leqq 0$, bei Annäherung von rechts hingegen $f'(x_0) \geqq 0$. Entsprechende Überlegungen gelten für den Fall eines relativen Maximums. Besitzt also eine überall innerhalb eines Intervalls differenzierbare Funktion f in einem inneren Punkt x_0 des Intervalls ein relatives Extremum, so gilt dort notwendig $f'(x_0) = 0$. Der erste Schritt zur Lösung von Extremwertaufgaben vom Typ der Aufgabe 1 besteht also in der Ermittlung derjenigen Stellen, in denen die Ableitung f' der jeweiligen Funktion f verschwindet. Um zu entscheiden, ob tatsächlich ein Extremwert vorliegt, müssen zusätzliche Überlegungen angestellt werden. Wir wollen diese Methode auf das Beispiel 1 anwenden. Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt $f(\alpha) = \frac{1}{2} ab \sin\alpha$, wenn α den Winkel zwischen den gegebenen Dreiecksseiten bezeichnet. Aus der Ableitungsdefinition folgt durch elementare Überlegung $f'(\alpha) = \frac{1}{2} ab \cos\alpha$ und aus $f'(\alpha) = 0$ schließlich $\alpha = \frac{\pi}{2}$, d. h., das gesuchte Dreieck erhält man, wenn die gegebenen Seiten einen rechten Winkel einschließen. Die vorliegende Aufgabe läßt sich allerdings ohne Benutzung der Differentialrechnung einfacher lösen, denn die Funktion $f(\alpha) = \frac{1}{2} ab \sin\alpha$ nimmt wegen $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ ihren größten Wert offensichtlich bei $\alpha = \frac{\pi}{2}$ an.

Das skizzierte Schema der Behandlung von Extremalaufgaben zieht sich in mehr oder weniger verallgemeinerter Form wie ein roter Faden auch durch die anderen Problemtypen, wie sie durch die Beispiele 2 bis 4 repräsentiert werden. In Beispiel 2 etwa hängt die Funktion f nicht nur von einer, sondern von 2 Variablen x und y ab. Die als Extremstellen in Frage kommenden Punkte ermittelt man in diesem Falle durch Nullsetzen der sogenannten partiellen Ableitungen, d. h. man bildet die Ableitungen der Funktion f bezüglich x bzw. y und betrachtet dabei y bzw. x als Konstante. Die Begründung für diese Vorgehensweise ist der obigen völlig analog. Entsprechend sind die Überlegungen bei Funktionen von mehr als zwei Variablen. Im vorliegenden Fall findet man die gesuchte Extremstelle bei $x = -2$, $y = 1$.

Auch hier kann man mittels der Umformung

$$x^2 + xy + y^2 + 3x + 2 = \left(\frac{x}{2} + y\right)^2 + 3\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 - 1$$

die Lösung auf direktem Weg finden, denn der rechts stehende Ausdruck ist ersichtlich $\geqq -1$ und der minimale Wert -1 wird genau dann angenommen, wenn die in Klammern stehenden Größen verschwinden. Dies ergibt die Werte $x = -2$, $y = 1$.

In Beispiel 3 liegt eine weitere Besonderheit vor. Gesucht ist ein Extremwert für eine Funktion von zwei Variablen, wobei noch eine zusätzliche Bedingung vorgegeben ist, die zwischen den Variablen bestehen soll.

Bezeichnen wir nämlich die Seitenlängen mit x und y, so ist ein Minimum der Funktion $f(x,y) = 2x + 2y$ unter der Bedingung $x \cdot y = F$ gesucht (F vorgegebener Rechteckinhalt). Man spricht daher von Extremwertaufgaben mit Nebenbedingung. In vielen Fällen läßt sich eine solche Aufgabe auf eine gewöhnliche Extremwertaufgabe für eine Funktion einer Variablen zurückführen, indem man die zweite Variable mit Hilfe der Nebenbedingung eliminiert. In unserem Falle ergibt sich eine gewöhnliche Extremwertaufgabe für die Funktion $g(x) = 2\left(x + \frac{F}{x}\right)$ mit der Lösung $x = \sqrt{F}$ und damit $y = \sqrt{F}$. Wie zu erwarten war, wird also das Minimum im Falle des Quadrats erreicht. Fragen wir analog nach den Abmessungen eines Quaders gegebenen Volumens V mit minimaler Oberfläche, so führt die Berücksichtigung der Nebenbedingung entsprechend zu einer gewöhnlichen Extremwertaufgabe vom Typ des Beispiels 2 und als Lösung erhält man den Würfel mit den Kantenlängen $x = y = z = \sqrt[3]{V}$. Hat man es mit einer Funktion von mehr als zwei Variablen und mehreren Nebenbedingungen zu tun, so kann unter Umständen in analoger Weise mit Hilfe dieser Nebenbedingungen die Anzahl der Variablen reduziert werden. Es gibt aber auch Methoden, die es gestatten, solche Probleme selbst dann zu lösen, wenn die oben erwähnte Reduktion nicht unmittelbar möglich ist (Methode der *Lagrangeschen Multiplikatoren*).

Im Vergleich zu den Beispielen 1 bis 3 ist die Aufgabe aus Beispiel 4, ungeachtet ihrer sofort erkennbaren Lösung, nämlich der Verbindungsstrecke, von grundsätzlich anderer Natur.

Während man in den ersten Fällen bestimmte Werte einer oder mehrerer Variabler zu ermitteln hat, für die eine gegebene Funktion dieser Variablen ein Maximum oder Minimum annimmt, hängt die fragliche Kurvenlänge in Beispiel 4 vom Gesamtverlauf der Kurve ab. An die Stelle variabler Parameter tritt also jetzt eine variable Kurve.

Die folgenden, wesentlich anspruchsvolleren Beispiele 5 bis 7 liefern weitere Problemstellungen dieser Art. Man spricht in diesen Fällen von Variationsproblemen.

Die in den Beispielen 5 bis 7 formulierten Probleme haben in der historischen Entwicklung der Mathematik bis hin zur Gegenwart eine bedeutende Rolle gespielt.

Beispiel 5

Ein Massenpunkt gleite reibungslos längs einer gewissen Kurve, die einen Punkt A mit einem tiefer gelegenen Punkt B verbindet. Für welche derartige Kurve wird die Laufzeit am kürzesten, falls der Massenpunkt lediglich unter dem Einfluß der Schwerkraft steht? *(Problem der Brachystochrone)* (Bild 3.)

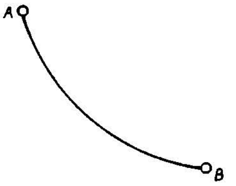


Bild 3

Beispiel 6

Gesucht ist diejenige Kurve gegebener Länge in der Ebene, welche einen maximalen Flächeninhalt einschließt. Entsprechend ist im Raum nach derjenigen geschlossenen Fläche gegebenen Inhalts gefragt, welche ein maximales Volumen einschließt *(Isoperimetrisches Problem)*.

Beispiel 7

Gegeben sei eine geschlossene Kurve L im Raum. Gesucht ist die von L begrenzte Fläche kleinstmöglichen Inhalts *(Plateausches Problem)*.

Die Aufgabe aus Beispiel 5 war im Jahre 1696 von *Johann Bernoulli* (1667 bis 1748) in der wissenschaftlichen Zeitschrift *Acta Eruditorum* in der Absicht gestellt worden, die großen Mathematiker der damaligen Zeit zum Wettbewerb herauszufordern. Der Erfolg war durchschlagend.

Es wurden verschiedene Lösungsmethoden vorgelegt. Die Lösung selbst erwies sich überraschend als Zykloide, in diesem Zusammenhang als Brachystochrone bezeichnet. Das Bedeutungsvolle dieser Untersuchung bestand darin, daß im Zusammenhang damit allgemeine Methoden entwickelt wurden, die zur Entstehung einer ganz neuen mathematischen Disziplin, nämlich der Variationsrechnung führten, insbesondere durch *Leonhard Euler* (1707 bis 1783). Dieser Vorgang hat durchaus exemplarischen Charakter. Allgemeine mathematische Methoden und Theorien entstehen in der Regel aus der Beschäftigung mit konkreten Problemen. Diese liefern den entscheidenden Antrieb für die Entwicklung der Wissenschaft. Das kann über Jahrtausende durch die gesamte Entwicklung der Mathematik bis zur Gegenwart verfolgt und durch die vielfältigsten Beispiele belegt werden.

G. Wildenhain

Dieser Beitrag wird in Heft 2/87 fortgesetzt.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. G. Wildenhain

Sektion Mathematik
der W.-Pieck-Universität Rostock
Leiter des Wissenschaftsbereiches Analysis

▲2749▲ Man beweise durch elementare geometrische Überlegungen, daß der Kreis unter allen geschlossenen Kurven mit vorgeschriebener Länge den größten Flächeninhalt einschließt.

Anleitung: Man führe die Betrachtung auf konvexe Gebiete zurück und benutze den Satz von Thales.

Ein Gebiet G heißt konvex, wenn alle Punkte der Verbindungsgerade zweier beliebiger Punkte von G ganz innerhalb G oder auf dem Rand von G liegen.

Kurzbiographie

Günther Wildenhain, geboren am 9. 10. 1937 in Beerwalde (Kreis Hainichen), Schulbesuch in Beerwalde und Mittweida, 1955 Abitur in Mittweida, 1955 bis 1960 Mathematikstudium an der TU Dresden, insbesondere bei den Professoren K. Maruhn, M. Landsberg und P. H. Müller, danach wissenschaftlicher Assistent am damaligen *Institut für Reine Mathematik* der TU Dresden, 1965 bis 1971 wiss. Mitarbeiter am *Institut für Reine Mathematik* der Akademie der Wissenschaften in Berlin.

1964 Promotion, 1968 Habilitation, 1971 Berufung zum Hochschuldozenten und 1973 zum ordentl. Professor für Analysis an die Sektion Mathematik der Universität Rostock. Längere Auslandsaufenthalte in Moskau, Leningrad, Lima (Peru) und Santa Clara (Kuba), Forschungstätigkeit in der Potentialtheorie, der Funktionalanalysis und der Theorie partieller Differentialgleichungen, bisher etwa 80 wissenschaftliche Publikationen, darunter drei Bücher. Vorsitzender der Bezirkssektion Nord der Mathematischen Gesellschaft der DDR.

alpha-Porträt: Stephan Werner

Klasse 10, OS Roßlau

Zielstrebige Arbeit auf mathematischem Gebiet zahlt sich aus.

Der Schüler *Stephan Werner*, als zweites Kind einer kinderreichen Familie am 15.9. 1969 in Neustrelitz geboren, besucht die Roßlauer *Ernst-Thälmann*-OS seit der 4. Klasse. Bereits seit der 5. Klasse ist er Mitglied einer außerschulischen mathematischen Arbeitsgemeinschaft an unserer Schule und löste seit dieser Zeit auch regelmäßig die Wettbewerbsaufgaben unserer mathematischen Schülerzeitschrift. Dadurch erweiterte er systematisch sein mathematisches Wissen, vertiefte es auch durch selbständige Arbeit, so daß er nun im 10. Schuljahr in der Lage ist, eine wissenschaftliche Jahresarbeit anzufertigen, wie sie sonst von Schülern der 11. bzw. 12. Klassen der EOS erstellt werden. Die anläßlich der MMM 1986 vorgelegte Arbeit über die verschiedenen Formen der Ableitungen in der Differentialrechnung bringt recht deutlich zum Ausdruck, daß ihm Ausdauer und Zielstrebigkeit – beides sehr wichtige Charaktereigenschaften für die Mathematik – in jeder Weise eigen sind. In dieser Arbeit zeigt er, daß er die Worte unseres Volksbildungsministers auf der Erfurter Volksbildungskonferenz richtig verstanden hat, sich persönlich ein elementares Verständnis für Probleme der Informatik anzueignen, wie entsprechende Denk-, Arbeits- und Betrachtungsweisen. Die Entwicklung elementarer mathematischer Fähigkeiten und Fertigkeiten, wie er sie sich im Unterricht, in der Arbeitsgemeinschaft oder jetzt im fakultativen Kurs (R) *Praktische Mathematik*, aneignen konnte. Dadurch war er auch in der Lage, zielstrebig seine Leistungen in den Schul-, Kreis-, Bezirksolympiaden systematisch zu steigern und zu verbessern. War der Schüler in der 5. Klasse in der Kreisolympiade 1980/81 noch Sechster, so belegte er ein Jahr später 1981/82 in der Kreisolympiade den 3. und in der Klassenstufe 7 1982/83 in der Kreisolympiade den 2. Platz. Viermal nacheinander belegte er in der Mathematik-Bezirksolympiade mit entweder voller oder einer Punktzahl von 38 Punkten immer den ersten Platz. Seit 1983/84 arbeitet der Schüler Stephan Werner auch im Korrespondenzzirkel der *Martin-Luther*-Universität Halle-Wittenberg erfolgreich mit, bekam als Frühstarter 1985 in der DDR-Mathematikolympiade 1985 in Erfurt einen dritten und 1986 einen zweiten Preis.

E. Timm

Stephan Werner sandte der *alpha* drei Aufgaben (mit Lösungen), bearbeitet von unserem Aufgabenexperten Dr. Fregin, Leipzig:

▲1▲ Man löse die Gleichung
$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$$
im Bereich der reellen Zahlen.

▲2▲ Es ist folgender Satz zu beweisen: *Für jedes Dreieck ABC gilt: Die Flächeninhalte des Dreiecks ABC und seines Inkreises verhalten sich wie ihre Umfänge.*

▲3▲ Es ist folgender Satz zu beweisen: *In jedem Sehnenviereck ist die Summe der Produkte der Längen der gegenüberliegenden Seiten gleich dem Produkt aus den Längen der Diagonalen.*

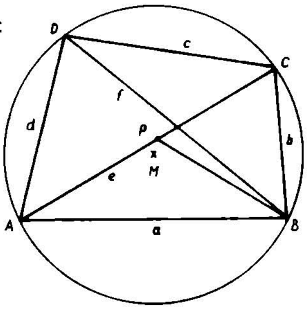
Lösungen

▲1▲ Durch geeignete äquivalente Umformungen erreicht man auf beiden Seiten der Gleichung solche Summen, die sich als Binome der Form $(a + b)^2$ schreiben lassen.
Man addiert auf beiden Seiten der Gleichung $4x^2 + 400x + 1$ und erhält
$$x^4 + 2x^2 + 1 = 10000 + 400x + 4x^2;$$
$$(x^2 + 1)^2 = (2x + 100)^2;$$
$$x^2 + 1 = \pm(2x + 100).$$
Nun nimmt man eine Fallunterscheidung vor:
1. Fall: $x^2 + 1 = 2x + 100;$
$x^2 - 2x - 99 = 0;$
$x_1 = 11;\ x_2 = -9.$
2. Fall: $x^2 + 1 = -2x - 100;$
$x^2 + 2x + 101 = 0.$
Diese quadratische Gleichung hat keine reellen Lösungen, da die Diskriminante negativ ist. Es gilt $L = \{11; -9\}$.

▲2▲ Es sei A_D die Bezeichnung für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und A_I die für den Flächeninhalt des Inkreises von ABC. Wir bezeichnen die Umfänge entsprechend mit u_D bzw. u_I. Für den Radius ϱ des Inkreises des Dreiecks ABC gilt die Beziehung $\varrho = \frac{A_D}{s}$, wobei $s = \frac{u_D}{2}$ ist.
Daraus folgt
$A_D = \varrho \cdot s$ bzw. $A_D = \frac{\varrho}{2} \cdot u_D$.
Nun bildet man das Verhältnis $\frac{A_D}{A_I}$ und erhält
$$\frac{A_D}{A_I} = \frac{\varrho \cdot u_D}{2 \cdot \pi \cdot \varrho^2} = \frac{u_D}{2\pi\varrho} = \frac{u_D}{u_I},$$
q. e. d.

▲3▲ Man wählt auf $\overline{AC}$ den Punkt P derart, daß $\sphericalangle ABP \cong \sphericalangle CBD$.
Da $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle CDB$ (Peripheriewinkel über demselben Bogen $\overset{\frown}{CB}$) gilt:
$\triangle ABP \sim \triangle BCD$ (Hauptähnlichkeitssatz). Es folgt nun
$l(\overline{AP}) : a = c : f$ bzw. $l(\overline{AP}) = \frac{a \cdot c}{f}$.
Da wegen
$\sphericalangle ABP \cong \sphericalangle DBC$ auch $\sphericalangle ABD \cong \sphericalangle PBC$
gilt und als Peripheriewinkel über demselben Bogen $\overset{\frown}{AB}$ auch
$\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle ADB$
ist, gilt auch $\triangle PBC \sim \triangle ABD$.
Es folgt nun
$d : f = l(\overline{CP}) : b$ bzw. $l(\overline{CP}) = \frac{b \cdot d}{f}$.
Also gilt wegen $l(\overline{AP}) + l(\overline{PC}) = e$
die Beziehung
$$e = \frac{a \cdot c}{f} + \frac{b \cdot d}{f},$$
$$e = \frac{a \cdot c + b \cdot d}{f}$$
bzw. $a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$, q. e. d.
Anmerkung: Das Symbol $l(\overline{AP})$ bedeutet *Länge der Strecke* $\overline{AP}$!

Skizze:



Lebensweisheiten

Während die Menschen lehren, lernen sie. *Seneca d. J.*

Der gebildete Mensch birgt in sich immer Reichtum. *Phaedrus*

Talent haben ist das beste, das zweite, etwas lernen. *Epicharm*

Nichts kann ohne Beispiel richtig gelernt oder gelehrt werden. *Columella*

Mehr Menschen werden durch Übung tüchtig als von Natur. *Stobaios*

Die Mathematik als Produktivkraft

Gedanken nach dem XI. Parteitag der SED Teil 1

Festvortrag auf der Abschlußveranstaltung der XXV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR in Erfurt, 3. Mai 1986

Die Mathematiker unseres Landes haben auf ihrem Kongreß in Rostock zu Beginn des Jahres 1986, im Vorfeld des XI. Parteitages, ihre erzielten Ergebnisse vorgelegt, damit ihre Leistungsfähigkeit unter Beweis gestellt, so wie Ihr, der Nachwuchs, jetzt hier auf Eurer Mathematikolympiade, und über die Entwicklungstendenzen der Mathematik beraten (1).

Mit großer Freude habe ich deshalb das Angebot des *Zentralen Komitees für die Olympiade Junger Mathematiker der DDR* angenommen, auf dieser festlichen Abschlußveranstaltung der Jubiläumsolympiade, nach dem XI. Parteitag der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands mit einigen Gedanken zu umreißen, wie die Wissenschaft Mathematik als Produktivkraft die künftige Entwicklung mit prägen wird. Es ist mir deswegen eine große Freude, weil es auch eine große Herausforderung ist:

Was können und was sollen wir Mathematiker unserem Nachwuchs als Orientierung sagen, in einem Moment, in dem unsere gesamte Gesellschaft weit in die Zukunft reichende Aufgaben in Angriff nimmt, in einem Moment, in dem gerade durch den Parteitag Maßstäbe gesetzt worden sind, wie eine Zukunftspolitik immer eine Politik für die Jugend, für den Nachwuchs ist? Auch deshalb wurden die Probleme der Jugend und der Schule auf dem Parteitag mit einer so großen Aufmerksamkeit behandelt.

Heute steht die Menschheit an einem Wendepunkt ihrer Entwicklung. Dieser Einsicht kann sich niemand, der über die Probleme unserer Tage nachdenkt, entziehen. Sei er ein Sozialist oder ein Bourgeois, Arbeiter oder Kapitalist, sei er Kommunist, Sozialdemokrat, Grüner oder aus dem konservativen Lager der kapitalistischen Welt, sei er älter oder so jung wie Ihr, liebe Mathematikolympioniken.

Man kommt zu dieser Einsicht, egal welche der großen Probleme der Welt man zum Ausgangspunkt seines Denkens nimmt. Sei es die Arbeitslosigkeit und der Sozialabbau in den Ländern des Kapitals, die Umweltbelastungen oder die Kernenergie, der Hunger in der dritten Welt oder die Frage von Krieg und Frieden. An einem Wendepunkt sind es immer weniger Parameter, die den gesamten Verlauf charakterisieren. Sagen wir es einmal mathematischer: Die Entwicklung ist an einem Sattelpunkt angekommen. Der eine Parameter, der über den weiteren Ablauf entscheidet, ist die Frage von Krieg und Frieden, die identisch geworden ist mit Untergang oder Weiterentwicklung der Menschheit. In dieser Problematik kulminieren auch alle mit dem wissenschaftlich-technischen Fortschritt und den Wissenschaften verbundenen Fragen. Erich Honecker formulierte dazu: *Nichts kann wichtiger sein, als zu verhindern, daß die Völker einem nuklearen Inferno ausgeliefert, die Flammen eines atomaren Krieges entfacht werden, in dem es weder Sieger noch Besiegte gäbe, der aber die menschliche Zivilisation auf unserem Erdball vernichten würde.*

Diese Feststellung ist eine fundamentale Formel, auf deren Basis eine Koalition der Vernunft in der definierten Breite und die Politik des Dialogs möglich und notwendig sind.

In dieser Periode der historischen Wende für die Zivilisation auf der Erde hat der XI. Parteitag der SED für uns in der DDR weit in die Zukunft reichende Aufgaben beschlossen.

Wir können uns dabei auf ein Fundament stützen, daß durch hohe Leistungen gelegt wurde und mit der auch wir schon in unserem Lande den Nachweis geführt haben: *Der Sozialismus ist kein Irrtum der Geschichte, sondern die Zukunft der Menschheit,* wie es im Rechenschaftsbericht des Zentralkomitees heißt.

Für die Zukunft gilt es, in historisch kurzer Zeit eine Schlacht zu gewinnen, nicht mit Säbeln und Raketen, sondern mit Arbeitsproduktivität.

In 15 Jahren soll die Welt kernwaffenfrei sein mit einer reduzierten konventionellen Rüstung in Europa vom Atlantik bis zum Ural.

In dieser Schlacht um die Arbeitsproduktivität kann nichts einfach oder billig sein, weil es die Klassenschlacht ist und weil Kapital in Arbeitsproduktivität zu verwandeln das einzige ist, was der Kapitalismus noch bewältigt. Ansonsten kann er keines der sozialen Probleme mehr lösen.

Auch deshalb wurden die Beschlüsse über die gemeinsame Verantwortung der Wissenschaftseinrichtungen und der Kombinate für eine weitgesteckte Grundlagenforschung gefaßt, damit nicht nur die personellen Voraussetzungen sondern auch die materiellen Bedingungen für eine richtig dimensionierte Forschung gesichert werden können.

Wir können morgen nur so produzieren, wie wir heute forschen. Im bevorstehenden Zeitabschnitt sind von der Grundlagenforschung (zu der auch immer die Mathematik gehört) Impulse zu erwarten, die zu Spitzenleistungen in Wissenschaft und Technik führen ... Dem entspricht die *Konzeption zur langfristigen Entwicklung der naturwissenschaftlichen, mathematischen und technischen Grundlagenforschung im Bereich der Akademie der Wissenschaften der DDR und des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen für den Zeitraum 1986 bis 1990 und darüber hinaus bis zum Jahre 2000.*

Die erarbeiteten Kenntnisse über die Rolle der Grundlagenforschung im Sozialismus sind im Rechenschaftsbericht an den XI. Parteitag eingeflossen und zum Beschluß erhoben worden.

Von grundsätzlicher Bedeutung ist, daß dort nichts von der mancherorts noch anzutreffenden Einteilung der Resultate der Grundlagenforschung in brauchbare und unbrauchbare zu finden ist.

Vielmehr ist die Bewertung der Grundlagenforschung gekennzeichnet durch solche Sätze wie:

Die Wissenschaft hat das belebende Feuer zu sein.

Es darf keine Kurzsichtigkeit geben. Nicht sofort verwendbare Ergebnisse sind ein Potential, das an die Reaktionsfähigkeit und Flexibilität der Volkswirtschaft hohe Anforderungen stellt.

Philosophie und Mathematik, also die Wissenschaften über die allgemeinsten Zusammenhänge, bilden in ihrer Polarität Eckpfeiler für die Wissenschaftsentwicklung.

Die lebendige Entwicklung der Wissenschaft Mathematik verläuft unendlich vielfältig verzahnt mit der Entwicklung der anderen Wissenschaften und der Gesellschaft. Auf jeder neuen Entwicklungsetappe der Produktivkräfte werden neue Fragen gestellt, deren Beantwortung immer auch eine neue Mathematik benötigt.

Auf die Woche genau vor 300 Jahren, am 19. Mai 1686 faßte die *Royal Society* in London den Beschluß über die Veröffentlichung von Newtons *Principia*, den Mathematischen Prinzipien der Naturwissenschaft. Fragestellungen, die letztlich zu Newtons Principia und der Schaffung der Differential- und Integralgleichung führten, waren etwa folgende:

- Was ist π für eine Zahl (Quadratur des Kreises)?
- Warum bewegen sich die Planeten nach den Keplerschen Gesetzen (also auf Ellipsen)?
- Warum hängt die Schwingungsdauer des Pendels nur von der Länge ab?

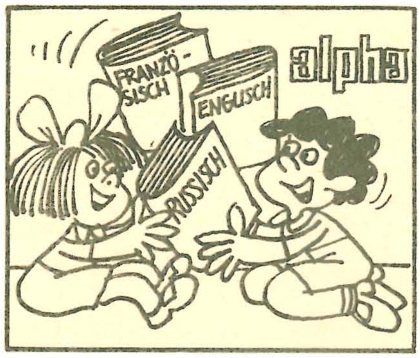
Das Wesen schon drei solcher Fragestellungen reichte in fast alle Gebiete der damaligen Produktivkräfte. Zu ihrer vollständigen Beantwortung benötigte man die neue Mathematik, die Infinitesimalrechnung, die an der Schwelle zum Zeitalter

des Kapitalismus entstand und entstehen mußte.
Im 20. Jahrhundert, an der Schwelle zum Zeitalter des Kommunismus, stellen sich neue mathematische Fragen, aber ebenso verknüpft mit unseren heutigen Produktivkräften und technischen Möglichkeiten:

- Was ist die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante α für eine Zahl?
- Warum hat das Photon als einziges Elementarteilchen die Masse Null?
- Warum zeigen die verschiedensten Gase beim Phasenübergang gasförmig – flüssig das gleiche kritische Verhalten?

Die Beantwortung solcher Fragestellungen erfordert das gesamte Spektrum unserer heutigen Mathematik. Dabei geht es natürlich nicht nur um die bloße Antwort auf solche Fragen, sondern um die Schaffung und Nutzung von Techniken und Technologien, denen solche physikalischen Effekte zugrunde liegen. Die mathematische Fassung der naturwissenschaftlichen Gesetzmäßigkeiten ist dabei im allgemeinen überhaupt erst die Voraussetzung für deren weitgehende praktische Nutzung.
Beispielsweise kann mit der Formulierung *Jedes Energieniveau kann höchstens durch ein Elektron besetzt werden* das Pauli-Prinzip bereits klar umrissen werden. Aber erst die Mathematisierung dieses Prinzips im Rahmen der Quantentheorie durch die nichtkommutative Algebra (Antikommutatorrelationen) ermöglicht den Aufbau der Theorie des Halbleiters mit allen praktischen Anwendungen in der heutigen Schlüsseltechnologie Mikroelektronik.
Die Formulierung der Gesetzmäßigkeiten der Quantentheorie mittels der nichtkommutativen Algebra und Analysis, sowie die Geometrisierung der Physik, die mit der Relativitätstheorie zu Beginn unseres Jahrhunderts eine prinzipiell neue Qualität erreichte und zur heutigen Eichfeldtheorie führte, sind die grundsätzlichsten Züge der mathematischen Naturbeschreibung unserer Zeit. Es ist ein qualitativer Sprung, der nur mit der Schaffung der Infinitesimalrechnung vor 300 Jahren vergleichbar ist. Mit dieser neuen Mathematik kann die Beantwortung solcher Fragestellungen wie die o. g. angegangen werden.
Hinzu kommt ein zweiter Aspekt. Bis zu unserem Jahrhundert erfolgte die Mathematisierung aller Gebiete fast ausschließlich über die Physik, ja man kann sogar sagen über die Mechanik. Solche Gebiete, wie die Kombinatorik, die elementare Wahrscheinlichkeitslehre und Statistik spielten eine Sonderrolle.
Durch die Entwicklung der Kybernetik und Informatik in unserer Zeit und der mathematischen Fassung solcher Begriffe wie Steuerung, Strategie, Information, System, Kompliziertheit, künstliche Intelligenz u. a. hat sich eine dialektische Polarität zwischen der Physik und Mechanik auf der einen Seite sowie Informatik und Kybernetik auf der anderen Seite herausgebildet.
Die ständig voranschreitende Mathematisierung der Natur-, Technik- und Gesellschaftswissenschaften vollzieht sich in dieser Polarität über Problemkreise der Physik und Mechanik einerseits sowie der Informatik und Kybernetik andererseits. Das gilt also auch für die Chemie und Biologie. Dabei ist wohl gegenwärtig bei der Mathematisierung der Biologie – mehr als in jeder anderen Naturwissenschaft – ein besonders starker Einzug mathematischer Theorien und Begriffe über die Informatik und Kybernetik zu beobachten. Dieser hält den molekular-physikalischen Einflüssen, also der Physikalisierung, schon die Waage.
Wir können davon ausgehen, daß die praktische Wirksamkeit der gesamten heutigen Mathematik entlang der beiden Linien Physik – Mechanik und Informatik – Kybernetik verfolgt werden kann und auf diese Weise auch die Weiterentwicklung ihres Begriffs- und Theoriensystem geschieht. Die Mathematik liegt im Spannungsfeld dieser beiden Pole. *G. Laßner*

Die erfolgreiche DDR-Mannschaft, IMO 1986, Warschau, siehe *alpha* 6/86.



▲1▲ An eight-digit integer has the following properties:
(I) The integer is written, in base ten, with two ones, two twos, two threes, and two fours.
(II) The two ones are separated by one integer, the two twos by two integers, the two threes by three integers, and the two fours by four integers.
What is the integer?
aus: mathematical pie, London

▲2▲ Братья Алеша и Боря родились в августе. В школе начинают учиться с семи лет. Номер класса, в котором учится сейчас старший брат Борис, равен возрасту Алеши. В какой класс перейдет Алеша, когда Борис окончит среднюю школу?
aus: Quant, Moskau

▲3▲ Il s'agit de compléter la grille à l'aide des nombres ci-dessous, de sorte que chaque série verticale ou horizontale de 5 nombres totalise 84 points.
5 – 14 – 15 – 16 – 20 – 22 – 27 – 28 – 29
aus: Maximath, Belgien

	3		2	
1		4		6
	11		25	
30		26		9
	12		23	

Rund um den SR 1

Die Speichertasten
$\boxed{\text{MR}}$, $\boxed{\text{X}\to\text{M}}$, $\boxed{\text{M+}}$

Das Tastenfeld des Schulrechners SR 1 enthält im oberen Teil drei rote Tasten, nämlich die Tasten $\boxed{\text{MR}}$, $\boxed{\text{X}\to\text{M}}$, $\boxed{\text{M+}}$. Das „M" deutet auf den Anfangsbuchstaben des englischen Wortes memory (Gedächtnis) hin. Die Buchstabenkombination MR kommt von den englischen Wörtern memory recall (recall – Aufruf). Der Rechner ist, wie wir gleich sehen werden, in der Lage, sich gewisse Zahlen zu merken, ohne die Rechnung zu beeinflussen, und diese gespeicherte Zahl nach Druck auf die Taste $\boxed{\text{MR}}$ wieder in der Anzeige erscheinen zu lassen (d. h., der Speicherinhalt wird in das Eingaberegister X übertragen).

1. Betätige nacheinander folgende Tasten, beobachte die Anzeige und fülle die Leerstellen aus!

5,32 $\boxed{\text{X}\to\text{M}}$ $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{+}$ 3
$\boxed{=}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{+}$ 3 $\boxed{=}$
▼ ▼ ▼
… … …

Nach Betätigung der Taste $\boxed{\text{X}\to\text{M}}$ wird die Zahl der Anzeige (d. h. der Inhalt des Eingaberegisters X) in den Speicher M übertragen. Symbolisch wird das durch X→M auf der Taste zum Ausdruck gebracht. Um den Benutzer des SR 1 darauf hinzuweisen, daß der Speicher belegt ist, erscheint in der Anzeige ein M. Der Speicherinhalt kann nun beliebig oft in die Rechnung einbezogen werden. Auf diese Weise läßt sich z. B. leicht folgende Wertetabelle vervollständigen:

x	$5{,}32 \cdot x + 3$
4	24,28
3	18,96
2,5	
2	
1,5	

Man braucht den Faktor 5,32 nun nicht ständig neu einzutasten.

2. Betätige die Tasten des SR 1 in angegebener Reihenfolge und fülle die Leerstellen aus!

Tastenfolge	Anzeige	Speicherinhalt
$\boxed{2}$	2.	0
$\boxed{\text{X}\to\text{M}}$	M 2.	2
$\boxed{+}$	M 2.	2
$\boxed{3}$		2
$\boxed{\text{X}\to\text{M}}$		
$\boxed{=}$		
$\boxed{+}$		
$\boxed{\text{MR}}$		
$\boxed{=}$		
$\boxed{0}$		
$\boxed{\text{X}\to\text{M}}$		

Wie aus Aufgabe 2. ersichtlich, bleibt der alte Speicherinhalt nur so lange im Speicher, bis er durch einen neuen Zahlenwert ersetzt (man sagt auch „überschrieben") wird.
Um den Speicherinhalt zu löschen, gibt man mit der Taste $\boxed{\text{X}\to\text{M}}$ eine Null in den Speicher. Danach verschwindet auch das M in der Anzeige.

3. Frank erhält die Aufgabe, das Volumen, die Mantelfläche und die Oberfläche eines geraden Kreiszylinders mit dem Radius $r = 0{,}623$ m und der Höhe $h = 2{,}276$ m zu berechnen. Dazu nutzt er seinen SR 1 und tippt den Zahlenwert des Radius nur einmal in den SR 1 ein. Geht das überhaupt?

4. Welcher Term wird durch den jeweiligen Rechenablaufplan ermittelt?

a) 4 $\boxed{\text{X}\to\text{M}}$ $\boxed{\div}$ 3 $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$

b) 4 $\boxed{+}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{X}\to\text{M}}$ 5 $\boxed{-}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$

c) 4 $\boxed{+}$ 3 $\boxed{\text{X}\to\text{M}}$ $\boxed{=}$ 5 $\boxed{-}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$

d) a $\boxed{\text{X}\to\text{M}}$ $\boxed{\times}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$

e) 0,5 $\boxed{\text{X}\to\text{M}}$ a $\boxed{+}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$
$(a + b > 0)$

f) a $\boxed{-}$ b $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{X}\to\text{M}}$ c $\boxed{+}$ d $\boxed{=}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$
$(b \geqq 0)$

Anja und Ines sollen den Wert des Terms
$(27{,}759 + 4{,}732 - 39{,}717)$
$\times (7{,}274 - 0{,}739 + 1{,}983)$
mit dem SR 1 ermitteln.
Ines wählt folgenden Weg:

(1) 27,759 $\boxed{+}$ 4,732 $\boxed{-}$ 39,717 $\boxed{=}$
▼
−7.226

(2) 7,274 $\boxed{-}$ 0,739 $\boxed{+}$ 1,983
$\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ 7,226 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$
▼
−61,551 068

Anja nutzt den Speicher und rechnet nach folgendem Rechenablaufplan:

27,759 $\boxed{+}$ 4,732 $\boxed{-}$ 39,717
$\boxed{=}$ $\boxed{\text{X}\to\text{M}}$ 7,274 $\boxed{-}$ 0,739 $\boxed{+}$ 1,983
$\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$

Als Resultat erhält auch Anja den Wert −61,551 068. Beide Wege sind möglich. Der Weg von Anja ist jedoch rationeller, da sie das Zwischenergebnis nicht notieren und erneut in den SR 1 eingeben muß.

5. Berechne unter Nutzung des Speichers folgende Terme! Gib jeweils einen Rechenablaufplan an!

a) $(3{,}27 + \sqrt{9{,}71}) \cdot (5{,}28^2 - 4{,}81)$

b) $(2{,}2^3 - 4{,}2^2) \cdot (4{,}32^2 - 0{,}87^2)$

c) $\dfrac{4{,}82 - \sqrt[4]{8{,}2}}{2{,}7 - 5{,}8^2}$

d) $\dfrac{4{,}7^2 - 4{,}2}{\sqrt{4{,}7 - 4{,}2}}$

Neben den Tasten $\boxed{\text{MR}}$ und $\boxed{\text{X}\to\text{M}}$ gibt es noch eine weitere Speichertaste $\boxed{\text{M+}}$. Zunächst wollen wir erkunden, was die Taste $\boxed{\text{M+}}$ leistet, indem wir folgenden Rechenablaufplan abarbeiten und die jeweiligen Leerstellen ausfüllen.

5 $\boxed{\text{M+}}$ $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{\text{M+}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\times}$ 3
▼ ▼
20 a

$\boxed{+/-}$ $\boxed{\text{M+}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{MR}}$
▼ ▼
−27 b

Für a erhält man den Wert 9 und für b den Wert 6. Das Zeichen + auf der Taste $\boxed{\text{M+}}$ weist darauf hin, daß es sich um einen „rechnenden" Speicher handelt. Beim Betätigen der Taste $\boxed{\text{M+}}$ wird zum bisherigen Speicherinhalt die Zahl addiert, die sich in der Anzeige (X-Register) des Rechners befindet. Betrachten wir nochmals unser obiges Beispiel: Beim erstmaligen Betätigen der Taste $\boxed{\text{M+}}$ gelangt die Zahl 5 in den Speicher. Nachdem man die Taste $\boxed{\text{M+}}$ erneut betätigt hat, wird zum Speicherinhalt 5 die Zahl 4 addiert. Der Druck auf die Taste $\boxed{\text{MR}}$ zeigt den Speicherinhalt 9 an. Beim erneuten Drücken der Taste $\boxed{\text{M+}}$ nach obigem Rechenablaufplan wird zum Speicherinhalt 9 die Zahl −3 addiert und man erhält als neuen Speicherinhalt 6.

6. Im Speicher des SR 1 sei die Zahl $x_1 = 21{,}73$. Die Anzeige des SR 1 zeigt die Zahl $x_2 = 17{,}321$.
Wie könnte man vorgehen, um den Speicherinhalt so zu verändern, daß in ihm die Zahl $x_1 - x_2$ gespeichert wird?

7. Betätige die Tasten des SR 1 in angegebener Reihenfolge und fülle die Leerstellen aus!

Tastenfolge	Anzeige	Speicherinhalt
$\boxed{2}$	2.	0
$\boxed{+}$	2.	0
$\boxed{3}$	3.	0
$\boxed{=}$	5.	0
$\boxed{\text{M+}}$	M 5.	5
$\boxed{-}$		
$\boxed{7}$		

$\boxed{=}$
$\boxed{M+}$
$\boxed{MR}$
$\boxed{0}$
$\boxed{X\to M}$

Es gibt auch Taschenrechner mit den Tasten $\boxed{M-}$, $\boxed{M\times}$, $\boxed{M\div}$. Mit Hilfe der Taste $\boxed{M-}$ wird vom Inhalt des Speichers die Zahl, die sich in der Anzeige befindet, subtrahiert. Beim Betätigen der Taste $\boxed{M\times}$ (bzw. $\boxed{M\div}$) wird der bisherige Speicherinhalt mit der Zahl in der Anzeige multipliziert (bzw. durch die Zahl in der Anzeige dividiert).

8. Berechne mit dem SR 1!

a) $(13{,}29 + 4{,}27)^2 + \sqrt{4{,}3^2 - 7{,}9} - (8{,}23^2 + 0{,}32)$

b) $\dfrac{2{,}8 \cdot 4{,}9}{3{,}7 \cdot 0{,}3 + 4{,}2 \cdot 0{,}41 - 3{,}9 \cdot 0{,}7}$

c) $\dfrac{7{,}4 + 9{,}3}{(2{,}9 - 7{,}03) \cdot (-7{,}8)^2}$

Oft empfiehlt es sich, die Rechnung mit dem Nenner zu beginnen. Seinen Wert gibt man in den Speicher. Nachdem der Zähler berechnet wurde, dividiert man diesen durch den Speicherinhalt.
Beispiel:
Es sei der Gesamtwiderstand R zweier parallel geschalteter Widerstände R_1 R_2 zu ermitteln.

Es gilt $R = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$

Lösung in Form eines Rechenablaufplanes:

R_1 $\boxed{+}$ R_2 $\boxed{=}$ $\boxed{X\to M}$ R_1 $\boxed{\times}$ R_2
$\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$

Verwendet man zur Berechnung von R die Formel
$\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$,
so kann man auf die Nutzung des Speichers verzichten:
R_1 $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ R_2 $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$.

9. Stelle zur Berechnung folgender Terme einen Rechenablaufplan auf!

a) $(\sqrt{a^3} + a) \cdot (1 - a)$

b) $(a + b) : \sqrt{c + d}$

c) $(a^2 + b) \cdot \dfrac{1}{(a + b)^2}$

10. Welchen Term kann man jeweils mit nachstehenden Rechenablaufplänen berechnen?

a) $\boxed{X\to M}$ $\boxed{\times}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$
$(a \cdot b > 0)$; $(a > 0)$

b) a $\boxed{+}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{M+}$ c $\boxed{+}$ d
$\boxed{=}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{M+}$ e $\boxed{+}$ f $\boxed{x^2}$
$\boxed{=}$ $\boxed{M+}$ $\boxed{MR}$

c) a $\boxed{+}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{X\to M}$ $\boxed{\div}$ 3
$\boxed{=}$ $\boxed{M+}$ $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{M+}$ $\boxed{MR}$

Lösungen

1. 5,32 $\boxed{X\to M}$ $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{+}$ 3
$\boxed{=}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{+}$ 3
▼ ▼
24,28 5,32
$\boxed{=}$
▼
18,96

2.

Tastenfolge	Anzeige	Speicherinhalt
$\boxed{3}$	M 3.	2
$\boxed{X\to M}$	M 3.	3
$\boxed{=}$	M 5.	3
$\boxed{+}$	M 5.	3
$\boxed{MR}$	M 3.	3
$\boxed{=}$	M 8.	3
$\boxed{0}$	M 0.	3
$\boxed{X\to M}$	0.	0

3. Ja!
Hier eine Möglichkeit:
$\boxed{\pi}$ $\boxed{\times}$ 0,623 $\boxed{X\to M}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ 2,276 $\boxed{=}$
▼ V

2 $\boxed{\times}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{\times}$ 2,276
$\boxed{=}$ $\boxed{+}$ 2 $\boxed{\times}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$
▼ M ▼ 0

4.
a) $(4 + 3^2) + 4 = 4 + 3^2 + 4$
b) $(5 - 2) : (4 + 3)$
c) $(5 - 2) \cdot 3$
d) $(a \cdot b + a^2) \cdot a$
e) $\sqrt{a + b}$
f) $(c + d)^2 \cdot (a - \sqrt{b})$

5.
a) 3,27 $\boxed{+}$ 9,71 $\boxed{\sqrt{}}$
$\boxed{=}$ $\boxed{X\to M}$ 5,28 $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 4,81
$\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$
147.31682

b) 2,2 $\boxed{y^x}$ 3 $\boxed{-}$ 4,2 $\boxed{x^2}$
$\boxed{=}$ $\boxed{X\to M}$ 4,32 $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 0,87 $\boxed{x^2}$
$\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$
125.19526

c) 4,82 $\boxed{-}$ 8,2 $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{\sqrt{}}$
$\boxed{=}$ $\boxed{X\to M}$ 2,7 $\boxed{-}$ 5,8 $\boxed{x^2}$
$\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$
1.0109–01

d) 0,5 $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{X\to M}$ 4,7 $\boxed{x^2}$
$\boxed{-}$ 4,2 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$
25.300281

6. Mit Hilfe der Taste $\boxed{+/-}$ bildet man in der Anzeige $-x_2 = -17{,}321$.
Nun betätigt man die Taste $\boxed{M+}$.
Der neue Speicherinhalt ist
$21{,}73 + (-17{,}321) = 4{,}409$.

7.

Tastenfolge	Anzeige	Speicherinhalt
$\boxed{-}$	M 5.	5
$\boxed{7}$	M 7.	5
$\boxed{=}$	M −2.	5
$\boxed{M+}$	M −2.	3
$\boxed{MR}$	M 3.	3
$\boxed{0}$	M 0.	3
$\boxed{X\to M}$	0.	0

8.
a) 243,554 93
b) 134,509 8
c) −0,066 462

9.
a) a $\boxed{y^x}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{+}$ a $\boxed{=}$
$\boxed{X\to M}$ 1 $\boxed{-}$ a $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$

b) c $\boxed{+}$ d $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{X\to M}$ a $\boxed{+}$ b
$\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$

c) a $\boxed{+}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{X\to M}$ a $\boxed{x^2}$
$\boxed{+}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$

10.
a) $(a \cdot b)^a$
b) $(a + b) - (c + d) + (e + f^2)$
c) $(a + b)^2 + \dfrac{(a + b)^2}{3} + \sqrt{\dfrac{(a + b)^2}{3}}$

L. Flade

Kryptarithmetik

Welche Operationszeichen sind für $\ast$ einzusetzen, damit folgende Identitäten erfüllt werden?

$95 \ast 5 = 9 \ast 5 \ast 5$
$63 \ast 3 = 6 \ast 3 \ast 3$
$(2 \ast 7) \ast 2 \ast 16 = 272 \ast 16$
$2^3 \ast 4 = 34 \ast 2$
$2^{8 \ast 1} = 128$
$95 \ast 4^2 = 9 \ast (5 \ast 4) \ast 2$
$4^3 \ast 2 = 34 \ast 2$
$5^{6 \ast 2} = 625$

Dr. W. Schmidt, Greifswald

Das Horner-Schema

Wir berechnen Funktionswerte und Nullstellen von Polynomen mit dem SR 1

Lehrerstudenten der Fachkombination Mathematik/Geographie haben sich an der *Ernst-Moritz-Arndt*-Universität Greifswald im Rahmen eines Jugendobjekts mit Anwendungsmöglichkeiten von Taschenrechnern in der Schule beschäftigt. Dem zusammengestellten Material entstammt dieser Beitrag, er wurde für den Schulrechner SR 1 aktualisiert.

Gefragt sei nach dem Wert des Polynoms
$p(x) = 4{,}57x^4 + 3{,}27x^3 - 2{,}28x^2 + 1{,}8x - 2{,}3$
an der Stelle $x = 2{,}53$.
Zu berechnen ist also
$p(2{,}53) = 4{,}57 \cdot (2{,}53)^4 + 3{,}27 \cdot (2{,}53)^3 - 2{,}28 \cdot (2{,}53)^2 + 1{,}8 \cdot 2{,}53 - 2{,}3$.
Mit dem Schulrechner SR 1 könnt ihr diesen Funktionswert schnell ermitteln. Aber in welcher Reihenfolge soll man die Rechenoperationen ausführen? Wer sich die Aufgabe nicht sehr gründlich ansieht, könnte vielleicht folgenden Rechenweg beschreiten, der auf dem SR 1 durch die Tastenfolge

$\boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{5}\ \boxed{3}\ \boxed{y^x}\ \boxed{4}\ \boxed{\times}\ \boxed{4}\ \boxed{,}$
$\boxed{5}\ \boxed{7}$
$\boxed{=}\ \boxed{X\to M}\ \boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{5}\ \boxed{3}$
$\boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{3}\ \boxed{,}\ \boxed{2}\ \boxed{7}$
$\boxed{=}\ \boxed{M+}\ \boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{5}\ \boxed{3}\ \boxed{y^x}\ \boxed{2}$
$\boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{2}\ \boxed{8}\ \boxed{=}\ \boxed{+/-}\ \boxed{M+}$
$\boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{5}\ \boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{,}\ \boxed{8}\ \boxed{=}$
$\boxed{M+}\ \boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{3}\ \boxed{+/-}\ \boxed{M+}\ \boxed{MR}$

gekennzeichnet ist.
Auf dem SR 1 werden dabei nacheinander angezeigt:

2.53	2.
4.	6.4009
40.9715	2.28
4.57	14.594052
187.23976	−14.594052
2.53	2.53
3.	1.8
16.1943	4.554
3.27	2.3
52.955361	−2.3
2.53	227.85506

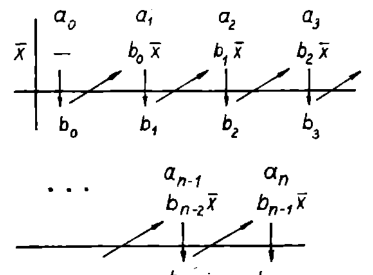
Das Ergebnis ist $p(2{,}53) = 227{,}85506$.
Weil die Funktionstaste $\boxed{y^x}$ benutzt wurde, sind die Zahlen $(2{,}53)^4$, $(2{,}53)^3$, $(2{,}53)^2$ umständlich (im SR 1 mit Hilfe der Logarithmusfunktion) und nur näherungsweise berechnet worden. Daher ist unser Vorgehen nicht sehr günstig. Etwas besser wäre es, die Zahlen
$A = (2{,}53)^2$, $B = (2{,}53)^3 = A \cdot 2{,}53$,
$C = (2{,}53)^4 = B \cdot 2{,}53$
zu berechnen und zu notieren, dabei kann man den Speicher des SR 1 gut einsetzen. Nun können die Werte A, B, C benutzt werden, um $p(2{,}53)$ als Summe von Produkten zu erhalten. Bei einem derartigen Vorgehen sind sieben Multiplikationen und vier Additionen durchzuführen. Umständlich ist vor allem das wiederholte Eingeben (und Aufschreiben) von Zahlen. Wir finden
$A = 6{,}4009$; $B = 16{,}194277$;
$C = 40{,}971521$ und $p(2{,}53) = 227{,}85508$.
Nun wollen wir die Rechnung so organisieren:
$p(x) = \left(((4{,}57x + 3{,}27)x - 2{,}28)x + 1{,}8\right)x - 2{,}3$.
Für unser Zahlenbeispiel mit $x = 2{,}53$ ist beim SR 1 die Tastenfolge

$\boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{5}\ \boxed{3}\ \boxed{X\to M}\ \boxed{\times}$
$\boxed{4}\ \boxed{,}\ \boxed{5}\ \boxed{7}$
$\boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{,}\ \boxed{2}\ \boxed{7}$
$\boxed{=}\ \boxed{\times}\ \boxed{MR}$
$\boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{2}\ \boxed{8}\ \boxed{=}\ \boxed{\times}\ \boxed{MR}$
$\boxed{+}\ \boxed{1}\ \boxed{,}\ \boxed{8}$
$\boxed{=}\ \boxed{\times}\ \boxed{MR}\ \boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$

zu betätigen.
Wir beobachten im Anzeigefenster

2.53	35.245213
4.57	2.53
11.5621	89.170389
3.27	1.8
14.8321	90.970389
2.53	2.53
37.525213	230.15508
2.28	227.85508

und finden wieder $p = 227{,}85508$. Bei diesem Rechenablauf sind aber nur vier Multiplikationen und vier Additionen notwendig. Hat das Polynom die allgemeine Form
$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$
mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$, so kann es in der Form
$p(x) = \left(\ldots((a_0x + a_1)x + a_2)x + a_3\right)\ldots + a_{n-1})x + a_n$
geschrieben werden. Rechnet man ohne Schulrechner, so ist es günstig, sich die Zwischenergebnisse in folgendem Schema zu notieren:



Dabei ist $b_0 = a_0$ und $b_j = b_{j-1}\bar{x} + a_j$ für $j = 1, \ldots, n$.
Offenbar gilt $p(\bar{x}) = b_n$. Dieses Schema wird *Horner-Schema* genannt. (William George Horner, 1768 bis 1837; das Schema soll aber schon Euler bekannt gewesen sein.)
Für das Polynom
$q(x) = b_0x^{n-1} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$ ist
$q(x) \cdot (x - \bar{x})$
$= (b_0x^{n-1} + \ldots + b_{n-1})(x - \bar{x})$
$= b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x - b_0\bar{x}x^{n-1} - \ldots - b_{n-2}\bar{x}x - b_{n-1}\bar{x}$
$= b_0x^n + (b_1 - b_0\bar{x})x^{n-1} + \ldots + (b_{n-1} - b_{n-2}\bar{x})x - b_{n-1}\bar{x}$
$= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n - b_{n-1}\bar{x} - a_n$
$= p(x) - b_n = p(x) - p(\bar{x})$.
Mithin gilt
$p(x) = q(x) \cdot (x - \bar{x}) + p(\bar{x})$.
Mit dem Horner-Schema kann also das Abspalten eines Linearfaktors (hier: $(x - \bar{x})$) realisiert werden. Für Schüler höherer Klassen sei bemerkt, daß die Beziehung $p'(\bar{x}) = q(\bar{x})$ besteht. Somit können die Werte der Ableitungen eines Polynoms durch wiederholtes Anwenden des Horner-Schemas gewonnen werden. Man spricht dann vom *vollständigen Horner-Schema*. Für die Berechnung eines Polynomwertes geben wir einen prinzipiellen Ablaufplan an:
1. Notiere auf einem Blatt Papier den Hilfswert $i = 0$!
2. Eingabe der Zahl $\bar{x}$ in den SR 1;
3. Taste $\boxed{X\to M}$ betätigen;
4. Eingabe des Koeffizienten a_i in den SR 1;
5. Prüfe, ob $i = n$ ist! Wenn ja, lies $p(\bar{x})$ am SR 1 ab! Stop. Wenn nicht, addiere zu dem *alten* Wert i eine 1 und notiere diese Zahl anstelle von i ($i = i + 1$)!
6. Tasten $\boxed{\times}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{+}$ auf dem SR 1 betätigen!
7. Mache weiter bei 4!

Wir zählen die durchzuführenden Rechenoperationen für die Bestimmung des Funktionswertes eines Polynoms n-ten Grades nach dem Horner-Schema: Erforderlich sind n Multiplikationen und n Additionen. Daher ist dieser Rechenweg besonders für Polynome höheren Grades sehr effektiv.
Wir wollen jetzt Nullstellen von Polynomen bestimmen, d. h., wir suchen eine Zahl $\bar{x}$ (oder mehrere Zahlen), so daß $p(\bar{x}) = 0$ ist. Es werde vorausgesetzt, daß wir zwei Zahlen x_l und x_r mit $x_l < x_r$ und $p(x_l) \cdot p(x_r) < 0$ kennen.
Das Polynom p habe also bei x_l und x_r Funktionswerte unterschiedlichen Vorzeichens. Man kann beweisen, daß es dann eine Zahl $\bar{x}$ zwischen x_l und x_r gibt, die eine Nullstelle des Polynoms p ist. Das wollen wir ausnutzen und durch fortlaufende Intervallhalbierung versuchen, eine Nullstelle in ein vorgegeben kleines Intervall *einzufangen*. (Manche nennen dieses Verfahren auch *Löwenfangmethode*!) Wir wollen folgendermaßen vorgehen:
1. Gegeben seien x_l und x_r mit $x_l < x_r$ und $p(x_l) \cdot p(x_r) \leqq 0$.
2. Falls $p(x_l) = 0$ oder $p(x_r) = 0$ ist, haben wir eine Nullstelle und sind fertig.
3. Andernfalls bilde $x_m = \frac{1}{2}(x_l + x_r)$!

4. Sollte $p(x_m) = 0$ sein, stoppe, dann ist x_m eine Nullstelle! Wenn $p(x_l) \cdot p(x_m) < 0$ ist, setze $x_r = x_m$, im anderen Fall setze $x_l = x_m$!
5. Rechne mit den neuen Zahlen x_l und x_r bei 3. weiter!

Um nicht *ewig* rechnen zu müssen, sollte man noch testen, ob eine vorgegebene Genauigkeit bereits erreicht ist. Dazu kann man z. B. untersuchen, ob $x_r - x_l$ kleiner als die gewählte Genauigkeitsschranke ist.
Bei diesem Verfahren sind immer wieder die Werte des Polynoms an den Stellen x_l und x_r bzw. an den Stellen x_m zu berechnen. Das kann günstig mit dem SR 1 nach dem Horner-Schema geschehen. Als Beispiel betrachten wir das Polynom
$p(x) = 3x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.
Es ist leicht zu sehen,
daß $p(0) < 0$ und $p(1) > 0$ ist.
Wir finden

x_l	$p(x_l)$	x_r	$p(x_r)$
0	−1	1	1
0,5	−0,375	1	1
0,5	−0,375	0,75	0,078125
0,625	−0,18945	0,75	0,078125
0,6875	−0,068115	0,75	0,078125
0,6875	−0,068115	0,71875	0,0016174
0,703125	−0,034061	0,71875	0,0016174
0,7109375	−0,016429	0,71875	0,0016174
0,7184	−0,0074583	0,71875	0,0016174
0,7167969	−0,0029335	0,71875	0,0016174
0,71777	−0,0006694	0,71875	0,0016174
0,71777	−0,0006694	0,71826	0,00047318

0,718 ist der auf drei Stellen gerundete Wert der Nullstelle des Polynoms zwischen 0 und 1. Zeichnet die berechneten Näherungen in das Intervall [0, 1] ein, wählt dazu einen großen Maßstab! Ihr erkennt, daß sich die Punkte x_m nur langsam einer Nullstelle nähern. Es sind deshalb günstigere Verfahren ersonnen worden, bei denen der Rechenvorgang nicht so oft wiederholt werden muß.

W. Schmidt

„... und dann paß schön auf!"

Klappoth

HEXAHEX – ein geometrisches Puzzle

Wer von euch puzzelte nicht gern, denn erst die rechte Kombination von Farbe und Form, Geduld und Geschick, Teil und Ganzem führt zum Ziel.
Wie wär's, erfinden wir doch gemeinsam ein geometrisches Puzzle:
Zeichne einen Kreis und darin einen Durchmesser. Trage den Radius von den Endpunkten des Durchmessers auf dem Kreis ab. Ohne HEXerei sind die Eckpunkte eines Sechsecks entstanden, noch dazu eines regulären (regelmäßigen). Diese Konstruktionen haben sicher schon mesopotamische Mathematiker vor über dreieinhalbtausend Jahren gekannt, und sie leiteten daraus eine erste, große Näherung für $\pi = 3$ ab. Verschiedene Darstellungen, z. B. von Jagdwagen, zeigen Räder mit sechs Speichen.
Das Sechseck, das man griechisch HEXAgramm nennt, wollen wir nun in möglichst einfache Teile zerlegen. Dazu zeichnen wir diejenigen Diagonalen und Verbindungsstrecken der Seitenmitten, die parallel zu Sechseckseiten verlaufen. Die entstandenen 24 gleichseitigen Dreiecke wollen wir Elementardreiecke nennen und ihnen den Flächeninhalt 1 zuordnen. Entlang ihrer Seiten wird uns eine interessante Zerlegung einfallen. Wer Spaß an Zahlenspielereien hat, ahnt, was wir tun sollten:
Sechs HEXAHEX-Teile entstehen, darunter natürlich ein Sechseck – vom Flächeninhalt 6, zwei Trapeze mit den Flächeninhalten 5 und 3 und zwei Parallelogramme (4 und 2). Bleiben noch vier Flächeneinheiten übrig; ein Dreieck beschließt den Figurenreigen.

Nun rasch ans Zerlegen! Zeichenkarton und ein Kreis mit $r = 6$ cm sind empfehlenswert. Aber erst überlegen, dann schneiden!

▲1▲ Legt diese Figuren nach (Bild 1 und 2)!

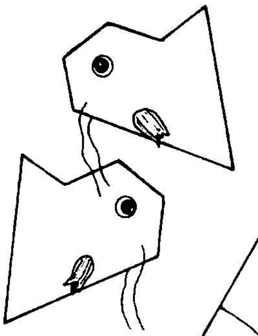


Bild 1a

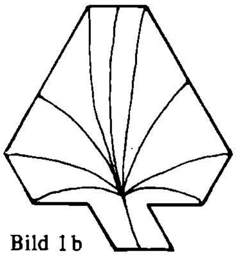


Bild 1b

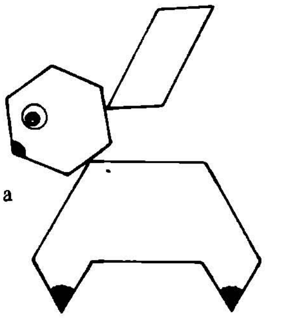


Bild 2a

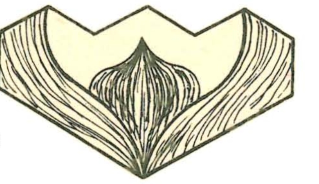


Bild 2b

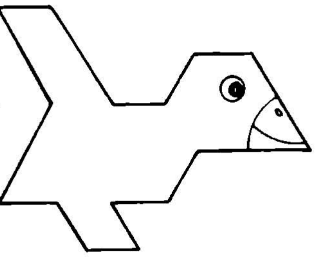
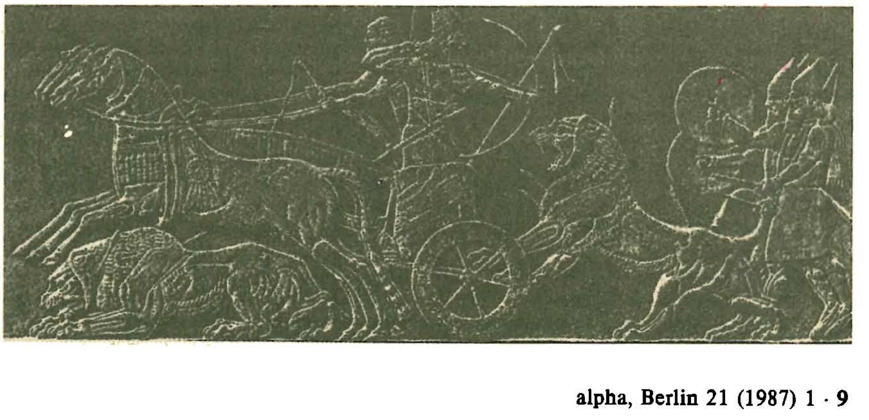


Bild 2c

Assyrischer Herrscher auf der Löwenjagd (9. Jh. v. u. Z.)



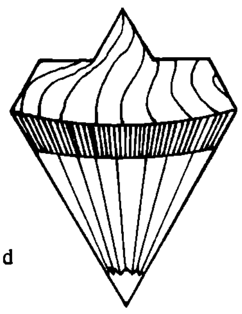
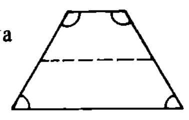


Bild 2 d

Wenn eure Puzzle-Leidenschaft etwas nachläßt und ihr euch anhand der lustigen Figuren mit allen Teilen vertraut gemacht habt, wollen wir ein ernsthaftes mathematisches Problem lösen. Wieviel und welche *konvexe Figuren* können mit unseren sechs Teilen gelegt werden?
Ein konvexes Vieleck hat nur Innenwinkel, die kleiner als 180° sind. Zur Verdeutlichung legen wir die beiden Trapeze aneinander.
Oben ist eine konvexe Figur entstanden, die untere ist nicht konvex, weil ein Innenwinkel größer als 180° ist.

Bild 3 a



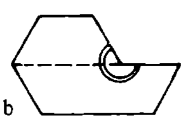


Bild 3 b

Findet ihr noch eine weitere, aus den beiden Trapezen bestehende, konvexe Figur?
Doch zurück zu allen sechs Teilen. Sicher habt ihr schon festgestellt, daß unser Ausgangssechseck zu den konvexen Figuren gehört. Wie aber können wir *alle* finden? Selbst wenn uns nach Stunden emsiger Puzzelei gar keine Figuren mehr gelingen, müssen wir nicht jede mögliche gefunden haben.
Deshalb wollen wir einen systematischen Weg beschreiten, der einem Vorschlag chinesischer Mathematiker aus dem Jahr 1940 folgt. Betrachten wir dazu als erstes die Außenwinkel möglicher konvexer Figuren. Wegen der gleichseitigen Elementardreiecke können nur Innenwinkel von 60° und 120° auftreten. Die folgende Gleichung gibt uns direkt an, welche dieser Winkel in verschiedenen Vielecken vorkommen können. Dazu müssen wir nur wissen, daß die Winkelsumme in einem Dreieck 180°, in einem Viereck $2 \cdot 180°$, in einem Fünfeck $3 \cdot 180°$ und allgemein in einem n-Eck $(n-2) \cdot 180°$ beträgt, was wir uns mit Hilfe von Zerlegungen in Dreiecke klarmachen können.
Wenn a die Anzahl der 60°-Innenwinkel ist, dann ist $(n-a)$ die Anzahl der 120°-Innenwinkel.

$$a \cdot 60° + (n-a) \cdot 120°$$
$$= (n-2) \cdot 180° : 60°$$
$$a + 2(n-a) = 3(n-2)$$
$$6 = n + a.$$

Wie wir nun ablesen, kann die Eckenzahl n höchstens sechs sein ($a \geqq 0$). In diesem Fall ist $a = 0$ und die Sechsecke haben also sechs Innenwinkel von 120°. Analog schließen wir: Die Lösungsfünfecke haben vier, die Vierecke zwei und die Dreiecke keine Innenwinkel von 120°.
Wenn wir uns solche Figuren aufzeichnen, fällt vielleicht auf: Jede läßt sich in ein Parallelogramm mit zwei 60°- und zwei 120°-Innenwinkeln so einbeschreiben, daß mindestens zwei ihrer Seiten auf Parallelogrammseiten liegen.
Zwei Beispiele dafür:

Bild 4 a

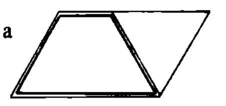
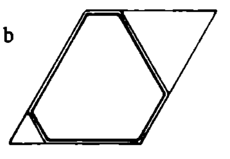


Bild 4 b



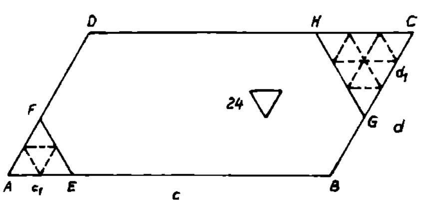
Für den Flächeninhalt dieser Parallelogramme $ABCD$, die wir uns wiederum aus Elementardreiecken vom Flächeninhalt 1 zusammengesetzt denken können, gilt

$$A = 2 \cdot c \cdot d,$$

wobei c und d die Anzahl der Dreiecke auf $\overline{AB}$ bzw. $\overline{BC}$ ist. Diese Fläche setzt sich zusammen aus der untersuchten Figur (Flächeninhalt $A_F = 24$) und höchstens zwei gleichseitigen Dreiecken AEF und CHG:

$$a = A_F + A_{AEF} + A_{CHG}$$
$$2 \cdot c \cdot d = 24 + c_1^2 + d_1^2.$$

Bild 5



Dabei gelten die Ungleichungen $c \leqq c$, $c_1 \leqq d$, $d_1 \leqq c$ und $d_1 \leqq d$. Außerdem wollen wir noch o. B. d. A. $c \leqq d$ sowie $c_1 \leqq d_1$ setzen und beachten, daß c und d größer gleich zwei sein müssen, da sonst z. B. das dreieckige Teil nicht passen würde (*). Nun können wir die *Diophantische Gleichung* mit Nebenbedingungen systematisch lösen:

d	c	c_1	d_1	
2	6	0	0	(1)
2	7	2	0	(2)
2	8	2	2	(3)
3	4	0	0	(4)
3	7	3	3	(5)
4	4	2	2	(6)
4	5	4	0	(7)
4	7	4	4	(8)
5	5	5	1	(9)
6	8	6	6	(10)
7	7	7	5	(11)
12	13	12	12	(12)

Die Bilder 6a und 6b veranschaulichen zwei der errechneten Lösungen.
Beim Kontrollieren der rechnerischen Lösungen müssen wir leider feststellen, daß einige auf dieselben Figuren führen. (Das zu verhindern hätte die Zahl unserer Bedingungen weiter erhöht.) So ist das bei (9) entstehende Trapez kongruent zu demjenigen bei (7). Die rechnerische Lösung (12) widerspricht der Bedingung (*).

Bild 6 a

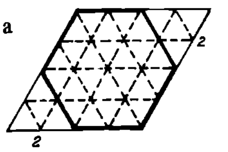
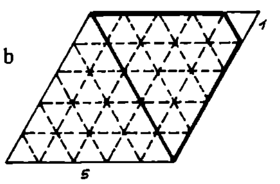


Bild 6 b



▲2▲ Prüfe, ob jede der fünf unterschiedlichen Figuren (1/3/10), (4/5/8), (2/11), (7/9) und (6) mit unseren HEXAHEX-Teilen gelegt werden kann! (Beachte, daß die rechnerische Lösung nur eine notwendige, nicht aber eine hinreichende Bedingung für eine Puzzle-Lösung ist, denn wir haben in die Rechnung die Form der Einzelteile nicht einbezogen!)
Sind alle fünf Figuren ausgelegt, ist unsere eingangs gestellte Aufgabe *vollständig* gelöst. Wir könnten beweisen, daß die *Diophantische Gleichung* keine weiteren Lösungen besitzt. Also gibt es auch keine weiteren konvexen HEXAHEX-Vielecke.

▲3▲ Carsten hat das sechseckige Teil verloren. Welche konvexen Figuren kann er mit dem Rest legen?

▲4▲ Welches Teil muß fortgelassen werden, um ein (konvexes) Fünfeck zu ermöglichen?

▲5▲ Ebenso kann man ein Teil gewissermaßen verdoppeln. Auf diese Weise entstehen Loch-Hexas. Puzzle symmetrische, konvexe Figuren, die ein Loch in Form des sechseckigen oder dreieckigen Teils haben!

▲6▲ Bilde weitere lustige Figuren aus allen sechs Teilen und schicke sie an die *alpha*!

Ch. Werge

Eine harte Nuß

Welchen Bedingungen müssen drei Zahlen x, y und z genügen, damit sich folgende Summe bilden läßt:

$$x^2 + y^2 = z^3?$$

Ing. A. Körner, Leipzig

Im Mönchguter Heimatmuseum entdeckt

Wer in seinem Urlaub auf die Insel Rügen fährt, wird vielleicht auch das *Mönchguter Heimatmuseum* in Göhren besuchen. Man kann dort sehr Interessantes über das Leben der Bewohner der Halbinsel Mönchgut erfahren. Mit Exponaten und Texttafeln wird der Besucher aber auch darauf hingewiesen, daß sich zwei Mathematiker bei der Erforschung, Vermessung und kartografischen Darstellung der Insel Rügen und der kleineren Nachbarinseln (Hiddensee, Vilm) sehr verdient gemacht haben: *E. Lubinus* (1565 bis 1621) und *F. v. Hagenow* (1797 bis 1865). Beide Wissenschaftler sind heute kaum noch bekannt. Die erwähnten Landkarten, die sie durch Anwendung mathematischer Methoden schufen, sind jedoch wertvolle Zeitdokumente, aus denen die Geographen ablesen können, wie sich die Gestalt der Inseln Rügen und Hiddensee in einem längeren Zeitabschnitt verändert hat.

Aus dem Leben der beiden Mathematiker gibt es einiges zu berichten, was uns heute ungewöhnlich erscheint:

Eilhardus Lubinus (in deutscher Form: *Eiland Lubin*) wurde am 24. 3. 1565 in Westerstade (Oldenburg) geboren. Er studierte von 1588 bis 1594 an sieben Universitäten, nämlich in Leipzig, Köln, Helmstedt, Straßburg, Jena, Marburg und Rostock. 1595 wurde *Lubinus* Professor für Dichtkunst in Rostock! Im Jahre 1605 erhielt er in Rostock die Professur für Theologie und Mathematik, gleichzeitig wurde er zum Consistorialassessor ernannt. Zu seiner Zeit rühmt man ihn als *einen Gelehrten, Dichter und ausgezeichneten Mathematiker, der Disputen sehr zugetan, in der Forschung streng, im freien Vortrag sicher und beim Beurteilen scharf war, der unerschrocken für die Wahrheit eintrat.* Er starb am 2. 6. 1621 in Rostock. In der Sammlung historischer Karten, die 1981 von der *Ernst-Moritz-Arndt*-Universität Greifswald herausgegeben wurden, sind drei Karten von *E. Lubinus* enthalten (siehe Bild).

Friedrich von Hagenow lebte ca. 200 Jahre später: er wurde am 19. 1. 1797 in Langenfelde bei Loitz geboren. Bereits 1809 bis 1812 lernte er angewandte Mathematik und Technologie in Greifswald. Danach arbeitete er auf dem Justizamt Dargun, war er Freiwilliger bei den Gardeschützen und wirkte er auf einem Pachtgut auf der Insel Rügen. 1823 kehrte er nach Loitz zurück. *F. v. Hagenow* beschäftigte sich mit Altertumskunde und konstruierte Maschinen und Instrumente für die Universität Greifswald. In dieser Zeit fertigte er nach trigonometrischen Vermessungen Spezialkarten von Rügen und Vorpommern an.

1830 promovierte v. Hagenow und siedelte nach Greifswald über, wo er die erste Kreideschlemmfabrik Deutschlands eröffnete. An der Landwirtschaftlichen Akademie in Eldena, eine der Universität Greifswald angegliederte, aber relativ selbständige Einrichtung, hielt *F. v. Hagenow* als Dozent von 1835 bis 1838 Vorlesungen zur angewandten Mathematik. Nachdem er seine Fabrik verkauft hatte, beschäftigte er sich als nicht unvermögender Privatgelehrter vorwiegend mit Geologie und Paläontologie. Er war auch literarisch tätig. Erwähnenswert ist sein Briefwechsel mit *A. v. Humboldt*.

Uta und Werner Schmidt

quaestio mathematica historica

Vor 270 Jahren: Das erste Mathematiklexikon in deutscher Sprache

Im Jahre 1716 wurde in Leipzig das erste *Mathematiklexikon in deutscher Sprache* gedruckt. Der Verfasser war *Christian Wolff*, Mathematikprofessor in Halle und führender Gelehrter der Aufklärungsbewegung des 18. Jahrhunderts. Über seine Absicht beim Abfassen des Wörterbuches sagt er selbst im Vorwort:

... Ich habe bey mir von Jugend auf eine unersättliche Begierde die Wahrheit gewiß zu erkennen und anderen zu dienen gefunden ... Dabei erwachte bey mir die Liebe zur Mathematick und sonderlich eine Lust zur Algebra, um zu sehen, was doch die Ursache sey, warum man in der Mathematick so große Gewißheit habe und nach was vor Regeln man daselbst denke, wenn man verborgene Wahrheiten zum Vorschein bringen will; damit ich mich desto sicherer bemühen möchte auch außerhalb der Mathematick dergleichen Gewißheit zu suchen ... So bin ich empfindlich genug überführet worden, daß es ohne die Mathematick in unserem Verstande nicht recht helle werden könne ... Da man von mir begehret, daß ich ein mathematisches Lexicon verfertigen möchte, so habe ich mich dieser verdrießlichen Arbeit, als die mehr Mühe als Verstand erfordert, nicht entziehen wollen, weil ich verspüret, es könne auch dadurch ein vielleicht nicht geringes zur Aufnahme der Mathematick beygetragen werden ...

Halle, dem 1. Maij 1716

Das Unternehmen konnte nur gelingen, weil das Lexikon in deutscher Sprache abgefaßt war. Der Erfolg stellte sich dann auch ein, denn in schneller Folge kamen weitere Auflagen auf den Markt, wie bei allen Büchern von Christian Wolff, die er bis zu seiner Vertreibung aus Halle durch den Preußischen König 1723 geschrieben hat.

Das Titelblatt dieser *alpha* zeigt einen Kupferstich aus dem zweiten Teil des Mathematiklexikons aus dem Jahre 1742.

Mathematikfachlehrer *W. Träger*, Döbeln, stellte drei Bände des Lexikons zur Verfügung, herzlichen Dank dafür.

Aber gab es nun vorher keine mathematischen Wörterbücher?

Doch, es gab sie, aber nicht in deutsch. Die ersten sind schon über 300 Jahre alt. 1668 gab der italienische Mönch *Geronimo Vitale* ein solches in lateinisch in Paris heraus. Wenige Jahre später kam 1680 ein englisches Lexikon von *Joseph Moxon* auf den Markt mit einer 2. Auflage 1692. In Paris folgte dann 1690 ein französisches Lexikon von *Jaques Ozanam*, das schon ein Jahr später in Holland nachgedruckt wurde. Zehn Jahre nach dem Druck aus Leipzig gab es dann noch eine englische Ausgabe von *Edmund Stone*, Mitglied der *Royal Society* in London.

Um nun unseren Lesern einen Eindruck von Inhalt und Form der Leipziger Ausgabe mit insgesamt 1548 Seiten zu geben, haben wir zwei fundamentale mathematische Begriffe original herausgegriffen: Algebra und Arithmetica. Danach wollen wir sehen, was Christian Wolff unter einer Kubikzahl und unter Mathematik verstanden hat.

J. Buhrow/J. Lehmann

Mathematisches Lexicon
darinnen die in allen Theilen der Mathematick üblichen Kunstwörter erklärt und zur Historie der mathematischen Wissenschaften dienliche Nachrichten ertheilt, Auff Begehren heraus gegeben von Christian Wolffen, Leipzig 1716

Algebra,
Ist eine Wissenschafft die Auffgaben in der Mathematick durch Gleichungen aufzulösen. Unter den Alten hat *Diophantus* Exempel aus der Rechen-Kunst oder von Zahlen durch dieselbe gerechnet; aber keine Regeln dazu gesetzet; ...

Algebra numerosa, die gemeine oder alte Algebra, oder die Algebra in Zahlen,
Ist diejenige in welcher man mit Zahlen rechnet. Diese allein ist den Alten bekandt gewesen, daher man sie auch die alte nennet. Sie war Anfangs bloß eine Regel der Rechen-Kunst, als wie die Regel detri; ...

Algebra philosophica,
Wird von dem berühmten Robert Hooke genennet der Weg die in der Natur verborgene Wahrheiten zu entdecken; ...

Algebra Speciosa, die neuere Algebra,
Ist diejenige, in welcher man mit Buchstaben rechnet. Diese haben wir dem *Vieta* zu dancken: *Harriot* in Engelland und *Cartesius* in Frankreich haben sie in einen besseren Stand gebracht.

Arithmetica die Rechen-Kunst,
Ist die Wissenschaft der Zahlen. Es sind verschiedene Arten derselben, die wir nach einander vornehmen wollen.

Arithmetica binaria sive dyadica, di Rechnung mit Eines und Null
Ist eine Wissenschafft alle Zahlen mit 1 und 0 zu schreiben, und mit diesen beyden Ziffern zu rechnen. Der Herr von Leibniz hat sie zu dem Ende erdacht, damit man dadurch die Gesetze der progressionum desto leichter entdecken und Regeln sie zu nummerin finden kann; ...

Arithmetica calculatoria, die Rechnung auf den Linien,
Ist eine Kunst mit Rechen-Pfennigen zu rechnen. Dieselbe hat A. 1550. Adam Riese in seiner Rechnung nach der Länge auf den Linien und der Feder beschrieben ...

Arithmetica decimalis, die Decimal Rechnung,
Ist eine Art der Rechnung, in der man keine andere Brüche gebrauchet als zehenhundert-tausend-theilige und so weiter. *Johannes Regiomontanus* hat sie zuerst zur Ausrechnung der *Tabularum Sinuum* gebraucht ...

Arithmetica divinatoria, die Wahrsage-Rechen-Kunst,
Ist eine Kunst durch Rechnung verschiedenes zu errathen, als z. E. was einer vor eine Zahl im Sinne hat, wie viel er Geld im Beutel hat, und so weiter.

Arithmetica fluxionum,
Wird von den Engelländern die Differential- und Integral-Rechnung des Herrn von Leibniz genennet ...

Arithmetica infinitorum, die Rechnung des unendlichen,
Ist eine Kunst unendliche Reihen Brüche zu summiren oder auch ihre Verhältnisse gegen andere zu finden. Z. E. man findet, daß $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ und so weiter unendlich fort 1 sey ...

Arithmetica practica, die Rechen-Kunst,
Ist eine Wissenschafft aus einigen gegebenen Zahlen andere zu finden, von denen in Ansehung der gegebenen eine Eigenschafft bekannt gemacht wird, als wenn ich eine Zahl finden soll, die so groß ist wie 6, 3 und 10 zusammengenommen ...

Arithmetica Sexagenaria, oder auch Logistica Sexagenaria, die Sexagesimal-Rechnung,
Ist diejenige, welche lehret, wie man mit sechzigtheiligen Brüchen rechnen soll. Die Alten haben sich sonderlich in der Astronomie ihrer bedienet, und hat sie auch zur Zeit darinnen ihren Nutzen, ob wohl zu wünschen wäre, daß man die Decimal-Rechnung auch in der Astronomie und Chronologie einführete. ...

Arithmetica Speciosa sive literalis, die Buchstaben-Rechen-Kunst,
Ist diejenige, welche an statt der Ziffern sich der Buchstaben im rechnen bedienet. Diese hat Franciscus Vieta zuerst erfunden...

Arithmetica surdorum sive irrationalium, item in comensurabilium, die Irrational-Rechen-Kunst,
Ist diejenige, welche die Rechnung mit Irrational-Zahlen lehret. Ozanam hat dieselbe ausführlich abgehandelt: allein nach der alten Weise. Nachdem der Herr von Leibniz und der Herr Newton gewiesen, wie man die Irrational-Grössen als Rational-Grössen vorstellen kan: so kan man diese Rechen-Kunst über die massen erleichtern...

Arithmetica theoretica vel speculativa, die erwegende Rechen-Kunst oder Zahl-Wissenschafft,
Ist diejenige, welche die Eigenschafften der Zahlen betrachtet. Diese ist aus dem Buche der *Elementorum Euclides* und des *Boethii* Arithmetica zu holen. ...

Arithmetica tetractica, die Tetractische Rechnung,
Ist diejenige Rechen-Kunst, welche nur mit 1, 2, 3 und 0 rechnet. Man zehlet nemlich nur biß 4, als wie wir insgemein biß 10 zehlen. *Weigel*, vor dem Professor Mettheseos zu Jena hat sie erdacht und beschrieben.

Arithmologia,
Bedeutet so viel als Arithmetica.

Arithmeticum Complementum
Wird genennet die Zahl, welche man zu einem Logarithmus hinzu thun muß, damit 100000000 heraus kommet. Z. E. der Logarithmus von 26 ist 1449733, sein Complementum arithmeticum 8 58 502 67.

Mathematica seu Mathesis – die Mathematick

M. ist eine Wissenschaft alles auszumessen, was sich ausmessen läßt. Insgesamt beschreibet man sie per scientiam quantitatum, durch eine Wissenschaft der Größen. ... Da nun alle Dinge sich ausmessen lassen in allem demjenigen, was sie endliches an sich haben, das ist, was sie sind: so ist nichts in der Welt, dabey die Mathematick nicht könnte angebracht werden. Ja, weil man keine genaue Erkentniß haben kann, als wenn man die Eigenschaften der Dinge auszumessen vermögend ist. So bringet uns die Mathematick zu der vervollkommensten Erkentniß aller möglichen Dinge in der Welt. Da nun ferner diese Erkentniß uns geschickt machet, die Kräfte der Natur nach unserem Gefallen zu unserem Nutzen in dem Grade anzuwenden, den wir verlangen. So erlangen wir durch die Mathematick die Herrschaft über die Natur. ... Das Vornehmste, was man an ihr rühmen kann, ist dieses: sie zeiget uns nicht allein, wie weit man durch rechten Gebrauch der Vernunft kommen kann, sondern hilft uns auch, wenn man sie mit Ernst betreibet, zu rechtem Gebrauch derselben. Daher macht sie uns zum Nachdenken geschickt, im Fleiße unermüdet und flößet und unvermerkt die Liebe zu gründlicher Erkenntniß ein.

Unter dem Buchstaben C finden wir bei Wolff eine schöne Anregung für den Leser, indem er sich an zwei Beweisen zur Berechnung von Kubikzahlen versuchen kann. Im Text heißt es:

Cubus seu (oder) numerus cubicus, das ist eine Cubic-Zahl.

Es ist eine Cörper-Zahl, die drey gleiche Seiten hat, das ist, das Product aus der Quadratzahl in die Wurtzel. Wenn man z. E. 9 als Quadrat von 3 durch seine Wurtzel 3 multipliziert, so kommet die Cubic-Zahl 27 heraus. Die Benennung ist aus der Geometrie entnommen, weil man daselbst den Inhalt eines Cubi oder Würffels findet.

Aufgaben

Und nun zwei Aufgaben, zu denen der Leser *den Beweis finden* sollte:

▲1▲ Die Cubic-Zahlen werden in einer beständigen Ordnung durch die bloße Addition der ungeraden Zahlen gefunden, denn wenn man die erste ungerade Zahl 1 nimmet, so hat man die Cubic-Zahl 1. Addiert man die zwey folgenden ungeraden Zahlen 3 und 5, so hat man 8 die Cubic-Zahl von 2. Addiert man die drey folgenden ungeraden Zahlen 7, 9, 11, so bekommt man 27 die Cubic-Zahl von 3, und so fort.

▲2▲ Man kann aber, wenn die Quadratzahlen bereits vorhanden sind, noch bequemer dazu kommen (zu den Cubic-Zahlen), wenn man zu der nächst vorhergehenden Cubic-Zahl das Quadrat der dazugehörigen Wurtzel 3 mal, die nächst vorhergehende Wurtzel 2 mal und die gegenwärtige Wurtzel 1 mal addieret z. E. 99 856 ist die Quadratzahl und 31 554 496 die Cubic-Zahl von 316.

Addieret man:

$$\begin{array}{r} 31\,554\,496 \\ 299\,568 \\ 632 \\ 317 \\ \hline \end{array}$$

so ist 31 855 013 Cubic-Zahl von 317!

Das sollte der alpha-Leser beweisen.

Christopher Hansteen – Pionier der Erforschung des Erdmagnetismus

Die norwegische Post würdigte 1984 den 200. Geburtstag des heute außerhalb Norwegens kaum bekannten Physikers, Mathematikers und Astronomen *Christopher Hansteen* durch die Ausgabe der beiden abgebildeten Briefmarken. Hansteen wurde am 26. 9. 1784 in Christiania (Oslo) geboren. Er studierte in Kopenhagen und wurde dort ein Schüler von *Hans Christian Oerstedt* (1777 bis 1851), der 1820 die magnetische Wirkung des elektrischen Stromes entdeckte und damit ein neues, sich bald stürmisch entwickelndes Gebiet von Physik und Technik begründete. Nach einigen Jahren als Lehrer an der *Gelehrten Schule zu Seeland* wurde Hansteen 1815 Professor für Astronomie und angewandte Mathematik und Direktor der Sternwarte in seiner Heimatstadt, wo er am 11. 4. 1873 starb.

In die Wissenschaftsgeschichte ist Hansteen eingegangen als Pionier der Erforschung des Erdmagnetismus, den er erstmals exakt als gerichtete Größe (Vektor) begriff und demzufolge an jedem Ort durch drei Meßgrößen *Deklination* (Neigung gegen die Nordrichtung), *Inklination* (Neigung gegen die Horizontale) und *Intensität* definierte, während die Seefahrt sich zuvor stets nur mit der Deklination (auch als Mißweisung des Kompaß bezeichnet) beschäftigt hatte. Diese Größen mit hoher Präzision zu messen, warf damals neue physikalisch-technische und auch mathematische Probleme auf. In diesem Zusammenhang trat Hansteen mit Gauß in Verbindung, der wohl hauptsächlich durch Hansteen zu seiner eigenen Beschäftigung mit dem Erdmagnetismus und den sich anschließenden theoretischen Untersuchungen über Vektorfelder inspiriert worden ist. In den Jahren 1828 bis 1830 unternahm Hansteen eine vom norwegischen Staat finanzierte Forschungsreise durch Sibirien, um den Erdmagnetismus rund um den Erdball zu messen. Seine *Reiseerinnerungen an Sibirien* kann man mit etwas Glück noch heute in deutscher Übersetzung (Leipzig 1865) in Bibliotheken aufstöbern. Begleitet wurde er auf dieser Reise von dem deutschen Gelehrten *Georg Adolph Erman* (1806 bis 1877), dem späteren Herausgeber der Zeitschrift *Archiv für wissenschaftliche Kunde von Rußland* (1841 bis 1856), das eine bedeutende Rolle für die Weiterführung der von Euler angebahnten deutsch-russischen wissenschaftlichen Kontakte gespielt hat. Hansteen, der in der Erkenntnis der Notwendigkeit friedlicher internationaler Zusammenarbeit weit fortgeschritten war, hat sich engagiert für die Vereinheitlichung der Maßeinheiten und die Standardisierung der Meßmethoden eingesetzt.

P. Schreiber

Kuriose Identitäten

Man überzeuge sich mit Hilfe des Schulrechners SR 1, ob folgende *kuriose* Identitäten richtig sind:

$\sqrt{64} = 6 + \sqrt{4}$;
$\sqrt{121} = 12 - 1$;
$\sqrt{6724} = 6 + 72 + 4$;
$\sqrt{144} = 14 - \sqrt{4}$;
$\sqrt{324} = (4 + 2) \cdot 3$;
$\sqrt{256} = 2 \cdot 5 + 6$;
$\sqrt{4356} = 4 \cdot 3 \cdot 5 + 6$;
$\sqrt{49} = 4 + \sqrt{9} = -\sqrt{4} + 9$;
$\sqrt{169} = 16 - \sqrt{9} = \sqrt{16} + 9$;
$\sqrt{1936} = -1 + 9 + 36$;
$\sqrt{11881} = 118 - 8 - 1$.

Man überzeuge sich mit Hilfe des Schulrechners SR 1, daß

$\sqrt[3]{5832} = 5 + 8 + 3 + 2$ und
$\sqrt[3]{12167} = 12 + \sqrt{16} + 7$ ist!

Dr. W. Schmidt, Greifswald

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1987

Mathematik

Ma 5 ■ 2750 Von drei Männern mit den Familiennamen Siewert, Müller und Schmidt, die den Beruf eines Drehers, Arztes bzw. Bäckers ausüben und die in Suhl, Weimar bzw. Eberswalde wohnen, ist folgendes bekannt:
(1) Herr Siewert und der Arzt verbringen ihren Urlaub an der Ostsee.
(2) Der Bäcker, der Dreher und Herr Schmidt betreiben aktiven Sport.
(3) Der Dreher wohnt in Weimar.
(4) Herr Siewert ist mit dem Bäcker, der in Eberswalde wohnt, befreundet.
Ordne den Namen den jeweiligen Beruf und Wohnort zu!

Schüler Christian Korner, Berlin

Ma 5 ■ 2751 Der Kraftstoffvorrat einer Tankstelle reicht für 64 Tage, wenn täglich 2400 Liter verkauft werden. Für wie viele Tage würde dieser Vorrat reichen, wenn täglich nur 1600 Liter verkauft werden?

Schüler J. Galuba, Erfurt

Ma 5 ■ 2752 Barbara ist doppelt so alt wie ihre Schwester Ingrid. Barbaras Mutter ist dreimal so alt wie ihre Tochter. Barbaras Vater ist siebenmal so alt wie Ingrid. Die vier Familienmitglieder sind zusammen (in ganzen Zahlen) 96 Jahre alt. Ermittle das Lebensalter jedes dieser Familienmitglieder!

Schülerin Jana Markwardt, Weimar

Ma 5 ■ 2753 Aus einem 1,20 m langen Draht wurde ein Rechteck gebogen, dessen eine Seite doppelt so lang ist wie die andere.
a) Wie lang und breit ist dieses Rechteck?
b) In dieses Rechteck sollen rechteckige Plättchen nebeneinander gelegt werden, die 11 cm lang und 7 cm breit sind. Wie viele solcher Plättchen passen höchstens in dieses Rechteck hinein?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2754 Ein Schüler kauft für seine Wandergruppe Brötchen für 5 Pf und Hörnchen für 8 Pf je Stück, wofür er insgesamt 0,72 M bezahlen muß. Wie viele Schüler gehören zu dieser Wandergruppe, wenn jeder entweder genau ein Brötchen oder genau ein Hörnchen erhält?

Schülerin Nannett König, Klein Krams

Ma 5 ■ 2755 Ein Autobus befördert insgesamt 42 Personen. Es sind doppelt so viele Männer wie Frauen und doppelt so viele Frauen wie Kinder. Wie viele Männer, Frauen bzw. Kinder fahren mit diesem Bus?

Schüler Sebastian Brenn, Brotterode

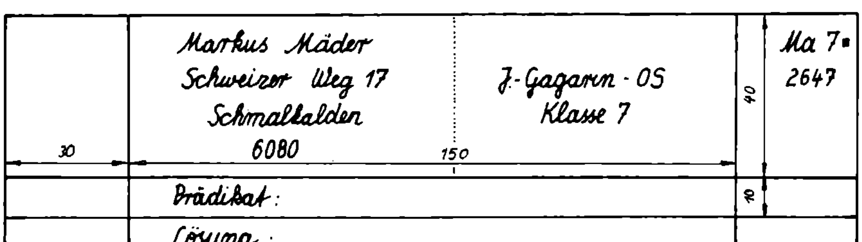
Ma 6 ■ 2756 Beim Kohlehandel wurden früher Briketts mit der Schaufel in Säcke gefüllt und abgewogen. Jeweils 3 Arbeiter schafften so in 8 Stunden 960 Säcke. Eine moderne Maschine füllt und wiegt jetzt in 2 Stunden die gleiche Anzahl Säcke. An der Maschine arbeiten 2 Arbeiter. Wieviel Arbeiter von damals werden jetzt durch einen Arbeiter ersetzt?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2757 Eine Hausgemeinschaft will eine rechteckige Sandkiste für die Kinder bauen. Als Umrandung sollen 84 würfelförmige Steine benutzt werden, die eine Kantenlänge von 20 cm haben. Wie breit wird die Sandfläche, wenn sie eine Länge von 5 m haben soll?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2758 Vier Schüler mit den Nachnamen Erdbach, Freimuth, Giebler und Hausmann haben (in anderer Reihenfolge) die Vornamen Alfred, Bernd, Christian und Detlef. Diese vier Schüler trafen sich auf Siegfried Zanders Geburtstagsfeier. Folgendes ist bekannt:
(1) Als ersten Gast konnte Siegfried seinen Mitschüler Hausmann, als zweiten Christian und danach den Schüler Erdbach begrüßen. Bernd traf als Letzter ein.



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Na/Te (Naturwissenschaft und Technik) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12 oder Na/Te 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1986/87 läuft von Heft 5/1986 bis Heft 2/1987. Zwischen dem 1. und 10. September 1987 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/86 bis 2/87 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/87 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/1986 bis 2/87) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1986/87 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

(2) Jeder dieser vier Gäste brachte für das Geburtstagskind ein Geschenk mit, und zwar Schüler Hausmann ein Würfelspiel, Alfred einen Kugelschreiber, Bernd einen Strauß Rosen und Schüler Giebler ein Buch.
Welche vollständigen Namen haben diese vier Geburtstagsgäste?

Ma 6 ■ 2759. Auf einem Parkplatz waren doppelt so viele Pkw wie Motorräder mit Beiwagen und dreimal so viele Mopeds wie Pkw abgestellt. Diese Kraftfahrzeuge hatten zusammen 322 Räder. Wie viele Pkw, Motorräder mit Beiwagen bzw. Mopeds parkten dort?

Schülerin Heike Engel, Brotterode

Ma 6 ■ 2760 Ein Flugzeug, das mit konstanter Geschwindigkeit von A nach B fliegt, war um 10.05 Uhr noch 2 100 km, um 11.20 Uhr nur noch 600 km von B entfernt.
a) Wieviel Kilometer legt das Flugzeug in der Stunde zurück?
b) Um wieviel Uhr wird es in B landen?

Ma 7 ■ 2761 Auf welche Grundziffer endet die Zahl 12^{100}?

Schüler J. Galuba, Erfurt

Ma 7 ■ 2762 Drei Abraumbagger eines Braunkohlentagebaues bewegen zusammen täglich 36 000 m^3 Abraum. Dabei schafft der zweite Bagger 1 000 m^3 weniger als der dritte, der erste 3 000 m^3 weniger als das Doppelte des zweiten Baggers. Welche Abraummenge wird täglich von jedem der drei Bagger bewegt?

Schüler J. Galuba, Erfurt

Ma 7 ■ 2763 Von einer Familie ist folgendes bekannt: Der Vater ist doppelt so alt wie seine Tochter Claudia. Der Sohn Klaus ist 31 Jahre jünger als seine Mutter. Claudia ist doppelt so alt wie ihr Bruder Klaus. Alle vier zusammen sind 127 Jahre alt. Wie alt ist jedes der vier Familienmitglieder?

Schüler Sven Höhnemann, Bad Frankenhausen

Ma 7 ■ 2764 Multipliziert man eine zweistellige natürliche Zahl, deren Quersumme 9 beträgt, mit 2 und subtrahiert man von diesem Produkt 9, so erhält man als Ergebnis eine weitere zweistellige natürliche Zahl mit der Quersumme 9, aber mit umgekehrter Ziffernfolge. Wie heißen diese beiden Zahlen?

Diplomlandwirt Hartmut Boettcher, Weimar

Ma 8 ■ 2765 Die folgende Behauptung ist zu beweisen: Man erhält das Quadrat einer um 0,5 vermehrten natürlichen Zahl, wenn man das Produkt aus der betreffenden natürlichen Zahl und deren Nachfolger bildet und 0,25 addiert.

Bernd Dethloff, Waren (Müritz)

Ma 8 ■ 2766 Mike, Thomas, Reiko und René haben auf dem Hof Fußball gespielt und eine Fensterscheibe eingeschlagen. Als der Vorfall untersucht wurde, machten die Jungen folgende Aussagen:
Mike: „Das Fenster hat Thomas oder Reiko eingeschlagen."
René: „Reiko hat es getan."
Thomas: „Ich habe das Fenster nicht eingeschlagen."
Reiko: „Ich auch nicht."
Ihr Lehrer, der die Jungen gut kannte, sagte: „Drei von ihnen sprechen immer die Wahrheit."
Wer hat das Fenster eingeschlagen?

Jan Unger, Grobitz

Ma 8 ■ 2767 Weise nach, daß für alle Primzahlen p der Wert des Terms $p^2 + 2$ genau einmal gleich einer Primzahl ist!

Sch.

Ma 8 ■ 2768 Es ist zu beweisen, daß in jedem gleichschenkligen Trapez die Differenz der Quadrate über der Diagonalen und über einer der nichtparallelen Seiten flächengleich dem Rechteck aus den beiden parallelen Seiten ist.

H.-D. Schwabe, Sondershausen

Ma 9 ■ 2769 Wie alt ist Herr Müller und wie alt ist seine Frau (Altersangabe in vollen Jahren), wenn Herr Müller doppelt so alt ist wie seine Frau war, als er so alt war, wie seine Frau heute ist? Herr Müller wird mit seiner Frau zusammen 108 Jahre alt sein, wenn seine Frau so alt sein wird, wie Herr Müller heute ist. *H. Laabs, Berlin*

Ma 9 ■ 2770 Zwei Primzahlen p und $p + 2$ nennt man Primzahlzwillinge.
Beispiel: 11 und 13.
Es ist der folgende Satz zu beweisen:
Wenn zwei Primzahlzwillinge $(p_1, p_1 + 2)$ und $p_2, p_2 + 2)$ die gleichen Endziffern haben, so ist die Differenz $p_2 - p_1$ stets durch 30 teilbar.
Beispiel: (29; 31) und (2999; 3001).

J. Suck, Essen, BRD

Ma 9 ■ 2771 Für welche natürlichen Zahlen a, b, c gilt das folgende Gleichungssystem
(1) $a^3 + b^3 = c^3 + 1$
(2) $b^2 - a^2 = a + b$
(3) $2a^3 - 6a = c^3 - 4a^2$?

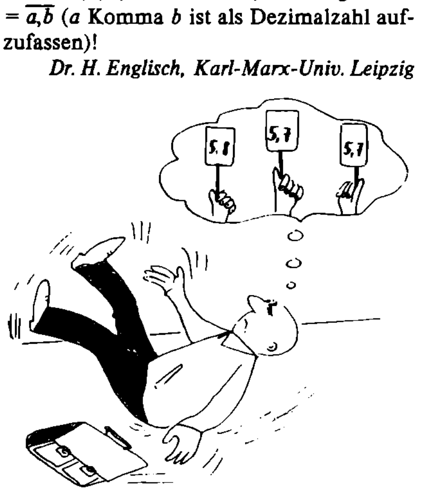
F. Pampel, Zeulenroda

Ma 9 ■ 2772 Es ist nachzuweisen, daß $4^7 > 5^6 > 6^5 > 7^4 > 8^3 > 9^2 > 10^1$ gilt.

Nach Quant, Moskau

Ma 10/12 ■ 2773 Es sind alle geordneten Paare höchstens zweistelliger natürlicher Zahlen $(a; b)$ zu ermitteln, für die gilt $b : a = \overline{a,b}$ (a Komma b ist als Dezimalzahl aufzufassen)!

Dr. H. Englisch, Karl-Marx-Univ. Leipzig



Ma 10/12 ■ 2774 Wie groß ist $\cot 3x$, wenn $-\sin x + \cos x = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}$?
Es sei $x \in P$ und $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Ch. Bittner, Mühlhausen

Ma 10/12 ■ 2775 Welche reellen Zahlen erfüllen die Gleichung
$$\sqrt{2 - x} + \sqrt{x - 3} = 1\,?$$

B. Dethloff, Waren (Müritz)

Ma 10/12 ■ 2776 Es seien h_a, h_b, h_c die Längen der Höhen eines Dreiecks und ϱ die Länge des Radius des Inkreises dieses Dreiecks; dann gilt
$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\varrho}.$$
Diese Aussage ist zu beweisen! *Sch.*

Naturwissenschaft und Technik

Na/Te 6 ■ 380 Fritz und Werner, die in zwei Orten wohnen, die 42 km voneinander entfernt liegen, fahren einander mit dem Fahrrad entgegen. Sie verließen ihre Heimatorte zur gleichen Zeit und treffen sich nach 2 h.
Welche Geschwindigkeit hatte jeder, wenn Fritz mit seinem Rennrad in einer Stunde 3 km mehr zurücklegte als Werner mit seinem Tourenrad? (Die Bewegung sei stets gleichförmig.)

Na/Te 6 ■ 381 In einem Meßgerätewerk konnte durch technische Verbesserungen die Produktion von täglich 40 Geräten auf täglich 60 Geräte erhöht werden. Auf wieviel Prozent stieg die Produktion?

Na/Te 7 ■ 382 Welche Terme kann man jeweils mit folgendem Rechenablaufplan ermitteln?
a) 7 $\boxed{-}$ 3 $\boxed{\times}$ 5 $\boxed{=}$
b) 3 $\boxed{+}$ 4 = $\boxed{\times}$ 6 $\boxed{=}$
c) 6 $\boxed{-}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{=}$

Na/Te 8 ■ 383 Peter schätzt die Länge einer Strecke auf 60 cm.
Die Messung ergibt einen Wert von 57 mm. Berechne den absoluten, relativen und prozentualen Fehler!

Na/Te 8 ■ 384 Es soll der Wandquerschnitt (A_R) eines Gasrohres mit dem Taschenrechner berechnet werden, dessen Außendurchmesser (d_a) und Innendurchmesser (d_i) jeweils durch Messung ermittelt wurden.
$d_a = 13{,}1$; $d_i = 11{,}2$ (Angaben in mm)

Na/Te 9 ■ 385 Ein Flugzeug benötigt für eine 50 km lange Prüfstrecke mit Wind und gegen Wind zusammen eine Flugzeit von 9,5 min. Die Windgeschwindigkeit betrage $8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Berechnen Sie die Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs!

Na/Te 9 ■ 386 Wasser wurde gleichmäßig erhitzt. Es ergaben sich folgende Meßwerte:

Zeit t in min	0	2	3	6	8
Temperatur ϑ in °C	20	35	42,5	65	80

Für die Zahlenwerte x der Zeit t und die Zahlenwerte y der Temperatur ϑ besteht eine Funktion $y = f(x)$.

a) Entscheiden Sie mit der graphischen Darstellung, ob die Funktion linear ist!

b) Geben Sie eine Gleichung für die Funktion an!

c) Welche Temperatur hat das Wasser nach 16 min?

Na/Te 10/12 ■ 387 Stimmgabeln führen harmonische Schwingungen aus. Diese Eigenschaft wird experimentell genutzt, um sehr kurze Zeiten zu messen. Dazu werden die Schwingungen einer Stimmgabel z. B. auf einer berußten Glasplatte aufgezeichnet und die Anzahl der Schwingungen gezählt. In welcher Zeit führt eine Stimmgabel mit der Frequenz $f = 440$ Hz 25 Schwingungen aus?

Na/Te 10/12 ■ 388 Ein Schüler schleudert einen Pendelkörper ($m = 100$ g), der an einem Faden von 1 m Länge befestigt ist, mit der Hand schnell im Kreis herum. Er sieht zunächst nicht ein, warum ihn der Lehrer scharf zurechtweist und ihn leichtsinnig nennt.

a) Berechnen Sie die Kraft, mit der der Pendelfaden gestrafft wird, wenn das Herausschleudern 2mal je Sekunde in horizontaler Ebene geschieht!

b) Mit welcher Kraft wird der Faden bei der Bewegung in einer vertikalen Ebene gespannt?

alpha-Wettbewerb 1985/86

Preisträger

Matthias List, Hans-Joachim Rudolph, beide Altenburg; Veneta Türke, Auerbach; Evelyn Peter, Bad Liebenstein; Michael Henning, Jan Schwate, Marcus Markardt, Ute Partsch, alle Bad Salzungen; Dörte Malzahn, Thomas Nitsche, Frank Wagner, Oliver Maspfuhl, Katja Geißler, alle Berlin; Stephan Schrameier, Blankenfelde; Ingrid und Ulrich Voigt, Böhlen; Heike Engel, Torsten Peter, beide Brotterode; Thomas Reißner, Silvio Löffler, beide Cottbus; Simone Eyning, Dingsleben; Matthias Overmann, Ulf Simon, Leonhard Karsch, alle Dresden; André Kratzert, Dürröhrsdorf; Thomas Gerlach, Erfurt; Katharina Hildebrandt, Jana Reinhardt, beide Fambach; Rüdiger Belch, Freiberg; Nadine Koch, Gehofen; Janett Weise, Gräfenhainichen; Thilo Kuessner, Greifswald; Frank Schneegaß, Großbodungen; Sven Rudolph, Großröhrsdorf; Stefan Schimmer, Kathrin Wiedow, Jörn Pamperin, Alois Belter, alle Hagenow; Thomas Schimank, Halle; Antje Stehfest, Havelberg; Mathias Hascher, Heinrichsort; Tom Werner, Falko Bilz, alle Hennigsdorf; Birgit Bremer, Heiligenstadt; Jan Krüger, Hohendodeleben; Henry Wiesjahn, Holzendorf; Bert Frenzel, Horka; Steffen Kowalick, Hoyerswerda; Dirk Hübel, Ilmenau; Michael Oehme, Jena; Markus Glück, Jößnitz; Nico Schmidt, Jüdenberg; Astrid Mirle, Kleindehsa; Sebastian Langer, Klietz; Elke Finck, Königswalde; Reinhard Priber, Karl-Marx-Stadt; Horst Huber, Krems (Österreich); Marco Rogozia, Ladeburg; Patrick Fladerer, Martin Schreiter, beide Leinefelde; Torsten Schreiber, Andre Gärtner, beide Leipzig; Tino Holzmüller, Cornelia Seidel, beide Lössau, Daniel Wetstein, Stat. Jg. Naturf. u. Techn., beide Lübz; Anke Harnisch, Lützen; Antje Richter, Lubmin; Karen Gustavs, Neuruppin; Ronny Berger, Christian Zschalig, beide Oberhermsdorf; Christian Haller, Mario Müller, beide Oelsnitz; Jana Wetzel, Oranienburg; Carola Sachs, Dörte Schappler, beide Parchim; Felix Kraenz, Picher; Sebastian Clauß, Possendorf; Christoph Weidling, Riethnordhausen; Remo Brandt, Rostock; Elke Jacobs, Saurasen; Matthias Kittner, Schmalkalden; Reiner Möwald, Sömmerda; Axel Bichler, Sondershausen; Sina Wilhelm, Steinbach-Hallenberg; Thomas Lotze, Suhl; Anja Tippe, Teterow; Silvano Storch, Jörg Steinbach, beide Trusetal; Una Brock, Stralsund; Martin Heise, Velten; Frederik Schiller, Voigtsgrün; Jan Bergmann, Unterbreizbach; Mario Pofahl, Ueckermünde; Claudia Nehring, Weimar; Sven Langer, Weißwasser; Ralf Klötzer, Wilkau-Haßlau; Karin Kurtz, Wittenburg; Ronald Peters, Wismar; Konstanze Reimann, Ute Pfitzenreuter, beide Worbis; Mathias Goltzsche, Zschopau; Diana Michler, Zschortau; Thomas Wimmer, Zwickau

Vorbildliche Leistung

Beatrice List, Altenburg; Silvia Freitag, Bad Liebenstein; Andreas Henning, Bad Salzungen; Marion Döring, Bernburg; Olaf Neumann, Cornelia Hauke, Sandra Neumann, Claudia Schmäu, Jana Schüßler, Christian Frauendorf, Christiane Tänzer, Olaf Leubner, alle Berlin; Verena Konow, Boizenburg; Heidi Pfannstiel, Roberto Rohmeiß, beide Breitungen; Christina Ruhl, Susann Dreyer, Cottbus; Simone Knaak, Dietlas; Hans Wirth, Dresden; Birgit Klappach, Ebersdorf; Steffen Siebert, Eberswalde; Stefan Seifert, Dresden; Jens Tschammer, Friedrichsthal; Roland Popp, Gotha; Stefan Heiber, Heyda; Olaf Schmidt, Hohenebra; Petra Seifert, Silke Pietsch, beide Horka; Berit Stein, Jena; Claudia Vörkel, Hohenlubast; Christian Dorschner, Katja Wurziger, beide Karl-Marx-Stadt; Manuela Winkler, Hoyerswerda; Marcus Waclawczyk, Kichheilingen; Carsten Blech, Klein-Rodensleben; Tonja Schmidt, Königsee; Johannes Nendwich, Krems (Österreich); Sandra Köchel, Lössau; Torsten Westphal, Neuruppin; Mario Martens, Oelsnitz; Olaf Hintze, Oranienbaum; Jürgen Nicolai, Ortrand; Jan Fricke, Pasewalk; Christin Schütze, Radis; Ralph Schlosser, Roßdorf; Andreas Burchert, Rostock; Ralf Fröhlich, Rudolstadt; Björn Ansorge, Saßnitz; Rebekka Kirchner, Enrico Rommel, beide Schwallungen; Werner Burghardt, Silkerode; Maik Freitag, Verchen; Jörn Weichert, Waltersdorf; Christine Storandt, Wernshausen; Birgit Schneeberger, Anja Hebestreit, Christiane Lehmert, alle Worbis; Marco Treichel, Unterbreizbach; Eva Starke, Zwinige

Abzeichen in Gold

Für neunzehnjährige Teilnahme
Lutz Püffeld, Halberstadt

Für achtzehnjährige Teilnahme
Guido Blosfeld, Halle

Für siebzehnjährige Teilnahme
Ullrich Riedel, Flöha

Für sechzehnjährige Teilnahme
Rainer Seifert, Dessau; Ursula Märker, Greifswald; Uwe Bormann, Magdeburg; Frank Aßmus, Oranienburg

Für fünfzehnjährige Teilnahme
Andreas Fittke, Berlin; Kurt Oertel, Gräfenhainichen; Bengt Nölting, Greifswald; Gerald Werner, Meiningen; Volker Schulz, Nauen; Lothar Gruber, Wien (Österreich); Katrin Richter, Wittenberg-P.

Für vierzehnjährige Teilnahme
Andreas Gude, Berlin; Frank Regensburger, Dresden; Eberhard Georgy, Erfurt; Wolfhart Umlauft, Freital; Andrea Fiehring, Jena; Steffen Langbein, Lichte; Rainer Bauer, Mittweida; Wilfried Röhnert, Radebeul; Heinz-Olaf Müller, Schmalkalden; Hans-Dietrich Schwabe, Sondershausen; Ralf Becker, Wolmirstedt; Torsten Löwe, Schleiz

Für dreizehnjährige Teilnahme
Dieter Koch, Arnstadt; Annett Körner, Dresden; Bernd Dübe, Forst; Matthias Weser, Großenhain; Rüdiger Düsing, Halle; Ruth Jacobs, Halle-N.; Rolf Kamieth, Kakerbeck; Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich); Diana Semper, Leipzig; Udo Kretzschmann, Markneukirchen; Jörg Pöhland, Klingenthal; Jana Walter, Röbel; Ina und Uwe Ebert, Ruppendorf; Siegried Kretschmann, Schlagsdorf; Bernd Hartwig, Thaldorf; Sylvia Glomb, Weißenfels

Für zwölfjährige Teilnahme
Uwe Maaz, Arnstadt; Guntram Türke, Auerbach; Karsten Schlutter, Babelsberg; Heike Lüpke, Berlin; Harry Höfer, Dorndorf; Carolin Engel, Ingolf Körner, Jörn Wittig, Karl-Heinz Jünger, alle Dresden; Thomas Mittelbach, Dirk-Thomas Orban, beide Erfurt; Jörg Butter, Freiberg; Angela Illing, Gersdorf; Michael Katzer, Greußen; Volker Reck, Heiligenstadt; René Schüppel, Hoyerswerda; Horst Fliegner, Jarmen; Marko Hanke, Thomas Mader, Jens Pönisch, Andreas Hengst, alle Karl-Marx-Stadt; Steffen Rieth, Klostermansfeld; Per Witte, Königs Wusterhausen; Knut Hantschel, Neuenkirchen; Claudia Trochold, Reichenbach; Maike Weide, Steinigtwolmsdorf; Heidrun Tiedt, Teterow; Hans Creutzburg, Thal; Gudrun Thäter, Weimar; Olaf Seidel, Weißwasser; Eva Maria Wabbel, Wolfen; Birgit Schultheiß, Wüstenbrand

Für elfjährige Teilnahme
Frank Baumgart, Aschersleben; Lutz Heinrich, Bad Langensalza; Marc Schewe, Berlin; Werner König, Berlingerode; Tilman Völzke, Böhlen; Petra Sarodnick, Dallgow; Stefan Edelmann, Dresden; Reinhard Weißnicht, Eberswalde; Thomas Pigorsch, Eisleben; Volker Georgy, Erfurt; Susanne und Matthias Schreiber, Elsterwerda; Wilfried Schleinitz, Greifswald; Dieter Seifert, Hagenow; Günter Schielinsky, Halle-N.; Karsten Milek, Hohen-Neuendorf; Ralf Häntsch, Köthen; Jörg Drechsel, Leinefelde; Lutz Hübschmann, Lößnitz; Uwe Würker, Mülsen; Manfred Hille, Ina Köhler, beide Riesa; Rolf Heubner, Wolfen; Steffen Klimpel, Wolgast; Karl Oertel, Zeitz; Thorsten Eidner, Zeulenroda; Siegfried Obst, Eberswalde

Für zehnjährige Teilnahme
Jens Fache, Altenburg; Andreas Jock, Blankenfelde; Uwe Schütze, Camin; Roland Damm, Cottbus; Andreas Mann, Cunersdorf; Frank Sarodnick, Dallgow; Ulrich Schuster, Demitz-Thumitz; Georg Kichner, Dermbach; Heiko Richter, Dietlas; Heike und Lutz Lauter, Titus Ziegler, Catherin Engel, alle Dresden; Siegfried Obst, Eberswalde; Britta und Achmed Schulz, Greifswald; Bettina Weser, Großenhain; Michael Schulze, Halberstadt; Dany Lindenberg, Frank Siebert, beide Halle; Claus Janke, Ilmenau; Heike

Schinke, Leuna; Karl-Heinz Gora, Lohsa; Sabine Oestreich, Oschersleben; Frank Berndt, Radeburg; Jürgen Schmalisch, Reuden; Kurt Schulze, Schernberg; Jens Hoffmann, Sebnitz; Birgit Lorenz, Waren; Hartmut Boettcher, Weimar; Christina Fuhrmann, Zepernick; Frank Pampel, Zeulenroda

Für neunjährige Teilnahme
Eckhard Heinrich, Aschersleben; Steffen Hoffmann, Babelsberg; Heike Eckardt, Bad Liebenstein; Jan-Martin Hertzsch, Beelitz; Kerstin Kantiem, Andris Möller, Susanne Krüger, Thomas Böhme, alle Berlin; Falk-Uwe Koppelt, Crostau; Kerstin Urban, Pedro Thiele, Gerald Eichler, Ines Lauter, alle Dresden; Una Heinecke, Eisenberg; Lars Mönch, Erfurt; Jens Wackernagel, Falkenberg; Sonnfried Lätsch, Görlitz; Ingolf Hintsche, Gräfenhainichen; Birgit Seifert, Hagenow; Uwe Prochno, Halle; Thomas Weiß, Jena; Andreas Paukert, Karbow; Andreas Niepel, Ricarda Ramm, beide Karl-Marx-Stadt; Norbert Neumann, Kleinmachnow; Andreas Helbig, Langenleuba-N.; Frank Herzog, Langenwolschendorf; Sabine Pohlmann, Uta Mersiowsky, beide Langewiesen; Andreas Eifler, Ralf Laue, Petra Polster, alle Leipzig; Jens Grundmann, Limbach-O.; Holger Schinke, Leuna; Anke Misch, Magdeburg; Norbert Fuchs, Meiningen; Sven Saar, Mühlhausen; Uwe Knispel, Neuburxdorf; Erhard Zilinske, Stralsund; Irene Michallik, Waren; Stefan Thäter, Margret Boettcher, beide Weimar; Agnes Jorzick, Wismar; Erika Schreiber, Zella-Mehlis; Mathias Goltzsche, Zschopau; Carmen Meikies, Schlagsdorf

Für achtjährige Teilnahme
Anka Sommer, Augsdorf; Steffen Padelt, Beate und Stefan Müller, Norbert Dorn, Jens Prochno, Reinhard Wegener, Bert Minske, alle Berlin; Christian Sitz, Calau; Ramona Blank, Clingen; Andreas Stenzel, Manfred Roßius, alle Cottbus; Uwe Martin, Crossen; Bert Kühne, Dahme; Stefan Mattausch, Michael Nitsche, Helmut und Carsten Schreiber, Rolf Dach, Jens Fuchs, alle Dresden; Barbara Tschada, Erfurt; Heike Morgner, Falkenstein; Henry Mäder, Frohburg; Ingolf Thurm, Gößnitz; Karsten Sonnemann, Grabow; Thomas Rauschenbach, Grochwitz; Henning Salz, Halle; Uta und Jutta Schumann, Havelberg; Carsten Leibnitz, Hohenstein-E.; Thomas Benusch, Hoyerswerda; Claudia Docter, Ilsenburg; Carla Umlauf, Andreas Israel, beide Karl-Marx-Stadt; Heiko Witte, Friedhelm Reichert, beide Königs Wusterhausen; Petra Gollewsky, Bernd Fucke, beide Leipzig; Michael Seidel, Leuna; Michael Simang, Mittelherwigsdorf; Anja Voß, Neustadt; Irma Goßmann, Oranienburg; Hellmut Schenk, Pirna; Katja Uhlemann, Prausitz; Ronald Kaiser, Schleid; Winfried Ullrich, Babette Müller, beide Schmalkalden; Ralf Stentzel, Schwarzenberg; Matthias Herrmann, Schwerin; Delia Wolfert, Söllichau; Mike Selig, Stauchitz; Silvia Reinwarth, Teltow; Evelin Schott, Thalheim; Uta Michallik, Waren; Claudia Tiersch, Weimar; Horst Rißmann, Wesenberg; Ralph Bock, Wolfen; Sebastian Horbach, Karl-Marx-Stadt

Für siebenjährige Teilnahme
Ralf und Wolfgang Beukert, Beatrice List, alle Altenburg; Annegerte Schädlich, Auerbach; Matthias Röder, Yvonne Selke, Matthias Tittel, alle Berlin; Eberhard Balzer, Bernburg; Frank-Jürgen Schwerin, Blumberg; Peter Sitz, Calau; Yvonne Sachse, Dresden; Olaf Krause, Eisenhüttenstadt; Jörg Simon, Engelsdorf; Ulrich und Peter Wenschuh, Falkenstein; Frank und Udo Schulte, Freienbessingen; Volker Pohlers, Greifswald; Karsten Seliger, Greiz; Maik Thiele, Kai Streubel, Ragna Siol, alle Grimma; Jörg Blaurock, Guben; Christina Schmerling, Antje Hüttig, beide Halle-N.; Fortsetzung siehe Heft 2/87

ARBEITS-GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Mini-BASIC für alpha-Leser Teil 3

Es wird verzweigt

Mit dem Computer haben wir bis jetzt immer etwas ausgerechnet. Nun soll uns der Computer helfen, Zahlen auf Teilbarkeit zu untersuchen. Wir wollen mit seiner Hilfe feststellen, ob eine natürliche Zahl n (z.B. 357983) Vielfaches einer natürlichen Zahl t (z.B. 17) ist ($t \neq 0$) bzw. ob gilt: t/n.
Zunächst vereinfachen wir die Aufgabe, indem wir uns das Ziel stellen, ein BASIC-Programm zu schreiben, mit dem ein Computer von einer natürlichen Zahl a entscheiden kann, ob sie durch 7 teilbar ist oder nicht.
Ohne Computer könnte man wie folgt vorgehen: Man dividiert die Zahl a durch 7. Ist das Ergebnis eine natürliche Zahl, so gilt $7 \mid a$, ansonsten gilt $7 \nmid a$.
Bevor wir an das Programmieren gehen, wollen wir folgende Aufgabe lösen.

▲ 18 ▲ Vervollständige die Tabelle! (Der Quotient $a:7$ ist – falls er keine natürliche Zahl ist – auf Zehntel zu runden!)

a	$a:7$	$a:7$	$7/a$
9	1,2	1	Nein
14			
23			
21			
84			
95			

Für die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl a durch 7 gilt: Wenn $[a:7] = a:7$, so $7/a$, sonst $7 \nmid a$.

Eine BASIC-nahe Formulierung wäre:
Wenn $\underbrace{[a:7]=a:7}_{\text{Bedingung}}$, so $\underbrace{\text{drucke } 7/a}_{\text{Anweisung 1}}$,
sonst $\underbrace{\text{drucke } 7 \nmid a}_{\text{Anweisung 2}}$!

In BASIC kann man den Sachverhalt so notieren:
IF INT (A/7) = A/7 THEN PRINT „7/“; A:ELSE PRINT „7 KEIN TEILER VON“; A (if –, then (engl.) – wenn –, dann; else (engl.) – sonst) IF ... THEN ... ELSE ruft eine *Programmverzweigung* hervor.
Wenn die Bedingung nach dem IF erfüllt ist, so wird die Anweisung 1 ausgeführt und die Anweisung 2 übersprungen. Ist die Bedingung nach dem IF nicht erfüllt, so wird die Anweisung 1 übersprungen und die Anweisung 2 ausgeführt. In jedem Fall setzt der Computer die Arbeit mit der nächsten Programmzeile fort.
Allgemein hat in BASIC eine *Programmverzweigung* mit Hilfe von IF ... THEN ... ELSE folgenden Aufbau:

IF $\boxed{\text{Bedingung}}$ THEN $\boxed{\text{Anweisung 1}}$:
ELSE $\boxed{\text{Anweisung 2}}$

Bei den Bedingungen treten oft Vergleiche auf, wobei in BASIC z.T. andere Symbole Verwendung finden als üblich.

Übliche Darstellung	=	<	>	≦	≧	≠
BASIC-Darstellung	=	<	>	<=	>=	<>

Nach diesen langen Vorbetrachtungen wollen wir nun ein BASIC-Programm zur Untersuchung der Teilbarkeit einer natürlichen Zahl a durch 7 vorstellen.

Programm 4.

```
10 INPUT „GIB EINE NATUERLICHE ZAHL EIN!“; A
20 IF INT (A/7) = A/7 THEN PRINT „7/“; A:ELSE PRINT „7 KEIN TEILER VON“;A
30 END
```

▲ 19 ▲ Verändere Programm 4 so, daß man die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl a durch eine beliebig wählbare natürliche Zahl t ($t \neq 0$) feststellen kann.

Problem + Computer = Lösung?

Um dem Leser erste Vorstellungen von der Programmiersprache BASIC und dem Programmieren zu vermitteln, haben wir bisher recht überschaubare Beispiele gewählt. Dabei konnte man allerdings schon feststellen, daß der Computer *selbst* sehr wenig kann. Im wesentlichen kann er Zahlen addieren, multiplizieren, dividieren, subtrahieren und Zahlen vergleichen. Außerdem kann er die Werte einiger Funktionen selbst ermitteln.
(Auf die Möglichkeit, den Computer zur Lösung nichtnumerischer Probleme einzusetzen, wird hier nicht eingegangen.)
Wenn wir also einen Kleincomputer zum Lösen eines Problems nutzen wollen, so müssen wir zunächst einmal selbst einen Lösungsweg entwerfen. Haben wir einen Lösungsweg gefunden, muß man ihn – falls er überhaupt mit einem Kleincomputer realisierbar ist – computergerecht aufbereiten; d. h., er ist so weit in einzelne Schritte aufzugliedern, daß der Computer sie ausführen kann. Diese Schrittfolge ist nun noch in eine Programmiersprache zu übersetzen. Um das Vorgehen zu verdeutlichen, betrachten wir einige Beispiele.

Aufgabenbeispiel 1

Es sollen alle Teiler einer natürlichen Zahl n $(n > 1)$ mit einem Kleincomputer ermittelt werden.

Lösungsetappen:

1. Feststellen der Eingabe- und Ausgabedaten

Eingabe: Natürliche Zahl n $(n > 1)$

Ausgabe: Alle Teiler von n

2. Problemanalyse

Eine natürliche Zahl t ist Teiler einer natürlichen Zahl n, wenn es eine natürliche Zahl x gibt, so daß gilt: $t \cdot x = n$ bzw. $x = n : t\,(t \neq 0)$.

Als Teiler kommen dabei nur Zahlen von 1 bis n in Frage. Indem wir alle Quotienten $n : t$ bilden, können wir die Teiler von n finden. Wenn der Quotient $n : t$ eine natürliche Zahl ist, so ist t ein Teiler von n.

Für $n = 9$ könnte man sich folgende Tabelle anlegen, um alle Teiler von 9 zu ermitteln.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$9 : t$	9	4,5	3	2,25	1,8	1,5	1,2...	1,25	1
$t/9$	Ja	Nein	Ja	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein	Ja

Für größere Zahlen n liefert dieses Vorgehen prinzipiell auch alle Teiler, kann aber sehr arbeitsaufwendig sein.

3. Lösungsplan

(1) Eingabe von n.

(2) 1 ist stets Teiler von n.

(3) Für alle natürlichen Zahlen t mit $2 \leqq t \leqq n$ ist zu untersuchen, ob der Quotient $n : t$ eine natürliche Zahl ist. (Das ist der Fall, wenn $[n : t] = n : t$.)

Ist $n : t$ eine natürliche Zahl, so ist t Teiler von n.

(Ausgabe von t!)

4. BASIC-Programm

Programm 5

```
10 CLS
20 INPUT „GIB EINE NATUERLICHE
   ZAHL EIN!“; N
30 PRINT „TEILER SIND: 1“;[1])
40 FOR T = 2 TO N
50 IF INT (N/T) = N/T THEN PRINT
   T;[1])
60 NEXT T
70 END
```

Im Programm 5 wurde in Zeile 50 die Anweisung IF ... THEN verwendet. Auch diese Anweisung ruft eine *Programmverzweigung* hervor. Wenn die Bedingung hinter IF erfüllt ist, so wird die Anweisung, die auf THEN folgt, ausgeführt.

Ist die Bedingung hinter IF nicht erfüllt, wird die Anweisung hinter THEN übersprungen. In jedem Fall setzt der Computer die Arbeit mit der folgenden Programmzeile fort.

▲20▲ Überlege, ob im Programm 5 die Variable T unbedingt alle Zahlen von 2 bis n durchlaufen muß, um alle Teiler von n zu ermitteln!

Aufgabenbeispiel 2

Ermittle alle Paare $[x; y]$ mit $x \in N$ und $y \in N$, die die Gleichung $2x + 3y = 57$ erfüllen!

Lösungsetappen

1. Feststellen der Eingabe- und Ausgabedaten

Eingabe: Natürliche Zahlen x; y

Ausgabe: Alle geordneten Paare $[x; y]$, die die Gleichung $2x + 3y = 57$ erfüllen.

2. Problemanalyse

Für x kommen nur natürliche Zahlen von 0 bis 28 und für y nur natürliche Zahlen von 0 bis 19 in Frage.

Das sind insgesamt 580 geordnete Paare $[x; y]$, von denen man entscheiden muß, ob sie die Gleichung $2x + 3y = 57$ erfüllen.

3. Lösungsplan

Für $x = 0$ bis $x = 28$ ist jeweils zu untersuchen, ob es ein y mit $y = 0$ bis 19 gibt, so daß $[x; y]$ die Gleichung $2x + 3y = 57$ erfüllt.

Ist das der Fall, so ist das Zahlenpaar $[x; y]$ eine Lösung der Gleichung.

4. BASIC-Programm

Programm 6

```
10 CLS
   20 FOR X = 0 TO 28
   30 FOR Y = 0 TO 19
   40 IF 2 * X + 3 * Y = 57 THEN
      PRINT“ („; X; “; “; Y; “)“
   50 NEXT Y
   60 NEXT X
70 END
```

Im Programm 6 wird die „Eingabe“ aller möglichen Zahlenpaare $[x; y]$ mit Laufanweisungen realisiert. Dazu müssen sogar zwei Schleifen ineinander geschachtelt werden. Die Schleife mit den X-Werten ist die äußere, die mit den Y-Werten die innere Programmschleife. Der Computer beginnt mit dem ersten X-Wert und arbeitet damit alle Y-Werte (innere Schleife) ab. Dann wird mit dem nächsten X-Wert die innere Schleife erneut durchlaufen usw. Der KC85/1 hat die 580 Fälle in wenigen Sekunden durchgerechnet.

Lösung: (0; 19), (3; 17), (6; 15), (9; 13), (12; 11), (15; 9), (18; 7), (21; 5), (24; 3), (27; 1)

▲21▲ a) Ermittle alle natürlichen Zahlen n, die folgende Eigenschaften haben:

- n läßt bei der Division durch 3 den Rest 2.
- n^2 läßt bei der Division durch 11 den Rest 1.
- Es gilt $50 \leqq n \leqq 150$.

b) Entwickle zur Ermittlung dieser Zahlen ein BASIC-Programm!

▲22▲ Wieviel natürliche Zahlen von 1 bis 1986 sind durch 5, aber nicht durch 7 und nicht durch 11 teilbar?

Erarbeite zur Lösung der Aufgabe ein BASIC-Programm!

▲23▲ Entwickle ein BASIC-Programm für ein Zahlenratespiel! Es soll eine natürliche Zahl erraten werden. Diese Zahl gibt ein Mitspieler dem Computer ein. Nach der Zahleneingabe ist der Bildschirm zu löschen. Ein anderer Spieler soll diese Zahl erraten. Auf den eingegebenen Tip soll der Computer eine der folgenden Informationen geben: Treffer; Tip war zu klein; Tip war zu groß. (Verbessere zusätzlich das Programm so, daß man nach einem Treffer erfährt, wieviel Tips nötig waren!)

[1]) Das Semikolon am Ende der Programmzeile ist nicht erforderlich; er gibt aber einen übersichtlicheren Ausdruck auf dem Bildschirm.

L. Flade/M. Pruzina

Drehsymmetrie

Eine Figur heißt drehsymmetrisch mit dem Winkel φ, wenn sie bei einer Drehung um φ in sich übergeht. Wie groß ist jeweils φ?

Bild 1

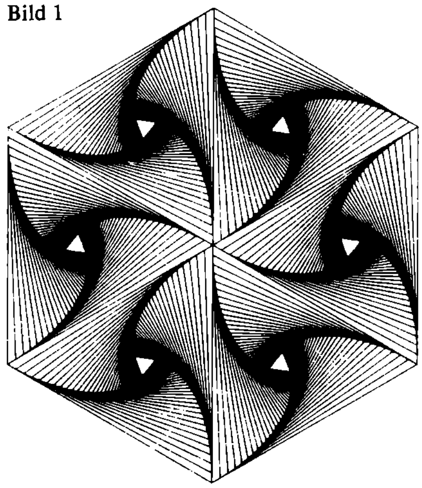
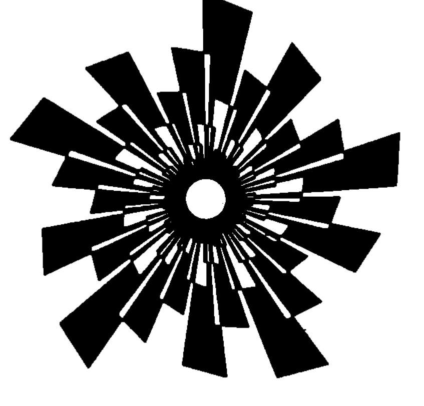


Bild 2



Komplexe Übungen

Preisausschreiben

Die neuen Lehrbücher für Mathematik ab Klassenstufe 5 enthalten nach größeren Stoffabschnitten sogenannte *Komplexe Übungen*. Sie orientieren auf eine systematische Entwicklung des Könnens der Schüler im Anwenden ihres mathematischen Wissens. Beim Lösen von Aufgaben komplexen Charakters muß der Schüler zunehmend selbständig entscheiden, welches von ihm erworbene Wissen und Können einzusetzen ist. Es geht also unter anderem um die Befähigung der Schüler zum inner- und außermathematischen Anwenden des erworbenen mathematischen *Instrumentariums* als das entscheidende Kriterium für den Lernerfolg.
Wie Schüler auf solche umfassenden Aufgabenstellungen vorbereitet werden können, sollen die nachfolgenden vier Beispiele für Aufgaben komplexen Charakters andeuten.
Die Redaktion der Schülerzeitschrift *alpha* ist an weiteren Aufgaben komplexen Charakters (in der anschließend angegebenen Form) sehr interessiert und fordert ihre Leser auf, eigene Aufgaben dieser Art einschließlich der Lösungen einzusenden. Für die besten Einsendungen sind Preise ausgeschrieben.

Aufgabe 1, Klassenstufe 5

In der Landwirtschaft werden oft pflanzliche Erzeugnisse auf sogenannte Getreideeinheiten (GE) umgerechnet; dann ist ihr Wert besser vergleichbar. Dem Getreide selbst wird also 1 GE zugrunde gelegt. 1 dt GE wird mit 40 M berechnet. Für Kartoffeln und für Zuckerrüben gelten jeweils 0,25 GE, für Zuckerrübenblatt gilt 0,10 GE, für Ölfrüchte 2 GE, für Feldfutter 0,12 GE. Durch umfassende Meliorationen (Bodenverbesserung durch vielfältige Maßnahmen) konnte im Kreis Röbel (Bezirk Neubrandenburg) die Marktproduktion um 17 dt GE je ha gesteigert werden.
a) Wieviel dt GE wurden im Kreis Röbel (landwirtschaftliche Nutzfläche 30 562 ha) mehr geerntet? Runde sinnvoll!
b) Wieviel Millionen Mark Nutzen hat dadurch jährlich die Volkswirtschaft? Runde sinnvoll!
c) Runde die landwirtschaftliche Nutzfläche auf km^2! Wie lang wäre dann eine Seite eines Rechtecks, dessen andere Seite 18 km lang wäre?
d) Gib für Zuckerrüben und Zuckerrübenblatt die GE in Form eines gemeinen Bruches an!
e) Wieviel dt Kartoffeln haben den gleichen Wert wie 2,5 dt Ölfrüchte?
f) 7,5 dt Getreide nehmen etwa einen Raum von 1 m^3 ein. Wieviel Kubikmeter Raum wird für 3 000 dt Getreide benötigt?
g) Wie hoch ist ein quaderförmiger Lagerraum dann gefüllt, wenn seine Grundseiten 20 m und 5 m lang sind?

Aufgabe 2, Klassenstufe 6

a) Zeichne ein Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} = 12$ cm und $\overline{BC} = 10$ cm! Lege einen inneren Punkt E auf $\overline{AB}$ derart fest, daß er 8 cm von A entfernt ist und einen inneren Punkt F auf $\overline{CD}$, der von D 4 cm entfernt ist! Verbinde F mit A und E, E mit C!
b) Welchen Flächeninhalt besitzen die entstandenen Dreiecke AEF und EBC?
c) Zeige, daß die Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{EC}$ gleichlang sind!
d) Zeige, daß die Winkel $\sphericalangle AFE$ und $\sphericalangle CEF$ gleichgroß sind!
e) Zeige, daß die Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{EC}$ parallel zueinander verlaufen!
f) Weise nach, daß der Streckenzug $AFEC$ länger als 30 cm, aber kürzer als 42 cm ist!
g) Beweise, daß die Summe der Größen der Winkel $\sphericalangle EAF$ und $\sphericalangle ECB$ genau 90° beträgt!

Aufgabe 3, Klassenstufe 7/8

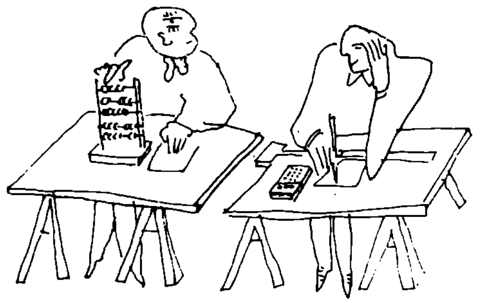
Eine LPG hat einen Weizenschlag von 68 ha. Die Ernte erfolgt durch Mähdrescher E 516. Der Kornbunker ist gegenüber den bisherigen Mähdreschern E 512 doppelt so groß und faßt mit 4,0 m^3 jetzt 31 dt Weizen.
a) Welche Fläche ist nach 1 250 m Fahrweg abgemäht bei einer Schnittbreite von 5,40 m? Der Kornbunker ist dann gefüllt.
b) Welcher Getreideertrag (in dt) wird vom gesamten Schlag geerntet?
c) Stelle eine Formel für den Gesamtertrag E (in t) auf! Es sei dabei A die Gesamtfläche (in ha), l die Länge des Fahrweges nach vollem Bunker (in m), F das Fassungsvermögen des Bunkers (in dt), b die wirksame Schnittbreite (in m).
d) Damit die Körnerverluste im Dreschwerk 1,5 % nicht überschreiten, darf der Durchlauf 5 kg je Sekunde nicht übersteigen. Welche Zeit benötigt dann ein Mähdrescher E 516 zur Füllung seines Kornbunkers?
e) Mit welcher Geschwindigkeit (in km/h) darf dann der Mähdrescher höchstens fahren?
f) Wieviel dt Halmgetreide werden auf einem Hektar geschnitten, und wieviel t Stroh werden auf dem Schlag geerntet, wenn das Körner-Stroh-Verhältnis, also das Verhältnis von Korn zu Stroh, 1 : 0,75 beträgt?
g) In welcher Zeit ist der Schlag abgemäht, wenn 4 Mähdrescher E 516 zugleich arbeiten und das Umladen auf die Hänger jeweils 4 bis 5 min dauert? (Verwende 4,5 min!)
h) Der Gesamtertrag soll zunächst in einem Trockenraum mit einer rechteckigen Fläche von 16 m und 9 m Seitenlänge ausgebreitet werden. Welche Höhe hat das so gelagerte Korn?
i) Danach erfolgt die Lagerung in Silos, die die Form eines geraden Kreiszylinders haben (5,10 m lichter Durchmesser, 10 m Nutzhöhe). Sind zwei Silos dazu ausreichend?

Aufgabe 4, Klassenstufe 9/10

a) Bei einem gleichschenkligen Dreieck ist die Basis gleich 4 LE (Längeneinheiten, z. B. 4 cm). Die Länge seiner Schenkel sei mit x bezeichnet. Der Umfang y des gleichschenkligen Dreiecks soll als Funktion von x dargestellt werden: $y = f(x)$.
b) Geben Sie den Definitionsbereich dieser Funktion an, wenn der Umfang des gleichschenkligen Dreiecks 30 LE nicht übersteigen soll!
c) Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion im Definitionsbereich $-1 \leqq x \leqq +7$!
d) Eine Normalparabel sei in positiver Richtung um c auf der x-Achse verschoben. Wie lautet die Funktionsgleichung dieser Parabel, wenn sie mit der Funktion $y = f(x)$ aus Aufgabe a) einen gemeinsamen Punkt P_1 auf der y-Achse besitzt und welche Koordinaten hat ihr Scheitelpunkt P_0?
e) Welche Koordinaten hat ihr zweiter Schnittpunkt P_2 mit der Funktion $y = f(x)$?
f) Wie lauten m und n der linearen Funktion $y = g(x) = mx + n$, auf der die Punkte P_0 und P_2 liegen?
g) Durch P_2 sind die Parallelen zu den Koordinatenachsen zu zeichnen! Die Gerade $y = f(x)$ teilt das entstandene Rechteck in zwei Teilflächen. Zeigen Sie, daß sich deren Flächeninhalte wie 3 : 5 verhalten!
h) In jede der Teilflächen ist ein Quadrat so einzubeschreiben, daß ein Eckpunkt auf $f(x)$ und die anderen drei Eckpunkte auf den Rechteckseiten liegen. Berechnen Sie jeweils die Seitenlänge dieser beiden Quadrate!
i) Zeichnen Sie die Gerade, die durch P_1 und P_0 geht! Im Rechteck entsteht dadurch ein zweites Dreieck mit den Eckpunkten P_1, P_0, 0 (0 sei der Koordinatenursprung). Beweisen Sie, daß beide Dreiecke einander ähnlich sind!

Lösungen siehe Heft 2/87 *H.-J. Kerber*

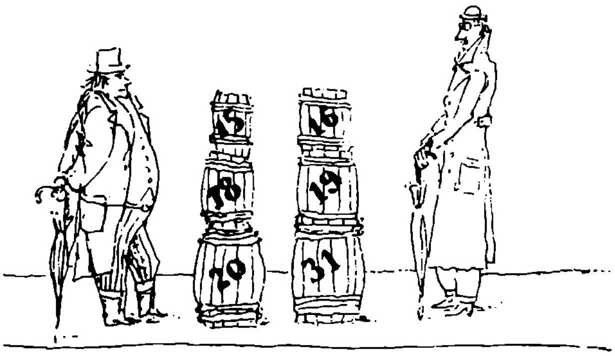
In freien Stunden · alpha heiter



Gerd Wessel

Kwaß – ein russisches Erfrischungsgetränk

Einem Laden wurden sechs Fässer Kwaß geliefert. Auf dem Bild ist gekennzeichnet, wieviel Liter in jedem Faß waren. Bereits am ersten Tag fanden sich zwei Käufer. Einer kaufte zwei Fässer, der andere drei, wobei der erste zweimal weniger Kwaß kaufte als der zweite. Es war nicht einmal nötig, die Fässer zu öffnen. Von den Fässern verblieb nur eins am Lager. Welches? *J.I. Perelman*



Gut kombinieren

In die leeren Felder sollt ihr die Zahlen von 1 bis 9 so einsetzen, daß die Aufgaben in den waagerechten und senkrechten Spalten richtig gelöst werden.

aus: NBI, Berlin

12	:		+		=	12
:	■	+	■	−	■	+
	+	5	−		=	
−	■	−	■	:	■	−
1	·		−	2	=	5
=	■	=	■	=	■	=
	·		·		=	10

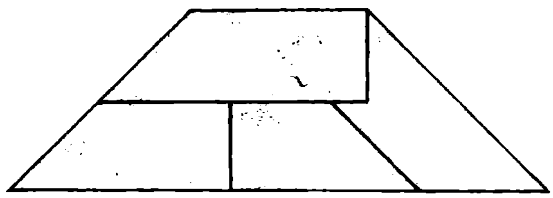
Persönliches

Der jugoslawische Geographieprofessor *Vladimir Zubic* vermag im Kopfrechnen die 37. Wurzel aus einer hundertstelligen Zahl in nur zwei Minuten und 17 Sekunden zu ermitteln. Dies stellte der Schnellrechner aus der bosnisch-herzegowinischen Hauptstadt Sarajevo kürzlich im Fernsehen unter Beweis (ADN).

Das T-Puzzle

Das Bild zeigt ein Trapez (Basiswinkel 45°). Fertige dir eine Schablone an, zerschneide diese und lege die vier Teile zu einem T zusammen, keine einfache Sache. Es gibt vier verschiedene Lösungen!

aus: Pythagoras, Gröningen



Wie alt bin ich?

Opa erzählt: „Meine Frau (Oma) ist 6 Jahre jünger als ich, meine Frau ist aber auch fünfmal so alt wie meine Enkelin. Meine Tochter ist halb so alt wie ich, mein Schwiegersohn ist 2 Jahre älter als meine Tochter.
Zusammen sind wir 238 Jahre alt.

Schülerin Claudia Schnelle, Schmölln

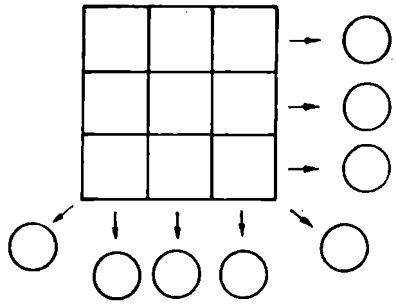
Verlorener Grand Hand

In einer Skatrunde spielte Paul als Hinterhandspieler Grand Hand und verlor, obwohl im Skat Herz Zehn und Karo Zehn lagen.
Nach dem Spiel legte Paul sein Blatt auf den Tisch und daneben den Skat.
Pauls Blatt: Kreuz – Bube, As, Zehn, König, Ober; Pik – Bube, König, Ober; Karo – Bube, As.
Skat: Herz – Zehn; Karo – Zehn.
Paul bemerkte dazu: „Bei der Kartenverteilung und der Spielweise meiner Gegner hatte ich mit Grand Hand keine Gewinnchance."
Ein vom Nachbartisch gerade Hinzugekommener, der Pauls Blatt und den Skat liegen sah, fragte: „Lag bei diesem Spiel im ersten Stich ein Bube?" Als Paul verneinte, urteilte der Hinzugekommene: „Dann liegt eindeutig fest, welche Karten der Vorderhandspieler hatte."
Kennst du das Blatt des Vorderhandspielers?

W. Träger, Döbeln

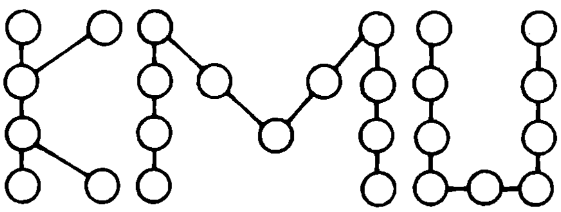
Anti-magisches Quadrat

Bilde mit den Ziffern 1 bis 9 ein anti-magisches Quadrat! Dies bedeutet, daß keine waagerechte, senkrechte oder diagonale Summe gleich ist. Finde bitte nur eine der möglichen Lösungen, denn durch weiteres Variieren dieser Lösung könntest du mühelos weitere erzeugen! *aus: Magazin, Berlin*



Gruß von der Karl-Marx-Universität

Im Jahre 1946 war die demokratische Neueröffnung der Leipziger Universität, der heutigen *Karl-Marx*-Universität (KMU).
Versucht doch nun einmal, die natürlichen Zahlen von 1 bis 26 so in die Kreisfelder der KMU-Figur einzutragen, daß die Zahlensumme auf jeder geraden Linie 46 beträgt! *Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig*



Alles Quadratzahlen

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern!

$$\begin{array}{ccccccc}
AB & + & CD & + & AEFC & = & AEGD \\
+ & & + & & + & & + \\
FGD & + & HGC & + & AB & = & AEGD \\
+ & & + & & + & & + \\
HGC & + & FIB & + & CD & = & AEGD \\
\hline
AEGD & + & AEGD & + & AEGD & = & KFBH
\end{array}$$

Ing. A. Körner, Leipzig

Additionsrätsel

Vor 2030 Jahren starb ein berühmter römischer Feldherr unter den Dolchen seiner politischen Feinde. Hinter den Fragezeichen verbergen sich seine drei Namen. Deren Buchstaben wiederum sind durch Zahlen zu ersetzen (nur gleiche Buchstaben durch gleiche Zahlen, keine Null an erster Stelle), so entsteht eine einzige richtige Addition.

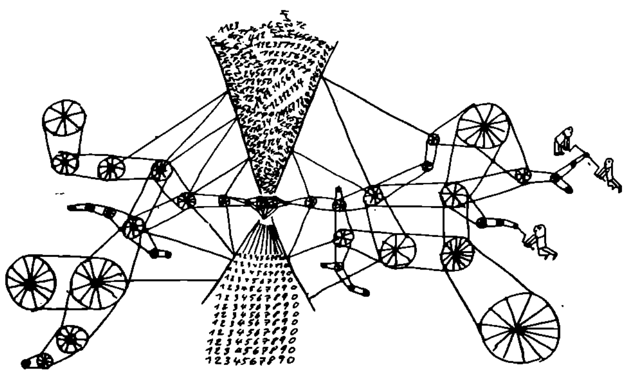
Philarithmos, ND, Berlin

$$\begin{array}{r}
?\ ?\ ?\ ?\ ? \\
+\ ?\ ?\ ?\ ?\ ?\ ? \\
\hline
=\ ?\ ?\ ?\ ?\ ?\ ? \\
\hline\hline
\end{array}$$

Ein altes Teilungsproblem

Ein reicher Mann verfügte in seinem Testament, daß all seine Goldmünzen gleichmäßig unter seine drei Kinder Peter, Paul und Mary verteilt werden sollen. Da eine Münze überzählig war, sollte diese sein treuer Diener erhalten. Gegen Mitternacht wachte Peter auf, versteckte seinen Haufen mit Goldmünzen und teilte die zwei übrigen Haufen in drei neue Haufen auf. Als er feststellte, daß eine Münze übrig war, entschied er, diese dem Diener zu geben. Später tat Paul das gleiche und gegen Morgen Mary ebenfalls. In jedem Falle blieb eine Münze für den Diener übrig.
Welches war die geringste ursprüngliche Anzahl von Goldmünzen?

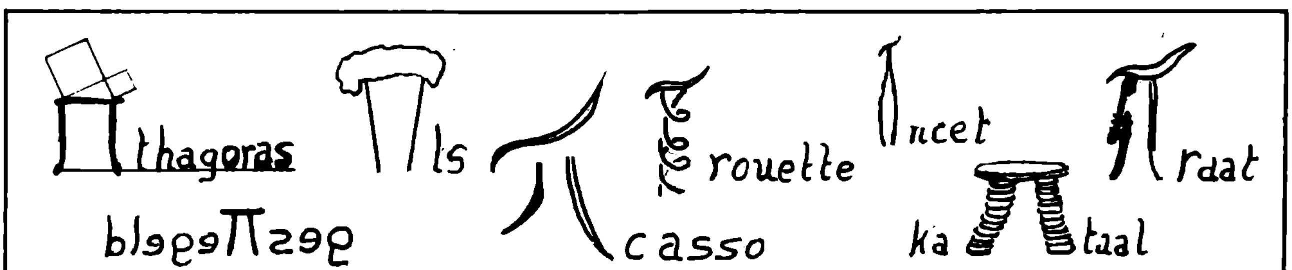
aus: The Australian Mathematics Teacher



aus: Urbanitäten von Gerd Wessel (Cartoons)

Heiteres π

aus: Pythagoras, Gröningen



Lösungen

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Eine achtstellige ganze Zahl hat folgende Eigenschaften:
(I) Die ganze Zahl wird, in der Basis 10, mit zwei Einsen, zwei Zweien, zwei Dreien und zwei Vieren geschrieben.
(II) Die zwei Einsen werden durch eine ganze Zahl, die zwei Zweien durch zwei ganze Zahlen, die zwei Dreien durch drei ganze Zahlen und die zwei Vieren durch vier ganze Zahlen getrennt.
Wie heißt die ganze Zahl?

