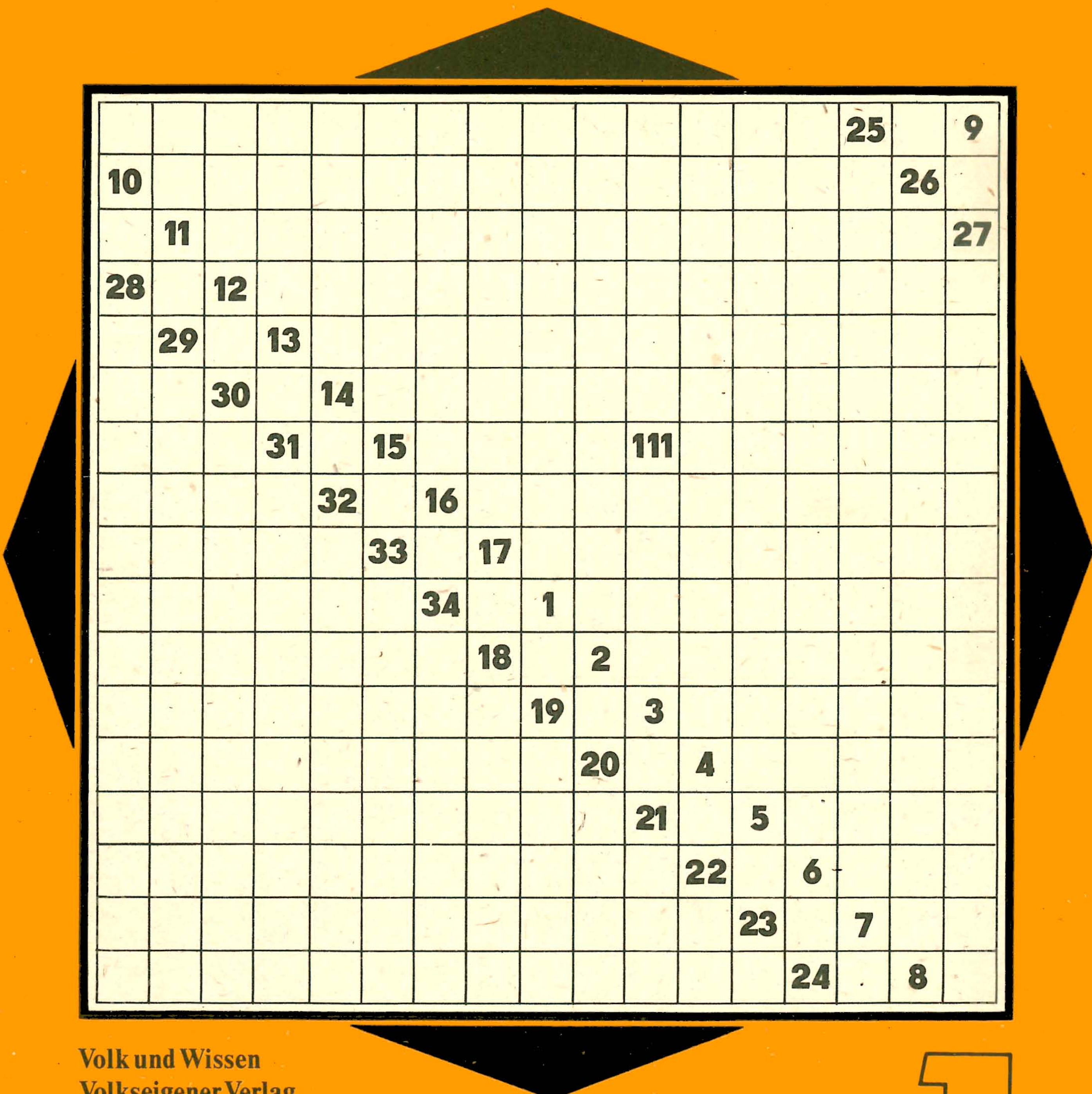
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
23. Jahrgang 1989
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

1

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstr. 16, Leipzig 7010.

Fotos: H.-J. Kühne (S. 7); Abt. Museen/Sammlungen d. Staatl. Schlösser und Gärten Wörlitz · Oranienbaum · Luisium (S. 8); J. Weiß (S. 12, 13); Staatl. Math.-Phys. Salon Dresden (IV. U.-Seite)
Vignetten: L. Otto (S. 17)
Techn. Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage von St. Hochmuth, Karl-Marx-Stadt
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 17. Oktober 1988
Auslieferungstermin: 13. Februar 1989

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Alphons weist die Schüler der 5. bis 7. Klasse auf speziell für sie geeignete Beiträge hin

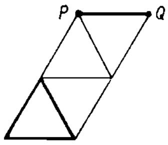
Dreiecks-geometrie

„alpha" freut sich immer, wenn sie ihre Leser zur Beschäftigung mit der Mathematik anregen kann. Noch mehr freuen wir uns, wenn ihr uns eure Überlegungen mitteilt. Schließlich ist meist die Diskussion über die eigenen Gedanken mit anderen der Prüfstein für ihre Richtigkeit. Vielleicht regt euch Ralphs Arbeit zu einem solchen Meinungsstreit an.

Alphons

Im Heft 2/1986 der *alpha* wurde eine *Taxi-Geometrie* vorgestellt. Dadurch kam ich auf die Idee für eine andere Geometrie, die ich *Dreiecksgeometrie* (kurz: *D-Geometrie*) nannte.
Ich gehe von einer Ebene aus, die – wie bei einem Halma-Spiel – von einem Netz aus zueinander kongruenten Dreiecken bedeckt ist *(D-Ebene)*. Jedes dieser Dreiecke nenne ich *Elementardreieck* (Bild 1).

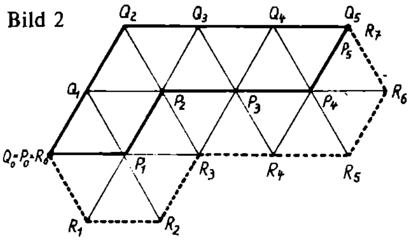
Bild 1



D-Geraden sind die Geraden des Dreiecksgitters. Die Gitterpunkte des Dreiecksgitters sollen die *D-Punkte* sein. In jedem D-Punkt schneiden sich genau drei D-Geraden. Auf jeder D-Geraden liegen mindestens zwei Punkte (sogar unendlich viele), aber zu zwei voneinander verschiedenen D-Punkten muß es nicht unbedingt eine D-Gerade geben, auf der diese beiden Punkte liegen.
Vor allem die letztgenannte Eigenschaft ist der Grund dafür, daß die D-Geometrie zum Teil erhebliche Unterschiede zur gewöhnlichen Geometrie aufweist.
Beispielsweise kann man den Begriff *Strecke* nicht wie sonst üblich definieren. Wir wollen unter einer *Elementarstrecke* ein Paar (P, Q) von Eckpunkten ein und desselben Elementardreiecks verstehen. (Anschaulich können wir uns unter einer Elementarstrecke eine Seite eines Elementardreiecks vorstellen, jedoch enthält eine Elementarstrecke außer ihren beiden Endpunkten keine weiteren D-Punkte.) (Bild 1)
Eine Folge $P_1P_2P_3 \ldots P_{n-1}P_n$ von D-Punkten, bei der jedes Paar (P_i, P_{i+1}) eine Elementarstrecke ist, nennen wir *Weg von* P_0 *nach* P_n. Die Anzahl n der auf dem Weg von P_0 nach P_n durchlaufenen Elementarstrecken nennen wir *Länge des Weges* $P_0P_1 \ldots P_n$.

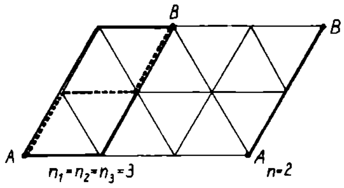
Ist $P_0P_1 \ldots P_n$ ein Weg der Länge n und gilt für jeden Weg $Q_0Q_1 \ldots Q_m$ mit $Q_0 = P_0$ und $Q_m = P_n$ die Beziehung $m \geqq n$, so nennen wir $P_0P_1 \ldots P_n$ *direkten Weg von* P_0 *nach* P_n. (Bild 2)

Bild 2



Sind A und B zwei voneinander verschiedene D-Punkte, so ist der direkte Weg von A nach B nur dann eindeutig bestimmt, wenn A und B auf ein und derselben D-Geraden liegen. (In diesem Fall könnte man den direkten Weg von A nach B auch als *Strecke AB* bezeichnen.) Andernfalls gibt es mehrere direkte Wege von A nach B, die jedoch alle gleich lang sind. Die Länge eines direkten Weges von A nach B ($A \neq B$) nennen wir *D-Abstand von A und B*. Jeder Punkt habe von sich selbst den Abstand 0. (Bild 3)

Bild 3



Ein *D-Vieleck* besteht aus k D-Punkten A_1, A_2, ..., A_k (Eckpunkte) und je einem direkten Weg von A_1 nach A_2, von A_2 nach A_3, ..., von A_{k-1} nach A_k und schließlich von A_k nach A_1 (k Seiten). Dabei sollen keine drei aufeinanderfolgenden Eckpunkte auf ein und derselben Geraden liegen.
Solche D-Vielecke wollen wir nun etwas näher untersuchen.
Zunächst betrachten wir eine Figur, die wir aus der gewöhnlichen Geometrie nicht kennen: Das Zweieck.

Bild 4a

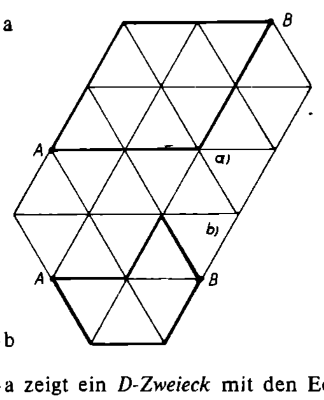


Bild 4b

Bild 4a zeigt ein *D-Zweieck* mit den Eckpunkten A und B. Im Bild 4b liegt dagegen kein Zweieck vor, da A und B nicht durch *direkte* Wege verbunden sind. Wir stellen fest: Die beiden Eckpunkte eines D-Zweiecks können nicht auf ein und derselben D-Geraden liegen.
Kommen wir jetzt zum *D-Dreieck*, wobei wir uns hier auf gleichseitige D-Dreiecke beschränken. Bild 5 zeigt zwei gleichseitige D-Dreiecke. Zweifelsohne ist das Dreieck a) das interessantere.

Bild 5a

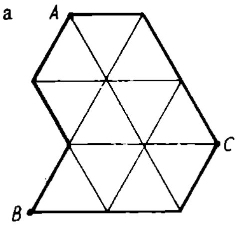
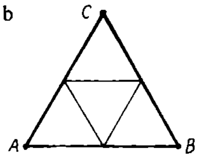


Bild 5b



Bei ihm befindet sich jeder der drei Eckpunkte A, B, C auf einer anderen D-Geraden. Das Dreieck b) unterscheidet sich nicht von einem gewöhnlichen gleichseitigen Dreieck. Ein gewöhnliches gleichseitiges Dreieck erhält man übrigens auch, wenn man die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks a) als Punkte einer gewöhnlichen Ebene auffaßt und durch gewöhnliche Geraden verbindet.

▲1▲ Zeichnet weitere gleichseitige D-Dreiecke und überprüft, ob ihre Eckpunkte auch in der gewöhnlichen Geometrie Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sind! Läßt sich eine allgemeine Aussage formulieren und beweisen?

Unter einem *D-Rhombus* verstehen wir ein D-Viereck, bei dem alle vier Seiten gleich lang sind (Bild 6).

Bild 6a

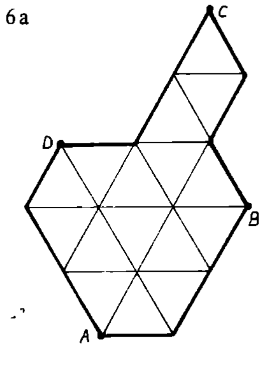
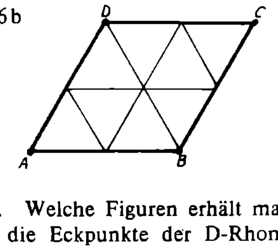


Bild 6b



▲2▲ Welche Figuren erhält man, wenn man die Eckpunkte der D-Rhomben im Bild 6 jeweils in eine gewöhnliche Ebene überträgt und durch gewöhnliche Geraden verbindet? Ist das bei allen D-Rhomben so?

Wenden wir uns nun der interessantesten Figur in der D-Geometrie zu, dem *D-Kreis*. Wir definieren: Ein D-Kreis ist die Menge aller D-Punkte, die von einem gegebenen

D-Punkt M, dem Mittelpunkt des D-Kreises, den gleichen Abstand r ($r \in N$, $r > 0$) haben.
Bild 7 zeigt zwei D-Kreise. Ihr Umfang (Länge des Weges *ABCDEFA* bzw. *ABCDEFGHIJKLA*) beträgt 6 bzw. 12, ihr Durchmesser 2 bzw. 4. Der Quotient *Umfang: Durchmesser* ist bei beiden Kreisen 3 (in der gewöhnlichen Geometrie: $\pi = 3{,}14\ldots$).

Bild 7a

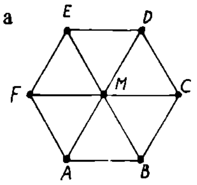
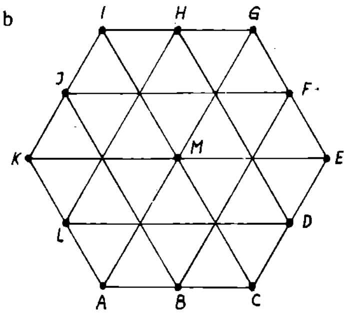


Bild 7b



▲3▲ Überprüft, ob dies bei allen D-Kreisen so ist!

Das waren nun die Dinge aus der D-Geometrie, die mir am interessantesten erschienen. Man kann noch viel mehr untersuchen, so z. B. in D-Dreiecken die Innenwinkelsumme, die nicht in jedem D-Dreieck dieselbe ist, oder auch Höhen, Seitenhalbierende, Winkelhalbierende usw. Jeder kann in dieser Geometrie leicht neue Sätze und Besonderheiten erkennen.
Und wenn jemand nach dem Nutzen fragt: Vor allem, glaube ich, macht das Erfinden einer *anderen* Geometrie und das Entdekken von Gesetzmäßigkeiten in ihr Spaß, und man versteht einige Zusammenhänge in der gewöhnlichen Geometrie besser.

R. Schlosser

Aufgabe zum Titelblatt – Ein anspruchsvolles Magisches Quadrat

In ein Quadrat aus 17×17 Feldern sind die Zahlen 1 bis 289 so einzutragen, daß sich sowohl in allen waagerechten Zeilen, in allen senkrechten Spalten als auch in den beiden Diagonalen stets die gleiche Summe ergibt.
Zur Erleichterung der Lösung sind in das Bild die Zahlen 1 bis 34 und die Zahl 111 bereits eingetragen.

Schüler St. Hochmuth, J.-Dieckmann-OS, Kl. 6a

Leontij Magnickij (1669 bis 1739) und seine „Arithmetik" (1703)

Die *Arithmetik* von Magnickij, die 1703 in Moskau mit einer für die damalige Zeit ungewöhnlich hohen Auflage von 2400 Exemplaren erschien, blieb in Rußland weiter ein grundlegendes Lehrbuch, obwohl 1740 die *Universale Arithmetik* von Euler ins Russische übersetzt worden war. Michail Lomonossow nannte es *eine Pforte zu seiner Gelehrsamkeit*. Außer den Rechenregeln und den Grundrechenarten, *die die Kaufleute, Handwerker, Beamten und überhaupt alle brauchen* – so stand es im Buch – enthielt es auch Kapitel über Algebra, Geometrie, Astronomie, Navigation u. a. m.
Peter I. erkannte, daß gegen den Analphabetismus des 18. Jahrhunderts die Entwicklung der Wissenschaften allgemein und der mathematischen im besonderen für den Schiffbau, für die Navigation, das Bauwesen, den Handel, die Ökonomie und das Militärwesen notwendig waren. Per Erlaß gründete er 1701 eine Schule der mathematischen und der Navigationswissenschaften in Moskau. Leontij Magnickij wurde zusammen mit dem Engländer Farguharson und zwei weiteren Ausländern an diese Schule berufen.
In einem Geschichtsbuch, das in Rußland im Jahre 1831 erschien, wird folgendes berichtet: Magnickij hatte selbständig die Mathematik erlernt und sprach deutsch, niederländisch, lateinisch und italienisch. Peter I. *unterhielt sich mit ihm über mathematische Probleme, und war von seinen Kenntnissen so entzückt, daß er ihn als seinen „Magneten" bezeichnete und anordnete, ihn Magnickij zu nennen. Welchen Familiennamen er bis dahin hatte, ist unbekannt ...*
Die *Arithmetik* von Magnickij entsprach einem wichtigen gesellschaftlichen Zeitbedürfnis. Es blieb bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts in Gebrauch, wie Prof. Juschkewic, einer der führenden Mathematikhistoriker der Sowjetunion, in seinem Buch *Die Geschichte der Mathematik in Rußland* festgestellt hat.

Wir stellen einige Aufgaben aus seiner *Arithmetik* vor:

▲1▲ Jemand ging Spielzeug einkaufen. Für das erste Spielzeug bezahlte er $\frac{1}{5}$ seines Geldes, für ein zweites $\frac{3}{7}$ des Restes und für ein drittes $\frac{3}{5}$ des ihm verbliebenen Geldes. Danach hatte er noch 1 Rubel und 92 Kopeken. Wieviel Geld hatte er ursprünglich, und wieviel kostete jedes Spielzeug?

▲2▲ „Wieviel Schüler hast du?" wollte ein Bauer von einem Lehrer wissen. „Einstweilen einige" antwortete der Lehrer. „Wenn aber noch einmal soviel kommen und noch die Hälfte und noch ein Viertel dieser Zahl und auch dein Sohn, dann sind es 100."
Wieviel Schüler hatte der Lehrer?

▲3▲ Ein Bauer stellt einen Knecht für ein Jahr ein und versprach ihm, 12 Rubel und einen Schafspelz als Lohn zu geben. Der Knecht diente aber nur 7 Monate. Der Herr bezahlte dafür 5 Rubel und gab ihm den Schafspelz. Bestimme den Preis des Pelzes!

▲4▲ Ein Wanderer benötigte für den Weg von einer Stadt in ein Dorf 30 Tage. Ein anderer ging aus diesem Dorf in diese Stadt und brauchte nur 20 Tage. Nach wieviel Tagen treffen sie sich, wenn sie gleichzeitig losgingen?

▲5▲ Ein Mann und eine Frau pflegten ein Fäßchen in 10 Tagen zu trinken. Der Mann trank dieses Fäßchen allein in 14 Tagen leer. In wieviel Tagen schafft dies die Frau?

▲6▲ Jemand hinterließ seiner Frau, seiner Tochter und seinen drei Söhnen 48000 Rubel als Erbschaft: der Frau ein Achtel der ganzen Summe, jedem Sohn zweimal mehr als der Tochter.
Wieviel Geld erhielt jeder?

Hier noch eine anspruchsvollere Aufgabe aus dem Kapitel *Reihen:*

▲7▲ Ein Verkäufer möchte für ein Pferd 156 Rubel haben. Ein Käufer meint, daß dieser Preis wesentlich zu hoch ist. „Dann kaufe nur die Nägel in jedem Hufeisen (jedes Hufeisen hat 6 Nägel)", schlägt der Verkäufer vor. „Für den ersten Nagel zahle mir $\frac{1}{4}$ Kopeke, für den folgenden $\frac{1}{2}$ Kopeke, danach 1 Kopeke, dann 2 Kopeken usw. Das Pferd gebe ich dir als Zugabe zu den Nägeln kostenlos." Der Käufer stimmte erfreut zu und hoffte, nicht mehr als 10 Rubel bezahlen zu müssen. Wieviel hätte er tatsächlich zahlen müssen?

A. Halameisär/J. Lehmann/W. Moldenhauer

Lösen von Extremwertaufgaben mit elementaren Mitteln

Die Mitglieder der Mathematischen Schülergesellschaft der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, Klasse 9, beschäftigten sich in einem Kurs mit Extremwertaufgaben, dabei spielten außerdem Näherungsmethoden auf Kleincomputern eine Rolle. Eine Kurzfassung des behandelten Stoffes teilen sie euch hier mit.

Im täglichen Leben stehen wir sehr oft vor der Aufgabe, aus vorhandenen Mitteln (in einem jeweils noch zu präzisierenden Sinne) das Beste zu machen oder ein gestelltes Ziel mit möglichst geringem Aufwand zu erreichen. In konkreten Fällen kann es z. B. darum gehen, einen möglichst hohen Exportgewinn zu erzielen oder eine möglichst große Produktionsleistung zu erreichen. Häufig ist mit möglichst wenig Material oder mit möglichst wenig Energie eine vorgegebene Aufgabe zu erfüllen. Prinz Epsilon (siehe alpha Heft 2/1988) muß überlegen, wie ein gegebenes Stück Pappe zu einer (oben offenen) Kiste mit möglichst großem Volumen gefaltet werden kann. Ein anderes Problem besteht z. B. darin, eine Kiste mit einem bestimmten festen Volumen so zu bauen, daß dazu möglichst wenig Material benötigt wird.

Derartige Probleme nennt man *Optimierungsprobleme* oder *Extremwertaufgaben*. Zu ihrer Lösung ist ein mathematisches Modell aufzustellen. Das sind meist Formeln oder Algorithmen zur Beschreibung des (technischen, physikalischen, ökonomischen, ...) Sachverhaltes. Zahlreiche mathematisch formulierte Extremwertaufgaben können mit Methoden der höheren Mathematik (Differentialrechnung) gelöst werden. Es gibt auch Probleme, bei denen die Unbekannten Funktionen sind. Aufgaben dieses Typs werden in der Variationsrechnung und in der Theorie der optimalen Steuerung untersucht. Von diskreten Problemen spricht man, wenn die Variablen nur endlich viele oder abzählbar unendlich viele Werte annehmen können, auch dafür sind spezielle Lösungsmethoden entwickelt worden.

Differentialrechnung und Optimierungsaufgaben werden im Mathematikunterricht der OS nicht behandelt. Trotzdem müssen wir nicht von vornherein passen. Manchmal lassen sich nämlich Extremwertaufgaben auch mit relativ elementaren Hilfsmitteln lösen. Als ein solches Hilfsmittel wollen wir hier Ungleichungen benutzen.

1. Einige Ungleichungen

Es seien $x_1, \dots, x_n$ nichtnegative reelle Zahlen. Dann heißt

$$A(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$$

das „arithmetische Mittel" und

$$G(x_1,\dots,x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

das „geometrische Mittel" der Zahlen $x_1, \dots, x_n$. Zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel besteht stets die Beziehung:

$$G(x_1,\dots,x_n) \leqq A(x_1,\dots,x_n). \tag{1}$$

Dabei gilt

$$G(x_1,\dots,x_n) = A(x_1,\dots,x_n)$$

dann und nur dann, wenn $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ ist.

Diese Ungleichung wurde von dem französischen Mathematiker A. L. Cauchy (1789 bis 1857) bewiesen. Einen elementaren Beweis dieser Ungleichung findet der interessierte Leser in [2].

Aus (1) folgt

Satz 1: Für beliebige nichtnegative Zahlen $x_1, \dots, x_n$ gilt

$$n \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \leqq x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n. \tag{2}$$

Bei positiven Zahlen ist Gleichheit genau dann erfüllt, falls $x_1 = \dots = x_n$ ist.

Beweis: Nach Formel (1) ist

$G(x_1^n,\dots,x_n^n) \leqq A(x_1^n,\dots,x_n^n)$, d. h.

$$\sqrt[n]{x_1^n \cdot \ldots \cdot x_n^n} \leqq \frac{1}{n}(x_1^n + \dots + x_n^n),$$

hieraus folgt (2).

Auch die folgende Ungleichung kann für die Lösung einiger Extremwertaufgaben mit Erfolg ausgenutzt werden. Sie wird nach Jacob Bernoulli (1654 bis 1705) als Bernoullische Ungleichung bezeichnet. Für $x \geqq 0$ und $n \in N$ folgt sie aus der bekannten binomischen Formel:

$$(1 + x)^n \geqq 1 + nx. \tag{3}$$

Wir zeigen nun, daß analoge Ungleichungen auch für allgemeinere Fälle richtig sind.

Satz 2: Es sei x eine reelle und α eine rationale Zahl mit $x \geqq -1$ und $\alpha \geqq 1$. Dann gilt

$$(1 + x)^\alpha \geqq 1 + \alpha x. \tag{4}$$

Im Fall $0 < \alpha < 1$, $x \geqq -1$ besteht die Ungleichung

$$(1 + x)^\alpha \leqq 1 + \alpha x, \tag{5}$$

für $\alpha \neq 1$ ist Gleichheit nur bei $x = 0$ erfüllt.

Beweis: Wir betrachten zuerst den Fall $0 < \alpha < 1$. Da α rational ist, existieren natürliche Zahlen m, n mit $1 \leqq m < n$, so daß $\alpha = \frac{m}{n}$ geschrieben werden kann.

Es ist $1 + x \geqq 0$ und folglich

$$(1 + x)^\alpha = (1 + x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(1 + x)^m} = \sqrt[n]{(1 + x) \cdot \ldots \cdot (1 + x) \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}.$$

Dabei wurde der Radikand um $(n - m)$ Faktoren 1 ergänzt, so daß unter dem Wurzelzeichen formal n Faktoren stehen.

Nach Ungleichung (1) ist daher

$$(1 + x)^\alpha \leqq \frac{m(1 + x) + (n - m) \cdot 1}{n} = \frac{m + mx + n - m}{n} = \frac{mx + n}{n} = 1 + \alpha x.$$

Weil in (1) das Gleichheitszeichen nur für „$x_1 = \dots = x_n$" steht, gilt $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x$ genau dann, wenn $1 + x = 1$ ist, d. h. nur für $x = 0$.

Es sei jetzt $\alpha > 1$. Falls $1 + \alpha x < 0$ ist, gilt natürlich $(1 + x)^\alpha \geqq 0 > 1 + \alpha x$. Also bleibt noch $\alpha > 1$, $1 + \alpha x \geqq 0$ zu diskutieren. In diesem Fall ist $0 < \frac{1}{\alpha} < 1$, und gemäß der schon bewiesenen Formel (5) ist

$$(1 + \alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} \leqq 1 + \frac{1}{\alpha}\alpha x = 1 + x.$$

Weil die Potenzfunktion für $\alpha > 1$ monoton ist, muß

$1 + \alpha x = \left((1 + \alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha \leqq (1 + x)^\alpha$ sein.

Bemerkung: Für $\alpha \neq 1$ steht in den Formeln (4) und (5) das Gleichheitszeichen nur für $x = 0$.

Satz 3: Die Bernoullische Ungleichung (4) gilt auch für x reell, α rational und $x \geqq -1$, $\alpha < 0$.

Beweis: Wir führen die Aussage auf Satz 2 zurück. Sollte $1 + \alpha x < 0$ sein, ist (4) offensichtlich. Im anderen Fall ist $\alpha x \geqq -1$. Wegen $-\alpha > 0$ gilt für $p \in N$, $p > -\alpha$ die Ungleichung $0 < -\frac{\alpha}{p} < 1$ und daher ist nach (5)

$$(1 + x)^{-\frac{\alpha}{p}} \leqq 1 - \frac{\alpha}{p}x \tag{6}$$

bzw. $(1 + x)^{\frac{\alpha}{p}} \geqq \dfrac{1}{1 - \frac{\alpha}{p}x}$. Wegen

$$1 \geqq 1 - \left(\frac{\alpha}{p}x\right)^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{p}x\right)\left(1 + \frac{\alpha}{p}x\right)$$

ergibt sich

$(1 + x)^{\frac{\alpha}{p}} \geqq 1 + \frac{\alpha}{p}x$ und folglich

$$(1 + x)^\alpha \geqq \left(1 + \frac{\alpha}{p}x\right)^p.$$

Da $\alpha x \geqq -1$ ist, gilt $\frac{\alpha}{p}x \geqq -\frac{1}{p} \geqq -1$.

Wegen $p \in N$ folgt dann

$(1 + x)^\alpha \geqq 1 + p\frac{\alpha}{p}x$ aus dem schon bekannten Satz.

Bemerkungen: Aus den Ungleichungen des Beweises folgt, daß

$(1 + x)^\alpha > 1 + \alpha x$

für $x \neq 0$ ($x \geqq -1, \alpha < 0$) ist.

Durch Grenzwertbildung kann man Potenzen x^α auch für $x \geqq 0$ und beliebige reelle Zahlen α definieren. Es läßt sich dann zeigen, daß die Sätze 2 und 3 richtig bleiben, wenn dort für α irrationale Zahlen (mit der Fallunterscheidung $\alpha < 0$, $\alpha > 1$ bzw. $0 < \alpha < 1$) eingesetzt werden.

2. Maxima und Minima

Untersuchung von Funktionen des Typs $x^\alpha - ax$

Von Funktionen dieses Typs soll uns interessieren, ob sie über der Menge der nichtnegativen reellen Zahlen $M = \{x \in R \mid x \geqq 0\}$ oder über gewissen Intervallen kleinste oder größte Funktionswerte besitzen, und wenn ja, wo diese angenommen werden.

Satz 4: Es sei $a > 0$, $\alpha > 1$. Dann hat die Funktion $f(x) = x^\alpha - ax$ bezüglich $x \geqq 0$ ihren kleinsten Wert im Punkt

$$\underline{x} = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \text{ und dieser Wert ist}$$

$$f(\underline{x}) = (1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Beweis: Wegen $\alpha > 1$ ist für alle $z \geqq -1$ nach (4) $(1+z)^\alpha \geqq 1 + \alpha z$. Setze $y = 1 + z$, also $z = y - 1$, so ergibt sich $y^\alpha \geqq 1 + \alpha(y-1)$ und daher $y^\alpha - \alpha y \geqq 1 - \alpha$. Dabei ist $y \geqq 0$ beliebig, die Ungleichung gilt für alle $y \geqq 0$ und das Gleichheitszeichen steht nur für $z = 0$, d. h. für $y = 1$. Multiplikation mit dem positiven Faktor $\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ liefert

$$\left(\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} y\right)^\alpha - \alpha\frac{a}{\alpha}\left(\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} y\right)$$

$$\geqq (1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Wir setzen nun $x = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} y$. Weil $y \geqq 0$ beliebig ist, durchläuft auch x alle nichtnegativen reellen Zahlen. Die Ungleichung hat jetzt die Gestalt

$$x^\alpha - ax \geqq (1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Für $x \neq \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ steht „>" und für

$x = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ steht „=".

Definition: Es sei M eine Teilmenge der reellen Zahlen R und f eine auf M definierte reellwertige Funktion. Wenn es ein $\underline{x} \in M$ (bzw. ein $\bar{x} \in M$) gibt, so daß $f(\underline{x}) \leqq f(x)$ bzw. $f(x) \leqq f(\bar{x})$ für alle $x \in M$ gilt, so nennt man $f(\underline{x})$ das (globale) Minimum und $f(\bar{x})$ das (globale) Maximum von f auf M. $\underline{x}$ heißt (globale) Minimumstelle und $\bar{x}$ (globale) Maximumstelle von f auf M.

Der höchste Berg (Punkt) der DDR ist der Fichtelberg. Nennt den höchsten Berg in Thüringen und den höchsten Berg im Bezirk Neubrandenburg! Im Kleinen (Lokalen) können offenbar ganz andere Maxima und Minima als im Großen (Globalen) auftreten. Man betrachtet daher neben den globalen Extremwerten (Minimum oder Maximum) auch lokale Extrema. Für den Fall $M = R$ sind diese exakt so definiert: f hat bei $x_0 \in R$ ein lokales Maximum, falls es ein Intervall $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ gibt, so daß $f(x_0) \geqq f(x)$ für alle $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ ist. Das bedeutet, daß $f(x)$ das globale Maximum von f auf $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ darstellt.

Entsprechend ist das lokale Minimum zu verstehen.

Wenn f nur auf $M \subseteqq R$ definiert ist, wird die Definition wie folgt abgeändert: Man sagt, f hat bei $x_0 \in M$ ein lokales Maximum auf M, wenn es ein Intervall $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ gibt, so daß $f(x_0) \geqq f(x)$ für alle $x \in M \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ gilt.

In diesem Beitrag sind nur globale Extrema von Interesse.

Daher vereinbaren wir, nur von Maximum und Minimum zu sprechen.

Aufgabe: Maximum oder Minimum von einer Funktion f auf einer Menge M existieren nicht immer. Wenn sie existieren, sind Minimum oder Maximum eindeutig bestimmt. Es kann jedoch mehrere Minimum- oder Maximumstellen geben. Illustriere dies an Beispielen!

Die Aussage von Satz 4 kann jetzt so formuliert werden: Es sei $a > 0$, $\alpha > 1$ und $M = \{x \mid x \in R, x \geqq 0\}$.

Dann nimmt die Funktion $f(x) = x^\alpha - ax$ ihr Minimum auf M an der Stelle

$\underline{x} = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ und nur an dieser Stelle an, das Minimum ist

$$f(\underline{x}) = (1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

Satz 5: Es seien $\beta, \gamma \in R$, $\gamma < 0 < \beta$ und M eine Teilmenge von R. Wenn f das Minimum (Maximum) auf M im Punkt $\underline{x}$ (bzw. $\bar{x}$) annimmt, so hat die Funktion βf dort ebenfalls ein Minimum (bzw. Maximum) auf M, γf hat in $\underline{x}$ ein Maximum.

Beweis: Es ist $f(x) \geqq f(\underline{x})$ und wegen $\gamma < 0$ dann $\gamma f(x) \leqq \gamma \cdot f(\underline{x})$ für alle $x \in M$. Also nimmt $\gamma \cdot f$ das Maximum auf M bei $\underline{x}$ an. Die anderen Aussagen erhält man analog.

Folgerung: Die Funktion $g(x) = ax - x^\alpha$ mit $a > 0, \alpha > 1$ nimmt das Maximum auf $M = \{x \mid x \in R, x \geqq 0\}$ im Punkt

$\bar{x} = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ an. Es gibt genau eine Maximumstelle auf M und der Wert des Maximums ist $(\alpha - 1)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$.

Wir wollen den Verlauf einiger Funktionen für den Spezialfall $a = 1$ skizzieren:

Bild 1

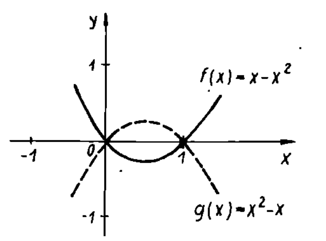


Bild 2

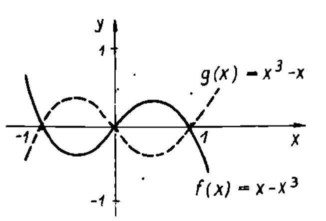


Bild 3

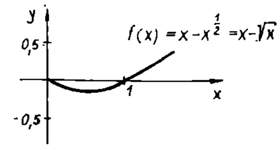


Bild 4

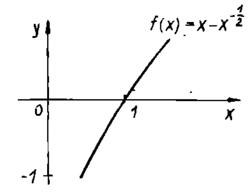
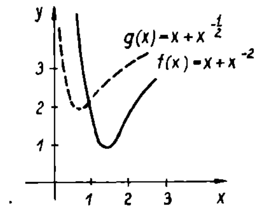


Bild 5



Die Skizzen motivieren uns zu Aussagen über Minima der Funktionen $f(x) = ax - x^\alpha$ für $\alpha > 0, 0 < \alpha < 1$ und der Funktionen $g(x) = x^\alpha + ax$ für $a > 0, \alpha < 0$ auf $M = \{x \mid x \geqq 0\}$.

Satz 6: Wenn $0 < \alpha < 1$ und $a > 0$ ist, so nimmt die Funktion $g(x) = x^\alpha - ax$ ihr Maximum auf $M = \{x \mid x \geqq 0\}$

im Punkt $\bar{x} = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ an.

Andere Maxima gibt es nicht! Die Funktion $f(x) = ax - x^\alpha$ besitzt dann im Punkt $\bar{x}$ ein Minimum auf M.

Beweis: Nach (5) ist $(1+z)^\alpha \leqq 1 + \alpha z$ für alle $z \geqq -1$. Mit $y = 1 + z$ findet man $y^\alpha \leqq 1 + \alpha(y-1)$ für alle $y \geqq 0$. Multipliziert man diese Ungleichung wieder mit $\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$, so ist

$$\left(\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} y\right)^\alpha - \alpha\left(\frac{a}{\alpha}\right)\left(\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} y\right)$$

$$\leqq (1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Setzt man $x = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} y$, folgt

$$x^\alpha - ax \leqq (1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für $z = 0$, also $y = 1$ bzw. $\bar{x} = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$

Satz 7: Wenn $\alpha < 0$ und $a > 0$ ist, nimmt die Funktion $g(x) = x^\alpha + ax$ ihr Minimum auf $M = \{x \mid x > 0\}$ im Punkt

$\underline{x} = \left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ an, andere Minimumstellen gibt es in M nicht!

Beweis: Aus der Bernoullischen Ungleichung erhält man $(1+z)^\alpha \geqq 1 + \alpha z$ für alle $z > -1$, was mit $y = 1 + z$ als $y^\alpha \geqq 1 + \alpha(y-1)$ geschrieben werden kann. Nach Multiplikation dieser Ungleichung mit der positiven Zahl $\left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ erhält man mit der Definition $x = \left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} y$ die Beziehung

$x^{\alpha} + ax \geqq (1-\alpha)\left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$, die für alle $x > 0$ gilt, weil y alle positiven reellen Zahlen durchläuft. Das Gleichheitszeichen steht wieder genau dann, wenn $y = 1$, also wenn $\underline{x} = \left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ ist.

Satz 8: Es sei $\bar{x}$ Maximumstelle von f auf M, und es gelte $M' \subseteqq M, \bar{x} \in M'$. Dann nimmt f auch auf M' das Maximum in $\bar{x}$ an. Entsprechendes gilt für das Minimum. Der Beweis ergibt sich aus der Definition von Maximum bzw. Minimum und der Inklusion $M' \subseteqq M$.

Es seien nun I und M Teilmengen von R. Auf M sei eine Funktion f und auf I eine Funktion g definiert. Es gelte $g(z) \in M$ für alle $z \in I$ und zu jedem $x \in M$ gebe es ein $z \in I$ mit $g(z) = x$. (Man nennt g eine Abbildung von I auf M.) Außerdem sei g so beschaffen, daß zu verschiedenen Argumenten auch verschiedene Bildpunkte gehören, d. h. $g(z) \neq g(\bar{z})$ für alle $z \neq \bar{z}, \bar{z} \in I$. (Man nennt dann g eine eineindeutige Funktion.)

Es werde nun eine Funktion h auf I definiert durch die Vorschrift

$h(z) = f(g(z)), z \in I$.

Satz 9: Die obigen Voraussetzungen seien erfüllt. Die Funktion h nehme im Punkt $\underline{z} \in I$ ihr Minimum (Maximum) auf I an. Dann ist $\underline{x} = g(\underline{z})$ eine Minimumstelle (Maximumstelle) von f auf M.

Wenn $\underline{z}$ eindeutig bestimmt und g eineindeutig ist, so nimmt f das Minimum (Maximum) auch nur in $\underline{x}$ an.

Beweis: Es ist $h(\underline{z}) \leqq h(z)$ für alle $z \in I$. Daher ist $f(\underline{x}) \leqq f(g(z))$ für alle $z \in I$. Weil jedes $x \in M$ Bild von g eines Punktes $z \in I$ ist, folgt $f(\underline{x}) \leqq f(x)$ für alle $x \in M$. Sei nun $h(\underline{z}) < h(z)$ für alle $z \in I$, $z \neq \underline{z}$. Wir nehmen an, daß ein $\bar{x} \neq \underline{x}$ mit $f(\bar{x}) = f(\underline{x})$ existiert. Da g eineindeutig ist, existiert ein $\bar{z} \neq \underline{z}$ mit $g(\bar{z}) = \bar{x}$. Dann wäre $h(\bar{z}) = h(\underline{z})$ und $\bar{z} \neq \underline{z}$, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Im Fall eines Maximums argumentiert man entsprechend.

3. Beispiele für Extremwertaufgaben

Beispiel 1: Es ist mit einem Faden der Länge l ein Rechteck so abzustecken, daß die Fläche des Rechtecks möglichst groß wird.

Lösung: Die Seiten des Rechtecks sollen mit x und y bezeichnet werden. Dann gilt $2x + 2y = l$, also $y = \frac{1}{2}l - x$, dabei kann x eine beliebige Zahl zwischen 0 und $\frac{l}{2}$ sein.

Für den Flächeninhalt $F = xy$ findet man demnach $F = \frac{1}{2}lx - x^2$. Wir bestimmen zuerst das Maximum von F auf $M = \{x \mid x \geqq 0\}$. Mit $\alpha = 2$ und $a = \frac{1}{2}l$ ergibt sich aus den Sätzen 4 und 5, daß der größtmögliche Wert von F für $\bar{x} = \left(\frac{l}{4}\right)^{\frac{1}{2-1}} = \frac{l}{4}$ angenommen wird.

Wegen $\frac{l}{4} \in \left\{x \mid 0 \leqq \bar{x} = \frac{l}{2}\right\}$ ist nach Satz 8 $\bar{x}$ auch Maximumstelle von F auf $\left\{x \mid 0 \leqq x \leqq \frac{l}{2}\right\}$. Es folgt $\bar{y} = \frac{l}{2} - \frac{l}{4} = \bar{x}$.

Das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt ist das Quadrat der Seitenlänge $\frac{l}{4}$.

Die Aufgabe erinnert etwas an eine Episode aus L. Tolstois Erzählung „Wieviel Erde braucht der Mensch“, siehe [1]. In dieser Erzählung will Pachom von den Baschkiren Land kaufen. Er soll für 1000 Rubel soviel Land erhalten, wie er an einem Tag zu Fuß umgehen kann, wobei Endpunkt und Ausgangspunkt zusammenfallen müssen. Pachom schreitet ein Viereck ab (aber kein Rechteck!).

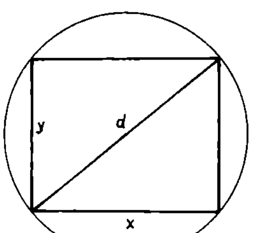
Da er seine Kräfte nicht richtig einschätzt, gelangt er nur mit derartigen Anstrengungen vor Sonnenuntergang am Startpunkt an, daß er verstirbt. Die Aufgabe L. Tolstois ist weit allgemeiner als unser Problem, weil die Klasse der zulässigen Figuren (Vergleichselemente) viel größer ist als die Klasse der Rechtecke. Sein Land kann auch krummlinig begrenzt sein, was in Beispiel 1 ausgeschlossen ist. Es könnte in der Erzählung auch die Gestalt eines Dreiecks, Trapezes oder Fünfecks haben.

Aufgabe: Gesucht ist ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt, wenn die Summe von drei Seiten dieses Rechtecks 100 m beträgt.

Lösung: Den größten Flächeninhalt erhält man, wenn die Seiten 25 m und 50 m lang sind, er beträgt 1250 m².

Beispiel 2: Der Querschnitt eines Baumes sei (idealisiert) überall ein Kreis vom Durchmesser d. Aus dem Baum soll ein Balken möglichst großer Festigkeit ausgesägt werden. Die Festigkeit F ist direkt proportional zum Produkt aus der Breite und dem Quadrat der Höhe des Balkens. Die physikalische Erkenntnis läßt sich so formulieren: Es gibt eine Materialkonstante $k > 0$, so daß $F = k \cdot x \cdot y^2$ ist.

Bild 6



Lösung: Wegen $x^2 + y^2 = d^2$ ist $F = k(d^2x - x^3)$. Die Funktion $f(x) = d^2x - x^3$ nimmt ihr Maximum auf $\{x \mid x \geqq 0\}$ bei $\bar{x} = \left(\frac{d^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ an, es ist $\bar{x} = \frac{d}{3}\sqrt{3}$, und an dieser Stelle nimmt F auch das Maximum auf $\{x \mid x \geqq 0\}$ und folglich auch auf $\{x \mid 0 \leqq x \leqq d\}$ an.

Aufgabe: In ein Dreieck mit den Seiten a, b, c und spitzen Winkeln α, β soll ein Rechteck mit Seiten x, y eingezeichnet werden, dessen eine Seite auf der Dreiecksseite c liegt und von dem zwei Eckpunkte die Seiten a bzw. b berühren. h bezeichne die Höhe auf c. Die Zeichnung ist so auszuführen, daß ein Rechteck größter Fläche entsteht!

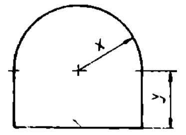
Lösung: Das flächenmäßig größte Rechteck wird bei $\bar{x} = \frac{c}{2}$, $\bar{y} = \frac{h}{2}$ erreicht. Die Analyse des Problems liefert zugleich eine Konstruktionsvorschrift.

Beispiel 3: Der Querschnitt eines Tunnels habe die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Der Umfang U dieser Figur sei vorgegeben. Bei welchem Radius x wird die Fläche am größten? (Größte Fläche bei konstantem Materialeinsatz für die Tunnelwandung.)

Lösung: Es ist $F = \frac{\pi}{2}x^2 + 2xy$ und $U = 2x + 2y + \pi x$. Es folgt $F = xU - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot x^2$. Die Einschränkungen für x sind $0 \leqq x \leqq \frac{U}{2 + \pi}$.

Eine Scheitelpunktbestimmung der quadratischen Funktion zeigt bereits, daß die Tunnelfläche für $\bar{x} = \bar{y} = \frac{U}{4 + \pi}$ bei gegebenem Umfang am größten wird.

Bild 7

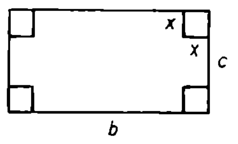


Beispiel 4: Jetzt sind wir gerüstet, um unserem Phantasiehelden Epsilon helfen zu können. Es ging ihm um die Bestimmung des Maximums der Funktion

$V(x) = 4\left(x^3 - \frac{c+b}{2}x^2 + \frac{cb}{4}x\right)$

bezüglich $0 \leqq x \leqq \min\left\{\frac{c}{2}, \frac{b}{2}\right\}$.

Bild 8



Lösung: Durch eine geeignete Substitution kann man den quadratischen Term beseitigen und unsere Sätze anwenden. Das führt zu der folgenden Betrachtung. Die Funktion

$h(z) = -\left(z^3 - \frac{c^2 - cb + b^2}{12}z\right)$ nimmt ihr Maximum auf $\{z \mid z \geqq 0\}$ im Punkt

$\bar{z} = \frac{\sqrt{c^2 - cb + b^2}}{6}$ an $\left(\text{das folgt aus Satz 4 mit } \alpha = 3,\ a = \frac{b^2 - cb + c^2}{12} > 0\right)$.

Nun überlegen wir uns anhand des Funktionsverlaufes von h (siehe Bild 2), daß $h(z) \leqq 0$ für

$0 \geqq z \geqq -\sqrt{\frac{b^2 - bc + c^2}{12}}$ und

$h(\bar{z}) = \dfrac{b^2 - bc + c^2}{12} > 0$ ist.

Also nimmt h auch das Maximum auf

$I = \left\{ z \mid z \geqq -\sqrt{\dfrac{b^2 - bc + c^2}{12}} \right\}$

im Punkt $\bar{z}$ und nur im Punkt $\bar{z}$ an.

Setze $x = \dfrac{b+c}{6} - z$, dadurch ist eine Funktion g mit $x = g(z)$ erklärt. g ist eine eineindeutige Abbildung von I auf die Menge

$M = \left\{ x \mid x \leqq \dfrac{b+c}{6} + \sqrt{\dfrac{b^2 - bc + c^2}{12}} \right\}$.

Betrachte nun

$f(x) = x^3 - \dfrac{b+c}{2} x^2 + \dfrac{bc}{4} x$.

Offenbar ist $h(z) = f(g(z))$.

Wir zeigen jetzt, daß

$M \supseteqq \left\{ x \mid 0 \leqq x \leqq \dfrac{c}{2} \right\}$ gilt, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $b \geqq c$ voraussetzen. Es ist dann nämlich

$0 \geqq c^2 - b^2 \geqq c^2 - cb - 2b^2$, also

$\dfrac{1}{3} c^2 - \dfrac{1}{3} bc - \dfrac{2}{3} b^2 \leqq 0$ und

$b^2 - bc + c^2 \geqq \dfrac{4c^2 - 4bc + b^2}{3}$. Es folgt

$\sqrt{b^2 - bc + c^2} \geqq \dfrac{|2c - b|}{\sqrt{3}}$ und

$\dfrac{\sqrt{b^2 - bc + c^2}}{2 \cdot \sqrt{3}} \geqq \dfrac{|2c - b|}{6}$ sowie

$\dfrac{b+c}{6} + \sqrt{\dfrac{b^2 - bc + c^2}{12}} \geqq \dfrac{2c - b}{6}$

$+ \dfrac{b+c}{6} = \dfrac{c}{2}$. Nach Satz 9 nimmt f das Maximum auf M in

$\bar{x} = \dfrac{b+c}{6} - \bar{z}$ an. Man erhält

$6\bar{x} = b + c - \sqrt{b^2 - bc + c^2}$ und überzeugt sich von der Beziehung $0 < \bar{x} < \dfrac{c}{2}$.

Folglich ist $\bar{x}$ auch die (einzige) Maximumstelle von V auf $\left\{ x \mid 0 \leqq x \leqq \dfrac{c}{2} \right\}$.

Spezialfälle:

$b = c \quad \bar{x} = \dfrac{1}{6}(2b - \sqrt{b^2}) = \dfrac{b}{6}$, d.h.

$\bar{x} = (2 - \sqrt{1}) \cdot \dfrac{c}{6}$

$b = 2c \quad \bar{x} = (3 - \sqrt{3}) \cdot \dfrac{c}{6}$

$b = 3c \quad \bar{x} = (4 - \sqrt{7}) \cdot \dfrac{c}{6}$

$b = 4c \quad \bar{x} = (5 - \sqrt{13}) \cdot \dfrac{c}{6}$

$b = 5c \quad \bar{x} = (6 - \sqrt{21}) \cdot \dfrac{c}{6}$

$b = 6c \quad \bar{x} = (7 - \sqrt{31}) \cdot \dfrac{c}{6}$

Ist insbesondere $b = 14$ und $c = 7$ (siehe *alpha* 2/1988), so erhält man mit dem SR 1 den Zahlenwert $x = 1{,}479\,274\,1$.

Beispiel 5: Man gebe die Maße eines oben offenen Bassins mit quadratischer Bodenfläche (und senkrecht stehenden Wänden) an, so daß bei vorgegebenem Volumen V die Gesamtfläche der Wände und des Bodens möglichst klein wird (minimaler Materialverbrauch!).

Lösung: Die Seitenlänge des Quadrates sei b und die Höhe des Bassins h. Dann gilt für das Volumen $V = b^2 h$ und für die Fläche $F = 4bh + b^2$. Ersetze $h = \dfrac{V}{b^2}$ in der Formel für F und substituiere $z = b^2$. Man erhält

$F = 4V\left(z^{-\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{4V} z \right)$. Nach Satz 7 besitzt F genau eine Minimumstelle auf $I = \{ z \mid z \geqq 0 \}$, nämlich

$\underline{z} = \left(\dfrac{2}{4V} \right)^{-\frac{2}{3}}$. Mit $g(z) = \sqrt{z}$ (eineindeutig von I auf $M = I$) folgt gemäß Satz 9, daß

$\underline{b} = \left(\dfrac{1}{2V} \right)^{-\frac{1}{3}}$ die (einzige) Minimumstelle von V auf I ist. Folglich wird die Gesamtfläche der Wände und des Bodens minimal für $\underline{b} = \sqrt[3]{2V}$ und $\underline{h} = \dfrac{1}{2} \sqrt[3]{2V}$.

Aufgabe: Durch einen Punkt mit den Koordinaten $b > 0$, $c > 0$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem ist eine Gerade so zu legen, daß aus dem positiven Quadranten ein Dreieck kleinstmöglicher Fläche herausgeschnitten wird!

Lösung: Die gesuchte Dreiecksfläche ist

$F = \dfrac{b}{2} \cdot \dfrac{x^2}{x - c}$, man setze $z = \dfrac{1}{x - c}$ bzw. $x = c + z^{-1}$ und $g(z) = c + x^{-1}$.

Transformiere $f(x) = \dfrac{x^2}{x - c}$ in $h(z) = 2c + z^{-1} + c^2 \cdot z$ und wende unsere Sätze an! Die Gerade ist durch die Punkte $(2c, 0)$ und $(0, 2b)$ zu zeichnen!

Aufgabe: In einen geraden Kreiskegel vom Radius R und der Höhe h ist ein auf der Grundfläche stehender Zylinder mit größtem Volumen einbeschrieben.
Welche Maße hat er?

Aufgabe: Aus einem Kreissektor vom Radius R soll ein Trichter gebaut werden. Bei welchem Zentralwinkel γ des Sektors hat er das größte Volumen?

Lösung: Man verwende die Substitution $z^2 = 4\pi^2 - \gamma^2$, der gesuchte Zentralwinkel ist $\bar{\gamma} = 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,\pi$.

Aufgabe: Bestimme den größten Wert der Funktion $y(x) = \sin x \cdot \sin 2x$.

Lösung: Beachte $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$ und $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, ersetze $z = \cos x$ auf einem geeignetem Intervall und überprüfe die Anwendbarkeit der Sätze. Eine Minimumstelle ist durch $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ gekennzeichnet.

W. Schmidt

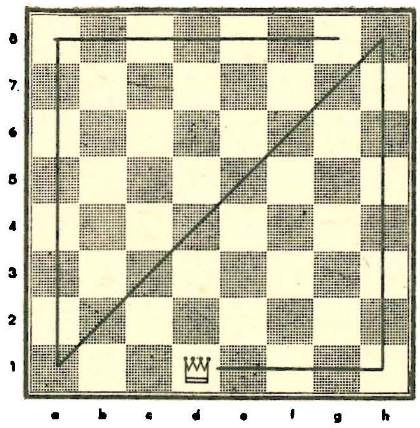
Literatur:

[1] J. I. Perelman.
Unterhaltsame Geometrie.
Volk und Wissen Berlin. 1963

[2] П. П. Коровкин. Неравенства. Популярные лекции по математике. Москва 1974

Fünfzügige Damenwanderung

Beim Schachspiel kann die Dame von ihrem Standfeld aus waagerecht, senkrecht oder diagonal beliebig weit über alle unbesetzten Felder ziehen. Aufgrund ihrer großen Beweglichkeit ist sie neben dem König die wertvollste Figur auf dem Schachbrett und Ausgangspunkt für eine Fülle von schachmathematischen Knobeleien. Aus der Vielfalt solcher Knobelaufgaben sei eine Aufgabe des englischen Rätselautors Henry E. Dudeney zu lösen. Die Dame soll in 5 Zügen vom Ausgangsfeld d1 einen möglichst langen Weg auf dem Schachbrett zurücklegen, ohne ein Feld zweimal berührt zu haben. Das abgebildete Diagramm zeigt eine sehr gute Lösung.



1. Zug:	Dd1-h1	4 Felder
2. Zug:	Dh1-h8	7 Felder
3. Zug:	Dh8-a1	$7 \cdot \sqrt{2}$ Felder
4. Zug:	Da1-a8	7 Felder
5. Zug:	Da8-g8	6 Felder
		$\approx 33{,}898$

Die Seitenlänge eines quadratischen Schachbrettfeldes wird mit 1 angenommen. Für ein diagonal überquertes Feld ergibt sich dabei die zurückgelegte Strecke aus Seitenlänge $\cdot \sqrt{2}$, also ein gerundeter Wert von 1,414. Fünf diagonal überquerte Felder bilden dadurch eine größere Wegstrecke als sieben waagerecht oder senkrecht überquerte Felder.

$5 \cdot 1{,}414 = 7{,}07 > 7 \cdot 1 = 7$

Die gezeigte Lösung ist noch nicht optimal. Wie muß der Weg der Dame verlaufen, damit die Gesamtlänge der 5 Züge ein Maximum ist? *H. Rüdiger*

Die Art, wie der vatikanische Obelisk transportiert wurde

Beim Verlag für Bauwesen, Berlin, erschien 1987 in einer dem behandelten Thema entsprechend würdigen Aufmachung als fotomechanischer Nachdruck die zweibändige Erstauflage der von Domenico Fontana 1590 verfaßten Originalschrift „Die Art, wie der vatikanische Obelisk transportiert wurde“ als Teilereprint (Band 1) mit dazugehöriger Übersetzung sowie Kommentar (Band 2).
(Bestell-Nr.: 562 376 2, Preis: 120,– M)
Dargestellt wird die herausragende technische Glanzleistung des von 1543 bis 1607 in der Amtszeit des Papstes Sixtus V. schaffenden Baumeisters und Architekten Domenico Fontana, auf den die Hebung eines Obelisken (vierkantiger, freistehender Eckpfeiler, der sich nach oben hin stark verjüngt) aus neun Metern Tiefe (Aufschüttungen der Jahrhunderte), dessen Transport vom ursprünglichen Standort (südlich der Peterskirche) zum heutigen und seine Errichtung auf dem Petersplatz in Rom im Jahre 1586 zurückzuführen sind.
In der Übersetzung und in den Kommentaren des 2. Bandes machen namhafte Kunsthistoriker sowie Technikwissenschaftler deutlich, daß Fontanas Verdienst nicht allein nur darin besteht, ein solches Unternehmen der Errichtung dieses kolossalen Monuments gewagt und erfolgreich beendet zu haben, das etwa 1 200 Jahre zuvor nicht mehr ausgeführt worden war und welches ein gerüttelt Maß an Mut und Zuversicht verlangte, weil ein Fehlschlag für die kirchlichen Auftraggeber unverzeihlich und für den Bauherren verhängnisvoll gewesen wäre. Ihm zum Ruhm gereicht vielmehr die Tatsache, eine Methode entwickelt zu haben, die es gestattete, den verschütteten Obelisken zur damaligen Zeit bereits annähernd exakt zu messen und zu wägen sowie bei Auswahl und Dimensionierung der erforderlichen Hebe- und Transportzeuge (einschließlich Bau einer entsprechenden Transporteinrichtung) sich nicht allein auf seine praktischen Erfahrungen verlassen zu haben, sondern z. B. die über jeden der eingesetzten Göpel wirkenden realen Lasten und Kräfte rechnerisch bestimmt zu haben.
D. Fontana bewies darüber hinaus ein außergewöhnliches statisches Gespür und zeichnete sich des weiteren bei der Koordinierung und Synchronisation der Muskelkraft von über 900 eingesetzten Menschen sowie 140 Pferden als Antrieb für die 40 Göpel als ein hervorragender Organisator aus. Seine Methode zur Hebung und zum Transport des Obelisken war der damaligen Zeit bereits weit voraus und wurde als eine beispielgebende technische Leistung geachtet und noch über 200 Jahre später nahezu unverändert zur Anwendung gebracht. Nachfolgende Abbildung soll einen Eindruck vom Ausmaß des gigantischen Unternehmens vermitteln.
Erst durch die Herstellung von Stahl als Werkstoff und die Nutzbarmachung anderer Energiequellen und neuer Erkenntnisse der sich entwickelnden Ingenieurwissenschaften gehörte sie schließlich der Vergangenheit an. Dennoch gilt sie auch heute noch als Beweis für die unerschöpfliche Vielfalt, Flexibilität und Kreativität der geistigen Leistungsfähigkeit der Menschen bei der Nutzung von Wissen, Erfahrungen und Ausnutzung von Naturgesetzmäßigkeiten. Auffallend an der Art und Weise der Beschreibung seiner Methode ist auch, daß Fontana großen Wert auf die Verwendung von eindeutigen Technikbegriffen legte und auf die Benutzung des ansonsten in dieser Zeit gebräuchlichen Latein verzichtete, um dadurch eine breitere Leserschaft zu erreichen. Beschrieben wird der technische Sachverhalt insgesamt in zeitgemäßer Form. In allen Einzelheiten erläutert werden die notwendigen Arbeitsgänge und auszuführenden Arbeitsschritte zur Hebung der verschütteten Gugliá (noch heute gebräuchliche volkstümliche Bezeichnung für den Obelisken) mit einem für die damalige Zeit kolossalem Gewicht von 327 Tonnen und zum Transport dieses obendrein sehr zerbrechlichen Körpers über eine Entfernung von 256,83 m sowie zur Errichtung und Justierung des Obelisken auf dem Petersplatz in Rom am 27. 09. 1586.

▲1▲ Bei der Errichtung des vatikanischen Obelisken in Rom im Jahre 1586 wurden über 900 Menschen, 140 Pferde, 40 Göpel sowie fünf 3,50 m lange Hebel eingesetzt, um die verschüttete Guglia zu heben und 256,83 m weit zu ihrem Standort auf dem Petersplatz zu transportieren.
Ein Göpel war dabei durchschnittlich mit je 3 Pferden und 16 Männern besetzt und brachte eine Zugkraft von 70 kN auf. Berechne die Größe der beim Transport insgesamt zu verrichtenden mechanischen Arbeit unter Berücksichtigung eines an jeder Winde anfallenden Reibungsverlustes von 30 %!

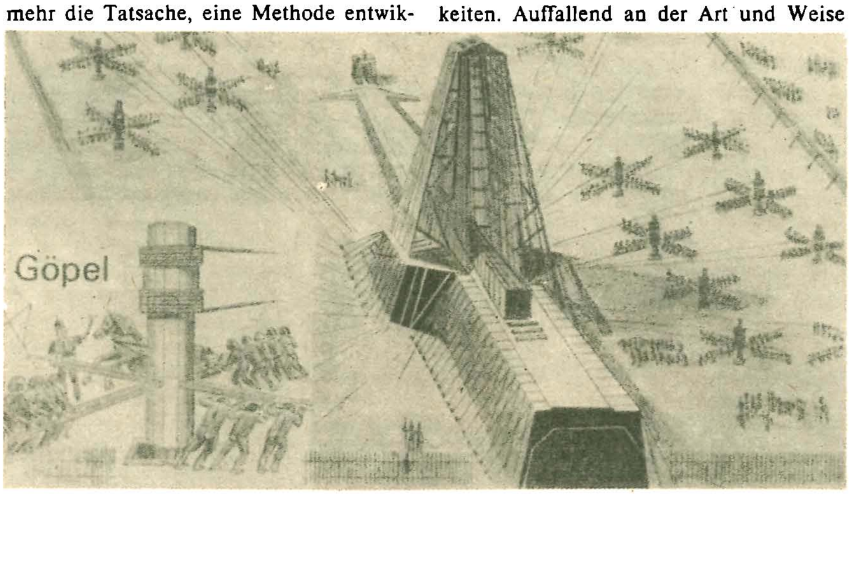
▲2▲ Für den Bau einer geeigneten Transporteinrichtung mußte Fontana den Obelisken (einen pyramidenförmigen Körper mit quadratischer Grundfläche) exakt bemessen und wägen. Durch die Messung erhielt er die folgenden Angaben:

	(Original-Maße)	(SI-Einheiten)
Breite am Fuß	$12\frac{1}{12}$ palmi	2,70 m
Breite am Ansatz der Pyramidenspitze	$8\frac{1}{12}$ palmi	1,80 m
Höhe des Obelisken (Stumpf + Spitze)	$113\frac{1}{2}$ palmi	25,35 m

Ermittle das Volumen dieses Pyramidenstumpfes!

▲3▲ Hinzu kam noch die Spitze der Guglia, die ein Volumen von 130 und $\frac{49}{72}$ palmi cubi (1 palmo cubo entspricht nach dem SI-Einheitensystem 0,011 138 m³) besaß.
D. Fontana entnahm des weiteren der verschüttgegangenen Guglia vor ihrer Hebung einen Probewürfel, bestimmte dessen Dichte von $\frac{86\ \text{Libro}}{1\ \text{palmo cubi}}$ $\left(\text{entspricht nach dem SI-Einheitensystem } 256\,\frac{\text{Tonnen}}{\text{m}^3}\right)$ und schloß daraus auf die Gesamtmasse des Obelisken.
Berechne die Gesamtmasse des Obelisken!

H.-J. Kühne



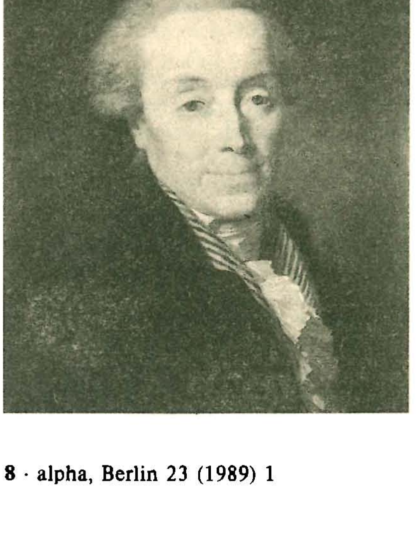
Hebegerüst zur Bergung des Obelisken

Friedrich Wilhelm von Erdmannsdorff, der Baumeister von Wörlitz

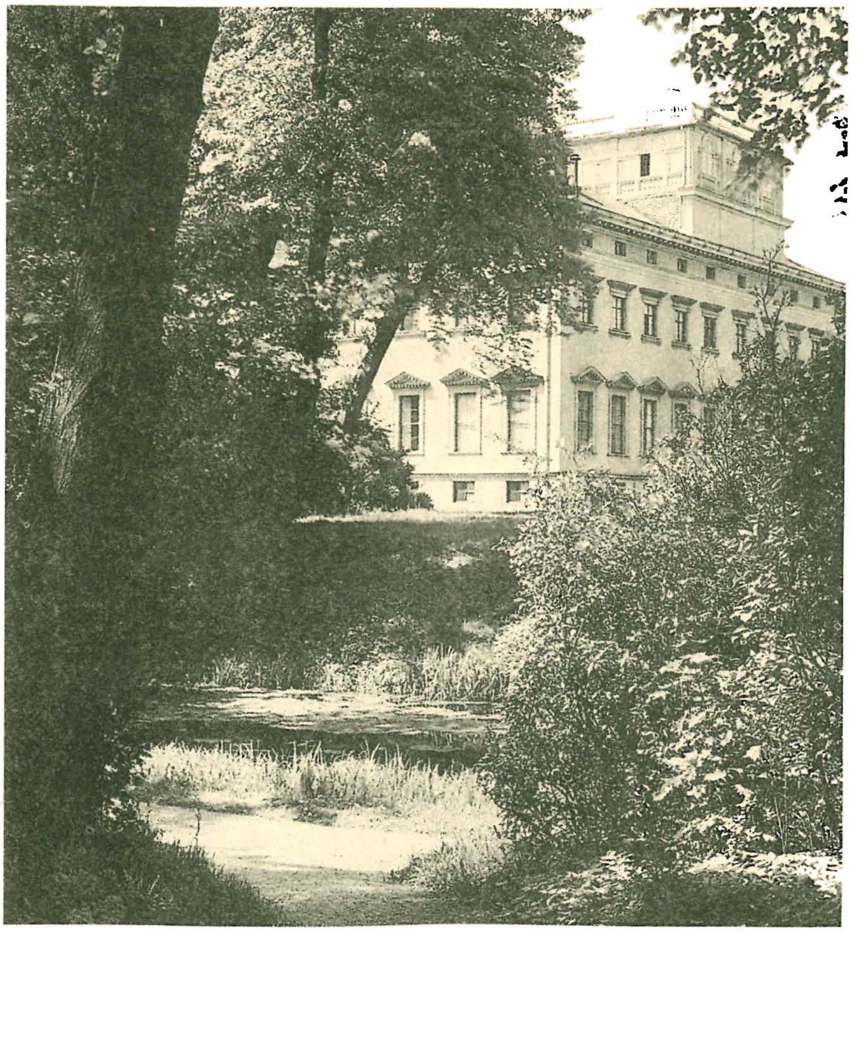
Mit diesem Beitrag möchten wir auch im Jahr 1989 unsere Serie „Auf den Spuren von Mathematikern" fortsetzen, die wir im Heft 1/84 begannen.
Dr. Schmidt und Dr. Schreiber aus Greifswald, euch sicher gut bekannt, arbeiten an einem Buchprojekt darüber. Schön wäre, wenn ihr weiter helfen würdet. Schaut euch doch in eurem Heimatbezirk genauer nach „Spuren von Mathematikern" um und vergeßt dabei nicht, daß die Mathematik vielfältig mit anderen Wissenschaften verbunden ist. Wir warten auf eure Post

Alphons

Im Jahre 1986 begingen wir den 250. Geburtstag von F. W. v. Erdmannsdorff, der am 18. Mai 1736 in Dresden geboren wurde.
Er war der Sohn eines königlichen Hausmarschalls (Vorsteher der Dienerschaft eines Hauses), verwaiste aber schon in jungen Jahren. Seine Kindheit verbrachte Friedrich Wilhelm in Dresden und nahm die spätbarocke Kultur in sich auf. Ab 1750 besuchte er hier die Ritterakademie. An dieser Ausbildungsstätte für junge Adlige wurden auch ingenieurtechnische Fähigkeiten geschult. Diese beiden Quellen erster Bildung bestimmten wohl die Wahl des jungen Studenten (ab 1754 in Wittenberg) für die Studienfächer Mathematik und Geschichte, aber auch andere, u. a. philosophische Vorlesungen besuchte er. Er erweiterte insbesondere sein theoretisches Wissen und erkannte die besondere Rolle der Mathematik zur Lösung vielfältigster praktischer Aufgaben.



Etwa im Jahre 1757 lernte F. W. v. Erdmannsdorff den Fürsten Franz von Anhalt-Dessau kennen, der den Ideen des „aufgeklärten Absolutismus", also der Verbindung von Fürstenregierung und bürgerlichen Reformen, folgte. Zu diesem Projekt fanden sich der Fürst und v. Erdmannsdorff zusammen. In den ersten Jahren wurden Pläne geschmiedet, über Kunst und Wissenschaft debattiert, Möglichkeiten der Verbesserung des Lebens der Untertanen erwogen. Dazu wurden auch mehrere Reisen unternommen.
Insbesondere zu Architekturstudien fuhr v. Erdmannsdorff 1761 nach Italien; 1763 besuchten er und der Fürst England und die Niederlande und lernten dort den „Englischen Garten" kennen, einen der Natur nachgebildeten Park, der mit dem „Französischen Garten" nichts mehr gemein hatte. Der „Englische Garten" entsprach den Ideen der bürgerlichen Aufklärung im Gegensatz zu den Ziergärten der Monarchen und zeigte das soziale Engagement seiner Schöpfer. Er brach mit der „unnatürlichen" Regelmäßigkeit und Geometrie des „Französischen Gartens". In England lernten sie auch Beispiele des englischen Klassizismus kennen. Dieser entsprach dem selbstbewußten Auftreten des englischen Bürgertums, seinen progressiven Ideen und seiner sozialen Kraft. Hier fanden sie Vorbilder für ihr Schaffen und Wirken und v. Erdmannsdorff auch die Aufgaben, zu deren Lösung sein mathematisch-naturwissenschaftliches Wissen und seine aufklärerischen Ideen einzusetzen waren.
Mit dem Jahre 1765 begann das Schaffen F. W. v. Erdmannsdorffs als Architekt. Der „Wörlitzer Park" wurde entworfen und begonnen zu bauen (beendet 1810). Ab 1765 entstanden verschiedene Bauten im Park (fast alle sind von v. Erdmannsdorff) wie auch die erste Eisenbrücke auf dem europäischen Festland. Der Wörlitzer Park fand Widerhall in ganz Europa, er bildet mit seinen Bauten eine Wende der Architekturentwicklung in Europa.
1769 begann der Bau des Wörlitzer Schlosses (beendet 1773). Dieses Schloß ist ein zweigeschossiger Backsteinbau in streng geometrischer Ausführung. Mit dieser Architektur der einfachen Formen und Proportionen der Bauelemente zueinander nach klassischem Vorbild wurde v. Erdmannsdorff zum Begründer eines neuen



Stils, des Klassizismus. Größter Wert wurde darauf gelegt, daß alles streng und einfach, aber gleichzeitig auch fein und vornehm ist. v. Erdmannsdorff berechnete die Verhältnisse der Elemente zueinander mit größter Sorgfalt. Selbst in den Einzelheiten bewies er sicheres Gefühl für Maß und Form. (Auch bei anderen Gebäuden sind neben dem ästhetischen Wert die Verhältnisse von Baukörper und Dach, Fläche und Öffnung des Mauerwerks, wie auch die Proportionen in Höhe, Breite und Tiefe zu beachten. Gleiches ist in der Lage der Achsen und Blickwinkel wie auch in der Anlage der Wege und der Verteilung der Einzelobjekte des Wörlitzer Parks zu finden.) 1786 gestaltete er Räume von Sanssouci und des Berliner Schlosses, kehrte aber nach Dessau zurück, baute 1793 die Orangerie und 1798 das Theater in Dessau (1855 abgebrannt). Dazwischen wurde 1794 das Magdeburger Theater nach seinen Plänen gebaut.

Am 9. 3. 1800 starb Friedrich Wilhelm von Erdmannsdorff in Dessau und wurde auf dem von ihm geschaffenen Friedhof begraben.

Auf der Grundlage mathematisch-naturwissenschaftlicher und aufklärerisch-humanistischer Bildung bemühte er sich um die Veränderung des menschlichen Lebens. Er hatte aktiven Anteil an der Entwicklung von Theater, Musik und Kunst. Die Landwirtschaft wurde reformiert, die Buch- und Zeitschriftenproduktion erreichte eine Blüte, die Steuern wurden gemindert. Vor allem aber wurde das Schulwesen reformiert und vorbildlich für Deutschland; neben der Einheitsschule gab es Lehrerseminare, auf der Grundlage einer von v. Erdmannsdorff erbauten Volkssportstätte wurde die Turnkunst begründet. So erblühte in Dessau-Wörlitz ein Kulturzentrum des 18. Jahrhunderts, woran Friedrich Wilhelm von Erdmannsdorff entscheidenden Anteil hatte.

D. Bauke

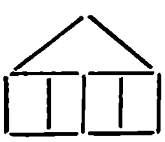
Aufgaben zu Erdmannsdorff

▲1▲ In einem Park sollen n Bauwerke errichtet werden.

a) Wie viele Wege sind zu planen, wenn alle Bauwerke durch verschiedene Wege verbunden sein sollen?

b) Mit wieviel Kreuzungen kommt man bei $n = 4$; 5; 6 bzw. 7 Bauwerken aus?

▲2▲ (E. I. Ignatjew) Lege aus Stäbchen einen griechischen Tempel! Aufgabe: Lege 4 Stäbchen so um, daß 15 Quadrate entstehen!



▲3▲ Ein Garten (konvexe Fläche) wird durch n Wege (Geraden), die nicht zusammenfallen, in mindestens $n + 1$ Teilflächen zerlegt. In wieviel Teilflächen kann die Ausgangsfläche maximal zerlegt werden?

Knifflige Sachen per Post

▲1▲ Von den Schülern einer 8. Klasse gehören genau $\frac{3}{5}$ dem Schulchor und genau $\frac{7}{10}$ der Schulsportgemeinschaft (SSG) an. Genau $\frac{2}{5}$ der Anzahl aller Schüler dieser Klasse sind sowohl Mitglied des Chores als auch Mitglied der SSG.

Berechnet, der wievielte Teil der Anzahl aller Schüler dieser Klasse weder im Chor noch in der SSG ist!

▲2▲ In der Zahl *378* sind anstelle der beiden * Ziffern zu setzen, so daß die entstandene Zahl durch 72 teilbar ist.

Es sind alle Möglichkeiten anzugeben!

▲3▲ Ein Klempner fertigt einen würfelförmigen, oben offenen Blechbehälter an, der 50 l Wasser faßt.

Wieviel m^2 Blech werden zur Anfertigung gebraucht? (Von Überlappungen und Verschnitt soll abgesehen werden.)

▲4▲ Beweise, daß der halbe Umfang eines beliebigen Dreiecks stets größer ist als jede seiner Seiten!

▲5▲ Die bei der Trocknung der Weintrauben erhaltenen Rosinen stellen 32 % der Trauben dar. Aus welcher Masse Trauben erhält man 2 kg Rosinen?

▲6▲ Untersuche, ob die Zahlen
2 438 195 760
3 785 942 160
4 753 869 120
4 876 391 520
durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 oder 18 ohne Rest teilbar sind!

▲7▲ Gibt es eine Zahl, die bei der Division durch 3 den Rest 1 ergibt, bei der Division durch 4 den Rest 2, bei der Division durch 5 den Rest 3, bei der Division durch 6 den Rest 4?

▲8▲ Berechne!

$$\frac{1}{3} : \frac{2}{3} + 0{,}228$$

$$:\left[\left(1{,}5291 - \frac{14{,}53662}{3 - 0{,}095} \cdot 0{,}305\right) : 0{,}12\right]$$

▲9▲ Die Kante eines Würfels habe die Länge $a_1 = 2$ cm, die eines anderen Würfels die Länge $a_2 = 6$ cm.

Berechne das jeweilige Verhältnis der Kantenlängen, der Oberflächen und der Rauminhalte dieser beiden Würfel! Verallgemeinere!

▲10▲ Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H und der Kantenlänge 4 cm. Von ihm werde durch einen ebenen Schnitt durch die Punkte I, K, L eine Ecke abgeschnitten, wobei I der Mittelpunkt von AE, K der Mittelpunkt von EF und L der Mittelpunkt von EH ist. Zeichne ein Netz des Restkörpers!

Diese Aufgaben stammen aus dem Arbeitsmaterial des Bezirksklubs Junger Mathematiker Halle. Thomas Miehe, ein Mitglied, sandte sie ein. Wir baten ihn, über seine Tätigkeit im Klub zu berichten.

Ich bin seit der 7. Klasse Mitglied des Bezirksklubs Junger Mathematiker. Dieser Klub hat seinen Sitz in der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg. Der Bezirksklub ist ein Korrespondenzzirkel, dessen Arbeit wie folgt läuft:

Gemeinsam mit anderen Schülern des Bezirkes wurde ich vom Klub ausgewählt, mit dem Ziel, unsere mathematischen Kenntnisse zu erweitern. Ich erhielt am Schulbeginn der 7. Klasse einen Brief, in dem ich zum Mitglied des Klubs ernannt wurde und noch Arbeitsmaterial. Es umfaßt 100 Aufgaben, unterteilt in sechs Komplexe. Jeden Monat mußte ich dann mindestens drei Aufgaben lösen, jedesmal aus einem anderen Komplex und die Lösungen dem Bezirksklub schicken. Die Aufgaben sind verschiedenartig, so z. B. sind Logik-Aufgaben, Aufgaben der elementaren Zahlentheorie sowie Aufgaben der darstellenden Geometrie und der Planimetrie enthalten.

Die Lösungen werden in Halle kontrolliert, eventuell berichtigt und dem Schüler mit einem Vermerk zurückgeschickt. Ich konnte schon sehr gute Ergebnisse vorweisen. Haben wir alle Aufgaben gelöst, treffen wir uns alle im Mai zu einer Auswertung. Dort besprechen wir unsere erreichten Ergebnisse. Außerdem lernen wir dort weitere mathematische Probleme kennen und beschäftigen uns auch mit dem Computer.

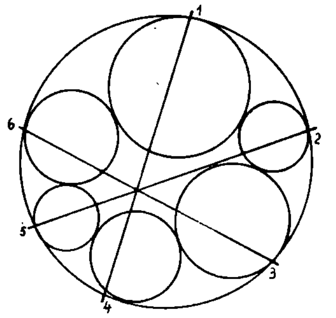
Dieses Jahr geht es weiter und ich hoffe, daß ich wieder so viel Freude am Lösen der Aufgaben habe wie voriges Jahr.

Th. Miehe

Eine Eigenschaft von sieben Kreisen

Erkennst du nur durch Betrachten des Bildes 1, von welcher geometrischen Eigenschaft hier ein Beispiel gegeben wird?

Bild 1



Einer der sieben Kreise spielt eine besondere Rolle. Wir nennen ihn den Hauptkreis. Die anderen sechs berühren alle den Hauptkreis, außerdem bilden die sechs eine geschlossene Kette von sechs aufeinanderfolgenden, sich berührenden Kreisen. Numerieren wir die Berührungspunkte mit dem Hauptkreis von 1 bis 6, und ziehen wir die Geraden 1–4, 2–5 und 3–6, dann gehen diese drei Strecken alle durch den gleichen Punkt!

Wir finden, daß das eine beachtenswerte Eigenschaft ist. Das Überraschendste daran ist vielleicht noch der Fakt, daß diese Eigenschaft erst 1971 zum erstenmal erkannt wurde (C. J. A. Evelyn/G. B. Money-Coutts/J. A. Tyrell: Die Sieben-Kreise-Theorie und andere neue Theorien; 1974).

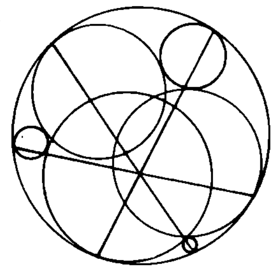
Und das, obwohl diese Art einfacher Planimetrie doch schon Tausende Jahre durch sehr viele untersucht wurde. Sollte es dann vielleicht doch noch mehr nicht entdeckte Eigenschaften geben, Eigenschaften, die ein Laie mehr oder weniger zufällig finden könnte?

Ein Beispiel wovon?

Das Bild 1 stellt nur ein Beispiel der beschriebenen Eigenschaft dar, es gibt auch andere Fälle. Wenn man jetzt die anderen Figuren betrachtet, bekommt man eine Vorstellung davon, was noch alles möglich ist.

Bild 1 ist die einfachste, weil die sechs „Ketten-Kreise" sich nur berühren und nirgends überschneiden. Daß Überschneidungen auch vorkommen können, sieht man in Bild 2. Die Kette von sechs sich berührenden Kreisen fällt nicht sofort ins Auge, ist aber bei näherer Betrachtung deutlich zu sehen.

Bild 2



Außerhalb des Hauptkreises

Die Kreiskette kann ebensogut die Außenseite des Hauptkreises berühren (Bild 3) und gemischte Varianten sind in den Bildern 4, 5 und 6 abgebildet.

Bild 3

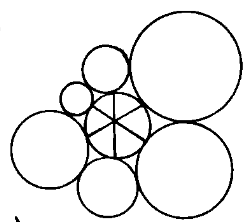


Bild 4

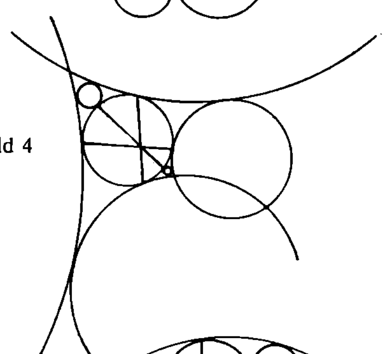


Bild 5

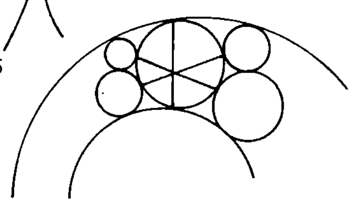
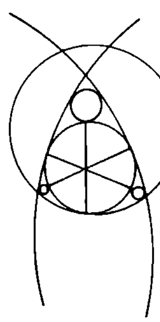


Bild 6



Die größten Kreise sind nur teilweise gezeichnet. Einige sind so groß geworden, daß sie bald den Grenzfall der Geraden erreicht haben. (Kreisdurchmesser wird unendlich groß, daraus folgt, daß der Kreisumfang zur Geraden wird.) Sie liegen dann mit der Kreisfläche vom Hauptkreis sowohl nach innen als auch nach außen gekehrt, um den Hauptkreis. Auch der Grenzfall selbst, in dem der Mittelpunkt des Kreises „im Unendlichen" liegt, und der Umfang eine Gerade ist, darf nicht fehlen (Bild 7).

Bild 7

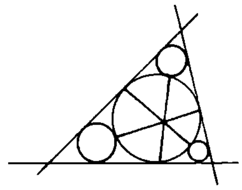
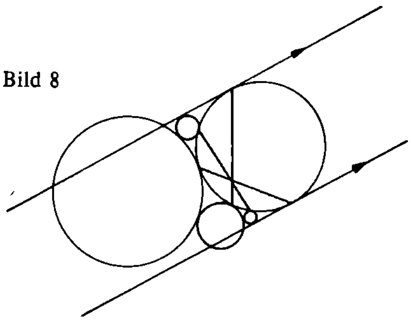


Bild 8



Bei Bild 8 ist es noch ausgefallener. Dort berühren sich zwei solcher Geraden-Kreise. Wir können aber diesen Berührungspunkt selbst nicht zeichnen, da er auch unendlich weit weg liegt. Die Eigenschaft der drei Verbindungslinien um Hauptkreis gilt noch immer!

Noch verwickelter

Auch in den Bildern 9, 10 und 11 ist noch immer die Sprache von einer Kette von sechs Kreisen, jeder berührt zwei Nachbarn und den Hauptkreis. Es wird deutlich, daß der gemeinsame Schnittpunkt der drei Verbindungslinien auch einmal außerhalb des Hauptkreises liegen kann.

Bild 9

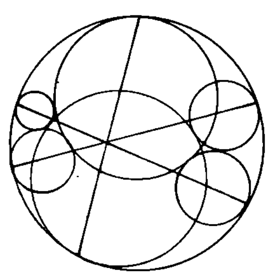


Bild 10

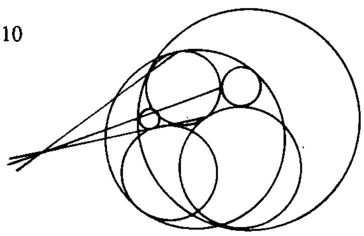


Bild 11

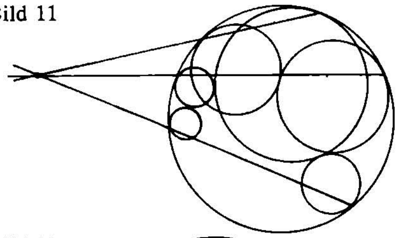
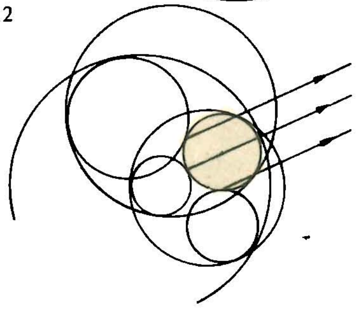


Bild 12



Im Fall von Bild 12, wo die Verbindungslinien zu drei Parallelen geworden sind, liegt dieser Schnittpunkt im Unendlichen.

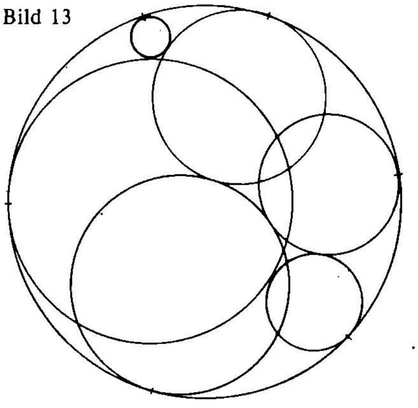
Hat es Sinn, nach einem Beweis zu suchen?

Ich kann mich den Lesern anschließen, die auf diese Frage reagieren mit: Ist das jetzt nötig? Die Eigenschaft selbst ist beachtenswert und fesselnd; alle Varianten lassen deutlich erkennen, daß es tatsächlich immer zutrifft. Schon zwölf mal! Verzichten wir also an dieser Stelle darauf.

Oder ... trifft Bild 13 nicht zu?

Zum Schluß eine kleine Zeichenaufgabe. Betrachte Bild 13.

Bild 13



Du siehst dort wieder einen Hauptkreis mit sechs darin befindlichen Ketten-Kreisen, wobei jeder Kreis zwei andere berührt und alle sechs den Hauptkreis. Numeriere die Berührungspunkte mit dem Hauptkreis von 1 bis 6, übereinstimmend mit der Reihenfolge der Kreise in der Kette. Wo du mit 1 beginnst, und in welcher Richtung, tut nichts zur Sache (das war auch in den vorangegangenen Figuren nicht wichtig). Verbinde jetzt wieder 1 mit 4, 2 mit 5 und 3 mit 6 und suche den gemeinsamen Schnittpunkt... Probier das auch mit den Bildern 14 und 15.

Bild 14

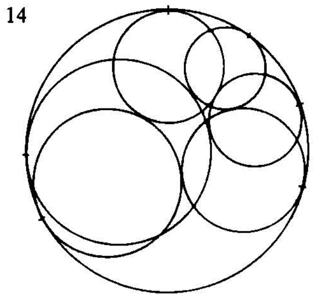
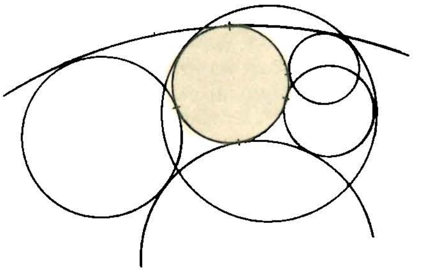


Bild 15



H. Pot

Eine Übersetzung aus der Niederländischen Mathematischen Schülerzeitschrift „Pythagoras".

Rund um die Zahl 1989

▲1▲ In einem Quader mit den Grundkanten 432 mm und 1701 mm mißt die Raumdiagonale 1989 mm. Wie hoch ist der Quader?

▲2▲ Um von der Schule zum Sportplatz zu gelangen, ist zuerst ein gerader Weg von 1836 m bis zu einer Brücke und nochmals ein gerader Weg im rechten Winkel dazu über die Brücke von 765 m zurückzulegen. Durch eine neue Brücke soll eine Direktverbindung hergestellt werden. Wie lang ist dieser neue Weg? Wieviel Meter Ersparnis ergeben sich?

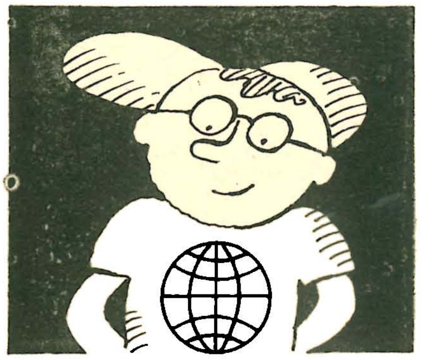
▲3▲ Wie viele verschiedene Quader mit ganzzahligen von 1 verschiedenen Kantenlängen gibt es, deren Rauminhalt 1988 cm³ ausmacht?
Gib alle Möglichkeiten an!

▲4▲ Stelle die Jahreszahl 1989
a) als Summe von zwei,
b) als Summe von drei,
c) als Summe von sechs,
d) als Summe von 9 natürlichen aufeinanderfolgenden Zahlen dar!

▲5▲ Die Mutter einer Familie stellt fest, daß die Summe der ganzzahligen Lebensalter ihrer vier Kinder ihrem eigenen Alter entspricht. Der Vater sagt dazu: „Wenn man die vier ganzzahligen Lebensalter der Kinder miteinander multipliziert, erhält man die Jahreszahl 1989." Wie alt ist die Mutter? Wie alt sind die Kinder?

▲6▲ Wie viele vierziffrige verschiedene Zahlen lassen sich aus den Ziffern der Jahreszahl 1989 bilden? Wie heißen sie?

H. Förg, Schwaz (Österreich)



▲1▲ We place in a box, 1987 white marbles and 7891 black marbles.
We also have 1000 black marbles outside the box. We remove two marbles from the box. If they have different colours, we put the white one back in the box. If they have the same colour, we put a black marble into the box. We continue doing this until only one marble is left. What is its colour?

aus: Parabola, Kensington

▲2▲ Решите арифметический ребус, изображенный на рисунке. (Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные.)

aus: Quant, Moskau

▲3▲ Le compteur d'une voiture indique 126 km lorsque la distance réellement parcourue est 118 km. Quelle est la distance réellement parcourue lorsque le compteur marque 550 km?

H.

▲4▲ Коля купил в буфете 3 пакетика ирисок. Витя – 2 пакетика. Когда пришел в буфет Алеша, ирисок уже не было. Друзья разделили купленные ириски поровну. Выяснилось, что Алеша должен друзьям 25 копеек. Сколько стоил пакетик ирисок и сколько Алеша должен Коле, а сколько – Вите?

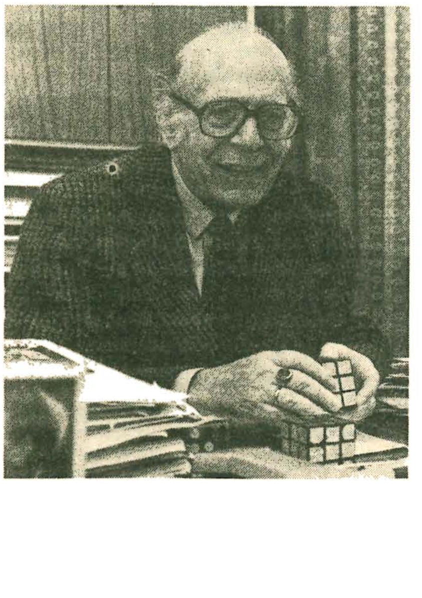
aus: Quant, Moskau

Zehnter Band im „Teubner-Archiv zur Mathematik“

Im Sommer 1860 begann der Berliner Mathematikprofessor Ernst Eduard Kummer seine berühmte Gedächtnisrede auf den verstorbenen Peter Gustav Lejeune Dirichlet mit den Worten: „Es ist nicht zehn Jahre her, daß die drei Männer, denen unser deutsches Vaterland eine neue Blüthenperiode der mathematischen Wissenschaften verdankt, Gauß, Jacobi und Dirichlet noch lebten und noch thätig arbeiteten ... Unsere Akademie hatte damals das Glück, zwei dieser hervorragenden Männer als aktive Mitglieder zu besitzen, Jacobi und Dirichlet ...“. Dirichlet war 1855 als Nachfolger von Gauß nach Göttingen berufen worden. Seinen frei werdenden Berliner Lehrstuhl hatte er aber noch mit dem Kandidaten seiner Wahl besetzen können, nämlich mit Kummer. Ebenfalls 1855 war Kummers Schüler Leopold Kronecker in die preußische Metropole übergesiedelt, und schon ein Jahr später bewirkte Kummer, daß auch der talentierte Karl Weierstraß in Berlin lehren konnte. Vom erfolgreichen Wirken der drei Mathematiker Kummer, Kronecker, Weierstraß sind wesentliche Impulse für die Wissenschaftsentwicklung ausgegangen, und der heutige Leser findet authentische Informationen über den Wissenschaftsbetrieb der damaligen Zeit in dem soeben veröffentlichten Buch „Nachrufe auf Berliner Mathematiker des 19. Jahrhunderts“. Dieser zehnte Band des in Leipzig erscheinenden „Teubner-Archivs zur Mathematik“ enthält fotomechanische Nachdrucke der klassischen Gedächtnisreden auf Jacobi von Dirichlet, auf Dirichlet von Kummer, auf Kummer von Hensel, auf Kronecker von Frobenius und auf Weierstraß von Hilbert. Herausgeber ist NPT Prof. Dr. H. Reichardt, Berlin. Als langjähriger Direktor an den Mathematischen Instituten der Humboldt-Universität sowie der Akademie ist Professor Reichardt der berufene Herausgeber solch eines Buches, das jedoch keineswegs nur Nachdrucke enthält. Fotos, Register und Faksimiles bisher unveröffentlichter Archivalien komplettieren die Edition. Beispielsweise kommt aus dem Berliner Universitätsarchiv Jacobis handschriftlicher Antrag aus dem Jahre 1825 auf Zulassung zur Habilitation zum Abdruck. Aus dem Akademiearchiv werden ein Brief von Dirichlet an Kummer und ein vierseitiges Schreiben von Weierstraß an Schwarz publiziert. Das Archiv der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina in Halle (Saale) stellte freundlicherweise einen von Kronecker 1884 handschriftlich ausgefüllten Fragebogen zur Verfügung, auf dem sowohl wichtige biographische Daten als auch umfangreiche Angaben zu Kroneckers Schriften vermerkt sind. Übrigens erwähnt Professor Reichardt im Vorwort zu diesem Band, daß er während seiner Berliner Semester 1928 bis 1931 wesentliche Anregungen aus den zahlentheoretischen Vorlesungen von I. Schur, dem großen Schüler und Nachfolger von G. Frobenius, empfangen hat. Bereits 1957 gab Professor Reichardt im Teubner-Verlag Leipzig einen großformatigen Gauß-Gedenkband heraus, und so ist es sicher nicht verwunderlich, daß er an dem 1984 begründeten „Teubner-Archiv zur Mathematik“ von Beginn an maßgeblich mitwirkt:

„Gaußsche Flächentheorie, Riemannsche Räume und Minkowski-Welt“ hieß der erste Titel der neuen Reihe. Diese Schrift wird vom renommierten „Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete“, einer international führenden Rezensionszeitschrift, in der regelmäßig Neuerscheinungen aus aller Welt besprochen werden, als ein Buch charakterisiert, welches „in hervorragender Weise zur Rückbesinnung auf die Quellen der modernen Mathematik anregt“. Die „Internationalen Mathematischen Nachrichten“ aus Wien sprechen von einer Edition, die „in keiner wissenschaftlichen Bibliothek fehlen sollte“. „wissenschaft und fortschritt“ hebt hervor, daß im neuverfaßten kommentierenden Anhang klassische Arbeiten „historisch eingeordnet und ihre Bedeutung für die Entwicklung der Geometrie gewürdigt werden“. Thematisch eng verwandt mit diesen differentialgeometrischen Beiträgen von Gauß, Riemann und Minkowski sind die im vierten Archiv-Band zusammengestellten klassischen Stücke zur nicht-euklidischen Geometrie. Hierbei handelt es sich um heute nur noch in wenigen Bibliotheken einsehbare Texte aus dem 19. Jahrhundert. Das Buch enthält zusätzlich einen vollständigen Wiederabdruck von H. Reichardts erfolgreicher Schrift „Gauß und die nicht-euklidische Geometrie“, die seit Jahren im Buchhandel vergriffen war, Fotos und unveröffentlichte Archivalien. „Eine spannende Präsentation, bereichert durch Originalarbeiten“, schreibt der „Wissenschaftliche Literaturanzeiger“, und nach Einschätzung des oben schon zitierten „Zentralblatts für Mathematik und ihre Grenzgebiete“ ist die Publikation „für jeden geometrisch Interessierten, besonders auch für jeden Studenten der Mathematik, eine zugleich mit hohen Belehrungen und Genüssen verbundene Lektüre“.

