Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
22. Jahrgang 1988
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

1

Alphons

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: W. Schmidt (S. 1, 2, 3); J. Warnke (S. 10, 11); Sportverlag Berlin (S. 15)
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, Vignette von Lothar Otto, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 5. Oktober 1987
Auslieferungstermin: 9. Februar 1988

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Alphons, vom Leipziger Graphiker Lothar Otto, wird insbesondere die Schüler der 5. bis 7. Klassen auf speziell für sie geeignete Beiträge hinweisen.

Kalendergeschichten

Teil 1

Die Uhr und der Kalender waren Großvaters Navigationsgeräte durch das Leben.
E. Strittmatter, Schulzendorfer Kramkalender

Bild 1

1. An welchem Wochentag wurdest du geboren? Wieviel Tage bist du alt? Weißt du, auf was für einen Wochentag der 1. 1. 2000 fallen wird? – Die zweite Frage läßt sich beantworten, indem du alle seit deiner Geburt bis zum aktuellen Datum verflossenen Tage addierst, dabei sind insbesondere die Schaltjahre zu berücksichtigen. Ein einfaches, aber mühevolles Vorgehen! Wenn man den gewünschten Wochentag nicht in einem Kalender ablesen kann, so läßt er sich aus dem in Tagen gemessenen Alter leicht berechnen.
Es ist objektiv recht schwierig, gute Kalender zusammenzustellen, weil ein (mittleres) Jahr aus 365,242... Tagen besteht. Der 45 v. u. Z. von Julius Caesar eingeführte *Julianische Kalender* sieht Jahre von 365 Tagen vor. In dem vierten Jahr wurde nach dem 23. Februar ein Schalttag eingefügt. Papst Gregor XIII. ordnete 1582 die Benutzung eines neuen Kalenders an, dieser wird als *Gregorianischer Kalender* bezeichnet, er wurde von Christoffel Clavius (1537 bis 1612) aufgestellt. An den 400. Jahrestag dieser Kalendereinführung erinnerte 1982 eine 60-Pf-Briefmarke der Deutschen Bundespost. Das Julianische Jahr ist mit 365,25 Tagen etwas länger als ein mittleres Sonnenjahr. Dies berücksichtigte der Gregorianische Kalender durch eine Korrektur von 3 Tagen in 400 Jahren. Und zwar ist das erste Jahr eines neuen Jahrhunderts (z. B. 1700, 1800, 1900) kein Schaltjahr, falls die ersten beiden Ziffern keine durch 4 teilbare Zahl darstellen (d. h. 2000 wird ein Schaltjahr sein!). Übrigens setzte sich dieser neue Kalender nur zögernd durch, er wurde erst 1777 Reichskalender in Deutschland. Die Sowjetunion führte ihn 1923 ein, wie ihr aus der Datumsangabe für viele historische Ereignisse (z. B. Oktoberrevolution am 7. 11.) wißt.
Bei der Aufstellung von Kalendern ist u. a. auch die Lage der Feiertage zu berechnen. Es darf uns daher nicht verwundern, daß noch vor 200 Jahren in Mathematiklehrbüchern das Kapitel Chronologie (Einteilung der Zeit) einen breiten Raum einnahm. (Die Berliner Akademie besaß eine nicht unergiebige Finanzierungsquelle durch die Herausgabe von Kalendern; Meinungsverschiedenheiten über zu erwartende Einnahmen aus dem Kalenderverkauf waren auch der Anlaß für L. Eulers erstes Abschiedsgesuch, siehe: R. Thiele, *Leonhard Euler*, Leipzig 1982.)
Der Mathematiker W. J. G. Karsten (1732 bis 1787, siehe *alpha* 1/1986) verfährt bei der Bestimmung des Wochentages so: Kämen in einem Kalender keine Schaltjahre vor, so würde alle 7 Jahre der Neujahrstag auf den gleichen Wochentag fallen. Wegen des Auftretens von Schaltjahren ist dies erst nach einem Zyklus von 28 Jahren der Fall. Jedem Tag ordne man nun einen Buchstaben aus der Menge A, B, C, D, E, F, G zu, und zwar dem 1. Januar A, dem 2. Januar B, ..., dem 1. Februar D usw. Im Schaltjahr erhält der 24. 2. als *Schalttag* ebenso wie der 23. 2. den Buchstaben E. Dadurch wird erreicht, daß in allen Monaten jeder Monatstag seinen eigenen Buchstaben behält. Für den 1. eines jeden Monats sind dies (Tabelle 1):

A	Januar	G	Juli
D	Februar	C	August
D	März	F	September
G	April	A	Oktober
B	Mai	D	November
E	Juni	F	Dezember

Im darauffolgenden Jahr fällt der Monatserste auf den nächstfolgenden Wochentag. Entsprach z. B. der Sonntag im n-ten Jahr A, so wird im $(n+1)$-ten Jahr dem Montag A und dem Sonntag G zugeordnet usw. Im Schaltjahr behält jeder Wochentag seinen Buchstaben nur bis zum 23. 2., der 24. 2. und alle folgenden Tage des Schaltjahres erhalten jeweils im Alphabet (Zyklus A, ..., G) vorangehende Buchstaben, z. B. E anstelle von F oder G anstelle von A. Somit treten im Schaltjahr zwei *Sonntagsbuchstaben* auf, einer bis zum 23. 2. und einer (im Alphabet vorangehend) ab 24. 2. Da *G* der Sonntagsbuchstabe des Jahres 1582 war, erhält man folgende Sonntagsbuchstabentafel für 1582 bis 1699 (Tabelle 2):

1	CB	8	A	15	F	22	D
2	A	9	GF	16	E	23	C
3	G	10	E	17	DC	24	B
4	F	11	D	18	B	25	AG
5	ED	12	C	19	A	26	F
6	C	13	BA	20	G	27	E
7	B	14	G	21	FE	28	D

Im Gregorianischen Kalender sind 1700, 1800 und 1900 keine Schaltjahre. Daher besaß 1700 nur einen Sonntagsbuchstaben, nämlich C. Folglich ist die Sonntagsbuchstabentafel von 1700 bis 1799 (Tabelle 3):

1	DC	8	B	15	G	22	E
2	B	9	AG	16	F	23	D
3	A	10	F	17	ED	24	C
4	G	11	E	18	C	25	BA
5	FE	12	D	19	B	26	G
6	D	13	CB	20	A	27	F
7	C	14	A	21	GF	28	E

Dies läßt sich jetzt fortsetzen.
Von 1800 bis 1899 galt (Tabelle 4)

1	ED	8	C	15	A	22	F
2	C	9	BA	16	G	23	E
3	B	10	G	17	FE	24	D
4	A	11	F	18	D	25	CB
5	GF	12	E	19	C	26	A
6	E	13	CD	20	B	27	G
7	D	14	B	21	AG	28	F

und von 1900 bis 2099 die Sonntagsbuchstabentafel (Tabelle 5)

1	FE	8	D	15	B	22	G
2	D	9	CB	16	A	23	F
3	C	10	A	17	GF	24	E
4	B	11	G	18	E	25	DC
5	AG	12	F	19	D	26	B
6	F	13	ED	20	C	27	A
7	E	14	C	21	BA	28	G

Nach einer Festlegung des Abtes Dionysius erhielt das erste Jahr unserer Zeitrechnung den Sonntagsbuchstaben B. Dies führte zu der Regel:
Wenn man 9 zur Jahreszahl addiert und die Summe durch 28 dividiert, so zeigt der Quotient, wie viele Sonnenzirkel seit dem Jahr 9 v. u. Z. verflossen sind, und der Rest gibt an, wieviel Jahre im laufenden Sonnenzirkel bis zum gegenwärtigen Jahr vergangen sind. Eben neben dieser zuletzt erwähnten Zahl steht der Sonntagsbuchstabe in der Sonntagsbuchstabentafel.
Beispiele:
a) Welcher Tag war der 15. 6. 1985?
Es ist $(1985+9):28 = 71$ Rest 6. Aus der Tabelle 5 ersehen wir, daß F der Sonntagsbuchstabe ist. Nach der Tabelle 1 entspricht der 1., 8. und 15. Juni dem Buchstaben E. Weil E der unmittelbare Vorgänger des Sonntagsbuchstabens F ist, war der 15. 6. 1985 ein Sonnabend.
b) Auf welchen Wochentag fiel der 17. 5. 1782?
Wegen $(1782+9):28 = 63$ Rest 27 ist F der Sonntagsbuchstabe (Tabelle 3). Der 1., 8. und 15. Mai hat B, daher gehört der Buchstabe D zum 17. 5. Wenn F dem Sonntag entspricht, so ist E ein Sonnabend und D ein Freitag. Also fiel der 17. 5. 1782 auf einen Freitag.
c) Welcher Tag wird der 1. 1. 2000 sein?
Aus der Tabelle 5 entnehmen wir nach der Lösung einer Divisionsaufgabe den Sonntagsbuchstaben BA, weil 2000 ein Schaltjahr ist und der 1. 1. vor dem 23. 2. liegt, ist der Sonntagsbuchstabe B und der gesuchte Wochentag ist Sonnabend.
d) Der 25. 2. 1984 soll untersucht werden. Dem Rest 5 entspricht AG, weil der 25. 2. auf den 23. 2. folgt, ist G zu benutzen. Für den 25. 2. folgt aus Tabelle 1 der Buchstabe

F, also ist der 26. 2. 1984 ein Sonntag und der gesuchte Tag ein Sonnabend.

▲1▲ Bestätige, daß der 1. 1. 1900 ein Montag war! Ermittle, an welchem Wochentag du geboren bist!

Von C. F. Gauß (1777 bis 1855) stammt ein einfacheres, formelmäßiges Vorgehen zur Berechnung des Wochentages, das wir sehr gut mit dem Schulrechner SR 1 nachvollziehen können. Dazu wird das vorgegebene Datum in der Form

$$t.\,m.\,h \cdot 10^2 + j$$

mit $t \in \{1, \ldots, 31\}, m \in \{1, \ldots, 12\}$, $h, j \in \{0, \ldots, 99\}$

geschrieben. Hierbei bedeuten t die Tages- und m die Monatszahl, h steht für die ersten beiden Ziffern und j für die letzten beiden Ziffern der Jahreszahl (d. h. Jahrhundert und Jahr im Jahrhundert). Abweichend von der uns geläufigen Monatsnumerierung ist hier die Zuordnung (Tabelle 6):

Monat	Jan.	Feb.	März	April	Mai	Juni
m	11	12	1	2	3	4

Monat	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
m	5	6	7	8	9	10

vorzunehmen, und Januar bzw. Februar sind als letzte Monate des (vorangehenden) Jahres aufzufassen, z. B. ist der Februar 1986 der 12. Monat des Jahres 1985!

Wir erinnern noch an den Begriff des *ganzzahligen Anteils* $[x]$ einer reellen Zahl x, der durch $[x] \in G$ und $0 \leqq x - [x] < 1$ charakterisiert ist.

Nach Gauß ermittle nun die Zahl

$$G = [2{,}6m - 0{,}2] + t + j + \left[\frac{j}{4}\right] + \left[\frac{h}{4}\right] - 2h.$$

Stelle anschließend G dar als $G = 7 \cdot k + r$ mit r, k ganz und $0 \leqq r < 7$, d. h. $r \equiv G \bmod (7)$. *Überlege, wie dabei der Schulrechner benutzt werden kann!*

Entsprechend Tabelle 7 wird der Zahl r ein Wochentag zugeordnet, dieser ist der gesuchte Wochentag.

r	0	1	2	3	4	5	6
Tag	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa

Wir überprüfen unsere Beispiele:

a) 15. 6. 1985

$t = 15,\ m = 4,\ h = 19,\ j = 85$

$G = 10 + 15 + 85 + 21 + 4 - 38$, also

$G = 97 = 13 \cdot 7 + 6 \Rightarrow$ Sonnabend.

b) 17. 5. 1782

$t = 17,\ m = 3,\ h = 17,\ j = 82$

$G = 96 = 13 \cdot 7 + 5 \Rightarrow$ Freitag.

c) 1. 1. 2000

$t = 1,\ m = 11,\ h = 19,\ j = 99$

$G = 118 = 16 \cdot 7 + 6 \Rightarrow$ Sonnabend.

d) 25. 2. 1984

$t = 25,\ m = 12,\ h = 19,\ j = 83$

$G = 125 = 17 \cdot 7 + 6 \Rightarrow$ Sonnabend.

e) 1. 1. 1900

$t = 1,\ m = 11,\ h = 18,\ j = 99$

$G = 120 = 17 \cdot 7 + 1 \Rightarrow$ Montag.

Bei der Angabe des Alters in Tagen beschränken wir uns auf Daten im 20. Jahrhundert. Zuerst wollen wir studieren, wieviel Tage vom 1. 1. 1900 bis zu einem vorgegebenen Datum (unseres Jahrhunderts) vergangen sind. Durch zweimaliges Anwenden dieses Verfahrens kann dann die ursprüngliche Frage beantwortet werden.

Das aktuelle Datum schreiben wir wieder als $t.\,m.\,1900 + j$, wobei die Monate jetzt in üblicher Weise numeriert sind, also Januar = 1, Februar = 2 usw. Berücksichtigt man Schaltjahre nicht und rechnet zuerst mit einer einheitlichen Monatslänge von 31 Tagen, so ergibt sich für die gesuchte Anzahl L der Überschlagswert

$$\tilde{L} = t + 31(m - 1) + 365j.$$

Die für die Schaltjahre zu addierende Korrektur hängt davon ab, ob das aktuelle Datum in ein Schaltjahr fällt oder nicht, und wenn ja, so ist zu unterscheiden, ob das Datum vor dem Schalttag (29. 2.) oder danach liegt. Beachtet man dies, erhält man für $j \geqq 1$ die Regel:

Wenn $m \leqq 2$ *ist, so addiere* $\left[\frac{j-1}{4}\right]$ *und wenn* $m \geqq 3$, *so addiere* $\left[\frac{j}{4}\right]$ *zu* $\tilde{L}$. Nun haben nicht alle Monate 31 Tage, daher haben wir zuviel Tage gezählt und $\tilde{L}$ ist zu groß. In Abhängigkeit von dem Monat m wurde in einem Nicht-Schaltjahr zuviel addiert (Tabelle 8):

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tage $T(m)$	0	0	3	3	4	4	5	5	5	6	6	7

Man kann nun fragen: Ist es möglich, eine Funktion $y = y(m)$ anzugeben mit der Eigenschaft

$y(m) = T(m)$ für $m = 1, 2, \ldots, 12$?

Wie ihr unmittelbar nachprüft, besitzt die Funktion $y(m) = [0{,}4m + 2{,}3]$ diese Eigenschaft für $m = 3, 4, \ldots, 12$.

Folglich können wir die gesuchte Zahl L so berechnen:

1. Falls $m \leqq 2$ ist, so ergibt sich

$$L = t + 31(m - 1) + 365j + \left[\frac{j-1}{4}\right].$$

2. Falls $m > 2$ ist, so bilde

$$L = t + 31(m - 1) + 365j + \left[\frac{j}{4}\right] - [0{,}4m + 2{,}3].$$

Der Fall $j = 0$ führt zu der Vorschrift:

1. Falls $m \leqq 2$, so ist $L = t + 31(m - 1)$.
2. Falls $m > 2$, so ist $L = t + 31(m - 1) - [0{,}4m + 2{,}3]$.

(Nach diesem Algorithmus wird die Anzahl der Tage vom 1. 1. 1900 einschließlich bis zu einem vorgegebenen Datum gezählt. Ermittelt man nun durch zweimalige Anwendung dieses Verfahrens und Differenzbildung die vom Geburtstag bis zu einem vorgegebenen Datum vergangenen Tage, so wird der zuletzt notierte Tag nicht erfaßt. Wie allgemein üblich bedeutet dies z. B., daß vom 1. 1. 1900 bis 1. 1. 1901 die Tageszahl 366 gezählt wird, ein am 1. 1. 1900 geborener Mensch aber am 1. 1. 1901 genau 1 Jahr ≙ 365 Tage alt ist.)

Beispiele:

a) Für den 20. 3. 1973 ist $t = 20$, $m = 3$, $j = 73$. Daher ergibt sich

$L_1 = 20 + 31 \cdot 2 + 365 \cdot 73 + 18 - 3$,

also $L_1 = 26\,742$.

Analog ist für den 20. 3. 1974

$L_2 = 20 + 31 \cdot 2 + 365 \cdot 74 + 18 = -3 = 27\,107$

und erwartungsgemäß $L_2 - L_1 = 365$.

b) Du wurdest am 20. 1. 1973 geboren. Wie alt bist du am 1. 6. 1987?

Wir finden

$L_1 = 20 + 31 \cdot 0 + 365 \cdot 73 + 18$
$= 26\,683$ und

$L_2 = 1 + 31 \cdot 5 + 365 \cdot 87 + 21 - 4$
$= 31\,928$.

Das gesuchte Alter ergibt sich als $L_2 - L_1$ zu 5 245 Tagen.

Ist die Zahl der Tage vom 1. 1. 1900 bis zu einem vorgegebenen Datum bekannt, so ergibt sich eine weitere Möglichkeit, um den Wochentag dieses Datums zu bestimmen. Dazu beachten wir, daß der 1. 1. 1900 ein Montag war. Weil die Wochentage einen 7er Zyklus bilden, ist die Tageanzahl L darzustellen in der Form $L = 7k + r$ mit ganzen, nichtnegativen Zahlen r, k und $0 \leqq r < 7$. Der Rest r bestimmt den gesuchten Wochentag gemäß Tabelle 7.

Wir bestätigen die vorn angeführten Beispiele mit diesem Verfahren:

15. 6. 1985 $\Rightarrow L = 31\,212$
$= 4458 \cdot 7 + 6 \Rightarrow$ Sonnabend

31. 12. 1999 $\Rightarrow L = 36\,524$
$= 5217 \cdot 7 + 5 \Rightarrow$ Freitag.

Damit ist der 1. 1. 2000 ein Sonnabend.

25. 2. 1984 $\Rightarrow L = 30\,736$
$= 4390 \cdot 7 + 6 \Rightarrow$ Sonnabend.

Das Alter in Tagen und der Wochentag lassen sich nach den zuletzt angegebenen Formeln günstig mit einem Kleincomputer bzw. mit einem programmierbaren Rechner bestimmen. Für den Kleincomputer KC 85/2 vom VEB Mikroelektronik Mühlhausen könnten (bei Kalendern von 1901 bis 1999) BASIC-Programme etwa so aussehen:

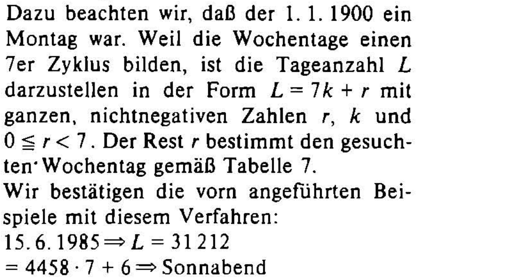


Bild 2

a) Bestimmung des Wochentages

```
10 INPUT „DATUM, TAG, MONAT,
   JAHR"; T, M, J
20 LET L=T+365*J+31*(M-1)
30 IF M<3 THEN 60
40 LET L=L-INT (0.4*M+2.3)
50 J=J+1
60 LET L=L+INT ((J - 1)/4)
70 LET L=L-7*INT(L/7)
80 PRINT „DAS DATUM FAELLT
   AUF EINEN"
90 IF L=0 THEN PRINT „SONNTAG"
100 IF L=1 THEN PRINT „MONTAG"
```

```
11Ø IF L=2 THEN PRINT „DIENSTAG“
12Ø IF L=3 THEN PRINT „MITT-
    WOCH“
13Ø IF L=4 THEN PRINT „DONNERS-
    TAG“
14Ø IF L=5 THEN PRINT „FREITAG“
15Ø IF L=6 THEN PRINT „SONN-
    ABEND“
```

b) Altersangabe in Tagen

(In der Ergibtanweisung kann auf LET verzichtet werden, das wird im folgenden Programm getan.)

```
 1Ø INPUT „GEBURTSTAG, TAG, MO-
    NAT, JAHR“; T, M, J
 2Ø INPUT „GEGEBENES DATUM“; U,
    N, K
 3Ø L=T+J*365+31*(M-1)
 4Ø IF M<=2 THEN 7Ø
 5Ø L=L-INT (Ø.4*M+2.3)
 6Ø J=J+1
 7Ø L=L+INT ((J - 1)/4)
 8Ø G=U+K*365+31*(N-1)
 9Ø IF N<=2 THEN 12Ø
1ØØ G=G-INT (Ø.4*N+2.3)
11Ø K=K+1
12Ø G=G+INT ((K - 1)/4)
13Ø G=G-L
14Ø PRINT „ALTER IN TAGEN“; G
```

c) Bei dem Programm b) ist für das Geburtsdatum und für das gegebene Datum der gleiche Rechenweg zu durchlaufen. Daher kann hier ein *Unterprogramm* vorgesehen werden. Der Unterprogrammaufruf GOSUB veranlaßt im folgenden Programm den Sprung zur angegebenen Zeile 7Ø, RETURN bewirkt den Rücksprung zu der auf GOSUB folgenden Anweisung, das sind im Programmbeispiel die Zeilen 4Ø bzw. 6Ø. In dem Beispiel wird auch davon Gebrauch gemacht, mehrere Anweisungen in eine Programmzeile zu schreiben, wobei diese Anweisungen durch das Doppelpunktzeichen zu trennen sind.

```
 1Ø INPUT „GEBURTSTAG, TAG, MO-
    NAT, JAHR“; T, M, J
 2Ø INPUT „GEGEBENES DATUM“; U,
    N, K
 3Ø GOSUB 7Ø
 4Ø A=L:T=U:M=N:J=K
 5Ø GOSUB 7Ø
 6Ø GOTO 13Ø
 7Ø L=T+365*J+31*(M-1)
 8Ø IF M<3 THEN 11Ø
 9Ø L=L-INT(Ø.4*M+2.3)
1ØØ J=J+1
11Ø L=L+INT ((J - 1)/4)
12Ø RETURN
13Ø L=L-A
14Ø PRINT „ZAHL DER TAGE VON
    GEBURT“
15Ø PRINT „BIS GEGEBENES DA-
    TUM=“; L
```

d) Bei einer weiteren Programm-Version sollen *Felder* benutzt werden. Deren Größe ist im Programm zu vereinbaren. Man beachte, daß in einem Nicht-Schaltjahr vom Neujahrstag bis einschließlich zum t-ten Februar $(31 + t)$ Tage vergangen sind, bis zum t-ten März sind es $(59 + t)$ Tage usw. Die Summe der Tage der Vormonate ist in folgender Tabelle zusammengestellt (Tabelle 9)

Monat	1	2	3	4	5	6
Summe	0	31	59	90	120	151

Monat	7	8	9	10	11	12
Summe	181	212	243	273	304	334

Die einzelnen Summenwerte sollen in einem Feld (Vektor) mit den Komponenten $S(1), \ldots, S(12)$ abgespeichert werden, d. h. es werde

$S(1) = 0, S(2) = 31, S(3) = 59, \ldots$

gesetzt. Zu einem vorgegebenen Datum $T.M.1900 + J$, bei dem $1 \leqq J \leqq 99$ ist und J nicht durch 4 teilbar ist (also kein Schaltjahr), ergibt sich dann die Anzahl der Tage X vom 1. 1. 1900

bis zum $T.M.1900 + J$ zu

$X = 365 * J + INT(J/4) + S(M) + T.$

In einem Schaltjahr muß unterschieden werden, ob das Datum vor oder nach dem Schalttag (29. 2.) liegt, gegebenenfalls ist dann eine Korrektur um einen Tag anzubringen.

Die umständlichen Ausgabebefehle von Beispiel a) können abgekürzt werden, wenn als Variable auch Zeichenketten zugelassen sind. Hinter die Variablenbezeichnung ist dabei jeweils das Dollarzeichen zu setzen. Als Zeichenketten werden hier die Namen der Wochentage vorgesehen. Anstelle von PRINT wird das (gleichwertige) Fragezeichen benutzt:

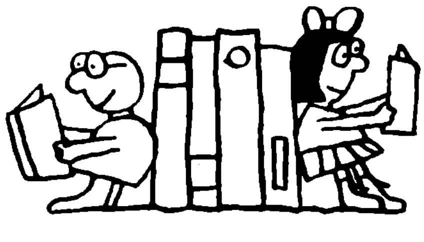
```
 1Ø INPUT „DATUM“; T, M, J
 2Ø DIM S(12), W$(7)
 3Ø FOR I=1 TO 12
 4Ø READ S(I)
 5Ø NEXT
 6Ø FOR I=1 TO 7
 7Ø READ W$(I)
 8Ø NEXT
 9Ø X=365*J+INT(J/4)+S(M)+T
1ØØ IF INT(J/4)><J/4 THEN 13Ø
11Ø IF M<=3 THEN 13Ø
12Ø X=X-1
13Ø I=X-7*INT(X/7)
14Ø ? „ANZAHL DER TAGE IM JAHR-
    HUNDERT BIS DATUM“; X
15Ø ? „DATUM FAELLT AUF EINEN“;
    W$(I)
16Ø DATA Ø, 31, 59, 9Ø, 12Ø, 151,
    181, 212, 243, 273, 3Ø4, 334
17Ø DATA MONTAG, DIENSTAG,
    MITTWOCH, DONNERSTAG,
    FREITAG, SONNABEND,
    SONNTAG
```

▲2▲ Schreibe ein BASIC-Programm zur Bestimmung des Wochentages (Kalender), welches die in 3. angegebene Formel von Gauß benutzt. Dabei sollen Tag, Monat und Jahr in der uns üblichen Zahldarstellung eingegeben werden (also z. B. 20. Februar 1987 als 2Ø, 2, 19, 87). Eine Umnumerierung der Monats- und eventuell der Jahreszahl ist im Programm vorzusehen!

Im Zeitalter der Mikroelektronik ist für viele von euch eine Digitaluhr etwas Selbstverständliches, kompliziertere Rechnungen führt ihr mit dem Schulrechner SR 1 aus. Der Taschenrechner MR 411 ist mit einer Digitaluhr und einer Weckvorrichtung ausgestattet. Wie wir gesehen haben, kann ein Computer auch die Aufgaben eines Kalenders übernehmen.

Die Mikroelektronik liefert uns die modernen Navigationsgeräte durch das Leben!

W. Schmidt



Buchtip

Gutzer, H./Pauer, H.-D.

Wenn Kepler einen Computer gehabt hätte

192 S., 46 Bilder, 4 Tabellen,
11 BASIC-Programme
Bestell-Nr. 547 229 8 Preis: etwa 9,80 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

Bei der Lektüre des Büchleins kommen an Computern als auch an Historie Interessierte auf ihre Kosten. In unterhaltsamer Weise werden historische Aufgaben, die seinerzeit von Archimedes, Kepler bzw. Darwin gelöst wurden, mit modernen BASIC-Programmen vorgerechnet.

Knobeleien als Auftakt für 1988

$1988 = 12^3 + 45 \cdot 6 + 7 - 8 - 9$

$9 + 8 + 7 - 6 + 5! + 43^2 + 1 = 1988$

$19 + 88 \equiv 19 \pmod{88}$

$19^{88} \equiv 1^9 + 8 \pmod 9 \equiv 1^{98} \pmod 8$

$1^9 - 8 : 8 = (1 - 9 + 8) \cdot 8$
$= 19 \cdot (8 - 8) = (1 - 9 + 8)^8 \qquad = 0$

$1 \cdot (9 - 8)^8 = (1 \cdot 9 - 8)^8$
$= 1^{988} = 19^{(8-8)} = 1^9 \cdot 8 : 8$
$= (-1 + 9! : 8!) : 8 \qquad = 1$

$1^9 + 8 : 8 = (-1 + 9 + 8) : 8$
$= \sqrt[1+\sqrt{9}]{8 + 8} = 1 + 9^{(8-8)} \qquad = 2$

$19 - (8 + 8) = 1 + \sqrt[\sqrt{9! : 8!}]{8} \qquad = 3$

$1^9 \cdot \sqrt{8 + 8} \qquad = 4$

$1^9 + \sqrt{8 + 8} = 1 + \sqrt[\sqrt{9}]{8 \cdot 8} \qquad = 5$

$-1 - 9 + 8 + 8 \qquad = 6$

$-1 + 9 - 8 : 8 = -1 + (9 - 8) \cdot 8 \qquad = 7$

$(-1 + 9) \cdot 8 : 8 = \sqrt[-1+9]{8^8}$
$= \left(\sqrt[-1+9]{8}\right)^8 \qquad = 8$

$1 \cdot 9 \cdot 8 : 8 = 1 + 9 - 8 : 8 \qquad = 9$

$1 + 9 + 8 - 8 = 1 + 9^{(8:8)}$
$= 1 \cdot \sqrt[\sqrt{9}]{8} + 8 \qquad = 10$

Dipl.-Lehrer H.-H. Epstude, Kirchheiligen

Wieviel Lösungen hat die Aufgabe?

A. Aufgaben für Klasse 5 bis 8

▲ 1 ▲ *Was kosten 4 Kugelschreiber zu je 1,20 M und 6 Hefte zu je 10 Pf zusammen?*
Die Lösung erhält man durch eine einfache Rechnung:
$4 \cdot 1{,}20\,\text{M} + 6 \cdot 0{,}10\,\text{M} = 5{,}40\,\text{M}$.
Wenn ein Schüler der Unterstufe diese Aufgabe löst, denkt er nicht an die Möglichkeit einer anderen Antwort als „Der Gesamtpreis beträgt 5,40 M". Solch eine Aufgabe kann nur *eine einzige Lösung* haben. •

▲ 2 ▲ *Eine Lehrerin fragt: Wieviel ist zwei plus fünf mal drei?*
„Siebzehn", antwortet Luise unsicher. „Habe ich richtig gerechnet, Frau Lehmann?" „Mein Ergebnis ist einundzwanzig!" ruft Hans. „Ist das richtig?"
Beide Schüler haben auf ihre Art richtig gerechnet.
Luise meinte $2 + 5 \cdot 3 = 17$,
während Hans rechnete $(2 + 5) \cdot 3 = 21$.
Die Lehrerin hatte leider nicht gesagt, ob Klammern zu setzen sind – sie hatte sich nicht eindeutig ausgedrückt. Die Art der Aufgabenstellung war unkorrekt.

▲ 3 ▲ In einer Deutschstunde ist der folgende Satz zu analysieren: *Klaus hat Sabine auf der Wiese mit Blumen getroffen.* Man kann diesen Satz auf mindestens dreierlei verschiedene Art verstehen:
1. *Klaus* hat die Blumen mitgebracht. (Er wollte sie dem Mädchen schenken.)
2. *Sabine* hatte die Blumen. (Sie hatte sie gerade gepflückt und wollte einen Kranz daraus flechten.)
3. Die Blumen wuchsen *auf der Wiese*, wo Klaus seine Freundin traf.
In einer gedruckten Erzählung zeugt solch ein Satz von einem schlechten Stil des Verfassers (oder auch von der Unaufmerksamkeit des Redakteurs). Zu welchen „tragischen" Folgen das führen kann, zeigt das folgende (nicht ganz ernst zu nehmende) Beispiel: *Köpfen nicht begnadigen!*
Dieser Befehl muß unbedingt durch das Einfügen eines Kommas präzisiert werden:
Entweder *Köpfen, nicht begnadigen!*
und damit hinrichten,
oder *Köpfen nicht, begnadigen!*
und damit freilassen.

▲ 4 ▲ *Es ist eine zweistellige Quadratzahl zu ermitteln, die auf 6 endet.*
Die Lösung „36" ist richtig, aber unvollständig; den Bedingungen der Aufgabe entspricht auch die Zahl 16. Geht man die Folge aller zweistelligen Quadratzahlen durch (16, 25, 36, 49, 64, 81), so findet man keine weiteren Lösungen. Genau die Zahlen 16 und 36 erfüllen die Bedingungen der Aufgabe. Die Menge aller Lösungen ist $L = \{16; 36\}$.

B. Aufgaben ab Klasse 9

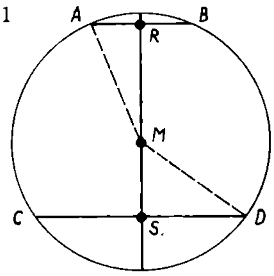
▲ 5 ▲ *Die Summe der Quadrate von vier aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen betrage 630.*
Berechne die betreffenden Zahlen!
Wieviel Möglichkeiten gibt es?
(Lehrbuch Mathematik 9, Seite 150/ Aufgabe 1)
Die kleinste der vier Zahlen sei x ($x \in N$).
Dann haben wir die Gleichung
$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 = 630$
zu lösen.
Wir tun dies in den folgenden Schritten

$$\begin{aligned} 4x^2 + 12x + 14 &= 630 \\ 4x^2 + 12x - 616 &= 0 \\ x^2 + 3x - 154 &= 0 \\ x_{1,2} &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{616}{4}} \\ x_{1,2} &= -\frac{3}{2} \pm \frac{25}{2} \end{aligned}$$

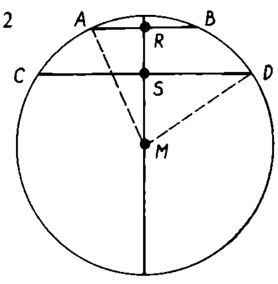
und erhalten $x_1 = 11$ und $x_2 = -14$.
Ausgehend von $x_1 = 11$ erhalten wir $(11; 12; 13; 14)$ als ein Quadrupel von Zahlen, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen
$(11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2$
$= 121 + 144 + 169 + 196 = 630)$.
Gehen wir dagegen von $x_2 = -14$ aus, so finden wir $(-14; -13; -12; -11)$. Diese vier aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen erfüllen ebenfalls unsere Bedingungen
$((-14)^2 + (-13)^2 + (-12)^2 + (-11)^2 = 630)$
Die gestellte Aufgabe hat also genau zwei voneinander verschiedene Lösungen. Die Menge aller Lösungen ist
$L = \{(11; 12; 13; 14);$
$(-14; -13; -12; -11)\}$.
Anmerkung: Wären vier aufeinanderfolgende *natürliche* Zahlen, deren Summe 630 beträgt, gesucht, so hätte die Aufgabe nur eine Lösung.

▲ 6 ▲ *In einem Kreis mit dem Radius 25 cm haben zwei zueinander parallele Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ die Längen 14 cm bzw. 40 cm.*
Es ist der Abstand dieser beiden Sehnen voneinander zu berechnen.
Der zu $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ senkrechte Durchmesser des Kreises schneide $\overline{AB}$ in R und $\overline{CD}$ in S (siehe Bild 1). Es ist dann $\overline{AR} = \overline{RB}$ und $\overline{CS} = \overline{SD}$. Wir zeichnen die Radien $\overline{MA}$ und $\overline{MD}$ ein und berechnen jeweils nach dem Satz des Pythagoras

$$\begin{aligned} \overline{RM} &= \sqrt{\overline{MA}^2 - \overline{AR}^2} \\ &= \sqrt{(25\,\text{cm})^2 - (7\,\text{cm})^2} \\ &= 24\,\text{cm} \qquad (\triangle\, AMR) \\ \overline{MS} &= \sqrt{\overline{MD}^2 - \overline{DS}^2} \\ &= \sqrt{(25\,\text{cm})^2 - (20\,\text{cm})^2} \\ &= 15\,\text{cm} \qquad (\triangle\, DMS). \end{aligned}$$

Bild 1


Der gesuchte Abstand der beiden Parallelen ist gleich der Länge der Strecke $\overline{RS}$; wegen $\overline{RS} = \overline{RM} + \overline{MS}$ ergibt sich ein Abstand von 39 cm.
Ist die Aufgabe damit schon gelöst? *Eine* Lösung haben wir gefunden, aber gibt es evtl. noch weitere?
Wir sind gemäß Bild 1 davon ausgegangen, daß der Kreismittelpunkt M *zwischen* den beiden Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ liegt. Es ist aber auch möglich, daß sich M *außerhalb* der Fläche *CDBA* (begrenzt durch die Sehnen $\overline{CD}$ und $\overline{AB}$ und die Kreisbögen *AC* und *DB* befindet) (Bild 2).

Bild 2


Wie oben erhalten wir $\overline{RM} = 24$ cm und $\overline{MS} = 15$ cm. Der gesuchte Abstand ist aber jetzt nicht als Summe, sondern als *Differenz* dieser beiden Strecken zu berechnen; wir erhalten hier als Lösung 9 cm.
Alle weiteren noch möglichen Lagen der beiden parallelen Sehnen im Kreis lassen sich jeweils durch eine Drehung um M auf einen der beiden behandelten Fälle zurückführen. Mit unseren beiden Lösungen 39 cm bzw. 9 cm sind alle Möglichkeiten erschöpft. Die Menge aller Lösungen ist $L = \{39\,\text{cm}; 9\,\text{cm}\}$.

▲ 7 ▲ *Die Zahlenwerte der Längen der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks seien natürliche Zahlen, die eine arithmetische Zahlenfolge bilden. Ermittle diese Maßzahlen!*
(Eine endliche Zahlenfolge $a_1, a_2, \ldots, a_n$ heißt arithmetisch, wenn es eine Zahl $d \neq 0$ gibt, so daß für alle i mit $1 < i \leqq n$ gilt: $a_i - a_{i-1} = d$.)

Der Zahlenwert der Länge der kleineren Kathete sei x, dann ist der Zahlenwert der Länge der größeren Kathete $x + d$ und der der Länge der Hypotenuse $x + 2d$ ($x \in N$, $d \in N$).
Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$x^2 + (x + d)^2 = (x + 2d)^2,$$
$$x^2 + x^2 + 2xd + d^2 = x^2 + 4xd + 4d^2,$$
$$x^2 - 2xd - 3d^2 = 0.$$

Division beider Seiten der letzten Gleichung durch d^2 ($d \neq 0$) liefert

$$\left(\frac{x}{d}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{d}\right) - 3 = 0.$$

Lösen wir diese Gleichung nach dem Quotienten $\frac{x}{d}$ auf, so erhalten wir mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$\left(\frac{x}{d}\right)_1 = -1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{x}{d}\right)_2 = 3.$$

$\frac{x}{d} = -1$ ist mit unserem Sachverhalt unvereinbar.
$\frac{x}{d} = 3$ besagt, daß der Zahlenwert der Länge der kleineren Kathete das Dreifache der Differenz d beträgt. Da die Zahlenwerte der Längen aller Dreiecksseiten natürliche Zahlen sind, sind für x und d genau die Paare $(3;1)$, $(6;2)$, $(9;3)$, ...
(allgemein: $(3n;n)$ mit $n \in N$, $n \neq 0$) möglich.
Die Zahlenwerte der Längen der Seiten des fraglichen Dreiecks lauten $(3;4;5)$ oder $(6;8;10)$ oder $(9;12;15)$ ...
(allgemein: $3n;4n;5n$) mit $n \in N$ und $n \neq 0$).
Unsere Aufgabe hat also unendlich viele Lösungen, die Menge aller ihrer Lösungen ist
$L = \{(3n;4n;5n);\ n \in N \text{ und } n \neq 0\}$.

Anmerkung: Die Bedingungen der Aufgabe werden durch sogenannte *ägyptische* Dreiecke erfüllt. Im alten Ägypten mußten nach den jährlichen Überschwemmungen des Nils die Feldraine jeweils neu markiert werden. Dabei waren häufig rechte Winkel zu konstruieren. Zu diesem Zweck benutzte man ein Seil, in dem jeweils im gleichen Abstand 12 Knoten angebracht waren. Man zog das Seil auseinander, so daß ein Dreieck entstand mit Seiten, die aus 3, 4 bzw. 5 gleichlangen Teilstrecken bestanden. Damit erhielten die ägyptischen Landmesser den nötigen rechten Winkel. Deshalb heißt ein Dreieck mit Seitenlängen, die im Verhältnis 3 : 4 : 5 stehen, *ägyptisches Dreieck*.

▲ 8 ▲ *Es ist eine dreistellige natürliche Zahl z zu ermitteln, die auf die Ziffer 4 endet und durch 11 und durch 13 teilbar ist.*
Da 11 und 13 teilerfremd sind, muß sich die gesuchte Zahl z in der Form
$z = 11 \cdot 13 \cdot n = 143 \cdot n$
$= 140 \cdot n + 3 \cdot n\ (n \in N)$
schreiben lassen. Damit z auf die Ziffer 4 endet, ist es demnach notwendig, daß auch $3 \cdot n$ auf 4 endet.
Damit kommen für n höchstens die Zahlen 8, 18, 28, ... in Frage.
Aber bereits $143 \cdot 8 = 1044$ ist vierstellig.
Die gesuchte Zahl z existiert nicht, die Aufgabe ist also *nicht lösbar*. Trotzdem können wir sagen, daß wir sie *vollständig* gelöst haben: Die Menge aller ihrer Lösungen ist die leere Menge – $L = \emptyset$.

Zusammenfassung:
Eine Aufgabe lösen heißt also, alle Objekte (Zahlen, Punkte, geometrische Figuren usw.) zu finden, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen – auch dann, wenn die Aufgabe in der Form „Ermittle eine Zahl, die ...“ gestellt ist. Deshalb ist neben der Begründung, daß die gefundenen Objekte wirklich Lösungen der Aufgabe sind, auch noch der Nachweis zu führen, daß weitere Lösungen nicht existieren. Oft ergibt sich dieser Nachweis schon aus einer vollständigen Darstellung des Lösungsweges. Dabei ist es – wie auch unsere Beispiele zeigen – notwendig, daß man die Aufgabenstellung nicht zu eng sieht, daß man sich nicht an zu spezielle Überlegungsskizzen bindet, daß man den gesamten Grundbereich auftretender Variabler überblickt.

A. Halameisär/C. P. Helmholz

Angaben ausreichend für Eindeutigkeit?

Bei einer ausreichenden Anzahl von Bedingungen (Voraussetzungen) wird eine Aufgabenstellung eindeutig lösbar. Bei den folgenden drei Aufgaben scheint dies im ersten Betrachten nicht so zu sein, da die zur Lösungsfindung nötigen Angaben *äußerst dürftig* vorliegen. Dennoch sei versichert, daß sie eindeutig lösbar sind. Wie so oft, gilt auch hier: Voreiliges Schließen bringt nichts ein!
Viel Freude beim Finden der Lösungen. Spezielle Vorkenntnisse zu den zwei Aufgaben werden nicht benötigt.

▲ 1 ▲ Jens schreibt drei aufeinanderfolgende zweistellige natürliche Zahlen in steigender Reihenfolge nebeneinander, so daß eine sechsstellige Zahl entsteht.
Er staunte über die *interessante* natürliche Zahl, die er erhielt, als er die Hälfte der sechsstelligen Zahl durch das Doppelte der anfänglich ersten zweistelligen Zahl dividierte.
Wie lautete seine sechsstellige Zahl? (Was könnte er bei seinem Rechenergebnis *interessant* gefunden haben?)

▲ 2 ▲ Gerlind hat sich fünf natürliche Zahlen aufgeschrieben. Dabei ist jede folgende Zahl doppelt so groß wie die Summe aller vorherigen. Von ihren fünf Zahlen war die erste Zahl zweistellig und von allen fünf Zahlen hatte nur eine der nachfolgenden vier Zahlen lauter gleiche Ziffern.
Wie lauten Gerlinds aufgeschriebene Zahlen?

H.-J. Kerber

▲ 1 ▲ Докажите, что для n положительных чисел
$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \ldots \geqq a_n$
выполнены неравенства:
а) $a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \geqq (a_1 - a_2 + a_3)^2$,
б) $a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 \geqq (a_1 - a_2 + a_3 - a_4)^2$,
в) $a_1^2 - a_2^2 + \ldots - (-1)^n a_n^2$
$\geqq (a_1 - a_2 + \ldots - (-1)^n a_n)^2$.

aus: Quant, Moskau

▲ 2 ▲ The following advertisement appeared on *XYZ* University's notice board:
Here we are, three perfect guys, namely Peter, Richard and Tony.
Each of us is neither tall, rich and handsome nor jolly, musical and smart.
But, each of us does posses just four of the above qualities. In fact, each quality is found in two of us.
Peter is handsome, and Richard, who is musical, is either handsome or smart but not both.
The two of us who are jolly are not both handsome and two of us who are smart are not both tall.
Tony thinks he has the best four qualities of us all. Can you describe Tony?

aus: The Australian Mathematics Teacher

▲ 3 ▲ Dans un stade, une piste de course à pied comporte deux lignes droites réunies par deux demi-cercles. La longueur de chaque ligne droite est 75 m. Quelle doit être la distance de ces lignes droites pour que le bord intérieur de la piste ait une longueur de 400 m?
La piste est formée de 6 couloirs larges de 2 m. Quelle est la longueur du bord intérieur du deuxième couloir?
Au départ d'une course de 400 m, quelle avance doit-on donner au coureur du deuxième couloir pour qu'il ait parcouru exactement 400 m lorsqu'il atteigne la ligne d'arrivée? *H.*

▲ 4 ▲ Put together six digits 1 so that the final value will be 12. Use only the symbol + and the fractimal line segment. You may use each of these symbols more than once.

aus: Fun with mathematics, Kanada

▲ 5 ▲ Un satellite décrit en 96 minutes un cercle autour de la Terre à la vitesse moyenne de 28 000 km/h. Calculer le rayon de sa trajectoire. A quelle distance de la Terre tourne-t-il? *H.*

Die Koordinatenmethode im Wandel der Zeiten

Zum 350. Jahrestag des Erscheinens von R. Descartes' «La Géométrie»

Teil 2

Die Koordinatenmethode vereinigt in sich zwei gegensätzliche Aspekte, die aber zugleich so eng miteinander verbunden sind, daß ihre klare Unterscheidung bis heute noch nicht jedem Mathematiker voll bewußt ist. Um so schwerer fällt es, die Beiträge bedeutender Mathematiker der Vergangenheit zur Entwicklung der Koordinatenmethode danach einzuordnen, welcher der beiden Aspekte dabei jeweils im Vordergrund stand. Welches sind diese beiden Aspekte?

Der erste besteht darin, daß die Einführung von Koordinaten es ermöglicht, jede Beziehung zwischen geometrischen Objekten in eine gleichbedeutende Beziehung zwischen den Koordinaten dieser Objekte zu übersetzen. Insbesondere entspricht dann jeder Operation, die geometrischen Objekten $G_1, \ldots, G_k$ ein neues geometrisches Objekt G_0 zuordnet, eine arithmetisch-algebraische Operation, die den Koordinaten der Objekte $G_1, \ldots, G_k$ die Koordinaten des Objekts G_0 zuordnet. (Geometrische Objekte G_i können z. B. Punkte, Strecken, Geraden, Kreise, Parabeln, Ellipsen, Dreiecke, Winkel, aber auch geometrische Abbildungen bestimmter Arten wie Spiegelungen, Drehungen, Schiebungen sein.) Hier ordnen sich solche Fragen und Aufgaben der analytischen Geometrie ein wie z. B.

– Wie kann man aus den Koordinaten (x_1, y_1), (x_2, y_2) zweier Punkte die Gleichung der Verbindungsgeraden oder den Abstand dieser Punkte berechnen?
– Wie kann man aus den gegebenen Gleichungen zweier Geraden rechnerisch entscheiden, ob diese Geraden sich schneiden, parallel oder gleich sind? Wie kann man im Fall des Schneidens die Koordinaten des Schnittpunktes berechnen?
– Durch welche Beziehungen (z. B. Gleichungen oder Ungleichungen) zwischen den Koordinaten dreier bzw. vierer Punkte drückt sich aus, daß einer der drei Punkte auf der von den beiden anderen begrenzten Strecke (also *zwischen* ihnen) liegt bzw. daß die von den ersten beiden Punkten begrenzte Strecke kongruent der von den zweiten beiden Punkten begrenzten Strecke ist?

Sind (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) die Koordinaten der vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, so liegt P_2 zwischen P_1 und P_3 genau dann, wenn es eine reelle Zahl t zwischen 0 und 1 gibt, so daß

$$x_2 = x_1 + t(x_3 - x_1) \quad \text{und}$$
$$y_2 = y_1 + t(y_3 - y_1) \text{ gilt,}$$

$P_1P_2 \cong P_3P_4$ gilt genau dann, wenn

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 \qquad (1)$$

gilt, da der Abstand zweier Punkte P_1, P_2 durch

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (2)$$

ausgedrückt wird.

Die konsequente Anwendung dieses Standpunktes erfordert es freilich, nicht nur den Punkten, sondern allen im jeweiligen Zusammenhang betrachteten Objekten Koordinaten zuzuordnen. Das ist im konkreten Fall oft gar nicht schwer: Als Koordinaten einer Strecke P_1P_2 können die Koordinaten (x_1, y_1, x_2, y_2) ihrer Endpunkte dienen (wobei es natürlich, wie schon bei den Koordinaten einzelner Punkte, wesentlich auf die Reihenfolge der Zahlen ankommt), als Koordinaten eines Dreiecks die insgesamt sechs Koordinaten seiner Eckpunkte, als Koordinaten eines Kreises die Koordinaten seines Mittelpunktes und sein Radius, als Koordinaten einer durch eine algebraische Gleichung einer bestimmten Art beschriebenen Kurve die Koeffizienten der entsprechenden Gleichung. Historisch ist von diesem Gesichtspunkt, Fragen an geometrische Objekte in Fragen an ihre Koordinaten zu übersetzen, zuerst (nämlich schon bei Fermat und Descartes) die Frage nach den Koordinaten der Schnittpunkte zweier durch ihre Gleichungen gegebenen Kurven vorhanden gewesen, ohne daß die Koeffizienten der gegebenen Gleichungen damals in irgendeiner Weise als Koordinaten der entsprechenden Kurven aufgefaßt worden wären. Die zu untersuchenden Objekte blieben lange Zeit auf solche Kurven und Flächen beschränkt, die sich durch algebraische Gleichungen bzw. Gleichungssysteme (seit Leonhard Eulers berühmtem Lehrbuch *Introductio in analysin infinitorum* von 1748 auch durch sogenannte Parameterdarstellungen) beschreiben ließen. Die Verwandlung elementarer geometrischer Beziehungen wie z. B. die Frage nach dem kürzesten Abstand zweier Geraden im Raum, ausgedrückt durch ihre Koordinaten, blieb erst Gaspard Monge (1746 bis 1818) und seinen Schülern vorbehalten. Die Beschreibung geometrischer Abbildungen durch Koordinaten und die Ersetzung von Manipulationen mit Abbildungen wie Hintereinanderausführung oder Umkehrung durch Rechnen mit den Koordinaten der Abbildungen setzte im wesentlichen erst im 19. Jh. ein. Die Erkenntnis, daß als Resultat der Übersetzung geometrischer Prozesse in die Koordinatensprache im allgemeinen nicht Gleichungs- und Ungleichungssysteme oder andere *geschlossene Formeln* sondern Rechenprogramme mit Verzweigungen und zyklischen Unterprogrammen zu erwarten sind, ist erst ein Kind unserer, von der Datenverarbeitung geprägten Zeit.

Die Verfolgung des hier an erster Stelle genannten Aspektes der Koordinatenmethode führte über viele historische Zwischenstufen schließlich dazu, arithmetisch-algebraische Modelle der Geometrie zu betrachten, d. h. die Zahlenlisten nicht mehr als Koordinaten wirklicher geometrischer Objekte aufzufassen, sondern sie selbst als geometrische Objekte zu begreifen. David Hilbert (1862 bis 1943) erklärte 1899 in seinem berühmten und folgenreichen Buch *Grundlagen der Geometrie* sinngemäß: Wenn wir *definieren*: Ein Punkt *ist* ein Paar (x, y) reeller Zahlen, eine Gerade *ist* eine solche Menge von Zahlenpaaren, die sich als Lösungsmenge einer linearen Gleichung $ax + by = c$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$ beschreiben läßt, die Strecke mit den Endpunkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) ist kongruent der Strecke mit den Endpunkten (x_3, y_3) und (x_4, y_4), wenn die Formel (1) gilt, so erhalten wir jedenfalls ein System von Objekten, für das alle Aussagen der euklidischen Geometrie *unzweifelhaft* gelten (während sowohl die Definition solcher Begriffe wie Punkt, Gerade in der materiellen Welt als auch die Gültigkeit der Aussagen der euklidischen Geometrie für diese Objekte mit vielen Unklarheiten und Problemen belastet sind).

Dieser Hilbertsche Standpunkt steht in enger Beziehung zu einer geradezu dämonischen Eigenschaft der Koordinatenmethode: Hinreichende Vertrautheit mit der geometrischen Bedeutung von rein arithmetischen Beziehungen zwischen den Koordinaten geometrischer Objekte (wie z. B. den Formeln (1) und (2)) führt uns leicht zu Verallgemeinerungen, die über das Dreidimensionale und anschaulich Vorstellbare weit hinausführen. Niemand kann uns daran hindern, Listen $(x_1, \ldots, x_n)$ von n geordneten reellen Zahlen als *Punkte* eines *n-dimensionalen Raumes* zu bezeichnen, den *Abstand* zweier solcher *Punkte* durch eine zu (2) analoge Formel zu definieren, andere Objekte dieses *n-dimensionalen Raumes* z. B. als Lösungsmengen gewisser algebraischer Gleichungen mit n (statt zwei) Variablen zu definieren, insbesondere z. B. $(n-1)$-dimensionale *geradlinige Unterräume* in Analogie zu den Geraden in der Ebene als Lösungsmengen von linearen Gleichungen der Form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c$$
(nicht alle a_i gleich 0).

Da n-gliedrige Listen von reellen Zahlen in der realen Welt eine wichtige Rolle in den verschiedensten Zusammenhängen spielen, z. B. als Beschreibungen eines mechanischen Systems mit n Freiheitsgraden oder als Produktionszustand eines Betriebes, der n verschiedene Erzeugnisse herstellt, ist die Verbindung *quasigeometrischer* Vorstellungen mit an sich rein arithmetischen Objekten und Beziehungen zwischen ihnen, die durch die Analogie zur Hilbertschen arithmetischen Interpretation der geometrischen Begriffe nahegelegt wird, oft sehr hilfreich für ein tieferes Verstehen solcher an sich rein arithmetischen Beziehungen. Freilich hat der Begriff *Geometrie* durch diese in der gesamten Mathematik fruchtbare Denk- und Vorgehensweise eine bedenkliche Aufweichung erfahren. *Geometrisch* ist in der heutigen Mathematik alles, was sich in gewisser, häufig nur noch sehr schwacher Analogie zu Begriffen und Verhältnissen des gewöhnlichen zwei- bzw. dreidimensionalen euklidischen Falles vorstellen läßt.

Ohne es zu bemerken, haben wir die Grenze zum zweiten der beiden eingangs angekündigten Aspekte der Koordinatenmethode überschritten. Das Koordinatensystem diente schon bei Fermat und Descartes nicht nur dazu, schon bekannte Kurven durch Gleichungen zu beschreiben, sondern auch dazu, sich ein *Bild* von einer vielleicht vorher nie gesehenen Kurve zu machen, die zunächst nur durch ihre Gleichung gegeben ist, mehr noch, am geometrischen Bild zweier Kurven zu entscheiden, ob und wo diese Kurven gemeinsame Punkte haben, mithin, wie die gemeinsamen Lösungen eines aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten bestehenden Gleichungssystems aussehen. Demnach liefert die Koordinatenmethode nicht nur arithmetische Modelle geometrischer Sachverhalte (das war der erste Aspekt) sondern auch geometrische Modelle rein arithmetisch-algebraischer Sachverhalte (zweiter Aspekt). Dieser zweite Aspekt der Koordinatenmethode tritt uns u. a. überall dort entgegen, wo funktionale Zusammenhänge zwischen physikalischen, ökonomischen oder sonstigen, durch reelle Zahlen meßbare Größen graphisch dargestellt werden, und insbesondere dann, wenn anhand solcher graphischer Darstellungen Aussagen und Erkenntnisse über Objekte, Sachverhalte und Prozesse gewonnen werden, die an sich mit Geometrie überhaupt nichts zu tun haben. Dieses gewaltige Werkzeug für Mathematik, Naturwissenschaft, Technik, ..., Ergebnisse und Aussagen auf dem Weg über die graphische Darstellung mittels *kartesischer Koordinatensysteme* zu erhalten, demonstrierte Descartes, ohne sich dessen selbst recht bewußt zu sein, an Beispielen wie dem folgenden. (Wir benutzen, um den Gedankengang durchsichtiger zu gestalten, eine moderne Ausdrucksweise.)

Gegeben sind die beliebigen reellen Zahlen p, q ($q \neq 0$, sonst ist die Aufgabe nur quadratisch, also *trivial*). Man soll entscheiden, ob und wie viele reelle Lösungen die kubische Gleichung

$$x^3 + px + q = 0$$

besitzt und soll diese Lösungen durch geometrische Konstruktion (mit Zirkel und Lineal) finden.

Lösung: Man zeichne in ein kartesisches Koordinatensystem die Normalparabel $y = x^2$ und den Kreis mit dem Mittelpunkt $\left(\frac{-q}{2}, \frac{1-p}{2}\right)$, der durch den Koordinatenursprung $(0,0)$ geht. (Sind die gegebenen Größen p, q auf der x-Achse des Koordinatensystems als Strecken markiert, so kann man den Punkt mit den Koordinaten $\left(\frac{-q}{2}, \frac{1-p}{2}\right)$ mit Zirkel und Lineal leicht konstruieren.) Die Gleichung dieses Kreises ist

$$\left(x + \frac{q}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{p-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2,$$

d. h. $x^2 + qx + y^2 + (p-1)y = 0$.

Die gemeinsamen Punkte von Kreis und Parabel sind also diejenigen, deren Koordinaten x, y dem Gleichungssystem

$y = x^2, x^2 + qx + y^2 + (p-1)y = 0$

genügen. Setzt man in die zweite Gleichung x^2 für y ein, so erhält man für die x-Koordinaten dieser Punkte die Gleichung

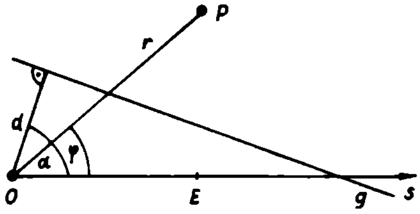
$$x(x^3 + px + q) = 0. \qquad (3)$$

Daß der Punkt $(0,0)$ nach Konstruktion ein gemeinsamer Punkt beider Kurven ist, spiegelt sich darin wider, daß $x = 0$ eine Lösung der Gleichung (3) ist. Die restlichen Lösungen sind gerade diejenigen der gegebenen kubischen Gleichung. (Descartes anerkannte nur positive reelle Zahlen und konnte daher auch seine Koordinatensysteme auf den *ersten Quadranten* beschränken. Erst Isaac Newton (1643 bis 1727) betrieb analytische Geometrie mit beliebigen reellen Koordinaten, d. h. in allen vier Quadranten.)

Aufgaben

▲1▲ Wie kann man aus den Koordinaten (x_1, y_1, r_1), (x_2, y_2, r_2) zweier Kreise berechnen, ob diese Kreise sich schneiden, ob einer von ihnen innerhalb des anderen oder ob sie voneinander getrennt liegen?

▲2▲ Ein ebenes Polarkoordinatensystem wird durch seinen Ursprungspunkt O, einen von O ausgehenden Strahl s, der die Maßeinheit OE trägt, und eine (meist mathematisch positiv gewählte) Zählrichtung der an s anzutragenden Winkel gegeben (Bild).



Die Polarkoordinaten eines beliebigen von O verschiedenen Punktes P sind (r, φ), wobei r die Länge der Strecke OP und φ der (vorzeichenbehaftete) Winkel $\sphericalangle EOP$ ist. Für den Ausnahmefall $P = O$ ist $r = 0$ und φ beliebig. Als Koordinaten einer Geraden g nehmen wir ihren senkrechten Abstand d ($\geqq 0$) von O und den (vorzeichenbehafteten) Winkel α zwischen s und dem von O auf g gefällten Lot. Durch welche Gleichung zwischen r, φ, d, α wird nun ausgedrückt, daß der Punkt mit den Koordinaten (r, φ) auf der Geraden mit den Koordinaten (d, α) liegt? Man stelle eine Berechnungsvorschrift auf, aus den Koordinaten zweier Punkte die Koordinaten der Verbindungsgeraden zu bestimmen. Wie kann man umgekehrt aus den Koordinaten zweier Geraden bestimmen, ob diese Geraden gleich oder parallel sind oder sich schneiden? Wie kann man im Fall des Schneidens aus den Koordinaten der Geraden die Koordinaten des Schnittpunktes berechnen?

▲3▲ Als Polarkoordinaten eines Kreises kann man wie im Fall kartesischer Koordinaten die Koordinaten seines Mittelpunktes und seinen Radius nehmen. Durch welche Gleichung zwischen den Koordinaten eines Kreises und den Koordinaten eines Punktes wird nun ausgedrückt, daß der Punkt auf dem Kreis liegt?

▲4▲ Decke auf, wie Descartes auf seine geometrische Methode gekommen ist, kubische Gleichungen der Form $x^3 + px + q = 0$ zu lösen! Setzt man in die allgemeine Kreisgleichung

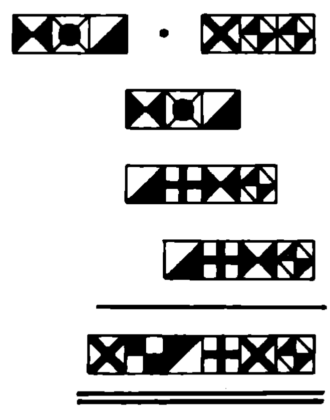
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$$

x^2 für y ein, so erhält man eine Gleichung 4. Grades für x.

Wie muß man x_1, y_1, r wählen, damit diese Gleichung die Form $x(x^3 + px + q) = 0$ annimmt? *P. Schreiber*

Wissen und Rechnen

Jedes Zeichen bedeutet eine Zahl und gleiche Zeichen bedeuten gleiche Zahlen. Unter Beachtung der Rechenregeln sind die Zahlen zu finden, die die Aufgabe richtig lösen. *W. Neugebauer, Berlin*



Eine harte Nuß

Man ermittle alle reellen Zahlen x, die der Ungleichung

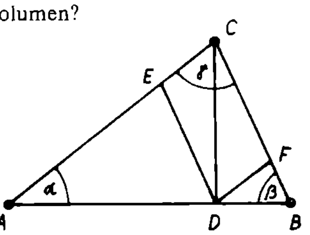
$$\frac{3x^2}{\left(\sqrt{1+3x} - 1\right)^2} \leqq x + 1$$

genügen! *R. Mildner, Leipzig*

Eine Aufgabe über Körper aus Dreiecksstücken

Im Dreieck $\triangle ABC$ über der gegebenen Grundseite $\overline{AB}$ sei D der Fußpunkt der Höhe $\overline{CD}$. Die Parallelen durch D zu den Geraden AC und BC schneiden die jeweils andere Gerade in den Punkten E und F (Bild 1). Die Strecken $\overline{DE}$, $\overline{DF}$ und $\overline{AB}$ bauen als Seitenkanten einen Quader, die Strecke $\overline{CD}$ baut als Seitenkante einen Würfel auf. Welche Voraussetzungen muß das Dreieck $\triangle ABC$ erfüllen, damit Quader und Würfel volumengleich sind? Auf welchem geometrischen Ort liegen die Eckpunkte C aller dieser Dreiecke bei gegebenem Volumen?

Bild 1



Gesucht werden also die Eigenschaften aller Dreiecke $\triangle ABC$ über der gegebenen Grundseite $\overline{AB}$, die die Gleichung

$$\overline{AB}\cdot\overline{DE}\cdot\overline{DF}=\overline{CD}^3 \qquad (1)$$

erfüllen.

In den ähnlichen Dreiecken $\triangle ADE$ und $\triangle ABC$ bzw. $\triangle DBF$ und $\triangle ABC$ gilt

$$\overline{DE}=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{BC}}{\overline{AB}},\quad \overline{DF}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{DB}}{\overline{AB}}.$$

Damit geht Gleichung (1) über in

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}\cdot\frac{\overline{DB}}{\overline{CD}}\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}=1. \qquad (2)$$

Durch Anwendung des Sinussatzes auf die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ADC$ erhält man

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma},\quad \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}}=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

Im Dreieck $\triangle ADC$ ist ferner

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}=\cot\alpha.$$

Man verliert aber Lösungen, wenn man außer acht läßt, daß α auch stumpf sein kann. Dann ist nach Bild 2

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}=\cot(180^\circ-\alpha)=-\cot\alpha.$$

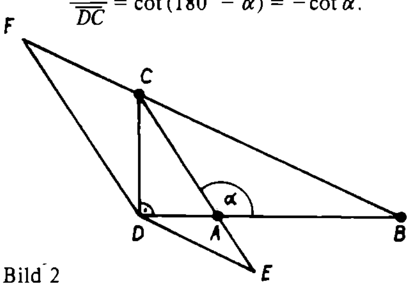


Bild 2

Beide Ergebnisse zusammengefaßt ergeben

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}=|\cot\alpha|.$$

Aus dem gleichen Grund ist

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=|\cot\beta|.$$

Damit geht Gleichung (2) über in

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot|\cot\alpha|\cdot|\cot\beta|\cdot\frac{1}{\sin\alpha}=1,$$

$$\frac{|\cot\alpha|\cdot|\cot\beta|}{\sin\gamma}=1,$$

und durch Übergang zum Reziproken:

$$|\tan\alpha|\cdot|\tan\beta|\cdot\sin\gamma=1.$$

Über die Innenwinkelbeziehung $\beta=180^\circ-(\alpha+\gamma)$ bekommt man die Gleichung

$$|\tan\alpha|\cdot|\tan(\alpha+\gamma)|\cdot\sin\gamma=1. \qquad (3)$$

Alle Dreiecke, deren Winkel α und γ die Gleichung (3) befriedigen, erfüllen auch die Aufgabenstellung (1).

Fall I: $\gamma=90^\circ$

Für alle $0^\circ<\alpha<90^\circ$ und $\gamma=90^\circ$ ist

$$\begin{aligned}&|\tan\alpha|\cdot|\tan(\alpha+\gamma)|\cdot\sin\gamma\\ &=|\tan\alpha|\cdot|\tan(\alpha+90^\circ)|\cdot\sin 90^\circ\\ &=|\tan\alpha|\cdot|-\cot\alpha|=|\tan\alpha|\,|\cot\alpha|\\ &=|\tan\alpha\cdot\cot\alpha|=1.\end{aligned}$$

Damit wird die Aufgabenstellung (1) von allen rechtwinkligen Dreiecken $\triangle ABC$ über der gegebenen Seite $\overline{AB}$ erfüllt.

Fall II: $0^\circ<\gamma<90^\circ$

Der Winkel γ sei zunächst beliebig wählbar, soll dann aber festgehalten werden.

Bild 3

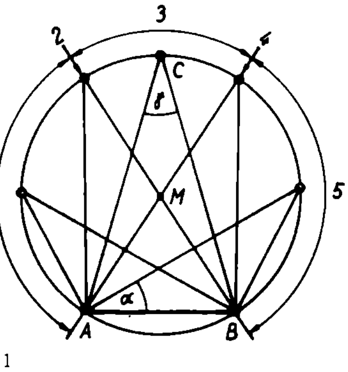


Tabelle 1

Fall	α	$\alpha+\gamma$	$\lvert\tan\alpha\rvert=$	$\lvert\tan(\alpha+\gamma)\rvert=$	Gleichung (2) geht über in
1	$180^\circ-\gamma>\alpha>90^\circ$	$180^\circ>\alpha+\gamma>90^\circ$	$-\tan\alpha$	$-\tan(\alpha+\gamma)$	$\tan\alpha\cdot\tan(\alpha+\gamma)\cdot\sin\gamma=1$
2	$90^\circ=\alpha$	$180^\circ>\alpha+\gamma>90^\circ$	n. d.	$-\tan(\alpha+\gamma)$	nicht definiert
3	$90^\circ>\alpha>90^\circ-\gamma$	$180^\circ>\alpha+\gamma>90^\circ$	$\tan\alpha$	$-\tan(\alpha+\gamma)$	$-\tan\alpha\cdot\tan(\alpha+\gamma)\cdot\sin\gamma=1$
4	$90^\circ-\gamma=\alpha$	$\alpha+\gamma=90^\circ$	$\tan\alpha$	n.d.	nicht definiert
5	$90^\circ-\gamma>\alpha>0^\circ$	$90^\circ>\alpha+\gamma>\gamma$	$\tan\alpha$	$\tan(\alpha+\gamma)$	$\tan\alpha\cdot\tan(\alpha+\gamma)\cdot\sin\gamma=1$

Dann sind hinsichtlich der Terme $|\tan\alpha|$ bzw. $|\tan(\alpha+\gamma)|$ in Gleichung (3) folgende Fälle zu untersuchen (siehe Bild 3, Tabelle 1).

In den Fällen 2 und 4 verliert die Gleichung (3) ihre Bedeutung.

Fall 3: Aus

$$-\tan\alpha\cdot\tan(\alpha+\gamma)\cdot\sin\gamma=1$$

folgt mit dem Additionstheorem für $\tan(\alpha+\gamma)$

$$-\frac{\tan^2\alpha+\tan\alpha\cdot\tan\gamma}{1-\tan\alpha\cdot\tan\gamma}=\frac{1}{\sin\gamma},$$

oder die quadratische Gleichung

$$\tan^2\alpha+\frac{\sin\gamma-1}{\cos\gamma}\tan\alpha+\frac{1}{\sin\gamma}=0$$

mit der Lösung $(\tan\alpha)_{1/2}=\frac{1}{2}$

$$\times\left(\frac{1-\sin\gamma}{\cos\gamma}\pm\sqrt{\left(\frac{1-\sin\gamma}{\cos\gamma}\right)^2-\frac{4}{\sin\gamma}}\right).$$

Die Diskriminante

$$\begin{aligned}D&=\left(\frac{1-\sin\gamma}{\cos\gamma}\right)^2-\frac{4}{\sin\gamma}\\ &=\frac{(1-\sin\gamma)^2}{1-\sin^2\gamma}-\frac{4}{\sin\gamma}\\ &=\frac{1-\sin\gamma}{1+\sin\gamma}-\frac{4}{\sin\gamma}\\ &=\frac{-\sin^2\gamma-3\sin\gamma-4}{\sin\gamma\cdot(1+\sin\gamma)}\end{aligned}$$

ist für alle betrachteten Winkel γ stets negativ, die Gleichung (3) besitzt also keine reelle Lösung.

Fall 1 und 5 können zusammengefaßt untersucht werden. Aus der Gleichung

$$\tan\gamma\cdot\tan(\alpha+\gamma)\cdot\sin\gamma=1$$

folgt die quadratische Gleichung

$$\tan^2\alpha+\frac{1+\sin\gamma}{\cos\gamma}\tan\alpha-\frac{1}{\sin\gamma}=0.$$

Da $D>0$ für alle betrachteten γ, ergeben sich die zwei Lösungen

$$\tan\alpha_1=-\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sin\gamma}{\cos\gamma}-\sqrt{\left(\frac{1+\sin\gamma}{\cos\gamma}\right)^2+\frac{4}{\sin\gamma}}\right)$$

$$\tan\alpha_2=-\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sin\gamma}{\cos\gamma}+\sqrt{\left(\frac{1+\sin\gamma}{\cos\gamma}\right)^2+\frac{4}{\sin\gamma}}\right). \qquad (4)$$

Damit gibt es zu jedem spitzen Winkel γ einen spitzen Winkel α_1 (Fall 5) und einen stumpfen Winkel α_2 (Fall 1), die beide die Gleichung (3) erfüllen. Es läßt sich zeigen, daß die beiden Dreiecke mit den Winkeln γ und α_1 bzw. γ und α_2 wegen $\alpha_2=180^\circ-(\gamma+\alpha_1)$ kongruent sind.

Fall III: $90^\circ<\gamma<180^\circ$

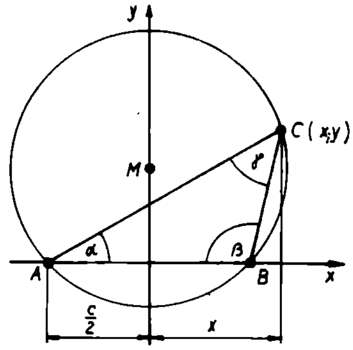
Für ein Dreieck mit beliebigem stumpfen, aber dann fest gehaltenen Winkel γ geht Gleichung (3) über in

$$-\tan\alpha\cdot\tan(\alpha+\gamma)\cdot\sin\gamma=1.$$

Die Nichtlösbarkeit dieser Gleichung wurde oben in Fall 3 nachgewiesen.

Zusammenfassung:
Über der gegebenen Grundseite $\overline{AB}$ erfüllt jedes rechtwinklige Dreieck $\triangle ABC$ ($\gamma = 90°$) die Aufgabenstellung (1). Das ist auch bei jedem spitzen Winkel γ für zwei spezielle kongruente Dreiecke der Fall, deren Winkel α sich über die Beziehungen (4) errechnen lassen.
Um den geometrischen Ort der Eckpunkte C über der gegebenen Grundseite $\overline{AB}$ ermitteln zu können, legt man das Dreieck $\triangle ABC$ wie in Bild 4 in ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem.

Bild 4



Man erhält über die Beziehungen

$$\cos\alpha = \frac{\frac{c}{2} + x}{\overline{AC}}, \quad \sin\alpha = \frac{y}{\overline{AC}},$$

$$\overline{AC} = c\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \quad \beta = 180° - (\alpha + \gamma)$$

für die Koordinaten des Punktes C

$$x = c\left(\frac{\sin(\alpha+\gamma)\cdot\cos\alpha}{\sin\gamma} - \frac{1}{2}\right)$$

$$y = c\frac{\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma}, \qquad (5)$$

wobei die Abhängigkeit des Winkels α zu jedem Winkel γ mit $0° < \gamma < 90°$ durch die Gleichungen (4) gegeben ist.

Bild 5

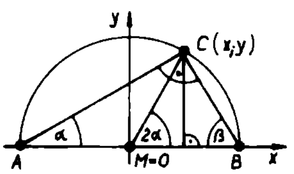
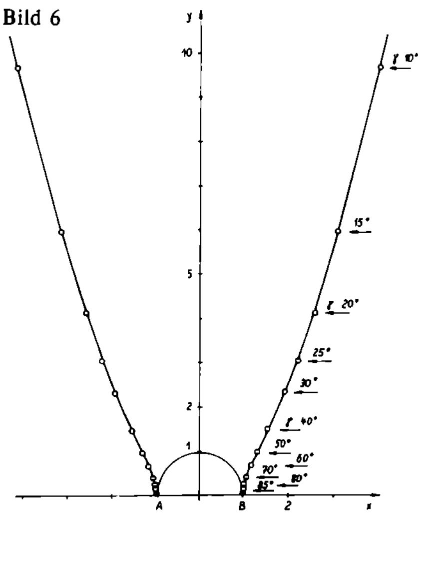


Bild 6



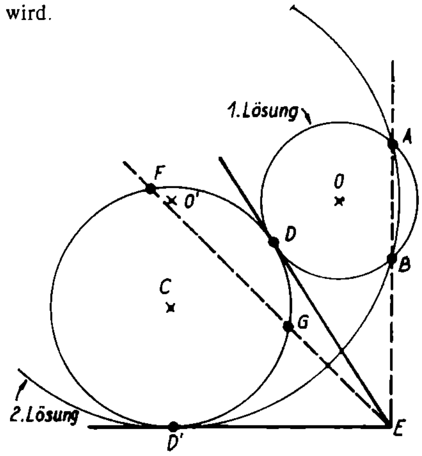
Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. A. Grunert

Universität Greifswald
geb. 7. 2. 1797, gest. 7. 6. 1872

▲2873▲ „Einen Kreis beschreiben, welcher einen gegebenen Kreis von außen berührt und durch zwei außerhalb demselben gegebenen Punkte geht!

Analysis: C sey Mittelpunkt des gegebenen Kreises, A und B die gegebenen Punkte. Die Aufgabe sey aufgelöst, O der gesuchte Mittelpunkt, D sey der Berührungspunkt beider Kreise mit gemeinsamer Tangente. Die Tangente schneidet die Verlängerung von AB in E, so ist $DE^2 = AE \cdot BE$ nach dem Sehnentangentensatz.
Von E aus sey EGF eine beliebige Sekante, so gilt auch
$DE^2 = FE \cdot GE$ und folglich
$AE \cdot BE = FE \cdot GE$ oder $AE : FE = GE : BE$, daher liegen die 4 Punkte A, B, G, F auf einem Kreis (Sekantensatz).

Synthesis: Man beschreibe einen durch A und B gehenden Kreis, welcher den gegebenen Kreis in 2 beliebigen Punkten F, G schneidet. Hierauf ziehe man die Linien AB und FG, die sich in E schneiden. Von E aus ziehe man nach bekannter Elementaraufgabe eine Tangente an den gegebenen Kreis, Berührungspunkt ist dann D. Ebenfalls nach einer Elementaraufgabe beschreibe man einen Kreis durch die drei Punkte A, B, D, welcher der gesuchte seyn muß. Bekanntlich kann man von E aus noch eine zweite Tangente ED' an den Kreis ziehen. Beschreibt man nun durch A, B, D' einen Kreis, so wird dies ein Kreis seyn, welcher durch A und B geht, und von dem gegebenen Kreis von innen berührt wird.



gegeben: 2 Punkte A, B, Kreis in e
gesucht: Berührungskreise an Kreis C durch A und B

D Berührungspunkt, 1. Lösung (von außen)
D' Berührungspunkt, 2. Lösung (von innen)

Anmerkung: Ganz wie vorhin kann man auch einen Kreis beschreiben, welcher von einem gegebenen Kreis berührt wird und durch zwei innerhalb desselben liegende Punkte geht."

Diese Aufgabe, von Dr. J. Buhrow, *E.-M.-Arndt*-Universität Greifswald ausgewählt, stammt aus dem Buch:
J. A. Grunert, Gymnasialprofessor in Neubrandenburg, 1834
Lehrbuch der Mathematik für die mittleren Classen höherer Lehranstalten, gedruckt bei J. J. Wiesike, Brandenburg.

Kurzbiographie
Johann August Grunert, geb. 7. 2. 1797 in Halle als Sohn eines Buchdruckers, ab 1815 Studium in Halle bei Pfaff, dem Doktorvater von Gauß, und dann bei Gauß in Göttingen, 1820 Dr. Phil., 1821 Gymnasiallehrer in Torgau, ab 1828 in Brandenburg, ab 1833 fast 39 Jahre Professor in Greifswald. Große Klarheit als Lehrer (kein Wunder nach der Praxis in der Schule!). Gab für Lehrer ab 1841 *Archiv für Mathematik und Physik* in Leipzig heraus. Etwa 500 gedruckte kleinere Arbeiten, wohl keine sehr großen Entdeckungen, Mitglied der Akademie in Wien, München, Erfurt, Stockholm und Upsala. Tod 7. 6. 1872.

Für $\gamma = 90°$ (Bild 5) gehen die Gleichungen (5) über in

$$x = c\left(\cos^2\alpha - \frac{1}{2}\right) = \frac{c}{2}\cdot\cos 2\alpha,$$

$$y = \frac{c}{2}\cdot\sin 2\alpha,$$

die Gleichung des Kreises in Parameterdarstellung.

Folgende Tabelle gibt für $c = 2\,LE$ und für spezielle spitze Winkel γ Näherungswerte für die Winkel α_1 und α_2 mit den dazugehörenden Koordinaten der Punkte $C(x;y)$ an.

γ in °	α_1 in °	α_2 in °	x	y
85	2,51	92,50	±1,00	0,09
80	5,04	94,96	±1,01	0,18
70	10,31	99,70	±1,06	0,38
60	17,03	104,45	±1,17	0,65
50	22,44	107,56	±1,30	0,95
40	29,79	110,21	±1,53	1,45
30	38,39	111,61	±1,91	2,31
25	43,29	111,71	±2,20	3,01
20	48,72	111,28	±2,60	4,09
15	54,83	110,17	±3,18	5,93
10	61,95	108,05	±4,15	9,66

In Bild 6 wird der gesuchte geometrische Ort aller Dreieckpunkte C für $\overline{AB} = c = 2LE$ dargestellt, die der Aufgabenstellung genügen.

R. Münzberg

IMO 87 in Kuba – ein unvergeßliches Erlebnis

Die Internationale Mathematikolympiade (IMO) fand vom 5. bis 16. Juli 1987 in Havanna statt. An ihr nahm auch eine 6-Schüler-Mannschaft aus der DDR teil. Es hatten sich für die Mannschaft Uta Hövel, Gerd Kunert, Frank Göhring, Jörg Jahnel, Gunter Döge und Ingo Warnke qualifiziert. Leiter der DDR-Delegation war Prof. Burosch (W.-Pieck-Universität Rostock) und sein Stellvertreter Prof. Gronau (E.-M.-Arndt-Universität Greifswald).
Am 4. Juli trafen wir uns auf dem Flughafen Berlin-Schönefeld. Dort wurden wir von unseren Eltern verabschiedet. Nach einer Zwischenlandung in Kanada landeten wir pünktlich um 19.30 Uhr Ortszeit in Havanna. Beim Ausstieg aus dem Flugzeug schlug uns sofort die heiße Luft der Subtropen ins Gesicht. Nach der Paß- und Zollkontrolle begrüßte uns der Kulturattaché der DDR-Botschaft in Kuba. Danach wurden wir Teilnehmer in die etwas außerhalb von Havanna gelegene Leninschule gebracht, während Prof. Burosch und Prof. Gronau im Riviera-Hotel untergebracht waren. Die Leninschule ist eine Schule mit Spezialisierung auf naturwissenschaftliche Fächer. Die Schüler wohnen direkt an der Schule in Zimmern, in denen während der IMO die Mannschaften untergebracht waren. Nach dem Abendessen brach dann für uns die erste Nacht an, die jedoch durch die ungewohnte Hitze und die vielen Moskitos bei mir in unangenehmer Erinnerung geblieben ist. Am nächsten Morgen fand ein kleiner Appell mit allen am gestrigen Tage angekommenen Mannschaften statt, in dessen Verlauf durch einen Teilnehmer jedes Landes, bei uns war das Jörg, die Landesflagge gehißt wurde. Damit waren wir dann in den Kreis der Olympiadeteilnehmer aufgenommen. Vom Veranstalter bekamen wir einen IMO-Beutel, in dem das Programm, Stadtpläne und der IMO-Anstecker waren. Außerdem erhielten wir eine Identitätskarte, die uns als IMO-Teilnehmer der DDR auswies. Am Nachmittag fuhren wir in ein Touristenzentrum. Da alle bisher angereisten Mannschaften mitgekommen waren, wurden dort bereits vereinzelt Kontakte zwischen den Mannschaften geknüpft bzw. Bekannte aus vorigem Jahr begrüßt. Am Montagvormittag war für die gesamte DDR-Mannschaft ausgiebiges Baden, Sonnen und Doppelkopfspielen angesagt. Da die Schule ein eigenes Schwimmbecken hatte, nutzten wir oft unsere Freizeit zum Baden und Sonnen. Das Ergebnis war eine krebsrote Haut bei uns allen schon nach einem Tag! Am Nachmittag fuhren wir dann nach Havanna zum Riviera-Hotel, wo wir uns mit Prof. Gronau trafen. Als wir von der Fahrt in die Schule zurückkehrten, fanden wir zu unserer Freude an den Betten Moskitonetze vor. Wir alle, besonders jedoch Uta, waren von Moskitostichen bereits stark gezeichnet.
Am nächsten Morgen besuchten wir ein Aquarium in Havanna. Neben einigen exotischen Fischen war dort eine lustige Delphinshow die Hauptattraktion. Nach dem Mittagessen gingen wir wieder einmal baden, da es anders wegen der fast senkrecht über uns stehenden Sonne schwer auszuhalten war. Auch der tägliche 15minütige Regen brachte keine Abkühlung. Abends spielte eine kubanische Gruppe lateinamerikanische Rhythmen. Dort konnten wir unsere kubanischen Betreuer das erste Mal in ihrem südlichen Temperament erleben. Wir versuchten natürlich auch bei ihren Tänzen mitzumachen, aber ob das wohl gut aussah? Solche Veranstaltungen gehören auch zu einer Olympiade, wo man die Gastgeber kennenlernt und auch zwischen den Mannschaften Gespräche entstehen. Am Mittwoch besuchten wir den ganz in der Nähe der Schule gelegenen Leninpark. Auf einem kleinen See bestand die Möglichkeit zu rudern, die wir natürlich nutzten. Während wir auf dem See waren, unterhielt ich mich mit dem Stellvertreter der mexikanischen Delegation. Jeder erzählte etwas über die Vorbereitung auf die IMO in seinem Land und die Wünsche, die er für die IMO hat. Auch im Leninpark gibt es ein Aquarium, das wir besucht haben. Dort waren für mich die Krokodile am interessantesten, Piranyas gab es dort leider nur als Modell. Am Nachmittag dieses Tages machten wir dann den Ausflug, auf den sich die ganze Mannschaft bereits seit Tagen gefreut hat; es ging an den Strand zum Atlantik! Der Strand war herrlich weiß, das Wasser klar grün. Durch den hohen Salzgehalt brauchte man nur die Luft anzuhalten, um zu schwimmen. Daß die Sonne schien, ist in Kuba selbstverständlich. Diese Idylle ist eine der schönsten Erinnerungen an Kuba, die ich habe. Am Abend machten wir dann noch eine Fahrt ins Zentrum von Havanna. Wir gingen am Meer entlang, wo sich, nachdem es dunkel geworden war, die jungen Leute von Havanna treffen. Wir sahen die Vorbereitungen für den Karneval, der leider erst nach unserer Abreise stattfand. Nach einem Spaziergang durch das nächtliche Havanna besuchten wir den Eispalast, wo sich auch um 22.00 Uhr noch sehr viele Kinder aufhielten. Auch um diese Zeit ist es in Kuba noch relativ warm, so daß wir noch ein Eis aßen; es gab ja im Eispalast genügend Auswahl. Der nächste Tag, Donnerstag der 9. Juli, war der Tag vor der 1. Klausur. Am Vormittag kam Prof. Gronau zu uns und brachte als letzte Übung Aufgaben mit, die er von anderen Delegationen bekommen hatte. Am Nachmittag machten wir dann einen Bummel durch Alt-Havanna.
Am Abend gab es dann mit einigen Mannschaften noch einen Aufgabenaustausch der nationalen Olympiaden. Am Freitag wurde die XXVIII. Internationale Mathematikolympiade dann eröffnet. Die Zeremonie war kurz, da die 1. Klausur gleich anschließend folgen sollte. Nach Beendigung dieser Klausur herrschte in der Mannschaft eine hervorragende Stimmung, da jeder alle Aufgaben gelöst hatte. An diesem Tag haben wir nur noch gebadet, da wir auf Grund der Spannung auf den nächsten Tag wenig Lust hatten anderes zu tun. Bei dieser Gelegenheit nutzten wir die Möglichkeit, viele Mannschaften über ihr Abschneiden zu befragen. Da die Aufgaben erst nach dem 2. Tag korrigiert werden, war das die einzige Möglichkeit, Informationen über die Plazierung unserer Mannschaft zu erhalten. Am Sonnabend, dem 2. Klausurtag, waren die Aufgaben dann auch wesentlich schwerer. Nur zwei hatten auch an diesem Tage alle Aufgaben gelöst, während wir anderen mit der 4. bzw. 6. Aufgabe Probleme hatten. In der Schule war

Die DDR-Mannschaft im Aquarium im Leninpark:
Uta Hövel, EOS *Heinrich Hertz* Berlin, Gerd Kunert, Spezialklasse der TH Karl-Marx-Stadt; Frank Göhring, Spezialklasse der TH Ilmenau; Ingo Warnke, EOS *Georg Thiele* Kleinmachnow; Gunter Döge, EOS *Friedrich Engels* Riesa; Jörg Jahnel, EOS *Carl Zeiss Jena* Jena (v. r. n. l.)

eine riesige Tafel angebracht worden, auf der die erzielten Punktzahlen für jede Aufgabe für jeden Teilnehmer eingetragen wurde. Seit dem Zeitpunkt, wo die ersten koordinierten Punktzahlen eingetragen wurden, war diese Trafel dicht umringt. Ständig wurde gerechnet und geschätzt, man versuchte die eigene und die Mannschaftsposition abzuschätzen. Nach dem Abendbrot begann der sportliche *Höhepunkt* der Olympiade – ein Fußballspiel. Die DDR-Mannschaft war mit Jörg im Tor sowie Gerd und Ingo stark vertreten. Während Jörg nur ein Mal hinter sich greifen mußte, konnten wir sieben Mal den gegnerischen Torwart überwinden. Am Abend stand eine kubanische Gala auf dem Programm, auf der sich lateinamerikanische Musik, Tanz und Pantomime abwechselten.

Am Sonntag fuhren die Teilnehmer an einen Strand in der Nähe von Havanna, während die Korrektoren unsere Lösungen zu korrigieren hatten. Gegen Ende unseres Strandbesuches stellte sich dann heraus, daß unsere kubanische Betreuerin Tanja gar nicht schwimmen kann! Unsere Versuche, es ihr beizubringen, scheiterten jedoch an den wenigen Möglichkeiten, die uns bis zur Abreise noch blieben. Am Montag besuchten wir das Pionierlager José Marti. Dort gibt es ein Museum des historischen Revolutionärs Che Guevara. Außerdem drehten wir im Vergnügungspark des Pionierlagers noch ein paar Runden. Ab 20.00 Uhr gab es an diesem Abend einen Empfang beim Minister für Volksbildung. Wir nutzten die Gelegenheit, um mit unserer Delegationsleitung über die Ergebnisse der korrigierten bzw. noch zu korrigierenden Lösungen zu sprechen. Langsam zeichnete sich auch ab, daß wir einen der vorderen Plätze in der Mannschaftswertung belegen würden. Am nächsten Tag war ein Ausflug zur Schweinebucht ans Karibische Meer angekündigt worden. Die historische Bedeutung der Schweinebucht war uns schon vorher bekannt. Hier gelang der erste große Sieg gegen den Imperialismus in Lateinamerika. Da die Fahrt über drei Stunden dauern sollte, fuhren wir in klimatisierten Bussen, die für uns Nord- und Mitteleuropäer natürlich eine willkommene Abkühlung brachten. Während einer Rast an einer Krokodilfarm nahmen wir einen, wie immer reichlichen Imbiß ein. Am Strand angekommen begann wieder die Suche nach einem günstigen Platz, wo wir uns niederlassen könnten. Nach allen Erfahrungen und Sonnenbränden wählten wir diesmal einen Platz, der nicht direkt unter der vollen Sonnenbestrahlung lag. Hier am Playa Gison, so heißt der Strand, gab es auch einen Souvenirladen, in dem sich jeder von uns einen riesengroßen Sombrero kaufte. Während des wieder ausgiebigen Badens informierten wir unsere Delegationsleitung vom Ausgang des Fußballspiels. Darüber war Prof. Burosch als ehemaliger aktiver Spieler natürlich sehr erfreut! Nachdem wir wieder in der Schule angekommen waren, standen uns noch einige aufregende Stunden vor der Ergebnistafel bevor. Bis auf die 6. Aufgabe der ungarischen Mannschaft war die Tafel bereits seit langem vollständig. Bis jetzt lagen wir auf dem 4. Platz, wären jedoch bei einer bestimmten Punktzahl auf die 6. Aufgabe der Ungarn um einen Platz zurückgefallen. Die lange Koordinationszeit ließ darauf schließen, daß um jeden Punkt regelrecht gekämpft wurde. Als die ersten Ergebnisse angeschrieben wurden, war es dann klar: wir waren 4. in der Mannschaftswertung. Groß war unsere Überraschung, als plötzlich die Amerikaner laut jubelten! Die Ungarn hatten nämlich in Wirklichkeit darum gekämpft, noch an den USA vorbeizuziehen. Dafür fehlten ihnen am Ende jedoch zwei Punkte. Am Mittwoch fand dann die Abschlußveranstaltung der IMO statt. Der Minister für Volksbildung ließ es sich nicht nehmen, auch die Siegerehrung vorzunehmen. Es wurden die Urkunden, Medaillen bzw. Geschenke für die Preisträger übergeben. Frank und Gerd waren unsere erfolgreichsten Teilnehmer, da beide einen 1. Preis erkämpften. Uta, Jörg und Gunter erhielten einen 2. Preis sowie Ingo einen 3. Preis. Nach der Preisverteilung lud der australische Delegationsleiter alle teilnehmenden Staaten zur nächsten Internationalen Mathematikolympiade 1988 nach Australien ein. Am Nachmittag kauften wir mit Hilfe eines in Kuba arbeitenden DDR-Wissenschaftlers, der bei der IMO Koordinator war, in Havanna ein. Wir kauften Ananas, Mangos, Rum usw. Einen Teil aßen wir dann schon abends bei den Abschiedsfeiern. Der eigentliche Abreisetag, der 16. 7. 87, wurde für uns durch die DDR-Botschaft organisiert. Zuerst wurden wir mit einem Barkas abgeholt und noch einmal an den Strand gefahren, wo wir dann ein letztes Mal im Atlantik gebadet haben. Später empfing uns noch beim Mittagessen in der Botschaft der Botschafter zu einem Gespräch. Auch er beglückwünschte uns zum so erfolgreichen Abschneiden, erkundigte sich über den Verlauf der IMO und unsere Eindrücke in Kuba und gab uns einen kleinen Einblick in die Arbeit einer Botschaft. Für den Nachmittag lud er uns in seine Residenz ein. Den Swimmingpool haben wir wegen der starken Hitze sofort besetzt. Zusammen mit Prof. Burosch und Prof. Gronau gab es dann ein kleines *Wasserfußballspiel*. Einen Imbiß, bestehend aus Kuchen und eisgekühlter Kola, haben wir natürlich auch nicht abgelehnt. Gegen 17.00 Uhr war der für uns alle sehr vergnügliche Aufenthalt in der Residenz leider zu Ende. Wieder in der Schule angekommen, bekamen wir dann zu unserer großen Freude noch jeder ein IMO-T-Shirt. Auch an diesem Abend mußte auf Grund der Transportkapazität noch ein Teil der gekauften Früchte gegessen werden.

Am nächsten Tag kam dann für uns der endgültige Abschied von Kuba. Wegen einer 50minütigen Verspätung hatten wir schon befürchtet, das Flugzeug zu verpassen. Trotz beträchtlichen Übergepäcks wurden wir noch zum chek in angenommen. Auf der gleichen Route wie beim Hinflug ging es dann um 11.58 Uhr von Kuba los. Um 6.00 Uhr des nächsten Tages (DDR-Zeit) wurden wir von unseren Familien, Vertretern des Ministeriums für Volksbildung und des Zentralrates der FDJ und der Aktuellen Kamera in Berlin-Schönefeld empfangen. Im Flughafenhotel erfolgte dann noch eine kleine Auswertungsveranstaltung, auf der unsere Leistungen gewürdigt wurden. Diese IMO war ein schöner und unvergeßlicher Abschluß meiner langen Olympiade-Laufbahn.

Ingo Warnke

Eingang der Lenin-Schule

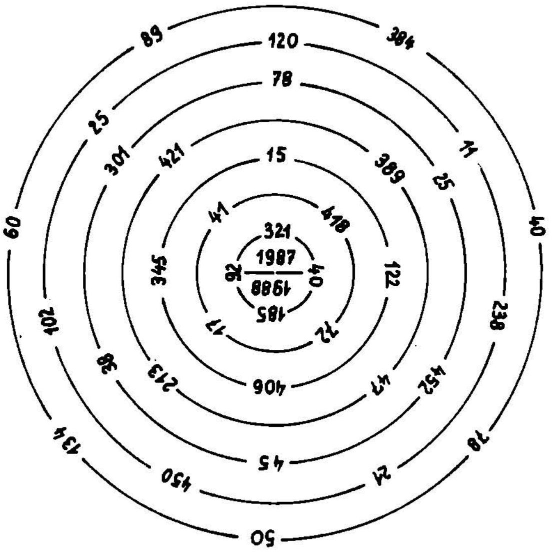
In freien Stunden · alpha-heiter

Wer nichts weiß und weiß,
daß er nichts weiß,
weiß viel mehr als der,
der nichts weiß und nicht weiß,
daß er nichts weiß.

Zahlenlabyrinth

Das abgebildete Zahlenlabyrinth ist von außen nach innen so zu durchlaufen, daß die Summe der dabei berührten Zahlen entweder die Jahreszahl 1987 oder die Jahreszahl 1988 ergibt. In jedem der Ringe darf immer nur eine einzige Zahl berührt werden. Wer findet die meisten Lösungen?

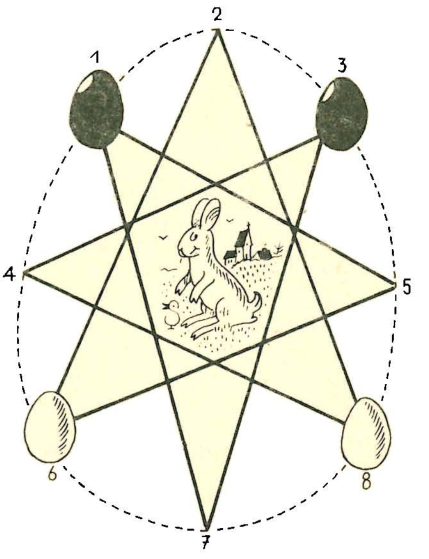
Ing. A. Körner, Leipzig



Ein kniffliges Eierspiel

Die beiden schwarzen und die beiden weißen Eier sollen durch Hin- und Herschieben über die fetten Linien ihre Plätze wechseln. Glaubt nicht, daß das so einfach ist! Aber darum ist das Spiel auch so kurzweilig. Stellt die vier Eier aus Zeichenkarton her und versucht euer Glück!

aus: WE, Köln



Kein Problem?!

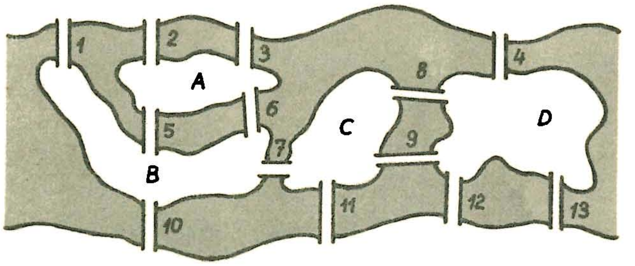
Die Chefsekretärin ist in Schwierigkeiten geraten. Bedauerlicherweise befindet sich die Schreibmaschine mit kyrillischen Buchstaben in Reparatur und gerade jetzt muß sie einige Worte in Großbuchstaben in eine Übersetzung ins Russische übertragen. Da hat sie eine Idee. Sie nimmt die Schreibmaschine mit lateinischen Buchstaben. Welche von den folgenden Worten kann sie nun schreiben?

1. ВЕС	11. СХЕМА
2. НЕТТО	12. ОТКАЗ
3. МУСКАТ	13. МАКЕТ
4. РОСТ	14. РУКА
5. НИНА	15. ПРИКАЗ
6. РУДИН	16. ХАРАКТЕР
7. УХО	17. ОСТАНОВКА
8. ПАНИКА	18. ХАТА
9. РЕМОНТ	19. РЕЗЕРВ
10. РАКЕТА	20. УТКА

E. Schmidt, Potsdam

Ein Brückenproblem

Die nachstehende Zeichnung zeigt einen Fluß, in dem sich vier Inseln (A, B, C und D) befinden. Diese Inseln sind von beiden Seiten des Flusses aus und untereinander über insgesamt 13 Brücken zu erreichen.



Ist es möglich, von einem beliebigen Ufer aus alle vier Inseln zu betreten und wieder zum Ufer (oder auch zum anderen Ufer) zu gelangen und dabei alle Brücken, aber jede nur ein einziges Mal, zu passieren?

1, 2, 3, ... – α ist immer dabei

Die Buchstaben in nachstehendem Gleichungssystem sind so durch Grundziffern zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

(1) $\alpha \cdot \alpha\alpha = P\alpha E$
(2) $P \cdot \alpha\alpha = R\alpha T$
(3) $R \cdot \alpha\alpha = O\alpha K$
(4) $O \cdot \alpha\alpha = D\alpha U$
(5) $D \cdot \alpha\alpha = U\alpha D$
(6) $U \cdot \alpha\alpha = K\alpha O$
(7) $K \cdot \alpha\alpha = T\alpha R$
(8) $T \cdot \alpha\alpha = E\alpha P$

In Altenburg

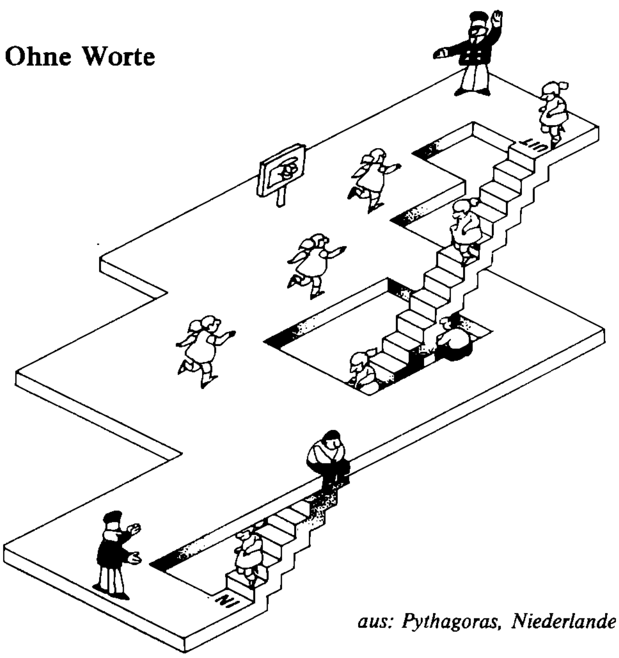
A	L	T	E	N	B	U	R	G

Welche Zahl wird jedem Buchstaben von ALTENBURG zugeordnet, wenn das folgende Gleichungssystem gilt:

$A + L + T + E = 43$ $\quad A + N = 22$
$A + L + T = 40$ $\quad B + U = 37$
$A + L = 38$ $\quad B + U + R = 70$
$A + B = 25$ $\quad B + U + R + G = 106$
$A - B = 11$

Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

Ohne Worte

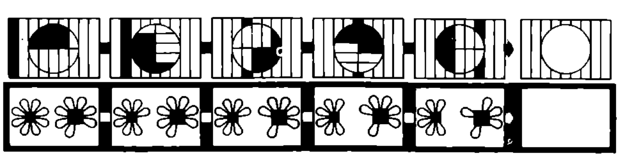


aus: Pythagoras, Niederlande

Logelei

Welche Figur gehört logischerweise in die Leerfelder?

aus: Füles, Budapest



Von A nach B gewandert

Die Figur ist von A nach B zu durchwandern. Dabei soll der Weg so durch alle Felder führen, daß sich ein Satz für das Rechnen im Bereich der natürlichen Zahlen ergibt.

Oberlehrer O. Chromy, Coswig

A→

A	D	D	M	U	L
I	T	I	D	I	T
O	N	U	N	P	L
O	I	T	A	K	I
N	S	S	C	H	R
N	I	E	G	N	Ä
D	U	N	E	I	N
F	S	U	A	T	K
Ü	H	R	B	A	R

→B

Kryptarithmetik

Setze an Stelle der Buchstaben bzw. Sternchen Ziffern so, daß richtig gelöste Aufgaben entstehen!

a) $\overline{abcd} \cdot 9 = \overline{dcba}$

b) $\overline{9ABCDE} = 4 \cdot \overline{ABCDE9}$

c)
```
  BDCA
+ BDAC
 AECBE
```

d)
```
  **5 · 4*
  *1*
 **6*
 *7***
```

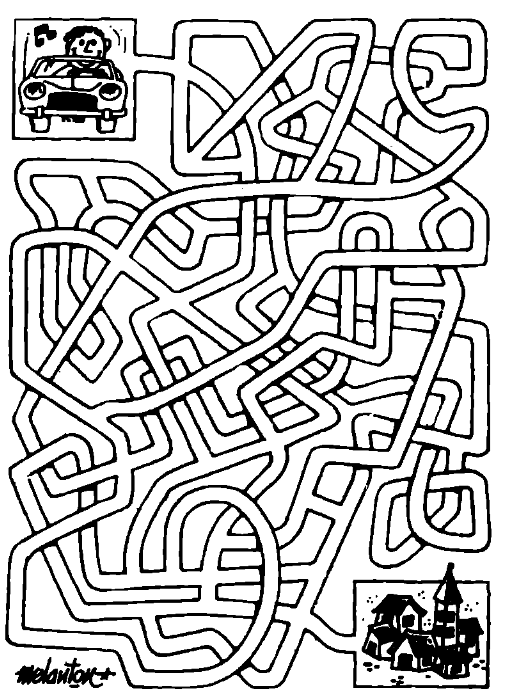
e)
```
√****** = ***
 *
 ***
 **
 4***
 ****
 –
```

aus: Matematica List, Beograd

Vorsicht Kurve!

Wie kommt der Autofahrer auf dem günstigsten Weg in die Ortschaft?

aus: Troll, Berlin



Rund um den SR 1

Die $\boxed{y^x}$-Taste

Will man Potenzen mit ganzzahligen positiven oder negativen Exponenten unter Verwendung eines Taschenrechners ermitteln, so genügen dazu die auf allen Taschenrechnern vorhandenen Tasten $\boxed{x}$, $\boxed{\div}$ und falls es sich um eine negative Basis handelt, noch die Vorzeichenwechseltaste $\boxed{+/-}$.

▲ 1 ▲ Berechne mit dem SR 1, ohne die $\boxed{y^x}$ zu verwenden, folgende Terme!
Gib jeweils einen Rechenablaufplan an!
a) $3{,}1^3$ b) $0{,}7^{-3}$ c) 0^3 d) 3^{14}
e) $2{,}81^5$ f) $(-2)^{21}$

Das Lösen der Aufgaben 1d) bzw. 1f) ist trotz der Konstantenautomatik des SR 1 recht *tastenaufwendig*. So muß man 13mal bzw. 20mal die Taste $\boxed{=}$ betätigen. Um uns bei der Berechnung von Potenzen das wiederholte Betätigen gleicher Tasten zu ersparen, verfügt unser Schulrechner SR 1 wie manch anderer wissenschaftliche Taschenrechner über die Taste $\boxed{y^x}$. Mit Hilfe dieser Taste kann man die Aufgaben 1a), 1b), 1d), 1e) und auch 1f) mit relativ wenig *Tastenbetätigung* lösen.
Beispiel: $3{,}1^3$
Rechenablaufplan: $\boxed{3{,}1}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$
▼
29,791

Die Taste $\boxed{y^x}$ gehört zu den Operationstasten. Zur Ermittlung des Resultats wird die Taste $\boxed{=}$ benötigt.

▲ 2 ▲ Berechne mit Hilfe der Taste $\boxed{y^x}$ die Ergebnisse der Aufgaben 1b), 1d), 1e)! Vergleiche jeweils die ermittelten Resultate der Aufgabe 1 mit denen der Aufgabe 2!
Was stellst du fest?

Da der Potenzwert y^x bei Nutzung der Taste $\boxed{y^x}$ mit Hilfe einer fest verdrahteten Schaltung über die Beziehung
$y^x = e^{x \cdot \ln y}$ gewonnen wird, ist die Genauigkeit des Resultats u. U. geringer als bei der Nutzung der Multiplikationstaste bzw. Divisionstaste. Der SR 1 gibt bei Verwendung der Taste $\boxed{y^x}$ die Ergebnisse auch nur mit sechs zuverlässigen Ziffern an (linke Nullen werden bei Dezimalbrüchen nicht als zuverlässige Ziffer gezählt), wobei die letzte zuverlässige Ziffer durch Runden entstanden ist, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel: 2^{20}
$\underbrace{\boxed{2}\ \boxed{x}\ \boxed{=}\ \boxed{=} \ldots \boxed{=}}_{19\text{mal}}$ 1048576 (genauer Wert)
$\boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{20} \ldots$ $\underbrace{10485}_{\text{zuverlässige Ziffern}}80$

Da $\ln y$ nur für positive reelle Zahlen y erklärt ist, können Potenzen mit negativer Basis und Potenzen mit Null als Basis *nicht* unter Verwendung der Taste $\boxed{y^x}$ berechnet werden.

▲ 3 ▲ Erkunde, welcher Term der SR 1 mit den angegebenen Rechenablaufplänen berechnet!
a) $\boxed{3}\ \boxed{y^x}\ \boxed{2}\ \boxed{=}$
b) $\boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{+/-}\ \boxed{=}$
c) $\boxed{16}\ \boxed{y^x}\ \boxed{0{,}5}\ \boxed{=}$
d) $\boxed{25}\ \boxed{y^x}\ \boxed{2}\ \boxed{1/x}\ \boxed{=}$
e) $\boxed{256}\ \boxed{y^x}\ \boxed{0{,}125}\ \boxed{=}$
f) $\boxed{6561}\ \boxed{y^x}\ \boxed{8}\ \boxed{1/x}\ \boxed{=}$
g) $\boxed{27}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{1/x}\ \boxed{=}$
h) $\boxed{16}\ \boxed{y^x}\ \boxed{2}\ \boxed{1/x}\ \boxed{+/-}\ \boxed{=}$
i) $\boxed{0}\ \boxed{y^x}\ \boxed{2}\ \boxed{=}$
j) $\boxed{3}\ \boxed{+/-}\ \boxed{y^x}\ \boxed{2}\ \boxed{=}$

Wie man bei der Lösung der Aufgabe 3 sah, lassen sich mit Hilfe der Taste $\boxed{y^x}$ auch Wurzeln berechnen, wenn man beachtet, daß z. B.
$\sqrt[2]{25} = 25^{\frac{1}{2}}$ $\left(\text{bzw. } \frac{1}{\sqrt[2]{16}} = 16^{-\frac{1}{2}}\right)$ gilt.
Kommt es bei der Berechnung von Termen der Form $\sqrt[2n]{a}$
($a > 0$; $n > 0$; $n \in N$) bzw.
a^{2n} ($a > 0$; $n > 0$; $n \in N$)
auf möglichst hohe Genauigkeit an, so ist zu empfehlen, die Taste $\boxed{\sqrt{\ }}$ (bzw. $\boxed{x^2}$) zu verwenden.

Beispiele:

	Rechenablaufplan	Anzeige
$\sqrt{3}$	$\boxed{3}\ \boxed{\sqrt{\ }}$	1.7320508
	$\boxed{3}\ \boxed{y^x}\ \boxed{0{,}5}\ \boxed{=}$	1.73205
$\sqrt[4]{7}$	$\boxed{7}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\sqrt{\ }}$	1.6265766
	$\boxed{7}\ \boxed{y^x}\ \boxed{0{,}25}\ \boxed{=}$	1.62658
$5{,}24^4$	$\boxed{5{,}24}\ \boxed{x^2}\ \boxed{x^2}$	753,9198
	$\boxed{5{,}24}\ \boxed{y^x}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$	753,92
$9{,}81^8$	$\boxed{9{,}81}\ \boxed{x^2}\ \boxed{x^2}\ \boxed{x^2}$	85773288
	$\boxed{9{,}81}\ \boxed{y^x}\ \boxed{8}\ \boxed{=}$	85773300

▲ 4 ▲ Betätige die Taste des SR 1 in angegebener Reihenfolge und fülle die Leerstellen aus!

Schritt	Tastenfolge	Anzeige
1	$\boxed{2}$	2.
2	$\boxed{y^x}$	2.
3	$\boxed{3}$	3.
4	$\boxed{=}$	8.
5	$\boxed{4}$	4.
6	$\boxed{=}$	64.
7	$\boxed{5}$	
8	$\boxed{=}$	
9	$\boxed{7}$	
10	$\boxed{=}$	–

Wie man sieht, wird von den Eingaben 4; 5 bzw. 7 jeweils die dritte Potenz ermittelt. Der einmal im Schritt 3 eingegebene *Exponent* bleibt *konstant*.

▲ 5 ▲ Fülle die Leerstellen aus!
$\boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$
▼ ▼ ▼
4. … …

▲ 6 ▲ Welchen Term kann man mit nachstehenden Rechenablaufplänen berechnen?
a) $\boxed{3}\ \boxed{y^x}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$
b) $\boxed{3}\ \boxed{x}\ \boxed{4}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$
c) $\boxed{2}\ \boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$
d) $\boxed{4}\ \boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{x}\ \boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$
e) $\boxed{27}\ \boxed{y^x}\ \boxed{4}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{1/x}\ \boxed{=}$
f) $\boxed{27}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{1/x}\ \boxed{y^x}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$

Bei Verwendung der Taste $\boxed{y^x}$ berücksichtigt der SR 1 die Vorrangregeln. Potenzieren wird also vor Multiplizieren (bzw. Dividieren) und dieses vor Addieren (bzw. Subtrahieren) ausgeführt. Der Term $3{,}4^3 + 5{,}2 \cdot \sqrt[5]{4}$ kann von links nach rechts in den SR 1 *eingegeben* werden:
$\boxed{3{,}4}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{+}\ \boxed{5{,}2}\ \boxed{x}\ \boxed{4}\ \boxed{y^x}\ \boxed{5}\ \boxed{1/x}\ \boxed{=}$

▲ 7 ▲ Stelle zur Berechnung folgender Terme einen Rechenablaufplan auf!
a) $\sqrt[7]{a^3}$ b) $\frac{a \cdot b}{\sqrt[5]{c}}$
c) $a^2 + b \cdot a \cdot \sqrt[3]{c}$ d) $\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

Die Taste $\boxed{y^x}$ kann auch genutzt werden, um Gleichungen der Form $a^x = b$ durch systematisches Probieren zu lösen.

▲ 8 ▲ Die Gleichung $3{,}1^x = 15{,}2821$ hat genau eine Lösung. Ermittle die Lösung mit Hilfe des SR 1!

▲ 9 ▲ Anja, Eva, Hannes und Frank erhalten die Aufgabe, den Term $\sqrt{6{,}05} \cdot 6{,}05^{\frac{3}{2}}$ mit dem SR 1 zu berechnen. Wer von ihnen hat eine falsche Tastenfolge gewählt?
Anja:
$\boxed{6{,}05}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{x}\ \boxed{6{,}05}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$
Hannes:
$\boxed{6{,}05}\ \boxed{y^x}\ \boxed{1{,}5}\ \boxed{+}\ \boxed{0{,}5}\ \boxed{=}$
Eva:
$\boxed{6{,}05}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{x}\ \boxed{6{,}05}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}$

$\boxed{=}$

Frank: $\boxed{6{,}05}\ \boxed{x^2}$

▲10▲ Jan und Uwe berechnen mit dem SR 1 den Term $2{,}1^{-3}$.
Sie geben folgende Rechenablaufpläne an:

Jan: $\boxed{2{,}1}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{+/-}\ \boxed{=}$

Uwe: $\boxed{2{,}1}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{1/x}$

Sind die Rechenablaufpläne korrekt?

L. Flade

Lösungen

▲1▲

a) $\boxed{3{,}1}\ \boxed{x}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ 29,791

b) $\boxed{1}\ \boxed{\div}\ \boxed{0{,}7}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ 2,9154519

c) 0

d) $\boxed{3}\ \boxed{x}\ \underbrace{\boxed{=}\ \boxed{=}\ \ldots\ \boxed{=}}_{13\text{mal}}$ 4782969

e) $\boxed{2{,}81}\ \boxed{x}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ 175,19899

f) $\boxed{2}\ \boxed{+/-}\ \boxed{x}\ \underbrace{\boxed{=}\ \boxed{=}\ \ldots\ \boxed{=}}_{20\text{mal}}$ −2097152

▲2▲

b) $\boxed{0{,}7}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{+/-}\ \boxed{=}$ 2,91545

d) $\boxed{3}\ \boxed{y^x}\ \boxed{14}\ \boxed{=}$ 4782970

e) $\boxed{2{,}81}\ \boxed{y^x}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$ 175,199

Die mit der Taste $\boxed{y^x}$ ermittelten Werte weichen geringfügig von den entsprechenden Resultaten ab, die mit den Rechenablaufplänen der Aufgabe 1 ermittelt worden sind.

▲3▲ a) 3^2 b) 2^{-3} c) $\sqrt{16}$ d) $\sqrt{25}$ e) $\sqrt[8]{256}$ f) $\sqrt[8]{6561}$ g) $\sqrt[3]{27}$ h) $\frac{1}{\sqrt{16}}$

i, j) SR 1-Anzeige $_E0$.

▲4▲

Schritt	Tastenfolge	Anzeige
7	$\boxed{5}$	5.
8	$\boxed{=}$	125.
9	$\boxed{7}$	7.
10	$\boxed{=}$	343.

▲5▲ $\boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$

▼ ▼ ▼
4. 16. 256.

▲6▲ a) $(3^2)^2$ b) $3 \cdot 4^3$ c) $(2+3)^3$

d) $4 + 3 \cdot 2^4$ e, f) $27^{\frac{4}{3}}$

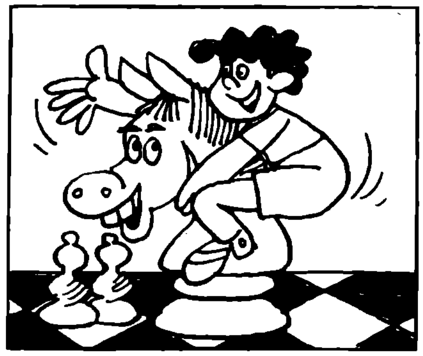
▲7▲

a) z. B.: $\boxed{a}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{y^x}\ \boxed{7}\ \boxed{1/x}\ \boxed{=}$

b) z. B.: $\boxed{a}\ \boxed{x}\ \boxed{b}\ \boxed{\div}\ \boxed{c}\ \boxed{y^x}\ \boxed{5}\ \boxed{1/x}\ \boxed{=}$

c) z. B.: $\boxed{a}\ \boxed{x^2}\ \boxed{+}\ \boxed{b}\ \boxed{x}\ \boxed{a}\ \boxed{x}\ \boxed{c}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{1/x}\ \boxed{=}$

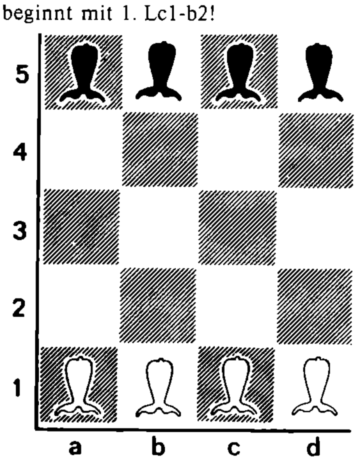
d) z. B.: $\boxed{3}\ \boxed{x}\ \boxed{V}\ \boxed{\div}\ \boxed{4}\ \boxed{\div}\ \boxed{\pi}\ \boxed{=}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{1/x}\ \boxed{=}$



Platztausch der Läufer

Henry Ernest Dudeney (1847 bis 1930) war Englands bedeutendster Rätselerfinder seiner Zeit. Die Aufgaben von ihm sind von großer mathematischer Brillanz und seine sechs Rätselbücher stellen einen hervorragenden Beitrag auf dem Gebiet der Unterhaltungsmathematik dar. Er befaßte sich auch viel mit Denkspielen und Rätselaufgaben rund um das Schachspiel. Zahlreiche knifflige Aufgaben zeugen davon.

In der folgenden Aufgabe reduzierte Dudeney das Schachbrett auf ein 4×5-Rechteck, auf dem 4 weiße und 4 schwarze Läufer postiert sind. Die weißen und die schwarzen Läufer sollen in möglichst wenigen Zügen (weniger als 20!) ihre Plätze tauschen, also die 4 weißen Läufer auf die 5. Reihe und die 4 schwarzen Läufer auf die 1. Reihe gelangen. Die Bewegung eines weißen und eines schwarzen Läufers gilt als ein Zug. Es wird abwechselnd gezogen, wobei beachtet werden muß, daß Läufer verschiedener Farbe sich einander nicht bedrohen. (In der abgebildeten Position wären somit Züge wie 1. Ld2 oder 1. La2 nicht erlaubt.) Weiß beginnt mit 1. Lc1-b2!



▲8▲ $x = 2{,}41$

▲9▲ Eva und Hannes

▲10▲ Mit beiden Rechenablaufplänen ist der Wert des Terms $2{,}1^{-3}$ zu berechnen. Jan erhält als Resultat 0,10798 (5 zuverlässige Ziffern), Uwe erhält als Resultat 0,1079797 (7 zuverlässige Ziffern).

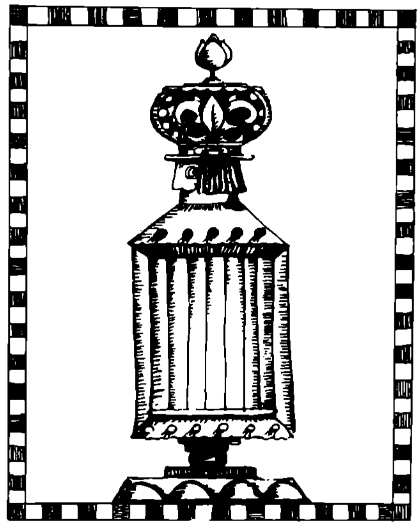
Buchtips für Schachfreunde und solche, die es werden wollen

Awerbach, Juri

Erfolg im Endspiel

208 S., 141 Diagramme
Bestell-Nr. 671 666 1 Preis: 13,50 M

Der Autor wendet sich an Schachfreunde mit geringen Kenntnissen. Auch Schachfreunde mit permanenter *Zeitnot* für ein umfangreiches Studium der Schachliteratur werden gern zu diesem Band greifen. Der Autor vermittelt das erforderliche Wissen über Grundbegriffe und elementare Endspiele und behandelt im Anschluß daran systematisch und leichtverständlich die verschiedenen Endspieltypen.
Übungsaufgaben und ein Lexikon der verwendeten Fachausdrücke beschließen den Band.



Suetin, Aleksei

Erfolgreich eröffnen

256 S., 141 Diagramme
Bestell-Nr. 671 669 6 Preis: 14,00 M

Der sowjetische Großmeister möchte Lernenden – vom Anfänger bis zum Spieler mittlerer Qualifikation – zeigen, wie man sich die Grundlagen der Schacheröffnungen erfolgreich aneignet.
Zu Beginn stellt Suetin die allgemeinen Gesetzmäßigkeiten des Eröffnungsspiels dar. Danach werden in systematischer Abfolge kurz die wichtigsten Varianten und Systeme aus allen Eröffnungen erläutert. Der Leser wird so befähigt, den inneren Zusammenhang zwischen allgemeinen Prinzipien und konkreten Varianten zu erfassen.

Beide Titel: Sportverlag Berlin

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb

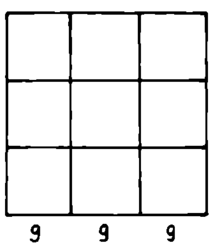
Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1988

Ma 5 ■ 2874 Ermittle alle natürlichen Zahlen x und y mit $0 < x < y$, welche die Ungleichung $5 \cdot x \cdot y < 65$ erfüllen! *Lehrer K. G. Lautsch, Menteroda*

Ma 5 ■ 2875 Heinz fuhr mit einem Sonderzug ins Ferienlager. Nachdem der Zug genau ein Drittel seiner Reisestrecke zurückgelegt hatte, schlief Heinz ein. Er erwachte erst, als der Zug bis zum Reiseziel noch 28 km zurückzulegen hatte. Die Länge der Strecke, während der Heinz schlief, ist gleich dem Siebenfachen dieser letzten 28 km. Berechne die Gesamtlänge der Reisestrecke von Heinz!

Lehrer K. G. Lautsch, Menteroda

Ma 5 ■ 2876 Trage die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 so in die abgebildete Figur ein, daß die Summe der drei dreistelligen Zahlen 999 beträgt! (Zeichne die Figur vorher ab!) *OL W. Melka, Neubrandenburg*



Ma 5 ■ 2877 Maik ist gegenwärtig sechsmal so alt wie seine Schwester Isolde. In 8 Jahren wird Maik nur noch doppelt so alt sein wie Isolde. Wie alt sind Maik und seine Schwester Isolde gegenwärtig?

Schülerin E. Aschenbach, Brotterode

Ma 5 ■ 2878 Genau 1 209 600 Sekunden wird es dauern, bis wir uns wieder treffen, sagt Walter, der gern mit großen Zahlen rechnet, zu Rolf, als sie sich am 10. Mai um 12 Uhr verabschieden. An welchem Tag treffen sie sich erneut?

Schüler A. Keller, Halberstadt

Ma 5 ■ 2879 In dem Schema

$$\begin{array}{cccc} & P & L & U & S \\ + & P & L & U & S \\ + & P & L & U & S \\ \hline S & U & M & M & E \end{array}$$

sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. *Sch.*

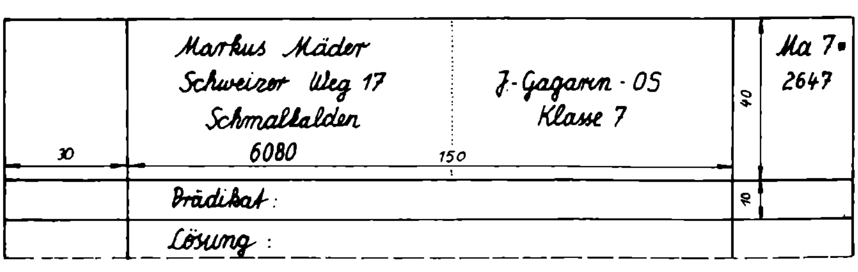
Ma 5 ■ 2880 Genau vier Ziffern 3 sind durch Rechenzeichen für die Grundrechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division so zu verknüpfen, daß man als Ergebnis 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 bzw. 10 erhält. Dabei dürfen auch Klammern gesetzt werden. Beispiel: $(3 \cdot 3 + 3) : 3 = 4$. *Sch.*

Ma 6 ■ 2881 Vier Ehepaare sitzen in fröhlicher Runde an einem kreisrunden Tisch, die Männer haben die Vornamen Sebastian, Gerd, Thomas und Alfred, die Frauen haben die Vornamen Ute, Simone, Monika und Elke. Ferner ist bekannt:
(1) Gerd sitzt seiner Frau gegenüber; alle anderen Ehepartner sitzen sich nicht gegenüber.
(2) Thomas sitzt rechts von Gerd und Elke gegenüber, die nicht die Frau von Sebastian ist.
(3) Sebastian sitzt zwischen Thomas und dessen Frau, die nicht Monika heißt.
(4) Rechts von Alfred sitzt Simone.
Wer ist mit wem verheiratet?

Schüler Th. Lux, Bad Langensalza

Ma 6 ■ 2882 In einem Ferienlager erholen sich mehr als 300, aber weniger als 400 Schüler. Der Lagerleiter will sie zum Morgenappell so aufstellen, daß sie eine rechteckige Formation bilden. Er versucht es mit Zweier-, Dreier-, Vierer-, Fünfer- und Sechser-Reihen, aber stets bleibt ein Schüler übrig. Erst bei der Bildung von Siebener-Reihen klappt es. Wie viele Schüler befinden sich in diesem Ferienlager?

Schüler M. Schmauch, Heuckewalde


Markus Mäder
Schweizer Weg 17
Schmalkalden
6080

J.-Gagarin-OS
Klasse 7

Ma 7 ■
2647

30 150 40 40

Prädikat:

Lösung:

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alpha-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027

3. Der jeweiligen Aufgabennummer ist ein Ma (Mathematik), Na/Te (Naturwissenschaft und Technik) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12 oder Na/Te 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug korrigiert.
Noch eine Bitte an die Schulen: Sendet bitte die Lösungen bereits nach Aufgaben sortiert ein.

6. Teilnehmer, die eine richtige Lösung (nicht nur Antwortsatz) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Anderenfalls erhalten sie eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst". Nach dem Einsendetermin eingehende Lösungen werden nicht mehr bearbeitet!

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1987/88 läuft von *Heft 5/1987 bis Heft 1/1988*. Zwischen dem 1. und 10. September 1988 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/87 bis 1/88 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/88 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (von den Wettbewerben der Hefte 5/87 bis 1/88) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein *alpha*-Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1987/88 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunde zurück). Schüler, die schon mehrere Jahre teilnehmen, senden bitte die zuletzt erhaltene Urkunde mit ein. Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

Ma 6 ■ 2883 Ein Fuchs kommt an einem Teich vorbei und sagt: „Guten Tag, ihr 100 Gänse!" Eine der angesprochenen Gänse antwortet: „Ehe wir 100 sind, müssen wir noch einmal so viele, noch einhalbmal so viele, noch einviertelmal so viele wie wir sind, außerdem noch dich hinzu bekommen." Wie viele Gänse schwammen auf dem Teich?

Schüler A. Keller, Halberstadt

Ma 6 ■ 2884 Auf die Frage, wie alt ihre Eltern, ihre Schwester und sie selbst seien, antwortet Grit: „Mein Lebensalter ist gleich einer Primzahl zwischen 10 und 20. Das Alter meiner Mutter, die ein Jahr jünger ist als mein Vater, ist durch 5 teilbar. Mein Vater ist viermal so alt wie meine Schwester Katja. Meine Mutter ist 22 Jahre älter als ich." Wie alt sind Grit, ihre Schwester und ihre Eltern?

Schülerin G. Berthold, Dresden

Ma 6 ■ 2885 Frank hat eine vierstellige symmetrische Telefonnummer, bei der die erste und vierte, aber auch die zweite und dritte Ziffer übereinstimmen. Ihre Quersumme ist so groß wie die aus den ersten zwei Ziffern gebildete Zahl.
Welche Telefonnummer hat Frank?

Schülerin J. Unger, Gröbitz

Ma 6 ■ 2886 Ein kleines Bassin mit quadratischer Grundfläche soll gekachelt werden. Die Kacheln sind quadratisch und haben eine Kantenlänge von 10 cm. Die Höhe des Bassins beträgt zwei Kachelbreiten. Wie groß ist das Fassungsvermögen dieses Bassins in Litern, wenn für die Grundfläche genau so viele Kacheln gebraucht werden wie für die Seitenflächen zusammen? (Fugen bleiben unberücksichtigt.) *Schülerin B. Breuer, Heiligenstadt*

Na/Te 6 ■ 416 Eine Bleifigur erscheint einem Schüler zu leicht. Um sich zu überzeugen, ob der Innenraum hohl ist, wägt er sie und stellt eine Masse von 278,5 g fest. Darauf füllt er einen Meßzylinder bis zum Teilstrich 40 ml mit Wasser und legt die Figur hinein, wobei der Wasserspiegel bis zum Teilstrich 67 ml steigt. Besitzt die Figur einen Hohlraum und wie groß ist dieser? (*Hinweis:* Du benötigst noch eine Konstante, die du aus dem Lehrbuch Physik Kl. 6 entnehmen kannst.)

aus: Aufgabensammlung Physik, Teil 1
Volk und Wissen Berlin

Ma 7 ■ 2887 In einer Einheit von 100 Soldaten spielen 80 Fußball, 60 Volleyball und 40 Basketball. Bekannt ist, daß 40 Soldaten sowohl Fußball als auch Volleyball, 30 Soldaten Fußball und Basketball, 20 Soldaten Volleyball und Basketball spielen. Wie viele Soldaten betreiben alle drei Mannschaftsspiele, wenn jeder Soldat mindestens eine der drei Ballspielarten ausübt? *Sch.*

Ma 7 ■ 2888 Es sei D ein Punkt im Innern eines Dreiecks ABC. Verbindet man D mit den Eckpunkten A, B und C des Dreiecks, so gilt stets: $\sphericalangle DAC + \sphericalangle CBD + \sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$. Diese Behauptung ist zu beweisen! *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 7 ■ 2889 Ein D-Zug benötigt beim Durchqueren des Tauerntunnels eine Zeit von 7 min 30 s, ein Güterzug eine Zeit von 9 min 30 s. Die Geschwindigkeit des D-Zuges ist um $4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ größer als die des Güterzuges. Berechne die Länge des Tauerntunnels! *Schülerin A. Boeßner, Unterpörlitz*

Ma 7 ■ 2890 Ein Schüler zeichnet ein Viereck an die Wandtafel. Frank behauptet, es sei ein Quadrat. Bianka meint, es sei ein Trapez. Anja hält das Viereck für einen Rhombus. Eva nennt das Viereck ein Parallelogramm. Der Mathematiklehrer stellt fest, daß genau drei der vier Behauptungen richtig sind, genau eine aber falsch ist. Was für ein spezielles Viereck hat der Schüler an die Wandtafel gezeichnet?

Schüler J. Unger, Gröbitz

Ma 7 ■ 2891 Welche gebrochene Zahl mit dem Nenner 17 ist größer als $\frac{1}{4}$, aber kleiner als $\frac{1}{3}$? *Schülerin A. Strauß, Stendal*

Na/Te 7 ■ 417 Beim Hochziehen eines Körpers mit der Masse von 200 kg auf einen Wagen über ein 5 m langes Brett wird eine Arbeit von 2 500 Nm verrichtet. Wie hoch wird der Körper dabei gehoben und mit welcher Kraft muß er hochgezogen werden?

aus: Aufgabensammlung Physik, Teil 1
Volk und Wissen, Berlin

Na/Te 7 ■ 418 Ein Unterseeboot verdrängt beim Schwimmen 2 500 t Wasser und beim völligen Untertauchen 3 000 t.
Welches Volumen hat a) der über Wasser, b) der unter Wasser gelegene Teil des Schiffes beim Schwimmen?

aus: Aufgabensammlung Physik, Teil 1
Volk und Wissen Berlin

Ma 8 ■ 2892 Eine Mutter und ihre drei Kinder sind zusammen 63 Jahre alt. Die Mutter ist siebenmal so alt wie der jüngere Sohn Roland. Ulrich ist doppelt so alt wie Roland. Vor drei Jahren war Ingrid fünfmal so alt wie Roland. Wie alt ist jedes Familienmitglied?

Schülerin I. Voigt, Böhlen b. Leipzig

Ma 8 ■ 2893 Gesucht sind alle geordneten Paare $[a; b]$ natürlicher Zahlen a und b, für die die Differenz aus ihren Quadraten 91 beträgt. *Sch.*

Ma 8 ■ 2894 An einer Kreisolympiade der Jungen Mathematiker nahmen in den Klassenstufen 11/12 insgesamt 6 Schüler teil. Sie erreichten zusammen 147 Punkte. Es sind die Punktzahlen, die jeder einzelne Schüler erreicht hatte, zu berechnen, wenn folgendes gilt:

(1) Zwei Schüler belegten punktgleich den 4. Platz.

(2) Die letzten beiden Plätze unterschieden sich um 2 Punkte.

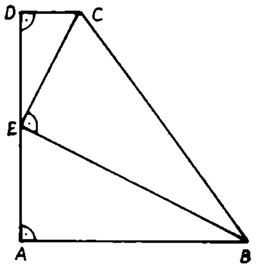
(3) Der Schüler auf dem 2. Platz hatte genau einen Punkt mehr erreicht als das Doppelte der Punktzahl, die für den 5. Platz vergeben wurde.

(4) Für den 1. Platz gab es 8 Punkte mehr als für den 2. Platz.

(5) Für den 3. Platz gab es 3 Punkte weniger als für den 2. Platz.

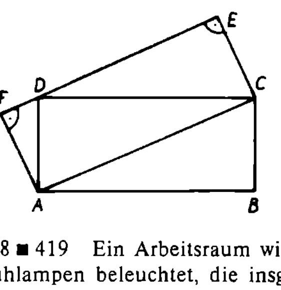
B. Bremer, Heiligenstadt

Ma 8 ■ 2895 Das Bild stellt ein rechtwinkliges Trapez $ABCD$ mit dem rechten Innenwinkel $\sphericalangle BAD$ und den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ dar. E ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{AD}$. Ferner gilt $\overline{AB} = \overline{AD}$ und $CE \perp BE$. Es ist nachzuweisen, daß der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ gleich dem zehnfachen Flächeninhalt des Quadrates über der Trapezseite $\overline{CD}$ ist! *Sch.*



Ma 8 ■ 2896 Die Zeichnung stellt ein Rechteck $ABCD$ dar. Die Parallele zu $\overline{AC}$ durch D schneidet das in A auf $\overline{AC}$ errichtete Lot in F und das in C auf $\overline{AC}$ errichtete Lot in E. Es ist nachzuweisen, daß die Rechtecke $ABCD$ und $ACEF$ den gleichen Flächeninhalt haben!

Schüler Ch. Bey, Neustadt/Dosse



Na/Te 8 ■ 419 Ein Arbeitsraum wird mit 45 Glühlampen beleuchtet, die insgesamt eine Leistung von 2500 W umsetzen. Einige von ihnen sind 40 Watt-Glühlampen, andere sind 75 Watt-Glühlampen. Wie viele Glühlampen von jeder Sorte beleuchten den Arbeitsraum?

Schüler A. Kellner, Halberstadt

Na/Te 8 ■ 420 Wie lang muß ein Chromnickeldraht mit $0{,}1\ \text{mm}^2$ Querschnitt gewählt werden, damit man einen Heizkörper anfertigen kann, der es ermöglicht, bei einem Wirkungsgrad von 90 % unter 220 V Spannung in 3 min $200\ \text{cm}^3$ Wasser von 10° C auf 100° C zu erwärmen? *R.*

Ma 9 ■ 2897 Ist die Zahl
$z = (11^3 + 7^5)^4 - 1$ durch 17 teilbar?

A. Brunner, Kremmen

Ma 9 ■ 2898 Auf einem Parkplatz stehen insgesamt 89 Personenkraftwagen der Typen *Trabant*, *Wartburg* und *Lada*. Vom Typ *Trabant* sind dort 14 Pkw mehr als vom Typ *Lada* abgestellt, am wenigsten vom Typ *Wartburg*. Die Anzahlen der Pkw jedes Typs sind Primzahlen. Wie viele Personenkraftwagen von jedem Typ befinden sich auf dem Parkplatz? *Sch.*

Ma 9 ■ 2899 Es ist zu beweisen, daß in jedem Rhombus die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den beiden Diagonalen viermal so groß ist wie der Flächeninhalt des Quadrates über einer Seite des Rhombus. *Th. Kuessner, Greifswald*

Ma 9 ■ 2900 Auf welche Grundziffern enden 4^{701} und 8^{1003} in dekadischer Schreibweise? *A. Brunner, Kremmen*

Ma 9 ■ 2901 Läßt sich ein 104 cm langer Metallstab in einer Kiste unterbringen, die, 1 m lang ist und bei der sich Länge, Breite und Höhe wie $1:\frac{1}{5}:\frac{3}{20}$ verhalten? *K. Trommer, Krostitz*

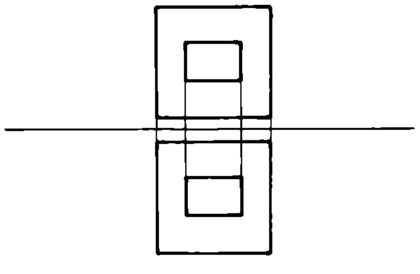
Na/Te 9 ■ 421 Ein Bus mit 42 Sitzplätzen hat eine Eigenmasse von 7 t. Seine Bremskraft beträgt 62 000 N. Wieviel Stehplätze können maximal zugelassen werden, wenn gewährleistet werden soll, daß der vollbesetzte Bus bei einer Geschwindigkeit von $72\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ einen maximalen Anhalteweg von 40 m haben darf? Die durchschnittliche Gewichtskraft eines Fahrgastes beträgt 750 N. *Ing. K.-H. Milde, Dresden*

Na/Te 9 ■ 422 Bei Eberswalde befindet sich das Schiffshebewerk Niederfinow. Mit seiner Hilfe können Schiffe, die den Oder-Havel-Kanal befahren, um 36 m gehoben oder gesenkt werden. Das 1934 fertiggestellte Bauwerk besteht im wesentlichen aus einem Hebegerüst und einem Trog (Abmessung: 85 m lang und 12 m breit; Masse 1750 t). Durch Öffnen des Haltungs- und Trogtores wird der Trog bis zu einer Höhe von 2,5 m mit Wasser gefüllt. Bei geöffneten Toren können Schiffe bis zu einer Tragfähigkeit (= Eigenmasse) von 1000 t eingeschleppt werden.
Die Tore werden dann geschlossen, und der Trog wird entweder gehoben oder gesenkt (um 36 m). Bei geöffneten Toren kann dann das gehobene oder abgesenkte Schiff das Hebewerk verlassen.
Welche Hubkraft ist erforderlich, um
a) den nur mit Wasser gefüllten und
b) den mit Wasser und einem Schiff mit einer Tragfähigkeit von 1000 t gefüllten Trog zu heben? *R.*

Ma 10/12 ■ 2902 Welche der beiden Zahlen 5^{444} und 2^{999} ist die kleinere? Die Antwort ist zu begründen! *Sch.*

Ma 10/12 ■ 2903 Auf welche Grundziffer endet das Produkt $6^3 \cdot 27^{12} \cdot 107^{18} \cdot 3^{11}$? *Schülerin C. Bär, Greifendorf*

Ma 10/12 ■ 2904 Das Bild zeigt das Grund- und Aufrißbild eines Körpers in senkrechter Parallelprojektion. Was für ein Körper ist das? Dieser Körper ist in einer Schrägbilddarstellung zu zeichnen!



B. Bremer, Heiligenstadt

Ma 10/12 ■ 2905
a) Wie groß ist ein Innenwinkel eines regelmäßigen 100-Ecks?
b) Es ist eine Formel zu finden, die es ermöglicht, die Größe eines Innenwinkels eines regelmäößigen n-Ecks zu berechnen, wenn nur die Eckenzahl bekannt ist!
c) Um wieviel Prozent kleiner ist der Flächeninhalt eines regelmäßigen 100-Ecks als der Flächeninhalt seines Umkreises? *J. Gläser, Schönfels*

Ma 10/12 ■ 2906 Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen beträgt 93 024. Es sind diese vier Zahlen zu ermitteln. Es ist eine allgemeine Abhängigkeit $x = f(a)$ zu finden, wenn x die kleinste von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen und a das Produkt dieser vier Zahlen ist.

Na/Te 10/12 ■ 423 Ein Wechselstrommotor für 220 V/50 Hz hat folgende Daten:
$P_{\text{mech}} = 20\ \text{kW}$; $\cos\varphi = 0{,}75$, $\mu = 0{,}85$.
Zur Kompensation des Blindstromes wird ein Kondensator parallel geschaltet. Wie groß muß seine Kapazität in μF gewählt werden, damit der dem Netz entnommene Strom mit der Spannung in Phase ist (Phasenverschiebung 0°)? *Lehrling J. Naundorf, Neukieritzsch*

Na/Te 10/12 ■ 424 Ein Kraftfahrer beschleunigt sein Fahrzeug gleichmäßig mit einer Beschleunigung von $3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ von einer Geschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf eine Geschwindigkeit von $80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Welchen Weg legt er dabei zurück? *R.*

Alpha-Wettbewerb 1986/87

Preisträger

Martina Hebenstreit, Matthias List, Hans-Joachim Rudolph, Janine Mau, alle Altenburg; Veneta Türke, Auerbach; Evelyn Peter, Bad Liebenstein; Alexander Sittig, Marcus Markardt, Ute Partsch, alle Bad Salzungen; Stefan Skonietzki, Frank Wagner, beide Berlin; Norbert Schröder, Bernau; Alice Kraneis, Bernburg; Stephan Schrameiner, Blankenfelde; André Schmatloch, Blankenhain; Ingrid Voigt, Ulrich Vogt, beide Böhlen; Kati Reum, Breitungen; Torsten Peter, Brotterode; Thomas Reißner, Silvio Löffler, beide Cottbus; Andreas Kirchberg, Tobias Rinke, beide Dingelstädt; Martina Hentschle, Matthias Overmann, Katrin Schwarzer, alle Dresden; André Katzert, Dürrröhrsdorf; Dimitri Stüberer, Beate Kragl, Peter Stübner, alle Erfurt; Tobias Gerlach, Friedeburg; Nadine Koch, Gehafen; Hardy Bekker, Glienicke; Janett Weise, Gräfenhainichen; Cathrin Kunze, Michael Gronau, beide Greifswald; Frank Schneegaß, Großbodungen; Jan Wettstein, Thilo Kallenbach, beide Gumpelstadt; Alois Belter, Hagenow; Lutz Püffeld, Halberstadt; Antje Stehfest, Havelberg; Schulklub der EOS W. Pieck, Heiligenstadt; Regina Plessow, Stephan Lexow, Tom Werner, alle Hennigsdorf; Andreas Henning, Höngeda; Christoph Wenig, Hohen Neuendorf; Markus Glück, Jößnitz; Nico Schmidt, Jüdenberg; Thomas Grund, Karl-Marx-Stadt; Astrid Mirle, Kleindehsa; Horst Huber, Krems (Österreich); Kirsten Schröter, Katrin Anton, beide Leegebruch; Martin Schreiter, Patrick Fladerer, beide Leinefelde; Torsten Schreiber, André Gärtner, Wolfgang Hildebrandt, Henrik Holke, alle Leipzig; Daniel Wetstein, Lübz; Anke Harnisch, Lützen; Christian Weber, Neu Boltenhagen; Frank Hoba, Neuhaus; Torsten Möller, Ohrdruf; Jana Wetzel, Cornelia Fahr, beide Oranienburg; Dörte Schappler, Parchim; Andrea Thiele, Rackwitz; Christin Schütze, Radis; Christoph Weidling, Riethnordhausen; Claudia Jurgat, Rostock; Elko Jacobs, Saurasen; Annett Kittner, Christiane Gans, beide Schmalkalden; Andreas Körner, Schwedt; Axel Bichler, Sondershausen; Ulrich Müller, Steudten; Thomas Lotze, Suhl; Andrej Sokoll, Templin; Anja Tippe, Teterow; Kerstin Schuster, Taubenheim; Nicole Simon, Andre Leinhos, Daniel Schuster, alle Trusetal; Mario Pofahl, Ueckermünde; Jörn Weichert, Waltersdorf; Hartmut Boettcher, Weimar; Nico Eberhardt, Wiesenthal; Ronald Peters, Wismar; Stefan Bretfeld, Zepernick; Mandy Jäger, Kati Hildebrandt, Jana Reinhardt, alle Fambach; Silke Rudolph, Großröhrsdorf

Vorbildliche Leistungen

Katharina Kutik, René Erler, beide Altenburg; Steffi Heller, Bad Liebenstein; Andrea Weigl, Bad Salzungen; Monika Züllsdorf, Olaf Leubner, beide Berlin; Jana Reuter, Bermbach; Daniela Morgenstern, Bernsbach; Enrico Senger, Bischofferode; Sandra Friedel, Blankenburg; Alexander Boll, Bleicherode; Denise Schellenberg, Cornelia Pleß, Heidi Pfannstiel, Torsten Schmidt, Thomas Römhild, alle Breitungen; Anett Gschwender, Brohm; Ralf Fuchs, Torsten Peter, Heike Engel, alle Brotterode; Stefan Hübner, Dingelstädt; Marcus Heinrich, Stefan Seifert, beide Dresden; Constanze Rost, Erlabrunn; Liane Döhrer, Michaela Engfer, beide Fambach; Nicole Schüler, Janet Goßrau, beide Friedeburg; Matthias Elert, Friedrichsthal; Beatrice Gronau, Greifswald; Thomas Pitzschke, Halle-Neustadt; Nico Reichelt, Hammerbrücke; Olaf Schmidt, Hohenebra; Jan Krüger, Hohendodeleben; Marco Dreyer, Hohen Neuendorf; Angela Wiesjahn, Holzendorf; Torsten Borchardt, Ilmenau; Michael Oehme, Jena; Gunar Herin, Katja Wurziger, André Lange, alle Karl-Marx-Stadt; Jürgen Frey, Kipsdorf; Nicki Große, Kirchworbis; Lars Hartmann, Klein-Quenstedt; Janet Brandt, Kletzin; Monika Plumer, Krems (Österreich); Mirko Jelinek, Leegebruch; Jens Gärtner, Leipzig; Katja Roeseler, Lubmin; Stefanie Albrecht, Lübtheen; Stephan Brendicke, Mittenwalde; Katrin Zutz, Neubrandenburg; Dajana Predöhl, Anja Wilkending, beide Neuhaus; Karin Gustavs, Neuruppin; Beate Magdefrau, Nordhausen; POS W. Pieck, Osterwieck; Matthias Huscher, Radebeul; Sylke Ahrend, Rakow; Manuela Radtke, Rodewitz; Karsten Peters, Rostock; Doreen Jacob, Röbel; Ralf Fröhlich, Rudolstadt; Gunnar Beck, Rüdersdorf; Maida Tennemann, Kathrin Rother, beide Saßnitz; Sören Hader, Schlotheim; Yvonne Gerbig, Peggy Machelett, Matthias Kittner, alle Schmalkalden; Katja Manski, Schildow; Susen Klement, Schwerin; Una Brock, Stralsund; Jens Krubert, Templin; Iris Demmer, Themar; Silvia Kaiser, Nicole Schiller, beide Tiefenort; Maik Freitag, Verchen; Christian Brüheim, Weimar; Martin Richter, Weinböhla; Otmar Jannasch, Wiednitz;

Christian Kühn, Wismar; Enrico Rommel, Schwallungen; Jörg Siede, Zepernick; Olaf Britzke, Zühlsdorf; Steffen Siebert, Pionierrepublik W. Pieck; Stefan Kottwitz, Gera; René Tümmler, Guben; Thomas Buttgereit, Zehlendorf

Abzeichen in Gold

Für zwanzigjährige Teilnahme
Lutz Püffeld, Halberstadt

Für neunzehnjährige Teilnahme
Guido Blosfeld, Halle; Claudia Docter, Ilsenburg

Für achtzehnjährige Teilnahme
Ullrich Riedel, Flöha

Für siebzehnjährige Teilnahme
Ursula Märker, Greifswald; Rainer Seifert, Gützkow; Uwe Bormann, Magdeburg; Frank Aßmus, Oranienburg

Für sechzehnjährige Teilnahme
Andreas Fittke, Berlin; Arno Feuerherdt, Brandenburg; Kurt Oertel, Gräfenhainichen; Bengt Nölting, Greifswald; Gerald Werner, Meiningen; Volker Schulz, Nauen; Hans-Dietrich Schwabe, Sondershausen; Lothar Gruber, Wien (Österreich); Katrin Richter, Wittenberg

Für fünfzehnjährige Teilnahme
Andreas Gude, Berlin; Frank Regensburger, Dresden; Eberhard Georgy, Erfurt; Rainer Bauer, Mittweida; Wilfried Röhnert, Radebeul; Torsten Löwe, Schleiz; Heinz-Olaf Müller, Schmalkalden

Für vierzehnjährige Teilnahme
Dieter Koch, Arnstadt; Sylvia Glomb, Berlin; Annett Körner, Dresden; Matthias Weser, Großenhain; Bernd Dübe, Forst; Rüdiger Düsing, Halle; Ruth Jacobs, Halle-Neustadt; Rolf Kamieth, Kakerbeck; Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich); Udo Kretzschmann, Markneukirchen; Jana Renner, Röbel; Ina und Uwe Ebert, Ruppendorf; Siegfried Kretzschmann, Schlagsdorf; Bernd Hartwig, Thaldorf

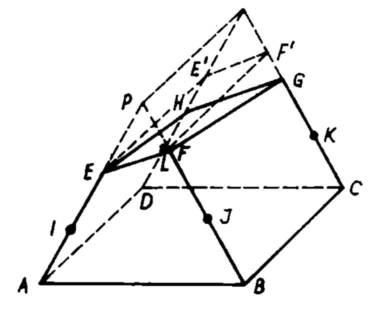
Für dreizehnjährige Teilnahme
Uwe Maaz, Arnstadt; Guntram Türke, Auerbach; Maik Weide, Callenberg; Harry Höfer, Dorndorf; Karl-Heinz Jünger, Ingolf Körner, Carolin Engel, Jörn Wittig, alle Dresden; Thomas Mittelbach, Dirk-Thomas Orban, beide Erfurt; Jörg Butter, Freiberg; Volker Reck, Heiligenstadt; René Schüppel, Hoyerswerda; Horst Fliegner, Jarmen; Jens Pönisch, Marko Hanke, Andreas Hengst, Thomas Mader, alle Karl-Marx-Stadt; Per Witte, Königs Wusterhausen; Knut Hantschel, Neuenkirchen; Karsten Schlutter, Potsdam; Sigrid Planke, Premnitz; Claudia Trochold, Reichenbach; Heidrun Tiedt, Teterow; Hans Creutzburg, Thal; Gudrun Thäter, Weimar; Olaf Seidel, Weißwasser; Eva-Maria Wabbel, Wolfen; Birgit Schultheiß, Wüstenbrand

Für zwölfjährige Teilnahme
Marc Schewe, Berlin; Werner König, Berlingerode; Tilman Völzke, Böhlen; Petra Sarodnick, Dallgow; Stefan Edelmann, Dresden; Reinhard Weißnicht, Siegfried Obst, beide Eberswalde; Susanne und Matthias Schreiber, Elsterwerda; Volker Georgy, Erfurt; Wilfried Schleinitz, Greifswald; Dieter Seifert, Hagenow; Günter Schielinsky, Halle-Neustadt; Karsten Milek, Hohen Neundorf; Uwe Würker, Mülsen; Manfred Hille, Ina Köhler, beide Riesa; Lutz Hübschmann, Schwarzenberg; Rolf Heubner, Wolfen; Steffen Klimpel, Wolgast; Thorsten Eidner, Zeulenroda

Fortsetzung siehe Heft 2/88

Körper mit bestimmten Eigenschaften gesucht!

Bei der 26. DDR-OJM war folgende Aufgabe zu lösen:
Beweisen Sie, daß es einen Körper mit folgenden Eigenschaften (1) bis (4) gibt!
(1) Die Oberfläche des Körpers besteht aus genau sechs ebenen Vierecken.
(2) Unter diesen Vierecken gibt es zwei, die keine Seitenkante miteinander gemeinsam haben.
(3) Außer den Seitenkanten dieser beiden Vierecke hat der Körper noch genau vier weitere Seitenkanten.
(4) Die Mittelpunkte dieser vier Seitenkanten liegen nicht in einer gemeinsamen Ebene. (Aufgabe 261046)
Diese Aufgabe bereitete vielen Teilnehmern große Schwierigkeiten. Für den geforderten Existenzbeweis genügt die Angabe eines Beispiels, und ich habe dies wie folgt konstruiert:
Ich gehe aus von einem geraden Prisma $ABPDCQ$, dessen Grundfläche ABP und Deckfläche DCQ gleichseitige Dreiecke mit der Kantenlänge von 5 cm sind, und lege Punkte
$E \in \overline{AP}$ mit $\overline{EP} = 2\,\text{cm}$,
$F \in \overline{BP}$ mit $\overline{PF} = \frac{4}{3}\,\text{cm}$,
$G \in \overline{QC}$ mit $\overline{QG} = 2\,\text{cm}$ und
$H \in \overline{QD}$ mit $\overline{QH} = 3\,\text{cm}$ fest.
(Das Bild zeigt einen Schrägriß.)



Ich zeige nun, daß $ABCDEFGH$ ein Körper mit den gewünschten Eigenschaften ist.
Die Ebene durch E und F und senkrecht zu der Fläche ABP schneidet die Strecke $\overline{DQ}$ in E' und die Strecke $\overline{CQ}$ in F'. Es ist $EF \parallel E'F'$, da die Ebenen ABP und DCQ zueinander parallel sind, und es gilt $\overline{EP} = \overline{E'Q}$ und $\overline{FP} = \overline{F'Q}$.