Lösung: Die Zahl muß lauten: 41 312 432. Dabei ist eine 3 zwischen 1 und 1; 4 und 3 zwischen 2 und 2; 1, 2 und 4 zwischen 3 und 3 sowie 1, 3, 1, 2 zwischen 4 und 4.

▲2▲ Die Brüder Aljosha und Boris wurden beide im August geboren. In die Schule kamen sie mit sieben Jahren. Die Nummer der Klasse, in der jetzt der ältere Bruder Boris lernt, ist gleich dem Alter von Aljosha. In welche Klasse kommt Aljosha, wenn Boris die zehnklassige Oberschule beendet?

Lösung: Das Alter eines Schülers, der im August geboren ist und der mit 7 Jahren eingeschult wurde, ist um 6 größer als die Nummer der Klasse, in der er gerade lernt. Folglich ist Boris 6 Jahre älter als Aljosha. Wenn Boris die 10. Klasse beendet, dann schließt Aljosha die 4. Klasse ab und kommt in die fünfte.

▲3▲ Grille chiffrée-Zahlengitter:
Das Zahlengitter ist mit Hilfe untenstehender Zahlen zu vervollständigen, so daß jede senkrechte oder waagerechte Reihe von fünf Zahlen insgesamt 84 ergibt.

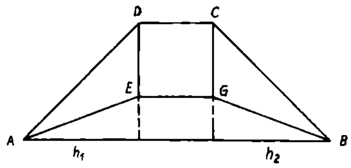
Lösung:

22	3	29	2	28
1	■	4	■	6
16	11	5	25	27
30	■	26	■	9
15	12	20	23	14

Lösungen zu: Alle Teile haben den gleichen Flächeninhalt

▲1▲ Für den Kreisumfang ist
$u = 2\pi r = 2\pi$.
Da u in 10 gleiche Teile unterteilt ist, gilt $a = \frac{u}{10} = \frac{\pi}{5}$.

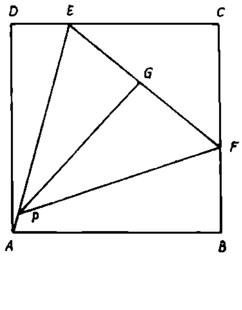
▲2▲ Wir bezeichnen die Punkte wie aus nebenstehender Skizze ersichtlich. Der Flächeninhalt des Quadrates $CDEG$ ist 1. Die Höhe h_1 des Dreiecks AED auf der Seite DE ist gleich 2, da $\frac{2 \cdot 1}{2} = 1$ wegen der Flächengleichheit gilt. Analog ist $h_2 = 2$. Damit gilt für die Fläche des Trapezes $ABGE$:
$\frac{2 \cdot a}{2} + a + \frac{2 \cdot a}{2} = 1$, also $1 = \frac{1}{3}$.



▲3▲ Die Eckpunkte der Dreiecke seien $A_1(1,0)$, $A_2(a_2,0)$, $A_3(a_3,0)$, ...
und $B_1(0,1)$, $B_2(0,b_2)$, $B_3(0,b_3)$, ...
$U(0,0)$ sei der Koordinatenursprung.
Für die Fläche des Dreiecks UA_1B_1 gilt:
$F(UA_1B_1) = \frac{1}{2}$.
Weiter ist $F(B_1UA_2) = 1 = \frac{1 \cdot a_2}{2}$,
also $A_2(2,0)$. Ferner ist
$F(B_2UA_2) = \frac{3}{2} = \frac{2b_2}{2}$, also $B_2\left(0, \frac{3}{2}\right)$
und $F(B_2UA_3) = 2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{a_3}{2}$,
also $A_3\left(\frac{8}{3}, 0\right)$. Schließlich ist
$F(B_3UA_3) = \frac{5}{2} = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{2}$ und damit
$B_3\left(0, \frac{15}{8}\right)$. Somit gilt $a = \frac{15}{8} - \frac{3}{2} = \frac{3}{8}$.

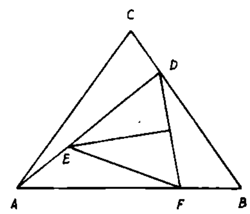
▲4▲ Es sei A_n die Fläche des n-ten Kreises mit dem Radius r_n.
Dann gilt $A_n = nA_1 = \pi r_n^2$:
Da $A_1 = \pi$ ist, folgt $r_n = \sqrt{n}$.
Mithin ist $a = r_5 - r_4 = \sqrt{5} - 2$.

▲5▲ Die Punktbezeichnung ist aus der Skizze entnehmbar. Da die Fläche des Dreiecks AED ein Fünftel der Fläche des Quadrates ist, muß
$\overline{DE} = \frac{2}{5}$ und somit $\overline{EC} = \frac{3}{5}$ sein. Damit
muß $\overline{EC} \cdot \frac{\overline{CF}}{2} = \frac{1}{5}$ gelten, also ist $\overline{CF} = \frac{2}{3}$.
Mit dem Satz des Pythagoras folgt
$\overline{EF} = \frac{1}{15}\sqrt{181}$ und da $\overline{EG} = \overline{GF}$ ist,
(die Dreiecke PGE und PGF haben die gleiche Fläche und die gleiche Höhe, also auch die gleichgroße Grundseite)
ist $a = \frac{1}{30}\sqrt{181}$.



▲6▲ Die Punkte der Abszisse seien mit $U(0,0)$, $A_1(a_1,0)$, ..., $A_n(a_n,0)$, ... bezeichnet. Dann ist $a_1 = 1$ und wegen der Dreiecksflächenformel $\frac{a_n a_n}{2} = n\frac{1}{2}$.
(Man beachte die Flächengleichheit!)
Also ist $a_n = \sqrt{n}$
und damit $a = a_5 - a_4 = \sqrt{5} - 2$.
(Man beachte die Analogie zwischen Aufgabe 4 und 5!)

▲7▲ Wir bezeichnen die Punkte wie aus nebenstehender Skizze ersichtlich. Da die Fläche des Dreiecks ADC ein Fünftel der Gesamtfläche des Dreiecks ABC sein soll,
folgt $\overline{CD} = \frac{1}{5}$.
(Flächenformel, gleiche Höhe!)
Der Kosinussatz im Dreieck ADC liefert
$\overline{AD} = \frac{1}{5}\sqrt{21}$. Nun gilt $\overline{AE} : \overline{ED} = 1 : 2$,
da die Fläche des Dreiecks AFE halb so groß sein soll, wie die Fläche des Dreiecks EFD. Folglich gilt
$a = \overline{ED} = \frac{2}{3}\frac{1}{5}\sqrt{21} = \frac{2}{15}\sqrt{21}$.



Lösungen zu HEXAHEX – ein geometrisches Puzzle

▲1▲

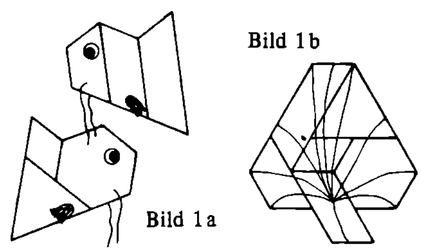


Bild 1a

Bild 1b

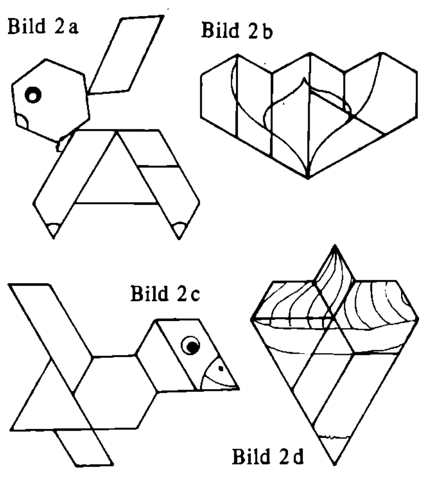


Bild 2a

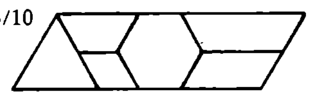
Bild 2b

Bild 2c

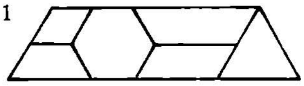
Bild 2d

▲2▲

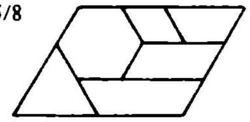
a) 1/3/10



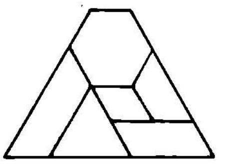
b) 2/11



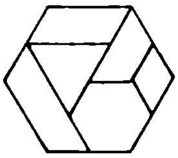
c) 4/5/8



d) 7/9



e) 6



▲3▲ Es gilt die Gleichung

$$2 \cdot c \cdot d = 18 + c_1^2 + d_1^2$$

mit den gleichen Nebenbedingungen wie vorn. Durch systematisches Probieren, bei $d = 2$ beginnend, entsteht die folgende Tabelle:

d	c	c_1	d_1	
2	5	1	1	(1)
3	3	0	0	(2)
3	6	3	3	(3)
5	5	4	4	(4)
9	10	9	9	(5)

Wir finden daraus zwei konvexe Figuren; die rechnerische Lösung (5) widerspricht auch (177).

Bild 3a

a) 1/4

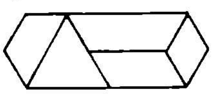
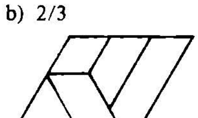
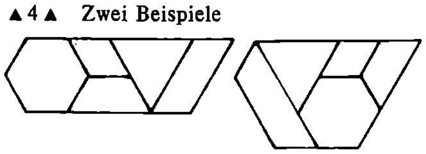


Bild 3b

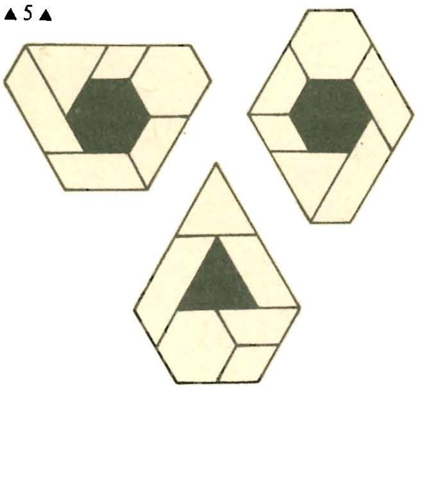
b) 2/3



▲4▲ Zwei Beispiele



▲5▲



Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Kwaß – ein russisches Erfrischungsgetränk

Der zweite ein 16-Liter-, ein 19-Liter- und ein 31-Liter-Faß.
Es sind also

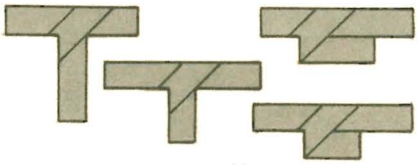
$$15 + 18 = 33; \; 16 + 19 + 31 = 66.$$

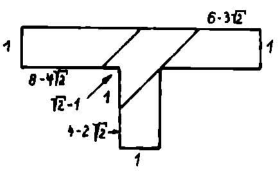
Das heißt, der zweite Käufer kaufte doppelt soviel Kwaß wie der erste. Übrig bleibt das 20-Liter-Faß.

Gut kombinieren

$$12 : 4 + 9 = 12$$
$$6 + 5 - 8 = 3$$
$$1 \cdot 7 - 2 = 5$$
$$1 \cdot 2 \cdot 5 = 10$$

Das T-Puzzle





Wie alt bin ich?

Claudia ist 14 Jahre alt; Opa: x;

Oma: $x - 6$; Tochter: $\frac{x}{2}$;

Schwiegersohn: $\frac{x}{2} + 2$, Enkelin: $\frac{x-5}{5}$;

$$x + (x - 6) + \left(\frac{x-6}{5}\right) + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2} + 2\right) = 238; \; x = 76.$$

Der Opa ist 76 Jahre alt.

Anti-magisches Quadrat

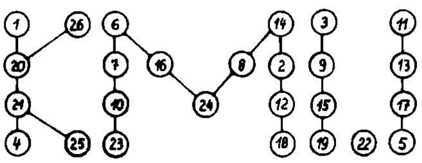
Eine der möglichen Lösungen:

7	6	3	→ 16
5	1	2	→ 8
8	4	9	→ 21

↙ 12, ↓ 20, ↓ 11, ↓ 14, ↘ 17

Gruß von der KMU

Eine mögliche Eintragung:



Alles Quadratzahlen

Aus den ersten beiden Spalten bzw. aus der zweiten und dritten Zeile folgt, daß die Zahl $AEGD$ mit einer Eins beginnen muß. (Die Summe zweier dreistelliger Zahlen plus einer zweistelligen Zahl ist im vorliegenden Fall kleiner als 2000.) Also $A = 1$. Damit ergibt sich für $AB = 16$. (Einzige Quadratzahl im Bereich 10 bis 19.) Damit ist also $B = 6$.
Weiterhin folgt aus der ersten Zeile, daß $B + C = 10$ sein muß.
Damit ist $C = 4$.
Deshalb muß $CD = 49$ sein. Also: $D = 9$.
Aus der dritten Spalte folgt $F = G - 6$. Weil die Ziffer 9 schon belegt ist, bleibt für F nur noch die Ziffer 2; denn die Eins ist auch vergeben. Die rechte untere Schlußsumme muß als Endziffer eine 7 haben, denn $3 \cdot 9 = 27$. Also ist $H = 7$. $G = 8$. Damit ist die Zahl HGC im Bereich 704 bis 784 zu suchen. Es kommt nur die Zahl 784 in Frage. Also: $G = 8$.
Jetzt ergibt sich in der ersten Spalte schon die Gesamtsumme aus: $16 + 289 + 784 = 1089$. Also ist $E = 0$. Nun ist es leicht, $I = 5$ und $K = 3$ zu bestimmen.

Denn:
$$\begin{array}{cccc} 4^2 + & 7^2 + & 32^2 = & 33^2 \\ + & + & + & + \\ 17^2 + & 28^2 + & 4^2 = & 33^2 \\ + & + & + & + \\ 28^2 + & 16^2 + & 7^2 = & 33^2 \\ \hline 33^2 + & 33^2 + & 33^2 = & 3 \cdot 33^2 \end{array}$$

Verlorener Grand Hand

Hätte Paul den ersten Stich erhalten, so hätte er höchstens zwei Stiche mit Pik König und Pik Ober abzugeben brauchen. Dazu könnten seine Gegner maximal 36 Augen beisteuern. Also müssen sie noch einen dritten Stich auf den Herz Buben erhalten haben. Da der Herz Bube nicht im ersten Stich lag, mußte der Vorderhandspieler nacheinander Pik As und Pik Zehn ausspielen und sein Mitspieler darf kein Pik haben, so daß er Herz As und Herz König beisteuern kann. Andernfalls erhalten Pauls Gegner nicht zwei Pikstiche, auf jeden Fall mit den Pikstichen dann weniger als 43 Augen. Beim dritten Ausspielen muß der Vorderhandspieler Karo König auf den Tisch legen und der Mittelhandspieler muß mit dem Herz Buben stechen können. Das ist nur möglich, wenn der Mittelhandspieler kein Karo im Blatt hat. Mit diesem dritten Stich erhalten Pauls Gegner 17 Augen (1× As, 1× König, 1× Bube) und damit maximal 60 Augen. Da sie das Spiel gewonnen haben, müssen sie 60 Augen erreicht haben. Die Karten des Vorderhandspielers sind:
Pik: As, Zehn, Neun, Acht, Sieben,
Karo: König, Ober, Neun, Acht, Sieben.

Additionsrätsel

$$\begin{array}{rr} \text{G A I U S} & 7\,6\,0\,8\,1 \\ +\ \text{J U L I U S} & +\ 3\,8\,9\,0\,8\,1 \\ \hline \text{C A E S A R} & 4\,6\,5\,1\,6\,2 \end{array}$$

Ein altes Teilungsproblem

Waren es am Anfang x Münzen, dann sieht die Verteilung so aus:

$$\frac{x-1}{3} + \frac{x-1}{3} + \frac{x-1}{3} + 1.$$

Nachdem nun Peter das Drittel $\left(\frac{x-1}{3}\right)$ versteckt hatte, waren es nur noch

$$\frac{x-1}{3} + \frac{x-1}{3} + 1 = \frac{2x+1}{3} \text{ Münzen.}$$

Diese verteilte er wie folgt:

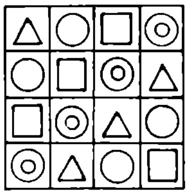
$$\frac{\frac{2x+1}{3}-1}{3}+\frac{\frac{2x+1}{3}-1}{3}+\frac{\frac{2x+1}{3}-1}{3}$$
$$+1=\frac{2x-2}{9}+\frac{2x-2}{9}+\frac{2x-2}{9}+1.$$
Nun tat Paul das gleiche.
Er nahm das Drittel $\left(\frac{2x-2}{9}\right)$ weg und verteilte den Rest von $\frac{4x+5}{9}$ Münzen.
$$\frac{\frac{4x+5}{9}-1}{3}+\frac{\frac{4x+5}{9}-1}{3}+\frac{\frac{4x+5}{9}-1}{3}$$
$$+1=\frac{4x-4}{27}+\frac{4x-4}{27}+\frac{4x-4}{27}+1.$$
Schließlich versteckte Mary davon wieder das Drittel $\left(\text{also } \frac{4x-4}{27}\right)$ und verteilte den Rest von $\frac{8x+19}{27}$ Münzen in
$$\frac{\frac{8x+19}{27}-1}{3}+\frac{\frac{8x+19}{27}-1}{3}$$
$$+\frac{\frac{8x+19}{27}-1}{3}+1=\frac{8x-8}{81}+\frac{8x-8}{81}$$
$$+\frac{8x-8}{81}+1.$$
Das heißt: $\frac{8x-8}{81}$ muß ganzzahlig sein.
Dann ist $8x-8=81a\ (a \in N)$
$$x=10a+\frac{a}{8}+1.$$
Für $b=0$ ist $x=1$ (auszuschließen).
Für $b=1$ ist $x=82$
und mit $a=\ 8b\ (b \in N)$
$$x=81b+1.$$
Für $b=2$ ist $x=163$.
Die geringste Anzahl von Goldmünzen beträgt 82.

Lösungen zu: Aufgaben für Arbeitsgemeinschaften Junger Mathematiker (Kl. 4 bis 6)
Heft 6/86

▲1▲ a) Nagel (kein Werkzeug); Linde (keine Blume); dunkel (keine Farbe); Gans (kein Säugetier); Würfel (keine ebene Figur); Gramm (keine Längeneinheit); 103 (keine zweistellige Zahl); 21 (keine gerade Zahl)
b) Ruderboot (kein Landfahrzeug); Auto (wird nicht mit Muskelkraft betrieben); 15 (keine gerade Zahl) oder 26 (kein Vielfaches von 3); 14 (keine Quadratzahl) oder 25 (keine gerade Zahl); Hund (kein Wildtier) oder Fasan (kein Säugetier).

▲2▲ a) Das erste Quadrat, denn bei diesem ist die schraffierte Fläche gleich zwei Drittel der Quadratfläche.
b) Das vierte Rechteck, denn bei diesem ist jedes Teilflächenstück gleich einem Achtel der Rechteckfläche.

▲3▲ a) Es fehlt ein Quadrat; denn dann tritt jede Figur dreimal auf.
b) In jeder waagerechten Zeile, aber auch in jeder senkrechten Spalte tritt jede der vier Figuren genau einmal auf.

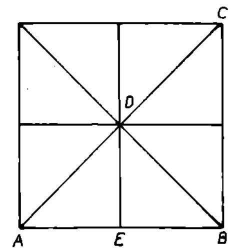


▲4▲

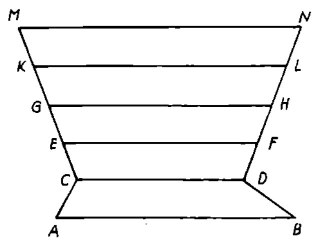
3		9
	6	
12		5

▲5▲ Das Würfelnetz a) gehört zum abgebildeten Würfel; denn die Summe der Augenzahlen zweier gegenüberliegender Würfelflächen muß 7 betragen.

▲6▲ a) 4 große Dreiecke (z. B. Dreieck *ABC*); 8 mittlere Dreiecke (z. B. Dreieck *ABD*); 8 kleine Dreiecke (z. B. Dreieck *AED*), also insgesamt 16 Dreiecke.



b) 5 Trapeze, die aus einer Teilfläche bestehen (z. B. Trapez *ABDC*), 3 Trapeze, die aus zwei Teilflächen bestehen (z. B. Trapez *CDHG*), 2 Trapeze, die aus drei Teilflächen bestehen (z. B. Trapez *CDLK*), 1 Trapez, das aus vier Teilflächen besteht (Trapez *CDNM*), also insgesamt 11 Trapeze.



▲7▲ a) $2 \cdot (40+30)$ cm $= 140$ cm;
140 cm : 4 = 35 cm; das Quadrat hat eine Seitenlänge von 35 cm.
b) Der halbe Umfang des Rechtecks beträgt 9 cm. Für die Seitenlängen a und b des Rechtecks gilt somit $a+b=9$ cm.
Daraus folgt

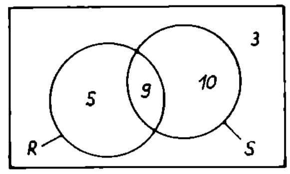
a	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm
b	8 cm	7 cm	6 cm	5 cm.

▲8▲ Aus $b+2\cdot s=160$ cm folgt

b	$2s$	s
20	140	70
40	120	60
60	100	50

▲9▲ Kegel (Bild 1); Würfel (B. 2); Zehnpfennigstück, das aufrecht steht (B. 3); Pyramide (B. 4); Fußball (B. 5); leerer Blumentopf (B. 6).

▲10▲ $27-(14+19-9)=27-24=3$; drei Schüler können weder radfahren noch schwimmen (siehe auch Venndiagramm).



27 Schüler

▲11▲ Es seien u, r, b, a, w, h die ganzen Zahlen, die das Lebensalter von Ulf, Ria, Beate, Astrid, Werner, Heiko angeben; dann gilt $b<a<h$ und $h<r$ und $a<u<h$ und $w<b$, also $w<b<a<u<h<r$.
Die Vornamen müssen deshalb folgende Reihenfolge erhalten: Werner, Beate, Astrid, Ulf, Heiko, Ria.

▲12▲ Aus dem Aufgabentext folgt:
Elke vor Astrid, aber Astrid vor Doris; Cilli ist am größten, Bärbel vor Elke, also die Reihenfolge Cilli, Bärbel, Elke, Astrid, Flora, Doris.

▲3▲ Die Siegerin und Renate trainieren in derselben Gruppe, also kann Renate nicht Siegerin sein. Da Renate nicht Dritte wurde, belegte Renate den 2. Platz.
Die Gewinnerin der Bronzemedaille ist Klassenkameradin von Ute, also wurde Ute nicht Dritte. Folglich belegte Ute den ersten, Renate den zweiten, Petra den dritten Platz.

▲14▲ Es lassen sich folgende zweifarbige Wimpel herstellen:
rot-gelb, rot-blau, rot-schwarz,
gelb-blau, gelb-schwarz,
blau-schwarz.
Dabei wird vorausgesetzt, daß z. B. die Wimpel rot-gelb und gelb-rot als gleichartig angesehen werden.

▲15▲
a) $3\cdot 4-48:6+16=12-8+16=20$
b) $(35-20)+(18-9)=15+9=24$;
$(35-20)-(18+9)=55-27=28$;
$24<28$.

▲16▲ Aus a) folgt $10 \leqq x \leqq 99$.
Aus b) ergeben sich für x die Zahlen 21, 42, 63, 84. Wegen c) entfallen die ungeraden Zahlen 21 und 63. Übrig bleiben die Zahlen 42 und 84.

▲17▲ Der Satz enthält die Zahlwörter eins, drei, zwei, neun, acht.
(*Ein S*eehund; Seehun*d reiß*t; gan*z wei*t; Zäh*ne un*d; N*acht*)

▲18▲
2,40 M : 2 = 1,20 M;
120 Pf − 50 Pf = 70 Pf;
70 Pf : 2 = 35 Pf;
35 Pf + 50 Pf = 86 Pf.
Ein Radiergummi kostet 35 Pf, ein Kalender 85 Pf.

▲19▲
$1\cdot 50\,\text{M}+8\cdot 20\,\text{M}=210\,\text{M}<300\,\text{M}$
$2\cdot 50\,\text{M}+7\cdot 20\,\text{M}=240\,\text{M}<300\,\text{M}$
$3\cdot 50\,\text{M}+6\cdot 20\,\text{M}=270\,\text{M}<300\,\text{M}$
$4\cdot 50\,\text{M}+5\cdot 20\,\text{M}=300\,\text{M}$ (Lösung)
$5\cdot 50\,\text{M}+4\cdot 20\,\text{M}=330\,\text{M}<300\,\text{M}$

▲20▲ Jeder Bus hat
512 Plätze : 16 = 32 Plätze. Wegen
5 · 32 Personen = 160 Personen
werden fünf Busse benötigt.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. Kubilius
Heft 5, S. 123

▲2721▲ Man bezeichne
$N = p^4 - 5p^2 + 4 = (p-2)(p-1)(p+1)(p+2)$. Ist $p = 2$, so ist $N = 0$; also N ist durch 360 teilbar. Wenn $p \neq 2$, so ist p ungerade. Daraus folgt, daß $p-1$ und $p+1$ zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen sind und ihr Produkt durch 8 teilbar ist. Wenn $p = 3$, so ist N nicht durch 3 teilbar. Wenn $p = 5$, so ist N nicht durch 5 teilbar. Wir werden zeigen, daß N durch 9 und durch 5 teilbar ist, falls $p \geqq 7$.
Eine Primzahl $p > 3$ kann die Gestalt $3k+1$ oder $3k+2$ haben. Im ersten Falle sind $p-1$ und $p+2$ durch 3 teilbar; im zweiten Falle sind $p-2$ und $p+1$ durch 3 teilbar. Jedenfalls ist N durch 9 teilbar.
Eine Primzahl $p > 5$ kann die Gestalt $5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4$ haben. Es ist leicht zu sehen, daß es in jedem Falle einen Faktor von N gibt, der durch 5 teilbar ist.
Antwort: N ist durch 360 teilbar, falls $p \neq 3$ und $p \neq 5$ ist.

Lösungen zu: Minimum-Wege-Strukturen
Heft 6/86

▲1▲ Nach Bild 5 gilt $\overline{SS_c} = x$, und die Weglänge l ist

$$l = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot d - x + 2\sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2}.$$

Differenziert

$$\frac{dl}{dx} = -1 + 2x\left(x^2 + \frac{d^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 0$$

und $x = \frac{1}{6}\sqrt{6}\cdot d$. Dann ist

$$l = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot d - \frac{\sqrt{6}}{6}\cdot d + 2\sqrt{\frac{6d^2}{36} + \frac{d^2}{4}},$$

$$l = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cdot d = 1{,}93\ldots d.$$

Die Mindestlänge beträgt $1{,}93\ldots d$.

▲2▲ In jedem der rechtwinkligen Dreiecke $\triangle AOD$, $\triangle BCO$, $\triangle ABO$ und $\triangle DCO$ beträgt die Mindestlänge s nach ▲1▲ mit

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot d = \overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO}$$

$$s = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot d.$$

Die Gesamtlänge des Mindestweges ist dann

$$l = 2s = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\,(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cdot d,$$

$$l = (\sqrt{3} + 1)\, d = 2{,}73\ldots d.$$

Die Länge beider Wege beträgt 2,73...d.

▲3▲ Die Länge l_1 des durchgezogenen Weges ergibt sich aus dem Mindestweg s_1 in den beiden gleichschenkligen Dreiecken $\triangle ADO$ und $\triangle BOC$ (siehe Bild 9).
Dann gilt für $\triangle ADO$ nach Bild 14

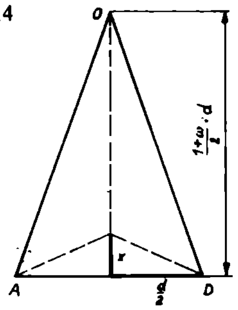
$$s_1 = \frac{(1+\omega)}{2} - x + 2\sqrt{x^2 + \frac{d^2}{4}}.$$

Man differenziert

$$\frac{ds_1}{dx} = -1 + 2x\left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 0,$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot d.$$

Bild 14



Dann ist

$$s_1 = \frac{(1+\omega)\cdot d}{2} - \frac{d}{6}\sqrt{3} + 2\sqrt{\frac{3d^2}{36} + \frac{d^2}{4}},$$

$$s_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3} + \omega)\cdot d.$$

Schließlich ist

$$l_1 = 2\cdot s_1 = (1 + \sqrt{3} + \omega)\cdot d = (2{,}73 + \omega)\cdot d.$$

Die Weglänge l_2 des gestrichelten Weges folgt aus $\triangle AOB$ und $\triangle DCO$ im Bild 9. Nach analogen Rechnungen folgt

$$l_2 = \left[1 + (1+\omega)\sqrt{3}\,\right]\cdot d.$$

▲4▲ Den Mindestweg s_1 im $\triangle AOD$ (siehe Bild 15a) findet man mit Hilfe der Konstruktion von Bild 7 mit

$\overline{AD} = d$ und $\overline{AO} = \frac{d}{2}\sqrt{3}$. Nach Bild 15b gilt dann mit dem Kosinussatz

$$s_1^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\sqrt{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{d}{2}\times\frac{d}{2}\sqrt{3}\cdot\cos 150°,$$

$$s_1^2 = \frac{7}{4}d^2,$$

$$s_1 = \frac{d}{2}\sqrt{7}.$$

Bild 15a

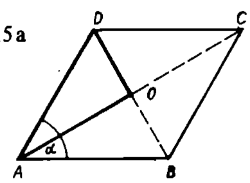
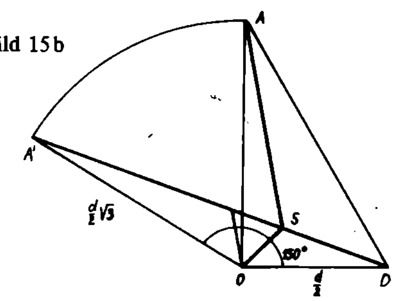


Bild 15b



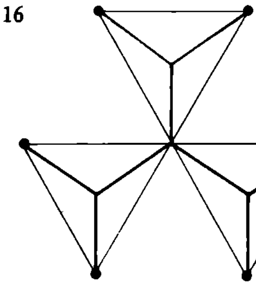
Die Mindestlänge im Viereck $ABCD$ ist schließlich

$$l = 2\cdot s_1 = \sqrt{7}\cdot d = 2{,}64\ldots d.$$

▲5▲ a) Man bestimmt den Mindestweg s der drei eingezeichneten gleichseitigen Dreiecke in Bild 16 nach Bild 4 mit $s = \sqrt{3}\times d$.
Dann ist der gesamte Mindestweg

$$l_a = 3\cdot s = 3\cdot\sqrt{3}\cdot d = 5{,}196\ldots d.$$

Bild 16



b) Man zerlegt das Sechseck in zwei Rhomben und bestimmt nach ▲4▲ deren Mindestwege (siehe Bild 17).
Dann ist der gesamte Mindestweg

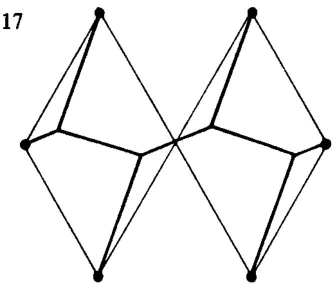
$$l_b = 2\cdot s \text{ mit } s = \frac{d}{2}\sqrt{7},$$

$$l_b = 2\cdot\sqrt{7}\cdot d,$$

$$l_b = 5{,}29\ldots d.$$

c) $l_c = 5d$.

Bild 17



Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 5/86

Ma 5 ■ 2694 Mischa heißt nicht Gerassimow. Da Wolodja nicht in die 5. Klasse geht, heißt er ebenfalls nicht Gerassimow. Deshalb hat Petja den Familiennamen Gerassimow. Der Vater von Wolodja ist Ingenieur, also nicht Dreher. Deshalb hat Wolodja nicht den Familiennamen Iwanow; er heißt vielmehr Wolodja Semenow. Folglich hat Mischa den Familiennamen Iwanow.

Ma 5 ■ 2695 Es ist
$3 + 4 = 7$; $7\cdot 2 = 14$; $14 + 3 = 17$; $17\cdot 2 = 34$; $34 + 3 = 37$; $37\cdot 2 = 74$.
Im Paket waren 74 Pralinen.

Ma 5 ■ 2696 Eine dreistellige Zahl kann nur bei einem Produkt aus 785 mit der 1 entstehen; eine vierstellige Zahl, deren erste Grundziffer 1 ist, ergibt sich nur aus $785\cdot 2$. Folglich ist der zweite Faktor der Aufgabe 121, und es gilt $785\cdot 121 = 94985$.

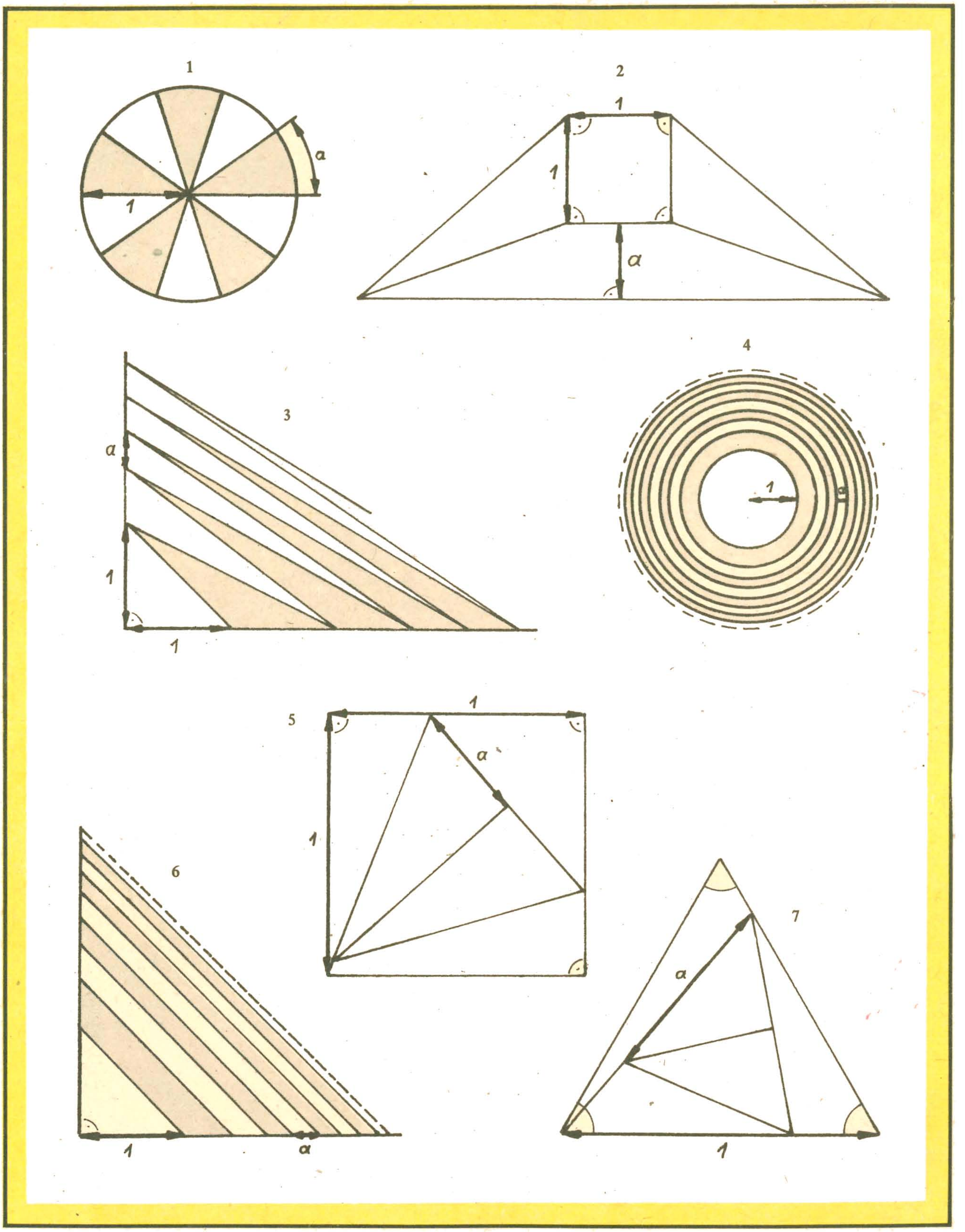
Ma 5 ■ 2697 In zwei Stunden klettert die Raupe $(10-4)$ cm = 6 cm hoch. Nach zehn Stunden ist sie $5\cdot 6$ cm = 30 cm hochgeklettert. Nach 11 Stunden ist die Raupe um 30 cm + 10 cm = 40 cm hinaufgeklettert.

Ma 5 ■ 2698 Das Produkt einer einstelligen Zahl mit 63 ist nur dann zweistellig, wenn der Faktor eine 1 ist. Daher ist der zweite Faktor der Aufgabe 11, und es gilt $63\cdot 11 = 693$.

Fortsetzung folgt in Heft 2/87.

aufgepaßt – nachgedacht

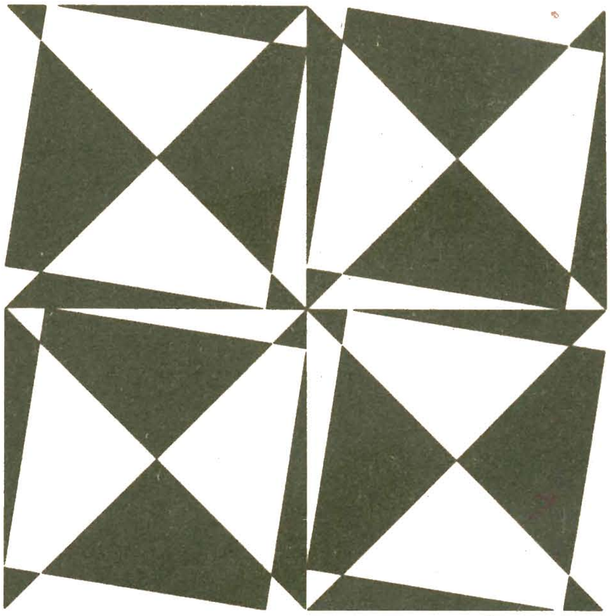
Alle Teile haben den gleichen Flächeninhalt! *aus: Pythagoras, Groningen*

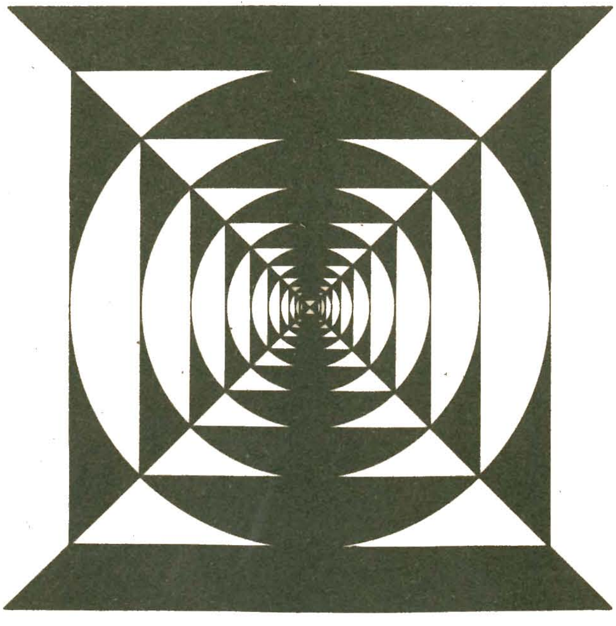


ISSN 002-6395 · alpha · Berlin · 21 (1987) 1 · Seiten 1 bis 24

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha





Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
21. Jahrgang 1987
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

2

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold
Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag ·
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Archiv P. Schreiber, Stralsund (S. 25); Zentralbild/ADN (S. 29); Eigenfoto H.-J. Treder (S. 31); Rolf F. Müller, Gera (S. 34)
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage aus der math. Schülerzeitschrift *Investigator*, London, Autor: Katharine Evans
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 9. Dezember 1986
Auslieferungstermin: 15. April 1987

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

[1] bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Vom Schicksal eines mathematischen Problems

Wie aus dem Fermatschen Problem das Steiner-Weber-Problem wurde

Aufgaben, bei denen in einer Menge M von Objekten oder Situationen ein Element x_0 gesucht wird, für das eine gewisse auf M definierte Funktion f den größten oder den kleinsten Wert annimmt, spielen in der heutigen, stark auf ökonomisches Denken gerichteten Zeit eine hervorragende Rolle unter den Anwendungen der Mathematik. Das war jedoch nicht immer so. Bevor sich am Ende des 17. Jahrhunderts die Differentialrechnung als erstes mathematisches Werkzeug zur Lösung solcher Aufgaben herausbilden konnte, mußte das Interesse der Mathematiker durch viele anregende konkrete *Extremwertaufgaben* in die neue Denkrichtung gelenkt werden. Eine größere Zahl derartiger Aufgaben geht auf den französischen Mathematiker *Pierre de Fermat* (1601 bis 1665) zurück, der auch als erster eine kalkülmäßige Methode zur Lösung von Extremwertaufgaben entwickelte, welche in sich den Keim der rund 50 Jahre später von G. W. Leibniz (1646 bis 1716) und I. Newton (1643 bis 1727) geschaffenen Differentialrechnung trug. Fermat, der eigentlich Jurist war und die Mathematik nur als Liebhaberei (aber mit großem Erfolg) betrieb, setzte seine Aufgaben oft durch Briefe in Umlauf, so auch um 1644 die folgende schöne Aufgabe:

Zu drei gegebenen Punkten P_1, P_2, P_3 ist derjenige Punkt P_0 zu finden, für den die Summe $\overline{P_0P_1} + \overline{P_0P_2} + \overline{P_0P_3}$ der Abstände am kleinsten wird.

(Ist M eine Ebene, die die Punkte P_1, P_2, P_3 enthält, so ist jedem Punkt P von M die Abstandssumme $\overline{PP_1} + \overline{PP_2} + \overline{PP_3}$ als $f(P)$ zugeordnet. Die Fermatsche Aufgabe ordnet sich also wirklich in den oben skizzierten allgemeinen Begriff der Extremwertaufgabe ein und ist sogleich ein Beispiel dafür, daß der Definitionsbereich einer betrachteten Funktion f keine Zahlenmenge sein muß – und auch der Wertebereich nicht, denn für unsere Aufgabe spielt die Möglichkeit, nach Wahl einer Maßeinheit die Streckenlängen durch reelle Zahlen zu messen, überhaupt keine Rolle. Es kommt nur auf die Möglichkeit des Größenvergleichs von Strecken an.)

Lösungen der Fermatschen Aufgabe wurden von drei italienischen Mathematikern veröffentlicht, und zwar 1646 von E. Torricelli (darum bezeichnet man den gesuchten Punkt P_0 auch als Torricellischen Punkt des Dreiecks $P_1P_2P_3$), 1647 von B. Cavalieri und 1659 von V. Viviani. Einiges von ihren Ideen findet sich in den von *W. Jungk* in *alpha* 1982, Heft 3, S. 51 unter (2), (3) und (4) vorgestellten Lösungen der Fermatschen Aufgabe.

Verallgemeinerungen der Fermatschen Aufgabe bieten sich in folgenden Richtungen an:

I. Es können mehr als drei Punkte gegeben sein, und sie müssen dann nicht alle in derselben Ebene liegen.

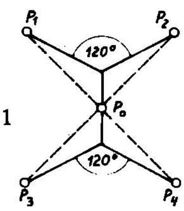
II. Deutet man die Strecken $\overline{PP_1}$, $\overline{PP_2}$, ..., $\overline{PP_n}$ etwa als Transportwege zwischen einer in P gelegenen Produktionsstätte, deren günstigster Standort P_0 ermittelt werden soll, und den gegebenen Standorten P_1, P_2, ..., P_n von Rohstoffen und Zulieferern bzw. Abnehmern, so liegt es nahe, die verschiedenen Strecken $\overline{PP_i}$ mit unterschiedlichen positiven Faktoren k_i zu multiplizieren, je nachdem, wieviel Güter zwischen P und P_i transportiert werden müssen und was dieser Transport pro km kostet. Die so modifizierte Aufgabe lautet: Gesucht ist bei gegebenen P_i und k_i derjenige Punkt P_0, für den

$f(P_0) = k_1\overline{P_0P_1} + k_2\overline{P_0P_2} + \ldots + k_n\overline{P_0P_n}$

minimal wird.

III. Es wird nicht nach einem einzelnen Punkt P_0 sondern nach einem Verbindungssystem zwischen den gegebenen Punkten von minimaler Gesamtlänge gefragt. (Die eingangs erwähnte Menge M ist also jetzt eine Menge von Streckensystemen, die P_1, ..., P_n miteinander verbinden, und die Funktion f, deren Minimum gesucht wird, ordnet jedem dieser Streckensysteme seine Gesamtlänge zu.) Für die vier Eckpunkte P_1, P_2, P_3, P_4 eines Quadrats ist, um den Unterschied zwischen den Aufgaben I und III zu verdeutlichen, der Schnittpunkt P_0 der Diagonalen die Lösung der Aufgabe I (man beweise dies!), während eine Lösung der Aufgabe III in Bild 1 gezeigt ist. (Man vergleiche hierzu die Artikel von *D. Cieslik* und *H.-J.- Schmidt* in *alpha* 6/84 und *C. Isenberg* in 6/86. Dort wird auch erklärt, was die Lösung der ursprünglichen Fermatschen Aufgabe zur Lösung der Aufgabe III beiträgt.)

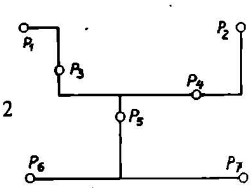
Bild 1



IV. Die gegebenen Punkte könnten z. B. auch auf einer Kugel oder einer anderen gekrümmten Fläche liegen, wobei die Entfernungen dann innerhalb dieser Fläche zu bestimmen sind.

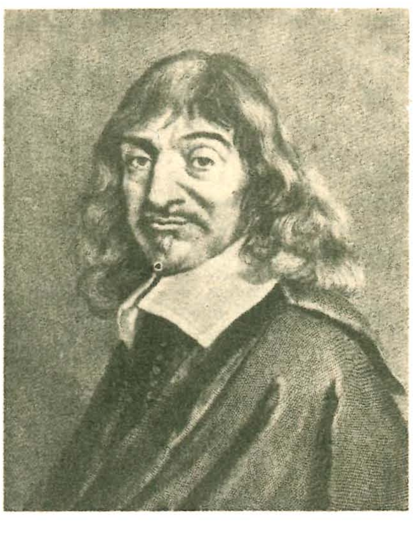
V. Es ist denkbar, daß die gegebenen Punkte zwar in der euklidischen Ebene liegen, aber ihre Entfernungen trotzdem auf eine nichteuklidische Weise zu bestimmen sind. Zum Beispiel kommen in der Elektrotechnik und Elektronik im allgemeinen nur Verbindungssysteme zwischen gegebenen Anschlußpunkten in Frage, die sich aus Strecken in zwei zueinander senkrechten Richtungen zusammensetzen (Bild 2).

Bild 2



VI. Im Umkreis der Fermatschen Aufgabe ist auch das folgende Problem angesiedelt: Wie sehen die Kurven aus, die bei gegebe-

René Descartes, 1596 bis 1650



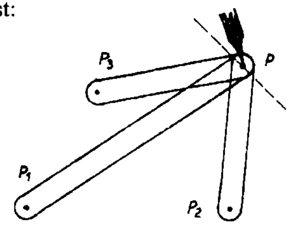
Pierre de Fermat, 1601 bis 1665

nen Punkten $P_1, \ldots, P_n$ und gegebener genügend großer Gesamtlänge s von denjenigen Punkten P gebildet werden, für die

$$\overline{PP_1} + \overline{PP_2} + \ldots + \overline{PP_n} = s \qquad (*)$$

gilt? Diese Kurven bilden gewissermaßen die Höhenlinien derjenigen Fläche oder Landschaft, die entsteht, wenn man über jedem Punkt P der Ebene, die $P_1, \ldots, P_n$ enthält, die Gesamtlänge $f(P) = \overline{PP_1} + \ldots + \overline{PP_n}$ als Höhe aufträgt. Der in Aufgabe I gesuchte Punkt ist der tiefste Punkt dieser Landschaft. Die gesuchten Kurven lassen sich prinzipiell (praktisch stößt dies für eine größere Zahl von Punkten allerdings auf große Schwierigkeiten) durch eine Fadenkonstruktion erzeugen, wie sie in Bild 3 für den Fall dreier gegebener Punkte dargestellt ist:

Bild 3



Die Gesamtlänge des in der gezeigten Weise um P, P_1, P_2, P_3 geschlungenen geschlossenen Fadens sei $2s$. Zieht man nun die Fäden straff und bewegt die in P befindliche Bleistiftspitze im Rahmen der ihr dann noch verbleibenden Bewegungsmöglichkeit, so beschreibt sie die gesuchte Kurve. Für den Spezialfall von zwei gegebenen Punkten P_1, P_2 erhält man die sogenannte *Gärtnerkonstruktion* der Ellipse aus ihren beiden Brennpunkten P_1, P_2.

Die besondere Qualität der ursprünglichen Fermatschen Aufgabe besteht darin, daß sie so viele Anregungen für sinnvolle Verallgemeinerungen, praktische Anwendungen und das Aufsuchen von Zusammenhängen zwischen scheinbar weit voneinander entfernten Begriffen der Mathematik bietet. So ist es nicht verwunderlich, daß der gesamte Problemkreis über Jahrhunderte hinweg bis in die Gegenwart immer wieder Mathematiker beschäftigt hat. Dabei wurden viele Fragen mehrfach aufgeworfen und viele Ergebnisse mehrfach gefunden und so oft nach den falschen Leuten benannt. Daher lehrt die Geschichte des Fermatschen Problems uns auch, daß historisches Wissen für Mathematiker kein bloßer Luxus sondern wichtiger Bestandteil ihrer fachlichen Ausbildung ist. Die folgende Zeittafel faßt einige der wichtigsten Ereignisse in der Geschichte des Fermatschen Problems zusammen.

Zeittafel

1638 R. Descartes fordert Fermat brieflich auf, die Kurven $(*)$ im Fall $n = 4$ zu untersuchen und dabei insbesondere mittels seines neuen Kalküls die Tangenten zu bestimmen.

1644 Fermat stellt seine Aufgabe.

1646 bis 1659 erste Lösung der Fermatschen Aufgabe durch Torricelli (1646), Cavalieri (1647) und Viviani (1659).

1659 E. W. v. Tschirnhaus fordert zur Untersuchung der Kurven $(*)$ im allgemeinen Fall auf und findet deren Fadenkonstruktion.

1775 J. Fr. Fagnano behandelt die Aufgabe I für den Fall von vier Punkten rechnerisch.

1810 P. Tédenat und S. l'Huilier behandeln die allgemeine Aufgabe I mit Mitteln der Differentialrechnung und finden als notwendige Bedingung für den Minimalpunkt P_0, daß er mit einem der gegebenen Punkte $P_1, \ldots, P_n$ zusammenfallen muß oder daß von P_0 nach $P_1, \ldots, P_n$ gerichteten Einheitsstrecken sich zu einem gerichteten geschlossenen Weg zusammenfügen lassen müssen. (Diese Bedingung liefert in den Fällen $n = 2, 3, 4$ triviale bzw. bereits bekannte Lösungen, während sie für $n \geqq 5$ nicht zu einer brauchbaren Lokalisierung von P_0 führt. Man begründe diese Aussagen!)

1836 C. F. Gauß formuliert in einem Brief an den ihm befreundeten Astronomen Schumacher als erster die Aufgabe III.

Um 1837 J. Steiner beschäftigt sich mehrfach mit Aufgabe I und findet ohne Differentialrechnung eine Verallgemeinerung der notwendigen Bedingung von Tédenat und l'Huilier.

1879 K. Bopp löst in seiner Dissertation die von Gauß gestellte Aufgabe III vollständig für den Fall $n = 4$. Er bemerkt

1. daß die Lösung der analogen Aufgabe für größere Zahlen n von gegebenen Punkten einen mit n so schnell wachsenden Aufwand an Fallunterscheidungen erfordert, daß die Aufgabe für große n praktisch unlösbar ist,
2. daß man die Lösung der Aufgabe III durch ein physikalisches Experiment erhalten kann, indem man die Eigenschaft von Seifenlauge benutzt, zwischen Festpunkten ein Häutchen von minimalem Flächeninhalt aufzuspannen.

1909 Der ökonomische Geograph A. Weber formuliert die Aufgabe II als Anwendungsaufgabe, und der Mathematiker G. Pick empfiehlt die mechanische Lösung dieser Aufgabe mittels des sogenannten Varignonschen Gestells zur Bestimmung des Schwerpunktes von n punktförmigen Massen.

1929 J. E. Hofmann findet für die ursprüngliche Fermatsche Aufgabe eine neue Lösung. (Sie ist in dem erwähnten *alpha*-Artikel von W. Jungk unter (1) mitgeteilt.)

1941 In dem heute weltweit verbreiteten Buch *Was ist Mathematik?* von R. Courant und H. Robbins wird das ursprüngliche Fermatsche Problem als Steinersches Problem vorgestellt, die Verallgemeinerung I als Beispiel einer schlechten bzw. unfruchtbaren Verallgemeinerung eines Problems bezeichnet und statt dessen die Verallgemeinerung III empfohlen. Courant und Robbins entdecken die Boppsche Seifenlaugenmethode erneut.

1963 H. W. Kuhn behandelt die Aufgabe II numerisch als Beispiel nichtlinearer Optimierung.

1966 Hanan behandelt erstmals die Aufgabe V.

1977 Garey und Johnson bestätigen im Rahmen eines modernen Begriffssystems die 1879 von Bopp geäußerte Bemerkung 1 (offensichtlich ohne Kenntnis der Arbeit von Bopp).

Seit den sechziger Jahren hat sich eine umfangreiche Spezialliteratur vor allem um Aufgabe III und ihre Variante V gebildet, die seitdem meist als Steinersches Problem oder als Steiner-Weber-Problem bezeichnet wird, obwohl weder Steiner noch Weber sich jemals mit dieser Variante des Fermatschen Problems beschäftigt haben. Übrigens hat anscheinend keiner der hier genannten Mathematiker die gesamte Vorgeschichte des Problems gekannt, und nur wenige haben überhaupt irgendwelche Bemerkungen darüber gemacht.

Während die weitere Bearbeitung der für Anwendungen, insbesondere beim Entwurf mikroelektronischer Schaltungen, heute hochaktuellen Aufgabe V ein umfangreiches und tiefgehendes Spezialwissen erfordert, bieten sich im Umkreis der ursprünglichen Fermatschen Aufgabe immer noch reizvolle und für den Hobbyknobler erfolgversprechende Teilfragen an, wie zum Beispiel die konstruktive Lösung der Aufgabe I für den Fall von vier nicht in einer Ebene gelegenen Punkten, die nähere Untersuchung von Spezialfällen der unter VI beschriebenen *verallgemeinerten Ellipsen* (oder *Kurven mit n Brennpunkten*, wie Tschirnhaus sie nannte) oder die Frage, wie man die Lösung der Aufgabe I für große Punktsysteme schrittweise auf die Lösung analoger Aufgaben für kleinere Teilsysteme zurückführen kann.

P. Schreiber

Unterhaltsame Psychologie

Lest die folgenden Begebenheiten!
Wißt ihr die Antwort?

1. Zwei Menschen, die von Kind an befreundet sind, treffen sich. Zwischen ihnen entspinnt sich folgender Dialog:
„Wir haben uns ja ewig nicht gesehen und auch nicht voneinander gehört." – „Ja, ja, und ich habe mittlerweile schon eine Tochter", entgegnete der andere. – „Wie heißt sie denn?" – „So wie ihre Mutter." – „Und wie alt ist die kleine *Johanna* jetzt?"
Wie war der eine Gesprächspartner darauf gekommen, daß das Kind *Johanna* heißt?
2. Zwei Männer wollen einen Fluß überqueren. Das Boot aber, das sie am leeren Strand finden, bietet nur für einen Platz. Trotzdem überqueren beide den Fluß in diesem Boot und setzen ihren Weg fort. Wie konnten sie das tun?

Entnommen aus:
Unterhaltsame Psychologie,
von Konstantin Platonow,
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

alpha-Wettbewerb 1985/86

Abzeichen in Gold

Fortsetzung

Für siebenjährige Teilnahme

Beate Thomas, Halle; Silke Umbreit, Ilmenau; Steffi Gebauer, Jörg Fiebig, beide Jena; Henrik Hodem, Kaltennordheim; Michael Tix, Ingolf Knopf, Michael und Jürgen Hoppe, alle Karl-Marx-Stadt; Torsten Schütze, Klettenberg; Susan Hoffmann, Klingenthal; Viola Sell, Lobenstein; Henning Hetzer, Oettersdorf; Steffen Scheithauer, Parey; Kay Leitz, Michael Taeschner, beide Parchim; Antje Reichel, Pirna; Andrea Schmidt, Potsdam; Wolfgang Schneider, Radeberg; Lutz Marschner, Riesa; Beate Walter, Röbel; Anne und Heiner Ruser, beide Rostock; Astrid Grulka, Schernberg; Achim Kröber, Schönbach; Roland Drendel, Senftenberg; Jochen Wetzel, Sömmerda; Bert Liebmann, Sondershausen; Wolfgang Vogel, Thalheim; Lothar Matzker, Torno; Ralf Gössinger, Unterbreizbach; Andreas Heidtmann, Waren; Volker Lehmann, Johannes Thäter, beide Weimar; Lutz Grothe, Wiederitzsch; Bert Winkler, Wilkau-Haßlau; Mathias Schwenck, Wittenburg; Uwe Schulz, Zittau

Für sechsjährige Teilnahme

Uwe Döbler, Arnstadt; Marcus Markardt, Bad Salzungen; Tom Pfeifer, Stefan Bading, Sarah Pietzsch, Frauke Wendt, alle Berlin; Alice Kraneis, Bernburg; Christian und Steffen Gering, Beuditz; Ralf Gröper, Biesenrode; Grit Giering, Blumberg; Michael Kremmer, Breitungen; Wolfgang Jäckel, Demitz-Thumitz; AG Math. der POS K. Niederkirchner, Domersleben; Ullrich Hartung, Klaus-Horst Milde, Jens Haufe, alle Dresden; Andreas Prüver, Eberswalde; Lutz Küch, Erlau; Ulrike Rößner, Erfurt; Kai Mettke, Alexander Schachow, beide Frankfurt (Oder); Anke Zimmermann, Geithain; Kristina Böttger, Görlitz; Andrea Rueß, Goldberg; Sven Rudolph, Großröhrsdorf; Holger Porath, Güstrow; Antje Ohlhoff, Halberstadt; Anja Botzon, Havelberg; Sylke Gonschorek, Harzgerode; Birgit Bremer, Heiligenstadt; Maik Otto, Holzthaleben; Marie-Luise Funk, Greifswald; Frank Lautenschläger, Ilsenburg; Stefan Lippmann, Ilsenburg; Katrin Holzhaus, Gerd F. Reifarth, Rainer Werner, Holger Illgen, Heiko Frank, alle Karl-Marx-Stadt; Frank Müller, Klaffenbach; Kerstin Trägenap, Klietz; Annett Raue, Langenweddingen; Thomas Kaufhold, Leinefelde; Bodo Marks, Leipzig; Petra Heiliger, Leuna; Hanna Erler, Massanei; Steffen Scharnowski, Möser; Martina Schulz, Steffen Siewert, beide Neuhaus; Karsten Kattner, Pasewalk; Ingo Schubert, Pfaffroda; Martina Schenck, Pitschen-Pickel; Joachim Rothe, Pretzschendorf; Andreas Suchanow, Neubrandenburg; Dagmar und Birgit Lenz, Reichenbach; Ines Schmidt, Reuth; Martin Wolff, Ute Möller, Stephan Dittmann, alle Rostock; Sven Ungelenk, Saalfeld; Kirsti Knabe, Sondershausen; Katrin Brock, Steinbach-Hallenberg; Claudia Schwartz, Suhl; Astrid Rogowski, Schwerin; Tanja Reinwarth, Teltow; Torsten Marx, Ueckermünde; Ina Gössinger, Unterbreizbach; Tom Boyks, Vietlübbe; Heike Bauer, alpha-Club, Klasse 6 und Kl. 7, Vitzenburg; Edith Boettcher, Weimar; Kristin Neumann, Zella-Mehlis; Frank Goth, Waltersdorf

Für fünfjährige Teilnahme

Matthias List, Altenburg; Gerlind Krolop, Angern; Veneta Türke, Auerbach; Lothar Fischer, Bad Köstritz; Ines Sobanski, Bad Liebenstein; Ute Partsch, Bad Salzungen; Veit Eska, Bad Sülze; Sven Aßmus, Gerhard Haug, Eva-Christina Müller, Annette Spangenberg, Claudia Lehmann, Petra Kuckuk, Axel Schneider, Sven Hartmann, Cornelia Wolf, alle Berlin; Peter Grabs, Bibra; Carsten Schmidt, Borna; Angela Maier, Bürgel; Rainer Lenk, Olaf Baur, beide Cottbus; Charis Förster, Crimmitschau; Steffen Eisenblätter, Delitzsch; Eva Faßmann, Dessau; Tino Riethmüller, Dingelstädt; Hans Schwenke, Dohna; Michaela Meyer, Dorndorf; Christoph Reichl, Eckart Henßge, Sylvia Penz, Rita Dach, Thomas Rotter, alle Dresden; André Kratzert, Dürrröhrsdorf; Christian Pigorsch, Eisleben; Andreas Flemming, Erla; Thomas Gerlach, Erfurt; Guido Strauch, Finsterwalde; Sven Schmitt, Freiberg; Hanka Pruditsch, Geithain; Lars Schiefner, Gesack; Thomas Galley, Golßen; Gunthard Stübs, Thilo Kuessner, beide Greifswald; Daniela Burkhardt, Guben; Heinz Seifert, Hagenow; Alexander Schmerling, Halle-Neustadt; Falk Ottilie, Harzgerode; Schulclub der EOS W. Pieck, Heiligenstadt; Hagen Reimann, Horka; Klaus Liesenberg, André Klinge, beide Ilsenburg; Gunnar Clausnitzer, Ivenack; Uta Störl, Ulf Prodlo, beide Jena; Jana Hodam, Kaltennordheim; Ricarda Baartz, Kandelin; Uwe Pirl, Karl-Marx-Stadt; Katja Hoffmann, Klingenthal; Sven Juffa, Langewiesen; Thomas Neuhaus, Leipzig; Beate Balzer, Lindow; Claas Gennrich, Lösenberg; Jens Löw, Luisenthal; Simone Schönemann, Thomas Rolle, Antje Mißbach, alle Magdeburg; Gerald Werner, Meiningen; Manja Franke, Mülsen; Bodo Braune, Neuburxdorf; Dirk Plischka, Jens Burmann, beide Neuhaus; Falk Thomas, Neukirch; Dirk Welke, Stefan Wamest, beide Neuruppin; Lars Abbe, Niederorla; Christian Usbeck, Oberschönau; Uwe Anke, Pappendorf; Claudia Paschwitz, Räckelwitz; Steffen Dragesser, Roßdorf; Katja Grunow, Sangerhausen; Andreas Jähnichen, Schneidlingen; Bertram Bracher, Schwarzheide; Ulf Schmiedel, Antje Blechschmidt, beide Schwarzenberg; Rosa Flint, Stapel; Christiane Marr, Frank Holland, Thomas Reumschüssel, Jutta Huhn, Gerit Hollan-Moritz, Katrin Usbeck, Manuela Reich, Mario Endter, Sandra Ebert, Anja Köhler, alle Steinbach-Hallenberg; Rüdiger Scheller, Teltow; Sven Janssen, Tornau; Ansgar Bock, Erik Schneider, Björn Langlotz, Wim Fleischhauer, Katja Lederhos, alle Vacha; Fredrik Schiller, Voigtsgrün; Ben Forstreuter, Thomas Kudraß, Achim Nahler, Swen Hoffmann, alle Weimar; René Voigt, Wernburg; Holger Post, Wiebendorf; Carl Grosch, Wolferstedt; Tilo Marschall, Zella-Mehlis; Matthias Klinke, Zeulenroda; Diana Michler, Zschortau; Lutz Eichner, Halle-N.

Für vierjährige Teilnahme

Kerstin Fredrich, Angermünde; Martina Mazurek, Aschersleben; Kathleen Heitfort, Bad Gottleuba; Michael Henning, Bad Salzungen; Juliane Röthmaler, Dirk Pandel, Anita Winter, Frank Wagner, alle Berlin; Annette Scholz, Blumberg; Norbert Wölfel, Brandenburg; Susanne Vinz, Brunnharshausen; Cynthia Bengs, Bürgel; Stefan Janke, Burg; Roland Bullan, Thomas und Birgit Reißner, Silvio Löffler, Daniela Kempf, alle Cottbus; AG Jg. Math. O.-Grotewohl-OS, Dreitzsch; Dorothea Krippstädt, Rita Kempe, Birgit Jeske, Elke Seifert, Henrike Süß, Kerstin Pohle, Daniel Overmann, Cornelia Zillmann, Susann Schober, Frank Naumann, Michael Potthoff, Matthias Overmann, alle Dresden; Judith Knopf, Drosa; Thomas Guder, Claudio Bannicke, beide Eberswalde; Matthias Buchmann, Eisenberg; Sven Hauptvogel, Yvonne Arnold, Susanne Förster, Kathleen Schaffer, Anja Titzmann, alle Elsterwerda; Andreas Kupsch, Finsterwalde; Silke Breunung, Geisa; Alexander und Mathias Neuber, Gerbitz; René Franke, Gersdorf; Dietlind Mai, Gillow; Gernot Mersiowsky, Görlitz; Andrea Landgraf, Gräfenthal; Michaela Große, Gohrau; Volker Schönberg, Groß Klessow; Karsten Hennig, Großbörner; Rene Kallenbach, Gumpelstadt; Ralf Gericke, Hainichen; Elke Heidemann, Halberstadt; Almuth Berg, Halle; Uta Börner, Harzgerode; Jan Wohlbold, Heidenau; Roberto Stahl, Herzberg; Stefan Heiber, Heyda; Susan Wiklinski, Hillersleben; Matthias Fuß, Frank Lampert, beide Kaltennordheim; Gunnar Bimberg, Kandelin; Tobias Wilke, Ulf Niederländer, beide Karl-Marx-Stadt; Carsten Blech, Klein-Rodensleben; Dirk Raue, Langenweddingen; Jörg Anschütz, Lehesten, Cornelia Häfner, Leinefelde; Rodica Meltzer, Beate Wasner, beide Leipzig; Andreas Vogel, Limbach-Oberfrohna; Hardy Dömpke, Löderburg; Ina Büttner, Ronny Henschel, Manja Lehnhuß, alle Lössau; Marco Schmidtgen, Luckenwalde; Giselher Schütze, Magdeburg; Manuela Zenker, Mehltheuer; Isabelle Nicol, Meiningen; Karsten Knothe, Merseburg; Christina Lang, Merkers; Maren Wolf, Milkau; Rüdiger Grewe, Neuhaus; Christian Bey, Neustadt; Lars Fischer, Niederschmalkalden; Kathrin May, Olbernhau; Carola Walter, Ottendorf-Okrilla; Felix Kraenz, Picher; Olav Zirnstein, Pirna; Axel Buerke, Pottenhagen; Katrin Lucchesi, Pulsnitz; Mareike Schmidt, Michael Hainke, Andrea Thiele, alle Rackwitz; Marco Rößler, Radebeul; Susanne Norden, Ribnitz-Damgarten; Beatrix Lorenz, Ellen Kupfer, beide Riesa; Enrico Anton, Steffi Bräunung, Claudia Lück, Liane Marschall, Daniela Bauer, Jens Weisheit, Jeannette Hornung, Christine Peter, Anja Bauckmann, alle Roßdorf; Rainer Walke, Kirstin Peter, Karen Meyer, Anika Drews, alle Rostock; Michael und Heike Gerhardt, Sandersleben; Sandra Henschke, Schierke; Marion Walther, Schlottwitz; Andreas Meynhardt, Annette Ruß, beide Schmalkalden; Oliver Henze, Reno Wenzel, beide Schneidlingen; Stefanie Hopf, Schönbrunn; Sylvia Ulrich, Schwallungen; Holger Reinitz, Sommerfeld; Carola Mücke, Sondershausen; Axel Bichler, Sondershausen; Thomas Heublein, Steinach; Steffi Döll, Alexander Anschütz, Corina Dieg, Sabine Recknagel, Daniela Jung, Silke Gerlach, Peter Reumschüssel, Carsten Bühner, Sven Reumschüssel, René Scheerschmidt, Alexander Wäldrich, Norbert Zeiß, Sören Bube, Katrin Häfner, Katja Usbeck, Sandra Usbeck, Katrin Recknagel, Bernd Büttner, alle Steinbach-Hallenberg; Marlies Müller, Ralf Busse, Beide Strasburg; Veronika Fischer, Töplitz; Sabina Kaiser, Tornau; Beate Günther, Markus Messerschmidt, Mathias Storch, Nico Messerschmidt, Beate Hahne, Stefan Otto, Rene Storch, Gitta Eichel, alle Trusetal; Michaela Berndt, Ueckermünde; Kerstin Waitz, Anja Frank, Jeanette Pfromm, alle Vacha; Dag Lohse, Vielau; Erik Möbus, Wegeleben; Andreas Günther, Weinböhla; Lars Fischer, Wernshausen; Sven-Uwe Kanngießer, Wolmirleben; Andreas Vogt, Christiane Lehmert, Kirsti Linke, alle Worbis; Heike Dittrich, Zeuckritz; Claudia Heret, Zwickau; André und Dietmar Linde, Zittau

Vorbildliche Hilfe

Unser Dank gilt den Verlagen, die Bücher im Werte von 1 500 M für die fleißigsten Wettbewerbsteilnehmer zur Verfügung stellten:
BSB B. G. Teubner, Leipzig;
VEB Fachbuchverlag Leipzig;
Der Kinderbuchverlag Berlin;
Militärverlag der DDR, Berlin;
Sportverlag, Berlin;
transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin;
VE Verlag Volk und Wissen, Berlin;
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin;
VEB Verlag Technik, Berlin.

Die Mathematik als Produktivkraft

Gedanken nach dem XI. Parteitag der SED Teil 2

Nur auf der Grundlage der neuen mathematischen Naturgesetzmäßigkeiten ist es möglich, die Präzision in der Meßtechnik und damit auch in der Technologie soweit zu erhöhen, daß solche Schlüsseltechnologien wie Mikroelektronik und Robotertechnik, Informationstechnologien, Kernenergetik, Weltraum- und Nachrichtentechnik, Mikromechanik und die Biotechnologien möglich werden.

Die große stimulierende Wirkung einer richtigen Einstellung zu den Wissenschaften ist den Kommunisten aus ihrem praktischen Kampf geläufig. Lenin hatte sie in die Losung „Kommunismus, das ist Sowjetmacht plus Elektrifizierung" gegossen. Dies ist ein Beispiel, über welches sich auch gegenwärtig erneut nachzudenken lohnt. Denn es geht nicht einfach darum, diese Losung zu aktualisieren, indem man etwa sagt: „Kommunismus, das ist Macht der Arbeiterklasse plus Hochtechnologie".
In der Leninschen Losung war mit der Elektrifizierung zu Beginn unseres Jahrhunderts eine Technologie angesprochen, die aus der Sicht der damaligen Naturwissenschaften etwas prinzipiell Neues darstellte. Erstmals war mit dem Elektromagnetismus eine Theorie entstanden, die zwei fundamentale Kräfte, oder wie wir heute sagen Wechselwirkungen, in einer einheitlichen Theorie vereinigte, die elektrische und die magnetische. Nur dadurch wurde der Bau von Dynamomaschinen, die Funktechnik, kurz die gesamte Elektrotechnik möglich, die das Alltagsleben im 20. Jahrhundert so revolutionierend verändert hat.
Nachdem in den 70er Jahren bereits eine Vereinigung der schwachen und der elektromagnetischen Wechselwirkung gelang, die der *wahren* Theorie wahrscheinlich sehr nahe kommt, deutet vieles darauf hin, daß wir vor einem qualitativen Sprung bei der Schaffung einer einheitlichen Theorie aller Wechselwirkungen stehen.
Indikator einer solchen Situation ist das sprunghafte Ansteigen der diesbezüglichen Vorhersagen auf dem Gebiet der Elementarteilchenphysik im letzten Jahrzehnt und die kurzfristigen Bestätigungen, die diese gefunden haben. Aus diesen Vorhersagen ergab sich u. a., daß ganz merkwürdige Teilchen existieren müßten, die in den 80er Jahren auch mit großem experimentellem und damit auch finanziellem Aufwand gefunden wurden. Zu ihnen gehören die W- und die Z-Bosonen sowie das neue Zeta-Teilchen. Wie konnten solche Teilchen vorausgesagt werden?
Das war möglich, weil man mathematische Symmetriegesetze in den Feldtheorien entdeckt hatte. Gleichzeitig stellte man fest, daß die Symmetrien, die in den Gesetzen herrschen, im realen Universum gebrochen sind, so wie die räumliche Symmetrie gebrochen ist, wenn ein Stoff beim Kondensieren kristallisiert. Es entstehen dabei neue Strukturen, und so entstehen auch die neuen Elementarteilchen. Deswegen muß auch das Photon die Masse 0 haben. Die anderen, die W- und Z-Teilchen, sind sehr schwer, etwa 80 Protonenmassen.
Für ihre Entdeckung wurde 1984 an Rubbia und van der Meer der Nobelpreis verliehen. Es ist wohl das erste Beispiel, daß sich jemand den Nobelpreis nicht nur vorgenommen hat, sondern daß er strategisch geplant wurde. Sie haben ihn dann auch prompt ein Jahr nach der Entdeckung erhalten.
Aber welche Überzeugungskraft der Mathematik! Wenn der mathematische Apparat solche seltsame Teilchen voraussagt, so werden sie auch gefunden. Alles fußt auf der Symmetrie gemäß der Konzeption des Erlanger Programms.
Als der 23jährige Professor Felix Klein 1873 in Erlangen seine *Vergleichenden Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* vortrug, wurde für die weitere naturwissenschaftliche Forschung ein Programm entworfen, das durch die Ergebnisse unseres Jahrhunderts, wie wir sehen, seine volle Bestätigung gefunden hat.
Dieses *Erlanger Programm* ist eines der größten Dokumente in der Geschichte der Mathematik. Es nannte als die Aufgabe der Mathematik, die Geometrie und die dynamischen Systeme mittels der Gruppentheorie zu klassifizieren.
Damals erschienen trotz der Ideen von Riemann und Helmholtz Geometrie und die dynamischen Systeme noch als natürlich getrennt – die Geometrie als die Struktur, in der die Dynamik abläuft.
Nach Einstein und den Entwicklungen der Quantenfeldtheorie mit ihrer Geometrisierung der Dynamik wird die Zielstellung des *Erlanger Programms* zur Aufgabe, die Bewegungen der physikalischen Realität und die damit verbundenen Strukturbildungen aus den Symmetrien und Invarianzeigenschaften heraus zu verstehen.
Natürlich ändern sich die Betrachtungsweisen und im Laufe der Entwicklung rücken andere Momente in das Zentrum der Bewertungen. Aber im Moment ist noch kein Ende der seit nun mehr als 100 Jahren währenden Entwicklung im Geiste des Erlanger Programms abzusehen.
Betrachten wir noch ein anderes Beispiel: Seit vor hundert Jahren durch den Hallenser Mathematiker Georg Cantor die Mengenlehre begründet wurde, hat die Konstruktion pathologischer Mengen immer eine Rolle gespielt. Eine dieser Mengen ist das Cantorsche Diskontinuum. Eine interessante Menge, unzusammenhängend, jeder Punkt ist Häufungspunkt, überabzählbar aber vom Maß Null.
Noch während meiner Ausbildung in den 60er Jahren erschien diese Menge im wesentlichen als ein interessantes mögliches Gegenbeispiel zu allen sonst guten und praktischen Eigenschaften einer Menge.
In den 70er Jahren hat sich die Situation dramatisch gewandelt. Heute weiß man, daß bei nichtlinearen Effekten oder fastperiodischen Einflüssen in den Meßwerten fast immer Aufspaltungen vom Typ des Cantorschen Diskontinuums zu beobachten sind.
Dies gilt für die sich immer feiner auffächernden Saturnschen Ringe genauso wie für Spektren von Schrödingeroperatoren mit fastperiodischen Potentialen. Mengen vom Typ des Cantorschen Diskontinuums sind auch das mathematisch Typische beim chaotischen Verhalten, sei es bei der Turbulenz oder bei dem chaotischen Auf und Ab in einem Elektrokardiogramm.
Analysiert man also mit dem Blick auf die Hochtechnologien die Wechselwirkung zwischen Mathematik und Praxis in unserem Jahrhundert, so kann man nur erstaunt sein, wie kurzfristig und tief neuentstandene, scheinbar ganz abstrakte mathematische Ergebnisse über andere Wissenschaften die Praxis grundlegend umgestalten halfen.
Wir sind für die künftigen Aufgaben gerüstet. Die mathematische Grundlagenforschung der DDR hat im Fünfjahrplanzeitraum 1981 bis 1985 eine vielseitige Entwicklung vollzogen. Die generell positive Bilanz der politisch stabilen, wirtschaftlich dynamischen Entwicklung der DDR, die auf dem XI. Parteitag gezogen werden konnte, ist nicht zuletzt dadurch bedingt, daß in der DDR Wissenschaft, Technik und Ökonomie zum Wohle des Volkes vorangebracht wurden. Das spiegelt sich auch in den Ergebnissen der Mathematik unseres Landes wider und wird durch bemerkenswerte Resultate untermauert.
Die mehr als 8000 im Fünfjahrplanzeitraum fertiggestellten Arbeiten, darunter mehr als 200 neue Bücher, belegen schon rein quantitativ, welch großes Potential der mathematischen Grundlagenforschung in der DDR vorhanden ist. Die positiven Ergebnisse waren nicht zuletzt deswegen möglich, weil die Leistungsfähigkeit und Leistungsbereitschaft der Wissenschaftler ständig gestiegen sind, ein Ergebnis der

unseren sozialistischen Prinzipien gemäßen langfristigen planmäßigen Entwicklung der Kader und speziell des wissenschaftlichen Nachwuchses. Das drückt sich auch in den mehr als 600 erfolgreich abgeschlossenen Promotionen A und B aus. –

All das war deshalb möglich, weil schon der Nachwuchs eine ständige Förderung erfährt, aber auch ständig herausgefordert wird.

Dies gilt auch schon für die *Jungen Mathematiker* unter den Schülern. Die Aufgaben der diesjährigen Mathematikolympiade (1986) hatten in beiden Olympiadeklassen ein hohes Niveau. Die erfolgreiche Bewältigung dieser Aufgaben durch viele Teilnehmer macht euer Leistungsvermögen deutlich.

Besonders hervorzuheben sind die Leistungen von Mathias-Torsten Tok von der Spezialklasse für Mathematik/Physik der *Martin-Luther*-Universität Halle und Gunter Döge von der Spezialschule mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Richtung *Friedrich Engels* in Riesa, die in der Olympiadeklasse 11/12 volle Punktzahl erreichten. Ebenfalls bemerkenswert ist die Leistung von Dirk Liebscher von der Spezialschule mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Richtung *Georg Thiele* in Kleinmachnow, der in der Olympiadeklasse 10 39 Punkte erhielt.

Die 30 Frühstarter beider Olympiadeklassen erzielten ebenfalls sehr gute Ergebnisse.

Thomas Mautsch, Schüler der 8. Klasse der *Rosa-Luxemburg*-Oberschule in Luckau, wird mit einem 3. Preis geehrt und erreichte immerhin 28 Punkte.

Von euch, liebe Freunde, von der Jugend in eurem Alter, von der Leistungsfähigkeit, die ihr euch jetzt durch euren Fleiß erwerbt, führt der Weg direkt zu den Spitzenleistungen, die wir brauchen, damit diese *Schlacht* für den Frieden, von der gesprochen wurde, gewonnen werden kann.

Die meisten der bahnbrechenden Leistungen werden in jungen Jahren erzielt bzw. liegen in jungen Jahren zumindest die Ansätze für bedeutende Leistungen in höherem Alter vor.

Gauß war 15 Jahre alt, als er den Primzahlsatz empirisch fand, mit 19 Jahren entdeckte er die Konstruierbarkeit des regelmäßigen 17-Ecks mit Zirkel und Lineal. Abel entdeckte mit 23 Jahren die Unmöglichkeit der Lösung der algebraischen Gleichungen höheren als 4. Grades durch Radikale; als er mit 27 Jahren starb, hatte er die Theorie der elliptischen Funktionen, der Abelschen Integrale und vieles andere mehr geschaffen.

Galois war in dem Alter, in dem, wie manche glauben, die Studenten mit Klausuren und Testaten bei der Stange gehalten werden müssen, schon tot; sein Einfluß aber auf die Mathematik wird Jahrhunderte überdauern. Felix Klein war mit 22 Jahren Professor, nachdem er mit 21 Jahren sein berühmtes Erlanger Programm geschaffen hatte, über das (schon) gesprochen wurde. Minkowski errang mit 18 Jahren den großen Preis der Pariser Akademie, Einstein war 25 Jahre, Heisenberg 26 Jahre, als sie ihre berühmten Theorien schufen. Van der Waerden hat mit 28 Jahren seine die gesamte moderne Algebra revolutionierende Monographie geschrieben und Kolmogorov war knapp 30 Jahre, als er die Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung schuf.

Das gilt heute so wie eh und je. Gerade auch auf dem Gebiet der Informatik, bei der Schaffung der Software, setzt die Jugend Maßstäbe.

Das wissenschaftliche Niveau einer Nation hängt vielleicht mehr von ihren Schulen als von ihren Universitäten ab. So war z. B. Deutschland in den 30er Jahren des vorigen Jahrhunderts keine bedeutende wissenschaftliche Macht. Um diese Zeit aber wurde ein relativ fortschrittliches System der Lehrerbildung eingeführt und der Gymnasialunterricht in den Naturwissenschaften wurde auf ein entschieden höheres Niveau gehoben. 10 bis 15 Jahre später hatte sich die deutsche Wissenschaft eine damals führende Stellung in der Welt verschafft.

Die Anforderungen an einen jungen Menschen, der sich der Wissenschaft widmen will, müssen außerordentlich hochgestellt sein. Es ist eine Auszeichnung, sich mit der Wissenschaft befassen zu dürfen und ein solcher Weg erfordert persönliche Opfer und ein über dem Durchschnitt der Gesellschaft liegendes Arbeitspensum. Eine notwendige Bedingung für eine solche Einstellung ist die Liebe zur Sache, die Begeisterung für die Wissenschaft. Diese Liebe zur Sache charakterisiert alle bedeutenden Wissenschaftler der Vergangenheit. Es ließe sich kein einziges Beispiel eines bedeutenden Wissenschaftlers aus der Vergangenheit anführen, der die Wissenschaft betrieb, um sein Brot zu haben. Gerade bei den großen Mathematikern ist eine geradezu fanatische Hingabe an die Wissenschaft zu beobachten. So wird von Weierstraß berichtet, daß es, als er noch Gymnasiallehrer in Bransberg war, öfter vorkam, daß er nach einer durchgearbeiteten Nacht früh vergaß, daß er Unterricht hatte und von seiner Arbeit weg zum Unterricht geholt werden mußte. Dedekind berichtete von sich, daß ihm die Schaffung der Idealtheorie algebraischer Zahlkörper eine mehrjährige unbeschreibliche Anstrengung gekostet habe. In einer Biographie von Felix Klein liest man: Er verschenkte nicht eine Minute und die Freuden der gewöhnlichen Menschen gönnte er sich nicht. Über Hilbert schreibt Blumenthal in einer Lebensskizze, daß er neben dem unbewußten Fleiß, nämlich in allen Lebenslagen über mathematische Probleme nachzudenken, einen wahrhaft Kantischen Fleiß besessen habe.

Karl Marx hat die hohen moralischen Eigenschaften, die ein Wissenschaftler haben muß, mit folgenden eindrucksvollen Worten charakterisiert: „Einen Menschen aber, der die Wissenschaft einem nicht aus ihr selbst, sondern von außen, ihr fremden, äußerlichen Interessen entlehnten Standpunkt zu akkomodieren sucht, nenne ich gemein."

Eine solche Hingabe ist nicht nur für denjenigen, der sich der wissenschaftlichen Arbeit verschrieben hat, die größte Befriedigung.

Wir brauchen sie auch als Gesellschaft, weil die Klassenkämpfe unserer Zeit nur durch den höchsten Einsatz entschieden werden können. Im Sozialismus können wir alles sozial gerecht gestalten, aber wir können nichts mit weniger Anstrengung erreichen.

Soll die Klassenschlacht ohne Waffen gewonnen werden, muß der Einsatz auf den anderen Gebieten um so höher sein. Nur so kann die Menschheit in die kommunistische Zukunft gebracht werden.

Natürlich kennen wir heute nicht die Zeiträume genau, in denen wir den naturwissenschaftlichen, technischen und ökonomischen Reifegrad erreichen werden, um real zum kommunistischen Verteilungsprinzip „Jeder nach seinen Fähigkeiten – jedem nach seinen Bedürfnissen" übergehen zu können.

Aber die ausgeprägte Überzeugung, daß dies das humanistische Ziel all unserer Anstrengungen und Kämpfe ist, ist von großer mobilisierender Wirkung. Die Veränderungen, die in den letzten Jahren in Naturwissenschaft und Technik eingetreten sind, sind erstaunlich und unerwartet. So daß – wie es Genosse Kurt Hager formulierte – „der erreichte Entwicklungsstand der Produktivkräfte das große humanistische Ziel, Hunger, Not, Armut und Unwissenheit zu überwinden und allen Menschen wachsenden materiellen Wohlstand, Bildung und gesundheitliche Betreuung zu ermöglichen, in greifbare Nähe rückt".

Auch in den neuen mathematisch-naturwissenschaftlichen Theorien spüren wir bereits die Konturen dieser künftigen Welt. Alles was die Menschheit in diesem Jahrhundert begonnen hat, den Übergang vom Kapitalismus zum Sozialismus und den Vorstoß in die Struktur der Materie, wird sie im nächsten Jahrhundert fortsetzen. Und es wird ein Jahrhundert des Friedens und des Sozialismus sein. *G. Laßner*

Produktion von Taschenrechnern im VEB Mikroelektronik Mühlhausen

Zur Lösung von Zahlenrätseln mit graphischen Mitteln

Sicher hat sich schon jeder mehr oder weniger erfolgreich mit Zahlenrätseln beschäftigt. Obwohl sie zumeist unter der Überschrift *Raten und Rechnen* gestellt werden, kommt es bei ihrer Lösung viel weniger auf Raten und Probieren an, als darauf, durch logisches Überlegen die richtige Ziffernkombination zu finden.

Im folgenden wollen wir uns mit der Lösung von Zahlenrätseln befassen. Dazu betrachten wir die folgende Aufgabe:

$$\begin{array}{lccccc}
(1) & \mathrm{AHB} & : & \mathrm{JB} & = & \mathrm{HG} \\
 & - & & \cdot & & + \\
(2) & \mathrm{DI} & + & \mathrm{FC} & = & \mathrm{CA} \\
\hline
(3) & \mathrm{DKF} & - & \mathrm{KGB} & = & \mathrm{FFF} \\
 & (4) & & (5) & & (6)
\end{array}$$

Jeder Buchstabe bedeutet jeweils eine Ziffer, gleiche Buchstaben immer gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Diesen Angaben entsprechend sind Zahlen zu finden, die die waagerechten ((1)–(3)) und senkrechten ((4)–(6)) Gleichungen richtig lösen.

Wie kann man nun Zahlenrätsel möglichst einfach lösen? Zunächst wird man nachsehen, ob gewisse Buchstaben von vornherein die richtigen Ziffern zugeordnet werden können.

In unserem Beispiel erkennt man aus (3), daß $B = 0$ gelten muß, und aus (6) folgt dann $F = 1$. Damit wird auch $I = 9$ in (4) eindeutig festgelegt.

Weitere Zuordnungen liegen nun nicht mehr auf der Hand. Man erkennt zwar Zusammenhänge zwischen den Unbekannten, z.B. muß wegen (6) $G + A = 11$ oder wegen (4) $A - 1 = D$ gelten, aber eine eindeutige Festlegung eines Buchstabens ist nicht möglich.

An dieser Stelle kann man nur mit einer vollständigen Fallunterscheidung bzw. eines ausgewählten Buchstabens fortsetzen.

Die Frage, welcher Buchstabe zur Fallunterscheidung genommen werden soll, ist nicht eindeutig zu beantworten. Im allgemeinen ist es aber günstig, solche zu nehmen, bei denen möglichst wenig Fälle zu untersuchen sind. Falls z. B. für einen Buchstaben erkannt wird, daß er für eine gerade Ziffer steht, so sind für ihn maximal fünf Fälle zu unterscheiden.

Im obigen Beispiel wollen wir A zur Fallunterscheidung nehmen.

$A = 0$ oder $A = 1$ ist nicht möglich, da bereits $B = 0$ und $F = 1$ gilt. Wegen (4) und (3) gelten die Relationen $1 < K < D < A$, und somit ist $A = 2$ oder $A = 3$ gleichfalls nicht möglich. Falls $A = 4$ gesetzt wird, so folgt aus (4) $D = 3$ und aus (6) $G = 7$. Damit müßte in (3) $K = 2$ (als 1. Ziffer) und $K = 8$ (als 2. Ziffer) gelten. Dies ist ein Widerspruch, d. h., $A = 4$ ist nicht richtig.

In gleicher Weise zeigt man, daß $A = 5$ oder $A = 6$ nicht möglich ist. Für $A = 7$ erhält man $G = 4$ (aus (6)), $D = 6$ (aus (4)), $K = 5$ (aus (3)), $H = 2$ (aus (4)), $C = 8$ (aus (6)) und $J = 3$ (aus (1)) und somit eine Lösung.

Dies ist die eindeutige Lösung des Zahlenrätsels, da auch die Fälle $A = 8$ und $A = 9$ zum Widerspruch führen.

Bildlich kann die obige Vorgehensweise wie folgt dargestellt werden:

F	B	I	A	D	G	K	H	C	J
			3	2	8	X			
			4	3	7	X			
			5	4	6	X			
1	0	9	6	5	X				
			7	6	4	5	2	8	3
			8	7	3	X			
			9	8	2	X			

Falls aber Fallunterscheidungen für mehrere Buchstaben durchzuführen sind, und das ist sehr oft der Fall, so wird die Rechnung recht umfangreich und mitunter unübersichtlich. Deshalb soll im weiteren eine Methode vorgestellt werden, wie mit graphischen Hilfsmitteln die Größenrelationen zwischen den Buchstaben veranschaulicht und damit die Anzahl der notwendigen Fallunterscheidungen wesentlich reduziert werden können. Gleichzeitig erkennt man damit, für welche Buchstaben Fallunterscheidungen durchzuführen sind.

Betrachten wir wieder das obige Beispiel. Aus (6) und (3) wissen wir, daß $F = 1$ und $B = 0$ gilt. Aus (3) folgt aber auch, daß D größer als K ist – dies wollen wir durch $K - D$ (lies: K kleiner als D) darstellen.

Ebenfalls aus (3) erhält man $G + 1 = K$, dies beschreiben wir durch $G \perp K$ (lies: G um eins kleiner als K). Da $K > F$, d. h. $F - K$, gilt, folgt $K \perp D$. Insgesamt haben wir damit $B \perp F$, $F - G$, $G \perp K$, $F - K$ und $K \perp D$ und zusammengefaßt

$B \perp F - G \perp K \perp D.$

Aus (4) erkennt man $D \perp A$, $I = 9$ und $H < D + 1$. Da $H = D$ nicht möglich, ist mithin $H - D$. Da $G \perp K \perp D$ gilt, folgt $H - G$.

Zusammengefaßt erhalten wir

$B \perp F - H - G \perp K \perp D \perp A - I.$

Schauen wir uns (5) an, so ist zu erkennen, daß auch $J - K$ gilt (da $F = 1$). Wegen $G \perp K$ gilt auch $J - G$, aber J und H können noch nicht verglichen werden. Wir stellen dies wie folgt dar:

$B \perp F \begin{smallmatrix} \diagup \\ \diagdown \end{smallmatrix}\!\!\begin{smallmatrix} H \\ J \end{smallmatrix}\!\!\begin{smallmatrix} \diagdown \\ \diagup \end{smallmatrix} G \perp K \perp D \perp A - I.$

($F \begin{smallmatrix} \diagup \\ \diagdown \end{smallmatrix}\!\!\begin{smallmatrix} H \\ J \end{smallmatrix}$ ... lies F kleiner als H und J;

$\begin{smallmatrix} H \\ J \end{smallmatrix}\!\!\begin{smallmatrix} \diagdown \\ \diagup \end{smallmatrix} G$ ... lies: H und J kleiner als G)

Schließlich erhalten wir aus (2) (da $I = 9$), daß $A \perp C$ gilt und somit

$B \perp F \begin{smallmatrix} \diagup \\ \diagdown \end{smallmatrix}\!\!\begin{smallmatrix} H \\ J \end{smallmatrix}\!\!\begin{smallmatrix} \diagdown \\ \diagup \end{smallmatrix} G \perp K \perp D \perp A \perp C - I.$

Nun sind alle zehn Buchstaben eingeordnet, und wir erkennen sofort, daß $G = 4$, $K = 5$, $D = 6$, $A = 7$ und $C = 8$ gilt. Offen bleibt nur, ob $H = 2$, $J = 3$ oder $H = 3$, $J = 2$ gilt. Aus (4) folgt aber sofort $H = 2$ und damit $J = 3$.

Ein weiteres Beispiel, in dem nur neun unterschiedliche Buchstaben vorkommen, soll das Aufstellen der Größenrelationen und deren Veranschaulichung vertiefen und zeigen, daß die Anzahl der Fallunterscheidungen wesentlich reduziert wird.

Gegeben sei nun das Zahlenrätsel

$$\begin{array}{lccccc}
(1) & \mathrm{EFEB} & : & \mathrm{GA} & = & \mathrm{FCA} \\
 & - & & \cdot & & + \\
(2) & \mathrm{CMDC} & + & \mathrm{HB} & = & \mathrm{CHAE} \\
\hline
(3) & \mathrm{DAFD} & - & \mathrm{GFBA} & = & \mathrm{FCBC} \\
 & (4) & & (5) & & (6)
\end{array}$$

In der folgenden Übersicht ist die jeweilige Zeile bzw. Spalte angegeben, aus der neue Größenverhältnisse zwischen den Variablen abgeleitet werden und die Zusammenfassung in einem Schema (Graphen):

$$\begin{array}{lll}
(2) & M \perp H,\ A \begin{smallmatrix} \diagup \\ \diagdown \end{smallmatrix}\!\!\begin{smallmatrix} D \\ H \end{smallmatrix} & A \begin{smallmatrix} \diagup \\ \diagdown \end{smallmatrix}\!\!\begin{smallmatrix} D \\ M \perp H \end{smallmatrix} \\[2ex]
(3) & \begin{smallmatrix} F \\ G \end{smallmatrix}\!\!\begin{smallmatrix} \diagdown \\ \diagup \end{smallmatrix} D,\ C - D \ \text{(wegen } A - D) & \begin{array}{l} C \diagdown \\ F \ \ \ D \\ G \diagup \\ A - M \perp H \end{array} \\[2ex]
(4) & \begin{smallmatrix} C \\ D \end{smallmatrix}\!\!\begin{smallmatrix} \diagdown \\ \diagup \end{smallmatrix} E & \begin{array}{l} C \diagdown \\ F - D - E \\ G \diagup \\ A - M \perp H \end{array} \\[2ex]
(6) & C \perp F,\ C \begin{smallmatrix} \diagup \\ \diagdown \end{smallmatrix}\!\!\begin{smallmatrix} F \\ H \end{smallmatrix} & \begin{array}{l} \ \ \ \ \ \ \ G \diagdown \\ C \perp F - D - E \\ \ \ \ \ \ \ \ A - M \perp H \end{array}
\end{array}$$

Aus dem Graphen erkennt man nun, daß $A + C < 10$ gilt, denn ist $C = 4$ (größtmöglicher Wert, da F, D, E, M, H größer als C sind), so gilt $A \leqq 3$ und ist $A = 5$, so gilt $C \leqq 3$. Damit folgt

$$\begin{array}{lll}
(6) & \begin{smallmatrix} A \\ C \end{smallmatrix}\!\!\begin{smallmatrix} \diagdown \\ \diagup \end{smallmatrix} B & \\[2ex]
(4) & D - B & \begin{array}{l} \ \ \ \ \ \ \ G \diagdown \ \ \ \ \diagup E \\ C \perp F - D - B \\ \ \ \ \ \ \ \ A - M \perp H \end{array}
\end{array}$$

Weitere Größenrelationen zwischen den Buchstaben sind nicht offensichtlich. Hier muß nun mit einer Fallunterscheidung fortgesetzt werden. Wegen (6) gilt $H = 8$ oder $H = 9$. H könnte also zur Fallunterscheidung genommen werden.

Da $\begin{smallmatrix} C \\ A \end{smallmatrix}\!\!\begin{smallmatrix} \diagdown \\ \diagup \end{smallmatrix} D$ gilt, folgt aus (3) aber auch, daß F gerade ist und aus dem Schema $F \leqq 4$. Falls $F = 2$ gilt, dann folgt $C = 1$ (Schema),

B = 6 (aus (3)), E = 7 (aus (2)), A = 4 (aus (6)), D = 5, G = 3, M = 8 und H = 9 (jeweils aus dem Schema).
F = 4 ist nicht richtig, denn es würde C = 3 (Schema), B = 7 (3), E = 0 (2) folgen im Widerspruch zum Schema. Damit ist das Rätsel gelöst und die eindeutige Lösung gefunden.
Die vorgeschlagene Methode ist ein Beispiel dafür, wie mit grafischen Hilfsmitteln die Übersichtlichkeit erhöht und wesentliche Beziehungen zwischen den Variablen veranschaulicht werden können.
Zahlenrätsel sind auf Grund ihrer innewohnenden Kombinatorik recht reizvoll für den, der über das Raten und Probieren hinausgeht. Das Lösen derartiger Aufgaben erhöht die Sicherheit im Umgang mit Fallunterscheidungen und kann deshalb nur empfohlen werden.

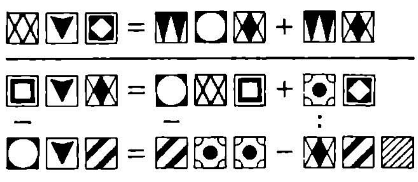
G. Scheithauer

Wir lösen Zahlenrätsel

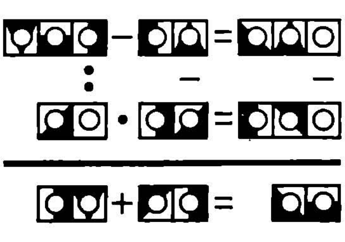
▲1▲

$$\begin{array}{ccccc} ABC & - & DB & = & EC \\ : & & + & & + \\ EA & \times & F & = & GF \\ \hline C & + & DF & = & DD \end{array}$$

▲2▲



▲3▲



▲4▲ Die beiden Wörter enthalten 10 verschiedene Buchstaben, welche so durch Ziffern ersetzt werden, daß die Rechnungen stimmen.

$$\begin{array}{r} \text{T R I O L E} \\ +\ \text{L E G U A N} \\ \hline \text{1 0 2 0 2 0 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{T R I O L E} \\ -\ \text{L E G U A N} \\ \hline \text{1 9 5 4 8 2} \end{array}$$

Die folgende Zahlenreihe
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
ergibt, wenn dafür die entsprechenden Buchstaben eingesetzt werden, eine andere Bezeichnung für Neubildung, Ausgleich.

Lösungen siehe Heft 3/87!

Eine Aufgabe von Prof. Dr. habil. Dr. h. c. mult. Hans-Jürgen Treder

Direktor des Einstein-Laboratoriums, Potsdam-Babelsberg

▲2777▲ Wie lange braucht ein Schwimmer, um in einem Fluß eine Strecke s hin und zurück zu schwimmen, wenn er relativ zum Wasser die Geschwindigkeit u entwikkelt und wenn die Strömungsgeschwindigkeit v beträgt? Was ergibt sich bei $u = v$?

Anmerkung: Die Aufgabe steht in Analogie zu dem berühmten Versuch von A. A. Michelson, welcher erstmalig 1881 auf dem Telegrafenberg bei Potsdam durchgeführt wurde. Die Strömung des Flusses ist analog zur Bewegung der Erde relativ zum angenommenen sogenannten Äther – darunter verstand man damals einen besonderen feinen Stoff, der den gesamten Raum erfüllen sollte. Der Schwimmer ist analog zum Licht, dessen Ausbreitungsgeschwindigkeit im Michelson-Versuch zweimal gemessen wurde – in Bewegungsrichtung der Erde und dazu entgegengesetzt. Es kam heraus, daß die Lichtgeschwindigkeit jedesmal denselben Wert hat, also von der Ausbreitungsrichtung sowie vom Bewegungszustand der Lichtquelle unabhängig ist. Als eine Schlußfolgerung daraus mußte die Äther-Hypothese fallengelassen werden und stattdessen die Spezielle Relativitätstheorie Einsteins als gültig angenommen werden. In diesem Sinne ist der Michelson-Versuch eine Stütze für die Spezielle Relativitätstheorie.
Unser Schwimmer in der Aufgabe verhält sich aber gerade anders als das Licht im Michelson-Versuch!

Prof. Treder im Einstein-Haus in Caputh

Forschungsstätte mit großen Aufgaben

Im März 1979, anläßlich des 100. Geburtstages von *Albert Einstein*, wurde an der Akademie der Wissenschaften der DDR das *Einstein-Laboratorium* gegründet. Zu seinem Direktor wurde der international bekannte Physiker Professor Dr. habil. Dr. h. c. mult. Hans-Jürgen Treder berufen. Die Forschungsstätte hat ihren Sitz auf dem Gelände der Sternwarte Babelsberg bei Potsdam; außerdem gehört Einsteins ehemaliges Sommerhaus in Caputh unweit von Potsdam dazu. Das Einstein-Laboratorium ist eine der Mitarbeiterzahl nach kleine Einrichtung, hat aber wichtige Aufgaben zu erfüllen – die Pflege und die Weiterführung des Werks von *Albert Einstein*.
Einstein war einer der größten theoretischen Physiker; er hat die Wissenschaft um fundamentale Erkenntnisse bereichert. Unter seinen Leistungen seien hervorgehoben die Arbeiten zur Lichtquantenhypothese, welche mit einem Nobelpreis gewürdigt wurden, sowie die *Spezielle* und die *Allgemeine Relativitätstheorie*, welche eine Umwälzung der Vorstellungen über Raum und Zeit bedeuteten. Mit *Albert Einstein* verbinden uns in der DDR bestimmte Traditionen: Er lebte von 1914 bis 1933 in Berlin, wirkte in dieser Zeit an der *Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* und an der *Humboldt-Universität*. Das für ihn gebaute und architektonisch bedeutsame Sommerhaus in Caputh bewohnte er in den Jahren 1929 bis 1932.
Einsteins Wirken wurde bzw. wird von Prof. Treder und seinen Mitarbeitern erforscht. Die Ergebnisse sind in zahlreichen Büchern und Artikeln niedergelegt. Es wird die Verbindung zu aktuellen Problemen der Forschung hergestellt: Im Brennpunkt des Interesses der Physiker stehen heute Beziehungen zwischen der Kosmologie, d. h. der Lehre vom Aufbau der Welt im *sehr Großen*, einerseits und der Elementarteilchenphysik, d. h. der Lehre vom Aufbau der Welt im *sehr Kleinen*, andererseits. Dabei sucht man nach einer Theorie, welche alle bekannten Kräfte in der Natur umfassen soll. Zu diesen international intensiv betriebenen Forschungen leisten das Einstein-Laboratorium und andere Einrichtungen der Akademie der Wissenschaften der DDR Beiträge.
Das Einstein-Laboratorium versteht sich auch als eine Stätte der Weiterbildung. Der Autor dieses Beitrags wurde von der Sektion Mathematik der *Ernst-Moritz-Arndt*-Universität Greifswald 1986 zu einem halbjährigen Studienaufenthalt an das Einstein-Laboratorium delegiert und hat dort eine Fülle von Anregungen für seine Arbeit erfahren.

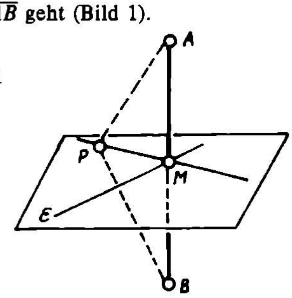
R. Schimming

Symmetrie im Raum

Teil 1

Mit Symmetrie und symmetrischen Figuren haben wir uns bereits in der Ebene näher beschäftigt, so mit der *Axialsymmetrie* (Heft 4/1984), der *Zentralsymmetrie* (Heft 2/1985) und der *Drehsymmetrie* (Heft 4/1985). Analoge Sachverhalte und Begriffe gibt es auch im Raum.
In manchen großen Schlössern, wie z. B. im *Neuen Palais* in Potsdam, aber auch in kleinen, wie etwa im Schloß Köthen, findet der Besucher Spiegelsäle mit ihrer immer wieder verblüffenden Wirkung. Denn – so wie vor langer Zeit aus Repräsentationsgründen – bleibt der Effekt auch heute der gleiche:
Der real bestehende Raum erscheint im Spiegel nochmals und *spiegelt* mehr als da ist! Der Spiegel wird zur Symmetrieebene bzgl. eines *Gesamtraums*, der sich aus dem real bestehenden und dem nur als *Bild* existierenden Raum zusammensetzt.
Jetzt abstrahieren wir: Eine Ebene ε heißt eine *Symmetrieebene einer Figur F*, wenn bei der *Spiegelung an der Ebene* ε die Figur auf sich abgebildet wird. Dieser Begriff ist also völlig analog der Axialsymmetrie einer Figur in der ebenen Geometrie (siehe Heft 4/1984) erklärt.
Bei der Spiegelung an ε wird jeder Punkt aus ε auf sich und jeder Punkt $A \notin \varepsilon$ auf denjenigen Punkt B abgebildet, für den die Verbindungsgerade g_{AB} senkrecht zur Ebene ε ist und ε durch den Mittelpunkt von $\overline{AB}$ geht (Bild 1).

Bild 1

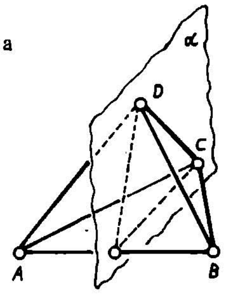


Hat man umgekehrt bei einer Spiegelung einen Originalpunkt A und das zugehörige Bild B, so gibt es genau eine zugehörige Symmetrieebene. Sie besteht einfach aus der Menge aller Punkte P des Raumes, die von A und B gleichen Abstand besitzen (Bild 1); und wir nennen sie die *Mittellotebene* von $\overline{AB}$.

Aufgaben

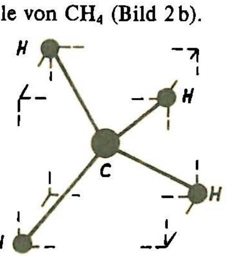
▲1▲ Es sei $ABCD$ ein regelmäßiges Tetraeder (d. h. eine dreiseitige Pyramide mit gleichlangen Kanten). Bestimme alle Symmetrieebenen dieser Figur!
Lösung: Die Mittellotebene α der Kante $\overline{AB}$ ist offensichtlich eine Symmetrieebene des regelmäßigen Tetraeders, da wegen
$|CA| = |CB|$ und $|DA| = |DB|$
die Punkte C und D auf α liegen (Bild 2a).

Bild 2a



Entsprechendes gilt für jede der weiteren fünf Kanten. Also gibt es wenigstens sechs Symmetrieebenen. Gibt es weitere?
Nein! Denn ist ε eine Symmetrieebene des regelmäßigen Tetraeders $ABCD$, so muß wenigstens einer der Eckpunkte nicht auf ε liegen, da A, B, C, D in keiner gemeinsamen Ebene liegen können. Es sei etwa $A \notin \varepsilon$. Das Bild von A bei der Spiegelung an ε muß eine der Ecken B, C oder D sein, da ε Symmetrieebene des Körpers ist, etwa der Punkt B. Dann ist aber ε gerade die Mittellotebene von $\overline{AB}$ und damit eine der bereits angegebenen Symmetrieebenen.
Symmetriebetrachtungen spielen in der *Chemie*, insbesondere in der *Kristallographie*, eine große Rolle. Ein regelmäßiges Tetraeder bilden u. a. das Kerngerüst der Moleküle von CH_4 (Bild 2b).

Bild 2b



▲2▲ Man bestimme alle Symmetrieebenen
a) eines Würfels (Bild 3a) und
b) eines geraden Kreiskegels (Bild 3b).

Bild 3a

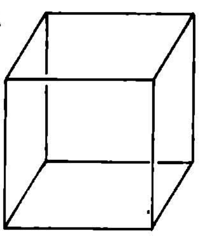
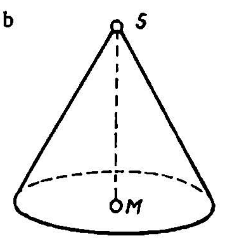


Bild 3b



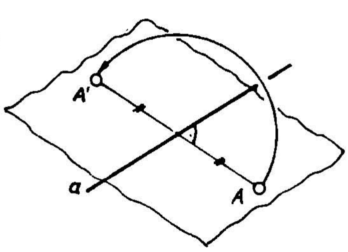
Symmetrieebenen findet man bei vielen Körperformen von Pflanzen (-teilen) und Tieren, in der Technik und bei Bauwerken. Da sich derartige symmetrische Formen in der Natur als Ergebnis einer langen Entwicklung herausgebildet haben, sind sie als optimale Gestalt unter den gegebenen Umweltbedingungen zu werten. In der Technik entstehen Formen mit Symmetrieebenen vielfach aus Zweckmäßigkeit, insbesondere aus Stabilitätsgründen.

▲3▲ Wie viele Symmetrieebenen besitzt
a) eine Tomate?
(Zerschneide dazu eine Tomate!)
b) das Vorderrad deines Fahrrades?
(Betrachte dazu eingehend die Lage der Speichen!)
c) die Blüte einer Orchidee?
d) gewöhnlicherweise eine Eisenbahnbrücke? (Bild 4)

Bild 4

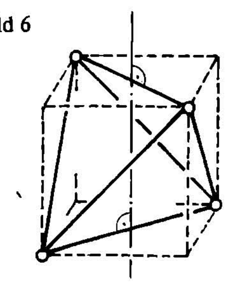
e) eine Tetrapackung
(z. B. für Kondensmilch)?
Beim geraden Kreiskegel im Bild 3b) heißt die Gerade g_{MS} die Kegelachse; der Kegel wird als symmetrisch bezüglich dieser Geraden angesehen.
Man nennt eine Gerade a eine *Symmetrieachse der Figur F*, wenn bei der (räumlichen!) Spiegelung an dieser Geraden die Figur in sich übergeht. Die Bildpunkte bei der *Spiegelung an einer Geraden a* lassen sich dabei sehr einfach beschreiben:
Alle Punkte auf a bleiben fest, und hinsichtlich eines Punktes $A \notin a$ ist in der Ebene durch a und A so wie bei der Geradenspiegelung in einer Ebene zu verfahren (Bild 5). Demnach ist eine Spiegelung an a auch einfach als eine (räumliche) Drehung um a mit 180° anzusehen.

Bild 5



▲4▲ Wie viele Symmetrieachsen besitzt ein regelmäßiges Tetraeder?

Bild 6



Lösung: Man erkennt leicht (etwa durch eine mögliche Einbettung in einen Würfel, Bild 6), daß die Verbindung der Mittelpunkte zweier windschiefer Kanten eine Symmetrieachse ist. Durch eine entsprechende Überlegung wie bei der Lösung zur 1. Aufgabe zeigt man, daß es nicht mehr als drei Symmetrieachsen gibt.

▲5▲ Wie viele Symmetrieachsen hat ein Würfel?
Es stellt sich die Frage, welcher Zusammenhang zwischen Symmetrieebenen und Symmetrieachsen besteht. Man kann leicht zeigen:

▲6▲ Hat eine Figur *zwei Symmetrieebenen* α und β und sind diese senkrecht zueinander, dann ist ihre *Schnittgerade* eine *Symmetrieachse* der Figur.
Mit dieser Eigenschaft kann die Aufgabe 4 nochmals mit dem Ergebnis aus der Aufgabe 1 gelöst werden. Man betrachte dazu wiederum das Bild 6. (Anhand dieses Bildes wird die Eigenschaft in der Aufgabe 6 selbst recht einsichtig!)
Muß nun umgekehrt bei Existenz einer Symmetrieachse auch ein Paar zueinander senkrechter Symmetrieebenen existieren? Nein!

▲7▲ Nenne (und beschreibe) eine Figur, die keine Symmetrieebene aber eine Symmetrieachse besitzt!
Eine Symmetrieachse besitzen die Doppelschraube (Bild 7) und die Doppelwendelfläche. Derartige geometrische Figuren findet man u. a. in der Baukunst (Säulenformen und -verzierungen, Wendeltreppen), in der Technik und in der Mikrobiologie. Symmetrieachsen findet man bei vielen Formen rotierender Teile in der Technik.

Bild 7

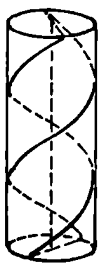
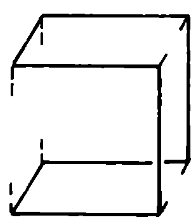


Bild 8



▲8▲ Ist die Achse des Vorderrades deines Fahrrades eine Symmetrieachse dieses Rades? (Prüfe sorgsam!)

▲9▲ Bestimme die Symmetrieachsen der Drahtfigur im Bild 8, die sich aus Kanten eines Würfels zusammensetzt! (Die Naht beim [Feld-]Tennisball zeigt gleiche Symmetrieeigenschaften!)
Nennenswert ist noch folgende allgemeine Eigenschaft:

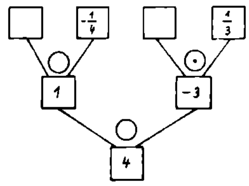
▲10▲ Hat eine Figur *zwei zueinander senkrechte Symmetrieachsen a* und *b*, *dann* ist die zu *a* und *b* senkrechte Gerade *c ebenfalls* eine *Symmetrieachse*.
Beispiele dafür liegen in den Aufgaben 4 und 9 vor.

E. Quaisser/H.-J. Sprengel

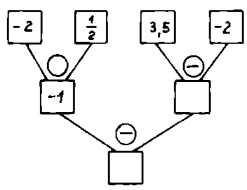
Rechenbäume

Fülle die Leerstellen aus!
Gib jeweils den zu berechnenden Term an!

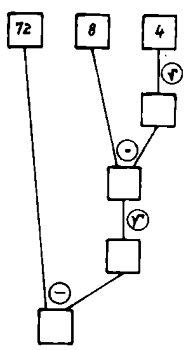
▲1▲



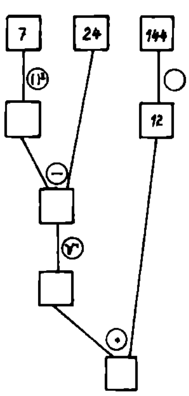
▲2▲



▲3▲



▲4▲



Stelle für folgende Terme einen Rechenbaum auf!

▲5▲ $-3\cdot(-4{,}1-1{,}9)$

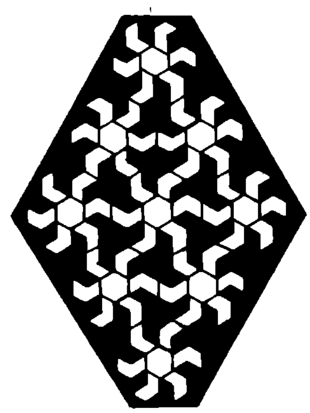
▲6▲ $\sqrt{2^2\cdot 4-(\sqrt{25}+10)}$

▲1▲ As you may know, the symbol $n!$ (called "n factorial") denotes the product of all integers from 1 to n. So, for instance,
$2!=1\cdot 2=2$; $5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$;
$6!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720$,
and so on.
Here is the number 12! written out in full
4 7 9 0 ■ 6 0 0.
Alas! One of the digits got blotted out. Can you find the missing digit without doing all the multiplications?

Math. Pie, London

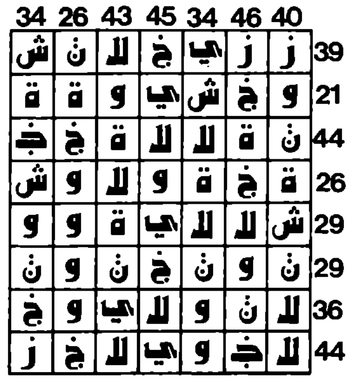
▲2▲ Симметричен ли узор на рисунке?

Quant, Moskau



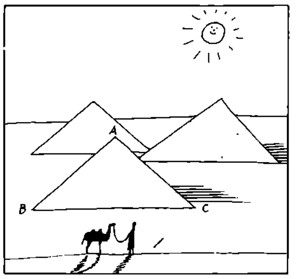
▲3▲ Chaque signe de ce tableau représente toujours le même chiffre. Les totaux de quinze additions vous sont donnés, horizontalement et verticalement. Attribuez à chaque signe sa valeur!

Maximath, Belgien



Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

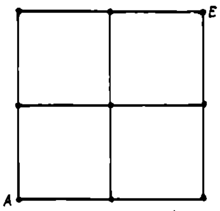
Letzter Einsendetermin: 12. Juni 1987



Mathematik

Ma 5 ■ 2778 Das Bild besteht aus vier gleichgroßen Quadraten. Es gibt verschiedene Wege, um von A (Anfang) nach E (Ende) zu wandern. Auf einem solchen Weg darf kein Abzweigpunkt ein zweites Mal betreten werden. Eine kleine Quadratseite soll 10 m lang sein. Wie viele Wege sind 40 m, 60 m bzw. 80 m lang?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

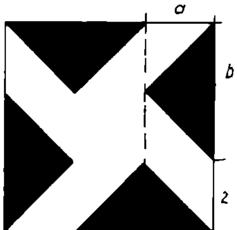


Ma 5 ■ 2779 Aus dem abgebildeten Quadrat wurden vier gleichgroße gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke herausgeschnitten ($a = 2$ cm, $b = 4$ cm).

(1) Welche Fläche ist größer, die gesamte herausgeschnittene Fläche oder die übriggebliebene Fläche?

(2) Um wieviel Quadratzentimeter unterscheiden sie sich?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Ma 5 ■ 2780 Zeichne auf Karopapier ein Quadrat mit 25 gleichgroßen Feldern. Diese Felder sollen mit möglichst wenig Farben so gefärbt werden, daß kein Feld, das ein anderes mit einer Seite oder mit einer Ecke berührt, die gleiche Farbe erhält. Wie viele Farben sind mindestens nötig? Gib ein Beispiel dafür an! (*Anmerkung:* Statt der Farben kannst du auch Ziffern setzen.)

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2781 Werner versucht, eine natürliche Zahl x zu finden. Dabei soll die Summe aus dem Vorgänger und Nachfolger von x die Jahreszahl 1987 ergeben.

a) Beweise, daß sich keine solche Zahl x finden läßt!

b) Zeige, wie sich eine solche Zahl x finden läßt, wenn die Jahreszahl eine gerade Zahl ist!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2782 In dem Schema

$$\begin{array}{rr} & ABC \\ + & AB \\ + & \underline{A} \\ & 300 \end{array}$$

sind Ziffern durch Buchstaben ersetzt worden. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Ermittle die richtigen Ziffern für A, B und C!

OL Werner Melka, Neubrandenburg

Ma 5 ■ 2783 Ersetze in dem Schema

$$\begin{array}{rr} & **** \\ - & **** \\ \hline & 1987 \end{array}$$

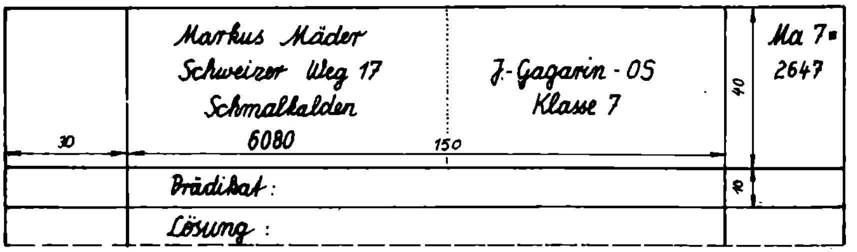
die Sternchen so durch Ziffern, daß eine richtige Subtraktionsaufgabe entsteht. Dabei dürfen aber nur die vier Ziffern 1, 9, 8, 7 benutzt werden, aber keine von ihnen mehr als dreimal.

Gib alle Möglichkeiten an!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2784 Die drei Mitglieder einer Familie sind zusammen 108 Jahre alt. Die Mutter ist dreimal so alt wie der Sohn, der Vater drei Jahre älter als die Mutter. Wie alt ist jedes der Familienmitglieder?

Schülerin D. Gretsch, Bad Freienwalde



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Na/Te (Naturwissenschaft und Technik) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12 oder Na/Te 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1986/87 läuft von Heft 5/1986 bis Heft 2/1987. Zwischen dem 1. und 10. September 1987 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/86 bis 2/87 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/87 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/1986 bis 2/87) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1986/87 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

Ma 6 ■ 2785 Drei Würfel W_1, W_2 und W_3 haben zusammen einen Rauminhalt von 90 cm^3. Dabei ist das Volumen des Würfels W_3 dreimal so groß wie das des Würfels W_1. Das Volumen des Würfels W_2 ist doppelt so groß wie das des Würfels W_3. Es ist die Oberfläche des Würfels W_3 zu berechnen! *Schüler J. Heße, Berlin*

Ma 6 ■ 2786 Es ist die kleinste, ohne Rest durch 7 teilbare natürliche Zahl zu ermitteln, die bei Division durch 2 den Rest 1, durch 3 den Rest 2, durch 4 den Rest 3, durch 5 den Rest 4 und durch 6 den Rest 5 läßt. *Schülerin B. Sommer, Görlitz*

Ma 6 ■ 2787 Die Sternchen in der vierstelligen natürlichen Zahl 1**0 sind so durch Ziffern zu ersetzen, daß man durch 36 teilbare Zahlen erhält. Es sind alle Lösungen anzugeben! *Schüler A. Henning, Bad Salzungen*

Ma 6 ■ 2788 Ermittle alle geordneten Zahlenpaare $(a; b)$ natürlichere Zahlen a und b, die Lösung der Gleichung
$a \cdot (a + b) = 1986$
sind! *OL W. Melka, Neubrandenburg*

Ma 7 ■ 2789 In der Gleichung
$\overline{AB}^2 = \overline{CDA}$ ist $\overline{AB}$ eine zweistellige, $\overline{CDA}$ eine dreistellige natürliche Zahl. Setze in diese Gleichung für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern so ein, daß eine wahre Aussage entsteht! *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 7 ■ 2790 In zwei Gefäßen befindet sich Wasser, und zwar 450 cm^3 im ersten Gefäß. Gießt man von einem Gefäß 20 % der Flüssigkeit in das andere, so enthalten dann beide Gefäße die gleiche Wassermenge. Wieviel Kubikzentimeter Wasser waren zuerst im zweiten Gefäß? *OL W. Melka, Neubrandenburg*

Ma 7 ■ 2791 Eine sechsstellige natürliche Zahl beginnt an der höchsten Stelle mit der Grundziffer 1. Streicht man diese Ziffer und hängt sie an die verbleibenden fünf Grundziffern hinten an, so erhält man eine Zahl, die dreimal so groß wie die ursprüngliche ist. Wie heißen diese beiden Zahlen? *Sch.*

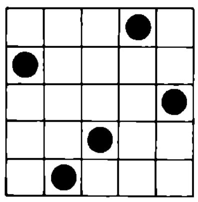
Ma 7 ■ 2792 Es ist nachzuweisen, daß für jedes konvexe Viereck mit den Seitenlängen a, b, c, d und den Längen e und f der Diagonalen $\frac{a+b+c+d}{2} < e + f < a + b + c + d$ gilt! *Sch.*

Ma 8 ■ 2793 Nach einer durchgeführten Altstoffsammlung lieferte Bert weniger Flaschen ab als Dirk. Arthur und Ede hatten zusammen genau so viele Flaschen gesammelt wie Dirk und Bert zusammen. Arthur und Dieter lieferten zusammen nicht so viele Flaschen ab wie Ede und Bert zusammen, sondern weniger. Wer dieser vier Schüler hatte die wenigsten, wer die meisten Flaschen abgeliefert? *Diplomlandwirt H. Boettcher, Weimar*

Ma 8 ■ 2794 Es ist nachzuweisen, daß die Differenz 63! − 61! ohne Rest durch 71 teilbar ist. (Unter der Zahl n! versteht man das Produkt
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$.) *Nach Quant, Moskau*

Ma 8 ■ 2795 Die Maßzahl des Umfangs eines Kreissektors (gemessen in cm) sei gleich der Maßzahl seines Flächeninhalts (gemessen in cm^2). Die Maßzahlen der Länge des Radius und des Kreisbogens seien natürliche Zahlen. Es ist zu untersuchen, für welche Maßzahlen diese Bedingungen erfüllt werden! *Sch.*

Ma 8 ■ 2796 Ein Quadrat ist in 25 paarweise kongruente quadratische Felder aufgeteilt.
Es sollen fünf gleiche Spielsteine so auf quadratische Felder gelegt werden, daß in jeder waagerechten Reihe und in jeder senkrechten Reihe genau ein Spielstein liegt. Wieviel unterschiedliche Belegungen gibt es?
Beispiel:



Dr. G. Hesse, Radebeul

Ma 9 ■ 2797 Kennt man das Quadrat einer natürlichen Zahl a, so kann man das Quadrat des Nachfolgers von a auf die folgende Weise leicht bestimmen:
Man addiert zum Quadrat von a nochmals a selbst sowie den Nachfolger von a.
Beispiel: Das Quadrat von 3 ist 9. Man erhält nun das Quadrat von 4, indem man zu 9 die 3 und den Nachfolger der 3 addiert, also
$9 + 3 + 4 = 16 = 4^2$. Es ist die Allgemeingültigkeit dieses Verfahrens für alle natürlichen Zahlen nachzuweisen. *Ch. Bittner, Mühlhausen*

Ma 9 ■ 2798 Junge Pioniere hatten durch das Sammeln und den Verkauf von Altstoffen 100,– M zusammengebracht. Dafür kauften sie 34 Geschenke, die sie Bewohnern eines Altersheimes auf einer Weihnachtsfeier überreichten. Es waren Geschenke zum Preise von 2,– M, 3,– M und 5,– M das Stück, am meisten zu 2,– M, am wenigsten zu 5,– M. Wie viele Geschenke jeder dieser drei Preisstufen wurden überreicht? *Schülerin A. Heiser, Diesdorf*

Ma 9 ■ 2799 Es sind zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien r_1 und r_2 ($r_1 < r_2$) zu zeichnen, die sich in den Punkten A und B schneiden. Auf k_1 ist ein Punkt P derart zu wählen, daß die Gerade PM_1 die Strecke $\overline{AB}$ in einem inneren Punkt schneidet. Die Gerade PA möge k_2 in D, die Gerade PB möge k_2 in C schneiden. Die Gerade PM_1 schneide $\overline{CD}$ in E. Es ist nachzuweisen, daß PE senkrecht auf CD steht. *Sch.*

Ma 9 ■ 2800 Zeichnen Sie ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck mit einer Kathete $\overline{AB}$ von 6 cm Länge!
a) Berechnen Sie die Länge derjenigen zu $\overline{AB}$ parallelen Strecke, die die Fläche dieses Dreiecks halbiert!
b) Konstruieren Sie diese Strecke!
c) Beschreiben Sie die Konstruktion! *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 10/12 ■ 2801 Eine Gruppe von Dolmetschern unterhielt sich über die Fremdsprachen, die sie beherrschen. Dabei stellte sich heraus, daß keiner nur eine Sprache beherrschte. Sechs Dolmetscher konnten Russisch und Englisch, zwei konnten Russisch und Französisch und nur einer konnte Englisch und Französisch sprechen. Alle drei Sprachen beherrschte auch nur ein Dolmetscher. Wie viele Dolmetscher hatten sich unterhalten? *Fr.*

Ma 10/12 ■ 2802 Es ist zu beweisen, daß für alle reellen Zahlen x gilt
$\sin x + \cos x \leqq \sqrt{2}$!
Dipl.-Math. C. Piehler, Halle

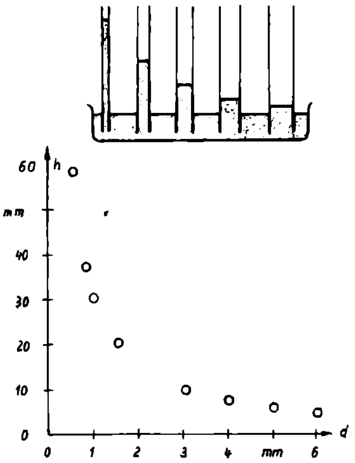
Ma 10/12 ■ 2803 Gegeben seien ein gerader Kreiskegel und eine gerade quadratische Pyramide. Beide Körper sind gleich hoch. Wie groß ist der Radius der Grundfläche des Kreiskegels, wenn beide Körper gleiche Volumina haben? *Schüler J. Kandziora, Zehdenick*

Ma 10/12 ■ 2804 Die Summe der Größen der Innenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks beträgt 1440°. Wie groß ist n? *Schülerin B. Balzer, Zittau*

Naturwissenschaft und Technik

Na/Te 6 ■ 369 Ein *Junger Mathematiker* wurde von seinen Freunden gefragt, wie er sein Campingziel erreicht habe, das 313 km von seinem Wohnort entfernt liegt. „Mit dem Autobus fuhr ich um 205 km weniger als mit dem Zug, meine Wanderstrecke war um 36 km kürzer als meine Fahrstrecke mit dem Autobus."
Berechne, wieviel Kilometer die Bahnfahrt, die Autobusfahrt und die Wanderstrecke betrug, wenn der *Junge Mathematiker* die Reise in seinem Wohnort begann! *DDR-Olympiade-Aufgabe*

Na/Te 7 ■ 370 Beim Experimentieren mit Kapillaren verschiedenen Durchmessers erhält Anja Meßwertpaare von Steighöhe h und Durchmesser d der Kapillaren, die sie zur besseren Veranschaulichung in ein Koordinatensystem einträgt.
a) Bestimme zeichnerisch die Steighöhen für $d_1 = 1{,}2$ mm und $d_2 = 0{,}75$ mm!
b) Was für ein Zusammenhang könnte vorliegen?
Stelle eine entsprechende Gleichung auf, die h und d enthält!
c) Prüfe damit die bei a) bestimmten Werte!
d) Biologische Kapillaren (z. B. Pflanzen) haben sehr geringe Durchmesser. Wie hoch



steigt das Wasser in einer Kapillare von 0,002 mm Durchmesser, wenn man voraussetzt, daß hierbei das gleiche Gesetz gilt?

Dipl.-Lehrer Ch. Werge, Karl-Marx-Universität Leipzig

Na/Te 7 ■ 371 a) Bei der Analyse von Eisenoxid wird das Massenverhältnis Eisen zu Sauerstoff von $2\frac{1}{3} : 1$ festgestellt. Es ist die Formel des Oxids aufzuschreiben.
b) Wieviel Gramm Eisen sind in 200 g Eisenoxid enthalten?

Aus: Chemie in der Schule, Berlin

Na/Te 8 ■ 372 Der Brennstoffverbrauch eines kleinen Spiritusbrenners soll ermittelt werden. Dazu wird über einen gewissen Zeitraum bei konstanter Dochtlänge die Masse des Brenners einschließlich des Brennstoffs im brennenden Zustand gemessen. Die folgende graphische Darstellung wurde, ausgehend von den Meßwerten, angefertigt:

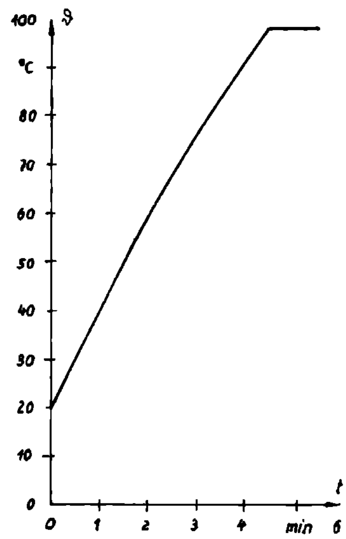
a) Der Zusammenhang zwischen Masse m und Zeit t kann mit einer Gleichung der Form

$$m = a \cdot t + b$$

(a, b physikalische Größen) beschrieben werden. Bestimme a und b so, daß die Gleichung für die Koordinaten aller Punkte der Geraden erfüllt ist!
b) Wieviel Brennstoff ist nach 5 Minuten verbrannt?
c) Wie groß ist der Spiritusverbrauch pro Minute?
d) Berechne, wie lange der Brenner im vorliegenden Fall längstens in Betrieb sein kann (ohne Brennstoff hat das Gerät eine Masse von 110 g)! *Ch. Werge, Leipzig*

Na/Te 8 ■ 373 Ein Luxusdampfer der *Weißen Flotte* hat auf der Elbe stromabwärts eine Fahrgeschwindigkeit von $33\,\mathrm{km} \cdot h^{-1}$, stromaufwärts beträgt diese jedoch nur noch $27\,\mathrm{km} \cdot h^{-1}$.
a) Berechne die Strömungsgeschwindigkeit!
b) Mit welcher Geschwindigkeit könnte der Dampfer in stehenden Gewässern fahren?

Na/Te 9 ■ 374 Beim Erwärmen von Wasser in einem offenen Gefäß über einem Bunsenbrenner wurde der untenstehende Zusammenhang zwischen Zeit und Temperatur festgestellt.

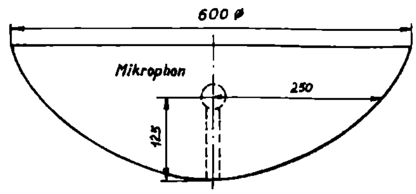


a) Bestimmen Sie zwei Funktionsgleichungen so, daß die Abweichung von der Messung unter 5 K liegt!
b) Wie ist der Verlauf des Graphen physikalisch zu deuten? *Ch. Werge, Leipzig*

Na/Te 9 ■ 375 Sonnenlicht trifft lotrecht auf eine Sammellinse mit einem Durchmesser von 8 cm und wirft auf einen 6 cm dahinter parallel zur Linse stehenden Schirm einen Lichtfleck von einem Durchmesser von 16 cm.
Wie groß ist die Brennweite der Linse?

Dr. M. Wurlitzer/Dr. H.-Ch. Semmelhack, Karl-Marx-Universität Leipzig

Na/Te 10/12 ■ 376 Die Mitglieder einer Biologie-Arbeitsgemeinschaft wollen für Tierstimmenaufnahmen ein Mikrophon mit einem geeigneten Reflektor verwenden und den Reflektor aus glasfaserverstärktem Polyesterharz selbst herstellen. In einer Bauanleitung wird der Querschnitt des dazu benötigten Formkerns angegeben, der entsprechend dem Reflexionsgesetz für Schall bestimmt worden ist (siehe Bild).
Da sich jedoch die Empfindlichkeit noch als zu gering erweist, möchten die Schüler den Formkern nach oben vergrößern.



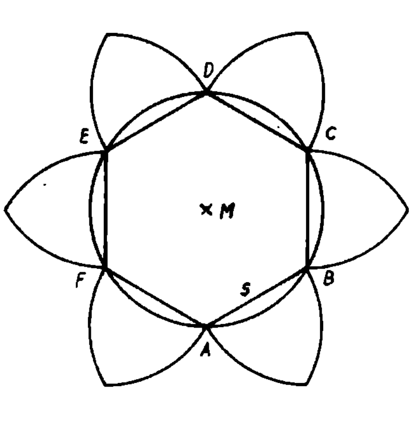
a) Bestimmen Sie nach Einzeichnen eines geeigneten Koordinatensystems eine Funktionsgleichung so, daß der Rand des Kerns möglichst genau wiedergegeben wird! Um was für einen Graphen handelt es sich?
b) Wie hoch muß der Formkern für einen Durchmesser von 800 mm sein?
c) Ergänzen Sie den Graphen, der den Rand des Formkerns angibt, gemäß der Funktionsgleichung! *Ch. Werge, Leipzig*

Na/Te 10/12 ■ 377 Ein Bus mit 42 Sitzplätzen hat eine Eigenmasse von 7 t und eine Bremskraft von 62 000 N.
Nach den Bestimmungen der Straßenverkehrs-Zulassungsordnung (StVZO) müssen Fahrzeuge einer bestimmten Bauart eine mittlere Bremsverzögerung von $5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ erreichen können.
Wieviel Sitzplätze können maximal eingenommen werden, wenn mit einer Masse von 75 kg je Passagier gerechnet wird?

Aus: Aufgabensammlung Mathematik, Volk und Wissen, Berlin

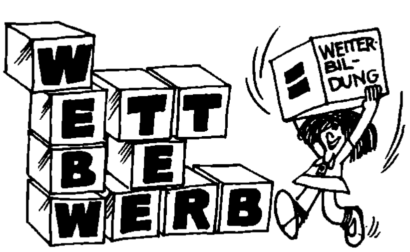
Verdoppelte Kreisfläche mit verdoppeltem Umfang

Die Zeichnung stellt ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$ mit seinem Umkreis dar. Um jeden Eckpunkt dieses Sechsecks wurden mit der Seitenlänge s des Sechsecks als Radius Kreisbogen geschlagen, deren Schnittpunkte außerhalb des Umkreises liegen.



Es ist nachzuweisen, daß der Umfang der so entstandenen Figur doppelt so lang, der Flächeninhalt doppelt so groß ist wie der des Umkreises des regelmäßigen Sechsecks!

Aus: Praxis der Mathematik, Köln
Autor: F. Meyer, München



XXVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Kreisolympiade

(15. 11. 1986)

Olympiadeklasse 5

260521 Auf der DDR-Olympiade *Junger Mathematiker* treffen sich Andreas, Britta, Dirk und Kerstin. Sie kommen jeder aus einer anderen Stadt, und zwar aus Berlin, Dresden, Halle und Schwerin. Wir wissen folgendes über sie:
(1) Andreas und der Teilnehmer aus Berlin sind von den vier Schülern die beiden einzigen, die schon im Vorjahr auf der DDR-Olympiade waren;
(2) die beiden anderen, nämlich Kerstin und der Teilnehmer aus Dresden, sind zum ersten Mal bei der DDR-Olympiade anwesend.
(3) Dirk ist älter als der Teilnehmer aus Berlin.
(4) Kerstin ist jünger als der Teilnehmer aus Schwerin.
Welcher Teilnehmer kommt aus welcher Stadt? Wer sind die beiden, die schon im Vorjahr an der DDR-Olympiade teilgenommen haben?

260522 Fritz hat drei rot und drei blau angestrichene kreisförmige Spielmarken. Keine zwei von diesen sechs Spielmarken sind in der Größe einander gleich.
a) Fritz legt zuerst nur die drei verschieden großen roten Spielmarken nebeneinander auf den Tisch. Zeichne alle möglichen Anordnungen dieser drei Spielmarken auf! Wie viele Anordnungsmöglichkeiten sind dies insgesamt?
b) Nun möchte Fritz alle sechs Spielmarken so nebeneinander legen, daß sich stets die Farben der Spielmarken abwechseln.
Wie viele Anordnungsmöglichkeiten der Spielmarken gibt es hierfür insgesamt? Nenne die Anzahl und erkläre, warum es genau diese Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten gibt!

260523 Zeichne eine Strecke AB der Länge 15 cm! Auf dem Strahl, der den Ausgangspunkt A hat und durch B geht, sollen nun zwei weitere Punkte C und D so eingezeichnet werden, daß $4 \cdot \overline{AC} = \overline{AD}$ und $\overline{CB} = \overline{BD}$ gilt. Wie groß sind dafür $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$ zu wählen?
Erkläre, wie man zur Berechnung dieser beiden Längen $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$ kommen kann, und zeichne dann die Punkte C und D!

260524 Du kannst die mit zwei Würfeln von jemandem geworfenen beiden Augenzahlen nennen, ohne sie gesehen zu haben, wenn du folgende Rechenschritte (1) bis (4) ausführen und dir nur das Endergebnis nach Schritt (4) ansagen läßt:
(1) Die mit dem einen Würfel geworfene Augenzahl ist zu verdoppeln.
(2) Hierzu ist 5 zu addieren.
(3) Die erhaltene Summe ist mit 5 zu multiplizieren.
(4) Zum Produkt ist die mit dem anderen Würfel geworfene Augenzahl zu addieren.
Wenn du nämlich vom Ergebnis des Schrittes (4) die Zahl 25 subtrahierst, so erhältst du diejenige Zahl, deren eine Ziffer die Augenzahl des einen Würfels und deren andere Ziffer die Augenzahl des anderen Würfels bezeichnet.
a) Überprüfe dies an einem selbstgewählten Beispiel!
b) Weise nach, daß das für jeden mit zwei Würfeln möglichen Wurf gilt!

Olympiadeklasse 6

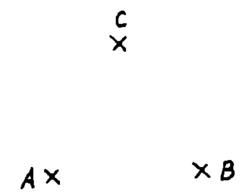
260621 Bei der folgenden fünfstelligen Zahl sind zwei Ziffern unleserlich geworden und durch Sternchen ersetzt.

2 7 * * 7

Anstelle der Sternchen sind zwei Ziffern so einzufügen, daß die Zahl durch 9 teilbar ist. Gib alle fünfstelligen Zahlen an, die durch derartiges Einfügen entstehen können! Weise nach, daß alle gesuchten Zahlen von dir angegeben wurden!

260622 Die Mädchen Britta, Petra und Anja wünschen sich einen Ball, eine Puppe und ein Album für Briefmarken. Dabei wünscht sich jedes der Mädchen genau einen der genannten Gegenstände, und zwar jedes Mädchen einen anderen.
Marie soll feststellen, wer von den Mädchen sich welchen Gegenstand wünscht. Auf ihre Frage erhält sie folgende Antworten:
(1) Britta wünscht sich den Ball.
(2) Petra wünscht sich den Ball nicht.
(3) Anja wünscht sich das Album nicht.
Von diesen drei Antworten ist genau eine wahr, die anderen beiden sind falsch.
Wenn man das weiß, kann man für jedes der drei Mädchen eindeutig feststellen, welchen Gegenstand es sich wünscht. Erkläre, wie sich diese Feststellungen gewinnen lassen, und gib die Feststellungen an!

260623 Es seien A, B, C die drei im Bild angegebenen Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Gerade liegen.
a) Konstruiere (mindestens) zwei Punkte



S_1 und S_2, für die
$\overline{S_1A} = \overline{S_1B}$ und $\overline{S_2A} = \overline{S_2B}$ gilt!
b) Es gibt genau einen Punkt S, der von A, B und C gleich weit entfernt ist. Konstruiere diesen Punkt S!
c) Begründe, warum der Punkt S bei deiner Konstruktion die geforderten Bedingungen erfüllt!

260624 Der Schüler Frank Schludrig meint, über seine Klasse folgendes herausgefunden zu haben: In der Klasse sind genau 28 Schüler, davon sind genau 16 Jungen. An Arbeitsgemeinschaften nehmen genau 20 Schüler der Klasse teil, davon sind genau 8 Jungen. An der Kreisolympiade *Junger Mathematiker* beteiligten sich genau 4 Schüler der Klasse, davon waren genau 2 Jungen. Von diesen Olympiadeteilnehmern sind genau 1 Junge und genau 1 Mädchen auch Mitglied einer Arbeitsgemeinschaft. Der Schüler Rolf Schlauberger hört sich diese Angaben an und behauptet nach einigem Überlegen, daß Frank Schludrig ein Irrtum unterlaufen sein muß. Weise nach, daß die Angaben von Frank Schludrig nicht stimmen können!

Olympiadeklasse 7

260721 Anne, Bernd und Peter helfen im Garten bei der Apfelernte. Alle drei benutzen Körbe gleicher Größe. Anne benötigt 10 Minuten, um einen Korb zu füllen, Bernd braucht dafür 15 Minuten und der kleine Peter sogar 30 Minuten.
Wie lange würde es dauern, bis die drei Kinder gemeinsam einen Korb gefüllt hätten? Wir setzen voraus, daß sich für keinen der drei Helfer die Pflückgeschwindigkeit ändert.

260722 Klaus lernte im Mathematik-Spezialistenlager Dorit kennen und fragte sie nach ihrem Alter. Sie antwortete: „Ich wurde im Mai desjenigen Jahres 10 Jahre alt, dessen Jahreszahl die kleinste durch 7 teilbare Zahl ist, die bei Division durch 2, 3, 5 und 11 jeweils den Rest 1 läßt."
Untersuche, ob Klaus aus dieser Antwort Dorits Alter eindeutig ermitteln konnte. Ist dies der Fall, dann gib an, wie alt (in vollen Lebensjahren gerechnet) Dorit im Juni 1986 ist!

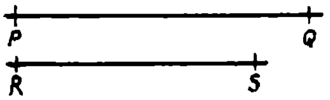
260723 Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm mit $AB \parallel CD$ und $AD \parallel BC$. Die Halbierende des Winkels $\sphericalangle DAB$ schneide die Seite CD in einem inneren Punkt E. Die Parallele durch E zu AD schneide AB in F.
Beweise, daß das Viereck $AFED$ ein Rhombus ist!

260724 Zu zwei gegebenen Streckenlängen $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ (siehe Bild) gibt es zwei weitere Streckenlängen a und b, die die Bedingungen

$\overline{PQ} = 2a + b$, (1)

$\overline{RS} = 2a - b$ (2)

erfüllen und durch diese Bedingungen eindeutig festgelegt sind.



Sie sollen auf zwei verschiedene Weisen ermittelt werden:

a) Übertrage $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ auf ein Zeichenblatt und konstruiere (ohne Verwendung einer Längenskala) aus diesen gegebenen Längen die gesuchten a und b! Beschreibe deine Konstruktion!

Begründe, warum die Aufgabe, (1) und (2) zu erfüllen, durch deine Konstruktion gelöst wird!

b) Ermittle a und b rechnerisch, wenn die gegebenen Längen

$\overline{PQ} = 9{,}8$ cm und $\overline{RS} = 6{,}6$ cm betragen!

Olympiadeklasse 8

260821 In der Kleinstadt A hat der Fleischer jeden Montag geschlossen, das Haushaltwarengeschäft jeden Dienstag und der Schuhmacher jeden Donnerstag. Der Optiker hat nur montags, mittwochs und freitags geöffnet. Am Sonntag sind alle Geschäfte geschlossen.

Eines Tages gingen die Freundinnen Anja, Ilka, Katrin und Susann, jede in ein anderes dieser vier Geschäfte. Als sie sich unterwegs trafen, sagten sie:

(1) Anja: „Susann und ich wollten eigentlich schon eher in dieser Woche einkaufen gehen, aber da gab es keinen Tag, an dem wir beide hätten unsere Besorgungen machen können."

(2) Ilka: „Ich wollte heute eigentlich nicht einkaufen, aber morgen hat das Geschäft geschlossen, in dem ich einkaufen will."

(3) Katrin: „Ich hätte auch schon gestern oder vorgestern alles besorgen können."

(4) Susann: „Ich hätte ebenso gestern oder auch morgen meinen Einkauf erledigen können."

Untersuche, ob diese Angaben miteinander vereinbar sind und ob dann aus ihnen eindeutig folgt,

a) wer von den genannten Mädchen in welchem der angegebenen Geschäfte war,

b) an welchem Wochentag das Gespräch stattgefunden hat!

Ist dies der Fall, dann gib die entsprechenden Antworten auf die Fragen a) und b)!

260822 Es sei k ein Halbkreis über dem Durchmesser AB. Eine Gerade schneide k in zwei von A und B verschiedenen Punkten D und C sowie die Verlängerung von AB über B hinaus in einem Punkt E derart, daß C zwischen D und E liegt. Außerdem gelte

(1) $\overline{BD} = \overline{BE}$ und

(2) $\sphericalangle DAC = 27°$.

Ermittle die Größe α des Winkels $\sphericalangle ACD$!

260823 Es sei $ABCDEFGHJKLM$ ein gerades sechsseitiges Prisma, in dem die sechs Seitenflächen $ABHG$, $BCJH$, $CDKJ$, $DELK$, $EFML$, $FAGM$ sowie die Grund- und Deckfläche $ABCDEF$ und $GHJKLM$ sämtlich einander umfangsgleich sind. Gegeben sei die Länge h der Strecke AG. Ermittle in Abhängigkeit von h die Längen dèr Strecken AB, BC, CD, DE, EF und FA!

260824 a) Ermittle alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingung erfüllen:

Setzt man vor die beiden Ziffern von z eine dritte Ziffer, so entsteht eine dreistellige Zahl, die 29mal so groß ist wie z.

b) Gib an, wie man weitere natürliche Zahlen z' bilden kann, die folgende Bedingung erfüllen:

Setzt man vor die sämtlichen Ziffern von z' eine weitere Ziffer, so entsteht eine neue Zahl, die 29mal so groß ist wie z'.

c) Ermittle alle diejenigen natürlichen, nicht durch 10 teilbaren Zahlen z'', die folgende Bedingung erfüllen:

Setzt man vor die sämtlichen Ziffern von z'' eine weitere Ziffer oder mehrere weitere Ziffern, so entsteht eine neue Zahl, die 29mal so groß ist wie z''.

Olympiadeklasse 9

260921 Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl n auch

$$\frac{n^3 - 2n^2 - 4n + 8}{n + 2}$$

eine natürliche Zahl ist!

260922 Peter und Heinz erzählen, daß sie Dreiecke gezeichnet haben, deren Seitenlängen, gemessen in Zentimeter, die Maßzahlen

$a = 3x + 9$,

$b = 5x + 8$,

$c = 4x + 1$

hatten, wobei x eine zuvor gewählte von Null verschiedene natürliche Zahl war.

Anke behauptet: Für jede von Null verschiedene natürliche Zahl x gibt es ein Dreieck mit den so gebildeten Maßzahlen a, b, c seiner Seitenlängen.

Birgit behauptet: Es gibt eine von Null verschiedene Zahl x, für die ein Dreieck, das diese Seitenlängen hat, rechtwinklig ist.

Untersuchen Sie für jede dieser beiden Behauptungen, ob sie wahr ist!

260923 Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel $(a; b; c)$ natürlicher Zahlen a, b, c, die die folgenden Bedingungen (1) bis (5) erfüllen!

(1) Es gilt $b < c$.

(2) b und c sind zueinander teilerfremd.

(3) a ist von jeder der Zahlen 4; 9; 12 verschieden.

(4) b und c sind von jeder der Zahlen 13; 16; 21 verschieden.

(5) Jede Zahl, die die Summe zweier verschiedener Zahlen der Menge $A = \{4; 9; 12; a\}$ ist, ist in der Menge $B = \{13; 16; 21; b; c\}$ enthalten.

260924 Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C wird gefordert, daß dieser rechte Winkel durch die Seitenhalbierende der Seite AB, die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ACB$ und die auf der Seite AB senkrechte Höhe in vier gleichgroße Winkel zerlegt wird.

Untersuchen Sie, ob es ein Dreieck ABC gibt, das diese Forderungen erfüllt, und ob alle Dreiecke, für die das zutrifft, einander ähnlich sind! Ermitteln Sie, wenn dies der Fall ist, die Größen der Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle ABC$!

Olympiadeklasse 10

261021 Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x und y, für die

$$3x^2 + 3y^2 - 18x + 12y + 27 = 0$$

gilt!