NPT Prof. Dr. Hans Reichardt, Berlin
(geb. am 2. April 1908 in Altenburg)



Betrachtet man das *nachstehende* Verzeichnis aller seit 1984 erschienenen Bände, dann wird deutlich, daß auch die Herausgabe unveröffentlichter mathematischer Texte von Anfang an ein Grundanliegen der Reihe ist: G. Herglotz’ oft zitierte, bisher jedoch noch nicht gedruckte Göttinger Vorlesung über die Mechanik der Kontinua konnte dadurch erstmals 1985 in Leipzig erscheinen. Es folgte die Vorlesung „Funktionentheorie in geometrischer Behandlungsweise“, mit der F. Klein 1880 seine Leipziger Lehrtätigkeit begonnen hatte, und schließlich K. Weierstraß’ „Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre“, gehalten im Sommersemester 1886 an der Berliner Universität.

Vielleicht wird sich mancher Leser verwundert fragen, ob unveröffentlichte Manuskripte aus dem vorigen Jahrhundert denn heute überhaupt noch von wissenschaftlichem Interesse sind und auf welchen Wegen sie letztendlich zur Publikation gelangen. Allgemeingültige Antworten gibt es naturgemäß nicht, aber beispielsweise wurden G. Herglotz’ Vorlesungen der Jahre 1926 und 1931 dem Teubner-Verlag von amerikanischen Mathematikern angeboten. Einer der beiden Herausgeber war früher selbst Assistent bei Herglotz gewesen. Vom technisch schwierig zu bewältigenden, weil sehr viele Formeln enthaltenden Manuskript ließ der Verlag dann eine maschinenschriftliche Fassung anfertigen – seinerzeit übrigens in Prag –, und nach Abschluß aller Korrekturen dienten diese zweihundertfünfzig reproduktionsfähigen Seiten als Vorlage für den Offsetdruck. Zweieinhalb Jahre nach seinem Erscheinen war der Band bereits vergriffen, und Rezensenten internationaler Fachzeitschriften bescheinigen, daß das Buch „auch heute noch Anregungen für die Forschung“ gibt, daß der Leser erstaunt sein wird „über die Informationsdichte“ und es sehr zu begrüßen sei, „daß die berühmten Vorlesungen über die Mechanik der Kontinua von Gustav Herglotz jetzt erschienen sind“.

Hingegen lagen der Edition von F. Kleins Funktionentheorie zwei handschriftlich verfaßte Hefte zugrunde, die in der Bibliothek der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig erhalten geblieben sind. Durch Verwendung weiterer Archivalien, nicht zuletzt auch der in Göttingen aufbewahrten eigenhändigen Vorlesungsvorbereitung Kleins, war es dem Herausgeber möglich, den Text zu rekonstruieren und erstmals eine umfassende Publika-

tion dieser Vorlesung vorzulegen (vgl. „alpha" 21 (1987) 3, S. 72).
Doch auch zu wichtigen Jubiläen erscheinen Titel im „Teubner-Archiv zur Mathematik". 1884 druckte Teubner den letzten Teil von G. Cantors grundlegender Abhandlung „Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten". Genau einhundert Jahre später sind jene Arbeiten, mit denen Cantor zum Begründer der Mengenlehre und der mengentheoretischen Topologie wurde, wieder allgemein zugänglich: als fotomechanische Nachdrucke der Originalausgaben, herausgegeben und kommentiert von Prof. Dr. G. Asser.
Dem 175jährigen Firmenjubiläum des traditionsreichen Leipziger Wissenschaftsverlages (vgl. „alpha" 20 (1986) 2, S. 42 bis 43) ist die Neuherausgabe von F. Kleins Vorlesung „Riemannsche Flächen" gewidmet, während das Doppeljubiläum einer relativ jungen mathematischen Disziplin der äußere Anlaß für die Konzipierung, Erarbeitung und Edition des sechsten Archiv-Bandes 1986 war. Dieser enthält zwei Graphentheorie-„Klassiker": Leonhard Eulers Beitrag über das Königsberger Brückenproblem (1736), die erste Arbeit über eine graphentheoretische Frage, und das erste Buch zur Graphentheorie, nämlich Dénes Königs „Theorie der endlichen und unendlichen Graphen" (1936). Herausgeber und Verfasser des aktuellen kommentierenden Anhangs ist Prof. Dr. H. Sachs. Ein glücklicher Umstand war es, daß sogar ein früherer Schüler Königs als Autor für einen biographischen Beitrag über den Begründer der Graphentheorie gewonnen werden konnte, und zwar der Budapester Mathematiker Prof. Dr. T. Gallai. Das Buch komplettieren bisher unveröffentlichte Auszüge aus einem von D. König handschriftlich angefertigten und in der Bibliothek des Mathematischen Instituts der Ungarischen Akademie der Wissenschaften erhaltenen Notizheftes vom Wintersemester 1904/05.
Auch diese Jubiläumsedition legte der Verlag termingerecht vor, d. h. genau fünfzig Jahre nach Königs Buch und zweihundertfünfzig Jahre nach Eulers Arbeit.
Weitere Titel sind bereits in der Produktion oder in Vorbereitung: Abhandlungen von D. Hilbert, E. Schmidt, G. Peano und 1989 auch ein Band mit ausgewählten Arbeiten H. Minkowskis, gewidmet dem 125. Geburtstag dieses großen Forschers.
Neben originalgetreuen Nachdrucken klassischer, heute schwer zugänglicher Beiträge und der Herausgabe unveröffentlichter Vorlesungen ist für die 90er Jahre erstmals die Edition von Briefen namhafter Mathematiker vorgesehen. Stets werden jedoch nicht nur Texte aus früherer Zeit gedruckt, sondern – in Abhängigkeit vom jeweiligen Thema – auch neuverfaßte einleitende Bemerkungen, Ergänzungen bzw. Kommentare, kurze biographische Anmerkungen, Übersetzungen ins Deutsche, Fotos, Autographen, Dokumente, Abbildungen historischer Titelseiten, Namen- und Sachverzeichnis.
Dies alles erfordert enge, langfristig angelegte Zusammenarbeit mit Wissenschaftlern, Bibliotheken und Archiven. So entstammen beispielsweise die mehr als einhundert Fotos der ersten zehn Bände wissenschaftlichen Einrichtungen oder privaten Sammlungen aus Berlin, Budapest, Bukarest, Djursholm, Düsseldorf, Erlangen, Göttingen, Greifswald, Halle, Jena, Leipzig, Montréal, Oberwolfach.
Abschließend sei hier auf zwei umfangreiche Buchprojekte verwiesen, die der Teubner-Verlag zusätzlich zu den regelmäßig erscheinenden Archiv-Bänden vorlegen wird: In Vorbereitung ist die etwa neunhundert Druckseiten umfassende Edition „Bernhard Riemanns gesammelte mathematische Werke, wissenschaftlicher Nachlaß und Nachträge", herausgegeben von Prof. Dr. R. Narasimhan, Chicago. Und anläßlich des 500. Geburtstages von Adam Ries 1992 wird die noch immer unveröffentlichte, vom Annaberger Rechenmeister handschriftlich verfaßte „Coß" erstmals gedruckt, ergänzt durch einen Kommentarband, den zur Zeit die beiden Herausgeber Prof. Dr. H. Wußing, Leipzig, und Prof. Dr. W. Kaunzner, Regensburg, erarbeiten. Darüber wird „alpha" später noch ausführlicher berichten.
Zu Beginn unseres Jahrhunderts war Teubner der international führende Mathematikverlag. Seit 1984 ist zur Herausgabe aktueller Monographien, bewährter Hochschullehrbücher sowie populärwissenschaftlicher Schriften die Edition klassischer mathematischer Texte hinzugekommen. Das Leipziger Verlagshaus setzt mit dieser thematischen Erweiterung des Mathematikprogramms eigene positive Traditionen fort, leistet zugleich aber auch einen Beitrag zur Erschließung, Pflege und Nutzung wissenschaftlichen Erbes.

J. Weiß

Band 1

C. F. Gauß / B. Riemann / H. Minkowski

Gaußsche Flächentheorie, Riemannsche Räume und Minkowski-Welt

Teubner-Archiv zur Mathematik

1984, Herausgegeben und mit einem Anhang versehen von J. Böhm, Jena, und H. Reichardt, Berlin

Band 2: G. Cantor
Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten
Arbeiten zur Mengenlehre aus den Jahren 1872 bis 1884
1984; Herausgegeben und kommentiert von G. Asser, Greifswald

Band 3: G. Herglotz
Vorlesungen über die Mechanik der Kontinua
1985; Ausarbeitung von R. B. Guenther, Corvallis, und H. Schwerdtfeger, Montréal, mit einem Geleitwort von H. Beckert, Leipzig

Band 4: H. Reichardt
Gauß und die Anfänge der nichteuklidischen Geometrie
1985; Mit Originalarbeiten von J. Bolyai, N. I. Lobatschewski und F. Klein

Band 5: F. Klein
Riemannsche Flächen
Vorlesungen, gehalten in Göttingen 1891/92
1986; Herausgegeben und kommentiert von G. Eisenreich, Leipzig, und W. Purkert, Leipzig

Band 6: D. König
Theorie der endlichen und unendlichen Graphen
Mit einer Abhandlung von L. Euler
1986; Herausgegeben und mit einem Anhang versehen von H. Sachs, Ilmenau, mit einem biographischen Anhang von T. Gallai, Budapest; mit einem Geleitwort von P. Erdös, Budapest

Band 7: F. Klein
Funktionentheorie in geometrischer Behandlungsweise
Vorlesung, gehalten in Leipzig 1880/81
1987; Herausgegeben, bearbeitet und kommentiert von F. König, Leipzig; mit einem Geleitwort von F. Hirzebruch, Bonn

Band 8: C. Neumann, F. Klein, S. Lie, F. Engel, F. Hausdorff, H. Liebmann, W. Blaschke, L. Lichtenstein
Leipziger mathematische Antrittsvorlesungen
Auswahl aus den Jahren 1869 bis 1922
1987; Herausgegeben und mit einem Anhang versehen von H. Beckert, Leipzig, und W. Purkert, Leipzig

Band 9: K. Weierstraß
Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre
Vorlesung, gehalten in Berlin 1886
Mit der akademischen Antrittsrede, Berlin 1857 und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstraß aus den Jahren 1870 bis 1880/86
1988; Herausgegeben, kommentiert und mit einem Anhang versehen von R. Siegmund-Schultze, Berlin; mit einem Geleitwort von K.-R. Biermann, Berlin

Band 10:
Nachrufe auf Berliner Mathematiker des 19. Jahrhunderts
C. G. J. Jacobi, P. G. L. Dirichlet, E. E. Kummer, L. Kronecker, K. Weierstraß
Mit Fotos, Dokumenten und Archivalien
1988; Herausgegeben von H. Reichardt, Berlin

Master Mind – beliebtes Spiel bei jung und alt

1. Einführung

Das Spiel „Master Mind" wurde von dem Angestellten der israelischen Post, Mordeachi Meirovich, erfunden und erstmals 1971 auf der Spielzeugmesse in Nürnberg ausgestellt. Dort entdeckte es ein Mitarbeiter von „Invicta Plastic", ein Unternehmen der Spielzeugindustrie in Leicester. Invicta Plastic kaufte dann auch die Idee und brachte verschiedene Varianten dieses Spiels auf den Markt, u. a. Master Mind, Mini Master Mind, Super Master Mind und Word Master Mind.
Das Spiel wurde ein enormer Verkaufserfolg. Schon 1973 verkaufte man in Großbritannien 150 000 Spiele.
Im Frühjahr 1975 wurde Master Mind in die USA eingeführt und noch im selben Jahr über eine Million Stück verkauft. In der DDR wird es unter dem Namen „Supercode" im Handel angeboten (siehe S. 15).
Inzwischen ist Master Mind eines der beliebtesten und meist gekauften Spiele geworden. Warum ist es so beliebt bei groß und klein? Das Spielen von Master Mind unterstützt die Entwicklung des logischen Denkens, ist aber auch sehr lehrreich für das Erkennen eigener Fehler, welche auf Grund nicht entsprechender Logik entstehen können. Weiterhin kann das Spiel sowohl einen lehrreichen Anstoß für interessante Probleme der Kombinatorik geben als auch ein guter Lehrer beim Finden geeigneter Probleme für kleinere Forschungsaufgaben sein. Ebenso könnte es eine Bereicherung für den Mathematikunterricht sein.

2. Spielregeln

Es ist ein Zweipersonenspiel. Ein „Kodierer" konstruiert einen verborgenen Code und der „Dekodierer" soll ihn enthüllen. Ein Code ist in der kommerziellen Version eine Reihe von Farbstiften, welche verdeckt in Löchern stecken. Der Dekodierer soll diesen Code erraten und für jede Vermutung erhält er vom Kodierer die Information wie viele Farbstifte richtig plaziert und wie viele Stifte zwar die richtige Farbe haben, aber nicht auf dem richtigen Platz sind. Für den Dekodierer gilt es, den Code mit so wenig wie möglich Vermutungen zu enthüllen. Der Kodierer kann das Spiel nach Wahl des Codes nicht mehr beeinflussen. Falsche Informationen an den Dekodierer sind nicht gestattet. Bei der üblichen Spielversion gibt es spezielle „Schlüsselstifte", schwarze und weiße, welche an der Seite neben dem vermuteten Code plaziert werden. Die Anzahl der schwarzen Stifte gibt die Anzahl der Übereinstimmungen von Farbe und Platz, die Anzahl der weißen Stifte die Anzahl der richtigen Farben bei den übrigen Stiften zwischen Code und Vermutung an.
Das Spiel Master Mind kann man auch mit Bleistift und Papier spielen. Statt „Farbstifte" kann man z. B. Zahlen nehmen. Ein Code kann dann 3231 sein. Nehmen wir an, der Dekodierer vermutet 4332. Es gibt eine Übereinstimmung mit Zahl und Platz, dies ist die „3" in Position 3. Zwei weitere Zahlen sind noch richtig, aber auf dem falschen Platz, dies ist die „3" in Position 2 und die „2" in Position 4. Die Antwort auf eine Vermutung kann man als Zahlenpaar (i,j) angeben. Die Zahl i für die Anzahl der Übereinstimmungen in Zahl und Platz, die Zahl j für die Anzahl der übrigen richtigen Farben. In unserem Beispiel wäre die Antwort (1, 2).
Eine Variante des Spiels ist, daß man in dem verdeckten Code eine Position nicht mit einer Farbe belegt, sondern frei läßt. Um die Komplexität der Aufgabe zu vermindern, kann man sich auch auf eine andere Variante des Spiels einigen, jede Farbe darf nur genau einmal vorkommen und jede Position muß besetzt sein.

3. Zur Spielstrategie

Bei dem Spiel Master Mind mit 4 Löchern und 6 Farben sind die Chancen sehr klein, den richtigen Code mit der ersten Vermutung zu erraten (1 zu 1296).
Die folgende Vermutung muß auf die Antworten der vorhergehenden Vermutungen angepaßt werden. Eine Spielstrategie ist ein Plan, durch den man unter Berücksichtigung der jeweiligen Antworten den richtigen Code erraten kann. Man möchte natürlich eine gute Strategie haben, d. h. die Anzahl der Vermutungen soll so klein wie möglich sein.
Dies soll an einem Beispiel demonstriert werden. Dazu wählen wir das Spiel „Simple Mind" mit 2 Löchern und 4 Farben. Hier ist eine Spielstrategie:

V1	A1	V2	A2	V3	A3	V4	A4
12	(2,0)						
	(1,0)	13	(2,0)				
			(1,0)	14	(2,0)		
					(1,0)	11	(2,0)
			(0,1)	32	(2,0)		
			(0,0)	22	(2,0)		
					(1,0)	42	(2,0)
	(0,2)	21	(2,0)				
	(0,1)	13	(1,0)	23	(2,0)		
			(0,2)	31	(2,0)		
			(0,1)	41	(2,0)		
			(0,0)	24	(2,0)		
	(0,0)	34	(2,0)				
			(1,0)	33	(2,0)		
					(0,0)	44	(2,0)
			(0,2)	43	(2,0)		

Nehmen wir an, daß der verborgene Code 44 ist. Die Antwort A 1 auf die erste Vermutung V 1 12 ist dann (0,0). Die nächste Vermutung V 2 in Übereinstimmung mit der Strategie ist 34. Die Antwort A 2 ist (1,0) und Vermutung V 3 ist 33. Es ergibt sich die Antwort A 3 (0,0) und Vermutung V 4 ist in diesem Fall 44, welches der verborgene Code ist. Die Antwort A 4 ist folglich (2,0).
Nach dieser Strategie benötigt man maximal 4 Vermutungen. Es ergibt sich die Frage, ob es eine bessere Strategie mit einer kleineren Maximalzahl g von Vermutungen gibt?
Die Anzahl der Antwortmöglichkeiten ist 5. Unter diesen hat (2,0) eine Sonderstellung: „Das Spiel ist zu Ende".
Nehmen wir an, wir haben eine Strategie mit minimaler Maximalzahl g von Vermutungen. Wie viele verdeckte Codes können wir dann mit genau x Vermutungen erkennen?
Für jede Antwort, außer der letzten, haben wir höchstens 4 Möglichkeiten. Dann gibt es höchstens 4^{x-1} verborgene Codes, welche man mit genau x Vermutungen erkennen kann. Da x variiert zwischen 1 und g haben wir
$1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{g-1} = (4^g - 1)/3$
als obere Grenze für die Anzahl der verborgenen Codes, welche $4^2 = 16$ bei Simple Mind ist. Also gilt:
$16 \leqq (4^g - 1)/3$ und daraus folgt $g \geqq 3$.
Diese Ungleichung kann zu $g \geqq 4$ durch folgende Überlegung verbessert werden. Nehmen wir o. B. d. A. an, daß eine erste Vermutung 12 ist. Unter allen möglichen Antworten gibt es für die Antwort (1,0) die Maximalanzahl (6) möglicher Codes. Diesen kann man durch weitere $g - 1$ Vermutungen bestimmen, woraus
$6 \leqq (4^{g-1} - 1)/3$ (vgl. oben) folgt,
und daraus $g \geqq 4$.
Wenn die erste Vermutung vom Typ 11 ist, erhält man für die Antwort (0,0) die Maximalanzahl (9) von möglichen Codes; und damit auch $g \geqq 4$.
Optimale Strategien gibt es für Master Mind mit 4 Löchern und 6 Farben ($g = 5$) wie auch für ein Spiel mit 4 Löchern und 4 Farben ($g = 4$). Der interessierte Leser könnte sich zur Übung eine Strategie für „Semi Simple Mind", 3 Löcher und 4 Farben, mit $g = 4$ überlegen.
Gilt $g \geqq 4$ für alle Semi Simple Mind Strategien?
Ein anderes interessantes Problem ist, wie gut oder schlecht ist eine „Konstante Strategie". Mit konstanter Strategie meinen wir eine Strategie, deren Vermutungen nicht in Abhängigkeit von den Antworten vari-

iert. Eine konstante Strategie für Simple Mind ist 12, 23, 34, 41. Für jeden Code bekommen wir dann eine Folge von Antworten und verschiedene Codes ergeben verschiedene Folgen. Man könnte daraus vermuten, daß 123, 234, 341, 412 eine konstante Strategie für Semi Simple Mind ist. Jedoch gilt dies nicht! Die Codes 132 und 213 erhalten beide dieselbe Folge von Antworten: (1,2) (1,1) (0,2) (1,1).

Eine nicht-konstante Strategie nennen wir verzweigt. Wahrscheinlich sind verzweigte Strategien besser als konstante.

Kann der Leser dies beweisen?

Wir sind noch nicht auf eine eventuelle Strategie für den Kodierer eingegangen. Der Kodierer möchte es dem Dekodierer so schwer wie möglich machen.

Bei Master Mind zeigt die Erfahrung, daß Codes, bei denen alle Stifte gleichfarbig sind, am einfachsten zu dekodieren sind und Codes mit 3 Farben, d. h. eine Farbe kommt doppelt vor, die meisten Probleme bereiten. Der Kodierer sollte folglich seinen Code zufällig innerhalb dieses Codetyps wählen, da die Kenntnis von Favoriten bei Farben und Mustern des Kodierers dem Dekodierer die Entschlüsselung erleichtern kann.

Dem Leser sei zum Abschluß noch eine kleine Aufgabe zur Übung gestellt:

Man bestimme den Code bei Master Mind (4 Löcher, 6 Farben) bei Kenntnis folgender Fragen und Antworten:

a) keine Farben kommen doppelt vor
b) Farben können doppelt vorkommen

	Vermutung	Antwort
a)	6214	(1,2)
	5631	(0,3)
	4365	(2,1)
	2456	(0,2)
b)	Vermutung	Antwort
	1123	(2,1)
	4125	(2,0)
	4323	(2,0)
	3156	(1,1)

N. Grünwald

Minicode

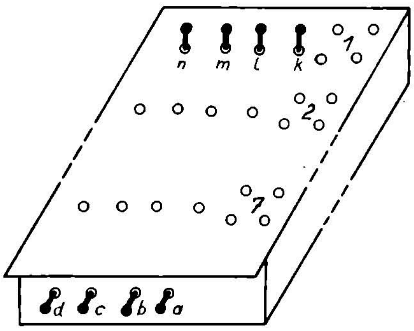
Die Spielregeln des attraktiven, jung und alt fesselnden Spieles „Supercode" lassen sich auf verschiedene Weise abändern, wobei das Spielgerät von Supercode beibehalten wird.

Eine mögliche, relativ einfache Variante, „Minicode" genannt, soll hier vorgestellt werden:

Spielregeln

- Spieler A sitzt an der gelochten Stirnseite des Spielgerätes, Spieler B sitzt ihm gegenüber. Zum Spiel werden nur weiße Anzeigestifte sowie Farbstecker in genau vier Farben, etwa rot, gelb, grün und blau, benutzt.
- A steckt je einen roten, gelben, grünen und blauen Stecker in die Stirnseitenlöcher. B sieht diese Stecker an der Stirnseite bis zum Partieende nicht.
- B soll mit möglichst wenig Versuchen die von A gewählte Anordnung (Permutation) der Farbstecker herausfinden. Als ersten Versuch steckt B ebenfalls vier verschiedenfarbige Stecker in die Reihe 1 am gegenüberliegenden Spielbrettende. Danach steckt A in die vier Löcher neben Reihe 1 entweder 4, 3, 2, 1 oder 0 weiße Anzeigestifte. Er gibt damit bekannt, um wieviel Plätze insgesamt die Farbstecker der Reihe 1 verrückt werden müssen, damit sie die gleiche Anordnung wie die an der Stirnseite steckenden haben. Dabei bedeuten 4, 3, 2, 1 bzw. 0 weiße Anzeigestifte die Gesamtabweichung um 8, 6, 4, 2 bzw. 0 Plätze.
- Dieser Spielvorgang wiederholt sich, wobei nacheinander die Reihen 1, 2, 3, ... besetzt werden, bis entweder A erstmals neben die Farbstecker einer Reihe keinen weißen Anzeigestift steckt oder bis zur letzten, der 7. Reihe.
- A erhält abschließend für die Partie soviel Punkte zugesprochen wie B Reihen mit seinen Farbsteckern besetzt hat.
- Von Partie zu Partie wechseln A und B die Spielerrollen.

Im folgenden wird die von A für die Stirnseite gewählte Anordnung der Farbstifte mit abcd, die von B für Reihe 1 mit klmn bezeichnet.



Zur Erläuterung: Wären z. B. a und m rote, b und l grüne, c und n blaue und d und k gelbe Stecker, so hätte A neben die Farbstecker der Reihe 1 $(2 + 0 + 1 + 3) : 2 = 3$ weiße Anzeigestifte zu stecken.

Zur Strategie: Spieler A hat insgesamt $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten für das Anbringen seiner Farbstecker an der Stirnseite. Spieler B kann stets mit höchstens vier Versuchen die von A gewählte Anordnung herausfinden: Steckt A neben die Farbstecker der Reihe 1 keinen weißen Anzeigestift, so hat B bereits mit dem 1. Versuch die Anordnung auf der Stirnseite erraten. Steckt A neben die Farbstecker der Reihe 1 drei weiße Anzeigestifte, so erkennt B hieraus, daß seine Anordnung klmn der Farbstecker in Reihe 1 übereinstimmt mit einer der neun Anordnungen bcda, bdca, bdac, cbda, cadb, dbca, dacb, dbac und dabc. B wählt dann für die 2. Reihe die Anordnung lmnk der Farbstekker (siehe Tabelle).

In dieser Tabelle wurde neben jeder Anordnung der Farbstecker die zugehörige Zahl der weißen Anzeigestifte angegeben. Steckt A neben die Farbstecker lmnk der 2. Reihe

1. Reihe		2. Reihe	
klmn	3	lmnk	4, 3, 2, 1 oder 0
bcda	3	cdab	4
bdca	3	dcab	4
bdac	3	dacb	3
cbda	3	bdac	3
cadb	3	adbc	2
dbca	3	bcad	2
dacb	3	acbd	1
dbac	3	bacd	1
dabc	3	abcd	0

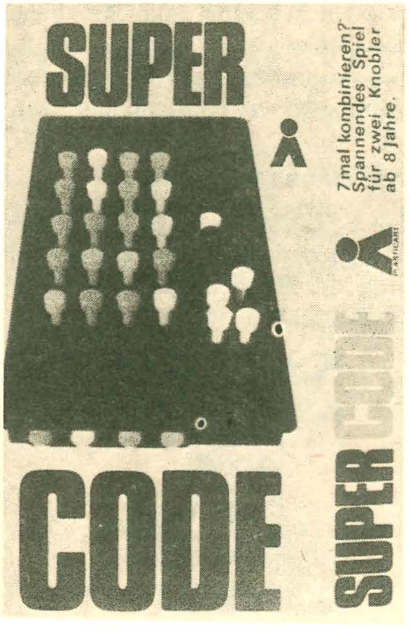
4 weiße Anzeigestifte, so stimmt lmnk laut Tabelle entweder mit cdab oder dcab überein. B weiß also, daß die Anordnung an der Stirnseite entweder nklm oder nkml ist. Damit findet er die richtige Anordnung bereits mit dem 3. oder spätestens mit dem 4. Versuch. Auch wenn A neben die Farbstecker der 2. Reihe 3, 2 oder 1 weiße Anzeigestifte steckt, kann B die Partie mit seinem 3. oder 4. Versuch beenden. Steckt A hingegen neben die Farbstecker der 2. Reihe keinen weißen Anzeigestift, so hat B die Partie bereits mit dem 2. Versuch beendet.

Bei vier weißen Anzeigestiften neben Reihe 1 wählt B für Reihe 2 die Anordnung nmlk, bei zwei weißen Anzeigestiften lmkn und bei einem weißen Anzeigestift ebenfalls lmkn. Im letzten Fall kann B die Partie stets mit dem 3. Versuch beenden. Das Aufstellen der zugehörigen Tabellen sei dem Leser überlassen.

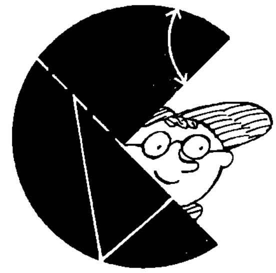
Die optimale Strategie von Minicode wurde damit zwar weitgehend angegeben. Doch diese sich einzuprägen und gedächtnismäßig (ohne Tabellen!) anzuwenden, ist dennoch eine ansprechende Leistung.

Wer das Spielgerät Supercode nicht besitzt, kann behelfsmäßig mit einem gefalteten Blatt Papier, zwei Bleistiften und einem Partner diese Spielweise ausprobieren.

W. Träger



In freien Stunden · alpha-heiter



Vom Kern zum Wort

Unabhängig von ihrer Reihenfolge sind die bereits eingetragenen Buchstaben zu Begriffen nachstehender Bedeutung zu ergänzen. Richtig gelöst ergeben die Anfangsbuchstaben ein Teilgebiet der Mathematik.

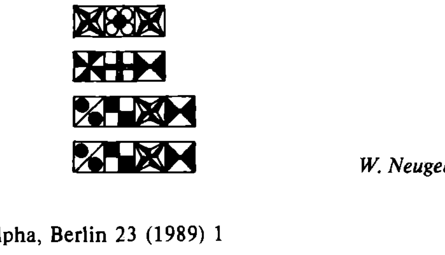
			M	A	L		
		G	E	N			
	O	L	D				
	L	E	M				
			R	I	F		
	A	D	I				
			L	O	G		

1. Übereinstimmung von Erscheinungen in wesentlichen Merkmalen,
2. Zahl, aus der die Wurzel gezogen wird,
3. Abweichung, Unregelmäßigkeit, Regelwidrigkeit,
4. Französischer Mathematiker (1752 bis 1833),
5. Objekte einer Menge,
6. Ergebnisse der gedanklichen Widerspiegelung von Dingen, Eigenschaften, Relationen,
7. Deutscher Mathematiker (1690 bis 1764), bekannt durch eine nach ihm benannte Vermutung, die bisher weder bewiesen noch widerlegt werden konnte und die besagt, daß jede gerade Zahl $n \geqq 6$ Summe von zwei ungeraden Primzahlen ist.

OL K. Koch, Schmalkalden

Wissen und Rechnen

Jedes Zeichen bedeutet eine Ziffer und gleiche Zeichen bedeuten gleiche Zahlen. Finde unter Beachtung der Rechenregeln die Ziffern, die die Divisionsaufgaben richtig lösen.

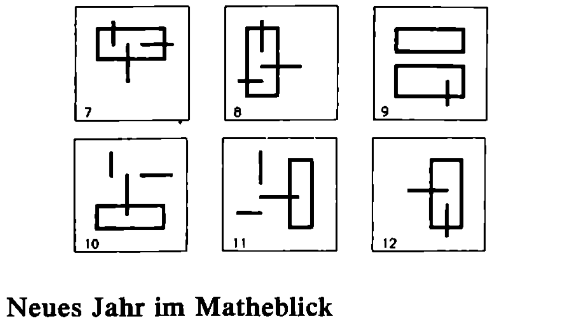


W. Neugebauer, Berlin

Tarnung

Die abgebildete Figur, die aus zusammengesetzten Linien besteht, verbirgt sich mitunter auch nur teilweise in 10 der anderen 12 Figuren. Finde die zwei Figuren heraus, die nicht dazugehören.

aus: Eleusis, Paris



Neues Jahr im Matheblick

$$
\begin{array}{r}
1+\ 9+\ 8+9 \\
+\ 1+\ 9+\ 8+9 \\
+\ 1+\ 9+\ 8+9 \\
+\ 1+\ 9+\ 8+9 \\
+\ 1+\ 9+\ 8+9 \\
\hline
= 19+89 = 98+9+1
\end{array}
$$

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Beständige Gleichheit

Aus der gelegten wahren Hölzchengleichung entsteht durch geeignetes Umlegen von a) einem Holz, b) zwei, c) drei und d) vier Hölzern jeweils wieder eine wahre Gleichung.

$$84+65=149$$

Ebenso entsteht durch geeignetes Wegnehmen von e) zwei, f) vier und g) fünf Hölzern jeweils wieder eine wahre Gleichung. *W. Träger, Döbeln*

Verdecktes Kartenspiel

Über vier verdeckte Karten ist folgendes bekannt:
1. Der „Bube“ liegt links vom „Herz“,
2. Eine „Sechs“ liegt rechts von „Pik“,
3. Ein „Karo“ liegt rechts neben dem „König“ und
4. „Kreuz“ liegt nicht neben „Herz“, sondern links vom „As“.

Welche Spielkarte verbirgt sich hinter A, B, C und D? *K. Petzold, Ebersbrunn*

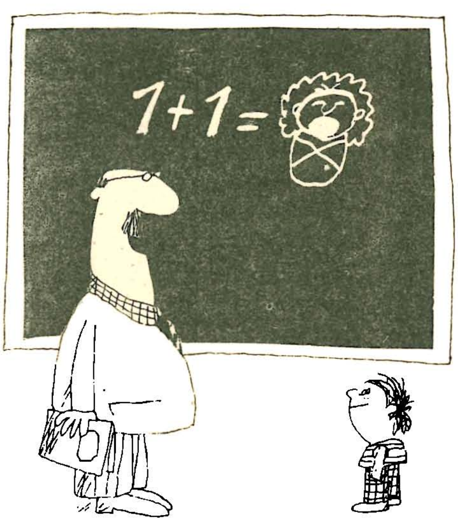
Ziel: Gleichheit

Setze die fehlenden Zeichen für die Addition, Subtraktion, Multiplikation bzw. Division ein, so daß Gleichungen entstehen!

A ·	9	2	12	5	=	67
B ·	13	15	2	14	=	56
C ·	10	6	6	11	=	20
D ·	18	12	2	14	=	34
E ·	7	5	13	10	=	38

Beachte, daß beim Rechnen Multiplikation und Division vor Addition und Subtraktion ausgeführt werden müssen! Klammern treten nicht auf. Vergleiche die beiden vorgegebenen Beispiele!

aus: Maximath, Paris



„In Biologie bist du schon ganz gut!“

Die Hemden des Junggesellen

Ein Junggeselle zieht jeden Tag ein frisches Hemd an. Jeden Montag bringt ihm die Wäscherei seine sauberen Hemden und nimmt die schmutzigen gleich mit.
Wieviel Hemden hat er mindestens?

aus: Pythagoras, Amsterdam

Mathematik und Phantasie

Der Mathematiker David Hilbert, den Max v. Laue „das größte wissenschaftliche Genie“ nannte, wurde eines Tages nach dem Schicksal eines seiner Schüler befragt. Er dachte lange nach, bevor er antwortete: „Ach ja, der ist unter die Dichter gegangen – für die Mathematik hatte er nicht genügend Phantasie.“

nach Lingmann/Schmiedel: Anekdoten, Episoden, Lebensweisheiten, VEB Fachbuchverlag Leipzig

Die Entlarvung des Orakels

Vor langer Zeit gab es in einem fernen Land ein berühmtes Orakel. Im Unterschied zu gewöhnlichen Orakeln vernahm man durch seinen Mund nicht nur eine Gottheit, sondern drei: den Gott der Wahrheit, den Gott der Lüge und den Gott der Diplomatie. Diese Gottheiten wurden durch vollkommen gleiche Figuren dargestellt, die sich in einer Reihe hinter dem Altar befanden. Die Götter antworteten immer gern auf die Fragen der Ratsuchenden. Da sie aber einander so ähnlich waren, konnte niemand erkennen, ob nun der Gott der Wahrheit, dem man glauben muß, oder der Gott der Lüge, der immer die Unwahrheit spricht, oder der Gott der Diplomatie, der entweder lügen oder die Wahrheit sagen kann, geantwortet hat. Einmal fand sich ein verwegener Neugieriger, der sich vorgenommen hatte, das zu vollbringen, was den größten Weisen nicht gelungen war. Er beschloß, jeden der Götter zu erkennen.
Der Kühne betrat den Tempel und fragte den links stehenden Gott: „Wer steht neben dir?“ „Der Gott der Wahrheit“, war die Antwort. Da fragte der Kühne den Gott in der Mitte: „Wer bist du?“ „Der Gott der Diplomatie“, war die Antwort. Die letzte Frage stellte der Kühne dem rechts stehenden Gott: „Wer steht neben dir?“ „Der Gott der Lüge“, war die Antwort. „Jetzt ist alles klar“, sagte der Kühne zufrieden.
Wie konnte er das aus den Antworten der Götter herausfinden?

aus: „Spaß für freie Stunden“ Verl. MIR · Moskau/ Verlag für die Frau · Leipzig eingesandt von M. Kschiwan, Batow

ÜBRIGENS trösten sich damit, daß Einstein ein schlechter Schüler war, immer die falschen.

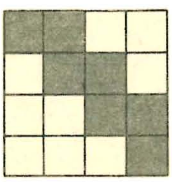
H. D. Schütt, aus Eulenspiegel, Berlin

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1989

Ma 5 ■ 2978 Anke, Birgit und Claudia sind (in anderer Reihenfolge) Schülerinnen der Klassen 4, 5 bzw. 6. Ihre Zeugnisnoten im Fach Mathematik sind 1, 2 bzw. 3. Nun weiß man folgendes:
(1) Birgit hat nicht die Zeugnisnote 1.
(2) Claudia hat die Zeugnisnote 3.
(3) Die Schülerin aus Klasse 4 hat die Zeugnisnote 2.
(4) Anke ist Schülerin der Klasse 5.
Gib Name, Klasse und Zeugnisnote jeder der drei Schülerinnen an!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2979 Das abgebildete Quadrat besteht aus 16 gleichgroßen, kleineren Quadraten, deren Seiten 5 mm lang sind. Das Bild zeigt eine schraffiert dargestellte zusammenhängende Fläche, die aus sieben dieser kleineren Quadrate besteht.



a) Bestimme die Länge des Umfangs dieser schraffierten Fläche!
Zeichne noch zweimal ein solches Quadrat und schraffiere eine zusammenhängende Fläche, die jetzt aus
b) acht Quadraten besteht und einen Umfang von 70 mm hat,
c) neun Quadraten besteht und einen Umfang von 60 mm hat!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2980 In das nachfolgende Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzusetzen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und daß alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gerechnet sind.

$$\begin{array}{ccccc} rs & + & mn & = & xyz \\ : & & - & & + \\ xz & - & n & = & xs \\ \hline a & \cdot & my & = & xsy \end{array}$$

Sch.

Ma 5 ■ 2981 Am Rande einer Landstraße stehen in regelmäßigen Abständen Telegrafenmasten. Vom ersten bis zum fünften Mast beträgt die Entfernung genau 250 m. Wie viele Meter stehen der erste und der zehnte Mast auseinander?
Schüler R. Holke, Leipzig

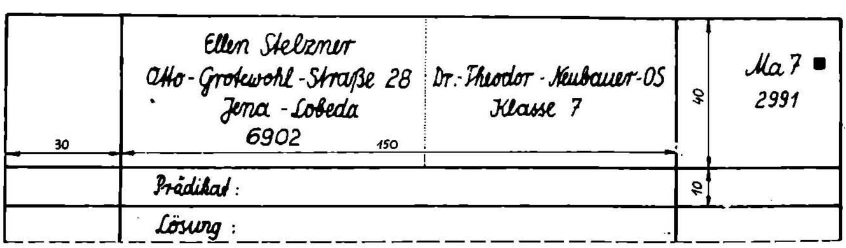
Ma 5 ■ 2982 Hanna sagt: „Wenn ich den Vorgänger und den Nachfolger einer natürlichen Zahl addiere, so erhalte ich als Summe mein Geburtsjahr 1978. Wenn ich aber statt 1978 das Jahr 1989 setze, dann finde ich keine solche natürliche Zahl." Begründe, warum dies Hanna nicht gelingen kann! *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 5 ■ 2983 Zum Transport von Mauersteinen hätte ein LKW mit 6 t Ladefähigkeit genau 35 Fuhren durchführen müssen. Nach 19 Fuhren wurde er durch einen anderen LKW mit 8 t Ladefähigkeit abgelöst, der nun den Rest transportierte. Wie viele Fuhren wurden dadurch eingespart?
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2984 Ein ganz mit einer Farbe angestrichener Würfel wurde in lauter gleichgroße kleinere Würfel zersägt. Es stellte sich heraus, daß genau an acht dieser kleineren Würfel keine Farbe war. Gib die Anzahl aller Würfel an, an denen Farbe war!
Begründe deine Behauptung!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2985 Wie viele Teiler hat die Zahl 1001?
Gib alle Teiler dieser Zahl an! *Sch.*

Ma 6 ■ 2986 In dem abgebildeten rechtwinkligen Dreieck ABC wurde die Höhe $\overline{CD}$ zur Hypotenuse $\overline{AB}$ und die Winkel-



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

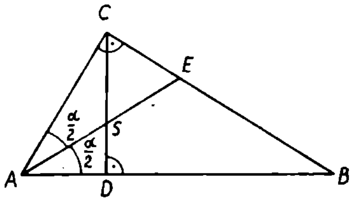
Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027

3. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. (Die Klassenstufennummer steht vor der Aufgabennummer.) Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12 oder Na/Te 10/12 gekennzeichnet sind.
4. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (siehe Muster), da die eingehenden Lösungen aufgabenweise sortiert und korrigiert werden. Noch eine Bitte an die Schulen: Sendet bitte die Lösungen bereits nach Aufgaben sortiert ein.
5. Teilnehmer, die eine richtige Lösung (nicht nur Antwortsatz) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Anderenfalls erhalten sie eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst". Nach dem Einsendetermin eingehende Lösungen werden nicht mehr bearbeitet!
6. Jeder Teilnehmer sollte einen Durchschlag seiner Lösungen anfertigen, um sie mit den jeweils zwei Hefte später erscheinenden Lösungen vergleichen zu können.

Der Jahreswettbewerb 1988/89 läuft von Heft 5/1988 bis Heft 1/1989. Zwischen dem 1. und 10. September 1989 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/88 bis 1/89 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden.
Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/88 veröffentlicht.
Wer mindestens 10 Antwortkarten (von den Wettbewerben der Hefte 5/88 bis 1/89) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein *alpha*-Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1988/89 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunde zurück). Schüler, die schon mehrere Jahre teilnehmen, senden bitte die zuletzt erhaltene Urkunde mit ein. Allein anhand dieser werden die Teilnehmerlisten aufgestellt. Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

halbierende $\overline{AE}$ des Winkels $\sphericalangle BAC$ gezeichnet, die sich im Punkte S schneiden. Es ist nachzuweisen, daß das Dreieck ECS gleichschenklig ist! *Sch.*



Ma 6 ■ 2987 Weise nach, daß die Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen niemals durch 4, ihr Produkt aber stets durch 8 teilbar ist! *Sch.*

Ma 6 ■ 2988 Erwin sagt: „Meine Schwester ist zwei Jahre jünger als ich; ich selbst bin drei Jahre jünger als mein Bruder. Zusammen sind wir 40 Jahre alt." Wie alt ist jedes der drei Geschwister? *Sch.*

Ma 6 ■ 2989 Die Maßzahlen der drei Seitenlängen eines Dreiecks (gemessen in cm), dessen Umfang weniger als 30 cm beträgt, sind sämtlich paarweise verschiedene Primzahlen. Welche Möglichkeiten gibt es für die Seitenlängen? *Sch.*

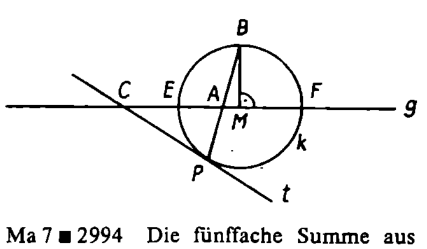
Ma 6 ■ 2990 Die Maßzahl des Umfangs eines Dreiecks (gemessen in cm) sei eine natürliche Zahl. Für zwei Seitenlängen gelte $a = 3$ cm und $b = 1$ cm. Es sind die Länge c der Seite $\overline{AB}$ und der Umfang u des Dreiecks zu berechnen! *Sch.*

Na/Te 6 ■ 443 Ein Würfel mit einer Kantenlänge von 10 cm besteht aus Stahl. Wie groß ist seine Gewichtskraft? *R.*

Ma 7 ■ 2991 Eine Mutter ist heute viermal so alt wie ihre Tochter. In 16 Jahren wird die Mutter nur doppelt so alt sein wie ihre Tochter.
Wie alt sind beide heute? *Sch.*

Ma 7 ■ 2992 Ein Hotel hat zusammen 82 Ein- und Zweibettzimmer mit insgesamt 132 Betten. Wie viele Ein- bzw. Zweibettzimmer hat dieses Hotel? *Sch.*

Ma 7 ■ 2993 Durch den Mittelpunkt M des abgebildeten Kreises k wurde die Gerade g gezeichnet, die den Kreis in den Punkten E und F schneidet. In M wurde die Senkrechte zur Geraden g errichtet, die k in B schneidet. Durch einen inneren Punkt A des Radius $\overline{ME}$ wurde die Gerade AB gezeichnet, die k in P schneidet. Im Punkte P wurde die Tangente t an den Kreis k gelegt, die die Gerade g in C schneidet. Es ist zu beweisen, daß das Dreieck CPA gleichschenklig ist! *Sch.*



Ma 7 ■ 2994 Die fünffache Summe aus drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist gleich dem Produkt aus diesen Zahlen. Um welche Zahlen handelt es sich? *Sch.*

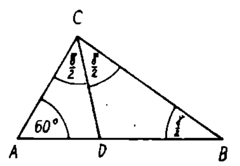
Ma 7 ■ 2995 Beweise: Die Differenz der Quadrate von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist gleich der Summe dieser Zahlen. (Benutze die Terme n und $n + 1$.)
Beispiel: $7^2 - 6^2 = 7 + 6$ *Sch.*

Na/Te 7 ■ 444 In drei zylindrische Flaschen (Grundfläche 10 cm²) werden je 100 g Wasser, Benzin und Öl gefüllt.
Wie hoch stehen die Flüssigkeiten in den Flaschen? *R.*

Na/Te 7 ■ 445 Über eine feste Rolle ist ein Seil gelegt. An den Enden des Seiles hängt je ein Körper mit einer Masse von 1 kg. Mit welcher Kraft wird das Seil gedehnt? *R.*

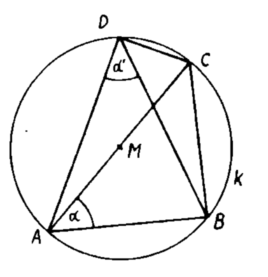
Ma 8 ■ 2996 Man zeige, daß die natürliche Zahl $z = p^4 - 1$ für jede Primzahl $p > 5$ stets durch 240 teilbar ist. *Sch.*

Ma 8 ■ 2997 Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\sphericalangle CAB = 60°$. Dabei schneidet die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ACB$ die Seite $\overline{AB}$ in D so, daß $\overline{CD} \cong \overline{BD}$ gilt. Berechne die Größe der anderen beiden Innenwinkel dieses Dreiecks und begründe deine Aussagen!
aus der Kreisolympiade Kl. 8, Kreis Löbau, Fachlehrer J. Kreusch



Skizze (nicht maßstabgerecht!)

Ma 8 ■ 2998 Gegeben sei ein Kreis k, auf dem die Punkte A, B, C, D so liegen, daß die Diagonale $\overline{AC}$ des Sehnenvierecks $ABCD$ durch den Mittelpunkt von k geht. Unter welcher Bedingung ist der Winkel $\sphericalangle MAB$ genau so groß wie der Winkel $\sphericalangle ADB$? *Schülerin G. Berthold, Dresden*



Ma 8 ■ 2999 Wie groß ist der Inhalt derjenigen Fläche in einer Ebene, die von einem Quadrat umschlossen wird, das einen Umfang von 1 km Länge hat? Um wieviel Prozent größer ist der Inhalt der Fläche, die von einem Kreis mit dem gleichen Umfang umschlossen wird? Der Flächeninhalt ist gerundet in ha anzugeben!
Fachlehrer Bucher, POS Gerstungen

Ma 8 ■ 3000 Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC. An $\overline{CA}$ soll in C ein rechter Winkel so angetragen werden, daß sein freier Schenkel die Gerade, auf der $\overline{AB}$ liegt, in D schneidet. Es ist zu beweisen, daß dann $\overline{AB} \cong \overline{BD}$ ist!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Na/Te 8 ■ 446 Mit einem Tauchsieder für eine Spannung von 220 V und einer Stromstärke von 2,7 A werden 2 Liter Wasser innerhalb von 24 min von 20°C bis zum Sieden erhitzt. Wie groß ist der Wirkungsgrad? *aus: Aufgabensammlung Physik, Volk und Wissen Berlin*

Na/Te 8 ■ 447 Die Entfernung Sonne–Erde beträgt rund 150 Millionen Kilometer. Das Licht legt in 1 s eine Strecke von 300000 Kilometer zurück.
Wie lange braucht es für die Strecke Sonne–Erde? *R.*

Ma 9 ■ 3001 Das Produkt aus Vorgänger und Nachfolger einer natürlichen Zahl n, vermindert um das Dreifache dieser natürlichen Zahl, beträgt 39. Wie heißt die natürliche Zahl n?
Petra Hahn, Nordhausen

Ma 9 ■ 3002 Es ist zu beweisen, daß für alle positiven reellen Zahlen a, b, c stets gilt:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > \frac{3}{a+b+c}!$$

Schüler O. Karger, Wittenberge

Ma 9 ■ 3003 Zeichnen Sie einen Kreis $k(M;r)$ mit zwei Durchmessern, die senkrecht zueinander sind. Bezeichnen Sie die Begrenzungspunkte im mathematisch positiven Drehsinn mit A, B, C, D. Legen Sie auf dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$ einen Punkt P fest ($P \neq A, P \neq B$) und verbinden Sie ihn mit C. Zeichnen Sie in P die Tangente an k mit ihrem Berührungsradius ein und verlängern Sie $\overline{AC}$ über A hinaus, so daß diese Verlängerung die Tangente in E schneidet. Verlängern Sie $\overline{BD}$ über B hinaus, und bezeichnen Sie den Schnittpunkt dieser Verlängerung mit der Tangente mit F!
Beweisen Sie, daß gilt:
$\sphericalangle ACP + \sphericalangle CPM + \sphericalangle MFP + \sphericalangle PMB + \sphericalangle PEM = 180°$
(die einzelnen Summanden wollen wir als Winkelgröße auffassen)!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ■ 3004 Es ist die Basis x desjenigen Zahlensystems zu ermitteln, in dem die Gleichung

$$[(689)_x - (511)_x] \cdot (11)_x = (1948)_x$$

mit $x \in N$ eine wahre Aussage darstellt.
Christian Bittner, Mühlhausen

Ma 9 ■ 3005 Welche natürliche Zahl ist gleich dem fünften Teil der Summe aller vorhergehenden natürlichen Zahlen außer der Zahl Null? *Sch.*

Na/Te 9 ■ 448 Ein Schleifkontakt eines Spannungsteilers teilt einen Gesamtwiderstand von 600 Ohm im Verhältnis 1:2 ($R_1 : R_2$) auf. Parallel zu R_1 wird ein Widerstand von 600 Ohm angeschlossen. Wie groß ist die Klemmenspannung am angeschlossenen Widerstand, wenn am Spannungsteiler eine Spannung von 240 V liegt? *R.*

Na/Te 9 ■ 449 In einem Haushalt (Nennspannung 220 V) ist ein Warmwasserbereiter mit einer Leistung von 1,8 kW in Betrieb. Überprüfen Sie, ob in dem gleichen Stromkreis noch ein Bügeleisen mit einer Leistung von 750 W eingeschaltet werden kann, wenn der Sicherungsautomat eine Gesamtstromstärke von 10 A zuläßt?

aus: Aufgabensammlung Physik, Volk und Wissen, Berlin

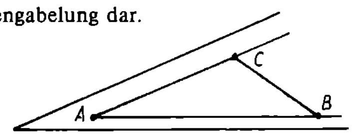
Ma 10/12 ■ 3006 Für welche reellen Zahlen x stellt die Gleichung

$$25^{1+x} - 25^{1-x} = 120$$

eine wahre Aussage dar?

Christian Bittner, Mühlhausen

Ma 10/12 ■ 3007 Das Bild stellt eine Straßengabelung dar.



$\overline{AB}$ ist 53,9 m lang, $\overline{AC}$ ist 34,6 m lang.
Wegen einer günstigeren Grenzziehung soll das dreieckige Grundstück ABC so verändert werden, daß $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ist. Das neue Grundstück ABC muß den gleichen Flächeninhalt haben wie das alte.
Wie lang sind $\overline{AB}$ bzw. $\overline{AC}$ nach der neuen Grenzziehung? *Rainer Struwe, Halberstadt*

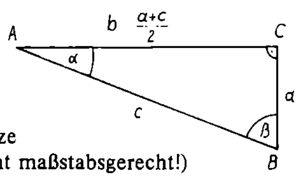
Ma 10/12 ■ 3008 Es ist zu beweisen, daß für alle reellen Zahlen x gilt

$$-\sin x \cdot \cos x < 0{,}5!$$

Christian Bittner, Mühlhausen

Ma 10/12 ■ 3009 In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Länge der einen Kathete genau so groß wie das arithmetische Mittel aus den Längen der zweiten Kathete und der Hypotenuse. Es sind die Innenwinkel dieses Dreiecks zu berechnen.

in einem slowakischen Mathematikbuch gefunden von St. Rudolf, Halberstadt



Skizze
(nicht maßstabsgerecht!)

Ma 10/12 ■ 3010 Aus einem Brief:
Lieber Opi! Zu Deinem 62. Geburtstag wünschen wir Dir alles Gute. – Addierst Du übrigens zum Quadrat des Nachfolgers von uns den Nachfolger des Quadrates von uns, so erhältst Du Dein Alter in Jahren. Unter „von uns" meinen wir die Anzahl der Personen unserer Familie.

Dein Matthias.

Aus wieviel Personen bestand die Familie?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Na/Te 10/12 ■ 450 Ein Widerstand von 100 Ohm und ein Kondensator von 4 µF werden hintereinander geschaltet und an eine Wechselspannung (50 Hz) von 220 V gelegt. Welcher Strom fließt durch die Anordnung? *R.*

Na/Te 10/12 ■ 451 Wie lang ist ein Sekundenpendel in Meereshöhe am Pol und am Äquator? *R.*

alpha-Wettbewerb

Kollektive Beteiligung am alpha-Wettbewerb 1987/88

E.-Mäder-OS, Fr.-Engels-OS, beide Altenburg; Stadtklub Jg. Math. Altentreptow; Dr.-Th.-Neubauer-Schule II, Apolda; W.-Seelenbinder-OS, Arneburg; OS VI Arnstadt; E.-Weinert-OS, Arnstadt; OS Dr. R. Sorge, Asbach; OS W. Lamberz, Bad Berka; OS H. Duncker, Bad Kleinen; E.-Weinert-OS, Bad Klosterlausnitz; H.-Beimler-OS, Bad Köstritz; E.-Thälmann-OS, Bad Langensalza; R.-Schwarz-OS, Bad Liebenstein; W.-Pieck-OS, EOS E. Thälmann, Th.-Neubauer-OS, A.-Saefkow-OS, O.-Grotewohl-OS, Stat. Jg. Techn. u. Naturf., OS VI, OS II M. Poser, alle Bad Salzungen; OS H. Beimler, Bärenklau; OS Bandelin; OS Cl. Zetkin, Barby; H.-Heine-OS, Barchfeld; Liebknecht-OS, Barth; K.-Schweitzer-OS, Basdorf; H.-Belz-OS, Behrenhoff; O.-Nowack-OS, Bentwisch; Stadtmatheklub 6. POS V, Bergen; 4. OS Marschall Budjonny, 25. OS W. Prochno, 44. OS Fr. Espenbeck, 26. OS L. Reum, 33. OS L. Grundig, 8. OS, 41. OS L. Weiskopf-Henrich, alle Berlin; A.-Becker-OS, Berlingerode; C.-Fugger-OS, Bernau; G.-Scholl-OS, Bernsdorf; OS Bernterode; OS Beuren; W.-Seelenbinder-OS, Bismark; Cl.-Zetkin-OS, Bischoferode; OS Blankenberg; W.-Pieck-OS, OS Fr. Schiller, beide Bleicherode; Fr.-Weinert-OS, Blumberg; G.-Ewald-OS, Blumenthal; OS Bokkau; K.-Wagner-OS, Böhrigen; A.-Bebel-OS, H.-Matern-OS, beide Boizenburg; OS J. Schehr, Born; H.-Beimler-OS, Braunsdorf; B.-Brecht-OS, Brehme; W.-Pieck-OS, Breitenworbis; OS H. Beimler, W.-Seelenbinder-OS, beide Breitungen; OS Dr. Th. Neubauer, Brotterode; M.-Poser-OS, Bürgel; Stat. Jg. Naturf. u. Techn., Burg; W.-Pieck-OS, Burow; OS II Burg Stargard; W.-Estel-OS, Buttlar; W.-Seelenbinder-OS, Buttstädt; 2. OS O. Grotewohl, EOS G. Schumann, Kreismatheklub, alle Calau; Stat. Prof. Dr. G. Hertz, Calbe; O.-Koschewoi-OS, Callenberg; OS A. Einstein, Caputh; Haus der JP, K.-Marx-OS, W.-Pieck-OS, alle Coswig; 5. OS C. Blechen, Stat. Jg. Naturf. u. Techn., beide Cottbus; R.-Schneider-OS, Crottendorf; OS Br. Kühn, Dambeck; Kreisklub Jg. Math., Demmin; M.-Gorki-OS, Dermbach; OS Dersekow; 13. OS A. Hennecke, Dessau; E.-Weinert-OS, Deuna; OS Makarenko, Dingelstädt; OS Fr. Reuter, Dömitz; OS K. Niederkirchner, Domersleben; OS A. Matrossow, Dorndorf; O.-Grotewohl-OS, Dreitzsch; Pionierpalast W. Ulbricht, 100. OS P. Neruda, M.-A.-Nexö-OS, alle Dresden; OS Dürrröhrsdorf; W.-Pieck-OS Eberswalde; EOS, Kreiszirkel Math., beide Egeln; W.-Pieck-OS, Eichhof; OS Eishausen; OS H. Grundig, Ellrich; 1. OS R. Arndt, Elsterwerda; E.-Weinert-OS, Empfertshausen; Stat. Jg. Techn. u. Naturf. Ernstthal; Th.-Müntzer-OS, Fambach; OS 3 O. Benario-Prestes, Falkenberg; 5. OS G. Dimitroff, Finsterwalde; E.-Weinert-OS., Flessau; K.-Marx-OS, Flöha; B.-Brecht-OS, Floh; Stat. Jg. Techn. u. Naturf., 19. OS Dr.-Th.-Neubauer-OS, beide Frankfurt (Oder); E.-Thälmann-OS, Friedeburg; OS Cl. Zetkin, Freiberg; OS I, Friedland; OS W. Seelenbinder, Fünfeichen; OS V H. Günther, Fürstenwalde; E.-Thälmann-OS, Freital; Haus d. JP E. Hörnle, Gadebusch; Th.-Müntzer-Schule, Gehren; R.-Arnstadt-OS, Geisa; E.-Hörnle-OS, Geismar; J.-Gagarin-OS, Geithain; E.-Hartsch-OS, Gersdorf; Kalinin-OS, Geschwenda; OS Gielow; 5. OS J. Gagarin, Görlitz; R.-Schulz-OS, Golzow; 7. OS Görlitz; J.-Brinckmann-OS, Goldberg; OS A. Schweitzer, Fr.-Engels-Schule, OS R. Luxemburg, alle Gotha; OS J. Gagarin, Grabowhöfe; Kreisklub Jg. Math. Gräfenhainichen; Stat. Jg. Techn. u. Naturf. Gransee; OS Gernrode; E.-Thälmann-OS, K.-Marx-OS, beide Greifswald; OS H. Beimler, OS K. Marx, beide Greußen; Math.-Kreisklub Grevesmühlen; OS W. Seelenbinder, Gröden; A.-Walther-OS, Gröditz; OS E. Weinert, Gröningen; S.-Jähn-OS, Gröditz; A.-Frank-OS, Grimma; OS Cl. Zetkin, Groitzsch; OS Großbartloff; OS A. Kuntz, E.-Hartsch-OS, beide Großbodungen; alpha-Klub Großrückerswalde; OS N. Ostrowski, Großdeuben; J.-Gagarin-OS, Grünhain; Th.-Müntzer-OS, Gumpelstadt; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Gützkow; OS H. Günther, Hachelbich; M.-Gorki-OS, Hainichen; M.-Engels-Schule, Halberstadt; Kreisklub Math. Halle-Süd; OS Hammerbrücke; Kreisklub Math. Harzgerode; Fr.-Wolf-OS, IMOS, EPOS, alle Havelberg; OS B. Koenen, Hedersleben; Th.-Storm-OS, EOS W. Pieck, beide Heiligenstadt; Schule d. DSF Heiligengrabe; 2. OS, Herzberg; M.-Gorki-OS, Hillersleben; Cl.-Zetkin-OS, Hohenstein-E.; 21. OS, Hoyerswerda; OS E. Egert, Hundeshagen; OS Hunshagen; OS A. Waszkiewicz, Hoyerswerda; OS Fr. Zielasko, Iden; OS W. Seelenbinder; OS N. Mandela, Ilmenau; Goethe-OS, Ilsenburg; G.-Ewald-OS, Ivenack; A.-Becker-OS, Jatznick; Fr.-Engels-Schule, Kaltennordheim; OS A. Becker, Kamsdorf; H.-Beimler-OS, Karbow; OS f. Körperbehinderte Dr. Fr. Wolf, A.-S.-Makarenko-OS, K.-Liebknecht-OS, E.-Schneller-OS, H.-Menzel-OS, E.-Thälmann-OS, Fr.-Heckert-OS, M.-Saupe-OS, Wl.-Komarow-OS, Fr.-Metschke-OS, P.-Tschaikowski-OS, Stadtbezirkspionierhaus, alle Karl-Marx-Stadt; E.-Boberg-OS, Karlsburg; J.-Warnke-OS, Katzow; OS Cl. Zetkin, Kaulsdorf; OS E. Schneller, Kirchberg; OS Kirchworbis; H.-Matern-OS, Klietz; OS H. Matern, Klockow; Th.-Neubauer-Schule, Kieselbach; Goethe-Schule, Königsee; W.-Seelenbinder-OS, Könitz; Kreisklub Königs Wusterhausen; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Köthen; K.-Marx-OS, Kranichfeld; OS M. Burwitz, Kritzmow; OS Küllstedt; OS Cl. Zetkin, Laage; OS R. Breitscheid, Latdorf; Goetheschule Lauscha; Pestalozzi-OS, Leegebruch; OS E. Weinert, Legefeld; R.-Teichmüller-OS, Leimbach; Dr.-S.-Allende-OS, OS IV, OS R. Luxemburg, K.-Liebknecht-OS, E.-Thälmann-OS, EOS K. Marx, alle Leinefelde; OS Br. Plache, Haus d. JP A. Saefkow, beide Leipzig; H.-Beimler-OS, Leisnig; G.-E.-Lessing-OS, Lengenfeld; M.-Poser-OS, Lengfeld; E.-Thälmann-OS, Leutenberg; O.-Grotewohl-OS, EOS Prof. Dr. M. Schneider, beide Lichtenstein; OS W. Wallstab, Löderburg; W.-Seelenbinder-OS, Lössau; H.-Günther-OS, Lohsa; E.-Weinert-OS, Loitz; 1. OS, Lommatzsch; OS Löcknitz; Haus d. JP Th. Körner, OS H. Schuldt, beide Ludwigslust; Kreismatheklub Lübbenau; W.-Bredel-OS, Stat. Jg. Naturf. u. Techn., beide Lübz; F.-Dzierzynski-OS, Magdala; A.-Becker-OS, Kaßner-OS, Matheklub des SB, alle Magdeburg; Haus d. JP F. Siemon, Markkleeberg; R.-Luxemburg-OS, Markneukirchen; Dr.-Th.-Neubauer-OS, 7. OS M. I. Kalinin, beide Meiningen; A.-Kuntz-OS, Mellingen; A.-Dürer-OS II, Merseburg; OS H. Rau, Mieste; OS Mittelstille; E.-Steinfurth-OS, Mittenwalde; OS H. Danz, Möser; O.-Grotewohl-OS, Naumburg; OS J. Fučik, Naundorf; OS W. Bykowski, Neetzow; M.-Burwitz-OS, Neuenkirchen; F.-Dzierzynski-OS, K.-Marx-OS, Förderzirkel Math. d. Kreises, alle Neuhaus; R.-Hallmeyer-OS, Neundorf; Stat. Jg. Techn. u. Naturf. Neuruppin; OS Neverin; H.-Beimler-OS, Neustadt; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Niederorschel; K.-Schlosser-OS, Niederschöna; OS Fr. Engels, OS W. I. Lenin, Pionierhaus H. Matern, OS J. Gagarin; alle Nordhausen; H.-Beimler-OS, Oberhermsdorf; OS E. Weinert, Oberschönau; Fr.-Fröbel-OS, Oberweißbach; OS der DSF, Oebisfelde; E.-Weinert-OS, Ohrdruf; OS Olbersdorf; Haus der JP H. Coppi, Oranienburg; OS W. Korobkow, Ortrand; EOS K. Marx, Oschersleben; OS P. Kmiec, Osternienburg; O.-Eichler-OS, Oschatz; OS H. Matern, OS W. Pieck, beide Osterwieck; Th.-Müntzer-OS, Osthausen; Haus d JP E. Weinert, Pasewalk; Haus d. JP P. Göring, Parchim; Oberschulbereich J. Fučik, Pfaffroda; OS Dr. Th. Neubauer, Pfaffschwende; Spezialistenlager Plauen-Land; Makarenko-OS, Plessa; Herbart-OS, Plauen; OS E. Schneller, Polleben; OS 50, Potsdam; W.-Pieck-OS, Premnitz; OS Pritzerbe; W.-Pieck-OS, Goethe-Schule II, beide Pritzwalk; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Rackwitz; OS Pestalozzi, Radebeul; OS Fr. Weineck, Radegast; B.-H.-Bürgel-Schule, Rathenow; E.-Thälmann-OS, Remda; Steinhauer-OS, J.-Gagarin-OS, beide Ribnitz; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. E. Hoernle, Richtenberg; J.-Gagarin-OS, Riethnordhausen; Spezialschule Fr. Engels, Riesa; H.-Matern-Schule, Rochlitz; Pestalozzischule, Rodewisch; J.-Curie-OS, Röbel; E.-Thälmann-OS, Röcknitz; Ziolkowski-OS, Roßdorf; Haus d. JP, 37. OS K. Meseberg, 1. OS W. Schröder, alle Rostock; OS S. Kosmodemjanskaja, Rotterode; Schillerschule, Rudolstadt; OS Th. Müntzer, Rüssen; OS K. Niederkirchner, Saal; Stat. Jg. Techn. u. Naturf. E. Thälmann, Salzwedel; T.-Bunke-OS, Sanitz; OS Th. Müntzer, Sangerhausen; OS H. Matern, Schernberg; OS M. Gorki, Schkölen; OS Pappenheim, OS H. Danz, OS J. G. Seume, OS K. Marx, alle Schmalkalden; P.-Göring-OS, Schmiedefeld; Schule d. DSF, Schneidlingen; K.-Liebknecht-OS, Schönbrunn; OS K. Liebknecht, Schönebeck; Mathe-Kreisklub Schönberg; H.-Beimler-OS, Schönhausen; Schule d. DSF, Schorssow; E.-Weinert-OS, Schollene; OS Fr. Engels, Schwallungen; Lenin-OS, Schwarzenberg; OS Schweina; Kreispionierhaus M. Böhme, Sebnitz; Fr.-Reuter-OS, Siedenbollentin; OS H. Warnke, Sielow; OS Th. Müntzer, Silkerode; Kreisförderzirkel d. Pestalozzi-OS, Sömmerda; G.-Hauptmann-OS, Sohland; OS Glückauf, OS A. Saefkow, beide Sondershausen; OS Sonneberg; OS H. A. Eckelmann, Sponholz; OS A. Becker, Spremberg; OS I J. H. Pestalozzi, 2. OS E. Wölk, beide Stadtroda; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Stahnsdorf; R.-Luxemburg-OS, Steinsdorf; J.-Fučik-OS, Steinbach; OS E. Thälmann, Steinbach-Hallenberg; K.-Marx-OS, Stralsund; Haus d. JP Fr. Weineck, Strausberg; OS E. Lasker, Ströbeck; 12. OS Dr. R. Sorge, Suhl; OS E. Weinert, Sundhausen; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Tangerhütte; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Templin; J.-Gagarin-OS, Teistungen; OS G. Eisler, Teterow; K.-Liebknecht-OS, Teuchern; W.-Seelenbinder-OS, Thoßfeld; OS Tiefenort; E.-Schneller-OS, Töplitz; Pestalozzischule, Torgelow; OS W. Pieck, Trusetal; OS Dr. S. Allende, Uebigau; A.-Nitz-OS, E.-Welk-OS, Goetheschule, Kreisklub Jg. Math., alle Ueckermünde; H.-Beimler-OS, Unterbreizbach; A.-H.-OS, Untermaßfeld; OS W. Seelenbinder, Unterpörlitz; OS Unterweißbach; E.-Schneller-OS, Urnshausen; OS J. G. Seume, Vacha; OS III, Velten; OS Vitte; alpha-Klub Vitzenburg; OS Völkershausen; A.-Bebel-OS, Vogelsang; OS Wachow; R.-Luxemburg-OS, Waldau; Goethe-Schule, Kreisklub Jg. Math., beide Waren; OS Wasserthaleben; OS Wechmar; OS Weißenborn-L.; Kreisklub Jg. Math. Weißwasser; J.-Gagarin-OS, Werneuchen; OS A. Günther, Wernshausen; J.-Harder-OS, Wesenberg; OS O. Grotewohl, Westerengel; Friedensschule, Wismar; E.-Thälmann-OS, Wittstock; Fr.-Engels-OS, Wittstock; Karl-Marx-OS, Wilkau-Haßlau; OS H. Matern, Wippersdorf; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Wittenberg; OS DSF, Wolgast; O.-Buchwitz-OS, Wolkenburg; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Wolmirstedt; Dr.-R.-Sorge-OS, Wollin; OS I H. Werner, Lenin-OS, beide Worbis; OS Th. Müntzer, Wulfen; OS H. Heine, Wörmlitz; Schillerschule, Lutherschule, beide Zella-Mehlis; W.-Seng-OS, Zepernick; Fr.-Schiller-OS, Zeulenroda; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Zembschen; 9. OS, Zittau

Ein Dankeschön an unsere Verlage

Die Redaktion *alpha* konnte in diesem Jahr den Preisträgern des alpha-Wettbewerbs 1987/88 wieder viele interessante Bücher senden. Diese stellen uns zahlreiche Verlage zur Verfügung, denen wir an dieser Stelle herzlichen Dank sagen möchten:

Aufbauverlag, Berlin;
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig;
VEB Domowina Verlag, Bautzen;
VEB Fachbuchverlag, Leipzig;
Der Kinderbuchverlag, Berlin;
Militärverlag der DDR, Berlin;
Buchverlag Der Morgen, Berlin;
Verlag Neues Leben, Berlin;
VEB Postreiter-Verlag, Halle;
Verlag Philipp Reclam jun., Leipzig;
Sportverlag, Berlin;
VE Verlag Technik Berlin;
Urania-Verlag, Leipzig;
Verlag Volk und Welt, Berlin;
VE Verlag Volk und Wissen, Berlin;
VE Verlag der Wissenschaften, Berlin

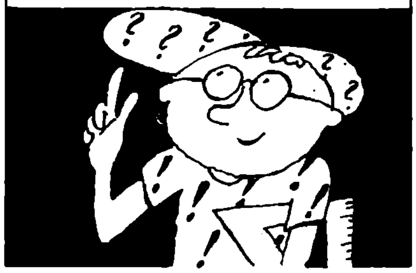
Energieeinsparung – nur ein Prozent?

Ein Prozent mutet wenig an: konkret betrachtet, ist es aber eine beachtliche Größe. Bei der Stadtgaserzeugung z. B.: 1 % der jährlich rd. 7,2 Mrd. m^3 produzierten Menge reicht, um beispielsweise 90 000 t Behältergas herzustellen oder um den Bedarf der Betriebe des Ministeriums für Leichtindustrie zu decken. Aus 1 % der geförderten Rohbraunkohle läßt sich eine Menge von Briketts herstellen, mit der man 382 000 Haushalte ein Jahr lang versorgen kann. Und 1 % der jährlichen Elektroenergie entspricht dem Verbrauch von 500 000 Haushalten. – In der volkswirtschaftlichen Bilanz schlägt also jedes eingesparte Prozent zu Buche.

Deshalb lohnt es sich, um die Einsparung jeder Tonne Rohbraunkohle, jeder Kilowattstunde Elektroenergie, jedes Kubikmeters Gas zu ringen. Die Einsparung von Energie ist für unsere Volkswirtschaft nach wie vor der effektivste Weg zur Deckung des Energiebedarfs.

aus: Urania, Berlin

Lösungen



Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. G. Geise
Heft 4/88

Die Sehne AB teilt die Kreisfläche in zwei Teilflächen (Bild 1). Es sei $F1$ der Flächeninhalt jenes Teils, der den Mittelpunkt M des Kreises k nicht enthält. Er ist gleich der Differenz der Flächeninhalte des Kreisausschnitts mit dem Mittelpunktswinkel $\sphericalangle AMB$ und des Dreiecks $\triangle AMB$. Die Größe des Winkels $\overline{\sphericalangle AMB} = 2\alpha$ ist in Bogenmaß anzugeben bzw. aus Gradmaß in Bogenmaß umzurechnen. Das Bogenmaß ist der Quotient aus Länge des Kreisbogens, der durch den Mittelpunktswinkel bestimmt ist, und Radius. Es ist $2\alpha[\text{rad}] = (\pi/180) \cdot 2\alpha[°]$ die Umrechnungsformel. Daher hat man

$$F1 = \alpha \cdot r^2 - (r \cdot \cos\alpha) \cdot (r \cdot \sin\alpha) = \frac{1}{2} r^2 \cdot (2\alpha - \sin 2\alpha).$$

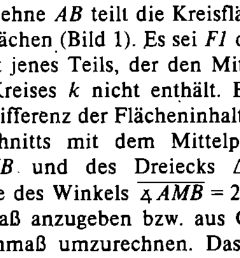
Wegen $F1 + F2 = \pi \cdot r^2$ ergibt sich

$$F2 = \frac{1}{2} r^2 \cdot (2\pi - 2\alpha + \sin 2\alpha).$$

Aus der Forderung $F1 : F2 = m : n$ erhält man folgende Bedingungsgleichung für $2\alpha[\text{rad}]$:

$$\frac{n}{m+n} \cdot 2\pi = 2\alpha - \sin 2\alpha \quad (0 < \alpha < \pi) \quad (1)$$

Bild 1



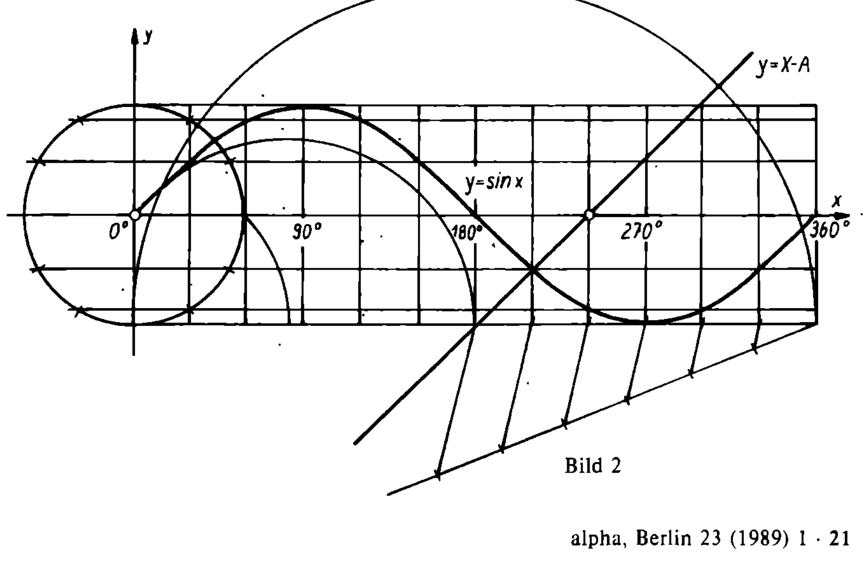


Bild 2

Der Radius r spielt also keine Rolle – erwartungsgemäß, denn eine Lösung der Aufgabe muß gegen zentrische Ähnlichkeiten mit dem Zentrum M (und überhaupt gegen Ähnlichkeiten) unempfindlich (man sagt: invariant) sein.

Die Gleichung (1) trägt einen berühmten Namen. Sie ist eine sogenannte *Keplersche* Gleichung. Sie kommt in der Form

$$M = E - e \cdot \sin E \qquad (2)$$

für Ellipsen mit der numerischen Exzentrizität e vor, wobei Ellipse für Planetenbahn steht. Es ist eine Aufgabe der praktischen Astronomie, für jeden Planeten zu einer recht dichten Folge von Zeitpunkten (grob: für jeden Tag eines Jahres) seine astronomischen Koordinaten im voraus zu bestimmen (Ephemeridenrechnung). Dabei ist jedesmal eine Gleichung der Art (2) zu lösen.

Das besorgen heutzutage natürlich Rechenautomaten, mußte aber vor gar nicht all zu langer Zeit ohne solche Unterstützung bewältigt werden. In beiden Fällen sind schnelle und genügend gute Näherungsverfahren gefragt.

Die Gleichung (1) ist ein Musterbeispiel für eine sogenannte transzendente Gleichung. Sie läßt sich zwar mit beliebiger Genauigkeit lösen, dies aber – wie schon in der Aufgabe erwähnt – nur auf iterativem Wege. Kein Wunder, daß uns diese naheliegende Aufgabe über die Zerlegung einer Kreisfläche noch nicht unter den Olympiadeaufgaben begegnet ist!

Wenden wir uns nun der Aufgabe zu, auf graphisch-konstruktivem Wege eine Näherungslösung zu ermitteln. (Natürlich kann man auch ‚rein numerisch' zu Näherungen kommen, indem man α eine (einfachheitshalber gleichabständige) Folge von Werten des Intervalls $0 < \alpha < \pi$ durchlaufen läßt und die Funktion

$$f(\alpha) = \frac{n}{m+n} \cdot 2\pi - 2\alpha + \sin 2\alpha$$

nach dem betragsmäßig kleinsten Wert befragt. Aber solch ein Verfahren erlaubt nicht, Vorstellungen oder Erwartungen über die Lösung zu erzeugen.)

Wir setzen $2\alpha = x$ und $\frac{n}{m+n} \cdot 2\pi = A$ und schreiben (1) um in

$$x - A = \sin x \qquad (0 < x < 2\pi) \qquad (3)$$

Diese Gleichung kann interpretiert werden als die Frage nach gemeinsamen Punkten der in einer Ebene mit kartesischem xy-Koordinatensystem dargestellten Kurven

$$\left.\begin{array}{l}(a)\ y = x - A \text{ und}\\ (b)\ y = \sin x\end{array}\right\} \qquad (0 < x < 2\pi) \qquad (4)$$

Die Kurve (a) ist eine Strecke, die unter 45° gegen die positive x-Achse geneigt ist. Um sie zeichnen zu können, muß eine Strecke der Länge A konstruiert werden. Die Kurve (b) ist eine Sinuslinie. Sie braucht nur ein einziges Mal konstruiert zu werden, um bei jeder Wahl von m und n und damit zu jedem resultierenden A verwendet werden zu können – das ist der Kern der Idee, die Gleichung (3) in das Gleichungssystem (4) umzuschreiben!

Für $m = 1$, $n = 2$ ergibt sich $A = \frac{2}{3} \cdot 2\pi$.

Bild 2 gibt eine Konstruktion an. Sie verwendet die Näherungskonstruktion $2\pi \cdot r \approx 2 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot r$. Der Kreisumfang ist in 12 gleiche Teile (zu Mittelpunktswinkel 30° gehörend) zerlegt worden, was mit dem Kreisradius im Zirkel sehr schnell geht. Die Abwicklung des Kreises wurde mit Hilfe des Strahlensatzes in 12 gleiche Teile zerlegt. Die Strecke (a) ist nur zu einem Teil gezeichnet worden. Einige Abszissen sind in dem uns vertrauteren Gradmaß angegeben. Man liest ab: $2\alpha \approx 210°$. Berechnet man $f(2\alpha) = A - 2\alpha + \sin 2\alpha$ für $2\alpha = 210°$ und $2\alpha = 211°$, so erhält man $f(210°) = 0{,}0236\ldots$ und $f(211°) = -0{,}008\ldots$

Die graphisch erhaltene Lösung ist also eine recht brauchbare Näherung.

Lösungen zu: Ganz in Familie
Heft 6/88

1. $x + 6 = 2(x - 6)$; $x = 18$.
Annerose ist 18 Jahre alt.

2. $28 + x = 3(4 + x)$; $x = 8$. In acht Jahren ist der Vater zweimal älter als sein Sohn, denn $28 + 8 = 36$ und $4 + 8 = 12$; $36 = 12 + 2 \cdot 12$.

3. $a + b = 19$; $a = b + 3$;
also: $2b + 3 = 19$; $b = 8$; $a = 11$.
Der eine Junge ist 8 Jahre, der andere 11 Jahre alt.

4. $2a + 2 = 100 + b$; $b = 100 - a$;
$2a + 2 = 200 - a$; also $a = 66$.
A ist 66 Jahre alt.

5. $V + S = 48 \qquad (1)$

$\left(\frac{V}{3}\right)^2 = (S + 2)^2 + 48 \qquad (2)$

aus (1) folgt: $S = 48 - V$; also $S + 2 = 50 - V$; in (2) eingesetzt ergibt $\frac{V^2}{9} = 2548 - 100V + V^2$;

$\frac{8}{9}V^2 - 100V = -2548$ und hieraus

$V = \frac{9 \cdot 25}{4} \pm \frac{3 \cdot 23}{4}$. Die Probe zeigt, daß nur $V = \frac{9 \cdot 25 - 3 \cdot 23}{4}$ sinnvoll ist. Der Vater ist 39 und der Sohn 9 Jahre alt.

6. $M = 4T$; $M + 16 = 2(T + 16)$, also $T = 8$; $M = 32$. Die Mutter ist 32 Jahre und die Tochter 8 Jahre alt.

7. $M + J = 7$; $M = 2(J - 1)$; also $J = 3$ und $M = 4$. Der Vater hat vier Mädchen und drei Jungen.

8. $4x = 100 - x$; also $x = 20$.
Armin ist 20 Jahre alt.

9. Wir bezeichnen die Anzahl der Personen in jeder Familie mit A, B, C, D, die Anzahl der Kinder in jeder Familie mit a, b, c, d. Es gilt:
$A + B + C + D = 24$; $K = a + b + c + d$,
wobei $a = b + d$, $c = \frac{a}{2}$ und $d = b + 2$;

$K = (b + d) + b + \frac{a}{2} + (b + 2)$
$= 3b + \frac{b + d}{2} + 2 + d$; $K = 5b + 5$
$= 5(b + 1)$.

Die Anzahl der Erwachsenen ist: $E = 24 - K$ und die Anzahl der Eltern $F - E - 1 = 23 - K$, bei vier Familien ist $4 \leq F \leq 8$, also $4 \leq 23 - K \leq 8$, hieraus $15 \leq K \leq 19$, also auch: $15 \leq 5(b + 1) \leq 19$, oder $3 \leq b + 1 \leq 3{,}8$, also $b + 1 = 3$, deshalb $b = 2$, daraus folgt $d = 4$, $a = 6$, $c = 3$, $K = 15$.

Personen in jeder Familie:
A = 2 Erwachsene und 6 Kinder,
B = 3 Erwachsene und 2 Kinder,
C = 2 Erwachsene und 3 Kinder,
D = 2 Erwachsene und 4 Kinder.

Lösungen zu: alpha-Wettbewerb
Heft 5/88

Ma 5 ■ 2911 Wir rechnen $22 \cdot 2 = 44$; $44 + (44 - 8) = 44 + 36 = 80$.
Im Faß waren anfangs 80 kg Gurken.

Ma 5 ■ 2912 Die gesuchten Zahlen lauten 334, 344, 354, 434, 444, 454, 534, 544, 554; ihre Summe beträgt 3996; ihre halbe Summe beträgt 1998. Das Ergebnis lautet somit $1998 - 10 = 1988$.

Ma 5 ■ 2913 Es gilt
$157{,}5° = 90° + 45° + 22{,}5°$.
Es sind zwei Winkel von 90° zu konstruieren, die einen Schenkel gemeinsam haben. Einer der beiden Winkel ist zu halbieren (45°), davon einer nochmals (22,5°).

Ma 5 ■ 2914 Von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren kleinste gerade ist, sind drei Zahlen gerade und zwei ungerade. Die Summe aus zwei ungeraden Zahlen ist stets gerade.
Die Summe aus lauter geraden Zahlen ist stets gerade.

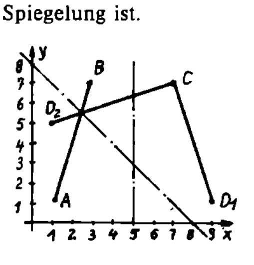
Ma 5 ■ 2915 Lebensalter in Jahren des

	Sohnes	Vaters	
in 5 Jahren	23	57	$2 \cdot 23 = 46 < 57$
in 10 Jahren	28	62	$2 \cdot 28 = 56 < 62$
in 15 Jahren	33	67	$2 \cdot 33 = 66 < 67$
in 16 Jahren	34	68	$2 \cdot 34 = 68$

In 16 Jahren wird der Vater doppelt so alt sein wie der Sohn.

Ma 5 ■ 2916 Angenommen, Axel ist gegenwärtig x Jahre alt;
dann gilt $4 \cdot x + x = 100$, $5 \cdot x = 100$, $x = 20$. Axel ist gegenwärtig 20 Jahre alt.

Ma 5 ■ 2917 Der Punkt C kann Bild des Punktes A, aber auch Bild des Punktes B bei einer Spiegelung sein. Ist C Bild von B, so ist die Gerade, die durch den Punkt (5; 0) geht und senkrecht zur x-Achse steht, die Spiegelachse, und A hat den Bildpunkt D_1 (9; 1). Ist C jedoch Bild von A, so ist die Gerade durch die Punkte (0; 8) und (8; 0) die Spiegelachse, und B hat den Bildpunkt D_2 (1; 5). Die Punkte D_1 und D_2 sind alle möglichen Punkte D, für die die Strecke $\overline{CD}$ das Bild der Strecke $\overline{AB}$ bei einer Spiegelung ist.



Ma 6 ■ 2918 Es sei $z = \overline{abcd}$ eine vierstellige natürliche Zahl in Dezimalschreibweise; dann gilt
$1 \leqq a \leqq 9$ und $0 \leqq b, c, d \leqq 9$.
Ferner gilt $a + b + c + d = 14$ und
$a \cdot d = a + d = b$. Aus $a \cdot d = a + d$
folgt $a = 2$ und $d = 2$, also $b = 4$ und
somit $c = 6$.
Es handelt sich um die Zahl 2462.

Ma 6 ■ 2919 Die erste Seite ist 18 m, die zweite 28 m lang. Die dritte Seite könnte 9 m oder 14 m lang sein. Wegen $9 + 18 = 27$ und $27 < 28$ ist die dritte Seite 14 m lang. Der Zaun ist deshalb $(28 + 18 + 14 - 1)$ m = 59 m lang.

Ma 6 ■ 2920 Wir rechnen
$3700 : (70 + 4) = 3700 : 74 = 50$;
$2 \cdot (72 + 48) = 2 \cdot 120 = 240$. Es ist
eine 240 m lange Strecke zurückzulegen.

Ma 6 ■ 2921 Aus $a \cdot b = 10$ und
$a \cdot b \cdot c = 70$ folgt $10 \cdot c = 70$,
also $c = 7$. Aus $a \cdot c = 14$ und $c = 7$
folgt $a \cdot 7 = 14$, also $a = 2$.
Aus $a \cdot b = 10$ und $a = 2$ folgt
$2 \cdot b = 10$, also $b = 5$.

Ma 6 ■ 2922 Wegen $9 + 9 + 9 + 9 = 36$ gilt für die Quersumme q der Zahl n $1 \leqq q \leqq 36$. Für die Zahl n gilt deshalb
$2012 - 36 \leqq n \leqq 2012 - 1$, also
$1976 \leqq n \leqq 2011$. Es existieren genau zwei Lösungen, nämlich
$1987 + 25 = 2012$ und $2005 + 7 = 2012$.

Ma 6 ■ 2923 Angenommen, Doris hat x Briefmarken; dann hat Bernd $3 \cdot x$ Briefmarken und Frank $(3 \cdot x - 50)$ Briefmarken. Das sind zusammen $(7 \cdot x - 50)$ Briefmarken, und es gilt
$7 \cdot x - 50 = 370$, $7 \cdot x = 420$, $x = 60$.
Somit besitzt Doris 60, Bernd 180 und Frank 130 Briefmarken.

Na/Te 6 ■ 425 In einer Stunde legt das Fahrzeug 45 km zurück. 12 min ist der 5. Teil einer Stunde, demzufolge beträgt der zurückgelegte Weg 9 km.

Ma 7 ■ 2924 Angenommen, Bettina ist x Jahre alt; dann ist Elke $4x$ Jahre, Doris $(4x - 2)$ Jahre, Christian $(x + 2)$ Jahre, Anton $3 \cdot (x + 2) = (3x + 6)$ Jahre, Gisela $(3x + 3)$ Jahre, Frank $2x$ Jahre und Hans $(4x + 1)$ Jahre alt. Das sind zusammen $(22x + 10)$ Jahre, und es gilt
$22x + 10 = 76$, $22x = 66$, $x = 3$.
Bettina ist 3, Elke 12, Doris 10, Christian 5, Anton 15, Gisela 12, Frank 6 und Hans 13 Jahre alt.

Ma 7 ■ 2925 Aus $a \cdot (b + c) = b \cdot (a + c)$ folgt $ab + ac = ab + bc$, $ac = bc$, $a = b$, also $b = 9$.
(1) $c = 10$; $(b; c) = (9; 10)$
(2) $c = 8$; $(b; c) = (9; 8)$

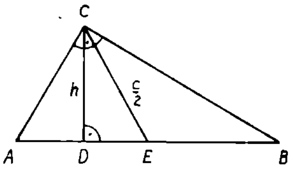
Ma 7 ■ 2926 Ein mögliches Beispiel wäre das folgende:

1	8	9
2	5	7
3	4	6

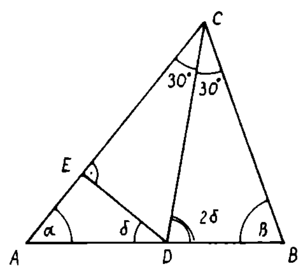
$1 \cdot 8 \cdot 9 = 72$
$2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$
$3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$
$\overline{214}$

Ma 7 ■ 2927 Es sei D Fußpunkt der Höhe $\overline{CD}$. Nach dem Satz des Thales gilt $\overline{EA} = \overline{EB} = \overline{EC}$, wobei E der Mittelpunkt der Hypotenuse $\overline{AB}$ ist. Für das rechtwinklige Dreieck DEC gilt somit $\overline{CE} = \frac{1}{2} \cdot c$. Im rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse die längste Seite.

Deshalb gilt $\overline{CD} < \overline{CE}$ bzw. $h < \frac{1}{2} \cdot c$.



Ma 7 ■ 2928 Nach Voraussetzung hat Winkel $\sphericalangle ACD$ die Größe 30°. Deshalb hat Winkel $\sphericalangle CDE$ die Größe $90° - 30° = 60°$. Winkel $\sphericalangle ADE$ habe die Größe δ. Für den gestreckten Winkel $\sphericalangle ADB$ gilt dann
$\delta + 60° + 2 \cdot \delta = 180°$, also $\delta = 40°$.
Daraus folgt weiter $\alpha = 90° - 40° = 50°$
und $\beta = 180° - 30° - 80° = 70°$.



Na/Te 7 ■ 426 Der Körper hat ein Volumen von 30 cm³ (1 ml = 1 cm³). Die Art der Flüssigkeit spielt keine Rolle. Aus der Gleichung zur Berechnung der Dichte ergibt sich: Dichte

eines Stoffes $= \frac{\text{Masse des Körpers}}{\text{Volumen des Körpers}}$

Dichte $= \frac{234\,\text{g}}{30\,\text{cm}^3} = 7{,}8\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

Der Körper könnte aus Stahl bestehen.

Na/Te 7 ■ 427 Unter Verwendung der Gleichung zur Berechnung der Geschwindigkeit benötigt der

1. Fahrer $t_1 = \frac{100\,\text{km}}{50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 2\,\text{h}$; der zweite

Fahrer $t_2 = \frac{50\,\text{km}}{40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} + \frac{50\,\text{km}}{60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}$

$= 2{,}083$ h, also mehr Zeit.
Der zweite Fahrer müßte den 2. Teil der Strecke in 0,75 h durchfahren.
Das bedeutet:

$v_2 = \frac{50\,\text{km}}{0{,}75\,\text{h}} = 66{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, d. h. mit $67\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Ma 8 ■ 2929 Nach Aufgabenstellung soll $\frac{4a - x}{5} + 2 > 0$ sein. Wir formen äquivalent um und erhalten

$4a - x + 10 > 0$, $a > \frac{x - 10}{4}$.

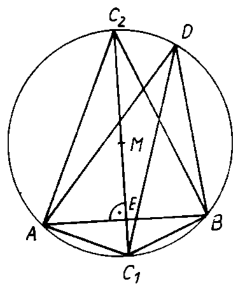
Nun soll $\frac{x - 10}{4} = -\frac{3}{4}$ sein.

Das ist nur für $x = 7$ der Fall.

Für alle reellen Zahlen a mit $a > -\frac{3}{4}$ ist $\frac{4a - 7}{5} + 2 > 0$, wie die Probe bestätigt, die wir dem Leser überlassen.

Ma 8 ■ 2930 Es sei $100a + 10b + c$ eine solche Zahl. Aus $a + b + c = 9$ folgt
$c = 9 - a - b$. Nun gilt
$100a + 10b + (9 - a - b) + 135$
$= 100(9 - a - b) + 10a + b$,
$189a + 108b = 756$, $7a + 4b = 28$.
Wegen $a \neq 0$ existiert genau eine Lösung, nämlich $a = 4$ und somit $b = 0$, also $c = 5$. Die Zahl lautet 405, und es gilt $540 = 405 + 135$.