Da $\frac{QE}{QH} = \frac{2}{3} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{QF'}{QG}$ ist,

sind nach der Umkehrung des Strahlensatzes $E'F'$ und HG zueinander parallel. Folglich ist auch $EF \parallel HG$ (Transitivität der Parallelitätsrelation); also ist das Viereck $EFGH$ ein ebenes Viereck. Da die anderen Vierecke $ABFE$, $DCGH$, $ADHE$, $BCGF$ und $ABCD$ nach Voraussetzung eben sind, ist (1) erfüllt. Es gilt (2), da die Vierecke $ABCD$ und $EFGH$ keinen Punkt gemeinsam haben. Die Bedingung (3) ist offensichtlich erfüllt, nämlich durch die Kanten $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ und $\overline{DH}$. Nun seien I, J, K und L die Mittelpunkte dieser Kanten. Dann ist

$$\overline{PI} = 2\,\text{cm} + \frac{1}{2}(3\,\text{cm}) = 3{,}5\,\text{cm},$$

und entsprechend ergibt sich

$$\overline{PJ} = \frac{19}{6}\,\text{cm}, \quad \overline{QK} = 3{,}5\,\text{cm} \quad \text{und}$$

$\overline{QL} = 4\,\text{cm}$.
Analog zu E' und F' führe ich I' und J' ein. Wenn $IJ \parallel KL$ wäre, so wären auch $I'J'$ und KL zueinander parallel. Nach dem Strahlensatz steht dies aber im Widerspruch zu der Feststellung, daß

$$\frac{QI'}{QJ'} = \frac{PI}{PJ} = \frac{3{,}5}{\frac{19}{6}} \neq \frac{4}{3{,}5} = \frac{QL}{QK} \text{ ist.}$$

Also gilt $IJ \parallel KL$.
Wenn nun die Punkte I, J, K, L in einer gemeinsamen Ebene lägen, dann wäre $IJ \parallel KL$, denn die Ebene durch I, J, K, L müßte die zueinander parallelen Ebenen ABP und CDQ in parallelen Geraden schneiden. Wegen $IJ \nparallel KL$ liegen also I, J, K, L nicht in einer gemeinsamen Ebene, und damit gilt auch die Bedingung (4).

Hans-Peter Störr

Anmerkungen der Redaktion:
Diese Aufgabe hat den Teilnehmern wohl deshalb große Schwierigkeiten bereitet, weil sie Ansprüche an räumliches Vorstellungsvermögen und an grundlegende Kenntnisse über räumliche Sachverhalte stellt. Einige Schüler waren sogar davon überzeugt, daß es einen Körper mit den Eigenschaften (1) bis (4) gar nicht gibt und führten einen Scheinbeweis für die Nichtexistenz. Häufig war folgender Sachverhalt nicht klar:
(*) Sind $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ und $\overline{GH}$ vier zueinander parallele Strecken und liegen sowohl A, C, E und G als auch B, D, F und H in jeweils einer gemeinsamen Ebene, so liegen auch die Mittelpunkte dieser Strecken in einer gemeinsamen Ebene. Versuche, mit derartigen Strecken einen geeigneten Körper zu konstruieren, mußten deshalb fehlschlagen.

Hans-Peter Störr, wohnhaft in Zwickau, ist Schüler der Spezialschule für mathem.-naturwiss.-techn. Richtung in Karl-Marx-Stadt. Für seine Lösungsidee zu dieser Aufgabe und ihre sehr durchsichtige Darlegung erhielt er ein Diplom. Hans-Peter Störr hat außerdem als Frühstarter (!) die höchste Punktzahl aller Starter in der Klassenstufe 10 erzielt und wurde mit einem 1. Preis ausgezeichnet.

Kreise, Ellipsen und Planeten

Als Kepler 1609 seine Bewegungsgesetze für die Planeten, die ihre Bahnen in Ellipsen um die Sonne ziehen, drucken ließ, hatte noch kein Astronom ein Fernrohr auf den Himmel gerichtet. Um so bewunderungswürdiger ist die schon damals erreichte Genauigkeit der Himmelsbeobachtungen. Galilei war es dann 1610, der als erster Astronom Sonne, Mond und die damals bekannten Planeten, den Jupiter sogar mit seinen vier größten Monden, im Fernrohr sah, wir können noch heute seine ersten überschwenglichen Berichte darüber nachlesen.

Aber Copernicus benutzte für die Planetenbahnen, auch für die von ihm als Planet erkannte Erde, noch die ideale Kreisbahn wie die Griechen tausend Jahre vor ihm, allerdings mit Zusatzkreisen, den Epizyklen, um besser mit den Beobachtungen übereinzustimmen.

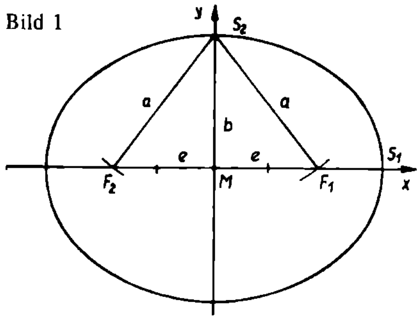
Nun hat wohl mancher von uns die Vorstellung von ausgesprochen langgestreckten Ellipsen, wenn von den Keplerschen Gesetzen die Rede ist. Kreis und Ellipse sind ja ähnliche Figuren der Geometrie, man muß nur jede Ordinate des Kreises in einem festen Verhältnis p stauchen, um eine Ellipse zu erhalten und zeichnen zu können. Anstelle des Radius r des Kreises entstehen dann die große und die kleine Halbachse a und b, die man verdoppelt Haupt- und Nebenachse nennt.

In den Gesetzen von Kepler steht die Sonne nun nicht mehr im Mittelpunkt, sondern in einem Brennpunkt der Ellipse, die aus Symmetriegründen immer zwei hat. Brennpunkte kennt jeder Leser von der Sammellinse im Fernrohr oder Brennglas oder vom Parabolspiegel im Scheinwerfer des Kraftwagens. Nun hat jede Ellipse die besondere Eigenschaft, daß von jedem ihrer Punkte die Summe der Abstände von beiden Brennpunkten immer konstant ist mit dem Wert der Hauptachse $2a$. Damit kann man die beiden Brennpunkte F_1 und F_2 leicht finden, indem man einen Kreisbogen mit dem Radius a um den Nebenscheitel S_2 schlägt. Die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Hauptachse sind F_1 und F_2. Ihr Abstand vom Mittelpunkt der Ellipse, man nennt ihn die Exzentrizität e, läßt sich leicht mit dem Satz von Pythagoras berechnen:

Es gilt nach Bild 1 $a^2 = b^2 + e^2$,

oder umgestellt $e^2 = a^2 - b^2$ und daraus die Wurzel. Der Astronom nimmt als Maß für die Gestalt einer Ellipse lieber die numerische Exzentrizität, das ist das Verhältnis von e zur großen Halbachse, also $\frac{e}{a}$, im Zahlenwert stets kleiner als eins.

Bild 1



Ein einfaches Zahlenbeispiel soll die Verhältnisse verdeutlichen: große Halbachse $a = 5$ cm, kleine Halbachse $b = 4$ cm, also Achsenverhältnis $p = \frac{b}{a} = 0{,}8$. Dann berechnet man nach dem Satz von Pythagoras $e = 3$ cm und daraus die numerische Exzentrizität $\frac{e}{a} = 0{,}6$. Selbst solche noch wenig gestauchte Ellipsen mit dem Achsenverhältnis 4 : 5 durchläuft keiner der bekannten Planeten! Ihre Bahnen sind alle viel mehr kreisähnlich. Die Tabelle gibt uns über ihre genaue Gestalt nach neueren Messungen die Antwort:

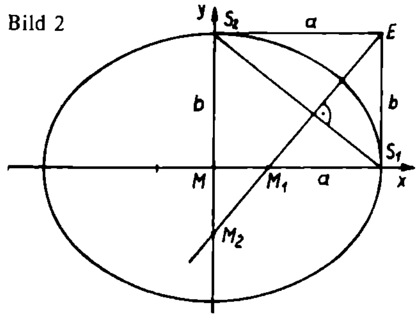
Planet	$\frac{e}{a}$	$\frac{b}{a}$	AE
Merkur	0,206	0,978	0,39
Venus	0,007	0,999	0,72
Erde	0,017	0,999	1,00
Mars	0,093	0,995	1,52
Jupiter	0,048	0,999	5,20
Saturn	0,056	0,998	9,54
Uranus	0,047	0,999	19,18
Neptun	0,009	0,999	30,06
Pluto	0,253	0,967	39,7

Nur Merkur und Pluto weichen merklich von der Kreisgestalt ab, letzteren kannte man zu Keplers Zeiten noch nicht. Die Bahn der Venus, der uns allen gut bekannte helle Morgen- oder Abendstern, kommt der idealen Kreisform am nächsten $\left(\frac{e}{a} = 0 \text{ für den Kreis}\right)$. An dritter Stelle in der Abweichung vom Kreis steht der Mars, den wir als roten Wandelstern im Fernrohr sehen können. Für ihn hatte Kepler von seinem Vorgänger als kaiserlicher Astronom in Prag, von Tycho de Brahe, sehr genaue, sehr umfangreiche Bahnvermessungen über viele Jahre als Erbschaft bekommen. Aber auch hier betragen die Abweichungen von der Kreisbahn nur wenige Bogenminuten am Himmelszelt. Keplers unsterbliche Leistung, aus diesen Beobachtungen die wahren Ellipsenbahnen zu berechnen, wird aus der Tabelle wieder recht deutlich. In der letzten Spalte sind zusätzlich die mittleren Sonnenabstände aller Planeten in *Astronomischen Einheiten* AE angegeben, d.h. für die Erde ist AE = 1 mit dem Wert

AE = $149{,}6 \cdot 10^6$ km.

Abschließend sei für den *alpha*-Leser noch eine schöne und einfache Ellipsenkonstruktion für Zirkel und Lineal angegeben: (vgl. Bild 2).

Bild 2



Der Mittelpunkt M und die beiden Scheitel S_1 und S_2 der Haupt- und Nebenachse bestimmen ein achsenparalleles Rechteck mit dem 4. Eckpunkt E außerhalb der Ellipse, für die a und b gegeben sein müssen. Man fälle nun das Lot von E auf die Sehne S_1S_2. Die Verlängerung des Lotes schneidet die Achsen der Ellipse in M_1 und in M_2, dies sind dann die Mittelpunkte der beiden Scheitelkreise für die gesuchte Ellipse mit den Radien $r_1 = M_1S_1$ und $r_2 = M_2S_2$. Beide Scheitelkreise müssen dann noch auf der anderen Seite der Ellipse symmetrisch zu M gezeichnet werden, den Rest besorgt ein Kurvenlineal, das die stetige Verbindung der Kreise schafft.

In unserem Sonnensystem gibt es nun auch Beispiele für größere Exzentrizitäten, gewissermaßen für *bessere Ellipsen*, es sind die Kometen und die Planetoiden, d.h. die kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter. Ein Beispiel ist uns noch allen gut bekannt: der Komet von Halley, den wir im vergangenen Jahr beobachten konnten, er kommt nur alle 76 Jahre in die Nähe der Erde. Seine große Halbachse ist $a = 18$ AE, seine numerische Exzentrizität $\frac{e}{a} = 0{,}87$, also durchläuft er eine sehr langgestreckte Ellipse!

Aufgaben

▲1▲ Man konstruiere die Bahnellipse des Halleyschen Kometen im Maßstab 1 AE = 1 cm!

▲2▲ Dazu berechne man das Verhältnis $\frac{b}{a}$! Und daraus b!

▲3▲ Wie groß ist seine kürzeste Entfernung von der Sonne? Der Astronom nennt diesen Abstand das Perihel. *J. Buhrow*

Buchtip

Hoppe, Johannes

Johannes Kepler

Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner, Bd. 17

92 S. mit 10 Abb.

Bestell-Nr. 665 586 2 Preis: 4,70 M

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig

ARBEITS-GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Der Kreisklub Mathematik Halle-Süd stellt sich vor

Auszüge aus seiner Computerzeitung CZ Nr. 1:
Den Kreisklub Mathematik Halle-Süd gibt es seit September 1984. Zu dieser Zeit waren wir noch Schüler der 7. Klasse. Wir lernen in zehn verschiedenen Oberschulen des Stadtbezirks Halle-Süd und sind insgesamt fünfzehn Schüler.
Die Arbeit in unserem Kreisklub teilt sich in zwei Schwerpunkte. Einmal beschäftigen wir uns mit Olympiade- und *alpha*-Aufgaben (wir beteiligen uns seit 3 Jahren kollektiv am *alpha*-Wettbewerb), zum anderen lernen wir seit März 1985 im Computerkabinett der Martin-Luther-Universität Halle die Programmierung von Kleincomputern mit Hilfe der Programmiersprache BASIC. Wir haben natürlich schon eine ganze Reihe von Programmen erstellt.

Liebe Freunde!
Wir wenden uns mit dieser kleinen Zeitung an alle Computerklubs der Klassenstufe 9 und 10! Wir suchen Kontakt zum Austausch von Erfahrungen, Programmen und Aufgaben. Vielleicht kann es auch einen gegenseitigen Besuch geben. Bitte schreibt uns! Versucht Detektiv Schnüffel bei der Aufklärung seines Falles zu helfen. Versucht es ohne oder mit Computer. Schickt uns die interessantesten Lösungen. Unser Pfiffikus ist aus Buchstaben aufgebaut, welche zwei BASIC-Befehle ergeben. Versucht sie rauszubekommen. Viel Spaß beim Knobeln und Spielen.
Wir freuen uns auf eure Post!

Die Schüler des Kreisklubs Halle-Süd
Almut Beige und Axel Großmann

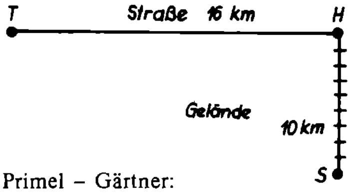
Schreibt bitte an: Kreisklub Halle-Süd
Uwe Siebert
Mötzlicher Str. 4
Halle
4050

Detektiv Schnüffel klärt auf

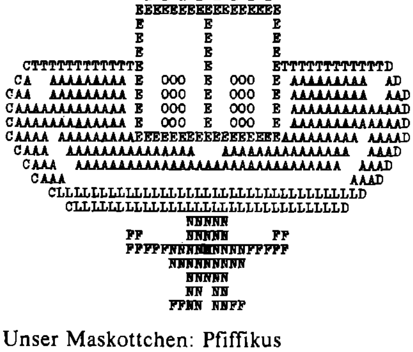
Im Einfamilienhaus der Familie Sonnenschein wurde eingebrochen und Gold- und Silberschmuck gestohlen. Der Täter wurde bei seiner Flucht gesehen. Auf Grund von Personenbeschreibungen konnte Schnüffel drei Verdächtige ermitteln und verhören.
Hier sind ihre Aussagen:

Rudi Reich – Bankangestellter:
Ich saß zur Tatzeit zu Hause und probierte gerade aus, auf wieviel verschiedene Weisen ich 50 Mark mit 1 M-, 2 M-, 5 M-, 10 M- und 20 M-Münzen wechseln könne. Ich brauchte über zwei Stunden, dann hatte ich alle 450 Möglichkeiten gefunden.
Schnüffel überlegte. Kann das stimmen? Sind es wirklich so viele?

Steffen Stürz – Motorradkonstrukteur:
Ich fuhr zur Tatzeit von Träumhausen nach Schlafstedt, um eine Testfahrt mit meiner umgebauten „NY" zu machen. Ich fuhr erst ein ganzes Stück Straße mit $90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ (er ist also auch ein Täter – die Red.) *und dann quer durchs Gelände Richtung Schlafstedt* $\left(\textit{hier waren nur } 36\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \textit{ möglich}\right)$. *Ich war mit meiner Fahrzeit von 26 Minuten sehr zufrieden!*
Schnüffel überlegte. Für den direkten Weg von T (Träumhausen) nach S (Schlafstedt) benötigt man (nur Gelände) 31 min und 27 s. Fährt man erst nur auf der Straße bis zur Hohlen Eiche (H) und dann rechtwinklig ab nach S, benötigt man 27 min und 20 s. (Entfernungen siehe Skizze.) Kann man es wirklich auf anderem Wege in 26 min schaffen?
Skizze:



Peter Primel – Gärtner:
Zur Tatzeit habe ich gerade meine Eigenzüchtung „Monsterus Primeljensia" vermessen. Sie hatte gestern die stattliche Höhe von 95 cm erreicht! Vor 12 Wochen war sie noch ein zartes Pflänzchen von 15 cm. Sie wächst sehr eigenartig: Am 1. Tag wuchs sie um 3 cm. Am 2. Tag wuchs sie um $\frac{9}{10}$ *von 3 cm, also um 2,7 cm. Am 3. Tag wuchs sie um* $\frac{9}{10}$ *von 2,7 cm, also um rund 2,43 cm, usw.*
Der Bekannte von Herrn Primel, Werner Welk, bestätigte, daß die Pflanze vor genau 12 Wochen 15 cm groß war und derart eigenartig wächst.
Schnüffel überlegte. Ist das Pflänzchen nach 12 Wochen wirklich 95 cm groß?
Der Täter ist derjenige, dessen Aussage falsch ist. Und wer ist das?



Unser Maskottchen: Pfiffikus

Lösungen

Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 5/87

Ma 5 ■ 2807 20mal; im Zehner 50 bis 59 erscheint die Ziffer 5 elfmal, in den übrigen 9 Zehnern je einmal.

Ma 5 ■ 2808 Für die Hunderterstelle im ersten Teilprodukt kommt nur 5 in Frage $(5 + 6 = 11)$. Durch die Division $508 : 2$ erhält man den ersten Faktor 254. Für die Einerstelle im zweiten Teilprodukt geht eindeutig die 2 hervor. Für die Zehnerstelle des zweiten Faktors müßte man 3 wegen $3 \cdot 4 = 12$ und 8 wegen $8 \cdot 4 = 32$ in Betracht ziehen. Die 8 scheidet aus, weil $254 \cdot 8$ ein vierstelliges Teilprodukt ergäbe.

$$\begin{array}{r} 254 \cdot 32 \\ \hline 508 \\ 762 \\ \hline 8128 \end{array}$$

Ma 5 ■ 2809 Wenn unter ungeraden Faktoren mindestens eine Zahl ist, deren letzte Ziffer eine 5 ist, so steht auch im Produkt dieser Faktoren als letzte Ziffer, also an der Einerstelle, eine 5.

Ma 5 ■ 2810 Man kann die Kugeln auf die folgenden sechs verschiedenen Arten verteilen.

	A	B
1	r r r	r s w w
2	r r s	r r w w
3	r r w	r r s w
4	r s w	r r r w
5	r w w	r r r s
6	s w w	r r r r

Ma 5 ■ 2811 Es genügt nicht, 36 Äpfel aus der Kiste herauszunehmen, weil sie alle von verschiedenen Sorten sein können, und zwar je 9 Äpfel von jeder Sorte. Wenn man jedoch noch einen weiteren Apfel herausnimmt, dann sind sicher 10 Äpfel von ein und derselben Sorte unter ihnen. Daher befinden sich unter 37 Äpfeln sicher mindestens 10 Äpfel von ein und derselben Sorte.

Ma 5 ■ 2812 Sie füllen aus dem Achteimerfaß erst das Dreieimerfaß voll. Diese drei Eimer füllen sie wieder in das Fünfeimerfaß. Hierauf füllen sie das Dreieimerfaß wieder, aus diesem wieder zu den drei Eimern im Fünfeimerfaß, wo folglich 1 Eimer in dem Dreieimerfaß zurückblieb. Die fünf Eimer aus dem Fünfeimerfaß füllen sie wieder in das Achteimerfaß, den einen Eimer in dem Dreieimerfaß wieder in das Fünfeimerfaß, aus dem Achteimerfaß wieder das Dreieimerfaß voll und diese drei Eimer wieder in das Fünfeimerfaß zu dem einen Eimer. Also sind im Acht- und Fünfeimerfaß in jedem vier Eimer, und das Dreieimerfaß bleibt leer.

Ma 5 ■ 2813 Man kann die zu ermittelnde(n) Zahl(en) dadurch erhalten, daß man, ausgehend von Resultat 7, mit den angegebenen Zahlen jeweils die entgegengesetzte Rechenoperation durchführt:
$7 + 15 = 22$; $22 : 11 = 2$; $2 \cdot 100 = 200$;
$200 - 107 = 93$.
Da die vorgenommenen Rechenoperationen durchweg eindeutige Resultate liefern, ist 93 zugleich die einzige Zahl, die den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Ma 6 ■ 2814 Die Ziffer im Zehner ist gleich 5, weil 10 die verdoppelte Ziffer der Zehner ist. Die dreistellige Zahl 59* ist Vielfaches von 11. Indem man 59* durch 11 dividiert, erhält man als ersten Rest 4. Daraus folgt, daß für das Sternchen nur 4 stehen kann. Die Zahl lautet also 594.

Ma 6 ■ 2815 Der Gesamtpreis von 7,50 M stellt die Summe dreier Produkte aus ganzen Zahlen dar. In jedem Produkt ist ein Faktor durch 4 teilbar (16, 28 und 8). Folglich ist auch die Summe ein Vielfaches von 4. Aber 750 Pf sind nicht durch 4 teilbar, d. h., die Berechnung stimmt nicht.

Ma 6 ■ 2816 Wenn x eine Zahl ist, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, dann gilt $\frac{17 - x}{19 + x} = \frac{7}{11}$. Da der Bruch $\frac{7}{11}$ durch keine natürliche Zahl gekürzt werden kann, muß der Bruch $\frac{17 - x}{19 + x}$ durch Erweitern aus dem Bruch $\frac{7}{11}$ hervorgehen. Also muß die Zahl $19 + x$ ein ganzzahliges Vielfaches der Zahl 11 sein.
Das kleinste derartige Vielfache von 11, das größer als 19 (oder gleich 19) ist, ist 22. Also muß x mindestens 3 betragen. Die Zahl $x = 3$ erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Für $x > 3$ wäre der Bruch $\frac{17 - x}{19 + x}$ kleiner als $\frac{7}{11}$.

Ma 6 ■ 2817 Aus c) folgt: Bernd ist entweder 16 oder 17 Jahre alt. Aus b) folgt: Bernd ist nicht 17 Jahre alt; folglich ist Bernd 16 Jahre alt; wegen a) hat Bernd die „Junge Welt" abonniert. Aus c) folgt weiter, daß Fred 17 Jahre alt ist; wegen b) hat Fred das „Neue Leben" abonniert.
Aus a) und b) folgt: Der 19jährige Axel hat „Neues Leben" abonniert. Deshalb ist Ernst 20 Jahre alt und Abonnent der „Jungen Welt".

Ma 6 ■ 2818 Die Zahl selbst muß durch 7, 8 und 9 teilbar sein. Da 7, 8 und 9 keine gemeinsamen Teiler haben (außer 1), ergibt sich $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$ als eine solche Zahl. Auch alle Vielfachen von 504 erfüllen die Bedingung der Teilbarkeit durch 7, 8 und 9, jedoch ist keines dieser Vielfachen dreistellig.
Die Zahl heißt demnach 504.

Ma 6 ■ 2819
$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{5}{48} + \frac{1}{6} + \frac{3}{16} + \frac{3}{24}$$
$$= \frac{6 + 12 + 5 + 8 + 9 + 6}{48} = \frac{46}{48} = \frac{23}{24}.$$
Es wurden 23 von den eingeteilten Stücken Torte verzehrt. Somit blieb ein Stück der Torte übrig.

Na/Te 6 ■ 398 $V = l \cdot b \cdot h$;
$V = 325\,\text{m} \cdot 25\,\text{m} \cdot 3{,}80\,\text{m}$; $V = 30\,900\,\text{m}^3$

Ma 7 ■ 2820 Wenn man den Radius mit r cm bezeichnet, gilt nach Voraussetzung der Aufgabe $\pi r^2 = 2\pi r$, woraus $r = 2$ folgt. Die Quadratfläche beträgt dann
$$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 = 2 \cdot 2^2\,\text{cm}^2 = 8\,\text{cm}^2.$$

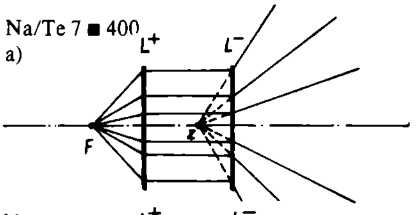
Ma 7 ■ 2821 a) Mit 4 Schritten legt der Vater genau 320 cm zurück, denn $4 \cdot 80\,\text{cm} = 320\,\text{cm}$. Da der Sohn für die gleiche Strecke 5 Schritte braucht, beträgt wegen $320 : 5 = 64$ seine durchschnittliche Schrittlänge 64 cm.
b) Genau dann, wenn der Vater ein Vielfaches von 4 als Schrittzahl beendet hat, hat der Sohn gleichzeitig mit dem Vater eine ganzzahlige Schrittlänge beendet, treten also Vater und Sohn gleichzeitig auf. Dies geschieht genau dann bei beiden mit dem linken Fuß, wenn sie eine gerade Anzahl von Schritten beendet haben. Bei dem Vater ist dies für jedes ganzzahlige Vielfache von 4 der Fall, bei dem Sohn genau für alle geradzahligen Vielfachen von 5. Das kleinste geradzahlige Vielfache von 5 ist aber das Zweifache. Daher treten Vater und Sohn erstmalig nach dem 8. Schritt des Vaters und damit nach dem 10. Schritt des Sohnes gleichzeitig mit dem linken Fuß auf.

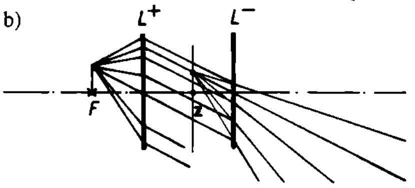
Ma 7 ■ 2822 Angenommen, es wurden x Flaschen Limonade, also $(300 - x)$ Flaschen Tafelwasser gekauft; dann gilt
$0{,}30 \cdot x + 0{,}20 \cdot (300 - x) = 70$,
also $x = 100$. Es wurden 100 Flaschen Limonade und 200 Flaschen Tafelwasser gekauft.

Ma 7 ■ 2823 Wegen $444 = 4 \cdot 3 \cdot 37$ sitzen 3 Personen im Auto; der Fahrer ist 37 Jahre alt.

Ma 7 ■ 2824 Wenn die Länge c der Basis und die Länge a eines Schenkels eines gleichschenkligen Dreiecks die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, so ist entweder
$c = \frac{5}{2}a$ oder $a = \frac{5}{2}c$.
Wäre $c = \frac{5}{2}a$, so wäre $a + a < \frac{5}{2}a = c$, im Widerspruch zur Dreiecksungleichung.
Also ist $c \neq \frac{5}{2}a$. Aus $a = \frac{5}{2}c$ folgt
$$\frac{5}{2}c + \frac{5}{2}c + c = 24\,\text{cm},$$
also $c = 4\,\text{cm}$ und $a = 10\,\text{cm}$.

Na/Te 7 ■ 399 $F_1 = F_2 = 50\,\text{N}$

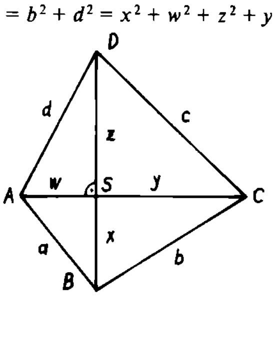
Na/Te 7 ■ 400
a)


b)


Ma 8 ■ 2825 Wenn die Maßzahlen der Seitenlängen des Rechtecks mit x und y bezeichnet werden $(x, y \in G)$, so gilt nach Voraussetzung der Aufgabe die Gleichung $x + y = x \cdot y$.
Die einzige ganzzahlige Lösung dieser Gleichung ist $x = 2$, $y = 2$. Für $x = 0$, $y = 0$ hat diese Aufgabe keinen Sinn. Das heißt, daß das Rechteck ein Quadrat ist und ihm folglich ein Kreis einbeschrieben werden kann.

Ma 8 ■ 2826 Die letzte Ziffer des Teilproduktes $a \cdot c$ ist gleich a; die letzte Ziffer des Teilproduktes $b \cdot c$ ist gleich b. Daraus folgt, daß c entweder 1 oder 6 ist, da die anderen Ziffern eine ähnliche Eigenschaft nicht besitzen. Wenn c gleich 1 wäre, dann könnte das erste Teilprodukt nicht vierstellig sein, sondern nur dreistellig. Folglich gilt $c = 6$. Hieraus schließen wir, daß a und b nur entweder 2, 4, oder 8 sein können. Da das zweite Teilprodukt dreistellig ist, kann nur $a = 2$ gelten. Für b bleiben zwei Möglichkeiten: $b = 4$, $b = 8$. Für $a = 2$ und $b = 4$ wäre das letzte Teilprodukt dreistellig. Folglich gilt $b = 8$.

Ma 8 ■ 2827 Teilbarkeit durch 360 bedeutet Teilbarkeit durch 5, 8 und 9. Von den fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $p - 2$, $p - 1$, p, $p + 1$, $p + 2$, ist genau eine durch 5 teilbar. Da $p \neq 2$ ist, ist p ungerade; deshalb sind $p - 1$ und $p + 1$ gerade Zahlen; eine davon ist sogar durch 4 teilbar.
Also ist das Produkt $(p - 1)(p + 1)$ durch 8 teilbar. Da $p \neq 3$ ist, ist p nicht durch 3 teilbar. Deshalb sind entweder $p - 2$ und $p + 1$ oder $p - 1$ und $p + 2$ durch 3 teilbar. Ihr Produkt ist deshalb durch 9 teilbar.

Ma 8 ■ 2828 Es sei S der Schnittpunkt der Diagonalen. Dann gilt für die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle ABS$, $\triangle BCS$, $\triangle CDS$, $\triangle DAS$ nach dem Satz des Pythagoras
$a^2 = x^2 + w^2$, $b^2 = x^2 + y^2$,
$c^2 = z^2 + y^2$, $d^2 = w^2 + z^2$, also
$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = x^2 + w^2 + z^2 + y^2$.


Ma 8 ■ 2829 Es gilt

$$\frac{m^2}{2}+\frac{m}{3}+\frac{m^3}{6}=\frac{3m^2+2m+m^3}{6}$$
$$=\frac{m(3m+2+m^2)}{6}=\frac{m(m+1)(m+2)}{6}.$$

Von den drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen m, $m+1$, $m+2$ ist mindestens eine durch 2 und genau eine durch 3 teilbar, ihr Produkt also durch 6 teilbar.

Na/Te 8 ■ 401 Der Druck in 20 m Tiefe beträgt 2 kPa. Aus $F=p\cdot A$ ergeben sich dann 3,2 kN.

Na/Te 8 ■ 402 Bei einem Hub wird der Arbeitskolben um die Strecke $s_1=0{,}0065$ cm gehoben, bei 480 Hebelbewegungen um $s_2=3{,}12$ cm. Die notwendige Kraft am Hebel beträgt $F_1=29{,}6$ N.

Ma 9 ■ 2830 Es sei n die Anzahl der herzustellenden Werkstücke ($n>0$, $n\in N$). Ohne Vorrichtung wird dafür die Zeit $t_1=n\cdot\frac{1}{2}$ benötigt (Angabe in Stunden).
Mit Vorrichtung wird dafür die Zeit $t_2=n\cdot\frac{1}{3}+4$ benötigt. Es soll $t_2<t_1$ sein, also $\frac{n}{3}+4<\frac{n}{2}$ gelten. Diese Ungleichung wird für alle $n>24$ zu einer wahren, für alle $n\leqq 24$ zu einer falschen Aussage. Es müßten mindestens 25 Werkstücke hergestellt werden, damit durch den Bau der Vorrichtung Zeit eingespart wird.

Ma 9 ■ 2831 Angenommen, es können x kg Bananen und y kg Tomaten gekauft werden; dann gilt

$$5x+1{,}3y=83,\ 50x+13y=830,$$
$$13y=832-2-52x+2x,$$
$$13y=832-52x+2\cdot(x-1),$$
$$\text{also } y=64-4x+\frac{2\cdot(x-1)}{13}.$$

Nur für $x=1$, $y=60$ oder für $x=14$, $y=10$ erhalten wir positive, ganzzahlige Lösungen. Es können entweder 1 kg Bananen und 60 kg Tomaten oder 14 kg Bananen und 10 kg Tomaten gekauft werden.

Ma 9 ■ 2832 Wegen $s_1=v_1\cdot t$ und $s_2=v_2\cdot t$ und $s_1+s_2=144$ gilt
$t\cdot(v_1+v_2)=t\cdot 120=144$,
also $t=\frac{144}{120}=1{,}2$. Die Fahrzeuge treffen sich nach 1,2 h bzw. 72 min.

Ma 9 ■ 2833 Die Differenz zwischen den Brüchen ist gleich

$$\frac{100^{100}+1}{100^{90}+1}-\frac{100^{99}+1}{100^{89}+1}$$
$$=\frac{(100^{100}+1)(100^{89}+1)}{1}$$
$$\times\frac{-(100^{99}+1)(100^{90}+1)}{(100^{90}+1)(100^{89}+1)}.$$

Wenn der Zähler dieses letzten Bruches positiv ist, wird der erste der gegebenen Brüche größer sein. Wir bezeichnen diesen Zähler mit x; dann gilt

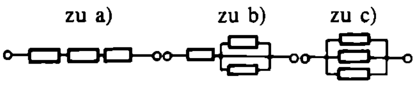
$$x=100^{189}+100^{100}+100^{89}+1$$
$$-(100^{189}+100^{99}+100^{90}+1)$$
$$=100^{100}+100^{89}-100^{99}-100^{90}$$
$$=100^{100}\cdot\left(1+\frac{1}{100^{11}}-\frac{1}{100}-\frac{1}{100^{10}}\right)$$

Die Zahl in der Klammer ist positiv, so daß x eine positive Zahl ist. Der erste der gegebenen Brüche ist größer als der zweite.

Ma 9 ■ 2834 Angenommen, es seien x Autobusse mit 19 und y mit 17 Plätzen benutzt worden; dann gilt $19x+17y=286$,
$19x=285+1-17y$, $x=15-\frac{17y-1}{19}$.
Nur für $x=7$, $y=9$ existiert eine positive ganzzahlige Lösung. Für die Reise wurden 7 Busse mit 19 Sitzen und 9 Busse mit 17 Sitzen gebraucht.

Na/Te 9 ■ 403 $a\approx 0{,}47\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $s\approx 0{,}93$ m

Na/Te 9 ■ 404
a) $I=0{,}01$ A, $P=0{,}05$ W je Widerstand, $R=150\,\Omega$
b) $I=0{,}02$ A, $P=0{,}02$ W bzw. 0,005 W je parallelgeschaltetem Widerstand, $R=75\,\Omega$
c) $I=0{,}09$ A, $P=0{,}045$ W je Widerstand, $R=17\,\Omega$



Ma 10/12 ■ 2835 Es soll gelten
$n(n+1)(n+2)(n+3)=p=110\,355\,024$.
Nun gilt $n^4<p=110\,355\,024$,
also $n<104$; es gilt aber auch
$(n+3)^4>100\,000\,000$, $n+3>100$, $n>97$,
also $97<n<104$. p ist nicht durch 5 teilbar, folglich ist keine der gesuchten Zahlen durch 5 teilbar. Also ist $n=101$. Die gesuchten Zahlen lauten 101, 102, 103, 104.

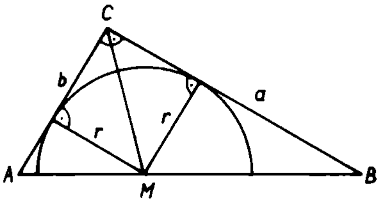
Ma 10/12 ■ 2836 Die vierstellige Zahl sei z, die aus der ersten und zweiten Ziffer gebildete Zahl sei a (a ganz; $0<a<100$). Dann gilt $z=100a+a=101a$. Das heißt, es gilt $101\mid z$. Nur für $a=1$ ist z Primzahl. Das ergibt das Zeichen 0101. Da 101 Primzahl ist, so folgte, falls z eine Quadratzahl wäre, aus $101\mid z$ auch $101^2\mid z$. Das ist aber nicht möglich, da sonst wegen $101^2>10\,000$ die Zahl z mindestens fünfstellig sein müßte.

Ma 10/12 ■ 2837 Am Ende befinden sich im Glas bzw. in der Tasse die gleiche Flüssigkeitsmenge wie zu Beginn. Daher fehlt der Studentin am Ende gegenüber dem Anfangszustand in ihrer Tasse genau soviel Kaffee, wie sie Milch in der Tasse hat, und genau diese Menge Kaffee muß der Student im Glas haben. Sie hat also genau soviel Milch in der Tasse wie er Kaffee im Glas.

Ma 10/12 ■ 2838 Es gilt $S=1$, also $F=9$ und somit $I=0$.
Wegen $F+I=N$, also $9+0=N$ müßte $N=9$ sein, was den Bedingungen der Aufgabenstellung widerspricht, da $N\neq F$ nur zugelassen ist. Diese Aufgabe hat keine Lösung.

Ma 10/12 ■ 2839 Für den Flächeninhalt des abgebildeten rechtwinkligen Dreiecks ABC gilt $\frac{a\cdot b}{2}=\frac{a\cdot r}{2}+\frac{b\cdot r}{2}$,

$$a\cdot b=r\cdot(a+b),\ r=\frac{a\cdot b}{a+b},$$
$$\frac{1}{r}=\frac{a+b}{a\cdot b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$



Na/Te 10/12 ■ 405 $F=m\cdot\frac{g-v^2}{r}$,
$g=9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; nach oben gewölbt:
$F\approx 3530$ N, nach unten gewölbt:
$F\approx 4310$ N

Na/Te 10/12 ■ 406 Es müssen ≈ 3900 kJ $\approx 1{,}1$ kWh zugeführt werden. Das Aufheizen kostet $\approx 0{,}09$ M und dauert ≈ 33 min.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Zahlenlabyrinth 1987 * 1988

Um alle die hier aufgeführten 21 Lösungen der Aufgabe zu ermitteln, benötigte der Taschen-Computer insgesamt drei Stunden! Die Anzahl der mit den im Labyrinth gegebenen Zahlen insgesamt möglichen Summen beträgt
$S=7\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4=75\,264$.
Damit hat der Computer in jeweils einer Sekunde rund 7 Summen gebildet und diese noch verglichen, ob sie den Wert 1987 oder 1988 ergeben. Wenn diese Bedingungen zutrafen, erfolgte die Ausgabe der Summanden.

Summe 1987:
$50+102+301+389+406+418+321=$
$50+238+301+389+406+418+185=$
$78+120+452+389+345+418+185=$
$78+120+452+421+406+418+92=$
$78+450+452+389+15+418+185=$
$134+450+45+213+406+418+321=$
$134+450+452+213+345+72+321=$
$384+450+25+421+345+41+321=$
$384+450+301+389+406+17+40=1987$

Summe 1988:
$40+450+25+389+345+418+321=$
$78+238+452+421+406+72+321=$
$78+450+301+421+345+72+321=$
$89+450+452+389+406+17+185=$
$134+120+452+421+122+418+321=$
$384+21+78+421+345+418+321=$
$384+21+301+421+122+418+321=$
$384+21+452+47+345+418+321=$
$384+25+45+389+406+418+321=$
$384+25+452+389+345+72+321=$
$384+238+452+389+15+418+92=$
$384+450+25+213+406+418+92=1988$

Kein Problem?!

Es können nur folgende Worte von den angeführten nicht geschrieben werden: 5, 6, 8, 15.

Ein kniffliges Eierspiel

1 – 5; 3 – 7; 7 – 1; 8 – 4; 4 – 3; 3 – 7; 6 – 2; 2 – 8; 8 – 4; 4 – 3; 5 – 6; 6 – 2; 2 – 8; 1 – 5; 5 – 6; 7 – 1.

Ein Brückenproblem

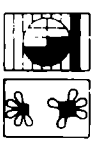
Die Aufgabe ist nicht lösbar. Um irgendeinen Raum, der über beliebig viele Ein- und Ausgänge verfügt, zu betreten und wieder zu verlassen, ohne einen Ein- bzw. Ausgang mehr als einmal zu nutzen, sind genausoviel Aus- wie Eingänge erforderlich.

1, 2, 3, ... – α ist immer dabei
Gleichung (1) $\alpha \cdot \alpha\alpha = P\alpha E$ schränkt die Möglichkeiten für die Belegung von α mit Grundziffern ein. Da das Produkt $P\alpha E$ dreistellig ist und mit $E (E \neq \alpha)$ endet, entfallen zunächst für α die Ziffern 1, 2, 3, 5 und 6. Weil die Ziffer an der Zehnerstelle von $P\alpha E$ mit den Ziffern in $\alpha \cdot \alpha\alpha$ übereinstimmt, entfallen wegen
$4 \cdot 44 = 176$, $7 \cdot 77 = 539$, $8 \cdot 88 = 704$
auch die Ziffern 4, 7 und 8. Gleichung (1) kann nur von $\alpha = 9$ erfüllt werden.
Wegen $9 \cdot 99 = 891$ ist $P = 8$ und $E = 1$.
$P = 8$ in (2) eingesetzt, ergibt $R = 7$ und $T = 2$;
$R = 7$ in (3) eingesetzt, ergibt $O = 6$ und $K = 3$;
$O = 6$ in (4) eingesetzt, ergibt $D = 5$ und $U = 4$.
Die Proben bestätigen die Richtigkeit der Lösung:
(1) $9 \cdot 99 = 891$; (2) $8 \cdot 99 = 792$; ...,
(8) $2 \cdot 99 = 198$.

In Altenburg
Durch Subtraktion einiger benachbarter Gleichungen erhält man: E = 3, T = 2, R = 33 und G = 36.
Durch Addition der vierten und fünften Gleichung ergibt sich A = 18, und damit folgen
B = 7, L = 20, N = 4 und U = 30.
Das Ergebnis in der Übersicht zeigt unverkennbar Hinweise auf Altenburg als Skatstadt:

A	L	T	E	N	B	U	R	G
18	20	2	3	4	7	30	33	36

Logelei



Von A nach B gewandert
Addition und Multiplikation sind uneingeschränkt ausführbar.

Kryptarithmetik
a) $1089 \cdot 9 = 9801$
b) $923076 = 4 \cdot 230769$
c) $5240 + 5210 = 10450$
d) $415 \cdot 41$; $915 \cdot 41$
e) $\sqrt{100489} = 317$

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Beweist, daß für n positive Zahlen
$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \ldots \geqq a_n$
die Ungleichungen
a) $a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 = (a_1 - a_2 + a_3)^2$,
b) $a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 = (a_1 - a_2 + a_3 - a_4)^2$,
c) $a_1^2 - a_2^2 + \ldots - (-1)^n a_n^2 = (a_1 - a_2 + \ldots - (-1)^n a_n)^2$
erfüllt sind.

Lösung: a) Wir betrachten die Differenz des linken und rechten Teiles der Ungleichung und tauschen die Konstante a_3 gegen die Variable x aus. Wir erhalten eine lineare Funktion in x:
$f_3(x) = a_1^2 - a_2^2 + x^2 - (a_1 - a_2 + x)^2$,
$x \in [0, a_2]$; (x^2 kürzt sich!).
Um zu beweisen, daß bei beliebiger Wahl von
$a_1 \geqq a_2 \geqq 0$ und $x \in [0, a_2] f_3(x) \geqq 0$
gilt, genügt es, die Werte $f_3(0)$ und $f_3(a_2)$ zu betrachten.
$$f_3(0) = a_1^2 - a_2^2 - (a_1 - a_2)^2 = 2(a_1 - a_2)\, a_1 \geqq 0$$
$$f_3(a_2) = a_1^2 - a_1^2 = 0.$$
b) Genauso beweisen wir die zweite Aufgabe. Wir betrachten die Funktion in x
$$f_4(x) = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - x^2 - (a_1 - a_2 + a_3 - x)^2, \quad x \in [0, a_3].$$
Das ist eine quadratische Funktion in x, deren Vorzeichen beim quadratischen Glied x^2 negativ ist. Um die Ungleichung $f_4(x) \geqq 0$ für $x \in [0, a_3]$ und beliebige $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq 0$ zu beweisen,
genügt es, die Werte $f_4(0)$ und $f_4(a_3)$ zu betrachten. Wir erhalten
$f_4(0) = f_3(a_3) \geqq 0$, (wie in a) bewiesen),
$f_4(a_3) = f_3(0) \geqq 0$.
c) Die dritte Ungleichung beweisen wir nach dem Prinzip der vollständigen Induktion. Es wird derselbe Ansatz wie unter a) und b) verwendet. Wir betrachten die Funktion in x
$$f_n(x) = a_1^2 - a_2^2 + \ldots + (-1)^n a_{n-1}^2 - (-1)^n x^2 - (a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^n a_{n-1} - (-1)^n x)^2,$$
$x \in [0, a_{n-1}]$,
für eine natürliche Zahl $n \geqq 3$. Die Funktion $f_n(x)$ ist linear genau dann, wenn n ungerade ist; und $f_n(x)$ ist quadratisch mit negativen Vorzeichen vor dem quadratischen Glied genau dann, wenn n gerade ist. Um zu beweisen, daß
$f_n(x) \geqq 0$ für $x \in [0, a_{n-1}]$ und
beliebige $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots a_{n-1} \geqq 0$ ist,
genügt es wiederum,
$f_n(0) \geqq 0$ und $f_n(a_{n-1}) \geqq 0$ zu zeigen.
Es gilt:
$$f_n(0) = f_{n-1}(a_{n-1}), \quad f_n(a_{n-1}) = f_{n-2}(a_{n-2}) = f_{n-1}(0).$$
Damit kann beim Induktionsschritt die Induktionsvoraussetzung genutzt werden.

▲2▲ Das folgende Inserat erschien an der Wandzeitung irgendeiner Universität: Hier sind wir, drei perfekte Burschen, Peter, Richard uind Tony. Jeder von uns ist weder groß, reich und hübsch noch lustig, musikalisch und smart.
Aber jeder von uns besitzt vier der obigen Eigenschaften. Tatsächlich ist jede Eigenschaft bei zweien von uns vorhanden. Peter ist hübsch und Richard, der musikalisch ist, ist entweder hübsch oder smart aber nicht beides.
Die zwei von uns, die lustig sind, sind beide nicht hübsch und die beiden von uns, die smart sind, sind beide nicht groß. Tony glaubt, daß er die besten vier Eigenschaften von uns besitzt. Können Sie Tony beschreiben?
Lösung: Tony ist groß, reich, lustig und smart. Die sechs Eigenschaften sind G, R, H, L, M und S. Keiner ist GRH oder LMS. Jeder von ihnen ist GR oder RH oder GH und ebenso LM oder MS oder LS.

	G	R	H	L	M	S
Peter		×	×		×	×
Richard	×		×	×	×	
Tony	×	×		×		×

▲3▲ In einem Stadion besteht eine Laufbahn aus jeweils zwei Geraden, die durch zwei Halbkreise verbunden sind. Die Länge jeder Geraden beträgt 75 m. Welchen Abstand müssen die beiden Geraden an der Innenkante der innersten Laufbahn haben, damit die Länge genau 400 m beträgt?
Die Rennstrecke besitzt sechs Laufbahnen von jeweils 2 m Breite. Welche Länge hat die Innenkante der zweiten Laufbahn? Welchen Vorsprung muß man einem Läufer beim Start auf der zweiten Bahn bei einem 400 m-Lauf geben, wenn auch er genau 400 m zum Erreichen der Ziellinie laufen soll?
Lösung: Der Läufer der Innenbahn, wie auch alle anderen, läuft auf den beiden Geradenabschnitten insgesamt 150 m. Damit verbleiben für die beiden Halbkreise 250 m, d. h. für einen Halbkreis 125 m.
$$u_1 = \pi \frac{d_1}{2} = 125\,\text{m}, \quad \text{d. h.} \quad d_1 = 79{,}58\,\text{m}.$$
Der Abstand der beiden Geraden beträgt also 79,58 m. Der Durchmesser d_2 des Halbkreises der zweiten Bahn beträgt, wieder bezogen auf die Innenkante, $d_2 = d_1 + 4\,\text{m}$. Auf beiden Halbkreisbahnen legt dieser Läufer somit 412,57 m zurück und muß auf seiner Bahn eine Vorgabe von 12,57 m erhalten.

▲4▲ Stelle sechs Ziffern 1 so zusammen, daß das Ergebnis 12 beträgt. Verwende nur das Zeichen + und den Bruchstrich. Du darfst diese Zahlen mehr als einmal verwenden.

Lösung: $\frac{11}{11} + 11 = 12$.

▲5▲ Ein Satellit beschreibt in 96 Minuten eine Kreisbahn mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $28\,000\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ um die Erde. Berechne den Radius seiner Kreisbahn! In welchem Abstand von der Erde bewegt er sich?
Lösung: $s = v \cdot t$;
$$s = 28\,000\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1{,}6\,\text{h} = 44\,800\,\text{km};$$
$$u = 2\pi r; \quad u = s; \quad r = \frac{u}{2\pi}$$
d. h. $r = 7130$ km. Der Radius der Kreisbahn beträgt 7130 km.
$a = 7130\,\text{km} - 6370\,\text{km} = 760\,\text{km}$.
Der Satellit kreist 760 km über der Erdoberfläche.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. Luis J. Davidson, Heft 6/87

Es sei $x_0 \geqq 1987$. Dann ist $p(x_0)$
$= x_0^2 + a x_0 + b \geqq 1987 x_0 + a x_0 + b$
$= (1986 + a)\, x_0 + x_0 + b > x_0 + b$,
da $1986 + a > 0$ nach Voraussetzung,
$> x_0 - 1987$, da $b > -1987$ vorausgesetzt war, $\geqq 1987 - 1987 = 0$. Also ist für $x_0 \geqq 1987$ $p(x_0) > 0$ und daher existiert keine derartige Lösung.

Wissenswertes über pythagoreische Zahlen

Hans ist Schüler einer 8. Klasse. Im Mathematikunterricht wurde gerade der *Satz des Pythagoras* behandelt, und Hans hat gelernt, was man unter *pythagoreischen Zahlen* zu verstehen hat. Am Abend fragt er seinen Vater, ob dieser ihm pythagoreische Zahlen nennen könne.

Prompt kam die Antwort: „$3^2 + 4^2 = 5^2$".

Bereits die alten Ägypter kannten viele Jahrhunderte vor unserer Zeitrechnung dieses Tripel $(3, 4, 5)$ natürlicher Zahlen, das die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ in der angegebenen Reihenfolge erfüllt. Sie steckten im Gelände rechte Winkel mit einem Seil ab, auf dem die Längen $a = 3$ m, $b = 4$ m und $c = 5$ m durch Knoten markiert waren, indem sie diese Seiten in Form eines Dreiecks spannten.

Wir wollen uns nun mit der Frage beschäftigen, ob es nur endlich viele oder gar beliebig viele solcher Zahlentripel wie $(3,4,5)$ oder $(5,12,13)$ gibt, die die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ erfüllen, und wir wollen herausfinden, wie sich solche Zahlentripel finden lassen. Dazu verabreden wir zunächst folgendes:

„Erfüllen natürliche Zahlen a, b, c die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$, so nennen wir ein solches Zahlentripel (a, b, c) ein *pythagoreisches Zahlentripel*."

Es sei (x, y, z) ein pythagoreisches Zahlentripel; durch Multiplikation der Zahlen x, y, z mit einer natürlichen Zahl $k \geqq 2$ erhält man die Zahlen kx, ky, kz. Auch diese Zahlen erfüllen die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$. Es gilt nämlich $(kx)^2 + (ky)^2 = (kz)^2$, $k^2x^2 + k^2y^2 = k^2z^2$, also nach Division durch k^2 auch $x^2 + y^2 = z^2$.

Wir geben hierzu ein Beispiel an:

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$
$$(3 \cdot 5)^2 + (4 \cdot 5)^2 = (5 \cdot 5)^2,$$
$$15^2 + 20^2 = 25^2.$$

Bereits auf diese Weise kann man beliebig viele pythagoreische Zahlentripel gewinnen. Aber dieses Vorgehen befriedigt uns nicht so recht, weil das Zahlentripel $(15, 20, 25)$ auf das Zahlentripel $(3, 4, 5)$ zurückzuführen ist.

In der Gleichung $15^2 + 20^2 = 25^2$ haben die Zahlen 15, 20 und 25 den gemeinsamen Teiler 5. Aber nur teilerfremde Zahlen x, y, z stellen wirklich *neue* pythagoreische Zahlentripel dar, wie z. B. das Zahlentripel $(5, 12, 13)$. Es erhebt sich nun die Frage, wie wir mit Sicherheit teilerfremde Tripel (x, y, z) erhalten?

Aus $a^2 + b^2 = c^2$ folgt $a^2 = c^2 - b^2$, also $a^2 = (c - b)(c + b)$. Wir nehmen mit Hilfe einer Tabelle eine Fallunterscheidung bezüglich der Geradzahligkeit oder Ungeradzahligkeit der Zahlen c und b vor und schließen daraus auf die Beschaffenheit der Zahl a.

	c	b	$c+b$	$c-b$	a^2	a
(1)	gerade	gerade	gerade	gerade	gerade	gerade
(2)	gerade	ungerade	ungerade	ungerade	ungerade	ungerade
(3)	ungerade	gerade	ungerade	ungerade	ungerade	ungerade
(4)	ungerade	ungerade	gerade	gerade	gerade	gerade

Im Fall (1) sind a, b, c sämtlich gerade Zahlen, also wenigstens durch 2 teilbar. Diese Zahlen lassen sich auf ein bereits bekanntes pythagoreisches Zahlentripel zurückführen. Sie interessieren also nicht weiter.

Im Fall (2) ist zu beachten, daß die Zahlen a und b beide ungerade sind. Die Summe zweier ungeradzahliger Quadratzahlen ist zwar stets durch 2, nicht aber durch 4 teilbar. Die geradzahlige Zahl c^2 ist aber stets durch 4 teilbar. Wegen dieses Widerspruchs entfällt auch dieser Fall.

Wir gewinnen folgende Erkenntnis: Von den Zahlen a und b muß eine gerade, die andere ungerade sein. Damit sind wir schon ein gutes Stück vorangekommen. Bei unseren weiteren Überlegungen sei die Zahl a ungeradzahlig, die Zahl b geradzahlig. Setzen wir $a = m - n$ mit $m > n$ und $c = m + n$, so folgt aus $a^2 + b^2 = c^2$ schließlich $b^2 = c^2 - a^2 = (m + n)^2 - (m - n)^2 = 4mn$, also $b = 2 \cdot \sqrt{mn}$.

Die Zahl b wird genau dann geradzahlig, wenn das Produkt $m \cdot n$ eine Quadratzahl ist. Damit sind wir dem Ziel schon etwas näher gerückt. Wir kommen zu folgender Erkenntnis: Wählt man eine natürliche Zahl m und eine kleinere von Null verschiedene natürliche Zahl n so, daß das Produkt $m \cdot n$ eine Quadratzahl ist, so bilden die Zahlen $a = m - n$, $b = 2 \cdot \sqrt{mn}$ und $c = m + n$ ein pythagoreisches Zahlentripel.

Wir untersuchen nun folgende fünf Beispiele näher:

Beispiel (1):
$m = 16$, $n = 9$, $a = 7$, $b = 24$, $c = 25$,
also $7^2 + 24^2 = 25^2$;

Beispiel (2):
$m = 18$, $n = 2$, $a = 16$, $b = 12$, $c = 20$,
also $16^2 + 12^2 = 20^2$;

Beispiel (3):
$m = 25$, $n = 1$, $a = 24$, $b = 10$, $c = 26$,
also $24^2 + 10^2 = 26^2$;

Beispiel (4):
$m = 63$, $n = 28$, $a = 35$, $b = 84$, $c = 91$,
also $35^2 + 84^2 = 91^2$;

Beispiel (5):
$m = 441$, $n = 256$, $a = 185$, $b = 672$, $c = 697$, also $185^2 + 672^2 = 697^2$.

Als Ergebnis dieser Untersuchung halten wir folgendes fest:

Das Beispiel (1) liefert uns ein *neues* pythagoreisches Zahlentripel.

Im Beispiel (2) haben die Zahlen 16, 12 und 20 den gemeinsamen Teiler 4. Woran liegt das? Da m und n beide geradzahlig sind, ist auch die Differenz $a = m - n$ geradzahlig. Das führt zu einem Widerspruch; denn wir haben a als ungeradzahlig vorausgesetzt.

Im Beispiel (3) haben die Zahlen 24, 10 und 26 den gemeinsamen Teiler 2. Woran liegt das? Da m und n beide ungeradzahlig sind, ist die Differenz $a = m - n$ geradzahlig; das führt zum gleichen Widerspruch.

Im Beispiel (4) haben die Zahlen 35, 84 und 91 den gemeinsamen Teiler 7. Dieses Zahlentripel geht also aus dem Tripel $(5, 12, 13)$ hervor. Wir gewinnen hieraus folgende Erkenntnis: Haben m und n einen gemeinsamen Teiler (in unserem Fall 7), so sind die Differenz $a = m - n$, die Summe $c = m + n$, aber auch $b = 2 \cdot \sqrt{mn}$ durch diese Zahl teilbar.

Daraus folgern wir:
m und n müssen teilerfremd sein. Jede der Zahlen m und n muß selbst Quadratzahl sein. In allen anderen Fällen ist $b = 2 \cdot \sqrt{mn}$ nicht geradzahlig.

Nun sind wir am Ziel angelangt. Man wähle eine gerade und eine ungerade natürliche Zahl. Beide Zahlen dürfen keinen gemeinsamen Teiler $t \geqq 2$ besitzen. Man quadriere diese beiden Zahlen, bilde die positive Differenz und die Summe ihrer Quadrate. Danach multipliziere man die zwei gewählten Zahlen und verdopple ihr Produkt. Die drei so erhaltenen Zahlen bilden ein pythagoreisches Zahlentripel ohne gemeinsamen Teiler.

In Kurzform:
$m = a^2$, $n = b^2$ mit $a > b$, $x = a^2 - b^2$,
$y = 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab$, $z = a^2 - b^2$

Beispiel:
$a = 7$, $b = 4$, $a^2 = 49$, $b^2 = 16$, $x = 33$,
$y = 56$, $z = 65$, $33^2 + 56^2 = 65^2$.

Dem Leser, der bis hierher durchgehalten hat, sei noch eine Überraschung bereitet. Wir gehen von der binomischen Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ aus. Danach gilt $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ bzw. $n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$. Wählen wir eine ungerade Quadratzahl $(2n + 1)$, dann gilt z. B. $2n + 1 = 81$, $2n = 80$, $n = 40$. Daraus folgt $40^2 + 9^2 = 41^2$.

Da beliebig viele ungeradzahlige Quadratzahlen existieren, kann man auf diese überraschend leichte Weise pythagoreische Zahlentripel gewinnen. Mit diesem Rezept werden zwar nicht alle pythagoreischen Tripel erfaßt, aber seine Nutzung kann bei Freunden, die das Rezept nicht kennen, Verblüffung auslösen.

Th. Scholl

Das Kämmen eines Igels

Ein Polyeder mit phantastisch abstehenden stachelförmigen Begrenzungen ist dieser *Igel*, den wir *kämmen* sollen (Bild 1).

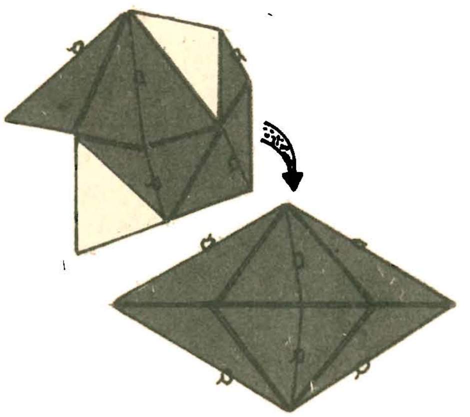


Bild 1

Aber bevor wir den Igel kämmen, müssen wir ihn basteln.

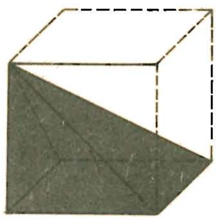
Wir basteln einen Igel

Am einfachsten stellen wir unser Spiel aus Holzwürfeln (z. B. aus einem Baukasten für kleinere Kinder) her. Wir brauchen 8 gleichgroße Würfel. (Wer sich in der Geometrie gut auskennt, dem genügen drei.) Außerdem benötigen wir noch dünnen Gummi und 8 kleine Ringe (z. B. von einem Plaströhrchen abgeschnitten). Anstelle der Ringe kann man auch kleine Knöpfe verwenden.

Wir gehen in folgender Reihenfolge vor:

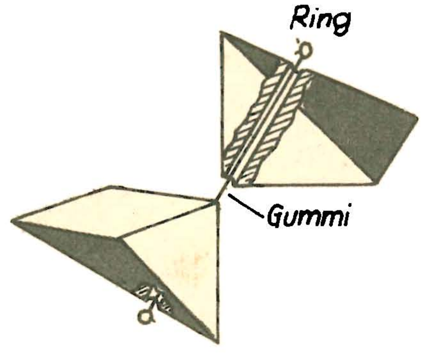
1. Aus den Würfeln werden 8 Pentaeder (Bild 2) herausgesägt.

Bild 2



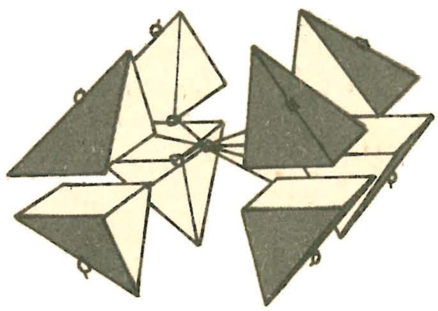
2. Die Kanten, an denen zueinander senkrechte Flächen aneinanderstoßen, werden mit Messer und Feile abgerundet, damit sie sich beim Drehen nicht gegenseitig behindern.
3. Durch jedes Pentaeder wird ein Loch gebohrt – von der Ecke, in der drei Kanten paarweise senkrecht aufeinanderstoßen zu einem Punkt auf der gegenüberliegenden Kante (Bild 3).
4. Durch die Löcher je zweier Pentaeder wird ein Gummi gefädelt und mit Ringen oder Knöpfen wie im Bild 3 befestigt. Der Gummi muß dabei eine gewisse Spannung bekommen, damit die Pentaeder aneinandergedrückt werden.
5. Die [illegible] big lackiert.
6. Der Igel wird zusammengebaut: Die mit einem Gummi verbundenen Pentaederpaare werden so aneinandergeknüpft, daß ein gekämmter Igel entsteht.

Bild 3



Jetzt könnt ihr spielen: Dreht ein paarmal jeweils eine Hälfte des Igels gegenüber der anderen. Tut dies in verschiedenen Ebenen! Nach den Verdrehungen beginnen die Begrenzungsflächen nach verschiedenen Seiten *abzustehen* (siehe Bild 4).

Bild 4



Versucht jetzt, den Igel in den Ausgangszustand zurückzudrehen! Ihr werdet erstaunt sein, daß dies eine schwierige Aufgabe ist. Schwierig, aber interessant. Beachtet beim Spielen, daß unser *Gummischarnier* rund 100 Umdrehungen verträgt; danach muß man einige Minuten zur Entspannung des Gummis verstreichen lassen, und der Igel ist erneut spielbereit.

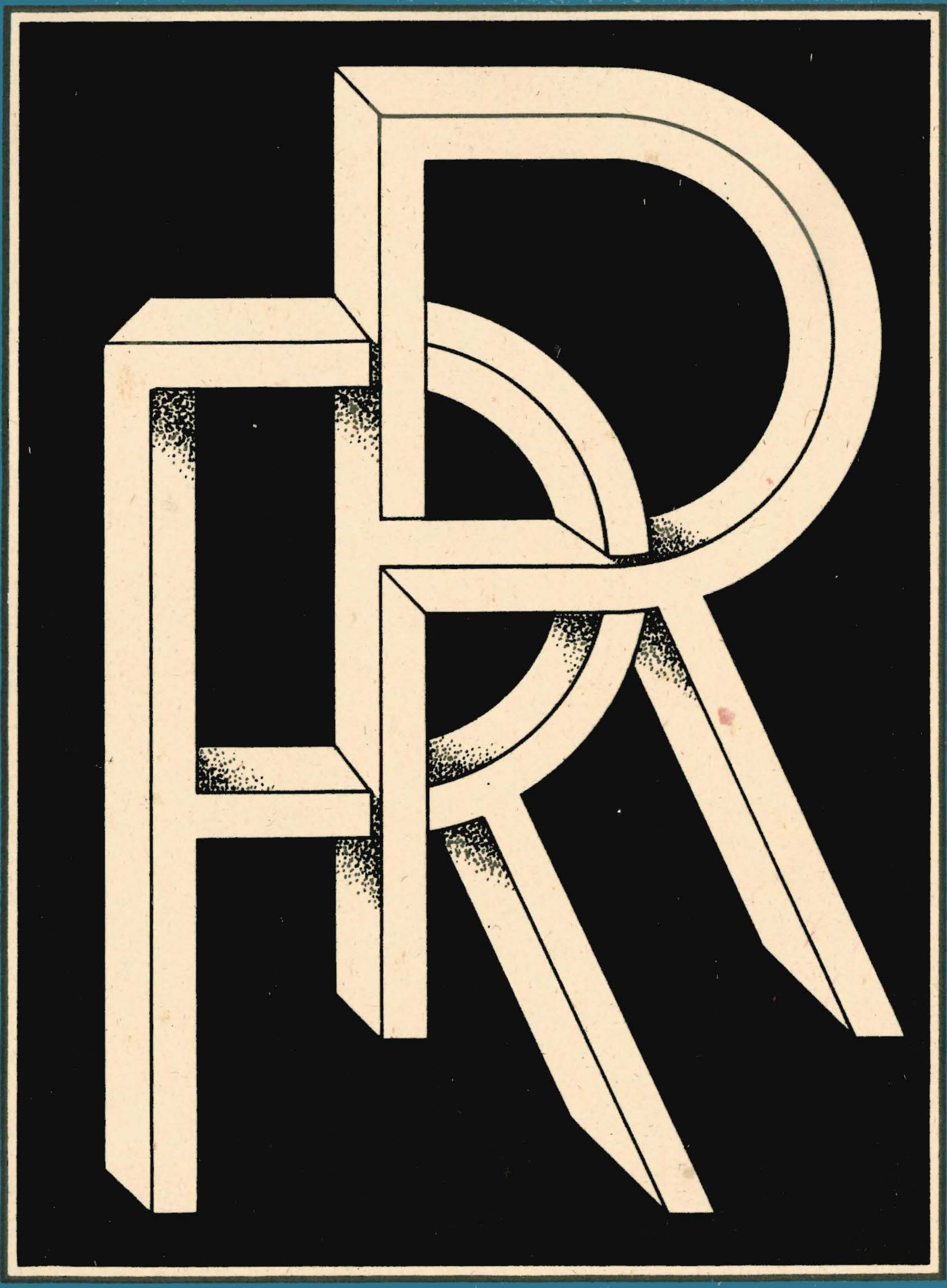
Woher kommt der Igel?

In Naturwissenschaft und Technik gibt eine Entdeckung meist den Anstoß für das schnelle Entstehen einer Vielzahl neuer interessanter Ideen und Erfindungen. Dies geschah auch mit dem berühmten *Zauberwürfel*, als dessen Verwandten man unseren Igel ansehen kann. Im Zauberwürfel werden 26 kleine Würfel in Gruppen zu je 9 in sechs Ebenen gedreht. Dabei erhält man eine sehr schwierige Knobelei, weil die Anzahl der möglichen Verteilungen der kleineren Würfel größer ist als $43 \cdot 10^{18}$ (deshalb nehmen Anleitungen zum Ordnen des Würfels auch mehrere Zeitschriftenseiten ein). *A. Kalinin*

ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 22 (1988) 1 · Seiten 1 bis 24

Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
22. Jahrgang 1988
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

2

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold
Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027
Redaktion:
Gabriele Liebau (Chefredakteur); Rosemarie Schubert (redaktioneller Mitarbeiter)
Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. C. P. Helmholz (Leipzig); Dozent Dr. sc. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dr. rer. nat. W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. rer. nat. W. Schulz (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle)
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: H. Beyrich mit freundlicher Genehmigung des Urania-Verlages (S. 26, 27); P. Schreiber (S. 31); R. Thiele (S. 32); Th. Glocke (S. 37); Staatl. Math.-Phys. Salon (IV. U.-Seite)
Alphons-Vignette: L. Otto
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage von R. Ruprecht, Coswig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 8. Dezember 1987
Auslieferungstermin: 5. April 1988

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Alphons weist die Schüler der 5. bis 7. Klasse auf speziell für sie geeignete Beiträge hin.

Beispiele zum Cavalierischen Prinzip

Das *Cavalierische Prinzip* wird im Mathematikunterricht des achten Schuljahres mitgeteilt und dort einigemal benutzt, um die Volumengleichheit zweier Körper nachzuweisen. Die Beispiele, die das Lehrbuch für die Klasse 8 zur Anwendung des Cavalierischen Prinzips bringt, sind freilich, mit Ausnahme des letzten, recht trivial. Wir haben daher nach interessanteren Beispielen gesucht und unerwartet viele gefunden. Nachfolgend vier davon, für die keine Kenntnisse aus der Abiturstufe gebraucht werden.

Dr. G. Schiemann,
Leiter der Spezialklassen an der Martin-Luther-Universität Halle

Beispiel 1

Die Bilder 1 und 2 zeigen die Achsenschnitte zweier Drehkörper. Die darin vorkommenden Parabeln sind kongruent. Der zu Bild 1 gehörende Körper ist ein *Rotationsparaboloid*, der zu Bild 2 gehörende ein gerader Kreiszylinder, aus dem ein zu dem vorigen kongruentes Rotationsparaboloid herausgefräst ist.
Seien $A_1(y)$ und $A_2(y)$ die Inhalte der Querschnitte durch das Paraboloid bzw. durch den Zylinderrest, jedweils in der gemeinsamen Höhe y mit $0 \leqq y \leqq h$.
Man findet:

$$A_1(y) = \pi x_K^2 \quad \text{und} \quad A_2(y) = \pi(r^2 - x_P^2)$$
$$= \pi r^2\left(1 - \frac{y}{h}\right) \qquad = \pi r^2\left(1 - \frac{y}{h}\right).$$

Die Querschnitte sind also in jeder Höhe gleich, beide Körper haben also gleiches Volumen. Da die Summe beider Volumina $\pi r^2 h$ ist, hat jeder Körper das Volumen $\frac{1}{2}\pi r^2 h$. Das ist ein einprägsamer Ausdruck für das Volumen eines Rotationsparaboloids.

Kurt Günther

Beispiel 2

Bild 3 zeigt den Achsenschnitt eines geraden Kreiszylinders, in den von oben ringförmig eine koaxiale *Furche* eingeschnitten ist, deren Achsenschnitt aus zwei gleichschenkligen Dreiecken besteht. Bild 4 zeigt den Achsenschnitt eines Rotationsparaboloids, der mit dem Zylinder gleichen Radius und gleiche Höhe hat.
Seien $A_1(y)$ und $A_2(y)$ die Inhalte der Querschnitte durch den Zylinderrest und das Paraboloid, jeweils in der gemeinsamen Höhe y mit $0 \leqq y \leqq h$.
Man findet $A_1(y) = \pi x_P^2 + \pi(r^2 - x_Q^2)$ als Summe der Inhalte eines Kreises und eines Kreisrings.
Mit $x_P = \frac{r}{2} - \frac{yr}{2h}$ bzw. $x_Q = \frac{r}{2} + \frac{yr}{2h}$ folgt

$$A_1(y) = \pi\left(\left(\frac{r}{2} - \frac{yr}{2h}\right)^2 + r^2 - \left(\frac{r}{2} + \frac{yr}{2h}\right)^2\right)$$
$$A_1(y) = \pi r^2\left(1 - \frac{y}{h}\right).$$

Nun gilt $A_2(y) = \pi x_k^2$ für das Rotationsparaboloid.
Mit $x_k^2 = r^2 - \frac{yr^2}{h}$ folgt

$$A_2(y) = \pi r^2\left(1 - \frac{y}{h}\right).$$

Die Querschnittsinhalte sind also in jeder Höhe gleich, beide Körper haben folglich gleiches Volumen, nämlich (nach Beispiel 1) $V = \frac{\pi}{2} r^2 h$.

Steffen Bonß/Jens Meusel

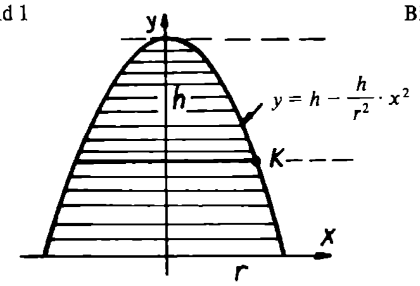
Bild 1


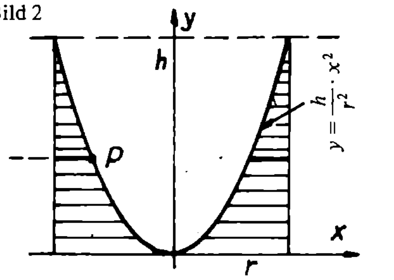
Bild 2


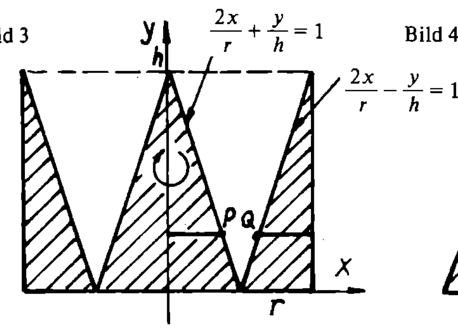
Bild 3


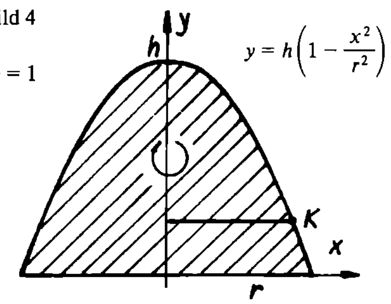
Bild 4


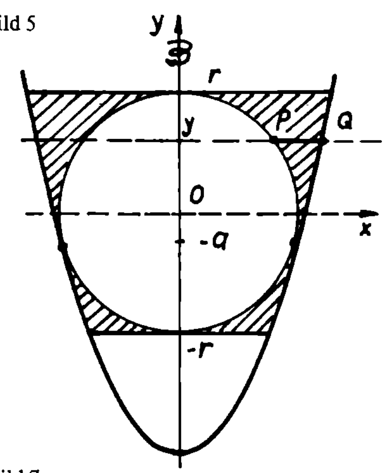
Bild 5


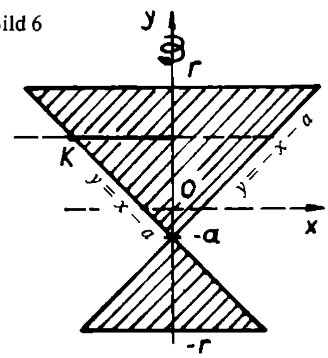
Bild 6


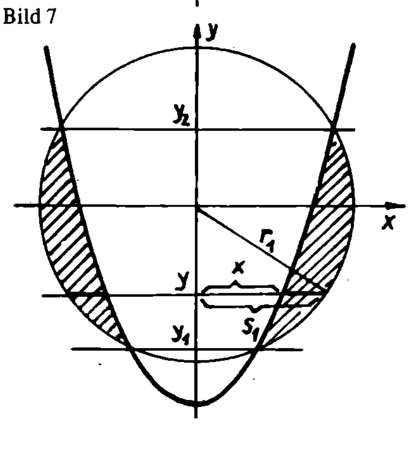
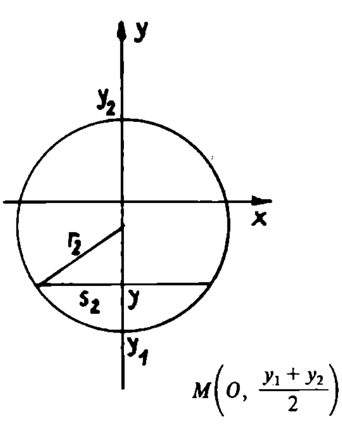
Bild 7


Bild 8


Beispiel 3

Bild 5 zeigt einen Kreis um O mit dem Radius r und eine zur y-Achse symmetrische Parabel, die durch den Kreis von innen berührt wird. Damit muß (das rechnet man leicht nach) die Parabelgleichung die Form $y = \frac{1}{2a}(x^2 - a^2 - r^2)$ haben, worin a eine reelle Zahl mit $O < a < r$ ist. Der schraffierte Teil der Figur sei der Achsenschnitt eines Drehkörpers (Paraboloidschicht mit kugelförmigem Hohlraum). Bild 6 zeigt den Achsenschnitt eines Paares gerader Kreiskegel.

Seien $A_1(y)$ und $A_2(y)$ die Inhalte der Querschnitte durch den Rest der Paraboloidschicht und das Kegelpaar, jeweils in der gemeinsamen Höhe y mit $-r \leqq y \leqq r$. Man findet

$$A_1(y) = \pi \cdot (x_Q^2 - x_P^2) \quad \text{u.} \quad A_2(y) = \pi \cdot x_k^2$$
$$= \pi \cdot (2ay + r^2 + a^2 \qquad = \pi \cdot (a+y)^2$$
$$-(r^2 - y^2))$$
$$= \pi \cdot (a+y)^2.$$

Die Querschnittsinhalte sind also in jeder Höhe gleich; beide Körper haben folglich gleiches Volumen.

Kathrin Eversmann

Beispiel 4

Die Parabel $x^2 = ay - b$ schneide den Kreis $x^2 + y^2 = r_1^2$ in den Punkten mit den Ordinaten y_1 und y_2 (Bild 7). Bei Rotation um die y-Achse beschreibt die schraffierte Fläche einen parabolischen Kugelring. Das Volumen dieses *parabolischen Kugelringes* wird mit dem einer Kugel verglichen, deren Durchmesser das Intervall (y_1, y_2) auf der y-Achse ist (Bild 8).

Die Ermittlung der Schnittpunkte von Kreis und Parabel führt auf die Gleichung

$$y^2 + ay - b - r_1^2 = 0.$$

Da die Lösungen dieser Gleichung y_1 und y_2 sind, gilt

$$y^2 + ay - b - r_1^2 = (y - y_1)(y - y_2).$$

Eine Ebene, die senkrecht zur y-Achse verläuft und diese im Punkt $P(O, y)$ schneidet, schneide beide Körper. Für die Inhalte der Schnittfläche erhält man:

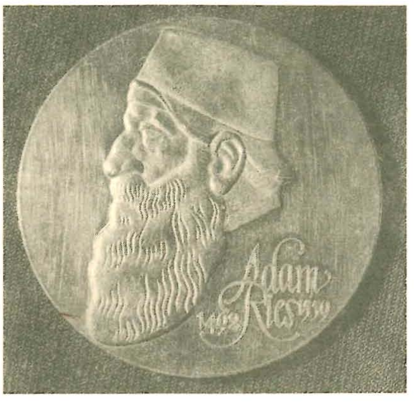
$$A_1(y) = \pi(s_1^2 - x^2)$$
$$A_2(y) = \pi s_2^2$$
$$A_1(y) = \pi(r_1^2 - y^2 - ay + b)$$
$$A_2(y) = \pi \cdot \left[r_2^2 - \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - y\right)^2\right]$$
$$A_1(y) = -\pi(y - y_1)(y - y_2)$$
$$A_2(y) = \pi \cdot \left[\left(\frac{y_2 - y_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - y\right)^2\right]$$
$$A_1(y) = \pi(y - y_1)(y_2 - y)$$
$$A_2(y) = \pi(y - y_1)(y_2 - y)$$

Somit gilt $A_1(y) = A_2(y)$ für alle $y \in \langle y_1, y_2 \rangle$.

Damit ist also der parabolische Kugelring volumengleich einer Kugel, deren Durchmesser gleich der Höhe des Ringes ist.

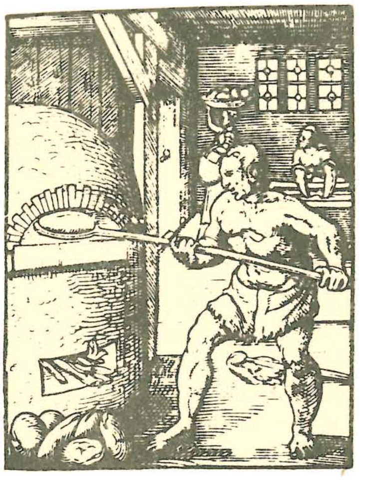
Uwe Müller

Das „Gerechent Büchlein" des Rechenmeisters Adam Ries (1492 bis 1559)



Medaille mit dem Bildnis des Adam Ries zu seinem 425. Todestag (aus Harry Beyrich: Adam Ries, der Rechenmeister in Annaberg, Bildmappe, Verlag H.C. Schmiedicke Leipzig 1983)

Der Beck.



Zu mir rein/wer hat Hungers not/
Ich hab gut Weiß vnd Rücken Brot/
Auß Korn/Weitzen vnd Kern/bachen/
Gesaltzn recht/mit allen sachen/
Ein recht gewicht/das recht wol schmeckt/
Semel/Bretzen/Laub/Spuln vnd Weck/
Dergleich Fladen vnd Eyerkuchn/
Thut man zu Ostern bey mir suchn.

Holzschnitt aus Jost Ammann, Eygentliche Beschreibung der Stände („Ständebuch"), mit Versen von Hans Sachs, Frankfurt am Main 1568

Ein Auftrag für den Rechenmeister

Am Beginn des 16. Jahrhunderts hatten Handel und Gewerbe in den Städten Deutschlands einen beachtlichen Umfang erreicht. Frühkapitalistische Wirtschaftsformen waren entstanden. Der steigende Waren- und Geldverkehr erforderte, daß Kaufleute und Marktkrämer rechnen konnten. Die Räte der Städte und manche Bürger aber nahmen die Dienste von Rechenmeistern in Anspruch. Diese führten bei Geschäften die Rechnungen aus, unterrichteten in Rechenschulen und verfaßten Rechenbücher.

Zum alltäglichen Handel gehörte der Verkauf und Kauf von Broten und Semmeln. Die Bäcker boten sie zu feststehendem Preise an und änderten ihr Gewicht und ihre Anzahl, wenn das Getreide teurer oder billiger geworden war. Bei wachsenden Kosten für Korn und Weizen verkleinerte man sie und stellte entsprechend mehr von ihnen her. Der Kunde sollte das offenbar weniger bemerken als die sonst notwendige Verteuerung der Ware. „Item so das Korn 14 grosch. gilt / beckt mann ein pfenning brodt wigt 34 loth / wie schwer soll mann es backen so es auffschlegt (sich der Preis erhöht) / vnd 17 groschen gilt? Facit 28 loth." Solche Aufgaben wie diese von Adam Ries [Adam Ries, Rechenung auff der linihen vnd federn, Auflage Frankfurt am Main 1544, S. 62] waren in den Rechenbüchern jener Zeit verbreitet. Die Problemstellung ist durch eine Verhältnisgleichung mit umgekehrt proportionalen Größen bzw. durch einen indirekten Dreisatz zu lösen.

Wenn die Preise für das Getreide kräftiger stiegen und folglich das Brotgewicht stärker abnahm, kam es in den Städten zu Streitigkeiten zwischen den Bürgern und den Bäckern. Deshalb ordnete der Rat von Annaberg im Jahre 1533 eine Backprobe an. In Anwesenheit von Vertretern der Stadtverwaltung und der Bürgerschaft wurden ein Scheffel Korn und ein Scheffel Weizen (siehe Tab. 1) gemahlen und zu Broten und Semmeln verarbeitet. Der Rechenmeister Adam Ries, der zugleich Schreiber des Bergamtes Annaberg und seit kurzem Zehntner des Bergreviers Geyer war und sich durch Tüchtigkeit, Sachkenntnis und Gewissenhaftigkeit schon ausgezeichnet hatte, erhielt den Auftrag, für eine Brotordnung (Brot- und Semmelsatzung, Beckenordnung) zu berechnen, wie schwer sie bei einem bestimmten Getreidepreis sein mußten und wieviel Stück zu backen waren. Man wollte, daß „der arme gemeine man ym Brotkauff nicht vbersetzt (betrogen) würde“ [Adam Ries, Ein Gerechent Büchlein, Leipzig 1536, Vorrede]. Der Rat, die Bäcker und ihre Kunden konnten die Zahlen nun von einer Tabelle ablesen. Sie brauchten sie nicht bei jeder Änderung der Getreidepreise selbst auszurechnen. Vom Rat ließ sich die Einhaltung der Vorschrift ohne Mühe kontrollieren. Die Herstellung aller Arten von Kuchen, die Feinbäckerei, stand dagegen nicht unter seiner Aufsicht.

Zur Erfüllung des Auftrages ging Ries von der Festlegung des Rates aus, „nach dem der kauff (Preis) im Korn vnnd Weitz dise zeit gleich / vnd vmb (um) zwenvndvierzick groschn der schöffel gekaufft / das ein halb groschen brott wegen sall (wiegen soll) drei pfunt / ein pfennig brott sechzehenn lott / vnnd ein par semel zwölff lott“ (siehe Tab. 2 und 3) [dsgl.]. Es entstanden vier Brottabellen und eine Semmeltabelle für einen Getreidepreis zwischen 20 und 84 Groschen, jeweils um einen Groschen steigend. Die Zahlen ermittelte Ries in zweierlei Weise. Als erstes berechnete er die Gewichte der Brote und Semmeln bis auf Quent und Quententeil genau. Zum anderen wiesen die Ergebnisse nur Pfund und Lot aus, und er ließ die kleinen Reste zugunsten der Bäcker unberücksichtigt, die jetzt mehr Brote bzw. Semmeln zum gleichen Preis verkaufen konnten. Der Gewinn aus den geringen Gewichtsunterschieden nahm mit der Veränderung der Getreidepreise allerdings einen ungleichförmigen Verlauf.

Die Tabellen stellte Ries mit Übersichten zum Getreidemaß, Weinmaß und Gewicht und über die Preise für die Grundeinheiten dieser Größen – den Scheffel, den Eimer und das Pfund – und ihre Vielfachen und Bruchteile zusammen. Das 160 Seiten umfassende Werk erschien 1536 in Leipzig unter dem Titel „Ein Gerechent (ausgerechnetes) Büchlein / auff den Schöffel / Eimer / vnd Pfundtgewicht“. Derartige Tafeln für den Handel waren kaum vorhanden (Preistabellen für das Gewicht von Gold und Silber im Bamberger Rechenbuch 1483, Brottaxe des Rülein von Calw in Freiberg um 1514, Preistafel für Wein von Jakob Köbel aus Oppenheim 1515) und in der Form, die die möglichen Veränderungen von Maß, Gewicht, Stückzahl und Preis so ausführlich darbot, wahrscheinlich überhaupt neu.

Volgende Tafell bericht wie vill ein par Semel wegen soll/ vnnd wie vill par Semel der Beck auß dem schöffel machen söll/so quenten vnnd teill mit gerechent Vnd wie vill er aus einem schöffel macht so ym die quenten vñ teil nach gelassen/ gibt auch berichtung seines gewins/so die Semeln von einander genumen.

Weitz	Par semel am gewicht			Semel vffn schöf.	Semel so qñt vñ teil nach gelassen.	
grosch	lott	qñ	teil	par semel	par semel	lot
20	25	0	16	240	241	23
21	24	0	0	252	252	0
22	22	3	14	264	274	20
23	21	3	15	276	288	0
24	21	0	0	288	288	0

D

Semmeltabelle, Schluß, aus Adam Ries, Ein Gerechent Büchlein ..., Leipzig 1536 (aus Fritz Deubner: ...nach Adam Ries, Urania-Verlag Leipzig/Jena 1959)

Ein Gerechent Büchlein/auff den Schöffel/Eimer/ vnd Pfundtgewicht/ zu ehren einem Erbarn/Weisen Rathe auff Sanct Annenbergk.

Durch Adam Riesen.

1535

Zu Leiptzick/ hatt gedruckt diß gerechent Büchlein Melchior Lotter.
Volendet vnd außgangen am abendt des Newen Jars
1536

Titelseite aus Adam Ries, Ein Gerechent Büchlein ..., Leipzig 1536

Die Berechnungen von Ries dienten anderen Städten als Vorbild für die Brotordnung. Wegen der oft verschiedenen Maße, Gewichte und Münzverhältnisse konnten sie aber nicht ohne weiteres übernommen werden. Deshalb kam der Rechenmeister auf Wunsch des Zwickauer und des Leipziger Rates selbst, nahm am Backvorgang teil und fertigte die Tabellen an.

Heute ist das Gerechent Büchlein ein ganz bedeutsames Zeugnis der Tätigkeit eines Rechenmeisters jener Zeit. Exemplare der Schrift befinden sich unter anderem noch in Bibliotheken in Halle, Zwickau, Hamburg, London und New York.

Rechnungen zur Semmeltabelle

Den Gebrauch der Tabellen verdeutlichte am Ende ein Beispiel mit Worten. Hier werden die Ausführungen unter der Semmeltafel ausgewählt.

Diese Angaben folgen aus der Festlegung des Annaberger Rates zum Brot- und Semmelgewicht (s. o., Vorrede zum Gerechent Büchlein). Bei der Rechnung wird zunächst in Quent und am Schluß wieder in

Weitz	Par semel am gewicht			Par semel vffn schöf	Par semel so qñt vñ teil nachgelassen	
grosch.	lot	qñt	teil	par semel	par semel	lot.
76	6	2	40	912	1008	0
77	6	2	14	924	1008	0
78	6	1	66	936	1008	0
79	6	1	41	948	1008	0
80	6	1	16	960	1008	0
81	6	0	72	972	1008	0
82	6	0	48	984	1008	0
83	6	0	24	996	1008	0
84	6	0	0	1008	1008	0

Wenn der weitz 64 groschen gilt. das seint 3 gülde 1 grosch/muß 1 par semel habē 7 lot 3 quent $\frac{32}{64}$ ist gleich $\frac{1}{2}$ quentē/kome vō 1 schöffel 768 par semel Wigt 1 par 7 lot vñ die quentē vnd teil werden nachgelassen in gemeltem kauff/ so kan der Beck machen 864 par semeln/ vñ were also sein gewyn 96 par semeln an 1 schöffel macht gerad 8 groschen.

D 3

Semmeltabelle, Beginn, aus Adam Ries, Ein Gerechent Büchlein ..., Leipzig 1536 (aus Fritz Deubner: ...nach Adam Ries, Urania-Verlag Leipzig/Jena 1959)

Lot umgewandelt (siehe Tab. 2). Die Quententeile drückte Ries in den Tafeln als Bruchteile des Getreidepreises aus, deren Zähler er niederschrieb.

Weizenpreis 42 Groschen:
Bei einem Weizenpreis von 42 Groschen soll ein Semmelpaar 12 Lot wiegen.
12 Lot = 48 Quent
Weizenpreis 64 Groschen:

$$\frac{64}{42} = \frac{48}{x}, \quad x = \frac{48 \cdot 42}{64} = 31\frac{32}{64}$$

$$x = 31\frac{32}{64} \text{ Quent} = 7 \text{ Lot } 3\frac{32}{64} \text{ Quent}$$

$$= 7 \text{ Lot } 3\frac{1}{2} \text{ Quent}$$

Bei einem Weizenpreis von 64 Groschen soll ein Semmelpaar $7 \text{ Lot } 3\frac{1}{2}$ Quent wiegen.

Ein Semmelpaar kostete damals einen Pfennig. Stellt man diesen Preis in Rechnung, ergibt sich, daß von einem Scheffel Weizen zu 64 Groschen oder 768 Pfennigen 768 Paar zu backen sind.

Wenn Quente und Quententeile außer Betracht bleiben und die Semmeln also weniger wiegen, erhöht sich die hergestellte Anzahl.

7 Lot = 28 Quent

$$\frac{28}{31\frac{1}{2}} = \frac{768}{x}, \quad x = \frac{768 \cdot 31\frac{1}{2}}{28} = 864$$

$x = 864$ Paar Semmeln

Aus einem Scheffel Weizen erhält man jetzt 864 Semmelpaare.

Der zusätzliche Erlös der Bäcker geht aus der Differenz der beiden Stückzahlen hervor („...gibt auch berichtung seines gewins / so die Semeln von einander genumen“).

H. Beyrich

Adam-Ries-Wettbewerb im Bezirk Karl-Marx-Stadt

Am 12. Mai 1987 fand in der Adam-Ries-Oberschule in Annaberg-Buchholz der 7. Adam-Ries-Wettbewerb für Schüler der Klassen 5 aus unserem Bezirk statt. Über den 1. Adam-Ries-Wettbewerb hatten wir im Heft 6/1981 der Schülerzeitschrift *alpha* berichtet.

Dieser Wettbewerb soll helfen, mathematisch begabte Schüler frühzeitig zu entdecken, um sie dann systematisch zu fördern und letztlich für einen Besuch der Spezialschule oder Spezialklassen zu gewinnen. Dabei sind Erfolge in der Olympiadebewegung ein wirksamer Anreiz für solche Schüler, sich über den Unterricht hinaus intensiv mit Mathematik zu beschäftigen. Noch haben wir dieses Ziel keinesfalls voll erreicht. Trotzdem können wir bereits auf erfreuliche Erfolge zurückblicken. Besonders erfolgreich bei der systematischen Förderung der leistungsstärksten Teilnehmer an diesem Wettbewerb waren das Mathematikzentrum des Pionierhauses *Juri Gagarin* in Karl-Marx-Stadt sowie die Kreise Freiberg und Hohenstein-Ernstthal. Gegenwärtig sind 45 ehemalige Teilnehmer des 1. bis 4. Adam-Ries-Wettbewerbs Schüler der Spezialklassen 11 und 12 der Technischen Universität Karl-Marx-Stadt oder der Klassen 9 bis 11 der Spezialschule math.-nat.-techn. Richtung *Hans Beimler* in Karl-Marx-Stadt, und sie gehören zu den leistungsstärksten Schülern ihrer Klassen.

Es ist nicht verwunderlich, daß solche Schüler auch in der OJM-Bewegung Erfolge erzielen. Wer im Adam-Ries-Wettbewerb gut abgeschnitten hat, sollte sich auf einen Frühstart in der Olympiadeklasse 7 vorbereiten. Die Anzahl solcher Schüler hat in den vergangenen Jahren ständig zugenommen. Im vergangenen Schuljahr erreichten bereits 17 solche Frühstarter die Bezirksolympiade, in diesem Schuljahr werden es sogar 24 Schüler sein.

Durch die Teilnahme am Korrespondenzzirkel Mathematik unseres Bezirks, an Spezialistenlagern, an der Bezirksarbeitsgemeinschaft für die Klassen 9/10 bzw. 11/12 und einer individuellen Förderung für Schüler der Klassen 10 bis 12 haben sie dann die Möglichkeit, ihr mathematisches Wissen und Können stark zu erhöhen.

Die guten Erfolge unseres Bezirks bei der XXVI. Zentralen Olympiade Junger Mathematiker (ZMO) in Erfurt haben wir in hohem Maße den 12 von insgesamt 19 Mitgliedern unserer Delegation zu verdanken, die ehemals Teilnehmer des Adam-Ries-Wettbewerbs waren und die jetzt sämtlich Schüler der Spezialschule oder der Spezialklassen sind. Die sechs erfolgreichsten von ihnen wollen wir hier vorstellen:

Gerd Kunert (Klasse 11);
II. Preis bei der ZMO
I. Preis bei der IMO in Havanna

Torsten Ehrhard (Frühstarter in Klasse 10); I. Preis bei der ZMO

Carsten Deus (Frühstarter in Klasse 10); II. Preis bei der ZMO

André Pönitz (Frühstarter in Klasse 11); III. Preis bei der ZMO

Enrico Thierbach (Klasse 10);
II. Preis bei der ZMO

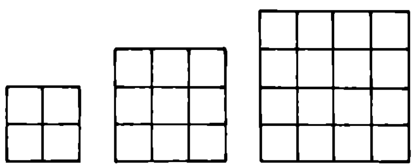
Holger Illgen (Klasse 10);
III. Preis bei der ZMO

Abschließend wollen wir noch die Aufgaben des 7. Adam-Ries-Wettbewerbs mitteilen. Viel Spaß beim Knobeln!

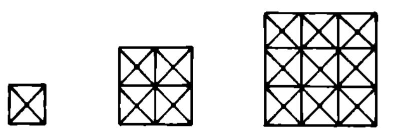
▲1▲ a) Die Klasse 5a sammelte 2,25 dt einer bestimmten Sorte von Altstoffen.
Die Klasse 5b sammelte von der gleichen Sorte von Altstoffen 3,15 dt und erhielt dafür 22,50 M mehr als die Klasse 5a.
Wieviel Mark erhielt die Klasse 5a für ihr Sammelergebnis?
b) Die Klassen 3, 4, 5 und 6 sammelten zusammen genau 5 dt Altpapier.
Dabei sammelte die Klasse 4 um 80 kg mehr als die Klasse 3.
Die Klasse 5 sammelte ebensoviel wie die Klassen 3 und 4 zusammen.
Die Klasse 6 sammelte nur halb soviel wie die Klasse 5.
Wieviel Dezitonnen Altpapier sammelte die Klasse 5?

▲2▲ Karsten möchte eine zweistellige natürliche Zahl z angeben, die folgende Bedingungen (1), (2), (3) gleichzeitig erfüllt:
(1) Die Summe der Ziffern von z ist nicht durch 10 teilbar.
(2) Vertauscht man die Ziffern von z miteinander, dann erhält man eine Zahl, deren Dreifaches größer als 100 und kleiner als 200 ist.
(3) Vergrößert man die Einerziffer von z um 2, so erhält man die Zehnerziffer von z.
Ermittle alle Zahlen z, die die genannten Bedingungen erfüllen!

▲3▲ Wer kann *geschickt* zählen?
a) In der Figur a 1 findet man 5 Quadrate (nämlich ein *großes* mit der Seitenlänge 2 und vier *kleinere* mit der Seitenlänge 1).
Wieviel Quadrate findet man in Figur a 2?
Wieviel Quadrate findet man in Figur a 3?



Figur a 1 Figur a 2 Figur a 3



Figur b 1 Figur b 2 Figur b 3

b) In Figur b 1 findet man 8 Dreiecke (nämlich vier *kleine* und vier *große*).
Wieviel Dreiecke findet man in Figur b 2?
Wieviel Dreiecke findet man in Figur b 3?
Wer angibt, wie man in Aufgabe a) die Anzahl der Quadrate in einer derartigen Figur mit beliebig vorgegebener Seitenlänge n ermitteln kann, erhält Sonderpunkte!

Tabelle 1: Scheffel, altes deutsches Hohlmaß für Getreide

1 Scheffel = 104 Liter (Sachsen 16. Jh., in Deutschland nicht einheitlich)
nach anderen Angaben im damaligen Annaberg 182 Liter
1 Scheffel Korn (zu 104 l) etwa 74 kg
1 Scheffel Weizen (zu 104 l) etwa 79 kg

Tabelle 2: Einteilung und Umrechnung der Gewichtseinheiten (Krämer- oder Handelsgewichte)

Pfund	Lot	Quent	Pfennig-gewicht	Heller-gewicht	in Gramm
1	32	128	512	1024	467,3 (Dresden 1579)
	1	4	16	32	14,6
		1	4	8	3,6
			1	2	0,9
				1	0,45

Gramm ist hier Gewichtsangabe. Auf die heutige Unterscheidung zwischen Gewicht und Masse und den Gebrauch des Gramms als Masseeinheit sei hingewiesen.

Tabelle 3: Einteilung und Umrechnung der Münzsorten

Gulden (fl)	Groschen (g)	Pfennig (d)	Heller (h)
1	21	252	504
	1	12	24
		1	2

Rund um den SR 1

Kalendergeschichten Teil 2 – Kalenderrechnung

Wir stützen unsere Berechnungen auf eine für den Zeitraum vom 1. März 1900 bis zum 28. Februar 2100 gültige Formel, die in [2] zu finden ist. Diese Formel unterscheidet sich von denen des vorigen Beitrages. Berechne zuerst

$$Y = [365{,}25 | A] + [30{,}6 | B] + T - 694\,066,$$

die Werte für A und *B* sind hierbei der folgenden Tabelle zu entnehmen:

M	Jan. 1.	Febr. 2.	März 3.	April 4.	Mai 5.	Juni 6.
A	$J-1$	$J-1$	J	J	J	J
B	14	15	4	5	6	7

M	Juli 7.	Aug. 8.	Sept. 9.	Okt. 10.	Nov. 11.	Dez. 12.
A	J	J	J	J	J	J
B	8	9	10	11	12	13

Dabei bedeutet J die Jahreszahl (also $J = h \cdot 10^2 + j$), M den Monat und T den Tag des jeweiligen Datums. Der gebrochene Anteil werde im Falle des Produkts $365{,}25\,A$ mit d_A und beim Produkt $30{,}6\,B$ mit d_B bezeichnet. Also ist
$365{,}25 \cdot A = [365{,}25 \cdot A] + d_A$ bzw.
$30{,}6 \cdot B = [30{,}6 \cdot B] + d_B$
Die Werte d_A und d_B können entsprechenden, in der Leuchtanzeige ausgewiesenen Zwischenwerten entnommen werden.
Wir fragen wieder, *wie viele Tage von einem Datum bis zu einem anderen Datum vergangen sind:*
Die Anzahl n dieser Tage erhalten wir als Differenz der zu den beiden Daten gehörenden Y-Werte, also als $n = Y_2 - Y_1$, wobei das mit „1" indizierte Datum vor dem mit „2" indizierten liegt.
Damit lautet der Ablaufplan:

$\boxed{365{,}25}\ \boxed{\times}\ \boxed{A_2}\ \boxed{-}\ \boxed{d_{A_2}}\ \boxed{=}\ \boxed{X \to M}$
$\boxed{30{,}6}\ \boxed{\times}\ \boxed{B_2}\ \boxed{-}\ \boxed{d_{B_2}}\ \boxed{+}\ \boxed{T_2}$
$\boxed{=}\ \boxed{M+}\ \boxed{365{,}25}\ \boxed{\times}\ \boxed{A_1}\ \boxed{-}\ \boxed{d_{A_1}}$
$\boxed{=}\ \boxed{+/-}\ \boxed{M+}\ \boxed{30{,}6}\ \boxed{\times}\ \boxed{B_1}\ \boxed{-}\ \boxed{d_{B_1}}$
$\boxed{+}\ \boxed{T_1}\ \boxed{=}\ \boxed{+/-}\ \boxed{M+}\ \boxed{MR} \nearrow n.$

Als Beispiel wählen wir als erstes Datum den 25. Januar 1984 mit
$J_1 = 1984$, $M_1 = 1$, $T_1 = 25$,
$A_1 = 1984 - 1 = 1983$, $B_1 = 14$
und als zweites den 3. Juli 1985 mit
$J_2 = 1985$, $M_2 = 7$, $T_2 = 3$,
$A_2 = 1985$, $B_2 = 8$.

Damit modifiziert sich der obige allgemeine Ablaufplan zu

$\boxed{365{,}25}\ \boxed{\times}\ \boxed{1985}\ \boxed{-}\,^{*)}\ \boxed{,25}$
$\boxed{=}\ \boxed{X \to M}\ \boxed{30{,}6}\ \boxed{\times}\ \boxed{8}\ \boxed{-}\ \boxed{,8}\ \boxed{+}\ \boxed{3}$
$\boxed{=}\ \boxed{M+}\ \boxed{365{,}25}\ \boxed{\times}\ \boxed{1983}\ \boxed{-}\ \boxed{,75}$
$\boxed{=}\ \boxed{+/-}\ \boxed{M+}\ \boxed{30{,}6}\ \boxed{\times}\ \boxed{14}\ \boxed{-}\ \boxed{,4}\ \boxed{+}$
$\boxed{25}\ \boxed{=}\ \boxed{+/-}\ \boxed{M+}\ \boxed{MR} \nearrow 525.$

Vom 25. Januar 1984 bis zum 3. Juli 1985 sind 525 Tage vergangen.

*) *In der Leuchtanzeige erscheint 725021.25; nach der getroffenen Festlegung für d_A ist 0,25 zu subtrahieren.*

Nun betrachten wir das Problem, *auf welchen Wochentag ein vorgegebener Kalendertag fällt.* Dazu wird wieder Y dargestellt als $Y = 7 \cdot l + r$ mit l, r natürliche Zahlen und $0 \leqq r < 7$.
Zu diesem Zweck berechne den Term
$r = \{Y : 7\} \cdot 7 = \{([365{,}25 \cdot A] + [30{,}6 \cdot B] + T - 694\,066) : 7\} \cdot 7.$
Die Klammer $\{\ldots\}$ fordert, daß der ganze Teil g des Quotienten $Y : 7$ abgestrichen und nur mit dem restlichen echten Dezimalbruch weitergerechnet werden soll, denn es gilt allgemein die Formel $w = [w] + \{w\}$.
Dann lautet der zugehörige Rechenablaufplan zur Bestimmung des Wochentages:

$\boxed{365{,}25}\ \boxed{\times}\ \boxed{A}\ \boxed{-}\ \boxed{d_A}\ \boxed{=}\ \boxed{X \to M}$
$\boxed{30{,}6}\ \boxed{\times}\ \boxed{B}\ \boxed{-}\ \boxed{d_B}\ \boxed{+}\ \boxed{T}\ \boxed{+}\ \boxed{MR}$
$\boxed{-}\ \boxed{694066}\ \boxed{=}\ \boxed{\div}\ \boxed{7}\ \boxed{-}\ \boxed{g}$
$\boxed{=}\ \boxed{\times}\ \boxed{7}\ \boxed{=} \nearrow r.$

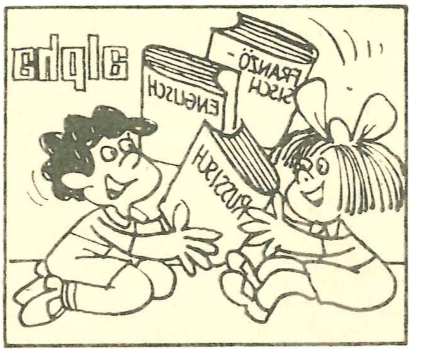
Der errechnete Wert r ist mit den Zahlen $0, 1, \ldots, 6$ gemäß Tabelle 7 (vgl. „Kalendergeschichten Teil 1", Heft 1/88) zu vergleichen und dabei festzustellen, mit welcher dieser Zahlen (bis auf Rundungsfehler) r übereinstimmt.
Als Beispiel wählen wir den 25. Januar 1984 mit
$J = 1984$, $M = 1$, $T = 25$,
$A = 1984 - 1 = 1983$, $B = 14$; also

$\boxed{365{,}25}\ \boxed{\times}\ \boxed{1983}\ \boxed{-}\ \boxed{,75}$
$\boxed{=}\ \boxed{X \to M}\ \boxed{30{,}6}\ \boxed{\times}\ \boxed{14}\ \boxed{-}\ \boxed{,4}$
$\boxed{+}\ \boxed{25}\ \boxed{+}\ \boxed{MR}\ \boxed{-}\ \boxed{694066}$
$\boxed{=}\ \boxed{\div}\ \boxed{7}\ \boxed{-}\,^{*)}\ \boxed{4382}\ \boxed{=}\ \boxed{\times}\ \boxed{7}$
$\boxed{=} \nearrow 2.99999.$

Wegen $2{,}99999 \approx 3$ ist der 25. Januar 1984 ein Mittwoch gewesen.

*) *In der Leuchtanzeige erscheint 4382.4286; nach der getroffenen Festlegung für g ist 4382 zu subtrahieren.*

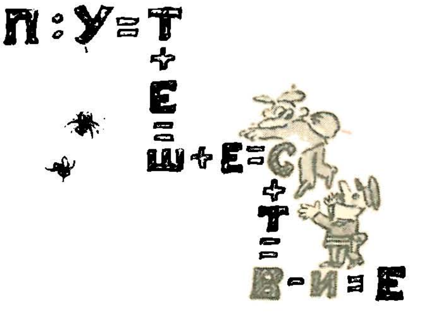
Analog erhält man für den 3. Juli 1985, daß dieses Datum ebenfalls auf einen Mittwoch fiel. *Überprüfe die Beispiele aus „Kalendergeschichten Teil 1" mit dem SR 1!*
Wer sich umfassender mit der Kalenderrechnung befassen möchte, kann nachlesen in



▲1▲ Using your calculator you will be able to check that
$\sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{8+\sqrt{55}}$ and
$\sqrt{7+\sqrt{33}} + \sqrt{6+\sqrt{35}}$
are approximately equal. Either prove that they are exactly equal, or decide (with proof) which is the larger.
aus: Parabola, Australien

▲2▲ Le bacille de la tuberculose (bacille de Koch) a une longueur de 4 µ. Quel grossissement faut-il utiliser pour que son image ait une longueur de 2 mm? *H.*

▲3▲ Совершите путешествие из пункта П в пункт Е (см. рисунок). Для этого замените буквы цифрами так, чтобы все равенства стали верными (одинаковые буквы заменяются одинаковыми цифрами, разные – разными). Счастливого пути!
aus: Quant, Moskau



[1] Butkewitsch, A. W.; Selikson, M. S.: Ewige Kalender. Leipzig Teubner-Verlag 1978
[2] Csákány, A.: Mein Taschenrechner. Berlin, Verlag der Technik 1980
[3] Gilde, W.; Altrichter, S.: Noch mehr Spaß mit dem Taschenrechner. Leipzig, Fachbuchverlag 1981
[4] Gilde, W.; Altrichter, S.: Schneller, leichter, genauer – Möglichkeiten des Taschenrechners. Leipzig, Fachbuchverlag 1987.
Es sei auch verwiesen auf: Welchen Ursprung haben die Namen der Monate? *alpha* 1985, 1, S. 7; Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. A. Smorodinsky. *Alpha* 1982, 3, S. 54/55.

K. Becker

Geometrische Interpretationen der Gleichung $x^\alpha + y^\alpha = z^\alpha$

Die Gleichung

$$x^\alpha + y^\alpha = z^\alpha, \qquad (1)$$

in der wir den Exponenten α als einen Parameter auffassen, hat in der Mathematik eine vielfältige Bedeutung.

In der Zahlentheorie untersucht man ihre ganzzahlige Lösbarkeit für natürliche Zahlen $\alpha \geqq 2$ (*alpha*, 1984, Heft 3).

Während für $\alpha = 2$ alle ganzzahligen Lösungen bekannt sind, ist die Fermatsche Vermutung, die Gleichung (1) hat für $\alpha > 2$ keine ganzzahligen Lösungen, noch nicht vollständig bewiesen. Man zeige, für $\alpha = -1$ hat die Gleichung (1) unendlich viele ganzzahlige Lösungen und ermittle alle.

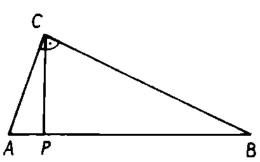
In der Geometrie steht die Gleichung (1) im engen Zusammenhang mit Sätzen und Konstruktionen. Auf der Suche nach möglichen geometrischen Interpretationen sollen x, y und z die Längen gewisser Strecken bedeuten. Wir stellen uns die Aufgabe, drei solche Strecken zu finden, deren Längen x, y und z für noch festzulegende Werte von α der Gleichung (1) genügen. Zur Lösung der Aufgabe sollen einfache ebene geometrische Gebilde, wie Dreiecke, Trapeze, regelmäßige Vielecke u. a. herangezogen werden.

Wenn wir uns auf Dreiecke beschränken, so kann man für jeden Exponenten α aus der Menge

$$\mathcal{M} = \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$$

Lösungen der gestellten Aufgabe angeben. Je eine ist nachfolgend genannt; es lassen sich weitere finden.

Bild 1



$\alpha = 1$

Dieser Fall ist trivial. Er läßt sich interpretieren als Teilung einer Strecke der Länge z in zwei Teilstrecken mit den Längen x und y, wobei gilt

$$x + y = z.$$

$\alpha = 2$

Zur Interpretation für $\alpha = 2$ kann ein rechtwinkliges Dreieck ABC dienen (siehe Bild 1).

Wenn $x = \overline{BC}$ und $y = \overline{AC}$ die Längen der Katheten sind und wenn $z = \overline{AB}$ die Länge der Hypotenuse bedeutet, so gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

$\alpha = \frac{1}{2}$

Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck und P der Höhenfußpunkt auf der Hypotenuse AB (siehe Bild 1). Mit $h = \overline{PC}$, $x = \overline{AP}$, $y = \overline{PB}$ werden die Längen der Höhe und der Hypotenusenabschnitte bezeichnet. Nach dem Höhensatz gilt

$$h^2 = xy.$$

Für die Länge $c = \overline{AB}$ der Hypotenuse ergibt sich

$$x + y = c.$$

Durch Addition von $2\sqrt{xy} = 2h$ zur letzten Gleichung erhält man

$$x + 2\sqrt{xy} + y = c + 2h.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ergibt ein vollständiges Quadrat

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = c + 2h.$$

Mit $z = c + 2h$ folgt daraus

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = z^{\frac{1}{2}}.$$

$\alpha = -2$

Für $\alpha = -2$ verwenden wir abermals das in Bild 1 dargestellte rechtwinklige Dreieck ABC. Mit $x = \overline{BC}$, $y = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$x^2 + y^2 = c^2$$

oder, nach Division durch x^2y^2:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{c^2}{x^2y^2}. \qquad (2)$$

Mit $h = \overline{PC}$, $p = \overline{AP}$, $q = \overline{PB}$ lautet der Höhensatz:

$$h^2 = pq.$$

Da im rechtwinkligen Dreieck das Quadrat über jeder Kathete flächengleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und der orthogonalen Projektion der entsprechenden Kathete auf die Hypotenuse ist, gilt

$$x^2 = qc, \quad y^2 = pc.$$

Daraus folgt

$$\frac{c^2}{x^2y^2} = \frac{1}{pq} = \frac{1}{h^2}.$$

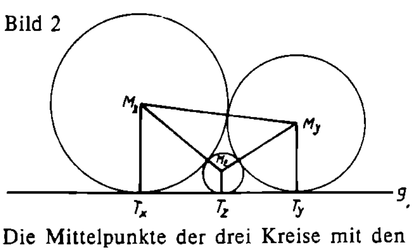
Mit $z = h$ ergibt sich somit unter Verwendung der letzten Gleichung aus der Gleichung (2) die Beziehung

$$x^{-2} + y^{-2} = z^{-2}.$$

$\alpha = -\frac{1}{2}$

Betrachtet werden drei Kreise, die sich paarweise berühren und von denen überdies jeder eine gegebene Gerade g tangiert (siehe Bild 2).

Bild 2



Die Mittelpunkte der drei Kreise mit den Radienlängen x, y und z seien M_x, M_y und M_z. Man erhält ein Dreieck mit den Eckpunkten M_x, M_y und M_z. Die Dreiecksseiten haben die Längen

$$x + y = \overline{M_xM_y},\ x + z = \overline{M_xM_z},\ y + z = \overline{M_yM_z}.$$

Wir setzen die folgenden Größenverhältnisse voraus:

$$x \geqq y > z > 0.$$

Die drei Kreise mögen die Gerade g in den Punkten T_x, T_y und T_z berühren. Unter Anwendung des Satzes von Pythagoras auf die rechtwinkligen Dreiecke mit den Hypotenusen M_xM_y, M_xM_z, M_yM_z und entsprechenden Katheten, die jeweils parallel bzw. rechtwinklig zur Geraden g sind, erhält man folgende drei Beziehungen:

$$(x - y)^2 + \overline{T_xT_y}^2 = (x + y)^2$$
$$(x - z)^2 + \overline{T_xT_z}^2 = (x + z)^2$$
$$(y - z)^2 + \overline{T_yT_z}^2 = (y + z)^2.$$

Nach Auflösung der Klammerausdrücke ergibt sich

$$\overline{T_xT_y} = 2\sqrt{xy},\ \overline{T_xT_z} = 2\sqrt{xz},\ \overline{T_yT_z} = 2\sqrt{yz}.$$

Wegen

$$\overline{T_xT_z} + \overline{T_yT_z} = \overline{T_xT_y}$$

folgt nun unmittelbar

$$\sqrt{xz} + \sqrt{yz} = \sqrt{xy}.$$

Wenn die letzte Gleichung durch $\sqrt{xyz}$ geteilt wird, so erhält man die gewünschte Gleichung

$$x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}} = z^{-\frac{1}{2}}.$$

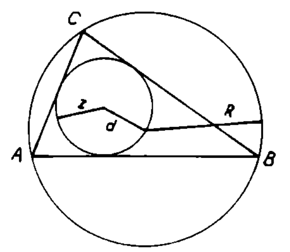
$\alpha = -1$

Für den letzten Fall von $\alpha \in \mathcal{M}$ ziehen wir einen Satz von Leonhard Euler (1707 bis 1783) heran. Der Satz besagt, daß für die Längen z bzw. R der Radien des In- bzw. Umkreises eines beliebigen Dreiecks ABC gilt:

$$\frac{1}{R + d} + \frac{1}{R - d} = \frac{1}{z}, \qquad (3)$$

wobei d der Abstand der Mittelpunkte dieser beiden Kreise ist (siehe Bild 3).

Bild 3



Aus dem Eulerschen Satz ergibt sich für d die Beziehung

$$d^2 = R^2 - 2Rz.$$

Leser, die sich für den Beweis des zitierten Satzes interessieren, seien beispielsweise auf die sowjetische mathematische Schülerzeitschrift Quant, 1984, Heft 5 verwiesen.

Setzen wir nun $x = R + d$ und $y = R - d$, so geht die Gleichung (3) über in

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}.$$

▲ 1 ▲ Man konstruiere die Strecken mit den Längen x, y und z für die betrachteten Beispiele.

▲ 2 ▲ Es sind andere geometrische Interpretationen der Gleichung (1) zu finden.

▲ 3 ▲ Bezüglich anderer Gleichungen, wie zum Beispiel für

$$x^\alpha + y^\beta = z^\gamma$$

oder $x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha = w^\alpha$

behandle man analog einfache Spezialfälle.

G. Windisch

Eine experimentelle Bestimmung der Zahl π

Zum 200. Todestag von G. Buffon

Gelegentlich haben Personen, die kaum als Mathematiker im engeren Sinn zu bezeichnen sind, einen Begriff, ein Problem, eine Methode oder ein Resultat von nachhaltiger Bedeutung zur Entwicklung der Mathematik beigetragen, so z. B. auch Georges-Louis Leclerc Comte de Buffon (7. 9. 1707 bis 16. 4. 1788), dessen Name für immer mit dem sogenannten Nadelproblem verbunden ist.

Buffon ist in der Wissenschaftsgeschichte wohlbekannt als einer der Mitarbeiter der berühmten französischen Encyclopédie, als Vorläufer Darwins in bezug auf die Idee der biologischen Evolution, als Verfasser einer 36bändigen *Naturgeschichte*. Er war ab 1739 Direktor des *königlichen* Botanischen Gartens und des *Königlichen Naturalienkabinetts* in Paris, Mitglied der Französischen Akademie und insgesamt mehr ein Vertreter der Bio- und Geowissenschaften, aber dem für das 18. Jh. typischen Hang der Gelehrten zur Vielseitigkeit entsprechend, beschäftigte er sich gelegentlich auch mit physikalischen und mathematischen Dingen, z. B. mit dem Zahlensystem der Basis 12, dem Versuch einer *moralisch-sittlichen Arithmetik* oder der Übersetzung von Newtons Abhandlung über den Differentialkalkül ins Französische.

Worin besteht das Buffonsche Nadelproblem? Auf ein waagerecht liegendes Brett mit einem Raster paralleler Linien, von denen je zwei benachbarte den Abstand d haben, werde in zufälliger Weise eine Nadel der Länge $l \leq d$ geworfen. Als *günstig* sehen wir den Fall an, daß diese Nadel eine der parallelen Linien trifft. Nun sind wir in einer ähnlichen Situation wie bei Würfel- oder Kartenspielen, deren Probleme, die Wahrscheinlichkeit für einen günstigen Ausgang eines Spieles abzuschätzen, einmal die historische Wurzel der Wahrscheinlichkeitsrechnung gebildet haben. Das Buffonsche Nadelspiel, um es einmal so zu nennen, unterscheidet sich jedoch von allen derartigen Spielen dadurch, daß sowohl die Menge aller möglichen Fälle als auch die Menge der günstigen Fälle unendlich ist, so daß die Definition der Wahrscheinlichkeit p als Quotient aus der Anzahl der günstigen Fälle und der Anzahl aller möglichen Fälle, die in ihrem Anwendungsbereich alle Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf kombinatorische Fragen reduziert, hier nicht anwendbar ist. Buffons richtungweisende Lösung des Problems bestand darin, den möglichen Lagen der Nadel umkehrbar eindeutig Punkte einer Ebene zuzuordnen und damit statt der Anzahlen der günstigen bzw. möglichen Fälle die Flächeninhalte der jeweils zugeordneten Mengen durcheinander dividieren zu können, um eine sinnvolle Verallgemeinerung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes für diesen Fall zu erhalten.

Eine beliebige Lage der Nadel können wir (unter Berücksichtigung der Gleichberechtigung aller parallelen Linien des Rasters und der Unwesentlichkeit von Verschiebungen parallel zum Raster, beides läßt sich streng begründen) durch den Abstand x des *rechten* Endpunktes der Nadel von der links daneben verlaufenden Rastergeraden und den Winkel α zwischen der als Strahl mit diesem Anfangspunkt aufgefaßten Nadel und der Senkrechten zu den Rastergeraden beschreiben (Bild 1).

Bild 1

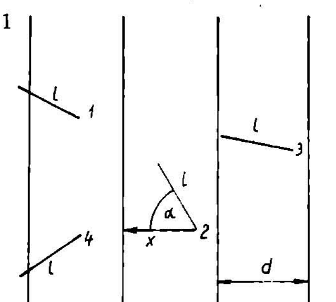
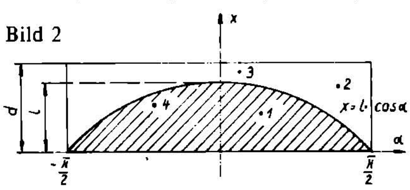


Bild 2



Dabei kann x alle Werte zwischen 0 und d annehmen, α alle Werte zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$. (α wird zweckmäßigerweise im Bogenmaß gemessen.) In einer mit einem kartesischen Koordinatensystem für die Größen α und x versehenen Bildebene nehmen daher die möglichen Lagen der Nadel das in Bild 2 gezeigte Rechteck mit den Seitenlängen π und d ein. Sein Flächeninhalt F_1 ist gleich $\pi \cdot d$.

Für die in Bild 1 eingezeichneten 4 Lagen der Nadel sind die jeweils zugehörigen Punkte in Bild 2 mit der gleichen Zahl markiert. Offenbar trifft die Nadel genau dann die links neben ihrem rechten Endpunkt verlaufende Rastergerade (und nur diese kann sie treffen), wenn $x \leqq l \cdot \cos\alpha$ gilt. Die Menge derjenigen Punkte, die dieser Bedingung genügen, ist in Bild 2 schraffiert. Mit Hilfe der Integralrechnung erhält man sehr leicht, daß sie den Flächeninhalt $F_2 = 2 \cdot l$ hat. (Dies kann man auch ohne Integralrechnung mit beliebiger Genauigkeit bestätigen, indem man die Fläche auf Millimeterpapier zeichnet und durch Auszählen von Quadraten einen unteren und einen oberen Näherungswert für den Flächeninhalt bestimmt.) Unsere in Bild 2 vorgenommene graphische Deutung des Problems liefert also für die gesuchte Wahrscheinlichkeit p den Wert $\frac{F_2}{F_1} = \frac{2 \cdot l}{\pi \cdot d}$. Da die Wahrscheinlichkeit auch als Grenzwert relativer Häufigkeiten verstanden werden kann (warum und in welchen Grenzen dies richtig ist, untersucht ebenfalls die Wahrscheinlichkeitsrechnung bzw. -theorie), müßte demnach folgendes richtig sein: Wirft man die Nadel n-mal auf das Brett und trifft sie dabei k-mal eine Gerade des Rasters, so ist für große Zahlen n ungefähr $\frac{k}{n} = \frac{2 \cdot l}{\pi \cdot d}$, und zwar um so genauer und mit um so größerer Sicherheit, je größer n ist. Man kann also, da l und d bekannt sind, aus der betrachteten Gleichung und experimentell gewonnenen Zahlen k und n die Zahl π berechnen. Dieser bestechende Gedanke hat zunächst noch einen verborgenen Haken: Unsere symbolische Darstellung der Mengen der möglichen und der günstigen Fälle in einer Bildebene ist ja ziemlich willkürlich. Man könnte die Lagen der Nadel auch durch andere Parameter als x und α beschreiben und bekäme andere Bildmengen mit anderen Flächeninhalten. Ausführung des beschriebenen Versuchs liefert aber mit verblüffender Güte Näherungswerte für π, so daß durch diese Versuche das Vertrauen in die *Natürlichkeit* der von uns gewählten Darstellung gestärkt wird. Danach ist es tatsächlich möglich, weitere, uns noch unbekannte Dezimalstellen der Zahl π durch hinreichend lange Wurfserien und deren statistische Auswertung zu bestimmen. Daß die von uns gewählte Darstellung der Lagen der Nadel die einzige dem Problem angemessene ist, kann von der modernen Mathematik auf ganz anderem als dem hier beschriebenen Weg begründet werden. Aus dem Buffonschen Nadelproblem entwickelte sich über mehrere Zwischenstufen ein ganzes Spektrum moderner und sehr praxiswirksamer mathematischer Theorien: Integralgeometrie, Theorie der geometrischen Maße, stochastische Geometrie und schließlich die sogenannte *Monte-Carlo-Methode* zur sehr effektiven (zeitsparenden) Lösung verschiedenartigster numerischer Probleme.

P. Schreiber

Das Katzenjammer-Spiel

Herkunft und Aufgabenstellung

Der ungarische Zauberwürfel mit seiner schwindelerregenden Zahl von Verdrehungsmöglichkeiten hat – zumindest für eine Zeit – das Interesse an anderen logischen Spielen in den Hintergrund gedrängt. Dabei stecken in farbig bemalten Würfeln noch viele andere reizvolle Spielideen, von denen wir eine, das Spiel *Katzenjammer*, vorstellen wollen. Einst hatte das Spiel unter diesem deutschen Namen im angelsächsischen Raum Furore gemacht und kehrte später unter der Bezeichnung *instant insanity* (sofortiger Wahnsinn) von dort wieder zurück.

Wer in Ungarn seinen Urlaub verbracht hat, der hat dieses Puzzle vielleicht in seiner letzten Form kennengelernt, die die Würfel durch Kugeln ersetzt und in deutlicher Anlehnung an die Zauberwürfelwelle den Namen *bűvös golyók* (Zauberkugeln) trägt. Im Gegensatz zu vielen Spielen bereitet es überhaupt keine Mühe, sich dieses Spiel selbst anzufertigen: 4 Würfel und 4 Farben zum Anstreichen reichen bereits (Bild 1). Die Seitenflächen von 4 gleich großen Würfeln werden auf bestimmte, später zu besprechende Weise mit 4 Farben bemalt (z. B. durch Anstreichen oder Aufkleben von Buntpapier bei handelsüblichen Holz- oder Plastewürfeln aus Kinderspielzeugen).

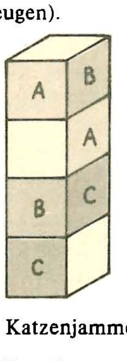
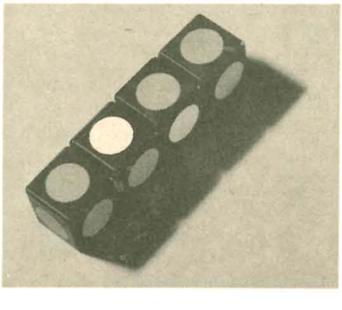


Bild 1: Katzenjammerspiel

Bild 2: Der Turm aus 4 Würfeln. Jede Farbe erscheint genau einmal pro Seite.



Worin besteht die Spielidee? Die vier bunten Würfel sollen so zu einem *Turm* zusammengesetzt werden, daß auf jeder der vier *großen* Seitenflächen des Turms jede der vier Farben genau einmal erscheint. Die Zauberkugeln sind eine geschickte Variante dieses Spiels, da der etwas unhandliche Turm aus Würfeln durch leicht drehbare Kugeln mit Farbkreisen ersetzt wurde (Bild 2).

Anfertigen des Spielgerätes

Von der gelösten Aufgabe her ist klar, wie die Würfel bemalt werden müssen. Die unbemalten Würfel werden zum Turm gelegt und die vier Farben so aufgetragen, daß sich eine Lösung ergibt. Die untere und obere Grundfläche des Turms sowie die einander berührenden Seitenflächen aufeinanderliegender Würfel können danach beliebig mit den vier vorgegebenen Farben angestrichen werden. Die Farbverteilung auf einem Würfel könnten wir für unsere Untersuchungen auf seinem abgewickelten Netz notieren, es ist aber bequemer, sich in den Würfeln ein Raumkreuz zu denken, dessen Enden die Farben der zugehörigen Seitenflächen aufweisen (Bild 3). Das Bild 4 zeigt einen Satz Raumkreuze mit einer Farbverteilung, wie sie z. B. für die Zauberkugeln gebraucht worden sind.

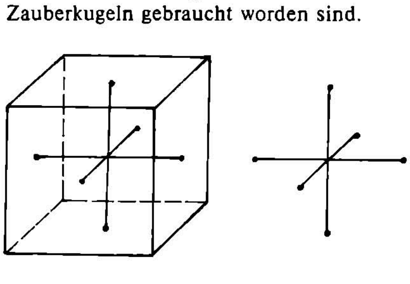
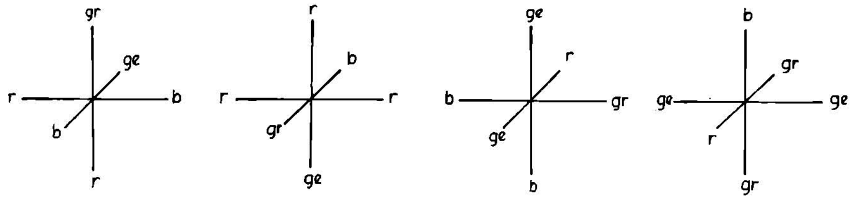


Bild 3: Raumkreuze sind praktischer als abgewickelte Würfelnetze

Bild 4: Ein Satz von Raumkreuzen mit der Farbaufteilung der Zauberkugeln (Erklärung der Abkürzungen im Text)



1. Kugel 2. Kugel 3. Kugel 4. Kugel

Ausflug in die Kombinatorik

Bis jetzt sieht das alles nach einem harmlosen Kinderspielzeug aus. Aber das ist nicht der Fall, wie uns die nachfolgenden kombinatorischen Überlegungen zeigen werden.

Auf wie viele Arten läßt sich *ein* Würfel in den Turm einbauen? Achten wir nur auf die geometrische Form des Würfels, so stellt sich diese Frage gar nicht. Aber sobald wir die farbigen Seitenflächen in Betracht ziehen, ergeben sich optisch verschiedene Möglichkeiten des Anordnens. Wir können einen Würfel auf irgendeine Fläche (Grundfläche) stellen, sagen wir so, daß die rote Farbe unten ist. Ohne die Grundfläche zu wechseln, läßt sich der Würfel drehen, daß jede der vier *Seitenwände* (Grund- und Deckfläche zählen nicht zu den Seitenwänden) nach vorn kommt. Das bedeutet: Für jede fest gewählte Grundfläche gibt es noch vier Möglichkeiten des Hinstellens. Da es sechs Flächen am Würfel gibt, kann jeder Würfel auf $6 \cdot 4 = 24$ verschiedene Arten in den Turm eingefügt werden. Wird der erste Würfel hingestellt, dann stehen dafür 24 Möglichkeiten zur Verfügung. Für den zweiten Würfel gibt es zu jeder dieser Möglichkeiten wiederum 24 Möglichkeiten des Daraufstellens. Damit lassen sich der erste und zweite Würfel auf $24 \cdot 24$ Arten aufeinander stellen. Überlegen wir entsprechend weiter, dann lassen sich vier Würfel auf
$24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 = 24^4 = 331\,776$ Arten
zusammenfügen.

Dabei folgt der als erster Würfel betrachtete auf den als zweiten angesehenen Würfel usw. Berücksichtigen wir jedoch, daß die Feststellung, welcher Würfel der erste, zweite usw. sein soll, ja ganz willkürlich ist, dann ist diese Zahl für völlig unterschiedlich gefärbte Würfel noch mit der Anzahl der verschiedenen Anordnungen von je vier Würfeln zu multiplizieren. Vier verschiedene Würfel lassen sich jeweils auf
$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ unterscheidbare Arten aufzstellen, so daß das *Katzenjammerspiel* bis zu $24^5 = 7\,962\,624$ verschiedene Farbzustände aufweisen *könnte*. Wir müssen hier *könnte* schreiben, denn bei unseren Überlegungen haben wir unterstellt, daß sich alle 24 Seitenflächen der vier Würfel voneinander unterscheiden (d.h. 24 Farben benutzt wurden). Das trifft ja nicht zu. Damit haben wir die Möglichkeit vernachlässigt, daß gewisse Anordnungen optisch das gleiche Bild liefern können. Folglich ist 24^5 nur eine großzügig ermittelte obere Grenze für alle optisch unterschiedlichen Möglichkeiten.

Wir wollen versuchen, die Zahl der tatsächlich erreichbaren Farbkombinationen etwas genauer zu bestimmen. Zunächst werden wir zwei vor uns stehende Farbtürme nicht als verschieden ansehen, wenn sie durch eine Drehung des Turmes als Ganzes auseinander hervorgehen. Das reduziert die Anzahl 24^5 bereits auf ein Viertel.

Falls wir jeden der vier Würfel als in gleicher Weise gefärbt unterstellen, so wäre im Farbturm jeder Würfel durch jeden ersetzbar, wobei gegebenenfalls beim Vertauschen eine geeignete Drehung notwendig wäre. Die Reihenfolge der Würfel spielte jetzt keine Rolle mehr, und es lägen dann bestenfalls $\frac{24^4}{4} = 82\,944$ verschiedene Farbmuster vor. Natürlich sind die vier Farbwürfel nicht völlig gleich, sondern unterscheiden sich, so daß auch diese Anzahl nicht exakt ist. Aber diese Zahl läßt vermuten, daß hinreichend viele Kombinationen möglich sind. Eine Schätzung, die unabhängig von der speziellen Bemalung der Würfel ist, gibt pro 40000 Anordnungen der Würfel etwa eine Grundlösung an. (Gibt es überhaupt eine Lösung, so lassen sich weitere Lösungen sofort durch Umordnen der Würfel erhalten, insgesamt so bestenfalls $4! = 24$ Lösungen, ohne Drehung des Turms.)
Bei den Zauberkugeln liegt durch das die Kugeln einschließende Röhrchen die Reihenfolge der Kugeln fest. Diese können nur noch auf zwei Arten als angeordnet betrachtet werden, je nachdem von welchem Röhrchenende aus gezählt wird (welches also als *oben* betrachtet wird). Die Zahl der optisch verschiedenen Bilder wird also bestenfalls gleich $2 \cdot \frac{24^4}{4}$ sein (Drehungen der Röhre nicht eingeschlossen).

Dieser Ausflug in die Kombinatorik soll uns genügen, um einen Eindruck von den Schwierigkeiten des Lösens zu bekommen. Durch mehr oder weniger zufälliges Herumdrehen werden wir vermutlich nicht viel erreichen, so daß wir uns um ein systematisches Herangehen bemühen.

Notwendige Bedingungen für eine Lösung

Bei der Lösung der Aufgabe wenden wir eine oft hilfreiche Methode an: Wir denken uns, daß die Aufgabe bereits gelöst sei und der Turm der vier Würfel in der gewünschten Farbanordnung (Bild 1) vor uns steht. Dann weisen die Vorder- und Rückseite und die beiden restlichen Seitenflächen natürlich die vier Farben in der gewünschten Weise auf. Wir verfolgen unser Ziel weiter, indem wir noch einen wirksamen Trick anwenden. Dieser Trick besteht darin, zunächst nicht alles das zu benutzen, was bekannt ist oder als bekannt angesehen wird. (In der Geometrie wird so z. B. bei der Methode der geometrischen Örter verfahren.)
In unserem Fall soll uns zunächst nur die Farbverteilung auf der Vorder- und Rückseite des Turms interessieren. Sie könnte beispielsweise für die Farben rot (r), gelb (ge), blau (b) und grün (gr) so aussehen:

	Vorderseite	Rückseite
1. Würfel	r	ge
2. Würfel	ge	b
3. Würfel	gr	r
4. Würfel	b	gr

Dieser Zusammenhang läßt sich graphisch so verdeutlichen (Bild 5) oder in einem Bild darstellen (die Zahlen an den Verbindungslinien geben den entsprechenden Würfel an) (Bild 6):

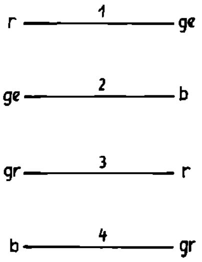


Bild 6

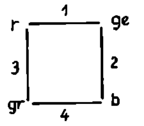


Bild 5

Bild 5: Schematische Darstellung des Farbzusammenhangs gegenüberliegender Turmseiten

Bild 6: Das in einem Graph zusammengefaßte Schema des Bildes 5

Natürlich könnte sich für den Zusammenhang ein ganz anderes Bild ergeben, wenn z. B. die beiden ersten Würfel eine unveränderte Farbaufteilung haben, aber beim dritten Würfel sich lediglich die Farbe grün und beim vierten Würfel die Farben blau und rot auf Vorder- und Rückseite gegenüber liegen (Bild 7):

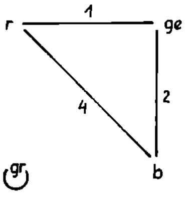


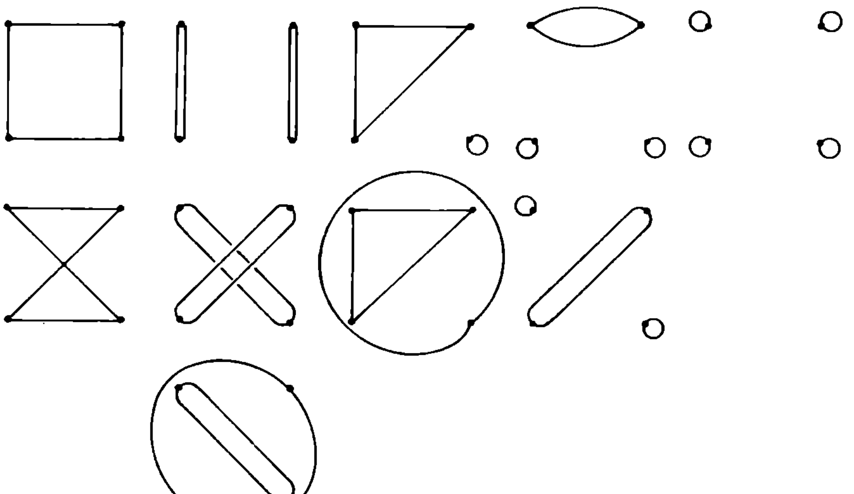
Bild 7: Ein weiterer möglicher Graph

Bild 8: Die fünf Typen möglicher Graphen für den Farbzusammenhang. Untereinander gezeichnete Graphen gehören zum gleichen Typ, auch wenn sie optisch unterschiedlich erscheinen.

Aber alle solche Bilder des Zusammenhangs der Farben, ein sogenannter Graph, weisen einige Merkmale auf, die für eine Farbverteilung auf zwei gegenüberliegenden Seitenflächen charakteristisch sind. Es ist klar, daß jeder Würfel genau einmal im Graph erscheinen muß. Das bedeutet, die Verbindungslinien zwischen den vier Farben tragen die Zahlen 1 bis 4 genau einmal.
Das Katzenjammerspiel verlangt, daß sowohl Vorder- als auch Rückseite jede Farbe genau einmal enthält. Es ist damit ein Graph unmöglich, in dem eine der Farben nicht erscheint.
Weiter gilt noch dieser einfache Sachverhalt. Von einer Farbe gehen genau zwei verschiedene Verbindungslinien weg oder eine Verbindungslinie bildet eine Schlaufe. Die Begründung ergibt sich wie folgt: Weist eine Farbe gar keine oder nur eine Verbindungslinie auf, so würde sie auf keiner oder nur einer Seite vorkommen. Wären jedoch mehr als zwei Verbindungslinien für eine Farbe vorhanden, so müßte diese insgesamt wenigstens dreimal auf Vorder- und Rückseite auftreten. Beide Fälle sind ausgeschlossen, wenn wir von einer Lösung ausgehen, womit nur die genannten Möglichkeiten übrig bleiben. Der Graph für den Farbzusammenhang zweier gegenüberliegender Seiten eines die Farbbedingung erfüllenden Turms muß damit strukturell folgendes Aussehen haben (Bild 8).

Aufsuchen der Lösung

Nachdem wir uns über die zu erwartende Struktur des Graphen für den Farbzusammenhang *gegenüberliegender* Seiten des Turms klar geworden sind, wollen wir den Graphen zeichnen, der den Farbzusammenhang *aller* Seiten für alle Würfel darstellt. In diesem alle Farbzusammenhänge wiedergebenden Graphen müssen dann – Lösbarkeit vorausgesetzt – auch die Graphen für die eben betrachteten Farbverteilungen als Teilgraphen zu finden sein.
Der Graph des allgemeinen Farbzusammenhangs ergibt sich aus dem Satz von



Typ I Typ II Typ III Typ IV Typ V

Raumkreuzen; für Bild 4 in dieser Form (Bild 9). Bei anderen Farbaufteilungen als in Bild 4 fällt er natürlich anders aus.

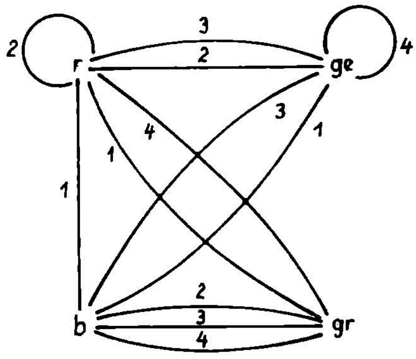


Bild 9: Der Graph des Farbzusammenhangs aller Seiten für die in Bild 4 gegebene Farbaufteilung dieser Würfel

Wir suchen jetzt in dem allgemeinen Graphen zwei verschiedene Teilgraphen der in Bild 8 gezeigten Struktur. Durch diese Teilgraphen ist die Farbaufteilung für Vorder- und Rückseite sowie die restlichen Seitenflächen gegeben. Verschiedene Teilgraphen bedeutet: Wenn ein Teilgraph z.B. die Verbindungslinie 1 von blau zu gelb enthält, so darf sie der andere nicht mehr aufweisen (denn die Farben blau und gelb können beim Würfel 1 entweder nur auf Vorder- und Rückseite oder nur auf den restlichen Seitenflächen einander gegenüberliegen.

Weil in dem Graphen des Bildes 9 nur zwei Schlaufen erscheinen, kann der Typ V als Teilgraph nicht auftreten. Auch der Typ IV kommt als Teilgraph nicht in Frage, denn für beide Schlaufen werden die Verbindungslinien 2 und 4 benötigt, so daß für die erforderlichen doppelten Verbindungslinien zwischen Blau und Grün von 2, 3 und 4 lediglich 3 möglich ist und damit 1 im Teilgraphen fehlt. Der Typ III ist ebenfalls auszuschließen.

Zunächst kann die einzelne Schlaufe nur bei Gelb erscheinen, denn für eine Schlaufe bei Rot gibt es die erforderliche geschlossene Verbindung der drei restlichen Farben nicht. Ist die Schlaufe bei Gelb plaziert, so scheidet im weiteren die Verbindungslinie 4 aus. Damit kommt die geschlossene Verbindung für die drei verschiedenen Farben nur mit einer doppelten Verbindungslinie 1 zustande, was nicht erlaubt ist. Der Typ II läßt für Rot doppelte Verbindungen nur nach Gelb oder Grün zu. Betrachten wir die beiden Fälle. Eine doppelte Verbindung Rot-Gelb erfordert die Linien 2 und 3, womit die doppelte Verbindung Blau-Grün aus 1 und 4 bestehen müßte. Linie 1 fehlt aber im Graphen. Entsprechend erfordert die doppelte Verbindung von Rot-Grün die Linien 1 und 4, und für die Verbindung Blau-Gelb fehlt die Linie 2. Also entfällt auch Typ II.

Beim Typ I lassen sich folgende Ansätze für die sich kreuzenden Verbindungslinien machen (Bild 10). Die punktierten Linien geben die möglichen Ergänzungen für die beiden ersten Fälle an, der letzte Ansatz

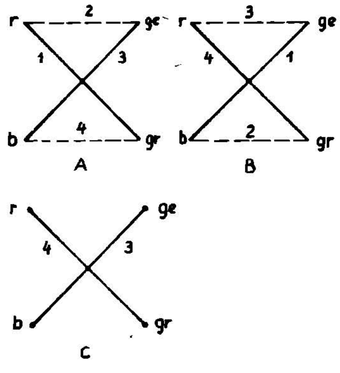


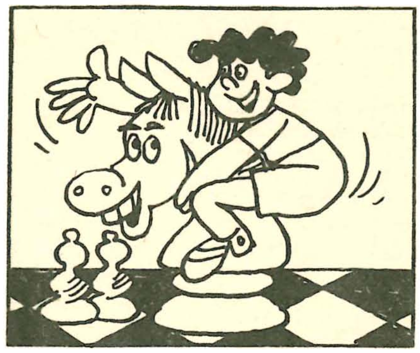
Bild 10: Ansätze für Teilgraphen

führt zu keiner Lösung (weil die 1 nicht erscheinen kann). Wenn wir die Variante *A* für Vorder- und Rückseite und die Variante *B* für die beiden anderen Seitenflächen die Farbaufteilung liefern lassen, erhalten wir folgende Lösung:

	Vorderseite	Rückseite	rechte Seite	linke Seite
1. Würfel	r	gr	b	ge
2. Würfel	ge	r	gr	b
3. Würfel	b	ge	ge	r
4. Würfel	gr	b	r	gr

Beim Aufstellen der Tabelle ist zu beachten, daß die Farbbedingung, alle Farben vorhanden, für jede Seitenwand erfüllt wird. Ordnen wir also, wie in der Tabelle, dem ersten Würfel vorn die rote Farbe zu, so muß zwangsläufig für den zweiten Würfel rot auf die Rückseite bzw. wir hätten es anders herum machen müssen (erster Würfel vorn grün, zweiter Würfel vorn rot). Die durch die Teilgraphen vermittelten Farbzusammenhänge sind tatsächlich in unserem Fall so, daß sich die Farbbedingungen erfüllen lassen. Das zeigt die aufgestellte Tabelle. (Dieser Sachverhalt rechtfertigt logisch unsere Methode, die von der Annahme einer Lösung ausging. Die Teilgraphen konnten damit nur notwendige Bedingungen widerspiegeln. Die aufgestellte Tabelle beweist, daß sich diese notwendigen Bedingungen zu hinreichenden erweitern ließen.)

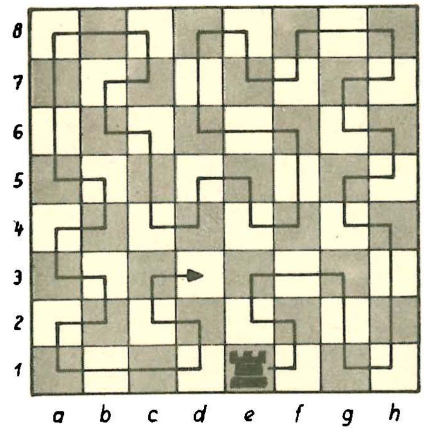
Wir hätten eine andere Tabelle erhalten, wenn wir wie angedeutet, beim ersten Würfel eine grüne Vorderseite gewählt hätten. Beim weiteren Abarbeiten des Teilgraphen wäre insgesamt die Vorder- und Rückseite vertauscht worden. Falls die rechte und linke Seitenwand dabei die Farben nicht geändert haben, so ergibt sich eine neue, optisch unterschiedliche Lösung. Vertauschen wir jedoch in diesen beiden Lösungen jeweils die Färbung der rechten und linken Seitenwände, so erscheinen keine neuen Lösungen, da sich die neuen Farbanordnungen durch Drehungen um 180° (um die Längsachse des Turms) ineinander überführen lassen. Gleichzeitiges Vertauschen gegenüberliegender Farben läuft auf ein Drehen um 180° hinaus. Unser Puzzle hat folglich nur zwei wesentliche Lösungen, aus denen sich durch Ändern der Reihenfolge der Würfel bzw. Kugeln neue Lösungen ableiten lassen. *R. Thiele*



Eine lange Turmwanderung übers Schachbrett

Aufgaben mit Turmwanderungen über oder Turmaufstellungen auf dem Schachbrett sind recht faszinierend, weil sie zwar einfach darzustellen, die Lösungen aber verhältnismäßig schwierig zu finden sind. So zeigt sich, daß viele kombinatorische Aufgaben aus dem Gebiet der angewandten Mathematik auf das Problem führen, bestimmte Aufstellungen von Türmen auf dem Schachbrett abzuzählen. Der amerikanische Mathematiker W. J. Riordan verbindet deshalb in seinem Buch „Einführung in die kombinatorische Analysis“ den Schachausdruck „Turm“ mit dem rein mathematischen Begriff „Polynom“ zum neuen Begriff „Turmpolynom“.

Wir möchten uns nun einer Schachknobelei von Henry E. Dudeney zuwenden. Gesucht wird eine Turmwanderung über das gesamte Schachbrett vom Feld e1 aus, wobei der Turm jedes Feld nur einmal betreten darf, aber möglichst viele Richtungsänderungen zu machen hat. Die Turmwanderung kann auf einem beliebigen Feld enden.



Die abgebildete Lösungsmöglichkeit zeigt 50 gerade Wegstrecken (Züge) des Turmes. Die Zahl der geraden Wegstrecken kann bei einer günstigeren Turmwanderung noch erhöht werden.

Wie sieht eine Wanderroute des Turmes vom Feld e1 bei maximaler Anzahl gerader Wegstrecken über alle Felder des Schachbrettes aus? *H. Rüdiger*

alpha-Märchen: Prinz Epsilon in Nöten

Dieses mathematische Märchen dachten sich die Mitglieder des Kreisklubs Mathematik in Halle-Süd aus. *alpha* stellte ihn im Heft 1/88 vor.

Die mit dem Kleincomputer gelöste Aufgabe könnt ihr auch mit dem Schulrechner SR 1 nachvollziehen.

In Syratanien lebte einst ein König mit einer wunderhübschen Tochter. Alle Prinzen, welche bisher um die Hand der Tochter anhielten, scheiterten an der Aufgabe, drei Prüfungen zu bestehen. Bis eines Tages Prinz Epsilon nach Syratanien fuhr und um die Hand der schönen Prinzessin anhielt...

Die erste Aufgabe teilen wir euch hier mit:

Hinter den sieben Hügeln und weiteren sieben Seen wartet eine Fee mit einer Kiste Goldstaub und einem Stück rechteckigen Karton von 2mal sieben Zentimeter Länge und sieben Zentimeter Breite. Der Prinz soll aus dem Karton durch Abschneiden quadratischer Stücke eine oben offene Schachtel basteln, so daß er die größtmögliche Menge Goldstaub zur Prinzessin befördern kann.

Helft dem Prinzen Epsilon! Da euch Sätze und Methoden aus der höheren Mathematik noch nicht bekannt sind, löst die Aufgabe (näherungsweise) mit dem SR 1, gebt die Länge der abzuschneidenden Quadrate auf Millimeter genau an.

Wir wollen uns an die Lösung *heranpirschen*. Es ist sicher gut, wenn ihr euch eine Skizze anfertigt und aus Zeichenkarton für einige Spezialfälle die Schachtel bastelt (Bild 1). Ihr erkennt:

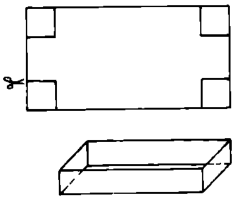


Bild 1

Schneidet man sehr kleine Quadrate ab, so hat die Schachtel zwar eine große Grundfläche, aber nur eine geringe Höhe. Sind die abgeschnittenen Quadrate aber groß, so entsteht eine Schachtel mit hohen Seitenwänden, die jedoch nur eine kleine Grundfläche besitzt. Die beste Lösung wird „irgendwo in der Mitte" liegen.

Nun wollen wir eine Formel aufstellen:

Die Schachtel wird x cm hoch, ihre Grundfläche ist $(14-2x)$ cm lang und $(7-2x)$ cm breit (Bild 2). Folglich gilt für das Volumen V der Schachtel

$V = x(14-2x)(7-x)$. Für jedes gewählte x liefert diese Formel einen Volumenwert V (man schreibt dafür auch $V(x)$). Die abzuschneidenden Quadrate können nicht ganz beliebig sein, offenbar muß $0 \leqq x \leqq 3{,}5$ gelten.

Berechne jetzt die Volumenwerte $V(x)$ für $x = 0$; $x = 0{,}5$; $x = 1$; ...; $x = 3$; $x = 3{,}5$ und trage diese in einem x-V-Diagramm ein (Bild 3). Die drei Linearfaktoren x, $(14-2x)$ bzw. $(7-2x)$ kann man entweder im Kopf berechnen und mit dem SR 1 multiplizieren oder jeweils auch auf dem SR 1 berechnen und auf dessen Speicher die Teilprodukte x, $(14-2x)$ bzw. $(7-2x)$ zwischenspeichern!

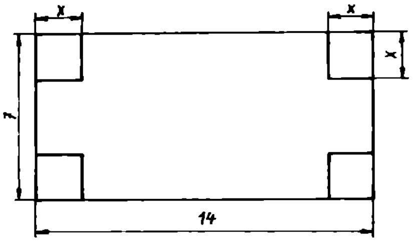


Bild 2

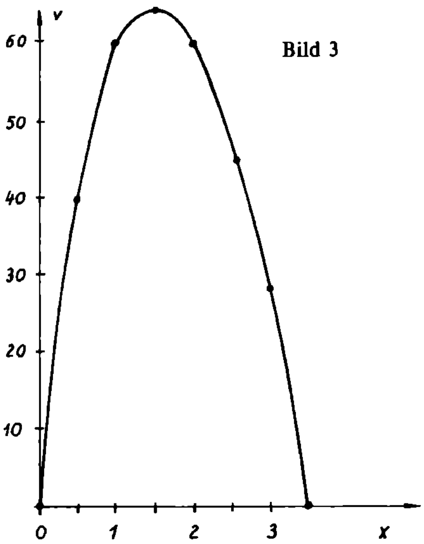


Bild 3

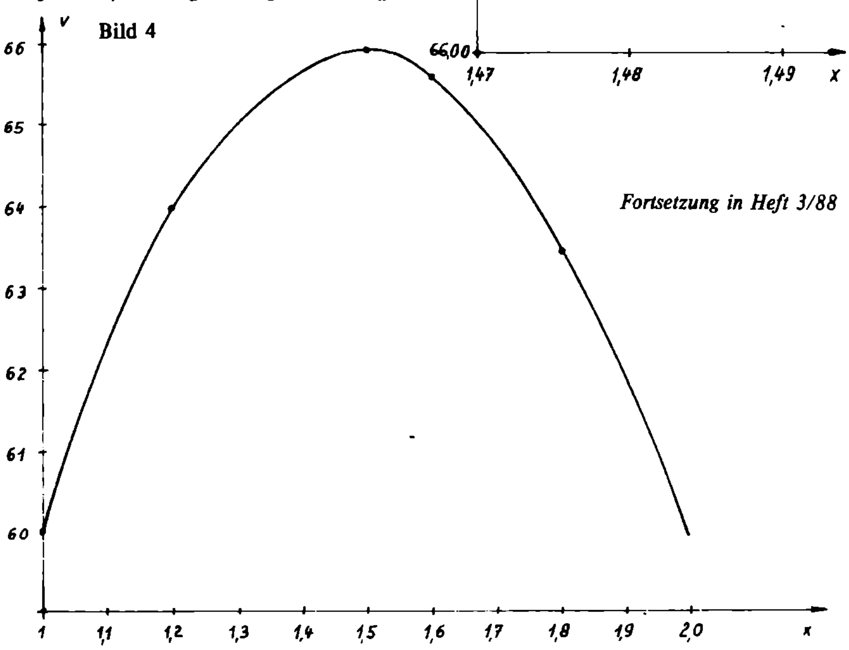


Bild 4

Nun nehmen wir an, daß sich das Volumen für reelle Zahlen x, die nicht Vielfache von $\frac{1}{2}$ sind, nicht sprunghaft ändert. Das bedarf eigentlich einer Diskussion der Funktion $V(x)$! Wir verbinden die eingetragenen Punkte durch eine Kurve und erkennen, daß in der Nähe von $x = 1{,}5$ das größte Volumen erzielt wird.