261022 Schneidet man einen Quader mit einer Ebene, so entsteht als Schnittfigur entweder ein Punkt oder eine Strecke oder ein n-Eck.

a) Ist es möglich, daß dieses n-Eck zwar ein Viereck, aber kein Trapez ist?

b) Ist es möglich, daß dieses n-Eck zwar ein Viereck, aber kein Parallelogramm ist?

261023 Zahlen stellen wir gewöhnlich im dekadischen Positionssystem (unter Verwendung der Basis 10 und der Ziffern 0, 1, ..., 9) dar. Man kann die Zahlen auch im dyadischen Positionssystem (oder Dualsystem) unter Verwendung der Basis 2 und der Ziffern 0 und 1 darstellen.

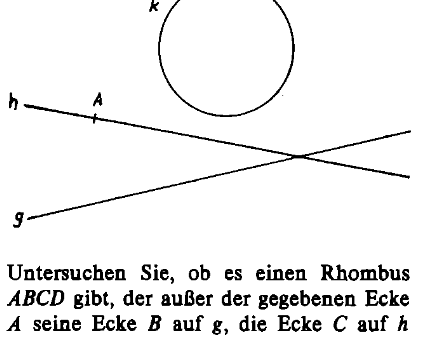
Zur Unterscheidung sei diese dyadische Darstellung einer Zahl durch eckige Klammern und eine kleine angehängte 2 gekennzeichnet.

a) Geben Sie für die Zahl 47 die dyadische Darstellung an! Ermitteln Sie für die Zahl, deren Darstellung im dyadischen System $[1\,1\,0\,0\,0\,1]_2$ lautet, die Darstellung im dekadischen Positionssystem!

b) Eine natürliche Zahl heiße „dekadische Spiegelzahl", wenn ihre dekadische Darstellung von rechts nach links gelesen dieselbe Ziffernfolge ergibt wie von links nach rechts gelesen.

Ermitteln Sie mindestens zwei natürliche Zahlen, die größer als 9 sind und die Eigenschaft haben, sowohl dekadische als auch dyadische Spiegelzahl zu sein!

261024 Auf dem Arbeitsblatt sind zwei Geraden g und h, ein Punkt A auf h und ein Kreis k eingetragen.



Untersuchen Sie, ob es einen Rhombus $ABCD$ gibt, der außer der gegebenen Ecke A seine Ecke B auf g, die Ecke C auf h und die Ecke D auf k hat!

Untersuchen Sie, ob es mehr als einen Rhombus mit diesen Eigenschaften gibt!

Wenn dies der Fall ist, sind dann alle derartigen Rhomben zueinander kongruent?
Hinweis: Der Lösungstext (nicht auf dem Arbeitsblatt) soll sich auf genau diejenige gegenseitige Lage der gegebenen g, h, k und A beziehen, die auf dem Arbeitsblatt ersichtlich ist. Das Arbeitsblatt (das für Konstruktionsschritte genutzt werden kann) ist abzugeben.

Olympiadeklassen 11/12

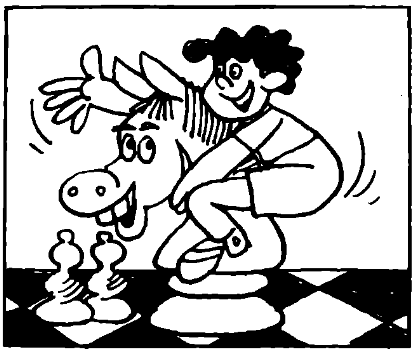
261221 Man ermittle alle diejenigen Tripel reeller Zahlen $(x; y; z)$, die Lösung des folgenden Gleichungssystems (1), (2), (3) sind:

$$x \cdot y = 2 \quad (1)$$
$$x \cdot z = 3 \quad (2)$$
$$x^2 + y^2 = 5. \quad (3)$$

261222 Man ermittle alle diejenigen Tripel $(p; q; r)$ von Primzahlen, die die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllen:
(1) In der Folge aller Primzahlen sind p, q, r in dieser Reihenfolge aufeinanderfolgende Primzahlen.
(2) Die Zahl $s = p^2 + q^2 + r^2$ ist eine Primzahl.

261223 In einer Stadt soll ein Wasserballturnier stattfinden, an dem zehn Mannschaften beteiligt sind. Jede Mannschaft spielt in einer Hin- und einer Rückrunde jeweils genau einmal gegen alle anderen. Zur Verfügung stehen zwei Schwimmhallen, die so weit voneinander entfernt sind, daß im Laufe eines Spieltages kein Übergang einer Mannschaft von einer Halle zur anderen erfolgen kann. Außerdem haben sich folgende Bedingungen als notwendig herausgestellt:
(1) An jedem Spieltag kann jede Mannschaft höchstens zwei Spiele bestreiten.
(2) In jeder Halle sind an jedem Spieltag höchstens fünf Mannschaften anwesend.
(3) Jede Mannschaft kann die Rückrunde erst beginnen, wenn sie alle Spiele der Hinrunde abgeschlossen hat.
Bei der Planung des Turniers wurde zunächst ein Spielplan aufgestellt, nach dem das Turnier in 10 Tagen durchgeführt werden kann.
Man untersuche, ob es unter den genannten Bedingungen auch möglich ist, das Turnier in 9 Tagen durchzuführen.

261224 Zwei Kreise k_1, k_2 seien so gelegen, daß sie sich in zwei verschiedenen Punkten A, B schneiden und daß die Verbindungsstrecke M_1M_2 der beiden Kreismittelpunkte von der Strecke AB in einem Punkte geschnitten wird, der zwischen M_1 und M_2 liegt. Unter allen denjenigen Geraden, die durch A gehen und außerdem sowohl den Kreis k_1 in einem von A und B verschiedenen Punkt P als auch den Kreis k_2 in einem von A und B verschiedenen Punkt Q schneiden, wird nun eine Gerade gesucht, für die die Strecke PQ möglichst lang ist.
Man untersuche, ob es eine solche Gerade gibt, ob sie dann durch die Kreise k_1, k_2 eindeutig bestimmt ist und, wenn dies der Fall ist, welche Lage diese Gerade dann hat.



Anordnung von Schachfiguren

Bei der Anordnung gleich- und verschiedenartiger Figuren auf dem Schachbrett gibt es eine Fülle interessanter Probleme. Dabei wirft jede Schachfigur für sich betrachtet die bekannten Minimax-Probleme auf: Wie viele braucht man minimal, damit alle Felder besetzt sind oder beherrscht werden? Wie viele können maximal aufgestellt werden, ohne daß sich die Steine bedrohen? Wie viele Variationen gibt es dabei jeweils?
Für den Fall, daß fünf Damen alle 64 Felder des Schachbrettes beherrschen, sind zahlreiche Lösungsmöglichkeiten bekannt.

Diagramm 1 zeigt eine solche Lösung. Die Anzahl der Lösungen wird jedoch bedeutend verringert, wenn man fordert, daß die fünf Damen in einer geraden Linie (Waagerechte, Senkrechte oder Diagonale) stehen müssen. Wie viele verschiedene Lösungsmöglichkeiten gibt es?

Im Diagramm 2 sind vier Damen und ein Springer so aufgestellt, daß 63 Felder des Schachbrettes von ihnen beherrscht oder besetzt sind. Nur das Feld a7 ist weder besetzt noch wird es von einer der Figuren beherrscht. Ist es möglich, mit diesen fünf Figuren alle 64 Felder entweder zu besetzen oder zu beherrschen?

H. Rüdiger

Diagramm 1

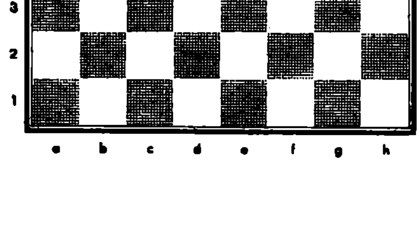
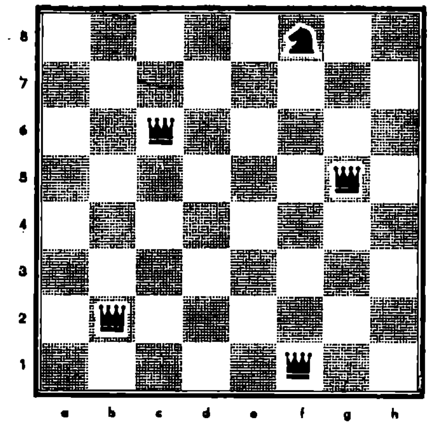


Diagramm 2



Neues aus dem Sportverlag

J. Awerbach
Turmendspiele
Band 1: Turm gegen Bauern
Turm und Bauer gegen Turm
212 Seiten Preis: 14,00 M
Bestell-Nr. 671 625 8

Band 2: Turm und zwei Bauern gegen Turm – Turm mit Bauern gegen Turm mit Bauern
218 Seiten Preis: 14,00 M
Bestell-Nr. 671 626 6

A. Pötzsch
Spaß am Kombinieren
190 Seiten Preis: 15,80 M
Bestell-Nr. 671 643 4

„Beeile dich! Und nimm auf der Straße gefälligst deine Gedanken zusammen!"
Hans-Jürgen Starke, aus: Für Dich, Berlin

Einige Bemerkungen über Extremalprobleme

Teil 2

Entsprechend modernem Sprachgebrauch geht es in den in Heft 1/87 formulierten Variationsproblemen darum, ein sogenanntes Funktional zu einem Minimum zu machen. Ein Funktional F bezeichnet hierbei eine Abbildung, die jeder Funktion f aus einer gewissen Funktionenklasse M eine reelle Zahl $F(f)$ zuordnet. Gesucht ist eine solche Funktion f_0, für welche $F(f_0)$ den kleinsten Wert hat.

In Beispiel 5 bedeutet $F(f)$ die Laufzeit eines Massenpunktes entlang einer Bahnkurve $f(x)$, in Beispiel 6 den Inhalt der durch eine Kurve f gegebener Länge begrenzten Fläche in der Ebene bzw. das Volumen des durch eine Fläche f gegebenen Inhalts begrenzten räumlichen Bereichs und in Beispiel 7 den Flächeninhalt einer Fläche im Raum, die in eine gegebene Randkurve eingespannt ist. Es ist aber nicht nur erforderlich, für jedes Problem das Funktional F, sondern auch die Funktionenklasse genau zu präzisieren, die als Konkurrenzmenge zur Bestimmung des Minimums in Frage kommt. Abgesehen davon, daß die Funktionen, wie bereits in den obigen Beispielen ersichtlich ist, von einer oder von mehreren Variablen abhängen können, muß eine Festlegung darüber getroffen werden, wie „glatt“ die Konkurrenzfunktionen und damit auch die Lösungen des Problems sein sollen.

Diesem Sachverhalt trägt man heutzutage dadurch Rechnung, daß Lösungen in genau präzisierten, sogenannten Funktionenräumen gesucht werden. Ohne eine derartige Präzisierung des Problems ist es in der Regel nicht möglich, exakte mathematische Existenzbeweise zu führen. Wir werden darauf zurückkommen. Daß ein Variationsproblem nicht immer eine Lösung besitzen muß, wollen wir an einem ganz einfachen Beispiel illustrieren. In der Ebene seien zwei Punkte A und B gegeben, die den Abstand d voneinander haben. Gesucht ist ein A und B verbindender

Bild 4

Streckenzug minimaler Länge, welcher die Eigenschaft hat, im Punkte A senkrecht zu der A und B verbindenden Geraden zu verlaufen (Bild 4).

Offenbar kann die Länge des gesuchten Streckenzuges nicht kleiner als d sein. Unmittelbar einleuchtend ist auch, daß es zu jeder vorgegebenen Zahl $d + \varepsilon$, wobei $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine Zahl ist, einen Streckenzug der verlangten Art mit einer Länge $< d + \varepsilon$ gibt. Der gesuchte kürzeste Streckenzug müßte also die Länge d haben. Der einzige A und B verbindende Streckenzug der Länge d ist die Verbindungsstrecke. Diese erfüllt aber nicht die geforderte Zusatzbedingung. Folglich besitzt die Aufgabe keine Lösung.

Bis weit in das 19. Jahrhundert hinein wurde selbst von den großen Mathematikern der damaligen Zeit bei der Betrachtung von Extremalproblemen die Existenz einer Lösung als selbstverständlich angenommen. Insbesondere gingen
C. F. Gauß (1777 bis 1855),
P. G. L. Dirichlet (1805 bis 1859)
und B. Riemann (1826 bis 1866)
in vielen bedeutenden Arbeiten bedenkenlos von solchen Annahmen aus. Dieser Umstand findet allerdings seine Erklärung darin, daß eine Reihe grundlegender physikalischer Gesetze ihren Ausdruck in Minimalprinzipien findet, so daß aus damaliger Sicht die mathematische Existenz einer Lösung als gleichbedeutend mit der Realisierung eines bestimmten physikalischen Zustandes angesehen wurde. Zum Beispiel herrscht in einem mechanischen System dann ein stabiles Gleichgewicht, wenn sich das System in einem Zustand befindet, in dem die potentielle Energie ein Minimum ist. In ähnlicher Weise ließen sich viele klassische Variationsprobleme als Probleme der mathematischen Physik interpretieren, wobei es in der Regel um die Beschreibung eines stationären physikalischen Zustandes geht, d. h. eines Zustandes, der sich im Zeitablauf nicht ändert. Seine Realisierung im physikalischen Experiment galt gleichzeitig als Existenzbeweis für das zugehörige mathematische Problem. Beispielsweise lassen sich für das Minimalflächenproblem (Beispiel 7) solche Experimente in sehr einfacher Weise durchführen. Stellt man etwa aus einem Draht einen geschlossenen Rahmen her, der die gegebene Randkurve repräsentiert, taucht diesen in eine Flüssigkeit mit geringer Oberflächenspannung und zieht ihn dann heraus, so bildet sich innerhalb des Rahmens eine dünne Haut in der Gestalt der gesuchten Minimalfläche. Das Plateausche Problem, dessen explizite mathematische Lösung außerordentlich schwierig ist, läßt sich also praktisch sehr einfach „lösen“, indem man den Draht in die jeweils vorgeschriebene Lage biegt.

Von der Entstehung der Variationsrechnung zu Beginn des 18. Jahrhunderts bis zu ihrer mathematisch einwandfreien Fundierung, die es schließlich ermöglichte, korrekte Existenzbeweise zu führen, sind immerhin 200 Jahre vergangen. Die Krönung dieser Entwicklung ist eng mit David Hilbert (1862 bis 1943) verbunden und stellt eine der grundlegenden Ausgangspunkte zur Entstehung der sogenannten Funktionalanalysis dar, die die Mathematik dieses Jahrhunderts wesentlich mitgeprägt hat, auf die hier allerdings nicht eingegangen werden kann.

Eine grundlegende Rolle in diesem historischen Entwicklungsprozeß spielte das Dirichletsche Prinzip, das wiederum in unmittelbarem Zusammenhang zum Dirichlet-Problem steht, auf das wir kurz eingehen wollen. Es handelt sich dabei um ein Randwertproblem für die sogenannte Laplace-Gleichung. Die Laplace-Gleichung stellt ein spezielles, jedoch sehr repräsentatives Beispiel einer partiellen Differentialgleichung dar. In einem Gebiet G des gewöhnlichen dreidimensionalen Raumes R^3 sei eine Funktion $u(x,y,z)$ gesucht, die von den 3 Variablen x,y,z abhängt und in G der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (2)$$

genügt. Dabei bedeuten die einzelnen Summanden die zweiten partiellen Ableitungen der Funktion u nach den jeweiligen Variablen. Für den Ausdruck auf der linken Seite schreibt man kurz Δu. Ganz allgemein spricht man von einer partiellen Differentialgleichung, wenn in einer Gleichung für eine gesuchte Funktion u von mehreren Variablen gewisse partielle Ableitungen von u vorkommen. Die Gleichung (2) ist der Prototyp einer elliptischen Differentialgleichung. Die Lösungen von (2) nennt man harmonische Funktionen. Denjenigen Zweig der Mathematik, der sich mit der Lösungstheorie der Laplace-Gleichung, insbesondere also mit den harmonischen Funktionen beschäftigt, nennt man Potentialtheorie. Die Potentialtheorie ist eines der ältesten und am weitesten entwickelten Gebiete der Analysis und stellt eines der vollkommensten Beispiele für die Verbindung mathematischen und physikalischen Denkens dar. Die Ursache liegt in der Verwurzelung der Laplace-Gleichung innerhalb der Mathematischen Physik.

Die Funktion u in der Gleichung (2) beschreibt verschiedenartigste stationäre physikalische Zustände. Charakteristische Beispiele sind

a) das elektrostatische Potential eines stationären elektrischen Stromes,
b) die Temperatur eines stationären Wärmefeldes,
c) das Gravitationspotential,
d) das Strömungspotential einer idealen, inkompressiblen Flüssigkeitsströmung.

Es geht dabei nicht schlechthin darum, Lösungen der Differentialgleichung zu ermitteln, sondern solche Lösungen zu finden, die gewissen zusätzlichen Bedingungen ge-

nügen. Charakteristisch für die Klasse der elliptischen Differentialgleichungen sind die sogenannten Randwertaufgaben. Typisches Beispiel hierfür ist das Dirichlet-Problem bei der Laplace-Gleichung:
Gesucht ist eine im Gebiet G harmonische Funktion u, die auf dem Rand Γ des Gebietes vorgegebene Randwerte f annimmt. Die Existenz einer eindeutigen Lösung dieses Problems unter der Annahme, daß der Rand Γ hinreichend „glatt" (und die Randfunktion f stetig) ist, läßt sich wiederum sehr leicht durch physikalische Experimente plausibel machen, denn beispielsweise führt jede elektrische Leiteranordnung zu einer wohlbestimmten „Lösung" des Problems. Dieser sich schließlich einstellende physikalische Zustand ist andererseits durch ein Minimum der Energie charakterisiert. Daher kann das Dirichlet-Problem auch auf eine Variationsaufgabe, nämlich auf die Minimierung der Energie zurückgeführt werden. Der Ausdruck für die Energie hat die Gestalt eines Integrals. Es muß also ein gewisses Integral zum Minimum gemacht werden. Da wir den Integralbegriff hier nicht voraussetzen wollen, gehen wir nicht näher darauf ein. Es sei nur erwähnt, daß Variationsaufgaben in der Regel darauf hinauslaufen, Integrale zu minimieren. Die Lösbarkeit des dem Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung zugeordneten Variationsproblems bezeichnet man seit Riemann in der Literatur als Dirichlet-Prinzip. Die Gültigkeit des Dirichlet-Prinzips wurde also lange Zeit aus rein physikalischen Gründen, insbesondere von B. Riemann, als evident angesehen., B. Riemann gründete wesentliche Teile der von ihm entwickelten Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen auf dieses Prinzip. K. Weierstraß war es schließlich, der Kritik an dieser Vorgehensweise übte und darauf hinwies, daß die Gültigkeit des Dirichlet-Prinzips mathematisch keineswegs evident ist, sondern eines Beweises bedarf. Er stützte diese Kritik auf ein Gegenbeispiel, womit er zeigte, daß das Dirichlet-Prinzip ohne eine genauere Präzisierung der zugrundeliegenden Funktionenklasse tatsächlich nicht immer gültig ist. Die Klärung dieser Fragen erwies sich zur damaligen Zeit als außerordentlich schwieriges Problem. Die mathematische Forschung war noch nicht darauf vorbereitet. Erst nach weiteren Jahrzehnten gelang D. Hilbert der bereits erwähnte Durchbruch. Die Krise um das Dirichlet-Prinzip führte andererseits zur Entwicklung neuer Methoden zur Lösung des Dirichlet-Problems und wirkte sich daher sehr fruchtbar auf die Entwicklung der Potentialtheorie, der Theorie der Integralgleichungen, der direkten Methoden der Variationsrechnung bis hin zur modernen Funktionalanalysis aus.
Zur Ergänzung unserer Ausführungen fügen wir noch einige weitere, aus der mathematischen Literatur geläufige Extremalprobleme an, auf die wir aber nicht näher eingehen wollen.

Beispiel 8

Gegeben seien eine Gerade l und zwei Punkte P und Q auf derselben Seite von l. Für welchen Punkt R auf l ist der Weg eines Lichtstrahles von P über R nach Q am kürzesten (Heronsches Problem, Heron von Alexandria, um 75 u. Z.) (Bild 5).
Die Lösung steht im Einklang mit dem bekannten Reflexionsgesetz (Heronsches Prinzip) der Physik. Mit anderen Worten, das Reflexionsgesetz kann durch ein Minimalprinzip beschrieben werden. Im 17. Jahrhundert zeigte P. Fermat, daß auch das Gesetz der Lichtbrechung in Form eines Minimalprinzips darstellbar ist. Die Lösung der folgenden Aufgabe möge der Leser selbst auf das Heronsche Problem zurückführen.

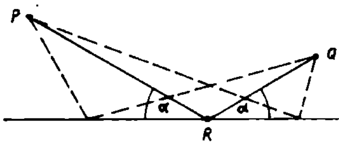


Bild 5

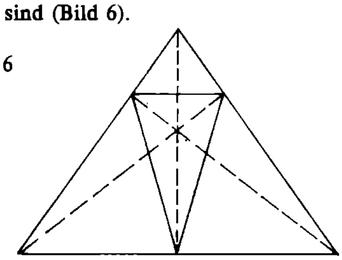
Beispiel 9

a) Gegeben sei der Flächeninhalt F und die Länge c einer Seite eines Dreiecks. Unter allen solchen Dreiecken ist dasjenige zu bestimmen, für das die Summe der Längen der beiden anderen Seiten den kleinsten Wert hat.
b) In einem Dreieck sei die Länge einer Seite c und die Summe $a + b$ der Längen der beiden anderen Seiten gegeben. Gesucht ist unter allen solchen Dreiecken das mit dem größten Flächeninhalt.

Beispiel 10

Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck. Gesucht ist ein einbeschriebenes Dreieck (d.h. die Ecken liegen je auf einer Seite des gegebenen Dreiecks) mit minimalem Umfang (Schwarzsches Dreiecksproblem, Hermann Amandus Schwarz [1843 bis 1921]). Die Lösung wird durch das sogenannte Höhendreieck realisiert, dessen Eckpunkte die Fußpunkte der Höhen des gegebenen Dreiecks sind (Bild 6).

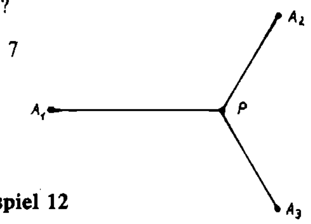
Bild 6



Beispiel 11

a) Es seien drei Punkte A_1, A_2, A_3 in der Ebene gegeben. Gesucht ist ein vierter Punkt P der Ebene, so daß die Summe $a_1 + a_2 + a_3$ der Abstände des Punktes P von A_1, A_2, A_3 ein Minimum wird (Steinersches Problem).
b) Gegeben seien n Punkte A_1, A_2, ..., A_n in der Ebene. Gesucht ist ein zusammenhängendes Streckensystem von minimaler Gesamtlänge, so daß je zwei der gegebenen Punkte durch einen Polygonzug aus Strecken des Systems verbunden werden können (Straßennetzproblem oder Steinersches Minimalbaumproblem).
Nehmen wir im Falle des Beispiels 11 a) an, daß alle Winkel des Dreiecks $A_1A_2A_3$ kleiner als 120° sind, so ist der gesuchte Punkt P dadurch charakterisiert, daß von ihm aus alle drei Seiten A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 unter dem Winkel 120° erscheinen (Bild 7).
Der Leser möge versuchen, diese Aussage zu beweisen. Was geschieht, wenn einer der Dreieckswinkel größer oder gleich 120° wird?

Bild 7

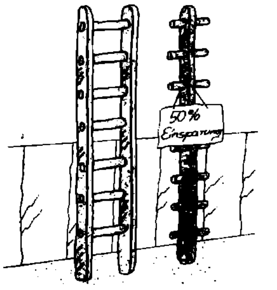


Beispiel 12

Gegeben sei eine Fläche S im Raum und 2 Punkte P und Q auf S.
Unter allen P und Q verbindenden und in der Fläche verlaufenden Kurven ist diejenige mit minimaler Länge gesucht (Problem der geodätischen Linien).
Auf der Kugeloberfläche handelt es sich dabei gerade um die sogenannten Großkreise.
Abschließend wollen wir noch etwas näher auf das in Beispiel 6 formulierte isoperimetrische Problem eingehen. Daß der Kreis unter allen geschlossenen Kurven vorgeschriebener Länge den größten Flächeninhalt und entsprechend die Kugel unter allen geschlossenen Flächen gegebenen Inhalts das größte Volumen einschließt, sind Tatsachen, an denen man natürlich auch in der Antike keinen Zweifel hegte. Dennoch sind erst in neuerer Zeit strenge Beweise dafür gefunden worden. Diese Beweise sind zum Teil äußerst elegant und originell. Grundsätzlich ist hierzu zu bemerken, daß viele der klassischen, teilweise uralten Extremalprobleme heute mit „Standardmethoden" gelöst werden können, die für zunächst scheinbar ganz verschiedenartige Problemstellungen eine einheitliche Behandlung gestatten. Man braucht nur an die oben skizzierte Untersuchung gewöhnlicher Extremwertaufgaben mit Hilfe der Differentialrechnung zu denken. Dabei geht allerdings oft der Reiz der direkten und elementaren Behandlung eines Problems verloren. Auch für das isoperimetrische Problem gibt es verblüffend elementare Zugänge. Wir möchten in der folgenden Aufgabe den Leser anregen, einen auf J. Steiner (1796 bis 1863) zurückgehenden einfachen Beweis für das isoperimetrische Problem in der Ebene nachzuvollziehen. Natürlich wird dazu eine Anleitung gegeben. Wer sich jedoch unmittelbar mit Steiner messen und das Problem auch ohne Anleitung lösen möchte, der versuche es, ohne diese zur Kenntnis zu nehmen. Schließlich wollen wir noch unterstreichen, daß es sich bei unserer Aufgabe nicht um einen Existenzbeweis für eine Lösung des isoperimetrischen Problems handelt.

G. Wildenhain

In freien Stunden · alpha-heiter



Frank Steger, Eulenspiegel

Kryptarithmetik

```
  BLAU        ALLE       FÜNF
+ ROT      + LESEN     + FÜNF
  LILA       ALPHA       ZEHN
```

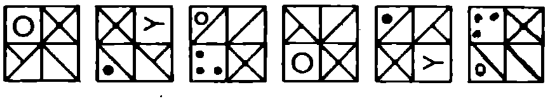
Steffi Hofmann, Halle

```
4xx · x2x       √WONDERFUL = OODDF
x3xx
  12              GLIED
 xx4x           + GLIED
xxxxx8            KETTE
```

Knobelei

Wie muß die rechte Figur aussehen?
Vervollständige die Zeichnung!

aus: Trommel, Berlin



Achtung – Straßenbahnknotenpunkt

In einer Stadt existiert ein Straßenbahn-Knotenpunkt E, in dem insgesamt 14 Straßenbahnlinien aus (bzw. nach) vier verschiedenen Richtungen A, B, C, D zusammenlaufen. Die vier verschiedenen Richtungen haben über den Punkt E folgende Verbindungen: AEB, AEC, BEC, BED. Die Verbindungen: CED und AED gibt es nicht.
Die vier Richtungen werden erreicht:
– A von 6 Linien, – B von 10 Linien,
– C von 9 Linien, – D von 3 Linien.
Wieviel Linien verkehren: in Richtung AEB, in Richtung AEC, in Richtung BEC (bzw. entgegengesetzt)?

Ing. A. Körner, Leipzig

Kurios anmutende Beziehungen

Verifiziere die folgenden, kurios anmutenden Beziehungen!
Versuche, analoge Gleichungen anzugeben!

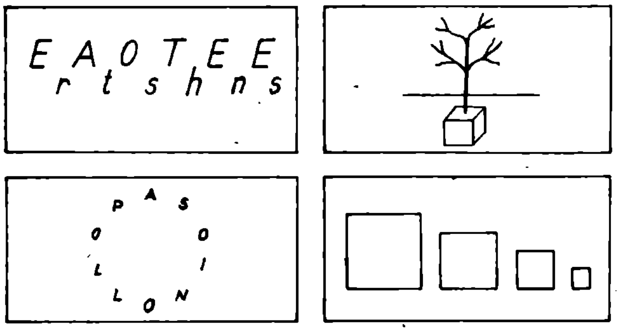
$$\sqrt{\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \sqrt[3]{3\frac{3}{26}} = 3\sqrt[3]{\frac{3}{26}}$$

$$\sqrt{5\frac{5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}} \qquad \sqrt[3]{4\frac{4}{63}} = 4\sqrt[3]{\frac{4}{63}}$$

Mathematische Spielereien

Interpretiere!

Prof. Dr. F. Smarandache, SR Rumänien



Notensalat

In einer Klasse erhielt kein Schüler als Abschlußzensur die Note 5, jeder neunte die Note 1, jeder dritte die Note 2 und jeder sechste die Note 4. In der Klasse sind mehr als 20 und weniger als 40 Schüler. Wie viele erhielten eine 3 als Abschlußnote?

Füllrätsel

In die senkrechten Spalten des Füllrätsels sind sieben Wörter mit je sechs Buchstaben von oben nach unten einzutragen, die folgendes bedeuten:
1. antikes Rechenbrett; 2. Zeichenhilfsmittel; 3. Linie ohne Krümmung; 4. griechischer Mathematiker; 5. polnischer Mathematiker; 6. Halbmesser eines Kreises; 7. eines der Bilder der Zweitafelprojektion.

1	2	3	4	5	6	7

Die oberste Zeile ergibt dann den Namen eines Teilgebietes der Mathematik.

OStR Th. Scholl, Berlin

In der MITROPA

In der MITROPA-Verkaufsstelle im Leipziger Hauptbahnhof bedienen die dort tätigen Kolleginnen freundlich und schnell. Eines Tages kommt ein kleiner Junge in die Verkaufsstelle und spricht: „Meine Mutti hat gesagt, ich soll für 5 Mark Kuchen holen. Ich möchte solchen und solchen Kuchen." Dabei zeigt er auf drei Kuchensorten, sagen wir Kuchen A (je Stück 0,30 M), Kuchen B (je Stück 0,35 M) und Kuchen C (je Stück 0,40 M). Wieviel Stück von jeder der drei Kuchensorten muß die Kollegin dem Jungen einpacken, damit der Gesamtpreis genau 5 Mark beträgt, und der Junge von jeder Kuchensorte mindestens 4 Stück erhält?

Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

$1-9+8+7=1\cdot(9-8)\cdot 7$

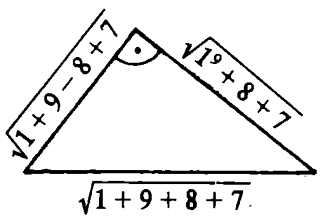
$0=1^9-(8-7)$	$6=1\cdot(-9+8)+7$
$1=1^9\cdot(8-7)$	$7=1\cdot(9-8)\cdot 7$
$2=1^9+(8-7)$	$8=1\cdot 9-(8-7)$
$3=1\cdot\sqrt{9}\cdot(8-7)$	$9=-1+9+8-7$
$4=1\cdot\sqrt{9}+(8-7)$	$10=1+9\cdot(8-7)$
$5=-1-9+8+7$	

$$1^9\cdot 8\cdot 7-1+9+8-7=1\cdot 9\cdot 8-7$$

$$[1\cdot(-9)+8+7]\cdot(1+9+8+7)=(1+9)\cdot(8+7)$$

$$1\cdot 9-8+7=\sqrt{1\cdot 9\cdot 8\cdot 7:(1\cdot 9-8+7)+(1^9\cdot 8-7)}$$

Schüler des Fakultat. Kurses „Mathematik", OS Dr. K. Fischer, Pirna



$A=(1-9):8+7$
$u=-1\cdot\sqrt{9}+8+7$

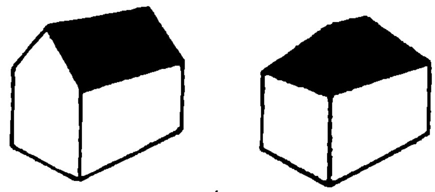
Ing. H. Decker, Köln

N. Welewzew, Krokodil, Moskau

Gleiche oder ungleiche Mengen?

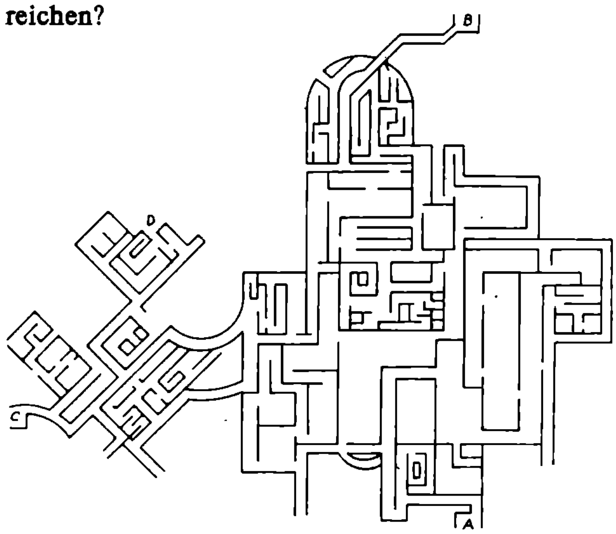
Zwei Häuser, wie das Bild zeigt, haben die gleiche rechteckige Grundfläche. Beim Giebelhaus und beim Wohnhaus ist der Neigungswinkel des jeweiligen Daches der gleiche.
Für welches Dach braucht man mehr Dachpappe?

aus der engl. Studentenzeitschrift Mathematical Spectrum, Sheffield



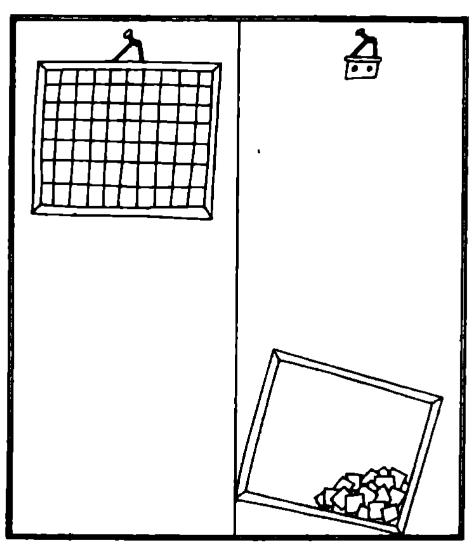
Labyrinth

Finde den kürzesten Weg von A nach B,
von A nach C,
von A nach D!
Wieviel Ausgänge sind von A außerdem noch zu erreichen?



Korinna König, Klasse 1c der 83. POS in Leipzig-Grünau

Eberhard Dietzsch, Eulenspiegel



ARBEITS-
GEMEINSCHAFTEN
IM BLICKPUNKT

Mini-BASIC für alpha-Leser, Teil 4

Wir haben bisher verschiedene BASIC-Anweisungen kennengelernt, mit denen wir auch schon Verzweigungen und Schleifen (auch Zyklen bzw. Wiederholungen genannt) programmieren können. Die folgenden Beispiele demonstrieren zum einen verschiedene Anwendungen, zum anderen weitere Möglichkeiten des Programmierens von Wiederholungen.

Ausdauer führt zum Ziel!
Oder:
Das Programmieren von Wiederholungen

Aufgabenbeispiel 3

Eine Schule hat 22 Klassen. Bei vielen Abrechnungen (z. B. Essengeld, Teilnehmermeldungen) sind die Angaben für jede Klasse zu addieren, um eine Gesamtsumme für die Schule zu erhalten!
Für diese fortlaufende Addition von 22 einzugebenden Summanden soll ein Programm aufgestellt werden.
Wir überlegen:
Z_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, 22)$ sind die einzelnen Summanden.
Die Eingabeanweisung INPUT muß 22mal auftreten; deshalb nehmen wir sie einmal innerhalb einer entsprechenden FOR-NEXT-Schleife auf.
Die Summe wird wie folgt gebildet:

$$S_{22} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots + Z_{22}$$

Die i-te Summe ist allgemein

$$S_i = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots + Z_i$$

Für S_{i+1} gilt dann:

$$S_{i+1} = S_i + Z_{i+1} = (Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots + Z_i) + Z_{i+1}$$

Also können wir im $(i+1)$-ten Durchlauf zum aktuellen Wert der Summe (S_i) die $(i+1)$-te Zahl addieren und erhalten damit den neuen aktuellen Wert der Summe (S_{i+1}). $S \leftarrow S + Z$[1])
Vor dem ersten Durchlauf muß natürlich S den Wert 0 haben. Man setzt daher $S = 0$, also einen *Startwert* für S.
Der *Lösungsplan* liegt damit vor:

(1) Startwert $2 \leftarrow 0$
(2) Wiederhole 22mal
 Eingabe Z
 $S \leftarrow S + Z$
(3) Ausgabe von S

[1]) Den Pfeil ← verwendet man, um Wertzuweisungen zu kennzeichnen.

Diesen verbal formulierten Lösungsplan kann man auch grafisch darstellen.
Eine Form ist das *Struktogramm*:

Startwert $S \leftarrow 0$	
Für $I = 1$ bis 22	
	Eingabe Z $S \leftarrow S + Z$
Nächstes I Ausgabe S	

▲24▲ Entwickle ein BASIC-Programm entsprechend diesem Lösungsplan! (Das Programm soll auch Text enthalten.)
Wir haben gesehen, daß das fortlaufende Addieren von Zahlen, deren Anzahl bekannt ist, sich bequem in einer FOR-NEXT-Schleife (auch Zählschleife genannt) programmieren läßt.

▲25▲ Schreibe ein BASIC-Programm zur Ermittlung des Produkts P der ersten n geraden Zahlen $(n \neq 0)$!

$$P = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2n$$

Aufgabenbeispiel 4

Bei physikalischen Experimenten werden oft Meßreihen aufgenommen, um zufällige Fehler auszugleichen. Bei der Auswertung von Meßreihen wird häufig das arithmetische Mittel $\bar{x}$ berechnet:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)$$

Es soll ein Programm entwickelt werden, das die Eingabe von Zahlen und das Berechnen des arithmetischen Mittels dieser Zahlen ermöglicht.
Die Anzahl der Summanden (n) soll vorher nicht bekannt sein.
Vorüberlegungen: Auch hier ist die Summe von Zahlen zu ermitteln. Jedoch kann das hier nicht mit einer FOR-NEXT-Schleife programmiert werden, weil die Summanden vorher nicht extra gezählt werden soll. Also muß nach jeder Eingabe festgestellt werden, ob noch Zahlen einzugeben sind. Wenn ja, kann zur Eingabe zurückgesprungen werden, wenn nein, kann die Berechnung des arithmetischen Mittels erfolgen. Innerhalb dieses Zyklus werden die Zahlen fortlaufend addiert und gezählt.
Lösungsplan: (S – Summen, N – Anzahl, X – zu addierende Zahl, D – arithmetisches Mittel)

(1) Startwerte: $S \leftarrow 0$, $N \leftarrow 0$
(2) Eingabe: X } Schleifenkörper
(3) Erhöhe N um 1 } Schleifenkörper
(4) Addiere X zu S } Schleifenkörper
(5) Wiederhole (2) bis (4), bis alle Zahlen eingegeben sind
(6) Berechne $D \leftarrow S/N$
(7) Gib D und N an

Struktogramm:

Startwerte: $S \leftarrow 0$, $N \leftarrow 0$	
Wiederhole	Eingabe X $N \leftarrow N + 1$ $S \leftarrow S + X$
bis alle Zahlen eingegeben sind	
$D \leftarrow S/N$	
Ausgabe: N, D	

Programm 6

```
10 CLS
20 PRINT
   „ARITHMETISCHES MITTEL“
30 PRINT „----------“: PRINT
40 LET S = 0: LET N = 0
50    INPUT „GIB ZAHL EIN:“; X
60    LET N = N + 1
70    LET S = S + X
80    INPUT „NOCH EINE ZAHL?
      JA(1)/NEIN(0)“; A
90 IF A = 1 THEN 50
100 PRINT: PRINT: LET D = S/N
110 PRINT „ANZAHL DER DATEN:“; N
120 PRINT
   „ARITHMETISCHES MITTEL:“; D
130 END
```

▲26▲ Arbeite dieses Programm mit folgenden x-Werten ab: 2, 3, 5, 7, 6, 1!
Fülle dabei folgende Tabelle aus!

N	
S	
X	
A	
D	

Dieses Programm ermöglicht das wiederholte Durchlaufen einer bestimmten Anweisungsfolge (50 bis 80), eine Schleife *ohne* FOR...NEXT.
Um diesen Zyklus verlassen zu können, gibt es eine *Abbruchbedingung* (vorgegeben in Zeile 80), die man mit einer IF...THEN-Anweisung überprüft (Zeile 90). Der Rücksprung wird so oft wiederholt, wie für A der Wert 1 eingegeben wird. Innerhalb des Zyklus werden die Summanden gezählt (= Anzahl der Schleifendurchläufe; Zeile 60). Nach Verlassen des Zyklus erfolgt die Berechnung des arithmetischen Mittels.
Wir haben eine Wiederholung mit *nachgestellter* Abbruchbedingung vorliegen (WIEDERHOLE...BIS-Zyklus). Dieser wird in jedem Fall mindestens einmal durchlaufen.

▲27▲ a) Kann man durch fortlaufende Addition der Brüche $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ usw. eine Summe erreichen, die größer als 5 ist? Wie viele Brüche müßte man dazu addieren?
Stelle zur Lösung dieser Aufgabe ein BASIC-Programm auf!
b) Gibt es eine Zahl für die Summe, die auf diese Weise nie erreicht wird?

Aufgabenbeispiel 5

Der Holzbestand eines Waldstücks werde auf 60000 m³ Holz geschätzt.
Wieviel Jahre dauert es, bis der Holzbestand auf 80000 m³ angewachsen ist, wenn man davon ausgeht, daß er jährlich um 2,3 % wächst?
Überlegen wir gemeinsam:
x sei der gegenwärtige Holzbestand (in m³).
E sei der zu erreichende Holzbestand (in m³).

H_i sei der Holzbestand (in m^3) im i-ten Jahr ($i = 1, 2, 3, \ldots$).
Nach einem Jahr beträgt der Holzbestand $H_1 = x + \frac{x \cdot 2{,}3}{100}$.
Nach zwei Jahren beträgt der Holzbestand $H_2 = H_1 + \frac{H_1 \cdot 2{,}3}{100}$ usw.

Solange der Holzbestand noch kleiner als 80 000 m^3 ist, muß der jährliche Holzzuwachs berechnet und der neue Holzbestand ermittelt werden.

Sehr übersichtlich kann man den Lösungsplan wieder in einem *Struktogramm* darstellen:

Eingabe: Ausgangsbestand x, Endbestand E
Anzahl der Jahre $J \leftarrow 0$
Holzbestand $H \leftarrow x$
Solange $H < E$ tue
$H \leftarrow H + \frac{H \cdot 2{,}3}{100}$ (Schleifenkörper; Schleife)
$J \leftarrow J + 1$ (Schleifenkörper; Schleife)
Ausgabe: Jahre J

Solche Wiederholungen oder Schleifen, wie sie mit obigem Struktogramm beschrieben werden, nennt man *Wiederholungen mit vorangestellter Abbruchbedingung*. Ein wichtiger Unterschied zur FOR-NEXT-Schleife besteht darin, daß man auch bei solchen Wiederholungen (SOLANGE...TUE-Schleifen) die Anzahl der Schleifendurchgänge vorab nicht kennt.

Wollen wir zur Lösung unserer Aufgabe einen Computer nutzen, so ist folgendes Programm geeignet:

Programm 7

```
10 INPUT „Ausgangsbestand:“; X
20 INPUT „Endbestand:“; E
30 LET J = 0
40 LET H = X
50 IF NOT (H < E)   } Bedingter
   THEN 90          } Sprung
60 LET H = H + H*2.3/100  } Schleifen-
70 LET J = J + 1          } körper
80 GOTO 50  } Unbedingter
            } Sprung
90 PRINT „Jahre:“; J
100 END
```

Die Anweisung GOTO n (n – Zeilennummer) veranlaßt den Computer, die Abarbeitung in der Programmzeile mit der angegebenen Zeilennummer n fortzusetzen (unbedingter Sprung).

Die IF-THEN-Anweisung in Zeile 50 bewirkt einen Sprung nach Zeile 90, falls die Bedingung „NOT ($H < E$)“ erfüllt ist (not [engl.] – nicht). Die Bedingung „NOT ($H < E$)“ ist nur erfüllt, wenn $H > E$ oder $H = E$ gilt. Man hätte die Zeile 50 also auch folgendermaßen aufschreiben können:

50 IF $H >= E$ THEN 90.

Solange allerdings $H < E$ gilt, werden jeweils die Schleifenanweisungen (Zeile 60 und Zeile 70) „durchlaufen“. Die Schleife wird also erst bei Erfülltsein der Bedingung „NOT ($H < E$)“ verlassen (bedingter Sprung).

▲28▲ Vergleiche die Anfangsbedingung für die Wiederholung im Struktogramm mit der Bedingung in Zeile 50 des entsprechenden BASIC-Programms. Was stellst du fest?

▲29▲ Gib für das BASIC-Programm „Wachstum des Waldes“ Werte X und E an, so daß der Schleifenkörper nicht ein einziges Mal durchlaufen wird!

L. Flade/M. Pruzina

Lösungen

▲24▲ Eine Möglichkeit

```
10 CLS
20 PRINT „GESAMTSUMME“
30 PRINT „----------“: PRINT
40 LET S = 0
50 FOR I = 1 TO 22
60    PRINT I;
70    INPUT „ZAHL:“; Z
80    LET S = S + Z
90 NEXT I
100 PRINT: PRINT
110 PRINT „SUMME“; S
120 END
```

▲25▲ Eine Möglichkeit

```
10 CLS
20 PRINT „P = 2*4*6*...*N“
30 PRINT „----------“: PRINT
40 INPUT „GIB GERADE ZAHL N
   EIN:“; N
50 LET P = 1
60 FOR I = 2 TO N STEP 2
70      LET P = P*I
80 NEXT I
90 PRINT: PRINT
100 PRINT „P =“; P
110 END
```

▲26▲

N	Ø	1	2	3	4	5	6
S	Ø	2	5	1Ø	17	23	24
X	-	2	3	5	7	6	1
A	-	1	1	1	1	1	Ø
D	-	-	-	-	-	-	-

▲27▲ a) Eine Möglichkeit

```
10 CLS
20 LET N = 0: LET S = 0
30      LET N = N + 1
40      LET S = S + 1/(N + 1)
50 IF S < = 5 THEN 30
60 PRINT N, S
70 END
```

Ja, denn für $N = 226$ ist $S = 5.00437$

b) Nein. Das kann man aber mit dem Computer nicht nachweisen, weil dieser – wie der Taschenrechner – nur mit *endlich* vielen Zahlen arbeitet; er „läuft sich irgendwann fest“. (Siehe dazu auch *alpha*, Heft 2/1985, S. 33.)

▲28▲
Anfangsbedingung im Struktogramm:
$H < E$
Bedingung des bedingten Sprungs:
NOT ($H < E$)

▲29▲ Zum Beispiel: $X = 300$, $E = 200$

Lösungen

Lösung zu: Nachgedacht – mitgemacht!
Heft 1, Seite 3

Der Radius des Umkreises eines regelmäßigen Sechsecks ist gleich der Seitenlänge s dieses Sechsecks. Folglich sind z. B. die Kreisbogen $\widehat{AB}$, $\widehat{AP}$ und $\widehat{BP}$ gleich lang. Der Umfang der Figur hat deshalb die zwölffache Länge des Kreisbogens $\widehat{AB}$, der Umkreis des Sechsecks aber nur die sechsfache Länge des Kreisbogens $\widehat{AB}$, d. h., der Umfang der Figur ist doppelt so lang wie der des Umkreises.

Für den Flächenumfang eines Möndchens gilt

$$A_M = \frac{1}{6}\pi s^2 - \frac{1}{4} \cdot s^2 \cdot \sqrt{3}:$$

Der Flächeninhalt der Figur setzt sich zusammen aus zwölf gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge s und aus zwölf kongruenten Möndchen. Für den Flächeninhalt der Figur gilt deshalb

$$A_F = 12 \cdot \frac{1}{4} \cdot s^2 \cdot \sqrt{3} + 12 \cdot \left(\frac{1}{6}\pi s^2 - \frac{1}{4} \cdot s^2 \cdot \sqrt{3}\right) = 2\pi s^2.$$

Der Flächeninhalt des Umkreises hingegen beträgt $A_K = \pi \cdot s^2$.

Lösungen zu: Kryptarithmetik
Heft 1, Seite 7

$95 : 5 = 9 + 5 + 5$
$63 : 3 = 6 \cdot 3 + 3$
$(2 + 7) \cdot 2 \cdot 16 = 272 + 16$
$2^3 \cdot 4 = 34 - 2$
$2^{8-1} = 128$
$95 - 4^2 = 9 \cdot (5 + 4) - 2$
$4^3 : 2 = 34 - 2$
$5^{6-2} = 625$

Lösungen zu: Mini-BASIC für alpha-Leser, Teil 3

▲18▲

a	$a:7$	$[a:7]$	$7/a$
14	2	2	Ja
23	3,3	3	Nein
21	3	3	Ja
84	12	12	Ja
95	13,6	13	Nein

▲19▲ Eine Programmöglichkeit:

```
10 CLS
20 INPUT „GIB EINE NATUERLICHE
   ZAHL A EIN!“; A
30 INPUT „GIB EINE NATUERLICHE
   ZAHL T EIN!“; T
```

```
40 IF INT (A/T) = A/T THEN PRINT
   „T/A“: ELSE PRINT „T IST KEIN
   TEILER VON A!“
50 END
```

▲20▲ Es genügt, wenn T die Zahlen 2 bis $\sqrt{n}$ durchläuft.

Verändertes Programm 5

```
 10 CLS
 20 INPUT „GIB EINE NATUERLICHE
    ZAHL EIN!“; N
 30 PRINT „TEILER SIND: 1“;
 40 FOR T = 2 TO SQR (N)
 50 IF INT (N/T) < >N/T THEN GOTO
    90
 60 IF N = T*T THEN GOTO 80
 70 PRINT T;
 80 PRINT N/T;
 90 NEXT T
100 PRINT N
110 END
```

(In den Zeilen 50 und 60 tritt eine neue Anweisung auf:

GOTO $\boxed{\text{Zeilennummer}}$.

Die Anweisung GOTO ... (go to [engl.] – gehe zu) bewirkt, daß der Computer seine Arbeit mit der Programmzeile fortsetzt, deren Zeilennummer nach dem GOTO angegeben ist.)

▲21▲ a) 56, 65, 89, 98, 122, 131

b)

```
10 CLS
20 FOR N = 50 TO 150 STEP 3
30 IF N*N = INT (N*N/11) *11 + 1
   THEN PRINT N;
40 NEXT N
50 END
```

▲22▲ a) 310 Zahlen

b)

```
10 CLS
20 LET N = 0
30 FOR I = 5 TO 1985 STEP 5
40 IF INT (I/7) = I/7 THEN GOTO 70
50 IF INT (I/11) = I/11 THEN GOTO 70
60 LET N = N + 1
70 NEXT I
80 PRINT N
90 END
```

▲23▲

```
10 INPUT „RATEZAHL“; R
20 CLS
30 LET S = 1
40 INPUT „GIB EINEN TIP EIN!“; T
50 IF T = R THEN PRINT „TREFFER
   MIT“; S; „TIPS“
60 IF T = R THEN END
70 IF T < R THEN PRINT „TIP WAR
   ZU KLEIN!“: ELSE PRINT TIP WAR
   ZU GROSS!“
80 LET S = S + 1
90 GOTO 40
```

Eleganter wäre es, die Zeilen 50 und 60 zu einer Zeile zusammenzufassen:

```
... IF T = R THEN PRINT „TREFFER
MIT“; S; „TIPS“: END
```

Lösungen zu: Unterhaltsame Psychologie

1. Einer der Gesprächspartner ist Johannas Mutter. Doch darauf kommt man gewöhnlich nicht. Liest man etwas von „zwei Menschen“, entsteht unwillkürlich das Bild zweier Männer, weil das Wort Mensch ebenfalls männlichen Geschlechts ist.

2. Gewohnheitsmäßig stellt man sich vor, daß die Männer zusammen zum Boot gingen. Schwerer fällt es schon, darauf zu kommen, daß sie sich von verschiedenen Seiten den Ufern des Flusses näherten und zunächst der eine, dann der andere den Fluß in entgegengesetzter Richtung überquerte. Danach setzte jeder allein seinen Weg fort.

Lösungen zu: Symmetrie im Raum

▲2▲ a) 3 (Mittellotebenen von Kanten) + 6 (Mittellotebenen von Flächendiagonalen) = 9

b) *alle* Ebenen durch die Kegelachse g_{MS}

▲3▲ a) 6; b) keine; c) 1; d) 2 zueinander senkrechte (also nach einer späteren Aussage in der Aufgabe 6 dann auch eine Symmetrieachse!); e) 2 (auf Grund der Herstellungsweise)

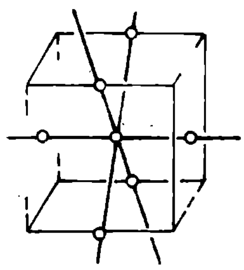
▲5▲ 3 (durch die Mitten von Seitenflächen) + 6 (durch die Mitten von Kanten) = 9

▲7▲ Zum Beispiel eine gerade Pyramide mit einem *echten* Parallelogramm als Grundfläche

▲8▲ Bei meinem 28er Rad nicht!

▲9▲ Siehe Bild 9

Bild 9



Lösungen zu: Rechenbäume

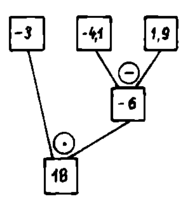
▲1▲ $\left(-\frac{1}{4}\right):\left(-\frac{1}{4}\right)-(-9)\cdot\frac{1}{3}$

▲2▲ $(-2)\cdot\frac{1}{2}-[3{,}5-(-2)]$

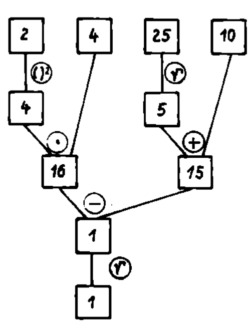
▲3▲ $72-\sqrt{8\cdot\sqrt{4}}$

▲4▲ $\sqrt{7^2-24}\cdot\sqrt{144}$

▲5▲



▲6▲



Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Wie bekannt, bezeichnet das Symbol $n!$ (genannt *n Fakultät*) das Produkt aller ganzen Zahlen von 1 bis n. So z. B.

$2! = 1\cdot 2 = 2;$

$5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120;$

$6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$ usw.

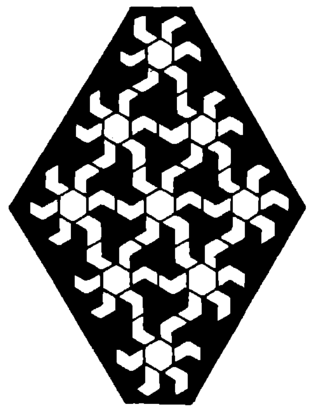
Die Zahl 12! voll ausgeschrieben lautet

4 7 9 0 ■ 6 0 0.

Leider ist eine der Ziffern ausgelöscht. Kannst du die fehlende Ziffer ermitteln, ohne alle Multiplikationen durchzuführen?

Lösung: Die Zahl 12! ist offensichtlich teilbar durch 9. Wenn eine Zahl durch 9 teilbar ist, muß die Summe ihrer Ziffern auch durch 9 teilbar sein. Aber die Summe der verbliebenen Ziffern ist 26; mit anderen Worten, wir brauchen 1, um eine durch 9 teilbare Zahl zu erhalten. Demzufolge war die Ziffer 1 ausgelöscht worden.

▲2▲ Ist das Ornament symmetrisch?



Lösung: Nein. Aber wenn man einen der Sterne umlegt, erhält man eine zentralsymmetrische Figur.

▲3▲ Jedes Zeichen auf dieser Tafel stellt immer die gleiche Ziffer dar. Die Summen der fünfzehn Additionen sind waagerecht und senkrecht angegeben. Setzen Sie für jedes Zeichen den entsprechenden Wert ein!

Lösung:

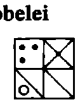
2	5	9	7	4	6	6
3	3	1	4	2	7	1
8	7	3	9	9	3	5
2	1	9	1	3	7	3
1	1	3	4	9	9	2
5	1	5	7	5	1	5
7	1	4	9	1	5	9
6	7	9	4	1	8	9

Lösungen zu: alpha-heiter

Kryptarithmetik

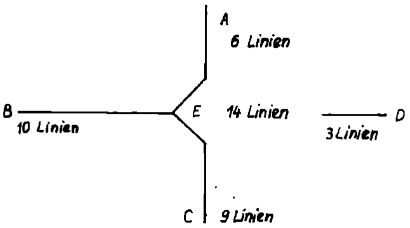
Zum Beispiel 8952 + 743 = 9695; 7668 + 68 489; 4584 + 4584; 456 · 328 = 149 568; $\sqrt{523\,814\,769}$ = 22 887; 14 389 + 14 389 = 28 778.

Knobelei



Achtung – Straßenbahnknotenpunkt

Das Liniennetz hat schematisch folgendes Bild:



Die drei Linien nach (bzw. von) D können nur in der Richtung BED verkehren! Damit verkehren von B aus die restlichen sieben Linien nach A oder C. Die Summe der Linien aus AEC und BEC soll neun sein. Damit müssen in der Richtung AEC mindestens zwei Linien verkehren, so daß für AEB höchstens vier Linien verbleiben. Damit bleiben aber für BEC nur noch drei Linien und C würde von 2 + 3 = 5 Linien erreicht.
Wir tragen die Möglichkeiten in eine Tabelle ein:

Richtung	Linien				
AEB	4	3	2	1	0
AEC	2?	3?	4!	5?	6?
BEC	3?	4?	5!	6?	7?
BED	3	3	3	3	3
Summe in E:	12	13	14	15	16

Die Fragezeichen sollen darauf verweisen, daß die Summe aus AEC und BEC = 9 sein soll. Es ergeben sich also folgende Verteilungen:
– AEB = 2 Linien; – AEC = 4 Linien;
– BEC = 5 Linien; – BED = 3 Linien;
Summe = 14 Linien.
Anmerkung für Leipziger Leser und Löser:
Das Vorbild für diese Aufgabe ist der Hauptbahnhofsvorplatz ohne die Haltestelle *Wintergartenstraße*.
Berücksichtigt wurden die Linien:
1, 2, 4, 6, 10, 11, 15, 16, 17, 20, 21, 25, 27, 28!
Entsprechend ist:
A = Erich-Weinert-Platz;
B = Friedrich-Engels-Platz;
C = Karl-Marx-Platz;
D = Rosa-Luxemburg-Straße.

Kurios anmutende Beziehungen
Wenn die Zahlen x, y die Gleichung $\sqrt[n]{x+y} = x\sqrt[n]{y}$ erfüllen, so muß $x + y = x^n y$ und daher $y = \frac{x}{x^n - 1}$ gelten. Andererseits sind alle Paare $x > 1$, $y > 0$ mit dieser Eigenschaft auch Lösungen, denn aus $y(x^n - 1) = x$ folgt $x + y = x^n y$ und $\sqrt[n]{x+y} = x\sqrt[n]{y}$.
Beispiel: $n = 4$, $x = 11$. Wähle $y = \frac{11}{14\,640}$.
Mit dem Schulrechner SR 1 überzeugt man sich schnell davon, daß tatsächlich
$\sqrt[4]{11\frac{11}{14\,640}} = 11\sqrt[4]{\frac{11}{14\,640}}$ ist.
Der mit dem SR 1 für beide Terme ermittelte Zahlenwert ist 1,821 1914.

Mathematische Spielereien
Sieb des Eratosthenes; Kubikwurzel;
Kreis des Appolonios;
Methode der kleinen Quadrate

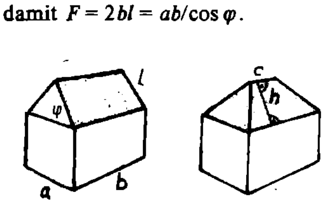
Notensalat
Zwischen 20 und 40 ist die 36 die einzige Zahl ein Vielfaches von 9, 3 und 6. Da also 36 Schüler in der Klasse waren, erhielten $36 - 4 - 12 - 6 = 14$ Schüler die Note 3.

Füllrätsel

1 A	2 L	3 G	4 E	5 B	6 R	7 A
B	I	E	U	A	A	U
A	N	R	K	N	D	F
K	E	A	L	A	I	R
U	A	D	I	C	U	I
S	L	E	D	H	S	ß

In der MITROPA
Bezeichnen a, b und c die Stückanzahlen der Kuchensorten A, B bzw. C, welche die Kollegin dem Jungen einpacken muß, dann muß gelten:
$0{,}30a + 0{,}35b + 0{,}40c = 5$ bzw.
nach Multiplikation der Gleichung
mit $20: 6a + 7b + 8c = 100$.
Die sogenannte diophantische Gleichung hat 10 der Forderungen des Jungen entsprechende Lösungstripel (a, b, c), d. h. bei denen a, b und c von Null verschiedene positive ganze Zahlen sind, nämlich die folgenden:
$(1, 2, 10)$, $(1, 10, 3)$, $(2, 8, 4)$,
$(3, 6, 5)$, $(4, 4, 6)$, $(5, 2, 7)$,
$(7, 6, 2)$, $(8, 4, 3)$, $(9, 2, 4)$
und $(13, 2, 1)$.
Aber nur das Tripel $(4, 4, 6)$ entspricht auch der Bedingung, daß der Junge von jeder Kuchensorte mindestens 4 Stück erhalten soll. Die Kollegin muß also 4 Stück Kuchen A, 4 Stück Kuchen B und 6 Stück Kuchen C einpacken.

Gleiche oder ungleiche Mengen?
Es seien a, b die Seiten der Grundfläche, φ der Neigungswinkel des Daches und F die Fläche des jeweiligen Daches. O. B. d. A. sei $b = a$. Für das Giebelhaus gilt dann:
$\frac{a/2}{l} = \cos\varphi$, $l = a/(2\cos\varphi)$
und damit $F = 2bl = ab/\cos\varphi$.



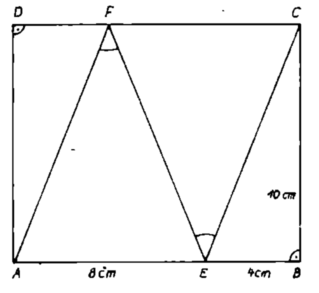
Beim Wohnhaus sei h die Höhe einer Fläche (siehe Skizze). Es ist wie beim Giebelhaus $h = a/(2\cos\varphi)$ und damit
$F = 2\frac{ah}{2} + 2\frac{b+c}{2}h$,
wobei $c = b - 2h\cos\varphi = b - a$ ist.
Dann gilt
$F = 2(ah/2 + (b + c)\,h/2) = h(a + b + c)$
$= h(a + b + b - a) = 2hb = ab/\cos\varphi$.
Also benötigt man für beide Dächer die gleiche Menge Dachpappe. (Es ist nicht notwendig, die trigonometrischen Funktionen zu benutzen, wenn man h als h der Flächen stehenläßt.)

Labyrinth
Man kann von A aus noch weitere 8 Ausgänge erreichen.

Lösungen zum Preisausschreiben: Komplexe Übungen, Heft 1/87

▲1▲
a) $17\,\text{dt GE} \cdot 30\,562 \approx 520\,000\,\text{dt GE}$
b) $40\,\text{M} \cdot 520\,000 = 20{,}8$ Millionen Mark
c) $30\,562\,\text{ha} \approx 306\,\text{km}^2$;
$x \cdot 18 = 306$, $x = 17$ (km)
d) Zuckerrüben $\left(\frac{1}{4}\,\text{GE}\right)$;
Zuckerrübenblatt $\left(\frac{1}{10}\,\text{GE}\right)$
e) $0{,}25 \cdot x = 2$; $x = 8$; $2{,}5\,\text{dt} \cdot 8 = 20\,\text{dt}$
f) $3000 : 7{,}5 = 400$, also $400\,\text{m}^2$
g) $20 \cdot 5 \cdot x = 400$, $x = 4$ (m)

▲2▲ a)

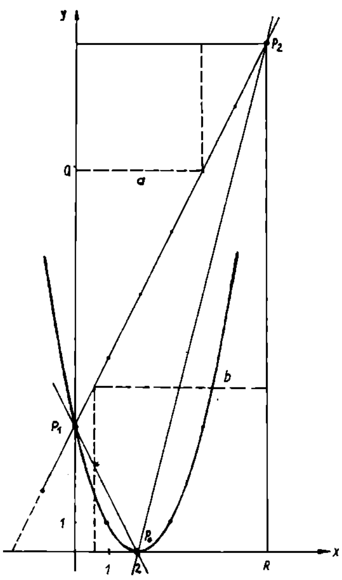


b) $A_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10\,\text{cm}^2 = 40\,\text{cm}^2$;
$A_{EBC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10\,\text{cm}^2 = 20\,\text{cm}^2$
c) $\triangle AFD \cong \triangle EBC$ (sws), also $\overline{AF} = \overline{EC}$
d) $\triangle AEF \cong \triangle CFE$ (sss),
also $\sphericalangle AFE = \sphericalangle CEF$
e) $\sphericalangle AFE = \sphericalangle CEF$ (Wechselwinkel an geschnittenen Geraden), also $AF \parallel EC$
f) $10\,\text{cm} < \overline{AF} < 14\,\text{cm}$ (Dreiecksungleichung); wegen $\overline{AF} = \overline{FE} = \overline{EC}$ gilt Streckenzug $\overline{AFEC} = 3 \cdot \overline{AF}$,
also $30\,\text{cm} < \overline{AFEC} < 42\,\text{cm}$
g) $\sphericalangle EAF = \sphericalangle BEC$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen);
$\sphericalangle BEC + \sphericalangle ECB = 90°$,
also $\sphericalangle EAF + \sphericalangle ECB = 90°$

▲3▲ a) $5{,}40\,\text{m} \cdot 1250\,\text{m} = 6750\,\text{m}^2 = 0{,}675\,\text{ha}$
b) $x : 31 = 68 : 0{,}675$, $x = 3123$ (dt)
c) $E = \frac{A \cdot F \cdot 1000}{l \cdot b}$ (in t)
d) $3100 : 5 = 620$; $620\,\text{s} \approx 10\frac{1}{2}\,\text{min}$
e) $\frac{1{,}250 \cdot 60 \cdot 60}{620}\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 7\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$
f) $46\,\text{dt} \cdot 1{,}75 = 80{,}3\,\text{dt}$ Halmgetreide;
$34{,}5\,\text{dt} = 345\,\text{t}$ Stroh
g) $10\frac{1}{2}\,\text{min} + 4\frac{1}{2}\,\text{min} = 15\,\text{min}$;
$x : 15\,\text{min} = 312\,\text{t} : 3{,}1\,\text{t}$,
$x \approx 1500\,\text{min} = 25\,\text{h}$
In $6\frac{1}{4}$ h ist der Schlag von vier Mähdreschern abgemäht.
h) $V = \frac{4 \cdot 3123}{31}\,\text{m}^3 \approx 403\,\text{m}^3$;
$h = \frac{V}{a \cdot b} = \frac{403}{16 \cdot 9}\,\text{m} \approx 2{,}8\,\text{m}$

i) $V_Z = \pi r^2 h = \pi \cdot 2{,}55^2 \cdot 10\,\mathrm{m}^3 \approx 204\,\mathrm{m}^3$; wegen $408\,\mathrm{m}^3 > 403\,\mathrm{m}^3$ reichen zwei Silos aus.

▲4▲ a) $y = 2x + 4$
b) $2x + 4 \leqq 30$; $2 < x \leqq 13$
c) siehe Zeichnung
d) $y = (x - c)^2$; $4 = (0 - c)^2$;
$c = 2$; $y = (x - 2)^2$; $P_0(2;0)$
e) $x^2 - 4x + 4 = 2x + 4$; $x(x - 6) = 0$;
$x_1 = 0$; $x_2 = 6$; $y_2 = 16$; $P_2(6;16)$
f) $y = mx + n$; aus $16 = 6m + n$ und $0 = 2m + n$ folgt $m = 4$ und
$n = -8$; $y = g(x) = 4x - 8$
g) $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12\,(\mathrm{LE})^2 = 36\,(\mathrm{LE})^2$;
$A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2} \cdot (4 + 16) \cdot 6\,(\mathrm{LE})^2$
$= 60\,(\mathrm{LE})^2$; $36 : 60 = 3 : 5$
h) Im Dreieck gilt $a : (12 - a)$
$= 6 : 12 = 4$; im Trapez gilt
$b : (16 - b) = (8 - b) : b$; $b = 5\frac{1}{3}$;
die Quadratseiten sind 4 cm bzw. $5\frac{1}{3}$ cm lang.
i) Beide Dreiecke sind rechtwinklig; ihre Katheten verhalten sich wie 2 : 1, folglich sind die Dreiecke einander ähnlich.



Lösung zu: Eine harte Nuß
Heft 1, Seite 10

Setze $z = a + b$; dann ist
$z^3 = (a + b)(a + b)^2$
$= a(a + b)^2 + b(a + b)^2$;
setze nun $a = u^2$ und $b = v^2$;
damit folgt
$z^3 = u^2(a + b)^2 + v^2(a + b)^2$
oder anders geschrieben
$z^3 = [u(a + b)]^2 + [v(a + b)]^2$;
und nun nur mit den Größen u und v
$z^3 = [u(u^2 + v^2)]^2 + [v(u^2 + v^2)]^2$
also
$z^3 = u^2(u^2 + v^2)^2 + v^2(u^2 + v^2)^2$
$= (u^2 + v^2)(u^2 + v^2)^2$
$z^3 = (u^2 + v^2)^3$.
Setze jetzt $x = u(u^2 + v^2)$
$y = v(u^2 + v^2)$
Zusammengefaßt:
Wenn $x = u(u^2 + v^2)$, $y = v(u^2 + v^2)$, dann ist $z = u^2 + v^2$
und damit folgt $x^2 + y^2 = z^3$.
Beispiel:
$u = 7$, $v = 11$ (beides Primzahlen!),
dann $x = 7(49 + 121) = 7$.
$170 = 1190$ und $y = 11(49 + 121)$
$= 11 \cdot 170 = 1870$, damit $x^2 + y^2$
$= 1190^2 + 1870^2 = 4\,913\,000 = 170^3$
also $1190^2 + 1870^2 = 170^3$.
Beachte:
Die vorstehend hergeleiteten Bedingungen besagen *nicht*, daß sich in jedem Falle eine *eindeutige* Zuordnung ergibt!
Es können sich für verschiedene Wertepaare x und y die gleichen Werte für z ergeben!

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. G. Wildenhain
Heft 1

▲2749▲ Nehmen wir an, es gibt eine geschlossene Kurve der gegebenen Länge l, die einen maximalen Flächeninhalt einschließt. Wäre das umschlossene Gebiet G nicht konvex, so könnte man entsprechend Bild 1 das Kurvenstück zwischen A und B an $\overline{AB}$ spiegeln und erhielte ein um die schraffierte Fläche vergrößertes Gebiet, dessen Randkurve ebenfalls die Länge l besitzt. Die gesuchte Kurve ist also konvex.

Bild 1

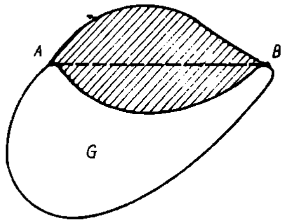
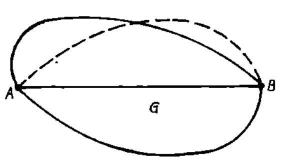


Bild 2



Wir wählen nun zwei Punkte A, B, welche die Lösungskurve in Bögen gleicher Länge zerlegen. Dann zerlegt die Strecke $\overline{AB}$ das Gebiet G in flächengleiche Teile, denn sonst könnte der Teil mit dem größeren Inhalt an $\overline{AB}$ gespiegelt werden, so daß entsprechend Bild 2 eine andere Kurve der Länge l entstünde, die einen größeren Flächeninhalt einschließt. Wir zeigen, daß $\overline{AB}$ das Gebiet G tatsächlich in zwei Halbkreisflächen zerlegt. Dazu betrachten wir entsprechend Bild 3 einen beliebigen Punkt C auf der Kurve.

Wäre nun $\sphericalangle ACB$ verschieden von $\frac{\pi}{2}$, so könnte man unter Beibehaltung der schraffierten Flächen durch Übergang von Bild 3 zu Bild 4 zu einer größeren Fläche übergehen (da sich das Dreieck ABC vergrößert), die aber nach wie vor von einem Bogen der Länge $\frac{l}{2}$ begrenzt wird. Also gilt $\sphericalangle ACB$ $= \frac{\pi}{2}$ und nach dem Satz von Thales handelt es sich um einen Halbkreis.

Bild 3

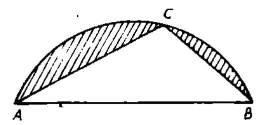
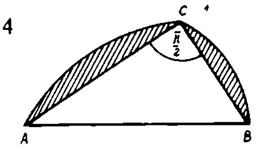


Bild 4



Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 5/86, Fortsetzung

Ma 5 ■ 2699 Wenn man die Gewichte addiert, die 3 Ferkel und 2 Lämmer bzw. 2 Ferkel und 3 Lämmer ergeben, dann erhalten wir das Gewicht von 5 Ferkeln und 5 Lämmern. Es ist gleich 45 kg. Deshalb wiegen 1 Ferkel und 1 Lamm zusammen 9 kg und 2 Ferkel und 2 Lämmer 18 kg. Da 3 Ferkel und 2 Lämmer 22 kg wiegen, hat ein Ferkel ein Gewicht von 22 kg − 18 kg = 4 kg und somit 1 Lamm ein Gewicht von 5 kg.

Ma 6 ■ 2700 Der Radfahrer fährt mit einer Geschwindigkeit von $5 + 4 = 9\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ so lange, bis die Freunde sich trafen. Beide legten in einer Stunde zusammen 9 km zurück, d. h. bis zum Treffen vergingen 36 : 9 = 4 Stunden. In dieser Zeit fuhr der Radfahrer $9 \cdot 4 = 36$ km.

Ma 6 ■ 2701 Die Summe der Früchte aus den übriggebliebenen Kisten muß durch 4 teilbar sein, d. h., es sind die Früchte der Kisten 2, 3, 4 und 5.
In ihnen sind insgesamt
105 + 110 + 115 + 130 = 460 Stück.
Folglich sind 460 : 4 = 115 Stück
Zitronen und 460 − 115 = 345 Stück
Apfelsinen übriggeblieben.

Ma 6 ■ 2702 Da 6 Pferde und 40 Kühe täglich 472 kg Heu benötigen, werden für 12 Pferde und 80 Kühe täglich $2 \cdot 472$ kg = 944 kg Heu benötigt. Da 12 Pferde und 37 Kühe täglich 514 kg Heu benötigen, werden für 43 Kühe täglich 944 kg − 514 kg = 430 kg, für 1 Kuh also täglich 10 kg Heu benötigt. Deshalb benötigen 40 Kühe täglich 400 kg Heu. Folglich benötigen 6 Pferde täglich 472 kg − 400 kg = 72 kg und somit 1 Pferd täglich 12 kg Heu. Vom 15. Oktober bis zum 25. März sind es 162 Tage. Damit benötigen 30 Pferde und 90 Kühe für diesen Zeitraum $(12 \cdot 30 + 10 \cdot 90) \cdot 162$ kg = 204 120 kg Heu.

Ma 6 ■ 2703 Der Fehler beträgt
$(5 - 2) \cdot 100 + (8 - 3) \cdot 1000$
$+ (2 - 9) \cdot 1 + (4 - 7) \cdot 10 = 5263$.
Die erhaltene Summe ist also größer als die richtige Summe. Daher ist sie gleich 28 975 − 5263 = 23 712.

Ma 6 ■ 2704 Angenommen, im Korb befanden sich anfangs x Eier;
dann gilt $x - \frac{x}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{x}{16} = 10$,
also $x = 160$. Zu Anfang waren 160 Eier im Korb.

Ma 7 ■ 2705 Die kleinere der Zahlen enthält alle Teiler, die der größte gemeinsame Teiler beider Zahlen enthält und ferner den Teiler 5. Das bedeutet, daß sie ein Vielfaches von $8 \cdot 5 = 40$ ist, also $40 \cdot n$ beträgt, wobei n eine natürliche Zahl ist. Für die zweite Zahl bleiben dann noch die Faktoren
$240 : (40n) = 6 : n$; also ist sie gleich
$(8 \cdot 6) : n = 48 : n$. Da $48 : n$
größer als $40n$ sein soll, gilt $n = 1$.
Die gesuchten Zahlen lauten somit 40 und 48.

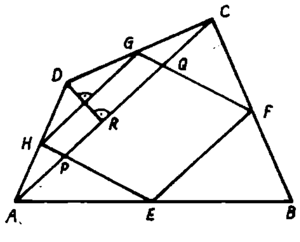
Ma 7 ■ 2706 Die Geschwindigkeit des Zuges von A nach B sei $x\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Dann betrug die Geschwindigkeit von B nach A $(x + 20)\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und die Fahrzeit 12 Stunden.
Wegen
$s = v \cdot t$ gilt $16 \cdot x = 12 \cdot (x + 20)$,
also $x = 60$.
Dann gilt $s = 60 \cdot 16\text{ km} = 960\text{ km}$.
Die beiden Städte sind 960 km voneinander entfernt.

Ma 7 ■ 2707 Angenommen, ein Teebeutel wiegt x Gramm. Dann gilt
$6x + 50 = x + 300,\ 5x = 250,\ x = 50.$
Ein Teebeutel wiegt 50 g.

Ma 7 ■ 2708 Das erste Teilprodukt endet auf die Ziffer 8, das zweite auf 5. Dies ist nur möglich, wenn die letzte Ziffer des ersten Faktors auf 1 und der zweite Faktor auf 58 endet. Da das zweite Produkt dreistellig ist, beginnt der erste Faktor mit einer 1. Im ersten Teilprodukt muß man bei Multiplikation des ersten Faktors mit 8 am Anfang eine 10 erhalten. Dies ist nur möglich, wenn die zweite Ziffer des ersten Faktors 3 ist. Das dritte Teilprodukt ist größer als das erste, d. h., die erste Ziffer des zweiten Faktors ist größer als die letzte Ziffer des zweiten Faktors. Folglich ist sie gleich 9. Damit lautet der erste Faktor 131, der zweite 958.

Ma 8 ■ 2709 Die Geschwindigkeit des Gegenzuges betrage $x\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$; dann fährt er am Reisenden des ersten Zuges mit einer Geschwindigkeit von $(60 + x)\frac{\text{km}}{\text{h}}$ vorbei.
Deshalb gilt
$\frac{120}{1000 \cdot (60 + x)} = \frac{x}{3600}$, also $x = 48$.
Die Geschwindigkeit des Gegenzuges betrug $48\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Ma 8 ■ 2710 Es gilt der Satz: Die Verbindungsstrecke der Mitten zweier Dreiecksseiten verläuft parallel zur dritten Seite und ist halb so lang wie diese.



Daraus folgt $2 \cdot \overline{HG} = \overline{AC}$ und somit
$\overline{PQ} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC}$. Deshalb gilt
$A_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{RD}$ und
$A_{PQGH} = \overline{PQ} \cdot \frac{\overline{RD}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{RD}$,
also $A_{ACD} = 2 \cdot A_{PQGH}$. Analog dazu erhält man $A_{ABC} = 2 \cdot A_{EFQP}$. Daraus folgt schließlich $A_{ABCD} = 2 \cdot A_{EFGH}$.

Ma 8 ■ 2711 Da keine Aufschrift richtig ist, gibt es nur zwei Möglichkeiten der Verteilung, nämlich

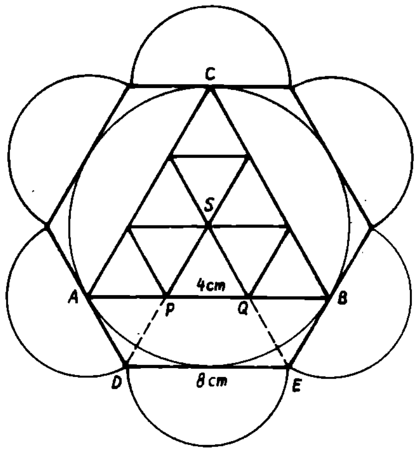
	a)	b)
„zwei weiße"	ws	ss
„weiß und schwarz"	ss	ww
„zwei schwarze"	ww	ws

Man hat also eine Kugel aus der Schachtel „weiß und schwarz" zu wählen und je nachdem, ob diese Kugel weiß oder schwarz ist, wissen wir, ob die Verteilung a) oder b) vorliegt.

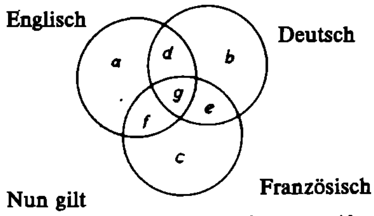
Ma 8 ■ 2712 Für $n = 1$ gilt
$\frac{19 \cdot 1 + 17}{7 \cdot 1 + 11} = \frac{36}{18} = 2$; deshalb ist
$n = 1$ eine Lösung.
Wegen $\frac{19n + 17}{7n + 11} = 2 + \frac{5n - 5}{7n + 11}$ gilt
$0 < \frac{5n - 5}{7n + 11} < 1$, so daß es keine weiteren Lösungen gibt.

Ma 9 ■ 2713 Ist x die Anzahl der 1. Preise, so folgt, daß es $(x + 12)$ 2. Preise und $2 \cdot (2x + 12)$ 3. Preise gibt. Überdies ist
$2(2x + 12) = x \cdot (x + 12) - 104$,
$x^2 + 8x - 128 = 0,\ x = 5 \pm 12,\ x_1 = 8$
und $x_2 = -16$ (entfällt, da negativ).
Es gab acht 1., zwanzig 2. und 56 dritte Preise.

Ma 9 ■ 2714 Das gleichseitige Dreieck ABC läßt sich, wie aus dem Bild ersichtlich, in neun kongruente gleichseitige Teildreiecke zerlegen.
Wegen $\overline{SP} : \overline{SD} = \overline{PQ} : \overline{DE} = 1 : 2$ und
$\overline{PQ} = \frac{12}{3}\text{ cm} = 4\text{ cm}$ gilt $\overline{DE} = 8\text{ cm}$.
Der Flächeninhalt der Rosette beträgt somit
$$A_R = \left(6 \cdot \frac{8^2}{4} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 8^2\right)\text{cm}^2$$
$$= 48 \cdot (2 \cdot \sqrt{3} + \pi)\text{ cm}^2 \approx 317\text{ cm}^2.$$

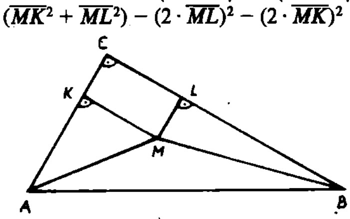


Ma 9 ■ 2715 Wir können die Mengen der Schüler, die eine Sprachkombination lernen, wie folgt graphisch darstellen:

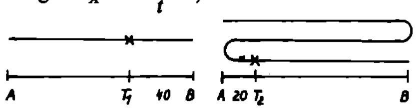


Nun gilt
$$\begin{aligned} a + b + c + d + e + f + g &= 40,\\ a + b + d + e + f + g &= 34,\\ b + c + d + e + f + g &= 25,\\ b &= 6,\\ d &= e + 3,\\ f + g &= 0. \end{aligned}$$
Hieraus folgt $a = 15,\ b = 6,\ c = 6,\ d = 8,\ e = 5, f = g = 0$.
27 Schüler lernen genau eine, 13 Schüler genau zwei Sprachen.

Ma 9 ■ 2716 Die Fußpunkte der Lote von M auf $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$ seien K bzw. L.
Wegen $A_{ABM} = A_{BCM} = A_{ACM}$ und
$A_{ABM} + A_{BCM} + A_{ACM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}$ ist
$A_{ACM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{MK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}$,
also $\overline{MK} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BC}$.
Analog dazu gilt $\overline{ML} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AC}$.
Da Viereck $LCKM$ ein Rechteck ist, erhalten wir nach dem Satz des Pythagoras
$$5 \cdot \overline{MC}^2 - \overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = 5 \cdot (\overline{MK}^2 + \overline{ML}^2)$$
$$- (\overline{AK}^2 + \overline{MK}^2) - (\overline{BL}^2 + \overline{ML}^2)$$
$$= 4 \cdot (\overline{MK}^2 + \overline{ML}^2) - \left(\frac{2}{3} \cdot \overline{AC}\right)^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \overline{BC}\right)^2$$
$$= 4 \cdot (\overline{MK}^2 + \overline{ML}^2) - (2 \cdot \overline{ML})^2 - (2 \cdot \overline{MK})^2$$
$$= 0.$$



Ma 10/12 ■ 2717 Der Radfahrer, der im Punkt A startet, fährt mit einer Geschwindigkeit von V_A und der andere mit V_B. Ferner sei $s = \overline{AB}$.
1. Treffen (nach Zeit t)
2. Treffen (nach Zeit $t + 8$)
Es gilt $V_A = \frac{s - 40}{t}$,

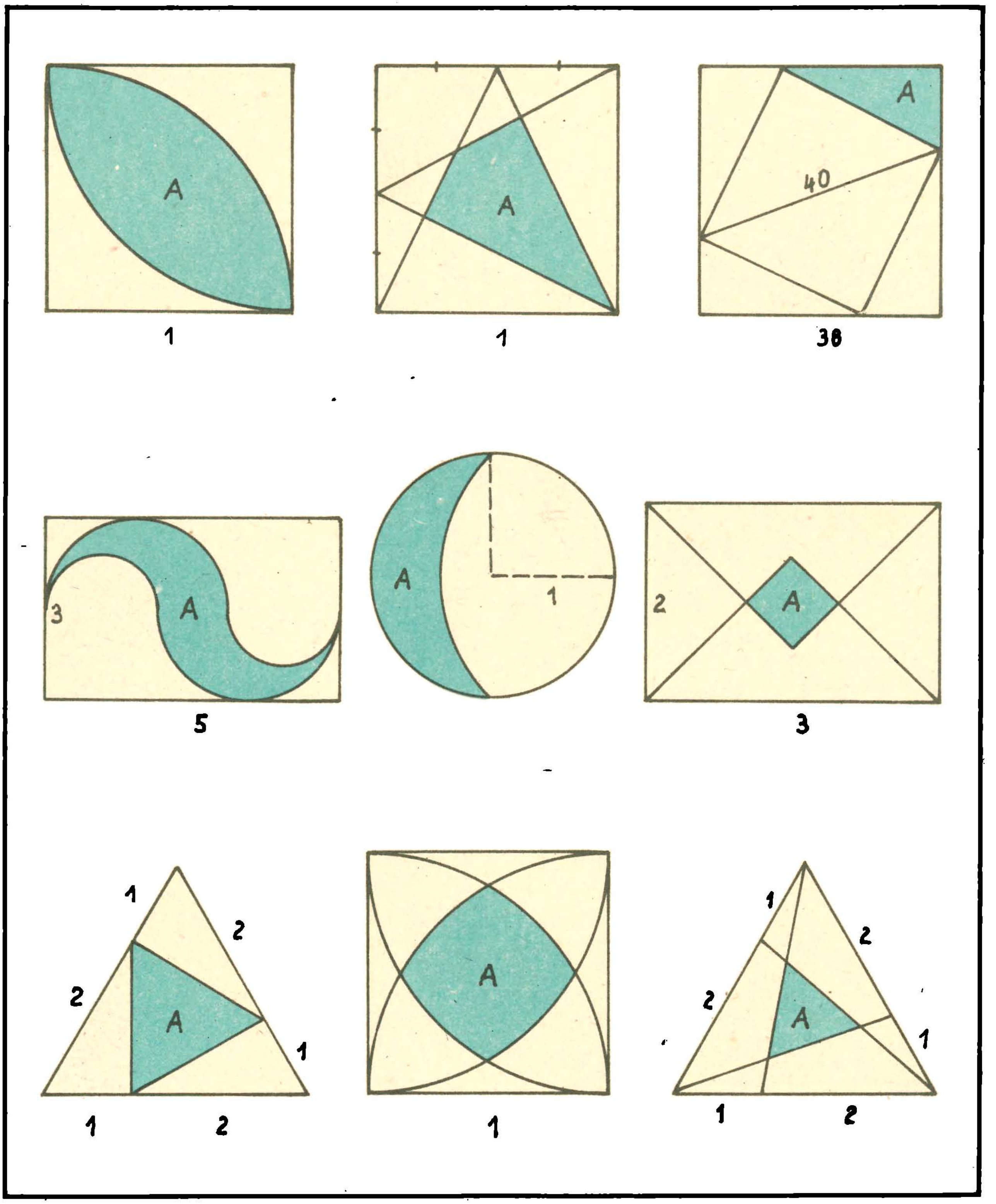


$V_B = \frac{40}{t}$ und $V_A = \frac{2s - 20}{t + 8}$, $V_B = \frac{s + 20}{t + 8}$,
also $V_A + V_B = \frac{s}{t} = \frac{3s}{t + 8}$,
d. h. $t + 8 = 3t,\ t = 4$.
Und somit
$V_B = 10,\ s + 20 = 10 \cdot 12,\ s = 100$,
$V_A = \frac{60}{4} = 15$.
Die Orte A und B haben eine Entfernung von 100 km. Die Radfahrer fahren mit den Geschwindigkeiten $15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Volumen gesucht

Die Kennzeichnung rechter Winkel ist weggelassen.
Alles, was nach einem Quadrat oder Rechteck aussieht, ist auch eins.

Aus: Pythagoras, Groningen



Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
21. Jahrgang 1987
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

3

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold
Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Briefmarken v. E. Quaisser/H.-J. Sprengel, Potsdam (S. 54/55); Eigenfoto Lehmann/Liebau, Leipzig (III. U.-Seite)
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach Vorlagen aus dem Buch: Korger: *Schrift und Schreiben*, VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1982
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 9. Februar 1987
Auslieferungstermin: 5. Juni 1987

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

[1]) bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben geeignet ab der angegebenen Klassenstufe

Wie ähnlich können sich Brüder sein?

Ein Brief mit einer kombinatorischen Fragestellung

Vor einiger Zeit erhielt ich folgendes Schreiben:

Sehr geehrter Herr G.
Bei der Bearbeitung einer genetischen Aufgabe stehe ich vor einem Problem. Es besteht darin, daß zwei Brüder in $k = 0; \ldots; 2m$ Chromosomen übereinstimmen können. Für Brüder, bei denen unterstellt wird, daß sie beispielsweise in 9 Chromosomen identisch sind, gibt es – 23 Chromosomenpaare vorausgesetzt – $\binom{46}{9}$ Möglichkeiten der Kombination von Chromosomen. Dabei können $r = 0;\ 1;\ 2;\ 3$ oder 4 Chromosomenpaare enthalten sein. Wie häufig treten bei vorgegebenen $2m$ und k die Kombinationen für $r = 0$, $r = 1$, ..., $r = \frac{k}{2}$ auf?
Sicher werden Sie mir helfen können.
Mit bestem Dank W. K.
Sektion Tierproduktion – Veterinärmedizin

Erläutern wir zunächst die *biologische Fragestellung*:
In den Chromosomen liegen die gesamten erblichen Eigenschaften, über die ein Lebewesen verfügen wird. Die Chromosomenstruktur und die Umwelt sind also die beiden dominierenden Faktoren, welche die Entwicklung eines Lebewesens bestimmen. Der Kern jeder Zelle enthält beim Menschen 23 Paare von je zwei Chromosomen. Bei der Befruchtung schließen sich Chromosomen der Eizelle mit Chromosomen der Samenzelle zu 23 neuen Paaren zusammen. Die Ähnlichkeit zwischen Brüdern und auch zwischen deren Nachkommen wird auch von der Zahl der übereinstimmenden Chromosomenpaare bestimmt.
Formulieren wir nun ein *mathematisches Problem*, welches es gestattet, auch die biologische Fragestellung zu beantworten.
Wir gehen aus von einer Menge
$M = \{x_1; \ldots; x_m; y_1; \ldots; y_m\}$
von $n = 2 \cdot m$ Elementen. Jedes der Elemente x_i kann mit dem Element y_i zu einem *Chromosomenpaar* $(x_i; y_i)$ zusammengefaßt werden. Daß zwei Brüder in k Chromosomen identisch sind, ist gleichbedeutend mit einer Auswahl von k Elementen aus der Menge M. Unter diesen k Elementen können nun auch *Chromosomenpaare* auftreten. Unsere Aufgabe ist es, zu ermitteln, wie oft bei einer Auswahl von k Elementen aus M genau r Paare der Form $(x_i; y_i)$ auftreten. Diese zu ermittelnde Anzahl $A^n_{k\,r}$ ist also von drei vorgegebenen natürlichen Zahlen, nämlich n (der Zahl der Elemente von M), k (der Zahl der aus M ausgewählten Elemente) und r (der Zahl der dabei auftretenden *Chromosomenpaare*) abhängig.
Zunächst erkennt man: Es geht um ein spezielles Problem der *Auswahl* von Elementen aus einer endlichen Menge, also um eine Fragestellung der *Kombinatorik*.
Wenden wir uns zunächst dem naheliegenden Gedanken zu, der bereits zur Lösung des Problems führen könnte, nämlich in geeigneter mathematischer Literatur nachzuschlagen. Schreiben wir einige Beziehungen, die im Zusammenhang zur Auswahlproblematik stehen, heraus:
Wir finden z. B. eine Formel zur Berechnung der Anzahl der voneinander verschiedenen Möglichkeiten, aus einer Menge von n Elementen k Elemente auszuwählen – jede solche Auswahlmöglichkeit heißt *Kombination:*

$$C^n_k = \frac{n(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k} \quad (1)$$

Aus der Menge $\{a; b; c\}$ kann man also genau $C^3_2 = \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} = 3$ voneinander verschiedene Zweiermengen, nämlich $\{a; b\}$; $\{a; c\}$ und $\{b; c\}$, auswählen. Wir entdecken weiter, daß (1) auch kürzer geschrieben werden kann, wenn man $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ benutzt und (zusätzlich) $0! = 1$ festlegt. Dann ergibt sich aus (1) durch Erweitern mit $(n-k)!$

$$C^n_k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \quad (2)$$

Für (2) schreibt man auch kurz

$$C^n_k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad (3)$$

Dabei ist das Symbol $\binom{n}{k}$ für $n \geqq k$ durch (3) definiert, für $n < k$ soll $\binom{n}{k} = 0$ gelten.
Der Ausdruck $\binom{n}{k}$ heißt *Binomialkoeffizient*, er tritt nämlich bei der Berechnung der Potenz eines Binoms auf:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}a^0 b^n \quad (4)$$

Diese Beziehung ist uns zumindest für $n = 2$ und $n = 3$ nicht unbekannt.

$$\text{Die Formel } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad (5)$$

die unmittelbar aus (3) folgt, garantiert, daß die Summe in (4) bezüglich der Koeffizienten symmetrisch aufgebaut ist, wie dies ja auch im *Pascalschen Dreieck* deutlich wird.
Eine Formel, die unmittelbar zur Lösung unseres Problems beiträgt, suchen wir jedoch vergeblich. Also stürzen wir uns in das Abenteuer, selbst eine solche herzuleiten. Wir gehen dabei so vor, wie man es meist in solchen Fällen tut: Zunächst untersuchen wir eine Reihe einfacher Beispiele, um eine Vermutung zur Berechnung der gesuchten Anzahl $A^n_{k\,r}$ aufzustellen. Und dann werden wir versuchen, unsere Vermutung zu beweisen.
Sei $n = 2m = 4$; d. h., es liegen 2 mal 2 *Chromosomen* $x_1; x_2; y_1; y_2$ vor. Dabei soll $(x_i; y_i)$ ein Paar übereinstimmender Chromosomen bilden. Wählt man von den 4 Elementen aus der Menge $M = \{x_1; x_2; y_1; y_2\}$ nur eines aus – es gibt dabei $\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = 4$ Möglichkeiten – so kann natürlich kein Paar übereinstimmender Elemente vorkommen.
Also ergibt sich für $n = 4$ und $k = 1$:
Ist $r = 0$, d. h., es existiert kein Paar übereinstimmender Elemente, so gibt es 4 Möglichkeiten; $A^4_{1\,0}$.
Ist $r \geqq 1$, d. h., es existiert mindestens ein Paar übereinstimmender Elemente, so gibt es keine Auswahlmöglichkeit;
$A^4_{1\,1} = A^4_{1\,2} = 0$.
Wählen wir aus M zwei Elemente aus, so ergeben sich
$C^4_2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$ Auswahlmöglichkeiten:
$x_1; x_2 \quad x_1; y_1 \quad x_2; y_1 \quad x_2; y_2$
$x_1; y_2 \quad y_1; y_2$.
Wir erhalten für $r = 0$ (es tritt kein Paar auf): $A^4_{2\,0} = 4$,
für $r = 1$ (es tritt genau ein Paar auf): $A^4_{2\,1} = 2$,
für $r > 1$ (es treten mindestens zwei Paare auf): $A^4_{2\,r} = 0$.
Wir wählen $k = 3$. Es ergeben sich 4 Kombinationen. Wir erhalten
$A^4_{3\,0} = 0$, $A^4_{3\,1} = 4$ und $A^4_{3\,2} = 0$.
Man überprüfe dies!
Schließlich erhalten wir für $k = 4$ nur die Auswahlmöglichkeit $x_1x_2y_1y_2$, in der zwei Paare auftreten.
Die gewonnenen Ergebnisse werden in Tabelle 1 zusammengestellt (Seite 50).

Wir deuten die 1. Spalte:
Wenn kein Element aus M ausgewählt wird, so können weder 0 noch 1 noch 2 noch mehr als 2 Paare auftreten. Der Fall $k = 0$ kann also künftig ausgeschlossen werden. Wir streichen die 1. Spalte.
Wir deuten die 2. Zeile:
Ein Paar x_iy_i kann erst dann vorkommen, wenn wenigstens 2 Elemente aus der Menge M ausgewählt werden.
Wir deuten die 4. Zeile:
Wenn man nur die 4 Elemente $x_1x_2y_1y_2$ zur Verfügung hat, so können nie mehr als 2 Paare auftreten.
Wir haben aus der Untersuchung dieser ersten Beispiele schon einiges gelernt, was

Tabelle 1

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$r=0$	0	4	4	0	0
$r=1$	0	0	2	4	0
$r=2$	0	0	0	0	1
$r>2$	0	0	0	0	0

man mühelos auf den „allgemeinen Fall" übertragen kann: $\underset{r}{A^{n}_{k}} \neq 0$ kann nur dann auftreten, wenn $r \leqq \frac{k}{2}$ gilt, denn unter k ausgewählten Elementen können nicht mehr als $\frac{k}{2}$ Paare sein.

In dem Teil der Tabelle, der unterhalb der von links oben nach rechts unten verlaufenden Diagonalen liegt, müssen also folgerichtig nur Nullen auftreten.

Offenbar gilt auch stets $C^{n}_{k} \geqq \underset{r}{A^{n}_{k}}$ (Warum?)

Berechnet man (mit Hilfe von (2)) einen beliebigen der 5 Werte C^{4}_{k} $(0 \leqq k \leqq 4)$, so erkennt man, daß die Summe der Elemente in der k-ten Spalte gerade C^{4}_{k} beträgt. Auch diese Erkenntnis können wir verallgemeinern: Die Summe der Fälle des Auftretens von genau $0; 1; \ldots; \frac{k}{2}$ Paaren muß mit C^{n}_{k} übereinstimmen, denn jede Kombination liefert genau eine Zahl vorkommender Paare.

Ehe wir uns an die Lösung des allgemeinen Problems heranwagen, untersuchen wir weitere Beispiele:

Die Werte $\underset{r}{A^{6}_{k}}$ sind in Tabelle 2 zusammengestellt.

Wir erläutern die 3. Spalte:

Es gibt $C^{6}_{3} = 20$ voneinander verschiedene Möglichkeiten, aus der Menge

$\{x_1; x_2; x_3; y_1; y_2; y_3\}$

genau 3 Elemente auszuwählen. Offensichtlich kann bei keiner dieser Möglichkeiten der Fall eintreten, daß 2 oder mehr als 2 Paare vorkommen,

also ist $\underset{2}{A^{3}_{6}} = 0$ und $\underset{3}{A^{3}_{6}} = 0$.

Unter den 20 Auswahlmöglichkeiten treten folgende zwei Fälle auf:

1. Die Kombination enthält nur Elemente aus der Teilmenge der x_i oder nur Elemente aus der Teilmenge der y_i.
2. Die Kombination enthält ein Element aus der Teilmenge der x_i und zwei Elemente aus der Teilmenge der y_i oder umgekehrt.

Beim *Fall 1* treten $2 \cdot C^{3}_{3} = 2$ Kombinationen auf, in denen kein Paar vorkommen kann, also ist $\underset{0}{A^{3}_{6}} = 2$.

Beim *Fall 2* beschränken wir uns auf die Untersuchung der Kombinationen der Form $x_i y_j y_k$, für die Kombinationen $x_i x_j y_k$ gelten analoge Überlegungen.

Nur in den Kombinationen

$x_1 y_2 y_3$; $x_2 y_1 y_3$ und $x_3 y_1 y_2$ tritt kein Paar auf. Damit haben wir gefunden:

$\underset{0}{A^{6}_{3}} = 2 + 3 + 3 = 8$.

Da in den anderen Auswahlmöglichkeiten der Form $x_i y_j y_k$ nicht mehr als ein Paar auftreten kann, ergibt sich:

$\underset{1}{A^{6}_{3}} = 20 - 8 = 12$.

Um die Ergebnisse der 4. Spalte der Tabelle 2 überprüfen zu können, benutzen wir zusätzlich die folgende Übersicht (Tabelle 3), in ihrer *Eingangszeile* ist der mögliche Charakter der Kombinationen von vier Elementen aus der Menge

$\{x_1; x_2; x_3; y_1; y_2; y_3\}$ dargestellt:

Im Feld I_0 muß die Zahl 0 stehen, da x_i zu einem der y_j bzw. y_i zu einem der x_j gehören muß. Es tritt also mindestens ein Paar auf, d. h., die Anzahl der Fälle, in denen kein Paar auftritt, ist Null.

Auch im Feld II_0 muß die Zahl 0 auftreten, denn für die vier Indizes i; j; k; l stehen nur 1; 2 und 3 zur Verfügung. Ist nämlich $i \neq k$ und $i \neq l$, so muß wegen $j \neq i$ entweder $j = k$ oder $j = l$ gelten. Da $\underset{0}{A^{4}_{6}}$ die Summe der in I_0 und II_0 eingetragenen Zahlen ist, haben wir $\underset{0}{A^{4}_{6}} = 0$ gefunden.

Offenbar kann in $x_i y_1 y_2 y_3$ (bzw. $y_i x_1 x_2 x_3$) nicht mehr als ein Paar auftreten. Also tritt in jeder dieser Kombinationen genau ein Paar auf. Es gibt dabei soviel Möglichkeiten, wie man Elemente für x_i (bzw. y_i) finden kann, also $2 \cdot 3 = 6$ (Feld I_1).

Untersuchen wir nun den Fall II_1:

Es gibt $C^{3}_{2} = 3$ Möglichkeiten, aus der Menge der Elemente $y_1; y_2; y_3$ genau zwei Elemente auszuwählen. Zu jeder von ihnen existieren $C^{2}_{1} = 2$ Möglichkeiten, den Index i von x_i so festzulegen, daß entweder $i = k$ oder $i = l$ gilt. Für die Wahl von j gibt es dann noch genau eine Möglichkeit, so daß $j \neq k$ und $j \neq l$ gilt. Damit muß in Feld II_1 die Zahl

$C^{1}_{1} \cdot C^{2}_{1} \cdot C^{3}_{2} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

eingetragen werden. Für $\underset{1}{A^{6}_{4}}$ ergibt sich aus I_1 und II_1 somit $6 + 6 = 12$.

Schließlich wenden wir uns noch den Feldern I_2 und II_2 zu. Offensichtlich können im Fall I_2 nicht zwei Paare auftreten.

Im Fall II_2 existieren zunächst C^{3}_{2} Möglichkeiten, die Elemente $x_i x_j$ festzulegen, offenbar treten aber nur dann zwei Paare auf, wenn $k = i$ und $l = j$ gilt. Dies bedeutet, daß im Feld II_2 die Zahl

$C^{3}_{2} \cdot C^{2}_{2} = 3 \cdot 1 = 3$ einzutragen ist.

Aus I_2 und II_2 folgt $\underset{2}{A^{6}_{4}} = 0 + 3 = 3$.

Damit haben wir unsere Übersicht abgearbeitet, die Ergebnisse stimmen mit denen der Spalte 4 in Tabelle 2 überein.

Wir sind nun hinreichend gerüstet, das Problem in seiner allgemeinen Form lösen zu können. Bei der Ermittlung einer *Formel* zur Berechnung von $\underset{r}{A^{n}_{k}}$ wollen wir so vorgehen, wie dies bei der Behandlung der letzten Beispiele angedeutet wurde.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß k eine gerade Zahl ist:

In der Tabelle 4 sind in der *Eingangszeile* alle möglichen *Typen* der Kombinationen von k Elementen aus der Menge

$\{x_1; \ldots; x_m; y_1; \ldots; y_m\}$ angegeben.

Dabei ist $n = 2m$, $k \leqq 2m$ und $r \leqq \frac{k}{2}$.

Wir begründen die in der 1. Zeile eingetragenen Ergebnisse für $r = 0$ (Zahl der Fälle, in denen kein Paar auftritt):

I_0: Da in den Kombinationen entweder nur Elemente x_i oder nur Elemente y_i auftreten, gibt es so viele Fälle, in denen kein Paar $(x_i; y_i)$ auftritt, wie es möglich ist, aus m Elementen x_i (bzw. y_i) k Elemente auszuwählen, also $2 \cdot C^{m}_{k}$ Kombinationen.

II_0: Es gibt C^{m}_{k-1} Möglichkeiten, aus der Menge $\{x_1; \ldots; x_m\}$ $k-1$ Elemente auszuwählen. Nun muß y_j so festgelegt werden, daß es zu keinem der Elemente $x_{i_1} \ldots x_{i_{k-1}}$ einer Auswahl gehört. Dabei hat man $C^{m-(k-1)}_{1} = m - (k-1)$ Möglichkeiten. Da für den zweitgenannten Auswahltyp $x_j(y_{i_1} \ldots y_{i_{k-1}})$ analoge Überlegungen gel-

Tabelle 2

	$C^{6}_{1} = 6$	$C^{6}_{2} = 15$	$C^{6}_{3} = 20$	$C^{6}_{4} = 15$	$C^{6}_{5} = 6$	$C^{6}_{6} = 1$
$\underset{0}{A^{6}_{k}}$	6	12	8	0	0	0
$\underset{1}{A^{6}_{k}}$	0	3	12	12	0	0
$\underset{2}{A^{6}_{k}}$	0	0	0	3	6	0
$\underset{3}{A^{6}_{k}}$	0	0	0	0	0	1

Tabelle 3

	$x_i y_1 y_2 y_3$; $y_i x_1 x_2 x_3$	$x_i x_j y_k y_l \quad i \neq j;\ k \neq l$	
$r=0$	I_0	II_0	$\underset{0}{A^{6}_{4}} = 0 + 0$
$r=1$	I_1	II_1	$\underset{1}{A^{6}_{4}} = 6 + 6$
$r=2$	I_2	II_2	$\underset{2}{A^{6}_{4}} = 0 + 3$

Tabelle 4

	$x_{i_1}\dots x_{i_k}$ bzw. $y_{i_1}\dots y_{i_k}$	$y_j x_{i_1}\dots x_{i_{k-1}}$ bzw. $x_j y_{i_1}\dots y_{i_{k-1}}$	$y_{j_1}y_{j_2}x_{i_1}\dots x_{i_{k-2}}$ bzw. $x_{j_1}x_{j_2}y_{i_1}\dots y_{i_{k-2}}$	$y_{j_1}y_{j_2}y_{j_3}x_{i_1}\dots x_{i_{k-3}}$ bzw. $x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}y_{i_1}\dots y_{i_{k-3}}$		$y_{j_1}\dots y_{j_s}x_{i_1}\dots x_{i_{k-s}}$ bzw. $x_{j_1}\dots x_{j_s}y_{i_1}\dots y_{i_{k-s}}$		$y_{j_1}\dots y_{j_{\frac{k}{2}}}x_{i_1}\dots x_{i_{\frac{k}{2}}}$ bzw. $x_{j_1}\dots x_{j_{\frac{k}{2}}}y_{i_1}\dots y_{i_{\frac{k}{2}}}$	
$r=0$	I_0 $2\cdot C_k^m$	II_0 $2\cdot C_1^{m-(k-1)}\cdot C_{k-1}^m$	III_0 $2\cdot C_2^{m-(k-2)}\cdot C_{k-2}^m$	IV_0 $2\cdot C_3^{m-(k-3)}\cdot C_{k-3}^m$		S_0 $2\cdot C_s^{m-(k-s)}\cdot C_{k-s}^m$		V_0 $C_{\frac{k}{2}}^{m-\frac{k}{2}}\cdot C_{\frac{k}{2}}^m$	$A_{\substack{k\\0}}^{2m}=$
$r=1$	I_1 0	II_1 $2\cdot C_1^{m-(k-1)}\cdot C_{k-1}^m$	III_1 $2\cdot C_1^{m-(k-2)}C_1^{k2}\cdot C_{k-2}^m$	IV_1 $2\cdot C_1^{m-(k-3)}\cdot C_1^{k-3}\cdot C_{k-3}^m$	…	S_1 $2\cdot C_1^{m-(k-s)}\cdot C_1^{k-s}\cdot C_{k-s}^m$	…	V_1 $C_{\frac{k}{2}-1}^{m-\frac{k}{2}}C_1^{\frac{k}{2}}\cdot C_{\frac{k}{2}}^m$	$A_{\substack{k\\1}}^{2m}=$
$r=2$	I_2 0	II_2 0	III_2 $2\cdot C_2^{k-2}\cdot C_{k-2}^m$	IV_2 $2\cdot C_1^{m-(k-3)}\cdot C_2^{k-3}C_{k-3}^m$		S_2 $2\cdot C_{s-2}^{m-(k-s)}\cdot C_2^{k-s}\cdot C_{k-s}^m$	…	V_2 $C_{\frac{k}{2}-2}^{m-\frac{k}{2}}\cdot C_2^{\frac{k}{2}}\cdot C_{\frac{k}{2}}^m$	$A_{\substack{k\\2}}^{2m}=$
…	0	0	0	…	…	…	…	…	

ten, erhält man $2\cdot C_1^{m-(k-1)}\cdot C_{k-1}^m$ Fälle, in welchem kein Paar auftritt.

III_0: Es gibt C_{k-2}^m Möglichkeiten, aus der Menge $\{x_1;\dots;x_m\}$ genau $k-2$ Elemente auszuwählen. Eine solche Auswahl ist z. B. $x_1;\dots;x_{k-2}$. Damit kein Paar auftritt, müssen die Elemente y_{i_1} und y_{i_2} aus der Menge $\{y_{k-1};y_k;\dots;y_m\}$ gewählt werden.
Dabei existieren $C_2^{m-(k-2)}$ Möglichkeiten.
Also erhält man $2\cdot C_2^{m-(k-2)}\cdot C_{k-2}^m$ Fälle, in denen kein Paar auftritt.

IV_0: Man überlege sich selbst, warum bei diesem „Auswahltyp" genau $2\cdot C_3^{m-(k-3)}\cdot C_{k-3}^m$ Kombinationen existieren, in denen kein Paar $(x_i;y_i)$ vorkommt.

V_0: Zunächst existieren $C_{\frac{k}{2}}^m$ Möglichkeiten der Auswahl der Elemente $x_{i_1}\dots x_{i_{\frac{k}{2}}}$. Die Zuordnung der $\frac{k}{2}$ Elemente y_j muß nun so erfolgen, daß kein Paar auftritt, dazu hat man $C_{\frac{k}{2}}^{m-\frac{k}{2}}$ Möglichkeiten.

Um $A_{\substack{k\\0}}^n$ zu charakterisieren, müssen die in Zeile 1 eingetragenen Werte addiert werden., Wir wollen uns jedoch vorher noch vergewissern, daß die zwischen IV_0 und V_0 auftretenden Summanden den gleichen Aufbau wie die unter II_0; III_0; IV_0 genannten besitzen:

S_0: Wir ermitteln die Zahl der Kombinationen der Form $x_{i_1}\dots x_{i_s}(y_{j_1}\dots y_{j_{k-s}})$, in denen kein Paar $(x_i;y_i)$ auftritt.
Aus den Elementen y_j wählt man $k-s$ Elemente aus, dafür gibt es C_{k-s}^m Möglichkeiten. In jeder dieser Kombinationen müssen die Elemente x_i so gewählt werden, daß keines dieser s Elemente mit einem der $k-s$ Elemente y_j ein Paar bildet; die Elemente x_i muß man also stets aus einer $m-(k-s)$ elementigen Teilmenge von $\{x_1\dots x_m\}$ auswählen. Es gibt $C_s^{m-(k-s)}$ derartige Kombinationen. Unter Berücksichtigung analoger Überlegungen für den Auswahltyp $y_{j_1}\dots y_{j_s}(x_{i_1}\dots x_{i_{k-s}})$ folgt:
In $2\cdot C_s^{m-(k-s)}\cdot C_{k-s}^m$ Fällen tritt kein Paar auf.
Dieser Ausdruck ordnet sich also in die bisher gewonnenen Ergebnisse ein.
Nun müssen wir rechnen. Wir benötigen dazu lediglich die Beziehungen (1) bis (5) und Kenntnisse aus der Bruchrechnung.

$$\begin{aligned}A_{\substack{k\\0}}^n = A_{\substack{k\\0}}^{2m} &= 2\cdot C_0^{m-k}\cdot C_k^m\\ &+2\cdot C_1^{m-(k-1)}\cdot C_{k-1}^m+2\cdot C_2^{m-(k-2)}\cdot C_{k-2}^m\\ &+2\cdot C_3^{m-(k-3)}\cdot C_{k-3}^m+\dots\\ &+2\cdot C_s^{m-(k-s)}\cdot C_{k-s}^m+\dots\\ &+C_{\frac{k}{2}}^{m-\frac{k}{2}}\cdot C_{\frac{k}{2}}^m\end{aligned} \tag{6}$$

Die Summe (6) schreiben wir mit Hilfe der Beziehungen (1) und (2) um:

$$\begin{aligned}A_{\substack{k\\0}}^{2m} &= \frac{2\cdot m!}{k!\cdot(m-k)!}\\ &+\frac{2\cdot(m-(k-1))!\cdot m!}{1!\cdot(m-k)!\cdot(k-1)!\cdot(m-(k-1))}\\ &+\frac{2\cdot(m-(k-2))!\cdot m!}{2!\cdot(m-k)!\cdot(k-2)!\cdot(m-(k-2))!}\\ &+\frac{2\cdot(m-(k-3))!\cdot m!}{3!\cdot(m-k)!\cdot(k-3)!\cdot(m-(k-3))!}+\dots\\ &+\frac{2\cdot(m-(k-s))!\cdot m!}{s!\cdot(m-k)!\cdot(k-s)!\cdot(m-(k-s))!}+\dots\\ &+\frac{\left(m-\frac{k}{2}\right)!\cdot m!}{\frac{k}{2}!\cdot(m-k)!\cdot\frac{k}{2}!\cdot\left(m-\frac{k}{2}\right)!}\end{aligned}$$

Zunächst sieht man sofort, daß sich alle Brüche (mit Ausnahme des ersten) kürzen lassen. Mit etwas Geschick läßt sich der Faktor $\frac{2m!}{k!(m-k)!}$ ausklammern; dazu muß man allerdings den 2. Bruch mit k, den 3. Bruch mit $k(k-1)$ und schließlich den letzten Bruch mit $k(k-1)\cdot\dots\cdot\left(\frac{k}{2}+1\right)$ erweitern. Man erhält:

$$\begin{aligned}A_{\substack{k\\0}}^{2m} &= \frac{2m!}{(m-k)!\cdot k!}\cdot\Bigg(1+\frac{k}{1!}+\frac{k(k-1)}{2!}\\ &+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}+\dots\\ &+\frac{k(k-1)\cdot\dots\cdot(k-(s-1))!}{s!}+\dots\\ &+\frac{1}{2}\,\frac{k(k-1)\dots\left(k-\left(\frac{k}{2}-1\right)\right)}{k!}\Bigg)\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck läßt sich unter Nutzung von (3) günstig umformen:

$$\begin{aligned}A_{\substack{k\\0}}^{2m} &= 2\binom{m}{k}\left(\binom{k}{0}+\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\binom{k}{3}+\dots\right.\\ &\left.+\binom{k}{s}+\dots+\frac{1}{2}\cdot\binom{k}{\frac{k}{2}}\right).\end{aligned}$$

Erinnern wir uns an die Beziehung (4), setzen dabei $a=b=1$ und nutzen (5), so erhält man überraschend

$$A_{\substack{k\\0}}^{2m} = 2\cdot\binom{m}{k}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^k \quad \text{bzw.}$$

$$A_{\substack{k\\0}}^{2m} = \binom{m}{k}\cdot 2^k \tag{7}$$

Wir müßten nun Zeile 2 der Tabelle 4 abarbeiten. Der interessierte Leser kann dies einmal tun.
Behandelt man die Summe

$$\begin{aligned}A_{\substack{k\\1}}^{2m} &= 2C_1^{k-1}C_{k-1}^m+2C_1^{m-(k-2)}C_1^{k-2}C_{k-2}^m\\ &+\dots+2C_2^{m-(k-s)}C_1^{k-s}C_{k-s}^m+\dots\\ &+C_{\frac{k}{2}-1}^{n-\frac{k}{2}}C_1^{\frac{k}{2}}C_{\frac{k}{2}}^m\end{aligned}$$

wie oben, so erhält man

$$A_{\substack{k\\1}}^{2m} = \binom{k-1}{1}\cdot\binom{m}{k-1}\cdot 2^{k-2} \tag{8}$$

Für $r=2$ ergibt sich

$$A_{\substack{k\\2}}^{2m} = \binom{k-2}{2}\cdot\binom{m}{k-r}\cdot 2^{k-4} \tag{9}$$

Überlegt man sich, daß man $A_{\substack{k\\0}}^{2m} = \binom{m}{k}\cdot 2^k$ wegen $\binom{k}{0}=1$ auch in der Form $A_{\substack{k\\0}}^{2m} = \binom{k}{0}\cdot\binom{m}{k-0}\cdot 2^{k-2\cdot 0}$ schreiben kann, so läßt sich dieses Ergebnis gut einordnen und man vermutet, daß allgemein gilt:

$$A_{\substack{k\\r}}^{2m} = \binom{k-r}{r}\cdot\binom{m}{k-r}\cdot 2^{k-2r} \tag{10}$$

Fortsetzung auf Seite 67

Der Vier-Quadrate-Satz
Teil 1

Aus Anlaß des 250. Geburtstages von Joseph Louis Lagrange (1736 bis 1813)

Der 25. Januar 1986 war der 250. Jahrestag der Geburt von Joseph Louis Lagrange (1736 bis 1813), der neben Leonhard Euler (1707 bis 1783) zu den berühmtesten Mathematikern des 18. Jahrhunderts gehört.
Durch mathematisch-astronomische Schriften des englischen Astronomen Edmund Halley (1656 bis 1742) war der junge Lagrange mit der Mathematik in Berührung gekommen, die ihn dann sein Leben lang fesseln sollte. Seine erste wissenschaftliche Arbeit erschien 1754. Bereits mit 19 Jahren war er Professor an der Artillerie-Schule seiner Geburtsstadt Turin (Oberitalien). Zusammen mit anderen jungen Wissenschaftlern gründete er dort eine wissenschaftliche Gesellschaft, aus der die Turiner Akademie hervorging. Auf Empfehlung Eulers und Jean d'Alemberts (1717 bis 1783) wurde ihm vom preußischen König Friedrich II. (1712 bis 1786) die Stelle eines Direktors der mathematischen Klasse der Berliner Akademie der Wissenschaften angeboten. Lagrange nahm das Angebot an. Euler siedelte 1766 nach Petersburg über; der 30jährige Lagrange wurde sein Nachfolger in Berlin. Als Mathematiker waren an der Berliner Akademie damals außerdem Johann Heinrich Lambert (1728 bis 1777) als Mitglied der physikalischen Klasse, Johann (III) Bernoulli (1744 bis 1807) als Direktor der Berliner Sternwarte und Jean de Castillon (1708 bis 1791), der 1787 Nachfolger Lagranges im Amt des Direktors der mathematischen Klasse wurde, tätig.
Im Alter von 51 Jahren siedelte Lagrange nach Paris über, wo er an der Akademie wirkte. Von der Revolutionsregierung wurde er in das Komitee berufen, welches das Münzwesen neu ordnen und das metrische System einführen sollte. Ende 1795 wurde er Direktor der physikalisch-mathematischen Klasse des Institut National (das an die Stelle der 1793 geschlossenen Académie des sciences getreten war). Mehrere Jahre unterrichtete Lagrange an der 1794 gegründeten Pariser Polytechnischen Schule.
Die Gebiete, in welchen die Wissenschaft Lagrange bedeutende Fortschritte zu verdanken hat, sind: Mathematik (Analysis, Algebra, Zahlentheorie u. a.), Mechanik und Astronomie.
Der Zahlentheoretiker Edmund Landau (1877 bis 1938) schrieb im Jahre 1913 anläßlich des 100. Todestages von Lagrange: *Zu den bedeutendsten Leistungen Lagranges gehört der Beweis des Satzes, daß jede positive ganze Zahl als Summe von vier Quadraten dargestellt werden kann, also als Summe von höchstens vier positiven Quadraten.*
Über diesen Satz soll im folgenden sachlich und historisch berichtet werden.

Zwei-Quadrate- und Drei-Quadrate-Sätze
Eine ungerade Primzahl p läßt sich genau dann in die Summe zweier Quadratzahlen zerlegen, wenn sie die Form $p = 4k + 1$ hat. Sind zwei ungerade Primzahlen jeweils die Summe zweier Quadratzahlen
$h_1 = a^2 + b^2$
(z. B. a ungerade, b gerade),
$h_2 = c^2 + d^2$
(z. B. c ungerade, d gerade), so ist auch
$h_1h_2 = (ad + bc)^2 + (ab - bd)^2$
(worin $ac - bd$ ungerade, also $\neq 0$, ist)
die Summe zweier Quadratzahlen.
Hieraus folgt der

Satz 1:
Eine natürliche Zahl h ist genau dann die Summe zweier Quadratzahlen $h = a^2 + b^2$, wenn gilt:
(1) Entweder enthält h keine Primfaktoren der Form $4k + 3$ oder Primzahlen der Form $4k + 3$ kommen in gerader Potenz in der Primzahlzerlegung von h vor.
(2) Die gerade Primzahl 2 tritt in ungerader Potenz in der Primzahlzerlegung von h auf oder h enthält wenigstens einen Primfaktor der Form $4k + 1$.
Beispiele: $8 = 2^3 = 2^2 + 2^2$,
$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 9^2 + 3^2$, $111 = 3 \cdot 37$
ist nicht Summe zweier Quadratzahlen,
$21^2 = 441 = 3^2 \cdot 7^2$
ist nicht Summe zweier Quadratzahlen,
$882 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = 21^2 + 21^2$.
Der folgende Satz gibt eine Übersicht über die natürlichen Zahlen, die als Summe von höchstens drei Quadratzahlen darstellbar sind. Eine Quadratzahl läßt bei der Division durch 8 den Rest 0 oder den Rest 1 oder den Rest 4. Die Summe höchstens dreier Quadratzahlen läßt daher bei der Division durch 8 niemals den Rest 7, d. h., sie kann nicht von der Form $8k + 7$ sein.
Allgemein gilt der

Satz 2:
Eine natürliche Zahl ist genau dann als Summe von höchstens drei Quadratzahlen darstellbar, wenn sie nicht die Form $4^l(8k + 7)$ ($l \geqq 0$, $k \geqq 0$ ganze Zahlen) hat.
Aus diesem Satz folgt nun leicht, daß sich jede natürliche Zahl (ohne Ausnahme) als Summe von höchstens vier Quadratzahlen darstellen läßt.

Vier-Quadrate-Sätze
Satz 3 (Vier-Quadrate-Satz A):
Jede natürliche Zahl ist als Summe von höchstens vier Quadratzahlen darstellbar.
Aufgabe 1: Zeige, daß Satz 3 aus Satz 2 folgt!
Daß es Zahlen gibt, die keine Quadratsummendarstellung mit weniger als vier Quadratzahlen besitzen, folgt aus dem Satz 2.
Beispiele: $7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$,
$15 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$,
$124 = 4(8 \cdot 3 + 7) = 11^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$
$= 9^2 + 5^2 + 3^2 + 2^2$.
Es gibt aber auch Zahlen, die als Summe von höchstens drei Quadratzahlen, jedoch nicht als Summe von vier Quadratzahlen darstellbar sind, z. B.
$1 = 1^2$, $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$,
$5 = 2^2 + 1^2$, $9 = 3^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$,
$11 = 3^2 + 1^2 + 1^2$, $17 = 4^2 + 1^2$,
$29 = 5^2 + 2^2 = 4^2 + 3^2 + 2^2$,
$41 = 5^2 + 4^2 = 6^2 + 2^2 + 1^2$.

Satz 4:
Die natürlichen Zahlen
1, 3, 5, 9, 11, 17, 29, 41, $4^k \cdot 2$,
$4^k \cdot 6$, $4^k \cdot 14$ (worin $k = 0, 1, 2, \ldots$)
sind nicht als Summe von vier Quadratzahlen darstellbar. Alle anderen natürlichen Zahlen sind als Summe von vier Quadratzahlen darstellbar. Insbesondere ist also jede ungerade Zahl >41 als Summe von genau vier Quadratzahlen darstellbar.
Die Zahlen 3, 9, 11, 17, 29, 41 und
$4^k \cdot 6 = (2^k)^2 + (2^k)^2 + (2^{k+1})^2$,
$4^k \cdot 14 = (2^k)^2 + (2^{k+1})^2 + (2^k \cdot 3)^2$
(für $k = 0, 1, 2, \ldots$) sind jeweils Summen dreier Quadratzahlen. Es gilt

Satz 5:
Alle natürlichen Zahlen, außer 1, 5, $4^k \cdot 2$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) sind als Summe von drei oder vier Quadratzahlen darstellbar.
Die Zahlen
$5 = 1^2 + 2^2$, $2 = 1^2 + 1^2$, $2^3 = 2^2 + 2^2$,
$2^5 = 4^2 \cdot 2 = 4^2 + 4^2$,
$2^{2k+1} = 4^k \cdot 2 = (2^k)^2 + (2^k)^2$
lassen nur die Darstellung als Summe zweier Quadratzahlen zu.
Aus dem Vier-Quadrate-Satz A folgt leicht der Satz 6.
Aufgabe 2: Wie?

Satz 6: (Vier-Quadrate-Satz B)
Jede gebrochene Zahl ist Summe von vier Quadraten gebrochener Zahlen.
Und als Spezialfall

Satz 7: (Vier-Quadrate-Satz C)
Jede natürliche Zahl ist Summe von vier Quadraten gebrochener Zahlen.

Diophant
Dieser Vier-Quadrate-Satz C wurde schon vom griechischen Gelehrten Diophant in seinem Werk *Arithmetische Probleme* – allerdings stillschweigend – benutzt.
Diophant soll – wahrscheinlich im 1. Jahrhundert – in Alexandrien gelebt haben, vielleicht betrieb er im dortigen Museion – einem Forschungsinstitut mit umfangreicher Bibliothek – mathematische, eventuell auch astronomische Forschungen. Von seinen Schriften kennt man – fragmentarisch – zwei: eine *Arithmetische Probleme* betitelte Sammlung von algebraischen und zahlentheoretischen Aufgaben mit Lösungen und eine Abhandlung über Polygonzahlen. Von den 13 Kapiteln der *Arithmetischen Probleme* sind zehn erhalten: sechs in griechischen Handschriften (Kapitel I bis III und wahrscheinlich VIII bis X) und vier in arabischer Übersetzung (Kapitel IV bis VII).
Zu den Aufgaben, bei deren Lösung der Vier-Quadrate-Satz C vorausgesetzt wird, gehört die folgende (Kapitel VIII, Aufg. 29):
Es sind vier Quadrate (r^2, s^2, t^2, u^2, wobei r, s, t, u Brüche oder natürliche Zahlen sein sollen)

zu finden, so daß ihre Summe $(r^2+s^2+t^2+u^2)$ *zu der Summe ihrer Wurzeln* $(r+s+t+u)$ *addiert eine gegebene Zahl* (a) *gibt:*

$$r^2+s^2+t^2+u^2+r+s+t+u=a. \quad (1)$$

Die Lösungsmethode erklärt Diophant am Zahlenbeispiel $a=12$:

Die gegebene Zahl sei $a=12$. Stets kommt, wenn man zu der Summe eines Quadrats und seiner Wurzel $\frac{1}{4}$ addiert, ein Quadrat heraus, ($x^2+x+\frac{1}{4}$ ist stets ein Quadrat), dessen Wurzel, wenn man $\frac{1}{2}$ davon subtrahiert, die Wurzel des ursprünglichen Quadrats gibt

$$\left(x^2+x+\frac{1}{4}=y^2,\ y-\frac{1}{2}=x;\right.$$

nämlich $\left.\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=x^2+x+\frac{1}{4}\right)$.

Nun muß die Summe der vier gesuchten Quadrate, wenn man die Summe ihrer Wurzeln addiert, die gegebene Zahl $(a=)12$ $(r^2+s^2+t^2+u^2+r+s+t+u=a=12)$ ergeben.

Addiert man noch die vier Viertel, so erhält man vier Quadrate, deren Summe 13 ist:

$$\left(r^2+r+\frac{1}{4}\right)+\left(s^2+s+\frac{1}{4}\right)+\left(t^2+t+\frac{1}{4}\right)+\left(u^2+u+\frac{1}{4}\right)$$
$$=\left(r+\frac{1}{2}\right)^2+\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(u+\frac{1}{2}\right)^2=a+1=13.$$

Man muß also $a+1=13$ in vier Quadrate zerlegen (allgemein nach dem Vier-Quadrate-Satz C möglich!), und wenn man dann von der Wurzel jeder derselben $\frac{1}{2}$ subtrahiert, so erhält man die Wurzeln der vier gesuchten Quadrate. Die Zahl 13 besteht aber aus den beiden Quadraten 2^2 und 3^2; jedes von diesen läßt sich wieder in zwei Quadrate zerlegen, nämlich $\frac{64}{25}$ und $\frac{36}{25}$, $\frac{144}{25}$ und $\frac{81}{25}$:

$$13=\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2+\left(\frac{9}{5}\right)^2.$$

Wenn man die Wurzel eines jeden Quadrats nimmt, nämlich $\frac{8}{5}, \frac{6}{5}, \frac{12}{5}, \frac{9}{5}$, und von jeder $\frac{1}{2}$ subtrahiert, so erhält man die Wurzeln der gesuchten Quadrate: $\frac{11}{10}, \frac{7}{10}, \frac{19}{10}, \frac{13}{10}$; die Quadrate selbst also sind $\frac{121}{100}, \frac{49}{100}, \frac{361}{100}, \frac{169}{100}$.

Allgemein hat man $a+1$ (nach dem Vier-Quadrate-Satz C) in vier Quadrate zu zerlegen:

$$a+1=k^2+l^2+m^2+n^2.$$

Dann gilt mit

$$r=k-\frac{1}{2},\quad s=l-\frac{1}{2},\quad t=m-\frac{1}{2},\quad u=n-\frac{1}{2}$$

in der Tat

$$r^2+s^2+t^2+u^2+r+s+t+u=a.$$

Im Jahre 1621 publizierte Claude G. Bachet de Méziriac (1581 bis 1638), Mathematiker und Philosoph in Paris, die sechs griechisch überlieferten Kapitel der Diophantischen *Arithmetischen Probleme* in griechischem Original und mit einer lateinischen Übersetzung. Zu den Aufgaben Diophants gab er ausführliche Erläuterungen. In der Anmerkung zu der Aufgabe VIII, 29 (bei Bachet IV, 31) bemerkte er, daß Diophant hier und in einigen weiteren Aufgaben den Vier-Quadrate-Satz C vorausgesetzt habe. Bachet vermutete die Richtigkeit des Vier-Quadrate-Satzes A. Er hätte ihn für alle natürlichen Zahlen bis 325 geprüft. Für die Zahlen bis zu 120 (nicht ganz vollständig) gab er Vier-Quadrate-Zerlegungen an.

Bachets Landsmann Pierre de Fermat (1601 bis 1665), Jurist, Königlicher Rat am Parlament von Toulouse, befaßte sich aus Liebhaberei mit mathematischen Studien. (Heute gilt er als Begründer der modernen Zahlentheorie.)

Gewissenhaft studierte Fermat die griechisch-lateinische Ausgabe des Diophant von Bachet. Auf freien Stellen und am Rande notierte er zahlreiche Ergänzungen, unter denen sich tiefsinnige zahlentheoretische Sätze und Vermutungen befinden. Nach Fermats Tod gab sein Sohn Samuel die Bachetsche Diophantausgabe zusammen mit den Randbemerkungen seines Vaters neu heraus (1670).

Bachets Kommentar zur Aufgabe VIII, 29 (Bachet: IV, 31) veranlaßte Fermat zu folgender Anmerkung: *Ich habe sogar den schönen und ganz allgemeinen Satz entdeckt, daß jede Zahl entweder eine Dreieckzahl oder die Summe von zwei oder drei Dreieckzahlen; entweder eine Quadratzahl oder die Summe von zwei oder drei oder vier Quadratzahlen; entweder eine Fünfeckzahl oder die Summe von zwei oder drei oder vier oder fünf Fünfeckzahlen ist, und daß weiter derselbe allgemeine und wunderbare Satz für Sechseckzahlen, Siebeneckzahlen, überhaupt beliebige Polygonalzahlen gilt. Den Beweis desselben, der aus vielen mannigfaltigen und ganz verborgenen Geheimnissen der Zahlen hergenommen wird, kann ich hier nicht beifügen. Ich habe nämlich vor, ein besonderes Werk diesem Gegenstande zu widmen und die Arithmetik in diesem Teil über die alten und bekannten Grenzen hinaus in wunderbarer Weise zu erweitern.*

Fermat hat sein Vorhaben leider nicht verwirklicht. Den Vier-Quadrate-Satz A sprach Fermat auch in Briefen aus, erstmals im Herbst 1636 an Mersenne. Hierin betonte Fermat ebenfalls stets, daß er einen Beweis für diesen Satz hätte, und forderte überdies verschiedene Mathematiker auf, ihn auch zu beweisen.

Es folgt ein Teil 2. *H. Pieper*

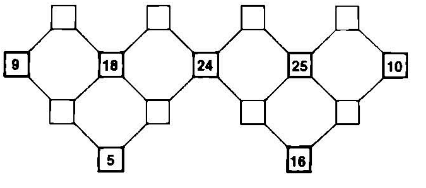
Joseph Louis Lagrange

1736, 25. Januar, Geburt in Turin
1736 bis 1766, in Turin (Artillerie-Schule, Turiner Akademie)
1766 bis 1787, in Berlin (Akademie der Wissenschaften)
1787 bis 1813, in Paris (Akademie, École normale, École polytechnique)
1813, 10. April, Tod in Paris

▲1▲ A water plant in a fish pond has $\frac{5}{6}$ of its length out of the water, $\frac{1}{12}$ in mud and 2 feet in water.
What is the total length of the plant?

Aus: Mathematical Pie, Großbritannien

▲2▲ Les nombres déjà inscrits représentent la somme des chiffres à situer dans les carrés qui leur sont directement reliés. Ces chiffres, tous différents, sont compris entre 1 et 9.

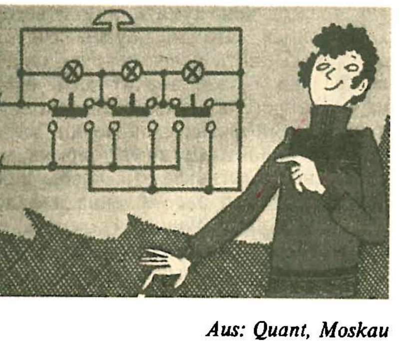


A vous de les placer!

Aus: MAXIMATH

▲3▲ Возможен ли треугольник со сторонами $a=7$ см и $b=2$ см, если известно, что высота, опущенная на третью сторону этого треугольника, является средним геометрическим двух других высот?

▲4▲ На рисунке изображена электрическая цепь со звонком, тремя лампочками и тремя кнопками, каждая из которых в свободном состоянии соединяет одну пару контактов, а в нажатом – другую. Цепь включена в сеть. Как она будет работать при нажатии на одну из кнопок?



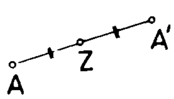
Aus: Quant, Moskau

Symmetrie im Raum

Teil 2

Wir hatten uns in einem ersten Beitrag (Heft 2/87) mit Symmetrien im Raum beschäftigt, denen Spiegelungen an einer Ebene oder Spiegelung an einer Geraden zu Grunde liegt. Zu den Symmetrien, die auf Spiegelungen beruhen, gehört im Raum noch die *Zentralsymmetrie*.
Ein Punkt Z heißt ein *Symmetriezentrum der Figur F*, wenn bei der *Spiegelung an* Z die Figur auf sich abgebildet wird. Dabei ist wie in der ebenen Geometrie das Bild A' eines Punktes $A \neq Z$ dadurch ausgezeichnet, daß Z der Mittelpunkt von $\overline{AA'}$ ist (Bild 1).

Bild 1

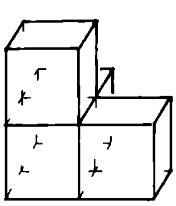


Aufgaben

▲1▲ Zeige, daß das regelmäßige Tetraeder *kein* Symmetriezentrum besitzt!

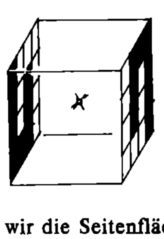
▲2▲ Der Raum läßt sich mit kongruenten Würfeln in der Weise wie im Bild 2 lückenlos füllen. Beschreibe alle Symmetriezentren einer derartigen Raumparkettierung!

Bild 2



▲3▲ Nenne (und beschreibe) eine Figur, die zwar ein Symmetriezentrum, aber weder eine Symmetrieebene noch eine Symmetrieachse besitzt!

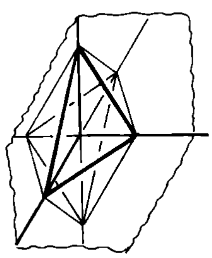
Bild 3



Wenn wir die Seitenflächen eines Würfels so bemalen, daß die Zentralsymmetrie des Würfels auch dafür besteht (etwa in der einfachen Weise mit einem Mosaik wie im Bild 3), so erkennen wir einen *wesentlichen Unterschied zur Zentralsymmetrie in der ebenen Geometrie:* Entsprechende Teile haben eine entgegengesetzte Orientierung und lassen sich deshalb durch keine eigentliche (physikalische) Bewegung ineinander überführen. Wenn wir also zwei rechtsläufige und kongruente Schrauben mit den Köpfen aneinanderfügen, so ist die Gesamtfigur aus diesem Grunde *nicht* zentralsymmetrisch.
Mit der Aussage in der folgenden Aufgabe wird auf einen bemerkenswerten Zusammenhang zwischen Symmetrieebenen und Symmetriezentrum einer Figur aufmerksam gemacht:

▲4▲ Hat eine Figur *drei paarweise aufeinander senkrecht stehende Symmetrieebenen, so ist ihr gemeinsamer Punkt ein Symmetriezentrum.*
Eine einfache Veranschaulichung dieses Sachverhalts bietet z. B. der Würfel, der Quader oder die (Erd-)Kugel mit den Breitenkreisen und den Meridianen.
Wenn man an einer Quaderecke die drei dort zusammentreffende Seitenflächen von innen mit einem spiegelnden Belag versieht, entsteht ein sogenannter *Dreikantspiegel*. (Derartige Spiegelsysteme findet man u. a. beim Rückstrahler!) In eine solche räumliche Ecke können wir ein spitzwinkliges Dreieck aus farbigem Glas oder einfach aus drei Holzstäbchen zusammengesetzt legen (Bild 4).

Bild 4



▲5▲ Welche Gesamtfigur entsteht daraus am Dreikantspiegel?
Lösung: Im Schrägriß (Bild 4) läßt sich jede beliebige Abfolge von Spiegelungen leicht verfolgen und konstruktiv nachvollziehen. Aus den 3 Ecken des Dreiecks entstehen nur 3 weitere Bildpunkte. Die Gesamtfigur wird zu einem (nicht notwendig regelmäßigen) *Oktaeder*. Entsprechend der Aussage in der Aufgabe 4 ist diese Figur *zentralsymmetrisch*.
Analog zur ebenen Geometrie gibt es im Raum ebenfalls Drehsymmetrie; anstelle der Drehungen um einen Punkt (siehe *alpha* Heft 4/1985) treten Drehungen um eine Gerade. Eine Gerade a heißt eine *Drehsymmetrieachse vom Grade* n, $n \geqq 2$ (oder eine *n-zählige Symmetrieachse*) *der Figur F*, wenn es zusammen mit der identischen Abbildung (!) n Drehungen um a gibt, bei denen F auf sich abgebildet wird. Ist a eine Drehsymmetrieachse vom Grade n und n geradzahlig, so ist a offenbar auch eine (einfache) Symmetrieachse.

▲6▲ Man bestimme alle Drehsymmetrieachsen und ihre Zähligkeit bei einem regelmäßigen Tetraeder!
Lösung: Wir hatten bereits in der Aufgabe 4 im ersten Teil des Beitrags (*alpha* 2/87) alle Symmetrieachsen des regelmäßigen Tetraeders ermittelt; es sind die drei Verbindungsgeraden der Mitten jeweils gegenüberliegender Tetraederkanten (Bild 5a). Sie sind offensichtlich nur 2-zählig. Fällen wir das Lot von einer Tetraederecke auf die gegenüberliegende Seitenfläche, so können wir um diese Gerade (zusammen mit der identischen Abbildung) genau drei Drehungen ausführen, die den Körper in sich überführen (Bild 5b). Auf diese Weise haben wir vier 3-zählige Drehsymmetrieachsen aufgezeigt. Dies sind alle 3-zähligen. Und höherzählige kann es nicht geben, da nicht mehr als drei Tetraederecken in einer gemeinsamen Ebene liegen.

Bild 5a

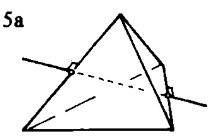
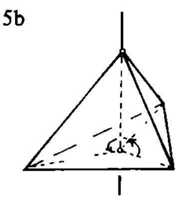


Bild 5b



Es gibt eine wesentliche Beziehung zwischen Symmetrieebenen und Drehsymmetrieachsen.

▲7▲ Hat eine Figur *zwei Symmetrieebenen*, die *sich schneiden, so* ist die *Schnittgerade* eine *Drehsymmetrieachse*.
Das Ergebnis der Aufgabe 6 läßt sich nun nochmals mit Hilfe der Kenntnis der Symmetrieebenen eines regelmäßigen Tetraeders (Aufgabe 1 im ersten Teil des Beitrages) gewinnen. (Man beachte dabei jedoch, daß *für* die *Existenz einer Drehsymmetrieachse* die *Existenz von Symmetrieebenen nicht notwendig ist!*)

▲8▲ Nenne ein Beispiel für eine Figur, die eine n-zählige Drehsymmetrieachse mit $n \geqq 3$, aber keine Symmetrieebene besitzt!

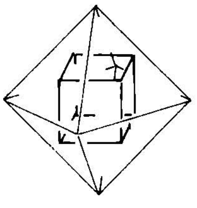
▲9▲ Besitzt das Vorderrad deines Fahrrades eine Drehsymmetrie?
Gib gegebenenfalls die Achse und den Grad der Drehsymmetrie an!

▲10▲ Viele Formen von Blüten und Früchten, von Mineralien (Bild 6), von Kunstgegenständen (Bild 7) sowie von rotierenden Teilen an Maschinen besitzen Drehsymmetrie.
Suche (weitere) Beispiele!

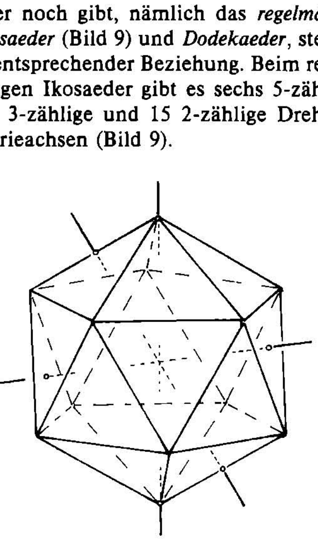
Bild 6


Bild 7

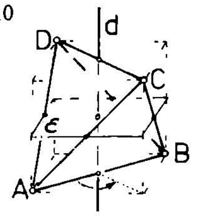

▲11▲ Bestimme alle Drehsymmetrieachsen und ihre jeweilige Zähligkeit beim Würfel!
Für das regelmäßige Oktaeder ergeben sich die gleichen Resultate. Warum? Der enge Zusammenhang wird sichtbar, wenn man die Mitten der Seitenflächen des regelmäßigen Oktaeders betrachtet (Bild 8); sie bilden einen Würfel!

Bild 8


Die beiden konvexen regelmäßigen Polyeder, die es neben Tetraeder, Würfel und Oktaeder noch gibt, nämlich das *regelmäßige Ikosaeder* (Bild 9) und *Dodekaeder*, stehen in entsprechender Beziehung. Beim regelmäßigen Ikosaeder gibt es sechs 5-zählige, 10 3-zählige und 15 2-zählige Drehsymmetrieachsen (Bild 9).

Bild 9


▲12▲ Begründe, daß der Fernsehfußball die gleichen Drehsymmetrien besitzt wie das regelmäßige Ikosaeder!
Für eine vollständige Übersicht über mögliche Symmetrien im Raum bilden die Symmetrien der regelmäßigen Polyeder eine grundlegende Rolle.
Unter einer ***Symmetrieabbildung einer Figur*** wird eine ***Bewegung*** verstanden, die diese Figur in sich überführt.
Zum Abschluß geben wir eine *Übersicht über alle Symmetrieabbildungen eines regelmäßigen Tetraeders*. Da bei jeder derartigen Abbildungen Ecken in Ecken übergehen müssen, kann es höchstens so viele geben, wie es $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten gibt. Wir zeigen nun, daß es auch 24 Symmetrieabbildungen gibt.
Viele sind uns bereits bekannt: die identische Abbildung, sechs Spiegelungen an Ebenen (Symmetrieebenen), drei Spiegelungen an Geraden (Symmetrieachsen) und acht Drehungen an Geraden (jeweils zwei nichtidentische und voneinander verschiedene Drehungen an den vier 3-zähligen Drehsymmetrieachsen). Daneben gibt es nun noch sogenannte *Drehspiegelungen*.

Bild 10


Dies sind Bewegungen, die sich aus einer Drehung um eine Gerade d und einer anschließenden Spiegelung an einer zu d senkrechten Ebene ε zusammensetzen. Im Bild 10 erkennt man, daß eine Drehung um die Gerade d durch die Mitten von $\overline{AB}$ *und* $\overline{CD}$ mit 90° und einer anschließenden Spiegelung an der zu d senkrechten Ebene ε, die durch die Mitten von $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ und $\overline{BD}$ geht, tatsächlich den Körper auf sich abbildet; die Punkte A, B, C, D gehen dabei in C, D, B, A über. Bei gleicher Achse d und Ebene ε ist noch eine weitere Drehspiegelung möglich, die A, B, C, D in D, C, A, B überführt. Auf diese Weise erkennen wir $3 \cdot 2 = 6$ *Drehspiegelungen als Symmetrieabbildungen des regelmäßigen Tetraeders*. Mehr kann es bereits nicht mehr geben, da unsere bisherige Auflistung schon 24 Bewegungen ergibt.

E. Quaisser/H.-J. Sprengel

Aus der Geschichte der Schiffahrt

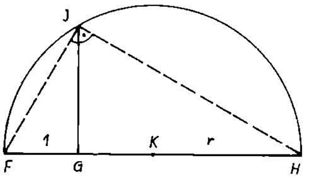
1886 wurde erstmals ein speziell als Tanker gebautes Schiff in Dienst gestellt. Dieser Tanker (mit dem Namen „Glückauf") konnte 20000 Barrel Öl aufnehmen, 1 Barrel entspricht 158,987 l.
Wie lang ist ein Zylinder mit einem Bodenflächenradius von 3 m, der gerade die Ölmenge des Tankers „Glückauf" faßt? Benutze den Schulrechner SR 1!

Mitgeteilt von Dr. W. Schmidt, Greifswald

Eine Aufgabe von René Descartes aus dem Jahre 1637

Und ich werde mich nicht scheuen, diese der Arithmetik entnommenen Ausdrücke in die Geometrie einzuführen, um mich dadurch verständlicher zu machen...

▲2805▲ Soll endlich aus (der Strecke) GH die Quadratwurzel gezogen werden, so füge ich zu GH in gradliniger Fortsetzung die Einheit FG hinzu, und beschreibe, nachdem ich FH im Punkte K in zwei gleiche Teile geteilt, um K als Mittelpunkt den Kreis FIH, errichte dann in G unter rechtem Winkel zu FH eine gerade Linie bis nach I, so ist GI die gesuchte Wurzel.
Beweise diese Konstruktion!



Gegeben: $\overline{GH}$, $FG = 1$;
gesucht: $GI = \sqrt{\overline{GH}}$, $\sphericalangle FIH = 90°$
(Buchstaben original wie bei Descartes, nur das Dreieck fehlt.)

Computer rechnete 37 Stunden an π

Tokio (JW): *Der japanische Mathematiker Professor Yasumasa Kanada hat die Zahl π mit einem Computer bis auf 133554 Millionen Stellen hinter dem Komma errechnet. Er ist überzeugt, daß er sich damit einen Eintrag im Guiness-Buch der Rekorde verdient hat. Der Computer rechnete schließlich 37 Stunden lang und druckte das Ergebnis auf 20000 Blättern Papier aus.* Es dürfte jedoch kaum von Nutzen sein, derart viele Stellen der Zahl π zu kennen. Aber es ist interessant zu wissen, daß man beliebig viele Stellen berechnen kann, wenn man genügend Zeit und einen leistungsfähigen Computer besitzt. Uns genügt die Genauigkeit des Schulrechners SR 1, der für π den Wert 3,1415927 anzeigt und mit 3,14159265 rechnet. Man bestätige die SR 1-Werte!

Mitgeteilt von Dr. W. Schmidt, Greifswald

Kryptarithmetik

Die folgenden Aufgaben aus der *Kryptarithmetik* sind zum größten Teil aus dem Entwurf des neuen Lehrbuches der Mathematik für die 3. Klasse, das im Schuljahr 1987/88 eingeführt wird, ausgewählt worden, z.T. aber auch aus dem neuen sowjetischen Lehrbuch für die 4. Klasse (Moskau 1986). Soweit die Lösungen nicht ohne weiteres ersichtlich sind, werden systematische Lösungen mit Hilfe von Gleichungen bzw. Fallunterscheidungen gegeben.
Diese Lösungen sind aber für Schüler der mittleren und oberen Klassen sowie für Lehrer zur Orientierung bestimmt. Schüler der unteren Klassen können die Aufgaben durch mehr oder weniger systematisches Probieren lösen. Das gelingt ihnen, weil die schwierigeren Aufgaben viele Lösungen haben und von den Schülern nur eine Lösung verlangt wird.
Bei den Kryptogrammen ist zu beachten, daß jeweils gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu belegen sind und daß am Anfang einer Zahl niemals die Ziffer 0 steht.