Ma 8 ■ 2931 Der auf $\overline{AB}$ senkrecht stehende Durchmesser halbiert sowohl die Sehne $\overline{AB}$ als auch den zu $\overline{AB}$ gehörenden Bogen und seinen entgegengesetzten Bogen. Es sind also die Dreiecke AC_1E und C_1BE kongruent, ebenso die Dreiecke AEC_2 und EBC_2.



Es sei D ein beliebiger Punkt des Kreises k. Dann sind die Peripheriewinkel $\sphericalangle ADC_1$ und $\sphericalangle C_1DB$ kongruent, da sie über Bögen gleicher Länge stehen. Daraus folgt, daß $\overline{DC_1}$ Winkelhalbierende des Peripheriewinkels $\sphericalangle ADB$ ist. Entsprechendes gilt für C_2, w. z. b. w.

Ma 8 ■ 2932 Nach den Bedingungen der Aufgabe kann man vier Fälle unterscheiden. Die Anzahl der fehlenden Kugeln in den 10 Fächern kann wie folgt verteilt sein:

(1)	3	1	4	4	4	4	0	0	0	0
(2)	3	3	1	1	4	4	4	0	0	0
(3)	3	3	3	1	1	1	4	4	0	0
(4)	3	3	3	3	1	1	1	1	4	0

In jedem Falle fehlen 20 Kugeln; es sind also noch 80 Kugeln in der Schachtel.

Ma 8 ■ 2933 Für die Farben der Rosen in Christas und Daniellas Haar gibt es nur drei verschiedene Möglichkeiten:
(1) beide weiß, (2) eine weiß, eine rot und (3) beide rot.
Im Fall (1) hätte Annette in den Haaren ihrer Freundinnen zwei weiße Rosen gesehen und geantwortet: „Ich habe eine rote Rose im Haar." In Fall (2) hätte Beate ebenso wie Annette in den Haaren ihrer Freundinnen Christa und Daniella eine weiße und eine rote Rose gesehen. Aus Annettes Antwort: „Ich weiß nicht, welche Farbe die Rose in meinem Haar hat", hätte Beate erkannt, daß sie eine rote Rose im Haar hat, und sie hätte nicht geantwortet: „Ich weiß es auch nicht." Es kann also nur der Fall (3) vorliegen: Christa und Daniella haben beide eine rote Rose im Haar.

Na/Te 8 ■ 428 Gesucht: v_2 in $\frac{m}{s}$

Gegeben: $v_1 = 10\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$

$$A_1 = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$A_2 = \pi \cdot \left(\frac{d}{4}\right)^2$$

Aus $A_1 : A_2 = v_2 : v_1$ ergibt sich $v_2 = 4v_1$. Die Strömungsgeschwindigkeit im engeren Teil beträgt $40\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

Na/Te 8 ■ 429 Dichte von Kork:
$\varrho_K = 0{,}2\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$;

Dichte von Wasser: $\varrho_W = 1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$;

Volumen V des Ringes:
$V = \frac{m}{\varrho_K} = 3600\,\text{g} \cdot \frac{\text{cm}^3}{0{,}2\,\text{g}} = 18\,000\,\text{cm}^3$

Auftriebskraft F_A des vollständig eingetauchten Ringes aus der Masse des verdrängten Wassers m_W:
$m_W = \varrho_W \cdot V$; $m_W = 18\,000\,\text{g}$.
Der Ring erfährt eine Auftriebskraft F_A von 180 N (Archimedisches Gesetz). Damit der Ring noch schwimmt, muß gelten: Auftriebskraft (F_A) = Gewichtskraft des Ringes (F_R) + Gewichtskraft des Körpers (F_G). Es ergibt sich $F_G = 180\,\text{N} - 36\,\text{N} = 144\,\text{N}$. Die Gewichtskraft des Körpers darf höchstens 140 N betragen.

Ma 9 ■ 2934 Angenommen, der Korb enthielt n Äpfel. Das erste Kind erhielt $1 + \frac{n-1}{7} = \frac{n+6}{7}$ Äpfel. Im Korb verblieben $n - \frac{n+6}{7} = \frac{6n-6}{7}$ Äpfel.
Das zweite Kind erhielt
$2 + \frac{6n-6-14}{49} = \frac{6n+78}{49}$ Äpfel.
Nun gilt $\frac{n+6}{7} = \frac{6n+78}{49}$,
$7n + 42 = 6n + 78$, $n = 36$. Der Korb enthielt 36 Äpfel. Jedes Kind erhielt $\frac{n+6}{7}$, also $\frac{36+6}{7} = 6$ Äpfel. Somit hat diese Mutter sechs Kinder.

Ma 9 ■ 2935 Setzt man den Text in Gleichungen um, so erhält man das folgende System von zwei Gleichungen mit genau zwei Variablen:

(1) $\frac{10x+y}{y} = 12 + \frac{2}{y}$; $y \neq 0$

(2) $\frac{10y+x}{x} = 9 + \frac{8}{x}$; $x \neq 0$

Die schrittweise Umformung ergibt
(1) $10x + y = 12y + 2$
(2) $10y + x = 9x + 8$
Es ergeben sich $y = 8$ und $x = 9$;
d. h.: $L = \{(9; 8)\}$.
Die gesuchte zweistellige Zahl ist 98.

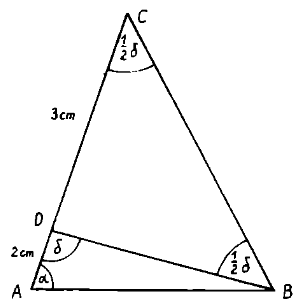
Probe: $98 : 8 = 12 + \frac{2}{98}$

und $89 : 9 = 9 + \frac{8}{89}$.

Ma 9 ■ 2936 Wir teilen zwei benachbarte Quadratseiten in je vier gleiche Teile und zeichnen durch die Teilpunkte Strecken, die parallel zu den gegenüberliegenden Quadratseiten sind. Auf diese Weise zerlegen wir das Quadrat in 16 kleinere Quadrate, die sämtlich paarweise zueinander kongruent sind.
In einem der 16 Quadrate müssen drei dieser Punkte liegen, anderenfalls wäre die Anzahl der Punkte kleiner als 33.
Der Umkreis dieses Quadrates hat nach dem Satz des Pythagoras einen Durchmesser von $d = \frac{a}{4}\sqrt{2}$, also einen Radius $r = \frac{a}{8}\sqrt{2}$.

Nun gilt $\frac{a}{8}\sqrt{2} < \frac{a}{5}$, denn $\frac{2a^2}{64} < \frac{a^2}{25}$ bzw. $\frac{a^2}{32} < \frac{a^2}{25}$ bzw. $\frac{1}{32} < \frac{1}{25}$.
Damit ist die Behauptung bewiesen!

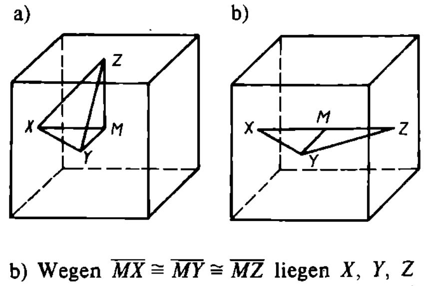
Ma 9 ■ 2937 Nach Umkehrung des Außenwinkelsatzes beträgt die Größe des Winkels $\sphericalangle CBD = \frac{1}{2}\delta$. Damit ist das Dreieck DBC gleichschenklig; die Länge von $\overline{DC}$ ist gleich der Länge von $\overline{DB}$.



Man konstruiert das Teildreieck ABD nach dem Kongruenzsatz ssw. $\overline{AD}$ ist über D hinaus zu verlängern, $\overline{DC}$ wird an $\overline{AD}$ angetragen. C ist mit B zu verbinden. Das Teildreieck ABD und der Punkt C sind eindeutig konstruierbar; somit ist es auch das Dreieck ABC.

Ma 9 ■ 2938 a) Es sei M der Mittelpunkt des Würfels, a dessen Kantenlänge und XYZ das zu untersuchende Dreieck.
Es gilt
$\overline{MX} \cong \overline{MY} \cong \overline{MZ} = \frac{a}{2}$ und
$\overline{MX} \perp \overline{MY} \perp \overline{MZ}$.
Daraus folgt die Kongruenz der Dreiecke MXY, MXZ und MYZ (sws). Daraus folgt $\overline{XY} \cong \overline{XZ} \cong \overline{ZY}$, w. z. b. w.

a) b)



b) Wegen $\overline{MX} \cong \overline{MY} \cong \overline{MZ}$ liegen X, Y, Z auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Durchmesser $\overline{XZ}$. Nach dem Satz des Thales ist dann der Winkel $\sphericalangle XYZ$ ein Rechter und somit das Dreieck XYZ rechtwinklig, w. z. b. w.

Na/Te 9 ■ 430 Gegeben: Gesamtlänge der Leitung (Hin- und Rückleitung) $l = 70\,\text{m}$
Aus dem Zusammenhang zwischen U, I und R an einem Leiterstück und dem Widerstandsgesetz $R = \varrho \cdot \frac{l}{A}$ ergibt sich:
$U = I \cdot l \cdot \frac{\varrho}{A}$;
$U = 12\,\text{A} \cdot 70\,\text{m} \cdot \frac{0{,}017\,\Omega \cdot \text{mm}^2}{2{,}5\,\text{mm}^2 \cdot \text{m}} = 5{,}71\,\text{V}$
Der Spannungsverlust beträgt rund 5,7 V.

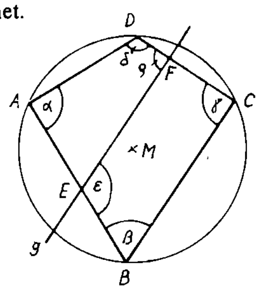
Na/Te 9 ■ 431 Gegeben: Masse des Eises $m = 2\,\text{kg}$
spezifische Schmelzwärme des Eises:
$q_s = 334\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$
spezifische Wärme des Wassers
$c = 4{,}186\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot K}$
spezifische Verdampfungswärme des Wassers $q_v = 2260\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$
Das Eis muß geschmolzen, das Wasser auf 100 °C erhitzt und anschließend verdampft werden. Dazu ist die Wärme $Q = m(q_s + c \cdot 100\,K + q_v)$ notwendig.
$Q = 6025\,\text{kJ}$.
Es müssen mindestens $6 \cdot 10^3\,\text{kJ}$ zugeführt werden. (Es ist nicht berücksichtigt worden, daß auch zugeführte Wärme an die Umgebung abgegeben wird und das Gefäß auch erhitzt werden muß.)

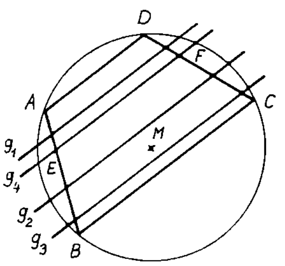
Ma 10/12 ■ 2939 Es gilt sicher $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Wir dividieren durch $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ und erhalten
$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$.
Wir formen weiter um:
$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}$ und somit
$(\tan\alpha + \cot\alpha)\sin 2\alpha = 2$, was zu zeigen war.

Ma 10/12 ■ 2940 1986 betrug die Anbaufläche für Getreide
$117 \cdot 10^6\,\text{dt} : 46{,}4\,\frac{\text{dt}}{\text{ha}} = 2\,521\,552\,\text{ha}$.
Wenn die Anbaufläche um 10 000 ha zurückgehen soll, stehen noch 2 511 552 ha zur Verfügung.
Der durchschnittliche Hektarertrag für 12 Mio t Gesamternte müßte dann
$120 \cdot 10^6\,\text{dt} : 2\,511\,552\,\text{ha} = 47{,}78\,\frac{\text{dt}}{\text{ha}}$
sein. Die Steigerung von
$46{,}4\,\frac{\text{dt}}{\text{ha}}$ auf $47{,}78\,\frac{\text{dt}}{\text{ha}}$ sind $\frac{47{,}78}{46{,}4} \approx 1{,}03$, also etwa 3 %.

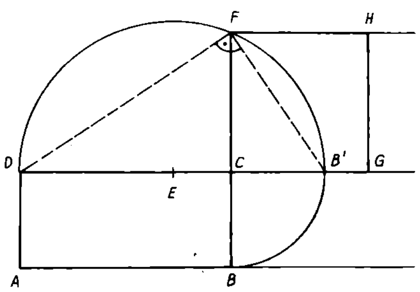
Ma 10/12 ■ 2941 Das Bild zeigt ein Sehnenviereck $ABCD$, und es gilt $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$. Es sei g eine Gerade mit der geforderten Eigenschaft. Dann schneidet g zwei gegenüberliegende Seiten von $ABCD$ in E und F, und die Vierecke $AEFD$ und $EBCF$ sind dann ebenfalls Sehnenvierecke. Dann muß auch gelten: $\alpha + \zeta = \gamma + \varepsilon = 180°$. Aus den angegebenen Gleichungen folgt $\zeta = \gamma$ und $\varepsilon = \alpha$. Nach der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes gilt $\overline{AD} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{BC}$. Da ζ und δ innere

entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen sind, muß $\zeta + \delta = 180°$ sein. Wegen $\alpha + \zeta = 180°$ ergibt sich $\alpha = \delta$. Das Sehnenviereck $ABCD$ muß also ein gleichschenkliges Trapez sein. Da umgekehrt jedes gleichschenklige Trapez auch Sehnenviereck ist, sind die gesuchten Vierecke alle gleichschenkligen Trapeze. Diese werden durch jede schneidende Gerade, die parallel zu den parallelen Seiten des gleichschenkligen Trapezes ist, in zwei ebensolche Trapeze zerlegt.
Als Beispiele wurden vier Geraden eingezeichnet.





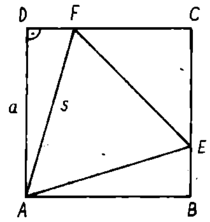
Ma 10/12 ■ 2942 Handlungsvorschrift:



1. Man zeichne ein beliebiges Rechteck $ABCD$; $ABCD$ sei kein Quadrat!
2. Man verlängere $\overline{DC}$ über C hinaus um $\overline{CB}$. Man erhält B'.
3. Um den Mittelpunkt E von $\overline{B'D}$ zeichne man den Thaleskreis!
4. Man verlängere $\overline{BC}$ über C hinaus und bezeichne den Schnittpunkt mit dem Thaleskreis mit F!
5. Das Quadrat mit der Seite $\overline{CF}$ ist nach dem Höhensatz flächengleich dem Rechteck $ABCD$; es gilt
$\overline{FC}^2 = \overline{DC} \cdot \overline{CB'}$ $(\overline{CB'} = \overline{CB}!)$.
Man bezeichnet das Quadrat mit $CGHF$.

Ma 10/12 ■ 2943 Aus
$\overline{AE} \cong \overline{AF}$, $\overline{AB} \cong \overline{AD}$
und $\sphericalangle ABE \cong \sphericalangle ADF$ folgt nach bekanntem Kongruenzsatz $\triangle ABE \cong \triangle DAF$ und damit auch $\overline{BE} \cong \overline{DF}$ und $\overline{FC} \cong \overline{CE}$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt $\overline{DF} = \sqrt{s^2 - a^2}$. Es folgt $\overline{FC} = a - \sqrt{s^2 - a^2}$. Im Dreieck FEC gilt nach dem Satz des Pythagoras $s^2 = 2\left(a - \sqrt{s^2 - a^2}\right)^2$. Unter Beachtung von $2a^2 = \overline{AC} > s^2$ folgt nun schrittweise:

$$s^2 = 2\left(a^2 - 2a\sqrt{s^2 - a^2} + s^2 - a^2\right),$$
$$s^2 = 4a\sqrt{s^2 - a^2}, \quad s^4 = 16a^2(s^2 - a^2),$$
$$16a^4 - 16a^2s^2 = -s^4,$$
$$(4a^2)^2 - 2 \cdot 4a^2 \cdot 2s^2 + (2s^2)^2 = 3s^4,$$
$$(4a^2 - 2s^2)^2 = 3s^4, \quad 4a^2 - 2s^2 = \sqrt{3} \cdot s^2,$$
$$a^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} s^2, \quad a = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} s.$$



Na/Te 10/12 ■ 432 Da sich der Körper beschleunigt bewegen soll, kann aus dem Weg-Zeit-Gesetz die Beschleunigung a berechnet werden. Diese Beschleunigung plus Fallbeschleunigung ist die Gesamtbeschleunigung, die auf den Körper einwirken muß. Die erforderliche Kraft ergibt sich aus dem Newtonschen Grundgesetz.

$$F = m \cdot \left(9{,}81 \,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + a\right),$$

$$F = m \cdot \left(9{,}81 \,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + \left(2 \cdot \frac{s}{t^2}\right)\right).$$

Mit $m = 200$ kg, $s = 3$ m und $t = 5$ s ergibt sich $F = 2010$ N. Es ist eine Kraft von $2 \cdot 10^3$ N erforderlich.

Na/Te 10/12 ■ 433 Um das Fahrzeug auf die Geschwindigkeit v zu beschleunigen, ist die Beschleunigungsarbeit
$W_{\text{Beschl.}} = 0{,}5 \cdot m \cdot v^2$ erforderlich.
Da der Beschleunigungsvorgang t dauert, muß der Motor eine Leistung

$P = \frac{W_{\text{Beschl.}}}{t}$ aufbringen.

$$P = 5625\,\mathrm{N} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 5625\,W.$$

Die notwendige Leistung beträgt 5,6 kW.

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Wir legen in eine Schachtel 1987 weiße und 7891 schwarze Kugeln. Außerhalb der Schachtel haben wir auch 1000 schwarze Kugeln. Wir nehmen zwei Kugeln aus der Schachtel. Wenn sie verschiedene Farben haben, legen wir die weiße zurück in die Schachtel. Haben sie dieselbe Farbe, legen wir eine schwarze Kugel in die Schachtel. Das führen wir fort, bis nur noch eine Kugel übrig ist. Welche Farbe hat sie?
Lösung: Bei jedem Schritt nimmt die Anzahl der Kugeln in der Schachtel um 1 ab und die Zahl der weißen Kugeln in der Schachtel bleibt entweder konstant oder verringert sich um 2. Da wir mit einer ungeraden Zahl weißer Kugeln begannen, müssen wir bei einer ungeraden Zahl enden – also ist die letzte Kugel weiß.

▲2▲ Kolja kauft am Büfett drei Tüten Sahnebonbon, Witja zwei Tüten. Als Aljoscha ans Büfett kam, waren die Bonbons schon alle. Die Freunde teilten die Bonbons gleichmäßig auf. Es ergab sich, daß Aljoscha 25 Kopeken an die Freunde zahlen mußte. Wieviel kostete eine Tüte Bonbons, und wieviel mußte Aljoscha an Kolja und wieviel an Witja zahlen?
Lösung: Da Aljoscha 25 Kopeken zu zahlen hatte, kosteten die fünf Tüten insgesamt $3 \cdot 25 = 75$ Kopeken. Eine Tüte kostete also 15 Kopeken. Kolja hatte drei Tüten für insgesamt 45 Kopeken gekauft. Er gab für 45 Kopeken – 25 Kopeken = 20 Kopeken Bonbons an Aljoscha. Witja, der zwei Tüten für insgesamt 30 Kopeken erworben hatte, gab davon für 30 Kopeken – 25 Kopeken = 5 Kopeken Bonbons an den Freund ab. Aljoscha hatte deshalb 20 Kopeken an Kolja und 5 Kopeken an Witja zu entrichten.

▲3▲ Der Kilometerzähler eines Fahrzeugs gibt 126 km an, wenn die tatsächlich zurückgelegte Strecke 118 km beträgt. Wie lang ist die tatsächlich zurückgelegte Strecke, wenn der Kilometerzähler 550 km anzeigt?
Lösung: $\frac{x}{550\,\text{km}} = \frac{118\,\text{km}}{126\,\text{km}}$; $x = 515$ km.
Die tatsächlich zurückgelegte Strecke beträgt dann 515 km.

▲4▲ Löse das im Bild dargestellte Kryptogramm. (Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben – verschiedene Ziffern)
Lösung: 45 203 + 45 203 = 90 406

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Vom Kern zum Wort

A n o m a l i e
L e g e n d r e
G o l d b a c h
E l e m e n t e
B e g r i f f e
R a d i k a n d
A n a l o g i e

Wissen und Rechnen
155 490 : 730 = 213

Tarnung
Die Figuren der Bilder 1 und 5 gehören nicht dazu.

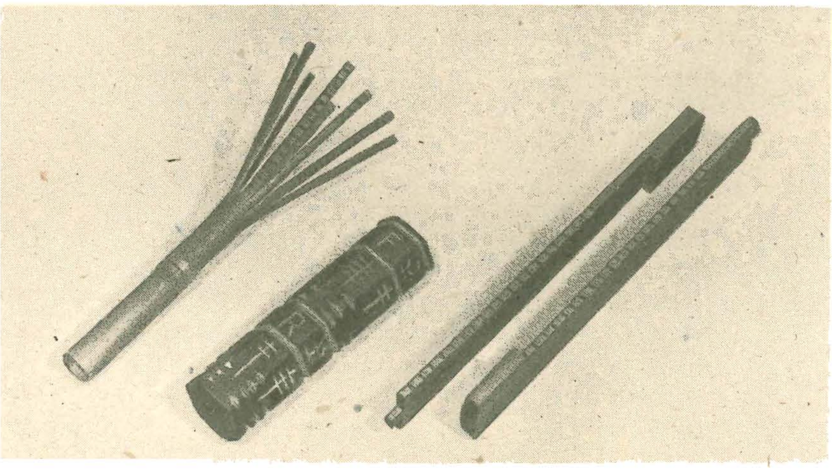
Beständige Gleichheit
a) 64 + 85 = 149; b) 84 + 56 = 140;
c) 85 + 55 = 140; d) 94 + 56 = 150;
e) 94 + 55 = 149; f) 64 + 55 = 119;
g) 84 – 65 = 19

Verdecktes Kartenspiel
A: Kreuz König; B: Karo As;
C: Pik Bube; D: Herz Sechs

Ziel: Gleichheit
a) $9 - 2 + 12 \cdot 5 = 67$;
b) $13 + 15 + 2 \cdot 14 = 56$;
c) $10 - 6 : 6 + 11 = 20$;
d) $18 - 12 + 2 \cdot 14 = 34$;
e) $7 \cdot 5 + 13 - 10 = 38$

Die Hemden des Junggesellen
7 + 7 + 1 = 15 Hemden

Die Entlarvung des Orakels
Links steht der Gott der Diplomatie, in der Mitte der Gott der Lüge, rechts der Gott der Wahrheit.



Drei verschiedene Kerbhölzer. Zählstock aus geschlitztem Bambus (beispielsweise zum Zählen von Kokosnüssen), Stiala de latg (Milchstab aus dem Bündner Oberland) und ein Doppelholz (von links nach rechts).

Am Anfang war die Kerbe

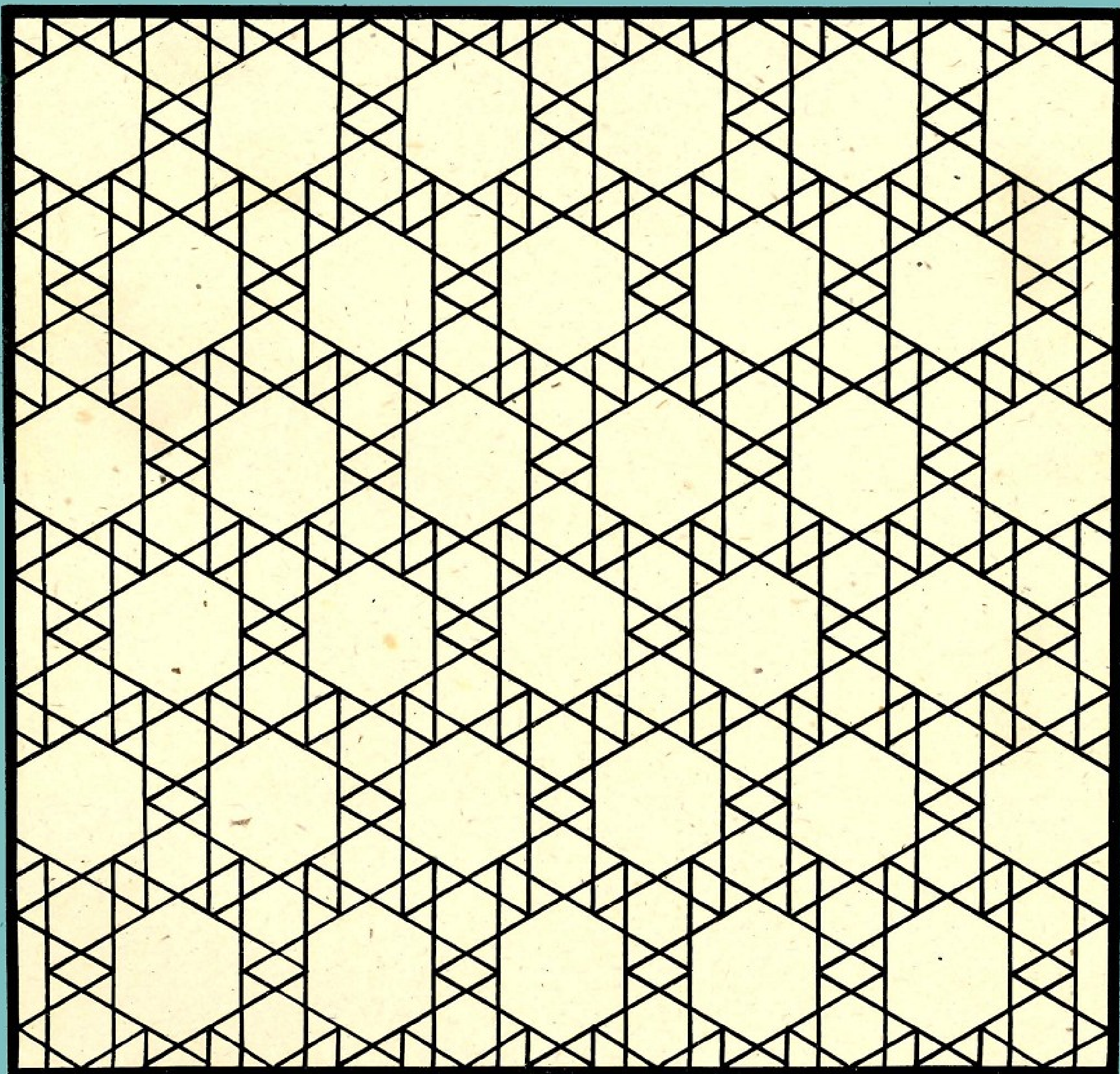
Das Zählen ist eine der wichtigsten abstrakten Tätigkeiten, die das menschliche Denken bereits in grauer Vorzeit entwickelt hat. Die ältesten schriftlichen Denkmale für das Zählen finden wir bereits in der schriftlosen Zeit der Menschheit:
die Zahl wurde nämlich bereits vor dem Wort aufgeschrieben, genauer Striche wurden eingeritzt oder eingekerbt. Das älteste uns bekannte Zeugnis dieser Art ist ein mit 55 Kerben versehener Knochen, der in Mähren (ČSSR) gefunden wurde und der rund 30000 Jahre alt ist. Die Kerben sind einfach aneinander gereiht. Es ist ziemlich sicher, daß damals für die Zahl 55 noch gar kein Zahlwort in der Sprache unserer Vorfahren vorhanden war. Aber demjenigen, der die Kerben gemacht hatte, war klar, daß es eine – wie wir heute sagen – umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen seinen Kerben und einer (uns unbekannten) Menge von 55 Elementen, die er zählte, gibt. Noch heute ist diese alte Art des Zählens im Gebrauch, wenn mit Strichlisten die Anzahl von Dingen erfaßt wird (z. B. Getränke vom Ober in Gaststätten, Kartoffelsäcke beim Liefern in Haushalte). Der Übersichtlichkeit halber reihen wir die Striche nicht einfach, sondern „bündeln“ sie. Die verbreitetste Form des Bündelns ist, jeden fünften Strich als Querstrich zu schreiben. Gezählt wird dann in Fünferschritten.
Die Striche sind für das Zählen lediglich eine Hilfsmenge. Es sind anstelle der Striche oder Kerben auch Stäbchen oder Steine benutzt worden und natürlich auch die stets vorhandene Hilfsmenge unserer 10 Finger.
Die ägyptischen oder römischen Ziffern konnten nur von Angehörigen der gebildeten Schichten gelesen werden; die Kerben waren und sind Ziffern, die dem Volk ohne Unterweisung verständlich sind. Auf Holzstöcken wurden die Kerben einfach aneinander gereiht oder durch verschiedene Formen gebündelt (quer eingeritzte Kerben, gekreuzte Kerben, breitere Kerben). Übrigens entwickelten sich die römischen Ziffern vermutlich aus den Kerben: I, II und III sind Kerben, und die fünfte bzw. zehnte Kerbe wurde in der Form V bzw. X gemacht (also die Reihung der Kerben mit dem Durchkreuzen zur Bündelung erhoben).
Es gab noch einen gewichtigen Grund, der dem Kerbholz im Volke eine weite Verbreitung sicherte. Papier gab es in Deutschland erst seit dem 14. Jahrhundert, und das seit der Antike gefertige Pergament war teuer. Das sicherte den leicht herstellbaren Kerbhölzern einen festen Platz im Rechnungswesen. Schuld wurde auf einfache Art aufgekerbt. Die Redewendung „etwas auf dem Kerbholz haben“ ist in unserer Sprache noch erhalten. Das teilweise Löschen einer Schuld wurde durch Auskerben und das vollständige Löschen durch Vernichten der Kerbhölzer vollzogen. Auch hier ist noch eine Redewendung lebendig: „glatte Rechnung“ meinte ursprünglich nämlich das ausgekerbte bzw. glatte Kerbholz.
Neben den einfachen Kerbhölzern mit Kerbe an Kerbe gab es auch Doppel- und Dreifachhölzer. Das sind Kerbhölzer, die längs in zwei oder drei Teile zerlegt wurden, so daß Schuldner und Gläubiger oder mehrere an einem Handel beteiligte Personen einen „Beleg“ hatten, der nur gemeinsam bei Lieferung oder Leistung geändert wurde. Eine ganz leichte doppelte oder mehrfache Buchführung, die betrugsicher war. Der Code civil, die Napoleonische Gesetzgebung von 1804, akzeptierte Kerbhölzer als rechtsgültige Vertragsbestandteile. Das chinesische Zeichen für Vertrag enthält auch das Kerbholzsymbol. Die Wiener Schneeabfuhr benutzte noch vor einigen Jahrzehnten dreiteilige Kerbhölzer (Aufladeplatz, Fuhrmann, Abladeplatz), und in Schweizer Dorfgemeinschaften wird noch heute durch Milchstäbe über die gemolkene Milch Buch geführt.
Über den flämischen Maler Pieter Bruegel (16. Jahrhundert) wird uns folgende hübsche Geschichte berichtet: „Solange er in Antwerpen wohnte, hielt er mit einer Magd aus, die er auch geheiratet hätte, wenn ihm nicht mißfallen hätte, daß sie jederzeit zu lügen gewohnt war. Er machte mit ihr eine Absprechung oder einen Vertrag, daß er alle Lügen anmerken werde auf einem Kerbstock, wozu er einen redlich langen nahm, und wenn der Kerbstock mit der Zeit voll geworden sei, sollte es mit dem Heiraten ganz und gar aus sein, wie es denn geschah, ehe lange Zeit um war.“ In einem Frauenlexikon, das 1715 in Leipzig gedruckt wurde, heißt es, daß im städtischen Gebrauch „... ein langes schmales Hölzlein, gedoppelt ineinander gelegt, worauf das Gesind, so das Tischbier außer dem Hause zu holen pflegten, kannenweise eingekerbt und anschreiben läßt“ üblich war.
Wir haben gesehen, daß das Kerbholz es mehrfach zu amtlichen Ehren gebracht hat. Beeindruckend ist seine Rolle im englischen Finanzwesen. Seit dem 12. Jahrhundert verbuchte die englische Staatsbank Gelder auf Kerbhölzern (sogenannten „Exchequer Tallies“), und sie gab damit auch Zahlungsanweisungen aus.
Der Bankkunde (der Kerbholzbesitzer – „the stock holder“) verglich (engl. to chek) seinen Teil des Kerbholzes mit dem der Bank: Der Ursprung unseres Schecks als gesicherte Zahlungsanweisung. Die Kerbhölzer waren im traditionsbewußten Vereinigten Königreich bis ins 19. Jahrhundert hinein üblich – eine einmalige Art des bargeldlosen Verkehrs. 1834 verfügte man schließlich, die amtlichen Bestände an Kerbhölzern zu verbrennen, was so gründlich im Parlament besorgt wurde, daß dieses gleich selbst mit abbrannte.
Abschließend einige sprachliche Bemerkungen zum Kerbholz. „Talo“ war die altgermanische Bezeichnung für die Einschnitte am Kerbholz. Hier wurzeln die englischen Wörter „to tell“ und „to talk“ (erzählen) oder „the tale“ (Erzählung). Die Wendung „all told“ (alles in allem) meint wörtlich „alles gezählt“. Die französischen oder englischen Wörter für Kerbholz sind „taille“ (die Einkerbung) und „tally“. Mit dem Kerbholz einkaufen gehen, heißt auf französisch „achater à la taille“ und bedeutet natürlich, daß man auf Pump kauft. Das Einritzen von Zahlen wird im Altgermanischen mit „writan“ ausgedrückt, was sich heute im englischen „to write“ (schreiben) findet. Den Übergang vom Einschneiden zum Rechnen läßt das Lateinische ausgezeichnet erkennen. Schneiden heißt dort „putare“. Einschneiden oder anrechnen „imputare“, rechnen „computare“ (Computer!).

R. Thiele

ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 23 (1989) 1 · Seiten 1 bis 24

Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



2

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
23. Jahrgang 1989
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag

Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086

Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstr. 16, Leipzig 7010.

Fotos: W.-Ostwald-Gedenkstätte Großbothen (S. 25); R. Pätzold (S. 36); H. J. Ilgauds (S. 42)
Vignetten: L. Otto
Techn. Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage von W. Ostwald
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 14. Dezember 1988
Auslieferungstermin: 11. April 1989

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Wilhelm Ostwald – ein Chemiker, von dem auch Mathematiker lernen können

Wilhelm Ostwald wurde am 2. September 1853 als Sohn eines Böttchermeisters in Riga geboren. Bereits sehr zeitig offenbaren sich seine vielseitigen Interessen, die das ganze Leben erhalten bleiben sollen. Er entdeckt früh das Buch als Schlüssel zum geheimnisvollen Reich des Wissens. Gefürchtet, aber geduldet waren seine aus Büchern nachvollzogenen Experimente zur Herstellung von Feuerwerkskörpern. Sein handwerkliches Geschick und die Fähigkeit, mit einfachen Mitteln große Wirkungen zu erzielen, zeigten sich in der Herstellung eines Fotoapparates aus Zigarrenkisten und dem Operrnglas der Mutter und der eigenhändigen Anfertigung der dazugehörigen Fotoplatten. Später entwarf und baute er eine Vielzahl Laborgeräte selbst. Einige tragen noch heute seinen Namen, z. B. Ostwald-Pygnometer, -Viskosimeter und -Thermostat. Erst Ostwalds Thermostat machte es möglich, Temperaturen konstant zu halten. Ein funktionstüchtiges Modell dieses ersten geschlossenen Regelsystems befindet sich in der Ostwald-Gedenkstätte in Großbothen.

Als Realschüler gab Ostwald die Schülerzeitschrift „Humor" heraus. Am Ende seines Lebens kann Ostwald auf ein wissenschaftliches Werk von 45 Hand- und Lehrbüchern, 20 Jahre Redaktion einer Zeitschrift, 120 Experimentalarbeiten zurückblicken. Dazu kommen 3 880 Referate, 920 Rezensionen und unzählbare Vorträge. Er stand mit 1 200 Partnern im Briefwechsel.

Ostwald befaßte sich sein ganzes Leben mit Farben. Auf Urlaubs- und Dienstreisen war das Malzeug steter Begleiter, Schränke voller Skizzen und Studien in Großbothen zeugen davon. Diese ihm Freude und Entspannung bereitende Tätigkeit führte ihn später zur wissenschaftlichen Auseinandersetzung mit Farben, gipfelt im Aufbau einer anschaulichen und praktisch anwendbaren Farbenlehre.

Als Schüler spielt Ostwald Geige, schreibt in seiner Studentenzeit alle 83 Haydn-Quartette ab und spielt sie auch, analysiert Beethovens Klaviersonaten hinsichtlich ihrer Harmonie und pflegt auch später mit seiner Familie die Musik als Erholungspause von anstrengender Kopfarbeit.

In seiner Jugend jedoch führen die zahlreichen Interessen zu einer nicht ganz freiwilligen Verlängerung seiner Schulzeit. Nach dem Abitur beginnt Ostwald 1882 an der Landesuniversität Dorpat (heute Tartu) das Chemiestudium. Bereits fünf Jahre später promoviert er zum Doktor der Chemie.

Im Jahr 1880 heiratet er Helene von Reyer. Sie ist ihm sein gesamtes Leben eine verständnisvolle Ehefrau. Überhaupt kann ihr gemeinsames Leben mit ihren fünf Kindern als Beispiel dafür dienen, daß wissenschaftliches Leben mit Familie vereinbar ist.

Nach fünf Jahren erfolgreichen Schaffens am Polytechnikum in Riga, in dieser Zeit erscheint sein vielbeachtetes „Lehrbuch der allgemeinen Chemie" in zwei Bänden und gründet er gemeinsam mit Henricus van't Hoff die „Zeitschrift für physikalische Chemie" zur Verbreitung der sich herausbildenden Physicochemie, wird Ostwald als Professor für Physikalische Chemie nach Leipzig berufen. Ostwalds hervorragende organisatorische und methodische Fähigkeiten lassen das Leipziger Institut zum weltberühmten Zentrum für physikalische Chemie werden. Dieser neue Wissenschaftszweig, der seine Entwicklung der gemeinsamen Arbeit Ostwalds, Arrhenius' und van't Hoffs verdankt, ist wichtigste Grundlage für die moderne technische Chemie. Für seine Forschungen über die Katalyse, die er erstmals klar definiert, erhält er 1909 den Nobelpreis. Zu dieser Zeit hat er sich bereits drei Jahre aus dem Leipziger Lehramt zurückgezogen und lebt mit seiner Familie in Großbothen (Kreis Grimma). Nun begann seine nicht weniger produktive und vielseitige Periode der Beschäftigung mit philosophischen, wissenschaftsorganisatorischen und gesellschaftspolitischen Problemen.

Während die Übertragung seiner in der Naturwissenschaft berechtigten „energetischen Betrachtungsweise" auf die Philosophie ein fundamentaler Irrtum war, haben seine vielfältigen Aktivitäten als Organisator der Wissenschaft auch heute noch fundamentale Bedeutung. In seinem Bemühen, die Arbeiten der Naturforscher der Vergangenheit einem breiteren Publikum zugänglich zu machen, gab er ab 1889 die Reihe „Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften" heraus. Seinen Nobelpreis stiftet Ostwald zu etwa zwei Dritteln zur Gründung der „Brücke", das „Internationale Institut zur Organisierung geistiger Arbeit". Ihre Aufgabe sollte in der Schaffung eines umfassenden Informationssystems bestehen, um den Forschern unschöpferische Vorarbeit abzunehmen. Wesentliche Voraussetzungen dafür waren für Ostwald die Schaffung einer Weltsprache und weitere Reformen. Seine von ihm vorgeschlagenen „Weltformate" zur Papiergrößennormung führten in den zwanziger Jahren zur Einführung der DIN-Formate. Da zur Lösung derartiger Aufgaben eine enge internationale Zusammenarbeit notwendig war, brach die „Brücke" kurz vor dem ersten Weltkrieg trotz bedeutender Teilerfolge zusammen.

Dieser Zusammenbruch traf Ostwald hart, zumal er in derartigen internationalen Bemühungen einen Friedensfaktor ersten Ranges sah. Ostwald zog sich nicht auf eine die Kämpfe seiner Zeit beschauende Position zurück, sondern griff durch Aktivitäten zur Schul- und Hochschulreform, seine Rede auf der Internationalen Stockholmer Friedenskonferenz 1910 und dem gemeinsamen Auftreten mit Karl Liebknecht gegen die Staatskirche als Machtmittel der Bourgeoisie 1913 und seine Mitarbeit im Monistenbund aktiv ein. Die Wurzeln des ersten Weltkrieges sah er jedoch nicht, sondern zog sich auf die Position des „inneren Burgfriedens" gegen den äußeren Feind zurück.

Neben diesen vielfältigen Aktivitäten findet Ostwald Zeit für seine Familie, die Musik, Malerei und Spaziergänge im Gelände seines Wohnsitzes „Die Energie" in Großbothen.

Mit Ostwalds Tod am 4. April 1932 endet sein aktives und erfülltes Leben, ein überwiegend glückliches, wie er es im Alter von 70 Jahren selbst einschätzte. Ein beredtes Zeugnis von der unerschöpflichen Energie Ostwalds ist die Wilhelm-Ostwald-Gedenkstätte in seinem Wohnhaus in Großbothen, die 1979 in die Zentrale Liste der Denkmale internationaler Bedeutung eingereiht wurde. Die im Zustand von Ostwalds Lebzeiten erhaltenen Räumlichkeiten betreut sehr engagiert und liebevoll eine Ostwald-Enkelin, Frau Margarete Brauer. Wir möchten uns bei Frau Brauer herzlich für die wertvolle Unterstützung bedanken. Der zweimalige Besuch der Ostwald-Gedenkstätte in Vorbereitung auf dieses Heft hat uns Ostwaldverehrer werden lassen. Wenn ihr die Gedenkstätte auch besuchen wollt, dann wendet euch zwecks Voranmeldung an folgende Adresse:

Wilhelm-Ostwald-Gedenkstätte der Akademie der Pädagog. Wissenschaften
Haus „Energie"
Großbothen
7243

G. Liebau

Rodnyi / Solowjew
Wilhelm Ostwald
aus der Reihe Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig

Domschke / Lewandrowski
Wilhelm Ostwald
Urania-Verlag, Leipzig · Jena · Berlin

In der „Welt der Formen“ von W. Ostwald

In seinen späteren Forschungen widmete sich W. Ostwald besonders der Farbenlehre. Er ließ sich dabei von dem Goetheschen Grundsatz leiten, daß Gesetzliches eine Vorbedingung für Schönheit ist. In gewisser Anlehnung an die Musik schuf er ein System wohlbestimmter Farben – eine messende Farblehre –, dem acht „Vollfarben“ und acht verschiedene Grautöne zu Grunde liegen. (Seine große „Farborgel“, die man in der Ostwald-Forschungsstätte der Akademie der Wissenschaften in Großbothen bei Leipzig besichtigen kann, gibt einen besonders anschaulichen und eindrucksvollen Einblick in das System.) Neben theoretischen Gesichtspunkten hatte Ostwald vor allem praktische Anwendungen zum Ziel. Das Ostwaldsche System wurde sogar in sächsischen Volksschulen gelehrt und in der Meißner Porzellanmanufaktur verwendet. Textilfabrikanten kennzeichneten damit ihre Muster.

Farbe und Form stehen in der Kunst in einem engen Zusammenhang. Dies veranlaßte W. Ostwald, eine „allgemeine Lehre von gesetzlichen Formen“ zu entwickeln. Seine prinzipiellen Gedanken dazu legte er in dem Buch „Harmonie der Formen“ (Leipzig 1922) dar. Konkrete Ausarbeitungen findet man dann in „Die Welt der Formen“, die er in sechs Mappen (Leipzig 1922 bis 1925) vorlegte.

W. Ostwald geht von der „gesetzlichsten Raumteilung“ der Ebene aus. Wie du, lieber Leser weißt, kann man die Ebene lückenlos und ohne Überlappungen durch kongruente regelmäßige Dreiecke oder kongruente Quadrate oder kongruente regelmäßige Sechsecke wie in den Bildern 1a bis c überdecken. Mit anderen kongruenten regelmäßigen n-Ecken der gleichen Eckenzahl gelingt das nicht!

Mit dem kleinkarierten Papier, das du fast täglich verwendest, hast du bereits eine derartige Überdeckung der Ebene zur Hand. Wir wollen deshalb die Vorgehensweise von W. Ostwald zur Herstellung von gesetzlichen Mustern auf der Grundlage einer Überdeckung der Ebene wie in Bild 1b erläutern, und auf kleinkariertem Papier kannst du dies leicht nachvollziehen.

Bild 1a

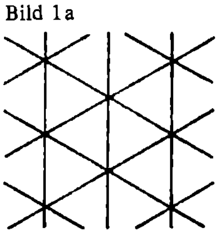


Bild 1b

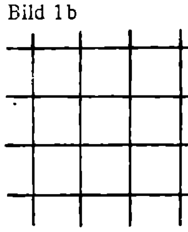


Bild 1c

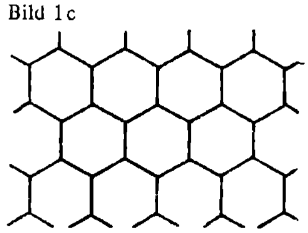


Bild 2a

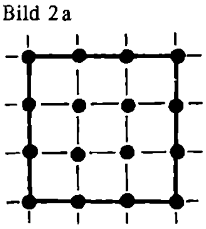


Bild 2b

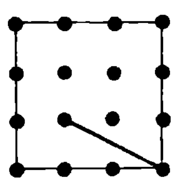


Bild 2c

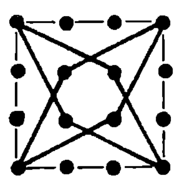


Bild 3

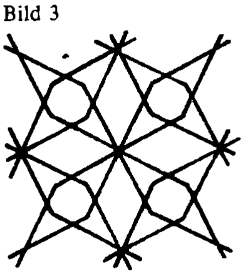


Bild 4

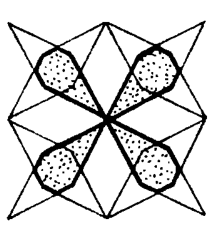
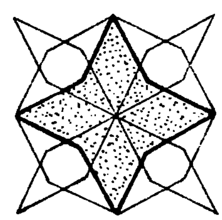


Bild 5



Die Ecken der Quadrate dieser Grundstruktur nennt Ostwald „Knoten“. Unter einem „Quadrat Q n-ter Ordnung“ wird ein Quadrat verstanden, das sich aus $n \cdot n = n^2$ Quadraten der Grundstruktur zusammensetzt. Seine Ecken sind also Knoten, und es enthält $(n+1)^2$ Knoten. Wähle dir ein Quadrat Q 3ter Ordnung und markiere die $(3+1)^2 = 16$ Knoten, die es enthält (Bild 2a).

Die Verbindungsstrecke zweier Knoten aus Q heißt (in Anlehnung an die Musik) ein „Thema“ (T).

▲1▲ Wie viele Themen in Q können gebildet werden?

Lösung: Q enthält $k(n) = (n+1)^2$ Knoten. Ein ausgewählter Knoten bildet mit den restlichen genau $(k-1)$ Themen. Also gibt es

$$t(n) = \frac{k(k-1)}{2} = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{2}$$

Themen. In unserem Beispiel haben wir $t(3) = 120$ Themen.

Wir wählen im Quadrat Q ein Thema T (Bild 2b) und wenden auf T alle Deckabbildungen von Q an. Die Deckabbildungen sind diejenigen Bewegungen der Ebene, die Q auf sich abbilden, und dies sind die Spiegelungen an den vier Symmetrieachsen von Q (zwei Diagonalen und zwei Mittelsenkrechten der Seiten), die drei Drehungen um den Mittelpunkt M von Q mit 90°, 180°, 270° und schließlich die identische Abbildung, die wir als Drehung um M mit 0° verstehen können. Diese Bilder von T kannst du auf dem kleinkarierten Papier leicht einzeichnen; sie sind wieder Themen von Q.

Die geometrische Figur, die aus diesen Bildern von T besteht, heißt die „Form“ von T. Für unser Beispiel zeigt sie das Bild 2c.

▲2▲ Bei welchen Themen T von Q sind nicht alle acht Bilder von T voneinander verschieden?

▲3▲ Begründe, daß man aus dem Bild T', das aus T bei einer Deckabbildung von Q entsteht, die gleiche Form wie aus T erhält, also $F(T') = F(T)$ ist!

Nun kann das Quadrat Q selbst wie in Bild 1b zu einer Überdeckung der Ebene verwendet werden. Dabei entsteht aus der Form $F(T)$ ein „Muster“. Und um es in seiner „reinen Weise“ zu haben, löschen wir alle bisherigen Hilfspunkte (Knoten) und Hilfslinien.

Wie Bild 3 zeigt, können auf diese einfache Weise recht ansprechende Muster entstehen. Bei ein wenig Phantasie kann man in diesem Muster Abbilder von gewissen Objekten erkennen. So nennt W. Ostwald selbst das vorliegende Muster „Die Nelke“ (Bild 4), und begeistert über derartige Muster bemerkt er, daß er deren „schlichte und reine Schönheit … noch nicht müde geworden“ ist „zu betrachten“. (Dabei weiß er wohl, daß die Blüte der Nelke nicht vier- sondern fünfzählig ist.)

▲4▲ Deute das Muster in Bild 3 neu! Zum Beispiel kann man einen „Vierspitz“ erkennen (Bild 5).

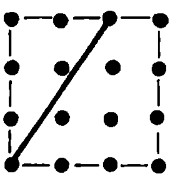


Bild 6a

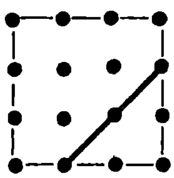


Bild 6b

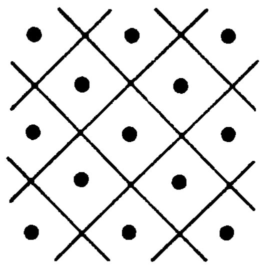


Bild 7

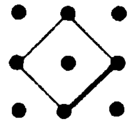


Bild 8a

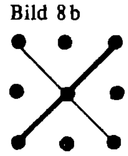


Bild 8b

▲5▲ Zeichne das Muster, das aus dem in Bild 6a bzw. 6b vorgegebenen Thema eines Quadrats 3ter Ordnung entsteht! (Lösung S. 29)

Im folgenden erörtern wir in der „Welt der Formen" auch eine Reihe von Fragen, denen Ostwald nicht weiter nachgegangen ist. Auf Symmetrieaspekte der Ostwaldschen Muster geht der Beitrag von Prof. Flachsmeyer näher ein.

▲6▲ Kann das in Bild 7 vorliegende Muster mit den zu Grunde liegenden Knoten durch solche Themen T_1 und T_2 in Quadraten 2ter Ordnung erzeugt werden, die nicht kongruente Formen besitzen?
Lösung: Derartige Themen gibt es tatsächlich, wie die Bilder 8a und 8b zeigen!
In Bild 8a setzt sich die Form $F(T)$ aus vier verschiedenen Bildern des Themas T zusammen, in Bild 8b sogar aus zwei verschiedenen.
W. Ostwald hat systematisch alle Muster aufgezeichnet, die auf der Grundlage der Quadrate 1ter bis 4ter Ordnung aus den Themen entstehen.
Eine Grundlage dafür ist die vollständige Erfassung aller nichtkongruenter Formen, die die Themen eines gewählten Quadrats n-ter Ordnung ergeben. Insbesondere wollen wir ihre Anzahl bestimmen. Die Bilder 8a und 8b machen deutlich, daß die Anzahl der nichtkongruenten Muster echt kleiner sein kann.
Zunächst ist klar, daß die Anzahl der nichtkongruenten Formen nicht größer als die Anzahl der Themen, also höchstens $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{2}$ ist. Diese obere Schranke ist 6 für $n=1$, 36 für $n=2$ und 120 für $n=3$, und sie erweist sich als eine sehr grobe Abschätzung, wie du an Hand der folgenden Aufgabe erkennst.

▲7▲ Zeichne alle nichtkongruenten Formen eines Quadrats 1ter, 2ter und 3ter Ordnung! Wie viele nichtkongruente Formen gibt es jeweils?
Du siehst, daß es wesentlich weniger sind, nämlich 2, 5 bzw. 17. Und du erkennst durch dein Zeichnen auch die Gründe für eine derartige Reduzierung. Einer der Gründe ist schon durch die Eigenschaft gegeben, mit der du dich in der Aufgabe 3 beschäftigt hast. Da bei den acht Deckabbildungen des Quadrats jedes Thema acht Bilder hat, könnte man vorschnell annehmen, die Zahl der Themen einfach durch acht zu teilen, um die Anzahl der Formen zu erhalten. Das ist aber falsch, denn die Bilder ein und desselben Themas müssen wie wir bereits sahen nicht alle voneinander verschieden sein. Es gibt drei Möglichkeiten: Das Thema bersitzt 8, 4 oder 2 voneinander verschiedene Bilder.

▲8▲ Begründe, daß es nur diese Möglichkeiten gibt!

▲9▲ Wie muß das Thema T im Quadrat Q liegen, damit die Form $F(T)$ sich aus vier bzw. zwei verschiedenen Bildern von T zusammensetzt?
Lösungsbemerkungen: An Hand der Eigenschaften der vier Geradenspiegelungen und der vier Drehungen um den Mittelpunkt M des Quadrats Q, die die Deckabbildungen von Q sind, erkennt man leicht, daß ein Thema T durch eine nichtidentische Deckabbildung von Q genau dann auf sich abgebildet werden kann, wenn (*i*) die Mittelsenkrechte von T eine Symmetrieachse von Q oder (*ii*) die T enthaltende Gerade eine Symmetrieachse von Q oder (*iii*) der Mittelpunkt M von Q auch Mittelpunkt von T ist. Damit ist weiter ersichtlich, daß die Form $F(T)$ genau dann aus vier bzw. zwei verschiedenen Bildern von T sich zusammensetzt, wenn genau eine der drei Lagebedingungen (*i*)–(*iii*) bzw. alle drei bestehen.
Die Bedingungen (*i*) bis (*iii*) stehen in einer engen Beziehung zueinander.

▲10▲ Zeige, daß aus der Gültigkeit zweier dieser Bedingungen die der dritten folgt!
Die Anzahl der Themen, die der Bedingung (*i*), (*iii*) bzw. allen drei genügen, werden mit s_1, s_3 bzw. s_0 bezeichnet.
Mit der Beantwortung der Frage 9 sind nicht alle Gründe aufgeklärt, die zu der relativ geringen Zahl nichtkongruenter Formen führen. Bei der Lösung der Aufgabe 7 hast du sicherlich bemerkt, daß zwei Themen T_1 und T_2 selbst dann zur gleichen Form führen können, wenn T_2 nicht das Bild von T_1 bei einer Deckabbildung des Quadrats ist.

▲11▲ Gib dafür ein Beispiel an!
Wir erkennen folgenden Sachverhalt: Besitzt ein Thema T_1 ein Bild T', das von T_1 verschieden ist und das mit T_1 sowohl auf ein und derselben Geraden liegt als auch einen gemeinsamen Punkt besitzt, so ist die Vereinigung $T_1 \cup T'$ ein Thema T^*, das nichtkongruent zu T_1 ist, aber die gleiche Form wie T_1 besitzt. An Hand der einzelnen Deckabbildungen des Quadrats erkennen wir, daß ein Thema T_1 genau dann diese Voraussetzungen erfüllt, wenn (*iv*) seine Mittelsenkrechte echt parallel zu einer Symmetrieachse a des Quadrats ist und T_1 mit dieser einen gemeinsamen Punkt hat oder wenn (*v*) T_1 den Mittelpunkt des Quadrats enthält und M nicht der Mittelpunkt von T_1 ist.
Das Thema T^* ($= T_1 \cup T'$) hat stets die Eigenschaft (*i*) oder (*iii*). Das bedeutet, daß mit den Formen der Themen, die den Bedingungen (*i*) oder (*iii*) genügen, bereits auch die Formen der Themen erfaßt sind, die die Eigenschaft (*iv*) oder (*v*) besitzen.
Besonderheiten treten also nur auf, wenn das Thema T senkrecht zu einer der Symmetrieachsen des Quadrats liegen oder auf einer Geraden liegt, die durch den Mittelpunkt des Quadrats geht. Die Anzahl derartiger Themen sei s.
Jedes andere Thema besitzt eine Form, die sich nicht aus weniger als acht Strecken (Themen) zusammensetzen läßt. Eine Form dieser Art besitzen nach unseren Überlegungen nur noch die Themen T, die auf keiner Symmetrieachse liegen und die entweder senkrecht zu einer Symmetrieachse a sind und mit dieser keinen Punkt gemeinsam haben oder auf einer Geraden durch den Mittelpunkt M des Quadrats liegen und überdies M nicht enthalten. Ihre Anzahl bezeichnen wir mit a. Weiterhin bezeichnen wir mit s_2 die Anzahl der Themen, die auf einer Symmetrieachse liegen und den Mittelpunkt M des Quadrats nicht enthalten.
Die Anzahl der Formen ist dann

$$f = \frac{t-s+a}{8} + \frac{s_1 - s_0}{4} + \frac{s_3 - s_0}{4} + \frac{s_2}{4} + \frac{s_0}{2}.$$

▲12▲ An Hand der gezeichneten Formen sind für $n = 1, 2, 3$ die Werte derjenigen Variablen und Summanden zu bestimmen, die in dieser Formel auftreten.

▲13▲ Beschreibe die Größen s_1, s_2, s_3 und s_0 in Abhängigkeit von n!
Lösung: Wir bestimmen zunächst die Anzahl s_1 der Themen, die der Bedingung (*i*) genügen. Ist d eine Diagonale, so liegen $\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$ Knoten des

Lösung zu Aufgabe 12:

n	t	s	a	$\frac{t-s+a}{8}$	s_1	s_2	s_3	s_0	$\frac{s_1-s_0}{4}$	$\frac{s_2}{4}$	$\frac{s_3-s_0}{4}$	$\frac{s_0}{2}$	f
1	6	6	0	0	6	0	2	2	1	0	0	1	2
2	36	28	0	1	12	0	4	4	2	0	0	2	5
3	120	80	16	7	28	4	8	4	6	1	1	2	17

Quadrats auf ein und derselben Seite von d, und demzufolge gibt es gleichviel Themen, die d als Mittelsenkrechte besitzen. Gehen wir von einer Mittelsenkrechten m einer Quadratseite aus, so liegen $\frac{(n+1)n}{2}$ Knoten auf einer Seite von m, falls n gerade ist, andernfalls sind es $\frac{(n+1)^2}{2}$ Knoten. Diese Zahlen lassen sich einheitlich durch $(n+1)\left[\frac{n+1}{2}\right]$ angeben, wobei $[x]$ die größte ganze Zahl bedeutet, die kleiner oder gleich einer vorgegebenen Zahl x ist. Insgesamt erhalten wir

$$s_1 = 2\frac{(n+1)n}{2} + 2(n+1)\left[\frac{n+1}{2}\right]$$
$$= (n+1)\left(2\left[\frac{n+1}{2}\right] + n\right).$$

Der Mittelpunkt M des Quadrats ist genau dann ein Knoten, wenn n gerade ist. Folglich gilt

$$s_3 = \frac{(n+1)^2 - 1}{2} = \frac{n(n+2)}{2},$$

falls n gerade und

$$s_3 = \frac{(n+1)(n+1)}{2},$$ falls n ungerade ist.

Eine einheitliche Angabe ist

$$s_3 = 2\left[\frac{(n+1)}{2}\right]\left[\frac{n+2}{2}\right].$$

Ist n gerade, so liegen auf jeder der beiden Diagonalen und auf jeder der beiden Mittelsenkrechten der Quadratseiten n vom Mittelpunkt M verschiedene Knoten, und damit ist

$$s_0 = 4 \cdot \frac{n}{2} = 2n.$$

Für ungerades n liegen nur auf den Diagonalen Knoten, und zwar $n+1$, die alle von M verschieden sind. In diesem Fall ist also

$s_0 = 2\frac{n+1}{2} = n+1$. Eine einheitliche Darstellung für diese Größen ist

$$s_0 = \frac{3n+1}{2} + (-1)^n \cdot \frac{n-1}{2}.$$

Einsichtig ist nun auch

$$s_2 = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} - 1\right) = n(n-2)$$

für gerades n und

$$s_2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{2}\left(\frac{n+1}{2} - 1\right)$$
$$= \frac{(n+1)(n-1)}{2}$$ für ungerades n.

Wir wenden uns nun den Ostwaldschen Mustern zu, die in analoger Weise auf der Grundlage einer Parkettierung der Ebene mit kongruenten gleichseitigen Dreiecken (Bild 1a) entstehen. Unser Kästchenpapier können wir nicht mehr unmittelbar verwenden. Aber diese neue Parkettierung ist durchaus leicht zu zeichnen; und dazu nehmen wir unliniertes Papier. Die Ecken der Dreiecke einer solchen Parkettierung heißen wieder „Knoten"; und ein „Dreieck n-ter Ordnung" ist in entsprechender Weise wie ein Quadrat n-ter Ordnung zu verstehen: Es ist ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seiten sich aus n Seiten der Grunddreiecke zusammensetzen (Bild 9).

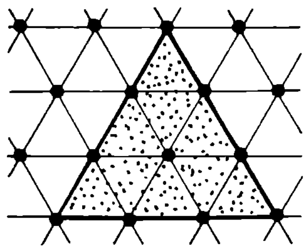
▲14▲ Wie viele Knoten und Grunddreiecke enthält ein Dreieck n-ter Ordnung?

Lösung: Ein „Thema" ist wieder die Verbindungsstrecke zweier Knoten.

$$k(n) = (n+1) + n + \ldots + 1$$
$$= \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Knoten und n^2 Dreiecke.

Bild 9



▲15▲ Wie viele Themen besitzt ein Dreieck n-ter Ordnung?

Lösung: $t(n) = \frac{k(k-1)}{2}$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{8}$$

Themen.

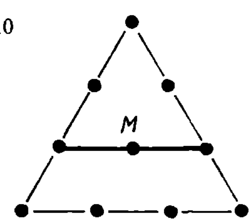
Die Deckabbildungen eines Dreiecks D (n-ter Ordnung) sind die Spiegelungen an den drei Mittelsenkrechten der Seiten von D sowie die Drehungen um den Mittelpunkt M von D mit 0°, 120° und 240°. Jedes Thema hat demnach bei den Deckabbildungen des Dreiecks sechs Bilder, die aber nicht alle voneinander verschieden sein müssen(!).

▲16▲ Bei welcher Lage des Themas im Dreieck treten weniger als sechs voneinander verschiedene Bilder auf? Zeige, daß es dann immer genau drei verschiedene Bilder sind, die sich bereits durch die drei Drehungen aus dem Thema ergeben.

Die durch das Thema bestimmte „Form" und das „Muster" sind völlig analog wie eingangs erklärt zu verstehen.

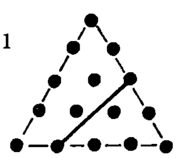
▲17▲ Zeichne die Form und dann damit das Muster, die aus dem in Bild 10 angegebenen Thema in einem Dreieck 3ter Ordnung entstehen. (Lösungen S. 29)

Bild 10



▲18▲ Zeichne das Muster, das sich aus dem in Bild 11 angegebenen Thema in einem Dreieck 4ter Ordnung ergibt. (Lösung S. 29)

Bild 11



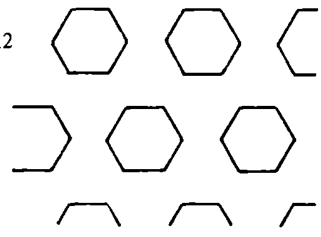
▲19▲ Zeichne alle Formen, die bei einem Dreieck 1ter, 2ter, 3ter bzw. 4ter Ordnung auftreten. Wie viele nichtkongruente Formen gibt es jeweils?

Lösung: Es gibt 1, 3, 8 bzw. 17 nichtkongruente Formen.

Wie bei einem Quadrat n-ter Ordnung lassen sich auch hier gewisse Anzahlen formenmäßig in Abhängigkeit von n angeben. (Versuch es einmal!)

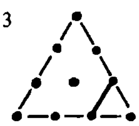
▲20▲ Das in Bild 12 vorgelegte Muster ist aus einem Thema in einem Dreieck 3ter Ordnung entstanden. Gib ein derartiges Thema an!

Bild 12



Lösung: Die Eckpunkte des Dreiecks 3ter Ordnung müssen bezüglich des Musters stets Drehsymmetriezentren 6ten Grades sein, d. h., durch eine Drehung um einen dieser Punkte mit $\frac{360°}{6} = 60°$ muß sich das Muster auf sich abbilden. Offenbar besitzen in dem vorliegenden Muster nur die Mittelpunkte der regelmäßigen Sechsecke diese Eigenschaft. Also ist bis auf Kongruenz das in Bild 13 angegebene Thema die Lösung.

Bild 13



▲21▲ Können in gewissen Fällen auch noch andere Punkte des Dreiecks zu Drehsymmetriezentren 6ten Grades hinsichtlich des Musters werden?

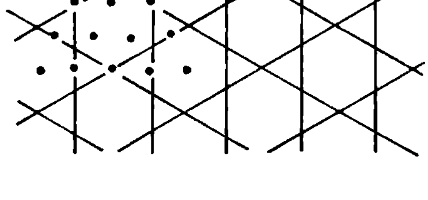
Antwort: Ja, in speziellen Fällen wie in Bild 14 der Mittelpunkt des Dreiecks. Für weitere Punkte ist das nicht möglich.

Damit erkennen wir, daß bei fest vorgegebenen n die Anzahl der Formen gleich der Anzahl der Muster ist. Bei Quadraten gilt dies nicht!

Die Ostwaldsche Methode zur Herstellung von „gesetzlich-schönen Gebilden" regt zu einer Fülle von Fragen und Aufgabenstellungen an. Wir konnten hier nur einigen wenigen nachgehen.

Das Verfahren drängt sich nahezu auf, es mit Hilfe eines Kleincomputers nachzuvollziehen. Und das ist in der Tat keine schwere, aber reizvolle Aufgabe, deren Lösung recht eindrucksvoll auf den Betrachter wirkt. Versuch es doch einmal, wenn du Gelegenheit dazu hast!

Bild 14

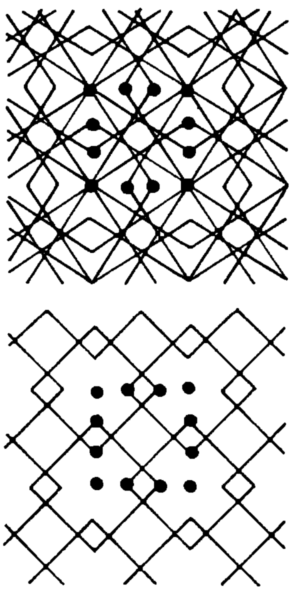


Wir überlassen dir gänzlich, die Musterherstellung auf der Grundlage von regelmäßigen Sechsecken zu betreiben.
Wenn wir als Thema nicht die Verbindungsstrecke zweier Knoten, sondern eine wohlbestimmte gekrümmte Linie (etwa ein Kreisbogenstück) verwenden, könnten möglicherweise ästhetisch ansprechendere Muster entstehen. Hast du ein schönes Beispiel?
Viel Spaß und Findigkeit wünschen

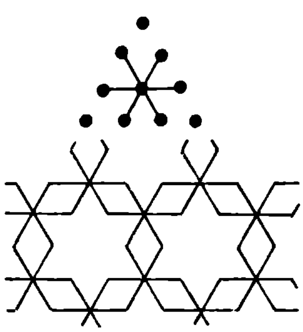
H. Freye und E. Quaisser

Die Autoren möchten Frau Prof. Dr. D. Goetz, Mitherausgeber der Reihe „Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften“ sowie Frau M. Brauer von der Ostwald-Gedenkstätte der AdW in Großbothen für freundliche Hinweise danken.

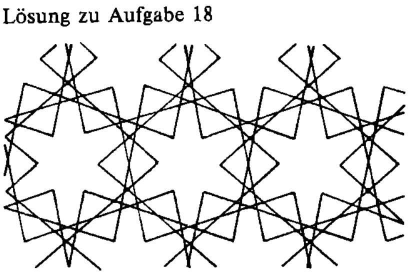
Lösung zu Aufgabe 5



Lösung zu Aufgabe 17



Lösung zu Aufgabe 18



Symmetrien Ostwaldscher Muster

Anmerkungen zu Ostwalds Bemühungen um eine Formenlehre

Wie im vorhergehenden Artikel ausgeführt wurde, bediente sich Wilhelm Ostwald zur Erzeugung seiner ebenen Muster eines wohlbestimmten Kompositionsverfahrens. Die benutzten Instrumente sind dafür das trigonale, quadratische oder hexagonale Gitter der Ebene. Als „Thema“ wird eine Verbindungslinie von Gitterpunkten gewählt. Die Kompositionsregeln bestehen in der Anwendung der sämtlichen Spiegelungen bzw. der sämtlichen Drehungen, die das Grundgitter in sich überführen. Die Spiegelungen variieren die Themalinie und die Spiegelvariationen der Themalinie usw. Es entsteht ein Ostwaldscher „Spiegeling“. Entsprechendes geschieht mit den Drehungen. Es entsteht ein Ostwaldscher „Drehling“. So kommen die von Ostwald publizierten 240 Muster seiner Formenlehre zustande. Er selbst hat mit Bienenfleiß die zeichnerischen Ausführungen der Muster angefertigt. Heutzutage wird man die ganze Palette der Ostwaldschen Muster natürlich durch einen Computer generieren lassen. Ein dazu erforderliches Programm muß die systematische Auswahl der Themalinie sichern und eine Abfolge der Variationen der Themalinie. Das kann durch fortlaufende Anwendung von jeweils drei speziellen Spiegelungen bzw. zwei speziellen Drehungen erreicht werden. (Sollte aus der Leserschaft genügend Verlangen danach bekundet werden, so würde ein entsprechender Artikel publiziert werden!)
In dem unveröffentlichten Nachlaß von Ostwald befinden sich noch weitere Muster, die sich dann auch gekrümmter Themalinien bedienen. Außerdem hat er seine Grundmuster miteinander kombiniert und sie auch mit harmonischen Ausmalungen versehen. In seinen 1926/27 veröffentlichten autobiographischen „Lebenslinien“ sowie auch in Manuskripten seines Nachlasses schreibt er, daß er schon als junger Assistent die in verschiedenen Sammelwerken veröffentlichten Ornamente der Ägypter, Inder, Chinesen, Araber und besonders der Mauren aufs höchste bewundert hat und dadurch zu der Frage angereizt wurde, die Ordnung und Gesetzlichkeit im Bau der Ornamente aufzufinden und damit systematische Verfahren zur Herstellung von Mustern zu erarbeiten. Er glaubte, mit seiner Komposition von Ornamenten den Weg zu den gesetzlich-schönen Formen der ebenen Muster freigelegt zu haben. 1922 erschienen von ihm verfaßte Werke „Die Harmonie der Formen“ und „Die Welt der Formen“. Er beklagt, daß durch die Geometrie zwar die Grundlagen zu einer wissenschaftlichen Formharmonik seit Jahrtausenden bereitstehen, aber eine Verbindung zur Kunstwissenschaft wenig entwickelt sei. Die klassische Geometrie hat in der Tat vorwiegend im Endlichen gelegene – also beschränkte – Figuren untersucht und die sich ins Unendliche erstreckenden Figuren nicht systematisch erforscht. Ein erster kombinatorischer Ansatz zur Erörterung unendlich ausgedehnter Figuren der Ebene findet sich lediglich bei der von Pythagoras behandelten Frage, welche Möglichkeiten es zur regelmäßigen Aufteilung der Ebene gibt, wenn dabei nur kongruente regelmäßige n-Ecke eines Typs benutzt werden und die Figuren eckentreu zusammenstoßen sollen. Die Antwort wird durch die drei regulären Gitter, nämlich trigonales, quadratisches und hexagonales Gitter geliefert. Erst im Mittelalter finden Fragen über Parkettieren der Ebene eine Fortsetzung. Welche Möglichkeiten gibt es, wenn als Bausteine kongruente regelmäßige Vielecke verwendet werden, unterschiedliche Bausteintypen in einem Parkett zugelassen sind, aber die Bausteine immer nur in Ecken oder längs ganzer Kanten zusammenstoßen dürfen und außerdem das Parkett eckenkongruent ist. Die Antwort lautet diesmal:
Es sind genau acht Möglichkeiten vorhanden und sie werden durch die sogenannten halbregulären oder Archimedischen Parkette realisiert.
Schon der bedeutende deutsche Künstler Albrecht Dürer (1471 bis 1528) widmete sich in dem 1525 erschienenen epochalen Lehrwerk „Underweysung der Messung mit dem Zirckel und richtscheyt in Linien, Ebenen und gantzen Corporen“ mit hohem mathematischem Rang den Fragen zeichnerischer Darstellungen und Konstruktionen. Dabei behandelt er im zweiten Buch auch die Ornamentik und gibt schöne Flächenmuster an, darunter einige halbreguläre Parkette bzw. duale Parkette dazu. Er ist der erste, der einen Lehrgang der Geometrie in Gestalt einer künstlerisch nutzbaren Formenlehre publizierte. (Nachdruck München 1909)
Warum war dem nicht nur künstlerisch interessierten, sondern auch künstlerisch schaffenden W. Ostwald dieser Tatbestand verborgen geblieben? Ebenfalls muß angemerkt werden, daß W. Ostwald der Analogie zwischen dem regelmäßigen Bau der

Kristallsysteme im Raum und der regelmäßigen Struktur der von ihm erörterten ebenen Muster nicht nachging. Das ist für einen Physiko-Chemiker erstaunlich! Kristallographische Untersuchungen waren gerade zu Ostwalds Zeiten den faszinierenden regelmäßigen Bauplänen der Kristallnatur auf der Spur. Der russische Kristallograph und Geometer E. S. Fedorov hatte 1891 eine Arbeit „Symmetrie in der Ebene“ in den Mitteilungen der Russischen Mineralogischen Gesellschaft veröffentlicht. Er beweist, daß es genau 17 Typen von regelmäßigen Mustern der ganzen Ebene gibt, wenn man sie nach den jeweils darin vorkommenden Symmetrien einteilt. Mit diesen Einsichten waren die grundlegenden Dinge über Ordnung und Gesetzlichkeit im Bau der flächendeckenden Ornamente aufgefunden. Es war also die Aufgabe, die W. Ostwald in seiner Formenlehre stellte, schon 30 Jahre vorher prinzipiell gelöst. Diese Lösung ist sogar umfassender als das, was Ostwald dafür an allgemeinen Ergebnissen einer Typisierung der „raumschlüssigen“ Muster beisteuerte. Die Ostwaldschen Muster liefern nur vier der 17 möglichen Typen.

Die Kongruenzabbildungen der von Ostwald benutzten drei regulären Parkette

Wodurch wird die Symmetrie einer Figur F (der Ebene) beschrieben?
Das System aller Kongruenzabbildungen der Ebene, unter denen F als Ganzes unverändert bleibt, heißt die Symmetriegruppe – Sym (F) – von F. Das ist das symmetriebeschreibende Objekt. Beispielsweise gilt bei einem Dreieck F über die Symmetriegruppe Sym (F) folgendes:

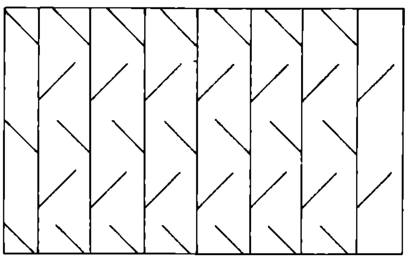
Das Dreieck F ist	Sym(F) besteht nur aus
nicht gleichschenklig	der identischen Abbildung *Id* der Ebene
gleichschenklig, aber nicht gleichseitig	*Id* und einer Geradenspiegelung S
gleichseitig	*Id*, drei Geradenspiegelungen, deren Achsen durch einen Punkt gehen und die den Vollwinkel in sechs gleiche Teile zerlegen, sowie zwei echten Drehungen um den gemeinsamen Schnittpunkt der Spiegelachsen mit einem Drehwinkel von 120° bzw. 240°.

Nun sei F eines der drei regulären Parkette der Ebene. Jetzt haben wir es mit einer sich ins Unendliche erstreckenden Figur zu tun. Als Kongruenzabbildungen der Ebene kommen nur Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen an Geraden und – wie es im Schulunterricht heißt – die aus diesen zusammengesetzten Kongruenzabbildungen in Frage. Solch eine Formulierung mutet an, als ob sich dahinter eine ganze Serie von nicht so einfach überschaubaren Typen verbirgt. Dem ist aber nicht so. Es gibt lediglich nur noch den Typ der Gleitspiegelung. Eine Gleitspiegelung wird durch eine Achse festgelegt und einen Gleitbetrag samt Richtung, in der das Gleiten erfolgen soll. Das folgende Friesornament hat nur Gleitspiegelungen und Translationen als Kongruenzabbildungen.

Bild 1

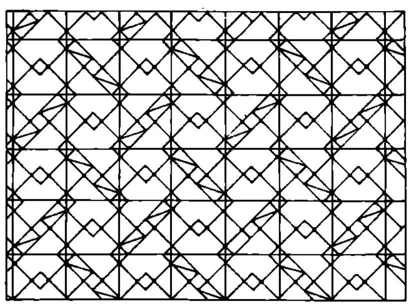
Der Symmetrietyp der Gleitspiegelung ist von unserer unmittelbaren Vorstellung wohl weiter entfernt als der einer Verschiebung, einer Spiegelung und einer Drehung. Das ist wahrscheinlich der Grund, warum etwa das Schulbuch dessen ausdrückliche Nennung unterläßt. Auch bei Ostwald tritt in seinen Symmetrieerörterungen nur immer die Hervorhebung der drei anderen Typen auf. Deshalb verwundert es nicht, wenn beispielsweise ein Wandmuster, das keine Drehungen und keine Spiegelungen, sondern nur Verschiebungen und Gleitspiegelungen aufweist, von dem Ostwaldschen Erzeugungsprozeß von Mustern nicht erfaßt wird.

Bild 2



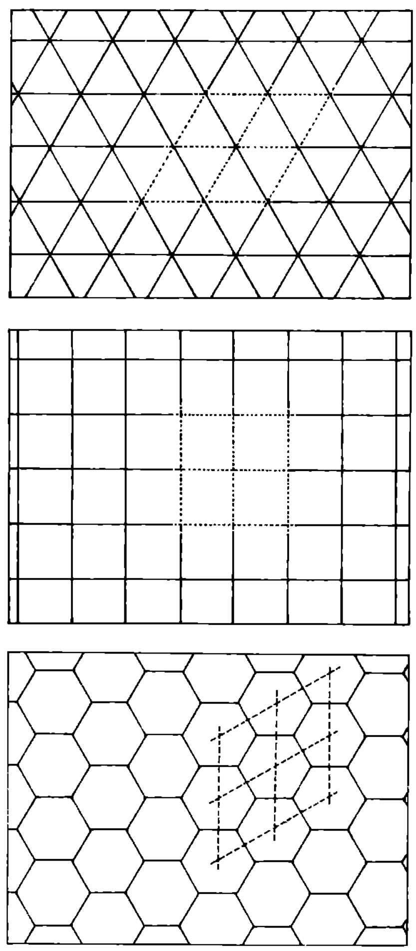
Aber auch das Wandmuster des nächsten Bildes liegt außerhalb des Ostwaldschen Erzeugungsprozesses. In ihm treten neben den Translationen und Gleitspiegelungen nur noch Halbdrehungen auf. Das Muster haben wir aus einem Ostwaldschen durch Überlagerung mit einer anderen regelmäßigen Figur gebildet.

Bild 3



Die sämtlichen Verschiebungen (= Translationen) in der Symmetriegruppe Sym (F) eines Wandmusters F bilden auch eine Gruppe, d. h. die Zusammensetzung von zwei Verschiebungen von F in sich ist wieder eine Verschiebung von F in sich und die Umkehrabbildung zu einer Verschiebung von F in sich ist auch wieder eine Verschiebung von F in sich.
Diese Gruppe heißt die Translationsgruppe Transl (F) der Figur F. Transl (F) wird bei einem Fries F aus einer einzigen Minimaltranslation erzeugt. Alle anderen Translationen aus Transl (F) entstehen aus t und t^{-1} (inverse Translation zu t) durch Iterationen.
Für ein Parkett F wird die Gruppe Transl (F) durch zwei Minimaltranslationen t_1, t_2 erzeugt. Diese verlaufen in zwei unabhängigen Richtungen. Die Zusammensetzungen von t_1, t_2 und den Inversen t_1^{-1}, t_2^{-2} ergeben alle Translationen von F in sich. Die Zusammensetzung von zwei Translationen geschieht bekanntlich nach dem Kräfteparallelogramm. Wenn man zwei Minimaltranslationen t_1, t_2 ermittelt hat, so kann man ein davon gebildetes Translationsgitter von F aufzeichnen, um einen Einblick in das Wirken von Transl (F) zu erhalten.

Bild 4
Zu den regulären Parketten gehörige Translationsgitter (gestrichelt)



Die möglichen Drehpunkte der drei regulären Gitter sind auch noch leicht überschaubar. Beim trigonalen Gitter treten nur 6er-Drehungen, 3er-Drehungen und 2er-Drehungen auf. Ebenso verhält es sich mit dem hexagonalen Gitter. Für das quadratische Gitter gibt es nur 4er- und 2er-Drehungen. Die nachfolgende Tabelle beschreibt die Lage der Drehpunkte.

sind auch leicht zu ermitteln. Es sind dies jeweils die Seiten der Grunddreiecke, Quadrate und Sechsecke und die Mittellinien sowie Diagonalen. Durch die Spiegelachsen entsteht ein neues Parkett der Ebene. Der Baustein ist beim Quadratmuster ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck und beim Dreieck- bzw. Sechseckmuster ein Halbierungsdreieck eines gleichseiti-

Art des regulären Musters	Lage der Drehpunkte der möglichen Drehordnungen			
	2	3	4	6
trigonal	Mittelpunkte der Dreiecksseiten	Mittelpunkte der Dreiecksflächen	–	Eckpunkte der Dreiecke
quadratisch	Mittelpunkte der Quadratseiten	–	Mittelpunkte der Quadratflächen und Eckpunkte der Quadrate	–
hexagonal	Mittelpunkte der Sechseckseiten	Eckpunkte der Sechsecke	–	Mittelpunkte der Sechseckflächen

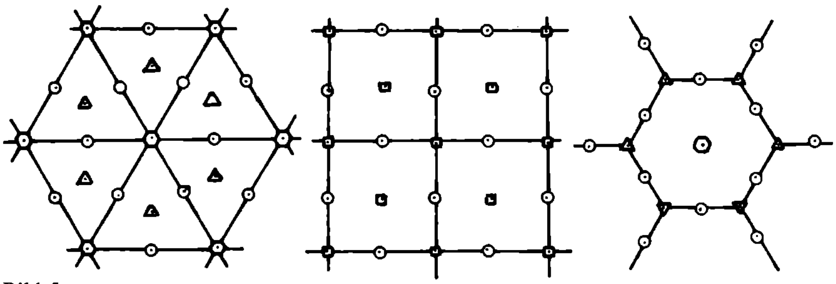


Bild 5
Zur Lage der Drehpunkte der regulären Muster

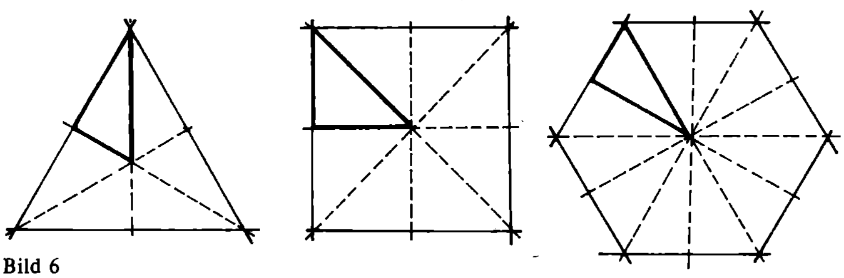


Bild 6
Zu den Spiegelachsen der regulären Muster. Bausteine des aus den Spiegelachsen erzeugten Parketts

Setzt man eine Drehung mit einer Translation zusammen, so ergibt sich eine Drehung um einen neuen Drehpunkt, während der Drehwinkel erhalten bleibt. Die Zusammensetzung von zwei Drehungen ist entweder eine Drehung um einen neuen Drehpunkt, sofern die beiden Ausgangsdrehungen unterschiedliche Drehpunkte hatten, oder die Zusammensetzung ist eine Translation, sofern nämlich die Drehwinkel sich zu 360° ergänzen. Das System Transl (F) der Translationen aus Sym (F) und das System Rot (F) aller Drehungen aus Sym (F) bilden zusammen auch eine Gruppe – die spezielle Symmetriegruppe der Figur F:

$$\text{SpezSym}(F) = \text{Transl}(F) \cup \text{Rot}(F)$$

Die Spiegelachsen der regulären Muster gen Dreiecks, d. h. ein rechtwinkliges Dreieck dessen beide übrigen Winkel 30° und 60° betragen.

Die Spiegelachsen des trigonalen sowie he-

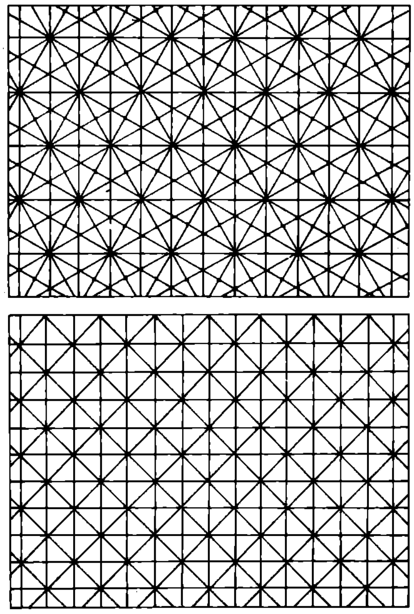


Bild 7
Die von den Spiegelungsgeraden gebildeten Muster der drei regulären Muster

xagonalen Gitters und entsprechend die Spiegelachsen des quadratischen Gitters liefern selbst wieder ansprechende Muster. Und diese Muster enthalten alle ihre Spiegelachsen. Die Schnittpunkte der Spiegelachsen sind die jeweiligen Drehpunkte der regulären Ausgangsmuster und die der von den Spiegelungsgeraden gebildeten Muster. Die Schnittordnung gibt die Drehordnung an.

Verbleibt noch die Diskussion der reinen Gleitspiegelachsen für die regulären Muster. Für das Quadratmuster liegen die Verhältnisse deutlich zutage. Als reine Gleitspiegelachse kommt eine Gerade parallel zu einer Quadratseite nicht in Frage, sondern höchstens schrägverlaufende Achsen. Die Schräge kann nur parallel zur Diagonalrichtung sein, weil sonst die Quadrate durch Spiegelung an solch einer Geraden aus der Musterrichtung kämen. Dann hat man die Antwort: Als reine Gleitspiegelachsen für das Quadratmuster treten nur die Parallelen zu den Quadratdiagonalen durch die Mittelpunkte der Quadratseiten auf. Die in Diagonalrichtung verlaufenden Spiegelachsen und reinen Gleitspiegelachsen sind äquidistant und wechseln sich ab.

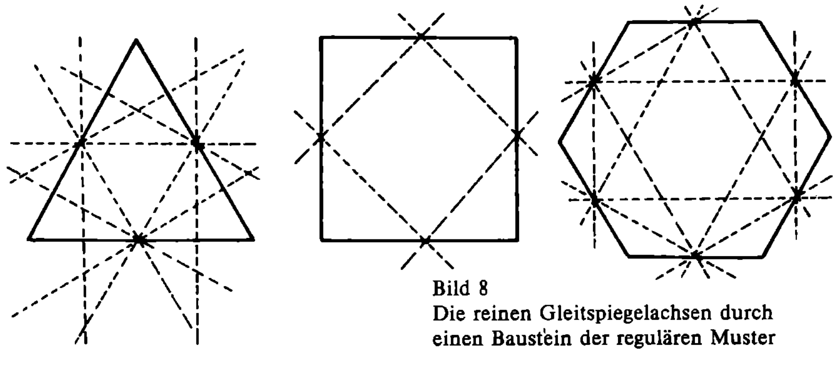


Bild 8
Die reinen Gleitspiegelachsen durch einen Baustein der regulären Muster

Beim Dreieck- und Sechseckmuster findet man entsprechend, daß die reinen Gleitspiegelachsen parallel zu den Spiegelachsen verlaufen und dabei durch die Mittelpunkte der Seiten gehen. Sie wechseln sich ebenfalls mit den Spiegelachsen ab.
Ein schönes Gesamtmuster der Ebene bilden die reinen Gleitspiegelachsen des trigonalen bzw. hexagonalen Grundmusters. Die Gleitspiegelachsenmuster beider Grundmuster stimmen überein.
Der Leser möge sich dies Muster aufzeichnen. Man wird erkennen, daß es sich durch Überlagerung der beiden nachstehenden Formen eines halbregulären Parketts ergibt.

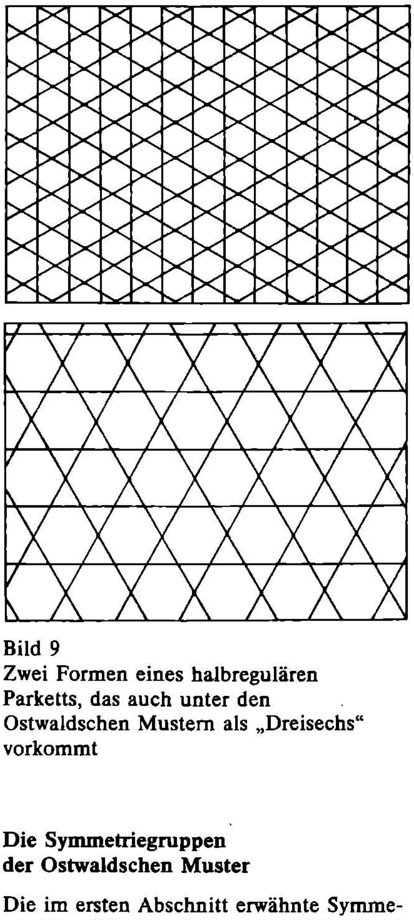


Bild 9
Zwei Formen eines halbregulären Parketts, das auch unter den Ostwaldschen Mustern als „Dreisechs" vorkommt

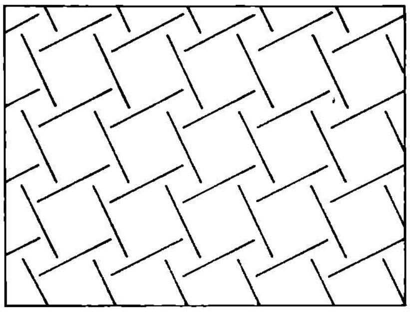


Bild 10
Das Ostwaldsche Grundmuster Nr. 269, von W. O. das große Rad, Mittelstellung, genannt. Es hat den Symmetrietyp W_4

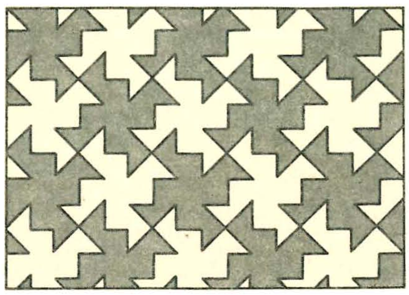


Bild 11
Ein kombiniertes Ostwald-Muster vom Symmetrietyp W_4. Es weist die angegebene Ostwaldsche Ausmalung auf

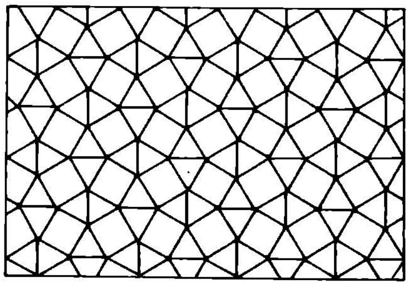


Bild 12
Ein halbreguläres Parkett mit der Symmetriegruppe W_4^2

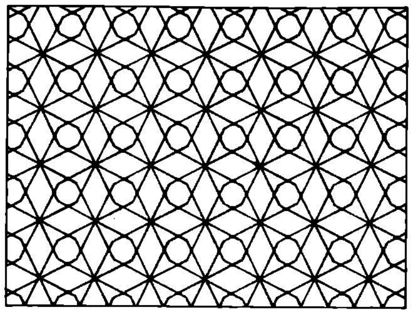


Bild 13
Das Ostwaldsche Grundmuster Nr. 83, die Nelke genannt.
Es hat die Symmetriegruppe W_4^1

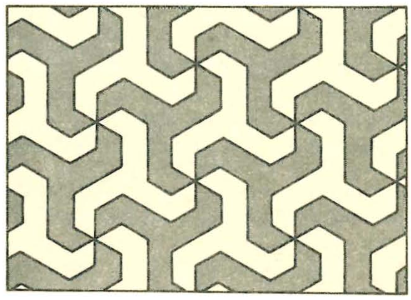


Bild 14
Ein Ostwaldsches kombiniertes Muster mit der Symmetriegruppe W_6

Die Symmetriegruppen der Ostwaldschen Muster

Die im ersten Abschnitt erwähnte Symmetrie-Klassifikation der „raumschlüssigen" ebenen Muster nach Fedorov ergibt, daß die Gruppen Sym(Q) und Sym(D) (= Sym(S)) des quadratischen Parketts Q bzw. des Dreieckparketts D die umfangreichsten von den 17 möglichen sind. In der Bezeichnungsweise nach dem ungarischen Mathematiker L. Fejes Toth wird die Symmetriegruppe des quadratischen Parketts mit W_4^1 angegeben. Der untere Index weist auf die höchste Drehordnung hin. Der obere Index soll hier auf die Art der vorkommenden Spiegelungen aufmerksam machen. Durch jeden 4er-Drehpunkt verlaufen Spiegelachsen! Alle Ostwaldschen „Spiegelinge", die aus einem quadratischen Grundmuster der Knotenpunkte entstehen, haben als Symmetriegruppe die Gruppe W_4^1. Die Gruppe SpezSym(Q) des quadratischen Parketts kann als volle Symmetriegruppe von Ostwaldschen „Drehlingen" auftreten. In der Bezeichnungsweise nach L. Fejes Toth ist dies der Symmetrietyp W_4.
Noch ein Symmetrietyp von den 17 möglichen gestattet ebenfalls 4er-Drehungen und Spiegelungen, nur daß dabei durch keinen 4er-Drehpunkt Spiegelachsen hindurchgehen. Dies ist der Symmetrietyp W_4^2. Beispielsweise besitzt eines der halbregulären Parkette diese Symmetriegruppe. Kein Ostwaldsches Muster kann diesen Symmetrietyp haben.
Die Symmetriegruppe des trigonalen bzw. hexagonalen Parketts trägt die Bezeichnung W_6^1. Alle Ostwaldschen „Spiegelinge", die aus Knotenpunkten des Dreieck- oder Sechsecknetzes erzeugt wurden, haben diesen Symmetrietyp. Entsprechende „Drehlinge" können ebenfalls diesen Symmetrietyp aufweisen oder nur den Symmetrietyp W_6 besitzen. Im letzten Fall wirkt dann nur die Gruppe SpezSym(D) (= SpezSym(S)).

J. Flachsmeyer

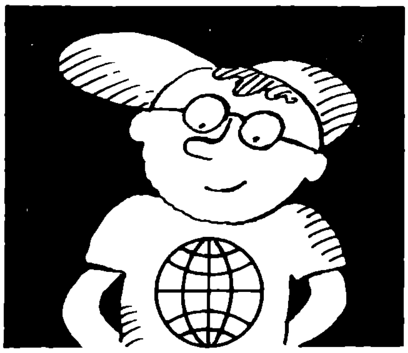
Für den Artikel wurden auch unveröffentlichte Materialien aus dem Ostwaldschen Nachlaß benutzt. Dafür sei den Mitarbeitern des Zentralarchivs der Akademie der Wissenschaften der DDR zu Berlin und der Betreuerin der Ostwald-Gedenkstätte „Haus Energie" in Großbothen, Frau Gretel Brauer, herzlich gedankt.