Jetzt wiederholen wir unser Vorgehen, beschränken uns aber auf $1 \leqq x \leqq 2$ und berechnen die Volumenwerte für $x = 1{,}2$; $x = 1{,}3$; $x = 1{,}4$; ...; $x = 1{,}8$.

Diese Werte tragen wir in das Koordinatensystem ein (Bild 4). Verbindet man die eingezeichneten Punkte, so ist zwischen $x = 1{,}4$ und $x = 1{,}6$ die Stelle mit dem größten Volumenwert ablesbar. Zur Sicherheit verfeinern wir noch einmal und berechnen einzelne Volumenwerte für $1{,}4 \leqq x \leqq 1{,}6$ (Bild 5).

Man sieht, daß für Quadrate mit der Seitenlänge $x = 1{,}48$ cm das Volumen der Schachtel am größten wird. Mit der geforderten Genauigkeit erhält man also $x = 1{,}5$ cm.

Für das wiederholte Ausrechnen der Volumenwerte nach ein und derselben Vorschrift ist nun ein Kleincomputer ein geeignetes Hilfsmittel. Man kann dem Computer auch das Verkleinern der Intervalle und das Zeichnen der Kurve überlassen, natürlich muß man es ihm in geeigneter Weise (BASIC-Programm) befehlen!

Übrigens: Mit anderen Methoden erhält man als Lösung: $x = 1{,}4792\ldots$

U. Siebert

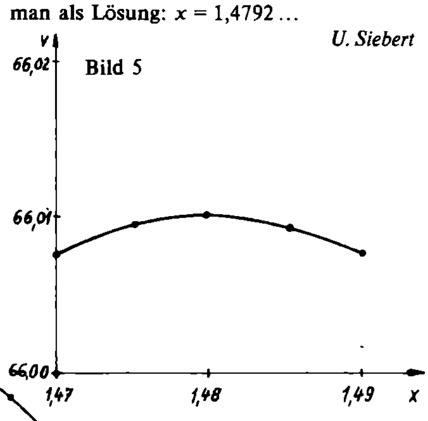


Bild 5

Fortsetzung in Heft 3/88

Wo finde ich den Regenbogen?

Wenn es regnet und zugleich die Sonne scheint, kann man damit rechnen, einen Regenbogen zu sehen. Unter sehr günstigen Umständen sieht man dann sogar zwei Bögen. Man braucht aber gar nicht das gesamte Himmelsgewölbe nach dieser schönen Erscheinung abzusuchen, denn, wenn der Regenbogen überhaupt zu beobachten ist, so ist das nur an ganz bestimmten Stellen der Fall. Meyers Lexikon (Leipzig 1980) gibt darüber Auskunft: „Der Regenbogen entsteht durch Brechung, Reflexion und Beugung des weißen Sonnenlichts in den Regentropfen. Im Hauptregenbogen (42° Abstand vom Sonnengegenpunkt) wird eine Folge der Regenbogenfarben Rot, Orange, Gelb, Grün, Blau, Indigo, Violett (von außen nach innen) erzeugt. Im Nebenregenbogen (51° Abstand) ist die Farbfolge umgekehrt." Wir wollen uns nun mit den Fragen beschäftigen, warum es sich gerade um die 42° bzw. 51° handelt und warum die Farbreihenfolge im Nebenregenbogen umgekehrt ist.

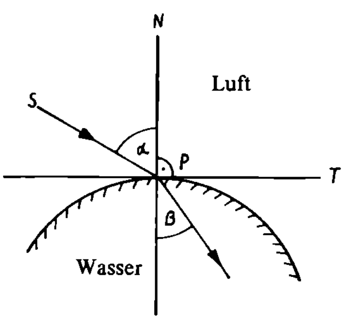
Zunächst wollen wir die physikalischen Voraussetzungen nennen, dann das zugehörige mathematische Problem lösen und schließlich einige offengebliebene Fragen diskutieren.

Die Brechungszahl für Wasser ist $n = 4/3$ und für Luft = 1. (Da wir das Ergebnis nur auf 1° genau herleiten wollen, können wir schon hier auf bequeme Werte runden.)

Das Brechungsgesetz lautet: Beim Eintritt eines Lichtstrahls S aus Luft in Wasser gilt für die Winkel α und β (siehe Bild 1)

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{4}{3}.$$

Bild 1



Dabei ist T die an den Durchstoßpunkt P angelegte Tangente, und N (die Normale) steht in P senkrecht auf T. Diese Normale ist der verlängerte Radius durch P, wenn wir von kugelförmigen Regentropfen ausgehen; der Nachweis, daß diese Voraussetzung gerechtfertigt ist, würde den Schulstoff weit übersteigen, und wir verweisen hier nur darauf, daß wir das richtige Ergebnis herleiten werden. Schließlich werden wir geradlinige Lichtausbreitung annehmen, da die durch die unterschiedliche Luftdichte hervorgerufene Krümmung des Lichtstrahls in der Atmosphäre vernachlässigbar klein ist.

Jetzt kommen wir zum mathematischen Problem: Wir bezeichnen den Winkelabstand eines Punktes des Himmelsgewölbes zum Sonnengegenpunkt mit φ (siehe Bild 2).

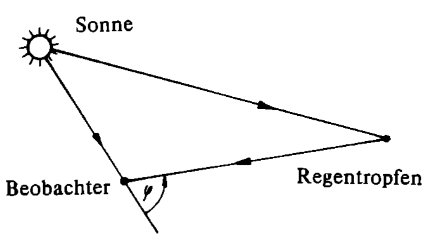


Bild 2

Für die Sonne selbst gilt folglich $\varphi = 180°$. Zunächst betrachten wir einen Lichtstrahl, der zentral auf einen Regentropfen fällt, also $\alpha = 0$ in Bild 1, d.h., die Verlängerung des Strahls S geht durch den Kugelmittelpunkt. Wird er im Tropfen geradzahlig oft reflektiert, hat er natürlich nach Austritt dieselbe Richtung wie zuvor, also $\varphi = \pm 180°$. (Addition eines ganzzahligen Vielfachen von 360° ändert ja geometrisch nichts.) Bei ungeradzahliger Reflexionszahl ergibt sich $\varphi = 0°$. Für alle anderen Lichtstrahlen wird durch den Strahl S und den Kugelmittelpunkt eine Ebene E definiert. Wir benutzen jetzt die Voraussetzung, daß der Regentropfen kugelförmig ist.

Damit können wir das zunächst räumliche Problem auf ein ebenes zurückführen: Der Schnitt der Ebene E mit dem Regentropfen ist dann ein Kreis. Die Bilder 1 und 3 zeigen diese Schnittebene. Die Tangente T in Bild 1 ist folglich der Schnitt der Tangentialebene in P an den Tropfen mit der Ebene E. Da das Problem der weiteren Ausbreitung dieses Lichtstrahls bezüglich einer Spiegelung an E symmetrisch ist, bleibt der Strahl ganz in dieser Ebene. Wir brauchen also nur noch den Lichtweg in der Ebene E zu untersuchen.

Im ersten Fall untersuchen wir nun die Strahlen, die an der Tropfeninnenwand genau einmal reflektiert werden und danach austreten (siehe Bild 3). Wir bestimmen schrittweise die Änderung von φ: Anfangs ist $\varphi = 180°$. Nach der ersten Brechung bei P ist
$\varphi = 180° + \beta - \alpha$, nach der Spiegelung bei Q ist $\varphi = 3\beta - \alpha$ und nach dem Austritt schließlich $\varphi = 4\beta - 2\alpha$.

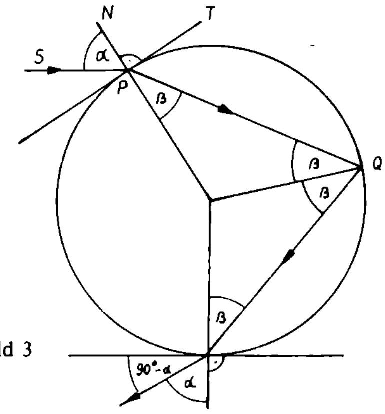


Bild 3

Mit Hilfe des Brechungsgesetzes soll jetzt β eliminiert werden. Dazu definieren wir die Funktion $\arcsin x$ für
$|x| \leqq 1$ durch $x = \sin(\arcsin x)$,
$-90° \leqq \arcsin x \leqq 90°$ und erhalten
$\beta = \arcsin\left(\frac{3}{4}\sin\alpha\right)$. Wegen
$\frac{3}{4}|\sin\alpha| \leqq 1$ ist β stets definiert und wir erhalten schließlich

$$\varphi = 4\arcsin\left(\frac{3}{4}\sin\alpha\right) - 2\alpha.$$

Für $\alpha = 0°$ ergibt sich $\varphi = 0°$ in Übereinstimmung mit der vorherigen Überlegung zum zentralen Auffall. Betrachten wir nun den Fall
$0° < \alpha < 90°$. ($\alpha = 90°$ ergibt für β den Winkel für Totalreflexion.)

Die Funktion $\varphi(\alpha)$ ist nicht konstant.

Beweis (indirekt): Wäre $\varphi(\alpha)$ konstant, so wäre $\varphi(\alpha) = 0$ für jedes α, da $\varphi(0) = 0$ ist. Es müßte also für jedes α gelten

$$4\arcsin\left(\frac{3}{4}\sin\alpha\right) = 2\alpha.$$

Wir teilen diese Gleichung durch 4 und wenden auf beide Seiten die Sinusfunktion an und erhalten

$$\frac{3}{4}\sin\alpha = \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Diese Gleichung müßte für alle α gelten. Für $\alpha = 60°$ gilt sie aber nicht. Widerspruch, w.z.b.w.

Daß die Funktion $\varphi(\alpha)$ nicht konstant ist, ist überraschend, da doch nach unserer Herleitung φ die Richtung des Hauptregenbogens angeben soll. Deshalb wollen wir jetzt die Gestalt der Funktion $\varphi(\alpha)$ genauer betrachten. Es ergibt sich, daß sie in einem relativ großen α-Intervall nahezu konstant ist: Im Intervall
$53° \leqq \alpha \leqq 66°$ ist $41° \leqq \varphi \leqq 42°$.

Genauer: Das Maximum der Kurve $\varphi(\alpha)$ liegt bei $\alpha = 59{,}4°$ mit $\varphi = 42{,}03°$.

Das läßt sich mittels einer Wertetabelle oder schneller unter Zuhilfenahme der Differentialrechnung ermitteln.

▲1▲ Man zeige, daß es kein weiteres derartiges α-Intervall (mit einer Länge $\geqq 4°$) gibt, in dem $\varphi(\alpha)$ fast (bis auf 1°) konstant ist.

Im zweiten Fall untersuchen wir nun die Strahlen, die genau zweimal an der Tropfeninnenwand reflektiert werden. Wir müssen also zum φ-Wert des 1. Falls noch $2\beta - 180°$ addieren. Wir erhalten

$$\varphi = 6 \arcsin\left(\frac{3}{4}\sin\alpha\right) - 2\alpha - 180°.$$

Für $\alpha = 0°$ ergibt sich wieder richtig $\varphi = -180°$. Im Intervall $67° \leqq \alpha \leqq 76°$ gilt $-52° \leqq \varphi \leqq -51°$, und das Maximum der Kurve $\varphi(\alpha)$ liegt bei $\alpha = 71{,}8°$ mit $\varphi = -50{,}98°$. Damit ist der erste Teil der Aufgabe, die Herleitung der Werte 42° für den Haupt- und 51° für den Nebenregenbogen auf 1° genau, erledigt. Für den zweiten Teil, die Reihenfolge der Farben, müssen wir wissen, daß die Brechungszahl n für rotes Licht geringfügig kleiner ist als die für violettes Licht, um nur die Randfarben zu nennen. Damit wird φ für rotes Licht geringfügig größer, was im 1. Fall zu einer Vergrößerung von $|\varphi|$ (Rot ist außen) und im 2. Fall zu einer Verkleinerung von $|\varphi|$ (Rot ist innen) führt.

Abschließend wollen wir noch einige Fragen klären:

1. Warum betrachten wir nicht den Fall, daß der Lichtstrahl an der Außenwand des Tropfens reflektiert wird?

Antwort: Wir erhalten dann $\varphi = 2\alpha$, also eine Funktion, die in keinem Teilintervall fast konstant ist.

2. Warum betrachten wir nicht den Fall, daß der Lichtstrahl innen überhaupt nicht oder mehr als zweimal reflektiert wird?

Antwort: Das errechnete φ ist so groß, daß wegen der Nähe der Sonne kein Regenbogen zu sehen ist, bei mehr als drei Reflexionen ist der Lichtintensitätsverlust schon so groß, daß nichts mehr zu sehen ist. Der Nebenregenbogen mit zwei Reflexionen ist schon deutlich schwächer als der Hauptregenbogen mit einer.

▲2▲ Man berechne die φ-Werte bei genau drei bzw. bei gar keiner Innenreflexion. In diesen Richtungen müßten theoretisch ganz schwache Bögen zu sehen sein.

3. Warum kann man im Sommer um die Mittagszeit keinen Regenbogen sehen?

Antwort: Weil dann die Richtungen, die $\varphi = 42°$ bzw. 51° entsprechen, unterhalb des Horizonts liegen.

Mit vorliegenden Zeilen sollte gezeigt werden, wie man ein physikalisches Problem (Erklärung des Regenbogens) in ein geometrisches (Untersuchung trigonometrischer Funktionen) umwandeln kann, und wie man erst durch sinnvolles Runden (Fast-Konstanz im 1°-Intervall anstelle von Konstanz) zum gewünschten Ergebnis geführt wird.

H.-J. Schmidt

Zum 101. Geburtstag

Eine Aufgabe von Prof. em. Dr. habil. Roman Roth

Jena

Im Jahre 1965 stellte Prof. Roman Roth mathematisch interessierten Schülern die nachfolgende Aufgabe.

▲2907▲ Durch drei auf einer Geraden g liegende Punkte U, V, W sind drei Geraden so zu legen, daß der Schwerpunkt des von diesen Geraden gebildeten Dreiecks ebenfalls auf g liegt.

Kurzbiographie

Am 8. April 1887 als Sohn eines Schlossers geboren, absolvierte er zunächst die 8klassige Grundschule seiner Heimatstadt Charlottenburg, besuchte anschließend Präparandenanstalt und ein Lehrerseminar und war ab 1908 Volksschullehrer, ab 1911 Lehrer an der staatlichen Präparandenanstalt in Cottbus. Noch vor dem ersten Weltkrieg erwarb er die Lehrbefähigung als Turn- und Sportlehrer und legte die Prüfung für die Lehrbefähigung an Mittelschulen ab.

Den ersten Weltkrieg machte er als Sanitäter mit. Im Jahre 1921 bestand er das Staatsexamen für den Dienst in der preußischen Lehrerbildung, wurde Seminarlehrer und Seminaroberlehrer.

An der Berliner Universität hörte er Vorlesungen in Mathematik, Physik, Philosophie und Pädagogik, so die Grundlage für seine Promotion legend, die er 1926 in Freiburg i. Br. bei L. Heffter verteidigte.

Als die preußische Regierung die Lehrerbildung einschränkte, wurde R. Roth 1925 Lehrer am Gymnasium in Jüterbog. Bis 1945 war Prof. Roth in verschiedenen Städten als Gymnasiallehrer tätig. Nebenbei hörte er Vorlesungen in Medizin. Er, der sich nach dem ersten Weltkrieg zunächst der USPD, später der SPD angeschlossen hatte, hielt sich von den Nazis konsequent fern.

Nach der Zerschlagung des Faschismus nahm er als Direktor des Schulwissenschaftlichen Instituts in Leipzig und als Leiter des Lehrerbildungsheimes Abtnaundorf am Aufbau unserer Lehrerbildung teil. Im Februar 1947 habilitierte er sich an der Pädagogischen Fakultät der Universität Jena, wurde im September 1947 dort zum Dozenten, 1950 zum Professor mit Lehrauftrag und 1952 zum Professor mit vollem Lehrauftrag für die Methodik des Mathematikunterrichts berufen. 1954 wurde Prof. Roth emeritiert.

Die Liste seiner wissenschaftlichen Veröffentlichungen umfaßt nahezu 40 Titel. Bis ins hohe Alter befaßte sich der Jubilar mit geometrischen Problemen und verfolgte die Entwicklung der Mathematik. Noch heute verläßt ein Besucher sein Haus in Jena-Auerbach nicht, ohne Anregungen für seine wissenschaftliche und pädagogische Arbeit erhalten zu haben.

Auszug aus:
Mathematische Schüleraufgaben
(für R. Roth ein „Königsweg").
Autor: Prof. Dr. Th. Glocke, Erfurt.
Zeitschrift: Sozialistische Universität, 15/87, Jena

Buchtips

Deubler, Raoul U.
Kreuz und Quer
179 S., 127 Abb. Preis: 18,50 M
Bestell-Nr. 547 208 7

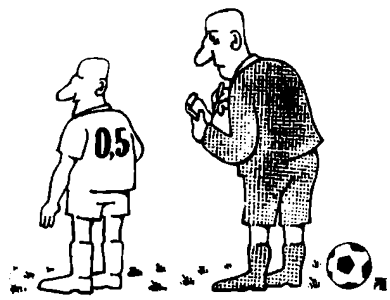
Buchreihe von A. Hilbert
Wir wiederholen
Gleichungen und Ungleichungen
Bestell-Nr. 546 658 4 Preis: 4,80 M
Gleichungssysteme
Bestell-Nr. 546 659 2 Preis: 4,80 M
Vektorrechnung
Bestell-Nr. 546 660 5 Preis: 4,80 M

Hilbert, Alfred
Mathematik
Etwa 672 S., 524 Abb. Preis: 22,00 M
Bestell-Nr. 546 928 3
alle Titel: VEB Fachbuchverlag Leipzig

Roman, Tiberiu
Reguläre und halbreguläre Polyeder
119 S., 76 Abb., MSB Nr. 45
Preis: 6,00 M
Bestell-Nr. 571 562 4
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

Meyer, Hansgeorg
Bücher, Leser, Bibliotheken
77 S., zahlr. farb. Abb. Preis: 5,80 M
Bestell-Nr. 629 608 9
Der Kinderbuchverlag Berlin

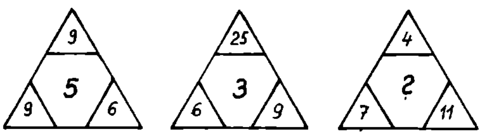
In freien Stunden · alpha-heiter



aus: Eulenspiegel, Borislaw Georgiew (Sofia)

Zahlenlogik

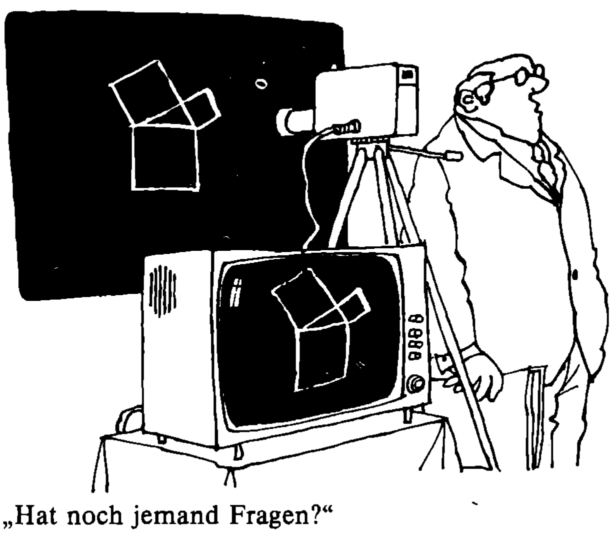
Zwischen den vier Zahlen der beiden Dreiecke links und Mitte besteht jeweils der gleiche Zusammenhang. Analog dazu ist die im rechten Dreieck fehlende Zahl zu bestimmen. *aus: NBI, Berlin*



Ein schlauer Händler

Im Basar gibt es Krach. Ali will eine große Lieferung mit Gold bezahlen. Sein Geschäftspartner weiß aber, daß in einem der zehn Säcke mit je 20 Goldstücken falsche Münzen sind. Sie wiegen statt zehn nur neun Gramm. Der Händler ist ein kluger Mann. Mit einer einzigen Wägung stellt er fest, in welchem Säckchen die falschen Münzen sind. *aus: WE, Köln*

In einem Zug



„Hat noch jemand Fragen?"

aus: Pythagoras, Groningen

Aufgabe: Die Figur (Satz des Pythagoras) ist in einem Zug nachzuzeichnen ohne eine Linie mehrfach zu zeichnen. *L.L.*

Drei Logeleien

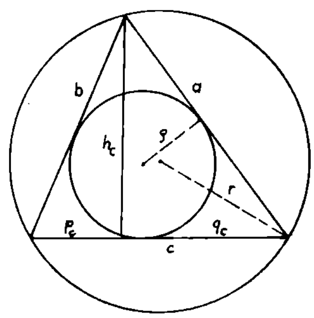
a) In jeder von fünf Kisten befinden sich genau die gleiche Anzahl von Äpfeln. Entnimmt man jeder Kiste 60 Äpfel, so bleiben in den Kisten insgesamt soviel Äpfel übrig, wie vorher in zwei Kisten waren. Ermittle die Anzahl aller Äpfel, die sich anfangs in den Kisten befanden! (OJM, Kl. 5)

b) In einem Kästchen befinden sich 12 rote, 15 blaue und 8 gelbe Kugeln, die sich nur durch ihre Farbe unterscheiden. Anke will mit verbundenen Augen Kugeln herausnehmen. Ihre Anzahl will sie so wählen, daß sie mit Sicherheit erreicht, daß sich unter den herausgenommenen Kugeln 5 von der gleichen Farbe befinden. Sie meint: „Es genügt hierzu, 15 Kugeln herauszunehmen." Birgit meint: „Es genügen dazu sogar nur 13 Kugeln." Cornelia behauptet: „Es genügen dafür 12 Kugeln."
Entscheide für jede der drei Meinungen, ob sie wahr ist, und begründe deine Entscheidung! (OJM, Kl. 6)

c) Klaus hat 7 Kugeln: 4 rote, 2 weiße und 1 schwarze. Er soll sie in zwei Kästchen A und B legen, und zwar in A drei und in B vier. Gib sämtliche möglichen voneinander verschiedenen Verteilungen der Kugeln auf die zwei Kästchen an! (Die Reihenfolge, in der die Kugeln in den Kästen liegen, soll dabei nicht berücksichtigt werden.) (OJM, Kl. 8)

Aufgaben aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR

Heronsches Dreieck 1988



$$a = 15 = 19 - \sqrt{8+8} = -1^9 + 8 + 8$$
$$b = 13 = 1 \cdot 9 + \sqrt{8+8}$$
$$c = 14 = 1 + 9 + \sqrt{8+8} = 1 - \sqrt{9} + 8 + 8$$
$$s = 21 = 19 + \sqrt{\sqrt{8+8}}$$

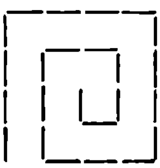
$$A = 84 = -1 - \sqrt{9} + 88$$
$$h_c = 12 = \sqrt{19 \cdot 8 - 8}$$
$$p_c = 5 = \sqrt{1 \cdot 9 + 8 + 8}$$
$$q_c = 9 = \sqrt{1 + 9 \cdot 8 + 8} = 1 \cdot (9 - 8) + 8$$
$$= 4 = \sqrt{1^9 \cdot (8 + 8)}$$
$$r = 8\frac{1}{8} = (1^9 + 8 \cdot 8) : \sqrt{1^9 \cdot 8 \cdot 8}$$
$$= (1^9 + 8 \cdot 8) : (1 - 9 + 8 + 8)$$

Ing. H. Decker, Köln

Hölzchenspiele

Bilde durch Umlegen von
a) 4 Hölzchen 2 gleich große Quadrate;
b) 4 Hölzchen 3 Quadrate (zwei Lösungen);
c) 12 Hölzchen 2 kleine und 2 große Quadrate!

L. L.



Aus dem Geschirrschrank

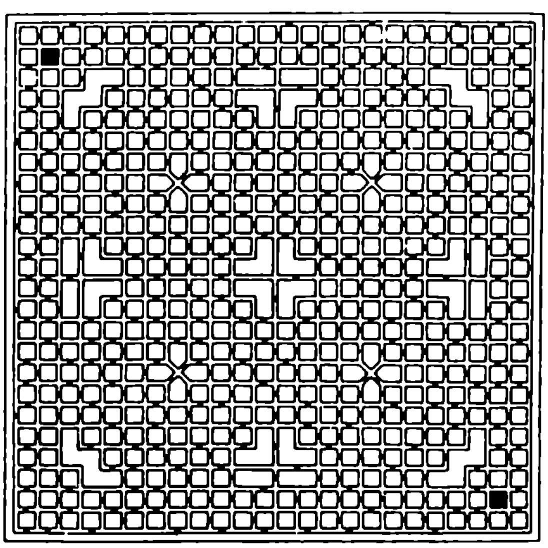
In einem Geschirrschrank befinden sich unter anderem etliche gleiche Teller, mehrere gleiche Gläser, einige gleiche Flaschen und zwei gleiche Krüge.
Ein Massenvergleich ergibt folgendes:
- eine Flasche und ein Glas entsprechen einem Krug,
- eine Flasche entspricht einem Teller und einem Glas,
- zwei Krüge entsprechen drei Tellern.

In welchem Verhältnis stehen die Massen der genannten Gegenstände zueinander?

mitgeteilt von Ing. A. Körner, Leipzig

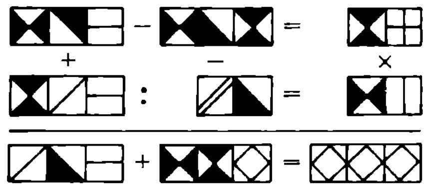
Labyrinth

Finde den Weg von einem zum anderen schwarz gekennzeichneten Quadrat! *aus: Füles, Budapest*

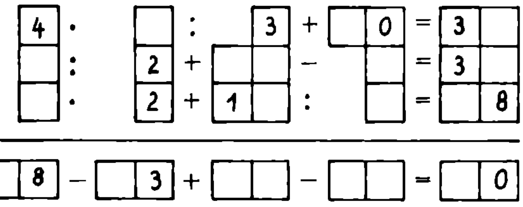


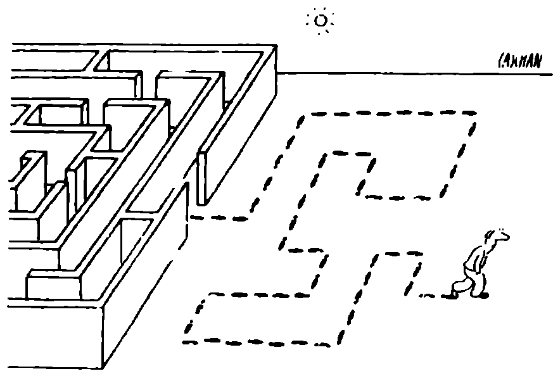
Kryptarithmetik

a)



b)

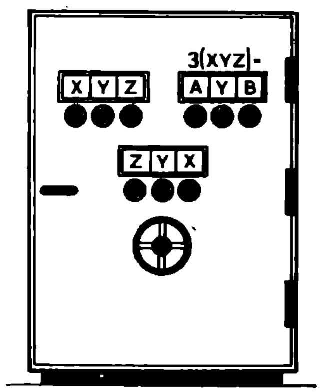




aus: Eulenspiegel, Juraj Cajchan (Schweden)

Der neue Tresor

Die Kaufhalle hat einen neuen Tresor bekommen, doch leider ist die Bedienungsanleitung verschwunden. Die drei Codezahlen zum Öffnen des Stahlschrankes stehen also nicht zur Verfügung.



Carmen, die bei der Abnahme anwesend war, erinnert sich aber an folgende Einzelheiten:
1. die Quersumme der ersten Zahl XYZ entsprach ihrem Alter, 18 Jahre;
2. die zweite Zahl war dreimal so groß wie die erste Zahl;
3. die dritte Zahl war um 99 kleiner als die zweite, außerdem war die Ziffernfolge der dritten Zahl genau umgekehrt wie die der ersten Zahl.
Wie lauten die drei Codezahlen?

aus: NBI, Berlin, Gedankentraining

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

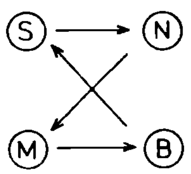
Aufgaben der Kreisolympiade

(18. 11. 87)

Olympiadeklasse 5

270521 Von Anja, Beate, Kerstin, Steffen und Maik wissen wir folgendes:
(1) Steffen ist kleiner als Kerstin und größer als Beate.
(2) Maik ist kleiner als Steffen und größer als Beate.
(3) Anja ist kleiner als Beate.
Ordne die Kinder nach ihrer Größe! Beginne mit dem größten Kind! Eine Begründung wird nicht verlangt.

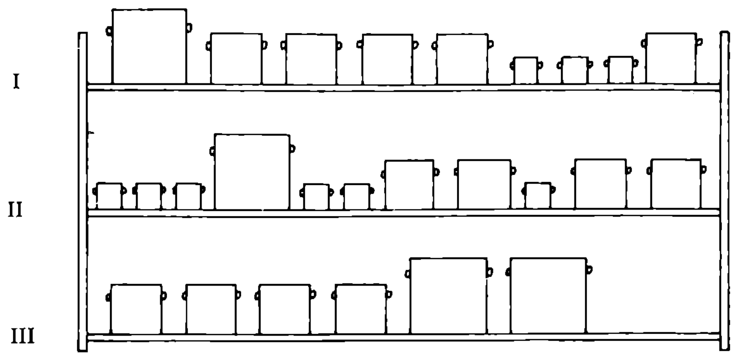
270522 Ein Tourist, der in Magdeburg (M) wohnt, möchte bei einer Rundreise jede der Städte Schwerin(S), Neubrandenburg (N) und Berlin (B) genau einmal aufsuchen und erst dann in seinen Wohnort zurückkehren.
Eine mögliche Reiseroute wäre von Magdeburg aus über Berlin, Schwerin und Neubrandenburg zurück nach Magdeburg (siehe Bild).



Gib alle Reiserouten an, die der Tourist unter den genannten Bedingungen wählen kann! Wieviel Reiserouten sind das insgesamt?
Eine Begründung wird nicht verlangt.

270523 In einer Olympiadeklasse wurde genau die Hälfte aller Teilnehmer mit einem Preis ausgezeichnet. Es gab nur erste, zweite und dritte Preise. Genau ein Achtel aller Teilnehmer erhielt einen ersten Preis. Genau ein Sechstel aller Teilnehmer erhielt einen zweiten Preis. In dieser Olympiadeklasse waren insgesamt mindestens 20, aber weniger als 30 Teilnehmer. Wieviel Teilnehmer genau waren in dieser Olympiadeklasse? Wie viele erste, zweite bzw. dritte Preise gab es darin? Gib an, wie du diese gesuchten Anzahlen eindeutig aus den obigen Angaben findest!

270524 Das Bild zeigt ein Regal, in dem Töpfe von genau drei verschiedenen Größen stehen. In jeder der Reihen I, II, III ergibt sich das gleiche Fassungsvermögen von genau 24 Litern.
Welches Fassungsvermögen hat jeweils ein Topf der verschiedenen Sorten?



Erkläre, wie sich für jede Topfsorte das Fassungsvermögen aus den Angaben über die Reihen I, II und III ergibt!
Überprüfe, daß bei deinen Ergebnissen sich wirklich für jede Reihe ein Fassungsvermögen von genau 24 Litern ergibt!

Olympiadeklasse 6

270621 Über einen 100-m-Lauf, den die drei Schüler Jens, Michael und Peter austrugen, wurden folgende Vorhersagen gemacht:
Frank sagte: „Jens oder Peter wird gewinnen."
Horst sagte: „Wenn Jens nicht gewinnt, dann gewinnt Michael."
Norbert sagte: „Wenn Michael gewinnt, dann wird Jens Zweiter."
Stefan sagte: „Michael wird schlechter abschneiden als Jens und Peter."
a) Nach dem Lauf wurde festgestellt:
Alle vier Voraussagen sind wahre Aussagen.
b) Nach dem Lauf wurde festgestellt:
Als einziger hatte Horst eine wahre Aussage gemacht.
Gib in beiden Fällen a), b) an, wer Erster, Zweiter bzw. Dritter wurde!
In beiden Fällen a), b) ist noch bekannt, daß Jens, Peter und Michael alle drei verschiedene Zeiten liefen.
Erkläre, wie du deine Angaben gefunden hast!

270622 a) Bei einem Wettkampf, an dem sich genau vier Mannschaften A, B, C und D beteiligten, spielte jede dieser Mannschaften gegen jede andere dieser Mannschaften genau ein Spiel.
Zähle diese Spiele auf!
b) Bei einem anderen Wettkampf spielte ebenfalls jede der teilnehmenden Mannschaften gegen jede andere der teilnehmenden Mannschaften genau ein Spiel. So kamen genau 21 Spiele zustande.
Wie viele Mannschaften nahmen insgesamt an diesem Wettkampf teil?
Zeige, daß bei der von dir angegebenen Anzahl von Mannschaften genau 21 Spiele zustandekommen!

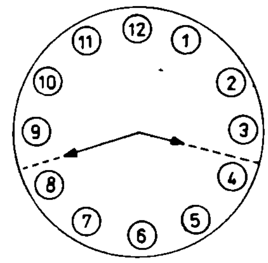
270623 a) Der Stundenzeiger einer Uhr (siehe Bild) zeigt um 3.42 Uhr in die Lücke zwischen den Zahlen 3 und 4, der Minutenzeiger in die Lücke zwischen 8 und 9. Dadurch wird das Zifferblatt so aufgeteilt, daß in einem Teil die Summe

$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$$

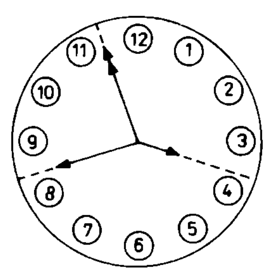
und im anderen Teil die Summe

$$9 + 10 + 11 + 12 + 1 + 2 + 3 = 48$$

steht.
Gesucht werden Uhrzeiten folgender Art: Jeder Zeiger zeigt in eine der zwölf Lücken zwischen benachbarten Zahlen, und dadurch wird das Zifferblatt in zwei Teile aufgeteilt, in denen die gleiche Summe steht.
Nenne zwei solche Uhrzeiten zwischen 0.00 Uhr und 12.00 Uhr, die sich voneinander um mehr als 5 Minuten unterscheiden!



b) Bei einer anderen Uhr (siehe Bild) zeigt 57 Sekunden nach 3.42 Uhr der Sekundenzeiger in die Lücke zwischen den Zahlen 11 und 12.



Hierdurch und durch die anderen Zeiger wird das Zifferblatt in Teile mit den Summen

$$\begin{aligned} 4+5+6+7+8 &= 30,\\ 9+10+11 &= 30,\\ 12+1+2+3 &= 18 \end{aligned}$$

aufgeteilt.
Warum gibt es keine Uhrzeit, bei der (jeder Zeiger in eine der zwölf Lücken zeigt und) das Zifferblatt in drei Teile aufgeteilt wird, in denen die gleiche Summe steht?

270624 In einer Werkhalle stehen vier Maschinen zur Herstellung von Werkstükken. Jeweils in 24 Stunden werden
auf Maschine A genau 2 Werkstücke,
auf Maschine B genau 3 Werkstücke,
auf Maschine C genau 8 Werkstücke,
auf Maschine D genau 12 Werkstücke
hergestellt. Für jede der Maschinen gilt, daß zum Herstellen der Werkstücke auf dieser Maschine stets die gleiche Zeit gebraucht wird. Dabei ist die Zeiteinteilung so angelegt, daß jeweils die Herstellung des nächsten Werkstückes genau dann beginnt, wenn das vorhergehende fertig ist.
An einem Tag beginnen alle vier Maschinen gleichzeitig um 0.00 Uhr mit der Herstellung eines neuen Werkstücks. Wie oft kommt es an diesem Tag bis einschließlich 24.00 Uhr insgesamt vor, daß
a) auf allen vier Maschinen,
b) auf genau drei der vier Maschinen,
c) auf genau zwei der vier Maschinen
zum gleichen Zeitpunkt ein Werkstück fertig wird?

Olympiadeklasse 7

270721 Jörg unternahm in den Ferien mit seinem Fahrrad eine Dreitagewanderung. Er legte dabei am ersten Tag die Hälfte und am zweiten Tag ein Drittel der Länge der für alle drei Tage geplanten Wanderstrecke zurück. Am zweiten Tag war Jörg 24 km weniger gefahren als am ersten Tag.
Ermittle die Länge der Wegstrecke, die Jörg noch für den dritten Tag verblieb!

270722 Angela, Bodo, Constanze und Dietmar sprechen über den Ausgang zweier Fußballspiele der Klasse 7a gegen die Klasse 7b. Zu beiden Spielen machen sie dieselben Aussagen, nämlich:
Angela: Das Spiel endete unentschieden.
Bodo: Die Klasse 7a gewann.
Constanze: Bodos Aussage ist falsch.
Dietmar: Angelas Aussage ist wahr.
a) Petra, die das erste Spiel gesehen hat, stellt wahrheitsgemäß fest, daß für das erste Spiel genau eine der vier Aussagen falsch ist.
b) Rolf, der das zweite Spiel gesehen hat, stellt wahrheitsgemäß fest, daß für das zweite Spiel genau eine der vier Aussagen wahr ist.
Untersuche, ob sich a) aus Petras Feststellung, b) aus Rolfs Feststellung der Ausgang des betreffenden Spiels (Sieg der 7a, Sieg der 7b oder Unentschieden) eindeutig ermitteln läßt!

270723 Die Maßzahlen zweier Seitenlängen eines Dreiecks seien $a = 12$ und $b = 8$. Ermittle alle diejenigen Zahlen, die als Maßzahl c der dritten Dreiecksseite so vorkommen können, daß die Maßzahl des Umfangs eine Primzahl ist. Alle drei Seitenlängen sollen dabei in derselben Maßeinheit, etwa in Zentimetern, gemessen sein.

270724 Es sei AB der Durchmesser eines Kreises, der Mittelpunkt des Kreises sei M, ferner sei C ein Punkt, der so auf dem Kreis liegt, daß der Winkel $\sphericalangle BMC$
a) die Größe 42°,
b) eine beliebig vorgegebene Größe φ mit $0° < \varphi < 180°$ hat.
Ermittle jeweils aus diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\sphericalangle ACM$ und die des Winkels $\sphericalangle ACB$!

Olympiadeklasse 8

270821 Ein AG-Leiter behauptet, er könne jede von seinen Zirkelteilnehmern gedachte Zahl erraten, wenn ihm nur das Ergebnis der folgenden Rechnung genannt wird: „Denke dir eine Zahl.
Addiere dazu die Zahl 5, multipliziere die Summe mit 16, subtrahiere davon das Sechsfache der gedachten Zahl und dividiere diese Differenz durch 10!"
Läßt sich tatsächlich aus dem nun zu nennenden Ergebnis dieser Rechnung die gedachte Zahl ermitteln?
Wenn das der Fall ist, so beschreibe und begründe, auf welche Weise das geschehen kann!

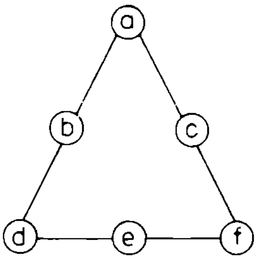
270822 Gegeben sei ein Kreis k; sein Mittelpunkt sei M, sein Radius betrage r. Von drei Punkten A, B, C auf k werde vorausgesetzt, daß $\overline{AB} = \overline{BC}$ gilt und daß der Winkel $\sphericalangle ABC$ die Größe 120° hat.
Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets $\overline{AB} = r$ gilt!

270823 Über ein Turnier in einer AG „Schach" wird berichtet:
Das Turnier wurde in mehreren Runden ausgetragen. In jeder Runde spielte jedes AG-Mitglied gegen jedes andere genau eine Partie. Auf diese Weise wurden in dem Turnier insgesamt 112 Partien gespielt. Es nahmen mehr als zwei Mitglieder teil.
Untersuche, ob ein Turnier möglich ist, bei dem diese Angaben zutreffen, und ob die Anzahl der Runden sowie die Anzahl der Teilnehmer eindeutig aus den Angaben folgen!
Wenn dies der Fall ist, so ermittle diese Anzahlen!

270824 Ein Würfel W werde in volumengleiche Teilwürfel zerlegt. Der Oberflächeninhalt des Würfels W sei A, die Summe der Oberflächeninhalte der voneinander getrennten Teilwürfel sei S.
Ermittle das Verhältnis $A : S$
a) wenn der Würfel W die Kantenlänge 14 cm hat und die Anzahl der Teilwürfel 8 beträgt,
b) bei beliebiger Kantenlänge a des Würfels W und bei der Anzahl 8 der Teilwürfel,
c) bei beliebiger Kantenlänge a des Würfels W und bei der Anzahl n^3 der Teilwürfel, wobei n eine beliebige natürliche Zahl mit $n \geqq 2$ ist!

Olympiadeklasse 9

270921 In die Felder auf den Ecken und Seitenmittelpunkten eines gleichseitigen Dreiecks (siehe Bild) sollen für a, b, c, d, e, f die Zahlen von 1 bis 6 so eingetragen werden, daß jede Zahl genau einmal vorkommt und daß auf jeder Dreieckseite die gleiche Summe entsteht.



Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen! Dabei heißen zwei Eintragungen genau dann voneinander verschieden, wenn sie weder durch Drehung noch durch Spiegelung ineinander überführt werden können.

270922 Bei einem „ungarischen Dominospiel" mit den Zahlen 0, 1, ..., 9 ist (abgesehen von dieser größeren Zahl in der vom „gewöhnlichen Dominospiel" bekannten Weise) jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen. In einem Spiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, ...; 9 je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steines dieselbe Zahl steht).
Eine „Kette" entsteht, wenn man mehrere Steine so nebeneinanderlegt, daß benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel).
Eine Kette heißt „geschlossen", wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen (so daß man die Kette, wenn sie aus genügend vielen Steinen besteht, an ihren Anfang zurückführen und dort schließen kann).
a) Ermitteln Sie die Anzahl aller zu einem „ungarischen Dominospiel" gehörenden Steine!
b) Ermitteln Sie die größte Anzahl solcher Steine eines Spiels, aus denen sich eine geschlossene Kette bilden läßt!

270924 Für je zwei natürliche Zahlen a, b, die die Ungleichungen

$$3a - 2b \leqq 10, \qquad (1)$$
$$3a + 8b \leqq 25 \qquad (2)$$

erfüllen, sei

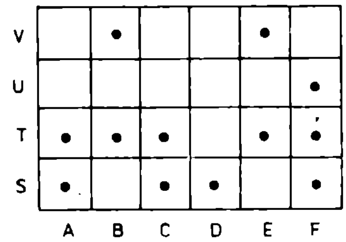
$$S = a + 2b.$$

Untersuchen Sie, ob es unter allen Zahlen S, die sich auf diese Weise bilden lassen, eine größte gibt!
Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie diesen größtmöglichen Wert von S!

Olympiadeklasse 10

271021 Das Rechteck im Bild a) soll aus den Teilen des Bildes b) zusammengesetzt werden. Jedes Teil soll genau einmal verwendet werden; die Teile sind ohne Anwendung von Spiegelungen, nur durch Verschiebungen und Drehungen in die gewünschte Lage zu bringen.

Bild a



Zeichnen Sie zwei verschiedene Zusammensetzungen des Rechtecks, die auf diese Weise entstehen können! Überprüfen Sie darin die Erfüllung der geforderten Bedingungen, indem Sie die (jeweils in die gewünschte Lage gebrachten) Teile durch ihre Nummern kennzeichnen!

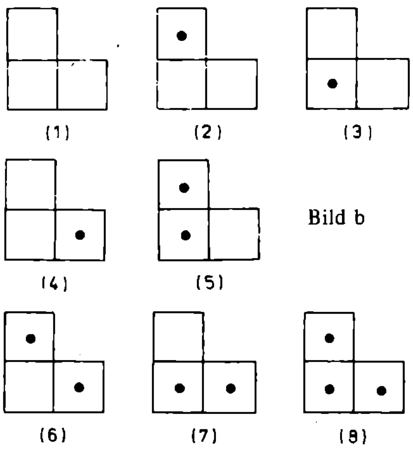


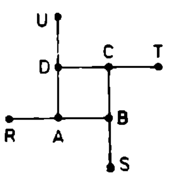
Bild b

271022 Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die

$$\frac{n^4-2n^3-3n^2+7n-6}{n+2}$$

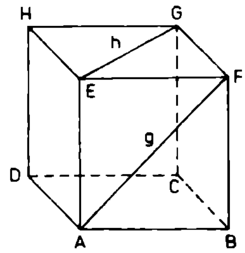
eine natürliche Zahl ist!

271023 Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit gegebener Seitenlänge a, ferner sei x eine beliebig gewählte positive reelle Zahl. Die Quadratseiten seien wie im Bild um Strecken der Länge $x \cdot a$ verlängert bis R, S, T bzw. U.



a) Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets $RSTU$ ein Quadrat ist!
b) Ermitteln Sie alle diejenigen positiven reellen Zahlen x, bei deren Wahl der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ ein Fünftel des Flächeninhaltes des Quadrates $RSTU$ beträgt!

271024 Bei einem Würfel mit gegebener Kantenlänge a seien die Eckpunkte wie im Bild bezeichnet. Die Gerade durch A und F sei g, die Gerade durch E und G sei h. Ermitteln Sie den Abstand von g und h!
Unter dem Abstand zweier windschiefer Geraden g, h versteht man die Länge einer Strecke XY, die so gelegen ist, daß X auf g, Y auf h liegt und daß XY sowohl auf g als auch auf h senkrecht steht.



Olympiadeklassen 11/12

271221 Man ermittle alle Paare (x, y) von Null verschiedener reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x\left(1+\frac{x}{y}\right)=6, \tag{1}$$

$$y\left(1+\frac{y}{x}\right)=3. \tag{2}$$

271222 Es sei $ABCD$ ein beliebiges ebenes konvexes Viereck; k sei eine beliebige positive reelle Zahl. Die Punkte P, Q, R, S mögen in dieser Reihenfolge die Seiten AB, BC, CD, DA dieses Vierecks jeweils im Verhältnis $k:1$ teilen.
Man ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte der Vierecke $PQRS$ und $ABCD$.

271223 a) Für jede natürliche Zahl n werde eine Funktion f (mit dem Definitionsbereich aller reellen $x \neq 0$) durch

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}(k-2)\,x^k$$

definiert. Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die die so erklärte Funktion f die Gleichung
$f(-1)=-f(1)$ erfüllt.
b) Für jede natürliche Zahl n werde eine Funktion g (mit demselben Definitionsbereich) durch

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3k-2}\cdot x^k$$

definiert.
Man untersuche, ob es eine natürliche Zahl n gibt, für die die so erklärte Funktion g die Gleichung
$(g(-1)=-g(1)$ erfüllt.

271224 a) Über eine Menge M, die aus genau 1987 Personen besteht, wird vorausgesetzt, daß jede Person aus M mit höchstens 5 anderen Personen aus M bekannt ist.
Man beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt:
Es gibt eine aus mindestens 332 Personen bestehende Untermenge U von M mit der Eigenschaft, daß keine Person aus U mit einer anderen Person aus U bekannt ist.
b) Man gebe ein Beispiel für eine Menge M aus genau 1988 Personen, für die folgende Aussagen zutreffen: Jede Person aus M ist mit genau 5 Personen aus M bekannt; jede Untermenge U von M mit der Eigenschaft, daß keine Person aus U mit einer anderen Person aus U bekannt ist, besteht aus höchstens 333 Personen.
In diesen Aufgaben werde stets angenommen, daß eine Person X genau dann mit einer Person Y bekannt ist, wenn Y mit X bekannt ist.

alpha-Wettbewerb 1986/87

Abzeichen in Gold

Fortsetzung aus *alpha* Heft 1/88

Für elfjährige Teilnahme
Jens Fache, Altenburg; Uwe Schütze, Camin; Frank Sarodnick, Dallgow; Ulrich Schuster, Demitz-Thumitz; Catherin Engel, Lutz und Heike Lauter, alle Dresden; Georg Kirchner, Dermbach; Veit-Thomas Meyen, Grimmen; Bettina Weser, Großenhain; Michael Schulze, Halberstadt; Frank Siebert, Dany Rose, beide Halle; Claus Janke, Ilmenau; Heiko Schinke, Leuna; Karl-Heinz Gora, Lohsa; Frank Berndt, Radeburg; Jürgen Schmalisch, Reuden; Kurt Schulze, Schernberg; Jens Hoffmann, Sebnitz; Birgit Lorenz, Waren; Hartmut Boettcher, Weimar; Christina Fuhrmann, Zepernick; Frank Pampel, Zeulenroda; Sabine Oestreich, Oschersleben

Für zehnjährige Teilnahme
Eckhard Heinrich, Aschersleben; Susanne Krüger, Thomas Böhme, Andris Möller, Kerstin Kantiem, alle Berlin; Heiko Ringel, Ines Lauter, Kerstin Urban, Gerald Eichler, alle Dresden; Lars Mönch, Erfurt; Jens Wackernagel, Falkenberg; Falk-Uwe Koppelt, Crostau; Jan-Martin Hertzsch, Geringswalde; Sonnfried Lätsch, Görlitz; Ingolf Hintzsche, Gräfenhainichen; Ulrike Brandenburg, Greifswald; Birgit Seifert, Hagenow; Anke Misch, Halberstadt; Annett Eichner, Halle-Neustadt; Norbert Neumann, Kleinmachnow; Andreas Paukert, Karbow; Uta Mersiowsky, Sabine Pohlmann, beide Langewiesen; Andreas Eifler, Petra Polster, beide Leipzig; Holger Schinke, Leuna; Jens Grundmann, Limbach-Oberfrohna; Steffen Hoffmann, Potsdam; Uwe Knispel, Prösen; Ralf Heidenreich, Roßleben; Carmen Meikies, Schlagsdorf; Ruth Backhaus, Silberhausen; Frank Zöllner, Sondershausen; Erhard Zilinske, Stralsund; Norbert Fuchs, Suhl; Ralf Gössinger, Unterbreizbach; Irene Michallik, Waren; Stefan Thäter, Weimar; Agnes Jorzick, Wismar; Mathias Goltzsche, Witterda; Erika Schreiber, Zella-Mehlis

Für neunjährige Teilnahme
Anka Sommer, Augsdorf; Bert Minske, Beate Müller, Jens Prochno, Norbert Dorn, Stefan Müller, alle Berlin; Christian Sitz, Calau; Uwe Martin, Crossen; Manfred Roßius, Cottbus; Bert Kühne, Dahme; Stefan Mattausch, Michael Nitsche, Carsten und Helmut Schreiber, Rolf Dach, alle Dresden; Barbara Tschada, Cornelia Wolf, beide Erfurt; Heike Morgner, Falkenstein; Ingolf Thurm, Gößnitz; Karsten Sonnemann, Grabow; Henning Salz, Halle; Jutta und Uta Schumann, Havelberg; Carsten Leibnitz, Hohenstein-E.; Sebastian Horbach, Andreas Israel, beide Karl-Marx-Stadt; Heiko Witte, Königs Wusterhausen; Bernd Fucke, Petra Gollewsky, beide Leipzig; Jens Fuchs, Luckau; Irma Goßmann, Oranienburg; Anja Voß, Riesa; Katja Uhlemann, Prausitz; Ronald Kaiser, Schleid; Sven Hacker, Schlotheim; Babette Müller, Winfried Ullrich, beide Schmalkalden; Ralf Stentzel, Schwarzenberg; Matthias Herrmann, Schwerin; Mike Selig, Stauchitz; Delia Wolfert, Söllichau; Silvia Reinwarth, Teltow; Evelin Schott, Thalheim; Horst

Rißmann, Wesenberg; Friedhelm Reichert, Königs Wusterhausen; Andreas Stenzel, Cottbus

Für achtjährige Teilnahme

Ralf und Wolfgang Beukert, Beatrice List, alle Altenburg; Annegret Schädlich, Auerbach; Yvonne Selke, Matthias Röder, Matthias Tittel, alle Berlin; Eberhard Balzer, Bernburg; Frank-J. Schwerin, Blumberg; Achim Kröber, Buttlar; Peter Sitz, Calau; Matthias Winkler, Dresden; Olaf Krause, Eisenhüttenstadt; Jörg Simon, Engelsdorf; Peter und Ulrich Wenschuh, Falkenstein; Ulf Winkler, Frankenberg; Frank und Udo Schulte, Freienbessingen; Volker Pohlers, Greifswald; Dirk Wenzlaff, Grieben; Ragna Siol, Grimma; Jörg Blaurock, Guben; Beate Thomas, Halle; Antje Hüttig, Christina Schmerling, beide Halle-Neustadt; Henrik Hodam, Kaltennordheim; Michael und Jürgen Hoppe, Michael Tix, alle Karl-Marx-Stadt; Susan Hoffmann, Klingenthal; Kay Leitz, Parchim; Steffen Scheithauer, Parey; Antje Reichel, Pirna; Beate Walter, Röbel; Heiner und Anne Ruser, Rostock; Roland Drendel, Senftenberg; Christiane May, Siebenlehn; Jochen Wetzel, Sömmerda; Bert Liebmann, Sondershausen; Wolfgang Vogel, Thalheim; Lothar Matzker, Torno; Johannes Thäter, Weimar; Bert Winkler, Wilkau-Haßlau; Mathias Schwenck, Wittenburg

Für siebenjährige Teilnahme

Uwe Döbler, Arnstadt; Marcus Markardt, Bad Salzungen; Sarah Plietzsch, Stefan Bading, Frauke Wendt, alle Berlin; Alice Kraneis, Bernburg; Christian Gering, Beuditz; Ralf Gröper, Biesenrode; Michael Kremmer, Breitungen; Wolfgang Jäckel, Demitz-Thumitz; POS K. Niederkirchner AG Math., Domersleben; Klaus-Horst Milde, Jens Haufe, Ullrich Hartung, alle Dresden; Andreas Prüver, Eberswalde; Ulrike Rößner, Erfurt; Lutz Küch, Erlau; Kai Mettke, Alexander Schackow, beide Frankfurt (Oder); Hanka Pruditsch, Anke Zimmermann, beide Geithain; Andrea Rueß, Goldberg; Marie-Luise Funk, Greifswald; Sven Rudolph, Großröhrsdorf; Holger Porath, Güstrow; Antje Ohlhoff, Halberstadt; Anja Botzon, Havelberg; Birgit Bremer, Heiligenstadt; Stefan Lippmann, Ilsenburg; Heiko Frank, Gerd F. Reifarth, Rainer Werner, Holger Illgen, alle Karl-Marx-Stadt; Frank Müller, Klaffenbach; Antje Schneider, Leipzig; Hanna Erler, Massanei; Steffen Scharnowski, Möser; Steffen Ewert, Neuhaus; Andreas Suchanow, Neubrandenburg; Karsten Kattner, Pasewalk; Ingo Schubert, Pfaffroda; Joachim Rothe, Pretzschendorf; Dagmar und Birgit Lenz, Reichenbach; Astrid Rogowski, Schwerin; Tanja Reinwarth, Teltow; Torsten Marx, Ueckermünde; Ina Gössinger, Unterbreizbach; Tom Boyks, Vietlübbe; Heike Bauer, alpha Klub Klasse 7 und 8, Witzenburg; Frank Goth, Waltersdorf; Edith Boettcher, Weimar; Christiane Moritz, Wriezen; Kristin Neumann, Zella-Mehlis; Petra Heiliger, Leuna

Für sechsjährige Teilnahme

Matthias List, Altenburg; Gerlind Krolop, Angern; Veneta Türke, Auerbach; Lothar Fischer, Bad Köstritz; Ute Partsch, Bad Salzungen; Veit Eska, Bad Sülze; Sven Hartmann, Axel Schneider, Annette Spangenberg, Eva-Christina Müller, Gerhard Haug, Sven Aßmus, Claudia Lehmann, alle Berlin; Peter Grabs, Bibra; Matthias Hentze, Bleicherode; Carsten Schmidt, Borna; Angela Maier, Bürgel; Olaf Baur, Cottbus; Charis Förster, Crimmitschau; Steffen Eisenblätter, Delitzsch; Eva Faßmann, Dessau; Hans Schwenke, Dohna; Thomas Rotter, Kristina Kutzer, Jens Pfennig, Rita Dach, alle Dresden; Christian Pigorsch, Eisleben; Gerd Kunert, Sven Schmitt, beide Freiberg; André Kratzert, Dürrröhrsdorf; Peter Meja, Wolfgang Sitte, beide Görlitz; Thomas Galley, Golßen; Lars Schiefner, Goseck; Gunthard Stübs, Greifswald; Astrid Gärtner, Großröhrsdorf; Daniela Burkhardt, Guben; Markus List, Grünbach; Regine Mallwitz, Güstrow; Heinz Seifert, Hagenow; Alexander Schmerling, Lutz Eichner, beide Halle-Neustadt; Schulklub der EOS W. Pieck, Heiligenstadt; Maik Otto, Holzthaleben; Klaus Liesenberg, Ilsenburg; Gunnar Clausnitzer, Ivenack; Ulf Prudlo, Uta Störl, beide Jena; Jana Hodam, Kaltennordheim; Uwe Pirl, Karl-Marx-Stadt; Beate Balzer, Lindow; Thomas Rolle, Magdeburg; Manja und Dirk Franke, Mülsen; Bodo Braune, Neuburxdorf; Jens Burmann, Neuhaus; Stefan Warnest und Dirk Welke, Neuruppin; Lars Abbe, Niederorla; Uwe Anke, Pappendorf; Falk Thomas, Neukirch; Claudia Paschwitz, Räckelwitz; Bertram Bracher, Schwarzheide; Reiner Möwald, Sömmerda; Rüdiger Scheller, Teltow; Corinna Krische, Treben; Eric Schneider, Wim Fleischhauer, Katja Ledderhos, alle Vacha; alpha Klub Kl. 6, Vitzenburg; Frederik Schiller, Voigtsgrün; Achim Nahler, Swen Hoffmann, beide Weimar; René Voigt, Wernburg; Arno Barthelmes, Tilo Marschall, beide Zella-Mehlis; Matthias Klinke, Zeulenroda; Diana Michler, Zschortau; Carl Grosch, Wolferstedt

Für fünfjährige Teilnahme

Kathrin Wagner, Antonsthal; Martin Mazurek, Aschersleben; Jochen Sommer, Augsdorf; Kathleen Heilfort, Bad Gottleuba; Michael Henning, Bad Salzungen; Dirk Prandel, Frank Wagner, beide Berlin; Annette Scholz, Blumberg; Ingrid Voigt, Böhlen; Norbert Wölfel, Brandenburg; Cynthia Bengs, Bürgel; Stefan Janke, Burg; Detlef Bartmuß, Burow; Thomas Reißner, Birgit Reißner, Silvio Löffler, alle Cottbus; AG J. Math. O.-Grotewohl-OS, Dreitzsch; Birgit Jeske, Henrike Süß, Frank Naumann, Dorothea Krippstädt, Kerstin Pohle, Cornelia Zillmann, Michael Potthoff, Matthias Overmann, alle Dresden; Matthias Buchmann, Eisenberg; Sven Hauptvogel, Susanne Förster, beide Elsterwerda; Antje Kaufhold, Erfurt; Andreas Kupsch, Finsterwalde; René Franke, Gersdorf; Mathias und Alexander Neuber, Gerbitz; Gernot Meriowsky, Christoph Kothe, Matthias Grau, alle Görlitz; Andrea Landgraf, Gräfenthal; Karsten Hennig, Großörner; Elke Heidemann, Halberstadt; Almuth Berg, Halle; Ralf Gericke, Hainichen; Jan Wohlbold, Heidenau; Roberto Stahl, Herzberg; Stefan Heiber, Heyda; Jan Zimmermann, Michael Köhler, Frank Lampert, Frank Marth, alle Kaltennordheim; Dietmar und André Lindner, Karl-Marx-Stadt; Hans Hermann, Marko Epstude, beide Kirchheilingen; Carsten Blech, Klein Rodensleben; Jörg Anschütz, Lehesten; Cornelia Häfner, Leinefelde; Beate Wasner, Leipzig; Peggy Menzel, Leutersdorf; Andreas Vogel, Limbach-O.; Hardy Dömpke, Löderburg; Ina Büttner, Manja Lehnhuß, beide Lössau; Marco Schmidtgen, Luckenwalde; Giselher Schützer, Magdeburg; Isabelle Nicol, Meiningen; Maren Wolf, Milkau; Karsten Knothe, Merseburg; Lars Fischer, Niederschmalkalden; Katrin May, Olbernhau; Torsten Lüth, Parchim; Felix Kraenz, Picher; Olav Zirnstein, Pirna; Axel Buerke, Potthagen; Ingmar Hellhoff, Prenzlau; Andrea Thiele, Michael Hainke, beide Rackwitz; Antje Westermann, Marco Rößler, beide Radebeul; Ramona Plautz, Ribnitz; Beatrix Lorenz, Riesa; Rainer Walke, Barbara Menzel, beide Rostock; Marcus Spindler, Sangerhausen; Sandra Henschke, Schierke; Marion Walther, Schlottwitz; Andreas Meynhardt, Schmalkalden; Oliver Henze, Schneidlingen; Jens Gläßer, Schönfels; Lars Hantschmann, Seifhennersdorf; Karin Möwald, Sömmerda; Melanie Wilhelm, Alexander Anschütz, Steffi Döll, Rene Scheerschmidt, Karsten Bühner, Katja Usbeck, Katrin Recknagel, alle Steinbach-Hallenberg; Michaela Berndt, Ueckermünde; Anja Frank, Thomas Flatz, Andreas Walter, alle Vacha; Dag Lohse, Vielau; Erik Möbius, Wegeleben; Sven-Uwe Kanngießer, Wolmirleben; Andreas Vogt, Worbis; Ralph Schammer, Zerbst; Claudia Heret, Zwickau; Axel Bichler, Sondershausen

Für vierjährige Teilnahme

Ulrich Egermann, Uta Schmidt, beide Altenburg; Sven Völker, Andreas Henning, beide Bad Salzungen; Monika Döring, Andrea Böttger, Cornelia Hauke, Michaela Hinke, Tanja Jakob, Anke Lindner, Sandra Neumann, Tanja Pfeiffer, Jana Schlüßler, Susanne Schmidt, Yvonne Stolz, Beate Wulf, Sven-Rico Gericke, Michael Köcher, Dominik Pelz, Frank Stehr, alle Berlin; Andreas Filz, Bernburg; Stefan Lenz, Bischofrod; Ingo Moldenhauer, Blankenfelde; Wolfram Schubert, Borna; Roberto Rohmeiß, Breitungen; Frank Wolff, Brotterode; Tilo Bartmuß, Burow; René Aust, Calau; Annett Löwa, Susan Dreyer, Falko Höhnsdorf, alle Cottbus; Thomas Freier, Stefan Heß, beide Creuzburg; Oliver Gehring, Ortrun Grahl, Christina Galikowsky, Jens Römer, Christoph Nitsche, Mario Kübler, Hans-Harald Neschke, alle Dresden; Burgund Berger, Drosa; Jens Renner, Dürrröhrsdorf; Martin Skriewe, Eichicht; Patrick Zacharias, Eilsleben; Thomas Prüver, Eberswalde; Dirk Lange, Gerit Schütze, beide Elsterwerda; Maik Denner, Empfertshausen; Rüdiger Hochheim, René Weilert, Steffen Zillmer, alle Erfurt; Kati Hildebrandt, Andrea Weyh, Corinna Mäder, Jana Reinhardt, Kristin Danz, Christiane Siebert, alle Fambach; Axel Pätzold, Flecken Zechlin; Uwe Danz, Floh; Bert Brause, Frankenberg; Thomas Monecke, Freiberg; Ulrike Hormann, Anja Bayer, Ulrike Bentz, alle Friedland; Torsten Feigl, Gera; Axel Plog, Gevezin; Michaela Große, Gohrau; Swen Ficker, Katja Martin, beide Grünhain; René Kallenbach, Gumpelstadt; Jörn Pamperin, Hagenow; Rainer und Britta Struwe, Halberstadt; Hendrik Speck, Halle; Corinna Wiefel, Silke Großmann, beide Hirzbach; Ulrike Watzke, Hoyerswerda; Peter Zimmermann, Ilmenau; Marco Ringel, Jähnikkendorf; Göran Glockmann, Norbert Kuschel, beide Jena; Thomas Fiekers, Mike Hesse, Martin Groß, Mario Stern, Cornelia Weber, alle Kaltennordheim; Sabine Klinger, Kamenz; Dorit Biedermann, Mirko Niepel, beide Karl-Marx-Stadt; Erika Preuß, Klietz; Katja Geißler, Königs Wusterhausen; Kirsten Völz, Körchow; Carsten Behrendt, Langenweddingen; Tobias Zepter, Langewahl; Liane Marx, Landsendorf; Katja Kasubek, Werner Unger, beide Lehesten; Stefan Suerbier, Leussow; Andrea Hockauf, Jana Ittner, beide Leutenberg; Jana Götz, Katrin Fröhlich, Dirk Schaller, Marian Reißig, alle Lössau; Jörg-Daniel Günter, Ludwigslust; Anke Näther, Lützschena; Christel Fritze, Magdeburg; Kay Pfennighaus, Neubrandenburg; Manuela Grewe, Dörte Busse, beide Neuhaus; Grit Richter, Niendorf; Jens Bastian, Heike Simmank, beide Niesky; Grit Pfützner, Ohorn; Kay Barthel, Oschersleben; Ute Zimmermann, Pauschwitz; Michael Schmarje, Jürgen Rietz, beide Pirna; Kilian Kindelberger, Potsdam; Antje Schleusener, Prag (ČSSR); Katrin Lonnig, Pretitz; Torsten Müller, Maria Meinel, beide Radebeul; Karsten Bossow, Heike Warm, Petra Roßenus, Stefan Maaß, alle Ribnitz; Tobias Franke, Ines Simmank, beide Riesa; Ralf und Dirk Seifert, Rochlitz; Ulrike Häfner, Schmalkalden; Kathrin Biedermann, Schneckengrün; Sabine Voß, Schönberg; Andreas Seifert, Schönebeck; Jana Herrmann, Schorssow; Stefan Erb, Schwallungen; Alexander Otto, Schwanebeck; Peter Hörnich, Schwedt; Simone Puhl, Schweinbach; Lars Prieske, Schwerin; Andreas Pechthold, Spechtsgrün; Jana Ullmann, Spremberg; Tino Sander, Springen; Steffen Müller, Hartmut Iser, Claudia Siegmund, alle Steinbach; Simone Thiem, Yvonne Menz, Sandra Usbeck, Sven Reumschüssel, Sabine Recknagel, alle Steinbach-Hallenberg

Fortsetzung in Heft 3/88

Lösungen

Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 6/87

Ma 5 ■ 2840 Robert las an den ersten zwei Tagen (36 + 48) Seiten = 84 Seiten. Somit sind 84 Seiten gleich dem vierten Teil der Anzahl der Seiten des Buches. Es umfaßt deshalb $4 \cdot 84$ Seiten = 336 Seiten.

Ma 5 ■ 2841 Es sei x die gedachte Zahl; dann gilt
$x + 100 = 10 \cdot x + 10$, also $x = 10$.
Die gedachte Zahl lautet 10.

Ma 5 ■ 2842 Egon hat $18 \cdot 1$ Pf + $36 \cdot 5$ Pf + $54 \cdot 10$ Pf + $9 \cdot 50$ Pf + $9 \cdot 20$ Pf
= (18 + 180 + 540 + 450 + 180) Pf
= 1368 Pf = 13,68 M gespart.

Ma 5 ■ 2843 Angenommen, in jedem der 16 Klassenzimmer befinden sich x Stühle; dann gilt
$16 \cdot (x - 8) = 12 \cdot x$, also $x = 32$.
Die Schule verfügt somit über $(16 \cdot 32 + 38)$ Stühle, also über 550 Stühle.
Oder: (16 − 12) Klassenzimmer = 4 Klassenzimmer. In 4 Klassenzimmern befinden sich $16 \cdot 8$ Stühle, in einem Klassenzimmer $4 \cdot 8$ Stühle = 32 Stühle.

Ma 5 ■ 2844 Das Quadrat enthält die Vierecke (2), (3), (4), (6), (1;2), (2;3), (3;6), (4;5), (5;6), (1;2;3), (4;5;6), (1;2;4;5), (2;3;5;6),
insgesamt also 13 verschiedene Vierecke.

Ma 5 ■ 2845 Wegen $E + E = A$ muß A eine von Null verschiedene gerade Grundziffer sein.
Für $A = 2$ gilt $M = 1$ und $E = 6$.
Wegen $H + H + 1 = H$ gilt $H = 9$.
Für $T = 3$ gilt $P = 7$ und $L = 4$.
Für $T = 8$ gilt $P = 7$ und $L = 5$. Wir erhalten die beiden Lösungen
12 396 + 12 396 = 24 792
und 12896 + 12896 = 25792.
Für $A = 4$ erhalten wir analog dazu zwei weitere Lösungen
24 097 + 24 097 = 48 194
und 24 197 + 24 197 = 48 394.
Für $A = 6$ oder $A = 8$ wäre $M + M = 5$ oder $M + M = 7$, was nicht möglich ist.

Ma 5 ■ 2846 Das Quadrat $ABCD$ hat einen Flächeninhalt von $12 \cdot 12\,\text{cm}^2 = 144\,\text{cm}^2$. Jedes der vier Rechtecke hat deshalb einen Flächeninhalt von $144\,\text{cm}^2 : 4 = 36\,\text{cm}^2$. Die Rechteckseite $\overline{DE}$ habe die Länge x; dann gilt $x \cdot 12\,\text{cm} = 36\,\text{cm}^2$, also $x = 3$ cm.
Dann hat die Rechteckseite $\overline{AE}$ die Länge 12 cm − 3 cm = 9 cm und die Rechteckseite $\overline{BK} = \overline{GK}$ die Länge 9 cm : 2 = 4,5 cm. Die Rechteckseite $\overline{AL}$ habe die Länge y; dann gilt $y \cdot 9\,\text{cm} = 36\,\text{cm}^2$, also $y = 4$ cm; somit hat $\overline{BL}$ die Länge 12 cm − 4 cm = 8 cm.

Ma 6 ■ 2847 Die Tabelle zeigt alle Möglichkeiten der Spielausgänge. Nur die letzte Möglichkeit erfüllt alle Bedingungen. Wegen $18 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 37$ ergeben sich 37 Punkte für die Mannschaft.

Anzahl der gewonnenen	verlorenen	unentschiedenen Spiele
3	1	21
6	2	17
9	3	13
12	4	9
15	5	5
18	6	1

Ma 6 ■ 2848 Da die Hunderterstelle des zweiten Summanden nicht Null sein kann, ist sie gleich 1. Daraus ergeben sich für die Zehner- und Einerstelle der beiden Summanden nur die Ziffer Null und für die Tausenderstelle nur die Ziffer 9.
9909 + 190 = 10 099.

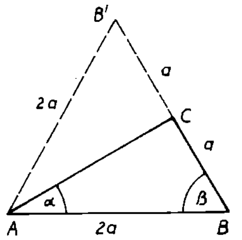
Ma 6 ■ 2849 Wegen $4 \cdot 5 = 20$ muß die zu ermittelnde Zahl durch 20 teilbar sein, also auf die beiden Grundziffern 00, 20, 40, 60 oder 80 enden. Damit die Zahl möglichst klein ist, muß die erste Grundziffer von links 1 sein. Die Zahl 199 980 hat die Quersumme 36; sie ist die kleinste durch 4 und 5 teilbare natürliche Zahl, deren Quersumme 36 beträgt.

Ma 6 ■ 2850 Man beginnt systematisch mit der kleinsten Primzahl und erhält folgende Tabelle

a	b	c	Wertung
2			entfällt, da dann c geradzahlig
3	5	85	entfällt, da 85 keine Primzahl
3	7	79	
3	11	67	
3	13	61	
3	17	49	entfällt, da 49 keine Primzahl
3	19	43	
3	23	31	
3	29	13	entfällt, da $b > c$
5			entfällt, da dann c durch 5 teilbar
7	11	23	

Weitere Möglichkeiten entfallen, da dann stets $b > c$ gilt.
Somit gibt es sechs Zahlentripel, welche die Bedingungen erfüllen.

Ma 6 ■ 2851 Wir konstruieren das Bild



des rechtwinkligen Dreiecks ABC bei Spiegelung an der Geraden AC als Symmetrieachse. Es sei B' Bildpunkt von B. Dann ist das Dreieck ABB' gleichseitig. Somit hat Winkel ABC die Größe $\beta = 60°$ und Winkel BAC die Größe $\alpha = 30°$.

Ma 6 ■ 2852 Aus $b > a$ und $b \cdot c = 6 \cdot a$ folgt $c < 6$, also $a < b < c < 6$ und somit $c \leqq 5$. Wegen $a + b > c$ (Dreiecksungleichung) existiert genau eine Lösung, nämlich
$a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm.

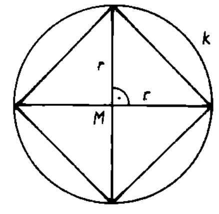
Na/Te 6 ■ 407 500 Umdrehungen bedeuten ein tausendmaliges Durchlaufen des Hubweges.
Damit ergibt sich ein Gesamtweg von
$73\,\text{mm} \cdot 1000 = 73\,000\,\text{mm} = 73\,\text{m}$,
also $\bar{v} = 73\,\text{m}/10\,\text{s} = 7{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Ma 7 ■ 2853 Angenommen, beiden Arbeitsgemeinschaften gehören x Schüler an; dann gehören der AG Modellbau $3 \cdot x$ Schüler, der AG Werken $2 \cdot 3 \cdot x = 6x$ Schüler an, und es gilt
$3x + 6x - x = 32$, $8x = 32$, $x = 4$.
An beiden Arbeitsgemeinschaften nehmen vier Schüler teil.

Ma 7 ■ 2854 Angenommen, es sind s Karten mit dem Vermerk „sehr gut gelöst“, g Karten mit dem Vermerk „gut gelöst“ und n Karten mit dem Vermerk „nicht gelöst“; dann gilt
$g + n = 3$, $s + n = 7$ und $s + g = 8$.
Durch Addition der drei Gleichungen erhalten wir
$2s + 2g + 2n = 18$, $g + s + n = 9$,
also $g = 2$, $s = 6$ und $n = 1$.
Werner erhielt sechs Karten mit dem Vermerk „sehr gut gelöst“, zwei Karten mit dem Vermerk „gut gelöst“ und eine Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Ma 7 ■ 2855 Nach der Dreiecksungleichung gilt $x + y > a$, $x + z > a$, $y + z > a$, also auch $2 \cdot (x + y + z) > 3a$ und
somit $x + y + z > \frac{3}{2} \cdot a$.

Ma 7 ■ 2856 Für den Flächeninhalt des Kreises gilt $A_K = \pi \cdot r^2$, für den Flächeninhalt des Quadrates gilt
$A_Q = 4 \cdot \frac{r \cdot r}{2} = 2 \cdot r^2$. Daraus folgt
$A_Q : A_K = (2r^2) : (\pi r^2) = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}6366$.

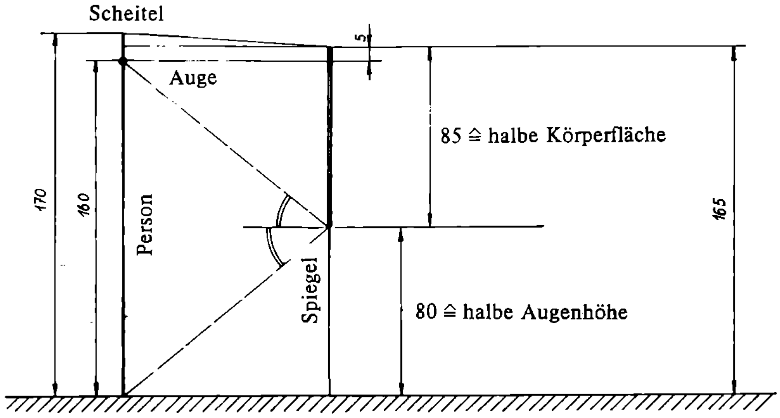


Der Flächeninhalt des Quadrates beträgt somit rund 64 % vom Flächeninhalt des Kreises.

Ma 7 ■ 2857 Der vierstellige Teiler der gesuchten fünfstelligen Zahl möge die Ziffernfolge $\overline{abcd}$ haben. Dann wäre nur $d = 1$ möglich. Ferner ist nur $c = 4$ möglich, da nur $4 \cdot 7$ auf die Ziffer 8 endet. Da a, b, c, d vier aufeinanderfolgende Zahlen sein sollen und die Zahl möglich groß sein soll, gilt $a = 3$ und $b = 2$. Somit gilt $22687 = 7 \cdot 3241$. Jürgen hatte am 22. 6. 87 Geburtstag.

Na/Te 7 ■ 408 Die Strahlungsverluste nehmen mit der Temperaturdifferenz zwischen Topf und Umgebung zu.

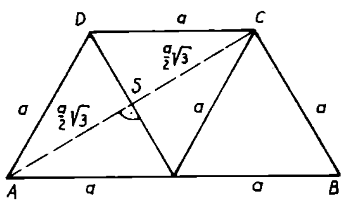
Na/Te 7 ■ 409 Maßangaben in cm



Ma 8 ■ 2858
Eine Lösung lautet 381654729.

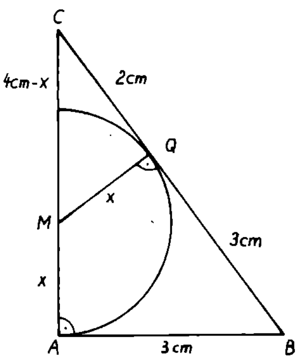
Ma 8 ■ 2859 Das Trapez $ABCD$ läßt sich, wie aus dem Bild ersichtlich, in drei kongruente gleichseitige Dreiecke zerlegen. Die Diagonale $\overline{AC}$ ist doppelt so lang wie die Höhe im gleichseitigen Dreieck, sie beträgt somit

$$\overline{AC} = 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = a \cdot \sqrt{3}$$
$$= 5 \cdot \sqrt{3}\ \text{cm} \approx 8{,}7\ \text{cm}.$$



Ma 8 ■ 2860 Der Halbkreis berühre die Gerade BC im Punkte Q; dann gilt $\overline{BA} = \overline{BQ}$. Der Radius $\overline{MA} = \overline{MQ}$ habe die Länge x; dann hat $\overline{CM}$ die Länge $4\ \text{cm} - x$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$(4 - x)^2 = x^2 + 2^2$, $16 - 8x + x^2 = x^2 + 4$, $12 = 8x$, $x = 1{,}5$. Der Radius des Halbkreises ist 1,5 cm lang.



Ma 8 ■ 2861 Es sei $\overline{abcde}$ eine fünfstellige natürliche Zahl in dekadischer Schreibweise; dann soll gelten: $\overline{abcde} \cdot 4 = \overline{edcba}$. Wegen $4 \cdot a < 10$ und $a \neq 0$ gilt $a = 1$ oder $a = 2$. Da das Produkt $e \cdot 4$ eine gerade Zahl ergibt, entfällt $a = 1$.
Folglich gilt $a = 2$. Wegen $e \neq 0$ und da $e \cdot 4$ auf die Ziffer 2 endet, gilt $e = 3$ oder $e = 8$.
Wegen $a \cdot 4 = 2 \cdot 4 \geqq 8$ entfällt $e = 3$. Folglich gilt $e = 8$. Wir erhalten zunächst $\overline{2bcd8} \cdot 4 = \overline{8dcb2}$. Wegen $b \cdot 4 < 10$ gilt $b = 1$ oder $b = 2$. Wegen $4 \cdot 8 = 32$ (Übertrag 3) und da $d \cdot 4 + 3$ eine ungerade Zahl ist, entfällt $b = 2$. Folglich gilt $b = 1$. Wir erhalten $\overline{21cd8} \cdot 4 = \overline{8dc12}$. Da $d \cdot 4 + 3$ auf die Ziffer 1 endet, gilt $d = 2$ oder $d = 7$. Wegen $21 \cdot 4 = 84$ gilt $\overline{8dc12} > 84000$, also $d \geqq 4$. Somit entfällt $d = 2$; es gilt $d = 7$. Wir erhalten $\overline{21c78} \cdot 4 = \overline{87c12}$. Da $c \cdot 4 + 3$ auf die Ziffer c endet, gilt $c = 9$. Es existiert genau eine Lösung, nämlich $21978 \cdot 4 = 87912$.

Ma 8 ■ 2862 Wir setzen die Variablen e, a, s für den Preis in M für eine Portion Eis bzw. Ananas bzw. Sahne und erhalten folgendes Gleichungssystem:

(1) $e + s = 2{,}15\ \text{M}$
(2) $a + s = 2{,}55\ \text{M}$
(3) $a + e = 2{,}30\ \text{M}$.

Die Addition dieser drei Gleichungen und die anschließende Division durch 2 führt zur Gleichung

(4) $a + e + s = 3{,}50\ \text{M}$.

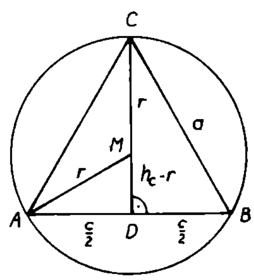
Eine Portion Eis mit Ananas und Sahne kostet 3,50 M.
Aus (4) – (2) folgt $e = 0{,}95$ M, aus (3) folgt dann $a = 1{,}35$ M und aus (2) $s = 1{,}20$ M. Eine Portion Eis kostet 0,95 M, eine Portion Ananas 1,35 M und eine Portion Sahne 1,20 M.

Na/Te 8 ■ 410 Die Last ist 7mal größer als die vorhandene Kraft, also muß der Kraftarm 7mal länger sein als der Lastarm. Man muß also die gesamte Hebellänge in 8 Teile teilen. Der Drehpunkt muß 25 cm von der Last entfernt sein.

Na/Te 8 ■ 411 Die Auftriebskraft beträgt 0,050 N. Die Gewichtskraft des verdrängten Wassers muß deshalb 0,050 N betragen. Aus der Dichte des Wassers ergibt sich, daß $1\ \text{cm}^3$ Wasser die Masse von 1 g hat, d. h. $1\ \text{cm}^3$ Wasser hat die Gewichtskraft 0,01 N. Folglich wirken auf $5\ \text{cm}^3$ 0,05 N. Das Volumen des Körpers beträgt $5\ \text{cm}^3$. Das gleiche Ergebnis erhält man auch, wenn man von der Dichte des Bleis $\left(11{,}3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ ausgeht.
Inhaltliches Lösen: $1\ \text{cm}^3$ hat die Masse von 11,3 g, das sind 0,113 N. Die Gewichtskraft des Körpers ist 5mal so groß wie die von $1\ \text{cm}^3$, folglich beträgt sein Volumen $5\ \text{cm}^3$.

Ma 9 ■ 2863 Es sei a die Länge der Seite des ersten und auch des zweiten Quadrats, b die Länge der Seite des dritten Quadrats in cm. Dann gilt $b = a + 2$ cm. Für die Flächeninhalte gilt nach Aufgabenstellung
$2a^2 + 4\ \text{cm}^2 = (a + 2\ \text{cm})^2$,
$2a^2 + 4\ \text{cm}^2 = a^2 + 4\ \text{cm} \cdot a + 4\ \text{cm}^2$,
$a^2 = 4\ \text{cm} \cdot a \,|\, : a (a \neq 0)$
$a = 4$ cm. Es folgt $b = 6$ cm. Die Länge der Seite eines der zwei kongruenten Quadrate beträgt 4 cm, die des dritten Quadrates 6 cm. Die Probe bestätigt die Richtigkeit der Lösung.

Ma 9 ■ 2864 Es sei M der Mittelpunkt des Umkreises und D Fußpunkt der Höhe h_c; nach dem Satz des Pythagoras gilt
$\left(\frac{c}{2}\right)^2 + (h_c - r)^2 = r^2$, also
$\frac{1}{4} c^2 + (4 - 4{,}5)^2 = 4{,}5^2$, $c^2 = 80$.



$c = 4 \cdot \sqrt{5}$. Daraus folgt für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC
$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{5} \cdot 4\ \text{cm}^2$
$= 8 \cdot \sqrt{5}\ \text{cm}^2 \approx 17{,}9\ \text{cm}^2$ Ferner gilt
$a^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + h_c^2$, $a^2 = 36\ \text{cm}^2$, $a = 6$ cm.
Für den Umfang des Dreiecks ABC gilt somit $u = 2a + c$,
$u = (2 \cdot 6 + 4 \cdot \sqrt{5})\ \text{cm} \approx 20{,}9\ \text{cm}$.

Ma 9 ■ 2865 Es seien $n - 2$, $n - 1$, n, $n + 1$, $n + 2$ fünf aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, wobei $n \geqq 3$ gilt. Ihre Summe beträgt $5n$. Daraus folgt
$(n - 2)(n - 1)\,n(n + 1)(n + 2)$
$= 224 \cdot 5n$, und wegen $n \neq 0$ gilt
$(n - 2)(n + 2)(n - 1)(n + 1) = 1120$,
$(n^2 - 4)(n^2 - 1) = 1120$,
$n^4 - 5n^2 - 1116 = 0$.
Wir setzen $n^2 = t$ und erhalten
$t^2 - 5t - 1116 = 0$, also $t_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \frac{67}{2}$,
$t_1 = 36$ und $t_2 = -31$ (entfällt, da negativ). Wegen $n^2 = t = 36$ gilt nur $n = 6$. Die fünf Zahlen lauten 4, 5, 6, 7 und 8.

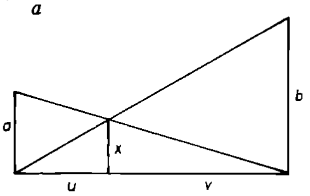
Ma 9 ■ 2866 Angenommen, die sechs

Spielsteine wären sämtlich verschiedenfarbig, dann gäbe es
$6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$
Möglichkeiten verschiedener Anordnung in jeweils einer Reihe. Nun ist $720 = 15\cdot 48$. Wären es 1 weißer und 5 schwarze Steine oder umgekehrt, dann müßte man 720 durch 5! (5! = 120) dividieren und erhielte 6 Möglichkeiten. Wären es 2 weiße und 4 schwarze Steine oder umgekehrt, so müßte man die 720 Möglichkeiten durch 2! = 2 Möglichkeiten und auch noch durch die 4! = 24 Möglichkeiten, also insgesamt durch $2\cdot 24 = 48$ Möglichkeiten dividieren und erhielte 15 Möglichkeiten. Das Kind hatte entweder 2 weiße und 4 schwarze oder 2 schwarze und 4 weiße Spielsteine.
(Es handelt sich um eine Permutation mit Wiederholung von 6 Elementen, wobei ein Element zweimal und ein weiteres Element viermal auftritt. Es gilt

$$^{(2,4)}P_6 = \frac{6!}{2!\;4!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 15)$$

Ma 9 ■ 2867 Nach dem Strahlensatz gilt:
(1) $x : b = u : (u+v)$ bzw.
$x(u+v) = bu$ und
(2) $x : a = v : (u+v)$ bzw.
$x(u+v) = av$.
Aus (1) und (2) folgt nun $av = bu$ bzw. (3) $v = \frac{bu}{a}$. Nach (1) gilt $x = \frac{bu}{u+v}$ und nach Einsetzen von (3) folgt

$$x = \frac{bu}{u + \frac{bu}{a}};\; x = \frac{abu}{au+bu};\; x = \frac{ab}{a+b}.$$



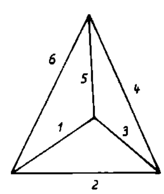
Na/Te 9 ■ 412 Ges.: c_{Cu}
Geg.: $m_{Cu} = 0{,}5$ kg, $m_{Kal} = 0{,}06$ kg, $m_{Wasser} = 0{,}4$ kg; $\vartheta_1 = 15\,°C$, $\vartheta_2 = 100\,°C$, $\vartheta_3 = 24{,}4\,°C$.
Aus Tafelwerk: $c_{Al} = 0{,}90\,\frac{kJ}{kg\cdot K}$;
$c_{Wasser} = 4{,}19\,\frac{kJ}{kg\cdot K}$
abgegebene Wärme
= aufgenommene Wärme
$(\vartheta_2 - \vartheta_3)\cdot c_{Cu}\cdot m_{Cu} = (m_{Kal}\cdot c_{Al} + m_{Wasser}\cdot c_{Wasser})\cdot(\vartheta_3 - \vartheta_1)$;
$c_{Cu} = 0{,}43\,\frac{kJ}{kg\cdot K}$.

Na/Te 9 ■ 413 Der Gesamtwiderstand muß 110 Ohm sein; daraus folgt der Widerstand des Parallelgliedes mit 80 Ohm, des einen Zweiges mit 480 Ohm und des anderen Zweiges mit 96 Ohm. Also beträgt der Widerstand $R_x = 36$ Ohm.

Ma 10/12 ■ 2868 Es sei $1000a + 100b + 10c + d$ eine beliebige vierstellige Zahl mit $1 \leqq a \leqq 9$, $1 \leqq b \leqq 9$, $1 \leqq c \leqq 9$ und $0 \leqq d \leqq 9$. Die nach Aufgabenstellung zu bildende Summe ist dann
$1000a + 100b + 10c + d + a + b + c + d + a + d = 5900$ bzw.
$1002a + 101b + 11c + 3d = 5900$.
Nun muß $a = 5$ gelten, denn für $a > 5$ wäre $1002a > 5900$ und für $a < 5$ müßte $101b + 11c + 3d \geqq 1892$ sein, was wegen der Bedingungen für b, c und d nicht möglich ist. Aus $a = 5$, d.h. aus $1002a = 5010$ folgt nun $101b + 11c + 3d = 890$.
Es muß $b = 8$ sein, denn für $b > 8$ ist $101b > 890$ und für $b < 8$ müßte $11c + 3d \geqq 183$ sein, was wegen der Bedingungen für c und d nicht möglich ist. Durch weitere analoge Überlegungen findet man, daß die Zahl 5859 die einzige vierstellige Zahl mit der geforderten Eigenschaft ist.

Ma 10/12 ■ 2869 Die Aussage ist falsch. Der Beweis erfolgt durch die Angabe eines Gegenbeispiels:
Wenn $n = 59$, so
$2n - 3 = 115$ und $2n + 3 = 121$. Sowohl 115 als auch 121 ist keine Primzahl. Folglich ist die Aussage falsch.

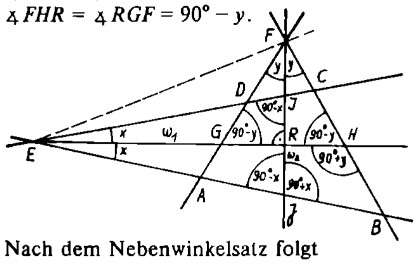
Ma 10/12 ■ 2870 a) Es können genau zwei unterschiedliche Kantenmodelle hergestellt werden. Entweder die zwei weißen Kanten haben genau einen oder keinen Punkt gemeinsam.
b) Es gibt 12 Möglichkeiten, das Modell verschieden aufzustellen, wenn die weißen Kanten genau einen Punkt gemeinsam haben und noch einmal drei Möglichkeiten, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben, also insgesamt 15 Möglichkeiten.



Zur Veranschaulichung seien in dem folgenden Bild alle Kanten numeriert. Die folgenden Zahlenpaare sollen stets die Nummern der weiß gefärbten Kanten bedeuten:
(1;2), (1;3), (1;5), (1;6),
(2;3), (2;4), (2;6),
(3;4), (3;5),
(4;5), (4;6),
(5;6),
(1;4), (2;5), (3;6).

Ma 10/12 ■ 2871 Das Volumen einer Kugel K mit dem Radius r berechnet man nach der Formel $V_K = \frac{4\cdot\pi r^3}{3}$.
Der einbeschriebene Doppelkegel hat unter den Bedingungen der Aufgabe die Höhe r. Der Radius seiner Grundfläche sei mit r_1 bezeichnet.
Dann gilt für sein Volumen
$V_{DK} = \frac{\pi\cdot r_1^2\cdot r\cdot 2}{3}$. Nach Aufgabenstellung gilt die Beziehung
$2V_{DK} = V_K$, also $r_1^2\cdot r = r^3$, $r_1^2 = r^2$, also $r_1 = r$.
Der Radius der gemeinsamen Kegelgrundfläche ist gleich dem Radius der Kugel.

Ma 10/12 ■ 2872 Da w_1 und w_2 Winkelhalbierende sind, gilt $\sphericalangle BEH = \sphericalangle HEC = x$ und $\sphericalangle AFJ = \sphericalangle JFB = y$. Dabei ist $x + y < \sphericalangle REF + \sphericalangle EFR = 90°$.
Wegen des Innenwinkelsatzes für Dreiecke ergibt sich:
$\sphericalangle EIR = \sphericalangle RJE = 90° - x$ und
$\sphericalangle FHR = \sphericalangle RGF = 90° - y$.



Nach dem Nebenwinkelsatz folgt
$\sphericalangle BJR = 90° + x$ und $\sphericalangle RHB = 90° + y$.
Nach dem Innenwinkelsatz für konvexe Vierecke erhalten wir $\sphericalangle GDI = 90° + x + y$ und $\sphericalangle HBJ = 90° - x - y$.
Die Summe der beiden gegenüberliegenden Winkel $\sphericalangle GDI$ und $\sphericalangle HBJ$ des Vierecks $ABCD$ beträgt demnach 180°, und damit ist $ABCD$ ein Sehnenviereck.

Na/Te 10/12 ■ 414 Bremszeit t_1: Aus $s_1 = \frac{a_1}{2}\cdot t_1^2$ folgt $t_1 = 31{,}6\,s \approx 32\,s$.
Anfahrzeit t_3: Aus $v_3 = a_2\cdot t_3$ folgt $t_3 = 70{,}4\,s \approx 70\,s$.
Der dabei zurückgelegte Weg s_3:
Aus $v_3^2 = 2\cdot a_2\cdot s_3$ folgt
$s_3 = 371\,m \approx 370\,m$.
Gesamtzeit t: $t = t_1 + 75\,s + t_3 = 177\,s$;
Gesamtweg s: $s = 100\,m + 370\,m = 470\,m$.

Na/Te 10/12 ■ 415 Ges.: V Geg.:
$U = 100\,V$; aus Tabelle: $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,A\cdot s$; $m = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ kg;
$m\cdot\frac{v^2}{2} = e\cdot U$; $v \approx 8{,}4\cdot 10^3\,\frac{km}{s}$.

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Unter Verwendung eures Rechners werdet ihr in der Lage sein zu überprüfen, daß
$\sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{8+\sqrt{55}}$ und
$\sqrt{7+\sqrt{33}} + \sqrt{6+\sqrt{35}}$ annähernd gleich sind. Für beide (Terme) ist zu beweisen, daß sie genau gleich sind oder zu entscheiden (mit Beweis), welches der größere ist.
Lösung: Es gilt $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$ mit $a, b \in N$ und folglich, daß

$$\sqrt{\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{2}}.$$

Daraus ergibt sich für unsere Aufgabe:

$$\sqrt{5+\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{3+7}{2} + \sqrt{3\cdot 7}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}},$$

und ebenso $\sqrt{8+\sqrt{55}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{11}}{\sqrt{2}}$;

$$\sqrt{7+\sqrt{33}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{2}};$$

$$\sqrt{6+\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}.$$

Es folgt, daß beide gegebenen Terme gleich $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{11})$ sind.

▲2▲ Der Tuberkelbazillus hat eine Länge von 4 µm. Welche Vergrößerung muß man wählen, damit sein Bild eine Länge von 2 mm hat?

Lösung: $\frac{4 \cdot 10^{-3}\,\text{mm}}{2\,\text{mm}} = \frac{1}{x}$, d. h. $x = 500$.

Man benötigt eine 500fache Vergrößerung.

▲3▲ Gehe von π nach E auf die Reise! Hierzu ist es notwendig, die Buchstaben derart durch Grundziffern zu ersetzen, daß die angegebenen Rechnungen stimmen. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Grundziffern, verschiedene bedeuten verschiedene Grundziffern.

Lösung: $6:2 = 3+1 = 4+1 = 5+3 = 8-7 = 1$.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

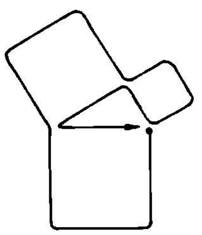
Zahlenlogik

Es fehlt eine Neun. (Summe der beiden unteren Zahlen geteilt durch Quadratwurzel aus der oberen Zahl.)

Ein schlauer Händler

Der Händler entnimmt dem 1. Sack 1 Goldstück, dem 2. Sack 2 Goldstücke, dem 3. Sack 3 Goldstücke usw. Die insgesamt 55 Goldstücke legt er auf die Waage. Sie würden, wären sie alle echt, genau 550 Gramm wiegen. Sind es nur 540 Gramm, so sind die Goldstücke des letzten Säckels falsch, bei 541 Gramm ist es der vorletzte Sack, der die falschen Münzen enthält usw.

In einem Zug



Drei Logeleien

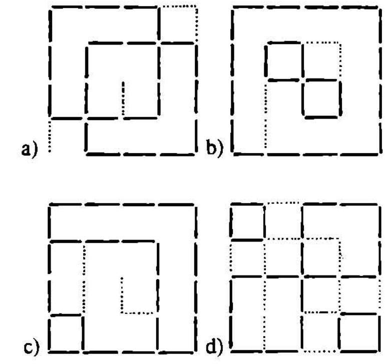
a) Aus den 5 Kisten wurden $5 \cdot 60$ Äpfel = 300 Äpfel herausgenommen. Diese Menge entspricht dem Inhalt von 3 Kisten, da nur soviel Äpfel übrig blieben, wie vorher in zwei Kisten waren. Folglich befanden sich in jeder Kiste anfangs genau 100 Äpfel. Insgesamt waren daher anfangs genau 500 Äpfel vorhanden.

b) Cornelias Meinung ist falsch; denn greift man 12 Kugeln heraus, können jeweils 4 von roter, blauer bzw. gelber Farbe sein. Birgits Meinung ist wahr; denn wenn unter beliebigen 12 von 13 Kugeln keine 5 von gleicher Farbe sind, müssen jeweils 4 von roter, blauer bzw. gelber Farbe sein. Dann hat aber die 13. Kugel ebenfalls eine dieser drei Farben. Von dieser Farbe existieren mithin unter den 13 Kugeln dann 5. Ankes Meinung ist ebenfalls wahr; denn wenn schon 13 Kugeln genügen, um mit Sicherheit zu erreichen, daß sich unter ihnen 5 von gleicher Farbe befinden, so erst recht 15 Kugeln.

c) Alle möglichen voneinander verschiedenen Verteilungen gibt das folgende Schema an. Dabei bedeuten: r = rote Kugel, s = schwarze Kugel, w = weiße Kugel.

	A	B
1.	rrr	rsww
2.	rrs	rrww
3.	rrw	rrsw
4.	rsw	rrrw
5.	rww	rrrs
6.	sww	rrrr

Hölzchenspiele

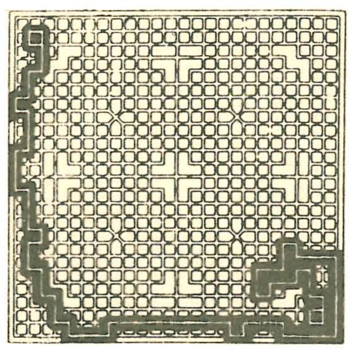


Aus dem Geschirrschrank

Bezeichne: Flasche = f; Glas = g; Krug = k; Teller = t.

Dann gilt: f + g = k (1),
f = g + t (2), 2k = 3t (3)
mit (2) in (1) folgt: 2g + t = k;
das in (3) ergibt:
4g + 2t = 3t, also: t = 4g;
damit in (2): f = 5g, bzw. in (3)
2k = 12g, also k = 6g.
Die Masseverhältnisse sind damit
g : t : f : k = 1 : 4 : 5 : 6.

Labyrinth



Kryptarithmetik

a)

290	−	253	=	37
+		−		x
360	:	15	=	24
650	+	238	=	888

b)

4	·	9	:	3	+	20	=	32
8	:	2	+	36	−	6	=	30
6	·	2	+	12	:	2	=	18
18	−	13	+	47	+	28	=	80

Der neue Tresor

Folgende Gleichungen können aufgestellt werden:

(1) $X + Y + Z = 18$
(2) $A = 100X + 10Y + Z$
(3) $B = 3A = 300X + 30Y + 3Z$
(4) $C = B - 99 = 300X + 30Y + 3Z - 99$
(5) $C = 100Z + 10Y + X$

Daraus folgt: $A = 297$; $B = 891$; $C = 792$.

Lösungen zu: Drei harte Nüsse
Heft 6/87

▲1▲ Setze 12.00 Uhr als Zeitpunkt 0 und wähle die Zeiteinheit 1 ≙ 5 min, also 1 h ≙ 12; 16.05 Uhr ≙ $4 \cdot 12 + 1 = 49$. Bezeichne v_A, v_B die Geschwindigkeiten der von A bzw. B gestarteten Autos und t_{A1}, t_{A2} die Fahrzeiten des in A gestarteten Autos für die Strecken $3\overline{AT}$ bzw. $\overline{TB}$. Analog seien t_{B1}, t_{B2} die Zeiten des in B gestarteten Autos für die Strecken $\overline{BT}$ bzw. $\overline{TA}$. Dann gilt:

$$v_A = \frac{\overline{AT}}{49} \quad v_A = \frac{\overline{TB}}{x-49}$$
$$v_B = \frac{\overline{TB}}{25} \quad v_B = \frac{\overline{AT}}{x-49}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\overline{AT}}{49} = \frac{\overline{TB}}{x-49} \text{ und } \frac{\overline{AT}}{x-49} = \frac{\overline{TB}}{25}$$

also $\frac{49}{x-49} = \frac{x-49}{25}$ bzw.

$$(x-49)^2 = 49 \cdot 25.$$

Mithin ist $x - 49 = 35$,
d. h. $x = 7 \cdot (5+7) = 7 \cdot 12$.

Da 123 Zeiteinheiten 1 h entsprechen, ist $x = 7$ h. Die Autos treffen 19.00 Uhr an ihren Zielorten ein.

▲2▲ Mit dem Umschalter für Winkelmaße stelle man *RAD* ein. Anschließend gebe man irgendeine Zahl in den Schulrechner (z. B. 0) ein. Nun drücke man die Taste $\boxed{\cos}$ so lange, bis sich der Wert in der Anzeige nicht mehr ändert. Angezeigt wird dann 0,73908, durch Multiplikation mit 10 werden weitere Stellen sichtbar gemacht: $x^* \approx 0{,}73908513$. Man nennt x^* einen *Fixpunkt* der Gleichung $x = \cos x$.

▲3▲ Ihr erkennt schnell, daß die Gleichungen $x = \sin x$ und $x = \tan x$ die Lösung $x^* = 0$ besitzen. Wie auch immer ihr beginnt, es gibt kein x mit $x = e^x$. Die Gleichung $x = \frac{1}{x}$ ist auf diesem Wege nicht lösbar. Dagegen könnt ihr die Gleichung $x = e^{-x}$ lösen: Nach Vorgabe einer ersten Zahl sind die 3 Tasten $\boxed{+/-}$ $\boxed{F}$ $\boxed{e^x}$ jeweils zu betätigen, bis sich nach dem Drücken der $\boxed{e^x}$-Taste immer der gleiche Wert ergibt.

Wir erkennen: $x^* \approx 0{,}56714$ bzw. $x^* \approx 0{,}56714329$. Analog kann die Gleichung $x = 10^{-x}$ gelöst werden ($x^* \approx 0{,}399013$). Unser Leser Herr E. Beier aus Zörbig hat festgestellt, daß man beim wiederholten Betätigen der Tasten $\boxed{\sin}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{\tan}$, die beim SR 1 ja nebeneinander angeordnet sind, immer den gleichen Wert ($x^* \approx 0{,}8757798$) erhält. Hier ist gerade die Gleichung $x = \tan(\cos(\sin x))$ gelöst worden!

Lösung zu: Wissen und Rechnen
Heft 1/88

$693 \cdot 155 = 107\,415$

Sowas gibt's doch gar nicht!

Bild 1a zeigt einen Körper, der aus drei Quadern zusammengesetzt ist. Man könnte ein Modell aus drei Holzleisten mit quadratischem Querschnitt basteln. Halt! Hier stimmt doch irgend etwas nicht! Ein dreieckiger Rahmen, der aus Vierkantleisten zusammengefügt ist, müßte doch etwa so wie im Bild 1b aussehen!
Was nun am Bild 1a nicht stimmt, kann man leicht feststellen, wenn man mit einem Stück Papier irgendeine der drei Ecken verdeckt und sich den weiteren Verlauf der jetzt unvollständigen Quader vorstellt. Deckt man beispielsweise die rechte Ecke der Figur im Bild 1a ab, so müßten diese Quader etwa so verlaufen, wie es im Bild 1c dargestellt ist.
Einen Körper wie im Bild 1a gibt es also nicht, ebensowenig wie den im Bild 1d. In der *alpha* wurden bereits einige solche *unmöglichen Körper* vorgestellt (z. B. in Heft 1/85). Wir wollen hier einige Tricks erläutern, mit denen man solche Figuren konstruieren kann.
Zunächst erinnern wir uns: Projektionen bilden räumliche Gebilde (z.B. Körper) auf eine Ebene ab. Dabei entstehen mehr oder weniger anschauliche Bilder der räumlichen Originale.
Auf diese Weise wird zwar jedem Körper ein ebenes Bild zugeordnet, jedoch ist nicht jede ebene Figur Bild eines Körpers bei irgendeiner Abbildung. Zeichnet man aber geschickt ebene Figuren, die keinem räumlichen Original entsprechen, so ist der Betrachter dennoch versucht, sie räumlich zu interpretieren, d.h. in ihnen einen Körper o.ä. zu erkennen. Wie kann man beim Erfinden solcher Figuren vorgehen?
Nehmen wir an, zwei kongruente Quader (veranschaulicht durch zwei Holzleisten mit quadratischem oder rechteckigem Querschnitt) liegen irgendwie im Raum. Sie sollen aber nicht parallel liegen, sondern so, daß sich ihre Bilder bei Parallelprojektion in wenigstens einer Rißebene (z. B. im Grundriß) überschneiden. Nun läßt sich vorstellen, daß die beiden Quader bei geeigneter schräger Parallelprojektion Bild 2a ergeben. Dieses Bild sagt jedoch nichts über die wahre räumliche Lage der Quader, also beispielsweise über ihren wahren Abstand voneinander, aus. Das wird besonders deutlich, wenn man nur die äußeren Umrißlinien des Bildes 2a zeichnet und die davon eingeschlossene Fläche (als Schattenfläche) betrachtet, wie es Bild 2b zeigt. So paßt der Umriß der Figuren in den Bildern 2c und 2d ebenso in das Schattenbild 2b hinein wie der Umriß der Figur im Bild 2a.
Bekanntlich haben die Bilder zweier nicht paralleler Geraden in zumindest einer Rißebene einen Schnittpunkt. Umgekehrt müssen Schnittpunkte in einem durch Projektion entstandenen Bild aber nicht immer einem tatsächlichen Schnittpunkt im Original entsprechen. Wie die Beispiele zeigen, ist es für die eindeutige räumliche Interpretation eines Projektionsbildes unbedingt notwendig, den im Bild auftretenden Schnittpunkten besondere Aufmerksamkeit zu widmen. Fehlinterpretationen wird schon vorgebeugt, wenn man sichtbare bzw. verdeckte Körperkanten im Bild deutlich kennzeichnet. Dadurch schließt das Bild 2a schon Körper wie in den Bildern 2c oder 2d aus (bei denen auch die vertikalen Schnittkanten auf die gegenseitige Durchdringung der beiden Quader hinweisen). Er ermöglicht aber dennoch keine Aussage über den Abstand der beiden Quader im Raum. Um diesen Abstand zu veranschaulichen, fügen wir jetzt einen dritten Quader senkrecht zu den beiden gegebenen so ein, daß er die Deckfläche des unteren mit der Grundfläche des oberen Quaders verbindet, und erhalten Bild 2e. Dabei haben wir angenommen, daß sich die beiden Quader nicht berühren, was nach Bild 2a durchaus möglich wäre.
Bis hierher haben wir uns streng an die Grundregeln der Darstellenden Geometrie gehalten. Wir betrachten nochmals das Bild 2e und stellen fest, daß dieses Bild richtig ist.
Was geschieht aber, wenn wir im Bild 2e die Kreuzungsstelle der beiden ursprünglichen Quader so umfrisieren, wie es im Bild 2c dargestellt ist? Dann entsteht Bild 2f.
Jetzt sind wir also bei dem *Trick* angelangt! Was haben wir getan? Wir haben zwei sich im Raum weder berührende noch durchdringende Körper so projiziert, daß sich ihre Bilder überschneiden. Ihren räumlichen Abstand haben wir mittels eines eingefügten dritten Körpers (Distanzstück) angedeutet. Und dann haben wir diesen räumlichen Abstand ignoriert und die Überschneidungsstelle unter Ausnutzung des zu den Bildern 2a bis 2c Gesagten zur Durchdringung manipuliert.
Es ist nun kein Problem, aus dem Bild 2f das Bild 1a zu gewinnen. Der ganze *unmögliche Körper* beruht also auf der zielgerichteten, absichtlichen Mißachtung der Regeln der Darstellenden Geometrie. Dabei haben wir Details durchaus richtig dargestellt, aber im Ganzen ergeben sich Widersprüche.
Nachdem wir nun wissen, wie Bild 1a entstanden ist, sehen wir uns Bild 3a an. Hier wurde genauso verfahren. Der Unterschied besteht lediglich darin, daß sich zwei im Raum parallele Quader im Projektionsbild mit einem dritten überschneiden, wobei der räumliche Abstand der parallelen Quader wieder durch ein eingefügtes vertikales Distanzstück verdeutlicht wird. Die in der Mitte des Bildes 3a dargestellte Überschneidung kann natürlich auch so verändert werden, daß der vertikale Quader nicht vor, sondern hinter dem anderen Quader erscheint. Man kann diese Stelle aber auch als Durchdringung darstellen (Bild 3b).
Interessante Varianten ergeben sich, wenn man die Ecken der Figuren in den Bildern 1a bzw. 3a durch Kreisbögen ersetzt, wie es in den Bildern 1d und 3c gezeigt ist. Diese Gebilde erscheinen wesentlich realer, sehen sie doch so aus, als seien sie nur durch entsprechendes Verdrehen oder Verwinden eines in sich geschlossenen ringähnlichen Körpers entstanden.
Verfolgt man im Bild 1d den Verlauf der Kanten, so stellt man überraschenderweise fest, daß die Kanten einen in sich geschlossenen Linienzug ergeben. Verfolgt man den Verlauf der Begrenzungsflächen, so ergibt sich eine in sich geschlossene Fläche (Bild 1e soll das veranschaulichen).
Das heißt aber: Gäbe es einen Körper gemäß Bild 1d, so hätte dieser nur eine Kante und nur eine Fläche. Dennoch stellt Bild 1d *kein Möbiussches Band* dar, denn diese ist ja ein existierendes räumliches Gebilde, von dem man sich leicht ein Modell anfertigen kann.
Bleiben wir bei unseren *unmöglichen Gebilden*. Bild 4 zeigt eine Kombination aus zwei Figuren des Bildes 1a. Daß im Bild 5 lediglich die Überschneidungsstellen falsch dargestellt sind, indem nämlich die sichtbaren mit den verdeckten Kanten vertauscht wurden, ist sofort erkennbar. Der Effekt kommt auch hier dadurch zustande, daß der vertikale räumliche Abstand durch Quader als Distanzstück dargestellt wurde. Im Bild 6 wurden Überschneidungen als Durchdringungen gezeichnet.
Bei der Figur 7a wurde die Figur aus Bild 1a in das Bild eines Ringes mit quadratischem Querschnitt (d. h. in diesem Fall eines Körpers, der durch Rotation eines Quadrats Q um eine außerhalb von Q verlaufende, in der Ebene von Q liegende Achse erzeugt wird) gezeichnet. Figur 7b zeigt eine richtige Darstellung, allerdings so gedreht, daß die mögliche Überschneidung im Projektionsbild außerhalb der Zeichnung liegt.

Zum Abschluß möge sich der Leser überlegen, wie das Bild 8 entstanden ist und ob das Bild 9 ebenfalls mit den hier erklärten Kniffen gezeichnet werden kann.
Und wenn sich dieser oder jener unserer Leser ein besonders ausgefallenes *unmögliches Gebilde* einfallen lassen sollte, darf er es getrost an die Redaktion *alpha* einsenden.

A. Körner

Bild 1a

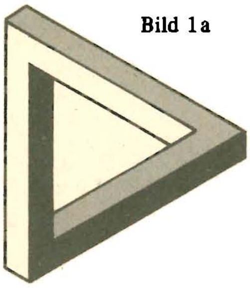


Bild 1c

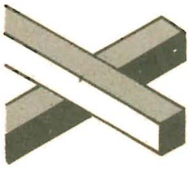


Bild 1b

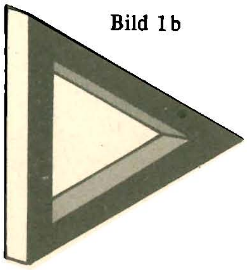
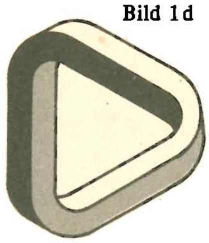


Bild 1d



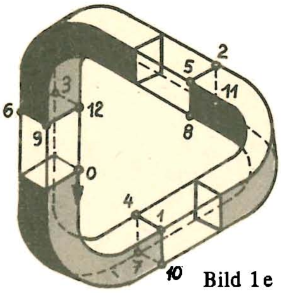


Bild 1e

Bild 2b

Bild 2a

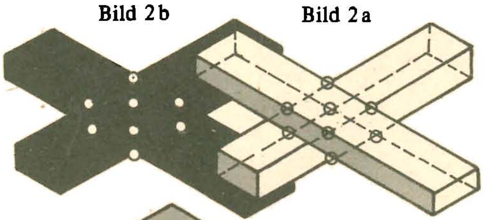


Bild 2c

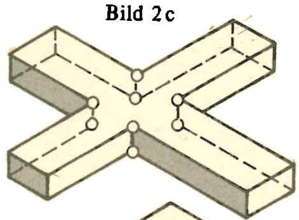


Bild 2d

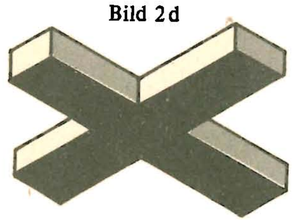


Bild 2e

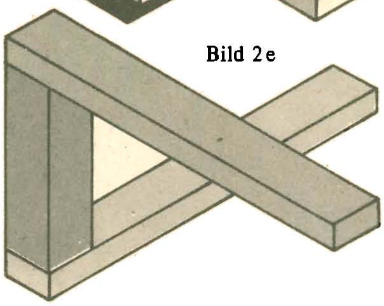


Bild 2f

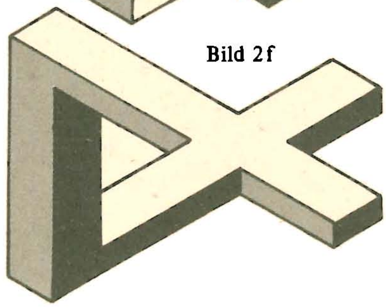


Bild 3a
Bild 3b

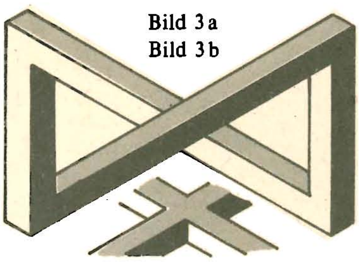


Bild 4

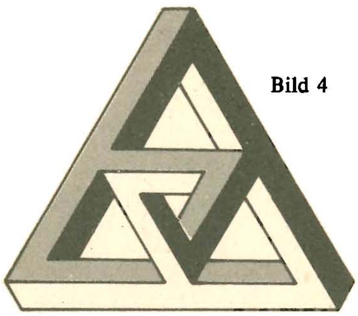


Bild 3c

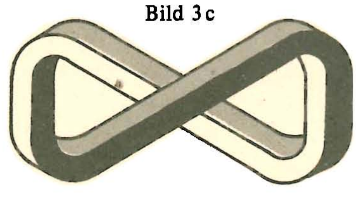


Bild 5

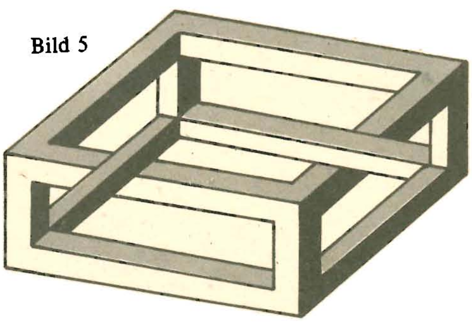


Bild 9

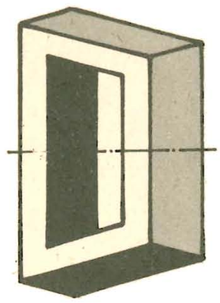


Bild 6

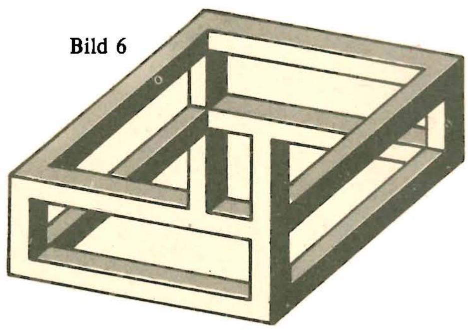


Bild 7a

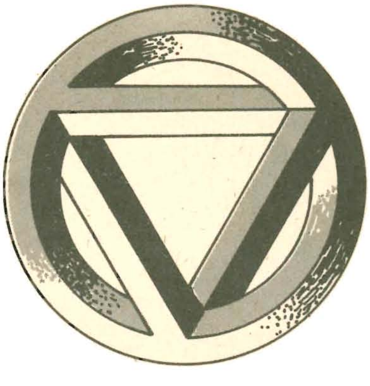


Bild 8

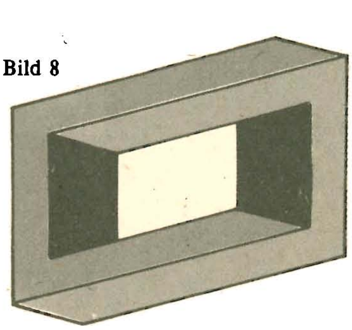
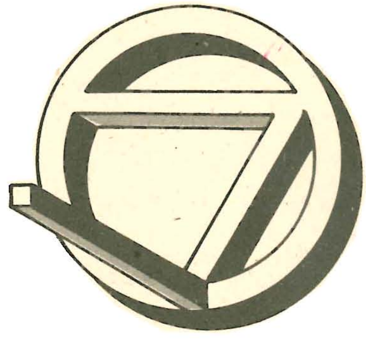
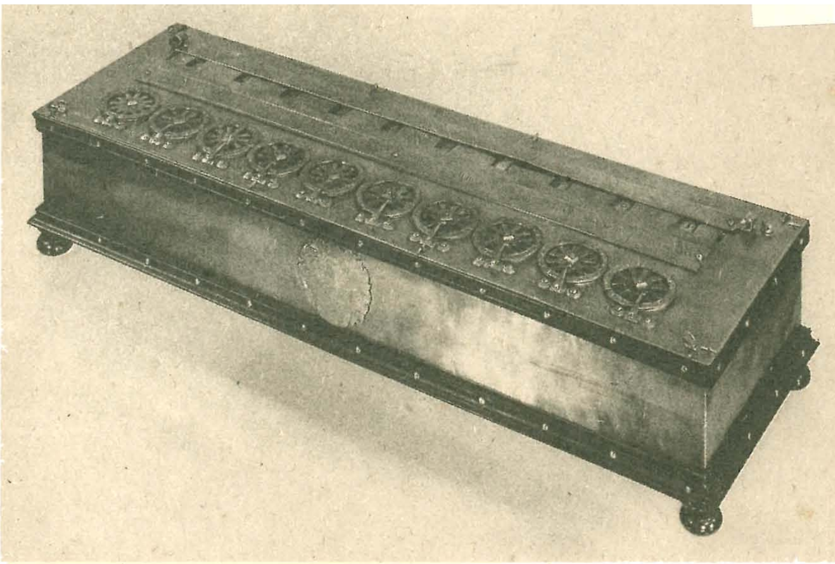


Bild 7b





Eine Rechenmaschine von Blaise Pascal aus der Zeit um 1650

im Staatlichen Mathematisch-Physikalischen Salon

Das Rechnen gehört zu einer der frühesten Betätigungen des Menschen. Mit der Entwicklung von Handwerk, Handel und Geldwirtschaft sowie der Wissenschaften wuchsen stetig die Anforderungen an den Umgang mit Zahlen, deren Speicherung und an die Durchführung bestimmter Rechenoperationen. Bereits frühzeitig versuchte der Mensch sich bei der Durchführung einfacher Rechenoperationen entsprechender Hilfsmittel zu bedienen. Als Beispiele sollen das Benutzen der Finger, kleiner Steinchen oder Muscheln zum Addieren und Subtrahieren, das Speichern von Zahlen durch Einkerben in Hölzer oder Knochen oder die Schaffung des Rechenbrettes angeführt werden. Aber erst im 17. Jahrhundert entstanden vereinzelt Anforderungen, die eine Mechanisierung der vier Grundrechenoperationen wünschenswert erscheinen ließen. Inzwischen war auch die feinmechanisch-handwerkliche Technik so weit entwickelt, daß die Voraussetzungen für den Bau mechanischer Rechenmaschinen gegeben waren.

Die Geschichte der mechanischen Rechenmaschine beginnt mit der ersten 1623 von Wilhelm Schickard (1592 bis 1635) konstruierten und von einem damit beauftragten Mechaniker gebauten Maschine, von der aber kein Originalexemplar erhalten geblieben ist. Sie war auf Anregung des berühmten Astronomen Johannes Kepler (1571 bis 1630) zur Erleichterung seiner umfangreichen astronomischen Berechnungen entstanden. Infolge ungünstiger Umstände (Dreißigjähriger Krieg) geriet die Erfindung in Vergessenheit.

Als nächster beschäftigte sich der französische Mathematiker, Physiker und Philosoph Blaise Pascal (1623 bis 1662) mit der Konstruktion und dem Bau von Rechenmaschinen. Die ersten Exemplare entstanden zwischen 1640 und 1645 mit dem Ziel, die umfangreichen Rechenarbeiten seines Vaters, der als Finanzverwalter für die obere Normandie tätig war, zu erleichtern. Die Maschinen waren daher nur für Addition und Subtraktion konzipiert. Ihre Herstellung erfolgte wahrscheinlich durch einen Uhrmacher in Rouen. Im Jahre 1649 erhielt Pascal ein königliches Privileg für die Herstellung seiner Rechenmaschinen. Von ihnen sind 9 Exemplare erhalten geblieben, davon nur eine Maschine außerhalb Frankreichs; es ist die im Staatlichen Mathematisch-Physikalischen Salon ausgestellte Pascalsche Rechenmaschine aus der Zeit um 1650.

Sie besitzt ein 10stelliges Einstell- und Resultatwerk. Entsprechend dem geplanten Verwendungszweck beschriftete Pascal die einzelnen Stellen mit Münzeinheiten bzw. deren Vielfachen. Die zu addierenden oder zu subtrahierenden Zahlen werden stellenweise mit Hilfe eines Griffels über die speichenkranzförmigen Einstellelemente eingegeben. Die eingestellten Zahlen erscheinen gleichzeitig auf Ziffernwalzen in Anzeigefenstern. Die Ziffernwalzen tragen auf ihrer Mantelfläche je einen schwarz bzw. rot beschrifteten Ziffernring, wobei sich jeweils Komplementziffern gegenüberstehen. Dadurch wird die Eingabe positiver und negativer Summanden ohne Umkehrung der Drehrichtung der Einstellelemente ermöglicht. Über den Anzeigefenstern befindet sich ein streifenförmiger Schieber zum Abdecken der jeweils nicht benötigten Zahlenreihe.

Das Rechenwerk besteht aus Kronrädern mit stiftförmigen Zähnen, die nach dem Prinzip eines Kegelradgetriebes angeordnet sind. Diese Kronräder mit den stiftförmigen Zähnen sind am Dresdner Exemplar jeweils aus einem Materialstück gefeilt.

Die Zehnerübertragung erfolgt über die Einwirkung der Schwerkraft auf einen speziellen Übertragungsmechanismus, so daß die Pascalschen Maschinen nur bei waagerechter Aufstellung arbeiten.

Mit Hilfe der Pascalschen Maschine ist es möglich, Zahlen zu addieren und zu subtrahieren. Nach einem etwas umständlichen Verfahren lassen sich aber auch Multiplikationen und Divisionen durchführen.

Der Weg des Dresdner Exemplares führte höchstwahrscheinlich über die aus Frankreich stammende Königin von Polen, Marie Louise de Gonzague, die zwei Rechenmaschinen von Pascal erhalten haben soll. Eine davon gelangte vermutlich während der sächsisch-polnischen Union an den Dresdner Hof und damit in die Sammlungen des Mathematisch-Physikalischen Salons. Sie blieb trotz vieler Kriegsereignisse bis in die heutige Zeit erhalten und legt Zeugnis ab vom hohen Stand der Feinmechanik und vom Können des Menschen der damaligen Zeit.

K. Schillinger

Staatlicher Mathematisch-Physikalischer Salon

Zwinger, Dresden, 8010

Öffnungszeiten: täglich, außer donnerstags, von 9–16 Uhr

Die weltbekannten Sammlungen umfassen kunstvolle Instrumente und Geräte der angewandten Mathematik und Physik sowie verwandter Disziplinen vom 13. bis 19. Jh. Seit seiner Gründung als eigenständiges Museum 1728 befindet sich der Salon im Zwinger. Die Uhrensammlung, die einen Überblick über 500 Jahre Zeitmessung gibt, gehört zu einer der umfangreichsten und international bedeutendsten ihrer Art. Das Glanzstück bildet die Planetenlaufuhr von Baldewein, Bucher und Diepel, 1563 bis 1567. Nicht minder berühmt ist die Globensammlung, die als ältestes Exponat einen Himmelsglobus vom Jahre 1279 aus der persischen Sternwarte Meragha enthält. Weitere wertvolle Sammlungen, die in dieser Geschlossenheit ebenfalls international zu den bedeutendsten zählen, umfassen geodätische Instrumente, optische und astronomische Instrumente, Waagen und Längenmaße, Thermometer und Barometer, Kompaßgeräte sowie Rechen- und Zeichenhilfsmittel vergangener Zeiten.

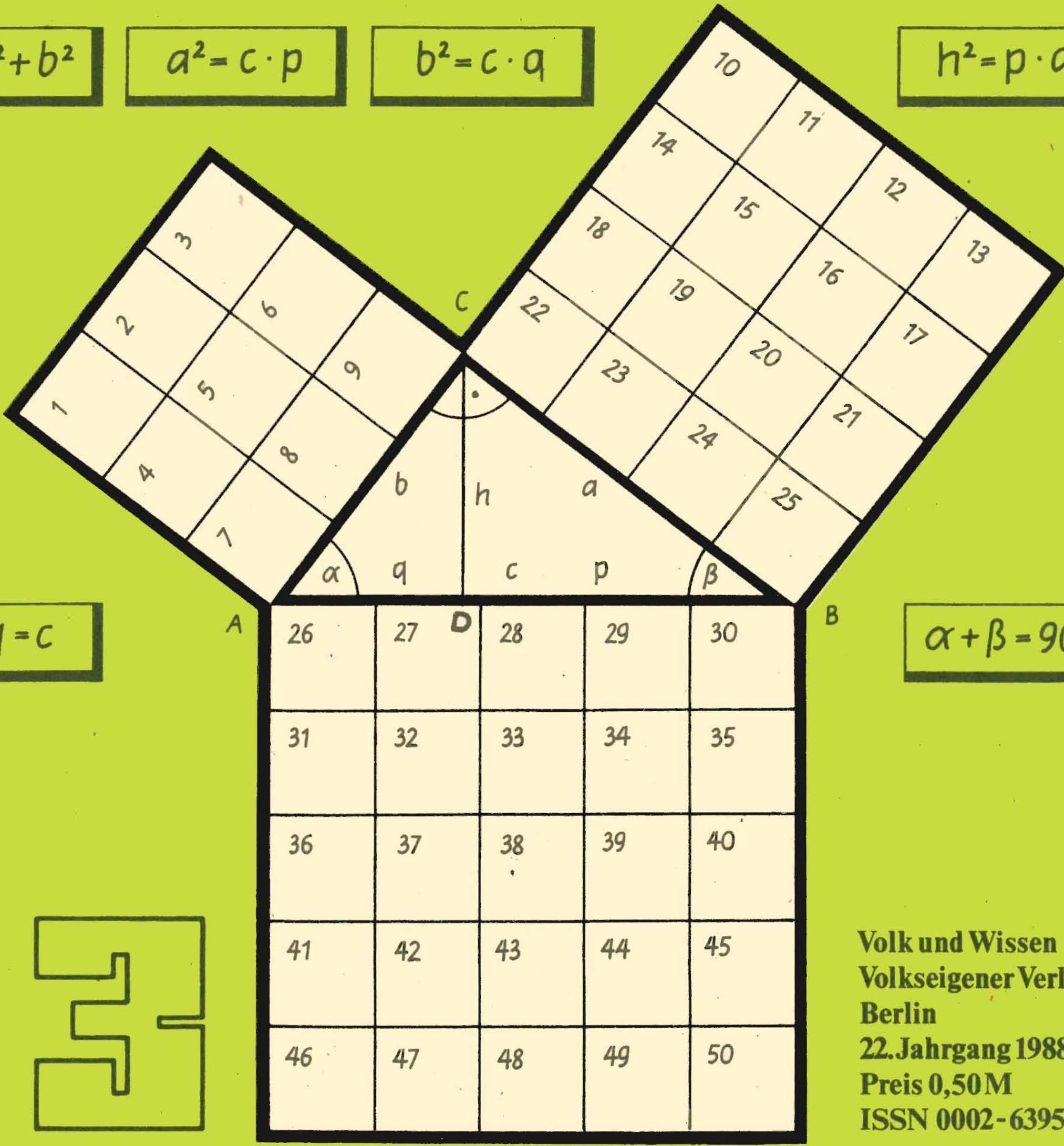
aus: Museen, VEB Tourist Verlag, Berlin · Leipzig

ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 22 (1988) 2 · Seiten 25 bis 48

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

$c^2 = a^2 + b^2$ $a^2 = c \cdot p$ $b^2 = c \cdot q$ $h^2 = p \cdot q$



$p + q = c$ $\alpha + \beta = 90°$

3

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
22. Jahrgang 1988
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold
Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027
Redaktion:
Gabriele Liebau (Chefredakteur); Rosemarie Schubert (redaktioneller Mitarbeiter)
Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. C. P. Helmholz (Leipzig); Dozent Dr. sc. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dr. rer. nat. W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. rer. nat. W. Schulz (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle)
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: R. Schimming (S. 49); H. Pieper (S. 52 o.); R. Bölling (S. 52 M.); K.-Sudhoff-Institut (S. 53); Volk und Wissen (S. 54); V. Paulauskas (S. 57); H. Vilkner (S. 72); A. Zenkert (S. 71/72, III. U.-Seite)
Vignetten: L. Otto (Titelvignetten); H. Teske (Titelvignette Ferienmagazin)
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage von R. Mildner, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 8. Februar 1988
Auslieferungstermin: 7. Juni 1988

Alphons, vom Leipziger Graphiker Lothar Otto, wird insbesondere die Schüler der 5. bis 7. Klassen auf speziell für sie geeignete Beiträge hinweisen.

100. Geburtstag von A. A. Friedman

Mathematiker, Meteorologe, Kosmologe

In diesem Jahr ist Anlaß, des großen sowjetischen Wissenschaftlers Alexander Alexandrowitsch Friedman zu gedenken, der – neben anderen bedeutenden Leistungen – die Expansion des Weltalls vorhersagte. Er wurde am 17. Juni 1888 in Petersburg in der Familie eines Musikers und Komponisten geboren. Der junge Alexander interessierte sich mehr für Mathematik und Naturwissenschaften als für Musik. Als Schüler auf dem Gymnasium verfaßte er – gemeinsam mit seinem Klassenkameraden J. D. Tamarkin – seine erste wissenschaftliche Arbeit. Sie war einem Problem der Zahlentheorie gewidmet und erschien 1906 in französischer Sprache in der renommierten Zeitschrift *Mathematische Annalen*. (Ein zweiter Teil erschien 1909 im *Journal für die reine und angewandte Mathematik*.) Über die Nachricht der Veröffentlichung freuten sich die beiden Freunde so, daß sie den Unterricht störten und den Raum verlassen mußten.

Es war nur natürlich, daß Alexander Friedman von 1906 bis 1910 Mathematik an der Petersburger Universität studierte. Der Studienbetrieb verlief damals und dort völlig anders als heute und bei uns; er war wenig durchorganisiert. Die Studenten mußten sich vieles selbst erarbeiten. Friedman fiel durch Begabung und Fleiß auf. Er betätigte sich eifrig in fachlichen Studentenzirkeln, aber ebenso in politischen Zirkeln. Letzteres war bei der allgemeinen vorrevolutionären Stimmung nicht ungewöhnlich. Die folgende Episode ist recht aufschlußreich:

In einem Vortrag *Über die Kanäle auf dem Mars* berichtete der Student Friedman, daß diese Kanäle ziemlich plötzlich entdeckt wurden. Die offenbar kurze Bauzeit für diese gewaltigen Anlagen ließe auf eine sozialistische Gesellschaftsordnung auf dem Mars schließen! Nach ausgezeichnetem Studienabschluß verblieb A. A. Friedman an der Universität; wir würden heute sagen als wissenschaftlicher Assistent. Auch andere Petrograder Hochschulen erteilten ihm Lehraufträge. Die geradlinige Laufbahn erhielt im Jahre 1913 eine Wendung durch die Anstellung des jungen Wissenschaftlers als Physiker am Aerologischen Observatorium in Pawlowsk. Bis dahin hatte er schon Arbeiten zur Hydrodynamik und Aerodynamik verfaßt und arbeitete sich nun schnell in die theoretische und praktische Meteorologie ein. Zum Zwecke der Weiterbildung delegierte man Friedman 1914 nach Leipzig zu dem damals führenden Meteorologen Prof. V. Bjerknes. Leider unterbrach der Beginn des ersten Weltkrieges diese Entwicklung: Kaum aus Leipzig zurückgekehrt, zog A. A. Friedman in den Krieg gegen Deutschland. Er wurde seinen Fachkenntnissen entsprechend eingesetzt – als Wetterbeobachter und bei Bombenzielwürfen. Selbst diese Zeit nutzte er, um ständig dazuzulernen; unter anderem wurde Friedman ein Spezialist für technische Fluggeräte. Schließlich wurde er sogar, im Jahre 1917, Direktor des Werkes für Flugzeugzubehör *Aviapribor* in Moskau. Oktoberrevolution und Kriegsende beendeten diese Tätigkeit. Unter der Sowjetmacht erhielt A. A. Friedman eine Menge wechselnder Aufgaben, die er stets mit dem ihm eigenen Elan erfüllte. Seine Laufbahn wurde zum Spiegel der unruhigen Zeit! Wir erwähnen nur einige Stationen: Professor für Theoretische Mechanik an der Universität Perm, Lehraufträge an Petrograder Hochschulen, Studienaufenthalte in Deutschland und Norwegen, im Jahre 1925 dann Direktor des Geophysikalischen Hauptobservatoriums in Pawlowsk. Bei allen äußeren Funktionen fand er Zeit für tiefgründige wissenschaftliche Arbeit. In seinem kurzen und bewegten Leben schrieb Alexander Friedman etwa 50 wissenschaftliche Veröffentlichungen. Er profilierte sich zum führenden Meteorologen des jungen Sowjetstaats, der die gesamte Skala von der Theorie bis zur praktischen Anwendung beherrschte. Besonders erwähnt sei ein Forschungs-Ballonaufstieg in die Rekordhöhe von 7400 Metern zusammen mit einem Ballonpiloten im Jahre 1925. Während des Fluges traten lebensbedrohliche Situationen ein. Am Ende glücklich gelandet, hielt Prof. Friedman den aus einem nahegelegenen Dorf herbeigeeilten Jugendlichen eine improvisierte Vorlesung über den Ballonflug!

Die wissenschaftlichen Interessen und Aktivitäten erstreckten sich auf viele Gebiete der Mathematik, Physik und ihrer Anwendungen. So war Friedman einer der ersten in der Sowjetunion, der die damals recht neue *Allgemeine Relativitätstheorie* Albert Einsteins verbreitete. Mehr noch, die auf der Relativitätstheorie aufbauenden eigenen Arbeiten A. A. Friedmans zur *Kosmologie*, d. h. zur Lehre vom Bau der Welt im Großen, erwiesen sich als fundamental. Seine berühmten Artikel *Über die Krümmung des Raumes* und *Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes* erschienen 1922 bzw. 1924 in deutscher Sprache in der *Zeitschrift für Physik*. Die Ergebnisse waren sensationell: Das Weltall kann nicht in Ruhe verharren, sondern muß sich entwickeln. Es dehnt sich aus und war vor einer langen Zeitspanne sehr klein und sehr dicht mit Masse angefüllt. Zwei Fälle, die nacheinander in den beiden Artikeln untersucht werden, sind möglich: Das Weltall ist entweder räumlich endlich (wir sagen heute geschlossen) oder räumlich unendlich (wir sagen offen). Im ersten Fall wird die Expansion nachlassen und sich eines Tages in eine Kontraktion umkehren. Im zweiten Fall hört die Expansion nie auf und die Massen im Weltall werden zunehmend verdünnt. Diese ungewöhnlichen Erkenntnisse fanden damals schwer Aufnahme; sogar Einstein kam zunächst nicht mit ihnen zurecht. Später korrigierte er sich und würdigte in fairer Weise die Leistung des Kollegen. Leider war es Friedman selbst nicht vergönnt, das Werk weiterzuführen: Er starb jung, mit 37 Jahren, am 16. September 1925 in Leningrad nach kurzem Krankenlager an Typhus.

Die ihn kannten, schildern Alexander Alexandrowitsch Friedman als lebhaften und geselligen Menschen. Er sorgte sich um die ihm unterstellten Mitarbeiter. Bezüglich der eigenen Person war er bescheiden und selbstkritisch.

Friedmans Kosmologie ist in den oben dargelegten Grundzügen noch heute gültig. Die Vorhersage der Expansion des Weltalls wurde im Jahre 1929 durch E. Hubble bestätigt, der aus Himmelsaufnahmen eine allgemeine Fluchtbewegung der Galaxien ableitete. Nach dieser Stützung durch Beobachtungen setzte eine Würdigung von Friedmans Beitrag zur Kosmologie ein. Die Sowjetregierung ehrte den Wissenschaftler im Jahre 1931 postum durch den Leninpreis. Leben und Werk A. A. Friedmans wurden durch die Herausgabe seiner *Gesammelten Werke* (1966) und durch andere Veröffentlichungen zugänglich gemacht. Im Jubiläumsjahr 1988 wird ein Buch *Die Welt Friedmans* (in russischer Sprache) erscheinen, das sich an breite Kreise wendet und unter anderem mit neuem Material zur Biographie des Wissenschaftlers aufwartet.

Erläuterung einiger Begriffe:
Hydrodynamik = Lehre von den Flüssigkeiten,
Aerodynamik = Lehre von den Gasen,
Meteorologie = Wetterkunde,
Geophysik = Physik der Erde, einschließlich der Erdatmosphäre,
Expansion = Ausdehnung,
Kontraktion = Zusammenziehung,
postum = nach dem Tode (bei nachträglichen Ehrungen oder Veröffentlichungen).

R. Schimming

Bemerkungen zu dem Artikel „Ein Brief Gerhard Gentzens an seinen Großvater“

Im Beitrag *Ein Brief Gerhard Gentzens an seinen Großvater*, *alpha*, Heft 2/86, Seite 28/29, werden einige geometrische Lehrsätze des 13jährigen begabten Schülers G. Gentzen aus dem Jahre 1922 vorgestellt. Sie beziehen sich auf das nachstehend nochmals angegebene Bild 1, das entsteht, wenn man zu einem gegebenen Dreieck $\triangle ABC$ über den Seiten AB, BC und CA gleichseitige Dreiecke $\triangle ADB$, $\triangle BEC$, und $\triangle CFA$ konstruiert.

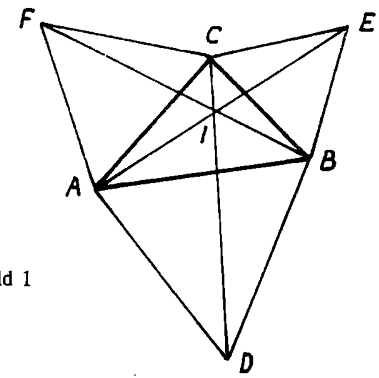
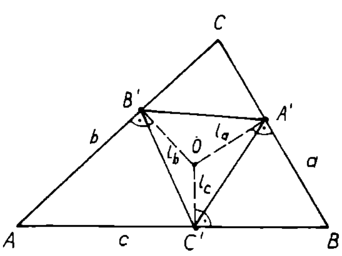


Bild 1

In den dort angegebenen Lehrsätzen 2 und 4 wird nachgewiesen, daß sich die *Pereunten* AE, BF und CD und alle Umkreise zu den oben konstruierten gleichseitigen Dreiecken in ein und demselben Punkt I schneiden.
Welche Bedeutung hat diese Erkenntnis und der Punkt I für die Mathematik und deren Anwendung?
Im Jahre 1642 stellte der berühmte französische Mathematiker und Rechtsgelehrte Pierre de Fermat das folgende *Standort-Problem:* Zu drei Eckpunkten A, B, C eines Dreiecks ist jener Punkt O zu finden, dessen Abstandssumme $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ am kleinsten ist.
Diese Aufgabe wurde 1755 in eingekleideter Form nochmals von der englischen Frauenzeitschrift *The Ladies Diary or Woman's Almanach* gestellt. Die Lösung dieses Problems war im Prinzip schon im 17. und 18. Jahrhundert bekannt (durch Torricelli 1742, Simpson 1750 u. a.) und damit zugleich auch der oben zitierte Lehrsatz 2 und 4; sie lautet: Ist kein Innenwinkel von $\triangle ABC$ größer als 120°, so ist die optimale Lage von O gerade in I.
Dieser Punkt I wird auch als *Torricelli-Punkt* oder *Vial-Zentrum* bezeichnet. Die von Gentzen als Pereunten bezeichneten Hilfslinien AE, BF und CD tragen die Bezeichnung *Simpsonlinien*.

Es ist bemerkenswert, daß diese Konstruktionselemente auch noch für die Lösung einer anderen nachstehend genannten geometrischen Optimierungsaufgabe von Bedeutung sind:
Finde zu einem Dreieck $\triangle ABC$ das flächengrößte gleichseitige *Umdreieck* (also ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seiten je einen der Eckpunkte A, B, C enthalten).
Die Antwort lautet: Falls die Innenwinkel des Dreiecks $\triangle ABC$ nicht größer als 120° sind, ist das optimale gleichseitige Umdreieck jenes, dessen Höhen auf den Simpsonlinien zu $\triangle ABC$ liegen.
Zur Anregung soll noch ein verwandtes Problem zur Sprache kommen.
Unter dem *Durchmesser D* einer ebenen Figur (Punktmenge) F versteht man den maximalen Abstand von Punktepaaren aus F. Ist F ein Dreieck $\triangle ABC$, so ist D gleich dem Maximum der Längen der Dreieckseiten
$a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.
Als *Indreieck* des Dreiecks $\triangle ABC$ bezeichnet man jedes Dreieck $\triangle A'B'C'$, dessen Ecken A', B' und C' auf je einer der Dreieckseiten a, b und c liegen. Wie in Figur 2 sei A' auf a, B' auf b, C' auf c.

Bild 2

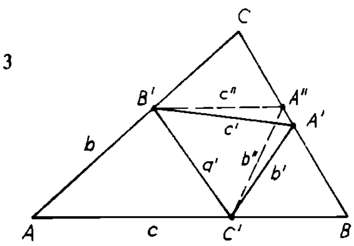


Wir behandeln gemeinsam die Aufgabe:
Finde zu einem spitzwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ das Indreieck $\triangle A'B'C'$ kleinsten Durchmessers.
Wir zeigen: Es gibt ein solches Indreieck $\triangle A'B'C'$ kleinsten Durchmessers, und dieses ist genau dann optimal, wenn es gleichseitig ist und in A', B' und C' Lote l_a, l_b bzw. l_c zu a, b bzw. c besitzt, die einen gemeinsamen Schnittpunkt O haben (vgl. dazu Bild 2)*.
Daß das optimale Dreieck $\triangle A'B'C'$ gleichseitig sein muß, erkennen wir wie folgt: Wäre $\triangle A'B'C'$ optimal, aber nicht gleichseitig, so würde es zwei verschieden lange Dreieckseiten geben, die größte und die kleinste. Wie im Bild 3 seien diese c' und b'. Der Durchmesser D von $\triangle A'B'C'$ wäre also gleich der Länge von c'.

Fall 1: $c' > a' \geqq b'$.
Ist c' nicht senkrecht zu a, so können wir A' auf BC in eine solche neue Lage A'' verschieben, daß das entstehende neue Indreieck $A''B'C'$ einen Durchmesser besitzt, der gleich der Länge von $c'' = B'A''$ und kleiner als D ist. Das kann aber nicht sein, weil ja schon $\triangle A'B'C'$ kleinsten Durchmesser haben sollte.
Ist c' aber senkrecht zu a, so können wir analog zu dem Vorhergehenden jetzt B' auf AC in eine solche neue Lage B'' verschieben, daß das Indreieck $\triangle B''C'A'$ wiederum einen kleineren Durchmesser als D besitzt. Das kann aber nach den Optimalitätsvoraussetzungen an $\triangle A'B'C'$ auch nicht sein.

Fall 2: $c' = a' > b'$.

Bild 3



Ist a' nicht senkrecht zu c, so können wir durch geringfügige Verschiebung von C' auf AB in die Lage C'' ein Dreieck $\triangle A'B'C''$ erhalten, das den gleichen Durchmesser D besitzt und den Voraussetzungen des Falles 1 genügt. Somit ist weder $\triangle A'B'C''$ noch $\triangle A'B'C'$ optimal.
Analog ist die Situation, wenn c' nicht senkrecht zu a ist. Ist aber sowohl a' senkrecht zu c als auch c' senkrecht zu a, so wäre der Innenwinkel des Dreiecks $\triangle A'B'C'$ zum Punkt B' größer als 90°. Das hätte aber zur Folge, daß b' eine größere Länge als a' und c' besitzt im Widerspruch zur Annahme. Diese Situation kann also auch nicht eintreten.

Wir verbinden dieses erste Teilresultat der Gleichseitigkeit des Indreiecks $\triangle A'B'C'$ mit zwei Aufgaben für den Leser:

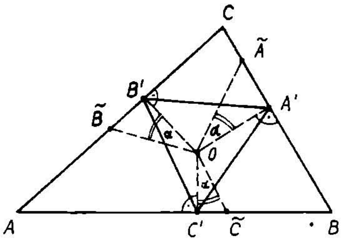
▲1▲ Zeige konstruktiv, daß zum Dreieck $\triangle ABC$ genau ein gleichseitiges Indreieck vorgegebener Seitenrichtung gefunden werden kann! Wir denken uns dabei die Seiten des Indreiecks im mathematisch positiven Umlaufsinn durch Pfeile (Vektoren) orientiert.

▲2▲ Zeige durch Angabe einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal, daß es zu vorgegebenem Dreieck $\triangle ABC$ stets ein solches gleichseitiges Indreieck $\triangle A'B'C'$ gibt, dessen durch A', B' bzw. C' hindurchgehende Lote l_a, l_b und l_c bezüglich a, b bzw. c einen gemeinsamen Schnittpunkt O haben!
Unter Benutzung dieser weiteren zwei Resultate zeigen wir nun, daß das gleichseitige Indreieck $\triangle A'B'C'$ genau dann den kleinsten Durchmesser besitzt, wenn es der Konstruktionsvorschrift von Aufgabe 2 genügt.
Dazu konstruieren wir zunächst jenes spezielle Indreieck $\triangle A'B'C'$ gemäß Aufgabe 2

und den gemeinsamen Schnittpunkt O der Lote l_a, l_b, l_c. Nach dem Ergebnis von Aufgabe 1 entsteht dann jedes andere gleichseitige Indreieck $\Delta\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ (entsprechend Bild 4) durch eine Drehung des Dreibeins OA', OB', OC' um einen Winkel α zum Drehpunkt O sowie durch Strecken dieser Seiten zu $O\tilde{A}$, $O\tilde{B}$, $O\tilde{C}$ um den gemeinsamen Faktor

$$\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{\overline{O\tilde{A}}}{\overline{OA'}}=\frac{\overline{O\tilde{B}}}{\overline{OB'}}=\frac{\overline{O\tilde{C}}}{\overline{OC'}}>1.$$

Bild 4



Damit hat jedes andere Indreieck $\Delta\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ einen größeren Durchmesser als $\Delta A'B'C'$.

R. Klötzler

* Dieses Resultat läßt sich sogar für sämtliche Dreiecke ΔABC bestätigen, deren Innenwinkel nicht größer als 120° sind. Es wurde vom Autor und seinem Schüler G. Jahnel gefunden.

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

In Heft 1/87 der *alpha* stellten wir im Rahmen des *alpha*-Wettbewerbs folgende Aufgabe:

Ma 7 ■ 2761 Auf welche Grundziffer endet die Zahl 12^{100}?

In Heft 4/87 veröffentlichten wir einen Lösungsvorschlag. Er lautete:

Es gilt $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$, usw., also endet 2^{4n} auf die Grundziffer 6.

Wegen $12^{100}=12^{4\cdot 25}=12^{4\cdot n}$ endet diese Zahl auf die Grundziffer 6.

● Wir stellen nun die Lösung von *Christian Kühn* aus Wismar vor, der Schüler der Klasse 7 der Pestalozzi-Oberschule ist.

Christian löste diese Aufgabe mit Hilfe von Zahlenkongruenzen, womit er sich in einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft beschäftigt hat, wie folgt:

Es gilt $12^1\equiv 2 \bmod 10$, $12^2\equiv 4 \bmod 10$,
$12^3\equiv 8 \bmod 10$, $12^4\equiv 6 \bmod 10$,
$12^5\equiv 2 \bmod 10$.

Daraus folgt $12^{4k+1}\equiv 2 \bmod 10$,
$12^{4k+2}\equiv 4 \bmod 10$, $12^{4k+3}\equiv 8 \bmod 10$,
$12^{4k}\equiv 6 \bmod 10$. Wegen $12^{100}=12^{4\cdot 25}$ gilt deshalb $12^{100}\equiv 6 \bmod 10$.

Die Zahl 12^{100} endet auf die Ziffer 6.

● Wir stellen nun die Lösung von *Anja Walter* aus Dohna vor, die Schülerin der Klasse 7a der Marie-Curie-Oberschule ist.

Anja löste diese Aufgabe wie folgt:

$12^{100}=12^{10}\cdot 12^{10}\cdot\ldots\cdot 12^{10}$; dieses Produkt besteht aus zehn Faktoren 12^{10}. Jeder Faktor 12^{10} endet auf die Ziffer 4. Nun endet 4^{10} auf die Ziffer 6; deshalb endet auch 12^{100} auf die Ziffer 6.

● Wir stellen nun die Lösung von *Sandy Frässdorf* aus Brück vor, die Schülerin der Klasse 6 der Hans-Beimler-Oberschule ist.

Sandy löste diese Aufgabe wie folgt:

Es gilt $12^{100}=12^{4\cdot 25}=(12^4)^{25}$. Nun endet 12^4 auf die Ziffer 6, denn $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=16$ endet auf die Ziffer 6.

Da jedes Produkt, dessen Faktoren auf die Ziffer 6 enden, selbst auf die Ziffer 6 endet, muß auch 12^{100} auf die Ziffer 6 enden.

Da etwa 20 % der bei uns eingegangenen Lösungen falsch waren, möchten wir abschließend als Training ähnliche Aufgaben einschließlich Lösungsvorschlägen folgen lassen.

Aufgaben

▲1▲ Mit welcher Ziffer endet die Summe
$11^6+12^6+13^6+14^6+15^6+16^6$?

▲2▲ Beweise, daß für jede natürliche Zahl n ($n>1$) die Zahl $2^{2^n}+1$ mit der Ziffer 7 endet!

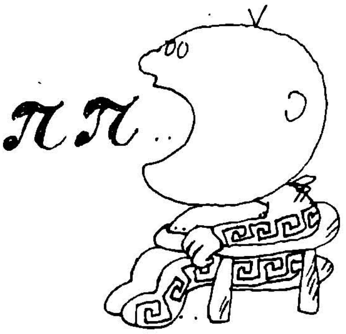
▲3▲ Auf welche beiden Ziffern endet das Produkt $z=345\,926\,476^3$
$\times 125\,399\,676^2\cdot 2\,100\,257\,933\,776^3$?

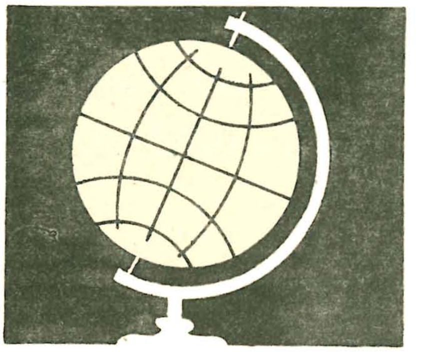
Th. Scholl

alpha-Wettbewerb 1986/87

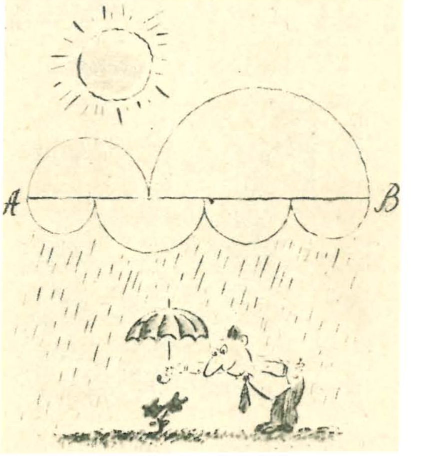
Fortsetzung aus Heft 2/88

Kerstin Schüler, Antje Hellmann, Katrin Weber, alle Steinbach-Hallenberg; Andreas Lange, Stendal; Silvana Seifert, Strausberg; Kerstin Schuster, Taubenheim; Beate Günther, Trusetal; Stephan Marx, Ueckermünde; Mario Gimpel, Heiko Männecke, Yvette Hartisch, alle Unterbreizbach; Horst Rex, Wählitz; Simone Wilk, Solweig Michels, Dirk Beckmann, alle Waren; Manuela Montag, Bettina Steil, Oliver Auert, alle Weißenschirmbach; Silvio Ladusch, Thomas Westphal, beide Weißwasser; Sebastian Steinbach, Wernigerode; Ralf Klötzer, Wilkau-Haßlau; Torsten Gebauer, Wippra; Bernhard Kühn, Wismar; Sören Schubert, Wittenberg; Christiane Harth, Wittenburg; Jens Müller, Wolgast; Janet Thom, Wünschendorf; Ronny Schwarz, Constanze Sikkel, beide Wulfen; Beate Balzer, Zittau





▲1▲ У каких полуокружностей, изображенный на рисунке, сумма длин больше – у верхних или у нижних?



aus: Quant, Moskau

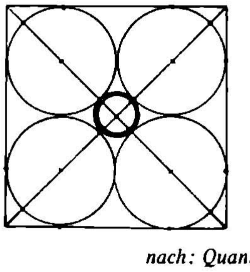
▲2▲ A un carrefour le signal lumineux est au vert pendant 50 s, à l'orange pendant 5 s, au rouge pendant 30 s.