▲1▲ Setze für □ die Rechenzeichen + oder · !
a) $0\square1\square2\square3\square4\square5 = 120$
b) $0\square1\square2\square3\square4\square5 = 121$

▲2▲ Setze in die Leerstellen +, · und Klammern ein!
$1\square2\square3\square4\square5 = 100$

▲3▲ Setze für die Leerstellen die Rechenzeichen + oder − ein! (Dezimale Schreibweise ist erlaubt, z. B. 12 oder 56.)
$1\square2\square3\square4\square5\square6\square7\square8\square9 = 100$

▲4▲ Die Ziffern 1, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9 sind in die Leerstellen so einzutragen, daß man die Summe 100 erhält.
$\square\square + \square\square + \square\square + \square\square = 100$

▲5▲ Die acht Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 9 sind so in die Leerstellen einzusetzen, daß man die Summe 10 000 erhält.

$$\begin{array}{r} \square\square\square\square\square \\ +\,\square\square\square\square \\ \hline 1\;0\;0\;0\;0 \end{array}$$

▲6▲ Fülle die Leerstellen mit Ziffern so aus, daß man als Differenz 1 erhält!

$$\begin{array}{r} \square\square\square\square \\ -\,\square\square\square \\ \hline 1 \end{array}$$

▲7▲ $\begin{array}{r} \square21\cdot4 \\ \hline 1684 \end{array}$

▲8▲ $\begin{array}{r} \square\square1\cdot3 \\ \hline 186\square \end{array}$

▲9▲ $\begin{array}{r} 41\square\cdot4 \\ \hline 1\square4\square \end{array}$

▲10▲ $69\square:\square = 2\square1$

▲11▲ $1\square25:5 = 32\square$

▲12▲
$$\begin{array}{ccccc} A & + & A & = & B \\ + & & \cdot & & - \\ A & \cdot & A & = & B \\ \hline B & - & B & = & 0 \end{array}$$

▲13▲
$$\begin{array}{ccccc} AAA & \cdot & A & = & BBB \\ - & & & & - \\ CCC & \cdot & A & = & DDD \\ \hline FFF & \cdot & A & = & 333 \end{array}$$

▲14▲
$$\begin{array}{r} EINS \\ +\,EINS \\ \hline ZWEI \end{array}$$

▲15▲
$$\begin{array}{r} VIER \\ +\,VIER \\ \hline ACHT \end{array}$$

▲16▲
$$\begin{array}{r} EIN\cdot A \\ \hline ISTA \end{array}$$

▲17▲ Ersetze die Buchstaben durch Ziffern! (Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern.)

a	6A8 : 2 = 32A
b	E25 : E = 105
c	B6B4 : 4 = C5C

Lösungen

▲1▲ a) Da $0+1+2+3+4+5 = 15$, also zu klein ist, muß man außer dem Rechenzeichen + noch das Rechenzeichen · benutzen. Nun ist
$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$. Es fehlt die Zahl 0, die man noch addieren kann:
$0+1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$.
b) Diese Summe ist um 1 größer, also muß man noch 1 addieren. Nun ist auch
$2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$. Man erhält
$0+1+2\cdot3\cdot4\cdot5 = 121$.

▲2▲ $1\cdot(2+3)\cdot4\cdot5 = 100$

▲3▲ $1+2+3-4+5+6+78+9 = 100$

▲4▲ An den Zehnerstellen der Summanden müssen möglichst kleine Zahlen stehen, damit die Summe 100 nicht überschritten wird. Nun ist
$1+1+2+3 = 7$ und $6+7+8+9 = 30$;
man erhält also eine Lösung:
$16+17+28+39 = 100$. Man erhält weitere Lösungen, wenn man die Zahlen an den Einer- und Zehnerstellen beliebig vertauscht. Insgesamt sind es
$\frac{4!}{2}\cdot4! = 12\cdot24 = 288$ **Lösungen.**

▲5▲ Da die Summe 10 000 beträgt, müssen an der letzten Stelle die Zahlen die Summe 10 ergeben und an den anderen Stellen die Summe 9 (wegen des Übertrages).
Also stehen an der letzten Stelle die Zahlen 1 und 9, an den übrigen Stellen die Zahlen 2 und 7 bzw. 3 und 6 bzw. 4 und 5.
So erhalten wir eine Lösung
$2341 + 7659 = 10\,000$
Nun hat man drei Möglichkeiten, eines der Paare an die erste Stelle zu setzen, dann zwei für die zweite Stelle und eine für die verbleibenden Stellen. Außerdem können an jeder Stelle die Zahlen vertauscht werden. Es gibt also $3\cdot2\cdot2 = 12$ Lösungen.

▲6▲ $1000 - 999 = 1$

▲7▲ Bezeichnet man den 1. Faktor mit x, so gilt
$x\cdot4 = 1684$, also $x = \frac{1684}{4} = 421$.

▲8▲ Setzt man anstelle der Leerstellen die Variablen x, y, z, so gilt
$(100x + 10y + 1)\cdot3 = 1860 + z$,
$30(10x + y) + 3 = 1860 + z$,
also ist $z = 3$ und
$30(10x + y) = 1860$,
$10x + y = \frac{1860}{30} = 62$.
Der erste Faktor ist also gleich 621.

▲9▲ $(410 + x)\cdot4 = 1040 + 100y + z$,
$1640 + 4x = 1040 + 100y + z$,
$600 + 4x = 100y + z$.
Also ist $x = 0$, 1 oder 2,
weil für $x \geqq 3$ $z > 10$ wird.
Man erhält drei Lösungen:
bei $x = 0$ wird $410\cdot4 = 1640$,
$x = 1$ $411\cdot4 = 1644$,
$x = 2$ $412\cdot4 = 1648$.

▲10▲ $(690 + x):y = 201 + 10z$,
$690 + x = (201 + 10z)y$,
$690 + x = 200y + y + 10yz$.
Also ist $x = y$ und
$690 = 200y + 10yz = 10y(20 + z)$.
Daher ist $y = 3$; denn für $y < 3$ wird die rechte Seite zu klein, für $y > 3$ zu groß.
Daraus folgt $z = 3$ und $693:3 = 231$.

▲11▲ $(1025 + 100x):5 = 320 + z$,
$1025 + 100x = (320 + z)\cdot5 = 1600 + 5z$.
Diese Gleichung ist nur für $z = 5$ erfüllt.
Daher ist
$100x = 1600 + 25 - 1025 = 600$,
$x = 6$ und $1625:5 = 325$.

▲12▲ Ist $A = 1$, so ist $A + A = 1 + 1 = 2 = B$ und $A\cdot A = 1\cdot1 = 1 = B$,
das ist ein Widerspruch.
Ist $A = 2$, so ist $A + A = 2 + 2 = 4$
und $A\cdot A = 2\cdot2 = 4$, d. h. $B = 4$.
Ferner ist $B - B = 4 - 4 = 0$.
Es sind also alle Gleichungen in den Zeilen und Spalten richtig.
$2 + 2 = 4$; $2\cdot2 = 4$; $4 - 4 = 0$.
(Für $A \geqq 3$ ergibt sich stets ein Widerspruch; denn dann ist $A + A < A\cdot A$.)

▲13▲ Wegen $333 = 111\cdot3$ kann FFF nur 111, da dreistellig, und $A = 3$ sein.
Dann ist $AAA\cdot A = 333\cdot3 = 999$,
also $B = 9$.
Es ist $AAA - CCC = FFF$, also $A - C = F$,
d. h., $3 - C = 1$, $C = 2$.

Wegen $CCC \cdot A = DDD$ ist $222 \cdot 3 = 666$, also $D = 6$.
Dann ist $BBB - DDD = 999 - 666 = 333$. Also sind alle Gleichungen in den Zeilen und Spalten richtig. Man erhält das Schema:

$$\begin{array}{c} 333 \cdot 3 = 999 \\ - \quad - \\ \underline{222 \cdot 3 = 666} \\ 111 \cdot 3 = 333 \end{array}$$

▲ 14 ▲ Es fällt zunächst auf, daß, wenn man $10N + S = x$ setzt und $x < 50$ ist, $(10N + S) + (10N + S) = 10E + I = 2x$ und $(10E + I) + (10E + I) = 10Z + W = 2x + 2x = 4x$ ist.
Dabei gilt $4x < 100$, also $x < 25$.
Für $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ergeben sich Widersprüche, da dann in dem Schema für verschiedene Buchstaben gleiche Ziffern auftreten.
Für $x = 7, 8, 9$,
d.h. $2x = 14, 16, 18$, $4x = 28, 32, 36$ erhält man die folgenden Lösungen:

1. Lösung	2. Lösung	3. Lösung
1407	1608	1809
+1407	+1608	+1809
2814	3216	3618

Ferner treten außer für $x = 14, 17, 18, 19$ Widersprüche auf, und man erhält die weiteren Lösungen:

4. Lösung	5. Lösung	6. Lösung
2814	3417	3618
+2814	+3417	+3618
5628	6834	7236

7. Lösung
3819
+3819
7638

Für $50 \leqq x < 100$ ist $x < 75$, und so gibt es noch die folgenden Lösungen:

8. Lösung	9. Lösung	10. Lösung
1457	1859	2864
+1457	+1859	+2864
2914	3718	5728

11. Lösung
4271
+4271
8542

▲ 15 ▲ Da diese Aufgabe viele Lösungen hat, wollen wir noch die Einschränkung machen:
Man ermittle diejenigen Lösungen, bei denen die Summe
a) möglichst klein,
b) möglichst groß ist.
Es ist $V = 1, 2, 3$ oder 4, da $V \neq 0$ und $A \leqq 9$ ist.
a) $V = 1$ und $A = 2$ sind die kleinstmöglichen Werte von V und A und ergeben daher die kleinsten Summanden und die kleinste Summe. Dann ist mindestens $I = 3$, $E = 4$, $R = 5$,
also $T = 0$, $H = 9$, $C = 6$.
($I = 0$ führt nicht zum Ziel, denn $0 + 0 = 0$, an der zweiten Stelle der Summe steht also 0 oder mit einem Übertrag 1, beide Zahlen sind schon besetzt.) Damit haben wir die Lösung mit der kleinsten Summe erhalten:

$$1345 + 1345 = 2690.$$

b) V ist höchstens gleich 4. Ist $V = 4$ und $A = 9$, so kann höchstens $I = 8$ sein. $E = 7$ würde zu $C = 7$ führen, ein Widerspruch wegen $E \neq C$. Dagegen erhält man für $E = 6$ und $R = 5$ die Lösung mit der größten Summe.

$$4865 + 4865 = 9730$$

($R = 7$ würde wieder zu einem Widerspruch führen, da $7 + 7 = 14$ und die 4 bereits besetzt ist.)

▲ 16 ▲ $(100E + 10I + N)A = 1000I + 100S + 10T + A$, wobei die Variablen natürliche Zahlen mit
$A \geqq 2$, $E \geqq 1$, $I \geqq 1$, $N \geqq 1$, $S \geqq 0$, $T \geqq 0$,
und sämtlich kleiner oder gleich 9 sind.
Da NA auf die Ziffer A endet, ist wegen $N \neq 0$
$A = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ oder 9,
$N = 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$,
oder $6, 6, 3, 7, 9$.
Für $A = 2$ und $N = 1$ erhält man keine Lösung. Für $A = 3$ und $N = 1$ erhält man die Lösungen
$821 \cdot 3 = 2463$; $921 \cdot 3 = 2763$.
Für $A = 4$ und $N = 1$ erhält man die Lösungen $521 \cdot 4 = 2084$; $931 \cdot 4 = 3724$.
Außerdem erhält man für $A > 4$ bzw. $N > 1$ noch die folgenden Lösungen, wobei nur die Faktoren angegeben sind:
$841 \cdot 5$; $941 \cdot 5$; $541 \cdot 8$; $651 \cdot 8$; $431 \cdot 9$; $541 \cdot 9$; $761 \cdot 9$; $516 \cdot 2$; $526 \cdot 4$; $726 \cdot 4$; $213 \cdot 5$; $843 \cdot 5$; $943 \cdot 5$; $217 \cdot 5$; $427 \cdot 5$; $637 \cdot 5$,
also insgesamt 20 Lösungen.

▲ 17 ▲ a)
$(600 + 10A + 8) : 2 = 320 + A$
$608 + 10A = 640 + 2A$, $8A = 32$, $A = 4$,
also $648 : 2 = 324$.
b) $(100E + 25) : E = 105$,
$100E + 25 = 105E$, $5E = 25$, $E = 5$,
also $525 : 5 = 105$.
c) $(1000B + 600 + 10B + 4) : 4 = 100C + 50 + C$,
$1010B + 604 = 400C + 200 + 4C$,
$1010B = 404C - 404 = 404(C - 1)$,

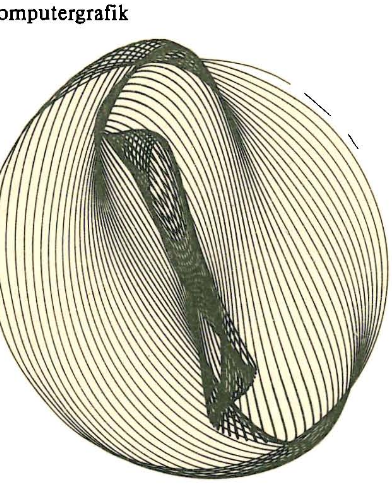
$$B = \frac{4 \cdot 101(C-1)}{101 \cdot 10} = \frac{4(C-1)}{10}$$

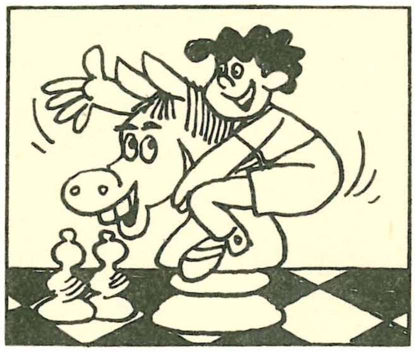
Da $B \neq 0$ ganzzahlig und 4 durch 2 teilbar ist, ist $C - 1 \neq 0$ durch 5 teilbar. Wegen $2 \leqq C \leqq 9$ ist das nur für $C - 1 = 5$, also $C = 6$ der Fall.

Dann ist $B = \frac{4 \cdot 5}{10} = 2$,
und man erhält $2624 : 4 = 656$.

R. Lüders

Computergrafik



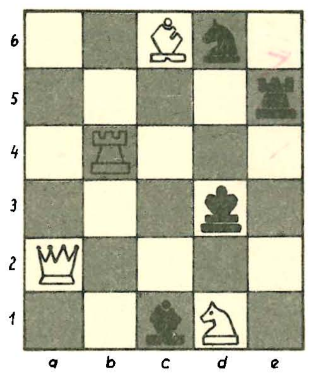


Anordnung von Schachfiguren

Wie groß die Vielfalt der möglichen Probleme bei der Anordnung von Schachfiguren auf dem Schachbrett ist, davon war in *alpha* schon mehrmals zu lesen. Die sechs unterschiedlich ziehenden Figurentypen und verschiedene Anordnungskriterien bieten einen großen Bereich von zu untersuchenden Fragen an.
Auch der bekannte englische Schachproblemkomponist *Thomas Rayner Dawson* (1889 bis 1951) befaßte sich mit Aufgaben dieser Art. Folgende Aufgabe von ihm wurde zuerst in *London Evening Standard* 1930 veröffentlicht:
Auf einem verkleinerten Schachbrett mit 5×6 Feldern sollen folgende acht Figuren so angeordnet werden, daß keine Figur eine andere deckt oder bedroht. Wie viele verschiedene Anordnungen sind möglich?

♚ ♕ ♜ ♖ ♝ ♗ ♞ ♘

Das abgebildete Diagramm zeigt eine Lösungsmöglichkeit.



Neues aus dem Sportverlag

I. Lindner
Faszinierendes Schach
284 Seiten, Preis: 15,50 M
291 Diagramme
Bestell-Nr. 671 639 9

A. Mazukewitsch
Verflixte Fehler
500 lehrreiche Minipartien
233 Seiten, Preis: 15,80 M
Bestell-Nr. 671 642 6

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade

7./8. Februar 1987

Olympiadeklasse 7

260731 Herr Anders fuhr mit seinem Pkw auf der Autobahn mit einer Geschwindigkeit von $100\frac{\text{km}}{\text{h}}$ an einer Tankstelle (A) vorbei. Nach einer weiteren Fahrstrecke von 175 km mußte Herr Anders den Benzinhahn auf Reserve stellen. Da die nächste Tankstelle (B) von dieser Stelle aus auf der Autobahn noch 45 km entfernt liegt, verringerte Herr Anders seine Geschwindigkeit auf $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$, um weniger Benzin zu verbrauchen.
Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit legte Herr Anders die Strecke zwischen A und B zurück?
(Der kurze Bremsweg, auf dem die Geschwindigkeit von $100\frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$ herabgesetzt wurde, soll in der Rechnung nicht berücksichtigt werden, da er die gesuchte Durchschnittsgeschwindigkeit nur unwesentlich beeinflußt.)

260732 Über die Feriengäste in einem Ferienheim ist folgendes bekannt:
Die Anzahl der Mädchen ist gleich der Hälfte der Anzahl derjenigen Feriengäste, die keine Mädchen sind.
Die Anzahl der Jungen ist gleich einem Drittel der Anzahl derjenigen Feriengäste, die keine Jungen sind.
Die Anzahl der Frauen ist gleich einem Viertel der Anzahl derjenigen Feriengäste, die keine Frauen sind.
Außer diesen Mädchen, Jungen und Frauen sind in diesem Ferienheim als Feriengäste noch genau 26 Männer.
Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutig die Anzahlen der Mädchen, Jungen und Frauen ergeben! Wenn dies der Fall ist, gib diese Anzahlen an!

260733 Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck; sein Umkreis k habe den Mittelpunkt M. Der Strahl aus A durch M schneide k in D, der Strahl aus B durch M schneide k in E, der Strahl aus C durch M schneide k in F.
Ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte des Sechsecks $AFBDCE$ und des Dreiecks ABC!

260734 Ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ natürlicher Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen!
(1) m und n sind dreistellige Zahlen.
(2) Es gilt $m - n = 889$.
(3) Für die Quersummen $Q(m)$ und $Q(n)$ von m bzw. n gilt $Q(m) - Q(n) = 25$.

260735 Bekanntlich haben in jedem gleichseitigen Dreieck die drei Seitenhalbierenden, die zugleich auch die drei Winkelhalbierenden und die drei Höhen sind, einen gemeinsamen Schnittpunkt.
Gibt es Dreiecke ABC, die nicht gleichseitig sind und bei denen wenigstens die Seitenhalbierende von BC, die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ABC$ und die zur Seite AB senkrechte Höhe einen gemeinsamen Schnittpunkt haben? Wenn es solche Dreiecke gibt, so konstruiere ein derartiges Dreieck und beschreibe deine Konstruktion! Eine Begründung wird nicht verlangt.

260736 Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel mit $AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH$; dabei sei $EFGH$ eine Seitenfläche des Würfels; der Schnittpunkt ihrer Diagonalen EG und FH sei S.
a) Beweise, daß der Winkel $\sphericalangle ESA$ kein rechter Winkel ist!
b) Beweise, daß der Winkel $\sphericalangle DSE$ ein rechter Winkel ist!

Olympiadeklasse 8

260831 Gegen Ende eines Kinderfestes kommen fünf Mädchen zur Solidaritätstombola und wollen Lose kaufen. Der Pionierleiter zählt die vorrätigen Lose und sagt dann: „Der Vorrat reicht dafür, daß jede von euch, eine nach der anderen, jeweils genau die Hälfte der gerade noch vorhandenen Lose und ein halbes Los dazu kauft. Dann bleibt kein Los übrig."
(I) Weise nach, daß es als Vorrat an Losen *höchstens* ein Anzahl geben kann, bei der die Aussagen des Pionierleiters zutreffen!
(II) Weise nach, daß für *diese* Anzahl die Aussagen des Pionierleiters zutreffen! Wie viele Lose kann jedes der fünf Mädchen nach diesen Aussagen kaufen?

260832 Ermittle alle diejenigen Paare $(p; q)$ von Primzahlen, die die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!
(1) Die Differenz $q - p$ ist größer als 0 und kleiner als 10.
(2) Die Summe $p + q$ ist das Quadrat einer natürlichen Zahl n.
(3) Addiert man zu dieser Zahl n die Summe von p und q, so erhält man 42.

260833 Gegeben seien ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r = 5$ cm sowie eine Gerade g, die von M den Abstand $d = 6$ cm hat. Zu konstruieren sind alle diejenigen Punkte P, die die folgenden Bedingungen a) und b) erfüllen:
a) Der Punkt P liegt auf der Geraden g.
b) Die von P an k gelegten Tangenten bilden miteinander einen rechten Winkel.
Beschreibe eine Konstruktion! Fertige eine Konstruktionszeichnung an! Beweise die beiden folgenden Sätze (I) und (II)!
(I) Wenn ein Punkt P die Bedingungen a) und b) erfüllt, dann läßt er sich nach der angegebenen Beschreibung konstruieren.
(II) Wenn ein Punkt P nach der angegebenen Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt er die Bedingungen a) und b).

260834 In einer Ebene seien 100 verschiedene Punkte so gelegen, daß folgende Voraussetzungen erfüllt sind:
(1) Es gibt genau eine Gerade, auf der mehr als zwei der 100 Punkte liegen.
(2) Auf dieser Geraden liegen genau drei der 100 Punkte.
Ermittle unter diesen Voraussetzungen die Anzahl derjenigen Geraden, die durch mehr als einen der 100 Punkte gehen!

260835 Beweise folgende Sätze:
(I) Wenn ABC ein Dreieck mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ ist, dann ist die Seitenhalbierende von AB zugleich auch Winkelhalbierende von $\sphericalangle ABC$.
(II) Wenn in einem Dreieck ABC die Seitenhalbierende von AB zugleich auch Winkelhalbierende von $\sphericalangle ABC$ ist, dann gilt $\overline{AC} = \overline{BC}$.

260836 Es sei $ABCD$ eine dreiseitige Pyramide, die die Bedingung erfüllt, daß die vier Dreiecke ABC, ABD, ACD und BCD sämtlich einander umfangsgleich sind.
Untersuche, ob durch diese Bedingung und durch die Längen

$$\overline{AD} = p,\ \overline{BD} = q,\ \overline{CD} = r$$

die Längen $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ und $\overline{AB} = c$ eindeutig bestimmt sind! Wenn dies der Fall ist, gib diese Längen a, b, c in Abhängigkeit von p, q, r an!

Olympiadeklasse 9

260931 Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(a; b)$ natürlicher Zahlen, für die die Gleichung

$$2(a + b) = ab \text{ gilt!}$$

260932 In einer Ebene e sei ein Dreieck ABC fest vorgegeben. Die Mittelpunkte der Dreiecksseiten BC, CA, AB seien U, V bzw. W in dieser Reihenfolge.
Weiter sei P ein beliebiger Punkt der Ebene e. Spiegelt man P sowohl an U, V als auch an W, so erhält man die Bildpunkte P_U, P_V bzw. P_W.
(Unter dem Bildpunkt P_S von P bei der Spiegelung an einem Punkt S versteht man denjenigen Punkt, für den gilt, daß S der Mittelpunkt der Strecke PP_S ist. Falls $P = S$ ist, ist $P_S = P$.)
Beweisen Sie, daß der Flächeninhalt des Dreiecks $P_UP_VP_W$ unabhängig von der Lage des Punktes P ist, und vergleichen Sie diesen Flächeninhalt mit dem des Dreiecks ABC!

260933 Wenn eine reelle Zahl a gegeben ist, so werde jeder reellen Zahl x eine Zahl y, nämlich

$$y=\frac{x^3+x^2+ax+1}{x^2+1}$$

zugeordnet.

(A) Ermitteln Sie, wenn $a=-3$ gegeben ist, zwei ganze Zahlen x, deren zugeordnete Zahlen y ebenfalls ganze Zahlen sind!

(B) Ermitteln Sie eine reelle Zahl a, für die die folgende Aussage (*) gilt!

(*) Wenn die Zahl a gegeben ist, so gibt es unendlich viele ganze Zahlen x, deren jeweils zugeordnete Zahlen y ebenfalls ganze Zahlen sind.

(C) Untersuchen Sie, ob es außer der in (B) ermittelten Zahl a noch eine andere reelle Zahl a gibt, für die die Aussage (*) gilt!

260934 Beweisen Sie folgenden Satz:
Wenn a und b zwei von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind, die nicht beide Quadratzahlen sind und für die $\frac{a}{b}$ ein so weit wie möglich gekürzter Bruch ist, dann ist $\sqrt{\frac{a}{b}}$ eine irrationale Zahl.

260935 Von einem Viereck $ABCD$ werde vorausgesetzt:

(1) $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$.

(2) Es gilt $\overline{AB} > \overline{CD}$.

(3) Die Summe der Größen der Innenwinkel $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle ABC$ beträgt 90°.

Der Mittelpunkt von AB sei M, der Mittelpunkt von CD sei N.
Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets

$$\overline{MN}=\frac{1}{2}\cdot(\overline{AB}-\overline{CD})$$

gilt!

260936 a) Ein regelmäßiges Tetraeder $ABCD$ soll durch eine Ebene e, die durch den Punkt A geht, in zwei Tetraeder T_1, T_2 zerlegt werden.
Skizzieren Sie eine derartige Zerlegung, z. B. in Kavalierperspektive, und beschreiben Sie, welche Lage e in bezug auf die drei Punkte B, C, D bei derartigen Zerlegungen haben muß!

b) Beweisen Sie, daß es unter den in a) genannten Ebenen genau drei gibt, bei denen T_1 volumengleich zu T_2 wird!

Olympiadeklasse 10

261031 Von einer natürlichen Zahl x sollen folgende Bedingungen erfüllt werden:

(1) Im Zweiersystem geschrieben hat x genau sieben Stellen.

(2) Schreibt man x im Dreiersystem, so tritt keine Ziffer mehr als zweimal auf.

(3) Im Fünfersystem geschrieben hat x genau vier Stellen.

Beweisen Sie, daß es genau eine natürliche Zahl x gibt, die diese Bedingungen erfüllt, und geben Sie diese Zahl an!

261032 Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0, 1, ..., 6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen. In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, ..., 6 je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steins dieselbe Zahl steht). Insgesamt besteht hiernach ein Dominospiel aus genau 28 Steinen.

Eine „Kette" entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, daß benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel). Eine Kette heißt „geschlossen", wenn auch die beiden Seitenhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen.

a) Ermitteln Sie die kleinste Anzahl $k>1$ von verschiedenen Steinen eines Dominospiels, die eine geschlossene Kette bilden können!

b) Aus einem Dominospiel sollen geschlossene Ketten aus je k verschiedenen Steinen gebildet werden (k sei die in a) genannte Zahl). Dabei soll jeder Stein des Dominospiels in höchstens einer dieser Ketten verwendet werden.
Ermitteln Sie die größte Anzahl g von Ketten, die so zustandekommen können!

c) Ermitteln Sie die Anzahl aller verschiedenen geschlossenen Ketten aus je k verschiedenen Steinen, die sich überhaupt bilden lassen! (Es darf also jeder Stein des Dominospiels in beliebig vielen dieser Ketten auftreten.) Dabei gelten zwei geschlossene Ketten genau dann als gleich, wenn sie bei geeigneter Wahl eines Anfangssteins und einer Durchlaufungsrichtung gleichlautende Zahlenfolgen zeigen. Beispielsweise gelten die beiden Ketten

$$(2,4),\ (4,5),\ (5,5),\ (5,1),\ (1,2)$$

und $$(5,4),\ (4,2),\ (2,1),\ (1,5),\ (5,5)$$

als einander gleich.

261033 Über eine Gerade h und drei Punkte S, A, B auf h wird vorausgesetzt, daß A zwischen S und B liegt. Ferner wird über eine Gerade $g \neq h$ vorausgesetzt, daß sie h in S schneidet. Gesucht sind alle diejenigen Punkte P, die die folgenden Bedingungen a) und b) erfüllen:

a) Der Punkt P liegt auf g.

b) Der Innenwinkel $\sphericalangle SBP$ im Dreieck SBP hat dieselbe Größe wie einer der Winkel, den AP mit g bildet.

(I) Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn ein Punkt P die Bedingungen a), b) erfüllt, dann kann er (aus voraussetzungsgemäß gegebenen h, g, S, A, B) durch eine Konstruktion erhalten werden.

(II) Beschreiben Sie eine Konstruktion, für die die Aussage in (I) zutrifft!

(III) Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn ein Punkt P nach der Beschreibung (II) konstruiert wird, dann erfüllt er die Bedingungen a), b).

261034 Ermitteln Sie unter allen denjenigen Werten, die

$$z=x^2+y^2+2x-22 \qquad (1)$$

für ganzzahlige x und y annehmen kann, den kleinsten Wert z, der eine natürliche Zahl ist!
Geben Sie alle diejenigen Paare $(x;y)$ ganzer Zahlen an, bei denen sich in (1) dieser Wert z ergibt!

261035 Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn n eine natürliche Zahl mit $1 \leqq n \leqq 5$ ist, so gilt: Wird eine Kugel von n Ebenen geschnitten, so entstehen auf der Kugeloberfläche höchstens 22 Teilflächen.

261036 Beweisen Sie, daß für jede reelle Zahl $x>1$ die Ungleichungen

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{x^2}\right)<\frac{1}{\sqrt[3]{x}}<\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$$

gelten!

Olympiadeklassen 11/12

261231 Man ermittle alle diejenigen Tripel $(x;y;z)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$x+y-z=1 \qquad (1)$$
$$x^2-y^2+z^2=1 \qquad (2)$$
$$-x^3+y^3+z^3=-1 \qquad (3)$$

261232 Im Raum seien zwei windschiefe Geraden g_1 und g_2 gegeben. Ferner seien d_1 und d_2 zwei gegebene Streckenlängen.
Beweisen Sie die folgende Aussage:
Wie man auch auf g_1 Punkte P_1, P_2 mit $\overline{P_1P_2}=d_1$ und auf g_2 Punkte Q_1, Q_2 mit $\overline{Q_1Q_2}=d_2$ wählt, stets ergibt sich für das Volumen des Tetraeders mit den Eckpunkten P_1, P_2, Q_1, Q_2 ein und derselbe Wert.

Von den nachstehenden Aufgaben 261233A und 261233B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

261233A Man untersuche, ob es vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, die die folgende Eigenschaft haben: Jede dieser vier Zahlen läßt sich so in zwei positive ganzzahlige Summanden x und y zerlegen, daß sie jeweils ein Teiler von $x\cdot y$ ist.

261233B Man beweise, daß in jedem Dreieck ABC für die Seitenlängen $a=\overline{BC}$, $b=\overline{CA}$, $c=\overline{AB}$, die Größen α, β, γ der Innenwinkel $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$ sowie für den Inkreisradius ϱ und den Flächeninhalt F die Ungleichung

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{b}\cos^2\frac{\beta}{2}+\frac{1}{c}\cos^2\frac{\gamma}{2} \geqq \frac{27\varrho}{8F} \qquad (1)$$

gilt. Man gebe alle diejenigen Dreiecke an, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

261234 Beweisen Sie: Für jedes Sehnenviereck $ABCD$, dessen Diagonale BD durch den Mittelpunkt N der Diagonalen AC verläuft, gilt die folgende Gleichung (1).

$$2\cdot\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{AD}^2. \qquad (1)$$

261235 Zwei Personen, A und B, spielen mit n in einer Geraden angebrachten Lampen ($n>3$) das folgende Spiel:
Zum Spielbeginn sind alle Lampen ausgeschaltet. Eine ganze Zahl k mit $1<k<n-1$ wird vereinbart. Dann verläuft das Spiel so, daß die Spieler, mit A beginnend, abwechselnd am Zug sind: Jeder Spieler schaltet, wenn er am Zug ist, nach eigener Wahl eine Anzahl nebeneinanderliegender Lampen ein, mindestens eine und höchstens k. Gewonnen hat derjenige Spieler, der die letzte der n Lampen einschaltet.
Man beweise, daß der Spieler A für jedes $n>3$ und jedes k mit $1<k<n-1$ durch

eine geeignete Vorgehensweise (Strategie) den Gewinn erzwingen kann.

261236 Es sei (x_n) diejenige Folge reeller Zahlen, für die

$$x_1 = \sqrt{3} \qquad (1)$$

und $$x_{n+1} = \sqrt{9x_n^2 + 11x_n + 3} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (2)$$

gilt. Für jede reelle Zahl $a \neq 0$ sei ferner (y_n) die durch

$$y_n = \frac{x_n}{a^n} \; (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (3)$$

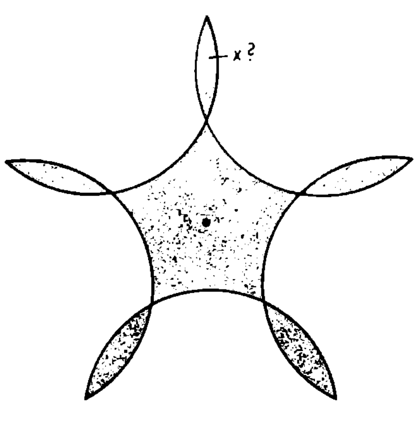
definierte Zahlenfolge.
Man ermittle alle diejenigen $a \neq 0$, für die die Folge (y_n) konvergent ist.

Eine harte Nuß

a) Eine vierstellige Zahl und die (ebenfalls vierstellige Zahl) Zahl, die entsteht, wenn man die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge schreibt, sind beide durch 78 teilbar. Wie heißen diese Zahlen?
b) Gesucht sind alle dreistelligen Zahlen, die aus geraden Ziffern bestehen und teilbar durch das Produkt ihrer Ziffern sind.
c) Eine dreistellige Zahl mit verschiedenen Ziffern ist gleich einem Fünftel der Zahl, die man erhält, wenn man die Summe aus den dreistelligen Zahlen bildet, die durch Umstellung der Ziffern der Ausgangszahl entstehen. Wie heißt die Zahl?

Aus: Matematika v škole, Moskau; mitgeteilt von Dr. J. Riehl, Egeln

Unterhaltsame Kreisfigur



Prof. A. Sawin, Mitarbeiter der sowjetischen Schülerzeitschrift *Quant*, grüßt alle *alpha*-Leser, wünscht alles Gute für 1987 und stellt folgende Aufgabe (ohne Worte!). Wir interpretieren: In der Kreisfigur ist x zu berechnen, d. h., es ist für x eine allgemeine Formel zur Berechnung des Bogenstückes zu finden. Wir erwarten eure Vorschläge!

Ein Besuch in der Knobelwerkstatt

Teil 8: Das VIII. Turn- und Sportfest der DDR

Liebe Freunde! Wie bereits in Teil 5 unserer Serie (*alpha* 6/85) angekündigt, soll unser heutiger Beitrag dem VIII. Turn- und Sportfest der DDR gewidmet sein, das zusammen mit der XI. Kinder- und Jugendspartakiade der DDR vom 27. Juli bis 2. August 1987 in Leipzig stattfinden wird. Damit wollen wir den Eigenbau von Knobelaufgaben unter dem Blickwinkel eines gesellschaftlichen Höhepunktes demonstrieren (vgl. dazu den Text von Teil 5 in *alpha* 6/85!).

Das VIII. Turn- und Sportfest der DDR *(s. Aufg. 1)* wird in der Tat sicher wieder ein besonderer Höhepunkt im Leben unserer Republik sein. Als Nationalfest der Körperkultur und des Sports wird es auf eindrucksvolle Weise demonstrieren, daß das humanistische Anliegen, Körperkultur und Sport zur Sache des ganzen Volkes, vor allem seiner Jugend zu machen, in unserer sozialistischen Gesellschaft zielstrebig verwirklicht wird. So vereinigte der DTSB der DDR im Jahre 1983 annähernd 3,3 Millionen Mitglieder, und etwa 700000 Bürger waren ehrenamtlich und unentgeltlich als Übungsleiter, Kampf- oder Schiedsrichter oder als gewählte Sportfunktionäre tätig. Und im Jahre 1982 erfüllten etwa 3 Millionen Bürger unseres Landes die Bedingungen des Sportabzeichens „Bereit zur Arbeit und zur Verteidigung der Heimat". Diese Breite des Sports macht solch hervorragende sportliche Leistungen, wie sie unsere Sportler national und international vollbringen und wie sie gewiß in Leipzig wieder zu sehen sein werden, natürlich erst möglich. Sicher hat auch manch einer von euch das Glück, als sportlich Bester in Leipzig dabei zu sein. Die Turn- und Sportfeste der DDR basieren auf einer etwa hundertjährigen Tradition vor allem der Arbeitersportbewegung. Sie begannen in unserer Republik 1954 neu und wurden dann in zeitlich unregelmäßiger Folge weiter fortgesetzt.

Die Gastgeberstadt Leipzig ist wahrlich eine Stadt des Sports: Der Massen- und Leistungssport in Leipzig kann beachtliche Erfolge aufweisen *(s. Aufg. 2a)*. Diese waren auch hier vor allem durch eine kontinuierliche Breitenarbeit im Sport möglich *(s. Aufg. 2b)*. Auch wurden seit der Gründung der DDR in Leipzig viele neue Sportstätten geschaffen, von denen das Sportforum – ein ganzer Komplex von Stadien und Sporthallen mit dem Zentralstadion als Herzstück – die größte ist *(s. Aufg. 2c)*. Ebenso entstanden in der Stadt eine Reihe von Volksschwimmhallen *(s. Aufg. 2d)*. Einen großen Anteil an der Entwicklung des Sports in Leipzig und darüber hinaus hat natürlich die Deutsche Hochschule für Körperkultur (DHfK), das Zentrum der sozialistischen deutschen Sportwissenschaft sowie der Aus- und Weiterbildung der Kader *(s. Aufg. 2e)*. Leipzig besitzt auch als einzige Stadt ein Sportmuseum. Und welcher Fußballfreund kennt ihn nicht, den 1. FC Lokomotive Leipzig, der im vergangenen Jahr den FDGB-Pokal errang *(s. Aufgaben 3 und 4)*.

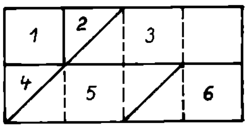
Das inhaltliche Programm des VIII. Turn- und Sportfestes der DDR hält wieder viele Attraktionen bereit, so u. a. die stets beeindruckende und von tausenden Sportlern und Trainern mit viel Liebe und Fleiß vorbereitete Sportschau des DTSB der DDR *(s. Aufg. 5)*, internationale und volkssportliche Wettkämpfe, kulturelle und andere sportliche Großveranstaltungen, und nicht zuletzt die Wettkämpfe der XI. Kinder- und Jugendspartakiade der DDR als Höhepunkt der Spartakiadebewegung in unserem Land, die getragen wird vom DTSB der DDR, den Organen der Volksbildung, der FDJ sowie der Pionierorganisation „Ernst Thälmann". Erfüllt von der olympischen Idee des friedlichen Wettstreits messen hier die besten Nachwuchssportler unserer Republik ihre Kräfte. Bewältigt wird hierbei annähernd das olympische Programm *(s. Aufgaben 6, 7 und 8)*, aber dies in der Hälfte der Zeit und durch die Einteilung nach Altersklassen etwa dreifach erweitert. Die Durchführung der Spartakiadewettkämpfe sowie insgesamt des VIII. Turn- und Sportfestes der DDR ist eine bewunderungswürdige Leistung seiner Organisatoren und nur durch die Mithilfe zehntausender sportbegeisterter Helfer möglich. Wünschen wir dem VIII. Turn- und Sportfest und der XI. Kinder- und Jugendspartakiade der DDR einen erfolgreichen Verlauf! Und so beenden wir unsere achtteilige Beitragsserie heute mit einem dreifachen „Sport frei!".

R. Mildner

Knobel-Wandzeitung

Sportfest-Legespiel

▲1▲ Zerschneidet ein rechteckiges Stück Karton, das doppelt so lang wie breit ist, in die abgebildeten 6 (dick umrandeten) Teile, und legt jeweils mit diesen 6 Teilen jede Ziffer bzw. jeden Buchstaben des Ausdrucks VIII. TURN- UND SPORTFEST DER DDR, LEIPZIG zusammen, wobei ihr euch die (stilisierten) Ziffern bzw. Buchstaben (als Legefiguren) selbst ausdenken sollt! Findet bei gleichen Legefiguren verschiedene Zusammenlegungen!



Leipzig – Stadt des Sports

▲2▲ a) Leipziger Sportler erkämpften von 1956 bis 1980 allein bei den olympischen Sommerspielen insgesamt 80 Medaillen. Davon waren 26,25 % Gold-, 46,25 % Silber- und 27,50 % Bronzemedaillen. Wieviel Medaillen von jeder Art erkämpften sie?

b) Im DTSB der DDR waren 1980 (rund) 65 000 Leipziger Bürger organisiert. Im Jahre 1951 waren es nur 31 000. Wieviel Prozent der Leipziger Einwohner waren 1980 im DTSB organisiert (Einwohnerzahl Leipzigs: 570 000) und um wieviel Prozent (gegenüber 1951) war der Anteil Leipziger DTSB-Mitglieder bis zum Jahre 1980 gestiegen?

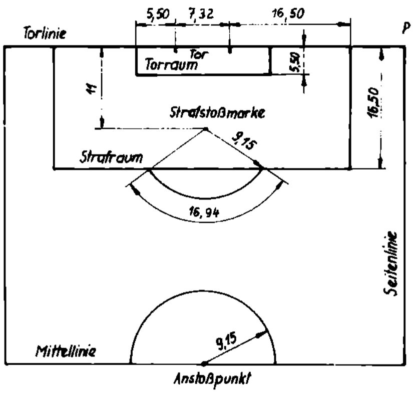
c) Das 1956 eingeweihte Leipziger Zentralstadion, das über 100 000 Sitzplätze verfügt, entstand in einer Bauzeit von nur 17 Monaten unter Mithilfe von 180 218 Leipziger Bürgern, die 735 992 Aufbaustunden geleistet haben. Wieviel Aufbaustunden wurden von jedem dieser aktiven Bürger durchschnittlich geleistet?

d) Nach einem Beschluß des Rates der Stadt Leipzig wurden ab Anfang 1968 in den einzelnen Stadtbezirken Volksschwimmhallen gebaut. 1981 gab es im Stadtgebiet 9 solche Schwimmhallen, deren Becken alle die gleichen Maße haben: Sie sind 25 m lang und 12,5 m breit, und die normale Wassertiefe beträgt 1,8 m. Wieviel Kubikmeter Wasser befinden sich in einem solchen normalgefüllten Schwimmbecken?

e) An der im Jahre 1950 gegründeten *Deutschen Hochschule für Körperkultur* (DHfK) in Leipzig ist bis zum Jahre 1981 die Zahl der Studenten (Direkt- und Fernstudenten) von 80 auf 2000, und die Zahl der Lehrkräfte von 13 auf 430 gestiegen. Auf das Wievielfache war die Zahl der Studenten bzw. Lehrkräfte angestiegen?

Auf dem Fußballplatz

▲3▲ Das Bild zeigt eine Hälfte eines 100 m × 60 m-Fußball-Großfeldes. Es soll nun das abgebildete (dick gezeichnete) Liniennetz so durchlaufen werden, daß man jede Linie des Netzes genau zweimal durchschreitet. Welche Wegroute – etwa ausgehend vom Punkt *P* und dort wieder endend – könnte man dazu wählen und welche Wegstrecke legt man dabei zurück?



Fußball-Kryptogramme

▲4▲

1 FUSS + BALL = CLUB   2 FUSS + BALL = PLATZ   3 FUSS + BALL = LEDER

4 FUSS + BALL = SCHUH   5 FUSS + BALL = WELT   6 FUSS + BALL = STOSS

7 FUSS + BALL = SPIEL   8 FUSS + BALL = TORE   9 FUSS + BALL = POKAL

10 FUSS + BALL = PAUSE   11 FUSS + BALL = BRAUT   12 FUSS + BALL = SPASS

Von den abgebildeten Kryptogrammen sind einige (mehrdeutig) lösbar. Welche sind es? Gebt in diesen Fällen mindestens je zwei Lösungen an! Die übrigen Kryptogramme sind nicht lösbar. Gebt dafür eine Begründung!

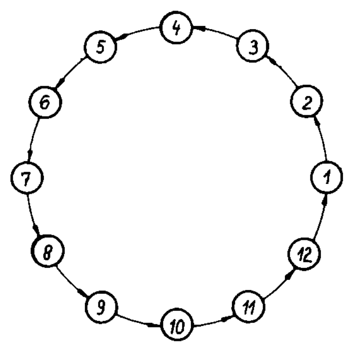
Lauftraining

▲5▲ Eine Trainingsgruppe von 12 Sportlern führt zur Erwärmung eine Laufübung im Kreis durch. Der Trainer gibt folgende Anweisungen:

a) Jeder laufe hinter seinem zweitnächsten Vordermann!

b) Jeder laufe hinter seinem drittnächsten Vordermann!

c) Jeder laufe hinter seinem fünftnächsten Vordermann!



Welche Lauffiguren entstehen nach Ausführung einer jeden Anweisung (Ausgangsstellung sei stets der Anfangskreis)?

Olympische Sportdisziplinen

▲6▲ Jeder der folgenden Namen stellt – natürlich in permutierter Form – eine olympische Sportdisziplin dar. Um welche Sportdisziplinen handelt es sich?

1. BEN HEGEWICHT
2. BEN OX
3. ELLA BRAWSS
4. ELLA BYLLOV
5. ERNA FLEUHUD
6. ERNI TE
7. HORST SPANGBUCH
8. INGE WURPST
9. MARTHA LOFUNA
10. RENATO SPRUNNK
11. RUDI SPRENG
12. SUSEN STOLEGK
13. SUSI WEKFREND
14. WERNER FESPE
15. WERNER HEMMAF

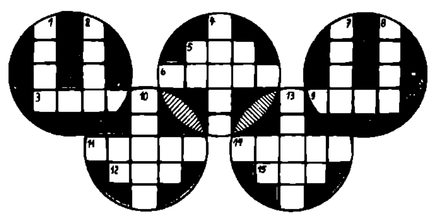
Buchstaben-Springreiten

▲7▲ In die fünf dickumrandeten Teilfiguren wurden in der Gangart eines Springers beim Schachspiel vier olympische Sportdisziplinen sowie das Teilgebiet des Sports, dem diese Disziplinen angehören, eingetragen. Welche sind es?

				E	E	A	C				
				T	H	L	I				
				L	T	I	T				
E	N	M	E	S	H	K	F	U	N	M	A
A	R	R	E	E	F	E	L	D	U	A	O
W	M	E	P	N	W	E	H	U	H	L	A
F	H	E	R	R	E	A	R	N	R	F	T

Im Zeichen Olympias

▲8▲ Gesucht sind die Nachnamen der Goldmedaillen-Gewinner bei den Olympischen Sommerspielen 1980 in Moskau in den angegebenen Sportdisziplinen (in Klammern die Siegerwerte):



Waagerecht:
3. Einer-Kajak der Männer, 1000 m (3 : 48,77 min);
5. Turnen der Frauen, Boden (19,875 Punkte);
6. 800 m-Lauf der Männer (1 : 45,4 min);
9. 400 m Hürden Männer (48,70 s);
11. Judo, Halbschwergewicht;
12. Olympische Schnellfeuerpistole (596 Ringe);
14. Freie KK-Büchse, liegend (599 Ringe);
15. 1500 m-Lauf der Männer (3 : 38,4 min).

Senkrecht:
1. 400 m-Lauf der Frauen (48,88 s);
2. Diskuswerfen der Frauen (69,96 m);
4. Schwimmen der Frauen, 400 m Freistil (4 : 08,76 min);
7. Ringen, Schwergewicht;
8. Boxen, Federgewicht;
10. Speerwerfen der Frauen (68,40 m);
13. Schwimmen der Männer, 100 m Rücken (56,53 s).

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Mini-BASIC für alpha-Leser, Teil 5

„Sperren" werden gebraucht

Aufgabenbeispiel 6

Erstelle ein BASIC-Programm, das von einer natürlichen Zahl die Quersumme ermittelt!

Bei der Lösung der Aufgabe besteht das Hauptproblem darin, von einer natürlichen Zahl n die einzelnen Ziffern „abzutrennen". Dabei hilft uns die INT-Funktion.

Von der natürlichen Zahl n ermittelt man $n_1 = [n:10]$.

Nun erhält man die Einer E wie folgt: $E = n - n_1 \cdot 10$.

Von der natürlichen Zahl n_1 ermittelt man $n_2 = [n_1:10]$.

Für die Zehner Z gilt dann: $Z = n_1 - n_2 \cdot 10$.

Von der natürlichen Zahl n_2 ermittelt man $n_3 = [n_2:10]$.

Nun gilt für die Hunderter H: $H = n_2 - n_3 \cdot 10$ usw. bis $n_i = 0$ ist $(i \in \{1, 2, 3, \ldots\})$.

Um nun die Quersumme Q von n zu ermitteln, ist lediglich noch die Summe aus E, Z, H usw. zu bilden. Mit Hilfe eines Struktogramms läßt sich das Vorgehen übersichtlich beschreiben.

Eingabe:	Natürliche Zahl N
Quersumme	$Q \leftarrow O$
Wiederhole	$G \leftarrow [N:10]$
	$A \leftarrow N - G \cdot 10$
	$Q \leftarrow Q + A$
	$N \leftarrow G$
bis	$N = 0$
Ausgabe:	Quersumme Q

▲30▲ Arbeite die im Struktogramm dargestellte Vorschrift für $N = 125$ ab!

Im angegebenen Struktogramm findet man eine Wiederholung mit nachgestellter Abbruchbedingung.

Ein entsprechendes BASIC-Programm hat nun folgendes Aussehen:

Programm 8

```
10 INPUT N
20 LET Q = 0
30     LET G = INT (N/10)
40     LET A = N - G * 10
50     LET Q = Q + A
60     LET N = G
70 IF NOT(N = 0) THEN 30
80 PRINT Q
90 END
```

Aufgabenbeispiel 7

Arbeite das Programm „Quersumme" mit folgenden Eingabedaten ab!

a) 17,34 b) −123

Wenn man das Programm formal für N = 17.34 abarbeitet, gelangt man zwar zum Resultat 8.34, aber das ist nicht korrekt.

Für N = −123 gibt es gar keine Lösung, da bei negativen Eingangsdaten der Algorithmus nicht abbricht.

[Der Computer würde in diesem Fall nach einiger Zeit mit einer Fehlermeldung „OV" (numerical overflow = engl.: Zahlenüberlauf) reagieren.]

Um solche Eingabewerte vom Computer abweisen zu lassen, bauen wir in das BASIC-Programm „Sperren" so ein, daß

a) negative Zahlen, b) Zahlen, die nicht ganzzahlig sind, als unzulässige Eingangsdaten zurückgewiesen werden.

Nach Eingabe von N ist dies mit Hilfe der IF-THEN-Anweisung zu realisieren:

```
11 IF N < 0 THEN PRINT „UNZULAES-
   SIGE EINGABE!"; GOTO 10
12 IF N < > INT(N) THEN PRINT
   „UNZULAESSIGE EINGABE!":
   GOTO 10
```

Die beiden Bedingungen könnte man auch zu einer zusammenfassen:

```
11 IF N < 0 OR N < > INT(N) THEN
   PRINT „UNZULAESSIGE EIN-
   GABE!": GOTO 10
```

(or = engl.: oder)

In einer IF-THEN-Anweisung können nach dem „IF" mehrere Bedingungen durch logische Operatoren wie AND, NOT, OR verknüpft sein.

BASIC-Symbol	Bedeutung
NOT	nicht (Negation)
AND	und (Konjunktion)
OR	oder (Alternative)

IF $\boxed{\text{Bedingung 1}}$ AND $\boxed{\text{Bedingung 2}}$

THEN $\boxed{\text{Anweisung}}$

Die Anweisung wird ausgeführt, wenn beide Bedingungen erfüllt sind, sonst nicht.

IF $\boxed{\text{Bedingung 1}}$ OR $\boxed{\text{Bedingung 2}}$

THEN $\boxed{\text{Anweisung}}$

Die Anweisung wird ausgeführt, wenn mindestens eine Bedingung erfüllt ist, sonst nicht.

Tippt man das veränderte Programm „Quersumme" z.B. in den KC 85/1 ein und wählt als Eingabewert die Zahl 123456789, so erhält man als Quersumme die Zahl 37. Das ist aber offensichtlich falsch, da die Quersumme von 123456789 die Zahl 45 ist. Dieser Fehler liegt nun daran, daß der KC 85/1 Ergebnisse nur mit maximal 6 Ziffern anzeigt und auch intern nur mit höchstens 8 Ziffern arbeitet. Bei Zahlen mit mehr Ziffern wird automatisch gerundet, und wie beim Taschenrechner werden zur Anzeige abgetrennte Zehnerpotenzen genutzt.

▲31▲ Verändere das Programm „Quersumme" so, daß auch Zahlen, die größer als 999999 sind, als unzulässige Eingangsdaten abgewiesen werden.

▲32▲ Welche Sperren sind im Programm 6 notwendig, um eine Computerreaktion auf unzulässige Eingabewerte zu programmieren?

▲33▲ Sind folgende Bedingungen geeignet, um im Programm 6 die unzulässigen Eingabewerte für A abzuweisen?

a) A < > Ø OR A < > 1

b) A < > Ø AND A < > 1

▲34▲ Computer arbeiten intern ausschließlich mit Dualzahlen.

Das sind Zahlen, die nur aus Ziffern Ø und 1 bestehen und deren Stellenwerte Potenzen von 2 sind.

Zum Beispiel Dualzahl 101001 $= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 41$

a) Entwickle ein BASIC-Programm so, daß eine einzugebende (natürliche) Dualzahl in eine Dezimalzahl umgerechnet wird.

b) Überprüfe, ob das Programm für alle denkbaren Eingabewerte richtige Ergebnisse liefert!

Füge ggf. geeignete Anweisungen ein, so daß unzulässige Eingabewerte abgewiesen werden! *L. Flade/M. Pruzina*

Lösungen

▲31▲ IF N > 999999 THEN PRINT „UNZULAESSIGE EINGABE": GOTO 10

▲32▲ Für A sind „Sperren" notwendig. Alle Werte, außer Ø und 1, sind abzuweisen.

85 IF NOT (A = Ø OR A = 1) THEN PRINT „FALSCHE EINGABE!!": GOTO 80

▲33▲ a) Falsch, weil diese Bedingung für jedes A erfüllt ist.

b) Richtig, weil die Konjunktion nur falsch wird, wenn A = Ø bzw. 1 ist.

▲34▲ Eine Möglichkeit:

a)

```
10 CLS
20 PRINT „UMWANDLUNG VON
   DUAL- IN DEZIMALZAHLEN"
30 PRINT „- - - - - - - - - - - - -"
40 PRINT
50 INPUT „GIB EINE DUALZAHL
   EIN:"; B
60 PRINT: LET S = 1 : LET D = 0
70     LET Q = INT(B/10) : LET G
       = B - 10 * Q
80     LET P = G * S : LET D = D + P
90     LET S = 2 * S : LET B = Q
100 IF B < > 0 THEN 70
110 PRINT „DEZIMALZAHL ........";
    D
120 END
```

Fortsetzung auf S. 67

Unterhaltungsmathematik aus der äthiopischen mathematischen Schülerzeitschrift Hisbab

Sieben Laibe Brot

▲1▲ Drei Reisende trafen sich und saßen zum Essen zusammen. Einer der Reisenden brachte drei Laibe Brot mit und der zweite vier Laibe. Nachdem die sieben Laibe zu gleichen Teilen unter den drei aufgeteilt und verzehrt worden sind, brachte der dritte Reisende sieben Fünf-Cent-Stücke und sagte: „Bitte, teilt diese Münzen zwischen euch gerecht auf!"
Wieviel Geld müßte jeder der ersten zwei Reisenden erhalten?

Küken

▲2▲ Wenn einhundert Küken in 100 Tagen 100 Scheffel Getreide fressen, wieviel Scheffel fressen 10 Küken in 10 Tagen?

Lebensalter gesucht

▲3▲ *Tesfaye:* Siehst du diese drei Personen da drüben? Das Produkt ihrer Lebensjahre ist 2450, und die Summe ihrer Lebensjahre ergibt genau zweimal dein Alter. Wie alt sind sie?
Fassil: Du hast mir keine ausreichende Angaben gemacht!
Tesfaye: Tut mir leid. Das Produkt der Lebensjahre der beiden Jüngeren ist höher als das Alter des Ältesten.
Fassil: In diesem Falle sind sie ...

Im Aware-Sportklub

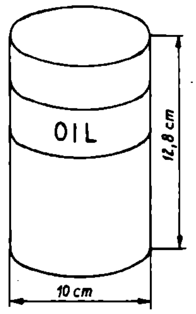
▲4▲ Der Aware-Sportklub hat 100 Mitglieder; 90 spielen Fußball, 80 spielen Basketball, und 70 spielen Volleyball. Einige Mitglieder betreiben keine dieser Sportarten, aber die Anzahl der Mitglieder, die alle drei Sportarten betreiben, ist 19mal so groß wie die Anzahl der nichtspielenden Mitglieder. Es gibt einige Fußballer, die keine der anderen Sportarten betreiben, aber die Basketball- und Volleyballspieler betreiben alle zumindest zwei Sportarten.
Wie viele Mitglieder spielen nur Fußball?

Die Film-Maus

▲5▲ In einem Science-Fiction-Film wird eine 5 cm lange Maus verwendet. Dafür muß eine große Maus ähnlich der kleinen angefertigt werden, die in jeder Dimension 100mal so groß ist.
a) Wievielmal so groß ist das Volumen der großen Maus, verglichen mit der kleinen Maus?
b) Wenn die kleine Maus eine Masse von 30 g hat, wieviel beträgt dann die Masse der großen Maus?
c) Wenn die Querschnittsfläche der Beine der kleinen Maus $1\,cm^2$ beträgt, wie groß ist dann die Querschnittsfläche der Beine der großen Maus?

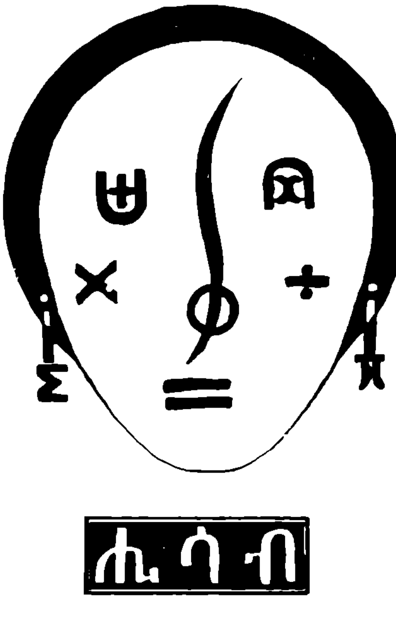
Autoöl in Dosen

▲6▲ Ein Liter Autoöl wird in Dosen (Ausmaße siehe Bild) verkauft. Ein großer Behälter von der gleichen Form wie die Öldose faßt einen Kiloliter.
Welche Ausmaße hat dieser?



Im Tunnel

▲7▲ Ein Güterzug von 1 km Länge fährt durch einen Tunnel, der ebenfalls 1 km lang ist. Wenn der Zug mit einer Geschwindigkeit von $15\,\frac{km}{h}$ fährt, wie lange braucht er, um den Tunnel zu durchfahren?



Praktische Geometrie

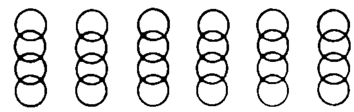
▲8▲ Ein Quadrat von 10 cm Seitenlänge soll in ein regelmäßiges Achteck verwandelt werden, indem man vier Ecken abschneidet. Wo müssen die Ecken abgeschnitten werden?

Kryptarithmetik

▲9▲ Die Zahl $273a49b5$ ist durch 9 und 11 teilbar.
Ermittle die Werte von a und b!

Der Kostenvoranschlag

▲10▲ Du hast 6 Kettenteile, jeder besteht aus 4 Gliedern. Die Kosten für das Öffnen eines Gliedes betragen 10 Cent. Die Kosten für das Zusammenschweißen der Schnittflächen betragen 25 Cent.
Ermittle die geringsten Kosten für das Zusammenfügen der 6 Teile zu einer Kette!



Der Knochen des Riesen

▲11▲ Erkläre, warum ein 6 m großer Riese Knochen $3\sqrt{3}$ mal so dick wie ein 2 m großer Mensch benötigt, um die entsprechende Masse auf die gleiche Weise zu tragen!

Der fehlende Cent

▲12▲ Sara ging täglich auf den Markt mit 30 Äpfeln, die sie zum Preis von 1 Cent für 2 Stück verkaufte. Wenn sie alle Äpfel verkaufte, brachte sie 15 Cent nach Hause. Ihre Freundin Hadas ging auch täglich auf den Markt mit 30 Äpfeln, von denen sie 3 Stück für 1 Cent verkaufte. Wenn sie alle verkaufte, brachte sie 20 Cent nach Hause. Eines Tages war Hadas krank. Deshalb bot Sara ihr an, ihre Äpfel zusammen mit ihren eigenen zu verkaufen. Sie verkaufte die gemischten Äpfel zu 5 Stück für 2 Cent. Als sie am Abend mit Hadas abrechnete, stellte sie mit Überraschung fest, daß sie nur 24 Cent anstelle der erwarteten 25 Cent eingenommen hatte.
Auf welche Weise hatte Sara den fehlenden Cent verloren?

Wir danken Dr. Christoph Bandt (ehem. IMO-Teilnehmer und Förderer der Arbeit der *alpha*) von der Sektion Mathematik der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald für die Bereitstellung des Materials für diesen Beitrag. Während seiner Tätigkeit als Gastdozent an der Universität Addis Abeba hatte er engen Kontakt mit der mathematischen Schülerzeitschrift Hisbab.
Wir grüßen die Mitarbeiter dieser Zeitschrift, mit der wir seit vielen Jahren zusammenarbeiten, aufs herzlichste.
Redaktion alpha

In freien Stunden · alpha-heiter

Rolli, aus technikus, Berlin

Eine Aufgabe von Jules Verne

In dem Buch *Fünf Wochen im Ballon* finden wir folgendes Problem:
„Dieser Gelehrte (Kakburu, ein Statistiker) gab ... folgende Aufgabe zu lösen: Wenn die Zahl der von dem Doktor auf seinen Reisen um die Welt zurückgelegten Meilen gegeben ist, einen wieviel weiteren Weg hat dann – in Anbetracht des größeren Radius – sein Kopf zurückgelegt als seine Füße? Und weiter: Wenn die Zahl der von den Füßen und dem Kopf des Doktors hinter sich gebrachten Meilen bekannt ist, möge er daraus seine Körpergröße bis auf den Zentimeter genau berechnen."

Mitgeteilt von Dipl.-Math. D. Bauke, Gera

Mathematische Knobelei

Im Schaufenster liegen rote, blaue, gelbe und weiße Bälle.
Silke sagt: Rote und blaue sind es genau 5.
Thomas sagt: Blaue und gelbe sind es genau 8.
Annett sagt: Blaue sind am wenigsten da.
Daniel sagt: Weiße sind am meisten da.
Uta sagt: Genau 19 Bälle liegen im Schaufenster.
Wieviel weiße Bälle liegen im Schaufenster?

Aus einem Neubrandenburger Freizeitheft, für Schüler, Autor StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Teilung von Figuren

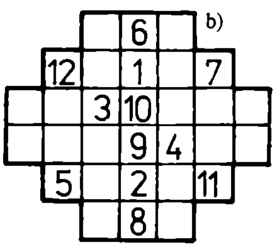
Wir widmen uns diesmal Rätseln, bei denen außer Zahlen ebene geometrische Figuren beteiligt sind.
a) Das Rechteck ist in zwei kongruente Teilflächen derart zu zerlegen, daß die in jeder Teilfläche enthaltenen Zahlen die gleiche Summe ergeben.
b) Diese magische Figur ist in sechs kongruente Teilflächen derart zu zerlegen, daß die in jeder Teilfläche enthaltenen Zahlen ebenfalls die gleiche Summe ergeben.

Aus: „rhozledy", Prag, übersetzt und mitgeteilt von O. Langer, Döbeln

a)

1		7	8				
		9		2			
	10				3		
		6					
					11		
		12				5	4

b)



Spiel mit dem Taschenrechner

Berechne jede der folgenden vier Zahlen a, b, c und d!

$$a = 5 \cdot 7 \cdot 1061; \qquad b = \frac{5162 \cdot 15}{2};$$

$$c = \frac{263 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 15}{5}; \qquad d = \frac{256\,895}{5}.$$

	Zahl					Begriff				
a										
b										
c										
d										

Wenn du die jeweilige Ergebniszahl in der Anzeige stehen hast und den Rechner dann um 180° drehst, so kannst du jeweils einen Begriff lesen. Welche Begriffe sind es? Die Mittelbuchstaben dieser Begriffe ergeben (v. o. n. u.) den Namen eines Flusses im Harz.

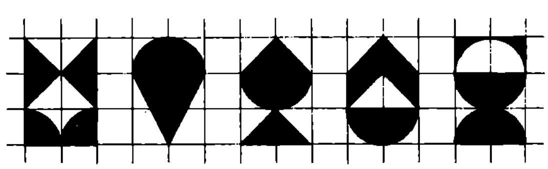
Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

Fröhliche Mathematik

a) Anke und Birgit wiegen zusammen 55 kg. Stehen Anke und Christa auf der Waage, so zeigt sie 58 kg an; bei Birgit und Christa zusammen sind es sogar noch 7 kg mehr.
Wieviel kg wiegt Christa?

b) In einem Quiz wurden 20 Fragen gestellt. Für jede richtige Antwort wurden 5 Punkte vergeben, für jede falsche Antwort wurden 8 Punkte abgezogen. Mirko hatte zum Schluß 48 Punkte. Wieviel Fragen hat er richtig beantwortet?

c) Welches der fünf schwarzen zusammenhängenden Flächenstücke hat den größten Flächeninhalt?



Aus dem Pionierkalender 1987, Autor: Dr. M. Rehm, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin

Füllrätsel

In die senkrechten Spalten des Füllrätsels sind sechs Wörter mit je sieben Buchstaben von oben nach unten einzutragen, die folgendes bedeuten:

1. Ein Kegelschnitt,
2. Kreis, auf dem die Eckpunkte eines Dreiecks liegen,
3. Kugelkappe,
4. Deutscher Mathematiker (1646 bis 1716),
5. Kreis, der jede Dreiecksseite in einem Punkt berührt,
6. Zahl, durch die geteilt wird.

Die oberste Zeile ergibt dann den Namen eines berühmten Mathematikers.

Oberstudienrat Th. Scholl, Berlin

1	2	3	4	5	6

Zwei Kryptogramme

a)

$$\begin{array}{r} \text{ZWEI} \\ +\,\text{DREI} \\ \hline \text{FÜNF} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{HAHN} \\ +\,\text{HUHN} \\ \hline \text{KÜKEN} \end{array}$$

Die Buchstaben sollen durch Ziffern so ersetzt werden, daß eine richtig gelöste Aufgabe entsteht. Für gleiche Buchstaben sollen in der jeweiligen Aufgabe gleiche, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden. (Es gibt mehrere Lösungen.)

Diplomlandwirt H. Boettcher, Weimar

Zum Scherzen aufgelegt

Aus den Silben
a – ab – ba – ex – gen – in – ke – kreis – lö – lu – men – nent – re – po – pro – sis – stand – sun – symp – te – to – vo – zi

sind acht mathematische Begriffe zu bilden, deren Anfangsbuchstaben von oben nach unten gelesen den Namen für die „Vokabeln der mathematischen Sprache" ergeben.

1. Es füllt einen Körper aus.
2. Er geht auf Distanz.
3. Es steht Kopf.
4. Er hat eine innige Berührung.
5. Sie ist ein Ziel, das nicht erreicht wird.
6. Sie strebt nicht nach oben.
7. Wer sie gefunden hat, der freut sich.
8. Er ist ein Hochgestellter.

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Kreuzzahlrätsel

Bestimme den Wert des Parameters n, und ergänze dann das Zahlenrätsel! (w bedeutet waagerecht und s senkrecht)

1	2	■	■	■	3	4
5			■	6		
7		■	8			
■	■	9			■	■
10	11	■		■	12	13
14		15	■	16		
17			■	■	18	

Waagerecht:
1. $4n - (7w:2)$
3. $6n$
5. $2n^2 + 10n$
6. $9w - 8n$
7. $2s:n$
8. $16w \cdot n$
9. $7 \cdot 12w$
10. $2 \cdot 1w$
12. $5w:12$
14. $3n + 8s$
16. $3n^2$
17. $8n$
18. $16w - 1s$

Senkrecht:
1. $5w - 2n$
2. $(18w - 12w) \cdot 10$
3. $8s + 15s + 3n$
4. $12s + 6n + 16w$
6. $11n + (7w:2)$
8. $13s - 2s - 12w$
10. $5n^2 + 2n$
11. $12s + 9w - 6w$
12. $9w + n + 7w$
13. $14w + 2s$
15. $9 \cdot (3w:13)$

Aus: Maximath, Belgien

Aus der Aufgabensammlung einer AG

Ersetze die Sternchen so durch Operationszeichen, daß alle Zahlen von 1 bis 9 dargestellt werden.
$1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 = n.$
Beispiel:
$1 \cdot 2 - 3 + 4 - 5 + 6 + 7 + 8 - 9 = 10$

mitgeteilt vom Mathematikfachlehrer V. Pöschel, Haus der JP Bruno Kühn, Gotha

Fünf Sinnsprüche

a) Der Turm zieht in 16 Zügen über alle Felder. Er erfaßt dabei zwei Sinnsprüche; welche?
b) Die Dame zieht in 14 Zügen über das gesamte Feld. Sie erfaßt drei Sinnsprüche; welche?

a)

Ü	T	R	E	D	R	U	N
C	I	E	D	A	U	E	R
H	D	F	U	A	T	A	H
T	U	T	G	L	Ü	C	K
I	G	D	N	U	H	C	I
G	H	H	I	L	F	R	E
E	C	S	N	E	M	R	E
E	D	E	L	S	E	I	D

b)

N	A	G	B	L	A	N	S
P	G	W	E	H	O	CH	T
R	T	I	E	W	W	E	S
E	I	T	H	E	O	N	I
I	S	N	R	E	G	N	G
S	E	F	R	I	S	CH	N
F	L	E	I	S	S	K	A
A	L	L	E	R	A	N	F

alpha-Sonderwettbewerb

Aufgaben aus Büchern des Teubner-Verlages, Leipzig

LEIPZIG

Letzter Einsendetermin: 17. Dezember 1987

Zur Entwicklung der gesamten außerunterrichtlichen Arbeit auf mathematischem Gebiet ist 1963 von den einschlägigen Verlagen mit Unterstützung durch die Mathematische Gesellschaft der DDR mit der Herausgabe einer Mathematischen Schülerbibliothek zu beginnen, hieß es im *Mathematikbeschluß* vom 17. Dezember 1962.

Heute, ein Vierteljahrhundert später, liegen bereits mehr als 125 Bände der *Mathematischen Schülerbücherei* (MSB) vor, und sechs Verlage beteiligten sich an dieser erfolgreichen Buchreihe (vgl. dazu auch *alpha* 20 (1986) 2, S. 42 bis 43).

Der BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, im Februar 1986 als erster Verlag mit der Ehrenmedaille der *Mathematischen Gesellschaft der DDR* ausgezeichnet, ruft alle *alpha*-Leser zum Lösen von fünf ausgewählten Aufgaben aus MSB-Bänden auf. Außerdem werden die Einsender gebeten, auf ihrer Zuschrift an die *alpha*-Redaktion zu vermerken, welche der bei Teubner erschienenen MSB-Bände sie selbst besitzen.

Doch zunächst wollen wir in drei aus dem Russischen übersetzten Büchern der *Mathematischen Schülerbücherei* lesen:

● Kommen wir wieder auf die für das vorliegende Buch wesentliche *Boolesche Algebra* zurück. Wir stellen die Frage, wie man die Mengen, welche die Elemente dieser Algebra sind, darstellen kann.

Es ist klar, daß die einfachste Art der Darstellung einer Menge die sogenannte *direkte* oder *Abzählmethode* ist, bei der alle Elemente der betrachteten Menge aufgezeigt werden. So kann man von der *Menge der Schüler: Peter, Klaus, Horst und Monika* sprechen, von der *Menge der Zahlen: 1, 2, 3, 4, 5* oder von der *Menge der vier Grundrechenarten der Arithmetik: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division*. In der Mathematik ist es üblich, bei der Angabe aller Elemente irgendeiner Menge diese in geschweifte Klammern einzuschließen. So kann man schreiben

$A = \{\text{Peter, Klaus, Horst, Monika}\}$,
$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
$C = \{+, -, \times, :\}$

(in der letzten Schreibweise symbolisieren die Zeichen der Grundrechenarten diese selbst).

Eine solche Methode der Darstellung einer Menge erweist sich jedoch in dem Falle als sehr unbequem, wenn die Elemente der Menge sehr zahlreich sind. Sie ist völlig unbrauchbar für die Darstellung *unendlicher* Mengen (wir können eben nicht unendlich viele Elemente der Menge aufzählen!).

Leseprobe aus dem MSB-Band Nr. 83:
I. M. Jaglom, Ungewöhnliche Algebra.
1976 (95 S., 45 Abb., 5,50 M,
Bestell-Nr. 665 789 2)

● In der elementaren Algebra wird zusammen mit den reellen Zahlen auch das umfangreichere System der komplexen Zahlen betrachtet. Der Grund, der dazu zwingt, die komplexen Zahlen zu betrachten, ist mit der Lösung quadratischer Gleichungen verbunden. Er besteht darin, daß man einige quadratische Gleichungen, zum Beispiel

$$x^2 + 1 = 0, \qquad (1)$$

nicht lösen kann, wenn man sich nur auf die reellen Zahlen beschränkt (denn es existiert keine solche reelle Zahl a, so daß a^2 gleich -1 ist).

Die Geschichte der komplexen Zahlen beginnt mit dem 16. Jahrhundert. Die italienischen Mathematiker *Girolamo Cardano* und *Raffaele Bombelli* führten beim Lösen quadratischer Gleichungen das Symbol $\sqrt{-1}$, die formale Lösung der Gleichung (1), aber auch den Ausdruck $b\sqrt{-1}$, die formale Lösung der Gleichung

$$x^2 + b^2 = 0,$$

ein. Ausdrücke der noch allgemeineren Form $a + b\sqrt{-1}$ kann man dann als formale Lösung der Gleichung

$$(x-a)^2 + b^2 = 0 \qquad (2)$$

betrachten.

Später wurden die Ausdrücke $a + b\sqrt{-1}$ als *imaginäre* und danach als *komplexe* Zahlen bezeichnet und $a + bi$ geschrieben.

Leseprobe aus dem MSB-Band Nr. 95:
I. L. Kantor/A. S. Solodownikow,
Hyperkomplexe Zahlen.
1978 (156 S., 18 Abb., 9,00 M,
Bestell-Nr. 665 871 3)

● Die Forschungsergebnisse *Lobatschewskis* wurden von der Mehrheit seiner Zeitgenossen nicht verstanden. Deshalb beurteilten sie seine geometrischen Arbeiten sowohl in Rußland als auch im Ausland negativ. Die Ideen des russischen Gelehrten waren zu kühn und einschneidend, sie stimmten nicht mit den damals in der Wissenschaft herrschenden Ansichten überein. Erst nach dem Tode fanden seine Arbeiten allgemeine Anerkennung. *Lobatschewski* war jedoch durch die Kritik nicht von der Richtigkeit seiner Überlegungen und Schlußfolgerungen abzubringen, sondern setzte beharrlich die Untersuchung des von ihm geschaffenen geometrischen Systems fort. Er veröffentlichte eine Reihe von Arbeiten, die mit Fragen der nichteuklidischen Geometrie verbunden waren. Die letzte Arbeit, die er kurz vor seinem Tode beendete, mußte, da er erblindet war, nach seinem Diktat geschrieben werden.

Die wissenschaftliche Arbeit *Lobatschewskis* blieb nicht auf geometrische Untersuchungen beschränkt, sondern wir verdanken ihm auch einige grundlegende Arbeiten zur Algebra und Analysis. Das von ihm gefundene Verfahren zur angenäherten Lösung algebraischer Gleichungen ist sehr originell und leicht anwendbar.

Leseprobe aus dem MSB-Band Nr. 96:
A. S. Smogorschewski,
Lobatschewskische Geometrie.
1978 (75 S., 43 Abb., 6,00 M,
Bestell-Nr. 665 842 2).

Wettbewerbs-Aufgaben

▲1▲ Besuchern, die das Lektorat Mathematik des Teubner-Verlages in Leipzig besuchen, wird erklärt: Wenn Sie zwei Stufen auf einmal genommen hätten, dann wäre eine Stufe übrig geblieben. Wenn Sie drei bzw. vier Stufen auf einmal nehmen, dann bleiben zwei bzw. drei Stufen am Ende übrig. Wenn Sie jedoch fünf Stufen auf einmal nehmen können, dann kommen Sie genau oben an. Insgesamt sind es nicht mehr als 50 Stufen.

Man gebe die Zahl der Stufen an!

Die Aufgabe ist dem MSB-Band Nr. 99 entnommen:
R. Thiele, Mathematische Beweise.
1979, 5. Aufl. 1988 (176 S., 68 Abb.,
8,60 M, Bestell-Nr. 665 919 3)

▲2▲ Drei Geraden G_1, G_2, G_3 einer Ebene werden durch folgende Gleichungen beschrieben:

$(G_1)\ x + 2y = 4,\quad (G_2)\ x - 2y = 0,$
$(G_3)\ 3x - 2y = 4.$

Man ermittle $G_1 \cap G_2 \cap G_3$!

Die Aufgabe ist dem MSB-Band Nr. 107 entnommen:
H. Kästner/P. Göthner,
Algebra – aller Anfang ist leicht.
1983, 3. Aufl. 1987 (155 S., 30 Abb.,
8,40 M, Bestell-Nr. 666 138 1)

▲3▲ Es sind Gleichungen mit den Wurzeln a) 3 und 7, b) -6 und 2, c) -10 und -1 zu bestimmen!

Die Aufgabe ist dem MSB-Band Nr. 119 entnommen:
W. Krysicki, Keine Angst vor x und y.
Übers. a. d. Poln.
1984, 2. Aufl. 1987 (108 S., 19 Abb.,
6,50 M, Bestell-Nr. 666 186 7)

▲4▲ Man suche zwei Zahlen, die so beschaffen sind, daß, wenn ihre Summe zu ihrem Produkt addiert wird, 79 herauskommt!

Die Aufgabe ist dem MSB-Band Nr. 125 entnommen:

M. Deweß/G. Deweß, Summa summarum. Kostproben unterhaltsamer Mathematik.
1986, 2. Aufl. 1987 (92 S., 78 Abb., 15,00 M, Bestell-Nr. 666 317 6)

▲5▲ Ein Würfel werde von allen denjenigen Ebenen geschnitten, die durch die Mittelpunkte der drei jeweils von einem Eckpunkt ausgehenden Kanten verlaufen. Dabei entsteht ein Restkörper.
a) Ermitteln Sie die Anzahl aller Eckpunkte und die Anzahl aller Kanten des Restkörpers!
b) Nennen Sie die Form und die Anzahl aller Teilflächen der Oberfläche des Restkörpers!
Die Aufgabe ist dem 1987 erscheinenden MSB-Band Nr. 130 entnommen:
J. Lehmann, Mathematik – von der Pflicht zur Kür

Teilnahmebedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an:
Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027
3. *alpha*-Leser, die selbst einige der im Teubner-Verlag erschienenen MSB-Bände besitzen, werden gebeten, diese Titel unter ihrer Lösung der Aufgaben zu nennen.
4. Letzter Einsendetermin ist der 17. Dezember 1987.
5. Unter den Einsendern werden Buchpreise aus der Produktion des Teubner-Verlages ausgelost.

alpha wird darüber berichten.

J. Lehmann/J. Weiß

Einige weitere Bände der Mathematischen Schülerbücherei

H. Belkner, Determinanten.
1968, 4. Aufl. 1987 (MSB Nr. 33, 96 S., 8 Abb., 4,80 M, Bestell-Nr. 665 100 1)

H. Belkner, Matrizen.
1970, 4. Aufl. 1986 (MSB Nr. 48, 96 S., 4,30 M, Bestell-Nr. 665 552 0)

I. M. Gelfand/E. G. Glagolewa/A. A. Kirillow, Die Koordinatenmethode.
1968 (MSB Nr. 41, 75 S., 36 Abb., 3,40 M, Bestell-Nr. 665 107 9)

I. M. Gelfand/E. G. Glagolewa/E. E. Schnol, Funktionen und ihre graphische Darstellung.
1971, 2. Aufl. 1974 (MSB Nr. 58, 127 S., 132 Abb., 9 Taf., 7,00 M, Bestell-Nr. 665 600 5)

M. Hasse, Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik.
1965, 9. Aufl. 1987 (MSB Nr. 2, 86 S., 7 Abb., 3,30 M, Bestell-Nr. 665 084 2)

L. D. Kudrjavzev, Gedanken über moderne Mathematik und ihr Studium.
1983 (MSB Nr. 112, 140 S., 7,00 M, Bestell-Nr. 666 077 6)

A. Kufner, Raum und Entfernung.
1981 (MSB Nr. 104, 90 S., 31 Abb., 6,00 M, Bestell-Nr. 666 028 2)

M. Miller, Gelöste und ungelöste mathematische Probleme.
1973, 5. Aufl. 1986 (MSB Nr. 73, 96 S., 7 Abb., 5,70 M, Bestell-Nr. 665 673 4)

M. Miller, Rechenvorteile.
1963, 8. Aufl. 1987 (MSB Nr. 14, 95 S., 1 Abb., 3,75 M, Bestell-Nr. 665 065 8)

P. Schreiber, Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie.
1980 (MSB Nr. 68, 101 S., 16 farb. Taf., 9,80 M, Bestell-Nr. 665 984 7)

E. Schröder, Mathematik im Reich der Töne.
1982, 3. Aufl. 1988 (MSB Nr. 106, 111 S., 61 Abb., 7,00 M, Bestell-Nr. 666 078 4)

J. Sedláček, Einführung in die Graphentheorie.
1968, 2. Aufl. 1972 (MSB Nr. 40, 171 S., 73 Abb., 6,40 M, Bestell-Nr. 665 105 2)

Fortsetzung von Seite 51

Wir überprüfen unsere Vermutung durch die Untersuchung von Spezialfällen:
Die bereits gewonnenen Ergebnisse

$A^{4}_{\substack{1\\0}} = 4;\ A^{4}_{\substack{2\\1}} = 2;\ A^{4}_{\substack{4\\2}} = 1;$

$A^{6}_{\substack{3\\2}} = 0;\ A^{6}_{\substack{3\\3}} = 0;\ A^{6}_{\substack{4\\1}} = 12$

erhält man durch Einsetzen spezieller Werte für m, k und r in (10) erneut, so ist z. B.

$$A^{6}_{\substack{4\\1}} = \binom{4-1}{1} \cdot \binom{3}{4-1} \cdot 2^{4-2} = 12\,.$$

Wäre $r > \frac{k}{2}$, so ist $k - r < r$ und $\binom{k-r}{r} = 0$. Dies bedeutet, daß bei einer solchen Auswahl von k Elementen aus $\{x_1; \ldots; x_m; y_1; \ldots; y_m\}$ in keinem Fall r Paare auftreten können.

Die Bestätigung unserer Vermutung (10) macht uns Mut. Wie man weiß, genügt jedoch die Untersuchung von Einzelbeispielen – und seien es noch so viele – als Nachweis für die Richtigkeit einer Vermutung nicht.

Wir verallgemeinern unsere bisherigen Überlegungen und untersuchen die Frage, in wieviel Kombinationen von k Elementen der Menge $M = \{x_1; \ldots; x_m; y_1; \ldots; y_m\}$ genau r Paare auftreten.

Zunächst ist klar: Solange weniger als r Elemente x_i (bzw. y_i) in einer Kombination auftreten, können nicht r Paare $(x_i; y_i)$ vorkommen. Wir betrachten nun sofort den *allgemeinen Auswahltyp* der Form

$y_{i_1}; \ldots; y_{i_{r+s}}; x_{j_1}; \ldots; x_{j_{k-(r+s)}}.$

Für die Auswahl der $k - (r + s)$ Elemente x_i aus der Menge $\{x_1; \ldots; x_m\}$ gibt es $C^{m}_{k-(r+s)}$ Möglichkeiten. Eine solche sei $x_1; \ldots; x_{k-(r+s)}$. Die r für die Paarbildung geeigneten Elemente y müssen aus der Menge $\{y_1; \ldots; y_{k-(r+s)}\}$ gewählt werden, es gibt $C^{k-(r+s)}_{r}$ solcher Kombinationen. Die restlichen s Elemente y dürfen nun in keinem Fall zu den gewählten x_j gehören (denn sonst treten mehr als r Paare auf), sie müssen also aus der Menge $\{y_{k-(r+1)}; \ldots; y_m\}$ stammen. Es gibt genau $C^{m-(k-(r+s))}_{s}$ solcher Auswahlmöglichkeiten. Also hat man – wieder unter Berücksichtigung der Analogie bei der Wahl der y_i und der x_j – gefunden:

Bezüglich des gewählten Auswahltyps ergeben sich genau

$2 \cdot C^{m-(k-(r+s))}_{s} \cdot C^{k-(r+s)}_{r} \cdot C^{m}_{k-(r+s)}$

Kombinationen, in denen genau r Paare auftreten.

Die Umformung der Summe erfolgt wie in dem bereits durchgerechneten Fall (6) und man erhält in der Tat

$$A^{n}_{\substack{k\\r}} = A^{2m}_{\substack{k\\r}} \binom{k-r}{r} \cdot \binom{m}{k-r} \cdot 2^{k-2r}.$$

Der mutige Leser möge die Rechnung ausführen!

Die Formel (10) gilt nun auch für ungerades k. Dann hätte in Tabelle 4 der *Auswahltyp* in der letzten Spalte die Form

$y_{j_1}; \ldots; y_{j_{\frac{k-1}{2}}}; x_{i_1}; \ldots; x_{i_{\frac{k+1}{2}}}$ bzw.

$x_{j_1}; \ldots; x_{j_{\frac{k-1}{2}}}; y_{i_1}; \ldots; y_{i_{\frac{k+1}{2}}}.$

Alle unsere Überlegungen lassen sich auf den Fall, daß k ungerade ist, übertragen.

Mein Antwortbrief an Herrn K. war relativ kurz; er enthielt im wesentlichen die gewonnene Formel. Dem interessierten *alpha*-Leser würde dies sicher nicht genügen; deshalb haben wir gemeinsam die Gedanken nachvollzogen, die zur Entstehung der gewünschten Formel führten.

P. Göthner

Fortsetzung von Seite 62

b) Unzulässige Eingabewerte für das angegebene Programm sind:
- Negative Zahlen.
- Alle Zahlen, die nicht ganzzahlig sind.
- Die einzugebenden Zahlen dürfen nur die Ziffern Ø und 1 haben.

```
51 IF B<Ø OR B<>INT(B) THEN
   „UNZULAESSIGE EINGABE!“:
   GOTO 4Ø
71 IF G>1 THEN PRINT „KEINE
   DUALZAHL!“: GOTO 4Ø
```

Außerdem muß man beachten, daß unser Computer Zahlen mit mehr als 6 Ziffern in Zahlen mit abgetrennten Zehnerpotenzen umwandelt.

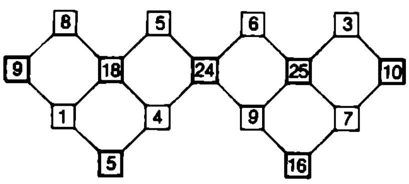
```
52 IF B>111111 THEN PRINT „ZAHL
   ZU GROSS!“: GOTO 4Ø
```

Lösungen

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Von einer Wasserpflanze in einem Fischteich befinden sich $\frac{5}{6}$ ihrer Länge außerhalb des Wassers, $\frac{1}{12}$ im Schlamm und 2 feet im Wasser.
Wie groß ist die gesamte Länge der Pflanze?
Lösung: Die gesamte Länge der Pflanze sei x feet.
$x = \frac{1}{12}x + 2 + \frac{5}{6}x;\ x = 24.$
Die Pflanze ist 24 feet lang.

▲2▲ Die bereits eingetragenen Zahlen stellen die Summe von Ziffern dar, die sich in den Vierecken, die direkt mit ihnen verbunden sind, befinden. Diese Ziffern, alle verschieden, haben einen Wert von 1 bis 9. Setzen Sie diese entsprechend ein!
Lösung:



▲3▲ Gibt es ein Dreieck mit den Seiten $a = 7$ cm und $b = 2$ cm, bei dem die Länge der Höhe auf seiner dritten Seite gleich dem geometrischen Mittel der Längen der beiden anderen Höhen ist?
Lösung: Angenommen, es gibt solch ein Dreieck.
Sein Flächeninhalt sei A. Dann gilt
$h_a = \frac{2A}{a},\ h_b = \frac{2A}{b}$ und $h_c = \frac{2A}{c}$.
Setzt man dies in die geforderte Beziehung $h_c = \sqrt{h_a h_b}$ ein, so erhält man $\frac{2A}{c} = \sqrt{\frac{2A \cdot 2A}{ab}}$, und daraus $c = \sqrt{ab}$. Im vorliegenden Fall ist
$c = \sqrt{7 \cdot 2}$ cm $= \sqrt{14}$ cm. Nach der Dreiecksungleichung muß $c > a - b$ sein. Es ist aber $\sqrt{14} < 7 - 2 = 5$. Folglich kann es kein derartiges Dreieck geben.

▲4▲ Auf dem Bild ist ein elektrischer Stromkreis mit einer Klingel, drei Lämpchen und drei Tastschaltern, von denen jeder im unbetätigten Zustand das eine Kontaktpaar verbindet und im betätigten Zustand das andere, dargestellt. Der Stromkreis ist ans Netz angeschlossen. Was geschieht beim Betätigen eines der Tastschalter?
Lösung: Die Klingel ertönt, und das Lämpchen über dem betätigten Schalter leuchtet auf.

Lösungen zu: Symmetrie im Raum, Teil 2

▲2▲ Symmetriezentren sind die Mitten der Würfel, der Würfelseitenflächen, der Würfelkanten sowie die Würfelecken selbst.

▲3▲ Zum Beispiel ein Spat (oder Parallelepiped; dies ist eine zum Parallelogramm analoge Figur im Raum).

▲9▲ Die Radachse ist Drehsymmetrieachse vom Grad 9 (beim 28er Rad: 36 Speichen, und jede 4. Speiche hat die gleiche Lage).

▲11▲ Drei 4zählige, vier 3zählige und sechs 2zählige.

▲12▲ Durch geeignetes Abschneiden der Ecken am Ikosaeder erhält man die *Ecken* des Fernsehfußballs.

Lösung zu: Eine Aufgabe von René Descartes

Der Beweis folgt aus dem Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck: GI ist die Höhe im Dreieck FHI, deren Quadrat ist dem Produkt der Höhenabschnitte FG und GH gleich, da aber $FG = 1$, ist GI die Wurzel aus GH.

Lösung zu: Anordnung von Schachfiguren

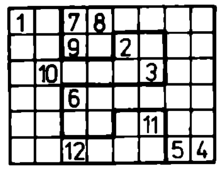
Kb1, Da4, Tc3, Td5, Lb6, Le2, Se1, Se6.
Kb6, Da3, Tc4, Td5, Lb1, Le1, Se2, Se6.
Kc4, Db6, Ta3, Td2, Le4, Le5, Sc1, Se1.
Ke5, Dc6, Tb4, Td1, La2, Le3, Sa3, Se2.
Ke3, Db2, Ta4, Tc4, Ld1, Ld6, Se1, Se6.
Mit der schon gegebenen Lösungsmöglichkeit ergeben sich sechs grundsätzlich verschiedene Anordnungen, welche jeweils um 180° gedreht, sechs weitere Lösungen ermöglichen. Insgesamt lassen sich somit 12 verschiedene Anordnungen darstellen.

Lösungen zu: In freien Stunden · alpha-heiter

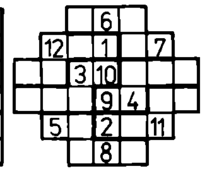
Eine Aufgabe von Jules Verne
Erdradius: R; Körpergröße: x;
Wegstrecke der Füße: m;
Wegstrecke des Kopfes: M.
Die zurückgelegten Wegstrecken sind proportional zu den Radien über die gleichen Zentriwinkel, daher gilt:
$$m : R = M : (R + x).$$
Das Umstellen der Proportion liefert für die erste Frage:
$$M = m\left(1 + \frac{x}{R}\right) \text{ und für}$$
die zweite Frage: $x = R \cdot \left(\frac{M}{m} - 1\right)$.

Mathematische Knobelei
Es liegen 8 weiße Bälle im Schaufenster.

Teilung von Figuren
a)



b)



Spiel mit dem Taschenrechner
Die Begriffe lauten:
SEILE, SILBE, SOSSE, GLEIS.
Der Fluß im Harz heißt ILSE.

Fröhliche Mathematik
a) Christa wiegt 34 kg.
(Anke 24 kg, Birgit 31 kg)
b) 16 Antworten waren richtig.
c) Keines, denn alle fünf schwarzen zusammenhängenden Flächenstücke haben den gleichen Flächeninhalt.

Füllrätsel

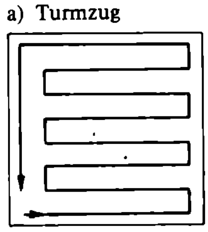
1 E	2 U	3 K	4 L	5 I	6 D
L	M	A	E	N	I
L	K	L	I	K	V
I	R	O	B	R	I
P	E	T	N	E	S
S	I	T	I	I	O
E	S	E	Z	S	R

Zwei Kryptogramme
a) z. B.
$$\begin{array}{r} 7654 \\ +1254 \\ \hline 8908 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1728 \\ +4328 \\ \hline 6056 \end{array}$$
b)
$$\begin{array}{r} 7\,870 \\ +\ 7\,270 \\ \hline 15\,140 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\,270 \\ +\ 7\,870 \\ \hline 15\,140 \end{array}$$

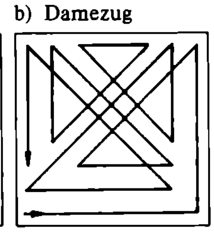
Zum Scherzen aufgelegt
1. Volumen; 2. Abstand; 3. Reziproke;
4. Inkreis; 5. Asymptote; 6. Basis;
7. Lösungen; 8. Exponent – *Variable*

Kreuzzahlrätsel
$n = 13$; 42 … 78; $468 \cdot 169$; $20 \cdot 6591$;
. . 273 . .; $84 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 9$; $715 \cdot 507$; 104 . . 65.

Fünf Sinnsprüche
a) Turmzug



b) Damezug



zu a) Edel sei der Mensch, hilfreich und gut. Glück hat auf die Dauer nur der Tüchtige.
zu b) Aller Anfang ist schwer. Frisch gewagt ist halb gewonnen. Ohne Fleiß kein Preis.

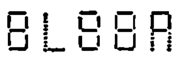
Aus der Aufgabensammlung einer AG
$1 \cdot 2 \cdot 3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8 - 9 = 1$
$1 \cdot 2 + 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - 9 = 2$

$1+2+3-4+5+6+7-8-9=3$
$1\cdot 2+3-4+5+6-7+8-9=4$
$1+2-3+4+5+6-7+8-9=5$
$1\cdot 2+3-4+5+6-7-8+9=6$
$1+2+3-4+5+6-7-8+9=7$
$1\cdot 2+3-4+5-6+7-8+9=8$
$1+2+3+4-5-6-7+8+9=9$

Lösungen zu:
Knifflige Glückwünsche

▲1▲

a) 

b) 

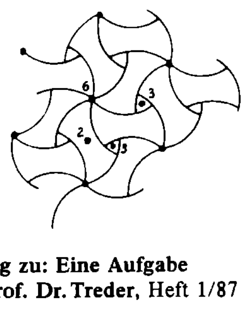
c) 

d) 

▲2▲ Aus (2) und (4) folgt $H=L+2A$. Aus (1) oder (5), die offenbar dieselbe Gleichung verkörpern, folgt $H=L+P-A$, woraus sich $P=3A$ ergibt. Nun ergeben sich (2) $L=\frac{2A}{(3A-2)}$ und aus (3) $L=\frac{4A}{(3A\cdot A-1)}$, woraus man durch Gleichsetzen einer kubischen Gleichung in A erhält, welche die Lösungen $A=0$ (entfällt) und $A=1$ (zweifach) hat. Also ist $A=1$, womit $L=2$, $P=3$ und $H=4$ folgen.

Lösungen zu:
Symmetrische Figuren

a), b) Bild 1: $n=6$ und damit zentralsymmetrisch, keine Symmetrieachse; B2: $n=7$, weder axial- noch zentralsymmetrisch; B3: $n=5$, weder axial- noch zentralsymmetrisch; B4: $n=3$, weder axial- noch zentralsymmetrisch; B5: weder dreh-, axial- noch zentralsymmetrisch; B6: $n=3$, weder axial- noch zentralsymmetrisch; B7: $n=10$ und damit zentralsymmetrisch. c) Hinsichtlich der Parkettierung mit dem Muster aus dem Bild 1 gibt es noch Drehsymmetriezentren vom Grad 3 und vom Grad 2. (Siehe Wiedergabe mit Ergänzungen!)



Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. Treder, Heft 1/87

▲2804▲ Relativ zum festen Ufer bewegt sich der Schwimmer stromabwärts mit der Geschwindigkeit $u+v$ und stromaufwärts mit der Geschwindigkeit $u-v$. Folglich braucht er für die Strecke s hin und zurück die Zeit
$t=\frac{s}{u+v}+\frac{s}{u-v}$. Die Formel gilt nur für $u>v$; im Grenzfall $u=v$ kommt der Schwimmer relativ zum Ufer stromaufwärts nicht von der Stelle.

Lösungen zu:
Wir lösen Zahlenrätsel, Heft 2/87

▲1▲
$$\begin{array}{rcrcr} 105 & - & 80 & = & 25\\ : & & + & & +\\ 21 & \times & 3 & = & 63\\ \hline 5 & + & 83 & = & 88\end{array}$$

▲2▲
$$\begin{array}{rcrcr} 703 & - & 54 & = & 649\\ : & & - & & -\\ 19 & \cdot & 31 & = & 589\\ \hline 37 & + & 23 & = & 60\end{array}$$

▲3▲
$$\begin{array}{rcrcr} 952 & - & 445 & = & 507\\ : & & - & & -\\ 34 & \cdot & 167 & = & 201\\ \hline 28 & + & 278 & = & 306\end{array}$$

▲4▲
$$\begin{array}{r} 607\,841\\ +\ 412\,359\\ \hline 1\,020\,200\end{array}\qquad\begin{array}{r} 607\,841\\ -412\,359\\ \hline 195\,482\end{array}$$

Lösungswort: R e g u l a t i o n
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

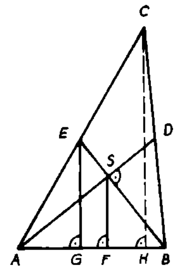
Lösungen zu:
Anordnung von Schachfiguren
Heft 2/87

Da1, Dc3, Dd4, De5, Dg7.
Da1, Dc3, De5, Df6, Dg7.
Db1, Dd3, De4, Df5, Dh7.
Dd2, Dd3, Dd4, Dd5, Dd8.
De2, De3, De4, De5, De8.
Diese 5 Grundlösungen können jeweils dreimal um je 90 Grad gedreht werden, wodurch sich $5\times 4=20$ verschiedene Lösungen ergeben.

Dd6, De4, Df5, Dg7, Sc1.
Diese Stellung einschließlich den daraus resultierenden Spiegelungen ist die bisher einzig bekannte Position, in der jedes der 64 Felder entweder besetzt oder beherrscht wird. Sie wurde 1908 von J. Wallis in der Zeitschrift *The Strand Magazine* zuerst veröffentlicht.

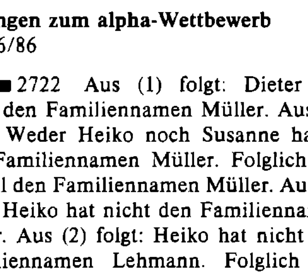
Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 5/86, Fortsetzung

Ma 10/12 ■ 2718 Es sei D der Mittelpunkt von $\overline{BC}$, E der Mittelpunkt von $\overline{AC}$. Dann gilt $AD\perp BE$, $\overline{AD}=24$ cm und $\overline{BE}=18$ cm, also $\overline{AS}=\frac{2}{3}\cdot\overline{AD}=16$ cm,
$\overline{BS}=\frac{2}{3}\cdot\overline{BE}=12$ cm.
Nach dem Strahlensatz gilt
$\overline{SF}:\overline{EG}=12:18=2:3$,
$\overline{EG}:\overline{CH}=1:2$, also $\overline{CH}=3\cdot\overline{SF}$.
Im rechtwinkligen Dreieck ABS gilt nach dem Satz des Pythagoras
$\overline{AB}=\sqrt{256+144}$ cm $=20$ cm.
Ferner gilt
$\overline{BF}\cdot\overline{AB}=\overline{BS}^2$, also
$\overline{BF}=\frac{144}{20}$ cm $=7{,}2$ cm, aber auch
$\overline{FS}^2=\overline{AF}\cdot\overline{BF}=12{,}8\cdot 7{,}2$ cm^2,
$\overline{FS}=9{,}6$ cm, und somit $\overline{CH}=28{,}8$ cm.
Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC erhalten wir
$$A_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CH}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 28{,}8\text{ cm}^2=288\text{ cm}^2.$$



Ma 10/12 ■ 2719 Wir betrachten die ersten 20 der 39 Zahlen. Unter diesen gibt es sicher zwei auf Null endende Zahlen, eine endet nicht auf 90; diese sei n.
Die Quersummen der Zahlen n, $n+1$, $n+2$, …, $n+9$, …, $n+19$ sind paarweise verschieden, d. h., eine dieser Zahlen hat eine durch 11 teilbare Quersumme. Die Zahlen 999 980 und 1 000 019 bilden ein gewünschtes Beispiel.

Ma 10/12 ■ 2720
Es sei $\overline{AH}=\overline{CM}$ und $\overline{AH}\geqq\overline{BD}$.
Wegen $\triangle ABH\sim\triangle MBK$ gilt
$\overline{AH}:\overline{MK}=\overline{AB}:\overline{MB}=2:1$, also
$\overline{MK}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AH}=\frac{1}{2}\cdot\overline{CM}$.
Das Dreieck CMK ist rechtwinklig und das Verhältnis einer Kathete zur Hypotenuse beträgt $1:2$, d. h., Winkel MCK hat die Größe 30°. Analog dazu gilt
$\overline{LM}=\frac{1}{2}\cdot\overline{BD}\leqq\frac{1}{2}\cdot\overline{AH}=\frac{1}{2}\cdot\overline{CM}$.
Folglich hat der Winkel ACM die Größe 30° oder er ist kleiner als 30°. Zusammen gilt für die Größe γ des Winkels ACB $\leqq 60°$.



Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 6/86

Ma 5 ■ 2722 Aus (1) folgt: Dieter hat nicht den Familiennamen Müller. Aus (2) folgt: Weder Heiko noch Susanne haben den Familiennamen Müller. Folglich hat Bärbel den Familiennamen Müller. Aus (3) folgt: Heiko hat nicht den Familiennamen Meier. Aus (2) folgt: Heiko hat nicht den Familiennamen Lehmann. Folglich hat Heiko den Familiennamen Schulze. Aus (2) folgt: Susanne hat nicht den Familiennamen Lehmann. Folglich hat Susanne den Familiennamen Meier. Somit hat Dieter den Familiennamen Lehmann.

Ma 5 ■ 2723 74 kg − 34 kg = 40 kg; Alfons und Bernd lieferten zusammen 40 kg Altpapier ab. Angenommen, auf Bernd ent-

fallen x kg Altpapier; dann entfallen auf Alfons $3 \cdot x$ kg Altpapier. Deshalb gilt
$x + 3x = 40,\quad 4x = 40,\quad x = 10.$
Bernd sammelte 10 kg, Alfons 30 kg, Claus 18 kg und Dieter 16 kg Altpapier.

Ma 5 ■ 2724 $205\,\text{M} - 25\,\text{M} = 180\,\text{M}$;
$180\,\text{M} : 2 = 90\,\text{M}$; $90\,\text{M} + 25\,\text{M} = 115\,\text{M}$;
Kurt hat 90 M, Peter 115 M gespart.

Ma 5 ■ 2725
Aus $a + b = 70\,\text{cm}$ und $b = a + 10\,\text{cm}$ folgt $2a + 10\,\text{cm} = 70\,\text{cm}$, $2a = 60\,\text{cm}$,
$a = 30\,\text{cm}$, $b = 40\,\text{cm}$, also
$A = a \cdot b = 30 \cdot 40\,\text{cm}^2 = 1200\,\text{cm}^2.$

Ma 5 ■ 2726
$10{,}00\,\text{M} - 0{,}04\,\text{M} = 9{,}96\,\text{M}$;
$9{,}96\,\text{M} - 1{,}56\,\text{M} = 8{,}40\,\text{M}$;
$8{,}40\,\text{M} : 2 = 4{,}20\,\text{M}$;
$4{,}20\,\text{M} + 1{,}56\,\text{M} = 5{,}76\,\text{M}$;
$4{,}20\,\text{M} = 12 \cdot 0{,}35\,\text{M}$;
$5{,}76\,\text{M} = 12 \cdot 0{,}48\,\text{M}$.
Peter kaufte 12 Flaschen Limonade und 12 Flaschen Bier.

Ma 5 ■ 2727 Im günstigsten Fall erwischt Herr A für die ersten drei Türen jeweils auf Anhieb den passenden Schlüssel. In diesem Fall wären nur 3 Schlüsselproben erforderlich, da der vierte Schlüssel mit Sicherheit zur vierten Tür paßt. Im ungünstigsten Fall passen zur 1. Tür nicht der 1., 2., 3. Schlüssel, dann paßt der 4. Schlüssel (3 Proben); passen zur 2. Tür nicht der 1., 2. Schlüssel, dann paßt der 3. Schlüssel (2 Proben); paßt zur 3. Tür nicht der 1. Schlüssel, dann paßt der zweite Schlüssel (1 Probe). Im ungünstigsten Fall sind also 6 Schlüsselproben zu machen.

Ma 6 ■ 2728 Für die Anzahl der weißen und blauen Bälle gibt es folgende Möglichkeiten:

weiße	blaue	restliche Bälle
1	3	20
2	6	16
3	9	12
4	12	8
5	15	4

Da es doppelt soviel rote wie gelbe Bälle sind, muß die Anzahl der restlichen Bälle durch 3 teilbar sein. Das trifft nur für die Zahl 12 zu. Deshalb sind es 3 weiße, 9 blaue, 8 rote und 4 gelbe Bälle.

Ma 6 ■ 2729 Aus $10a + b = 5 \cdot (a + b)$ folgt $10a + b = 5a + 5b$, $5a = 4b$.
Wegen $1 \leqq a \leqq 9$ und $0 \leqq b \leqq 9$ gilt $a = 4$ und $b = 5$.
Die Zahl heißt 45.

Ma 6 ■ 2730 Aus $A_R = a \cdot b$ und
$$A_V = a \cdot b - \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{b}{2} - \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{a}{2}$$
$$= ab - \frac{ab}{2} = \frac{ab}{2} \quad \text{folgt} \quad A_V = 2 \cdot A_R;$$
d.h., der Flächeninhalt des Vierecks *BFDE* ist halb so groß wie der des Rechtecks *ABCD*.

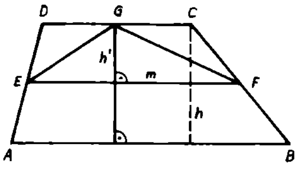
Ma 6 ■ 2731 Wegen $2n + (2n + 2) + (2n + 4) + (2n + 6) + (2n + 8) = 10n + 20 = 10 \cdot (n + 2)$
ist diese Summe ein Vielfaches von 10, also durch 10 teilbar.

Ma 6 ■ 2732 Der Sohn ist siebenmal so alt wie der Enkel; denn eine Woche hat 7 Tage. Der Großvater ist zwölfmal so alt wie der Enkel; denn ein Jahr hat 12 Monate. Deshalb gilt $x + 7x + 12x = 100$, $20x = 100$, $x = 5$. Der Enkel ist 5, der Sohn 35, der Großvater 60 Jahre alt.

Ma 7 ■ 2733 Angenommen, in dem Ferienheim gibt es x Zwei-, also $(52 - x)$ Vierbettzimmer; dann gilt
$2x + 4 \cdot (52 - x) = 144,$
$2x + 208 - 4x = 144,\quad 2x = 64,\quad x = 32.$
In diesem Ferienheim gibt es 32 Zwei- und 20 Vierbettzimmer.

Ma 7 ■ 2734 Angenommen, vor dem Aus- bzw. Einsteigen an der Haltestelle befanden sich im ersten Wagen n Fahrgäste; dann befanden sich im zweiten Wagen $(n + 3)$ Fahrgäste und im dritten Wagen $(n + 5)$ Fahrgäste. Nach dem Aus- bzw. Einsteigen an der Haltestelle befanden sich im ersten Wagen $\frac{1}{2} \cdot n$ Fahrgäste, im zweiten Wagen $(n - 3)$ Fahrgäste und im dritten Wagen $(n + 8)$ Fahrgäste. Das sind insgesamt $\left(\frac{5}{2} \cdot n + 5\right)$ Fahrgäste.
Nun gilt $\frac{5}{2} \cdot n + 5 = 60$, $\frac{5}{2} \cdot n = 55$,
also $n = 22$.
Vor dem Aus- bzw. Einsteigen an der Haltestelle befanden sich im ersten Wagen 22, im zweiten Wagen 25, im dritten Wagen 27 Fahrgäste.

Ma 7 ■ 2735 Für den Flächeninhalt des Dreiecks *EFG* gilt
$A_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot h'$, für den Flächeninhalt des Trapezes gilt $A_2 = m \cdot h$. Wegen
$h = 2 \cdot h'$ gilt darum $A_2 = 2 \cdot m \cdot h'$.
Daraus folgt
$A_1 : A_2 = 1 : 4$, also $A_1 = \frac{1}{4} \cdot A_2$.
Der Flächeninhalt des Dreiecks *EFG* beträgt 25 % des Flächeninhalts des Trapezes *ABCD*.

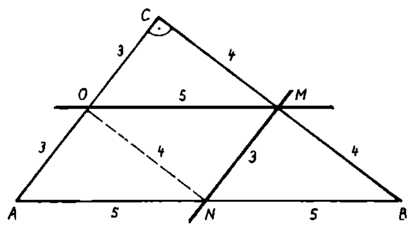


Ma 7 ■ 2736 Angenommen, es waren im ganzen n Nüsse. Dann sollten $(n - 5)$ Nüsse zu gleichen Teilen unter den vier Brüdern aufgeteilt werden. Jeder sollte somit $\frac{1}{4} \cdot (n - 5)$ Nüsse erhalten. Davon sollte der Freund
$$4 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4} \cdot (n - 5) = \frac{1}{10} \cdot (n - 5)$$
Nüsse erhalten. Nun gilt
$$\frac{n}{5} = \frac{n - 5}{10} + 5,\quad 2n = n - 5 + 50,\ n = 45.$$
Es waren im ganzen 45 Nüsse.

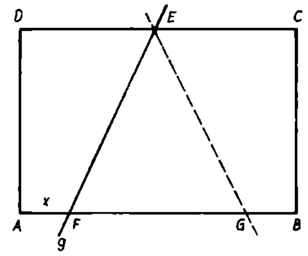
Ma 8 ■ 2737 Angenommen, B(2) wäre wahr. Dann wären A(1) und A(2) falsch. Also ist B(1) wahr. Daraus folgt, daß C(1) falsch, also C(2) wahr ist.
Wenn A(2) wahr wäre, müßte die letzte Grundziffer von n eine 0 oder 5 sein. Das ist wegen C(2) bzw. B(1) nicht möglich. Es folgt: A(1) ist wahr.
Man gelangt durch systematische Überlegungen zu der Erkenntnis, daß die einzige Zahl n, die alle Bedingungen erfüllt, die Zahl 378 ist.

Ma 8 ■ 2738
Es gilt $a < b$, also $a + x = b$.
Aus $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ folgt durch Einsetzen
$$\frac{a}{a + x} + \frac{a + x}{a} = \frac{a^2 + (a + x)^2}{a(a + x)}$$
$$= \frac{a^2 + a^2 + 2ax + x^2}{a(a + x)} = \frac{2a^2 + 2ax + x^2}{a(a + x)}$$
$$= \frac{2a(a + x) + x^2}{a(a + x)} = 2 + \frac{x^2}{a(a + x)} > 2.$$

Ma 8 ■ 2739 Nach einem bekannten Satz gehen die Parallelen durch den Mittelpunkt einer Dreieckseite zu den anderen Dreieckseiten auch durch die Mittelpunkte der anderen Dreieckseiten. Die dabei entstandenen Strecken sind jeweils halb so lang wie die zu ihnen parallelen Dreieckseiten.
Es entstehen also vier kongruente Dreiecke mit jeweils 3 cm, 5 cm und 4 cm langen Seiten. Da diese Dreiecke rechtwinklig sind (pythagoräische Zahlen), beträgt der Flächeninhalt eines dieser Dreiecke $A = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6\,\text{cm}^2$; der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt demzufolge $12\,\text{cm}^2$.
Der Umfang des entstandenen Parallelogramms beträgt $2 \cdot (3 + 5)\,\text{cm} = 16\,\text{cm}$.
Skizze nicht maßgerecht!



Ma 8 ■ 2740 $\overline{AF}$ habe die Länge x, also $\overline{FB}$ die Länge $(60 - x)$; dann gilt
$$2 \cdot \frac{30 + x}{2} \cdot 40 = \frac{30 + (60 - x)}{2} \cdot 40,$$
$40(30 + x) = 20(90 - x),$
$2(30 + x) = 90 - x,$
$60 + 2x = 90 - x,\quad 3x = 30,\quad x = 10.$
Der Schnittpunkt F der Geraden g mit $\overline{AB}$ ist 10 m von A entfernt.



Ma 9 ■ 2741 Es seien a und $a + 1$ die beiden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen.

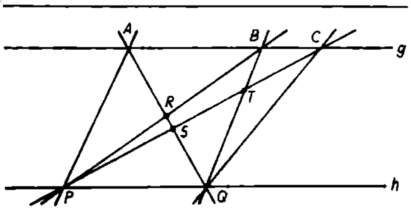
Dann gilt nach Aufgabenstellung:
$a^2 + (a+1)^2 - a(a+1) = a(a+1) + 1$.
Wir formen äquivalent um und erhalten
$a^2 + a^2 + 2a + 1 - a^2 - a = a^2 + a + 1$
bzw. $a^2 + a + 1 = a^2 + a + 1$.
Da wir nur äquivalent umgeformt haben, ist die Aussage bewiesen.

Ma 9 ■ 2742 Es sei x der Preis für einen Apfel in Denare und y der Preis für eine Birne in Denare, dann gilt
(1) $9x - y = 13$ und
(2) $-x + 15y = 6$.
Wir multiplizieren die Gleichung (2) mit 9 und erhalten
(1) $9x - y = 13$
(2)' $-9x + 135y = 54$ +
(3) $134y = 67$
$y = 0{,}5$ in (1):
(1)' $9x = 13{,}5$, $x = 1{,}5$.
Ein Apfel kostet 1,5 Denare, eine Birne 0,5 Denare. Die Probe bestätigt die Richtigkeit der Lösung.

Ma 9 ■ 2743 Es seien a und b die Maßzahlen der Längen der Katheten und c die Maßzahl der Länge der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks.
Aus $a^2 + b^2 + c^2 = 2450$ und $a^2 + b^2 = c^2$ folgt $2c^2 = 2450$, $c^2 = 1225$, $c = 35$.
Aus $a + b + c = 84$ und $c = 35$ folgt $a + b = 49$, $b = 49 - a$.
Aus $a^2 + b^2 = 1225$ und $b = 49 - a$ folgt durch Einsetzen $a^2 + (49 - a)^2 = 1225$,
$a_1 = 28$, $a_2 = 21$.
Die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks sind 21 cm, 28 cm und 35 cm lang.

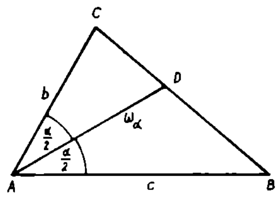
Ma 9 ■ 2744
Man kann folgende Tabelle aufstellen:

Anzahl der Punkte auf g	Anzahl der entstehenden Schnittpunkte
1	$0 = \frac{1 \cdot 0}{2}$
2	$1 = \frac{2 \cdot 1}{2}$
3	$3 = \frac{3 \cdot 2}{2}$
4	$6 = \frac{4 \cdot 3}{2}$
5	$10 = \frac{5 \cdot 4}{2}$
⋮	⋮
n	$\frac{n(n-1)}{2}$
7	$21 = \frac{7 \cdot 6}{2}$
14	$91 = \frac{14 \cdot 13}{2}$



Ma 10/12 ■ 2745 Die natürliche Zahl z läßt sich wie folgt darstellen:
$z = 7 \cdot 10^x + n \quad (x \in N;\ n \in N)$.
Nach Aufgabenstellung soll gelten $7 \cdot 10^x + n = 5(10n + 7)$.
Wir formen äquivalent um und erhalten
$7 \cdot 10^x = 49n + 35$; $n = \frac{7 \cdot 10^x - 35}{49}$.
$x = 5$ ist die kleinste natürliche Zahl, für die n eine natürliche Zahl wird; es ist dann
$n = \frac{700\,000 - 35}{49}$; $n = 14\,285$.
Nun können wir z berechnen:
$z = 7 \cdot 10^5 + 14\,285$; $z = 714\,285$.
z' ist dann $142\,857$, und
es gilt $142\,857 \cdot 5 = 714\,285$,
d.h. $z = 5 \cdot z'$.

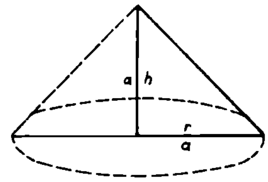
Ma 10/12 ■ 2746 Skizze:



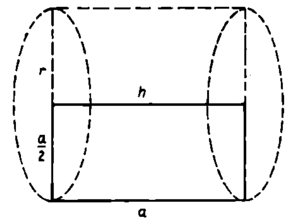
Es gilt $A_{ABD} + A_{ADC} = A_{ABC}$, also
$\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \cdot w_\alpha \cdot c + \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \cdot w_\alpha \cdot b$
$= \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot b \cdot c$.
Wir formen äquivalent um und erhalten
$\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \cdot w_\alpha(b + c) = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot b \cdot c$,
$\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \cdot w_\alpha(b + c)$
$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot b \cdot c$
$\left| : \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} \neq 0\right)\right.$
$w_\alpha \cdot (b + c) = 2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot b \cdot c$,
$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{w_\alpha \cdot (b + c)}{2 \cdot b \cdot c}$.

Ma 10/12 ■ 2747 Nach Voraussetzung gilt
$a \cdot b \cdot c = a \cdot b \cdot h \cdot 4$, also $c = 4h$.
Dabei ist c die Länge der Hypotenuse, h die Länge der Höhe zur Hypotenuse.
Aus $\sin\alpha = \frac{h}{b} = \frac{c}{4b} = \frac{a}{c}$ folgt $c^2 = 4ab$.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt
$a^2 + b^2 = 4ab$, $a^2 - 4ab + b^2 = 0$.
Daraus folgt weiter $a_1 = b(2 + \sqrt{3})$
und $a_2 = b(2 - \sqrt{3})$.
Somit gilt $\tan\alpha_1 = a_1 : b = 2 + \sqrt{3}$
und $\tan\alpha_2 = a_2 : b = 2 - \sqrt{3}$,
also $\alpha_1 = 75°$ und $\beta_1 = 15°$ bzw.
$\alpha_2 = 15°$ und $\beta_2 = 75°$.

Ma 10/12 ■ 2748
a) Flächeninhalt des Dreiecks: $A = \frac{1}{2}a^2$



Länge einer Kathete: a;
Rotationskörper K_1: gerader Kreiskegel mit $r = a$ und $h = a$;
Das Volumen V_1 beträgt: $V_1 = \frac{1}{3}\pi a^3$;
Vergleich: $V_1 : V_2 = \frac{\pi a^3 \cdot 4}{3\pi \cdot a^3}$; $V_1 : V_2 = 4 : 3$.
Das konstante Verhältnis ist $\frac{4}{3}$.
b) Flächeninhalt des Rechtecks:
$A = a \cdot \frac{1}{2} \cdot a = \frac{1}{2}a^2$;
Länge der Seiten: a bzw. $\frac{1}{2}a$;
Rotationskörper K_2: gerader Kreiszylinder mit $r = \frac{1}{2}a$ und $h = a$;
Volumen V_2: $V_2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \cdot \pi a$; $V_2 = \frac{1}{4}\pi a^3$



Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 1/87

Ma 5 ■ 2750 Aus (2) folgt: Herr Schmidt ist Arzt von Beruf. Aus (3) und (4) folgt: Herr Schmidt wohnt weder in Weimar noch in Eberswalde. Folglich wohnt Herr Schmidt in Suhl. Aus (4) folgt: Herr Siewert wohnt nicht in Eberswalde, also in Weimar. Aus (3) folgt: Herr Siewert ist Dreher von Beruf. Deshalb wohnt Herr Müller in Eberswalde und ist Bäcker von Beruf.

Ma 5 ■ 2751 Der Kraftstoffvorrat der Tankstelle beträgt
$64 \cdot 2400\,\mathrm{l} = 153\,600\,\mathrm{l}$.
Nun gilt $153\,600 : 1600 = 96$.
Der Vorrat würde 96 Tage reichen, wenn täglich nur 1600 Liter verkauft werden.

Ma 5 ■ 2752 Angenommen, Ingrid ist n Jahre alt, Barbara also $2n$ Jahre, der Vater $7n$ Jahre, die Mutter $6n$ Jahre alt. Das sind zusammen $16n$ Jahre. Nun gilt $16 \cdot n = 96$, also $n = 6$. Ingrid ist 6, Barbara 12, die Mutter 36, der Vater 42 Jahre alt.

Ma 5 ■ 2753 a) Der halbe Umfang des Rechtecks beträgt
$120\,\mathrm{cm} : 2 = 60\,\mathrm{cm}$. Deshalb ist eine Seite 20 cm, die andere 40 cm lang.
b) In das Rechteck lassen sich in einer Reihe 5 Plättchen hochkant und darüber noch 3 Plättchen breitkant, insgesamt also 8 Plättchen legen.

Ma 5 ■ 2754
Wegen 32 Pf + 40 Pf = 72 Pf, also
$4 \cdot 8$ Pf + $8 \cdot 5$ Pf = 72 Pf
gehören zu dieser Wandergruppe
4 + 8 = 12 Schüler.

Ma 5 ■ 2755 Angenommen, mit dem Bus fahren x Kinder, also $2x$ Frauen und somit $4x$ Männer; das sind zusammen
$x + 2x + 4x = 7x$ Personen. Nun gilt
$7x = 42$, also $x = 6$.
Mit dem Bus fahren 6 Kinder, 12 Frauen und 24 Männer.

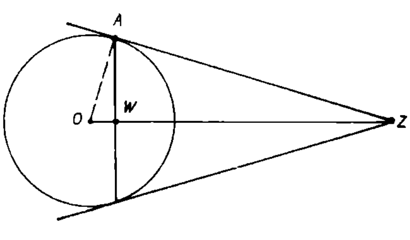
Fortsetzung in Heft 4/87, d. Red.

Alte Vorlesungsmitschrift entdeckt!

In der Bibliothek der Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität* in Leipzig habe ich vor wenigen Jahren eine Mitschrift einer Vorlesung des bedeutenden Mathematikers *Felix Klein*[1]) gefunden, die einer seiner Assistenten angefertigt hat. Sie ist überschrieben: *Funktionentheorie in geometrischer Behandlungsweise.*

Felix Klein hielt diese interessante Vorlesung in den Jahren 1880/81 an der Leipziger Universität.[2]) In geometrisch-anschaulicher Form und sehr einprägsam werden darin Dinge behandelt, die auf dem Bereich der komplexen Zahlen aufbauen. Eine sehr wichtige und grundlegende Eigenschaft ist hierbei die sogenannte *Transformation durch reziproke Radien.* Zwei Punkte der Ebene, die durch diese Transformation einander zugeordnet sind, nennt man auch *konjugierte Punkte.* Darunter versteht man die Abbildung von Punkten der Ebene aufeinander, die spiegelbildlich bezüglich der Peripherie des Einheitskreises liegen. Die beiden einander zugeordneten Punkte z und w liegen dabei (siehe Bild 1) auf einem vom Kreismittelpunkt 0 (Koordinatenursprung) ausgehenden Strahl und es gilt:

Bild 1



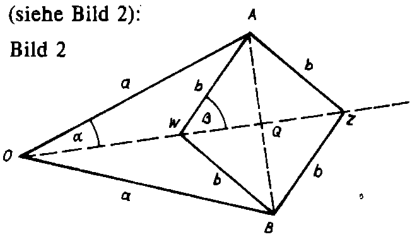
$\overline{0w} = \frac{1}{\overline{0z}}$ oder eben $\overline{0w}\,\overline{0z} = 1$. Sind der Kreis und der Punkt vorgegeben, so konstruiert man das zu z gehörige w auf der Geraden durch 0 und z wie folgt: Man lege von z aus die beiden möglichen Tangenten an den Kreis. Die Gerade durch die beiden Berührungspunkte (genannt *Polare zu z*) schneidet die Gerade durch 0 und z in w.

Aufgabe 1

Beweise, daß $\overline{0w}\,\overline{0z} = 1$!

In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts war an den Hochschulen und Universitäten die Herstellung und Benutzung mathematischer Modelle sehr verbreitet. Beispielsweise konstruierte im Jahre 1864 der Techniker und Mathematiker *Peaucellier* eine Apparatur, die es in gewissen Grenzen gestattet, die konjugierten Punkte mechanisch zu bestimmen. Man nannte dieses Gerät den *Inversor von Peaucellier.* In Kleins Vorlesung ist er etwa so beschrieben (siehe Bild 2):

Bild 2



„Um einen festen Punkt 0 sind die beiden gleichlangen Arme $\overline{0A}$ und $\overline{0B}$ drehbar. In A und B sind mittels Scharnieren je zwei neue gleichlange Stäbe befestigt, die wiederum in w und z mit Scharnieren verbunden sind. Bewegt man jetzt $\overline{0A}$ *und* $\overline{0B}$ um 0, so sind w und z immer zwei konjugierte Punkte."

w und z liegen tatsächlich stets spiegelbildlich bezüglich der Peripherie eines Kreises mit dem Mittelpunkt 0. Allerdings ist dieser Kreis nur dann der Einheitskreis, wenn die Differenz $a^2 - b^2$ gleich 1 ist.

Aufgabe 2

Man zeige, daß auch bezüglich Bild 2 gilt $\overline{0w}\,\overline{0z} = a^2 - b^2 (= 1)$!

(Hinweis: Drücke $\overline{0w}$ *und* $\overline{0z}$ mittels Winkelfunktionen aus und benutze einen entsprechenden Ausdruck für $\overline{AQ}$! Ferner braucht man noch die bekannte Beziehung $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.)

Nachfolgend noch zwei Aufgaben, die inhaltlich eng mit der 1880/81 gehaltenen Vorlesung von Felix Klein *Funktionentheorie in geometrischer Behandlungsweise* stehen. (Siehe Band 7 der Reihe „TEUBNER-Archiv zur Mathematik".) Gegenstand der Aufgabe 3 ist die *logarithmische Spirale.* Diese Kurve war ein grundlegendes Beispiel einer gemeinsamen wissenschaftlichen Arbeit der Mathematiker *Felix Klein* (1849 bis 1925) und *Sophus Lie* (1842 bis 1899), die sie in den siebziger Jahren des 19. Jahrhunderts schrieben. Für beide war es inhaltlich ein entscheidender Ausgangspunkt für ihre bedeutendsten mathematischen Leistungen.

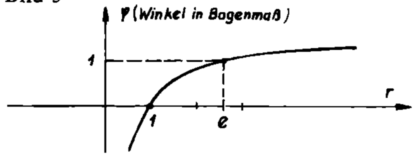
Aufgabe 3

Für eine feste (konstante) reelle Zahl k wird durch die Gleichung

$$\varphi = k \cdot \log_e r$$

($e = 2{,}718\ldots$) eine sogenannte logarithmische Spirale definiert. Wir zeichnen einmal für $k = 1$ die zur Gleichung gehörige Kurve in ein r, φ-Koordinatensystem und erhalten (Bild 3). Warum wohl heißt die Kurve *Spirale,* obwohl die oben abgebildete Kurve nicht spiralförmig aussieht?

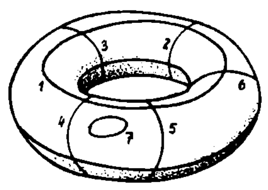
Bild 3



Aufgabe 4

Wir betrachten auf gekrümmten Flächen im Raum geschlossene Kurven ohne Doppelpunkt. Dabei soll nicht zwischen Kurven unterschieden werden, die man durch Verschiebung und Verzerrung (ohne die Kurve zu zerreißen) ineinander überführen kann (zur Deckung bringen kann). So ist z.B. auf der Torusfläche (Bild 4) zwischen den Kurven 2 bis 6 nicht zu unterscheiden.

Bild 4

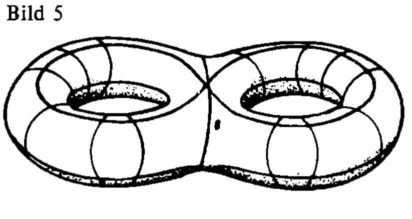


Wohl aber ist 7 oder auch 1 eine andere geschlossene Kurve. Von besonderer Bedeutung sind dabei diejenigen Kurven, die man auf der Fläche nicht auf einen Punkt zusammenziehen kann. Dies ist etwa bei Kurve 1 und bei Kurve 2 der Fall, Kurve 7 hingegen läßt sich auf einen Punkt zusammenziehen. Und beim Torus gibt es in der Tat nur zwei solcher Kurven.

Wieviel solche geschlossene Kurven, die man nicht auf einen Punkt zusammenziehen kann, existieren

a) auf der Kugel;
b) auf der Brezel (Bild 5)?

Bild 5



Überprüfe insbesondere das die Brezel umschlingende Band 8!

F. König

---

[1]) Ausführliches zu Leben und Werk von Felix Klein findest du in dem Buch *Felix Klein* von R. Tobies und F. König, das als Band 50 der Reihe *Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner* beim Teubner-Verlag Leipzig erschienen ist.

[2]) Diese Vorlesung wird in Buchform als Band 7 der Reihe *TEUBNER-ARCHIV zur Mathematik* beim Teubner-Verlag Leipzig voraussichtlich 1987 erscheinen.

Immer weigere ich mich, irgend etwas deswegen für wahr zu halten, weil Sachverständige es lehren oder auch, weil alle es annehmen. Jede Erkenntnis muß ich mir selbst erarbeiten. Alles muß ich neu durchdenken, von Grund auf, ohne Vorurteile.

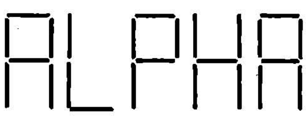
Albert Einstein

Knifflige Glückwünsche

Anfang 1987 war die *alpha* 20 Jahre alt, ihr Chefredakteur erreichte das 65. Lebensjahr (11. 1.). Zahlreiche Freunde haben diese beiden Geburtstage zum Anlaß genommen, an gemeinsame Wege und Ziele zu erinnern, und ihre guten Wünsche auf vielerlei Art zum Ausdruck gebracht. Die Freude darüber verbindet, verpflichtet und regt zum Nachdenken an.
Auf diesem Wege sei allen herzlicher Dank gesagt.

Drei originelle Glückwünsche sollen die 54 000 *alpha*-Leser zum Knobeln anregen.

▲1▲ Die aus Hölzchen gelegte ALPHA-Figur ist durch Umlegen von a) 4 Hölzchen, b) 5 Hölzchen, c) 6 Hölzchen und d) 7 Hölzchen so abzuändern, daß jeweils 7 kongruente Quadrate entstehen.



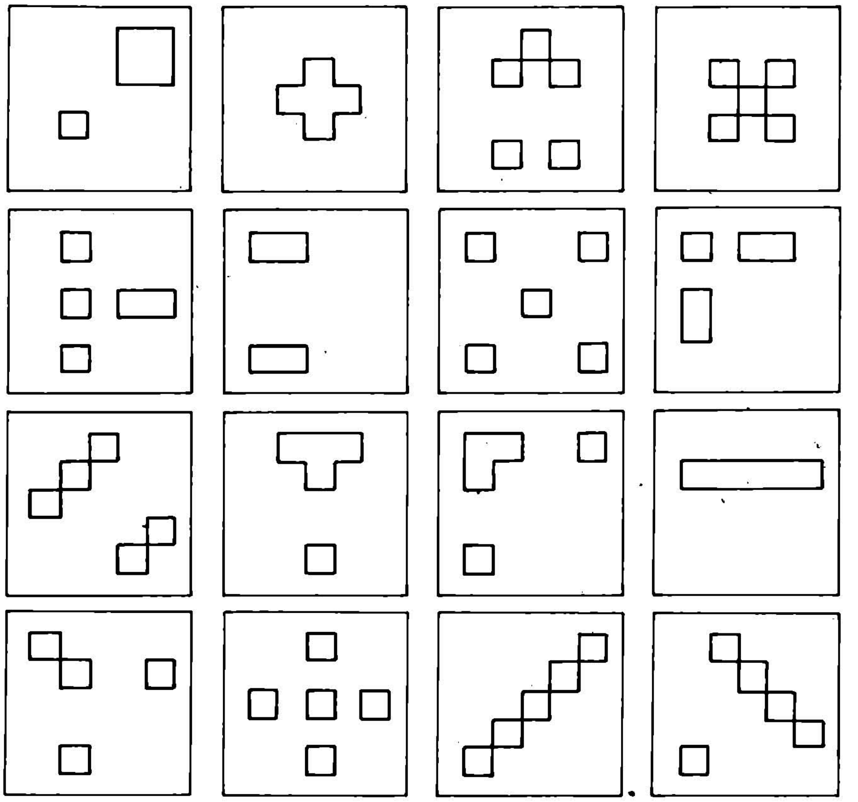
▲2▲ Ermittle alle nichttrivialen Lösungen des abgebildeten ALPHA-Gleichungssystems, d.h., bestimme alle Zahlen A, L, P und H (alle ungleich Null), die das Gleichungssystem erfüllen!

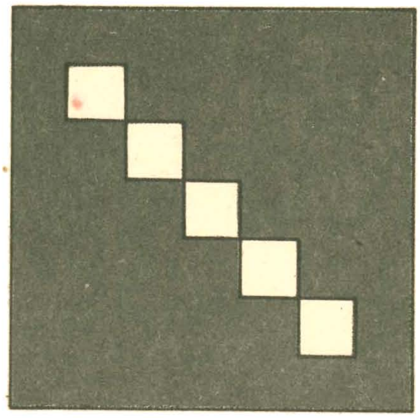
(1) $A + L + P - H - A = A$
(2) $A + L \cdot P - H - A = L$
(3) $A \cdot L \cdot P - H + A = P$
(4) $A + L \cdot P - H + A = H$
(5) $A - L - P + H + A = A$

Glückwunsch aus der „Leipziger Volkszeitung“, Autor: Dr. R. Mildner, Karl-Marx-Universität Leipzig

▲3▲ Zum 65. Geburtstag des Chefredakteurs der *alpha* sandte die langjährige Leserin, Frau *Susanne Noßke* aus Borna, ein magisches Geburtstagsquadrat:

7	14	18	21	5
16	25	2	9	13
4	8	11	20	22
15	17	24	3	6
23	1	10	12	19





Finde mit Hilfe von 16 Schablonen (sie sind stark verkleinert wiedergegeben) die 120 verschiedenen Zusammenstellungen von 5 Zahlen, deren Summe jeweils 65 beträgt!

Am 1. März 1987 übergab Oberstudienrat J. Lehmann, seit 13. Dezember 1945 im Schuldienst, seit 20 Jahren Chefredakteur der *alpha*, sein Amt an die Leipziger Dipl.-Lehrerin Gabriele Liebau (im Bild rechts). J. Lehmann wird weiterhin im Redaktionskollegium mitarbeiten und sicher seine reichen Erfahrungen auch als Rentner (11.1.1987) in Schrift und Wort noch viele Jahre weitergeben. Sein besonderer Dank gilt dem Redaktionskollegium und der umsichtigen Redaktionssekretärin Rosemarie Schubert (im Bild links), die 15 Jahre lang fleißig wirkte, insbesondere bei der Erstellung der oft nicht einfachen Manuskripte, dem umfangreichen Briefwechsel und bei der technischen Bewältigung der umfassenden organisatorisch-technischen Arbeiten für den *alpha*-Wettbewerb. Wir wünschen der Nachfolgerin für ihre neue Tätigkeit viel Freude und Erfolg.

Symmetrische Figuren

Eine Figur heißt drehsymmetrisch bezüglich eines Punktes M, wenn es Drehungen um M gibt, die die Figur auf sich abbilden. Gibt es einschließlich der identischen n derartige Drehungen um M, so heißt n der Grad der Drehsymmetrie (bezüglich M) (siehe auch *alpha* 4/85).

a) Bestimme den jeweiligen Grad der Drehsymmetrie!

b) Welche Figuren besitzen Symmetrieachsen?

c) Man kann sich das Muster im Bild 1 zu einer unbegrenzt fortgesetzten Parkettierung der Ebene vorstellen. Treten dann noch andere Drehsymmetriezentren mit möglicherweise sogar anderen Drehsymmetriepunkt auf?

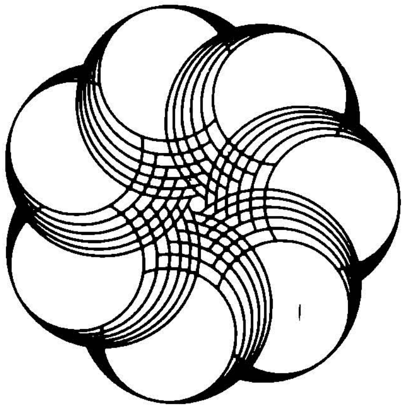


Bild 2

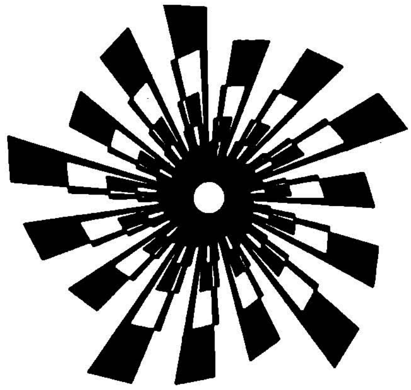


Bild 3

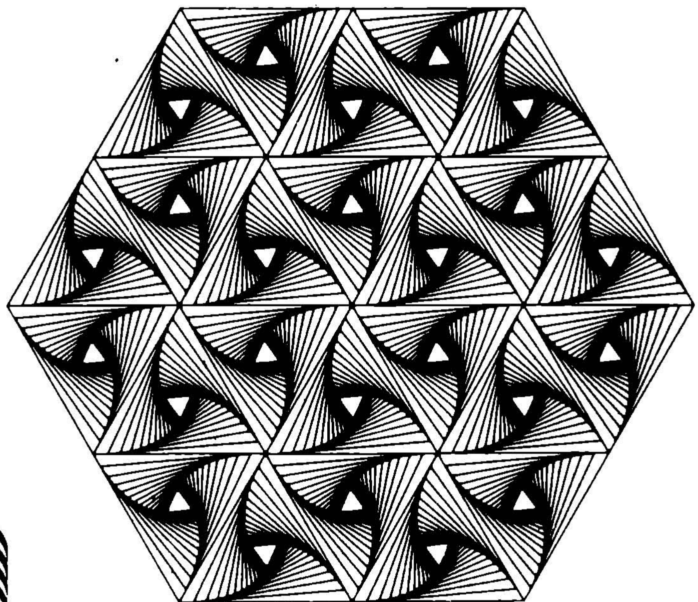


Bild 1

Bild 4

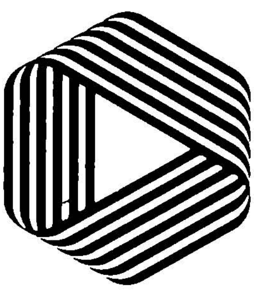


Bild 5

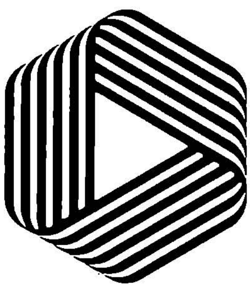


Bild 6

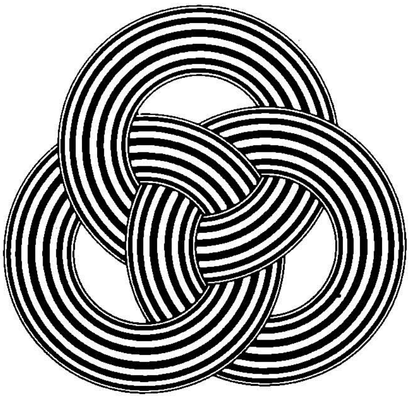


Bild 7

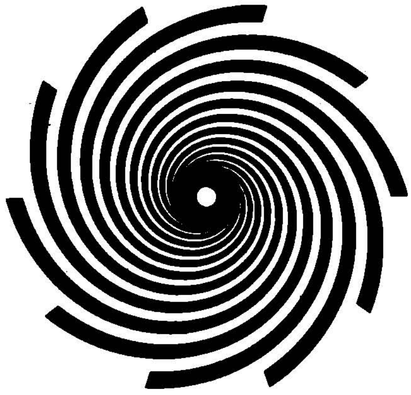
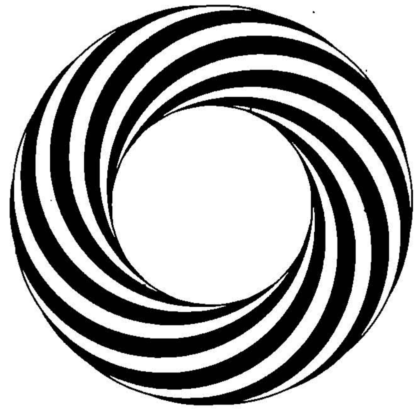


Bild 8



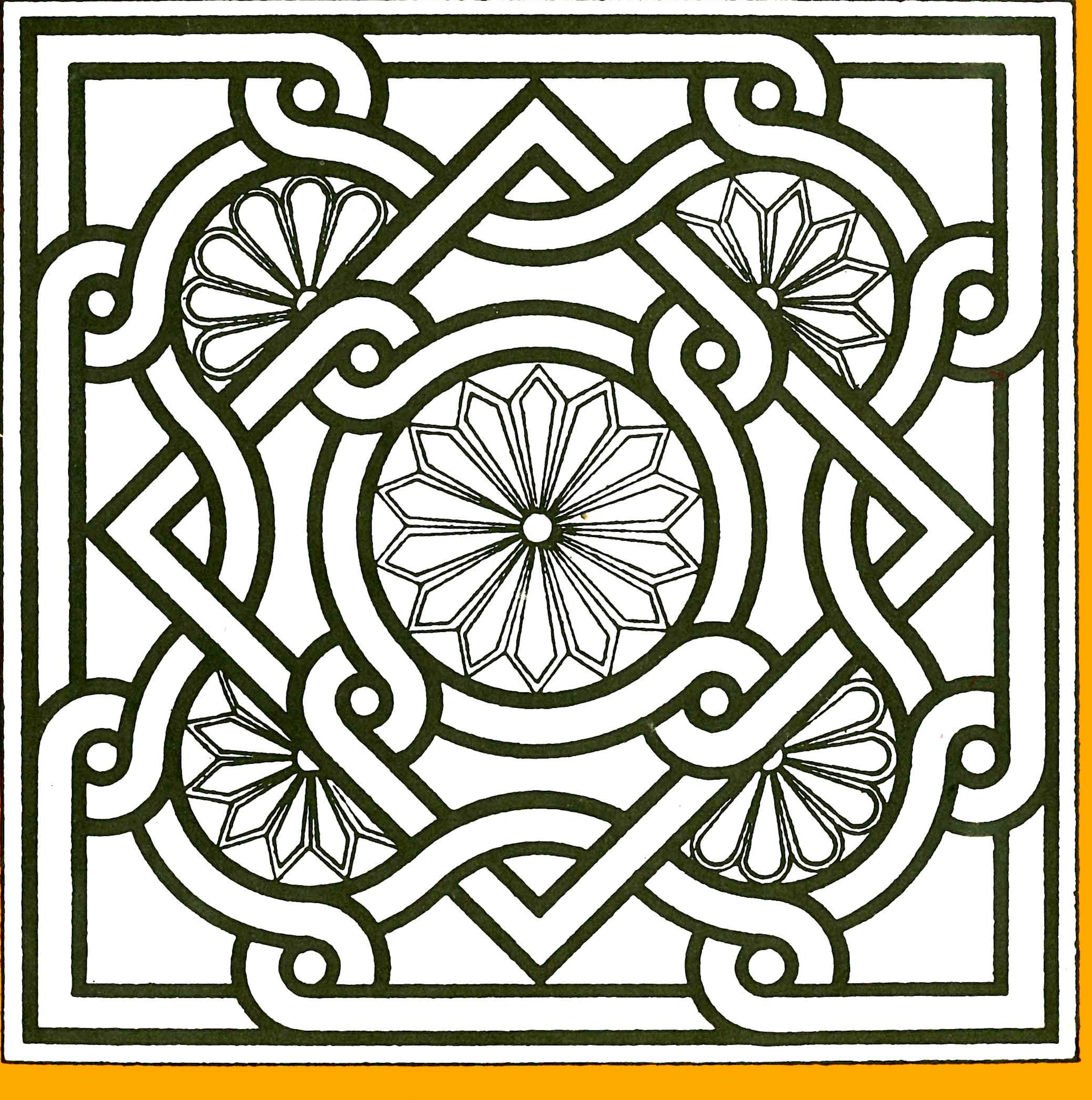
ISSN 002-6395 · alpha · Berlin · 21 (1987) 3 · Seiten 49 bis 72

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
21. Jahrgang 1987
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

4



Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027
Redaktion:
Gabriele Liebau (Chefredakteur)
Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Dr. rer. nat. W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. rer. nat. W. Schulz (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: St. Zopf, Leipzig, Eigenfotos (S. 75); de Laplace, Lithographie von Delpech (S. 77); K. F. Gauß, nach einem Pastellgemälde von Chr. Aug. Schwarz 1803 (S. 77); aus *Spaßvögel*, Kinderbuchverlag, P. Bauer (S. 83); ADN-ZB/Hirndorf (S. 85); Redaktion *practic*, Berlin (III. U.-Seite)
Briefmarken: H. Rüdiger, Berlin (S. 81); P. Schreiber, Stralsund (S. 88)
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage: Byzantinisches Ornament
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 13. April 1987
Auslieferungstermin: 11. August 1987

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

[1] bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben geeignet ab der angegebenen Klassenstufe

Würfeln ohne Würfel

Vorbemerkung: Im folgenden Artikel kommt der Begriff der Wahrscheinlichkeit vor. Für das Verständnis des Artikels ist es wichtig zu wissen, daß die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses gleich ist dem Quotienten aus der Anzahl der für das Ereignis günstigen Möglichkeiten und der Gesamtanzahl der Möglichkeiten; dabei muß man natürlich davon ausgehen können, daß es nur endlich viele Möglichkeiten gibt und jede dieser Möglichkeiten die gleiche Chance hat realisiert zu werden. Die Formulierung *auf gut Glück*, die wir nachfolgend oft verwenden, bedeutet gerade, daß allen Möglichkeiten die gleiche Chance eingeräumt wird.

Mit einem Spielwürfel, wie wir ihn alle kennen, ist es möglich, Zufallszahlen zu erzeugen. Man denkt dabei in erster Linie natürlich an die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6; und wenn der Würfel *gut* ist, dann werden diese Zahlen alle die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, nämlich $\frac{1}{6}$. Dies äußert sich in langen Reihen von Würfelexperimenten darin, daß die einzelnen Zahlen als Augenzahlen ungefähr mit der gleichen relativen Häufigkeit auftreten. (Die relative Häufigkeit z. B. der Augenzahl *1* ist gleich dem Quotienten aus der Anzahl der Würfe, in denen die *1* auftrat und der Gesamtanzahl der Würfe.)

Nun gehen wir einmal davon aus, daß uns kein Würfel zur Verfügung steht und wir dennoch solche Zufallszahlen erhalten wollen. Der einfachste Weg scheint darin zu bestehen, daß man – ohne zu würfeln – eine Liste von Zahlen aufschreibt, die nur die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 enthält; diese Liste möchte natürlich so aussehen, als wäre sie durch Würfeln entstanden. Doch die Sache ist gar nicht so einfach. Ein Fachmann auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung käme leicht dahinter, ob eine ihm vorgelegte Liste *echt* ist oder nicht. In einer Serie von Würfen mit einem Spielwürfel stecken nämlich – so paradox dies auch klingen mag – viele Gesetzmäßigkeiten. Es ist daher ganz lohnenswert, einmal eine Liste z. B. von 216 ($=6^3$) *echten* Würfelergebnissen und eine solche Liste ohne Würfeln aufzuschreiben und diese beiden Listen miteinander zu vergleichen. Bei 216 Würfen mit einem Spielwürfel erwartet man jede der Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 etwa 36mal; man kann auch damit rechnen, daß insgesamt etwa 36mal zwei gleiche Zahlen hintereinander stehen (!) – und dies muß sich etwa gleichmäßig auf die sechs Paare (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5) und (6, 6) verteilen. Und, um eine weitere Gesetzmäßigkeit anzudeuten, etwa 6mal werden in einer *echten* Liste drei gleiche Zahlen hintereinander stehen. Würde man allein dies alles beim Aufschreiben einer Liste von 216 Augenzahlen – ohne zu würfeln – berücksichtigen können?

Wir wollen uns hier mit *Ersatzwürfeln* beschäftigen, d. h., wir wollen einige Zufallsexperimente beschreiben, die 6 verschiedene Ausgänge haben können und die alle die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ besitzen.

Ersatzwürfel 1: In einer Urne – so nennt man üblicherweise in der Wahrscheinlichkeitsrechnung einen Behälter (Becher, Topf), in den man Kugeln hineinlegen und mischen kann – befinden sich fünf weiße Kugeln und eine schwarze Kugel. Man entnimmt *auf gut Glück* eine Kugel. Ist diese Kugel schwarz, so notiert man als Versuchsausgang *1*; ist sie weiß, so entnimmt man – ohne die gezogene Kugel zurückzulegen – neuerlich *auf gut Glück* eine Kugel. Ist die an zweiter Stelle gezogene Kugel schwarz, so notiert man als Versuchsausgang *2*; anderenfalls fährt man in der beschriebenen Weise fort.