Zeitgenossen über Ostwald

Sein Schüler Georg Bredig in seinem Vorschlag an das Nobelkomitee:
„Ostwalds Bedeutung besteht weniger in einer wuchtigen Einzelentdeckung, sondern in dem ungeheuren allgemeinen Einfluß, den er auf die Entwicklung der modernen Chemie gehabt hat, ein Einfluß, der in vieler Hinsicht an den erinnert, den einst Berzelius auf die chemische Welt ausübte."

W. I. Lenin hielt Ostwald für
„... einen sehr großen Chemiker und sehr verworrenen Philosophen"

Sein erster Assistent, Ernst Beckmann, stöhnte:
„Wenn man mit Ostwald eine halbe Stunde spricht, hat man für ein halbes Jahr Arbeit."

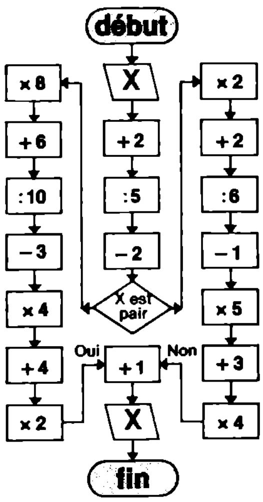


▲1▲ Organimath

En respectant l'organigramme, effectuez les opérations et retrouvez la valeur de X. Elle a été choisie parmi les nombres de 1 à 100 et est identique au départ et à l'arrivée.

Attention! Ce jeu n'accepte que des valeurs entières et supérieures à zéro comme résultat de chaque opération!

aus: Logigram, Paris



▲2▲ Notice

A visit of a day to Ostwald at Großbothen is worth a transatlantic trip. You cannot be in his presence for ten minutes, without realizing that you are facing a really great man. His breath of knowledge, his originality and many-sidedness, all taken together make him one of the most interesting personalities of the age.

Harry S. Jones
disciple of Ostwald's

▲3▲ Как-то раз я уронил термометр, которым обычно измеряю температуру фотореактивов (см. ризунок). Термометр не разбился, но столбик спирта „разорвался". Как починить термометр?

aus: Quant, Moskau

Ein Rechenmeister vor Adam Ries

Im vorigen Jahr brachte der Akademie-Verlag Berlin als Dokument der Wissenschaftsgeschichte den Band „Das Bamberger Rechenbuch von 1483" heraus (Bestell-Nr. 754 531 5, Preis: 60,00 M).

Das hier zunächst reproduzierte Rechenbuch, in zwei vollständigen Exemplaren in die Gegenwart überliefert, stammt vom Rechenmeister Ulrich Wagner. Im 2. Teil des Buches wird die Originalschrift von Dr. Eberhard Schröder transkribiert (transkribieren: lautgetreu in eine andere Schrift übertragen).

In der vorliegenden Transkription wurden zum Beispiel Punkt, Komma, Semikolon und Fragezeichen entsprechend dem heutigen Gebrauch verwendet sowie von Ulrich Wagner gewählte Worte, die einen entscheidenden Bedeutungswandel erfahren haben, durch das im Neuhochdeutschen adäquate Wort ersetzt. So wird das Buch auch für uns leicht lesbar, was wir an einem Beispiel demonstrieren wollen.

Addiren Gebrochñ. Das .1. capitel.

EIn yglich gebrochñ zu andn gebrochñ zegeben. das heisset addirñ. merck wenn dir für kompt gebrochen das einem Nenner hat so addir die zeler zu sam vnd den nenner setzt darunter gesetzt als hernach stet.

1/3 zu 2/3 ist 3/3 Facit 1   2/5 4/5 3/5 ist 9/5 Facit 1 4/5.
1/7 2/7 3/7 4/7 5/7 Facit 15/7 ist 2 1/7

So dir gebrochen fürkümpt. das nicht einen nenner hat als 2/3 vnd 3/4. So multiplicir in creutz 3 mal 3 ist 9 vnd 2 mal 4 ist 8. addir 8 zu 9 ist 17 die setz oben vnd multiplicir ein nenner mit dem anderen. als 3 mal 4 ist 12 vnd setz also 17/12 das ist 1 5/12.

5/6 zu 7/8 ist 82/48 Facit 1 17/24. 1/2 3/5 Facit 11/10 ist 1 1/10.

(Bevor ihr weiterlest, versucht doch erstmal selbst hinter den Sinn zu kommen!)

Transkription: Eine jegliche Gebrochene zur anderen Gebrochenen zu geben, das heißt Addieren. Merke, wenn dir vorkommt Gebrochenes, das einen Nenner (gemeint ist ein gemeinsamer Nenner) hat, so addiere die Zähler zusammen und den Nenner einfach darunter gesetzt, wie hernach steht:

$\frac{1}{3}$ zu $\frac{2}{3}$ ist $\frac{3}{3}$, Fazit 1.

$\frac{2}{5}$ (zu) $\frac{4}{5}$ (zu) $\frac{3}{5}$ ist $\frac{9}{5}$, Fazit $1\frac{4}{5}$

$\frac{1}{7}$ (zu) $\frac{2}{7}$ (zu) $\frac{3}{7}$ (zu) $\frac{4}{7}$ (zu)

$\frac{5}{7}$ Fazit $\frac{15}{7}$ ist $2\frac{1}{7}$

So dir Gebrochenes vorkommt, das nicht einen Nenner (gemeint ist ein gemeinsamer Nenner) hat, wie $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$, so multiplizier über kreuz, 3 mal 3 ist 9 und 2 mal 4 ist 8. Addiere 8 zu 9 ist 17. Die setze oben, und multipliziere einen Nenner mit dem anderen, also 3 mal 4 ist 12 und setze also $\frac{17}{12}$, das ist $1\frac{5}{12}$.

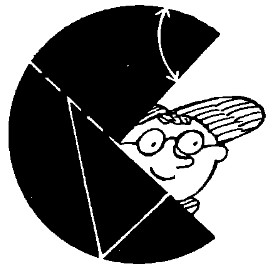
$\frac{5}{6}$ zu $\frac{7}{8}$ ist $\frac{82}{48}$, Fazit $1\frac{17}{24}$. $\frac{1}{2}$ (zu) $\frac{3}{5}$ Fazit $\frac{11}{10}$, ist $1\frac{1}{10}$.

Das Nachwort von Dr. Schröder beschäftigt sich mit dem historischen Hintergrund und der Einordnung des Rechenbuches. Wir zitieren einige Passagen:

„In 100 zufällig aus dem 15. Jh. überlieferten Schuldokumenten ist das Rechnen als Lehrdisziplin nur zweimal erwähnt. Hingegen wird der gründlichen Ausbildung in Latein und Katechetik der Vorrang eingeräumt. Das dürftige Angebot der offiziellen Schuleinrichtungen stand im Widerspruch zu den Bedürfnissen der Kaufleute u. a. in Augsburg und Nürnberg."

„Die internationale Verflechtung des Handels forderte solides Wissen über die Vielfalt von Währungssystemen und deren Wechselkurse untereinander. Die herkömmlichen Rats- und Stadtschulen konnten dem nicht gerecht werden. So wurden Rechenmeister eingestellt, die zugleich das Amt des Schreibmeisters zu erfüllen hatten. Daher verwundert es nicht, daß Nürnberg bald durch seine Schreib- und Rechenschulen berühmt wurde. Ulrich Wagner ist ein Repräsentant dieser neuen Berufsgruppe und sein Lehrbuch ein Spiegelbild des in dieser Zeit florierenden Handels." „Zweifellos hat Ulrich Wagner eine entscheidende Pionierleistung dafür vollbracht, daß der Rechenunterricht im Bildungswesen der Zeit des Frühkapitalismus zu höherem Ansehen und größerer Volkstümlichkeit gelangte. Sie besteht zunächst in der konsequenten Anwendung der indisch-arabischen Ziffern, der Verwendung des dezimalen Stellenwertsystems und der damit verknüpften Überwindung des Rechnens mit Abakus und Zählsteinen. Er verhalf dem Rechnen mit der Feder nach dem neuen Algorismus zum Durchbruch. Weiter verstand er es, die zu seiner Zeit revolutionäre Erfindung der Buchdruckerkunst in den Dienst der Ausbildung und Erziehung junger Menschen zu stellen." *Alphons*

In freien Stunden · alpha-heiter



Wilhelm Ostwald war schon als Professor für Chemie am Polytechnikum in Riga durch seine pädagogischen Fähigkeiten bekannt und berühmt. Davon zeugt ein Gespräch zwischen zwei polnischen Hörern, die damals in Riga ziemlich zahlreich vertreten waren. Sagt der eine: „Hast du schonn gehörrt neuen Professor?“ Fragt der andere: „Nein, was ist?“ – Antwortet der erste: „Du mußt hörren ihn, da geht sich Chemie in Kopf wie mit Schaufel.“

aus: Was nicht in den Analen steht
von Josef Hausen, Verlag Chemie, Weinheim

Freitag der 13.

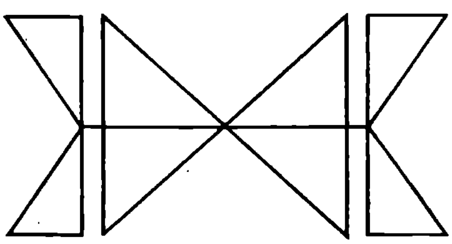
Fällt der 13. eines Monats auf einen Freitag, so bringt das Unglück. Welches ist das letzte Jahr ohne solche Unglückstage gewesen?

aus: Pythagoras, Amsterdam

In einem Zug

Die Figur ist in einem Zug nachzuzeichnen ohne eine Linie mehrfach zu zeichnen.

aus: Füles, Budapest



Großes Ostereierfärben

Im Schulhort wurden für drei Klassen Ostereier in den Farben Rot, Gelb, Blau und Violett gefärbt. Gelb gefärbt war ein Ei mehr als rot, blau zwei mehr als gelb und violett eins mehr als blau.
Die gefärbten Eier wurden geschickt auf drei Nester auf der Spielwiese verteilt. Die Schüler der drei Klassen stellten fest:
Von keiner Farbe lagen auch nur in zwei Nestern gleich viel Eier. Jedoch die kleinste, die größte und auch die beiden voneinander verschiedenen mittleren Zahlen gleichfarbiger Eier stimmten für alle drei Nester überein. Und die kleinste Zahl gleichfarbiger Eier eines Nestes war gerade halb so groß wie die größte Zahl gleichfarbiger Eier eines Nestes. Wieviel Eier waren rot gefärbt? *W. Träger, Döbeln*

Zum Scherzen aufgelegt

Aus den Silben
a – ach – ba – ben – de – den – en – en – er – fi – fol – ge – geb – gen – ger – halt – in – kel – kus – lö – nach – ne – ni – nis – o – on – on – pe – ra – ra – se – sen – sun – ti – ti – win sind 10 Wörter (mathematische Begriffe) zu bilden, deren Anfangsbuchstaben – von oben nach unten gelesen – den Namen für „schräge Strecken“ ergeben.

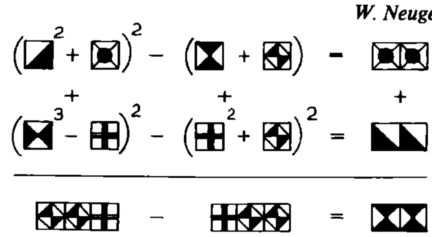
1. Sie legen etwas fest.
2. Er füllt eine Figur aus.
3. Sie hat jedes Auto.
4. Sie machen keine krummen Touren.
5. Sie werden auch vom Arzt ausgeführt.
6. Sie sind Nachbarn.
7. Er ist ein uraltes Rechengerät.
8. Sie werden gesucht, aber nicht immer gefunden.
9. Sie werden besonders hervorgehoben.
10. Er kommt immer hinterher.

OL K. Koch, Schmalkalden

Wissen und Rechnen

Jedes Karo bedeutet eine positive ganze einstellige Ziffer; gleiche Karos bedeuten also immer gleiche positive ganze einstellige Ziffern.
Diesen Angaben entsprechend sind unter Anwendung der Rechenregeln die Ziffern zu finden, die das Gleichungssystem richtig lösen. (Es sind dabei die Vorzeichenregeln zu beachten!)

W. Neugebauer, Berlin



Dreiecksgeschichten

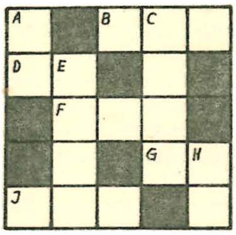
Konstruiere vier Dreiecke mit folgenden Seiten auf Pappe!

1. Dreieck: 3 cm, 7 cm, 8 cm
2. Dreieck: 5 cm, 7 cm, 8 cm
3. Dreieck: 7 cm, 8 cm, 13 cm
4. Dreieck: 7 cm, 13 cm, 15 cm

Schneide danach diese Dreiecke aus und lege sie zu einem Dreieck aneinander! *W. Träger, Döbeln*

„Auf alle Fälle“ …!

Es sind mehrstellige natürliche Zahlen zu finden, für die gelten soll:



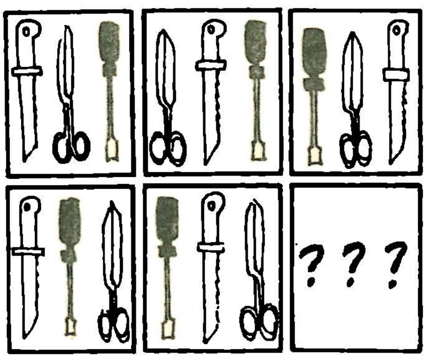
Waagerecht
B_w Vielfaches von 53
D_w Teiler von E_s
F_w Teiler von E_s
G_w 22 mehr als H_s
Senkrecht
A_s Eine Quadratzahl
C_s Das 53fache von A_s
E_s Aus gleichen Ziffern bestehende Zahl
H_s Eine Primzahl

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Geschickt kombiniert

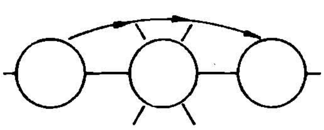
Wie muß das letzte Bild aussehen?

aus: Füles, Budapest

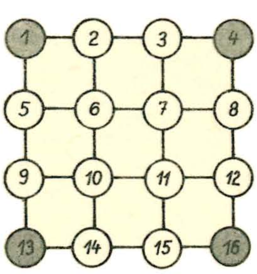


Springen und schlagen!

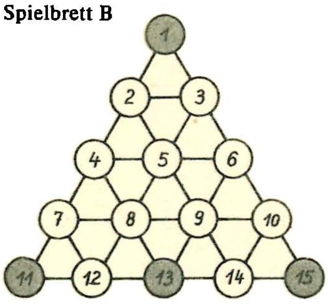
Zunächst setzt man auf jedes kreisförmige, nicht graue Feld des abgebildeten Spielbrettes A (Teil des Schachbretts) oder B (Teil des Halmabretts) einen Spielstein, z. B. ein Stück Pappe oder ein 1-Pfennig-Stück. Durch Springen sind danach alle Steine bis auf einen zu entfernen: Sprünge sind längs jeder eingezeichneten Geraden möglich. Ein Stein darf einen auf einem benachbarten Feld liegenden Stein überspringen, wenn das Feld hinter dem übersprungenen Stein leer ist. Der springende Stein wird auf das leere Feld gesetzt und der übersprungene Stein wird vom Spielbrett genommen.



Spielbrett A



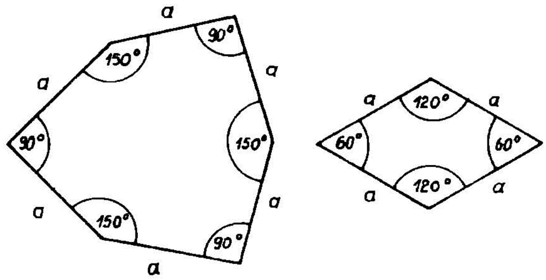
Spielbrett B



W. Träger, Döbeln

Geschickt gepflastert

Um Freiflächen attraktiv zu pflastern, hat der städtische Bauhof zwei Formen angefertigt und mit diesen Betonplatten mit gleichlangen Seiten gegossen:



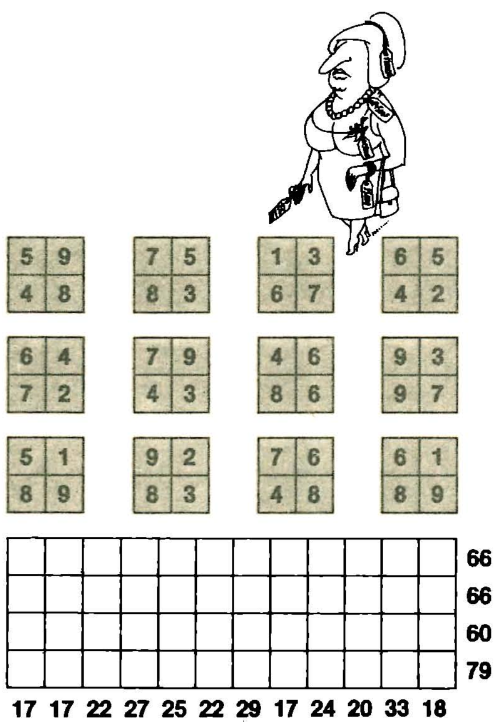
Alle viereckigen Platten sind schwarz gefärbt, die sechseckigen teils gelb und teils rot. Welche Muster sind für das Pflaster möglich, wenn gleichfarbige Platten nie eine gemeinsame Seite haben sollen?

W. Träger, Döbeln

Zahlenpuzzle

Setze die Teile des Puzzles in die unten stehenden Felder, und zwar so, daß man bei Addition der Zeilen bzw. Spalten die vorgegebenen Ergebnisse erhält!

aus: Maximath, Paris



Rotos – ein neues Logikspiel

Meinen Mathematiklehrern
G. Scheuermann und W. Seiferth
in Dankbarkeit gewidmet

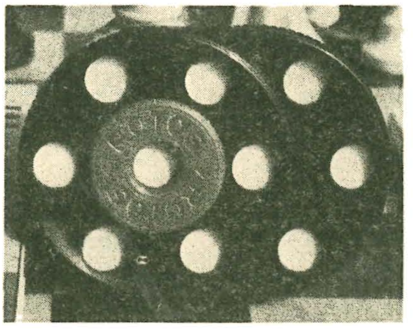
Seit dem Erscheinen des „magischen Würfels“ werden in zunehmendem Maße international immer wieder neue Spiele erdacht und hergestellt, die unseren Geist herausfordern. Der ungarische Professor Rubik – geistiger Vater des „Zauberwürfels“ – scheint durch seine geniale Erfindung eine wahre Flut an Geduld-, Puzzle- und Logikspielen ausgelöst zu haben, die nicht mehr abreißen will. Die hin und wieder zu vernehmende Meinung einiger Zeitgenossen, daß beispielsweise das Drehen am Würfel eine langweilige, stupide und sinnlose Beschäftigung sei, kann wohl am besten durch die Tatsache entkräftet werden, daß sich hervorragende Fachleute diesen Themen gewidmet haben. Mehr noch: Eine selbständige Richtung von Fachliteratur ist entstanden, Mathematiker haben Rechenanlagen gefüttert und deren dem Menschen überlegene Eigenschaft des „schnellen suchenden Probierens“ genutzt.

An dieser Stelle darf ich Herrn Prof. Dr. H.-D. Gronau aus Greifswald für wertvolle Hinweise, speziell für seine Anregungen zur Simulation des Spiels auf einem Computer, recht herzlich danken.

Auf der Suche nach einem Ordnungsalgorithmus

Hat man Rotos erstmals in der Hand, wird zunächst der Spieltrieb triumphieren. Man dreht links und rechts, vorwärts und rückwärts – immer vom Instinkt geleitet – und plötzlich kann es passieren, dies zumindest beim Farbenspiel, daß man die gewünschte Ordnung hergestellt hat: die roten Scheibchen befinden sich in einer waagerechten Reihe, die gelben und grünen ebenfalls. Zwangsläufig stellt sich hier nun die Frage, wie dieser Erfolg wiederholt werden kann. Wir hätten gerne eine Vorschrift, ein Rezept, einen Algorithmus, wie die Mathematiker zu sagen pflegen, der uns das gewünschte Ziel erreichen läßt. Versuchen wir also, uns einen solchen Algorithmus zu erarbeiten. Zuerst schaffen wir uns eine Symbolik, damit wir alle Drehfolgen eindeutig beschreiben können. Hat man das Spiel vor sich, so kann man sowohl die linke Scheibe (L) als auch die rechte Scheibe (R) drehen, und zwar jeweils im Uhrzeigersinn (gekennzeichnet durch positive Exponenten) oder entgegengesetzt (negative Exponenten). Unter einer Elementardrehung wollen wir eine 60°-Drehung der linken oder rechten Scheibe in Uhrzeigerrichtung oder entgegengesetzt verstehen. Somit haben wir die vier Elementarzüge L^1, L^{-1}, R^1 und R^{-1}. Lassen wir bei der Hintereinanderausführung von Elementarzügen die immer vorhandenen und somit redundanten L-R- bzw. R-L-Wechsel weg und notieren uns nur den Beginn und die Potenzen der Drehfolge, so können wir beispielsweise für $R^{-2}L^1R^3$ kürzer $R(-2, 1, 3)$ schreiben. Die Dimension, d. h. die Anzahl der Elemente des Vektors, wollen wir Umfang der Drehfolge nennen und mit U bezeichnen. Ist nach endlich vielen Drehungen der Ausgangszustand wieder erreicht, so nennen wir diese Drehfolge Identität I.

Ein Beispiel hierfür wäre $L^6 = I$. Selbstverständlich gilt analog $(R^{-1})^6 = R^{-6} = I$ usw. Dies ist trivial und leuchtet jedem sofort ein. Wie verhält es sich nun aber mit beliebigen anderen Drehfolgen?



Abschließend führen wir noch eine Kurzschreibweise für die Vertauschung zweier Scheibchen ein. Es bietet sich an, diejenigen der oberen Reihe von links nach rechts mit o1, o2 und o3 zu bezeichnen; analog nennen wir die Elemente der unteren Reihe u1, u2, u3 und bekommen schließlich für die Mittelreihe m1, ..., m4.

Computersimulation und Mensch-Maschine-Vergleich

Um einen Überblick zu bekommen, wie man die Auswertung der Drehversuche einem Digitalrechner übertragen kann, wollen wir das abgebildete Flußdiagramm (auch Programmablaufplan genannt) betrachten. Es sei die Aufgabe gestellt, sämtliche Drehfolgen der Gestalt $Z = L^{I1}R^{I2}L^{I3}$ mit $I1, I2, I3 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ auf Identität und bestimmte Vertauschungen zu untersuchen. Daß wir an Stelle von -2 die 4 und für -1 die 5 als Potenz nehmen, hat rein programmiertechnische Ursachen. Während sich hinter dem Flußbild im wesentlichen das Hauptprogramm verbirgt, stehen die Kästchen „V“ (Versuch) und „A“ (Auswertung) symbolisch für zwei eigenständige Unterprogramme, die das eigentliche Herzstück der Simulation beinhalten. Im Unterprogramm (V) wird dem Rechner zunächst durch die Anweisung o1: = 0, o2: = 1, ..., u3: = 9 der geordnete Zustand mitgeteilt. Nun programmiert man eine Realisierung für L^1 und eine für R^1, bei höheren Potenzen wird der entsprechende Programmteil einfach mehrmals abgearbeitet. Bei L^1 wandert das Scheibchen oben links beispielsweise um eine Position nach rechts. Für den Computer heißt das: o2: = o1 (also ist jetzt o2 = 0) usw. Das Auswerteprogramm (A) vergleicht nun den (geordneten) Ausgangszustand mit der aktuellen Belegung der Variablen o1, o2, ..., u3.

Abschließend wollen wir noch einen interessanten Zeitvergleich zwischen Mensch und Maschine anstellen. Notiert man sich die Ausgangsstellung und den Endzustand für eine Drehfolge vom Umfang $U = 7$, so benötigt man dafür etwa 150 Sekunden. Wollte man sämtliche Folgen vom Umfang $U = 7$ auf diese Weise auswerten, so brauchte man dafür $2 \cdot 5^7 \cdot 150$ Sekunden bzw. 271 Tage. Ein moderner Computer schafft es in 20 Minuten! Um das Spiel gründlich zu untersuchen, müßte man aber alle Drehfolgen vom Umfang $U = 2$ bis etwa $U = 9$ betrachten. Das sind

$2(5^2 + 5^3 + ... + 5^9) = 4\,882\,800$ Varianten.

Nach unserer Kalkulation entspricht dies einem menschlichen Arbeitspensum von etwa 23 Jahren. Ein Rechner hingegen wäre bereits in der Nachtschicht des ersten Tages arbeitslos, da er diese Aufgabe in knapp 11 Stunden erledigt.

Die Ordnung von Drehfolgen

Wir legen uns nun die Aufgabe vor, eine feste Zugfolge, etwa $Z = L^{-1}R^1$, und ihre wiederholte Anwendung näher zu untersuchen. Es ergibt sich die Frage: Wie oft muß man die Folge Z hintereinander ausführen, um den Ausgangszustand zu erhalten? In mathematischer Formulierung heißt das: Bestimme die kleinste natürliche Zahl n, für die gilt $Z^n = I$. Wir führen dafür die Bezeichnung $O(Z) = n$ ein und nennen n Ordnung der Zugfolge Z. Für $Z = L$ ist die Lösung bereits bekannt, nämlich $O(L) = 6$. Tabelle 1 enthält die Ordnungen für einige weitere Zugfolgen.

Tabelle 1

Z	O(Z)
L^2R^2	3
$L^{-1}R^1$	5
L^3R^1	8
$L^{-2}R^1$	12
L^1R^1	21
L^2R^1	30

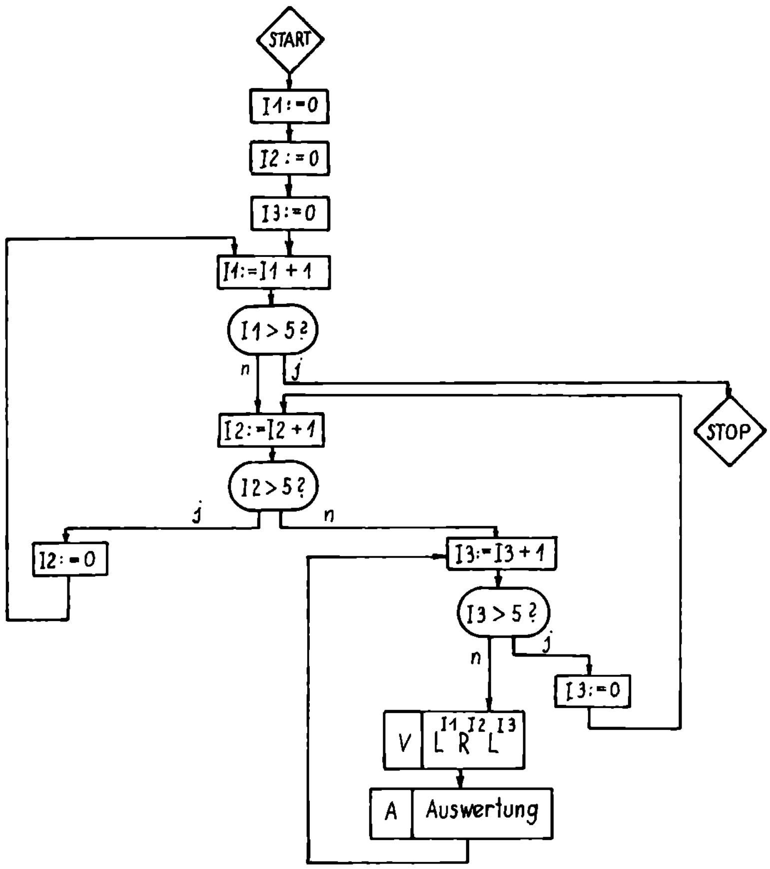
Automatisch ergibt sich an dieser Stelle die Frage nach der maximalen Ordnung von Drehfolgen bei unserem Spiel. Dieses Problem werden wir im folgenden Abschnitt wieder aufgreifen.

Permutationen

Wenn es um Fragen der Anordnung, Umordnung und Vertauschung von Elementen einer vorgegebenen endlichen Menge geht, kann man stets die für Permutationen übliche Schreibweise anwenden und die Erkenntnisse aus der Theorie der Permutationen nutzen. Notieren wir uns in einer Zeile den Zustand vor einer Drehfolge und darunter das Ergebnis des Drehversuchs, so erhalten wir beispielsweise für die Identität den Ausdruck

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Programmablaufplan zur Simulation einer Drehfolge vom Umfang $U = 3$



In jedem Falle ergibt sich so eine umkehrbar eindeutige Abbildung von der Menge der Scheibenpositionen (in der ersten Zeile immer in geordneter Reihenfolge dargestellt) auf die Menge der Scheibchen (in der zweiten Zeile als Permutation der Scheibennummern notiert). Eine zweifache Drehung der linken Scheibe in Uhrzeigerrichtung – ausgehend vom geordneten Zustand – hat man also in der Form

$$L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 2 & 8 & 4 & 0 & 6 & 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

niederzuschreiben. Ebenso gilt

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 8 & 5 & 2 & 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Für die multiplikative Verknüpfung dieser Permutationen ergibt sich

$$L^2R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 1 & 9 & 8 & 0 & 2 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

In der kürzeren Zyklenschreibweise bekommt der letzte Ausdruck die Form

$L^2R^1 = (0\ \ 7\ \ 5)\,(1\ \ 3\ \ 9\ \ 6\ \ 2)\,(4\ \ 8)$.

An dieser Stelle wollen wir nun noch einmal auf die Fragestellung des letzten Abschnitts – diesmal aus rein mathematischer Sicht – zu sprechen kommen: Für welche n gilt $(L^2R^1)^n = I$?

Wir verwenden zunächst die Gesetzmäßigkeit, daß jeder Zyklus aus n Elementen nach n-maliger Hintereinanderausführung in Einerzyklen zerfällt, d. h. die Identität liefert. Mit Hilfe der Beispiele

$$(4\ \ 8)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = (4)\,(8)$$

$$(0\ \ 7\ \ 5)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} = (0)\,(7)\,(5)$$

und einem kleinen induktiven Beweis kann man sich das schnell klarmachen. Damit können wir unsere Frage beantworten, denn aus $O(L^2R^1) = \mathrm{kgV}(2, 3, 5) = 30$ folgt unmittelbar $n = 30m$. Hier bezeichnet kgV das kleinste gemeinsame Vielfache und m ist eine beliebige natürliche Zahl. Gleichzeitig ist 30 auch die größte bei Rotos mögliche Ordnung.

Optimierung von Zügen

Dieser Abschnitt trägt eher theoretischen, man könnte fast sagen ästhetischen Charakter, denn für den Hausgebrauch dürfte es belanglos sein, zwischen 2 oder 4 Elementarzügen zu unterscheiden. Es ist unmittelbar klar, daß sich die Züge $Z_1 = L^4$ und $Z_2 = L^{-2}$ hinsichtlich ihrer Wirkung nicht unterscheiden; wohl aber benötigt Z_2 zwei Elementardrehungen weniger. Diesen Sachverhalt kann man sich für das Verkürzen von Drehfolgen zunutze machen, wie folgendes Beispiel zeigt.

Es sei jetzt

$$Z_1 = L^2R^5(L^3R^3)^3R^{-2}L^{-2}$$

und $\quad Z_2 = L^2R^{-1}L^3(R^3L^3)^2R^1L^{-2}$.

Da wir lediglich die Beziehungen $R^5 = R^{-1}$ und $R^3R^{-2} = R^1$ ausgenutzt haben, führt die um 8 Elementardrehungen kürzere Folge Z_2 zu dem gleichen Ergebnis wie Z_1.

Zusammenstellung einiger Zugfolgen

Aus der Menge aller möglichen Drehfolgen sind natürlich diejenigen am interessantesten, mit denen man gezielt Positionsvertauschungen vornehmen kann. Es liegt nun quasi am Wesen des Spiels, daß wir den Idealfall, bei dem 8 Scheibchen ihren Platz beibehalten und nur zwei ihre Positionen miteinander vertauschen, nicht erwarten dürfen. Hat man aber mit etwas Intuition und Systematik den „Schlüsselzug“ (Z11) gefunden, der die Vertauschungen m1 – m3 und m2 – m4 ausführt, so kann man davon viele andere Züge ableiten. Bezeichnen wir mit Z eine beliebige, im Hinblick auf die Überschaubarkeit aber nicht zu komplizierte Drehfolge, so erweist sich die Untersuchung von Zügen der Gestalt $Z^1(R^3L^3)^3Z^{-1}$ mit dem Hintergedanken als sinnvoll, daß man zunächst bestimmte Scheibchen in die Mittelreihe „hineindreht“, danach die Vertauschungen von Z11 nutzt und schließlich mit der inversen Operation Z^{-1} die Drehfolge beendet. Die in Tabelle 2 enthaltenen Züge sind hinsichtlich ihrer Wirkung optimal und vollständig. Für die Vertauschungen o1 – u2, m2 – m4 zum Beispiel gibt es als kürzeste nur die mit Z1 bezeichneten zwei Züge. Den mit Computer geführten Beweis für diesen Sachverhalt müssen wir dem Leser allerdings schuldig bleiben.

Zug	Drehfolge	Wirkung
Z1	L(2,3,3,3,3,3,1) L(−1,3,3,3,3,3,−2)	o1–u2, m2–m4
Z2	L(1,3,3,3,3,3,2) L(−2,3,3,3,3,3,−1)	o2–u1, m2–m4
Z3	R(2,3,3,3,3,3,1) R(−1,3,3,3,3,3,−2)	o2–u3, m1–m3
Z4	R(1,3,3,3,3,3,2) R(−2,3,3,3,3,3,−1)	o3–u2, m1–m3
Z5	R(−2,1,3,3,3,3,3,2,2) R(−2,−2,3,3,3,3,3,−1,2)	u1–m4, o3–u2
Z6	R(2,2,3,3,3,3,3,1,−2) R(2,−1,3,3,3,3,3,−2,−2)	o1–m4, o2–u3
Z7	L(2,2,3,3,3,3,3,1,−2) L(2,−1,3,3,3,3,3,−2,−2)	m1–u3, o1–u2
Z8	L(−2,−2,3,3,3,3,3,−1,2) L(−2,1,3,3,3,3,3,2,2)	m1–o3, o2–u1
Z9	L(3,−2,2,2,1) L(−1,−2,−2,2,3) L(1,2,2,−2,3) L(3,2,−2,−2,−1)	o1–u1, m3–m4
Z10	R(3,−2,2,2,1) R(−1,−2,−2,2,3) R(1,2,2,−2,3) R(3,2,−2,−2,−1)	o3–u3, m1–m2
Z11	R(3,3,3,3,3,3) L(3,3,3,3,3,3)	m1–m3, m2–m4

Tabelle 2

Ordnen des Farbenspiels

Wir wenden uns nun dem Ordnen des Farbenspiels zu. Dies geht relativ schnell und problemlos. Zunächst bringen wir die gelben Scheiben in die in Bild 1 gezeigte Ausgangsstellung. Wie man mit Hilfe einer Fallunterscheidung bezüglich der Positionierung der gelben Scheiben zeigen kann, ist das immer mit höchstens 16 Elementarzügen möglich. Nach R^3L^2 liegt die Mittelreihe geordnet vor. Nun betrachten wir o. B. d. A. nur die neun Fälle, bei denen sich in der oberen Reihe genau ein blaues Scheibchen befindet (ansonsten dreht man das Spiel um).

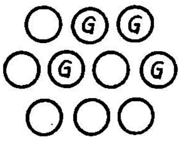


Bild 1

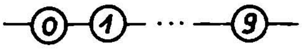


Bild 2

G = gelb, R = Rot, B = blau

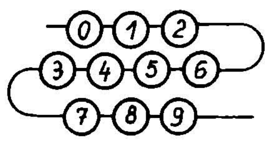
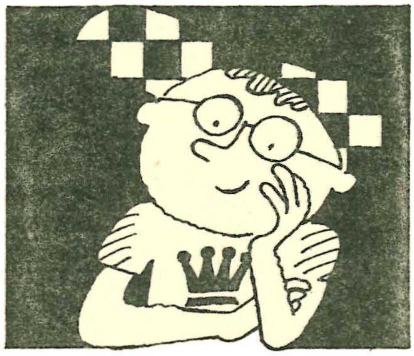


Bild 3



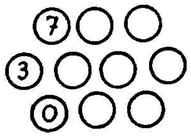


Bild 4

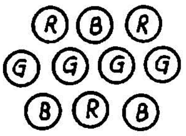


Bild 5

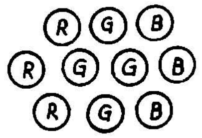


Bild 6

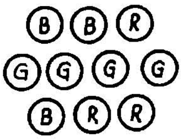


Bild 7

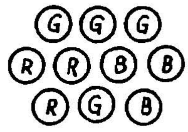


Bild 8

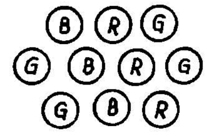


Bild 9

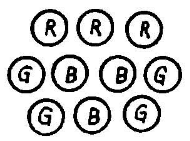


Bild 10

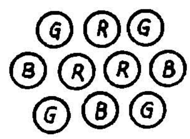


Bild 11

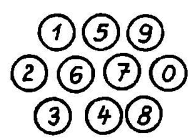


Bild 12

Bilden die blauen Scheibchen ein gleichseitiges Dreieck, so ist man nach Z9, Z10 fertig. In allen anderen Fällen genügen die Drehfolgen L^3, R^3, Z1, Z2, Z3 und Z4. Für das Ordnen des Farbenspiels benötigen wir also im ungünstigsten Falle $16 + 8 + 3 + 18 = 45$ Elementarzüge.

Ordnen des Zahlenspiels

Das Ordnen der Zahlen in wachsender oder fallender Reihenfolge gestaltet sich etwas aufwendiger, haben wir doch 3 628 000 mögliche Ausgangsstellungen. Wie kommt man auf diese gewaltige Zahl? Dazu stellen wir uns vor, wir hätten sämtliche Zahlenscheibchen hintereinander auf eine Schnur gefädelt (Bild 2).

Wir haben 10 unterschiedliche Scheibchen zur Verfügung und können diese nach den Gesetzen der Kombinatorik auf $10! = 3\,628\,000$ verschiedene Arten anordnen und erhalten also ebenso viele verschiedene „Zahlenschnüre". Legt man jede Schnur entsprechend Bild 3 zusammen, so erhält man sämtliche Konfigurationen unseres Spiels. Wir stellen hier einen Algorithmus vor, der lediglich den Zug Z9 benötigt und aus jeder Stellung nach maximal 85 Elementarzügen zum Ziel führt. Davon sind höchstens 17 Elementarzüge für den „linken Bogen" (o1, m1, u1) nötig, $5(3 + 10) = 65$ für das Ordnen des rechten Rings und drei für dessen richtige Positionierung. Betrachten wir bei dem in wachsender Folge geordneten Spiel die Zahlenfolge auf der rechten Scheibe, so können wir den Zyklus (1, 2, 6, 9, 8, 4) ablesen. Im ungünstigsten Falle steht kein Scheibchen auf dem richtigen Platz. Dann müssen wir in Einzelschritten 5 Scheibchen neu plazieren, indem wir jedes zunächst in den rechten Mittelpunkt (m3) überführen, danach mit R^1 die richtige Zykluspositon auf m4 bringen und schließlich wieder mit Z9 die Vertauschung m3–m4 durchführen. Da wir im allgemeinen eine ungerade Anzahl von Vertauschungen durchführen müssen, belegen wir zu Beginn die Felder o1, m1 und u1 entsprechend Bild 4.

Farbmuster, Symmetrien und Zahlenkonfigurationen

Beim Farbenspiel gibt es viele schöne Muster, die man unter Verwendung der Zugfolgen aus Tabelle 2 herstellen kann. Einige Beispiele sind in den Bildern 5 bis 11 dargestellt. An dieser Stelle wollen wir auch die Symmetrien zwischen L- und R-Drehfolgen erwähnen, die man bei Rotos sofort vermuten kann. Auch die Identität beinhaltet Symmetrien:

$L(-2,2,2,2,2,2,-2) = I$
$= R(1,2,2,2,2,2,1)$.

Daß man auch beim Zahlenspiel außer der geordneten Reihenfolge noch viele interessante Zahlenkonfigurationen angeben kann, belegt Bild 12. Dort ist die Summe der Zahlen in jeder Zeile gleich 15. Da es insgesamt 17 280 voneinander verschiedene Anordnungen mit dieser Zeilensumme gibt, wird der Leser leicht weitere finden.

Diejenigen Leser, die Rotos nun „durchforscht" haben, wünschen sich jetzt sicher ein neues Logikspiel. Gibt es wirklich keine offenen Fragen mehr? Dies kann nicht der Fall sein! – Gibt es Züge, die die Vertauschungen o1–o2, o2–o3, u1–u2 oder u2–u3 bewirken? Mit welcher kürzesten Zugfolge erreicht man die Identität? Wenn der Leser sich das Spiel erneut vornimmt oder zum magischen Tetraeder, Fünfzehnerspiel usw. greift, hat dieser Beitrag seinen Zweck erfüllt.

R. Pätzold

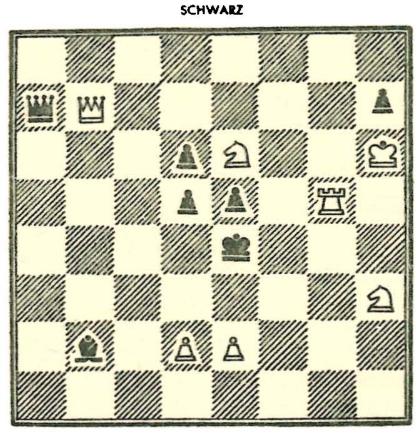
Das Schachproblem

Das Schachproblem ist eine von dem Verfasser konstruierte Schachstellung mit der Forderung, das Matt in einer bestimmten Zügezahl zu erzwingen. Es stellt also keine zufällig im Zweikampf entstandene Phase einer tatsächlich gespielten Partie, sondern eine bewußt geschaffene, komponierte Schachposition dar. Dadurch können oft eindrucksvolle und verborgene Ideen des Schachspiels in Schachproblemen dargestellt werden. Die Darstellung bestimmter Ideen wird unter sparsamster Verwendung der Mittel, des Figurenmaterials und der Zügezahl sowie unter optimaler Ausnutzung des Raumes auf dem Schachbrett angestrebt.

Das Schachproblem zeigt sich stets auch als ein Rätsel, wobei der Rätselcharakter je nach dem Grad der Schwierigkeit der Lösung und ihres Überraschungseffekts mehr oder weniger ausgeprägt ist. An ihm kann der Löser sein logisches Denken und seine schnelle Auffassungsgabe üben und trainieren. Aber nicht nur dem Löser wird ästhetischer Genuß zuteil, sondern auch dem Verfasser von Schachproblemen. Dieser bemüht sich stets nach weiterer Ideenbereicherung und künstlerischer Vervollkommnung in seinen Schachproblemen. Es gibt viele schöne und interessante Schachprobleme, die man noch nach Jahren immer wieder mit Freude und Genuß betrachtet, obwohl man die Lösung längst kennt. Ließe sich das etwa von einem noch so geistreichen Kreuzworträtsel denken? Das Schachproblem ist eben nicht nur Rätsel, sondern entschieden mehr.

Eine preisgekrönte, 78 Jahre alte Aufgabe von G. Heathcote: Matt in 2 Zügen

SCHWARZ



Eine Aufgabe von Prof. Dr. B. Goldschmidt

Biotechnikum
der Martin-Luther-Universität Halle

In vielen Zweigen der Naturwissenschaften muß man Meßpunkte durch geeignete Funktionen f möglichst gut beschreiben. Dazu berechnet man den Fehler bzw. die Abweichung aus den Differenzen zwischen dem i-ten Meßwert y_i und dem Funktionswert $f(x_i)$ am Meßpunkt x_i. In den meisten Fällen stellt man diesen Fehler F als Summe der Quadrate dieser Differenzen dar:

$$F = (y_1 - f(x_1))^2 + \ldots + (y_n - f(x_n))^2.$$

Die Funktion f kann von bestimmten Parametern $p, q, r, \ldots$ abhängen, die so gewählt werden sollen, daß F möglichst klein wird.

▲ 3011 ▲ Sei $f(x) = px + q$. An den Punkten x_1, x_2, x_3 werden die Werte y_1, y_2, y_3 gemessen. Wie müssen p und q gewählt werden, damit F möglichst klein wird?
Wie groß sind p und q, wenn

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad y_2 = 3,$$
$$x_3 = 3, \quad y_3 = 2$$

sind?

Kurzbiographie

Jahrgang 1950 – Abitur 1968 – Mathematikstudium an der Martin-Luther-Universität Halle 1968 bis 1972 – Forschungsstudium 1972 bis 1975 – 1975 Promotion A (Cousin-Probleme bei partiellen Differentialgleichungen) – seit 1975 Assistent bzw. Oberassistent an der Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität – NVA 1976 bis 1978 – 1980 Dissertation B (Verallgemeinerte analytische Vektoren im R^n) – 1981/82 Praxisaufenthalt im VEB Chemiekombinat Bitterfeld (Anwendung mathematischer Methoden in der Biotechnologie) – 1984 Berufung zum Dozenten für Analysis an die Sektion Mathematik der MLU – 1987 Lehrstuhl für Biomathematik am Biotechnikum der MLU – verheiratet – 3 Kinder.

Die Arbeit eines Mathematikers am Biotechnikum

Das Biotechnikum an der Martin-Luther-Universität Halle wurde gegründet, um biologische Wirkprinzipien zu erforschen und diese bei der Produktion qualitativ hochwertiger Lebensmittel, neuer und spezifischer Arzneimittel oder dem Abbau von Schadstoffen und Abprodukten anzuwenden. Um biotechnologische Verfahren in der Volkswirtschaft zu nutzen, müssen immense finanzielle und technische Mittel für den Bau und das Betreiben von Anlagen bereitgestellt werden. Deshalb ist es notwendig, diese Verfahren ökonomisch zu optimieren und die stabilen Arbeitsbereiche zu bestimmen. Um diese Aufgabe zu lösen, versucht man, solche Anlagen auf modernen Rechnern nachzubilden und deren Verhalten unter unterschiedlichsten Bedingungen zu studieren. Dies geschieht in mehreren Stufen:

1. Formulierung der Zielstellung, der Voraussetzungen und der Zusammenhänge

In dieser Phase, die vom Naturwissenschaftler, Konstrukteur oder Betreiber einer Anlage initiiert wird, kommt es darauf an, möglichst genau die Problemklasse anzugeben, die untersucht werden soll (z. B. welche Einflüsse untersucht werden sollen, welche man vernachlässigen kann, wie genau die Ergebnisse sein müssen, auf welche Meßergebnisse und theoretische Untersuchungen man sich stützen kann usw.).

2. Modellierung

Unter mathematischer Modellierung versteht man das Aufstellen von Gleichungen und Relationen, um bestimmte Sachverhalte der Realität nachzubilden (wie das Aufstellen der Gleichungen bei der Lösung von Sachaufgaben im Unterricht). Hier werden Naturgesetze (z. B. Gesetz über die Erhaltung der Masse und Energie → Bilanzgleichungen), physikalisch-chemische Gesetzmäßigkeiten (Wärmeleitung, Reaktionsgeschwindigkeit), empirisch-statistische Zusammenhänge (z. B. der Zusammenhang zwischen Rührerdrehzahl und Durchmischung) sowie Materialeigenschaften (z. B. Abhängigkeit der Viskosität von der Temperatur) berücksichtigt. In dieser Phase arbeiten Mathematiker, Naturwissenschaftler und Techniker eng zusammen.

3. Lösung der Modellgleichungen

Hier wird untersucht, ob die Gleichungen überhaupt Lösungen besitzen (Existenz) und ob es eindeutig bestimmte oder mehrere gibt (Eindeutigkeit). Weiterhin werden Eigenschaften der Lösungen untersucht (Extremwerte, Nullstellen, Verhalten an den Rändern, Monotonie usw.). Bei allgemeinen Modellen ist die Berechnung der Lösung sehr kompliziert und im allgemeinen nur mit Hilfe von Computern näherungsweise möglich. Dann ist es unsere Aufgabe, Methoden zur Lösung dieser Gleichungen zu entwickeln und die dazugehörigen Computerprogramme zu schreiben. Wir arbeiten i. a. auf Personalcomputern in der Programmiersprache PASCAL.

4. Anpassung der Modellgleichungen an Meßwerte

Modellgleichungen enthalten im allgemeinen Parameter, deren Wert nicht genau bekannt ist bzw. deren Wert eine Vielzahl von Eigenschaften beschreibt. Je nach Wahl dieser Werte wird die gesuchte Lösung den untersuchten Sachverhalt gut oder schlecht beschreiben. Man könnte nun einfach verschiedene Werte für die Parameter ausprobieren, um eine gute Anpassung der Lösung zu finden. Dabei wird man für die Güte der Anpassung ein Kriterium (Fehler) definieren müssen. Mit Hilfe schneller und robuster Optimierungsverfahren ist man auch in der Lage, diese Modellparameter automatisch zu bestimmen. Auch dafür wurden von uns geeignete Algorithmen entwickelt (siehe Aufgabe).

5. Auswertung der Lösungen

Die so gefundenen Lösungen müssen jetzt klar und übersichtlich dargestellt werden (Tabellen, Graphiken) und mit den Ausgangswerten verglichen werden. Ist die Übereinstimmung des Modells mit den bekannten Werten gut, so kann man das Modell für weitgehende Aufgaben verwenden. Andernfalls müssen die Fehler genau analysiert werden (z. B. ob man unzulässige Vereinfachungen getroffen hat) und erneut eine Modellierung vorgenommen werden.

6. Simulation und Optimierung

Mit derartigen mathematischen Modellen kann man eine Reihe von Überlegungen anstellen, z. B.
– Testen von Hypothesen über Zusammenhänge und Abhängigkeiten, um die Ursachen von naturwissenschaftlichen Phänomenen zu erkennen und nutzbar zu machen.
– Durchführung von Simulationen auf Computern, d. h. z. B. Durchspielen von Wachstums- und Produktionsprozessen bei unterschiedlichen Ausgangssituationen (Rohstoff, Anlagenkonfiguration) oder unterschiedlichen Qualitäts- und Quantitätsparametern (Konzentration, Energie usw.).
– Optimierung von Anlagen und Verfahren.

Auf dieser Grundlage wurde von uns in den letzten Jahren ein Programmpaket „Modellbank Biotechnologie" entwickelt, mit dem man derartige Probleme schnell und sicher bearbeiten kann.
Um derartig komplizierte Aufgaben lösen zu können, muß ein Mathematiker neben der sicheren Beherrschung der Methoden und Verfahren in der Lage sein, naturwissenschaftliche Zusammenhänge zu verstehen und fachgebietsspezifische Anwendungen zu überblicken. Er muß die Fähigkeit besitzen, sich mit Biologen und Ingenieuren in deren Terminologie zu verständigen und neuere Entwicklungen in der Literatur verfolgen. *B. Goldschmidt*

Olympiasieger in mathematischer Disziplin – Andreas Siebert

Ein Erlebnisbericht von der XXIX. IMO in Canberra

Andreas Siebert wurde am 15. 2. 1971 in Berlin geboren. Im Kreisklub „Junge Mathematiker" in Köpenick begann ab der 3. Klasse die ernsthafte Beschäftigung mit der Mathematik. Dann ging es folgerichtig über die Kreisolympiade, Mathematische Schülergesellschaft, DDR-Ausscheide und die Spezialschule „Heinrich Hertz" Berlin weiter. Bei den DDR-Olympiaden 1986, 1987 und 1988 erang Andreas 1. Preise. Der 1. Preis in Canberra dürfte der bisher höchste Lohn für seine harte, disziplinierte Arbeit sein. Was nicht heißt, daß da nicht auch viel Spaß am Hobby Mathematik dabei ist. Und wenn sich Andreas entspannen will, tut er das bei Musik von Pankow oder Herbert Grönemeyer sowie einem täglichen Eis.
Wir wünschen Andreas weiterhin viel Erfolg auch bei seinem geplanten Mathematikstudium an der Humboldt-Universität. *Alphons*

Nach harten Wochen Trainingslehrgang und einigen Klausuren stand fest, daß wir, Frank Göring, Dirk Liebscher, Martin Welk, Gerard Zenker und ich, für gut eine Woche nach Australien fahren, um dort an der IMO teilzunehmen.
Also trafen wir uns am Sonntag, dem 10. 7. 1988 in Berlin mit unserem Betreuer Dr. Quasthoff, verbrachten noch einen schönen Tag, ließen uns mit Informationen über Australien vollstopfen und setzten uns schließlich ins Flugzeug, um über Dubai, Singapur und Melbourne nach Sydney zu fliegen.
Die erste Überraschung traf uns in Dubai, wo wir gegen Morgen landeten und uns 35 °C im Schatten erwarteten. Zu unserem Glück war hier alles klimatisiert. Nach knapp 25 Stunden Flug erreichten wir mehr oder minder unbeschadet am Mittwochmorgen den Flughafen von Sydney und begaben uns zu unserer Unterkunft.
Natürlich nutzten wir unseren kurzen Aufenthalt, um uns die Stadt anzusehen. So sahen wir die weltberühmte Oper von Sydney, das chinesische Viertel und die Wolkenkratzer von Sydney. Obwohl wir ja nur einige Stunden in Sydney waren, glaubte ich fest daran, daß wir fast alle Wolkenkratzer dieser Stadt gesehen haben. Denn einige Minuten vom Stadtzentrum entfernt und ein Dreigeschosser ist ein großes Haus. Man hatte zeitweise das Gefühl, nicht in einer Zweimillionenstadt, sondern in einem riesigen Dorf zu sein.
Vorhin schrieb ich über die tropische Hitze von Dubai, nun muß ich auch das Klima von Sydney erwähnen, denn wir sind ja in den australischen Winter geflogen. Also „Winter" war das nicht, denn wir konnten uns die Stadt im T-Shirt ansehen. Dementsprechend war auch die Flora und Fauna. Es waren Palmen und anderes tropisches Gewächs zu sehen.
Als wir meinten, die Stadt besichtigt zu haben und es langsam dunkel wurde, sind wir zu unserer Unterkunft gefahren, nahmen noch die Informationsmaterialien entgegen und schliefen uns ordentlich aus, denn der Flug nimmt einen ziemlich mit und auch die Zeitdifferenz von acht Stunden ist zu verkraften. So ging unser erster Tag auf der Südhalbkugel ziemlich schnell vorbei.
Am nächsten Tag machten wir uns auf die Reise nach Canberra, an und für sich schon eine Reise allein. Die Fahrt dauerte „nur" vier Stunden, denn die Dimensionen sind auf dem 5. Kontinent doch anders als bei uns in Mitteleuropa. Auf der ganzen Fahrt sind wir durch eine (!) Siedlung gekommen. Übrigens – für alle Autofans – sind dort die Straßen fast autoleer.
An unserem 2. Tag wurden wir vom Veranstalter willkommen geheißen. Da die Zeremonie abends stattfand, nutzten wir gleich die Möglichkeit unser astronomisches Wissen aufzufüllen – wir suchten und fanden das Kreuz des Südens.
Am Freitag und Sonnabend schrieben wir die beiden Klausuren, die erwartet hart waren. Am Sonnabend besuchten wir noch ein Museum, in dem physikalische und technische Kuriosa und Experimente zu sehen und auszuprobieren waren. Den Abend beschloß ein temperamentvoller Buschtanz.
Am Sonntag zeigte uns ein ehemaliger Bumerangweltmeister, selbstverständlich aus Australien, wie man den Bumerang werfen muß, daß er auch zurückkommt. Am Abend gab es einen Mathemannschaftswettbewerb (die Regeln habe ich nachfolgend beschrieben). Er bereitete uns und unserer türkischen Partnermannschaft viel Spaß, so daß unsere mittelmäßige Plazierung schnell vergessen war.
Damit wir auch wirklich glauben, daß es in Australien die Känguruhs wie bei uns Kaninchen (oder noch mehr) gibt, machten wir einen Tagesausflug zu ihnen und tatsächlich – sie hoppelten rum. Für Leute („die sie mögen") ist es möglich sie zu streicheln, doch wir waren dazu zu ungeschickt. Da in Australien Winter war, aber kein Schnee lag, zogen wir zu einer Bobbahn mit Schlitten auf Rollen, wo man richtig auf Tempo kam, was den Spaß noch steigerte. Selbstverständlich schauten wir uns auch Canberra an, fuhren auf den Fernsehturm und waren auch hier von den Dimensionen beeindruckt. Beinah hätte ich es vergessen – Australien feierte seinen 200. Geburtstag seiner Besiedlung, und das war an jeder Ecke zu sehen. Dieser Tagesausflug war eine gute Ablenkung, denn am Abend sollte feststehen, wieviel Punkte jeder in der Endabrechnung haben würde. Die große Rechnerei ging los und jeder hoffte natürlich...! (Unsere Plazierungen konntet ihr ja in „alpha" Heft 6/88 erfahren.) Wir genossen also diesen Tag und waren einmal freudig überrascht, denn der Feldstecher der Wildhüterin kam aus der DDR, von Carl Zeiss – und das im fernen Australien.
Am vorletzten Tag in Australien statteten wir einem australischen College und einer australischen Familie einen Besuch ab. Hier lernten wir noch einmal das sympathische Temperament der Australier kennen. Den Abend schloß ein Essen in der Pizzeria Hut ab, die es angeblich in jeder Siedlung geben soll. Von der Qualität des Essens waren wir wie vom Service angenehm überrascht. Der letzte Tag war wieder dem mehr offiziellen Programm gewidmet – der mit dem Besuch unserer Botschaft begann. Wir und auch die „Botschaftler" waren doch erfreut, endlich mal Landsmänner hier am anderen Ende der Welt zu treffen.
Die Überreichung der Medaillen fand im Nationaltheater von Canberra statt. Der australische Premierminister Bob Hawke überreichte mir, wie den anderen 16 Goldmedaillengewinnern, die Goldene Plakette. Das war natürlich der „Punkt aufs i". Wir waren überhaupt von dem öffentlichen Interesse angenehm überrascht. Leider ging diese Woche auf der Südhalbkugel zu schnell vorbei – aber wir sollten noch einen Tag Singapur genießen dürfen. Also flogen wir am 21. nach Singapur – am Abend zuvor testeten wir noch das australische Bier und hielten es für trinkbar – mit Singapur Airlines in einer Boeing 747 (ein Riesending), wo wir vom Service einschließlich Radioprogramm und Film sowie den Mahlzeiten angenehm überrascht wurden.
Also in Singapur, wir übernachteten noch, besuchten wir am nächsten Tag die Singapurer Innenstadt bei tropischer Hitze. Wir schauten uns das chinesische Viertel an und wenn man etwas kaufen wollte, waren im allgemeinen erst mal Verhandlungen – wie in ganz Singapur – notwendig, wenn man nicht zu viel bezahlen wollte. Von Singapur wurden wir noch vom freundlichen Interflugvertreter verabschiedet. Dann flogen wir über Bombay, wo wir uns mit den letzten Souvenirs bewaffneten, nach Moskau. Von hier war es dann „nur" noch ein „Katzensprung" bis nach Berlin – wo wir auch schon von Vertretern des Ministeriums, der FDJ, der Medien und nicht zuletzt den „privaten Fans", Familie und Klassenkameraden begrüßt wurden.

Diese IMO war für uns ein schöner Höhepunkt bzw. Abschluß unserer langen Olympiadelaufbahn.
Nun will ich euch die Regeln für den Mathewettbewerb nennen, den ihr sicherlich in Schule oder Kreisklub durchführen könnt:

1. Die Mannschaften bestehen aus je zwei Gruppen A und B.
2. Zuerst bekommt Gruppe A eine Aufgabe.
3. Löst sie diese, ist Gruppe B an der Reihe, dann wieder Gruppe A usw.
4. Löst sie sie nicht richtig, darf sie es noch einmal versuchen und noch einmal usw. bis sie die Aufgabe hat oder bis sie aufgibt.
5. Für jede gelöste Aufgabe gibt es einen Punkt.
6. Die Mannschaft mit den meisten Punkten (Summe aus beiden Gruppen) in einer vorgegebenen Zeit ist Sieger.
7. Den Transport von Aufgaben und Lösungen kann man, wenn man will, durch Sporteinlagen ausschmücken.

Abschließend stellt euch Andreas die 6. Aufgabe der IMO 1988 vor, die keiner aus unserer Mannschaft gelöst hatte.

Aufgabe: Es seien a und b positive ganze Zahlen, so daß $ab+1$ ein Teiler von a^2+b^2 ist.
Man zeige, daß $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ das Quadrat einer ganzen Zahl ist.

Lösung: Angenommen, es existieren positive ganze Zahlen a, b mit $ab+1 | a^2+b^2$ und $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ ist keine Quadratzahl. Sei, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, $a \leqq b$ und unter allen diesen Paaren (a, b) die der Bedingung nicht genügen, wähle ich ein solches mit minimalem b aus.

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1} = c \Rightarrow a^2+b^2 = c(ab+1)$$
$$\Rightarrow b^2 - c \cdot ab + (a^2-c) = 0$$
$$\Rightarrow b_{1,2} = \frac{ac}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2c^2}{4} - a^2 + c}.$$

Offensichtlich gilt: Wenn das Paar (a, b) nicht den Bedingungen der Aufgabe genügt, so auch nicht $\left(\frac{a^2-c}{b}, a\right)$. Wenn $a < b$, so $\frac{a^2-c}{b} < b$ und $a < b \Rightarrow$ das gewählte (a, b) war nicht minimal. Das ist ein Widerspruch zur Annahme. Also war die Annahme falsch und die Behauptung gilt.
Bleibt der Fall $a = b$ und der Fall $\frac{a^2-c}{b} \leqq 0$ zu diskutieren.
Sei $a = b$: Dann gilt $a^2+1 | 2a^2$.
Da $a^2+1 | 2a^2+2 \Rightarrow a^2+1 | 2 \Rightarrow a = 1$.
Für $a = b = 1$ gilt $ab+1$ und $a^2+b^2 = 2 \Rightarrow a+b^2 | ab+1 \Rightarrow$ Behauptung gilt.

Sei $\frac{a^2-c}{b} \leqq 0 \leftrightarrow a^2 - c \leqq 0 \leftrightarrow a^2 \leqq c$
$$\Rightarrow b^2(ab+1) \leqq c(ab+1)$$
$$\Rightarrow a^3b + a^2 \leqq a^2 + b^2 \Rightarrow a^3 b \leqq b^2 \Rightarrow a^3 \leqq b.$$
Wie man sich leicht überzeugt, ist für $b > a^3$ nie $ab+1 | a^2+b^2$. Bleibt also $b^3 = a \Rightarrow a^2+b^2 = a^2+a^6$ und
$$ab+1 = 1+a^4 \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{ab+1} = a^2 \text{ q. e. d.}$$

alpha-Wettbewerb 1987/88

Preisträger

Susanne Dräbenstedt, Aderstedt; René Erler, Altenburg; Veneta Türke, Auerbach; Silvio Strech, Bad Salzungen; Thoralf Czichy, Bergfelde; Gundula Hofer, Stefan Skonietzki, beide Berlin; Norbert Schröder, Bernau; Stephan Schrameier, Blankenfelde; André Schmatloch, Blankenhain; Torsten Schmidt, Sandra Nothnagel, Denise Schellenberg, Cornelia Pleß, Kati Reum, alle Breitungen; Anett Gschwender, Brohm; Torsten Peter, Brotterode; Christian Griepenhog, Brusendorf; Silvio Löffler, Hagen Lessing, beide Cottbus; Stefan Hübner, Christian Vögle, Andreas Kirchberg, alle Dingelstädt; Daniel Arndt, Marcus Heinrich, Steffen Petzold, Torsten Schmack, alle Dresden; André Kratzert, Dürrröhrsdorf; Dimitri Stübner, Peter Stübner, beide Erfurt; Yvonne Witthauer, Nicole Schöbel, Conny Richter, Martin Schulz, alle Ernstthal; Jana Reinhardt, Mandy Jäger, beide Fambach; Ulrich Müller, Fischheim; Mirko Niemann, Frankfurt/O.; Katrin Schünemann, Freital; Tobias Gerlach, Nicole Schüler, beide Friedeburg; Nadine Koch, Gehofen; Stefan Kottwitz, Gera; Alexander Tenner, Michael Gronau, Cathrin Kunze, alle Greifswald; Frank Schneegaß, Großbodungen; Silke Rudolph, Großröhrsdorf; Thomas Müller, Greußen; Jan Wettstein, Thilo Kallenbach, beide Gumpelstadt; Alois Belter, Hagenow; Schulklub der EOS W. Pieck, Heiligenstädt; Angela Wiesjahn, Holzendorf; Manuela Winkler, Hoyerswerda; Nico Schmidt, Jüdenberg; André Lange, Karl-Marx-Stadt; Mirko Jelinek, Katrin Anton, AG Math. Kl. 5/6 der Pestalozzi-OS, Kirsten Schröter, alle Leegebruch; Patrik Fladerer, Leinefelde; Torsten Schreiber, André Gärtner, beide Leipzig; Andreas Willnow, Lindenthal; Veit Kannegießer, Lübben; Daniel Wettstein, Lübz; Matthias Loesdau, Neustrelitz; Andreas Birkner, Katja Schürer, beide Oranienburg; Steffen Siebert, Pionierrepublik W. Pieck; Kanni Kelder, Pölva (Estnische SSR); Andrea Thiele, Rackwitz; Gerrit Tuschling, Ribnitz; Claudia Jurgat, Rostock; Kathrin Rotter, Saßnitz; Elko Jacobs, Saurasen; Katja Manski, Schildow; Matthias Kittner, Schmalkalden; Dagmar Schröder, Schönberg; Nicole Kirchner, Schwallungen; AG Jg. Math. des Kreispionierhauses „M. Böhme", Sebnitz; Thomas Lotze, Suhl; Steffen Vollbarth, Sondershausen; Iris Demmer, Themar; Sylvia Kaiser, Nicole Schiller, beide Tiefenort; Daniel Schuster, Trusetal; Karsten Hoof, Wiesenburg; Ronald Peters, Christian Kühn, beide Wismar; Christian Förster, Wittenberg; Stefan Bretfeld, Zepernick

Vorbildliche Leistung

Tino Wirsing, Bad Salzungen; Corinna Scherf, Olaf Leubner, beide Berlin; Katrin Kickbusch, Boizenburg; Beate Pohler, Brand-Erbisdorf; Petra Schmidt, Brusendorf; Susan Dreyer, Thomas Reißner, beide Cottbus; Andreas Witkowsky, Dingelstädt; Anja Werner, Silke Wicklein, Jan Skribanowitz, Matthias Overmann, Alexander Fischer, Christiane Hofmann, alle Dresden; Beate Kragl, Dirk Borsch, beide Erfurt; Lars Lämmerhirt, Ettenhausen; Steffen Röder, Fambach; Ulrike Müller, Fischheim; Thomas Nopp, Frankfurt/O.; Götz Lothal, Friedeburg; Matthias Ebert, Friedrichsthal; Nicol Gericke, Stephan Brendicke, beide Gallin; Beatrice Gronau, Greifswald; Kristin Winkler, Großschönau; Jens Köster, Halberstadt; Thomas Pitzschke, Halle-Neustadt; Katja Sonntag, Hennigsdorf; Olaf Schmidt, Hohenebra; Björn Borchardt, Ilmenau; Andreas Anders, Jüterbog; Katja Wurziger, Marco Münch, beide Karl-Marx-Stadt; Martin Schulz, Katzhütte; Heike Schmidtke, Königs Wusterhausen; Martin Schreiter, Leinefelde; Jens Gärtner, Clemens Crucius, beide Leipzig; Wibke Engel, Jacqueline Koschnitzki, beide Mittenwalde; Andreas Schröder, Ralph Michaelis, Frank Müller, alle Neubrandenburg; Beate Mägdefrau, Nordhausen; Cornelia Fahr, Mirko Kitzig, Roland Becker, alle Oranienburg; Susanne Kraenz, Picher; Dörte Schappler, Parchim; Katrin Hielscher, Ragow; Christoph Weidling, Riethnordhausen; Torsten Gerhardt, Alexander Koop, beide Rostock; Frank Schönheit, Rudolstadt; Marco Klemm, Röhrsdorf; Undine Wahl, Sandra Schünemann, beide Saßnitz; Erik und Björn Zimmermann, Schildow; Stefan Schrickel, Schmalkalden; Dörte Radke, Schwerin; Dirk Weber, Steinbach-Hallenberg; Jens Krubert, Templin; Silvia Kaiser, Tiefenort; Marcus Matzker, Torno; Thomas Förster, Velten; Sven Peyer, Weimar; Heiko Barthel, Wilschdorf; Enrico Maasch, Wittenberg; Martin Löffler, Worbis; Nico Eberhardt, Wiesenthal; Thomas Buttgereit, Zehlendorf; Jörg Siede, Zepernick; Anja Jakubahs

Abzeichen in Gold

Aus Platzgründen veröffentlichen wir ab diesem Wettbewerb nur noch die Namen der Teilnehmer, die 4, 5, 6, 10, 15, 20, 21, ... Jahre teilnehmen.

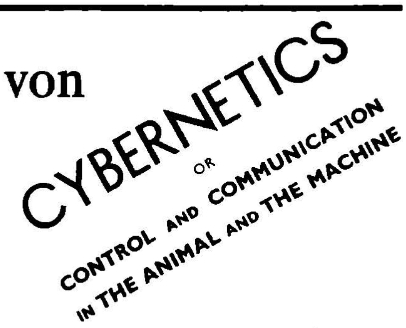
Für einundzwanzigjährige Teilnahme
Lutz Püffeld, Halberstadt

Für zwanzigjährige Teilnahme
Guido Blosfeld, Halle

Für fünfzehnjährige Teilnahme
Ina Büttner, Berlin; Annett Körner, Dresden; Bernd Dübe, Forst; Matthias Weser, Großenhain; Rüdiger Düsing, Halle; Ruth Jacobs, Halle-Neustadt; Rolf Kamieth, Kakerbeck; Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich); Udo Kretzschmann, Markneukirchen; Jana Renner, Röbel; Ina und Uwe Ebert, Ruppendorf; Siegfried Kretschmann, Schlagsdorf; Bernd Hartwig, Thaldorf

Für zehnjährige Teilnahme
Florian Schreiber, Aue; Bert Minske, Norbert Dorn, Jens Prochno, Beate und Stefan Müller, alle Berlin; Christian Sitz, Calau; Andreas Prinz, Manfred Roßius, beide Cottbus; Uwe Martin, Crossen; Bert Kühne, Dahme; Rolf Dach, Michael Nitsche, Carsten und Helmut Schreiber, Ingolf Thurm, alle Dresden; Cornelia Wolf, Barbara Voigt, beide Erfurt; Heike Morgner, Falkenstein; Henry Mäder, Frohburg; Jutta und Uta Schumann, Havelberg; Carsten Leibnitz, Hohenstein-E.; Claudia Docter, Ilsenburg; Andreas Israel, Sebastian Horbach, beide Karl-Marx-Stadt; Friedhelm Reichert, Heiko Witte, beide Königs Wusterhausen; Bernd Fucke, Leipzig; Jens Fuchs, Luckau; Sven Saar, Mühlhausen; Irma Goßmann, Oranienburg; Helmut Schenk, Pirna; Katja Uhlemann, Prausitz; Ronald Kaiser, Schleid; Winfried Ullrich, Schmalkalden; Delia Wolfert, Söllichau; Mike Selig, Stauditz; Silvia Reinwarth, Teltow; Evelin Schott, Thalheim; Horst Rißmann, Wesenberg
Fortsetzung siehe Heft 3/88

Zum 25. Todestag von Norbert Wiener am 18. März 1989



In unserer Zeit einer neuen wissenschaftlich-technischen Revolution wird man kaum ein Exemplar, von naturwissenschaftlichen oder mathematischen Fachzeitschriften ganz zu schweigen, einer Tageszeitung finden, in dem nicht von Automatisierung, Computern, Informatik, Kybernetik, Hochtechnologien usw. die Rede ist. Einer der Väter dieses neuen technologischen Zeitalters ist der amerikanische Mathematiker Norbert Wiener gewesen.

Norbert Wiener wurde am 26. November 1894 in Columbia (USA-Staat Missouri) als Sohn des bedeutenden jüdischen Slawisten Leo Wiener (1862 bis 1939) geboren. Der Vater, Professor an der berühmten Harvard-Universität, stammte aus dem vom zaristischen Rußland besetzten Teil Polens, die Mutter Wieners aus dem Rheinland. Der außerordentlich begabte Norbert wurde zeitweise im elterlichen Haus vom Vater unterrichtet, danach nur kurzzeitig an Elementarschulen und dann sofort an höheren Schulen (Colleges). Bereits 1909 begann Wiener ein Studium der Biologie, danach ein Studium der Philosophie, das er 1912, also achtzehnjährig, mit einer Doktorarbeit über ein Thema der mathematischen Logik abschloß. Dieser äußerlich so glatte Weg zu einer großen Laufbahn hat jedoch auch seine Stolperstellen gehabt. In seiner Autobiographie hat Wiener beschrieben, daß er mechanische Tätigkeiten in der Mathematik, wie das sichere

Beherrschen der Grundrechenarten nur schwer lernte, noch „mit den Fingern" rechnete, „als das längst nicht mehr als statthaft galt". Dagegen fiel ihm das Verstehen schwieriger Vorgänge außerordentlich leicht. Das auch später bei Wiener bemerkbare Auseinanderfallen von unbedingt beherrschbaren Grundfertigkeiten und höherer Mathematik könnte eine Folge des ungewöhnlichen Bildungsweges gewesen sein, aber es scheint auch eine charakteristische Eigenart seines Denkens auszudrücken. Natürlich „verstand" Wiener die Infinitesimalrechnung, die analytische Geometrie usw., aber er konnte sie nicht erklären. Bedeutende Mathematiker haben beschrieben, daß Wiener ein „großartig schlechter Dozent" (H. Freudenthal) gewesen ist und er ist bezüglich des Stils seiner Arbeiten und seiner Arbeitsweise sogar mit einem Läufer verglichen worden, der möglichst schnell ans Ziel kommen will, sich dabei um das Zusammenspiel von Muskeln und Nerven, im Gegensatz zu seinem Trainer, nicht kümmernd (P. R. Halmos). Trotzdem hat Wiener einige direkte Schüler gehabt. Konnten sie den komplizierten, verschlungenen und ungewöhnlichen Gedankengängen Wieners, hauptsächlich in dessen Spezialseminaren folgen, so wie der Begründer der mathematischen Informationstheorie, Claude Elwood Shannon, dann hat Wiener sie auch tatkräftig gefördert.

Nach der Promotion setzte Wiener seine Studien in Europa, in Cambridge und in Göttingen, fort. In Göttingen lenkte ihn die Bewunderung für den großen Mathematiker David Hilbert (1862 bis 1943) schon auf seinen eigentlichen Forschungsbereich, die Anwendung der Mathematik auf physikalische und technische Fragen in weitestem Sinne. Nach seiner Rückkehr in die USA wirkte Wiener, wissenschaftlich wenig erfolgreich, kurzzeitig in New York, Cambridge/Mass., Orono, Lynn und Albany. Nach einem kurzen Militärdienst arbeitete er als Reporter, wurde arbeitslos. Die finanzielle Situation seiner Familie ermöglichte ihm aber weiterhin eine sorgenfreie Forschungsarbeit auf dem Gebiet der mathematischen Logik. Im Jahre 1919 erschien Wieners erste, sehr bedeutende Arbeit über die Theorie des Messens. 1920 wurde Wiener am berühmten Massachusetts Institute of Technology in Cambridge (Massachusetts) fest angestellt. 1932 wurde er dort ordentlicher Professor. Studienaufenthalte, Gastprofessuren und Vortragsreisen führten Wiener in den folgenden Jahrzehnten in viele Länder. Während einer dieser Reisen ist er am 18. März 1964 in Stockholm gestorben.

Nach den frühen Arbeiten zur mathematischen Logik wandte sich Wiener in seiner Forschungsarbeit vorwiegend Gebieten zu, die an der „vordersten Front" der damaligen Forschung lagen. Diese Gebiete, auch heute noch höchst aktuell, seien nur erwähnt. Es waren die harmonische Analyse und ihre Verbindung zur Theorie der Zufallsprozesse, und, angeregt durch Fragen der Elektrotechnik, die Operatorenrechnung (1925) und die Potentialtheorie (1923/24). Mit seinem Namen sind noch jetzt eine Anzahl von Sätzen aus diesen Gebieten ebenso wie der Begriff „Fourier-Wiener-Reihen" verbunden. Die Arbeiten Wieners über harmonische Analyse eröffneten auch die Möglichkeit, die Grundlagen dieser Theorie neu zu fassen. Auch noch in den zwanziger Jahren entstanden Arbeiten über Tauber-Theoreme, zur Quantenmechanik, entwickelte Wiener das Konzept des normierten Raumes und der komplexen Fouriertransformation. Es folgten die berühmten Untersuchungen zur Brownschen Bewegung (1920 bis 1934). Die Brownsche Bewegung ist benannt nach dem schottischen Botaniker Robert Brown (1773 bis 1858). Er entdeckte sie 1827, als er das Verhalten von Pollenkörnern im Wasser betrachtete. Die Körner wurden durch die ständigen Stöße der sich ständig bewegenden Wassermoleküle in die unregelmäßigste Bewegung versetzt. Die Deutung der Ursache dieser Bewegung war erstmals Albert Einstein (1879 bis 1955) gelungen. Brownsche Bewegungen treten, wie wir heute wissen, auch beim Transport elektrischer Ladungen, bei chemischen Reaktionen, im Kernreaktor und an vielen anderen Stellen in Wissenschaft und Technik auf.

Die Arbeiten Wieners über Brownsche Bewegung ermöglichten es unter Mitarbeit anderer Mathematiker schließlich, solche Bewegungen und ähnliche Erscheinungen mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu beschreiben.

„Wiener-Prozesse", samt „Wienerschem Integral" und „Wienerschem Maß" spielen heute in der Theorie der Zufallsprozesse und bei ihren technischen Anwendungen geradezu eine entscheidende Rolle. Nebenbei entstanden in den dreißiger Jahren Arbeiten zur Ergodentheorie und über Integralgleichungen.

Zur Zeit des zweiten Weltkrieges entwickelte Wiener die Theorie der optimalen Filter und der optimalen Vorhersage. Die Filtertheorie gab die Möglichkeit, Methoden zu entwickeln, die störenden Nebengeräusche bei einer Nachrichtenübermittlung, z. B. durch Radar, zu vermindern. Diese Wienersche Theorie ist noch jetzt von grundsätzlicher Bedeutung für die Nachrichtentechnik. Die Vorhersagetheorie ermöglichte es, aus einer gewissen Menge von Daten über die Vergangenheit eines Ereignisses statistisch auf die nächste

Zukunft des Vorganges zu schließen. Ein solcher Vorgang tritt zum Beispiel bei der Flugzeugabwehr auf. Um das Flugzeug abzuschießen, muß das Geschütz auf eine Stelle des Himmels gerichtet werden, die das Flugzeug dann erreicht, wenn das abgesandte Geschoß auch diese Stelle erreicht. Um das Geschütz richtig zu richten, muß man die wahrscheinliche Position des Flugzeugs für eine Zeit „vorhersagen“ können. Filtertheorie und Vorhersagetheorie sind aus der Not entstanden, England gegen die verheerenden faschistischen Luftangriffe schützen zu müssen.
Etwa auf das Jahr 1942 gingen die Anstrengungen Wieners und anderer zurück, die „Kybernetik“ zu begründen. In einer Reihe von Konferenzen wurden von Fachleuten sehr unterschiedlicher Fachgebiete Grundfragen der neuen Wissenschaft diskutiert. Als Dokument der Diskussionen erschien nach einer Vorstudie (1943) Wieners berühmtestes Buch „CYBERNETICS ...“. Das Buch war ein Meilenstein auf dem Wege, einheitliche Prinzipien (z. B. „Rückkopplung“) aufzufinden, die für Lebewesen, technische Geräte, Gesellschaftsstrukturen gleichermaßen Gültigkeit haben. Der Welterfolg des Buches ermunterte Wiener in weiteren Schriften sich vorwiegend mit der Anwendung der Kybernetik und der gesellschaftlichen Bedeutung dieser Wissenschaft auseinanderzusetzen.
In diesen Schriften verurteilte er jede Art imperialistischer Ideologie und legte die (kybernetischen) Mechanismen diktatorischen Herrschaftsstrebens und kapitalistischer Geschäftspraktiken bloß. Auch seit etwa 1942 hatte Wiener begonnen, für sich Konsequenzen aus der entstandenen politischen Situation zu ziehen. Seiner Einbeziehung in das Projekt zur Schaffung der Atombombe standen möglicherweise schon sicherheitspolitische Bedenken reaktionärer Militärkeise entgegen. Wenig später weigerte sich Wiener jedoch selbst an halbmilitärischen Projekten über Rechengeräte mitzuwirken und erklärte schließlich 1947 im Zusammenhang mit dem Bau der Wasserstoffbombe, daß er nicht die Absicht habe, sich weiterhin mit Untersuchungen zu befassen, die für die Kriegsführung von Bedeutung wären. Seine Aufgabe und die Aufgabe der ehrlichen Naturwissenschaftler und Mathematiker sei es vielmehr auch, die Allgemeinheit mit den Grundfragen der Naturwissenschaften und mit den politischen Hintergründen der Anwendung von Mathematik und Naturwissenschaften vertraut zu machen.

H. J. Ilgauds

Wir verweisen auch auf den Titel aus der Reihe „Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner“:

H. J. Ilgauds
Norbert Wiener
86 S., zahlr. Abb.
Bestell-Nr. 665 983 9 Preis: 4,80 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft
Leipzig, 1984

Ein elementarer Konvergenzbeweis

Dirk Porezag, der Autor dieses Beitrages, wurde am 15. 12. 1968 in Frauenstein (Osterzgebirge) geboren. Bis zum Abschluß der 10. Klasse besuchte er dort die POS „Julius Fučik“. Von 1985 bis 1987 war er Schüler der Spezialklasse für Mathematik der Technischen Universität Karl-Marx-Stadt. Vom 5. Schuljahr an nahm er regelmäßig und erfolgreich an Mathematik- und Physikolympiaden teil, war Mitglied im Bezirkskorrespondenzzirkel und in der Bezirksarbeitsgemeinschaft für Mathematik. Dirk nahm 1987 an der Technischen Universität Karl-Marx-Stadt ein Physikstudium nach Sonderstudienplan auf. Zur Zeit leistet er noch seinen Ehrendienst bei der NVA und wird im Mai dieses Jahres sein Studium fortsetzen. Wir wünschen ihm dabei viel Erfolg!

Alphons

Bei Anwendung des Tangentenverfahrens von Newton zur Bestimmung der reellen positiven Nullstelle der Funktion $f(x) = x^m - a$, wobei $a \in R$ und $m \in N$ mit $a > 0$ und $m > 1$ gegeben sind, wird man auf folgendes Iterationsverfahren geführt:

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

mit einem beliebigen Startwert $x_0 > 0$. Dabei ist
$g(x) = (1/m)\,[(m-1)\,x + a/x^{m-1}]$, $(x > 0)$.
Die Idee ist die, beginnend mit einem beliebigen positiven Startwert x_0 über die Beziehung (1) nacheinander sogenannte Näherungswerte $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ für die gesuchte Lösung der Gleichung $x^m - a = 0$, nämlich $\sqrt[m]{a}$ zu erhalten. Im allgemeinen ist aber nicht sicher, daß dieses Vorgehen Näherungswerte mit beliebiger Genauigkeit liefert. Man muß also nachweisen, daß die durch (1) erzeugte Folge von Näherungswerten gegen $\sqrt[m]{a}$ konvergiert.
In der Literatur wird die Konvergenz dieser Folge, wegen der Entstehung des Verfahrens, mit Hilfe der Differentialrechnung nachgewiesen. Hier soll ein elementarer Konvergenzbeweis vorgestellt werden. Er benutzt nur den Satz über die Konvergenz monotoner und beschränkter Folgen sowie einige einfache Umformungen, also Kenntnisse, die bereits etwa im ersten Drittel der 11. Klasse zur Verfügung stehen müßten.
Wir formulieren zunächst das zu beweisende Resultat:
Satz: Das Iterationsverfahren (1) liefert bei beliebigem positivem Startwert x_0 eine gegen $\sqrt[m]{a}$ konvergierende Folge (x_n), die ab $n > 0$ monoton fällt und durch $\sqrt[m]{a}$ nach unten beschränkt ist. Außerdem gilt folgende Fehlerabschätzung
$0 \leqq x_n - \sqrt[m]{a} \leqq x_n - a/x_n^{m-1}$
$(n = 1, 2, \ldots)$.
Wir bereiten den Beweis des Satzes mit einem Lemma und zwei Folgerungen vor.
Lemma: Für $u > 0$ und $m > 1$ ist
$u^m + m - 1 \geqq mu$.
Beweis: Offenbar folgt aus $0 < u \leqq 1$ (bzw. $u > 1$) sofort
$\sum_{i=0}^{m-1} u^i \leqq m \left(\text{bzw. } \sum_{i=0}^{m-1} u^i > m\right)$, woraus nach Multiplizieren mit $u - 1$ in beiden Fällen unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Folge die Ungleichung $u^m - 1 \geqq m(u-1)$ (die Gleichheit gilt nur für $u = 1$) folgt. Hieraus ergibt sich die Behauptung des Lemmas. q. e. d.
Folgerung (1): Für $x > 0$, $m > 1$ und $a > 0$ ist $g(x) \geqq \sqrt[m]{a}$.
Beweis: Für $u = \sqrt[m]{a}/x > 0$ erhält man aus dem Lemma die Ungleichung $a/x^m + (m-1) \geqq m\sqrt[m]{a}/x$. Diese mit x/m multipliziert liefert die Beschränktheit der Funktion g nach unten durch $\sqrt[m]{a}$.
Folgerung (2): Für $x \geqq \sqrt[m]{a}$ ist $g(x) \leqq x$.
Beweis: Dieses Resultat ergibt sich unmittelbar aus der Darstellung
$g(x) = x - (x^m - a)/mx^{m-1}$.
Kommen wir nun zum Beweis des Satzes: Wegen Folgerung (1) ist $x_n \geqq \sqrt[m]{a}$ für $n = 1, 2, \ldots$, woraus mit der Folgerung (2) sich sofort $x_{n+1} = g(x_n) \leqq x_n$ für $n = 1, 2, \ldots$ ergibt. Bekanntlich konvergiert eine solche nach unten beschränkte und monoton fallende Folge. Sei $G = \lim_{n\to\infty} x_n$. Offensichtlich ist $G \geqq \sqrt[m]{a} > 0$, so daß wir unter Berücksichtigung einfacher Grenzwertsätze ohne Schwierigkeiten in (1) mit n gegen Unendlich gehen können. Man erhält: $G = (1/m)\,[(m-1)\,G + a/G^{m-1}]$, woraus $G = \sqrt[m]{a}$ folgt. Zur Fehlerabschätzung: Setzen wir $y_n = a/x_n^{m-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, so erkennt man leicht, daß die Folge (y_n) monoton wachsend gegen $\sqrt[m]{a}$ konvergiert. Mithin gilt immer:
$y_n < \sqrt[m]{a} < x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$.
Hieraus folgt die erwähnte Fehlerabschätzung. q. e. d.

D. Porezag

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Kreisolympiade

(16. 11. 88)

Olympiadeklasse 5

280521 In einer Gaststätte, die aus einem Speisesaal und einem Grillrestaurant besteht, sind im Speisesaal genau 135 Plätze für die Gäste vorhanden. Die Anzahl der Plätze im Grillrestaurant beträgt ein Drittel von der Anzahl der Plätze im Speisesaal.

a) Wieviel Plätze stehen in der Gaststätte insgesamt zur Verfügung?

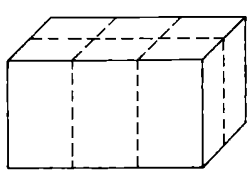
b) Im Sommer kommen noch Plätze im Freien hinzu. Ihre Anzahl ist doppelt so groß wie die Anzahl der Plätze im Grillrestaurant.

Wie groß ist im Sommer das Platzangebot der Gaststätte?

280522 Das im Bild abgebildete Paket ist von links nach rechts 45 cm lang, von vorn nach hinten 30 cm breit, und es ist 25 cm hoch. Es soll in der dargestellten Weise (gestrichelte Linie) mit Klebeband verklebt werden. Für das Überlappen von End- und Anfangsstücken sind zusätzlich insgesamt 10 cm Klebeband vorgesehen.

Wieviel Zentimeter Klebeband werden demnach insgesamt gebraucht?

Wieviel Meter sind das?



280523 a) Zeichne eine Gerade g und ein Dreieck ABC, dessen Eckpunkt C auf g liegt, während A und B nicht auf g liegen, sondern sich auf verschiedenen Seiten der Geraden g befinden!

b) Von einer Verschiebung wird verlangt, daß bei ihr die Gerade g sich selbst als Bild hat und daß die Verschiebungsweite 6 cm beträgt.

Wie viele solcher Verschiebungen gibt es insgesamt?

Zeichne zu jeder dieser Verschiebungen einen Verschiebungspfeil!

c) Konstruiere das Bild des Dreiecks ABC bei jeder der in b) genannten Verschiebungen!

280524 a) In einer Kiste sind 3 grüne und 4 gelbe Kugeln und keine weiteren. Kerstin und Steffen überlegen, wieviel Kugeln sie mindestens aus der Kiste herausholen müssen, um zu sichern, daß von jeder Farbe (mindestens) eine dabei ist. Beim Herausholen der Kugeln soll nicht in die Kiste geschaut werden. Kerstin meint, man müsse mindestens 5 Kugeln herausholen; dies würde aber auch ausreichen, um das Gewünschte zu sichern. Steffen ist dagegen der Ansicht, daß dafür schon 4 Kugeln reichen.

Wer von beiden hat recht? Begründe deine Entscheidung.

b) Jetzt seien in der Kiste 23 rote, 33 blaue, 21 schwarze, 21 weiße, 2 grüne Kugeln und keine weiteren. Gib an und begründe, wieviel Kugeln man mindestens herausnehmen muß, um zu sichern, daß 6 dieser Kugeln einander gleiche Farbe haben!

Zeige, daß die von dir angegebene Zahl dafür auch ausreicht!

Olympiadeklasse 6

280621 An der Bahnstrecke von Pfiffigstadt nach Knobelshausen liegen zwischen diesen beiden Orten noch drei Bahnstationen: Adorf, Bedorf, Cedorf.

In jedem dieser fünf Bahnhöfe kann man Fahrkarten nach jedem anderen dieser Bahnhöfe kaufen.

André besitzt zu jeder dieser möglichen Verbindungen genau eine Fahrkarte. Weitere Fahrkarten hat er noch nicht in seiner Sammlung.

Wieviel Fahrkarten hat André insgesamt? (Hinweis: Hin- und Rückfahrt gelten als verschiedene Verbindungen, kombinierte „Hin- und Rückfahrkarten" gibt es jedoch nicht.)

280622 Frau Müller und ihre Tochter Michaela, Frau Beyer und ihre Söhne Jan und Gerd sowie Frau Schulz mit ihren Kindern Steffi und Jens besuchen gemeinsam eine Veranstaltung. Frau Müller kauft die Eintrittskarten für alle und bezahlt 22 Mark.

Wieviel Geld müssen Frau Beyer und Frau Schulz der Frau Müller geben, um die Eintrittskarten für sich und ihre Kinder zu bezahlen, wenn für Michaela, Jan, Gerd, Steffi und Jens jeweils nur der halbe Eintrittspreis wie für einen Erwachsenen entrichtet werden mußte?

280623 Rolf zeichnet ein Rechteck. Er verkleinert dann dessen größere Seitenlänge um 2 cm und stellt fest: Dabei entsteht ein zweites Rechteck, dessen Flächeninhalt um 8 cm^2 kleiner ist als der Flächeninhalt des ersten Rechtecks. Ferner vergrößert er beide Seitenlängen des ersten Rechtecks um je 1 cm und stellt fest: Dabei entsteht ein drittes Rechteck, dessen Flächeninhalt um 13 cm^2 größer ist als der Flächeninhalt des ersten Rechtecks.

Weise nach, daß sich allein aus Rolfs Feststellungen die beiden Seitenlängen des ersten Rechtecks ermitteln lassen! Gib diese Seitenlängen an!

280624 Heidi, Manuela, Peggy und Simone starteten beim Schulsportfest, jedes dieser Mädchen in genau einer der Sportarten „Handball", „Mehrkampf", „Pop-Gymnastik", „Schwimmen".

Ferner ist bekannt:

(1) Jedes der vier Mädchen errang genau eine Medaille; zwei Mädchen Gold, die beiden anderen Silber.

(2) Für Mädchen mit gleicher Medaille gilt stets: Bei jedem dieser Mädchen beginnt der Name mit demselben Buchstaben wie die Sportart des anderen Mädchens.

(3) Heidi erhielt eine Medaille geringeren Wertes als Manuela.

(4) Simone erkämpfte nicht die gleiche Medaille wie die Handballerin.

Zeige, daß aus diesen Angaben eindeutig gefunden werden kann,

a) in welcher Sportart jedes der Mädchen gestartet ist,

b) welche Medaille jedes der Mädchen errungen hat!

Überprüfe auch, ob mit den so gefundenen Sportarten und Medaillen alle Angaben (1) bis (4) erfüllt werden!

Olympiadeklasse 7

280721 Im Mathematikunterricht einer Klasse wurden über eine natürliche Zahl, die zwischen 100 und 200 liegt, durch Schüler folgende Aussagen getroffen:

(1) André: „Die Zahl ist durch 11 teilbar."

(2) Birgit: „Die Zahl ist eine Primzahl".

(3) Christian: „Die Zahl ist eine zusammengesetzte Zahl."

(4) Doris: „Die Zahl ist eine Quadratzahl."

Der Mathematiklehrer stellt fest, daß genau eine dieser vier Aussagen falsch ist.

Untersuche, ob die Zahl durch diese Feststellungen eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, dann gib die Zahl an!

280722 Es sei ABC ein Dreieck; darin sei CD die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$. Die Parallele durch B zu CD schneide die Verlängerung von AC über C hinaus in einem Punkt E.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets das Dreieck BEC gleichschenklig ist!

280723 Es sei $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$, das folgende Bedingungen erfüllt:

(1) Die Längen der Seiten AB und CD verhalten sich wie $5:4$.

(2) Die Mittellinie des Trapezes hat eine Länge von 5,4 cm.

(3) Die Höhe des Trapezes ist halb so groß wie die Länge der Seite AB.

Untersuche, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ eindeutig bestimmt ist. Ist dies der Fall, dann gib den Flächeninhalt des Trapezes in Quadratzentimetern an!

280724 a) Ermittle die Summe der Quersummen aller zweistelligen, durch 5 teilbaren Zahlen!

b) Ermittle die Summe der Quersummen aller natürlichen Zahlen von 0 bis 1000!