A 7 h le signal passe au vert. Combien de fois sera-t-il au vert de 7 h à 19 h? *H.*

▲3▲ If a, b, c, d are four positive integers such that $ab=cd$, prove that $a+b+c+d$ is not a prime number.

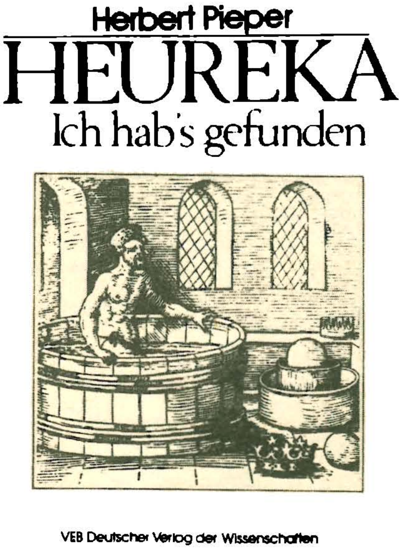
aus: Parabola, Australien

▲4▲ Рассмотрим квадрат со стороной длиной 4. В его четыре угла впишем четыре окружности радиуса 1, так как показано на рисунке. Добавим теперь окружность с центром в точке пересечения диагоналей, касающуюся четырёх вписанных окружностей. Вычислите её радиус!



nach: Quant, Moskau

Vier historische Mathematikaufgaben



Im VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften erscheint in diesem Jahr ein Buch mit dem Titel *Heureka, ich hab's gefunden.* 55 mathematische Rätsel und Aufgaben werden darin gestellt und gelöst. Jede Aufgabe wird nicht nur formuliert, sie erscheint vielmehr als Teil eines etwas ausführlicher beschriebenen mathematikhistorischen Sachverhalts. Das Buch ist daher nicht nur eine Sammlung von Mathematikaufgaben, sondern gleichzeitig ein Sachbuch über Mathematikgeschichte. Einige Kostproben seien hier vorab vorgestellt.

Die Anzahl aller Primzahlen

Im Jahre 1847 konnte Ernst Eduard Kummer mit neuen von ihm gefundenen zahlentheoretischen Methoden den bis dahin größten Fortschritt beim Ringen um den auch gegenwärtig noch nicht gefundenen allgemeinen Beweis der Fermatschen Vermutung, daß die Gleichung

$$x^p + y^p = z^p$$

für jede ungerade Primzahl keine Lösung mit von Null verschiedenen ganzen Zahlen x, y, z besitzt, erzielen. Während bis zu jener Zeit diese Vermutung nur für die Exponenten $p = 3, 5, 7$ bewiesen worden war, entdeckte Kummer, daß sie für alle sogenannten *regulären* Primzahlen gültig ist. (So sind mit Ausnahme von 37, 59, 67 alle ungeraden Primzahlen bis 100 regulär.) Dieses aufsehenerregende Resultat und andere zahlentheoretische Ergebnisse begründeten Kummers Ruhm als Zahlentheoretiker. Er wurde 1855 an die Berliner Universität berufen und zum ordentlichen Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften ernannt.

Nach dem Tode von Jacobi (1851) und Eisenstein (1852) in Berlin, Gauß (1855) und Dirichlet (1859) in Göttingen wurde Berlin durch die Tätigkeit von Kummer, Kronecker (auch er kam 1855 nach Berlin) und Weierstraß (er wurde 1856 nach Berlin berufen) ein führendes Zentrum der reinen Mathematik in Deutschland.

In seiner Forschungs- und Vorlesungstätigkeit widmete sich Kummer neben anderen Gebieten immer wieder der Zahlentheorie. Am 25. November 1878 trug er auf der Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse der Akademie einen „neuen elementaren Beweis des Satzes, daß die Anzahl aller Primzahlen eine unendliche ist" vor. Er sagte:

„Der erste sehr einfache und sinnreiche Beweis dieses Satzes, welcher von Euklid herrührt, stützt sich auf keine anderen Hilfsmittel, als auf die Sätze über die Zerlegbarkeit aller Zahlen in Primfaktoren, während die späteren Beweise von Euler und anderen die Hilfsmittel der Analysis

E. E. Kummer (1810 bis 1893)

namentlich der unendlichen Reihen und Produkte in Anwendung bringen. Da nun ein zweiter ganz elementarer Beweis, insofern er die vorliegende Frage von einer neuen Seite beleuchtet, einiges Interesse haben möchte, so will ich einen solchen der Akademie mitteilen. welchen ich schon seit einer Reihe von Jahren meinen Zuhörern in der Vorlesung über Zahlentheorie vorgetragen habe, welcher aber noch nicht anderweit veröffentlicht ist.

Gesetzt die Anzahl aller in der unendlichen Zahlenreihe enthaltenen Primzahlen sei eine endliche, so müßte auch das Produkt aller Primzahlen, welche ich mit P bezeichne, eine endliche bestimmte Zahl sein:

$P = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot p.$

Diese Zahl P aber müßte die ganz besondere Eigenschaft haben" (1): Zu dieser Zahl kann keine natürliche Zahl, außer der 1, teilerfremd sein. Bezeichnet $\varphi(n)$ für eine natürliche Zahl n die Anzahl aller natürlichen Zahlen $a < n$ mit $(a, n) = 1$, so müßte $\varphi(P) = 1$ sein. Aus der elementaren Zahlentheorie ist bekannt, daß

$\varphi(p) = p - 1$ für Primzahlen p ist und

$$\varphi(n_1 n_2) = \varphi(n_1) \cdot \varphi(n_2),$$

falls $(n_1, n_2) = 1$ ist.

Somit wäre einerseits $\varphi(P) = 1$ und andererseits $\varphi(P) = \varphi(2)\,\varphi(3) \ldots \varphi(p)$

$$= (2-1)(3-1)\ldots(p-1) \neq 1.$$

Kummer: „Die Annahme, daß die Anzahl aller Primzahlen eine endliche sei, welche auf diesen Widerspruch führt, ist darum eine falsche. Also die Anzahl aller Primzahlen ist keine endliche Zahl.

Man kann auch auf eine andere, noch einfachere Weise nachweisen, daß eine Zahl P, zu welcher keine Zahl außer Eins relative Primzahl (d. h. teilerfremd) wäre, nicht existiert, nämlich daraus, daß je zwei benachbarte Zahlen der Zahlenreihe notwendig relative Primzahlen (teilerfremd) sind." Wie?

Das Kästchenproblem

In seinem Buch über die Wahrscheinlichkeitsrechnung (erschienen in Paris im Jahre 1888) stellte Joseph Bertrand die folgende Aufgabe: Von drei sich äußerlich vollkommen gleichenden Kästchen mit je zwei Schubfächern enthalte das erste in jedem Fach eine Goldmünze, das zweite in jedem Fach eine Silbermünze, das dritte in einem Fach eine Goldmünze, im anderen eine Silbermünze. Zufällig werde ein Kästchen ausgewählt.

(1) Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es das Kästchen ist, in dem sich eine Gold- und eine Silbermünze befinden?

(2) Man hat im ausgewählten Kästchen ein Schubfach geöffnet. Darin befinde sich eine Goldmünze. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, im anderen Fach des ausgewählten Kästchens eine Silbermünze zu finden?

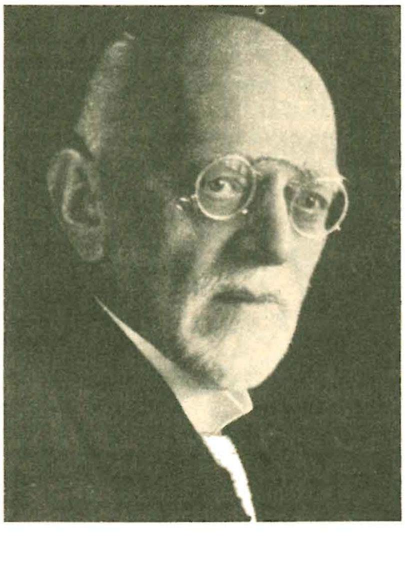
Auf die erste Frage gab Bertrand die Antwort: $\frac{1}{3}$. Von drei gleichwahrscheinlichen Fällen ist in der Tat einer günstig.

Bei der zweiten Frage liegt die Antwort $\frac{1}{2}$ nahe: Das geöffnete Fach enthält eine Goldmünze. Man kann es nur mit dem ersten oder dritten Kästchen zu tun haben (das zweite Kästchen ist durch das erlangte Wissen – *Im geöffneten Schubfach ist eine Goldmünze* – ausgeschlossen), hat wohl die Wahl zwischen zwei gleichwahrscheinlichen Kästchen.
Bertrand gab diese Lösung zunächst auch, verwarf sie aber sogleich als falsch. Wie sollte – so fragte er – das Öffnen eines Schubfachs genügen, um die Wahrscheinlichkeit zu ändern und von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{1}{2}$ zu erhöhen? Bertrand beantwortete nun die zweite Frage mit $\frac{1}{3}$.
Der Wiener Mathematiker Emanuel Czuber kritisierte im Jahre 1899 in einem Bericht über *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendung*, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, diese Lösung:
Nicht das Öffnen des Schubfaches, wohl aber die Wahrnehmung ihres Inhalts übt Einfluß aus, weil es unser Wissen vermehrt und die Anzahl der gleichberechtigten Fälle vermindert. Die einzige richtige Antwort auf die zweite Frage wäre doch $\frac{1}{2}$; denn jetzt liegen zwei gleichberechtigte Fälle vor, repräsentiert durch das erste und dritte Kästchen, eines davon ist günstig.
In seinem später erschienenen Buch über Wahrscheinlichkeitsrechnung berichtigte Czuber seinen eigenen Fehlschluß: Bertrands Antwort $\left(\frac{1}{3}\right)$ ist richtig! Warum?
Ist es nicht trotzdem paradox, daß das durch das Öffnen eines Schubfachs erworbene, gegenüber der ersten Fragestellung vermehrte Wissen an der Wahrscheinlichkeit des erwarteten Ereignisses nichts ändert?
Czuber ergänzte die Bertrandsche Aufgabe durch folgendes Beispiel: Enthielten die Kästchen je drei Schubfächer, und diese drei Schubfächer im ersten Kästchen nur Gold-, im zweiten Kästchen nur Silbermünzen, während im dritten Kästchen zwei Gold- und eine Silbermünze auf die Schubfächer verteilt wären, so verhielte es sich anders. Wieder wäre $\frac{1}{3}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man bei vollzogener zufälliger Wahl das dritte Kästchen ergreift; findet man aber in einem geöffneten Schubfach eine Goldmünze, so gehört das Schubfach mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$ dem dritten Kästchen an. Warum?

Der Streckenübertrager

Vom 2. bis 12. August 1900 fand in Paris der 2. Internationale Mathematikerkongreß statt. 226 Wissenschaftler aus vielen Ländern tagten in den Sektionen Zahlentheorie und Algebra, Analysis, Geometrie, Mechanik und mathematische Physik, Geschichte und Bibliographie der Mathematik sowie Unterricht und Methodologie der Mathematik. Am 8. August hielt David Hilbert aus Göttingen ein grundlegendes Referat mit dem Titel *Mathematische Probleme*. Hilbert ging in einer allgemein gehaltenen Einleitung zunächst auf die interessanten Fragen ein, „ob es allgemeine Merkmale gibt, die ein gutes mathematisches Problem kennzeichnen, ...aus welchen Quellen die Mathematik ihre Probleme schöpft, ...welche berechtigten allgemeinen Forderungen an die Lösung eines mathematischen Problems zu stellen sind“. Am Ende dieses einleitenden Teils formulierte er sein *Axiom von der Lösbarkeit eines jeden Problems*, seine „Überzeugung, daß ein jedes bestimmte mathematische Problem einer strengen Erledigung notwendig fähig sein müsse, sei es, daß es gelingt, die Beantwortung der gestellten Frage zu geben, sei es, daß die Unmöglichkeit seiner Lösung und damit die Notwendigkeit des Mißlingens aller Versuche dargetan wird.“
Anschließend formulierte und diskutierte er 23 ungelöste mathematische Probleme (nur *Proben* von Problemen, wie er betonte); diese Probleme stellten sich in den folgenden Jahrzehnten fast alle als mathematische Kernprobleme heraus und übten auf die Entwicklung der modernen Mathematik einen *außergewöhnlichen Einfluß* (P. S. Alexandrov) aus.
Eines dieser Probleme, das siebzehnte (es wurde 1927 von Emil Artin gelöst), steht in einer interessanten Beziehung zu einer geometrischen Aufgabe. Es handelt sich um die geometrischen Konstruktionen mittels Lineal und Streckenübertrager. Diese wurden schon im Kapitel VII der *Grundlagen der Geometrie* von Hilbert (die Monographie war Teil der 1899 erschienenen Festschrift zur Feier der Enthüllung des *Gauß-Weber*-Denkmals in Göttingen) untersucht. Als Streckenübertrager bezeichnete Hilbert ein Instrument, mit dessen Hilfe man auf jeder Geraden von jedem Punkte aus eine gegebene Strecke abtragen kann.

D. Hilbert (1862 bis 1943)

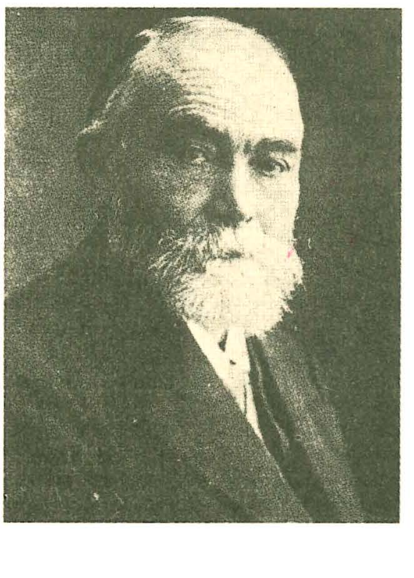


Die folgende Aufgabe beispielsweise läßt sich allein mit Hilfe des Lineals und des Streckenübertragers lösen (wie?):
Es ist zu einer gegebenen Geraden eine Senkrechte zu ziehen.
Im 44. Satz der *Grundlagen der Geometrie* gab Hilbert ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür an, daß eine vorgelegte Konstruktionsaufgabe, die mittels des Zirkels ausführbar ist, sich auch allein durch Ziehen von Geraden und Abtragen von Strecken ausführen läßt. Der Beweis ist jedoch nicht einfach und erfordert *einige Sätze zahlentheoretischen und algebraischen Charakters*.
Hilbert konnte sein Kriterium nicht allgemein beweisen. Er führte jedoch die geometrische Fragestellung auf ein algebraisches Problem zurück, das dann in seinem Pariser Vortrag als siebzehntes Problem genannt wurde.

Die Russellsche Antinomie

Gottlob Frege wird als einer der bedeutendsten Logiker aller Zeiten angesehen. Er sprach wichtige Erkenntnisse erstmals aus, die heute Allgemeingut der mathematischen Logik geworden sind.
In seinem Buch *Grundlagen der Arithmetik* (erschienen 1884) diskutierte er die Fragen, welcher Natur die arithmetischen Sätze sind und ob und wie man die natürlichen Zahlen definieren kann.
Diese Monographie stellt den programmatischen Versuch dar, grundlegende mathematische Begriffe, insbesondere den Zahlbegriff, auf rein logische Begriffe zurückzuführen (Logizismus), die Frege für sicherer hält als die bloße Anschauung. Das Buch enthält die erste Begründung des Begriffs der natürlichen Zahl.
Im ersten Band des Werkes *Grundgesetze der Arithmetik* (1893), mit dem er sein logizistisches Programm der Arithmetik realisieren wollte, schrieb er: „Und nur das würde ich als Widerlegung anerkennen können, (...) wenn jemand mir nachwiese,

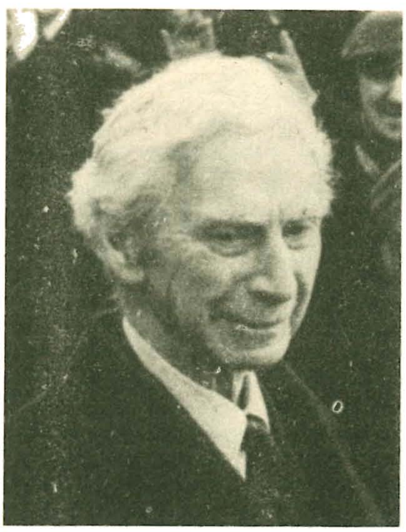
G. Frege (1846 bis 1925)



daß meine Grundsätze zu offenbar falschen Folgesätzen führten. Aber das wird keinem gelingen." Doch Frege sollte sich irren.
Am 16. Juni 1902 schrieb Bertrand Russell, Mathematiker und Philosoph am Trinity College in Cambridge, einen Brief an Frege: „Sehr geehrter Herr College! Seit anderthalb Jahren kenne ich Ihre ‚Grundgesetze der Arithmetik', aber jetzt erst ist es mir möglich geworden die Zeit zu finden für das gründliche Studium, das ich Ihren Schriften zu widmen beabsichtige. Ich finde mich in allen Hauptsachen mit Ihnen in vollem Einklang. (...) In vielen einzelnen Fragen finde ich bei Ihnen Discussionen, Unterscheidungen, und Definitionen, die man vergebens bei anderen Logikern sucht. (...) Nur in einem Punkt ist mir eine Schwierigkeit begegnet." Russell teilt nun Frege mit, wie sich aus diesem *einen Punkte* der *Grundgesetze* ein Widerspruch konstruieren läßt, ebenso wie es nicht die Menge aller der Mengen gibt, die sich nicht selbst als Element enthalten.
Enthält diese Menge sich selbst als Element? „Aus jeder Antwort folgt das Gegentheil." Warum?
Am 22. Juni 1902 schrieb Frege aus Jena an Russell: „Ihre Entdeckung des Widerspruchs hat mich auf's Höchste überrascht und, fast möchte ich sagen, bestürzt, weil dadurch der Grund, auf dem ich die Arithmetik aufzubauen dachte, in's Wanken geräth. (...) Jedenfalls ist Ihre Entdeckung sehr merkwürdig und wird vielleicht einen großen Fortschritt in der Logik zur Folge haben, so unerwünscht sie auf den ersten Blick auch scheint."
In der Nachfolge Freges versuchte Russell den Antinomien der Mengenlehre zu begegnen und das Programm des Logizismus zu verwirklichen. In unserem Jahrhundert hat sich die Einsicht durchgesetzt, daß sich die Mathematik nicht auf die Logik allein gründen läßt. Der Logizismus hat jedoch wesentlich zur Entwicklung der mathematischen Logik und zur Klärung des Antinomieproblems beigetragen.

H. Pieper

B. Russell (1872 bis 1969)



alpha-Märchen: Prinz Epsilon darf heiraten!

Nach erfolgreicher Lösung der ersten Aufgabe wird Prinz Epsilon vor ein weiteres schwieriges Problem gestellt (siehe *alpha*, Heft 2/88). Aber auch dabei können wir ihm mit dem Schulrechner SR 1 helfen, so daß er der schönen Prinzessin wieder einen Schritt näher kommt.

Im Reich der Zauberer lebt der Magier Riesifos. Er züchtet mit Hilfe seiner Zaubersäfte eigenartige, gnomhafte Wesen. Riesifos weiß zu berichten, daß seine Wesen, am Anfang gerade 10 cm groß, durch seine Zaubersäfte jedes Jahr um 4,8 % ihrer jeweiligen Größe wachsen. Er behauptet, daß die Gnome bereits nach sieben mal sieben Jahren ihre ursprüngliche Größe von 10 cm mehr als verzehnfacht haben. Ob dies stimme, lautete die Frage an Epsilon.

Ein harter Brocken für unseren Prinzen, doch wir stehen ihm mit dem SR 1 zur Seite:
Die Größe der Gnome nach einem Jahr können wir schnell berechnen. Der Grundwert ist 10 cm und der Prozentsatz 4,8 %. Nach der bekannten Formel zur Berechnung des Prozentwertes W ist dieser

$$W = \frac{G}{100} \cdot P \text{ also } W = 0{,}48\,\text{cm}.$$

Die neue Größe G_{neu} in cm ist demnach $G_{alt} + 0{,}48$, also 10,48 cm. Für die Größe nach dem 2. Jahr ist analog vorzugehen: Prozentwert berechnen (für G ist die neue Größe einzusetzen), Addition der Größe nach einem Jahr und des Prozentwertes – man erhält die Größe nach zwei Jahren. Ein ziemlich müßiges Verfahren! Nun ist allgemein jeweils die neue Größe gleich der alten vergrößert um den Prozentwert, also

$$G_{neu} = G_{alt} + W, \text{ wobei } W = \frac{G_{alt}}{100} \cdot 4{,}8$$

ist. Das heißt, wenn wir die zweite Formel in die erste einsetzen, erhalten wir:

$$G_{neu} = G_{alt} \cdot 0{,}048 + G_{alt}.$$

Wir können die Formel vereinfachen, indem wir G_{alt} ausklammern:

$$G_{neu} = G_{alt} \cdot (1 + 0{,}048)$$

bzw. $G_{neu} = G_{alt} \cdot 1{,}048$.

Nach dieser Formel könnt ihr mit dem SR 1 die Berechnung der Tabelle 1 leicht nachvollziehen.
Immerhin müssen wir auf diesem Wege 49 Berechnungen durchführen. Mit einem Computer geht das in Sekundenschnelle, aber auch der SR 1 ist uns eine gute Hilfe. Wir nutzen die Konstantenautomatik! Wir erinnern uns:
Beispiel: Es soll $3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots$ berechnet werden!

Tabelle 1

Größe in cm	nach ... Jahren
10	Anfangsgröße
10,48	1
10,983 04	2
11,510 225	3
12,062 715	4
12,641 725	5
...	...

Nach Eingabe von $\boxed{3}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ reicht nun wiederholtes Drücken der $\boxed{=}$-Taste, und immer wieder wird der Inhalt des X-Registers (was in der Anzeige steht) mit 3 multipliziert.
Probiert es aus!
Wißt ihr bereits, wie wir diese Eigenschaft für unser Problem nutzen können?
Richtig, nach Eingabe der Tastenfolge $\boxed{1}$ $\boxed{,}$ $\boxed{0}$ $\boxed{4}$ $\boxed{8}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ reicht nun jeweils das Drücken der $\boxed{=}$-Taste aus, um die Größe der Gnome nach jedem Jahr zu ermitteln, da jedesmal die aktuelle Größe (in der Anzeige) mit dem Faktor 1,048 multipliziert wird. Nun braucht ihr nur noch mitzuzählen, wie oft ihr die $\boxed{=}$-Taste gedrückt habt, und ihr könnt so die Behauptung des Zauberers Riesifos nachprüfen! Riesifos sprach von der Verzehnfachung der Größe in 49 Jahren!
Wir können dem Prinzen Epsilon und der Prinzessin jedoch noch viel schneller helfen, die zweite Aufgabe zu lösen. Dazu bezeichnen wir mit G_o die Anfangsgröße der Gnome und mit G_i ihre Größe nach dem i-ten Jahr.
Offensichtlich ist $G_o = 10$ cm und
$G_1 = 1{,}048 \cdot G_o$, $G_2 = 1{,}048 \cdot G_1$,
also $G_2 = 1{,}048^2 \cdot G_o$, $G_3 = 1{,}048 \cdot G_2$,
also $G_3 = 1{,}048^3 \cdot G_o$, ... usw.
Schließlich ist $G_{49} = 1{,}048^{49} \cdot G_o$. Mit der im SR 1 als Standardfunktion vorhandenen Potenzfunktion erhält man den Wert G_{49} durch die Tastenfolge
$\boxed{1}$ $\boxed{,}$ $\boxed{0}$ $\boxed{4}$ $\boxed{8}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{4}$ $\boxed{9}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0}$
als $G_{49} = 99{,}4725$ cm. Der Magier Riesifos hatte nicht Recht, erst nach 50 Jahren sind die Gnome größer als 1 m, denn es ist $G_{50} = 104{,}247$ cm.
Übrigens nützt euch das Gesagte auch für die Berechnung des Sparguthabens. Solltet ihr über Jahre hinweg euer Konto nicht bewegen (also nicht abheben noch draufzahlen), könnt ihr durch Eingabe des Zinssatzes $3\frac{1}{4}$ % (als Dezimalzahl) mal eurem Guthaben durch Drücken der $\boxed{=}$-Taste beobachten, wie euer Guthaben Jahr für Jahr wächst!
Dank eurer Hilfe hat Prinz Epsilon auch die zweite Aufgabe gelöst. Nun steht die dritte und letzte Aufgabe an.

Im abgelegensten Teil des Königreiches leben die grausamen Drachen. Dorthin soll sich Prinz Epsilon begeben, um die Behauptung eines kleinen Erdmännchens zu überprüfen. Es gibt dort nämlich drei gefräßige Drachen. Der *erste von ihnen frißt jeden Tag einen halben Elefanten und dazu einen viertel Elefanten, dazu noch einen achtel Elefanten, sowie einen sechzehntel Elefanten und ... immer noch die Hälfte der vorhergehenden Ration dazu. Der zweite Drachen frißt einen drittel Löwen, dazu einen neuntel Löwen, einen siebenundzwanzigstel Löwen und ... immer noch ein Drittel der vorhergehenden Ration dazu. Während der dritte Drachen einen viertel Tiger, dazu einen sechzehntel Tiger, einen vierundsechzigstel Tiger und ... immer noch ein Viertel der vorhergehenden Ration dazu frißt, und nie zu fressen aufhört! Das Erdmännchen behauptete, daß der erste Drachen einen Elefanten pro Tag verspeist, der zweite reicht mit einem Löwen zwei Tage und der dritte frißt an drei Tagen einen Tiger auf.*

Wollen wir uns zuerst dem Drachen Nummer 1 zuwenden. Sein *Elefantenverbrauch* pro Tag läßt sich mit einer Summe von unendlich vielen Summanden beschreiben, nämlich:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\ldots$$

usw.

bzw., da jeder Summand durch die Multiplikation seines Vorgängers mit $\frac{1}{2}$ hervorgeht:

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}$$

$+\ldots$ usw.

Da uns Sätze und Methoden der höheren Mathematik noch nicht bekannt sind, müssen wir uns auf die näherungsweise Berechnung dieser *unendlichen Summe* mit Hilfe des SR 1 beschränken.

Berechnen wir einmal die Summe der ersten 10, 20, 30 und 40 Summanden! Natürlich – mit dem Rechenablaufplan

$\boxed{1}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{1}\ \boxed{+}\ \boxed{1}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}$
$\boxed{y^x}\ \boxed{2}\ \boxed{+}\ \boxed{1}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{+}$
$\boxed{1}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{4}\ \boxed{+}\ \ldots$

ein zeitaufwendiges Unterfangen. Aber man sieht hier schön, wie die Summe zwar stetig wächst, die Zunahme aber immer geringer wird. Die SR 1-Experten haben aber längst einen rationelleren Weg gefunden. Mit Hilfe der Konstantenautomatik sind die Summen schnell erzeugt:

$\boxed{1}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{\times}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$
$\boxed{M+}\ \boxed{M+}\ \boxed{M+}\ \boxed{M+}$
$\boxed{=}\ \boxed{=}\ \ldots$
$\boxed{M+}\ \boxed{M+}$

Das Summieren realisiert man durch das Drücken der Speicher-„+"-Taste an den mit dem Pfeil gekennzeichneten Stellen.

Nun könnt ihr die folgende Tabelle leicht nachvollziehen:

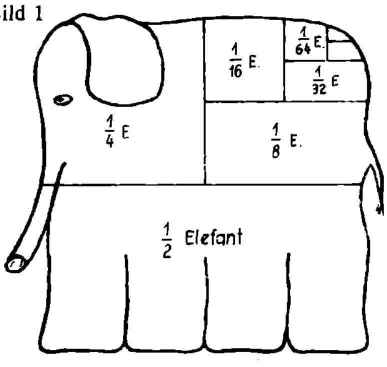
Tabelle 2

Anzahl von Summanden	Summe
10	0.99902344
20	0.99999904
30	0.99999999
40	0.99999999

Auch nach 40 Summanden nimmt die Summe weiterhin zu, doch die Summanden sind mittlerweile so klein, daß die Anzeige des SR 1 uns diese Zunahme nicht mehr mitteilen kann. Die Summanden werden so klein, daß sie im Rechner zu 0 abgerundet werden. Prinz Epsilon hat davon als eifriger Leser der Schülerzeitschrift *alpha* schon etwas erfahren (siehe *Chancen für Denkfaule?* in Heft 2/1985). Er ist deshalb auch mit einer Aussage vorsichtig. Mit dem SR 1 oder mit einem Computer kann man nur eine Idee für den Wert der Summe gewinnen, der angezeigte Wert kann aber durchaus falsch sein. Die Prinzessin nickt dem Prinzen jedoch heimlich zu: Die Summe wird den Wert 1 nie übersteigen, das hat sie in Syratanien in der Schule gelernt!

Diese Tatsache läßt sich auch geometrisch plausibel erklären (Bild 1).

Bild 1



Der erste Drache frißt und frißt, aber insgesamt doch nur einen Elefanten pro Tag. Der jeweils übrig bleibende Teil des Elefanten wird halbiert. Hieraus erkennt ihr, daß die Gesamtsumme nie größer als 1 werden kann!

Die erste Antwort zur dritten Frage ist gefunden. Um Teil 2 und 3 zu beantworten, benötigt ihr nun keine Hilfe mehr. Beachtet aber bitte genau, nach welchem Gesetz die Summanden zu bilden sind! Die *Elefantenration* haben wir im Kreisklub Mathematik in Halle mit einem Kleincomputer berechnet.

Hier ist das BASIC-Programm:

```
10 CLS
20 PRINT "SUMMANDEN",
   "LETZT SUMMAND", "SUMME"
30 PRINT "————————————————"
40 S=0:A=1
50 FOR I=1 TO 50
60 A=A/2
70 S=S+A
80 PRINT I, A, S
90 NEXT I
```

Für die Aufgabe mit den Löwen und den Tigern ist lediglich der Befehl Nr. 60 abzuändern!

Prinz Epsilon hat alle drei Aufgaben gelöst! Es findet eine große Hochzeitsfeier statt. Die Prinzessin ist überglücklich. Sogar die Fee, der Magier Riesifos und das kleine Erdmännlein kommen, um zu gratulieren....

Herrn Dr. Schmidt von der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald möchten wir für Hinweise und Ratschläge danken. Solltet ihr Spaß an den Aufgaben oder neue Ideen haben, so schreibt uns bitte über:

Redaktion *alpha*, PSF 14, Leipzig 7027!

U. Siebert

Krysicki, Wlodzimierz
Keine Angst vor x und y
Quadratische Gleichungen und Gleichungssysteme
MSB Nr. 119
108 Seiten, 19 Abb. Preis: 6,50 M
Bestell-Nr. 666 186 7

Schreiber, P.
Euklid
Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner
59 Seiten, 31 Abb. Preis: 7,50 M
Bestell-Nr. 666 375 8
beide Titel: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig

Wiederholungsprogramm
Berane/Gärtner/Lohse
Gleichungen und Funktionen
214 Seiten, 92 Bilder Preis: 7,80 M
Bestell-Nr. 546 528 2

Naumann/Schuricht
Sensoren – technische Sinnesorgane?
etwa 160 Seiten, 95 Bilder, 4 Tabellen
Bestell-Nr. 547 246 6 Preis: 5,50 M
beide Titel: VEB Fachbuchverlag Leipzig

Höfner, G.
Computerbegriffe populär
124 Seiten, zahlr. Abb. Preis: 7,50 M
Bestell-Nr. 654 178 5
Urania-Verlag Leipzig

Wolf, D.
Bevor der Film ins Kino kommt
137 Seiten, zahlr. Abb. Preis: 6,80 M
Bestell-Nr. 632 709 2

Spittel, Olaf R
Kleines Rätselbuch für Kinder
159 Seiten, zahlr. Abb. Preis: 6,00 M
Bestell-Nr. 632 504 6
beide Titel: Der Kinderbuchverlag Berlin

Ein Teil der Bücher ist beim Buchhandel vergriffen. Wir weisen auf Möglichkeit der Ausleihe in Bibliotheken hin.

Symmetrie auf einem Band

Sicherlich hast du schnell ein Band zur Hand, das man zum Einpacken von Geschenken verwendet. Suche dir bitte ein solches mit einem Muster aus.

● Was fällt dir auf? Welche Gesetzmäßigkeiten erkennst du?

Wir betrachten die Beispiele in Bild 1, 2 und 3.

Es fällt auf, daß regelmäßig und in gleichen Abständen jeder Teil des Musters wiederkehrt. Durch eine Verschiebung längs des Bandes läßt sich also das Muster zur Deckung bringen. In jedem der drei Bilder haben wir durch einen Pfeil eine derartige Verschiebung mit der kleinsten Verschiebungsweite angegeben.

Diese Eigenschaft ist im allgemeinen schon durch die technische Herstellung bedingt. Wird das Muster aufgedruckt, so muß sich (spätestens) nach einem Umlauf der Druckrolle das Muster wiederholen.

Ist v eine Verschiebung, bei der das Muster des Bandes wieder mit sich zur Dekkung kommt, so tritt dies offenbar auch bei der zu v entgegengesetzten Verschiebung sowie nach der zweimaligen Ausführung der Verschiebung v ein.

Das Band darf man sich dabei weder mit einem Anfang noch mit einem Ende vorstellen. Dies ist natürlich nur eine Vorstellung. Jedes real vorliegende Band hat immer einen Anfang und ein Ende. Aber wenn wir an die drucktechnische Herstellung denken, so besteht natürlich kein Grund, daß die Druckrolle nur eine bestimmte Anzahl von Umdrehungen ausführt.

Im folgenden wollen wir unter einem *Bandmuster* stets ein Muster eines Bandes verstehen, für das es eine Verschiebung mit kleinster Verschiebungsweite gibt, die das Muster auf sich abbildet.

● Ein Bandmuster mit der beschriebenen Verschiebungssymmetrie entsteht, wenn du auf einem Papierstreifen in gleichen Abständen ein Motiv mit einem Stempel aufdruckst oder zeichnest.

Wie müßte das Motiv auf dem Stempel (etwa aus einer Kartoffel gefertigt) aussehen, damit auf diese Weise das Muster in Bild 3 entsteht?

Bandmuster sind dir bereits bei Besichtigung von Museen, Schlössern und in älteren Gebäuden aufgefallen. Sie dienen meist als Abschluß, als Berandung von Wänden (Wandtapeten) und Decken. Man nennt sie *Friese*.

In einschlägigen Geschäften werden Zierstreifen für dekorative Arbeiten angeboten. Man findet Zierstreifen auf Vasen und Geschirr. Denkt man sich hinsichtlich dieser Gegenstände diese Verzierungen abgerollt vor, so führt das wieder zu unseren (endlosen) Bandmustern.

● Gibt es außer den Verschiebungen noch weitere Bewegungen des Bandes, die das Muster zur Deckung bringen? Betrachte die Muster in den Bildern 1, 2 und 3 genauer und vergleiche!

Das Bandmuster in Bild 1 besitzt Symmetrieachsen, die senkrecht zur Bandrichtung liegen und zwischen denen gleiche Abstände bestehen. Mit anderen Worten, bei der Spiegelung an diesen (und nur an diesen) Geraden kommt das Muster des Bandes zur Deckung. Der Abstand zweier benachbarter Symmetrieachsen ist halb so groß wie die Länge des angegebenen Verschiebungspfeils. In Bild 2 kommen keine weiteren Bewegungen als die bereits genannten Verschiebungen in Frage.

Bei dem Muster in Bild 3 haben wir neben den Verschiebungen und Symmetrieachsen, die zur Bandrichtung senkrecht sind, noch Drehungen um 180°, bei denen das Muster auf sich abgebildet wird. Die Zentren dieser Drehungen liegen in gleichen Abständen auf ein und derselben Geraden; der Abstand zweier benachbarter ist halb so groß wie die Länge des angegebenen Verschiebungspfeils (Bild 4a). Überdies sind die Symmetrieachsen gerade die Mittelsenkrechten von je zwei benachbarten Drehzentren.

Die Drehung um einen Punkt P mit 180° nennt man auch die *Spiegelung am Punkt P*. Und geht dabei das Muster in sich über, so heißt P ein *Symmetriezentrum* des Musters.

Wir wollen nun mit Hilfe von Punktspiegelungen ein Muster auf einem Band erzeugen und wählen zur einfacheren Durchführung kleinkariertes Papier.

● Markiere auf einer Geraden in Bandrichtung Punkte, die gleiche Abstände besitzen. Wähle überdies ein einfaches Motiv (Grundfigur), etwa ein F wie in Bild 5a!

Nun spiegeln wir abwechselnd an den vorgegebenen Punkten. Es entsteht ein Muster wie in Bild 5b. Dieses Muster hat als Symmetriezentren die vorgegebenen Punkte (und nur diese), und es gibt auch hier wieder eine Verschiebung, die das Muster zur Deckung bringt. Eine derartige Verschiebung mit der kleinsten Verschiebungsweite wird durch einen Pfeil beschrieben, der von einem der Symmetriezentren bis zum übernächsten reicht (Bild 5b).

An Hand des Bildes 1 kannst du sofort erkennen, daß man ein Bandmuster auch erhalten kann, wenn man senkrecht zur Bandrichtung Geraden in gleichen Abständen wählt und an ihnen ein vorgegebenes Motiv spiegelt.

● Erzeuge auf diese Weise das Muster in Bild 3! Eine dafür geeignete Grundfigur (Motiv) zeigt Bild 4b.

Wir kehren zurück zu der Erzeugung mit Punktspiegelungen.

● Wähle ein Motiv derart, daß als Muster eine zusammenhängende einfache Linie wie in Bild 3 entsteht und dieses Muster keine Symmetrieachse besitzt. Eine mögliche Lösung zeigt Bild 6a und 6b.

● Welches Bandmuster entsteht, wenn du anstelle des Motivs in Bild 6a das Motiv aus Bild 6c oder 6d verwendest?

Vergleiche diese Muster hinsichtlich der möglichen Deckabbildungen mit den bisher betrachteten Bandmustern!

Bild 1

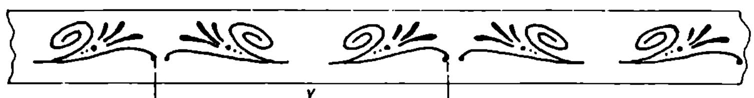


Bild 2

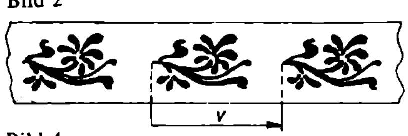


Bild 3

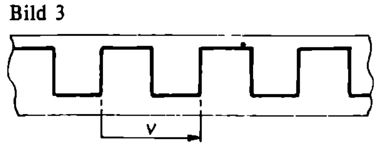
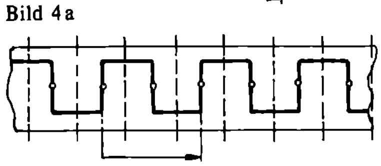


Bild 4a



4b

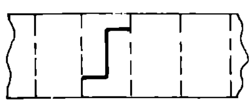
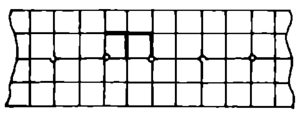
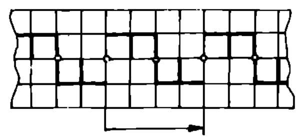


Bild 5a



5b



Ausgehend von dem Motiv in Bild 6d entsteht ein Bandmuster, das neben Symmetrieachsen senkrecht zur Bandrichtung auch noch diejenige Gerade a als Symmetrieachse besitzt, auf der die Symmetriezentren liegen. Außerdem treten zusätzliche Symmetriezentren neben den vorgegebenen Punkten auf, und zwar die Mittelpunkte der Verbindungsstrecken, die je zwei benachbarte der vorgegebenen Punkte bilden (Bild 6e).

● Wie läßt sich dieses Muster mit Geradenspiegelungen allein herstellen und welche Grundfigur kann dazu gewählt werden? Das Bild 6f zeigt eine Lösung.

● Welche Deckabbildungen besitzt das Bandmuster in Bild 7?

Neben den typischen Verschiebungen gibt es hier nur eine Geradenspiegelung an einer Geraden a in Bandrichtung.

Bei den bisher betrachteten Bandmustern haben wir hinsichtlich der möglichen Deckabbildungen sechs verschiedene Typen kennengelernt. Neben den typischen Verschiebungen gibt es

1. keine weiteren Deckabbildungen (Bild 2),
2. nur Spiegelungen an Geraden senkrecht zur Bandrichtung (Bild 1),
3. nur Punktspiegelungen (Bild 5b und 6b),
4. nur eine Spiegelung an einer Geraden in Bandrichtung (Bild 7),
5. Spiegelungen an Geraden senkrecht zur Bandrichtung und Punktspiegelungen (Bild 3; die Symmetriezentren liegen dabei nicht auf den Symmetrieachsen!)

und schließlich

6. Spiegelungen an Geraden senkrecht zur Bandrichtung, Spiegelung an einer Geraden in Bandrichtung und Punktspiegelungen (Bild 6e; die Symmetriezentren sind dabei die Schnittpunkte der zur Bandrichtung senkrechten Symmetrieachsen mit der einzigen in Bandrichtung liegenden Symmetrieachse).

● Auch das folgende Muster in Bild 8 ist ein Bandmuster.

Besitzt es aber im Vergleich zu irgendeinem der bisherigen Bandmuster die gleiche Art von Deckabbildungen?

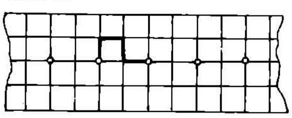
Dieses Muster kann im Vergleich zu dem Muster in Bild 2 noch durch die Nacheinanderausführung der angegebenen Verschiebung t und der Spiegelung an der Geraden g zur Deckung gebracht werden. Eine derartige Bewegung nennt man eine *Schubspiegelung*. Und es ist besonders bemerkenswert, daß weder die Verschiebung t noch die Spiegelung an der Geraden g für sich allein diese Eigenschaft besitzen. (Die Schubspiegelung besitzt also eine eigene Qualität! Schubspiegelungen als Deckabbildungen bestehen (nachträglich gesehen) zwangsläufig bei den Mustertypen 4, 5 und 6.)

Überraschenderweise gibt es nur diese sieben Arten von Bandmustern. (Wenn du meinst, daß du noch eine neue Art (mit einem anderen Gefüge von Deckabbildungen) gefunden hast, dann schicke uns diese zu.) Wir können das hier nicht näher begründen. Es war ohnehin nicht die Absicht, theoretische Grundlagen und Zusammenhänge in den Vordergrund zu stellen. So ist z. B. von Bedeutung, daß die Nacheinanderausführung der Spiegelungen an den Punkten P und Q eine Verschiebung ist, die doppelt so groß wie $\overline{PQ}$ ist, und daß die Nacheinanderausführung der Spiegelungen an zueinander senkrechten Geraden die Spiegelung an ihrem Schnittpunkt ist. Wir wollten mehr in Form einer spielerischen Beschäftigung dein Interesse gewinnen und dir den Blick öffnen für geometrische Gesetzmäßigkeiten.

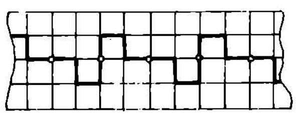
● Und nun kannst du selbst besonders schöne Bandmuster herstellen, etwa auch mit Hilfe von Abriebfolien, die im Handel erhältlich sind. Oder du betrachtest bewußt Friese (Wandmuster) in deiner Umgebung.

Viel Spaß wünscht dir *E. Quaisser*

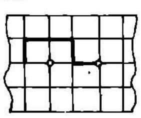
Bild 6a



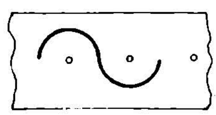
6b



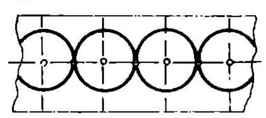
6c



6d



6e



a

6f

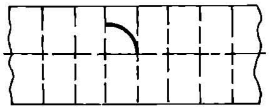
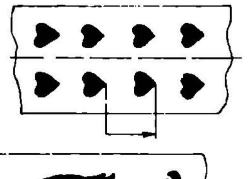
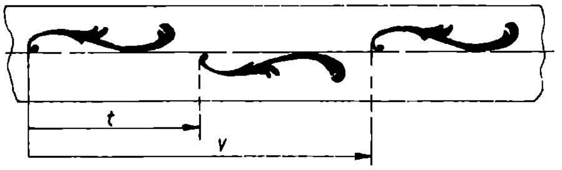


Bild 7



a

Bild 8



g

Bild 9

6096096096096

Eine Aufgabe von Prof. Dr. V. Paulauskas

Mathematische Fakultät der V.-Kapsukas-Universität Vilnius Leiter des Wissenschaftsbereiches Analysis

▲2908▲ In der linken unteren Ecke eines Schachbrettes steht ein Damestein. Zwei Spieler setzen abwechselnd den Stein in ein unmittelbar benachbartes Feld, erlaubt sind aber nur Züge nach rechts, nach oben und in Richtung *Nordosten* (Diagonalzug nach rechts oben)! Es gewinnt der Spieler, der mit seinem Zug den Damestein in die rechte obere Ecke des Schachbretts setzt.

Kann der Spieler, der den ersten Zug ausführt, gewinnen, unabhängig davon, welche Züge der andere Spieler macht?

Vigantas Paulauskas wurde am 18.10.1944 im Dorf Burju (Rayon Kelmes) in der Litauischen Sowjetrepublik (UdSSR) geboren. Schulbesuch in Kaunas. Von 1962 bis 1967 Studium an der Universität Vilnius Mathematik, Studienabschluß mit Auszeichnung. Danach Aspirantur bei Prof. Statulevčius. 1969 Promotion (Kandidat der Wissenschaften). Wissenschaftliche Arbeit am Lehrstuhl für Wahrscheinlichkeitstheorie und Zahlentheorie unter Leitung von Prof. Dr. J. Kubilius (siehe *alpha* 5/85; 6/86). 1972 Berufung zum Dozenten. 1978 Verteidigung der Dissertation B (Doktor der Wissenschaften). Seit 1981 Professor. Längere Auslandsaufenthalte in Göteborg, Budapest, Dresden, Prag, Upsala, Stockholm, Köln, Aachen, Frankfurt/M. und Kiota. Ausgezeichnet mit dem Ehrenpreis des Komsomol der LSSR (1972) und dem Litauischen Ehrenpreis für Naturwissenschaften (1979). Zahlreiche wissenschaftliche Publikationen, darunter eine Monographie (zusammen mit seinem Schüler Raškauskas).

Arbeitsgebiet von Prof. Paulauskas: Theorie der Verteilungen und Grenzwertsätze in unendlichdimensionalen Räumen. Verdienste hat sich Prof. Paulauskas um die Förderung von talentierten Schülern und jungen Wissenschaftlern erworben. Er ist Vorsitzender des Komitees für die Mathematikolympiade in der LSSR.

Wir rechnen mit dem SR 1

Geschwindigkeiten in Natur und Technik

Die besten Läufer der Welt legen im Sprint 100 m in weniger als 10 s zurück. Das ist eine phantastische Zeit und ganz sicher eine beachtliche Leistung für ein *Lebewesen*. Ihr hättet wohl etliche Mühe, auf dem Fahrrad dieses Tempo mitzuhalten. Und doch ist ein ganz gewöhnlicher Feldhase noch etwas schneller, er schafft nämlich etwa $40\,\frac{km}{h}$.

▲1▲ Bestätigt, daß der Hase schneller läuft!

Nun sind jedoch nicht alle Lebewesen Schnelläufer, -schwimmer oder -flieger, manche bewegen sich im Schneckentempo.

In den nachstehenden Tabellen sind die Höchstgeschwindigkeiten einiger Tiere angegeben.

Auf dem Lande

Gepard	$v_1 = 28\,\frac{m}{s}$
Antilope	$v_2 = 27\,\frac{m}{s}$
Schildkröte	$v_3 = 5\,\frac{cm}{s}$
Schnecke	$v_4 = 5{,}76\,\frac{m}{h}$
Mensch	$v_5 = 10\,\frac{m}{s}$

▲2▲ Berechne die Geschwindigkeiten v_i in $\frac{km}{h}$ und vergleiche sie. Ermittle das Verhältnis der Geschwindigkeiten der genannten Tiere zu der Höchstgeschwindigkeit des Menschen, also $v_i : v_5$ für $i = 1, 2, 3, 4$.

Im Wasser

Schwertfisch	$v_6 = 37\,\frac{m}{s}$
Thunfisch	$v_7 = 28\,\frac{m}{s}$
Delphin	$v_8 = 25\,\frac{m}{s}$
Lederschildkröte	$v_9 = 9{,}7\,\frac{m}{s}$
Freistilschwimmer	$v_{10} = 2\,\frac{m}{s}$

▲3▲ Rechne alle Geschwindigkeiten in $\frac{km}{h}$ um und bestimme, wievielmal die Meeresbewohner schneller als der Mensch im Wasser sind!

In der Luft

Mauersegler	$v_{11} = 80\,\frac{m}{s}$
Schwalbe	$v_{12} = 60\,\frac{m}{s}$
Brieftaube	$v_{13} = 50\,\frac{m}{s}$
Buchfink	$v_{14} = 54\,\frac{km}{h}$

Der Mensch ist von Natur aus weder auf dem Lande noch im Wasser extrem schnell. Der Luftraum ist ihm für die eigene Fortbewegung gänzlich versagt. Aber seine Fähigkeit, schöpferisch zu denken, schuf und schafft ihm Hilfsmittel, die ihn auch in bezug auf die Geschwindigkeit weit über das Tierreich hinausheben. Moderne Flugzeuge erreichen bis zu $980\,\frac{m}{s}$.

▲4▲ Bestimme die Geschwindigkeiten v_{11}, v_{12}, v_{13} und v_{14} der Vögel und die des schnellsten Flugzeuges (v_{15}) und ermittle die Quotienten $v_i : v_{15}$ für $i = 11, \ldots, 14$ mit dem SR 1!

Auf dem Lande begann der Mensch 1829 das erste *vollwertige* Hilfsmittel zur deutlichen Steigerung seines Fortbewegungstempos einzusetzen, die Eisenbahn. Die Lokomotive *Rocket* von Stephenson erreichte damals mit einem von 36 Personen besetzten Wagen eine Geschwindigkeit von $46\,\frac{km}{h}$. Im Jahre 1903 wurde mit einem elektrisch angetriebenen Versuchstriebwagen eine Geschwindigkeit von $210{,}2\,\frac{km}{h}$ erzielt. 1936 brachte es eine Dampflokomotive (Baureihe 05 der DR) mit einem 197 t schweren Zug auf $200{,}4\,\frac{km}{h}$. In Japan verkehren seit 1964 Super-Expreß-Züge mit einer Reisegeschwindigkeit von $163\,\frac{km}{h}$, wobei die Höchstgeschwindigkeit $210\,\frac{km}{h}$ beträgt und auf $270\,\frac{km}{h}$ erhöht werden soll. Nach Pressemeldungen sind sogar Höchstgeschwindigkeitszüge mit Linearmotor geplant, die über $400\,\frac{km}{h}$ fahren sollen. In Frankreich erzielen die TGV-Züge Spitzengeschwindigkeiten von $260\,\frac{km}{h}$ und bei Versuchsfahrten sogar $380\,\frac{km}{h}$.

▲5▲ Auf wieviel Prozent wurden bei den angeführten Zügen die Geschwindigkeiten gegenüber der Geschwindigkeit der Lokomotive *Rocket* gesteigert? Um wieviel Prozent lag die Höchstgeschwindigkeit der Dampflokomotive BR 05 $\left(200{,}4\,\frac{km}{h}\right)$ über der von der Lokomotive *Rocket* erreichten Geschwindigkeit von $46\,\frac{km}{h}$?

▲6▲ Dem Kursbuch des internationalen Verkehrs 1985/86 ist zu entnehmen:

Zug-Nr.:		R 801	R 815
km	Station		
0	Paris Gar-de-Lyon	ab 10.23	11.42
617	Valence	an	14.36
742	Avignon	an 14.09	

Berechne die Reisegeschwindigkeit der beiden Züge!

Welche Fahrzeit würde die Lokomotive *Rocket* für die Strecke Paris–Avignon (ohne Zwischenaufenthalt) mindestens benötigen?

▲7▲ Der Städte-Expreß *Lipsia* benötigt für die 182 km lange Strecke von Berlin bis Leipzig 2 Stunden und 16 Minuten. Die Selketalbahn fährt (zur Freude vieler Harzbesucher) 10.55 Uhr in Gernrode ab und trifft 12.10 Uhr im 17,5 km entfernten Harzgerode ein. Wievielmal schneller ist der Städteexpreß als die Selketalbahn?

Im Straßenverkehr gelang der Durchbruch zu auf die Dauer tauglichen Fahrzeugen erst, als der Verbrennungsmotor zur Verfügung stand. 1885 baute *Carl Benz* ein mit Benzinmotor angetriebenes Straßenfahrzeug. 1895 betrug beim ersten Automobilrennen, das in Frankreich ausgetragen wurde, die Durchschnittsgeschwindigkeit $24\,\frac{km}{h}$. Schon fünf Jahre danach wurden von einem Kraftwagen $105\,\frac{km}{h}$ erreicht. Es soll hier auch erwähnt werden, daß viele Rekordjagden nur Reklamewert besitzen und äußerst fragwürdig oder unsinnig sind und nur des Geschäftes wegen Leben und Gesundheit von Menschen aufs Spiel setzen. Ein trauriges Beispiel dafür ist der Rekordversuch mit dem Spezialfahrzeug *Blue Flame* auf einem ausgetrockneten Salzsee im USA-Staat Utah, bei $1000\,\frac{km}{h}$ schwebt der Fahrer in Lebensgefahr.

A. Körner/W. Schmidt

Eine Leseranfrage

Liebe Redaktion *alpha*!

Ich habe mich in meiner Freizeit mit einer eurer Aufgaben beschäftigt. Die Anregung dazu erhielt ich durch die FKR Mathematik an meiner Schule. Ich versuchte die Zahlen 1, 9, 8 und 8 (genau in dieser Reihenfolge) mit Hilfe der vier Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division), $\sqrt{x}$, $x!$ und mit Klammern so zu verknüpfen, daß ich die natürlichen Zahlen von 0 bis 20 erhielt. Weitere Versuche endeten bei der Zahl 41. Außerdem fand ich keine Möglichkeit die Zahl 38 darzustellen. Mich würde sehr interessieren, ob für die Zahl 38 und die Zahlen größer 41 überhaupt Lösungen existieren.

Arne Krüger
Mittelstr. 22
Landgrafenroda
4241

Wenn ihr eine Lösung wißt, schreibt doch an Arne!

Die Redaktion

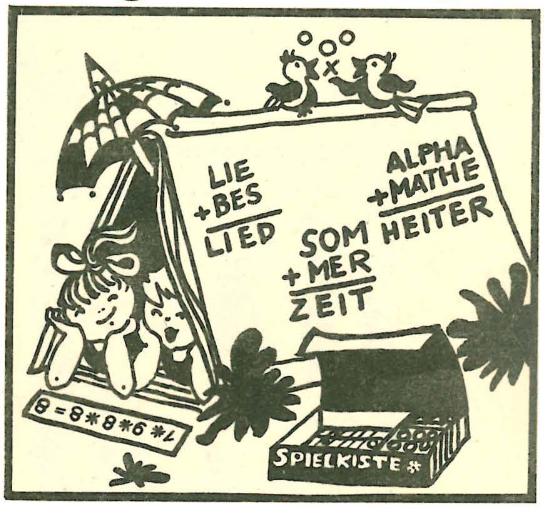
Kryptarithmetik

1. Setze natürliche Zahlen so ein, daß richtig gelöste Aufgaben entstehen!

	+		:		=7
−	■	+	■	·	■
	·	5	−		=6
−	■	:	■	+	■
	·		+		= 8
=0	■	= 3	■	= 9	■

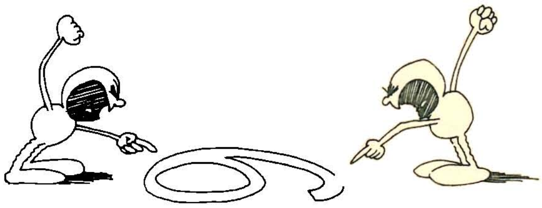
2. Setze für das Zeichen * Ziffern ein, so daß sich richtig gelöste Aufgaben ergeben!

$$2* + *0 = 54$$
$$7 \cdot * = 2*$$
$$3* : * = 4$$
$$4* - 9 = 4*$$



Suchbild

Durch welche neun Änderungen unterscheiden sich beide Bilder?



Konkret

1. Auf zwei Büschen saßen 16 Spatzen. Bald darauf flogen vom ersten Busch 2 Spatzen davon und vom zweiten Busch flogen 5 Spatzen zum ersten hinüber. Jetzt saßen auf beiden Büschen gleich viel Spatzen. Wieviel Spatzen waren anfangs auf jedem Busch?

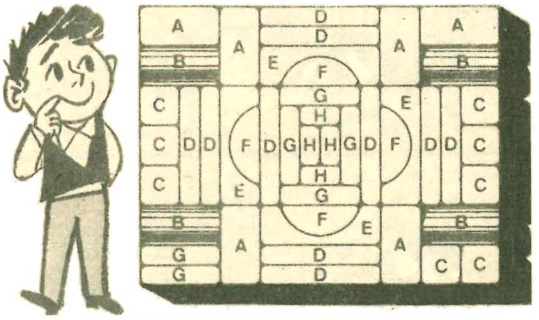
2. Ein Koch soll 4 Liter Milch abmessen. Es stehen ihm aber nur ein 3-Liter- und ein 5-Liter-Gefäß zur Verfügung. Kannst du ihm helfen?

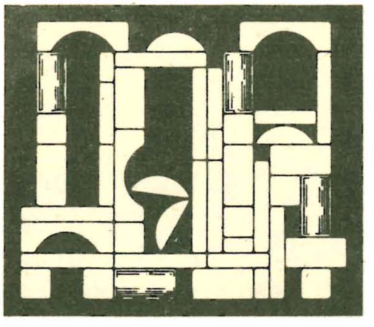
3. Längs einer Landstraße stehen Telegrafenmasten in regelmäßigen Abständen. Vom 1. bis zum 5. sind es 200 Meter. Wie weit ist es vom 1. bis zum 10. Mast?

4. In jedem von drei Körben sind zwei Kohlköpfe. Der eine enthält zwei Weißkohl-, der andere zwei Rotkohl- und der dritte einen Weißkohl- und einen Rotkohlkopf. Jemand hatte die Beschriftung vertauscht. Wer schafft es mit *einem* Griff, ohne in die Körbe zu schauen. Einen Kohlkopf nahm er heraus und konnte nun den Inhalt der anderen richtig bestimmen.

Beobachtungstest

Dieser ungarische Schüler hat mit seinem Baukasten ein schönes Tor gebaut. Ein Stein blieb übrig. Welcher?





2

Abstrakt

1. Nur Fünfen enthält das Produkt zweier zweistelliger Zahlen.
Welches sind die Faktoren des Produkts?

2. Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 10. Verdoppelt man die Ausgangszahl und subtrahiert 1, dann erhält man eine Zahl, die die Ziffern der ersten in umgekehrter Reihenfolge enthält.

3. Der fünfte Teil vom Siebzigfachen einer Zahl ist 420.
Wie heißt die Zahl?

4. Das Dreifache einer Zahl, vermehrt um ihr Vierfaches ist 21.

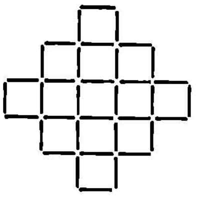
5. Vermindert man das Siebenfache einer Zahl um 27, so erhält man ihr Vierfaches.

6. Die Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender Zahlen ist 61.
Wie heißen die beiden Zahlen?

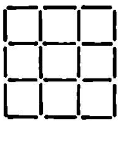
15

Spiele mit Hölzchen

1. Von den 13 Quadraten sind vier Hölzchen wegzunehmen, so daß noch acht Quadrate übrig bleiben.



2. Nimm von dieser Figur acht Hölzchen weg, so daß nur noch drei Quadrate übrig bleiben!



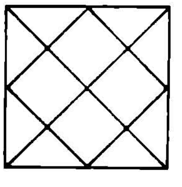
3. In jeder Zahlengruppe ist ein Hölzchen so umzulegen, daß eine richtig gelöste Aufgabe entsteht.

III-II=IV	VI+II=III	VII+I=V	VI-IV=IX

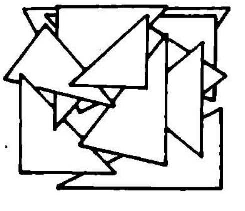
4

Wie viele Flächen siehst du?

1. Wie viele Quadrate und wie viele Dreiecke findest du in dieser Figur?



2. Wie viele Dreiecke liegen in dieser Figur übereinander?



13

Irrgarten

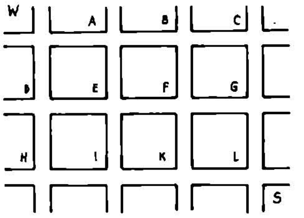
Wer findet am schnellsten den Weg von A nach B?

A B

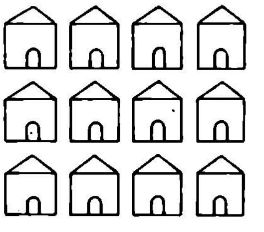
12

Kürzeste Wege

1. Monika geht auf kürzestem Wege von ihrem Bungalow (*W*) zum Lagerkino (*S*). Zeige Möglichkeiten!



2. Zwölf Häuser sollen durch Telefonkabel verbunden werden.
Um Geld zu sparen, ist der kürzeste Weg durch die Häuser zu finden. Das Kabel kann bei jedem beliebigen Haus beginnen, braucht nicht zum Ausgangspunkt zurück.



5

Ein Blick in die Praxis

1. Marie-Luise ließ einen Fünfmarkschein wechseln und erhielt dabei 20 Münzen zu 5, 10 und 50 Pfennigen.
Wieviel von jeder Sorte waren es?

2. Ein Baum wirft einen Schatten, der 10 Meter lang ist. Ein drei Meter langer Stab wirft einen zwei Meter langen Schatten.
Wie hoch ist der Baum?

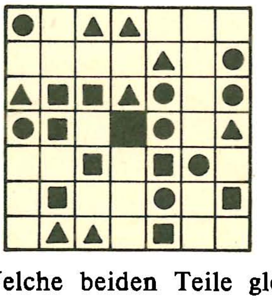
3. Wenn du erraten kannst, wieviel Äpfel ich habe, dann bekommst du die Hälfte weniger als zwei oder – was dasselbe ist – ein Drittel und noch einen Apfel dazu.
Wie viele Äpfel waren vorhanden, wie viele sollten verschenkt werden?

4. Vier große und drei kleine Päckchen wiegen zusammen 2,9 kg. Dagegen haben drei große und vier kleine Päckchen zusammen ein Gewicht von 2,7 kg.
Wie schwer ist ein großes und wie schwer ein kleines Päckchen?

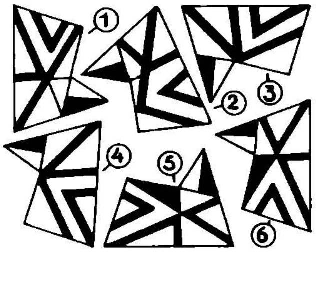
10

aufgepaßt – mitgemacht

1. Das Quadrat soll in vier formgleiche (kongruente) Teile zerlegt werden. Jedes Teil soll zwei kleine Quadrate, zwei Dreiecke und zwei Kreise enthalten.



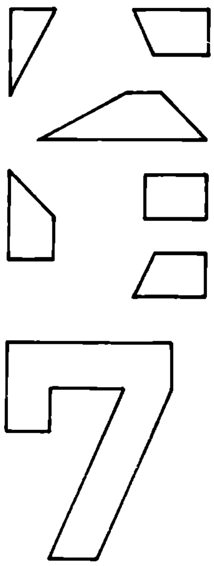
2. Welche beiden Teile gleichen sich vollkommen?



7

Die interessante Sieben

Ein altes Legespiel: Paust die sechs Teile ab, schneidet sie aus und setzt aus ihnen eine nach dem Muster des Bildes gezeigte *Sieben* zusammen!



6

Lustige Zahlenspielereien

1. Die Zahlen von 0 bis 10 sollen mit jeweils vier Siebenen oder fünf Dreien und den gebräuchlichen Rechenzeichen dargestellt werden.

Beispiel: $\frac{77}{7} - 7 = 4$; $3 + 33 : 33 = 4$ usw.

2. Die Zahl 100 ist mit jeweils neun gleichen Ziffern (von 1 bis 9), die durch beliebige Rechenoperationen der vier Grundrechenarten zu verbinden sind, darzustellen. Es gibt viele Möglichkeiten.

$1 \cdot 1 \cdot 111 - 1 \cdot 1 \cdot 11$	$= 100$
	$= 100$
	$= 100$
	$= 100$
$55 + 5 + 5\left(5 + 5 - \frac{5+5}{5}\right)$	$= 100$
	$= 100$
	$= 100$
$\frac{888}{8} - \frac{88}{8} + 8 - 8$	$= 100$
	$= 100$

11

Abstrakt

1. Die Zahl 80 ist so in zwei Teile zu zerlegen, daß der eine Teil 60 % des anderen bildet.

2. Wieviel sind eineinhalb Drittel von 100?

3. Die Summe zweier Zahlen sei ein ganzzahliges Vielfaches von 1000. Der erste Summand ist 1988. Der zweite Summand ist zweistellig. Berechne ihn!

4. „Wie alt ist die Eiche?“, fragten Schüler den Förster. „Nun überlegt einmal!“, antwortete er verschmitzt. „Addiert die größte einstellige Zahl und die größte zweistellige Zahl und die größte dreistellige Zahl. Von dieser Summe subtrahiert die kleinste vierstellige Zahl! Dann wißt ihr, wie alt die Eiche ist.“

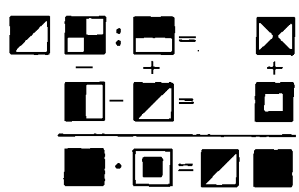
Die Lösungen zu dieser Knobel-Wandzeitung sind auf Seite 69 zu finden. Die Seiten 59 bis 62 können auch, sauber ausgeschnitten und gefaltet, als Mini-Mathe-Heft verwendet werden.

Viel Freude und Erfolg wünscht *J. Lehmann*

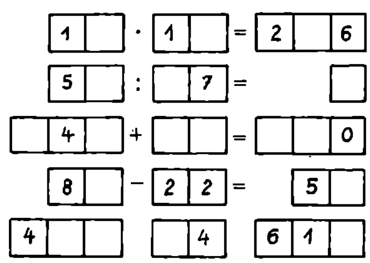
8

Weißt du es?

1. Setze für die Zeichen Ziffern so ein, daß richtig gelöste Aufgaben entstehen! Gleiche Zeichen bedeuten gleiche Ziffern.



2. Setze für die Leerstellen Ziffern so ein, daß richtig gelöste Aufgaben entstehen!



9

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade

6./7. Februar 1988

Olympiadeklasse 7

270731 Vier Mannschaften, A, B, C und D, trugen ein Fußballturnier aus. Jede Mannschaft spielte genau einmal gegen jede andere Mannschaft. Jedes gewonnene Spiel wurde mit 2 Punkten für die Siegermannschaft und mit 0 Punkten für die Verlierermannschaft gewertet, jedes unentschiedene Spiel für beide Mannschaften mit je 1 Punkt. Weiterhin ist folgendes bekannt:

(1) Keine Mannschaft blieb ohne Punkte.
(2) Mannschaft A konnte ihren Turniersieg aus dem vorigen Jahr nicht wiederholen, erreichte aber eine höhere Gesamtpunktzahl als Mannschaft B.
(3) Mannschaft C gewann kein Spiel, erreichte jedoch eine geradzahlige Gesamtpunktzahl.
(4) Mannschaft D spielte in keinem ihrer Spiele unentschieden und gewann gegen B sowie gegen den Turniersieger des vorigen Jahres.

Untersuche, ob aus diesen Angaben eindeutig folgt, welche Punktzahlen jedes Spiel des Turniers den einzelnen Mannschaften erbrachte und welche Gesamtpunktzahlen sie erreichten!
Ist das der Fall, so trage die Punktzahlen in die folgende Tabelle ein!

Mannschaft	Erreichte Punktzahl gegen A	B	C	D	Erreichte Gesamtpunktzahl
A	–				
B		–			
C			–		
D				–	

270732 In einem Betrieb werden Erzeugnisse hergestellt, bei denen die Herstellungskosten für jedes Stück 19,20 M betragen. Der Betrieb hat die Möglichkeit, für 13 500 M eine neue Werkzeugmaschine anzuschaffen; mit dieser Maschine würden die Herstellungskosten für jedes Stück nur noch 13,15 M betragen.
Ein Planziel lautet: Die Summe aus den Anschaffungskosten der neuen Maschine und aus den Herstellungskosten der damit in 3 Jahren hergestellten Erzeugnisse soll weniger als 80% derjenigen Herstellungskosten betragen, die (für ebenso viele Erzeugnisse) ohne Nutzung der neuen Maschine entstehen würden.
Ermittle die kleinste Stückzahl pro Jahr, mit der dieses Planziel zu erreichen ist!

270733 Gegeben sei ein Dreieck ABC, in dem die Größe γ des Winkels $\sphericalangle ACB$ kleiner ist als die Größe β des Winkels $\sphericalangle ABC$. Gefordert seien die folgenden von einem Punkt P zu erfüllenden Bedingungen (1) und (2):
(1) P liegt auf der Strecke AC.
(2) Der Winkel $\sphericalangle APB$ hat die Größe 2γ.
a) Beschreibe hierzu eine Konstruktion; zeige, daß sie zu jedem Dreieck ABC mit $\gamma < \beta$ genau einen Punkt P liefert und daß die beiden folgenden Aussagen b) und c) gelten!
b) Wenn ein Punkt P die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, dann wird er durch die beschriebene Konstruktion erhalten.
c) Wenn ein Punkt P durch die beschriebene Konstruktion erhalten wird, dann erfüllt er die Bedingungen (1) und (2).

270734 Ermittle alle diejenigen geordneten Paare $(x;y)$ natürlicher Zahlen x, y, für die
$x^2 + xy + y^2 = 49$ gilt!

270735 In einem Dreieck ABC seien CD und BE die Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ACB$ bzw. $\sphericalangle ABC$. Der Schnittpunkt dieser Strecken CD, BE sei S. Wie üblich bezeichne α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$. Vorausgesetzt werde nun, daß der Winkel $\sphericalangle BSD$ die Größe 4α hat.
Weise nach, daß durch diese Voraussetzung die Winkelgröße α eindeutig bestimmt ist, und ermittle α!

270736 In einem Dreieck ABC seien AD, BE und CF die drei Seitenhalbierenden. Sie gehen bekanntlich durch einen gemeinsamen Punkt S.
Beweise, daß für jedes Dreieck mit diesen Bezeichnungen die Aussage gilt:
Alle sechs Dreiecke BDS, DCS, CES, EAS, AFS, FBS haben denselben Flächeninhalt!

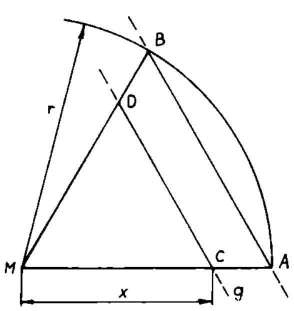
Olympiadeklasse 8

270831 Während einer Kindergeburtstagsfeier spielt man „Geburtstagsdatum erraten". Katrin, das Geburtstagskind, erklärt ihrem jeweiligen Spielpartner: „Teile dein Geburtstagsdatum auf in eine Tageszahl und eine Monatszahl! (Mein heutiger Geburtstag, der 24. Mai, wäre z. B. aufzuteilen in die Tageszahl 24 und die Monatszahl 5.) Verdopple nun die Tageszahl deines Geburtsdatums, addiere zum Ergebnis 7, multipliziere die Summe mit 50 und vermehre das Produkt um die Monatszahl deines Geburtsdatums!"
Nachdem das Ergebnis genannt wurde, war Katrin in der Lage, das betreffende Geburtsdatum zu nennen. Erkläre, durch welche Überlegung man das Geburtsdatum in jedem Fall aus dem Ergebnis der von Katrin geforderten Rechnung finden kann!

270832 Bei einem Schachturnier spielte jeder der acht Teilnehmer gegen jeden anderen genau eine Partie; die von den einzelnen Spielern erreichten Punktzahlen waren sämtlich voneinander verschieden. Bernd, der den zweiten Platz belegte, gewann so viele Punkte wie die vier Letztplazierten zusammen.
Gerd wurde Dritter und Uwe belegte den siebenten Platz.
Untersuche, ob aus diesen Voraussetzungen eindeutig folgt, mit welchem Ergebnis die Partie zwischen Gerd und Uwe endete! Ist dies der Fall, dann gib das Ergebnis an!
Hinweis: Im Schachsport erhält der Spieler für einen Sieg 1 Punkt, spielt er unentschieden, bekommt er $\frac{1}{2}$Punkt. Für eine Niederlage gibt es 0 Punkte.

270833 Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Diesem Kreis sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC einbeschrieben, bei dem für die Größen α, β der Winkel $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$ vorausgesetzt werde, daß $\alpha > \beta$ gilt. Im Dreieck ABC sei D der Fußpunkt der auf AB senkrechten Höhe. Der von C ausgehende Strahl durch M schneide k in E.
Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen der Winkel $\sphericalangle DCE$ stets die Größe $\alpha - \beta$ hat!

270834 Es sei $\widehat{ABM}$ ein Kreissektor, für den die Länge $r = \overline{MA} = \overline{MB}$ gegeben ist und der Zentriwinkel $\sphericalangle AMB$ die Größe 60° hat. Von einer Geraden g, die zu AB parallel ist und die Strecken MA bzw. MB in C bzw. D schneidet, sei bekannt, daß der Umfang u_1 des Dreiecks MCD gleich dem Umfang u_2 der Figur $\widehat{ABDC}$ ist (siehe Bild).



a) Ermittle unter dieser Voraussetzung die Länge $x = \overline{MC}$ in Abhängigkeit von r!
b) Die Länge r sei mit einer Genauigkeit gemessen, bei der sich auf eine Dezimale nach dem Komma genau $r = 6{,}7$ cm ergibt. Ferner sei zur Berechnung verwendet, daß auf zwei Dezimalen nach dem Komma genau $\pi = 3{,}14$ gilt.
Beweise, daß man daraus die Länge x (in Zentimetern) auf eine Dezimale nach dem

Komma genau durch Berechnung von Schranken ermitteln kann! Wie lautet diese Längenangabe x?

270835 Eine quadratförmige schachbrettartige Tabelle bestehe aus 15 mal 15 Feldern. Eine der beiden Diagonalen des Quadrates sei d genannt.
In jedes der 225 Felder der Tabelle kann eine der Zahlen 1 bis 15 so eingetragen werden, daß die folgenden Forderungen (1) und (2) erfüllt sind:
(1) Jede (waagerechte) Zeile enthält jede der 15 Zahlen genau einmal.
(2) Für je zwei Felder, die symmetrisch zu d liegen, gilt: Die Zahlen in diesen zwei Feldern sind einander gleich.
Für jede Eintragung kann man die Summe aus denjenigen Zahlen bilden, die in den fünfzehn von der Diagonale d durchquerten Feldern stehen.
Beweise, daß diese Summe durch die Voraussetzungen (1), (2) eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Summe!

270836 Es sei $ABCDS$ eine gerade Pyramide mit einem Quadrat $ABCD$ als Grundfläche und S als Spitze. Der Fußpunkt der Höhe dieser Pyramide sei E, ferner sei $a = \overline{AB}$ und $h = \overline{ES}$.
I. Zeichne ein Bild dieser Pyramide mit den Maßen $a = 6$ cm, $h = 8$ cm in schräger Parallelprojektion $\left(\alpha = 45°, q = \frac{1}{2}\right)$, wobei die Strecke ES in wahrer Länge erscheinen soll!
II. Auf der Strecke ES gibt es genau einen Punkt P, für den die (im Raum verlaufenden) Strecken AP und SP einander gleichlang sind.
Leite eine Möglichkeit her, in dem nach I. hergestellten Bild der Pyramide $ABCDS$ den Bildpunkt dieses Punktes P zu konstruieren; beschreibe diese Konstruktion und führe sie durch!
III. Die Länge a sei beliebig gegeben. Ermittle dann in Abhängigkeit von a alle diejenigen Werte h, für die sich (in der Pyramide mit diesen Maßen a, h) ein Punkt P auf ES finden läßt, der die in II. genannte Bedingung $\overline{AP} = \overline{SP}$ erfüllt!

Olympiadeklasse 9

270931
a) Beweisen Sie, daß die Gleichung
$$x_1^{11} + x_2^{11} + \ldots + x_{1987}^{11} = 1988 \qquad (1)$$
keine Lösung $(x_1, x_2, \ldots, x_{1987})$ besitzt, in der alle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{1987}$ natürliche Zahlen sind!
b) Beweisen Sie, daß die Gleichung (1) unendlich viele verschiedene Lösungen besitzt, in denen alle Zahlen ganze Zahlen sind!
Dabei heißen zwei Lösungen $(x_1, x_2, \ldots, x_{1987})$ und $(x_1', x_2', \ldots, x_{1987}')$ genau dann voneinander verschieden, wenn mindestens eine der Ungleichungen
$x_1 \neq x_1', x_2 \neq x_2', \ldots, x_{1987} \neq x_{1087}'$
gilt.

270932
I. Untersuchen Sie, ob der folgende Satz allgemein gilt: Wenn a, b, c, d reelle Zahlen sind, für die $b \neq 0$, $b + c \neq 0$ und $b + d \neq 0$ gilt, so folgt

aus $\quad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$

stets auch $\frac{a}{b} < \frac{a+d}{b+d}$.

II. Untersuchen Sie, ob der folgende Satz allgemein gilt:
Wenn a, b, c, d positive reelle Zahlen sind, so folgt

aus $\quad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$

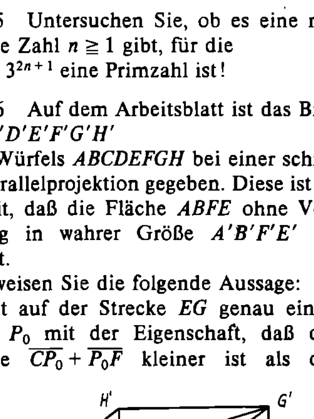
stets auch $\frac{a}{b} < \frac{a+d}{b+d}$.

270933 Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, dessen Seiten AB und CD so gelegen sind, daß sich die Verlängerung von AB über B hinaus und die Verlängerung von DC über C hinaus in einem Punkt T schneiden. Die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ATD$ sei h. Der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD sei S; die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ASD$ sei g.
Beweisen Sie: Aus diesen Voraussetzungen folgt stets, daß g und h zueinander parallel sind.
(Bemerkung: Auch in dem Spezialfall, daß g und h in dieselbe Gerade fallen, werden sie als zueinander parallel bezeichnet.)

270934 Jens zeichnet auf ein Blatt Papier einige Punkte, von denen keine drei auf einer gemeinsamen Gerade liegen. Er verbindet einige Male irgend zwei dieser Punkte durch eine Strecke. Dabei kommt es auch vor, daß Punkte jeweils mit mehr als einem anderen Punkt verbunden sind.
Dirk zählt nun die von jedem Punkt ausgehenden Strecken und ermittelt dann die Anzahl A aller derjenigen Punkte, von denen jeweils eine ungerade Anzahl von Strecken ausgeht.
Christa behauptet dann, ohne zu wissen, wie viele Punkte Jens gezeichnet hat und welche Punkte er mit welchen anderen verbunden hat, die Anzahl A müsse in jedem Fall eine gerade Zahl sein. Trifft das zu?

270935 Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl $n \geqq 1$ gibt, für die $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ eine Primzahl ist!

270936 Auf dem Arbeitsblatt ist das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ eines Würfels $ABCDEFGH$ bei einer schrägen Parallelprojektion gegeben. Diese ist so gewählt, daß die Fläche $ABFE$ ohne Verzerrung in wahrer Größe $A'B'F'E'$ erscheint.
a) Beweisen Sie die folgende Aussage:
Es gibt auf der Strecke EG genau einen Punkt P_0 mit der Eigenschaft, daß die Summe $\overline{CP_0} + \overline{P_0F}$ kleiner ist als die Summe $\overline{CP} + \overline{PF}$ für jeden anderen Punkt P auf EG.
b) Leiten Sie eine Möglichkeit her, das Bild P_0' dieses Punktes P_0 bei der Parallelprojektion auf dem Arbeitsblatt zu konstruieren! Führen Sie die Konstruktion durch! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!
(*Hinweis:* CP_0, P_0F, CP, PF bezeichnen Strecken im Raum, nicht ihre Bildstrecken in der Zeichenebene.)



Olympiadeklasse 10

271031 Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare $(x; y)$, die die folgenden Bedingungen (1) bis (4) erfüllen!
(1) x und y sind dreistellige natürliche Zahlen.
(2) Die drei Ziffern von x sind sämtlich voneinander verschieden.
(3) Die drei Ziffern von x sind auch die drei Ziffern von y, nur in anderer Reihenfolge.
(4) Es gilt $x - y = 45$.

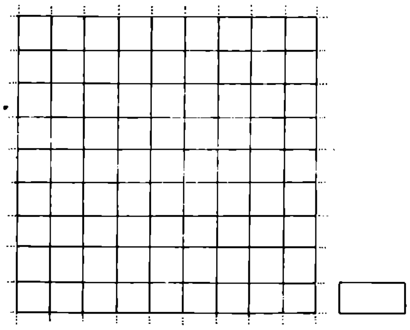
271032 Es sei a eine gegebene positive reelle Zahl. Von einer Funktion f, die für alle reellen Zahlen x definiert ist, werde vorausgesetzt, daß sie die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt:
(1) Für jede reelle Zahl x gilt $f(x) + f(x + a) = 1$.
(2) Es gibt eine reelle Zahl c, so daß für alle reellen Zahlen x, die $c < x \leqq c + a$ erfüllen, $f(x) > \frac{1}{2}$ gilt.
Beweisen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Die Funktion f ist periodisch; es gibt eine kleinstmögliche Periode von f. Ermitteln Sie diese kleinstmögliche Periode von f!
(*Hinweis:* Eine Funktion f heißt genau dann periodisch, wenn es eine positive reelle Zahl p gibt, so daß für alle reellen Zahlen x die Gleichung $f(x + p) = f(x)$ gilt. Ist das der Fall, so heißt jede positive reelle Zahl p, mit der dies gilt, eine Periode von f.)

271033 Vier Kreise k_1, k_2, k_3 und k_4 mit den Mittelpunkten M_1 bis M_4 und den Radien r_1 bis r_4 mögen so in einer Ebene E_1 liegen, daß sich k_1, k_2 und k_3 paarweise von außen berühren. Außerdem berührt k_4 die Kreise k_2 und k_3 ebenfalls von außen und hat mit k_1 keinen Punkt gemeinsam.
Die Kreise seien die Grundflächen von vier geraden Kreiskegeln mit den Höhen h_1 bis h_4 und den Spitzen S_1 bis S_4. Die Punkte S_1, S_2 und S_3 mögen auf der gleichen Seite von E_1 (d. h. im gleichen Halbraum bezüglich E_1) liegen.
Folgende Maße seien gegeben:
$r_1 = r_4 = 1$ cm, $r_2 = 2$ cm, $r_3 = 3$ cm,
$h_1 = 1$ cm, $h_2 = 2{,}1$ cm, $h_3 = 4{,}6$ cm.
Nun sollen S_1, S_2, S_3 und S_4 in einer Ebene E_2 liegen.
Wie groß muß dann h_4 sein?

271034 Ermitteln Sie alle diejenigen positiven rationalen Zahlen x, für die
$$x^{2x} = \frac{1}{2}$$
gilt!

271035 Es sei ABC ein Dreieck, der Mittelpunkt von AB sei S, der Mittelpunkt von CS sei M, der Schnittpunkt von BC mit der Geraden durch A und M sei P.
Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen die Verhältnisse $\overline{BP}:\overline{PC}$ und $\overline{AM}:\overline{MP}$ eindeutig bestimmt sind, und ermittle diese Verhältnisse.

271036 Eine Ebene E sei durch vertikale und horizontale Geraden in Quadrate der Seitenlänge 1 cm zerlegt. Diese Ebene soll mit Rechtecken der Seitenlängen 1 cm, 2 cm so ausgefüllt werden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
Kein Punkt der Ebene soll frei bleiben, aber die Rechtecke dürfen sich auch nicht gegenseitig überlappen.
Jede der obengenannten vertikalen und horizontalen, beliebig herausgegriffenen Geraden zerlegt nur endlich viele der Rechtecke in kleinere Flächenstücke.



Man untersuche, ob es möglich ist, diese Bedingungen zu erfüllen.

Olympiadeklassen 11/12

271231 Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, die das folgende Ungleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x^4 - 6x^2 + 8 \leq 0, \qquad (1)$$
$$2x^2 - 3x > 0. \qquad (2)$$

271232 Ein Auto soll einen Rundkurs in einem vorgeschriebenen Umlaufsinn durchfahren. Das zur Verfügung stehende Benzin reicht genau zum einmaligen Durchfahren des Kurses, wurde aber vorher willkürlich in eine Anzahl $n \geqq 1$ von Kanistern verteilt, die ebenfalls willkürlich längs des Rundkurses aufgestellt sind. Der Tank des Autos ist zu Beginn leer und besitzt ausreichendes Fassungsvermögen, um beim Erreichen jedes Kanisters dessen Benzin aufzunehmen.
Man beweise, daß es möglich ist, den Startpunkt des Autos so zu wählen, daß der Kurs genau einmal durchfahren werden kann. (Eventuelle Verluste beim Umfüllen, Mehrverbrauch bei wiederholtem Anfahren usw. sollen nicht berücksichtigt werden.)

Von den nachstehenden Aufgaben 271233 A und 271233 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

271233 A Man ermittle den größten Wert, den der Flächeninhalt des Bildes eines beliebig im Raum liegenden Quaders Q mit gegebenen Kantenlängen a, b, c bei senkrechter Parallelprojektion auf eine Ebene annehmen kann.

271233 B Es sei f diejenige für alle geordneten Paare (x,y) natürlicher Zahlen x, y definierte Funktion, die für alle natürlichen Zahlen x, y die folgenden Gleichungen (1), (2), (3) erfüllt:

$$f(0,y) = y+1, \qquad (1)$$
$$f(x+1,0) = f(x,1), \qquad (2)$$
$$f(x+1,y+1) = f(x,f(x+1,y)). \qquad (3)$$

Man ermittle
a) den Funktionswert $f(3,3)$,
b) den Funktionswert $f(4,2)$.
(*Hinweis:* Gegebenenfalls kann die Angabe eines gesuchten Funktionswertes durch einen rechnerischen Ausdruck mit konkret angegebenen Rechenoperationen erfolgen, wenn deren zahlenmäßige Ausführung ohne Rechenhilfsmittel eine zu lange Rechenzeit erfordern würde.)

271234 Man beweise für jedes Dreieck ABC: Bezeichnen wie üblich b, c, h_a die Längen der Seiten AC, AB bzw. der auf BC senkrechten Höhe und α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$, so gilt

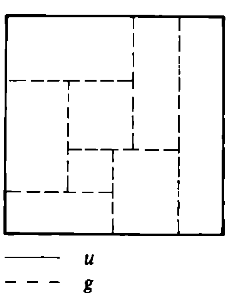
$$h_a \leqq \sqrt{bc} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Man ermittle alle diejenigen Dreiecke ABC, bei denen in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

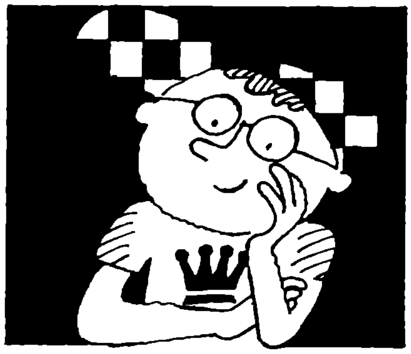
271235 Man ermittle alle diejenigen Tripel (x,y,z) ganzer Zahlen, die die folgende Gleichung (1) erfüllen:

$$1243 \cdot (1+yz) = 65 \cdot (xyz + x + z). \qquad (1)$$

271236 Ein quadratisches Feld Q der Seitenlänge 10 km ist von einem Wassergraben u umgeben. Zur Bewässerung soll Q durch Anlegen weiterer Gräben g vollständig in rechteckige Teilfelder F_1, F_2, ..., F_n zerlegt werden. (Die Breite der Gräben werde vernachlässigt; das Bild zeigt ein Beispiel für eine solche Zerlegung.)

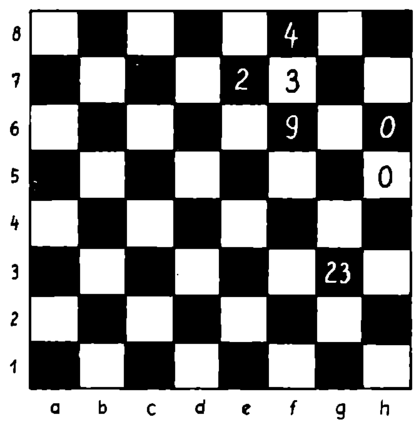


Ferner werde gefördert, daß jeder Punkt der Fläche Q nicht weiter als 100 m von einem Wassergraben (u oder g) entfernt ist.
a) Man beweise: Wenn diese Forderung durch Gräben g einer Gesamtlänge von L Kilometern erfüllt wird, so folgt stets $L \geqq 480$.
b) Man beweise, daß es einen kleinsten Wert gibt, den L (bei Erfüllung der genannten Forderung) annehmen kann, und ermittle diesen Wert.



Kriminalistischer Spürsinn am Schachbrett

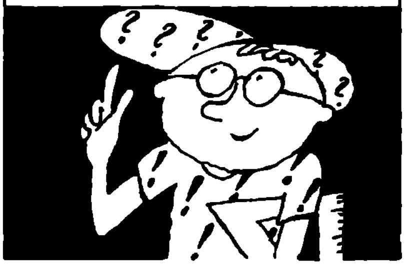
Das Schachspiel bietet uns auch die Möglichkeit Probleme und Aufgaben in der Kniffligkeit zu erweitern, die Verbindung von mathematischer Logik und schachlicher Kombinatorik zu vertiefen. Als Löser wird man veranlaßt, mit fast kriminalistischem Spürsinn zwingend logisch zu kombinieren, um die Lösung korrekt zu beweisen.



Im vorstehenden Diagramm sind 7 Schachfiguren auf die Felder zu setzen, die mit einer Ziffer gekennzeichnet sind. Die jeweilige Ziffer besagt, daß die daraufstehende Figur diese Anzahl Möglichkeiten zum Ziehen hätte. Von den 7 Schachfiguren sind 3 weiß und 4 schwarz. Bei richtiger Aufstellung der gesuchten Figuren ergibt sich ein Zweizüger (Matt in 2 Zügen), der zu lösen ist!

H. Rüdiger

Lösungen



Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 1/88

Ma 5 ■ 2874 Aus $5 \cdot x \cdot y < 65$ folgt $x \cdot y < 13$. Folgende Zahlenpaare erfüllen die gegebene Ungleichung:

x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

x	1	2	2	2	2	3
y	12	3	4	5	6	4

Ma 5 ■ 2875
Wir rechnen: $28\,\text{km} \cdot 7 = 196\,\text{km}$;
$196\,\text{km} + 28\,\text{km} = 224\,\text{km}$;
$224\,\text{km} : 2 = 112\,\text{km}$; $112\,\text{km} \cdot 3 = 336\,\text{km}$
(Gesamtlänge der Reisestrecke).

Ma 5 ■ 2876 Eine mögliche Lösung ist die folgende:
$567 + 328 + 104 = 999$.

Ma 5 ■ 2877 Wir stellen eine Tabelle auf:
Lebensalter von

Maik gegenwärtig	Isolde gegenwärtig
6	1
12	2
18	3
Maik in 8 Jahren	**Isolde in 8 Jahren**
14	9
20	10
26	11

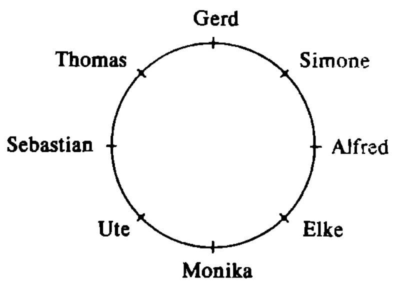
Nur die zweite Zeile der Tabelle erfüllt die Bedingungen. Maik ist gegenwärtig 12 Jahre, seine Schwester Isolde 2 Jahre alt.

Ma 5 ■ 2878 $1\,209\,600 : (60 \cdot 60 \cdot 24) = 14$. In 14 Tagen, also am 24. Mai, treffen sich Walter und Rolf wieder.

Ma 5 ■ 2879 Für den Buchstaben S könnte die Ziffer 1 oder 2 eingesetzt werden. Für S = 1 gilt E = 3.
Es sei U = 2, also M = 6. Da $3 \cdot L$ weder durch 16 noch durch 26 teilbar ist, entfällt diese Möglichkeit.
Es sei U = 4, also M = 2. Dann müßte L = 7 sein. Daraus folgt weiter P = 4, was wegen U = 4 nicht möglich ist.
Es sei U = 6, also M = 8. Dann müßte L = 9 sein. Daraus folgt weiter P = 8, was wegen M = 8 nicht möglich ist.
Es sei U = 7, also M = 1, was wegen S = 1 nicht möglich ist.
Es sei U = 8, also M = 4. Dann müßte L = 4 sein, was wegen M = 4 nicht möglich ist.
Es sei U = 9, also M = 7. Dann müßte L = 5 sein. Daraus folgt weiter P = 6. Wir erhalten folgende Lösung:
$6591 + 6591 + 6591 = 19\,773$.
Für S = 2 existiert keine weitere Lösung, wovon man sich bei gleichartigem systematischem Vorgehen leicht überzeugen kann.

Ma 5 ■ 2880
Mögliche Lösungen sind die folgenden:
$3 : 3 + 3 - 3 = 1$, $3 + 3 + 3 : 3 = 7$,
$3 : 3 + 3 : 3 = 2$, $3 \cdot 3 - 3 : 3 = 8$,
$3 \cdot 3 - 3 - 3 = 3$, $3 \cdot 3 + 3 - 3 = 9$,
$3 + 3 - 3 \cdot 3 = 5$, $3 \cdot 3 + 3 : 3 = 10$.
$3 + 3 + 3 - 3 = 6$,

Ma 6 ■ 2881 Aus (1) und (2) folgt: Elke ist weder die Frau von Gerd, noch von Thomas, noch von Sebastian. Folglich ist Elke mit Alfred verheiratet.
Aus (4) folgt: Simone ist nicht Thomas Frau. Aus (3) folgt: Die Frau von Thomas heißt nicht Monika. Folglich ist Ute mit Thomas verheiratet.
Aus (4) folgt: Simone ist nicht die Frau von Gerd. Folglich ist Monika mit Gerd und Simone mit Sebastian verheiratet.



Ma 6 ■ 2882 Das k.g.V. von 2, 3, 4, 5 und 6 ist 60. Folglich müssen es $60x + 1$ oder $7y$ Schüler sein. Nun gilt $7y = 60x + 1$ und $300 < 60x + 1 < 400$.
Von den Zahlen 301 und 361 ist nur 301 durch 7 teilbar. Deshalb gilt $x = 5$ und $y = 43$. Im Ferienlager befinden sich 301 Schüler.

Ma 6 ■ 2883 Angenommen, es sind x Gänse; dann gilt

$$x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100,$$

$$\frac{11}{4} \cdot x = 99, \quad x = \frac{99 \cdot 4}{11}, \quad x = 36.$$

Auf dem Teich schwammen 36 Gänse.

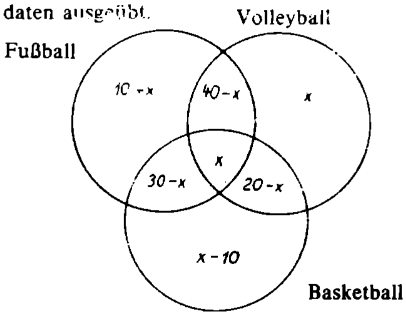
Ma 6 ■ 2884 Die Primzahlen zwischen 10 und 20 lauten 11, 13, 17 und 19. Die Mutter könnte also, da sie 22 Jahre älter als Grit ist, 33 oder 35 oder 39 oder 41 Jahre alt sein. Von diesen Zahlen ist nur 35 durch 5 teilbar. Die Mutter ist 35 Jahre, der Vater 36 Jahre, Grit 13 Jahre, Katja 9 Jahre alt.

Ma 6 ■ 2885 Es gilt $z = \overline{abba}$,
also $q = 2a + 2b$.
Wegen $10a + b = 2a + 2b$ gilt $b = 8a$.
Wegen $1 \leqq a \leqq 9$ und $0 \leqq b \leqq 9$ existiert genau eine Lösung, nämlich $a = 1$, also $b = 8$. Die Telefonnummer lautet 1881.

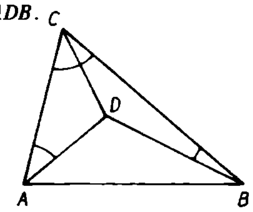
Ma 6 ■ 2886 Die quadratische Grundfläche des Bassins bestehe aus a^2 Kacheln. Jede Seitenfläche hat dann $2 \cdot a$ Kacheln, alle vier Seitenflächen also $8 \cdot a$ Kacheln.
Nun gilt $a^2 = 8 \cdot a$, also $a = 8$. Das Volumen des Bassins beträgt somit
$V = a^2 \cdot 2 = 2a^2 = 2 \cdot 8^2$ Liter
$= 128$ Liter.

Na/Te 6 ■ 416
Die Dichte von Blei beträgt $11{,}3\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.
Aufgabe kann nur durch inhaltliches Lösen gelöst werden: Das Volumen beträgt 27 ml, das sind $27\,\text{cm}^3$ (vgl. LB Physik 6, S. 49). Wenn die Figur aus Blei vollständig wäre, dann müßte die Masse 305,1 g betragen. Da die Masse geringer ist als die auf der Waage bestimmten Masse, muß die Figur innen z.T. hohl sein. Die Massendifferenz beträgt 26,6 g. Durch Überlegung gewinnt man: Der Hohlraum hat ein Volumen von $2\,\text{cm}^3$.

Ma 7 ■ 2887 Dem abgebildeten Diagramm ist folgendes zu entnehmen:
$(10 + x) + (40 - x) + x + (30 - x)$
$+ x + (20 - x) + (x - 10) = 100$,
also $x + 90 = 100$, $x = 10$.
Alle drei Ballspielarten werden von 10 Soldaten ausgeübt.



Ma 7 ■ 2888 Verlängert man CD über D hinaus, dann gilt nach dem Außenwinkelsatz für die Dreiecke ADC und BCD
$(\sphericalangle DAC + \sphericalangle ACD) + (\sphericalangle DCB + \sphericalangle CBD)$
$= \sphericalangle ADB$.



Wegen $\sphericalangle ACD + \sphericalangle DCB = \sphericalangle ACB$ ist damit die Behauptung bewiesen.

Ma 7 ■ 2889 $t_1 = 7\,\text{min}\,30\,\text{s} = 450\,\text{s}$;
$t_2 = 9\,\text{min}\,30\,\text{s} = 570\,\text{s}$; $v_2 = v_1 - 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$;
wegen $s_1 = s_2$ gilt $v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$,
also $450 \cdot v_1 = 570 \cdot (v_1 - 4)$,
$v_1 = 19\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, und somit
$s = 19 \cdot 450\,\text{m} = 8550\,\text{m}$. Der Tauerntunnel hat eine Länge von 8550 m.

Ma 7 ■ 2890 Ein Rhombus ist zugleich ein Trapez bzw. ein Parallelogramm, aber kein Quadrat. Folglich handelt es sich bei dem Viereck um einen Rhombus.

Ma 7 ■ 2891
Aus $\frac{1}{4} < \frac{x}{17} < \frac{1}{3}$ folgt $\frac{51}{204} < \frac{12x}{204} < \frac{68}{204}$,
also $51 < 12x < 68$ und somit $x = 5$.
Deshalb gilt $\frac{1}{4} < \frac{5}{17} < \frac{1}{3}$.

Na/Te ■ 417 Durch inhaltliche Überlegung gewinnt der Schüler bei Anwendung der Gleichung für die Hubarbeit und der Umrechnung der Masse des Körpers in seine Gewichtskraft: $h = 1{,}25$ m. Da der Weg auf dem Brett 4mal so lang ist wie die Hubhöhe, ist nur $\frac{1}{4}$ der Kraft notwendig bei Benutzung der Rampe.
Die Kraft beträgt also 500 N.

Na/Te 7 ■ 418 Das Gesamtvolumen beträgt 3000 m³. Aus der verdrängten Wassermasse ergibt sich, daß 2500 m³ (b) eingetaucht sind. Folglich sind 500 m³ über Wasser (a).

Ma 8 ■ 2892 Wir stellen eine Tabelle auf:

Familienmitglied	Alter in Jahren
Roland	x
Ulrich	$2x$
Mutter	$7x$
Ingrid	y

Vor drei Jahren war Ingrid $(y-3)$ und Roland $(x-3)$ Jahre alt.
Nach den Angaben der Aufgabe gilt
$y - 3 = 5(x-3)$, d.h. $y = 5x - 12$
für das jetzige Alter von Ingrid.
Wir rechnen:
$x + 2x + 7x + (5x - 12) = 63$,
$15x - 12 = 63$, $15x = 75$, $x = 5$.
Roland ist 5, Ulrich 10, Ingrid 13 und die Mutter 35 Jahre alt.
Die Probe bestätigt, daß die Aufgabe richtig gelöst wurde.

Ma 8 ■ 2893 Aus $a^2 - b^2 = 91$ folgt
$(a+b)(a-b) = 91 = 1 \cdot 7 \cdot 13$.
Daraus folgt weiter

$$\begin{array}{lcl} a+b=91 & \text{oder} & a+b=13 \\ \underline{a-b=\ \ 1} & & \underline{a-b=\ \ 7} \\ 2a=92 & & 2a=20 \\ a=46,\ \text{also} & & a=10,\ \text{also} \\ b=45 & & b=\ \ 3. \end{array}$$

Die geordneten Paare [46; 45] und [10; 3] erfüllen die gestellten Bedingungen; es gilt
$46^2 - 45^2 = 2116 - 2025 = 91$ und
$10^2 - 3^2 = 100 - 9 = 91$.

Ma 8 ■ 2894 Wir stellen eine Tabelle auf:

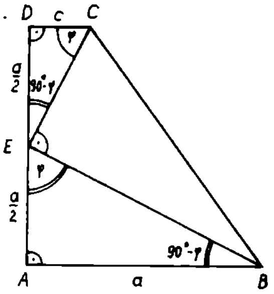
Platzziffer	Anzahl der Punkte
4.	x
4.	x
5.	$x-2$
2.	$2(x-2)+1 \quad = 2x-3$
1.	$2(x-2)+1+8 = 2x+5$
3.	$2(x-2)+1-3 = 2x-6$

Nach Addition der Punktzahlen erhält man $9x - 6 = 147$ bzw. $9x = 153$,
d.h. $x = 17$.
Es ergeben sich in geordneter Reihenfolge nachstehende Punktzahlen

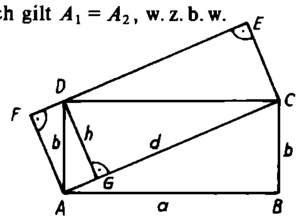
Platzziffer	Anzahl der Punkte
1.	39
2.	31
3.	28
4.	je 17
5.	15

Die Probe bestätigt die Richtigkeit.

Ma 8 ■ 2895 Dem Bild ist folgendes zu entnehmen: $\triangle ABE \sim \triangle CDE$, also
$c : \frac{a}{2} = \frac{a}{2} : a$ und somit $a = 4c$.
Für den Flächeninhalt des Trapezes gilt deshalb
$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (a+c) = \frac{1}{2} \cdot 4c \cdot (4c + c)$
$= 10c^2$.



Ma 8 ■ 2896 Es sei $A_1 = a \cdot b$ der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$. Das von D auf $\overline{AC}$ gefällte Lot habe den Fußpunkt G. $\overline{AB}$ habe die Länge a, $\overline{BC}$ die Länge b, $\overline{AC}$ die Länge d und $\overline{DG}$ die Länge h. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AGD und ACD folgt $h : b = a : d$, also $h = \frac{a \cdot b}{d}$. Für den Flächeninhalt A_2 des Rechtecks $ACEF$ gilt dann
$A_2 = d \cdot h$; $A_2 = d \cdot \frac{a \cdot b}{d}$; $A_2 = a \cdot b$.
Folglich gilt $A_1 = A_2$, w.z.b.w.



Na/Te 8 ■ 419 Es sind x Lampen zu 75 W und $(45 - x)$ Lampen zu 40 W vorhanden. Die Leistungsbilanz ergibt
$x \cdot 75\,\text{W} + (45 - x) \cdot 40\,\text{W} = 2500\,\text{W}$,
$x = 20$. Es sind 20 Lampen zu 75 W und 25 Lampen zu 40 W vorhanden.

Na/Te 8 ■ 420
Ges.: Länge des Drahtes l (in m)
Gegeben: Masse des Wassers $m = 200$ g,
Temperaturerhöhung $\Delta T = 90$ K,
Zeit der Erwärmung $t = 3$ min $= 180$ s,
Wärmekapazität des Wassers
$c = 4{,}186 \frac{\text{J}}{\text{g} \cdot \text{K}}$, Spannung $U = 220$ V,
Spez. Widerst. des Drahtes
$\varrho = 1{,}20\,\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$ (Tafelwerk),
Querschnitt des Drahtes $A = 0{,}1\,\text{mm}^2$,
Wirkungsgrad $\eta = 90\,\%$.
Zur Erwärmung des Wassers sind
$Q = c \cdot m \cdot \Delta T = 4{,}186 \frac{\text{J}}{\text{g} \cdot \text{K}} \cdot 200\,\text{g}$
$\times 90$ K erforderlich.
Die unter Berücksichtigung des Wirkungsgrades erforderliche Wärme beträgt
$Q_e = \frac{Q}{\eta}$. Die notwendige Wärmeleistung der Heizquelle beträgt
$P_{th} = \frac{Q_e}{t} = \frac{4{,}186\,\text{J} \cdot 200\,\text{g} \cdot 90\,\text{K} \cdot 10}{\text{g} \cdot \text{K} \cdot 180\,\text{s} \cdot 9}$
$= 465 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 465$ W.

Die Leistung muß vom elektrischen Strom aufgebracht werden:
Da $P_{el} = \frac{U^2}{R}$ und $R = \frac{\varrho \cdot l}{A}$ ist, gilt
$P_{el} = \frac{U^2 \cdot A}{\varrho \cdot l}$
$= 220^2\,\text{V}^2 \cdot 0{,}1 \frac{\text{mm}^2 \cdot \text{m}}{1{,}2\,\Omega \cdot \text{mm}^2 \cdot l} \qquad P_{el} = P_{th}$
Daraus
$l = \frac{220^2\,\text{V}^2 \cdot 0{,}1\,\text{mm}^2 \cdot \text{m}}{1{,}20\,\Omega \cdot \text{mm}^2 \cdot 465\,\text{W}}$, $l = 8{,}67$ m
Beachte: $1\,\text{W} = 1\,\text{V} \cdot 1\,\text{A} \quad 1\,\Omega = \frac{1\,\text{V}}{1\,\text{A}}$!
Die Länge des Drahtes muß etwa 8,7 m betragen.

Ma 9 ■ 2897 $11^3 = 1331 = 78 \cdot 17 + 5$;
11^3 läßt bei Division durch 17 den Rest 5.
$7^5 = 16\,807 = 988 \cdot 17 + 11$;
7^5 läßt bei Division durch 17 den Rest 11.
Somit läßt $11^3 + 7^5$ bei Division durch 17 den Rest $5 + 11 = 16$, also $(11^3 + 7^5)^4$ den Rest 16^4.
$16^4 = 65\,536 = 3855 \cdot 17 + 1$; 16^4 läßt bei Division durch 17 den Rest 1.
$z = (11^3 + 7^5)^4 - 1$ läßt deshalb bei Division durch 17 den Rest $1 - 1 = 0$, d.h. z ist durch 17 teilbar.

Ma 9 ■ 2898 Angenommen, auf dem Parkplatz sind x Pkw vom Typ Wartburg, y Pkw vom Typ Lada, also $(y + 14)$ Pkw vom Typ Trabant abgestellt;
dann gilt $x + y + (14 + y) = 89$,
also $x + 2y = 75$ mit $x < y$.
Daraus folgt $x = 75 - 2y$, wobei die Zahlen x, y und $(y + 14)$ Primzahlen sind.
Aus $75 - 2y = x$ und $x < y$ folgt
$75 - 2y < y$, $3y > 75$, also $y > 25$.
Aus $75 - 2y > 0$ folgt $2y < 75$, also
$y \leqq 37$. Also gilt $y = 29$ oder $y = 31$ oder $y = 37$.
Für $y = 31$ und $y = 37$ ist $y + 14$ nicht Primzahl. Deshalb existiert genau eine Lösung, nämlich
$y = 29$, $x = 17$, $y + 14 = 43$.
Auf dem Parkplatz sind 17 Pkw vom Typ Wartburg, 29 vom Typ Lada und 43 vom Typ Trabant abgestellt.

Ma 9 ■ 2899 In jedem Rhombus sind die Diagonalen senkrecht zueinander und halbieren einander. Sie zerlegen den Rhombus in vier paarweise kongruente rechtwinklige Dreiecke. In einem solchen Dreieck finden wir die Beziehung
$a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2$, wenn a die Länge einer Seite, e bzw. f die Längen der beiden Diagonalen des Rhombus bezeichnen.
Wir formen die Gleichung äquivalent um und erhalten
$a^2 = \frac{e^2 + f^2}{4}$ bzw. $4a^2 = e^2 + f^2$,
womit die Behauptung bewiesen ist.

Ma 9 ■ 2900 $4^1 = 4$ endet auf 4; $4^2 = 16$ endet auf 6; $4^3 = 64$ endet auf 4; $4^4 = 256$ endet auf 6; 4^{2n} mit $n \in N$ und $n \neq 0$ endet auf 6; 4^{2n+1} mit $n \in N$ endet auf 4. Es folgt: 4^{701} endet auf 4.
$8^1 = 8$ endet auf 8; $8^2 = 64$ endet auf 4; $8^3 = 512$ endet auf 2; $8^4 = 4096$ endet auf 6; $8^5 = 32\,768$ endet auf 8 usw. (s. o.)

$8^{4 \cdot 250} = 8^{1000}$ endet auf 6;
$8^{1000} \cdot 8^3 = 8^{1003}$ endet auf $6 \cdot 2 = 12$, also auf 2.

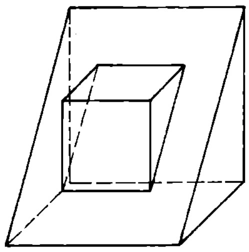
Ma 9 ■ 2901 Nach den Angaben in der Aufgabe ist die Kiste 1 m lang, 20 cm breit und 15 cm hoch.
Wenn der Stab in die Kiste passen soll, dann darf er nicht länger sein als die Raumdiagonale der quaderförmigen Kiste. Die Länge dieser Raumdiagonale kann man mit zweimaliger Anwendung des Satzes des Pythagoras berechnen oder entnimmt der Zahlentafel die Formel
$e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, wobei e die Länge der Raumdiagonale des Quaders und a, b bzw. c die Längen der Quaderkanten bezeichnen. Man erhält
$e = \sqrt{100^2 + 20^2 + 15^2}$ cm,
$e = \sqrt{10\,625}$ cm, $e \approx 103{,}07$ cm.
Der Metallstab paßt in diese Kiste nicht hinein!

Na/Te 9 ■ 421
Ges.: Anzahl der Stehplätze x
Gegeben: Eigenmasse $m_e = 7000$ kg,
Bremskraft $F = 62\,000$ N,
Anhalteweg $s = 40$ m,
Anfangsgeschwindigkeit $v = \frac{72}{3{,}6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
Es wird zunächst die Bremsverzögerung a berechnet:
$v^2 = 2 \cdot a \cdot s$, $a = \frac{v^2}{2 \cdot s}$, $a = 5\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.
Die Gesamtmasse des Fahrzeuges
$m = m_e + 42 \cdot 75\,\text{kg} + x \cdot 75\,\text{kg}$.
Nach dem Newtonschen Grundgesetz $F = m \cdot a$ ergibt sich eine Gleichung für x. Es ergibt sich $x = 30$. Es können also maximal 30 Personen stehend befördert werden, wenn der geforderte Anhalteweg gewährleistet werden soll.

Na/Te 9 ■ 422 Gegeben: $l = 85$ m,
$b = 12$; $t = 2{,}5$ m; $\varrho_w = \frac{1\,\text{t}}{\text{m}^3}$,
Eigenmasse $m_e = 1750$ t.
a) und b) haben die gleiche Lösung, denn nach dem Gesetz von Archimedes ist bei einem schwimmenden Körper die Auftriebskraft so groß wie die Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit.
Außerdem gilt: Bei einem schwimmenden Körper sind Auftriebskraft und Gewichtskraft gleich groß. Das einfahrende Schiff verdrängt so viel Wasser, wie seine Gewichtskraft beträgt.
Der vollständig mit Wasser gefüllte Trog hat eine Masse m von
$m = l \cdot h \cdot t \cdot \varrho_w + m_e$
$= 85\,\text{m} \cdot 12\,\text{m} \cdot 2{,}5\,\text{m} \cdot \frac{1\,\text{t}}{\text{m}^3} + 1750\,\text{t}$.
Das ergibt eine Gewichtskraft von $m \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{t}}$.
Die Hubkraft beträgt $43 \cdot 10^6$ N.

Ma 10/12 ■ 2903 $6^3 = 216$ endet auf 6.
27^{12} endet auf dieselbe Grundziffer wie 7^{12}; $7^4 = 2401$ endet auf 1, 7^{4n} ($n \in N$) endet auf 1, $7^{12} = 7^{4 \cdot 3}$ endet auf 1. Somit endet 27^{12} auf 1.
107^{18} endet auf dieselbe Grundziffer wie 7^{18}; $7^{4 \cdot 4} = 7^{16}$ endet auf 1, $7^2 = 49$ endet auf 9, $7^{18} = 7^{16} \cdot 7^2$ endet auf $1 \cdot 9 = 9$.
Somit endet 107^{18} auf 9.
$3^{11} = 3^8 \cdot 3^3$; $3^4 = 81$ endet auf 1, $3^8 = 3^{4 \cdot 2}$ endet auf 1, $3^3 = 27$ endet auf 7,
$3^{11} = 3^8 \cdot 3^3$ endet auf $1 \cdot 7 = 7$.
Also endet $6^3 \cdot 27^{12} \cdot 107^{18} \cdot 3^{11}$ auf $6 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 7 = 378$, also auf 8.

Ma 10/12 ■ 2904 Es handelt sich um einen zusammengesetzten Körper, und zwar um zwei gerade dreiseitige Prismen.
Lösungsmöglichkeit:



Ma 10/12 ■ 2905 a) Man denkt sich einen beliebigen Punkt P im Innern dieses 100-Ecks und verbindet diesen mit allen Eckpunkten, so daß 100 Dreiecke entstehen, deren Innenwinkelsumme $100 \cdot 180°$ $= 18\,000°$ beträgt. Subtrahiert man davon die Summe aller Winkel mit dem Scheitel P (360°), so erhält man 17 640°.
In einem regelmäßigen 100-Eck sind alle Innenwinkel gleich groß; die Größe eines Innenwinkels beträgt demnach
$17\,640 : 100 = 176{,}4°$. (In diesem 100-Eck fällt der Punkt P mit dem Mittelpunkt des Umkreises zusammen.)
b) Man zerlegt das n-Eck in n gleichschenklige paarweise kongruente Dreiecke, deren Innenwinkelsumme die Größe von $n \cdot 180°$ hat. Davon subtrahiert man die Summe aller Winkel an den Spitzen der gleichschenkligen Dreiecke (360°) und erhält
$n \cdot 180° - 360° = (n-2) \cdot 180°$. Für regelmäßige n-Ecke ist nun noch durch die Anzahl n der Ecken zu dividieren, so daß sich für die Größe α eines Innenwinkels ergibt:
$$\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}.$$
c) Es sei M der Mittelpunkt des Umkreises des regelmäßigen 100-Ecks und Spitze aller 100 gleichschenkligen Dreiecke. Jeder Schenkel eines Dreiecks ist ein Radius des Umkreises. Für den Flächeninhalt dieses 100-Ecks gilt:
$A_{100} = \frac{100 \cdot r^2 \sin 3{,}6°}{2}$;
$A_{100} \approx 3{,}1395 \cdot r^2$.
Der Flächeninhalt des Umkreises beträgt
$A_U = \pi r^2$; $A_U \approx 3{,}1416 \cdot r^2$.
Der Flächeninhalt des regelmäßigen 100-Ecks ist um etwa 0,07 % kleiner als der des Umkreises.

Ma 10/12 ■ 2906 Durch Probieren findet man relativ leicht, daß
$16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 = 93\,024$ ist, d. h.,
die vier gesuchten Zahlen sind 16, 17, 18 und 19.
Bezeichnet man die kleinste der vier Zahlen mit x und das Produkt der vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mit a, so gilt allgemein
$a = x(x+1)(x+2)(x+3)$; $x \in N$ und $x \neq 0$. Wir nehmen nun die folgenden äquivalenten Umformungen vor und erhalten
$a = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$,
$a + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$,
$\sqrt{a+1} = x^2 + 3x + 1$,
$\sqrt{a+1} + 1{,}25 = x^2 + 3x + 2{,}25$,
$\sqrt{a+1} + 1{,}25 = (x + 1{,}5)^2$,
$\sqrt{\sqrt{a+1} + 1{,}25} = x + 1{,}5$.
Es folgt nun
$x = f(a) \sqrt{\sqrt{a+1} + 1{,}25} - 1{,}5$.
An einer Probe zeigen wir auch, wie der Einsatz des Taschenrechners hier besonders rationell ist.
Es ist $88 \cdot 89 \cdot 90 \cdot 91 = 64\,144\,080$.
Nach der Formel verfahren wir in folgenden Schritten:
(1) $64\,144\,080 + 1 = 64\,144\,081$;
(2) $\sqrt{64\,144\,081} = 8009$;
(3) $8009 + 1{,}25 = 8010{,}25$;
(4) $\sqrt{8010{,}25} = 89{,}5$;
(5) $89{,}5 - 1{,}5 = 88$.
Die kleinste der vier Zahlen ist 88; die Zahlen sind 88, 89, 90, 91.

Na/Te 10 ■ 423 Ges.: Kapazität C (in µF)
Gegeben: $P_{\text{mech}} = 20$ kW;
$\cos\varphi = 0{,}75 \rightarrow \varphi = 41{,}4°$
$\eta = 0{,}85$ $f = 50$ Hz
Aus P_{mech} und η ergibt sich dem Netz entnommene Wirkleistung P in W
$P = \frac{P_{\text{mech}}}{\eta}$. Aus P und $\cos\varphi$ ergibt sich dem Netz entnommene Scheinleistung S in VA, $S = \frac{P}{\cos\varphi}$.
Aus S und $\sin\varphi$ ergibt sich dem Netz entnommene Blindleistung Q in var
$Q = S \cdot \sin\varphi$
$= P \cdot \tan\varphi = P_{\text{mech}} \cdot \frac{\tan\varphi}{\eta}$.
Der Kondensator entnimmt dem Netz folgende Blindleistung:
$Q_c = \frac{U^2}{X_c}$. Mit $X_c = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$,
$Q_c = U^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C$.
Bei vollständiger Kompensation ist $Q = Q_c$.
Daraus folgt
$C = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot U^2}$. Werte eingesetzt:
$C = 1365\,\mu\text{F} \left(1\,\text{F} = 10^{-6} \frac{\text{AS}}{\text{V}}\right)$.
Es ist ein Kondensator mit einer Kapazität von etwa 1400 µF parallel zu schalten.

Na/Te 10/12 ■ 424 Ges.: Weg s (in m)
Gegeben: Anfangsgeschwindigkeit
$v_1 = \frac{50}{3{,}6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$, Endgeschwindigkeit
$v_2 = \frac{80}{3{,}6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$, Beschleunigung $a = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
Ist t die benötigte Zeit zum Beschleunigen, so gilt
$s = v_1 \cdot t + a \cdot \frac{t^2}{2}$, $v_2 = v_1 + a \cdot t$
eingesetzt und umgeformt:
$s = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2 \cdot a} = 50{,}15$ m. Es wird ein Weg von etwa 50 m benötigt.

Lösung zu: Springzahlrätsel

Man erhält die folgenden drei magischen Quadrate:

^{1} 6	^{2} 1	^{3} 8
^{4} 7	^{5} 5	^{6} 3
^{7} 2	^{8} 9	^{9} 4

^{10} 1	^{11} 12	^{12} 8	^{13} 13
^{14} 14	^{15} 7	^{16} 11	^{17} 2
^{18} 15	^{19} 6	^{20} 10	^{21} 3
^{22} 4	^{23} 9	^{24} 5	^{25} 16

^{26} 24	^{27} 10	^{28} 16	^{29} 2	^{30} 13
^{31} 17	^{32} 3	^{33} 14	^{34} 25	^{35} 6
^{36} 15	^{37} 21	^{38} 7	^{39} 18	^{40} 4
^{41} 8	^{42} 19	^{43} 5	^{44} 11	^{45} 22
^{46} 1	^{47} 12	^{48} 23	^{49} 9	^{50} 20

Lösungen zu: Sprachecke

▲1▲ Von welcher Mehrfachkreislinie, dargestellt in der Zeichnung, ist die Summe der Längen größer – der oberen oder der unteren?
Lösung: Sind u und v die Längen der Durchmesser der beiden nach oben gewölbten Halbkreise und w, x, y, z die der nach unten gewölbten, so ist die Summe der Längen der oberen Halbkreisbögen

$$s_1 = \frac{\pi}{2}u + \frac{\pi}{2}v = \frac{\pi}{2}(u + v)$$

und die der unteren

$$s_2 = \frac{\pi}{2}w + \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y + \frac{\pi}{2}z$$
$$= \frac{\pi}{2}(w + x + y + z).$$

Da laut Zeichnung
$u + v = w + x + y + z = \overline{AB}$ ist, folgt

$$s_1 = s_2 = \frac{\pi}{2}\overline{AB}.$$

Beide Summen sind somit gleich groß.

▲2▲ An einer Kreuzung steht die Verkehrsampel für 50 s auf „Grün“, 5 s auf „Gelb“ und 30 s auf „Rot“. Um 7 Uhr schaltet die Ampel auf „Grün“. Wie oft steht die Ampel zwischen 7 Uhr und 19 Uhr auf „Grün“?
Lösung: In den 43 200 Sekunden zwischen 7 Uhr und 19 Uhr wird der Zyklus „Grün – Gelb – Rot – Gelb“, der insgesamt 90 Sekunden dauert, 480mal geschaltet, d. h. „Grün“ wird von der Ampel auch 480mal angezeigt (43 200 : 90 = 480).

▲3▲ Es seien a, b, c, d vier positive ganze Zahlen, für die gilt: $ab = cd$. Es ist zu beweisen, daß $a + b + c + d$ keine Primzahl ist.
Lösung: Es gilt:
$a(a + b + c + d) = a^2 + ab + ac + ad$
$= a^2 + cd + ac + ad = (a + c)(a + d)$
Wenn $a + b + c + d$ eine Primzahl wäre, dann müßte sie entweder ein Faktor von $(a + c)$ oder $(a + d)$ sein. Das ist aber nicht möglich, da $a + b + c + d$ größer als jeder dieser Terme ist. Daraus folgt das Ergebnis.

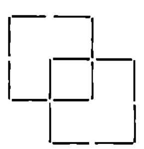
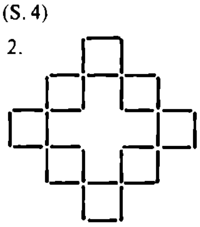
▲4▲ Wir betrachten ein Quadrat mit der Seitenlänge 4. In seine vier Ecken beschreiben wir vier Kreise des Radius 1 so ein, wie es im Bild gezeigt ist. Nun fügen wir einen Kreis mit Zentrum im Schnittpunkt der Diagonalen hinzu, der die vier einbeschriebenen Kreise berührt. Berechne seinen Radius!
Lösung: Wir betrachten eine Diagonale des Quadrates. Ihre Länge setzt sich aus vier Radien der Kreise in den Ecken und aus vier Radien des Zentrumkreises zusammen.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt:
$4^2 + 4^2 = (4 \cdot r + 4)^2$.
Also ist $r = \sqrt{2} + 1$.

Lösungen zu: Ferienmagazin

Titelblatt (S. 1)
102 + 923 = 1025 oder 106 + 962 = 1068.
268 + 805 = 1073 oder 943 + 325 = 1268.
1 − 9 + 8 + 8 = 8.

Beobachtungstest (S. 2)
Ein Baustein G blieb übrig.

Konkret (S. 3)
1. Auf dem ersten Busch saßen vier, auf dem zweiten 12 Spatzen.
2. Erst 3 Liter in den 5-Liter-Topf; dann aus dem wieder gefüllten 3-Liter-Topf den 5-Liter-Topf füllen; bleibt in dem 3-Liter-Topf ein Liter zurück. Nun den 5-Liter-Topf ausgießen und den im 3-Liter-Topf verbliebenen Rest hineinschütten; dann nochmals 3 Liter hinzugeben. Damit befinden sich im 5-Liter-Topf genau vier Liter.
3. Der Abstand beträgt 450 m, die sich regelmäßig auf neun Zwischenräume verteilen.
4. Ein Kohlkopf wird aus dem Korb „Weißkohl/Rotkohl“ entnommen. Ist es Rotkohl, so ist das andere ebenfalls ein Rotkohlkopf (Beschriftung stimmt ja nicht mehr). In dem Rotkohlkorb ist dann der Weißkohl und im Weißkohlkorb Weißkohl und Rotkohl. (Ist der zuerst herausgenommene Kohl weiß, muß man entsprechend überlegen.)

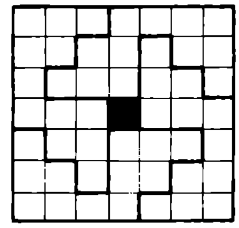
Spiele mit Hölzchen (S. 4)
1. 
2. 

3.

III + II = V	VI − III = III
VII − II = V	V + IV = IX

Kürzeste Wege (S. 5)
1. Monika hat die Wahl zwischen 10 Wegen, die alle gleich kurz sind:
1. W–C–S; 2. W–B–F–G–S;
3. W–B–K–S; 4. W–A–G–E–S;
5. W–A–E–F–K–S; 6. W–A–I–S;
7. W–D–G–S; 8. W–D–F–K–S;
9. W–D–E–I–S; 10. W–H–S.
2. Eine mögliche Lösung (einfachste Lösung):

Die interessante Sieben (S. 6)
Die Lösung sei dem Leser selbst überlassen.

aufgepaßt – mitgemacht (S. 7)
1. 

2. Die Teile 3 und 4 sind deckungsgleich.

Abstrakt (S. 8)
1. $80 = x + \frac{60}{100} \cdot x$; $x = 50$.
Die beiden Teile sind 30 und 50.
2. $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 100 = \frac{300}{6} = 50$.
Die Zahl heißt 50.
3. $1988 + x = 2000$; $x = 12$.
Die zweistellige Zahl heißt 12.
4. $9 + 99 + 999 - 1000 = 107$.
Die Eiche ist 107 Jahre alt.

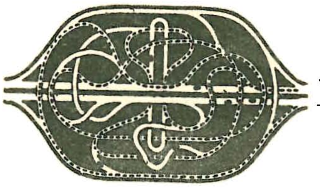
Weißt du es? (S. 9)
1. Waagerecht:
$14 : 2 = 7$; $9 - 1 = 8$; $5 \cdot 3 = 15$
2. $19 \cdot 14 = 266$; $51 : 17 = 3$;
$249 + 41 = 290$; $81 - 22 = 59$;
400; 94; 618.

Ein Blick in die Praxis (S. 10)
1. Marie-Luise erhielt vier 5-Pfennig-Stücke, acht 10-Pfennig-Stücke und acht Münzen zu 50 Pfennig.
2. Die Höhe des Baumes verhält sich zur Länge des Schattens wie der Stab zu seinem Schatten, also wie 3 : 2. Demnach ist der Baum 15 Meter hoch.
3. 18 Äpfel waren vorhanden, 7 sollten als Belohnung verschenkt werden,
denn $\frac{x}{2} - 2 = \frac{x}{3} + 1$; $x = 18$.
4. Die großen Päckchen wiegen je 500 g, die kleinen je 300 g.

Lustige Zahlenspielereien (S. 11)
1. $3 - 3 : 3 - 3 : 3 = 1$;
$3 - 33 : 33 = 2$; $3 + 3 + 3 - 3 = 3$;
$3 + (3 : 3) + (3 : 3) = 5$;
$(3 \cdot 3 + 3 \cdot 3) : 3 = 6$; $(33 - 3) : 3 - 3 = 7$;
$3 + 3 + 3 - (3 : 3) = 8$; .
$3 + 3 + 3 + 3 - 3 = 9$.
$1 = \frac{77}{77}$; $2 = \frac{7}{7} + \frac{7}{7}$; $3 = \frac{7 + 7 + 7}{7}$;
$5 = 7 - \frac{7 + 7}{7}$; $6 = \frac{7 \cdot 7 - 7}{7}$;
$7 = 7\frac{7 - 7}{7}$; $8 = \frac{7 + 7 \cdot 7}{7}$;
$9 = 7 + \frac{7 + 7}{7}$.

2.
$$2 \cdot 2 \cdot 22 + 2 \cdot 2\left(2 + \frac{2}{2}\right) = 100$$
$$3 \cdot 3\left(3 \cdot 3 + 3 - \frac{3}{3}\right) + \frac{3}{3} = 100$$
$$4 \cdot 44 - 4\left(4 \cdot 4 + 4 - \frac{4}{4}\right) = 100$$
$$66 + 6 \cdot 6 - \frac{6 + 6}{6} + 6 - 6 = 100$$
$$77 + 7 + 7 + \frac{7 \cdot 7 + 7 + 7}{7} = 100$$
$$\frac{999}{9} - \frac{99}{9} + 9 - 9 = 100$$

Irrgarten (S. 12)



Wie viele Flächen siehst du? (S. 13)
1. Die Figur enthält 6 Quadrate und 20 Dreiecke.
2. Es liegen 10 Dreiecke übereinander.

Suchbild (S. 14)
Die Lösung sei dem Leser selbst überlassen.

Abstrakt (S. 15)
1. Ein Produkt zweier zweistelliger Zahlen muß drei- oder vierstellig sein. So kommen nur 5555 oder 555 in Frage.
Ersteres entfällt, denn $5555 = 55 \cdot 101$.
Es bleibt 555. Die einzige mögliche Kombination zweistelliger Faktoren ist
$555 = 15 \cdot 37$.
2. $a + b = 10;\ 2(10a + b) - 1 = 10b + a;$
$a = 3;\ b = 7$.
3. $\frac{70}{5}x = 420;\ x = 30$. Die Zahl ist 30.
4. $3x + 4x = 21;\ x = 3$.
5. $7x - 27 = 4x;\ x = 9$.
6. $a^2 + (a+1)^2 = 61;\ a^2 + a = 30;$
$\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{121}{4};\ a = 5;\ b = 6$.

Kryptarithmetik (S. 16)
1. waagerecht: $(3 + 4) : 1 = 7;$
$(2 \cdot 5) - 4 = 6;\ (1 \cdot 3) + 5 = 8$.
2. $24 + 30 = 54;\ 7 \cdot 4 = 28$
oder $7 \cdot 3 = 21;\ 36 : 9 = 4$
oder $32 \cdot 8 = 4;\ 49 - 9 = 40$.

Die Aufgaben zu diesem Heft entstammen der Sammlung von J. Lehmann, Leipzig; Dr. R. Mildner, Leipzig (S. 1, 2 Aufg.); L. Penčikowa, Prag (S. 1); Füles, Budapest (S. 2, S. 12); Frösi, Berlin (S. 7, S. 13 je 1 Aufg.); NBI, Berlin (S. 14); Vignette aus *Wurzel*, Jena (S. 14).

Lösungen zu: Angaben ausreichend für Eindeutigkeit?
Heft 1/88

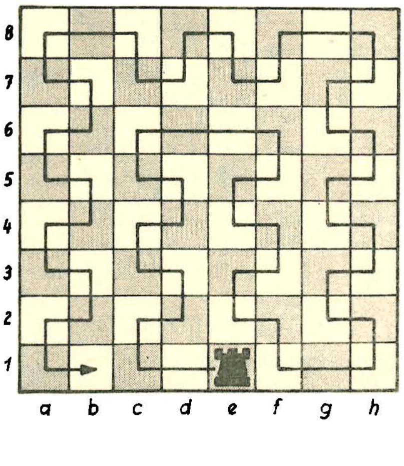
▲1▲ Die zweistellige Zahl sei z.
Dann lautet die sechsstellige Zahl
$\overline{z\,z+1\,z+2}$, d. h.
$z \cdot 10\,000 + (z+1) \cdot 100 + (z+2)$
$= 10\,101z + 102$. Da ein Divisor z ist, muß jeder Summand durch z teilbar sein. Wegen $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$ kann z nur 17, 34 oder 51 sein. Da die sechsstellige Zahl halbiert wurde, ist nur 34 möglich. Sie lautet also 343 536. (Die Hälfte dividiert durch 68 ergibt 2526, das sind wieder zwei aufeinanderfolgende und nebeneinandergeschriebene zweistellige Zahlen.)

▲2▲ Die Bildungsvorschrift der fünf Zahlen ist a, $2a$, $6a$, $18a$, $54a$, $a \in N$, $10 \leqq a \leqq 99$. Die Zahl mit den gleichen Ziffern ist höchstens vierstellig.
(1) Bei vier gleichen Ziffern gilt
$1111 \cdot x = 11 \cdot 101 \cdot x$, $(x = 1, 2, \ldots, 9)$. Da 101 Primzahl, muß a Vielfaches von 101 sein (Widerspruch zur Voraussetzung).
(2) Bei drei gleichen Ziffern gilt
$111 \cdot x = 3 \cdot 37 \cdot x$, $(x = 1, 2, \ldots, 9)$. Da 37 Primzahl ist, kann $a_1 = 37$, $a_2 = 74$ gelten. a_1 entfällt wegen 37, 74, 222, 666, ... (Widerspruch zur Voraussetzung). Jedoch 74, 148, 444, 1332, 3996 erfüllt alle Bedingungen.
(3) Bei zwei gleichen Ziffern hätte auch die erste Zahl (wegen $11 \cdot x$) gleiche Ziffern (Widerspruch zur Voraussetzung). Somit ist die in (2) angegebene Folge die einzige Möglichkeit.

Lösung zu: Eine harte Nuß
Heft 1/88
Es gelte die Ungleichung
$$\frac{3x^2}{\left(\sqrt{1+3x}-1\right)^2} \leqq x + 1. \qquad (1)$$
Der linke Term von (1) ist offenbar nur definiert für
$$x \geqq -\frac{1}{3} \qquad (2)$$
und $\quad x \neq 0. \qquad (3)$
Für alle x, die (2) und (3) erfüllen, müssen dann weiterhin die folgenden untereinander äquivalenten Ungleichungen gelten:
$$\frac{3x^2\left(\sqrt{1+3x}+1\right)^2}{\left(\sqrt{1+3x}-1\right)^2\left(\sqrt{1+3x}+1\right)^2} \leqq x + 1,$$
$$\left(\sqrt{1+3x}+1\right)^2 \leqq 3x + 3,$$
$$2\sqrt{1+3x} \leqq 1,$$
$$x \leqq -\frac{1}{4}. \qquad (4)$$
Nach (2), (3) und (4) ist die Ungleichung (1) somit für alle x mit $-\frac{1}{3} \leqq x \leqq -\frac{1}{4}$ erfüllt.

Lösungen zu: Schachecke
Heft 1/88
1. Lc1–b2 Lb5–c4; 2. Lb1–c2 Lc5–b4;
3. Lb2–d4 Lc4–a2; 4. Lc2–d3 Lb4–a3;
5. Ld1–a4 La5–d2; 6. La4–b5 Ld2–c1;
7. Ld4–c3 La2–b3; 8. Ld3–b1 La3–c5;
9. Lc3–a5 Lb3–d1; 10. La1–c3 Ld5–b3;
11. Lb5–d3 Lc1–a3; 12. Lc3–d2 Lb3–a4;
13. Ld3–c4 La3–b2; 14. Lb1–a2 Lc5–d4;
15. Ld2–b4 La4–c2; 16. Lc4–b5 Lb2–c1;
17. La2–d5 Ld4–a1; 18. Lb4–c5 Lc2–b1.

Heft 2/88
Bei der abgebildeten Turmwanderung werden 57 gerade Wegstrecken (Züge) benötigt. Keine andere Turmwanderung kann diese Anzahl übertreffen.

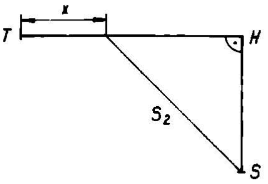


Heft 3/88
Weiß: Kf7, Dg3, Sf8.
Schwarz: Kh5, Lf6, Be7, h6.
Die Lösung dieses Zweizügers von Klaus-Peter Zuncke lautet:
1. Se6 Le5/Lg5 2. Dh3/Sg7 matt.

Lösungen zu: Der Kreisklub Mathematik Halle-Süd stellt sich vor
Heft 1/88

BASIC-Befehle im Pfiffikus
CLOAD, IF THEN

Detektiv Schnüffel klärt auf
Rudi Reich:
```
10  CLS:Z=0
20  FOR A=0 TO 50
30  FOR B=0 TO 25
40   FOR C=0 TO 10
50    FOR D=0 TO 5
60     FOR E=0 TO 2
70      T=A*1+B*2+C*5+D*10
        +E*20
80      IF T=50 THEN Z=Z+1
90  NEXT E, D, C, B, A
100 PRINT "Es gibt"; Z; "Möglich-
    keiten."
110 END
```



Laufzeit rund 1 h und 43 min.
Es gibt wirklich 450 Möglichkeiten, Rudi hat die Wahrheit gesagt.
Steffen Stürz:
```
10  CLS
20  FOR X=0 TO 16000 STEP 500
30   T1=X/25
40   S2=SQR((16000-X)*(16000-X)
     +10000*10000)
50   T2=S2/10:T=T1+T2
60   MI=INT(T/60)
70   SE=T-MI*60
80   PRINT X; "m", MI; "min"; SE; "s"
90  NEXT X
100 END
```
Mit diesem Programm erhält man bei $x = 11\,500$ m die kürzeste Zeit von 25 min 56,6 s. Untersucht man nun das Intervall $11\,000 \leqq x \leqq 12\,000$ mit der Schrittweite 50, erhält man bei 11 650 als kürzeste Zeit 25 min 56,5 s. Man könnte das Intervall weiter verkleinern, aber Stürz hat offensichtlich die Wahrheit gesagt.
Peter Primel:
```
10  CLS
20  G=15
30  W=3
40  G=G+W
50  PRINT 1, G
60  FOR T=2 TO 84
70    W=W*0.9
80    G=G+W
90    PRINT T, G
100 NEXT T
110 END
```
Die Größe nach 84 Tagen betrug nur knapp 45 cm. Peter Primel hatte gelogen!

Konstruktion von Sonnenuhren

Sonnenuhren dienten unseren Vorfahren jahrhundertelang als Zeitmesser. Sie nutzen die Bewegung der Erde und ihren Umlauf um die Sonne. Noch vorhandene Sonnenuhren aus früherer Zeit sind wichtige Kultur-Dokumente, Sonnenuhren unserer Zeit halten die Tradition aufrecht und sind Schmuckelemente für Gebäude, Gärten und Parkanlagen. Seit es elektronische Taschenrechner gibt, ist die Berechnung von Sonnenuhren bedeutend einfacher geworden und für mathematische Arbeitsgemeinschaften gut geeignet. Das liegt aber nicht daran, daß die Berechnung schneller geht, sondern weil mit Formeln gerechnet wird, während früher zeichnerische Konstruktionen üblich waren. Außerdem liefern die Formeln Strecken, während mit den Zeichnungen Winkel hergestellt werden.

Ein weiterer Vorteil der hier vorgestellten Konstruktionsweise besteht darin, daß von vornherein eine *Einheitsstrecke*, in der Regel die Mittagslinie, festgelegt wird. Wenn diese Einheitsstrecke im Nenner steht, fällt sie weg, und der Zähler eines tan bleibt als *Tangentenstrecke* übrig. Dadurch werden dann auch weitere Formeln einfacher und übersichtlicher. Schließlich kann ein solches, auf eine Einheitsstrecke bezogenes Zifferblatt als ähnliche Figur durch Multiplikation aller Strecken mit demselben Faktor auf diejenige Größe gebracht werden, die für die Sonnenuhr geplant ist. Winkel bleiben bei solchen Maßstabsänderungen unverändert.

Vertikale Sonnenuhr
Bonifatiuskirche Sömmerda, 1502

Die häufigsten Sonnenuhr-Typen

1. Horizontale Sonnenuhr (Hor. SU)
Zifferblatt in der Horizontebene; Schattenstab zeigt oben nach dem Himmelsnordpol; Stundenlinien sind nach 12 Uhr zusammengedrängt; Stunden laufen rechts herum

2. Vertikal-Süd Sonnenuhr (Vert. SU)
Wand ist genau nach Süd gerichtet; Schattenstab zeigt unten nach dem Himmels-Südpol bzw. rückwärts hinter der Wand nach dem Himmels-Nordpol; Stundenlinien sind nach 12 Uhr zusammengedrängt; Stunden laufen links herum

3. Vertikal-abweichende Sonnenuhr (Abw. SU)
Wand weicht von der Südrichtung ab; Schattenstab zeigt beim Blick auf die Wand seitwärts abwärts; Mittagslinie jedoch genau senkrecht; Stundenlinien sind nach der *Substilaren* (Linie unter dem Schattenstab) zusammengedrängt. Diese SU ist formelmäßig interessant!

4. Polare Sonnenuhr (Pol. SU)
Wand genau nach Ost oder West gerichtet; Schattenstab in einem bestimmten Abstand parallel zur Wand abgestützt, parallel zur Erdachse, zeigt oben nach dem Himmels-Nordpol; Stundenlinien parallel zueinander und zum Schattenstab

5. Äquatoriale Sonnenuhr (Äqu. SU)
Schattenstab parallel zur Erdachse zeigt nach dem Himmels-Nordpol; Zifferblatt bzw. Stundenringebene steht senkrecht auf dem Schattenstab, liegt also parallel zur Äquatorebene; Stundenlinien, Stundenpunkte gleichmäßig (15° voneinander) verteilt

Horizontale und Vertikal-Süd Sonnenuhr

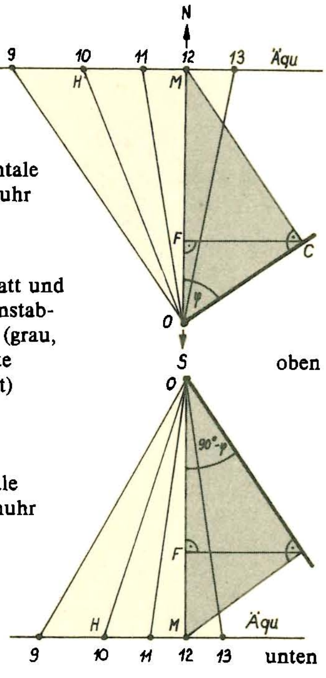
Diese beiden Sonnenuhr-Typen können zusammengefaßt werden (Bild 1), zumal der folgende Satz gilt:

Bild 1

Horizontale Sonnenuhr

Zifferblatt und Schattenstabdreieck (grau, zur Seite geklappt)

Vertikale Sonnenuhr



oben

unten

Eine Hor. SU auf der geographischen Breite φ hat dasselbe Zifferblatt wie eine Vert. SU auf der Breite (90°−φ). Auf der Breite 45° haben also beide dasselbe Zifferblatt. Lediglich in der Beschriftung der Stunden unterscheidet sich die Hor. SU (rechts herum) von der Vert. SU (links herum).

Bei der Hor. SU, Vert. SU und auch bei der Abw. SU gehen der Schattenstab und alle Stundenlinien vom Koordinatensprung 0 aus. Es sind zu berechnen:
1. Schattenstab (Länge und Richtung)
2. Zifferblatt (Richtung der Stundenlinien)

Schattenstab

Seine Länge OC und der Erhebungswinkel werden nach den Formeln für das Schattenstabdreieck (Bild 1) berechnet, wobei sich der Erhebungswinkel bei O aus den rechtwinkligen Dreiecken OCF oder OCM ergibt. Eine Kontrolle der berechneten Werte wird in beiden Fällen mit dem *Satz des Pythagoras* vorgenommen.

$$\overline{OF}^2 + \overline{FC}^2 = \overline{OC}^2$$
$$\overline{OC}^2 + \overline{CM}^2 = 1$$

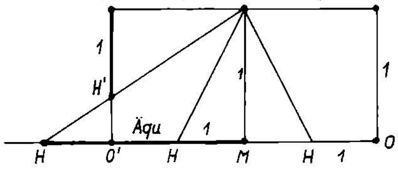
Der *Schattenstab-Endpunkt* C ist nur für die Berechnung nötig. In der Ausführung muß der Schattenstab etwa ein Drittel länger gemacht werden, damit der Schatten bei der Hor. SU im Sommer, bei der Vert. SU im Winter genügend lang wird.

Zifferblatt

Der Konstruktion liegt folgender Gedankengang zugrunde: Am 21. März läuft der vom Schattenstab-Endpunkt C erzeugte Schattenpunkt von morgens bis abends auf einer Geraden, der *Äquinoktiallinie* Äqu, entlang und trifft um 12 Uhr WOZ auf den Mittagspunkt M. (Die Abkürzungen sind am Ende des Beitrags erklärt.) Auf dieser Äqu werden die Stundenpunkte H bezeichnet, indem ihre Abstände MH (die Tangentenstrecken t) berechnet werden. Zur Herstellung des Zifferblattes brauchen dann nur noch die Stundenlinien von O zu diesen Stundenpunkten gezogen zu werden.

Zu Anfang wird die Mittagslinie $\overline{OM} = 1$ hingelegt. Durch M wird Äqu senkrecht nach beiden Seiten gezogen. Wenn die Tangentenstrecken t von M aus abgetragen werden, sind die Werte von t in der Nähe von M noch kleiner als 1; schließlich werden sie größer als 1 und dann so groß, daß sie sich nicht mehr zeichnen lassen. Deshalb werden zwischen der Mittagslinie und Äqu auf beiden Seiten Einheitsquadrate OMO'M' angelegt (Bild 2). Tangentenstrecken $\overline{MH} = t < 1$ werden dann auf $\overline{MO'}$ von M aus, solche mit $t > 1$ – entsprechend dem folgenden Satz – auf $\overline{M'O'}$ von M' aus als $\overline{M'H'}$ abgetragen. So ist eine genaue

Bild 2
Mittagslinie OM und Einheitsquadrate



Konstruktion auf kleinstem Raum möglich.

Satz: Wenn in einem Quadrat MOM'O' eine Seite (z. B. MO') über O' hinaus verlängert wird, so ist, wenn der von O nach H ausgehende Strahl die Strecke $\overline{O'M'}$ in H' schneidet, die Strecke $\overline{M'H'}$ gleich dem reziproken Wert von MH

$$\overline{M'H'} = \frac{1}{\overline{MH}}$$

Man beweise diesen Satz!

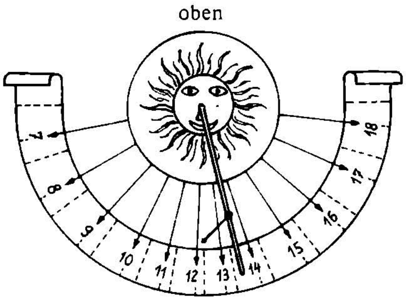


Bild 3

Vertikale Sonnenuhr an einer Südwand, konstruiert für etwa 11° östliche Länge

——→ Anzeige in wahrer Zonenzeit

- - - - Anzeige in wahrer Ortszeit

Tangentenstrecken-Tabelle

Das Ausrechnen der Tangentenstrecken $t = \overline{MH}$ geschieht in einer Tabelle (Tab. 1), die so viele Spalten enthält, wie Stundenpunkte bzw. -linien gewünscht werden.

Die erste Zeile der Tabelle enthält die Uhrzeiten, die zweite Zeile die zugehörigen *äquatorialen Stundenwinkel* τ, die 15° je Stunde betragen.

Abkürzungen

SU	Sonnenuhr
Zbl	Zifferblatt
O	Koordinatenursprung = Ausgangspunkt für Stundenlinien und Schattenstab
M	Mittagspunkt
$\overline{OM}$	Mittagslinie = Einheitsstrecke
Äqu	Äquinoktiallinie
H	Stundenpunkte (lat. hora)
Stl	Stundenlinie $\overline{OH}$
Zgl	Zeitgleichung
WOZ	Wahre Ortszeit
WZZ	Wahre Zonenzeit
Hor. SU	Horizontale Sonnenuhr
Vert. SU	Vertikal-Süd-Sonnenuhr
Abw. SU	Abweichende Vert. Sonnenuhr
Pol. SU	Polare Sonnenuhr
Äqu. SU	Äquatoriale Sonnenuhr
φ	Geographische Breite
λ	Geographische Länge
$\Delta\lambda$	Längengrad-Fehler
τ	Stundenwinkel (äquatorparallel)
$\tau(\lambda)$	Zonen-Stundenwinkel
t	Tangentenstrecke auf Äqu
$t(\lambda)$	Zonen-Tangentenstrecke
τ_0	Stundenlinienwinkel bei O
$\tau_0(\lambda)$	Zonen-Stundenlinienwinkel

Übergang von der WOZ zur Zonenzeit

Alle grundsätzlichen SU-Probleme werden in WOZ betrachtet und entwickelt. Erst wenn die endgültige Anzeige bevorsteht, wird der Übergang in Zonenzeit vorgenommen, denn die SU soll ja eine einigermaßen richtige Zeit anzeigen.

Die WOZ hat zwei Fehler: den Längengradfehler $\Delta\lambda$ und die *Zeitgleichung* Zgl. Der Längengradfehler läßt sich leicht ausschalten; dabei geht die Ortszeit in die Zonenzeit über, aber beides sind noch *wahre* Zeiten. Durch die Zeitgleichung geht eine *wahre* Zeit in eine *mittlere* über, z. B. in die MEZ. Die Zgl. läßt sich aber – außer mit ganz besonderen Mitteln – bei Sonnenuhren nicht ausschalten. Bei SU bleibt es also bei der (wenig bekannten) *wahren Zonenzeit*, und dieser Übergang wird in der dritten Zeile vollzogen, indem der Längengradfehler zum Stundenwinkel zugezählt wird. Es entsteht der Zonen-Stundenwinkel $\tau(\lambda)$; dabei sind die Vorzeichen zu beachten (in Tabelle 1, Zeile 3). Die Stundenwinkel τ sind vormittags negativ, und der Längengradfehler $\Delta\lambda$ ist westlich des 15. Längengrades – und das gilt fast für die ganze DDR – negativ und umgekehrt. Alle Größen, die in diese Zonenzeit umgerechnet sind, werden durch die Klammer (λ) gekennzeichnet und erhalten den Zusatz *Zonen-*. Das gilt für den Zonen-Stundenwinkel $\tau(\lambda)$ sowie für die Zonen-Tangentenstrecken $t(\lambda)$, die in Zeile 4 nach der Formel umgerechnet werden.

Es folgen einige Eigenschaften dieser beiden Sonnenuhr-Typen, die zum Teil aus Zeile 4 des Beispiels in Tabelle 2 hervorgehen.

1. Die Mittagslinie muß stets genau Nord–Süd oder senkrecht ausgerichtet sein.

2. Die 12-Uhr-Stundenlinie liegt bei SU, die Zonenzeit anzeigen, seitlich von der Mittagslinie, und zwar ist sie bei SU, die sich westlich von 15° östlicher Länge befinden, in Richtung 11 Uhr verschoben. Das ist das Erkennungsmerkmal, wie eine Sonnenuhr berechnet und ob sie richtig angebracht worden ist.

3. Stundenlinien, die sich um 12 Stunden unterscheiden, sind die rückwärtig geradlinigen Verlängerungen voneinander.

4. Stundenlinien, die sich nur um sechs Stunden unterscheiden, z. B. 6 bzw. 18 Uhr gegenüber 12 Uhr, stehen bei Anzeige in Zonenzeit nicht genau senkrecht aufeinander.

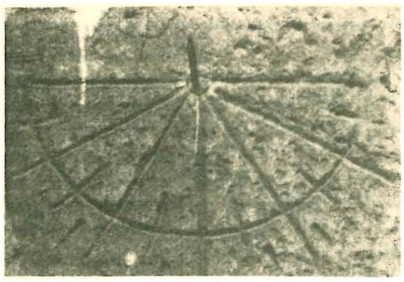
5. Nördlich von 45° Breite sind die Stundenlinien bei Vert. SU stärker nach 12 Uhr zusammengedrängt als bei Hor. SU. Südlich von 45° ist es umgekehrt.

6. Wenn die Stunden der Sommerzeit angezeigt werden sollen, kann dies nur durch Doppel- oder Umbeschriftung geschehen. Es wäre falsch, sowohl die Zonenzeit als auch die Sommerzeit durch Drehen des Zifferblattes oder gar durch Biegen des Schattenstabes erreichen zu wollen.

7. Auf dem endgültigen Zifferblatt sollen auch die Stundenlinien etwa ein Drittel über Äqu hinaus verlängert werden. Außerdem brauchen die Mittagslinie, die Äqu, die Stundenpunkte H sowie der Punkt C des Schattenstabes auf dem Zifferblatt nicht zu erscheinen. Lediglich der Mittagspunkt M sollte angedeutet werden, damit eine Kontrolle der Anbringung jederzeit möglich ist.