In Bild 1 haben wir für die jeweiligen Ziehungen die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Ergebnisse angegeben; die Wahrscheinlichkeit eines *Weges* ergibt sich dann als Produkt der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten. Bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit des Auftretens des Versuchsausganges i bei dem oben beschriebenen Zufallsexperiment mit p_i, so erhalten wir also

$$p_1=\frac{1}{6}$$
$$p_2=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{6}$$
$$p_3=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$$
$$p_4=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$
$$p_5=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$
$$p_6=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{6}.$$

Somit handelt es sich bei diesem Zufallsexperiment tatsächlich um einen *Ersatzwürfel.*

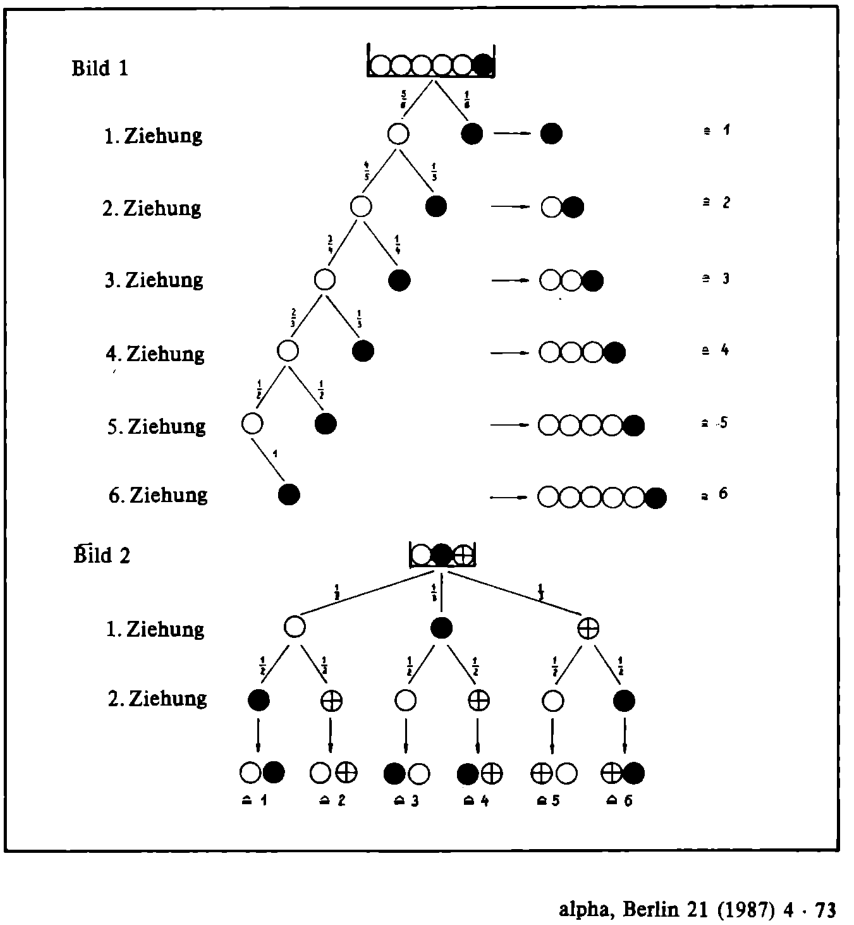
Ersatzwürfel 2: In einer Urne befinden sich drei Kugeln, eine weiße ○, eine schwarze ● und eine rote Kugel ⊕. Man entnimmt der Urne *auf gut Glück* nacheinander zwei Kugeln, wobei man die bei der ersten Entnahme gezogene Kugel vor der zweiten Kugelentnahme nicht zurücklegt. Den sechs möglichen Ergebnissen – vgl. Bild 2 – ordnen wir in eineindeutiger Weise die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 zu.

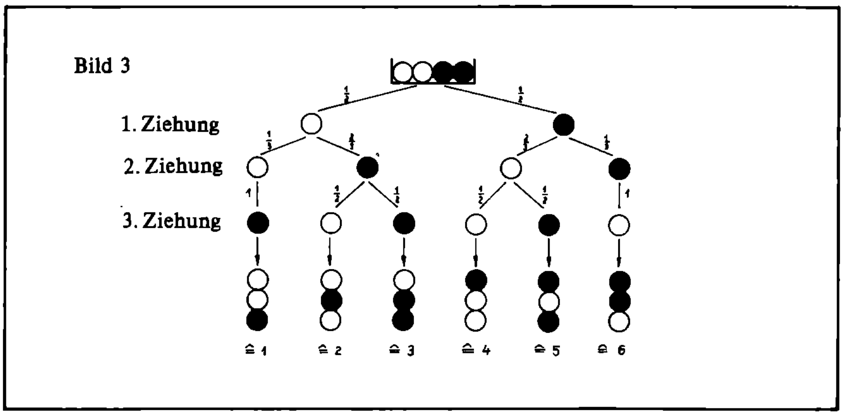
Für die Wahrscheinlichkeit des Auftretens des Ergebnisses mit der Nummer i ergibt sich – unabhängig von i – $(i=1,2,\ldots,6)$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

Es liegt also auch bei diesem Zufallsexperiment ein *Ersatzwürfel* vor.

Ersatzwürfel 3: In einer Urne befinden sich zwei weiße und zwei schwarze Kugeln.





Man entnimmt der Urne *auf gut Glück* nacheinander ohne Zurücklegen drei Kugeln. Die möglichen Ergebnisse lassen sich wiederum in eineindeutiger Weise den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 zuordnen; dies und die Wahrscheinlichkeiten p_i für das Auftreten des Ergebnisses mit der Nummer i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ lassen sich leicht aus Bild 3 ableiten.

$$p_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6} = p_6,$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = p_3 = p_4 = p_5.$$

Wir erhalten also auch hier, daß die Zahl i mit der Wahrscheinlichkeit

$$p_i = \frac{1}{6} \quad (i = 1, 2, \ldots, 6) \text{ auftritt,}$$

d. h., wir haben einen weiteren *Ersatzwürfel* vor uns.

(Wir bemerken am Rande, daß noch eine vierte Ziehung durchgeführt werden könnte. Da sich die Ergebnisse bei vier Ziehungen von denen nach drei Ziehungen nur dadurch unterscheiden, daß an letztere die einzige in der Urne noch vorhandene Kugel *angehängt* wird, würde sich bei vier Ziehungen also ebenfalls eine gleichmäßige Verteilung der Gesamtwahrscheinlichkeitsmasse 1 auf 6 Möglichkeiten ergeben.)

Es lassen sich ohne große Mühe noch weitere Zufallsexperimente angeben, bei denen 6 Ausgänge möglich sind und die alle die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. (So ist z. B. die gleichzeitige Entnahme von zwei Kugeln *auf gut Glück* aus einer Urne, die vier verschiedene Kugeln enthält, ein weiteres solches Zufallsexperiment.)

Wir wollen uns aber noch gewissen Verallgemeinerungen obiger Beispiele zuwenden, wobei es letztlich um die Frage geht, wie man eine gleichmäßige Verteilung (der Gesamtwahrscheinlichkeitsmasse 1) auf eine vorgegebene Anzahl N von Punkten (z. B. auf die Zahlen $1, 2, \ldots, N$) erzeugen kann. (In den obigen Beispielen war $N = 6$.)

Zunächst betrachten wir – im Anschluß an *Ersatzwürfel 3* – folgende Situation: In einer Urne befinden sich n weiße und n schwarze Kugeln; dabei ist n eine beliebige natürliche Zahl. Man entnimmt der Urne *auf gut Glück* nacheinander ohne Zurücklegen $2n - 1$ (oder $2n$) Kugeln. Es ist nicht schwer, sich davon zu überzeugen, daß es

$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$ verschiedene Ergebnisse gibt und daß diese alle die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. (Diese Wahrscheinlichkeit beträgt dann $\frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{n! \cdot n!}{(2n)!}$.)

Auf diese Weise kann man also gleichmäßige Verteilungen auf $\binom{2n}{n}$ Punkten herstellen. (Für $n = 2$ ergibt sich 6 – vgl. *Ersatzwürfel 3* –; für $n = 3$ ergibt sich 20, $n = 4$ führt auf 56.)

Nun ist es nicht wesentlich, daß die Anzahl der weißen Kugeln gleich der Anzahl der schwarzen Kugeln ist. Hat man m weiße Kugeln und n schwarze Kugeln, so entsteht durch $m + n - 1$ (oder auch $m + n$) Entnahmen – nacheinander, *auf gut Glück*, ohne Zurücklegen – eine gleichmäßige Verteilung auf $\binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m! \cdot n!}$ Punkten; die Wahrscheinlichkeit jedes Ergebnisses ist also gleich $\frac{1}{\binom{m+n}{m}}$.

Damit ist die oben formulierte Frage, wie man eine gleichmäßige Verteilung auf einer beliebig vorgegebenen Anzahl N von Punkten erzeugen kann, bereits vollständig beantwortet: Man wähle $n = 1$, $m = N - 1$; dann gilt $\binom{m+n}{m} = \binom{N-1+1}{N-1} = \binom{N}{1} = N$.

(Der *Ersatzwürfel 1* beinhaltet den Fall $N = 6$, $m = 5$, $n = 1$.)

Und noch ein letzter Schritt: Es ist auch nicht wesentlich, daß es nur zwei Sorten verschiedener Kugeln gibt. Hat man also n_1 Kugeln der Sorte S_1, n_2 Kugeln der Sorte S_2, …, n_k Kugeln der Sorte S_k (k ist irgendeine natürliche Zahl $\geqq 2$), so entsteht durch $n_1 + n_2 + \ldots + n_k - 1$ Entnahmen – nacheinander, *auf gut Glück*, ohne Zurücklegen – eine gleichmäßige Verteilung auf

$$\binom{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}{n_1, n_2, \ldots, n_k} := \frac{(n_1 + 5n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Punkten; die Wahrscheinlichkeit jedes Ergebnisses ist also gleich

$$\frac{1}{\binom{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}{n_1, n_2, \ldots, n_k}}.$$

Und hier können wir endlich auch unseren Ersatzwürfel 2 einordnen:

$k = 3, \quad n_1 = n_2 = n_3 = 1, \quad n_1 + n_2 + n_3 = 3,$

$\binom{3}{1, 1, 1} = 6.$

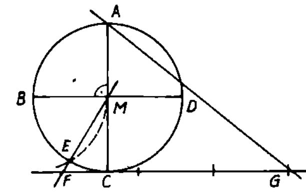
G. Maibaum/A. Płocki

Konstruktion einer Strecke $l \approx \pi$ mit Zirkel und Lineal

In *alpha* 2/84 wurde beschrieben, wie man mittels Zirkel und Lineal eine Strecke $l \approx \pi$ konstruieren kann. Dabei wurde der Bruch

$$\frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots \approx 3{,}141596\ldots = \pi$$

zugrunde gelegt. Eine andere Möglichkeit, diese Aufgabe zu lösen, ist folgende Konstruktion (siehe Bild):



Man zeichnet um M einen Kreis mit dem Radius $r = 1$ und in diesen Kreis zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser, die auf dem Kreis die Punkte A, B, C und D bestimmen. Im Punkt C wird die Tangente an den Kreis gelegt. Ein Kreisbogen um B mit dem Radius $r = 1$ schneidet den Kreis zwischen B und C im Punkt E. Eine durch M und E gelegte Gerade schneidet die Tangente im Punkt F. Von F beginnend wird auf der Tangente in Richtung C (und über C hinaus) eine Strecke $\overline{FG} = 3r$ abgetragen, d. h. auf der Tangente wird der Punkt G festgelegt. Jetzt kann man die Strecke $\overline{AG}$ zeichnen, wobei $\overline{AG} \approx \pi$ ist.

Aufgabe

Die Länge der Strecke $\overline{AG}$ ist als Dezimalbruch zu bestimmen.

Lösung

Die Punkte M, B und E sind Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge r. Aus dem Fakt, daß die Innenwinkel dieses Dreiecks 60° betragen, kann man die Größe des Winkels $\sphericalangle CMF = 30°$ ableiten. Demzufolge kann man das Dreieck MCF als „halbes gleichseitiges Dreieck" mit der Höhe $\overline{MC} = 1$ und der Seitenlänge $\overline{MF}$ $(= 2\overline{CF})$ auffassen. Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras kann man die Strecke $\overline{CF}$ berechnen:

$$\begin{aligned} \overline{CF}^2 + \overline{MC}^2 &= \overline{MF}^2 \\ \overline{CF}^2 + 1 &= 4\overline{CF}^2 \\ \frac{1}{3} &= \overline{CF}^2 \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} &= \overline{CF}. \end{aligned}$$

Somit beträgt in dem rechtwinkligen Dreieck ACG die eine Kathete $\overline{CG} = 3 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$ und die andere Kathete $\overline{AC} = 2$. Die Länge der Hypotenuse kann man nach dem Satz des Pythagoras berechnen:

$$\overline{AG} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CG}^2}$$

$$\overline{AG} = \sqrt{4 + \left(3 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2}$$

$$\overline{AG} = \sqrt{4 + 9 - 2\sqrt{3} + \frac{1}{3}}$$

$$\overline{AG} = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}$$

$$\overline{AG} = 3{,}1415333\ldots \approx \pi = 3{,}1415926\ldots$$

M. Wilde, Leipzig

Mathematik-Studium in der Ungarischen Volksrepublik

Mein Name ist Steffen Zopf. Zur Zeit arbeite ich als befristeter Assistent an der *Karl-Marx*-Universität in Leipzig. Von 1976 bis 1979 war ich Schüler der *Karl-Marx*-EOS Leipzig. Für Mathematik habe ich mich schon immer interessiert. So war ich seit der 6. Klasse Mitglied der Mathematischen Schülergesellschaft (MSG) Leipzig (wo ich jetzt auch selbst einen Zirkel leite) und in der 10. und 11. Klasse in einem Spezialzirkel bei Dr. H. Englisch. Auf Grund guter Ergebnisse in den Mathematikolympiaden nahm ich 1979 an der XXI. Internationalen Mathematikolympiade (IMO) in London teil.

1980 begann ich dann ein Mathematikstudium – in der Ungarischen Volksrepublik an der Universität *Attila József* in Szeged, gelegen im Länderdreieck Ungarn – Jugoslawien – Rumänien. Dazu kam es so: An der EOS wurden die besten Schüler, falls sie den Wunsch hatten, an die ABF *Walter Ulbricht* in Halle delegiert, um dort ein Vorbereitungsstudium von einem Jahr aufzunehmen.

Dort absolvierte ich also das Abitur und lernte auch – 10 Stunden in der Woche – Ungarisch. Heute hat das Vorbereitungsstudium eine Länge von zwei Jahren; man wird von der Oberschule zum Vorbereitungsstudium delegiert.

Nach einem einmonatigen Sprachkurs im August 1980 in Budapest begann das eigentliche Studium in Szeged. Mit der ungarischen Sprache hatten wir natürlich zu Anfang sehr große Schwierigkeiten – nicht so sehr auf dem Gebiet der Mathematik, als vielmehr in den anderen Fächern, wie Materialismus oder Physik, und im täglichen Gespräch mit unseren ungarischen Kommilitonen und Zimmerkameraden. Aber nach etwa einem Jahr konnten wir uns schon fast mühelos verständigen. In Szeged waren wir recht wenige Studenten aus der DDR: Erst zwei Jahre vor meinem Studienbeginn waren die ersten DDR-Studenten an die dortigen Universitäten gekommen (wissenschaftliche und medizinische Universität). Das hatte aber auch Vorteile. Dieses Studium, das ich 1985 erfolgreich abschloß, werde ich wohl nie vergessen.

Noch etwas zur Universität *Attila József* (die nach einem berühmten Nationaldichter Ungarns benannt ist): Sie gliedert sich in drei Fakultäten, von denen eine die naturwissenschaftliche Fakultät ist, an der auch das mathematische Institut *János Bolyai* arbeitet. Dessen Leiter war auch noch zu der Zeit, als ich studierte, Prof. *Béla Szökefalvi Nagy*, ein bekannter ungarischer Mathematiker. In Mathematik kann man zwei Studienrichtungen belegen: die des *Programmplaners* und die des *modellbildenden Mathematikers*. Beide Ausbildungen dauern fünf Jahre und sind überaus gründlich. Die Schwerpunkte liegen etwas anders als in der DDR, so nehmen Geometrie, Zahlentheorie und Kombinatorik einen wesentlichen Platz ein, wie man auch an den folgenden Aufgaben, die in ungarischen Mathematikzirkeln behandelt werden, sieht:

Aufgaben

▲1▲ **Seien** α, β und γ die Innenwinkel eines Dreiecks. Man beweise die folgende Ungleichung!

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma \leqq \frac{1}{8}$$

In welchen Dreiecken gilt das Gleichheitszeichen?

▲2▲ Für welche reellen Zahlen x gilt $x^{1-x-x^2} < 1$?

▲3▲ P sei ein Polyeder, dessen Seitenflächen regelmäßige Fünf- und Sechsecke sind. Dabei ist jedes Fünfeck nur von Sechsecken umgeben, während an die Sechsecke abwechselnd Fünf- und Sechsecke angrenzen. Man beweise, daß es nur einen solchen Polyeder gibt; dieser gleicht einem gewöhnlichen Fußball.

▲4▲ Was geschieht in Aufgabe 3, wenn wir statt Fünfecken regelmäßige Dreiecke und statt Sechsecken regelmäßige Vierecke betrachten?

Hinweis: Aufgabe 3 und 4 lassen sich sehr gut mit dem *Eulerschen Polyedersatz* lösen, wonach in einem (konvexen) Polyeder immer gilt: $e - k + f = 2$ (e: Anzahl der Ecken, k: Anzahl der Kanten; f: Anzahl der Seitenflächen).

▲5▲ Man beweise: Sind n und m ungerade natürliche Zahlen, dann sind $2^n + 1$ und $2^m + 1$ Teiler von $2^{n\cdot m} + 1$!

▲6▲ Es seien n Sorten von Buchstaben gegeben, von jeder Sorte genau zwei Stück. Wieviel verschiedene Wörter lassen sich daraus bilden, die nur aus zwei Buchstaben bestehen? Wie groß wird die Anzahl dieser Wörter, wenn sie alle aus drei Buchstaben bestehen?

Und nun noch eine fast klassische (und auch schwierige) Aufgabe, die mir aber im Studium viel Spaß bereitet hat:

▲7▲ Auf einem Ball sind insgesamt n Paare anwesend. An einem Tanz beteiligen sich alle Teilnehmer des Balls. Wieviele Möglichkeiten gibt es für diesen Tanz, bei dem keiner mit dem Partner tanzt, mit dem er auf den Ball gekommen ist?

St. Zopf

Studenten bei der Weinernte

Der Vier-Quadrate-Satz

Teil 2

Leonhard Euler

Die unbewiesenen zahlentheoretischen Behauptungen Fermats regten Leonhard Euler (1707 bis 1783, siehe *alpha*, Heft 2/1983) immer wieder an, sich mit ihnen zu beschäftigen. (Auf dem Gebiet der Zahlentheorie gilt Euler als der große Fortsetzer von Fermat.) Aus Eulers Korrespondenz mit Christian Goldbach (1690 bis 1764), einem ideenreichen Gelehrten mit großem mathematischen Verständnis, der erst als Akademie-Mitglied in Petersburg wirkte (wie auch Euler von 1727 bis 1741, und von 1766 bis 1783), seit 1728 aber im russischen Staatsdienst in Moskau tätig war, ist zu ersehen, daß Euler sich mehrere Jahrzehnte auch um den *Beweis des Vier-Quadrate-Satzes* bemühte. Erstmals schrieb er darüber am 4. Juni 1730 an Goldbach. Er hätte die *Opera* Fermats gelesen und wäre dabei auf den Vier-Quadrate-Satz gestoßen. Drei Wochen später mußte er bekennen, daß es ihm nicht gelungen ist, den Satz zu beweisen.

Daß Euler sich wiederholt damit befaßte, zeigen auch die im Leningrader Akademie-Archiv vorhandenen Notizbücher Eulers. Unter den Notizen, die Euler in den Jahren 1736 bis 1740 geschrieben hatte, befindet sich neben anderen sich auf den Vier-Quadrate-Satz beziehende Eintragungen die folgende Produktformel:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)\\ &= (ap+bq+cr+ds)^2\\ &+ (bp-aq+dr+cs)^2\\ &+ (cp-dq-ar+bs)^2\\ &+ (dp+cq-br-as)^2,\end{aligned}$$

die Euler 1748 und 1749 auch in Briefen an Goldbach aufschrieb. Die später als *Eulersche Identität* bezeichnete Formel zeigt, daß ein Produkt von als Summe von vier Quadraten darstellbaren Zahlen selbst wieder als eine solche Summe darstellbar ist. Nun ist jede natürliche Zahl > 1, wenn sie nicht selbst Primzahl ist, ein Produkt von Primzahlen. Es genügt also, den Vier-Quadrate-Satz für ungerade Primzahlen zu beweisen! (Für die einzige gerade Primzahl 2 ist er offensichtlich:
$2 = 0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2$.)

Am 12. April 1749 schrieb Euler (der seit 1741 in Berlin wirkte) an Goldbach: „Dass eine jede Zahl eine summa quatuor vel pauciorum quadratorum (Summe von vier oder weniger Quadraten) sey, kann ich beynahe beweisen; es fehlt mir nehmlich nur noch an einer Proposition (Satz), welche dem ersten Ansehen nach keine Schwierigkeit zu haben scheint.

Dieses Zeichen $\boxed{4}$ bedeute eine jegliche Zahl, welche eine Summe von 4 oder weniger quadratis (Quadratzahlen) ist, so sind meine Sätze folgende

I. (Satz 8): Si $a = \boxed{4}$ et $b = \boxed{4}$,
erit quoque $ab = \boxed{4}$.
(Wenn $a = \boxed{4}$ und $b = \boxed{4}$,
so wird auch $ab = \boxed{4}$.)

Hiervon ist der Beweis bündig ...“, denn er folgt sofort aus der Eulerschen Identität.

„II. (Satz 9): Si $ab = \boxed{4}$ et $a = \boxed{4}$,
erit etiam $b = \boxed{4}$.
(Wenn $ab = \boxed{4}$ und $a = \boxed{4}$,
so wird auch $b = \boxed{4}$.)

Dieses ist der Satz, worauf die ganze Sache beruhet, und den ich noch nicht beweisen kann.“

Der Satz 9 bedeutet: Ist die Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen teilbar durch eine Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen, dann ist auch der Quotient eine Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen. Aus Satz 8 folgt nur, daß der Quotient eine Summe von vier Quadraten rationaler Zahlen ist. Ist nämlich
$n = ab = c^2 + d^2 + e^2 + f^2$ und
$a = p^2 + q^2 + r^2 + s^2$,
dann gibt es (nach Satz 8) ganze Zahlen
u, v, w, x mit
$n \cdot a = u^2 + v^2 + w^2 + x^2$
und es wird in der Tat

$$b = \frac{n}{a} = \frac{na}{a^2} = \left(\frac{u}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{a}\right)^2 + \left(\frac{w}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2.$$

Entscheidend ist also im Satz 9 die Aussage, daß es sich wieder um Quadrate *ganzer* Zahlen handelt!

Aus dem Satz 9 folgt der

Satz 10: Wenn $ab = \boxed{4}$ und $a \neq \boxed{4}$,
dann auch $b \neq \boxed{4}$.
Wäre nämlich $b = \boxed{4}$,
so wegen $ab = \boxed{4}$ nach Satz 9
auch $\frac{ab}{b} = a = \boxed{4}$,
im Widerspruch zur Voraussetzung.

Doch der Satz 9 (und damit der Satz 10) blieb bei Euler unbewiesen. Klar sind nur die folgenden Aussagen, worin $\boxed{4}_B$ eine Zahl bedeutet, die eine Summe von höchstens vier Quadraten von Brüchen ist.

Satz 11: Wenn $ab = \boxed{4}_B$ und $a = \boxed{4}_B$,
so $b = \boxed{4}_B$.

Satz 12: Wenn $ab = \boxed{4}_B$ und $a \neq \boxed{4}_B$,
so $b \neq \boxed{4}_B$.

Am 4. Dezember 1751 beendete Euler die Diskussion mit Goldbach über den Vier-Quadrate-Satz: „Ich habe rigorosissime (streng) bewiesen, daß wenn N ein numerus integer (eine ganze Zahl) ist, allzeit sein müsse $N = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$, wo aber A, B, C, D sowohl numeros fractos als integros (sowohl gebrochene als auch ganze Zahlen) andeuten“ (das ist der Vier-Quadrate-Satz C). Hierüber hatte Euler bereits am 17. Juni 1751 in der Berliner Akademie der Wissenschaften vorgetragen. Eine Abhandlung mit dem Beweis des Vier-Quadrate-Satzes C erschien gedruckt erst 1760 in einer Schrift der Petersburger Akademie. Euler bewies darin den folgenden

Satz 13: Ist p eine gegebene Primzahl, so gibt es ganze Zahlen a, b derart, daß $1 + a^2 + b^2$ durch p teilbar ist.

Der Beweis des Vier-Quadrate-Satzes C ergibt sich daraus folgendermaßen. Es genügt zu zeigen, daß sich jede ungerade Primzahl als Summe von vier Quadraten gebrochener Zahlen darstellen läßt. Wäre dies falsch, so gäbe es Primzahlen, die sich nicht als Summe von vier Quadraten von Brüchen darstellen lassen.

Es sei p die kleinste unter diesen Primzahlen. Nach Satz 13 gibt es ganze Zahlen a, b derart, daß $1 + a^2 + b^2$ durch p teilbar ist. Dann gibt es auch ganze Zahlen a_0, b_0 mit
$|a_0| < \frac{p}{2}$, $|b_0| < \frac{p}{2}$ so, daß $n = 1 + a_0^2 + b_0^2$
durch p teilbar ist. (Ist nämlich r der Rest von a bei der Division durch p, so setze $a_0 = r$, falls
$r < \frac{p}{2}$ und $a_0 = r - p$, falls $r > \frac{p}{2}$.
Ist s der Rest von b bei der Division durch p, so setze $b_0 = s$, falls $s > \frac{p}{2}$
und $b_0 = s - p$, falls $s > \frac{p}{2}$.)
Aus $1 < \frac{p^2}{4}$, $a_0^2 < \frac{p^2}{4}$, $b_0^2 < \frac{p^2}{4}$
folgt aber $n < 3 \cdot \frac{p^2}{4}$,
also $\frac{n}{p} < \frac{3p}{4} < p$.

Nach der Minimalwahl von p (als kleinster Primzahl mit $p \neq \boxed{4}_B$) muß somit die Zahl $\frac{n}{p}$ Summe von vier Quadraten gebrochener Zahlen sein. Dies ist ein Widerspruch. Denn aus

$$\frac{n}{p} \cdot p = n = 0^2 + 1^2 + a_0^2 + b_0^2 = \boxed{4} = \boxed{4}_B \text{ und } p \neq \boxed{4}_B$$

müßte nach Satz 12 $\frac{n}{p} \neq \boxed{4}_B$ folgen.

Mit Satz 10 würde analog der Beweis des Vier-Quadrate-Satzes A zu führen sein. Es gelang Euler jedoch nicht, den Satz 10 zu begründen.

Joseph Louis Lagrange

Eulers Arbeit las einige Jahre nach seiner Ankunft in Berlin Joseph Louis Lagrange, der seit 1768 auch zahlentheoretische Forschungen betrieb. Im August 1768 hatte Lagrange an d'Alembert geschrieben: „Ich habe mich in den vergangenen Tagen, um ein wenig Abwechslung in meine Studien zu bringen, mit einigen Problemen der Zahlentheorie beschäftigt und ich versichere Ihnen, daß ich weit mehr Schwierigkeiten als erwartet gefunden habe." Anknüpfend an Eulers Ideen (in dessen Abhandlung von 1760) konnte Lagrange bald ein schwieriges Problem lösen. Es gelang ihm, jene Lücke beim Beweis des Vier-Quadrate-Satzes A zu schließen, die Euler offen gelassen hatte. Er bewies den

Satz 14: Ist eine Summe $a = r^2 + s^2 + t^2 + u^2$ von vier Quadraten ganzer Zahlen teilbar durch eine Primzahl $p > \sqrt{a}$, dann ist p selbst Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen, und folgerte daraus statt des Satzes 10 den folgenden

Satz 15: Jede natürliche Zahl, welche die Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen teilt, die teilerfremd zueinander sind, ist selbst Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen.

Aus Satz 15 folgt nun mit Eulers Satz 13 leicht der Vier-Quadrate-Satz A. Jede Primzahl teilt nach Satz 13 eine Summe $1 + a^2 + b^2$, allgemeiner also eine Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen, die teilerfremd zueinander sind; sie ist somit nach Satz 15 selbst die Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen. Lagranges Abhandlung darüber (in französischer Sprache, mit dem Titel *Beweis eines arithmetischen Theorems*) erschien im Jahre 1772 in den Memoiren der Berliner Akademie der Wissenschaften. Diese Publikation muß Euler sehr beeindruckt haben. Bereits am 21. September desselben Jahres reichte er bei der Petersburger Akademie eine Arbeit mit dem Titel *Neuer Beweis für die Zerlegung der Zahlen in Quadrate* ein (in lateinischer Sprache). Er zog sie aber 1773 wieder zurück, um sie bei einer Leipziger Zeitschrift zur Veröffentlichung einzusenden, wo sie dann noch im selben Jahr erschien. (Dies wäre so schnell bei der Petersburger Akademie offenbar nicht möglich gewesen. Euler reichte nämlich eine andere Fassung dieser Arbeit im März 1774 bei der Petersburger Akademie ein. In deren Schriften erschien sie erst im Jahr 1780!) In dieser Arbeit wiederholte Euler kurz den von Lagrange gegebenen Beweis, um nun selbst einen einfacheren zu geben.

Ich glaube, daß Newton Euler überlegen ist, ich stelle aber Lagrange über Newton.

G. Monge

Studieren Sie Euler, wenn Sie ein Mathematiker werden wollen, und bemühen Sie sich, selbst die Fragen aufzulösen, die er sich stellt.

J. L. Lagrange

Eine Biographie Lagranges ist im Sammelband *Biographien bedeutender Mathematiker*, herausgegeben von H. Wußing und W. Arnold, Volk und Wissen Verlag, enthalten.

Carl Friedrich Gauß

Am 10. Juli 1796 schrieb der 19jährige Göttinger Student Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855) in sein mathematisches Tagebuch: „Heureka! (Ich hab's gefunden!) Zahl = △ + △ + △."

Die Darstellung von natürlichen Zahlen durch Rechensteine in Form von gleichseitigen Dreiecken

```
                        0
              0        0 0
     0       0 0      0 0 0
0   0 0     0 0 0    0 0 0 0
```

gehörte zur alten pythagoreischen Zahlentheorie. Man erhält die Dreieckszahlen 1, 3, 6, 10, ...

Gauß war erstmalig der Beweis dafür gelungen, daß sich jede natürliche Zahl als Summe von drei Dreieckszahlen darstellen läßt. In seinem im Sommer 1801 erschienenen Buch *Arithmetische Untersuchungen* (in lateinischer Sprache), mit dem er in strengem Sinne die höhere Zahlentheorie begründete, gab er einen tiefliegenden Beweis des Drei-Quadrate-Satzes (Satz 2), woraus er leicht den Satz über die Darstellung durch Dreieckszahlen und den Vier-Quadrate-Satz A folgern konnte.

Carl Gustav Jacob Jacobi

Euler hatte noch eine andere Idee, den Vier-Quadrate-Satz A zu beweisen. Er setzte mit einer Unbestimmten x

$P(x) = 1 + x + x^4 + x^9 + x^{16} + x^{25} + \dots$

und entwickelte $(P(x))^4$ wieder in eine Potenzreihe:

$(P(x))^4 = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 \dots .$

Hierin ist aber der Koeffizient von x^n gerade die Anzahl, wie oft n als Summe von vier Quadratzahlen darstellbar ist.

Um den Vier-Quadrate-Satz A zu beweisen, ist somit nachzuweisen, daß alle Koeffizienten a, b, c, d, ... größer als 0 sind. Diese Beweismethode wurde zuerst vollständig von Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 bis 1851), den seine Zeitgenossen bewundernd den *Euler des 19. Jahrhunderts* nannten (vgl. *alpha*, Heft 1/1980), in seiner 1829 erschienenen Monographie über sogenannte elliptische Funktionen ausgeführt. Aus Formeln, die seiner Theorie dieser Funktionen entstammen, konnte Jacobi den folgenden Satz beweisen.

Satz 16: Bezeichnet $A(n)$ die Anzahl der geordneten 4-Tupel (w, x, y, z) ganzer Zahlen mit

$$n = w^2 + x^2 + y^2 + z^2,$$

wobei n eine gegebene natürliche Zahl ist, so gilt:

Ist n gerade, so ist $A(n)$ 24mal die Summe aller ungeraden Teiler von n. Ist n ungerade, so ist $A(n)$ 8mal die Summe aller Teiler von n.

Beispiele:

1) $n = 7$, $A(7) = 8(1 + 7) = 64$

Diese 64 Zerlegungen der 7 in vier Quadrate ganzer Zahlen entstehen durch Veränderungen des Vorzeichens und Vertauschen der Summanden:

$7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$
$= (-1)^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$
$= 1^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 = \dots$ usw.

2) $n = 6$, $A(6) = 24(1 + 3) = 96$

$6 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2$
$= 0^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + 1^2 = \dots$ usw.

Im Jahre 1834 konnte Jacobi auch einen rein zahlentheoretischen Beweis (ohne Bezug auf Formeln über elliptische Funktionen) des Satzes 16 geben.

Zahlentheorie

Die genaue Untersuchung der Geschichte des Vier-Quadrate-Satzes zeigt, wie eng er mit der Geschichte der Zahlentheorie, des *reinsten und mathematischsten Gebietes der Mathematik* (K. Hensel), verbunden ist. Gauß' Beweis des Drei-Quadrate-Satzes beruhte auf der Theorie sogenannter quadratischer Formen (mit denen sich auch Euler, Lagrange, Legendre beschäftigt hatten), aus der sich die algebraische Zahlentheorie entwickelte. Mit Jacobis Beweis (und einem Resultat von Dirichlet) wurde de facto die analytische Zahlentheorie eingeleitet. Aus den Bemühungen um den Beweis einer schon 1770 von Waring formulierten (den Satz von Lagrange verallgemeinernden) Vermutung (aber auch anderer, wie der Goldbachschen Vermutungen) entstand die additive Zahlentheorie.

„Immer aber wird", wie schon Jacobi am 5. August 1847 in der Berliner Akademie der Wissenschaften sagte, „dem Diophant der Ruhm bleiben, den tiefer liegenden Eigenschaften und Beziehungen der Zahlen, welche durch die schönen Forschungen der neueren Mathematik erschlossen worden, den ersten Anstoß gegeben zu haben."

H. Pieper

Mit und ohne Taschenrechner

Martina, Susan und Mario nehmen an einer Mathematikarbeitsgemeinschaft ihrer Schule teil. Heute üben sie weiter den Gebrauch des Taschenrechners SR 1. Sie suchen und diskutieren verschiedene Rechenabläufe:

Beispiel 1

$$\frac{2}{3-\sqrt[3]{25}}$$

Um den jeweiligen Rechenablauf zu notieren, wurde vereinbart, daß alles, was sie in den Rechner eingeben, in $\boxed{\text{Eingabekästchen}}$ geschrieben wird, daß eine einzugebende Ziffernfolge in nur ein Eingabekästchen notiert werden kann und daß für eine nachträgliche Kontrolle Zahlenwerte der Anzeigetafel des Schulrechners SR 1 eingefügt werden dürfen. Sie stehen aber dann nicht im Eingabekästchen.

Martina rechnet und notiert:

$\boxed{3}\ \boxed{-}\ \boxed{25}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{1/x}\ \boxed{=}\nearrow 0{,}07598$

$\boxed{1/x}\nearrow 13{,}161358$

$\boxed{x}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\nearrow 26{,}322717.$

Mario sagt: „Ich kann den Nenner des Bruches auch zuvor rational machen und danach erst den Rechner verwenden.

Da die Formel

$$a^3-b^3=(a-b)\,(a^2+ab+b^2)$$

gilt, erweitere ich den Bruch mit

$$9+3\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{625}\,.$$

Ich erhalte so

$$\frac{2(9+3\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{625})}{(3-\sqrt[3]{25})\,(9+3\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{625})}$$
$$=9+3\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{625}\,.\text{“}$$

Marios Rechenablauf ist darum:

$\boxed{625}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{1/x}\ \boxed{+}\nearrow 8{,}54988$

$\boxed{\sqrt{\ }}\nearrow 2{,}9240178$

$\boxed{x}\ \boxed{3}\ \boxed{+}\nearrow 17{,}321933$

$\boxed{9}\ \boxed{=}\nearrow 26{,}321933.$

(Mario überlegte sich noch, daß $\sqrt[3]{25}=\sqrt{\sqrt[3]{625}}$ ist.)

Martina ist über die voneinander abweichenden Ergebnisse höchst verwundert. Sie untersucht folgenden Rechenablauf:

$\boxed{25}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{1/x}\ \boxed{=}\nearrow 2{,}92402$

$\boxed{x\to M}\ \boxed{x}\ \boxed{3}\ \boxed{+}\ \boxed{MR}\ \boxed{x^2}\nearrow 8{,}549893$

$\boxed{+}\nearrow 17{,}321953\ \boxed{9}\ \boxed{=}\nearrow 26{,}321953$

Susan meint: „Die Abweichungen entstehen durch die unterschiedliche Wurzelberechnung.“

Die Ergebnisse der vier Grundrechenoperationen $\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{\times}$, $\boxed{\div}$ liefert der SR 1 auf neun Stellen. Davon werden bei Ergebnisausgabe in Exponentendarstellung höchstens fünf angezeigt. Der Rechner hat aber intern in diesen Fällen die maximale Gesamtzahl Stellen zur Verfügung. Beim Arbeiten mit der Taste $\boxed{y^x}$ ist die Genauigkeit jedoch geringer. Es können mindestens fünf Ziffern bei entsprechend genauen Eingangswerten als gültig angesehen werden. Größere Genauigkeit bedarf hier einer Kontrolle.

Bei $\boxed{25}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{1/x}\ \boxed{=}\nearrow 2{,}92402$ sind es sechs zuverlässige Ziffern; denn

$\boxed{2{,}924017}\ \boxed{x}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\nearrow 24{,}999981$ und

$\boxed{2{,}924018}\ \boxed{x}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\nearrow 25{,}000007.$

Bildet man aber $3-2{,}92402$ (vgl. Martinas 1. Lösung!), so kommt es mit 0,07598 zu einer Verminderung der Anzahl von wesentlichen und zuverlässigen Ziffern auf vier.

Durch das Rationalmachen des Nenners vermeidet Mario diese Verarmung der Anzahl der wesentlichen und zuverlässigen Ziffern. Aufgrund der Rechnung kann er sechs wesentliche zuverlässige Ziffern erwarten. Er muß dies aber überprüfen. Martinas zweites Ergebnis ist nicht so genau wie das von Mario, aber genauer als ihr erstes.

Beispiel 2

$$6\sqrt{\frac{3}{2}-\sqrt{2}}+\sqrt{43+30\sqrt{2}}$$

a) Der numerische Wert ist mit einem Taschenrechner SR 1 zu bestimmen!

b) Wie kann man bei dieser Aufgabe ohne Hilfsmittel (Tafel, Taschenrechner, Rechenstab o. dgl.) den numerischen Wert bestimmen?

Lösung:

a) Man kann folgendermaßen verfahren:

$\boxed{43}\ \boxed{+}\ \boxed{30}\ \boxed{x}\ \boxed{2}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}\nearrow 85{,}426407$

$\boxed{\sqrt{\ }}\nearrow 9{,}2426407\ \ \boxed{x\to M}$

$\boxed{1{,}5}\ \boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}\nearrow 8{,}5786-02$

$\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{x}\ \boxed{6}\ \boxed{+}\ \boxed{MR}\ \boxed{=}\nearrow 11.$

Dieser Wert stimmt mit dem exakten überein.

b) Man erhält durch Umformung der Aufgabe

$$\sqrt{54-36\sqrt{2}}+\sqrt{43+30\sqrt{2}}$$
$$=\sqrt{(6-3\sqrt{2})^2}+\sqrt{(5+3\sqrt{2})^2}=11.$$

Bekanntlich ist $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl, deren Dezimaldarstellung ein unendlicher nichtperiodischer Dezimalbruch ist. Der SR 1 bricht die Rechnung nach der neunten Ziffer ab und zeigt einen aus acht Ziffern bestehenden gerundeten Näherungswert an. So steht nach der Tastenfolge $\boxed{2}\ \boxed{\sqrt{\ }}$ im Rechenwerk des SR 1 der Wert 1,41421356, angezeigt wird aber der Wert 1,4142136. Man kann die in der letzten Stelle des Rechenwerks stehende Ziffer durch den folgenden Rechenablauf abfragen:

$\boxed{2}\ \boxed{\sqrt{\ }}\nearrow 1{,}4142136$

$\boxed{-}\ \boxed{1{,}4142136}\ \boxed{=}\nearrow -4,\ -08.$

Im Rechenwerk erfolgte die Differenzbildung

$1{,}41421356-1{,}4142136=-0{,}00000004.$

Die folgende Überlegung zeigt das Bestehen der Ungleichung

$1{,}41421356<\sqrt{2}\,.$

Beim Rechenablauf $\boxed{2}\ \boxed{\sqrt{\ }}\nearrow 1{,}4142136$

$\boxed{x^2}\nearrow 2\ \boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\nearrow -1,\ -08$

wird nicht der angezeigte Wert 1,4142136 quadriert, sondern der im Rechenwerk stehende ungerundete Wert 1,41421356. Die Differenzbildung zeigt, das Quadrat ist kleiner als 2.

Dagegen ist beim Rechenablauf

$\boxed{1{,}4142136}\ \boxed{x^2}\nearrow 2{,}0000001$

das Quadrat größer als 2. Man beachte, der aufgerundete Wert 1,4142136 steht bei diesem Rechenablauf im Eingabekästchen!

Mit einem Trick kann man eine Ziffer in die letzte Position des Rechenwerkes bringen: Man addiert und benutzt zur Eingabe die Exponentendarstellung. Wir wissen bereits, daß nach $\boxed{2}\ \boxed{\sqrt{\ }}$ im Rechenwerk des SR 1 1,41421356 steht und also nach Addition von 0,00000001 (Exponentendarstellung: $\nearrow 1,\ -08$) der im Rechenwerk stehende Wert 1,41421357 ist. Dieser Wert ist größer als $\sqrt{2}$. Dies kontrollieren wir mit dem Rechenablauf

$\boxed{2}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{+}\ \boxed{EEX}\ \boxed{+/-}\ \boxed{8}$

$\boxed{=}\ \boxed{x^2}\ \boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\nearrow 2,\ -08.$

Damit folgt $1{,}41421357^2>2$ und es ist gezeigt, daß $\sqrt{2}<1{,}41421357$ ist.

Beispiel 3

Man bestätige mit dem SR 1, daß

$1{,}73205080<\sqrt{3}<1{,}73205081$ ist!

Wir rechnen

$\boxed{3}\ \boxed{\sqrt{\ }}\nearrow 1{,}7320508$

$\boxed{-}\ \boxed{1{,}7320508}\ \boxed{=}\nearrow 0$

(Schlußfolgerung: Auf 8 folgt 0.)

$\boxed{3}\ \boxed{\sqrt{\ }}\nearrow 1{,}7320508$

$\boxed{x^2}\nearrow 3\ \boxed{-}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\nearrow -3,\ -08$

(Schlußfolgerung: $1{,}73205080^2<3$ und also $1{,}73205080<\sqrt{3}$.)

$\boxed{3}\ \boxed{\sqrt{\ }}\nearrow 1{,}7320508\ \boxed{+}\ \boxed{EEX}\ \boxed{+/-}$

$\boxed{8}\nearrow 1,\ -08\ \boxed{=}\ \boxed{x^2}\ \boxed{-}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\nearrow 0$

(Schlußfolgerung: Mit Hilfe des SR 1 kann so nur festgestellt werden, daß 1,73205081 eine bessere Näherung für $\sqrt{3}$ ist als 1,73205080.)

Da $\sqrt{3}=\frac{1}{5}\sqrt{75}$,

folgt aus dem Rechenablauf

$\boxed{75}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{+}\ \boxed{5}\ \boxed{EEX}\ \boxed{+/-}\ \boxed{8}$

$\boxed{=}\nearrow 8{,}6602541\ \boxed{x^2}\nearrow 75{,}000001$

$\boxed{-}\ \boxed{75}\ \boxed{=}\nearrow 0{,}0000007$

und weil $\frac{1}{25}\cdot 75{,}0000007>3$ ist,

daß $\sqrt{3}<1{,}73205081$ gilt.

Somit gelten auch die obigen Schranken.

Beispiel 4

Gegeben ist $x = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Mit dem SR 1 ist y numerisch zu berechnen, wenn

$y = 3^{24}\left(\frac{1}{99} - x\left(x - \frac{18}{55}\sqrt{5}\right)\right)$ ist.

Lösung:

$\boxed{5}\,\boxed{\sqrt{}}\,\boxed{\div}\,\boxed{3}\,\boxed{-}\nearrow 7{,}4535\ -01$

$\boxed{x\to M}\,\boxed{18}\,\boxed{\div}\,\boxed{55}\,\boxed{\times}\,\boxed{5}\,\boxed{\sqrt{}}$

$\boxed{=}\nearrow 1{,}3551\ -02\ \boxed{\times}\,\boxed{MR}\,\boxed{+/-}$

$\boxed{+}\,\boxed{99}\,\boxed{1/x}\,\boxed{=}\nearrow -6,\ -10$

$\boxed{\times}\,\boxed{3}\,\boxed{y^x}\,\boxed{24}\,\boxed{=}\nearrow -169{,}4574.$

Es ist aber

$$\frac{1}{99} - x^2 + \frac{18\sqrt{5}}{55}x = \frac{1}{99} - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \frac{18\sqrt{5}}{55}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{1}{99} - \frac{5}{9} + \frac{6}{11} = \frac{1-55+54}{99} = 0,$$

und somit ist $y = 3^{24}\cdot 0 = 0$.

Das Rechnerergebnis ist völlig falsch.

Mit dem Rechner SR 1 ist

$\boxed{6}\,\boxed{\div}\,\boxed{11}\,\boxed{-}\,\boxed{5}\,\boxed{\div}\,\boxed{9}\,\boxed{+}\,\boxed{99}$

$\boxed{1/x}\,\boxed{=}\nearrow -9,\ -10$ bzw.

$\boxed{99}\,\boxed{1/x}\,\boxed{-}\,\boxed{5}\,\boxed{\div}\,\boxed{9}\,\boxed{+}\,\boxed{6}$

$\boxed{\div}\,\boxed{11}\,\boxed{=}\nearrow -1,\ -09,$

diese Ergebnisse weichen nur wenig von dem exakten Wert 0 ab. Durch Multiplikation mit der großen Zahl 3^{24} ergibt sich die Rechnerkatastrophe.

Beispiel 5

Mit Hilfe des Schulrechners SR 1 bestimme man auf vier wesentliche und zuverlässige Ziffern nach dem Komma den numerischen Wert von

$\sqrt[4]{\sqrt{6400} + \sqrt{6144} + \sqrt{4800} + \sqrt{4608}}$.

Lösung:

$\sqrt{6400} = 80$ bestimmt man im Kopf.

Der Rechenablauf ist nun

$\boxed{80}\,\boxed{+}\,\boxed{6144}\,\boxed{\sqrt{}}\nearrow 78{,}383672$

$\boxed{+}\nearrow 158{,}38367\ \boxed{4800}\,\boxed{\sqrt{}}\nearrow 69{,}282032$

$\boxed{+}\nearrow 227{,}6657\ \boxed{4608}\,\boxed{\sqrt{}}\nearrow 67{,}882251$

$\boxed{=}\nearrow 295{,}54795\ \boxed{\sqrt{}}\,\boxed{\sqrt{}}\nearrow 4{,}1462644.$

Da $\sqrt[4]{\sqrt{6400} + \sqrt{6144} + \sqrt{4800} + \sqrt{4608}} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$

(der Leser führe den Beweis!),

liefert der Rechenablauf

$\boxed{1}\,\boxed{+}\,\boxed{2}\,\boxed{\sqrt{}}\,\boxed{+}\,\boxed{3}\,\boxed{\sqrt{}}\,\boxed{=}\nearrow 4{,}1462644$

auch das Ergebnis. Dieser Rechenablauf ist aber bedeutend kürzer.

Das gerundete Ergebnis ist 4,1463.

Aufgrund der Beispiele wird festgestellt:

Mario: „Mehr als fünf zuverlässige Stellen nach dem Komma darf ich bei meinem Ergebnis nicht erwarten. Es gilt:

Bei der Addition (bzw. Subtraktion) von Näherungszahlen sind nur so viele Stellen nach dem Komma beizubehalten, wie der Summand (bzw. Subtrahend) mit der kleinsten Anzahl von Stellen hinter dem Komma hat. (1)

Betätigt man beim SR 1 die Taste $\boxed{y^x}$, so beträgt die Zuverlässigkeitserwartung höchstens sechs wesentliche Ziffern. (2)

Beachte ich eine Schutzstelle, so lautet nach dem Gesagten mein Ergebnis: 26,3219 (vgl. Beispiel 1!)."

Martina: „Meine erste Rechnung (Beispiel 1) ist wegen der Verringerung der Anzahl wesentlicher und zuverlässiger Ziffern nur auf zwei Stellen nach dem Komma genau. Das erste Ergebnis lautet bei mir 26,32. Meine Schlußfolgerung ist:

Habe ich die Differenz zweier fast gleicher Zahlen zu bilden, so muß ich auf eine Verringerung der Anzahl wesentlicher und zuverlässiger Ziffern achten. Besonders gefährlich wird es, wenn eine Differenz zweier fast gleicher Zahlen im Nenner eines Bruches steht." (3)

Susan: „Wenn das Ergebnis mit nur höchstens fünf wesentlichen und zuverlässigen Ziffern zu bestimmen ist, kann ich, wenn es die Rechnung erfordert, zweckmäßig die Taste $\boxed{y^x}$ des SR 1 benutzen. Sonst meide ich diese Taste, wenn es möglich ist. (4)

Mario vergaß zu sagen, auch beim Rechnen mit dem SR 1 gilt:

Einen irrationalen Nenner macht man nach Möglichkeit rational. (5)

Solange wie möglich arbeite ich mit den mathematisch-exakten Werten (z. B. $\sqrt{2}$) und nicht mit numerischen (z. B. 1,414) und strebe Vereinfachungen an." (6)

Martina: „Ich merke mir:

Durch die Rundungsautomatik des SR 1 kann es zu Fehlern kommen. (7)

Sie liegen wie bei jedem Runden in den üblichen Grenzen.

Beim Rechnen mit Brüchen, deren Dezimaldarstellung mehr wesentliche und gültige Ziffern hat, als das Rechenwerk des SR 1 faßt, muß ich auf Rundungsfehler achten." (8)

Der Arbeitsgemeinschaftsleiter weist darauf hin: „Kontrollrechnungen sind immer angebracht. (9)

Man soll versuchen, durch Überschlagsrechnung und Abschätzung die Größenordnung des zu berechnenden numerischen Wertes zu bestimmen. (10)

Bei Beispiel 1 überlegt man sich:

$\sqrt[3]{25} < \sqrt[3]{27} = 3$. Schätzung: $\sqrt[3]{25} \approx 2{,}9$,

also $\frac{2}{3-\sqrt[3]{25}} \approx \frac{2}{3-2{,}9} = 20$.

Es können mit Trick in der Weise, wie sie bei den Beispielen 2 und 3 gezeigt wurde, für irrationale Quadratwurzeln Schranken mit neun gültigen Ziffern bestimmt werden. (11)

Wenn die Genauigkeit es erfordert, ist in besonderen Fällen nicht mit Näherungswerten von Brüchen zu rechnen. (12)

Beim Lösen solcher Aufgaben, das zeigen die Beispiele, gibt es also manches zu beachten. Denkt daran!"

Die folgenden Aufgaben sind unter Zuhilfenahme eines Taschenrechners zu lösen:

▲1▲ Man bestimme den numerischen Wert von $\frac{4}{5-\sqrt[3]{121}}$ auf vier zuverlässige Ziffern nach dem Komma!

▲2▲ Es ist $\sqrt{7}$ mit acht gültigen Ziffern hinter dem Komma anzugeben und der Nachweis zu erbringen, daß es sich wirklich um gültige Ziffern handelt!

▲3▲ Man berechne

$\sqrt{\sqrt{5795 + 152\sqrt{19}} - \sqrt{163 + 24\sqrt{19}}}$.

Wie kann man auch ohne Taschenrechner bestätigen, daß der gefundene Wert der exakte ist?

▲4▲ Was ist größer $\sqrt{1984} + \sqrt{1986}$ oder $2\sqrt{1985}$? (aus: Quant, Moskau)

▲5▲ Welche Aussage kann man über den folgenden Bruch machen?

$$\frac{1}{3\left(0{,}00033\cdot 0{,}00099^2 + \frac{1}{13}\right) + \frac{5}{91} - \frac{2}{7}}$$

R. Bergmann

Lösungen zu:

Mit und ohne Taschenrechner

▲1▲ 74,1942.

▲2▲ $\boxed{7}\,\boxed{\sqrt{}}\nearrow 2{,}6457513$

$\boxed{x\to M}\,\boxed{-}\,\boxed{2{,}6457513}\,\boxed{=}\nearrow 1,\ -08,$

$\boxed{MR}\nearrow 2{,}6457513\ \boxed{x^2}\nearrow 7\ \boxed{-}\,\boxed{7}$

$\boxed{=}\nearrow -1,\ -08,$

folglich $2{,}64575131 < \sqrt{7}$,

$\boxed{MR}\,\boxed{+}\,\boxed{EEX}\,\boxed{+/-}\,\boxed{8}\,\boxed{=}\,\boxed{x^2}\nearrow 7$

$\boxed{-}\,\boxed{7}$

$\boxed{=}\nearrow 4,\ -08 \to 7{,}00000004,$

folglich $\sqrt{7} < 2{,}64575132$.

Ergebnis: $\sqrt{7} = 2{,}64575131\ldots$

▲3▲ $\boxed{5795}\,\boxed{+}\,\boxed{152}\,\boxed{\times}\,\boxed{19}\,\boxed{\sqrt{}}$

$\boxed{=}\nearrow 6457{,}5526\ \boxed{\sqrt{}}\nearrow 80{,}358899\ \boxed{x\to M},$

$\boxed{163}\,\boxed{+}\,\boxed{24}\,\boxed{\times}\,\boxed{19}\,\boxed{\sqrt{}}$

$\boxed{=}\nearrow 267{,}61357\ \boxed{\sqrt{}}\nearrow 16{,}358899$

$\boxed{+/-}\,\boxed{M+}\,\boxed{MR}\,\boxed{\sqrt{}}\nearrow 8.$

▲4▲ $\boxed{4}\,\boxed{\times}\,\boxed{1985}\,\boxed{=}\nearrow 7940\ \boxed{\sqrt{}}$

$\nearrow 89{,}106678\ \boxed{-}\,\boxed{89.106678}$

$\boxed{=}\nearrow -0{,}0000004 \to 89{,}1066776;$

$\boxed{1984}\,\boxed{\sqrt{}}\nearrow 44{,}542115\ \boxed{+}\,\boxed{1986}$

$\boxed{\sqrt{}}\nearrow 44{,}56456\ \boxed{=}\nearrow 89{,}106675$

$\boxed{x^2}\nearrow 7939{,}9995.$

Da $\sqrt{1984} + \sqrt{1986} < 89{,}106677$

und $89{,}106677^2 < 7940$, was man durch Rechnung überprüft, gilt

$\sqrt{1984} + \sqrt{1986} < 2\sqrt{1985} = \sqrt{7940}$.

▲5▲ Der Bruch ist definiert.

Durch Umformung folgt zunächst

$$\frac{1}{0{,}00099^3 + \left(\frac{3}{13} + \frac{5}{91} - \frac{2}{7}\right)} = 1 : 0{,}00099^3.$$

Überschlag: $1 : \left(\frac{1}{10^3}\right)^3 = 10^9$.

$\boxed{0{,}00099}\,\boxed{x^y}\,\boxed{3}\,\boxed{=}\nearrow 9{,}7029\ -10$

$\boxed{1/x}\nearrow 1{,}0306\ 09$

Kontrolle: $\boxed{:}\,\boxed{EEX}\,\boxed{9}\,\boxed{=}\nearrow 1{,}0306102.$

Ergebnis: $1{,}0306\cdot 10^9$

Zur Aufgabe im Text (vgl. Beispiel 5!):

$$\sqrt[4]{\sqrt{6400} + \sqrt{6144} + \sqrt{4800} + \sqrt{4608}} = \sqrt[4]{80 + 32\sqrt{6} + 40\sqrt{3} + 48\sqrt{2}} = \sqrt[4]{(6 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6})^2} = \sqrt[4]{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^4} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Prismen! Prismen?

▲1▲ Welche der Körper (Bild 1) sind
a) Quader? b) Prismen?

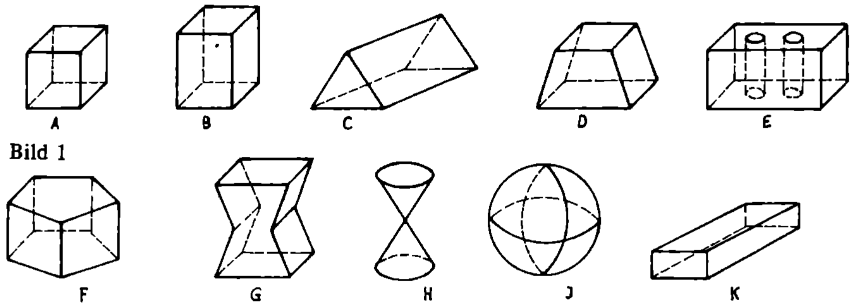


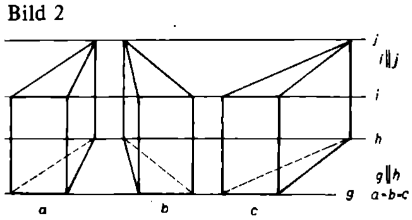
Bild 1

▲2▲ Welches der Volumen der in Bild 1 dargestellten Körper läßt sich mit der Formel $V = G \cdot h$ (G – Grundfläche, h – Höhe) berechnen?

▲3▲ Wahr oder falsch?
a) Jeder Würfel ist ein Quader.
b) Alle Quader sind Prismen.
c) Jeder Quader ist ein Würfel.
d) Es gibt Prismen, die Quader sind.
e) Es gibt Würfel, die Quader sind.
f) Es gibt keine Würfel, die keine Prismen sind.
g) Nicht jeder Quader ist ein Würfel.
h) Alle Quader sind keine Würfel.

▲4▲ Welches der dargestellten Prismen (Bild 2) hat das größte Volumen? (Für die jeweilige Höhe h der Prismen gilt: $h = 5{,}0$ cm.)

Bild 2

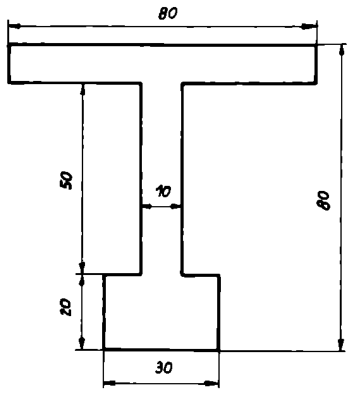


▲5▲ Vervollständige die Tabelle!

Quader				
Länge	(in cm)	2	2	3
Breite	(in cm)	3	3	
Höhe	(in cm)	1		2
Volumen	(in cm³)		12	24
Oberfläche	(in cm²)			

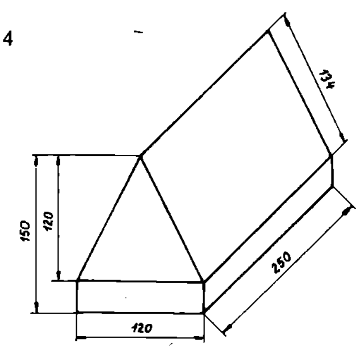
▲6▲ Berechne das Volumen eines Doppel-T-Trägers von 3,200 m Länge (siehe Bild 3/Angaben in mm)!

Bild 3



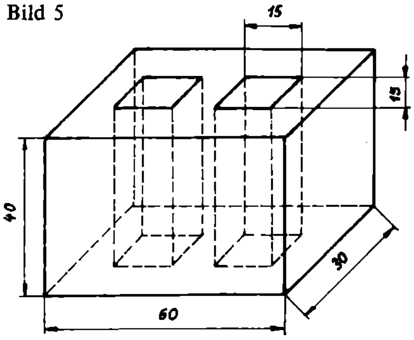
▲7▲ a) Ermittle das Volumen des in Bild 4 dargestellten Zeltes, wenn alle Zeltseiten straff gespannt sind (Angaben in cm)!
b) Das Zelt soll von außen (ohne Boden) mit Imprägnierspray besprüht werden. Wie groß ist die zu besprühende Fläche? Runde auf volle Quadratmeter!

Bild 4



▲8▲ Ermittle Volumen und Oberfläche des in Bild 5 dargestellten Körpers (Angaben in mm)!

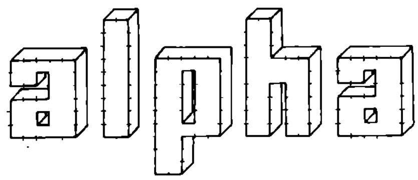
Bild 5



▲9▲ Peter hat ein Aquarium mit den Abmessungen $l = 70{,}0$ cm, $b = 40{,}0$ cm und $h = 30{,}0$ cm. Das Aquarium wird mit Hilfe eines Schlauches mit Wasser gefüllt. Wie hoch ist der Wasserstand nach 12 Minuten, wenn pro Minute 5,0 Liter Wasser einfließen?

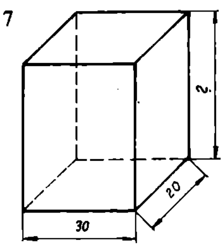
▲10▲ Berechne jeweils Volumen und Oberfläche der in Bild 6 angegebenen Prismen! (Die Körper sind alle eine Längeneinheit *dick*.)

Bild 6



▲11▲ Ermittle die fehlende Seitenlänge des in Bild 7 dargestellten Körpers! Die Oberfläche des Quaders beträgt 52 cm² (Angaben in mm).

Bild 7

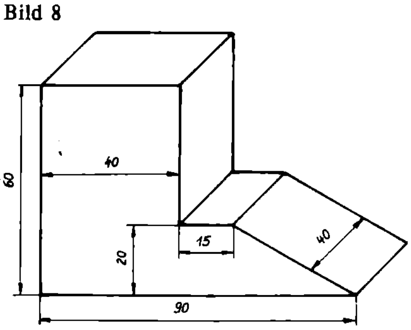


▲12▲ Aus 240,0 cm Draht ist das Kantenmodell eines Quaders erstellt worden, dessen eine Kante 3,0 cm länger und dessen andere Kante 6,0 cm länger als die kürzeste Kante des Quaders ist. Berechne das Volumen des Kantenmodells! (Verschnittverluste bleiben unberücksichtigt.)

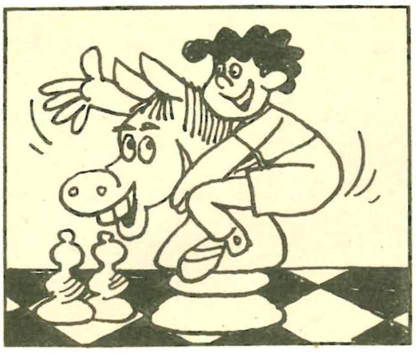
▲13▲ Ein Quader mit den Maßen $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 4$ cm ist außen grün gefärbt. Der Quader wird in kleine Würfel von 1 cm Kantenlänge zersägt. Wieviel Würfel haben keine grüne Fläche?

▲14▲ Wie groß ist das Volumen des in Bild 8 dargestellten Körpers (Angaben in mm)?

Bild 8



L. Flade/H. Knopf



Wer hat die besseren Chancen?

In einem Schachturnier mit 14 Spielern liegen nach 12 Runden Holger und Matthias mit jeweils 8 Punkten in der vorderen Hälfte der Turniertabelle. Holger erzielte dabei folgende Resultate: 5 Gewinne, 6 Remis und 1 Niederlage. Matthias erkämpfte die 8 Punkte mit 4 Gewinnen, 8 Remis und ohne Niederlage

(Gewinn = 1 Punkt, Remis = $\frac{1}{2}$ Punkte,

Niederlage = 0 Punkte).

In der 13. Runde spielen Holger und Matthias gegeneinander. Wer hat dabei die besseren Chancen?

Nach den Prinzipien der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die mathematische Wahrscheinlichkeit P für das Eintreffen eines zufälligen Ereignisses A gleich dem Quotienten aus der Anzahl der für A günstigen Ereignisse g und der Anzahl der gleichmöglichen Ereignisse m zu dem entsprechenden Ereignisfeld:

$$P(A) = \frac{g}{m}$$

Mit dieser Form ist die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, daß ein Schachspieler eine bestimmte Partie gewinnt, nicht zu beantworten. Von gleichmöglichen Ereignissen kann bei einer solchen Frage nicht die Rede sein. Deshalb müssen bei derartigen Problemen die Prinzipien der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung angewendet werden, d. h., bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines solchen Ereignisses sind jene Ereignisse zu berücksichtigen, deren Ergebnis bereits feststeht. Mittels einer Methode von C. H. O'D. Alexander erhält man die Möglichkeit zur Bestimmung einer solchen Wahrscheinlichkeit.

Zuerst wird überprüft, ob die jeweiligen Anzahlen der Gewinn-, Remis- bzw. Verlustpartien beider Spieler größer 0 ist. Da Matthias keine Verlustpartie aufzuweisen hat, werden die betreffenden Anzahlen beider Spieler um je 1 erhöht. Danach ergibt sich folgendes:

Holger	*Matthias*
6 Gewinne	5 Gewinne
7 Remis	9 Remis
2 Verluste	1 Verlust

Jetzt werden die erhöhten Gewinnpunkte von Holger mit den erhöhten Verlustpunkten von Matthias und umgekehrt die erhöhten Gewinnpunkte von Matthias mit den erhöhten Verlustpunkten von Holger sowie noch die erhöhten Remispunkte miteinander multipliziert.

Gewinne für Holger:	$6 \cdot 1 = 6$
Gewinne für Matthias:	$5 \cdot 2 = 10$
Remis:	$7 \cdot 9 = 63$
	79

Daraus ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeitswerte:

Gewinn für Holger: $\frac{6}{79} = 0{,}07 = 7\,\%$

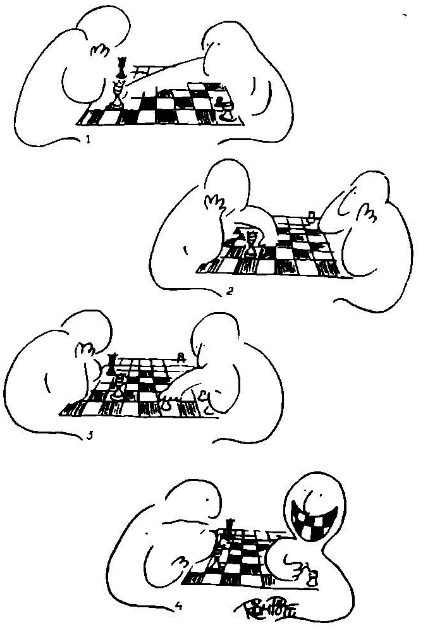
Gewinn für Matthias: $\frac{10}{79} = 0{,}13 = 13\,\%$

Remis: $\frac{63}{79} = 0{,}80 = 80\,\%$

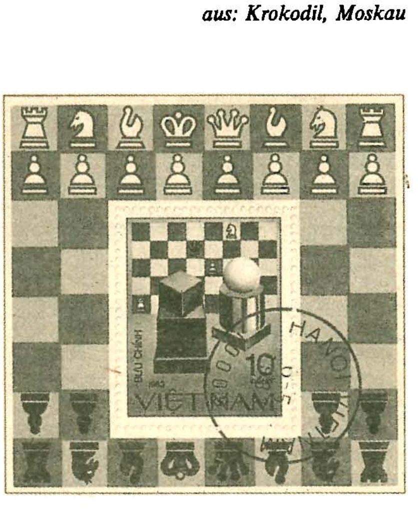
Somit ist erkennbar, daß Matthias – mathematisch betrachtet – über die besseren Chancen in dieser Partie verfügt.

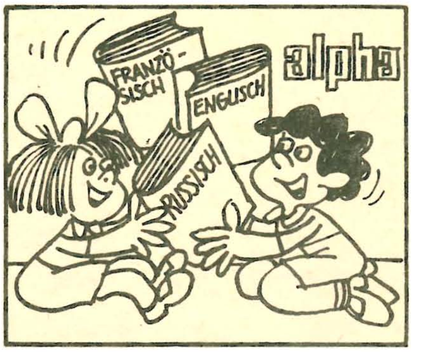
Die Farbverteilung (Weiß oder Schwarz) für die vorangegangenen Partien sowie für die 13. Partie der beiden Spieler blieb bei dieser mathematischen Bestimmung unberücksichtigt.

H. Rüdiger

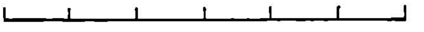


aus: Krokodil, Moskau



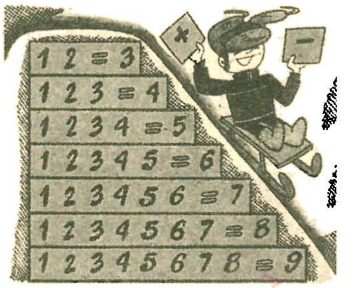


▲1▲ *Counting the segments:* The drawing shows a segment of a straight line divided into sections of unit length. In this drawing, we can get many segments of different length—of two units, three units, four units, and so on.



Suppose that the total segment has a length of n units. What will be the total number of all the different segments of various lengths?

▲2▲ В числовой пирамиде, изображенной на рисунке, расставьте знаки + и − так, чтобы выполнялись указанные равенства. Между некоторыми соседними цифрами можно не ставить знака, объединяя их в одно число.



▲3▲ *Plus ou moins:* N, un nombre de trois chiffres, intervient dans toutes les définitions de ce problème! Retrouvez-le et complétez la grille en utilisant judicieusement les deux nombres horizontaux qui y figurent déjà! *aus: Maximath, Belgien*

	1	2	3	4	5	6	7
1				■			
2		■				■	
3			■	7	8	2	8
4	■			■			■
5	7	9	2	5	■		
6		■				■	
7				■			

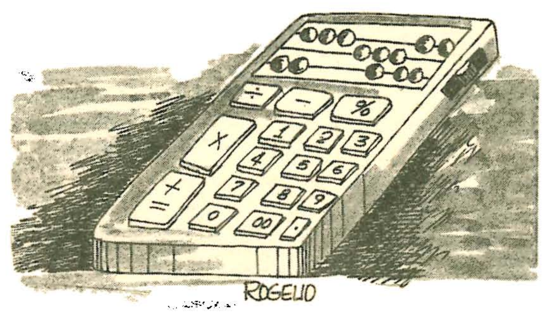
Horizontalement:

1 N − 83 · N − 600
2 N + 50
3 N − 808 · 7828
4 N − 777 · N − 807
5 7925 · N − 808
6 N − 260
7 N − 702 · N − 39

Verticalement:

1 N − 103 · N − 33
2 N − 175
3 N − 806 · N + 6428
4 N − 747 · N − 768
5 N + 1657 · N − 777
6 N − 553
7 N − 386 · N − 189

Teilbarkeitsregeln: Gewichtete Quersummen



In *alpha* Heft 1/84 wurde ein Beispiel für die Aufstellung von Teilbarkeitsregeln für solche Teiler angegeben, die durch die allgemein bekannten Teilbarkeitsregeln für 2, 4, 5, 8, 10 sowie die einfache bzw. alternierende Quersummenregel für 3, 9 bzw. 11 nicht erfaßt werden. Es soll hier ein anderes Verfahren aufgezeigt werden, welches es gestattet, für alle Teiler und alle möglichen Dividenden die Teilbarkeit zu prüfen.

Ausgangspunkt sei die bekannte Teilbarkeitsregel für 3.

Beispiel 1: Die Bildung der üblichen Quersumme einer m-stelligen auf Teilbarkeit zu prüfenden Zahl

$$Z = \sum_{s=0}^{m-1} a_s \cdot 10^s$$

(geschrieben $a_{m-1} \ldots a_1 a_0$) erfolgt zu

$$Q = \sum_{s=0}^{m-1} a_s.$$

Die Teilbarkeit von Q durch 3 ist deshalb mit der Teilbarkeit von Z durch 3 identisch, weil für jede Stelle s ein $n_s \in N$ existiert, so daß $10^s = 3 \cdot n_s + 1$.

Das gleiche gilt für die Teilbarkeit durch 9.

Mit der Teilbarkeitsregel für 7 soll die gewichtete Quersumme an einem Beispiel eingeführt werden.

Beispiel 2: Hier wird zur Zahl Z die *gewichtete Quersumme*

$$Q = \sum_{s=0}^{m-1} a_s \cdot w_s$$

gebildet, wobei für den Teiler 7 in Stelle s die nachfolgende Wichte w_s zu verwenden ist:

s	… 7	6	5	4	3	2	1	0
w_s	…	$\overline{(-2}$	$\overline{-3}$	$\overline{-1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{1)}$	

Die Klammer und der Periodenstrich sollen angeben, daß für Stellen $s \geqq 6$ sich die angegebenen Wichten periodisch nach links wiederholen, d. h. $w_s = w_{s-6}$ für $s \geqq 6$.

Durchführung der Teilbarkeitsprüfung durch 7 für $Z = 192\,837\,465$:

Stelle s:
8 7 6 5 4 3 2 1 0

Ziffer a_s:
1 9 2 8 3 7 4 6 5

× Wichte w_s:
2 3 1 −2 −3 −1 2 3 1

Gewichtete Quersumme Q =
2 + 27 + 2 − 16 − 9 − 7 + 8 + 18 + 5
= 30. $Q = 30$ ist nicht durch 7 teilbar, daher ist auch Z nicht durch 7 teilbar. Der Beweis für $7 \mid Z \Leftrightarrow 7 \mid Q$ wird mit Satz 1 folgen. Dieser Satz wird auch den Beweis für folgende Feststellung liefern:

Da $Q - 2$ durch 7 teilbar ist, gilt dies auch für $Z - 2$:

$Z - 2 = 192\,837\,463 = 7 \cdot 27\,548\,209$

Die Anwendung der gewichteten Quersummenregel ist ebenso wie die der herkömmlichen Quersummenregel rekursiv möglich, falls bei einer ersten Anwendung eine Quersumme entsteht, die die Teilbarkeit noch nicht erkennen läßt.

Ableitung der theoretischen Grundlagen der Teilbarkeit von Zahlen

$$Z = \sum_{s=0}^{m-1} a_s \cdot b^s$$

durch beliebige Teiler $t \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ in Zahlensystemen mit beliebiger Basis $b \in \{2, 3, 4, \ldots\}$:

Satz 1: Eine m-stellige Zahl

$$Z = \sum_{s=0}^{m-1} a_s \cdot b^s \text{ ist genau}$$

dann durch t teilbar, wenn auch

$$Q = \sum_{s=0}^{m-1} a_s \cdot (b^s - n_s \cdot t)$$

mit $n_s \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ durch t teilbar ist. (Schreibweise: $t \mid Z \Leftrightarrow t \mid Q$).

Dabei heißt der Ausdruck

$$w_s = b^s - n_s \cdot t$$

„Wichte" der Stelle s bzgl. der Teilbarkeit durch t; der Ausdruck

$$Q = \sum_{s=0}^{m-1} a_s \cdot w_s$$

heißt „Gewichtete Quersumme" von Z.

Beweis:

$$Z - Q = \sum_{s=0}^{m-1} a_s \cdot b^s - \sum_{s=0}^{m-1} a_s \cdot (b^s - n_s \cdot t)$$
$$= \sum_{s=0}^{m-1} (a_s \cdot b^s - a_s \cdot b^s + a_s \cdot n_s \cdot t)$$
$$= t \cdot \sum_{s=0}^{m-1} a_s \cdot n_s$$

Demnach ist die Differenz zwischen Z und Q durch t teilbar. Da das Hinzufügen (oder Abziehen) eines ganzzahligen Vielfachen eines Teilers t an der Teilbarkeit einer beliebigen Zahl Z durch t nichts ändert, folgt Satz 1.

Die letzte Zeile des obigen Beweises kann auch geschrieben werden:

$$Z \equiv Q (\operatorname{mod} t)$$

Das heißt, daß Z und Q in derselben Restklasse (modulo t) liegen.

Dies bedeutet auch

$t \mid (Z - n) \Leftrightarrow t \mid (Q - n)$ mit $n \in N$

Hieraus leitet sich der im Beispiel 2 gezogene Schluß der Teilbarkeit von $Q - 2$ auf $Z - 2$ ab.

Zur Vereinfachung der Rechnung sollte n_s stets so gewählt werden, daß der Betrag $|w_s|$ jeder Wichte w_s ein Minimum annimmt. Es sei ferner bemerkt, daß die Zahl 0 definitionsgemäß durch jeden beliebigen Teiler t teilbar ist, d. h., eine entstehende Quersumme $Q = 0$ bedeutet Teilbarkeit.

Satz 1 gilt für jedes beliebige Zahlensystem. Für $b = 10$, d. h. im Dezimalsystem, entsteht der Ausdruck für die Wichten zu

$$w_s = 10^s - n_s \cdot t.$$

Einige Spezialfälle:

- Teiler $t = 1$: alle $w_s = 0$ möglich mit $n_s = 10^s$. Das heißt Q stets gleich 0, die Teilbarkeit ist stets gegeben.
- Teiler $t > 1$: mit $n_0 = 0$ ist $w_0 = 1$ stets möglich.
- Für die Teiler 2…19 ist unten eine Tabelle der Wichten minimalen Betrages angegeben.

Satz 2: Rekursive Berechnung der Wichten w_s ($s \geqq 1$):

Die Wichte w_{s+1} kann aus w_s gebildet werden zu

$$w_{s+1} = w_s \cdot b - n'_{s+1} \cdot t$$

wobei n'_{s+1} ganzzahlig.

Beweis: Es gilt

$$w_s = b^s - n_s \cdot t$$

und

$$w_{s+1} = b^{s+1} - n_{s+1} \cdot t$$

laut Definition der Wichte. Mit

$$n_{s+1} = n_s \cdot b + n'_{s+1}$$

folgt

$$w_{s+1} = b^{s+1} - n_s \cdot b \cdot t - n'_{s+1} \cdot t$$
$$= b \cdot (b^s - n_s \cdot t) - n'_{s+1} \cdot t$$
$$= b \cdot w_s - n'_{s+1} \cdot t \qquad \text{q. e. d.}$$

Demnach können im Dezimalsystem die Wichten w_s für einen Teiler t, beginnend mit $w_0 = 1$, für $s \geqq 1$ zu

$$w_{s+1} = 10 \cdot w_s - n'_{s+1} \cdot t$$

gebildet werden, wobei die n'_{s+1} zur Minimierung der Rechenarbeit so gewählt werden sollten, daß die $|w_{s+1}|$ minimal werden. Ferner folgt aus Satz 2: Falls $w_s = 0$, so gilt auch $w_{s+i} = 0$ für $i \geqq 1$.

Satz 3: Periodizität der Wichten

Gilt für eine Stelle $s = r + d$ ($d > 0$) einer Zahl Z

$$w_s = w_r$$

d. h. $b^s - n_s \cdot t = b^r - n_r \cdot t$

so gilt stets auch

$$w_{s+1} = w_{r+1}.$$

Das heißt, es existieren n_{s+1}, n_{r+1}, so daß

$$b^{s+1} - n_{s+1} \cdot t = b^{r+1} - n_{r+1} \cdot t.$$

Beweis: Mit $w_r = w_s$ folgt aus Satz 2:

$$w_{s+1} = w_s \cdot b - n'_{s+1} \cdot t$$
$$w_{r+1} = w_s \cdot b - n'_{r+1} \cdot t.$$

Wählt man $n'_{r+1} = n'_{s+1}$, so folgt Satz 3.
Wenn für die Stellen $s = r \ldots (r+d-1)$ die gewünschte Minimalität der Beträge der Wichten vorlag, so wird diese Minimalität durch die Wahl $n'_{r+1} = n'_{s+1}$ auch weiterhin periodisch geliefert.

Folgerung: Bei Verwendung von Wichten w_s minimalen Betrages ist jeder Satz von Wichten w_s bzgl. eines Teilers t nach spätestens $t-1$ Stellen periodisch, oder es gilt für eine Stelle r $(r < t)$ und alle folgenden Stellen

$$r+i \quad (i \geqq 0) \quad w_{r+i} = 0.$$

Beweis: Es treten lt. Voraussetzung nur Wichten aus $w \in \left\{0; \pm 1; \ldots; \pm \lfloor \frac{t}{2} \rfloor\right\}$ auf, da sich andere nach Satz 1 durch Addition oder Subtraktion von t auf diese zurückführen lassen. ($\lfloor x \rfloor$ bedeutet: größte ganze Zahl $\leqq x$.) Ferner gilt die Folgerung nach Satz 2 bzgl. $w_{r+i} = 0$.

Beispiele im Dezimalsystem:
Bildung der im Beispiel 2 für $t = 7$ verwendeten Wichten entsprechend Satz 2:

$w_0 = 1$ (nach Satz 1)

$w_1 = 10 \cdot 1 - n'_1 \cdot 7 = 3$ (w_1 von minimalem Betrage für $n'_1 = 1$)

$w_2 = 10 \cdot 3 - n'_2 \cdot 7 = 2$ (w_2 von minimalem Betrage für $n'_2 = 4$)

$w_3 = 10 \cdot 2 - n'_3 \cdot 7 = -1$ (w_3 von minimalem Betrage für $n'_3 = 3$)

$w_4 = 10 \cdot (-1) - n'_4 \cdot 7 = -3$ (w_4 von minimalem Betrage für $n'_4 = -1$)

$w_5 = 10 \cdot (-3) - n'_5 \cdot 7 = -2$ (w_5 von minimalem Betrage für $n'_5 = -4$)

$w_6 = 10 \cdot (-2) - n'_6 \cdot 7 = 1 = w_0$ (w_6 von minimalem Betrage für $n'_6 = -3$)

d. h., nach Satz 3 besteht die Periodizität $w_s = w_{s-6}$ $(s \geqq 6)$.
Schreibweise: $W(7) = \overline{(-2;\ -3;\ -1;\ 2;\ 3;\ 1)}$
Eine Kontrolle der so errechneten minimalen Wichten läßt sich stets auch nach Satz 1 ausführen.

Zusammenstellung aller Wichten $W(t)$ für $t = 2 \ldots 19$ im Dezimalsystem:

$W(t)$	t
$(\bar{0};\ 1)$	2
$(\bar{1})$	3
$(\bar{0};\ 2;\ 1)$	4
$(\bar{0};\ 1)$	5
$(\overline{-2};\ 1)$	6
$\overline{(-2;\ -3;\ -1;\ 2;\ 3;\ 1)}$	7
$(\bar{0};\ 4;\ 2;\ 1)$	8
$(\bar{1})$	9
$(\bar{0};\ 1)$	10
$\overline{(-1;\ 1)}$	11
$(\bar{4};\ -2;\ 1)$	12
$\overline{(4;\ 3;\ -1;\ -4;\ -3;\ 1)}$	13
$(\overline{(-6;\ -2;\ 4;\ 6;\ 2;\ -4)};\ 1)$	14
$(\overline{-5};\ 1)$	15
$(\bar{0};\ 8;\ 4;\ -6;\ 1)$	16
$\overline{(-5;\ 8;\ -6;\ -4;\ 3;\ 2;\ 7;\ -1;\ 5;\ -8;\ 6;\ 4;\ -3;\ -2;\ -7;\ 1)}$	17
$(\overline{-8};\ 1)$	18
$\overline{(2;\ 4;\ 8;\ -3;\ -6;\ 7;\ -5;\ 9;\ -1;\ -2;\ -4;\ -8;\ 3;\ 6;\ -7;\ 5;\ -9;\ 1)}$	19

$\bar{0}$ bedeutet, daß diese und alle höheren Stellen nicht in die Quersumme eingehen. $W(7)$, $W(17)$ und $W(19)$ sind Beispiele für Periodizitäten der Länge $t-1$. $\overline{(\ldots\ \ldots)}$ bedeutet die periodische Wiederholung des Klammerinhalts nach links.

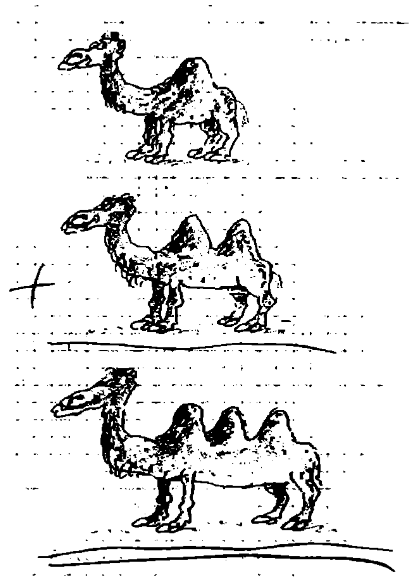
Beispiel 3: Ist $Z = 64\,219\,587\,954$ durch 17 teilbar?

Stelle s:	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Ziffer a_s:	6	4	2	1	9	5	8	7	9	5	4
× Wichte w_s:	2	7	−1	5	−8	6	4	−3	−2	−7	1

Gewichtete Quersumme $Q =$
$12 + 28 - 2 + 5 - 72 + 30 + 32 - 21 - 18 - 35 + 4 = -37$ ist nicht durch 17 teilbar.
Jedoch ist $Q + 3$ und damit auch $Z + 3 = 64\,219\,587\,957$ durch 17 teilbar.
Ergebnis:
$64\,219\,587\,957 = 17 \cdot 3\,777\,622\,821$.

Andere Zahlensysteme:
Für Teiler $t >> 10$ kann sich die Betrachtung im 100er oder 1000er System empfehlen, d. h., es werden, von rechts beginnend, stets Zweier- oder Dreiergruppen von Ziffern betrachtet, für die zuvor gemeinsame Wichten ermittelt wurden. Allerdings wird auch hier die Rechenarbeit meist noch erheblich sein.
Bedeutungsvoller kann jedoch die direkte Teilbarkeitsprüfung in grundsätzlich anderen Zahlensystemen sein. Selbstverständlich ist $Z = (999)_{10}$ auch in jedem anderen Zahlensystem durch drei und neun teilbar, unabhängig von der Darstellungsweise. Jedoch sieht man dies der Zahl $Z = (1747)_8$ im Oktalsystem ja nicht gleich an, und kann sie trotzdem ohne vorherige Rückkonvertierung ins Dezimalsystem prüfen, indem man z. B. die Wichten für den Neunertest im Oktalsystem ermittelt:
(Beachte hier Satz 2:
$w_{s+1} = 8 \cdot w_s - n'_{s+1} \cdot t$).
$W(9)_8 = \overline{(-1;\ 1)}$.
Damit entsteht die gewichtete Quersumme zu
$Q = (-1 + 7 - 4 + 7)_8 = (11)_8\ (= 9_{10})$
und richtig erweist sich auch die oktal geschriebene Zahl Z als durch $9_{10} = (11)_8$ teilbar.

J. Hoppe



ARBEITS-
GEMEINSCHAFTEN
IM BLICKPUNKT

Mini-BASIC für alpha-Leser Teil 6

Oder: Lösen von Gleichungen

Aufgabenbeispiel 8

Gegeben ist ein Quader mit einem Volumen von 770 cm³. Die Zahlenwerte der Kantenlängen des Quaders seien natürliche Zahlen. Außerdem wissen wir, daß die erste Kante um 3 cm länger ist als die zweite und daß die zweite Kante um 4 cm kürzer als die dritte ist.

Gib die Zahlenwerte der Kantenlängen an!

Um die Aufgabe zu lösen, stellen wir zunächst eine Gleichung auf. x sei der Zahlenwert der zweiten Kantenlänge (in cm);

Zahlenwert der 1. Kantenlänge (in cm): $x+3$;

Zahlenwert der 3. Kantenlänge (in cm): $x+4$.

Gleichung:

$$(x+3)\,x\,(x+4) = 770 \text{ bzw.}$$
$$x^3+7x^2+12x-770=0 \quad (x \in N).$$

Aufgrund des Sachverhalts und der Gleichung folgt, daß x größer als Null sein muß und nicht größer als 10 sein kann (grob abgeschätzt).

$x^3+7x^2+12x-770=0$ ist eine Gleichung dritten Grades, für die uns noch kein Lösungsverfahren bekannt ist. Dennoch können wir uns an eine Lösung herantasten, indem wir den linken Term der Gleichung für einige x-Werte aus dem Lösungsbereich berechnen und so versuchen, den x-Wert zu finden, für den die Gleichung erfüllt ist.

x-Wert	linker Term	Feststellung
5	−410	zu klein
8	286	zu groß
7	0	Lösung

Die Lösung der Gleichung in dem Lösungsbereich ist 7. Die Kantenlängen des Quaders betragen somit 10 cm, 7 cm und 11 cm. In diesem Fall war das Problem leicht zu lösen. Wir hätten maximal 9 Zahlenwerte (1; 2; ... 9) für x durchprobieren müssen. Enthält der Grundbereich weit mehr als 9 Zahlen, z. B. 100 oder 1000 oder noch mehr, so ist das Finden einer Lösung bzw. aller Lösungen einer Gleichung dritten Grades auch mit Hilfe eines Taschenrechners eine mühselige Arbeit.

▲35▲ Die Gleichung

$$x^3+7x^2+12x-500=0$$

hat im Intervall $0 \leqq x \leqq 20$ genau eine Lösung. Gib die Lösung mit Hilfe des SR 1 auf Zehntel genau an!

Beim Lösen dieser Aufgabe hast du festgestellt, daß man sich auch an eine solche Lösung, die keine natürliche oder ganze Zahl ist, *herantasten* kann. Man erhält dabei zuweilen Näherungswerte, die um so besser sind, je weniger der berechnete Termwert von Null abweicht. Will man einen Näherungswert auf Hundertstel oder Tausendstel genau ermitteln, ist das auch mit einem Taschenrechner recht zeitaufwendig. Deshalb wollen wir nun den Fleiß eines Computers nutzen, um solche Gleichungen zu lösen. Dazu müssen wir allerdings ein geeignetes BASIC-Programm entwerfen.

Mit einem solchen BASIC-Programm soll der Computer für verschiedene x-Werte die entsprechenden Termwerte ausdrucken lassen. Das kann mit einer FOR-NEXT-Schleife realisiert werden. Damit wir uns an die Lösungen möglichst genau *herantasten* können, gestalten wir das Programm so, daß der Anfang, das Ende und die Schrittweite in unserem Suchintervall frei wählbar sind.

Programm 7 (Wertetabellen für $x^3+7x^2+12x-500$)

```
 1Ø CLS
 2Ø INPUT „INTERVALLANFANG:“;A
 3Ø INPUT „INTERVALLENDE:“;E
 4Ø INPUT „SCHRITTWEITE:“;S
 5Ø PRINT „X“, „Y“
 6Ø PRINT „----------“
 7Ø FOR X = A TO E STEP S
 8Ø         LET Y = X*X*X
                  + 7*X*X
                  + 12*X − 5ØØ
 9Ø         PRINT X, Y
1ØØ NEXT X
11Ø PRINT:PRINT:GOTO 2Ø
```

▲36▲ Berechne mit dem Computer eine Lösung der Gleichung

$$x^3+7x^2+12x-500=0$$

so genau wie möglich!

▲37▲ Versuche folgende Aufgaben auf analoge Weise mit dem Computer zu lösen.

a) Die Gleichung
$x^4-5{,}1x^3+5{,}9x^2-9{,}3x+27=0$
hat im Intervall $0 \leqq x \leqq 5$ genau zwei Lösungen. Ermittle sie!

b) Finde die Lösung der Gleichung
$100^{\frac{1}{a}} = 36{,}63^{\frac{1}{25}}$ im Intervall
$10 \leqq a \leqq 40$!

c) Ermittle die drei Lösungen der Gleichung $b^3+1=2b$!

d) Die Gleichung $z^{\frac{3}{4}}-2\sqrt{z}-7=0$
hat im Intervall $0 \leqq z \leqq 100$ genau eine Lösung. Gib sie an!

Mit dem Programm 7 ermittelten wir eigentlich die Nullstelle (n) der in Zeile 8Ø angegebenen Funktion:

$$y = x^3+7x^2+12x-500.$$

In BASIC kann auch mit Hilfe der Anweisung

DEF FN Name (Argument) = Ausdruck

eine Funktion definiert werden.

Beispiele:

```
DEF FNY(X) = X ∧ 4 − 5.1*X ∧ 3
DEF FNF(B) = B*B*B − 2*B + 1
DEF FNK(Z) = Z ∧ (3/4) − 2*SQR(Z) − 7
```

▲38▲ Finde die Fehler!

a) DEF FN(X) = X*X + 2
b) DEF FNY = 2*Z − 7
c) DEF FNA(X) = 3X ∧ 4

Nutzt man im Programm 7 die Funktionsanweisung, so könnte man folgende Änderungen vornehmen:

```
45 DEF FNY(X) = X*X*X
              + 7*X*X
              + 12*X − 500
```

Dafür wird die Zeile 8Ø gestrichen.
Die Zeile 9Ø ist zu ändern:

```
9Ø PRINT X, FNY(X)
```

Wie man sieht, ist beim Aufruf der in Zeile 45 definierten Funktion die Buchstabenkombination FN dem Namen voranzustellen (vgl. Zeile 9Ø).

▲39▲ Weshalb ist das Vereinbaren von Funktionen innerhalb einer Schleife abzulehnen?

Beim Lösen der Aufgabe 37 konntest du feststellen, daß die Wahl geeigneter Eingabewerte für A (Intervallanfang) und E (Intervallende) für das Finden einer Lösung entscheidende Bedeutung hat. Wenn das neue Intervall im vorherigen enthalten ist und die Termwerte an den Intervallenden verschiedenes Vorzeichen haben, so kommt man der Lösung ein Stück näher. (Diese Aussage gilt allerdings nur für solche Gleichungen, die auf stetige Funktionen führen. Da alle in der Schule behandelten Funktionsklassen stetig sind, soll dieser Begriff hier nicht näher erläutert werden.)

Wenn man auch nach längerem Suchen kein geeignetes Intervall findet, kann daraus noch nicht gefolgert werden, daß es keine Lösungen gibt. Wir wollen im weiteren die Fragen der Lösbarkeit und der Anzahl der Lösungen nicht näher betrachten, da bei Anwendungsaufgaben die Lösbarkeit in einem Intervall meist durch den Sachverhalt gegeben ist.

Wir wollen nun unser Programm 7 noch nutzerfreundlicher gestalten. Bisher nahm uns zwar der Computer viele Rechnungen ab, aber wir hatten noch genug zu tun:

(1) Feststellen, ob es einen x-Wert gibt, für den $y = 0$ ist.
(2) Vorzeichenwechsel feststellen.
(3) Neues Intervall ablesen und eingeben.
(4) Neue Schrittweite bestimmen und eingeben.
(5) Entscheidung über Beendigung des Verfahrens.

All diese Aufgaben soll der Computer übernehmen.

Zu (1): Mit Hilfe der Anweisung

```
94    IF FNY(X) = Ø   THEN   PRINT
         „Y = Ø FUER X = “;X
```

kann der Computer feststellen, ob es einen x-Wert gibt, für den Y = Ø gilt.

Zu (2): Um geeignete Intervallgrenzen zu erkennen, nutzen wir den bekannten Satz, daß das Produkt zweier Zahlen genau dann negativ ist, wenn die Zahlen unterschiedliches Vorzeichen haben.

```
IF FNY(X)*FNY(X + S) < Ø
THEN PRINT „+/− WECHSEL"
```

Zu (3)/(4): Ausgehend von (2) wissen wir, daß eine Lösung der Gleichung (bzw. eine Nullstelle der Funktion Y(X)) im Intervall <X;X + S> liegt. Um sich an diese weiter heranzutasten, sind X und X + S als neue Intervallgrenzen zu wählen:

LET A = X: LET E = X + S.

Darüber hinaus ist die Schrittweite S zu verkleinern (z.B. auf ein Zehntel der vorherigen Schrittweite):

LET S = Ø.1*S.

Also können wir insgesamt folgende BASIC-Programmzeile formulieren:

```
98   IF FNY(X)*FNY(X + S) < Ø
     THEN PRINT„+/−WECHSEL":
     A=X:E=X+S=.1*S:GOTO 7Ø.
```

(Das Schlüsselwort LET kann auch weggelassen werden.)

▲ 40 ▲ Ergänze das Programm 7 und löse dann die Aufgabe 37 erneut!

Man erkennt: Sobald ein geeignetes Intervall eingegeben wurde, arbeitet sich der Computer selbständig an die Lösung heran.

Aber: Nachdem die Genauigkeitsgrenze des Computers erreicht ist (6 Ziffern), läuft der Computer in einigen Fällen *rund*, ohne daß eine Änderung eintritt

(z.B. bei ▲ 37 ▲ c) mit $b_1 = -1.618Ø3$).

Wir müssen also eine Abbruchbedingung formulieren.

Zu (5):

▲ 41 ▲ Übernimm folgende Programmzeile!

```
95   IF S < 1E − 6 THEN PRINT
     „NAEHERUNGSLOESUNG:",
     X:END
```

a) Warum wurde die Abbruchbedingung vor den Anweisungen zur Intervallveränderung bei einem Vorzeichenwechsel eingefügt?

b) Löse folgende Gleichungen!

$$x^3 - 2x + 5 \quad = 0$$
$$x^3 - 2x + 50\,000 = 0$$

c) Überlege, warum die gleiche Abbruchbedingung bei der zweiten Gleichung versagt!

Will man Abbruchbedingungen formulieren, so ist die gewünschte Genauigkeit anzugeben. Dazu wurde in Zeile 95 die Schrittweite S genutzt.

S gibt eine Schranke für den *absoluten Fehler* des Näherungswertes X an; der absolute Fehler von X soll kleiner sein als 0,000 001.

Damit wird verständlich, weshalb die Abbruchbedingung in der letzten Aufgabe mit der Näherungslösung

$x = -36{,}8584$ nicht erfüllt werden kann.

Für S = 0,000 001 z. B. ist der Wert von X + S = −36,858 399. Da der Kleincomputer nur 6 Ziffern anzeigt, intern aber auch nur mit 7 Ziffern arbeitet, führt dieser Wert zu keiner Änderung, und die Schrittweite S wird nicht weiter verkleinert.

Der absolute Fehler für sich genommen reicht also noch nicht aus, um eine in jedem Fall geeignete Abbruchbedingung zu formulieren. Man muß ihn in Bezug zum Näherungswert setzen.

Deshalb empfiehlt es sich, stets den *relativen Fehler* für eine Abbruchbedingung zu verwenden.

$$\text{Relativer Fehler} = \left| \frac{\text{Absoluter Fehler}}{\text{Näherungswert}} \right|$$

Aber auch dem relativen Fehler sind durch die beschränkte Stellenzahl Grenzen gesetzt.

Es gilt: Wenn ein Näherungswert *n* zuverlässige Ziffern hat, dann liegt der relative Fehler in der Größenordnung $\frac{1}{10^n}$ (und umgekehrt).

Damit erhalten wir allgemein folgende Abbruchbedingung, wenn S den absoluten Fehler und X den Näherungswert angibt:

ABS(S/X) < 1 E − 6

Für X = 0 führt diese Bedingung jedoch zu einer Fehlermeldung.

Deshalb sollte X = 0 gesondert untersucht werden.

Insgesamt erhalten wir damit ein Programm zur Lösung *beliebiger* Gleichungen bzw. zur Ermittlung von Nullstellen beliebiger (stetiger) Funktionen.

Programm 8

```
1Ø  CLS
2Ø  INPUT „INTERVALLANFANG:";A
3Ø  INPUT „INTERVALLENDE:";E
4Ø  INPUT „SCHRITTWEITE:";S
5Ø  DEF FNY(X) = ...
6Ø  PRINT „X", „Y"
7Ø  PRINT „----------"
8Ø  FOR X = A TO E STEP S
9Ø      PRINT X,FNY(X)
1ØØ     IF FNY(X) = Ø THEN PRINT
        „Y = Ø FUER X = ";X
11Ø     IF X = Ø THEN PRINT „X = Ø
        EXTRA BEHANDELN!":GOTO
        2Ø
12Ø     IF ABS(S/X) < 1E − 6 THEN
        PRINT „NAEHERUNGS-
        LOESUNG:";X:END
13Ø     IF FNY(X)*FNY(X + S) < Ø
        THEN PRINT
        „+/−WECHSEL!":
        A = X : E
        = X + S : S = .1*S: GOTO 8Ø
14Ø NEXT X
15Ø PRINT:PRINT:GOTO 2Ø
```

▲ 42 ▲ Ergänze das Programm 8, so daß man die Genauigkeit der Näherungslösung wählen kann!

▲ 43 ▲ Entwickle ein Programm zur Lösung beliebiger Gleichungen nach folgender Idee:

Wenn $<a; b>$ ein geeignetes Lösungsintervall ist, dann bilde den Funktionswert in der Mitte des Intervalls $<a; b>$. Von den beiden Teilintervallen wird mit dem weitergearbeitet, für das die Funktionswerte an den Intervallenden verschiedenes Vorzeichen haben. Wiederhole die Intervallhalbierung solange, bis der relative Fehler der Näherungslösung kleiner als 0,000 01 ist!

L. Flade/M. Pruzina

Lösungen

▲ 35 ▲ $x = 5.8$

▲ 36 ▲ $x = 5.799Ø1$

Hierbei stellst du auch fest, daß der Computer im *Inneren* mit einer etwas größeren Genauigkeit arbeitet, als auf dem Bildschirm angezeigt wird.

▲ 37 ▲ a) $x_1 = 2.5$ $x_2 = 3.6$

b) $a = 31.9727$;

c) $b_1 = -1.618Ø3$ $b_2 = Ø.618Ø34$ $b_3 = 1$

d) $z = 66.6597$

▲ 38 ▲ a) Der Name der Funktion fehlt.

b) Das Argument der Funktion fehlt.

c) Das Multiplikationszeichen fehlt.

▲ 39 ▲ Die Funktionsvereinbarung innerhalb einer Schleife würde unnötigerweise bei jedem Schleifendurchlauf erneut erfolgen.

▲ 41 ▲ a) Wenn die gewünschte Genauigkeit erreicht ist, kann auf weitere Untersuchungen verzichtet werden.

b) $x_1 = -2.Ø9455$ $x_2 = -36.8584$

c) Die Abbruchbedingung versagt, weil die Schrittweite nicht kleiner als 0,000 001 werden kann.

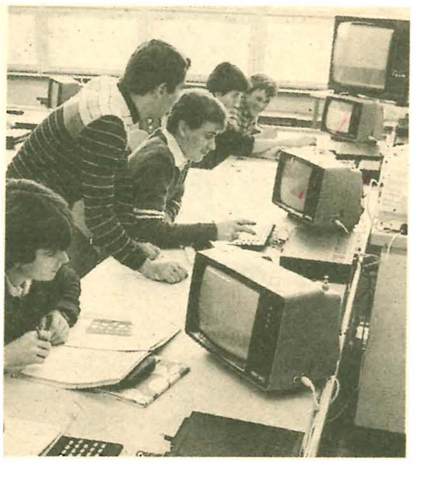
▲ 42 ▲

```
45  INPUT „RELATIVER
    FEHLER:";G
12Ø IF ABS(S/X) < G
    THEN ...
```

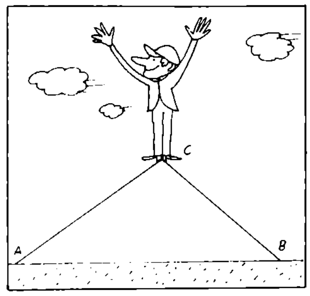
▲ 43 ▲ Eine Möglichkeit:

```
1Ø  CLS
2Ø  INPUT „INTERVALLANFANG:";A
3Ø  INPUT „INTERVALLENDE:";E
4Ø  DEF FNY(X)=...
5Ø      X = .5*(A + E)
6Ø      IF FNY(X) = Ø THEN
        PRINT „X=";X:END
7Ø      IF FNY(A)*FNY(X) < Ø
        THEN E=X:ELSE A=X
8Ø      IF X=Ø THEN PRINT „X=Ø
        EXTRA BEHANDELN!":
        GOTO 2Ø
9Ø      IF ABS(E−A)/X) < 1E−5
        THEN PRINT
        „NAEHERUNGSLOESUNG:"
        ;X:END
1ØØ GOTO 5Ø
```

In der Betriebsberufsschule des Wohnungsbaukombinates Erfurt erhalten jährlich 550 Lehrlinge eine Ausbildung im Computerkabinett.



In freien Stunden · alpha-heiter

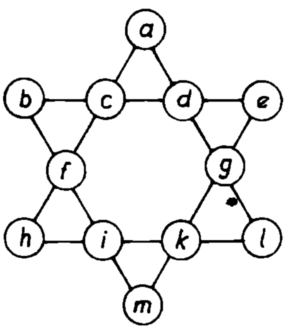


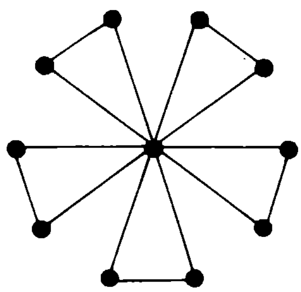
Rolf Felix Müller, Gera

Magische Sternfiguren

a) Das im linken Bild gezeigte Sternsechseck hat sechs äußere und sechs innere Ecken (a, e, l, m, h, b bzw. c, d, g, k, i, f). Sie sind mit den Zahlen 1, 2, 3, ..., 12 so zu besetzen, daß immer je vier längs einer Geraden liegenden Zahlen dieselbe Summe ergeben.

Oberlehrer O. Chromy, Coswig



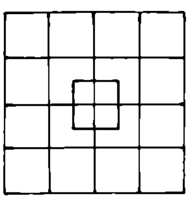


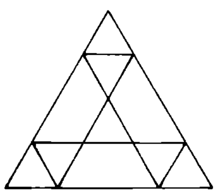
b) Anstelle der Punkte sind im rechten Bild die Zahlen 1 bis 11 so zu ergänzen, daß die Summe am Umfang jedes Dreiecks zunächst 14, dann 18 beträgt.

Jindřich Pěnčik, Prag

Wie viele Quadrate, wie viele Dreiecke?

L. L.





Ein Taschengeldproblem

Ein Schüler hatte in seiner Geldbörse nur Münzen zu 15 Kopeken und zu 20 Kopeken; es waren mehr Münzen zu 20 Kopeken als Münzen zu 15 Kopeken. Den 5. Teil seines Geldes gab dieser Schüler für eine Kinokarte aus, die er mit genau zwei Münzen bezahlte. Die Hälfte des ihm noch verbliebenen Geldes gab er für das Mittagessen aus, das er mit genau drei Münzen bezahlte.
Wieviel Münzen zu 15 Kopeken und zu 20 Kopeken hatte dieser Schüler anfangs?

aus einem sowj. Unterhaltungsbuch

Geburtstag erraten

Multipliziere die Tageszahl mit 20 und addiere 3! Multipliziere dann mit 5, und addiere die Monatszahl! Multipliziere das Ergebnis mit 20, addiere 3, und multipliziere mit 5! Addiere zum Schluß die Jahreszahl (nur die aus den letzten beiden Grundziffern ablesbare Zahl) dazu!
(Ich subtrahiere von dem genannten Ergebnis 1515 und lese von links nach rechts die Tages-, Monats- und Jahreszahl ab.)

L. L.

Erstaunliche Skatabrechnung

Vier Freunde rechnen ihre Spielergebnisse beim Skat mit $\frac{1}{10}$ Pf je Punkt ab. Letztens sah die Abrechnung so aus (relative Differenz mit jedem anderen Spieler):

Jürgen	Jochen	Dieter	Hannes	
+ 75	−219	+165	− 21	
+294	−294	+ 90	− 96	
− 90	−384	+384	+198	
+ 96	−198	+186	−186	
+300 : 10	−876 : 10	+660 : 10	− 84 : 10	
+ 30	− 88	+ 66	− 8	(Pf)

Da meinte Dieter: „Wollten wir heute nicht eigentlich um $\frac{1}{4}$ Pf spielen?“ „Ja“, meinten auch die anderen, „dann müssen wir zum Schluß eben durch 4 dividieren.“ „Nicht nötig“, antwortete Dieter nach kurzem Überlegen, „diesmal können wir das Ergebnis sofort aus dem Spielergebnis ablesen.“ Die Freunde zweifelten und dividierten die letzte Zeile jeweils durch 4. Erstaunt stellten sie fest, daß Dieter recht hatte.
Wie läßt sich das erklären?

Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz

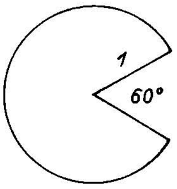
Möglich oder nicht möglich?

Ist es möglich, genau die Zahlen 1, 2, ..., 12 so auf einem Kreis anzuordnen, daß für je drei aufeinanderfolgende Zahlen a, b, c; $b^2 - ac$ durch 13 teilbar ist?

aus der ungarischen math. Schülerzeitschrift Lapok

Das Monster

In einem Spiel ist das „Monster“ der Sektor eines Kreises mit dem Radius 1 cm, das in der Figur gezeigt wird. Das fehlende Stück (der Mund) hat einen Zentriwinkel von 60°.
Wie groß ist der Umfang des Monsters (in cm)?

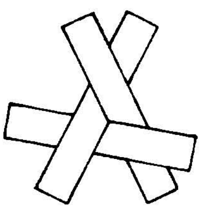


A $\boxed{\pi + 2}$ B $\boxed{2\pi}$ C $\boxed{5/3\pi}$ D $\boxed{5/6\pi + 2}$
E $\boxed{5/3\pi + 2}$

aus einem britischen Schulwettbewerb 1985

Gute Beobachtungsgabe gefragt!

Zwei Minuten anschauen, dann nachzeichnen!

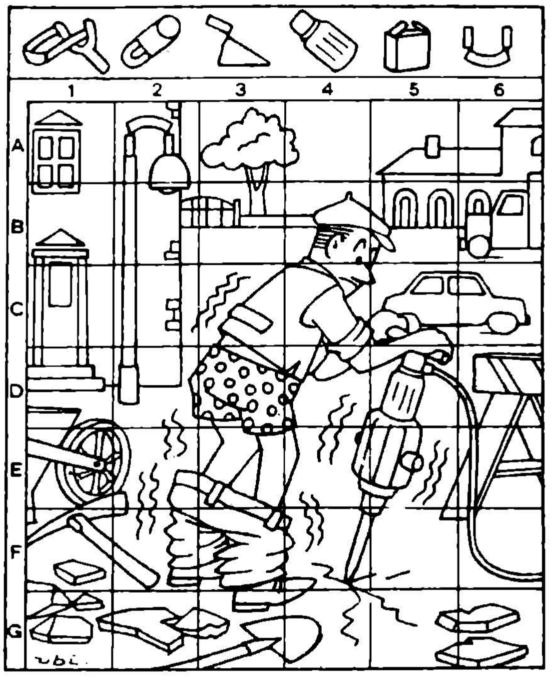


aus der niederländischen math. Schülerzeitschrift Pythagoras

Suchbild

Von den in der oberen Reihe dargestellten Gegenständen befinden sich vier auch in der Zeichnung. Welche?

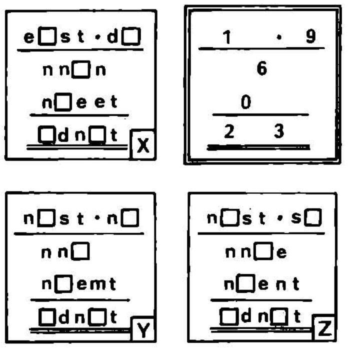
aus Füles, Budapest



Kryptarithmetik

Die Buchstaben auf den Datenträgern X, Y, Z sind verschlüsselte Zahlen, wobei gleiche Buchstaben gleiche Zahlen bedeuten. Welcher Datenträger löst die rechts oben fixierte Multiplikationsaufgabe?

W. Neugebauer, Berlin



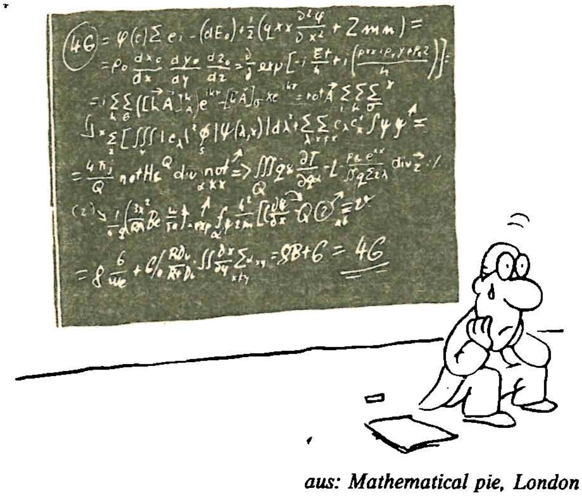
Zahlen in Begriffen

Ergänze die folgenden Wortbruchstücke jeweils so durch das Zahlwort für eine natürliche Zahl, daß sich sinnvolle Begriffe ergeben:

A) ...sassa, ...guldenkraut.
B) ...meter, ...ung, ...teinium, ...tagsfieber, ...sachen, ...fel, ...e, ...erbahn, ...stigkeit, ...tschrift, ...amkeit, ...g, ...gebirge, ...erdeck, ...schaft, ...jähriger Krieg, ...enbein, ...t.
C) ...malklug, ...errat, ...los, Jahr..., ...kampf, ...riede, ...waldstätter See, ...enbeinküste.

Wenn a die Summe der unter A eingefügten, b die Summe der unter B eingefügten und c die Summe der unter C eingefügten Zahlen ist, so gibt $a - b$ das Geburtsjahr und $a - c$ das Todesjahr eines französischen Physikers und Mathematikers, nach dem die SI-Basiseinheit der elektrischen Stromstärke benannt ist, an.
Wer ist es, und wann lebte er?

Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität



aus: Mathematical pie, London

Evariste Galois

Verständlicherweise kommt es auch heute noch selten vor, daß Mathematiker durch Briefmarken gewürdigt werden, deren wissenschaftliche Leistungen auf die *reine* Mathematik beschränkt sind und nicht unmittelbar in Naturwissenschaften, Technik oder anderen Praxisbereichen wirksam werden, so daß es schwer ist, ihren Inhalt und ihre Bedeutung einem breiteren Publikum verständlich zu machen. Zu den wenigen Ausnahmen gehört die hier gezeigte französische Briefmarke aus dem Jahre 1984, die dem *Revolutionär und Geometer* Evariste Galois (1811 bis 1832) gewidmet ist. *Geometer* ist hier als Mathematiker zu verstehen, denn das Arbeitsgebiet von Galois war die Algebra, wenngleich seine Ergebnisse von Bedeutung für die Theorie der geometrischen Konstruktionen sind.

Ein uraltes zentrales Problem der Mathematik ist die Suche nach Lösungsformeln und -methoden für Gleichungen in einer Unbekannten x, die auf die Form

(1) $\quad x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

gebracht werden können. Nachdem im wesentlichen schon in der Antike die Lösungsformel

$$x_{1/2} = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right)$$

für die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

bekannt war und im 16. Jh. ähnliche, auf den Grundoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und zweite bzw. dritte Wurzel $\sqrt[2]{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$ beruhende Lösungsformeln (sogenannte Radikale, abgeleitet von radix [lat.] = Wurzel) für Gleichungen dritten und vierten Grades, d. h. für die Fälle $n = 3, 4$ in (1) gefunden worden waren, konzentrierte sich das Streben der Mathematiker auf die Suche nach analogen Lösungsformeln in Gestalt von Radikalen für Gleichungen höheren Grades.

1799 bewies der Italiener P. Ruffini (1765 bis 1822) mit noch unzulänglichen Mitteln und 1822 der Norweger N. H. Abel (1802 bis 1829) in aller Strenge, daß es eine solche Lösungsformel für die allgemeine Gleichung (1) im Fall $n \geqq 5$ nicht gibt. Derartige Resultate, vergleichbar ist z. B. die Unmöglichkeit, die Gleichung $x^2 = 2$ durch eine rationale Zahl zu lösen oder eine Strecke der Länge π aus der Einheitsstrecke mit Zirkel und Lineal zu konstruieren, stoßen meist auf das Unverständnis der Nichtmathematiker, obwohl jeder versteht, daß im täglichen Leben bestimmte Aufgaben mit dafür ungeeigneten Hilfsmitteln unlösbar sein können. Auch innerhalb der Mathematik erfordern solche Unmöglichkeitsbeweise, jedenfalls die ersten auf einem neuen Gebiet, meist grundsätzlich neue Überlegungen, Begriffe und Methoden, das Durchbrechen gewisser psychologischer Barrieren, und sie bewirken das Entstehen neuer mathematischer Disziplinen und weiterführender Fragen, lösen manchmal eine innermathematische Revolution aus. So geschah es auch mit dem Satz von Ruffini und Abel. Er besagt ja keineswegs, daß keine Gleichung der Form (1) durch ein Radikal lösbar ist. Zum Beispiel ist $x = \sqrt[5]{a}$ eine Lösungsformel in Gestalt eines Radikals für die Gleichung $x^5 - a = 0$ und

(2) $\quad x = \pm\sqrt{a \pm \sqrt{b \pm \sqrt{c}}}$

ein Lösungsradikal für die Gleichung

(3) $\quad x^8 - 4ax^6 + (6a^2 - 2b)\,x^4 + (4ab - 4a^3)\,x^2 + a^4 - 2a^2b + b^2 - c = 0,$

d. h. alle 8 im allgemeinen verschiedenen Werte, die die rechte Seite der Formel (2) bei allen möglichen Wahlen der vorkommenden Vorzeichen annimmt, erfüllen die Gleichung (3) oder, was gleichbedeutend ist:

Bezeichnet man diese 8 Werte mit $x_1, x_2, \ldots, x_8$, so ist die linke Seite von (3) gleich dem Produkt $(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_8)$. (Man prüfe beides nach!) Aber in diesen Fällen genügen die Koeffizienten der gelösten Gleichungen sehr speziellen Bedingungen: Im ersten Beispiel sind fast alle gleich Null, im zweiten Beispiel hängen sie auf eine sehr spezielle Weise von nur drei Parametern a, b, c ab.

Der Satz von Ruffini und Abel besagt nur, daß für die Gleichung (1) keine für alle Werte von $a_{n-1}, \ldots, a_0$ einheitlich anwendbare Radikal-Lösungsformel existiert, die aus den Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1}$ als Variablen mittels der zulässigen Operationen aufgebaut ist.

Galois stellte sich mit dem Einfallsreichtum, dem ungestümen Temperament und revolutionärem Elan, die ihn auch in seinem kurzen, dramatischen Leben auszeichneten, der überaus schwierigen Frage, ob und wie man aus den Koeffizienten einer speziellen Gleichung erkennen kann, ob sie durch Radikale lösbar ist und wie diese Radikale gegebenenfalls von der Struktur der Koeffizienten der gegebenen Gleichung abhängen. Das dazu erforderliche völlig neue Begriffssystem, auf dem heute unter dem Namen Gruppentheorie eine grundlegende und äußerst vielseitig verwendbare mathematische Disziplin aufgebaut ist, benötigte rund 100 Jahre vom Tode Galois' an gerechnet, bis es ungefähr die heutige Gestalt annahm und von allen Mathematikern verstanden, anerkannt und gehandhabt wurde. Es ist also nicht gar so verwunderlich, daß die sehr kurzen, in fast aphoristischem Stil und provokatorischem Ton gehaltenen Schriften des so jungen Galois von den berühmten, erfolgreichen und sich ihrer Bedeutung bewußten Mathematikern der französischen Akademie nicht verstanden oder beachtet wurden.

Die *Galoistheorie* gehört zu den genialsten mathematischen Leistungen aller Zeiten, vollbracht von einem jungen, unbekannten und mathematisch nur notdürftig gebildeten, überdies politisch mißliebigen Mann. Sie findet heute teils direkt, vor allem aber durch die von ihr erzeugte neue Denkweise Anwendungen in vielen Richtungen, von denen Galois selbst und seine Zeitgenossen nichts ahnen konnten. Zugleich muß man sagen, daß sie für die tatsächliche numerische Lösung algebraischer Gleichungen von sehr geringem Wert ist. Aber auch diese Erkenntnis, eingebettet in die umfassendere Wahrheit, daß das letzte Ziel der Mathematik nicht so sehr die schönen, eleganten Sätze und Theorien als vielmehr die rationell anwendbaren Verfahren und Methoden sein müssen, ist das Resultat einer innermathematischen Revolution, die sich in unseren Tagen vollzieht. Man darf überzeugt sein, daß Galois, der sich zu seiner Zeit den aktuellsten, am meisten in die Zukunft weisenden Fragen der Mathematik widmete und so viel zur Vollendung der *klassischen* Mathematik beigetragen hat, auch heute auf der Seite des Fortschritts zu finden wäre.

Wir haben zugunsten eines Versuchs, die wissenschaftliche Leistung von Galois mit einfachen Mitteln zu erläutern und aus heutiger Sicht zu werten, auf jegliche Details aus dem Leben und politischen Wirken von Galois verzichtet. Hierzu möchten wir den Leser auf die Galois-Biographie in den *Biographien bedeutender Mathematiker* (Verlag Volk und Wissen, 3. Aufl. 1983) und auf den biographischen Roman *Wen die Götter lieben* von L. Infeld (deutsch 1954) sowie auf den Artikel über Galois in der *alpha* 1969, Heft 4, verweisen[1]).

P. Schreiber

[1]) Nur wenige heutige Leser haben die *alpha* schon seit so langer Zeit abonniert und aufgehoben, aber es ist eine interessante und nützliche Aufgabe, einmal nachzuforschen, wo in Eurem Umkreis die alten *alpha*-Jahrgänge noch zugänglich sind und darin zu stöbern. Wir möchten Euch anregen, alte *alpha*-Hefte aufzuspüren, Stil und Inhalt von damals mit der heutigen *alpha* zu vergleichen und uns Eure Eindrücke und Entdeckungen zu schreiben.

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Schulolympiade

Abgabe beim Mathematiklehrer: Ende September 1987

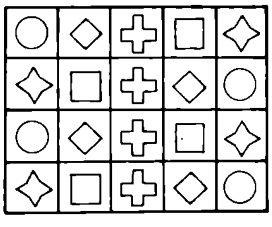
Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

Hinweis: Unter den Aufgaben der 1. Stufe befinden sich auch solche (in der Regel ist es die 4. Aufgabe), die aus mehreren Teilaufgaben von steigendem Schwierigkeitsgrad bestehen. Dabei ist Teil a) meist recht einfach zu lösen und gibt in der Regel Hilfe für die Lösung der anderen Teilaufgaben. Die Lösung der letzten Teilaufgabe stellt bewußt hohe Anforderungen. Diese Teilaufgabe ist vorwiegend für die leistungsstärkeren Schüler gedacht. Es wird empfohlen, über diese anspruchsvollen Aufgaben in Klassen und Arbeitsgemeinschaften zu diskutieren.

Anmerkung: $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B, während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

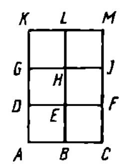
270511 Jemand will die abgebildete Figur in genau vier Teile zerschneiden. Keines der 20 kleinen Quadrate soll dabei zerschnitten werden. Die vier Teile sollen sich so übereinander legen lassen, daß sie sich dann völlig gleichen (gleiche Gestalt und gleiche Verteilung der Muster).



Es gibt fünf Möglichkeiten für eine derartige Zerlegung.
Zeichne diese fünf Zerlegungen!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

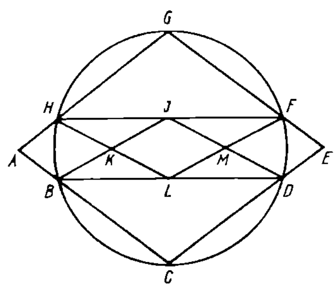
270512 Eine Strecke von 240 mm Länge soll in zwei Teilstrecken zerlegt werden. Die größere Teilstrecke soll genau 47mal so lang sein wie die kleinere. Wie lang muß dann die kleinere Teilstrecke sein und wie lang die größere? Begründe deine Antwort!

270513 Das Bild zeigt ein Rechteck $ACMK$, das aus sechs kleinen Quadraten zusammengesetzt ist. Man kann im Bild außer diesem Rechteck noch weitere Rechtecke finden, die sich aus solchen kleinen Quadraten zusammensetzen und die selbst keine Quadrate sind. Zum Beispiel ist $DFJG$ ein derartiges Rechteck.

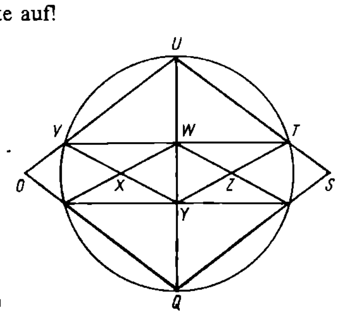


Nenne alle derartigen Rechtecke außer $ACMK$!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

270514 a) Die Figur des Bildes soll so *in einem Zuge* gezeichnet werden, daß dabei keine Linie zweimal durchlaufen wird.



Ein solcher *Zug* kann z. B. im Punkt L beginnen und über die Punkte $M, J, K, L, B, A, H, G, H, J, F, G, F, M, D, F, E, D, C, B, H, K, B, C, D$ nach Punkt L zurückführen.
Suche mindestens einen weiteren derartigen *Zug* und schreibe ihn wie im Beispiel mit Hilfe der bei ihm zu durchlaufenden Punkte auf!

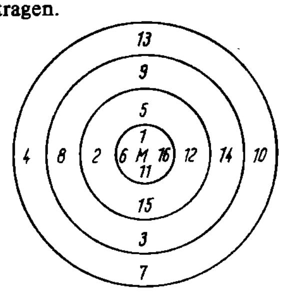


zu b)

b) Auch die Figur des Bildes läßt sich *in einem Zuge* so zeichnen, daß jede Linie genau einmal durchlaufen wird.
Gib mindestens einen derartigen *Zug* an!
c) Vergleiche Anfangs- und Endpunkt der von dir in den Bildern a und b gefundenen Wege! Was stellst du fest?

Olympiadeklasse 6

270611 Vier Kreisscheiben sind jede für sich um ihren gemeinsamen Mittelpunkt M so zu drehen, daß danach immer vier Zahlen auf je einem Strahl mit dem Anfangspunkt M liegen. Dabei soll die Summe der vier Zahlen auf jedem Strahl 34 betragen.



Gib mindestens eine Möglichkeit solcher Drehungen an!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

270612 In jedes leere Feld des abgebildeten Quadrats ist eine der Zahlen 2, 3, 4, 5 einzutragen. Dabei soll in keiner Spalte oder Zeile eine dieser Zahlen mehrfach vorkommen. Ferner soll in keiner Spalte oder Zeile neben einer Zahl deren Nachfolger oder Vorgänger stehen.

1			
	1		
		1	
			1

Gib mindestens zwei solche Eintragungen an!
Eine Begründung wird nicht verlangt.
(*Hinweis:* Es gibt sogar mehr als zwei solche Eintragungen.)

270613 Auf einer Wippe stellt sich heraus:

(1) Andreas ist leichter als Frank, aber schwerer als Dirk.
(2) Stefan ist leichter als Andreas, aber schwerer als Dirk.
(3) Peter ist leichter als Jürgen, aber schwerer als Michael.
(4) Jürgen ist leichter als Dirk.

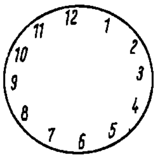
Ordne die Jungen nach ihrem Gewicht; beginne bei dem schwersten!
Überprüfe, ob bei der von dir angegebenen Reihenfolge alle Aussagen (1) bis (4) wahr sind!

270614 Kerstin zerschneidet ein rechteckiges Stück Papier so, daß der Schnitt vom Mittelpunkt einer Rechteckseite zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite verläuft. Es entstehen zwei kleinere Rechtecke; Kerstin legt sie genau übereinander, so daß nur noch ein kleineres Rechteck zu sehen ist, das aus zwei Schichten besteht.

Kerstin zerschneidet dieses aus zwei Schichten bestehende Rechteck in gleicher Weise und legt wieder die entstandenen rechteckigen Papierstücke genau übereinander.
Entsprechend wird fortgesetzt: Übereinanderliegende Rechtecke werden zerschnitten, die entstandenen Papierstücke werden übereinandergelegt. (Natürlich geht das nicht beliebig oft; denn der Papierstapel, der zerschnitten werden soll, wird immer dicker.)
(1) Nenne die Anzahl der Papierstücke, die nach dem
a) zweiten, b) dritten, c) vierten
Zerschneiden entstanden sind!
(2) Angenommen, das Zerschneiden wäre beliebig oft möglich. Warum könnten dann trotzdem niemals nach einem Schnitt genau 160 Papierstücke entstehen?

Olympiadeklasse 7

270711 Klaus ließ versehentlich seinen Wecker zu Boden fallen. Dabei zersprang das Zifferblatt (vgl. das Bild) in drei Flächenstücke. Nachdem der erste Schreck über das Mißgeschick vorüber war, bemerkte Klaus, daß keine der 12 Zahlen beim Zerspringen des Zifferblattes auseinandergerissen worden war.



Er berechnete für jedes der drei Flächenstücke die Summe derjenigen Zahlen, die auf diesem Flächenstück standen. Dabei stellte er fest, daß sich in allen drei Fällen dieselbe Summe ergab.
Wie könnte das Zifferblatt zersprungen sein? Gib eine Möglichkeit hierfür an und überprüfe, daß die von Klaus gemachte Feststellung für deine Angabe zutrifft!

270712 In einer Kiste befinden sich genau 100 Kugeln, und zwar 30 rote, 30 blaue, 30 grüne sowie 10 Kugeln, von denen nur bekannt ist, daß sie schwarz oder weiß sind und daß mindestens eine schwarze Kugel dabei ist. Durch das Tastgefühl lassen sich verschiedenfarbige Kugeln nicht voneinander unterscheiden.
Untersuche, ob es trotzdem möglich ist, mit geschlossenen Augen eine jeweils geeignete Anzahl von Kugeln, aber nicht alle, so herauszugreifen, daß man mit Sicherheit vorhersagen kann:
a) Unter den herausgegriffenen Kugeln befinden sich mindestens 12 Kugeln von gleicher Farbe.
b) Unter den herausgegriffenen Kugeln befindet sich mindestens eine schwarze Kugel.
c) Unter den herausgegriffenen Kugeln befinden sich mindestens 5 weiße Kugeln.

270713 In einem Dreieck seien die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Längen aller Seiten ganzzahlig, gerade und untereinander verschieden.
Bekannt ist $a = 6$ cm und $b = 4$ cm.
Untersuche, ob aus diesen Angaben der Umfang des Dreiecks eindeutig ermittelt werden kann! Ist dies der Fall, dann gib den Umfang an!

270714 Bekanntlich hat jedes Viereck genau zwei Diagonalen.
a) Ermittle die Anzahl der Diagonalen eines Fünfecks und eines Sechsecks!
b) Finde eine Formel für die Anzahl der Diagonalen eines Vielecks in Abhängigkeit von der Eckenzahl n des Vielecks!
Die Formel soll für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 4$ gelten.
Begründe diese Formel!
c) Welchen Wert gibt diese Formel, wenn man sie für $n = 3$ anwendet? Läßt sich auch dieser Wert in eine geometrisch anschauliche Aussage fassen?

Olympiadeklasse 8

270811 Steffen stellt den Mitgliedern der AG Mathematik folgende Aufgabe:
„Jeder denke sich eine Zahl, multipliziere diese mit 2, addiere zum Produkt 30, dividiere die Summe durch 2, subtrahiere von dem erhaltenen Ergebnis die anfangs gedachte Zahl!
Schreibe das Ergebnis auf!"
Es stellt sich heraus, daß alle Schüler der Arbeitsgemeinschaft das gleiche Ergebnis hatten.
Müssen sich Steffens Mitschüler unbedingt auch die gleiche Zahl gedacht haben?

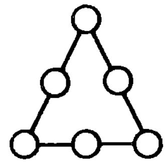
270812 In einem rechtwinkligen Koordinatensystem seien die Punkte $A(1;5)$, $B(4;4)$, $C(2;8)$, $A'(8;4)$, $B'(7;1)$, $C'(11;3)$ gegeben. Sie sind so gelegen, daß es eine Drehung gibt, bei der A, B und C die Bildpunkte A', B' bzw. C' haben.
Konstruiere das Drehzentrum D dieser Drehung!
Beschreibe deine Konstruktion!
Beweise folgende Aussage: Wenn D das gesuchte Drehzentrum ist, dann läßt sich D nach deiner Beschreibung konstruieren.

270813 Es sei ABC ein Dreieck, bei dem der Innenwinkel $\sphericalangle BAC$ die Größe 30° hat.
Beweise, daß unter dieser Voraussetzung die Länge der Seite BC gleich der Länge des Umkreisradius dieses Dreiecks ist!

270814 Es soll die Summe der Quadrate zweier beliebiger natürlicher Zahlen gebildet werden. Dann ist eine *Division mit Rest* durchzuführen, und zwar soll die eben genannte Summe durch 4 dividiert werden. Man will nun untersuchen, welche Zahlen bei einer derartigen Division als Rest auftreten können und welche nicht.
a) Bilde zunächst einige Beispiele, indem du jedesmal selbst zwei natürliche Zahlen wählst, die Summe ihrer Quadrate durch 4 dividierst und den auftretenden Rest notierst! Setze das Bilden solcher Beispiele so oft fort, bis es *nur noch eine* natürliche Zahl kleiner als 4 gibt, die in deinen Beispielen *nicht* als Rest auftrat!
b) Nun kann man vermuten, daß diese Zahl *niemals* als Rest auftritt, wenn die Summe der Quadrate zweier beliebiger natürlicher Zahlen durch 4 dividiert wird. Beweise diese Vermutung!

Olympiadeklasse 9

270911 In die Kreisfelder der Figur sollen die Zahlen 1 bis 6 so eingetragen werden, daß jede Zahl genau einmal vorkommt, und daß die Zahlen auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe ergeben.



Geben Sie eine solche Eintragung an! Überprüfen Sie, daß die von Ihnen angegebene Eintragung alle geforderten Bedingungen erfüllt!

270912 Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0, 1, ..., 6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen. In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, ..., 6 je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steines dieselbe Zahl steht).
Eine *Kette* entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, daß benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel). Eine Kette heißt *geschlossen*, wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen (so daß man die Kette, wenn sie aus genügend vielen Steinen besteht, an ihren Anfang zurückführen und dort schließen kann).
a) Ermitteln Sie die Anzahl aller zu einem Dominospiel gehörenden Steine!
b) Ermitteln Sie die größte Zahl solcher Steine eines Dominospiels, aus denen sich eine geschlossene Kette bilden läßt!

270913 Jemand möchte die Frage beantworten, ob 1987 eine Primzahl ist. Er hat unter seinen Rechenhilfsmitteln (Zahlentafel, Taschenrechner) zwar auch eine Primzahltabelle; sie enthält aber nur die Primzahlen unter 100.
Wie kann (ohne weitere Hilfsmittel) die Untersuchung geführt werden; welche Antwort erbringt sie?

270914 Für jedes Rechteck seien die Seitenlängen mit a, b bezeichnet, die Diagonalenlänge mit d und der Flächeninhalt mit A.
Beweisen Sie mit diesen Bezeichnungen die folgende Aussage:
Es gilt $d = 2a - b$ genau dann,
wenn $A = \frac{3}{4}a^2$ gilt!

Olympiadeklasse 10

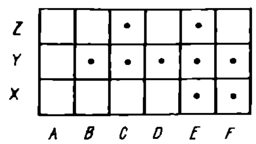
271011 Wie viele geordnete Paare von ganzen Zahlen (x, y) gibt es insgesamt, für die $x \cdot y = 1987$ gilt?

271012 a) Gibt es eine *ganze Zahl* x, für die $\frac{1}{x-1} > 1987$ gilt?

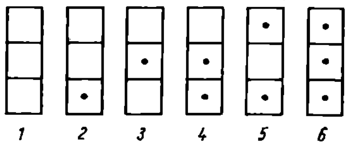
b) Ermitteln Sie alle diejenigen *reellen Zahlen* x, für die $\frac{1}{x-1} > 1987$ gilt!

271013 Das Rechteck in dem Bild a kann (mit Berücksichtigung des eingezeichneten Punktmusters) aus den sechs Teilen in Bild b zusammengesetzt werden.

a)



b)



Geben Sie eine Möglichkeit für eine solche Zusammensetzung an und untersuchen Sie, ob die von Ihnen angegebene Möglichkeit die einzige ist!
(Zur Bezeichnung der Teilquadrate sollen die im Bild a angegebenen Buchstaben benutzt werden. So wird z.B. das rechte obere Feld mit *FZ* bezeichnet.)

271014 Ist es möglich, einen Quader mit den Kantenlängen $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{8}$ vollständig mit Würfeln gleicher Kantenlängen auszufüllen?

Olympiadeklassen 11/12

271211 Man ermittle alle diejenigen Paare (x,y) reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

(1) $x + xy + y = -1$
(2) $x^2 + y^2 = 5$!

271212 Man ermittle alle diejenigen zweistelligen und alle diejenigen dreistelligen natürlichen Zahlen, bei denen das Produkt der Ziffern doppelt so groß ist wie die Quersumme!

271213 Es seien wie üblich a, b, c die Seitenlängen eines beliebigen Dreiecks.
Man untersuche, ob für jedes Dreieck die Ungleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc)$$

gilt!

271214
Man ermittle den Rest, den die Summe

$$s = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + 1987^5$$

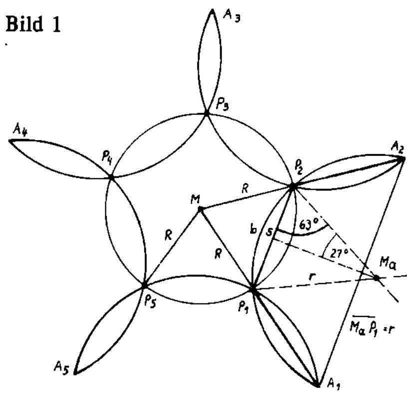
bei Division durch 25 läßt!

Lösungen

Lösung zu:
Unterhaltsame Kreisfigur
Heft 3/87

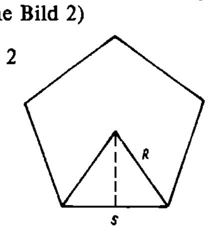
Laut Aufgabenstellung seien alle Bogenstücke kongruent, also $\widehat{P_1P_2}$; $\widehat{P_2P_3}$; $\widehat{P_3P_4}$; $\widehat{P_4P_5}$; $\widehat{P_1A_1}$ und $\widehat{A_1P_1}$; usw.

Bild 1



$P_1P_2P_3P_4P_5$ ist ein regelmäßiges Fünfeck, M sei der Mittelpunkt des Umkreises (siehe Bild 1). $A_1A_2P_2P_1$ ist ein gleichschenkliges Trapez, die Bogen $\widehat{A_2P_2}$, $\widehat{P_2P_1}$, $\widehat{P_1A_1}$ bilden einen Bogen, der ein Teil des Umkreises dieses gleichschenkligen Trapezes ist. Die Winkelhalbierenden von $\sphericalangle A_1P_1P_2$ und $\sphericalangle P_1P_2A_2$ schneiden einander im Mittelpunkt des Umkreises M_a dieses gleichschenkligen Trapezes. Der Radius dieses Kreises sei r, der Radius des Umkreises des Fünfecks sei R.
Nun gilt für die Seitenlänge s des Fünfecks (siehe Bild 2)

Bild 2



(1) $s = 2 \cdot R \cdot \sin 36°$

wegen $\frac{s}{2} = R \cdot \sin 36°$
$\overline{M_aP_1} = r$

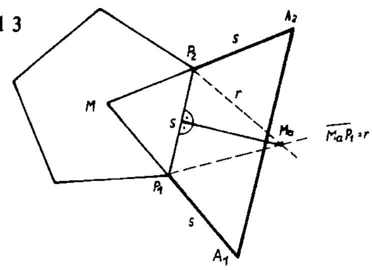
Für das gleichschenklige Trapez $A_1A_2P_2P_1$ gilt

$$\overline{A_1P_1} \cong \overline{P_1P_2} \cong \overline{P_2A_2} = s$$
$$\sphericalangle A_1P_1P_2 = 126° \text{ sowie}$$
$$\sphericalangle P_1P_2A_2 = 126°$$
$$\sphericalangle P_1M_aP_2 = 54°$$

$\frac{s}{2} : r = \sin 27°$, also

$$r = \frac{\frac{s}{2}}{\sin 27°} \text{ und wegen (1)}$$

Bild 3



(2) $r = \frac{R \cdot \sin 36°}{\sin 27°}$.

Der Bogen b errechnet sich somit nach der Formel

(3) $b = \frac{\pi r \cdot 54}{180} = \frac{3 \cdot \pi \cdot R \cdot \sin 36°}{10 \cdot \sin 27°}$

Einsender der Lösung:
Mathematikfachlehrer H. Schaller,
Institut für Lehrerbildung, Leipzig

Lösungen zu:
Der Vier-Quadrate-Satz
Heft 3/87

▲1▲ Jede natürliche Zahl der Form $4m + 1$ ist (nach Satz 2) in höchstens drei Quadratzahlen zerlegbar. Jede natürliche Zahl der Form $4m + 2$ ist ebenfalls (nach Satz 2) in höchstens drei Quadratzahlen zerlegbar. Jede natürliche Zahl der Form $n = 4m + 3$ läßt sich als Summe $n = (n-1) + 1^2$ schreiben, worin $n - 1$ als Zahl der Form $4m + 2$ in höchstens drei Quadratzahlen zerlegbar ist; also ist n als Summe von höchstens vier Quadratzahlen darstellbar. Dies gilt auch für jede durch 4 teilbare natürliche Zahl n.
Man kann sie nämlich in der Form $n = 4^l(4m + r) = (2^l)^2(4m + r)$ mit $r = 1$, 2, oder 3 schreiben (4^l soll also die höchste in n aufgehende Potenz von 4 sein).
$4m + r$ ist aber für $r = 1$ oder 2 in höchstens drei Quadratzahlen, für $r = 3$ in höchstens vier Quadratzahlen zerlegbar.

▲2▲ Der Satz 6 ergibt sich folgendermaßen aus Satz 3: Es sei $r = \frac{p}{q}$ eine gebrochene Zahl, worin p und q natürliche Zahlen sind. Nach Satz 3 ist jede natürliche Zahl Summe von höchstens vier Quadratzahlen.
1. Fall: Es ist $pq = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ mit natürlichen Zahlen a, b, c, d.
Dann ist

$$r = \frac{p}{q} = \frac{pq}{q^2} = \left(\frac{a}{q}\right)^2 + \left(\frac{b}{q}\right)^2 + \left(\frac{c}{q}\right)^2 + \left(\frac{d}{q}\right)^2$$

Summe von vier Quadraten gebrochener Zahlen.
2. Fall: Es ist $pq = a^2 + b^2 + c^2$ mit natürlichen Zahlen a, b, c.
Dann ist

$$r = \frac{p}{q} = \left(\frac{a}{q}\right)^2 + \left(\frac{b}{q}\right)^2 + \left(\frac{3c}{5q}\right)^2 + \left(\frac{4c}{5q}\right)^2$$

Summe von vier Quadraten gebrochener Zahlen (beachte $5^2 = 3^2 + 4^2$).

3. Fall: Es ist $pq = a^2 + b^2$ mit natürlichen Zahlen a, b. Dann ist

$$r = \frac{p}{q} = \frac{pq}{q^2} = \left(\frac{a}{q}\right)^2 + \left(\frac{b}{3q}\right)^2 + \left(\frac{2b}{3q}\right)^2 + \left(\frac{2b}{3q}\right)^2$$

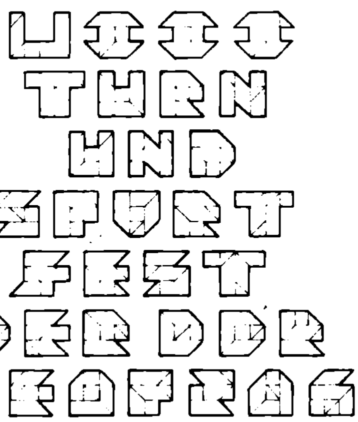
Summe von vier Quadraten gebrochener Zahlen (beachte $3^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2$).

4. Fall: Es ist $pq = a^2$ mit einer natürlichen Zahl a. Dann ist

$$r = \frac{p}{q} = \frac{pq}{q^2} = 4\left(\frac{a}{2q}\right)^2 = \left(\frac{a}{2q}\right)^2 + \left(\frac{a}{2q}\right)^2 + \left(\frac{a}{2q}\right)^2 + \left(\frac{a}{2q}\right)^2$$ Summe von vier Quadraten gebrochener Zahlen.

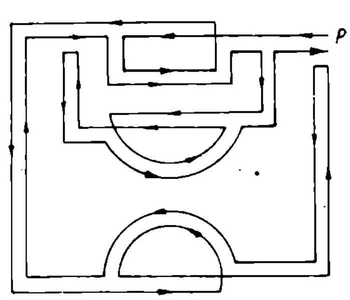
Lösungen zu:
Knobel-Wandzeitung (8)
Heft 3/87

▲1▲ Das Bild zeigt mögliche Legefiguren sowie je eine Legemöglichkeit.



▲2▲ a) 21 Gold-, 37 Silber- und 22 Bronzemedaillen.
b) 11,4 % der Leipziger Einwohner waren 1980 im DTSB, das ist gegenüber 1951 eine Steigerung um 109,68 %.
c) Jeder leistete durchschnittlich rund 4 Stunden.
d) In einem normalgefüllten Becken befinden sich 562,5 m³ Wasser.
e) Die Zahl der Studenten stieg auf das 25fache, und die Zahl der Lehrkräfte auf (rund) das 33fache.

▲3▲ Das Bild zeigt eine Möglichkeit zum zweimaligen Durchlaufen des Liniennetzes. (Es ist nicht möglich, das Liniennetz hintereinander so zu durchlaufen, daß man jede Linie des Netzes genau einmal durchschreitet. Warum?)



Die zurückgelegte Wegstrecke beträgt 736,66 m. Diese ergibt sich als doppelte Länge des Liniennetzes, die 368,33 m beträgt und sich zusammensetzt aus der Länge der Seitenlinien (100 m), der Tor- und Mittellinie (120 m), der Strafraumlinien (73,32 m), der Torraumlinien (29,32 m), des Mittelhalbkreises ($\pi \cdot 9{,}15$ m $= 28{,}75$ m) und der Strafraum-Kreislinie (16,94 m).

▲4▲ Die Kryptogramme 1, 2, 5, 6 und 8 sind mehrdeutig lösbar. Es gibt z. T. sehr viele Lösungen, z. B.

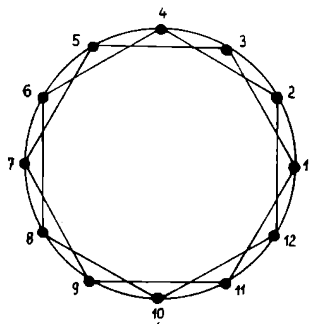
1	6233	7255	6	6211	9311
	+1588	+1366		+8300	+7200
	7821	8621		14511	16511
2	8977	6988	8	3788	5722
	+6055	+7544		+5622	+3688
	15032	14532		9410	9410
5	2399	3199			
	+5411	+5277			
	7810	8476			

Die übrigen Kryptogramme sind nicht lösbar. Ihr gelangt in all diesen Fällen zu einem Widerspruch.

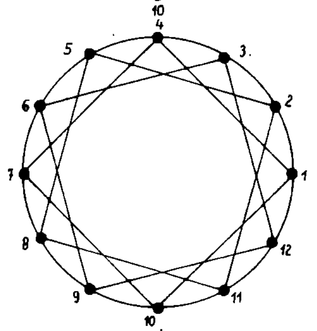
▲5▲ Allgemein: Ist die Zahl 12 durch die Stellung des angewiesenen Vordermanns (hier 2. und 3. Vordermann) teilbar, so teilt sich der Kreis ($12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$), wenn nicht (hier 5. Vordermann), so bleibt ein Kreis.

Ausführungsschema:

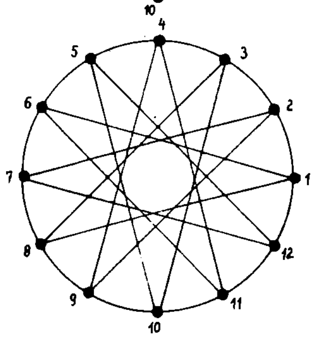
a)



b)

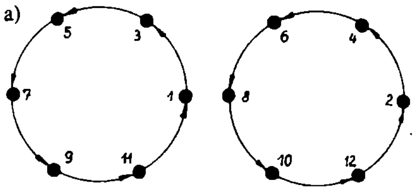


c)

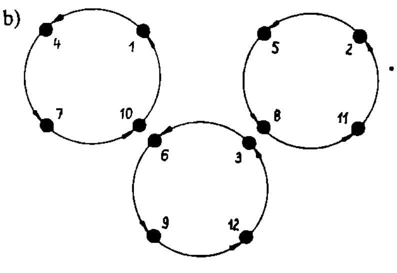


Lauffiguren:

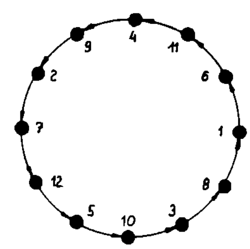
a)



b)



c)



▲6▲ 1. BEN HEGEWICHT – GEWICHTHEBEN;
2. BEN OX – BOXEN;
3. ELLA BRAWSS – WASSERBALL;
4. ELLA BYLLOV – VOLLEYBALL;
5. ERNA FLEUHUD – HUERDENLAUF;
6. ERNI TE – REITEN;
7. HORST SPANGBUCH – STABHOCHSPRUNG;
8. INGE WURPST – WEITSPRUNG;
9. MARTHA LOFUNA – MARATHONLAUF;
10. RENATO SPRUNNK – KANURENNSPORT;
11. RUDI SPRENG – DREISPRUNG;
12. SUSEN STOLEGK – KUGELSTOSSEN;
13. SUSI WEKFREND – DISKUSWERFEN;
14. WERNER FESPE – SPEERWERFEN;
15. WERNER HEMMAF – HAMMERWERFEN

▲7▲ oben: LEICHTATHLETIK, unten (v. l. n. r.): HAMMERWERFEN, SPEERWERFEN, HUERDENLAUF, MARATHONLAUF.

▲8▲ *Waagerecht:* 3. Helm (Rüdiger, DDR); 5. Kim (Nelli, UdSSR); 6. Ovett (Steven, Großbritannien); 9. Beck (Volker, DDR); 11. Walle (Robert van de, Belgien); 12. Jon (Corneliu, Rumänien); 14. Varga (Karoly, Ungarn); 15. Coe (Sebastian, Großbritannien).
Senkrecht: 1. Koch (Marita, DDR); 2. Jahl (Evelin, DDR); 4. Diers (Ines, DDR); 7. Mate (Ilja, UdSSR); 8. Fink (Rudi, DDR); 10. Colon (Maria, Kuba); 13. Baron (Bengt, Schweden).

Lösungen zu: Unterhaltungsmathematik aus der äthiopischen Schülerzeitschrift Hislab
Heft 3/87

▲1▲ Der Preis für ein Brot sei x Cent, dann hat der dritte a Cent an den ersten und b Cent an den zweiten zu zahlen.
Das ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rlrl} 3x - a = & 35 & 3x - a = & 35 \\ 4x - b = & 35 & a = & 45 - 35 \\ \underline{a + b =} & \underline{35} & a = & 10 \\ 4x - b = & 35 & a + b = & 35 \\ \underline{3x + b =} & \underline{70} & b = & 25 \\ 7x = & 105 & & \\ x = & 15 & & \end{array}$$

Der erste Reisende müßte 2 Fünf-Cent-Stücke und der zweite Reisende 5 Fünf-Cent-Stücke erhalten.

▲2▲ 100 Küken fressen in 100 Tagen 100 Scheffel. 100 Küken fressen in 10 Tagen 10 Scheffel. 10 Küken fressen in 10 Tagen 1 Scheffel.

▲3▲ Unter den vielen Möglichkeiten, 2450 in ein Produkt aus drei Faktoren zu zerlegen, gibt es zwei, in denen die Summe der Faktoren gleich 64 ist:
$5 \cdot 10 \cdot 49 = 2450; \quad 5 + 10 + 49 = 64;$
$7 \cdot \ \ 7 \cdot 50 = 2450; \quad 7 + \ \ 7 + 50 = 64.$
Da das Produkt der beiden kleineren Faktoren größer sein muß als der größte Faktor, sind die Personen 5, 10 und 49 Jahre alt.