Olympiadeklasse 8

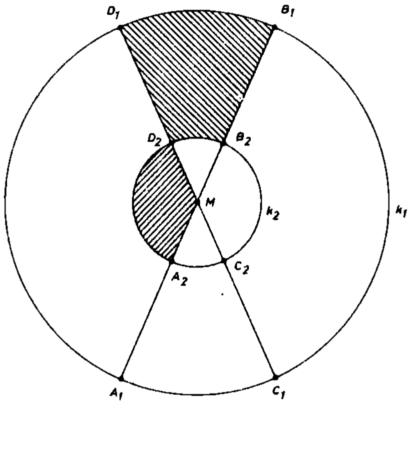
280821 Ein Frachtschiff benötigt für eine Schiffsroute vom Hafen A zum Hafen B genau 12 Tage. Ein Tanker fährt diese Route in entgegengesetzter Richtung und braucht dafür 15 Tage.
Der Frachter fährt 6 Tage später vom Hafen A ab als der Tanker vom Hafen B.
a) Wieviel Tage nach Abfahrt des Frachters treffen sich die beiden Schiffe, wenn sie mit gleichbleibender Geschwindigkeit fahren?
b) Welchen Teil der Route hat dann jedes Schiff zurückgelegt?

280822 Beweise die folgende Aussage!
Unter je fünf unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gibt es mindestens eine, höchstens aber zwei, die durch 3 teilbar sind.

280823 In einer Arbeitsgemeinschaft wird über folgende Figur diskutiert: Es sei $ABCD$ ein Quadrat; die Mittelpunkte der Seiten AD bzw. CD seien M bzw. N, der Schnittpunkt der Strecken CM und BN sei P.
a) Simone mißt den Winkel $\sphericalangle BPM$ und stellt fest, daß die Strecken CM und BN aufeinander senkrecht stehen!
b) Frank mißt von den Dreiecken ABM und BPM Seiten- und Höhenlängen und stellt fest, daß diese beiden Dreiecke nicht einander flächeninhaltsgleich sind.
Untersuche, ohne an einer Figur Messungen durchzuführen, für jede der beiden Feststellungen, ob sie für jedes Quadrat wahr ist!

280824 Es seien k_1 und k_2 zwei konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkt M, deren Radien sich wie $3:1$ verhalten. Zwei Durchmesser A_1B_1 und C_1D_1 von k_1 schneiden k_2 in Punkten A_2, B_2 bzw. C_2, D_2, die so angeordnet sind, wie das Bild zeigt.

a) Ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte des Kreisausschnittes A_2MD_2 und des Kreisringausschnittes $D_2B_2B_1D_1$, wenn vorausgesetzt wird, daß $\sphericalangle A_1MD_1$ ein rechter Winkel ist!
b) Wie hat man die Größe des Winkels $\sphericalangle A_1MD_1$ zu wählen, damit der Flächeninhalt des Kreisaussschnittes A_2MD_2 gleich dem Flächeninhalt des Kreisringausschnittes $D_2B_2B_1D_1$ ist?



Olympiadeklasse 9

280921 Ermitteln Sie die kleinsten vier Zahlen, die das Quadrat einer natürlichen Zahl und zugleich auch die dritte Potenz einer anderen natürlichen Zahl sind!

280922 In ein Quadrat mit 4×4 Feldern seien die Zahlen von 1 bis 16 so eingetragen, daß jede der Zahlen genau einmal auftritt und daß sich bei der Addition der Zahlen in jeder der vier Zeilen, der vier Spalten und der beiden Diagonalen jeweils dieselbe Summe s ergibt („Magisches Quadrat").
a) Beweisen Sie, daß in allen magischen Quadraten (mit den Zahlen von 1 bis 16 in 4×4 Feldern) derselbe Wert für s auftreten muß!
b) Beweisen Sie, daß in jedem magischen Quadrat von 4×4 Feldern die Summe der Zahlen in den vier Eckfeldern ebenfalls s sein muß!

280923 In einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen und Winkelgrößen wie üblich mit a, b, c und α, β, γ bezeichnet. Die Winkelhalbierende von $\sphericalangle BAC$ schneide die Seite BC in einem Punkt D. Dabei sei $\overline{AD} = b$. Ferner sei vorausgesetzt, daß eine der drei Winkelgrößen α, b, γ das arithmetische Mittel der beiden anderen ist.
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen alle Möglichkeiten für die Winkelgrößen α, β, γ!

280924 a) Ermitteln Sie alle diejenigen Primzahlen, die sich als Summe zweier aufeinanderfolgender von Null verschiedener natürlicher Zahlen darstellen lassen!
b) Beweisen Sie, daß es keine Primzahl gibt, die sich als Summe von drei oder mehr aufeinanderfolgenden von Null verschiedenen natürlichen Zahlen darstellen läßt!

Olympiadeklasse 10

281021 Gesucht ist die kleinste positive natürliche Zahl, deren Ziffemdarstellung (im Dezimalsystem) nur aus den Ziffern 0 und 1 besteht und die durch 450 teilbar ist.

281022 Weisen Sie nach, daß es genau eine quadratische Funktion f gibt, die die Bedingung

$$\frac{f(x)+f(x+2)}{6} = x^2 - 3 \qquad (*)$$

für alle reellen Zahlen x erfüllt, und daß diese Funktion zwei ganzzahlige Nullstellen hat!

281023 Über einen Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und einen Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt M_2 werde vorausgesetzt, daß k_2 durch M_1 geht, aber nicht ganz in der Fläche des Kreises k_1 liegt.
Derjenige Schnittpunkt von k_1 mit der Geraden g durch M_1, M_2, der dann im Innern von k_2 liegt, sei S. Ferner sei P_2 einer der Schnittpunkte, die k_2 mit der in S auf g errichteten Senkrechten hat.
Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets folgende Aussage gilt: Diejenige von P_2 an k_1 gelegte Tangente t, die k_1 in einem von S verschiedenen Punkt P_1 berührt, ist auch Tangente an k_2.

281024 Gegeben sei ein Halbkreis. Gesucht sind Vierecke, die die folgenden Bedingungen (1) bis (3) erfüllen:
(1) Zwei Eckpunkte des Vierecks liegen auf dem Durchmesser des Halbkreises, die beiden anderen Eckpunkte liegen auf dem Halbkreisbogen.
(2) Das Viereck ist ein Rechteck.
(3) Seine Seitenlängen verhalten sich wie $\sqrt{3}:2$.
a) Beschreiben Sie eine Konstruktion, durch die man zwei verschiedene Vierecke $P_1Q_1R_1S_1$ und $P_2Q_2R_2S_2$ erhält!
b) Führen Sie die beschriebene Konstruktion aus!
c) Beweisen Sie, daß die nach Ihrer Beschreibung konstruierten Vierecke die Bedingungen (1) bis (3) erfüllen!

Olympiadeklassen 11/12

281221 Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) von Null verschiedener reeller Zahlen x, y und z, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=z \quad (1),$$
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-x \quad (2),$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=y \quad (3).$$

281222 Für jede natürliche Zahl $n > 0$ sei f_n die durch

$$f_1(x) = (x-1)^2,$$
$$f_2(x) = (x-1)^2 + (2x-1)^2,$$

allgemein

$$f_n(x) = (x-1)^2 + (2x-1)^2 + \ldots + (nx-1)^2$$

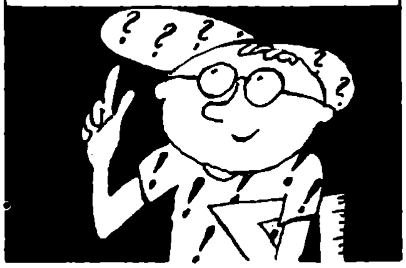
für alle reellen x definierte Funktion. Der Graph dieser Funktion, jeweils eine Parabel, habe den Scheitel S_n.
a) Man berechne die Koordinaten von S_1, S_2 und S_3.
b) Hat jeweils S_n die Koordinaten (x_n, y_n), so beweise man, daß die Folge (x_n) streng monoton fällt und die Folge (y_n) streng monoton steigt.

281223 Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M, gegeben sei ferner ein von M verschiedener Punkt N im Innern von k. Man untersuche, ob es unter allen durch N gehenden Sehnen AB des Kreises k
a) eine gibt, für die $\overline{NA}^2 + \overline{NB}^2$ möglichst klein ist,
b) eine gibt, für die $\overline{NA}^2 + \overline{NB}^2$ möglichst groß ist.
Gibt es jeweils eine solche Sehne, so gebe man deren Lage (in bezug auf die gegebenen k, M, N) an.

281224 Die ganzen Zahlen x_n und y_n seien durch $x_1 = y_1 = 1988$ und die Vorschriften
(1) $x_{n+1} = 2x_{n-1}$, $\quad n = 1, 2, 3, \ldots$
(2) $y_{n+1} = 2y_n - 2^{n+1}$, $\quad n = 1, 2, 3, \ldots$
festgelegt. Man untersuche, ob
a) alle Zahlen x_n,
b) alle Zahlen y_n
positiv sind.

Solltet ihr Probleme bei der Lösung dieser Aufgaben haben, wendet euch bitte über euren Mathematiklehrer an den Fachberater des entsprechenden Kreises.

Lösungen



Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 6/88

Ma 5 ■ 2945 In der linken Abbildung haben die beiden Dreiecke Seitenlängen von 5 cm und (5 + 7) cm = 12 cm. Zusammengefügt ergeben sie ein Rechteck von $5\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm} = 60\,\text{cm}^2$ Flächeninhalt. Bei der rechten Abbildung erhält man entsprechend zwei Rechtecke von jeweils $4\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} = 32\,\text{cm}^2$, also insgesamt von $64\,\text{cm}^2$ Flächeninhalt. Da wegen $5 + 7 = 4 + 8 = 12$ beide Quadrate die gleiche Seitenlänge von 12 cm besitzen, also auch den gleichen Flächeninhalt haben, wird vom rechten Quadrat mehr Fläche abgeschnitten als vom linken. Also ist die linke schraffierte Fläche die größere.

Ma 5 ■ 2946 Wir stellen eine Tabelle auf. Die Zahlen stellen das Lebensalter der vier Familienmitglieder dar.

Peter	Hanni	Mutter	Vater	zusammen
1	11	33	35	80
2	12	36	38	88
3	13	39	41	96
4	14	42	44	104
5	15	45	47	112
6	16	48	50	120

Peter ist 6 Jahre, Hanni 16 Jahre, die Mutter 48 Jahre, der Vater 50 Jahre alt.

Ma 5 ■ 2947 a) Die Produkte sind gleich und verschieden von Null; daher ist $a : b = 1$.
b) Die Produkte sind gleich und heben sich bei der Addition auf; daher ist $v + w = 10\,000\,000$.
c) Da y um $1 \cdot 1987$ kleiner ist als x, gilt $x - y = 1987$.

Ma 5 ■ 2948 Man findet solche ungeraden Zahlen unter aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen dann am häufigsten, wenn bereits die erste Zahl dafür zutrifft. Dann ist wieder die 6. Zahl durch 5 teilbar, die aber eine gerade Zahl ist.
Die 11. Zahl ist dann wieder ungerade und die 21. Zahl ebenfalls. Unter 20 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gibt es also nur zwei verschiedene ungerade Zahlen, die sich durch 5 ohne Rest teilen lassen. Es gibt also keine drei Zahlen mit der angegebenen Eigenschaft.

Ma 5 ■ 2949 Da dem Hans 34 Pf am Kaufpreis fehlen, muß das Knobelheft mehr als 34 Pf kosten. Kostet das Heft 35 Pf, so besitzt Hans 1 Pf und Franz 33 Pf, was möglich ist. Kostet das Heft aber 36 Pf oder mehr, so hat Hans 2 Pf oder mehr und Franz 34 Pf oder mehr. In jedem Falle könnte dann aber das Heft gekauft werden. Deshalb hat Hans 1 Pf und Franz 33 Pf. Das Heft kostet 35 Pf.

Ma 5 ■ 2950 In einer Sekunde legen beide zusammen $3\,\text{m} + 5\,\text{m} = 8\,\text{m}$ zurück. Wegen $8 \cdot x = 400$, also $x = 50$, treffen sich beide nach 50 Sekunden. Wegen $y = 50 \cdot 3$, also $y = 150$, hat Fritz dann 150 m zurückgelegt.

Ma 5 ■ 2951 Aus (1) folgt: Bärbel wohnt nicht in Halle. Aus (2) folgt: Bärbel wohnt weder in Berlin noch in Leipzig. Folglich wohnt Bärbel in Cottbus. Aus (2) folgt: Anke wohnt weder in Berlin noch in Leipzig. Da sie auch nicht in Cottbus wohnt, ist ihr Wohnort Halle. Aus (3) folgt: Yvonne wohnt nicht in Berlin. Deshalb wohnt sie in Leipzig. Doreen wohnt somit in Berlin.

Ma 6 ■ 2952 Angenommen, der jüngste Sohn ist x Jahre, der Vater also $6x$ Jahre, der älteste Sohn $2x$ Jahre und die Mutter $(6x - 12)$ Jahre alt. Zusammen sind die vier Personen $(15x - 12)$ Jahre alt. Nun gilt $15x - 12 = 123$, $15x = 135$, $x = 9$. Der jüngste Sohn ist 9 Jahre, die Mutter 42 Jahre alt und somit 33 Jahre älter als der jüngste Sohn.

Ma 6 ■ 2953 Die Parallele durch P zu BC schneide AB in E und CD in F. Dann ist $EP = h_1$ Höhe im Dreieck ABP und $FP = h_2$ Höhe im Dreieck CDP. Nun gilt

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1$ und $A_3 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_2$, also

$A_1 + A_3 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_2$,

$A_1 + A_3 = \frac{1}{2} a \cdot (h_1 + h_2)$ und wegen

$h_1 + h_2 = a$ somit $A_1 + A_3 = \frac{1}{2} \cdot a^2$.

Wegen $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = a^2$ gilt deshalb auch

$A_2 + A_4 = \frac{1}{2} \cdot a^2$, also gilt

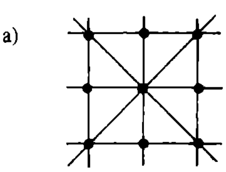
$A_1 + A_3 = A_2 + A_4$.

Ma 6 ■ 2954 Der Vorgänger von 1985 ist 1984. Das Produkt lautet $1984 : 2 = 992$. Nun gilt $n^2 < n \cdot (n + 1)$, also $n^2 < 992$. Wegen $30^2 = 900$ und $900 < 992$ sind folgende Produkte zu prüfen:
$30 \cdot 31 = 930$; $31 \cdot 32 = 992$. Es handelt sich um die Zahlen 31 und 32.

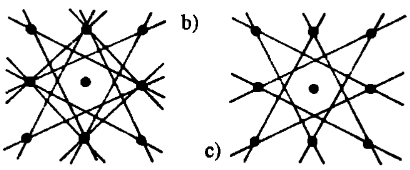
Ma 6 ■ 2955 Für die Zahl 504 gibt es genau fünf Faktorenzerlegungen, nämlich
$504 = 1 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 9 = 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7$
$= 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8$.
Deshalb ist 9871 die größte vierstellige natürliche Zahl, deren Querprodukt 504 beträgt.

Ma 6 ■ 2956 zu a) 8 Geraden,

a)



zu b) 12 Geraden, zu c) 8 Geraden.



Ma 6 ■ 2957 Wir beginnen mit der kleinsten sechsstelligen Zahl, die aus lauter verschiedenen Grundziffern besteht; sie lautet 102 345. Eine Zahl ist durch 18 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 9 teilbar ist. Die ungerade Zahl 102 345 hat die Quersumme 15, ist also nicht durch 9 teilbar. Die zu ermittelnde Zahl lautet demnach 102 348.

Na/Te 6 ■ 434 Der Zug hat erst dann den Tunnel passiert, wenn der letzte Wagen den Tunnel verlassen hat. Zur Länge des Tunnels muß also die Zuglänge addiert werden. Da die Geschwindigkeit $15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ beträgt, legt der Zug in 1 s 15 m zurück. Für 1800 m benötigt er
$1800 : 15\,\text{s} = 120\,\text{s} = 2\,\text{min}$.

Ma 7 ■ 2958 Wegen $100 : 7 = 14 \cdot 7 + 2$ wäre eine Zerlegung der 100 Pilze auf 7 Personen z. B. wie folgt möglich:
14, 14, 14, 14, 14, 15, 15 Pilze. Da keine zwei der Pilzsammler dieselbe Anzahl im Korb hatten, müßte die Zerlegung aber z. B. 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18 Pilze lauten. Nun gilt aber $14 + 15 + 17 + 18 = 54 > 51$. Werden diese Summanden kleiner gewählt, wachsen die nicht verwendeten drei Zahlen 11, 12, 13. Folglich kann man nicht in jedem Fall beliebig vier Pilzsammler so auswählen, daß die Gesamtzahl ihrer Pilze kleiner als 51 ist.

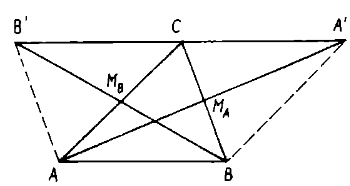
Ma 7 ■ 2959 Es seien a, b, c, d die vier Summanden; dann gilt $a + b + c + d = 45$ und $a + 2 = b - 2 = c \cdot 2 = d : 2$. Daraus folgt $d = 2a + 4$, $c = \frac{a}{2} + 1$, $b = a + 4$ und somit

$a + (a + 4) + \left(\frac{a}{2} + 1\right) + (2a + 4) = 45$,

$\frac{9}{2} a = 36$, also $a = 8$, $b = 12$, $c = 5$,

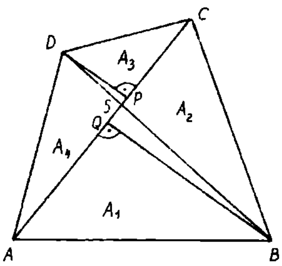
$d = 20$. Die vier Summanden lauten 8, 12, 5 und 20.

Ma 7 ■ 2960 Nach Voraussetzung bzw. Konstruktion gilt
$\overline{AM_B} = \overline{CM_B}$, $\overline{BM_A} = \overline{CM_A}$, $\overline{AM_A} = \overline{A'M_A}$, $\overline{BM_B} = \overline{B'M_B}$. Da $\overline{AC}$ und $\overline{BB'}$ bzw. $\overline{BC}$ und $\overline{AA'}$ Diagonalen des Vierecks $ABCB'$ bzw. des Vierecks $ABA'C$ sind und diese Diagonalen einander halbieren, sind diese beiden Vierecke Parallelogramme, und es gilt $\overline{AB} \parallel \overline{A'C}$ und $\overline{AB} \parallel \overline{B'C}$. Deshalb liegen die Punkte A', B' und C auf einer Geraden.



Ma 7 ■ 2961 Es seien $n-1$, n, $n+1$ drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen mit $n \geqq 1$; dann soll gelten
$(n-1)+n+(n+1)=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$,
$3n = n\cdot(n-1)\cdot(n+1)$,
und wegen $n \neq 0$ $3=(n-1)\cdot(n+1)$,
$1\cdot 3=(n-1)\cdot(n+1)$. Daraus folgt
$n-1=1$ und $n+1=3$, also $n=2$.
a) Die Zahlen 1, 2, 3 erfüllen die Bedingungen, und es gilt $1+2+3=1\cdot 2\cdot 3$.
b) Da 3 Primzahl ist, existiert außer $1\cdot 3=3$ kein weiteres Produkt natürlicher Zahlen mit dem Wert 3. Somit existiert genau ein solches Zahlentripel.

Ma 7 ■ 2962 Wir fällen die Lote $\overline{BQ}$ und $\overline{DP}$ von B und D auf $\overline{AC}$; dann gilt
$A_1=\frac{1}{2}\cdot\overline{AS}\cdot\overline{BQ}$, $A_2=\frac{1}{2}\cdot\overline{CS}\cdot\overline{BQ}$,
$A_3=\frac{1}{2}\cdot\overline{CS}\cdot\overline{DP}$, $A_4=\frac{1}{2}\cdot\overline{AS}\cdot\overline{DP}$ und
somit $A_1 : A_2 = A_4 : A_3 = \overline{AS} : \overline{CS}$,
also $A_1\cdot A_3 = A_2\cdot A_4$.

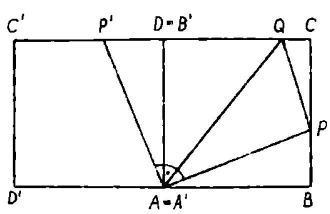


Na/Te 7 ■ 435 Der Hebel befindet sich im Gleichgewicht, da sich auf der rechten Seite ein Körper mit $\frac{1}{5}$ der Gewichtskraft des Körpers auf der linken Seite in der 5fachen Entfernung vom Drehpunkt befindet. Das Lager wird mit einer Kraft von 1,2 N belastet.

Na/Te 7 ■ 436 Ja; da der Hubweg 6mal so groß ist wie der Zugweg, ist zum Heben einer Last von 4800 N eine Kraft von 800 N notwendig. Es stehen aber 1000 N zur Verfügung.

Ma 8 ■ 2963 a) Neun aufeinanderfolgende natürliche Zahlen haben bei Division durch 9 die Reste 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0 (nicht notwendig in dieser Reihenfolge!), also ist genau eine dieser Zahlen durch 9 teilbar.
b) Von 10 beliebigen natürlichen Zahlen sind mindestens zwei Zahlen, die bei Division durch 9 denselben Rest lassen; ihre Differenz läßt dann bei Division durch 9 den Rest 0, d. h., sie ist durch 9 teilbar.

Ma 8 ■ 2964 Wir drehen das Dreieck APQ um A als Drehzentrum entgegen dem Uhrzeigersinn um einen Winkel der Größe 90° und verbinden das Bild P' von P mit Q.



Von A fällen wir das Lot auf die Gerade $P'Q$; sein Fußpunkt ist dann $B' = D$. $\overline{AD}$ ist die gesuchte Quadratseite. Wir konstruieren das Quadrat $ABCD$ mit $\overline{AD}$ als einer der vier Quadratseiten.

Ma 8 ■ 2965 Eine der drei aufeinanderfolgenden Zahlen 2^n-1, 2^n, 2^n+1 ist durch 3 teilbar. Da von allen Primzahlen nur die 3 durch 3 teilbar ist und 2^n für kein n durch 3 teilbar ist, kann nur gelten: entweder $2^n-1=3$ oder $2^n+1=3$.
Da 1 nicht Primzahl ist, ist das einzige derartige Paar (3; 5).

Ma 8 ■ 2966 Die Seiten des Rechtecks seien mit a und mit $a+10$ bezeichnet. Dann gilt für den Umfang des Rechtecks $u_R = a+a+a+10+a+10 = 4a+20$.
Nun ist auch der Umfang des Quadrates $u_Q = 4a+20$. Die Seite des Quadrates beträgt somit $(4a+20):4 = a+5$.
Damit ist der Flächeninhalt
des Rechtecks $A_R = a(a+10) = a^2+10a$
und der Flächeninhalt des Quadrates
$A_Q = (a+5)^2 = a^2+10a+25$.
Beide Flächeninhalte unterscheiden sich demnach um 25 cm².

Ma 8 ■ 2967 Beweis für zweistellige natürliche Zahlen mit der Einerstelle 5:
Es sei $n = 10x+5$ mit $x \in N$ und
$1 \leqq x \leqq 9$. Dann ist
$n^2 = (10x+5)^2 = 100x^2+100x+25$.
Streicht man die Ziffer 5, so bleibt die Zahl x übrig; multipliziert man mit dem Nachfolger, so entsteht das Produkt $x(x+1)$. Hängt man die 25 an, so verhundertfacht sich $x(x+1)$. Es entsteht die Summe $x(x+1)\cdot 100+25$, vereinfacht ist das
$100x^2+100x+25$, q. e. d.
Beweis für dreistellige natürliche Zahlen mit der Einerstelle 5 (verkürzt):
$n = 100x+10y+5$ mit $x \in N$ und
$1 \leqq x \leqq 9$ und $y \in N$ und $0 \leqq y \leqq 9$.
Dann ist $(100x+10y+5)^2 = 10\,000x^2 + 2000xy + 1000x + 100y^2 + 100y + 25$,
und es ist
$(10x+y)(10x+y+1)\cdot 100+25$
$= 10\,000x^2+2000xy+1000x+100y^2 + 100y+25$. Wir sehen, daß das beschriebene Verfahren zum gleichen Ergebnis führt, w. z. b. w. Weitere Beweise kann der Leser führen.

Na/Te 8 ■ 437 Unter Benutzung des Tafelwerkes findet man das Volumen-Temperatur-Gesetz: $\frac{V_1}{V_2}=\frac{T_1}{T_2}$.
Gesucht: V_2 (in cm³);
Gegeben: $V_1 = 1000$ cm³,
$T_1 = (273+24)$ K,
$T_2 = 273$ K.
Das gesuchte Volumen beträgt 920 cm³.

Na/Te 8 ■ 438 Gesucht: Temperatur des Schmelzwassers ϑ (in °C),
Gegeben: Wärmeleistung des Tauchsieders
$P_{th} = 1\ \mathrm{kW} = 1\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{s}}$;
Masse des Eises: $m = 1$ kg;
Heizzeit $t = 10\cdot 60$ s
Aus Tafelwerk: Schmelzwärme des Eises
$Q_s = 334\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$; spezifische Wärmekapazität des Wassers $c = 4{,}186\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}$.
Der Tauchsieder erzeugt eine Wärme $Q = P_{th}\cdot t$. Diese Wärme wird zum Schmelzen des Eises und zum Erwärmen des Schmelzwassers benutzt:
$Q = m\cdot Q_s + m\cdot c\cdot\Delta T$.
Eingesetzt: $\Delta T = \frac{P_{th}\cdot t - m\cdot Q_s}{m\cdot c}$; im vorliegenden Fall ist $\vartheta = \Delta T$; $\vartheta = 63{,}5\ °\mathrm{C}$.
Da der Tauchsieder mit erwärmt und Wärme an die Umgebung abgegeben wird, wird die errechnete Temperatur nicht erreicht.

Ma 9 ■ 2968 Rainer wird im Jahre 1989 9 Jahre alt, $45^2 = 2025$, d. h. Rainer wird im Jahre 2025 genau 45 Jahre alt. Es gilt $44^2 = 1936 < 45^2 = 2025 < 46^2 = 2116$.
Die angegebene Lösung ist die einzig mögliche.

Ma 9 ■ 2969 Die Lösungsmenge des Systems ist tatsächlich $L = \{(0; 4)\}$. Peter hat unzulässigerweise durch die Variable x dividiert, ohne zu bedenken, daß das nur für $x \neq 0$ möglich ist.
Der Übergang von $4-\frac{x}{4} = 4+\frac{4x}{5}$ zu $-\frac{1}{4}=\frac{4}{5}$ ist falsch, und dieser Fehler wird noch zweimal wiederholt.

Ma 9 ■ 2970 Hat das Buch weniger als 400 Seiten, so wird höchstens $4\cdot 9+3\cdot 2 = 42$mal die Ziffer Null verwendet (jeweils neun volle Zehner in allen Hunderter-Abständen und drei Hunderter). Hat das Buch 400 Seiten oder mehr, so wird mindestens $42+2 = 44$mal die Ziffer Null verwendet. Damit ist es unmöglich, daß genau 43mal die Ziffer Null verwendet wurde.

Ma 9 ■ 2971 Es sind folgende Fälle zu unterscheiden:
(1) Von den fünf beliebigen natürlichen Zahlen lassen mindestens drei Zahlen bei Division durch 3 denselben Rest,
(2) es lassen mindestens zwei der fünf Zahlen den Rest 1 und eine den Rest 2,
(3) es lassen mindestens zwei der fünf Zahlen den Rest 2 und eine den Rest 1.
Andere Möglichkeiten kann es nicht geben.
Im 1. Fall können sich die Reste 1, 1, 1, bzw. 2, 2, 2 oder 0, 0, 0 ergeben. In jedem Falle ist die Summe dieser drei Zahlen durch 3 teilbar, weil
$1+1+1=3$, $2+2+2=6$ und auch $0+0+0=0$ durch 3 teilbar sind.
Im 2. Fall und auch im 3. Fall ergeben die Zahlen mit den Resten 1, 2, 0 als Summe eine durch 3 teilbare Zahl.

Ma 9 ■ 2972 In allgemeiner Darstellung sieht die Rechnung wie folgt aus:

$$\begin{array}{l}
1000a + 100b + 10c + d \\
+ \quad 1000b + 100c + 10d + a \\
+ \quad 1000c + 100d + 10a + b \\
+ \quad 1000d + 100a + 10b + c \\
\hline
1111a + 1111b + 1111c + 1111d \\
= 1111(a+b+c+d).
\end{array}$$

Dividiert man diese Zahl durch $(a+b+c+d)$, so erhält man stets 1111, w. z. b. w.

Na/Te 9 ■ 439
Gesucht: l (in m) und ΔT (in K)
Gegeben: zugeführte elektrische Energie $A_{El} = 0{,}03$ kWh
Durchmesser d des Drahtes = 1 mm;
spezifischer elektrischer Widerstand
$\varrho = 0{,}42\,\Omega\frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$;
Stromstärke $I = 3{,}2$ A;
Dauer $t = 5 \cdot 60$ s; Masse des Wassers $m = 1000$ g,
spezifische Wärmekapazität des Wassers
$c = 4{,}19\frac{\text{J}}{\text{g}\cdot\text{K}}$ (aus Tafelwerk).
Berechnung von l: Aus der Gleichung für die elektrische Arbeit und der Gleichung $U = I \cdot R$ ergibt sich:
$A_{El} = I^2 \cdot R \cdot t$. R läßt sich aus dem Widerstandsgesetz berechnen: $R = \frac{\varrho \cdot l}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi}$

In A_{El} eingesetzt: $A_{El} = \frac{I^2 \cdot l \cdot \varrho \cdot t}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi}$

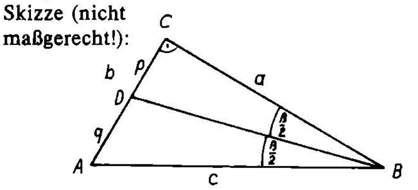
Nach l aufgelöst: $l = \frac{A_{El} \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2}{I^2 \cdot t \cdot \varrho}$.
Es ergibt sich $l = 65{,}74$ m,
d. h. $l \approx 66$ m. Berechnung von ΔT:
Aus $A_{El} = m \cdot c \cdot \Delta T$ folgt
$\Delta t = \frac{A_{El}}{m \cdot c}$; $\Delta T = 25{,}7$ K.
Es wird eine Temperaturerhöhung von etwa 26 K beobachtet. Der Draht war rund 66 m lang.

Na/Te 9 ■ 440 Gesucht: c_A $\left(\text{in } \frac{\text{J}}{\text{g}\cdot\text{K}}\right)$
Gegeben: Kantenlängen des Blocks:
$a = 2$ cm, $b = 2$ cm, $c = 2{,}5$ cm
Temperatur des heißen Wassers
$\vartheta_W = 100\,°\text{C}$; Temperatur des kalten Wassers $\vartheta_K = 27\,°\text{C}$; Mischtemperatur $\vartheta_M = 29{,}1\,°\text{C}$; Masse des Wassers $m = 200$ g; spezifische Wärmekapazität des Wassers $c_W = 4{,}19\frac{\text{J}}{\text{g}\cdot\text{K}}$; Dichte des Aluminiums $\varrho_A = 2{,}7\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.
Die Masse des Aluminiumblocks läßt sich aus den Abmessungen und der Dichte des Aluminiums berechnen:
$m_A = a \cdot b \cdot c \cdot \varrho_A$.
Vom heißen Aluminiumblock wird an das Wasser die Wärme Q_A abgegeben. Wenn man die Gleichung zur Berechnung der Wärme benutzt:
$Q_A = m_A \cdot c_A \cdot (\vartheta_W - \vartheta_M)$. Vom kalten Wasser wird die Wärme Q_W aufgenommen:
$Q_W = m \cdot c_W \cdot (\vartheta_M - \vartheta_K)$.
Aus $Q_A = Q_W$ erhält man für c_A:
$c_A = \frac{m \cdot c_W \cdot (\vartheta_M - \vartheta_K)}{a \cdot b \cdot c \cdot \varrho_A(\vartheta_W - \vartheta_M)}$.
Die spezifische Wärmekapazität des Aluminiums beträgt $0{,}92\frac{\text{J}}{\text{g}\cdot\text{K}}$.

Ma 10/12 ■ 2973 Aus $16 - 8\sqrt{3} = 12 - 8\sqrt{3} + 4$ folgt schrittweise:
$8(2-\sqrt{3}) = (2\sqrt{3}-2)^2$,
$2\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 2$,
$2 + 2\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} + 2 - \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$,
$\left(\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = 2 + \sqrt{3}$,
$\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$,
Die beiden Zahlen z_1 und z_2 sind gleich.

Ma 10/12 ■ 2974 Angenommen, es gibt Zahlen x, für die z Primzahl ist. Dann läßt sich die Gleichung wie folgt vereinfachen:
$z = 5x - 30 - x + 5 + x^2 - 4x$,
$z = x^2 - 25$, $z = (x-5)(x+5)$.
Wenn $x = 6$, so ist
$z = (6-5)\cdot(6+5) = 1 \cdot 11 = 11$,
und 11 ist Primzahl. Wenn $x = -6$, so ist
$z = (-6-5)\cdot(-6+5) = (-11)\cdot(-1) = 11$,
und 11 ist Primzahl. Weitere Möglichkeiten gibt es nicht, falls es überhaupt Lösungen gibt.
Wir prüfen das durch Einsetzen:
(1) $x = 6$: $5 \cdot 0 - 1 + 6 \cdot 2 = 11$;
(2) $x = -6$: $5\cdot(-12) - (-11) + (-6)\cdot(-10) = -60 + 11 + 60 = 11$.
Die einzigen Lösungen sind 6 und -6.

Ma 10/12 ■ 2975 Im abgebildeten Dreieck ABC sei $p = 4$ cm und $q = 5$ cm, also $p + q = b = 9$ cm.
Skizze (nicht maßgerecht!):



Aus $\frac{a}{c} = \frac{p}{q} = \frac{4}{5}$ folgt $a = \frac{4c}{5}$.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt
$c^2 = a^2 + b^2$, also $c^2 = \frac{16c^2}{25} + 81$
bzw. $9c^2 = 81 \cdot 25$, $c^2 = 9 \cdot 25$, $c = 15$.
Durch Einsetzen folgt $a = \frac{4 \cdot 15}{5}$, $a = 12$.
Die Seiten des Dreiecks ABC haben folgende Längen: $a = 12$ cm, $b = 9$ cm, $c = 15$ cm.

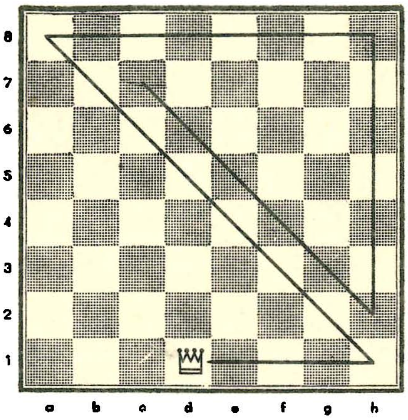
Ma 10/12 ■ 2976 Auf Grund der gegebenen Bedingungen gibt es natürliche Zahlen u, v, w, t, so daß gilt $a = uv$; $b = wt$; $c = uw$; $d = vt$. Dann folgt:
$a^{1988} + b^{1988} + c^{1988} + d^{1988} \doteq (uv)^{1988} + (wt)^{1988} + (uw)^{1988} + (vt)^{1988}$.
Wir formen nun die rechte Seite dieser Gleichung weiter um:
$u^{1988}\cdot(v^{1988} + w^{1988}) + t^{1988}\cdot(v^{1988} + w^{1988}) = (u^{1988} + t^{1988})\cdot(v^{1988} + w^{1988}) = s$.

Ma 10/12 ■ 2977 1. Fall: Es sei $x = 0$; dann lautet die Ungleichung $y \geqq 0$; Lösungen sind alle geordneten Paare $(0; n)$ mit $n \in N$.
2. Fall: Es sei $x = 1$; dann lautet die Ungleichung $2 + y \geqq y$; Lösungen sind alle geordneten Paare $(1; n)$ mit $n \in N$.
3. Fall: Es sei $x \geqq 2$. Die Ungleichung wird schrittweise äquivalent umgeformt:
$2x + y \geqq xy \mid -y$; $2x \geqq y(x-1) \mid : (x-1)$
$\frac{2x}{x-1} \geqq y$. Wegen
$y \leqq \frac{2x}{x-1} = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$
gilt $y \leqq 4$ für $x = 2$; $y \leqq 3$ für $x = 3$; $y < 3$ für $x \geqq 4$.
Weitere Lösungen sind:
(2; 0), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (3; 0), (3; 1), (3; 2), (3; 3) und alle geordneten Paare $(n; 0)$, $(n; 1)$, $(n; 2)$ mit $n \in N$ und $n \geqq 4$.

Na/Te 10/12 ■ 441 Bei der Aufwärtsbewegung beträgt die Beschleunigung $11\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, bei der Abwärtsbewegung $9\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Unter Verwendung des Newtonschen Grundgesetzes beträgt die Gewichtskraft bei der Aufwärtsbewegung 1100 N, bei der Abwärtsbewegung 900 N.

Na/Te 10/12 ■ 442
Ges.: a (in $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$) und t (in s)
Gegeben: $s = 1{,}2$ m; $v = 720\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
Es handelt sich um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung.
Aus $v^2 = 2 \cdot a \cdot s$ folgt $a = \frac{v^2}{2 \cdot s}$ und
aus $v = a \cdot t$ folgt $t = \frac{v}{a} = \frac{2 \cdot s}{v}$,
$a = 216 \cdot 10^3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ und $t = \frac{1}{300}$ s.

Lösung zur Schachecke
Heft 1/89
$4 + 7 \cdot \sqrt{2} + 7 + 6 + 5 \cdot \sqrt{2} \approx 33{,}968$.



Lösung zur Schachecke
1. Sd4 (2. Tg4 matt) K:d4/e:d4/L:d4/D:d4
2. Db4/D:d5/Db1/D:h7 matt.

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Programmablaufplan
Folge dem vorgegebenen Programmablaufplan und ermittle den Wert X! X ist eine Zahl von 1 bis 100 und ist am Anfang und Ende des Programms gleich.
Hinweis: In den Rechenoperationen treten immer nur ganze von Null verschiedene Zahlen auf.
Lösung: $X = 33$.

▲2▲ Ein Tagesausflug zu Ostwald nach Großbothen lohnt die Atlantiküberquerung. Du kannst nicht zehn Minuten in seiner Gegenwart sein, ohne zu verstehen, daß du einem wirklich großen Mann gegenüberstehst. Sein Wissen, seine Originalität und Vielseitigkeit, all das zusammen macht ihn zu einer der interessantesten Persönlichkeiten seiner Zeit.
Ostwald-Schüler Harry S. Jones

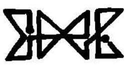
▲3▲ Irgendwie verlor ich das Thermometer, mit dem ich gewöhnlich die Temperatur der Fotochemikalien messe. Das Thermometer zerbrach nicht, aber der Spiritusfaden „riß".
Wie wird das Thermometer repariert?
Lösung: Legt man das Thermometer in das Tiefkühlfach und erwärmt es anschließend, ist der Spiritusfaden wieder in Ordnung.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Freitag der 13.

In jedem Jahr fällt ein 13. auf den Freitag! In einem Jahreskalender beginnen die Monate (in einem normalen Jahr): Januar, Februar, April, Mai, Juni, August und September jeweils an einem anderen Wochentag. Und folglich ist auch der 13. Tag der Monate auf die sieben Wochentage verteilt. Für Schaltjahre gilt eine ähnliche Gedankenführung. Eine weitere Untersuchung zeigt, daß in jedem Jahr (einschließlich Schaltjahr) der 13. vom Monat Mai bis einschließlich November auf sieben verschiedene Wochentage fällt.

In einem Zug



Großes Ostereierfärben
Eine mögliche Verteilung der Eier ist:
Nest 1 4 rote, 5 gelbe, 7 blaue, 8 viol.
Nest 2 5 rote, 8 gelbe, 4 blaue, 7 viol.
Nest 3 7 rote, 4 gelbe, 8 blaue, 5 viol.

Zum Scherzen aufgelegt
1. Definitionen; 2. Inhalt; 3. Achsen; 4. Geraden; 5. Operationen; 6. Nebenwinkel; 7. Abakus; 8. Lösungen; 9. Ergebnisse; 10. Nachfolger

Wissen und Rechnen

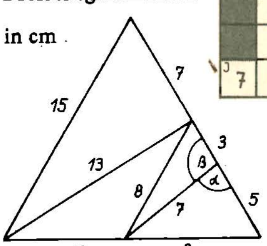
$$\begin{array}{ccccc} (2^2+1)^2 & - & (9+5) & = & 11 \\ + & & + & & + \\ (3^3-4)^2 & - & (4^2+5)^2 & = & 88 \\ \hline 554 & - & 455 & = & 99 \end{array}$$

„Auf alle Fälle" ...!

A 4		B 4	C 2	4
D 9	E 9		5	
	F 9	0	9	
	9		G 7	H 5
J 7	9	5		3

Dreiecksgeschichten

in cm



(Mit $E_s = 9999$ als einzige der neun Möglichkeiten. Denn wegen D_w, F_w und A_s muß die Zehnerstelle von C_s mit der E_s-Ziffer übereinstimmen. Auch B_w und I_w werden dadurch eindeutig. Schließlich sind G_w und H_s eindeutig voneinander abhängig.)

Geschickt kombiniert
1. Schere; 2. Schraubendreher; 3. Messer.

Springen und schlagen
Mögliche Zugfolgen sind:
A: 9→1; 2→4; 10→2; 1→3; 4→2; 8→6; 2→10; 14→6; 12→10; 6→14; 15→13
B: 4→1; 6→4; 7→2; 9→7; 1→4; 4→11; 11→13; 13→15; 15→6; 6→1

Zahlenpuzzle

6	5	5	1	7	9	9	2	6	4	9	3
4	2	8	9	4	3	8	3	7	2	9	7
1	3	5	9	6	1	4	6	7	6	7	5
6	7	4	8	8	9	8	6	4	8	8	3

Lösungen zu:
Rund um das Dreieck

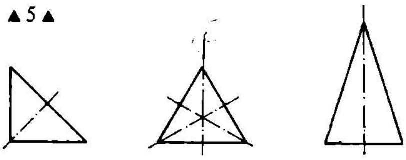
▲1▲ Alle gezeichneten Dreiecke haben den gleichen Flächeninhalt.

▲2▲ (1) Aus diesen Seitenlängen ist kein Dreieck konstruierbar.

▲3▲ a) 50°, b) 40°, c) 40°, d) 35°, e) 120°, f) 60°

▲4▲ $A \cong I$ $B \cong F$ $C \cong H$ $E \cong G$

▲5▲



▲6▲ a) Der Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* verdoppelt sich.
b) Der Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* vervierfacht sich.
c) Der Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* verändert sich nicht.

▲7▲	Flächeninhalt A in cm²	Grundseite c in cm	Höhe h in cm
a)	270	10	54
b)	36	36	2
c)	10	5	4

▲8▲ a) 12, b) 28, c) 44

▲9▲ b), c), d), e)

▲10▲ 4

▲11▲ $h = 2a$

▲12▲ Die Flächeninhalte der Dreiecke *ABC*, *GHI* und *KLM* sind gleich groß. Die Flächeninhalte der Dreiecke *NOP*, *RST* und *UVW* sind gleich groß.

▲13▲ a) 76 cm², b) 94 cm²

▲14▲

a)

spitzwinklige Dreiecke	rechtwinklige Dreiecke	stumpfwinklige Dreiecke

b)

gleichschenklige Dreiecke [gleichseitige Dreiecke]	unregelmäßige Dreiecke

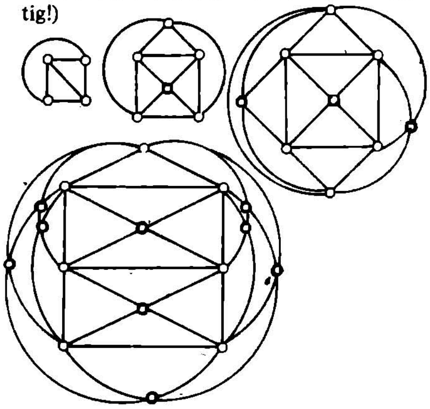
▲15▲ Zum Beispiel: 3-8-4-2-9-5-1-7-6 (von oben in Uhrzeigerrichtung)

▲16▲ $\alpha = 15°$, $\beta = 75°$, $\gamma = 30°$, $\delta = 150°$

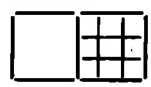
▲17▲ 217 cm²

Lösungen zu: v. Erdmannsdorff Heft 1/89

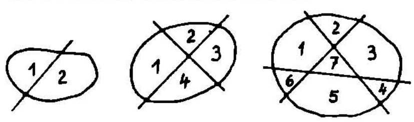
▲1▲ Sei $W(n)$ die Anzahl der Wege bei n Objekten. Bei 1; 2; 3 Objekten werden 0; 1; 3 Wege benötigt. Zu jedem neu dazu kommendem Objekt werden zu allen vorhandenen Objekten neue Wege benötigt. Das ergibt die Rekursionsformel $W(n+1) = W(n) + n$.
Daraus leitet man $W(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ ab und beweist sie mittels vollständiger Induktion: $N(n) + n$
$= \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{(n+1)n}{2} = N(n+1)$.
b) Es sind 0; 1; 3; 9 Kreuzungen. (Bei 8 Bauwerken jedoch sind nicht 27, sondern 19 und bei 9 Objekten 36 Kreuzungen nötig!)



▲2▲



▲3▲ Man muß sich darum bemühen, daß jede Gerade alle übrigen schneidet, wobei sich in einem Punkt nicht mehr als zwei Geraden schneiden dürfen.



Dann trifft die $(n+1)$-te Gerade auf n vorhandene Geraden und zerlegt dabei $n+1$ Flächen, so daß $n+1$ zusätzliche Flächen entstehen. Es gilt also für die Anzahl der Flächen:
$F(n+1) = F(n) + (n+1)$.
So gilt $F(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2}$.
Beweise dies durch vollständige Induktion!

Lösungen zu: Rund um die Zahl 1989 Heft 1/89

▲1▲ Die Höhe ist 936 mm.

▲2▲ $1836^2 + 765^2 = 1989^2$. Der neue Weg ist 612 m kürzer.

▲3▲ $1988 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 71$, also lauten die entsprechenden drei Quader: 4/7/71 cm, 2/14/71 cm, 2/7/142 cm.

▲4▲ 1989 ist a) 994 + 995, b) 662 + 663 + 664, c) 329 + 330 + 331 + 332 + 333 + 334, d) 217 + 218 + 219 + 220 + 221 + 222 + 223 + 224 + 225.

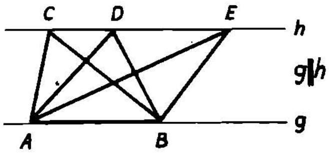
▲5▲ Alter der Kinder 3, 3, 13 und 17 Jahre. Die Mutter ist 36.

▲6▲ 1899 8199 9189 9819 9918
1989 8919 9198 9891 9918
1998 8991 Also 12 Ziffern!

Rund um das Dreieck

▲1▲ Welches der gezeichneten Dreiecke *ABC*, *ABD*, *ABE* hat den größten Flächeninhalt?

Bild 1

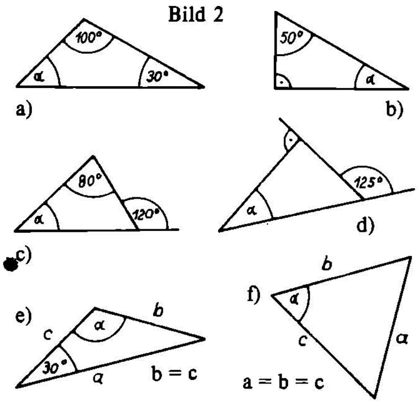


▲2▲ Untersuche, ob aus den vorgegebenen Seitenlängen *a*, *b*, *c* ein Dreieck konstruierbar ist!

	a	*b*	*c*
(1)	6,0 cm	4,0 cm	10,0 cm
(2)	4,1 cm	1,7 cm	5,3 cm
(3)	5,0 cm	5,0 cm	5,0 cm
(4)	15,3 cm	5,7 cm	11,3 cm

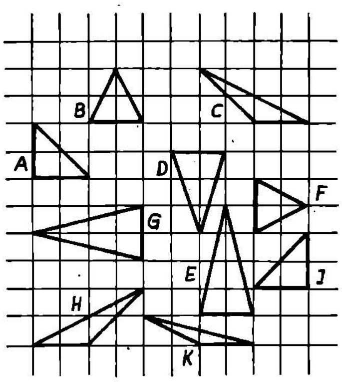
▲3▲ Gib jeweils die Größe des Winkels α an!

Bild 2



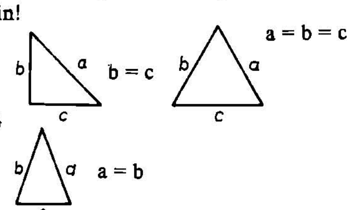
▲4▲ Welche der gezeichneten Dreiecke sind kongruent zueinander?

Bild 3



▲5▲ Zeichne jeweils alle Symmetrieachsen ein!

Bild 4



▲6▲ Wie verändert sich der Flächeninhalt eines Dreiecks *ABC*, wenn man
a) die Grundseite verdoppelt;
b) die Grundseite und die zugehörige Höhe verdoppelt;
c) die Grundseite verdoppelt und die Höhe halbiert?

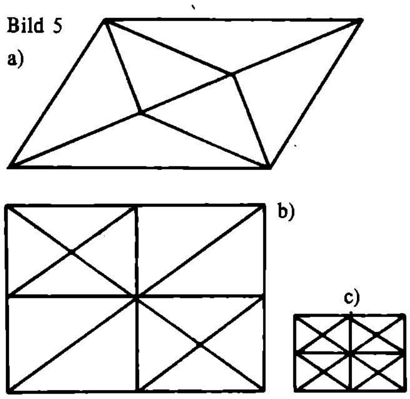
▲7▲ Vervollständige folgende Tabelle für Dreiecke!

	Flächeninhalt *A* in cm²	Grundseite *c* in cm	Höhe *h* in cm
a)	270	10	
b)	36		2
c)		5	4

▲8▲ Wieviel Dreiecke enthält jede der in Bild 5 angegebenen Figur?

Bild 5

a)



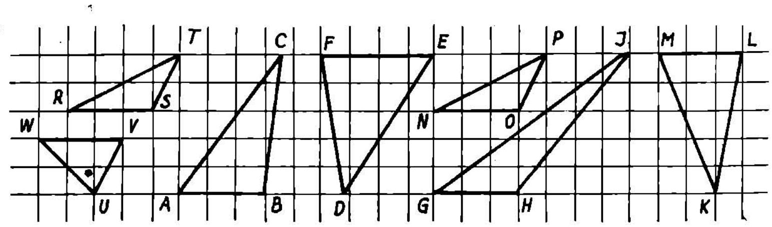
▲9▲ Welche der folgenden Aussagen sind wahr?
a) Jedes rechtwinklige Dreieck ist unregelmäßig.
b) Jedes gleichseitige Dreieck ist spitzwinklig.
c) Es gibt stumpfwinklige Dreiecke, die gleichschenklig sind.
d) Es gibt kein rechtwinkliges Dreieck, das gleichseitig ist.
e) Jedes gleichseitige Dreieck ist gleichschenklig.

▲10▲ Wieviel zueinander gleichseitige Dreiecke benötigt man mindestens, um daraus wieder ein gleichschenkliges Dreieck zu legen?

▲11▲ Ein Quadrat und ein Dreieck stimmen in der Grundseite *a* und dem Flächeninhalt *A* überein. Ermittle die Höhe des Dreiecks in Abhängigkeit von *a*!

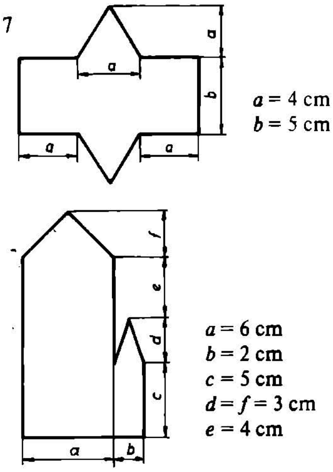
▲12▲ Welche der gezeichneten Dreiecke haben den gleichen Flächeninhalt?

Bild 6



▲13▲ Berechne jeweils den Flächeninhalt der Figuren!

Bild 7



▲14▲ a) Stelle in einem Mengenbild die Menge der spitzwinkligen Dreiecke, die Menge der stumpfwinkligen und die Menge der rechtwinkligen Dreiecke dar!
b) Stelle in einem Mengenbild die Menge der gleichseitigen Dreiecke, die Menge der gleichschenkligen Dreiecke und die Menge der unregelmäßigen Dreiecke dar!

▲15▲ Schreibe an die Ecken eines Dreiecks je eine und an die Seiten des Dreiecks je zwei der Zahlen 1 bis 9, so daß an jeder Seite die Summe 17 herauskommt!

Bild 8

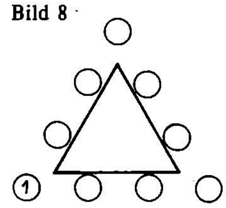
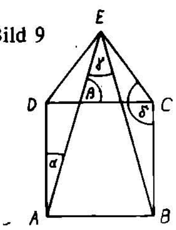


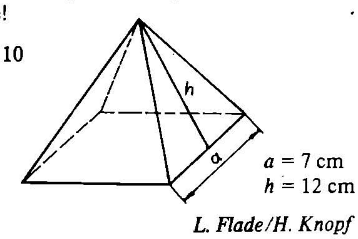
Bild 9



▲16▲ Wie groß sind die Winkel α, β, γ und δ in der nachstehenden Figur (siehe Bild 9)? (Die Figur besteht aus einem Quadrat *ABCD* und einem gleichseitigen Dreieck *DCE*.)

▲17▲ Berechne die Oberfläche der im Bild 10 dargestellten quadratischen Pyramide!

Bild 10



L. Flade/H. Knopf

ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 23 (1989) 2 · Seiten 25 bis 48

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

3

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
23. Jahrgang 1989
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag

Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086

Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstr. 16, Leipzig 7010.

Fotos: Archiv der W.-Pieck-Universität Rostock (S. 50); Sawelski, „Die Masse und ihre Messung“, VEB Fachbuchverlag Leipzig (S. 67 Mitte); Museum Göhren/Rügen (S. 67 r. oben); VEB Ammendorfer Plastwerk (S. 67 r. unten)

Vignetten: H. Teske, Leipzig (S. 59, Titel); L. Otto, Leipzig (Titelvignetten, S. 62)

Techn. Zeichnungen: StR G. Gruß, Leipzig

Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage von S. Tunn, Barth

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97

Artikelnummer (EDV) 128

ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 7. Februar 1989

Auslieferungstermin: 9. Juni 1989

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Alphons weist die Schüler der 5. bis 7. Klasse auf speziell für sie geeignete Beiträge hin.

Joachim Jungius – ein Leibniz vor Leibniz

Am 22. 10. 1987 jährte sich zum 400. Male der Geburtstag des Gelehrten Joachim Jungius, der nicht nur im Urteil seiner Zeitgenossen als bedeutender Mathematiker galt, sondern auch noch von einer Reihe von Wissenschaftlern der nachfolgenden Generationen geschätzt wurde. G. W. Leibniz verglich ihn z. B. mit Galilei, Kepler und Descartes und betonte, daß „er nicht nur mit allen Teilen der Gelehrsamkeit, sondern auch mit dem Innern der Mathematik in einer Weise vertraut (war), die fast über das Verständnis seiner Zeit und des Ortes, den ihm Geburt und Schicksal zugewiesen hatten, hinausging". Alexander von Humboldt, der – wie er selbst sagte – bei seinem Aufenthalt in Hamburg um 1790 die glückliche Gelegenheit hatte, die Jungiusschen Schriften kennenzulernen, sprach von dem großen, so lange verkannten Jungius. J. W. v. Goethe (der besonders Interesse an den botanischen Arbeiten Jungius' hatte) trug sich übrigens kurz vor seinem Tode mit der Absicht – ähnlich seiner Cellini-Biographie – eine von Jungius zu verfassen.

Wer war nun dieser Joachim Jungius, nach dem man z. B. in Rostock eine Straße benannt hat, von dem man jedoch in Büchern über Wissenschaftsgeschichte nicht allzu viele Informationen findet?

Geboren wurde er am 22. 10. 1587 in Lübeck als Sohn eines Gymnasiallehrers. Seine akademische Ausbildung begann Jungius in Rostock, wo er später – unterbrochen durch Studien in Gießen, Helmstedt und Padua – mehrere Jahre als Professor für Mathematik wirkte. In Rostock gründete Jungius 1622 auch die erste wissenschaftliche Gesellschaft nördlich der Alpen.

Typisch für die Studien von Jungius in jenen Jahren war sein Bestreben, sich das gesamte damalige Wissen anzueignen. Dabei war er sehr kritisch und forderte auch von seinen Schülern, ja nicht in der „Geborgenheit von Autorität einzuschlafen".

Jungius war auch ein engagierter Anhänger der pädagogischen Reformbewegungen und außerdem Doktor der Medizin.

Von 1629 bis zu seinem Tode am 23. 9. 1657 wirkte Jungius in Hamburg.

Auch wenn Jungius sich mit sehr vielen Gebieten beschäftigte (so nahm er z. B. auf Reisen zwecks astronomischer Studien sein Fernrohr mit, er legte sich Sammlungen von Naturdingen an und er experimentierte chemisch), hatte für ihn die Mathematik als Vorbild für Wissenschaftserkenntnis und -darstellung eine große Bedeutung. Es sind mehrere Reden und Schriften von ihm überliefert, in denen er den großen Nutzen und die Bedeutung der Mathematik für die allgemeine Naturerkenntnis preist, sowie ein Lehrbuch für Geometrie, mit dem er diejenigen Schüler, denen die klassische Geometrie zu schwierig erscheint, mittels empirischer Überlegungen an die Gedankengänge der Mathematik heranzuführen gedachte.

Aufs beste war Jungius mit den damals modernsten Richtungen und Entwicklungstendenzen in der Mathematik vertraut. In dieser Zeit vervollkommneten sich z. B. die Rechenmethoden (u. a. kamen Dezimalbrüche und Logarithmen auf), eine hochentwickelte Symbolik bildete sich heraus und man begann, eine Reihe von physikalisch-mechanischen Problemen (freier Fall, Planetenbewegungen, Pendelschwingungen, ...) mathematisch zu behandeln. Von Jungius ist nun bekannt, daß er wie selbstverständlich bei entsprechenden Rechnungen Logarithmen benutzte und z. B. auch trigonometrische Funktionen verwendete.

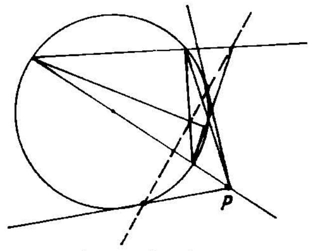
Seit 1613 beherrschte er die Buchstabenrechnung des Vieta, die er teilweise verbesserte. Er hatte übrigens die berühmte „Zetetica" von Vieta nur für eine Nacht geliehen bekommen, sich so weit wie möglich Auszüge angefertigt und dann selbständig vieles ergänzt. Vermutlich hat er auf diese Weise vor Descartes – dem man einige Verbesserungen der Vietaschen Zeichensprache zuschreibt – anstelle von großen Buchstaben die übersichtlicheren kleinen Buchstaben verwendet und den Grad einer Potenz durch Hochstellen eines Exponenten klarer als Vieta dargestellt. Die von Jungius in seinen Aufzeichnungen verwendete formelhafte Schreibweise ist auch für heutige Leser leicht verständlich.

Leider hat Jungius von seinen gewonnenen neuen Erkenntnissen auf dem Gebiet der Mathematik nichts publiziert. Daß trotzdem etwas bekannt geworden ist, verdankt Jungius vor allem seinem Schüler Woldeck Weland (1614 bis 1641) und Leibniz. Gelohnt hätte sich eine rechtzeitige Drucklegung seiner mathematischen Erkenntnisse sicher. So z. B. die seiner Restitution eines verlorenen Werkes des Apollonius von Perga über die ebenen Örter anhand der von Pappos ohne Beweis überlieferten Sätze, die von Weland im weiteren vollendet wurde, jedoch auf Grund des frühen Todes von Weland und anderer widriger Umstände nicht gedruckt wurde. Mathematikgeschichtlich wirksam wurden nur die Restitutionen von van Schooten (1615 bis 1660) und Fermat (1601 bis 1665).

Von Weland wurde 1640 eine kleine Abhandlung herausgegeben, die u. a. zwei interessante, von Jungius stammende Resultate enthält. Zum einen ist das

die Berechnung des Tetraedervolumens aus den 6 Seitenkanten (wobei Jungius auch den Radius der umbeschriebenen Kugel bestimmt hat)

und zum anderen eine hübsche Konstruktion einer Tangente an einen Kreis von einem äußeren Punkt nur mit Hilfe eines Lineals:



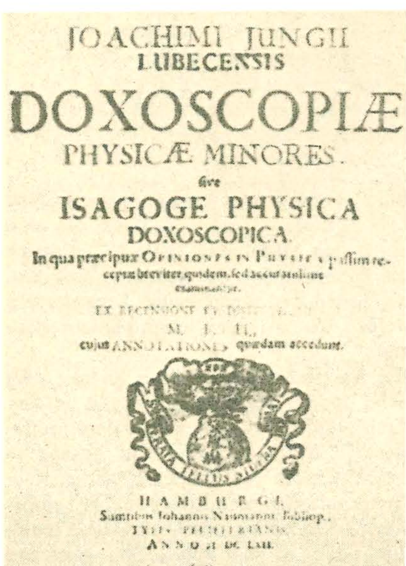
Vom vorgegebenen Punkt P aus werden zwei Sekanten durch den Kreis, die eine durch den Mittelpunkt, gelegt. Die durch die Schnittpunkte der Sekanten bestimmten Seiten des entstehenden Kreisvierecks werden bis zu ihrem Schnittpunkt verlängert.

Die Verbindungslinie desselben mit dem Schnittpunkt der Diagonalen gibt auf der Kreisperipherie die gesuchten Berührungspunkte. Wir haben hier den bekannten Tangentensatz der Polarentheorie erstmalig vor uns, den man früher dem Gregorius von St. Vincentius zuschrieb. Die Verbindungslinie ist die Polare, der gegebene Punkt außerhalb des Kreises der Pol.

Eine weitere erwähnenswerte mathematische Leistung von Jungius ist der sowohl experimentelle als auch rechnerische Nachweis, daß eine Vermutung von Galilei aus dem Jahre 1638 „die Kettenlinie ist eine Parabel" falsch ist. Eine mathematische Konstruktion gab erstmalig Leibniz im Jahre 1691 an, wobei er auf den „ausgezeichneten Philosophen und Mathematiker" Jungius hinwies.

In dem Artikel über die Kettenlinie bemerkt Leibniz übrigens auch, daß man die Kettenlinie zur Hyperbelquadratur benutzen kann, womit ein seit der Antike bestehendes Problem gelöst war. (Unter der Hyperbelquadratur versteht man die Berechnung von Flächen, die durch einen Hyperbelast und Geraden begrenzt sind.) Einem Brief des Jungius-Schülers Vincentius kann man nun entnehmen, daß Jungius ebenfalls eine Methode zur Hyperbelquadratur besessen haben soll. Vermutlich handelt es sich bei der Jungiusschen Hyperbelquadratur um die einer gleichseitigen Hyperbel, wie sie auch Gregorius von St. Vincentius 1647 gelang. Jungius würde mit dieser Leistung jedoch zu den Mathematikern des 17. Jahrhunderts gehören, die durch eine Reihe von Beispielen die Entwicklung der Infinitesimalmathematik vorbereiteten.

Von weiteren mathematischen Arbeiten Jungius' sind meist nicht mehr als nur die Titel bekannt. Da auch die etwa 8000 Blätter mathematischen Inhalts des Hamburger Jungius-Archivs noch nicht vollständig ausgewertet worden sind, ist ein abschließendes Urteil über den Mathematiker Jungius zur Zeit noch nicht möglich.


IOACHIMI JUNGII
LUBECENSIS
DOXOSCOPIÆ
PHYSICÆ MINORES.
sive
ISAGOGE PHYSICA
DOXOSCOPICA.
HAMBURGI

Abschließend sei noch bemerkt, daß Jungius nicht nur an konkreten mathematischen Problemen interessiert war, sondern auch eine allgemeine Beweislehre entwickelt hat. Dargelegt hat er seine Vorstellungen in der „Logica Hamburgensis", deren Kernstück (Buch 4) die Lehre vom wissenschaftlichen Beweis ist. Daneben findet man in den hinterlassenen Manuskripten von Jungius auch Ansätze zur Entwicklung einer mathematischen Logik. Damit waren Jungius und auch Leibniz, der diese Ansätze von Jungius weiterverfolgte, ihrer Zeit weit voraus. (Die mathematische Logik entwickelte sich erst im 19. Jh.)

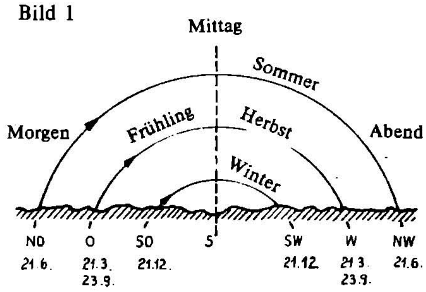
D. Lau, S. Röhl, J. Schumacher

Das Fußballspiel auf der Insel Malta

Eine unterhaltsame Betrachtung zur mathematischen Astronomie

Von der Insel Malta wurde neulich ein mit Spannung erwartetes Fußballspiel live im Fernsehen übertragen. Es war der 21. Juni, der Tag der Sommersonnenwende – der längste lichte Tag des Jahres!
Da im südlichen Europa um diese Zeit die Tagestemperaturen sehr hoch liegen, wurde der Beginn des Spieles auf 20^h MEZ (21^h MESZ) festgelegt. Wir hatten es uns an diesem Abend in den Sesseln vor dem Fernsehapparat gemütlich gemacht, draußen schien noch die Sonne, die sich noch etwa 3° über dem Horizont befand.
Der Anblick auf dem Bildschirm überraschte uns! Auf dem Spielfeld in La Valetta, der Hauptstadt von Malta, herrschte bereits Nacht, die großen Flutlichtscheinwerfer waren eingeschaltet. Wir fragten uns nach dem Grund dieses Unterschiedes, und mein Freund hatte dafür sofort eine Erklärung: „Ganz einfach, Malta liegt viel weiter im Osten, also ist dort die Sonne früher als bei uns untergegangen!" – Zugegeben, im Geographieunterricht war er keine Leuchte gewesen, denn sonst hätte er nicht eine solche Antwort geben können. Ein rascher Blick auf den Atlas belehrte ihn: Die geographische Länge der Insel stimmt mit der von Berlin überein. Also kann es keinen Zeitunterschied geben, und auf Malta steht die Sonne ebenfalls um 12^h MEZ (13^h MESZ) im Süden wie bei uns.
Wie aber war dieser Unterschied zu erklären? Bei uns taghell, auf Malta bereits dunkle Nacht? – Wohlgemerkt, es handelte sich um eine Direktübertragung und nicht um eine Aufzeichnung! Außerdem zeigten die Uhren auf dem Malteser Fußballplatz genau unsere Zeit an.
Um auf unsere Frage die richtige Antwort zu bekommen, müssen wir uns ein wenig mit den Tagbögen der Sonne befassen, also mit einem Thema, das im Heimatkundeunterricht der 3. Klasse behandelt worden ist. Ferner benötigen wir dazu auch noch

Bild 1

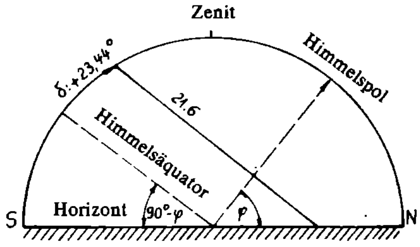


Kenntnisse aus der mathematischen Geographie.
Wir wissen, daß die Sonne täglich in östlicher Richtung aufgeht, im Laufe des Vormittags immer höher steigt, um zu Mittag (12^h MEZ) ihren höchsten Punkt genau im Süden zu erreichen. Am Nachmittag nimmt die Höhe der Sonne wiederum ab, bis sie in westlicher Richtung untergeht. Diesen täglichen Sonnenweg bezeichnen wir als den Tagbogen der Sonne (Bild 1). Beobachten wir die Tagbögen im Laufe eines Jahres, müssen wir feststellen, daß sie sehr verschieden groß sind. An den kurzen Wintertagen ist der Tagbogen klein, die Sonne erreicht nur eine Mittagshöhe von 14°. Im Sommer dagegen, wenn sich die Sonne mehr als 16 Stunden über dem Horizont befindet, ist der Tagbogen groß, die Mittagshöhe 61°. Dazwischen liegt der gleich große Tagbogen vom Frühling und Herbst, der die Besonderheit aufweist, daß die Sonne genau im Ostpunkt aufgeht und im Westpunkt untergeht. Dies trifft für die anderen Jahreszeiten nicht zu. So geht die Sonne am 21. 6. im Nordosten auf und im Nordwesten unter, am 21. 12. ist dies im Südosten und Südwesten der Fall. Wer einmal aufmerksam über einen längeren Zeitraum hinweg beobachtet, wo z. B. die Sonne untergeht, wird dieses „Wandern" des Untergangpunktes feststellen können. Mit Hilfe einer einfachen Skizze, die das Datum des Beobachtungstages enthält, bekommt man ein brauchbares Beobachtungsprotokoll.

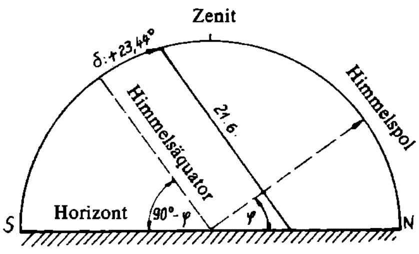
In unserem Beispiel handelt es sich um den größtmöglichen Tagbogen der Sonne im Jahr. Aus diesem Grund wird der 21. 6. als Tag der Sommer-Sonnenwende bezeichnet, von da ab werden die Tage wieder kürzer. Es ist aber nicht gleichgültig, wo wir uns am 21. 6. befinden, ob in Leningrad oder Kairo oder gar auf dem Äquator. Da Malta auf einer geographischen Breite von 36,5° liegt, besteht zu Berlin (52,5°) ein Breitenunterschied von 16°. Hier haben wir die Ursache zu suchen!
Die Tagbögen der Sonne verlaufen unter einem ganz bestimmten Winkel zum Horizont, der in Berlin (die Unterschiede in der DDR sind gering) 37,5° beträgt. Reisen wir nach Norden, werden die Winkel kleiner, die Tagbögen verlaufen flacher, bis sie auf dem Nordpol parallel zum Horizont liegen. Dieser Sonderfall soll uns aber für unsere Aufgabe weiter nicht interessieren!
Reisen wir nach Süden, werden die Winkel

größer, die Tagbögen verlaufen steiler, und die Sonne erreicht größere Höhen. Während bei uns die Sonne am 21. 6. zu Mittag 61° hoch steht, sind es auf Malta immerhin schon 77°. Diese Differenz entspricht dem Unterschied in der geographischen Breite. Wir haben in den verschiedenen Breiten eine unterschiedliche Lage der Tagbögen,

Bild 2



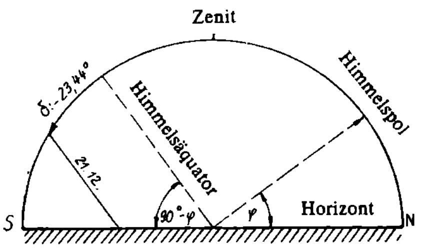
a) Für die geographische Breite von Berlin



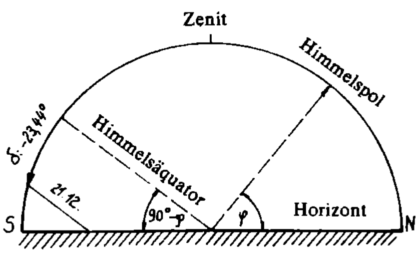
b) Für die geographische Breite von Malta

Schematische Darstellung der Tageslänge in verschiedenen geographischen Breiten am 21. 6.
(Die Tageslänge in Malta differiert um 10 mm gegenüber der Tageslänge von Berlin. Die Längen der Tagbögen sind nicht ausmeßbar, sie geben nur das ungefähre Verhältnis zueinander wieder.)

Bild 3



a) Für die geographische Breite von Berlin



b) Für die geographische Breite von Malta

Schematische Darstellung der Tageslänge in verschiedenen geographischen Breiten am 21. 12.

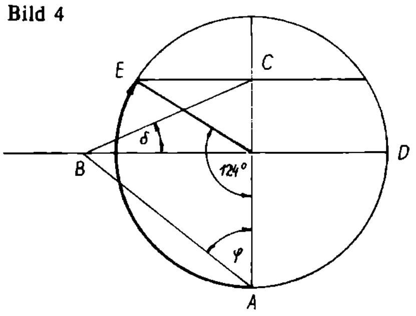
so daß diese am Äquator sogar senkrecht verlaufen.

Verändern wir die geographische Breite, tritt eine weitere Besonderheit auf, die wenig bekannt ist: Die Längen der Tage sind unterschiedlich! Der 21. 6. ist zwar überall (vom Äquator und den Polen abgesehen!) der längste Tag des Jahres, aber er ist nicht überall gleich lang (Bild 2). Wie die Bilder zeigen, sind die Sommertage im Norden länger als im Süden, dafür sind aber die Wintertage im Süden länger als im Norden (Bild 3).

Diese wichtige Erkenntnis halten wir nun einmal fest! Somit beträgt in Berlin am 21. 6. der lichte Tag 16 Stunden 35 Minuten, auf Malta dagegen nur 14 Stunden 27 Minuten. Das bedeutet einen Unterschied von 2 h 8 min. Hinzu kommt noch, daß die Dämmerungsdauer im Süden kürzer ist und die Nächte um diese Zeit keine Aufhellung im Norden (Mitternachtsdämmerung) aufweisen wie bei uns. Das bedeutet aber auch, daß auf Malta die Sonne um 1 h 4 min (die Hälfte des Gesamtunterschiedes) später aufgeht und ebenfalls um diesen Betrag früher untergeht.

Die Berechnung der Tageslänge erfolgt mit Hilfe von Formeln der Trigonometrie (Dreiecksberechnung), die aber erst in den letzten Klassenstufen behandelt werden. Wir können uns die Berechnung sparen, indem wir ein graphisches Verfahren anwenden, das einfach und rasch zu handhaben ist (Bild 4). Das Ergebnis ist der sogenannte halbe Tagbogen, also die Zeit vom Sonnenaufgang bis Mittag (Sonne im Süden) bzw. vom Mittag bis zum Sonnenuntergang. Die Genauigkeit dieses Verfahrens hängt von der Größe der Zeichnung ab:

Bild 4



Die geographische Ermittlung des halben Tagbogens

Der halbe Tagbogen für den 21. 6. in Berlin (52,5°) beträgt 124°. Dies mit 15 geteilt ergibt 8,266 6 h.
Die Gesamttageslänge beträgt: 16,533 3 h.

Zuerst wird ein Kreis mit zwei aufeinander senkrecht stehenden Durchmessern gezeichnet. Bei A wird die geographische Breite des betreffenden Ortes aufgetragen und bis zum waagerechten Durchmesser verlängert. Bei B wird die Deklination des Gestirns (Sonne, Mond, Planet, Stern) aufgetragen, und zwar positiv nach oben, negativ nach unten. In C wird eine Parallele zu $\overline{BD}$ bis zum Kreisumfang gezogen. Der Winkel zwischen A und E entspricht dem halben Tagbogen. Durch Division mit 15 wird in das Stundenmaß umgerechnet. Die somit ermittelte Zeit entspricht dem Stundenwinkel vom Gestirnsaufgang bis Mittag bzw. vom Mittag bis zum Gestirnsuntergang. Ein halber Tagbogen von 75° (= 5^h) bedeutet, daß die Sonne um 7^h wahrer Ortszeit aufgeht und um 17^h untergeht. Durch Multiplikation mit 2 bekommt man die Gesamttageslänge der Sonne. Bei Mond, Planeten und Sternen spricht man logischerweise nicht vom Tagbogen, sondern vom Sichtbarkeitsbogen oder von der Sichtbarkeitsdauer.

Unter der „Deklination" versteht man den Winkelabstand eines Gestirns vom Himmelsäquator, der bei der Sonne zwischen +23,44° am 21. 6. und −23,44° am 21. 12. schwankt. Am 21. 3. und 23. 9. beträgt die Deklination der Sonne 0°. Die Deklination kann dem „Kalender für Sternfreunde" oder anderen astronomischen Jahrbüchern entnommen werden.

Verbleiben wir noch bei unserem Fußballspiel! Wie wäre es, wenn das Spiel zur Zeit der Wintersonnenwende, am 21. 12., stattfände? Hier liegen die Verhältnisse umgekehrt, da die Wintertage im Süden länger als im Norden sind und die Sonne früher auf- und später untergeht. Angenommen, das Fußballspiel begänne um 16^h MEZ! Bei uns wäre die Sonne bereits untergegangen, die Straßenbeleuchtung wäre eingeschaltet. Auf Malta wäre es dagegen noch taghell, und die Sonne hätte eine Höhe von 7,5°. Das Bild 3 zeigt die unterschiedlich großen Tagbögen der Sonne am 21. 12.

Für unsere Überlegungen gibt es noch eine 3. Möglichkeit: Aus den Bildern ist zu ersehen, daß der mittlere Tagbogen für den 21. 3. und 23. 9. stets gleich groß ist, gleich in welcher geographischen Breite man sich befindet. An diesen beiden Tagen befindet sich die Sonne auf dem Himmelsäquator, die Länge des lichten Tages beträgt 12 h. Wann müßte das Fußballspiel stattfinden, damit die Beleuchtungsverhältnisse bei uns und auf Malta gleich wären? Die Antwort ist einfach: Am 21. 3. oder 23. 9.!

Nehmen wir den Spielbeginn für 18^h MEZ an, so wäre für uns sowie für Malta Sonnenuntergang.

Abschließend sei noch erwähnt, daß selbst innerhalb unserer Republik, die eine Nord-Süd-Ausdehnung von etwa 500 km hat (4° in der geographischen Breite) beachtliche Unterschiede in der Tageslänge bestehen. So ist auf der Insel Rügen der lichte Tag am 21. 6. um 45 Minuten länger als im Vogtland. Dafür aber liegen am 21. 12. die Verhältnisse umgekehrt: Auf Rügen ist der Wintertag um 45 Minuten kürzer als im Vogtland. Mit Hilfe des Bildes 2 kann dies überprüft werden. Für den halben Tagesbogen besteht zwischen Rügen (54,5°) und dem Vogtland (50,5°) ein Unterschied von 5,5°.

So betrachtet, kann ein Fußballspiel auch etwas mit der Astronomie zu tun haben!

A. Zenkert

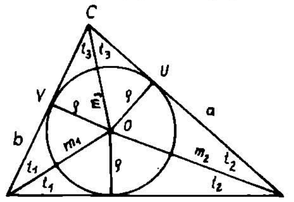
Eine interessante geometrische Aufgabe

Aus dem Altertum ist das Berührungsproblem des Apollonius bekannt. Apollonius von Perge lehrte um 200 v. u. Z. in Alexandria und Pergamon. Er stellte die Aufgabe, Kreise zu finden, die drei gegebene Kreise berühren. Dabei ist zugelassen, daß die gegebenen Kreise in Punkte oder auch Geraden entartet sind, so daß sich zehn verschiedene Fälle ergeben. Eine konstruktive Lösung dieser zehn Aufgaben ist in [1] angegeben. Angeregt durch dieses Problem stellte G. F. Malfatti (1731 bis 1807) im Jahre 1803 folgende Aufgabe: Gesucht sind drei Kreise, so daß jeder die beiden anderen und zugleich zwei Seiten eines gegebenen Dreiecks berührt. Er selbst gab eine Lösung an, indem er die Radien der gesuchten Kreise berechnete. J. Steiner (1796 bis 1863) veröffentlichte eine geometrische Konstruktion ohne Beweis. Der von Steiner benutzte Hilfssatz wurde erst 1874 durch Schröter bewiesen. Interessant ist, daß diese recht schwierige Aufgabe in einem Schulbuch [2] behandelt wird, allerdings ist der dort angegebene Beweis des von Steiner benutzten Hilfssatzes unverständlich dargestellt. Ein sehr elegantes Ergebnis durch Berechnung erhielt A. Cayley (1821 bis 1895), auf das später noch eingegangen wird.

S. Tunn aus Barth beschäftigte sich 1987 mit dieser Aufgabe. Er fand eine rechnerische Lösung, die lediglich Kenntnisse der Schulmathematik voraussetzt, aber mathematische Phantasie und Geschick im Umformen von Termen verlangt. Er entdeckte neben den bisher betrachteten einbeschriebenen Kreisen noch drei weitere Kreise, die ebenfalls den Bedingungen der Aufgabe genügen, und konnte einen sehr schönen Satz beweisen, der diese beiden Tripel von Kreisen zueinander in Verbindung bringt. Ehe die Lösung von S. Tunn dargestellt wird, sollen noch einige einfache Beziehungen an Dreiecken bereit gestellt werden.

1. Bild 1 zeigt ein Dreieck mit seinem Inkreis. Der Mittelpunkt 0 ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, sein Radius sei ϱ. Mit $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ wird der halbe Umfang des Dreiecks bezeichnet.

Bild 1



Dann gilt mit
$\overline{AW} = \overline{AV} = t_1$, $\overline{BW} = \overline{BU} = t_2$,
$\overline{CU} = \overline{CV} = t_3$:

$$(1)\quad \left.\begin{aligned} t_1 + t_2 &= c \\ t_2 + t_3 &= a \\ t_1 + t_3 &= b \end{aligned}\right\} \text{ also } \left\{\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{2}(b+c-a) = s-a \\ t_2 &= \frac{1}{2}(c+a-b) = s-b \\ t_3 &= \frac{1}{2}(a+b-c) = s-c. \end{aligned}\right.$$

Das Additionstheorem für die Kosinusfunktion lautet:
$\cos(\varphi + \psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi$.
Mit $\varphi = \psi = \frac{\alpha}{2}$: $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$.
Wegen $\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ folgt daraus

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

wegen $\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos^2\frac{\alpha}{2}$ folgt daraus

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Aus dem Kosinussatz erhält man:
$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ und weiter:

$$\frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc} = \frac{(s-c)(s-b)}{bc}$$

nach der dritten binomischen Formel. Damit ergibt sich:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$ und entsprechend

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

Aus diesen beiden Formeln findet man:

$$(2)\quad \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$
$$\tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}},$$
$$\tan\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}},$$

wobei die beiden letzten Gleichungen aus der ersten durch zyklische Vertauschung folgen. Aus Bild 1 folgt weiter:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{t_1} = \frac{\varrho}{s-a},$$

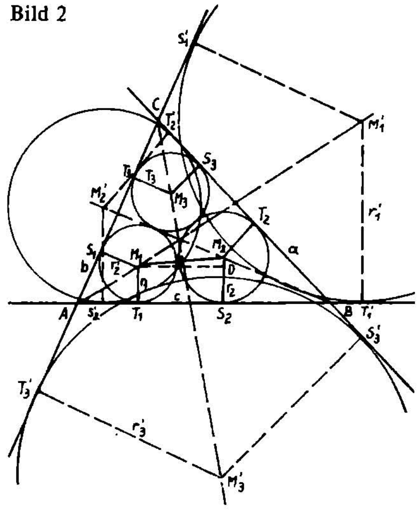
und daraus mittels (2):

$$(3)\quad \varrho = (s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

Für die Fläche A des Dreiecks ergibt sich aus Bild 1: $A = \varrho s$, und mit (3) erhält man die Formel des Heron von Alexandria (um 110 v. u. Z.):
$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Lösung der Aufgabe von Malfatti nach S. Tunn.
In Bild 2 werde bezeichnet:

Bild 2



$\overline{AT_1} = \overline{AS_1} = x$, $\overline{BT_2} = \overline{BS_2} = y$,
$\overline{CT_3} = \overline{CS_3} = z$.5
M_1, M_2, M_3 sind die Mittelpunkte der gesuchten Kreise, die ganz im Innern des Dreiecks liegen, r_1, r_2, r_3 deren Radien. Läßt man zu, daß die Kreise auch die Verlängerungen der Seiten berühren können, so erhält man die von S. Tunn zusätzlich betrachteten Kreise mit den Mittelpunkten M'_1, M'_2, M'_3 und den Radien r'_1, r'_2, r'_3.
Die Tangentenlängen seien
$\overline{AT'_1} = x'$, $\overline{BS'_2} = y'$, $\overline{CT'_3} = z'$.
Aus ΔM_1DM_2 folgt für $\overline{T_1S_2} = \overline{M_1D}$:
$\overline{T_1S_2} = \sqrt{(r_1+r_2)^2 - (r_2-r_1)^2} = 2\sqrt{r_1r_2}$
und entsprechend: $\overline{T'_1S'_2} = 2\sqrt{r'_1r'_2}$.
Wegen $\overline{AT_1} + \overline{T_1S_2} + \overline{S_2B} = c$ ergibt sich
$x + 2\sqrt{r_1r_2} + y = c$.
Aus $\overline{AT'_1} - c = \overline{T'_1S'_2} - \overline{BS'_2}$,
also $x' - c = 2\sqrt{r'_1r'_2} - y'$, folgt:
$x' - 2\sqrt{r'_1r'_2} + y' = c$.
Führt man das für alle drei Seiten aus, so folgen zwei Systeme von Ausgangsgleichungen:

$$(4)\quad \begin{aligned} x + 2\sqrt{r_1r_2} + y &= c \\ y + 2\sqrt{r_2r_3} + z &= a \\ z + 2\sqrt{r_3r_1} + x &= b \end{aligned}$$

$$(4')\quad \begin{aligned} x' - 2\sqrt{r'_1r'_2} + y' &= c \\ y' - 2\sqrt{r'_2r'_3} + z' &= a \\ z' - 2\sqrt{r'_3r'_1} + x' &= b. \end{aligned}$$

Wegen $r_1 = x\tan\frac{\alpha}{2}$, $r_2 = y\tan\frac{\beta}{2}$,
$r_2 = z\tan\frac{\gamma}{2}$ und $r'_1 = x'\tan\frac{\alpha}{2}$,
$r'_2 = y'\tan\frac{\beta}{2}$, $r'_3 = z'\tan\frac{\gamma}{2}$ folgt
aus (4) bzw. (4') unter Verwendung von (2):

$$(5)\quad \begin{aligned} x + 2\sqrt{\frac{s-c}{s}xy} + y &= c \\ y + 2\sqrt{\frac{s-a}{s}yz} + z &= a \\ z + 2\sqrt{\frac{s-b}{s}zx} + x &= b \end{aligned}$$

$$(5')\quad \begin{aligned} x' - 2\sqrt{\frac{s-c}{s}x'y'} + y' &= c \\ y' - 2\sqrt{\frac{s-a}{s}y'z'} + z' &= a \end{aligned}$$

$$z' - 2\sqrt{\frac{s-b}{s}}\,z'x' + x' = b.$$

Beide Gleichungssysteme bleiben bei gleichzeitiger zyklischer Vertauschung von a, b, c und x, y, z bzw. x', y', z' bis auf die Reihenfolge der Gleichungen unverändert. Löst man jeweils nach den Quadratwurzeln auf und quadriert, so lassen sich beide Systeme zusammenfassen:

$$\begin{aligned} &4\frac{s-c}{s}uv = (c-u-v)^2 \\ (6)\qquad &4\frac{s-a}{s}vw = (a-v-w)^2 \\ &4\frac{s-b}{s}wu = (b-w-u)^2. \end{aligned}$$

Man beachte: Ist x, y, z Lösung von (5) bzw. x', y', z' Lösung von (5'), so ist auch $u = x$, $v = y$, $w = z$ bzw. $u = x'$, $v = y'$, $w = z'$ Lösung von (6), aber nicht jede Lösung von (6) muß auch Lösung von (5) oder (5') sein. Die erste Gleichung von (6) kann umgeformt werden zu:

$$v^2 - 2v\left(c - \left(2\frac{c}{s} - 1\right)u\right) + (c-u)^2 = 0,$$

und weiter:

$$v = c - \left(2\frac{c}{s} - 1\right)u \pm 2\sqrt{\left(\frac{c}{s} - \left(\frac{c}{s}\right)^2\right)(su - u^2)}\,.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$R = 2\frac{a}{s} - 1$, $S = 2\frac{b}{s} - 1$, $T = 2\frac{c}{s} - 1$ und

$F = 2\sqrt{\frac{a}{s} - \left(\frac{a}{s}\right)^2}$, $G = 2\sqrt{\frac{b}{s} - \left(\frac{b}{s}\right)^2}$,

$H = 2\sqrt{\frac{c}{s} - \left(\frac{c}{s}\right)^2}$, so erhält man daraus:

$$(7)\qquad v = c - Tu \pm H\sqrt{su - u^2}\,,$$

und entsprechend aus der dritten Gleichung von (6):

$$(8)\qquad w = b - Su \pm G\sqrt{su - u^2}\,.$$

Wegen der Dreiecksungleichung gilt: $a < b + c$, also $2a < a + b + c = 2s$ und damit $a < s$, d.h. $\frac{a}{s} < 1$ und entsprechend $\frac{b}{s} < 1$ und $\frac{c}{s} < 1$. Deshalb gilt $F > 0$, $G > 0$, $H > 0$, so daß durch F, G, H dividiert werden darf. Damit folgt aus (7): $\mp\sqrt{su - u^2} = \frac{1}{H}(c - Tu - v)$. Da man die erste Gleichung von (6) hätte auch nach u auflösen können, lassen sich aus (6) folgende Gleichungen ableiten:

$$\begin{aligned} \mp\sqrt{su - u^2} &= \frac{1}{H}(c - Tu - v), \\ \mp\sqrt{sv - v^2} &= \frac{1}{F}(a - Rv - w), \\ \mp\sqrt{sw - w^2} &= \frac{1}{G}(b - Sw - u), \\ \mp\sqrt{su - u^2} &= \frac{1}{G}(b - Su - w), \\ \mp\sqrt{sv - v^2} &= \frac{1}{H}(c - Tv - u), \\ \mp\sqrt{sw - w^2} &= \frac{1}{F}(a - Rw - v). \end{aligned}$$

Die Lösungen von (5) bzw. (5') können nur jeweils sechs der abgeleiteten Gleichungen gleichzeitig erfüllen, wenn diese sechs Gleichungen bei zyklischer Vertauschung von a, b, c und u, v, w bis auf ihre Reihenfolge ungeändert bleiben (vgl. Bemerkung im Anschluß an (5) und (5')). Daher muß jeweils entweder stets das positive oder stets das negative Vorzeichen der Wurzeln gewählt werden, so daß jeweils die rechten Seiten der Gleichungen mit gleicher linken Seite gleich sind. Durch Gleichsetzen und Umformen erhält man folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{G} - \frac{T}{H}\right)u - \frac{1}{H}v + \frac{1}{G}w &= \frac{b}{G} - \frac{c}{H} \\ \frac{1}{H}u + \left(\frac{T}{H} - \frac{R}{F}\right)v - \frac{1}{F}w &= \frac{c}{H} - \frac{a}{F} \\ -\frac{1}{G}u + \frac{1}{F}v + \left(\frac{R}{F} - \frac{S}{G}\right)w &= \frac{a}{F} - \frac{b}{G}. \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem für u, v, w ist nicht eindeutig lösbar, weil die Gleichungen linear abhängig sind. Bildet man die Summe der drei linken und der drei rechten Seiten, so erhält man:

$$\left(\frac{1-T}{H} + \frac{S-1}{G}\right)u + \left(\frac{1-R}{F} + \frac{T-1}{H}\right)v + \left(\frac{1-S}{G} + \frac{R-1}{F}\right)w = 0.$$

Setzt man für die Abkürzungen die Werte ein, so erhält man mit

$$\begin{aligned} (9)\qquad \frac{1-R}{F} &= \sqrt{\frac{s}{a} - 1} = f, \\ \frac{1-S}{G} &= \sqrt{\frac{s}{b} - 1} = g, \\ \frac{1-T}{H} &= \sqrt{\frac{s}{c} - 1} = h \end{aligned}$$

die Gleichung:

$$(10)\qquad (h-g)u + (f-h)v + (g-f)w = 0.$$

Die Summe der drei Koeffizienten in (10) ist null.

1. Fall: $a \neq b$, $b \neq c$ und $a \neq c$. Dann folgt aus (9), daß f, g, h paarweise verschieden sind. Daher ist in (10) kein Koeffizient null. Man kann deshalb (10) z.B. nach w auflösen:

$$(11)\qquad w = pu + qv \text{ mit } p = \frac{g-h}{g-f},\quad q = \frac{h-f}{g-f} \text{ und}$$

$$(12)\qquad p + q = 1.$$

Multipliziert man (7) mit q und setzt aus (11) w in (8) ein und ordnet nach qv um, so erhält man:

$$\begin{aligned} qv &= q\left(c - Tu \pm H\sqrt{su - u^2}\right) \\ qv &= b - Su \pm G\sqrt{su - u^2} - pu. \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen der rechten Seiten und Ordnen folgt:

$$\begin{aligned} (13)\qquad &\mp(Hq - G)\sqrt{su - u^2} \\ &= (S - Tq + p)u - (b - cq). \end{aligned}$$

Setzt man für S und T die Terme ein und beachtet (12), so folgt:

$$S - Tq + p = \left(2\frac{b}{s} - 1\right) - \left(2\frac{c}{s} - 1\right)q + p = \frac{2}{s}(b - cq).$$

Mit $\frac{b - cq}{Hq - G} = B$ ergibt sich aus (13):

$$\mp\sqrt{su - u^2} = \left(\frac{2}{s}u - 1\right)B.$$

Daraus folgt durch Quadrieren und Ordnen:

$$\left(\frac{4}{s^2}B^2 + 1\right)u^2 - s\left(\frac{4}{s^2}B^2 + 1\right)u + B^2 = 0,$$

also:

$$(14)\qquad u^2 - su + \frac{B^2 s^2}{4B^2 + s^2} = 0.$$

Wegen der Bemerkung im Anschluß an (6) erfüllen sowohl x als auch x' die Gleichung (14). Da aber (14) nur zwei Lösungen hat und $x \neq x'$ gilt, sind x und x' die Lösungen von (14):

$$u_{1,2} = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - \frac{B^2 s^2}{4B^2 + s^2}} = \frac{s}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{s^2}{4B^2 + s^2}}\right).$$

Setzt man noch $\frac{s^2}{4B^2 + s^2} = Q$ und beachtet, daß aus der Definition von x und x' folgt: $x \leqq x'$, so erhält man:

$$x = u_1 = \frac{s}{2}(1 - \sqrt{Q}),$$

$$x' = u_2 = \frac{s}{2}(1 + \sqrt{Q}).$$

Für y, y', z, z' erhält man entsprechende Formeln durch zyklische Vertauschung. Daraus folgt der Satz von S. Tunn:

Es gilt: $x + x' = y + y' = z + z' = s$.

Kennt man also die Punkte T_1, T_2, T_3, so lassen sich die Punkte T'_1, T'_2, T'_3 nach diesem Satz leicht konstruieren und umgekehrt.

2. Fall: Ist das Dreieck gleichschenklig, also etwa $a = b \neq c$, so stimmen die Koeffizienten der 2. und 3. Gleichung in (6) überein, woraus $u = v$ folgt. Aus der ersten Gleichung von (6) findet man:

$$u_{1,2} = v_{1,2} = \frac{s}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{c}{s}}\right),$$

woraus sich wie oben ergibt:

$$x = y = \frac{s}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{c}{s}}\right),$$

$$x' = y' = \frac{s}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{c}{s}}\right).$$

z und z' gewinnt man aus (8), indem man für u entweder x oder x' einsetzt.