H. Vilkner

Vertikale Sonnenuhr Bleicherode, vor 1500



Horizontale Sonnenuhr auf der Promenade von Heringsdorf

Äquatorial-Sonnenuhr Elterlein/Erzgebirge

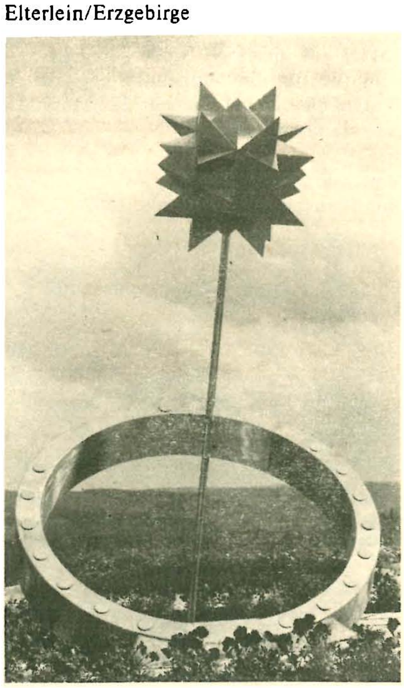


Tabelle 1: Tangentenstrecken

1. Uhrzeit	9	10	10^{30}	11	12	13 Uhr
2. Stundenwinkel τ	-45	-30	$-22{,}5$	-15	0	15 Grad
3. Zonen-Stundenwinkel $\tau(\lambda)$	vormittags				nachmittags	
westl. 15°	$-\lvert\tau\rvert - \lvert\Delta\lambda\rvert$				$\tau - \lvert\Delta\lambda\rvert$	
östl. 15°	$-\lvert\tau\rvert + \Delta\lambda$				$\tau + \Delta\lambda$	
4. Zonen-Tangentenstrecke $t(\lambda)$	$= \tan\tau(\lambda)\cdot\sin\varphi$ (Hor. SU)					
	$= \tan\tau(\lambda)\cdot\cos\varphi$ (Vert. SU)					

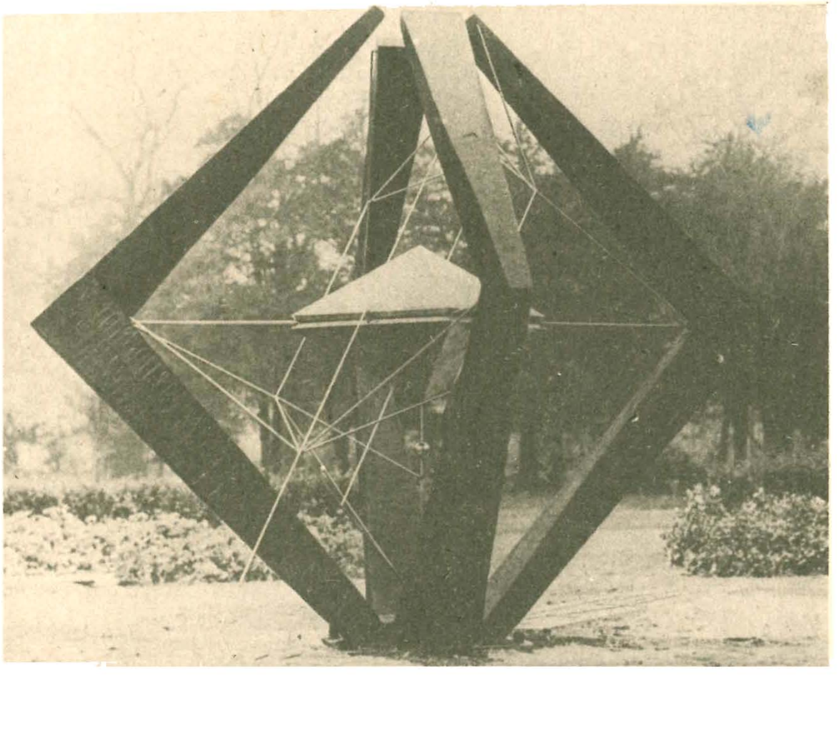
Tabelle 2: Beispiel $\varphi = 54°$, $\lambda = 12°$, $\Delta\lambda = -3°$

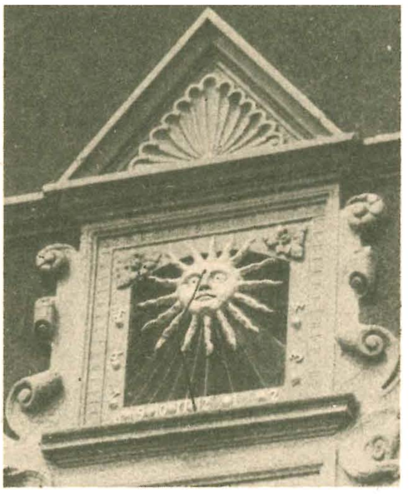
1. Uhrzeit	4	6	8	10	12	14	16	18	20 Uhr	
2. τ	-120	-90	-60	-30	0	30	60	90	120 Grad	
3. $\tau(\lambda)$	-123	-93	-63	-33	-3	27	57	87	117 Grad	
4. $t(\lambda)$	$-1{,}25$	$-15{,}44$	$-1{,}59$	$-0{,}53$	$-0{,}04$	0,41	1,25	15,44	1,59 Grad	Hor. SU
$\frac{1}{t}(\lambda)$	$-0{,}80$	$-0{,}07$	$-0{,}63$				0,80	0,07	0,63	
$t(\lambda)$			$-1{,}15$	$-0{,}38$	$-0{,}03$	0,30	0,91	11,22		Vert. SU
$\frac{1}{t}(\lambda)$			$-0{,}87$					0,09		

Formeln

	Hor. SU	Vert. SU
Mittagslinie	$\overline{OM} = 1$	$\overline{OM} = 1$
Länge des Schattenstabes	$\overline{OC} = \cos\varphi$	$\overline{OC} = \sin\varphi$
Erhebungswinkel des Schattenstabes	$\tan\varphi = \frac{\overline{CF}}{\overline{FO}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{OC}}$	$\tan(90° - \varphi) = \frac{\overline{CF}}{\overline{FO}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{OC}}$
Stützlot	$\overline{CF} = \sin\varphi\cos\varphi$	$\overline{CF} = \sin\varphi\cos\varphi$
Projektion des Schattenstabes	$\overline{OF} = \cos^2\varphi$	$OF = \sin^2\varphi$
Reststrecke	$\overline{FM} = \sin^2\varphi$	$\overline{FM} = \cos^2\varphi$
Schattenweg	$\overline{CM} = \sin\varphi$	$\overline{CM} = \cos\varphi$
Tangentenstrecke	$t = \tan\tau\sin\varphi$	$t = \tan\tau\cos\varphi$
Zonen-Tangentenstrecke	$t(\lambda) = \tan\tau(\lambda)$ $\sin\varphi$	$t(\lambda) = \tan\tau(\lambda)$ $\cos\varphi$
Längengrad-Fehler	$\Delta\lambda = \lambda - 15°$	
Zonen-Stundenwinkel	$\tau(\lambda) = \tau + \Delta\lambda$	

Großplastik mit sieben Sonnenuhren, Stadtpark Dessau, 1976





Vertikale Sonnenuhr
Gotha, Rathaus

Die Aufnahmen der Sonnenuhren stellte uns der Arbeitskreis Gnomonik im Kulturbund der DDR zur Verfügung.
Der Arbeitskreis als Leit- und Meldestelle für die Sonnenuhren in der DDR, zeichnet für die Beschreibung und bildliche Darstellung historisch und künstlerisch wertvoller Sonnenuhren als Dokumente der Zeitmeßkunst verantwortlich, arbeitet mit der Denkmalspflege und den Bauämtern eng zusammen und berät bei der Anlage von Sonnenuhren.
Wer mehr darüber wissen möchte, kann sich an den Leiter des Arbeitskreises, StR A. Zenkert wenden.

Die Adresse lautet:
Astronomisches Zentrum
„Bruno H. Bürgel“
Planetarium – Beobachtungsstation
Bürgel-Gedenkstätte
Neuer Garten 6
Potsdam
1500

Gorsleben, Kr. Artern
am Friedhofseingang, 1698

Aufgabe zum Titelblatt

Springzahlrätsel: Zur Satzgruppe des Pythagoras

Die gesuchten natürlichen Zahlen, Dezimalbrüche (meist als Maßzahlen von Größen), geordneten Zahlenpaare (x, y) und Tripel (x, y, z) – jeweils als Ziffernfolge geschrieben [z. B. 3,61 als Ziffernfolge 361 oder das Tripel $(3, 4, 5)$ als Ziffernfolge 345] – werden in die in eckigen Klammern genannten Kästchen aufgeteilt (in der angegebenen Reihenfolge), wobei in jedem Kästchen mindestens eine Ziffer stehen muß und höchstens eine zweistellige natürliche Zahl stehen darf. Es muß sogar für jede in einem Kästchen stehende Lösungszahl n gelten: $1 \leqq n \leqq 25$. Zur Textabkürzung seien das Dreieck ABC unserer Rätselfigur mit Δ und die Quadrate über den Katheten a und b mit Q_a bzw. Q_b bezeichnet. Die Länge einer Kästchenseite sei dabei eine Längeneinheit (1 LE). Maßzahlen von auf die Rätselfigur bezogenen Längen, Flächeninhalten bzw. Volumina sind dementsprechend in LE, $(\mathrm{LE})^2$ bzw. $(\mathrm{LE})^3$ anzugeben. Winkelgrößen werden in Grad angegeben. Wenn von der Länge einer Dreiecks-Transversalen (Mittelsenkrechte, Seitenhalbierende, Winkelhalbierende, Höhe) die Rede ist, so ist stets die Länge des innerhalb des jeweiligen Dreiecks liegenden Abschnitts dieser Transversalen gemeint. Die Textbeifügung *(n Stellen)* bedeutet, daß bei sich ergebenden Dezimalbrüchen diese auf n Dezimalstellen zu runden sind. Durch Mehrfachbelegung mancher Kästchen (d. h., die in diesen Kästchen stehenden Zahlen sind Bestandteile mehrerer Ergebnisse) ist eine gute Hilfe und Kontrolle für nachfolgende Ergebnisse möglich.

Gesucht sind: [1]: Flächeninhalt von Δ; [1, 3, 20]: Pythagoreisches Tripel; [2, 3]: Länge des Hypotenusenabschnitts q von Δ; [2, 7]: Umfang von Δ; [3, 4]: Länge (in cm) der Mittelsenkrechten m_a in einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck mit den Schenkeln $a = b = 17{,}4$ cm; [3, 8]: Länge (in cm) einer Winkelhalbierenden eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge $a = 10{,}3$ cm (1 Stelle); [4, 23]: Lösungspaar (x, y) der Gleichung $x^2 + y^2 = 130$; [4, 15, 22]: Länge (in cm) einer Raumdiagonale eines Quaders mit den Kanten $a = b = 5{,}16$ m und $c = 2{,}58$ m; [5, 19, 35]: Länge einer Diagonale in Q_a (2 Stellen); [5, 11, 13]: Pythagoreisches Tripel; [6, 7]: Länge des Hypotenusenabschnitts p von Δ; [6, 12, 22]: Flächeninhalt des Teildreiecks BCD von Δ; [6, 19]: Länge der Seitenhalbierenden s_a von Δ (1 Stelle); [7, 40]: Länge der Höhe h in Δ; [7, 25]: Flächeninhalt des Teildreiecks CAD von Δ; [8, 11, 18]: Lösungstripel (x, y, z) der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$; [9, 17, 22]: Länge einer Diagonale von Q_b (2 Stellen); [9, 17, 38]: Länge der Seitenhalbierenden s_b von Δ (2 Stellen); [9, 24]: Größe eines Basiswinkels in einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck; [10, 21, 24]: Größe eines zu einem Basiswinkel eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks gehörenden Außenwinkels; [10, 29]: Länge der Höhe (in cm) eines gleichschenkligen Trapezes mit den Grundseiten $a = 19$ cm und $c = 1$ cm sowie den Seiten $b = d = 15$ cm; [11, 26]: Volumen (in cm³) eines 2,04 m langen Dreikantstabes, dessen Querschnittsfläche kongruent zu Δ ist (1 LE = 1 cm); [12, 20, 36]: Lösungstripel (x, y, z) der Gleichung $5^2 + 6^2 + x^2 + y^2 = z^2$; [12, 34]: Flächeninhalt (in cm²) eines Trapezes mit den Grundseiten $a = 83$ cm und $c = 27$ cm sowie den Seiten $b = 25$ cm und $d = 39$ cm; [13, 44]: Flächeninhalt (in cm²) eines Rechtecks, dessen Umfang 160 cm beträgt und dessen Seiten einen Längenunterschied von 34 cm haben; [14, 33]: Volumen (in cm³) eines Quaders mit den Kanten $a = a_1$ cm, $b = b_1$ cm und $c = c_1$ cm, wobei a_1 eine gerade Primzahl, b_1 die größte einstellige und c_1 die kleinste dreistellige Primzahl ist; [15, 42]: Flächeninhalt eines Achtecks (in cm²), welches aus einem Quadrat der Seitenlänge $a = 27$ cm dadurch entsteht, daß man seine vier Ecken so abschneidet, daß die vier abgeschnittenen Stücke untereinander kongruente rechtwinklige Dreiecke sind, deren ganzzahlige Eckseitenlängen im Verhältnis $1 : 5$ stehen; [16, 19, 25]: Volumen eines Quaders (in cm³), wenn eine Diagonale einer seiner Begrenzungsflächen 55 cm mißt und eine der zu dieser Fläche senkrechten Kanten 8 cm beträgt; [17, 24, 41]: die positive Lösung der Gleichung $2x^2 + (129)^2 = (387)^2$; [18, 32, 35]: Volumen (in cm³) einer geraden rechteckigen Pyramide mit den Grundkanten $a = 16$ cm und $b = 12$ cm sowie Seitenkanten der Länge $s = 26$ cm; [19, 39]: Maisertrag (in dt), der auf 3 ha eines Maisschlages, der die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse von 500 m und einer Kathete von 300 m hat, erbracht wird, wenn auf dem gesamten Feld 1236 dt Mais geerntet werden; [20, 48]: Leerinhalt (in cm³) einer Schachtel, die 31 cm lang, 1,1 dm breit und 30 mm hoch ist; [21, 49]: Länge (in cm) einer Diagonale eines Rechtecks mit den Seiten $a = 15$ cm und $b = 36$ cm; [23, 37]: Länge der Höhe (in cm) eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn der Hypotenusenabschnitt $q = 7{,}51$ cm und $b = 11{,}88$ cm betragen (2 Stellen); [24, 45]: Breite (in m) eines rechteckigen Feldstükkes, das 696 m lang ist und eine Diagonalenlänge von 870 m hat; [27, 43]: Radius (in cm) eines Kreises, bei dem eine Sehne der Länge $s = 16{,}8$ dm einen Abstand von 6,3 dm vom Kreismittelpunkt hat; [28]: Länge der Höhe h_a (in cm) eines Parallelogramms, das einen Flächeninhalt von 208 cm² hat, und die Seite $a = 13$ cm beträgt; [30, 50]: Umkreisradius (in mm) eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $a = 15{,}84$ dm und $b = 21{,}12$ dm; [31, 46]: Abstand (in mm), den eine Sehne der Länge $s = 45{,}6$ cm in einem Kreis mit dem Radius $r = 28{,}5$ cm vom Kreismittelpunkt hat; [40, 50]: Flächeninhalt (in cm²) eines Dreiecks mit den Seiten $a = 39$ cm, $b = 25$ cm und $c = 56$ cm; [41, 47]: Hangabtriebskraft (in kp), die eine kugelförmige Lawine vom Gewicht $G = 1015$ kp an einem Hang (geneigte Ebene) mit der Steigung $4 : 3$ erfährt.

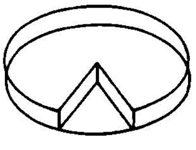
Bei richtiger Auflösung ergeben sich drei magische Quadrate. (In einem magischen Quadrat gilt: Zeilensummen = Spaltensummen = Diagonalsummen.)

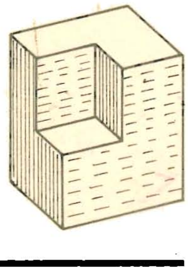
R. Mildner

Wo ist das fehlende Stück?

Stelle das *alpha*-Heft auf den Kopf!

E. Quaisser, Potsdam

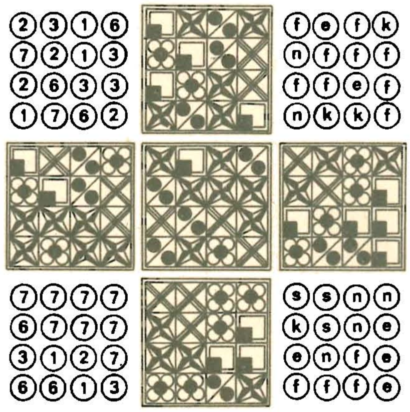




Visuelle Logik

Zwischen den Zahlen, Zeichen und Buchstaben besteht ein logischer Zusammenhang, der sich durch eine zweistellige Zahl ausdrücken läßt. Wie lautet diese Zahl?

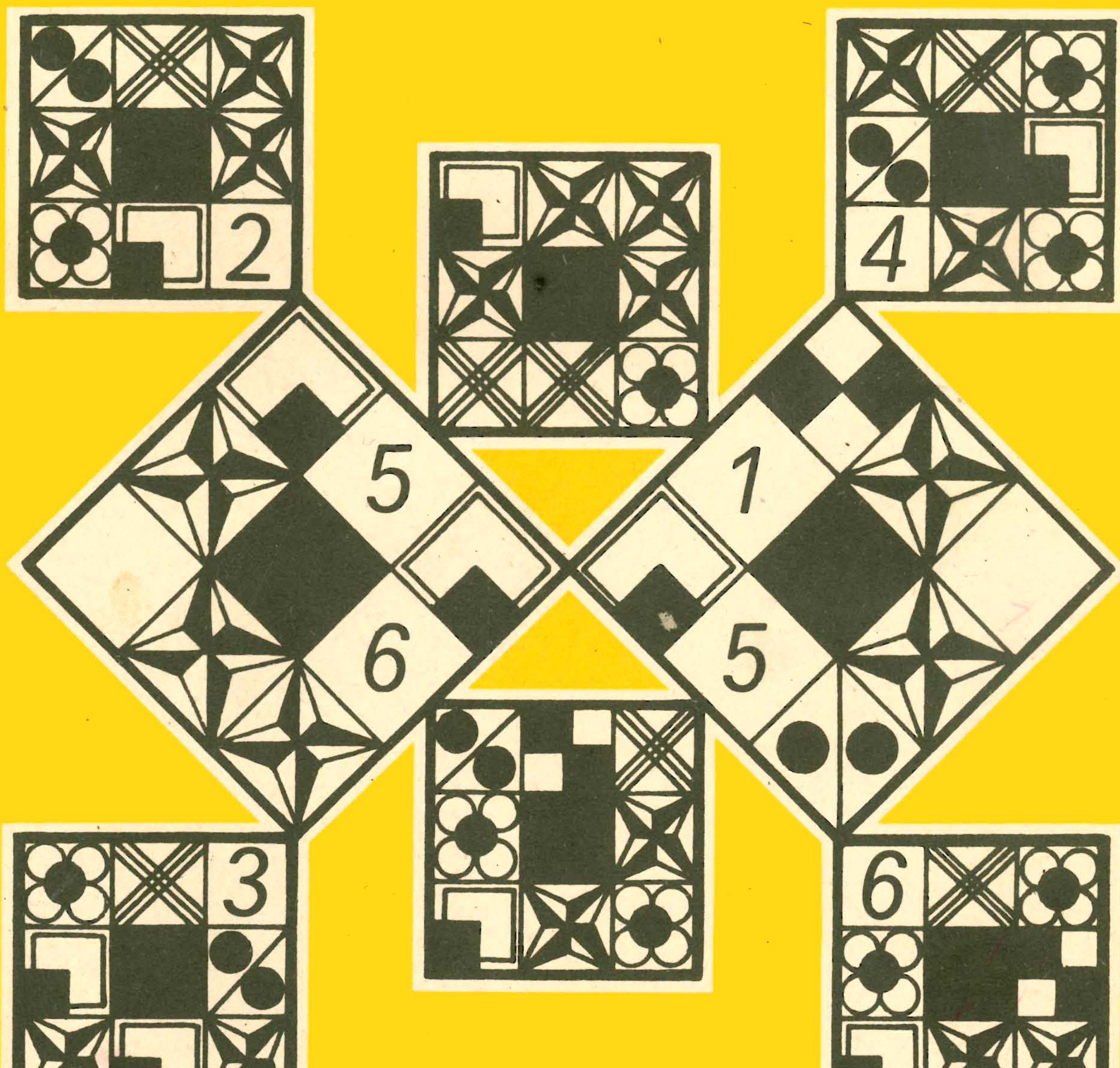
W. Neugebauer, Berlin



ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 22 (1988) 3 · Seiten 49 bis 72

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



4

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
22. Jahrgang 1988
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold
Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027
Redaktion:
Gabriele Liebau (Chefredakteur); Rosemarie Schubert (redaktioneller Mitarbeiter)
Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. C. P. Helmholz (Leipzig); Dozent Dr. sc. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dr. rer. nat. W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. rer. nat. W. Schulz (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle)
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: R. Thiele (S. 73); ADN – ZB/Michel (S. 74); ADN – ZB/Gerth (S. 75); J. Jahnel (S. 77); Kurt Oertel (S. 83); R. Bölling (S. 92)
Vignetten: L. Otto (Titelvignetten, S. 76, S. 88 l., IV. U.-S.); aus Eulenspiegel, Berlin (S. 87 M.)
Titelblatt: W. Fahr nach einer Vorlage von W. Neugebauer (beide Berlin)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 13. April 1988
Auslieferungstermin: 9. August 1988

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Flächenberechnung bei Dreiecken mit dem SR 1

Erste Bekanntschaft mit dem Flächeninhalt von Dreiecken macht ein Schüler meist in Klasse 5 am Spezialfall: Für Dreiecke mit $\sphericalangle(a, b) = 90°$ und den Seitenlängen a und b gilt $A = \frac{1}{2}ab$ (der Flächeninhalt A des rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem halben Produkt der Seiten a und b). In Klasse 6 wird das Wissen erweitert: Aus Grundseite und Höhe lernt ihr den Inhalt nach der Formel $A = \frac{g \cdot h}{2}$ zu berechnen. Oft sind leider die Seitenlängen bekannt, die zugehörigen Höhen jedoch nicht.
Schüler dieser Klassenstufe können sich helfen, indem sie durch Konstruktion die Höhen näherungsweise bestimmen. Dieser Mangel wird erst in Klasse 10 mit umfangreicheren Mitteln beseitigt.

▲1▲ *Man berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Seitenlängen 13 cm, 14 cm, 15 cm! Man gebe dazu einen Programmablaufplan für den SR 1 an, so daß man ohne das Notieren von Zwischenergebnissen zum Ziel kommt.*
(Schüler der 6. Klasse ermitteln die Länge einer Höhe durch Konstruktion.)

Schon dem griechischen Mathematiker *Heron von Alexandria* (um 75 u. Z.) war eine Formel bekannt, um den Flächeninhalt aus den drei Seiten eines Dreiecks rechnerisch zu bestimmen. Die sogenannte *Heronsche Formel*

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

wobei s der halbe Umfang des Dreiecks ist, zeigt, daß man für die Flächenberechnung keine Winkelgrößen als Hilfswerte benötigt.

▲2▲ *Gib einen Programmablaufplan für den SR 1 an, so daß bei Anwendung der Heronschen Formel keine Zwischenergebnisse notiert werden müssen! Überprüfe damit das in Aufgabe 1 ermittelte Ergebnis!*

Wer Aufgabe 2 selbständig gelöst hat, beherrscht seinen Schulrechner sehr gut. Wir wollen nun versuchen, eine Formel zu finden, die leicht programmierbar und einprägsam ist. Dazu seien a, b, c die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks, ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $c \geqq a$ und $c \geqq b$.
Unter Verwendung des Kosinussatzes

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

berechnen wir zunächst den Kosinuswert des größten Winkels

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Aus $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$
und $0° < \gamma < 180°$ folgt

$$\sin\gamma = \sqrt{1 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{(2ab)^2}}.$$

Wir benutzen diese Beziehung und formen die Formel $A = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma$ um:

$$A = \frac{1}{2}ab\sqrt{\frac{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{(2ab)^2}},$$

daher ist

$$A = \sqrt{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2} : 4.$$

▲3▲ *Man gebe einen Programmablaufplan zur Anwendung dieser Formel auf dem SR 1 an und überprüfe das Ergebnis von Aufgabe 1!*
Diese Formel ist nicht nur *rechnerfreundlich*, sie läßt sich wegen der gleichartigen Terme wie beim Kosinussatz auch leicht merken. Wir wollen noch weitere Vorteile kennenlernen.

▲4▲ *Man berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks, wenn die Maßzahlen der Seitenlängen 48, 55, 73 sind!*
Seid bitte nicht verunsichert, wenn plötzlich 0 zu quadrieren ist. Sorgfältiges Abarbeiten des weiteren Programms führt zum richtigen Ergebnis. Wir erinnern uns an den *Lehrsatz des Pythagoras*:
Hat der Term $a^2 + b^2 - c^2$ den Wert 0, so ist das Dreieck rechtwinklig. Für die Berechnung seines Flächeninhaltes eignet sich daher die eingangs erwähnte einfache Formel $A = (48 \cdot 55) : 2$.
Man überprüfe dies! *Hat der genannte Term einen positiven Wert, so handelt es sich um ein spitzwinkliges Dreieck, ist der Wert negativ, handelt es sich um ein stumpfwinkliges Dreieck, wobei der stumpfe Winkel der Seite c gegenüberliegt.*
Aufmerksames Beobachten der Zwischenergebnisse liefert also nützliche Zusatzinformationen! Zum Schluß sei an den Spezialfall des gleichseitigen Dreiecks erinnert.

▲5▲ *Man leite aus*
$A = \sqrt{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2} : 4$
eine Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes gleichseitiger Dreiecke her und vergleiche das Ergebnis mit der Angabe im Tafelwerk!

B. Herrmann

Eine historische Aufgabe

Verfolgungsaufgaben gehören zu den interessantesten Problem der Unterhaltungsmathematik. Eine der einfachsten Aufgaben dieser Art ist die Frage, wann eine Person eine andere überholen wird. Dieser Grundtypus erscheint bereits 1000 Jahre vor der Zeitrechnung in der chinesischen Mathematik. Der gelehrte Mönch Alcuin von York verfaßte am Hofe Karls des Großen die Aufgabensammlung *Propositiones ad acuendos iuvenes* (etwa um das Jahr 1000), in der unter anderem die Verfolgungsproblematik als Hund – Hasen – Aufgabe erscheint. Auf diese Einkleidung wird im ganzen Mittelalter ständig zurückgegriffen, beispielsweise durch die italienischen Mathematiker Pacioli und Cardano (um 1500 bzw. 1540) oder die deutschen Mathematiker Rudolff und Köbel (um 1520). In Köbels Rechenbuch wird das Jagdproblem Hund – Hase variiert. In jenen Jahrhunderten wurden Nachrichten durch Boten überbracht, und so bildeten sich in Italien allgemeinere Kurierprobleme heraus, in denen zwei Boten zur gleichen oder zu verschiedenen Zeiten in gleicher (oder entgegengesetzter) Richtung von gleichen oder verschiedenen Orten aus starten. Später bot die Uhr mit ihren Zeigern die Möglichkeit, knifflige Überholaufgaben zu formulieren.

Von Wandern.

¶ Von wandern uber Landt.

Zwen Bürger auß Oppenheym/ Einer Son Heynrich/ der ander Contz võ Treber genant/ wolten mit einander gen Rom gehen/ Vnd Heynrich was alt/ vnd mocht einen tag nicht mehr denn zehen meilen gehen/ Aber Contz von Treber was jung vnd starck/ der mocht einen tag 15. meilen gehen/ Deßhalben gieng Son Heynrich neun tag ehe auß Oppenheym denn Contz von Treber/ Also war Son Heynrich Contzen 90. meilen fürgangen/ ehe Contz anzeheben hat außzugehen.

Unser Bild zeigt eine Seite aus dem *Rechenbuch* von Köbel (Ausgabe von 1564), in der zwei Oppenheymer Bürger nach Rom wandern und zu verschiedenen Zeiten aufbrechen. Die Wahl eines italienischen Zielortes weist noch auf den italienischen Ursprung der Kurierprobleme hin.
Viel Spaß beim Lösen wünscht Euch

R. Thiele

Mathematikolympiaden in der Volksrepublik Moçambique

Der Autor dieses Beitrags – Mitarbeiter der Sektion Mathematik der *Karl-Marx*-Universität Leipzig – bildet zur Zeit an der Universität *Eduardo Mondlane* in Maputo Lehrer für die Fächer Mathematik und Physik aus. Er ist einer der DDR-Bürger, die der VR Moçambique unter zum Teil komplizierten Bedingungen beim Aufbau des Sozialismus helfen. In einem Brief an die Redaktion *alpha* berichtet er über Mathematikolympiaden in diesem jungen afrikanischen Staat.

Bei der Überwindung der Folgen einer 500-jährigen Kolonialzeit hat das Bildungswesen besonders viel zu leisten. Bereits in den ersten 10 Jahren des Bestehens der VR Moçambique konnte die Zahl der Analphabeten bedeutend gesenkt werden. Dies gelang, obwohl noch zu wenige Schulräume, Arbeitsmaterialien und Lehrer vorhanden sind. Beispielsweise muß an den großen Schulen der Hauptstadt in drei Schichten gearbeitet werden:

Vormittags haben die Klassen 10 und 11 Unterricht, nachmittags die Klassen 7 bis 9, und abends lernen die Erwachsenen.

Die Moçambiquaner wissen, daß für den Aufbau ihres Landes mathematisches und naturwissenschaftliches Wissen und Können große Bedeutung haben. Von den sozialistischen Ländern griffen sie deshalb die Idee auf, regelmäßige Schülerolympiaden durchzuführen. Im Jahre 1981 begann man mit einer Mathematikolympiade, an der 139 Schüler teilnahmen. Bereits drei Jahre später gab es Olympiaden in den Fächern Mathematik, Physik, Chemie, Biologie, Geographie, Geschichte und Portugiesisch dazu, an denen sich insgesamt mehr als 4000 Jugendliche beteiligten.

Durch diese Olympiaden werden die Schüler zu intensiverer Beschäftigung mit dem jeweiligen Fachgebiet angespornt.

Preisträger der Olympiaden nutzen alle Möglichkeiten des Weiterlernens. So qualifizierte sich z. B. *Lourenza Làzaro Magaia*, einer der Preisträger der Mathematikolympiade von 1981, inzwischen zum Lehrer für Mathematik und Physik. Er arbeitet zur Zeit als Assistent an der Universität Maputo und bereitet sich auf ein Zusatzstudium in der DDR vor.

Die Mathematikolympiade wird landesweit in zwei Stufen durchgeführt. An der 1. Stufe können sich alle Schüler ab Klasse 7 beteiligen. Die fünf besten Schüler jeder Schule und Klassenstufe dürfen die Aufgaben der 2. Stufe lösen. In der Klassenstufe 10/11 starten auch Studenten, die zu Lehrern für die Klassen 7 bis 9 ausgebildet werden.

Während die Lösungen der 1. Stufe in den Provinzen korrigiert werden, erfolgt die Auswertung der 2. Stufe zentral in der Hauptstadt Maputo.

Einige Olympiadeaufgaben wollen wir euch im Anschluß an diesen Beitrag vorstellen.

Die Mathematikolympiaden finden in der Öffentlichkeit starke Beachtung. So veröffentlichen Zeitungen und auch *Radio Moçambique* mathematische Preisaufgaben in Vorbereitung auf die Olympiade. Das Bild 2 zeigt ein Plakat, das zur Teilnahme u. a. an der Mathematikolympiade aufruft.

Zur Vorbereitung auf die Mathematikolympiade nutzen die immer zahlreicher werdenden Teilnehmer vor allem die seit

Bild 1 Unterricht in der mit Unterstützung der FDJ errichteten Technischen Schule von Maotize.

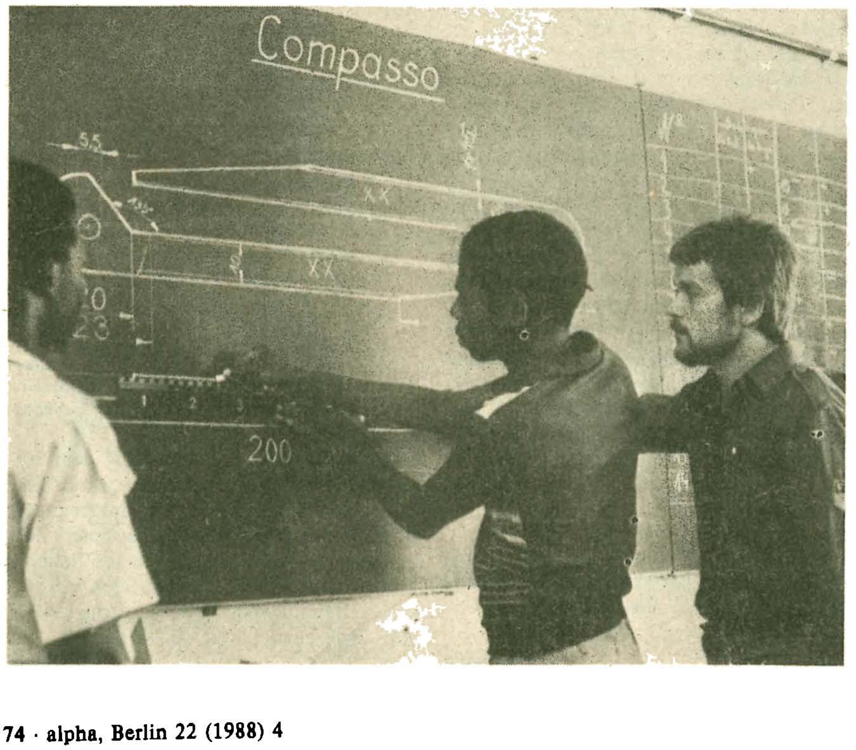


Bild 2

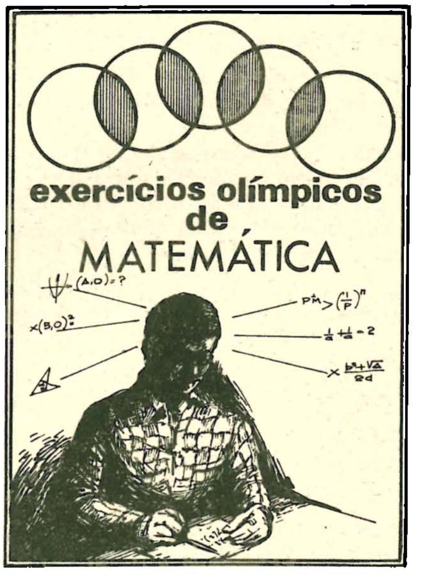
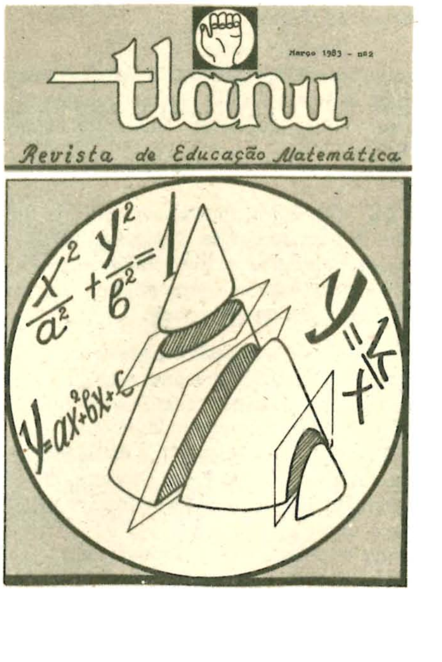


Bild 3



fünf Jahren bestehende Schülerzeitschrift *Tlanu*, eine Bruderzeitschrift der *alpha*. An ihrer Gestaltung sind Wissenschaftler aus der DDR wesentlich beteiligt. *Tlanu* bedeutet in den Bantusprachen soviel wie die Zahl 5. Diese Zahl war die Basis des von den Eingeborenen im Gebiet der heutigen VR Moçambique beim Zählen und Rechnen verwendeten Positionssystems. Das Bild 3 zeigt eine Titelseite dieser Zeitschrift. *H. Hunecke*

Aufgaben

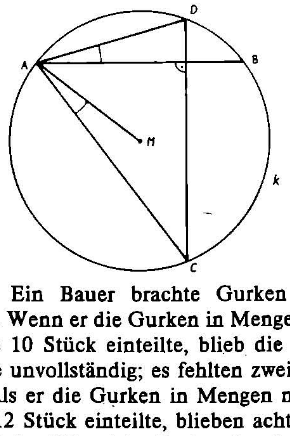
Klassenstufe 7

▲1▲ a) Num torneio de xadres, cada aluno joga contra ca da aluno. Ao todo, fazem – se 28 jogos. Quantos são os alunos participantes.
b) Num outro torneio do mesmo tipo, participam 10 alunos. Quantos jogos se fazem no total?
(Originaltext einer Olympiadeaufgabe)

▲1▲ a) Bei einem Schachturnier spielte jeder Schüler gegen jeden anderen Teilnehmer genau einmal. Insgesamt wurden 28 Spiele ausgetragen. Wie viele Schüler nahmen an diesen Turnier teil?
b) An einem anderen Schachturnier nahmen 10 Schüler teil. Wie viele Spiele mußten ausgetragen werden, wenn jeder Schüler gegen jeden anderen Turnierteilnehmer genau einmal spielte?

▲2▲ Mario, Angelo und Lucas sind drei Jugendliche. Einer von ihnen wohnt in Lichinga, einer in Nampula und einer in Inhambane. Von ihnen ist folgendes bekannt:
(1) Angelo und der Jugendliche aus Nampula beschäftigen sich in ihrer Freizeit mit dem Lösen mathematischer Aufgaben.
(2) Derjenige von ihnen, der in Nampula wohnt, kennt Lucas nicht.
(3) Angelo ist der Freund des Jugendlichen, der in Lichinga wohnt.
Ermittle, in welcher Stadt jeder der drei Jugendlichen wohnt!

▲3▲ Im abgebildeten Kreis k mit dem Mittelpunkt M stehen die Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ aufeinander senkrecht. Weise nach, daß die Winkel $\sphericalangle DAB$ und $\sphericalangle MAC$ einander kongruent sind!



▲4▲ Ein Bauer brachte Gurken zum Markt. Wenn er die Gurken in Mengen mit jeweils 10 Stück einteilte, blieb die letzte Menge unvollständig; es fehlten zwei Gurken. Als er die Gurken in Mengen mit jeweils 12 Stück einteilte, blieben acht Gurken übrig. Wie viele Gurken brachte der Bauer zum Markt, wenn es mehr als 300 weniger als 400 Stück waren?

Klassenstufe 8

▲5▲ Man finde alle natürlichen Zahlen m und n, für die $m^2 - n^2 = 91$ gilt!

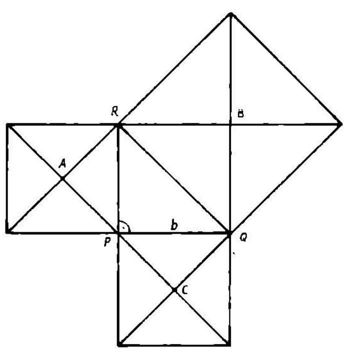
▲6▲ Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit den Höhen h_a (Höhe auf $\overline{BC}$) und h_c (Höhe auf $\overline{AB}$), die sich im Punkte S schneiden. Ferner gelte $\overline{AS} = \overline{BC}$. Es ist die Größe des Winkels CAB zu bestimmen!

▲7▲ Man weise nach, daß für alle positiven reellen Zahlen a und b die Ungleichung
$$\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$$ erfüllt wird!

▲8▲ Ein Mathematiker wurde gefragt, an welchem Tag und Monat er Geburtstag habe, scherzhaft antwortete er: „Wenn man den Tag meines Geburtstages mit 12, den Monat mit 31 multipliziert und diese beiden Produkte addiert, so erhält man 368. Nun rechnet meinen Geburtstag selber aus!"

Klassenstufe 9

▲9▲ Es seien A, B und C die Mittelpunkte der Quadrate über den Seiten eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks PQR. Ferner habe die Strecke $\overline{PQ}$ die Länge b. Es ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC durch die Länge b auszudrücken!



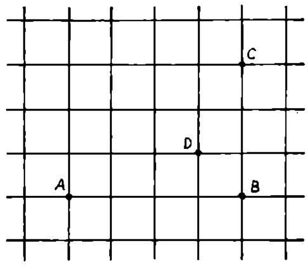
▲10▲ Ein Händler kaufte eine gewisse Anzahl Hühner für 3 360 MT, von denen sieben infolge einer Krankheit starben. Die restlichen Hühner verkaufte er für einen Stückpreis, der um 20 MT pro Huhn höher lag als der ursprüngliche Kaufpreis. Nachdem er alle Hühner verkauft hatte, betrug sein Gewinn 140 MT. Wie viele Hühner hatte er ursprünglich gekauft?
(Die Währung Mocambiques ist der *Metical*, abgekürzt MT, Mehrzahl Meticais.)

▲11▲ Ein Händler verkaufte eine gewisse Menge Speiseöl für 24 000 MT. Dabei verdiente er soviel Prozent wie ihm das Öl in Tausendern gekostet hatte. Für welchen Preis hatte er das Öl eingekauft?

▲12▲ Auf Grund einer Dürre erhöhte man den Preis für Kartoffeln um 20 %. Etwas später wurde der Preis für Kartoffeln wieder um 20 % gesenkt. Wann waren die Kartoffeln billiger, vor der Preiserhöhung oder nach der Preissenkung?
Wieviel Prozent beträgt der Preisunterschied?

Klassenstufe 10

▲13▲ In einem aus kongruenten Quadraten bestehenden Gitternetz wurden vier Punkte A, B, C, D (wie aus dem Bild ersichtlich) festgelegt. Es ist zu beweisen, daß die Gerade AD den Winkel BAC halbiert!



▲14▲ Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$. Es sei M der Mittelpunkt der Höhe $\overline{CD}$. Die Gerade AM schneide BC im Punkte K. Man zeige, daß $\overline{AM} = 3 \cdot \overline{MK}$ gilt!

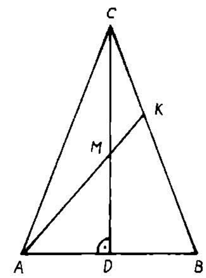
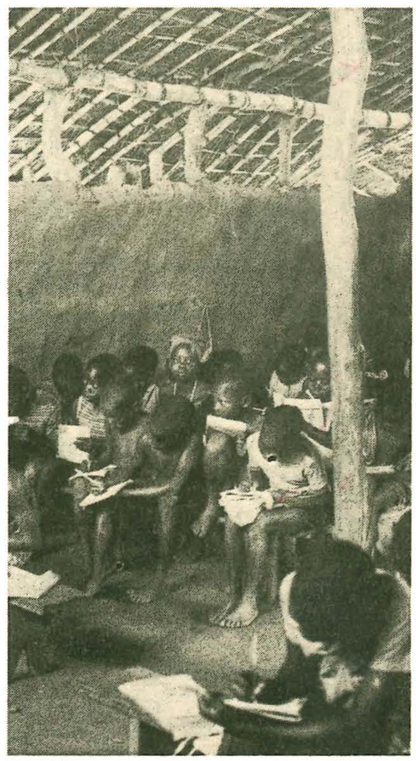
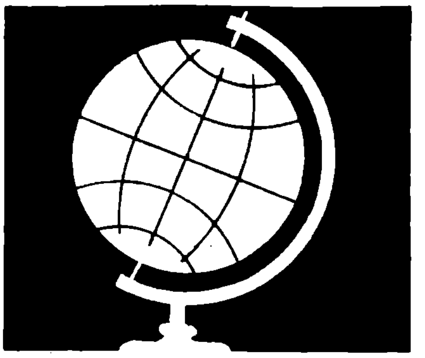


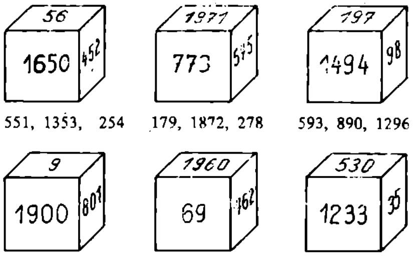
Bild 4
Eine Schule bei Motala, einer kleinen Ortschaft in der Provinz Sambesi. Besonders auf dem Lande entstanden seit der Gründung der VR Moçambique hunderte, wenn auch noch sehr einfache Schulgebäude.



Schneller als mit dem Rechner

Teil 1



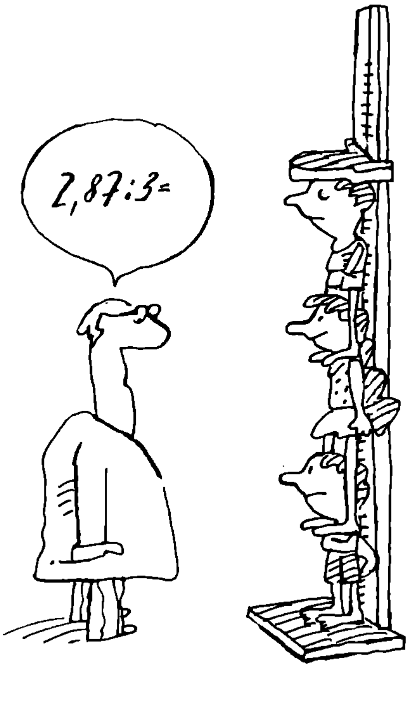


551, 1353, 254 · 179, 1872, 278 · 593, 890, 1296

207, 603, 1405 · 168, 1564, 366 · 1431, 332, 134

Es ist zu hoffen, daß die Überschrift neugierig gemacht hat. Bei folgendem Würfelspiel[1] wirst du, oder besser gesagt, wird dein Mitspieler dieses sicherlich sagen.

Auf den sechs abgebildeten Würfeln siehst du auf den Würfelflächen ein-, zwei-, drei- oder vierstellige natürliche Zahlen notiert. (Die Zahlen der jeweils nicht sichtbaren Flächen sind daruntergeschrieben.) Du könntest dir solche Würfel mit den angegebenen Zahlen herstellen und dann deinen Freund würfeln lassen. Danach stellt ihr die gewürfelten sechs Zahlen schön in Reihe nebeneinander und dein Freund beginnt – so schnell er kann – mit dem Rechner zu addieren. ... Aber du hast schon längst das Ergebnis zu Papier gebracht. Dein Freund stellt erstaunt fest, daß beide Ergebnisse (wenn er richtig eingetippt hat) übereinstimmen. Auswendig kannst du die Summe nicht gelernt haben, denn es gibt mehr als 46 Tausend (genau 6^6) Würfelmöglichkeiten! Wenn du ihm dann noch sagst, daß du diese speziellen Würfel auch mit anderen Zahlen beschriften könntest und daß es auch mehr oder weniger als sechs Würfel sein könnten, wird er neugierig sein und wissen wollen, wie du das machst und wie das so kommt.



Beschäftigst du dich näher mit den Zahlen auf diesen speziellen Würfeln, so wirst du vielleicht bald hinter das *Geheimnis des Rechenkünstlers* kommen. Suche und überlege zuerst selbständig, indem du dir diese Zahlen etwas genauer ansiehst!

Bald wirst du das Geheimnis lüften und finden, daß du nur die sechs Einer dieser sechs Zahlen zu addieren brauchst, das erhaltene aus zwei Ziffern bestehende Ergebnis zu 50 ergänzen und die so gefundene Zahl vor die Einersumme setzen mußt. Zu dieser vierstelligen Zahl addierst du noch die (eventuell vorhandenen) Tausender der sechs Zahlen.

Wären zum Beispiel die Zahlen gewürfelt: 452, 1 971, 98, 1 900, 69, 1 233, so addierst du die Einer und erhälst 23. Die Ergänzung ergibt 27; ferner sind es drei Tausender. Also (statt 2 723) ist 5 723 die Lösung.

Nun gibt es zwei Fragen:

1. *Warum* findet man so die *schnelle Lösung*?
2. *Wie* stellt man sich solche Zahlen auf den Würfeln her?

Im nächsten Heft werden diese Fragen zu beantworten sein. Viel Spaß beim Knobeln!

H.-J. Kerber

[1]) Nach einer Idee von Heath/1927 aus *Magazin* 3/87

Wo steckt der Fehler?

Löse die Gleichung

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{x} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3}!$$

Für die Exponenten gilt: $2x + x = 3$

also $x = 1$.

Die Probe zeigt, daß das Ergebnis richtig ist!

Wie kommt mit einer falschen Rechnung, das richtige Ergebnis zustande?

aus: Lietzmann, Wo steckt der Fehler, BSB B. G. Teubner, 1963

▲1▲ Products

If x and y integers and s represents their sum, d their difference and p their product, show that the product of s, d and p is always a multiple of 6.

Note: The product of three consecutive integers is divisible by 6.

nach: The Australian Mathematic Teacher

▲2▲ La masse de la tour Eiffel est 8 200 t. Calculer le volume de l'acieur utilisé pour la construire. Le poids volumique de l'acier est 7,8 kg/dm³. *H.*

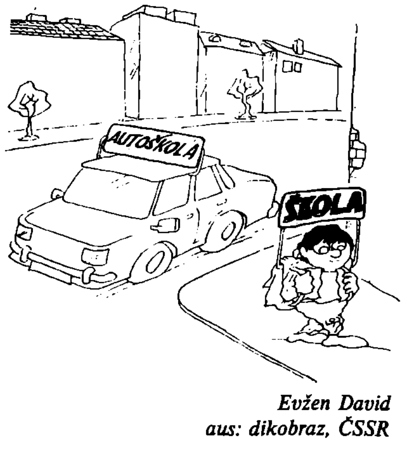
▲3▲ В куче 1001 камень. Она произвольно делится на две кучи, подсчитывается число камней в них и записывается произведение этих двух чисел. Затем с одной из этих куч (в которой больше одного камня) проделывается та же операция: она делится на две и записывается произведение чисел камней в двух вновь образовавшихся кучах. Затем та же операция повторяется с одной из трех получившихся куч и так далее, пока во всех кучах не станет по одному камню. Чему равняется сумма 1000 записанных произведений?

aus: Quant, Moskau

▲4▲

In Randwick, the cats, I declare,
They number one third of a square.
If a quarter did roam,
Just a cube would stay home.
How many, at least, must be there?

aus: Parabola, Australien (Schulolympiade Mathematik 1987)



Evžen David aus: dikobraz, ČSSR

alpha-Porträt:

Mathematikstudent
Jörg Jahnel

Im Jahre 1968 wurde ich in Eisenberg im Bezirk Gera geboren. Von 1975 bis 1983 besuchte ich die *Maxim-Gorki*-Oberschule in der kleinen Stadt Schkölen. Von Klasse 4 an war ich Mitglied einer Arbeitsgemeinschaft Mathematik, in der vorwiegend Aufgaben des *alpha*-Wettbewerbs behandelt wurden. So ergab sich die etwas außergewöhnliche Gelegenheit, schon in Klasse 4 als Frühstarter an der Kreisolympiade Junger Mathematiker teilzunehmen. Der damalige 1. Preis war wohl in erster Linie auf das völlig unbekümmerte Herangehen zurückzuführen, hat aber in jedem Fall ein bis heute erhalten gebliebenes Interesse an der Mathematik hervorgebracht. Von da an nahm ich jährlich, und solange wie möglich als Frühstarter an Kreisolympiaden teil. In Klasse 6 qualifizierte ich mich erstmalig für die Bezirksolympiade, in Klasse 8 für die DDR-Olympiade. Über den 3. Preis unter um zwei Jahre älteren Schülern hatte ich mich sehr gefreut. An diesem Erfolg hatte zweifellos die Förderung durch den Bezirksklub Gera Junger Mathematiker großen Anteil.

Im Jahre 1983 wechselte ich an die Spezialschule *Carl Zeiss* in Jena. Obwohl die Anforderungen stark gestiegen waren, hatten sich meine Leistungen nur unwesentlich verschlechtert. Auch mein Interesse an der Mathematik blieb, trotz der wenigen freien Zeit, erhalten. 1987 legte ich das Abitur mit Prädikat *Auszeichnung* ab.

In die Zeit an der Spezialschule fielen meine größten Erfolge auf dem Gebiet der Mathematikolympiaden. Im Jahre 1985, als Schüler der 10. Klasse, gehörte ich, für mich selbst etwas überraschend, neben vier Schülern der 12. Klasse und einem weiteren Schüler der 10. Klasse zur Mannschaft der DDR bei der Internationalen Mathematikolympiade (IMO) in Finnland. Dort erreichte ich einen 2. Preis.

In den Jahren 1986 und 1987 nahm ich noch zweimal an Internationalen Mathematikolympiaden teil, in der VR Polen und der VR Kuba. Ich erreichte dabei einen ersten und einen zweiten Preis. Selbstverständlich sind IMO-Teilnahmen aus verschiedenen Blickwinkeln betrachtet sehr interessant. Dies betrifft natürlich zuerst die mathematische Seite. Weiterhin ist der olympische Geist der Völkerverständigung zu nennen, der auch bei der IMO ausgeprägt ist. Gespräche mit Teilnehmern aus anderen Ländern verlaufen im allgemeinen in einer freundlichen Atmosphäre. Man würde sich jedoch bessere Fremdsprachenkenntnisse wünschen. Ein dritter Aspekt betrifft die Reiseziele. Der Leser wird schon vermutet haben, daß von den drei von mir besuchten Ländern Kuba mit einigem Abstand das attraktivste war.

Auf Initiative des Bezirksklubs Junger Mathematiker wurde ich seit Klasse 8 durch die *Friedrich-Schiller*-Universität Jena und seit Klasse 9 speziell durch Prof. Kerstan individuell gefördert. So hatte ich die gewiß nicht alltägliche Gelegenheit, mir während meiner Schulzeit Teile des Stoffes für das Mathematikstudium anzueignen und Prüfungen abzulegen. Das wohl bisher wichtigste Ergebnis dieser Förderung ist meine Diplomarbeit, die inhaltlich am Ende der 11. Klasse fertiggestellt war und die ich am 1. 9. 1987, dem Tag meiner offiziellen Immatrikulation, einreichte. Nunmehr studiere ich an der *Friedrich-Schiller*-Universität Jena nach einem individuellen Studienplan.

Aufgaben

▲1▲ Im Würfel mit der Kantenlänge 1 seien 57 Punkte gelegen. Man zeige, daß man stets 8 von ihnen derart auswählen kann, daß jeder (möglicherweise entartete) geschlossene Polygonzug mit diesen Punkten als Eckpunkten eine Gesamtlänge von höchstens $4 \cdot \sqrt{3}$ hat.

▲2▲ n sei eine natürliche Zahl, die nicht durch 4 teilbar ist.
$a_1, \ldots, a_n$ seien ganze Zahlen derart, daß $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = n$ gilt.
Man beweise $a_1 + \ldots + a_n \neq 0$.

▲3▲ Man entscheide, ob $2^{683} - 1$ eine Primzahl ist.

▲4▲ Man finde die kleinste positive ganze Zahl a, für die $a^3 - 130a^2 - 91a$ durch 1987 teilbar ist.

▲5▲ Gibt es ganze Zahlen m, n, so daß $5m^2 - 6mn + 7n^2 = 1985$ gilt?

▲6▲ Im Würfel mit Kantenlänge 1 seien 1988 Punkte gelegen. Man zeige, daß man stets 32 von ihnen derart auswählen kann, daß jeder (möglicherweise entartete) geschlossene Polygonzug mit diesen Punkten als Eckpunkte eine Gesamtlänge von höchstens $8 \cdot \sqrt{3}$ hat.

J. Jahnel

Ohne Wasser, merkt euch das, wär' diese Welt ein leeres Faß

Wasser ist für Menschen, Tiere und Pflanzen lebenswichtig.

Der Wasserbedarf steigt ständig, und zwar durch die Zunahme der Bevölkerung, durch das Anwachsen des Lebensstandards (Badezimmer, Haushaltmaschinen) sowie durch eine umfangreichere gärtnerische und landwirtschaftliche Bewässerung und das Zunehmen der Industrialisierung. Mit Wasser sollte deshalb jedermann sparsam umgehen.

Aufgaben

▲1▲ Genau am 1. 1. 1988, um 0.00 Uhr fing dieser verflixte Wasserhahn an zu tropfen. Alle 24 s fiel einer – ich meine ein Tropfen (0,198 8 ml)!

a) Wieviel Liter Wasser sind das in einer Stunde?

b) Wieviel Liter Wasser sind das an einem Tag?

c) Wieviel Kubikmeter Wasser sind das im gesamten Jahre 1988?

d) Nehmen wir einmal an, in einer Kreisstadt gibt es 500 solcher *Tropfhähne*. Wieviel Kubikmeter Wasser gehen dann im Verlaufe eines Jahres der sinnvollen Nutzung verloren?

▲2▲ Herr Müller sprengt trotz Verbotes in der trockenen Sommerperiode seinen Rasen vor dem Haus aus dem öffentlichen Trinkwassernetz. Das benutzte Gerät versprüht pro Minute 5 l Wasser.

In den höher gelegenen Ortsteilen ist nicht zuletzt aus solchen Gründen der Wasserdruck so gering, daß die Einwohner in den Tagesstunden kein Wasser entnehmen können. Wie oft muß Klaus mit zwei Eimern laufen (je 8 l Fassungsvermögen), wenn er die von Herrn Müller vergeudete Wassermenge aus dem Tankwagen heranschaffen sollte? Wir nehmen dabei an, daß das Sprühgerät 1 Std. in Betrieb ist.

▲3▲ Familie Weber sammelt das Regenwasser in einer Tonne von 200 l Fassungsvermögen und benutzt es während der Trockenheit zum Gießen im Garten. Im Faß sind noch 40 l. Bei einem Regenschauer werden innerhalb von 1,5 Std. 12 l pro Quadratmeter Niederschlag gemessen. Das Laubendach hat eine Fläche von 12,5 m². 80 % der Wassermenge gelangen in das Faß.

a) Wieviel Liter Regenwasser enthält das Faß nach diesem Schauer?

b) Wieviel Kannen Wasser (zu 8 l) kann Familie Weber nutzen, wenn eine Reserve von 50 l verbleiben soll?

c) Um wieviel Millimeter steigt in dieser Zeit der Wasserspiegel des Schwimmbekkens im Garten der Familie Weber, das noch nicht vollständig gefüllt war?

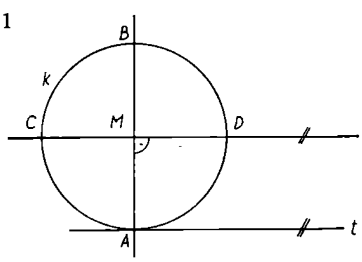
J. Kreusch

Näherungsweise Konstruktionen für den halben Kreisumfang

Auch im Zeitalter der Rechenmaschinen mit graphischen Bildschirmen und Zeichenautomaten ist das Skizzieren und Zeichnen von Hand, das Konstruieren mit Zirkel und Lineal und weiteren Zeichenhilfsmitteln unentbehrlich. Wird man doch teure Gerätetechnik erst dann einsetzen wollen, wenn die „Idee" einen umsetzungsfähigen Reifegrad erreicht hat, und für einen Einzelfall sollte man nicht erst große Programmierbemühungen investieren. Daher kann es wertvoll sein, für die Ermittlung des Umfangs eines Kreises Konstruktionen zu kennen. Sie sind auch anderweitig interessant, denn sie gehören in jenes anspruchsvolle mathematische Gebiet, das die Güte von Rechnungen untersucht, die statt mit reellen Zahlen (auf die sich die Theorie bezieht) mit den Zahlen, die ein Rechenhilfsmittel (Zeichnung, Logarithmen, Rechenstab, ..., Computer) realisiert, ausgeführt werden.

Da die Konstruktion des (halben oder ganzen) Umfangs eines Kreises nur Teilaufgabe innerhalb einer umfangreicheren Konstruktion sein wird, kann folgende Ausgangssituation als typisch angenommen werden (Bild 1): Von dem Kreis k liegen außer Mittelpunkt M und Radius r (als Strecke, etwa $r = \overline{CM}$) auch noch ein Paar zueinander senkrechter Durchmesser g_{AB} und g_{CD} sowie etwa in A die Tangente t an k vor. Die durch die Konstruktion dieser Stücke bedingten Einflüsse auf die nachfolgenden Konstruktionsschritte sollen ignoriert werden.

Bild 1



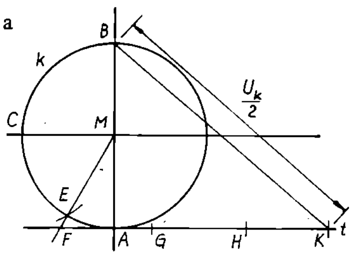
Im Jahre 1685 wurde von *Adam Amandus Kochansky* (siehe nebenstehende biographische Skizze) folgende konstruktive Ermittlung des halben Kreisumfangs veröffentlicht (Bild 2a):

– An die Halbgerade, die in M beginnt und durch A geht, wird ein Winkel der Größe 30° angetragen (2 Möglichkeiten!), etwa so: Der Kreis um C durch M trifft k im Punkt E; es ist $\sphericalangle EMA = 30°$.

– Die Verbindung von M mit E trifft t im Punkt F.

– Auf der Halbgeraden, die in F beginnt und durch A geht, wird dreimal eine Strecke der Länge r abgetragen; das liefert der Reihe nach die Punkte G, H und K.

Bild 2a



E: $\overline{CE} = \overline{CM} = r$,
F: g_{ME} mit t schneiden,
G: $\overline{FG} = \overline{CM} = r$,
H: $\overline{GH} = \overline{CM} = r$,
K: $\overline{HK} = \overline{CM} = r$.

(Die kurzgefaßte Konstruktionsbeschreibung zu Bild 2a ist nun verständlich, wenn man den Doppelpunkt als Abkürzung für „ist festgelegt durch" nimmt.)

Behauptung: Die Strecke BK hat näherungsweise die Länge des halben Umfangs $u/2$ von k.

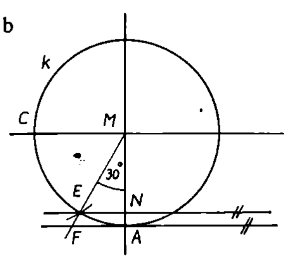
Nun wird ja der Zusammenhang zwischen halbem Umfang $u/2$ und Radius r des Kreises k durch $u/2 = \pi \cdot r$ beschrieben. Die Behauptung kann daher auch in der Form

$u/2 = \pi \cdot r \approx u_K/2 = \pi_K \cdot r$

notiert werden, worin $u_K/2$ die nach *Kochansky* konstruierte Näherung des halben Kreisumfangs von k und π_K die aus dieser Konstruktion sich ergebende Näherung von π bezeichnet.

In der Tat werden wir die Güte der angegebenen geometrischen Konstruktion nur durch Rechnung bestimmen können!

Bild 2b



Zur Vorbereitung betrachten wir Bild 2b: Die Parallele zu t durch E trifft g_{AM} im Punkt N. Es ist $\overline{EN} = r/2$; daher folgt in dem rechtwinkligen Dreieck MEN mit dem rechten Winkel bei N, daß

$\overline{MN} = \sqrt{r^2 - (r/2)^2} = r \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$

(Länge der Höhe im gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge r).

Die Dreiecke MEN und MFA sind ähnlich, woraus folgt:

$\overline{FA} : \overline{EN} = \overline{MA} : \overline{MN}$, also

$\overline{FA} = \overline{EN} \cdot \overline{MA} / \overline{MN} = \frac{r}{2} \cdot r/r \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = r/\sqrt{3}$.

Das liefert (Bild 2a) zunächst

$\overline{AK} = 3r - r/\sqrt{3} = r\left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

und damit endlich

$$u_K/2 = \overline{BK} = \sqrt{\overline{AK}^2 + \overline{AB}^2} = r \cdot \sqrt{\left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2^2} = r \cdot \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}$$

sowie

$$\pi_K = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} = 3{,}141\,533\,339\ldots$$

Der Vergleich von π_K mit π liefert den absoluten Fehler

$|\pi - \pi_K| = 0{,}000\,059\,31\ldots \approx 6 \cdot 10^{-5}$

für die Approximation von π durch π_K. Die Abweichung der konstruierten Länge von der wahren Länge des halben Kreisumfangs, der sogenannte Rektifikationsfehler F, ergibt sich zu

$F = |u/2 - u_K/2| = r \cdot |\pi - \pi_K|$
$= r \cdot 0{,}000\,059\ldots \approx r \cdot 6 \cdot 10^{-5}$.

Den zeichnerischen Einsatz der *Kochansky*schen Konstruktion findet man etwa wie folgt gewertet:

„Da das unbewaffnete Auge erfahrungsgemäß zwei Punkte, die um weniger als 1/20 [mm] voneinander entfernt sind, nicht mehr zu trennen vermag, bleibt der Rektifikationsfehler F des halben Kreisumfanges $u/2 = r \cdot \pi$ so lange unter dieser Schranke der Zeichengenauigkeit, als

$F \approx 6 \cdot 10^{-5} \cdot r\,[\text{mm}] < \frac{1}{20}\,[\text{mm}]$

ist. Das ist der Fall, wenn

$r < \frac{10^5}{6 \cdot 20}\,[\text{mm}] = \frac{5}{6} \cdot 10^3\,[\text{mm}] < 83{,}4\,[\text{cm}]$

ist, d. h. aber für fast alle auf dem Zeichenblatt auftretenden Kreise."

Diese Abschätzung geht nun freilich davon aus, daß die Näherungskonstruktion exakt ausführbar sei. Tatsächlich aber ist die Konstruktion aus mehreren Schritten, deren jeder fehlerbehaftet ist, zusammengesetzt. Da der erfahrene Zeichner um die visuell und manuell (beim Gebrauch der Zeichengeräte) bedingten Ungenauigkeiten des konkreten Konstruierens weiß, verwendet er auch gerne Näherungskonstruktionen, die zwar theoretisch weniger genau, dafür aber aus nur wenigen Schritten bestehen und in diesem Sinne „schnell" sind. Eine solche Konstruktion wird unten zum Vergleich angeführt.

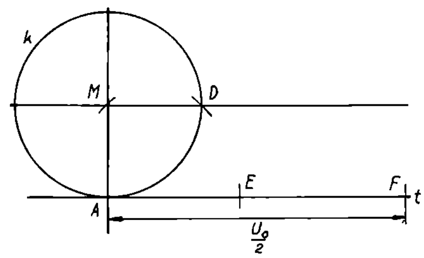
Die *Kochansky*sche Konstruktion kommt mit einer Zirkelöffnung aus (: Vorzug!), benötigt jedoch sechs Schritte, das Abgreifen von $u_K/2 = \overline{BK}$ einbegriffen (Bild 2a). Ungenauigkeiten (Fehler) entstehen bei folgenden Operationen:

1., 2.: In C einstechen, bis M spannen (falls r noch im Zirkel ist, entfällt 2.),
3., 4.: M und E verbinden,
5., 6., 7.: in F, in G, in H einstechen,
8., 9.: in K einstechen, bis B spannen.

Wenn der einzelne Fehler wieder mit maximal 1/20 [mm] angenommen wird, dann ist das praktisch erhaltene Ergebnis möglicherweise um $8 \cdot 0{,}05$ [mm] $= 0{,}4$ [mm] gegenüber dem theoretisch begründeten verfälscht!

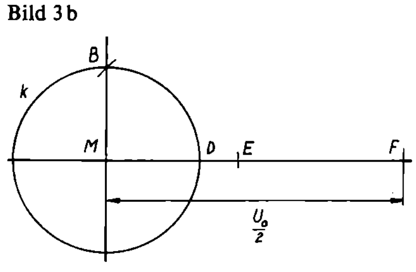
Praktisch unaufwendiger, aber theoretisch weniger genau ist die folgende Näherungskonstruktion, die 1895 von *Philbert Maurice d'Ocagne* mitgeteilt wurde (s. nebenstehende biographische Skizze). Sie ist aus nur zwei Schritten zusammengesetzt, benötigt allerdings zwei verschiedene Zirkelöffnungen. Dafür kann sie meist so eingerichtet werden, daß die Strecke, deren Länge den halben Kreisumfang annähert, gleich dort zu liegen kommt, wo sie benötigt wird, etwa auf g_{CD} (von M oder von D aus nach rechts angetragen) oder auf t (von A aus angetragen): Bilder 3a und 3b (die kurzen Konstruktionsbeschreibungen nach dem Muster aus Bild 2a). (Die benötigten Kreisbögen wird man nur zu einem kleinen Teil ausführen, um die Zeichnung nicht mit unnötigen Linien zu belasten.)

Bild 3a



E: $\overline{AE} = \overline{AD}$,
F: $\overline{EF} = \overline{EM}$.

Bild 3b



E: $\overline{ME} = \overline{DB}$,
F: $\overline{EF} = \overline{EB}$.

Es ist eine neue Näherung für den halben Kreisumfang
$u_0/2 = \overline{AF}$ in Bild 3a,
$u_0/2 = \overline{MF}$ in Bild 3b,
$u_0/2 = r \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) = r \cdot \pi_0$,
worin
$\pi_0 = \sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}146\,264\ldots$
eine neue Näherung für π angibt mit dem absoluten Fehler
$|\pi - \pi_0| = 0{,}004\,671\ldots \approx 5 \cdot 10^{-3}$,
d. h. die Näherung π_0 von π ist um den Faktor 100 schlechter als die Näherung π_K von π.

Fehler können bei folgenden Operationen entstehen:
Bei der Konstruktion Bild 3a:
1.: in A einstechen,
2.: bis D spannen,
3.: in E einstechen,
4.: bis M spannen.
Bei der Konstruktion Bild 3b:
1.: in D einstechen,
2.: bis B spannen,
3.: in M einstechen,
4.: in E einstechen,
5.: bis B spannen.
Das gibt $4 \cdot 0{,}05$ [mm] $= 0{,}2$ [mm]
oder $5 \cdot 0{,}05$ [mm] $= 0{,}25$ [mm]
als möglichen Gesamtfehler der Konstruktionsausführung.

Die visuell-manuell bedingten Fehler in der praktischen Ausführung einer Konstruktion machen es illusorisch, einen numerisch sehr kleinen Fehler einhalten zu können, wenn relativ viele Teilkonstruktionen auszuführen sind. Anders ausgedrückt: Theoretisch sehr gute Näherungskonstruktionen können bei ihrem praktischen Einsatz weniger guten unterlegen sein! Das ist übrigens das Schicksal vieler exakter Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, deren Fehler der Theorie nach ja gleich Null ist. Vor diesem Hintergrund beurteile man eine beliebige Lösung der folgenden Aufgabe:

Man ersinne eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal für den halben Kreisumfang, die
$\pi_N = \sqrt{14} - 0{,}6 = 3{,}141\,657\ldots$
als Näherung für π verwendet!
(Es ist $|\pi - \pi_N| = 0{,}000\,064\,73\ldots$,
also π_N kaum schlechter als π_K.)

G. Geise

Adam Adamandus Kochański

polnischer Jesuit und Mathematiker, geb. 5. 8. 1631 in Dobrzyń an der Wisła (nahe Warschau), studierte Theologie an deutschen und italienischen Universitäten, hielt sich längere Zeit in Prag auf. 1680 bis 1685 Mathematiker in Warschau, 1686 bis 1690 Hofkaplan des polnischen Königs Jan III. Sobieski, von diesem 1691 zum *Königlichen Mathematiker* ernannt. Kochański beschäftigte sich hauptsächlich mit geometrischen Konstruktionen, besonders mit der näherungsweisen Rektifikation des Kreises und der Berechnung von regelmäßigen Vielecken sowie mit magischen Quadraten. Er starb am 19. 5. 1700 in Teplice (heute ČSSR).

Philbert Maurice d'Ocagne

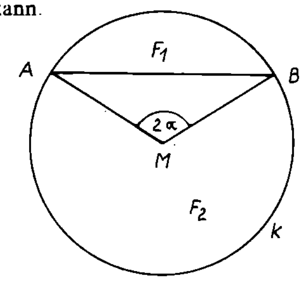
Ingenieur und Mathematiker, geb. 25. 3. 1862 in Paris, 1893 Prof., 1922 Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften, Arbeitsgebiete: Darstellende, projektive und Differentialgeometrie, insbesondere vom Standpunkt der angewandten Mathematik, zählt vor allem zu den Begründern der graphischen Statik und der Nomographie, insgesamt über 200 wissenschaftliche Arbeiten. Er starb am 23. 10. 1938 in Paris.

P. Schreiber

Eine Aufgabe von Prof. Dr. G. Geise

Die Aufgabe kann nur näherungsweise (= approximativ) gelöst werden. Es gibt Verfahren, die durch fortgesetztes Wiederholen einer Rechenvorschrift immer bessere Näherungen für die Lösung ermitteln (Iterationsverfahren). Sie benötigen allerdings einen ersten Wert, mit dem das Verfahren gestartet werden kann. In vielen Fällen verhilft eine graphische Lösung der Aufgabe zu solch einem Startwert. Hier geht es um solch eine durch Konstruktion zu gewinnende Näherungslösung, bei der eine näherungsweise Ermittlung des halben Kreisumfangs dienlich sein wird.

Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r. Zwei Punkte A und B von k legen einen Mittelpunkts- oder Zentriwinkel der Größe $\measuredangle AMB = 2\alpha$ fest ($0° \leqq 2\alpha \leqq 180°$). Es ist 2α so zu bestimmen, daß die Sehne AB die Kreisfläche in zwei Teile zerlegt, deren Flächeninhalte $F1$ und $F2$ ein vorgegebenes Verhältnis haben: $F1 : F2 = m : n$. Der Fall $m : n = 1 : 1$ ist natürlich nicht interessant, so daß man sich etwa auf die Aufgabe $F1 : F2 = 1 : 2$ festlegen kann.



Geg.: Positive (reelle) Zahlen m, n.
Ges.: 2α, so daß $F1 : F2 = m : n$

Kurzbiographie

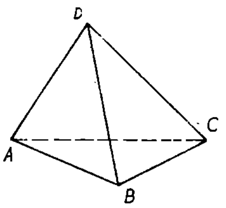
Gerhard Geise, 1930 in Stendal geboren, Ausbildung als Kraftfahrzeughandwerker, Mathematikstudium 1951 bis 1956 an der *Martin-Luther*-Universität Halle, 1961 Promotion, 1967 Habilitation, Berufung zum Hochschuldozenten, 1972 zum Ordentlichen Professor für Reine Mathematik (Geometrie) an der TU Dresden, Sektion Mathematik. Forschungstätigkeit seit 1968 bevorzugt auf verschiedenen Gebieten der geometrischen Verfahren zum Entwurf von Kurven und Flächen (CAD), seit 1962 vielfältig bei der Förderung mathematisch interessierter und talentierter Schüler wirksam; Vorsitzender der Bezirkssektion Dresden der MGdDDR; rund achtzig Veröffentlichungen, ein Buch, an mehreren Patenten beteiligt.

Pythagoreische Tetraeder

1. *Verwandtschaft* zwischen ebenen Figuren und Körpern

Ein Dreieck ist uns als ebene geometrische Figur recht gut bekannt: Wir kennen Begriffe wie Seite und Winkel, Eigenschaften wie *gleichschenklig* oder *rechtwinklig* und einige Lehrsätze. Weit weniger vertraut ist uns dagegen das Tetraeder (zu deutsch: *Vierflächner*), eine dreiseitige Pyramide (Bild 1), obwohl das Tetraeder für die Raumgeometrie etwa die Bedeutung hat, wie sie dem Dreieck in der ebenen Geometrie zukommt.

Bild 1



Deshalb sollen hier einige Betrachtungen zur Raumgeometrie der Tetraeder dargelegt werden, insbesondere ein Satz, der sehr viel *Ähnlichkeit* mit dem bekannten Satz des Pythagoras hat und der deshalb auch Satz des Pythagoras für Tetraeder, Satz des Pythagoras im Raum oder kurz *räumlicher Pythagoras* genannt wird. Dreieck und Tetraeder sind in einem gewissen Sinne *verwandte* oder *analoge* Figuren (das Wort *ähnlich* darf man in der Geometrie für diesen Sachverhalt nicht verwenden, weil seine Bedeutung in der Ähnlichkeitslehre genau fixiert ist und auch dafür reserviert bleiben soll), so wie Kreis und Kugel oder Quadrat und Würfel. Worin diese *Verwandtschaft* genau besteht, soll hier nicht exakt auseinander gesetzt werden, weil uns dazu die Hilfsmittel aus der analytischen Geometrie fehlen. Dagegen können wir mit dem Dimensionsbegriff immerhin sagen, worin sich Quadrat, Kreis und Dreieck einerseits, von Würfel, Kugel und Tetraeder andererseits unterscheiden: Erstere lassen sich in eine Ebene (Dimension $n = 2$) legen, i. allg. nicht aber in eine Gerade (Dimension $n = 1$), für letztere ist ein Raum (Dimension $n = 3$) erforderlich, eine Ebene reicht i. a. zur Einbettung nicht aus.

Um über pythagoreische Tetraeder zu diskutieren, werden einige Begriffe, der Raumgeometrie benötigt. Zu ihrer Einführung wollen wir grundsätzlich von der bekannten ebenen Geometrie ausgehen, jedoch die Formulierungen unter Umständen so wählen, daß eine Übertragung auf die Raumgeometrie naheliegend ist. Als bekannt wird insbesondere vorausgesetzt:

(I) Eine *Gerade* in einer *Ebene* ist durch zwei verschiedene Punkte eindeutig definiert. Sie teilt die *Ebene* in zwei *Halbebenen.*

(I′) Eine *Ebene* in einem *Raum* ist durch *drei* verschiedene Punkte eindeutig definiert. Sie teilt den *Raum* in zwei *Halbräume.*

Uns fällt auf, daß beide Sätze bis auf die Kursiv geschriebenen Wörter identisch sind. Diese Wörter wollen wir als geordnete Begriffspaare zusammenstellen: Gerade – Ebene, Ebene – Raum, zwei – drei. So erhalten wir ein kleines Wörterbuch.

Ersetzt man gleichzeitig das erste Wort eines jeden Begriffspaares in I durch das zweite, so geht I in I′ über. Ersetzt man jetzt das zweite Wort wieder durch das erste, so wird aus I′ wieder I. Wenn es uns gelingt, eine ebene Figur und einen Körper durch eine einheitliche Definition im eben beschriebenen Sinne einheitlich zu charakterisieren, so sollen sie *verwandt* oder *analog* genannt werden.

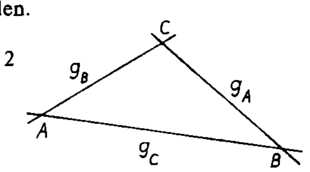
So ist also die Ebene das räumliche Gegenstück zur Geraden einerseits und andererseits das zweidimensionale Analogon zum Raum.

Nach diesem Vorbild wollen wir nun versuchen, Dreieck und Tetraeder einheitlich zu definieren, so daß nur analoge Begriffe ausgetauscht werden müssen.

(II) Definition des Dreiecks

Gegeben seien in einer *Ebene drei* verschiedene Punkte *A, B, C.* Je *zwei* Punkte bestimmen eine *Gerade.* g_A sei die *Gerade*, die durch B und C definiert ist, g_B ist bestimmt durch A und C und g_C durch A und B. Das Gebiet der *Ebene*, das durch die *drei Geraden* g_A, g_B und g_C begrenzt wird, nennen wir *Dreieck ABC.* Die *drei Strecken* $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ sind die Seiten des *Dreiecks ABC*, deren *Längen* mit *a, b* und *c* bezeichnet werden.

Bild 2



(Bemerkung: In der Schule wird das Dreieck als Streckenzug definiert, das sind nur die Randpunkte des Dreiecks nach dieser Definition. Die Streckenzugdefinition ist für unsere Zwecke jedoch nicht geeignet.)

(II′) Definition des Tetraeders

Gegeben seien im *Raum vier* verschiedene Punkte *A, B, C, D.* Je *drei* Punkte bestimmen eine Ebene. E_A sei die *Ebene*, die durch *B, C* und *D* definiert ist, E_B durch *A, C, D*, E_C durch *A, B, D* und E_D durch *A, B, C.* Das Gebiet des *Raumes*, das durch die *vier Ebenen* E_A, E_B, E_C und E_D begrenzt wird, nennen wir *Tetraeder ABCD.* Die vier Dreiecke $\triangle BCD$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$, $\triangle ABC$ sind die Seiten des *Tetraeders ABCD*, deren *Flächeninhalte* mit F_A, F_B, F_C und F_D bezeichnet werden.

Berücksichtigt man zu den bereits aufgeführten die neuen Begriffspaare

Dreieck – Tetraeder, Strecke – Dreieck, Länge – Flächeninhalt, drei – vier, so sind auch II und II′ identische Definitionen. Dreieck und Tetraeder sind damit verwandte geometrische Objekte. Aus diesem Grunde vermuten wir, vom Dreieck her bekannte geometrische Beziehungen am Tetraeder wiederzufinden.

Wir wollen am Satz des Pythagoras zeigen, daß diese Vermutung einerseits berechtigt ist, andererseits aber auch darauf hinweisen, daß es keinen *Automatismus* gibt, mit dessen Hilfe man Sätze der ebenen Geometrie in Sätze der räumlichen *übersetzen* kann. Man kann mit Hilfe der analogen Begriffe von gewissen Dreieckssätzen nur zu Hypothesen über Tetraedersätze gelangen, die dann ihrerseits bewiesen oder verworfen werden müssen. Beides führt jedoch i. a. zu einem tieferen geometrischen Verständnis.

2. Hilfsformeln

Sind die Koordinaten zweier Punkte

$A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$

in einem ebenen kartesischen Koordinatensystem gegeben, so ist die Länge der Strecke $\overline{AB}$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}. \qquad (1)$$

Liegen zwei Punkte

$P = (x_P, y_P, z_P)$, $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$

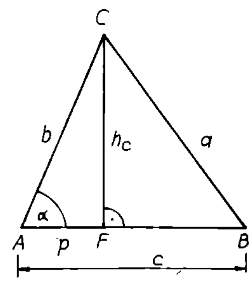
im Raum und sind ihre räumlichen kartesischen Koordinaten gegeben, so ist die Länge der Strecke

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}. \qquad (2)$$

Für den Flächeninhalt eines Dreiecks *ABC* benutzen wir $F = \frac{1}{2} c \cdot h_c$, aber die Höhe h_c wollen wir eliminieren und durch die Seiten ausdrücken:

$h_c^2 = b^2 - p^2 = (b + p)(b - p)$

Bild 3

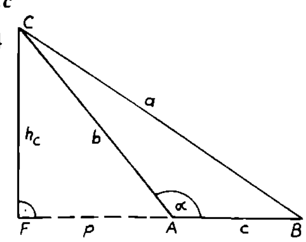


1. Fall: α spitz (siehe Bild 3)

$a^2 = h_c^2 + (c - p)^2 = b^2 + c^2 - 2cp,$

$p = \frac{1}{2c}(b^2 + c^2 - a^2)$

Bild 4



2. Fall: α stumpf (siehe Bild 4)

$a^2 = h_c^2 + (c + p)^2 = b^2 + c^2 + 2cp,$

$p = \frac{-1}{2c}(b^2 + c^2 - a^2).$

Es gilt für beide Fälle einheitlich

$$h_c^2 = \frac{1}{4c^2}(2bc + b^2 + c^2 - a^2)$$
$$\times (2bc - b^2 - c^2 + a^2)$$
$$= \frac{1}{4c^2}(a + b + c)(b + c - a)$$
$$\times (a + c - b)(a + b - c)$$

oder

$$16F^2 = (a + b + c)(b + c - a)$$
$$\times (a + c - b)(a + b - c) \quad (3)$$

oder ausmultipliziert

$$16F^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2$$
$$+ 2b^2c^2. \quad (4)$$

Führt man in (3) den halben Umfang $s = \frac{(a + b + c)}{2}$ ein, so erhält man die bekannte Heronische Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks, benannt nach dem griechischen Ingenieur und Mathematiker *Heron*, der im 1. Jh. u. Z. in Alexandria lebte:

$$F = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}. \quad (5)$$

Hat man die Koordinaten der Eckpunkte $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$, so kommt man über (1) und (4) zu

$$F = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1)$$
$$+ x_3(y_1 - y_2)]. \quad (6)$$

3. Pythagoreische Dreiecke und Tetraeder

Der Satz des Pythagoras für das Dreieck besteht aus zwei Aussagen:

(1) Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Länge der größten Seite (Hypotenuse, sie liegt dem rechten Winkel gegenüber) gleich der Summe der Quadrate der Längen der anderen Seiten (Katheten).

Ist $\sphericalangle ACB = 90°$, so folgt

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (7)$$

(2) Umkehrung: Ist das Quadrat der Länge der größten Seite eines Dreiecks gleich der Summe der Quadrate der Längen der anderen Seiten, so ist das Dreieck rechtwinklig und der rechte Winkel liegt der größten Seite gegenüber.

Ist $c^2 = a^2 + b^2$, so folgt

$$\sphericalangle ACB = 90°. \quad (8)$$

Für ein beliebiges Dreieck ABC mit c als größte Seite ist die Beziehung

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{(III)}$$

richtig oder falsch. Wir wollen diese Beziehung (III) pythagoreische Relation für das Dreieck ABC nennen und falls sie richtig ist, das Dreieck selbst dann pythagoreisch. Man überlegt sich sofort: Hat ein Dreieck keine größte Seite, so kann es nicht pythagoreisch sein. Der Begriff *pythagoreisches Dreieck* ist überflüssig und auch ungebräuchlich, denn die pythagoreischen Dreiecke sind genau die rechtwinkligen. Er wurde hier benutzt, um auf die pythagoreischen Tetraeder hinzuführen. (III) kann in Worten so formuliert werden: Das Quadrat des Inhaltes der größten Seite ist gleich der Summe der Quadrate der Inhalte aller anderen Seiten. Diese Formulierung ist schon unabhängig von der Dimension $n = 2$. Daher ist es nach der in Abschnitt 1 dargelegten Philosophie naheliegend zu formulieren:

Ist $\triangle ABC$ die größte Seite eines Tetraeders $ABCD$, so nennt man die Relation

$$F_D^2 = F_A^2 + F_B^2 + F_C^2 \quad \text{(III')}$$

die pythagoreische Relation für das Tetraeder und wenn diese Relation gültig ist, das Tetraeder selbst dann pythagoreisch. Auch hier ist klar: Hat ein Tetraeder keine größte Seite, so kann es nicht pythagoreisch sein. Dabei ist es für uns noch offen, ob es überhaupt pythagoreische Tetraeder gibt. Kann uns der Sachverhalt der ebenen Geometrie (7) und (8) einen Hinweis geben, welche Tetraeder pythagoreisch sein könnten? In (7) und (8) tritt als hinreichend und notwendige Bedingung $\sphericalangle ACB = 90°$ auf. Damit können wir zunächst nichts anfangen für die Raumgeometrie, denn der Winkelbegriff kommt in unserem *Wörterbuch der analogen Begriffspaare* von Abschnitt 1 nicht vor. Nun könnten wir versuchen, eine räumliche Verallgemeinerung des Dreieckswinkelbegriffes (Winkel zwischen zwei Seiten) am Tetraeder zu definieren. Aber dazu bieten sich gleich drei Möglichkeiten an, was uns unsere Aufgabe sehr erschwert:

– Winkel zwischen zwei Seiten (Ebenen) eines Tetraeders. Er wird Keilwinkel genannt und ist ein ebener Winkel.

– Winkel zwischen Seite und Kante eines Tetraeders. Auch dieser Winkel ist ein ebener Winkel.

– Winkel, der von drei Seiten eines Tetraeders gebildet wird. Er ist ein Raumwinkel.

Diese Winkel haben alle ihre Bedeutung in der Tetraedergeometrie, aber für das Verständnis pythagoreischer Tetraeder kann man sie entbehren. Daher soll auf die Winkelproblematik nicht weiter eingegangen werden.

Wir ersetzen $\sphericalangle ACB = 90°$ in (7) und (8) durch $\overline{AC} \perp \overline{BC}$. (IV)

(IV) übersetzen wir nun in die Raumgeometrie durch

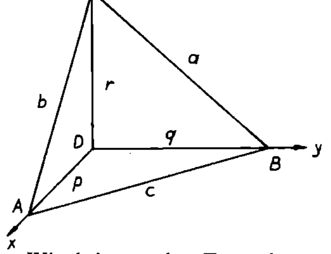
$\triangle ABD \perp \triangle ACD$ und $\triangle ABD \perp \triangle BCD$ und $\triangle ACD \perp \triangle BCD$. (IV')

Wir zeigen: Aus IV' folgt III'.

Satz über die einfachsten pythagoreischen Tetraeder.

Stehen in einem Tetraeder drei Seiten paarweise aufeinander senkrecht, so ist das Tetraeder pythagoreisch.

Bild 5



Beweis: Wir bringen das Tetraeder nach Bild 5 in ein kartesisches Koordinatensystem. Die Koordinaten der Eckpunkte sind dann

$A = (p, o, o)$, $B = (o, q, o)$, $C = (o, o, r)$, $D = (o, o, o)$

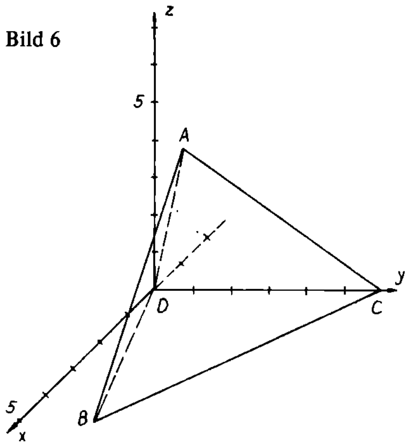
mit $p, q, r > o$. Die Flächeninhalte F_A, F_B und F_C sind unmittelbar aus Bild 5 ablesbar, für F_D bekommt man nach (4)

$$16F_D^2 = -(q^2 + r^2)^2 - (p^2 + r^2)^2$$
$$- (p^2 + q^2)^2 + 2(q^2 + r^2)$$
$$\times (p^2 + r^2) + 2(q^2 + r^2)(p^2 + q^2)$$
$$+ 2(p^2 + r^2)(p^2 + q^2)$$
$$= 4q^2r^2 + 4p^2r^2 + 4p^2q^2$$
$$= 16F_A^2 + 16F_B^2 + 16F_C^2, \text{ q. e. d.}$$

Durch ein Gegenbeispiel zeigen wir, daß IV' aber nicht aus III' folgt:

$A = (-1, 0, 3)$, $B = (5, 2, 0)$, $C = (0, 6, 0)$, $D = (0, 0, 0)$

Bild 6



Nach (2) ist $\overline{AB}^2 = 49$, $\overline{AC}^2 = 46$, $\overline{AD}^2 = 10$, $\overline{BC}^2 = 41$, $\overline{BD}^2 = 29$, $\overline{CD}^2 = 36$.

Nach (4) erhält man $16F_A^2 = 3\,600$, $16F_B^2 = 1\,440$, $16F_C^2 = 1\,060$, $16F_D^2 = 6\,100$. Damit ist das Tetraeder $ABCD$ pythagoreisch, aber nicht einmal ein Seitenpaar steht senkrecht, wie man aus Bild 6 sehen kann oder man baut sich nach Bild 7 ein maßstäbliches Modell.

Bild 7

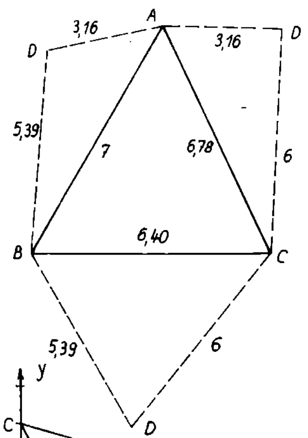
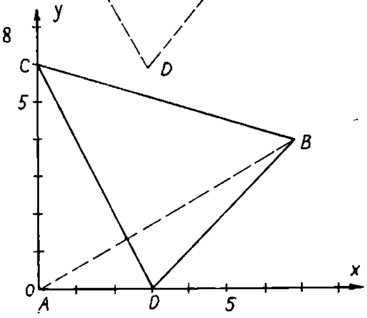


Bild 8



Noch überzeugender ist vielleicht das folgende entartete pythagoreische Tetraeder mit der Höhe Null, das man in eine Ebene legen kann (Bild 8):

$A = (0, 0)$, $B = (7, 4)$, $C = (0, 6)$, $D = (3, 0)$. Nach (6) ist

$F_A = 18$, $F_B = 9$, $F_C = 6$, $F_D = 21$.

$21^2 = 18^2 + 9^2 + 6^2$.

W. Dörband

Ein verzwickter Quader

Vorbemerkung der Redaktion:
Im Heft 3/88 veröffentlichte *alpha* die Aufgaben der Kreisolympiade und verzichtete dabei zunächst auf die heiß umstrittene Aufgabe 270923. Der folgende Beitrag gibt nun Gelegenheit, sich intensiv mit ihr zu beschäftigen.

270923 *Für jeden Quader seien die Kantenlängen mit a, b, c bezeichnet, die Länge der Raumdiagonalen mit d und der Oberflächeninhalt mit A. Beweisen Sie mit diesen Bezeichnungen die folgende Aussage: Es gilt genau dann*

$d = \frac{1}{3}(a+b+c)$, *wenn* $A = 8d^2$ *gilt.*

Viele werden die Aufgabe kennen. Diejenigen, die sich noch nicht damit beschäftigt haben, sollten es ruhig versuchen. Dann kann man die eigenen Überlegungen mit den weiteren Ausführungen vergleichen.
Zum Beweis sucht man nach weiteren Beziehungen zwischen A, d und den Kantenlängen a, b, c und stößt sofort auf
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ und $A = 2ab + 2ac + 2bc$.
Nun sieht man, daß die Gleichung

$$2(ab + bc + ac) = A = 8d^2 = 8(a^2 + b^2 + c^2)$$

genau dann gilt, wenn

$$(a + b + c)^2 = 9(a^2 + b^2 + c^2) = 9d^2$$

ist. Da alle Größen positive Zahlen sind, ist letztere Gleichung genau dann erfüllt, wenn $d = \frac{1}{3}(a + b + c)$ ist. Damit wäre der geforderte Beweis erbracht.
Nun haben aber Schüler richtig bemerkt, daß für einen echten Quader stets

(1) $\quad a + b + c < 3d$

gelten muß, d. h. die Gleichung $d = \frac{1}{3}(a + b + c)$ ist für alle Quader falsch. Was nun? Ist die behauptete Aussage in der Aufgabe nun doch falsch? Dann müßte unser Beweis ebenfalls einen Fehler enthalten. Sehen wir uns den kurzen Beweis noch einmal genau an, so stellen wir seine Korrektheit erneut fest. Wie erklärt sich aber der Widerspruch zu Ungleichung (1)? Dazu müssen wir über *genau dann, wenn* Aussagen tiefer nachdenken. Solche Aussagen setzen sich aus zwei Aussagen H_1 und H_2 zusammen. In der Aufgabe 270923 bedeutet für einen beliebigen Quader H_1 die Aussage $d = \frac{1}{3}(a + b + c)$ und H_2 die Aussage $A = 8d^2$.
Verbindet man zwei Aussagen H_1 und H_2 durch *genau dann, wenn*, also H_1 genau dann, wenn H_2, so versteht man darunter, daß die Aussage H_1 dann und nur dann wahr ist, wenn die Aussage H_2 wahr ist. Das bedeutet aber auch, daß die Aussage H_1 genau dann falsch ist, wenn die Aussage H_2 falsch ist. Wir merken uns: Für den Beweis einer *genau dann, wenn* Aussage ist es nicht erforderlich, die Wahrheit von H_1 oder H_2 nachzuweisen. Es kommt nur darauf an zu zeigen, daß H_1 und H_2 beide denselben Wahrheitswert besitzen. Das erreicht man üblicherweise, indem man zeigt, daß aus H_1 die Aussage H_2 folgt und umgekehrt, daß H_1 aus H_2 folgt. Bei Gleichungen, wie im vorliegenden Fall, kann man dies durch äquivalente Umformungen bewerkstelligen.
Kommen wir zur Feststellung (1) zurück. Diese Feststellung allein gibt keine Antwort auf die Frage, ob die Behauptung der Aufgabenstellung richtig oder falsch ist. Kann aber zusätzlich $A \neq 8d^2$ nachgewiesen werden, ist der in der Aufgabenstellung geforderte Beweis erbracht, da dann beide Aussagen falsche Aussagen sind. Und in der Tat ist

(2) $\quad A = 2ab + 2bc + 2ac \leqq a^2 + b^2 + a^2 + c^2 + b^2 + c^2 = 2d^2 < 8d^2,$

da bekanntlich $2xy \leqq x^2 + y^2$ für alle reellen Zahlen x, y gültig ist. Wir halten fest, daß durch die beiden Ungleichungen (1) und (2) ein zweiter vollgültiger Beweis für die Aufgabe 270923 gegeben wird.
Nachdem wir jetzt mathematisch alles wieder in Ordnung gebracht haben, könnte man freilich nach dem Sinn einer solchen Aufgabe fragen, da ja sofort $3d = a + b + c$ als falsche Aussage erkannt wird.
Ist zum Beispiel ein Beweis wie der zuerst geführte sinnlos, weil wir uns über die Gültigkeit der Aussagen H_1 und H_2 überhaupt keine Gedanken gemacht haben? Man muß diese Frage verneinen. Auch dieser so scheinbar *rein akademische* Beweis hat seinen *praktischen* Nutzen. Mit Hilfe der bewiesenen *genau dann, wenn* Aussage kann man nämlich zum Beispiel aus (1) sofort auf $A \neq 8d^2$ schließen, ohne dies direkt ausführen zu müssen. (Freilich ist die direkt bewiesene Ungleichung (2) eine schärfere Aussage).
Nun kann man die Aufgabenstellung für beliebige Quader folgendermaßen verallgemeinern.

▲1▲ *Für welche positiven Zahlen m und n gilt* $a + b + c = nd$ *genau dann, wenn* $A = md^2$ *ist?*

Zusätzlich kann man die folgenden Fragen stellen.

▲2▲ *Für welche positiven n ist die Gleichung* $a + b + c = nd$ *für wenigstens einen Quader wahr?*

▲3▲ *Für welche positiven m ist die Gleichung* $A = md^2$ *für wenigstens einen Quader wahr?*

Wie wir bereits wissen ist $n = 3$ zu groß. Wegen

(3) $\quad d < a + b + c$

ist $n = 1$ zu klein. Was ist mit $n = 2$? Im Fall des Würfels ist $n = \sqrt{3}$. Gibt es Quader mit noch größerem n? Bei $A\,3$ wissen wir aus (2) bereits, daß $m = 2$ die größtmögliche Zahl ist.
Ihr solltet jetzt erst einmal selbst versuchen, diese Aufgaben zu lösen. Es ist wirklich nicht schwer. Wenn Ihr eine Lösung gefunden habt, könnt Ihr weiterlesen und Eure mit unseren Beweisen vergleichen.
Zur Behandlung der Aufgabe $A\,1$ gehen wir von der Gleichung

$$2ab + 2bc + 2ac = A = md^2 = m(a^2 + b^2 + c^2)$$

aus und addieren auf beiden Seiten d^2. Das ergibt

$$(a + b + c)^2 = 2ab + 2bc + 2ac + a^2 + b^2 + c^2 = (m + 1)(a^2 + b^2 + c^2) = (m + 1)d^2$$

Diese Gleichung ist äquivalent zur Gleichung $a + b + c = \sqrt{m + 1}\, d$.
Insgesamt stellen wir also fest, daß für $n = \sqrt{m + 1}$ und nur dafür die beiden Gleichungen $a + b + c = nd$ und $A = md^2$ äquivalent sind. Wählt man $m = 8$, dann ist $n = 3$, wie in der Olympiadeaufgabe.
Die Aufgabe $A\,1$ mit dem Ergebnis $n = \sqrt{m + 1}$ können wir bei der Behandlung der Aufgaben $A\,2$ und $A\,3$ nutzen. Aus der Ungleichung (2) wissen wir, daß in $A\,3$ nur $m \leqq 2$ in Frage kommt. Das hat aber unmittelbar $n = \sqrt{m + 1} \leqq \sqrt{3}$ in $A\,2$ zur Folge. Wie wir schon aus (3) wissen, muß auch $n > 1$ sein. Damit schließen wir auf $m = n^2 - 1 > 0$.
Es bleibt als letztes zu klären, ob es nun für jedes n aus dem Intervall $1 < n \leqq \sqrt{3}$ wenigstens einen Quader mit $a + b + c = nd$ gibt. Für $n = \sqrt{3}$ ist es der Würfel. Sei also im folgenden n eine beliebige aber feste reelle Zahl aus dem Intervall $1 < n < \sqrt{3}$.
Die Frage ist, ob es einen Quader mit den Kantenlängen a, b, c gibt, so daß

(4) $\quad a + b + c = nd = n\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

gilt. Wir wählen $a = b$ und $c = a + x$. Gelingt es uns zu zeigen, daß es zu vorgegebenen n mit $1 < n < \sqrt{3}$ stets ein positives x mit

(5) $\quad 3a + x = n\sqrt{3a^2 + 2ax + x^2}$

gibt, so ist das Problem gelöst. Dann erfüllt nämlich ein Quader mit den Kantenlängen a, $b = a$, $c = a + x$ die gewünschte Gleichung (4). Wir haben also eine positive Lösung der Gleichung (5) zu suchen.
Durch quadrieren erhält man

(6) $\quad 9a^2 + 6ax + x^2 = (3a + x)^2 = n^2(3a^2 + 2ax + x^2)$

und nach weiterem Umstellen schließlich die quadratische Gleichung

$$x^2 + 2a\frac{n^2 - 3}{n^2 - 1}x + 3a^2\frac{n^2 - 3}{n^2 - 1} = 0.$$

Wir können

$$p = 2a\frac{n^2 - 3}{n^2 - 1} < 0,$$

$$q = 3a^2\frac{n^2 - 3}{n^2 - 1} < 0$$

für alle n aus dem Intervall $1 < n < \sqrt{3}$ feststellen. Damit ist die Diskriminante $\frac{p^2}{4} - q > 0$ und die quadratische Gleichung hat zwei reelle Lösungen. Wegen $p, q < 0$ ist eine Lösung positiv und zwar

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$
$$= \frac{a}{n^2 - 1}\left(3 - n^2 + n\sqrt{2(3 - n^2)}\right).$$

Für positive x sind die Gleichungen (5) und (6) gleichwertig. Wir haben so eine positive Lösung der Gleichung (5) gefunden. Schreiben wir das Ergebnis noch einmal in aller Deutlichkeit auf. Zu jedem n aus dem Intervall $1 < n < \sqrt{3}$ gibt es einen Quader mit den Kantenlängen a, $b = a$, $c = a + x$ so, daß die Gleichung (4) erfüllt ist. Das Problem aus Aufgabe $A\,2$ ist jetzt vollständig geklärt. Für die Zahlen n aus dem Intervall $1 < n \leqq \sqrt{3}$ und nur für diese Zahlen gibt es Quader, deren Kantenlängen die Gleichung (4) befriedigen.

Dieses Ergebnis führt nun in Zusammenhang mit der Aufgabe $A\,1$, d. h. mit der Gleichung $m = n^2 - 1$, zur Beantwortung der Frage $A\,3$. Für alle m mit

$$0 = 1^2 - 1 < n^2 - 1 = m$$
$$= n^2 - 1 \leqq 3 - 1 = 2$$

und nur für diese gibt es wenigstens einen Quader mit $A = md^2$.

Zum Schluß wollen wir noch darauf hinweisen, daß man ähnliche Überlegungen für nichtnegative Summanden $a_1, a_2, \ldots, a_k$ anstellen kann.

Wir setzen $d = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2}$ und

$$\begin{aligned} A &= 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_1a_k \\ &\quad + 2a_2a_3 + 2a_2a_4 + \ldots + 2a_2a_k \\ &\quad + 2a_3a_4 + 2a_3a_5 + \ldots + 2a_3a_k \\ &\quad + 2a_4a_5 + \ldots + 2a_{k-1}a_k \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{k} a_ia_j. \end{aligned}$$

Folgende Aufgaben lassen sich formulieren:

▲ 4 ▲ *Für welche positiven Zahlen m und n gilt $nd = a_1 + \ldots + a_k$ genau dann, wenn $A = md^2$ ist?*

▲ 5 ▲ *Für welche positiven n gibt es positive $a_1, \ldots, a_k$ so, daß $nd = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ gilt?*

▲ 6 ▲ *Für welche positiven m gibt es positive $a_1, \ldots, a_k$ so, daß $A = md^2$ gilt?*

F. Fiedler

Aufgabe zum Titelblatt

Visuelle Logik

Zwischen den Zeichen und Ziffern in den kleinen quadratischen Feldern besteht ein logischer Zusammenhang. Welche Zeichen müssen in die zwei leeren Felder eingezeichnet werden, wenn der logische Zusammenhang erhalten bleiben soll?

Gewinner des alpha-Sonderwettbewerbs

Aufgaben aus Büchern des Teubner-Verlages, Leipzig
Heft 3/1987, Lösungen:

▲ 1 ▲ Es sind genau 35 Stufen.

▲ 2 ▲ Der Durchschnitt ist die Menge, die nur aus dem Punkt (2; 1) besteht.

▲ 3 ▲ a) $x^2 - 10x + 21 = 0$.
b) $x^2 + 4x - 12 = 0$.
c) $x^2 + 11x + 10 = 0$.

▲ 4 ▲ Bezeichnen wir die gesuchten Zahlen mit x und y, so muß $xy + x + y = 79$ gelten. Wir erhalten (z. B. im Bereich der natürlichen Zahlen) folgende Lösungsmöglichkeiten:

x	0	1	3	4	7
y	79	39	19	15	9

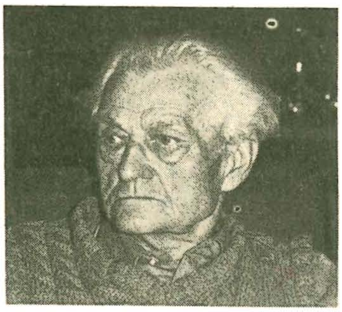
▲ 5 ▲ a) Der Restkörper hat 12 Eckpunkte und 24 Kanten.
b) Sechs Teilflächen sind Quadrate, acht Teilflächen sind gleichseitige Dreiecke.

Bis zum 17. Dezember 1987, dem letzten Einsendetermin, trafen in der *alpha*-Redaktion mehrere hundert Zuschriften ein, die überwiegend richtige Lösungen enthalten. Im Januar wurden die Gewinner durch Los ermittelt. Folgende *alpha*-Leser erhielten Buchpreise aus der Produktion des Teubner-Verlages:
Sören Boigs, Flintbek; Silke Herger, Gera; Christian Kühn, Wismar; Silke Schiede, Sömmerda; Doris Seifert, Rochlitz; Heidrun Tiedt, Teterow; Heike Walter, Berlin; Andreas Werner, Leipzig; Tobias Zepter, Langewahl; Kerstin Zirnstein, Pirna.
Sonderpreise: Thilo Bocklisch, Karl-Marx-Stadt (4. Klasse); Peter Hörnich, Schwedt (z. Zt. NVA); Kurt Oertel, Gräfenhainichen (85 Jahre)
alpha-Redaktion und Teubner-Verlag danken für die rege Beteiligung und für die interessanten Anmerkungen zu einzelnen Bänden der *Mathematischen Schülerbücherei.*
Auf vielfachen Wunsch wird auf Seite 84 eine Liste aller bis Ende 1988 vorliegenden Bände dieser erfolgreichen Buchreihe abgedruckt, an der sich sechs Verlage unseres Landes beteiligen.

J. Lehmann/J. Weiß

Kurt Oertel, einer der Preisträger im Teubner-Sonderwettbewerb, ist auch der älteste Teilnehmer an unserem alpha-Wettbewerb. Die Redaktion bat ihn, in alpha über sich zu berichten.

Am 7. 5. 1903 wurde ich, Kurt Oertel, in Helfta geboren. Das Datum enthält die ersten drei ungeraden Primzahlen in umgekehrter Folge, sollte das schon ein Hinweis auf die Mathematik in meinem Leben bedeuten?
Nach vier Jahren Volksschule im heimatlichen Helfta ging es zur Oberrealschule nach Eisleben. Das Rechnen, dann die folgende Mathematik in den kommenden Schuljahren wurden zum Lieblingsfach. Ich wurde bester Schüler der Anstalt. Die Debatte über die richtige Lösung einer Aufgabe mit dem Mathe-Lehrer ging zu meinen Gunsten aus. Neben den Aufgaben der Schule wurden Knobelaufgaben aller Art gelöst. Mein auch so geringes Taschengeld wurde nicht nur in Eiswaffeln u. a. Leckereien umgesetzt, sondern fast immer in Heftchen mathematischen Inhalts: Mathematische Spielereien, später Rechenhilfen, Neues über den Kreis, diophantische Gleichungen usw., die noch heute in meinem Bücherschrank stehen. Die Aufstellung von magischen Quadraten, die pythagoreischen Zahlen haben mich lange beschäftigt. Ungelöste Probleme, wie Fermat u. a. gehörten auch dazu.
Ich wollte gern Mathematik studieren, aber es kam nicht dazu. Ich wählte ein naturwissenschaftliches Thema, die Metallhüttenkunde. Mein Studium in Glausthal/Bergakademie schloß ich 1928 als Dipl.-Ing. für Metallhüttenwesen ab.



Das war zu einer schlechten Zeit. Betriebsstillegungen, -einschränkungen waren an der Tagesordnung. Schließlich Betriebsassistent bei Borchers in Goslar. Wegen Betriebsreduzierung nach $1\frac{1}{2}$ Jahren arbeitslos. Endlich nach vielen Bewerbungen im In- und Ausland Einstellung auf Kochhütte der Mansfeld A. G. als Vorarbeiter (6,60 M Schichtlohn). Dann weitere Entwicklung in den Mansfeld-Betrieben bis zum Hüttendirektor auf Kochhütte/Helbra. Nicht ohne Einfluß blieben die 20er Putschwochen, der Weltkrieg. Entlassung!
Neuer Anfang beim VEB Elektrokorund-Schmelze in Zschornewitz als Produktions- und zuletzt Technischer Leiter bis zu meiner vorzeitigen Pensionierung 1965 (aus gesundheitlichen Gründen).
Durch all die Jahre blieb die Mathe das beliebteste Hobby. Wesentlichen Anstoß und ständige Anregungen gab mir meine Beteiligung an den *alpha*-Wettbewerben, die ich vor 20 Jahren mit meiner Enkeltochter Martina begann. Im Jahre 1988 beteiligte ich mich das 17. Mal selbst. *K. Oertel*

Gesamtverzeichnis Mathematische Schülerbücherei, 1988

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft (BGT)
Der Kinderbuchverlag (KB)
Urania-Verlag (U)
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (DVW)
VEB Fachbuchverlag (FV)
Volk und Wissen Volkseigener Verlag (VWV)

Redaktionsschluß: 13. April 1988

Band 1
Alexandroff, Einführung in die Gruppentheorie (DVW 5. Aufl. 1965, 9. Aufl. 1975)

Band 2
Hasse, Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik (BGT 1965, 9. Aufl. 1987)

Band 3
Markuschewitsch, Streifzüge durch die Mathematik I (U 1965)

Band 4
Hameister, Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene (BGT 1966, 3. Aufl. 1970)

Band 5
Vyšin, Methoden zur Lösung mathematischer Aufgaben (BGT 1972, 2. Aufl. 1975)

Band 6
Lietzmann, Der Pythagoreische Lehrsatz (BGT 8. Aufl. 1966, 9. Aufl. 1968)

Band 7
Varga, Mathematische Logik für Anfänger I (VWV 1970)

Band 8
Sominski, Die Methode der vollständigen Induktion (DVW 6. Aufl. 1965, 13. Aufl. 1982)

Band 9
Korowkin, Ungleichungen (DVW 4. Aufl. 1965, 7. Aufl. 1973)

Band 10
Gnedenko/Chintschin, Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung (DVW 5. Aufl. 1965, 12. Aufl. 1983)

Band 11
Lietzmann, Wo steckt der Fehler? (BGT 4. Aufl. 1966, 5. Aufl. 1969)

Band 12
Lietzmann, Altes und Neues vom Kreis (BGT 4. Aufl. 1966)

Band 13
Lietzmann, Riesen und Zwerge im Zahlenreich (BGT 7. Aufl. 1966, 8. Aufl. 1969)

Band 14
Miller, Rechenvorteile (BGT 3. Aufl. 1966, 8. Aufl. 1987)

Band 15
Natanson, Einfachste Maxima- und Minimaaufgaben (DVW 3. Aufl. 1965, 7. Aufl. 1975)

Band 16
Natanson, Summierung unendlich kleiner Größen (DVW 2. Aufl. 1967, 3. Aufl. 1969)

Band 17
Dubnow, Fehler in geometrischen Beweisen (DVW 2. Aufl. 1965, 5. Aufl. 1973)

Band 18
Dynkin/Uspenski, Mathematische Unterhaltungen I (DVW 2. Aufl. 1965, 4. Aufl. 1968)

Band 19
Worobjow, Die Fibonaccischen Zahlen (DVW 2. Aufl. 1971, 3. Aufl. 1977)

Band 20
Dynkin/Uspenski, Mathematische Unterhaltungen II (DVW 2. Aufl. 1965, 4. Aufl. 1968)

Band 21
Kurosch, Algebraische Gleichungen beliebigen Grades (DVW 3. Aufl. 1965, 5. Aufl. 1969)

Band 22
Gelfond, Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen (DVW 3. Aufl. 1966, 5. Aufl. 1973)

Band 23
Schafarewitsch, Über die Auflösung von Gleichungen höheren Grades (DVW 2. Aufl. 1965, 4. Aufl. 1974)

Band 24
Markuschewitsch, Streifzüge durch die Mathematik II (U 1966)

Band 25
Markuschewitsch, Rekursive Folgen (DVW 2. Aufl. 1968, 4. Aufl. 1977)

Band 26
Dynkin/Uspenski, Mathematische Unterhaltungen III (DVW 2. Aufl. 1965, 5. Aufl. 1976)

Band 27
Steinhaus, 100 Aufgaben (U 1968)

Band 28
Perelman, Unterhaltsame Geometrie (VWV 1962)

Band 29
Perelman, Unterhaltsame Algebra (VWV 1965)

Band 30
Kolosow, Kreuz und quer durch die Mathematik (VWV 1963)

Band 31
Teplow, Grundriß der Kybernetik (VWV 1966)

Band 32
Jaglom/Boltjanski, Konvexe Figuren (DVW 1956)

Band 33
Belkner, Determinanten (BGT 1968, 4. Aufl. 1987)

Band 34
Autorenkollektiv, Rund um die Mathematik (KB 1969, 7. Aufl. 1980)

Band 35
Schmidt, Kein Ärger mit der Algebra (KB 1968)

Band 36
Übungen für Junge Mathematiker, Teil 1: Lehmann, Zahlentheorie (BGT 1968, 2. Aufl. 1970)

Band 37
Übungen für Junge Mathematiker, Teil 2: Grosche, Elementargeometrie (BGT 1969, 3. Aufl. 1983)

Band 38
Übungen für Junge Mathematiker, Teil 3: Kleinfeld, Ungleichungen (BGT 1969, 3. Aufl. 1983)

Band 39
Krysicki, Zählen und Rechnen einst und jetzt (BGT 1968)

Band 40
Sedláček, Einführung in die Graphentheorie (BGT 1968, 2. Aufl. 1972)

Band 41
Gelfand/Glagolewa/Kirillow, Die Koordinatenmethode (BGT 1968)

Band 42
Markuschewitsch, Komplexe Zahlen und konforme Abbildungen (DVW 4. Aufl. 1973)

Band 43
Markuschewitsch, Flächeninhalte und Logarithmen (DVW 4. Aufl. 1977)

Band 44
Donath, Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks (DVW 1968, 3. Aufl. 1976)

Band 45
Roman, Reguläre und halbreguläre Polyeder (DVW 1968, 2. Aufl. 1987)

Band 46
Autorenkollektiv, Kompendium der Mathematik (VWV 1969, 10. Aufl. 1981)

Band 47
Lehmann, Lineare Optimierung für Junge Mathematiker (BGT 1970)

Band 48
Belkner, Matrizen (BGT 1970, 4. Aufl. 1986)

Band 49
May, Differentialgleichungen (BGT 1971, 2. Aufl. 1974)

Band 50
Sobol, Die Monte-Carlo-Methode (DVW 1971, 3. Aufl. 1981)

Band 51
Zich/Kolman, Unterhaltsame Logik (BGT 1970, 3. Aufl. 1975)

Band 52
Worobjow, Teilbarkeitskriterien (DVW 1972, 2. Aufl. 1973)

Band 53
Freyer/Gäbler/Möckel, Gut gedacht ist halb gelöst (U 1972, 7. Aufl. 1987)

Band 54
Bürger/Wittmar, Was ist, was soll Datenverarbeitung? (U 1969, 3. Aufl. 1974)

Band 55
Cendrowski, Die Bande der unsichtbaren Hand (KB 2. Aufl. 1970)

Band 56
Göttner, Was ist, was soll Operationsforschung? (U 1970, 4. Aufl. 1973)

Band 57
Dege, EDV Maschinelles Rechnen (U 1971)

Band 58
Gelfand/Glagolewa/Schnol, Funktionen und ihre graphische Darstellung (BGT 1971, 2. Aufl. 1974)

Band 59
Kaloujnine, Primzahlzerlegung (DVW 1971)

Band 60
Trachtenbrot, Wieso können Automaten rechnen? (DVW 6. Aufl. 1971)

Band 61
Boltjanski/Gochberg, Sätze und Probleme der kombinatorischen Geometrie (DVW 1972)

Band 62
Varga, Mathematische Logik für Anfänger II (VWV 1973)

Band 63
Maibaum, Wahrscheinlichkeitsrechnung (VWV 1972, 4. Aufl. 1987)

Band 64
Wilenkin, Unterhaltsame Mengenlehre (BGT 1972, 3. Aufl. 1986)

Band 65
Belkner, Metrische Räume (BGT 1972)

Band 66
Jäckel, Mathematik heute (U 1972)

Band 67
Sedláček, Keine Angst vor Mathematik (FV 5. Aufl. 1969)

Band 68
Schreiber, Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie (BGT 1980)

Band 69
Gronitz, Praktische Mathematik (VWV 1975)
Band 70
Hilbert, Matrizen (VWV 1975, 2. Aufl. 1977)
Band 71
Mader/Richter, Wissensspeicher Mathematik (VWV 1977, 8. Aufl. 1988)
Band 72
Steinhaus, 100 neue Aufgaben (U 1973)
Band 73
Miller, Gelöste und ungelöste mathematische Probleme (BGT 1973, 5. Aufl. 1986)
Band 74
Solodownikow, Lineare Ungleichungssysteme (DVW 1973)
Band 75
Golowina/Jaglom, Vollständige Induktion in der Geometrie (DVW 1973)
Band 76
Rehm, Zahl, Menge, Gleichung (KB 1973, 5. Aufl. 1985)
Band 77
Lehmann, Kurzweil durch Mathe (U 1980, 3. Aufl. 1985)
Band 78
Kordemski, Köpfchen, Köpfchen! (U 1963, 13. Aufl. 1983)
Band 79
Glade/Manteuffel, Am Anfang stand der Abacus (U 1973)
Band 80
Bašmakova, Diophant und diophantische Gleichungen (DVW 1974)
Band 81
Pieper, Zahlen aus Primzahlen (DVW 1974, 2. Aufl. 1984)
Band 82
Lehmann, Mathe mit Pfiff (U 1975, 2. Aufl. 1977)
Band 83
Jaglom, Ungewöhnliche Algebra (BGT 1976)
Band 84
Belkner, Reelle Vektorräume (BGT 1974)
Band 85
Stahl/Wenzel, Elektronische Datenverarbeitung (VWV 1975)
Band 86
Göttner/Fischer/Krieg, Was ist, was kann Statistik? (U 1975)
Band 87
Übungen für Junge Mathematiker, Teil 4: Bomeleit, Gleichungen (BGT 1976, 3. Aufl. 1983)
Band 88
Kolman, Die vierte Dimension (BGT 1975)
Band 89
Drews, Lineare Gleichungssysteme und lineare Optimierungsaufgaben (DVW 1975, 2. Aufl. 1977)
Band 90
Lovász/Vesztergombi/Pelikán, Kombinatorik (BGT 1977)
Band 91
Rehm, Strecke, Kreis, Zylinder (KB 1977, 3. Aufl. 1984)
Band 92
Fanghänel/Vockenberg, Arbeiten mit Mengen (VWV 1978, 6. Aufl. 1988)
Band 93
Fehringer, Näherungsrechnung (VWV 1978, 5. Aufl. 1987)
Band 94
Lohse, Elementare Statistik (VWV 1983)
Band 95
Kantor/Solodownikow, Hyperkomplexe Zahlen (BGT 1978)
Band 96
Smorgorschewski, Lobatschewskische Geometrie (BGT 1978)
Band 97
Berg, Differenzengleichungen zweiter Ordnung mit Anwendungen (DVW 1979)
Band 98
Ruben, Philosophie und Mathematik (BGT 1979)
Band 99
Thiele, Mathematische Beweise (BGT 1979, 5. Aufl. 1988)
Band 100
Lehmann, 2 × 2 plus Spaß dabei (VWV 1981, 4. Aufl. 1987)
Band 101
Drinfel'd, Quadratur des Kreises und Transzendenz von π (DVW 1980)
Band 102
Hódi, Mathematisches Mosaik (U 1977, 2. Aufl. 1980)
Band 103
Quaisser/Sprengel, Räumliche Geometrie (DVW 1981)
Band 104
Kufner, Raum und Entfernung (BGT 1981)
Band 105
Klotzek, Einführung in die Differentialgeometrie I (DVW 1981)
Band 106
Schröder, Mathematik im Reich der Töne (BGT 1982, 3. Aufl. 1988)
Band 107
Kästner/Göthner, Algebra – aller Anfang ist leicht (BGT 1983, 3. Aufl. 1987)
Band 108
Klotzek, Einführung in die Differentialgeometrie II (DVW 1983)
Band 109
Belkner/Brehmer, Riemannsche Integrale (DVW 1984)
Band 110
Pieper, Die komplexen Zahlen (DVW 1984, 2. Aufl. 1988)
Band 112
Kudrjavzev, Gedanken über moderne Mathematik und ihr Studium (BGT 1983)
Band 113
Belkner/Brehmer, Lebesguesche Integrale (DVW 1984)
Band 114
Sprengel/Wilhelm, Funktionen und Funktionalgleichungen (DVW 1984)
Band 115
Belski/Kaloujnine, Division mit Rest (DVW 1982)
Band 116
Quaisser, Bewegungen in der Ebene und im Raum (DVW 1983)
Band 117
Höfner/Klein, Wahrscheinlichkeit ganz einfach – Mathematik zwischen Astrologie und Trendrechnung (U 1983, 2. Aufl. 1986)
Band 118
Péter, Das Spiel mit dem Unendlichen (BGT 5. Aufl. 1984)
Band 119
Krysicki, Keine Angst vor x und y (BGT 1984, 2. Aufl. 1987)
Band 120
Bogdanovič, Mathematischer Regenbogen (VWV 1988)
Band 121
Lehmann, 3 plus 8 und mitgemacht (VWV 1985, 2. Aufl. 1986)
Band 122
Klotzek u. a., kombinieren, parkettieren, färben (DVW 1985)
Band 123
Schäfer, Die Wunder der Rechenkunst (Hrsg.: Lehmann) (VWV 1983, 2. Aufl. 1985)
Band 124
Kaloujnine/Suščanskij, Transformationen und Permutationen (DVW 1986)
Band 125
Deweß/Deweß, Summa summarum (BGT 1986, 2. Aufl. 1987)
Band 126
Sominskij/Golovina/Jaglom, Die vollständige Induktion (DVW 1986)
Band 127
Quaisser/Sprengel, Extrema (DVW 1986)
Band 128
Schröder, Kartenentwürfe der Erde (BGT 1988)
Band 129
Boltjanskij/Efremovič, Anschauliche kombinatorische Topologie (DVW 1986)
Band 130
Lehmann, Mathematik – von der Pflicht zur Kür (BGT 1987, 2. Aufl. 1988)
Band 131
Lehmann u. a., Rechnen und Raten (VWV 1987)
Band 133
Höfner, Das Tor zur höheren Mathematik (U 1987)
Band 134
Fanghänel, Mein Freund der Taschenrechner (VWV 1988)
Band 135
Pieper, Heureka – ich hab's gefunden (DVW 1987)
Band 136
Šaškin, Ecken, Flächen, Kanten (DVW 1988)
Band 137
Quaisser/Sprengel, Geometrie in Ebene und Raum (DVW 1988)
Band 138
Lang, Faszination Mathematik (BGT 1988)

Spaß mit Quadratzahlen

Wenn die Quadratzahlen bis 25 sicher im Gedächtnis gespeichert sind, können die Quadrate einfacher Dezimalzahlen mit einer 5 hinter dem Komma schnell im Kopf berechnet werden.
Zum Beispiel:

$$3{,}5^2 = 3^2 + 3 + 0{,}25 = 12{,}25$$
$$6{,}5^2 = 36 + 6 + 0{,}25 = 42{,}25.$$

Bei kleinen Zahlen kommt man noch schneller zum Ziel, wenn man die ganze Zahl mit ihrem Nachfolger multipliziert und zum Produkt 0,25 addiert.
Zum Beispiel:

$$3{,}5^2 = 3 \cdot 4 + 0{,}25 = 12{,}25$$
$$8{,}5^2 = 8 \cdot 9 + 0{,}25 = 72{,}25$$

Wer die binomischen Formeln kennt, kann den Beweis für diese Gesetzmäßigkeit leicht erbringen.

G. Richter, Oranieburg
nach: Deutsche Lehrerzeitung, Heft 6/88

Computer 1 × 1

Kleincomputer ist für viele Mädchen und Jungen ein Zauberwort, von dem sie oft nicht mehr loskommen. Fast drei Jahre habe ich in einem Computer-Zirkel (Schülerakademie Greifswald) die Möglichkeit gehabt, die Bedienung und Programmierung von Kleincomputern zu erlernen und Probleme mit Hilfe eines Computers zu lösen.

In der DDR gibt es den KC 85/1 (frühere Bezeichnung Z 9001) und seinen Nachfolger KC 87 vom VEB Robotron Dresden sowie die Kleincomputer KC 85/2 und KC 85/3 vom VEB Mikroelektronik Mühlhausen.

Computer sind unheimlich schnell und auch zuverlässig, wenn ihnen ein richtiges Programm eingegeben wurde. Sie können sich Zahlen und Namen *merken* und den ganzen Tag rechnen. Mit den Computern kann man Musik erzeugen (SOUND-Befehle) und zeichnen. Sie können eine Modelleisenbahnanlage mit individuellem Fahrplan steuern. Ganze Aufsätze können sie speichern und bei Bedarf ausdrucken. Man kann sich interessante Computerspiele überlegen und programmieren, und dann ist der Computer ein idealer Spielpartner!

Manche Aufgaben sahen zuerst etwas einfach aus, erst beim Schreiben des Programms stießen wir auf Schwierigkeiten. Unsere Übungsprogramme befaßten sich mit mathematischen Aufgaben, mit der Lösung von Knobelproblemen und mit dem Programmieren von Spielen. Wir legten Klassenbücher und Fahrpläne im Computer an und schrieben Vokabellernprogramme. Dazu definierten wir auch kyrillische Zeichen. Andere AG-Mitglieder haben Programme für den Geographie- und den Geschichtsunterricht angefertigt.

Viel Spaß bereitet den Anfängern das *Zeichnen* und das *Komponieren* auf dem Computer. Unser Computer 1 × 1 muß aber als Einstieg in ernsthafte Arbeiten angesehen werden. Fahrkartenautomaten kennt ihr sicher alle, Computer können den Arzt bei der Diagnose unterstützen, ganze Werkanlagen lassen sich mit Computern überwachen und steuern. Akustische Signale (Musik) und optische Hinweise (Aufblinken von Zeichen in verschiedenen Farben) unterstützen die Kontrolle von Betriebsanlagen. Sparkonten mit automatischer Abbuchung von regelmäßigen Zahlungen werden schon lange über Computer geführt. Ganze Bücher lassen sich auf Disketten speichern und können bei Bedarf gedruckt werden.

Dabei macht ein Computer aber nur das, was ihm durch Befehle mitgeteilt wird, nicht mehr, aber auch nicht weniger. So kann der Computer unser Freund und Helfer werden. Aufgaben werden ihm über die Tastatur mitgeteilt, Antworten können z. B. auf dem Bildschirm eines Fernsehgerätes ausgegeben werden. Sehr verbreitet und leicht zu erlernen ist die Programmiersprache BASIC, über die in der *alpha* auch eine Beitragsfolge (Heft 5, 1986 bis Heft 6, 1987) gedruckt worden ist. Diese Sprache ist für den Computer aber erst durch die Hilfe eines Übersetzers (Interpreter oder Compiler, ist meist ein Teil des Computers selbst) verständlich. Man kann den Computer auch im Maschinencode oder in der Assemblersprache programmieren. Das ist umständlicher und aufwendiger, die Programme werden dafür schneller abgearbeitet und benötigen weniger Speicherplatz. Sehr übersichtlich sind Programme in der Sprache PASCAL, andere Programmiersprachen für Kleincomputer sind z. B. LOGO und FORTH.

An die Kleincomputer lassen sich auch Drucker und Zeichengeräte (Plotter) anschließen. Damit können dann Texte wirklich ausgedruckt werden, und Kurven, Funktionsbilder und richtige Bilder können gezeichnet werden. Im Prinzip kann man dann mit dem Computer auch konstruieren, Bauzeichnungen erstellen und sogar Muster entwerfen, z. B. für Pullover. Dieses Einsatzgebiet des Computers ist als CAD (Computer aided design) bekannt, während die Steuerung von Maschinen durch Computer als CAM (Computer aided manufacturing) bezeichnet wird.

Natürlich sollte man immer überlegen, ob die angegebenen Aufgaben mit einem Computer besser als mit einem Taschenrechner, einer Schreibmaschine oder einem einfachen Reißbrett gelöst werden können. Dabei ist zu berücksichtigen, daß der Computer superschnell und (innerhalb seiner Genauigkeitsschranken) exakt arbeitet. Er kann die Zwischenergebnisse mitteilen und bei Fehlern Hinweise geben (Dialog). Außerdem kann er auch mit Buchstaben, Zeichen und sogar von euch definierten Sonderzeichen operieren. Sein Einsatz ist besonders zu empfehlen, wenn gleiche oder ähnliche Berechnungen oder andere Programmstücke mehrmals auszuführen sind.

Computer können uns bei der Lösung vieler Aufgaben helfen. Aber beachtet bitte, daß für die Erarbeitung der meisten Programme sehr gute Kenntnisse im Fach Mathematik erforderlich sind.

A. Schmidt

„Für den, der völlig ohne Dunst
in Anwendung der Rechenkunst ...,
ein Rechner ist – dies immer galt –
von völlig nutzlosem Gehalt."

C. Näther, Leipzig

Mini-BASIC für alpha-Leser – Übersicht

(Gültig für KC 85/1, KC 85/2, KC 85/3 und KC 87).

Darstellung von Zahlen in BASIC

	Darstellung in BASIC
3,09	3.Ø9
$-3{,}9 \cdot 10^7$	−3.9E + Ø7
$1{,}4 \cdot 10^{-4}$	1.4E − Ø4
0,73	.73
π	PI

Das Vorzeichen „−" wird mit der Taste $\boxed{-}$ eingegeben. Als **Variable für Zahlen** (numerische Variable) verwendet man z. B. A; B1; AK u. ä.

Nicht zugelassen sind Zeichenkombinationen, die nicht mit einem Buchstaben beginnen und solche, die auf BASIC-Wörter führen (z. B. IF, ON1). Der Computer unterscheidet nur die ersten beiden Zeichen einer Variablenbezeichnung, z. B. sind AL1 und AL2 für ihn gleich.

Rechenoperationen

	Darstellung in BASIC
a + b	A + B
a − b	A − B
a · b	A ✱ B
a : b	A / B
a^b	A ∧ B

Wie der Taschenrechner SR 1 *beachten* die Kleincomputer i. a. die Vorrangregeln. Zur Berechnung von Termen stehen auch **Klammern** zur Verfügung. Sie werden so wie in der Mathematik üblich verwendet.

Mathematische Funktionen

	Darstellung in BASIC
$\sqrt{x}$	SQR(X)
$\lvert x \rvert$	ABS(X)
[x]	INT(X)
Zufallszahl	RND(X)

Anweisung zur Definition einer Funktion DEF FN

DEF FN Name (Argument) = Ausdruck

Name ist die Bezeichnung der zu definierenden Funktion,

Argument bezeichnet die Variable, von der die Funktion abhängt,

Ausdruck definiert die Funktionsvorschrift

Beispiel: DEF FNE(X) = ABS(X + 1)

Vergleichsoperatoren

	Darstellung in BASIC
=	=
≠	< >
<	<
>	>
≦	< =
≧	> =

Logische Operatoren

Bedeutung	BASIC-Symbol
Nicht; Es gilt nicht (Negation)	NOT
und; sowohl – als auch (Konjunktion)	AND
oder (Alternative)	OR

Anweisungen

Wertzuweisung LET

LET A = $\boxed{\begin{array}{l}\text{TERM}\\ \text{z. B.: 18}\\ C + D\\ G - 12\\ A + 1\end{array}}$

Der Wert des rechts vom Zeichen „=" stehenden Terms wird ermittelt und der links stehenden Variablen als neuer Wert zugeordnet.

Eingabeanweisung

● INPUT
INPUT X
Der Programmablauf wird unterbrochen.
Der Computer wartet auf einen Eingabewert.
INPUT X, Y
Der Programmablauf wird unterbrochen.
Der Computer wartet auf zwei durch Komma zu trennende Eingabewerte.
Bei INPUT-Anweisungen darf ein informativer Text nur unmittelbar nach INPUT folgen und muß von nachfolgenden Variablen durch ein Semikolon getrennt werden.
Beispiel: INPUT „a (in cm):"; A

Ausgabeanweisung

● CLS
Die Anweisung CLS löscht den vereinbarten Bildschirmbereich.
● PRINT
PRINT A
Mit Hilfe der PRINT-Anweisung wird der Wert der Variablen A auf dem Bildschirm ausgedruckt.
PRINT „TEXT"
Auf dem Bildschirm erscheint der zwischen den Anführungszeichen stehende Text.
In PRINT-Anweisungen können auch mehrere Ausgabeelemente enthalten sein, die man durch Komma oder Semikolon trennen kann.
Beispiel: PRINT „a ="; A, „b ="; B
PRINT A; B; C
Die Werte der Variablen A, B, C werden unmittelbar nebeneinander ausgedruckt. (Bei nichtnegativen Zahlen wird statt des Vorzeichens ein Leerzeichen ausgegeben.)
PRINT A, B, C
Die Werte A, B, C werden in drei Druckzonen ausgegeben (tabelliert).
PRINT
Auf dem Bildschirm wird eine Leerzeile erzeugt.
PRINT AT (Z, S); A
Der Wert der Variablen A wird in Zeile Z ab Spaltenposition S ausgedruckt.
● BEEP
Die Anweisung „BEEP" veranlaßt den Computer zu einem Signalton.

Anweisungen zur Steuerung des Programmablaufs

Zählschleife
● FOR – TO – NEXT
FOR X = A TO B STEP C
$\boxed{\text{Anweisung(-en)}}$ } Schleifenkörper
NEXT X
Die Anweisung(-en) des Schleifenkörpers werden für X = A bis X = B (Schrittweite C) ausgeführt.

Verzweigung
● IF... THEN...
IF $\boxed{\text{Bedingung}}$ THEN $\boxed{\text{Anweisung}}$
zB. IF B < 7 OR C = 8 THEN PRINT A
Ist die $\boxed{\text{Bedingung}}$ erfüllt, so wird die $\boxed{\text{Anweisung}}$ ausgeführt und die Programmabarbeitung mit der nächsten Programmzeile fortgesetzt.
Ist die $\boxed{\text{Bedingung}}$ nicht erfüllt, wird die $\boxed{\text{Anweisung}}$ übersprungen und die Programmarbeit mit der nächsten Programmzeile fortgesetzt.
IF $\boxed{\text{Bedingung}}$ THEN Zeilennummer (Bedingter Sprung)
Wenn die $\boxed{\text{Bedingung}}$ erfüllt ist, wird das Programm in der nach „THEN" stehenden Zeilennummer fortgesetzt, ansonsten wird die Programmabarbeitung mit der nächsten Programmzeile fortgesetzt.
● IF... THEN...: ELSE...
IF $\boxed{\text{Bedingung}}$ THEN $\boxed{\text{Anweisung 1}}$: ELSE $\boxed{\text{Anweisung 2}}$.
Wenn die $\boxed{\text{Bedingung}}$ erfüllt ist, dann wird die $\boxed{\text{Anweisung 1}}$ ausgeführt, anderenfalls $\boxed{\text{Anweisung 2}}$. (Für die Anweisungen können auch Zeilennummern stehen. Dann erfolgt in Abhängigkeit vom Erfülltsein der Bedingung ein Sprung zur betreffenden Programmzeile.)
● GOTO *z*
Unbedingter Sprung
Das Programm wird in der nach GOTO angegebenen Zeilennummer *z* fortgesetzt.

Mehrfachverzweigung
● ON X GOTO z_1, z_2, z_3
Die Anweisung bewirkt die Programmfortsetzung in der Zeile, die an X-ter Stelle in der Zeilennummernliste z_i steht.
● PAUSE *n*
Die Anweisung PAUSE *n* bewirkt eine Unterbrechung von *n* Zehntelsekunden.
● END
Die Anweisung END bewirkt, daß der Computer die Programmabarbeitung beendet und in den Kommando-Modus übergeht.

zusammengestellt von L. Flade/M. Pruzina

Computer hilft beim Knobeln

▲ 20 Personen, Männer, Weiber und Jungfrauen, stellen eine Festlichkeit an, die ihnen auf 20 Thaler zu stehen kömmt; jeder Mann gibt 2 Thlr., jede Frau 1 Thlr. und jede Jungfrau 1/2 Thlr.
Wieviel Männer, Weiber und Jungfrauen waren es?

aus: „Die Wunder der Rechenkunst" von Joh. Christ. Schäfer 1857 Weimar, herausgegeben von J. Lehmann 1983

Programm zur Lösung:

```
10  FOR A = 1 TO 18
12  FOR B = 1 TO 18
14  FOR C = 1 TO 18
16  IF A + B + C = 20
    THEN PRINT TAB (8) A; B; C
    AND 2 * A + B + 0.5 * C = 20
18  NEXT C, B, A
```

In dieser Version benötigt der Computer zwei Minuten, um die sechs Fälle zu finden. Wenn man berücksichtigt, daß es höchstens sechs Männer sein können (warum?) und Zeile 10 dahingehend ändert, sind nur noch 40 Sekunden nötig!

H. Pätzold, Waren (Müritz)

Buchtips für Computerfreunde

F. Roitmayr
Der Sprung in die Computerwelt
78 Seiten, zahlr. Abb.
Bestell-Nr. 633 315 0
Preis etwa 8,00 M

Chr. Hülm/S. Pietzsch
Vom Kerbholz zum Computer
144 Seiten, zahlr. Abb.
Bestell-Nr. 632 981 3
Preis etwa 7,80 M

G. Saeltzer
Erstaunliche Computerwelt
160 Seiten, zahlr. Abb.
Bestell-Nr. 632 752 7
Preis etwa 16,80 M

alle Titel: Kinderbuchverlag Berlin

St. Hesse
Maschinen in der Geisterschicht
112 Seiten, 43 Abb.
Bestell-Nr. 654 177 1
Preis: 7,50 M
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Als weitere Titel plant der Urania-Verlag:

B. Winde/J. Heim
Technik en miniature
Stippvisite bei der Mikrotechnik

M. Roth
Die intelligente Maschine
Der Computer als Experte

R. Schmidt
Softwarekonzepte vorgestellt

Ein Teil der Bücher ist durch Vorbestellungen bei den Verlagen vergriffen. Sie sind möglicherweise beim Buchhandel z. Z. noch vorrätig. Wir weisen auf die Möglichkeit der Ausleihe in Bibliotheken hin.

In freien Stunden · alpha-heiter

Praktische Arithmetik

Leonhard Euler (1707 bis 1783) der große Schweizer Mathematiker lebte und wirkte von 1741 bis 1766 in Berlin. Er hatte in der Bärenstraße ein *artiges Haus* 1742 für 2000 Reichstaler erworben, das unweit von seiner Arbeitsstätte, der Akademie, gelegen war. Es ist übrigens das heutige Haus Nr. 24 in der Behrenstraße, gegenüber der Komischen Oper. Euler, der nie mit einem Fachkollegen um Verdienste und Rechte stritt, stand den Belangen des praktischen Lebens gelegentlich etwas fremd gegenüber. Mit seinem Nachbarn war er in Streit gekommen, wer die Kosten für das Zuschütten eines Grabens, der zwischen beiden Grundstücken lag, tragen sollte. Die Sache kam bis zu Gericht und kostete jede Partei 100 Taler. Der Lohn für das Einebnen des Grabens machte dann genau 5 Taler aus!

mitgeteilt von Dr. R. Thiele, Leipzig

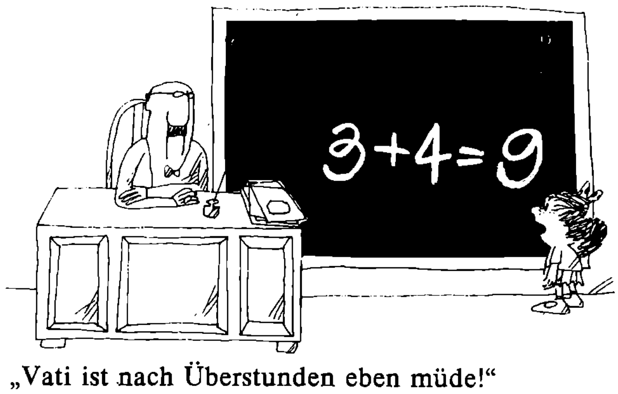
Eine Gleichung, die den Kopfstand verträgt

Peter, ein Schüler der 3. Klasse, soll als Hausaufgabe eine Summe mit drei Summanden bilden und berechnen. Dabei soll ein Summand eine einstellige Zahl, ein anderer Summand eine zweistellige Zahl und der dritte Summand ein Produkt aus einer einstelligen und einer zweistelligen Zahl sein.

* + ** + * · **

Sein älterer Bruder Sven, der Peter gegenüber am Tisch sitzt, bemerkt, daß Peters Aufgabe und ihr Ergebnis auch von seinem Platz aus in gewohnter Weise lesbar sind und daß auch aus dieser Sicht die Aufgabe richtig gelöst ist.
Welche Aufgabe kann Peter aufgeschrieben haben?

W. Träger, Döbeln

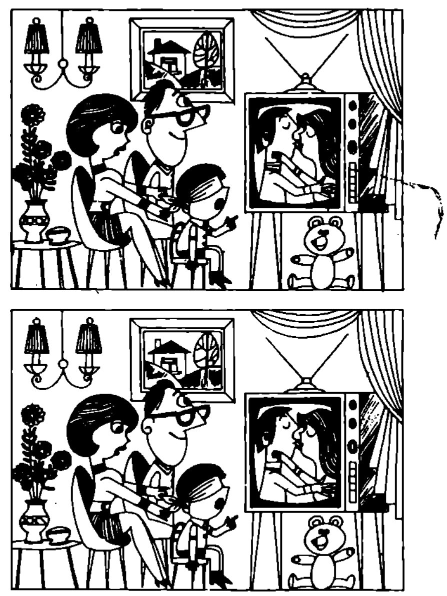


„Vati ist nach Überstunden eben müde!“

Fehler gesucht

Beim Neuzeichnen des Bildes unterliefen dem Zeichner einige Fehler. Schaut genau hin! Bestimmt findet ihr sie heraus.

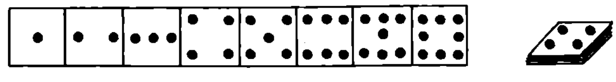
aus: Krokodil, Moskau



Mathematische Faltarbeit

Anja hat den abgebildeten, aus acht mittels Punkten auf beiden Blattseiten numerierten Quadraten bestehenden Papierstreifen auf verschiedene Weise jeweils zu einem Paket aus acht übereinanderliegenden Quadraten zusammengefaltet, so daß obenauf das Quadrat mit vier Punkten und ganz unten das Quadrat mit sieben Punkten liegt. Wieviel Möglichkeiten des Zusammenfaltens gibt es da?

W. Träger, Döbeln



Der Eulersche Polyedersatz

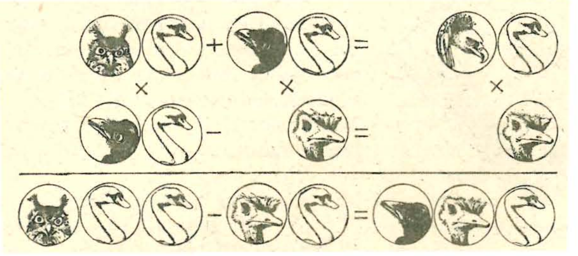
Es hilft kein Stauchen, hilft kein Strecken!
Konvexe Polyeder wissen,
daß EULER sie sich fügen müssen:
Die Rechnung auf die 2 stets führt,
falls von der Flächen – plus Ecken –
die Kantenzahl man subtrahiert.

K. Nähter, Leipzig

Zoo-Logisches

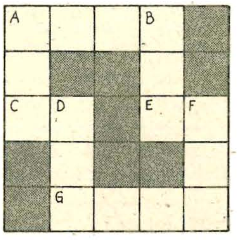
Ersetze die Figuren durch Ziffern!

aus: Füles, Budapest



Geburtsjahre

Es sind mehrstellige natürliche Zahlen zu finden, für die gelten soll:



Waagerecht:

A_w Jahr der ersten *alpha*-Ausgabe

C_w Quersumme von A_w

E_w Querprodukt von G_w

G_w Jahr der I. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Senkrecht:

A_s Eine durch 11 teilbare Zahl

B_s Eine durch 11 teilbare Zahl

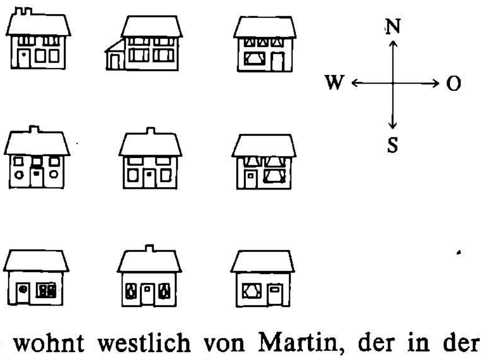
D_s $\frac{(A_w - G_w)}{2} \cdot 127$

F_s $\frac{(A_w + G_w)}{2} : 4$

Schülerin S. Kerber, Saal

Wo sind sie zu Hause?

Neun Freunde wohnen in einem gleichen Wohngebiet. Findet heraus, wo jeder wohnt und berücksichtigt dabei, daß die Straßen von West nach Ost und die Avenuen von Nord nach Süd verlaufen!



Jacob wohnt westlich von Martin, der in der gleichen Straße wie Quentin wohnt. Dieser wohnt westlich von Romuald, der südlich von Guillaume lebt. Quentin hat seine Wohnung südlich von Gilles, der in der gleichen Avenue zu Hause ist wie Martin, der nördlich von Renaud lebt. Jacob wohnt in der gleichen Avenue wie Renaud, der in der gleichen Straße wie Malcolm zu Hause ist. Dieser lebt in einer anderen Straße und in einer anderen Avenue wie Clément. Gilles ist westlich von Clément zu Hause, der in der gleichen Avenue wie Guillaume wohnt; dieser hat seine Wohnung in der gleichen Straße wie Jacob.

aus: Logigram, Paris

Etwas komplizierte Angelegenheit!

Der kleine Steffen fragt seinen Vater: „Vati! – Ist morgen auch heute?“ Der Vater erwidert: „Freilich. – Paß mal auf. Das ist so: Heute ist heute heute. Heute wird aber morgen gestern sein, so wie heute gestern morgen war. Und so war gestern auch heute, deshalb wird morgen auch heute sein.“

mitgeteilt von A. Körner, Leipzig

alpha-heiter · Preisaufgabe
Verschlüsselte Geburtsdaten

In der Buchhaltung eines Betriebes arbeiten Rainer, Miriam und Marina. Zu Rainers Geburtstag sagte Miriam: „Nun bin ich wieder für viele Wochen, nämlich bis zu meinem Geburtstag, um so viele Jahre jünger als Rainer wie ich älter bin als Marina.“ Dabei zählte sie jedes Lebensalter nach vollen Lebensjahren. Und Miriam bemerkte: „Gibt man unsere Geburtsdaten (Tag, Monat, Jahr), wie es in unserer Branche üblich ist, mit sechs aufeinanderfolgenden Ziffern an, so kann jeder seinen Vornamen als seine verschlüsselten Geburtsdaten auffassen, wobei einheitlich für uns drei gleiche Ziffern durch gleiche Buchstaben und verschiedene Ziffern durch verschiedene Buchstaben ersetzt sind.“ Wann wurden Rainer, Miriam und Marina geboren?

Hinweis: Werden Datumsangaben aus unserem Jahrhundert durch sechs aufeinanderfolgende Ziffern angegeben, so legen je zwei Ziffern Tag, Monat und Jahr fest. So wird z. B. der 3. 7. 1924 durch die Ziffernfolge 030724 angegeben.

W. Träger, Döbeln

Schreibt eure Lösung bitte nach folgendem Schema auf eine Postkarte und sendet sie an die Redaktion *alpha*!

Verschlüsselte Geburtsdaten

RAINER: ......

MIRIAM: ......

MARINA: ......

Den Absender nicht vergessen!

Einsendeschluß: 31. 8. 1988

Unter den richtigen Einsendungen werden drei Gewinner ausgelost. Ihre Namen werden im Heft 6/88 veröffentlicht.

Zu gewinnen sind: Logikspiele des VEB Kamenzer Spielwaren und des VEB Plasticart sowie ein Autogramm unseres zweifachen Olympiasiegers Frank-Peter Roetsch.

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Schulolympiade

Abgabe beim Mathematiklehrer: Ende September 1988

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.
Die Lösungen werden im Oktober 1988 in der *Trommel* und der *Jungen Welt* veröffentlicht.
Hinweis: Unter den Aufgaben der 1. Stufe befinden sich auch solche (in der Regel ist es die 4. Aufgabe), die aus mehreren Teilaufgaben von steigendem Schwierigkeitsgrad bestehen. Dabei ist Teil a) meist recht einfach zu lösen und gibt in der Regel Hilfe für die Lösung der anderen Teilaufgaben. Die Lösung der letzten Teilaufgabe stellt bewußt hohe Anforderungen. Diese Teilaufgabe ist vorwiegend für die leistungsstärkeren Schüler gedacht.
Es wird empfohlen, über diese anspruchsvollen Aufgaben in Klassen und Arbeitsgemeinschaften zu diskutieren.
Anmerkung: $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B, während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

280511 In jedes der acht freien Felder der Figur ist genau eine natürliche Zahl so einzutragen, daß die Summe der drei in jeder waagerechten und jeder senkrechten Reihe stehenden Zahlen jeweils 39 beträgt.

	9	

Finde eine derartige Eintragung, bei der neun Zahlen vorkommen, von denen keine zwei einander gleich sind!

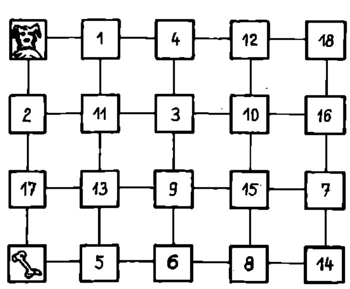
280512 Aus den Ziffern 1, 2 und 3 sollen dreistellige Zahlen gebildet werden.
a) Jede dieser drei gegebenen Ziffern soll in jeder der zu bildenden Zahlen genau einmal vorkommen.
Schreibe alle dreistelligen Zahlen auf, die sich auf diese Art und Weise bilden lassen!
b) In weiteren dreistelligen Zahlen aus den drei gegebenen Ziffern dürfen Ziffern auch mehr als einmal auftreten; dafür brauchen sie nicht alle vorzukommen.
Schreibe alle diejenigen dreistelligen Zahlen auf, die nun zusätzlich zu den in a) aufgezählten Zahlen noch gebildet werden können!

280513 Vier gleich große Kisten mit gleichem Inhalt haben zusammen eine Masse von 132 kg.
Welche Masse hat dann der Inhalt einer Kiste, wenn die Masse aller vier leeren Kisten zusammen 12 kg beträgt?

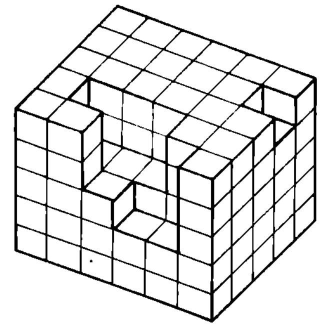
280514 a) Zeichne in ein Koordinatensystem die Punkte $A(1; 9)$, $B(4; 6)$ und $C(6; 10)$!
Verbinde je zwei dieser drei Punkte durch eine Strecke! Wieviel Verbindungsstrecken sind das insgesamt?
b) Zeichne zwei weitere Punkte D und E; wähle sie so, daß jede Verbindungsstrecke von zwei der fünf Punkte A, B, C, D, E keinen weiteren der fünf Punkte enthält! Verbinde je zwei der fünf Punkte durch eine Strecke!
Wieviel Verbindungsstrecken sind das insgesamt?
c) Man kann die in b) gesuchte Anzahl von Verbindungsstrecken auch durch eine Überlegung ermitteln, ohne die Punkte und die Strecken zu zeichnen.
Beschreibe eine solche Überlegung!
d) Ermittle auf die in c) beschriebene Weise die Anzahl aller Verbindungsstrekken zwischen je zwei von zehn Punkten, für die dasselbe wie in b) gilt!

Olympiadeklasse 6

280611 Bello kann nur dann zum Knochen gelangen, wenn er einen Weg wählt, bei dem das Produkt der dabei überquerten Zahlen 2 431 beträgt.
Welchen Weg muß er wählen?

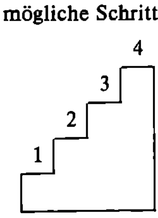


280612 Ein großer Quader wurde in kleine, untereinander gleich große Würfel zerlegt. Wie im Bild ersichtlich, wurden dann einige kleine Würfel herausgenommen. Von denjenigen kleinen Würfeln, die im Bild nicht zu sehen sind, wurde aber keiner weggenommen. Wie viele der kleinen Würfel enthält dann der im Bild gezeigte Restkörper insgesamt noch?
Beschreibe, wie du die gesuchte Anzahl gefunden hast!



280613 Mario, Petra, Rigo und Tanja unterhalten sich darüber, welche Plätze sie bei der Schulolympiade wohl belegen werden.
Dabei äußern sie folgende Meinungen:
(1) Tanja wird den ersten Platz erreichen und Petra den zweiten.
(2) Tanja wird Zweite werden und Rigo Dritter.
(3) Mario wird den zweiten Platz und Rigo den vierten belegen.
(4) Keine zwei Schüler werden auf den gleichen Platz kommen.
Nach Abschluß der Schulolympiade stellt sich heraus, daß die Aussage (4) wahr ist und daß in den Meinungen (1), (2) und (3) jeweils genau eine der beiden Aussagen wahr und die andere falsch ist.
Gib an, welcher Schüler hiernach welchen Platz bei der Schulolympiade belegt! Zeige, daß die von dir genannte Platzverteilung die Bedingungen der Aufgabe erfüllt!

280614 Die Treppe im Bild besteht aus vier Stufen. Um diese vierstufige Treppe hinaufzugehen, darf man jeweils mit einem Schritt entweder genau eine oder genau zwei Stufen nach oben steigen. (Eine hiernach mögliche Schrittfolge lautet z. B. 1, 3, 4.)



a) Gib für diese Treppe alle möglichen Schrittfolgen an!
Wieviel sind es insgesamt?
b) Gib für eine dreistufige Treppe alle möglichen Schrittfolgen an, ebenso für eine zweistufige Treppe und für eine einstufige Treppe!
c) Jemand behauptet: „Man kann die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine vierstufige Treppe durch eine einfache Rechnung finden, wenn man die Anzahl

aller möglichen Schrittfolgen für eine dreistufige Treppe und die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine zweistufige Treppe kennt."
Gib eine solche einfache Rechnung an! Schreibe sie in Form einer Gleichung!
d) Schreibe entsprechend eine Gleichung, mit der sich die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine dreistufige Treppe aus den entsprechenden Anzahlen für eine zweistufige und für eine einstufige berechnen läßt!
e) Wie kommt es, daß die in c) und d) gefundenen Beziehungen gelten?
f) Gib die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine fünfstufige und für eine sechsstufige Treppe an!

Olympiadeklasse 7

280711 Ein Spiel für zwei Mitspieler hat folgende Regel: Einer der beiden nennt eine beliebige einstellige Zahl. Der andere nennt eine größere natürliche Zahl, die jedoch höchstens um 10 größer sein darf als die vorhergenannte. So wechselt man ab. Gewonnen hat derjenige, der unter Beachtung der Spielregeln die Zahl 100 nennen kann.
a) Gibt es für den beginnenden Spieler eine Möglichkeit, das Spiel in jedem Fall zu gewinnen?
b) Gibt es aber auch einen Spielbeginn, der anschließend dem zweiten Spieler eine Möglichkeit gibt, das Spiel in jedem Fall zu gewinnen?