▲4▲ Die Zahl der Nur-Fußballspieler sei a. Die Zahl der Fußball- und Basketballspieler sei b. Die Zahl der Spieler aller drei Sportarten sei c. Die Zahl der Fußball- und Volleyballspieler sei d. Die Zahl der Basket- und Volleyballspieler sei e.
Die Zahl der Nichtspieler sei f.
Es ist $a + b + c + d = 90$ und damit $e + f = 10$. Ferner gilt $b + e + c = 80$, dann ist $b + c \geqq 70$ und $a + d + e + f \leqq 30$, also auch $d + e \leqq 30$.
Nun ist $c + d + e = 70$ und schließlich $c \geqq 40$ und $c \leqq 70$. Da c ein Vielfaches von 19 ist, ergibt sich $c = 57$, $f = 3$, $e = 7$, $b = 16$, $d = 6$ und $a = 11$.
Es spielen 11 Mitglieder Fußball.

▲5▲ Der Ähnlichkeitsfaktor beträgt $k = 100$.
a) $V' = k^3 \cdot V = 1\,000\,000 \cdot V$.
Das Volumen der großen Maus ist 1 000 000mal so groß.
b) Die Masse ist proportional dem Volumen.
$m' = 1\,000\,000 \cdot m = 1\,000\,000 \cdot 30\ \text{g}$
$= 30\,000\,000\ \text{g} = 30\,000\ \text{kg}$.
Die Masse der großen Maus beträgt 30 000 kg.
c) $A' = k^2 \cdot A = 10\,000 \cdot A$
$= 10\,000 \cdot 1\ \text{cm}^2 = 10\,000\ \text{cm}^2 = 1\ \text{m}^2$.
Die Querschnittsfläche der großen Maus beträgt für die Beine 1 m².

▲6▲ Die Volumina der beiden Behälter stehen im Verhältnis $V' : V = k^3 = 1000$. Demzufolge ist der Ähnlichkeitsfaktor $k = 10$.
Für die Höhe des großen Behälters ist
$h' = 10 \cdot h = 10 \cdot 12{,}8\ \text{cm} = 128\ \text{cm}$
und der Durchmesser
$d' = 10 \cdot d = 10 \cdot 10\ \text{cm} = 100\ \text{cm}$.
Der große Behälter hat die Ausmaße 100 cm und 128 cm.

▲7▲ Der Zug legt, wenn der Anfang in den Tunnel einfährt, bis der letzte Wagen aus dem Tunnel herauskommt, eine Strecke von $s = 2$ km zurück. Die Fahrzeit erhält man aus der Gleichung

$s = v \cdot t$ mit $t = \frac{s}{v}$,

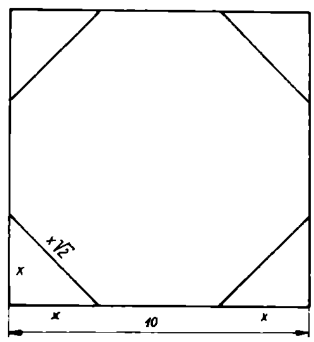
$t = \frac{2\ \text{km} \cdot \text{h}}{15\ \text{km}} = \frac{2}{15}\ \text{h} = 8\ \text{min}$.

Der Zug braucht 8 Minuten.

▲8▲ Bezeichnet man die Länge der abzuschneidenden Ecken mit x cm (siehe Bild), dann muß gelten

$$\begin{aligned} 2x + x\sqrt{2} &= 10, \\ x(2 + \sqrt{2}) &= 10, \\ x &= \frac{10}{2 + \sqrt{2}} = \frac{10(2 - \sqrt{2})}{4 - 2}, \\ x &= 5(2 - \sqrt{2}),\ x = 2{,}9289\ldots \end{aligned}$$

Die Ecken müssen in etwa 2,9 cm Länge abgeschnitten werden.

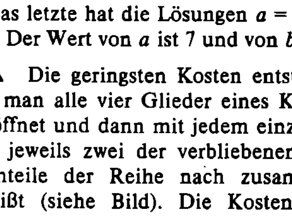


▲9▲ Die Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist. Deshalb gelten die Gleichungen $a + b = 6$ oder $a + b = 15$ mit $0 \leqq a$; $b \leqq 9$.
Die Zahl ist durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist. Deshalb gilt die Gleichung
$a - b = -1$ mit $0 \leqq a$; $b \leqq 9$.
Von den zwei Möglichkeiten der Gleichungssysteme

$$\begin{array}{lcl} a + b = 6 & \text{und} & a + b = 15 \\ a - b = 1 & & a - b = -1 \end{array}$$

führt das erste zum Widerspruch ($a = 3{,}5$), und das letzte hat die Lösungen $a = 7$ und $b = 8$. Der Wert von a ist 7 und von b ist 8.

▲10▲ Die geringsten Kosten entstehen, wenn man alle vier Glieder eines Kettenteils öffnet und dann mit jedem einzelnen Glied jeweils zwei der verbliebenen fünf Kettenteile der Reihe nach zusammenschweißt (siehe Bild). Die Kosten sind dann
$4 \cdot 10 + 4 \cdot 25 = 140$.
Die geringsten Kosten betragen 140 Cent.



▲11▲ Masse, Gewicht und Volumen sind proportional. Die Höhen des Menschen und des Riesen stehen im Verhältnis $k = 6 : 2 = 3 : 1 = 3$,
demzufolge gilt $V' = k^3 \cdot V = 27 \cdot V$
bzw. $m' = 27\ \text{m}$ für die Masse
und $G' = 27\ G$ für das Gewicht.
Nun muß in beiden Fällen der Druck p gleich sein, dann ist, wenn man den Querschnitt des Knochens z. B. kreisförmig betrachtet,

$p = \frac{G}{A_k}$, $p = \frac{G \cdot 4}{\pi \cdot d^2}$ und $p = \frac{27 \cdot G \cdot 4}{\pi(x \cdot d)^2}$.

Durch Gleichsetzen erhält man

$\frac{G \cdot 4}{\pi d^2} = \frac{27 \cdot G \cdot 4}{\pi \cdot x^2 \cdot d^2}$, $\quad (F \neq 0;\ d \neq 0)$

$x^2 = 27$, $x = 3\sqrt{3}$.

Die Knochen des Riesen sind $3\sqrt{3}$ mal so dick.

▲12▲ Wenn Sara die zwei Sorten Äpfel getrennt verkauft, erhält sie $\frac{30}{2} + \frac{30}{3}$ $= 25$ Cent. Mischt sie die beiden Sorten und verkauft die Mischung mit 5 Stück zu 2 Cent, bekommt sie $\frac{60}{5} \cdot 2 = 24$ Cent.
Saras Problem liegt in ihrer Rechnung. Sie dachte, daß der Verkauf der Mischung mit 5 Stück zu 2 Cent dasselbe ist wie der Verkauf von 2 teuren Äpfeln zu 1 Cent und von 3 billigen zu 1 Cent. Aber es ist eben nicht dasselbe. Diese beiden Arten des Verkaufs würden nur dann dasselbe Ergebnis haben, wenn beide Sorten Äpfel ursprünglich im gleichen Verhältnis 2 : 3 gemischt worden wären. Würde man also z. B. 30 teure Äpfel mit 45 billigen mischen, so erhält man in beiden Fällen 30 Cent.

$\frac{30}{2} + \frac{45}{3} = 30$ und $\frac{75}{5} \cdot 2 = 30$.

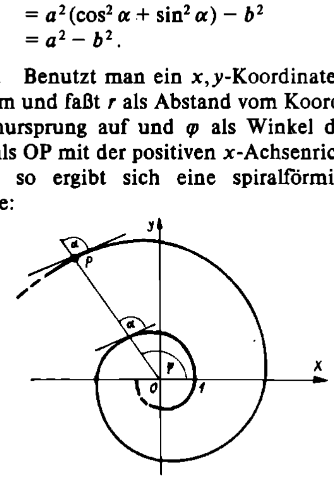
Lösungen zu: Eine alte Vorlesungsmitschrift entdeckt
Heft 3/87

▲1▲ $\triangle OPz$ ist ähnlich $\triangle OwP$, also $\frac{\overline{OP}}{\overline{Ow}} = \frac{\overline{Oz}}{\overline{OP}}$. Mit $\overline{OP} = 1$ folgt die gesuchte Relation!

▲2▲ $\overline{Ow} = a \cos\alpha - b \cos\beta$ und
$\overline{Oz} = a \cos\alpha + b \cos\beta$, also
$\overline{Ow} \cdot \overline{Oz} = a^2 \cos^2\alpha - b^2 \cos^2\beta$.
Da $\overline{AQ} = a \sin\alpha$ und auch $\overline{AQ} = b \sin\beta$, gilt nun

$$\begin{aligned} \overline{Ow} \cdot \overline{Oz} &= a^2 \cos^2\alpha - b^2(1 - \sin^2\beta) \\ &= a^2 \cos^2\alpha - b^2 + a^2 \sin^2\alpha \\ &= a^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - b^2 \\ &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

▲3▲ Benutzt man ein x,y-Koordinatensystem und faßt r als Abstand vom Koordinatenursprung auf und φ als Winkel des Strahls OP mit der positiven x-Achsenrichtung, so ergibt sich eine spiralförmige Kurve:



Diese auf *René Descartes* (1596 bis 1650) und *Evangeliste Torricelli* (1608 bis 1647)[1]) zurückgehende logarithmische Spirale wird auch oft als *gleichwinklige Spirale* bezeichnet, da alle Strahlen, die von ihrem Zentrum O ausgehen, immer unter dem gleichen Winkel α geschnitten werden.

[1]) Viele Einzelheiten über diese beiden Wissenschaftler erfährst du in dem Buch *Wegbereiter der neuen Mathematik* von Nikiforowski und Freiman, Fachbuchverlag Leipzig 1978.

▲4▲ Im Fall a gibt es keine solche Kurve, im Fall b sind es 4! Die geschlossene Kurve 8 kann man auf einen Punkt zusammenziehen!

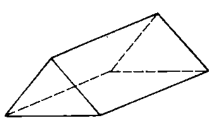
Lösungen zu:
Mathematik-Studium in der UVR

▲1▲ Es sei $f(\alpha, \beta, \gamma)$:
$= \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$.
Zuerst bestimmen wir das Maximum von f bei festem γ.
Es ist dann $\alpha + \beta = 180° - \gamma$
und nach Additionstheoremen:
$f(\alpha, \beta, \gamma)$
$= \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \cdot \cos\gamma$
$= \frac{1}{2}(\cos(180° - \gamma) + \cos(\alpha - \beta)) \cdot \cos\gamma$
$= \frac{1}{2}(-\cos\gamma + \cos(\alpha - \beta)) \cdot \cos\gamma$.
Für $\gamma \geqq 90°$ ist $f(\alpha, \beta, \gamma) \leqq 0$,
also genügt es, $\gamma < 90°$ zu betrachten.
Dann ist aber $f(\alpha, \beta, \gamma)$ maximal, wenn $\cos(\alpha - \beta)$ maximal ist, also $= 1$, d.h. aber wegen $0 \leqq \alpha, \beta < 180°: \alpha = \beta$.
Für diesen Fall ist:
$f(\alpha, \alpha, \gamma) = \frac{1}{2}(1 - \cos\gamma) \cdot \cos\gamma$.
Wegen $\sqrt{(1 - x) \cdot x} \leqq \frac{1}{2} \cdot (1 - x + x)$
$= \frac{1}{2}$ für $x \in [0; 1]$
$\left(\text{Gleichheitszeichen gilt nur für } x = \frac{1}{2}\right)$
folgt dann aber:
$f(\alpha, \beta, \gamma) \leqq f(\alpha, \alpha, \gamma) \leqq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$
und Gleichheitszeichen gilt nur für
$\alpha = \beta$ und $\cos\gamma = \frac{1}{2}$,
d.h. aber $\alpha = \beta = \gamma = 60°$.

▲2▲ Offensichtlich muß gelten $x > 0$ und $x \neq 1$. (Für $x = 1$ gilt $x^{1-x-x^2} = 1$.)
1. Fall: $0 < x < 1$.
Die Ungleichung ist äquivalent zu
$1 - x - x^2 > x$
d.h. $1 - 2x - x^2 > 0$
d.h. $x^2 + 2x - 1 < 0$.
$x^2 + 2x - 1 = 0$ gilt
für $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$, d.h. aber:
$-1 - \sqrt{2} < x < -1 + \sqrt{2}$ und wegen
$0 < x < 1: 0 < x < -1 + \sqrt{2}$.
2. Fall: $x > 1$.
Dann ist die Ungleichung äquivalent zu
$1 - x - x^2 < x$
d.h. $x^2 + 2x - 1 > 0$.
$x^2 + 2x - 1 = 0$ gilt für
$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$, d.h. also
$x < -1 - \sqrt{2}$ oder $x > -1 + \sqrt{2}$.
Wegen $x > 1$ gilt also: $x > 1$.
Endergebnis: $L = (0; -1 + \sqrt{2}) \cup (1, \infty)$.

▲3▲ Es sei m die Anzahl der 5-Ecke, n die Anzahl der 6-Ecke.
Dann gilt sicher: $f = m + n$.
In jeder Ecke treffen drei Vielecke aufeinander. Zählen wir also die Ecken der 5- bzw. 6-Ecke zusammen, erhalten wir die dreifache Anzahl der Ecken von P, also $e = \frac{1}{3}(5m + 6n)$. Analog gilt für die Kantenzahl $k = \frac{1}{2}(5m + 6n)$.
Wegen $e - k + f = 2$ muß also gelten:
$\frac{1}{3}(5m + 6n) - \frac{1}{2}(5m + 6n) + m + n$
$= 2$, d.h. aber: $m = 12$.
Damit ist die Anzahl der 5-Ecke eindeutig bestimmt. Da an jedes Sechseck drei 5-Ecke und an jedes 5-Eck fünf 6-Ecke angrenzen, muß gelten:
$5m = 3n$, d.h. aber: $n = 20$.

▲4▲ Sei wieder m die Anzahl der Dreiecke, n die Anzahl der Vierecke.
Wieder gilt:
$f = m + n$ und $k = \frac{1}{2}(3m + 4n)$.
Auch jetzt können nur drei Seitenflächen in einer Ecke aufeinandertreffen,
also: $e = \frac{1}{3}(3m + 4n)$. Mithin gilt:
$2 = e - k + f = \frac{1}{3}(3m + 4n) - \frac{1}{2}(3m + 4n)$
$+ m + n$, d.h.: $12 = 3m + 2n$.
Da an jedes Dreieck drei Vierecke und an jedes Viereck zwei Dreiecke angrenzen, gilt: $3m = 2n$ also $12 = 6m$; $m = 2$ und $n = 3$:



▲5▲ Es genügt offensichtlich,
$(2^n + 1) | (2^{m \cdot n} + 1)$ zu zeigen. m ist ungerade, also existiert ein natürliches k mit $m = 2k + 1$.
Es gilt:
$x^m + 1 = x^{2k+1} + 1 = (x + 1)$
$\cdot (x^{2k} - x^{2k-1} \pm \ldots - x + 1)$
also gilt für ganzes x: $(x + 1) | (x^m + 1)$.
Mithin ist für $x = 2^n$:
$(2^n + 1) | (2^{n \cdot m} + 1)$, q.e.d.
Der Beweis ist auch über vollständige Induktion durchführbar.

▲6▲ Für den ersten Buchstaben eines zweibuchstabigen Wortes gibt es n Möglichkeiten, aber auch für den zweiten, da von jedem Buchstaben zwei Stück vorhanden sind. Also lassen sich insgesamt $m \cdot n = n^2$ Wörter bilden, die aus zwei Buchstaben bestehen.
Das Wort bestehe nun aus drei Buchstaben. Auch jetzt gibt es für den ersten und zweiten Buchstaben je n Möglichkeiten. Ist der zweite mit dem ersten Buchstaben identisch (dafür gibt es insgesamt nur $n \cdot 1$ Möglichkeiten), dann kann man den dritten nur noch auf $n - 1$ Art und Weisen auswählen.
Ansonsten (das sind $n \cdot (n - 1)$ Möglichkeiten) gibt es auch für den dritten Buchstaben noch n Möglichkeiten.
Also insgesamt:
$n \cdot 1 \cdot (n - 1) + n \cdot (n - 1) \cdot 1$
$= n(n - 1) \cdot (1 + n) = n(n^2 - 1)$
dreibuchstabige Wörter.

▲7▲ Es bezeichne a_n die Anzahl der Möglichkeiten, daß bei n Tanzpaaren keiner mit seinem Partner tanzt. Es ist offensichtlich $a_1 = 0$ und $a_2 = 1$. Wir numerieren nun die Paare mit 1 bis n und betrachten Herrn 1. Für ihn gibt es $n - 1$ Möglichkeiten, seine Tanzpartnerin auszuwählen. Er tanze z.B. mit Frau k. $1 < k \leqq n$ $(n > 2)$.
1. Fall: Herr k tanzt mit Frau 1. Dann erfüllen die Paare $2, \ldots, k - 1, k + 1, \ldots, n$ ebenfalls die Bedingungen der Aufgabe; für sie gibt es also a_{n-2} Möglichkeiten zu tanzen.
2. Fall: Herr k tanzt nicht mit Frau 1. Wenn wir jetzt Frau 1 und Frau k austauschen, so tanzen zwar Herr und Frau 1 zusammen, die restlichen Paare erfüllen aber wieder die Bedingungen der Aufgabe und dafür gibt es a_{n-1} Möglichkeiten.
Also muß gelten:
$a_n = (n - 1) \cdot (a_{n-1} + a_{n-2})$.
Das heißt aber:
$a_n - n a_{n-1} = (n - 1) a_{n-2} - a_{n-1}$.
Sei $b_n := a_n - n \cdot a_{n-1}$.
Dann gilt:
$b_n = -b_{n-1} = b_{n-2} = \ldots = (-1)^k b_{n-k}$
$= (-1)^{n-2} b_2 = (-1)^n b_2$.
Nun ist $b_2 = a_2 - 2 \cdot a_1 = 1$,
also: $b_n = (-1)^n$. Daraus folgt:
$a_n = (-1)^n + n \cdot a_{n-1}$
$n a_{n-1} = n \cdot ((-1)^{n-1} + (n - 1) a_{n-2})$
$= n \cdot (-1)^{n-1} + n(n - 1) a_{n-2}$
$n(n - 1) a_{n-2} = n(n - 1)(-1)^{n-2}$
$+ n(n - 1)(n - 2) a_{n-3}$
.
.
.
$n(n - 1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot a_2 = n(n - 1) \cdot \ldots$
$\cdot 3 \cdot (-1)^2 + n(n - 1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot a_1$.
Addiert und vereinfacht ergibt sich:
$a_n = (-1)^1 + n(-1)^{n-1} + n(n - 1)$
$\cdot (-1)^{n-2} + \ldots + n \cdot (n - 1) \cdot \ldots$
$\cdot 3 + n(n - 1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 0 \qquad (a_1 = 0)$
oder anders geschrieben:
$a_n = \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \frac{n!}{4!} \mp \ldots + \frac{n!}{(n-1)!}(-1)^{n-1}$
$+ \frac{n!}{n!}(-1)^n = n! \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$
oder auch: $a_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
Bemerkung: Insgesamt gibt es ja $n!$ Möglichkeiten für die Zusammenstellung von Paaren und für die, die schon einmal etwas von Grenzwerten gehört haben, können wir nun schreiben:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e},$$

wobei e die Eulersche Zahl ist:
$e = 2{,}712\ldots$.

Lösungen zu: Prismen! Prismen?

▲1▲ a) Quader: A, B, K;
b) Prismen: A, B, C, E, F, G, K.

▲2▲ A, B, C, E, F, G, K.

▲3▲ a) wahr, b) wahr, c) falsch, d) wahr, e) wahr, f) wahr, g) wahr, h) falsch.

▲4▲ Die dargestellten Prismen haben alle gleiches Volumen.

▲5▲

Länge	2	2	3
Breite	3	3	4
Höhe	1	2	2
Volumen	6	12	24
Oberfläche	22	32	52

▲6▲ $V = 6{,}08\ \mathrm{dm}^3$.

▲7▲ a) $V = 2{,}70\ \mathrm{m}^3$;
b) $A_0 = 10\ m^2$ (10,36)

▲8▲ $V = 54\ \mathrm{cm}^2$; $A_0 = 1{,}47\ \mathrm{dm}^2$

▲9▲ 21 cm (21,428 571)

▲10▲

	a	l	p	h
V (in VE)	25	18	32	32
A_0 (in FE)	84	58	102	100

▲11▲ 4,0 cm

▲12▲ $a = 17$ cm, $b = 20$ cm, $c = 23$ cm, $V = 7{,}8\ \mathrm{dm}^3$ (7,82)

▲13▲ 4

▲14▲ $V = 0{,}122\ \mathrm{dm}^3$

In Klammern sind jeweils die mit dem SR 1 ermittelten Zahlenwerte angegeben.

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ *Zählung der Stücke:*
Das Bild zeigt ein Stück einer geraden Linie, die in Abschnitte gleicher Länge unterteilt ist. Daraus kann man viele Abschnitte verschiedener Länge erhalten, wie z. B. zwei Einheiten, drei Einheiten, vier Einheiten usw.
Angenommen, das ganze Stück hat eine Länge von n Einheiten, wie hoch ist dann die Gesamtzahl aller verschiedenen Abschnitte unterschiedlicher Länge?
Lösung: Die letzte Spalte zeigt deutlich, daß man die Folge der Partialsummen der natürlichen Zahlen (Dreieckszahlen) erhält. Die n-te Partialsumme s ist demzufolge $s = \frac{n(n+1)}{2}$, und diese ergibt die Gesamtzahl aller verschiedenen Abschnitte unterschiedlicher Länge.

Vollst. Länge	1 Einh.	2 Einh.	3 Einh.	4 Einh.	5 Einh.	6 Einh.	Gesamtheit d. Abschn.
⊔	1	–	–	–	–	–	1
⊔⊔	2	1	–	–	–	–	3
⊔⊔⊔	3	2	1	–	–	–	6
⊔⊔⊔⊔	4	3	2	1	–	–	10
⊔⊔⊔⊔⊔	5	4	3	2	1	–	15

▲2▲ Setzt in der Zahlenpyramide auf der Zeichnung die Zeichen + und − so ein, daß die gezeigten Gleichungen gültig werden. Man braucht zwischen benachbarte Ziffern kein Zeichen zu setzen, wenn man sie zu einer Zahl vereinigt.

Lösung:
$1 + 2 = 3$
$-1 + 2 + 3 = 4$
$12 - 3 - 4 = 5$
$1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 = 7$
$1 + 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 = 8$
$12 + 3 + 4 - 5 - 6 - 7 + 8 = 9$.

▲3▲ *Mehr oder weniger:*
N, eine dreistellige Zahl, erscheint in allen Teilaufgaben. Ermitteln Sie sie, und ergänzen Sie das Gitter, indem Sie die beiden bereits waagerecht eingetragenen Zahlen benutzen!
Lösung: $741 \cdot 224$; $2 \cdot 874 \cdot 3$;
$16 \cdot 7828 \cdot 47 \cdot 17 \cdot 7925 \cdot 16$; $9 \cdot 564 \cdot 3$;
$122 \cdot 785$; $N = 824$.

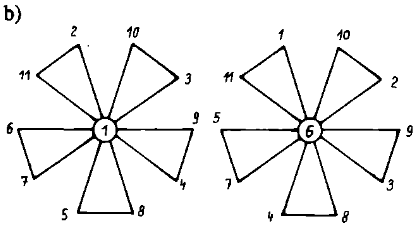
Lösungen zu: alpha-heiter

Magische Sternfiguren

a) z. B.

```
        9                      12
 4    7   10   5         9   2    7   8
    8        6                1     3
2     11   12    1        11   6   5   4
        3                      10
```

b)



Wie viele Quadrate, wie viele Dreiecke?
Es sind 35 Quadrate, 14 Dreiecke.

Ein Taschengeldproblem

$$15x + 20y = 150$$
$$3x + 4y = 30$$

Der Schüler hatte anfangs zwei Münzen zu 15 Kopeken und sechs Münzen zu 20 Kopeken.

Erstaunliche Skatabrechnung
Sind a, b, c, d die Ergebnisse der Spieler A, B, C, D, so ergibt sich z. B.
für A $(a - b) + (a - c) + (a - d)$
$= 3a - b - c - d$.
Oder $4a - a - b - c - d = 4a - S$, mit
$S = a + b + c + d$.
Somit gilt für A $(4a - S) : 4 = a - \frac{S}{4}$.
Wegen $S = 0$ in diesem Falle ist a das Ergebnis (in Pf.) für A.

Möglich oder nicht möglich?
Die beiden einzigen Möglichkeiten sind (man beginnt z. B. mit $b = 12$ und führt eine vollständige Fallunterscheidung durch):

(1) 2→12-7-3-5-4-11-1-6-10
    ↑———————— 9-8
(2) 3-12-9-10-1-4-3 Widerspruch
(3) 4-12-10-4 Widerspruch
(4) 5-12-8-1-5 Widerspruch
(5) 6→12-11-9-5-10-7-1-2-4
    ↑———————— 3-8

Das Monster

Der Kreisumfang beträgt 2π. $\frac{1}{6}$ dieses Umfangs ist abgeschnitten, da der Zentriwinkel mit 60° ein Sechstel von 360° ist. Somit gilt für den Umfang des Monsters

$$2\pi - \frac{1}{6}2\pi + 2 = \frac{5}{3}\pi + 2$$

und damit gilt E.

Kryptarithmetik
Datenträger Y; $1165 \cdot 19$.

Zahlen in Begriffen
A. M. Ampère 1775 bis 1836.

Lösung zu:
Aus der Geschichte der Schiffahrt
Heft 3/87

Das Volumen des Tankers in m^3 ist:
$V_T = 158{,}987 \cdot 20\,000\ \mathrm{dm}^3$
$= 158{,}987 \cdot 20\ \mathrm{m}^3$; $V_T = 3179{,}74\ \mathrm{m}^3$.
Das Volumen des Zylinders berechnet man nach der Formel $V_Z = \pi \cdot r^2 \cdot h$ mit der gesuchten Länge (Höhe) h des Zylinders. Also ist $3179{,}74 = \pi \cdot 9 \cdot h$ und daher $h = \frac{3179{,}74}{9\pi}$ [m]. Der Schulrechner zeigt $h = 112{,}4603$ an. Der Zylinder ist folglich etwa 112,5 m lang.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 1/87, Fortsetzung

Ma 6 ■ 2756 3 Arbeiter schafften früher in 8 Stunden 960 Säcke;
2 Arbeiter schaffen jetzt in 2 Stunden 960 Säcke;
1 Arbeiter schaffte früher in 1 Stunde $\frac{960}{3 \cdot 8} = 40$ Säcke;
1 Arbeiter schafft jetzt in 1 Stunde $\frac{960}{2 \cdot 2} = 240$ Säcke.
Es werden 6 Arbeiter von damals durch 1 Arbeiter heute ersetzt.

Ma 6 ■ 2757 $5\ \mathrm{m} = 500\ \mathrm{cm} = 25 \cdot 20\ \mathrm{cm}$; für eine Länge der Sandfläche werden 25, für beide Längen also 50 Steine benötigt.
$84 - 50 = 34$; $34 : 2 = 17$; $17 - 2 = 15$.
Nun gilt $15 \cdot 20\ \mathrm{cm} = 300\ \mathrm{cm} = 3\ \mathrm{m}$.
Die Sandfläche wird 3 m breit.

Ma 6 ■ 2758 Wegen (1) heißt Schüler Hausmann weder Christian noch Bernd. Wegen (2) kann Schüler Hausmann nicht Alfred heißen. Sein vollständiger Name lautet somit Detlef Hausmann. Wegen (1) heißt Schüler Erdbach weder Christian noch Bernd. Er heißt aber auch nicht Detlef. Sein vollständiger Name lautet somit Alfred Erdbach.
Wegen (1) heißt Schüler Freimuth entweder Bernd oder Christian. Wegen (2) hat Schüler Freimuth kein Buch geschenkt, Bernd aber Rosen. Sein vollständiger Name lautet somit Bernd Freimuth. Der vierte Gast heißt deshalb Christian Giebler.

Ma 6 ■ 2759 Angenommen, es parkten dort x Motorräder mit Beiwagen, also $2x$ Pkw und somit $6x$ Mopeds; dann gilt

$3 \cdot x + 4 \cdot 2x + 2 \cdot 6x = 322,$
$3x + 8x + 12x = 322,$
$23x = 322,\ x = 14.$
Es parkten dort 14 Motorräder mit Beiwagen, 28 Pkw und 84 Mopeds.

Ma 6 ■ 2760 a) Von 10.05 Uhr bis 11.20 Uhr sind 75 min = 1,25 h verflossen. In dieser Zeit legte das Flugzeug 2100 km − 600 km = 1500 km zurück.
Das ergibt eine Geschwindigkeit
$v = 1500 : 1{,}25 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1200 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$
b) Wegen $v = 1200 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ benötigt das Flugzeug für den restlichen Weg von 600 km noch $\frac{1}{2}$ h = 30 min. Es wird somit um 11.50 Uhr in B landen.

Ma 7 ■ 2761 Es gilt $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$ usw., also endet 2^{4n} auf die Grundziffer 6.
Wegen $12^{100} = 12^{4 \cdot 25} = 12^{4 \cdot n}$ endet diese Zahl auf die Grundziffer 6.

Ma 7 ■ 2762 Angenommen, der dritte Bagger bewegt täglich x Kubikmeter Abraum, der zweite somit $(x - 1000)\,\text{m}^3$, der erste $[2(x - 1000) - 3000]\,\text{m}^3$
$= (2x - 5000)\,\text{m}^3$. Dann gilt
$x + x - 1000 + 2x - 5000 = 36\,000$, also
$x = 10\,500$. Der erste Bagger bewegt täglich $16\,000\,\text{m}^3$, der zweite $9500\,\text{m}^3$, der dritte $10\,500\,\text{m}^3$ Abraum.

Ma 7 ■ 2763 Angenommen, Klaus ist x Jahre alt; dann ist Claudia $2x$ Jahre, der Vater $4x$ Jahre, die Mutter $(x + 31)$ Jahre, alle zusammen sind $(8x + 31)$ Jahre alt. Nun gilt $8x + 31 = 127$, also $x = 12$. Klaus ist 12, Claudia 24, die Mutter 43, der Vater 48 Jahre alt.

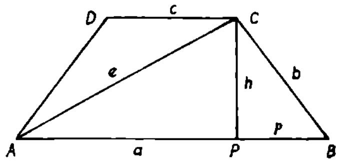
Ma 7 ■ 2764 Die Zehnerstelle der zweistelligen natürlichen Zahl sei a; dann ist $(9 - a)$ die Einerstelle. Nun gilt
$[10a + (9 - a)] \cdot 2 - 9 = 10(9 - a) + a,$
also $a = 3$.
Es handelt sich um die Zahlen 36 und 63.

Ma 8 ■ 2765 Es sei a eine beliebige natürliche Zahl. Wenn man diese um 0,5 vermehrt und dann das Quadrat bildet, erhält man
$(a + 0{,}5)^2 = a^2 + a + 0{,}25$
$= a(a + 1) + 0{,}25.$
Die letzte Zeile entspricht der Behauptung.
(Beispiel: $19{,}5^2$
$= 19 \cdot 20 + 0{,}25 = 380 + 0{,}25 = 380{,}25$.)

Ma 8 ■ 2766 Angenommen, René lügt. Dann lügt auch Mike, und das ist ein Widerspruch zur Feststellung des Lehrers. Folglich sagt René die Wahrheit. Damit sagen auch Mike und Thomas die Wahrheit; nur Reiko lügt.
Das Fenster hat Reiko zerschlagen. Alle anders begonnenen Überlegungen führen zum gleichen Ergebnis.

Ma 8 ■ 2767 Es gilt $p^2 + 2$
$= p^2 - 1 + 3 = (p - 1)(p + 1) + 3.$
Von den drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $p - 1, p, p + 1$ ist genau eine durch 3 teilbar. Angenommen $p \neq 3$; dann ist entweder $p - 1$ oder $p + 1$ Vielfaches von 3. Dann ist die Summe $(p - 1)(p + 1) + 3$ ebenfalls durch 3 teilbar, also keine Primzahl.
Für $p = 3$ gilt $p^2 + 2 = 9 + 1 = 11$.
Es existiert somit genau eine Lösung, nämlich $p = 3$.

Ma 8 ■ 2768 In dem abgebildeten gleichschenkligen Trapez gilt o. B. d. A.
$e^2 = h^2 + (a - p)^2$ und $b^2 = h^2 + p^2$.



Bildet man die Differenz der Quadrate, so erhält man
$$\begin{aligned} e^2 - b^2 &= (h^2 + (a - p)^2) - (h^2 + p^2) \\ &= h^2 + (a - p)^2 - h^2 - p^2 \\ &= h^2 + a^2 - 2ap + p^2 - h^2 - p^2 \\ &= a(a - 2p). \end{aligned}$$
Wegen $a - 2p = c$
gilt nun $e^2 - b^2 = a \cdot c$, q. e. d.

Ma 9 ■ 2769 Das heutige Alter des Herrn Müller in Jahren sei mit x und das seiner Frau mit y bezeichnet. Herr Müller war vor $x - y$ Jahren y Jahre alt, seine Frau war $y - (x - y)$, also $2y - x$ Jahre alt. Wenn nun Herr Müller heute doppelt so alt ist, gilt $x = 2(2y - x)$ bzw. $3x - 4y$.
Frau Müller wird in $x - y$ Jahren x Jahre alt sein (so alt, wie Herr Müller heute ist); sie ist dann also $y + x - y$ Jahre alt. Dann wird Herr Müller $x + x - y$ Jahre alt sein. Wenn beide dann zusammen 108 Jahre alt sein werden, gilt
$$y + x - y + x + x - y = 108,$$
Nun gilt (1) $\quad 3x - y = 108.$
$3x = 4y$ und (2) $3x = y + 108$,
also $4y = y + 108$,
$3y = 108$, $y = 36$ und $3x = 36 + 108$,
$3x = 144$, $x = 48$.
Herr Müller ist heute 48 Jahre, seine Frau 36 Jahre alt. Die Probe zeigt die Richtigkeit der Ergebnisse.

Ma 9 ■ 2770 Wenn p_1 und p_2 die gleichen Endziffern haben, so endet $p_2 - p_1$ auf die Ziffer 0, d. h. $p_2 - p_1$ ist Vielfaches von 10. Keine der Primzahlen p_1 und p_2 ist durch 3 teilbar. Keine der Primzahlen p_1 und p_2 läßt bei Division durch 3 den Rest 1; denn sonst wären die Zahlen $p_1 + 2$ und $p_2 + 2$ durch 3 teilbar, also keine Primzahlen (Widerspruch!).
Folglich gibt es natürliche Zahlen a und b derart, daß
$p_1 = a \cdot 3 + 2$ und $p_2 = b \cdot 3 + 2$,
also $p_2 - p_1 = (b - a) \cdot 3$ gilt,
d. h. $3 \mid p_2 - p_1$.
Aus $10 \mid p_2 - p_1$ und $3 \mid p_2 - p_1$ folgt
$30 \mid p_2 - p_1$, w. z. b. w.

Ma 9 ■ 2771 Man formt zunächst (2) um und erhält (2') $(b + a)(b - a) = a + b$ und für $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt weiter
$b - a = 1$, $b = a + 1$.
Das setzt man in (1) ein und erhält
(1') $a^3 + (a + 1)^3 = c^3 + 1$,
$2a^3 + 3a^2 + 3a = c^3$.
Nun stellt man (3) um, erhält
(3') $2a^3 - 6a + 4a^2 = c^3$ und setzt nun (1') ein. Das führt zu
(4) $2a^3 - 6a + 4a^2 = 2a^3 + 3a^2 + 3a$,
$a^2 - 9a = 0$, $a_1 = 0$ entfällt
(siehe (2')!) $a_2 = 9$.
Aus (2') folgt dann $b = 10$. Nun läßt sich auch $c = 12$ berechnen. Das einzige Tripel natürlicher Zahlen, das das gegebene Gleichungssystem erfüllt, ist (9; 10; 12). Die Probe bestätigt die Richtigkeit.

Ma 9 ■ 2772 Aus $\frac{4^6}{5^6} = \left(\frac{4}{5}\right)^6 = \left(\frac{4^3}{5^3}\right)^2$
$= \left(\frac{64}{125}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ folgt $\frac{4^6}{5^6} > \frac{1}{4}$
und somit $4^7 > 5^6$. Aus
$\frac{5^6}{6^6} = \left(\frac{5^3}{6^3}\right)^2 = \left(\frac{125}{216}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^2$
$= \frac{1}{4}$ folgt $4 \cdot 5^6 > 6^6$, also
$5^6 > \frac{6^6}{4} > \frac{6^6}{6} = 6^5.$
Die weiteren Beweisschritte erfolgen in analoger Weise.

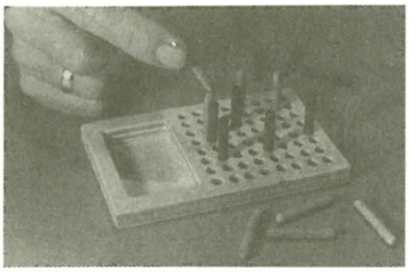
Ma 10/12 ■ 2773 Das geordnete Paar (2; 5) ist einzige Lösung.

Ma 10/12 ■ 2774 Zuerst quadrieren wir die gegebene Gleichung und erhalten
$\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}.$
Weitere äquivalente Umformungen ergeben
$1 - \sin 2x = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$, $-\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,
$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $2x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{6}$.
Nun ist $\cot 3x = \cot \frac{\pi}{2} = 0$.

Ma 10/12 ■ 2775 Es gibt keine reelle Zahl, die die gegebene Gleichung erfüllt. Der Term $\sqrt{2 - x}$ hat den Definitionsbereich $D_1 = \{x \in P; x \leqq 2\}$; der Term $\sqrt{x - 3}$ hat den Definitionsbereich $D_2 = \{x \in P; x \geqq 3\}$; die gegebene Gleichung hat somit den Definitionsbereich $D = D_1 \cap D_2$, d. h. $D = \emptyset$. Es gilt also $L = \emptyset$.
Würde man den Definitionsbereich nicht beachten und *einfach drauflos rechnen*, so käme man nach entsprechenden Umformungen auf die Gleichung
$x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{28}{4}}$ und müßte erkennen, daß die Diskriminante negativ ist.
Daraus folgt $L = \emptyset$.

Ma 10/12 ■ 2776 Aus $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \varrho + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \varrho + \frac{1}{2} \cdot c \cdot \varrho = \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot (a + b + c)$
folgt $\frac{a + b + c}{2 \cdot A} = \frac{1}{\varrho}$, $\frac{a}{2 \cdot A} + \frac{b}{2 \cdot A} + \frac{c}{2 \cdot A} = \frac{1}{\varrho}$.
Wegen $2 \cdot A = a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$
gilt deshalb $\frac{a}{a \cdot h_a} + \frac{b}{b \cdot h_b} + \frac{c}{c \cdot h_c} = \frac{1}{\varrho}$, $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\varrho}$.

Taschenspiele (reien)

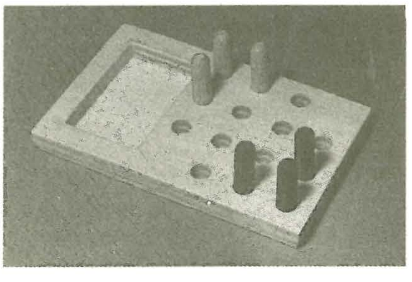


Hier stellen wir ein paar ganz einfach herzustellende Spiele vor, die man schon in der Hosentasche mit sich führen kann, um bei passender Gelegenheit mit einem Partner im kurzweiligen Spiel taktische Geschicklichkeit zu erproben.

Die Spielplatten bestehen jeweils aus 10 mm dicken und 74 mm × 116 mm großen Holztäfelchen, in die nach Zeichnung Löcher zum Einstecken der Spielsteine (8-mm-Holzdübel bzw. 5-mm-Rundholzstückchen gleicher Länge) mit ein bzw. zwei Zehntel Millimeter mehr Durchmesser gebohrt werden. In dem auszusägenden rechteckigen Fach werden die Spielsteine beim Transport untergebracht.

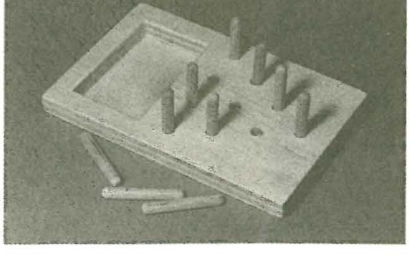
Unter die Spielplatten wird ein etwa 1 mm dicker Boden aus Furnier, Sperrholz oder Pappe geklebt. Aus festem Karton ist dann noch eine einfache Schiebehülse anzufertigen, die verhindert, daß die eingelegten Spielsteine beim Transport herausfallen können.

Mini-Halma Bild 1



Bei dieser kleinen Halma-Version stehen jedem Spieler drei Spielsteine zur Verfügung. Wer zuerst wie beim großen Halma seine Stäbchen durch Ziehen und Springen von der Ausgangsposition (Bild 1) in die gegenüberliegende Spielfeldecke gebracht hat, ist Sieger.

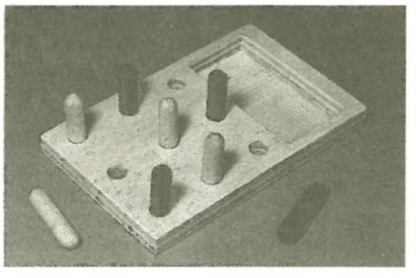
Nimm Bild 2



Bei diesem Spiel (Bild 2) werden die 10 Stäbchen in die dreieckförmig angeordneten Löcher gesteckt. Für die Spieler besteht die Aufgabe darin, abwechselnd 1 bis 4 Spielsteine einer Reihe zu nehmen. Wer das letzte Stäbchen nehmen muß, hat verloren.

Tic-Tac-Toe und Mini-Mühle Bild 3

Auf dieser Platte mit neun Löchern



(Bild 3) lassen sich zwei Spiele austragen. Beim Tic-Tac-Toe, einem Spiel, das schon in der Antike in Ägypten und Griechenland gespielt worden sein soll, setzen die Spieler ihre Steine abwechselnd auf das Spielfeld und ziehen dann jeweils einen Stein mit dem Ziel, eine waagerechte oder senkrechte Dreierreihe aus den eigenen Spielsteinen zu bilden.

Das Spiel kann beendet werden, wenn der erste Spieler eine solche Reihe erreicht hat. Eine andere Variante wäre, weiterzuspielen, bis es einem der Spieler gelungen ist, durch Ziehen oder Springen fünfmal oder zehnmal eine Dreierreihe aufzubauen.

Mini-Mühle

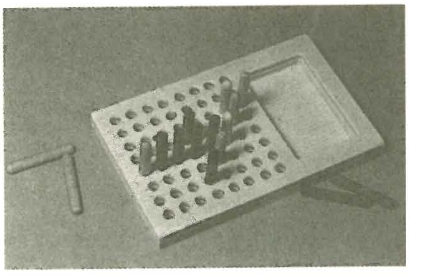
Für die auf der gleichen Platte zu spielende Mini-Mühle erhält jeder Spieler 3 Stäbchen einer Farbe und muß nun wie bei der großen Mühle versuchen, durch Setzen und Ziehen der Spielsteine eine Dreierreihe waagerecht, senkrecht oder diagonal zu bilden.

Fünferreihe und Spring

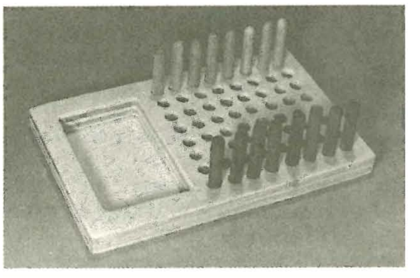
Auch die auf Bild 4 gezeigte Platte mit 64 Löchern bietet die Möglichkeit für zwei verschiedene Spiele.

Bei der *Fünferreihe* handelt es sich um ein älteres Spiel aus Japan, wo es auf einem Go-Spielbrett gespielt wird. Bei der hier vorgestellten Abwandlung wird auf 64 *Feldern* gespielt und jeder der beiden Spielpartner erhält acht Spielsteine. Diese werden abwechselnd gesetzt und dürfen dann jeweils von einem Loch gezogen werden. Sieger ist, wem es zuerst gelingt, aus fünf der acht Spielsteine eine waagerechte, senkrechte oder diagonale Reihe zu bilden.

Bild 4



Spring Bild 5



Auf der gleichen Grundplatte läßt sich ein zweites Spiel mit ebenfalls je acht Stäbchen spielen. Diese werden auf den Grundlinien aufgestellt (Bild 5). Die Steine können in jeder Richtung zu einem benachbarten Loch gezogen werden, also senkrecht, waagerecht oder diagonal und dabei auch rückwärts.

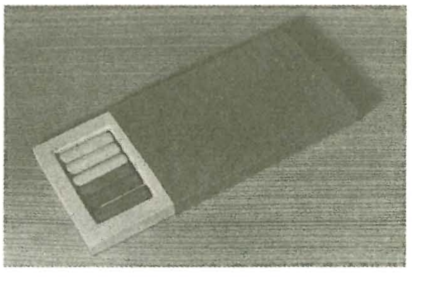
Stehen sich zwei gegnerische Spielsteine auf Nachbarfeldern gegenüber, kann der Spieler, der am Zuge ist, den anderen Stein durch Überspringen schlagen und vom Feld nehmen, soweit das Feld hinter dem gegnerischen Stein frei ist. Es darf aber bei einem Zug nur ein Spielstein des Gegners geschlagen werden.

Sieger ist, wer als letzter noch einen oder mehrere Steine auf dem Spielfeld hat.

Bild 6 zeigt eines der Spiele mit der aus festem Karton gefertigten Transport-Schiebehülse.

aus: practic 2/86

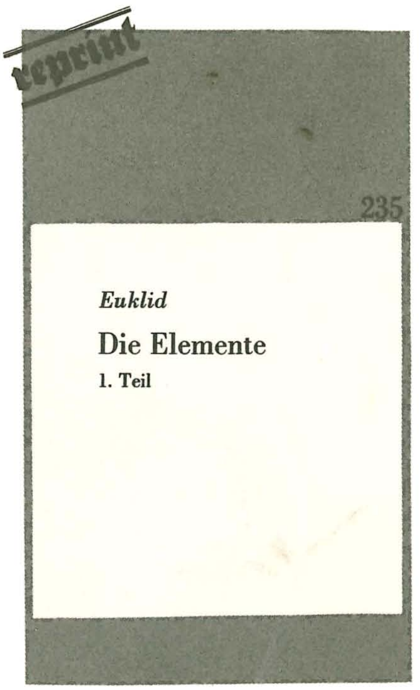
Bild 6



Sechs Aufgaben von Euklid von Alexandria

365? bis 300 v. u. Z.

Mit den dreizehn Büchern der „Elemente“ des hellenistischen Mathematikers Euklid tritt uns das erfolgreichste Werk der mathematischen Weltliteratur entgegen. In meisterhafter Darstellung vereinigte und systematisierte Euklid das gesamte mathematische Wissen seiner Zeit mit Ausnahme der Anwendungen der Mathematik.
Das von Euklid gewählte Darstellungsschema Definition, Satz, Beweis wurde für mehr als zwei Jahrtausende zum Muster der in der griechischen Tradition stehenden Mathematik.
Es ist das Verdienst der *Akademischen Verlagsgesellschaft Geest und Portig K.-G.* Leipzig, daß sie die dreizehn Bücher nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzen ließ und im Jahre 1933 in fünf kleinen Bänden herausgab. Im Jahre 1984 erschienen davon Reprints in der Reihe: Ostwalds Klassiker der Wissenschaft: Euklid, Die Elemente;
1. Teil, Bestell-Nr. 669 654 1,
Preis 13,00 M;
2. Teil, Bestell-Nr. 669 653 3,
Preis 11,00 M;



3. Teil, Bestell-Nr. 669 652 5,
Preis 12,00 M;
4. Teil, Bestell-Nr. 669 651 7,
Preis 17,00 M;
5. Teil, Bestell-Nr. 669 650 9,
Preis 16,00 M.

Diese Titel enthalten die Euklidischen Bücher: Vom Punkt bis zum Pythagoreischen Lehrsatz; Geometrische Algebra; Kreislehre; Ausdehnung der Größenlehre auf Irrationalitäten; Proportionen und Anwendung auf Planimetrie; Quadrat- und Kubikzahlen, geometrische Reihen; Lehre von Gerade und Ungerade; Mit geometrischen Mitteln zu führende Beweise; Elementare Stereometrie, Exhaustionsmethode: Pyramide, Kegel, Kugel; Reguläre Polyeder.
Für die *alpha*-Leser wählten wir sechs geometrische Probleme – textlich modernisiert – aus:

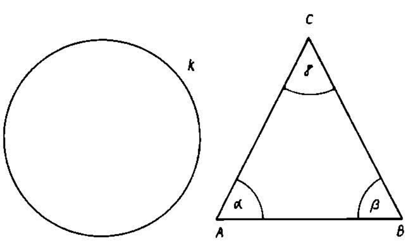
Aufgaben

▲1▲ Eine gegebene Strecke $\overline{AB}$ ist durch einen inneren Punkt H so zu teilen, daß das Rechteck aus der ganzen Strecke $\overline{AB}$ und dem Abschnitt $\overline{BH}$ flächengleich ist dem Quadrat über dem Abschnitt $\overline{AH}$.

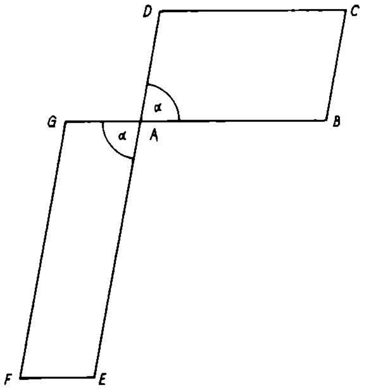
▲2▲ Es ist zu beweisen, daß zwei nicht durch den Mittelpunkt gehende Sehnen eines Kreises einander im Schnittpunkt nicht halbieren können!

▲3▲ Schneiden im Kreise zwei Sehnen einander, so ist das Rechteck aus den Abschnitten der einen Sehne flächengleich dem Rechteck aus den Abschnitten der anderen Sehne. Dieser Satz ist zu beweisen!

▲4▲ Gegeben sei ein Kreis k und ein Dreieck ABC. Diesem Kreis k ist ein Dreieck $A'B'C'$ einzubeschreiben, das dem Dreieck ABC ähnlich ist.



den kongruenten Scheitelwinkeln BAD und EAG. Es ist nachzuweisen, daß sich die Seiten dieser Parallelogramme umgekehrt proportional verhalten, d. h., daß $\overline{AB} : \overline{AE} = \overline{AG} : \overline{AD}$ gilt.



▲6▲ Beschreibt man einem Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge a ein, so ist der Flächeninhalt des Quadrates über einer Dreieckseite dreimal so groß wie der Flächeninhalt des Quadrates über dem Radius r des Umkreises k. Diese Aussage ist zu beweisen!

J. Lehmann/Th. Scholl

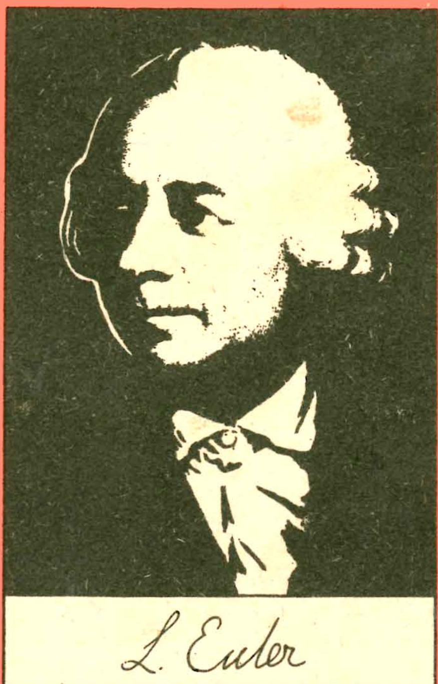
Zeitgenössische Darstellung eines griechischen Lehrers, vermutlich eines Sklaven, beim Privatunterricht: Auf dem Schoß liegt die Schreibtafel; mit der Rechten schwingt er den Griffel.

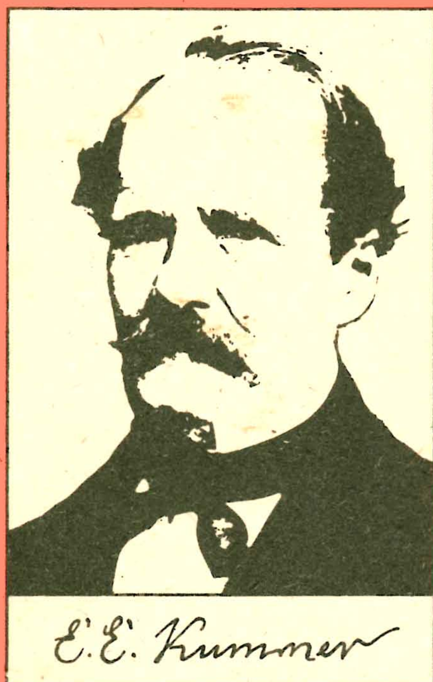
Freie wohlhabende Griechen bei wissenschaftlichen Diskussionen

ISSN 002-6395 · alpha · Berlin · 21 (1987) 4 · Seiten 73 bis 96

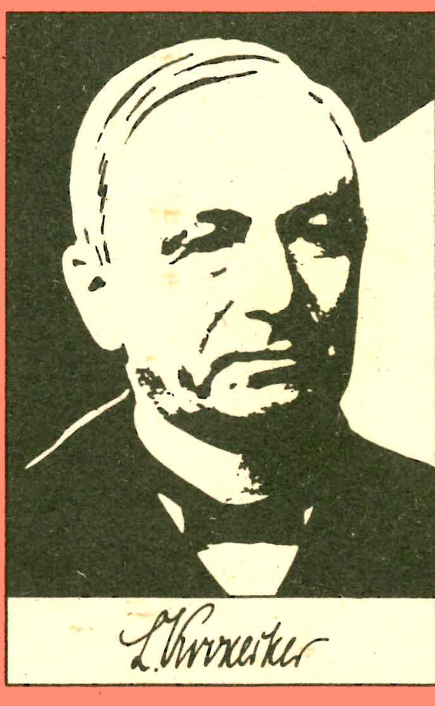
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha





BERÜHMTE BERLINER MATHEMATIKER



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
21. Jahrgang 1987
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

5

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold
Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027
Redaktion:
Gabriele Liebau (Chefredakteur)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: H. Pieper (S. 97, 98, 113); J. Lehmann (S. 99, 101, 104, 105); R. Bölling (S. 103); Theiler, aus Für Dich (S. 114)
Titelblatt: W. Fahr, Berlin
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 9. Juni 1987
Auslieferungstermin: 2. Oktober 1987

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Die konzeptionelle und inhaltliche Gestaltung dieses Heftes lag in den Händen von J. Lehmann, Leipzig, und Dr. H. Pieper, Berlin.

Inhalt

[1]) bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet.

Mathematiker in Berlin
(von 1708 bis 1855)
Von Naudé bis Eisenstein

Obwohl über sechs Jahrhunderte seit ihrer Entstehung vergangen waren, hatte die Stadt Berlin (Ersterwähnung: 1237) bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts nur zwei große Zeitalter auf dem Gebiet der Mathematik gehabt: Zwischen 1741 und 1787 wirkten in Berlin Euler, Lambert und Lagrange, zwischen 1828 und 1855 Dirichlet, Steiner, Jacobi und Eisenstein.

In Berlin gab es keine auf dem Boden des Feudalismus gewachsene Universität (wie etwa in Leipzig seit 1409, in Rostock seit 1419, in Greifswald seit 1456, in Wittenberg seit 1502, in Frankfurt (Oder) seit 1506). Die Berliner Universität entstand im Jahre 1810, unbelastet von eigener feudaler Tradition, mit der bürgerlichen Umgestaltung der Gesellschaft. Fast ein Jahrhundert früher, im Jahre 1711, war in Berlin die *Akademie der Wissenschaften* als eine Art von Gelehrtengesellschaft für die Führung von wissenschaftlichen Disputationen eröffnet worden.

Andere Institutionen, an denen sich Gelehrte oder Lehrer mit Mathematik befaßten, waren vor allem die Gymnasien.

In den Gymnasien hat man bis etwa über die Mitte des 18. Jahrhunderts hinaus durchweg Latein für das wesentlichste Lehrobjekt gehalten. Die Mathematik nahm in den Lehrplänen lange Zeit eine untergeordnete und nebensächliche Stellung ein; sie eroberte, sofern sie mehr ist als gewöhnliches Rechnen, erst im Laufe des 18. Jahrhunderts die Gymnasien.

Das *illustre* Joachimsthalische Gymnasium hatte wohl von Anfang an einen eigenen Mathematiker. Schon im Jahre 1615 wurde Benjamin Ursinus (1587 bis 1634), Freund und Gehilfe des Astronomen Kepler, berufen (später war er Professor für Mathematik an der Universität Frankfurt (Oder)). Von 1677 an arbeitete dort Philipp Naudé (1654 bis 1729) (seit 1696 Hofmathematiker und Pagenlehrer, sowie Professor für Mathematik an der *Berliner Maler-Akademie*). Mit seinem Sohn Philipp Naudé (1684 bis 1745) unterrichtete am Joachimsthalschen Gymnasium seit 1708 ein durchaus bedeutender Mathematiker. Von 1747 bis 1762 war der Mathematiker und Philosoph Johann Georg Sulzer (1720 bis 1779) der *Professor matheseos*. Das Berlinisch-Köllnische Gymnasium besaß seit 1778 in dem Professor Johann Andreas Michelsen (1749 bis 1797) einen eigenen Mathematiker. Er hatte ein Lehrbuch verfaßt, das er seinem Unterricht zugrunde legte. Hier unterrichtete seit 1787 auch Ernst Gottfried Fischer (1754 bis 1831), der übrigens dem jungen Alexander von Humboldt Privatunterricht in Mathematik erteilte.

An den verschiedenen Berliner höheren militärischen Lehranstalten des 18. Jahrhunderts waren gute Mathematiker tätig, von denen F. P. Jacobi (1724 bis 1758), J. de Castillon (1708 bis 1791), J. K. G. Schulze (1749 bis 1790), G. F. von Tempelhoff (1737 bis 1807), A. Burja (1752 bis 1816) genannt seien. Diese gehörten auch als ordentliche Mitglieder der mathematischen Klasse der Akademie an.

Die auf Veranlassung des Gelehrten Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716) durch den brandenburgischen Kurfürsten Friedrich III. (seit 1701 König Friedrich I. von Preußen) im Jahre 1700 gestiftete *Akademie der Wissenschaften* gewann unter Friedrich II. (seit 1740 König von Preußen) hohes Ansehen.

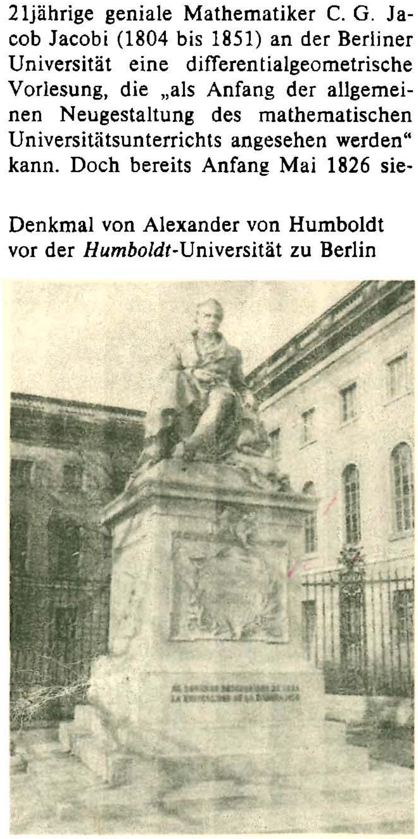
Der König war bestrebt, die hervorragendsten Gelehrten nach Berlin zu berufen. Von 1741 bis 1766 wirkte hier Leonhard Euler (1717 bis 1783), unstreitig einer der größten Mathematiker aller Zeiten. Kein Geringerer als Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855) schrieb über ihn: „Von keinem anderen Mathematiker älterer oder neuerer Zeit kann man eine solche fast unbegreifliche Schnelligkeit in den schwierigsten Arbeiten bei einer solchen unerschöpflichen Fruchtbarkeit an neuen Ideen und Hilfsquellen rühmen. Alle Teile der Mathematik bearbeitete er, und die meisten erhielten unter seinen Händen eine ganz neue Gestalt.“ Eulers Nachfolger wurde von 1766 bis 1787 Joseph Louis Lagrange (1736 bis 1813). Auch seine Arbeiten gehören „zu dem Vorzüglichsten, was je in der Mathematik geleistet wurde“. Obwohl im Jahre 1765 zum Mitglied der physikalischen Klasse der Akademie berufen, war der vielseitige Gelehrte Johann Heinrich Lambert (1728 bis 1777) an erster Stelle Mathematiker. Gleiches gilt für Johann (III) Bernoulli (1744 bis 1807), der von 1764 bis 1787 Direktor der Akademie-Sternwarte war. Diese Mathematiker, die drei Schweizer Euler, Lambert und Bernoulli und der Italo-Franzose Lagrange waren eine Zierde der Berliner Akademie in der friderizianischen Zeit.

Grabstätte von Johann (III) Bernoulli in Köpenick

Wer im 18. Jahrhundert in Deutschland Mathematik unter seinen Studienfächern hatte, hörte in den Universitätsvorlesungen kaum etwas von den Problemen und Theorien, mit denen sich die führenden forschenden Mathematiker beschäftigten. (Euler war übrigens nie Universitätsprofessor.) Mit der Gründung der Berliner Universität postulierte die neue bürgerliche Universitätsidee zwar von Anfang an die Einheit von Forschung und Lehre, aber dieses Ideal konnte in der Mathematik in den ersten zwei Jahrzehnten der Berliner Universität noch nicht verwirklicht werden; sie konnte sich nicht über das niedrige Niveau der anderen deutschen Universitäten erheben. Von Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855) in Göttingen abgesehen (aber auch er machte seine Studenten nicht mit den neuesten Erkenntnissen bekannt), blieb die Mathematik in Deutschland (seit der Übersiedlung Lagranges von Berlin nach Paris) bis in die zwanziger Jahre des 19. Jahrhunderts weit hinter der Mathematik in Frankreich zurück.

Im Wintersemester 1825/26 hielt der 21jährige geniale Mathematiker C. G. Jacob Jacobi (1804 bis 1851) an der Berliner Universität eine differentialgeometrische Vorlesung, die „als Anfang der allgemeinen Neugestaltung des mathematischen Universitätsunterrichts angesehen werden“ kann. Doch bereits Anfang Mai 1826 sie-

Denkmal von Alexander von Humboldt vor der *Humboldt*-Universität zu Berlin



delte Jacobi nach Königsberg (Kaliningrad) über. An der dortigen Universität hat er dann in seinen Forschungen und Vorlesungen derartige Aktivitäten entfaltet, daß sie ihn zu einem der ideenreichsten und produktivsten Mathematiker, einem Reformator des mathematischen Universitätsunterrichts und dem Begründer einer mathematischen Schule werden ließen.

In Berlin blieb der Zustand der mathematischen Lehre und Forschung im Jahre 1826 noch der alte. Das sollte sich erst durch die wissenschaftsfördernde Wirksamkeit von Alexander von Humboldt (1769 bis 1859) und August Leopold Crelle (1780 bis 1855) ändern.

Der berühmte Forschungsreisende und Naturforscher Alexander von Humboldt siedelte im Mai 1827 im Alter von 57 Jahren von Paris nach Berlin über. Durch seinen langjährigen Aufenthalt in Paris, dem damaligen Mittelpunkt des naturwissenschaftlichen und mathematischen Lebens in Europa, hatte Humboldt einen Blick für die Notwendigkeit der Entwicklung der exakten Wissenschaften erworben. Für die Förderung der Naturwissenschaften und der Mathematik in Preußen zu wirken, das war Humboldts erklärtes Ziel bei seiner Übersiedlung. Die objektiven Voraussetzungen waren in der steigenden Bedeutung dieser Wissenschaften und dem wachsenden allgemeinen Interesse an ihnen als Folge der industriellen Revolution (die in Deutschland später als in England und Frankreich einsetzte) gegeben.

Die damals in Berlin tätigen Mathematiker waren nicht so bedeutend, wie einst Euler oder Lagrange oder die zeitgenössischen französischen Mathematiker.

Eine Verbesserung der Berliner mathematischen Verhältnisse wäre dadurch zu erzielen, daß wirklich bedeutende Mathematiker an die Universität oder die Akademie berufen werden. Humboldt, der durch seine Beziehungen zum königlichen Hof und seine vielseitigen Verbindungen in Wissenschaft und Kunst in Berlin eine außergewöhnliche Stellung genoß, bemühte sich mehrfach (jedoch vergeblich) Gauß der Stadt Berlin zuzuführen. Im Zusammenhang mit einer geplanten Berufung von Gauß wurde auch das (jedoch nicht verwirklichte) Projekt erörtert, in Berlin eine mit der Pariser *École polytechnique* (gegründet 1794; eine höhere Schule von Weltruf) vergleichbare neue Lehranstalt zu errichten, an die hervorragende Mathematiker berufen werden sollten (neben Gauß wurde auch der geniale Norweger Abel, ferner Jacobi, die Geometer Plücker und Steiner in Erwägung gezogen).

In Müggelheim (Stadtbezirk Köpenick) wurde 1754 der Geodät Johann Jacob Baeyer geboren.

Zur Verwirklichung seiner Ziele hatte Humboldt in Crelle, dem Gründer (1826) und Herausgeber des *Journals für die reine und angewandte Mathematik*, einen Verbündeten gefunden, der dank Humboldtscher Vermittlung mit dem Amt des Fachreferenten für Mathematik im preußischen Kultusministerium betraut wurde und so zu einem *Vollstrecker der Humboldtschen Pläne auf mathematischem Gebiet* werden konnte.

Humboldt und Crelle förderten und unterstützten (z. B. durch Bemühungen um die Verschaffung einer Professur, um Aufnahme in die Akademie, um finanzielle Sicherstellung, um die Gewährung von Arbeitsurlaub) die Mathematiker Dirichlet, Steiner, Minding, Jacobi und Eisenstein (und viele andere, nicht nur in Berlin).

Als Jacobi im September 1844 wieder nach Berlin zurückkehrte, hatten sich in der mathematischen Lehre und Forschung der Stadt tatsächlich Veränderungen vollzogen.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 bis 1859) begann schon 1828 seine mathematische Lehrtätigkeit an der Allgemeinen Kriegsschule und ein Jahr später auch an der Universität.

„In demselben Sinne, in welchem Jacobi an der Universität Königsberg den mathematischen Unterricht reformierte", sagte E. E. Kummer später, wurde an der Universität Berlin „die dem Stande und den Anforderungen der Wissenschaft entsprechende Lehrmethode durch Lejeune-Dirichlet eingeführt."

Der aus der Schweiz stammende erfindungsreiche und originelle Geometer Jakob Steiner (1796 bis 1873), von 1821 für vier Jahre Lehrer am Friedrichswerderschen Gymnasium, von 1825 für 10 Jahre Lehrer an der städtischen Gewerbeschule, wurde 1834 Mitglied der Berliner Akademie und Professor an der Universität.

Im Jahre 1830 habilitierte sich der vielseitig talentierte Ferdinand Minding (1806 bis 1885) an der Universität zum Privatdozenten. Er hat den mathematischen Unterricht mit neueren Forschungsergebnissen durchdrungen. Von 1834 an war er gleichzeitig als Lehrer an der Bauakademie tätig. Diese drei Mathematiker legten den *Grundstein für den unaufhaltsamen und stetigen Aufstieg des Ansehens der Mathematik an der Universität Berlin* und bestimmten bis kurz vor dem Wiedereintreffen Jacobis das mathematische Profil der Universität. Doch in der Fakultät besaßen sie weder Sitz noch Stimme. Immer noch gaben jene mittelmäßigen Mathematiker den Ton an, die schon zu Jacobis Studentenzeit von maßgeblichem Einfluß waren: Gruson (1768 bis 1857), Lubbe (1786 bis 1846), Dirksen (1792 bis 1850) und Martin Ohm (1792 bis 1872), der einzige Mathematikordinarius, den die Akademie nicht zu ihrem Mitglied gewählt hat, der nebenbei zeitweise an der Bauakademie, an der Allgemeinen Kriegsschule und an der Artillerie- und Ingenieurschule tätig war). Die Professoren Dirichlet und Steiner und der Privatdozent Minding blieben von der Beurteilung der Dissertationen, der Beteiligung an Promotionsprüfungen und der Einflußnahme auf die Habilitation weitgehend ausgeschlossen, so daß die Berliner Universität nicht alle Funktionen eines mathematischen Zentrums ausüben konnte, wie die Königsberger Universität (zwischen 1826 und 1843 vor allem durch Jacobi und seine Schüler) oder die Berliner Universität unter Kummer, Kronecker und Weierstraß in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts. Minding nahm 1843 den Ruf nach Dorpat an. Als ein Jahr später Jacobi nach Berlin kam, wurde zumindest der Schwerpunkt der mathematischen Forschung in Deutschland nach Berlin verlegt.

Damals erregte ein Berliner Mathematikstudent die Aufmerksamkeit der Fachgelehrten: Gotthold Eisenstein (1823 bis 1852). Im Oktober 1843 an der Universität immatrikuliert, bereicherte er ein Jahr später zwei Bände des *Crellschen Journals* bereits mit 25 vor allem zahlentheoretischen Arbeiten. Im Jahre 1852 wurde er zum Mitglied der Akademie der Wissenschaften gewählt, Höhepunkt aber leider zugleich auch Schlußpunkt seines Lebens. Noch nicht 30 Jahre alt, starb Eisenstein wenige Monate später an der Schwindsucht.

Dirichlet (er wurde 1855 Nachfolger von Gauß in Göttingen), Steiner, Jacobi und Eisenstein sind im 19. Jahrhundert als die Begründer des mathematischen Ruhms von Berlin anzusehen. *H. Pieper*

▲ 1 ▲ Aus der schriftlichen Abiturprüfung am Berlinisch-Köllnischen Gymnasium zum Grauen Kloster vom Jahre 1790: Wer war der alte berühmte griechische Philosoph, der keinen in seine philosophische Schule aufnahm, als der die Geometrie verstand? Was mag ihn dazu bewogen haben? ...

Wie heißt der griechische Schriftsteller, dessen Buch von der gemeinen Geometrie nicht nur hochgeschätzt, sondern auch von vielen den neueren Lehrbüchern vorgezogen wird?

▲ 2 ▲ Problem von Naudé (formuliert am 27. 8. 1740 in einem Brief an Euler): Es ist zu finden, auf wieviel verschiedene Arten b Taler (z. B. $b = 50$) in c Teile (z. B. $c = 7$) zerlegt werden können, so daß alle Teile untereinander verschieden sind, aber nur aus positiven ganzen Zahlen bestehen.

▲ 3 ▲ Satz von Euler (formuliert am 17. 2. 1748 in einem Brief an G. W. Krafft in Petersburg): Verbindet man bei einem beliebigen Viereck die Mitten der Diagonalen, so ist die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen plus dem vierfachen Quadrat jener Verbindungsstrecke.

Mitgeteilt von H. Pieper

In alten Berliner Mathematik-Lehrbüchern gestöbert

Alexis Clairaut
Anfangsgründe der Algebra
Aus dem Französischen übersetzt von L. Mylius, verlegt von Ch. G. Nicolai
Berlin 1752

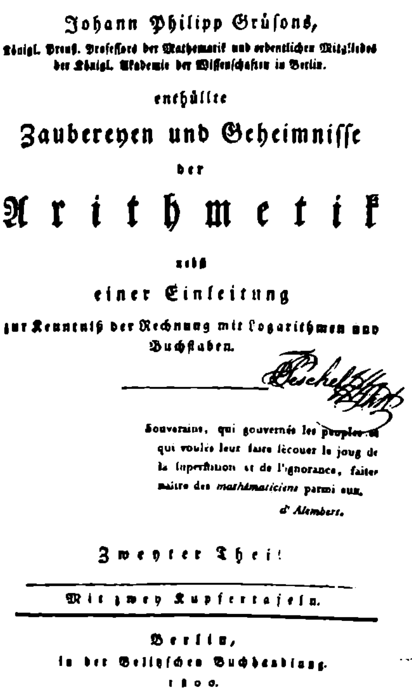
▲1▲ Zwei Boten brechen vom gleichen Ort auf, der erste 9 Stunden früher als der zweite. Der erste Bote legt durchschnittlich 5 Meilen in 2 Stunden, der zweite 11 Meilen in 3 Stunden zurück.
Nach wieviel Meilen holt der zweite Bote den ersten ein?

Johannes Andreas Christian Michelsen, Prof. der Mathematik und Physik am Berlinischen Gymnasium
Beyträge zur Beförderung des Studiums der Mathematik
Berlin 1760

▲2▲ Ein gegebenes Dreyeck durch eine Parallele zu einer seiner Seiten in zwei flächengleiche Theile zu theilen.

Johann Philipp Grusons
Enthüllte Zaubereyen und Geheimnisse der Arithmetik
Berlin 1800

▲3▲ Jemand stößt beym Hinausgehen aus seinem Hause auf eine gewisse Anzahl Arme. Er will das Geld, was er bey sich hat, unter sie theilen, findet aber, daß, wenn er jedem 9 Sous giebt, so hat er zwey und dreyßig zu wenig, und giebt er einem jeden nur 7, so behält er vier und zwanzig übrig.
Wieviel Arme waren es, und wie viel Geld hatte der Mann bey sich?


Johann Philipp Grúsons,
Königl. Preuß. Professors der Mathematik und ordentlichen Mitgliedes der Königl. Akademie der Wissenschaften in Berlin.
enthüllte
Zaubereyen und Geheimnisse
der
Arithmetik
nebst
einer Einleitung
zur Kenntniß der Rechnung mit Logarithmen und Buchstaben.

Souverains, qui gouvernés les peuples et qui voulés leur faire secouer le joug de la superstition et de l'ignorance, faites naître des *mathématiciens* parmi eux.
d'Alembert.

Zweyter Theil.

Mit zwey Kupfertafeln.

Berlin,
in der Wellischen Buchhandlung.
1800.

▲4▲ Ein Hausvater hinterläßt, da er sterben will, seine Frau schwanger und setzt durchs Testament fest, daß, wenn sie mit einem Sohne niederkommen würde, dieser zwey Drittel, und sie ein Drittel von seinem Vermögen ererben sollte; würde sie aber eine Tochter gebähren, so sollte diese nur ein Drittel und die Mutter zwey Drittel bekommen.
Sie kömmt aber mit zwey Kindern, einem Sohn und einer Tochter nieder.
Wieviel bekömmt nun ein jedes?

Aus einer Sammlung von 2000 Aufgaben und Beispielen
Buchstabenrechnung und Algebra
Berlin 1804

▲5▲ 1520 Thlr. sollen unter drei Personen A, B, C so getheilt werden, daß B 100 Thlr. mehr als A, C aber 270 Thlr. mehr als B erhalte.
Wieviel wird jeder bekommen?

▲6▲ Ich habe eine gewisse Zahl im Sinne, spricht A zu B, versuche es, sie zu erraten. Ich multiplicire meine Zahl mit 7, setze zum Produkt 3 hinzu, dividire hierauf durch 2, ziehe von dem Quotienten 4 ab, und ich erhalte 15.
Welche Zahl ist es nun?

▲7▲ M ersteht auf einer Auktion 36 m Stoff für 162 Thl. Beim Tuchhändler kostet ein Meter dieses Stoffes 6 Thl.
Um wieviel kaufte M den Stoff billiger?

Sammlung von
Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra
von Meier Hirsch, Berlin 1816

▲8▲ Es soll eine Zahl gefunden werden, welche die Eigenschaft besitzt, daß, wenn man den dritten Theil derselben mit ihrem vierten Theile multiplicirt, und zum Produkte das Fünffache der gesuchten Zahl addirt, das was heraus kommt, die Zahl 200 um eben so viel übertreffe, als die gesuchte Zahl selbst unter 280 ist.
Welche Zahl ist es?

▲9▲ Ein Rechenmeister verlangt von seinen Schülern, daß sie eine Zahl, welche er im Sinn habe, aus folgenden Angaben berechnen sollen.
Wenn ihr diese Zahl, sagt er, mit 5 multiplicirt, von dem Produkte 24 abzieht, den Rest durch 6 dividirt, und zum Quotienten 13 addirt, so erhaltet ihr diese Zahl selbst.
Welche Zahl ist es nun?

▲10▲ Zwei Freunde begegneten einem Pferdehändler, der ein schönes Pferd führte, und entschlossen sich, es gemeinschaftlich zu kaufen. Als sie wegen des Preises einig waren, fand sich, daß der eine nur den fünften, der andere nur den siebenten Theil zu bezahlen im Stande sey; so viel schossen sie denn auch wirklich zusammen, und bezahlten damit dem Verkäufer abschläglich 48 Thlr.
Wie hoch kam das Pferd zu stehen?

▲11▲ Eine Anzahl Männer, Weiber und Kinder machen zusammen eine Lustpartie. Ein Mann verzehrt (für) 19, eine Frau 10 und ein Kind 8 Groschen. Die Männer haben insgesamt 7 Gr. mehr als die Weiber, und 15 Gr. mehr als die Kinder verzehrt.
Wie viele Männer, Weiber und Kinder waren es mindestens?

▲12▲ Die Summe zweier Zahlen soll $= a$, ihr Produkt $= b$ seyen.
Welche Zahlen sind es?

Aufgaben – Systeme und Sammlungen aus der ebenen Geometrie
von H. v. Holleben und P. Gerwien, Lietenants im Königl. Preuß. Kadetten-Korps, Berlin 1831

▲13▲ Ein gegebenes Dreieck ABC ist durch eine geeignete Konstruktion in vier kongruente Teildreiecke zu zerlegen.

▲14▲ Es ist ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ aus den Stükken
$\overline{AB} = a = 95$ mm, $\overline{CD} = c = 30$ mm,
$\overline{AC} = e' = 100$ mm und $\overline{BD} = e = 125$ mm
zu konstruieren.

▲15▲ Gegeben seien zwei Kreise k und k' mit den Mittelpunkten M und M' und den Radien r und r' ($r < r'$), die sich in den Punkten P und Q schneiden. Durch den Punkt ist eine Gerade, die k in A und k' in B schneidet, derart zu konstruieren, daß P die Strecke $\overline{AB}$ halbiert.

T. Richard
Handbuch gebräuchlicher und unterhaltender Anwendungen der Mathematik
Berlin 1838

▲16▲ Ein Mann sucht ein 150 Pfund schweres Faß auf eine Ebene hinaufzubringen, deren waagerechte Länge 10 Fuß und deren Höhe $7\frac{1}{2}$ Fuß beträgt. Er bedient sich dazu eines Strickes, den er um das Faß schlingt; man fragt, welche Kraft er anwenden muß, um das Faß festzuhalten, wenn er mit der Ebene parallel zieht?

Aus einem Mathematikbuch, 1860 in Berlin gedruckt:
Eduard D. Braesicke
Der sächsische Rechenmeister

▲17▲ A hat 100 Last 10 Malter 4 Himten 2 Spind $1\frac{1}{2}$ Sechzehntel Getreide vorrätig und verkauft davon 48 Last 14 Malter 5 Himten und 3 Sechzehntel.
Wieviel behält er übrig?
(*Rechne mit:* 1 Last = 16 Malter;
1 Malter = 6 Himten; 1 Himte = 4 Spind;
1 Spind = 4 Metzen;
1 Metze = 1 Sechzehntel;
1 Spind = 4 Sechzehntel!)

J. Lehmann/Th. Scholl

Vollständige Anleitung zur Algebra von Leonhard Euler

Neun ausgewählte Aufgaben

Im Jahre 1770 gab Euler, der damals schon völlig erblindet war, ein leicht verständliches Lehrbuch der Algebra heraus. Dieses Buch erschien zunächst in deutscher Sprache in Petersburg, dem heutigen Leningrad, und wurde in viele Sprachen übersetzt. Dieses Werk war mehr als hundert Jahre lang eines der beliebtesten und meist gelesenen Lehrbücher, es enthielt viele Aufgaben, leichtere und schwerere. Hier eine kleine Auswahl:

▲1▲ Ein Vater hinterläßt seinen drei Söhnen ein Vermögen von 1600 Rthlr. (Reichstaler, deutscher Taler seit 1566). Nach seinem Testament soll der älteste Sohn 200 Rthlr. mehr haben als der zweite, der zweite aber 100 Rthlr. mehr als der dritte; wieviel bekommt jeder?

▲2▲ Ein Mann hinterläßt 11 000 Rthlr. für seine Witwe, zwei Söhne und drei Töchter. Nach seinem Testament soll die Frau zweimal mehr (zweimal so viel) bekommen als ein Sohn, und ein Sohn zweimal mehr als eine Tochter. Wieviel bekommt jeder Erbe?

▲3▲ Teile 25 in zwei Teile, so daß der größere 49mal größer ist als der kleinere. In moderner Form: Die Zahl 25 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, daß der größere Summand 49mal so groß wie der kleinere ist.

▲4▲ 20 Personen, Männer und Frauen, sind in einem Gasthause. Die Männer geben 24 Fl. (franz. Florin, d. h. Gulden), die Frauen geben auch 24 Fl. aus, und es findet sich, daß ein Mann einen Gulden mehr als eine Frau hat zahlen müssen. Wieviel waren es Männer und Frauen?

▲5▲ Ein Maulesel und ein Esel tragen jeder etliche Pud (altes russ. Massemaß, etwa 16 kg). Der Esel beschwert sich über seine Last und sagt zum Maulesel: „Wenn du mir ein Pud von deiner Last gäbest, so hätte ich zweimal so viel als du.“ Darauf antwortet der Maulesel: „Wenn du mir ein Pud von deiner Last gäbest, so hätte ich dreimal so viel als du.“ Wieviel Pud hat jeder getragen?

▲6▲ Diese Aufgabe (mit einem recht komplizierten Text, der hier nicht wiedergegeben werden soll) führt auf das folgende Gleichungssystem, das Euler auf eine sehr elegante Weise löst:

$$(1)\quad x+\frac{y+z}{2}=901$$

$$(2)\quad y+\frac{x+z}{3}=901$$

$$(3)\quad z+\frac{x+y}{4}=901$$

▲7▲ Man teile 100 in zwei Teile, so daß der erste durch 7, der zweite aber durch 11 sich teilen läßt.
In moderner Form: Man stelle die Zahl 100 als Summe von zwei natürlichen Zahlen dar, von denen die erste durch 7 und die zweite durch 11 teilbar ist.

▲8▲ Zwei Bäuerinnen haben zusammen 100 Eier. Die erste sagt: „Wenn ich die meinigen zu 8 überzähle, so bleiben 7 übrig.“ Die zweite sagt: „Wenn ich die meinigen zu 10 überzähle, so bleiben mir auch 7 übrig.“
Wieviel Eier hat jede gehabt?

▲9▲ Euler behandelt auch den Fall von zwei diophantischen Gleichungen mit drei Variablen und gibt zur Lösung eine allgemeine Regel an und schreibt dann: „Von dieser Regel machen auch die Münzmeister und Goldschmiede Gebrauch, wenn sie aus drei oder mehreren Sorten Silber eine Masse von einem gegebenen Gehalte zusammenschmelzen wollen, wie aus folgendem Beispiel zu ersehen:
Ein Münzmeister hat dreierlei Silber, das erste ist 14lötig, das zweite 11lötig und das dritte 9lötig. Nun braucht er zu einer Arbeit 30 Mark 12lötiges Silber. Wieviel Mark muß er von jeder Sorte nehmen?“
14lötiges Silber ist eine Silberlegierung mit einem Gehalt an Feinsilber von $\frac{14}{16}$. Mark ist hier eine alte Gewichtseinheit (233,8 g).

R. Lüders

Lösungen

▲1▲ Wenn der dritte Sohn x Rthlr. erhält, so erhält der zweite Sohn $x+100$ Rthlr. und der erste Sohn $x+300$ Rthlr. Daraus folgt
$x+x+100+x+300=1600$; $x=400$.
Der dritte Sohn erhält 400 Rhtlr., der zweite 500 Rthlr., der erste 700 Rthlr., das sind zusammen 1600 Rthlr.

▲2▲ Es sei x das Erbteil einer Tochter, dann ist $2x$ das Erbteil eines Sohnes und $4x$ das Erbteil der Witwe. Daher gilt
$4x+2\cdot 2x+3x=11\,000$; $x=1000$.
Jede Tochter erhält also 1000 Rthlr., jeder Sohn 2000 Rthlr. und die Witwe 4000 Rthlr.

▲3▲ Es sei x der kleinere Summand; dann ist $25-x$ der größere Summand, und es gilt
$25-x=49x$, $x=\frac{1}{2}$; $25-x=24\frac{1}{2}$.
Die Zerlegung ist also $24\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=25$.

▲4▲ Es sei x die Anzahl der Männer; dann ist $20-x$ die Anzahl der Frauen.
Jeder Mann gibt also $\frac{24}{x}$ Fl. aus,
jede Frau $\frac{24}{20-x}$ Fl., also gilt
$\frac{24}{x}-1=\frac{24}{20-x}$,
$x^2-68x+480=0$, $x_{1,2}=34\pm 26$.
Wegen $x<20$ ist daher $x=8$.
Es waren 8 Männer und 12 Frauen.

▲5▲ Es seien x Pud die Last des Maulesels und y Pud die Last des Esels. Dann gilt

$$(1)\quad y+1=2(x-1)$$

$$(2)\quad x+1=3(y-1)$$

$$x=2\frac{3}{5}\quad y=2\frac{1}{5}$$

Der Maulesel hat $2\frac{3}{5}$ Pud,
der Esel $2\frac{1}{5}$ Pud getragen.

▲6▲ Lösung durch Euler:
Setzt man $x+y+z=t$, so erhält man die Gleichungen

$$x+\frac{t-x}{2}=901,\ \text{also}\ x=1802-t, \qquad (4)$$

$$y+\frac{t-y}{3}=901,\ \text{also}\ 2y=2703-t, \qquad (5)$$

$$z+\frac{t-z}{4}=901,\ \text{also}\ 3z=3604-t. \qquad (6)$$

Multipliziert man in (4) mit 6, in (5) mit 3 und in (6) mit 2, so erhält man

$$6x = 10\,812-6t, \qquad (7)$$
$$6y = 8\,109-3t, \qquad (8)$$
$$6z = 7\,208-2t. \qquad (9)$$

Durch Addition ergibt sich hieraus

$$6(x+y+z) = 26\,129-11t,$$
$$6t = 26\,129-11t,$$
$$t = 1537.$$

Wegen (4), (5) und (6) gilt daher

$$x = 1802-1537=265,$$
$$2y = 2703-1537=1166,\ \text{also}\ y=583,$$
$$3z = 3604-1537=2067,\ \text{also}\ z=689.$$

▲7▲ Es seien $7x$ der erste Summand, $11y$ der zweite Summand. Dann gilt
$7x+11y=100$, also

$$x=\frac{100-11y}{7}=\frac{98+2-7y-4y}{7}$$
$$=14-y+\frac{2-4y}{7}=14-y+\frac{2(1-2y)}{7}.$$

Wegen
$0\leqq 11y<100$ gilt $0\leqq y<\frac{100}{11}$, also $y\leqq 9$.
Daher ist $1-2y$ nur dann durch 7 teilbar, wenn $y=4$ ist. Dann ist

$$x=14-4+\frac{2\cdot(-7)}{7}=8.$$

Also ist der erste Summand gleich $7x=56$ und der zweite Summand gleich $11y=44$.
Dieses Verfahren zur Lösung diophantischer Gleichungen mit 2 Variablen, das zuerst von Euler systematisch angewandt

wurde, wird häufig als „Eulersches Verfahren“ oder die „Eulersche Methode“ bezeichnet.

▲8▲ Die erste Bäuerin habe $8x + 7$, die zweite $10y + 7$ Eier. Dann gilt

$$8x + 7 + 10y + 7 = 100$$

$$y = \frac{43 - 4x}{5} = 8 - x + \frac{3 + x}{5}.$$

Daher ist $x = 2$ oder $x = 7$, da für $x \geqq 12$ $y < 0$ wird.
Diese Aufgabe hat also genau zwei Lösungen, nämlich:

1. $x = 2$, also $y = 7$, d. h., die erste Bäuerin hatte $8 \cdot 2 + 7 = 23$ Eier, die zweite 77 Eier.
2. $x = 7$, also $y = 3$, d. h., die erste Bäuerin hatte $8 \cdot 7 + 7 = 63$ Eier, die zweite 37 Eier.

▲9▲ Der Münzmeister nehme von der ersten Sorte x Mark, von der zweiten Sorte y Mark und von der dritten Sorte z Mark, dann gilt

(1) $x + y + z = 30$,
(2) $14x + 11y + 9z = 30 \cdot 12 = 360$.

Aus (1) folgt $9x + 9y + 9z = 270$, also

$$5x + 2y = 90, \quad y = \frac{90 - 5x}{2} = 45 - \frac{5}{2}x.$$

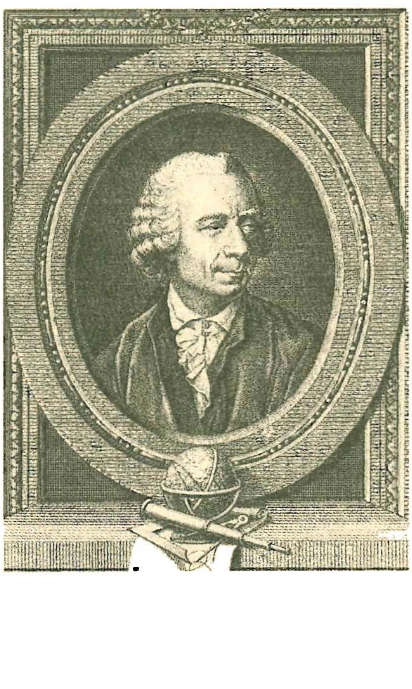
Daher ist $x = 2u$ eine gerade Zahl, und man erhält
$y = 45 - 5u$, $z = 30 - x - y = 3u - 15$.
Wegen $y \geqq 0$ ist $u \leqq 9$, und wegen $z \geqq 0$ ist $u \geqq 5$; daher ist $u = 5, 6, 7, 8$ oder 9, und man erhält die folgenden Lösungen:

u	5	6	7	8	9
x	10	12	14	16	18
y	20	15	10	5	0
z	0	3	6	9	12

Stellt man die zusätzliche Bedingung, daß von dem 14lötigen Silber möglichst wenig genommen werden soll, so hat diese Aufgabe genau eine Lösung, nämlich:

$x = 10, \; y = 20, \; z = 0$. *R. Lüders*

Das Studium der Werke Eulers bleibt die beste Schule in den verschiedenen Gebieten der Mathematik und kann durch nichts anderes ersetzt werden. *C. F. Gauß*



Mathematiker in Berlin
(von 1855 bis 1897)
Kummer, Weierstraß, Kronecker

In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts erwarb sich Berlin den Ruf eines mathematischen Forschungszentrums von Weltgeltung. Diese hervorragende Stellung verdankt es vor allem dem Wirken dreier Mathematiker: Ernst Eduard Kummer, Karl Weierstraß und Leopold Kronecker.

Ernst Eduard Kummer

Als Sohn eines Arztes wurde Ernst Eduard Kummer in Sorau (Niederlausitz) am 29. Januar 1810 geboren. Bereits drei Jahre später starb der Vater an Typhus. In ihrem Unglück nahm die Mutter jede Arbeit an, um ihre kleinen Kinder durchzubringen. Lange Zeit nähte sie Soldatenhemden. Trotz der sehr knapp bemessenen Mittel konnte sie es ermöglichen, daß ihre beiden Söhne das Gymnasium in Sorau besuchten. Im Abgangszeugnis von E. E. Kummer wird sein *launiger Witz* hervorgehoben und *daß er sich im Deutschen ohne Schwulst zum Poetischen zu erheben* [...] *vermöge*. 1828 ging er nach Halle, um Theologie zu studieren, wechselte dann aber zur Mathematik über. In Scherk fand er einen Lehrer, unter dessen Anleitung er bald zu eigenen mathematischen Untersuchungen angeregt wurde. Der erste wissenschaftliche Erfolg stellte sich im dritten Jahr seines Studiums ein, als er 50 Reichstaler für eine Preisarbeit erhielt. Noch im gleichen Jahr wurde er, erst 21jährig, zum Doktor promoviert. Nach einem Probejahr am Gymnasium seiner Vaterstadt siedelte Kummer nach Liegnitz über, wo er als Lehrer bis 1842 am Gymnasium unterrichtete (mit 22 bis 24 Wochenstunden). Während dieser Zeit entstanden Arbeiten auf dem Gebiet der Funktionentheorie. Jacobi soll die Ausführungen über die hypergeometrische Reihe, die Kummer ihm zugeschickt hatte, als er seine militärische Dienstzeit ableistete, so kommentiert haben: „Wenn schon Musketiere jetzt so ausgezeichnete mathematische Arbeiten machen, dann möchte ich einmal die der Herren Unteroffiziere sehen“. Auf Grund seiner Arbeiten wird Kummer bereits mit 29 Jahren zum korrespondierenden Mitglied der Berliner Akademie ernannt. 1842 erfolgt seine Berufung als Professor an die Universität Breslau. In den folgenden Jahren entsteht Kummers größte wissenschaftliche Leistung, die Schöpfung der idealen Zahlen. Hier nimmt das, was sich dann später zu dem Gebiet der Idealtheorie entwickelt hat, seinen eigentlichen Anfang. Über diese wahrhaft geniale Erfindung äußerte sich der Mathematiker Hensel (1861 bis 1941) mit Worten, die nichts von ihrer Gültigkeit eingebüßt haben: „Nur ein großer Geist und eine reiche Phantasie konnte in einem Gebiete, in welchem alles regellos jeder Ordnung zu spotten schien, das tiefverborgene aber so einfache Gesetz ahnen; es erforderte eine unbeugsame Energie, auf diesem mühevollen Wege nicht mutlos stehen zu bleiben.“ Für den Mathematiker Frobenius (1849 bis 1917) sind die idealen Zahlen „eine der tiefsten mathematischen Konzeptionen aller Zeiten“. 1855 wird Kummer als Nachfolger Dirichlets nach Berlin berufen. Durch seine sorgfältig vorbereiteten und mit pädagogischem Talent abgehaltenen Vorlesungen (z. B. über analytische Geometrie, Mechanik, Flächentheorie, Zahlentheorie) wird er bald ein beliebter Lehrer. Es wird von Zahlentheorievorlesungen mit der selbst nach heutigen Maßstäben enormen Zahl von mindestens 250 Hörern berichtet. Zusammen mit Weierstraß gründete er 1861 das *Berliner Mathematische Seminar* zur Förderung der Ausbildung befähigter Mathematikstudenten. Kummer war auch als Dekan und Rektor (1868/69) an der Berliner Universität tätig. Als 72jähriger ersuchte er die Fakultät, sich beizeiten um einen Nachfolger für ihn zu bemühen, was er u. a. damit begründete, daß er eine Schwächung seines Gedächtnisses bemerke. 1884 zog er sich dann endgültig aus dem mathematischen Leben zurück. Er starb am 14. Mai 1893 in Berlin.

Aus einem Brief von Kummer

Am 2. Oktober 1844 schrieb Kummer seinem Schüler Kronecker, zu welchen weiteren Ergebnissen über die Teilbarkeit von Primzahlen in gewissen erweiterten Zahlbereichen (die auch für die Fermatsche Vermutung von größter Bedeutung sind) er inzwischen gelangt ist.

▲1▲ *Es wird mir, glaube ich, folgender einfache Satz behilflich sein.*
Es ist immer

$$c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2 \geqq \frac{(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)^2}{n}$$

für beliebige n reelle Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ (die Originalbezeichnungen Kummers wurden geringfügig abgeändert).
Wer kann Kummers Satz beweisen?

Karl Weierstraß

Ein Zeitgenosse nannte ihn den *unbestrittenen Beherrscher des mathematischen Betriebes* an der Berliner Universität. Charles Hermite, der bekannte französische Mathematiker, schrieb 1882 an Weierstraß' vielgenannte Schülerin Sonja Kowalewskaja: „Weierstraß – das ist unser aller Meister.“ Karl Weierstraß wurde am 15. Oktober 1815 in Ostenfelde, einem Dorf in Westfalen geboren. Sein Vater arbeitete dort als Sekretär beim Bürgermeister. Karl besuchte verschiedene Schulen, weil sein Vater mehrmals versetzt wurde. Kurz vor seinem 12. Geburtstag stirbt seine Mutter. Zu Beginn der zweiten Hälfte des Schuljahres 1828/29 tritt er in das Paderborner Gymnasium ein. Schon nach fünfeinhalb Jahren legt er das Abitur als *Primus omnium* (Erster von allen) ab. Weierstraß hatte in der damals siebenklassigen Schule ein Schuljahr überspringen dürfen. Es war üblich, daß am Schuljahresende für die in mehreren Fächern besten Schüler Musikstücke zur Aufführung gelangten. Zu Ehren von Karl spielte die Kapelle gewöhnlich viermal. Auf Wunsch des Vaters nimmt er danach in Bonn ein Studium auf, das ihn auf die Laufbahn eines höheren Staatsbeamten vorbereiten soll. Aber 1838 verläßt er die Universität ohne Examen, sehr zum Verdruß seines Vaters. An der Akademie in Münster hört er 1839 die einzigen mathematischen Vorlesungen seines Lebens. Eine Vorlesung über elliptische Funktionen hört er zudem als einziger Student. Nach bestandenem Staatsexamen war er von 1842 bis 1855 als Lehrer zunächst in Deutsch-Krone (jetzt VR Polen), danach (ab 1848) in Braunsberg (jetzt VR Polen) tätig. Zu seinen Unterrichtsfächern gehörten neben Mathematik, Physik auch Deutsch, Botanik, Geographie, Geschichte, Turnen und kurze Zeit sogar Schönschreiben. Trotz der umfangreichen Lehrverpflichtungen beschäftigt sich Weierstraß intensiv mit tiefliegenden mathematischen Problemen. Es wird aus Braunsberg berichtet, daß Weierstraß eines Morgens nicht zum Unterricht erscheint. Daraufhin begibt sich der Direktor zur im Gymnasium gelegenen Wohnung von Weierstraß, den er, ganz in seine Arbeit versunken, bei Lampenlicht antrifft. Er hatte die ganze Nacht hindurch gearbeitet, den Anbruch des neuen Tages nicht bemerkt, und bat nun, ihn nicht zu stören, da er einer Entdeckung auf der Spur sei. Die mathematische Fachwelt ist dann auch höchst erstaunt, als 1854 Weierstraß' erste große Arbeit mit der Lösung des sogenannten Jacobischen Umkehrproblems für hyperelliptische Integrale erscheint. Ein unbekannter Lehrer aus der Provinz, abseits von den mathematischen Zentren, präsentierte seine bahnbrechenden Ideen. Das Außerordentliche der Situation wird auch daran deutlich, daß eine Abordnung der Universität Königsberg eigens nach Braunsberg reist, um dem Lehrer Weierstraß den Ehrendoktortitel zu verleihen. Mit seiner 1856 erfolgten Berufung als Professor an das Berliner Gewerbeinstitut beginnt ungewöhnlich spät die akademische Laufbahn des inzwischen 41jährigen Weierstraß. 1864 übernimmt er eine ordentliche Professur an der Berliner Universität. Hier hält er seine großen Vorlesungen, die Hörer des In- und Auslandes anziehen, darunter promovierte Mathematiker und Dozenten. Er berichtet über eigene Forschungsergebnisse, teilt Ideen mit, die man nur bei ihm hören kann. So steigt Weierstraß zur anerkannten wissenschaftlichen Autorität auf. Hohe und höchste Auszeichnungen werden ihm zuteil (darunter der Orden *Pour le mérite*). Während seiner mehr als 30jährigen Vorlesungstätigkeit erwächst ihm eine große Schar von Schülern. Aus der Fülle seiner Anregungen schöpfen sie für ihre eigenen Forschungen. Konnten sie in seinem Sinne Erfolge erringen, so nahm er daran aufrichtigen Anteil und fragte nicht nach geistiger Urheberschaft. Ein besonders herzliches Verhältnis verband ihn mit seiner Schülerin Sonja Kowalewskaja, die später als erste Frau in Europa zum Professor berufen wurde. Als 20jährige war sie 1870 nach Berlin gekommen. Da aber Frauen zu den Vorlesungen nicht zugelassen wurden und auch Weierstraß keine Ausnahmeregelung erwirken konnte, kam es dazu, daß er ihr bis zu ihrer Promotion 1874 (in Göttingen) Privatunterricht erteilte. Erst ihr vorzeitiger Tod 1891 setzte seiner treuen Freundschaft ein Ende. Weierstraß, die letzten Jahre ganz an den Rollstuhl gefesselt, stirbt am 19. Februar 1897 in Berlin. Er hinterläßt eine Fülle mathematischer Erkenntnisse, wie etwa sein großes Hauptwerk über die Abelschen Funktionen und weitere grundlegende Ergebnisse, insbesondere in der Analysis und Funktionentheorie. Weierstraß hat darüber hinaus mit seinen Anforderungen an Exaktheit der mathematischen Begriffsbildungen und Strenge der Beweisführungen – man sprach geradezu von *Weierstraßscher Strenge* – die Maßstäbe gesetzt, die seither zum anerkannten Allgemeingut in der Mathematik geworden sind.

Aus einer Vorlesung von Weierstraß

In seinen Vorlesungen über elliptische Funktionen betrachtet Weierstraß Funktionen mit Perioden. Dabei heißt eine reelle Zahl w eine Periode der Funktion $f(x)$, wenn $f(x+w)=f(x)$ für alle reellen Zahlen x gilt. Beispielsweise besitzt $f(x)=\sin x$ die Periode $w=2\pi$. Wenn w eine Periode ist, so sind offensichtlich auch alle ganzzahligen Vielfachen mw Perioden. $f(x)$ soll einfach-periodisch heißen, wenn die Menge aller Perioden von $f(x)$ aus den Vielfachen mw einer gewissen Periode $w \neq 0$ besteht.

▲2▲ Es ist zu beweisen, daß es zu jeder reellen Zahl $r \neq 0$ einfach-periodische Funktionen gibt, deren Perioden genau die Vielfachen von r sind.

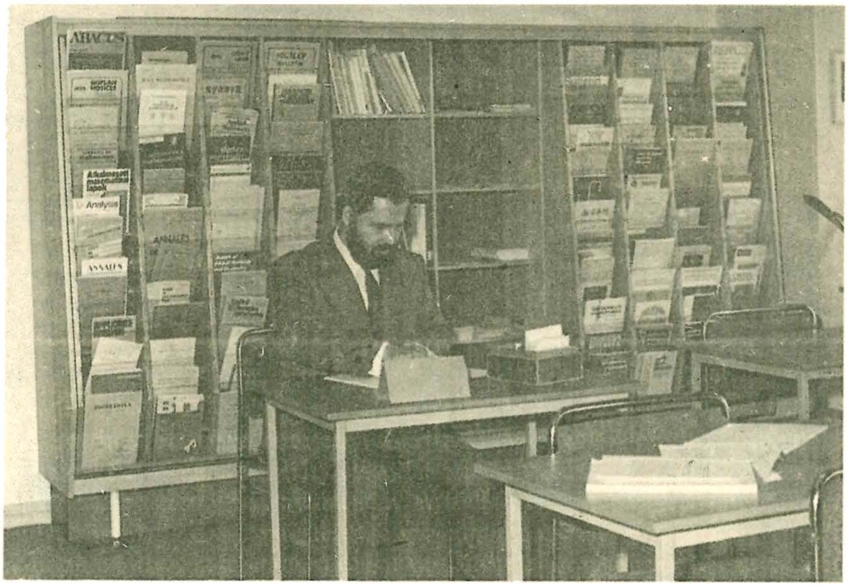
▲3▲ Weierstraß betrachtet periodische Funktionen $f(x)$, die für alle reellen x definiert sind (und also wenigstens eine Periode $w \neq 0$ besitzen). Er behauptet, daß dann $f(x)$ entweder beliebig kleine positive Perioden besitzt oder einfach-periodisch ist.
Wer findet einen Beweis hierfür?

▲4▲ Wer den Begriff der Ableitung einer Funktion kennt, kann noch beweisen: eine differenzierbare Funktion hat dann und nur dann beliebig kleine Perioden, wenn sie eine Konstante ist.
Weierstraß formuliert das so: Es gibt keine reellen differenzierbaren doppelt-periodischen Funktionen.

Leopold Kronecker

Kroneckers Mathematiklehrer am Gymnasium war kein geringerer als Kummer. So reicht die bis ans Lebensende währende Freundschaft dieser beiden Männer bis in jene Schulzeit zurück. Leopold Kronecker wurde am 7. Dezember 1823 in Liegnitz als Sohn eines Kaufmannes geboren. Sein Vater sorgte für eine umfassende Erziehung und Ausbildung. 1841 nahm Kronecker sein Studium an der Berliner Universität auf. Hier hörte er Vorlesungen bei Dirichlet, Jacobi, Steiner und später in Breslau auch bei seinem Lehrer Kummer. Außerdem hat er philosophische Studien betrieben und sich mit Sprachen des klassischen Altertums beschäftigt. Noch als Student publiziert er 1845 seine erste Arbeit, die einen kurzen Beweis der von Gauß nachgewiesenen Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung vom Primzahlgrad enthält. Ebenfalls 1845 schließt er sein Studium mit der Promotion ab. In seiner Doktorarbeit gelangt er zu Resultaten über die Einheitengruppe in Kreisteilungskörpern. In den folgenden Jahren verwaltet Kronecker auf väterlichen Wunsch ein Gut, das der Familie gehört. Er kümmert sich um jede Einzelheit des Betriebes und ritt bei Wind und Wetter auf den Feldern umher. Als 1846 sein Onkel starb, übernimmt er mit großem Geschick die Auflösung des von diesem betriebenen Bankgeschäftes. Trotz dieser so ganz anders gearteten Tätigkeiten hat Kronecker seine mathematischen Studien nicht vernachlässigt. Nach Abschluß der geschäftlichen Tätigkeit siedelt Kronecker 1855 nach Berlin über, wo er eine Villa erworben hatte. Kurz darauf kamen Kummer und Weierstraß ebenfalls in diese Stadt. Damit war Berlin Wirkungsstätte von drei Männern geworden, die zu den ersten Vertretern ihrer Wissenschaft gehören. Sie begründen den Ruf Berlins als eines der bedeutendsten mathematischen Zentren. 1861 wird Kronecker zum Mitglied der Berliner Akademie gewählt. Seine Vermögensverhältnisse erlauben ihm, mathematische Studien ohne anderweitige dienstliche Verpflichtungen betreiben zu können. Als Akademiemitglied hatte er das Recht, an der Universität Vorlesungen zu halten, wovon er ausgiebigen Gebrauch machte. Im Unterschied zu Kummer sprach er oft über neueste Forschungsergebnisse, nicht selten sogar über Resultate, die er erst in der Nacht zuvor entdeckt hatte. Allerdings führte das zum raschen

Namenstafel am Karl-Weierstraß-Institut für Mathematik



Der Autor in der Bibliothek des Karl-Weierstraß-Instituts für Mathematik

Absinken der Hörerzahl in jedem Semester. Die Förderung junger Talente lag ihm sehr am Herzen. Oft versammelte sich eine auserwählte Schar von Zuhörern in seinem Hause. Dabei wurde nicht nur über Mathematik gesprochen, sondern beispielsweise auch musiziert. Im Zusammenhang mit dem Ausscheiden seines alten Lehrers Kummer übernahm er, nun ebenfalls im vorgerückten Alter, 1883 eine Professur an der Berliner Universität. Kronecker vertritt die Ansicht, daß für den Aufbau und die Grundlegung der Mathematik nur das eine Existenzberechtigung habe, was in endlich vielen Schritten in jedem Einzelfalle geprüft werden kann. So sucht er etwa, die reellen Zahlen zu vermeiden. „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk" erklärt er auf der Berliner Naturforscher-Versammlung 1886. Die sich entwickelnde, noch junge Mengenlehre kann er nicht anerkennen, ebenso kritisiert er die Grundlagen der Weierstraßschen Analysis. Weierstraß hat sich öffentlich dazu nicht geäußert. Aus seinen Briefen an seine Schülerin Sonja Kowalewskaja wissen wir aber, wie sehr er die Entfremdung mit Kronecker bedauert und in welchem Maße er darunter gelitten hat. Kronecker ist bis zuletzt mathematisch aktiv. Im August 1891 stirbt seine geliebte Frau. Kurz darauf erliegt er am 29. Dezember 1891 einer Bronchitis. In der Algebra, Zahlentheorie und der Theorie der elliptischen Funktionen hat Kronecker hervorragende Beiträge geliefert. Das noch größere Verdienst besteht aber wohl darin, tiefe Wechselbeziehungen zwischen diesen Gebieten aufgedeckt zu haben.

Aus einer Beweisvariante von Kronecker

Mehrfach hat Kronecker sich mit dem erstmals von Gauß bewiesenen quadratischen Reziprozitätsgesetz beschäftigt und immer andere Beweisvarianten aufgesucht. In einer 1876 publizierten Arbeit zu diesem Thema finden sich folgende Behauptungen (die Bezeichnungen wurden geringfügig abgeändert). Für ungerade natürliche Zahlen m, n betrachtet Kronecker

$\prod\left(\frac{a}{m}-\frac{b}{n}\right)$, *wo das Product auf alle Werthe* $a = 1, 2, \ldots \frac{m-1}{2}$ *und* $b = 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2}$ *zu erstrecken ist.*

▲5▲ Kroneckers Produkt ist dann und nur dann von Null verschieden, wenn m und n teilerfremd sind.

Für teilerfremde m, n hat es also Sinn, von dem Vorzeichen $e(m, n)$ des Kroneckerschen Produktes zu reden.

▲6▲ Für teilerfremde m, n *folgt aus der Definition* [...] *unmittelbar die Reciprocitätsgleichung*

$$e(m,n)\,e(n,m) = (-1)^{\frac{(m-1)(n-1)}{4}}$$

▲7▲ *[so]wie die Relation*

$$e(m,n) = (-1)^E \text{ mit } E = \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{km}{n}\right]$$

($[x]$ bezeichnet die größte ganze Zahl $\leqq x$).

▲8▲ *Hieraus folgt wiederum, daß für positive ungrade Zahlen* l *und* m, *welche nach dem Modul* n [...] *einander congruent sind,*

$e(l, n) = e(m, n)$

ist (die Kongruenzbedingung bedeutet, daß $l - m$ durch n teilbar ist).

Wer beweist Kroneckers Behauptungen?

R. Bölling

Zusammen mit anderen Akademie-Instituten ist in diesem Gebäude ein Teil des Karl-Weierstraß-Instituts für Mathematik der AdW der DDR untergebracht

Römische Zahlen

In der Mathematik werden die *umständlichen* römischen Zahlen schon seit Jahrhunderten nicht mehr verwendet. Auf anderen Gebieten aber behaupten sie sich nach wie vor. Es sind wohl vor allem zwei Gründe, auf die sich ihr Weiterleben zurückführen läßt. Einerseits ist die Möglichkeit, unterschiedliche Zahlzeichen nebeneinander benutzen zu können, bei vielen Gelegenheiten ein Vorteil. Beispielsweise wird in Büchern – besonders in wissenschaftlichen – der sogenannte Titelbogen, der außer dem Titelblatt auch Vorworte, Inhalts-, Abbildungs-, Abkürzungsverzeichnisse usw. enthält und der jeweils erst als letzter Teil eines Buches ausgedruckt wird, regelmäßig mit römischen Zahlen paginiert (mit Seitenzahlen versehen). Damit geht man allen Schwierigkeiten der Seitenzählung am Buchanfang aus dem Weg. Auch bei der Anfertigung stärker gegliederter Verzeichnisse und Übersichten greift man gern auf römische Zahlen zurück; sie erhalten dann in der Regel vor den arabischen Zahlen und vor eventuell ebenfalls verwendeten Buchstaben den ersten Rang („I 1 a“).

Der zweite Grund für das Weiterleben der römischen Zahlen ist weniger ein praktischer als ein solcher des Stils und der Ästhetik. Der monumentale Charakter der von den Römern als Zahlzeichen verwendeten großen lateinischen Buchstaben und gerade auch die erwähnte *Umständlichkeit* lassen die römischen Zahlen viel gewichtiger und würdevoller erscheinen als die schlanken, beweglichen arabischen Ziffern. Offensichtlich aus diesem Grunde beziffert man z. B. periodisch wiederholte Veranstaltungen gern mit römischen Zahlen („XII. Kongreß“). Ebenso benutzt man sie nicht selten in einfachen Aufzählungen, um den einzelnen Punkten mehr Gewicht zu verleihen. Obligatorisch sind römische Zahlen, wenn es darum geht, gleichnamige Herrscher aus einer und derselben Dynastie durch Bezifferung der Namen voneinander zu unterscheiden („Georg III. von England“).

Zu unangenehmen Begegnungen mit römischen Zahlen kann es bei der Besichtigung historischer Bauwerke kommen. Nicht jedem Betrachter gelingt es nämlich, die in den – zumeist lateinischen – Bauinschriften genannten Jahreszahlen zu entziffern. Denn mit den Zahlzeichen I, V und X, die jedem geläufig sind, kommt man nur bis 39. Welche muß man noch kennen?

Zu den antiken Denkmälern, auf denen römische Zahlzeichen authentisch überliefert sind, gehören die Münzen der Römischen Republik und des Kaiserreiches. Vor allem in der sogenannten Titulatur der Kaiser begegnet man vielen Zahlen: sie sagen aus, zum wievielten Mal der Kaiser zum Zeitpunkt der Prägung der Münze die sogenannte *tribunizische Gewalt* (tribunicia potestas) besaß und wie oft er zu diesem Zeitpunkt schon den Ehrentitel *Imperator* erhalten oder das Konsulat bekleidet hatte.

Bild 1

Auf der Rückseite eines Sesterzes des Mark Aurel, die den Kaiser zwischen Standarten zeigt (Bild 1), lesen wir TR POT XIX IMP II COS III, d. h. der Kaiser besaß damals zum neunzehnten Mal die – jährlich im Dezember erneuerte – tribunizische Gewalt (Dezember 164 bis Dezember 165 u. Z.), er war schon zweimal zum Imperator ausgerufen worden (zuletzt 163 u. Z.) und hatte dreimal das Konsulat bekleidet (zuletzt 161 u. Z.). Da nun bekannt ist, daß Mark Aurel im Spätsommer 165 u. Z. zum dritten Mal den Imperatortitel erhielt, kann man die Münze auf den Zeitraum Dezember 164 bis Sommer 165 u. Z. datieren. Die Münzen vom Herbst 165 u. Z. haben bereits TR POT XIX IMP III COS III, die vom Dezember TR POT XX IMP III COS III.

Höhere Zahlen kann man, wie leicht erklärlich, nicht in den Kaisertitulaturen, sondern nur in anderen Zusammenhängen finden. Welche Zahlen liest man auf den Rückseiten zweier Denare des Gaius Marius Capito, der ungefähr im Jahre 81 v. u. Z. das Amt eines Münzmeisters ausübte (Bild 2 und 3)? Würden wir diese Zahlen heute genauso schreiben? Welche Bedeutung mögen sie haben? Gibt es außer den unterschiedlichen Zahlen noch andere Unterschiede zwischen den beiden Münzbildern?

Bild 2

Bild 3

Auf einem Bronzemedaillon des Kaisers Hadrian (Bild 4) ist der Genius der Zirkusspiele abgebildet, in der Rechten ein Rad haltend, mit der Linken eine Zirkussäule (Wendemarke) umfassend.

Bild 4

Die Münzaufschrift lautet:
ANN DCCCLXXIIII NAT VRB P CIR CON, d. h. „im Jahre ... hat (der Kaiser) am Gründungstage der Stadt dem Volk Zirkusspiele gestiftet". In welchem Jahre befinden wir uns, wenn die Gründung Roms nach traditioneller römischer Auffassung im Jahre 753 v. u. Z. stattgefunden hatte?

Das nächste Beispiel – eine Silbermünze des Kaisers Maximianus (Bild 5) – läßt innerhalb eines Kranzes die Buchstaben AQ erkennen, mit denen die Münzstätte Aquileia (Norditalien) bezeichnet wird, und darüber eine römische Zahl, die angibt, wie viele derartige Münzen auf 1 Pfund Silber gehen. Wie schwer ist die Münze, wenn das römische Pfund 324 g wog? Zum besseren Verständnis sei daran erinnert, daß der Wert der alten Gold- und Silbermünzen allein durch das Gewicht bestimmt war.

Bild 5

Eine Goldmünze Konstantins des Großen (Bild 6) zeigt die Siegesgöttin (Viktoria), in der Linken einen Palmzweig, in der Rechten ein Siegesmal (Tropaion) haltend. Im sogenannten Abschnitt der Münze, d. h. unter der Bodenlinie, befindet sich die Signatur der Münzstätte Antiochia (Syrien), rechts neben der Göttin eine Zahl, die auch hier das Verhältnis des Gewichtes der Münze zum römischen Pfund angibt. Welches Gewicht müßte die Goldmünze haben?

Bild 6

Die Zahlen auf den beiden zuletzt erwähnten Münzen sind geeignet, uns auf eine viel diskutierte wissenschaftliche Frage zu führen, nämlich die nach dem theoretischen Gewicht des römischen Pfundes. Um dieses zu ermitteln, muß man von einer der wenigen Münzsorten ausgehen, deren Gewichts- und Wertverhältnis zum römischen Pfund bekannt ist. In Betracht kommen von vornherein nur Goldmünzen, da nur sie einigermaßen genau justiert sind. Man hat auch darauf zu achten, daß nur sehr gut erhaltene, *prägefrische* Exemplare auf die Waage kommen.
Gleichwohl läßt sich das Gewicht des römischen Pfundes nur annähernd bestimmen, sein Ansatz schwankt zwischen 322,560 g und 327,450 g. Es mit 324 g anzusetzen, wie wir es oben gemacht haben, empfiehlt sich nur aus rein praktischen Gründen: 324 ist durch 12 teilbar, was mit Rücksicht auf das duodezimal eingerichtete römische Gewichtssystem von Vorteil ist.

Zuletzt wollen wir eine Kupfermünze des byzantinischen Kaisers Justinian (1. April 527 bis 14. November 565 u. Z.) betrachten (Bild 7). ANNO XIII, „im Jahre 13", bezeichnet natürlich das 13. Regierungsjahr des Kaisers, also 539/40 u. Z. Wer aber in dem großen M das römische Zahlzeichen für „1000" erkennen und

Bild 7

die Münze als „Tausender" verstehen wollte, würde sich sehr irren: M ist hier der griechische Buchstabe my, der als griechisches Zahlzeichen „40" bedeutet. Ebenso ist das unter dem M befindliche A als griechischer Buchstabe *alpha* zu verstehen, der zugleich als Zahlzeichen für „1" dient. Die Münze ist also ein „Vierziger" des Justinian, geprägt im 13. Regierungsjahr in der 1. Offizin des Münzamtes von CONstantinopolis (heute Istanbul).
Über griechische Zahlzeichen auf Münzen wird in einem späteren Beitrag gehandelt werden.

H.-D. Schultz

Lösungen

Gefragt war zunächst nach den römischen Zahlzeichen L (50), C (100), D (500) und M (1000). C ist der Anfangsbuchstabe des Zahlwortes CENTVM (hundert), M der von MILLE (tausend). L und D haben andere Ursprünge, deren Erklärung hier zu weit führen würde. Tausender (ab 2000) werden durch einen waagerechten Strich über dem Zahlzeichen angegeben, z. B. $\overline{\text{V}} = 5000$, $\overline{\text{C}} = 100\,000$.
Auf den um 81 v. u. Z. geprägten Denaren des Münzmeisters G. Marius Capito liest man XXXXIIII (44) bzw. CXXXXVIIII (149). In neuerer Zeit würde man, um diese langen Zahlen zu verkürzen, XLIV bzw. CXLIX schreiben. Die Römer selbst gebrauchten nebeneinander unterschiedliche Notierungsarten, die jedoch immer unmißverständlich waren. – Mit den Zahlen waren im vorliegenden Fall die Münzprägestempel zu Kontrollzwecken numeriert worden. Mindestens 149 Paare von Münzprägestempeln waren also an der Prägung der Denare des genannten Münzmeisters beteiligt. Da die Stempel von den Graveuren aus freier Hand gearbeitet wurden, zeigten sie immer gewisse Unterschiede und waren untereinander nie völlig gleich. Die Unterschiede der Stempel wiederholten sich auf den Münzen. Nur Münzen, die aus demselben Stempelpaar stammen, haben auch völlig identische Münzbilder.
Die Zirkusspiele, die auf dem Bronzemedaillon des Kaisers Hadrian (117 bis 138 u. Z.) erwähnt sind, wurden im 874. Jahr nach der Gründung Roms (753 v. u. Z.) gestiftet, d. h. im Jahre 121 u. Z.
Die Silbermünze des Kaisers Maximianus (286 bis 305 u. Z.) wiegt $\frac{1}{96}$ des römischen Pfundes von 324 g, das Gewicht müßte also 3,375 g betragen. Tatsächlich sind es aber nur 2,86 g! Der Solidus Konstantins des Großen (306 bis 337 u. Z.) zu $\frac{1}{72}$ römischen Pfund müßte 4,50 g wiegen. Er wiegt aber nur 4,47 g.

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 11. Januar 1988

Im Jahr des 750jährigen Bestehens von Berlin wollen wir unsere *alpha*-Leser mit einem der größten Verlage der DDR, dem Volkseigenen Verlag *Volk und Wissen*, der seinen Sitz in unserer Hauptstadt hat, etwas näher bekannt machen. Dieser Verlag gewährleistet seit seinem Bestehen die gesamte Schulbuchversorgung in unserer Republik. Darüber hinaus hat der Verlag viele Titel für die Hand des Lehrers oder für Studenten, die den Beruf des Lehrers anstreben, aber auch für Eltern herausgebracht, die dazu beitragen, unser Volksbildungswesen ständig weiterzuentwickeln. Die Abteilung Mathematik dieses Verlages hat durch zahlreiche Titel die Förderung junger mathematischer Talente erfolgreich unterstützt. Es seien einige dieser Titel, die auch bei vielen *alpha*-Lesern sich großer Beliebtheit erfreuen, stellvertretend im Anschluß an diesen Wettbewerb genannt. Aus der Fülle dieser Titel haben wir für den *alpha*-Wettbewerb einige Aufgaben ausgewählt, deren Lösung unseren Lesern Freude bereiten möge.

Achtung! Ab diesem Wettbewerbsjahr wird der Wettbewerb in den Heften 5/87, 6/87 und 1/88 mit je 7 Aufgaben durchgeführt.

Ma 5 ■ 2807 Es werden alle Zahlen von 1 bis 99 aufgeschrieben. Wie oft wird die Ziffer 5 geschrieben?

Ma 5 ■ 2808 Wie heißen die mit Sternchen bezeichneten Ziffern in der folgenden Multiplikationsaufgabe?

```
* * * · * 2
      * 08
     * 6 *
    * 128
```

Ma 5 ■ 2809 Welche Ziffer steht an der Einerstelle des Produktes aus den folgenden zehn Faktoren?
$11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot \ldots \cdot 25 \cdot 27 \cdot 29$

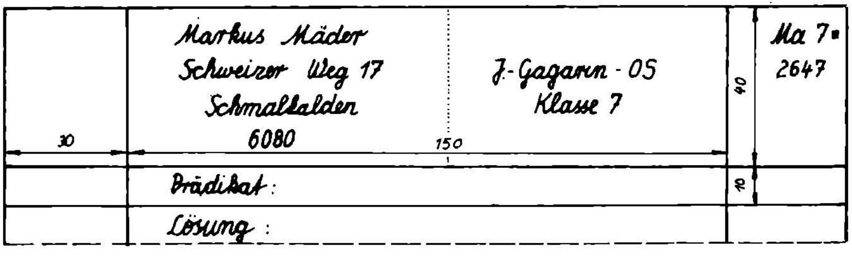
Ma 5 ■ 2810 Wie können die Kugeln verteilt werden? Man denke sich sieben Kugeln, vier rote, eine schwarze und zwei weiße, die sich voneinander nur in der Farbe unterscheiden, im übrigen aber völlig gleich sind. Außerdem denke man sich zwei Kästen A und B, von denen A nicht mehr als drei Kugeln fassen kann und B nicht mehr als vier. Wieviel Möglichkeiten gibt es, die sieben farbigen Kugeln in den Kästen A und B unterzubringen?

Ma 5 ■ 2811 *Die Äpfel:* In einer Kiste liegen vier Sorten Äpfel, von jeder Sorte gleich viel und zusammen 100. Wieviel Äpfel muß man ohne Hinzusehen mindestens herausnehmen, damit man sicher ist, daß von einer Sorte mindestens zehn Äpfel dabei sind?

Ma 5 ■ 2812 *Die künstliche Teilung:* Zwei Ökonomen lassen sich acht Eimer Wein (in einem Achteimerfaß) kommen; zu Hause haben sie weiter kein Gefäß, als ein Fünf- und ein Dreieimerfaß. Nun will jeder vier Eimer haben. Wie haben sie den Wein geteilt?

Ma 5 ■ 2813 In einem alten Buch mit lustigen mathematischen Knobeleien fand sich folgender Vers:
Eine Zahl hab ich gewählt,
107 zugezählt,
dann durch 100 dividiert
und mit 11 multipliziert,
endlich 15 subtrahiert,
und zuletzt ist mir geblieben
als Resultat die Primzahl 7.'
Ermittle alle Zahlen, die diesen Bedingungen genügen!

Ma 6 ■ 2814 Addiert man zur Quersumme einer zweistelligen natürlichen Zahl die Differenz aus den Ziffern im Zehner und Einer, so erhält man 10. Setzt man zwischen die beiden Ziffern eine 9, so ergibt sich eine elfmal so große Zahl. Wie heißt die Zahl?



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alpha-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027

3. Der jeweiligen Aufgabennummer ist ein Ma (Mathematik), Na/Te (Naturwissenschaft und Technik) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12 oder Na/Te 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug korrigiert.
Noch eine Bitte an die Schulen: Sendet bitte die Lösungen bereits nach Aufgaben sortiert ein.

6. Teilnehmer, die eine richtige Lösung (nicht nur Antwortsatz) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Anderenfalls erhalten sie eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst". Nach dem Einsendetermin eingehende Lösungen werden nicht mehr bearbeitet!

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1987/88 läuft von *Heft 5/1987 bis Heft 1/1988*. Zwischen dem 1. und 10. September 1988 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/87 bis 1/88 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/88 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (von den Wettbewerben der Hefte 5/87 bis 1/88) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein *alpha*-Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1987/88 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunde zurück). Schüler, die schon mehrere Jahre teilnehmen, senden bitte die zuletzt erhaltene Urkunde mit ein. Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

Ma 6 ■ 2815 Ein Schüler kaufte 15 Bleistifte zu 16 Pf, 7 zu 28 Pf und 8 Zeichenstifte. Obwohl der Schüler den Einzelpreis für die Zeichenstifte vergessen hatte, stellte er fest, daß der Preis von 7,50 M nicht stimmte. Wie überlegte er?

Ma 6 ■ 2816 Luise sucht eine natürliche Zahl x, die sie vom Zähler des Bruches $\frac{17}{19}$ subtrahieren und gleichzeitig zum Nenner addieren möchte, wobei der so entstehende Bruch den Wert $\frac{7}{11}$ erhalten soll. Stelle fest, ob es eine Zahl x gibt, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Gib diese Zahl im Falle ihrer Existenz an, und untersuche, ob sie die einzige ist, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt!

Ma 6 ■ 2817 Vier Freunde, Axel, Bernd, Ernst und Fred, sind entweder Abonnent des Jugendmagazins *Neues Leben* oder der Zeitung *Junge Welt*. Von diesen Freunden ist bekannt:
a) Der 19jährige ist nicht Abonnent der *Jungen Welt*, aber der 16jährige und Ernst haben die *Junge Welt* abonniert.
b) Axel und der 17jährige sind Abonnenten von *Neues Leben*, Bernd dagegen nicht.
c) Der 20jährige, der 19jährige und Bernd waren kürzlich Gäste der Geburtstagsfeier von Fred.
Es ist herauszufinden, wie alt jeder der vier Freunde ist und welche Zeitung bzw. Zeitschrift er abonniert hat.

Ma 6 ■ 2818 Wenn man von einer dreistelligen natürlichen Zahl 7 subtrahiert, dann ist die entstandene Zahl durch 7 teilbar, subtrahiert man 8, so ist die entstandene Zahl durch 8 teilbar, subtrahiert man 9, so ist die entstandene Zahl durch 9 teilbar. Wie heißt die gegebene dreistellige Zahl?

Ma 6 ■ 2819 Klaus hat Geburtstag. Fünf Kinder kommen zu Besuch. Die Geburtstagstorte wurde in 24 gleichgroße Stücke geteilt. Axel verzehrte $\frac{1}{8}$, Bernd $\frac{1}{4}$, Christian $\frac{5}{48}$, Dieter $\frac{1}{6}$ und Ernst $\frac{3}{16}$ der Torte. Klaus aß drei von den eingeteilten 24 Stücken. Wieviel eingeteilte Stücke der Torte blieben übrig?

Na/Te 6 ■ 398 Eine Schleusenkammer hat eine Länge von 325 m, ist 25 m breit und 4,30 m hoch. Welches Volumen hat die eingelassene Wassermenge, wenn der Wasserspiegel seinen höchsten Stand 0,50 m unter der Oberkante der Schleusenkammer hat? Runde sinnvoll!
aus: Aufgabensammlung Physik Teil 1, Volk und Wissen, Berlin

Ma 7 ■ 2820 In einem Kreis sollen der Flächeninhalt und der Umfang, in cm^2 bzw. cm ausgedrückt, in den Maßzahlen übereinstimmen. Welchen Flächeninhalt hat ein Quadrat, das in diesen Kreis einbeschrieben wird?

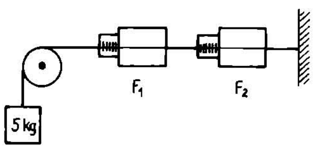
Ma 7 ■ 2821 Vater und Sohn gehen nebeneinander. In der gleichen Zeit, in der der Vater 4 Schritte macht, macht der Sohn jedesmal 5 Schritte. In dieser Zeit legen beide jedesmal genau den gleichen Weg zurück. Die durchschnittliche Schrittlänge des Vaters beträgt 80 cm.
a) Wie groß ist die durchschnittliche Schrittlänge des Sohnes?
b) Wir nehmen an, daß beide gleichzeitig mit dem rechten Fuß beginnen. Nach wie vielen Schritten des Vaters treten beide erstmalig gleichzeitig mit dem linken Fuß auf?

Ma 7 ■ 2822 Für ein Kinderferienlager wurden 300 Flaschen Getränke für 70,00 M gekauft. Eine Flasche Limonade kostet 0,30 M, eine Flasche Tafelwasser 0,20 M. Wieviel Flaschen wurden von jeder Sorte gekauft?

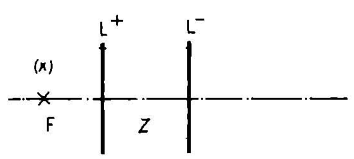
Ma 7 ■ 2823 Eine Familie fährt im *Trabant*. Das Produkt aus der Anzahl der am Auto befindlichen Räder, dem Alter des Fahrers und der Anzahl der mitfahrenden Personen beträgt 444. Wie alt ist der Fahrer? Wieviel Personen sitzen im Auto?

Ma 7 ■ 2824 Der Umfang u eines gleichschenkligen Dreiecks soll 24 cm betragen; eine der Seiten dieses Dreiecks soll $2\frac{1}{2}$mal so lang sein wie eine andere seiner Seiten. Untersuche, ob es eine Möglichkeit gibt, die Seitenlängen eines Dreiecks so anzugeben, daß diese Bedingungen erfüllt sind. Untersuche, ob es genau eine solche Möglichkeit gibt! Wenn dies der Fall ist, so ermittle die zugehörigen Seitenlängen!

Na/Te 7 ■ 399 Was zeigen die Federkraftmesser bei folgender Anordnung an? *R.*



Na/Te 7 ■ 400 Parallelstrahlen (Strahlen, die parallel zur optischen Achse der Linse verlaufen) werden von einer Sammellinse so gebrochen, daß sie einander hinter der Linse im Brennpunkt F schneiden. Parallelstrahlen werden von einer Zerstreuungslinse so gebrochen, als ob sie von einem Punkt vor der Zerstreuungslinse, dem Zerstreuungspunkt Z, herkämen.



a) Konstruiere den Strahlenverlauf für folgende Linsenanordnung, wenn sich eine Lichtquelle in F befindet!
b) Wie erfolgt der Strahlenverlauf, wenn sich die Lichtquelle in einem Punkt (x) der Brennebene befindet? *R.*

Ma 8 ■ 2825 In einem Rechteck sollen die Maßzahlen der Seiten, in Zentimeter ausgedrückt, ganzzahlig sein. Der halbe Umfang soll zahlenmäßig mit dem Flächeninhalt übereinstimmen. Kann diesem Rechteck ein Kreis einbeschrieben werden?

Ma 8 ■ 2826
Die rätselhafte Multiplikation:

$$\begin{array}{r} a\,b\,c \cdot b\,a\,c \\ \hline * * * * \\ * * a \\ * * * b \\ \hline * * * * * * \end{array}$$

Das Schema ist zu dechiffrieren.

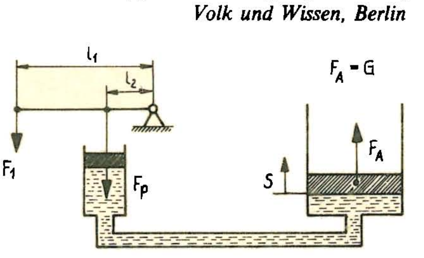
Ma 8 ■ 2827 Zeige, daß für jede Primzahl $p > 5$ das Produkt $(p-2)(p-1)p(p+1)(p+2)$ durch 360 teilbar ist!

Ma 8 ■ 2828 Beweise den folgenden Satz! Die Diagonalen eines ebenen konvexen Vierecks $ABCD$ schneiden einander rechtwinklig genau dann, wenn $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ gilt, wobei a, b, c, d die Seitenlängen des Vierecks sind.

Ma 8 ■ 2829 Es ist zu beweisen: Die Zahl $\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}$ ist für jedes ganze m ganzzahlig.

Na/Te 8 ■ 401 Der Boden eines Kajaks hat eine Fläche von $1{,}6\ m^2$.
Die mittlere Eintauchtiefe beträgt 20 cm. Welche Druckkraft wirkt auf den Boden des Bootes? *R.*

Na/Te 8 ■ 402 Über einen einseitigen Hebel ($l_1 = 134$ cm, $l_2 = 22$ cm) wirkt auf den Pumpkolben einer hydraulischen Presse eine Kraft $F_p = 180$ N. Der Pumpkolben bewegt sich 6,5 cm nach unten. Der Hebel wird 480mal betätigt. Um welche Strecke wird ein Körper mit der Gewichtskraft von $G = 180\,000$ N durch den Arbeitskolben gehoben? Welche Kraft F_1 muß am Hebel wirken? (Die erforderlichen Ventile sind nicht eingezeichnet.)
aus: Aufgabensammlung Physik Teil 1, Volk und Wissen, Berlin



Ma 9 ■ 2830 Ein Dreher braucht zur Anfertigung eines Werkstückes eine halbe Stunde. Da mehrere gleiche Teile anzufertigen sind, wäre eine Vorrichtung zweckmäßig. Mit einer solchen Vorrichtung könnte ein Teil in 20 Minuten hergestellt werden. Der Bau der Vorrichtung dauert 4 Stunden. Wieviel Teile müßten mindestens hergestellt werden, damit durch den Bau der Vorrichtung Zeit eingespart wird?

Ma 9 ■ 2831 Für ein Kinderferienlager sollen für 83,00 M Tomaten und Bananen gekauft werden. Ein Kilogramm Bananen kostet 5,00 M, ein Kilogramm Tomaten

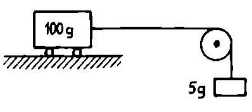
1,30 M. Wieviel Kilogramm Tomaten und wieviel Kilogramm Bananen können gekauft werden?

Ma 9 ■ 2832 Von einem Ort A fährt ein LKW nach einem Ort B; seine Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt $50\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Gleichzeitig fährt von B nach A ein PKW mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $70\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Nach welcher Zeit treffen sich beide Fahrzeuge, wenn die Entfernung von A nach B 144 km beträgt?

Ma 9 ■ 2833 An einer Touristenreise haben 286 Angehörige eines Betriebes teilgenommen. Ihnen standen Autobusse, einerseits mit 19 Sitzen, andererseits mit 17 Sitzen zur Verfügung. Der Kraftfahrer des Autobusses und auch sein Sitz werden in der Aufgabe nicht in Betracht gezogen. Berechnen Sie, wieviel Autobusse jeder der beiden Arten für die Reise gebraucht wurden, wenn alle Sitze besetzt waren und keiner stehen mußte.

Ma 9 ■ 2834 Entscheiden Sie, welcher der beiden Brüche $\frac{100^{100}+1}{100^{90}+1}$ und $\frac{100^{99}+1}{100^{89}+1}$ größer ist!

Na/Te 9 ■ 403 Welchen Weg legt ein Wagen bei folgender Versuchsanordnung in zwei Sekunden zurück? Die Masse der Rolle und die Reibung sollen vernachlässigt werden. *R.*



Na/Te 9 ■ 404 Gegeben sind drei Drahtwiderstände mit einem elektrischen Widerstand von 50 Ohm. Diese drei Widerstände werden in verschiedener Weise zusammengeschaltet und an eine Spannung von 1,5 V gelegt. Geben Sie die Möglichkeiten an (Zeichnung, Gesamtwiderstand, Nennverlustleistung, die an jedem Widerstand in Wärme umgesetzt wird)! *R.*

Ma 10/12 ■ 2835 Das Produkt von vier unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist 110 355 024. Wie lauten die Zahlen?

Ma 10/12 ■ 2836 Dietmar und Jörg sehen bei einem Spaziergang ein Auto, bei dem im Kennzeichen die Zahl 4949 steht. Die Tatsache, daß 49 eine Quadratzahl ist, führt sie auf die Frage, ob auch die Zahl 4949 eine Quadratzahl ist. Nach kurzer Überlegung sagt Dietmar: „Ich kann sogar beweisen, daß keine vierstellige Zahl, deren erste gleich ihrer dritten und deren zweite gleich ihrer vierten Ziffer ist, eine Quadratzahl sein kann. Übrigens läßt sich auch beweisen, daß unter diesen Zahlen genau eine Primzahl ist.“ Führen Sie diese Beweise durch! (Dietmar faßt dabei alle Kennzeichen von 0001 bis 9999 als vierstellige Zahlen auf.)

Ma 10/12 ■ 2837 Ein Student und eine Studentin gehen in ein Café. Der Student bestellt für sich ein Glas Milch und für die Studentin eine Tasse Kaffee. Er entnimmt seinem Glas einen Teelöffel voll Milch und gießt diesen in die Tasse mit Kaffee. Sie rührt den Inhalt ihrer Tasse gut um und entnimmt ihrem Kaffee-Milch-Mischgetränk einen Teelöffel voll (gleiches Volumen wie vorher) und gießt ihn in das Glas des Studenten. Hat sie am Ende mehr, gleichviel oder weniger (Volumenteile) Milch in ihrer Tasse als er (Volumenteile) Kaffee im Glas?

Ma 10/12 ■ 2838 In

$$\begin{array}{r} \text{FUENF} \\ +\ \underline{\text{ZWEI}} \\ \text{SIEBEN} \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß die Addition zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten. Untersuchen Sie, wieviel Lösungen die Aufgabe hat!

Ma 10/12 ■ 2839 Es sei r der Radius eines Kreises, der beide Katheten der Längen a bzw. b eines rechtwinkligen Dreiecks berührt und dessen Mittelpunkt auf der Hypotenuse liegt. Es ist zu beweisen, daß $\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ gilt.

Na/Te 10/12 ■ 405 Ein Kraftwagen mit der Gewichtskraft 3925 N fährt über eine nach oben gewölbte Brücke mit einem Krümmungsradius von 200 m mit einer Geschwindigkeit von $50\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Mit welcher Kraft drückt der fahrende Wagen auf die Mitte der Brücke? Wie groß ist die Kraft, wenn die Brücke nach unten gewölbt ist?

aus: Physik für Lehrer Band 2
Verlag der Wissenschaften, Berlin

Na/Te 10/12 ■ 406 Eine Waschmaschine erwärmt 10 l Wasser von 20 °C auf 95 °C. Es wird ein Wirkungsgrad von 80 % angenommen. Wie lange dauert das Aufheizen, wenn die Nennleistung der Heizung 2 kW beträgt, und was kostet es (1 kWh kostet 0,08 M)? *R.*

Achtung! Ab diesem Wettbewerbsjahr wird der Wettbewerb in den Heften 5/87, 6/87 und 1/88 mit je 7 Aufgaben durchgeführt.

Literatur zur außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik aus dem Verlag Volk und Wissen, Berlin

Autorenkollektiv
Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR
Band 1 (ab Kl. 8) Bestell-Nr. 002 170 1
Band 2 (ab Kl. 8) Bestell-Nr. 706 734 1
Klassen 5 bis 8 Bestell-Nr. 707 624 8

Autorenkollektiv
Elementare Zahlentheorie (Gleichungen/Kombinatorik)
Bestell-Nr. 706 730 9 (ab Kl. 7)

Joh. Christ. Schäfer
Die Wunder der Rechenkunst
Bestell-Nr. 707 745 1 (ab Kl. 5)

Autorenkollektiv
Sammlung mathematischer Aufgaben mit Lösungen
Bestell-Nr. 709 146 4 (ab Kl. 9)

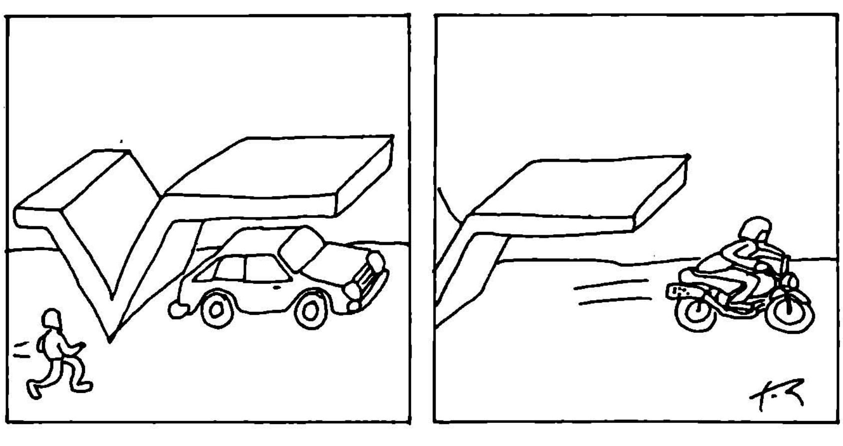
Autorenkollektiv
Mathematische Arbeitsgemeinschaften in den Klassen 5 bis 8
Bestell-Nr. 707 441 0

Autorenkollektiv
Rechnen und Raten
Ein unterhaltsames Mathe-Magazin (ab Kl. 5)
(Zusammenstellung von Beiträgen aus der alpha), erscheint Ende 1987

Joh. Lehmann
2×2 plus Spaß dabei
Bestell-Nr. 707 437 3 (Kl. 1 bis 4)

Joh. Lehmann
3 plus 8 und mitgemacht
Bestell-Nr. 707 857 5 (Kl. 1 bis 4)

Aus: Funktio 5/86, Finnland



ARBEITS-
GEMEINSCHAFTEN
IM BLICKPUNKT

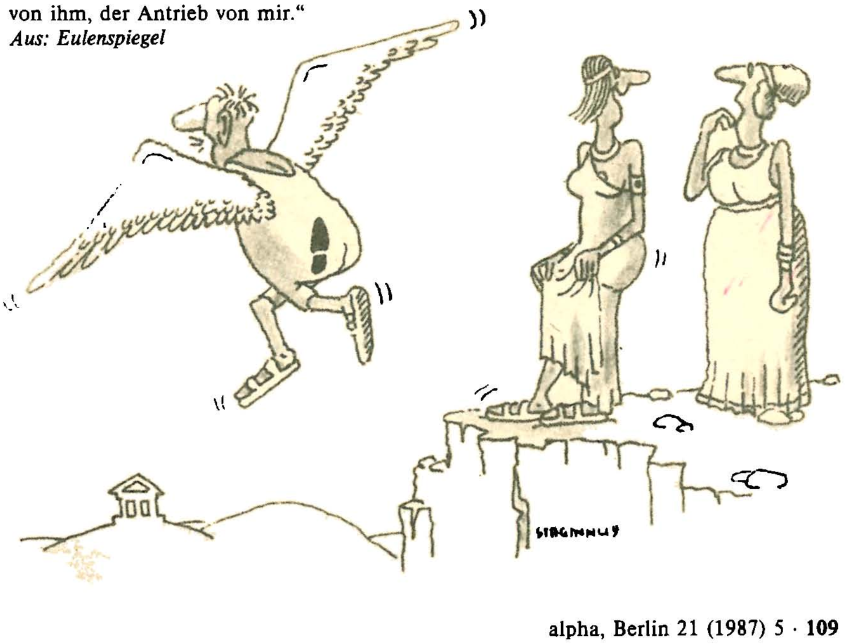
Die Mathematische Schülergesellschaft (MSG) „Leonhard Euler“

bei der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin

Die MSG ist eine gemeinsame Einrichtung der Abteilung Volksbildung beim Magistrat der Hauptstadt und der *Humboldt*-Universität. Sie wurde am 8. 10. 1970 gegründet und ist somit die älteste Schülergesellschaft ihrer Art in unserer Republik. Bei ihrer Gründung waren etwa 150 Mädchen und Jungen Mitglieder der MSG. Im Moment sind es über 500, wobei etwa ein Drittel hiervon Mädchen sind.
Seit 1975 gibt es ein einheitliches Lehrprogramm für die Schuljahre 6 bis 12, dessen neueste und abgestimmte Variante seit September 1986 vorliegt.
Der Unterricht in der MSG wird in Zirkeln mit 12 bis 18 Schülern erteilt, wobei die aktive Gestaltung dieses Unterrichtes durch die Schüler ein Hauptanliegen darstellt. Neben dieser Form der außerunterrichtlichen Tätigkeit arbeiten noch sechs Zirkel in Klassenstufe 8 bis 12 zur Vorbereitung ausgewählter Schüler auf die verschiedenen Stufen der Olympiaden Junger Mathematiker. Für etwa 60 Schüler sind auf verschiedenen mathematischen Gebieten Einzelpatenschaften übernommen worden. In dieser Betreuungsform beschäftigen sich Jungen und Mädchen von Klassenstufe 9 bis 12 tiefer mit konkreten Fragestellungen in der Algebra, der Geometrie, der Analysis, der Numerik, der Statistik und der Informatik.
Erstmals konnten wir für alle Schüler der 8. Klasse, etwa 90 Teilnehmer, einen BASIC-Programmierkurs realisieren.
Im Rahmen unserer Arbeit konnten wir in den letzten sechs Jahren stets die beste Mathematik-Olympiademannschaft zur 4. Stufe der DDR-Olympiade entsenden, ein bis drei Schüler waren stets Mitglieder der Nationalmannschaft bei der IMO.
Viele erfolgreiche MSG-Mitglieder haben ein Mathematikstudium begonnen oder abgeschlossen, die ersten ehemaligen Schüler haben sogar erfolgreich promoviert oder sind, nach Abschluß ihrer Promotion, bereits Hochschullehrer, wie Prof. Dr. sc. J. Grabowski, Dozent Dr. sc. H. Schiemangk, Dr. B. Bellach, Dr. Reimann bzw. Forschungsstudenten oder Studenten wie z. B. H. Neß, K. Peters, K. Gröger, E. Schwarzenecker und F. Fauck. Die genannten Namen repräsentieren nur eine kleine Anzahl erfolgreicher Mitglieder unserer MSG. Alle diese Schüler sind Absolventen der Spezialschule *Heinrich Hertz* bzw. der Spezialschule Mathematik unserer Sektion. Von diesen beiden Bildungseinrichtungen kommen auch heute noch die besten Schüler in Klassenstufe 9 bis 12. Die meisten unserer Schüler sind vielseitig interessiert, sie musizieren, lernen Sprachen und treiben Sport, was wir als eine gute Bereicherung ihrer Persönlichkeitsentwicklung ansehen.
Innerhalb der MSG sind wir bemüht, ein interessantes und vielseitiges Angebot an zusätzlichen Bildungsmöglichkeiten zu realisieren. Alljährlich, meist im April, findet das Schülerkolloquium statt, hier referieren Schüler vor ihren Klassenkameraden. In den Sommerferien führen wir unser Mathematikspezialistenlager in einem Pionierlager durch, hierbei werden am Vormittag drei Stunden Unterricht in sehr aufgelockerter Form erteilt, während die übrige Zeit für Spiel- und Freizeitfreuden reserviert ist. Als zirkelergänzend bieten wir ein Vortragsprogramm zu allgemein interessierenden Fragen an. Hier referierten die Professoren Kuczynski, Steininger, Porstmann, Lanius und Budach sowie der ehemalige Chefredakteur dieser Zeitung, OStR J. Lehmann, zu vielfältigen Problemen ihres Arbeitsgebietes.
Wir möchten mit unserer Tätigkeit die Propaganda für unser schönes und so interessantes Fachgebiet pflegen, wollen jungen Menschen Voraussetzungen für alle Berufe vermitteln und die Besten befähigen, selbst einmal aktiv als Mathematiker, Informatiker oder Lehrer ihr Fachgebiet weiterzuentwickeln oder bestmöglich zu unterrichten.

J. Nietzsch

Frau Ikarus: „Die Konstruktion stammt von ihm, der Antrieb von mir.“
Aus: Eulenspiegel



Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. nat. J. Nietzsch

Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin, Vorsitzender der Mathematischen Schülergesellschaft

▲2806▲ Gegeben seien vier verschiedene Punkte in der Ebene A, B, C, D. Man beweise: Wenn die Schwerpunkte der Dreiecke $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle DAB$ auf einem Kreis liegen, so liegen auch A, B, C, D auf einem Kreis.

Kurzbiographie

Josef Nietzsch, geboren am 19. 3. 1938 in Böhmisch Kamnitz (heute ČSSR), Schulbesuch in Torgau/Bezirk Leipzig bis 1956, von 1956 bis 1962 Studium der Physik und Mathematik bei den Professoren Hertz, Kockel, Lösche, Weiß, Beckert, Günter und Kähler in Leipzig. 1962 bis 1964 Mitarbeiter am heutigen *Deutschen Amt für Meßwesen und Warenprüfung*, 1964 bis 1968 Mitarbeiter am Rechenzentrum der *Humboldt*-Universität, 1968 bis 1970 Assistent an der Sektion Mathematik, Promotion A, 1971 bis 1976 Forschungsgruppenleiter, erfolgreiche Promotion von acht Assistenten, Abschluß der eigenen B-Promotion. Seit 1973 Hochschuldozent, 1983 Berufung zum Professor.
Arbeitsgebiete: Rechentechnik, Programmierung, Numerik, Angewandte Kernphysik, Mathematische Physik. Beiträge hierzu auf verschiedenen internationalen Konferenzen, Studienaufenthalte und Gastprofessuraufenthalte in der UdSSR, ČSSR, VR Polen, Berlin (West), Belgien und Kuba. Vorsitzender der Mathematischen Schülergesellschaft seit 1974.

aufgepaßt nachgedacht mitgemacht

speziell für Klassen 5/7

Prof. Dr. G. Noodt, Oberlehrer an der Viktoriaschule zu Berlin, 1908

Mathematisches Unterrichtsbuch für höhere Mädchenschulen

Angewandte Aufgaben

▲1▲ In einer mit einer Vorschule verbundenen höheren Mädchenschule befinden sich in der Vorschule $\frac{6}{25}$, in der Unterstufe $\frac{3}{10}$, in der Mittelstufe $\frac{1}{4}$ aller Schülerinnen; die Oberstufe (für diese ist das Buch, aus dem wir die vorliegenden 34 Aufgaben auswählten, geschrieben) besuchten 168 Schülerinnen. a) Wie verteilten sich die Schülerinnen auf die einzelnen Stufen? b) Wieviel Schülerinnen besuchten die ganze Anstalt?