3. Fall: Ist das Dreieck gleichseitig: $a = b = c$, so wird $s = \frac{3a}{2}$, und aus (6) folgt wieder $u = v = w$. Damit geht jede der Gleichungen von (6) über in:

$\frac{4}{3}u^2 = (a - 2u)^2$, woraus folgt:

$$u_1 = x = y = z = \frac{3a}{4} - \frac{a}{4}\sqrt{3} \text{ bzw.}$$

$$u_2 = x' = y' = z' = \frac{3a}{4} + \frac{a}{4}\sqrt{3}\,.$$

2. Bemerkung zur Lösung von Cayley. Dieser hatte gefunden [3], daß das spezielle quadratische Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &a_1X^2 + a_2Y^2 + 2b_1XY = t^2a_3(a_1a_2 - b_1^2) \\ (15)\qquad &a_2Y^2 + a_3Z^2 + 2b_2YZ = t^2a_1(a_2a_3 - b_2^2) \\ &a_3Z^2 + a_1X^2 + 2b_3ZX = t^2a_2(a_3a_1 - b_3^2) \end{aligned}$$

folgende Lösung hat:

$$\begin{aligned} X^2 &= \frac{t^2}{2a_1}\left(a_1a_2a_3 - b_1b_2b_3 + b_2\sqrt{D_3D_1} - b_3\sqrt{D_1D_2} - b_1\sqrt{D_2D_3}\right) \\ (16)\qquad Y^2 &= \frac{t^2}{2a_2}\left(a_1a_2a_3 - b_1b_2b_3 - b_2\sqrt{D_3D_1} + b_3\sqrt{D_1D_2} - b_1\sqrt{D_2D_3}\right) \\ Z^2 &= \frac{t^2}{2a_3}\left(a_1a_2a_3 - b_1b_2b_3 - b_2\sqrt{D_3D_1} - b_3\sqrt{D_1D_2} + b_1\sqrt{D_2D_3}\right) \end{aligned}$$

mit $D_1 = a_1a_2 - b_1^2$, $D_2 = a_2a_3 - b_2^2$, $D_3 = a_3a_1 - b_3^2$.
Setzt man nun:

$$b_1 = \sqrt{\frac{s-c}{s}},\quad b_2 = \sqrt{\frac{s-a}{s}},$$

$$b_3 = \sqrt{\frac{s-b}{s}},\quad t^2 = s,\quad a_1 = a_2 = a_3 = 1$$

und $X^2 = x$, $Y^2 = y$, $Z^2 = z$,
so geht das System (15)
in das Gleichungssystem (5) über.
Beachtet man noch:

$$t^2 b_1 b_2 b_3 = s\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s^3}} = \varrho$$

wegen (3) und

$$D_1 = 1 - \frac{s-c}{s} = \frac{c}{s},\quad D_2 = \frac{a}{s},\quad D_3 = \frac{b}{s}$$ also:

$$b_2\sqrt{D_3D_1} = \frac{1}{s}\sqrt{\frac{(s-a)bc}{s}},$$

$$b_3\sqrt{D_1D_2} = \frac{1}{s}\sqrt{\frac{(s-b)ca}{s}},$$

$$b_1\sqrt{D_2D_3} = \frac{1}{s}\sqrt{\frac{(s-c)ab}{s}},$$

und berechnet aus Bild 1:
$\overline{AO} = m_1 = \sqrt{t_1^2 + \varrho^2}$, so erhält man nach (1) und (3):

$$t_1^2 + \varrho^2 = (s-a)^2 + \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$$
$$= \frac{(s-a)}{s}((s-a)s + (s-b)(s-c))$$
$$= \frac{(s-a)}{s}bc.$$

Damit wird $b_2\sqrt{D_3D_1} = \frac{1}{s}m_1$

und entsprechend $b_3\sqrt{D_1D_2} = \frac{1}{s}m_2$,

$b_1\sqrt{D_2D_3} = \frac{1}{s}m_3$ mit $m_2 = \overline{BO}$, $m_3 = \overline{CO}$.

Aus (16) folgt dann:

$$x = \frac{1}{2}(s - \varrho + m_1 - m_2 - m_3)$$

(17) $$y = \frac{1}{2}(s - \varrho - m_1 + m_2 - m_3)$$

$$z = \frac{1}{2}(s - \varrho - m_1 - m_2 + m_3).$$

x, y, z setzen sich also in einfacher Weise aus s, ϱ und den Abschnitten m_1, m_2, m_3 der Winkelhalbierenden zusammen. Damit lassen sich x, y, z leicht mit Zirkel und Lineal konstruieren. Soweit zur Lösung von Cayley.

Würde man

$$b_1 = -\sqrt{\frac{s-c}{s}},\quad b_2 = -\sqrt{\frac{s-a}{s}},$$

$$b_3 = -\sqrt{\frac{s-b}{s}}$$

setzen, so erhielte man aus (15) das Gleichungssystem (5') mit der Lösung:

$$x' = \frac{1}{2}(s + \varrho - m_1 + m_2 + m_3)$$

$$y' = \frac{1}{2}(s + \varrho + m_1 - m_2 + m_3)$$

$$z' = \frac{1}{2}(s + \varrho + m_1 + m_2 - m_3),$$

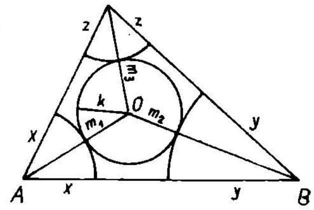
woraus sich ebenfalls der Satz von S. Tunn ergibt:

$$x + x' = y + y' = z + z' = s.$$

Aus der von Cayley angegebenen Lösung für x, y, z hat S. Tunn noch einen weiteren Satz gefunden. Setzt man nämlich

$k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3 + \varrho - s)$, so folgt:
$x = m_1 - k$, $y = m_2 - k$, $z = m_3 - k$, d. h.:
Schlägt man um den Mittelpunkt O des Inkreises einen Kreis mit Radius k, so schneidet dieser auf den Abschnitten m_1, m_2, m_3 die Tangentenlängen x, y, z ab (Bild 3).

Bild 3



Ein entsprechender Satz gilt auch für die Tangentenlängen x', y', z' der „äußeren" Kreise. Setzt man $k' = k + s$, so folgt:
$x' = k' - m_1$, $y' = k' - m_2$,
$z' = k' - m_3$, d. h.:
Schlägt man um den Mittelpunkt O des Inkreises einen Kreis mit Radius k' und verlängert die Abschnitte m_1, m_2, m_3 über die Ecken des Dreiecks hinaus, so schneidet dieser Kreis auf den Verlängerungen die Tangentenlängen x', y', z' ab.

G. Grosche,
nach einer Idee von S. Tunn, Barth

Literatur:
[1] Grosche, G.: Übungen für Junge Mathematiker, Teil 2. Mathematische Schülerbücherei, Leipzig 1983.
[2] Hoffmann, G.: Anleitung zur Lösung planimetrischer Aufgaben. Leipzig 1910.
[3] Loeber, K.: Beiträge zur Lösung und Geschichte des Malfattischen Problems und seiner Erweiterungen. Dissertation, Phil. Fak. Universität Halle 1914.

Olympische Kryptogramme

Buchstaben sind durch Ziffern zu ersetzen (gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern), so daß richtige arithmetische Beziehungen entstehen. Anfangsbuchstaben eines Wortes ist nicht die Ziffer 0 zuzuordnen!
Welches der beiden Kryptogramme, die an Olympia "88 erinnern, hat eine Lösung?

▲ 1 ▲

KRISTIN : OTTO = GOLD

▲ 2 ▲

KRISTIN : OTTO = 6 · GOLD

Die olympischen Sommerspiele 1992 werden in Barcelona durchgeführt. Wieviel Lösungen besitzen die Kryptogramme?

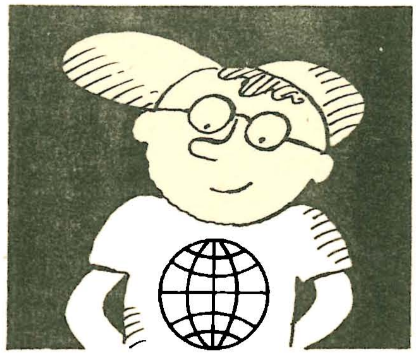
▲ 3 ▲

BAR + CE = LONA

▲ 4 ▲

BAR · CE = LONA

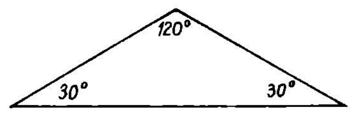
Dr. W. Schmidt, Greifswald



▲ 1 ▲ Два последовательных двузначных числа сложили и в их сумме переставили цифры. В результате получилось бо́льшее из складываемых чисел. Какие числа складывали?

aus: Quant, Moskau

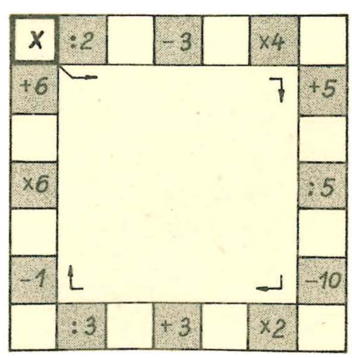
▲ 2 ▲ Divide a triangle into five similar ones
We learn that two triangles are said to be similar if the angles of one are correspondingly equal to the angles of the other. We can also say that two similar triangles have the same shape.



The drawing shows an isosceles triangle whose angles are 30°, 30°, and 120°. Find a way to divide this triangle into five triangles, each of them similar to the original one.

aus: Fun with mathematics, Toronto

▲ 3 ▲ Boomerang
En respectant le sens giratoire, effectuez les douze opérations et retrouvez la valeur de X.
Elle a été choisie parmi les nombres de 1 à 100 et est identique au départ et à l'arrivée du circuit.



Attention! ce jeu n'accepte que des valeurs entières et supérieures à zéro comme résultat de chaque opération!

aus: Logigram, Paris

Serpent – ein Spiel für zwei Personen

Das Spielfeld, ein Quadrat mit 10 Kästchen Seitenlänge, wird auf kleinkariertem Papier mit Bleistift und Lineal aufgezeichnet (Bild 1). Die Randbezeichnung muß nicht übernommen werden. Sie dient der Beschreibung des Spieles. Auch die gekreuzten Felder müssen nicht vor jedem Spiel in das Feld gezeichnet werden, wenn man sich ein Muster des Spielplanes mit den eingezeichneten gekreuzten Feldern aufzeichnet. Sonst benötigen wir nur noch als Spielgeräte zwei verschieden farbige Kugelschreiber, z. B. blau und rot, Filzstifte oder ähnliches. Jeder Spieler bekommt einen der zwei Stifte. Sie einigen sich, wo das Ziel, ein umrahmtes Kästchen, eingezeichnet werden soll.
Es sind alle im Spielfeld befindlichen Kästchen möglich, außer diejenigen, welche mit einem Kreuz gesperrt sind. Nachdem ausgelost wurde, wer beginnt, folgen die ersten zwei Züge von Spieler A in Form von zwei Strichen auf den Linien a2 und u21 (Bild 2).
Es besteht Zugpflicht, außer wenn dadurch eine nachstehende Regel verletzt wird. Von jedem Spieler werden immer abwechselnd zwei Striche eingezeichnet. Nun folgt Spieler B mit seinen zwei Zügen. Dabei hat er am Anfang vier Möglichkeiten: b1, v20 oder b1, t20 oder b3, v20 oder b3, t20.
Im Beispiel 1 (Bild 2) wählte er b1, t20. Jetzt ist A an der Reihe. Jeder neue Strich muß rechtwinklig am freien Ende des zuletzt vom Gegner eingezeichneten gesetzt werden. In Beispiel 1: c2, s19. Es war unten nur c2 möglich. Statt s19 wäre u19 auch möglich. Es entstehen auf diese Weise zwei Schlangen mit abwechselnden Farblinien. Wer das eingezeichnete Ziel zuerst an einer beliebigen Ecke berührt, erhält 2 Gewinnpunkte. Es ist verboten, einen rückwärtigen Teil einer Schlange zu berühren.
Im Beispiel 2 (Bild 3) wäre nach dieser Regel der Zug b3 verboten. Weiterhin ist die Berührung einer Schlange durch die andere verboten. Ist das Ziel von einer Schlange erreicht, gilt es für die verbliebene andere Schlange im weiteren Spielverlauf als Hindernis. Diejenige Schlange, die das Ziel berührt hat, wird nicht mehr fortgesetzt. Das Ziel darf nun von der zweiten Schlange an keiner Stelle mehr berührt werden. Es wird so lange gespielt, bis keine Schlange mehr fortgesetzt werden kann. Jeder Spieler muß versuchen, so zu spielen, daß er nicht den letzten Strich einer Schlange setzt, außer bei Berührung des Zieles. Wer nämlich den letzten Strich einer Schlange setzt, hat die Fortbewegung dieser Schlange blockiert. Sein Gegenspieler erhält einen Gewinnpunkt. So erhält im Beispiel 2 der Spieler Blau einen Gewinnpunkt, weil Spieler Rot mit u17 die Schlange blockiert hat. Es ergibt sich im Beispiel 2 das Spielergebnis: Blau 1 Punkt und Rot 2 Punkte (Zielberührung).
Spieler Rot ist Sieger. Wird eine zweite Partie gespielt, beginnt Spieler B.
Man kann die Anzahl der Spiele vorher festlegen und am Ende die Punkte aus allen Partien addieren.

Bild 1

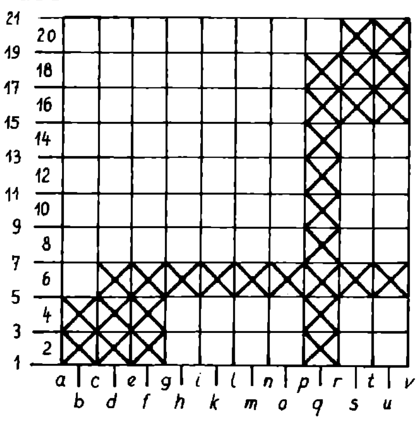


Bild 2

Spieler A —— Spieler B · · · ·

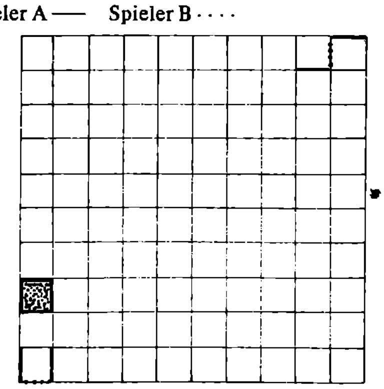


Bild 3

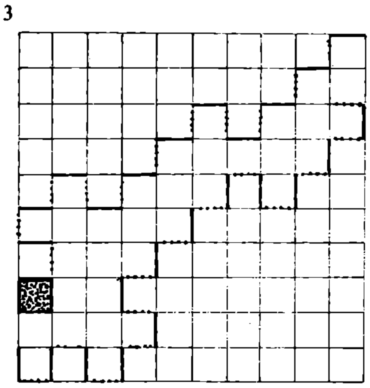
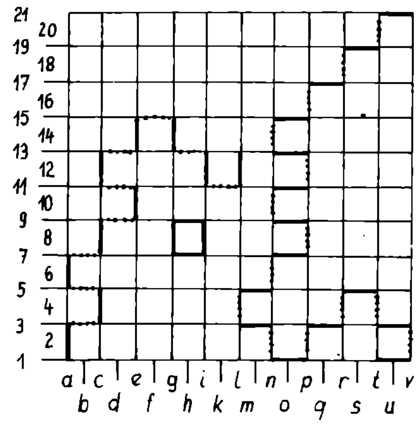


Bild 4



Zur Illustration stellen wir einen möglichen Partieverlauf vor:
Beispiel 3 (Bild 4) zeigt eine Partie. In der weiteren Beschreibung werden folgende Zeichen eingeführt:
↑: Zwangsatz (für den betreffenden Spieler gibt es nur diese eine Möglichkeit, ohne Regelverstoß)
⊥: Zielberührung (2 Punkte)
→|: Blockade (Fortbewegung der Schlange blockiert, 1 Punkt für den Gegenspieler)
Blau (Spieler A) begann mit a2, u21. Rot (Spieler B) entschied sich für b3, t20. Es folgte Blau c4, s19, danach Rot b5, r18. (Hätte Rot d5 gesetzt, könnte Blau eine Zielberührung erzwingen, und zwar indem Blau mit e4 antwortet. Nun kommt Rot f3↑; Blau g4; Rot h5↑ und Blau i6⊥; 2 Gewinnpunkte für Blau.) Weiter Blau a6↑, q17; Rot b7↑, p16; Blau c8↑, o15; Rot d9, n14; Blau e10, o13. Blau muß auf d9 mit e10 antworten wegen Blau e8, Rot f7⊥. Jetzt kommt Rot d11, p12↑; Blau c12↑, o11; Rot d13, n10↑; Blau e14↑, o9. (Hätte Blau m9 gesetzt, könnte Rot eine Zielberührung erzwingen, und zwar indem Rot mit l10 antwortet. Nun kommt Blau k11↑ und Rot i10⊥.) Nun wird weitergespielt durch Rot f15, p8↑; Blau g14, o7; Rot h13↑, n6↑; Blau i12, m5; Rot k11, l4.
Die letzten beiden Züge von Rot waren die einzig möglichen, um Blau an der Zielberührung zu hindern. Es folgt Blau l12→|, m3. Blau hat sich für l12 entschieden, da auf Blau l10, Rot k9⊥ gefolgt wäre. Rot hätte 2 Punkte erhalten. Durch l12→| erhält Rot nur 1 Punkt. Jetzt kann nur noch die rechte Schlange fortgesetzt werden. Rot n2↑; Blau muß mit o1 antworten, da m1→|. Jetzt Rot p2↑; Blau q3↑; Rot r4; Blau s5 (Blau q5→|); Rot t4. Dieser Zug t4 von Rot führt eine rasche Blockade der Schlange herbei mit einem Gewinnpunkt für Rot. Zum Schluß folgt Blau u3↑, Rot v2, Blau u1→|. Das Spielergebnis lautet 2 Punkte für Rot (pro blockierte Schlange 1 Punkt).

R. Wirsing

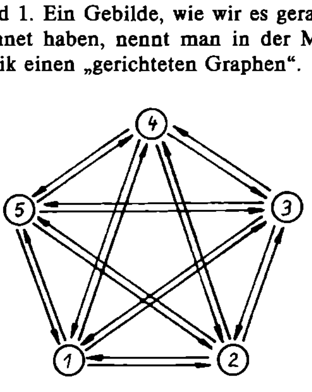
Das Problem der kürzesten Fahrtstrecke

Eine interessante Aufgabenstellung der Diskreten Optimierung

Teil 1

Aufgabenstellung 1: Ein Jugendlicher plant seinen Urlaub, in dem er mit dem Motorrad eine Reihe von Orten unserer Republik kennenlernen will. Dabei möchte er natürlich möglichst wenig Zeit und Sprit verfahren, er sucht also eine „Rundreise“ durch diese Orte, die eine möglichst geringe Gesamtlänge hat.
Wie können wir dieses Problem mathematisch formulieren? Wir wollen das Problem anhand eines kleinen Beispiels untersuchen, in dem wir annehmen, daß ein in einer Stadt 1 wohnender Jugendlicher vier andere Orte, die wir der Einfachheit halber mit 2, 3, 4 und 5 bezeichnen, besuchen will.
Zunächst fertigen wir uns eine Skizze an, in die wir die zu besuchenden Orte (willkürlich oder entsprechend ihrer Lage auf der Landkarte) eintragen. Dabei dürfen wir natürlich den Heimatort 1 des jugendlichen Touristen nicht vergessen. Die Orte vermerken wir am besten durch einen kleinen Kreis, den wir mit der Nummer des Ortes kennzeichnen. Anschließend überlegen wir uns, daß der Tourist ja von jedem Ort zu jedem anderen fahren kann. So ist es möglich, von Ort 2 zu Ort 3 zu fahren. Dies vermerken wir durch eine Linie mit einem Pfeil (kurz: durch einen Pfeil) in der Skizze. Da wir auch umgekehrt von Ort 3 zu Ort 2 fahren können, nehmen wir auch diesen Pfeil in die Skizze auf. Wenn wir das für alle Orte getan haben, so erhalten wir Bild 1. Ein Gebilde, wie wir es gerade gezeichnet haben, nennt man in der Mathematik einen „gerichteten Graphen“.

Bild 1



Dieser Graph G wird gewöhnlich durch zwei Mengen charakterisiert: durch die Menge seiner Knoten, d. h., durch die Menge der Bezeichnungen der zu besuchenden Orte, die wir eingezeichnet haben, und durch die Menge der Pfeile, die die möglichen Fahrtstrecken zwischen verschiedenen Orten symbolisieren.
Beide Mengen werden wir durch Angabe ihrer Elemente beschreiben, die Pfeile jeweils durch geordnete Paare, welche aus den Bezeichnungen der Anfangs- und Endknoten des Pfeiles gebildet werden. So entspricht zum Beispiel der Pfeil (2, 3) der Fahrtroute von Ort 2 zu Ort 3. Für die Menge der Knoten (oder auch Knotenmenge) E erhalten wir

$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Für die Menge der Pfeile, die wir mit U bezeichnen wollen, ergibt sich

$$U = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}.$$

Beim Durchlesen dieser Menge U meint sicherlich der eine oder andere von euch, daß es doch gar nicht notwendig ist, die Menge U aufzuschreiben, es gäbe doch eine Gesetzmäßigkeit:
In der Menge U sind alle die Paare von Knotenbezeichnungen aus E enthalten, die nicht Paare gleicher Zahlen sind. Oder stimmt in dieser Überlegung etwas nicht?
Was ist nun aber, wenn unser Jugendlicher seine Fahrt am 17. 7. des kommenden Jahres beginnen und in Ort 2 bei Bekannten übernachten will, die aber erst am 21. 7. aus dem Urlaub kommen? Dann kann er doch nicht von seinem Heimatort 1 sofort zum Ort 2 fahren, wir müßten also diese Fahrtroute (1, 2) verbieten, den entsprechenden Pfeil im Graphen streichen und erhielten die Menge der Pfeile

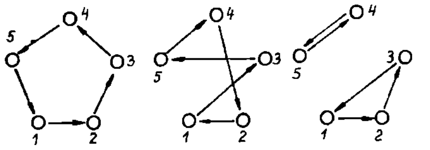
$$U' = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}.$$

Überprüft das bitte. Vollkommen analog können wir natürlich auch gerichtete Graphen konstruieren, die entstehen, wenn unser Jugendlicher $n > 4$ Orte besuchen will. Dabei wollen wir annehmen, daß keine Fahrtrouten verboten sind. Die Knotenmenge bestehe also aus den natürlichen Zahlen von 1 bis $n + 1$,

$E = \{1, 2, \ldots, n + 1\}$,

und die Menge der Pfeile aus allen geordneten Paaren von Elementen aus E außer Paaren gleicher Zahlen. Solche Graphen nennen wir vollständig.
Unser jugendlicher Reisender hat nun mehrere Möglichkeiten, in welcher Reihenfolge er die verschiedenen Orte besuchen will. Eine solche Möglichkeit ist, daß er nach seinem Heimatort 1 Ort 2, dann Ort 3, danach Ort 4 und zum Schluß Ort 5 besucht und danach wieder zu Ort 1 zurückkehrt. Dieser Rundreise durch die Orte 1 bis 5 entsprechen ganz konkrete, spezielle Pfeile im Graphen in Bild 1. Diese sind in Bild 2a nochmals eingezeichnet. Eine andere mögliche Rundreise ist in Bild 2b angegeben. In welcher Reihenfolge besucht der Tourist dort die verschiedenen Orte?

Bild 2a 2b 2c



Richtig, in der Reihenfolge 1, 3, 5, 4, 2, 1. Bild 2c dagegen ist kein Bild einer Rundreise, warum? Verfolgen wir doch einmal den Weg des Reisenden. Ausgehend von Ort 1 wird Ort 2 erreicht, danach Ort 3, dann aber kehrt der Tourist vorzeitig in die Heimatstadt 1 zurück. Die Orte 4 und 5 werden nicht besucht.
Genauso wie wir es in den Bildern 2a und 2b getan haben, läßt sich jede Rundreise durch einen zweiten Graphen G' darstellen, der genauso viele Knoten hat wie der ursprüngliche Graph G, also die gleiche Knotenmenge E, jedoch nur eine Teilmenge U' der Menge der Pfeile U, $U' \subset U$.
Welche Eigenschaften hat nun ein Graph G', der einer Rundreise entspricht?
(i) Er hat genauso viele Pfeile wie Knoten, denn aus jedem Ort muß unser Reisender schließlich irgendwann herausfahren.
(ii) Für jeden Ort gibt es genau einen Pfeil, der in diesem Ort endet, und genau einen Pfeil, der in diesem Knoten beginnt.
Beide Bedingungen sind leicht einzusehen, wenn wir die Graphen in den Bildern 2a und 2b betrachten. Doch hat auch der Graph in Bild 2c beide Eigenschaften. Dieser stellt jedoch keinen Graphen einer Rundreise dar. Das hatten wir durch Verfolgung des Weges erkannt, der durch die Pfeile vorgegeben wird. Damit erhalten wir die dritte Eigenschaft, welche sich im Gegensatz zu den Eigenschaften (i) und (ii) nur sehr aufwendig formalisieren läßt:
(iii) Wenn wir, beginnend mit Knoten 1, in Richtung der Pfeile im Graphen G' unsere Rundreise „abfahren“, so endet diese Prozedur wieder in Knoten 1, aber erst, nachdem alle anderen Knoten passiert wurden.
Mit diesen Eigenschaften sind alle Rundreisen über die Eigenschaften der entsprechenden Graphen U' beschrieben. Um nun unser Problem zu lösen, müssen wir nur alle diese Rundreisen aufschreiben bzw. die entsprechenden Graphen zeichnen, ihre Gesamtlänge berechnen (wie, werden wir später noch sehen) und die Rundreise mit der geringsten Länge heraussuchen.
Doch, Achtung! Wie viele Rundreisen gibt es denn überhaupt in einem vollständigen Graphen mit $n + 1$ Knoten, d. h., wenn der Tourist n Städte besuchen will? Wenn er nur eine Stadt besuchen will, kann er nur hin- und anschließend zurückfahren: 1 Rundreise; will unser Reisender zwei

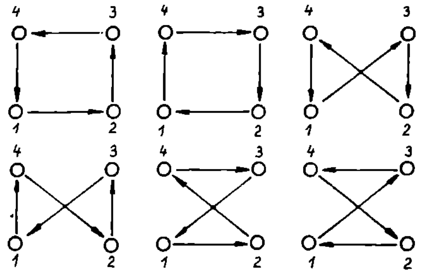


Bild 3

Städte besuchen, so gibt es schon zwei Möglichkeiten: er kann erst Ort 2 und dann Ort 3 besuchen oder umgekehrt. Bei drei zu besuchenden Orten sind die sechs möglichen Rundreisen in Bild 3 dargestellt.

Und in unserem Beispiel mit 4 zu besuchenden Orten gibt es 24 mögliche Rundreisen.

Wie viele sind es nun allgemein?

Die Antwort darauf gibt der folgende Satz, welcher mittels vollständiger Induktion bewiesen werden kann.

Satz: In einem vollständigen Graphen mit $n + 1$ Knoten gibt es

$n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2$

mögliche Rundreisen.

Zum Beweis wollen wir hier aus Platzgründen nur das folgende sagen. Wir betrachten in einem Graphen mit $k + 1$ Knoten eine beliebige Rundreise, welche o. E. d. A. aus den Pfeilen $(1, 2)$, $(2, 3)$, ..., $(k-1, k)$, $(k, 1)$ besteht. Dann können wir durch Einfügung des Knotens $k + 1$ an jeder der k möglichen Stellen (zwischen Knoten 1 und 2, zwischen Knoten 2 und 3, usw.) aus dieser einen Rundreise k neue Rundreisen durch $k + 1$ Knoten konstruieren und damit alle möglichen Rundreisen durch $k + 1$ Knoten erfassen.

Den genauen Induktionsbeweis solltet ihr selbständig aufschreiben und untereinander oder mit eurem Lehrer diskutieren!

Wenn unser Jugendlicher also 10 Städte besuchen will, so müssen $10! = 3\,628\,800$ verschiedene Rundreisen konstruiert werden, eine Menge, die kaum noch zu schaffen ist, bei der wir aber zumindest bei unsystematischem Vorgehen schnell den Überblick verlieren würden. Wir werden also ein systematisches Vorgehen wählen müssen und ein Computerprogramm schreiben, wollen wir die kürzeste Rundreise suchen.

Zunächst beschäftigen wir uns aber mit der Berechnung der Gesamtlänge einer Rundreise. Dazu führen wir einige Bezeichnungen ein. Unseren vollständigen Graphen G hatten wir charakterisiert durch die Knotenmenge E und die Menge der Pfeile U. Wir hatten auch schon erkannt, daß eine beliebige Rundreise einer Teilmenge U' der Menge der Pfeile U entspricht, die den Bedingungen (i), (ii), (iii) genügt. Damit können wir theoretisch alle möglichen Rundreisen konstruieren und die entsprechenden Mengen U' bilden. Alle diese Mengen U' fassen wir zur Menge V aller Rundreisen zusammmen. Jede der Mengen U' aus V (kurz $U' \in V$) besteht aus genau $n + 1$ Pfeilen, die wir allgemein mit (i, j) bezeichnen. Dabei sei (i, j) ein beliebiger Pfeil, der im Knoten i aus E (kurz: $i \in E$) beginnt und im Knoten $j \in E$ endet. Jedem dieser Pfeile (i,j) entspricht eine „Länge“, d. h., die Länge der entsprechenden Fahrtroute von Knoten i zu Ort j, welche wir mit c_{ij} bezeichnen. Die Menge dieser Längen fassen wir zu einer Matrix C zusammen:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n+1} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n+1,1} & & \cdots & c_{n+1,n+1} \end{bmatrix}$$

Dabei ist zum Beispiel c_{23} die Länge der Fahrtroute von Ort 2 zu Ort 3. Und was ist mit c_{22}? Richtig, der Weg von Ort 2 zu Ort 2 ist verboten! Das werden wir in der Matrix C dadurch kennzeichnen, daß wir c_{ii} gleich plus Unendlich setzen. Als Beispiel wollen wir folgende Matrix für das Rundreiseproblem mit den fünf Orten betrachten (die Zahlen sind dabei willkürlich gewählt, aber durchaus realitätsnah):

$$C = \begin{bmatrix} \infty & 119 & 109 & 111 & 119 \\ 105 & \infty & 110 & 100 & 110 \\ 100 & 105 & \infty & 105 & 104 \\ 106 & 110 & 103 & \infty & 100 \\ 106 & 102 & 110 & 100 & \infty \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Betrachtet euch die Matrix genauer und versucht, die Zahlen zu interpretieren! Das kann doch nicht sein, höre ich da einige rufen, die Länge der Fahrtroute von Ort 1 zu Ort 2 ist größer als die Länge der Fahrtroute von Ort 2 zu Ort 1! Das ist richtig, $119 > 105$. Aber, wieso soll das denn verboten sein? Es gibt doch schließlich Einbahnstraßen, Umleitungen, usw., die solche Unterschiede erzwingen.

Damit können wir das Rundreiseproblem mathematisch fassen: Die Länge der Rundreise ergibt sich als Summe der Längen der einzelnen Fahrtrouten, die in ihr enthalten sind. Das drücken wir durch das Symbol

$$\sum_{(i,j) \in \bar{U}} c_{ij} \qquad (2)$$

aus. Insgesamt ist also eine Rundreise

$$\bar{U} \in V, \qquad (3)$$

für die (2) minimal wird, gesucht. Formal sagt man dann, daß die Funktion (2) unter der Bedingung (3) minimiert wird.

Bevor wir unsere Unterhaltung für heute beschließen, möchte ich noch zwei Aufgabenstellungen anführen, die auf die praktische Bedeutung des Rundreiseproblems hinweisen. Beide Aufgaben, die zunächst wenig mit einer „Reise“ zu tun zu haben scheinen, wollen wir als Rundreiseproblem modellieren. Schwierigkeiten bereiten dabei die Wahl der Knoten und der Entfernungsmatrix C.

Aufgabenstellung 2: Betrachten wir einen Roboter, der Bauelemente auf eine Leiterplatte montieren soll. Diese Bauelemente liegen in Kisten, die feste Standorte an der Peripherie des Roboters haben. Der Roboter nimmt nun ein Bauelement (einen Widerstand, eine Diode oder ähnliches) auf, bewegt sich zur Leiterplatte, montiert es auf die Leiterplatte, bewegt sich zum nächsten Bauelement, nimmt es auf, usw. In welcher Reihenfolge soll der Roboter die Bauelemente montieren, damit die Leiterplatte möglichst schnell fertig wird?

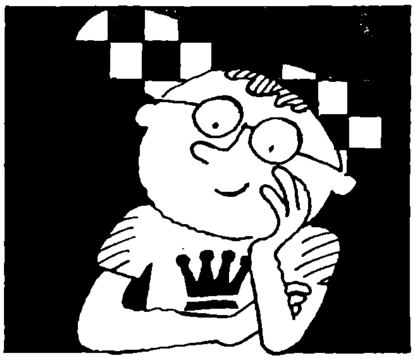
Als Knoten für unseren vollständigen Graphen werden wir die Bauelemente wählen. Der Heimatort des Roboters ist dabei eine fixierte Stelle, z. B. bei einem Bauelement. Die Pfeile in dem vollständigen Graphen bedeuten nun, daß die Bauelemente in einer bestimmten Reihenfolge montiert werden, so bedeutet (2, 3), daß das Bauelement 3 nach Bauelement 2 montiert werden kann. Wenn wir die reinen Montage- und Zugriffszeiten des Roboters vernachlässigen (die in Wirklichkeit auch nur einen konstanten Summanden darstellen), so ergibt sich, daß die Gesamtbearbeitungszeit einer Leiterplatte gleich der Summe der Bewegungszeiten des Roboters ist, die tatsächlich von der Reihenfolge der Montage der Bauelemente abhängt. Damit wählen wir als Länge der Fahrtrouten (oder Pfeile) zwischen den Knoten i und j die Bewegungszeit des Roboters von dem Standort des Bauelementes i zum Montageplatz der Leiterplatte und zurück zum Standort des Bauelementes j.

Aufgabenstellung 3: In einem Betrieb soll auf einem Automaten ein ständig wiederkehrendes Sortiment von Erzeugnissen 1, ..., p in gewissen Stückzahlen n_1, ..., n_p hergestellt werden. Der Automat muß nach Herstellung eines Erzeugnisses umgerüstet werden, damit auf ihm das nächste hergestellt werden kann, z. B. müssen Steuerprogramme, Werkzeuge, Spannbacken u. ä. ausgewechselt werden. Diese Umrüstzeiten sind unterschiedlich lang und hängen von dem davor bearbeiteten und dem danach zu bearbeitenden Erzeugnis ab. In welcher Reihenfolge sind die einzelnen Erzeugnisse zu produzieren, damit ein Sortiment möglichst schnell fertiggestellt wird?

Hier betrachten wir die Erzeugnisse als Knoten des vollständigen Graphen. Pfeile im Graphen bedeuten, daß ein Erzeugnis unmittelbar nach einem anderen hergestellt werden kann. Betrachten wir wieder die Gesamtbearbeitungszeit für das Sortiment, so gibt es wieder einen variablen und einen festen Teil wie bei der Modellierung von Aufgabenstellung 2. Der feste Teil ist hier die Summe der Bearbeitungszeiten der Erzeugnisse, variabel dagegen ist die Summe der Umrüstzeiten, die von der konkreten Reihenfolge der Bearbeitung der Erzeugnisse abhängt. Das legt es nahe, die Umrüstzeiten als Elemente der Matrix C, also als „Längen der Pfeile“ zu wählen.

Im nächsten Teil werden wir uns mit einem Lösungsalgorithmus für das Rundreiseproblem beschäftigen. Versucht bis dahin doch selbst einmal, das kleine Beispiel mit den vier zu besuchenden Orten und der „Kostenmatrix“ C aus (1) zu lösen. Welche der 24 möglichen Rundreisen realisiert die kleinste Summe in (2)?

S. Dempe



Attraktion für alpha-Schachfreunde

In veränderter Gestaltung präsentierte sich der 6. alpha-Schachwettbewerb in Heft 5/1988. Die Leser reagierten in etwas geteilter Meinung darauf. Als negativ wurde u. a. von J. Haas und S. Aßmus (beide aus Berlin) die Verringerung der Aufgabenzahl eingeschätzt. E. Bösenberg (Töppeln) bedauerte, daß damit der besondere Stil des alpha-Schachwettbewerbs verloren ginge. Dagegen freute sich u. a. A. Thorhauer (Jena) darüber, daß nur zweizügige Schachaufgaben zu lösen waren.
Jedoch die breite Zustimmung zum Wettbewerb trotz der Reduzierung auf vier zweizügige Aufgaben war einhellig. Für J.-C. Krumm (Oberhausen/BRD) waren die Schachaufgaben „sehr gut ausgesucht" und „bescherten hübsche Effekte und Pointen" nicht nur für K. Rubin (Berlin). „Erneut ein Wettbewerb, der Freude bereitete" meinte Dr. Büchel (Zella-Mehlis) und M. Klenke (Brück) betonte, daß „auch dieses Jahr der alpha-Schachwettbewerb eine gelungene Attraktion für alle Schachfreunde war".
Für T. Rühlemann (Greifswald) ist der alpha-Schachwettbewerb eine willkommene Werbung für das Schachspiel. „Als Übungsleiter der Sektion Schach kann ich durch alpha leicht den ersten Kontakt mit dem Problemschach erreichen, da ja das Lösen der gestellten Aufgaben durch den alpha-Wettbewerb einen besonderen Anreiz bietet."

Der sportliche Wettbewerbsanreiz regte wieder 338 alpha-Leser zum Mitmachen an. Dabei zählten Roland Voigt (Böhlen), Andreas Jähmlich (Weißwasser) und Kirsten Rudloff (Petkus) mit 7 bzw. 8 Jahren zu den jüngsten Teilnehmern, während die treuen alpha-Leser Hilde Espig (Karl-Marx-Stadt), Elisabeth Möller (Bad Kösen) und Fritz Rauhe (Wendgräben) mit 83 bzw. 84 Jahren, wie im Vorjahr, zu den ältesten Teilnehmern gehörten.
Allen Teilnehmern ein herzliches Dankeschön fürs Mitmachen!

Lösungen

▲1▲
1. Da1 (droht 2. Kf7 matt)
1. ... Kg8/Lg8
2. D:a8/K:g6 matt.
Die Auftaktsaufgabe des Wettbewerbs, die vom unvergeßlichen Sam Loyd („Detroit Free Press", 1877) stammt, versuchten alle Teilnehmer zu lösen. Nur 10,3 % der Einsendungen wiesen eine falsche Lösung aus. Als ein mehrmaliger Fehler zeigte sich dabei die vermeintliche Lösungsangabe 1. D:a8+ Lg8 2. K:g6. Der schwarze König kann zwar nicht mehr ziehen, jedoch ist er von keinem Schachgebot einer weißen Figur bedroht – somit liegt ein Patt und kein Matt vor!

▲2▲
1. Tg5 (droht 2. L:d5 matt)
1. ... Td4/Se3/f3
2. Te5/f3/Tg4 matt.
In dem löserfreundlichen Urdruck von Fritz Hoffmann (Weißenfels) werden die schwarzen Verteidigungen 1. ... Td4 und 1. ... Se3, die zur Deckung des Feldes d5 dienen, aber den schwarzen König in seinem Aktionsradius blockieren, von Weiß vorteilhaft ausgenutzt. Zu dieser Aufgabe hatten 10,1 % der Löser eine falsche oder keine Lösung eingesandt.

▲3▲
1. Da1 (droht 2. Dd4 oder 2. De5 matt)
1. ... Sc3/Sf6
2. Td4/Dd4 matt.
1. ... Sf5/Sb5
2. Da2/Da2 oder Le6 matt.
Dieser Zweizüger von Dr. Karl-Heinz Siehndel („Freie Presse", 1975) brachte 30,5 % der Einsender auf eine falsche Fährte. Besonders über die Verführung 1. Dc1 (droht 2. Dc6 matt) „stolperten" mehrere Löser. Aber auf 1. Dc1 gibt es nach der schwarzen Verteidigung 1. ... Lf5 kein Matt im 2. Zug. Auch die Verführungen 1. Dg3/Dg7 oder 1. Dh2 scheitern eindeutig an 1. ... Sf6 bzw. 1. ... Sf5.

▲4▲
1. Sd7 (droht 2. Te6 matt)
1. ... D:b8/La2/Sf3
2. L:c6/L:d3/D:f3 matt.
1. ... Sf7/Sg4/L:f6/Lf4
2. D:g6/D:h1/S:f6/T:f4 matt.
Der Höhepunkt des Wettbewerbs. Die Aufgabe von József Szöghy („Magyar Sakkélet", 1955, 1. Preis) begeisterte viele Teilnehmer, die diese Aufgabe richtig lösten. Die Kommentierung von F. Götze (Döbeln) zu diesem Zweizüger sei hier stellvertretend für andere enthusiastische Zuschriften zitiert:
„Ein Reiterkunststück erster Güte! Dieses Vollblut (Se5) zu zügeln, an die richtige Stelle zu bringen und dabei die eigenen Mitstreiter nicht zu behindern, benötigt schon einen versierten Jockei!" In dem Fall erwiesen sich 43,5 % der Teilnehmer als „versierte Jockeis" und lösten die Aufgabe richtig.
Der weiße Springer auf dem Feld e5 hat 8 Zugmöglichkeiten, 7 davon sind Verführungen.

Verführung	Parade
1. Sc4? L:f6	2. Sd2 matt, aber 1. ... d2!;
1. S:c6? L:f6	2. Dd5 matt, aber 1. ... D:b8!;
1. S:d3? L:f6	2. De2 matt, aber 1. ... La2!;
1. Sg4? L:f6	2. S:f6 matt, aber 1. ... Sf3!;
1. S:g6? L:f6	2. Df5 matt, aber 1. ... Sf7!;
1. Sf3? L:f6	2. Sd2 matt, aber 1. ... Sg4!.

Nach 1. ... L:f6 ergeben sich dadurch 6 veränderte Matts zwischen Lösungs- und Verführungsabspiele. Im 7. Fall verteidigt eben 1. ... L:f6 gegen die Verführung 1. Sf7.

Unter den Einsendern, die alle vier Aufgaben richtig gelöst hatten, wurden folgende Gewinner ermittelt:
Mario Freidank (Rathenow),
Silvio Jaschinski (Kamenz),
Jörn Neumann (Feldberg),
Christian Kühnert (Karl-Marx-Stadt)
und Angela Städter (Wiesenau).
Weiterhin wurden Preise unter allen Teilnehmern verlost, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst hatten:
Thomas Berger (Bernburg),
Madlen Graunke (Hohen-Demzin),
Marco Jendrezok (Gera),
Stefan Neupert (Wittstock/Dosse)
und Mathias Simon (Geithain).
Allen Gewinnern herzlichen Glückwunsch!

„Trotz aller Mühen hat es natürlich eine Menge Spaß gemacht und beim nächsten Wettbewerb werde ich sicher wieder mit von der Partie sein", zog N. Wodtke (Franzburg) sein Fazit und R. Kürschner (Zella-Mehlis) reimte sogar:
„Euer Schachwettbewerb findet bei mir großes Interesse,
er ist einfach toll und voller Raffinesse!"

Der nächste alpha-Schachwettbewerb folgt in Heft 5/1989 und wird sicher wieder einige knifflige Raffinessen zu bieten haben!

H. Rüdiger

Buchtips für Schachfreunde

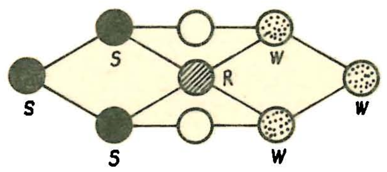
A. Pötzsch
Spaß am Kombinieren
192 S., 365 Diagramme
Bestell-Nr. 671 788 3 Preis: 15,80 M

B. Starck
Schach macht Spaß
160 S., 227 Diagramme
Bestell-Nr. 671 789 1 Preis: 16,80 M

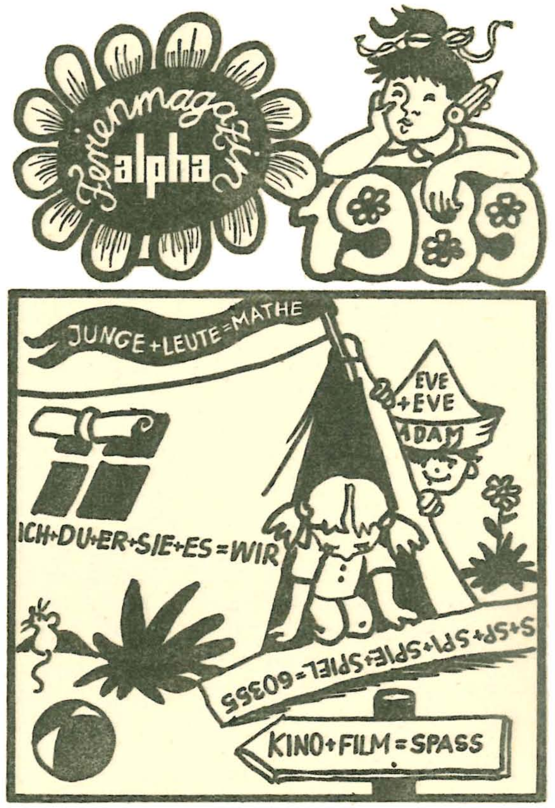
A. Mazukewitsch
Verflixte Fehler
240 S., 311 Diagramme
Bestell-Nr. 671 790 4 Preis: 15,80 M

Alle Titel sind Nachauflagen des Sportverlages Berlin.

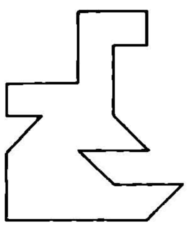
12. Wie das Bild zeigt, liegen ein roter (R), drei weiße (W) und drei schwarze (S) Spielsteine auf einem Brett, wobei Bewegungen nur entlang einer Linie zu einem angrenzenden leeren Feld vorgenommen werden dürfen. Das Ziel ist, die Positionen der schwarzen und weißen Steine auszuwechseln, wobei der rote Stein in der Mitte verbleibt. Eine Bewegung ist folgendermaßen zu verstehen: Zuerst wird ein schwarzer oder ein weißer Stein bewegt und dann der rote. Die Reihenfolge einer schwarzen oder weißen Bewegung, gefolgt von einer roten Bewegung, wird solange wiederholt, bis der erforderliche Austausch stattgefunden hat.



Zusammenstellung dieses Ferienmagazins: J. Lehmann, Leipzig; Lösungen siehe in diesem Heft S. 72.

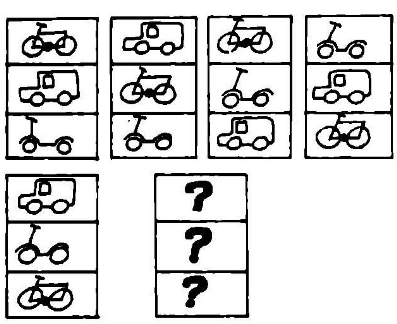


8. Zerlege die Figur durch einen geraden Schnitt so, daß drei Teile entstehen! (Verwende Transparentpapier!) Setze die drei Teile zu einem Quadrat zusammen!



Logelei

9. Welche Figuren müssen logischerweise an Stelle der Fragezeichen eingesetzt werden?



Kleine Zahlenspielerei

2. Setze zwei Minus- und zwei Pluszeichen links vom Gleichheitszeichen, so daß die Gleichung richtig ist!

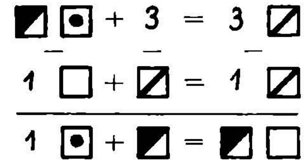
3 3 4 4 5 5 6 6 7 7 = 153

Kryptarithmetik

3. a) $(\square\,\square)^2 = \square\,\triangle\,\square$

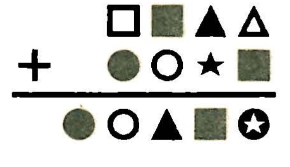
b) $(a \cdot b) = b : a = b^a = 8$

c)



d) $2 \cdot \overline{bb} = \overline{abc}$

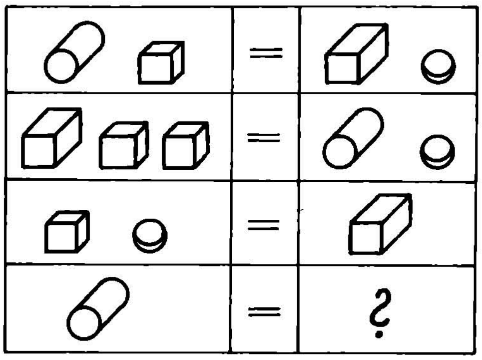
e)



Waage-Rechtes

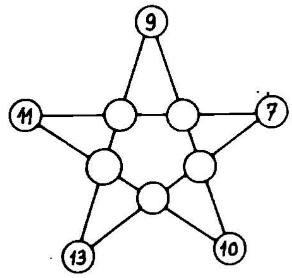
1. Vier Arten von Körpern (Würfel, Quader, Kugeln und Zylinder), wobei Körper einer bestimmten Art jeweils die gleiche Masse besitzen, werden mit einer einfachen Balkenwaage gegeneinander abgewogen. In den obigen drei Fällen (siehe Bild) ergibt sich Gleichgewicht. Wieviel a) Kugeln, b) Würfel bringen die Waage im unten dargestellten Fall ins Gleichgewicht?

R. Mildner, aus LVZ



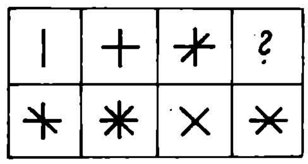
2

10. Setze die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 in die leeren Kreise ein, so daß sich an jedem Arm des Sterns die gleiche Summe ergibt!



Der dreifache Austausch

11. Welche der Figuren *a*, *b*, *c*, *d* gehört logischerweise in das Feld mit dem Fragezeichen?

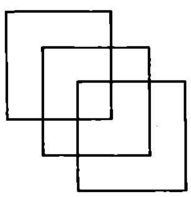


a b c d

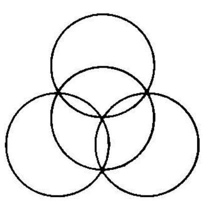
7

In einem Zug

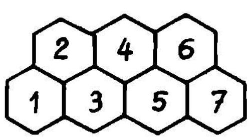
4. a) Lewis Carolls *Dreiquadrate-Problem*:



b) O'Beirnes *Vierkreise-Problem*:

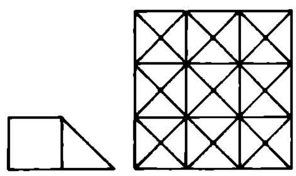


5. Wie viele Wege von 1 bis 7 sind möglich, wenn man sich immer nach einer angrenzenden Zahl und stets nach rechts bewegt?
Ein Beispiel wäre: 1–2–3–5–7.

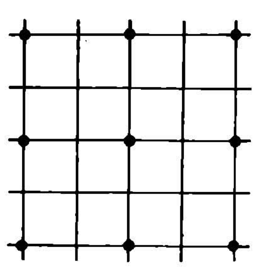


4

6. Wie viele Figuren der dargestellten Form in beliebiger Größe sind im folgenden Bild zu finden?



7. Wie viele gleichschenklige Dreiecke können auf diesem 3×3-Gitter gebildet werden, wenn man nur die neun Punkte als Endpunkte (Eckpunkte) benutzt?



5

Information zum Ideenwettstreit „Kreativ mit Algorithmen“

Im Oktober 1988 riefen die beiden von der AdW der DDR herausgegebenen Zeitschriften „spectrum“ und „Wissenschaft und Fortschritt“ zu einem Ideenwettstreit auf. Dieser zielt darauf, den Umgang mit dem Computer zu initiieren oder zu vertiefen sowie seine Anwendung auch auf derzeit noch ausgefallene Sachverhalte – wie künstlerische Betätigung, anspruchsvolle Spiele und das Ausknobeln origineller Problemlösungsvarianten – zu fördern.
Neuartige Lösungen können, wie sich in der Vergangenheit mehrfach gezeigt hat, große Wirkungen auslösen.
Jury und Redaktionen wünschten sich, daß der Wettbewerb die Leser anregen möge, sich mit folgenden Problemkreisen näher zu befassen:

- Neue kreative Ideen für den Umgang mit dem Computer;
- hocheffektive Algorithmen zur Lösung bekannter Probleme sowie
- interessante Fragen, die einer rechentechnischen Lösung bedürfen.

Bedingungen

Inhaltlich sind Probleme und Lösungen in keiner Weise eingeschränkt. Sie können sowohl numerischer, graphischer als auch künstlerisch-ästhetischer Natur sein (Bild, Ton, Text) – nur Originalität ist gefragt, die kreative, neue tragende Idee!
Nicht bearbeiten wird die Jury reine Aktionsspiele, die betont auf die manuelle Reaktion des Menschen angelegt sind.
Kommerzielle und zu umfangreiche Programmsysteme können ebenfalls nicht in den Wettbewerb einbezogen werden.
Die Einsendungen an die Redaktionen sollten aus drei Teilen bestehen:

- einer inhaltlichen Beschreibung (maximal fünf Schreibmaschinenseiten);
- einer Programmdokumentation (maximal 300 Programmzeilen), bevorzugt in PASCAL oder C, evtl. BASIC);
- einem maschinenlesbaren Beleg des Beispielprogramms zur Erprobung (Diskette oder Kassette).

Eingesandte Unterlagen bleiben materiell und urheberrechtlich Eigentum des Einsenders. Die Einsendungen werden umgehend bestätigt. Die Jury entscheidet innerhalb von drei Monaten über Annahme oder Nichtannahme zum Wettbewerb, gleichzeitig erhalten die Einsender ihre Unterlagen zurück. Im Oktober 1989 werden die besten Ergebnisse prämiert. In der Zwischenzeit können interessante Lösungen in „spectrum“ und „Wissenschaft und Fortschritt“ veröffentlicht werden, um einen regen und kreativen Meinungsaustausch zu Informatikproblemen zu erreichen.
Jedermann ist berechtigt zur freiwilligen Teilnahme. Vom Einsender sind folgende Angaben zur Person erforderlich:
Name, Alter, Beruf, Adresse; außerdem eine verbindliche Erklärung, daß der Inhalt der Einsendung sein geistiges Eigentum ist und Rechte anderer nicht bestehen. Wünschenswert ist ein Literaturverzeichnis zu ähnlichen Inhalten. In (1) und (2) sind Beispiele für zu lösende Aufgaben genannt; in (3) werden die Teilnahmebedingungen (hinsichtlich Programmiersprachen usw.) noch präzisiert.
Auf Programmangebote, Lösungsvarianten und neue, interessante Probleme freuen sich die Redaktionen „spectrum“ und „Wissenschaft und Fortschritt“ sowie die Jury.

Anschriften:

Redaktion spectrum, AdW der DDR,
Otto-Nuschke-Straße 22/23,
PSF 1298, Berlin, 1086

Redaktion Wissenschaft und Fortschritt,
Leipziger Straße 3–4,
Berlin, 1086

Literatur:

(1) Kreativ mit Algorithmen. – In: Wiss. Fortschr. – Berlin 38 (1988) 10
(2) Kreativ mit Algorithmen. – In: spectrum. – Berlin 20 (1989) 1
(3) Neues zu „Kreativ mit Algorithmen“. – In: Wiss. Fortschr. – Berlin 39 (1989) 3

alpha gratuliert

- dem Kinderbuchverlag Berlin zu seinem 40. Geburtstag.

Am 1. Juni 1949 gegründet, erschienen bis 1988 4 804 Titel mit 260 Millionen Exemplaren.

- dem Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin zu seinem 65. Geburtstag.

1924 initiierte der Jenaer Biologieprofessor Julius Schaxel (1887 bis 1943) die erste Ausgabe der „kulturpolitischen Monatshefte für Naturerkenntnis und Gesellschaftslehre“, „Urania“ genannt. Nach 14jähriger erzwungener Unterbrechung nahm der Verlag im Juli 1947 die Arbeit wieder auf und profilierte sich zum führenden Verlag für populärwissenschaftliche Literatur.

Buchtip

Walter Kranzer

So interessant ist Mathematik

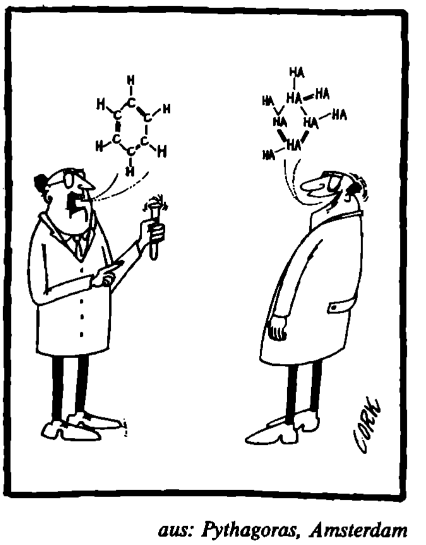
238 S., zahlr. Abb.
Bestell-Nr. 571 680 3 Preis: 28,00 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin

Dieses Buch richtet sich an zwei Lesergruppen, zum einen an bereits mathematisch interessierte, zum anderen an diejenigen, die erfahren möchten, ob und was die Mathematik an Erstaunlichem anzubieten hat. Der Bogen der Darstellung spannt sich von der Zahlentheorie über Mengenlehre, Analysis, Geometrie bis zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, läßt immer wieder neue herrliche Schätze und überraschende Zusammenhänge entdecken.

Erna Padelt

Mit dem Meßrad um die Welt

131 S., zahlr. Abb.
Bestell-Nr. 633 231 8 Preis: 7,40 M
Der Kinderbuchverlag Berlin



aus: Pythagoras, Amsterdam

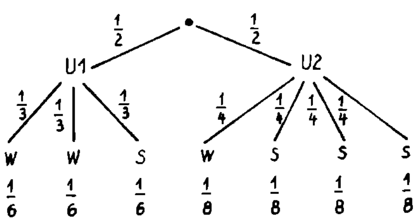
alpha-Märchenecke
Die Chance des Sterndeuters

Vor langer Zeit lebte am Hofe eines Königs ein Sterndeuter, der dem König Ratschläge für seine Regierungsentscheidungen gab. Eines Tages riet der Sterndeuter, das erkrankte Lieblingspferd des Königs nicht zu behandeln, nur dann könne es wieder gesund werden.

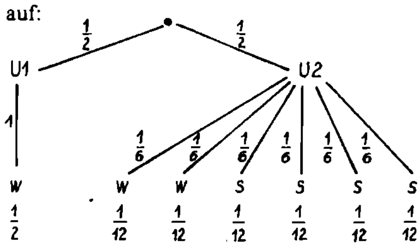
Der Stallmeister hielt sich an diese Empfehlung, aber das Pferd verstarb. Das ärgerte den König so sehr, daß er den Sterndeuter wegen des falschen Rates zu fünf Jahren Kerkerhaft verurteilte.
Nun bat der Sterndeuter seinen König um Gnade. Dieser wollte das Urteil nicht einfach abändern, dem Sterndeuter aber doch noch eine Chance geben. Er sprach deshalb zu ihm:
„Ich gebe dir sieben gleichartige Kugeln, drei weiße und vier schwarze, und zwei Urnen. Du sollst die Kugeln irgendwie auf die zwei Urnen verteilen, aber so, daß keine Urne leer bleibt. Dann wird mein Hofmarschall zuerst eine der beiden Urnen auswählen und anschließend aus dieser Urne eine Kugel ziehen. Natürlich weiß der Hofmarschall nicht, welche Kugeln in welcher Urne liegen. Zieht er eine schwarze Kugel, so bleibt mein Urteil bestehen, zieht er eine weiße, so sollst du begnadigt werden und meine Tochter heiraten. Überlege dir, wie du die Kugeln verteilen willst. Du hast eine Stunde Zeit!“
Der Sterndeuter strengte seinen Kopf an und überlegte:
„Wenn die Kugeln alle in einer Urne wären, dann hätte ich eine Chance von 3 : 7 $\left(\text{oder } \frac{3}{7}\right)$ für eine Begnadigung, denn 3 der 7 Kugeln sind weiß.
Sind die Kugeln aber auf zwei Urnen verteilt, dann ist es komplizierter. Nehmen wir an, in Urne 1 (U1) liegen zwei weiße und eine schwarze Kugel, in Urne 2 (U2) die restlichen, also so:

U1 | ○ ○ ● | U2 | ○ ● ● ● |

Die Chance, daß U1 gewählt wird, ist $\frac{1}{2}$ (eine von zwei Urnen). Für jede der Kugeln aus U1 beträgt dann die Chance, gewählt zu werden, $\frac{1}{3}$ (weil drei Kugeln in der Urne liegen). Insgesamt beträgt die Chance für jede der Kugeln aus U1, gewählt zu werden, demnach $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$, also $\frac{1}{6}$.
Für die Wahl von U2 beträgt die Chance $\frac{1}{2}$ (wie für U1), dann hat jede der Kugeln von U2 die Chance $\frac{1}{4}$, insgesamt also $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.
Das kann man aufzeichnen:



Günstig ist für mich das Ziehen einer weißen Kugel. Das kann – wie ich in der Zeichnung sehe – auf drei verschiedenen ‚Wegen‘ geschehen. Die Chance für ‚weiße Kugel‘ beträgt somit insgesamt $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}$.
Das ist schon besser als $\frac{3}{7}$, denn $\frac{11}{24} > \frac{3}{7}$.
Aber ist diese Verteilung schon die für mich beste?“
Der Sterndeuter probierte andere Verteilungen aus, z. B.:
a) In U1 eine weiße Kugel und eine schwarze (w, s), in U2 alle übrigen Kugeln (w, w, s, s, s).
Da betrug seine Chance $\frac{9}{20}$ (prüfe das nach!), war also schlechter als im vorigen Fall, denn $\frac{9}{20} < \frac{11}{24}$.
b) In U1 eine weiße und zwei schwarze Kugeln (w, s, s), in U2 alle übrigen Kugeln (w, w, s, s).
Damit verringerte sich seine Chance weiter, sie betrug nur noch $\frac{10}{24}$. (Prüfe das nach!)
Aber nun wurde ihm klar: je „gleichmäßiger“ die weißen und schwarzen Kugeln auf die beiden Urnen verteilt werden, um so ungünstiger ist das für ihn. Deshalb versuchte er die Verteilung U1: eine weiße Kugel; U2: alle übrigen Kugeln.
Er zeichnete sich den zugehörigen „Baum“ auf:



Die Chance, daß eine weiße Kugel gezogen wird, beträgt hier

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

Der Sterndeuter entschied sich für diese Verteilung, bei der die Chance für „weiße Kugel“ tatsächlich am größten ist: legt man nämlich noch eine weiße Kugel aus U2 nach U1, so vermindert sich die Chance für „weiß“ bei U2, ohne daß sie bei U1 wächst; legt man eine schwarze Kugel von U2 nach U1, so vermindert sich bei U1 die Chance für „weiß“ von $\frac{1}{2}$ auf $\frac{1}{4}$, während sie bei U2 nur von $\frac{1}{12}$ auf $\frac{2}{10}$ wächst – insgesamt wird die Chance für „weiß“ also kleiner. Ähnlich ist es bei anderen Verteilungsvarianten.
Was wurde nun aus dem Sterndeuter? Hat seine Überlegung ihm zur Begnadigung verholfen? Leider wissen wir es nicht, die Chronik berichtet nur, daß die Tochter des Königs bald geheiratet hat. Aber wen?

W. Walsch

Nun fragt ein „gewöhnlicher“ Mensch: „Kann man mit dieser Straßenbahn zum Hauptbahnhof fahren?“ „Ja, man kann“, antwortet der Computermann.
Das ist völlig richtig. Man kann. Aber die Straßenbahn fährt gerade in die entgegengesetzte Richtung! Man kann 17 Haltestellen bis zur Endstation der Linie fahren und dann noch 26 Haltestellen zurück, um den Hauptbahnhof zu erreichen...
Eine hilfreiche Antwort wäre aber nicht etwa nur „man muß in die entgegengesetzte Richtung fahren“, sondern ein Hinweis darauf, daß man von der Bushaltestelle nebenan mit einem Expreßbus den Hauptbahnhof in 5 min erreichen kann.
Aber das wäre die Antwort auf die Frage „Wie kann man am schnellsten den Hauptbahnhof erreichen“ – und diese Frage wurde dem Programmierer nicht gestellt!
Eine richtige, ganz präzise Antwort kann manchmal für den Fragenden völlig nutzlos sein, wenn dieser seine Formulierung nicht gründlich genug durchdacht hat.

A. Halameisär, Moskau

alpha-Wettbewerb 1987/88

Abzeichen in Gold

Fortsetzung

Für sechsjährige Teilnahme

Carsten Karl, Aken; Kathrin Schmidt, Antonsthal; Michael Henning, Bad Salzungen; Frank Wagner, Dirk Pandel, beide Berlin; Cynthia Bengs, Bürgel; Detlef Bartmuß, Burow; Silvio Löffler, Thomas Reißner, beide Cottbus; Cornelia Zillmann, Henrike Süß, Michael Potthoff, Birgit Jeske, Dorothea Krippstädt, Rita Kempe, Frank Naumann, Matthias Overmann, Jan Skribanowitz, alle Dresden; Matthias Buchmann, Eisenberg; Sven Hauptvogel, Elsterwerda; Antje Kaufhold, Erfurt; Andreas Kupsch, Finsterwalde; Elisabeth Siegel, Freital; Silke Breunung, Geisa; Alexander und Matthias Neuber, Gerbitz; René Franke, Gersdorf; Gernot Mersiowsky, Christoph Kothe, beide Görlitz; Karsten Hennig, Großörner; Ralf Gericke, Hainichen; Elke Heidemann, Halberstadt; Sabine Schwarz, Halle-Neustadt; Jan Wohlbold, Heidenau; Roberto Stahl, Herzberg; Stefan Heiber, Heyda; Marko und Hans-Hermann Epstude, Kirchheilingen; Cornelia Häfner, Leinefelde; Beate Wasner, Leipzig; Norbert Wölfel, Andreas Vogel, beide Limbach-O.; Hardy Dömpke, Löderburg; Antje Mißbach, Giselher Schütze, beide Magdeburg; Markus Walther, Meißen; Karsten Knothe, Merseburg; Katrin May, Olbernhau; Carola Walter, Ottendorf-O.; Felix Kraenz, Picher; Olav Zirnstein, Pirna; Axel Buerke, Potthagen; Andreas Thiele, Rackwitz; Torsten Engelhaupt, Enrico Anton, Cornelia Fleischmann, Liane Marschall, Christine Reder, alle Roßdorf; Rainer Walke, Rostock; Marion Walther, Schlottwitz; Oliver Henze, Schneidlingen; Lars Hantschmann, Seifhennersdorf; Karin Möwald, Sömmerda; Axel Bichler, Sondershausen; Anja Tippe, Teterow; Thomas Flatz, Andreas Walter, beide Vacha; Dag Lohse, Vielau; Sven-Uwe Kanngießer, Wolmirsleben; Andreas Vogt, Silke Weißbach, beide Worbis; Ralph Schammer, Zerbst; Claudia Heret, Zwickau; Jörg Anschütz, Lehesten; AG Junge Mathematiker der O.-Grotewohl-O. Dreitzsch

Für fünfjährige Teilnahme

Ulrich Egermann, Uta Schmidt, beide Altenburg; Sven Völker, Andreas Henning, beide Bad Salzungen; Monika Döring, Peter Zülsdorff, Katja Geißler, Andreas Böttger, alle Berlin; Andreas Filz, Bernburg; Stefan Lenz, Bischofrod; Wolfram Schubert, Borna; Frank Wolff, Brotterode; René Aust, Calau; Thomas Freier, Creuzburg; Hans-Harald Neschke, Dresden; Jens Renner, Dürröhrsdorf; Thomas Prüver, Eberswalde; Patrick Zacharias, Eilsleben; René Weilert, Rüdiger Hochheim, Steffen Zillmer, alle Erfurt; Jana Reinhardt, Katharina Hildebrandt, Christiane Siebert, Kristin Danz, Corinna Mäder, Andrea Weyh, alle Fambach; Werner Ernst, Finsterwalde; Uwe Danz, Floh; Holger Hänchen, Forst; Thomas Mittelstädt, Thomas Monecke, beide Freiberg; Ulrike Hormann, Ulrike Bentz, Anja Bayer, alle Friedland; Katharina Dost, Geithain; Torsten Feigl, Gera; Jörn Pamperin, Hagenow; Rainer und Britta Struwe, Halberstadt; Ulrike Watzke, Hoyerswerda; Marco Ringel, Jänickendorf; Göran Glockmann, Norbert Kuschel, Jan Rüdiger, alle Jena; Nico Schmidt, Jüdenberg; Cornelia Weber, Mario Stern, Mike Hesse, alle Kaltennordheim; Käthe Bäckmann, Marko Niepel, beide Karl-Marx-Stadt; Werner Unger, Lehesten; Tobias Zepler, Langenwahl; Sandra Krüger, Ludwigslust; Christel Fritze, Magdeburg, Eberhard Schulze, Mildenberg; Kay Pfennighaus, Neubrandenburg; Manuela und Rüdiger Grewe, Neuhaus; Grit Pfützner, Ohorn; Michael Schmarje, Jürgen Rietz, beide Pirna; Kilian Kindelberger, Potsdam; Katrin Lönnig, Prettitz; Karsten Bossow, Ribnitz; Axel Kaminski, Tobias Franke, beide Riesa; Dirk und Ralf Seifert, Rochlitz; Kirstin Peter, Ulrich Rothe, beide Rostock; Ulrike Häfner, Schmalkalden; Stefan Erb, Schwallungen; Alexander Otto, Schwanebeck; Lars Prieske, Schwerin; Holger Reinitz, Sommerfeld; Jana Ullmann, Spremberg; Claudia Siegmund, Steinbach; Birgit Spindler, Heide Rudolph, Katrin Werner, alle Steinbach-Hallenberg; Andreas Lange, Stendal; Kerstin Schuster, Taubenheim; Stephan Marx, Ueckermünde; Frank Werbach, Marko Treichel, beide Unterbreizbach; Steffen Schmidt, Urleben; Horst Rex, Wählitz; Bettina Wiemuth, Weißenborn-L.; Manuela Montag, Oliver Auert, beide Weißenschirmbach; Sebastian Steinbach, Wernigerode; Christine Storandt, Wernshausen; Sören Schubert, Wittenberg; Jens Müller, Wolgast; Silke Weißbach, Andreas Vogt, beide Worbis; Janet Thom, Wünschendorf; Beate Balzer, Zittau

Für vierjährige Teilnahme

Tilo Kaiser, Aken; Frank Gembus, Altentreptow; André Höna, Altenburg; Ronald Stüve, Anklam; Michael Seibt, Arnstadt; Sabine Keilhaupt, Bad Lauchstädt; Uwe Völker, Sabine Werkmeister, Jan Schwate, alle Bad Salzungen; Thoralf Räsch, Bad Wilsnack; Alexander Starick, Ina Müller, beide Bärenklau; Claudia Groll, Bannewitz; Alexander Golz, Guiletta Himmel, Annekatrin Hegewald, Reik Hartmann, Annett Schafranka, Rainer Scheel, Matthias Böttger, Bodo Petermann, alle Berlin; Christian und Clemens Neufert, Torsten Adam, Jan Opalka, Susanne Filz, Katrin Priemuth, alle Bernburg; Stephan Hantsch, Berthelsdorf; Thomas Schulze, Bindow; Falk Wietreck, Bischofswerda; Andreas Liebmann, Bitterfeld; Thomas Römhild, Breitungen; Torsten Peter, Holger Wehner, Ralf Fuchs, alle Brotterode; Claudia Tittmann, Cainsdorf; Matthias Wiesick, Hagen Lessing, beide Cottbus; Stefan Daske, Dabendorf; Simone Eyning, Dingsleben; Domenik Fiedler, Tobias Rinke, beide Dingelstädt; Jens Meyer, Jens Herrmann, Uwe Löbel, Beate Schreiber, Michael Grüning, Edith Bombach, Andrea Hahn, Birgit Alm, Stefan Seifert, Ulf Erben, alle Dresden; Yvonne Gierth, Carsten Heinrich, beide Dürröhrsdorf; Kornelia Eckert, Effelder; Anne Heyl, Eisenach; Jan Buchmann, Eisenberg; Reinhard Schnippa, Eisenhüttenstadt; Lars Lämmerhirt, Ettenhausen; Karsten Wackernagel, Falkenberg; Kirsten Leffler, Anke Jung, Petra Stadler, Katrin Gerlin, Adrian Weinaug, Yvonne Scheiber, Yvonne Hollandt, Nicola Erb, Silke Wirth, Tanja Ilgen, Rico Neuhöfer, Thomas Leffler, Enrico Eck, Torsten Krone, Yvonne Stengel, Peggy Möller, Frank Leffler, alle Floh; Steffen Pietzsch, Frankfurt/O.; Karl Etourno, Freiberg; Thomas Wiegel, Freienorla; Matthias Elert, Friedrichsthal; Katja Frey, Roman Knöfler, beide Gersdorf; Dorit Jackisch, Görlitz; Roland Popp, Gotha; Jacqueline Spatke, Gräfenthal; Cornelia Bär, Greifendorf; Yvette Vogelsberger, Greifswald; Susanne Schulz, Grimma; Thomas Henker, Groitzsch; Frank Schnecgaß, Großbodungen; Jan Glaser, Großdeuben; Birgit Bindig, Großweitzschen; Ines Pannenberg, Jana Pausch, Silke Tränkner, alle Grünhain; Alois Belter, Hagenow; Kurt und Uwe Lehmann, Haidemühl; Burkhard Huth, Roland Kunert, Gunhild Berg, alle Halle; Vivian Bähr, Torsten Bohn, beide Halle-Neustadt; Antje Stehfest, Havelberg; Michael Puchta, Hecklingen; Jens Weinhold, Hermsdorf; Matthias Lönhardt, Herzberg; Olaf Schmidt, Hohenebra; Bert Frenzel, Horka; Claudia Meyer, Manuela Winkler, beide Hoyerswerda; Steffen Vogler, Torsten Borchardt, beide Ilmenau; Ellen Stelzner, Jena-Lobeda; Markus Glück, Jössnitz; Andreas Anders, Jüterbog; Stefan und Franziska Koch, Kamenz; Stefan Mader, Jane Bicly, beide Karl-Marx-Stadt; Marcus Waclawczyk, Kirchheilingen; Matthias Müller, Klaffenbach; Astrid Mirle, Kleindehsa; Karsten Knobloch, Kleinmachnow; Anke Baumann, Ronny Müller, beide Klietz; Ulrike Kleinau, Kritzmow; Olaf Dreyer, Krumbeck; Marko Rogozia, Ladeburg; Katrin Ziermann, Landsendorf; Mario Menger, Lauterbach; Kirsten Schröter, Katrin Anton, beide Leegebruch; Dominique Dode, Sebastian Meinhardt, Robert Staufenbiel, Martin Schreiter, Andreas Winter, alle Leinefelde; Henrik Holke, Mareike Schmidt, Christian Tiedt, alle Leipzig; Annett Reiche, Liederstädt; Mario Voigt, Löderburg; Cornelia Seidel, Lössau; Olaf Weber, Meuselwitz; Frank Höll, Mittelstille; Tilo Schulz, Möbiskruge; Dorit Pinnow, Daniela Voigtländer, Stefan König, Steffi Pörschel, alle Mügeln; Christian Bittner, Mühlhausen; Tino Elste, Nebra; Dajana Predöhl, Michael Ritter, beide Neuhaus; Petra Ropenus, Neuhof; Christian Rißler, Gabriele Bröner, beide Niederodewitz; Susan Abbe, Susanne Ludwig, beide Niederorla; Michael Hummel, Olbersdorf; Torsten Kaiser, Oranienbaum; Jana Wetzel, Oranienburg; Mario Koch, Oschersleben; Dörte Schappler, Parchim; Jan Fricke, Pasewalk; Susanne Kraenz, Picher; Alexander Moskau, Plauen; Bernd Völkel, Potsdam; Ronald Dreße, Pretitz; Claudia Burkhardt, Prettin; Sylke Ahrend, Rakow; Christoph Weidling, Riethnordhausen; Doris Seifert, Rochlitz; Nicole Eck, Diana Herget, Nicole Fuß, Steffen Tiedmann, alle Roßdorf; Burkhard Rothe, Rostock; Daniela Möser, Sangerhausen; Sören Hader, Schlotheim; Torsten Haase, Matthias Kittner, beide Schmalkalden; Sina Schnock, Schönebeck; Enrico Rommel, Schwallungen; Claudia Vörkel, Schköna; Diana Heinrich, Seyda; Sandy Schinkel, Eileen Hesse, Korina Maloszyk, Babette Stietz, Ivonne Bühling, Petra Gerlach, Kay Schinkel, Steffen Vollbarth, alle Sondershausen; Norman Heidecke, Staßfurt; Katja Hoffmann, Melanie Wilhelm, beide Steinbach-Hallenberg; Peter Brock, Stralsund; Mario Buchholz, Tantow; Ulrike Kaden, Teltow; Torsten Wüstenberg, Templin; Iris Demmer, Themar; Sigrun Pfeiffer, Trebra; Diana Brenn, Sebastian Brenn, Norman Fuß, Jörg Steinbach, Silvano Storch, Christiane Heinemann, Susanne Peter, Annett Storch, Tanja Zeiß, alle Trusetal; Steffen Limburg, Karen Stenderhoff, Anett Tischendorf, Katrin Fladung, Elvira Stehling, Hans-Helmut Zappe, Michael Lotz, Sven Buchholz, alle Vacha; Elko Könlechner, Mario Zitek, Ronald Petigk, alle Weimar; Tanja Voigt, Wernburg; Otmar Jannasch, Wiednitz; Ralf Klötzer, Wilkau-Haßlau; Manuela Kabelitz, Wollin; Ulrike Langer, Wolmirstedt; Kristina Bergmann, Wolzig; Ronald Peters, Wismar; Nico Qual, Zeitz; Tom Marschall, Lutz Hengelhaupt, beide Zella-Mehlis; Holger Beyer, Zschopau; Olaf Breitzke, Zühlsdorf

Achtung!

Immer wieder bitten uns Leser um „alphas" älterer Jahrgänge oder mathematische Lesebögen. Leider können wir in den seltensten Fällen helfen!

Also – „ausgelesene" Exemplare bitte nicht wegwerfen! Schickt sie bitte an die Redaktion „alpha". Vielen Dank!

Alphons

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade

Februar 1989

Olympiadeklasse 7

280731 Das Volumen eines Würfels w_1 ist achtmal so groß wie das Volumen eines Würfels w_2. Wäre das Volumen von w_2 um genau $9\,\mathrm{cm}^3$ kleiner, so wäre es gleich einem Zwölftel des Volumens von w_1.
Ermittle aus diesen Angaben die Kantenlängen a_1 und a_2 der beiden Würfel w_1 und w_2!

280732 In einer Fabrik zur Herstellung von alkoholhaltigen Essenzen soll aus einem Restbestand von 300 kg 32prozentigem Alkohol durch Zugabe von 90prozentigem Alkohol ein neuer Bestand von 40prozentigem Alkohol hergestellt werden.
Ermittle diejenige Menge 90prozentigen Alkohols, mit der das erreicht wird!

280733 Gegeben sei ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck ABC. Gesucht ist eine Gerade g, die die folgenden Bedingungen erfüllt:
(1) Die Gerade g ist parallel zu AB, sie schneidet die Seite AC in einem Punkt D und die Seite BC in einem Punkt E.
(2) Für diese Punkte gilt $\overline{AD} + \overline{BE} = \overline{DE}$.
I. Zeige, daß eine Gerade g, wenn sie die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, zu dem Dreieck konstruiert werden kann!
II. Beschreibe eine solche Konstruktion!
III. Zeige, daß eine Gerade g, wenn sie nach dieser Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1) und (2) erfüllt!
IV. Konstruiere ein beliebiges spitzwinkliges, nicht gleichschenkliges Dreieck ABC und zu diesem nach deiner Beschreibung auch g!

280734 Ermittle alle diejenigen Paare $(p; q)$ aus zwei Primzahlen, die die folgenden Bedingungen erfüllen!
(1) Es gilt $q > p + 1$.
(2) Die Zahl $s = p + q$ ist ebenfalls eine Primzahl.
(3) Die Zahl $p \cdot q \cdot s$ ist durch 10 teilbar.

280735 Beweise, daß für jedes Dreieck ABC die folgende Aussage gilt:
Wenn D, E, F in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten BC, CA, AB sind und wenn A', B', C', E', F' die Fußpunkte der Lote von A, B, C, D, E, F auf eine Gerade g sind, die ganz außerhalb des Dreiecks ABC verläuft und auf keiner der verlängerten Seiten BC, CA, AB senkrecht steht, dann gilt stets
$\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = \overline{DD'} + \overline{EE'} + \overline{FF'}$.

280736 Auf einer Kreislinie seien die natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 der Reihe nach angeordnet. Dann wird, beginnend mit der Zahl 1, jede fünfzehnte Zahl mit einer Markierung versehen, d. h., die Zahlen 1, 16, 31, 46, ... usw. werden markiert. Dieses Weiterzählen und Markieren jeder fünfzehnten Zahl wird umlaufend fortgesetzt, d. h., beim Weiterzählen läßt man auf die Zahl 1000 wieder die Zahl 1 folgen. Auch Zahlen, die bereits markiert sind, werden beim Weiterzählen stets mit berücksichtigt. Erst wenn zum weiteren Markieren nur noch Zahlen erreicht würden, die bereits markiert sind, wird der Vorgang beendet.
Ermittle die Anzahl aller derjenigen Zahlen auf dem Kreis, die dann ohne Markierung geblieben sind!

Olympiadeklasse 8

280831 Zwei wanderlustige Freunde A und B beschließen, auf einer Wanderstrecke von 30 km einander entgegenzugehen. Zu Beginn befindet sich A an einem Endpunkt, B an dem anderen Endpunkt dieser Strecke. Sie verständigen sich telefonisch über ihr Vorhaben und nehmen dabei an, daß jeder von ihnen seine persönliche Marschgeschwindigkeit während des ganzen Weges gleichbleibend beibehält. Damit erhalten sie die folgenden Aussagen:
(1) Wenn A 2 Stunden eher startet als B, so treffen sie sich $2\frac{1}{2}$ Stunden nach dem Start von B.
(2) Wenn aber B 2 Stunden eher startet als A, so treffen sie sich 3 Stunden nach dem Start von A.
Zeige, daß unter diesen Voraussetzungen, wenn die Aussagen (1) und (2) zutreffen, die Marschgeschwindigkeiten von A und B eindeutig bestimmt sind; ermittle diese Geschwindigkeiten! Überprüfe, daß auch umgekehrt gilt: Wenn A und B die ermittelten Geschwindigkeiten haben, dann treffen die Aussagen (1) und (2) zu.

280832 Beweise den folgenden Satz!
Wenn $ABCD$ ein Quadrat ist, M der Mittelpunkt von AB, N der Mittelpunkt von BC und P der Schnittpunkt der Strecken CM und DN ist, dann gilt $\overline{AD} = \overline{AP}$.

280833 Beweise die folgende Aussage!
Stets, wenn irgendwelche sechs unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen vorliegen, ist es unmöglich, diese sechs Zahlen so in zwei Gruppen einzuteilen, daß das Produkt der Zahlen einer Gruppe gleich dem Produkt der Zahlen der anderen Gruppe ist.
Hinweis: Enthält bei einer Einteilung eine der zwei Gruppen nur eine Zahl, so gilt diese Zahl als das „Produkt" der Zahlen dieser Gruppe.

280834 Für ein Schulsportfest möchte die Klasse 8c aus den sieben im 100-m-Lauf besten Schülern eine aus vier Schülern bestehende Mannschaft zum 4×100-m-Staffellauf auswählen.
a) Wieviel verschiedene Mannschaften könnten aus den sieben Schülern ausgewählt werden?
b) Wieviel verschiedene Mannschaften könnten aus den Schülern ausgewählt werden, wenn auf jeden Fall zwei bestimmte der sieben Schüler dabei sein sollen?
c) Wieviel verschiedene Mannschaften könnten aus den Schülern ausgewählt werden, wenn auf jeden Fall drei bestimmte der sieben Schüler dabei sein sollen?
d) In wieviel verschiedenen Reihenfolgen ihrer Starts lassen sich stets die vier Schüler einer Mannschaft zum Staffellauf aufstellen?

280835 Es sei ABC ein Dreieck, α sei die Größe des Winkels $\measuredangle BAC$ und β die Größe des Winkels $\measuredangle ABC$. Der Inkreis des Dreiecks berühre die Seite AB in D, die Seite BC in E und die Seite AC in F.
Ermittle die Größe des Winkels $\measuredangle FDE$ in Abhängigkeit von α und β!
Hinweis: Der Inkreis eines Dreiecks ist derjenige Kreis, der alle drei Seiten des Dreiecks von innen berührt.

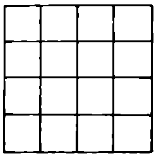
280836 Gegeben seien zwei Strecken; für ihre Längen p und q gelte $p < q$. Gesucht ist ein Viereck $ABCD$, das die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt.
(1) Das Viereck $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$.
(2) Es gilt $\overline{AB} = p$ und $\overline{CD} = q$.
(3) Es gibt einen Kreis, auf dem die Punkte A, B, C und D liegen und dessen Radius p beträgt.
I. Zeige, daß ein Viereck, wenn es die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, aus p und q konstruiert werden kann!
II. Beschreibe eine solche Konstruktion!
III. Zeige, daß ein Viereck, wenn es nach dieser Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!
IV. Untersuche, unter welchen Bedingungen für die gegebenen Lösungen p und q ein solches Viereck
a) existiert,
b) bis auf Kongruenz eindeutig durch p und q bestimmt ist!

Olympiadeklasse 9

280931 Man nennt drei von 0 verschiedene natürliche Zahlen a, b, c genau dann ein pythagoreisches Zahlentripel, wenn sie die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen.
Beweisen Sie, daß in jedem pythagore-

ischen Zahlentripel mindestens eine der drei Zahlen durch 5 teilbar ist!

280932 In jedes der 16 Felder eines 4×4-Quadrates (siehe Bild) soll eine der Zahlen 0 und 1 so eingetragen werden, daß in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen zweimal die 0 und zweimal die 1 vorkommt.



Ermitteln Sie alle verschiedenen Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen! Dabei seien zwei Eintragungen genau dann voneinander verschieden genannt, wenn es keine Spiegelung gibt, die die eine Eintragung in die andere überführt.

280933 Untersuchen Sie, ob es zu jeder geraden Pyramide $P = ABCDS$ mit quadratischer Grundfläche $ABCD$ eine Ebene e so gibt, daß die Schnittfigur von P mit e ein gleichseitiges Dreieck ist!
Hinweis: Gibt es nicht zu jeder Pyramide P eine solche Ebene e, so ist für eine Pyramide P diese Unmöglichkeit zu beweisen; gibt es aber zu jeder Pyramide eine solche Ebene e, so ist anzugeben, wie eine Ebene e gefunden werden kann und daß jede so gefundene Ebene e die geforderte Bedingung erfüllt.

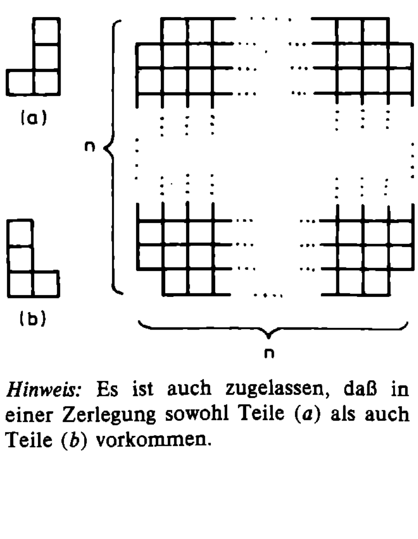
280934 Beweisen Sie, daß für beliebige positive reelle Zahlen x und y stets die Ungleichung

$$\frac{\sqrt{x}}{y^6\cdot\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{x^6\cdot\sqrt{x}}\geqq\frac{1}{x^6}+\frac{1}{y^6}$$

gilt!

280935 Untersuchen Sie, ob es ein Rechteck $ABCD$ gibt, in dem die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$ durch den Mittelpunkt der Strecke AB geht!

280936 Ermitteln Sie alle diejenigen Zahlen $n \geqq 3$, für die es möglich ist, ein $n\times n$-Brett ohne die vier Eckfelder (siehe Bild) vollständig so in Teile zu zerlegen, daß jedes Teil aus einer der Flächen (a), (b) durch Verschiebung und Drehung zu erhalten ist!



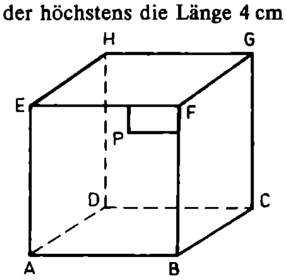
Hinweis: Es ist auch zugelassen, daß in einer Zerlegung sowohl Teile (a) als auch Teile (b) vorkommen.

Olympiadeklasse 10

281031 Für jede natürliche Zahl n werde ihre Zifferndarstellung mit der Basis 2 (Darstellung als Dualzahl), ferner ihre Zifferndarstellung mit der Basis 3 usw. ..., schließlich ihre Zifferndarstellung mit der Basis 10 (Darstellung als Dezimalzahl) betrachtet.
Wenn es natürliche Zahlen $n > 1$ gibt, bei denen in jeder dieser Zifferndarstellungen (mit den Basen 2, 3, 4, ..., 10) die letzte Ziffer (Einerziffer) eine 1 ist, so ermittle man die kleinste derartige natürliche Zahl n.

281032 Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(f; g)$ von Funktionen f und g, die für alle reellen Zahlen definiert sind und die folgenden Bedingungen (1) bis (4) erfüllen!
(1) f ist eine quadratische Funktion, in deren Darstellung $y = f(x)$ der bei x^2 stehende Koeffizient 1 beträgt.
(2) Für alle reellen x gilt
$f(x + 1) = g(x)$.
(3) f hat genau eine reelle Nullstelle.
(4) Es gilt $g(5) = 4$.

281033 Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel der Kantenlänge 6 cm. Auf der Seitenfläche $ABFE$ sei P derjenige Punkt, der von EF den Abstand 1 cm und von BF den Abstand 2 cm hat (siehe Bild).
Ermitteln Sie die Menge M aller derjenigen Punkte auf der Oberfläche des Würfels, die von P aus erreichbar sind, jeweils längs eines auf der Oberfläche verlaufenden Weges, der höchstens die Länge 4 cm hat!



(verkleinerter Maßstab)

Hinweis: Die gesuchte Menge M ist als Vereinigungsmenge von Flächenstücken auf den einzelnen Seitenflächen des Würfels nachzuweisen. Jedes dieser Flächenstücke ist durch Angabe seiner Randkurve zu beschreiben; die Beschreibung ist so anzulegen, daß sie die Möglichkeit einer konstruktiven Gewinnung der einzelnen Teile solcher Randkurven vermittelt.

281034 Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(a; b)$ reeller Zahlen, die die folgende Gleichung (1) erfüllen!

$$a^3 - b^3 - a^2 + b^2 + a - b = 0 \qquad (1)$$

281035 Gegeben seien die Streckenlängen $r = 5$ cm, $s = 16{,}8$ cm und die Winkelgröße $\gamma = 50°$. Gesucht sind Dreiecke ABC, die den folgenden Bedingungen genügen:
(1) Der Umkreis des Dreiecks ABC hat den Radius r.
(2) Die Seitenlängen $c = \overline{AB}$ und $a = \overline{BC}$ haben die Summe $c + a = s$.
(3) Der Winkel $\sphericalangle ACB$ hat die Größe γ.

I. Beweisen Sie, daß jedes Dreieck ABC, das die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, aus den gegebenen r, s, γ konstruiert werden kann!
II. Beschreiben Sie eine solche Konstruktion!
III. Beweisen Sie, daß jedes Dreieck, das nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, den Bedingungen (1), (2), (3) genügt!
IV. Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck oder bis auf Kongruenz eine andere Zahl von Dreiecken der verlangten Art gibt, und ermitteln Sie im letztgenannten Fall diese Zahl!

281036
Beweisen Sie die folgende Aussage!
Für jede natürliche Zahl $n \geqq 1$ gibt es eine $(n + 2)$-stellige natürliche Zahl, die mit genau n Ziffern 3, genau einer Ziffer 4 und genau einer Ziffer 6 in geeigneter Reihenfolge geschrieben wird und durch 7 teilbar ist.
Hinweis: Die Verwendung eines – nicht programmierbaren – Taschenrechners ist gestattet.

Olympiadeklassen 11/12

281231 Man ermittle alle diejenigen aus je drei Gliedern bestehenden Folgen (a_1, a_2, a_3) und (b_1, b_2, b_3), die mit zwei geeigneten von Null verschiedenen reellen Zahlen p, r sowie mit $q = 5$ die folgenden Bedingungen erfüllen:
(1) Es gilt $a_1 = \frac{1}{p}$, $a_2 = \frac{2}{q}$, $a_3 = \frac{1}{3}$.
(2) Es gilt $b_1 = \frac{1}{a_1}$, $b_2 = \frac{1}{a_1\cdot a_2}$,
$b_3 = \frac{1}{a_2\cdot a_3}$.
(3) Die Folge (a_1, a_2, a_3) ist eine arithmetische Folge.
(4) Die Folge (b_1, b_2, b_3) ist eine arithmetische Folge.

281232 Gegeben seien ein Punkt A in einer Ebene e sowie eine Länge a.
Man ermittle die Menge aller derjenigen Punkte C in e, zu denen es jeweils Punkte B und D so gibt, daß $ABCD$ ein Parallelogramm mit
$\overline{AB} = a$ und $\overline{AC} : \overline{AB} = \overline{BD} : \overline{AD}$ ist.

Von den nachstehenden Aufgaben 281233A und 281233B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

281233A Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geqq 3$, für die es möglich ist, zu jedem $i = 1, \ldots, n$ eine natürliche Zahl a_i so anzugeben, daß die folgenden Bedingungen erfüllt werden:
(1) Für alle i mit $1 \leqq i \leqq n$ gilt
$0 \leqq a_i \leqq \frac{1}{2}(n-1)\cdot n$.
(2) Keine zwei unter den Differenzen $a_j - a_i$, die man für alle i, j mit $1 \leqq i \leqq n$, $i \leqq j \leqq n$ und $i \neq j$ bilden kann, sind einander gleich.

281233B Für jede natürliche Zahl $n \geqq 2$ sei die folgende Forderung betrachtet: Man soll $2n$ Gegenstände so in n (genügend große) Behälter verteilen, daß die nachstehenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jeder Behälter enthält mindestens einen der Gegenstände.

(2) Jeder Behälter enthält höchstens n der Gegenstände.

(3) Es ist nicht möglich, die n Behälter so in zwei getrennten (genügend großen) Räumen unterzubringen, daß dabei in jeden der beiden Räume n der Gegenstände gelangen.

a) Geben Sie für $n = 3$ eine Verteilung von 6 Gegenständen in 3 Behälter an, und weisen Sie nach, daß die von Ihnen angegebene Verteilung die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!

b) Beweisen Sie, daß es genau dann möglich ist, die Forderung zu erfüllen, wenn n eine ungerade Zahl ist!

c) Ermitteln Sie für jedes ungerade $n \geqq 3$ alle Verteilungen der geforderten Art!

281234 Man untersuche, ob es 21 paarweise verschiedene ganze Zahlen sowie eine Reihenfolge

$$a_1, a_2, \ldots, a_{21} \qquad (*)$$

dieser Zahlen so gibt, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für je vier in der Reihenfolge (*) unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen ergibt sich eine negative Summe dieser vier Zahlen.

(2) Die Summe aller 21 Zahlen $a_1, \ldots, a_{21}$ beträgt 1989.