280712 Aus den Ziffern 1, 3, 4, 5, 7 und 9 sollen sechsstellige natürliche Zahlen gebildet werden, in denen jede dieser Ziffern genau einmal vorkommt.
a) Ermittle die Anzahl aller verschiedenen Zahlen, die auf diese Weise gebildet werden können!
b) Untersuche, welche von den auf diese Weise gebildeten Zahlen durch 18 teilbar sind!

280713 a) Zeichne ein Parallelogramm $ABCD$, in dem der Winkel $\sphericalangle DAB$ ein spitzer Winkel ist! Konstruiere das Lot von D auf die Gerade durch A und B; den Fußpunkt dieses Lotes bezeichne mit E! Konstruiere das Lot von B auf die Gerade durch C und D; den Fußpunkt dieses Lotes bezeichne mit F!
b) Beweise, daß in jedem solchen Parallelogramm $ABCD$ für die so konstruierten Punkte E, F

$\triangle AED \cong \triangle CFB$ gilt!

280714 Im Mathematikunterricht stellt der Lehrer die Aufgabe, die Seitenlängen eines gleichschenkligen Dreiecks ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ zu ermitteln, wenn vorausgesetzt ist, daß eine der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks den Dreiecksumfang derart teilt, daß der eine Teil 12 cm und der andere 9 cm beträgt.
Dazu äußern sich einzelne Schüler folgendermaßen:
Achim: „Die Aufgabe hat keine Lösung; denn die Seitenhalbierende eines gleichschenkligen Dreiecks ist Symmetrieachse und kann somit den Umfang nur in zwei gleich große Teile zerlegen."
Birgit: „Es gibt bis auf Kongruenz genau ein Dreieck, das die Forderungen der Aufgabenstellung erfüllt."
Claudia: „Die Aufgabe hat bis auf Kongruenz genau zwei (zueinander nicht kongruente) Lösungen."
Dorit: „Da man in ein Dreieck drei Seitenhalbierende einzeichnen kann, hat die Aufgabe mindestens drei zueinander nicht kongruente Lösungen."
Untersuche, wer von den vier Schülern recht hat, und begründe deine Feststellungen!

Olympiadeklasse 8

280811 In einem Kasten befinden sich 500 Kugellagerkugeln, die sich äußerlich nicht voneinander unterscheiden; 499 Kugeln haben untereinander die gleiche Größe und das gleiche Gewicht, eine einzige Kugel hat zwar die gleiche Größe wie jede der anderen Kugeln, ist aber leichter als sie. Es soll nun – mit Hilfe einer Balkenwaage, nur durch wiederholte Feststellung, ob Gleichgewicht zwischen zwei gleich großen Anzahlen dieser Kugeln besteht oder nicht – die leichtere Kugel ermittelt werden.
Zeige, daß sechs Wägungen hierfür in jedem Fall ausreichen, d. h.: Wie auch die Ergebnisse einer 1., 2., ..., 5. Wägung ausfallen mögen, stets soll man die nächste Wägung so durchführen können, daß nach der 6. Wägung die leichtere Kugel eindeutig ermittelt ist.

280812 Es sei M der Umkreismittelpunkt eines spitzwinkligen Dreiecks ABC. Die Größe des Winkels $\sphericalangle BAM$ betrage 40° und die des Winkels $\sphericalangle BCM$ sei 30°.
Ermittle aus diesen Angaben die Größe α, β, γ der drei Innenwinkel des Dreiecks ABC!

280813 Beweise die folgende Aussage!
Für je fünf unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gilt: Unter diesen fünf Zahlen gibt es stets genau eine, die durch 5 teilbar ist.

280814 Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Ferner sei P ein beliebiger im Innern dieses Dreiecks gelegener Punkt.
a) Konstruiere ein derartiges Dreieck!
b) Miß die Länge der von P auf die Seiten gefällten Lote, und vergleiche die Summe dieser Längen mit der Länge einer Höhe dieses Dreiecks! Was vermutest du?
c) Beweise deine Vermutung!
Hinweis: Es ist zweckmäßig, den Flächeninhalt geeigneter Teildreiecke zu betrachten.

Olympiadeklasse 9

280911 In ein Quadrat mit 4×4 Feldern sollen die Zahlen von 1 bis 16 so eingetragen werden, daß jede der Zahlen genau einmal auftritt und daß sich bei der Addition der Zahlen in jeder der vier Zeilen, der vier Spalten und der beiden Diagonalen jeweils dieselbe Summe ergibt.
Versuchen Sie, eine solche Eintragung zu finden!

280912 Gibt es eine rationale Zahl, aus der man nach dem Bilden des Reziproken und anschließendem Verdoppeln wieder die ursprüngliche rationale Zahl erhält?

280913 Beweisen Sie, daß in jedem Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} > \overline{BC}$ die Mittelsenkrechte auf der Diagonalen AC die Seite AB zwischen A und B schneidet!

280914 Drei Werkstücke W_1, W_2, W_3 durchlaufen eine Taktstraße mit vier Bearbeitungsmaschinen M_1, M_2, M_3, M_4. Dabei muß jedes Werkstück die Maschinen in der Reihenfolge M_1, M_2, M_3, M_4 durchlaufen, und an jeder Maschine soll die Reihenfolge der drei Werkstücke dieselbe sein.
Die Bearbeitungszeiten der Werkstücke auf den einzelnen Maschinen sind (in Stunden) in der folgenden Tabelle angegeben:

	M_1	M_2	M_3	M_4
W_1	4	1	2	1,5
W_2	2	2,5	1	0,5
W_3	2	3,5	1	1

Es können niemals zwei Werkstücke gleichzeitig auf derselben Maschine bearbeitet werden. Die Zeiten zum Wechseln der Werkstücke an den Maschinen seien so klein, daß sie vernachlässigt werden können.
Geben Sie eine Reihenfolge der drei Werkstücke für das Durchlaufen der Taktstraße so an, daß die Gesamtzeit (das ist die Zeit vom Eintritt des zuerst eingegebenen Werkstücks in die Maschine M_1 bis zum Austritt des zuletzt bearbeiteten Werkstücks aus der Maschine M_4) so klein wie möglich ist!
Zeigen Sie, daß die von Ihnen angegebene Reihenfolge mit ihrer Gesamtzeit die jeder anderen Reihenfolge unterbietet!

Olympiadeklasse 10

281011 a) Bernd hörte, daß der Mathematiker Leonhard Euler (1707 bis 1783) nachwies: Für jede ganze Zahl x mit $-40 < x < 41$ ist die Zahl $x^2 - x + 41$ eine Primzahl. Bernd wollte dies für mindestens zehn dieser Zahlen nachrechnen. Rechnen Sie dies ebenfalls für mindestens zehn dieser Zahlen nach!
b) Untersuchen Sie, ob sogar für jedes ganzzahlige x die Zahl
$x^2 - x + 41$ eine Primzahl ist!

281012 Antje will alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z ermitteln, die den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:
(1) die erste und die zweite Ziffer von z sind einander gleich.
(2) Die dritte und die vierte Ziffer von z sind einander gleich.
(3) Die Zahl z ist eine Quadratzahl.
Antje will diese Aufgabe lösen, ohne eine Zahlentafel, einen Taschenrechner oder einen anderen Rechner zu benutzen. Wie kann sie vorgehen?

Fortsetzung auf Seite 96

Karl-Weierstraß-Institut und Spezialschule „Heinrich Hertz“

Im Jahre 1986 beging die EOS *Heinrich Hertz* (Spezialschule mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Richtung) in Berlin ihren 25. Geburtstag. Blättern wir ein wenig in der Schulchronik: 1962 wurden die ersten mathematischen Spezialklassen gebildet. Seit 1963 findet der *Heinrich-Hertz*-Wettbewerb statt, ein Schülerwettstreit, bei dem Einzel- und Kollektivarbeiten angefertigt werden (Themen aus verschiedenen Wissenschaftsgebieten, Literaturarbeiten, Unterrichtsmittel, Aufträge aus Betrieben). Bei den *Internationalen Mathematikolympiaden* (IMO) erringen von 1964 bis 1985 insgesamt 14 Schüler der *H zwei O* erste bis dritte Preise. 1969 wird das Pflichtfach WpA (wissenschaftlich-praktische Arbeit) in den Klassenstufen 11 und 12 eingeführt. Gegenwärtig sind es mehr als 30 WpA-Gruppen (zu durchschnittlich je zwei bis drei Schülern), die in wöchentlichem bzw. 14tägigem Rhythmus in verschiedenen Institutionen und Betrieben der Hauptstadt betreut werden.

Der Autor dieser Zeilen leitet seit 1971 WpA-Gruppen im *Karl-Weierstraß*-Institut für Mathematik der *Akademie der Wissenschaften der DDR*.

Es soll im folgenden über diese Arbeit berichtet werden.

Eine Gruppe von vier bis sechs Schülern kommt einmal pro Woche in das Institut. Das Ziel des sich jeweils über ein Jahr erstreckenden Unterrichts besteht darin, grundlegende Kenntnisse auf solchen Gebieten zu vermitteln, auf denen im Institut eigene Forschungsarbeit geleistet wird (z. B. Zahlentheorie, Algebra, Algebraische Geometrie, Funktionentheorie). Besonderes Gewicht liegt dabei auf der Entwicklung und Förderung von schöpferischen Fähigkeiten. So tragen zunächst die Schüler ihre Lösungen der Aufgaben vor, die sie in der jeweils vorangegangenen Woche erhalten haben. In der Regel sind drei bis vier Aufgaben zu bearbeiten (am Schluß sind einige davon aufgeführt), die jeder Schüler aus einer größeren Anzahl selbst – je nach Neigung und Interesse – wählt. Einerseits macht es Freude eigene Ideen darzustellen, andererseits übt die Möglichkeit der Diskussion des Vorgetragenen die kritische Auseinandersetzung mit der betreffenden Thematik. Dieser erste Teil beansprucht etwa die Hälfte der auf drei Stunden bemessenen Zeit (außerdem werden die schriftlich festzuhaltenden Lösungen vom Leiter korrigiert). Hiernach schließt sich in der verbleibenden Zeit die Fortführung des Arbeitsthemas durch einen Vortrag des Leiters an. Gegen Ende des WpA-Jahres erhält jeder Schüler ein Thema, über das eine Arbeit unter Heranziehung wissenschaftlicher Originalarbeiten (darunter auch in russischer oder englischer Sprache) anzufertigen ist. Bei der Auswahl der Themen finden vor allem solche Berücksichtigung, die Ansatzpunkte für eigenes Forschen bieten. Den Abschluß bildet die Verteidigung der Ergebnisse durch Vorträge der einzelnen Schüler. An dieser Veranstaltung nehmen insbesondere auch Fachlehrer der *Heinrich-Hertz*-Oberschule und ehemalige WpA-Schüler teil.

Zur weiteren Intensivierung der Zusammenarbeit zwischen dem Institut und der Spezialschule ist 1986 ein Arbeitsplan für den Zeitraum bis 1990 vereinbart worden. So wird vom Institut ein Spezialunterricht in Mathematik durchgeführt, der im Rahmen des wahlweise obligatorischen Unterrichts stattfindet. Vorträge profilierter Wissenschaftler des Instituts sind als Beitrag zur Lehrerweiterbildung vorgesehen. Außerdem sollen Lehrer die Möglichkeit erhalten, an Kolloquien, Seminaren und anderen Veranstaltungen (wie dem Tag junger Wissenschaftler) teilzunehmen. Durch das Institut werden Studienförderungsvereinbarungen abgeschlossen (Durchführung von Praktika, Betreuung von Diplomarbeiten). Schließlich berichtet eine Ausstellung (im Institut und an der Schule) in regelmäßigen Abständen über die Zusammenarbeit, Ergebnisse und Leistungen der WpA-Gruppen.

Bei der Arbeit an dieser schönen und lohnenden Aufgabe konnte der Autor auch manchen Entwicklungsweg über die Schulzeit hinaus verfolgen. In den letzten Jahren gab es die ersten Promotionen ehemaliger Schüler. Einige haben inzwischen ihre Tätigkeit am *Karl-Weierstraß*-Institut aufgenommen.

Zum Abschluß sollen einige Aufgaben angeführt werden, die den Schülern meines ersten WpA-Kurses zu Beginn gestellt wurden.

Folgende Behauptungen sind zu beweisen:

▲1▲ Für alle reellen Zahlen $x \neq 0$ gilt $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geqq 3$.

▲2▲ Aus $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$ folgt $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqq \frac{1}{n}$ für beliebige reelle Zahlen a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

▲3▲ Für jede Primzahl $p \geqq 5$ läßt p^2 bei Division durch 24 den Rest 1.

▲4▲ Für jede natürliche Zahl n können Zähler und Nenner des Bruches $\frac{21n + 4}{14n + 3}$ nicht gekürzt werden.

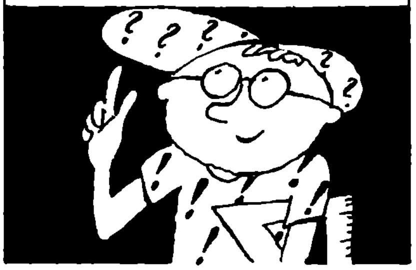
▲5▲ Die Summe von $2n + 1$ aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist durch $2n + 1$ teilbar (für jede natürliche Zahl n).

▲6▲ Unter $n + 1$ beliebig gewählten Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 2n - 1, 2n\}$ gibt es stets mindestens zwei, von denen eine ein Teiler der anderen ist (für jede natürliche Zahl n).

R. Bölling

Spezialschule *Heinrich Hertz*, Berlin

Lösungen



Lösungen zu:
7. Adam-Ries-Wettbewerb
Heft 2/88

▲1▲ a) Wegen 3,15 − 2,25 = 0,90 und 0,90 dt = 90 kg sammelte die Klasse 5b genau 90 kg Altstoff mehr als die Klasse 5a, wofür sie 2 250 Pfennige erhielt.
Wegen 2 250 : 90 = 25 kostete daher 1 kg dieses Altstoffes 25 Pfennige. Wegen 225 · 25 = 5 625 erhielt die Klasse 5a für 2,25 dt dieses Altstoffes daher M 56,25.
b) Wir nehmen an, daß Klasse 3 genau x kg Altpapier gesammelt hat. Nach Aufgabenstellung gilt dann:

Sammelergebnis in kg			
Klasse 3	$x +$		60
Klasse 4	$x +$	80	140
Klasse 5	$x + (x + 80) = 2 \cdot x +$	80	200
Klasse 6	$\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot x + 80) = x +$	40	100
zusammen	$5 \cdot x + 200$		500

Da die vier Klassen zusammen 500 kg Altpapier sammelten, muß $5 \cdot x + 200 = 500$ gelten. Hieraus folgt $x = 60$ (weil $5 \cdot 60 + 200 = 500$). Wegen $2 \cdot 60 + 80 = 200$ folgt hieraus, daß Klasse 5a genau 200 kg Altpapier, d. h. 2 dt Altpapier gesammelt hat.
(Berechnet man noch die Sammelergebnisse der anderen Klassen, dann kann man der so ergänzten Tabelle entnehmen, daß diese Lösung tatsächlich alle im Text genannten Bedingungen erfüllt.)

▲2▲ *Hinweis:* Bei derartigen Aufgaben ist es oft günstig, zunächst die Bedingung herauszufinden, die die kleinste Erfüllungsmenge besitzt; bei unserer Aufgabe ist dies die Bedingung (3). Aus dieser Erfüllungsmenge eliminiert man dann diejenigen Elemente, die eine der restlichen Bedingungen nicht erfüllen.

$z = \overline{ab}$	$\overline{ba}$	$3 \cdot \overline{ba}$	$a + b$
20	2	6	
31	13	39	
42	24	72	
53	35	105	8
64	46	138	10
75	57	171	12
86	68	204	
97	79	237	

Es gibt genau 8 zweistellige Zahlen $z = \overline{ab}$ mit den Ziffern a und b, die die Bedingung (3) erfüllen (vgl. Tabelle).
Unter den zugehörigen Zahlen der Gestalt $3 \cdot \overline{ba}$ (das ist das Dreifache der Zahl, die aus z durch Vertauschen der Ziffern entsteht) gibt es nur 3 Zahlen, die die Bedingung (2) erfüllen, nämlich 105, 138 und 171.
Also können nur die Zahlen 53, 64 und 75 die Bedingungen (2) und (3) erfüllen.
Betrachtet man deren Ziffernsumme $a + b$, dann erkennt man, daß nur die Zahlen 53 und 75 auch die Bedingung (1) und damit alle Bedingungen erfüllen können.
Die für diese Zahlen bereits durchgeführten Rechnungen zeigen, daß sie die Bedingungen (1), (2) und (3) tatsächlich erfüllen. Folglich sind die Zahlen 53 und 75 die einzigen Lösungen unserer Aufgabe.

▲3▲ a) Wir stellen fest, welche Arten von Quadraten mit unterschiedlichen Seitenlängen in der betreffenden Figur vorkommen, ermitteln dann jeweils deren Anzahl und erhalten die gesuchte Gesamtzahl als Summe dieser Anzahlen.
Folglich findet man in der Figur a2 genau 14, in der Figur a3 genau 30 Quadrate.

zu Figur a2

Seitenlänge des Quadrats	Anzahl der Quadrate
3	1
2	4
1	9
Gesamtanzahl	14

zu Figur a3

Seitenlänge des Quadrats	Anzahl der Quadrate
4	1
3	4
2	9
1	16
Gesamtanzahl	30

Wenn ein Quadrat die Seitenlänge n hat, dann findet man in ihm
$(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2)$ Quadrate.

b) Um die gesuchte Gesamtanzahl von Dreiecken zu erhalten, stellen wir zunächst fest, welche Arten von Dreiecken vorkommen (siehe Spalteneingänge der Tabelle). Dann bestimmen wir jeweils deren Anzahl und bestimmen die Summe dieser Anzahlen.
Da Figur b2 aus 4 Figuren b1 zusammengesetzt ist, enthält sie auch jeweils die vierfache Anzahl von Dreiecken der Gestalt d1 bzw. d2 wie Figur b1.
Figur b1 enthält jeweils genau 4 Dreiecke der Art d1 und d2. Analog findet man in Figur b2 jeweils 4 Dreiecke der Art d3 und d4. In Figur b2 gibt es allerdings noch vier weitere Dreiecke der Art d3 (eines davon wurde in Figur b2 grau markiert)! Also findet man in Figur b2 insgesamt 44 Dreiecke.
Bei analogem Vorgehen (vgl. Tabelle) findet man in Figur b3 insgesamt 124 Dreiecke.

Lösungen zu: Geschwindigkeiten in Natur und Technik
Heft 3/88

▲1▲ Das Umrechnungsverhältnis für Geschwindigkeiten von $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ist;

$1\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1\,000}{3\,600}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{10}{36}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ bzw.

$1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 3{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Der Hase hat demnach eine Geschwindigkeit von $11{,}11 \ldots \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Er kann in 10 s eine Strecke von rund 111 m zurücklegen.

▲2▲

Tier	$\frac{\text{km}}{\text{h}}$	$v_i : v_5$
Gepard	101	2,8
Antilope	97	2,7
Schildkröte	0,18	0,005
Schnecke	$5{,}76 \cdot 10^{-3}$	0,000 16
Mensch	36	1

▲3▲

Tier	$\frac{\text{km}}{\text{h}}$	$v_i : v_{10}$
Schwertfisch	133	18,5
Thunfisch	101	14
Delphin	90	12,5
Lederschildkröte	35	4,85
Freistilschwimmer	7,2	1

Arten von Dreiecken / Figur	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	Gesamtanzahl
b_1	4	4	0	0	0	0	8
b_2	4·4 = 16	4·4 = 16	4 + 4 = 8	4 = 4	0 = 0	0 = 0	44
b_3	9·4 = 36	9·4 = 36	4·8 − 8 = 24	4·4 = 16	4+4 = 8	4 = 4	124

▲4▲ $v_{15} = 980\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Tier	$\frac{\text{km}}{\text{h}}$	$v_i : v_{15}$
Mauersegler	288	0,082
Schwalbe	216	0,061
Brieftaube	68	0,019
Buchfink	194	0,055

Das Flugzeug erreicht eine Höchstgeschwindigkeit von $3\,528\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

▲5▲ Bei einer Geschwindigkeit von $a\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ist die prozentuale Steigerung bezüglich der Geschwindigkeit der Rocket-Lokomotive $x = \frac{100}{46}\,a$.

Versuchstriebwagen von 1903:	457 %
Dampflok BR 05	436 %
Superexpreßzug Japan	354 %
Superexpreß Höchstgeschwindigkeit	457 %
Superexpreß geplant	870 %
TGV Höchstgeschwindigkeit	826 %

Die Geschwindigkeit der Dampflok BR 05 war um rund 336 % höher als die der *Rokket*.

▲6▲ Der R 801 hat eine Reisezeit von 3 h und 46 min, d. h. 226 min. Seine Geschwindigkeit ist demnach

$v = \frac{742}{226}\cdot 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, also $v = 197\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Entsprechend ist für den R 815 die Reisestrecke 617 km und die Reisezeit 2 h und 54 min, das sind 174 min.

Folglich ist $v = 213\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Die Fahrzeit der *Rocket* berechnet man nach der Formel $t = \frac{s}{v}$ (s = Weg, v = Geschwindigkeit).

Damit wird $t = \frac{742}{46} = 16{,}13$ h.

Die Lokomotive *Rocket* würde als 16 h und 8 min benötigen.

▲7▲

Lipsia: $v = \frac{182}{136}\cdot 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ $\quad v = 80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Selketalbahn: $v = \frac{17{,}5\cdot 60}{75}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ $\quad v = 14\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Der Städteexpreß fährt 5,7 (also rund 6) mal schneller als die Selketalbahn.

Lösungen zu: Vier historische Mathematikaufgaben
Heft 3/88

Die Anzahl aller Primzahlen

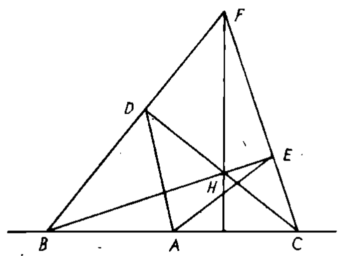
Mit $P = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot\ldots\cdot p$ hätten alle natürlichen Zahlen (außer 1) einen gemeinsamen Teiler größer als 1. Somit auch $P+1$. Andererseits ist $(P, P+1) = 1$.
(Aus $d \mid P$, $d \mid P+1$ folgt
$d \mid (P+1) - P$, d. h. $d \mid 1$, $d = 1$.)

Das Kästchenproblem

Nach Öffnen eines Schubfaches, welches eine Goldmünze enthält, hat man folgende drei gleichwahrscheinliche (gleichberechtigte) Fälle:
(1) Man hat das erste Schubfach im ersten Kästchen geöffnet.
(2) Man hat das zweite Schubfach im ersten Kästchen geöffnet.
(3) Man hat das Fach mit der Goldmünze im dritten Kästchen geöffnet.
Nur in einem dieser drei Fälle (nämlich im Fall (3)) ist im zweiten Schubfach des Kästchens eine Silbermünze, also die Wahrscheinlichkeit, daß sich im anderen Fach des ausgewählten Kästchens eine Silbermünze befindet, gleich $\frac{1}{3}$.

Der Streckenübertrager

Es sei A ein beliebiger Punkt der gegebenen Geraden, dann tragen wir von A aus auf dieser Geraden nach beiden Seiten hin zwei gleiche Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ ab (siehe Bild) und bestimmen dann auf zwei beliebigen anderen durch A gehenden Geraden die Punkte E und D, so daß auch die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{AE}$ den Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ gleich werden. Die Geraden BD und CE mögen sich in F, die Geraden BE und CD in H schneiden; dann ist FH die gesuchte Senkrechte. In der Tat: die Winkel $\sphericalangle BDC$ und $\sphericalangle BEC$ sind als Winkel im Halbkreis über BC Rechte, und daher steht nach dem Satze vom Höhenschnittpunkt eines Dreiecks (die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt!), auf das Dreieck BCF angewandt, auch FH auf BC senkrecht.



Die Russellsche Antinomie

Die meisten Mengen enthalten sich nicht selbst als Element. (Beispiel: Die Menge N der natürlichen Zahlen. Elemente von N sind die natürlichen Zahlen. N ist, da es keine natürliche Zahl ist, nicht als Element in N enthalten.)
Es sei M die Menge aller dieser Mengen, die sich selbst nicht als Element enthalten. Entweder enthält M sich selbst als Element oder nicht. Enthält M sich selbst als Element ($M \in M$), so kann M nicht zu M gehören (nach Definition von M), d. h. $M \notin M$. Enthält M sich nicht selbst als Element, dann gehört M aber zu M (nach Definition von M). Somit $M \in M$ genau dann, wenn $M \notin M$. Das ist ein Widerspruch!

Lösungen zu: Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen
Heft 3/88

▲1▲ 1^6 endet auf 1; 2^6 endet auf 4; 3^6 endet auf 9; 4^6 endet auf 6; 5^6 endet auf 5; 6^6 endet auf 6, also endet die angegebene Summe wegen
$1+4+9+6+5+6 = 31$ auf 1.

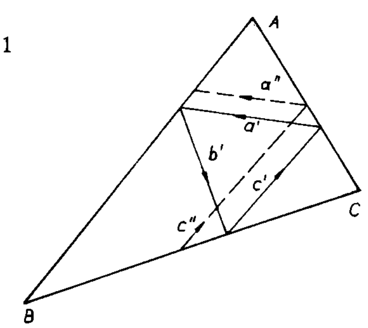
▲2▲ Für $n \geqq 2$ gilt $2^{2^n} = 2^4\cdot 2^{n-2} = 16^{2^{n-2}}$. Da jede Potenz von 16 mit 6 endet, ist die letzte Ziffer von 2^{2^n} im Falle $n \geqq 2$ stets die 6 und die von $2^{2^n}+1$ demzufolge die 7.

▲3▲ Die Zahl z ist das Produkt von acht Faktoren. Jeder dieser Faktoren ist eine Zahl der Form $100a + 76$, wobei a eine natürliche Zahl ist. Wegen
$(100a + 76)(100b + 76)$
$= 100\,(100ab + 76a + 76b + 57) + 76$
ist das Produkt je zweier Zahlen dieser Form wieder eine Zahl dieser Form. Daher gilt dasselbe für z, d. h., z endet auf 76.

Lösungen zu: Bemerkungen zu dem Artikel „Ein Brief G. Gentzens an seinen Großvater"
Heft 3/88

▲1▲ a) Konstruktion eines solchen Indreiecks
Gegeben denken wir uns das Dreieck $\triangle ABC$ mit den im mathematisch positiven Umlaufsinn orientierten Seiten $a = \overrightarrow{BC}$, $b = \overrightarrow{CA}$, $c = \overrightarrow{AB}$ sowie im Sinne der vorgegebenen Orientierung ein gleichseitiges Dreieck $\triangle A_0B_0C_0$.
Lege durch A_0, B_0 bzw. C_0 solche gleichorientierten Parallelen zu a, b und c, daß diese ein zu $\triangle ABC$ ähnliches und gleichorientiertes Umdreieck $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ zu $\triangle A_0B_0C_0$ bilden. Eine anschließende Ähnlichkeitstransformation führt $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ in $\triangle ABC$ über und $\triangle A_0B_0C_0$ in ein Indreieck $\triangle A'B'C'$ der gesuchten Art.
b) Eindeutigkeit des gleichseitigen Indreiecks
Gäbe es zwei Lösungen der gestellten Aufgabe, also zwei gleichseitige Indreiecke vorgegebener Orientierung, so müßten deren Seiten a', b', c' bzw. a'', b'', c'' paarweise parallel und gleichorientiert sein. Da beide Indreiecke aber verschieden sind, müssen die Seitenlängen eines dieser Seitenpaare verschieden sein, z. B. $a'' < a'$. Das hat gemäß Bild 1 notwendig $c'' > c'$ zur Folge. Das widerspricht aber der geforderten Gleichheit $a' = b' = c'$ und $a'' = b'' = c''$. Somit kann es nicht zwei verschiedene gleichseitige Indreiecke geben.

Bild 1



▲2▲ Wir denken uns das Dreieck $\triangle ABC$ mit den Innenwinkeln α, β und γ gegeben. Nun zeichnen wir irgendein gleichseitiges Dreieck $\triangle A_0B_0C_0$ und über seinen Seiten als Sehnen Kreisbögen mit den Peripheriewinkeln $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ bzw. $\bar{\gamma}$ (Bild 2). Dabei ist
$\bar{\alpha} = 180° - \alpha$, $\bar{\beta} = 180° - \beta$,
$\bar{\gamma} = 180° - \gamma$.
Nach dem Satz vom Peripheriewinkel

schneiden sich diese drei Kreisbögen in einem gemeinsamen Punkt $\bar{O}$, da $\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\bar{\gamma}=360°$ beträgt. Lege weiterhin durch A_0, B_0 und C_0 die Senkrechten zu den Strecken $\bar{O}A_0$, $\bar{O}B_0$ und $\bar{O}C_0$. Diese bilden dann mit ihren Schnittpunkten $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ ein zu $\triangle ABC$ ähnliches Dreieck $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, da seine Innenwinkel α, β und γ sind. Eine anschließende Ähnlichkeitstransformation werde so ausgeführt, daß $\bar{A}$ in A, $\bar{B}$ in B und $\bar{C}$ in C übergeht. Dabei wird $\bar{O}$ in den gesuchten Punkt O übergeführt und die Strecken $\bar{O}A_0$, $\bar{O}B_0$ und $\bar{O}C_0$ ergeben als Bild die gesuchten Lote l_a, l_b und l_c.

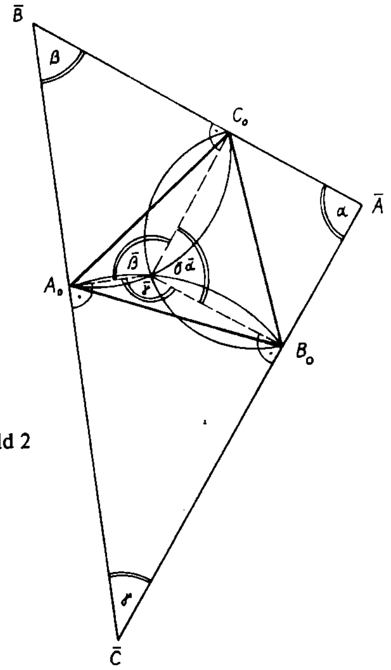


Bild 2

Lösung zu: Visuelle Logik
Heft 3/88

Die Zeichen und Buchstaben sind die verschlüsselten Zahlen 1, 2, 3, 6 und 7. Gleiche Zeichen und gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Zahlen.
Das Produkt der deckungsgleich waagerecht und senkrecht sich gegenüberliegenden Werte ergibt immer 42. Die gesuchte Zahl ist also 42.

Lösungen zu: Flächenberechnung bei Dreiecken mit dem SR 1

▲1▲ Es ist $a = 13$, $b = 14$ und $c = 15$.
Aus $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$
und $A = \frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma$ folgt $A = 84$.

Ein Programmablaufplan ist
a $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ b $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ c $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$
$\boxed{\div}$ a $\boxed{\div}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{x}$ a $\boxed{x}$
b $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$

▲2▲ a $\boxed{+}$ b $\boxed{+}$ c $\boxed{-}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$
$\boxed{=}$ $\boxed{x\to M}$ $\boxed{x}$ a $\boxed{+/-}$ $\boxed{M+}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{x}$ a
$\boxed{M+}$ b $\boxed{+/-}$ $\boxed{M+}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{x}$ b $\boxed{M+}$ c
$\boxed{+/-}$ $\boxed{M+}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{}}$

▲3▲ a $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ b $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ c $\boxed{x^2}$
$\boxed{=}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{x\to M}$ $\boxed{2}$ $\boxed{x}$ a $\boxed{x}$ b
$\boxed{=}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$

An den Stellen a, b, ... ist die jeweilige Zahl in den SR 1 einzugeben. $\boxed{F}$ $\boxed{\cos}$ bedeutet arccos, damit wird gerade γ ermittelt.

▲4▲ 1320

▲5▲ $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

Lösung zu:
Eine historische Aufgabe

Son Heynrich legt am Tag 10 Meilen zurück, Contz von Treber 13 Meilen. Son Heynrich startet 9 Tage vor Contz von Treber. Er hat damit einen Vorsprung von 90 Meilen. Wir nehmen an, daß sich beide n Tage nach dem Abmarsch von Contz treffen. Dann haben Son Heynrich bzw. Contz von Treber $10n$ bzw. $13n$ Meilen zurückgelegt bzw.
$90 + 10n = 13n$
oder $90 = 3n$
und $n = 30$.
Beide treffen sich 30 Tage nach dem Abmarsch von Contz.

Lösung zu:
Wo steckt der Fehler?
Heft 4/88

Die Antwort erfordert die Lösung der Frage für welchen Wert a gilt:
$a^2 + a = a^3$? Dividiere durch a.
Es folgt:
$$a^2 - a = 1 \text{ und } \left(a-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$
also:
$$a = \frac{1}{2}\left(1 - \pm\sqrt{5}\right) \text{ d. h.}$$
für den Wert $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
ist eine derartig absurde Rechnung tatsächlich möglich!
mitgeteilt von Ing. A. Körner, Leipzig

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Es seien x und y ganze Zahlen und s ist ihre Summe, d ihre Differenz und p ihr Produkt. Es ist zu zeigen, daß das Produkt von s, d und p immer ein Vielfaches von 6 ist.
Beachte: Das Produkt dreier aufeinanderfolgender Zahlen ist durch 6 teilbar.
Lösung:
$$\begin{aligned} s &= x+y;\ d = x-y;\ p = xy; \\ sdp &= (x+y)(x-y)xy \\ &= (x^2-y^2)xy \\ &= [(x^2-1)+1-(y^2-1)-1]xy \\ &= [(x-1)(x+1)-(y-1)(y+1)]xy \\ &= y(x-1)x(x+1)-(y-1)y(y+1) \end{aligned}$$

▲2▲ Die Masse des Eiffelturms beträgt 8200 t. Berechne das Volumen des Stahls, den man zu seiner Konstruktion benötigte!
Die Dichte von Stahl ist $7{,}8\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$.

Lösung: $V = \frac{m}{\varrho}$; $V = 1050\ \text{m}^3$.
Das Volumen des verwendeten Stahls beträgt $1050\ \text{m}^3$.

▲3▲ In einem Haufen befinden sich 1001 Steine. Er wird beliebig in zwei Haufen geteilt, die Anzahl der Steine in jedem von ihnen wird gezählt und das Produkt der beiden Zahlen aufgeschrieben. Danach wird mit einem der beiden Haufen (in dem sich mehr als ein Stein befindet) die gleiche Operation durchgeführt: Er wird in zwei Haufen geteilt, und die Anzahl der Steine in beiden neugebildeten Haufen miteinander multipliziert wird aufgeschrieben. Dann wird die Operation mit einem der drei erhaltenen Haufen wiederholt usw., bis jeder Haufen nur noch aus einem Stein besteht. Wie lautet die Summe der aufgeschriebenen Produkte? Warum?
Lösung: Wir stellen uns vor, daß am Anfang alle Steine paarweise durch je eine Schnur verbunden sind. Wenn wir einen Haufen mit mehr als einem Stein in zwei Haufen teilen, so zerschneiden wir jeweils alle Schnüre, die die zwei neu gebildeten Haufen verbinden. Ihre Anzahl ist gleich dem Produkt der Steineanzahlen in jedem der beiden betrachteten Haufen. Am Ende unseres Prozesses sind alle Schnüre zerschnitten. Wieviele waren es am Anfang?
Es waren
$$\sum_{n=1}^{1000} n = 1+2+3+\ldots+1000$$
$$=(1000\cdot 1001)\cdot\frac{1}{2} = 500500.$$
Man kann auch einen Induktionsbeweis dieser Formel führen.

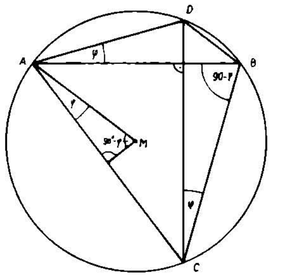
▲4▲ Die Zahl der Katzen in Randwick ist ein Drittel einer Quadratzahl. Wenn ein Drittel herumstreift, ist genau die dritte Potenz immer zu Hause. Wieviel Katzen muß es mindestens geben?
Lösung: Es sei x die Zahl der Katzen. Aus dem Gedicht entnehmen wir:
$x = \frac{1}{3}y^2$ und $\frac{3}{4}x = z^3$ und $\frac{1}{4}y^2 = z^3$.
y und z sind ganze Zahlen. Daraus folgt: y ist teilbar durch 3 und 2 und folglich durch 6. Wir setzen $y = 6w$, wobei w eine ganze Zahl ist, dann gilt $9w^2 = z^3$. Die kleinste Zahl, die diese Gleichung erfüllt, ist $z = 9$ (mit $w = 9$) und folglich ist $y = 54$ und $x = 972$. Es muß mindestens 972 Katzen geben.

Lösungen zu: Mathematikolympiaden in der VR Moçambique

▲1▲ a) Angenommen, es nahmen x Schüler an dem Schachturnier teil. Jeder der x Schüler spielte gegen $(x-1)$ Schüler. Das würde $x(x-1)$ Spiele ergeben. Da die Spiele A gegen B und B gegen A als nur ein Spiel rechnen, gilt für die Anzahl der Spiele
$\frac{1}{2}\cdot x\cdot(x-1) = 28$,
$x\cdot(x-1) = 56 = 8\cdot 7$, also $x = 8$.
An diesem Turnier nahmen 8 Schüler teil.
b) Die Überlegungen zur Aufgabe 1a) führen zu folgender Rechnung:
$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 9 = y$, also $y = 45$. Es mußten 45 Spiele ausgetragen werden.

▲2▲ Wegen (1) wohnt Angelo nicht in Nampula. Wegen (3) wohnt Angelo nicht in Lichinga. Folglich wohnt Angelo in Inhambane. Wegen (2) wohnt Lucas nicht in Nampula. Folglich wohnt Lucas in Lichinga. Somit wohnt Mario in Nampula.

▲3▲ Das Lot von M auf $\overline{AC}$ habe den Fußpunkt E; der Winkel MAE habe die Größe φ, der Winkel EMA somit die Größe



$90° - \varphi$. Der Peripheriewinkel ABC ist so groß wie der halbe Zentriwinkel EMA; er hat somit ebenfalls die Größe $90° - \varphi$. Der Winkel BCD hat deshalb die Größe φ. Der Peripheriewinkel DAB steht mit dem Peripheriewinkel BCD über der gleichen Sehne $\overline{BD}$. Deshalb hat er die Größe φ. Folglich sind die Winkel $\sphericalangle DAB$ und $\sphericalangle MAC$ einander kongruent. Fortsetzung in 5/88

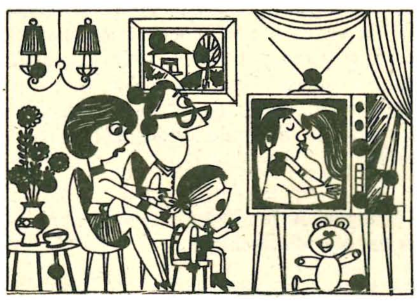
Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Eine Gleichung, die den Kopfstand verträgt

Peter hat eine der folgenden fünf Aufgaben aufgeschrieben.

$6 + 99 + 9 \cdot 66 = 699$
$9 + 66 + 6 \cdot 99 = 669$
$6 + 99 + 6 \cdot 99 = 699$
$9 + 66 + 9 \cdot 66 = 669$
$8 + 96 + 8 \cdot 88 = 808$

Fehler gesucht



Mathematische Faltarbeit

Es gibt 19 zulässige Möglichkeiten des Zusammenfaltens. Dabei befinden sich die Quadrate mit den Nummern 1 bis 7 in einer der 10 angegebenen Anordnungen. Das Quadrat mit der Nummer 8 befindet sich jeweils an einer der durch einen Stern markierten Stellen:

4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	1	1	5	2	5	3	5	3	3
6	5	2	6	1	6	*	6	*	*
1	6	3	2	3	3	1	3	2	2
2	2	*	1	*	*	2	*	5	1
3	3	5	3	5	1	*	2	6	*
*	*	6	*	6	2	5	1	1	5
7	7	*	7	*	*	6	*	*	6
		7		7	7	*	7	7	*
						7			7

Zoo-Logisches

$$\begin{array}{ccccc} 20 & + & 10 & = & 30 \\ \times & & \times & & \times \\ 10 & - & 5 & = & 5 \\ \hline 200 & - & 50 & = & 150 \end{array}$$

Geburtsjahre

A_w und G_w findet man leicht mit Hilfe der Titelseite *alpha* bzw. der diesjährigen OJM.

A 1	9	6	B 7	■
3	■	■	1	■
C 2	D 3	■	E 5	F 4
■	8	■	■	9
■	G 1	9	6	1

Wo sind sie zu Hause?

Jacob	Gilles	Guillaume
Quentin	Martin	Clément
Renaud	Malcolm	Romuald

Fortsetzung von Seite 91

281013 Gegeben sei eine regelmäßige, fünfseitige, gerade Pyramide P mit der Höhenlänge $h = 10$ cm. Durch einen ebenen Schnitt, der parallel zur Grundfläche verläuft, soll von dieser Pyramide eine wiederum regelmäßige, fünfseitige und gerade Pyramide P^* abgetragen werden, deren Volumen V^* ein Drittel des Volumen V der ursprünglichen Pyramide P ist.

Wie groß ist die Höhenlänge h^* dieser abgetrennten Pyramide P^*?

Hinweis: Schätzen Sie vor der Berechnung das zu erwartende Ergebnis! Wird es

a) zwischen 2 cm und 4 cm,
b) zwischen 4 cm und 6 cm,
c) zwischen 6 cm und 8 cm,
d) zwischen 8 cm und 9 cm liegen?

281014 Wenn Frank große natürliche Zahlen auf ihre Teilbarkeit durch 7 untersucht, geht er folgendermaßen vor: Von rechts beginnend teilt er die Zahl in Gruppen zu je drei Ziffern ein. (Damit auch die links stehende Gruppe aus drei Ziffern besteht, wird sie nötigenfalls durch Davorsetzen von einer oder zwei Ziffern 0 ergänzt.)

In jeder Gruppe addiert Frank zur rechts stehenden Ziffer das Dreifache der mittleren und das Doppelte der linken Ziffer. So erhält er *Gruppensummen*; diese versieht er (von rechts beginnend) abwechselnd mit den Vorzeichen + und −. Schließlich addiert er alle so abgewandelten *Gruppensummen* und erhält damit eine *Gesamtsumme*. Diese kann man leicht auf ihre Teilbarkeit durch 7 überprüfen.

1. Beispiel: Zu untersuchen sei die Zahl 45 893 127, in Gruppen 045 893 127.

Die Gruppe 127 hat die Gruppensumme
$7 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 15$,
die Gruppe 893 hat die Gruppensumme
$3 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 8 = 46$,
die Gruppe 045 hat die Gruppensumme
$5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 17$.
Als Gesamtsumme ergibt sich die Zahl
$+15 - 46 + 17 = -14$;
diese ist durch 7 teilbar.

2. Beispiel: Zu der Zahl 45 693 127 findet man entsprechend die Gesamtsumme
$+15 - 42 + 17 = -10$; diese ist nicht durch 7 teilbar.

Frank sagt nun, bei seinem Verfahren gelte stets: Genau dann, wenn die Gesamtsumme durch 7 teilbar ist, ist es auch die ursprüngliche Zahl.

Beweisen Sie diese Aussage!

Olympiadeklassen 11/12

281211 Ein Arbeitskollektiv will sich gemeinsam am Tele-Lotto 5 aus 35 beteiligen. Die Kollegen A, B, C werden mit der Auswahl der Zahlen auf den abzugebenden Tipscheinen beauftragt. Bei ihrer Beratung, welche Tips sie zusammenstellen wollen, stellt jeder der drei Kollegen bestimmte Forderungen. So verlangt A, daß jeder Tip drei Primzahlen enthält, deren Summe 42 ist.

B fordert, daß jeder Tip drei Zahlen enthält, deren Produkt das 33fache ihrer Summe ist.

C erwartet, daß jeder Tip zwei Zahlen enthält, die keine Primzahlen sind.

Man ermittle alle diejenigen Tips, die die Forderungen aller drei Kollegen erfüllen.

281212 Man untersuche, ob es rechtwinklige Dreiecke ABC mit dem rechten Winkel bei C gibt, in denen die Seitenlängen

$a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$ in dieser Reihenfolge

a) eine geometrische Folge,
b) eine arithmetische Folge bilden.

Falls es solche Dreiecke gibt, ermittle man jeweils in Abhängigkeit von a alle diejenigen Seitenlängen b, c, für die die geforderte Eigenschaft vorliegt.

281213 a) Man gebe zwei Quadrupel (x, y, z, u) reeller Zahlen an, die das folgende Gleichungssystem (1) bis (4) erfüllen.

b) Man ermittle ein Quadrupel (x, y, z, u) ganzer Zahlen so, daß eine der Variablen x, y, z, u den Wert 1988 besitzt und das Gleichungssystem (1) bis (4) erfüllt wird.

(1) $1x + 9y + 8z + 8u = 1$
(2) $9x + 9y + 24z + 24u = 9$
(3) $8x - 13y + 8z + 7u = 8$
(4) $8x - 21y - 10z + 8u = 8$

281214 Im Überseehafen Rostock wird eine Stückgutsendung erwartet. Über sie ist nur bekannt, daß die beiden folgenden Bedingungen (1), (2) eingehalten sind:

(1) Die Gesamtmasse aller Stücke der Sendung beträgt 10 t.
(2) Die Masse jedes einzelnen Stücks ist nicht größer als 1 t.

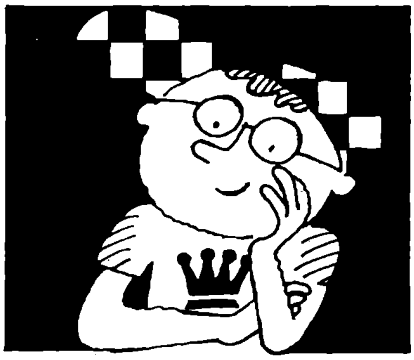
Zum Transport stehen Lastkraftwagen (LKW) mit einer Tragfähigkeit von je 3 t zur Verfügung.

Man untersuche, ob für jede Stückgutsendung, die die Bedingungen (1), (2) einhält, eine einmalige Fahrt von

a) 5 LKW, b) 4 LKW, c) 3 LKW

zum Abtransport der Sendung ausreicht.

Dabei sei angenommen, daß sich Stückgüter von insgesamt 3 t jeweils auch auf einem LKW unterbringen lassen.



Reizvolle Schachknobelei

Der 5. alpha-Schachwettbewerb vermittelte wiederum vielen Teilnehmern Freude und Begeisterung an der unermeßlichen Schönheit des Schachs. Die Vermischung von Elementen der Kunst, des Sports und des Rätsels in den gestellten Schachaufgaben fasziniert viele Leser immer wieder aufs Neue. „Diese Aufgaben haben mich sehr angeregt, mich mit dem königlichen Spiel mehr zu befassen“ (Luis Urbina, Leipzig), „die Knobeleien waren in der Tat wieder reizvoll“ (F. Fiedler, Mügeln), „für jeden etwas und somit eine echte Werbung für das Schachspiel“ (E. Bösenberg, Töppeln) und „das Knobeln nach den richtigen Lösungen hat wieder viel Spaß gemacht“ (T. Mautsch, Duben).
Welche Faszination vom Schachspiel ausgeht, zeigt auch das breite Altersspektrum der Teilnehmer. Zu den jüngsten Teilnehmern zählten Roland Voigt (Böhlen), Daniela Manthey (Oranienburg) und Andreas Jähnlich (Weißwasser) mit 6 bzw. 7 Jahren. Als älteste Teilnehmer sind Hilde Espig (Karl-Marx-Stadt), Elisabeth Möller (Bad Kösen) und Fritz Rauhe (Wendgräben) mit 82 bzw. 83 Jahren zu nennen.
Allen Teilnehmern ein herzliches Dankeschön fürs Mitmachen!

Lösungen

▲1▲ 1. Kf7 Kh7
2. Dh4 matt (1 P.).
Die Lösung zu dieser Aufgabe von J. Kotrc aus *Die Schachpartie* (1920) wurde von fast allen Einsendern gefunden.

▲2▲ 1. Te8 (droht 2. D:f8 matt)
1. ... D:e8/De7
2. Sf6/S:e7 matt (2 P.).
Ein verblüffend schnelles Matt!

▲3▲ Sh8 (droht 2. Dh7 matt)
1. ... Te8/Tf7
2. Df7/D:f7 matt (2 P.).

▲4▲ 1. Dh7+ K:h7
2. Sf6++ (Doppelschach von Sf6 und Ld3)
2. ... Kh8
3. Sg6 matt (3 P.).

▲5▲ 1. Sd8 (droht 2. D:f7 matt und 2. Te8 matt)
1. ... De6
2. D:e6+ Kf8
3. Df7 oder De8 matt (1 P.).
1. ... T:d8
2. D:d8+ Df8
3. Dd5+ Df7
4. Te8 matt (3 P.).
Der elegante Schlüsselzug 1. Sd8 unterbricht die Wirkungskraft des Turmes a8 und lenkt gleichzeitig die schwarze Dame vom Feld f7 ab.

▲6▲ 1. Sg7–f5 (droht 2. Td4 matt)
1. ... L:f5
2. L:f5 matt (2 P.).
1. ... Lf6
2. Sg3 matt (2 P.).
1. ... Sb3/Sc6+
2. Lc6/L:c6 matt (2 P.).
Bei dieser Aufgabe von Harald Dieffenbach („Schach“, 1980) wurden zahlreiche Löser durch eine der mehreren vorhandenen Verführungsvarianten zu der Angabe einer falschen Lösung verleitet.
Die vermeintlichen Schlüsselzüge
1. Sg4/Sd1/Sf1/Se6/Sef5/Sd5
werden jeweils durch
1. ... Lg6/Le1/Le1/Le7/Lf2/Sc6+
widerlegt.
Für die richtige Lösung war es erforderlich, das Ausgangsfeld des gezogenen Springers anzugeben. Denn sowohl der Springer auf e3 als auch der auf g7 können im 1. Zug nach dem Feld f5 gezogen werden, aber nur der Springerzug von g7 nach f5 führt zum zweizügigen Matt.

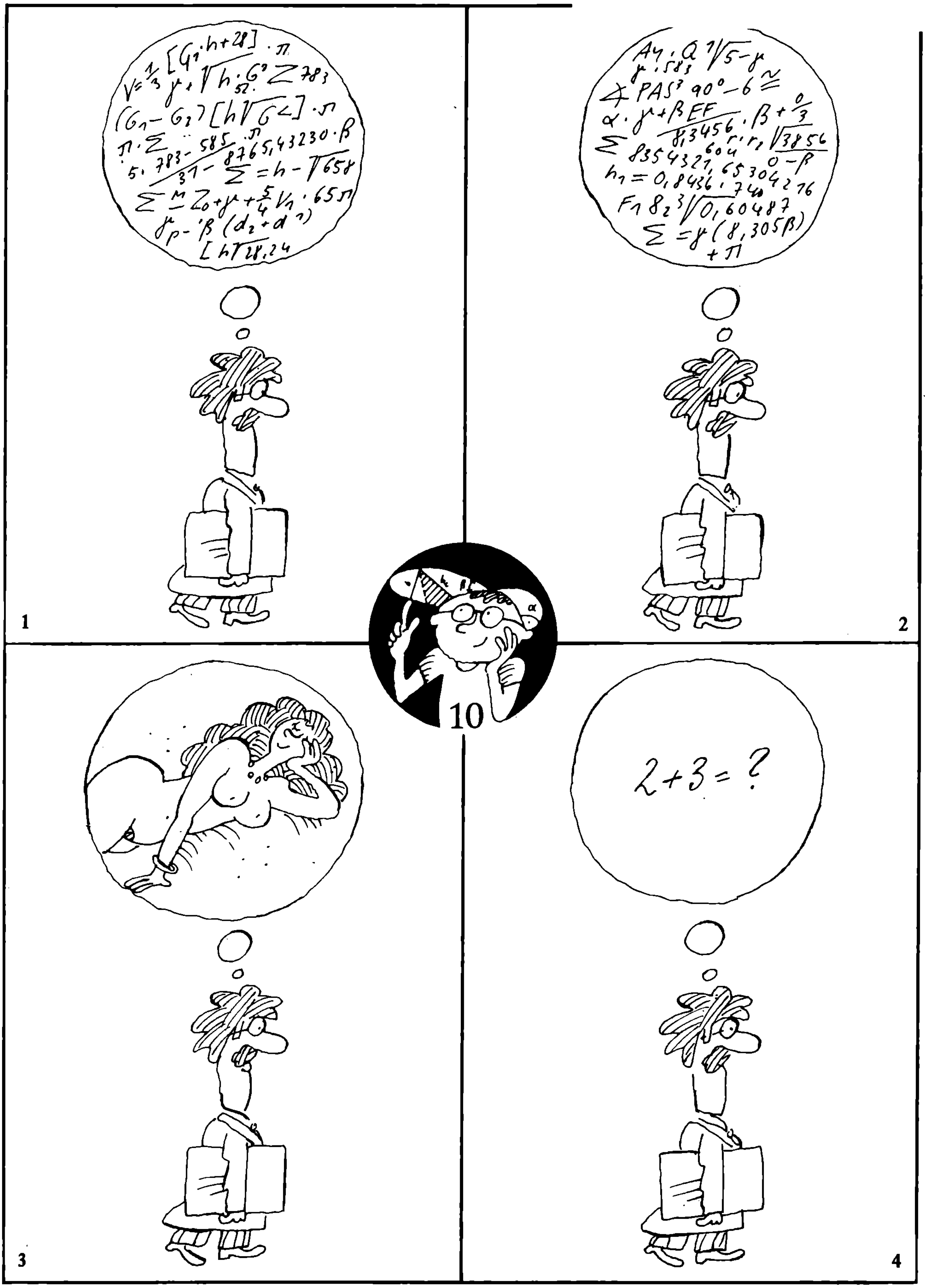
▲7▲ 1. Th2 K:a4
2. Lc6+ K:a3/Ka5
3. Lc5/Th5 matt (6 P.).
In dieser Aufgabe von William A. Shinkman (*Checkmate*, 1903) wurde der paradoxe königsferne Hinterstellungszug 1. Th2, welcher die spätere Flucht des schwarzen Königs auf die 2. Reihe vereitelt, von mehreren Teilnehmern nicht als Schlüsselzug für die richtige Lösung erkannt. Der Versuch 1. Th5+ K:a4 2. Kc3 führt nach 2. ... a5 nicht zum Matt im 3. Zug, ebenso nicht
1. Lg3 Kb6 2. Tb4+ nach 2. ... Kc5.

▲8▲ 1. Se2+ Kf2
2. Sf4+ Ke3, Ke1/Kg3, Kg1
3. De2/Dg2 matt.
2. ... K:f3/Kf1
3. De2+/De2+ Kg3/Kg1.
4. Dg2/Dg2 matt.
1. ... Kg2
2. Sf4+ Kg3, Kg1, Kh1
3. Dg2 matt.
2. ... K:f3/Kf1
3. De2+/De2+ Kg3/Kg1
4. Dg2/Dg2 matt.
1. ... Kh2
2. Sf4+ Kh2 beliebig
3. Dg2 matt.
1. ... K:f3
2. Sg1+ Ke3/Kg4
3. De2/Dg6 matt.
2. ... Kg3 (Hauptvariante)
3. De2 Th2/Th1
4. Df3 matt/Df3+ Kh2
5. Df2 matt.
Mehrere Löser, die diese logische Miniatur von dem Karl-Marx-Städter Manfred Zukker richtig gelöst hatten, waren begeistert von dem Reiz dieser Aufgabe. „Diese Aufgabe verdient einen Schönheitspreis“ (G. Wuttig, Berlin). Die Aufgabe, die 1968 in der *Schwalbe* erschien, erhielt auch dort den 1. Preis.
Mit einer Lenkung wird in der Hauptvariante der weiße Bauer auf f3 beseitigt und nach 2. Sg1+ Kg3 die Ausgangsstellung ohne den Bauern f3 wieder erreicht. Nach 3. De2 gerät Schwarz in Zugzwang und wird musterhaft matt gesetzt.

Die bei den jeweiligen Aufgaben angegebene Punktzahl verdeutlicht ungefähr den steigenden Schwierigkeitsgrad und diente zur Auswertung der Lösungseinsendungen. Die volle Punktzahl erreichten 219 der insgesamt 446 Teilnehmer.
Unter den Einsendern, die die volle Punktzahl erzielten, sowie unter jenen bis zum Alter von 14 Jahren, welche die Aufgaben Nr. 1 bis 4 richtig gelöst hatten, wurden folgende Gewinner ermittelt:
Bernd Ballandt (Wittichenau),
Carsten Grau (Jena),
Stefanie Grunst (Plaue),
Michael Klimt (Erfurt)
und Stefan Warnest (Neuruppin).
Weiterhin wurden Preise unter allen Teilnehmern verlost, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst hatten:
Matthias Gutzeit (Dresden),
Lutz Häselbarth (Weimar),
Steffen Reymann (Wismar),
Karola Schulz (Schwerin)
und Karin Wingeyer (Zettlitz).
Die zwei Buchpreise für die Teilnehmer, welche alle Aufgaben einschließlich der Zusatzaufgabe korrekt gelöst hatten, gehen an:
Matthias Borchardt (Pasewalk)
und Karsten Thomaneck (Neubrandenburg).
Allen Gewinnern herzlichen Glückwunsch!

„Besten Dank, alpha, für dieses Schachvergnügen“ (F. Hoffmann, Weißenfels) und „für die wieder gelungene Auswahl origineller, pointierter Schachaufgaben in ausgewogener Schwierigkeit“ (K. Rubin, Berlin).
„Die Idee des alpha-Schachwettbewerbs finde ich ausgezeichnet. Ich hoffe, daß 1988 eine neue Schachknobelei in alpha zu finden ist“ (M. Ludwig, Plauen).
Der 6. alpha-Schachwettbewerb ist 1988 bereits im nächsten Heft (5/1988)! Alle alpha-Leser sind dazu wiederum herzlich aufgefordert, sich zu beteiligen!

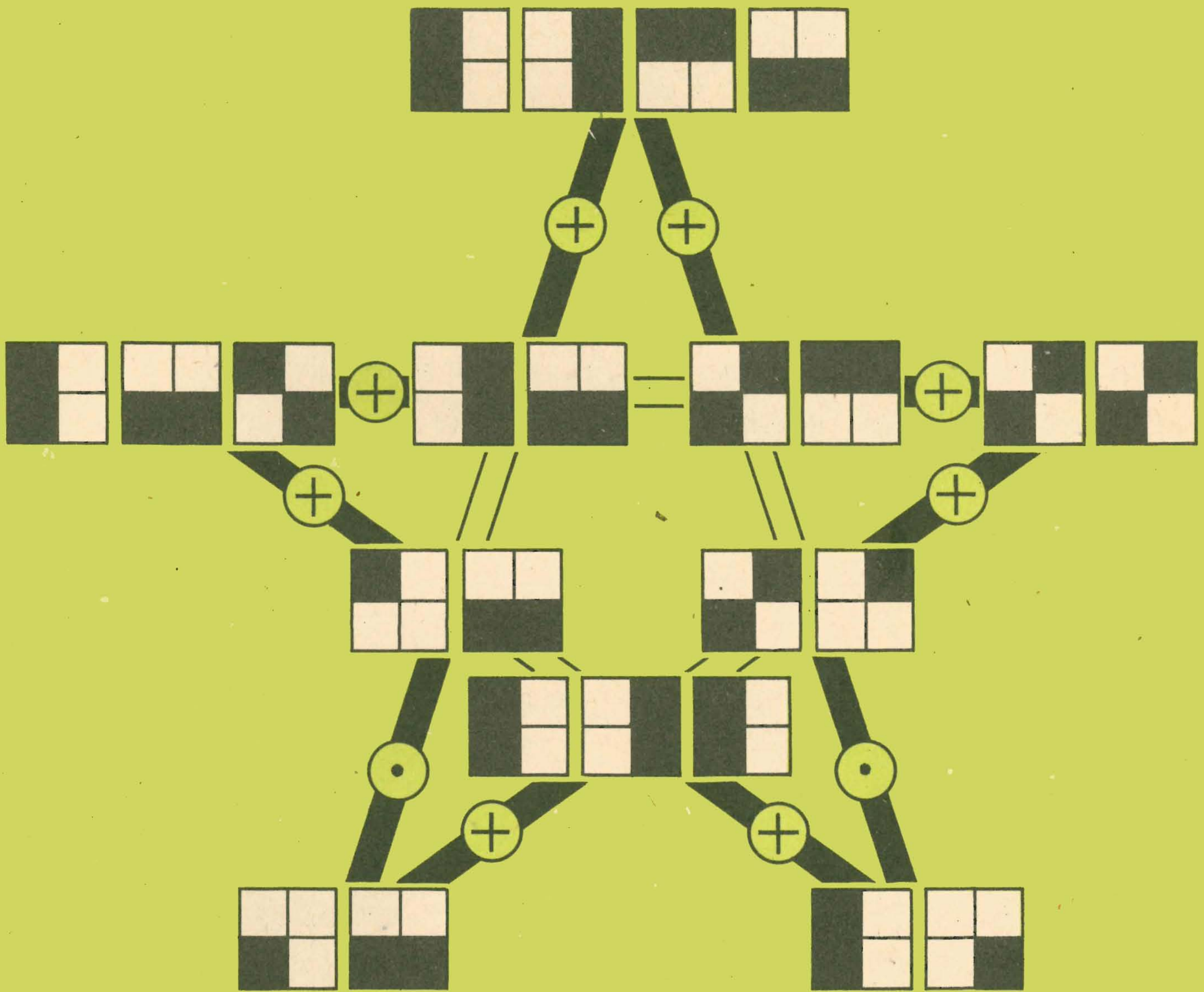
H. Rüdiger



ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 22 (1988) 4 · Seiten 73 bis 96

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



5

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
22. Jahrgang 1988
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold
Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Erscheinungsweise: zweimonatlich. Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.
Fotos: H. F. Bauch (S. 100); H.-J. Kerber (III. U.-Seite); G. Stelzer (IV. U.-Seite)
Vignetten: L. Otto (Titelvignetten)
Briefmarken: P. Schreiber (S. 97)
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage von W. Träger, Döbeln
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

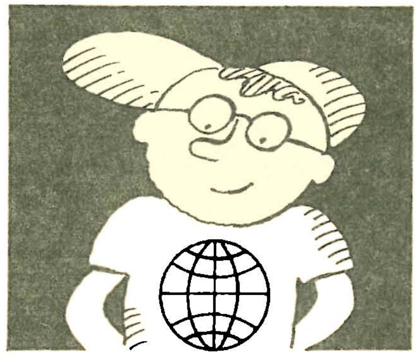
Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 13. Juni 1988
Auslieferungstermin: 11. Oktober 1988

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

125 Jahre jednota československych matematiků a fysiků



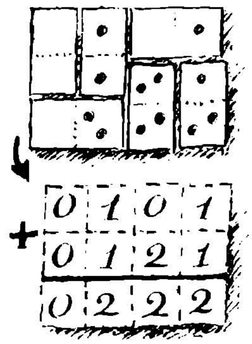
Die Gesellschaft der tschechoslowakischen Mathematiker und Physiker *Jčsm+f* beging 1987 ihr 125jähriges Bestehen. 1862 gegründet, gehört sie zu den ältesten nationalen Organisationen von Mathematikern, Physikern, Astronomen und verwandten Wissenschaftlern. (Die *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* DMV wurde z. B. erst 1890 gegründet, entsprechende Gesellschaften in Rußland 1864, in England 1865, in Frankreich 1872.)
Von den drei aus diesem Anlaß in der ČSSR erschienenen Briefmarken zeigt eine die Bildnisse der Professoren Jozef Maximilian Petzval (1807 bis 1891), Čeněk Strouhal (1850 bis 1922, Physiker an der Prager Karlsuniversität) und Vojtěch Jarník (1897 bis 1970, Mathematiker an der Karlsuniversität). Am bekanntesten von diesen ist außerhalb der ČSSR vermutlich der Mathematiker und Physiker Petzval, der an den Universitäten von Budapest und Wien wirkte und bei der Berechnung von Fotoobjektiven eine ähnliche Pionierrolle spielte wie der Jenaer Physiker Ernst Abbe (1840 bis 1905) bei der wissenschaftlichen Durchdringung der Mikroskopherstellung.

Insgesamt weisen die drei Marken eine Fülle interessanter Motive auf, u. a.
– das Hauptzifferblatt der berühmten astronomischen Uhr am Altstädter Rathaus in Prag, die im 15. Jh. von Meister Hanuš, Mathematiker an der Prager Universität, konstruiert wurde; nach langem Verfall wurde sie seit dem Ende des 18. Jh. mehrfach restauriert,,
– daneben das graphische Bild einer gewissen komplexwertigen Funktion, d. h. einer Funktion, die komplexen Zahlen komplexe Zahlen zuordnet und deren Definitionsbereich daher Teil einer Ebene ist. Die Darstellung des Funktionsverlaufes über dieser Ebene bezeichnet man auch als *analytische Landschaft*,
– eine Illustration über geometrische Konstruktionen im Gelände aus einem französischen Buch *Die Arbeiten des Mars* über Kriegsingenieurkunst von A. M. Mallet (um 1630 bis um 1706),
– die computergraphische Darstellung eines geowissenschaftlichen Sachverhaltes und die sogenannte Brownsche Molekularbewegung.

Professor Ivan Netuka, einer der Initiatoren dieser schönen Marken und selbst ein begeisterter Sammler *mathematischer Briefmarken*, äußerte in einem Gespräch, daß es natürlich immer sehr schwer ist, ein Postministerium für die Herausgabe solcher Marken zu gewinnen, deren Ausgabeanlaß und Motive nur einen sehr kleinen Teil der Postkunden und Philatelisten unmittelbar ansprechen. Als *Köder* dienten in diesem Fall die astronomische Uhr und die historische Illustration, die die Interessen vieler Sammler bedienen.

P. Schreiber

▲1▲ Из шести косточек домино выложен прямоугольник так, что ему соответствует пример на сложение (см. рисунок). Сложите из шести косточек домино (может быть, других) такой же прямоугольник так, чтобы сумма (т. е. число в нижней строчке) была наименьшей.



aus: Quant, Moskau

▲2▲ An Equitable Division
Two men sold their herd of x cows at x dollars per head.
With the proceeds they bought sheep at \$ 10 each and a single lamb costing less than \$ 10.
Each man received the same number of animals but the one receiving the lamb had to be compensated so as to make the division equitable.
How much money did he receive from the other man?

aus: The Australian Mathematic Teacher

▲3▲ Une barre de fer a pour section un T formé d'un rectangle de 4 cm sur 1,2 cm surmonté d'un rectangle de 6 cm sur 1,5 cm.
La longueur de la barre est 4 m. Calculer la masse de la barre.
Un décimètre cube de fer pèse 7,8 kg. *H.*

Aufgabe zum Titelblatt

Durch Ersetzen von gleichen Symbolen durch gleiche Ziffern und von verschiedenen Symbolen durch verschiedene Ziffern sollen an dem abgebildeten fünfzackigen Stern fünf wahre Gleichungen entstehen.

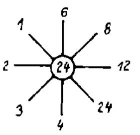
W. Träger, Döbeln

Von Teilern, Primzahlen und Primfaktorenzerlegungen

Dieser Beitrag ist insbesondere für Euch, liebe Schüler aus Klasse 6, gedacht. Ihr habt Euch zu Beginn des Schuljahres vor allem mit der Teilbarkeitslehre beschäftigt. Durch die folgenden Ausführungen könnt Ihr Euer Wissen und Können zur Teilbarkeit natürlicher Zahlen vertiefen und weiter vervollkommnen.

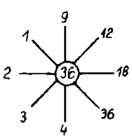
Wir wissen aus dem Mathematikunterricht, was *a ist ein Teiler von b* bedeutet und wie man rationell mit Hilfe eines gedachten *Teilersterns* alle Teiler einer gegebenen von Null verschiedenen natürlichen Zahl ermitteln kann:

a) Teiler von 24:



$24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$;
also sind 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 und 24 alle Teiler von 24.

b) Teiler von 36:



$36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9$
$= 6 \cdot 6$; also sind 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 und 36 alle Teiler von 36.

Daran wird deutlich, daß man für eine gegebene natürliche Zahl $z (\neq 0)$ eigentlich nur alle Teiler bis zu derjenigen Zahl finden muß, deren Quadrat höchstens gleich z ist: bei 24 also bis zum Teiler 4, da bereits 5^2 größer als 24 ist; bei 36 bis zum Teiler 6, da $6^2 = 36$ ist. Die übrigen Teiler ergeben sich gewissermaßen von selbst.

Wir wissen auch, was man unter einer Primzahl und einer zusammengesetzten Zahl versteht, daß 0 und 1 weder Primzahlen noch zusammengesetzte Zahlen sind und daß man jede zusammengesetzte Zahl in ein Produkt von Primzahlen (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutig zerlegen kann. Primzahlen können als *Bausteine* für die zusammengesetzten Zahlen angesehen werden. Dabei kann eine Primzahl auch mehrfacher *Baustein* sein, wie im Beispiel
$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ die Primzahl 2.

Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen

Um eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist, als eine Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl zu erkennen, muß man durch Probieren feststellen, ob sie außer 1 und sich selbst noch weitere Zahlen als Teiler hat. Es ist daher günstig, wenn man möglichst viele Primzahlen kennt oder zumindest weiß, wo man zum Beispiel alle Primzahlen bis 100, 1000, ... finden kann. Im *Tafelwerk für die 7. bis 10. Klasse* gibt es eine Tabelle mit allen Primzahlen bis 1009. Man kann sich eine solche Übersicht mit Hilfe eines sehr einfachen, wenn auch etwas schreibaufwendigen Verfahrens selbst herstellen. Dieses Verfahren nennt man nach einem griechischen Gelehrten des Altertums *Sieb des Eratosthenes*. Will man alle Primzahlen bis zu einer Zahl n ermitteln, schreibt man zunächst alle Zahlen von 2 bis n der Reihe nach auf. Man überlegt: Jede zweite Zahl nach der kleinsten Primzahl 2 ist ein Vielfaches von 2, kann also keine Primzahl sein; diese Zahlen werden gestrichen. Die nächste nicht gestrichene Zahl nach 2 muß eine Primzahl sein; es ist 3. Nun streicht man alle auf 3 folgenden Vielfachen von 3; sie sind keine Primzahlen. Die nächstgrößere nicht gestrichene Zahl muß wieder eine Primzahl sein; es ist 5. Dieses Verfahren wird nun solange fortgesetzt, bis man zu einer Primzahl gelangt, deren Quadrat größer als n ist. Dann kann man das Verfahren abbrechen, da nun nur noch Primzahlen übrig geblieben sein können.

Überlege einmal, warum dies so sein muß!

Für $n = 100$ kann man nach der Primzahl 7 bereits aufhören, da für die nächstgrößere nicht gestrichene Zahl, nämlich 11, bereits $11^2 = 121 > 100$ gilt. Für $n = 100$ würde sich (auszugsweise) ergeben:
2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, 11, ~~12~~, 13, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, ~~21~~, ~~22~~, 23, ~~24~~, ..., ~~28~~, 29, ~~30~~, 31, ~~32~~, ..., ~~36~~, 37, ~~38~~, ~~39~~, ~~40~~, 41, ~~42~~, 43, ~~44~~, ~~45~~, ~~46~~, 47, ~~48~~, ..., ~~52~~, 53, ~~54~~, ..., ~~58~~, 59, ~~60~~, 61, ~~62~~, ..., ~~66~~, 67, ~~68~~, ~~69~~, ~~70~~, 71, ~~72~~, 73, ~~74~~, ..., ~~78~~, 79, ~~80~~, ~~81~~, ~~82~~, 83, ~~84~~, ..., ~~88~~, 89, ~~90~~, ..., ~~96~~, 97, ~~98~~, ~~99~~, ~~100~~.

Man könnte nun denken, daß Primzahlen um so spärlicher auftreten, je weiter man die Folge der natürlichen Zahlen durchläuft, da ja mit der Größe einer Zahl auch die Anzahl ihrer *möglichen* Teiler wächst. Diese Vermutung ist im Prinzip richtig; dann aber ist es recht überraschend, daß die Folge der Primzahlen niemals abbricht:

Zu jeder Primzahl gibt es eine noch größere Primzahl.

Dies läßt sich leicht einsehen:
Wir nehmen an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen
$p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ..., p_k, und p_k wäre die größte dieser Primzahlen. Wir betrachten dann die Zahl
$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$, die größer als p_k und zugleich durch keine der Primzahlen p_1, p_2, ..., p_k teilbar ist. (Welcher Rest würde sich bei Division von a durch jede dieser Primzahlen ergeben?) Also muß a entweder selbst eine Primzahl sein, die größer als p_k ist, oder durch eine Primzahl teilbar sein, die von $p_1, p_2, \ldots, p_k$ verschieden, also ebenfalls größer als p_k sein muß. (Wer sich mit diesem Beweisgedanken noch etwas vertrauter machen will, sollte überprüfen, ob die Zahlen
$2 \cdot 3 + 1$, $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1$, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1$ Primzahlen sind oder wie sie sich zerlegen lassen!)
Das heißt: Es muß auf jeden Fall mindestens noch eine Primzahl geben, die größer als p_k ist. Dies steht jedoch im Widerspruch zu der Annahme, p_k sei bereits die größte Primzahl. Diese Begründung ist schon seit dem Altertum bekannt; sie stammt von dem berühmten griechischen Mathematiker Euklid.

An den Primzahlen bis 100 erkennt man bereits, daß sie in der Folge der natürlichen Zahlen recht unregelmäßig verteilt sind. Zwischen 3 und 5 oder 41 und 43 ist der Abstand gering; zwischen den benachbarten Primzahlen 23 und 29 oder 89 und 97 ist schon eine etwas größere Lücke. Man nennt Paare von Primzahlen, deren Differenz 2 beträgt, Primzahlzwillinge. Wer Lust hat, kann einmal alle Primzahlzwillinge bis 100 oder aus dem Tafelwerk bis 1000 heraussuchen. Das größte Primzahlzwillingspaar unterhalb von 10 000 ist 9929 und 9931. Man hat festgestellt, daß es bis zur Zahl 100 000 insgesamt 1125 solcher Paare gibt, zwischen 100 000 und 200 000 jedoch weniger als 1125. Vielleicht nimmt ihre Anzahl immer mehr ab, und es gibt ein letztes und damit größtes Primzahlzwillingspaar? Vermutlich existieren aber unendlich viele solcher Primzahlzwillinge; ein Beweis dafür ist aber bisher noch nicht gefunden worden. Leicht beweisen jedoch läßt sich, daß die Summe von zwei Primzahlen, die Primzahlzwillinge und größer als 3 sind, stets durch 12 teilbar ist. Versuch es einmal!

Der kleinstmögliche Abstand zwischen benachbarten Primzahlen, die größer als 2 sind, ist also 2. Hingegen gibt es keinen größtmöglichen Abstand benachbarter Primzahlen. Wir zeigen dazu, daß es benachbarte Primzahlen gibt, deren Differenz gleich einer beliebig groß vorgegebenen natürlichen Zahl ist. Mit anderen Worten: In der Folge der natürlichen Zahlen gibt es stets Abschnitte von beliebig vorgegebener Länge, die ausschließlich zusammengesetzte Zahlen enthalten. Man kann leicht zum Beispiel 13 aufeinanderfolgende zusammengesetzte Zahlen auf die folgende Weise angeben:

$2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14+2$
$(= 87\,178\,291\,202)$,
$2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14+3$
$(= 87\,178\,291\,203)$,
...
$2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14$
$+ 14\ (= 87\,178\,291\,214)$.
Diese 13 Zahlen sind als Summen geschrieben, wobei der jeweils erste Summand durch jede der Zahlen 2, 3, ..., 14 teilbar ist und der zweite Summand durch 2 bzw. 3 bzw. ... bzw. 14. Nach dem aus dem Unterricht bekannten Satz *Wenn $n|a$ und $n|b$, so $n|a+b$* muß also die erste der 13 Zahlen den Teiler 2, die zweite den Teiler 3, ..., die letzte den Teiler 14 haben. Diese 13 Zahlen folgen aufeinander und sind zusammengesetzte Zahlen. Sicher kannst du nun auch 20 (oder allgemeiner n) aufeinanderfolgende zusammengesetzte Zahlen angeben. Überlege dir, wie du sie bilden könntest! Auf diese Weise erhält man allerdings nicht unbedingt die kleinsten derartigen Zahlen. Zum Beispiel sind die zwischen den Primzahlen 113 und 127 oder 317 und 331 gelegenen 13 Zahlen ebenfalls sämtlich zusammengesetzte Zahlen.

Primfaktorenzerlegung und Teiler einer Zahl

Kennt man von einer zusammengesetzten Zahl deren (eindeutig bestimmte) Primfaktorenzerlegung, so kann man mit ihrer Hilfe ebenfalls alle Teiler dieser Zahl ermitteln. Wir wollen uns das an Beispielen verdeutlichen:
Wir betrachten zunächst nur Zahlen, deren Primfaktorenzerlegungen jeweils aus lauter paarweise verschiedenen Primzahlen bestehen.
a) Ist zum Beispiel $n_2 = 7\cdot13$, so hat n_2 (außer 1) die folgenden Teiler: Bei Berücksichtigung eines Faktors ergeben sich als Teiler 7 und 13, bei Berücksichtigung der beiden Faktoren die Zahl n_2 $(= 7\cdot13 = 91)$ selbst. Die Zahl n_2 hat also insgesamt $1+2+1$, also 4 Teiler.
b) Ist zum Beispiel $n_3 = 3\cdot5\cdot7$, so hat n_3 (außer 1) bei Berücksichtigung eines Faktors die drei Teiler 3, 5 und 7, von zwei Faktoren die drei Teiler $3\cdot5$, $3\cdot7$ und $5\cdot7$, von allen drei Faktoren die Zahl n_3 $(= 105)$ selbst. Sie hat also insgesamt $1+3+3+1$, also 8 Teiler.
c) Ist zum Beispiel $n_4 = 2\cdot3\cdot7\cdot11$, so hat n_4 (außer 1) bei Berücksichtigung eines Faktors die vier Teiler 2, 3, 7 und 11, zweier Faktoren die sechs Teiler
$2\cdot3\,(=6)$, $2\cdot7\,(=14)$,
$2\cdot11\,(=22)$, $3\cdot7\,(=21)$,
$3\cdot11\,(=33)$ und $7\cdot11\,(=77)$,
dreier Faktoren die vier Teiler
$2\cdot3\cdot7\,(=42)$, $2\cdot3\cdot11\,(=66)$,
$2\cdot7\cdot11\,(=154)$ und $3\cdot7\cdot11\,(=231)$, aller vier Faktoren die Zahl $n_4\,(=462)$ selbst als Teiler. Die Zahl n_4 hat also insgesamt $1+4+6+4+1$, also 16 Teiler.
Wer will, kann auf diese Weise auch die Teiler der Zahl
$n_5 = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$
und deren Anzahl ermitteln.

Man erkennt am systematischen Aufschreiben der Teiler, daß die Anzahl der Teiler nicht abhängig ist von den speziellen Primfaktoren, sondern allein davon, daß die Primfaktorenzerlegung der Zahl n aus 2, 3 bzw. 4 paarweise verschiedenen Primzahlen besteht.

Primfaktoren-zerlegung	Anzahl der Teiler
$n_2 = p_1\cdot p_2$	$1 + 2 + 1$
$n_3 = p_1\cdot p_2\cdot p_3$	$1 + 3 + 3 + 1$
$n_4 = p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4$	$1 + 4 + 6 + 4 + 1$

Wer etwas nachdenkt, wird gewiß herausfinden, was die eingezeichneten Striche rechts bedeuten und vermuten, welche Summe die Anzahl der Teiler einer Zahl n_5 angibt, deren Primfaktorenzerlegung
$n_5 = p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4\cdot p_5$ ist. Wer die Teiler von $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$ und deren Anzahl ermittelt hat, kann daran seine Vermutung überprüfen. Für die Zahl
$n_6 = p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4\cdot p_5\cdot p_6$ ergibt sich auf diese Weise
$1+6+15+20+15+6+1$
als Anzahl der Teiler, also 64.
Das Bilden solcher Summen läßt sich beliebig fortsetzen. Wir wollen hier auf einen Beweis verzichten, daß die so gebildeten Summen tatsächlich stets die Teileranzahl einer natürlichen Zahl, deren Primfaktorenzerlegung aus lauter paarweise verschiedenen Primzahlen besteht, angeben.
Überdies ordnet sich in unsere Übersicht auch der bislang nicht betrachtete Fall ein, daß n_1 selbst eine Primzahl ist: $n_1 = p_1$. Diese hat (außer 1) nur noch sich selbst als Teiler; die Teileranzahl ist also $1+1=2$.
Wer die Teileranzahlen genauer betrachtet hat, wird vermuten, daß sie stets Zweierpotenzen sind: Bei 2 Primfaktoren gibt es $4 = 2^2$ Teiler, bei 3 Primfaktoren $8 = 2^3$ Teiler, bei 4 Primfaktoren $16 = 2^4$ Teiler, ..., bei 6 Primfaktoren $64 = 2^6$ Teiler. Diese Vermutung läßt sich beweisen. Da sie sich noch als Spezialfall einer allgemeineren Überlegung ergeben wird, werden wir auf einen Beweis an dieser Stelle verzichten.
Wir betrachten nun Zahlen, in deren Primfaktorenzerlegungen Primzahlen auch mehrfach vorkommen können. Solche Zerlegungen schreibt man am zweckmäßigsten mit Potenzen, zum Beispiel 10 800 $= 2^4\cdot3^3\cdot5^2$. Wie viele Teiler besitzt nun diese Zahl? Offenbar kann die Primfaktorenzerlegung jedes Teilers von 10 800 nur solche Primfaktoren enthalten, die auch in der Zerlegung von 10 800 vorkommen, und jeden von diesen auch höchstens in derjenigen Potenz, in der er in der Zerlegung von 10 800 auftritt. Alle Teiler von 10 800, in deren Zerlegungen jeweils jede der Primzahlen 2, 3 und 5 vorkommt, lassen sich in der Form
$2^x\cdot3^y\cdot5^z$ mit $x\leqq4$, $y\leqq3$, $z\leqq2$
schreiben. Um darin auch diejenigen Teiler zu erfassen, in deren Zerlegung gewisse dieser Primfaktoren nicht auftreten, läßt man für die Exponenten x, y, z auch den Wert 0 zu und vereinbart, daß $a^0 = 1$ für alle Zahlen $a \neq 0$ gelten soll. Folglich bedeutet zum Beispiel
$2^0\cdot3^1\cdot5^2\,(= 1\cdot3\cdot5^2 = 3\cdot5^2)$,
daß der Primfaktor 2 eigentlich nicht vorkommt, der Primfaktor 3 genau einmal und der Primfaktor 5 genau zweimal vorkommen. Überlege dir, was $2^1\cdot3^0\cdot5^0$ oder $2^2\cdot3^0\cdot5^1$ bedeuten und welche Teiler dies sind!
Nach diesem *Trick* können wir also feststellen: Die Teiler der Zahl 10 800 $= 2^4\cdot3^3\cdot5^2$ sind alle Zahlen der Form $2^x\cdot3^y\cdot5^z$, wobei x, y und z natürliche Zahlen mit
$0\leqq x\leqq4$, $0\leqq y\leqq3$, $0\leqq z\leqq2$ sind.
Wieviel solcher Produkte $2^x\cdot3^y\cdot5^z$ gibt es nun? Der Faktor 2 kann mit den Exponenten 0, 1, 2, 3 und 4 vorkommen; dies ergibt also $5\,(= 4+1)$ Möglichkeiten. Entsprechend ergeben sich $4\,(= 3+1)$ Möglichkeiten für den Faktor 3 sowie $(= 2+1)$ Möglichkeiten für den Faktor 5. Da jede Möglichkeit für den Primfaktor 2 mit jeder Möglichkeit für die beiden anderen Primfaktoren gekoppelt (kombiniert) werden kann, ergeben sich daher
$(4+1)\cdot(3+1)\cdot(2+1) = 5\cdot4\cdot3 = 60$ Tei-
Man kann diese Teiler nun auch systematisch aufschreiben; versuche einmal, dieses *System* selbst herauszufinden:
$2^0\cdot3^0\cdot5^0\,(=1)$, $2^0\cdot3^0\cdot5^1\,(=5)$,
$2^0\cdot3^0\cdot5^2\,(=25)$, $2^0\cdot3^1\cdot5^0\,(=3)$,
$2^0\cdot3^1\cdot5^1\,(=15)$, $2^0\cdot3^1\cdot5^2\,(=75)$,
$2^0\cdot3^2\cdot5^0\,(=9)$, $2^0\cdot3^2\cdot5^1\,(=45)$,
$2^0\cdot3^2\cdot5^2\,(=225)$, $2^0\cdot3^3\cdot5^0\,(=27)$,
..., $2^4\cdot3^3\cdot5^1\,(=2160)$,
$2^4\cdot3^3\cdot5^2\,(=10\,800)$.

Man sieht, daß die Anzahl der Teiler einer Zahl nicht abhängig ist von den speziellen Primfaktoren, die in der Zerlegung der Zahl vorkommen, sondern allein davon, wieviel paarweise verschiedene Primfaktoren und wie häufig (mit welchen Exponenten) diese darin enthalten sind. Die Zahlen $392 = 2^3\cdot7^2$ und $1125 = 3^2\cdot5^3$ haben zwar nicht die gleichen Teiler, aber die gleiche Anzahl von Teilern, nämlich 12 Teiler.
Die Zahl $n = p_1^{e_1}\cdot p_2^{e_2}\cdot p_3^{e_3}$ hat demzufolge genau $(e_1+1)\cdot(e_2+1)\cdot(e_3+1)$ Teiler. So wie in diesem Beispiel kann man stets überlegen. Hat also eine Zahl n die Primfaktorenzerlegung
$n = p_1^{e_1}\cdot p_2^{e_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{e_k}$,
so sind genau alle Zahlen
$p_1^{x_1}\cdot p_2^{x}\cdot\ldots p_k^{x_k}$, wobei
$0\leqq x_1\leqq e_1$, $0\leqq x_2\leqq e_2$, ...,
$0\leqq x_k\leqq e_k$ ist, Teiler von n;
ihre Anzahl ist daher
$(e_1+1)\cdot(e_2+1)\cdot\ldots\cdot(e_k+1)$.
Jetzt läßt sich auch leicht erkennen, daß für eine Zahl, in deren Primfaktorenzerlegung jeder Primfaktor genau einmal vorkommt, die Anzahl der Teiler eine Zweierpotenz sein muß: Wenn
$n = p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k = p_1^1\cdot p_2^1\cdot\ldots\cdot p_k^1$
ist, dann ist die Anzahl der Teiler
$(1+1)\cdot(1+1)\cdot\ldots\cdot(1+1)$
$= 2\cdot2\cdot\ldots\cdot2 = 2^k$.
Mit Hilfe der Primfaktorenzerlegung einer Zahl kann man also stets ermitteln, welche Teiler und wieviel Teiler sie hat. Primfaktorenzerlegungen können aber auch nützlich sein beim Ermitteln des größten ge-

meinsamen Teilers (ggT) oder des kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV) natürlicher Zahlen. Für die Zahlen
$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ und $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$
zum Beispiel können die gemeinsamen Teiler sich nur in der Form $2^x \cdot 3^y$ darstellen lassen, da 5 nicht in der Primfaktorenzerlegung von 1008, 7 nicht in der von 360 vorkommen. Da in der Primfaktorenzerlegung eines gemeinsamen Teilers die Primzahlen 2 und 3 höchstens in einer solchen Anzahl vorkommen können wie sowohl in 360 als auch in 1008, ist der ggT beider Zahlen $2^3 \cdot 3^2 = 72$. Man könnte aber auch so überlegen: Mit Hilfe des zuvor bereits genutzten *Tricks*, in der Primfaktorenzerlegung nicht auftretende Primzahlen formal mit dem Exponenten 0 hinzuzufügen, kann man die Primfaktorenzerlegungen beider Zahlen jeweils mit den gleichen Primzahlen angeben:

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0,$$
$$1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1.$$

Die Primfaktorenzerlegung des ggT ergibt sich dann, indem man für jede Primzahl das *Minimum* der Exponenten (den jeweils kleineren, besser: nichtgrößeren) nimmt, also

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 2^3 \cdot 3^2 = 72.$$

Welche Darstellung als *Primzahlprodukt* ergibt sich auf diese Weise für den ggT der teilerfremden Zahlen 75 und 28?
Entsprechend kann man das kgV natürlicher Zahlen ermitteln. Die Primfaktorenzerlegung des kgV von 360 und 1008 muß sämtliche Primzahlen aus der Primfaktorenzerlegung von 360, aber auch sämtliche aus der von 1008 aufweisen, und zwar für jede Primzahl mit dem Maximum (größeren, besser: nichtkleineren) der jeweiligen Exponenten. Das kgV von 360 und 1008 ist also

$$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 5040.$$

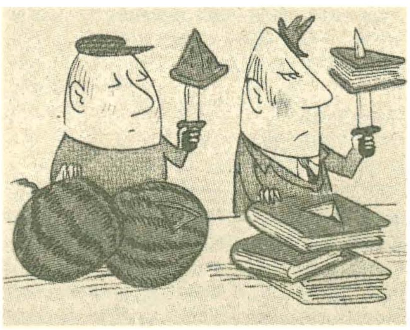
Bildet man das Produkt des ggT und des kgV von 360 und 1008, erhält man $72 \cdot 5040 = 362\,880$. Das gleiche Ergebnis liefert das Produkt der Zahlen 360 und 1008. Offensichtlich ist also das Produkt des ggT und des kgV von 360 und 1008 gleich dem Produkt dieser Zahlen. Dies ist kein Zufall. Überlege einmal selbst und begründe anhand der folgenden Gegenüberstellung von Primfaktorenzerlegungen, daß im Produkt des kgV und des ggT von 360 und 1008 alle Primzahlpotenzen der Primfaktorenzerlegung von 360 und ebenso alle Primzahlpotenzen der Zerlegung von 1008 jeweils genau einmal auftreten müssen:

$$\begin{array}{llcccccc}
\text{kgV}(360, 1008) & = & & 3^2 \cdot & 5 \cdot & 2^4 & & \cdot\, 7 \\
 & & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\
360 \cdot 1008 & = & 2^3 \cdot & 3^2 \cdot & 5 \cdot & 2^4 \cdot & 3^2 \cdot & 7 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & \\
\text{ggT}(360, 1008) & = & 2^3 & & \cdot & & 3^2 &
\end{array}$$

Also muß das Produkt von ggT und kgV der beiden Zahlen gleich deren Produkt sein. Man sieht auch, daß man bei zwei anderen Zahlen in gleicher Weise überlegen kann. Es gilt stets
$\text{kgV}(a, b) \cdot \text{ggT}(a, b) = a \cdot b$.
Versuche herauszufinden, ob auch bei drei Zahlen das Produkt des ggT und des kgV dieser Zahlen gleich dem Produkt der drei Zahlen ist!

Die gewonnene Erkenntnis kann manchmal nützlich sein, wenn man von zwei Zahlen entweder das kgV oder den ggT leicht erkennen kann; dann braucht man zum Ermitteln des ggT bzw. des kgV nur das Produkt der beiden Zahlen durch das kgV bzw. den ggT zu dividieren. Damit läßt sich auch die aus dem Unterricht bekannte Erkenntnis begründen, daß das kgV zweier teilerfremder Zahlen gleich deren Produkt ist.
Das Interessante an der Beschäftigung mit Problemen der Teilbarkeit natürlicher Zahlen besteht darin, daß man vieles durch das Untersuchen von Zahlen selbst entdecken kann. Zugleich stößt man dabei aber auch auf Fragen, die zwar einfach zu verstehen, bis heute aber noch nicht gelöst worden sind.

M. Rehm



Wetkina, aus „Krokodil", UdSSR

Abschluß der Sommerkurse der MSG Greifswald 1987;
Sektionsdirektor Prof. Dr. sc. Gronau, MSG-Verantwortlicher Neubrandenburg W. Mett,
MSG-Vorsitzender Prof. Dr. sc. Terpe, MSG-Sekretär Dr. Bauch *(v. r. n. l.)*

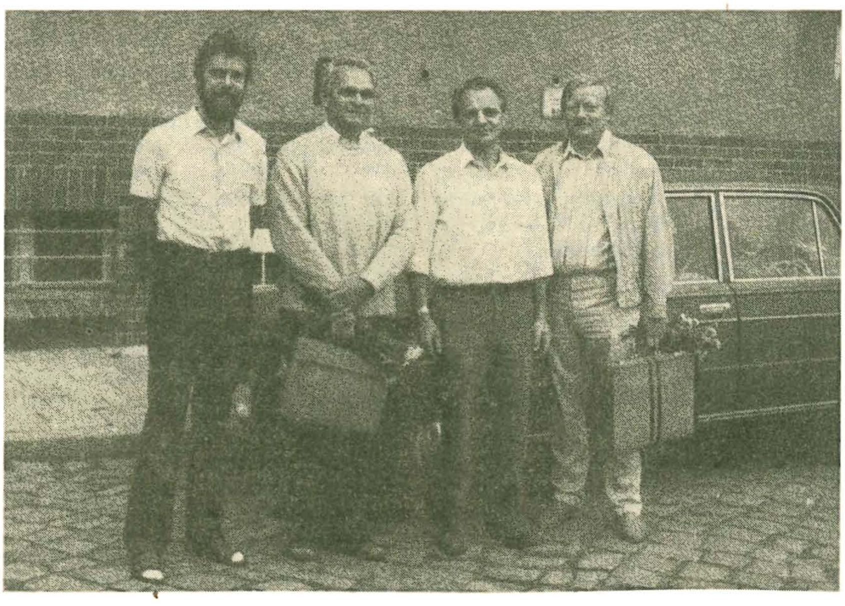
Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. nat. Frank Terpe

Greifswald

▲2910▲ In einem Trapez $ABCD$ (AB parallel zu CD) gelte
$\overline{AB} = k \cdot \overline{CD}$ $(0 < k < 1)$.
S sei der Schnittpunkt der Diagonalen.
E und F seien die Diagonalenmittelpunkte.
In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte des Dreiecks EFS und des Trapezes $ABCD$ zueinander?

Kurzbiographie

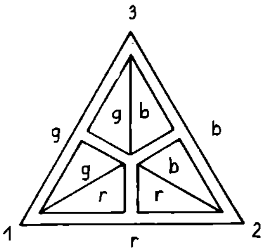
Frank Terpe, geb. 10.10.1929 in Nünchritz bei Riesa, 1948 bis 1954 Studium der Mathematik und Physik an der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, ab 1954 wissenschaftlicher Assistent und nach der Promotion zum Dr. rer. nat. wissenschaftlicher Oberassistent am Mathematischen Institut in Greifswald, 1966 Habilitation zum Dr. rer. nat. habil., 1968 Berufung zum Dozenten und 1969 Berufung zum Ordentlichen Professor für Analysis an der Sektion Mathematik der Universität Greifswald, Arbeitsgebiete: Maß- und Integrationstheorie, Anwendungen der Topologie in der Analysis, Elementargeometrie, 1969 bis 1971 Stellvertreter des Sektionsdirektors und von 1971 bis 1980 Direktor der Sektion Mathematik der EMAU, ab 1982 Leiter des Wissenschaftsbereiches Topologie der Sektion Mathematik, Vorsitzender der Mathematischen Schülergesellschaft in Greifswald.



Ein Legespiel – mathematisch betrachtet

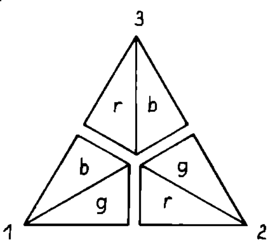
Wir erfinden ein Legespiel.

Bild 1



Es besteht aus drei kongruenten Chips, die sich zu einem gleichseitigen Dreieck zusammenlegen lassen und wie angegeben auf Vorder- und Rückseite gleich gefärbt sind (Bild 1). Wir wollen sie aus der Form herausnehmen und ganz beliebig wieder hineinlegen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es? Wie kann man diese verschiedenen Positionen gut beschreiben? Wie können sie auseinander nach gewissen Vorschriften entstehen? Zur Beantwortung dieser Frage numerieren wir die Chips mit 1, 2, 3 und ebenso die Plätze, an denen sie sich in der Ausgangsposition befinden. In einer anderen Position wird sich der Chip i am Platz j befinden und eventuell gekippt sein. Das läßt sich durch die Farben feststellen. Betrachten wir unser Beispiel (Bild 2):

Bild 2



Chip 1 liegt nun auf Platz 2, Chip 2 auf Platz 3 und Chip 3 auf Platz 1. Wir schreiben dafür kurz $(2,3,1)$ oder

$1 \to 2$
$2 \to 3$
$3 \to 1$

Jede Anordnung der Zahlen $1,2,3$ nennen wir eine Permutation (der Länge 3) und schreiben $p = (1p, 2p, 3p)$.
In unserem Beispiel ist $1p = 2$, $2p = 3$, $3p = 1$, d.h. $p = (2,3,1)$.
Durch ein Tripel $x = (1x, 2x, 3x)$ wollen wir kennzeichnen, welche Chips wir kippen (1), und welche wir nicht kippen (0), bevor wir sie auf ihre neuen Plätze legen. Im Beispiel wurde Chip 1 gekippt $(1x = 1)$, ebenso Chip 2 $(2x = 1)$, aber nicht Chip 3 $(3x = 0)$, also $x = (1,1,0)$. Wir können so jede Position a unseres Spiels durch eine Permutation der Zahlen 1, 2, 3 und ein Tripel aus Nullen und/oder Einsen beschreiben, unser Beispiel liefert
$a = (p, x) = (2,3,1,1,1,0)$.

▲1▲ Wie viele Positionen gibt es?
Jetzt liefert uns jede Position aber auch eine Vorschrift, wie man sie aus der Ausgangsposition
$n = (e, o) = (1,2,3,0,0,0)$ gewinnt:
Der Chip i wird ix-mal gekippt und auf den Platz ip gelegt, um aus n die neue Position $a = (p, x)$ zu erhalten. Eine Anwendung dieser Handlungsanweisung auf eine beliebige Position $b = (q, y)$ anstelle von n kann man so festlegen: Der Chip *am Platz i* wird ix-mal gekippt und auf den Platz ip gelegt.
Frage: Welche Position $c = (r, z)$ erhalten wir, wenn a wie oben und $b = (3,2,1,1,1,0)$ ist?
Wir beantworten die Frage, indem wir zuerst b und dann a ausführen. Betrachten wir Chip 1: Er wird $1y$-mal gekippt $(1y = 1)$ und auf Platz $1q$ gelegt $(1q = 3)$. Nun wird dieser Chip am Platz 3 $3x$-mal gekippt $(3x = 0)$ und auf Platz $3p$ gelegt $(3p = 1)$. Also liegt Chip 1 gekippt auf seinem alten Platz 1. Symbolisch

$1 \to 3 \to 1$
$1 + 0 = 1$,

wobei die zweite Zeile die Kippungen beschreibt. Insgesamt ergibt sich

b a	c
$1 \to 3 \to 1$	$1 \to 1$
$1 + 0 = 1$	$1 = 1$
$2 \to 2 \to 3$	$2 \to 3$
$1 + 1 = 0$	$0 = 0$
$3 \to 1 \to 2$	$3 \to 2$
$0 + 1 = 1$	$1 = 1$

Wir erhalten folglich als neue Permutation $r = (1,3,2)$. Da für $i = 1,2,3$ die Zahl ir gleich $(iq)p$ ist, schreiben wir $r = qp$. Das Tripel $z = (1,0,1)$ ergibt sich durch Addition modulo zwei, aber nicht von ix und iy, sondern natürlich ist $iz = iy + (iq)x$. Wir mußten also aus $x = (1,1,0)$ erst das Tripel
$qx = ((1q)x, (2q)x, (3q)x) = (3x, 2x, 1x)$
$= (0,1,1)$ bilden, um
$z = y + qx = (1+0, 1+1, 0+1)$
$= (1,0,1)$ zu erhalten. Damit ist
$c = (r, z) = (1,3,2,1,0,1)$.
Versucht durch ein analoges Diagramm die folgende Aufgabe zu lösen!

▲2▲ Ändert sich das Ergebnis c, wenn wir a und b vertauschen?
Wir wollen uns auch der Frage zuwenden, wie man ein a' wählen muß, um a rückgängig zu machen, also wieder die Ausgangsposition n zu erhalten. Wir lösen das Problem durch ein Diagramm.

$1 \to 2 \to 1$
$1 + \quad = 0$
$2 \to 3 \to 2$
$1 + \quad = 0$
$3 \to 1 \to 3$
$0 + \quad = 0$

Es ist sehr leicht zu vervollständigen.
Erkennt ihr auch
$p' = (3,1,2)$ und $x' = (0,1,1)$?

▲3▲ Ist auch $a'a = n$?
Ebenso ist es nun möglich, beliebige Gleichungen der Form $ad = b$ oder $d'a = b$ für bekannte a und b zu lösen.

▲4▲ Löst für $a = (2,3,1,1,1,0)$ und $b = (1,3,2,1,1,0)$ obige Gleichungen!
Eine Ergänzung zur Aufgabe 1 ist

▲5▲ Welche Positionen lassen das Dreieck als Ganzes unzerstört?

H. F. Bauch

Eigenaufgaben der Mathematischen Schülergesellschaft Greifswald

Jedes Jahr, 1988 zum achten Mal, finden drei Kurse der Mathematischen Schülergesellschaft der Sektion Mathematik der *Ernst-Moritz-Arndt*-Universität mit Schülern der 9. und 10. Klassen in Greifswald statt. Unterschiedliche Themen – natürlich auch Umgang mit Computern – werden von Wissenschaftlern der Sektion mit den Teilnehmern behandelt. Der Vorsitzende der MSG, Prof. Dr. sc. nat. F. Terpe, fordert die Mitglieder – wie auch schon die Teilnehmer an der Rostocker Bezirksolympiade in Übernahme einer Neubrandenburger Tradition – auf, eigene Aufgaben mitzubringen.

Hier sind einige aus den vergangenen Jahren:

▲1▲ Eine Uhr hat als Zeiger rechteckige Plättchen: großer Zeiger 5 cm × 1 cm, Längen bis zum Drehpunkt 4 cm bzw. 0,5 cm, kleiner Zeiger 4 cm × 1,5 cm, Längen bis zum Drehpunkt 3,5 cm bzw. 0,75 cm.
Wie spät muß es sein, damit möglichst viel von den Zeigern übrigbleibt, wenn die linke Hälfte der Uhr weggesägt wird?

Schüler Alexander Lang, Waren

▲2▲ Zwei Stoffe A und B mit ihren voneinander verschiedenen Dichten a und b werden gemischt.
Ist die resultierende Dichte des Gemisches bei gleichen Masseanteilen oder bei gleichen Volumenanteilen der Stoffe A und B größer?

Schüler Christoph Giese, Anklam

▲3▲ Vor Weihnachten sollen vier Kerzen mit einer Brenndauer von drei Stunden so abgebrannt werden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
a) am i-ten Sonntag ($i = 1, 2, 3, 4$) sind i brennende Kerzen zu sehen,
b) die Brenndauer jeder Kerze an jedem Sonntag ist ein ganzzahliges Vielfaches einer Stunde.
Ist das möglich? Wenn ja, so gebe man alle wesentlich verschiedene Lösungen an!

Schülerin Britta Bölter, Greifswald

Rund um den SR 1

Die Konstantenautomatik des SR 1

Aus dem Unterricht in Klasse 7 und aus der Bedienungsanleitung zum SR 1 ist uns bekannt: Die Konstantenautomatik bewirkt, daß beim Lösen einfacher Aufgaben (zwei Zahlen, verknüpft zu Summe, Differenz, Produkt, Quotient oder Potenz) mit dem SR 1 die benutzte Rechenoperation und die zuletzt eingegebene Zahl gespeichert bleiben:

$\boxed{a}\ \boxed{x}\ \boxed{b}\ \underset{\nearrow ab}{\boxed{=}}\ \boxed{c}\ \underset{\nearrow cb}{\boxed{=}}\ \boxed{d}\ \underset{\nearrow db}{\boxed{=}}$

Mit dem angegebenen Ablaufplan wird die Aufgabenfolge ab, cb, db vorteilhaft gelöst: Durch die Speicherung des Teilablaufplanes $\boxed{x}\ \boxed{b}$ erhalten wir diesen kurzen Ablaufplan. Es bedeute $\boxed{a}$, $\boxed{b}$ usw. die Eingabe der jeweiligen Zahlenwerte für die Variablen a, b, ….

In diesem Beitrag soll untersucht werden, wie die Konstantenautomatik beim Lösen komplizierterer Aufgaben mit dem SR 1 wirkt, und unter Benutzung der Konstantenautomatik sollen dann als Anwendung Aufgabenfolgen berechnet werden.

Da bei komplizierteren Aufgaben Konstanten- und Vorrangautomatik meist gleichzeitig wirksam werden, wollen wir uns vorbereitend mit der Vorrangautomatik beschäftigen. Wir beginnen mit einer Problemstellung:

Bei einfachen Aufgaben kann eine falsch eingegebene Operation korrigiert werden, indem man nach der falschen Operationstaste die richtige drückt

$\boxed{a}\ \boxed{-}\ \boxed{\div}\ \boxed{b}\ \underset{\nearrow a:b}{\boxed{=}}$

Bleibt diese Korrekturmöglichkeit auch bei komplizierteren Aufgaben richtig?

▲1▲ a) Welcher Term gehört zu dem angegebenen Ablaufplan?
b) Streiche im Ablaufplan von den beiden unmittelbar aufeinanderfolgenden Operationstastenzeichen jeweils das erste. Welcher Term gehört zu dem so geänderten Ablaufplan? (Die Lösung soll durch Probieren gefunden werden, wobei anstelle der im Ablaufplan auftretenden Variablen geeignete Zahlen einzusetzen sind.)

1. $\boxed{a}\ \boxed{+}\ \boxed{b}\ \boxed{-}\ \boxed{x}\ \boxed{c}\ \boxed{=}$
2. $\boxed{a}\ \boxed{x}\ \boxed{b}\ \boxed{-}\ \boxed{\div}\ \boxed{c}\ \boxed{=}$

Wir erkennen: *Durch das Drücken der richtigen Operationstaste nach einer falschen ist die Korrektur nicht immer möglich. Die zur falschen Operationstaste gehörende Operation wird zwar nicht ausgeführt, jedoch kann durch die falsch gedrückte Operationstaste die Reihenfolge (Vorrang) der Ausführung der Rechenoperationen verändert worden sein.*

Wir erinnern uns und prägen uns ein:
Das Berechnen von Quadratwurzeln, Quadraten, Reziproken, … mittels der entsprechenden Funktionstasten führt unser Rechner vorrangig vor jeder Rechenoperation aus.
Rechenoperationen höherer Stufe werden vor solchen niederer Stufe ausgeführt.
Dazu die folgende Übersicht:

Funktionstasten
(bzw. Funktionstastenfolgen)

$\boxed{\sqrt{\ }}$, $\boxed{x^2}$, $\boxed{1/x}$, $\boxed{+/-}$, $\boxed{\%}$, $\boxed{lg}$, $\boxed{F}\,\boxed{lg}$, $\boxed{ln}$, $\boxed{F}\,\boxed{ln}$, $\boxed{sin}$, $\boxed{F}\,\boxed{sin}$, $\boxed{cos}$, $\boxed{F}\,\boxed{cos}$, $\boxed{tan}$, $\boxed{F}\,\boxed{tan}$

Operationstasten
für Rechenoperationen …

3. Stufe: $\boxed{y^x}$
2. Stufe: $\boxed{x}$, $\boxed{\div}$
1. Stufe: $\boxed{+}$, $\boxed{-}$

Man beachte aber die Mehrfachbedeutung der Tasten $\boxed{+/-}$ und $\boxed{\%}$! Durch Betätigen der Vorzeichenwechseltaste $\boxed{+/-}$ wird in der Regel die angezeigte Zahl durch ihre entgegengesetzte ersetzt. Wird die Taste $\boxed{+/-}$ jedoch betätigt, nachdem eine Zahl mit abgetrennter Zehnerpotenz mittels der Taste $\boxed{EEX}$ eingegeben wurde, so wird der Exponent durch den entgegengesetzten ersetzt. Das Wirken der Prozenttaste ist in (*) dargestellt.

Zur Festigung lösen wir noch folgende Aufgabe.

▲2▲ Welcher Term wird jeweils mit den folgenden Ablaufplänen berechnet?

1. $\boxed{a}\ \boxed{+}\ \boxed{b}\ \boxed{x^2}\ \boxed{=}$
2. $\boxed{a}\ \boxed{x}\ \boxed{b}\ \boxed{y^x}\ \boxed{c}\ \boxed{=}$
3. $\boxed{a}\ \boxed{x}\ \boxed{b}\ \boxed{=}\ \boxed{y^x}\ \boxed{c}\ \boxed{=}$

Nun wollen wir uns der eigentlichen Zielstellung zuwenden. Wir beschränken uns zunächst auf Aufgaben, zu denen es einen Ablaufplan mit genau einem Ergebnistastenzeichen $\boxed{=}$, und zwar am Ablaufplanende, gibt. Derartige Aufgaben nennen wir *Startaufgaben*, der zugehörige Ablaufplan heiße *Startplan*. Uns interessiert, wie beim Fortsetzen dieser Startpläne nach rechts die Konstantenautomatik wirkt und welche Aufgabenfolgen damit vorteilhaft gelöst werden können.

Im ersten Schritt soll der Startplan genau ein Operationstastenzeichen und zusätzliche Funktionstastenzeichen enthalten.

▲3▲ a) Gib zu jedem Pfeil an, welcher Term der betreffenden Stelle des Ablaufplanes durch den SR 1 zugeordnet ist!
b) Gib weiterhin an, welcher Teil des Startplanes vom SR 1 gespeichert ist!

1. $\boxed{a}\ \boxed{x}\ \boxed{b}\ \boxed{x^2}\ \underset{\nearrow\alpha}{\boxed{=}}\ \boxed{c}\ \underset{\nearrow\beta}{\boxed{=}}\ \boxed{d}\ \underset{\nearrow\gamma}{\boxed{=}}$
2. $\boxed{a}\ \boxed{x^2}\ \boxed{+}\ \boxed{b}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{1/x}\ \underset{\nearrow\alpha}{\boxed{=}}\ \boxed{c}\ \underset{\nearrow\beta}{\boxed{=}}\ \boxed{d}\ \underset{\nearrow\gamma}{\boxed{=}}$

Wir erkennen: *In diesem Fall speichert der SR 1 den Teil des Startplanes, der mit dem Operationszeichen beginnt und vor dem Ergebnistastenzeichen endet.*

Im zweiten Schritt soll der Startplan mehrere Operationstastenzeichen gleicher Stufe und eventuell noch Funktionstastenzeichen enthalten. (Den Operationstasten und ihren Zeichen denken wir uns die gleiche Stufe zugeordnet wie den entsprechenden Operationen.)

▲4▲ a) Gib zu jedem Pfeil an, welcher Term der betreffenden Stelle des Ablaufplanes durch den SR 1 zugeordnet ist!
b) Gib an, welcher Teil des Startplanes vom SR 1 gespeichert ist!

1. $\boxed{a}\ \boxed{+}\ \boxed{b}\ \boxed{-}\ \boxed{c}\ \underset{\nearrow\alpha}{\boxed{=}}\ \boxed{d}\ \underset{\nearrow\beta}{\boxed{=}}\ \boxed{e}\ \underset{\nearrow\gamma}{\boxed{=}}$
2. $\boxed{a}\ \boxed{x^2}\ \boxed{\div}\ \boxed{b}\ \boxed{x}\ \boxed{c}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \underset{\nearrow\alpha}{\boxed{=}}\ \boxed{d}\ \underset{\nearrow\beta}{\boxed{=}}\ \boxed{e}\ \underset{\nearrow\gamma}{\boxed{=}}$

Wir erkennen: *Hier speichert der SR 1 den Teil des Startplanes, der mit dem letzten Operationstastenzeichen beginnt und vor dem Ergebnistastenzeichen endet.*

Im dritten Schritt soll der Startplan mehrere Operationstastenzeichen (verschiedener Stufen) und eventuell noch Funktionstastenzeichen enthalten.

▲5▲ a) Gib wieder an, welche Terme bei den einzelnen Pfeilen im Ablaufplan berechnet werden!
b) Welcher Teil des Startplanes wird im SR 1 gespeichert?

1. $\boxed{a}\ \boxed{x}\ \boxed{b}\ \boxed{-}\ \boxed{c}\ \boxed{1/x}\ \boxed{+}\ \boxed{d}\ \boxed{\div}\ \boxed{e}\ \underset{\nearrow\alpha}{\boxed{=}}\ \boxed{f}\ \underset{\nearrow\beta}{\boxed{=}}\ \boxed{g}\ \underset{\nearrow\gamma}{\boxed{=}}$
2. $\boxed{a}\ \boxed{\div}\ \boxed{b}\ \boxed{x}\ \boxed{c}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{y^x}\ \boxed{d}\ \underset{\nearrow\alpha}{\boxed{=}}\ \boxed{e}\ \underset{\nearrow\beta}{\boxed{=}}\ \boxed{f}\ \underset{\nearrow\gamma}{\boxed{=}}$

Jetzt speichert unser Rechner den Teil des Startplanes, der mit dem am weitesten rechts stehenden Operationstastenzeichen der niedrigsten vorkommenden Stufe beginnt und vor dem Ergebnistastenzeichen endet.

Das Wirken der Konstantenautomatik

steht in enger Beziehung zu dem der Vorrangautomatik. Das erkennt man, wenn an geeigneten Stellen eines Ablaufplanes die Anzeige und auch der Speicherinhalt (genauer der Inhalt des *Arbeitsspeichers*) angegeben werden. Beachte: Während der Konstantenspeicher (Tasten $\boxed{\text{MR}}$, $\boxed{\text{x}\rightarrow\text{M}}$, $\boxed{\text{M+}}$) eine Zahl speichern kann, speichert der Arbeitsspeicher Befehlsfolgen und Zahlen. Es soll jetzt zur Verdeutlichung zwischen einer Aufgabe und ihrem Ergebnis unterschieden werden. So werde z. B. das Ergebnis der Aufgabe $a:b$ mit $\langle a:b\rangle$ bezeichnet.

$\boxed{a}\ \underset{\nearrow\alpha}{\boxed{\times}}\ \boxed{b}\ \underset{\nearrow\beta}{\boxed{-}}\ \boxed{c}\ \underset{\nearrow\gamma}{\boxed{\times}}\ \boxed{d}\ \underset{\nearrow\delta}{\boxed{\times}}$

$\boxed{e}\ \underset{\nearrow\varepsilon}{\boxed{+}}\ \boxed{f}\ \underset{\nearrow\zeta}{\boxed{\times}}\ \boxed{g}\ \underset{\nearrow\eta}{\boxed{=}}\ \boxed{h}\ \underset{\nearrow\vartheta}{\boxed{=}}$

Pfeil	Anzeige	Inhalt des Arbeitsspeichers
α	a	ax...
β	⟨ab⟩	⟨ab⟩ − ...
γ	c	⟨ab⟩ − cx...
δ	⟨cd⟩	⟨ab⟩ − ⟨cd⟩x...
ε	⟨ab − cde⟩	⟨ab − cde⟩ + ...
ζ	f	⟨ab − cde⟩ + fx...
η	⟨ab − cde + fg⟩	⟨ab − cde⟩ + ⟨fg⟩
ϑ	⟨h + fg⟩	h + ⟨fg⟩

Nun soll geprüft werden, wie die Erweiterung des Startplanes verändert werden darf, damit die Speicherung erhalten bleibt.

▲6▲ Gib zu jedem Pfeil an, welcher Term der betreffenden Stelle des Ablaufplanes durch unseren Rechner zugeordnet ist!

1. $\boxed{a}\ \boxed{\times}\ \boxed{b}\ \boxed{\div}\ \boxed{c}\ \boxed{x^2}\ \underset{\nearrow\alpha}{\boxed{=}}\ \boxed{d}$

$\boxed{1/x}\ \underset{\nearrow\beta}{\boxed{=}}\ \boxed{e}\ \underset{\nearrow\gamma}{\boxed{=}}\ \boxed{f}\ \boxed{+}\ \boxed{g}$

$\underset{\nearrow\delta}{\boxed{=}}\ \boxed{h}\ \underset{\nearrow\varepsilon}{\boxed{=}}$

2. $\boxed{a}\ \boxed{+}\ \boxed{b}\ \boxed{=}\ \underset{\nearrow\alpha}{\boxed{1/x}}\ \boxed{c}\ \underset{\nearrow\beta}{\boxed{=}}$

$\underset{\nearrow\gamma}{\boxed{=}}\ \boxed{d}\ \boxed{+/-}\ \underset{\nearrow\delta}{\boxed{=}}\ \boxed{e}\ \boxed{\times}\ \underset{\nearrow\varepsilon}{\boxed{=}}\ \boxed{f}$

$\underset{\nearrow\zeta}{\boxed{=}}\ \boxed{g}\ \underset{\nearrow\eta}{\boxed{=}}$

3. $\boxed{a}\ \boxed{\times}\ \boxed{b}\ \underset{\nearrow\alpha}{\boxed{=}}\ \boxed{c}\ \boxed{x^2}\ \boxed{1/x}\ \underset{\nearrow\beta}{\boxed{=}}$

$\underset{\nearrow\gamma}{\boxed{=}}\ \boxed{d}\ \boxed{+}\ \boxed{e}\ \boxed{-}\ \boxed{f}\ \boxed{\times}\ \boxed{g}$

$\underset{\nearrow\delta}{\boxed{=}}\ \boxed{h}\ \underset{\nearrow\varepsilon}{\boxed{=}}$

Wir erkennen: *Die Speicherung eines Teiles des Startplanes bleibt bei dessen Erweiterung erhalten, wenn diese durch abwechselndes Hinzunehmen von Zahlzeichen und Ergebnistastenzeichen, ergänzt durch Funktionstastenzeichen, erfolgt. Die Speicherung bleibt ebenfalls erhalten, wenn in der Erweiterung Zahlzeichen weggelassen werden.*

Der SR 1 verwendet dann die Zahl, die gerade in der Anzeige sichtbar ist. Die im Arbeitsspeicher enthaltene Zahl und die gespeicherte Operation werden gelöscht und durch neue ersetzt, sobald in der Erweiterung des Startplanes Operationstastenzeichen auftreten. Die neue Speicherung ist bestimmt durch *den* Teil der Erweiterung, in dem das erste Operationstastenzeichen auftritt. Dieser Teil, der als neuer Startplan aufzufassen ist, beginnt nach einem Ergebnistastenzeichen, endet mit einem Ergebnistastenzeichen und enthält im Innern kein Ergebnistastenzeichen.

Ergänzend sei mitgeteilt, daß diese Aussage auch in den Fällen gültig bleibt, in denen vor dem ersten Operationstastenzeichen in der Erweiterung kein Zahlzeichen steht:

$\boxed{a}\ \boxed{\div}\ \boxed{b}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \underset{\nearrow\frac{a}{\sqrt{b}}}{\boxed{=}}\ \boxed{c}\ \underset{\nearrow\frac{c}{\sqrt{b}}}{\boxed{=}}\ \boxed{+/-}$

$\boxed{-}\ \boxed{d}\ \underset{\nearrow-\frac{c}{\sqrt{b}}-d}{\boxed{=}}\ \boxed{e}\ \underset{\nearrow e-d}{\boxed{=}}$

Weiterhin ist es möglich, daß eine Speicherung gar nicht wirksam wird, sondern sofort aufgehoben und durch eine neue ersetzt wird:

$\boxed{a}\ \boxed{+}\ \boxed{b}\ \underset{\nearrow a+b}{\boxed{=}}\ \boxed{\times}\ \boxed{c}\ \underset{\nearrow(a+b)c}{\boxed{=}}\ \boxed{d}$

$\underset{\nearrow dc}{\boxed{=}}\ \boxed{e}\ \underset{\nearrow ec}{\boxed{=}}$

$\boxed{b}\ \boxed{+}\ \boxed{c}\ \underset{\nearrow b+c}{\boxed{=}}\ \boxed{\text{x}\rightarrow\text{M}}\ \boxed{a}\ \boxed{\div}\ \boxed{\text{MR}}$

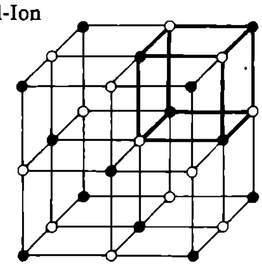
$\underset{\nearrow a:(b+c)}{\boxed{=}}\ \boxed{d}\ \underset{\nearrow d:(b+c)}{\boxed{=}}\ \boxed{e}\ \underset{\nearrow e:(b+c)}{\boxed{=}}$

Damit überblicken wir in jedem Falle, wie die Konstantenautomatik wirkt.

Zusätzlich wurde mit dem letzten Ablaufplan erkannt: *Das Betätigen von Tasten für Arbeiten mit dem Speicher* ($\boxed{\text{MR}}$, $\boxed{\text{M+}}$, $\boxed{\text{x}\rightarrow\text{M}}$) beeinflußt das Wirken der Konstantenautomatik nicht. Nunmehr wollen wir unsere Erkenntnisse anwenden, um geeignete Aufgabenfolgen vorteilhaft zu lösen. Damit dabei die Konstantenautomatik ausgenutzt werden kann, ist der Rechenablauf entsprechend zu organisieren, d.h., die jeweilige Formel ist gegebenenfalls geeignet umzuformen. Die in den folgenden Aufgaben angegebenen Größenangaben sollen als Näherungswerte (Meßwerte) angesehen werden. Deshalb sind die mit Größenangaben ermittelten Ergebnisse sinnvoll zu runden.

▲7▲ Die Formel für die Länge der Raumdiagonale eines Würfels der Kantenlänge a lautet $e = a\sqrt{3}$.

Modell eines Kochsalzkristalles
$a = 2{,}8 \cdot 10^{-10}$ cm
● Na-Ion
○ Cl-Ion



Berechne für Würfel mit den Kantenlängen
$a_1 = 2{,}24$ dm, $a_2 = 3{,}7$ cm, $a_3 = 5{,}9$ cm, $a_4 = 4{,}58$ m und $a_5 = 2{,}8 \cdot 10^{-10}$ cm (Abstand zweier benachbarter Natrium- und Chlorionen im Kochsalzkristall) die Länge der Raumdiagonalen!

▲8▲ Die Formel für den Oberflächeninhalt A_0 einer Kugel mit dem Radius r lautet $A_0 = 4\pi r^2$.
Berechne die Oberflächeninhalte der Kugeln mit den Radien
$r_1 = 2{,}9$ cm, $r_2 = 3{,}71$ m, $r_3 = 8{,}4$ dm und $r_4 = 6371$ km (mittlerer Erdradius)!

▲9▲ Die Formel für das Volumen V eines Kreiszylinders mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h lautet $V = \pi r^2 h$.
Berechne für die Kreiszylinder mit dem Volumen 500 cm³ (0,5 l) die jeweiligen Grundkreisradien, wenn die Höhen
$h_1 = 14{,}0$ cm, $h_2 = 17{,}4$ cm, $h_3 = 24{,}1$ cm und $h_4 = 30{,}0$ cm sind!

▲10▲ Für die Längen der Katheten a und b sowie die Länge der Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks gilt $c^2 = a^2 + b^2$. Berechne für rechtwinklige Dreiecke mit der Hypotenuse $c = 6{,}3$ cm jeweils die eine Kathete a, wenn die andere Kathete b 1,2 cm, 2,2 cm, 3,4 cm, 4,2 cm oder 5,1 cm lang ist!

▲11▲ Für den Gesamtwiderstand R zweier parallel geschalteter Widerstände R_{I} und R_{II} gilt die Formel $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{\mathrm{I}}} + \frac{1}{R_{\mathrm{II}}}$. In einer Parallelschaltung habe der eine Widerstand den Wert $R_{\mathrm{I}} = 50{,}0\,\Omega$. Der andere Widerstand R_{II} kann stufenweise verändert werden. Er nehme dabei die Werte 10,0 Ω, 20,0 Ω, 30,0 Ω, 40,0 Ω, 50,0 Ω, 60,0 Ω, 70,0 Ω, 80,0 Ω, 90,0 Ω und 100,0 Ω an. Berechne den jeweiligen Gesamtwiderstand!

▲12▲ Berechne
$1{,}1^3 + 1{,}2^3 + 1{,}3^3 + 1{,}4^3 + 1{,}5^3 + 1{,}6^3 + 1{,}7^3 + 1{,}8^3 + 1{,}9^3$!

Anleitung: Die Berechnung dieser Summe mit dem SR 1 gelingt unter Benutzung der Taste $\boxed{\text{M+}}$!

Das Benutzen der Konstantenautomatik beim Berechnen der Glieder einer Zahlenfolge bzw. ihrer Summe ist offensichtlich um so vorteilhafter, je mehr Glieder die Zahlenfolge besitzt.

Abschließend sei vermerkt, daß die Wirkung der Konstantenautomatik nicht aufgehoben wird, wenn eine falsch eingegebene Zahl durch einmaliges Betätigen der Löschtaste $\boxed{\text{CE}-\text{C}}$ gelöscht und anschließend die richtige Zahl eingegeben wird. So ist z. B.

$\boxed{a}\ \boxed{-}\ \boxed{b}\ \underset{\nearrow a-b}{\boxed{=}}\ \boxed{c}\ \boxed{\text{CE}-\text{C}}\ \boxed{d}\ \underset{\nearrow d-b}{\boxed{=}}.$

W. Träger

(*) Rund um den SR 1 – Die Prozenttaste. *alpha*, Heft 1/86

Ein bekanntes geometrisches Problem

Welche mathematische Fragestellungen sind wohl besonders interessant und hervorhebenswert? Die Antwort ist gewiß nicht leicht! Zwei Eigenschaften sollten solche Probleme jedoch immer haben: Einer einfachen, verständlichen Formulierung müßte ein wegen seiner Schwierigkeit reizvoller Lösungsweg gegenüberstehen.
Wir wollen ein derartiges Problem aus der Geometrie vorstellen, das trotz umfangreicher Bemühungen vieler Mathematiker seit mehr als 30 Jahren ungelöst ist.
Der erste Abschnitt soll zunächst einfache Begiffe bereitstellen, während unter 2. die eigentliche Problemstellung genannt wird. Danach werden bekannte Teilergebnisse aufgezeigt.

1. Konvexe Mengen

Wir befassen uns mit Punktmengen in der Ebene sowie im dreidimensionalen Raum. (Die folgenden Begriffe können auch im n-dimensionalen Raum, z.B. für $n = 4$, definiert werden, was wir aber dem geometrisch erfahrenen Leser überlassen.) Eine solche Menge C heißt *konvex*, wenn sie zu jedem beliebigen Punktepaar x, y auch die zugehörige Verbindungsstrecke xy vollständig enthält (siehe Bild 1, wo nur die beiden rechts dargestellten Mengen diese Eigenschaft haben).
Eine Menge wird *beschränkt* genannt, wenn man sie in einem Kreis (in der Ebene) bzw. in einer Kugel (im Raum) unterbringen kann (Bild 1: Da eine Halbebene offensichtlich eine unbeschränkte Menge darstellt, ist lediglich die ganz rechts gezeichnete Menge konvex *und* beschränkt.).

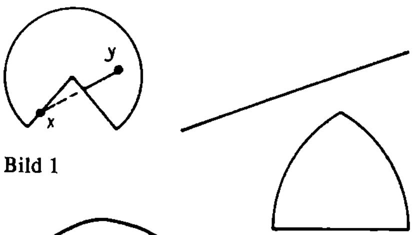


Bild 1

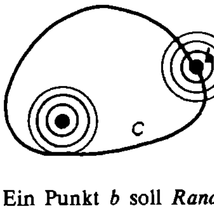


Bild 2

Ein Punkt b soll *Randpunkt* der Menge C heißen (in der Ebene), wenn jeder noch so kleine Kreis um b sowohl Punkte von C als auch solche, die nicht zu C gehören, enthält (Bild 2).
Die Gesamtheit der Randpunkte von C werden wir *Rand* nennen. Im Raum wird der Rand analog definiert, nur muß man für *Kreis* dann *Kugel* setzen. (Zum Beispiel heißt der Rand einer Kugel bekanntlich Sphäre.) Die wohl interessantesten konvexen Mengen sind die konvexen Figuren bzw. Körper. Eine beschränkte konvexe Menge in der Ebene (im Raum) soll *konvexe Figur* (*konvexer Körper*) heißen, wenn sie ihren gesamten Rand sowie echt innere Punkte enthält. Die erstgenannte Bedingung über den gesamten Rand vermeidet die Einbeziehung solch *unbequemer* konvexer Mengen wie etwa des Würfels ohne seine Ecken. Die zweite Aussage schließt Punkte und Strecken in der Ebene bzw. Punkte, Strecken und ebene Figuren im Raum aus.

2. Formulierung des Problems

Jedes Quadrat Q kann durch vier kleinere Quadrate mit Seiten parallel zu denen von Q vollständig überdeckt werden, während drei solche Quadrate nicht ausreichen (warum?). Ein Kreis K kann hingegen durch drei kleinere Kreise überdeckt werden, aber nicht durch zwei (Bild 3).

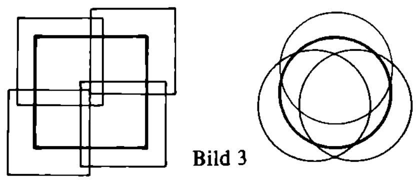


Bild 3

Die Mathematiker Hadwiger und Levi stellten die allgemeine Frage nach der kleinsten Zahl solcher *kleineren Kopien* einer konvexen Figur bzw. eines konvexen Körpers C, mit denen C überdeckbar ist. Diese Zahl sei künftig mit $L(C)$ bezeichnet. Also haben wir augenscheinlich $L(Q) = 4$ und $L(K) = 3$. Doch vor weiteren Betrachtungen sollen diese *kleineren Kopien* einer Menge exakt definiert werden.
Sei z beliebiger Punkt der Ebene oder des Raumes und k eine positive reelle Zahl mit $k < 1$. Wir bilden jeden Punkt x von C auf einen Punkt x' derart ab, daß x' zwischen z und x liegt und das Verhältnis der Abstände $|x'z|$ und $|xz|$ gleich k ist (Bild 4).

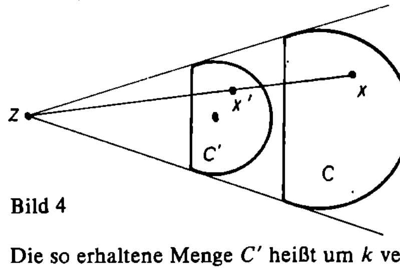


Bild 4

Die so erhaltene Menge C' heißt um k verkleinertes Bild von C. Die beschriebene Abbildung ist, wie ihr leicht seht, eine zentrische Streckung mit Zentrum z und Verhältnis k, d.h. (wegen $0 < k < 1$) insbesondere eine Verkleinerung. Es ist auch üblich, unter unseren Voraussetzungen C' als *gestauchtes Bild* von C zu bezeichnen.

Aufgabe 1

Zeige, daß jede durch Verschiebung von C' erhaltene Menge C'' ebenfalls ein gestauchtes Bild von C ist!
(*Hinweis:* Zentrische Streckungen werden in Klasse 8 behandelt.)

Aus der Lösung dieser Aufgabe folgt sofort, daß für die Überdeckung von C mittels gestauchter Bilder die Betrachtung von Mengen ausreicht, welche aus einem einzigen um k verkleinerten Bild von C durch Verschiebung hervorgehen.
Der bekannte Schweizer Mathematiker Hadwiger formulierte 1957 die folgende *Vermutung*:
Jeder konvexe Körper im n-dimensionalen Raum kann durch 2^n gestauchte Bilder überdeckt werden.
In der Ebene ($n = 2$) konnte diese Vermutung bestätigt werden, für $n = 3$ (also im uns interessierenden Anschauungsraum) hingegen ist die Antwort bis heute unbekannt. Möglicherweise kann euch also erstmals der Beweis gelingen, daß *jeder* konvexe Körper im Raum durch $2^3 = 8$ gestauchte Bilder überdeckt werden kann. Andererseits würde natürlich zur Widerlegung der berühmten Vermutung ein Gegenbeispiel genügen.

Aufgabe 2

Ermittle $L(C)$, falls C als Parallelogramm, regelmäßiges Sechseck, Kugel, Würfel, Tetraeder, regelmäßiges Oktaeder sowie als Prisma mit quadratischer Grundfläche vorliegt! Versuche, deine Aussagen zu beweisen!

3. Das Überdeckungsproblem in der Ebene

Allein für die Ebene bewies Levi im Jahre 1955 den *Satz 1:* Für jede konvexe Figur C, die kein Parallelogramm ist, gilt $L(C) = 3$. Zusammen mit $L(P) = 4$ (P... beliebiges Parallelogramm) ist dies die positive Antwort auf Hadwigers Vermutung in der Ebene. Unmittelbar drängt sich nun die Frage auf, welchen kleinstmöglichen Wert k annehmen kann, um $L(C) = 4$ für eine beliebige konvexe Figur C auch weiterhin zu gewährleisten. Zum Beweis des diesbezüglichen Satzes 2 benötigen wir einen weiteren Begriff und einen Hilfssatz. Zwei Parallelogramme P und $\bar{P}$ heißen *quasidual*, wenn die Seiten von P parallel zu den Diagonalen von $\bar{P}$ und wenn die Seiten von $\bar{P}$ parallel zu den Diagonalen von P sind.

Aufgabe 3

Beweise die folgenden Eigenschaften quasi-dualer Parallelogramme P und $\bar{P}$:
Die Verhältnisse der Seiten von P zu jeweils parallelen Diagonalen von $\bar{P}$ sind gleich (wir bezeichnen ihren gemeinsamen Wert mit p).
Die Verhältnisse der Seiten von $\bar{P}$ zu den jeweilig parallelen Diagonalen von P sind natürlich auch gleich und, mit q bezeichnet, durch $p \cdot q = \frac{1}{2}$ festgelegt.

Es folgt noch der angekündigte *Hilfssatz:*
In jede konvexe Figur C läßt sich ein Paar quasi-dualer Parallelogramme derart einbeschreiben, daß die insgesamt 8 Ecken Randpunkte von C sind.
Der relativ umfangreiche Beweis dieser Aussage soll unterlassen werden. Dafür beweisen wir aber mit ihrer Hilfe nun *Satz 2* (*Lassak, 1984*):
Jede konvexe Figur C kann durch vier kleinere Bilder mit $k \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$ überdeckt werden.
Beweis: Wegen des Hilfssatzes finden wir Punkte a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4 nacheinander im Rand von C, so daß die Vierecke $P = a_1a_2a_3a_4$ und $\bar{P} = b_1b_2b_3b_4$ quasi-duale Parallelogramme sind (siehe Bild 5).
Setzen wir $p \leqq q$ (umgekehrt wäre die weitere Beweisführung analog), so folgt wegen $p \cdot q = \frac{1}{2}$ (Aufgabe 3) sofort $p \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Wir bezeichnen nun mit a den Mittelpunkt von P. Die Punkte c_1, c_2, c_3, c_4 seien die jeweiligen Schnittpunkte der paarweisen Verlängerungen der Strecken a_1b_4 und a_2b_2, a_2b_1 und a_3b_3, a_3b_2 und a_4b_4 sowie a_4b_3 und a_1b_1 (siehe wiederum Bild 5).
Da a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4 aufeinanderfolgende Punkte im Rand von C sind, ist C enthalten in der *sternförmigen* Vereinigungsmenge der Vierecke
$aa_1c_1a_2$, $aa_2c_2a_3$, $aa_3c_3a_4$ und $aa_4c_4a_1$.
Die zentrische Streckung mit Zentrum c_i und Verhältnis p wird fortan durch H_i ($i = 1, 2, 3, 4$) repräsentiert.
Aus $H_1(b_4) = a_1$, $H_1(b_2) = a_2$, der Parallelität der Strecken a_1a und b_4b_3 sowie der Parallelität von a_2a und b_2b_3 folgt, daß $H_1(C)$ das Dreieck aa_1a_2 überdeckt. Sei y ein im Dreieck $a_1a_2c_1$ liegender Punkt aus C. Da $H_1(C)$ konvex ist und die Punkte a_1, a_2, $H_1(y)$ enthält, liegt auch das gesamte Dreieck $a_1a_2H_1(y)$ in $H_1(C)$, insbesondere der Punkt y. Demnach enthält $H_1(C)$ jenen Teil von C, der im Viereck $aa_1c_1a_2$ liegt. In gleicher Weise sind die Teile von C, welche in den Vierecken $aa_2c_2a_3$, $aa_3c_3a_4$ und $aa_4c_4a_1$ liegen, Teilmengen von $H_2(C)$, $H_3(C)$ und $H_4(C)$, w. z. b. w.

4. Teilergebnisse im Raum

Die räumliche Fassung der Hadwigerschen Vermutung, daß also jeder konvexe Körper durch $2^3 = 8$ gestauchte Bilder überdeckbar sei, ist bislang, wie bereits erwähnt, ohne Beweis bzw. Gegenbeispiel geblieben. Da keine zwei Ecken eines Parallelepipeds (siehe Bild 6, linke Seite) zugleich durch ein gestauchtes Bild dieses Polyeders überdeckt werden können, ist der gesamte Körper auch nicht durch sieben kleinere Bilder überdeckbar. Dieses Beispiel zeigt, daß die Zahl 8 nicht verkleinert werden kann.

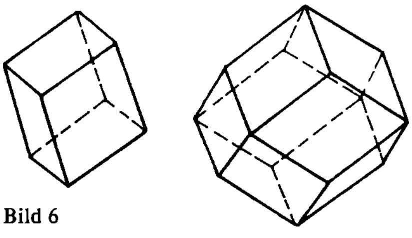
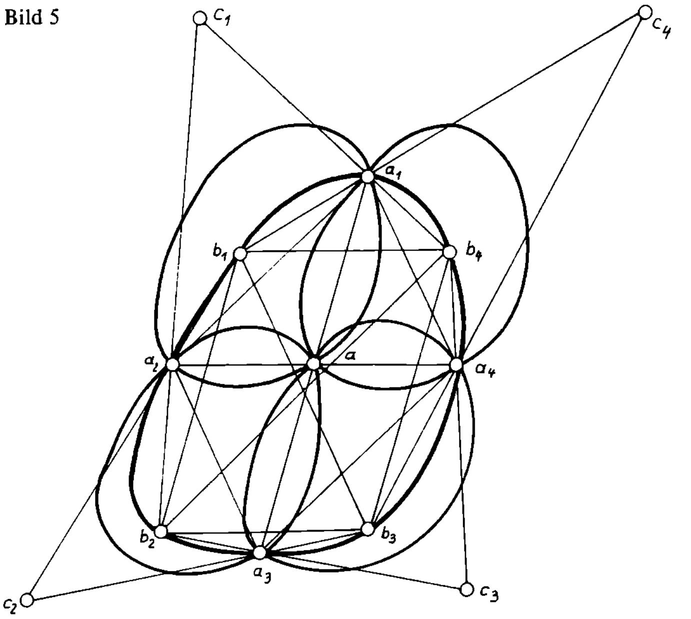


Bild 6

Für die exakte Formulierung einiger Teilergebnisse brauchen wir noch drei einfache Begriffe: Eine Ebene durch einen Randpunkt b eines konvexen Körpers C wird *Stützebene* von C genannt, wenn der gesamte Körper C in einem Halbraum bezüglich dieser Ebene liegt. Ein Randpunkt von C heißt *regulär*, wenn es nur genau eine Stützebene an C durch ihn gibt, ansonsten *singulär*. Zum Beispiel sind die Ecken und Kantenpunkte des Würfels singulär, während alle Randpunkte der Kugel regulär sind. Im Jahre 1960 bewies der Moskauer Mathematiker Boltjanski *Satz 3*:
Ein konvexer Körper mit ausschließlich regulären Randpunkten kann stets durch vier gestauchte Bilder überdeckt werden. Ein einfacher Beweis (der n-dimensionalen Verallgemeinerung) dieses Satzes kann in dem populären Buch (*) nachgelesen werden. Boltjanskis Aussage wurde neuerlich erweitert. So konnte der Georgier Charasischwili zeigen, daß $L(C) = 4$ bestehen bleibt, wenn C nicht mehr als vier singuläre Randpunkte hat. Andererseits bewies der Mathematiker Weißbach aus Magdeburg, daß $L(C) = 4$ sogar bei Existenz beliebig vieler singulärer Randpunkte gilt, die allerdings nicht *zu spitz* sein dürfen.
Eine andere Möglichkeit der Gewinnung von Teilergebnissen zu unserem Überdekkungsproblem ist die Beschränkung auf konvexe Körper mit Mittelpunkt. In den sechziger Jahren konnte der englische Mathematiker Rogers für jeden solchen Körper C eine Abschätzung im n-dimensionalen Raum finden, die für $n = 3$ die Ungleichung $L(C) \leqq 148$ erbringt, während Lewin und Petunin aus Woronesh (mit einer ebenfalls n-dimensionalen Abschätzung) $L(C) \leqq 64$ für den Anschauungsraum vorlegten. Der Vergleich dieser Schranken mit der vermuteten Zahl 8 zeigt so recht die Schwierigkeit des Problems. 1984 konnte dann endlich die Hadwiger-Vermutung für zentralsymmetrische konvexe Körper bestätigt werden.
Es gilt nämlich *Satz 4* (*Lassak 1984*):
Jeder konvexe Körper mit Mittelpunkt kann durch acht gestauchte Bilder überdeckt werden.
Man könnte vermuten, daß für alle konvexen Körper mit Mittelpunkt, die kein Parallelepiped sind, bereits jeweils sechs gestauchte Bilder ausreichen. Doch sogar für die Polyeder in dieser Menge ist dies unbewiesen.
Fordert man allerdings, daß nicht nur das konvexe Polyeder sondern auch jede seiner Seitenflächen selbst einen Mittelpunkt hat (also zentralsymmetrisches Polygon ist), so genügen tatsächlich sechs gestauchte Bilder, wenn man allein die Parallelepipede ausschließt. Solche Polyeder heißen Zonoeder und spielen in Geometrie und Kristallographie eine bedeutende Rolle. Bild 6 zeigt zwei Zonoeder, ein Parallelepiped und ein Rhombendodekaeder.
Es gilt also *Satz 5* (*Martini 1985*):
Jedes Zonoeder, das kein Parallelepiped ist, kann durch sechs gestauchte Bilder überdeckt werden.
Abschließend sei bemerkt, daß dem erstgenannten Autor 1984 der Beweis von $L(C) \leqq 20$ für jeden beliebigen konvexen Körper C gelang.

M. Lassak/H. Martini

Bild 5



(*) W. G. Boltjanski, I. Z. Gochberg:
Sätze und Probleme der kombinatorischen Geometrie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Erfurt, 16. bis 19. Mai 1988

Olympiadeklasse 10

271041 Beweisen Sie, daß die Gleichung

$$x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 34x + 10 = 0$$

genau zwei reelle Lösungen hat!

271042 Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und für alle reellen Zahlen x_1, x_2 die folgenden Gleichungen (1), (2) erfüllt:

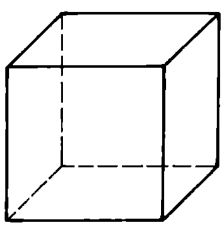
$$f(x_1 + x_2) = f(x_1^3) + f(x_2^3), \quad (1)$$

$$f(x_1 \cdot x_2) = x_1 \cdot f(x_2) + x_2 \cdot f(x_1). \quad (2)$$

Beweisen Sie, daß durch diese Voraussetzungen der Funktionswert $f(2 + \sqrt{5})$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diesen Funktionswert!

Von den nachstehenden Aufgaben 271043 A und 271043 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

271043 A Das Bild wird gewöhnlich als das Bild eines Würfels oder jedenfalls eines achteckigen Körpers in schräger Parallelprojektion angesehen.



Zeigen Sie, daß dies aber auch sowohl das Bild eines zehneckigen als auch das Bild eines zwölfeckigen Körpers in schräger Parallelprojektion sein kann!

Zeichnen Sie zu diesem Zweck je einen solchen Körper in einer neu gewählten schrägen Parallelprojektion, bei der alle zehn bzw. alle zwölf Eckpunkte des Körpers als voneinander verschiedene Bildpunkte erscheinen! Geben Sie ferner zu jedem der beiden Körper eine Aufzählung aller Eckpunkte, aller Kanten und aller ebenen Teilflächen seiner Oberfläche an, und nennen Sie eine Gerade in einer Projektionsrichtung, bei der das Bild entstehen würde! Eine weitere Begründung wird nicht verlangt.

271043 B Ein Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt{2}$ besagt: Aus einem Näherungswert $\frac{a}{b}$, dessen Zähler a und Nenner b positive ganze Zahlen sind, wird ein neuer Näherungswert $\frac{a'}{b'}$ nach der Vorschrift

$$a' = a^2 + 2b^2, \quad (1)$$

$$b' = 2ab \quad (2)$$

gewonnen. Um einschätzen zu können, ob $\frac{a}{b}$ ein geeigneter Anfangswert für dieses Verfahren sein kann, behandelt man die folgende Aufgabe (bei der die Zahl $\sqrt{2}$ wie ein bekannter Wert verwendet wird): Man ermittle alle diejenigen $\frac{a}{b}$ (a, b positive ganze Zahlen), bei denen die Vorschrift (1), (2) auf einen besseren Näherungswert $\frac{a'}{b'}$ führt, d. h.,

$$\left|\frac{a'}{b'} - \sqrt{2}\right| < \left|\frac{a}{b} - \sqrt{2}\right| \text{ gilt.}$$

271044 Ein Kreis k_1 mit dem Radius $r_1 = 10\,cm$ und ein Kreis k_2 mit dem Radius $r_2 = \frac{10}{\sqrt{3}}$ cm seien so in einer Ebene gelegen, daß der Mittelpunkt von k_2 außerhalb von k_1 liegt und daß sich k_1 und k_2 in zwei Punkten P_1, P_2 schneiden, für die $\overline{P_1P_2} = 10$ cm gilt.

Ermitteln Sie den Flächeninhalt A des gemeinsamen Flächenstücks der beiden Kreisflächen!

Hinweis: Entsprechend wie bei der obigen Angabe von r_2 soll die zahlenmäßige Angabe von A erfolgen, ohne dabei Näherungswerte (z. B. endliche Dezimalbrüche) für irrationale Zahlen zu verwenden.

271045 Worte aus den Buchstaben E, R und S sollen nach folgenden Regeln aus einem zu Anfang vorgegebenen Wort gebildet werden:

(1) Endet ein Wort auf S, so kann ein R angefügt werden.

(2) An ein Wort darf dasjenige Wort angefügt werden, welches aus den gleichen Buchstaben, aber in umgekehrter Reihenfolge besteht.

(3) Treten in einem Wort drei gleiche Buchstaben unmittelbar hintereinander auf, dann dürfen sie durch ein R ersetzt werden.

(4) Zwei aufeinanderfolgende R oder E dürfen weggelassen werden. Eine beliebige Wahl der Reihenfolge und beliebig häufige Wiederholung der Regelanwendungen sind zugelassen.

Ist es möglich, durch genügend häufige Anwendung dieser Regeln aus dem Wort ES das Wort ER zu erhalten?

271046 Beweisen Sie folgende Aussage: Wenn für reelle Zahlen

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$

gilt, daß jede dieser Zahlen im Intervall $5 \leqq x \leqq 10$ liegt, dann gilt für diese Zahlen stets

$$2(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_5b_5)$$

$$\leqq a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + \ldots + a_5^2 + b_5^2$$

$$\leqq \frac{5}{2} \cdot (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_5b_5).$$

Olympiadeklassen 11/12

271241 In einer Ebene sei G die Menge aller derjenigen Punkte, deren rechtwinklige kartesische Koordinaten ganze Zahlen sind. Ferner sei F eine Menge von 1988 verschiedenen Farben.

Man beweise: Für jede Verteilung von Farben, bei der jeder Punkt aus G genau eine der Farben aus F erhält, gibt es in G vier gleichfarbige Punkte, die die Ecken eines Rechtecks mit achsenparallelen Seiten sind.

271242 Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$1 \cdot x^3 + 9 \cdot y^2 + 8 \cdot y + 8 = 1988, \quad (1)$$

$$1 \cdot y^3 + 9 \cdot z^2 + 8 \cdot z + 8 = 1988, \quad (2)$$

$$1 \cdot z^3 + 9 \cdot x^2 + 8 \cdot x + 8 = 1988. \quad (3)$$

271243 Wieviel verschiedene Wörter $(a_1a_2a_3 \ldots a_{n-1}a_n)$ kann man insgesamt aus den Buchstaben

$a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $i = 1, \ldots, n$

derart bilden, daß

$$|a_j - a_{j+1}| = 1$$

für $j = 1, \ldots, n-1$ gilt?

271244 Durch ein konvexes n-Eck $P_1P_2 \ldots P_n$, das einen Inkreis c besitzt, sei eine Gerade g gelegt, die die Seite P_nP_1 in einem Punkt M und eine Seite P_kP_{k+1} $(1 \leqq k < n)$ in einem Punkt N schneidet.

Die Gerade sei so gelegt, daß sie sowohl den Umfang als auch den Flächeninhalt des n-Ecks halbiert, d. h., daß die folgenden Bedingungen (1) und (2) gelten:

(1) Die Längen der Streckenzüge $MP_1P_2 \ldots P_kN$ und $NP_{k+1}P_{k+2} \ldots P_nM$ sind einander gleich.

(2) Die Flächeninhalte der Vielecke $MP_1P_2 \ldots P_kN$ und $NP_{k+1}P_{k+2} \ldots P_nM$ sind einander gleich.

Man beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Die Gerade g geht durch den Mittelpunkt des Kreises c.

271245 Es sei (x_n) die durch

$x_1 = 1, \; x_2 = 1,$

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_{n-1} + 4} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

definierte Zahlenfolge.

Man untersuche, ob diese Folge konvergent ist, und ermittle, falls das zutrifft, ihren Grenzwert.

Von den nachstehenden Aufgaben 271246 A und 271246 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

271246 A Alfred und Bernd teilen sich n Äpfel, indem der Reihe nach für jeden einzelnen Apfel durch eine Zufallsentscheidung (z. B. Werfen einer Münze) festgelegt

wird, wer diesen Apfel erhält. Ein solcher Verteilungsvorgang heiße für Alfred günstig genau dann, wenn Alfred nicht nur am Ende, sondern während des gesamten Vorgangs niemals weniger Äpfel in seinem Besitz hat als Bernd.
Als Wahrscheinlichkeit $w(n)$ dafür, daß ein Verteilungsvorgang für Alfred günstig ist, bezeichnet man den Quotienten, der sich ergibt, wenn die Anzahl aller für Alfred günstigen Verteilungsvorgänge durch die Anzahl aller überhaupt möglichen Verteilungsvorgänge dividiert wird.
a) Man ermittle $w(4)$.
b) Man ermittle $w(n)$ für beliebiges natürliches $n \geqq 2$.

271246B Man beweise: Für jede natürliche Zahl $n \geqq 2$ und für je n im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ definierte Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ gibt es reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mit $0 \leqq a_i \leqq 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, für die

$$\left| a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n - \sum_{i=1}^{n} f_i(a_i) \right| \geqq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

gilt.

Die XXVII. OJM der DDR fand in der Pädagogischen Hochschule *Dr. Theodor Neubauer* in Erfurt vom 16. Mai bis zum 19. Mai statt.

Einen ersten Preis in Klasse 10 erhielten:
Ingrid Voigt, Spezialschule Leipzig;
Carsten Deus, Steffen Gerlach (Kl. 9), beide Spezialschule *Hans Beimler*, Karl-Marx-Stadt;
Raymond Hammecke, Spezialschule Erfurt (Kl. 9)

Einen ersten Preis in Klasse 11/12 erhielten:
Dirk Liebscher, Spezialschule *G. Thiele*, Kleinmachnow;
Martin Welk, EOS E. Abbe, Eisenach;
Andreas Siebert, Spezialschule *H. Hertz*, Berlin (Kl. 11);
Jan Fricke, 5. POS *F. Wolf*, Pasewalk (Kl. 10)

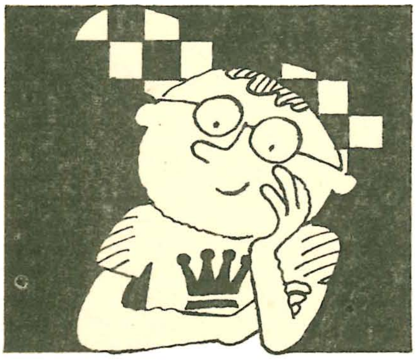
Einen zweiten Preis erhielten 14 Schüler, einen 3. Preis 33 Schüler und eine Anerkennungsurkunde 32 Schüler.
An der OJM nahmen 172 Schüler, davon 22 Mädchen, teil.

Die Internationale Mathematikolympiade wird im Juli dieses Jahres in Canberra/Australien stattfinden.

Buchtips für Schachfreunde

Ernst Bönsch
Kleines Lexikon Schach
144 Seiten, 30 Diagramme
Bestell-Nr. 671 728 5 Preis: 8,50 M

Issak, M. Lindner
Das Schachgenie Capablanca
320 Seiten, 15 Diagramme
Bestell-Nr. 671 733 0 Preis: 16,50 M
beide Titel: Sportverlag, Berlin

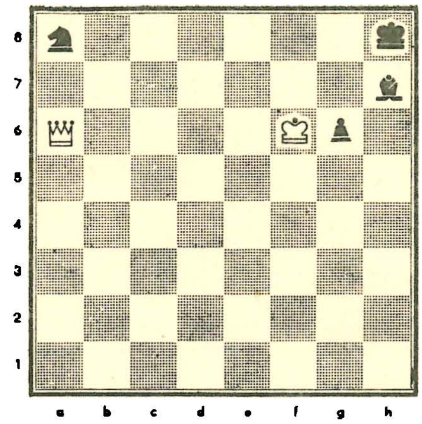


alpha-Schachwettbewerb 1988

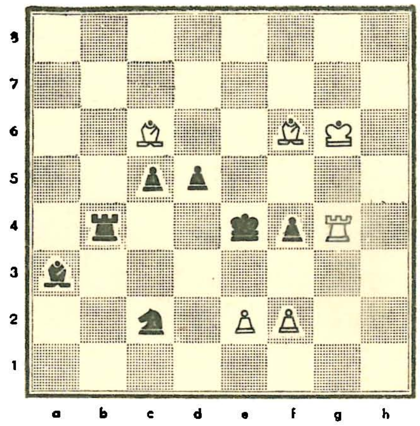
Zum 6. Mal fordert *alpha* alle Schachfreunde zur Teilnahme an einem Lösungswettbewerb auf!
Unsere Knobelei soll Schachfreunden als Anregung dienen und neue Interessenten ermuntern, am Wettbewerb teilzunehmen. Gegenüber den vorangegangenen Wettbewerben präsentiert sich dieser in etwas veränderter Gestaltung. Diesmal gilt es, nur vier Schachaufgaben mit der Forderung „Matt in 2 Zügen" richtig zu lösen. Der 6. *alpha*-Schachwettbewerb bietet dabei eine Premiere. Die Aufgabe Nr. 2 ist der erste Urdruck (Erstveröffentlichung eines Schachproblems), der in *alpha* erscheint. Der populäre Schachproblemkomponist Fritz Hoffmann (Weißenfels) stellte diese Aufgabe freundlicherweise zur Verfügung.
In allen vier Aufgaben beginnt Weiß und setzt Schwarz trotz bester Gegenwehr mit dem zweiten Zug matt. Als vollständig gilt die Lösung, wenn alle Abspiele bis zum Matt angeführt werden.
Mögen diese vier Aufgaben allen Teilnehmern schöne Mußestunden bereiten, wenngleich bis zum Erreichen der Lösungen einige Fallstricke und Verführungen zu erkennen und zu durchschauen sind.