▲2▲ Ein Schulkind hatte auf dem Schulwege zu tragen:
eine Schulmappe im Gewichte von 650 g, ein Lesebuch 500 g, ein franz. Übungsbuch 450 g, ein Naturgeschichtsbuch 520 g, ein botanisches Besteck 60 g, ein Rechenbuch 170 g, fünf Schreibhefte 850 g, einen Federkasten 130 g.
Welches Gewicht hatte die Schulmappe mit dem Inhalt?

▲3▲ Ein für 40 Schülerinnen bestimmtes Klassenzimmer ist 5,86 m lang und 5,12 m breit; wie hoch ist das Zimmer, wenn für jede Schülerin und die Lehrer ein Luftraum von 3,25 cbm gerechnet worden ist?

▲4▲ Eine Lehrerin hat jährlich 35 M staatliche Einkommenssteuer, 12 M Gemeindesteuer, 4 M Ergänzungssteuer, 5 M Kirchensteuer, 6 M Prämien für Feuerversicherung und Versicherung gegen Einbruchsdiebstahl, 6 M für die Sterbekasse zu zahlen. Um wieviel wird ihr Einkommen durch diese Steuerleistung geschmälert?

▲5▲ Eine Seminaristin arbeitet täglich $1\frac{1}{4}$ Stunden bei Lampenlicht und reichte so mit einem bestimmten Petroleumvorrat 9 Tage; vor der Prüfung arbeitete sie täglich eine Stunde länger bei Lampenlicht; wie lange reichte jetzt der Petroleumvorrat?

▲6▲ Für 5 l Petroleum bezahlt man 90 Pf. Wieviel zahlt man für 60 l? Den wievielten Teil eines Liters Petroleum erhält man für einen Pfennig?

▲7▲ Ein Mädchen strickte in der letzten Woche vor Weihnachten an den einzelnen Wochentagen 110 Nadeln, 98 N., 104 N., 122 N., 111 N. Wie viele Nadeln hat sie in der Woche vor dem Feste gestrickt?

▲8▲ Ein Mädchen hat eine Stickerei in 30 Tagen vollendet bei durchschnittlich 9stündiger Arbeit am Tage. Wie lange hätte sie an der Stickerei zu tun gehabt, wenn sie täglich 15 Stunden darauf verwendet hätte?

▲9▲ Zu einem Rock gebraucht ein Herr $2\frac{1}{2}$ m, zum Beinkleid $1\frac{1}{2}$ m und zur Weste $\frac{3}{5}$ m; wieviel Stoff ist zum ganzen Anzug erforderlich?

▲10▲ Eine Hausfrau rechnet zum Mittagsmahl für ihren Mann $\frac{1}{5}$ kg, für sich $\frac{3}{20}$ kg und für jedes ihrer Kinder $\frac{1}{8}$ kg Fleisch.
a) Wieviel Fleisch brauchte sie?
b) Infolge der Fleischverteuerung begnügt sie sich mit $\frac{1}{2}$ kg Fleisch. Wieviel kg Fleisch werden dadurch täglich der Familie entzogen?

▲11▲ Um Quittengelee zu kochen, kaufte eine Hausfrau 3 kg Quitten, das kg zu 0,55 M, und ließ dieselben unter Zusatz von 1,5 kg Zucker, das kg zu 0,46 M, einkochen. Wie teuer kam (von der Feuerung abgesehen) das Gelee?

▲12▲ Um Schweinefleisch einzupökeln, nimmt man auf 3 kg Fleisch 0,2 kg Kochsalz und 20 g Salpeter, legt es mit Lorbeer, Pfeffer und Nelken in ein Geschirr fest ein und verwahrt es unter öfterem Umwenden 6 bis 8 Tage kühl an einem Ort. Darauf wird das Fleisch gedampf oder gekocht. Wie teuer stellt sich das Gericht für jede Person, wenn 7 Personen an dem Mahl teilnehmen? (1 kg Schweinefleisch kostet 1,60 M, 1 kg Salz 0,20 M, 100 g Salpeter 15 Pf, für das übrige Gewürz rechnet die Hausfrau 10 Pf.)

▲13▲ Was ist vorteilhafter, Brennholz nach Maß, für 15,50 M das cbm, zu kaufen oder nach Gewicht, wenn das cbm Brennholz $2\frac{1}{2}$ dz wiegt und der dz 6,20 M kostet?

▲14▲ Flur und Treppen eines Hauses werden mit einem Teppichläufer, welcher 0,90 m breit liegt, belegt. Wie hoch stellt sich der Preis für den Belag, wenn für den Flur 6,80 m und für die Treppen $10\frac{1}{4}$ m erforderlich sind und das m Teppichläufer mit 4,80 M berechnet wird? (Welche Angabe ist für die Berechnung überflüssig?)

▲15▲ Eine Familie hatte im Laufe eines Jahres für ärztliche Behandlung 156 M, für Arzeneien 46,75 M zu bezahlen. Elf Tage wurde die Hilfe einer Krankenpflegerin in Anspruch genommen, welche täglich 4,75 M Lohn erhielt; die Bekostung derselben kostete täglich 1,60 M. Wie hoch beliefen sich die Ausgaben, welche der Familie durch Krankheit auferlegt wurden?

▲16▲ Im Jahre 1900 gab es in Berlin 1378 Wohnungen aus einem Wohnraum (mit mehr als 4 Bewohnern) mit insgesamt 7815 Bewohnern und 388 Wohnungen aus 2 Wohnräumen (mit mehr als 9 Bewohnern) mit insgesamt 4028 Bewohnern.
a) Wieviel Wohnungen waren zu jener Zeit in Berlin übervölkert?
b) Wieviel Einwohner mußten in derartig überfüllten Wohnungen hausen?

▲17▲ Im Dezember 1890 gab es in Berlin 11895 leer stehende Wohnungen, im Dezember 1895 deren 24236. Wieviel Wohnungen standen im Jahre 1895 mehr leer als 1890?

▲18▲ Londoner Maurer legen, um einer Beschränkung des Arbeitslohnes vorzubeugen, durchschnittlich nicht mehr als 400 Mauersteine den Tag; da der Bau einer großen Fabrikanlage in Manchester dadurch zu langsam gefördert wurde, ließ man amerikanische Maurer kommen, die 2000 Mauersteine den Tag legten. Wieviel Mauersteine verarbeitete eine Kolonne von 20 amerikanischen Maurern täglich mehr als ebensoviel ihrer englischen Kollegen?

▲19▲ Ein Pelzhändler verkauft 35 Zimmer (das Zimmer – 40 Stück) Hermelinpelze mit einem Gesamtgewinn von 575 M für 2500 M.
Wie teuer war das Zimmer eingekauft?

▲20▲ Fünf Seronen (aus Rindshaut bestehende Ballen, die Nähte mit Pech überstrichen) Chinarinde wiegen zusammen 425 kg brutto, das Taragewicht beträgt 63 kg. Wieviel kg Chinarinde sind zu verzollen?

▲21▲ Ein Hausdiener holt in einer Handkarre 1404 Kisten Zigarren vom Bahnhof und muß 52mal fahren. Wieviel Kisten muß er jedesmal aufladen?

▲22▲ Im Jahre 1901/02 wurden in Mainz von 320 Gewürzproben 4, in Eberfeld von 143 Butterproben 13, in Würzburg von 50 Butterproben 5, in Mannheim von 16 Wurstproben 8, in Görlitz von 8 Fleischproben 4 beanstandet. Der wievielte Teil der chemisch untersuchten Nahrungsmittel mußten in den einzelnen Fällen beanstandet werden?

▲23▲ Der Marktpreis für 1 kg Schweinefleisch stellt sich im Monat Oktober auf 1,70 M, im November auf 1,90 M und im Dezember auf 2,10 M. Eine Hausfrau brauchte im Oktober 4 kg, im November 6 kg und im Dezember 18 kg Schweinefleisch. Mit welchem Durchschnittspreis bezahlte die Hausfrau das kg Schweinefleisch?

▲24▲ Ein Kaufmann verspricht dem Verkäufer eine Prämie von 0,015 M für jedes verkaufte kg Zucker; wieviel kg Zucker müssen verkauft werden, damit eine Prämie von 5,10 M erzielt wird?

▲25▲ Von einer Gutsherrschaft werden ständig 25 Tagelöhner und 15 Tagelöhnerinnen beschäftigt. Der Jahresverdienst der männlichen Personen wird auf 630 M, der der weiblichen Personen auf 330 M festgesetzt. Wie hoch kommt der Gutsherrschaft die Versicherung der Arbeiter und Arbeiterinnen vierteljährlich (in 13 Wochen)? Lohnklasse I bis 350 M; Wochenbeitrag 0,14 M, Lohnklasse III 550 M bis 850 M; Wochenbeitrag 0,24 M.

▲26▲ Der Milchertrag einer Kuh im Laufe eines Jahres beträgt bei zweckmäßiger Ernährung durchschnittlich das Fünffache des Körpergewichts der Tiere. Wieviel Milch hat man im Durchschnitt täglich (1 Jahr = 365 Tage) von einer Kuh zu erwarten, deren Körpergewicht 584 kg beträgt?

▲27▲ Im Jahre 1894 standen in Hamburg 15138 Gelasse leer, das waren $\frac{9}{100}$ aller zu vermietenden Räumlichkeiten; im Jahre 1902 gab es nur noch 5219 leerstehende Gelasse in Hamburg, das waren $\frac{17}{625}$ aller vermietbaren Gelasse. Wieviel Gelasse waren in den genannten Jahren in Hamburg zu vermieten?

▲28▲ Die mit 22 Betten belegten Einzelräume der Hamburger Auswandererhalle haben eine durchschnittliche Höhe von $4\frac{1}{2}$ m, eine Länge von $13\frac{1}{5}$ m und eine Breite von $5\frac{7}{50}$ m. Wieviel Luft ergibt sich für den Kopf bei voller Belastung?

▲29▲ Eine Festung ist für 600 Mann 9 Monate verproviantiert; wie lange kann sie sich halten, wenn noch 200 Mann vor der Belagerung hinzukommen?

▲30▲ Beim Zählen der Kollektengelder fanden sich an Kupfermünzen 107 Zweipfennigstücke und 193 Einpfennigstücke. Der Pfarrer wechselt diese Münze gegen ein Fünfmarkstück ein, wieviel Geld hat er aus seiner Tasche zugelegt?

▲31▲ Wie groß ist das Verjüngungsverhältnis einer Kartenaufnahme, bei welcher 10 Schritt zu 0,8 m durch 1 m dargestellt werden?

▲32▲ Ein Schnellzug legt in einer Stunde 82 km zurück und fährt von Berlin nach Hamburg $3\frac{1}{2}$ Stunden.
Wieviel km sind diese Bahnhöfe voneinander entfernt?

▲33▲ Die Schattenlänge eines senkrecht aufgestellten Stabes von $\frac{3}{5}$ m Länge betrug (im Raum) $\frac{3}{8}$ m. Zur selben Zeit warf die Peterskirche in Rom einen $86\frac{1}{4}$ m langen Schatten. Wie hoch ist der Turm dieser Kirche? (Veranschauliche Dir diesen Sachverhalt an einer Skizze.)

▲34▲ Colladom und Sturm haben durch Versuche im Genfer See die Geschwindigkeit des im Wasser fortgepflanzten Schalles zu 1435 m in der Sekunde ermittelt; um wieviel Sekunden durchläuft der Schall die Strecke von 1 km im Wasser schneller als in der Luft, wenn die Geschwindigkeit des Schalls in der Luft zu 340 m angenommen wird?

J. Lehmann/Th. Scholl

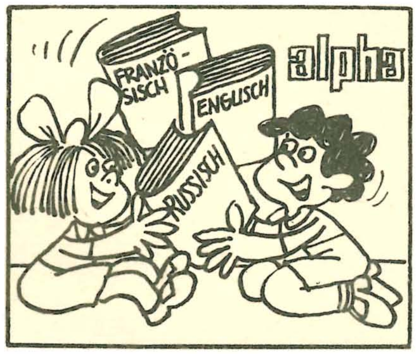
Neuerscheinung

Gilde/Altrichter

Schneller, leichter, genauer – Möglichkeiten des Taschenrechners

aus der Reihe *Polytechnische Bibliothek*
Etwa 160 Seiten mit 18 Bildern, Broschur
Bestell-Nr. 547 243 1
Preis etwa: 5,50 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

Der moderne Taschenrechner ist nicht nur ein Instrument, das schnell die verschiedensten Rechenaufgaben löst. Rechner wie der Schulrechner SR 1 lassen alle in der Praxis vorkommenden Rechenoperationen zu. Zudem ermöglichen sie völlig neue Einsichten in wissenschaftliche und technische Zusammenhänge.
Bisher wurden viele Zahlenwerte ohne weiteren Einspruch hingenommen, weil das Prüfen viel zu umständlich war. Heute gestattet es ein guter Taschenrechner, auch komplizierte Zahlenangaben schnell zu kontrollieren. Er läßt es außerdem zu, aus vorhandenen Zahlen neue, mit neuen Erkenntnisinhalten, zu errechnen.
Bewußt wird in diesem Buch auf den SR 1 orientiert, obwohl auch jeder ähnliche Rechner die Aufgaben lösen kann. Auf Bedienungsanleitungen wird verzichtet. Das ist Unterrichtsstoff und es gibt bereits Bücher darüber. Hauptsächlich für Schüler gedacht, soll das Buch die Freude am Umgang mit dem Taschenrechner fördern, denn Rechnen ist keine Arbeit, sondern ein Vergnügen – wenn man interessante Probleme schnell lösen kann. Die Autoren haben aus ihren Titeln *Mehr Spaß mit dem Taschenrechner* und *Noch mehr Spaß mit dem Taschenrechner* einige Aufgaben ausgewählt und die interessantesten Abschnitte zusammengefaßt. Dabei behandeln sie in zwangloser Folge mathematische Probleme aus Naturwissenschaft und Technik sowie aus dem Alltag: Der immerwährende Kalender. Der goldene Schnitt. Was ist eine Sekunde? Wieviel Kilometer lief der Autoreifen? Was ist ein Faß? –
Solche und ähnliche Themen vermitteln Denkanstöße und regen dazu an, selbst Aufgaben zu stellen und Lösungswege zu finden. Dieses Buch erleichtert den Schritt vom Taschenrechner zum Computer.

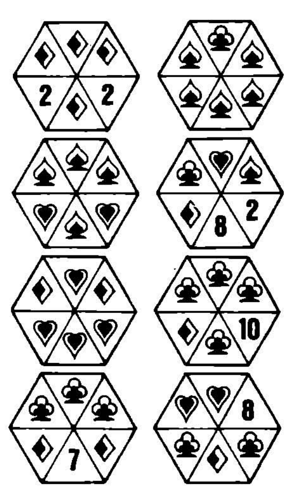


▲1▲ Sixteen players compete in a 'knock-out' tennis tournament. Each player plays a first match against one other player, and the winners of these matches go on into the second round. There are no draws, and the losers drop out.
The process is repeated in the second round and continues until there only one winner left.
How many matches are played altogether?

▲2▲ Возьмите шестизначное число, которое делится хотя бы на одно из чисел из списка: 7, 13, 11, 37. Переставьте первую цифру в конец числа. Проверьте, что полученное число вновь будет иметь тот же делитель из списка, что и первоначальное.
Почему?

▲3▲ Un avion part de Paris-Orly à 7 heures et se dirige vers Marseille-Marignane; sa vitesse constante est 680 km/h.
Un autre avion part Marseille-Marignane à 7 h 30 et se dirigee vers Paris-Orly, sa vitesse constante est 520 km/h.
La distance de Paris-Orly à Marseille-Marignane est 720 km.
a) A quelle heure les avignons se croisent-ils?
b) A quelle distance de Paris-Orly le croisement a-t-il lieu?

▲4▲ La valeur des signes



Sachant qu'un même signe représente toujours un même chiffre, et que chaque figure géométrique contient le même nombre de points, retrouvez ce nombre.

Aus: Maximath

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Erfurt, 18. bis 21. Mai 1987

Olympiadeklasse 10

261041 Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Ferner sei x eine beliebig vorgegebene Streckenlänge. Die Seiten des Dreiecks ABC seien jeweils um eine Strecke dieser Länge x verlängert, und zwar BA über A hinaus bis A', CB über B hinaus bis B' und AC über C hinaus bis C'.
Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen das Dreieck $A'B'C'$ stets denselben Umkreismittelpunkt wie das Dreieck ABC hat!

261042 Man ermittle die kleinste natürliche Zahl $n > 0$, die die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt:
(1) Es gibt genau 144 natürliche Zahlen, die Teiler von n sind.
(2) Unter den Teilern von n befinden sich 10 unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.

Von den nachstehenden Aufgaben 261043A und 261043B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

261043A Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (x_1, x_2, x_3) von reellen Zahlen x_1, x_2, x_3, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen!

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3, \qquad (1)$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3, \qquad (2)$$
$$x_1 x_2 x_3 = 1. \qquad (3)$$

261043B a) Beweisen Sie, daß fünf paarweise verschiedene reelle Zahlen existieren, mit denen die folgende Aussage gilt!
Für jede Auswahl von drei der fünf Zahlen existiert ein Dreieck, dessen Seitenlängen die drei ausgewählten Zahlen als Maßzahlen haben (wobei zum Messen aller drei Seitenlängen dieselbe Maßeinheit benutzt wird).
b) Ermitteln Sie, wenn fünf derartige Zahlen vorliegen, wie viele paarweise nicht kongruente Dreiecke insgesamt sich aus diesen fünf Zahlen auf die in a) genannte Art gewinnen lassen!
c) Beweisen Sie, daß stets dann, wenn fünf derartige Zahlen vorliegen, mindestens eines der genannten Dreiecke spitzwinklig ist!

261044 Ermitteln Sie für jede natürliche Zahl $k \geqq 2$ die Anzahl aller Lösungen (x, y, z, t) der Gleichung

$$\overline{xy} + \overline{zt} = \overline{yz},$$

worin für x, y, z, t nur natürliche Zahlen mit

$1 \leqq x \leqq k-1$, $1 \leqq y \leqq k-1$,
$1 \leqq z \leqq k-1$, $0 \leqq t \leqq k-1$

zugelassen sind!
Dabei bezeichnet jeweils $\overline{pq}$ diejenige Zahl, die im Positionssystem der Basis k mit den Ziffern p, q (in dieser Reihenfolge) geschrieben wird.

261045 Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0, 1, ..., 6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen. In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, ..., 6 je genau einmal vor.
Eine *Kette* entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, daß benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen. Eine Kette heißt *geschlossen*, wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen. Eine geschlossene Kette aus drei verschiedenen Steinen werde kurz *Dreierkette* genannt. Zwei Dreierketten gelten genau dann als gleich, wenn sie aus denselben Steinen bestehen.
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen aus je genau 7 verschiedenen Dreierketten $K_1, \ldots, K_7$ bestehenden Mengen $\{K_1, \ldots, K_7\}$ bei denen jeder Stein des Dominospiels in höchstens einer der Ketten $K_1, \ldots, K_7$ vorkommt!
(Wie üblich heißen zwei Mengen $M = \{K_1, \ldots, K_7\}$ und $M' = \{K_1', \ldots, K_7'\}$ genau dann einander gleich, wenn jede in der Menge M enthaltene Kette K_i auch in M' enthalten ist und umgekehrt auch jede in M' enthaltene Kette in M.)

261046 Beweisen Sie, daß es einen Körper mit den folgenden Eigenschaften (1) bis (4) gibt!
(1) Die Oberfläche des Körpers besteht aus genau sechs ebenen Vierecken.
(2) Unter diesen Vierecken gibt es zwei, die keine Seitenkante miteinander gemeinsam haben.
(3) Außer den Seitenkanten dieser beiden Vierecke hat der Körper noch genau vier weitere Seitenkanten.
(4) Die Mittelpunkte dieser vier Seitenkanten liegen nicht in einer gemeinsamen Ebene.

Olympiadeklassen 11/12

261241 500 Bonbons sollen unter Verwendung von Umhüllungen passender Größen so zu einem Scherzpaket zusammengepackt werden, daß die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt sind. Dabei soll sich (2) auf jede Möglichkeit beziehen, alle Bonbons auszupacken, indem man nach jeweils eine zugängliche Umhüllung öffnet und entfernt (falls mehrere Umhüllungen zugänglich sind, in beliebiger Reihenfolge):
(1) Es gibt genau eine Umhüllung, die das gesamte Paket enthält.
(2) Beim Öffnen dieser und jeder weiteren Umhüllung zeigt sich, daß deren Inhalt entweder aus mindestens drei sämtlich mit Umhüllung versehenen Teilpaketen oder aus genau einem nicht umhüllten Bonbon besteht.
Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von Umhüllungen, die ein solches Paket aufweisen kann!

261242 Man ermittle alle diejenigen Zahlenfolgen (a_n) mit $n = 1, 2, 3, \ldots$, die die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllen:
(1) Für alle ganzen Zahlen m, n mit $n > m > 0$ gilt
$a_{n+m} \cdot a_{n-m} = a_n^2 - a_m^2$.
(2) Es gilt $a_1 = 1$ und $a_2 = \frac{5}{2}$.

261243 Es seien $k_1, \ldots, k_n$ Kugelkörper, jeder einschließlich seiner Randpunkte verstanden. Diese Kugeln seien beliebig im Raum gelegen; es sei auch zugelassen, daß sie einander durchdringen oder berühren. Die Vereinigungsmenge der k_i habe das Volumen V.
Man beweise, daß es unter diesen Voraussetzungen stets möglich ist, eine Auswahl aus den Kugeln k_i so zu treffen, daß je zwei der ausgewählten Kugeln keinen gemeinsamen Punkt haben und daß die Vereinigungsmenge der ausgewählten Kugeln ein Volumen $U \geqq \frac{1}{27} V$ hat.

261244 Man ermittle die kleinste positive ganze Zahl a, für die
$(a+1)^5 - a^5 - 1$ durch 18305 teilbar
ist.

261245 Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geqq 3$, mit denen die folgende Aussage gilt:
Jede ebene konvexe n-Ecksfläche $A_1A_2 \ldots A_n$ wird vollständig überdeckt von den Flächen der n Kreise, die die Strecken A_iA_{i+1} als Durchmesser haben ($i = 1, \ldots, n$; es sei $A_{n+1} = A_1$ gesetzt).
Dabei sei jede n-Ecksfläche und jede Kreisfläche einschließlich ihrer Randpunkte verstanden.

Von den nachstehenden Aufgaben 261246A und 261246B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

261246A Im Mathematiklager schlägt ein Zirkelleiter den n Schülern ($n \geqq 3$) seiner Gruppe vor, den Schüler, der den Tafeldienst wahrzunehmen hat, nach folgender Methode auszuwählen:
Die Schüler werden mit $P_1, P_2, \ldots, P_n$ numeriert und stellen sich in dieser Reihenfolge im Kreis auf. Dabei folgt (im Umlaufsinn $P_1, P_2, \ldots$) auf P_n wieder P_1. Durch

Münzwurf wird zunächst entschieden, ob P_1 oder P_2 aus dem Kreis ausscheidet. Liegt *Wappen* oben, so scheidet P_1 aus, bei *Zahl* P_2. Danach wird der Ausscheid mit denjenigen beiden noch nicht ausgeschiedenen Schülern fortgesetzt, die auf den soeben zuletzt ausgeschiedenen Schüler im genannten Umlaufsinn folgen. Bei *Wappen* scheidet wieder der in dem Umlaufsinn erste von diesen beiden aus, bei *Zahl* der zweite. Dies wird solange wiederholt, bis nur noch ein Schüler übrigbleibt, der dann als Diensthabender bestimmt wird.

a) Man berechne im Fall $n = 3$ die Wahrscheinlichkeiten W_1, W_2, W_3 dafür, daß P_1, P_2 bzw. P_3 als Diensthabender bestimmt werden.

b) Man beweise für jedes $n \geqq 3$, daß die Auswahlmethode ungerecht ist, d. h. daß die Wahrscheinlichkeit, als Diensthabender bestimmt zu werden, nicht für alle Schüler $P_1, P_2, \ldots, P_n$ gleich ist.

Bemerkung: Tritt irgendein zufälliges Ereignis A als Folge irgendeines von m Ereignissen aus einer Gesamtzahl von N möglichen Ereignissen (die einander ausschließen und gleichwahrscheinlich sind) ein, so bezeichnet man als Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A die Zahl $p = \frac{m}{N}$.

261246B Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_{1987}$ nichtnegative reelle Zahlen, für die die Summe der Quadrate gleich 10 und die Summe der dritten Potenzen größer als 1 ist.

Untersuchen Sie, ob es unter diesen Voraussetzungen stets möglich ist, eine Auswahl

a) von 9 dieser Zahlen,

b) von 10 dieser Zahlen

so zu treffen, daß die Summe der ausgewählten Zahlen größer als 1 ist!

(Kommt eine Zahl mehrmals unter den $x_1, \ldots, x_{1987}$ vor, so darf sie auch höchstens ebenso oft unter die ausgewählten Zahlen aufgenommen werden.)

Die XXVI. OJM der DDR fand in der Pädagogischen Hochschule *Dr. Theodor Neubauer* in Erfurt vom 18. Mai bis zum 22. Mai statt.

Einen ersten Preis in Klasse 10 erhielten: Hans-Peter Störr, Torsten Ehrhardt, beide Spezialschule *Hans Beimler*, Karl-Marx-Stadt (Kl. 9)

Einen ersten Preis in Klasse 11/12 erhielten: Uta Hövel, Spezialschule *Heinrich Hertz*, Berlin; Gunter Döge, Spezialschule *Friedrich Engels*, Riesa; Ingo Warnke, Spezialschule *Georg Thiele*, Kleinmachnow; Andreas Siebert, Spezialschule *Heinrich Hertz*, Berlin (Kl. 10); Dirk Liebscher, Spezialschule *Georg Thiele*, Kleinmachnow

Einen zweiten Preis erhielten 16 Schüler, einen 3. Preis 32 Schüler und eine Anerkennungsurkunde 30 Schüler.

An der OJM nahmen 165 Schüler, davon 20 Mädchen, teil.

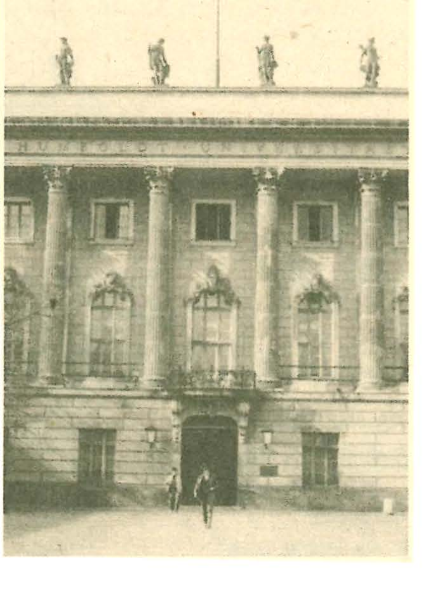
Die internationale Mathematikolympiade wird im Juli dieses Jahres in Kuba stattfinden.

Spezialschule Mathematik/Physik der Humboldt-Universität Berlin

Seit 1964 existiert an der hauptstädtischen *Humboldt*-Universität eine Spezialschule, die es sich zur Aufgabe gemacht hat, leistungsstarke, gesellschaftlich aktive Absolventen der 10. Klasse der Polytechnischen Oberschulen, die besonderes Interesse an mathematischen oder physikalischen Fragestellungen haben, gezielt auf ein Hochschulstudium vorzubereiten.

Bei der Ausbildung unserer Schüler nutzen wir ganz bewußt die materiellen und personellen Möglichkeiten unserer Universität. Unseren Schülern werden durch Wissenschaftler der entsprechenden Sektionen unserer Hochschule gefestigte Grundlagenkenntnisse in all jenen Fächern vermittelt, die auch Bestandteil der an erweiterten Oberschulen geltenden Stundentafel sind. Darüber hinaus werden unsere Schüler in vielfältiger Weise gefordert und gefördert. Dem Unterricht in den Fächern Mathematik und Physik liegen Sonderstudienpläne zugrunde, die weniger auf einen Vorgriff des Hochschulstoffes abzielen, sondern vielmehr auf die Aneignung eines gediegenen festen und anwendungsbereiten Wissens gerichtet sind. Alle Schüler erhalten über drei Semester wöchentlich eine zweistündige Zusatzausbildung in Informatik, die mit praktischen Übungen an aktuell verfügbarer Rechentechnik verbunden ist.

Humboldt-Universität zu Berlin



Außerdem wird jeder Schüler individuell durch Wissenschaftler der Sektionen Mathematik und Physik angeleitet und behutsam zu ersten wissenschaftlichen Tätigkeiten geführt, die in die Anfertigung sogenannter Jahresarbeiten münden. Viele Schüler nutzen auch die Möglichkeit, im Rahmen der an unserer Universität bestehenden Mathematischen Schülergesellschaft *Leonhard Euler* auch außerhalb des obligatorischen Unterrichts ihr Hobby, die Beschäftigung mit der Mathematik, zu pflegen.

Die Absolventen unserer Spezialschule haben sich im Studium an den Hochschulen bewährt, wo sie in der Regel zu den leistungsstärksten Studenten ihrer Studienjahre gehörten.

Von den 342 Abiturienten, die in den 23 Jahren ihres Bestehens unsere Spezialschule absolviert haben, nahmen mehr als 250 ein Studium an der *Humboldt*-Universität auf, darunter 171 an der Sektion Mathematik und 69 an der Sektion Physik.

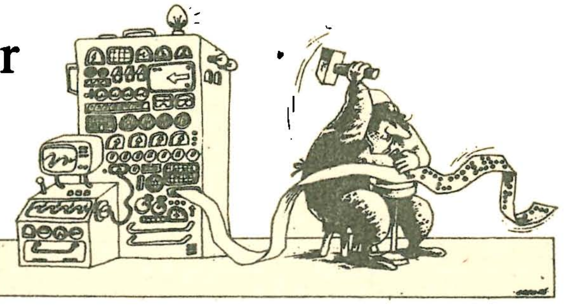
Viele dieser Studenten haben sich über ein Forschungsstudium so weiterqualifizieren können, daß sie heute als promovierte Kader in Forschungskollektiven der Akademie der Wissenschaften und im Hochschulbereich ihren Beitrag für die Weiterentwicklung von Wissenschaft und Technik leisten. Wir freuen uns, daß sich einige von ihnen zu Doktoren der Wissenschaft qualifizieren konnten sowie zu Dozenten und Professoren berufen wurden.

Absolventen unserer Spezialschule nehmen in verschiedenen Schwerpunkten unserer Volkswirtschaft eine geachtete Stellung ein und leisten ihren Beitrag bei der Einführung und Anwendung von Schlüsseltechnologien.

Im Jubiläumsjahr unserer Hauptstadt werden wir unsere Spezialschule um eine zusätzliche Klasse erweitern. Damit ergeben sich für uns weitere Möglichkeiten, junge begabte Schüler aus verschiedenen Bezirken unserer Republik an der Humboldt-Universität nach erfolgreichem Abschluß der 10. Klasse der POS weiter zu fördern und sie damit besonders gründlich auf ein Hochschulstudium vorzubereiten.

R. Böttcher

In freien Stunden · alpha-heiter

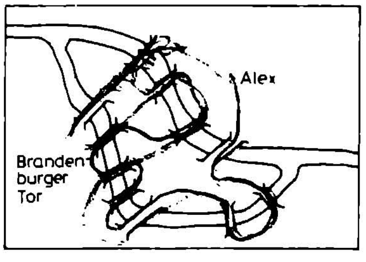


Unterhaltsame Mathematik
aus Berliner Zeitschriften und Zeitungen
aufgestöbert von J. Lehmann, Leipzig

Berlinbummel

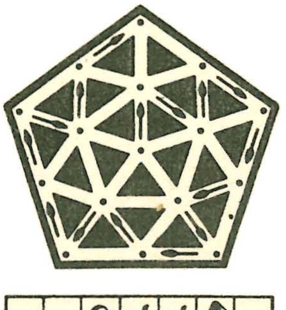
Das Berliner Stadtzentrum erstrahlt im alten-neuen Glanze. Reizvoll und lehrreich ist ein Bummel durch dieses Gebiet. „Spreeathen“ wird die Hauptstadt liebevoll genannt, schließlich überspannen zahlreiche Brücken die Spree und ihre Seitenflüsse.
Gibt es für einen Fußgänger nach dieser Skizze einen Weg über alle Brücken, ohne eine davon mehr als einmal zu betreten, wenn er vom Alex zum Brandenburger Tor gelangen will?

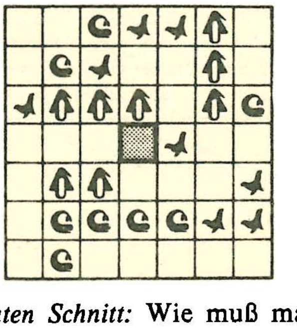
nach ND



Nachgedacht – mitgemacht

a) *Sternlauf:* Wie kommt man von der Mitte zu allen Punkten? Pfeilrichtung beachten!





b) *Guten Schnitt:* Wie muß man die Figur in vier Teile zerschneiden? Es sollen immer 12 Felder und von jeder Sorte je zwei Figuren sein.

Aus Berliner Rätselzeitung: Troll

Rätselspaß mit π

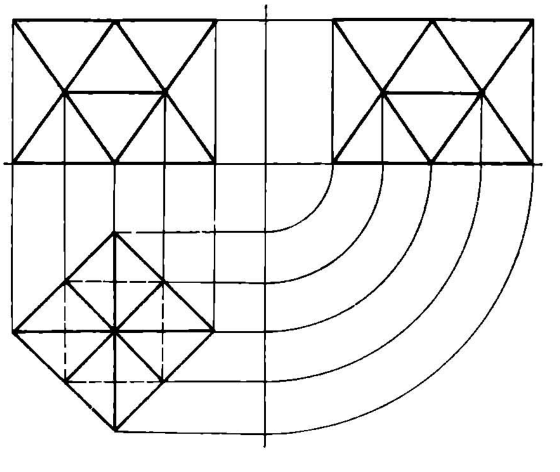
Für diese Aufgabe benötigen wir ein normales Skatspiel (32 Karten) und acht Kinder. Bei mir waren es vier Geschwisterpaare, die die Karten restlos unter sich aufgeteilt hatten.
Dabei ergab sich, daß Anna nur eine, Berta zwei, Cäcilie drei und Dora vier Karten hatten. Ralf Müller hatte soviel Karten wie seine Schwester, Steffen Fischer dagegen doppelt soviel wie seine Schwester, Tom Schmidt sogar dreimal soviel wie seine Schwester. Und Ulf Müller endlich viermal soviel wie seine Schwester.
Wie sind die Familiennamen der Mädchen?

Aus: Magazin

Unsere Mathematikaufgabe

Im Bild sind Grund-, Auf- und Seitenriß eines Körpers dargestellt. Man beschreibe diesen Körper eindeutig in einem Satz und gebe eine Skizze in schräger Parallelprojektion.

Aus: Wissenschaft und Fortschritt



Schwierig

Welche Figur ergeben die graphischen Darstellungen folgender Funktionen, wenn man sie in ein gemeinsames Koordinatensystem überträgt?

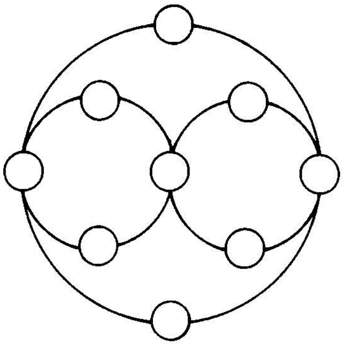
$$y_1 = \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{x^2 + |x| - 5}{x^2 + |x| + 1} + \sqrt{25 - x^2} \right]$$

$$y_2 = \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{x^2 + |x| - 5}{x^2 + |x| + 1} - \sqrt{25 - x^2} \right]$$

Aus: technikus, Michael Kühne, Lauscha

Alle knobeln mit

Wie müssen die Zahlen 1 bis 9 in die freien Felder der Kreise eingetragen werden, damit die Summe der auf einem Kreis liegenden Zahlen jeweils 19 beträgt? *Aus: Junge Welt, Fred Leisner, Blankenburg*



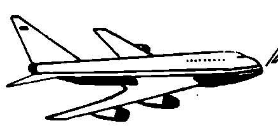
Wann klingelt es wo?

Auf der Leipziger Messe kommt es zwischen der DDR und Handelspartnern aus Moskau, Tokio, Delhi, Brasilia und Mexico zu erfolgreichen Vertragsabschlüssen. In bezug auf die Liefertermine sind von den ausländischen Vertretern im Heimatland noch Rücksprachen erforderlich. Es wird vereinbart, daß die Vertreter genau 48 Stunden nach Ankunft in ihrem Heimatland telefonisch mit dem Partner in Berlin Kontakt aufnehmen.
An welchem Tag und zu welcher Zeit klingelt in Berlin das Telefon, wenn die ausländischen Vertreter, wie in der Tabelle angegeben in ihrem Heimatland eintreffen?

Aus: Neue Berliner Zeitung/NBI Gedankentraining

Anruf in Berlin	
Tag	Ortszeit(MEZ)

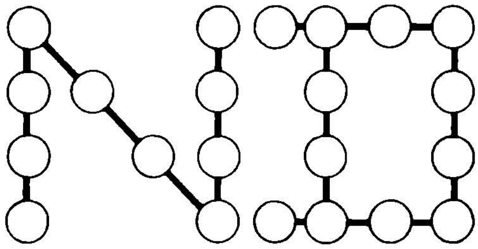
Ankunft n. Ortszeit		
Ort	Tag	Zeit
Moskau	12.3.	11^{00}
Tokio	14.3.	7^{00}
Delhi	15.3.	20^{00}
Brasilia	16.3.	17^{00}
Mexico	16.3.	4^{00}



Magische ND-Knobelei

Trage die natürlichen Zahlen von 1 bis 22 so in die ND-Figur ein, daß die Zahlensumme auf jeder geraden Linie a) 45, b) 46, c) 47 beträgt!

Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig



Denken · Raten · Knobeln

a) *Mathematisches:* Welches ist die kleinste natürliche Zahl, in der alle zehn Ziffern genau einmal vorkommen?

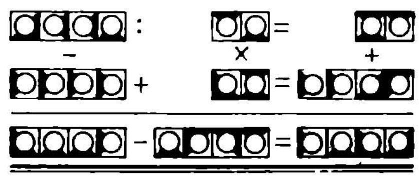
b) *Rechenrätsel:* Setze die fehlenden Zahlen von 1 bis 16 so in die leeren Felder der Figur ein, daß die vier waagerechten, senkrechten und diagonalen Felder jeweils 34 ergeben! *Aus: Trommel*

	14	3	
	2	15	

Raten und rechnen

Jedes Karo bedeutet eine Ziffer; gleiche Karos bedeuten immer gleiche Ziffern. Diesen Angaben entsprechend sind die Ziffern zu finden, die – in die runden Mittelfelder eingesetzt – die waagerechten und senkrechten Aufgaben richtig lösen.

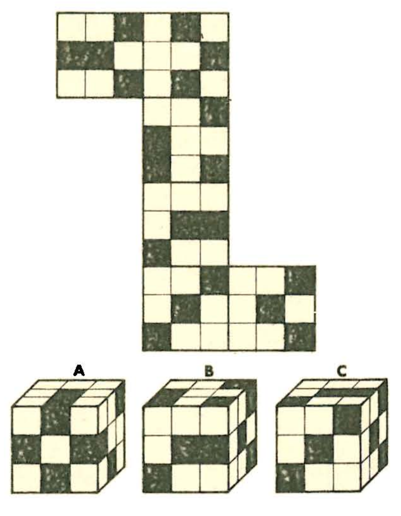
Aus: Freie Welt



Karo-Kisten

Welcher der drei Würfel entspricht der „Abwicklung"?

Aus: Für Dich

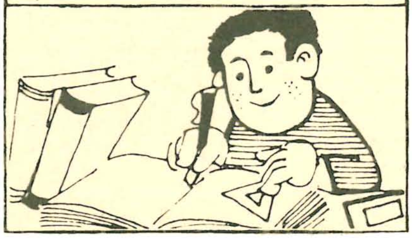


Mathe-Knobelei

Wer hat eine größere Geschwindigkeit:
- ein 100-m-Läufer, der seine Strecke in 10,3 s zurücklegt oder
- ein Wasserspringer vom 10-Meter-Brett (freier Fall), wenn er ins Wasser taucht?

Aus: technikus, Mathe-Knobelei Nr. 260

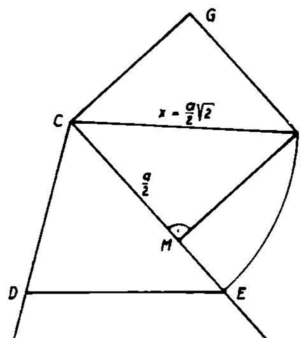
Lösungen



Lösungen zu: In alten Berliner Mathematikbüchern gestöbert

▲1▲ Wegen $s_1 = s_2$ gilt $v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$.
Aus $v_1 = \frac{5}{2}$, $v_2 = \frac{11}{3}$, $t_1 = t_2 + 9$
folgt $\frac{5}{2} \cdot (t_2 + 9) = \frac{11}{3} \cdot t_2$, also
$t_2 = \frac{135}{7}$ und somit $s_2 = \frac{11 \cdot 135}{3 \cdot 7} = 70\frac{5}{7}$.
Nachdem jeder Bote $70\frac{5}{7}$ Meilen zurückgelegt hat, wird der erste vom zweiten Boten eingeholt.

▲2▲ Es gilt $A_{DEC} : A_{ABC} = 1:2$
$= \overline{EC}^2 : \overline{BC}^2 = x^2 : a^2$, also $x = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}$.
Es habe $\overline{CM}$ die Länge $\frac{a}{2}$; dann hat die Diagonale $\overline{CF}$ des Quadrates $CMFG$ die Länge $\frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}$. Der Kreis um C mit dem Radius $\overline{CF}$ schneide $\overline{BC}$ in E. Die Parallele zu $\overline{AB}$ durch E erzeugt zwei flächengleiche Teile.



▲3▲ Angenommen, das Geld werde an x Personen verteilt; dann gilt
$9x - 32 = 7x + 24$, also $x = 28$. Es wurden 220 Sous an 28 Personen verteilt.

▲4▲ Für die Erbanteile s und f von Sohn und Frau gilt
$s:f = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2:1 = 4:2$;
für die von Frau und Tochter gilt
$f:t = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2:1$.
Daraus folgt $s:f:t = \frac{4}{2} : 2 : 1$.
Wegen $4 + 2 + 1 = 7$ erhält der Sohn $\frac{4}{7}$, die Frau $\frac{2}{7}$, die Tochter $\frac{1}{7}$ des Vermögens.

▲5▲ Angenommen A erhält x Thlr., B also $(x + 100)$ Thlr., C aber $(x + 370)$ Thlr.; zusammen sind das $(3x + 470)$ Thlr.; nun gilt $3x + 470 = 1520$, $x = 350$. Die Personen A, B bzw. C erhalten 350 Thlr., 450 Thlr. bzw. 720 Thlr.

▲6▲ Es sei x die von A gedachte Zahl; dann gilt
$(x \cdot 7 + 3):2 - 4 = 15$, $x = 5$.
A hat sich die Zahl 5 gedacht.

▲7▲ $162:36 = 4\frac{1}{2}$; $6\frac{3}{4} - 4\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$;
$3 \cdot 2\frac{1}{4} = 6\frac{3}{4}$. M kauft den Stoff auf der Auktion um $2\frac{1}{4}$ Thlr. billiger als beim Tuchhändler; er spart $\frac{1}{3}$ des Preises des Händlers ein.

▲8▲ Es sei x die gesuchte Zahl; dann gilt
$\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4} + 5x = y$ und $y - 200 = 280 - x$,
also $y = 480 - x$.
Durch Einsetzen erhält man
$\frac{1}{12} \cdot x^2 + 5x = 480 - x$,
$x^2 + 72x - 5760 = 0$, $x_1 = 48$
und $x_2 = -120$ (entfällt, da negativ).
Die zu findende Zahl lautet 48.

▲9▲ Es sei x die vom Rechenmeister gedachte Zahl; dann gilt
$(x \cdot 5 - 24):6 + 13 = x$, also $x = 54$.
Somit handelt es sich um die Zahl 54.

▲10▲ Angenommen, das Pferd kostet x Thlr.; dann gilt
$\frac{x}{5} + \frac{x}{7} = 48$, $x = 140$.
Das Pferd kostet 140 Thlr.

▲11▲ Angenommen, es sind m Männer, f Frauen und k Kinder; dann gilt
(1) $19m + 10f + 8k = s$.
Aus $19m = 10f + 7 = 8k + 15$ folgt
(2) $10f = 8k + 8$ bzw. (3) $8k = 10f - 8$.
Durch Einsetzen in (1) erhalten wir (4)
$19m + 16k + 8 = s$ und
(5) $19m + 20f - 8 = s$. Subtrahieren wir (5) von (4) erhalten wir $16k - 20f + 16 = 0$,
$k = \frac{5f}{4} - 1$. Erst für $f = 24$, also $k = 29$ erhalten wir eine ganzzahlige Lösung für m; nämlich $19m = 10f + 7 = 247$, $m = 13$. Für diese diophantische Gleichung existieren weitere ganzzahlige Lösungen. Es waren mindestens 13 Männer, 24 Frauen und 29 Kinder.

▲12▲ Aus $x + y = a$ bzw. $y = a - x$ und $x \cdot y = b$ folgt durch Einsetzen

$$x(a - x) = b,\ x^2 - ax + b = 0, \text{ also}$$
$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(a + \sqrt{a^2 - 4b}\right) \text{ und}$$
$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(a - \sqrt{a^2 - 4b}\right),$$
$$y_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(a - \sqrt{a^2 - 4b}\right) \text{ und}$$
$$y_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(a + \sqrt{a^2 - 4b}\right).$$

▲13▲ Wir halbieren die Seite $\overline{AB}$; ihr Mittelpunkt sei D. Durch D zeichnen wir die Parallele zur Seite $\overline{AC}$; sie schneide $\overline{BC}$ in E. Durch D zeichnen wir die Parallele zur Seite $\overline{BC}$; sie schneide $\overline{AC}$ in F. Wir verbinden E mit F. Die so entstandenen vier Teildreiecke $\triangle ADF$, $\triangle DBE$, $\triangle DEF$ und $\triangle FEC$ sind untereinander kongruent. Der Nachweis dafür sei dem Leser überlassen.

▲14▲ Wir zeichnen $\overline{AB} = a = 95$ mm, verlängern $\overline{AB}$ über B hinaus um $c = 30$ mm bis E. Wir zeichnen je einen Kreis um A mit $\overline{AC} = e' = 100$ mm und um E mit $e = 125$ mm; ihr Schnittpunkt sei C. Wir zeichnen die Parallele zu $\overline{AB}$ durch C und die Parallele zu $\overline{CE}$ durch B; die beiden Parallelen mögen sich in D schneiden. Wir verbinden A mit D.

▲15▲ Wir drehen den Kreis k um P als Drehzentrum um einen Winkel der Größe 180°. Es sei E das Bild von M. Der Schnittpunkt des Bildes von k mit dem Kreis k' sei B. Die Gerade BP schneide k in A. Dann halbiert P die Strecke $\overline{AB}$.

▲16▲ Für die Länge l der geneigten Ebene gilt nach dem Satz des Pythagoras
$l = \sqrt{10^2 - 7{,}5^2} = 12{,}5$. Aus der Formel
$F = \frac{G \cdot h}{l}$ folgt $F = \frac{100 \cdot 7{,}5}{12} = 90$.
Damit beträgt die erforderliche Gesamtkraft 90 Pfund. Da jedoch das Seil, an dem der Mann zieht, auf dem einen Ende an einem unbeweglichen Punkt befestigt ist, benötigt der Mann nur die Hälfte dieser Gesamtkraft, also nur 45 Pfund anzuwenden.

▲17▲ 100 Last 10 Malter 4 Himten 2 Spind $1\frac{1}{2}$ Sechzehntel sind dasselbe wie 99 Last, 25 Malter, 10 Himten 1 Spind $5\frac{1}{2}$ Sechzehntel. Davon sind zu subtrahieren 48 Last 14 Malter 5 Himten 0 Spind 3 Sechzehntel. Es bleiben übrig 51 Last 11 Malter 5 Himten 1 Spind $2\frac{1}{2}$ Sechzehntel.

Lösungen zu: Mathematisches Unterrichtsbuch für höhere Mädchenschulen

▲1▲
a) $1 - \frac{6}{25} - \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{21}{100}$;
$\frac{21}{100} \cdot x = 168$, $x = 800$.
Diese Mädchenschule besuchten 800 Schülerinnen.
b) Auf die Vorschule entfallen
$\frac{800 \cdot 6}{25} = 192$, auf die Unterstufe
$\frac{3 \cdot 800}{10} = 240$, auf die Mittelstufe
$\frac{800}{4} = 200$, auf die Oberstufe 168 Schülerinnen.

▲2▲ $650 + 500 + 450 + 520 + 60 + 170 + 850 + 130 = 3330$; die Schulmappe einschließlich ihres Inhaltes hatte ein Gewicht von 3330 g bzw. 3,330 kg.

▲3▲ $5{,}86 \cdot 5{,}12 \cdot x = 41 \cdot 3{,}25$, $x \approx 4{,}4$.
Das Klassenzimmer ist etwa 4,40 m hoch.

▲4▲ $35 + 12 + 4 + 5 + 6 + 6 = 68$;

das jährliche Einkommen der Lehrerin wird durch die Steuerleistungen um 68 M geschmälert.

▲5▲ $x:9 = 1\frac{1}{4}:2\frac{1}{4}$, $x = 5$.
In der Zeit vor der Prüfung reicht der Petroleumvorrat nur 5 Tage.

▲6▲ a) $60:5 = 12$; $12 \cdot 90$ Pf $= 1080$ Pf $= 10{,}80$ M.
Für 60 l Petroleum zahlt man 10,80 M.
b) $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$.
Für 1 Pf erhält man $\frac{1}{18}$ l Petroleum.

▲7▲ $110 + 98 + 104 + 122 + 111 = 545$; das Mädchen hat in der Woche vor dem Feste 545 Nadeln gestrickt.

▲8▲ $x:30 = 9:15$; $x = \frac{9 \cdot 30}{15} = 18$.
Das Mädchen hätte die Stickerei in 18 Tagen vollendet.

▲9▲ $2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = 4\frac{3}{5}$. Für den ganzen Anzug sind $4\frac{3}{5}$ m Stoff erforderlich.

▲10▲ a) $\frac{1}{5} + \frac{3}{20} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{29}{40} = 0{,}725$.
Die Hausfrau braucht für ein Mittagsmahl 0,725 kg Fleisch.
b) $\frac{29}{40} - \frac{1}{2} = 0{,}725 - 0{,}500 = 0{,}225$.
Der Familie werden täglich 0,225 kg Fleisch entzogen.

▲11▲ $3 \cdot 0{,}55$ M $+ 1{,}5 \cdot 0{,}46$ M $= 2{,}34$ M.
Das Gelee kostete 2,34 M.

▲12▲ $(3 \cdot 1{,}60 + 0{,}2 \cdot 0{,}20 + 0{,}15:5 + 0{,}10)$ M $= 4{,}97$ M; $4{,}97$ M $:7 = 0{,}71$ M.
Das Gericht kostete 0,71 M je Person.

▲13▲ $2\frac{1}{2} \cdot 6{,}2$ M $= 15{,}50$ M.
Brennholz nach Maß ist genau so teuer wie Brennholz nach Gewicht.

▲14▲ $(6{,}80 + 10{,}25) \cdot 4{,}80$ M $= 17{,}05 \cdot 4{,}80$ M $= 81{,}84$ M.
Der Preis für den Teppichläufer beträgt 81,84 M. Die Angabe der Breite (0,90 m) des Läufers ist überflüssig.

▲15▲ $156 + 46{,}75 + 11 \cdot (4{,}75 + 1{,}60) = 272{,}60$. Die Ausgaben, welche der Familie durch Krankheit auferlegt wurden, beliefen sich auf 272,60 M.

▲16▲ a) $1378 + 388 = 1766$. Zu jener Zeit waren in Berlin 1766 Wohnungen übervölkert.
b) $7815 + 4028 = 11\,843$. In derart überfüllten Wohnungen mußten 11 843 Einwohner hausen.

▲17▲ $24\,236 - 11\,895 = 12\,341$. Im Jahre 1895 standen 12 341 Wohnungen mehr leer als im Jahre 1890.

▲18▲ $20 \cdot (2000 - 400) = 20 \cdot 1600 = 32\,000$. Eine Kolonne von 20 amerikanischen Maurern verarbeitet täglich 32 000 Mauersteine mehr als ebensoviel ihrer englischen Kollegen.

▲19▲ Das Zimmer kaufte er für 55 M.

▲20▲ Brutto: 425 kg, Tara: 63 kg,
Netto: 362 kg. Es sind 362 kg Chinarinde zu verzollen.

▲21▲ $1404:52 = 27$. Der Hausdiener muß jedesmal 27 Kisten Zigarren aufladen.

▲22▲
$\frac{4}{320} = \frac{1}{80}$ der Gewürzproben in Mainz,
$\frac{13}{143} = \frac{1}{11}$ der Butterproben in Elberfeld,
$\frac{5}{50} = \frac{1}{10}$ der Butterproben in Würzburg,
$\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ der Wurstproben in Mannheim,
$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ der Fleischproben in Görlitz
mußten beanstandet werden.

▲23▲ $(4 \cdot 1{,}7 + 6 \cdot 1{,}9 + 18 \cdot 2{,}1):28 = 2$.
Die Hausfrau zahlte für Schweinefleisch einen Durchschnittspreis von 2 M je kg.

▲24▲ $5{,}10:0{,}015 = 340$. Um eine Prämie von 5,10 M zu erzielen, müssen 340 kg Zucker verkauft werden.

▲25▲ $13 \cdot (15 \cdot 0{,}14$ M $+ 25 \cdot 0{,}24$ M$)$ $= 105{,}30$ M. Die vierteljährliche Versicherung der Arbeiter und Arbeiterinnen beträgt 105,30 M.

▲26▲ $\frac{5 \cdot 584}{365}$ kg $= 8$ kg. Von einer Kuh hat man im Durchschnitt täglich 8 kg Milch zu erwarten.

▲27▲ $\frac{9}{100} \cdot x = 15\,138$, $x = 168\,200$;
$\frac{17}{625} \cdot y = 5219$, $y = 191\,875$.
Im Jahre 1894 waren in Hamburg 168 200 Gelasse, im Jahre 1902 waren 191 875 Gelasse zu vermieten.

▲28▲ $\left(4\frac{1}{2} \cdot 13\frac{1}{5} \cdot 5\frac{7}{50}\right):22 = 13{,}878$.
Pro Person ergeben sich 13,878 m³ Luft.

▲29▲ $x:9 = 600:800$; $x:9 = 3:4$;
$x = \frac{9 \cdot 3}{4} = 6\frac{3}{4}$. Der Proviant für 800 Mann reicht für $6\frac{3}{4}$ Monate.

▲30▲ $500 - (2 \cdot 107 + 1 \cdot 193) = 93$.
Der Pfarrer mußte 93 Pf aus seiner Tasche zulegen.

▲31▲ $10 \cdot 0{,}8$ m $= 8$ m. 8 m in der Natur entsprechen 1 m auf der Karte. Das Verjüngungsverhältnis der Kartenaufnahme beträgt 1 : 8.

▲32▲ $82\,\frac{\text{km}}{\text{h}} : 3\frac{1}{2}$ h $= 287$ km.
Diese Bahnhöfe sind 287 km voneinander entfernt.

▲33▲ $x:86\frac{1}{4} = \frac{3}{5}:\frac{3}{8}$, $x = 138$.
Der Turm der Peterskirche in Rom ist 138 m hoch.

▲34▲
$\frac{1}{0{,}34} - \frac{1}{1{,}435} = 2{,}94 - 0{,}69 = 2{,}25$.
Die Strecke von 1 km durchläuft der Schall im Wasser um rund 2,25 Sekunden schneller als in der Luft.

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Sechzehn Spieler nehmen an einem „k.o." Tennis-Turnier teil. Jeder Spieler spielt sein erstes Spiel gegen einen anderen Spieler und der Gewinner dieses Spiels kommt in die zweite Runde. Es gibt keine Unentschieden und der Verlierer scheidet aus. Dieser Prozeß wird in der zweiten Runde wiederholt und weitergeführt bis nur ein Gewinner übrig bleibt. Wie viele Spiele sind insgesamt durchgeführt worden?

Lösung: In der ersten Runde spielen 16 Spieler 8 Spiele. In der zweiten Runde spielen die 8 Gewinner der ersten Runde 4 Spiele. Die vier Gewinner der zweiten Runde spielen 2 Spiele in der dritten Runde. In der vierten Runde spielen die zwei Gewinner der dritten Runde ein Spiel gegeneinander, um den Turniergewinn zu ermitteln. Die Zahl der insgesamt gespielten Spiele ist $8 + 4 + 2 + 1 = 15$.
Von den 16 Spielern kann nur einer Gesamtsieger sein, so daß 15 Spieler Verlierer sein müssen. Um 15 Verlierer zu ermitteln, müssen 15 Spiele durchgeführt werden.

▲2▲ Nehmt eine sechsstellige Zahl, die durch eine der Zahlen 7, 13, 11, 37 teilbar ist. Streicht ihre erste Ziffer und hängt sie als letzte Ziffer an.
Weist nach, daß die so erhaltene Zahl genau dieselben Teiler aus obiger Liste hat wie die ursprüngliche!

Lösung: Die sechsstellige Zahl sei A, ihre erste Ziffer a. Wenn man die erste Ziffer streicht, kann man die entstandene Zahl in der Form $A - 100\,000a$ schreiben. Die Zahl, die man daraus durch Anhängen der Ziffer a erhält ist
$10(A - 100\,000a) + a$ bzw.
$10A - 999\,999a$.
Es ist aber $999\,999 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 27$.
Wenn also A durch einen dieser Faktoren teilbar ist, so ist es auch die neue Zahl.

▲3▲ Ein Flugzeug startet um 7 Uhr von Paris-Orly und fliegt nach Marseille-Marignane. Seine konstante Geschwindigkeit beträgt 680 km/h. Ein anderes Flugzeug startet um 7.30 Uhr von Marseille-Marignane und fliegt nach Paris-Orly. Seine konstante Geschwindigkeit beträgt 520 km/h. Die Entfernung von Paris-Orly nach Marseille-Marignane beträgt 720 km.
a) Zu welcher Zeit begegnen sich beide Flugzeuge?
b) In welcher Entfernung von Paris-Orly findet die Begegnung statt?

Lösung: Berücksichtigen wir, daß ein Flugzeug bereits 7 Uhr von Paris-Orly startet, so haben beide Flugzeuge zusammen von 7.30 Uhr an eine Strecke von 720 km − 340 km zurückzulegen, bevor sie sich kreuzen, daraus folgt
$720 - 340 = 680 \cdot t + 520 \cdot t$
(t in Stunden) und damit $t = \frac{19}{60}$.
a) Die Flugzeuge kreuzen sich um 7.49 Uhr.
b) Die Flugzeuge begegnen sich etwa 555 km vor Paris-Orly entfernt.

▲4▲ Der Wert der Zeichen
Ein gleiches Zeichen bedeutet immer eine gleiche Ziffer, und jede geometrische Figur enthält die gleiche Summe.
Ermitteln Sie diese!

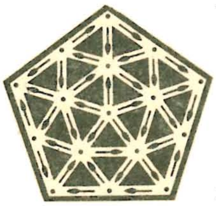
Lösung: In jedem Sechseck ist die Summe 28 mit Treff = 3, Karo = 6, Herz = 4 und Pik = 5.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

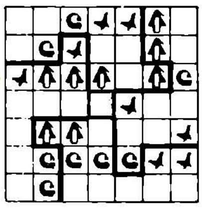
Berlinbummel
Die Abwandlung des bekannten Eulerschen Brückenproblems ist nicht lösbar. Wenn man vom Alex zum Brandenburger Tor gehen will, muß man eine Brücke zweimal überqueren.

Nachgedacht – mitgemacht

a)

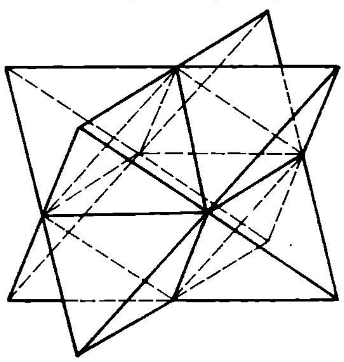


b)

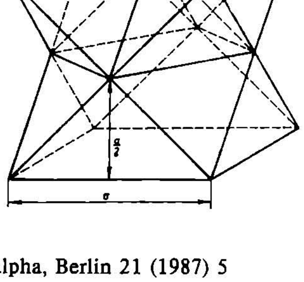


Rätselspaß mit π
Die Mädchen heißen: Anna Schmidt, Berta Müller (Schwester von Ulf Müller), Cäcilie Müller (Schwester von Ralf Müller), Dora Fischer.

Unsere Mathematikaufgabe
Der Körper wird aus zwei kongruenten, einander symmetrisch durchdringenden regulären Tetraedern gebildet (Bild 1).

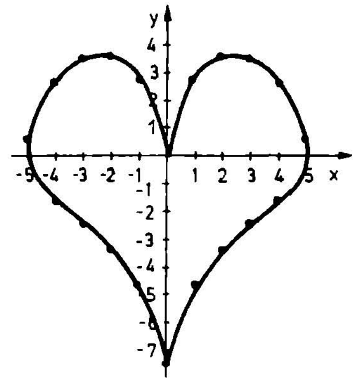


Man könnte den Körper auf folgende Weise anfertigen: Von einem quadratischen Prisma mit der Grundkante a und der Höhe $0{,}5a$ werden die vier oberen Körperecken so abgeschnitten, daß die verbleibende Deckfläche ein Quadrat mit der Seite $0{,}5a\sqrt{2}$ ist. Auf diese Deckfläche



wird eine quadratische Pyramide mit der Grundkante $0{,}5a\sqrt{2}$ und der Höhe $0{,}5a$ gesetzt. Auf die Seitenflächen dieser Pyramide werden regelmäßige Tetraeder mit der Kantenlänge $0{,}5a\sqrt{2}$ gesetzt (Bild 2).

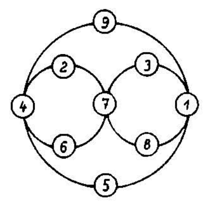
Schwierig
Die Funktionen ergeben zusammen eine herzförmige graphische Darstellung.



x	0	±1	±2	±3	±4	±5
y_1	0	2,923	3,54	3,4	2,785	0,604
y_2	−7,5	−4,423	−3,33	−2,595	−1,71	0,604

Alle knobeln mit
Reihenfolge der Zahlengruppen:
Außenkreis – linker Innenkreis – rechter Innenkreis:

3457	2197	6481	2467	3187	5491
4357	1297	6362	1387	4267	5392
4762	5392	1783	1782	6382	4753
2791	6481	3754	3781	5491	2764
6382	1792	4357	5392	4762	1387
6481	1791	3457	und Abb.		



Wann klingelt es wo?
Die Anrufe kommen in Berlin zu folgenden Zeiten an:
Moskau, 14. 3.; 9.00 Uhr – Tokio, 15. 3.; 23.00 Uhr – Delhi, 17.3.; 15.30 Uhr – Brasilia, 18. 3.; 21.00 Uhr – Mexico, 18. 3.; 12.00 Uhr.
Die Differenz der Ortszeiten der genannten Städte gegenüber der Ortszeit von Berlin betragen:
Moskau +2 h; Tokio +8 h; Delhi +4 h 30 min; Brasilia −4 h; Mexico −8 h.

Denken · Raten · Knobeln
a) Die natürliche Zahl lautet:
1 023 456 789.

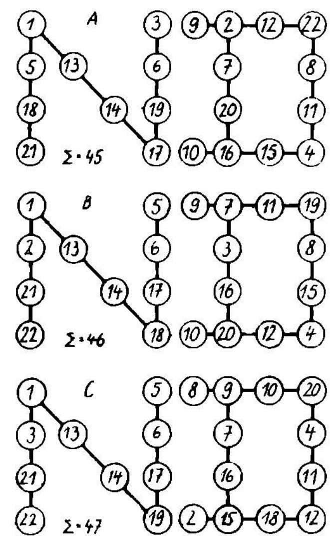
b)

4	7	10	13
9	14	3	8
5	2	15	12
16	11	6	1

Raten und rechnen

5332	:	62	=	86
−		·		+
1111	+	48	=	1159
4221	−	2976	=	1245

Magische ND-Knobelei



Karo-Kisten
Zu der Abwicklung gehört Würfel C.

Mathe-Knobelei
Läufer: l, Springer: s;
Geschwindigkeiten:

$$v_l = \frac{100\text{ m}}{10{,}3\text{ s}} = 9{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ (rd. 35 km/h)}$$

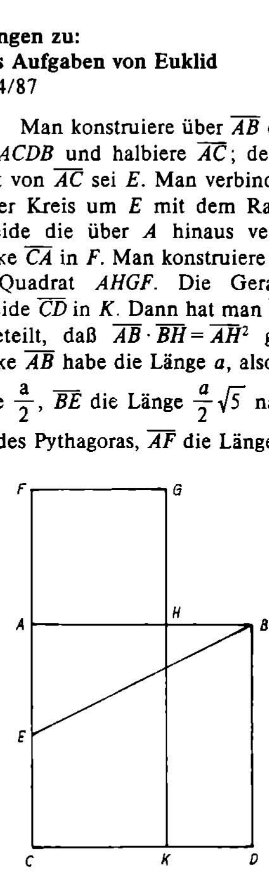
$$v_s = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \text{ mit } g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\text{und } h = 10\text{ m} \quad s = \sqrt{196{,}2\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \approx 14{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(rd. 50,4 km/h),
also $v_s > v_l$.

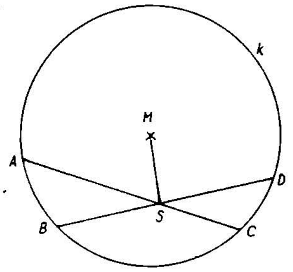
Lösungen zu:
Sechs Aufgaben von Euklid
Heft 4/87

▲1▲ Man konstruiere über $\overline{AB}$ das Quadrat $ACDB$ und halbiere $\overline{AC}$; der Mittelpunkt von $\overline{AC}$ sei E. Man verbinde B mit E. Der Kreis um E mit dem Radius $\overline{EB}$ schneide die über A hinaus verlängerte Strecke $\overline{CA}$ in F. Man konstruiere über $\overline{AF}$ das Quadrat $AHGF$. Die Gerade GH schneide $\overline{CD}$ in K. Dann hat man $\overline{AB}$ in H so geteilt, daß $\overline{AB} \cdot \overline{BH} = \overline{AH}^2$ gilt. Die Strecke $\overline{AB}$ habe die Länge a, also $\overline{AE}$ die Länge $\frac{a}{2}$, $\overline{BE}$ die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{5}$ nach dem Satz des Pythagoras, $\overline{AF}$ die Länge

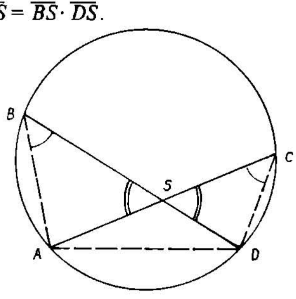


$\frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\cdot(\sqrt{5}-1)$
und $\overline{BH}$ die Länge
$a - \frac{a}{2}\cdot(\sqrt{5}-1) = \frac{a}{2}\cdot(3-\sqrt{5})$.
Für den Flächeninhalt des Rechtecks $BHKD$ gilt deshalb
$A_R = a\cdot\frac{a}{2}\cdot(3-\sqrt{5}) = \frac{a^2}{2}(3-\sqrt{5})$;
für den Flächeninhalt des Quadrates $AHGF$ gilt
$A_Q = \frac{a^2}{4}(\sqrt{5}-1) = \frac{a^2}{4}(6-2\sqrt{5})$
$= \frac{a^2}{2}(3-\sqrt{5})$, also $A_R = A_Q$.

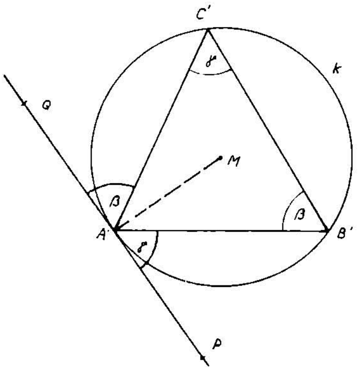
▲2▲ Im abgebildeten Kreis k mit dem Mittelpunkt M mögen sich zwei nicht durch den Mittelpunkt gehende Sehnen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ im Punkt S schneiden. Wir verbinden M mit S. Würde S die Sehne $\overline{AC}$ halbieren, dann müßte der Winkel MSA ein rechter sein. Würde S die Sehne $\overline{BD}$ halbieren, dann müßte Winkel MSB ebenfalls ein rechter sein. Das heißt, die Punkte A und B müßten zusammenfallen. Dies ist aber nicht möglich, da die Sehnen sich nach Voraussetzung in S schneiden sollen.



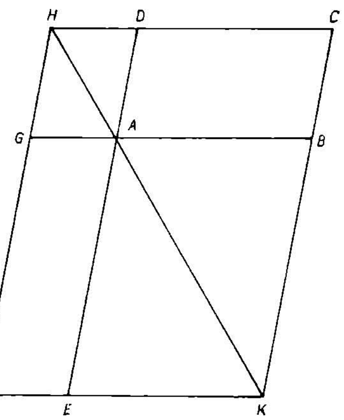
▲3▲ Die Sehnen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ mögen sich in S schneiden. Als Peripheriewinkel über der Sehne $\overline{AD}$ sind die Winkel $\sphericalangle ABD$ und $\sphericalangle ACD$ kongruent. Als Scheitelwinkel sind die Winkel $\sphericalangle ASB$ und $\sphericalangle CSD$ ebenfalls kongruent. Deshalb gilt
$\triangle ASB \sim \triangle CSD$.
Daraus folgt $\overline{AS}:\overline{BS} = \overline{DS}:\overline{CS}$ bzw.
$\overline{AS}\cdot\overline{CS} = \overline{BS}\cdot\overline{DS}$.



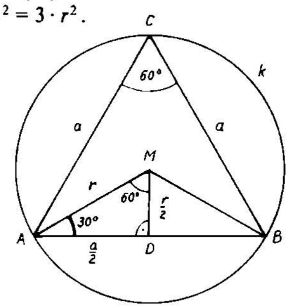
▲4▲ Auf dem Kreis k legen wir einen beliebigen Punkt A' fest. Im Punkte A' konstruieren wir die Tangente $QA'P$ an den Kreis k. In A' tragen wir an $A'P$ den Winkel der Größe γ an, dessen freier Schenkel k in B' schneidet. In A' tragen wir an $A'Q$ den Winkel der Größe β an, dessen freier Schenkel k in C' schneidet. Wir verbinden B' mit C'. Da ein Sehnen-Tangenten-Winkel kongruent ist jedem Peripheriewinkel über demselben Kreisbogen, hat Winkel $A'C'B'$ die Größe γ, Winkel $A'B'C'$ die Größe β.
Daraus folgt $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.



▲5▲ Die Geraden FG und CD mögen sich in H, die Geraden FE und CB in K schneiden. Nach Grund der Voraussetzungen liegen die Punkte H, A und K auf einer Geraden. Nach dem Strahlensatz gilt
$(\overline{KB}+\overline{BC}):\overline{KB} = (\overline{CD}+\overline{DH}):\overline{AB}$ bzw.
wegen
$\overline{KB} = \overline{AE}$ und $\overline{DH} = \overline{AG}$ und $\overline{CD} = \overline{AB}$
$(\overline{AE}+\overline{AD}):\overline{AE} = (\overline{AB}+\overline{AG}):\overline{AB}$, also
$1 + \overline{AD}:\overline{AE} = 1 + \overline{AG}:\overline{AB}$,
also $\overline{AD}:\overline{AE} = \overline{AG}:\overline{AB}$ und somit auch
$\overline{AB}:\overline{AE} = \overline{AG}:\overline{AD}$.



▲6▲ Wir verbinden M mit A und B, fällen das Lot $\overline{MD}$ von M auf $\overline{AB}$. Der Zentriwinkel AMB ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel ACB. Deshalb hat der Winkel AMD die Größe 60°, der Winkel MAD die Größe 30°. Im rechtwinkligen Dreieck ADM gilt somit $\overline{AM} = 2\cdot\overline{DM}$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt somit
$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2$, $\frac{a^2}{4} + \frac{r^2}{4} = r^2$,
also $a^2 = 3\cdot r^2$.



Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 2/87

Ma 5 ■ 2778 Es gibt 6 verschiedene Wege von 40 m Länge, 4 verschiedene Wege von 60 m Länge und 2 verschiedene Wege von 80 m Länge, um von A nach E zu wandern.

Ma 5 ■ 2779 a) Halbiert man ein herausgeschnittenes Dreieck, so lassen sich die beiden Hälften zu einem Quadrat mit 2 cm Seitenlänge zusammensetzen. Die vier Dreiecke haben einen Flächeninhalt von $4\cdot 4\,\text{cm}^2 = 16\,\text{cm}^2$. Die Seite des großen Quadrates ist $(2+4)\,\text{cm} = 6\,\text{cm}$ lang; sein Flächeninhalt beträgt $36\,\text{cm}^2$. Die übriggebliebene Fläche beträgt somit $20\,\text{cm}^2$.
b) Der Unterschied der Flächeninhalte beträgt $4\,\text{cm}^2$.

Ma 5 ■ 2780 Eine mögliche Lösung ist die folgende, in der für gleiche Ziffern gleiche Farben zu denken sind. Es werden mindestens vier Farben benötigt.

1	3	1	3	1
2	4	2	4	2
1	3	1	3	1
2	4	2	4	2
1	3	1	3	1

Ma 5 ■ 2781 a) Vorgänger und Nachfolger der Zahl x sind entweder beide gerade oder beide ungerade. Dann ist die Summe aus ihnen stets gerade. 1987 ist aber eine ungerade Zahl. Daher kann es keine solche Zahl x geben.
b) Man dividiert die Jahreszahl durch 2. Die Summe aus dem Vorgänger und Nachfolger des Quotienten ist dann die Jahreszahl.

Ma 5 ■ 2782 Wegen des Übertrags gilt $A = 2$. Dann muß B wegen des Übertrags 7 sein. Somit bleibt für C die Ziffer 1.
Wir erhalten $271 + 27 + 2 = 300$.

Ma 5 ■ 2783
Es gibt folgende vier Möglichkeiten:

9898	9798	9878	9178
−7911	−7811	−7891	−7191
1987	1987	1987	1987

Ma 6 ■ 2784 Angenommen, der Sohn sei n Jahre, die Mutter also $3n$ Jahre und der Vater $(3n+3)$ Jahre, alle drei zusammen somit $(7n+3)$ Jahre alt; dann gilt
$7n + 3 = 108$, $7n = 105$, $n = 15$.
Der Sohn ist 15, die Mutter 45, der Vater 48 Jahre alt.

Ma 6 ■ 2785 Es seien a^3, b^3, c^3 die Rauminhalte der Würfel W_1, W_2, W_3.
Wegen $c^3 = 3a^3$ und $b^3 = 6a^3$ gilt
$a^3 + 6a^3 + 3a^3 = 90\,\text{cm}^3$, $10a^3 = 90\,\text{cm}^3$,
$a^3 = 9\,\text{cm}^3$, also $c^3 = 27\,\text{cm}^3$, $c = 3\,\text{cm}$.
Daraus folgt weiter
$6c^2 = 6\cdot 9\,\text{cm}^2 = 54\,\text{cm}^2$. Der Würfel W_3 hat eine Oberfläche von $54\,\text{cm}^2$.

Ma 6 ■ 2786 Es sei $7n$ die gesuchte Zahl; dann ist $7n+1$ durch 2, 3, 4, 5 und 6 teilbar. Das k.g.V. von 2, 3, 4, 5, 6 ist 60. Die Zahlen 60, 120, 180, ... sind deshalb zu untersuchen.
Der Fall $7n+1 = 60$, $7n = 59$ entfällt, da 59 nicht durch 7 teilbar ist.
Der Fall $7n+1 = 120$, $7n = 119$, $n = 17$ stellt eine Lösung dar.
Die Zahl 119 ist die kleinste Zahl mit den geforderten Eigenschaften.

Ma 6 ■ 2787 Wegen $36 = 4\cdot 9$ müssen die Zahlen durch 4 und 9 teilbar sein. Wegen der Teilbarkeit durch 4 kommen die Zahlen 1*00, 1*20, 1*40, 1*60, 1*80 in Frage. Wegen der Teilbarkeit durch 9 muß die Quersumme der Zahlen durch 9 teilbar sein. Das trifft für die Zahlen 1800, 1620, 1440, 1260 und 1080 zu.

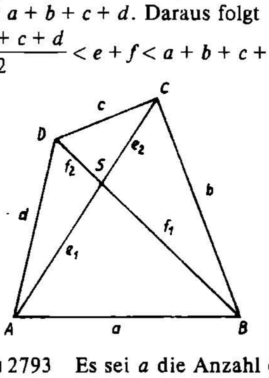
Ma 6 ■ 2788 Aus $1986 = 1 \cdot 1986$ folgt $a = 1$ und $b = 1986 - 1 = 1985$;
aus $1986 = 2 \cdot 993$ folgt $a = 2$ und $b = 993 - 2 = 991$; aus $1986 = 3 \cdot 662$ folgt $a = 3$ und $b = 662 - 3 = 659$;
aus $1986 = 6 \cdot 331$ folgt
$a = 6$ und
$b = 331 - 6 = 325$.
Es existieren genau vier solcher Zahlenpaare $(a; b)$; sie lauten
(1; 1985), (2; 991), (3; 659), (6; 325).

Ma 7 ■ 2789 Wegen $40^2 = 1600$ gilt $A < 4$. Sowohl $A = 3$ als auch $A = 2$ entfallen, da keine Quadratzahl auf die Ziffer 3 bzw. 2 endet. Daher gilt $A = 1$. Da nur das Quadrat von 1 bis 9 auf die Ziffer 1 endet und $B \neq 1$ sein muß, gilt $B = 9$.
Aus $19^2 = 361$ folgt $C = 3$ und $D = 6$.

Ma 7 ■ 2790 Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:
(1) $x + 90 = 450 - 90$, $x = 270$ (cm³ Wasser)
(2) $x - 0{,}2x = 450 + 0{,}2x$; $x = 750$ (cm³ Wasser)

Ma 7 ■ 2791 Die sechsstellige Zahl sei $z = 1 \cdot 10^5 + x$; die daraus zu bildende neue Zahl ist dann $z' = 10x + 1$. Ferner gilt $10x + 1 = 3 \cdot (10^5 + x)$; $10x + 1 = 300\,000 + 3x$, $7x = 299\,999$, $x = 42\,857$.
Die beiden Zahlen sind $z = 142\,857$ und $z' = 428\,571$, und es gilt
$3 \cdot 142\,857 = 428\,571$.

Ma 7 ■ 2792 Es sei S der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ des Vierecks $ABCD$, $\overline{AS}$ habe die Länge e_1, $\overline{CS}$ die Länge e_2, $\overline{BC}$ die Länge f_1, $\overline{DS}$ die Länge f_2. Dann gilt
$e_1 + f_1 > a$, $e_2 + f_1 > b$, $e_2 + f_2 > c$,
$e_1 + f_2 > d$, also
$2e_1 + 2e_2 + 2f_1 + 2f_2 > a + b + c + d$
und somit $2 \cdot (e_1 + e_2 + f_1 + f_2)$
$= 2(e + f) > a + b + c + d$ bzw.
$$e + f > \frac{a + b + c + d}{2}.$$
Ferner gilt $e < a + b$, $e < c + d$, $f < a + d$, $f < b + c$, also
$2(e + f) < 2(a + b + c + d)$ bzw.
$e + f < a + b + c + d$. Daraus folgt
$$\frac{a + b + c + d}{2} < e + f < a + b + c + d.$$



Ma 8 ■ 2793 Es sei a die Anzahl der Flaschen, die Arthur, b die Bert, d die Dieter und e, die Ede sammelten.
Dann gilt
(1) $b < d$,
(2) $a + e = b + d$
(3) $a + d < b + e$.
Aus (2) und (3) folgt durch Addition $2a + d + e < 2b + d + e$, $2a < 2b$, also $a < b$. Wegen (1) gilt dann $a < b < d$.
Aus (2) und (3) folgt durch Subtraktion $e - d > d - e$, $2e > 2d$, also $d < e$.
Deshalb gilt $a < b < d < e$.
Arthur sammelte die wenigsten, Ede die meisten Flaschen.

Ma 8 ■ 2794 $63! - 61!$
$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 63 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 61$
$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 61 \cdot (62 \cdot 63 - 1)$
$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 61 \cdot 3905$
$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 61 \cdot 55 \cdot 71$

Ma 8 ■ 2795 Aus $A = \frac{b \cdot r}{2}$ und $u = 2r + b$ folgt nach Voraussetzung
$\frac{b \cdot r}{2} = 2r + b$, $b \cdot r = 4r + 2b$,
$b \cdot r - 2b = 4r$, $b \cdot (r - 2) = 4r$,
$b = \frac{4r}{r - 2}$, $b = 4 + \frac{8}{r - 2}$.
Nur für r gleich 3, 4, 6 oder 10 wird b ganzzahlig und positiv.

r	3	4	6	10
b	12	8	6	5

Ma 8 ■ 2796 In der ersten Zeile (waagerechte Reihe) kann man wahlweise jedes der fünf Felder belegen (5 Belegungen). In der 2. Zeile kann man wegen der vorgegebenen Bedingungen nur vier Felder wahlweise belegen (zusammen mit der 1. Zeile nun 20 Belegungen). In der 3. Zeile kann man nur über drei, in der 4. Zeile über zwei Felder verfügen, und in der 5. Zeile erfüllt stets nur ein Feld die vorgegebenen Bedingungen.
Somit gibt es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ unterschiedliche Belegungen.

Ma 9 ■ 2797 Bekannt sei a^2 $(a \in N)$.
Nach den Bedingungen der Aufgabe soll gelten:
$(a + 1)^2 = a^2 + a + (a + 1)$.
Wir formen äquivalent um und erhalten
$(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$,
$(a + 1)^2 = (a + 1)^2$.
Diese Aussageform wird bei jeder Belegung von a mit einer natürlichen Zahl zu einer wahren Aussage. Da wir nur äquivalente Umformungen vorgenommen haben, ist auch
$(a + 1)^2 = a^2 + a + (a + 1)$
allgemeingültig, w. z. b. w.

Ma 9 ■ 2798 Angenommen, es waren x Geschenke zu 2,– M, y zu 3,– M und z zu 5,– M das Stück, dann gilt

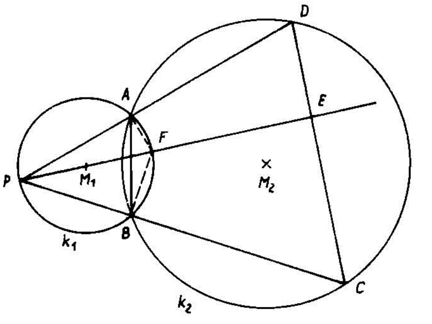
$$\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 100 \\ x + y + z &= 34 \\ \hline 2x + 3y + 5z &= 100 \\ 2x + 2y + 2z &= 68 \\ \hline y + 3z &= 32 \\ 3z &= 30 + 2 - y \\ z &= 10 - \frac{y - 2}{3} \end{aligned}$$

Die folgende Tabelle gibt alle möglichen Belegungen für x, y, z an:

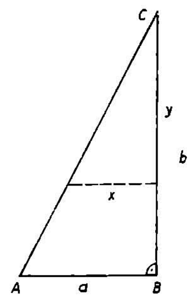
x	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4
y	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29
z	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Nur für $x = 16$, $y = 11$, $z = 7$ gilt $x > y > z$. Es wurden 16 Geschenke zu 2,– M, 11 Geschenke zu 3,– M und 7 Geschenke zu 5,– M überreicht.

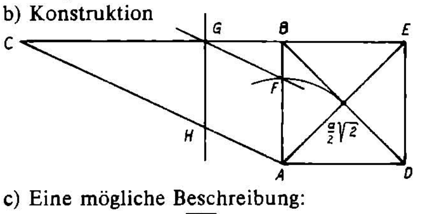
Ma 9 ■ 2799 Die Gerade PM_1 schneide k_1 in F. Nun gilt $\sphericalangle BPF = \sphericalangle BAF$ als Peripheriewinkel über demselben Bogen BF, und der Winkel PAF habe die Größe 90° (Thaleskreis). Der Winkel BAF habe die Größe φ. Dann hat Winkel BAD die Größe $90° + \varphi$. Viereck $ABCD$ ist ein Sehnenviereck. Folglich hat Winkel BCD die Größe $90° - \varphi$. Da im Dreieck PCE Winkel CPE die Größe φ hat, muß Winkel PEC die Größe 90° haben, d. h., $PE \perp CD$.



Ma 9 ■ 2800 a) Nach der Skizze gilt

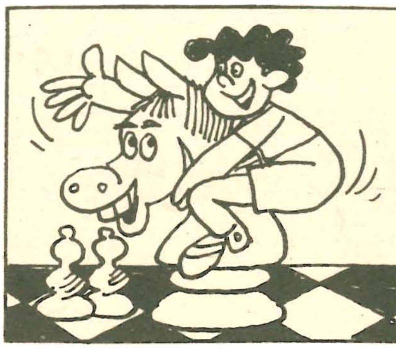


$$\frac{xy}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{2} \text{ bzw. } \frac{xy}{2} = \frac{ab}{4} \quad (1)$$
und $\quad x : y = a : b \quad (2)$
Es ist also
$x^2 = \frac{ab}{2y} \cdot \frac{ay}{b}$, $x^2 = \frac{a^2}{2}$, $x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.
b) Konstruktion



c) Eine mögliche Beschreibung:
Man zeichnet über $\overline{AB}$ das Quadrat, so daß dieses mit dem Dreieck ABC die Seite $\overline{AB}$ und keinen weiteren Punkt gemeinsam hat. Um A zeichnet man einen Kreis mit einem Radius der halben Länge von $\overline{AE}$, der $\overline{AB}$ in F schneidet. Die Parallele zu $\overline{AC}$ durch F schneidet $\overline{CB}$ in G; die Parallele zu $\overline{AB}$ durch G schneidet $\overline{AC}$ in H. $\overline{HG}$ ist die gesuchte Strecke. Der Flächeninhalt des Dreiecks HGC ist gleich dem Flächeninhalt des Vierecks (Trapezes) $ABGH$.

Fortsetzung folgt in Heft 6/87

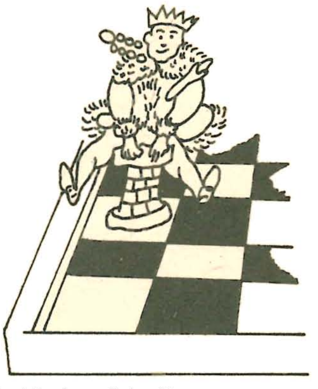


4. alpha-Schachwettbewerb

Es beteiligten sich 484 Leser. Die volle Punktzahl zu den Aufgaben Nr. 1 bis Nr. 7 erzielten 170 Teilnehmer. Erfreulich war wiederum der breite Altersquerschnitt der Wettbewerbsteilnehmer. Er umfaßte den Bereich von 7 Jahre (Axel Märker, Greifswald und Thomas Neumann, Berlin) bis 83 Jahre (Erwin Huth, Schulpforte).

Neben den Lösungen brachten auch viele Leser ihr Gefallen am alpha-Schachwettbewerb zum Ausdruck. „Das Lösen der Schachaufgaben bereitete mir viel Spaß und Freude, obwohl ich ganz schön zu knobeln hatte“ (Karen Wendeborn, Dessau). „Euren Schachwettbewerb zu lösen, hat mir sehr viel Spaß gemacht“ (Wiete Dorn, Jena). „Es war mir wieder ein wahres Vergnügen, die Aufgaben des alpha-Schachwettbewerbs zu lösen“ (Hans Burbach, Hilversum/Niederlande).

Mit einer Zeichnung gab Richard Nacke (Dresden) seinen Spaß und Dieter Koch (Arnstadt) mit einigen Versen seine Freude an dem Wettbewerb zu verstehen.



Der alpha-Wettbewerb ist Klasse,
bringt Schach für viele Mathe-Asse.
Diese Rateform in vierter Runde
ist Denksport für manch volle Stunde.
Ich löste sieben Schachaufgaben,
hiermit könnt ihr's schriftlich haben.
Auf den wichtigsten Zug als Beginn
weisen meine Zeilen hin.
Bei der ersten Aufgabe war das Brett fast leer,
Dame nach a1 war wirklich nicht schwer.
Die zweite Lösung hatte einen kleinen Aufwand,
das Damenopfer auf c6 schnell ich fand.
Das dritte Problem, eine leichte Knobelei,
Abzugsschach durch König nach g3.
Bei Nummer vier mit manchen Abweg
nur Dame nach h6 letztendlich geht.
Für die fünfte Lösung war erneut gefragt der Mut,
denn nur mit dem Damenopfer auf h7 geht's gut.
Das sechste Problem erscheint für mich unlösbar,
ob es wohl ein Dreizüger war?
Die Lösung zur Aufgabe 7 war schnell erreicht,
mit dem Dameschach auf h1 ging's leicht.
Die Anstrengung für die Zusatzaufgabe blieb gering,
die Lösung, Dame nach e4, auf Anhieb ging.

Lösungen

▲1▲	1. Da1	Kh7	
	2. Dg7	matt	(2 P.).

Dieses kleine Schachproblem von W. A. Shinkman (*Dubuque Chess Journal*, 1873) erwies sich für fast alle Teilnehmer als leicht zu lösen.

▲2▲	1. Dc6+	b:c6, L:c6	
	2. Sa6	matt	(2 P.).
▲3▲	1. Kg3+	Lh5	
	2. T:h5+	K:h5/g:h5	
	3. Dh1/Df6	matt	(3 P.).
▲4▲	1. Dh6	Tag8	
	2. D:h7+	T:h7	
	3. T:g8	matt	(4 P.).

Mehrere Löser gaben hier
1. S:h7 T:h7/Kg8
2. Df6+/Dh6 Tg7/beliebig
3. D:g7/Sf6 matt als Lösung an.
Jedoch führt 1. S:h7 nach 1. ... L:f5 (!) nicht zum Matt im dritten Zug.

▲5▲	1. D:h7+	K:h7	
	2. Th4+	Kg7	
	3. Lh6+	Kh7, Kh8	
	4. Lf8	matt	(4 P.).
▲6▲	1. Th8	Tf1 beliebig	
	2. S:f2	matt	(1 P.).
	1. ...	La3, Lc5	
	2. Sc3	matt	(1 P.).
	1. ...	Ld2, Le1	
	2. S:d6	matt	(1 P.).
	1. ...	f3	
	2. Dh7	matt	(1 P.).
	1. ...	e:d4	
	2. Te8	matt	(1 P.).

Dieses Problem von dem populären Dresdner Schachproblemkomponist Hans Vetter (1894 bis 1973) bereitete dem Großteil der Löser die meiste Mühe und es gab viele falsche Lösungen. Zugwechsel ist der Inhalt dieses Zweizügers. Wäre Schwarz zuerst am Zuge
1. ... Tf1 beliebig/La3/Le1/e:d4,
so könnte Weiß gleich daraufhin mit
2. S:f2/Sc3/S:d6/T:f4 jeweils mattsetzen.
Aber Weiß ist zuerst am Zuge und verfügt weder über einen neutralen Wartezug, noch über die Möglichkeit eine Mattdrohung aufzustellen. Mit dem feinen Schlüsselzug 1. Th8 kommt Weiß seiner Zugpflicht nach, erhält die Mattdrohungen für die schwarze Zugpflicht aufrecht und bahnt der Dame den Weg nach h7.

▲7▲	1. Dh1+	K:h1	
	2. S:g4	Lh2	
	3. S:f2	matt	(3 P.).
	1. ...	Kg3	
	2. Df3+	Kh4/Kh2	
	3. D:g4/S:g4	matt	(3 P.).

Auch mit dieser Aufgabe (aus „New York Albion“, 1858) konnte der berühmte Schachproblemkomponist und Rätselautor Sam Loyd (1841 bis 1911) wiederum viele Teilnehmer erfreuen. Das überraschende Hineinziehungsopfer der weißen Dame in der Schachbrettecke begeistert auch heute noch die Schachfreunde.

▲Z▲

1. De4 (droht 2. D:a8 matt)	
1. ...	Tb8
2. Dh4	Kd8/Kf8/O–O
3. D:e7+/D:e7+, D:h5/Dg5+	Kc8/Kg8, beliebig/Kh8
4. Dd7/Df7(g7), Df7/Dg7	matt.
1. ...	Tc8
2. Dh4	Kf8/O–O
3. D:h5, D:e7+/Dg5+	beliebig, Kg8/Kh8
4. Df7, Df7(g7)/Dg7	matt.
1. ...	Td8
2. Dc6+	Td7/Kf8
3. D:d7+/Df3+	Kf8/Kg8, Ke8
4. Dc8(d8)/Df7	matt.
1. ...	O–O
2. Dg2+	Sg3
3. D:g3+	Kh8
4. Dg7	matt.

Zahlreiche Löser gaben zu der Aufgabe von Günter Schiller (*Schach*, 1970) als Lösung
1. Dh4 Kd8; 2. De4, D:h1 Tb8/Tc8/c6
3. Dc6 nebst 4. Dd7 matt an.

Dagegen hat jedoch Schwarz eine gute Verteidigung parat – 1. ... O–O–O! Nach dieser langen Rochade wäre in einer Partie der Gewinn für Weiß wohl dahin.

Diese Aufgabe gibt uns Anlaß, noch auf eine Schachregel hinzuweisen: In einer beliebigen Schachaufgabe sind jeweilige Rochadeformen durchführbar, so lange nicht aus der Stellung heraus nachgewiesen werden kann, daß der betreffende König oder Turm schon einmal gezogen haben.

Unter den Einsendern, die die volle Punktzahl erzielten, sowie unter jenen bis zum Alter von 14 Jahren, welche die Aufgaben Nr. 1 bis 4 richtig gelöst hatten, wurden folgende Gewinner ermittelt:
Claudia Bachmann (Syrau), Dennis Heuer (Eilenburg), Falk Nestler (Zschopau), Ralph Schlosser (Boßdorf), Matthias Zeitz (Karith).

Weiterhin wurden Preise unter allen Teilnehmern verlost, die zumindest eine Aufgabe korrekt gelöst hatten:
Michaela Kitta (Ziddorf), Astrid Quapp (Leipzig), Jens Schmiedek (Ammelshain), Jan Witt (Röbel), Frank Wolff (Brotterode).

Die zwei Buchpreise für die Einsender, welche alle Aufgaben einschließlich der Zusatzaufgabe richtig gelöst hatten, gehen an: Andreas Lasarow (Wittenberg) und Reiko Wöllert (Berlin).

In Heft 6/1987 folgt der 5. *alpha*-Schachwettbewerb.

H. Rüdiger

Fakten und Daten zum Berliner Bildungswesen seit 1945

1945 Ende Juni nehmen etwa 130 000 Kinder am behelfsmäßigen Unterricht teil. Von 22 740 Schulräumen der Vorkriegszeit waren nur noch 1 300 halbwegs wetterfeste Räume übrig geblieben, die meisten ohne Fensterscheiben und ohne Beleuchtung. Fast jedes zweite Kind lebte zu Hause in einer nicht heizbaren Wohnung. Mehr als 70 Prozent der Berliner Kinder verfügten nicht über ausreichendes Schuhwerk.

1. Oktober – Eröffnung aller Schulen in der Sowjetischen Besatzungszone und in Berlin. Mehr als 2 400 Neulehrer werden eingestellt.

18. Oktober – Gemeinsamer Aufruf von KPD und SPD zur demokratischen Schulreform.

1946 Juli – Eröffnung der Vorstudienanstalt (später ABF) an der Berliner Universität

1947 Juli – Einführung des 9. Schuljahres als Pflichtjahr

1948 Januar – Verbot der körperlichen Züchtigung in den Berliner Schulen

1950 Juli – III. Parteitag der SED orientiert auf Einführung der 10-Klassen-Schule und des Gegenwartskundeunterrichts

1955 April – Erste Jugendweihefeiern

1957 Produktionsarbeiter aus Berliner Betrieben werden für den Lehrerberuf gewonnen und vorwiegend als Werklehrer ausgebildet

1958 Juli – V. Parteitag der SED. Orientierung auf den Aufbau der zehnklassigen polytechnischen Oberschule

September – Einführung des Unterrichtstages in der Produktion (UTP) und des Faches „Einführung in die sozialistische Produktion" (ESP)

meinbildenden Schulen

1961 Februar – 1. Berliner Mathematikolympiade

1962 Einführung der Berufsausbildung mit Abitur

Dezember – „Mathematikbeschluß" des ZK der SED

1965 Juli – Berlin ist Gastgeber der VII. Internationalen Mathematikolympiade (IMO)

1971 Juni – VIII. Parteitag der SED legt fest, den Übergang zur allgemeinbildenden zehnklassigen Oberschulbildung bis 1975 im wesentlichen zu vollenden.

1972 In der Hauptstadt bestehen 194 Oberschulen und 20 Hilfs- und Sonderschulen mit Schulhorten

1974 Juli – Abschluß der XVI. Internationalen Mathematikolympiade im Haus des Lehrers, Berlin (Austragungsort der IMO: Erfurt)

1977 82 690 Schüler besuchen eine der mehr als 5 000 außerschulischen Arbeitsgemeinschaften

Oktober – VIII. Pädagogischer Kongreß – 1 200 Berliner Pädagogen nehmen teil

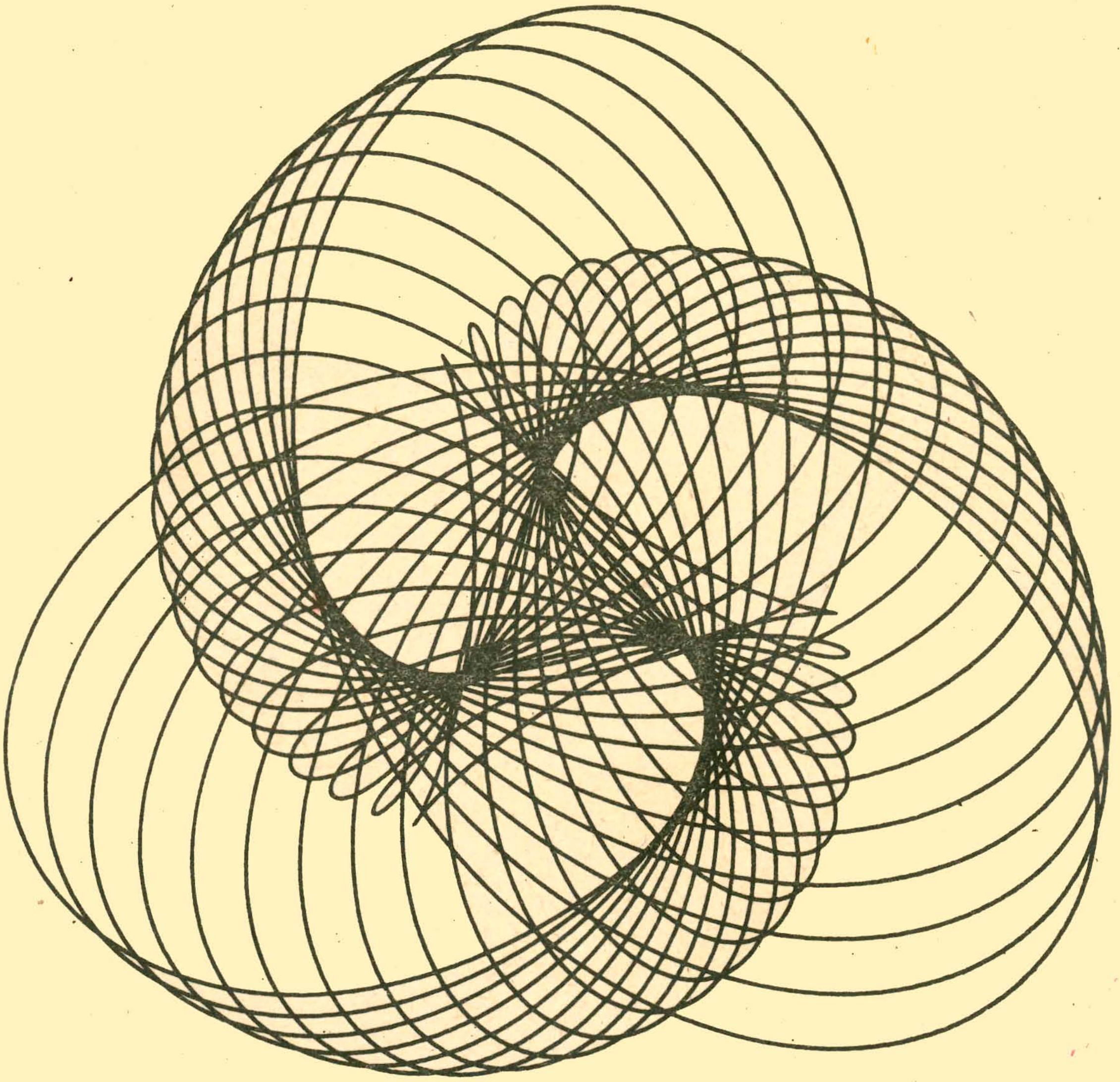
1983 Polytechnischer Unterricht wird in 93 Betrieben der Hauptstadt durchgeführt. Die Anleitung erfolgt durch 1 728 Lehrfacharbeiter sowie Lehrmeister und 301 Diplomlehrer

1986 April – XI. Parteitag der SED bestimmt die Aufgaben, die sich aus der weiteren Gestaltung der entwickelten sozialistischen Gesellschaft – eingeschlossen die Ansprüche aus der wissenschaftlich-technischen Revolution – für die inhaltliche Vervollkommnung des Bildungswesens ergeben.

1987 entstehen in Berlin 19 Schulen, 21 Sporthallen, 39 Kindergärten. Seit 1971 wurden 210 polytechnische Oberschulen gebaut. Bis 1990 werden 70 neue Schulen und 160 Kindergärten hinzukommen.

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
21. Jahrgang 1987
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

6

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold
Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027
Redaktion:
Gabriele Liebau (Chefredakteur)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.
Fotos: J. Lehmann, B. Liebau (S. 121); P. Schreiber (S. 123); Dallos, aus Eulenspiegel (S. 130); aus Funktio, Finnland (S. 132)
Titelblatt: W. Fahr, Berlin
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

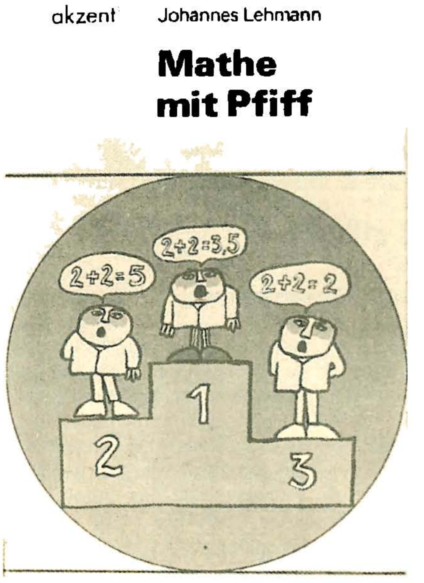
Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 10. August 1987
Auslieferungstermin: 4. Dezember 1987

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

[1] bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben geeignet ab der angegebenen Klassenstufe

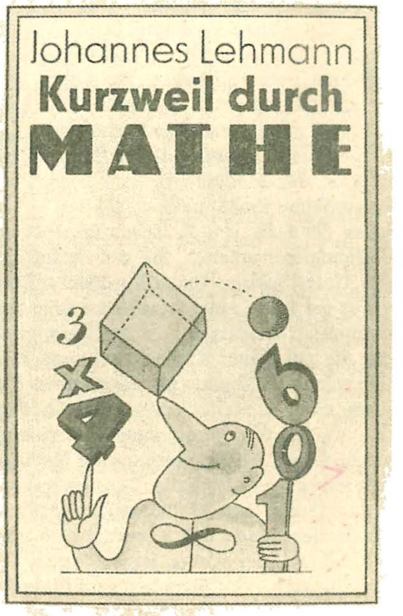
Ein Dank an „Mathe"-Lehmann

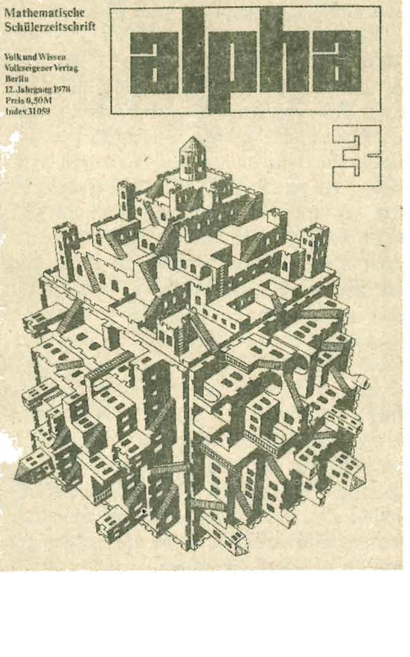


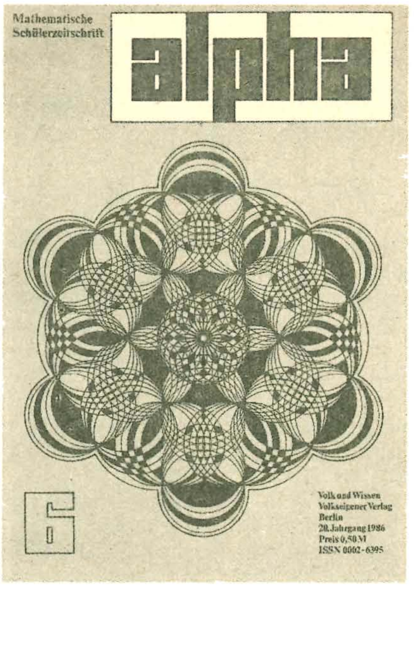
Als Chefredakteur der *alpha* kann der Verdiente Lehrer des Volkes Oberstudienrat Johannes Lehmann auf eine zwanzigjährige erfolgreiche Arbeit zurückblicken. Gemeinsam mit einem aktiven Redaktionskollegium wurde die *alpha* zu einer interessanten mathematischen Schülerzeitschrift entwickelt, die aus dem Zeitschriftenangebot unseres Landes nicht mehr wegzudenken ist. Mit über 120 *alpha*-Heften hat Johannes Lehmann es geschafft, hunderttausende Schüler für die ernsten und heiteren Seiten der Mathematik zu begeistern, Arbeitsgemeinschaften, Kreis- und Bezirksklubs der Mathematischen Schülergesellschaft, Korrespondenzzirkeln u. a. Anregung für ihre Arbeit zu geben.

Aber auch für den Mathematiklehrer ist die *alpha* Anregung und Bereicherung seines Unterrichts. Die gesammelten Jahrgänge stellen für ihn eine wahre Fundgrube an mathematischen Denksportaufgaben, Spielen, historischen Betrachtungen, aber auch theoretischen, vertiefenden Beiträgen dar. Die Veröffentlichung der Aufgaben der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, zu deren Initiatoren J. Lehmann gehört, sind fester Bestandteil der *alpha*. Gleichzeitig erhielten zahlreiche Leser und Kollektive die Möglichkeit, ihre Aufgabenvorschläge, Ideen und Erfahrungen bei der Beschäftigung mit der Mathematik einer breiten Öffentlichkeit zugänglich zu machen.

Auf diese Weise hat Johannes Lehmann einen nicht geringen Anteil an der erfolgreichen Entwicklung des Mathematikunterrichts und einer lebendigen, außerunterrichtlichen Tätigkeit, an der Gewinnung junger Kader für eine Wissenschaft, der in der Entwicklung und Anwendung von Spitzentechnologien in unserer Volkswirtschaft ein besonderer Platz zukommt. Neben seiner Arbeit als Chefredakteur agierte J. Lehmann ebenso erfolgreich als Buchautor oder Herausgeber von unterhaltsamer mathematischer Literatur. 18 Mathe-LVZ (Sonderausgaben der Leipziger Volkszeitung), 12 unterhaltsame Mathe-Hefte, 80 Lesebogen Junger Mathematiker und neun Bücher haben ihn als „Mathe-Lehmann" auch über die Grenzen unseres Landes hinaus bekannt gemacht. Kein Wunder, daß er auch nach dem 65. Lebensjahr der Mathematik die Treue hält und weitere Veröffentlichungen, natürlich auch in der *alpha*, plant.







Mit Wirkung vom 1. 1. 1988 scheidet J. Lehmann nach einem Jahr tatkräftiger Unterstützung des neuen Chefredakteurs aus der Redaktion *alpha* aus.

Für das bisher Geleistete sagen wir herzlichen Dank, für die Zukunft wünschen wir Gesundheit, viele neue Ideen und alles Gute im persönlichen Leben.

Die Redaktion alpha
und das Redaktionskollegium

Die Koordinatenmethode im Wandel der Zeiten

Zum 350. Jahrestag des Erscheinens von R. Descartes' «La Géométrie»

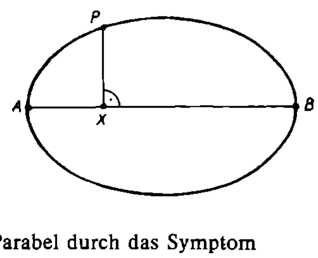
Teil 1

Die Koordinatenmethode der Geometrie gehört seit langem zu den mächtigsten und vielseitigsten Werkzeugen der Mathematik. Es ist üblich, ihre *Geburt* mit den Jahren 1636 bzw. 1637 in Verbindung zu setzen, in denen zwei grundlegende Arbeiten von Pierre de Fermat (1601 bis 1665) bzw. René Descartes (1594 bis 1650) zur Begründung der später als *analytische Geometrie* bezeichneten Koordinatenmethode entstanden. Wie so oft in der Geschichte der Mathematik haben diese Arbeiten eine bis in die Antike zurückreichende Vorgeschichte und eine bis in die Gegenwart wirksame Folgegeschichte. Sie stehen weder am Anfang noch am Ende einer Entwicklung, sondern sie markieren einen gewissen Qualitätssprung in der Behandlung einer in der Mathematik von Beginn an vorhandenen Problematik.

Schon im 4. Jh. v. u. Z. hatten griechische Mathematiker erkannt, daß die Definition und Untersuchung spezieller ebener Kurven es erfordert, eine charakteristische Bedingung für diejenigen Punkte zu formulieren, die auf dieser Kurve liegen, und daß eine solche Bedingung im allgemeinen die Form einer Gleichung zwischen Größen hat, die durch arithmetische Operationen wie Addition, Multiplikation oder Verhältnisbildung (eine explizite Division gab es in der griechischen Mathematik nicht) aus den Entfernungen der Kurvenpunkte von bestimmten, der Kurve zugeordneten festen Punkten oder Geraden gebildet werden. Eine solche Gleichung nannten sie ein Symptom der betreffenden Kurve. Eine Ellipse wurde von ihnen z. B. durch das Symptom

$$\frac{PX \cdot PX}{AX \cdot BX} = \text{const}, \qquad \text{(Bild 1)}$$

Bild 1



eine Parabel durch das Symptom

$$\frac{PX}{MX} = \frac{AX}{AC} \qquad \text{(Bild 2)}$$

beschrieben. Eine Parabel definieren wir heute meist durch ihre Gleichung

$$y = ax^2. \qquad (1)$$

wobei y bzw. x die Abstände des variablen

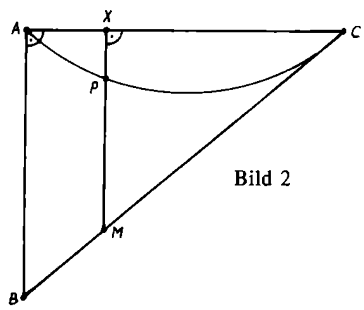
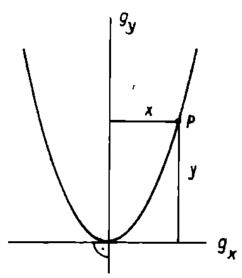


Bild 2

Kurvenpunktes P von zwei zueinander senkrechten, der Parabel zugeordneten Geraden sind: ihrer Symmetrieachse g_y und der dazu im Scheitelpunkt senkrechten Geraden g_x (der Scheitelpunkt ist der gemeinsame Punkt der Parabel mit ihrer Symmetrieachse, Bild 3). Um die geometrische Bedeutung des Koeffizienten a zu ermitteln, hat man $x = 1$ zu setzen: a ist der zu $x = 1$ gehörige y-Wert. Seine Größe gibt also scheinbar die *Steilheit* der Parabel an. Dieser Begriff ist jedoch nur in bezug auf eine gewählte Maßeinheit sinnvoll. In Wirklichkeit sind alle (durch verschiedene Werte von a erzeugten) Parabeln untereinander ähnlich. Verändert man nämlich den Maßstab durch die Transformation $x^* = ax$, $y^* = ay$, so geht (1) bei beliebigem a in die spezielle Form $y^* = x^{*2}$ über.

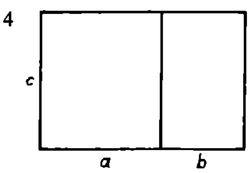
Bild 3



Die Gleichung (1) wäre jedoch für die griechischen Mathematiker sinnlos gewesen. Sie verfügten nicht über den Begriff der reellen Zahl. Da sie andererseits schon im 5. Jh. v. u. Z. bemerkt hatten, daß ganze Zahlen und deren Verhältnisse (d. h. modern: gebrochene Zahlen) zur Beschreibung geometrischer Sachverhalte nicht ausreichen, weil es z. B. keine Maßeinheit gibt, bezüglich derer Seite und Diagonale eines Quadrats gleichzeitig ganzzahlige Längen haben, faßten sie Streckenlängen, Flächen- und Rauminhalte selbst als Größen auf, ohne ihnen Zahlenwerte zuzuordnen. Addition solcher Größen wurde durch Aneinanderlegen entsprechender Repräsentanten, Multiplikation von Längen durch Bildung des Rechtecks aus den gegebenen Strecken, Multiplikation dreier Längen als Bildung eines Quaders erklärt. Rechengesetze für die solcherart erklärten Operationen konnten durch geometrische Betrachtungen begründet werden.

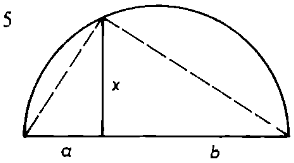
Zum Beispiel gilt für Strecken a, b, c stets $(a + b)c = ac + bc$, weil das Rechteck mit den Seiten $a + b$ und c sich durch Aneinanderlegen aus den Rechtecken mit den Seiten a und c bzw. b und c ergibt (Bild 4).

Bild 4



Unbekannte Strecken konnten nun in vielen Fällen durch geometrische Konstruktion gefunden werden. Ist z. B. von einer gesuchten Strecke x bekannt, daß $x^2 = ab$ (mit gegebenen Strecken a, b) ist, so findet man x nach dem Höhensatz für rechtwinklige Dreiecke als Höhe eines solchen Dreiecks mit den Hypotenusenabschnitten a, b (Bild 5). Dies alles konnte genutzt werden, um durch Symptome definierte Kurven zu untersuchen und Sätze über sie zu beweisen.

Bild 5



In der Auffassungsweise der Griechen waren jedoch nur Gleichungen sinnvoll, die folgenden beiden Bedingungen genügen:

(a) Es kommen nur Produkte von höchstens drei Streckenfaktoren vor.

(Wie sollten sie sich einen *vierdimensionalen* Quader vorstellen?)

(b) Es können nur Größen gleicher Dimension addiert, subtrahiert oder gleichgesetzt werden.

(In diesem Sinne verlangt also Gleichung (1) die Gleichheit eines Rauminhaltes mit einer Strecke.) Obwohl es den griechischen Mathematikern gelang, Kegelschnitte und einige spezielle andere Kurven durch Symptome zu beschreiben, die den Bedingungen (a) und (b) genügten, erwiesen sich diese Bedingungen insgesamt als wesentliches Hemmnis für die weitere Entfaltung der griechischen Mathematik, und die auf den geometrischen Größenbegriff zugeschnittene *geometrische Algebra* der Griechen, die jede Umformung einer Gleichung und jede Lösung einer solchen durch geometrische Betrachtungen rechtfertigen mußte, war sehr schwerfällig. Dennoch bildete die genaue Kenntnis der griechischen Mathematik und ihrer Schwierigkeiten den Ausgangspunkt und eine notwendige Voraussetzung für die Leistungen von Fermat und Descartes.

Fermat war Jurist und Beamter. Die Mathematik betrieb er mit Leidenschaft, jedoch nur als *Hobby*. Er gehört zu den vielseitigsten und bedeutendsten Mathematikern des 17. Jh. Außer der Koordinatenmethode begründete er die Zahlentheorie, die Wahrscheinlichkeitstheorie (gemeinsam mit Blaise Pascal (1623 bis 1662)) und die kalkülmäßige Lösung von Maximum- und Minimumaufgaben, aus der sich wenig später die Differentialrechnung entwickelte. Während seines Lebens wurden die meisten seiner Ergebnisse nur durch seinen relativ umfangreichen Briefwechsel bekannt. Ausgangspunkt seiner geometrischen Untersuchungen war das Bemühen, die verlorengegangenen Beweise aus der Kegelschnittslehre des Apollonios von Perge (um 262 bis um 190 v. u. Z.) zu rekonstruieren bzw. die überlieferten Beweise zu vereinfachen oder durchsichtiger zu gestalten. An den antiken Prinzipien (b) und im wesentlichen auch an (a) hielt er fest, benutzte jedoch statt der schwerfälligen geometrischen Terminologie der Griechen die von Francois Viète (Vièta 1540 bis 1603) eingeführte algebraische Formelsymbolik, die zwar immer noch viel unhandlicher als unsere heutigen Schreibweisen war, jedoch einen gewaltigen Fortschritt gegenüber der antiken Ausdrucksweise bedeutete. Fermat charakterisierte die Lage von Punkten einheitlich durch ihre Abstände von zwei zueinander senkrechten Achsen und untersuchte nun für alle möglichen Typen von Gleichungen zwischen zwei Unbekannten, die man unter Berücksichtigung der Beschränkungen (a) und (b) aufstellen kann, welche Kurven sich ergeben. Sein Ergebnis: Es kommen außer Geraden genau alle Arten von Kegelschnitten heraus. Die für die weitere Entwicklung wesentlichste, wenn auch noch nicht völlig klar formulierte Erkenntnis Fermats könnte man mit heutigen Worten etwa so aussprechen:

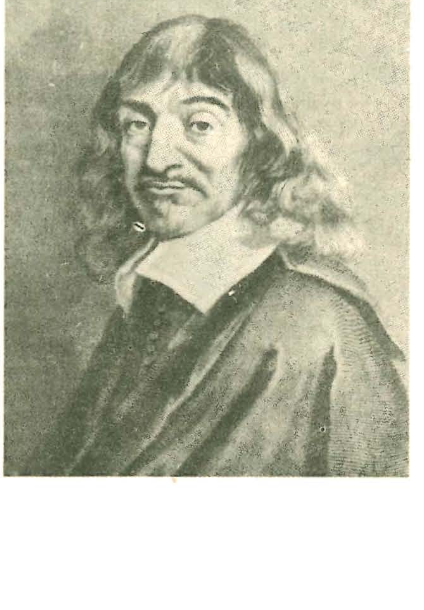
Die Koordinatenmethode erschöpft sich nicht darin, für irgendwelche (z. B. durch mechanische Vorrichtungen erzeugte) Kurven nachträglich Beschreibungen durch Gleichungen aufzufinden und zur weiteren Untersuchung dieser Kurven zu benutzen. Vielmehr definiert nach Wahl eines Paares zueinander senkrechter Achsen jede Gleichung mit zwei Unbekannten eine Kurve, nämlich die Menge derjenigen Punkte, deren Abstände zu den beiden Achsen dieser Gleichung genügen. Von der Gleichung ausgehend, kann man die Form und die sonstigen Eigenschaften dieser Kurve *entdecken*. Überdies liefert die algebraische Gestalt der Gleichungen Klassifikationsprinzipien für die entsprechenden Kurven.

Diese Erkenntnisse sind in Fermats in lateinischer Sprache verfaßter Schrift *Einführung in die ebenen und körperlichen Örter* enthalten, die 1636 geschrieben und bis 1637 in französischen Gelehrtenkreisen bekannt, jedoch erst 1679, nach seinem Tode, erstmals gedruckt wurde. *Ebene und körperliche Örter* bedeutet dabei nicht etwa ebene und räumliche (also in keiner Ebene ganz enthaltene) Kurven, sondern bezieht sich noch auf die antike Auffassung der Größen. Ebene Örter sind bei Fermat solche Kurven, in deren Gleichungen nur Produkte zweier Strecken vorkommen. Körperliche Örter sind solche Kurven, in deren Gleichungen Produkte dreier Strecken vorkommen. Kurven, deren Gleichungen von höherem Grade als drei sind, nannte Fermat kurioserweise *lineare Örter*, ohne sich weiter mit ihnen zu beschäftigen.

Ob und wieweit Descartes von Fermats Ergebnissen Kenntnis hatte, bevor 1637 seine Abhandlung *La Géométrie* in Leiden gedruckt wurde, übrigens nicht als selbständige Veröffentlichung, sondern als einer von drei Anhängen seiner berühmten philosophischen Programmschrift *Discours de la méthode* (Erörterung über die Methode), wollen wir unerörtert lassen. Jedenfalls ist sein Beitrag von ganz anderer Art, geradezu komplementär zu Fermats Erkenntnissen, und nur beide gemeinsam konnten wohl die folgende Revolution in der Mathematik auslösen, die innerhalb von 200 Jahren zur vollständigen gegenseitigen Übersetzung geometrischer und arithmetisch-algebraisch-analytischer Begriffe, Sachverhalte und Methoden ineinander führen sollte.

Das Hauptverdienst von Descartes um die Koordinatenmethode besteht aus heutiger Sicht darin, daß er sie von den beiden antiken Beschränkungen (a) und (b) befreite. Descartes erkannte, daß man nach Wahl einer Einheitsstrecke e das Produkt ab zweier Strecken a, b durch diejenige Strecke c repräsentieren kann, für die das Rechteck mit den Seiten e, c flächengleich dem Rechteck mit den Seiten a, b ist. Auf diese Weise fortfahrend kann man das Produkt beliebig vieler Strecken stets wieder auf eine Strecke reduzieren und somit jede Gleichung beliebig hohen Grades und mit Summanden unterschiedlicher Grade als Gleichung zwischen Strecken deuten.

Der französische Philosoph,
Mathematiker und Physiker
René Descartes (1596 bis 1650)
gilt gemeinsam
mit dem französischen Juristen und
Mathematiker Pierre de Fermat
(1601 bis 1665) als Begründer
der analytischen Geometrie.



Auf eine verzwickte, nicht mit wenigen Sätzen zu erläuternde Weise ist dieses Prinzip gleichbedeutend mit der Möglichkeit, nach Wahl eines 0- und eines 1-Punktes auf einer Geraden die sämtlichen Punkte dieser Geraden umkehrbar eindeutig den sämtlichen reellen Zahlen zuzuordnen, wie jeder es in der Schule lernt und wie es jeder, heute in den verschiedensten Praxisbereichen unentbehrlichen graphischen Darstellung funktionaler Zusammenhänge zwischen physikalischen, ökonomischen oder sonstigen in reellen Zahlen meßbaren Größen zugrundeliegt. Diese Entsprechung zwischen Strecken und ihren bezüglich einer Maßeinheit zahlenmäßig ausgedrückten Längen ist uns heute so selbstverständlich, daß es uns sehr schwer fällt, uns in die antike Denkweise zurückzuversetzen, die mit Strecken, Flächen und Körpern umging, ohne damit irgendwelche Vorstellungen von Maßzahlen zu verbinden.

Descartes' in französischer Sprache geschriebene und im Widerspruch zu seinem philosophischen Bekenntnis zur menschlichen Vernunft nicht besonders klare Abhandlung war zur rechten Stunde erschienen, um einem herangereiften dringenden gesellschaftlichen Bedürfnis zu dienen, der uneingeschränkten Behandlung geometrischer und damit auch naturwissenschaftlicher und technischer Fragen mittels algebraischen Formelkalküls. Schon 1646 wurde sie durch Übersetzung ins Lateinische einem breiten gelehrten Publikum zugänglich.

Weitere Übersetzungen und Bearbeitungen folgten rasch, aber es bedurfte noch vieler inhaltlicher Schritte und der Beiträge vieler Mathematiker, um der Koordinatenmethode jene klassische Form zu geben, die sie etwa um die Mitte des 19. Jh. erreicht hatte. Und selbst diese, lange Zeit als vollendet angesehene Form hat in unserem von der Informatik geprägten Zeitalter wesentliche Erweiterungen und Bereicherungen erfahren. Über diese weitere Entwicklung wird im zweiten Teil berichtet.

P. Schreiber

Drei harte Nüsse

▲1▲ Ein Autofahrer fährt um 12.00 Uhr von A nach B ab, ein zweiter Autofahrer fährt 14.00 Uhr von B nach A. Sie treffen sich um 16.05 Uhr und kommen beide zur gleichen Zeit an ihren Zielorten an. Beide Autos fahren mit konstanter Geschwindigkeit. Wann kamen sie am Ziel an?

▲2▲ Wie kann man mit Hilfe des Schulrechners SR 1 die Gleichung $x = \cos x$ unter alleiniger Verwendung einer Taste (näherungsweise, mit Rechnergenauigkeit) lösen?

▲3▲ Wer findet mit Hilfe des SR 1 Fixpunkte von anderen Gleichungen durch ausschließliches Betätigen von SR 1-Tasten?

Mr. Doris Gollé, Apothekerin, Wien

Ein Verfahren zur Gewinnung aller teilerfremden pythagoreischen Zahlentripel aus dem Tripel (3; 4; 5)

Drei positive ganze Zahlen bilden ein *pythagoreisches Zahlentripel* $(a; b; c)$, wenn $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.
Ist $(a; b; c)$ ein pythagoreisches Zahlentripel, so ist auch für eine beliebige positive ganze Zahl k das Tripel $(ka; kb; kc)$ ein solches, denn es gilt dann
$k^2(a^2 + b^2) = k^2c^2$,
also $(ka)^2 + (kb)^2 = (kc)^2$.

Stellt man die Frage nach *allen* pythagoreischen Zahlentripeln, so genügt es deshalb, zunächst nach allen *teilerfremden* zu suchen.
Alle teilerfremden pythagoreischen Zahlentripel ergeben sich aus den Gleichungen

$$a = u \cdot v, \quad b = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad c = \frac{1}{2}(u^2 + v^2), \qquad (*)$$

wenn $(u; v)$ die Menge aller Paare teilerfremder ungerader positiver ganzer Zahlen (im folgenden „tupgZ" abgekürzt) mit $u > v$ durchläuft. Man kann dies z. B. in *Lietzmann:* Der Pythagoreische Lehrsatz (Mathematische Schülerbücherei, Band 6) nachlesen.

Wie kann man aber alle Paare tupgZ mit $u > v$ *systematisch* erhalten? Wir werden eine Möglichkeit dazu angeben und dabei erkennen, daß es möglich ist, *jedes* teilerfremde pythagoreische Zahlentripel durch wiederholtes Anwenden eines Systems von linearen Gleichungen aus dem Tripel (3; 4; 5) zu gewinnen.

Satz 1
a) Ist $(u; v)$ ein Paar tupgZ mit $u > v$, so ist auch jedes Paar $(\bar{u}; \bar{v})$, das mit Hilfe eines der drei Systeme

(A) $\bar{u} = u + 2v$, $\bar{v} = v$ (B) $\bar{u} = 2u + v$, $\bar{v} = u$
(C) $\bar{u} = 2u - v$, $\bar{v} = u$

gewonnen wurde, ein solches.
b) Ist $(\bar{u}; \bar{v})$ ein Paar tupgZ mit $\bar{u} > \bar{v}$, das verschieden vom Paar (3; 1) ist, so läßt sich dieses mit Hilfe genau eines der drei Systeme (A), (B), (C) aus einem Paar tupgZ mit $u > v$ erzeugen. Das Paar $(u; v)$ ist durch $(\bar{u}; \bar{v})$ eindeutig bestimmt.
c) Durch wiederholte Anwendung des in a) beschriebenen Schrittes läßt sich jedes Paar tupgZ $(\bar{u}; \bar{v})$ mit $\bar{u} > \bar{v}$ aus dem Paar (3; 1) gewinnen (siehe Bild 1).

Beweis:
a) 1. Da es sich bei den rechten Seiten der Gleichungen in (A), (B) und (C) ausschließlich um Summen von Vielfachen von u und v handelt, gibt es in jedem der drei Fälle genau ein Paar $(\bar{u}; \bar{v})$.
2. Es werden nur *ganze* Zahlen erzeugt, denn das Produkt, die Summe und die Differenz zweier ganzer Zahlen ist stets wieder eine ganze Zahl.
3. Es werden nur *positive* Zahlen erzeugt. Dies ist in (A) und (B) offensichtlich.
Für (C) gilt: Wegen $u > v$ ist $u - v > 0$ und mit $u > 0$ erst recht $2u - v > 0$.
4. Daß nur *ungerade* Zahlen erzeugt werden, ist leicht zu erkennen.
5. $\bar{u}$ und $\bar{v}$ sind stets zueinander *teilerfremd.* Hätten $\bar{u}$ und $\bar{v}$ einen größten gemeinsamen Teiler k mit $k > 1$, so hätten in (A), (B) und (C) auch jeweils die rechten Seiten der zwei Gleichungen diesen g.g.T. Haben aber $2x \pm y$ und x für $x, y \in Z$ den g.g.T. $k > 1$, so teilt k auch y.
In unseren Fällen würde gelten g.g.T. $(u, v) = k > 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung.
6. Wegen $u > v$ gilt $\bar{u} > \bar{v}$. In den Fällen (A) und (B) ist dies wegen der rechten Seiten der Gleichungen sofort einzusehen. Im Fall (C) folgt aus $u > v$ $u - v > 0$, also $2u - v > u$ und damit $\bar{u} > \bar{v}$.
b) 1. Löst man die Gleichungssysteme (A), (B) und (C) jeweils nach u und v auf, so erhält man

(A') $u = \bar{u} - 2\bar{v}$, $v = \bar{v}$ (B') $u = \bar{v}$, $v = \bar{u} - 2\bar{v}$
(C') $u = \bar{v}$, $v = 2\bar{v} - \bar{u}$

2. Die rechten Seiten der Gleichungen in (A'), (B') und (C') sind sämtlich Summen von Vielfachen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$. Deshalb liefert für ein gegebenes Paar $(\bar{u}; \bar{v})$ jedes der Systeme (A'), (B'), (C') genau ein Paar $(u; v)$.
3. Ganzzahligkeit, Teilerfremdheit und Ungeradheit von u und v können genau wie im Beweis zu a) leicht gezeigt werden.

4. Jedoch ist die Bedingung $u > v > 0$ nur in genau einem der drei Fälle (A'), (B'), (C') erfüllt. Wir zeigen dies:
Es ist erkennbar, daß *entweder* die zweite Gleichung von (B') *oder* die zweite Gleichung von (C') für v eine negative Zahl liefert. Folglich entfällt eines der Systeme (B'), (C').
Entfällt nun (B') wegen $\bar{u} - 2\bar{v} < 0$, so entfällt aus demselben Grunde auch (A'), d.h. es bleibt nur noch das mit (C') gewonnene Zahlenpaar $(u; v)$.
Entfällt aber (C'), so stellen wir weiter fest, daß sich (A') und (B') nur durch Vertauschung von u und v voneinander unterscheiden. Folglich ist nur für eines dieser Systeme die Bedingung $u > v$ erfüllt.
Eine genaue Untersuchung der Erfüllbarkeit der Forderung $u > v > 0$ ergibt

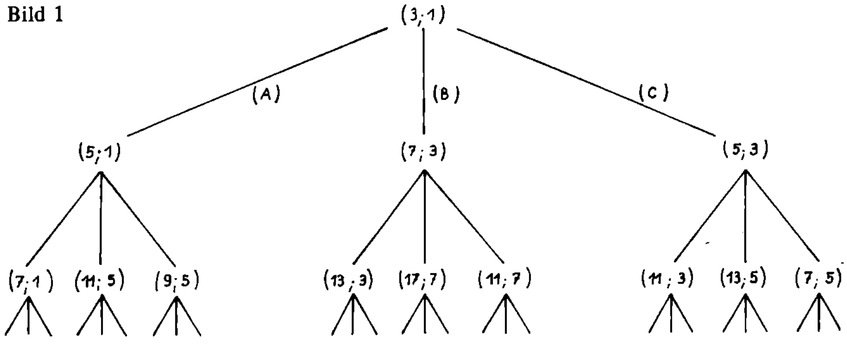
im Falle (A')
$\bar{u} - 2\bar{v} > \bar{v} > 0$
$\bar{u} > 3\bar{v} > 2\bar{v}$
$\bar{u} > 3\bar{v}$

im Falle (B')
$\bar{v} > \bar{u} - 2\bar{v} > 0$
$3\bar{v} > \bar{u} > 2\bar{v}$

im Falle (C')
$\bar{v} > 2\bar{v} - \bar{u} > 0$
$-\bar{v} > -\bar{u} > -2\bar{v}$
$2\bar{v} > \bar{u} > \bar{v}$

Folglich liefert
nur (C') das Paar $(u; v)$, wenn $\bar{v} < \bar{u} < 2\bar{v}$ gilt,
nur (B') das Paar $(u; v)$, wenn $2\bar{v} < \bar{u} < 3\bar{v}$ gilt und
nur (A') das Paar $(u; v)$, wenn $3\bar{v} < \bar{u}$ gilt.
5. Untersucht man die durch die zuletzt gefundenen Bedingungen nicht erfaßten Fälle $\bar{u} = \bar{v}$, $\bar{u} = 2\bar{v}$ und $\bar{u} = 3\bar{v}$, so stellt man fest: Die Fälle $\bar{u} = \bar{v}$ und $\bar{u} = 2\bar{v}$ treten wegen der Teilerfremdheit von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ nur für die Paare (1; 1) bzw. (2; 1) ein. Beide erfüllen nicht die Voraussetzung des Satzes, brauchen also nicht weiter untersucht zu werden.
Ebenfalls wegen der Teilerfremdheit von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ gilt $\bar{u} = 3\bar{v}$ genau für das im Satz erwähnte Paar (3; 1).
Eine Anwendung der Systeme (A'), (B'), (C') würde hier die Paare (1; 1), (1; 1) bzw. (1; −1) liefern.
Bevor wir Teil c) beweisen, vereinbaren wir: Ein Zahlenpaar $(i; j)$ heiße *größer* als

Bild 1



das Paar $(k; l)$ genau dann wenn entweder

$i = k$ und $j > l$
oder $i = l$ und $j > k$
oder $j = k$ und $i > l$
oder $j = l$ und $i > k$ gilt.

Wir schreiben $(i; j) > (k; l)$.

Ein Paar P_1 ist demnach genau dann größer als das Paar P_2, wenn unabhängig von der Bezeichnung und der Reihenfolge der Komponenten eine Komponente aus P_1 gleich einer Komponente von P_2 ist, die andere Komponente von P_1 aber größer ist als die andere Komponente von P_2.

Wir stellen fest:

1. Für jedes Paar $(\bar{u}; \bar{v})$, das gemäß Teil a) von Satz 1 aus einem Paar tupgZ $(u; v)$ mit $u > v$ gewonnen wurde, gilt
$(\bar{u}; \bar{v}) > (u; v)$:
Eine der Komponenten von $(\bar{u}; \bar{v})$ ist entsprechend den zweiten Gleichungen von (A), (B), (C) gleich einer Komponente von $(u; v)$, und wegen
$u + 2v > u,\ 2u + v > v,\ 2u - v > v$
(letzteres folgt aus
$u - v > 0$, d.h. $2u - 2v > 0$)
stehen die jeweils anderen Komponenten in der geforderten Relation.
2. Für das gemäß Teil b) von Satz 1 durch ein Paar tupgZ
$(\bar{u}; \bar{v}) \neq (3; 1)$. mit $\bar{u} > \bar{v}$ eindeutig bestimmte Paar $(u; v)$ gilt
$(u; v) < (\bar{u}; \bar{v})$: War (A') anzuwenden, so gilt $v = \bar{v}$ und $u < \bar{u}$, bei Anwendung von (B') gilt $u = \bar{v}$ und $v < \bar{u}$, und schließlich gilt bei Anwendung von (C') $u = \bar{v}$ und mit $\bar{v} < \bar{u}$ auch $2\bar{v} < 2\bar{u}$, $2\bar{v} - \bar{u} < \bar{u}$, d.h. $v < \bar{u}$.

Beweise von Teil c):

Ist $(\bar{u}; \bar{v})$ ein beliebiges (von $(3; 1)$ verschiedenes) Paar tupgZ mit $\bar{u} > \bar{v}$, so kann man gemäß b) seinen eindeutig bestimmten *Vorläufer* ermitteln, von diesem wieder den *Vorläufer* usw. Dieses Verfahren bricht nach höchstens $\bar{u} + \bar{v}$ Schritten ab, da sich mit jedem Schritt eine der beiden Komponenten des Paares mindestens um 1 vermindert. Wie aus den Punkten 4. und 5. des Beweises zu b) ersichtlich ist, liefern (A'), (B'), (C') nur dann keinen Vorläufer, wenn das Paar $(3; 1)$ erreicht ist.
Die von $(\bar{u}; \bar{v})$ ausgehende Folge von gemäß b) ermittelten Paaren endet also beim Paar $(3; 1)$. Das heißt aber umgekehrt: Ausgehend vom Paar $(3; 1)$ kann man durch wiederholtes Anwenden des Schrittes in a) *jedes* Paar tupgZ $(\bar{u}; \bar{v})$ mit $\bar{u} > \bar{v}$ erreichen.
Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Satz 2

Alle teilerfremden pythagoreischen Zahlentripel $(\bar{a}; \bar{b}; \bar{c})$ und nur diese werden aus dem Tripel $(3; 4; 5)$ durch wiederholte Anwendung der drei Systeme

(R) $\bar{a} = a - 2b + 2c$
$\bar{b} = 2a - b + 2c$
$\bar{c} = 2a - 2b + 3c$

(S) $\bar{a} = a + 2b + 2c$
$\bar{b} = 2a + b + 2c$
$\bar{c} = 2a + 2b + 3c$

(T) $\bar{a} = -a + 2b + 2c$
$\bar{b} = -2a + b + 2c$
$\bar{c} = -2a + 2b + 3c$

erzeugt.

Beweis:
Die eingangs genannten Gleichungen (*) sind unter der Bedingung $u > 0$ äquivalent zu
$v = \frac{a}{u},\ u^2 = 2b + v^2,\ u^2 = 2c - v^2.$
Durch Addition ergibt sich aus den letzten beiden Gleichungen
$2u^2 = 2b + 2c$, also $u^2 = b + c$, und aus
$v^2 = \frac{a^2}{u^2}$ folgt $v^2 = \frac{c^2 - b^2}{b + c}$ und damit
$v^2 = c - b$. Folglich gilt

$$u \cdot v = a,\quad u^2 = b + c,\quad v^2 = c - b. \qquad (**)$$

Wir wenden Satz 1 an.
Nach dem Gleichungssystem (A) aus Satz 1 gilt $\bar{v} = v$ und $\bar{u} = u + 2v$.
Durch aufeinanderfolgendes Anwenden der Gleichungen (*), (A) und (**) ergibt sich

$$\bar{a} = \bar{u} \cdot \bar{v} = (u + 2v) \cdot v = uv + 2v^2$$
$$= a + 2(c - b) = a - 2b + 2c$$
$$\bar{b} = \frac{1}{2}(\bar{u}^2 - \bar{v}^2) = \frac{1}{2}((u + 2v)^2 - v^2)$$
$$= \frac{1}{2}(u^2 + 4uv + 3v^2)$$
$$= \frac{1}{2}(b + c + 4a + 3c - 3b)$$
$$= \frac{1}{2}(4a + 4c - 2b) = 2a - b + 2c$$
$$\bar{c} = \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) = \frac{1}{2}((u + 2v)^2 + v^2)$$
$$= \frac{1}{2}(u^2 + 4uv + 5v^2)$$
$$= \frac{1}{2}(b + c + 4a + 5c - 5b)$$
$$= \frac{1}{2}(4a - 4b + 6c) = 2a - 2b + 3c.$$

Durch entsprechende Überlegungen erhält man (S) und (T).

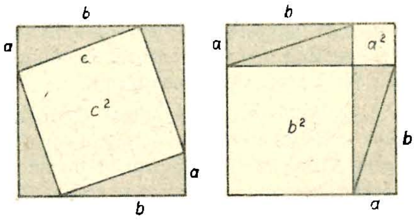
● Führt einige Schritte des im Satz 2 beschriebenen Verfahrens aus, und überprüft, ob *pythagoreische* Zahlentripel entstanden sind!

W. Schultze

Bela Rak, Ungarn

Der Satz des Pythagoras

Ein Dreieck, lebend voll des Dünkels
des Habens eines rechten Winkels,
sich die Quadrate, artvertraut,
sofort auf jede Seite baut.
Ganz aufgetakelt tut es stehen
und meint, schön sei es anzusehen.
Denn die Katheten, so quadriert
und danach beide aufsummiert
sind gleich dem – nach des Satzes Flusse –
Quadrat von der Hypotenuse.
Und der Beweis läuft ohne Mühe
ganz einfach unter'm Wörtchen siehe:



Pythagoras, verehrt, bewundert,
so lebte v. u. Z. fünfhundert.

Dieses kleine Gedicht sandte uns Frau K. Näther aus Leipzig ein

Der *Lehrsatz des Pythagoras* zählt wegen seiner großen Bedeutung für Berechnungen und Beweisführungen in der Elementargeometrie mit Recht zu den berühmtesten Lehrsätzen der Planimetrie. Seine Entdeckung wird, was mit dieser Absolutheit sicher nicht richtig ist, meist *Pythagoras von Samos* zugeschrieben. Historisch belegte Einzelheiten aus seinem Leben sind nur wenige bekannt.

aus: Kleine Enzyklopädie Mathematik

▲1▲ Für den Satz des Pythagoras sind mehr als 100 Beweise bekannt. Im oben angegebenen Bild wird einer der kürzesten, der Zerlegungsbeweis dargestellt. Vollziehe diesen Beweis nach!

Pythagoras von Samos
(um 580 bis 501 v. u. Z.)

Der aus der Schillerschen Ballade bekannte Tyrann Polykrates von Samos soll einstmals bei einem Gastmahl Pythagoras gefragt haben, wieviel Schüler er habe. Dieser antwortete: „Ich will es sagen dir, o Polykrates. Siehe, die Hälfte treibt die treffliche Mathematik, dagegen ein Viertel erforscht die Tiefen der Natur, der unsterblichen, ein Siebentel übt noch schweigend die Kraft der Seele, im Herzen die Lehre wahrend.
Zähl' drei Jungfrauen hinzu, aus denen Theano hervorragt, soviel führ' ich der Schüler zum Born der ewigen Wahrheit."
Wie viele Schüler hatte Pythagoras?

aus: Kurzweil durch Mathe, J. Lehmann

25 Jahre ABC-Mathematikolympiaden

Jedes Jahr werden die Schüler der Klassen 1 bis 4 im Märzheft der ABC-Zeitung aufgerufen, sich an der ABC-Mathematikolympiade zu beteiligen. Die Zeitschrift *Die Unterstufe* informiert die Lehrer jeweils zur gleichen Zeit und veröffentlicht die Aufgaben der 2. Stufe (in Klausurform).

Welche Aufgaben haben diese Olympiaden? – Sie sollen bei den Schülern von der ersten Klasse an die Liebe zur Mathematik wecken, vorhandenes Interesse weiter fördern, die Lust an mathematischem Denken und Knobeln entwickeln helfen und damit zu einer sinnvollen Freizeitbeschäftigung beitragen. Alle Schüler der Klassen 1 bis 4 haben somit die Möglichkeit, ihre Kräfte miteinander zu messen, indem sie die gestellten Aufgaben lösen, sich in einer 1. Stufe zu Hause und in einer 2. Stufe in einer Klausur im Rahmen der Schule, in zentralen Veranstaltungen der Pionierhäuser, Stationen der Jungen Naturforscher oder Klubhäusern zu bewähren. Sie geben Gelegenheit, besonders leistungsstarke Schüler zu erkennen und weiterzufördern, stellen eine echte Vorbereitung auf die *Olympiaden Junger Mathematiker der DDR* (für Klassen 5 bis 11/12) dar.

Diese ABC-Mathematikolympiaden können auf eine 25jährige Tradition zurückblicken. Sie wurden im Rahmen des *Mathematikbeschlusses* des ZK der SED vom 17. Dezember 1962 im Jahre 1963 ins Leben gerufen. An dieser Stelle sei den Initiatoren dieser Höhepunkte außerunterrichtlicher Arbeit, besonders aber den „Schöpfern" der zahlreichen Aufgaben und den Mitarbeitern der *ABC-Zeitung* und der *Die Unterstufe*, den Lehrern, Arbeitsgemeinschaftsleitern und auch den Eltern gedankt. Ist es nicht ein schöner Erfolg, wenn jährlich an rund 180 000 *Junge Mathematiker* Urkunden für vorbildliche Leistungen überreicht werden können? *J. Lehmann*

Auswahl von Aufgaben

ABC-Mathematikolympiade
Klassen 3 und 4

▲1▲ Schreibe die größte dreistellige Zahl auf! Welche Zahl mußt du zu dieser Zahl addieren, um 1000 zu erhalten?

▲2▲ Ordne die folgenden Zahlen der Größe nach, obwohl einige Grundziffern (*) unlesbar sind!
344*0; *9*; ***1; 83; 1000; 354*1

▲3▲ Welche Zahlen erfüllen die folgenden Ungleichungen?
a) $x + 3 < 10$;
b) $43 < 5x < 68$;
c) $37 > 3x + 27 > 34$.

▲4▲ Wenn man die Zahl a um 7 verkleinert und das Ergebnis auf das Neunfache erhöht, so erhält man 108.
Wie heißt die Zahl a?

▲5▲ Setze für A und B Zahlen ein, aber beachte die Zeichen „+", „−" und „·"!

$$\begin{array}{ccccc} A & + & A & & B \\ + & & \cdot & & - \\ A & \cdot & A & = & B \\ \hline B & - & B & = & 0 \end{array}$$

▲6▲ Ergänze das Quadrat so, daß die Summe in jeder Zeile und Spalte dieselbe Zahl ergibt!

75	12	57
	48	
39		21

▲7▲ Subtrahiere von 3 182 100 das Produkt der Zahlen 56 823 und 56! Um wieviel ist die Differenz größer als 10?

▲8▲ Vervollständige die Tabelle!

e	Nachfolger von e	Vorgänger von e	Nachfolger des Doppelten von e	Doppeltes des Nachfolgers von e
100				
		204		
	18			

▲9▲

a	b	300	Nachfolger von $a + b$
7	1000		
	0003	15	
		9	10

▲10▲

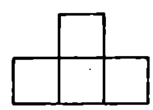
$$\begin{array}{l} 34 + a = 40 \\ 40 : 10 = b \\ b \cdot a = c \\ \hline c : (a - b) + 44 = 56 \end{array}$$

Welche Zahlen mußt du für a, b und c einsetzen?

▲11▲ Zeichne ein Rechteck, das 7 cm lang und 5 cm breit ist. Unterteile die Länge so, daß ein Quadrat und ein Rechteck entstehen. Das Quadrat zerlege in 4 kleine Quadrate. Wie lang sind die Seiten eines kleinen Quadrates?

▲12▲ Zeichne ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $a = 4$ cm.
Verbinde A mit C und B mit D!
Zeichne um jeden Eckpunkt und den Schnittpunkt von $\overline{AC}$ mit $\overline{BC}$ einen Kreis mit dem Radius $r = 2$ cm!

▲13▲ Zerschneide die Figur mit einem Schnitt so, daß die entstehenden Teile zu einem Quadrat zusammengesetzt werden können! Finde zwei Möglichkeiten!



▲14▲ Im Schulgarten sollen Sträucher in Reihen von 8 m Länge gepflanzt werden, in jede Reihe 10 Sträucher. Die Schule kaufte 50 Sträucher. Wieviel Meter beträgt die Gesamtlänge der Reihen, die bepflanzt werden können?

▲15▲ Horst fährt mit dem Fahrrad zur Schule. Um 7.45 Uhr hat er die halbe Strecke zurückgelegt. Der Unterricht beginnt um 8 Uhr. Wenn er mit gleichem

Aus dem Beschluß des Politbüros des ZK der SED und des Ministerrates der DDR vom 17. Dezember 1962

- In allen Jugend- und Kinderzeitschriften sind regelmäßig nach einem genauen Plan interessante Probleme und Aufgaben sowie geeignete Beiträge über die geschichtliche Entwicklung der Mathematik und über ihre Rolle in Wissenschaft und Technik zu veröffentlichen. Mit Unterstützung des Ministeriums für Volksbildung und der Mathematischen Gesellschaft der DDR sind zu diesem Zweck bei den Redaktionen Fachgruppen zu bilden.
- Die Förderung erfolgreicher Teilnehmer der mathematischen Olympiaden und anderer mathematisch befähigter Schüler ist eine gemeinsame Aufgabe der Schulen und Volksbildungsorgane, der Mathematischen Gesellschaft der DDR, der Wissenschaftler der Hoch- und Fachschulen, der wissenschaftlich-technischen Kader der Betriebe und Forschungsstätten sowie der gesellschaftlichen Organisationen.

Tempo weiterfährt, so ist er 5 Minuten vor Unterrichtsbeginn in der Schule.
a) Wieviel Minuten Fahrzeit benötigt Horst für die gesamte Wegstrecke?
b) Wann fährt Horst von zu Hause fort?

▲16▲ In einem Stadtbezirk wurden 260 große Wohnungen renoviert. Der zehnte Teil der Wohnungen hat 56 m² Wohnfläche, der vierte Teil der Wohnungen hat 67 m² und der Rest 80 m² Wohnfläche pro Wohnung. Berechne die Gesamtwohnfläche aller renovierten Wohnungen!

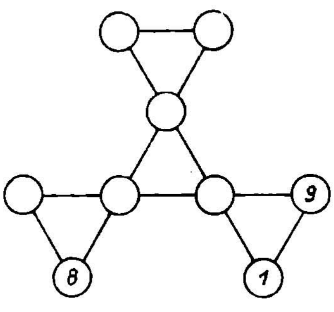
▲17▲ Aus 30 g Blütennektar entstehen 10 g Bienenhonig.
Wieviel Gramm Blütennektar sind für 1 kg Bienenhonig notwendig?