281235 Beweisen Sie den folgenden Satz! Wenn (x_n) eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen ist, die für jede natürliche Zahl $n \geqq 1$ die Ungleichung

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{3} + \ldots + \frac{x_{n^2}}{n} \geqq 1$$

erfüllt, dann erfüllt sie auch für jede natürliche Zahl $n \geqq 1$ die Ungleichung

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \ldots + \frac{x_n}{n} \leqq 3.$$

281236 Es sei d eine gegebene Streckenlänge. Ferner sei M die Menge aller derjenigen Pyramiden $ABCS$, die den folgenden Bedingungen genügen:

(1) Das Dreieck ABC ist gleichseitig.

(2) Das Lot von S auf die Ebene durch A, B, C hat den Schwerpunkt des Dreiecks ABC als Fußpunkt.

(3) Der Abstand zwischen den Kanten AS und BC beträgt d.

Untersuchen Sie, ob es in der Menge M eine Pyramide mit kleinstem Volumen gibt! Ist das der Fall, so ermitteln Sie in Abhängigkeit von d dieses kleinstmögliche Volumen!

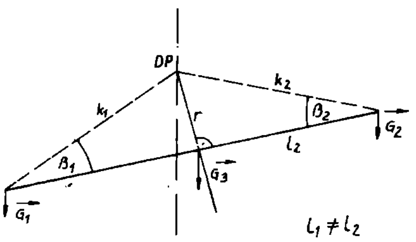
Hinweis: Unter dem Abstand zwischen zwei Strecken UV und XY, von denen UV auf einer Geraden g und XY auf einer zu g windschiefen Geraden h liegt, versteht man die Länge der Strecke GH, wo G auf g, H auf h liegt und GH sowohl g als auch h senkrecht schneidet. Diese Erklärung gilt auch für den Fall, daß derartige Punkte G, H sogar den Strecken UV bzw. XY angehören.

Solltet ihr Probleme bei der Lösung der Aufgaben haben, wendet euch bitte über euren Mathematiklehrer an das Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit.

Mathematik an der Balkenwaage

Mit Hilfe der Balkenwaage wird ermittelt, ob zwei Probekörper die gleiche Masse besitzen, und wenn dies nicht zutrifft, wie groß die Differenz der Massen ist.

Der prinzipielle Aufbau einer solchen Waage ist folgender:



Das Waagengestänge wird von r, l_1 und l_2 gebildet, wobei l_1 der zum Probekörper 1 gehörende und l_2 der zum Körper 2 gehörende Lastarm ist. Das Gestänge ist im Drehpunkt (DP) gelagert. Der Auslenkwinkel wird mit einer Skala angezeigt. G_1 und G_2 sind die Gewichtskräfte der Probekörper. G_3 ist die Gewichtskraft des Waagengestänges. Sie greift wegen der Symmetrie und der Länge der Lastarme in der angezeigten Stelle an.

Es sollen die Gewichtskräfte G_1 und G_2 verglichen werden. Als Ergebnis der Wägung erhält man den zugehörigen Auslenkwinkel. Es muß eine Beziehung zwischen den Gewichtskräften und dem Auslenkwinkel gefunden werden.

Die Waage verhält sich wie ein starrer Körper. Dieser ist im Gleichgewicht, wenn (1) die Summe aller Kräfte 0 ist und (2) die Summe aller Drehmomente 0 ist.

Die Summe der nach unten gerichteten Kräfte $(G_1 + G_2 + G_3)$ findet ihre Gegenkraft im Lager der Waage, also im Drehpunkt. Damit ist Bedingung (1) erfüllt.

Der Betrag des Drehmoments ist definiert durch die Gleichung $M = F \cdot r \cdot \sin \gamma$. Dabei ist F die wirkende Kraft, r der Abstand zwischen dem Drehpunkt des Körpers und dem Angriffspunkt der Kraft. γ ist der Winkel zwischen der Wirkungslinie der Kraft und der Verbindungslinie Drehpunkt – Angriffspunkt von F.

O. B. d. A. sei das Drehmoment positiv, wenn der Körper durch dieses Moment in Uhrzeigerrichtung gedreht wird.

Für die Waage gilt deshalb, wenn o. B. d. A. α in der skizzierten Lage ist, für die Drehmomente von:

$G_1 : M_1 = -G_1 \cdot k_1 \cdot \sin(90° + \beta_1 + \alpha)$

$G_2 : M_2 = G_2 \cdot k_2 \cdot \sin(90° + \beta_2 - \alpha)$

$G_3 : M_3 = G_3 \cdot r \cdot \sin(180° - \alpha)$

Es gilt (siehe Bild):

$$\cos \beta_i = \frac{l_i}{k_i} \text{ und } \sin \beta_i = \frac{r}{k_i}.$$

Durch einfache Umformungen erhält man:*

$M_1 = -G_1 \cdot (l_1 \cdot \cos \alpha - r \cdot \sin \alpha)$

$M_2 = G_2 \cdot (l_2 \cdot \cos \alpha + r \cdot \sin \alpha)$

$M_3 = G_3 \cdot r \cdot \sin \alpha.$

Bedingung (3) fordert nun:

$M_1 + M_2 + M_3 = 0$

$-G_1 \cdot (l_1 \cos \alpha - r \sin \alpha) + G_2(l_2 \cos \alpha + r \sin \alpha) + G_3 \cdot r \cdot \sin \alpha = 0 \qquad (1)$

Der Winkel $\alpha = 90°$ ist physikalisch unsinnig. Deshalb kann Gleichung (1) durch $\cos \alpha$ dividiert werden. Durch Umformungen erhält man daraus:

$$\tan \alpha = \frac{G_1 l_1 - G_2 l_2}{r(G_1 + G_2 + G_3)} \qquad (I^*)$$

Es soll nun der Winkel α_0 bestimmt werden, für den die Waage am empfindlichsten ist. Dieser Winkel ist dadurch gekennzeichnet, daß eine Änderung einer der Kräfte G_1 oder G_2 um ΔG an der Stelle $\alpha = \alpha_0$ die größte Änderung von α hervorruft.

Fall I: Die Gewichtskraft des Waagengestänges gegenüber den beiden anderen Gewichtskräften sei vernachlässigbar: $G_3 = 0$.

Die Änderung einer der Kräfte G_1 oder G_2 beeinflußt zunächst das Drehmoment und dann erst den Auslenkwinkel. Deshalb muß eine Änderung von G_2 um ΔG eine maximale Veränderung des Drehmoments M_2 bewirken. Für M_2 galt:

$M_2 = G_2 k_2 \sin(90° + \beta_2 - \alpha)$

$\hat{M}_2 = \hat{G}_2 k_2 \sin(90° + \beta_2 - \alpha)$

mit $G_2 - \hat{G}_2 = \Delta G_2$

$\Delta M_2 = \Delta G_2 k_2 \cdot \sin(90° + \beta_2 - \alpha)$

Damit ΔM_2 maximal wird, müssen k_2 und $\sin(90° + \beta_2 - \alpha)$ maximal sein.

k_2 sind durch die Ausmaße der Waage Grenzen gesetzt und kann deshalb nicht beliebig vergrößert werden.

$\sin(90° + \beta_2 - \alpha)$ ist maximal bei $\beta_2 = \alpha$. Damit hat die Waage an der Stelle $\alpha_0 = \beta_2$ für G_2 die größte Empfindlichkeit. Da $G_1 = G_2$ gemessen werden soll, muß l_1 verändert werden, damit die Waage für $G_1 = G_2$ den Winkel α_0 annimmt. Es gilt

$$\tan \beta_2 = \frac{r}{l_2}$$

und mit $\alpha_0 = \beta_2$ auch $\tan \alpha_0 = \frac{r}{l_2}$.

Mit $G_1 = G_2$ folgt für l_1 aus (I^*):

$$l_1 = l_2 + 2\frac{r^2}{l_2}.$$

Wenn die Gewichtskräfte nicht gleich sind, stellt sich ein Winkel ein, der ungleich α_0 ist. Es sei $G_1 - G_2 = \Delta G$ und $\Delta G \ll G_2$. Damit gilt $G_1 = G_2 + \Delta G$.

Für den Auslenkwinkel ergibt sich:

$$\tan \alpha = \frac{\Delta G l_1 + G_2 l_1 - G_2 l_2}{r(2G_2 + \Delta G)} = \frac{\Delta G l_1}{r(2G_2 + \Delta G)} + \frac{l_1 - l_2}{r\left(2 + \frac{\Delta G}{G_2}\right)}$$

* Nutze folgende Additionstheoreme:
$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$

$$\tan\alpha \approx \Delta G\frac{l_1}{2rG_2} + \frac{l_1 - l_2}{2r}$$
$$= \Delta G\frac{l_1}{2rG_2} + \tan\alpha_0 .$$

Daraus folgt:
Die Differenz der tan-Werte ist proportional der Gewichtsdifferenz.
Die Differenz der tan-Werte kann nicht angezeigt werden.
Nur $(\alpha_0 - \alpha)$ ist ablesbar. Da die tan-Funktion streng monoton wachsend ist, gilt: je größer $\tan(\alpha_0 - \alpha)$, desto größer auch $(\alpha_0 - \alpha)$,

$$\tan(\alpha_0 - \alpha) = \frac{\tan\alpha_0 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha_0 \tan\alpha} \text{ mit}$$
$$\tan\alpha_0 = \frac{r}{l_2} \text{ und } \tan\alpha = \tan\alpha_0 + \Delta G\frac{l_1}{2rG_2}.$$

Damit erhält man
$$\tan(\alpha_0 - \alpha) = \frac{\Delta G}{G}\cdot\frac{l}{2r\left(1 + \frac{r}{l^2}\right)}.$$

Dieser Wert wird dann am größten, wenn $l \gg r$ gilt.

Der Wert $\tan\alpha_0 = \frac{r}{l}$ strebt gegen Null.

Deshalb ist die Balkenwaage am empfindlichsten, wenn gilt:
$\alpha_0 = 0$ und $l \gg r$ und $l_1 = l_2$.

Fall II: G_3 ist nicht vernachlässigbar. Es werde angenommen, daß die empfindlichste Stelle der Waage bei $\alpha_0 \neq 0$ liege. Für $G_1 = G_2$ muß die Waage diesen Winkel annehmen. Damit ergibt sich für die Länge des Lastarmes l_1

$$\tan\alpha_0 = \frac{l_1G_2 - l_2G_2}{r(2G + G_3)}$$
$$l_1 = r\left(2 + \frac{G_3}{G_2}\right)\tan\alpha_0 + l_2 .$$

Die Länge von l_1 ist also vom Verhältnis $G_3 : G_2$ abhängig. Es muß für jede (!) neue Messung ein anderer Lastarm benutzt und außerdem vor jeder Messung die Kraft G_2 bestimmt werden. Dafür braucht man allerdings wieder eine Waage ...!
Dieser Kreis ist nur zu durchbrechen, wenn $\alpha_0 = 0$ gewählt wird. So ist gezeigt, daß man mit der Balkenwaage die optimalen Ergebnisse bei $\alpha_0 = 0$ erzielt.
Tritt der Fall $G_1 + G_2 \ll G_3$ auf, ergibt sich folgendes:

$$\tan\alpha = \frac{l(G_1 - G_2)}{r(G_1 + G_2 + G_3)} \approx \frac{l}{rG_3}(G_1 - G_2).$$

Für kleine Winkel gilt $\tan\alpha \approx \alpha$ (bei 4° ist der Fehler 1,5 %).
Daraus folgt:

$$\alpha = m\cdot\Delta G \text{ mit } m = \frac{l}{rG_3}.$$

Die Skala für α kann sofort in Masseeinheiten geeicht werden, da m konstant ist.

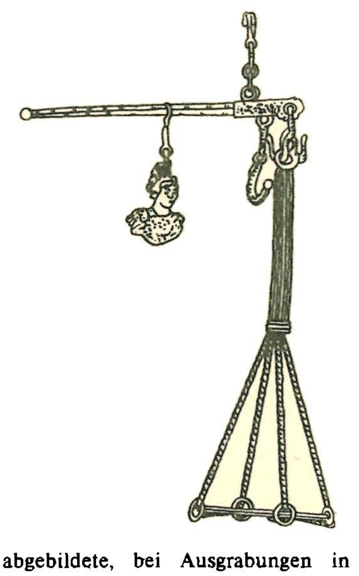
A. Vogel

Schon gewußt?

In der DDR gibt es einen einzigen Ichtmacher: Rainer Merzbach in Leipzig. Was R. Merzbach macht?
Er stellt hochgenaue Wägestücke zwischen 100 und einem tausendstel Gramm her. In seiner Werkstatt wachen Meßgeräte über konstante Raumtemperatur und Luftfeuchtigkeit, bei wechselndem Luftdruck müssen die Pinzetten aus der Hand gelegt werden.

Mathematik auf der Waagschale

Als wichtiges Instrument zum Vergleichen von Massen bei Handel und Produktion werden seit mindestens 5 000 Jahren Waagen benutzt:
Das Bild einer gleicharmigen Hebelwaage ist in eine Pyramide von Giseh eingemeißelt. Im Laufe der Zeit lernt die Menschheit die an einer Waage wirkenden Gesetzmäßigkeiten immer besser verstehen, werden dem jeweiligen Verwendungszweck angepaßte Waagentypen erfunden und weiterentwickelt. Ein kleiner Einblick in die Entwicklung der Wägetechnik mit Hebelwaagen soll beiläufig zu den folgenden Beiträgen über Waagen geboten werden. Für gewährte Unterstützung ist den Leitern und Mitarbeitern der Museen in Oschatz und Göhren/Rügen und des Stadtarchivs Stralsund herzlich zu danken.



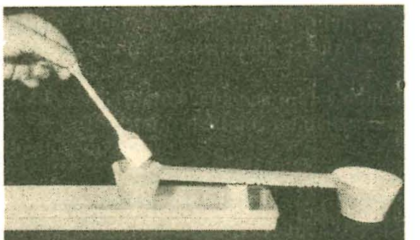
Die abgebildete, bei Ausgrabungen in Pompeji (79 u. Z. durch Vulkanausbruch des Vesuv verschüttet) gefundene Altrömische Schnellwaage befindet sich jetzt in der Leningrader Ermitage. Sie besitzt zwei Aufhängebügel. Zu jedem Aufhängebügel gehört eine mit Kerben versehene Ableseskale. Ihr Laufgewicht hat die Form einer Jünglingsbüste.

Aufgaben über ein Dosierbesteck für Pflanzenschutz- und Schädlingsbekämpfungsmittel (PSM)

Schnellwaagen wie die im Göhrener Museum befindlichen waren bereits in Indien vor 2 000 Jahren und im Frankenreich Karls des Großen (768 bis 814) gebräuchlich. Diese Schnellwaagen sind leicht herstellbar, jedoch ungenauer als die römischen. Der eine Hebelarm weist eine Verdickung (Festgewicht) auf, während sich am anderen Hebelarm ein Haken für die Last befindet. Das Gleichgewicht wird hergestellt, indem man die Schnurschlinge auf dem mit einer Skale versehenen Waagebalken verschiebt. Diese Schnellwaagen wurden noch im 19. Jahrhundert von den Bauern als Marktwaagen benutzt: Nach einer im Stadtarchiv Stralsund befindlichen Akte aus dem Jahre 1804 sind die „Besemermacher“ verpflichtet, die „Löhde“ (Waagebalken) aus einem Stück anzufertigen und die „Kolbe“ (Festgewicht) mit Blei auszugießen. Das städtische Eichamt Stralsund besaß bis zu seiner Auflösung im Jahre 1912 (Verstaatlichung des Eichwesens) Brennstempel.

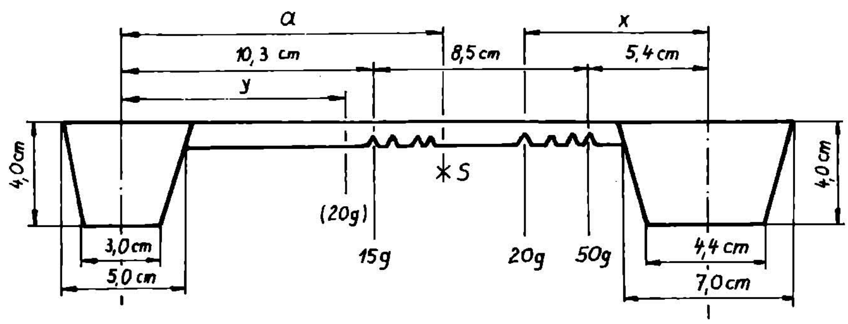
Als Besemer bezeichnete Schnellwaage mit eingebranntem Stralsunder Eichzeichen aus dem Mönchsguter Museum in Göhren

Das gleiche Prinzip zum Herstellen des Gleichgewichtes, nämlich das Verschieben der Drehachse, wird beim Dosierbesteck für PSM verwendet, über das einige Aufgaben gestellt und gelöst werden.



Dosierbesteck für PSM

▲1▲ Der Waagebalken des Dosierbestecks ist zum einen im Gleichgewicht, wenn sich im kleinen Becher 15 g Füllmittel befinden und die 15-g-Kerbe Drehachse ist, und zum anderen, wenn sich im großen Becher 50 g Füllmittel befinden und die 50-g-Kerbe Drehachse ist.
Berechne aus den in der Skizze des Waagebalkens angegebenen Längenangaben 10,3 cm, 8,5 cm und 5,4 cm die Masse m des Waagebalkens und den Abstand a seines Schwerpunktes von der Achse des kleinen Bechers!



▲2▲ Zum Abwägen von 20 g Füllmitttel im großen Becher ist die am Waagebalken angebrachte 20-g-Kerbe als Drehachse zu verwenden.
Berechne den Abstand x dieser Kerbe von der Achse des großen Bechers!

▲3▲ Der große Becher des Waagebalkens faßt (auch wenn die Oberfläche des Füllmittels eben ist) 50 g übliche Füllmittel.
Berechne aus den in der Skizze angegebenen Abmessungen beider Becher ihr Volumen! (Benutze dazu die Formel für das Volumen eines Kegelstumpfes aus dem Tafelwerk!) Erschließe daraus, daß der kleine Becher mehr als 20 g übliche Füllmittel faßt!

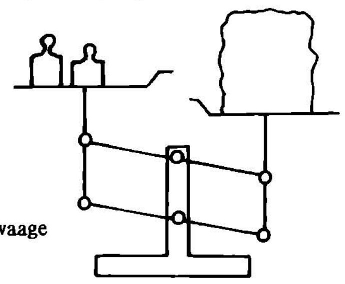
▲4▲ Die in der Skizze angegebenen Längenangaben wurden durch Messen mit einem Lineal erhalten. Für jeden dieser Meßwerte ist der Betrag des absoluten Fehlers höchstens gleich 0,05 cm. Wie genau konnte aus diesen Angaben die Masse m des Waagebalkens und der Abstand a seines Schwerpunktes von der Achse des kleinen Bechers ermittelt werden?

▲5▲ Wie kann man die Lage des Schwerpunktes S durch ein einfaches Experiment mit dem Dosiergerät bestimmen?

▲6▲ In der Gebrauchsanweisung zum Dosiergerät heißt es:
„... 1. Waagebalken mit der entsprechenden Gewichtsmarkierung auf die Schneide im Unterteil des Kastens auflegen.
2. Den hochstehenden Becher so lange zentrisch mit PSM befüllen, bis sich die Waage im Gleichgewicht befindet. ...“
Warum muß pulverförmiges PSM zentrisch in den Becher gefüllt werden?
Übrigens: Die Theorie der Hebelwaage entwickelten ...
... Aristoteles (384 bis 322 v. u. Z.), Euklid (um 300 v. u. Z.) und Archimedes (287 bis 212 v. u. Z.) für einen geraden masselosen Hebel
... Leonardo da Vinci (1452 bis 1519) und Leonhard Euler (1707 bis 1783) für einen massebehafteten, absolut starren Hebel
... Dmitri Iwanowitsch Mendelejew (1834 bis 1907) für einen massebehafteten elastischen Hebel.

Wägungsaufgaben

Die bei Wägungsaufgaben in Text und Bild häufig benutzte Waage ist eine Tafelwaage. Die Tafelwaage wurde 1669 von Giles Persone, der sich nach seinem Heimatort de Roberval nannte, erfunden. Bei ihr wird durch ein doppeltes Stangensystem (Parallelogramm) bewirkt, daß sich beide Waagschalen nur parallel zu sich bewegen können. Dadurch wirkt jede aufgelegte Masse unabhängig von der Stelle, an der sie auf die Waagschale gelegt wird.



Tafelwaage

Ein Wägestück ist zu leicht!

Ein Vater hat seinem Sohn zur Einschulung als Geschenk eine Tafelwaage und neun zylinderförmige Wägestücke mit den Massen 1 g, 2 g, 2 g, 5 g, 10 g, 20 g, 20 g, 50 g und 100 g angefertigt und in jedes Wägestück die Maßzahl seiner Masse eingeschlagen.
Nach geraumer Zeit teilt der Sohn dem Vater mit: „Eiche bitte meinen Wägesatz neu, denn eines meiner Wägestücke war verrostet und ich habe es deshalb mit Feile und Schmirgelpapier tüchtig bearbeitet. Ich weiß leider nur noch, daß es weder das 50-g- noch das 100-g-Wägestück war.“
Der Vater antwortet: „Finde selbst das Wägestück heraus, das weniger Masse besitzt als seine Beschriftung angibt und bringe es mir. Du kannst es sogar mit höchstens zwei Wägungen herausfinden.“ Wie kann der Sohn das schaffen?

Ohne Wägestücke!

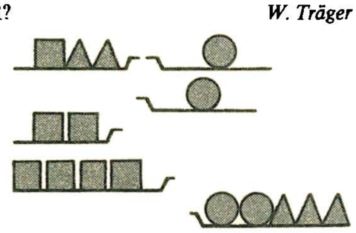
Zur Verfügung stehen massegleiche Kugeln, massegleiche Würfel und massegleiche Kegel. Die Masse einer Kugel ist ein Vielfaches der Masse eines Kegels. Mit diesen Körpern werden die folgenden drei Wägungen ausgeführt, wobei die Waage nur einmal im Gleichgewicht ist. Wieviel Kegel haben die gleiche Masse wie eine Kugel?

W. Träger

I

II

III

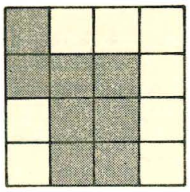


Lösungen zu: alpha-Wettbewerb Heft 1/89

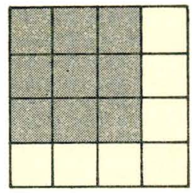
Ma 5 ■ 2978 Aus (1) und (2) folgt: Birgit hat die Zeugnisnote 2. Somit hat Anke die Zeugnisnote 1. Aus (3) folgt: Birgit ist Schülerin der Klasse 4. Aus (5) folgt: Claudia ist Schülerin der Klasse 6.

Ma 5 ■ 2979 a) 16 Quadratseiten zu je 5 mm Länge ergeben einen Umfang von 80 mm Länge.
Mögliche Lösungen für b) und c)

b)



c)



Ma 5 ■ 2980 Aus $mn - n = my$ folgt $y = 0$,
aus $rs + mn = x0z$ folgt $x = 1$,
aus $10z + 1s = 1s0$ folgt $s = 2$,
aus $10z + 12 = 120$ folgt $z = 8$,
aus $r2 : 18 = a$ folgt $a = 4$ und $r = 7$,
aus $4 \cdot m0 = 120$ folgt $m = 3$,
aus $18 - n = 12$ folgt $n = 6$.
Die vollständige Lösung lautet somit

$$\begin{array}{ccccc} 72 & + & 36 & = & 108 \\ : & & - & & + \\ 18 & - & 6 & = & 12 \\ \hline 4 & \cdot & 30 & = & 120 \end{array}$$

Ma 5 ■ 2981 Vom ersten bis zum fünften Mast gibt es vier Zwischenräume von je $250\,\text{m} : 4 = 62{,}5\,\text{m}$ Länge. Zwischen dem ersten und dem zehnten Mast sind es neun Zwischenräume; deshalb beträgt diese Entfernung $9 \cdot 62{,}5\,\text{m} = 562{,}5\,\text{m}$.

Ma 5 ■ 2982 Es sei n eine natürliche Zahl, also $(n-1)$ ihr Vorgänger und $(n+1)$ ihr Nachfolger. Wegen $(n-1) + (n+1) = 2n$ gilt $2n = 1978$. Die natürliche Zahl lautet $n = 989$. Wegen $2n = 1989$ existiert keine natürliche Zahl n, da $2n$ eine gerade, aber 1989 eine ungerade Zahl ist.

Ma 5 ■ 2983 Es sind $35 \cdot 6\,\text{t} = 210\,\text{t}$ Mauersteine zu transportieren. Wegen $19 \cdot 6\,\text{t} = 114\,\text{t}$ und $210\,\text{t} - 114\,\text{t} = 96\,\text{t}$ und $12 \cdot 8\,\text{t} = 96\,\text{t}$ sind $19 + 12 = 31$ Fuhren durchgeführt worden. Es wurden also $35 - 31 = 4$ Fuhren eingespart.

Ma 5 ■ 2984 Aus den acht Würfeln ohne Farbe läßt sich ein $2 \cdot 2 \cdot 2$-Würfel bilden. Es müssen in jeder der drei Richtungen (Länge, Breite, Höhe) vier Würfel gelegen haben. Der ursprüngliche, ganz mit einer Farbe angestrichene Würfel besteht deshalb aus $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ gleichgroßen kleineren Würfeln. Wegen $64 - 8 = 56$ gibt es also 56 Würfel mit Farbe.

Ma 6 ■ 2985 Es gilt
$1001 = 1 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Die Zahl 1001 besitzt genau acht Teiler; sie lauten 1, 7, 11, 13, 1001, 77, 91, 143.

Ma 6 ■ 2986 Im Dreieck ADS hat der Winkel $\sphericalangle ASD$ die Größe $90° - \frac{\alpha}{2}$. Im Dreieck AEC hat der Winkel $\sphericalangle AEC$ die Größe $90° - \frac{\alpha}{2}$. Als Scheitelwinkel zu $\sphericalangle ASD$ hat der Winkel $\sphericalangle CSE$ die Größe $90° - \frac{\alpha}{2}$.
Aus $\sphericalangle CSE \cong \sphericalangle CES$ folgt $\overline{CS} \cong \overline{CE}$.

Ma 6 ■ 2987 Es sei n eine beliebige natürliche Zahl. Dann sind n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Nun gilt
$n + (n+1) + (n+2) + (n+3)$
$= 4 \cdot n + 6 = 2 \cdot (2n+3)$.
Da $2n$ eine gerade natürliche Zahl ist, muß $2n + 3$ eine ungerade natürliche Zahl sein. Somit ist $2 \cdot (2n+3)$ durch 2, aber nicht durch 4 teilbar. Von den vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ sind genau zwei ungerade und genau zwei gerade Zahlen. Von den beiden geraden Zahlen ist eine durch 2, die andere durch 4, das Produkt
$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)$ also durch $2 \cdot 4 = 8$ teilbar.

Ma 6 ■ 2988 Angenommen, Erwin ist x Jahre alt; dann ist seine Schwester $(x-2)$ Jahre, sein Bruder $(x+3)$ Jahre alt. Die Geschwister sind zusammen $(3x+1)$ Jahre alt, und es gilt $3x + 1 = 40$, $3x = 39$, $x = 13$. Erwin ist 13 Jahre, seine Schwester 11 Jahre, sein Bruder 16 Jahre alt.

Ma 6 ■ 2989 Wegen $a + b > c$ und $a + b + c < 30$ gibt es genau vier Möglichkeiten für die Maßzahlen der Seitenlängen des Dreiecks, und zwar (3, 5, 7), (3, 11, 13), (5, 7, 11), (5, 11, 13).

Ma 6 ■ 2990 Wegen $a + b > c$ und $a = 3$ cm und $b = 1$ cm gilt $c < 4$ cm.
Wegen $b + c > a$, also $1\text{ cm} + c > 3\text{ cm}$, gilt $c > 2$ cm.
Aus $2\text{ cm} < c < 4\text{ cm}$ folgt $c = 3$ cm und somit $u = a + b + c = 7$ cm.

Na/Te 6 ■ 443 Gesucht: G (in N)
Gegeben: $s = 10$ cm; $\varrho = 7{,}8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
Es wird zunächst die Masse des Körpers berechnet. Das Volumen V des Würfels beträgt $V = s \cdot s \cdot s$; $V = 1000\text{ cm}^3$.
Da 1 cm^3 eine Masse von 7,8 g hat, hat der Würfel die Masse von $m = 7800$ g. Auf einen Körper mit der Masse von 100 g wirkt eine Gewichtskraft von 1 N. Demzufolge wirkt auf den Würfel eine Gewichtskraft von 78 N.

Ma 7 ■ 2991 Angenommen, die Tochter ist heute x Jahre, die Mutter also $4x$ Jahre alt; dann gilt
$4x + 16 = 2 \cdot (x + 16)$, also $x = 8$.
Heute ist die Tochter 8 Jahre, die Mutter 32 Jahre alt.

Ma 7 ■ 2992 Angenommen, es sind x Ein-, also $(82 - x)$ Zweibettzimmer; dann gilt $x + 2 \cdot (82 - x) = 132$, also $x = 32$.
Dieses Hotel hat 32 Ein- und 50 Zweibettzimmer.

Ma 7 ■ 2993 Wir zeichnen den Radius $\overline{MP}$.
Aus $\overline{MB} = \overline{MP}$ folgt $\sphericalangle MPB = \sphericalangle MBP = \varphi$.
Daraus folgt weiter $\sphericalangle CPA = 90° - \varphi$.
Im rechtwinkligen Dreieck AMB gilt ferner $\sphericalangle BAM = 90° - \varphi$. Ferner gilt $\sphericalangle CAP = \sphericalangle BAM = 90° - \varphi$ als Scheitelwinkelpaar. Aus $\sphericalangle CAP = \sphericalangle CPA = 90° - \varphi$ folgt $\overline{CA} = \overline{CP}$, d. h., das Dreieck CPA ist gleichschenklig.

Ma 7 ■ 2994 Es seien $n - 1$, n, $n + 1$ drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen mit $n \geqq 2$; dann gilt
$5 \cdot (n - 1 + n + n + 1) = (n - 1)$
$\cdot n \cdot (n + 1)$, $15n = n \cdot (n^2 - 1)$,
$15 = n^2 - 1$, $n^2 = 16$, $n = 4$. Es handelt sich um die Zahlen 3, 4 und 5.

Ma 7 ■ 2995 Es gilt $(n+1)^2 - n^2$
$= n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$
$= n + (n + 1)$.

Na/Te 7 ■ 444 Gesucht: h (in cm);
Gegeben: (aus Lehrbuch 6 (Physik));
$\varrho_{\text{Wasser}} = \frac{1\text{ g}}{\text{cm}^3}$; $\varrho_{\text{Benzin}} = \frac{0{,}7\text{ g}}{\text{cm}^3}$;
$\varrho_{\text{Öl}} = \frac{0{,}9\text{ g}}{\text{cm}^3}$
Aus $m = \frac{\varrho}{V}$ folgt $V = \frac{m}{\varrho}$. Mit einer Masse $m = 100$ g ergeben sich Volumina von 100 cm^3; 143 cm^3 und 111 cm^3. Da die Grundfläche der zylindrischen Flaschen 10 cm^2 beträgt, steht das Wasser 10 cm, das Benzin 14,3 und das Öl 11,1 cm hoch.

Na/Te 7 ■ 445 Mit einer Kraft von 10 N. Das Seil dient nur zum Übertragen der Kraft von einem Körper auf den anderen.

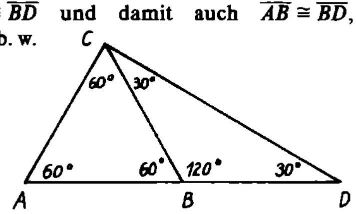
Ma 8 ■ 2996 Es gilt
$z = p^4 - 1 = (p^2 + 1)(p^2 - 1)$
$= (p^2 + 1)(p - 1)(p + 1)$.
Alle Primzahlen $p > 5$ sind ungerade. Das Quadrat p^2 einer ungeraden Zahl p ist ebenfalls ungerade; damit ist $p^2 + 1$ eine gerade Zahl, also durch 2 teilbar. Ferner sind $p - 1$ und $p + 1$ aufeinanderfolgende gerade Zahlen, von denen eine durch 2, die andere durch 4 teilbar ist. Deshalb ist z durch $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ teilbar. Von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen $p - 1$, p, $p + 1$ ist eine durch 3 teilbar. Da p Primzahl ist, muß entweder $p - 1$ oder $p + 1$ durch 3 teilbar sein. Damit ist z durch $3 \cdot 16 = 48$ teilbar. Primzahlen größer als 5 können nur auf die Grundziffer 1, 3, 7 oder 9 enden. Die Quadrate dieser Zahlen enden demnach nur auf die Grundziffer 1 oder 9. Deshalb ist entweder $p^2 + 1$ oder $p^2 - 1$ durch 5 teilbar. Damit ist z durch $5 \cdot 48 = 240$ teilbar.

Ma 8 ■ 2997 Nach den Bedingungen der Aufgabe ist das Dreieck BCD gleichschenklig; daraus folgt, daß $\sphericalangle DBC \cong \sphericalangle DCB$; ihre Größe beträgt je $\frac{\gamma}{2}$. (γ sei die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB$.) Nun gilt auf Grund des Innenwinkelsatzes für Dreiecke
$60° + \frac{3\gamma}{2} = 180°$; es folgt $\gamma = 80°$.
Die Innenwinkel des Dreiecks ABC haben folgende Größen: $\sphericalangle CAB$: 60°, $\sphericalangle ABC$: 40°, $\sphericalangle BCA$: 80°.

Ma 8 ■ 2998 $\sphericalangle AMB$ ist Zentriwinkel über $\widehat{AB}$, $\sphericalangle ADB$ ist Peripheriewinkel über $\widehat{AB}$; es gilt stets $\alpha' = \frac{\gamma}{2}$ (1) (γ sei die Größe des Winkels $\sphericalangle AMB$). $\sphericalangle MAB$ ist Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ABM, und es gilt $\alpha = 90° - \frac{\gamma}{2}$. In diese Gleichung setzen wir (1) ein und erhalten
$\alpha = 90° - \alpha'$ bzw. $\alpha + \alpha' = 90°$.
Daraus folgt, daß nur dann $\alpha = \alpha'$ ist, wenn $\alpha = \alpha' = 45°$ ist.

Ma 8 ■ 2999 Ein Quadrat mit 1 km Umfang hat eine Seitenlänge von 250 m; sein Flächeninhalt ist $A = 250^2\text{ m}^2 = 62\,500\text{ m}^2$. Es gilt $1\text{ ha} = 10\,000\text{ m}^2$; also hat das Quadrat einen Flächeninhalt von 6,25 ha. Ein Kreis mit einem Umfang von 1 km hat einen Radius von $r = \frac{u}{2\pi} = \frac{1000\text{ m}}{2\pi}$
$\approx 159{,}15$ m und einen Flächeninhalt von
$A = \pi \cdot r^2 \approx \pi \cdot 159{,}15^2\text{ m}^2$
$\approx \pi \cdot 25\,328{,}72\text{ m}^2 \approx 79\,572{,}52\text{ m}^2$;
das sind rund 7,96 ha. Wir setzen
$6{,}25\text{ ha} \mathrel{\hat{=}} 100\,\%$, $7{,}96\text{ ha} \mathrel{\hat{=}} x\,\%$ und erhalten $x \approx 127{,}36\,\%$. Die Fläche, die von einem Kreis mit 1 km Umfang umschlossen wird, ist um etwa 27 % (mehr als ein Viertel) größer als die von einem Quadrat gleichen Umfangs.

Ma 8 ■ 3000 Die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB$ beträgt 60°, die des Winkels $\sphericalangle ACD$ 90°; daraus folgt, daß der Winkel $\sphericalangle BCD$ eine Größe von 30° hat. Da Winkel $\sphericalangle ABC$ eine Größe von 60° hat, beträgt die Größe des Winkels $\sphericalangle CBD$ 120°, da A, B und D auf einer Geraden liegen. Wegen des Satzes über die Innenwinkelsumme im Dreieck hat der Winkel $\sphericalangle BDC$ eine Größe von 30°.
Da nun $\sphericalangle BCD \cong \sphericalangle BDC$ ist, folgt, daß das Dreieck BDC gleichschenklig ist. Somit gilt $\overline{CB} \cong \overline{BD}$ und damit auch $\overline{AB} \cong \overline{BD}$, w. z. b. w.



Na/Te 8 ■ 446 Gesucht: η;
Gegeben: $U = 220$ V, $I = 2{,}7$ A,
$m_{H_2O} = 2$ kg, $\vartheta_1 = 80$ °C, $\vartheta_2 = 100$ °C,
$\Delta\vartheta = 80$ K, $c_{H_2O} = 4{,}19 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$,
$t = 24\text{ min} = 24 \cdot 60$ s
Vom Tauchsieder abgegebene Energie $W_1 = U \cdot I \cdot t$, vom Wasser aufgenommene Energie $W_2 = c \cdot m \cdot \Delta\vartheta$, Wirkungsgrad

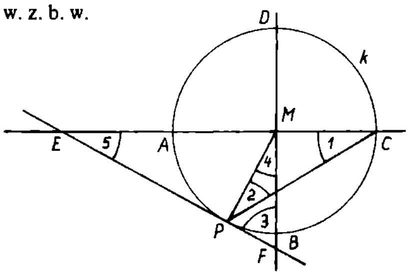
$\eta = \frac{W_2}{W_1}$ eingesetzt: $\eta = 0{,}78$.
Der Wirkungsgrad beträgt 78 %.

Na/Te 8 ■ 447 Gesucht: t (in s);
Gegeben: $v = 300\,000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$,
$s = 150\,000\,000$ km.
Wenn das Licht 300 000 km in 1 s zurücklegt, dann benötigt es $\frac{150\,000\,000}{300\,000}$ s für die Strecke Sonne – Erde. Das ergibt $t = 500$ s.
Das Licht benötigt 500 s für die Strecke Sonne – Erde.

Ma 9 ■ 3001 Es sei n die gesuchte natürliche Zahl, dann ist $(n-1)$ ihr Vorgänger und $(n+1)$ ihr Nachfolger. Nach den weiteren Angaben läßt sich die Gleichung $(n-1)(n+1) - 3n = 39$ aufstellen. Äquivalente Umformungen führen zu der quadratischen Gleichung
$n^2 - 3n - 40 = 0$ mit den Lösungen $n_1 = 8$ und $n_2 = -5$.
Da n eine natürliche Zahl ist, trifft nur $n_1 = 8$ zu. Probe:
$7 \cdot 9 = 63$ und $63 - 3 \cdot 8 = 39$.

Ma 9 ■ 3002
Wegen $a > 0$, $b > 0$ und $c > 0$ gilt
$\frac{1}{a+b} > \frac{1}{a+b+c}$, $\frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+b+c}$,
$\frac{1}{c+a} > \frac{1}{a+b+c}$. Daraus folgt
$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > \frac{3}{a+b+c}$,
w. z. b. w.

Ma 9 ■ 3003 Numeriert man die Größen der fünf Winkel in der angegebenen Reihenfolge mit 1, 2, 3, 4, 5, so ergeben wegen des Satzes über die Innenwinkelsumme in Dreiecken
$1 + 2 + 4 = 180° - 90° = 90°$ und
$3 + 5 = 180° - 90° = 90°$, also
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 90° + 90° = 180°$,
w. z. b. w.



Ma 9 ■ 3004 Wegen der in der Gleichung vorkommenden Ziffer 9 muß $x \in N$ und $x > 9$ sein. Wir stellen die Gleichung im x-adischen Positionssystem dar:
$[(6x^2 + 8x + 9) - (5x^2 + x + 1)] \cdot (x+1)$
$= x^3 + 9x^2 + 4x + 8$ bzw.
$(x^2 + 7x + 8)(x+1) = x^3 + 9x^2 + 4x + 8$.
Wir lösen diese Gleichung nach x auf, indem wir schrittweise äquivalent umformen:
$x^3 + 8x^2 + 15x + 8 = x^3 + 9x^2 + 4x + 8$,
$x^2 - 11x = 0$, $x(x-11) = 0$,
$x_1 = 0$, $x_2 = 11$.
Da $x > 9$ gelten muß, ist $x_2 = 11$ einzige Lösung. Die gegebene Gleichung stellt nur im Elfersystem eine wahre Aussage dar. Wir überprüfen:
$[(689)_{11} - (511)_{11}] \cdot (11)_{11} = (1948)_{11}$,
$(6 \cdot 11^2 + 8 \cdot 11 + 9 - 5 \cdot 11^2 - 11 - 1)$
$\cdot (11 + 1) = 11^3 + 9 \cdot 11^2 + 4 \cdot 11 + 8$,
$(726 + 88 + 9 - 605 - 11 - 1) \cdot 12$
$= 1331 + 1089 + 44 + 8$,
$206 \cdot 12 = 2472$, $2472 = 2472$ w. A.

Ma 9 ■ 3005
Aus $\frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{5} = n + 1$ folgt
$\frac{n(n+1)}{2} = 5(n+1)$, $\frac{n}{2} = 5$, also $n = 10$,
$n + 1 = 11$.
Probe: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 5 \cdot 11$.

Na/Te 9 ■ 448 Der Schleifkontakt teilt den Spannungsteiler in zwei Teilwiderstände von 200 Ω und 400 Ω auf. Parallel zum Widerstand von 200 Ω liegt ein Widerstand von 600 Ω. Der Widerstand der beiden parallel geschalteten Widerstände beträgt:
150 Ω $\left(\text{aus } \frac{1}{R} = \frac{1}{200\,\Omega} + \frac{1}{600\,\Omega}\right)$. Die Spannung von 240 V wird durch die hintereinandergeschalteten Widerstände von 150 Ω und 200 Ω geteilt. Es gilt $U_1 : U = 150\,\Omega : 400\,\Omega$. Mit $U = 240$ V ergibt sich $U_1 = 65$ V. Die Klemmenspannung am Widerstand beträgt 65 V.

Na/Te 9 ■ 449 Gesucht: I_{ges} (in A);
Gegeben: $U = 220$ V, $P_1 = 1{,}6$ kW
$= 1600$ W, $P_2 = 750$ W
Das Netz muß eine Gesamtleistung von $P = P_1 + P_2$ bringen. $P = 2350$ W;
da $P = U \cdot I$ ist, folgt $I = \frac{P}{U}$.
Es fließt ein Strom von 10,7 A. Da die Leitung nur mit 10 A abgesichert ist, würde der Automat ansprechen. Das Bügeleisen darf nicht zugeschaltet werden.

Ma 10/12 ■ 3006
Wir zerlegen die Potenzen und erhalten
$25 \cdot 25^x - 25 \cdot \frac{1}{25^x} = 120$. Nun nehmen wir weitere äquivalente Umformungen vor:
$25^x - \frac{1}{25^x} = 4{,}8$, $(25^x)^2 - 4{,}8 \cdot 25^x - 1 = 0$.
Wir setzen $25^x = a$ und erhalten weiter $a^2 - 4{,}8a - 1 = 0$. Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung nach a liefert die beiden Lösungen $a_1 = 5$ und $a_2 = -0{,}2$. Es gilt also $25^x = 5$ oder $25^x = -0{,}2$. Da $25^x = -0{,}2$ von keinem reellen x erfüllt wird, kann nur $25^x = 5$, also $x = \frac{1}{2}$ Lösung der gegebenen Gleichung sein.
Probe:
$25^{1,5} - 25^{0,5} = 120$, $\sqrt{25^3} - \sqrt{25} = 120$,
$125 - 5 = 120$, $120 = 120$.
Die Probe bestätigt die Lösung.

Ma 10/12 ■ 3007 Bezeichnet man die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ mit α, so gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC
$A = \frac{1}{2} \cdot 53{,}9 \cdot 34{,}6 \cdot \sin\alpha$
$= \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \sin\alpha$, $A = 932{,}47 = \frac{1}{2} x^2$,
$x^2 = 1864{,}94$, $x \approx 43{,}18$.
Die an den Straßen liegenden Seiten des Grundstücks haben eine Länge von etwa 43,18 m.

Ma 10/12 ■ 3008 Sicher gilt $(\sin x + \cos x)^2 > 0$. Wir formen äquivalent um und erhalten
$\sin^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x > 0$.
Wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ergibt sich
$2 \cdot \sin x \cdot \cos x > -1$.
Nach Division durch 2 und anschließender Multiplikation mit (-1) erhalten wir schrittweise $\sin x \cdot \cos x > -0{,}5$,
$-\sin x \cdot \cos x < 0{,}5$, w. z. b. w.

Ma 10/12 ■ 3009
Nach dem Satz des Pythagoras gilt
$a^2 + \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = c^2$, also
$a^2 + \frac{a^2 + 2ac + c^2}{4} = c^2$,
$4a^2 + a^2 + 2ac + c^2 = 4c^2$,
$5a^2 + 2ac - 3c^2 = 0$,
$a^2 + \frac{2}{5}ac - \frac{3}{5}c^2 = 0$;
$a_{1,2} = -\frac{c}{5} \pm \sqrt{\frac{c^2 + 15c^2}{25}}$,
$a_{1,2} = -\frac{c}{5} \pm \frac{4c}{5}$, $a_1 = -c$ (entfällt, da negativ), $a_2 = \frac{3}{5}c$. Daraus folgt weiter
$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\frac{3}{5}c}{c} = \frac{3}{5}$, $\alpha = 36{,}87°$,
also $\beta = 53{,}13°$.

Ma 10/12 ■ 3010 Aus den Angaben in der Aufgabe kann man folgende Gleichung gewinnen: $(x+1)^2 + x^2 + 1 = 62$.
Die äquivalente Umformung dieser Gleichung führt zu folgender quadratischen Gleichung: $x^2 + x - 30 = 0$ mit den Lösungen $x_1 = 5$ und $x_2 = -6$. Für die Anzahl der Familienmitglieder kann nur die erste Lösung in Frage kommen. Die Familie bestand aus fünf Personen. Probe: Der Nachfolger von 5 ist 6, davon das Quadrat ist 36, das Quadrat „von uns" ist 25, der Nachfolger 26, und $36 + 26 = 62$.

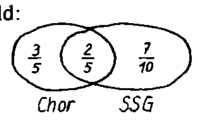
Na/Te 10/12 ■ 450 Gesucht: I (in A);
Gegeben: $R = 100\,\Omega$, $C = 4\,\mu$F, $f = 50$ Hz
Der Wechselstromwiderstand des ohmschen Widerstandes beträgt $R_{\sim} = R = 100\,\Omega$. Der Wechselstromwiderstand des Kondensators beträgt
$R_c = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot c}$; $R_C = 795\,\Omega$.
Im Wechselstromkreis müssen ohmsche und kapazitive oder induktive Widerstände geometrisch addiert werden (vgl. Zusammensetzung von Kräften).
Es gilt:
$R_{ges} = \sqrt{R_{\sim}^2 + R_C^2}$; $R_{ges} = 801\,\Omega$.
Nach dem Ohmschen Gesetz:
$I = \frac{U}{R}$ ergibt sich $I = 0{,}27$ A.

Na/Te 10/12 ■ 451 Ein Sekundenpendel ist ein Pendel, das für einen Hin- oder Hergang 1 s benötigt. Die Periodendauer eines Sekundenpendels beträgt also 2 s.
Gesucht: l_P (in m); l_A (in m);
Gegeben: $T = 2$ s; $g_P = 9{,}83\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$;
$g_A = 9{,}78\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.
Aus $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ folgt $l = \frac{T^2 \cdot g}{4 \cdot \pi^2}$;

Länge des Pendels am Pol: $l_P = 0,996$ m,
Länge des Pendels am Äquator:
$l_Ä = 0,991$ m.

Lösungen zu: Knifflige Sachen per Post (Heft 1/89)

▲1▲ Zeichnet man die Angaben in ein Mengendiagramm, dann ergibt sich folgendes Bild:



Da $\frac{2}{5}$ dem Chor und auch der SSG angehören, ergibt sich aus diesem Diagramm folgende Gleichung (y: Anteil der Schüler, die weder Mitglied der SSG noch des Chores sind):
$1 = \frac{3}{5} + \frac{7}{10} - \frac{2}{5} + y;\ 1 = \frac{9}{10} + y;\ y = \frac{1}{10}$.

▲2▲ a) Man zerlegt die Zahl 72 in ihre Primfaktoren: $72 = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3$.
b) Man sucht alle Teiler von 72;
Teiler: 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18; 24; 36; 72.
Feststellung: *378* (die zu suchende Zahl); nach a) muß hinten 0; 2; 4; 6; 8 stehen, da die Zahl auch durch 2 teilbar sein muß. Die Quersumme dieser Zahl muß durch 3 teilbar sein. Daraus ergeben sich folgende Zahlen:
33780; 13782; 23784; 33786; 13788
63780; 43782; 53784; 63786; 43788
93780; 73782; 83784; 93786; 73788.
Da aber nach b) diese Zahlen auch durch 4 teilbar sein müssen, bleiben nur noch folgende Zahlen übrig:
33780; 23784; 13788
63780; 53784; 43788
93780; 83784; 73788.
Da aber nach b) diese Zahlen auch durch 8 teilbar sein müssen, bleiben nur noch folgende Zahlen übrig:
23784; 53784; 83784. Da aber nach b) diese Zahlen auch durch 9 teilbar sein müssen, bleibt nur noch diese Zahl übrig: 53784; diese Zahl ist durch alle Teiler von 72 teilbar.

▲3▲ $V = 50$ l umgerechnet $V = 50\ dm^3$; da $V = a^3$ muß man die Umkehroperation nehmen, also:
$\sqrt[3]{50\ dm^3} = 3,7\ dm = 37\ cm;\ a = 37\ cm$.
1 Würfelfläche $= a^2$, also $(37\ cm)^2$;
1 Würfelfläche $= 1370\ cm^2$.
Da eine Fläche offen ist am Würfel, bleiben noch fünf Flächen,
also: $5A$; $1370\ cm^2 \cdot 5 = 6850\ cm^2$;
$6850\ cm^2 = 0,685\ m^2 \approx 0,7\ m^2$.
Es werden rund $0,7\ m^2$ Blech für die Anfertigung gebraucht.
Probe: $6850\ cm^2 : 5 = 1370\ cm^2$;
$\sqrt{1370\ cm^2} = 37\ cm;\ 37\ cm = 3,7\ dm;$
$(3,7\ dm)^3 = 50$ l.

▲4▲ Nach der Dreiecksungleichung gilt $a < b + c$. Daraus folgt weiter:
$a + a < a + b + c;\ 2a < a + b + c;$
$a < \frac{1}{2}\cdot(a + b + c) = \frac{1}{2}\cdot u.$

▲5▲
$\frac{2\ kg}{32\ \%} = \frac{x\ kg}{100\ \%};\ x\ kg = \frac{2\ kg \cdot 100\ \%}{32\ \%};$
$x = 6,25$ kg. Aus 6,25 kg Trauben erhält man 2 kg Rosinen.

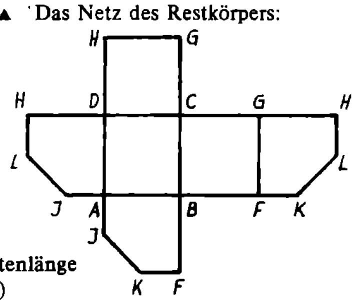
▲6▲ Auf die vollständige Lösung soll aus Platzgründen verzichtet werden. Hinweise zur Lösung:
Es genügt die Teilbarkeit durch 16, 9, 5, 7, 11, 13 und 17 nachzuweisen. Denn
16 ist die höchste 2er-Potenz
9 ist die höchste 3er-Potenz
5 ist die höchste 5er-Potenz
7 ist die höchste 7er-Potenz
11 ist die höchste 11er-Potenz
13 ist die höchste 13er-Potenz
17 ist die höchste 17er-Potenz.
Beachte: a ist Teiler von b genau dann, wenn die Elemente der Primfaktorzerlegung von a auch Elemente der Primfaktorzerlegung von b sind.

▲7▲ Folgende Feststellung muß getroffen werden: (x sei die gesuchte Zahl)
$x = 3y + 1;\ x = 4z + 2;\ x = 5a + 3;$
$x = 6b + 4.$
Man findet als Lösung die Zahl $x = 118$.

▲8▲ 1. Ausrechnen des Bruches $\frac{14,53662}{3 - 0,095}$,
2. Ergebnis von 1. mit 0,305 multiplizieren;
3. Ergebnis von 2. von 1,5291 subtrahieren;
4. Ergebnis von 3. durch 0,12 dividieren;
5. 0,228 durch Ergebnis von 4.;
6. $\frac{1}{3}:\frac{2}{3}$ ausrechnen (Punktrechnung vor Strichrechnung);
7. Ergebnisse von 6. und 5. addieren.
Das Ergebnis lautet 10.

▲9▲ $a_1 = 2\ cm,\ a_2 = 3\cdot a_1 = 6\ cm$
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3};\ \frac{A_{0_1}}{A_{0_2}} = \frac{1}{9};\ \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{27}$
$a_1 = x\ cm,\ a_2 = n\cdot a_1 = n\cdot x\ cm$
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{n};\ \frac{A_{0_1}}{A_{0_2}} = \frac{6\cdot x^2}{6\cdot(n\cdot x)^2} = \frac{1}{n^2};$
$\frac{V_1}{V_2} = \frac{x^3}{(b\cdot x)^3} = \frac{1}{n^3}.$

▲10▲ Das Netz des Restkörpers:



(Kantenlänge 2 cm)

Lösungen zu: Leontij Magnickij und seine Arithmetik, Heft 1/89

▲1▲ Zu Beginn hatte die Person x Rubel. Das erste Spielzeug kostete $\frac{1}{5}x$, als Rest verblieben $\frac{4}{5}x$. Das zweite Spielzeug kostete damit $\frac{4}{5}x\cdot\frac{3}{7}$ und der Rest betrug $\frac{4}{5}x\cdot\frac{4}{7}$. Das dritte Spielzeug kostete dann $\frac{4}{5}x\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{5}$ und der Rest war
$\frac{4}{5}x\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{5} = 1$ Rubel 92 Kopeken.
Hieraus folgt $x = 10,5$ Rubel. Die Spielzeuge kosteten somit 2,10 Rubel, 3,60 Rubel und 2,88 Rubel.

▲2▲ Es sei x die Anzahl der Schüler, die der Lehrer zur Zeit hat. Dann gilt
$2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100$, also $x = 36$.
Er hat 36 Schüler.

▲3▲ Es sei x der Preis des Pelzes. Dann gilt $12:7 = (12 + x):(5 + x)$, also $x = 4,8$. Der Pelz kostete 4,80 Rubel.

▲4▲ Der erste Wanderer geht in einem Tag $\frac{1}{30}$ des Weges, in x Tagen also $\frac{x}{30}$.
Der andere $\frac{x}{20}$. Damit ist $\frac{x}{30} + \frac{x}{20} = 1$, also $x = 12$.
Sie treffen sich nach 12 Tagen.

▲5▲ Der Mann trinkt pro Tag $\frac{1}{14}$ des Fäßchens. In 10 Tagen trinkt er somit $\frac{10}{14}$.
Die Frau schafft somit $\frac{4}{14}$ in 10 Tagen, also $\frac{4}{14}:10 = \frac{1}{35}$ an einem Tag. Sie braucht also 35 Tage.

▲6▲ Seine Frau erhielt $\frac{48\,000}{8}$ $= 6000$ Rubel. Bezeichnet x die Erbschaft der Tochter, dann ist
$3\cdot2\cdot x + x = 48\,000 - 6000$,
also $x = 6000$. Die Tochter erhielt also 6000 Rubel, die Söhne erhielten jeweils 12000 Rubel.

▲7▲ Der Preis für die Hufnägel ist:
$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + 8$
(für die 6 Hufnägel des 1. Hufeisens)
$+ 16 + 32 + \ldots + 512$
(für die 6 Hufnägel des 2. Hufeisens)
$+ 1024 + \ldots + 32\,768$
(für die 6 Hufnägel des 3. Hufeisens)
$+ 65\,536 + \ldots + 2\,097\,152$
(für die 6 Hufnägel des 4. Hufeisens).
Die Summe ist somit 4194303,75 Kopeken. *Für Schüler höherer Klassen:*
Es liegt eine geometrische Reihe mit dem Anfangsglied $\frac{1}{4}$, dem Quotienten 2 und dem Endglied $\frac{1}{4}\cdot2^{23}$ vor. Die Summenformel liefert das obige Ergebnis. Der Preis ist somit fast 4200000 Rubel.
Bemerkung: Bei der letzten Aufgabe liegt eine große Ähnlichkeit zu der Aufgabe der Bezahlung des Erfinders des Schachspiels vor. Für das erste Feld ein Reiskorn, für das 2. zwei Reiskörner usw.

Lösung zu: Ein anspruchsvolles Magisches Quadrat, Heft 1/89

Die Summen der Zeilen, Spalten und Diagonalen ergeben sich aus folgender Überlegung: Die Gesamtsumme aller Zahlen von 1 bis 289 ist
$S = \frac{289\cdot289}{2} = 41\,905.$

137	282	121	266	105	250	89	234	73	218	57	202	41	186	25	170	9
10	138	283	122	267	106	251	90	235	74	219	58	203	42	187	26	154
155	11	139	284	123	268	107	252	91	236	75	220	59	204	43	171	27
28	156	12	140	285	124	269	108	253	92	237	76	221	60	188	44	172
173	29	157	13	141	286	125	270	109	254	93	238	77	205	61	189	45
46	174	30	158	14	142	287	126	271	110	255	94	222	78	206	62	190
191	47	175	31	159	15	143	288	127	272	111	239	95	223	79	207	63
64	192	48	176	32	160	16	144	289	128	256	112	240	96	224	80	208
209	65	193	49	177	33	161	17	145	273	129	257	113	241	97	225	81
82	210	66	194	50	178	34	162	1	146	274	130	258	114	242	98	226
227	83	211	67	195	51	179	18	163	2	147	275	131	259	115	243	99
100	228	84	212	68	196	35	180	19	164	3	148	276	132	260	116	244
245	101	229	85	213	52	197	36	181	20	165	4	149	277	133	261	117
118	246	102	230	69	214	53	198	37	182	21	166	5	150	278	134	262
263	119	247	86	231	70	215	54	199	38	183	22	167	6	151	279	135
136	264	103	248	87	232	71	216	55	200	39	184	23	168	7	152	280
281	120	265	104	249	88	233	72	217	56	201	40	185	24	169	8	153

(bearbeitet von Ing. A. Körner, Leipzig)

Die Summe aller Zeilen (aber auch Spalten und Diagonalen) muß diese Gesamtsumme ergeben. Bei 17 Zeilen muß jede Zeile (Spalte und Diagonale) die Summe
$S_Z = \frac{S}{17} = \frac{41\,905}{17} = 2465$ ergeben.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. B. Goldschmidt Heft 2/89

▲ 2978 ▲

$$F = (px_1 + q - y_1)^2 + (px_2 + q - v_2)^2 + (px_3 + q - y_3)^2$$
$$= p^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 3q^2 + (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + 2pq(x_1 + x_2 + x_3) - 2p(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) - 2q(y_1 + y_2 + y_3).$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} A &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 \\ B &= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \\ C &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \\ D &= x_1 + x_2 + x_3 \\ E &= y_1 + y_2 + y_3 \end{aligned} \qquad (1)$$

Wenn man q festhält, ist F eine quadratische Funktion von p:

$$F = p^2A + 2p(qD - C) + (3q^2 - 2qE + b). \qquad (2)$$

Das Minimum von F bezüglich p liegt bei

$$p = \frac{-(qD - C)}{A} \qquad (3)$$

und hat den Wert

$$F = \frac{(q^2(3A - D) - 2q(EA - CD) + (AB - C^2))}{A}. \qquad (4)$$

Dies ist eine quadratische Funktion in q mit dem Minimum bei

$$q = \frac{(AE - CD)}{(3A - D^2)}. \qquad (5)$$

Setzt man (5) in (3) ein, so erhält man

$$p = \frac{(3C - DE)}{(3A - D^2)}. \qquad (6)$$

Das Minimum von F liegt also bei den durch (5), (6) berechneten Werten. Für das konkrete Beispiel bedeutet das
$A = 14$, $B = 14$, $C = 13$, $D = 6$, $E = 6$
und damit $p = 0{,}5$, $q = 1$.

Lösungen zur Sprachecke

▲ 1 ▲ Zwei aufeinanderfolgende zweistellige Zahlen addierte man und stellte bei ihrer Summe die Ziffern um. Als Resultat erhielt man die größere der addierten Zahlen. Welche Zahlen addierte man?
Lösung: Da die beiden addierten Zahlen ein zweistelliges Dezimalsymbol besitzen und der größere Summand aus dem Dezimalsymbol der Summe durch Umstellung hervorgeht, hat die Summe ebenfalls eine zweistellige Dezimaldarstellung. (Der Fall, daß die Summe das Zehnfache des größeren Summanden ist, kann hier nicht auftreten, da die beiden Summanden aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind.)
Wir machen deshalb für die Summe der beiden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen den Ansatz
$10a + b$ $(1 \leq a \leq 9;\ 0 \leq b \leq 9;\ a, b \in N)$.
Laut Aufgabe gilt nun

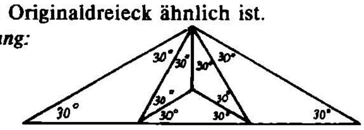
$$10a + b = 10b + a - 1 + 10b + a$$

also $\quad 8a + 1 = 19b$.
Weil auf Grund des Ansatzes gelten muß

$$0 \leq 8a \leq 72,$$

folgt $\quad 1 \leq 19b \leq 73$.
Hieraus folgert man, daß die Aufgabe nur für $a = 7$ und $b = 3$ eine Lösung haben kann. Tatsächlich gilt $73 = 36 + 37$. Die addierten aufeinanderfolgenden zweistelligen natürlichen Zahlen sind 36 und 37.

▲ 2 ▲ Teile ein Dreieck in fünf ähnliche Dreiecke
Wir lernen, daß zwei Dreiecke ähnlich sind, wenn die Winkel des einen Dreiecks denen des anderen entsprechen. Wir können auch sagen, daß sich zwei Dreiecke ähnlich sind, wenn sie dieselbe Form haben.
Die Zeichnung zeigt ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Winkel 30°, 30° und 120° betragen. Finde einen Weg, dieses Dreieck in fünf Dreiecke zu teilen, von denen jedes zum Originaldreieck ähnlich ist.
Lösung:



▲ 3 ▲ Bumerang
Folge der Pfeilrichtung und führe die 12 Rechenoperationen aus, um die Zahl x zu finden. Die Zahl x befindet sich zwischen 1 und 100 und ist am Anfang und am Ende des Kreislaufs gleich.
Hinweis: Dieses Spiel kennt nur ganze und von Null verschiedene Zahlen als Ergebnisse jeder Rechenoperation.
Lösung: $x = 66$.

Lösungen zum alpha-Ferienmagazin

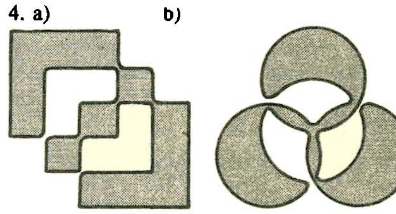
Zum Titelblatt:
$172 + 60 + 34 + 513 + 35 = 814$.
$656 + 656 = 1312$ oder $757 + 757 = 1514$,
oder $858 + 858 = 1716$
oder $959 + 959 = 1918$.
$16\,850 + 20\,640 = 37\,490$.
$3486 + 7425 = 10\,911$.
$5 + 54 + 543 + 5432 + 54\,321 = 60\,355$.

1. a) 2 Kugeln; b) 3 Würfel.

2. $3 - 344 + 5 + 566 - 77 = 153$.

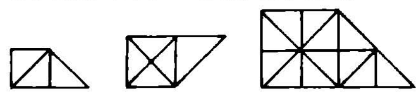
3. a) $11^2 - 121$;
b) $(1 \cdot 8) = 8 \cdot 1 = 8^1 = 8$;
c) $28 + 3 = 31$; $10 + 1 = 11$; $18 + 2 = 20$;
d) $2 \cdot 99 = 198$;
e) $9567 + 1085 = 10\,652$.

4. a) b)



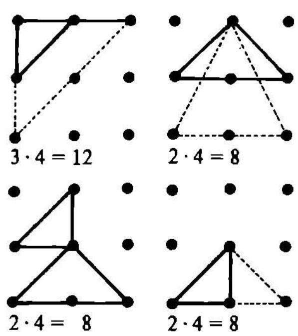
5. Es gibt 13 verschiedene Wege:
1–2–3–4–5–6–7; 1–3–4–5–6–7;
1–2–4–5–6–7; 1–2–3–5–6–7;
1–2–3–4–6–7; 1–2–3–4–5–7;
1–3–4–6–7; 1–3–5–6–7; 1–3–4–5–7;
1–2–4–6–7; 1–2–4–5–7; 1–2–3–5–7;
1–3–5–7.

6. Insgesamt 112 Trapeze sind zu finden.

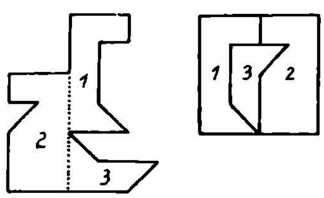


48 48 16

7. Es können 36 gleichschenklige Dreiecke gebildet werden.

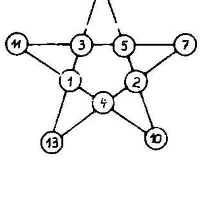


8.



9. Es müssen von oben nach unten eingesetzt werden: Roller, Fahrrad, Auto.

10.



11. Figur b

Einiges über das Sehnenviereck

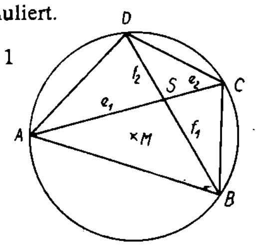
Wenn man die Aufgabe hat, zu einem Dreieck den Mittelpunkt des Umkreises und den Mittelpunkt des Inkreises zu konstruieren, dann wird man gewöhnlich mit Hilfe der üblichen Grundkonstruktionen (mindestens) zwei Mittelsenkrechte und (mindestens) zwei Winkelhalbierende zeichnen. Es gibt indes für die Lösung dieser Aufgabe einen einfacheren Weg. Er ergibt sich aus Eigenschaften des Sehnenvierecks.
Diese Figur soll im folgenden näher betrachtet und untersucht werden.
Im Lehrbuch der Klasse 7 wird (S. 144) der Begriff „Sehnenviereck" definiert. Es heißt dort: „Als Sehnenviereck bezeichnet man jedes Viereck, zu dem es einen Umkreis gibt."
Gleichwertige Erklärungen für diesen Begriff wären zum Beispiel: „Ein Viereck, dessen Eckpunkte auf ein und demselben Kreis liegen, heißt Sehnenviereck."
Oder: „Wenn alle Seiten eines Vierecks Sehnen ein und desselben Kreises sind, dann ist dieses Viereck ein Sehnenviereck."
An gleicher Stelle wird auch eine Eigenschaft der Innenwinkel solcher Vierecke genannt und bewiesen:
„In jedem Sehnenviereck beträgt die Summe gegenüberliegender Winkel jeweils 180°."

Aufgaben

▲1▲ Weise nach, daß jedes Rechteck und jedes gleichschenklige Trapez ein Sehnenviereck ist! Wo liegt jeweils der Mittelpunkt des Umkreises?
▲2▲ Von einem Sehnenviereck $ABCD$ sei die Seite $\overline{AB}$ gleichzeitig Durchmesser des Umkreises; ferner gelte: $\overline{AD} = \overline{CD}$.
Der Winkel ADC sei 130° groß. Berechne die Größe der drei anderen Innenwinkel dieses Vierecks!

Auch die Diagonalen des Sehnenvierecks haben eine bemerkenswerte Eigenschaft:
In jedem Sehnenviereck ist das Produkt aus den Längen der Abschnitte der einen Diagonale gleich dem Produkt aus den Längen der Abschnitte der anderen Diagonale. (Dabei werden als Abschnitte die Teile bezeichnet, die durch den Schnittpunkt der Diagonalen entstehen.)
Bezogen auf das Bild 1 bedeutet das:
Es gilt $e_1 \cdot e_2 = f_1 \cdot f_2$.
Dieser Satz wird auch „Sehnensatz" genannt und bisweilen für zwei einander schneidende Sehnen eines Kreises (also ohne Bezugnahme auf ein Sehnenviereck) formuliert.

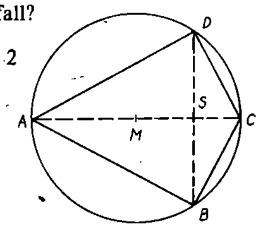
Bild 1



Aufgaben

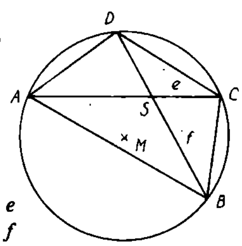
▲3▲ Suche nach einer solchen Formulierung!
▲4▲ Beweise diesen Satz! Weise dazu nach, daß die Dreiecke ABS und CDS einander ähnlich sind! (Denke an den Satz über Peripheriewinkel!) Stelle aus den Seiten dieser Dreiecke eine geeignete Verhältnisgleichung auf, und bilde daraus die Produktgleichung!
▲5▲ Wende diesen Satz auf ein Sehnenviereck an, dessen eine Diagonale Durchmesser des Umkreises und Symmetrieachse des Vierecks ist! (Siehe Bild 2.) Was für ein Viereck ist dieses Sehnenviereck? Welchen Satz erhält man in diesem Spezialfall?

Bild 2



Weniger bekannt ist folgender Satz:
„Das Produkt der Diagonalen des Sehnenvierecks ist gleich der Summe der Produkte der gegenüberliegenden Seitenpaare."
Bezogen auf das Bild 3 bedeutet das:

Bild 3



$\overline{AC} = e$
$\overline{BD} = f$

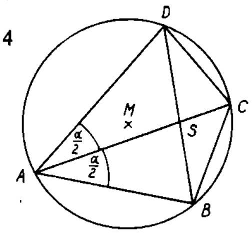
Es gilt $e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d$. Dieser Satz heißt auch „Satz von Ptolemäus".
Claudius Ptolemäus (auch: Ptolemaios) war ein bedeutender griechischer Astronom und Mathematiker. Er stammte aus Ägypten und lebte von etwa 90 bis etwa 165 unserer Zeitrechnung.
Er hat sich um die Entwicklung der Trigonometrie verdient gemacht, und auf ihn gehen auch die Bezeichnungen „Minute" und „Sekunde" zurück. Wir wollen diesen Satz hier ohne Beweis nutzen.

Aufgaben

▲6▲ Wende diesen Satz auf ein Rechteck an! Welchen bekannten Satz erhält man in diesem Falle?
▲7▲ Wende diesen Satz auf ein gleichschenkliges Trapez an!
Welche Beziehung ergibt sich daraus?
▲8▲ Nutze diese Beziehung, um die Länge der Diagonalen eines gleichschenkligen Trapezes zu berechnen, von dem die Längen der Grundseiten mit 8 cm bzw. 3 cm und die Längen der Schenkel mit je 5 cm gegeben sind!

Betrachten wir abschließend den Spezialfall, daß eine der Diagonalen des Sehnenvierecks einen Innenwinkel halbiert.
Das Bild 4 zeigt ein Beispiel dafür.

Bild 4



$\overline{AS} = e_1$
$\overline{AC} = e$
$\overline{AB} = a$
$\overline{AD} = d$

Aufgaben

▲9▲ Es gelte in diesem Dreieck (Bild 4) $\alpha = 50°$ und $\beta = 110°$. Berechne die Größe aller anderen in dieser Figur auftretenden Winkel!
▲10▲ Suche in dieser Figur (Bild 4) nach weiteren Winkeln, die die Größe $\frac{\alpha}{2}$ haben!
▲11▲ Zeige, daß die Dreiecke ASD und ABC einander ähnlich sind! Leite daraus die Beziehung $e_1 \cdot e = a \cdot d$ her!
▲12▲ Wende diesen Satz auf den unter ▲5▲ genannten Spezialfall an! Welchen bekannten Satz erhält man daraus?
▲13▲ Beweise, daß das Dreieck BCD gleichschenklig ist!
▲14▲ Begründe, daß die Mittelsenkrechte von $\overline{BD}$ sowohl durch M als auch durch C verläuft!

Aus dieser hier hergeleiteten Eigenschaft ergibt sich folgender Satz: „Die Mittelsenkrechte einer Dreieckseite und die Halbierende des dieser Seite gegenüberliegenden Winkels schneiden einander in einem Punkt des Umkreises."
Hat man also zu einem Dreieck die drei Mittelsenkrechten konstruiert, so braucht man nur jeweils den Schnittpunkt mit dem Umkreis und den gegenüberliegenden Eckpunkt des Dreiecks zu verbinden, um die Winkelhalbierende zu erhalten. (Streng genommen hat natürlich die Mittelsenkrechte zwei Schnittpunkte mit dem Umkreis. Es ist stets der zu benutzen, der in der durch die Dreieckseite bestimmten Halbebene liegt, in der sich der gegenüberliegende Eckpunkt nicht befindet.)

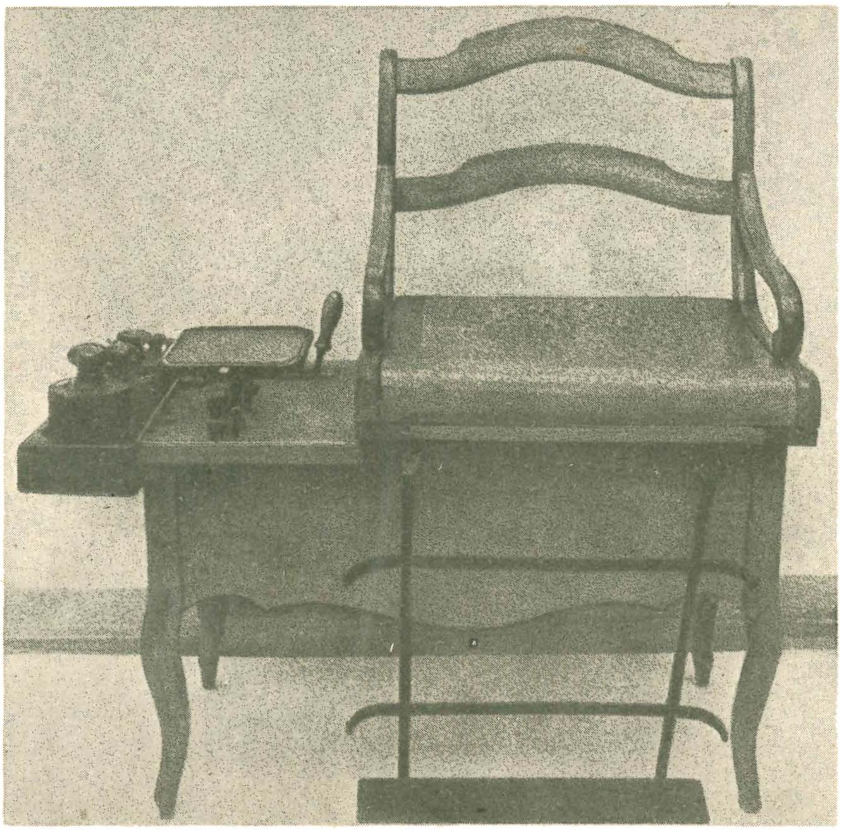
Aufgabe

▲15▲ Zeichne ein Dreieck ABC! Konstruiere seine drei Mittelsenkrechten! Zeichne dann, ohne die übliche Grundkonstruktion zu benutzen, die drei Winkelhalbierenden ein!

Auch das Eintragen der drei Seitenhalbierenden ist leicht möglich, da durch die Mittelsenkrechten die Mittelpunkte der Dreiecksseiten bereits fixiert sind.

J. Kreusch/K. Lehmann

Die Ratsherrenwaage – eine Attraktion des Oschatzer Museums



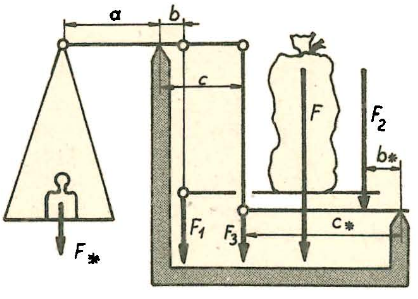
Spruch um 1848:
Jedes deutsche Ländchen
Hat sein eigen Quentchen.
Eigne Maße hat
Fast jede deutsche Stadt.

(Zu Beginn des 19. Jahrhunderts waren allein im Großherzogtum Baden 80 verschiedene Pfundmaße im Gebrauch.)

Die abgebildete, in Oschatz gebaute Personenwaage war 1862 als Exponat auf der Weltausstellung in London ausgestellt und befindet sich heute im Bereich „Entwicklung des Waagenbaus“ des Oschatzer Stadtmuseums. Der zugehörige Wägesatz fußt auf dem 1858 vom „Deutschen Zollverein“ eingeführten Zollpfund zu 500 g: Er enthält u. a. Wägestücke zu 1 Pf, 5 Pf, $\frac{1}{2}$ Pf = 250 g, $\frac{1}{4}$ Pf = 125 g und als kleinstes Wägestück $\frac{1}{100}$ Pf = 5 g.

Diese Waage ist eine Dezimalbrückenwaage: Die Masse der auf der Waagschale gelegten Wägestücke ist bei Gleichgewicht der 10. Teil der Masse der auf der Brücke sitzenden Person. Gegenüber dem abgebildeten Waagengestänge sind bei ihr Brücke und Waagschale nach oben gezogen.

Bei der 1823 von Quintenez und Schwilgué in Strasbourg erfundenen Brückenwaage genügen die Hebelarme b, c, b_* und c_* der Proportion $\frac{b}{c} = \frac{b_*}{c_*}$. Bei Gleichgewicht gelten die Gleichungen
$F = F_1 + F_2$, $F_2 b_* = F_3 c_*$ und
$F_* a = F_1 b + F_3 c$ und damit $\frac{F}{F_*} = \frac{a}{b}$.



Die auf der Brücke liegende Last wirkt durch Vermittlung des Waagengestänges so, als ob sie am Hebelarm b angreifen würde.

Brückenwaagen mit $\frac{a}{b} = 10$ heißen Dezimal-, solche mit $\frac{a}{b} = 100$ Zentesimalwaagen.

Im Oschatzer Waagenbaumuseum, dem einzigen unserer Republik, sind etwa 100 Waagen, historische und neuzeitliche, zu sehen, wird die Werkstatt eines Waagenbauers um 1900 gezeigt und wird die Entwicklung des Waagenbaues auch graphisch veranschaulicht.

Das Museum ist Dienstag bis Freitag von 10.00 bis 12.00 Uhr und von 13.00 bis 16.00 Uhr und sonntags von 13.00 bis 16.00 Uhr geöffnet. Nach vorheriger Absprache werden Besuchergruppen durch das Museum geführt.

W. Träger

Was ihr nicht rechnet, glaubt ihr,
sei nicht wahr,
Was ihr nicht wägt, hat für euch kein
Gewicht,
Was ihr nicht münzt, das, meint ihr,
gelte nicht.

Johann Wolfgang v. Goethe, Faust II

Nach dem römischen Schriftsteller Marcus Vitruvius Pollio stellte Archimedes (287 bis 212 v. u. Z.) fest, daß ein Kranz nicht, wie vom Hersteller angegeben, aus reinem Gold bestand:
Durch Abwiegen mit einer Waage verschaffte er sich zunächst einen mit dem Kranze gleichgewichtigen Goldklumpen. Als er anschließend nacheinander Goldklumpen und Kranz in ein randvoll mit Wasser gefülltes Gefäß eintauchte, lief beim Kranze mehr Wasser über als beim Goldklumpen.

In einer 1569 in Leipzig gedruckten Ausgabe des Sachsenspiegels (Rechtsbuch) heißt es:
„Wer falsch Gewicht und Maß macht / wird es bürglich gefodert er muß denen / die damit betrogen sind worden / zwifaltig widerstattung thun / Wird es aber peinlich gefordert / so sol er nach Keyserlichem Rechten / zur stauppen geschlagen werden“
(Original im Stadtarchiv Döbeln).

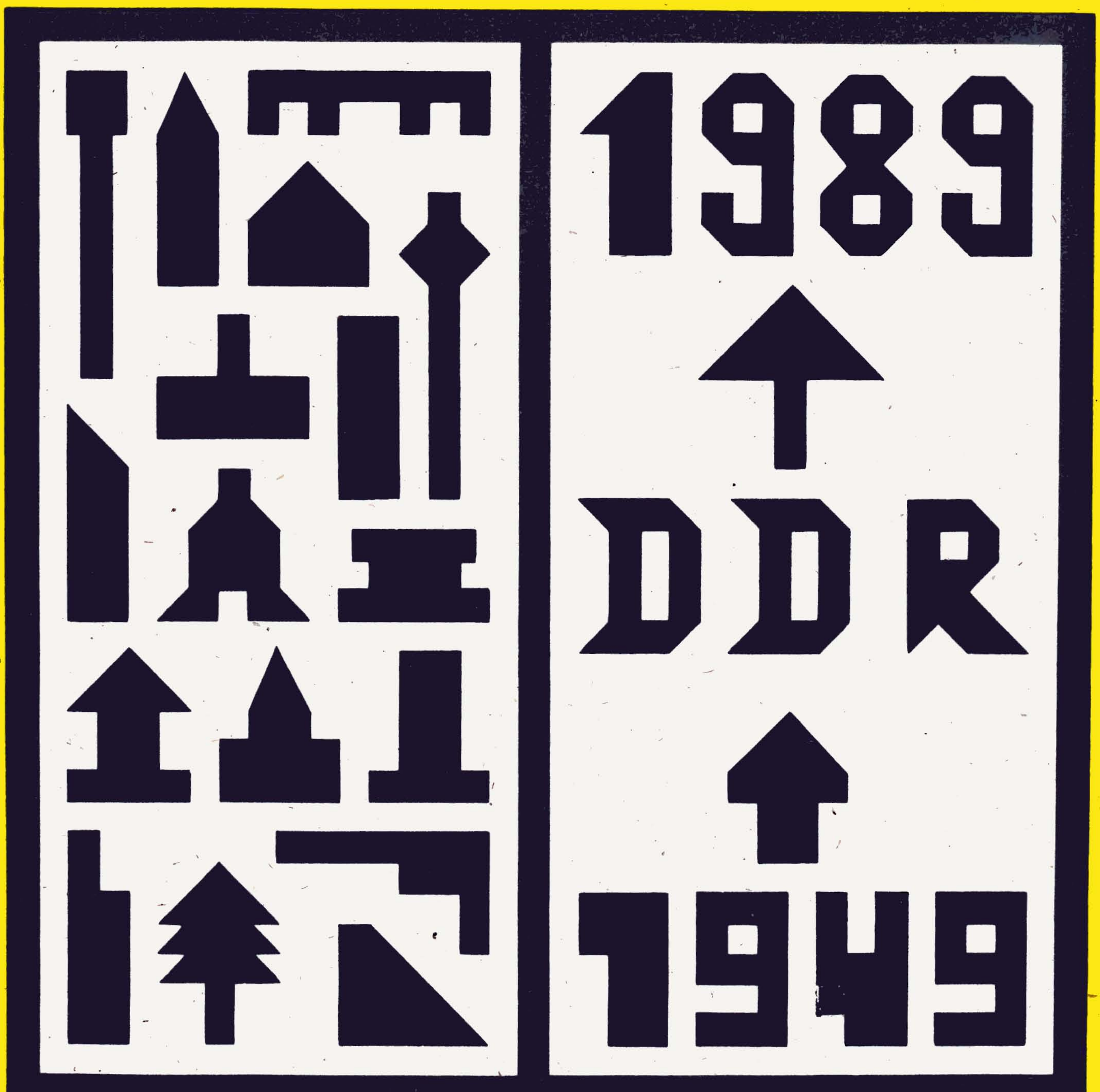
Zur Finanzierung des Siebenjährigen Krieges (1756 bis 1763) ließ Friedrich II. von Preußen Geld mit vermindertem Silbergehalt prägen. Zum Beispiel wurden bei einer solchen Aktion 4 Millionen Silbertaler in 11 Millionen Taler „verwandelt“.
Nach dem Siebenjährigen Krieg ließ er alle schlechten Münzen außer Kurs setzen und von den öffentlichen Kassen nur gegen ihren Metallwert zurücknehmen.

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
23. Jahrgang 1989
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

alpha

4

Mathematische
Schülerzeitschrift



Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold
Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027

Redaktion:
Dr. paed. Gabriele Liebau (Chefredakteur); Rosemarie Schubert (redaktioneller Mitarbeiter)
Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Dr. sc. Lothar Flade (Halle); Studiendirektor Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. C. P. Helmholz (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dr. rer. nat. W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. rer. nat. W. Schulz (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle)
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstr. 16, Leipzig 7010.
Fotos: F. Wagenseil, Werneuchen (S. 82); H. Boettcher, Weimar (S. 83); H. Beyrich, Karl-Marx-Stadt (S. 86, 87); Dr. P. Schreiber, Greifswald (S. 90/91)
Vignetten: L. Otto, Leipzig (Titelvignetten); The Australien Mathematics Teacher, Kenmore Hills (S. 92)
Techn. Zeichnungen: StR G. Gruß, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage von Dr. R. Mildner, Leipzig
Typografie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 11. April 1989
Auslieferungstermin: 9. August 1989

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Alphons weist die Schüler der 5. bis 7. Klasse auf speziell für sie geeignete Beiträge hin.

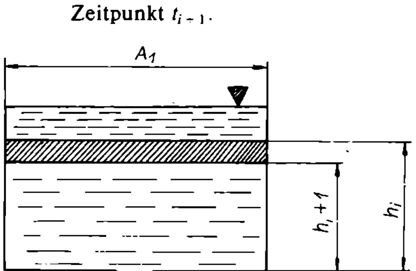
Leser antworten Lesern

Anfrage eines Lesers an „alpha" (Heft 5/1988; 3. Umschlagseite): „Ein Würfel mit einem Kilometer Kantenlänge sei mit Wasser gefüllt. Im Boden sei eine Öffnung von 100 mm Durchmesser.
Wie lange braucht das Wasser, um aus dem Gefäß herauszufließen?"
Der Leser war auf einen (geschätzten) Wert von mindestens 250 Jahren gekommen und bat um den „mathematischen Nachweis".

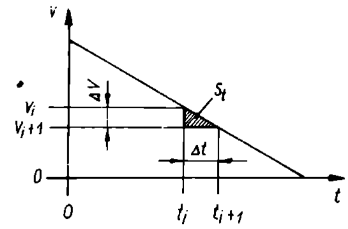
Versuch der Lösung

Vorbemerkung: Der gewünschte „Nachweis" bedarf zunächst der Physik!
Wenn eine Flüssigkeit (z. B. Wasser) aus einem offenen Gefäß durch eine im Verhältnis zum Gefäß kleine Bodenöffnung abfließt, ist die Ausflußgeschwindigkeit eine unmittelbare Funktion der Höhe der Flüssigkeitssäule über der Ausflußöffnung!
Nämlich: $v = \sqrt{2gh}$.
In dem vorgelegten Falle ist die Gesamtzeit eine Funktion im Sinne einer gleichförmig verzögerten Bewegung, denn die Flüssigkeitssäule sinkt allmählich auf Null und ebenso die Ausströmgeschwindigkeit. (Jeder Badeofen, den man leerlaufen läßt, zeigt das sehr anschaulich.)

Im nachstehenden Bild bezeichnen:
A_1 = Querschnittsfläche des Würfels (m^2)
A_2 = Querschnittsfläche der Ausflußöffnung (m^2)
h_i = Höhe der Wassersäule zu einem Zeitpunkt t_i
h_{i+1} = Höhe der Wassersäule zu einem Zeitpunkt t_{i+1}.



Da die einzige auf das Wasser wirkende Kraft die Schwerkraft ist, kann von einer gleichförmig verzögerten Bewegung ausgegangen werden.
Das während eines Zeitelementes Δt ausfließende Volumen ergibt sich aus: Ausflußquerschnitt × in der Zeit Δt zurückgelegter Weg, also:
$$\Delta V = A_2 \cdot s_t.$$
Bezeichnet man die Zeitdifferenz $t_{i+1} - t_i = \Delta t$ und analog $v_i - v_{i+1} = \Delta v$, dann ist $s_t = \frac{\Delta v \cdot \Delta t}{2}$ und damit
$$\Delta V = \frac{A_2}{2} \cdot \Delta_v \cdot \Delta_t, \tag{1}$$
außerdem ist aber auch
$$\Delta V = A_1 \cdot (h_i - h_{i+1}) \tag{2}$$
oder mit $h_i - h_{i+1} = \Delta h$
$$\Delta V = A_1 \cdot \Delta h. \tag{3}$$



Nun ist aber offensichtlich die Summe aller Δv gleich $v_{max} - v_{min}$ und entsprechend die Summe aller Zeitelemente Δt gleich $t_{max} - t_{min}$ und weil $v_{min} = 0$; ebenfalls $t_{min} = 0$ ergibt sich
$$\sum \Delta v = v_{max} \quad \text{und} \quad \sum \Delta t = t_{max}.$$
Damit folgt aus (1)
$$\sum \Delta V = V_{ges} = \frac{A_2}{2} \cdot v_{max} \cdot t_{max}$$
(wobei $t_{max} = t_{ges}$).
Weiterhin ist die Summe aller Δh gleich h_{ges}, woraus sich mit (3) die einfache Tatsache $V_{ges} = A_1 \cdot h_{ges}$ ergibt.
Damit erhält man
$$A_1 \cdot h_{ges} = \frac{A_2}{2} \cdot v_{max} \cdot t_{ges}. \tag{4}$$
Setzt man nun noch $v_{max} = \sqrt{2gh_{ges}}$ ein und stellt (4) entsprechend um, folgt
$$t_{ges} = \frac{A_1 \cdot h_{ges} \cdot 2}{A_2 \cdot \sqrt{2gh_{ges}}}.$$
Mit den Zahlenwerten
$$A_1 = 10^6\,m^2;\ A_2 = 10^{-2} \cdot \frac{\pi}{4}\,m^2;$$
$$h_{ges} = 10^3\,m;\ g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$$
folgt $t_{ges} = \dfrac{8 \cdot 10^{11}}{\pi \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1000}}$,
t_{ges} = 1 817 986 328 Sekunden, das sind, das Jahr mit 365 Tagen gerechnet, 57,648 Jahre.

Achtung!

Aufgrund der Überlegungen in der Herleitung der Lösung könnte man auf den Gedanken kommen, die Gesamtzeit mit einem Computer mit hinlänglicher Genauigkeit in der Größenordnung dermaßen berechnen zu wollen, daß man die Teilzeiten für die Höhen h_i berechnet.
Dabei könnte man die Höhe h_i von 1 000 Meter bis 1 Meter in Schritten zu je einem Meter einsetzen.
Den Rest könnte man dann im Bereich von ein Meter bis $\frac{1}{10\,000}$ Meter mit entsprechender Schrittweite berechnen.
Damit würde man (anscheinend!!!) genügend genau rechnen und doch vermeiden eine Division durch Wurzel aus Null zu bekommen. Diese Überlegung ist deswegen falsch, weil bei h_i gegen Null ein Grenzwert entsteht, der gegen Unendlich geht!
Der Versuch so zu rechnen, scheint berechtigt zu sein, denn im Bereich h_i = 1 000 Meter bis h_i = 1 Meter, Schrittweite = 1 m, ergibt sich eine Summe der Teilzeiten von 1 776 463 055 Sekunden. Im Bereich von h_i = 1 Meter bis h_i = 0,01 Meter und Schrittweite = 0,01 Meter ergibt sich aber schon eine Summe von 5 343 560 757 Sekunden!
Treibt man diesen Versuch noch weiter, ergibt sich z. B. für eine Restmenge von $10\,m^3$ eine Ausflußzeit von $1{,}44 \cdot 10^{11}$ Sekunden.
Womit die obige Aussage über den Grenzwert bestätigt wird!

A. Körner

Und noch einmal – **Achtung!**
In dieser Lösung wird eine Voraussetzung verwendet, die eigentlich des Beweises bedarf. Versucht also, diese Voraussetzung zu finden und den Beweis für ihre Richtigkeit zu erbringen.
Eure Lösung könnt ihr an uns schicken.
Wir sind schon gespannt darauf!

Alphons

alpha-Preisaufgabe

Das moderne Hexeneinmaleins
(frei nach Goethe)

Aus 5 mach 5, mach 2, mach 3
das schützt euch vor dem Einerlei.
Die 6 bleibt 6 und wird zur 9
das scheint die Hexe zu erfreu'n!
Und aus der 7 mach die 8
das ist mit viel Verstand gemacht!
4 wird zur 4 – oder zur 7
nun sind uns nur noch 2 geblieben!
Aus 6 mach keins – aus 2 mach 1
das ist das Hexeneinmaleins!

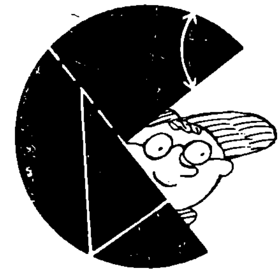
Unser Hexlein ist wirklich modern! Das wird euch klar, wenn ihr des Rätsels Lösung findet!
Sendet diese bitte an den Urheber dieses Rätsels:

Helmut Pätzold
Mattei 62
Waren
2060

Unter den richtigen Einsendungen werden drei Gewinner ausgelost.
Ihnen winkt ein Autogramm unseres „Schwimmhexleins" Kristin Otto!

Alphons

In freien Stunden · alpha-heiter

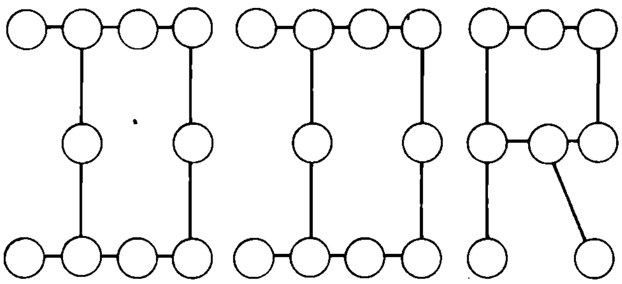


Ein mathematischer Blumenstrauß

Liebe Freunde!
In diesem Jahr feiert die Deutsche Demokratische Republik – unser Heimatland – ihren 40. Geburtstag. Auch wir wollen zu den Gratulanten zählen, und wir möchten unserer Republik mit den folgenden mathematischen Knobeleien einen herzlichen Geburtstagsgruß überbringen.

DDR-40

Tragt die ganzen Zahlen von 0 bis 27 so in die abgebildete Figur ein, daß die Zahlensumme auf jedem geradlinigen Abschnitt 40 beträgt!



Von Bezirk zu Bezirk

In der abgebildeten Buchstaben-Matrix sind alle 15 Bezirksstädte der DDR eingetragen, und dies entweder von links nach rechts, von rechts nach links oder von oben nach unten.
Findet diese 15 Städtenamen und markiert (etwa durch Streichung) deren Buchstaben! (Einige Buchstaben gehören mehreren Städtenamen an; diese brauchen aber nur einmal markiert zu werden.)

G	R	U	B	N	E	D	N	A	R	B	U	E	N
M	O	I	L	H	U	S	C	H	W	E	R	I	N
K	S	R	T	R	U	F	K	N	A	R	F	O	P
H	T	D	A	T	S	X	R	A	M	L	R	A	K
A	O	R	O	Z	A	R	E	G	E	I	S	S	O
L	C	R	D	R	E	S	D	E	N	N	T	E	C
L	K	H	N	I	G	R	U	B	E	D	G	A	M
E	R	F	U	R	T	K	S	U	B	T	T	O	C
L	E	I	P	Z	I	G	P	O	T	S	D	A	M

Diejenigen Buchstaben, die am Schluß noch nicht markiert sind, ergeben (v. l. n. r. und v. o. n. u. gelesen) den Namen einer wissenschaftlichen Zeitschrift der DDR, die für Computerfreunde sicher höchst interessant ist.