Unter den Teilnehmern, die die Aufgaben Nr. 1 bis Nr. 4 korrekt gelöst haben, werden Buchpreise verlost und Urkunden verteilt. In einer weiteren Verlosung haben auch alle anderen Teilnehmer, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst haben, die Chance, einen Buchpreis zu gewinnen.
Teilnahmeberechtigt sind alle *alpha*-Leser. Die Einsendung der Lösungen (jeweilige Aufgaben-Nummer angeben) ist bitte bis zum 31. 12. 1988 unter Angabe von Name, Vorname, Alter und Adresse zu richten an
Redaktion alpha
PSF 14
Leipzig
7027
Die Lösungen sowie die Gewinner werden in *alpha* 4/1989 veröffentlicht.

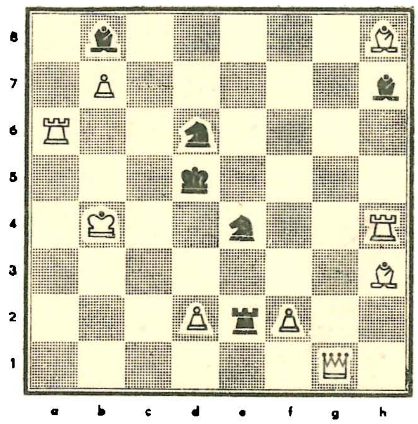
Schon gewußt?
Das Schach entstand vermutlich vor 2000 bis 2500 Jahren in Indien, um das Jahr 1000 kam es nach Europa. Weltmeisterschaften werden seit 1886, Europameisterschaften seit 1957 ausgetragen.



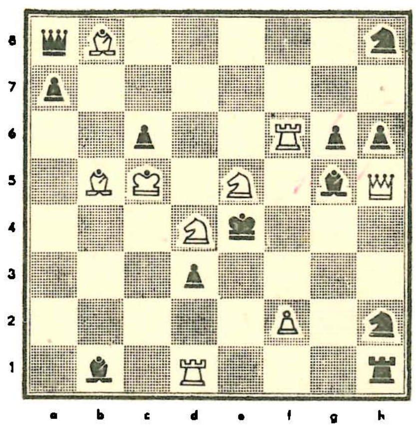
Nr. 1 Matt in 2 Zügen



Nr. 2 Matt in 2 Zügen



Nr. 3 Matt in 2 Zügen



Nr. 4 Matt in 2 Zügen

Die Trio-Würfel

Wir wollen euch heute ein selbsterdachtes logisches Spielzeug, die Trio-Würfel, vorstellen. Sie gestatten vielfältige Baumöglichkeiten und bergen auch manch kniffliges Problem in sich.

Herstellung der Trio-Würfel

Als *Trio-Würfel* (Dreifarben-Bauwürfel) bezeichnen wir einen Bausatz von 27 gleich großen Würfeln, die mit drei Farben, (z. B.) Blau, Gelb und Rot, so gefärbt sind, daß mit ihnen der Zusammenbau eines äußerlich sowohl blauen, gelben als auch roten $3\times3\times3$-Würfels möglich ist, wobei der Bausatz eine symmetrische Färbung hat, d. h. eine beliebige Permutation der drei Farben die Färbung des Bausatzes nicht verändert.

Das Bild 1 zeigt die Netze der 27 Trio-Würfel, die durch Farbanstrich bzw. Bekleben mit Buntpapier leicht herstellbar sind, wobei ihr nach folgender Färbungsvorschrift verfahren könnt:

Stellt 27 gleich große Würfel in fünf Reihen zu je 3, 6, 6, 6 und 6 Würfeln auf (vgl. Bild 1) und färbt sie wie folgt (D = Deckfläche, G = Grundfläche, V = Vorderfläche, R = Rückfläche, LS = linke Seitenfläche, RS = rechte Seitenfläche):

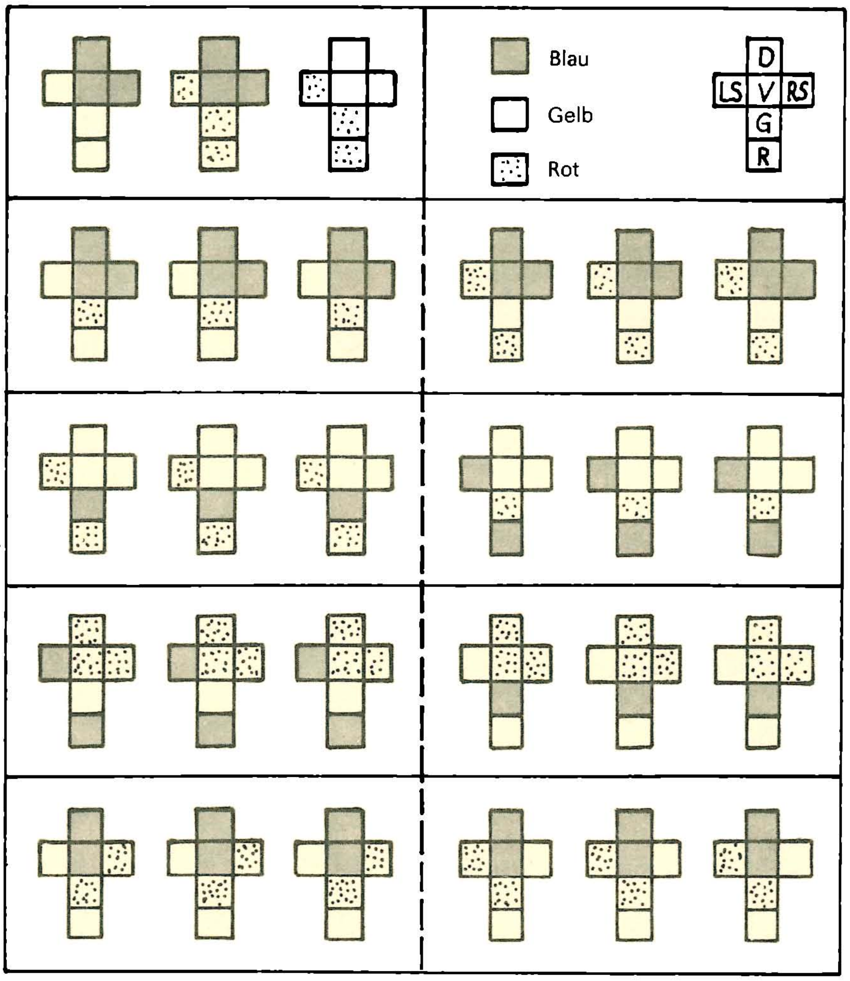
1. Reihe: V, D und RS werden beim linken und mittleren Würfel blau, beim rechten Würfel gelb gefärbt. Die drei Restflächen werden beim linken Würfel gelb sowie beim mittleren und rechten Würfel rot gefärbt.

2. Reihe (3. Reihe, 4. Reihe): V, D und RS aller 6 Würfel werden blau (gelb, rot) gefärbt. Man bildet nun zwei Gruppen zu je drei Würfeln. Bei der linken Gruppe werden R und LS gelb (rot, blau) und G rot (blau, gelb), bei der rechten Gruppe R und LS rot (blau, gelb) und G gelb (rot, blau) gefärbt.

5. Reihe: V und D aller 6 Würfel werden blau gefärbt.

Man bildet wieder zwei Gruppen zu je drei Würfeln. Bei der linken Gruppe werden R und LS gelb sowie G und RS rot, bei der rechten Gruppe R und RS gelb sowie G und LS rot gefärbt.

Bild 1: Die Trio-Würfel (Würfelnetze)



Spielmöglichkeiten und Probleme

Mit den Trio-Würfeln können ein-, zwei- bzw. dreifarbige Körper (Würfel bzw. Gebäudemodelle) gebaut werden, wobei der Reiz bzw. die Schwierigkeit darin besteht, daß man mit den zur Verfügung stehenden Würfel-Farbflächen haushalten muß.

Baut man etwa beim Zusammenbau eines einfarbigen roten Würfels eine rote Fläche ins Innere ein, so fehlt diese am Schluß. Der Fehler ist aber durch Austausch des fälschlich eingebauten Würfels leicht korrigierbar. Da bei den Trio-Würfeln jede Farbe gleichwertig auftritt, so ist natürlich jedes Modell nur ein Vertreter einer Klasse von Modellen, die sich lediglich durch Permutation der Farben unterscheiden. Der Bau eines Modells wird wesentlich schwieriger, wenn man fordert, daß die *einfache Anschlußbedingung* (je zwei im Inneren aufeinanderliegende Würfelflächen haben gleiche Farbe) bzw. die *verschärfte Anschlußbedingung* (aufeinanderliegende Schnittflächen des Modells sind gleichfarbig) erfüllt sind. Löst nun mit Hilfe der selbstgebauten Trio-Würfel folgende Aufgaben:

▲1▲ Baut die in den Bildern 2 und 3 dargestellten Würfel und Gebäudemodelle (zunächst ohne Beachtung einer Anschlußbedingung)!

▲2▲ Baut einen einfarbigen (etwa blauen) Würfel, der nur die einfache Anschlußbedingung erfüllt!

▲3▲ Baut einen einfarbigen (etwa gelben) Würfel, der die verschärfte Anschlußbedingung erfüllt! Entwickelt hieraus eine rationellere (als die obige) Färbungsvorschrift zur Herstellung der Trio-Würfel!

▲4▲ Greift unterschiedliche Trio-Würfel heraus und baut sie vergrößert im Format $2\times2\times2$ bzw. $3\times3\times3$ nach!

▲5▲ Überlegt euch, ob mit den Trio-Würfeln gleichzeitig ein blauer, ein gelber und ein roter $2\times2\times2$-Würfel gebaut werden kann!

▲6▲ Gebt Beispiele für farbige Gebäudemodelle an, die mit den Trio-Würfeln nicht gebaut werden können!

Zur Färbung der Trio-Würfel

Ausgangspunkt für die Färbung der 27 Trio-Würfel war das folgende *Färbungsproblem*:

Kann man einen Würfelsatz, bestehend aus 27 gleich großen Würfeln, mit drei verschiedenen Farben so färben, daß mit ihm der Zusammenbau eines $3\times3\times3$-Würfels mit einfarbiger Oberfläche, wobei jede der drei Farben die Oberflächenfarbe sein kann, möglich ist? Wenn ja, so sind alle derartigen Färbungen, die wir *zulässige Färbungen* nennen wollen, anzugeben! Dabei sollen die Färbungen von zwei Würfelsätzen als *gleich* angesehen werden, wenn man die Würfelsätze, betrachtet als Würfelmengen, eineindeutig so aufeinander abbilden kann, daß je zwei dabei einander zugeordnete Würfel die gleiche Färbung (bis auf Würfeldrehung) besitzen. Wir wollen zur Färbung o. B. d. A. die drei Farben Blau, Gelb und Rot wählen.

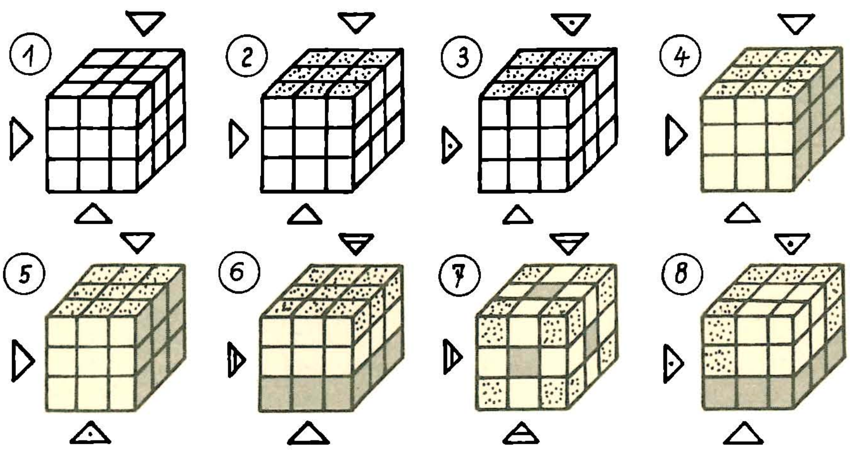


Bild 2: Einige Würfelmodelle aus Trio-Würfeln
Zeichenerklärung: ▨ Blau ☐ Gelb ▩ Rot

▷ (▷, ▷): Die linke Seitenfläche ist blau (gelb, rot)
▽ (▽, ▽): Die Rückfläche ist blau (gelb, rot)
△ (△, △): Die Grundfläche ist blau (gelb, rot)
▷ (▽, △): Die linke Seitenfläche (die Rückfläche, die Grundfläche) hat dieselbe Farbgebung wie die rechte Seitenfläche (die Vorderfläche, die Deckfläche)

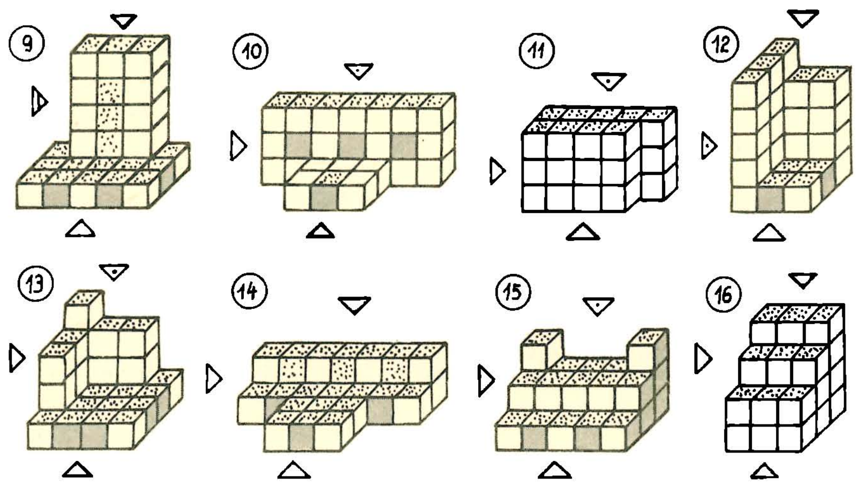


Bild 3: Einige Gebäudemodelle aus Trio-Würfeln, Zeichenerklärung siehe Bild 2

Analyse des Problems:
Nehmen wir an, unser aus 27 Würfeln bestehender Würfelsatz sei bereits zulässig gefärbt, und ein z. B. gelber $3\times3\times3$-Würfel sei daraus gebaut. Dann müssen offenbar 8 Würfel (die Eckwürfel) je drei eine Ecke bildende gelbe Flächen, 12 Würfel (die Kantenwürfel) je zwei in einer Kante zusammenstoßende gelbe Flächen und 6 Würfel (die Flächenwürfel) je eine gelbe Fläche tragen. Es müssen also 54 gelbe Flächen auf 26 Würfeln nach obiger Anordnung liegen. Die innen liegenden 108 Flächen und somit der nicht sichtbare 27. Würfel (der Zentralwürfel) müssen folglich nur die beiden anderen Farben Blau und Rot tragen, denn für den Bau des blauen bzw. roten $3\times3\times3$-Würfels benötigt man ja ebenfalls je 54 blaue bzw. 54 rote Flächen. Daraus ergibt sich, daß ein zulässig gefärbter Würfelsatz genau drei Würfel, die jeweils als Zentralwürfel fungieren, enthalten muß, die nur zwei Farben (in gegenseitiger Kombination auf je drei Eckflächen) tragen, und daß die anderen 24 Würfel alle drei Farben tragen müssen, wobei 6 Würfel je drei blaue Eckflächen, 6 Würfel je drei gelbe Eckflächen, 6 Würfel je drei rote Eckflächen (jeweils zusammen mit zwei Flächen mit gemeinsamer Kante der zweiten und eine Fläche der dritten Farbe), und 6 Würfel die drei Farben auf je zwei Flächen mit gemeinsamer Kante tragen müssen.

Lösung des Problems:
Beschreiben wir jeden Würfel unseres Würfelsatzes durch ein geordnetes Farbtripel (b, g, r), wobei b die Anzahl seiner blauen, g seiner gelben und r seiner roten Flächen angibt (b, g, r ganzzahlig; $0 \leqq b, g, r \leqq 6$; $b+g+r=6$), so muß nach obigen Überlegungen ein zulässig gefärbter Würfelsatz (zunächst noch ohne Berücksichtigung der geometrischen Anordnung der Farben auf einem solchen Würfel) enthalten:

- die 3 Würfel (3, 3, 0), (3, 0, 3), (0, 3, 3), (1)
- 6 Würfel vom Typ (2, 2, 2), (2)
- x_1 Würfel vom Typ (3, 2, 1) und x_2 Würfel vom Typ (3, 1, 2) mit $x_1 + x_2 = 6$, (3)
- x_3 Würfel vom Typ (1, 3, 2) und x_4 Würfel vom Typ (2, 3, 1) mit $x_3 + x_4 = 6$, (4)
- x_5 Würfel vom Typ (2, 1, 3) und x_6 Würfel vom Typ (1, 2, 3) mit $x_5 + x_6 = 6$. (5)

Da die 18 Würfel (3), (4) und (5) offenbar noch je 36 Flächen von jeder Farbe tragen müssen, so liefert das (diophantische) lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + x_6 &= 36\\
2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 + 2x_6 &= 36\\
x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 + 3x_6 &= 36\\
x_1 + x_2 &= 6\\
x_3 + x_4 &= 6\\
x_5 + x_6 &= 6
\end{aligned} \qquad (6)$$

mit der Zusatzbedingung
x_i ganzzahlig,
$0 \leqq x_i \leqq 6$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ (7)
die noch gesuchten Würfelanzahlen x_i. Durch Lösung des linearen Gleichungssystems (6) etwa nach dem Gaußschen Algorithmus und unter Beachtung von (7) erhält man die folgenden sieben Lösungs-6-tupel
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$:
(6, 0, 6, 0, 6, 0), (5, 1, 5, 1, 5, 1),
(4, 2, 4, 2, 4, 2),
(3, 3, 3, 3, 3, 3), (8)
(2, 4, 2, 4, 2, 4), (1, 5, 1, 5, 1, 5)
und (0, 6, 0, 6, 0, 6),
von denen ein jedes eine zulässige Färbung des Würfelsatzes charakterisiert. Berücksichtigt man jetzt noch die geometrische Anordnung der Farben auf einem Würfel, so zeigt sich, daß zwar bei jedem der 21 Würfel (1), (3), (4) und (5) durch das Farbtripel und die Eckbildungsvorschrift die Farbanordnung (bis auf Würfeldrehung) eindeutig festgelegt ist, daß aber die 6 Würfel (2) zwei geometrisch verschiedene Farbanordnungen, die nicht durch Würfeldrehung ineinander übergeführt werden können, zulassen. Denn hat man eine Farbe, z. B. Blau, auf zwei in einer Kante zusammenstoßenden Flächen aufgetragen, so gibt es für die zweite Farbe, z. B. Rot, zwei mögliche Anordnungen, nämlich linksherum (FL) bzw. rechtsherum (FR); die Lage der restlichen zwei Flächen mit der dritten Farbe steht dann fest (siehe Bild 4). Bei jeder der sieben obigen zulässigen Färbungen (ohne Berücksichtigung der geometrischen Anordnung) hat man also sieben Möglichkeiten für die Wahl der 6 Würfel (2), nämlich keinen Würfel mit (FL) und 6 Würfel mit (FR), 1 Würfel mit

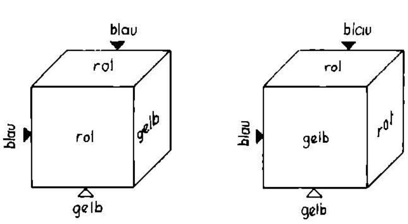


Bild 4: Zwei (2, 2, 2)-Würfel mit den Farbanordnungen (FL) (linker Würfel) bzw. (FR) (rechter Würfel)

(FL) und 5 Würfel mit (FR), usw., wobei die Farbgebung
3 Würfel mit (FL) und 3 Würfel mit (FR) (9)
gegenüber Farbpermutation unveränderlich bleibt. Es gibt also insgesamt $7 \cdot 7 = 49$ verschiedene zulässige Färbungen unseres Würfelsatzes. Unter diesen 49 zulässigen Färbungen gibt es nun genau eine Färbung, nämlich die durch (1), (2) mit (9) sowie (3), (4) und (5) mit (8) bestimmte, die durch eine beliebige Permutation der drei Farben nicht verändert wird.
Diese symmetrische Färbung wurde nun für die Trio-Würfel gewählt, die damit enthalten:
1 Würfel vom Typ (3, 3, 0),
1 Würfel vom Typ (3, 0, 3),
1 Würfel vom Typ (0, 3, 3),
3 Würfel vom Typ (3, 2, 1),
3 Würfel vom Typ (3, 1, 2),
3 Würfel vom Typ (1, 3, 2),
3 Würfel vom Typ (2, 3, 1),
3 Würfel vom Typ (2, 1, 3),
3 Würfel vom Typ (1, 2, 3),
3 Würfel vom Typ (2, 2, 2) nach (FL),
3 Würfel vom Typ (2, 2, 2) nach (FR),
wobei drei gleichfarbige Würfelflächen eine Ecke bilden und zwei gleichfarbige Flächen eine Kante gemeinsam haben müssen.
Im Bild 1 sind die Netze der 27-Trio-Würfel dargestellt, und wir haben eine Färbungsvorschrift zur Herstellung der Trio-Würfel und einige Probleme angegeben. Trotzdem bergen die Trio-Würfel noch viele oben nicht betrachtete Möglichkeiten und Probleme in sich (Entwurf weiterer Gebäudemodelle, Untersuchungen zur einfachen bzw. verschärften Anschlußbedingung, Herstellung eines Würfelsatzes mit einer der anderen 48 zulässigen Färbungen und Untersuchungen dazu u.a.), die ihr bearbeiten könntet.
Betrachtet man das eingangs formulierte Färbungsproblem einmal aus der Sicht der Anzahlen der Würfel und Farben, so liegt die Vermutung nahe für die Lösbarkeit des folgenden Problems für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 1$:
***n*-Farbenproblem für n^3 Würfel:**
Kann man einen Würfelsatz, bestehend aus n^3 gleich großen Würfeln, mit n verschiedenen Farben so färben, daß mit ihm der Zusammenbau eines $nxnxn$-Würfels mit einfarbiger Oberfläche, wobei jede der n Farben die Oberflächenfarbe sein kann, möglich ist? Wenn ja, so sind alle derartige Färbungen (zulässige Färbungen) zu charakterisieren!
Das Problem ist, wie man leicht feststellen kann, für $n = 1$ und $n = 2$ (eindeutig) lösbar. Wie wir gezeigt haben, ist auch das Drei-Farbenproblem für $3^3 = 27$ Würfel (mehrdeutig) lösbar, und eine zulässige Färbung liefert die Trio-Würfel. Wenn ihr Freude daran habt, könnt ihr das Problem ja für beliebiges n einmal untersuchen, zumindest aber für $n = 4$, wonach ihr euch einen Satz *Quartett-Würfel* (64 Würfel) bauen könntet.

Viel Spaß dabei wünscht euch

R. Mildner

Algorithmengrundstrukturen und ihre Notationsformen

Algorithmengrundstrukturen \ Notationsform	verbal
Anweisungsfolge	• Linksbündiges Untereinanderschreiben der Anweisungen (kein Numerieren notwendig!) • Wertungszuweisungen mit Symbol „:=" • Ein- und Ausgabeanweisungen mit „E: …" bzw. „A: …" kennzeichnen
Auswahl a) einseitig	WENN Bedingung DANN A1
b) zweiseitig	WENN Bedingung DANN A1 SONST A2
c) mehrfach A1, A2, … Am-Anweisung(-en)	FÜR Fall k GEHE ZU A1 A2 ⋮ Am
Wiederholung (Zyklus, Schleife) a) Zählzyklus	FÜR Index := Anfang BIS Ende (mit Schrittweite)* Anweisung(-en)
b) Zyklus mit Endbedingung	WIEDERHOLE Anweisung(-en) BIS Bedingung
c) Zyklus mit Anfangsbedingung	SOLANGE Bedingung TUE Anweisung(-en)

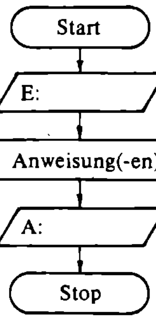
Unteralgorithmenaufrufe werden grafisch wie folgt dargestellt: UA k

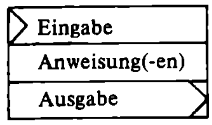
Die Anweisung in den Zyklen (Schleifenkörper) werden optisch meist durch Einrücken hervorgehoben.

*(...) wird weggelassen, wenn die Schrittweite 1 ist.

zusammengestellt von L. Flade/M. Pruzina

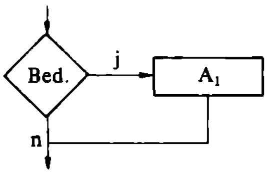
grafisch: Programmablaufplan | Struktogramm — BASIC

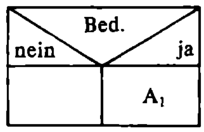




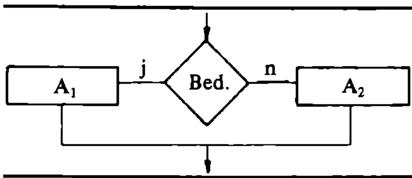
BASIC:

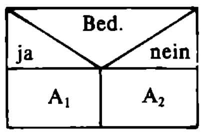
k INPUT ...
l LET ...
m PRINT ...
n END





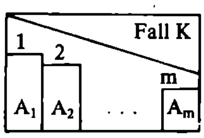
BASIC: IF Bedingung THEN A1



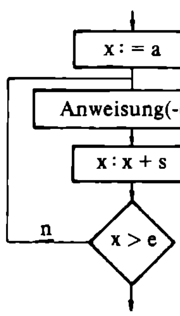


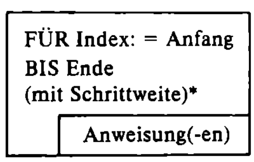
BASIC: IF Bedingung THEN A_1::ELSE A2

Durch Ineinanderschachteln von a) und b) – mehrfach



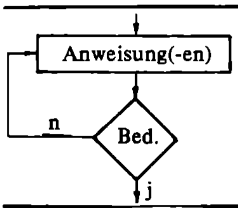
BASIC: ON K GOTO $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$

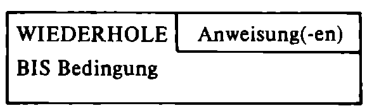




BASIC:

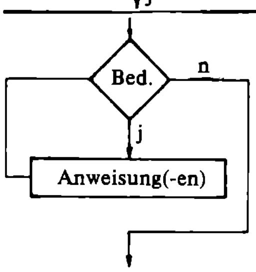
FOR X = A TO E(STEP S)*
Anweisung(-en)
NEXT X

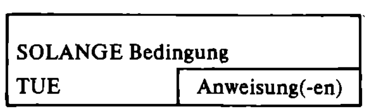




BASIC:

k Anweisung(-en)
l IF NOT (Bedingung) THEN k
m Fortsetzung

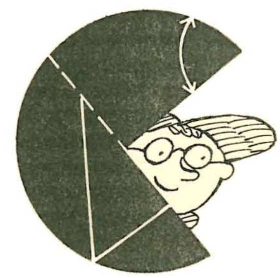




BASIC:

k IF NOT (Bedingung) THEN n
l Anweisung(-en)
m GOTO k
n Fortsetzung

In freien Stunden · alpha-heiter



Primzahl-Hokuspokus

Verbindet in der abgebildeten Zahlenmatrix alle Primzahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge durch einen Polygonzug miteinander, und euch wird ein genialer Mathematiker aus dem 18. Jahrhundert erscheinen! Wer ist es?

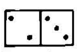
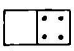
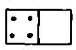
Dr. R. Mildner, Leipzig

3	10	2	21	34	48	58	43	35	51	24	56	1
80	39	55	68	14	75	22	65	41	85	12	76	42
5	49	18	45	33	52	4	30	81	16	91	38	66
69	7	54	19	82	31	25	77	59	93	67	73	79
11	32	6	64	15	57	9	36	60	53	62	8	72
74	20	44	86	26	92	40	87	70	27	50	46	90
13	63	17	23	78	29	37	47	61	84	71	88	28

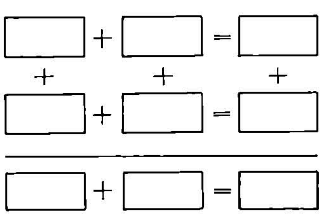
Verflixte Bruchrechnung

Lehrer: „Wenn ich ein Stück Fleisch in zwei Teile schneide, was habe ich dann, Peter?" „Hälften." „Gut. Und wenn ich die beiden Hälften abermals zerschneide?" „Viertel." „Und wenn ich es noch einmal tue?" „Achtel." „Und noch einmal?" „Sechzehntel." „Und noch einmal? Sag du mir das, Fritz!" „Hackfleisch."

Rätselhaftes Domino

Dominosteine sollen, entsprechend abgelegt, ein- oder zweistellige Zahlen darstellen. So soll z. B.  die Zahl 23  4 und  40 bedeuten. In das folgende Schema sind so 9 der 28 Dominosteine eines Spieles einzusetzen, daß alle darin enthaltenen sechs Gleichungen erfüllt sind und daß die in der unteren rechten Ecke stehende Zahl möglichst klein ist.

W. Träger, Döbeln



Lolek und Bolek

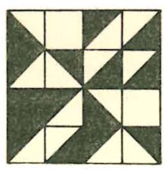
$$\begin{array}{r} \text{LOLEK} \\ +\ \text{BOLEK} \\ \hline \text{REISE} \end{array}$$

Ermittelt – durch Einsetzen von dezimalen Grundziffern für die Buchstaben – alle Lösungen des abgebildeten Kryptogramms! *Dr. R. Mildner, Leipzig*

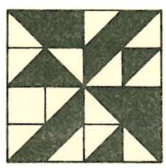
Farbenverkehrt

A ist das Negativ einer Filmaufnahme. Welches der anderen sechs Bilder ist dann das Positiv?

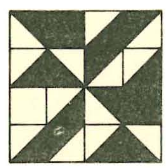
OL O. Chromy, Coswig



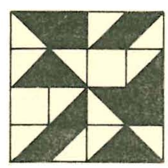
A



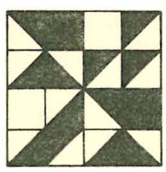
1



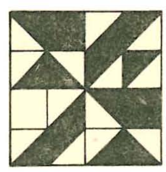
2



3



4



5

6

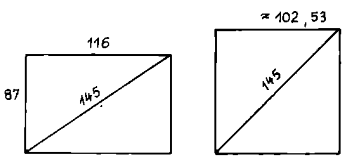
Konsequent betont?

AG-Leiter: „Wer bei den Mathematikolympiaden zu Erfolgen kommen will, muß genau wie beim Sport konsequent trainieren."
Bernd: „Was bedeutet der Begriff konsequent?"
AG-Leiter: „Konsequent bedeutet, erst so und dann wieder so handeln."
Bernd: „Und was bedeutet inkonsequent?"
AG-Leiter: „Inkonsequent bedeutet, erst so und dann wieder so handeln."
Bernd: „Sie haben zwei entgegengesetzte Begriffe mit den gleichen Worten erläutert."
AG-Leiter: „Stimmt, aber du hast einen feinen Unterschied überhört." *OL K. Koch, Schmalkalden*

Mathematisches Märchen

Vor vielen Jahren lebte einmal ein Bauer, der hatte eine bildschöne und fleißige Tochter. Peter und Iwan bewarben sich um die Hand des Mädchens. Der Bauer entschied, daß derjenige seine Tochter zur Frau bekommen sollte, der die Differenz der Flächeninhalte seiner beiden Felder (siehe Bild), eines rechteckigen Feldes (Feld A) und eines quadratischen Feldes (Feld B) mit gleicher Diagonallänge, am genauesten schätzen konnte. Peter schätzte die Flächendifferenz auf 500 Quadratmeter und Iwan auf 400 Quadratmeter. Wer von beiden bekam wohl die Bauerstochter zur Frau?

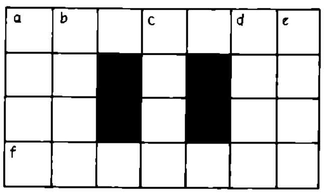
Dr. R. Mildner, aus: LVZ



(Feld A) (Feld B)

Verkehrte Welt am Taschenrechner

Jede Zahl ist mit dem Taschenrechner auszurechnen, und die auf den Kopf gestellte Ergebniszahl (Taschenrechner um 180 Grad drehen!) ist der gesuchte Begriff, der in die Figur eingetragen wird:



Waagerecht:

$a_w = 2^2(2^{10} \cdot 3^7 + 11) - 2^{14}(2^7 + 1) + 5^7 \cdot 7$,

$f = 2 \cdot 3^{13} + 2^2 \cdot 3^2(3^2 \cdot 5 \cdot 19^2 + 2) + 1$.

Senkrecht:

$a_s = 5(2^4 \cdot 5^3 - 137)$, $b = 2^{12} - 223$,

$c = 2^4 \cdot 3^5 - 317$, $d = \frac{7(7^4 - 1)}{2} - 19 \cdot 53$,

$e = 3^3(2 \cdot 3 + 5^3)$.

Dr. R. Mildner, Leipzig

Scheinzauber

Ein Abteilungsleiter eines Betriebes soll der Betriebskasse die Auszahlungsliste für die Jahresendprämie mit Angabe der benötigten Anzahl an Geldscheinen zu 100, 50, 20, 10 und 5 Mark übergeben, um unnötige Laufereien nach Wechselgeld zu vermeiden.

Für seine Mitarbeiter sind folgende Prämien vorgesehen:

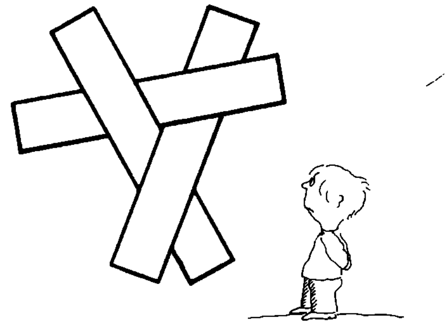
735 Mark, 780 Mark, 845 Mark, 865 Mark, 915 Mark, 955 Mark, 1085 Mark und 1130 Mark. Insgesamt also 7310 Mark.

Wie könnte die der Kasse zu übergebende Liste aussehen?

Ing. A. Körner, Leipzig

Kannst du das?

Schau dir diese Abbildung zwei Minuten lang an und versuche sie aus dem Kopf nachzuzeichnen!



Systematisch zum Ziel

Wie oft ist das Wort „Matheolympiade“ in den folgenden sieben Zeilen und Spalten lesbar?

M A T H E O L Y
A T H E O L Y M
T H E O L Y M P
H E O L Y M P I
E O L Y M P I A
O L Y M P I A D
L Y M P I A D E

Schülerin G. Berthold, Dresden

Eine aktuelle Folge

Wie lautet das mit **?** bezeichnete Glied der Folge 11111000100; 2201122; 133010; 30423; 13112; 5540; 3704; 2648; **?**; 1548; 1198; ...?
Um welche Folge handelt es sich?

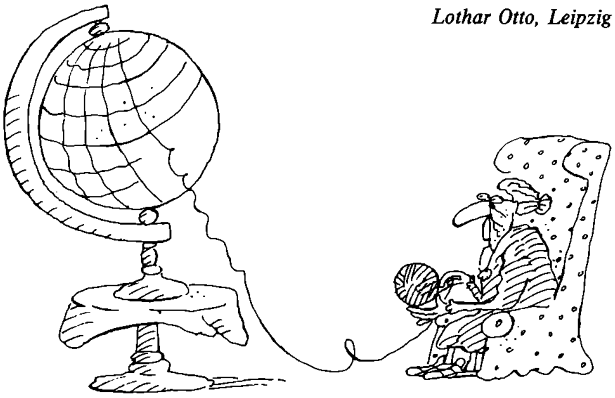
Mathematiklehrer G. Roesch, Apolda

Auflösung der alpha-heiter-Preisaufgabe Heft 4/88

Verschlüsselte Geburtsdaten

Die Geburtsdaten sind: Rainer: 14 05 31
Miriam: 20 10 42
Marina: 24 10 54

Lothar Otto, Leipzig



Alphons informiert:

Wie läuft der Wettbewerb?

Da uns oft Anfragen zum Ablauf des Wettbewerbs erreichen, will ich zu Beginn des Wettbewerbs 1988/89 etwas ausführlicher darüber berichten.
Die Aufgaben werden aus den Aufgabenvorschlägen unserer Leser, der Literatur und mit eigenen Ideen von unseren als Aufgabenautoren tätigen Mitarbeitern zusammengestellt. Ich möchte sie unseren alpha-Lesern vorstellen:

Dr. Werner Riehl, Diplomphysiker und Lehrer für das Fach Physik, Dozent und Leiter des Wissenschaftsbereiches Methodik des Physikunterrichts der *Karl-Marx*-Universität Leipzig, verantwortlich für die Aufgaben aus Naturwissenschaft und Technik;

Oberstudienrat Theodor Scholl, Diplomlehrer für Mathematik, langjähriger Mitarbeiter im Ministerium für Volksbildung, nun zwar Rentner, aber traditionell (seit 1967) in der Aufgabengruppe von *alpha* und als Autor verschiedener Beiträge tätig, verantwortlich für die Mathematikaufgaben der Klassenstufen 5 bis 7;

Dr. Wolfgang Fregin, Fachlehrer für Mathematik und Studiendirektor am Institut für Lehrerbildung *N. K. Krupskaja*, verantwortlich für die Mathematikaufgaben der Klassenstufen 8 bis 10. Er möchte die Gelegenheit zu einigen Bemerkungen über eure Aufgabenvorschläge auch im Namen seiner Kollegen nutzen:
Seit 12 Jahren arbeite ich an der alpha mit. Über die vielen Zuschriften mit Aufgabenvorschlägen, die aus allen Teilen unserer Republik und auch aus dem Ausland eintreffen, bin ich sehr erfreut. Ich verfüge dadurch über einen großen Vorrat, aus dem ich für den Wettbewerb in jedem Jahr 45 Aufgaben auswähle. Aufgabenstellungen und Lösungsvorschläge müssen oft anders formuliert werden – man nennt das redaktionelle Bearbeitung –, so daß mancher Einsender vielleicht seine Aufgabe gar nicht gleich wiedererkennt. Sehr gewissenhaft muß ich dann alles prüfen und nachrechnen, da sich doch ab und zu herausstellt, daß eine vorgeschlagene Rechnung nicht ganz stimmt. Ich wünsche mir vor allen Dingen von den „Aufgabenerfindern", daß recht originelle und nicht so formale Aufgaben eingesandt werden. Es sollten viele eigene Ideen sein und keine lehrbuchartigen Aufgabenstellungen; wir wollen ja in der alpha nicht nur rechnen, sondern hauptsächlich knobeln und unser logisches Denkvermögen einsetzen. Dabei soll möglichst nicht über den Stoff der 10. Klasse hinausgegangen werden.

Und noch etwas: Viele gute Aufgaben muß ich leider deshalb auf die Wartebank schieben, weil eben im Jahr nur 45 Aufgaben abgedruckt werden können.

▲1▲ Nun versucht einmal selbst, mit Hilfe der nachstehenden Zahlenangaben zu berechnen, wie viele Lösungen zum Wettbewerb 1987/88 in unserer Redaktion insgesamt eingegangen sind:
Zu den Wettbewerbsaufgaben der Hefte 5/87 und 6/87 erhielten wir insgesamt 71 269, der Hefte 6/87 und 1/88 insgesamt 65 174, der Hefte 5/87 und 1/88 insgesamt 69 315 Lösungen.
Wie viele Lösungen zum Wettbewerb 1987/88 sind das? Wie viele Lösungen entfallen davon durchschnittlich auf je eines dieser drei Hefte? Zu den Wettbewerbsaufgaben des ersten *alpha*-Heftes (1/1967) wurden rund 14 000 Lösungen eingesandt. Auf wieviel Prozent steigerte sich die Anzahl der eingesandten Lösungen zu einem der Hefte im Wettbewerb 1987/88 gegenüber denen zur ersten alpha-Ausgabe im Jahre 1967?

Schon wenige Tage nach Erscheinen eines Wettbewerbsheftes kommt unsere redaktionelle Mitarbeiterin Frau Schubert mit einer täglich größer werdenden Tasche zur Redaktion geradelt.
In den letzten Tagen vor Einsendeschluß ist es dann mindestens ein Postsack pro Tag.
Nun heißt es für Frau Schubert neben ihrer üblichen Arbeit in der Redaktion Briefe öffnen und die Lösungen zuerst klassenstufenweise, dann aufgabenweise zu sortieren.

▲2▲ Ein in den letzten Tagen bei uns eingegangener Poststapel enthielt rund 2500 Briefsendungen. Welche Arbeitszeit benötigt Frau Schubert für das Öffnen dieser Briefe und das Sortieren der Lösungen nach Klassenstufen und Aufgabennummern, wenn sie durchschnittlich je Brief 14 Sekunden braucht?

Für die Korrektoren der Lösungen (die Chefredakteurin und Mann für die Klassen 5 bis 7 und die Leipziger Mathematiklehrerin Christa Döhler für die Klassen 8 bis 10) beginnt nun ein allabendliches Auswerten, das durch die aufgabenweise Sortierung wesentlich erleichtert wird.

▲3▲ Zur Aufgabe Ma 5 ■ 2807 des Heftes 5/87 gingen bei uns 2691 Lösungen ein, darunter 91,2 % richtige Lösungen. Wie viele richtige bzw. falsche Lösungen entfallen auf diese Aufgabe?
Zur Aufgabe Ma 10/12 ■ 2835 des Heftes 5/87 gingen bei uns 27 falsche Lösungen ein; das sind 3,4 % aller eingesandten Lösungen. Wie viele Lösungen zu dieser Aufgabe erhielten wir; wie viele davon waren richtig?

Nach etwa drei Wochen können die Stapel korrigierter Lösungen an die vielen Helfer verteilt werden, die in ihrer Freizeit für jede eingesandte Lösung eine Antwortpostkarte schreiben. Ihr werdet verstehen, daß bei dieser mühevollen Arbeit eine leserliche und vollständige Adressenangabe sehr wichtig ist. Zumal für unsere Statistik beim Schreiben der Antwortkarten wiederum getrennt wird, diesmal nach Junge oder Mädchen.

▲4▲ Zu den eingegangenen Lösungen des Heftes 5/87 mußten an Mädchen 18 410, an Jungen 885 Antwortkarten mehr als an Mädchen geschrieben werden. Für Heft 6/87 waren es 17 380 Antwortkarten an Jungen, an Mädchen aber 1196 Antwortkarten weniger als an Jungen. Zu den Lösungen des Heftes 1/88 erhielten 16 300 Jungen und 15 310 Mädchen je eine Antwortkarte.
Wie viele Antwortkarten mußten zu den eingegangenen Lösungen für diese drei Hefte insgesamt geschrieben werden?
Eine Antwortkarte hat ungefähr die Dicke von 0,1 mm. Denkt euch alle diese Antwortkarten übereinander gestapelt. Wie hoch ist diese Kartensäule?

Auf dem Leipziger Bahnpostamt werden nun alle Antwortkarten freigestempelt und abgeschickt. Inzwischen beginnen sich aber schon die Lösungen des nächsten Wettbewerbs zu stapeln.
Ungelegen also kommen alle bereits vor dem 1. September eingesandten Antwortkarten für richtige Lösungen.
Frau Schubert beginnt diese erst nach dem 10. September auszuwerten. Sie richtet die Bitte an euch, die Wettbewerbsbedingungen genau durchzulesen und einzuhalten und die Aufgabennummern nochmals genau zu überprüfen. Anderenfalls wird ihr der Postverkehr mit den Teilnehmern am Wettbewerb (1987/88 waren es 5016), die Aufstellung der Teilnehmerlisten und die Statistik erheblich erschwert.
Ende November geht dann ein Aufatmen durch die Redaktion, der Wettbewerb ist abgeschlossen. Aber die Ruhepause ist kurz, denn das Heft 5 mit dem 1. neuen Wettbewerb erschien bereits einen Monat vorher. Also dann, auf ein Neues!

Alphons

Lösungen

▲1▲ $2x = 71\,269 + 65\,174 + 69\,315$,
$2x = 205\,758$, $x = 102\,879$
Zum Wettbewerb 1987/88 gingen bei uns 102 879 Lösungen ein, also je Heft durchschnittlich
$102\,879 : 3 = 34\,293$ Lösungen. Die Anzahl der eingesandten Lösungen steigerte sich gegenüber der zum Heft 1/1967 auf rund 245 Prozent.

▲2▲ $(2500 \cdot 14) : (60 \cdot 60)$ Stunden ≈ 10 Stunden.

▲3▲ Auf die Aufgabe 2807 entfallen 2454 richtige und 237 falsche Lösungen.
Zur Aufgabe 2835 gingen bei uns 794, davon 767 richtige Lösungen ein.

▲4▲ Antwortkarten

	Jungen	Mädchen	insgesamt
5/1987:	19 295	18 410	37 705
6/1987:	17 380	16 184	33 564
1/1988:	16 300	15 310	31 610
			102 879

Die Kartensäule ist etwa 10 m hoch.

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 11. Januar 1989

Ma 5 ■ 2911 Von einem Faß Gurken blieben am ersten Tag 8 kg Gurken mehr übrig als verkauft wurden. Am zweiten Tag verkaufte man die Hälfte der noch im Faß vorhandenen Gurken. Am dritten Tag verkaufte man die restlichen 22 kg Gurken. Wieviel Kilogramm Gurken waren anfangs im Faß? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 5 ■ 2912 Gib alle durch 2 teilbaren dreistelligen natürlichen Zahlen an, die sich aus den Ziffern 3, 4, 5 bilden lassen. Dabei dürfen diese Ziffern auch mehr als einmal in jeder Zahl vorkommen. Welche Zahl erhältst du, wenn du von der halben Summe dieser Zahlen 10 subtrahierst? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 5 ■ 2913 Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal einen Winkel der Größe 157,5°! *Schülerin M. Winkler, Hoyerswerda*

Ma 5 ■ 2914 Wenn die kleinste von fünf beliebigen aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gerade ist, dann ist die Summe aus diesen fünf Zahlen ebenfalls gerade. Diese Behauptung ist zu beweisen! *Schüler R. Holke, Leipzig*

Ma 5 ■ 2915 Ein Vater ist 52, sein Sohn 18 Jahre alt.
In wieviel Jahren wird der Vater doppelt so alt sein wie der Sohn? *Sch.*

Ma 5 ■ 2916 Axel sagt zu Bruno: „Wenn ich viermal so alt bin wie jetzt, dann fehlt mir zu 100 Jahren gerade noch mein jetziges Alter.“ Wie alt ist Axel gegenwärtig? *Sch.*

Ma 5 ■ 2917 Zeichne ein rechtwinkliges Koordinatensystem und in dieses die Punkte $A(1;1)$, $B(3;7)$ und $C(7;7)$. Ermittle alle Punkte D, für die $\overline{CD}$ das Bild von $\overline{AB}$ bei einer Spiegelung ist, und gib deren Koordinaten an. *Mathematiklehrer G. Roesch, Apolda*

Ma 6 ■ 2918 Gegeben sei eine vierstellige natürliche Zahl mit der Quersumme 14, die folgende Eigenschaft hat:
Sowohl das Produkt als auch die Summe aus den Zahlen, die jeweils die erste und vierte Grundziffer darstellen, ergibt eine Zahl, die von der zweiten Grundziffer dargestellt wird. Um welche Zahl handelt es sich? *Schüler R. Hochheim, Erfurt*

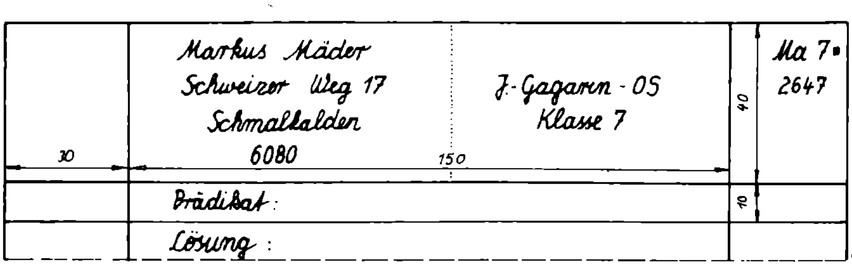
Ma 6 ■ 2919 Ein Garten hat die Form eines Dreiecks. Eine Seite ist 18 m lang; die zweite Seite ist 10 m länger als diese Seite. Die dritte Seite ist halb so lang wie eine von den beiden anderen Seiten. Wie lang ist der Zaun, der um den Garten geht, wenn die Gartentür 1 m breit ist? Die Lösung ist zu begründen! *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 6 ■ 2920 Eine rechteckige Rasenfläche von 70 m Länge wird von einem 2 m breiten Weg umrandet. Dadurch ist die Gesamtfläche einschließlich des Weges 3700 m² groß. Welche Strecke ist zurückzulegen, wenn man auf der Mitte des Weges um den gesamten Rasen herumgeht? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 6 ■ 2921 Bestimme a, b, c aus den drei Gleichungen $a \cdot b \cdot c = 70$ und $a \cdot c = 14$ und $a \cdot b = 10$! *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 6 ■ 2922 Ermittle alle natürlichen Zahlen n mit folgender Eigenschaft:
Addiert man zu n die Quersumme von n, so erhält man als Ergebnis die Zahl 2012! (Hinweis: Die Quersumme z. B. von 5416 beträgt 16 wegen $5 + 4 + 1 + 6 = 16$.) *StR W. Melka, Neubrandenburg*

Ma 6 ■ 2923 Bernd, Doris und Frank sammeln Briefmarken. Bernd hat dreimal soviel Briefmarken wie Doris und 50 mehr als Frank. Wieviel Briefmarken hat jeder von ihnen, wenn sie zusammen 370 Briefmarken besitzen? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027

3. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. (Die Klassenstufennummer steht vor der Aufgabennummer.) Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12 oder Na/Te 10/12 gekennzeichnet sind.
4. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (siehe Muster), da die eingehenden Lösungen aufgabenweise sortiert und korrigiert werden. Noch eine Bitte an die Schulen: Sendet bitte die Lösungen bereits nach Aufgaben sortiert ein.
5. Teilnehmer, die eine richtige Lösung (nicht nur Antwortsatz) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Anderenfalls erhalten sie eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“. Nach dem Einsendetermin eingehende Lösungen werden nicht mehr bearbeitet!
6. Jeder Teilnehmer sollte einen Durchschlag seiner Lösungen anfertigen, um sie mit den jeweils zwei Hefte später erscheinenden Lösungen vergleichen zu können.

Der Jahreswettbewerb 1988/89 läuft von Heft 5/1988 bis Heft 1/1989. Zwischen dem 1. und 10. September 1989 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/88 bis 1/89 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden.

Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/88 veröffentlicht.

Wer mindestens 10 Antwortkarten (von den Wettbewerben der Hefte 5/88 bis 1/89) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein *alpha*-Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1988/89 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunde zurück). Schüler, die schon mehrere Jahre teilnehmen, senden bitte die zuletzt erhaltene Urkunde mit ein. Allein anhand dieser werden die Teilnehmerlisten aufgestellt. Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

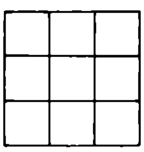
Redaktion alpha

Na/Te 6 ■ 425 Das Tachometer eines Fahrzeuges zeigt eine Geschwindigkeit von $45\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wieviel Meter legt das Fahrzeug in 12 Minuten zurück? *R.*

Ma 7 ■ 2924 Es ist das Lebensalter von acht Kindern, die zusammen 76 Jahre alt sind, aus folgenden Angaben zu ermitteln: Anton ist dreimal so alt wie Christian und Elke viermal so alt wie Bettina. Doris ist zwei Jahre jünger als Elke, Bettina zwei Jahre jünger als Christian. Gisela ist drei Jahre jünger als Anton. Frank ist doppelt so alt wie Bettina. Hans ist ein Jahr älter als Elke. *Schüler C. Neufert, Bernburg*

Ma 7 ■ 2925 In der Gleichung
$a \cdot (b + c) = b \cdot (a + c)$ seien a, b, c von Null verschiedene natürliche Zahlen. Welche Zahlenpaare $(a; b)$ erfüllen die Gleichung, wenn $a = 9$ gelten soll und
(1) c der Nachfolger von b sein soll?
(2) b der Nachfolger von c sein soll?
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ■ 2926 In die neun Quadrate des Bildes sind die natürlichen Zahlen von 1 bis 9 so einzutragen, daß die Summe aus den Produkten der Zahlen jeder Zeile möglichst klein ist. Gib diese Summe an! (Ein Beispiel genügt.)
StR W. Melka, Neubrandenburg



Ma 7 ■ 2927 Beweise, daß in jedem rechtwinkligen Dreieck mit verschieden langen Katheten die Höhe auf der Hypotenuse stets kürzer ist als die halbe Hypotenuse. *Sch.*

Ma 7 ■ 2928 Zeichne ein Dreieck ABC, dessen Innenwinkel ACB die Größe $\gamma = 60°$ hat. Halbiere den Winkel ACB, bezeichne den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit der Seite $\overline{AB}$ mit D, fälle das Lot von D auf $\overline{AC}$, bezeichne den Fußpunkt des Lotes mit E. Bestimme die Größe α des Winkels BAC und die Größe β des Winkels ABC, wenn $\sphericalangle BDC = 2 \cdot \sphericalangle EDA$ gelten soll!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Na/Te 7 ■ 426 Es soll bestimmt werden, aus welchem Stoff ein lackierter Körper mit einer Masse von 234 g besteht. Er wird in einen Meßzylinder (Meßbereich 250 ml), der mit Spiritus gefüllt ist, getaucht. Dabei steigt der Flüssigkeitsspiegel vom Teilstrich 60 auf 90. Aus welchem Stoff könnte der Körper bestehen? *R.*

Na/Te 7 ■ 427 Ein Kraftfahrer fährt eine Strecke von 100 km mit einer konstanten Geschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ein anderer fährt 50 km mit einer Geschwindigkeit von $40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, den Rest der Strecke mit einer Geschwindigkeit von $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wer ist eher am Ziel? Mit welcher Geschwindigkeit müßte der zweite Abschnitt der Strecke gefahren werden, damit die Fahrzeiten beider Fahrer gleich sind? *R.*

Ma 8 ■ 2929 Gegeben sei der Term
$T(a, x) = \frac{4a - x}{5} + 2;\ a \in P, x \in P.$
Bestimme diejenige reelle Zahl x, so daß für alle $a \in P$ mit $a > -\frac{3}{4}$ der Term $T(a, x)$ positiv ist! *Fr.*

Ma 8 ■ 2930 Setzt man die letzte Grundziffer einer dreistelligen natürlichen Zahl mit der Quersumme 9 an den Anfang, so nimmt die neue Zahl im Vergleich zur ursprünglichen um 135 zu.
Wie viele solcher Zahlen gibt es? Wie heißen sie? *Sch.*

Ma 8 ■ 2931 Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und einer beliebigen Sehne $\overline{AB}$. Der auf $\overline{AB}$ senkrecht stehende Durchmesser von k schneide den Kreis in C_1 und C_2. Es ist zu beweisen, daß die Winkelhalbierende eines jeden Peripheriewinkels über dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$ durch C_1 oder C_2 geht!
Schüler R. Schlosser, Boßdorf

Ma 8 ■ 2932 In einer Schachtel mit 10 Fächern liegen in jedem Fach genau 10 Kugeln, insgesamt sind es also 100 Kugeln. Nach dem Spielen fehlen in einigen Fächern je 3 Kugeln, in genausoviel anderen Fächern fehlt je 1 Kugel. In genau der Hälfte der noch verbleibenden Fächer fehlen je 4 Kugeln. In den restlichen Fächern fehlt keine Kugel. Wieviel Kugeln sind noch in der Schachtel?
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 8 ■ 2933 Annette hatte ihre Freundinnen Beate, Christa und Daniella zu sich eingeladen. Nachdem alle vier Frauen an einem Tisch Platz genommen hatten, legte Annettes Ehemann vor den Augen der Frauen vier rote und zwei weiße Rosen in einen Korb und sagte: „Ich werde jetzt jeder von euch genau eine dieser Rosen ins Haar stecken." Er ließ keine der Frauen sehen, welche Rose in ihr Haar gesteckt wurde und welche Rosen im Korb blieben. Jede konnte natürlich die Rosen in den Haaren der anderen sehen. „Nun ratet mal, welche Rose in eurem Haar steckt", sprach Annettes Mann. Nachdem sie alle gründlich nachgedacht hatten, begann Annette: „Ich weiß nicht, welche Farbe die Rose in meinem Haar hat!" Auch Beate sagte, daß sie es nicht wüßte. Nun konnten Christa und Daniella die Farbe der Rose nennen, die jeweils in ihrem Haar steckte. Welche Rosen hatten Christa und Daniella im Haar?
W. Träger, Döbeln

Na/Te 8 ■ 428 Die Strömungsgeschwindigkeit in einem horizontalen Wasserleitungsrohr ($d = 4$ cm) beträgt $10\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Welche Strömungsgeschwindigkeit hat das Wasser in einem engeren Abschnitt des Rohres, wenn der Durchmesser nur halb so groß ist? *R.*

Na/Te 8 ■ 429 Ein Rettungsring aus Kork hat eine Masse von 3,6 kg. Er wird mit einem Körper belastet. Wie groß darf dessen Gewichtskraft höchstens sein, damit der Ring nicht untergeht, wenn er auf Süßwasser schwimmt? Die Dichte des Wassers beträgt $1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, die des Korkes $0{,}2\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. *R.*

Ma 9 ■ 2934 Eine Mutter hatte einen Korb mit Äpfeln, die sie zu gleichen Teilen restlos an ihre Kinder verteilte. Das erste Kind erhielt einen Apfel und ein Siebentel der restlichen Äpfel.
Das zweite Kind erhielt zwei Äpfel und ein Siebentel der nun noch verbliebenen restlichen Äpfel. Das dritte Kind erhielt drei Äpfel und ein Siebentel der noch verbliebenen restlichen Äpfel und so weiter. Wie viele Kinder hat diese Mutter? Wie viele Äpfel enthielt der Korb? *Sch.*

Ma 9 ■ 2935 Teilt man eine zweistellige natürliche Zahl durch ihre *Einerziffer*, so erhält man 12 Rest 2. Vertauscht man die Ziffern der Zahl und teilt die so entstandene Zahl durch ihre *Einerziffer*, erhält man 9 Rest 8. Wie heißt die zweistellige natürliche Zahl?
(Bemerkung: *Einerziffer* ist eine kurze Sprechweise; man kann natürlich nicht durch Ziffern dividieren. Die letzte Ziffer der zweistelligen Zahl wird als einstellige Zahl aufgefaßt!)
Schülerin A. Mißbach, Magdeburg

Ma 9 ■ 2936 Gegeben sei ein beliebiges Quadrat. In diesem Quadrat seien 33 Punkte beliebig verteilt. Es ist zu zeigen, daß es einen Kreis gibt mit $r = \frac{a}{5}$ (mit a sei die Länge der Quadratseite bezeichnet), in dem mindestens drei von diesen 33 Punkten liegen! *A. Israel, Karl-Marx-Stadt*

Ma 9 ■ 2937 Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren, in dem folgende Stücke bekannt sind:
(1) $\sphericalangle BAC$ hat die Größe $\alpha = 65°$,
(2) D liegt auf $\overline{AC}$,
(3) $\sphericalangle ADB$ hat die Größe δ,
(4) $\sphericalangle ACB$ hat die Größe $\frac{1}{2}\,\delta$,
(5) $\overline{DC}$ ist 3 cm lang und
(6) $\overline{AD}$ ist 2 cm lang.
Es ist zu begründen, ob das Dreieck ABC eindeutig konstruierbar ist oder nicht.
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ■ 2938 Es ist zu beweisen, daß die drei Mittelpunkte von drei benachbarten Würfelflächen genau dann ein gleichseitiges Dreieck bilden, wenn diese benachbarten Flächen eine gemeinsame Ecke haben und genau dann ein rechtwinkliges Dreieck bilden, wenn diese Flächen keine gemeinsame Ecke haben!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Na/Te 9 ■ 430 Wie groß ist der Spannungsverlust auf einer 35 m langen Zuleitung aus Kupfer (Querschnitt 2,5 mm², 20° C) bei einer Stromstärke von 12 A? *R.*

Na/Te 9 ■ 431 2 kg Eis von 0°C werden bei einem Druck von 103,3 kPa in Wasserdampf von 100°C umgewandelt. Welche Energie muß mindestens zugeführt werden? *R.*

Ma 10/12 ■ 2939 Es ist zu zeigen, daß für alle α mit $0° < \alpha < 90°$ gilt:
$(\tan\alpha + \cot\alpha)$ sind $2\alpha = 2$!

Ä. Heyl, Eisenach

Ma 10/12 ■ 2940 Im Jahre 1986 wurden in der DDR 11,7 Mio t Getreide bei einem durchschnittlichen Ertrag von 46,4 dt je Hektar geerntet. Um wieviel Prozent muß der durchschnittliche Hektarertrag bei Getreide gesteigert werden, wenn ein Bedarf an 12 Mio t Getreide besteht, die Anbaufläche für Getreide aber um 10000 ha zurückgehen soll?

Dipl.-Landwirt H. Boettcher, Weimar

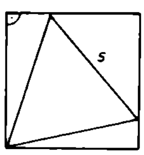
Ma 10/12 ■ 2941 Zu welchen Sehnenvierecken gibt es eine Gerade, durch die das Sehnenviereck in zwei Vierecke zerlegt wird, die wiederum Sehnenvierecke sind? Welche Lage hat eine solche Gerade?

W. Träger, Döbeln

Ma 10/12 ■ 2942 Es ist eine Handlungsvorschrift zu formulieren, wie aus einem beliebigen Rechteck ein flächengleiches Quadrat zu konstruieren ist! Die Konstruktion ist zu zeigen und zu begründen!

Lehrling M. Wierick, Cottbus

Ma 10/12 ■ 2943 Einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite s ist ein Quadrat so umbeschrieben, wie das Bild zeigt. Es ist eine Formel zu entwickeln, nach der die Seite a des Quadrates aus gegebenem s berechnet werden kann. *W. Träger, Döbeln*



Na/Te 10/12 ■ 432 Welche Kraft muß auf einen Körper mit einer Masse von 200 kg wirken, damit er innerhalb von 5 s beschleunigt auf 3 m Höhe gehoben wird? $\left(\text{Fallbeschleunigung } g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$ *R.*

Na/Te 10/12 ■ 433 Welche Leistung muß der Motor eines Pkw mit der Masse von 900 kg aufbringen, damit das Fahrzeug innerhalb von 50 s aus der Ruhelage auf eine Geschwindigkeit von $90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ beschleunigt wird? (Bewegungswiderstände werden nicht berücksichtigt.) *R.*

Eine harte Nuß

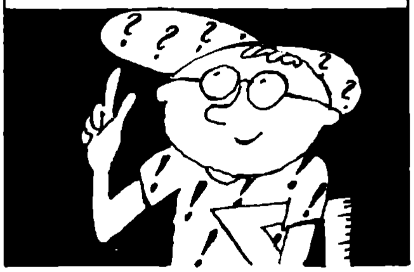
Gegeben ist die Struktur des Zahlenrätsels.

$$\begin{array}{ccccc} \ldots & - & \ldots & = & \ldots \\ : & & : & & : \\ \ldots & + & \ldots & = & \ldots \\ \hline \ldots & - & \ldots & = & \ldots \end{array}$$

Es gibt viele Möglichkeiten, für die drei Punkte natürliche Zahlen so zu setzen, daß alle sechs Gleichungen erfüllt sind. Es ist die Gesamtheit aller Lösungen unter Verwendung von Variablen zu bestimmen!

W. Träger, Döbeln

Lösungen



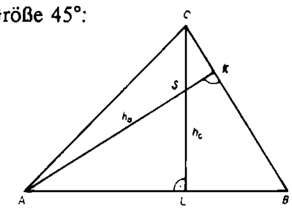
Lösungen zu: Mathematikolympiaden in der VR Mocambique

Fortsetzung aus Heft 4/88

▲4▲ Das k.g.V. der Zahlen 10 und 12 beträgt 60. Nun gilt
$300 < 60 \cdot n < 400$, also $n = 6$.
Daraus folgt
$368 = 10 \cdot 36 + 8 = 12 \cdot 30 + 8$.
Der Bauer brachte 368 Gurken zum Markt.

▲5▲ Aus $m^2 - n^2 = 91$ folgt
$(m-n)(m+n) = 91 = 1 \cdot 91 = 7 \cdot 13$.
Daraus folgt $m - n = 1$ und $m + n = 91$,
$2m = 92$, $m_1 = 46$, $n_1 = 45$,
aber auch $m - n = 7$ und $m + n = 13$,
$2m = 20$, $m_2 = 10$, $n_2 = 3$.

▲6▲ Wegen $\overline{AS} = \overline{BC}$, $\measuredangle ALS = \measuredangle BLC$, $\measuredangle ASL = \measuredangle KSC = \measuredangle LBC$ sind die Dreiecke ALS und LBC kongruent. Deshalb gilt $\overline{AL} = \overline{CL}$ und somit hat der Winkel CAB die Größe 45°:



▲7▲ Aus $\frac{a}{1+a+b} < \frac{a}{1+a}$ und $\frac{b}{1+a+b} < \frac{b}{1+b}$ folgt
$\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$.

▲8▲ Aus $12t + 31m = 368$ folgt
$31m = 372 - 4 - 12t$,
$m = 12 - \frac{4 \cdot (3t+1)}{31}$.
Nur für $t = 10$ und somit für $m = 8$ wird diese Gleichung unter den einschränkenden Bedingungen erfüllt. Der Mathematiker hat am 10. August Geburtstag.

▲9▲ Die Strecke $\overline{PB}$ hat die Länge $b \cdot \sqrt{2}$. Wegen $\overline{AC} = \overline{RQ} = \overline{PB}$ hat $\overline{AC}$ auch die Länge $b \cdot \sqrt{2}$. Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt somit
$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \sqrt{2} \cdot b \cdot \sqrt{2} = b^2$.

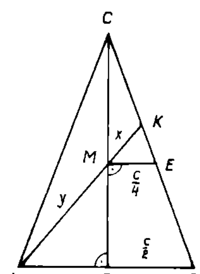
▲10▲ Angenommen, der Händler kaufte x Hühner zum Stückpreis p; dann gilt
$x \cdot p = 3\,360$ und
$(x-7)(p+20) = 3\,360 + 140 = 3\,500$.
Daraus folgt
$x \cdot p + 20x - 7p - 140 = 3\,500$,
$3\,360 + 20x - 7p = 3\,640$,
$20x - 7p = 280$, $7p = 20x - 280$.
Durch Einsetzen erhalten wir
$x \cdot \left(\frac{20x}{7} - 40\right) = 3\,360$,
$x^2 - 14x - 1\,176 = 0$, $x = 42$.
Der Händler hatte ursprünglich 42 Hühner gekauft.

▲11▲ Es sei x der Einkaufspreis des Öls in Tausendern; dann gilt
$x + \frac{x^2}{100} = 24$, $x^2 + 100x - 2\,400 = 0$,
$x = 20$. Das Speiseöl wurde zum Preis von 20000 MT eingekauft.

▲12▲ Nach der Preiserhöhung betrug der neue Preis $p + \frac{20p}{100} = \frac{6p}{5}$.
Nach der Preissenkung betrug der Preis $\frac{6p}{5} - \frac{6p}{25} = \frac{96p}{100}$.
Die Kartoffeln waren nach der Preissenkung um 4% billiger.

▲13▲ Der Winkel DAB habe die Größe φ, der Winkel BAC die Größe α, dann gilt $\tan\varphi = \frac{1}{3}$ und $\tan\alpha = \frac{3}{4}$. Ferner gilt
$$\tan 2\varphi = \frac{2 \cdot \tan\varphi}{1 - \tan^2\varphi} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4},$$
also $2\varphi = \alpha$.

▲14▲ Die Parallele zu AB durch M schneide BC in E. Wegen $\overline{CE} : \overline{CB} = \overline{ME} : \overline{DB} = 1:2$ hat $\overline{ME}$ die Länge $\frac{c}{4}$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke MEK und ABK folgt
$x : \frac{c}{4} = (x+y) : c$, $cx = \frac{cx}{4} + \frac{cy}{4}$,
$4cx = cx + cy$, $4x = x + y$,
$y = 3x$ bzw. $\overline{AM} = 3 \cdot \overline{MK}$.



C. P. Helmholz, H. Hunecke, J. Lehmann, Th. Scholl

Lösungen zu: alpha-Porträt
Heft 4/88

▲1▲ Diese Aufgabe wird wie Aufgabe 6 gelöst, aber der Einheitswürfel ist nur in 8 Würfel der Kantenlänge $\frac{1}{2}$ zu zerlegen.

▲2▲ Man unterscheidet zwei Fälle.
1. Fall: n ist ungerade.
Wegen $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = n$ sind $a_1, \ldots, a_n$ lauter ungerade Zahlen, und zwar ungeradzahlig viele. Also ist $a_1 + \ldots + a_n$ ungerade und damit von 0 verschieden.
2. Fall: n ist gerade.

Da n nicht durch 4 teilbar ist, kommt die 2 in der Primfaktorenzerlegung von n genau einmal vor. Wegen $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = n$ ist also eine der Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gerade, die übrigen ungeradzahlig vielen sind ungerade. Also ist $a_1 + \ldots + a_n$ ungerade und damit von 0 verschieden. Dies war zu zeigen.

▲3▲ Es gilt offenbar:
$2^{683} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 683 \equiv (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2)$
$\cdot \ldots \cdot (2 \cdot 683) \quad (1367)$
$\equiv 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 682 \cdot 684 \cdot \ldots \cdot 1366 \quad (1367)$
$\equiv 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 682 \cdot (-683) \cdot \ldots \cdot (-1) \quad (1367)$
(andere Darstellung)
$\equiv (2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 682) \cdot (683 \cdot \ldots \cdot 1) \quad (1367)$
(342 Minuszeichen)
$\equiv 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 683 \ (1367)$
Da 1, ..., 683 sämtlich zur Primzahl 1367 (siehe Tafelwerk) teilerfremd sind, folgt $2^{683} \equiv 1 \ (1367)$ bzw. $1367 \nmid 2^{683} - 1$, so daß $2^{683} - 1$ keine Primzahl ist.
Bemerkungen zur Lösungsfindung:
a) Wenn man nach einem Primteiler p von $2^{683} - 1$ sucht, so weiß man, daß $2^{p-1} \equiv 1(p)$ (Satz von *Fermat*) und $2^{683} \equiv 1(p)$ (lt. Aufgabe) gelten muß. Es ist also natürlich, $p - 1$ als Vielfaches von 683 zu wählen. $p - 1 = 2 \cdot 683$ liefert schon $p = 1367$.
b) Wenn man $p = 1367$ setzt, kann man dann $2^{683} \equiv 1 \ (1367)$ weniger elegant und mehr systematisch erhalten, indem man zum Beispiel mit dem Taschenrechner fortlaufend die Restklassen von 2^1, 2^2, 2^4, 2^8, ..., 2^{512} berechnet und diese richtig aufmultipliziert.

▲4▲ Es gilt:
$a^3 - 130a^2 - 91a$
$\equiv a(a^2 - 130a - 91) \quad (1987)$
$\equiv a(a^2 - 130a - 14000)$ denn (1987),
$91 \equiv 14000 \ (1987)$ folgt sofort aus
$13 \equiv 2000 \quad (1987)$.
Durch Ausmultiplizieren prüft man nach:
$a^3 - 130a^2 - 91a$
$\equiv a(a - 200)(a + 70) \quad (1987)$
$\equiv a(a - 200)(a - 1917) \quad (1987)$.
Da nun 1987 Primzahl ist (man dividiere zum Beispiel mittels Taschenrechner durch die Primzahlen kleiner als $\sqrt{1987} \approx 44{,}6$), muß $a \equiv 0 \, (1987)$, $a \equiv 200 \, (1987)$ oder $a \equiv 1917 \, (1987)$ gelten. Die gesuchte kleinste natürliche Zahl ist also 200.

▲5▲ Durch Multiplikation mit 5 und Vervollständigung des Quadrates erhält man
$(5m - 3n)^2 + 26n^2 = 9925 = 6 \, (13)$, also
$(5m - 3n)^2 \equiv 6 \, (13)$.
Quadrate lassen jedoch modulo 13 nur die Reste 0, 1, 4, 9, 3, 12, 10. Es gibt folglich keine Zahlen im Sinne der Aufgabe.

▲6▲ Der Einheitswürfel wird in 64 Würfel der Kantenlänge $\frac{1}{4}$ zerlegt. Mindestens einer der Würfel enthält 32 Punkte, da sonst höchstens $64 \cdot 31 = 1984$ Punkte im Einheitswürfel liegen würden. 32 Punkte eines derartigen Würfels werden betrachtet. Der Abstand zweier solcher Punkte ist höchstens gleich der Raumdiagonalenlänge dieses Würfels, also $\frac{1}{4}\sqrt{3}$.
Damit hat ein beliebiger geschlossener Polygonzug mit diesen Ecken höchstens die Länge $32 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

Lösungen zu:
Ohne Wasser, merkt euch das, wär' diese Welt ein leeres Faß
Heft 4/88

▲1▲ a) $\frac{60 \cdot 60 \cdot 0{,}1988}{24} \text{ ml} \approx 30 \text{ ml}$ pro Stunde
b) $24 \cdot 30 \text{ ml} = 720 \text{ ml}$ pro Tag
c) $(366 \cdot 720)\,\text{l} : 1000 \approx 260\,\text{l}$ im Jahre 1988
d) $(262{,}8 \cdot 500) : 1000 \text{ m}^3 \approx 130 \text{ m}^3$

▲2▲ $\frac{60 \cdot 5}{8 \cdot 2} \approx 19$ (mal)

▲3▲ a) $\frac{12 \cdot 12{,}5 \cdot 80}{100}\,\text{l} + 40\,\text{l}$
$= 120\,\text{l} + 40\,\text{l} = 160\,\text{l}$
b) $110 : 8 \approx 14$ Kannen
c) $\frac{12\,000 \text{ cm}^3}{10\,000 \text{ cm}^2} = 1{,}2 \text{ cm} = 12 \text{ mm}$

Lösungen zu: Karl-Weierstraß-Institut und Spezialschule „Heinrich Hertz"
Heft 4/88

▲1▲ Stets gilt $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \geqq 0$. Daher ist $x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} \geqq 0$, woraus durch Addition von 3 die Behauptung folgt.

▲2▲ Wir setzen $a_i = \frac{1}{n} + b_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$. Es folgt
$a_1^2 + \ldots + a_n^2 = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2b_1}{n} + b_1^2\right) + \ldots$
$+ \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2b_n}{n} + b_n^2\right) = n \cdot \frac{1}{n^2}$
$+ \frac{2}{n}(b_1 + \ldots + b_n) + b_1^2 + \ldots + b_n^2$.
Aus $a_1 + \ldots + a_n = 1$ folgt $b_1 + \ldots + b_n = 0$. Daher ist $a_1^2 + \ldots + a_n^2$
$= \frac{1}{n} + b_1^2 + \ldots + b_n^2 \geqq \frac{1}{n}$, w. z. b. w.

▲3▲ p ist eine ungerade Zahl $2m + 1$. Dann ist $p^2 - 1 = 4m^2 + 4m = 4m(m + 1)$. Es folgt $8 \mid p^2 - 1$, da $m(m + 1)$ stets eine gerade Zahl ist. Von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen $p - 1$, p, $p + 1$ ist genau eine durch 3 teilbar. Da p aber nicht durch 3 teilbar ist, folgt
$3 \mid (p - 1)(p + 1) = p^2 - 1$.
Insgesamt ist $p^2 - 1$ also durch 3 und durch 8 teilbar, also auch durch $3 \cdot 8 = 24$ (3 und 8 sind teilerfremd), w. z. b. w.

▲4▲ Angenommen, es ist $d > 1$ ein gemeinsamer Teiler des Zählers und Nenners. Dann gilt
$d \mid 3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 1$.
Das ist aber ein Widerspruch. Also gibt es kein d, w. z. b. w.

▲5▲ $2n + 1$ aufeinanderfolgende natürliche Zahlen können wir in der Form $a - n$, ..., $a - 2$, $a - 1$, a, $a + 1$, $a + 2$, ..., $a + n$ darstellen. Da die Summe von zwei bzgl. a symmetrischen Zahlen $a - i$ und $a + i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ stets $2a$ ist, ergibt sich als Summe aller $2n + 1$ Zahlen $2an + a = a(2n + 1)$, woraus die Behauptung folgt.

▲6▲ Angenommen, die Behauptung ist falsch. Wir wählen unter allen Gegenbeispielen eines mit minimalem n. Es sei also A eine Menge von $n + 1$ Zahlen aus $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, für die die Behauptung falsch ist. Dagegen ist die Behauptung insbesondere für beliebige n Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 2n - 2\}$ noch richtig (es ist $n > 1$). Deshalb kann A höchstens $n - 1$ Zahlen enthalten, die $\leqq 2n - 2$ sind. Daher gilt $2n - 1 \in A$, $2n \in A$.
Folglich ist n nicht in A enthalten $(n \mid 2n)$. Nimmt man zu den $n - 1$ Zahlen von A, die $\leqq 2n - 2$ sind, noch die Zahl n hinzu, so müssen unter diesen zwei Zahlen existieren, von denen eine die andere teilt. Das ist aber nur möglich, wenn ein $a \in A$ mit $a \mid n$ existiert. Damit würde A die Zahlen a und $2n$ enthalten, was wegen $a \mid 2n$ ein Widerspruch ist. Folglich gibt es kein Gegenbeispiel A, d. h. die Behauptung ist richtig.

Lösung zu: Eine harte Nuß

Wenn wir in der mittleren Zeile die linke Zahl mit u und die mittlere Zahl mit v bezeichnen, so lautet die mittlere Zeile $u + v = u + v$. Die beiden darüberstehenden Zahlen müssen dann Vielfache von u bzw. v sein; wir wollen sie mit au bzw. bv bezeichnen:

$$\begin{array}{ccccc} au & - & bv & = & au - bv \\ : & & : & & : \\ u & + & v & = & u + v \\ \hline a & - & b & = & \ldots \end{array}$$

Die neunte Zahl dieses Schemas muß die Gleichung
$a - b = (au - bv) : (u + v)$
erfüllen. Es folgt schrittweise
$(a - b) \cdot (u + v) = au - bv$,
$au + av - bu - bv = au - bv$,
$av = bu$.
Ist k der größte gemeinsame Teiler von u und v und l der größte gemeinsame Teiler von a und b, so gilt $u = kx$, $v = ky$, $a = lm$ und $b = ln$, wobei x und y sowie auch m und n teilerfremd sind.
Durch Einsetzen in $av = bu$ ergibt sich $my = nx$. Da x und y sowie m und n teilerfremd sind, muß $m = x$ und $n = y$ gelten.
Damit ergibt sich

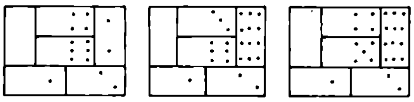
$$\begin{array}{ccccc} klx^2 & - & kly^2 & = & kl(x^2 - y^2) \\ : & & : & & : \\ kx & + & ky & = & k(x + y) \\ \hline lx & - & ly & = & l(x - y) \end{array}$$

Bei der Herstellung mußte gelten: a, b, u, v, k, l, m, n, x, y sind von Null verschiedene natürliche Zahlen.
Nun können wir festlegen:
$k, l, x, y \in N$, $k \neq 0$, $x \geqq y > 0$.
Wegen $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ ist auch die rechte Spalte stets erfüllt. Die allgemeine Lösung ist gefunden.

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Sechs Dominosteine sind wie im Bild in Rechteckform ausgelegt. Lege auch

du sechs Dominosteine derart aus, daß ein zum dargestellten Rechteck kongruentes entsteht, in welchem die Summe (das heißt, die durch die Dominosteine in der untersten Zeile symbolisierte Dezimalzahl) möglichst klein ist.
Lösung: Auf Grund des Aufbaus des Dominospiels ist die kleinste in der angegebenen Weise darstellbare Summe 102. Sie ist durch drei verschiedene Anordnungen darstellbar:



▲2▲ Eine gerechte Teilung
Zwei Männer verkauften ihre Herde von x Kühen zu x Dollar das Stück. Davon kauften sie Schafe zu 10 Dollar das Stück und ein einzelnes Lamm, das weniger als 10 Dollar kostete. Jeder Mann erhielt die gleiche Anzahl Tiere, aber derjenige, der das Lamm erhielt, hatte einen Ausgleich zu bekommen, damit die Teilung gerecht wird. Wieviel Geld hat er von dem anderen Mann erhalten?
Lösung: Der Verkaufserlös für die Kühe beträgt x^2 Dollars. Die Zahl der Schafe muß ungerade sein. Sie sei $2n+1$ $(n \in N)$.
Dann teilt sich der Verkaufserlös folgendermaßen auf: $x^2 = 10(2n+1) + y$, wobei y der Preis des Lammes ist.
Quadratzahlen mit einer ungeraden Zahl an der Zehnerstelle (16, 36, 196, 256, ...) haben immer die 6 als Einerstelle (hier ohne Beweis). Deshalb beträgt die Differenz 4 Dollar.
Folglich erhält der Mann mit dem Lamm eine Ausgleichszahlung von 2 Dollar.

▲3▲ Ein Eisenträger mit T-Profil besteht aus einem Rechteck von 4 cm mal 1,2 cm und einem zweiten von 6 cm mal 1,5 cm. Die Länge des Trägers beträgt 4 m. Berechne die Masse des Trägers, wenn die Dichte von Eisen $7{,}8\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ ist!
Lösung: $m = V \cdot \varrho$; $m = (A_1 + A_2) \cdot l \cdot \varrho$; $m = 43$ kg. Der Eisenträger besitzt eine Masse von ca. 43 kg.

Lösungen zu: Eigenaufgaben der MSG Greifswald

▲1▲ 2 Uhr 06 min 52 sec
bis 2 Uhr 19 min 25 sec
3 Uhr 04 min 25 sec
bis 3 Uhr 19 min 25 sec
4 Uhr 04 min 25 sec
bis 4 Uhr 19 min 25 sec
5 Uhr 04 min 25 sec
bis 5 Uhr 06 min 52 sec

▲2▲ Gleiche Massen ergeben die größere Dichte.

▲3▲

Sonntag	1.	2.	3.	4.	Σ	Kerze
1.	1(0)	1(0)	0	1	$k \cdot 1$	
2.	0(1)	0(1)	1	1	$l \cdot 2$	
3.	1	1	1	0	$m \cdot 3$	
4.	1	1	1	1	$n \cdot 4$	

In der i-ten Zeile muß die Zeilensumme ein Vielfaches von i sein. In der j-ten Spalte muß die Spaltensumme 3 sein. Dann ist
$k \cdot 1 + l \cdot 2 + m \cdot 3 + n \cdot 4 = 12$
Also
$n = 1,\ m = 1,\ k + 2l = 5,\ k \geqq 1,\ l \geqq 1,$
d. h. $k = 1,\ l = 2$ oder $k = 3,\ l = 1$
Dabei ist am 1. (bzw. 2.) Sonntag zu beachten, daß die Kerzen so brennen, daß die Forderung a) nicht verletzt wird. Das ist möglich.

Lösungen zu: Ein Legespiel – mathematisch betrachtet

▲1▲ 48
▲2▲ Ja, $c' = ab = (2,1,3,0,1,1)$
▲3▲ Ja
▲4▲ $d = (2,1,3,1,0,0)$,
$d' = (3,2,1,1,0,1)$
▲5▲ $(2,3,1,0,0,0)$, $(3,1,2,0,0,0)$, $(1,2,3,0,0,0)$, $(1,3,2,1,1,1)$, $(3,2,1,1,1,1)$, $(2,1,3,1,1,1)$

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. nat. F. Terpe

▲2910▲ Das Verhältnis beträgt $(1-k)^2 : (2k+2)^2$.

Lösungen zu: Die Konstantenautomatik des SR 1

▲1▲
1.a) $(a+b)\,c$; 1.b) $a + bc$;
2.a) $ab : c$; 2.b) $ab : c$

▲2▲
1. $a + b^2$; 2. ab^c; 3. $(ab)^c$

▲3▲
1.a)α) ab^2; β) cb^2; γ) db^2
1.b) $\boxed{x}\ \boxed{b}\ \boxed{x^2}$
2.a)α) $a^2 + \frac{1}{\sqrt{b}}$; β) $c + \frac{1}{\sqrt{b}}$; γ) $d + \frac{1}{\sqrt{b}}$;
2.b) $\boxed{+}\ \boxed{b}\ \boxed{\sqrt{}}\ \boxed{1/x}$

▲4▲
1.a)α) $a + b - c$; β) $d - c$; γ) $e - c$;
1.b) $\boxed{-}\ \boxed{c}$;
2.a)α) $\frac{a^2}{b} \cdot \sqrt{c}$; β) $d\sqrt{c}$; γ) $e\sqrt{c}$;
2.b) $\boxed{x}\ \boxed{c}\ \boxed{\sqrt{}}$

▲5▲
1.a)α) $ab - \frac{1}{c} + \frac{d}{e}$; β) $f + \frac{d}{e}$; γ) $g + \frac{d}{e}$;
1.b) $\boxed{+}\ \boxed{d}\ \boxed{\div}\ \boxed{e}$; 2.a)$\alpha$) $\frac{a}{b} \cdot \sqrt{c}^{\,d}$;
β) $e \cdot \sqrt{c}^{\,d}$; γ) $f \cdot \sqrt{c}^{\,d}$;
2.b) $\boxed{x}\ \boxed{c}\ \boxed{\sqrt{}}\ \boxed{y^x}\ \boxed{d}$

▲6▲
1.α) $ab : c^2$; β) $\frac{1}{d} : c^2$; γ) $e : c^2$; δ) $f + g$;
ε) $h + g$;
2.α) $\frac{1}{a+b}$; β) $c + b$; γ) $c + 2b$;
δ) $-d + b$; ε) $e \cdot e = e^2$; ζ) $f \cdot e$;
η) $g \cdot e$;
3.α) ab; β) $\frac{1}{c^2} \cdot b = \frac{b}{c^2}$; γ) $\frac{1}{c^2} b \cdot b = \frac{b^2}{c^2}$;
δ) $d + e - fg$; ε) $h - fg$

▲7▲ $\boxed{a_1}\ \boxed{x}\ \boxed{3}\ \boxed{\sqrt{}}\ \boxed{=}\ \boxed{a_2}\ \boxed{=}\ldots$
$\nearrow e_1$ $\nearrow e_2$
$3{,}87\text{ dm} < e_1 < 3{,}89\text{ dm}$; $6{,}3\text{ cm} < e_2 < 6{,}5\text{ cm}$; $10{,}1\text{ cm} < e_3 < 10{,}4\text{ cm}$; $7{,}92\text{ m} < e_4 < 7{,}95\text{ m}$; $4{,}7 \cdot 10^{-10}\text{ cm} < e_5 < 5{,}0 \times 10^{-10}\text{ cm}$

▲8▲
$\boxed{4}\ \boxed{x}\ \boxed{\pi}\ \boxed{=}\ \boxed{x \to M}\ \boxed{r_1}\ \boxed{x^2}\ \boxed{x}$
$\boxed{MR}\ \boxed{=}\ \boxed{r_2}\ \boxed{x^2}\ \boxed{=}\ldots$
$\nearrow A_{01}$ $\nearrow A_{02}$
$102\text{ cm}^2 < A_{01} < 110\text{ cm}^2$; $172\text{ m}^2 < A_{02} < 174\text{ m}^2$; $876\text{ dm}^2 < A_{03} < 898\text{ dm}^2$; $5{,}0998 \cdot 10^8\text{ km}^2 < A_{04} < 5{,}1015 \cdot 10^8\text{ km}^2$

▲9▲ $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}} = \sqrt{\frac{1}{h} \cdot \frac{V}{\pi}}$
$\boxed{V}\ \boxed{\div}\ \boxed{\pi}\ \boxed{=}\ \boxed{x \to M}\ \boxed{h_1}\ \boxed{1/x}\ \boxed{x}$
$\boxed{MR}\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{}}\ \boxed{h_2}\ \boxed{1/x}\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{}}\ldots$
$\nearrow r_1$ $\nearrow r_2$
Der Zielwert $V = 500\text{ cm}^3 = 0{,}5\text{ l}$ wird als wahrer Wert angesehen. Dann gilt:
$3{,}36\text{ cm} < r_1 < 3{,}38\text{ cm}$; $3{,}020\text{ cm} < r_2 < 3{,}029\text{ cm}$; $2{,}567\text{ cm} < r_3 < 2{,}573\text{ cm}$; $2{,}301\text{ cm} < r_4 < 2{,}306\text{ cm}$

▲10▲ $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{-b^2 + c^2}$
$\boxed{b_1}\ \boxed{x^2}\ \boxed{+/-}\ \boxed{+}\ \boxed{c}\ \boxed{x^2}$
$\boxed{=}\ \boxed{\sqrt{}}\ \boxed{b_2}\ \boxed{x^2}\ \boxed{+/-}\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{}}\ldots$
$\nearrow a_1$ $\nearrow a_2$
Wird auch $c = 6{,}3$ cm als Meßwert angesehen, so gilt:
$6{,}1\text{ cm} < a_1 < 6{,}3\text{ cm}$; $5{,}8\text{ cm} < a_2 < 6{,}0\text{ cm}$; $5{,}2\text{ cm} < a_3 < 5{,}4\text{ cm}$; $4{,}5\text{ cm} < a_4 < 4{,}9\text{ cm}$; $3{,}5\text{ cm} < a_5 < 3{,}9\text{ cm}$

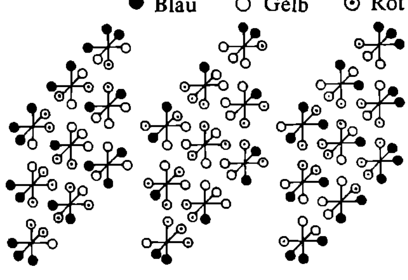
▲11▲ $R = \frac{1}{\frac{1}{R_I} + \frac{1}{R_{II}}} = \frac{1}{\frac{1}{R_{II}} + \frac{1}{R_I}}$
$\boxed{R_{II1}}\ \boxed{1/x}\ \boxed{+}\ \boxed{R_I}\ \boxed{1/x}$
$\boxed{=}\ \boxed{1/x}\ \boxed{R_{II2}}\ \boxed{1/x}\ \boxed{=}\ \boxed{1/x}\ldots$
$\nearrow R_1$ $\nearrow R_2$
Wird auch $R_I = 50\,\Omega$ als Meßwert angesehen, so gilt:
$8{,}29\,\Omega < R_1 < 8{,}37\,\Omega$; $14{,}25\,\Omega < R_2 < 14{,}32\,\Omega$; $18{,}72\,\Omega < R_3 < 18{,}78\,\Omega$; $22{,}19\,\Omega < R_4 < 22{,}25\,\Omega$; $24{,}97\,\Omega < R_5 < 25{,}03\,\Omega$; $27{,}24\,\Omega < R_6 < 27{,}30\,\Omega$; $29{,}14\,\Omega < R_7 < 29{,}20\,\Omega$; $30{,}74\,\Omega < R_8 < 30{,}80\,\Omega$; $32{,}11\,\Omega < R_9 < 32{,}17\,\Omega$; $33{,}30\,\Omega < R_{10} < 33{,}37\,\Omega$

▲12▲
$\boxed{1{,}1}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{M+}\ \boxed{1{,}2}$
$\nearrow 1{,}1^3$
$\boxed{=}\ \boxed{M+}\ \ldots\ \boxed{1{,}9}\ \boxed{=}\ \boxed{M+}\ \boxed{MR}$
$\nearrow 1{,}2^3$ $\nearrow 1{,}9^3$ $\nearrow s$
$s = 33{,}075$

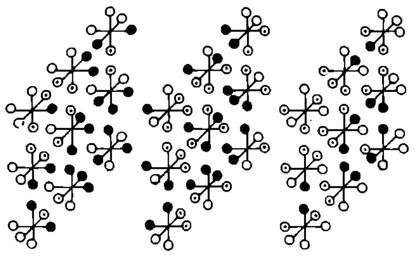
Lösungen zu: Die Trio-Würfel

▲2▲ Das Bild zeigt ein mögliches Modell:

● Blau ○ Gelb ⊙ Rot



▲3▲ Folgende Färbungsvorschrift zur Herstellung der Trio-Würfel ist zu entnehmen: Man setze 27 gleich große Würfel zu einem 3×3×3-Würfel zusammen und färbe dessen Oberfläche mit der 1. Farbe. Dann ziehe man die drei Schichten in jeder der drei räumlichen Richtungen auseinander und färbe in jedem Falle zwei gegenüberliegende Schichtflächen mit der 2. Farbe und die beiden anderen gegenüberliegenden Schichtflächen mit der 3. Farbe so, daß der Zentralwürfel zwei einfarbige Ecken hat.



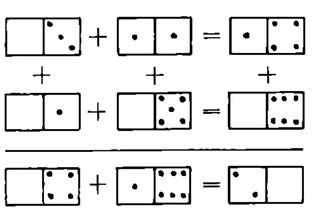
▲5▲ Das ist nicht möglich, denn in den erstgebauten einfarbigen 2×2×2-Würfel müssen bereits zwei einfarbige Würfelekken der beiden anderen Farben eingebaut werden, die für den Bau eines zweiten oder dritten Würfels fehlen.

▲6▲ Wegen der Spezifik der Färbung der Trio-Würfel (3 der 27 Trio-Würfel tragen nur zwei Farben, gegenüberliegende Würfelflächen sind niemals gleichfarbig, nur begrenzte Anzahl von Würfeln eines bestimmten Typs) können z. B. nicht gebaut werden: a) nichtwürfelförmige Modelle mit einfarbiger Oberfläche, b) aus 27 Würfeln bestehende Mauern (Dicke: 1 Würfelseite) mit einer einfarbigen Wandfläche, c) Gebäudeteile (Dicke: 1 Würfelseite), bei denen gegenüberliegende Teilflächen gleichfarbig sind.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

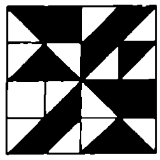
Primzahl-Hokuspokus
Der Polygonzug ergibt das Wort Euler (Leonhard Euler, 1707 bis 1783).

Rätselhaftes Domino



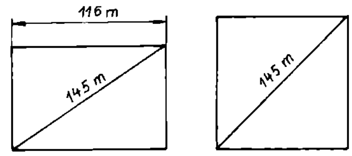
Lolek und Bolek
Durch Fallunterscheidung nach E ($E = 0$, 2, 4, 6, 8) erhält man die folgenden acht Lösungen:
41426 + 31426 = 72852; 37342 + 17342 = 54684; 37342 + 57342 = 94684; 32347 + 52347 = 84694; 19184 + 59184 = 78368; 39384 + 19384 = 58768; 14189 + 54189 = 68378; 24289 + 14289 = 38578

Farbenverkehrt



5

Mathematisches Märchen
Mit dem Satz des Pythagoras kann man die noch fehlenden Feldseiten berechnen:
Feld A – 10092 Quadratmeter;
B – 10512,5 Quadratmeter;
Differenz – 420,5 Quadratmeter.
Iwan bekam die Bauerstochter zur Frau, da seine Schätzung genauer war.



(Feld A) (Feld B)

Verkehrte Welt am Taschenrechner
Waagerecht: $a_w = 7391335$ (SEEIGEL), $f = 3773539$ (GESELLE).
Senkrecht: $a_s = 9315$ (SIEG), $b = 3873$ (ELBE), $c = 3571$ (ILSE), $d = 7393$ (EGEL), $e = 3537$ (LESE).

Scheinzauber

	Scheine zu (Mark)				
Betrag	100	50	20	10	5
735	7	–	1	1	1
780	7	1	1	1	–
845	8	–	2	–	1
865	8	1	–	1	1
915	9	–	–	1	1
955	9	1	–	–	1
1085	10	1	1	1	1
1130	11	–	1	1	–
7310	69	4	6	6	6
Kontrolle					
7310	6900	200	120	60	30

Systematisch zum Ziel
Um von M zu E (rechts unten) zu gelangen, gibt es über die Buchstaben der 7. Zeile bzw. Spalte nur je eine Möglichkeit. Die Anzahl der Wege über alle anderen Buchstaben läßt sich jeweils aus der Summe der sich unmittelbar darunter und rechts daneben ergebenden Anzahl der Wege ermitteln. Damit ergeben sich 1716 Möglichkeiten.

Die aktuelle Folge
Das gesuchte Folgeglied heißt 1988.
Bei dieser Folge handelt es sich um das Jahr 1988 in den Positionssystemen zur Basis 2; 3; 4; ...

Lösung zu: Visuelle Logik
Heft 4/88

Die Zeichen entsprechen den Zahlen 1 bis 6 und sie liegen sich an den Berührungspunkten gegenüber. Die Summe der Zeichen und Zahlen in den aus den Feldern gebildeten Quadraten ist immer 25. In die leeren Felder muß deshalb die Blüte als Zeichen für die 1 eingezeichnet werden.

Buchtips

Karl Heinz Hardt
Das Flugzeug
47 Seiten, zahlr. Abb.
Bestell-Nr. 632 120 5 Preis: 12,50 M
Der Kinderbuchverlag Berlin

G. Brandes/R. Jarschel
Feuer und Flamme
Interessantes vom Feuerzeug
Etwa 192 Seiten, zahlr. Abb.
Bestell-Nr. 547 442 9 Preis: 20,50 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

Walter Kranzer
So interessant ist die Mathematik
Ein Spaziergang durch das Reich der Mathematik zur Würze von Mußestunden und zur Anregung im Unterricht
Etwa 250 Seiten, zahlr. Abb.
Bestell-Nr. 571 680 3 Preis: 30,00 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

Eberhard Schröder
Mathematik im Reich der Töne
111 Seiten, 61 Abb., MSB Nr. 106
Bestell-Nr. 666 078 4 Preis: 7,00 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig

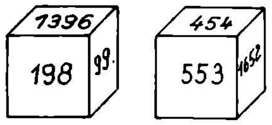
Wißt ihr schon?

– Die älteste Bibliothek der Menschheit entstand vor fast 4000 Jahren im Land Sumer. Sie bestand aus mehr als 2000 Schrifttafeln, die wichtige Gesetze, dazu viele Märchen, Sagen, Lieder und auch wissenschaftliche Texte enthielten.
– Eine der ältesten mathematischen Schriften vor 3600 Jahren im alten Ägypten von einem Schreiber namens Ahmes verfaßt wurde. Sie enthält eine Sammlung von Rechenaufgaben, die praktische Probleme behandeln. So zum Beispiel Flächen- und Volumenberechnungen, geometrische Konstruktionen in Architektur und Bauwesen und auch schon Aufgaben mit Variablen.
– Vor fast 1000 Jahren in einer Wiener Klosterbibliothek jeder Mönch, wenn er ein neues Buch ausleihen wollte, eine Prüfung ablegen mußte; er mußte beweisen, ob er das alte Buch nutzbringend gelesen hat. Fiel er durch, bekam er es nochmal.

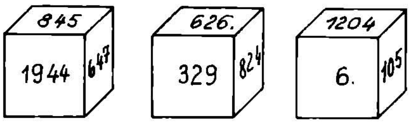
aus: R. Fiedler „Streifzüge durch die Mathematik", H. Meyer „Bücher, Leser, Bibliotheken", beide: Der Kinderbuchverlag Berlin

Schneller als mit dem Rechner!

Teil 2



297, 1990, 594 — 1850, 157, 58



1548, 746, 449 — 428, 1923, 1725 — 600, 501, 1303

Im ersten Teil hatten wir mit sechs Würfeln gewürfelt. Jetzt *steigern wir uns* und sind auch noch bei fünf Würfeln schneller im Addieren als unser Freund mit seinem Rechner.

Noch einmal das Prinzip: Auf den fünf abgebildeten Würfeln siehst du auf den Würfelflächen ein-, zwei-, drei- oder vierstellige natürliche Zahlen notiert. (Die Zahlen der jeweils nicht sichtbaren Flächen sind daruntergeschrieben.) Dein Freund würfelt und du stellst die fünf gewürfelten Zahlen schön in Reihe nebeneinander. Während dein Freund mit dem Rechner addiert, addierst du die fünf Einer und schreibst sie dir als zweiziffrige Zahl auf. Dann ergänzt du diese Zahl zu 50 und schreibst sie davor, so daß eine vierstellige Zahl entsteht. Dann addierst du noch schnell die (eventuell vorhandenen) Tausender zu den Tausendern deiner vierstelligen Zahl dazu. Du wirst sicher schneller sein als dein Freund mit seinem Rechner.

Als Beispiel:

198, 58, 1944, 725, 1204.

Einersumme 29, Ergänzung 21, also 2129; dazu 2 Tausender, somit 4129 als Ergebnis.

Nun wenden wir uns den Fragen zu:

1. *Warum* findet man *so* die *schnelle Lösung*?
2. *Wie* stellt man sich solche Zahlen auf den Würfeln her?

Betrachten wir die einzelnen Würfel etwas genauer!

Dazu lassen wir zunächst die Tausender außer Betracht und setzen vor die ein- und zweistelligen Zahlen 00 bzw. 0, so daß jetzt bei allen Würfeln dreiziffrige Darstellungen vorliegen von der Form $\overline{abc}$ (in Ziffermdarstellung) bzw. $100a + 10b + c$ (in Potenzschreibweise).

Wir stellen fest:

1. Bei ein und demselben Würfel sind die Zehnerstellen untereinander gleich.

Dabei lauten die fünf Zehner bei unseren fünf Würfeln

$b_1 = 9,\ b_2 = 5,\ b_3 = 4,\ b_4 = 2,\ b_5 = 0.$

Ihre Summe ergibt sich daraus mit $b_s = 20$.

2. Bei ein und demselben Würfel sind die sechs Summen, die jeweils aus der Hunderter- und der Einerstelle gebildet werden, untereinander gleich.

Bezeichnet man nun auf unseren fünf gewürfelten Zahlen die Hunderter mit a_1 bis a_5 und die Einer mit c_1 bis c_5, so erhält man

$a_1 + c_1 = 9,\ a_2 + c_2 = 8,\ a_3 + c_3 = 13,$
$a_4 + c_4 = 12,\ a_5 + c_5 = 6.$

Ist a_s die Summe der fünf Hunderter, so gilt demnach

$$a_s = (9 - c_1) + (8 - c_2) + (13 - c_3) + (12 - c_4) + (6 - c_5) = 48 - c_s,$$

wenn mit c_s die Summe der fünf Einer bezeichnet wird.

Nun bilden wir die Gesamtsumme s der gewürfelten Zahlen. Es ist dann

$$s = (48 - c_s)\cdot 100 + 20\cdot 10 + c_s = 4800 + 200 - 100c_s + c_s = 5000 - 100c_s + c_s = (50 - c_s)\cdot 100 + c_s.$$

Und das ist gerade die anfangs angegebene Methode zum schnellen Finden der vierstelligen Summe. Wir beachten nur noch, daß wir eventuell vorhandene Tausender hinzufügen müssen.

Die Frage nach weiteren Zusammenstellungen solcher Würfelsysteme wirst du vielleicht nun selbst beantworten können.

An einem Beispiel mit sechs Würfeln wollen wir unsere Überlegungen dennoch gemeinsam treffen.

Welchen Bedingungen unterliegen unsere Zahlen?

a) Zur Festlegung der Zehnerziffern:

Auf unseren sechs Würfeln muß die Summe $b_s = b_1 + b_2 + \ldots + b_6$ ein Vielfaches von 10 sein, denn ein Vielfaches von 100 muß später addiert werden. Sollen bei den sechs Zehnerziffern keine zwei gleiche Ziffern erscheinen (was wegen der *Verschleierung* sinnvoll ist), so verbleiben für b_s nur die Summen 20 oder 30. (Für $b_s = 10$ wäre

$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + k = 10$, *mit* $k \geqq 5$

nicht möglich und für $b_s \geqq 40$ wäre

$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + k \geqq 40$, mit $k \leqq 4$

nicht möglich.)

Wir wählen also z. B. $b_s = 20$ und als Zehner die Zahlen 0, 1, 2, 3, 6, 8.

b) Zur Festlegung der Hunderter- und Einerziffern:

Wegen $b_s = 20$ ergeben sich für die Summe auf unseren sechs Würfeln

$$(a + c)_s = (a_1 + c_1) + (a_2 + c_2) + \ldots + (a_6 + c_6) \text{ nur } 48.$$

Sollen auf den sechs Seitenflächen ein und desselben Würfels bei den Hunderterziffern bzw. bei den Einerziffern keine zwei gleiche Ziffern erscheinen *(Verschleierung)*, so muß jeder der angegebenen sechs Summanden größer als 4 und kleiner als 14 sein. Da nämlich

$$4 = (0 + 4) = (1 + 3) = (2 + 2) = (3 + 1) = (4 + 0) = (?) \text{ bzw.}$$
$$14 = (9 + 5) = (8 + 6) = (7 + 7) = (6 + 8) = (5 + 9) = (?),$$

würden sich mindestens auf einer der sechs Seitenflächen des Würfels die angegebenen Zahlen in der Hunderter- und Einerstelle wiederholen.

Ein Beispiel für $(a + c)_s = 48$ könnte die Zerlegung

$5 + 7 + 8 + 9 + 9 + 10$ sein.

Würfel I könnte dann die Zahlen haben:

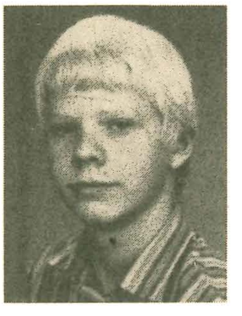
500, 401, 302, 203, 104, 5

Würfel II 710, 611, 413, 314, 116, 17

Unter Beachtung des beschriebenen Verfahrens vervollständige selbst und setze zur *Verschleierung* noch bei jedem Würfel ein bis zwei Eintausender vor die dreistelligen Zahlen!

Abschließend sei noch bemerkt, falls du dir zwei solcher Würfelsysteme gebastelt hast, daß du sie zu einem vereinigen kannst und daß dann natürlich wegen der Additionen jetzt die zweiziffrige Summe aller Einerzahlen auf 100 zu ergänzen ist.

Viel Spaß beim Basteln und beim Vorführen!



Unser Mitglied des Bezirksklubs Junger Mathematiker/Bezirk Neubrandenburg *Jan Fricke* aus Pasewalk, Kl. 10 (siehe Bild) schickte uns nach Aufforderung dazu eine Lösung für dieses Würfelsystem. Jan ist seit der 5. Klasse Mitglied des BJM und war bisher stets Frühstarter auf den Kreis-, Bezirks- und DDR-Mathematikolympiaden. 1988 erhielt er in Olympiadeklasse 12 als Frühstarter einen I. Preis sowie ein Diplom für eine besonders elegante Lösung einer Aufgabe.

H.-J. Kerber

Eine Leseranfrage

Liebe Redaktion *alpha*!

Von einem Freund wurde mir folgende mathematische Aufgabe gestellt:

Ein Würfel mit einem Kilometer Kantenlänge sei mit Wasser gefüllt. Im Boden sei eine Öffnung von 100 mm Durchmesser. Wie lange braucht das Wasser, um aus dem Gefäß herauszufließen? Meine Schätzung beläuft sich auf mindestens 250 Jahre. Nun fehlt mir aber der mathematische Nachweis, um den ich Sie bitten möchte.

Wenn ihr eine Lösung wißt, schreibt doch an

Rainer Gruhne
Hauptstr. 62
Gorden
7901

Die Redaktion

Vom Comptator zum Computer

Rechentechnische Sammlung der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, Sektion Mathematik

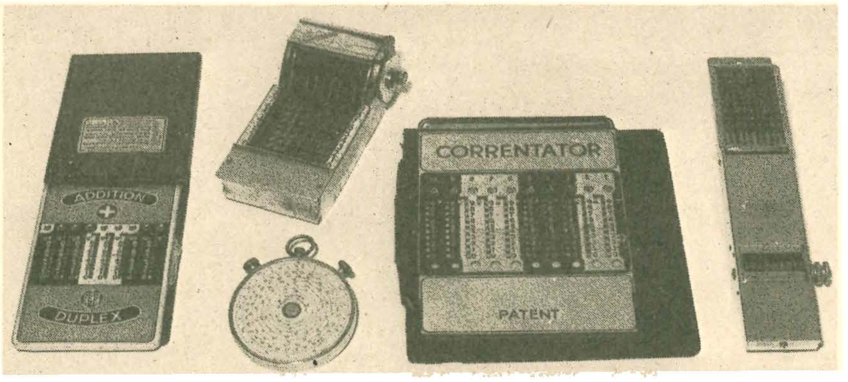


Bild 1

Wenn ihr addieren und subtrahieren, multiplizieren und dividieren wollt oder gar Quadratwurzeln und Werte von trigonometrischen Funktionen bestimmen müßt, greift ihr meist zu einem zuverlässigen Helfer, dem Schulrechner SR 1. Eure Eltern haben in der Schule Rechenstäbe und Logarithmentafeln benutzt, eure Großeltern haben noch das schriftliche Wurzelziehen gelernt.

Über die Entwicklung der Rechentechnik gibt in Greifswald eine kleine Ausstellung von Rechenmaschinen und Rechenhilfsmitteln Auskunft. 350 Jahre lang waren Rechenstäbe die Universal-Rechenhilfsmittel für Techniker, Astronomen, auch für Naturwissenschaftler und Ökonomen. Wir zeigen eine Kollektion von Stäben aus den verschiedensten Materialien und für ganz spezielle Einsatzgebiete, dazu auch Rechenscheiben und eine Rechenwalze. Rechenbretter aus der Sowjetunion, aus Vietnam und Japan sind ebenso zu sehen wie Modelle von Neper-Stäben für die Multiplikation. In der Sammlung werden zahlreiche Typen von mechanischen Rechenmaschinen mit Handkurbel oder mit Elektromotorantrieb gezeigt. Schüler, die unsere Ausstellung besuchen, dürfen mit einigen *Uralt-Maschinen* auch richtig rechnen. Die älteste Maschine der Sammlung hat immerhin schon vor 120 Jahren geholfen, Aufgaben mit den vier Grundrechenarten schneller und *beinahe automatisch* zu lösen. Noch fixer und zuverlässiger geht es mit Tischrechnern und elektronischen Taschenrechnern.

Die elektronische Rechenanlage ODRA 1013 leistete bis vor wenigen Jahren treue Dienste an der Universität Greifswald. Neben dieser ersten in Greifswald installierten EDV-Anlage zeigen wir auch Teile von anderen Rechnern, insbesondere Speichereinrichtungen. Wenn die Möglichkeit besteht, im Rechentechnischen Kabinett der Sektion die Kleincomputer KC 85/3 zu sehen, mit ihnen Computerspiele zu starten oder gar selbst ein kleines BASIC-Programm zu schreiben, um den Computer zeichnen oder rechnen zu lassen, dann erkennen unsere Besucher sehr anschaulich, wie stürmisch sich die Rechentechnik entwickelt hat.

Wir wollen euch aus der Greifswalder Sammlung einige historische Taschenrechner vorstellen. Einige Leser werden sich noch daran erinnern, daß sie als ABC-Schützen Demonstrationsrechenstäbe mit gleichmäßig unterteilten Skalen für die Addition und Subtraktion im Zahlenbereich natürlicher Zahlen kleiner gleich 20 (oder 200) benutzt haben. Addition und Subtraktion wurden dort auf das Aneinanderlegen von Strecken zurückgeführt. Bei größeren Zahlen würden derartige Additionsstäbe aber äußerst lang und unhandlich werden. Die beiden in Bild 1 dargestellten Additionsgeräte (Addition Duplex und Correntator) verwenden die übliche Positionsdarstellung (Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, ...) von natürlichen Zahlen. Die Geräte haben die Form eines Notizbuches, sie wurden auch scherzhaft Rechenhexen genannt.

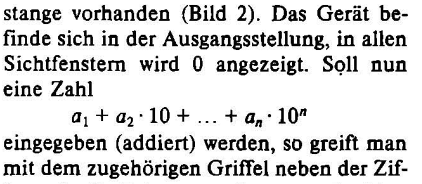


Bild 2

Für jede Position (Ziffer) ist eine Zahnstange vorhanden (Bild 2). Das Gerät befinde sich in der Ausgangsstellung, in allen Sichtfenstern wird 0 angezeigt. Soll nun eine Zahl

$$a_1 + a_2 \cdot 10 + \ldots + a_n \cdot 10^n$$

eingegeben (addiert) werden, so greift man mit dem zugehörigen Griffel neben der Ziffer a_1 in die Zahnstange der ersten Position und zieht diese um a_1 Zähne nach unten, anschließend wird in die Lücke der zweiten Zahnstange bei a_2 eingegriffen und diese mit dem Griffel ganz nach unten ge-

$$\boxed{0\,0 \ldots 0\, a_n \ldots a_1}\,.$$

Soll eine zweite Zahl $b_m \cdot 10^m + \ldots + b_1$ addiert werden und ist dies in allen Positionen ohne Übertrag möglich, so verfahre man wie bei der ersten Addition. Ist aber z. B. $a_1 + b_1 > 9$, so wird die sogenannte Komplementzahl-Methode angewandt:

$$a_1 + b_1 = a_1 - (10 - b_1) + 10,$$

d. h. es wird $(10 - b_1)$ subtrahiert und in der Zehnerposition eine 1 addiert. Die Subtraktion wird durch Verschieben der Zahnstange nach oben realisiert. Um $(10 - b_1)$ von a_1 zu subtrahieren, ist einfach der Griffel bei b_1 in die Zahnstange einzusetzen und soweit wie möglich nach oben zu ziehen. Dann kann der Griffel entlang der hakenförmigen Aussparung in der Deckplatte nach links geführt und in der nächsten Position die Zahnstange um 1 nach unten gezogen werden (Addition von 10). Mit den übrigen Ziffern rechne man in den entsprechenden Positionen ganz genauso. Wichtig ist, daß ein möglicher Übertrag vom Benutzer selbst mit Hilfe der Aussparung und des Griffels in der nächsten Stelle abzutragen ist. Das Problem des Zehnerübertrags mußte bei allen mechanischen Rechenmaschinen gelöst werden. Meist geht es automatisch wie beim Kilometerzähler. Aber auch bei elektronischen Rechengeräten sind Additionsschaltungen (für Dualzahlen) mit möglichem Übertrag vorhanden, nur ahnt man dies als Benutzer kaum. Aber gerade deshalb ist die Realisierung des Übertrags bei den *Rechenhexen* von Interesse.

Man überlege sich, wie mit diesem Gerät zu subtrahieren ist!

Die Addiermaschine Comptator (rechts in Bild 1) ist fast einhundert Jahre alt.

An eine Stoppuhr erinnert das in Bild 1 dargestellte runde Gerät. Es ist eine Rechenuhr, sie ist mit den Rechenscheiben verwandt und benutzt das Prinzip des Rechenschiebers.

Führungen durch unsere Sammlung sind nach telefonischer Voranmeldung möglich. Wir freuen uns auch über Hinweise auf alte Rechenmaschinen, die noch im Verborgenen schlummern, über Schenkungen und Angebote.

W. Schmidt

Tips gefragt!

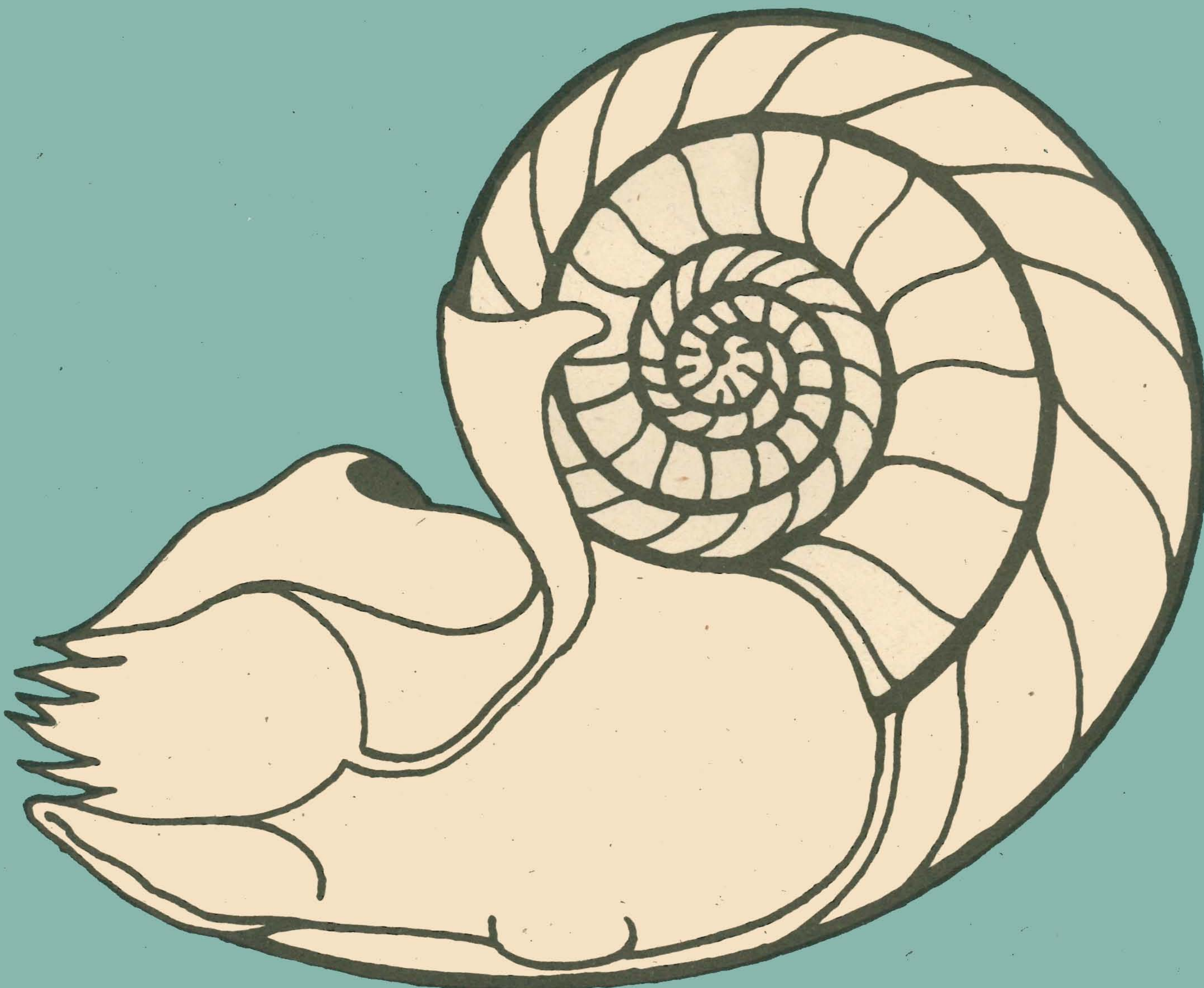
Mit unserer neuen Serie, die euch historische mathematische Instrumente vorstellt, möchten wir euch gleichzeitig Tips für sehenswerte Sammlungen solcher Instrumente geben. An der weiteren Gestaltung solltet ihr mitwirken! Schreibt uns doch, wenn euch ein noch nicht vorgestelltes mathematisches Instrument interessiert oder ihr in eurem Heimatbezirk bzw. bei Reisen ein sehenswertes Instrument in einer zu besichtigenden Sammlung entdeckt habt. Es muß ja nicht gleich der Dresdner Zwinger sein!

Alphons

ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 22 (1988) 5 · Seiten 97 bis 120

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



6

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
22. Jahrgang 1988
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold
Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: wissenschaft und fortschritt 8/79 (S. 122); B. Liebau (S. 123); A. Körner (S. 124); L. Wolf (S. 131); J. Töppler (IV. U.-Seite)
Vignetten: L. Otto (Titelvignetten); Logigram, Frankreich (S. 127)
Briefmarken: H. Tracksdorf (S. 130)
Titelblatt: W. Fahr, Berlin
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 8. August 1988
Auslieferungstermin: 6. Dezember 1988

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Zum Jahreswechsel

Figur 1: Wieviel verschiedene Lesemöglichkeiten – stets zu einem benachbarten Buchstaben fortschreitend – gibt es in der Matrix für den Begriff „Weihnachtsgaben“?

W	E	I	H	N	A	C	H	T
E	I	H	N	A	C	H	T	S
I	H	N	A	C	H	T	S	G
H	N	A	C	H	T	S	G	A
N	A	C	H	T	S	G	A	B
A	C	H	T	S	G	A	B	E
C	H	T	S	G	A	B	E	N

Figur 2: In die Jahreszahl 1988 wurden im Rösselsprung, d. h. in der Gangart eines Springers beim Schachspiel, die Nachnamen von 10 bedeutenden Mathematikern aus der Vergangenheit aufeinanderfolgend eingetragen. Welche Mathematiker sind es?

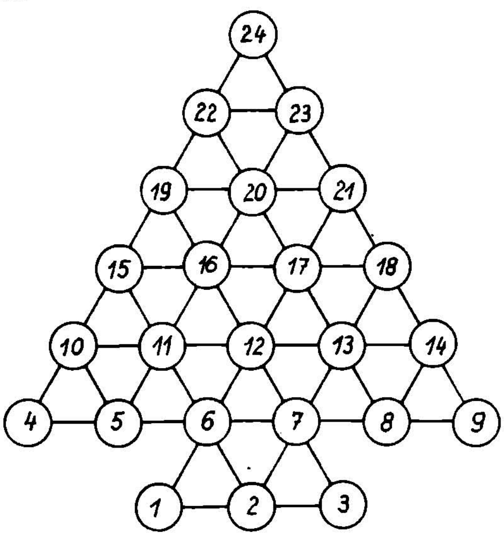
P	H	A	G
S	O	Y	I
T	H	A	R
	A	M	C
	E	E	M
	E	R	F
	S	R	D

O	B	H
I		T
E	R	L
		R
A	A	T
A	T	S
C	P	L

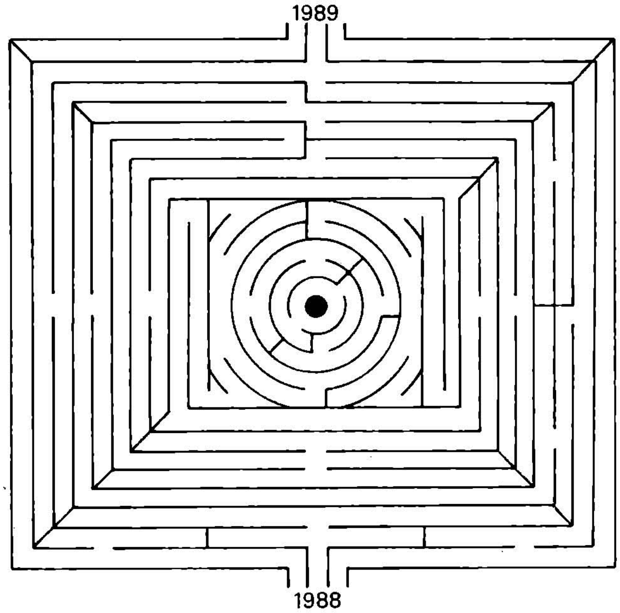
K	A	N
D		E
N	I	C
E	A	U
E		R
G	L	U

D	S	R
A		E
D	T	S
E	W	S
S		I
E	R	S

Figur 3: Findet in der Baumfigur Wege von 1 bis 24 mit größtmöglicher bzw. kleinstmöglicher Zahlensumme sowie mit den Zahlensummen 100 bzw. 200! Dabei darf jede Zahl nur höchstens einmal überquert und nicht wieder nach unten abgestiegen werden.



Figur 4: Sicher findet ihr schnell den Weg durch das Labyrinth, der vom Jahr 1988 in das Jahr 1989 führt.



Figur 5: Ersetzt die Buchstaben W, X, Y und Z so durch dezimale Grundziffern, daß sich eine richtig ausgeführte Additionsaufgabe ergibt, m. a. W., ermittelt sämtliche Lösungen des Kryptogramms!

$$\begin{array}{cccc} & X & X & Y \\ + & X & X & W \\ \hline Y & X & Z & Z \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & X & X & Y \\ + & X & X & Z \\ \hline Y & X & Z & X \end{array}$$

Figur 6: Ermittelt sämtliche Lösungen dieses Kryptogramms!

Figur 7: Wieviel verschiedene Lesemöglichkeiten – ausgehend von links oben oder rechts unten und stets zu einem benachbarten Buchstaben fortschreitend – gibt es in der Matrix für den Begriff „Neujahr“?

N	E	U	J	A	H	R
E	U	J	A	H	R	H
U	J	A	H	R	H	A
J	A	H	R	H	A	J
A	H	R	H	A	J	U
H	R	H	A	J	U	E
R	H	A	J	U	E	N

Figur 8: Und zum Schluß senden die *alpha*-Redaktion und der Autor dieser Knobeleien allen *alpha*-Lesern zum Jahreswechsel einen herzlichen Gruß, der im Rösselsprung in die Jahreszahl 1989 eingetragen wurde. Viel Spaß beim Ermitteln dieses Satzes!

R. Mildner

S	N	F	H
A	T	T	D
U	E	C	S
	N	E	I
	U	G	D
	I	H	S
	E	N	N

H	E	L
A		A
L	P	N
		L
E	G	S
E	A	U
L	W	S

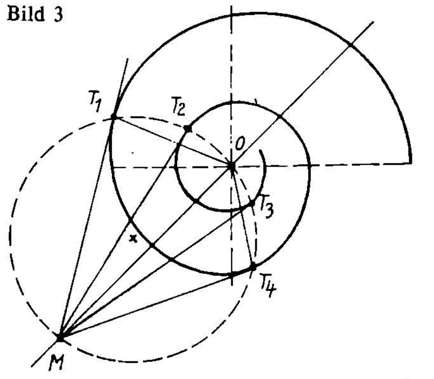
L	E	E
N		E
S	I	R
	H	
R	C	N
E		O
E	F	K

!	A	E
S		R
H	U	J
S	C	E
L		E
H	N	I

Das spiralige Haus eines Tintenfischs

Mathematische Ergänzungen zum Titelbild

Bild 3



Unser heutiges Titelbild zeigt den schematisierten Schnitt durch das Gehäuse eines Tintenfisches, dessen Name *Schiffsboot* ist. Schlagen wir in einem Lexikon nach, dann finden wir: *Schiffsboot, Nautilus: Gattung rezenter Kopffüßer mit äußerer, gekammerter spiraliger Schale (bis 27 cm Durchmesser), die als Schwimmapparat dient, offene Grubenaugen, etwa 90 Kopftentakeln und 4 Kiemen. S. leben in sechs Arten im westl. Stillen Ozean bis in etwa 700 m Tiefe.* (BI Universallexikon, VEB Bibliographisches Institut, 1. Aufl. Leipzig 1987)

Was uns an dieser Charakterisierung besonders interessiert, ist der Hinweis auf die sofort ins Auge fallende, fast ideale Spiralform des Gehäuses.

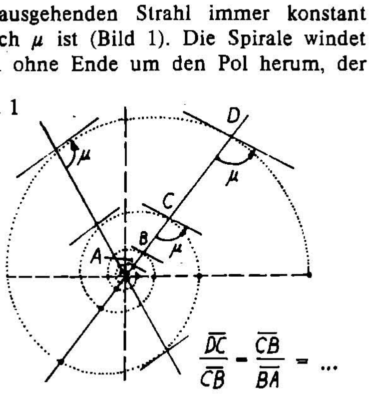
Wir fragen uns, ob sich diese Spirale als mathematische Kurve genauer beschreiben läßt und ob man aus den Eigenschaften einer solchen Kurve ableiten kann, warum hier gerade diese Form entsteht und auch sonst in der Natur häufig zu beobachten ist.

A. Als mathematisches Objekt ist die vorliegende Kurve unseres Wissens erstmals um das Jahr 1640 definiert und untersucht worden, und zwar unabhängig und auf recht verschiedenen Wegen von den bedeutenden Gelehrten René Descartes (1596 bis 1650) in Frankreich und Evangeliste Torricelli (1608 bis 1647) in Italien.

Wir wollen jetzt einige der wichtigsten Eigenschaften dieser Kurven, die man als *Logarithmische Spiralen* bezeichnet, zusammenstellen, ohne uns allerdings näher mit ihrer Herleitung befassen zu können.

(1) Jede *Logarithmische Spirale* besitzt einen charakteristischen Punkt O, um den sie sich herumwindet. Sie wird dabei vollständig durch die Eigenschaft charakterisiert, daß ihr Schnittwinkel mit jedem von O ausgehenden Strahl immer konstant gleich μ ist (Bild 1). Die Spirale windet sich ohne Ende um den Pol herum, der

Bild 1



Umfang einer Umrundung wird dabei immer kleiner und kleiner.

(2) Bezeichnet $r(\varphi)$ den Abstand eines Kurvenpunktes P, dessen Fahrstrahl mit der Abszissenachse den Winkel φ einschließt, vom Pol O, dann gilt

$r(\varphi) = d \cdot e^{\varphi \cdot \cot \mu}$ als *Polardarstellung* der Spirale, deren Name wegen der daraus folgenden Formel

$$\log r(\varphi) - \log d = \varphi \cdot \cot \mu$$

verständlich wird.

(3) Die von R. Descartes in den Vordergrund gestellte Eigenschaft ist die Proportionalität der Bogenlänge $s(\varphi)$ und des Abstandes eines Kurvenpunktes vom Pol, die sich in der Gleichung

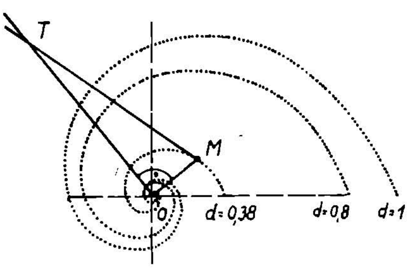
$$s(\varphi) = \frac{r(\varphi)}{\cos \mu}$$

ausdrückt, wenn man die Bogenlänge so definiert, daß $s(\varphi)$ gegen Null strebt, wenn der Punkt sich dem Pol beliebig nähert.

Auch Torricelli hatte festgestellt, daß man dieser Kurve eine endliche Bogenlänge *bis zum Pol gemessen* zuschreiben kann, obwohl derselbe nicht Endpunkt der Spirale ist! Er fand:

Zeichnet man zu einem Punkt M auf der Spirale den Fahrstrahl $\overline{OM}$ und die Tangente, errichtet auf OM im Punkte O die Senkrechte und bestimmt den Schnittpunkt T der Senkrechten mit der Tangente, dann ist die Strecke $\overline{MT}$ gleich dem Grenzwert der Bogenlänge von M bis zu einem Punkt P, der sich auf der Spirale dem Punkt O beliebig nähert (Bild 2).

Bild 2



(4) Aus dem zuletzt Gesagten folgt eine interessante dynamische Eigenschaft: Läßt man eine *Logarithmische Spirale* auf einer Geraden (hier MT) ohne Gleiten abrollen, dann bewegt sich der Pol auf einer Geraden (nämlich OT).

(5) Erinnert man sich noch an den Peripheriewinkelsatz, dann sieht man leicht, daß die Berührungspunkte T_i aller von einem festen Punkt M aus an eine *Logarithmische Spirale* gelegten Tangenten mit O und M auf einer Kreislinie liegen (Bild 3).

(6) Wenn man eine um einen Punkt herumlaufende Kurve bezüglich dieses Punktes einer Dehnung (oder Stauchung) unterzieht, dann hat man die Vorstellung, daß die Kurve dabei irgendwie *größer* (bzw. *kleiner*) wird. Die *Logarithmische Spirale* belehrt uns eines Besseren: Zwei bezüglich O gedehnte *Logarithmische Spiralen* sind stets zueinander kongruent und können durch eine Drehung um O zur Deckung gebracht werden (Bild 2). (Man beweist das leicht unter Verwendung der Polardarstellung!)

(7) Betrachtet man zu einer ebenen Kurve in einem Kurvenpunkt denjenigen Kreis, der sie gleichgekrümmt berührt, dann nennt man ihn *Krümmungskreis*, seinen Mittelpunkt *Krümmungszentrum* und den Kehrwert des Radius *Krümmung* der Kurve in diesem Kurvenpunkt. Der geometrische Ort aller Krümmungsmittelpunkte einer Kurve heißt *Evolute* derselben.

Und auch hier hat unsere *Logarithmische Spirale* eine Überraschung bereit: Die Evolute ist stets eine drehungskongruente (d.h. nach (6) eine nur gedehnte) *Logarithmische Spirale*!

Es gibt noch eine ganze Reihe weiterer tiefliegender und teilweise überraschender Eigenschaften unserer Spiralen. Die daran anknüpfenden Untersuchungen können aber hier nicht verständlich gemacht werden.

Wir bemerken nur, daß Leonhard Euler (1707 bis 1783), einer der bedeutendsten Mathematiker aller Zeiten, sie offenbar für so wesentlich gehalten hat, daß er auf seinen Grabstein eine *Logarithmische Spirale* meißeln ließ (Bild 4).

B. Jetzt wenden wir uns dem zweiten Teil der aufgeworfenen Frage zu und versuchen zu verstehen, warum das Gehäuse des Nautilus gerade diese Form bekommt.

Die letzte Ursache dafür ist die Art und Weise, wie mehrzellige Lebewesen wach-

Bild 4

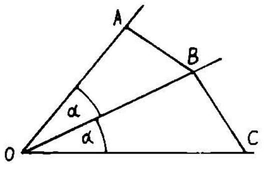
sen: durch Zellteilung! Das führt nämlich dazu, daß der Längenzuwachs in einer Wachstumsrichtung der vorhandenen Länge proportional ist.

(1) Unser Kopffüßer bewohnt immer die letzte (größte) Kammer und schlüpft von Zeit zu Zeit aus einer zu eng gewordenen in eine neu angelegte (Prinzip des Häutens!). Wenn das Wachstum in allen Richtungen gleich schnell vor sich geht, dann bleibt der Körper geometrisch ähnlich, die Kammern sollten das dann auch sein. Denken wir uns ihre Form vereinfacht als Dreiecke mit einer Ecke fest im Punkte O, dann sollte also gelten:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}},$$

d. h. $\overline{OB}$ ist die mittlere Proportionale von $\overline{OA}$ und $\overline{OC}$ (Bild 5).

Bild 5



Dann müssen aber die drei Punkte A, B und C auf einer *Logarithmischen Spirale* liegen, denn mit

$\overline{OA} = d \cdot e^{\varphi \cot \mu}$ und

$\overline{OC} = d \cdot e^{(\varphi + 2\alpha) \cot \mu}$ wird

$\overline{OB}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OC} = d^2 \cdot e^{2(\varphi + \alpha) \cot \mu}$

und demzufolge $\overline{OB} = d \cdot e^{(\varphi + \alpha) \cot \mu}$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Die Sache wird aber noch interessanter! Wir fragen uns nämlich jetzt, warum wohl die Kammer selbst durch den Bogen einer Spirale begrenzt wird.

Nun: das Wachstum geschieht durch Zellteilung und folglich ist der Längenzuwachs pro Zeitdifferenz der Länge proportional.

Also gilt in radialer Richtung $\frac{\Delta r}{\Delta t} = k \cdot r$ und in Richtung der äußeren Begrenzungskurve $\frac{\Delta s}{\Delta t} = k \cdot s$. Daraus folgern wir

$$\frac{\Delta s}{\Delta r} = \frac{k \cdot s \cdot \Delta t}{k \cdot r \cdot \Delta t} = \frac{s}{r}$$

und hieraus wiederum

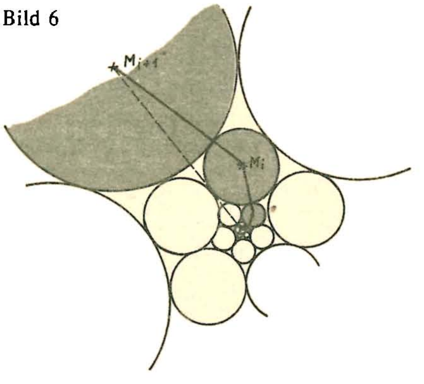
$$\frac{(s + \Delta s)}{(r + \Delta r)} = \frac{s + \frac{s}{r} \cdot \Delta r}{(r + \Delta r)} = \frac{s}{r}.$$

Während des Wachsens bleibt das Verhältnis von Radius r und Bogenlänge s konstant! Das charakterisiert aber gerade eine Logarithmische Spirale (Eigenschaft (3)).

Schauen wir uns nun mit unseren neuen Erkenntnissen ausgerüstet einmal aufmerksam in der Natur um, ob wir nicht an weiteren Lebewesen solche Spiralen entdekken und ihre Entstehung erklären können! Sicher habt ihr – vielleicht bisher mehr unbewußt – beobachtet, daß die Einzelblüten (oder später die Einzelfrüchte) eines Korbblütlers sich ebenfalls spiralig ordnen. Das kann man sich ganz ähnlich erklären. Wir vereinfachen den Sachverhalt wieder, indem wir annehmen, daß auf einem kreisförmigen Blütenboden ebenfalls kreisförmige Früchte dicht gepackt sitzen und mit gleicher Geschwindigkeit wachsen.

Dann müssen die Mittelpunkte von sich jeweils berührenden Früchten in aufeinanderfolgenden Größenschichten wieder auf *Logarithmischen Spiralen* liegen (Bild 6).

Bild 6



Wieder ist nämlich längs der Kurve $\frac{\Delta s}{\Delta t} = a \cdot s$, während für den Abstand $\overline{OM_i}$ $\frac{\Delta r}{\Delta t} = a \cdot r$ gilt. Somit bleibt das Verhältnis von s zu r während des Wachstums konstant, die Kurve ist eine Logarithmische Spirale.

C. Eine Nachbemerkung

Wir hoffen, unsere Leser durch die Betrachtungen zu zweierlei anregen zu können. Erstens sollten sich recht viele von ihnen einmal mit den wichtigsten elementaren Kurven und ihren Eigenschaften beschäftigen. In älteren wissenschaftlichen Bibliotheken findet man dazu vielleicht noch das Buch von Gino Loria *Spezielle Algebraische und Transzendente ebene Kurven, Theorie und Geschichte, B. G. Teubner, Leipzig, 1902*. Jetzt, wo vielen wenigstens ein Kleinrechner (etwa KC 85/2 und /3) zugänglich ist, kann die Beschäftigung sehr an Reiz gewinnen, wenn man die Bilder auf dem Bildschirm entstehen läßt (unsere Abbildungen sind z. B. so entstanden!).

Zum Zweiten aber möchten wir anregen, aufmerksamer durch unsere Umwelt zu gehen und Fragen zu stellen, deren Beantwortung nicht sofort auf der Hand liegt und die vielleicht von Lehrern oder Klassenkameraden bisher überhaupt noch nicht aufgeworfen worden sind. Zum Thema unseres Aufsatzes finden sich beispielsweise viele Ergänzungen in einem Artikel in *Wissenschaft und Fortschritt*, Heft 8/1979.

R. Hofmann

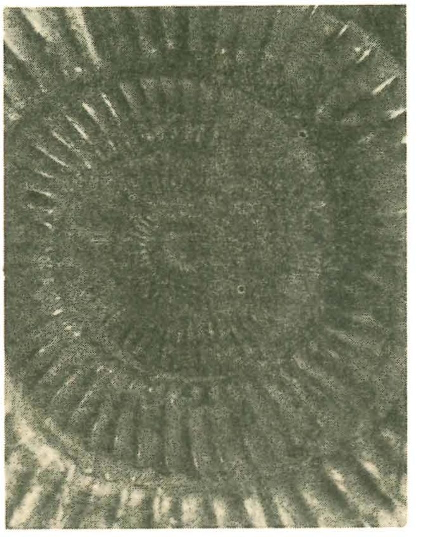


Bild 7
Lias-Ammonit (etwa 190 Mill. Jahre)

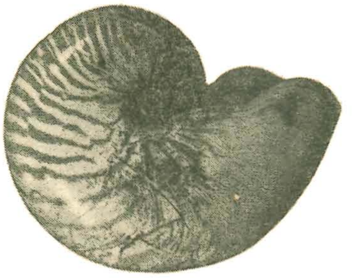
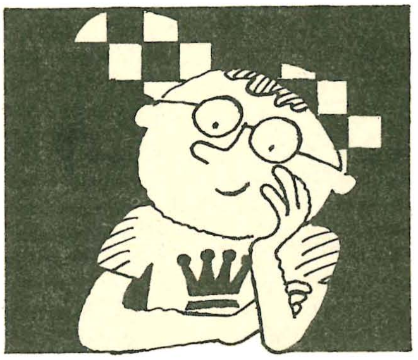


Bild 8
Nautilus (lebendes Fossil – kommt heute noch in der Tiefsee vor)

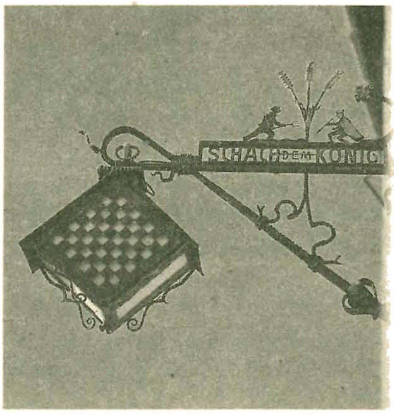
Bild 9
Trias-Ammonit (etwa 200 Mill. Jahre)

Die auf den Bildern 7 bis 9 dargestellten Stücke stammen aus der Geologisch-Paläontologischen Sammlung des Wissenschaftsbereiches Geophysik der Karl-Marx-Universität Leipzig. Wir danken der Mitarbeiterin des WB, Frau A.-B. Ernst, für ihre freundliche Unterstützung.



19. Fach: Schach

Seit etwa vier Jahren besteht an unserer Schule in Ströbeck eine Mathematik-Arbeitsgemeinschaft für die Klassen 3 bis 5. Hier können sich die an Mathematik interessierten Schüler unserer kleinen zentralen Dorfschule (wir haben Kinder aus insgesamt fünf Dörfern) hauptsächlich noch spielerisch mit mathematischen Problemen beschäftigen. Neben mathematischen Spielen und aus Zeitungen, Büchern und Zeitschriften gesammelten Knobelaufgaben beschäftigen wir uns auch mit der Vorbereitung auf Olympiaden und mathematische Wettkämpfe und beteiligen uns natürlich auch am *alpha*-Wettbewerb. Jedes Jahr wird bei uns Ende September eine Mathematik-Schulolympiade organisiert, die in sehr würdiger Form stattfindet, so daß sie für die Teilnehmer eine echte Auszeichnung bedeutet. Auf dem Appell zu unserem Nationalfeiertag werden die drei besten Schüler jeder Klassenstufe prämiert. Sie erhalten neben kleinen Präsenten auch jeder von der Schule ein Jahresabonnement der Zeitschrift *alpha*. Auf diese Weise wird erreicht, daß sich möglichst viele Schüler auch in ihrer Freizeit mit Mathematik beschäftigen.
Die Sieger unserer Schulolympiade werden selbstverständlich zur Kreisolympiade nach Halberstadt delegiert.
Wir nutzen auch jede Möglichkeit, an mathematischen Wettbewerben im Kreismaßstab teilzunehmen. Bei all diesen Leistungsvergleichen konnten wir AG-Mitglieder in den letzten Jahren stets vordere Plätze erreichen. Diese Erfolgsergebnisse spornen uns natürlich zu weiterer Arbeit an.
Zu Beginn der 6. Klasse sind wir alt genug, um selbständig mit dem Bus nach Halberstadt zu fahren. Die besten von uns werden dann in die Kreis-AG in die Station Junger Techniker und Naturforscher *Heinz Rockmann* delegiert. Die Station ist für uns auch nichts Neues mehr. Wir kennen sie und viele der dort tätigen Lehrer von früheren Wettbewerben oder vom Spezialistenlager in den Ferien. Hier sind dann in jeder AG nur Schüler derselben Klassenstufe und wir können deshalb noch mehr lernen.
Einige unserer AG-Mitglieder sind gleichzeitig Mitglieder der AG *Schach* an unserer Schule und haben sich mit anderen Schülern auch am Schachwettbewerb der *alpha* beteiligt.
Ihr müßt aber auch wissen, daß Schach seit 1823 an unserer Schule Unterrichtsfach ist. Selbstverständlich wahren wir diese schöne Tradition. Am Schachunterricht nehmen alle Schüler der Klassen 3 bis 7 teil. Ab Klasse 8 ist die Teilnahme in einer Arbeitsgemeinschaft möglich. Für uns Schüler bedeutet dies pro Woche eine zusätzliche Stunde Unterricht. Das ist selbstverständlich, weil ja bereits unsere Eltern, Großeltern, ... in der Schule Schachunterricht hatten.



Straßenlampe am Schachturm in Ströbeck

Am Ende jedes Schuljahres kämpfen die Schüler der 7. Klassen um drei Sätze Figuren und die Schüler der 8. Klassen um drei Bretter mit einer Widmung: *Zur Belohnung des Fleißes im Schach*. Diese Trophäen werden hart umkämpft und finden großes Interesse bei Schülern, Eltern und allen anderen Einwohnern im Dorf.
Auch das Fernsehen der DDR hat bereits einen solchen Wettkampf gefilmt und in einer Sendung *Elternsprechstunde* gesendet.
Wir sind stolz auf unseren Schulnamen: *Schule der DSF – Dr. Emanuel Lasker*.
Dr. Lasker war der einzige deutsche Schachweltmeister.
Er konnte diesen Titel 27 Jahre lang für sich in Anspruch nehmen.
Aus rassischen Gründen verlegte er 1936 seinen Wohnsitz in die Sowjetunion. Hier arbeitete der promovierte Mathematiker in Moskau an der AdW am Institut für Mathematik und löste wichtige mathematische Probleme.
In den Schulen beschäftigte er sich mit Pionieren und löste mit diesen mathematische Aufgaben.
Wir sind dabei, die Biographie dieses Schachspielers, Mathematikers und hervorragenden Menschen weiter zu erforschen. Dabei geht es uns insbesondere um seine Beziehungen zur Sowjetunion.
Wir haben das *Karl-Sudhoff-Institut*, das uns dabei unterstützt hat, angeregt, eine Biographie über Dr. E. Lasker herauszugeben, damit möglichst viele Menschen über diese bedeutende Persönlichkeit mehr erfahren und von ihm lernen können.

Matthias Orb
Mathe-AG der Schule der DSF
„Dr. E. Lasker“

Schachsymbol an einem Ströbecker Haus, das jeder Gewinner der jährlichen Schulmeisterschaft anbringen darf.

alpha bat Dr. R. Thiele vom Karl-Sudhoff-Institut für Geschichte der Medizin und Naturwissenschaften der Karl-Marx-Universität Leipzig, ihren Lesern mehr über Emanuel Lasker mitzuteilen.

Schach als Kampf

Emanuel Lasker ist weniger als Mathematiker, sondern als Schachspieler bekannt geworden. Das entspricht letztendlich seinen Absichten, denn Schach war dem promovierten Mathematiker wichtiger als sein Fachgebiet. Geboren ist Lasker am 24. Dezember 1868 in Berlinchen (Neumark). Nach dem Abitur studierte er in Berlin, Göttingen sowie Heidelberg Mathematik und Philosophie und promovierte an der Universität Erlangen *Über Reihen auf der Konvergenzgrenze*. Obwohl Lasker 1893 an der Tulane University in New Orleans (USA) und 1901 an der Victoria University in Manchester (Großbritannien) Vorlesungen gehalten hatte, war er ein Berufsschachspieler. Seine Schachkarriere hatte 1889 begonnen, und bereits 1894 schlug er den amtierenden Weltmeister Steinitz. 1902 siedelte Lasker in die USA über, kam aber 1907 wieder nach Deutschland zurück und ließ sich in Thyrow bei Berlin nieder. 1905 erschien in den Mathematischen Annalen, einer wichtigen mathematischen Zeitschrift, ein Artikel von Lasker *Zur Theorie der Modulen und Ideale*, in dem Lasker den Begriff des Primideals faßt. Damit leistete der Schachweltmeister einen bedeutenden Beitrag zur Entwicklung der modernen Algebra. 1921 verlor Lasker den Weltmeistertitel im Schach, den er 27 Jahre getragen hatte, gegen den 20 Jahre jüngeren Capablanca. Lasker schrieb auch Bücher über Schach und andere Denkspiele. Er begriff Schach als eine Kunst und betonte die psychologische Seite des Spiels (Schwäche des Gegners nützen).
1927 eröffnete er eine *Schule für Verstandesspiele*, in der neben Schach auch Go, Bridge oder Lasca gelehrt wurden. Lasca ist ein Brettspiel, das Lasker selbst erfunden hat. 1933 mußte Lasker in die Emigration

gehen. Zunächst fand er Aufnahme in Großbritannien, folgte aber dann einer Einladung in die Sowjetunion. Die sowjetische Akademie der Wissenschaften ernannte ihn 1935 zu ihrem Mitglied. Lasker lebte bis 1937 in Moskau und ging dann nach New York. Dort starb er im Alter von 72 Jahren am 11. 1. 1941.

Lasker über das Schachspiel

Das Schachspiel, nur ein Theaterkrieg, kann als Sinnbild aller Arten des Kampfes dienen, so z. B. eines Disputs (Streitgespräch), diplomatischer Unterhandlungen oder eines gerichtlichen Prozesses. Es bereitet uns für das feinere Verständnis der strategischen Gesetze vor.

Lasker war der Meinung, daß jeder Zug nicht an sich stark oder schwach ist, sondern insbesondere im Hinblick auf den jeweiligen Gegner gut oder schlecht ist. Er strebte nicht nach dem objektiv besten Zug, sondern nach dem für den jeweiligen Gegner unangenehmsten.

Schachspieler über Lasker

Max Euwe
(Weltmeister im Schach, Mathematiker)
Lasker war von allen Großmeistern, denen ich in den vergangenen 35 Jahren begegnet bin, der Größte.

José Raúl Capablanca
(Weltmeister im Schach)
Er war der tiefgründigste Schachspieler, den ich je gekannt habe.

Alexander Aljechin
(Weltmeister im Schach)
Die Idee der Schachkunst ist undenkbar ohne Lasker.

Richard Réti
Sein Stil ist ein klares Wasser mit einem Tropfen Gift.

R. Thiele

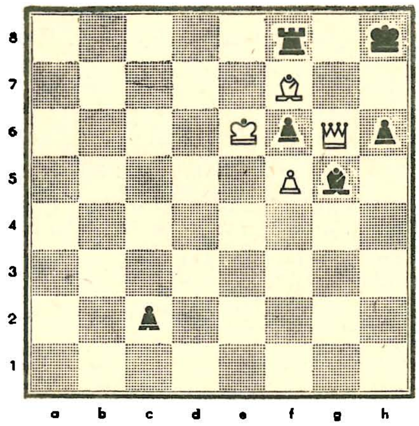
Der Sportverlag Berlin bereitet in seiner Reihe „Das Schachgenie“ eine Biographie von Lasker vor. Sie ist für 1990 geplant. In der Reihe erschienen bisher folgende Titel: „Das Schachgenie Paul Keres“, A. Suetin 1987, und „Das Schachgenie Capablanca“, I. u. Wl. Linder 1988.

Zwei Aufgaben von Dr. Emanuel Lasker

Als Schachmeister war Dr. Emanuel Lasker die überragende Persönlichkeit seiner Zeit. Von 1894 bis 1921 trug er die Krone des Schachweltmeisters. Weder vor noch nach ihm gelang es einem Schachweltmeister, sich 27 Jahre auf dem Schachthron zu behaupten. In einer Reihe bedeutender Schachwerke zeigte er sich als wegbereitender Schachdenker. Seine philosophischen Schriften, seine Werke über andere Spiele und seine mathematischen Arbeiten lassen ihn als Persönlichkeit von universellem Geist erkennen.

Mit zwei kleinen Aufgaben, die es zu lösen gilt, mögen die Leser auf Dr. Laskers schachlichen Spuren wandeln.

Diagramm 1 zeigt eine Aufgabe von Dr. Emanuel Lasker aus dem Buch von J. Prety *ABC d'Echecs* (1895). Weiß beginnt und setzt Schwarz spätestens im 6. Zuge matt.



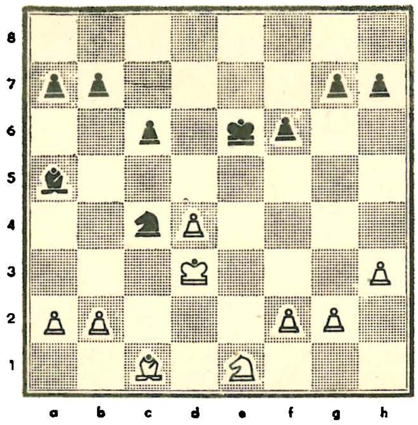


Diagramm 2 zeigt eine Partiestellung zwischen Dr. Lasker und Dr. Euwe (Nottingham, 1936). Mit einer imponierenden Wendung gewinnt der bereits 68jährige Dr. Lasker gegen den zu jener Zeit amtierenden Schachweltmeister eine Leichtfigur innerhalb von 3 Zügen. Weiß am Zuge.

H. Rüdiger

Buchtips

Anatoli Mazukewitsch
Seltene Gambits
334 S., 380 Diagr.
Bestell-Nr. 671 735 7 Preis: 19,80 M

Jakow Neistadt
Damenopfer
224 S., 335 Diagr.
Bestell-Nr. 671 671 7 Preis: 15,50 M

Aleksei Suetin
Modernes Mittelspiel
320 S., 218 Diagr.
Bestell-Nr. 671 730 6 Preis: 16,50 M

Alle Titel sind Neuerscheinungen des Sportverlages, Berlin

Ganz in Familie

1. „In sechs Jahren werde ich noch einmal so alt sein, wie ich vor sechs Jahren war“, sagt Annerose verschmitzt. „Nun, wie alt bin ich?“

2. Ein Vater ist jetzt 28 Jahre und sein Sohn 4 Jahre alt.
In wieviel Jahren wird der Vater zweimal älter als sein Sohn sein?

3. Zwei Jungen sind zusammen 19 Jahre alt, und zwar ist der eine um drei Jahre älter als der andere.
Wie alt sind die beiden?

4. Auf die Frage, wie alt er sei, gab A zur Antwort: „Wäre ich noch einmal so alt, wie ich jetzt bin, und noch zwei Jahre dazu, so hätte ich gerade soviel über 100 Jahre als mir jetzt davon abgehen.“
Wie alt ist A?

5. „Ich und mein Sohn“, sagte ein Vater verschmitzt, „sind zusammen 48 Jahre alt. Das Quadrat des Drittels meines Alters ist um 48 größer als das Quadrat der um 2 vermehrten Zahl des Alters meines Sohnes.“
Wie alt sind Vater und Sohn?

6. Eine Mutter ist heute viermal so alt wie ihre Tochter.
In 16 Jahren wird sie nur doppelt so alt sein wie diese.
Wie alt sind Mutter und Tochter?

7. Ein Vater hat sieben Kinder. Jeder Sohn hat doppelt soviel Schwestern wie Brüder.
Wieviel Mädchen und Jungen sind das?

8. Armin sagt: „Wenn ich 4mal so alt bin wie jetzt, fehlt mir zu 100 Jahren gerade noch mein jetziges Alter.“
Wie alt ist Armin heute?

9. In einem Haus wohnen die vier Familien A, B, C und D mit insgesamt 24 Personen. Familie A hat ebensoviel Kinder wie B und D zusammen. Familie C halb so viel. Familie D hat zwei Kinder mehr als Familie B.
Aus wieviel Erwachsenen und Kindern besteht jede Familie, wenn bei Familie B noch ein Großvater wohnt?

A. Körner/ J. Lehmann

Im Kopf zu lösen!