▲18▲ Für 3 Handtücher vom gleichen Preis bezahlt Mutter 4,62 Mark.
Wieviel Mark würden 7 Handtücher dieser Sorte kosten?

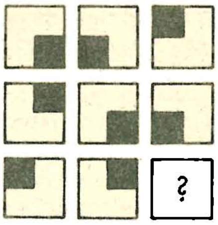
▲19▲ In einem Korb liegen 5 gelbe und 3 rote Kugeln. Man kann in den Korb hineingreifen, aber die Kugeln nicht erkennen.
Wie oft muß man in den Korb greifen, um ganz sicher 2 Kugeln herauszuholen, die die gleiche Farbe haben?

▲20▲ Uwe sagt: „Mein Vater ist 42 Jahre alt. Mein Vater ist zwei Jahre älter als meine Mutter. Meine Mutter ist doppelt so alt wie mein Bruder und ich. Ich bin zwei Jahre jünger als mein Bruder.“ Wie alt sind Uwe, sein Bruder und seine Mutter?

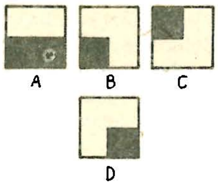
▲21▲ In einem Bild sollen die Kreise Eckpunkte von Dreiecken darstellen.
Die neun Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sollen so in die neun Kreise eingetragen werden, daß die Summe in jedem Dreieck 15 beträgt. (Die Zahlen 1, 8 und 9 wurden bereits eingetragen.)



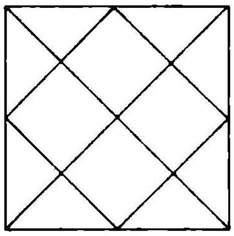
▲22▲ Die Quadrate sind in dem Bild nach einer Regel angeordnet.



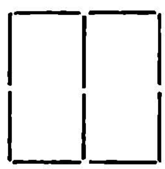
Welches der Quadrate würdest du an Stelle des Fragezeichens setzen? Schau dir genau die Zeilen und auch die Spalten an! Erkennst du die Regel?



▲23▲ Wieviel Quadrate findest du in dieser Zeichnung?
Und wieviel Dreiecke sind es?



▲24▲ In dem Bild ist eine Figur mit 10 gleichen Hölzchen gelegt. Lege *ein* Hölzchen so um, daß in der Figur zwei Quadrate entstehen!



▲25▲ Jeder von vier Brüdern einer Familie sagt: „Ich habe zwei Schwestern.“ Wieviel Kinder gehören zur Familie?

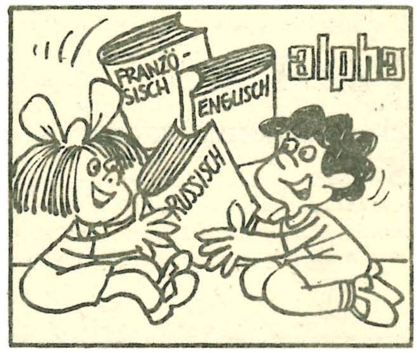
Zitiert

● Man muß den zukünftigen Mathematiker von Kindheit an erziehen, je früher, desto besser.
Niemanden verwundert es, daß die Ausbildung einer zukünftigen Ballerina oder eines zukünftigen Musikers meistens schon in früher Kindheit, im Alter von 6 bis 8 Jahren, beginnt. Das erklärt sich dadurch, daß eine erfolgreiche Beherrschung der Feinheiten der Ballettkunst oder der Musik im jugendlichen Alter unmöglich ist ohne eine spezialisierte Ausbildung in der Kindheit. ... Man darf nicht glauben, daß es in der Wissenschaft und besonders in der Mathematik anders wäre.

W. G. Boltjanski, I. M. Jaglom, Moskau

● Wir müssen die Vorzüge unseres einheitlichen und zugleich gegliederten Bildungswesens noch besser nutzen, um alle Talente zu entwickeln, darunter vor allem Spitzenbegabungen.

Prof. Dr. G. Neuner, Präsident der Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der DDR



▲1▲
Find a digit to replace each letter.

$$\begin{array}{r} \text{FIVE} \\ -\ \text{FOUR} \\ \hline \text{ONE} \end{array}$$

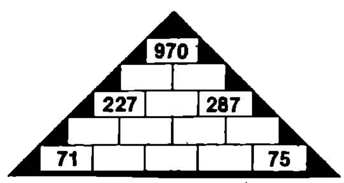
Each letter stands for only one digit.
(There is more than one possible answer.)

▲2▲ В последнее время я много хожу на лыжах. Правда, позавчера я прошел на 3 км больше, чем вчера, а вчера на 40 км меньше, чем позавчера и сегодня вместе. Сколько километров я прошел на лыжах сегодня?

▲3▲ Un bassin est alimenté en eau par deux robinets; l'un, en coulant seul, remplit ce bassin en 9 heures; l'autre le remplit en 6 heures.
a) Quelle fraction du volume du bassin chacun de ces robinets remplit-il en 1 heure?
b) On ouvre simultane les deux robinets. Quelle est la fraction de volume du bassin remplit au bout d'une heure?
c) Au bout de combien de temps le bassin sera-t-il plein?

▲4▲ **La pyramide des nombres**
Sachant que chaque nombre est égal à la somme des deux nombres situés dans les rectangles au-dessous de lui, reconstituez cette pyramide arithmétique!

aus: Maximath, Belgien



Fan-Tan

ein mathematisches Spiel

Fan-Tan ist ein Spiel für zwei Personen, für das lediglich einige kleine Steine, Streichhölzer oder ähnliches benötigt werden. Es stammt vermutlich aus China. Die wohl bekannteste Variante des Spiels läßt sich wie folgt beschreiben:

Auf einem Tisch werden 15 Steine in drei Haufen angeordnet.

Der erste Haufen enthält 7 Steine, der zweite Haufen 5 Steine und der dritte Haufen 3 Steine. Die beiden Spieler (nennen wir sie A und B) nehmen nun abwechselnd von einem der drei Haufen eine beliebige Anzahl von Steinen weg. Dabei ist es gleichgültig, von welchem der drei Haufen die Steine weggenommen werden, wichtig ist nur, daß jeweils wenigstens ein Stein weggenommen wird und alle mit einem Mal weggenommenen Steine von ein und demselben Haufen sind. So wird verfahren, bis sich kein Stein mehr auf dem Tisch befindet. Gewonnen hat, wer den letzten Stein nimmt.

Um den Verlauf einer Partie in übersichtlicher Form darstellen zu können, charakterisieren wir jede *Stellung* der Partie durch ein Zahlentripel $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, dessen Komponenten a_1, a_2 und a_3 folgende Bedeutung haben sollen: der erste Haufen enthält genau a_1, der zweite genau a_2 und der dritte genau a_3 Steine.

An Hand zweier Beispiele soll der Verlauf einer Partie verdeutlicht werden (über dem Pfeil wird jeweils der zum Zug kommende Spieler angegeben):

a)

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Im ersten Beispiel gewinnt A; im zweiten dagegen B.

Wir wollen uns bei der mathematischen Untersuchung des Spiels nicht auf den oben beschriebenen Spezialfall von drei Haufen und der *Anfangsstellung* $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ beschränken. Es wird daher vereinbart, daß m Haufen von Steinen gebildet werden, und zwar enthalte der i-te Haufen $(1 \leqq i \leqq m)$ zu Beginn des Spiels n_i Steine. Eine bestimmte *Stellung* des Spiels wird dann in der Form

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

dargestellt, wobei a_i $(1 \leqq i \leqq m)$ die Anzahl der Steine im i-ten Haufen angibt. Das Ziel unserer Untersuchungen ist es, herauszufinden, ob es eine Regel (Gewinnstrategie genannt) gibt, die es einem der beiden Spieler gestattet, den Gewinn zu erzwingen, und zwar unabhängig von der Spielweise seines Gegners. Da eine Partie stets nach einer endlichen Anzahl von *Zügen* beendet ist, muß es immer einen Gewinner und einen Verlierer geben. Es ist also klar, daß eine solche Gewinnstrategie – im Falle ihrer Existenz – nur für einen der beiden Spieler anwendbar ist.

Im Ergebnis unserer Untersuchungen wird sich zeigen, daß stets einer der beiden Spieler, in Abhängigkeit von der Anfangsstellung, den Gewinn erzwingen kann.

Mathematische Theorie des Fan-Tan

Um das Spiel einer mathematischen Untersuchung zugänglich zu machen, ist es erforderlich, daß wir den zur Beschreibung verwendeten Begriffen der Umgangssprache eine wohlbestimmte mathematische Bedeutung geben: Einen konkreten Spielverlauf wollen wir als eine *Partie* bezeichnen. Das Wegnehmen von Steinen durch einen Spieler entsprechend der Spielregel heiße ein *Zug*. Der Einfachheit halber wollen wir denjenigen Spieler, welcher den ersten Zug ausführt, Spieler A und den anderen Spieler B nennen.

Offenbar ist der Stand des Spiels zu jedem Zeitpunkt einer Partie vollständig bekannt, wenn wir wissen:

a) welcher Spieler am Zug ist und

b) wie viele Steine sich in den einzelnen Haufen befinden.

Das m-Tupel $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$, wobei a_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ die Anzahl der Steine im i-ten Haufen sei, heiße eine *Stellung* (ungeachtet dessen, welcher Spieler am Zug ist). Mitunter werden wir eine Stellung einfach mit einem unterstrichenen kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen.

Eine Stellung $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ heiße von der Stellung $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ erreichbar, wenn es möglich ist, mit einem Zug von der Stellung $\underline{a}$ zur Stellung $\underline{b}$ überzugehen. Aus der Spielregel schließen wir, daß die Stellung $\underline{b}$ genau dann von der Stellung $\underline{a}$ erreichbar ist, wenn es eine Zahl j $(1 \leqq j \leqq m)$ gibt, so daß:

$a_i = b_i$ für $i = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m$

und

$a_j > b_j$.

Dies bedeutet, daß wir Stellung $\underline{b}$ aus der Stellung $\underline{a}$ erhalten können, indem wir vom j-ten Haufen $a_j - b_j$ Steine wegnehmen.

▲ 1 ▲ Welche Stellungen können in einer Partie mit der Anfangsstellung

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_m \end{pmatrix} \quad (\text{mit } n_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m)$$

auftreten? Man bestimme die Anzahl aller möglichen Stellungen!

Wir wollen uns nun der Lösung des in der Einleitung gestellten Problems zuwenden. Hierzu werden wir alle – entsprechend einer vorgegebenen Anfangsstellung $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_m \end{pmatrix}$ – möglichen Stellungen des Spiels in zwei Klassen, in Gewinn- und Verluststellungen, einteilen. Dabei wollen wir unter einer Gewinnstellung eine solche Stellung verstehen, die es dem am Zug befindlichen Spieler ermöglicht, unabhängig von der weiteren Spielweise seines Gegners den Gewinn zu erzwingen.

Als Verluststellung wollen wir dann entsprechend eine solche Stellung bezeichnen, die es dem am Zug befindlichen Spieler unmöglich macht zu gewinnen, vorausgesetzt, sein Gegner spielt *vernünftig*.

Mit den hier eingeführten Begriffen Gewinn- bzw. Verluststellung verbunden ist naturgemäß die Frage, ob sie dem Spiel entsprechend überhaupt einen Sinn haben, d. h., ob es solche Stellungen überhaupt gibt, und wenn ja, wie man diese charakterisieren kann. Man beachte, daß wir sogar angekündigt haben, die Menge aller möglichen Spielstellungen in Gewinn- bzw. Verluststellungen zerlegen zu können, d. h. von *jeder* Spielstellung im Vorhinein entscheiden zu können, ob sie zum Gewinn bzw. Verlust des Spieles führt – besser sollte man wohl sagen: führen kann, denn wir fordern ja immer zusätzlich von dem in einer Gewinnstellung am Zuge befindlichen Spieler, daß er *vernünftig* (auch dies wird im Folgenden zu klären sein) spielt.

Doch wenden wir uns nun endlich der gesuchten Zerlegung zu. Hierzu werden wir ein Verfahren benutzen, welches zurückgeht auf den französischen Mathematiker *C. L. Bouton* (1902) und eine sehr originelle Anwendung des folgenden mathematischen Sachverhaltes beinhaltet:

Jede natürliche Zahl n läßt sich auf eindeutige Weise als Summe paarweise verschiedener Zweierpotenzen darstellen:

$n = \alpha_k 2^k + \alpha_{k-1} 2^{k-1} + \ldots + \alpha_1 2^1 + \alpha_0 2^0$

mit

$\alpha_i = 1$ bzw. $\alpha_i = 0$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, k)$.

Denjenigen Lesern, welche sich schon einmal mit der Darstellung von Zahlen in elektronischen Rechenautomaten beschäftigt haben, ist dieser Sachverhalt als dyadische Darstellung (häufig auch binäre oder duale Darstellung genannt) einer natürlichen Zahl bekannt.

Praktisch erhält man die dyadische Darstellung einer gegebenen natürlichen Zahl durch wiederholtes Dividieren mit Rest (durch 2) und Verwendung der hierbei entstehenden Reste als Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ für die dyadische Darstellung:

Beispiel:

(1)

$$\begin{array}{ll} 11 = 2 \cdot \underline{5} + 1 & \alpha_0 = 1 \\ \underline{5} = 2 \cdot \underline{2} + 1 & \alpha_1 = 1 \\ \underline{2} = 2 \cdot \underline{1} + 0 & \alpha_2 = 0 \\ \underline{1} = 2 \cdot \underline{0} + 1 & \alpha_3 = 1 \end{array} \qquad 11 = 2^3 + 2^1 + 2^0$$

(2)

$$\begin{array}{ll} 8 = 2 \cdot \underline{4} + 0 & \alpha_0 = 0 \\ \underline{4} = 2 \cdot \underline{2} + 0 & \alpha_1 = 0 \\ \underline{2} = 2 \cdot \underline{1} + 0 & \alpha_2 = 0 \\ \underline{1} = 2 \cdot \underline{0} + 1 & \alpha_3 = 1 \end{array} \qquad 8 = 2^3$$

Um die gesuchte Zerlegung in Gewinn- bzw. Verluststellungen vorzunehmen, betrachten wir eine beliebige Stellung

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

aus der Menge M aller bezüglich der Anfangsstellung $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_m \end{pmatrix}$ möglichen Spielstellungen.

Die Zahl d_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ gebe an, wie oft 2^i in den dyadischen Darstellungen der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ auftritt. Tritt 2^i in keiner dieser dyadischen Darstellungen auf, so sei $d_i = 0$. Zur Verdeutlichung betrachten wir zwei Beispiele:

a) $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^0 \\ 2^1 \\ 0 \\ 2^0 + 2^2 \end{pmatrix}.$$

Hier ist $d_0 = 2$ und $d_1 = d_2 = 1$.
Alle anderen d_i sind null.

b) $$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^0 + 2^1 \\ 2^0 + 2^1 + 2^2 \\ 2^1 + 2^3 \end{pmatrix}.$$

Hier ist $d_0 = 2$, $d_1 = 3$ und $d_2 = d_3 = 1$.
Alle anderen d_i sind null.

Die Menge der Stellungen wird nun folgendermaßen in zwei Teilmengen G und V zerlegt: Zur Menge V gehören alle Stellungen

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$ mit der Eigenschaft,

daß alle d_i geradzahlig sind.

Die restlichen Stellungen bilden die Menge G. Die auf diese Weise in M gebildeten Teilmengen V und G sind offenbar disjunkt und erschöpfen M ganz. Wir wollen nun nachweisen, daß einerseits jede Stellung aus V eine Verlust- und andererseits jede Stellung aus G eine Gewinnstellung ist. Hierzu zeigen wir:

(1) Die Endstellung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ gehört zu V.

(2) Jede von einer Stellung $\underline{a} \in V$ erreichbare Stellung $\underline{a}'$ liegt in G.

(3) Zu jeder Stellung $a \in G$ gibt es wenigstens eine von $\underline{a}$ erreichbare Stellung $\underline{a}' \in V$.

Bevor wir den Nachweis der Richtigkeit dieser Aussagen antreten, wollen wir uns vergegenwärtigen, welche Bedeutung sie für das Spiel haben:

- Gelangt ein Spieler (sagen wir A) in einer Stellung $\underline{a} \in G$ zum Zuge, so kann er gemäß (3) seinem Gegenspieler (B) stets eine Stellung aus V vorsetzen; letzterer jedoch bringt (wegen (2)) beim Ziehen den Spieler A wieder in eine Stellung, die notwendig zu G gehört. Somit ist A stets in einer Spielstellung aus G am Zuge und kann in jedem Fall dafür sorgen (indem er (3) wiederholt ausnutzt), daß B stets mit einer Stellung aus V Zugzwang hat. Da einerseits nur endlich viele Steine zur Verfügung stehen und andererseits in jedem Zug des Spielverlaufs wenigstens ein Stein aus einem der Haufen entnommen wird, muß nach endlich vielen Zügen die Endstellung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ entstehen. Weil diese nach (1) zu V gehört, wird sie (bei Einhaltung der auf (3) orientierten Spieltaktik durch Spieler A) dem Spieler B vorgesetzt werden. Damit aber verliert B – die Stellung $\underline{a}$ war also eine Gewinnstellung.
- Gelangt dagegen der Spieler A in eine Stellung $\underline{b} \in V$ zum Zuge, so ist dies entweder die Endstellung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ des Spiels und A hat verloren, oder aber A bringt (gemäß (2)) beim Ziehen seinen Gegenspieler B in eine Stellung aus G. Nach dem oben Gesagten verliert dann jedoch A – vorausgesetzt B benutzt (3) bei der Wahl seiner Spieltaktik. Folglich war $\underline{b}$ eine Verluststellung.

Dies zeigt uns, daß die Aussagen (1)–(3) hinreichend dafür sind, die Stellungen aus G als Gewinn- und die Stellungen aus V als Verluststellungen auszuweisen. Wir wollen uns nun dem Beweis der Aussagen (1)–(3) zuwenden:

Zu (1): Ist $\underline{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, so sind offenbar alle $d_i = 0$ und also geradzahlig.

Die Stellung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ gehört demzufolge zur Menge V.

Zu (2): Ist eine Stellung $\underline{a}'$ von der Stellung $\underline{a}$ erreichbar, so unterscheiden sich $\underline{a}$ und $\underline{a}'$ in der Anzahl der Steine in genau einem der m Haufen. Da in der dyadischen Darstellung einer Zahl jede Zweierpotenz 2^i höchstens einmal auftritt, unterscheiden sich die zu $\underline{a}$ bzw. $\underline{a}'$ gehörenden Zahlen d_i und d_i' jeweils höchstens um 1.

Andererseits ist klar, daß nicht für alle i $d_i = d_i'$ sein kann. Gehört nun die Stellung $\underline{a}$ zur Menge V, so sind alle d_i geradzahlig. Aus dem oben Dargelegten ergibt sich dann, daß bei jeder von $\underline{a}$ erreichbaren Stellung $\underline{a}'$ wenigstens ein ungeradzahliges d_i' auftreten muß, d. h. alle von $\underline{a}$ erreichbaren Stellungen gehören zur Menge G.

Zu (3): Gehört eine Stellung $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ zur Menge G, so treten gewisse Zweierpotenzen in den dyadischen Darstellungen der Zahlen $a_1, \ldots, a_m$ ungeradzahlig oft auf. Die größte dieser Zweierpotenzen sei 2^l.

Es sei a_k $(1 \leqq k \leqq m)$ eine Komponente von $\underline{a}$, in deren dyadischer Darstellung 2^l auftritt. Wir bezeichnen die ungeradzahlig oft auftretenden Zweierpotenzen, welche in der dyadischen Darstellung von a_k vorkommen mit

$$2^l = 2^{i_1}, 2^{i_2}, \ldots, 2^{i_\nu},$$

Die anderen (also nicht in a_k) ungeradzahlig oft auftretenden Zweierpotenzen seien

$$2^{j_1}, \ldots 2^{j_\mu}.$$

Wir betrachten nun die Stellung

$$\underline{a}' = \begin{pmatrix} a_l' \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_m' \end{pmatrix},$$

mit $a_\sigma' = a_\sigma$ für $\sigma = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, m$ und $a_k' = a_k - 2^{i_1} - \ldots - 2^{i_\nu} + 2^{j_1} + \ldots + 2^{j_\mu}$.

Wegen

$$2^l = 2^{i_1} > 2^{i_1} - 1 \geqq 2^{j_1} + \ldots + 2^{j_\mu},$$

ist $a_k' < a_k$ und somit die Stellung $\underline{a}'$ von $\underline{a}$ erreichbar.

Da sich ferner auf Grund der Bildungsvorschrift für $\underline{a}'$ alle ungeradzahligen d_i um $+1$ oder -1 geändert haben, sind die zu $\underline{a}'$ gehörenden d_i' alle gerade, d. h. $\underline{a}'$ gehört zur Menge V.

Weil der Nachweis der dritten Eigenschaft recht kompliziert ist, soll er noch an einem Beispiel verdeutlicht werden:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^0 + 2^1 \\ 2^0 + 2^1 + 2^2 \\ 2^1 + 2^3 \end{pmatrix}.$$

Es ist $d_0 = 2$, $d_1 = 3$ und $d_2 = d_3 = 1$. Da d_1, d_2 und d_3 ungerade sind, gehört $\underline{a}$ *zur Menge* G. Die größte ungeradzahlig oft auftretende Zweierpotenz ist offenbar 2^3. Sie tritt in der dyadischen Darstellung von $a_3 = 10$ auf. In der dyadischen Darstellung von a_3 treten 2^3 und 2^1 auf, 2^2 dagegen nicht, und es ist folglich

$$a_3' = a_3 - 2^3 - 2^1 + 2^2$$
$$= 10 - 8 - 2 + 4 = 4.$$

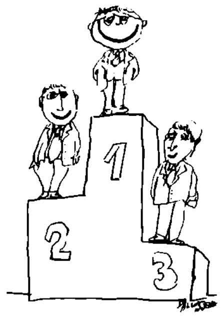
Die *neue* Stellung ist also:

$$\underline{a}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^0 + 2^1 \\ 2^0 + 2^1 + 2^2 \\ 2^2 \end{pmatrix}.$$

▲2▲ Im Beispiel (b) der Einleitung unterläuft dem Spieler A ein Fehler. Finde diesen!

Th. Böhme

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 8. März 1988

Ma 5 ■ 2840 Robert las am ersten Tag genau 36 Seiten eines Buches. Am zweiten Tag las er 12 Seiten mehr als am ersten Tag. Er hatte nun noch drei Viertel der Anzahl der Seiten dieses Buches zu lesen. Wieviel Seiten umfaßt dieses Buch?

Schülerin N. König, Klein Krams

Ma 5 ■ 2841 Ich denke mir eine Zahl. Addiere ich 100 dazu, so erhalte ich zehn mehr als das Zehnfache meiner gedachten Zahl.
Welche Zahl habe ich mir gedacht?

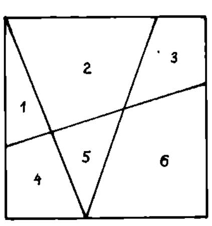
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2842 Egon öffnet seine Sparbüchse, um festzustellen, welchen Geldbetrag er bereits gespart hat. Die Sparbüchse enthält 1-Pf-, 5-Pf-, 10-Pf-, 20-Pf- und 50-Pf-Münzen, keine weiteren Münzen oder Geldscheine. Es sind 18 einzelne Pfennige, zweimal soviel 5-Pf-Münzen und dreimal soviel 10-Pf-Münzen, aber nur halb soviel 50-Pf-Münzen wie 1-Pf-Münzen, außerdem noch neun 20-Pf-Münzen. Welchen Geldbetrag hat Egon gespart?

Schülerin I. Schulze, Zittau

Ma 5 ■ 2843 Jedes der 16 Klassenzimmer einer Schule hat gleich viele Stühle. Aus jedem Klassenzimmer trägt man 8 Stühle in die Aula. Nun sind in den 16 Klassenzimmern noch soviel Stühle, wie vorher in 12 Klassenzimmern waren. In den übrigen Räumen der Schule sind noch weitere 38 Stühle. Über wieviel Stühle verfügt diese Schule? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 5 ■ 2844 Das abgebildete Quadrat wurde durch drei Strecken in zwei Dreiecke (1) und (5) und in vier Vierecke (2), (3), (4) und (6) zerlegt. Wie viele verschiedene Vierecke enthält das abgebildete Quadrat? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

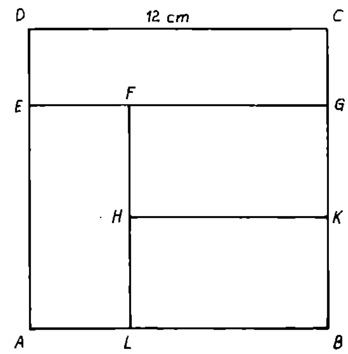


Ma 5 ■ 2845 In dem Schema

$$\begin{array}{r} \text{MATHE} \\ +\,\text{MATHE} \\ \hline \text{ALPHA} \end{array}$$

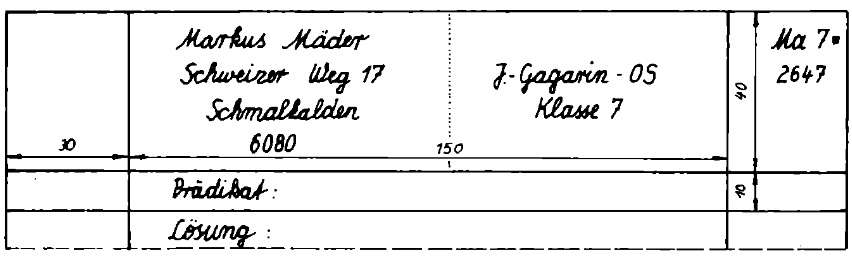
bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Grundziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Grundziffern. Außerdem darf keine Ziffer mit 0 beginnen. Diese Aufgabe besitzt vier Lösungen. Versuche, alle Lösungen zu finden. *Sch.*

Ma 5 ■ 2846 Ein Quadrat $ABCD$ wurde, wie aus dem Bild ersichtlich, in vier Rechtecke $ALFE$, $LBKH$, $HKGF$ und $EGCD$ unterteilt, die sämtlich den gleichen Flächeninhalt besitzen. Wie lang sind die Seiten dieser vier Rechtecke, wenn die Quadratseite 12 cm lang ist? *Sch.*



Ma 6 ■ 2847 Die Handballmannschaft einer Schule trug im vorigen Schuljahr 25 Spiele aus. Sie gewann dreimal so viele Spiele wie sie verlor. Es waren weniger unentschiedene als verlorene Spiele. Wie viele Punkte erreichte die Mannschaft, wenn jedes gewonnene Spiel 2 Punkte, jedes unentschiedene 1 Punkt und jedes verlorene 0 Punkte zählte?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alpha-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027

3. Der jeweiligen Aufgabennummer ist ein Ma (Mathematik), Na/Te (Naturwissenschaft und Technik) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12 oder Na/Te 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug korrigiert.
Noch eine Bitte an die Schulen: Sendet bitte die Lösungen bereits nach Aufgaben sortiert ein.

6. Teilnehmer, die eine richtige Lösung (nicht nur Antwortsatz) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Anderenfalls erhalten sie eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst". Nach dem Einsendetermin eingehende Lösungen werden nicht mehr bearbeitet!

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1987/88 läuft von *Heft 5/1987 bis Heft 1/1988*. Zwischen dem 1. und 10. September 1988 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/87 bis 1/88 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/88 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (von den Wettbewerben der Hefte 5/87 bis 1/88) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein *alpha*-Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1987/88 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunde zurück). Schüler, die schon mehrere Jahre teilnehmen, senden bitte die zuletzt erhaltene Urkunde mit ein. Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

Ma 6 ■ 2848 In dem Schema

$$\begin{array}{r} *9\;*9 \\ +\quad *9\;* \\ \hline **0\;** \end{array}$$

ergibt die Summe aus einer vierstelligen und einer dreistelligen Zahl eine fünfstellige Zahl. Wie lautet die richtig gelöste Additionsaufgabe?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2849 Es ist die kleinste natürliche Zahl zu ermitteln, die durch 4 und 5 teilbar ist und deren Quersumme 36 beträgt!

Sch.

Ma 6 ■ 2850 Ermittle alle Zahlentripel (a, b, c), welche die Gleichung $a \cdot b + c = 100$ erfüllen. Dabei sind a, b, c Primzahlen, und es gilt $a < b < c$.

OL W. Melka, Neubrandenburg

Ma 6 ■ 2851 In einem rechtwinkligen Dreieck ABC ist die Hypotenuse $\overline{AB}$ doppelt so lang wie die Kathete $\overline{BC}$. Es sind die Größen α und β der beiden spitzen Innenwinkel des rechtwinkligen Dreiecks ABC zu bestimmen!

Schülerin A. Bothe, Manschnow

Ma 6 ■ 2852 Es sind alle Dreiecke zu ermitteln, bei denen die Maßzahlen der Seitenlängen natürliche Zahlen sind, und die folgende Bedingungen erfüllen:
(1) Für die Seitenlängen a, b, c gilt $a < b < c$.
(2) Das Sechsfache der kleinsten Seitenlänge ist gleich dem Produkt aus den beiden anderen Seitenlängen.

Schüler Ch. Bölling, Berlin

Na/Te 6 ■ 407 Welche Durchschnittsgeschwindigkeit hat der Motorkolben eines PKW vom Typ *Trabant 601*, wenn der Hub 73 mm beträgt und in 10 s 500 Umdrehungen der Kurbelwelle erfolgen?

aus: Aufgabensammlung Physik, Volk und Wissen, Berlin

Ma 7 ■ 2853 Von 32 Schülern gehört jeder wenigstens einer der Arbeitsgemeinschaften Modellbau oder Werken an. In der AG Werken sind doppelt so viele Teilnehmer wie in der AG Modellbau. Ein Drittel der Modellbauer beteiligt sich auch an der AG Werken.
Wie viele Schüler nehmen an beiden Arbeitsgemeinschaften teil?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ■ 2854 Werner wurde gefragt, wieviel Antwortkarten des *alpha*-Wettbewerbs er schon erhalten hätte. Er sagte: „Bis auf 3 Karten hatten alle Karten den Vermerk ‚sehr gut gelöst‘.
Bis auf 7 Karten war der Vermerk ‚gut gelöst‘ und bis auf 8 Karten war der Vermerk ‚nicht gelöst‘ angegeben.“ Wieviel Karten von jeder Art hat Werner erhalten?
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ■ 2855 Zeichne ein gleichseitiges Dreieck ABC. Lege einen beliebigen inneren Punkt P fest und verbinde ihn mit den Eckpunkten A, B und C. Das Dreieck ABC habe die Seitenlänge a, die Verbindungsstrecken $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ bzw. $\overline{PC}$ haben die Längen x, y bzw. z. Weise nach, daß stets gilt

$$x + y + z > \frac{3}{2} \cdot a!$$

Sch.

Ma 7 ■ 2856 Einem Kreis k mit dem Radius r wurde ein Quadrat einbeschrieben, d. h., die Ecken des Quadrates liegen auf der Peripherie des Kreises. Wieviel Prozent vom Flächeninhalt des Kreises beträgt der Flächeninhalt des ihm einbeschriebenen Quadrates?

Sch.

Ma 7 ■ 2857 „Sag mir bitte, wann du in diesem Jahr Geburtstag hattest“ wird Jürgen von seinem Freund gefragt. Jürgen lächelt und sagt: „Damit du es gut behältst, berechne die fünfstellige Zahl für die $***87 = 7 \cdot ****$ gilt. Dabei besteht die vierstellige Zahl aus vier aufeinanderfolgenden Zahlen und ist so groß wie möglich.“
(*Bemerkung:* Es wäre z.B. 21.9.87 ohne die Punkte eine entsprechende fünfstellige Zahl.)

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Na/Te 7 ■ 408 Auf einer Kochplatte wird ein Topf mit Wasser erwärmt. Warum geht die Erwärmung von 20 °C auf 30 °C schneller vor sich als die Erwärmung von 80 °C auf 90 °C (bei gleicher Wärmeabgabe der Heizplatte)?

aus: Aufgabensammlung Physik, Volk und Wissen, Berlin

Na/Te 7 ■ 409 Es soll ein Spiegel an eine senkrechte Wand so aufgehängt werden, daß sich ein Mädchen (Körpergröße 170 cm, Augenhöhe 160 cm) vollständig betrachten kann. Wie hoch muß die Oberkante über dem Erdboden hängen und wie groß muß der Spiegel mindestens sein?
(*Lösungshinweis:* Beachte bei der geometrischen Lösung, daß Lichtstrahlen sowohl von den Fußspitzen als auch vom Scheitel zum Auge gelangen müssen.) *R.*

Ma 8 ■ 2858 Gesucht ist wenigstens eine neunstellige natürliche Zahl, die aus den Ziffern 1 bis 9 besteht und in welcher jede dieser Ziffern genau einmal vorkommt. Die gesuchte Zahl hat folgende Eigenschaften:
Die aus den ersten beiden Ziffern gebildete Zahl ist durch 2 teilbar, die aus den ersten drei Ziffern gebildete Zahl ist durch 3 teilbar, die aus den ersten vier Ziffern gebildete Zahl ist durch 4 teilbar, die aus den ersten fünf Ziffern gebildete Zahl ist durch 5 teilbar, die aus den ersten sechs Ziffern gebildete Zahl ist durch 6 teilbar, die aus den ersten sieben Ziffern gebildete Zahl ist durch 7 teilbar, die aus den ersten acht Ziffern gebildete Zahl ist durch 8 teilbar, die aus den ersten neun Ziffern gebildete Zahl ist durch 9 teilbar.
(Hinweis: Benutze den Taschenrechner!)

Fachlehrer W. Bucher, Gerstungen

Ma 8 ■ 2859 Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, für welches
$\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = a = 5$ cm und $\overline{AB} = 2a$ gilt!
Berechne die Länge der Diagonalen $\overline{AC}$!

Diplomlehrer J. Kreusch, Löbau

Ma 8 ■ 2860 Einem rechtwinkligen Dreieck ABC, dessen Hypotenuse $\overline{BC}$ die Länge 5 cm und dessen Kathete $\overline{AB}$ die Länge 3 cm besitzt, ist ein Halbkreis einzubeschreiben, dessen Mittelpunkt M auf der Kathete $\overline{AC}$ liegt und der die Geraden AB und BC berührt. Es ist die Länge des Radius dieses Halbkreises zu bestimmen! *Sch.*

Ma 8 ■ 2861 Die Ziffernfolge einer fünfstelligen natürlichen Zahl werde durch deren Multiplikation mit 4 umgekehrt. Welche natürliche Zahl erfüllt diese Bedingung? *Dipl.-Ing. H. Miethig, Dresden*

Ma 8 ■ 2862 Eine Portion Eis mit Sahne kostet 2,15 M. Eine Portion Ananas mit Sahne kostet 2,55 M. Eine Portion Eis mit Ananas kostet 2,30 M.
a) Wieviel kostet eine Portion Eis mit Ananas und Sahne?
b) Wieviel kostet jeweils eine Portion Eis, Ananas bzw. Sahne? *O. Gehring, Dresden*

Na/Te 8 ■ 410 Ein Hebel ist 2 m lang. An welcher Stelle muß er unterstützt werden, damit man mit einer Kraft von 20 N eine Last von 140 N anheben kann? (Der Hebel soll als zweiseitiger Hebel wirken!) *R.*

Na/Te 8 ■ 411 Ein Federkraftmesser, an dem ein Körper aus Blei angehängt ist, zeigt 0,565 N. Nach dem Eintauchen in Wasser zeigt er 0,515 N. Wie groß ist das Volumen des Bleikörpers?
(Beachte, daß auf einen Körper von 100 g Masse eine Gewichtskraft von – annähernd – 1 N auf der Erde wirkt.)

aus: Aufgabensammlung Physik, Volk und Wissen, Berlin

Ma 9 ■ 2863 Gegeben seien drei Quadrate. Zwei davon sind zueinander kongruent. Das dritte Quadrat hat eine um 2 cm längere Seite als jedes der zwei kongruenten Quadrate. Sein Flächeninhalt ist um 4 cm² größer als die Summe der Flächeninhalte der beiden kongruenten Quadrate. Wie lang ist jede Quadratseite?

Schüler H. Laabs, Berlin

Ma 9 ■ 2864 Von einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$ seien die Höhe $h_c = 4{,}0$ cm zur Seite $\overline{AB}$ *und der Umkreisradius* $r = 4{,}5$ cm gegeben. Es sind Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks ABC zu berechnen!

Diplomlehrer J. Kreusch, Löbau

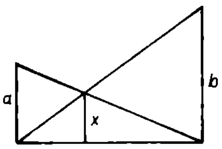
Ma 9 ■ 2865 Das Produkt von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist 224mal so groß wie die Summe aus diesen Zahlen. Um welche Zahlen handelt es sich? *Sch.*

Ma 9 ■ 2866 Ein Kind hat eine bestimmte Anzahl schwarzer und eine bestimmte Anzahl weißer Spielsteine, insgesamt sind es sechs. Das Kind probiert alle Möglichkeiten aus, diese sechs Spielsteine in eine Reihe zu legen, wobei jedesmal die Farben schwarz oder weiß verschieden angeordnet sind.
Nun findet das Kind heraus, daß es genau 15 derartige Möglichkeiten gibt. Wieviel weiße und wieviel schwarze Spielsteine

hatte das Kind, wenn seine Behauptung richtig ist? *Fr.*

Ma 9 ■ 2867 In dem Bild seien die Strecken mit den Längen a, b und x paarweise parallel zueinander. Man finde eine Formel, mit der man bei gegebenen Längen a und b die Länge x berechnen kann!

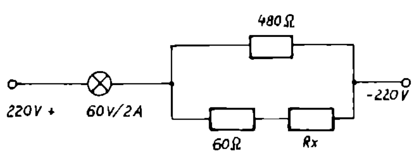
Doris Gollé, Wien (Österreich)



Na/Te ■ 412 Zur Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität des Kupfers erwärmte ein Schüler einen Körper aus Kupfer (Gewichtskraft 5 N) bis auf eine Temperatur von 100 °C und steckte ihn anschließend in ein Kalorimeter aus Aluminium (Gewichtskraft 0,6 N), das mit 400 ml Wasser gefüllt war. Die Anfangstemperatur des Wassers im Kalorimeter betrug 15 °C, die Endtemperatur 24,4 °C. Welchen Wert erhielt der Schüler für die spezifische Wärmekapazität des Kupfers? *R.*

Na/Te 9 ■ 413 Welchen Wert muß der Widerstand R_x haben, damit durch die Lampe bei einer Spannung von 60 V ein Strom von 2 A fließt?

aus: Lindner: Elektroaufgaben



Ma 10/12 ■ 2868 Gesucht sind alle vierstelligen Zahlen mit folgender Eigenschaft: Die Summe aus der betreffenden Zahl selbst, ihrer Quersumme und der zwei einstelligen Zahlen, die durch die erste und die letzte Ziffer dargestellt werden, beträgt 5900.

Schülerin B. Bremer, Heiligenstadt

Ma 10/12 ■ 2869 Es ist nachzuweisen, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist: Für alle natürlichen Zahlen n gilt: Wenn n eine Primzahl ist, so ist auch $2n - 3$ oder $2n + 3$ eine Primzahl.

W. Träger, Döbeln

Ma 10/12 ■ 2870 Mit je zwei weißen und vier schwarzen Stäben gleicher Länge werden Kantenmodelle eines regelmäßigen Tetraeders hergestellt.

a) Wieviel verschiedene Modelle gibt es, von denen keine zwei durch eine räumliche Bewegung zur Deckung gebracht werden können?

b) Wieviel Aufstellungen mit verschiedenen Ansichten der Tetraeder bezüglich ihrer gefärbten Kanten gibt es?

Dr. G. Hesse, Radebeul

Ma 10/12 ■ 2871 Einer Kugel mit dem Radius r wurden zwei kongruente Kegel mit gemeinsamer Kegelgrundfläche so einbeschrieben, daß seine beiden Spitzen die Kugeloberfläche berühren.

Das Volumen des Doppelkegels soll halb so groß sein wie das der Kugel. Es ist der Radius der gemeinsamen Kegelgrundfläche zu ermitteln und mit Hilfe von r auszudrücken.

Schüler M. Glück, Jössnitz

Ma 10/12 ■ 2872 In einem konvexen Viereck $ABCD$ mit nichtparallelen Gegenseiten sei E der Schnittpunkt der Geraden AB und CD und F der Schnittpunkt von BC und AD. Die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle BEC$ sei mit w_1, die des Winkels $\sphericalangle AFB$ mit w_2 bezeichnet. Es ist zu beweisen:

Wenn w_1 und w_2 senkrecht aufeinander stehen, so ist $ABCD$ ein Sehnenviereck.

W. Träger, Döbeln

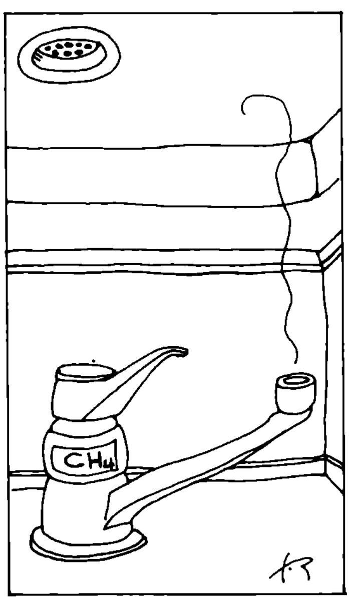
Na/Te 10/12 ■ 414 Ein Güterzug wird 100 m vor einem auf Halt stehenden Signal gleichmäßig mit $0{,}20\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gebremst. Der Aufenthalt vor dem Signal dauert 75 s. Danach wird er mit $0{,}15\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gleichmäßig beschleunigt und erreicht eine Geschwindigkeit von $38\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Mit dieser Geschwindigkeit wird die Fahrt fortgesetzt. Welchen Weg legt der Zug vom Beginn des Bremsens bis zum Erreichen der geforderten Geschwindigkeit zurück? Welche Zeit wird dafür benötigt?

aus: Aufgabensammlung Physik, Volk und Wissen, Berlin

Na/Te 10/12 ■ 415 Mit welcher Geschwindigkeit erreicht ein aus einer Katode emittiertes Elektron die Anode, wenn die Spannung zwischen Katode und Anode einer Röhrendiode 200 V beträgt?

(Hilfe: Von einem elektrischen Feld wird an einem Körper mit der Ladung Q nach Durchlaufen der Spannung U die Arbeit $A = U \cdot Q$ verrichtet.)

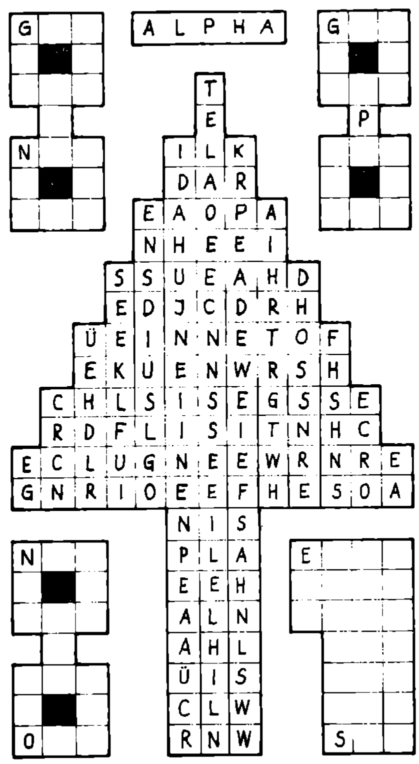
aus: Aufgabensammlung Physik, Volk und Wissen, Berlin



Rösselsprung ins Neue Jahr

Die *alpha*-Redaktion sendet Euch zum Jahreswechsel einen herzlichen Gruß, der in der Gangart eines Springers beim Schachspiel in die Baumfigur eingetragen wurde. Viel Spaß beim Ermitteln dieses Wunschsatzes! Und anbei noch vier Rösselsprünge zum Selbstbauen:

In die 7-Figur ist der Begriff SCHULMATHEMATIKOLYMPIADE, und in die 8-Figuren sind die Begriffe OPERATIONSZEICHEN, NÄHERUNGSRECHNUNG und PROGRAMMSTEUERUNG im Rösselsprung einzutragen, wobei Anfangs- und Endbuchstabe jeweils vorgegeben sind. Viel Spaß auch bei dieser Knobelei!



Jahreswechsel

1 9 8 8 = 1
1 9 8 7 = 9
1 9 8 8 = 8
1 9 8 7 = 7

1 9 8 7 = 1
1 9 8 8 = 9
1 9 8 7 = 8
1 9 8 8 = 8

Vervollständigt jede Zeile zu einer wahren Gleichung unter Benutzung der Operationszeichen +, −, · und : sowie des Fakultätszeichens ! ($n!$ ist das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n)! Klammern dürfen nicht benutzt werden.

Dr. R. Mildner, Leipzig

XXVIII. Internationale Mathematikolympiade

Havanna, 5. bis 16. Juli 1987

Aufgaben

1. Sei $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \geqq 1)$ und sei $p_n(k)$ die Anzahl der Permutationen von S mit genau k Fixpunkten.
Man beweise:
$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k) = n!$$
(Hinweis: Eine Permutation f von S ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung von S auf S. Ein Element $i \in S$ heißt Fixpunkt von f, falls $f(i) = i$ ist.) (BRD)

2. ABC sei ein spitzwinkliges Dreieck. Die Halbierende des Innenwinkels bei A schneidet die Seite BC in L und den Umkreis des Dreiecks in N $(N \neq A)$. Seien K und M die Fußpunkte der Lote von L auf AB bzw. AC.
Man beweise:
Die Flächeninhalte des Vierecks $AKNM$ und des Dreiecks ABC sind gleich. (SU)

3. Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reelle Zahlen mit $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$.
Man beweise:
Für jede natürliche Zahl $k \geqq 2$ gibt es ganze Zahlen a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, für die
$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n| \leqq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$$
gilt, wobei die Nebenbedingungen:
- nicht alle a_i sind gleich Null,
- für alle i gilt $|a_i| \leqq k - 1$

erfüllt sind. (BRD)

4. Man beweise:
Es gibt keine Funktion f: $N_0 \to N_n$, welche für alle $n \in N_0$ die Eigenschaft $f(f(n)) = n + 1987$ besitzt.
$(N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\})$ (Vietnam)

5. Es sei n eine natürliche Zahl $\geqq 3$.
Man beweise:
Es gibt eine Anordnung von n Punkten in der Ebene, für die je zwei beliebige Punkte einen irrationalen Abstand haben, und je drei beliebige Punkte ein nicht entartetes Dreieck mit rationalem Flächeninhalt bilden. (DDR)

6. Sei n eine ganze Zahl $\geqq 2$.
Man beweise:
Wenn $k^2 + k + n$ für alle ganzen Zahlen k mit $0 \leqq k \leqq \frac{\sqrt{n}}{3}$ eine Primzahl ist, dann ist auch $k^2 + k + n$ für alle ganzen Zahlen k mit $0 \leqq k \leqq n - 2$ eine Primzahl. (SU)

Arbeitszeit: zweimal 4,5 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Unsere Mannschaft der IMO 87:
Prof. Dr. Burosch, Delegationsleiter
Prof. Dr. Gronau,
stellv. Delegationsleiter

Frank Göring	1. Preis, 42 Punkte
Gerd Kunert	1. Preis, 42 Punkte
Uta Hövel	2. Preis, 40 Punkte
Jörg Jahnel	2. Preis, 39 Punkte
Gunter Döge	2. Preis, 37 Punkte
Ingo Warnke	3. Preis, 31 Punkte

Inoffizielle Länderwertung – Preisverteilung

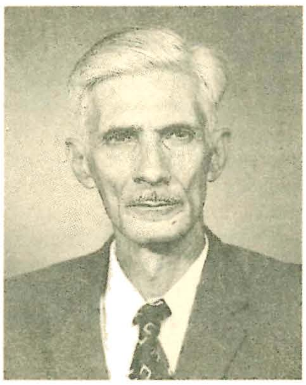
Platz	Land	Punkte	1.	2.	3.
1.	SR Rumänien	250	5	1	–
2.	BRD	248	4	2	–
3.	UdSSR	235	3	3	–
4.	DDR	231	2	3	1
5.	USA	220	2	3	1
6.	Ungarische VR	218	–	5	1
7.	VR Bulgarien	210	1	3	2
8.	VR China	200	2	2	2
9.	ČSSR	192	–	4	2
10.	Großbritannien	182	1	2	2
11.	SR Vietnam	172	–	1	5
12.	Frankreich	154	–	3	2
13.	Österreich	150	–	2	3
14.	Niederlande	146	–	1	4
15.	Australien	143	–	3	–
16.	Kanada	139	1	1	1
17.	Schweden	134	–	2	2
18.	Jugoslawien	132	–	1	3
19.	Brasilien	116	1	–	2
20.	Griechenland	111	–	–	4
21.	Türkei	94	–	–	2
22.	Spanien	91	–	–	3
23.	Marokko	88	–	–	3
24.	Kuba	83	–	–	2
25.	Belgien	74	–	–	1
26.	Iran	70	–	–	1
27.	Norwegen	69	–	–	–
	Finnland	69	–	–	2
29.	Kolumbien	68	–	–	1
30.	Mongolische VR	67	–	–	–
31.	VR Polen	55 (3)	–	–	2
32.	Island	45 (4)	–	–	–
33.	Zypern	42	–	–	–
34.	Peru	41	–	–	–
35.	Italien	35 (4)	–	–	1
36.	Algerien	29	–	–	–
37.	Kuweit	28	–	–	–
38.	Luxemburg	27 (1)	–	–	1
39.	Uruguay	27 (4)	–	–	–
40.	Mexiko	17 (5)	–	–	–
41.	Nikaragua	13	–	–	–
42.	Panama	7	–	–	–

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Luis J. Davidson

Havanna, Rep. Kuba
Sekretär des Organisationskomitees der XXVIII. IMO

▲ 2873 ▲ Es seien a und b reelle Zahlen, für die
$$-1986 < b + 1 < a$$
gilt.
Man beweise: Die Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ hat keine reelle Lösung x_0, *die* $x_0 \geqq 1987$ erfüllt.

Kurzbiographie:



Luis J. Davidson, geboren am 10.9.1921 in Havanna, 1940 Immatrikulation an der Universität Havanna, 1944 Erlangung des Titels *Doktor der physikalisch-mathematischen Wissenschaften*, 1945 bis 1961 Lehrer für Mathematik an der Oberschule von Matanzas, nach dem Sieg der kubanischen Revolution Nationalinspektor für Mathematik, 1974 Übernahme des Lehrstuhls für wissenschaftliche Forschungen am Zentralinstitut für pädagogische Wissenschaften, 1982 Erlangung des Titels *Doktor der pädagogischen Wissenschaften*, zur Zeit Lehrer am pädagogischen Hochschulinstitut *Enrique José Varona*, Förderer der Olympiadebewegung in der Republik Kuba, Initiator der seit 1963 jährlich stattfindenden nationalen Mathematik-Ausscheide, seit der ersten Teilnahme der Republik Kuba an der XIII. IMO 1971 in der ČSSR Delegationsleiter der kubanischen Mannschaft.

Jede Mannschaft bestand aus 6 Schülern bzw. der in Klammern angegebenen Anzahl von Schülern.
1. Preis für 42 Punkte
2. Preis für $\geqq 32$ und $\leqq 41$ Punkte
3. Preis für $\geqq 18$ und $\leqq 31$ Punkte

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Mini-BASIC für alpha-Leser, Teil 7

Computerwürfel oder: Zufallszahlen

▲44▲ Gib folgendes Programm in den Computer ein und starte es mehrmals! Beobachte den jeweiligen Ausdruck auf dem Bildschirm!

Programm 9

```
10 CLS
20 For I = 1 TO 10
30      X = RND (1)
40      PRINT X
50 NEXT I
60 END
```

Mit dem Programm 9 druckt der Computer KC 85/1 zehn nicht vorhersagbare Zahlen zwischen 0 und 1 auf dem Bildschirm. Solche Zahlen nennt man auch Zufallszahlen.

```
      .727313
      6.83401 E - 03
      .96943
      1.7514 E - 03
      .956225
      .0407678
      .896609
      .660212
      .554489
      .818675
OK
```

Durch die BASIC-Anweisung
LET X = RND (1) wird die Variable X mit einer Zufallszahl z zwischen 0 und 1 belegt ($0 < z < 1$). Dabei ist natürlich der Zahlenbereich des jeweiligen Computers zu berücksichtigen. So ist z. B. die betragsmäßig kleinste von Null verschiedene Zahl, die der KC 85/1 anzeigt 9.40396 E - 39. Mit Hilfe von RND (1) kann man einen Computer auch als Würfel nutzen. Dazu müssen wir allerdings die Zeile 30 im Programm 9 so umschreiben, daß zufällig eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 erzeugt wird.
Das gelingt mit folgender BASIC-Anweisung:

```
30 X = INT (6 * RND (1) + 1)
```

▲45▲ Begründe, warum mit der obigen Zeile 30 eine Zufallszahl
X mit $X \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
erzeugt werden kann!
Falls der Computer einen idealen Würfel simuliert, müßte er jede der sechs *Würfelzahlen* etwa gleich häufig ausdrucken. Das kann man natürlich nur überprüfen, wenn man sehr häufig würfelt bzw. den Computer veranlaßt, viele Würfelzahlen auf dem Bildschirm zu drucken. Damit wir nicht zählen müssen, wie oft eine 1, 2, 3, ..., 6 *gewürfelt* wurde, lassen wir uns auch das vom Computer angeben.

▲46▲
a) Erweitere das Programm 9 so, daß es 500 Würfelzahlen ausdruckt und angibt, wie oft dabei eine Eins, Zwei, Drei, Vier, Fünf oder Sechs ausgedruckt wurde.
b) Gib das erarbeitete Programm in den Computer ein und überprüfe, ob der simulierte Würfel den Bedingungen eines idealen Würfels nahekommt!

▲47▲ Schreibe ein BASIC-Programm zum Ausfüllen eines Telelottoscheines (5 aus 35)!
Der Computer soll aus der Menge
$\{1, 2, 3, \ldots, 35\}$
fünf Zahlen zufällig auswählen.
Das Programm ist so zu gestalten, daß die doppelte Ausgabe einer Lottozahl auszuschließen ist.

▲48▲
a) Gib eine BASIC-Anweisung an, mit der ein Computer eine Zufallszahl Z mit $7 \leqq Z \leqq 12$ erzeugt!
b) Notiere eine BASIC-Anweisung, mit der ein Computer eine Zufallszahl F mit $A \leqq F \leqq B$ erzeugt!
(A, B, F sollen natürliche Zahlen sein.)

Computer als Spielpartner

Wir wollen nun ein Spielprogramm erstellen, dem folgende Idee zugrunde liegt: Es ist eine zweistellige natürliche Zahl zu erraten, die mit Hilfe von *RND(1)* vom Computer erzeugt werden soll, aber auf dem Bildschirm nicht ausgedruckt wird.
Nach Eingabe eines Tips soll über den Bildschirm eine Mitteilung erfolgen, ob die Zahl erraten wurde (Treffer) bzw. ob die getippte Zahl zu groß oder zu klein ist. Außerdem soll der Spieler darüber informiert werden, welche Ziffern der getippten Zahl in der zu erratenden Zahl vorkommen. Um die letzte Idee zu realisieren, wird es nützlich sein, die Einer und Zehner der zu erratenden Zahl einzeln *erzeugen* zu lassen.

Einer: E = INT (10 * RND (1))
Zehner: Z = INT (9 * RND (1) + 1)

Die vom Computer zu erzeugende Zahl R erhält man wie folgt:

R = Z * 10 + E.

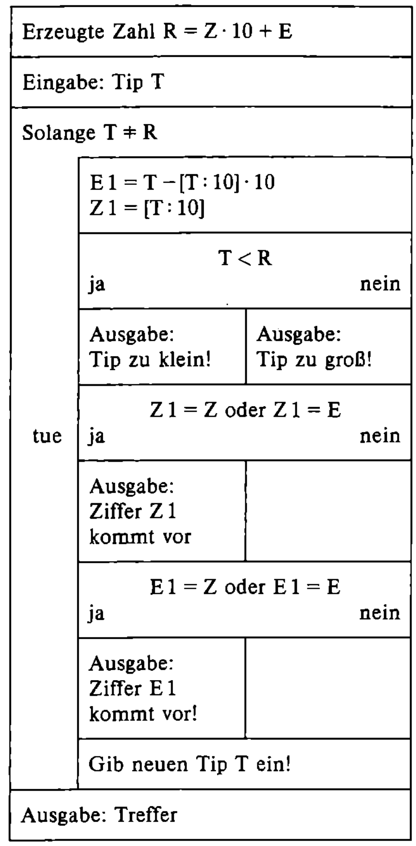
Um anzugeben, welche Ziffer der getippten Zahl T in der zu erratenden Zahl R vorkommt, ist es notwendig, von T zunächst die Einer E1 abzutrennen, um sie mit E bzw. Z vergleichen zu können.

E1 = T - INT(T / 10) * 10

Die Anzahl der Zehner Z1 erhält man durch folgende Anweisung:

Z1 = INT (T / 10)

Eine Hilfe bei der Erarbeitung unseres BASIC-Programms könnte folgendes Struktogramm sein:



▲49▲ a) Erstelle nun selbst ein entsprechendes BASIC-Programm für die Realisierung der Spielidee!
Gestalte das Programm so, daß bei einem falschen Tip ein erneuter Versuch möglich ist!
b) Verbessere das Programm so, daß der Computer jeweils mit angibt, der wievielte Versuch gestartet wird!
Der Schwierigkeitsgrad des Spiels kann erhöht werden, wenn man drei- oder sogar vierstellige natürliche Zahlen vom Computer *verstecken* läßt.

Computer als Trainer

Der Computer soll uns nun helfen, die Quadratzahlen von 10 bis 25 zu lernen. Dazu ist er so zu programmieren, daß auf dem Bildschirm eine Aufgabe, z. B. 23^2 erscheint.
In Abhängigkeit von der eingegebenen Antwort soll er mit *Richtig* oder *Falsch* reagieren.
Hier ein mögliches Druckbild:

Aufgabe: 13^2
Lösung: 149
Falsch!

Das Problem ist eigentlich schnell gelöst. Die Aufgabe läßt man mit Hilfe der Anweisung

A = INT (16 * RND (1) + 10)

durch den KC stellen.
Die Lösung E wird mit dem Quadrat von A verglichen, und die entsprechende Antwort *Richtig* bzw. *Falsch* ist auszudrucken. Mühe macht z. T. die Gestaltung des Bildschirms. So ist es nicht ganz einfach bei der Aufgabenstellung 13^2 die 2 richtig aus-

drucken zu lassen, da sie nicht in derselben Zeile, sondern eine Zeile zuvor *gedruckt* werden muß.
Hier nun unser Programmvorschlag:

Programm 10

```
10Ø  CLS
2Ø   PRINT
3Ø   A = INT (16 * RND (1) + 1Ø)
4Ø   PRINT : PRINT : PRINT
5Ø   PRINT "␣␣␣␣ Aufgabe:" : PRINT
6Ø   PRINT "␣␣␣ ... ␣␣␣␣␣ 2"
     (16 Leerzeichen)
7Ø   PRINT "␣␣␣ ... ␣␣␣ ", A
     (13 Leerzeichen)
8Ø   PRINT : PRINT : PRINT
9Ø   INPUT "␣␣␣␣ LOESUNG : "; L
1ØØ  PRINT : PRINT : PRINT
11Ø  IF L = A * A THEN PRINT
     "␣␣ ... ␣␣ RICHTIG"
     (23 Leerzeichen)
12Ø  IF L< >A * A THEN PRINT
     "␣␣ ... ␣␣ FALSCH!"
     (23 Leerzeichen)
13Ø  END
```

Unser Programm 10 können wir nun noch weiter verbessern, indem wir jedes falsche Ergebnis auch noch akustisch anzeigen lassen. Das ist mit Hilfe der BASIC-Anweisung BEEP zu realisieren, z. B.:

```
12Ø  IF L< >A * A THEN PRINT "
     FALSCH" : BEEP
```

▲50▲ Verändere das Programm 10 so, daß es 10 Aufgaben stellt und nach den 10 Aufgaben angibt, wieviel Aufgaben falsch gelöst wurden!
Wenn das entsprechend der Aufgabe 50 veränderte Programm abgearbeitet wird, stellen wir einen wesentlichen Mangel fest. Die Auswertung der Aufgaben und das Stellen einer neuen Aufgabe gehen viel zu schnell. Um das zu verhindern, nutzen wir die BASIC-Anweisung PAUSE n ($n > 0$; $n \in N$).
Damit kann man eine Pause von $0{,}1 \cdot n$ Sekunden in das Programm *einbauen*.
Die BASIC-Anweisungen

```
13Ø  PAUSE 5Ø : GOTO 1Ø
```

bewirken, daß der Computer nach einer Pause von 5 Sekunden seine Arbeit in Zeile 1Ø fortsetzt.

▲51▲ Entwirf ein Trainingsprogramm für das kleine Einmaleins!
(10 Aufgaben!) *L. Flade/M. Pruzina*

Lösungen

▲45▲ Der Bereich der Zufallszahlen kann mit der Anweisung LET A = RND (1) * 6 auf das Sechsfache gestreckt werden. Mit der Anweisung LET A = RND (1) * 6 erhält man also Zufallszahlen A mit $0 < A < 6$. Durch die Anweisung
LET B = INT (RND) (1) * 6)
erhält man ganzzahlige Zufallszahlen B mit $0 \leqq B < 6$, also
$B \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
Mit der Anweisung
X = INT (RND (1) * 6 + 1)
erhält man nun *Würfelzahlen* X mit
$X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

▲46▲

```
1Ø   CLS
15   E = Ø : Z = Ø : D = Ø : V = Ø : F
     = Ø : S = Ø
2Ø   FOR I = 1 TO 5ØØ
3Ø       X = INT (RND (1) * 6 + 1)
4Ø       PRINT X;
5Ø       IF X = 1 THEN E = E + 1
6Ø       IF X = 2 THEN Z = Z + 1
7Ø       IF X = 3 THEN D = D + 1
8Ø       IF X = 4 THEN V = V + 1
9Ø       IF X = 5 THEN F = F + 1
1ØØ      IF X = 6 THEN S = S + 1
11Ø  NEXT I
12Ø  PRINT : PRINT : PRINT
13Ø  PRINT E, Z, D, V, F, S
14Ø  END
```

▲47▲ Eine Möglichkeit:

```
1Ø   A = INT (RND (1) * 35 + 1)
2Ø   B = INT (RND (1) * 35 + 1)
3Ø   IF B = A THEN 2Ø
4Ø   C = INT (RND (1) * 35 + 1)
5Ø   IF C = A OR C = B THEN 4Ø
6Ø   D = INT (RND (1) * 35 + 1)
7Ø   IF D = A OR D = B OR D = C
     THEN 6Ø
8Ø   E = INT (RND (1) * 35 + 1)
9Ø   IF E = A OR E = B OR E = C
     OR E = D THEN 8Ø
1ØØ  PRINT "TIP FUER TELELOTTO:"
11Ø  PRINT A, B, C, D, E
12Ø  END
```

▲48▲
a) Z = INT (6 * RND (1) + 7)
b) F = INT ((B − A + 1) * RND (1) + A)

▲49▲ a) Eine Möglichkeit:

```
1Ø   CLS
2Ø   Z = INT (9 * RND (1) + 1) : E
     = INT (1Ø * RND (1))
3Ø   R = Z * 1Ø + E
4Ø   INPUT "TIP:"; T
45   IF T = R THEN 11Ø
5Ø   E1 = T − INT (T / 1Ø) * 1Ø : Z1
     = INT (T / 1Ø)
6Ø   IF T < R THEN PRINT "TIP ZU
     KLEIN!" : ELSE PRINT
     "TIP ZU GROSS!"
7Ø   IF Z1 = Z OR Z1 = E
     THEN PRINT Z1; "KOMMT VOR!"
8Ø   IF E1 = Z OR E1 = E
     THEN PRINT E1; "KOMMT VOR!"
9Ø   INPUT "GIB NEUEN TIP EIN!"; T
1ØØ  GOTO 45
11Ø  PRINT "TREFFER": END
```

b)

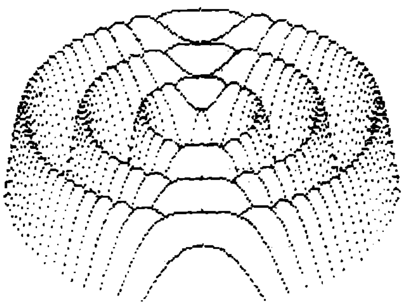
```
1 V = 1
82 V = V + 1
85 PRINT "VERSUCH NR.: "; V
```

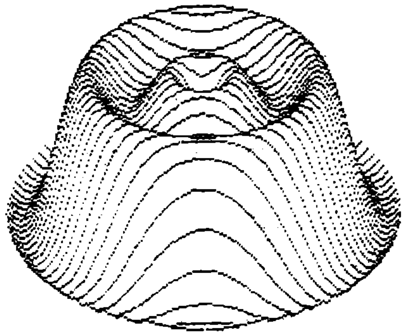
▲50▲

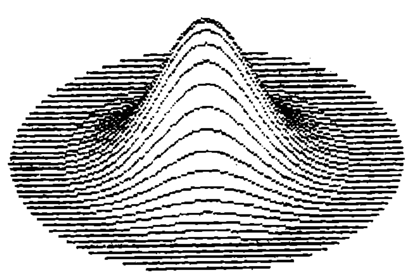
```
1 V = 1 : F = Ø
13Ø  IF L< >A * A THEN PRINT
     "FALSCH!" : F = F + 1
135  IF V ≦ 1Ø THEN V = V + 1 :
     GOTO 1Ø
136  PRINT : PRINT
14Ø  PRINT "VON 10 AUFGABEN
     WURDEN"; F; "FALSCH
     GELOEST" : END
```

▲51▲ Eine Möglichkeit:

```
1    A = Ø
1Ø   CLS
2Ø   FOR N = 1 TO 1Ø
3Ø   A = INT (RND (1) * 1Ø + 1)
4Ø   B = INT (RND (1) * 1Ø + 1)
5Ø   PRINT "AUFGABE:"; A; "·"; B
6Ø   INPUT "LOESUNG:"; C
7Ø   IF C = A * B THEN PRINT "RICH-
     TIG" : ELSE PRINT "FALSCH"
8Ø   NEXT N
9Ø   END
```







Computergrafiken
von *Bernd Grünler, Bürgel*

Der Rechenmann

Ach, könnte ich doch zaubern!
Ich wünscht' mir einen Rechenmann,
ich brauchte nicht zu schwitzen,
noch müßt ich extra ran.

Der Lehrer würde staunen,
wenn ich die Eins geschafft
und jede Gleichung löse –
er denkt, aus eigener Kraft.

Die Eltern würd' es freuen,
was ich so alles weiß.
Dem Rechenmann spendiert ich
dafür ein großes Eis.

Hilke Brüning, Frankfurt (Oder)

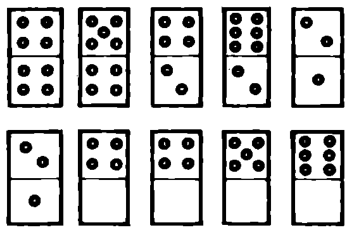
In freien Stunden · alpha-heiter

J. Guckuk, LVZ Leipzig

Domino-Quadrat

Lege die abgebildeten Dominosteine so zu einem Quadrat, daß die Augensumme auf jeder Quadratseite 18 beträgt!

aus: ND, Berlin



Information aus Dottershausen und Eiersbach

Im Hühnerdorf Dottershausen legen eineinhalb Hühner in eineinhalb Tagen eineinhalb Eier. Im Hühnerdorf Eiersbach legen zweieinhalb Hühner in zweieinhalb Tagen zweieinhalb Eier. In jedem Dorf sind gleich viele Hühner. In einem der beiden Dörfer sind die Hühner fleißiger. Sie legen an jedem Tag 40 Eier mehr als in dem anderen Dorf. Wieviel Eier werden an jedem Tag in jedem der Dörfer gelegt?

Oberlehrer W. Melka, Neubrandenburg

Mit 1, 2, 3 und 4

Bilde mit den Ziffern 1, 2, 3, 4 zehn Aufgaben, die 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 als Ergebnis haben! Jede der vier Zahlen (Ziffern) muß dabei genau einmal verwandt werden und Klammern dürfen nicht gesetzt werden.
(Beispiel für 25: $2 \cdot 14 - 3$ oder $31 - 2 - 4$ oder $2 \cdot 3 \cdot 4 + 1$.)

Schüler St. Kerber, Saal

Eine interessante Gleichung

Löse die Gleichung

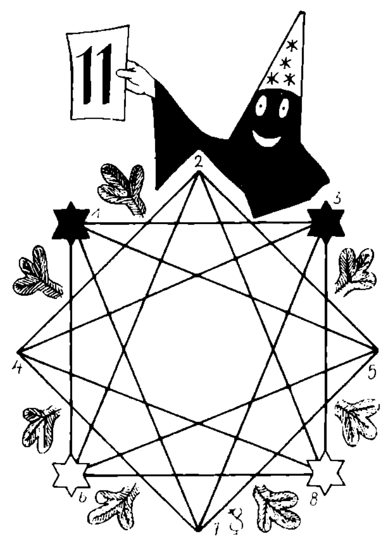
$$\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{DO}} = 0,\mathrm{SKISKISKISKI}\ldots,$$

wobei der rechts stehende Ausdruck einen periodischen Dezimalbruch und wie üblich jeder Buchstabe eine bestimmte Ziffer im Dezimalsystem darstellt!

aus: MATH STUDENT, London

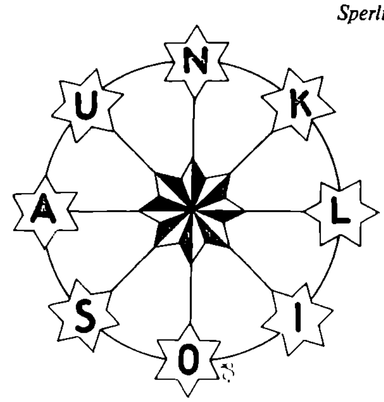
Zwei weihnachtliche Geduldsspiele

a) Zeichne dir jeweils zwei andersfarbige kleine Sterne und lege diese – wie das Bild zeigt – auf die Ecken des Spielfeldes.
Und nun versuche, durch abwechselndes Ziehen der dunklen und hellen Sterne, deren Platz zu vertauschen. Das soll in 11 Zügen zu bewerkstelligen sein. Versucht's einmal!



b) Schneide dir acht kleine Sterne aus, versieh sie mit den Buchstaben N, I, K, O, L, A, U, S! Durch Rücken der Sterne über die Sternmitte oder auf dem Rand, wenn die Mitte besetzt ist, soll erreicht werden, daß auf dem Rand der Name NIKOLAUS lesbar wird. Das N oben steht bereits auf dem richtigen Platz; das Wort muß im Uhrzeigersinn weiterlaufen.

Sperling, aus: WE, Köln



Abschied von 1987

Die Zahlen 0 bis 50 sind durch die Ziffern der Jahreszahl 1987 darzustellen, und zwar dergestalt, daß bei jeder Zahl mindestens ein Logarithmusausdruck enthalten ist. Die Reihenfolge der Ziffern 1987 ist dabei nicht zu verändern. Einige Beispiele seien aufgeführt:

$$0 = \lg(1+9) - \lg(\mathrm{ld}\,8+7)$$
$$1 = \lg\sqrt{1+9} + \lg(\mathrm{ld}\,8+7)$$
$$15 = \lg(1+9)^{8+7}$$
$$29 = -1 + \sqrt{9}\,(\mathrm{ld}\,8+7)$$
$$40 = 19 + \mathrm{ld}\,8^7$$
$$50 = 19 \cdot \mathrm{ld}\,8 - 7$$

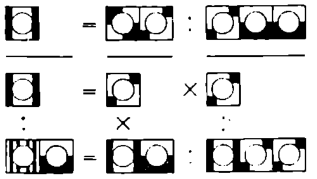
Viel Freude und Erfolg wünscht

Ing. K.-H. Milde, Dresden

Kryptarithmetik

Jedes Karo bzw. jeder Buchstabe bedeutet eine Ziffer. Gleiche Karos bzw. Buchstaben bedeuten immer gleiche Ziffern.

a) Es sind an Stelle der Karos Ziffern zu finden, die die waagerechten und senkrechten Aufgaben richtig lösen.

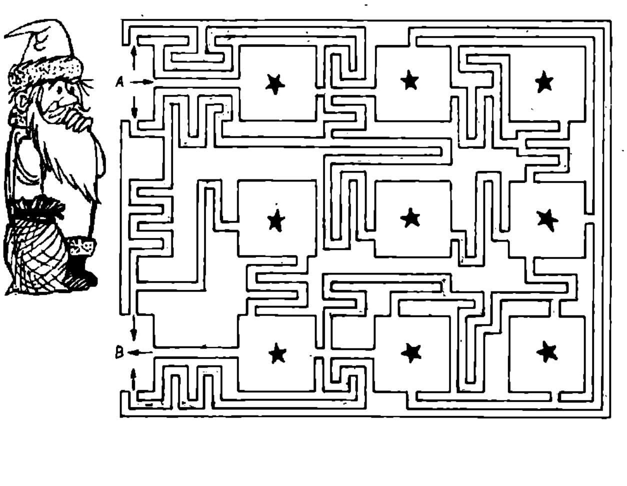


$$\begin{array}{ccccccc} ba & \cdot & eg & - & sp & = & etd \\ \cdot & & : & & + & & - \\ bg & : & g & + & dh & = & dd \\ - & & + & & : & & + \\ ed & + & bs & : & t & = & et \\ \hline bsp & - & ed & + & fe & = & egt \end{array}$$

b) Es sind an Stelle der Buchstaben Ziffern zu finden, die die waagerechten und senkrechten Aufgaben lösen.

Der Weihnachtsmann ist da!

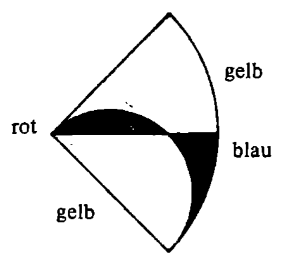
Das Bild stellt neun Einfamilienhäuser in einem großen Park dar. Der Weihnachtsmann steht vor dem Eingang A des Parkes und überlegt, in welcher Richtung er laufen soll, um alle neun Familien so zu besuchen, daß er jedes Haus nur einmal betritt und den Park beim Ausgang B verläßt. Wie muß er entlanggehen?



Mit Kühnheit und Verstand

König Arthur bestellte einen Maler, um seinen Schild bemalen zu lassen. Er bat ihn, den Schild, der die Form eines Viertelkreises hatte, mit drei Farben zu bemalen; mit Gelb als Farbe der Güte, mit Rot als Farbe der Kühnheit und mit Blau als Farbe der Weisheit. Als der Künstler den Entwurf dafür brachte, stellte der Waffenträger des Königs fest, daß auf dem Bild die Kühnheit gegenüber dem Verstand überwiege. Der Maler konnte jedoch beweisen, daß beide zu gleichen Teilen vertreten waren. Wie tat er das?

aus: Quant, Moskau, eingesandt von Oberlehrer R. Bergmann, Döbeln



Was alles in einem Dreieck steckt

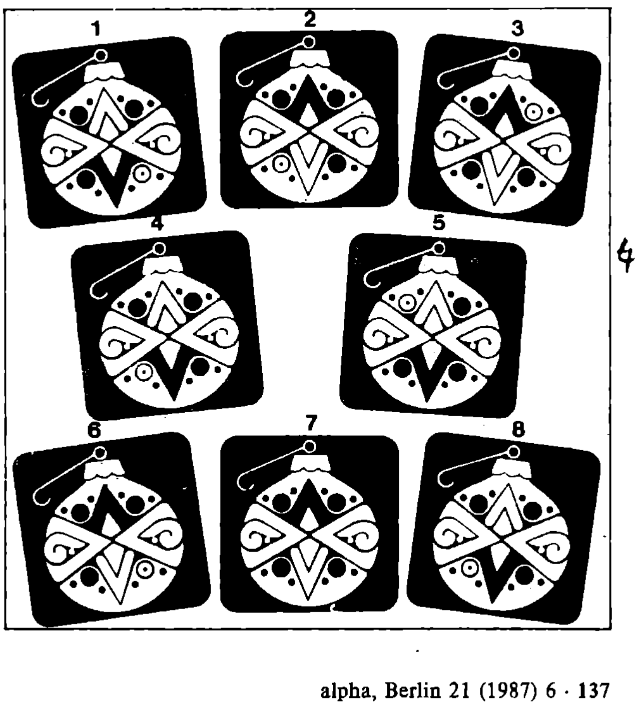
Aus einem Teil der sieben Buchstaben des Wortes DREIECK lassen sich 18 neue Substantive bilden. Wie lauten sie? (Benutze den wichtigen mathematischen Grundsatz und gehe systematisch vor!)

Schülerin S. Kerber, Saal

Auf einen Blick

Welche von den acht Weihnachtsbaumkugeln sind gleichförmig?

aus: Füles, Budapest



4 · ?

Wir arbeiten mit Resten

Ein Arbeitsmaterial für Schülerzirkel ab Klasse 7

Ihr habt im Mathematikunterricht der Klasse 7 die Menge Q der rationalen Zahlen und – als Teilmenge davon – die Menge Z der ganzen Zahlen kennengelernt. Wir dehnen unsere Betrachtungen zur Teilbarkeit und zu Resten bei Division nun auf die Menge der ganzen Zahlen aus.[1]

▲ 8 ▲ Warum hat es wenig Sinn, derartige Untersuchungen in der Menge der rationalen Zahlen zu führen? Überlege, durch welche Zahl z. B. die Zahl 3 dann *nicht* teilbar wäre!

Zunächst definieren wir für *ganze* Zahlen a und b:

b ist ein Teiler von a, bedeutet *es gibt eine ganze Zahl n, so daß $a = b \cdot n$ ist.*

a läßt bei Division durch b den Rest r, bedeutet *es gibt eine ganze Zahl k, so daß gilt* $a = k \cdot b + r$ $(0 \leqq r < |b|)$.

Die Bedingung $0 \leqq r < |b|$ bewirkt, daß auch hier der Rest r, den die ganze Zahl a bei Division durch die ganze Zahl b läßt, eindeutig bestimmt ist.

Beispiele

$14 = 2 \cdot 6 + 2$
14 läßt bei Division durch 6 den Rest 2.
$-14 = (-3) \cdot 6 + 4$
-14 läßt bei Division durch 6 den Rest 4.
$-14 = 3 \cdot (-6) + 4$
-14 läßt bei Division durch -6 den Rest 4.
$14 = (-2) \cdot (-6) + 2$
14 läßt bei Division durch -6 den Rest 2.

Man kann nun den Rest einer Summe, eines Produkts oder einer Potenz bei Division durch eine bestimmte Zahl bestimmen, ohne diese Terme zu berechnen. Man benötigt dafür nur die Reste, die die Summanden, die Faktoren bzw. die Basis bei Division durch die gegebene Zahl lassen. Dies ermöglicht oft ein rationelleres Lösen entsprechender Aufgaben (z. B.: Ist $9^{14} \cdot 412 - 2857 \cdot 19 + 4762$ durch 7 teilbar?).

Wir untersuchen, wie man *mit Resten rechnen* kann.

Dazu teilen wir zunächst die Elemente von Z, also die ganzen Zahlen, in *Klassen* ein. Ähnlich wurde in Klasse 6 vorgegangen, als mit Brüchen gerechnet werden sollte (↗ LB 6, S. 29).

Wir definieren:

a und b liegen (bzgl. m) in derselben Klasse $(a \equiv b(m))$, bedeutet *a und b lassen bei Division durch m denselben Rest.*

Dies bedeutet aber: *Die Differenz $b - a$ ist durch m teilbar* $(m \mid b - a)$.
Kurz: $a \equiv b(m)$ bedeutet $m \mid b - a$.

Beispiele

$10 \equiv 18\ (4)$, denn $4 \mid 18 - 10$.
$-7 \equiv 5\ (4)$, denn $4 \mid 5 - (-7)$.
$-3 \equiv 2\ (5)$, denn $5 \mid 2 - (-3)$.
$11 \equiv -3\ (7)$, denn $7 \mid -3 - 11$.
$6 \equiv 0\ (3)$, denn $3 \mid 0 - 6$.
$-2 \not\equiv 2\ (5)$, denn $5 \nmid 3 - (-2)$.

Wählen wir für m eine feste von 0 verschiedene Zahl, z. B. 4, so können wir Z tatsächlich in Klassen einteilen.

Alle durch 4 teilbaren ganzen Zahlen liegen in derselben Klasse, denn ihre Differenz ist stets durch 4 teilbar. Andere Zahlen liegen nicht in dieser Klasse.

Wir nehmen nun eine in dieser Klasse noch nicht erfaßte ganze Zahl, z. B. 1, und bestimmen alle ganzen Zahlen, die bei Division durch 4 denselben Rest wie diese Zahlen lassen. Wir erhalten eine zweite Klasse. So fahren wir fort, bis keine ganze Zahl mehr übrig bleibt.

Insgesamt erhalten wir die in Bild 1 angegebenen vier *Restklassen*.

Bild 1

…,	−12,	−8,	−4,	0,	4,	8,	12,	…
…,	−11,	−7,	−3,	1,	5,	9,	13,	…
…,	−10,	−6,	−2,	2,	6,	10,	14,	…
…,	−9,	−5,	−1,	3,	7,	11,	15,	…

Keine dieser Klassen ist die leere Menge (1), keine zwei Klassen haben ein Element gemeinsam (2), und jede ganze Zahl liegt in einer dieser Klassen (3). Deshalb sind wir berechtigt, von *Klassen* – und nicht nur von *Teilmengen* – zu sprechen.

▲ 9 ▲ Erläutert, daß die Klassen eurer Schule auch Klassen im mathematischen Sinne sind! Weist dazu die Eigenschaften (1), (2) und (3) nach!

▲ 10 ▲ Man kann jede gebrochene Zahl als Klasse von Brüchen auffassen., Erläutert, wie in Klasse 6 die Menge aller Brüche in Klassen eingeteilt wurde! Weist nach, daß es sich tatsächlich um *Klassen* handelt!

▲ 11 ▲ Teilt die Menge der ganzen Zahlen in Restklassen bezüglich 5 ein!

▲ 12 ▲ Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Zahl m $(m \neq 0)$, bezüglich der Z in Restklassen eingeteilt wird, und der Anzahl dieser Restklassen?

Jedes Element einer Restklasse wird auch als deren *Repräsentant* bezeichnet. Kennt man einen Repräsentanten einer Restklasse (bei gegebenem m), so lassen sich leicht alle übrigen Elemente dieser Restklasse bestimmen. Man kann deshalb einen Repräsentanten benutzen, um die gesamte Restklasse zu bezeichnen. Wir schreiben ihn dazu in eckige Klammern und fügen als Index das jeweilige m hinzu.

Beispielsweise bezeichnet $[7]_4$ die gesamte Restklasse
$\{\ldots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \ldots\}$.

Allerdings ist es üblich, zur Bezeichnung Repräsentanten x mit $0 \leqq x < |m|$ zu wählen. Es ist demnach $[7]_4 = [3]_4$.

Wie mit Zahlen kann man auch mit Restklassen rechnen. Als Beispiel wählen wir wieder $m = 4$. Zunächst erklären wir, was die Summe zweier Restklassen sein soll:

Die Summe $[2]_4 + [3]_4$ ist diejenige Restklasse, in der die Summe $2 + 3$ der Repräsentanten 2 und 3 liegt, also die Restklasse $[1]_4$. Sinngemäß werden auch die übrigen Summen festgelegt. Übersichtlich sind sie in der *Verknüpfungstafel* im Bild 2 angegeben. Da hier keine Verwechslungen zu befürchten sind, wurden die Indizes an den Klammern weggelassen.

Bild 2

+		2.Summand			
		[0]	[1]	[2]	[3]
1. Summand	[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
	[1]	[1]	[2]	[3]	[0]
	[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
	[3]	[3]	[0]	[1]	[2]

▲ 13 ▲ Überprüft die Angaben im Bild 2!

Als *Produkt* zweier Restklassen $[a]_m$ und $[b]_m$ wird diejenige Restklasse $[c]_m$ definiert, in der das Produkt $a \cdot b$ liegt.

▲ 14 ▲ Stellt eine Verknüpfungstafel für die Multiplikation der Restklassen bezüglich 4 auf!

▲ 15 ▲ Erläutert, daß man die Addition bzw. Multiplikation gebrochener Zahlen als Addition bzw. Multiplikation von Klassen, deren Repräsentanten Brüche sind, auffassen kann!

Unsere Festlegungen bedürfen aber noch einer gewissen Rechtfertigung. Was passiert z. B., wenn wir zur Bezeichnung zweier zu multiplizierender Restklassen andere Repräsentanten wählen? Ist das Produkt der Restklassen trotzdem eindeutig bestimmt?

Wir überzeugen uns zunächst an einem Beispiel:
$[2]_4 \cdot [3]_4 = [2]_4$, denn $2 \cdot 3 = 6$ und $6 \in [2]_4$.

Wir wählen andere Repräsentanten für die zu multiplizierenden Restklassen:
$10 \in [2]_4$, $-5 \in [3]_4$.

Das Produkt $10 \cdot (-5)$ liegt ebenfalls in der Restklasse $[2]_4$, denn $4 \mid 2 - (-50)$.

Allgemein sei $a' \in [a]_m$ und $b' \in [b]_m$. Wir müssen nachweisen, daß $a' \cdot b'$ in derselben Restklasse bzgl. m liegt wie $a \cdot b$.

Voraussetzung: $m \mid a - a'$, $m \mid b - b'$
Behauptung: $m \mid ab - a'b'$
Beweis:
Wegen $-ab' + ab' = 0$ ist $ab - a'b'$
$= ab - ab' + ab' - a'b'$.

Auf je zwei Summanden läßt sich das Distributivgesetz anwenden:
$ab - ab' = a(b - b')$
und $ab' - a'b' = (a - a')\,b'$.

Es ist also
$ab - a'b' = a(b - b') + (a - a')\,b'$.
Jeder der Summanden auf der rechten Seite der letzten Gleichung ist nach Voraussetzung durch m teilbar, also auch die Summe.
Folglich gilt $m \mid ab - a'b'$, w. z. b. w.

▲16▲ Beweist, daß auch die Summe zweier Restklassen unabhängig von den gewählten Repräsentanten für die Summanden ist!

Man kann Restklassen auch mit natürlichen Exponenten n ($n \geqq 2$) potenzieren.

▲17▲ Füllt die Verknüpfungstafel im Bild 3 aus!

Bild 3

$[a]_4^n$		Exponent n				
		2	3	4	5	6
Basis $[a]_4$	$[0]_4$					
	$[1]_4$					
	$[2]_4$					
	$[3]_4$					

Beim Ausfüllen der Verknüpfungstafel für das Potenzieren habt ihr sicher bemerkt, daß man nicht unbedingt erst die Potenz des Repräsentanten der als Basis auftretenden Restklasse ausrechnen muß, um dann die Restklasse, in der die Potenz liegt, zu bestimmen. Man kann auch zwischendurch schon zu kleineren Repräsentanten übergehen:
1. Weg: $3^6 = 729 = 182 \cdot 4 + 1$,
also $[3]_4^6 = [1]_4$
2. Weg:
$[3]_4 \cdot [3]_4 = [1]_4$
$[1]_4 \cdot [3]_4 = [3]_4$
$[3]_4 \cdot [3]_4 = [1]_4$
$[1]_4 \cdot [3]_4 = [3]_4$
$[3]_4 \cdot [3]_4 = [1]_4$,
also $[3]_4^6 = [1]_4$.
Beim 2. Weg wurde das Assoziativgesetz der Multiplikation von Restklassen angewendet. Dieses ist natürlich erst zu beweisen.
Im nächsten Zirkel werden wir uns mit einigen Eigenschaften der Addition und der Multiplikation von Restklassen beschäftigen und daraus weitere Regeln für das Rechnen mit Restklassen ableiten.

C.-P. Helmholz

Lösungen

▲8▲ Zu je zwei rationalen Zahlen a und b ($b \neq 0$) gibt es *immer* eine rationale Zahl n, so daß $a = b \cdot n$ ist.

▲9▲ In jede Schulklasse geht mindestens ein Schüler (1), kein Schüler besucht zugleich zwei Klassen (2), jeder Schüler geht in irgendeine Klasse (3).

▲10▲
siehe LB 6, S. 29 und Lösungen zu ▲15▲.

▲11▲

...,	−15,	−10,	−5,	0,	5,	10,	15,	...
...,	−14,	−9,	−4,	1,	6,	11,	16,	...
...,	−13,	−8,	−3,	2,	7,	12,	17,	...
...,	−12,	−7,	−2,	3,	8,	13,	18,	...
...,	−11,	−6,	−1,	4,	9,	14,	19,	...

▲12▲ Es gibt genau $|m|$ paarweise verschiedene Restklassen bezüglich m.

▲13▲ ohne Lösung

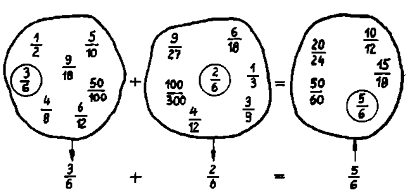
▲14▲

•		2. Faktor			
		[0]	[1]	[2]	[3]
1. Faktor	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
	[1]	[0]	[1]	[2]	[3]
	[2]	[0]	[2]	[0]	[2]
	[3]	[0]	[3]	[2]	[1]

▲15▲ Jede gebrochene Zahl ist eine Klasse von Brüchen, die durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen. Zur Bezeichnung einer solchen Klasse wählt man einen beliebigen Bruch, der in ihr liegt.

Sollen z. B. die gebrochenen Zahlen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ addiert werden, so wählt man zunächst Repräsentanten aus beiden Klassen, die gleichnamig sind: $\frac{3}{6}$ und $\frac{2}{6}$.
Diese *Brüche* werden addiert:
$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$. Summe der gebrochenen Zahlen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ ist diejenige *Klasse von Brüchen*, in der $\frac{5}{6}$ liegt (Bild 4).

Bild 4



▲16▲ *Voraussetzung:*
$a' \in [a]_m$, d. h. $m \mid a - a'$
$b' \in [b]_m$, d. h. $m \mid b - b'$
Behauptung: $a' + b' \in [a + b]_m$,
d. h. $m \mid (a + b) - (a' + b')$
Beweis: $(a + b) - (a' + b')$
$= (a - a') + (b - b')$
Jeder Summand auf der rechten Seite dieser Gleichung ist nach Voraussetzung durch m teilbar, also auch die Summe.
Folglich gilt
$m \mid (a + b) - (a' + b')$, w. z. b. w.

▲17▲

$[a]_4^n$		Exponent n				
		2	3	4	5	6
Basis $[a]_4$	$[0]_4$	$[0]_4$	$[0]_4$	$[0]_4$	$[0]_4$	$[0]_4$
	$[1]_4$	$[1]_4$	$[1]_4$	$[1]_4$	$[1]_4$	$[1]_4$
	$[2]_4$	$[0]_4$	$[2]_4$	$[0]_4$	$[2]_4$	$[0]_4$
	$[3]_4$	$[1]_4$	$[3]_4$	$[1]_4$	$[3]_4$	$[1]_4$

[1] Siehe *alpha* 4/86 und *alpha* 5/86

Leserpost: Chancen für Denkfaule?

Unser Leser *Rolf Kamieth* aus Kakerbeck wurde durch den Beitrag *Chancen für Denkfaule?* (*alpha* 2, 1985) angeregt, sich näher mit der harmonischen Reihe zu beschäftigen und mit seinem Taschenrechner Zahlenexperimente durchzuführen. Seine Rechenergebnisse führten ihn zu der Vermutung, daß für die n-te und m-te Partialsumme der harmonischen Reihe
$\left(\text{d. h. für } a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i},\ a_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i}\right)$
bei großen Zahlen n und m gilt:
$e^{a_n - a_m} \approx \frac{n}{m}$.
Geht man zu Logarithmen über, so lautet seine Aussage:
$$a_n - a_m \approx \ln n - \ln m.$$
Diese Beziehung ist richtig, sie folgt aus der bekannten Darstellung
$$a_n = \ln n + C + \gamma_n, \qquad (*)$$
wobei $C = 0{,}557\,215\,664\,90\ldots$ die sogenannte *Mascheronische Konstante* (nach dem italienischen Mathematiker *Lorenzo Mascheroni*, 1750 bis 1800) und γ_n Elemente einer Nullfolge sind. (C wird auch Eulersche Konstante genannt!) Die Formel (*) zeigt, daß die Zahlen a_n wie $\ln n$ für große n wachsen. Man erhält als Folgerung aus dieser Formel die Beziehung
$a_{nk} \approx a_n + a_k - C$ für große n, $k \in N$.
Die bemerkenswerte Darstellung (*) für a_n ist übrigens gerade der im *alpha*-Artikel erwähnte Trick, um bei Benutzung des Tischrechners K 1002 erst von einem großen Index n an die Zahlen $\frac{1}{n}$ addieren zu müssen. Damit gelangte man schnell zu einer Stelle n_1, so daß sich die Partialsummen a_n für $n \geqq n_1$ nicht mehr änderten.
Es ist oft nützlich, durch konkrete Zahlenrechnungen eine Idee für einen theoretischen Sachverhalt zu finden und dann die gewonnene Aussage exakt zu beweisen. Das geht mit einem Taschenrechner oder einem Computer besonders genau und schnell, weil sich auch viele Beispiele durchrechnen lassen.

W. Schmidt

alpha-Schachwettbewerb 1987

Zum 5. Mal fordert *alpha* alle Schachfreunde zur Teilnahme an einem Lösungswettbewerb auf!

Wiederum sind acht Schachaufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad vorgegeben. Wenn der eine oder der andere Leser vielleicht auch nicht alle Aufgaben lösen kann, so ist dennoch seine Teilnahme sehr erwünscht und wird auch in der Gewinnverlosung berücksichtigt. Vordergründig soll der Wettbewerb Spaß an den reizvollen Knobeleien auf dem Schachbrett vermitteln und als Anregung dienen, sich etwas intensiver mit dem königlichen Spiel zu beschäftigen.

In allen acht Aufgaben beginnt Weiß und setzt trotz bester Gegenwehr von Schwarz in der geforderten Zügezahl matt. Die jeweilige Punktzahl, die in etwa den Schwierigkeitsgrad wiedergibt und aus der Bepunktung der Abspiele resultiert, ist bei den Aufgaben mit angegeben. Als vollständig gilt die Lösung, wenn alle Abspiele bis zum Matt angeführt werden.

Unter allen Teilnehmern, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst haben, werden Bücher verlost.

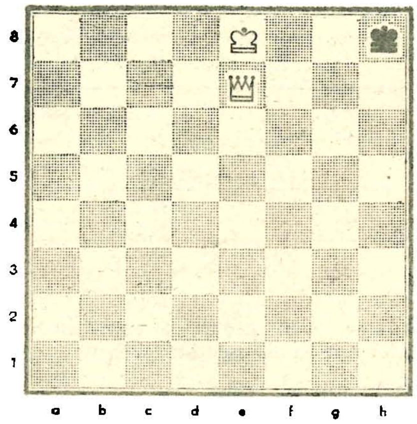
Die Teilnehmer, die die volle Punktzahl zu den Aufgaben Nr. 1 bis Nr. 7 erreichen, erhalten eine Urkunde und nehmen an einer weiteren Verlosung von Buchpreisen teil. Für Teilnehmer bis zum Alter von 14 Jahren reicht schon die volle Punktzahl zu den Aufgaben Nr. 1 bis Nr. 4 aus, um in diese Verlosung zu kommen.

Die achte Aufgabe ist eine Zusatzaufgabe. Sie ist für leistungsstärkere Schachspieler gedacht und bleibt ohne Punktbewertung. Unter den Teilnehmern, die alle Aufgaben einschließlich der Zusatzaufgabe richtig gelöst haben, werden zusätzlich zwei Bücher verlost.

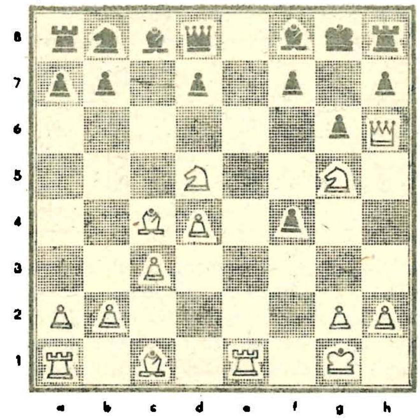
Teilnahmeberechtigt sind alle *alpha*-Leser. Die Einsendung der Lösungen (jeweilige Aufgaben-Nummer angeben) ist bitte bis zum 29. Februar 1988 unter Angabe von Name, Vorname, Alter und Adresse zu richten an

Redaktion alpha
PSF 14, Leipzig, 7027.

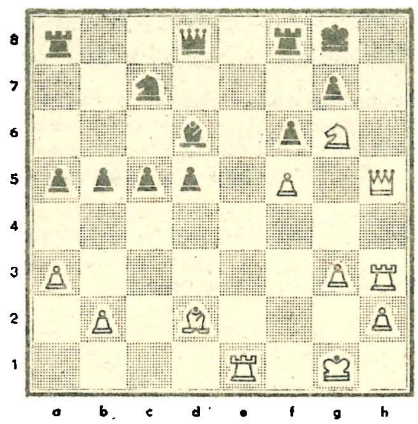
Die Lösungen sowie die Gewinner werden in alpha 4/1988 veröffentlicht.



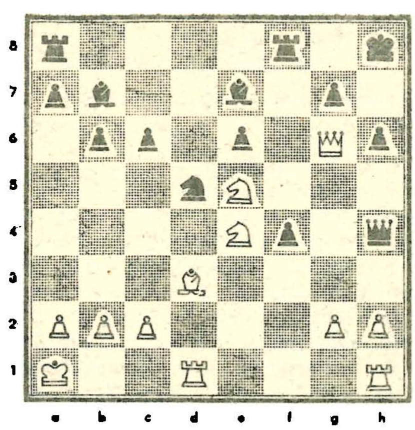
Nr. 1 Matt in zwei Zügen 1 Punkt



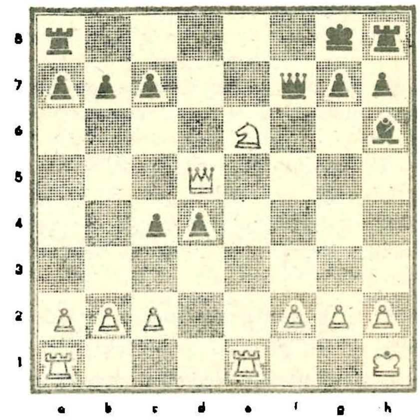
Nr. 2 Matt in zwei Zügen 2 Punkte



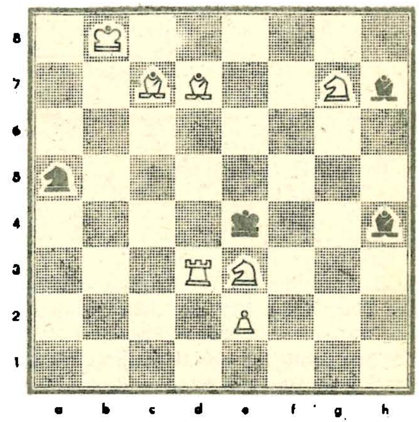
Nr. 3 Matt in zwei Zügen 2 Punkte



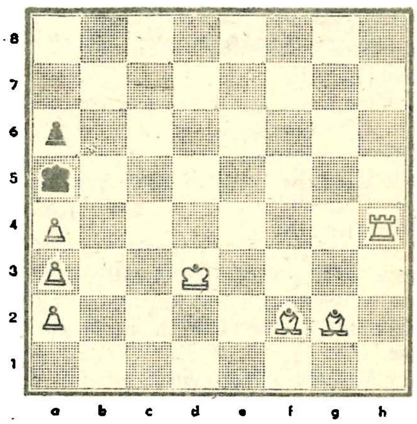
Nr. 4 Matt in drei Zügen 3 Punkte



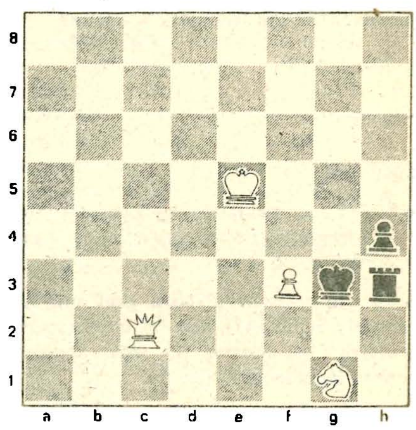
Nr. 5 Matt in vier Zügen 4 Punkte



Nr. 6 Matt in zwei Zügen 6 Punkte



Nr. 7 Matt in drei Zügen 6 Punkte



Nr. 8 Matt in fünf Zügen Zusatz

Buchtips

Peter Heblik

Wissensspeicher BASIC

Das Wichtigste für Einsteiger und Fortgeschrittene
302 S., zahlr. Abb.,
Pappband zellophaniert
Bestell-Nr. 709 183 5 Preis: 14,50 M
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Berlin

Helmut Kahnt/Bernd Knorr

BI-Lexikon
Alte Maße, Münzen und Gewichte

214 Textabb., 24 Farbtafeln, 54 Fotos
Bestell-Nr. 577 825 4 Preis: 27,80 M
VEB Bibliographisches Institut Leipzig

Johannes Lehmann

Mathematik – Von der Pflicht zur Kür

120 Prüfungsaufgaben aus ehem. Abschlußprüfungen, Klassenstufe 10 sowie über 200 z. T. unterhaltsame Aufgaben mit Lösungshinweisen
MSB Nr. 130
1. Aufl. 1987; 2. Aufl. 1988
148 Seiten, 134 Abb.
Bestell-Nr. 666 253 6 Preis: 12,00 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft
Leipzig

Reinhard Zilch

Auf Mark und Pfennig

Aus der Geschichte des Geldes
103 Seiten, zahlr. Illustrationen
Bestell-Nr. 631 860 4 Preis: 7,40 M
Der Kinderbuchverlag Berlin

Wolfgang Gloede

Vom Lesestein zum Elektronenmikroskop

248 Seiten, 222 Abb., Tafeln, Leinen
Bestell-Nr. 553 593 0 Preis: 29,50 M
VEB Verlag Technik, Berlin

Buchreihe: Wir wiederholen Physik

Band 7: Felder
Bestell-Nr. 547 231 9 Preis etwa 6,80 M
Band 8: Wellen und Strahlen
Bestell-Nr. 547 232 7 Preis etwa 6,80 M
beide Titel: VEB Fachbuchverlag Leipzig

Ernst Bönsch

Schachlehre

für Lehrende und Lernende

Lektionen für die Grundausbildung im Schach, Übungen zur schachtaktischen Vervollkommnung, eine Übersicht über Eröffnungssysteme und Varianten, die Notaktionsforschung, die Klassifizierungsordnungen, Regelwerke und Spielsysteme – das alles findet der interessierte Leser in der Schachlehre, die erstmalig 1985 erschien und in Fachkreisen bereits viel Aufmerksamkeit fand.
Entsprechend der inhaltlichen Ausrichtung wendet sich das Buch an Schachtrainer, Übungsleiter und Schachlehrer.
Damit liegt erstmalig ein Schachlehrbuch vor, das den hohen Ansprüchen der Anfängerausbildung voll gerecht wird.
Übungsleiter und Schachlehrer mit geringerer schachlicher Qualifikation werden gleichfalls in die Lage versetzt, durch die vielen praktischen Hinweise zur Gestaltung des Schachunterrichts, zur Betreuung der jungen Schachspieler bis hin zur Vorbereitung auf Wettkämpfe das in neun Lektionen konzeptierte Stoffangebot mühelos zu vermitteln.
446 Seiten, 944 Diagramme,
Leinen mit Schutzumschlag
Bestell-Nr. 671 699 5 Preis: 24,00 M
Sportverlag Berlin

Hans Kleffe

Roboter reisen zu Planeten

78 Seiten, zahlr. Abb.
Bestell-Nr. 632 356 9 Preis: 8,20 M
Der Kinderbuchverlag, Berlin

Hannelore Kischkewitz

Das Ägypten der Pharaonen

132 Seiten, zahlr. Abb.
Bestell-Nr. 630 773 7 Preis: 19,50 M
Der Kinderbuchverlag, Berlin

G. Deweß und M. Deweß

Summa summarum

Kostproben unterhaltsamer Mathematik
92 S., 78 Abb., Festeinband
Bestell-Nr. 666 317 6 Preis: 15,00 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft
Leipzig

H. Kästner und P. Göthner

Algebra – aller Anfang ist leicht

156 S., 30 Abb., kartoniert
Bestell-Nr. 666 138 1 Preis: 8,40 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft
Leipzig

M. Miller

Rechenvorteile

96 S., 1 Abb., kartoniert
Bestell-Nr. 665 065 8 Preis: 3,75 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft
Leipzig

M. Hasse

Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik

Etwa 84 Seiten mit etwa 7 Abb.,
kartoniert
Bestell-Nr. 665 084 1 Preis: 3,30 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft
Leipzig

Ein Teil der Bücher ist durch Vorbestellungen bei den Verlagen vergriffen. Sie sind möglicherweise beim Buchhandel z. Z. noch vorrätig. Wir weisen auf die Möglichkeit der Ausleihe in Bibliotheken hin.

Plaudereien über das Buch

Eine Gruppe von Sachverständigen, die 1460 die Erfindung des Johann Gensfleisch zu Gutenberg untersuchte, kam zu dem Schluß, die Buchdruckerpresse sei unnütz und habe keine Zukunft. Die Begründung war einleuchtend: Die Zahl der Personen, die lesen könnten, sei so gering, daß die Buchproduktion der kopierenden Mönche völlig ausreiche.

aus: Harald Weirich/Otto Wilfert, Auf dem Weg in die elektronische Kommunikation

Lesen und leben sind durch mehr als einen Reim verbunden und durch weniger als einen Konsonanten getrennt.

Hermann Kant

Es wäre gut Bücher kaufen, wenn man die Zeit, sie zu lesen, mitkaufen könnte, aber man verwechselt meistens den Ankauf der Bücher mit dem Aneignen ihres Inhalts.

Schopenhauer

Ein Dankeschön an unsere Verlage

Die Redaktion *alpha* konnte in diesem Jahr den Preisträgern des *alpha*-Wettbewerbs 1986/87 wieder viele interessante Bücher senden. Diese stellten uns zahlreiche Verlage zur Verfügung, denen wir an dieser Stelle herzlichen Dank sagen möchten:
Altberliner Verlag, Berlin;
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig;
VEB Domowina Verlag, Bautzen;
VEB Fachbuchverlag, Leipzig;
Der Kinderbuchverlag, Berlin;
Militärverlag der DDR, Berlin;
Mitteldeutscher Verlag, Halle;
Buchverlag Der Morgen, Berlin;
Verlag Neues Leben, Berlin;
VEB Postreiter-Verlag, Halle;
Verlag Philipp Reclam jun., Leipzig;
Sportverlag, Berlin;
VE Verlag Technik, Berlin;
transpress-Verlag, Berlin;
Urania-Verlag, Leipzig;
Verlag Volk und Welt, Berlin;
VE Verlag Volk und Wissen, Berlin;
VE Verlag der Wissenschaften, Berlin.

alpha-Wettbewerb

Kollektive Beteiligung am alpha-Wettbewerb 1986/87

Fr.-Engels-OS, E.-Mäder-OS, beide Altenburg; Stadtklub Jg. Math., Altentreptow; E.-Schneller-OS, Alt-Sührkow; K.-Marx-OS, Anklam; OS Asbach; Tereschkowa-OS, Aschersleben; OS W. Lamberz, Bad Berka; H.-Duncker-OS, Bad Kleinen; H.-Beimler-OS, Bad Köstritz; R.-Schwarz-OS, Bad Liebenstein; M.-Poser-OS., EOS E. Thälmann, A.-Saefkow-OS, 1. OS Dr. Th. Neubauer, O.-Grotewohl-OS, Stat. Jg. Techn. u. Naturf., alle Bad Salzungen; Zentrale OS H. Beimler, Bärenklau; H.-Heine-OS, Barchfeld; OS Cl. Zetkin, Barby; O.-Nowack-OS, Bentwisch; 33. OS L. Grundig, 44. OS F. Erpenbeck, 25. OS Fr. Mehring, 41. OS L. Weiskopf-Henrich, alle Berlin; Haus der JP, Berlin-Pankow; OS J. R. Becher, Bernburg; OS C. Fugger, Bernau; A.-Becker-OS, Berlingerode; Geschw.-Scholl-OS, Bernsdorf; OS Cl.-Zetkin, Bischofferode; WSO, Bismark; OS Fr. Schiller, Bleicherode; F.-Weineck-OS, Blumberg; OS Blumenthal; OS Beuren; G.-Dimitroff-OS, Böhlen; A.-Bebel-OS, Boizenburg; OS Bockau; Kreis-AG Math., Borna; OS J. Schehr, Born; OS W. Komarow, Boxberg; OS W. Pieck, Brand-Erbisdorf; OS H. Beimler, W.-Seelenbinder-OS, beide Breitungen; B.-Brecht-OS, Brehme; OS Dr. Th. Neubauer, Brotterode; Kl.-Gottwald-OS, Burg-Stargard; W.-Pieck-OS, Burow; M.-Poser-OS, Bürgel; W.-Estel-OS, Buttlar; O.-Koschewoi-OS, Callenberg; Stat. Jg. Naturf. u. Techn., 5. OS C. Blecher, beide Cottbus; OS Br. Kühn, Dambeck; Fr.-Reuter-OS, Kreisklub Jg. Math., beide Demmin; OS Dersekow; OS Dermbach; R.-Breitscheid-OS, Dessau; E.-Weinert-OS, Deuna; OS Makarenko, Dingelstädt; M.-Curie-OS, Dohna; OS A. Matrossow, Dorndorf; K.-Niederkirchner-OS, Domersleben; OS Fr. Engels, Drebkau; O.-Grotewohl-OS, Dreitzsch; W.-Pieck-OS, 100. OS, Pionierpalast W. Ulbricht, alle Dresden; OS Dürrröhrsdorf; W.-Pieck-OS, Kreisklub Math., beide Eberswalde; W.-Pieck-OS, Eichhof; OS Eichhorst; 1. OS R. Arndt, Elsterwerda; E.-Weinert-OS, Empfertshausen; OS 56, Goethe-OS, beide Erfurt; 1. OS A. Becker, 2. OS, beide Falkenberg; Th.-Müntzer-OS, Fambach; E.-Weinert-OS, Flessau; B.-Brecht-OS, Floh; W.-Pieck-OS, Fehrbellin; Stat. Jg. Techn. u. Naturf., Dr.-Th.-Neubauer-OS, beide Frankfurt/O.; E.-Thälmann-OS, Freital; E.-Thälmann-OS, Friedeburg; OS I, Friedland; OS G. Dimitroff, Friedrichsthal; OS V H. Günther, Fürstenwalde; Haus der JP, Gadebusch; K.-Marx-OS, Gebesee; R.-Arnstadt-OS, Geisa; E.-Hoernle-OS, Geismar; K.-Marx-OS, Gera; E.-Hartsch-OS, Gersdorf; OS Gernrode; J.-Gagarin-OS, Geithain; OS Gielow; 7. OS, Görlitz; OS Goldberg; Kreisklub Jg. Math., Gräfenhainichen; OS J. Gagarin, Grabowhöfe; Pestalozzi-OS, Greiffenberg; E.-Thälmann-OS, Greifswald; OS H. Beimler, Greußen; Kreisklub Jg. Math., Grevesmühlen; A.-Frank-OS, Grimma; OS W. Seelenbinder, Gröden; A.-Walther-OS, Gröditz; OS Cl. Zetkin, Groitzsch; OS Großbartloff; OS A. Kuntz, Großbodungen; R.-Luxemburg-OS, Groß-Nemerow; J.-Gagarin-OS, Grünhain; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Guben; Th.-Müntzer-OS, Gumpelstadt; OS H. Günther, Hachelbich; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. H. Reckmann, Marx-Engels-Schule, beide Halberstadt; M.-Gorki-OS, Hainichen; Kreisklub Math. Halle-Süd; Stat. Jg. Techn. u. Naturf. Halle-Neustadt; OS Hammerbrücke; J.-Fučik-OS, Hartha; OS Haynrode; J.-Marchlewski-OS, Havelberg; OS B. Koenen, Hedersleben; Schule d. DSF, Heiligengrabe; EOS W. Pieck, Heiligenstadt; OS M. Gorki, Hillersleben; Goethe-OS, Hohenleipisch; Cl.-Zetkin-OS, Hohenstein-E.; 21. OS Hoyerswerda; OS E. Egert, Hundeshagen; OS W. Seelenbinder, Ilfeld; Goethe-OS, Ilsenburg; G.-Ewald-OS, Ivenack; A.-Becker-OS, Jatznick; OS M. Poser, OS W. Pieck, beide Jena; Fr.-Engels-Schule, Kaltennordheim; H. Beimler-OS, Karbow; Cl.-Zetkin-OS, Kandelin; OS A. Becker, Kamsdorf; Wl.-Komarow-OS, Fr.-Matschke-OS, E.-Schneller-OS, H.-Menzel-OS, Tschaikowski-OS, A. Matrossow-OS, Makarenko-OS, Stadtbezirkspionierhaus, alle Karl-Marx-Stadt; OS Katzow; E.-Boberg-OS, Karlsburg; Cl.-Zetkin-OS, Kaulsdorf; Th.-Neubauer-OS, Kieselbach; OS Kirchworbis; OS Kitzen; H.-Matern-OS, Klietz; OS H. Matern, Klockow; W.-Seelenbinder-OS, Könitz; OS M. Burwitz, Kritzmow; K.-Marx-OS, Kühlungsborn; OS Cl. Zetkin, Laage; OS Langenwolmsdorf; OS R. Breitscheid, Latdorf; Goetheschule, Lauscha; Schulkombinat Lauscha-Ernstthal; Pestalozzi-OS, Leegebruch; OS E. Weinert, Legefeld; R.-Teichmüller-OS, Leimbach; Dr.-S-Allende-OS, E.-Thälmann-OS, OS R. Luxemburg, EOS K. Marx, K.-Liebknecht-OS, 4. OS J. C. Fuhlrott, alle Leinefelde; 46. OS L. Fürnberg, Haus der JP A. Saefkow, beide Leipzig; M.-Poser-OS, Lengfeld; Cl.-Zetkin-OS, Leopoldshagen; E.-Thälmann-OS, Leutenberg; O.-Grotewohl-OS, EOS Prof. Dr. M. Schneider, beide Lichtenstein; OS W. Wallstab, Löderburg; W.-Seelenbinder-OS, Lössau; B.-Brecht-OS, Luckenwalde; Haus der JP Th. Körner, Ludwigslust; Fr.-L.-Jahn-OS, Lübtheen; Goethe-OS, Ludwigslust; Lenin-OS, Magdeburg; Haus der JP Fr. Siemon, Markkleeberg; J.-Gagarin-OS., Meiningen; OS J. Gagarin, Merkers; Fr.-Hecker-OS, Milkau; OS H. Rau, Mieste; OS Mittelstille; E.-Steinfurth-OS, Mittenwalde; Kinderheim Munzig; OS Nachterstedt; O.-Grotewohl-OS, Naumburg; OS J. Fučik, H.-Beimler-OS, beide Naundorf; OS W. Bykowski, Neetzow; 12. OS E. Weinert, Neubrandenburg; F.-Dziersynski-OS. Neuhaus; M.-Burwitz-OS, Neuenkirchen; R.-Hallmeyer-OS, Neundorf; Fontane-Schule, Neuruppin; Fr.-Schiller-OS, Goetheschule, W.-Pieck-OS, alle Neustadt; W.-Seelenbinder-OS, Niederlichtenau; Dr.-Th.-Neubauer-Schule, Niederorschel; OS J. Gagarin, EOS W. v. Humboldt, beide Nordhausen; OS Nossentiner Hütte; OS E. Weinert, Oberschönau; Fr.-Fröbel-OS, Oberweißbach; OS Olbersdorf; Haus der JP H. Coppi, Kreisklub Mathe, beide Oranienburg; E.-Vogel-OS, Pestalozzi-OS, beide Oschatz; EOS K. Marx, Oschersleben; OS P. Kmiec, Osternienburg; OS W. Pieck, Osterwieck; OS O. Grotewohl, Pappenheim; Haus der JP P. Göring, Parchim; E.-Schneller-OS, Penig; OS Dr. Th. Neubauer, Pfaffschwende; OS G. Haak, Pirna; Herbart-OS, Plauen; Spezialistenlager Plauen-Land; Makarenko-OS, Plessa; OS Pritzerbe; Goetheschule II, Pritzwalk; OS E. Schneller, Polleben; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Rackwitz; OS Pestalozzi, O.-Buchwitz-OS, beide Radebeul; P.-Blechschmidt-OS, Raschau; E.-Weinert-OS, Reichenbach; K.-Burger-OS, Reinkenhagen; J.-Gagarin-OS, Ribnitz; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. E. Hoernle, Richtenberg; H.-Matern-OS, Spezialschule Fr. Engels, beide Riesa; H.-Matern-OS, Rochlitz; Joliot-Curie-OS, Röbel; Joliot-Curie-OS, Ronneburg; K.-Liebknecht-OS, Rositz; Fr.-Schmenkel-OS, Roskow; Ziolkowski-OS, Roßdorf; 66. OS O. Buchwitz, Haus der JP, 37. OS, alle Rostock; OS S. Kosmodemjanskaja, Rotterode; Kreisklub Jg. Math. Rotta; DSF-OS, Rudolstadt; OS K. Niederkirchner, Saal; E.-Weinert-OS, Saalfeld; Stat. Jg. Techn. u. Naturf. E. Thälmann, Salzwedel; Tamara-Bunke-OS, Sanitz; W.-Pieck-OS, Sangerhausen, W.-I.-Lenin-OS, Saßnitz; OS H. Matern, Schernberg; OS M. Gorki, Schkölen; G.-Hauptmann-OS, Schleusingen; 4. OS, OS K. Marx, OS J. G. Seume, alle Schmalkalden; P.-Göring-OS, Schmiedefeld; Schule der DSF, Schneidlingen; Haus der JP W. Sonneberg, Schönebeck; OS H. Beimler, Schönhausen; E.-Weinert-OS, Schollene; OS Kuba, Schule der DSF, Schorssow; R.-Hartmann-OS, Schönberg; OS Fr. Engels, Schwallungen; Lenin-OS, Schwarzenberg; OS Schweina; Haus der JP M. Böhme, M.-May-OS, beide Sebnitz; OS A. Wölk, Senftenberg; Fr.-Reuter-OS, Siedenbollentin; OS Th. Müntzer, Silkerode; Pionierhaus Förderzirkel Math., Sömmerda; OS Glückauf, OS W. Pieck, OS A. Saefkow, J.-R.-Becher-OS, alle Sondershausen; OS H.-A. Eckelmann, Sponholz; OS A. Becker, OS K. Marx, beide Spremberg; Wittig-OS, Staaken; Stat. Jg. Naturf. u. Techn., Stahnsdorf; II. OS E. Wölk, Stadtroda; J.-Fučik-OS, Steinbach; R.-Luxemburg-OS, Steinsdorf; Haus der JP Fr. Weineck, Strausberg; Lasker-OS, Schule d. DSF, Ströbeck; M.-Gorki-OS, Stützerbach; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Tangerhütte; H.-Beimler-OS, Tantow; J.-Gagarin-OS, Teistungen; OS G. Eisler, Teterow; OS Thoßfell; K.-Liebknecht-OS, Teuchern; E.-Schneller-OS, Töplitz; Pestalozzischule, A.-Einstein-OS, beide Torgelow; OS W. Pieck, Trusetal; E.-Welk-OS, A.-Nitz-OS, beide Ueckermünde; H.-Beimler-OS, Unterbreizbach; E.-Schneller-OS, Urnshausen; A.-Becker-OS, Urbich; OS J. G. Seume, Vacha; OS Vierraden; OS Viernau; alpha-Club OS Vitzenburg; OS Völkershausen; A.-Bebel-OS, Vogelsang; Goetheschule, Kreisklub Jg. Math., beide Waren; OS Wechmar; Kreisklub Jg. Math., Weißwasser; OS Weißenborn-L.; R.-Luxemburg-OS, Werbelow; J.-Gagarin-OS, Werneuchen; OS A. Günther, Wernshausen; J.-Harder-OS, Wesenberg; OS O. Grotewohl, Westerengel; OS Wippersdorf; K.-Kollwitz-OS, Stat. Jg. Naturf. u. Techn., beide Wittenberg; Stat. Jg. Naturf. u. Techn., Fr.-Engels-OS, beide Wittstock; OS H. Heine, Wörmlitz; O.-Buchwitz-OS, Wolkenburg; Dr.-R.-Sorge-OS, Wollin; Kreis-Mathematiklager, OS W. I. Lenin, OS I H. Werner, alle Worbis; OS Th. Müntzer, Wulfen; G.-Walter-OS, Wustrow; Pestalozzi-OS, Zeithain; Lutherschule, Zella-Mehlis; Stat. Jg. Naturf. u. Techn., Zembschen; W.-Seng-OS, M.-Lenk-OS, beide Zepernick; F.-Schiller-OS, Zeulenroda; Th.-Müntzer-OS, Ziesar; OS J. H. Pestalozzi, Zschornewitz; OS E. Thälmann, Steinbach-Hallenberg; 12. OS Dr. R. Sorge, Suhl.

Aus einem Mathematischen Schülerwettstreit der Klassen 4 im Kreis Bernau

$$B \cdot E \cdot R \cdot L \cdot I \cdot N = 750$$

Schreibe 750 als Produkt aus 6 Faktoren derart, daß jeder nächstfolgende Faktor jeweils eine größere oder mindestens eine gleichgroße Zahl ist wie der vorhergehende Faktor. Dabei soll der Faktor 1 höchstens dreimal in einer Gleichung vorkommen.

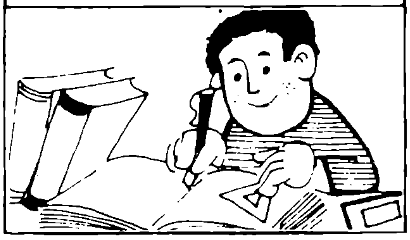
Gib möglichst viele Gleichungen an!

Erika Schwerin, Fachberater im Kreis Bernau

Lösung

1. $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 125 = 750$
2. $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 75 = 750$
3. $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 50 = 750$
4. $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 25 = 750$
5. $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 25 = 750$
6. $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 25 = 750$
7. $1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10 = 750$
8. $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 30 = 750$

Lösungen



Lösung zu:
Pythagoras von Samos

Die Anzahl der Schüler des Pythagoras sei x. Dann gilt:
$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 3 = x.$
Es folgt: $x = 28$.
Pythagoras hatte 28 Schüler.

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Ersetze jeden Buchstaben durch einen Einer (d. h. durch eine einstellige Zahl)!

FIVE	(fünf minus vier
− FOUR	gleich eins)
ONE	

Jeder Buchstabe steht für nur einen Einer. (Es gibt mehr als eine mögliche Antwort.)

Lösung: Zum Beispiel

8671	8741
−8350	−8350
321	391

▲2▲ In letzter Zeit laufe ich viel Ski. Vorgestern bin ich 3 km mehr gelaufen als gestern, und gestern 40 km weniger als vorgestern und heute zusammen. Wieviel Kilometer habe ich heute auf Ski zurückgelegt?

Lösung: Wir bezeichnen mit x die heutige Kilometerzahl, die gestrige mit y. Dann wurden vorgestern $(y + 3)$ km gelaufen. Nach der zweiten Angabe gilt
$y + 40 = y + 3 + x$, also $x = 37$.

▲3▲ Ein Bassin wird durch zwei Wasserhähne mit Wasser gefüllt. Der eine allein füllt das Bassin in 9 Stunden, der andere füllt es allein in 6 Stunden.
a) Welcher Teil des Volumens des Bassins wird von jedem Hahn allein in einer Stunde gefüllt?
b) Man öffnet gleichzeitig beide Hähne. Welcher Teil des Volumens des Bassins ist nach einer Stunde gefüllt?
c) Nach welcher Zeit ist das Bassin voll?

Lösung:
a) Der eine Hahn allein füllt in einer Stunde $\frac{1}{9}$ des Bassins, der andere füllt allein $\frac{1}{6}$ des Bassins pro Stunde.
b) Nach einer Stunde sind $\frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$ des Bassins gefüllt.
c) Bezeichnet man die gesuchte Zeit (in Stunden) mit t, so erhält man die Gleichung $\frac{5}{18} \cdot t = 1$. Das heißt, daß in $t = \frac{18}{5}$ Stunden das Bassin gefüllt ist. Also wird das Bassin durch beide Hähne in 3 Stunden 36 Minuten gefüllt.

▲4▲ **Zahlenpyramide**
Jede Zahl in einem Rechteck dieser Pyramide ist gleich der Summe der Zahlen, die in den beiden Rechtecken unterhalb von diesem stehen.
Ergänzt die fehlenden Zahlen!

Lösung:

970				
455	515			
227	228	287		
127	100	128	159	
71	56	44	84	75

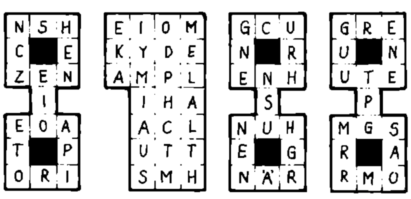
Lösungen zu: Fan-Tan – ein mathematisches Spiel

▲1▲ In der Partie mit der Anfangsstellung $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_m \end{pmatrix}$ können alle Stellungen $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ mit $0 \leqq a_i \leqq n_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$ auftreten. Die Anzahl aller möglichen Stellungen (einschließlich der Anfangsstellung) ist
$(n_1 + 1)\ (n_2 + 1)\ \ldots\ (n_m + 1)$.

▲2▲ Der Fehler unterläuft dem Spieler A im dritten Zug; statt auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ müßte er auf $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ziehen.

Lösung zu: Rösselsprung

In der Baumfigur steht:
WIR WÜNSCHEN ALLEN
ALPHALESERN
EIN FROHES WEIHNACHTSFEST
SOWIE EIN GESUNDES, GLÜCK-
LICHES UND ERFOLGREICHES
NEUES JAHR!
DIE REDAKTION DER ALPHA



Lösung zu: Jahreswechsel

Je eine Möglichkeit ist:

$1 \cdot 9! : 8! - 8 = 1$
$1 + 9 - 8 + 7 = 9$
$1 - 9 + 8 + 8 = 8$
$1 - 9 + 8 + 7 = 7$

$1 \cdot 9 - 8! : 7! = 1$
$1 \cdot 9 \cdot 8 : 8 = 9$
$1 \cdot 9 - 8 + 7 = 8$
$1 \cdot 9 - 8 : 8 = 8$

Lösungen zu: alpha-heiter

Domino-Quadrat

1/2	2/4	4/5
1/2		5/0
2/6		0/4
6/0	0/4	4/4

Information aus Dottershausen und Eiersbach

Für Dottershausen gilt: $1\frac{1}{2}$ Hühner legen an 1 Tag 1 Ei.)3 Hühner legen je Tag also 2 Eier.) 1 Huhn legt je Tag $\frac{2}{3}$ Eier.

Für Eiersbach gilt entsprechend: $2\frac{1}{2}$ Hühner legen an 1 Tag 1 Ei. (5 Hühner legen je Tag also ebenfalls 2 Eier.) 1 Huhn legt je Tag $\frac{2}{5}$ Eier. Ist x die Anzahl der Hühner in jedem Dorf, so gilt:
$x \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) = 40, \quad \frac{4}{15}x = 40,$
$x = 150$ (Hühner). Wegen
$150 \cdot \frac{2}{3} = 100$ und $150 \cdot \frac{2}{5} = 60$
gilt $100 - 60 = 40$.
Also werden 100 bzw. 60 Eier je Tag in den beiden Dörfern gelegt.

Mit 1, 2, 3 und 4
Zum Beispiel: $15 = 1 + 2 + 3 \cdot 4$;
$16 = 34 : 2 - 1$, $17 = 1 \cdot 34 : 2$;
$18 = 32 - 14$, $19 = 12 + 4 + 3$;
$20 = 23 - 4 + 1$; $21 = 1 \cdot 24 - 3$;
$22 = 2 \cdot 13 - 4$; $23 = 3^2 + 14$;
$24 = 12 + 3 \cdot 4$.

Eine interessante Gleichung

Es gibt zwei Lösungen:
$\frac{8}{74} = 0{,}\overline{108}$ und $\frac{5}{27} = 0{,}\overline{185}$.

Zwei weihnachtliche Geduldsspiele
a) Die Lösung sei dem Leser selbst überlassen.
b) M Mitte; R Rand. I − M, L − R, K − R, I − R, O − M, L − R, O − R, S − M, A − R, U − R, S − R.

Kryptarithmetik

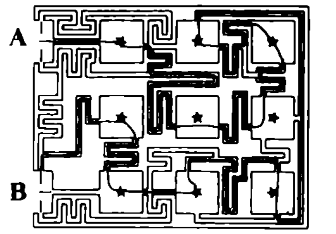
a)

$$\begin{array}{ccccc} 224 & : & 14 & = & 16 \\ : & & \cdot & & : \\ 2 & \cdot & 2 & = & 4 \\ \hline 112 & : & 28 & = & 4 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ccccccc} 14 & \cdot & 25 & - & 87 & = & 263 \\ \cdot & & : & & + & & - \\ 15 & : & 5 & + & 30 & = & 33 \\ - & & + & & : & & + \\ 23 & + & 18 & : & 6 & = & 26 \\ \hline 187 & - & 23 & + & 92 & = & 256 \end{array}$$

Der Weihnachtsmann ist da!



Mit Kühnheit und Verstand
Der Halbkreis in der Zeichnung hat einen Radius, der halb so groß ist, wie der Radius r des Viertelkreises. Dessen Inhalt A_1 ist $A_1 = \frac{\pi}{4} r^2$, der Inhalt des gezeichneten Halbkreises A_2 ist damit

$$A_2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot r^2}{2 \cdot 4} = \frac{\pi}{8} r^2 = \frac{1}{2} A_1.$$

Die Summe der Flächeninhalte der gerasterten und der gepunkteten Schildhälfte ist somit gleich A_2, dem Inhalt des gezeichneten Halbkreises. Der Inhalt der gerasterten Teilfläche wird also sowohl durch den Inhalt der schwarz gemalten Fläche des Schildes als auch durch den der gepunkteten Fläche zu A_2 ergänzt. Somit gilt die Behauptung des Malers, w. z. b. w.

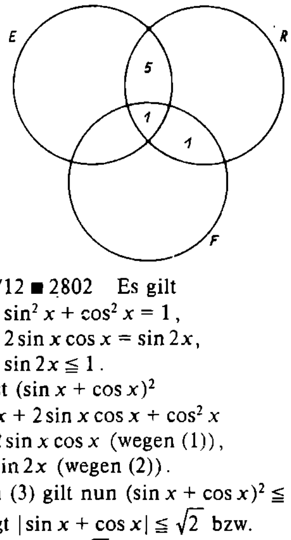
Was alles in einem Dreieck steckt
Drei, Dreck, Decke; Deck, Dicker, Recke; Reck, Rede, Ricke; Ede, Ei, Eid; Ecke, Erde, Erik; Idee, Ire, Kreide.

Auf einen Blick
Die Kugeln mit der Nr. 4 und 8 sind dekkungsgleich.

Lösung zu: Wieviel Bonbons sind am Pfefferkuchenhaus?
38 165 172,5 – ein Bonbon hat Hänsel also schon angeknabbert!

Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 2/87, Fortsetzung

Ma 10/12 ■ 2801 Es waren 7 Dolmetscher.



Ma 10/12 ■ 2802 Es gilt
(1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
(2) $2 \sin x \cos x = \sin 2x$,
(3) $\sin 2x \leqq 1$.
Nun ist $(\sin x + \cos x)^2$
$= \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x$
$= 1 + 2 \sin x \cos x$ (wegen (1)),
$= 1 + \sin 2x$ (wegen (2)).
Wegen (3) gilt nun $(\sin x + \cos x)^2 \leqq 2$.
Es folgt $|\sin x + \cos x| \leqq \sqrt{2}$ bzw.
$\sin x + \cos x \leqq \sqrt{2}$, w. z. b. w.

Ma 10/12 ■ 2803 Es mögen beide Körper die Höhe h haben, dann gilt für das Volumen der Pyramide $V_P = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$ und für das des Kreiskegels $V_K = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$ (a sei die Bezeichnung für die Länge der Grundkante der Pyramide).
Da beide Volumina gleich sein sollen, gilt nun $\frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$.
Nach Division durch $\frac{1}{3} h$ und Umstellung nach r erhält man $r = \frac{a}{\sqrt{\pi}}$.

Ma 10/12 ■ 2804 Ein regelmäßiges n-Eck setzt sich aus n gleichschenkligen und paarweise kongruenten Dreiecken zusammen. Der Winkel an der Spitze eines solchen Dreiecks hat die Größe $\frac{360°}{n}$. Bezeichnen wir einen jeden Basiswinkel mit α, so gilt nach dem Innenwinkelsatz für Dreiecke

$$\alpha = \frac{180° - \frac{360°}{n}}{2},$$

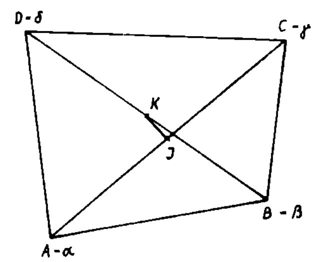
und da sich ein Innenwinkel des regelmäßigen n-Ecks aus zwei Basiswinkeln eines Dreiecks zusammensetzt, beträgt seine Größe 2α. Es läßt sich nun die folgende Gleichung aufstellen:
$1440° = n \cdot 2 \cdot \left(90° - \frac{180°}{n}\right)$,
$1440° = 180° \cdot n - 360°$,
$1800° = 180° \cdot n$, $10 = n$. Es handelt sich um ein regelmäßiges Zehneck.

Lösungen zu: Mathematiker in Berlin (von 1708 bis 1855)
Heft 5/87

▲ 1 ▲ Platon (427 bis 347 v. u. Z.).
Satz von Pythagoras: Ein Dreieck mit den Katheten a, b und der Hypotenuse c ist genau dann rechtwinklig, wenn
$c^2 = a^2 + b^2$ ist.
Euklid (4. Jh. v. u. Z.).

▲ 2 ▲ Auf 522 Arten kann die Zahl 50 in sieben verschiedenen Summen zerlegt werden. Leonhard Euler löste das Problem u. a. im 16. Kapitel seines 1748 erschienenen Buches „Einleitung in die Analysis des Unendlichen, Teil 1" (deutsche Übersetzung von H. Maser, Berlin 1885).

▲ 3 ▲ Der Mittelpunkt J der Diagonalen $\overrightarrow{AC}$ ist $J = \frac{\alpha + \gamma}{2}$, der Mittelpunkt K der Diagonalen $\overrightarrow{BD}$ ist $K = \frac{\beta + \delta}{2}$.
Dann ist $\overrightarrow{JK} = \frac{\beta + \delta}{2} - \frac{\alpha + \gamma}{2}$.
Ferner gilt $\overrightarrow{BD} = \delta - \beta$, $\overrightarrow{AC} = \gamma - \alpha$,
$\overrightarrow{AB} = \beta - \alpha$, $\overrightarrow{BC} = \gamma - \beta$.
$\overrightarrow{CD} = \delta - \gamma$, $\overrightarrow{DA} = \alpha - \delta$.



Hieraus folgt
$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2$
$= |\beta - \alpha|^2 + |\gamma - \beta|^2 + |\delta - \gamma|^2 + |\alpha - \delta|^2$
$= (\beta - \alpha)(\overline{\beta} - \overline{\alpha}) + (\gamma - \beta)(\overline{\gamma} - \overline{\beta})$
$+ (\delta - \gamma)(\overline{\delta} - \overline{\gamma}) + (\alpha - \delta)(\overline{\alpha} - \overline{\delta})$
und
$|AC|^2 + |\overline{BD}|^2 + (2\,|JK|)^2$
$= |\gamma - \alpha|^2 + |\delta - \beta|^2 + |\beta + \delta - \alpha - \gamma|^2$
$= (\gamma - \alpha)(\overline{\gamma} - \overline{\alpha}) + (\delta - \beta)(\overline{\delta} - \overline{\beta})$
$+ (\beta + \delta - \alpha - \gamma)(\overline{\beta} + \overline{\delta} - \overline{\alpha} - \overline{\gamma})$.
Weiteres Ausrechnen beider Ausdrücke bestätigt die Gleichheit:
$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2$
$= |AC|^2 + |BD|^2 + 4\,|JK|^2$.

Lösungen zu: Mathematiker in Berlin (von 1855 bis 1897)
Heft 5/87

▲ 1 ▲ Wir setzen $A = \frac{c_1 + \ldots + c_n}{n}$ und $a_i = c_i - A$ für $1 \leqq i \leqq n$.
Dann ist $\sum_{i=1}^{n} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right) - nA$
$= nA - nA = 0$. Damit folgt
$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (A + a_i)^2$
$= \sum_{i=1}^{n} (A^2 + 2Aa_i + a_i^2$
$= \sum_{i=1}^{n} A^2 + 2A \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} a_i^2$
$= nA^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqq nA^2$,
woraus die Behauptung folgt.

▲ 2 ▲
Zum Beispiel leisten die Funktionen $f(x) = c \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{r} x\right)$ das Verlangte (für jede Konstante $c \neq 0$).

▲ 3 ▲ Wir nehmen an, daß $f(x)$ keine beliebig kleinen positiven Perioden besitzt. Dann existiert ein $c > 0$, so daß $w > c$ für alle positiven Perioden w gilt. Da mit zwei Perioden w', w auch deren Differenz $w' - w$ eine Periode ist, folgt $|w' - w| > c$. Daher muß unter den Perioden von $f(x)$ eine kleinste positive Periode w existieren. Es sei w' irgendeine weitere positive Periode. Weiterhin sei h die größte natürliche Zahl mit $hw \leqq w'$. Wir setzen $w_1 = w' - hw$. Dann ist $0 \leqq w_1 < w$. Da aber w_1 auch eine Periode ist, muß $w_1 = 0$ gelten. Folglich sind alle positiven Perioden Vielfache von w. Da mit w' auch $-w'$ eine Periode ist, sind schließlich alle Perioden Vielfache von w und damit ist $f(x)$ einfach-periodisch.

▲ 4 ▲ Nach Voraussetzung existiert eine Folge w_n, $w_n \neq 0$, von Perioden von $f(x)$ mit $\lim_{n \to \infty} w_n = 0$. Wenn $f(x)$ differenzierbar ist, gilt

$$f'(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_0 + w_n) - f(x_0)}{w_n}$$

für jede reelle Zahl x_0.
Also ist $f'(x_0) = 0$.
Dann ist aber $f(x) = c$ für eine Konstante c. Andererseits hat jede konstante Funktion trivialerweise beliebig kleine Perioden.

▲ 5 ▲ Die Bedingung ist notwendig: es sei d der ggT von m und n. Dann ist $\frac{a}{m} - \frac{b}{n} = 0$ für $a = \frac{m}{d}$, $b = \frac{n}{d}$.
Ist also das Kroneckersche Produkt von Null verschieden, muß notwendig $d = 1$ gelten.
Die Bedingung ist hinreichend: Gilt

$\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$ für gewisse a, b, so folgt $an = bm$. Da m und n teilerfremd sind, muß $a \mid m$ und $b \mid n$ gelten. Wegen $0 < a < m$, $0 < b < n$ kann das nicht eintreten.

▲6▲ Wir bezeichnen das Kroneckersche Produkt $\prod \left(\frac{a}{m} - \frac{b}{n} \right)$ mit $P(m, n)$.

Es besteht aus $\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}$ Faktoren.

Daher ist

$$P(n,m) = (-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}} P(m,n).$$

Es folgt dann

$$e(n,m) = (-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}} e(m,n),$$

was mit der Behauptung gleichbedeutend ist.

▲7▲ Zur Berechnung von $e(m,n)$ bestimmen wir die Anzahl der negativen Faktoren $\frac{a}{n} - \frac{b}{n}$. Es ist

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{n} < 0 \Leftrightarrow \frac{a}{m} < \frac{b}{n} \Leftrightarrow a < \frac{bm}{n}.$$

Die Anzahl der natürlichen Zahlen a mit $a < \frac{bm}{n}$ ist aber $\left[\frac{\mathrm{bm}}{\mathrm{n}} \right]$.

Die Bedingung $a < \frac{m}{2}$ ist auch stets erfüllt, da aus $b < \frac{n}{2}$ sofort $\frac{bm}{n} < \frac{m}{2}$ folgt.

Daher ist $E = \sum_{b=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{bm}{n} \right]$ die Anzahl der negativen Faktoren $\frac{a}{m} - \frac{b}{n}$ im Kroneckerschen Produkt.

Also ist $e(m,n) = (-1)^E$.

▲8▲ Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $l > m$. Nach Voraussetzung ist $l = m + gn$ für eine natürliche Zahl g. Da l, m, n ungerade Zahlen sind, muß g gerade sein: $g = 2h$ für eine natürliche Zahl h. Also ist $l = m + 2hn$. Auf Grund der vorangegangenen Aufgabe gilt

$$e(l,n) = (-1)^E \text{ mit } E = \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{kl}{n} \right],$$

$$e(m,n) = (-1)^F \text{ mit } F = \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{km}{n} \right].$$

Aus $\frac{kl}{n} = \frac{km}{n} + 2hg$ folgt $\left[\frac{kl}{n} \right] = \left[\frac{km}{n} \right] + 2hg$. Daher unterscheiden sich E und F um eine gerade Zahl.

Also gilt $(-1)^E = (-1)^F$.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. Nietzsch
Heft 5/87

Das Schwerpunktviereck ist zum Viereck $ABCD$ ähnlich.

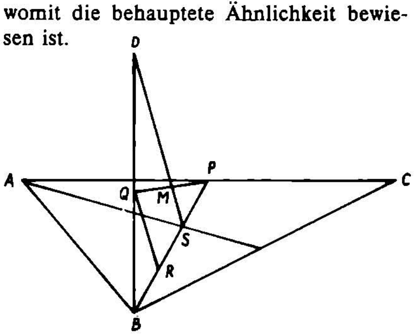
Beweis: Nach der Figur seien die Punkte P, Q, R und S so definiert, daß gilt: P halbiert $\overline{AC}$, R halbiert $\overline{BS}$ und S ist der Schwerpunkt von $\triangle ABC$. Dann gilt: $\triangle BQR$ ist dem $\triangle BSD$ ähnlich, auf Grund des gemeinsamen Winkels $\sphericalangle QBR$ und wegen der Seitenverhältnisse $\overline{DB} : \overline{QB} = \overline{SB} : \overline{RB}$.

Somit ist aber $\overline{QR} \parallel \overline{MS}$ und M halbiert $\overline{PQ}$. Weiterhin gilt

$$\overline{MS} = \frac{1}{2}\overline{QR} = \frac{1}{4}\overline{SD}, \text{ d. h. } \overline{DM} = 3\overline{MS}.$$

Damit ist gezeigt, daß der Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ das Bild von D bei zentrischer Streckung in M mit dem Streckungsfaktor $-\frac{1}{3}$ ist.

Analog schließt man für die Schwerpunkte der anderen eingangs genannten Dreiecke, womit die behauptete Ähnlichkeit bewiesen ist.



Bemerkung: Man kann jede andere Beziehung für die beiden Vierecke zeigen, die bei Ähnlichkeit erhalten bleiben (z. B. ist der Schwerpunkt S_{ABC} der Mittelpunkt des Kreises durch die Schwerpunkte S_{BCD}, S_{CDA}, S_{DAB}, so ist D der Mittelpunkt des Umkreises von $\triangle ABC$).

Rund um den SR 1

Wieviel Bonbons sind am Pfefferkuchenhaus?

Seit September 1985 benutzen wir im Mathematikunterricht den neuen Schulrechner SR 1. Die Arbeit mit diesem Rechner bereitet uns viel Freude, und der SR 1 ist uns ein guter und schneller Helfer. Unsere Mathematiklehrerin, Frau Rupp, hat uns erklärt, daß man mit dem SR 1 auch manche Wörter schreiben kann, indem man den Rechner umdreht und die *auf Kopf stehenden* Ziffern als Buchstaben deutet. Wir vereinbaren:

1 ≙ I, 2 ≙ Z, 3 ≙ E, 4 ≙ h, 5 ≙ S,
7 ≙ L, 8 ≙ B, 9 ≙ G, 0 ≙ O.

Anstelle des Buchstabens ß wollen wir wie auf alten Schreibmaschinen ss schreiben. Groß- und Kleinschreibung beachten wir nicht. Wir haben sehr viele Wörter so darstellen können. In der folgenden Geschichte sind einige versteckt:

Hänsel und Gretel lebten mit ihren Eltern in einem kleinen Haus. Der Vater ging oft mit dem Beil in den Wald, um Holz zu hacken. Weil die Eltern sehr arm waren, schickten sie die Kinder fort. Als es noch hell war, gab es im Wald viel zu sehen. Hänsel beobachtete einen Zobel und einen Igel, Gretel sah einen Zeisig. An einem See erblickten die Kinder eine Seelilie, über der eine Libelle ihre Kreise zog. Als es aber dunkel wurde, bekamen sie Angst. Durch die Bäume schimmerte ein gelbes Licht.

„Ho, ho“, rief Hänsel, aber Gretel meinte: „Sei leise!“ Sie standen vor dem Pfefferkuchenhaus. Hänsel kletterte an einem Seil auf das Dach und biss in einen Kuchen. „Los“, rief er, „hole eine Leiter und eine Bohle, damit wir Schokolade von der Esse abbrechen können.“ Da aber erschien die Hexe, sie hatte stechende, boese Augen, und rief: „Wer hat von meinem Lebkuchen gegessen? Kommt her, liebe Kinder, ich habe Marzipan und Gelee in Hülle und Fülle für euch.“ Die Kinder ließen sich von der Hexe täuschen. Gretel mußte nun im Haus helfen, den Hänsel aber sperrte die boese Hexe in ein Gelaß, das mit einem Riegel verschlossen war. Er bekam leckere Speisen, Sosse und Eis, damit er schnell dick werde. Gretel ahnte Schlimmes, als sie im Backofen Feuer machen sollte. Sie tat so, als ob sie das nicht könne, und bat die Hexe: „Zeige es mir bitte!“ Die Hexe band sich ein Seil um den Leib und kroch in den Ofen.

Hänsel hatte alles beobachtet und rief: „Schnell, schieb die Olle rein, mach die Klappe zu und hol mich aus dem Käfig. Wir haben einen Sieg errungen!“ Die Kinder freuten sich und aßen sich satt. Hänsel stopfte sich Bonbons in die Hose. Dann wollten die Kinder nach Hause. Vater und Mutter freuten sich sehr, der Hofhund aber begrüßte sie mit freudigem Gebell.

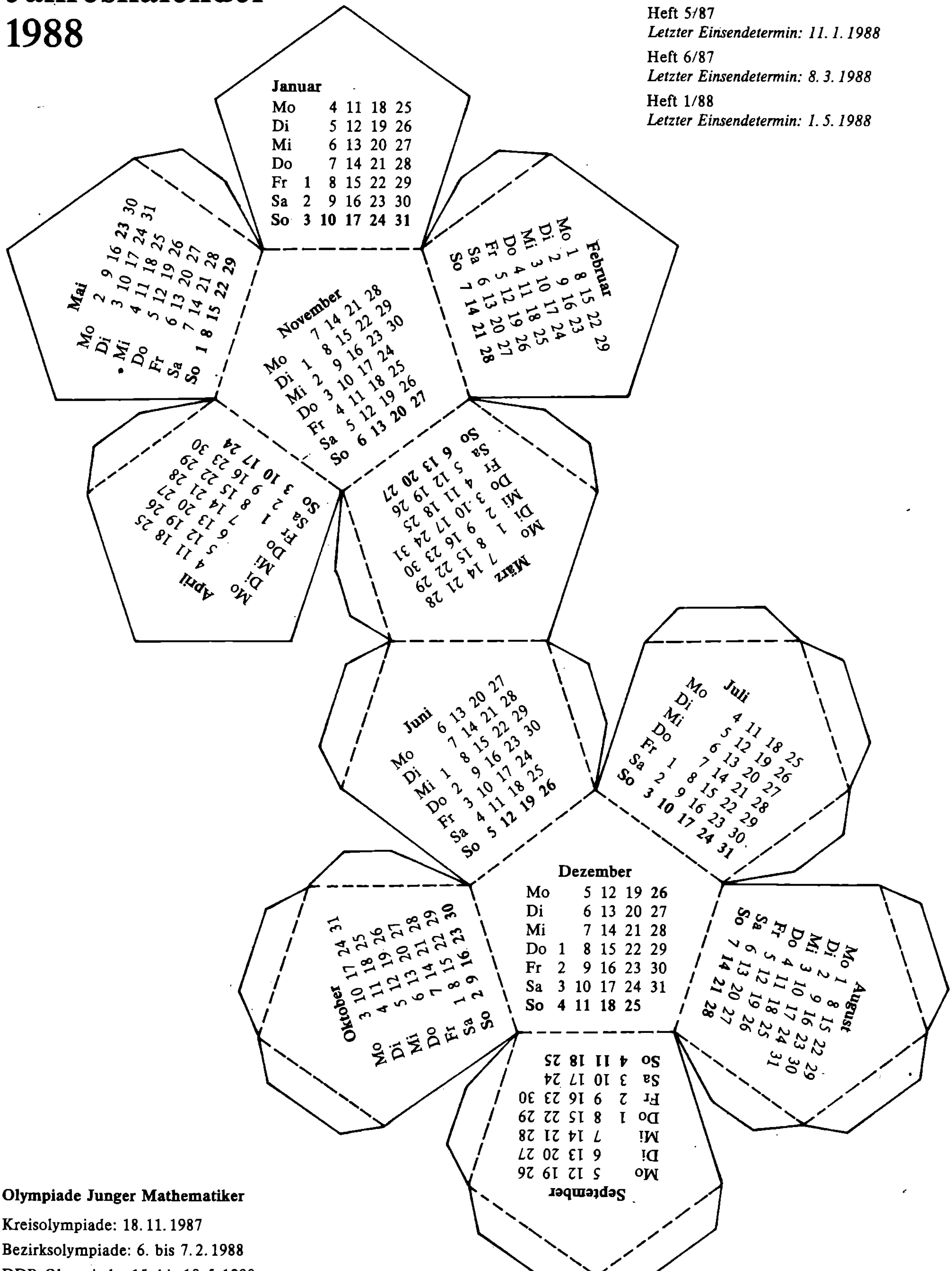
Sucht alle Wörter, die ihr mit dem SR 1 schreiben könnt, heraus (die mehrfach vorkommenden werden so oft berücksichtigt, wie sie in der Geschichte vorkommen). Stellt die Wörter mit dem SR 1 dar und addiert die zugehörigen Zahlen. Endet ein Wort auf den Buchstaben O, so wollen wir es als Dezimalzahl 0. * … * *darstellen. Dazu kann man den Speicher benutzen (Taste M+). Ich habe mir gedacht, daß die (richtige) Summe die Zahl der Bonbons am Hexenhaus sein soll. Habt ihr die Lösung gefunden?* *Susanne Schmidt, Klasse 9, E.-M.-Arndt-OS Greifswald*

Jahreskalender 1988

Heft 5/87
Letzter Einsendetermin: 11. 1. 1988

Heft 6/87
Letzter Einsendetermin: 8. 3. 1988

Heft 1/88
Letzter Einsendetermin: 1. 5. 1988



Olympiade Junger Mathematiker

Kreisolympiade: 18. 11. 1987

Bezirksolympiade: 6. bis 7. 2. 1988

DDR-Olympiade: 15. bis 19. 5. 1988

ISSN 002-6395 · alpha · Berlin · 21 (1987) 6 · Seiten 121 bis 144