Welche Zahl ist größer:
31^{80} oder 17^{100}?

aus: Funktio, Helsinki

Rund um den SR 1

Die Tasten $\boxed{\text{sin}}$, $\boxed{\text{cos}}$, $\boxed{\text{tan}}$ – Umschalter für Winkelmaße

Das Tastenfeld des Schulrechners SR 1 enthält im oberen Teil drei schwarze Tasten, nämlich die Funktionstasten $\boxed{\text{sin}}$, $\boxed{\text{cos}}$, $\boxed{\text{tan}}$. Die Tasten sind, wie man sieht, doppelt belegt.

arcsin	arccos	arctan
$\boxed{\text{sin}}$	$\boxed{\text{cos}}$	$\boxed{\text{tan}}$

Mit diesen Tasten ist man in der Lage, Funktionswerte für vorgegebene Winkel zu ermitteln und außerdem bei vorheriger Betätigung der Taste $\boxed{\text{F}}$ zu gegebenen Funktionswerten trigonometrischer Funktionen ein zugehöriges Argument anzugeben. Zu den Funktionstasten gehört noch der *Umschalter für Winkelmaße*, dem wir uns zunächst näher zuwenden wollen.

Der Umschalter für Winkelmaße

Der Umschalter für Winkelmaße ermöglicht drei Schalterstellungen:

	DEG	RAD	GRD
1.	■		

Diese Schalterstellung wird gewählt, wenn die Eingabe (bzw. Ausgabe) der Winkelgröße in dezimalgeteiltem Altgrad erfolgen soll.

Beispiele:

- $y = f(x) = \sin x$

Ermitteln Sie $f(32°)$!

Ablaufplan: (DEG) 32 $\boxed{\text{sin}}$ [5.2991-01]

Ergebnis: $f(32°) = \sin 32° = 0{,}52991$

- $y = f(x) = \sin x$

$f(x) = 0{,}62$.

Ermitteln Sie x für $0° \leqq x \leqq 90°$!

Es soll also zu einem gegebenen Winkelfunktionswert 0,62 in einem gegebenen Intervall der (bzw. die) zugehörige(n) Winkel ermittelt werden.

Ablaufplan: (DEG) 0,62 $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{sin}}$

d. h. 0,62 $\boxed{\text{arcsin}}$ [38.316135]

Ergebnis: $x = 38{,}316\,135°$.

Arkusfunktionen sind Umkehr- oder inverse Funktionen der trigonometrischen Funktionen, z. B.

$y = \arcsin x$; $y = \arccos x$;
$y = \arctan x$; $y = \operatorname{arccot} x$

bedeutet der Bogen y (*Bogen* im lateinischen *arcus*), dessen Sinus die Größe x hat.

Wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktionen ist dieser Bogen nur dann eindeutig anzugeben, wenn ein Intervall vorgegeben wird, in dem die betreffende trigonometrische Funktion alle ihre Werte annimmt und monoton ist.

▲1▲ Erkunden Sie, in welchen Intervallen der SR 1 die Winkel für
a) $\arcsin x$; b) $\arccos x$; c) $\arctan x$
angibt!

	DEG	RAD	GRD
2.		■	

Diese Schalterstellung wird verwendet, wenn die Eingabe (bzw. Ausgabe) der Winkelgröße in Bogenmaß erfolgt (bzw. erfolgen soll). Die Einheit des Winkels ist hier der Radiant (Zeichen: rad). 1 rad ist der Winkel, für den das Verhältnis der Längen von Kreisbogen und Radius gleich 1 ist ($1\,\text{rad} = 57{,}295\,78°$).

Zuweilen wird die Einheit *rad* auch weggelassen, und man gibt die Winkel als Vielfache bzw. Teile von π an $\left(\text{z. B. } 2\pi,\ 7\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{\pi}{3}\right)$.

Beispiele:

- $y = f(x) = \cos x$

Ermittle $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$!

Ablaufplan:

(RAD) π $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{cos}}$ [7.0710-01]

Ergebnis: $\cos\frac{\pi}{4} = 0{,}707\,10$

- $y = f(x) = \cos x$

$f(x) = 0{,}2$.

Ermittle x in Bogenmaß für $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$!

Ablaufplan:

(RAD) 0,2 $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{cos}}$ [1.3694384]

Ergebnis: $x = 1{,}369\,438\,4$ rad

Den Umschalter für Winkelmaße kann man nutzen, um Winkel, die in dezimal geteiltem Altgrad gegeben sind, in Bogenmaß umzurechnen und umgekehrt.

▲2▲ Betätigen Sie die Tasten des SR 1 in angegebener Reihenfolge und füllen Sie die Leerstellen aus!

a)

Eingabe	Anzeige
Schalterstellung DEG	0.
45	45.
$\boxed{\text{sin}}$	
Schalterstellung RAD	
$\boxed{\text{F}}$	
$\boxed{\text{sin}}$	

Welche Bedeutung hat der vom SR 1 zuletzt angezeigte Zahlenwert?

b)

Eingabe	Anzeige
Schalterstellung RAD	0.
$\boxed{\pi}$	
$\boxed{\div}$	
4	
$\boxed{=}$	
$\boxed{\text{sin}}$	
Schalterstellung DEG	
$\boxed{\text{F}}$	
$\boxed{\text{sin}}$	

Welche Bedeutung hat der vom SR 1 zuletzt angezeigte Zahlenwert?

	DEG	RAD	GRD
3.			■

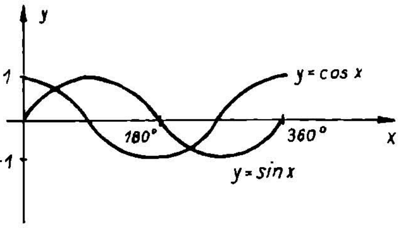
Man stellt den Umschalter auf GRD, wenn die Eingabe (bzw. Ausgabe) der Winkelgröße in Neugrad oder Gon (Winkelmaß, dessen Einheit der 100. Teil eines rechten Winkels ist) erfolgt (bzw. erfolgen soll).

Die Einheit Gon (Zeichen: g) wird in der Geodäsie verwendet.

Wir experimentieren mit den Tasten $\boxed{\text{sin}}$ $\boxed{\text{cos}}$

Aus der grafischen Darstellung der Funktion $y = \sin x$ $(0° \leqq x \leqq 360°)$ erkennt man (vgl. Bild 1), daß im gegebenen Intervall zwar zu jedem x-Wert genau ein y-Wert gehört, aber nicht umgekehrt jedem y-Wert genau ein x-Wert zugeordnet ist. Das wird erneut beim Ausfüllen nachstehender Tabelle deutlich.

Bild 1



▲3▲ Vervollständigen Sie die Tabelle!

x	0°	30°	90°	150°	180°
$\sin x$	0				

x	210°	270°	330°	360°
$\sin x$				0

Aus diesem Grunde haben auch goniometrische Gleichungen der Form $\sin x = a$ im Intervall $0° \leqq x \leqq 360°$ im allgemeinen mehr als eine Lösung.

▲4▲ Geben Sie eine Gleichung der Form $\sin x = a$ an, die im Intervall $0° \leqq x \leqq 360°$ genau eine Lösung hat!

▲5▲ Geben Sie eine Gleichung der Form $\sin x = a$ an, die im Intervall $0° \leqq x \leqq 360°$ genau drei Lösungen hat.

▲6▲ Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $\sin x = 0{,}54$ im Intervall $0° \leqq x \leqq 360°$ an.

Mit dem Taschenrechner SR 1 erhält man als eine Lösung der Gleichung $\sin x = 0{,}54$ (entsprechend dem Ablaufplan: 0,54 $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{sin}}$) den Wert 32.683639. Aus der obenstehenden Tabelle und dem Bild der Sinusfunktion wissen wir, daß die Gleichung $\sin x = 0{,}54$ im vorgegebenen Intervall genau zwei Lösungen hat und die zweite Lösung im Intervall $90° < x < 180°$ (II. Quadrant) liegen muß.

Um eine Vermutung über die Beziehungen der Winkel und deren Sinuswerte in den ersten beiden Quadranten zu erhalten, kann das Lösen der Aufgabe 7 nützlich sein!

▲7▲ Vervollständigen Sie die Tabelle mit dem SR 1 (Umschalter auf DEG)!

x	$x\ \boxed{\sin}\ \boxed{F}\ \boxed{\sin}$
0	0
12	
30	
80	
100	
120	
140	

Füllen Sie die weiteren Leerstellen der Tabelle ohne Nutzung des SR 1 aus!

x	$x\ \boxed{\sin}\ \boxed{F}\ \boxed{\sin}$
145	
150	
170	
175	

Formulieren Sie – ausgehend von der ausgefüllten Tabelle – eine Vermutung! Kontrollieren Sie, ob Sie alle Lösungen der Gleichung $\sin x = 0{,}54$ (vgl. Aufgabe 6) ermittelt haben!

▲8▲ Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $\cos x = 0{,}32$ im Intervall $0° \leqq x \leqq 360°$ an!
Beachten Sie, daß bereits dem Kurvenverlauf der Kosinusfunktion (Bild 1) zu entnehmen ist, daß die Gleichung im vorgegebenen Intervall zwei Lösungen hat. Wie die Lösung für das Teilintervall $270° < x \leqq 360°$ zu ermitteln ist, können Sie durch das Ausfüllen nachstehender Tabelle erkunden.

x	(DEG) $x\ \boxed{\cos}\ \boxed{F}\ \boxed{\cos}$
270	
280	
290	
300	
350	

Überprüfen Sie mit dem SR 1, ob Sie alle Lösungen der Gleichung $\cos x = 0{,}32$ richtig bestimmt haben!
Da der Kosinus eines Winkels x sowohl im Intervall $90° < x \leqq 180°$ als auch im Intervall $180° \leqq x < 270°$ negativ ist, wäre es interessant zu erfahren, wie der Taschenrechner bei der Abarbeitung des nachstehenden Rechenablaufplans
($x\ \boxed{\cos}\ \boxed{F}\ \boxed{\cos}$ $(180° \leqq x < 270°)$)
reagiert.
Dazu füllen wir folgende Tabelle aus.

x	$x\ \boxed{\cos}\ \boxed{F}\ \boxed{\cos}$
180	180°
185	
200	
240	
260	

▲9▲ Betrachten Sie die ausgefüllte Tabelle und formulieren Sie eine Vermutung!
$\cos(180° + x) = \cos \ldots$

▲10▲ Ermitteln Sie im Intervall $0° \leqq x \leqq 360°$ jeweils alle reellen Lösungen der angegebenen Gleichungen!
a) $\sin x = 0{,}25$
b) $\sin x + \cos 60° = 1{,}2$
c) $2 \sin 0° + \dfrac{\tan 45°}{\cos 60°} + 2 \sin x = 3$
d) $\cos x = -0{,}5$
e) $\cos x = -\sin 60°$

Dem Kurvenverlauf der Funktion $y = \sin x$ und dem Kurvenverlauf der Funktion $y = \cos x$ (siehe Bild 1) ist zu entnehmen, daß der Sinus eines Winkels mit dem Kosinus eines anderen Winkels übereinstimmen muß. Das Lösen der Aufgaben 11 und 12 wird uns helfen, diese Beziehungen zu erkennen.

▲11▲ Stellen Sie den Umschalter für Winkelmaße auf DEG!
Betätigen Sie die Tasten des SR 1 in der angegebenen Reihenfolge und füllen Sie die Leerstellen aus!

a)

Tastenfolge	Anzeige
60	60.
$\boxed{\cos}$	
$\boxed{F}$	
$\boxed{\sin}$	

b)

Tastenfolge	Anzeige
50	50.
$\boxed{\cos}$	
$\boxed{F}$	
$\boxed{\sin}$	

▲12▲ Welche Taschenrechneranzeige vermuten Sie jeweils nach folgender Tastenfolge (Umschalter auf DEG)?
a) 70 $\boxed{\cos}\ \boxed{F}\ \boxed{\sin}$
b) 30 $\boxed{\cos}\ \boxed{F}\ \boxed{\sin}$
c) 30 $\boxed{\sin}\ \boxed{F}\ \boxed{\cos}$
d) 20 $\boxed{\sin}\ \boxed{F}\ \boxed{\cos}$

Überprüfen Sie Ihre Voraussage mit dem Taschenrechner!
Formulieren Sie eine Vermutung über den zugrunde liegenden Sachverhalt!

▲13▲ Lösen Sie im Intervall $0 \leqq x \leqq 90°$ folgende Gleichungen:
a) $\cos 30° = \sin x$; b) $\sin x = \cos 70°$;
c) $\cos x = \sin 45°$!

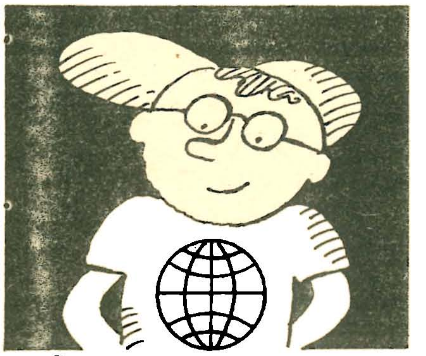
L. Flade

Mit diesem Beitrag schließen wir die Serie zum Taschenrechner SR 1 ab. Natürlich wird er euch in unseren Beiträgen noch öfter begegnen.
Bei Nachfragen nutzt bitte die inzwischen zum Taschenrechner erschienene Literatur, die ihr sicher auch in den Bibliotheken ausleihen könnt, zum Beispiel:

Gilde/Altrichter:
Schneller, leichter, genauer

Gilde/Altrichter:
Mehr Spaß mit dem Taschenrechner
beide VEB Fachbuchverlag, Leipzig

Fanghänel:
Mein Freund, der Taschenrechner
VE Verlag Volk und Wissen, Berlin



▲1▲ Find the pattern
In the accompanying diagram we develop a special arrangement in five columns of the integers greater than 1. Explore the structure of the arrangement and predict in which column (from left to right) the number 100 will fall.

	2	3	4	5
9	8	7	6	
	10	11	12	13
17	16	15	14	
–	–	–	–	–

aus: Fun with mathematics, Toronto

▲2▲ Déterminer x et y pour que le nombre $\overline{4x5y}$ soit divisible par 6. *H.*

▲3▲ Простота математики
Джон фон Нейман, один из крупнейших матиматиков нашего столетия, выступая в конце 40-х годов с докладом о будущем электронно-вычислительных машин, сказал, что математика – только очень малая и очень простая часть жизни. Когда в ответ на это аудитория зашумела, фон Нейман добавил: „Если люди не верят в то, что математика проста, то только потому, что они не осознают, как сложна жизнь“.

aus: Quant, Moskau

▲4▲ On fond 82 kg de bronze et 18 kg d'argent. Calculer la masse volumique de l'alliage.
La masse volumique du bronze
$8{,}5\ \text{kg}\,\text{dm}^{-3}$,
la masse volumique de l'argent
$10{,}5\ \text{kg}\,\text{dm}^{-3}$.

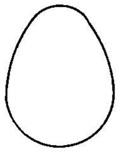
H.

Wie man Brezeln und andere Figuren mit Zirkel und Lineal konstruiert

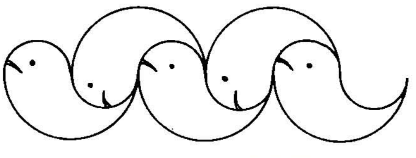
Die Figuren im Bild 1 sind aus Kreisen bzw. Kreisbögen zusammengesetzt. Wir wollen untersuchen, wie man solche Figuren mit Zirkel und Lineal konstruieren kann.

Bild 1

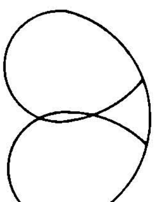
a) Ei



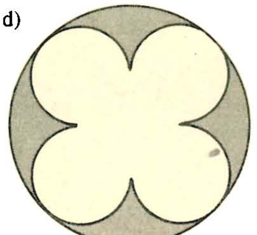
b) Muster aus Walfischen



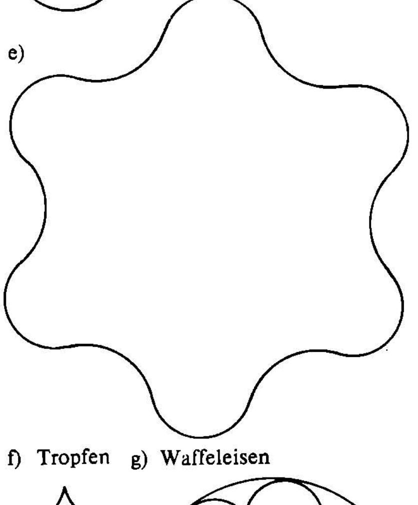
c) Brezel



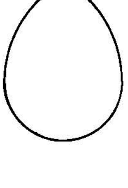
d)



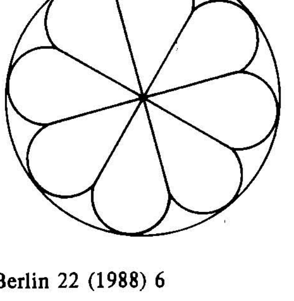
e)



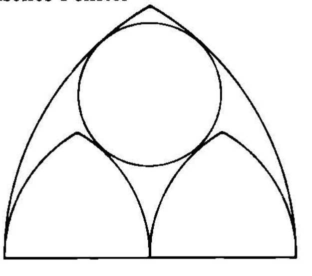
f) Tropfen



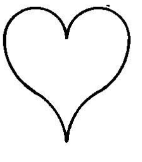
g) Waffeleisen



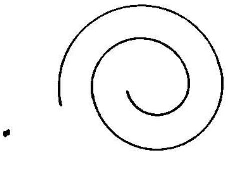
h) gotisches Fenster



i) Herz



k) Spirale



l) Schlangenlinie

Untersuchen wir zunächst einmal, und zwar an den Beispielen k und l (Bild 1), aus was für Kreisbögen die Figuren zusammengesetzt sind: Wir ergänzen die in den Figuren enthaltenen Kreisbögen zu ganzen Kreisen.

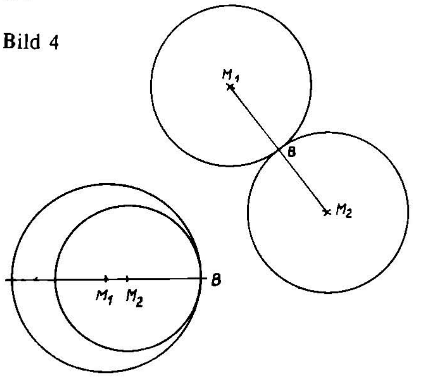
Wir erkennen: Jeweils zwei der Kreise haben genau einen gemeinsamen Punkt. Sie berühren sich in diesem Punkt. Diese Berührungspunkte sind genau die Begrenzungspunkte der einzelnen Kreisbögen, aus denen die Figur zusammengesetzt ist.

Was passiert nun aber, wenn die Kreise, aus deren Bögen die Figur zusammengesetzt ist, sich nicht in einem Punkt berühren, sondern zwei gemeinsame Punkte haben? Versuchen wir, aus solchen Kreisen eine Wellenlinie zusammenzusetzen:

Wir erkennen: In diesem Fall hat die Figur *Ecken* (siehe bei a)) oder *Lücken* (siehe bei b)). Ein *nahtloser* Übergang zwischen Kreisbögen verschiedener Kreise ist also dort und nur dort möglich, wo sich zwei Kreise berühren.

Um solche Figuren wie in Bild 1 konstruieren zu können, muß man also neben den Mittelpunkten und Radien der Kreise auch ihre Berührungspunkte exakt bestimmen können. Es ist deshalb naheliegend, die Frage zu untersuchen: Gibt es einen Zusammenhang zwischen dem Berührungspunkt zweier Kreise und ihren Mittelpunkten?

Bild 4



Das Bild läßt uns vermuten:

* Haben zwei Kreise genau einen gemeinsamen Punkt (oder auch: berühren sich zwei Kreise), so liegt dieser gemeinsame

Bild 2

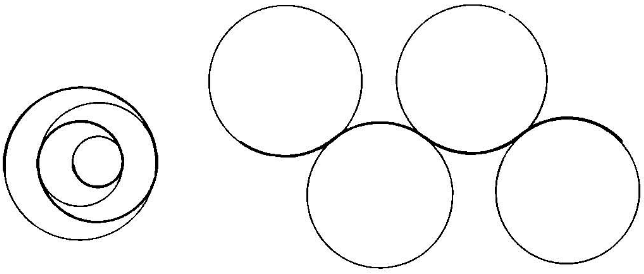
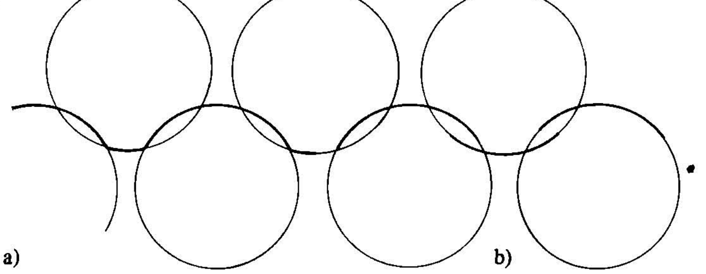


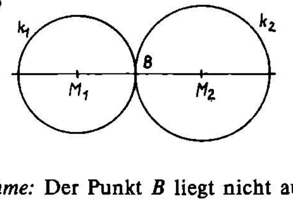
Bild 3



a) b)

Punkt (der Berührungspunkt) auf der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der beiden Kreise.
Den Beweis dieser Aussage führen wir indirekt:
Voraussetzung: k_1 und k_2 haben genau einen gemeinsamen Punkt, den Punkt B.

Bild 5



Annahme: Der Punkt B liegt nicht auf der Geraden M_1M_2. Wir spiegeln k_1 und k_2 an der Geraden M_1M_2. Dabei gilt:

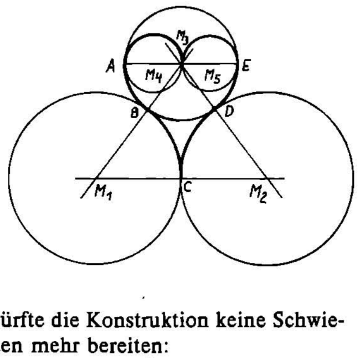
$$(1) \left.\begin{array}{l} k_1' = k_1 \\ k_2' = k_2 \end{array}\right\} \text{(da die Spiegelgerade durch die Mittelpunkte von } k_1 \text{ und } k_2 \text{ geht)}$$

(2) B liegt auf k_1 und k_2 (Voraussetzung)
$\rightarrow$ B' liegt auf k_1' und k_2'
(Eigenschaft der Spiegelung)
$\rightarrow$ B' liegt auf k_1 und k_2 (wegen (1))
(3) $B' \neq B$
(B liegt nicht auf der Spiegelgeraden)
Aus (2) und (3) folgt: k_1 und k_2 haben zwei gemeinsame Punkte, nämlich B und B'. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, also kann die Annahme nicht wahr sein.
Damit ist die Aussage (*) bewiesen.
An den Beispielen h und i des Bildes 1 soll nun gezeigt werden, wie uns die Aussage * bei der Konstruktion von Figuren aus verschiedenen Kreisbögen helfen kann.

Beispiel i:
Konstruktion eines Herzens

Wir fertigen zunächst eine Überlegungsfigur an, in der wir die verwendeten Kreisbögen zu ganzen Kreisen ergänzen. Da wir wissen (vgl. Aussage *), daß die Berührungspunkte der Kreise auf den Verbindungsgeraden der jeweiligen Kreismittelpunkte liegen, zeichnen wir auch diese Verbindungsgeraden ein:

Bild 6

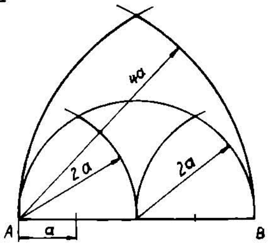


Nun dürfte die Konstruktion keine Schwierigkeiten mehr bereiten:
1. gleichschenkliges Dreieck $M_1M_2M_3$ mit $\overline{M_1M_2}$ als Basis
(Das Dreieck muß wegen der Axialsymmetrie der Figur gleichschenklig sein. Die Form des Herzens richtet sich nach dem Verhältnis $\overline{M_1M_2} : \overline{M_1M_3}$; siehe z. B. Bild 8i);
2. Kreis k_1 um M_1 mit $r_1 = \frac{\overline{M_1M_2}}{2}$;
Kreis k_2 um M_2 mit $r_2 = \frac{\overline{M_1M_2}}{2}$ $\rightarrow$ Berührungspunkt von k_1 und k_2: C;
3. Kreis k_3 um M_3 mit $r_3 = \overline{M_1M_3} - r_1$ $\rightarrow$ Berührungspunkte des Kreises k_3 mit k_1 und k_2: B, D;
4. Parallele zu M_1M_2 durch M_3 $\rightarrow$ Schnittpunkte der Parallelen mit k_3: A, E;
5. Kreise k_4 und k_5 mit den Durchmessern $\overline{AM_3}$ bzw. $\overline{M_3E}$.
Die gesuchte Figur besteht aus den Kreisbögen $\overset{\frown}{M_3A}$; $\overset{\frown}{AB}$; $\overset{\frown}{CB}$; $\overset{\frown}{DC}$; $\overset{\frown}{DE}$; $\overset{\frown}{EM_3}$. (Zur Bezeichnung der Kreisbögen vgl. Lehrbuch Mathematik 7, S. 138.)

Beispiel h:
Konstruktion eines gotischen Fensters

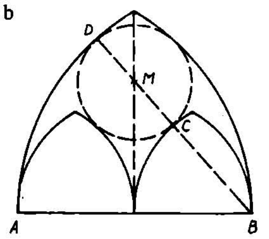
Die ersten Konstruktionsschritte dürften unmittelbar aus dem Bild 1h erkennbar sein:

Bild 7a



Wie aber finden wir den Mittelpunkt und den Radius r des noch fehlenden Kreises? Wir wissen: 1. Wegen der Symmetrie der Figur liegt M auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$.
2. Angenommen, M wäre schon bekannt; wegen des Satzes (2) müßten die Berührungspunkte C und D dann auf der Geraden BM liegen:

Bild 7b



Da wir aber weder den Mittelpunkt M noch die Berührungspunkte C und D kennen, müssen wir nach weiteren bekannten Größen suchen:
Wissen wir überhaupt etwas über die Strecken auf der Geraden BM? Ja! Nach der bisherigen Konstruktion (vgl. Bild 7a) ist:

$$\overline{BC} = 2a \quad \text{und}$$
$$\overline{BD} = 4a.$$

Daraus folgt $\overline{CD} = 2a$, also $\overline{CM} = a$ und $\overline{BM} = 3a$.
Damit kann in dem Bild 7a der Punkt M (Kreise um A und B mit $r = 3a$) und schließlich der noch fehlende Kreis um M mit $r = a$ konstruiert werden.

Aufgaben

▲1▲ Konstruiere die Figuren aus den Bildern 1a bis 1l!
(*Hinweis:* In manchen Fällen sind – ähnlich wie im Beispiel i bestimmte Stücke frei wählbar, wodurch sich die Form der Figur geringfügig ändern kann. In den Lösungen ist im allgemeinen nur eine Möglichkeit angegeben.)

▲2▲ Berechne für die Figur in Bild 8a
a) das Verhältnis der drei Radien,
b) den Umfang, wenn r_1 gegeben ist!

▲3▲ In Bild 1d sei der Radius der kleinen Kreise r. Berechne
a) den Radius des großen Kreises,
b) den Flächeninhalt der grauen Fläche!

E. Goldberg

Traumlösung

Im Schlaf wurden die größten Entdeckungen gemacht und Meisterwerke der Literatur und Musik geschaffen.

Als der russische Gelehrte Dmitri Mendelejew an seinem Periodensystem der Elemente arbeitete, konnte er es lange nicht in Form einer Tabelle bringen. Nach langer rastloser Arbeit schlief er ein und träumte das, was seinen Namen unsterblich machte.
Mendelejew selbst darüber: „Ich sah im Traum eine Tabelle, in der die Elemente so wie nötig angeordnet waren; als ich aufwachte, schrieb ich sie sofort auf einen Zettel – nur an einer Stelle war später eine Korrektur notwendig."

Der französische Mathematiker Henri Poincaré – nicht in der Lage, eine Gleichung zu integrieren – ließ sie liegen und ging schlafen. Gegen Morgen hatte er einen Traum, in dem er vor den Studenten eine Vorlesung hielt und an der Tafel diese Gleichung löste. Poincaré erwachte und schrieb die Lösung aufs Papier.

Der bekannte Mathematiker Carl Friedrich Gauß löste im Schlaf eine Aufgabe, über der er 19 Jahre gesessen hatte.

Der italienische Komponist Giuseppe Tartini kam lange Zeit mit einer seiner Sonaten nicht zurande. Einmal erschien ihm der Teufel, der eine außergewöhnliche Melodie trällerte. Tartini erwachte, schrieb die Musik und nannte sie *Teufelstriller-Sonate*.

Der deutsche Chemiker Friedrich August Kekulé von Stradonitz sah im Traum die gewohnten langen linearen Ketten von Atomverbindungen des Azetylen. Plötzlich begannen die Ketten in Bewegung zu geraten, näherten einander, wanden sich wie Schlangen. Eine packte ihren Schwanz und begann sich zu drehen. Kekulé erwachte und verbrachte den Rest der Nacht mit der Aufstellung einer neuen Hypothese: der ringförmigen Verkettung des Benzols.

aus: Sputnik, Moskau

Carl Zeiss
(1816 bis 1888)

Vor 100 Jahren, am 3. 12. 1888 starb in Jena Carl Zeiss, der Gründer des heute weltbekannten Betriebes für optische, feinmechanische und neuerdings auch elektronische Geräte, der nun den Namen VEB Kombinat Carl Zeiss trägt. Wer heute den Namen Zeiss hört, denkt wohl zuerst an Planetarien und astronomische Fernrohre, an die Multispektralkamera und andere hochspezialisierte Hilfsmittel der Forschung. Was aber einst den Ruhm der Firma begründete, war die Produktion von Mikroskopen, die erst durch Zeiss im Zusammenwirken mit dem Jenaer Physiker Ernst Abbe (1840 bis 1905) aus dem Stadium des *Pröbelns* in das Stadium exakter Berechnung überführt wurde.

Carl Zeiss wurde am 11. 9. 1816 in Weimar als Sohn eines Kunstdrechslermeisters geboren, der zugleich ein Spielwarengeschäft betrieb. Nach dem Besuch des Gymnasiums in Weimar (etwa bis zur heutigen 10. Klasse) ging er 1834 nach Jena in die Lehre zum Hofmechanikus Dr. Friedrich Körner, der eine private Werkstatt führte und zugleich als Privatdozent an der Universität Unterricht im Bau wissenschaftlicher Geräte erteilte. Eine ähnliche Mischung von gewerblicher Tätigkeit und engem Kontakt zur sich stürmisch entwikkelnden Naturwissenschaft mag auch Carl Zeiss als Ideal künftigen Wirkens vorgeschwebt haben. Als er sich jedoch nach den damals noch für Handwerker üblichen Wanderjahren 1845 um die Eröffnung eines eigenen Geschäftes bewarb, zunächst in Weimar, dann in Jena, mußte er lange gegen erhebliche bürokratische Widerstände kämpfen. Immerhin war Jena damals ein Städtchen von nur etwa 6 000 Einwohnern, in dem es bereits zwei Optiker und Mechaniker gab. Daß ein hochspezialisierter Handwerksbetrieb nach wenigen Jahren Kunden unter den Wissenschaftlern halb Europas haben könnte, war den um ihr bescheidenes Brot fürchtenden Jenaer Bürgern nicht vorstellbar. Hervorzuheben ist, daß Zeiss die lange Wartezeit nutzte, um wiederum an der Universität Vorlesungen über Mathematik, Physik und Chemie zu besuchen und den Professoren bei der Herstellung bzw. Verbesserung ihrer Apparaturen zu helfen, wie er es auch schon während seiner Lehre getan hatte. So erwarb er viele nützliche Kenntnisse und Bekanntschaften. Insbesondere in dem bedeutenden Jenaer Botaniker Matthias Jacob Schleiden (1804 bis 1881), einem Pionier der Erforschung der Pflanzenzellen, erwuchs ihm ein verständnisvoller und engagierter Förderer.

Nachdem Zeiss 1846 die Erlaubnis zur Gründung eines *mechanischen Ateliers* erkämpft hatte, hat er seinen Betrieb aus bescheidensten Anfängen zum Weltruhm geführt. Das Hauptproblem bestand für ihn zunächst in einer wesentlichen Verbesserung des Auflösungsvermögens der Mikroskope, deren Zusammensetzung aus verschiedenen Linsen damals noch weitgehend vom zufälligen Ergebnis geduldigen Probierens abhing. Nachdem eine anfängliche Zusammenarbeit mit dem Jenaer Mathematiker Fr. W. Barfuß nicht zu brauchbaren Ergebnissen geführt hatte, gewann er 1866 den aus einer Arbeiterfamilie stammenden Physikprofessor Ernst Abbe zur Mitarbeit. 1871 gelang es Abbe, ebenfalls nach nicht wenigen Mißerfolgen, die Abhängigkeit der Bildqualität von der Lichtbeugung an den nicht selbstleuchtenden Objekten mathematisch zu beschreiben, und 1873 fand er die nach ihm benannte Sinusbedingung für mikroskopische Linsensysteme, die deren Berechnung bis heute zugrundeliegt. Einen weiteren Meilenstein in der Verwissenschaftlichung der optischen Produktion stellte ab 1881 die Zusammenarbeit mit dem Chemiker und Glastechniker Dr. Friedrich Otto Schott (1851 bis 1935) dar, die 1884 zur Errichtung der *Schottschen* Glashütte in Jena als wichtigem Zulieferbetrieb führte. Abbe wurde 1875 Teilhaber von Zeiss, nach dessen Tod Alleininhaber und wandelte den Betrieb schließlich in die Form einer Stiftung um, deren Überschüsse der Stadt und Universität in vielfältiger Form zugute kamen. Aus Mitteln der Zeiss-Stiftung wurden z. B. das Volkshaus in Jena mit Bibliothek und größtem Veranstaltungssaal der Stadt sowie das *Abbeanum* der Universität erbaut, in dem Teile der Sektionen Mathematik und Physik bis heute beheimatet

sind. Hatten noch bis zum Tode von Zeiss die Mikroskope den Kern der Produktion gebildet, so wurde nach seinem Tode nach und nach auch die Herstellung von Fotoapparaten, terrestrischen und astronomischen Fernrohren, geodätischen Instrumenten aufgenommen.

Gewiß beruhte der Erfolg von Carl Zeiss zum Teil auf seiner geschäftlichen Begabung, der Durchsetzung höchster Qualität und Präzision in der täglichen Arbeit und auch auf der damals allgemein üblichen harten Ausbeutung der Arbeiter und besonders der Lehrlinge. Entscheidend aber war seine frühe Erkenntnis, daß eine Produktion, die Hilfsmittel für die Wissenschaft liefert, sich selbst in starkem Maße der Wissenschaft bedienen muß.

Von seinem Weg der mathematischen und physikalischen Durchdringung der Wirkungsprinzipien der optischen Geräte ließ er sich auch durch anfängliche Rückschläge technischer und ökonomischer Art niemals abbringen. So ehren wir heute in Carl Zeiss einen Pionier der Entwicklung von Mathematik und Naturwissenschaften zur unmittelbaren Produktivkraft.

P. Schreiber

Neue Inhalte und Anforderungen an Berufe im Kombinat VEB Carl Zeiss JENA

Wenn man den Namen *Carl Zeiss JENA* hört, denkt man oft zuerst an Optik und Präzisionsmechanik. Haben sich doch unsere Gründer Carl Zeiss, Ernst Abbe und Otto Schott einen bleibenden Platz in der Geschichte verdient, haben Generationen von erfahrenen Facharbeitern in Optik und Mechanik auf einer wissenschaftlichen Grundlage des optischen Präzisionsgerätebaus durch ihre Arbeit einem Firmennamen Weltruf verschafft.

Nun beinhaltet die vom XI. Parteitag der SED beschlossene ökonomische Strategie, daß sich unser Kombinat VEB Carl Zeiss JENA zu einem Zentrum von Hochtechnologien entwickelt. Die Mikroelektronik ist eine solche Technologie, und vor allem darauf ist diese Strategie gerichtet.

Schon seit den letzten 15 Jahren haben wir nun in unserem Kombinat schrittweise zunehmend anspruchsvolle Aufgaben für die Herstellung und Anwendung der Mikroelektronik in Angriff genommen. Die größten Effekte in unserem Kombinat hat die Mikroelektronik bei der Lösung von Aufga-

ben ermöglicht, die für die Mikroelektronik selbst unerläßlich, aber auf herkömmliche Weise nicht beherrschbar sind. So ist beispielsweise mit der Mikroelektronik der Anspruch an die Hochleistungssysteme der Optik enorm gewachsen. Nur durch die Computertechnik ist es überhaupt noch möglich, derartige Optiken zu berechnen und herzustellen.
So sind Erzeugung wie auch Anwendung der Geräte unseres Kombinates durchdrungen von Rechentechnik. Wir wollen nun genauer anschauen, wodurch diese *Durchdringung* gekennzeichnet ist, und welche Anforderungen und Perspektiven sich nicht zuletzt für mathematikorientierte Berufe auftun.

Renaissance der Optik und Mikroelektronik

Vor wenigen Jahrzehnten war man der Meinung, daß bei der Entwicklung optischer Systeme keine bedeutenden Fortschritte mehr möglich sind. Mit den Anforderungen, die die Raumfahrt (Multispektralkamera MKF6) und die Mikroelektronik an die optischen Systeme stellten, kam es zu einer Renaissance der Optik. Für die Herstellung höchstintegrierter Schaltkreise werden Objektive benötigt, die Strukturbreiten von 0,002, später auch bis zu 0,0005 mm abbilden können. Solche Objektive sind selbst das Entwicklungsergebnis modernster CAD-Technik.

Mikroelektronik im Optischen Präzisionsgerätebau

Die Geräte unseres Kombinates sind hauptsächlich informationsverarbeitende Geräte. Ihre Bedienung erfordert zunehmend Kenntnisse aus der Informatik. Umgekehrt wird die Informatik zunehmend zur notwendigen Methode, ein Gerät überhaupt erst zu entwickeln. Man kann das ablesen daran, wie sich die *Elektronik-Dichte* in unseren Geräten weiter vollzieht. Gleichzeitig wächst auch die Dichte, mit der Transistorfunktionen in einem Schaltkreis untergebracht werden.

Bild 1
Ausschnitt einer Struktur aus dem 64 KBit DRAM-Schaltkreis U 2164. Die Auflösung beträgt etwa 2 Mikrometer, die Reliefhöhe etwa 1 Mikrometer.

Bild 2
Entwicklung der Elektronikdichte in den Erzeugnissen des Optischen Präzisionsgerätebaus unseres Kombinates VEB Carl Zeiss JENA. Es ist davon auszugehen, daß sich die Anzahl der Transistorfunktionen je Gerät durchschnittlich alle 2 Jahre verdreifacht.

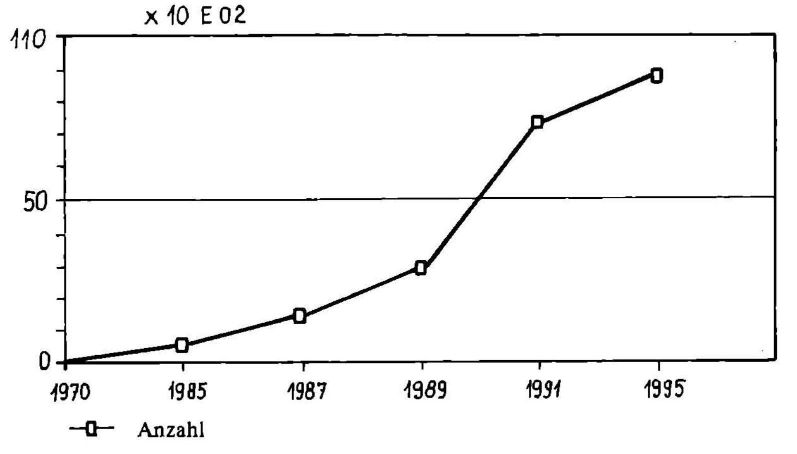


Bild 3
Wachstum der Komplexität bei Schaltkreisen, die im Kombinat VEB Carl Zeiss JENA zum Einsatz kommen. Bezogen auf 1987 = 1 bedeutet dies für die Jahre 1988 = 4, 1990 = 15, 1992 = 50 und 1995 = 125fache Komplexität.
Das entspricht übrigens auch dem Gesetz von Gordon Moore, wonach sich die in einem Chip integrierte Bauelementeanzahl alle 2 Jahre verdreifacht bei gleichbleibender Chipfläche.

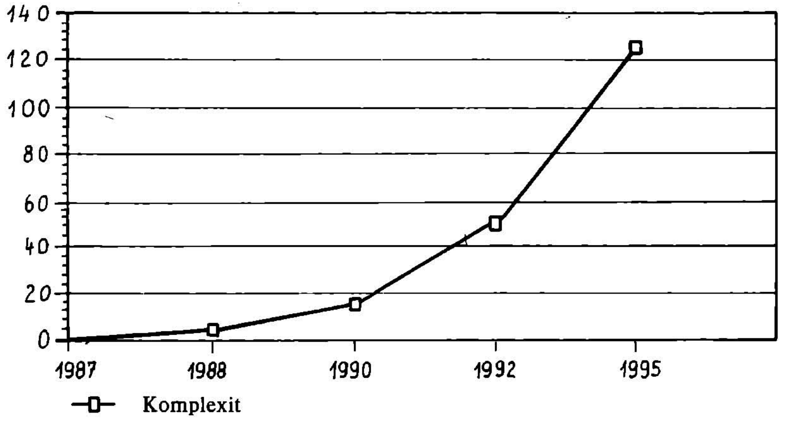


Bild 4
Ein anwenderspezifischer Schaltkreis verhindert die Arbeit, die sonst beim Einsatz vieler herkömmlicher elektronischer Bauelemente aufgewendet würde.

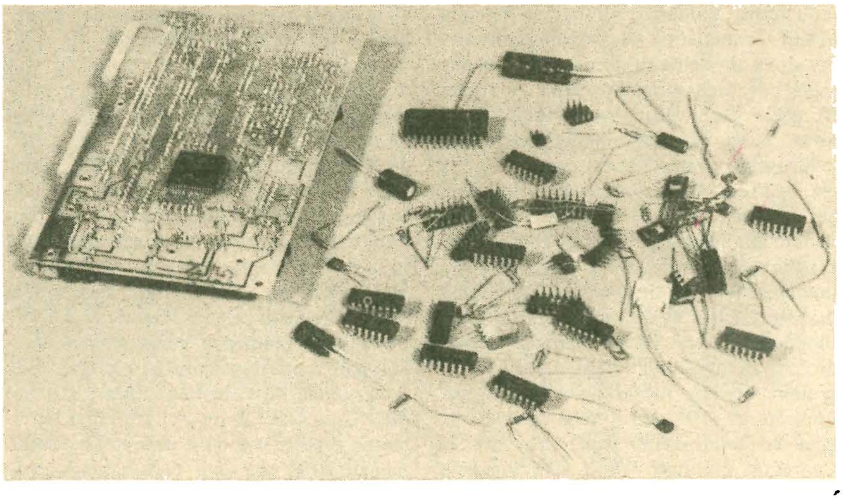
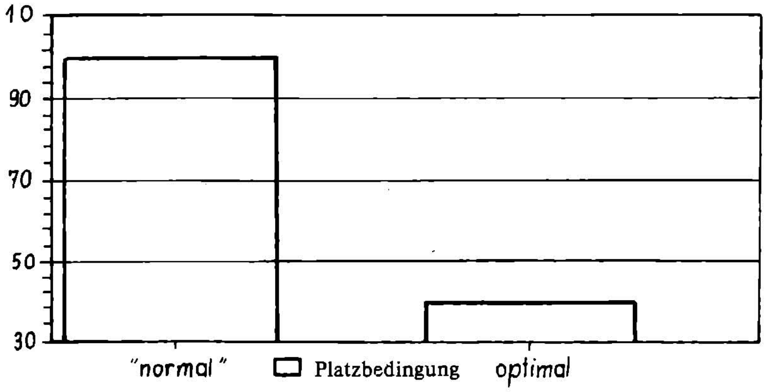


Bild 5
Will man eine digitale Schaltung in einen Schaltkreis integrieren, so kann man bis zu 60 % Platz sparen, wenn man vorher eine Optimierung durchführt.



Die Spitze eines Eisberges

In unserem Kombinat sind inzwischen alle Voraussetzungen gegeben, hochintegrierte und auch Hybrid-Schaltkreise selbst zu entwerfen und herzustellen. Bei den hochintegrierten Schaltkreisen arbeiten wir zur Zeit mit einem Integrationsgrad von 3000 Gattern je Schaltkreis. 1990 werden es über 100000 Gatter je Schaltkreis sein. Wir bezeichnen solche Schaltkreise als *anwenderspezifische* Schaltkreise. Das besonders Interessante an ihnen ist, daß man damit für jedes Gerät oder jeden Anwendungszweck die elektrischen Schaltungen *maßgeschneidert* in einen Schaltkreis hineinpacken kann, daher auch die Bezeichnung *anwenderspezifisch*. Die Wirkung besteht darin, daß das, was bisher in Form von Baugruppen aufgebaut wurde, nun auf eine Leiterplatte geht; daß das, was bisher auf einer Leiterplatte war, nun in einen einzelnen Schaltkreis geht. Man kann sagen, daß mit einem solchen Schaltkreis ein bis zwei Leiterplatten oder etwa 100 bis 200 elektronische Bauelemente *eingespart* werden können. Aber man darf das nicht so verstehen, daß 1 bis 2 Leiterplatten bzw. 100 bis 200 Bauelemente, die bisher *da* waren, nun *nicht mehr da* sind. Vielmehr wird mit dem Einsatz eines anwenderspezifischen Schaltkreises von vornherein die Verwendung so vieler Leiterplatten oder Bauelemente verhindert.
Die Folgen sind also außer einer *Einsparung* von Bauteilen auch verringerte Masse, reduziertes Volumen, geringerer Energiebedarf, reduzierter Herstellungsaufwand, vor allem aber eine Erhöhung der Zuverlässigkeit der Schaltung. Als Preis zu zahlen ist dabei eine völlig neue Herangehensweise beim Entwurf solcher integrierter maßgeschneiderter Schaltungen. U. a. ist ein restloses Beherrschen und Verstehen der elektrischen Schaltung, die in einen Schaltkreis gepackt werden soll, unumgänglich. Hier bekommen Fragen der mathematischen Durchdringung und Modellierung solcher Schaltungen einen hohen Stellenwert. Beim Entwurfsprozeß müssen die Schaltungen auf einem Computer simuliert werden. Erfahrungen zeigen, daß im späteren selbst entworfenen Schaltkreis alles das funktionieren wird, was vorher im Computer simuliert wurde, aber von dem, was nicht simuliert wurde, auch nichts funktionieren wird. Beim Aufbau einer Leiterplatte können beim Ausprobieren einzelne Bauelemente notfalls ausgetauscht, oder es können auch einmal ein paar Drähte noch hineingelötet werden. Beim Integrieren geht das nicht – es muß dann ggf. der ganze Schaltkreis neu hergestellt und wieder ausprobiert werden. Wie wichtig diese mathematische Durchdringung der in einen Schaltkreis hineinzuintegrierenden Schaltungen sein kann, läßt sich auch folgendermaßen zeigen:
Das wird auch an einem weiteren Beispiel deutlich: Nach der Herstellung eines solchen Schaltkreises muß er meßtechnisch überprüft werden. Wenn es sich z. B. um eine rein digitale Schaltung von z. B. 25 Flip Flops handelt, die mit einer Rate von 10 Millionen mal in der Sekunde ein- und ausgeschaltet wird, würde das Messen aller dann möglichen Schalt-Zustände dennoch eine Zeit von etwa 36 Jahren erfordern. Um solche Testzeiten in die Größenordnung von einigen Sekunden oder Minuten zu bringen, sind hochentwickelte, natürlich mathematisch fundierte *Fahrpläne* für solche Meßarbeiten vonnöten.

Computer aus dem Baukasten

Bei der Benutzung von Geräten unseres Kombinates gibt es eine Reihe von Aufgaben der Bedienung, Steuerung und der Auswertung von Meßdaten. Bisher wurden viele dieser Arbeiten vom Menschen ausgeführt. Aufgrund der Zunahme des Umfangs, der notwendigen Schnelligkeit und der Kompliziertheit dieser Arbeiten müssen diese immer mehr dem Gerät selbst überlassen werden. Wir sagen dazu, daß die Geräte durch den Einbau von immer mehr Mikroelektronik *intelligenter* gemacht werden. Ein Weg dahin führt über die Verwendung *maßgeschneiderter* Computer im Innern der Geräte unseres Kombinates. Stets geht es dabei darum, aus einem Grundsortiment solcher Module (z. B. Zentraleinheit, Meßwerte verarbeitende Baugruppen, Antriebssteuerungen ausführende Baugruppen, Speicherbaugruppen u. a. m.) diejenigen Mikrocomputer mit einer Verarbeitungsbreite von 8 Bit und 16 Bit zusammenzusetzen, die dem Verwendungszweck des Gerätes am besten entsprechen. Die 8 Bit-Computer setzen wir in der Regel in kleineren Geräten bzw. als Hilfscomputer in größeren Baugruppen ein, während die 16 Bit-Computer vorrangig in Großgeräten verwendet werden. Ein Beispiel für die Anwendung vieler solcher Baugruppen in einem Großgerät ist die elektronische Steuerung unseres Großplanetariums *COSMORAMA*.

Womit wir es noch zu tun haben – Software

Obwohl wir ein Kombinat des Optischen Präzisionsgerätebaus sind, wird dennoch jeder zweite in Forschung und Entwicklung arbeitende Kollege direkt mit der Elektronik zu tun haben. Die Gründe dafür wurden bereits dargelegt. Ähnlich wie der Gebrauch eines Homecomputers nur in dem Maße möglich ist, in dem man dafür Software zur Verfügung hat, muß man sich das auch bezgl. der Verwendung der Geräte unseres Kombinates vorstellen. Es geht also darum, daß unsere Werktätigen in weitaus größerem Ausmaß in der Lage sein müssen, Software herzustellen. Im Grunde genommen müssen sich auch die Kollegen, die unsere Geräte in der Fertigung in Betrieb nehmen und ausprobieren, zum praktischen Umgang mit solcher Software befähigen. Insgesamt bleiben diese Anforderungen an die Tätigkeit der Werktätigen auf unbestimmte Zeit gültig, da sich die Mikroelektronik selbst auf unbestimmte Zeit weiter mit höchstem Tempo weiterentwickelt. Dieses Tempo ist dadurch zu kennzeichnen, daß sich der Entwicklungsstand der Mikroelektronik, man kann auch sagen – das Fachwissen – alle 2 bis 3 Jahre erneuert.

Die Aussichten

Wir haben gesehen, daß sich im Optischen Präzisionsgerätebau Veränderungen ereignen. Die Optischen Präzisionsgeräte wandeln sich entsprechend ihrem Verwendungszweck zu Geräten der Informatik. Das trifft vor allem auch auf die Hochtechnologie-Produkte unseres Kombinates zu. Gleichzeitig werden zu ihrer Entwicklung und Herstellung selbst modernste Hochtechnologien einschließlich moderner Rechentechnik benötigt. Das Erzeugen einer immer mehr maßgeschneiderten Mikroelektronik in den Geräten, aber auch deren Ausstattung mit Software erfordert von unseren Werktätigen, daß sie sich zunehmend von gewohnten Arbeitsmethoden trennen und sich mit neuen anfreunden müssen. Zu den neuen ist in jedem Falle der Umgang mit Computertechnik einschließlich die Herstellung maßgeschneiderter Mikrocomputer, das mathematische Durchdringen verschiedener Entwurfsarbeiten und das Herstellen oder die Anwendung von Software zu rechnen. So sieht man, daß sich für mathematisch interessierte oder vorgebildete Werktätige eine Reihe von ausgesprochen interessanten Arbeitsmöglichkeiten in unserem Kombinat ergibt.

L. Wolf

Regsechs und Gleisechs – zwei Legespiele

Fünf Dreiecke – ein Sechseck, ein Fünfeck, ein Rechteck

Zur Erinnerung: *Ein regelmäßiges Sechseck besitzt sechs gleichlange Seiten, und jeder Innenwinkel eines derartigen Sechsecks beträgt 120°. Die Seitenlänge stimmt mit dem Umkreisradius überein.*

Zeichnet euch ein regelmäßiges Sechseck und zerlegt es mit Hilfe spezieller Diagonalen in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke und in drei untereinander kongruente gleichschenklige Dreiecke, so wie es Bild 1 zeigt.

Bild 1

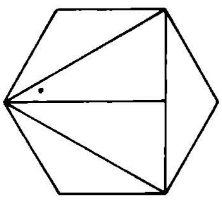
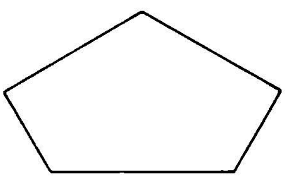


Bild 2



Versucht dann, aus diesen fünf Elementen den in Bild 2 dargestellten Drachen, also ein Fünfeck, sowie ein Rechteck und einen Rhombus zusammenzulegen. Aus dem Rhombus erhaltet ihr sofort zwei kongruente gleichseitige Dreiecke. Nun ist es

Bild 3

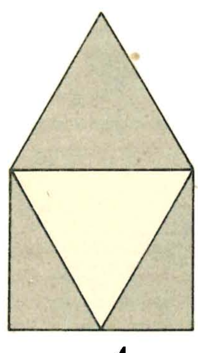
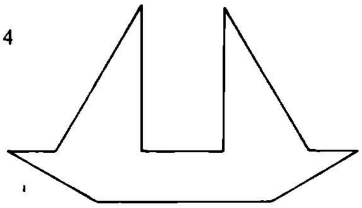


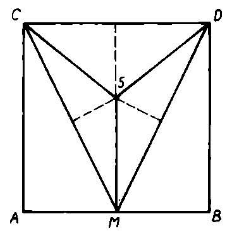
Bild 4



auch ganz leicht, das Haus (Bild 3) und das Segelschiff (Bild 4) zu bauen.
Leider gelingt es nicht, aus den fünf Elementen ein Quadrat zu legen. *Das Legespiel nennen wir Regsechs.*

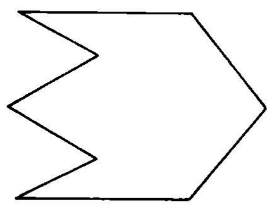
Um das Spiel *Gleisechs* zu erhalten, wollen wir von einem Quadrat (Bild 5) ausgehen. Man verbinde den Mittelpunkt M der Seite AB mit den Eckpunkten C und D. Anschließend wird das Dreieck CDM in drei Teildreiecke so zerlegt, daß $\overline{CS} = \overline{DS} = \overline{MS}$ ist. Wir haben also wieder fünf Dreiecke, nämlich die kongruenten rechtwinkligen Dreiecke ACM und BDM, die kongruenten gleichschenkligen Dreiecke DMS und CMS sowie das Dreieck CDS.

Bild 5



Legt nun ein gleichseitiges Sechseck, eine zum Drachen (Bild 2) verwandte Fünfeckfigur, einen Rhombus und die Schwalbe (Bild 6) aus den fünf Elementen von Gleisechs zusammen. Sicher findet ihr noch weitere interessante Figuren.

Bild 6



Und wenn ihr beim Suchen nach neuen Kombinationen etwas Muße findet, so berechnet doch einmal alle Winkel und alle Seitenlängen der Dreiecke bei beiden Spielvarianten. Vielleicht können euch dabei Geschwister, Freunde oder eure Eltern helfen.

▲1▲ Welche Innenwinkel besitzt das zusammengelegte gleichseitige (aber nicht regelmäßige) Sechseck?

▲2▲ Wie ist in Bild 5 der Punkt S zu konstruieren?

Übrigens: Werden die Dreiecke der Legespiele aus Pappe, Plaste oder Sperrholz angefertigt, dann dürfte dies ein originelles, schönes Weihnachtsgeschenk sein!

W. Schmidt

Kryptogramm

An das Pioniertreffen erinnert unser Kryptogramm, bei dem Buchstaben derart durch Ziffern zu ersetzen sind, daß die Additionsaufgabe richtig gelöst wird.
Wieviel verschiedene Lösungen gibt es?

$$\begin{array}{r} KARL \\ +\ MARX \\ \hline STADT \end{array}$$

W. Schmidt, Greifswald

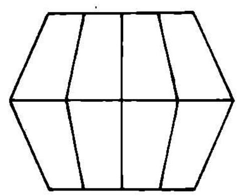
Knobeleien
(nicht nur) für Klasse 8

Folgende Aufgaben stammen aus der 30. Mathematikolympiade der RSFSR, die im Februar dieses Jahres stattfand. Dr. Werge von der Karl-Marx-Universität Leipzig, zu dieser Zeit zu einem Studienaufenthalt in der Sowjetunion, sandte uns diese Aufgaben und wünscht euch viel Spaß beim Knobeln! Ich natürlich auch!

Alphons

▲1▲ Können in den Ecken eines regelmäßigen Achtecks die Zahlen 1, 2, ..., 8 so verteilt werden, daß die Summe der Zahlen in drei beliebigen benachbarten Ecken
a) größer als 11,
b) größer als 13 ist?

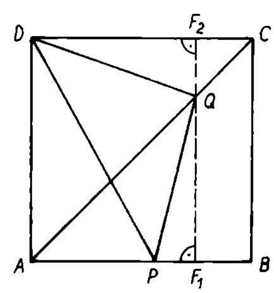
▲2▲ Teile ein regelmäßiges Sechseck in acht flächengleiche Stücke!



▲3▲ Auf der Seite $\overline{AB}$ bzw. der Diagonalen $\overline{AC}$ eines Quadrates $ABCD$ liegen die Punkte P bzw. Q so, daß

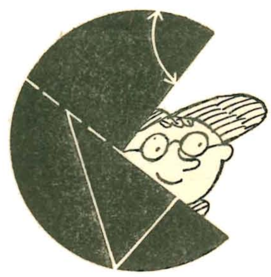
$\overline{AP} : \overline{PB} = 3 : 2$ und
$\overline{AQ} : \overline{QC} = 4 : 1$ gilt.

Bestimme die Winkel im Dreieck PQD!



▲4▲ Über zwei Häufchen von Spielsteinen ist folgendes bekannt: Werden vom ersten 100 Steine auf den zweiten gelegt, liegen auf dem zweiten zweimal mehr Steine. Wird aber (vom Ausgangszustand) eine gewisse Zahl Steine vom zweiten zum ersten Häufchen gelegt, so ist ihre Zahl auf dem ersten sechsmal größer als auf dem zweiten.
Wie groß ist die kleinstmögliche Zahl von Steinen in beiden Häufchen?

In freien Stunden · alpha-heiter



Weihnachtliche Kryptarithmetik

Wie müssen die Ziffern der englischen Kryptogramme lauten, damit richtig gelöste Additionsaufgaben entstehen?

a)
```
  NOEL
+ NOEL
------
  BELL
```

b)
```
  NOEL
+ NOEL
------
 BELLS
```

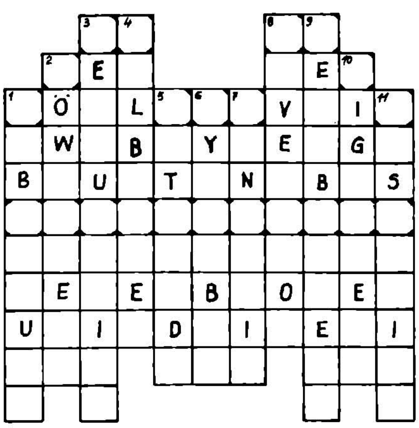
c)
```
   DING
   DONG
   DING
   DONG
+ BELLS
-------
  SOUND
```

aus: Journal of Recreational Mathematics, Farmingdale

alpha-heiter – ernst

Gesucht sind 11 senkrecht einzutragende mathematische Begriffe bzw. Namen von Wissenschaftlern:

1. Zuordnung, 2. Logiker und Mathematiker (1878 bis 1940), 3. Anordnung von Elementen,
4. Zerlegen eines Ganzen in zwei gleiche Teile,
5. sternförmige Kurve mit vier Spitzen,
6. Kegelschnitt, 7. Begründer der Relativitätstheorie (1879 bis 1955), 8. Spiegelung am Kreis,
9. Relation im Bereich der ganzen Zahlen,
10. Charakteristikum einer Matrix, 11. Begriff aus der Reihenlehre.



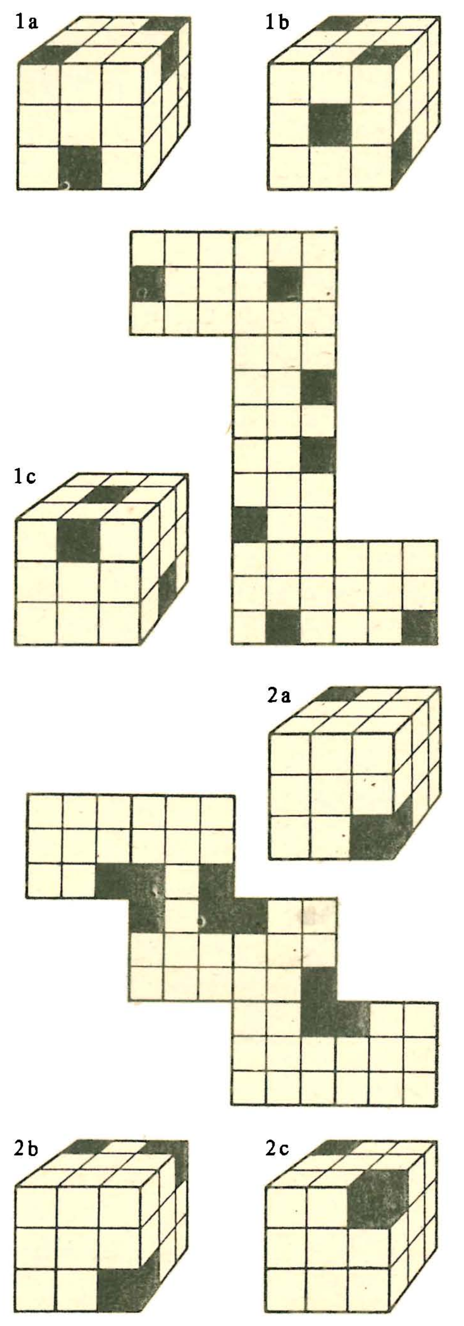
Bei richtiger Eintragung der Begriffe bringen die Anfangsbuchstaben (1 bis 11) und die Buchstaben der markierten Mittelzeile (v. l. n. r. gelesen) eine Meinung vieler alpha-Leser zum Ausdruck.

Dr. R. Mildner, Leipzig

Würfellogik

Gehört das angegebene Flächennetz zu einem, zu zwei, zu drei oder zu keinem der abgebildeten Würfel?

aus: Logigram, Paris

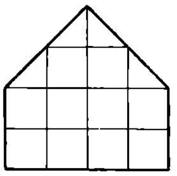


Was alles in einem Dreieck steckt

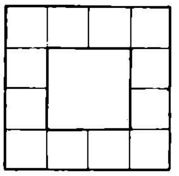
Die Figur A ist mit fünf Schnitten so zu zerlegen, daß aus den entstehenden Teilen die Figur B zusammengesetzt werden kann.

Ing. A. Körner, Leipzig

Figur 1



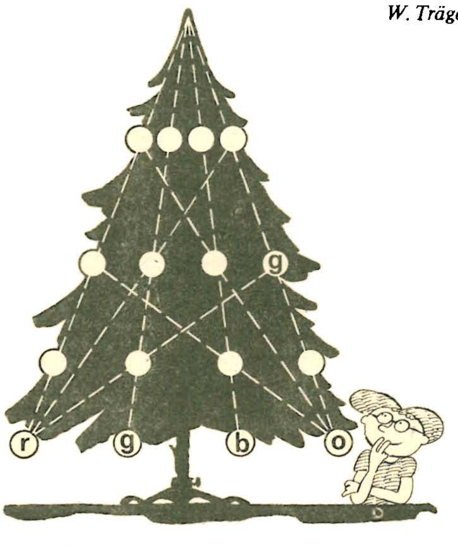
Figur 2



Knobeleien am Weihnachtsbaum

Ein Weihnachtsbaum wurde mit Glaskugeln in den Farben rot (r), gelb (g), blau (b) und olivgrün (o) sowie silbrigen Baumschmuckgirlanden festlich ausgestattet. Genau vier Glaskugeln von jeder Farbe sind sichtbar. Von diesen befinden sich an den Zweigen keines der vier Quirle sowie auf keinem der im Bilde geradlinigen Girlandenteile zwei Kugeln gleicher Farbe. Von fünf Kugeln ist die Farbe angegeben. Welche Farbe haben die übrigen Kugeln?

W. Träger, Döbeln

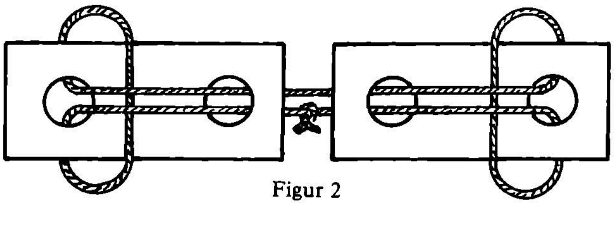


Löse die Verbindung

Nimm die Hülse einer Streichholzschachtel und schneide Ober- und Unterseite ab. Dahinein kommen zwei Löcher mit einem Durchmesser von etwa 1 cm. Fädele einen Faden (nicht zu kurz) durch die Löcher und knote ihn fest (siehe Bild).
Probiere nun die Teile der Streichholzschachtel vom Faden zu trennen ohne den Knoten zu lösen.

aus: Pythagoras, Amsterdam

Figur 1



Figur 2

1988 – 1989

Die durch Hintereinanderaufschreiben der Ziffern dieser beiden Jahreszahlen entstehende Zahl 19 881 989 ist in Primfaktoren zu zerlegen. Dabei benutze man zweckmäßig die Tabelle der Primzahlen im Tafelwerk und den SR 1!

W. Träger, Döbeln

Eine schöne Bescherung

Vor dem Auspacken ihrer in drei Paketen verpackten Weihnachtsgeschenke stellen die Geschwister fest: Die drei quaderförmigen Pakete lassen sich zu einem Quader mit den Kantenlängen 6 dm, 5 dm und 2 dm aneinanderlegen. Auch die Maßzahlen aller Kanten der drei Pakete zur Maßeinheit Dezimeter sind ganzzahlig.
Zwei Pakete sind volumengleich, ohne daß beide Pakete durchweg gleiche Kantenlängen haben. Das dritte Paket hat ein kleineres Volumen als diese beiden. Welche Abmessungen haben die drei Pakete?

W. Träger, Döbeln

Daß dem berühmten Mathematiker David Hilbert alles *Schmalspurdenken* zuwider war, bewies er in einer Senatssitzung der Universität Göttingen. Dort debattierte man, ob die Mathematikerin Sonja Kowalewskaja auf einen ordentlichen Lehrstuhl berufen werden sollte – als erste Frau. Zu ihren Gunsten entschied Hilbert: „Meine Herren, wir sind doch keine Badeanstalt, sondern ein Senat!"

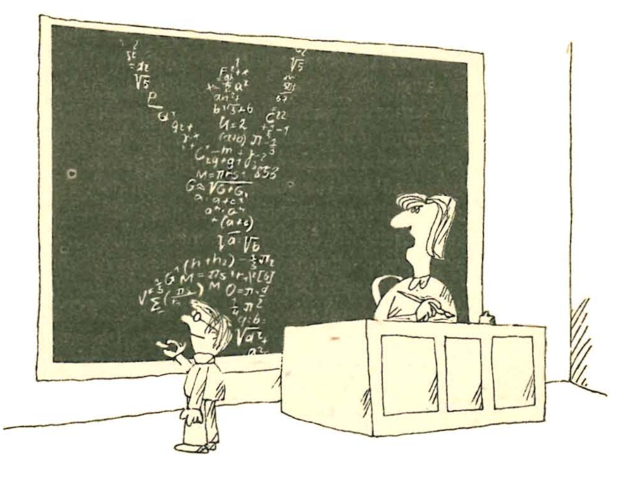
nach: Lingmann/Schmiedel: Anekdoten, Episoden, Lebensweisheiten, VEB Fachbuchverlag Leipzig

alpha-heiter · Preisaufgabe Heft 4/88

alpha gratuliert:

Karl Hause, Erfurt
Heike Lehmann, Machern
Ronald Peters, Wismar

L. Otto, Leipzig

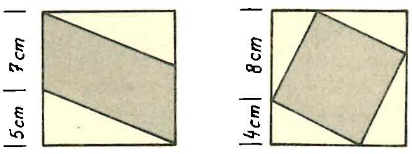


Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 8. März 1989

Ma 5 ■ 2945 In den beiden Bildern wurden vom linken Quadrat zwei gleichgroße Teilflächen und vom rechten Quadrat vier gleichgroße Teilflächen abgeschnitten. Welche der beiden grauen Flächen hat den größeren Flächeninhalt? Begründe deine Feststellung!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Maße in cm

Ma 5 ■ 2946 Die vier Mitglieder einer Familie sind zusammen (in ganzen Jahren) 120 Jahre alt. Hanni ist 10 Jahre älter als ihr Bruder Peter. Die Mutter dieser Kinder ist dreimal so alt wie Hanni. Der Vater ist zwei Jahre älter als seine Frau. Wie alt ist jede dieser vier Personen?

Schülerin K. Schwartz, Suhl

Ma 5 ■ 2947 Löse die folgenden drei Aufgaben, ohne eine Multiplikation durchzuführen!

a) $1987 \cdot 1988 = a$
$1988 \cdot 1987 = b$
Bestimme $a : b$!

b) $123\,456 + 1988 \cdot 1987 = v$
$9\,876\,544 - 1987 \cdot 1988 = w$
Bestimme $v + w$!

c) $1987 \cdot 234\,560 = x$
$234\,559 \cdot 1987 = y$
Bestimme $x - y$!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2948 Beweise, daß es unter irgendwelchen 20 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen keine drei verschiedenen ungeraden Zahlen gibt, die sich durch 5 ohne Rest teilen lassen!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2949 Hans und Franz wollten ihr Geld zusammenlegen und sich ein Knobelheft kaufen. Leider fehlte ihnen trotzdem noch etwas Geld für diesen Kauf. Hans fehlten 34 Pf und Franz fehlten 2 Pf an dem Preis.
Wieviel Geld hatte jeder, und wie teuer war das Knobelheft?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2950 Auf einem Sportplatz beträgt eine Runde 400 m. Fritz will mit seinem Hund Mopsi einmal um den Platz laufen. Beide starten zur gleichen Zeit und vom gleichen Punkt, aber in entgegengesetzter Richtung. Fritz legt in jeder Sekunde 3 m, sein Hund aber 5 m zurück. Nach wieviel Sekunden begegnen sich beide wieder? Wieviel Meter ist dann Fritz gelaufen?

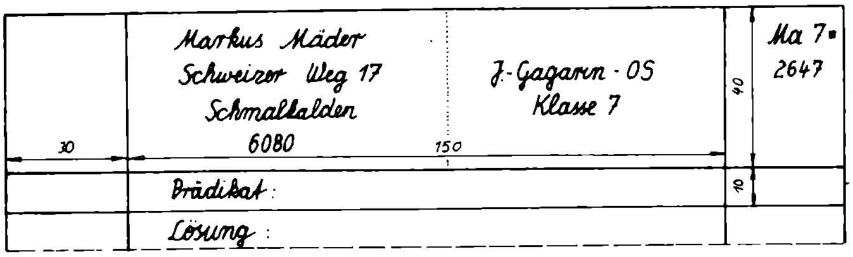
StR W. Melka, Neubrandenburg

Ma 5 ■ 2951 Die Schülerinnen Anke, Bärbel, Yvonne und Doreen wohnen in den Städten Berlin, Cottbus, Halle und Leipzig. Von ihnen wissen wir folgendes:
(1) Bärbel und das Mädchen aus Halle waren zusammen im Ferienlager.
(2) Anke und Bärbel schreiben sich mit den Mädchen aus Berlin und Leipzig Briefe.
(3) Yvonne und das Mädchen aus Berlin besuchten kürzlich zusammen ein Trainingslager.
In welcher Stadt wohnen diese vier Schülerinnen?

Schülerin D. Weyh, Winne

Ma 6 ■ 2952 Zur Familie Meier gehören vier Personen. Der Vater ist sechsmal so alt wie sein jüngster und dreimal so alt wie sein ältester Sohn. Die Mutter ist 12 Jahre jünger als der Vater. Alle Familienmitglieder sind zusammen (in ganzen Zahlen) 123 Jahre alt. Wieviel Jahre ist die Mutter älter als ihr jüngster Sohn?

Schülerin D. Klaus, Aspenstedt



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027
3. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. (Die Klassenstufennummer steht vor der Aufgabennummer.) Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12 oder Na/Te 10/12 gekennzeichnet sind.
4. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (siehe Muster), da die eingehenden Lösungen aufgabenweise sortiert und korrigiert werden. Noch eine Bitte an die Schulen: Sendet bitte die Lösungen bereits nach Aufgaben sortiert ein.
5. Teilnehmer, die eine richtige Lösung (nicht nur Antwortsatz) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Anderenfalls erhalten sie eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst". Nach dem Einsendetermin eingehende Lösungen werden nicht mehr bearbeitet!
6. Jeder Teilnehmer sollte einen Durchschlag seiner Lösungen anfertigen, um sie mit den jeweils zwei Hefte später erscheinenden Lösungen vergleichen zu können.

Der Jahreswettbewerb 1988/89 läuft von Heft 5/1988 bis Heft 1/1989. Zwischen dem 1. und 10. September 1989 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/88 bis 1/89 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden.

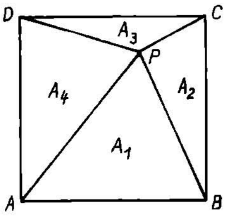
Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/88 veröffentlicht.

Wer mindestens 10 Antwortkarten (von den Wettbewerben der Hefte 5/88 bis 1/89) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein *alpha*-Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1988/89 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunde zurück). Schüler, die schon mehrere Jahre teilnehmen, senden bitte die zuletzt erhaltene Urkunde mit ein. Allein anhand dieser werden die Teilnehmerlisten aufgestellt. Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

Ma 6 ■ 2953 Ein innerer Punkt P des abgebildeten Quadrates $ABCD$ wurde mit den vier Eckpunkten des Quadrates verbunden. Es seien A_1, A_2, A_3, A_4 die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ABP$, $\triangle BCP$, $\triangle CDP$, $\triangle DAP$. Es ist nachzuweisen, daß die Beziehung $A_1 + A_3 = A_2 + A_4$ gilt! *Sch.*



Ma 6 ■ 2954 Der Nachfolger vom Zweifachen eines Produkts aus zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen lautet 1985. Um welche beide Zahlen handelt es sich?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

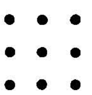
Ma 6 ■ 2955 Unter dem *Querprodukt* einer natürlichen Zahl versteht man das Produkt aus den einstelligen Zahlen, die ihren Grundziffern entsprechen. Gesucht ist die größte vierstellige natürliche Zahl, deren Querprodukt 504 beträgt.

Mathe-Klub, Gotha

Ma 6 ■ 2956 Die neun Punkte des Bildes seien Eckpunkte von vier Quadraten mit der Seitenlänge 1 cm. Ermittle die Anzahl der Geraden, die durch
a) genau drei dieser Punkte verlaufen,
b) genau zwei dieser Punkte verlaufen,
c) genau zwei dieser Punkte verlaufen, deren Abstand größer als 2 cm ist!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2957 Ermittle die kleinste sechsstellige natürliche Zahl, die aus lauter verschiedenen Grundziffern besteht und durch 18 teilbar ist! *Sch.*



Na/Te 6 ■ 434 Ein 200 m langer Zug durchfährt einen Tunnel, der eine Länge von 1,6 km hat. Wie lange dauert es, bis der Zug den Tunnel passiert hat, wenn er mit einer gleichbleibenden Geschwindigkeit von $15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ fährt?

Ma 7 ■ 2958 Sieben Pilzsammler fanden zusammen 100 Speisepilze. Keine zwei der Pilzsammler hatten dieselbe Anzahl Pilze im Korb. Kann man in jedem Fall von den Pilzsammlern beliebig vier so auswählen, daß die Gesamtzahl ihrer Pilze kleiner als 51 ist?
Die Antwort ist zu begründen. *Sch.*

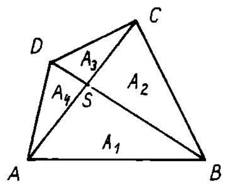
Ma 7 ■ 2959 Die Zahl 45 ist in vier Summanden zu zerlegen, für die folgendes gilt: Addiert man zum ersten Summanden 2, subtrahiert man vom zweiten Summanden 2, multipliziert man den dritten Summanden mit 2, dividiert man den vierten Summanden durch 2, so erhält man stets dasselbe Ergebnis. Wie lauten die vier Summanden?

Schülerin N. Knust, Wörmlitz

Ma 7 ■ 2960 Zeichne ein Dreieck ABC, konstruiere den Mittelpunkt M_A von $\overline{BC}$ und den Mittelpunkt M_B von $\overline{AC}$. Verlängere nun $\overline{AM_A}$ über M_A hinaus um sich selbst bis A' und $\overline{BM_B}$ über M_B hinaus um sich selbst bis B'. Weise schließlich nach, daß die Punkte A', B' und C auf einer Geraden liegen. *Sch.*

Ma 7 ■ 2961 Die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist gleich dem Produkt aus diesen drei Zahlen.
a) Welche drei Zahlen erfüllen diese Bedingung?
b) Wie viele solcher Tripel natürlicher Zahlen gibt es? *Sch.*

Ma 7 ■ 2962 In dem abgebildeten Viereck $ABCD$, dessen Diagonalen sich im Punkte S schneiden, seien A_1, A_2, A_3 bzw. A_4 die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ABS$, $\triangle BCS$, $\triangle CDS$ bzw. $\triangle DAS$. Es ist nachzuweisen, daß die Beziehung $A_1 \cdot A_3 = A_2 \cdot A_4$ gilt! *Sch.*



Na/Te 7 ■ 435 An einem Hebel hängt links vom Drehpunkt ein Körper mit der Masse 100 g in einem Abstand von 10 cm vom Drehpunkt, rechts ein Körper mit einer Masse von 20 g im Abstand von 50 cm vom Drehpunkt. Befindet sich der Hebel im Gleichgewicht? Welche Druckkraft wirkt auf das Lager im Drehpunkt?

Na/Te 7 ■ 436 Der Zugweg eines Flaschenzuges mit paralleler Seilführung ist sechsmal so groß wie der Hubweg. Kann man mit einer Kraft von 1000 N eine Last von 4800 N heben?

Ma 8 ■ 2963 Es ist zu beweisen, daß es
a) unter neun aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen keine zwei gibt, die durch 9 teilbar sind,
b) unter zehn beliebigen natürlichen Zahlen stets zwei gibt, deren Differenz durch 9 teilbar ist. *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 8 ■ 2964 Es sei A ein vorgegebener Eckpunkt eines Quadrates $ABCD$, P ein innerer Punkt der Quadratseite $\overline{BC}$ und Q ein innerer Punkt der Quadratseite $\overline{CD}$. Aus der Kenntnis der Lage der Punkte A, P und Q ist das Quadrat $ABCD$ zu konstruieren! *Sch.*

Ma 8 ■ 2965 Es sind alle Primzahlzwillinge der Form
$(2^n - 1;\ 2^n + 1)$, $n \in N$ zu finden!

A. Israel, Techn. Rechner, Karl-Marx-Stadt
Mathematikfachlehrer G. Roesch, Apolda

Ma 8 ■ 2966 Gegeben ist ein Rechteck, dessen eine Seite 10 cm länger ist als die andere. Um wieviel Quadratzentimeter unterscheidet sich der Flächeninhalt dieses Rechtecks von dem eines Quadrates mit dem gleichen Umfang?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 8 ■ 2967 Das Quadrat der natürlichen Zahl 175 kann man bilden, indem man die Ziffer 5 streicht, die übrig bleibende Zahl 17 mit ihrem Nachfolger 18 multipliziert und an das erhaltene Produkt 306 die 25 anhängt, so daß als Ergebnis die Zahl 30625 zustande kommt. Die Probe $(175^2 = 30625)$ bestätigt dieses Ergebnis. Kann man mit jeder natürlichen Zahl, die auf die Ziffer 5 endet, so verfahren?
Ein Beweis ist zu erbringen!

Sven Hartmann, Berlin

Na/Te 8 ■ 437 Eine Luftmasse nimmt bei $t = 24\,°C$ einen Raum von $V = 1000\,\text{cm}^3$ ein. Welches Volumen hat sie unter gleichem Druck bei 0 °C? (Die Luft wird als ideales Gas angenommen.)

Na/Te 8 ■ 438 Mit einem Tauchsieder (Leistung 1000 W) wird in einem Gefäß 1 kg Eis geschmolzen und anschließend das Schmelzwasser erwärmt. Welche Temperatur hat das Schmelzwasser 10 min nach dem Einschalten des Tauchsieders? Wird diese Temperatur in Wirklichkeit erreicht? Begründe!

Ma 9 ■ 2968 Anläßlich einer Familienfeier stellt Renate fest, daß ihr Bruder Rainer im Jahre x^2 genau x Jahre alt wird. Wie alt wird Rainer im Jahre 1989?

Antje Mißbach, Magdeburg

Ma 9 ■ 2969 Gegeben ist das folgende Gleichungssystem (Grundbereich: die Menge N der natürlichen Zahlen):
(1) $x + 4y = 16$
(2) $5y - 4x = 20$
(3) $3y - 4x = 12$.
Peter will dieses System mit dem sogenannten Gleichsetzungsverfahren lösen und verfährt wie folgt: Er stellt jede Gleichung nach y um und erhält
(1) $y = 4 - \frac{x}{4}$; (2) $y = 4 + \frac{4x}{5}$;
(3) $y = 4 + \frac{4x}{3}$.
Nun folgert er daraus:
$4 - \frac{x}{4} = 4 + \frac{4x}{5}$, also $-\frac{x}{4} = \frac{4x}{5}$ bzw. $-\frac{1}{4} = \frac{4}{5}$; er setzt die rechten Seiten der Gleichungen (2) und (3) gleich und erhält $\frac{1}{5} = \frac{1}{3}$, und beim Gleichsetzen von (1) und (3) ergibt sich $-\frac{1}{4} = \frac{4}{3}$. Das sind offenbar drei falsche Aussagen, und daraus folgert Peter, daß das gegebene Gleichungssystem keine Lösung in N hat. Sein Schulfreund sagt ihm aber nach einiger Zeit, daß er doch eine Lösung gefunden habe, nämlich das geordnete Paar (0; 4). Peter setzt nun in jede Gleichung für $x = 0$ und für $y = 4$ ein und findet die Lösung bestätigt. Wer hat nun recht, und wodurch kommt es zu diesen Widersprüchen?

Ing. A. Körner, Leipzig

Ma 9 ■ 2970 Bernd behauptet, daß zur Numerierung der Seiten eines Buches genau 43mal die Ziffer Null verwendet wurde. Es ist zu zeigen, daß diese Behauptung falsch ist.

Dipl.-Math. A. Fittge, Berlin

Ma 9 ■ 2971 Es ist zu beweisen, daß es unter fünf beliebigen natürlichen Zahlen stets drei Zahlen gibt, deren Summe durch 3 teilbar ist.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ■ 2972 Wir notieren eine beliebige vierstellige natürliche Zahl und addieren zu dieser noch drei weitere Zahlen, die entstehen, wenn wir jedesmal die erste Ziffer streichen und sie an die anderen Ziffern anhängen. Nun dividieren wir die erhaltene Summe durch die Quersumme einer dieser Zahlen und erhalten 1111. Es ist zu beweisen, daß man stets dieses Ergebnis erhält, wenn man in der beschriebenen Weise verfährt.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Na/Te 9 ■ 439 An einem Kilowattstundenzähler wurde in 5 min eine Zunahme von 0,03 kWh beobachtet, als ein Draht mit einem Durchmesser von 1 mm und dem spezifischen elektrischen Widerstand von $0{,}42 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$ 1000 g Wasser erwärmte. Um wieviel Kelvin wurde das Wasser erwärmt und wie lang war der Draht, wenn ein in den Stromkreis geschalteter Strommesser 3,2 A anzeigte?

Na/Te 9 ■ 440 Ein Aluminiumblock mit den Abmessungen 20 mm · 20 mm · 25 mm wird in 100 °C heißes Wasser getaucht und dann in 200 g Wasser mit der Temperatur $T = 27\,°C$ gebracht. Es ergab sich eine Mischungstemperatur von 29,1 °C. Wie groß ist die spezifische Wärmekapazität des Aluminiums?

Ma 10/12 ■ 2973 Es sind die Zahlen $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ und $z_2 = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ zu vergleichen!

W. Träger, Döbeln

Ma 10/12 ■ 2974 Es sind alle Zahlen x anzugeben, für die $z = 5(x-6) - (x-5) + x(x-4)$ Primzahl ist!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 10/12 ■ 2975 In einem rechtwinkligen Dreieck ABC (rechter Winkel $\sphericalangle ACB$) teilt die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ABC$ die gegenüberliegende Seite $\overline{AC}$ in zwei Abschnitte, die 4 cm bzw. 5 cm lang sind.
Wie lang sind die Seiten des Dreiecks ABC?

Ing. A. Körner, Leipzig

Ma 10/12 ■ 2976 Die Summe $s = a^{1988} + b^{1988} + c^{1988} + d^{1988}$ ist in ein Produkt umzuformen. Es sind a, b, c, d natürliche Zahlen, die die Gleichung $ab = cd$ erfüllen.

Birgit Breuer, PH Erfurt

Ma 10/12 ■ 2977 Es sind alle geordneten Paare $(x;y)$ natürlicher Zahlen x und y zu bestimmen, die die Ungleichung $2x + y \geqq xy$ erfüllen!

W. Träger, Döbeln

Spezialistenlager, Grethen 1988

Am Haus der Jungen Pioniere „Fritz Siemon" Markkleeberg existierten im Schuljahr 1987/88 vier Arbeitsgemeinschaften Mathematik für Schüler der Klassen 5 bis 7 und drei Arbeitsgemeinschaften Informatik mit dem Ziel, mathematisch interessierte und begabte Schüler zu fördern.
Höhepunkt des Schuljahres war für die Schüler der 5. Klassen die Teilnahme am kombinierten Kreisspezialistenlager Mathematik/Russisch vom 9. bis zum 13. Mai in der Jugendherberge Grethen bei Grimma.
Christiane, eine Teilnehmerin, berichtet euch darüber.

Im Spezialistenlager standen für Mathematik jeweils vormittags und nachmittags $1\frac{1}{2}$ Std. auf dem Tagesplan.
Am ersten Tag nach unserer Ankunft behandelten wir zunächst die Graphentheorie. Wenn man sie beherrscht, kann man auf einen Blick erkennen, ob eine Figur sich in einem Zuge zeichnen läßt. Frau Dr. Deweß von der Karl-Marx-Universität Leipzig hat uns dies einleuchtend und verständlich erklärt. Dieses Thema fanden alle sehr interessant.
Nachmittags baute jeder eine Sonnenuhr nach der Erklärung von Herrn Henke. Anschließend probierten wir sie gleich aus, sie funktionierte bei allen.
Am nächsten Tag machte uns Herr Geßner vom Wissenschaftlich-Technischen Zentrum der Land- und Nahrungsgüterwirtschaft Markkleeberg, dem Patenbetrieb des HdJP *Fritz Siemon*, mit dem Problem der Kombinatorik bekannt. Die Kombinatorik untersucht die verschiedenen Möglichkeiten der Anordnung von Elementen.
Zur Verdeutlichung stellte er uns eine interessante Aufgabe:
Könnte ein Skatspieler sämtliche möglichen Spiele im Laufe seines Lebens spielen?

Wir versuchten sie zu lösen. Lange knobelten wir daran und waren dann verblüfft über die Lösung, eine fast unvorstellbare große Anzahl von Spielmöglichkeiten, die unmöglich in einem Menschenleben zu schaffen wären.

Am Nachmittag besuchte uns die Chefredakteurin der *alpha* und erzählte uns Interessantes aus der Geschichte der Mathematik. Das war alles noch sehr unbekannt und, ich finde, doch sehr wissenswert, so zum Beispiel, daß unsere heutigen Zahlen ihren Ursprung in Indien haben.
Am letzten Tag im Spezialistenlager schafften wir uns an den verschiedensten Mathe-Knobeleien, was auch großen Spaß bereitete. Nachmittags wurde dann eine Lagerolympiade über die behandelten Themen durchgeführt.
Alle Teilnehmer fanden, daß das Spezialistenlager sehr gut organisiert war und uns Hilfe beim weiteren Lernen sein wird. Ich persönlich habe viel dazu gelernt und noch mehr Interesse für Mathematik und andere Wissensgebiete gewonnen.

Christiane Müller

Und nun noch eine Aufgabe für euch, die die Schüler im Lager lösten:
In einem Theaterstück werden von den Kindern Lutz, Klaus, Peter, Uwe und Thomas abwechselnd die Rollen Schneidermeister, Schneidergeselle, Kunde, Betrüger und Gefängniswärter gespielt.
Wieviel verschiedene Möglichkeiten der Rollenbesetzung gibt es? Überprüfe deine Aussage, indem du alle Möglichkeiten aufschreibst für den Fall, daß Lutz den Schneidermeister spielt!

Na/Te 10/12 ■ 441 Ein Körper mit der Masse 100 kg wird in einem Fahrstuhl mit der Beschleunigung von $1\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ bewegt. Wie groß ist die Gewichtskraft des Körpers bei der Aufwärts- und bei der Abwärtsbewegung? (Fallbeschleunigung $10\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$)

Na/Te 10/12 ■ 442 Eine Gewehrkugel verläßt das $s = 1{,}20$ m lange Rohr mit einer Geschwindigkeit $v = 720\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.
Wie groß ist die durch die Pulvergase erzeugte Beschleunigung, wenn man die Wirkung der Gase unveränderlich annimmt und wie lange ist das Geschoß im Rohr?

Buchtips

Chr. Posthoff/G. Reinemann
Computerschach – Schachcomputer
206 S., 65 Abb., 9 Tab.
Bestell-Nr. 763 664 7 Preis: 16,00 M
Akademie-Verlag Berlin

Eberhard Schröder
Kartenentwürfe der Erde
Kartographische Abbildungsverfahren aus mathematischer und historischer Sicht
168 S., 64 Abb.
Bestell-Nr. 666 460 3 Preis: 9,00 M
MSB, Nr. 128 (Für Schüler ab Klasse 9)

S. Lang, New Haven
Faszination Mathematik
Ein Wissenschaftler stellt sich der Öffentlichkeit
Etwa 168 S., 90 Abb.
Bestell-Nr. 666 457 4 Preis: etwa 12,50 M
(Für Schüler ab Klasse 10)

Beide Titel: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig

Systematisches Probieren mit Computerhilfe

Die Verwendbarkeit programmierbarer Kleincomputer eröffnet die Möglichkeit der Realisierung *algorithmischer* Lösungsmethoden.
Algorithmen sind *uralter* Bestand des Wissens der Menschen, deren Bedeutung als Problemlösungsvorschriften mit der unmittelbaren Ausführbarkeit durch geeignete Maschinen (Computer) heute stark im Wachsen begriffen ist.
Doch wollen wir es gleich vorwegnehmen: Wunder können selbst Computer nicht vollbringen! Auch weitere Entwicklungen informationsverarbeitender Technik (IVT) werden Maschinen hervorbringen, die vom menschlichen Nutzer mehr abverlangen als irgendeine Geste, die dem Computer den Auftrag andeuten soll, den er i.f. zur vollen Zufriedenheit des Nutzers zu erfüllen hat. Moderne IVT kann – bei richtiger Anwendung – intelligenzverstärkend wirken, intelligenzgebärend wirkt sie mit Sicherheit nicht!
Was es nun heißt, ein System bestehend aus Hard- und Software richtig anzuwenden, kann an vielen Beispielen verdeutlicht werden. Ganz besonders eignen sich solche Aufgabenstellungen, zu deren Bearbeitung mehrere verschiedene Lösungsideen existieren. Oftmals werden analytische Methoden verwendet, die solche Verfahren, die auf ein sinnvolles Probieren hinauslaufen, völlig in den Schatten stellen. Die Ursache für diese Situation liegt auf der Hand: Bisher verbot sich umfangreiches Probieren von selbst, denn die praktische Ausführung kann i.a. nicht vom Menschen realisiert bzw. fehlerfrei beherrscht werden. Dies ist schon interessant, man weiß ganz genau wie die Aufgabe gelöst wird (z. B. Probieralgorithmus) und kann es ohne einen Rechensklaven nicht tun.
Im vorliegenden Beispiel vereinfacht sich der Lösungsweg gegenüber dem analytischen beachtlich, so daß sehr viele Schüler in der Lage sein werden, diesen ohne weitere Erläuterungen nachzuvollziehen.
Die Grundidee wurde bereits dargestellt: Systematisches Probieren in einem abgeschlossenen Intervall. Die *Begrenztheit* des zu betrachtenden Intervalls ist immer dann zu sichern, wenn *alle* Lösungen gesucht sind, denn es lassen sich nur *endlich* viele Zahlen durchmustern.

▲1▲ Eine vierstellige Zahl und die (ebenfalls vierstellige) Zahl, die entsteht, wenn man die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge schreibt, sind beide durch 78 teilbar. Wie heißen diese Zahlen?

```
10  FOR I=1000 TO 9999
20      IF I/78 ⟨ ⟩ INT (I/78) THEN 90
30      A$=MID$(STR$(I),2): B$=" "
40      FOR K=4 TO 1 STEP -1
50          B$=B$+MID$ (A$,K,1)
60      NEXT K
70      K=VAL (B$)
80      IF K/78 = INT (K/78)
        THEN PRINT I
90  NEXT I
```

Nach etwa 3 Minuten kann das Resultat abgelesen werden: 2496, 6006, 6942 und 8580 sind zunächst die Programmausgaben. Die Zahl 8580 liefert bei Umkehrung der Ziffernfolge 858 – eine dreistellige Zahl – und muß daher ausgesondert werden. Folglich sind 2496, 6006 (ein Palindrom!) und 6942 die Lösungen der Aufgabe.

▲2▲ Gesucht sind alle dreistelligen Zahlen *abc*, mit geraden Zahlen *a*, *b* und *c*, die teilbar sind durch das Produkt a∗b∗c! (Wie viele solcher Zahlen müssen vom Programm untersucht werden?)
Da es für *b*, *c* in $z = abc$ (*a*, *b*, *c* sind die Ziffern von *z* – nicht das Produkt ist gemeint!) genau 5 Möglichkeiten gibt (0, 2, 4, 6, 8) und *a* einer der Zahlen 2, 4, 6 oder 8 entspricht, müssen (unter Beachtung der Reihenfolge) 5∗5∗4 = 100 Zahlen untersucht werden. Diese Überlegung wollen wir bestätigen, indem die Testzyklen mitgezählt werden.

```
  4  N=0
 10  FOR I=2 TO 8 STEP 2
 20    FOR K=0 TO 8 STEP 2
 30      FOR L=0 TO 8 STEP 2
 40        N=N+1
 50        S=100*I+10*K+L
 60        Q=I*K*L
 70        IF Q=0 THEN 90
 80        IF S/Q = INT (S/Q)
           THEN PRINT S,
 90      NEXT L
100    NEXT K
110  NEXT I
120  PRINT
130  PRINT N
```

Innerhalb weniger Sekunden werden die Lösungen 224 und 624 ermittelt. N=100 wird bestätigt.

▲3▲ Eine dreistellige Zahl mit verschiedenen Ziffern ist gleich einem Fünftel der Zahl, die man erhält, wenn man die Summe aus den dreistelligen Zahlen bildet, die durch Umstellung der Ziffern der Ausgangszahl entstehen.
Wie heißt die Zahl?
Bevor wir zum Computer greifen ist hier etwas mehr Vorbereitung nötig. Außerdem können ausreichende Vorüberlegungen unter Umständen den Programmieraufwand senken bzw. effizientere Programme ermöglichen.
Die Ziffern der Ausgangszahl *z* seien *abc*, also $z = 100a + 10b + c$. Dann ist die Zahl z' gesucht, für die gilt z'=0.2∗s mit
$s = 100(2(b + c) + a) + 10(2(a + c) + b) + 2(a + b) + c$.
Außerdem sind natürlich a⟨ ⟩0, b⟨ ⟩0, c⟨ ⟩0 sowie a⟨ ⟩b, a⟨ ⟩c und b⟨ ⟩c gefordert.

```
 3  DEF FN F(X)=VAL (MID$(A$,X,1))
10  FOR I=100 TO 999
20      A$=MID$(STR$(I),2)
30      A=FN  F(1):  B=FN  F  (2):
        C=FN F(3)
40      IF A=B OR A=C OR B=C
        THEN 80
50      IF B=0 OR C=0 THEN 80
60      S=100*(2*(B+C)+A)+10*
        (2*(A+C)+C)+2*(A+B)+C
70      IF I=S/5 THEN PRINT I
80  NEXT I
```

Wie man sieht, gibt es *mehrere* Zahlen, die die genannten Forderungen erfüllen: 481, 518, 592 und 629.

Damit sind drei Beispielaufgaben gelöst. Wir mußten Grundwissen aus der Mathematik und einige Programmierkenntnisse verwenden. Dann brauchten wir auf die Ergebnisse nicht lange zu warten.
Es ging nicht darum zu zeigen, daß die Verwendung von Computern bewährte Lösungsmethoden verdrängen.
Vielmehr wollten wir demonstrieren, daß die hier in Beispielen vorgestellte Klasse von Aufgaben zweckmäßig algorithmisch zu lösen ist.
Insofern ist gerade solchen algorithmischen Verfahren und vor allem Denkweisen künftig mehr Aufmerksamkeit zu schenken.
Man beachte dabei aber stets, daß der „Griff" zum Computer erst dann erfolgt, wenn die Aufgabe eigentlich schon gelöst ist – nur der konkrete Wert derselben fehlt.

Chr. Wagenknecht

Computer hilft beim Knobeln

Die 30 Preisträger eines Schülerwettbewerbs sollen mit Büchern prämiert werden. Es stehen Bücher zu 30 Mark, 24 Mark bzw. 18 Mark zur Verfügung. Jedes Buch soll vertreten sein.
Welche Möglichkeiten der Zusammenstellung gibt es, wenn 600 Mark zur Verfügung stehen? *Mathematikolympiade 1965, Klasse 10, DDR-Olympiade*

Programm zur Lösung:

```
10  FOR A=1 TO 28
12  FOR B=1 TO 28
14  FOR C=1 TO 28
16  IF 30*A+24*B+18*C=600
    THEN PRINT A;B;C
18  NEXT C, B, A
```

In dieser Form benötigt der Computer etwa 9 Minuten, um die vier Fälle zu ermitteln. Wenn man beachtet, daß aus
A+B+C=30 und
30*A+24*B+18*C=600 folgt:
B=2*(5−A), dann erkennt man, daß A höchstens 4 sein kann.
Wird Zeile 10 dahingehend geändert, braucht der Computer nur noch 1,3 Minuten! Man erkennt, daß es auf eine sinnvolle Programmierung ankommt.

H. Pätzold, Waren (Müritz)

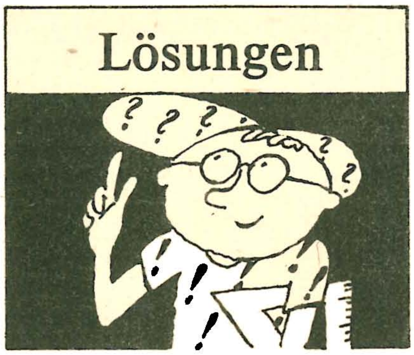
Elektronik macht's möglich

Dem französischen Weber *Joseph-Maria Jacquard* war es gelungen, mit einem auf Lochkarten eingestanzten Programm Webstühle automatisch zu steuern und damit Fäden zu den verschiedensten Mustern schnell und fehlerfrei zu verknüpfen. Als der englische Mathematiker und Ingenieur *Charles Babbage* das erfuhr, sann er unablässig darüber nach, wie auf ähnliche Art mit sehr vielen Zahlen verfahren werden könnte, um beispielsweise logarithmische, statistische und astronomische Werte, deren Berechnung größte Mühe bereitete, rationell und exakt maschinell zu ermitteln. *Babbage* entwarf 1832 eine Rechenmaschine, an der er – seine Kräfte und Gelder verausgabend – bis an sein Lebensende baute, ohne daß sie je funktionierte. Seine Mitbürger schimpften ihn „crackpot" (Narr). Und tatsächlich, Jahrzehnte nach *Babbages* Tod wurde – beim Versuch, seine Maschine zu vollenden – nachgewiesen, daß sich sein Plan nicht verwirklichen ließ, jedenfalls nicht mit der Technik, die ihm zur damaligen Zeit zur Verfügung stand, den Zahnrädern, Schalthebeln und der sonstigen, noch relativ einfachen Mechanik.
Bemerkenswert ist aber, daß *Babbages* Rechenautomat aus drei Teilen bestand, die er store (Vorratskammer), mill (Rechenmühle) und control (Arbeitsaufsicht) nannte. Heute sagt man Speicher, Rechenwerk und Steuerwerk und meint damit den prinzipiellen Aufbau eines jeden Computers der Welt. Der „Narr" von Cambridge war es, der diese geniale Idee hatte.

aus: Lingmann/Schmiedel – Anekdoten, Episoden, Lebensweisheiten – von Naturwissenschaftlern und Technikern
VEB Fachbuchverlag Leipzig

Zwei Forscher sind mit einem Ballon gefahren. Durch einen gewaltigen Sturm wurden sie weit abgetrieben. Erst nach Stunden landeten sie in einer unbekannten Siedlung und fragten, ohne die Gondel zu verlassen, einen Passanten:
„Sagen Sie bitte, wo befinden wir uns?"
„Sie befinden sich in der Gondel eines Ballons", antwortete dieser trocken.
„Das kann nur ein Programmierer sein", bemerkte einer der Ballonpiloten zum anderen, „der eine so präzise und gleichzeitig für uns so wertlose Antwort gibt."

A. Halameisär, Moskau



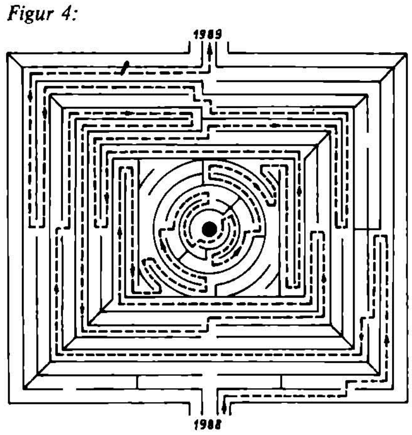
Lösungen zu: Zum Jahreswechsel

Figur 1:
Es gibt $3003 = \frac{14!}{8!6!}$ Lesemöglichkeiten.

Figur 2: Pythagoras (von Samos, 580 bis 496 v. u. Z.), Archimedes (von Syrakus, um 287 bis 212 v. u. Z.), Fermat (Pierre, 1601 bis 1665), Pascal (Blaise, 1623 bis 1662), Euler (Leonhard, 1707 bis 1783), Gauss (Carl Friedrich, 1777 bis 1855), Weierstraß (Karl, 1815 bis 1897), Dedekind (Richard, 1831 bis 1916), Cantor (Georg, 1845 bis 1918), Hilbert (David, 1862 bis 1943).

Figur 3: Weg mit größtmöglicher Zahlensumme (= 285):
1 + 2 + 3 + 7 + 8 + 9 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 15 + 16 + 17 + 18 + 21 + 20 + 19 + 22 + 23 + 24.
Weg mit kleinstmöglicher Zahlensumme (= 98):
1 + 6 + 11 + 15 + 19 + 22 + 24.
Weg mit Zahlensumme 100 (einziger Weg):
1 + 2 + 6 + 11 + 15 + 19 + 22 + 24.
Zwei Wege mit der Zahlensumme 200 sind z. B.: 1 + 2 + 3 + 7 + 6 + 5 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 18 + 17 + 16 + 19 + 22 + 24;
1 + 6 + 5 + 10 + 11 + 12 + 17 + 16 + 15 + 19 + 20 + 21 + 23 + 24.

Figur 4:



Figur 5:
Eindeutige Lösung: 991 + 997 = 1988

Figur 6:
Eindeutige Lösung: 991 + 998 = 1989

Figur 7:
Es gibt $128 = 2^7$ Lesemöglichkeiten.

Figur 8: Allen alphalesern ein frohes Weihnachtsfest und ein gesundes glueckliches neues Jahr!

Lösungen zur Schachecke

1) 1. Lg8 (droht 2. Dh7 matt) T:g8 2. Kf7 T:g6 3. f:g6 h5 (Oder 3. ... c1D 4. g7+ Kh7 5. g8D matt) 4. g7+ Kh7 5. g8D+ Kh6 6. Dg7/Dh8 matt.

2) 1. b4 L:b4 (Erzwungen, da sonst 2. K:c4) 2. Sc2 und Schwarz verliert mit dem 3. Zug von Weiß den Lb4 oder den Sc4.

Lösungen zu:
Die Tasten $\boxed{\text{sin}}$, $\boxed{\text{cos}}$, $\boxed{\text{tan}}$

▲1▲ a) $-90° \leqq x \leqq 90°$;
b) $0° \leqq x \leqq 180°$; c) $-90° \leqq x \leqq 90°$

▲2▲ a) Der zuletzt angezeigte Wert ist das Bogenmaß von 45° (0,785 39).
b) Der zuletzt angezeigte Wert ist das dezimal geteilte Altgrad zu $\frac{\pi}{4}$ (45°).

▲3▲

x	0°	30°	90°	150°	180°
$\sin x$	0	0,5	1	0,5	0
x	210°	270°	330°	360°	
$\sin x$	−0,5	−1	−0,5	0	

▲4▲ $\sin x = 1$

▲5▲ $\sin x = 0$

▲6▲ $x_1 = 32{,}683\,639$; $x_2 = 147{,}316\,36$

▲7▲

x	x $\boxed{\text{sin}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{sin}}$
0	0
12	12
30	30
80	80/80.000002/
100	80/80.000002/
120	60
140	40
145	35
150	30
170	10
175	5/5.0000001/

$\sin x = \sin(180° - x)$.

▲8▲ $x_1 = 71{,}337\,075°$;
$x_2 = 360° - x_1 = 288{,}662\,925°$

▲9▲ $\cos(180° + x) = \cos(180° - x)$

▲10▲ a) 14,477 512°; 165,522 49°
b) 44,427 004°; 135,573° c) 30°; 150°
d) 120°; 240° e) 150°; 210°

▲11▲

a)

Tastenfolge	Anzeige
60	60.
$\boxed{\text{cos}}$	0.5
$\boxed{\text{F}}$	0.5
$\boxed{\text{sin}}$	30.

b)

Tastenfolge	Anzeige
50	50.
$\boxed{\text{cos}}$	6.4278-01
$\boxed{\text{F}}$	6.4278-01
$\boxed{\text{sin}}$	40.

▲12▲
a) 20; b) 60; c) 60; d) 70;
$\cos x = \sin(90° - x)$, $\sin x = \cos(90° - x)$

▲13▲ a) 60°; b) 20°; c) 45°

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Finde die Gesetzmäßigkeit
Im nachfolgenden Diagramm ordneten wir ganze Zahlen größer als 1 in fünf Spalten an. Untersuche die Struktur und finde heraus, in welcher Spalte (von links nach rechts) die Zahl 100 vorkommen wird.
Lösung: In der 2. und 4. Spalte stehen gerade Zahlen, durch 8 teilbare kommen in der 2. Spalte und durch 4, aber nicht durch 8 teilbare Zahlen in der 4. Spalte vor. Da 100 durch 4, aber nicht durch 8 teilbar ist, gehört sie in die 4. Spalte.

▲2▲ Bestimme x und y so, damit die Zahl $\overline{4x5y}$ durch 6 teilbar ist!
Lösung: Die vierstellige Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist. Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn sie gerade ist, d. h. $y = \{0; 2; 4; 6; 8\}$. Damit die Zahl auch durch 3 teilbar ist, muß die Summe von x und y durch 3 teilbar sein.
Es gibt 17 Zahlen:

4050	4152	4254	4056	4158
4350	4452	4554	4356	4458
4650	4752.	4854	4656	4758
4950			4956	

▲3▲ Die Leichtigkeit der Mathematik
John v. Neumann, einer der bedeutendsten Mathematiker unseres Jahrhunderts, sagte Ende der vierziger Jahre bei einem Vortrag über die zukünftigen elektronischen Rechenmaschinen, daß die Mathematik nur ein sehr kleiner und sehr einfacher Teil des Lebens ist. Als die Zuschauer daraufhin in Bewegung gerieten, fügte er hinzu: „Wenn die Leute nicht glauben, daß die Mathematik einfach ist, dann nur, weil sie nicht begreifen, wie kompliziert das Leben ist."

▲4▲ Man schmilzt 82 kg Bronze und 18 kg Silber. Berechne die Dichte der Legierung, wenn die Dichte von Bronze $8{,}5\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ und von Silber $10{,}5\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ beträgt!
Lösung:
Berechnung des Volumens der Legierung:

$$V = \frac{m}{\varrho}$$

Bronze: $V = \frac{82\text{ kg}}{8{,}5\text{ kg dm}^{-3}} = 9{,}65\text{ dm}^3$

Silber: $V = \frac{18\text{ kg}}{10{,}5\text{ kg dm}^{-3}} = 1{,}71\text{ dm}^3$

Dichte der Legierung:

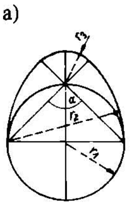
$$\varrho = \frac{m}{V};\quad \varrho = \frac{100\text{ kg}}{11{,}36\text{ dm}^3} = 8{,}8\text{ kg dm}^{-3}$$

Die Dichte der Legierung beträgt etwa $8{,}8\text{ kg dm}^{-3}$.

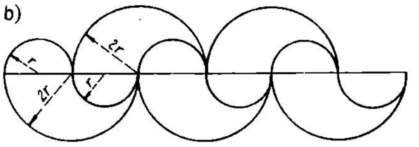
Lösungen zu: Wie man Eier, Brezeln, Herzen und andere Figuren mit Zirkel und Lineal konstruiert

▲1▲

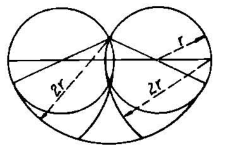
Bild 8 a)



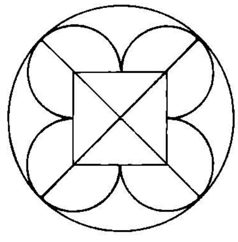
b)



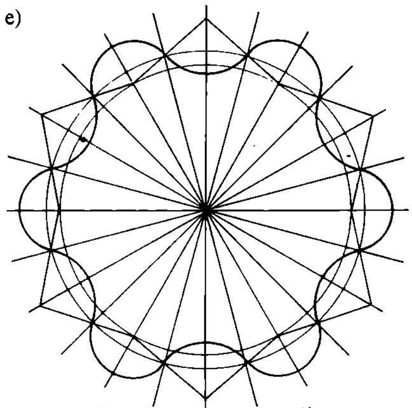
c)



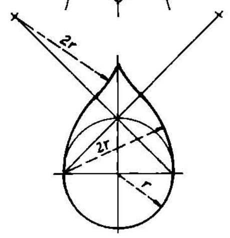
d)



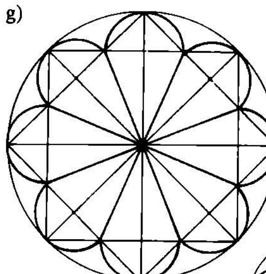
e)



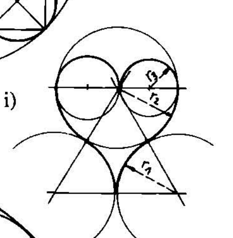
f)



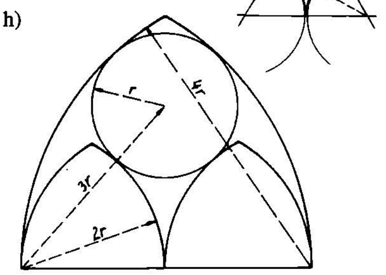
g)



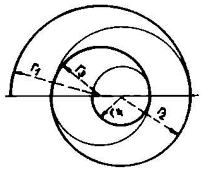
i)



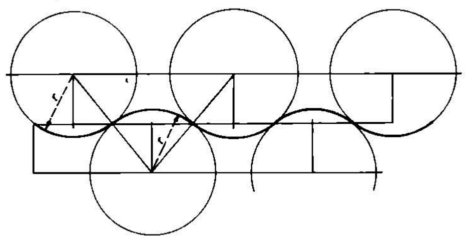
h)



k)



l)



▲2▲ a) geg.: r_1
ges.: r_2, r_3; $r_1 : r_2 : r_3$
Lösung: 1. $r_2 = 2r_1$ (siehe Bild 8 a)
2. $r_3 = r_2 - \sqrt{2r_1^2}$
(Bild 8 a; Satz des Pythagoras)
$r_3 = 2r_1 - r_1\sqrt{2}$
$r_3 = r_1(2 - \sqrt{2})$
3. $r_1 : r_2 : r_3 = 1 : 2 : (2 - \sqrt{2})$
(wegen 1. und 2.)
b) Die Figur besteht aus:
- einem Halbkreis mit $r = r_1$,
- zwei Achtelkreisen mit $r = r_2 = 2 \cdot r_1$, (Achtelkreise, da die zu diesen Bögen gehörenden Zentriwinkel jeweils 45° groß sind – Basiswinkel im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck);
- einem Viertelkreis mit $r = r_3 = r_1(2 - \sqrt{2})$. (Viertelkreis, da der zu diesem Bogen gehörende Zentriwinkel ein rechter Winkel ist – Scheitelwinkel; Satz des Thales)

$$U = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r_1 + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 2\pi(2r_1) + \frac{1}{4} \cdot 2\pi r_1(2 - \sqrt{2})$$

$$U = \pi r_1 + \pi r_1 + \pi r_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi r_1$$

$$U = \left(3 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cdot \pi \cdot r_1$$

▲3▲ Wir orientieren uns an dem Bild 8 d.
a) Radius der kleinen Kreise: r (gegeben)
→ Länge der Quadratseite: $2 \cdot r$ (vgl. Bild 8 d)
→ Länge der Quadratdiagonalen: $\sqrt{4r^2 + 4r^2}$ (Satz des Pythagoras) $= 2r \cdot \sqrt{2}$
→ Durchmesser des großen Kreises: $2r \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot r$ (Bild 8 d)
→ Radius des großen Kreises: $r \cdot \sqrt{2} + r = r(\sqrt{2} + 1)$
b) Es sei A – Inhalt der grauen Fläche (gesucht), A_1 – Flächeninhalt des großen Kreises, A_2 – Flächeninhalt eines kleinen Kreises, A_3 – Flächeninhalt des Quadrates.

$$A = A_1 - \left(A_3 + 4 \cdot \frac{3}{4} A_2\right)$$
$$= \pi \cdot (r\sqrt{2} + r)^2 - (2r)^2 - 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \pi r^2$$
$$= \pi r^2 \cdot (2 + 2\sqrt{2} + 1) - 4r^2 - 3\pi r^2$$
$$= r^2(3\pi + 2\sqrt{2}\,\pi - 4 - 3\pi)$$
$$A = r^2(2\sqrt{2}\,\pi - 4)$$

Lösung zu:
Welche Zahl ist größer?

Ein möglicher Weg: $17^{100} > 16^{100}$
$= 2^{400} = (2^5)^{80} = 32^{80} > 31^{80}$

Lösungen zu:
Regsechs und Gleisechs

▲1▲ Das regelmäßige Sechseck bei *Regsechs* besitze den Umkreisradius 1. Die gleichseitigen Dreiecke haben dann die Seitenlängen 1; 1; $\sqrt{3}$ und die Winkel 30°; 30°; 120°. Die beiden rechtwinkligen Dreiecke haben die Seitenlängen 3; $\frac{3}{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, die Winkel betragen 30°; 60° und 90°.
Bei *Gleisechs* gehe man von einem Quadrat der Seitenlänge 1 aus. Die rechtwinkligen Dreiecke AMC und BDM besitzen die Seitenlängen 1; $\frac{1}{2}$ und $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
Aus dem Satz des Pythagoras folgt
$\overline{CS} = \overline{DS} = \overline{MS} = \frac{5}{8}$.

▲2▲ In dem Sechseck *Gleisechs* betragen die Innenwinkel 4δ bzw. $180° - 2\delta$, d.h. etwa 106,3° bzw. 126,9°,
denn aus $\cos\delta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ und $\sin\mu = \frac{2}{\sqrt{5}}$
erhält man mit Hilfe des Taschenrechners SR 1
$\delta = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$ und $\mu = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$
also $\delta = 26{,}565\,051°$ und $\mu = 63{,}434\,949°$.
Der Punkt S im Bild 5 ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf $\overline{DM}$ und $\overline{CM}$ und $\overline{CD}$.

Lösungen zu: Knobeleien (nicht nur) für Klasse 8

▲1▲ a) 1, 8, 3, 2, 7, 4, 6, 5 (eine der möglichen Anordnungen)
b) Nein. Weil die Summe $1 + 2 + \ldots + 8 = 36$ beträgt, jede Ecke als linker, mittlerer oder rechter Summand auftritt ($36 \cdot 3 = 108$), damit im Mittel die Summe dreier benachbarter Zahlen gleich $108 : 8 = 13{,}5$ ist, also die nächstgrößere ganze Zahl 14 für *alle* Tripel nicht erreichbar ist.

▲2▲ Alle Trapeze in der folgenden Teilung sind flächengleich, weil sie kongruente Höhen haben und die Diagonale bzw. die Seiten in vier kongruente Strecken geteilt wurden.

▲3▲ Die Fußpunkte des Lotes von Q auf AB bzw. CD seien F_1 bzw. F_2. Laut Strahlensatz gilt
$\overline{AF_1} : \overline{F_1B} = \overline{AQ} : \overline{QC} = 4 : 1$
(Strahlenabschnitte) und
$\overline{QF_1} : \overline{CB} = 4 : 5$ (Parallelenabschnitte).
Damit folgt
$\overline{BF_1} = \frac{1}{5} \cdot \overline{AB}$, $\overline{PF_1} = \frac{1}{5} \cdot \overline{AB}$ sowie
$\overline{QF_1} = \frac{4}{5} \cdot \overline{AB}$ und $\overline{QF_2} = \frac{1}{5} \cdot \overline{AB}$.
Analog gilt $\overline{F_2D} = \frac{4}{5} \cdot \overline{AB}$.
Nach *sws* sind die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle QF_1P$ und $\triangle QF_2D$ kongruent. Darüber hinaus gilt
$\sphericalangle DQP = 180° - \sphericalangle DQF_2 - \sphericalangle PQF_1 = 90°$,
und somit ist $\sphericalangle PQD$ gleichschenklig-rechtwinklig:
$\sphericalangle DQP = 90°$, $\sphericalangle PDQ = \sphericalangle QPD = 45°$.

▲4▲ Sei n die gewisse Zahl, x bzw. y die Zahl der Steine auf dem ersten bzw. zweiten Häufchen.
Dann gelten die Gleichungen
$$3(x - 100) = y + 100 \qquad (1)$$
$$x + n = 7(y - n). \qquad (2)$$
Wird (2) nach x umgestellt und in (1) eingesetzt, ergibt sich $y = 20 + \frac{6}{5}n$.
Da y eine ganze Zahl sein muß, für $n = 0$ aber nicht von Umlegen gesprochen werden kann, ist $n \geqq 5$. Auf dem ersten Häufchen liegen damit 142, auf dem zweiten 26 Steine.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Weihnachtliche Kryptarithmetik

a) $3250 + 3250 = 6500$;
$1750 + 1750 = 3500$;
$4250 + 4250 = 8500$;
$4750 + 4750 = 9500$
b) $9387 + 9387 = 18\,774$
c) $1467 + 1567 + 1467 + 1567 + 28\,993 = 35\,061$

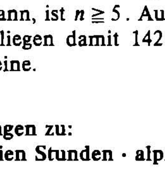
alpha-heiter – ernst

1. Abbildung, 2. Löwenheim,
3. Permutation, 4. halbieren, 5. Astroide,
6. Hyperbel, 7. Einstein,
8. Inversion, 9. Teilbarkeit,
10. Eigenwert, 11. Restglied
Meinung: alpha-heiter – interessant

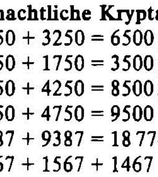
Würfellogik

1. Würfel c; 2. Würfel a, b und c

Was alles in einem Dreieck steckt



Figur A



Figur B

Knobeleien am Weihnachtsbaum

g r o b
b o r g
o b g r
r g b o

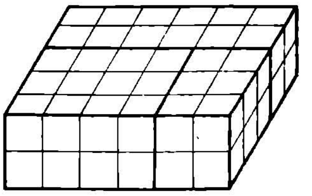
Löse die Verbindung

Dieser Aufforderung unsererseits kam Stefan Kage, zum Redaktionsschluß noch Schüler der 12. Klasse der EOS *Karl Marx*, Leipzig nach. Wenn ihr nicht zum Ziel kommt, schreibt an uns.
Wir senden euch dann die Lösung, deren Veröffentlichung in *alpha* zuviel Platz einnehmen würde.

1988 – 1989

$19\,881\,989 = 337 \cdot 58\,997$

Eine schöne Bescherung



Lösung zu:
Spezialistenlager Grethen 1988

Es gibt 120 Möglichkeiten.

Lösung zu: Titelblatt Heft 5/88

1. Zeile: 1602
2. Zeile: $127 + 62 = 90 + 99$
3. Zeile: 52 94
4. Zeile: 161
5. Zeile 32 18

Lösungen zu: Binäres Zahlenraten

▲1▲ Es müssen sieben Zahlenkarten verwendet werden (A, B, C, D, E, F, G).
Karte A wird um folgende Zahlen ergänzt:
33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99.
Karte B wird um folgende Zahlen ergänzt:
34, 35, 38, 39, 42, 43, 46, 47, 50, 51, 54, 55, 58, 59, 62, 63, 66, 67, 70, 71, 74, 75, 78, 79, 82, 83, 86, 87, 90, 91, 94, 95, 98, 99.
Karte C wird um folgende Zahlen ergänzt:
36, 37, 38, 39, 44, 45, 46, 47, 52, 53, 54, 55, 60, 61, 62, 63, 68, 69, 70, 71, 76, 77, 78, 79, 84, 85, 86, 87, 92, 93, 94, 95, 100.
Karte D wird um folgende Zahlen ergänzt:
40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95.
Karte E wird um folgende Zahlen ergänzt:
48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95.
Die neu hinzugekommene Karte F enthält die Zahlen
32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 96, 97, 98, 99, 100.
Die neu hinzugekommene Karte G enthält die Zahlen
64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.

▲2▲

A	1	27	21	15	B	2	27	22	15
	23	13	3	25		23	14	3	26
	11	17	31	5		11	18	31	6
	29	7	9	19		30	7	10	19
C	4	29	22	15	D	8	29	26	15
	23	14	5	28		27	14	9	28
	13	20	31	6		13	24	31	10
	30	7	12	21		30	11	12	25
E	16	29	26	23					
	27	22	17	28					
	21	24	31	18					
	30	19	20	25					

XXIX. Internationale Mathematikolympiade

Canberra, 9. bis 21. Juli 1988

Aufgaben

1. Man betrachte in einer Ebene zwei Kreise mit den Radien R und r ($R > r$) mit dem gleichen Mittelpunkt. Es sei P ein fester Punkt auf dem kleineren Kreis und B ein variabler Punkt auf dem größeren Kreis. Die Gerade BP schneide den größeren Kreis ein zweites Mal in C. Die Senkrechte l auf BP in P schneide den kleineren Kreis erneut in A (falls l eine Tangente in P ist, dann ist $A = P$).
(I) Man bestimme die Menge aller Werte von
$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2$.
(II) Man bestimme den geometrischen Ort aller Mittelpunkte von AB.
(Kreis ≡ Kreislinie) *(Luxemburg)*

2. Sei n eine positive ganze Zahl; es seien $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ Teilmengen einer Menge B und es gelte:
a) Jede Menge A_i enthält genau $2n$ Elemente.
b) Für alle Indizes i und j ($1 \leqq i < j \leqq 2n + 1$) enthält die Menge $A_i \cap A_j$ genau ein Element.
c) Jedes Element von B gehört zu mindestens zwei der Mengen A_i. Für welche Werte n kann man für gegebene Menge B und ihre Teilmengen $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ mit den Eigenschaften a), b) und c) jedem Element von B eine der Zahlen 0 oder 1 so zuordnen, daß genau n Elementen jeder Menge A_i die Zahl 0 zugeordnet wird? *(ČSSR)*

3. Es sei f eine Funktion mit dem Definitionsbereich $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
Es gelte:
$$f(1) = 1,\ f(3) = 3,$$
und für alle $n \in N$
$$f(2n) = f(n),$$
$$f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n),$$
$$f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n).$$
Man bestimme die Anzahl aller Elemente $n \in N$ mit $n \leqq 1988$ und $f(n) = n$. *(Großbritannien)*

4. Man zeige, daß die Menge aller reellen Zahlen x, die der Ungleichung
$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqq \frac{5}{4}$$
genügen, eine Vereinigung von disjunkten Intervallen ist, wobei die Summe aller Intervallängen 1988 beträgt. *(Irland)*

5. Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse BC; der Fußpunkt der Höhe auf BC sei D. Die Verbindungsgerade der Inkreismittelpunkte der Dreiecke ABD und ACD schneidet die Seiten AB, AC in den Punkten K bzw. L. Es seien S und T der Flächeninhalt von ABC bzw. AKL.
Zeige, daß $S \geqq 2T$ ist. *(Griechenland)*

6. Es seien a und b positive ganze Zahlen, so daß $ab + 1$ ein Teiler von $a^2 + b^2$ ist.
Man zeige, daß $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ das Quadrat einer ganzen Zahl ist. *(BRD)*

Arbeitszeit: zweimal 4,5 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Unsere Mannschaft der IMO 88:
Prof. Dr. Burosch, Delegationsleiter
Dr. U. Quasthoff, stellv. Delegationsleiter

Andreas Siebert	1. Preis, 33 Punkte
Martin Welk	2. Preis, 31 Punkte
Dirk Liebscher	2. Preis, 28 Punkte
Gerard Zenker	2. Preis, 27 Punkte
Frank Göring	2. Preis, 26 Punkte

Inoffizielle Länderwertung – Preisverteilung

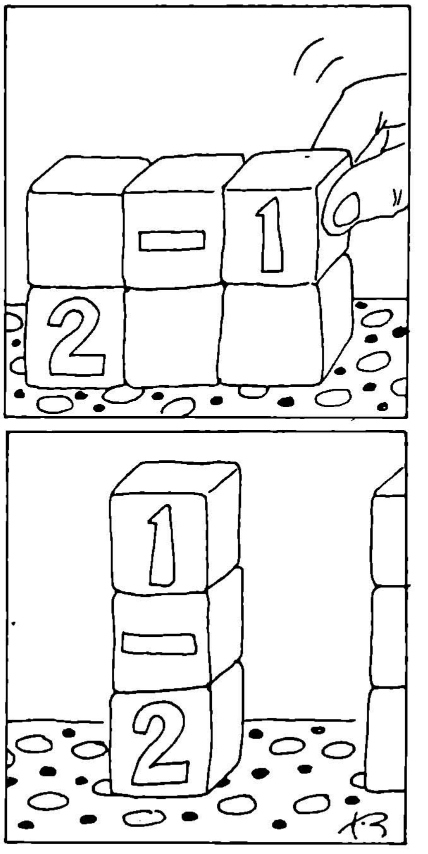
Platz	Land	1.	2.	3.
1.	UdSSR	4	2	-
2.	SR Rumänien	2	4	-
3.	VR China	2	4	-
4.	BRD	1	4	1
5.	DDR (5 Schüler)	1	4	-
6.	SR Vietnam	1	4	-
7.	USA	-	5	1
8.	VR Bulgarien	-	4	2
9.	Frankreich	1	1	3
10.	Luxemburg (3 Schüler)	-	1	2
11.	Kanada	1	1	2
12.	Großbritannien	-	3	2
13.	ČSSR	-	2	2
14.	Schweden	1	-	4
15.	Israel	1	-	4
16.	Österreich	1	1	1
17.	Ungarische VR	-	2	2
⋮				

Jede Mannschaft bestand aus 6 Schülern bzw. der in Klammern angegebenen Anzahl von Schülern.

1. Preis für $\geqq 32$ und $\leqq 42$ Punkte
2. Preis für $\geqq 23$ und $\leqq 31$ Punkte
3. Preis für $\geqq 14$ und $\leqq 22$ Punkte.

Es nahmen 268 Schüler aus 49 Ländern teil, 9 weitere Länder waren durch offizielle Beobachter vertreten.

Die Lösungen der Aufgaben senden wir euch auf Wunsch zu. Legt bitte einen frankierten Rückumschlag bei. *Alphons*



aus: Funktio, Helsinki

Buchtip

J. Lehmann
Mathematik – von der Pflicht zur Kür
148 S. mit 138 Abb.
Bestell-Nr. 666 253 6 Preis: 12,00 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig

In 2. Auflage (1. Aufl. 1987) erscheint der 130. Band der „Mathematischen Schülerbücherei" mit einhundert Aufgaben der schriftlichen Abschlußprüfung Klasse 10 im Fach Mathematik. Gegliedert sind die zehn Kapitel des „Pflicht"-Teils nach inhaltlichen Schwerpunkten, und ergänzt werden sie jeweils durch die „Kür": einhundertfünfzig Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades, unterhaltsame Knobeleien und ausgewählte historische Mathematikaufgaben. Lösungen und Lösungshinweise vervollständigen das Buch. Die 3. Auflage ist 1989 geplant.

Binäres Zahlen„raten“

Wohl jeder jugendliche „Möchtegern-Zauberer“ und an Unterhaltungsmathematik Interessierte ist ihnen schon begegnet: den Zahlenkarten, mit deren Hilfe sich eine gedachte natürliche Zahl (z. B. das Alter einer Person) „erraten“ läßt.

Ist diese Zahl nicht größer als 31, so benötigt man zu diesem Kunststück fünf Zahlenkarten (A, B, C, D, E), die wie abgebildet beschriftet werden.

A:	B:	C:	D:	E:
1	2	4	8	16
3	3	5	9	17
5	6	6	10	18
7	7	7	11	19
9	10	12	12	20
11	11	13	13	21
13	14	14	14	22
15	15	15	15	23
17	18	20	24	24
19	19	21	25	25
21	22	22	26	26
23	23	23	27	27
25	26	28	28	28
27	27	29	29	29
29	30	30	30	30
31	31	31	31	31

Die Vorführung spielt sich dann etwa so ab: Ein williger Zuschauer wird aufgefordert, an eine beliebige natürliche Zahl von 1 bis 31 zu denken und festzustellen, auf welchen der fünf Zahlenkarten diese gedachte Zahl steht. Läßt man sich nun die betreffenden Karten, die die gedachte Zahl enthalten, aushändigen, so ist man sofort imstande, diese gedachte Zahl zu errechnen: Man braucht lediglich die Anfangszahlen dieser Karten zu addieren. Kommt die gedachte Zahl etwa auf den Karten C und D vor, so handelt es sich um die Zahl 12(= 4 + 8), steht sie z. B. auf den Karten A, B und E, so wurde an die Zahl 19 (= 1 + 2 + 16) gedacht.

Wer ergründen will, wie dieses Kunststück „funktioniert“, ist eingeladen, sich zunächst einmal die Besonderheiten unseres dezimalen Stellenwertsystems in Erinnerung zu rufen: Es werden 10 Ziffern verwendet (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), und jede nächsthöhere Stelle ist das Zehnfache der vorhergehenden (Wert der 1. Stelle = 1 = 10^0, Wert der 2. Stelle = 10 = 10^1, Wert der 3. Stelle = 100 = 10^2, ... Wert der n-ten Stelle = 10^{n-1}). Daraus folgt, daß sich jede Zahl dieses Zehnersystems als Summe von Zehnerpotenzen darstellen läßt, z. B.

$342_{(10)} = 10^2 + 10^2 + 10^2 + 10^1 + 10^1 + 10^1 + 10^1 + 10^0 + 10^0$;

jede Zehnerpotenz kann dabei bis zu neunmal als Summand auftreten.

Die Basis eines Stellenwertsystems muß aber keineswegs 10 sein. Die kleinstmögliche hierfür geeignete Basis ist die Zahl 2. In diesem Zahlensystem (Zweiersystem, Binärsystem), das seit der Konstruktion elektronischer Rechenanlagen große Bedeutung erlangt hat, werden nur zwei verschiedene Ziffern (0 und 1) verwendet, und jede nächsthöhere Stelle ist das Zweifache der vorhergehenden (Wert der 1. Stelle = 1 = 2^0, Wert der 2. Stelle = 2 = 2^1, Wert der 3. Stelle = 4 = 2^2, Wert der 4. Stelle = 8 = 2^3, ... Wert der n-ten Stelle = 2^{n-1}). In einem solchen Zahlensystem ist dann jede Zahl als Summe von Zweierpotenzen darstellbar, wobei aber – im Gegensatz zu vorhin – jede Zweierpotenz nur höchstens einmal als Summand auftreten kann, z. B. $1011_{(2)} = 2^3 + 2^1 + 2^0$. (Will man wissen, welcher Zahl des Zehnersystems diese Zahl entspricht, braucht man bloß die Werte dieser Zweierpotenzen zu addieren: 8 + 2 + 1 = 11.)

Die folgende Übersicht zeigt den Beginn der natürlichen Zahlenreihe in binärer Ziffernschreibweise, als Summe von Zweierpotenzen und in dezimaler Schreibweise.

$$
\begin{aligned}
1_{(2)} &= 2^0 = 1_{(10)}\\
10_{(2)} &= 2^1 = 2_{(10)}\\
11_{(2)} &= 2^1 + 2^0 = 3_{(10)}\\
100_{(2)} &= 2^2 = 4_{(10)}\\
101_{(2)} &= 2^2 + 2^0 = 5_{(10)}\\
110_{(2)} &= 2^2 + 2^1 = 6_{(10)}\\
111_{(2)} &= 2^2 + 2^1 + 2^0 = 7_{(10)}\\
1000_{(2)} &= 2^3 = 8_{(10)}\\
1001_{(2)} &= 2^3 + 2^0 = 9_{(10)}\\
1010_{(2)} &= 2^3 + 2^1 = 10_{(10)}\\
1011_{(2)} &= 2^3 + 2^1 + 2^0 = 11_{(10)}\\
1100_{(2)} &= 2^3 + 2^2 = 12_{(10)}\\
1101_{(2)} &= 2^3 + 2^2 + 2^0 = 13_{(10)}\\
1110_{(2)} &= 2^3 + 2^2 + 2^1 = 14_{(10)}\\
1111_{(2)} &= 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 15_{(10)}\\
10000_{(2)} &= 2^4 = 16_{(10)}\\
10001_{(2)} &= 2^4 + 2^0 = 17_{(10)}\\
10010_{(2)} &= 2^4 + 2^1 = 18_{(10)}\\
10011_{(2)} &= 2^4 + 2^1 + 2^0 = 19_{(10)}\\
10100_{(2)} &= 2^4 + 2^2 = 20_{(10)}\\
10101_{(2)} &= 2^4 + 2^2 + 2^0 = 21_{(10)}\\
10110_{(2)} &= 2^4 + 2^2 + 2^1 = 22_{(10)}\\
10111_{(2)} &= 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 23_{(10)}\\
11000_{(2)} &= 2^4 + 2^3 = 24_{(10)}\\
11001_{(2)} &= 2^4 + 2^3 + 2^0 = 25_{(10)}\\
11010_{(2)} &= 2^4 + 2^3 + 2^1 = 26_{(10)}\\
11011_{(2)} &= 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 27_{(10)}\\
11100_{(2)} &= 2^4 + 2^3 + 2^2 = 28_{(10)}\\
11101_{(2)} &= 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 29_{(10)}\\
11110_{(2)} &= 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = 30_{(10)}\\
11111_{(2)} &= 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 31_{(10)}
\end{aligned}
$$

Doch nun zurück zu unseren Zahlenkarten.

Ein Vergleich dieser Übersicht mit den Zahlenkarten macht deutlich, nach welchen Kriterien die Zahlen den fünf Karten zugeordnet wurden und lüftet so ihr „Geheimnis“:

Karte A enthält alle natürlichen Zahlen von $1_{(10)}$ bis $31_{(10)}$, die in binärer Ziffernschreibweise an der 1. Stelle die Ziffer 1 haben (die bei der Darstellung als Summe von Zweierpotenzen den Summanden $2^0 = 1$ enthalten;

Karte B enthält alle natürlichen Zahlen von $1_{(10)}$ bis $31_{(10)}$, die in binärer Ziffernschreibweise an der 2. Stelle die Ziffer 1 haben (die bei der Darstellung als Summe von Zweierpotenzen den Summanden $2^1 = 2$ enthalten);

Karte C enthält alle natürlichen Zahlen von $1_{(10)}$ bis $31_{(10)}$, die in binärer Ziffernschreibweise an der 3. Stelle die Ziffer 1 haben (die bei der Darstellung als Summe von Zweierpotenzen den Summanden $2^2 = 4$ enthalten);

Karte D enthält alle natürlichen Zahlen von $1_{(10)}$ bis $31_{(10)}$, die in binärer Ziffernschreibweise an der 4. Stelle die Ziffer 1 haben (die bei der Darstellung als Summe von Zweierpotenzen den Summanden $2^3 = 8$ enthalten);

Karte E enthält alle natürlichen Zahlen von $1_{(10)}$ bis $31_{(10)}$, die in binärer Ziffernschreibweise an der 5. Stelle die Ziffer 1 haben (die bei der Darstellung als Summe von Zweierpotenzen den Summanden $2^4 = 16$ enthalten).

▲1▲ Eingangs wurde festgehalten, daß die gedachte Zahl nicht größer als 31 sein darf. (Wir sagen jetzt wohl besser: Sie muß kleiner als 32 = 2^5 sein.)

Wie müssen Anzahl und Beschriftung der Zahlenkarten abgeändert werden, damit die gedachte Zahl $\leqq 100$ sein kann?

▲2▲ Jede der fünf ursprünglichen Zahlenkarten enthält genau 16 Zahlen. Die Zahlen jeder Karte lassen sich daher in vier Reihen zu je vier Zahlen anordnen.

Mit etwas Geschick und Ausdauer sollte es dem Leser möglich sein, dies so zu tun, daß diese Anordnung jeweils ein magisches Quadrat darstellt. Als Hilfe ist jeweils die Position der kleinsten Zahl und die Konstante des magischen Quadrates angegeben.

A

1			

(64)

E

16			

(94)

B

2			

(66)

C

4			

(70)

D

8			

(78)

W. Miller

Mersennesche Zahlen

Die Mathematik entwickelt sich heutzutage – wie auch die meisten modernen Wissenschaften – mit stark wachsender Geschwindigkeit. In der Welt erscheinen hunderte mathematische Zeitschriften, in denen alljährlich zehntausende wissenschaftliche Arbeiten veröffentlicht werden. Aber vor 350 Jahren gab es noch keine mathematischen Zeitschriften, und die Gelehrten tauschten ihre Forschungsergebnisse in persönlichen Briefen aus.
Nun gab es jemand – den französischen Mönch *Marin Mersenne* (1588 bis 1648), der mehr solcher Briefe als andere erhielt. Mersenne von der Entdeckung eines neuen Satzes benachrichtigen hieß zugleich, die Priorität zu sichern, denn Mersenne informierte darüber in der Regel seine übrigen Briefpartner – unter ihnen *R. Descartes, B. Pascal, P. Fermat, Ch. Huygens* und andere Gelehrte der damaligen Zeit. Diese Tätigkeit des Marin Mersenne trug zur Gründung der Pariser Akademie bei.

Von den eigenständigen mathematischen Leistungen Mersennes sind seine Untersuchungen der Zahlen der Form
$M_n = 2^n - 1$ $(n \in N)$ am bekanntesten.
Wer geometrische Reihen kennt, bemerkt sofort, daß M_n gleich der Summe der ersten n Glieder der geometrischen Reihe mit dem Anfangsglied $2^0 = 1$ und dem Quotienten 2 ist:
$M_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}$.
Mersenne interessierte, welche der Zahlen $M_n = 2^n - 1$ *Primzahlen* sind. Diese Frage erwuchs aus einem Problem, das bereits von den alten Griechen gestellt worden war.
Wir kommen darauf noch zurück.
Primzahlen, die man als Wert des Terms $2^n - 1$ für eine natürliche Zahl n erhält, werden auch *Mersennesche Zahlen* genannt.

Auch wir wollen uns mit dem Problem der Suche nach Mersenneschen Zahlen etwas beschäftigen.

Wir berechnen einige Zahlen
$M_n = 2^n - 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$
und schreiben sie der Reihe nach in Tabelle 1.

Erste Feststellung: Die Zahlen, die in ein und derselben Spalte stehen, enden mit ein und derselben Ziffer. Die Zahlen in der ersten Spalte enden auf die Ziffer 1, die in der zweiten Spalte auf 3, die in der dritten Spalte auf 7 und die in der vierten Spalte auf 5.

▲1▲ Versucht, diese Feststellung exakt zu begründen!
Das bedeutet, daß die Zahlen M_n in der vierten Spalte alle durch 5 teilbar sind. Unter ihnen kann sich also keine Mersennesche Zahl befinden.

Zweite Feststellung: Die Zahlen in der zweiten und die Zahlen in der vierten Spalte sind alle durch 3 teilbar.
Beweis: Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Zahlen M_{2k} und M_{2k+2} mit *geradem* Exponenten n ist
$M_{2k+2} - M_{2k} = (2^{2k+2} - 1) - (2^{2k} - 1)$
$= 2^{2k+2} - 2^{2k} = 2^2 \cdot 2^k - 1 \cdot 2^{2k}$
$= 3 \cdot 2^{2k}$.
Wenn also M_{2k} durch 3 teilbar ist, so ist auch M_{2k+2} durch 3 teilbar. Da $M_2 = 3$ ist, sind *alle* Zahlen M_n mit geradem n durch 3 teilbar.
Es hat deshalb nur in der ersten und in der dritten Spalte einen Sinn, nach Mersenneschen Zahlen (außer $M_2 = 3$) zu suchen.

Dritte Feststellung: Wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist $(n = k \cdot l,\ k > 1,\ l > 1)$, dann ist M_n sowohl durch M_k als auch durch M_l teilbar. Dies folgt aus
$2^{kl} - 1 = (2^k)^l - 1 = (2^l)^k - 1$ und
$x^m - 1 = (x - 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1)$.
Nebenbei: Aus der dritten Feststellung folgen die ersten beiden, da alle Zahlen der zweiten Spalte durch $M_2 = 3$ teilbar sind und alle Zahlen der vierten Spalte durch $M_4 = 15$.
Die Zahl $2^n - 1$ ist höchstens dann eine Primzahl, wenn n eine Primzahl ist.
Ob aber für *jede* Primzahl p die Zahl M_p prim ist? Die Hoffnung auf eine positive Antwort wird schnell zerstört:
Schon $M_{11} = 2047 = 23 \cdot 89$ ist eine zusammengesetzte Zahl.
Mersenne selbst gab alle Primzahlen n an, die nicht größer als 257 sind und für die seiner Meinung nach die Zahlen $M_n = 2^n - 1$ prim sind. Er lieferte jedoch keinen Beweis dafür. In der Folgezeit wurde klar, daß seine Voraussagen fehlerhaft waren.
An der Suche nach Mersenneschen Zahlen beteiligte sich auch *Leonhard Euler*, Mitglied der Petersburger Akademie, einer der bedeutendsten Mathematiker der Neuzeit. Im Jahre 1750 entdeckte er die zehnte der (in natürlicher Reihenfolge geordneten) Mersenneschen Zahlen:
$M_{31} = 2\,147\,483\,647$.
Wenn früher die Suche nach Mersenneschen Zahlen *von Hand* geführt wurde, so bezog man im 20. Jahrhundert die moderne Rechentechnik mit ihrer sehr hohen Arbeitsgeschwindigkeit ein. Im Jahre 1952 wurden mit einem Schlag fünf neue Mersennesche Zahlen entdeckt: M_{521}, M_{607}, M_{1279}, M_{2203} und M_{2281}; sie sind das 13. bis 17. Glied der Folge der Mersenneschen Zahlen. Die nächsten sechs Mersenneschen Zahlen wurden in den Jahren 1958 bis 1963 gefunden. Es schlossen sich an M_{19937} (Nummer 24/entdeckt im Jahre 1971), M_{21701} (Nummer 25/1978), M_{23209} und M_{44497} (Nummer 26 und 27/beide 1979). Die letzte uns bekannte Mersennesche Zahl fand man 1983: M_{86243}. Es ist noch ungewiß, ob dies die 28. in der Folge der Mersenneschen Zahlen ist.
Warum sind nun die Mersenneschen Zahlen so interessant? Sie stehen im Zusammenhang mit den sogenannten *vollkommenen Zahlen*, mit denen sich schon die alten Griechen beschäftigten. Dies sind Zahlen, die gleich der Summe all ihrer Teiler (natürlich mit Ausnahme der betreffenden Zahl selbst) sind. Die ersten drei vollkommenen Zahlen sind 6, 28 und 496
$(6 = 1 + 2 + 3;$
$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14;$
$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 15 + 31 + 62 + 124 + 248).$
Schon *Euklid* bewies:
Wenn $2^n - 1$ eine Primzahl ist, so ist die Zahl $2^{n-1}(2^n - 1)$ vollkommen.

▲2▲ Beweist diesen Satz!
Leonhard Euler hat bewiesen, daß alle *geraden vollkommenen Zahlen* die Form $2^{n-1}(2^n - 1)$ haben, wobei $2^n - 1$ eine Mersennesche Zahl ist. Und die *ungeraden vollkommenen Zahlen*? Eine ungerade vollkommene Zahl hat noch niemand gefunden, und niemand hat bisher bewiesen, daß es solche Zahlen nicht gibt.

nach J. W. Koroljow/O. M. Mamedow, aus Quant, übersetzt und bearbeitet von C. P. Helmholz

Tabelle 1

$M_1 = 1$	$M_2 = 3$	$M_3 = 7$	$M_4 = 15$
$M_5 = 31$	$M_6 = 63$	$M_7 = 127$	$M_8 = 255$
$M_9 = 511$	$M_{10} = 1.023$	$M_{11} = 2.047$	$M_{12} = 4.095$
$M_{13} = 8.191$	$M_{14} = 16.383$	$M_{15} = 32.767$	$M_{16} = 65.535$
$M_{17} = 131.071$	$M_{18} = 262.143$	$M_{19} = 524.287$	$M_{20} = 1.048.575$
$M_{21} = 2.997.151$	$M_{22} = 4.194.303$	$M_{23} = 8.388.607$	$M_{24} = 16.777.215$
$M_{25} = 33.554.431$	$M_{26} = 67.108.863$	$M_{27} = 134.217.727$	$M_{28} = 268.435.455$
$M_{29} = 536.870.911$	$M_{30} = 1.073.741.823$	$M_{31} = 2.147.483.647$	$M_{32} = 4.294.967.295$
………	………	………	………
M_{4n-3}	$M_{2(2n-1)}$	M_{4n-1}	M_{4n}

Ein interessanter Theodolit

Carl Zeiss Jena, 1908

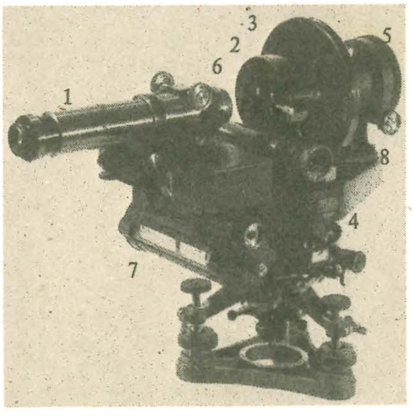


Bild 1

S = Stehachse (vertikale Drehachse) des Theodolit und Brechpunkt des hinteren Prisma
A = Brechpunkt des vorderen Prisma
Z = Zielpunkt

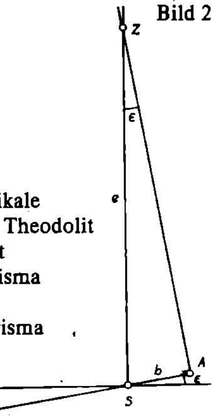


Bild 2

Die Aufgabe des Geodäten, unter anderem von der Erdoberfläche ein *ähnliches, maßstäblich verkleinertes und durch Kartenzeichen erläutertes Abbild* in Form einer Karte herzustellen, wurde bis zum Einsatz der Luftbildmessung fast ausschließlich durch kombinierte Winkel- und Streckenmessung verwirklicht.

Die ältesten Vermessungsgeräte, genutzt etwa 3000 Jahre v. u. Z. in Ägypten beispielsweise bei der Felder-Neueinteilung nach den jährlichen Nilüberschwemmungen, waren Meßseile und Meßstangen. Vervollkommnet bzw. auch vereinfacht wurde die Längenmeßtechnik durch die Einführung des Rades zur Streckenmessung. Nahezu 100 Jahre vor unserer Zeitrechnung beschrieb Heron von Alexandria diese Methode und deutete an, daß man sie schon seit langem im Einsatz habe. Leonardo da Vinci (1452 bis 1529) war übrigens ebenfalls mit der Konstruktion von Wagen mit Meßrädern und von Schrittzählern beschäftigt. Von Interesse dürfte auch sein, daß schon im römischen Heer Schrittzähler genutzt wurden, die von Soldaten getragen wurden, die auf ein bestimmtes Schrittmaß eingeübt waren.

Um das Jahr 1300 kam dann der sogenannte *Jakobsstab* zum Einsatz; ein Gerät, das sowohl für die Strecken- als auch für die Winkelmessung eingesetzt werden konnte.

Der Begriff *Theodolit* für ein Winkelmeßgerät wurde erstmals von dem Engländer Digges um das Jahr 1600 eingeführt, nachdem in der Astronomie für Winkelmessungen genutzte Astrolabien auch für die Bestimmung von Horizontalwinkeln eingesetzt worden waren. Die Erweiterung dieser Geräte durch Fernrohre, um damit eine Erhöhung der Ziel- und Meßgenauigkeit zu erreichen, war erst nach Einführung des Fadenkreuzes möglich; das geschah in der Mitte des 17. Jahrhunderts.

Mit dem Einsatz des Fernrohres für geodätische Zwecke kam natürlich auch die Frage nach der Streckenmessung unter Nutzung optischer Mittel auf. Der Geodät benötigt fast ausschließlich den horizontalen Abstand zweier Punkte. Ob mit Meßketten, Meßseilen, Meßstangen oder Meßbändern, stets ist deshalb das Fadenlot ein unentbehrliches Hilfsmittel bei der mechanischen Streckenmessung. Was nimmt es Wunder, wenn man diese Meßmethode durch eine optische abzulösen trachtete. Bereits um 1670 versuchte sich der Italiener Montanari mit der optischen Streckenmessung; aber erst 1812 bekam diese durch Georg von Reichenbach enormen Auftrieb. Bei den dabei verwendeten sog. Reichenbachschen Distanzfäden handelt es sich um ein in der Fadenkreuzebene des Fernrohres angebrachtes Strichpaar, dessen auf dem Zielbild einer senkrecht stehenden und mit Teilung versehenen Latte erzeugter Lattenabschnitt ein Maß für die Entfernung darstellt. Der Nachteil dieser Meßmethode ist, daß sie streng nur für horizontale Zielungen gilt und daß bei schrägen Visuren der systematische Fehleranteil wächst und außerdem nur Schrägentfernungen gemessen werden.

Unter den vielen Lösungsvarianten zur optischen Streckenmessung, die vor und nach der letzten Jahrhundertwende instrumentell verwirklicht wurden, sei hier nur eine herausgegriffen, die bei Carl Zeiss, Jena konstruiert und offenbar nur in ganz wenig Exemplaren gebaut wurde. Der abgebildete Theodolit – selbst seine Bezeichnung ist zur Zeit noch unbekannt – basiert auf einer Idee von Pulfrich und stammt aus dem Zeitraum 1907/08. Auffällig an ihm ist vorerst sein horizontal gelagertes Fernrohr (1); eine Maßnahme, die offenbar eine bequeme Beobachtungsstellung des Messenden auch bei sehr steilen Zielungen ermöglichen sollte. In seiner Funktion als Theodolit werden mit ihm Horizontal- und Vertikalwinkel gemessen. Zur Bestimmung dieser Winkel sind Teilkreise eingebaut (3 und 4), die über Nonienablesungen eine Winkelablesung auf 1′ zulassen. Geneigte Zielungen werden mit dem Gerät durch ein dem Fernrohr vorgelagertes und um die Fernrohrachse drehbares Prisma (2) reali-

ist der Vertikalkreis (3). Aus dieser konstruktiven Lösung der Vertikalwinkelmessung ergibt sich auch die Eigenart, daß Zielvisur und Fernrohrachse rechtwinklig zueinander stehen. Mit dem fest installierten Beobachtungsmikroskop (8) kann jederzeit über eine Dosenlibelle die Horizontierung des Gerätes kontrolliert werden.

Das Interessanteste aber an diesem Theodolit dürfte seine instrumentelle Ausrüstung für die optische Streckenmessung sein. Zu diesem Zweck kann am vorderen Ende des drehbaren Tubus (5) ein zweites Prisma angeordnet werden, das an den Drehungen des ersten teilnimmt. So entsteht im Gerät eine Basis b, an deren Enden rechtwinklig austretende Zielstrahlen angeordnet sind. Eine schwenkbare Abdeckplatte (6) erlaubt wahlweise durch das vordere bzw. hintere Prisma den gleichen Zielpunkt zu beobachten. Der sich dabei bildende und zu messende kleine Winkel ε – der sog. parallaktische Winkel – ist ein Maß für die Entfernung, die sich aus folgender Gleichung errechnen läßt:

$$e = \frac{b}{\sin \varepsilon} \qquad \text{(Siehe Bild 2)}$$

Es zeugt vom praktischen Sinn Pulfrichs, wenn er diesem Theodolit eine Meß- und Ableseeinrichtung hinzufügte, die nicht den Winkel selbst, sondern an der Trommel (7) ablesbar den für die obige Formel benötigten Sinus des Winkels ermitteln ließ. Von der Methode her hatte diese Variante der optischen Streckenmessung zwei Vorteile: 1. Der Zielpunkt brauchte nicht signalisiert und somit nicht begehbar zu sein und 2. war die ermittelte Entfernung bereits die Horizontalentfernung. Der Nachteil aber war – und daran ist offenbar auch eine Weiterentwicklung gescheitert – die geringe Genauigkeit. Die fehlertheoretische Untersuchung der Gleichung verbunden mit der nur 150 mm betragenden Gerätebasis b läßt das Verfahren nur für kurze Distanzen – also nur wenige Meter – zu, und in diesem Bereich liegt nicht die Menge der geodätischen Arbeiten.

Auch Pulfrich hat diese Schwachstelle erkannt und fast zur gleichen Zeit die *Basislatte* entwickelt, die sich bis in unsere Tage bei geodätischen Arbeiten bewährt hat. Hierbei wird der parallaktische Winkel zu einer im Zielpunkt aufzustellenden horizontalen Latte gemessen, die zwei in ihrem Abstand geeichte Zielmarken trägt. Der Abstand dieser Zielmarken beträgt heutzutage zwei Meter; zu Zeiten Pulfrichs waren es drei Meter. Gemessen werden können Strecken von über 100 Metern, wobei allerdings Hilfsfiguren zu bestimmen sind.

Natürlich ist mit Einführung der elektromagnetischen bzw. elektro-optischen Streckenmeßgeräte auch auf dem Gebiet der Streckenmessung eine kolossale Wende eingetreten.

Das Optische Museum der Carl-Zeiss-Stiftung Jena ist glücklicher Besitzer des zuvor beschriebenen Theodoliten. *J. Töppler*

ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 22 (1988) 6 · Seiten 121 bis 144