Geographisches

Wie lang ist jeder der genannten acht Flüsse unseres Landes, wenn die folgenden acht Aussagen gelten:
(1) Die Elbe ist mit einer Länge von 1165 km der drittgrößte Strom Mitteleuropas.
(2) Die Bode ist 13 km länger als die Peene.
(3) Die Länge der Oder beträgt 7 km mehr als die doppelte Länge der Saale.
(4) Die Länge der Elbe beträgt 18 km weniger als die siebenfache Länge der Bode.
(5) Die Länge der Elbe beträgt 13 km mehr als die Summe der Längen von Havel, Saale und Spree.
(6) Die Länge der Saale beträgt 41 km weniger als die dreifache Länge der Peene.
(7) Die Länge der Oder beträgt 168 km weniger als die dreifache Länge der Havel.
(8) Die Länge der Spree beträgt 10 km mehr als die dreifache Länge der Mulde (ohne Zwickauer und Freiberger Mulde).

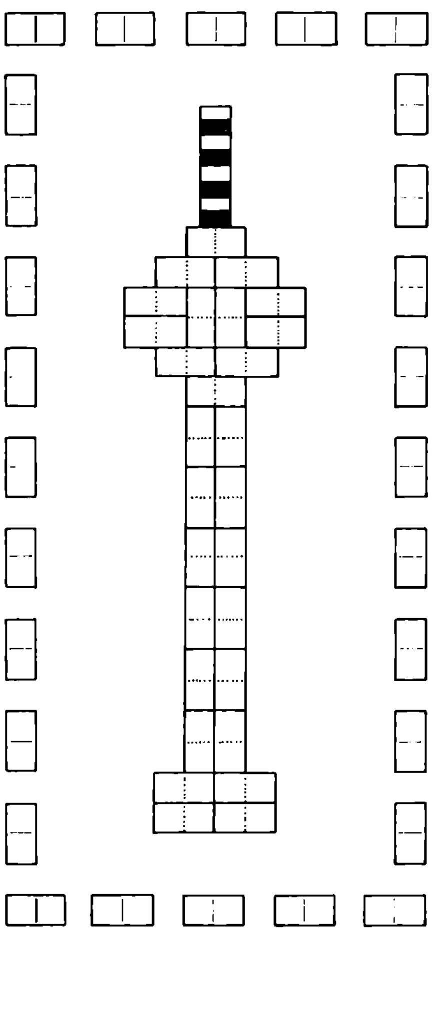
Von Stadt zu Stadt

In dem folgenden Text sind die Namen von 40 Städten unserer Republik versteckt, die es zu finden gilt:
Neues Schuljahr, erster Schultag, und es klingelte zur Hofpause. Endlich waren wir wieder für die Dauer von zwanzig Minuten von Chemie mit Naphthalen, von Geographie mit Spitzbergen und von Biologie mit Forstschädlingen und Arterneuerung befreit. Alle Schüler strömten auf den Schulhof in die Sonne. „Bergziege" und „Grauwolf" entwickelten dabei ein rasantes Tempo und wurden von unserem Klassenlehrer, Herrn Barth, von uns auch „Doktor Gaudium" genannt, mit Nachdruck ermahnt.
Da die schöne Ferienzeit zu Ende war, gab es viel zu erzählen:
Da hörte man vom Dresdener Zwinger, vom Leipziger Völkerschlachtdenkmal, von der historisch wert-

vollen alten Burg in Querfurt, von einer Reise nach Tabor, nach Bulgarien und an die Wolga.
Steffen Schaller hatte die Ferienzeit bei seiner Oma in Wismar verbracht, und von dort aus hatte er auch Rostock und Güstrow besucht. Hans Merseburger, wir nennen ihn „Isegrim", machte ein todernstes Gesicht, als er uns einen Calauer auftischen wollte.
„Kojenaugust" wieherte, und „Jungfrau Maria" lachte albern auf. „Hallo Schatz!", rief Uwe ihr zu. „Wer da?", unkte sie zurück und zog reizvoll ihre Bluse zurecht. Marie sah neckisch aus, doch sie war schwer in Sorge um ihre neue Bluse, denn diese war bei der Hitze nicht mehr wie ein Laken so weiß. „Wasser!", rief Peter aus Jux ganz laut. Wir aber linderten unseren Durst mit dem feierlichen Schwur, zentnerweise am Nachmittag Speiseeis zu verzehren. Gerade da ertönte das Vorklingeln, und wir eilten in den Klassenraum zurück.

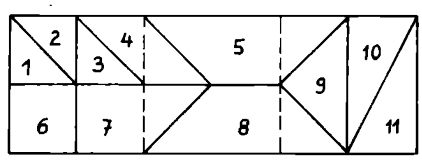
Fernsehturm-Domino

Nehmt die 28 Steine eines vollständigen Dominospiels zur Hand, und löst damit die folgenden beiden Aufgaben:
a) Legt die 28 Domino-Steine so zu dem abgebildeten stilisierten Berliner Fernsehturm zusammen, daß die Augensummen in den waagerechten Domino-Reihen stets 8, 9 bzw. 10 betragen, je nach dem, ob diese Reihen aus 2, 4 bzw. 6 Domino-Halbteilen bestehen!
b) Legt die 28 Domino-Steine so zu einem geschlossenen Rechteckring (siehe Umrandung des Fernsehturms) zusammen, daß die Domino-Anlegeregel (es dürfen nur gleiche Halbteile aneinander liegen) erfüllt ist!



Erbauliche Ansichten

Zerschneidet ein rechteckiges Stück Karton, dessen Seitenlängen im Verhältnis 1:3 stehen, in die abgebildeten 11 Teile, und legt mit diesen 11 Teilen jede Figur auf dem Titelblatt dieses alpha-Heftes zusammen! Die Teile dürfen beidseitig verwendet werden.



Ein grundlegendes Recht

Gesucht sind 15 waagerecht einzutragende mathematische Begriffe folgender Bedeutung:
1. spezielles Viereck, 2. Hochzahl, 3. Rechenautomat, 4. Kegelschnitt, 5. kurvenberührende Gerade, 6. Sternkurve, 7. Koordinaten-Nullpunkt, 8. eindeutige Abbildung, 9. schräger Abhang, 10. Grundbegriff der Analysis, 11. Gleichungsergebnisse, 12. rationale Rechenoperation, 13. Umklappung, 14. Primzahl, 15. Grundbegriff der Vektoranalysis.

1				T			K
2			O			N	
3		M			T		
4		P			B		
5			G			T	
6				O			E
7				R			G
8			K			O	
9				H			G
10				G			L
11			U			E	
12		V			I		
13		L			U		
14			N			H	
15				I			T

Bei richtiger Eintragung der Begriffe nennen die Anfangsbuchstaben (1 bis 15) ein grundlegendes und verfassungsmäßig gesichertes Recht für alle Bürger unserer Republik.

Viel Spaß beim Knobeln wünscht euch

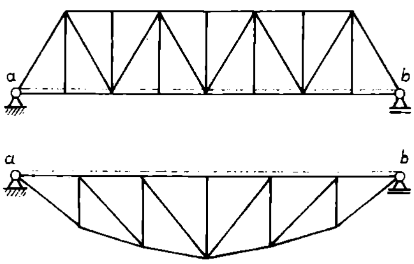
R. Mildner

Wir berechnen ein ebenes Fachwerk

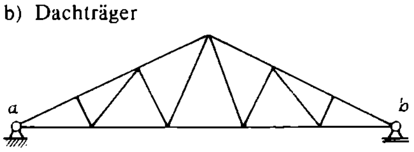
1. Das Rechenmodell „Fachwerk“ – die Aufgabe

Für den Werkstoff Stahl sind Tragwerke, deren tragende Konstruktionen als Fachwerk ausgeführt sind, typisch. Bild 1 zeigt solche Systeme.

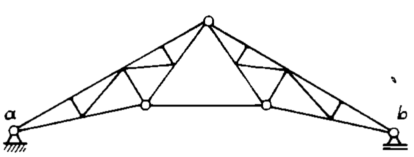
Bild 1
a) Brückenträger



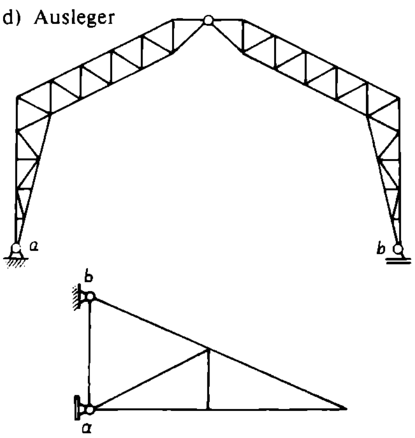
b) Dachträger



c) Dreigelenkrahmen als Fachwerk



d) Ausleger



In der Technik verstehen wir unter einem **Fachwerk** ein System von zug- bzw. druckfesten Stäben, die in Knoten gelenkig miteinander verbunden sind. Die Belastung erfolgt ausschließlich in den Knoten.

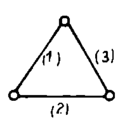
In diesem Sinne sind die in Bild 1 gezeigten Systeme Fachwerke.

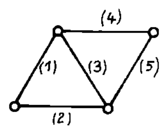
Dabei handelt es sich um **ebene Fachwerke**, weil alle Stäbe, Knoten und Kräfte in einer Ebene liegen. Solche ebenen Fachwerke sind Bestandteile vieler räumlicher Konstruktionen.

Die vorangestellte Erklärung beschreibt ein **Modell**, das wir der Berechnung zugrunde legen. Wir bezeichnen dieses Modell als **ideales Fachwerk**. Reale Fachwerkkonstruktionen haben natürlich keine Gelenke in den Knoten. Vielmehr sind die Fachwerkstäbe an den Knoten miteinander verschweißt, verschraubt oder vernietet. Dennoch ist das ideale Fachwerk bei sorgfältig durchdachter Konstruktion ein für die Praxis gut brauchbares Modell für ein reales Fachwerk.

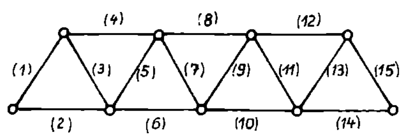
Um den Aufbau eines Fachwerkes zu verfolgen, betrachten wir Bild 2a. Drei Stäbe, die an den Enden jeweils durch Gelenke verbunden sind, bilden ein Stabdreieck. Nehmen wir an, daß die Stäbe selbst sich nicht verformen können, so wird sich diese Figur auch unter beliebiger Belastung nicht verändern. Wir sagen, sie ist *kinematisch starr*. An diese einfache Grundfigur kann ein weiterer Knoten durch zwei Stäbe angeschlossen werden. So entsteht die Figur nach Bild 2b, die ebenfalls kinematisch starr ist. In dieser Weise kann man fortfahren (Bild 2c).

Bild 2a) b)





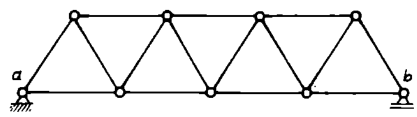
c)



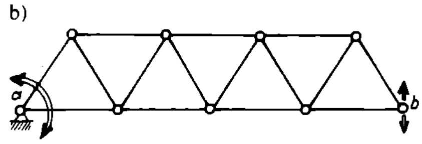
Wir erkennen:
Geht man von einem Stabdreieck aus, so entsteht durch zweistäbigen Anschluß weiterer Knoten ein **einfaches Fachwerk**.

Soll die Fachwerkscheibe als Träger verwendet werden, so muß man sie unbeweglich mit dem Fundament verbinden. Dafür wollen wir jedoch nicht mehr Bindungen einsetzen als unbedingt erforderlich sind. Die unbewegliche Bindung an die Fundamente kann erreicht werden wie in Bild 3a gezeigt wird. Das Lager bei a ist ein **festes Gelenklager**, es verhindert eine Verschiebung des Punktes a sowohl in horizontaler als auch in vertikaler Richtung, läßt jedoch noch eine Drehung der Fachwerkscheibe um den Punkt a zu (Bild 3b). Das Lager bei b darf die dieser Drehung entsprechende Bewegung des Punktes b nicht zulassen. Es muß also vertikale Bewegungen verhindern. Horizontale Bewegungen dagegen sollen möglich sein. Dadurch werden Zwängungen und die damit verbundenen Beanspruchungen vermieden, die sonst entstehen würden, wenn sich die Länge des Trägers infolge Temperaturänderungen ändert. Eine gleichmäßige Temperaturänderung erzeugt dann im Tragwerk keine zusätzlichen Kräfte. Das Lager b ist ein **verschiebliches Gelenklager**.

Bild 3a)



b)



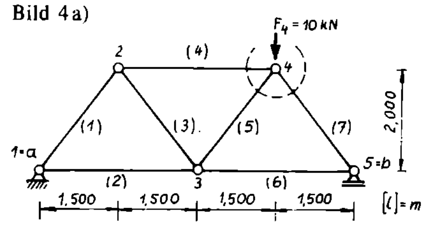
Wir wollen jetzt die Kräfte in Stabrichtung eines belasteten einfachen ebenen Fachwerkes berechnen. Dabei setzen wir als vorhandenes Wissen voraus:
- Rechnen mit Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck,
- Gleichgewichtsbedingungen für eine ebene zentrale Kräfteschar,
- Hebelsatz.

2. Der Lösungsweg

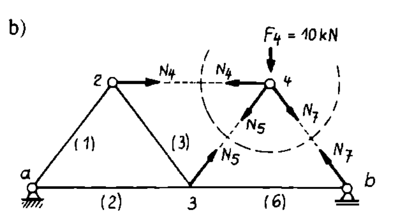
2.1. Modellbildung durch Freischneiden der Knoten

Zunächst müssen wir die Kräfte, die berechnet werden sollen, sichtbar machen. Das geschieht durch **Freischneiden** der Knoten. Wir trennen die an einem Knoten angeschlossenen Stäbe durch und ersetzen die den Stäben entsprechenden Bindungen durch Kräfte. Diese Kräfte sind so zu wählen, daß sie den ursprünglich vorhandenen

Bild 4a)



b)



Ruhezustand des Knotens wieder herstellen können. Bild 4b zeigt das für den Knoten 4 des Beispiels Bild 4a.

Durch Freischneiden werden die den Bindungen entsprechenden Kräfte sichtbar.

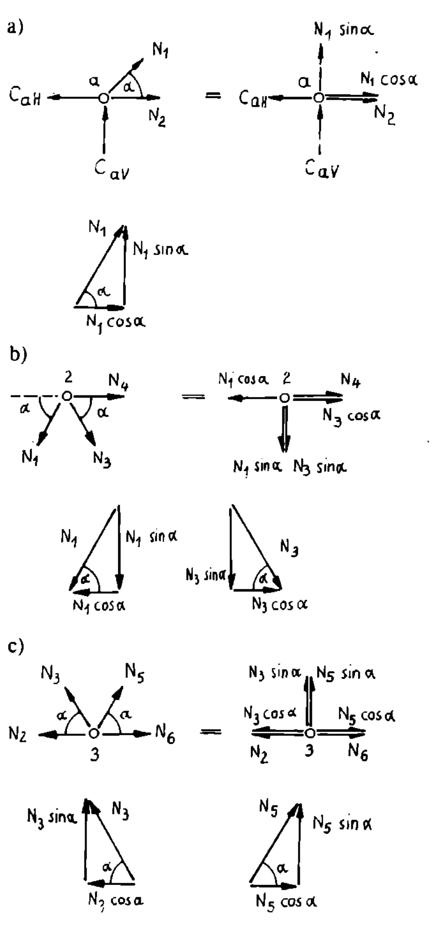
In unserem Falle sind diese Kräfte die Stabkräfte des Fachwerkes. Wir wollen sie im Modell so zeichnen, daß sie vom Knoten weg zeigen, also *in den Schnitt hinein*. Anschaulich sind solche Kräfte Zugkräfte.

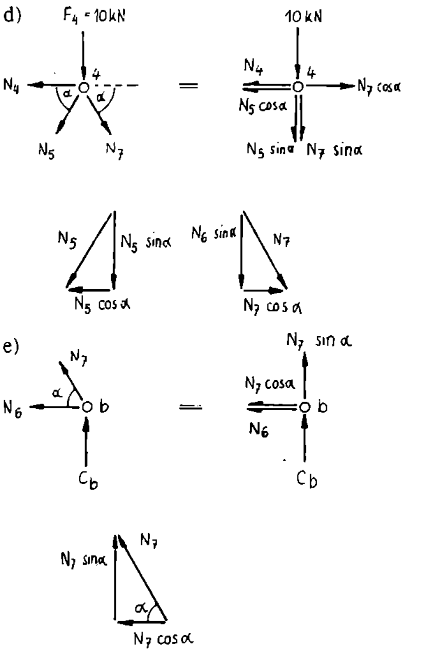
Ganz analog verfahren wir mit den äußeren Bindungen. Da das Gelenklager bei a weder eine vertikale noch eine horizontale Verschiebung zuläßt, müssen wir beim Freischneiden für das Lager eine vertikale und eine horizontale Stützkraft C_{aH} und C_{aV} ansetzen. Bei b wird dagegen nur die vertikale Verschiebung verhindert, also gibt es dort lediglich eine vertikale Stützkraft C_b (Bild 5a, e).

Wir schneiden nun nacheinander jeden Knoten des Fachwerkes frei und erhalten dabei jeweils eine zentrale Kräfteschar, die äußere Kräfte (Lasten) F_i, Stabkräfte N_i und bei a bzw. b auch Stützkräfte enthält.

Durch das Freischneiden der Fachwerkknoten wird an jedem Knoten eine zentrale Kräfteschar sichtbar. Die Kräfte dieser Schar müssen sich im Gleichgewicht befinden, da der vor dem Freischneiden vorhandene Ruhezustand des Knotens durch die Kräfteschar wieder hergestellt werden muß.

Bild 5
Knotenschnitte $a = 1, 2, \ldots$; $b = 5$
– Lageplan der Kräfte
– Komponentenzerlegung im Kräfteplan





2.2. Der Ansatz der Gleichgewichtsbedingungen

Auf die Kräfte jedes Knotens wenden wir nun die **Gleichgewichtsbedingungen** für zentrale ebene Kräftescharen an. Das führt auf folgende Gleichungen

Knoten 1 (Bild 5a)

$$\sum F_{iH} = N_1 \cos\alpha + N_2 - C_{aH} = 0$$
$$\sum F_{iV} = N_1 \sin\alpha + C_{aV} = 0 \qquad (1)$$

Knoten 2 (Bild 5b)

$$\sum F_{iH} = -N_1 \cos\alpha + N_3 \cos\alpha + N_4 = 0$$
$$\sum F_{iV} = -N_1 \sin\alpha - N_3 \sin\alpha = 0 \qquad (2)$$

Knoten 3 (Bild 5c)

$$\sum F_{iH} = -N_2 - N_3 \cos\alpha + N_5 \cos\alpha + N_6 = 0$$
$$\sum F_{iV} = +N_3 \sin\alpha + N_5 \sin\alpha = 0 \qquad (3)$$

Knoten 4 (Bild 5d)

$$\sum F_{iH} = -N_4 - N_5 \cos\alpha + N_7 \cos\alpha = 0$$
$$\sum F_{iV} = -N_5 \sin\alpha - N_7 \sin\alpha - F_4 = 0 \qquad (4)$$

Knoten 5 (Bild 5e)

$$\sum F_{iH} = -N_6 - N_7 \cos\alpha = 0$$
$$\sum F_{iV} = N_7 \sin\alpha + C_b = 0 \qquad (5)$$

In diesen insgesamt 10 Gleichungen treten genau 10 unbekannte Kräfte auf. Wir können also diese Gleichungen zu einem System von 10 Gleichungen für 10 Unbekannte zusammenfassen, das wir dann lösen müssen. Mit den in Bild 4 festgelegten Abmessungen ist $\cos\alpha = 0{,}6$, $\sin\alpha = 0{,}8$. Es entsteht das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llllllll}
+0{,}6N_1 + N_2 & & & & -C_{aH} & & & = \varnothing \\
+0{,}8N_1 & & & & & +C_{aV} & & = \varnothing \\
-0{,}6N_1 & +0{,}6N_3 + N_4 & & & & & & = \varnothing \\
-0{,}8N_1 & -0{,}8N_3 & & & & & & = \varnothing \\
 & -N_2 - 0{,}6N_3 & +0{,}6N_5 + N_6 & & & & & = \varnothing \\
 & +0{,}8N_3 & +0{,}8N_5 & & & & & = \varnothing \\
 & & -N_4 - 0{,}6N_5 & +0{,}6N_7 & & & & = \varnothing \\
 & & -0{,}8N_5 & -0{,}8N_7 & & & -10 & = \varnothing \\
 & & & -N_6 - 0{,}6N_7 & & & & = \varnothing \\
 & & & -0{,}8N_7 & & +C_h & & = \varnothing
\end{array}$$

2.3. Die Berechnung der Stabkräfte

Die Auflösung des soeben vorgestellten Systems überlassen wir besser einem kleinen Computer – aber wir geben uns nicht geschlagen.

Betrachten wir einmal die Gleichungen am Knoten 1, so treten in den beiden Gleichgewichtsgleichungen insgesamt vier Unbekannte auf: C_{aH}, C_{aV}, N_1 und N_2. Zwei davon sind Stützkräfte, und wenn wir deren Wert kennen würden, dann könnten wir die beiden Kräfte N_1, N_2 aus den beiden Ansatzgleichungen berechnen.

Ist aber N_1 bekannt, dann verbleiben am Knoten 2 nur die beiden Kräfte N_3 und N_4 als Unbekannte, und zu deren Berechnung genügt wieder die Auflösung der zwei Gleichgewichtsgleichungen am Knoten 2. Wenn wir so Knoten für Knoten weiter gehen, wird deutlich:

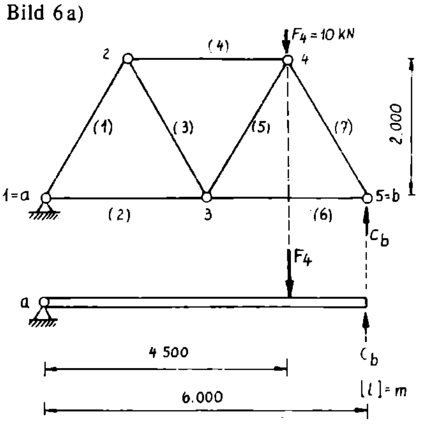
Die Stabkräfte des einfachen Fachwerkes lassen sich aus einer Folge von zwei Gleichungen für jeweils zwei unbekannte Stabkräfte berechnen, sobald die Stützkräfte bekannt sind.

Nun, diese Voraussetzungen werden wir schaffen. Da wir wissen, daß unsere Fachwerkscheibe kinematisch starr ist, genügt der Hebelsatz um zunächst die Stützkraft C_b zu berechnen. Wir schneiden die Fachwerkscheibe bei b frei, es entsteht das Modell von Bild 6a. Das ist nichts anderes als ein einarmiger Hebel. Folglich gilt

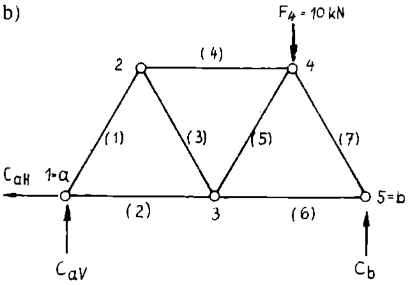
$$6{,}0 \cdot C_b - 4{,}5 \cdot 10 = 0$$
$$C_b = 7{,}50 \text{ kN} \qquad (6)$$

Schneiden wir nun die Fachwerkscheibe äußerlich vollkommen frei, dann müssen natürlich sowohl die vertikalen als auch die horizontalen Kräfte den Gleichgewichtsbedingungen genügen (Bild 6b).

Bild 6a)



b)



Also muß sein

$\sum F_{iH} = -C_{aH} = 0$ (7)

$\sum F_{iV} = C_{aV} - 10 + C_b = 0\,.$ (8)

Damit erhalten wir

$C_{aH} = 0\,,\quad C_{aV} = 2{,}5\ \text{kN}\,.$

Mit den nun bekannten Werten für die Stützkräfte C_{aV} und C_{aH} heißen die Gleichungen (1)

$N_1 \cdot 0{,}6 + N_2 = 0$

$N_1 \cdot 0{,}8 + 2{,}5 = 0$

und wir können N_1, N_2 berechnen.

$N_1 = -3{,}125\ \text{kN}\,,\quad N_2 = 1{,}875\ \text{kN}\,.$

Die Stabkraft N_1 hat ein negatives Vorzeichen, das bedeutet:

Die Richtung der Stabkraft N_1 stimmt nicht mit der im Modell von Bild 5a angenommenen Richtung überein. Die Stabkraft N_1 ist also keine Zugkraft sondern eine Druckkraft.

> Führt die Berechnung einer Stabkraft auf ein negatives Vorzeichen, so wirkt diese Kraft entgegengesetzt zu der Richtung, die bei Freischneiden für das Modell festgelegt wurde.

Da wir N_1 und N_2 schon berechnet haben, bleiben in den für den Knoten 2 gültigen Gleichungen nur N_3 und N_4 unbekannt. Die Bestimmungsgleichungen (2) heißen jetzt

$-(-3{,}125) \cdot 0{,}6 + N_3 \cdot 0{,}6 + N_4 = 0$

$-(-3{,}125) \cdot 0{,}8 - N_3 \cdot 0{,}8 \qquad = 0\,.$

Also ist

$N_3 = 3{,}125\ \text{kN}\,,\quad N_4 = -3{,}750\ \text{kN}\,.$

Wieder ist N_4 eine Druckkraft.

Nun können wir mit Knoten 3 fortfahren. Da N_2 und N_3 bekannt sind, vereinfachen sich die Gleichungen (3) zu

$-(1{,}875) - (3{,}125) \cdot 0{,}6 + N_5 \cdot 0{,}6 + N_6 = 0$

$(3{,}125) \cdot 0{,}8 + N_5 \cdot 0{,}8 \qquad = 0$

und wir erhalten

$N_5 = -3{,}125\ \text{kN}\,,\quad N_6 = 5{,}626\ \text{kN}\,.$

Auch N_5 ist eine Druckkraft.

Der nächste Knoten wäre der Knoten 4. In den Gleichungen (3) ist aber jetzt nur noch N_7 unbekannt, so daß eine der beiden Gleichungen (3) zur Berechnung von N_7 genügt. Die andere dient der Kontrolle!

Die Rechnung führt auf

$N_7 = -9{,}375\ \text{kN}\,.$

Danach sind am Knoten 5 schon alle Kräfte bekannt, die Gleichungen (4) bieten somit eine weitere Kontrollmöglichkeit.

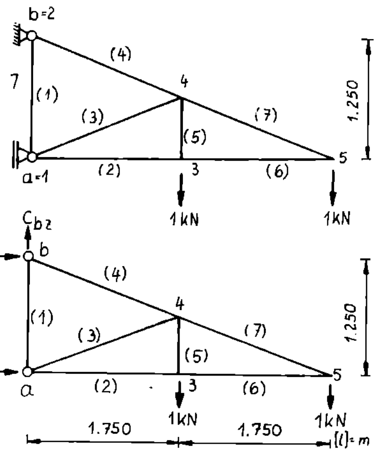
Das Ergebnis der Rechnung fassen wir zusammen:

Stab Nr.	Stabkraft in kN
1	−3,125 (Druckstab)
2	+1,875 (Zugstab)
3	+4,125 (Zugstab)
4	−3,750 (Druckstab)
5	−3,125 (Druckstab)
6	+5,625 (Zugstab)
7	−9,375 (Druckstab)

Der Konstrukteur kann nun anhand der Stabkräfte prüfen, ob die von ihm gewählten Profile ausreichend bemessen sind. Dabei ist noch zu beachten, daß bei den Druckstäben die Gefahr des Ausknickens besteht. Aber das steht hier nicht zur Erörterung.

In Bild 7 ist ein weiteres Beispiel gezeigt.

Bild 7



Wer wird versuchen, dieses einfache System zu berechnen? Zur Kontrolle sei das Ergebnis verraten:

C_{ax} =	4,200 kN		
C_{bx} =	−4,200 kN	C_{bz} =	2,000 kN
N_1 =	0,500 kN	N_2 =	−2,800 kN
N_3 =	−1,487 kN	N_4 =	4,460 kN
N_5 =	1,000 kN	N_6 =	−2,800 kN
N_7 =	2,973 kN		

In Bild 8 sind andere Lastfälle dargestellt, als Anregung für weitere Berechnungen. Wie wirkt sich eine Änderung des Systems nach Bild 9a oder b aus?

Bild 8

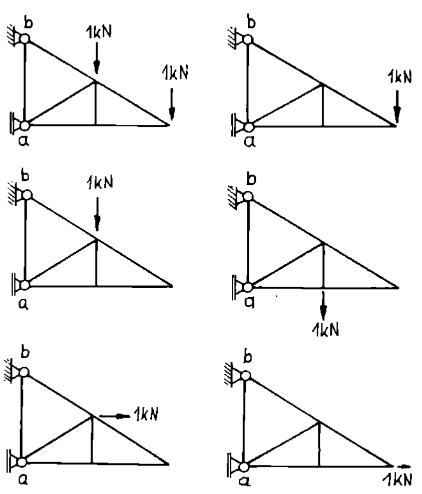
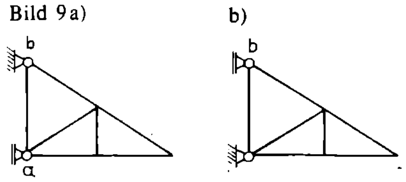
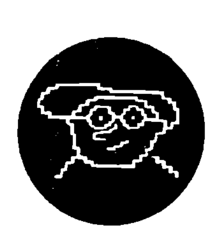


Bild 9a) b)





3.

Die Berechnung mit dem Computer

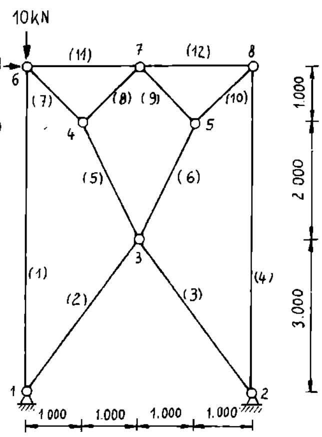
3.1.

Die Grobstruktur des Programmes

Der im Abschnitt 2.3. vorgestellte Lösungsweg ist sehr leicht mit dem Taschenrechner zu realisieren. Soll die Rechnung jedoch einem Computer übertragen werden, dann ist es einfacher, von dem am Ende des Abschnittes 2.2 aufgestellten Gleichungssystem auszugehen.

Der Vorteil liegt darin, daß die Auswahl der Folge von jeweils nur zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten nicht erforderlich ist und also auch nicht programmiert werden muß. Weiterhin können dann auch solche Fachwerke untersucht werden, für die die im Abschnitt 2.3 vorausgesetzte Folge von jeweils zwei Gleichungen für nur zwei Unbekannte gar nicht gibt. Bild 10a zeigt ein derartiges Fachwerk.

Bild 10a)



Es wäre also nicht computergerecht, den in 2.3 beschriebenen Lösungsweg „zu Fuß“ einfach Schritt für Schritt auf den Computer zu übertragen. Der Computer kann mehr. Da wir für jeden Knoten zwei Gleichgewichtsgleichungen aufstellen können, haben wir bei k Knoten $2k$ Gleichungen zur Verfügung, mit denen wir ebenso viele Unbekannte berechnen. Hat ein Fachwerk s Stäbe und t einfache Bindungen, so sind alle Fachwerke erfaßbar, für die $2k = s + t$. (9)

Für die Arbeit mit dem Computer brauchen wir mindestens die folgenden Routinen:

- Eingabe der zur Beschreibung des Systems und der Belastung erforderlichen Daten
- Berechnung der Koeffizienten des Gleichungssystems
- Lösung des Gleichungssystems
- Darstellung des Ergebnisses.

Darüber hinaus könnten noch Routinen hinzugefügt werden, z. B.

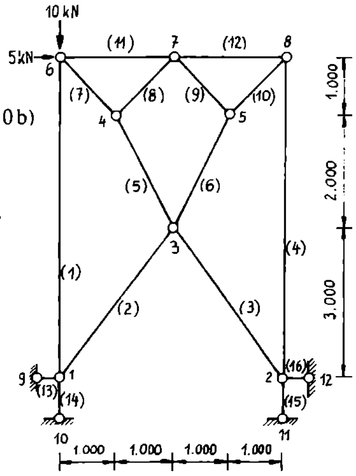
- zum Sichern von Daten/Ergebnissen
- zur Ausgabe des Ergebnisses über einen Drucker.

3.2. Die Eingaberoutine

Für die Eingabe der erforderlichen Daten müssen wir die Beschreibung des Fachwerkes computergerecht aufbereiten:

– Wir ersetzen die äußeren Bindungen des Fachwerkes durch Stützstäbe (Bild 10b) und zählen ab

Bild 10b)

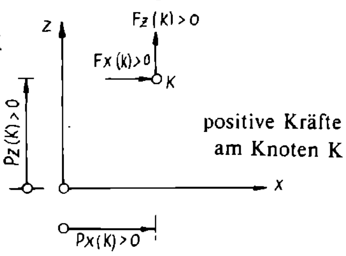


ZS Anzahl der Fachwerkstäbe
ZK Anzahl der Fachwerkknoten
ZW Anzahl der Stützstäbe.

– Systemknoten werden von K = 1 bis K = ZK gezählt. Die Stützenfußpunkte erhalten die Nummern K = ZK + 1 bis K = ZK + ZW. Die Lage eines Punktes K wird durch Koordinaten PX(K), PZ(K) beschrieben.

– Die Last am Knoten K hat die Komponenten FX(K), FZ(K). Die Lastkomponenten sollen das positive Vorzeichen erhalten, wenn sie in die Richtung der positiven Koordinatenachsen zeigen (Bild 11).

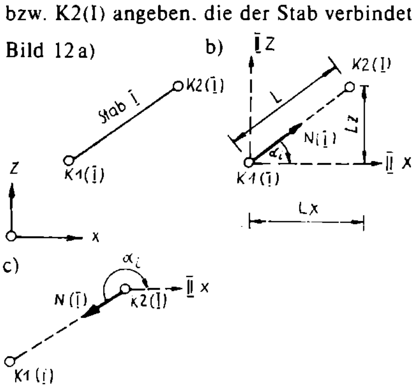
Bild 11



– Die Systemstäbe werden von 1 bis ZS gezählt, die Stützstäbe von ZS + 1 bis ZS + ZW.

– Die Zuordnung der Knoten zu den Stäben beschreiben wir, indem wir für jeden Stab I die Nummern der Knoten K1(I) bzw. K2(I) angeben, die der Stab verbindet

Bild 12a)



(Bild 12a). Dabei legen wir fest, daß für einen Stützstab I stets K1(I) der Systemknoten, K2(I) der Stützenfußpunkt ist.

– Die Stabkräfte werden als Zugkräfte positiv eingeführt. Das gilt auch für die Kräfte in den Stützstäben (Bild 12b).

Danach ist das Beispiel Bild 10b wie folgt zu beschreiben:
ZS = 12, ZK = 8, ZW = 4.

Systemknoten (Koordinaten in m, Belastung in kN):

Knoten-Nr.	X(I)	Z(I)	FX(I)	FZ(I)
1	0	0	0	0
2	4	0	0	0
3	2	3	0	0
4	1	5	0	0
5	3	5	0	0
6	0	6	5	−10
7	2	6	0	0
8	4	6	0	0

Stützenfußpunkte (Koordinaten in m):

Punkt-Nr.	X(I)	Z(I)
9	−1	0
10	0	−1
11	4	−1
12	5	0

Zuordnung der Stäbe und Knoten:

Stab-Nr.	K1(I)	K2(I)	
1	1	6	Systemstäbe
2	1	3	
3	2	3	
4	2	8	
5	3	4	
6	3	5	
7	4	6	
8	4	7	
9	5	7	
10	5	8	
11	6	7	
12	7	8	
13	1	9	Stütz-stäbe
14	1	10	
15	2	11	
16	2	12	

Die Eingabe realisieren wir über eine READ/DATA-Anweisung. Im Listing stehen die Daten des Beispiels in den Zeilen 820–870, und zwar genau in der Reihenfolge, wie sie in den READ-Anweisungen auf den Zeilen 50 und 100–120 festgelegt sind. Im Programm werden nach dem Einlesen der Parameter ZS, ZK und ZW die Felder für die im Programm auftretenden indizierten Variablen dimensioniert. Mit Zeile 80 wird die Erfüllung der Gl. (9) geprüft.

3.3. Die Berechnung der Koeffizienten und die Lösung des Gleichungssystems

Für die Lösung des Gleichungssystems werden wir eine Routine verwenden, die ganz allgemein auf ein beliebiges System von M linearen Gleichungen für M Unbekannte anwendbar ist. Dieser Routine liegt ein Eliminationsverfahren zugrunde (Gaußscher Algorithmus). Sie ist z. B. in [1] beschrieben. Dabei geht man aus von einer Darstellung des Gleichungssystems in folgender Form:

A(1,1)X(1) + … + A(1,I)X(I) + …
… + A(1,M)X(M) = B(1)
A(2,1)X(1) + … + A(2,I)X(I) + …
… + A(2,M)X(M) = B(2)
⋮
A(R,1)X(1) + … + A(R,I)X(I) + …
… + A(R,M)X(M) = B(R)
⋮
A(M,1)X(1) + … + A(M,I)X(I) + …
… + A(M,M)X(M) = B(M).

Die Koeffizienten A(R,I), die Lastglieder B(R) und die Unbekannten X(I) wurden dabei als indizierte Variable eingeführt, so wie wir sie dann bei der Umsetzung in BASIC verwenden werden (Feldvariable).

Wir erinnern uns:
Das Gleichungssystem zur Berechnung der unbekannten Stab- und Stützkräfte entsteht, indem für jeden Knoten die Summe der Kraftkomponenten sowohl in der x-Richtung als auch in der z-Richtung aufgeschrieben wird.
Der Knoten 1 liefert also die Zeilen 1 und 2, der Knoten K die Zeilen 2K − 1 und 2K, der letzte Knoten ZK die Zeilen 2ZK − 1 = M − 1 und 2ZK = M.

Daraus ergibt sich:

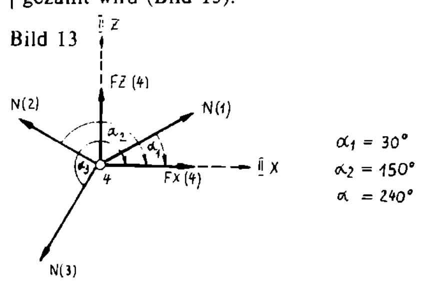
A(2K − 1,I) ist der Kosinus des Richtungswinkels α_i der am Knoten K angreifenden Stabkraft N(I). A(2K,I) ist der Sinus dieses Winkels.

Wir legen nun fest, daß eine nach rechts bzw. nach oben gerichtete Kraft bzw. Kraftkomponente stets positiv in die Summe eingehen soll.

Daher gilt:

Das Vorzeichen der Kraftkomponente wird eindeutig bestimmt durch das Vorzeichen des Kosinus bzw. Sinus des Richtungswinkels α_i, wenn der Winkel stets von der Kraftrichtung bis zur x-Richtung gezählt wird (Bild 13).

Bild 13



Für die Lastglieder stellen wir fest:

Da die Zeile 2K − 1 die Summe der horizontalen Komponenten erfaßt, ist das Lastglied B(2K − 1) = −FX(K).
Entsprechend ist B(2K) = −FZ(K).

Zur Verdeutlichung: Nehmen wir an, der in Bild 13 dargestellte Knoten habe die Nr. 4. Dann ist also K = 4 und die beiden zum Knoten gehörigen Gleichgewichtsgleichungen heißen allgemein

– in $+x$-Richtung
A(7,1)N(1) + A(7,2)N(2) + A(7,3)N(3) − B(7) = 0

– in $+z$-Richtung
A(8,1)N(1) + A(8,2)N(2) + A(8,3)N(3) − B(8) = 0.

Im Beispiel Bild 13 ist nun gegeben:

$\alpha_1 = 30°$	$\alpha_2 = 150°$	$\alpha_3 = 240°$
$\cos\alpha_1$	$\cos\alpha_2$	$\cos\alpha_3$
$= +0{,}866$	$= -0{,}866$	$= -0{,}500$
$\sin\alpha_1$	$\sin\alpha_2$	$\sin\alpha_3$
$= +0{,}500$	$= +0{,}500$	$= -0{,}866.$

Daher: Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte
- in $+x$-Richtung
0,866N(1) − 0,866N(2) − 0,500N(3) + FX(4) = Ø
- in $+z$-Richtung
0,500N(1) + 0,500N(2) − 0,866N(3) + FZ(4) = 0.

Bei der Berechnung der Kosinus und Sinus müssen wir uns also jetzt streng auf die Koordinatenrichtungen beziehen. Aus Bild 12b entnehmen wir für die Stabkräfte N(I) im Stab I

$\cos\alpha_i = LX/L, \quad \sin\alpha_i = LZ/L$ (10)

wobei $LX = PX(K2) - PX(K1)$

$LZ = PZ(K2) - PZ(K1)$ (11)

$L = \sqrt{LX^2 + LZ^2}$. (12)

Dabei greift die Stabkraft in K1 an und zeigt nach K2. Für die am freigeschnittenen Knoten K1 angreifende Stabkraft I entsteht somit für das Gleichgewicht in der x-Richtung ein Koeffizient

$A(2K1 - 1,I) = LX/L$ (13)

und für das Gleichgewicht in der z-Richtung ein Koeffizient

$A(2K1,I) = LZ/L$. (14)

Ist der freigeschnittene Knoten dagegen K2, so zeigt dieselbe Stabkraft (als Zugkraft angesetzt!) von K2 nach K1 (Bild 12c).

Demzufolge wäre jetzt anzusetzen

$LX' = PX(K1) - PX(K2)$

$LZ' = PZ(K1) - PX(K2)$.

Man sieht, es ist $LX' = -LX$, $LZ' = -LZ$ und daher

$A(2K2 - 1,I) = -A(2K1 - 1,I)$

$A(2K2,I) = -A(2K2,I)$. (15)

Die Formeln (13), (14) und (15) finden wir wieder im Programm auf den Zeilen 140–220. In diesem Programmteil werden die Koeffizienten für die Stabkräfte in den Systemstäben berechnet. Für die Stützkräfte erfolgt die Berechnung analog (Zeilen 230–290). Natürlich entfällt das Freischneiden der Fußpunkte.

Schließlich sind noch die Lastglieder B zu berechnen. Das erfolgt auf den Zeilen 300–320.

Auf den Zeilen 340–690 ist dann die Routine zur Auflösung des Gleichungssystems notiert. Zur Erklärung muß wieder auf [1] verwiesen werden.

Schließlich stellen wir die Ergebnisse dar. Natürlich lassen wir auf dem Bildschirm die Bezeichnung N(I) erscheinen (Zeile 730). Um die Ergebnisse ordentlich betrachten zu können, halten wir das Programm an, wenn 20 Werte ausgedruckt sind. Erst auf Tastendruck werden dann die weiteren Werte gezeigt (Zeilen 740–770).

3.4. Beispiele

Das System in Bild 10 führt auf folgende Ergebnisse (Kräfte in kN):

Systemstäbe:

Stab-Nr.	Stabkraft in kN
1	−6,25
2	+4,507
3	−4,507
4	−3,750
5	−5,590
6	+5,590
7	−5,303
8	−1,768
9	+1,768
10	+5,303
11	−1,250
12	−3,750
Stützstäbe:	
13	2,500
14	−2,500
15	−7,500
16	−2,500

Positive Kräfte sind Zugkräfte, negative Kräfte sind Druckkräfte. Daher zeigen die Kräfte N(14) bzw. N(16) von unten nach oben auf die Lagerknoten 1 bzw. 2 (Stützkräfte!).

Für das System nach Bild 14 ist
ZS = 9, ZK = 7, ZW = 5
und die Daten führen zu folgender Eingabe auf den Zeilen 820–870.

```
820 DATA 9,7,5
830 DATA Ø,Ø, 3,Ø, 6,Ø, Ø,2.5, 1.25,4
         4.75,4, 6,2.5
840 DATA -1,Ø, Ø,-1, 2,Ø, 3,-1, 6,-1
850 DATA Ø,Ø, Ø,Ø, Ø,Ø, Ø,Ø, 5,-1Ø, Ø,Ø,
         Ø,Ø
860 DATA 1,4, 1,6, 2,4, 2,7, 3,5, 3,7, 4,5,
         5,6, 6,7
870 DATA 1,8, 1,9, 2,1Ø, 2,11, 3,12
```

Die Rechnung ergibt:

Systemstäbe:

Stab-Nr.	Stabkraft in kN
1	−16,94
2	+10,24
3	+10,85
4	+ 7,16
5	0
6	−11,18
7	−13,02
8	−13,33
9	− 8,59
Stützstäbe:	
10	+ 7,84
11	−10,35
12	− 2,84
13	+11,53
14	−11,18

Wenn wir die Stützung verändern, so wie das in Bild 15 dargestellt ist, heißt die Eingabe

```
820 DATA 9,7,5
830 DATA Ø,Ø, 3,Ø, 6,Ø, Ø,2.5, 1.25,4,
         4.75,4, 6.2.5
840 DATA -1,Ø, Ø,-1, 3,-1, 6,-1, 7,Ø
850 DATA Ø,Ø, Ø,Ø, Ø,Ø, Ø,Ø, 5,-1Ø, Ø,Ø,
         Ø,Ø
860 DATA 1,4, 1,6, 2,4, 2,7, 3,5, 3,7, 4,5,
         5,6, 6,7
870 DATA 1,8, 1,9, 2,1Ø, 3,11, 312
```

Beim Programmablauf erscheint in diesem Fall auf dem Bildschirm nach kurzer Zeit die Information „Matrix singulär“. Das heißt, das Gleichungssystem ist nicht eindeutig lösbar. Praktisch bedeutet das, daß das Fachwerk bei dieser Art der Stützung nicht stabil ist, es kann seine Aufgabe als tragende Konstruktion nicht erfüllen.

3.5. Listing

Die in den Zeilen 820–870 niedergelegten Daten entsprechen dem Beispiel Bild 10.

```
1Ø CLS:PRINT:PRINT:PRINT"
     A L P H A - PROGRAMM"
2Ø PRINT:PRINT *EBENES
     FACHWERK*
3Ø PRINT "- - - - - - - - - -"
4Ø PRINT:PRINT" ICH LESE DIE
     DATEN EIN"
5Ø READ ZS,ZK,ZW
6Ø DIM PX(ZK+ZW),PZ(ZK+ZW),
     FX(ZK+ZW),FZ(ZK+ZW),
     K1(ZS+ZW),K2(ZS+ZW)
7Ø M=2*ZK
```

Bild 14

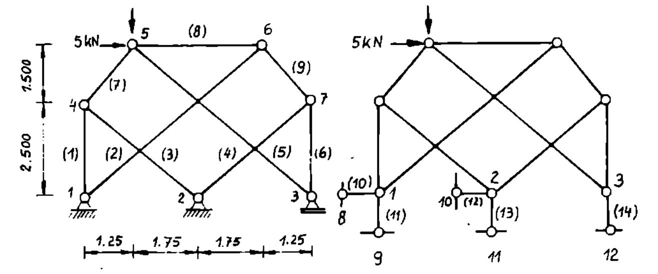
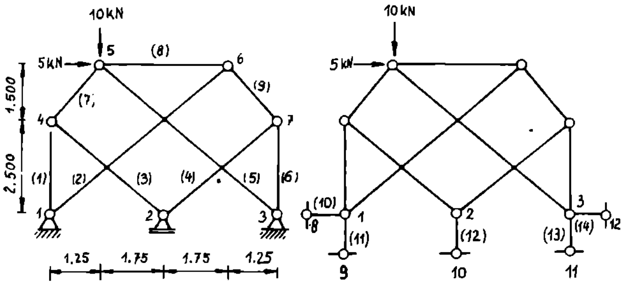


Bild 15 Instabiles Fachwerk



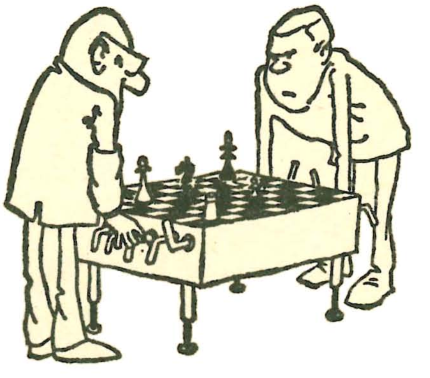
```
80 IF M-ZS-ZW( )0 THEN
   CLS:PRINT:PRINT"BERECHNUNG
   NICHT MOEGLICH!":END
90 DIM A(M,M),(B(M),N(ZS+ZW)
100 FOR K=1 TO ZK+ZW:READ
   PX(K),PZ(K):NEXT K
110 FOR K=1 TO ZK:READ
   FX(K),FZ(K):NEXT K
120 FOR I=1 TO ZS+ZW:READ K1
   (I),K2(I):NEXT I
130 CLS:PRINT:PRINT:PRINT"JETZT
   BERECHNE ICH DIE"
135 PRINT:PRINT"KOEFFIZIENTEN
   DES GLEICHUNGSSYSTEMS"
140 FOR I=1 TO ZS
150 K1=K1(I):K2=K2(I)
160 LX=PX(K2)-PX(K1):LZ=PZ(K2)
   -PZ(K1)
170 L=SQR(LX^2+LZ^2)
180 A(2*K1-1,I)=LX/L
190 A(2*K1,I)=LZ/L
200 A(2*K2-1,I)=-A(2*K1,I)
210 A(2*K2,I)=-A(2*K1,I)
220 NEXT I
230 FOR I=ZS+1 TO ZS+ZW
240 K1=K1(I):K2=K2(I)
250 LX=PX(K2)-PX(K1):LZ=PZ(K2)
   -PZ(K1)
260 L=SQR(LX^2+LZ^2)
270 A(2*K1-1,I)=LX/L
280 A(2*K1,I)=LZ/L
290 NEXT I
300 FOR K=1 TO ZK
310 B(2*K-1)=-FX(K):B(2*K)
   = -FZ(K)
320 NEXT K
330 CLS:PRINT:PRINT"NUN LOESE
   ICH DAS GLEICHUNGSSYSTEM"
340 FOR J=1 TO M-1
350 PRINT:PRINT" DURCHLAUF
   J=";J
360 A1=0
370 FOR I=J TO M
380 A0=ABS(A(I,J))
390 IF A0(=A1 THEN GOTO 410
400 A1=A0:I1=I
410 NEXT I
420 FOR K=J TO M
430 Z=A(J,K)
440 A(J,K)=A(I1, K)
450 A(I1,K)=Z
460 NEXT K
470 Z=B(J)
480 B(J)=B(I1)
490 B(I1)=Z
500 IF ABS(A(J,J)/A(1,1))(0.000001
   THEN 810
510 FOR I=J+1 TO M
520 F=A(I,J)/A(J,J)
530 FOR K=1 TO M
540 A(I,K)=A(I,K)-F*A(J,K)
550 NEXT K
560 B(I)=B(I)-F*B(J)
570 NEXT I
580 NEXT J
590 IF ABS(A(M,M)/A(1,1))(0.000001
   THEN 810
600 CLS:PRINT:PRINT" JETZT WERTE
   ICH DIE "
610 PRINT:PRINT"
   DREIECKSMATRIX AUS"
620 N(M)=B(M)/A(M,M)
630 FOR I=M-1 TO 1 STEP -1
640 S=0
650 FOR J=I+1 TO M
660 S=S+A(I,J)*N(J)
670 NEXT J
680 N(I)=(B(I)-S)/A(I,I)
690 NEXT I
700 CLS:PRINT:PRINT" LOESUNG:"
710 PRINT:R=0
720 FOR I=1 TO M:R=R+1
730 PRINT" N(";I;")";TAB(12);"=";N(I)
740 IF R(20 THEN 770
750 PRINT:PRINT"MIT BELIEBIGEM
   TASTENDRUCK WEITER":R=0
760 IF INKEY$=" " THEN 760
770 NEXT I
780 PRINT:PRINT"MIT BELIEBIGEM
   TASTENDRUCK WEITER"
790 IF INKEY$=" " THEN 790
800 END
810 CLS:PRINT:PRINT:PRINT
   "MATRIX SINGULAER!":END
820 DATA 12,8,4
830 DATA 0,0, 4,0, 2,3, 1,5, 3,5, 0,6
840 DATA 2,6, 4,6, -1,0, 0,-1, 4,-1, 5,0
850 DATA 0,0, 0,0, 0,0, 0,0, 0,0, 5,-10,
   0,0
860 DATA 0,0, 1,6, 1,3, 2,3, 2,8, 3,4
865 DATA 3,5, 4,6, 4,7, 5,7, 5,8, 6,7
870 DATA 7,8, 1,9, 1,10, 2,11, 2,12
```

G. Clemens

Literatur:

[1] Werner, Basic für Mikrorechner, VEB Verlag Technik, Berlin 1986

[2] Clemens, TM in BASIC, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1989



S. Aschmarin, aus: Nedelja, Moskau

Originelle Mattstellung nach 10 Zügen

Die Mathematik und das Schach haben viele Gemeinsamkeiten.
So bemerkte der englische Mathematiker Godefrey H. Hardy (1877 bis 1947) in seinem Werk „Bekenntnisse eines Mathematikers“, daß die Lösung eines Problems beim Schachspiel nichts anderes ist als eine mathematische Übung und daß ein Schachspieler während des Spiels so etwas wie eine mathematische Melodie vor sich hin pfeift.
Ein beliebter Berührungspunkt zwischen Mathematik und Schach findet sich im Genre der Unterhaltungsmathematik, zu dem mathematische Spiele, Aufgaben und Unterhaltsames auf dem Schachbrett gehören, wieder. Es gibt genügend Beispiele, die wahre Wunderwerke menschlichen Scharfsinnes sind und hohe Anforderungen an das Vorstellungsvermögen stellen.
Verblüffend mit welcher kombinatorischer Gradlinigkeit und geometrischer Eleganz Weiß in 10 Zügen aus der Diagrammstellung 1 das erstickende Mattbild in der Diagrammstellung 2 erreicht. Wie lautet die zehnzügige Zugfolge in dieser Aufgabe von C. F. Jänisch (1813 bis 1872), um aus der Diagrammstellung 1 die vorgegebene Mattstellung in Diagramm 2 zu erzielen?

H. Rüdiger

Diagramm 1

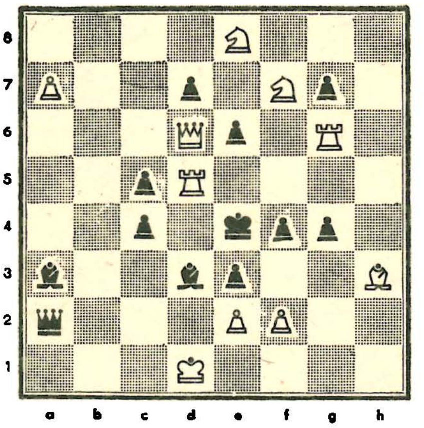
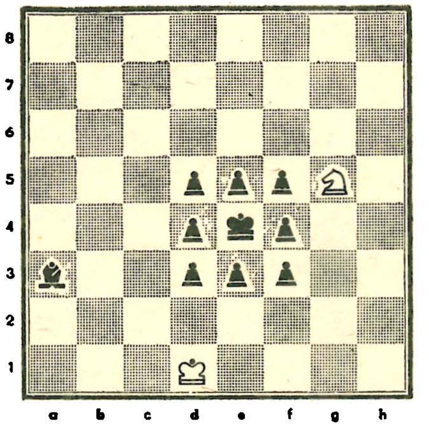


Diagramm 2



Unser alpha-Klub

Unsere Arbeitsgemeinschaft wurde im Schuljahr 1985/86 auf Anregung der Kreisfachberaterin für Mathematik Frau Schwerin für Schüler der 3. und 4. Klasse gegründet. In den ersten Jahren nahmen Schüler aus verschiedenen Orten unseres Kreises teil, und die Gruppe war Bestandteil des Kreisklubs. In diesem Schuljahr besuchen auf Grund ungünstiger Fahrverbindungen nur noch Schüler der 7. Klassen der Werneuchner Oberschule „Juri Gagarin" die Arbeitsgemeinschaft. Trotz wechselnder Durchführungsorte und veränderter Teilnehmerzahl haben sich einige Traditionen herausgebildet und erhalten, die wir euch kurz vorstellen möchten.
Wir führen unsere Zusammenkünfte zur Zeit 14tägig, um 16.15 Uhr, in der Schule durch. Jede Stunde beginnt mit der „Erwärmung", die unsere Köpfe richtig in Schwung bringen soll. Für die Aufgaben haben wir genau 10 Minuten Zeit. Danach werden die Lösungen ausgewertet und bepunktet. Sollte ein Schüler eher fertig sein, erhält er einen Zusatzpunkt, alle anderen Teilnehmer müssen aufhören. Zum Halbjahresende wird jeweils der „Erwärmungssieger" festgestellt. Wollt ihr mal einige Aufgaben kennenlernen?
Hier sind Beispiele:

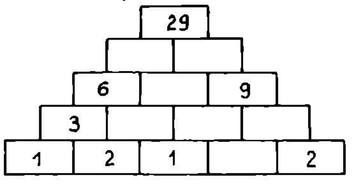
▲1▲ Ein Kind wiegt etwa 25 kg, ein Elefant etwa 3,0 t.
a) Wiegen 30 Kinder mehr als ein Elefant?
b) Wieviel Kinder sind etwa ebenso schwer wie ein Elefant?

▲2▲ Suche alle Tiere aus dem Text heraus und unterstreiche sie!
Walter sah, wie ein bärtiger Geselle einen Teppich und einen Ring an sich raffen wollte, sich später aber umdrehte und entfloh.

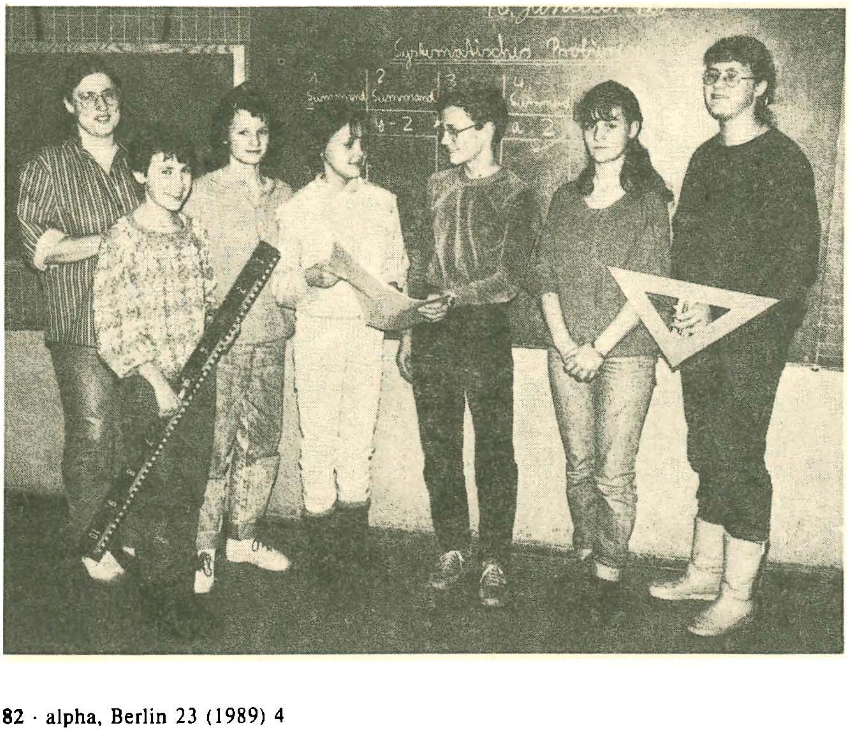
▲3▲ Beim Schreiben mathematischer Begriffe sind die Buchstaben durcheinander geraten. Ordne sie wieder so, daß sinnvolle mathematische Begriffe entstehen!
Dropkut, Sasib, Tnerzop, Skrei.

▲4▲ Ich habe mir eine Zahl gedacht. Wenn man zu der Zahl 1 addiert, das Ergebnis durch 5 dividiert, 8 dazuzählt, 5 subtrahiert und das erhaltene Ergebnis mit 6 multipliziert, so erhält man 30. Wie heißt die gedachte Zahl?

▲5▲ Die Summe zweier benachbarter Felder erscheint immer im Mittelfeld darüber. Die eingetragenen Zahlen dienen als Starthilfe.



Na, haben euch die Aufgaben gefallen? Wir kommen oft ganz schön ins Schwitzen. Im zweiten Teil der Stunde beschäftigen wir uns mit verschiedenen mathematischen Problemen und lernen Lösungsmöglichkeiten für sie kennen. Was wir in den vergangenen Jahren dazugelernt haben, wollen wir euch an einer Aufgabe zeigen.



▲ In einer Klasse sind Schüler aus Hirschfelde, Tempelfelde, Schönfeld und Willmersdorf. Insgesamt sind es 25 Kinder. Es sind zwei Schüler weniger aus Tempelfelde als aus Schönfeld, sieben Schüler mehr aus Hirschfelde als aus Tempelfelde und vier Schüler weniger aus Willmersdorf als aus Tempelfelde.
Wie viele Schüler stammen aus jedem Ort?

Als wir Aufgaben dieses Typs zum ersten Mal sahen, fanden wir sie sehr schwer. Dann lernten wir eine Lösungsmöglichkeit durch systematisches Probieren in Tabellen kennen, und schon waren solche Aufgaben leichter zu lösen (siehe Tabelle).

Tempelfelde	Schönfeld	Hirschfelde
	Temp. + 2	Temp. + 7
4	6	11
6	8	13
5	7	12

Willmersdorf	insgesamt	
Temp. − 4	25	
0	21	mehr
2	29	weniger
1	25	

Im Moment arbeiten wir daran, an Hand des Textes Gleichungen aufzustellen, um noch schneller ans Ziel zu kommen.

$$x + x + 2 + x + 7 + x - 4 = 25 \quad \text{zusammenf.}$$
$$4x + 5 = 25 \quad | -5$$
$$4x = 20 \quad | :4$$
$$x = 5$$

Mit Hilfe des erworbenen Wissens versuchen wir *alpha*-Aufgaben des laufenden Wettbewerbs zu lösen. Einige der Aufgaben erhalten wir auch als Hausaufgaben. In der nächsten Arbeitsgemeinschaftsstunde stellen wir unsere Lösungen vor und diskutieren über die günstigste Variante. Manchmal können wir es aber gar nicht so lange aushalten, und da wir alle in dieselbe Schule gehen, sprechen wir schon in der Pause über die Lösungen.
Ende Januar und Ende Juni werden Klausuren geschrieben, in denen wir unser Wissen unter Beweis stellen können. Im Anschluß daran besucht uns in den Sommer- und Winterferien *Max*. *Max*, das ist ein kleiner Seeräuber, der seine Schätze mit Hilfe von Mathematikaufgaben versteckt und dann nicht mehr finden kann. Wir müssen ihm beim Suchen helfen, manchmal vom Klassenzimmer, manchmal von zu Hause aus. Auch bei einem Geländespiel hat *Max* uns schon durch den Ort gejagt. Einen Teil der Ferien verbringen wir gemeinsam in der Gruppe. Wir waren schon im Pionierpalast in Berlin, haben verschiedene Computerzentren besucht und Wandzeitungen gestaltet. Vertreter unseres alpha-Klubs nehmen am jährlichen Kreisspezialistenlager Mathematik teil. Einige vordere Plätze konnten wir dort schon belegen. Leider sind wir in der Kreismathematikolympiade noch nicht so erfolgreich. Dazu müssen wir weiter viel üben, vielleicht klappt es einmal.
Zum Schluß möchten wir euch noch eine unserer Traditionen vorstellen.

Bei uns gibt es in jedem Jahr zu Weihnachten einen Kalender für das nächste Jahr „Mit Mathematik durch das Jahr". (Der Kalender für 1989 hängt auch in der Redaktion „alpha".)
In diesem Kalender sind in jedem Monat verschiedene Aufgaben unter einem bestimmten Thema enthalten. Einige davon wollen wir euch vorstellen:

▲6▲ Januar:
„Aus einem alten Mathematikbuch"
Wenn man 18 um den achten Teil einer gewissen Zahl vermindert, erhält man den zehnten Teil derselben Zahl.
Wie heißt diese Zahl?

▲7▲ März: „Kryptogramme"

$$\begin{array}{r} \underline{1A1 \cdot AA} \\ ABA \\ \underline{ABA} \\ ACCA \end{array} \qquad \begin{array}{r} OMA \\ \underline{+OPA} \\ PAAR \end{array}$$

▲8▲ April: „Mathematische Zaubereien"
Denke dir eine mehrstellige natürliche Zahl. Berechne die Quersumme und subtrahiere sie von der gedachten Zahl. Von der so ermittelten Zahl streiche eine beliebige Ziffer. Jeder, der unseren „Trick" kennt, ist dann in der Lage, nach Nennung der übriggebliebenen Zahlen sofort die gestrichene Ziffer zu nennen, ohne die gedachte Zahl zu kennen.
Lösung: Man bildet die Summe der mitgeteilten Ziffern und ermittelt die Zahl, die bis zur nächsten, ohne Rest durch neun teilbaren Zahl, fehlt. Die so gefundene Zahl ist die gesuchte Ziffer.

▲9▲ Juni: „Internationale Mathematik"
Eine Badewanne kann in sechs Minuten gefüllt werden. Die Entleerung dauert zehn Minuten. Wann würde die Badewanne überlaufen, wenn jemand Wasser einlaufen läßt und gleichzeitig vergißt, den Abfluß zu schließen? (VR Polen)

▲10▲ August:
„Knobeleien für die ganze Familie"
Welche Anzahl von Produkten kaufen die Schüler in heute üblichen Maßeinheiten?
Klaus kauft 3 Dutzend Eier.
Otto holt eine Mandel Brötchen.
Uli kauft 3 Zentner Kohlen.
Hans bekommt 3 Sechser.
Elke erhält 3 Schock Äpfel.
Rosi erhält 3 Groschen.

Wir hoffen, daß euch unsere Aufgaben gefallen haben. Viel Spaß beim Lösen wünscht euch der

Werneucher alpha-Klub

Eine harte Nuß

Man ermittle alle Tripel (x, y, z) einstelliger natürlicher Zahlen x, y und z, die folgendem Gleichungssystem genügen:

$$x + y + z = 19$$
$$3x + 5y + 6z = 85.$$

Dr. R. Mildner, Leipzig

Ein Hobbymathematiker stellt sich vor

Unter den Einsendern von Aufgabenvorschlägen für den alpha-Wettbewerb fand sich immer wieder Hartmut Boettcher, Diplomlandwirt. Wir wurden neugierig und fragten einfach mal an:
„Wie kommt ein Diplomlandwirt zu einer so intensiven Beschäftigung mit der Mathematik?"

Seit 25 Jahren bin ich in der Schweinezucht des Bezirkes Erfurt auf dem Gebiete der Leistungs- und Zuchtwertprüfung tätig. Nach einem einjährigen Zusatzstudium „Anwendung mathematischer Methoden und der elektronischen Datenverarbeitung in der Landwirtschaft" und mit dem Tierzuchtleiterabschluß wurde ich Leiter eines Kollektivs im VEB Tierzucht Erfurt, das sich insbesondere mit der Zuchtwertschätzung der im Bezirk eingesetzten Besamungseber befaßt. Dazu gehört auch die Informationsverarbeitung aus den vielfältigen Schweinezucht-Projekten, die im zentralen Rechenzentrum des Kombinates Tierzucht oder mit eigener Rechentechnik angewandt werden. Ich brauche also in meinem Beruf ein gutes Verhältnis zu Zahlen und Formeln.
Die mathematische Schülerzeitschrift „alpha" lernte ich im Jahre 1974 kennen, als unsere älteste Tochter sich auf die Teilnahme an der Mathematik-Kreisolympiade in der 5. Klasse vorbereitete. Wir abonnierten die Zeitschrift, und zwei Jahre später begann auch ich mit der Lösung von Aufgaben der Klassenstufe 10/12.
Inzwischen hat unsere Familie mit drei Töchtern 43 „Teilnahmen" mit über 800 Lösungen geschafft.
Seit dem Jahre 1980 sende ich Aufgabenvorschläge ein, von denen einige bisher veröffentlicht wurden. Ich betrachte die aktive Teilnahme am alpha-Wettbewerb als Hobby und Herausforderung, um mathematisches Grundwissen anzuwenden und logisches Denken weiter zu trainieren.

Aufgaben

▲1▲ Von einer fünfstelligen Zahl ist bekannt:
- die Quersumme der fünf Ziffern beträgt 15,
- betrachtet man die erste und zweite Ziffer sowie die dritte bis letzte Ziffer als selbständige Zahlen, so ist die dreistellige Zahl fünfeinhalb mal größer als die zweistellige Zahl.

Gib mehrere Lösungen an!

▲2▲ Eine Kuhherde erreichte im Jahre 1987 eine durchschnittliche Leistung von 5250 kg Milch bei 4,34 % Fettgehalt, das waren 227,85 kg Milchfett je Kuh. Zur Absicherung der Zielstellung für das Jahr 1990 muß die Leistung bei Milchfett (in kg) auf 102,7 Prozent (Basis 1987) gesteigert werden.
Um wieviel Kilogramm Milchmenge ist die Leistung jährlich zu erhöhen, wenn ein durchschnittlicher Milchfettgehalt für das Jahr 1990 von 4,36 % erwartet wird?

▲3▲ Man ermittle den Rest, den die Summe

$$s = 1^6 + 2^6 + 3^6 + \ldots + 100^6$$

bei Division durch 4 läßt.

▲4▲ In den Kryptogrammen

$$\text{a)}\ \begin{array}{r} DREI \\ \underline{+DREI} \\ SECHS \end{array} \qquad \text{b)}\ \begin{array}{r} VIER \\ \underline{+FÜNF} \\ NEUN \end{array}$$

sollen die Buchstaben durch Grundziffern so ersetzt werden, daß eine richtig gelöste Aufgabe entsteht. Für gleiche Buchstaben sollen gleiche, für verschiedene Buchstaben sollen verschiedene Grundziffern eingesetzt werden.
Untersuche, wieviel Lösungen die Aufgabe hat!

▲5▲ Bei einem Mühlespielbrett mit 24 Feldern soll auf dem ersten Feld ein Weizenkorn und auf den folgenden Feldern jeweils die doppelte Anzahl an Weizenkörnern vom vorhergehenden Feld liegen.
a) Wie viele Weizenkörner kommen auf das letzte Feld?
b) Wie viele Weizenkörner sind es auf allen Feldern zusammen?
c) Welche Anbaufläche ist für die Erzeugung des Weizens unter b) erforderlich, wenn die Tausendkornmasse 50 g und der durchschnittliche Ertrag 60 dt je Hektar betragen?

▲6▲ Zur Benutzung der Stadtomnibusse in Weimar gibt es Fahrscheine mit 9 Lochfeldern.
Wie viele voneinander verschiedene Möglichkeiten zur Einstellung der Entwerter gibt es, wenn bis zu drei Felder eines Fahrscheins bei Antritt einer Fahrt gelocht werden sollen? *H. Boettcher*

Überall Näherungswerte

Frank, Michael und Felix planen für die Sommerferien eine kleine Radtour. Am 1. August wollen sie ihre Reise in Halle beginnen. Für diesen Tag steht die Strecke Halle – Pouch auf dem Programm. Das sind etwa 40 km. Hier in Pouch ist die 124 km lange Mulde in einem alten Braunkohletagebau gestaut, und es gibt einen wunderschönen Zeltplatz. Am 2. Tag geht es über Bad Düben nach Wittenberg. Auf dieser Fahrt werden sie die höchste Erhebung der Dübener Heide – die Hohe Gieck (191 m) sehen. In Wittenberg wollen sie gegen 17 Uhr eintreffen, da sie noch einiges für das Abendbrot einkaufen wollen und die Läden 18.00 Uhr schließen.
Am 3. Tag geht es über Roßlau nach Dessau. In Dessau leben heute 104 000 Menschen. Auffallend im Stadtbild sind die vielen Radfahrer. Übernachten werden die Jungen in der Jugendherberge „Jupp Angenfort", Waldkaterweg 11.
Von Dessau nach Halle wollen sie die Eisenbahn benutzen. Für die im Fahrplan ausgewiesenen 57,0 km muß man 4,60 M bezahlen. Da Frank, Michael und Felix Schüler sind, brauchen sie nur die Hälfte dieses Preises zu zahlen.

▲1▲ In dieser Geschichte von den drei Jungen sind einige Zahlen- bzw. Größenangaben angegeben. Entscheide, welche davon genaue Werte und welche Näherungswerte sind! Vervollständige dazu nachstehende Tabelle 1!

Im allgemeinen kann man von Zahlen- oder Größenangaben sehr sicher entscheiden, ob es Näherungswerte oder genaue Werte sind. Mitunter ist das aber nicht so absolut eindeutig möglich. Das habt ihr vielleicht bei der Einordnung der Werte unter f) und i) gemerkt. Natürlich ist es richtig, daß nicht alle Läden „punkt" 18.00 Uhr in Wittenberg schließen. Zuweilen hat man Pech und steht bereits 17.59 Uhr vor verschlossener Ladentür, oder man hat Glück und kann sogar noch nach 18.01 Uhr in den Laden huschen. Trotzdem kann man die Angabe 18.00 Uhr als genauen Wert betrachten, weil er einen Sollwert darstellt. Ähnliches gilt für die im Fahrplan ausgewiesene Entfernung Dessau – Halle. Die 57,0 km von Dessau Hbf. bis Halle Hbf. sind gewiß letztlich gemessen worden und stellen somit einen Näherungswert dar. Für die Berechnung des Fahrpreises nimmt man diese Entfernungsangabe als genauen Wert (Tarifkilometer) an. Wie man unserer kleinen Geschichte entnehmen kann, muß man bei Zahlen- bzw. Größenangaben zwischen *Näherungswerten* und *genauen Werten* unterscheiden.
Näherungswerte sind z. B. alle Ergebnisse von Messungen. Die Genauigkeit, mit der der Zahlenwert angegeben werden kann, hängt insbesondere vom verwendeten Meßinstrument ab. So kann man z. B. eine Strecke
- mit einem Tafellineal auf Zentimeter,
- mit einem Schülerlineal auf Millimeter
- mit einem Meßschieber auf 0,1 Millimeter genau messen.

Man kann – wie ihr seht – eine Strecke in Abhängigkeit vom verwendeten Meßinstrument mit unterschiedlicher Genauigkeit messen, aber den genauen Wert kann man durch Messungen nicht ermitteln. Welches Meßinstrument man für eine spezielle Messung verwendet, hängt sehr stark vom praktischen Sachverhalt ab.
Will man z. B. die Zeit messen, die man benötigt, um von zu Haus zur Schule zu kommen, so genügt eine Armbanduhr, auf der man die Zeit mit Minutengenauigkeit ablesen kann. Zum Schulsportfest wird man zur Zeitmessung beim 100-m-Lauf eine Stoppuhr verwenden, wobei eine Angabe der Laufzeit auf Zehntelsekunden genau ausreicht (Handstoppung). Bei Meisterschaften oder gar Olympischen Spielen genügt eine Messung per Hand nicht mehr; elektronische Apparaturen sichern eine Genauigkeit von Hundertstelsekunden, gegebenenfalls sogar von Tausendstelsekunden (z. B. beim Rennschlittensport).
Beim Einkaufen findet man auf Verpackungen zuweilen folgende Angaben: Florena-Creme 60 g ± 2,5 g. Das bedeutet, daß eine Dose Florena-Creme zwischen 57,5 g und 62,5 g Creme enthält.
Wenn man mit m die genaue Masse bezeichnet, sind folgende Schreibweisen üblich: $57{,}5\,\text{g} \leqq m \leqq 62{,}5\,\text{g}$ oder
$60\,\text{g} - 2{,}5\,\text{g} \leqq m \leqq 60\,\text{g} + 2{,}5\,\text{g}$ oder
$m = (250 \pm 4)\,\text{g}$ oder
$m = 250\,\text{g} \pm 4\,\text{g}$
Die Doppelungleichung $57{,}5\,\text{g} \leqq m \leqq 62{,}5\,\text{g}$ beschreibt eine Zahlenmenge; eine solche Zahlenmenge nennt man auch Intervall. Ein Näherungswert gibt also letztlich ein Intervall an, in dem der genaue Wert liegt. Die Intervallgrenzen nennt man auch untere bzw. obere Wertschranke eines Näherungswertes. Stellt man ein Intervall auf einem Zahlenstrahl dar, so erhält man eine Strecke.
Nun kann man den Unterschied zwischen einem genauen Wert und einem Näherungswert anschaulich so erklären: Ein genauer Wert stellt auf der Zahlengeraden einen Punkt dar, ein Näherungswert eine Strecke (Bild 1).

▲2▲ Vervollständige die Tabelle 2!
Werden bei Näherungswerten keine Wertschranken angegeben, so ist wie in Tabelle 3 zu verfahren.
Man geht also davon aus, daß der wahre Wert vom angegebenen Näherungswert nicht mehr abweicht als die Hälfte $\left(\frac{5}{10}\right)$ des Stellenwertes der letzten angegebenen Ziffer. Die Ziffern solcher Näherungswerte werden als *zuverlässige* Ziffern bezeichnet. (Dabei werden die Nullen links von der ersten von Null verschiedenen Ziffer nicht mitgezählt.)

▲3▲ Vervollständige die Tabelle 4!
Wie man den Lösungen der Aufgaben 3c, d, e entnehmen kann, darf man bei Näherungswerten rechte Nullen nicht einfach weglassen oder hinzufügen, da sie dem Leser eine Information über das Intervall geben, in dem der wahre Wert liegt. Näherungswerte nutzt man häufig zur Kontrolle von Rechnungen, so z. B. bei der Überprüfung von Resultaten mittels Überschlägen.

Tabelle 1

	genauer Wert	Näherungswert
a) Abfahrtstag: 1. August	*x*	
b) Entfernung Halle – Pouch: 40 km		
c) Länge der Mulde: 124 km		
d) Höhe von der „Hohen Gieck": 191 m		
e) Ankunftszeit in Wittenberg: 17.00 Uhr		
f) Ladenschluß: 18.00 Uhr		
g) Einwohner von Dessau: 104 000		
h) Hausnummer: 11		
i) im Fahrplan ausgewiesene Fahrtkilometer Dessau – Halle: 57,0 km		
k) Fahrpreis zweiter Klasse Dessau – Halle: 4,60 M		

Bild 1

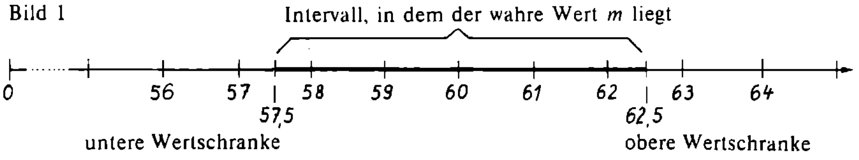


Tabelle 2

	Angabe des Intervalls für den wahren Wert m mit Hilfe einer Ungleichung	untere Wertschranke	obere Wertschranke
Florena-Creme $60\,g \pm 2{,}5\,g$	$57{,}5\,g \leqq m \leqq 62{,}5\,g$	57,5 g	62,5 g
Zahnpasta $50\,g \pm 4\,g$			
Waschpulver $900\,g \pm 40\,g$			
Tafelbutter		246 g	254 g

Tabelle 3

Näherungswert	Stellenwert d. letzten angeg. Ziffer	untere Wertschranke	obere Wertschranke	Bedingungen für den genauen Wert x_w
a) 17	Einer	16,5	17,5	$16{,}5 \leqq x_w \leqq 17{,}5$
b) 2,8	Zehntel	2,75	2,85	$2{,}75 \leqq x_w \leqq 2{,}85$
c) 2,80	Hundertstel	2,795	2,805	$2{,}795 \leqq x_w \leqq 2{,}805$
d) 0,034	Tausendstel	0,033 5	0,034 5	$0{,}0335 \leqq x_w \leqq 0{,}345$

Tabelle 4

Näherungswert	Anzahl der zuverlässigen Ziffern	untere Wertschranke	obere Wertschranke	Bedingungen für den genauen Wert x_w
a) 0,03	1	0,025	0,035	$0{,}025 \leqq x_w \leqq 0{,}035$
b) 2,7				
c) 11				
d)	3	10,95		
e)				$10{,}995 \leqq x_w \leqq 11{,}005$

▲4▲ Gib zu folgenden Aufgaben einen Überschlag an! Berechne jeweils auch den genauen Wert!
a) $1274 \cdot 543$ b) $7432 \cdot 181$ c) $9275 : 35$.
Mit Hilfe eines Überschlags kann man eigentlich nur sagen, daß der genaue Wert in der „Nähe" des Überschlags liegen muß. Der genaue Wert kann kleiner oder größer sein als der Überschlag.
Will man eine genauere Angabe über das Resultat haben, es aber nicht ausrechnen, so nutzt man die Angabe eines Intervalls. Man ermittelt also im Kopf zwei Werte (eine untere Schranke, eine obere Schranke), zwischen denen der genaue Wert liegt.
Beispiel: Es ist das Produkt $1274 \cdot 543$ zu ermitteln. Um sich einen ersten Überblick zu verschaffen, in welchem Intervall das Ergebnis p liegen muß, kann man wie folgt vorgehen:

$$1200 \cdot 500 \leqq p \leqq 1300 \cdot 600$$
$$600\,000 \leqq p \leqq 780\,000.$$

Eine solche Kontrollrechnung nennt man auch Abschätzung.

▲5▲ Gib ein Intervall an
a) für das Produkt $7432 \cdot 181$;
b) für den Quotienten $9275 : 35$!
Beachte: Um von einem Quotienten eine untere Schranke zu erhalten, muß man den Dividenden verkleinern und den Divisor vergrößern.
Näherungswerte können auch beim Rechnen mit genauen Werten entstehen, wenn z. B. das Ergebnis ein unendlicher Dezimalbruch ist und man nicht alle Stellen angeben kann bzw. einen Taschenrechner verwendet, der nur eine begrenzte Zahl von Ziffern anzeigt.
Hier ein Beispiel:
Im Ferienlager wurden zur Ermittlung des Lagermeisters im Fußball neun Spiele ausgetragen. Dabei fielen insgesamt 13 Tore. Wieviel Tore wurden im Durchschnitt pro Spiel erzielt?

Lösung: 13 : 7
Mit dem Taschenrechner SR 1 ermittelt man für den Quotienten 13 : 7 den Näherungswert 1,857 142 9.

Um die Frage hinreichend zu beantworten, genügt es sicher, den Quotienten 13 : 7 auf Zehntel genau zu berechnen.

▲6▲ Welche der folgenden Resultate sind Näherungswerte?
a) $23 : 13 = 1{,}769$ d) $1 : 3 = 0{,}3$
b) $1 : 7 = 1{,}43$ e) $2 : 6 = \frac{1}{3}$
c) $5 : 8 = 0{,}625$ f) $5 : 3 = 1{,}7$.

L. Flade/M. Pruzina

Das Rechenbuch des Johannes Widmann von 1489

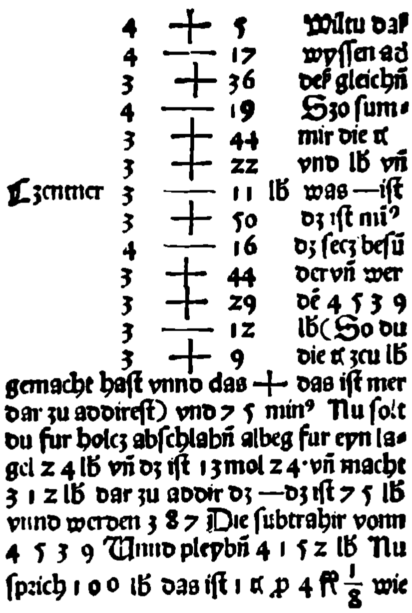
Der Magister schreibt ein Rechenbuch

„Was – ist dz ist mi⁹ (minus) ... vnnd das + das ist mer."

Mit dieser knappen Erklärung erschienen die beiden mathematischen Zeichen erstmals in einem Buche gedruckt. Es war das Rechenbuch „Behēde (behende) vnd hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft" des Johannes Widmann (um 1460 bis nach 1498?).

Die Symbole finden sich in einer Aufgabe, in der die Warenmenge einer Lieferung von Feigen aus den Fracht- und den Verpackungsgewichten der einzelnen Posten (Bild 1) zu bestimmen und dann der Kaufpreis zu berechnen ist. „Veygen. Itm̄ Eyner kaufft 13 lagel (Fässer) veygen vnd nympt ye 1 c'' (Zentner) pro 4 fl $\frac{1}{2}$ ort $\left(4\frac{1}{8}\text{ Gulden}\right)$. Vnd wigt itliche lagel als dan hye nachuolget. vn̄ ich wolt wissen was an der sum brecht (welche Summe sich ergibt)."

Das 1489, vor 500 Jahren, in Leipzig veröffentlichte Werk gehört zu den frühesten in deutscher Sprache gedruckten Rechenbüchern. Es lehrt das schriftliche Rechnen mit den indisch-arabischen Zahlzeichen, dessen größere Zweckmäßigkeit gegenüber dem bisher gebräuchlichen Rechnen auf den Linien und den mit römischen Ziffern geschriebenen Zahlen zunehmend erkannt wurde. Damals, am Ausgang des 15. Jahrhunderts, hatten sich in den fortgeschrittenen Ländern Europas frühkapitalistische Wirtschaftsformen herausgebildet. Handwerkliche Produktion, Warenverkehr und Geldumlauf wuchsen rasch an und verlangten allgemein verbreitete Rechenkenntnisse. Dieses Wissen wurde durch Rechenschulen und Rechenbücher vermittelt. Die Schriften stammten vor allem von Rechenmeistern und Universitätsgelehrten.



4 + 5 Wiltu das
4 — 17 wyssen ad
3 + 36 des glaichn̄
4 — 19 So sum-
3 + 44 mir die c
3 + 22 vnd lb vn̄
Czenner 3 — 11 lb was — ist
3 + 50 dz ist mi⁹
4 — 16 dz secz besu̅
3 + 44 der vn̄ wer
3 + 29 de 4 5 3 9
3 — 12 lb (So du
3 + 9 die c zcu lb
gemacht hast vnnd das + das ist mer
dar zu addirest) vnd 7 5 min⁹ Nu solt
du fur holcz abschlahn̄ albeg fur eyn la-
gel 24 lb vn̄ dz ist 13 mol 24 · vn̄ macht
3 1 2 lb dar zu addir dz — dz ist 7 5 lb
vnnd werden 3 8 7 Die subtrahir vom
4 5 3 9 Vnnd pleybn̄ 4 1 5 2 lb Nu
sprich 1 0 0 lb das ist 1 c p 4 fl $\frac{1}{8}$ wie

Bild 1
Tabelle der Gewichte der Fässer und Lösung der Aufgabe von den Feigen (die Abbildungen aus Johannes Widmann, Behēde vnd hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft, Leipzig 1489)

Johannes Widmann wirkte als Magister an der Universität Leipzig. Er wurde in Eger (heute Cheb, ČSSR) geboren. In Leipzig hielt er Vorlesungen über Arithmetik und im Sommersemester 1486 überhaupt die erste an einer Universität über Algebra. Zu seinem Rechenbuch wird ihn das Handels- und Messetreiben der Stadt angeregt haben.

Die „Behēde vnd hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft" umfaßt 462 nicht numerierte Seiten. Auf eine Einführung in das Rechnen mit natürlichen Zahlen und mit gemeinen Brüchen folgen Textaufgaben mit den behandelten Rechenverfahren und mit Proportionen, Kaufmannsrechnung („zal geordiniret auff kauffmanschafft") und Geometrie.

Das Plus- und das Minuszeichen treten bei der Behandlung der Rechenarten noch nicht auf, sondern erst in der Kaufmannsrechnung. Deshalb liegt die Annahme nahe, daß die beiden Symbole bei solchen Aufgaben entstanden waren. Sie kennzeichneten zunächst mehr die Abweichungen nach oben und unten als die Rechenoperationen.

Ihre Bildung wird aus älteren Handschriften sichtbar. Die Symbole leiten sich von den Schriftzügen der Worte „et (lat., und)" und „minus (lat., weniger)" durch Zusammenziehung, Abkürzung und Vereinfachung ab.

„zal geordiniret auff kauffmanschafft"

Der Magister wollte die Rechenverfahren der Kaufleute eingehend darstellen. Entsprechend der Vielfalt der mathematischen Probleme unterschied er eine große Zahl von Rechenregeln. Sie gingen den Beispielen voraus und werden oft eigentlich erst durch die Beschreibung der Aufgaben verständlich. Widmann nannte sie nach dem Anwendungsgebiet im Alltag oder nach dem Lösungsweg. Das am breitesten einsetzbare Rechenverfahren war der Dreisatz bzw. die Gleichsetzung von Verhältnissen (Regula Detri ader proportionum). Darauf konnten die auf die verschiedenen Anwendungsfälle bezogenen Vorschriften zurückgeführt werden.

„Das regula Detri nicht anders ist dann drey dingk die du seczt vnter welichen das erste vnd das leczte almol muß gleich sein (gemeint ist, dem Gegenstand bzw. der Dimension nach) Weliches leczte du solt multipliciren mit dem mittelsten das dann gleich ist dem vierden vnd vnbekantn̄ · dz erwechst auß solcher multiplicatio · vnd der teylūg (Teilung) daß product mit dem ersten (durch das erste)." Der Rechenweg wurde, wie damals üblich, nur beschrieben, nicht begründet. Er sollte mechanisch beherrscht werden. Beispiele verdeutlichten ihn. „Itm̄ ich hab kaufft 24 lb (Pfund) pro 13 flo. (Gulden) wy kummen 130 lb Machß nach der Regel Also multiplicir das mittelst mit dē leczten vnd teylß durch das erst kumpt 70 flo. 8 ß (Schillinge) 4 hlr (Heller)."

Man rechnet zunächst die 13 Gulden in 273 Schillinge und diese in 3276 Heller um. Nach der Dreisatzrechnung wird auf die Einheit $\left(\frac{3276}{24}\right)$ und dann auf das gefragte Vielfache $\left(\frac{3276}{24}\cdot 130\right.$, das ist die Operation, die Widmann in der Regel verlangt$\left.\right)$ geschlossen. 130 Pfund kosten 17745 Heller oder 70 Gulden 8 Schillinge 9 Heller (nicht 4 Heller, wie von Widmann angegeben).

Mit Hilfe einer Verhältnisgleichung ergibt sich

$$\frac{x}{3276} = \frac{130}{24}, \quad x = \frac{130 \cdot 3276}{24} = 17745.$$

Geldverleiher und -wechsler, Kaufleute und Münzmeister mußten Kenntnisse über die Berechnung der Preise der Münzmetalle Silber und Gold und des Feingehaltes, des Gewichtes und des Wertes (Preises) der Münzen im Zusammenhang mit deren Prägung besitzen (Bild 2). „Itm̄ ist aber eyn mūcz der 6 auff das lot geen (gehen) Vnd besten (bestehen) czu 10 lotn̄ in der prob (enthalten 10 Lot Silber auf 1 Mark Münzlegierung aus Silber und Kupfer). Vnd die m̄r für $8\frac{1}{4}$ fl in die muncz gesaczt Ist die frag wye vil sol man der selbigē pro 1 fl gebn̄ dz die m̄r für $8\frac{1}{4}$ fl hin kumpt." Aus 1 Lot Münzlegierung prägt man 6 Münzen (Groschen), also 96 Münzen aus 1 Mark. Diese 1 Mark Legierung enthält 10 Lot Silber. 1 Mark Silber kostet $8\frac{1}{4}$ fl, folglich kosten 10 Lot Silber $\frac{10}{16}\cdot 8\frac{1}{4}\text{ fl} = 5\frac{5}{32}\text{ fl}$. Demnach haben die 96 Münzen, die aus 1 Mark Legierung geprägt wurden, einen

Wert von $5\frac{5}{32}$ fl, und für 1 fl muß man $\frac{96 \cdot 32}{165}$ Münzen (Groschen) $= 18\frac{34}{55}$ Münzen geben.

Neben Aufgaben aus dem täglichen Geschehen behandelte Widmann Beispiele zur Unterhaltung und zur Übung im Rechnen. „Anis. Itm̃ Eyner will eyn sack mit Anißkauffen Vnd wen er vor itlichß lb (Pfund) 12 ₰ (Pfennige) giebt szo pleiben ym vbrig 37 ₰ Szo er aber für 1 lb 15 ₰ giebt so zu rint ym (zerrinnt ihm, verliert er) 44 ₰ Nu ist die frag wie vil der sagk gewegen hab vnd wie vil er gelcz gehabt hab.“

Der Magister löste die Aufgabe mit dem Verfahren von Überschuß und Fehlbetrag, das er wohl in früheren Handschriften gefunden hatte. Er nannte es „Regula augmenti + decrementi (von lat. augmentum, Zunahme, und decrementum, Abnahme)“. Man bestimmt eine Zahl (hier die Geldsumme) aus zwei Vielfachen einer weiteren Größe (hier des Gewichtes des Sacks Anis), die größer bzw. kleiner als die gefragte Zahl sind, und diesen Differenzen. Nach der Regel rechnete Widmann $15 - 12$ und dann $\frac{44 + 37}{15 - 12}$. Daraus folgte für den Sack Anis ein Gewicht von 27 Pfund. Weiter erhielt der Magister aus $(27 \cdot 12) + 37$ oder $(27 \cdot 15) - 44$ den Geldbetrag in Höhe von 361 Pfennigen.

Mit der Variablen x findet man heute das Gleichungssystem $y = 12x + 37$, $y = 15x - 44$ (x das Gewicht des Sacks Anis und y der Geldbetrag). Widmann wollte dagegen in seinem Rechenbuch ohne Algebra zum Ziele kommen, weil er auch für mathematisch ungeübte Leser schrieb.

H. Beyrich

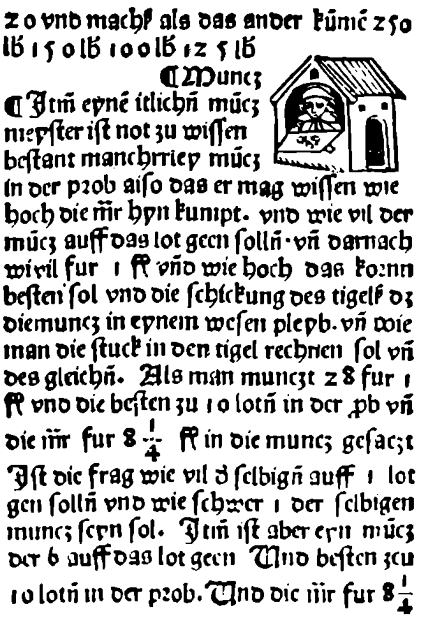

zo vnd macht als das ander kũnć z5o
lb 15o lb 1oo lb 1z 5 lb
Muncz
Jtm̃ eyné itlichñ mũcz
meyster ist not zu wissen
bestant mancherley mũcz
in der prob also das er mag wissen wie
hoch die m̃r hyn kumpt. vnd wie vil der
mũcz auff das lot geen sollñ · vñ darnach
wie vil fur 1 m̃r vñd wie hoch das korn
besten sol vnd die schickung des tigels dz
die muncz in eynem wesen pleyb. vñ wie
man die stuck in den tigel rechnen sol vñ
des gleichñ. Als man munczt 28 fur 1
m̃r vnd die besten zu 10 lotñ in der pb vñ
die m̃r fur $8\frac{1}{4}$ m̃r in die muncz gesaczt
Jst die frag wie vil d selbigñ auff 1 lot
gen sollñ vnd wie schwer 1 der selbigen
muncz seyn sol. Jtm̃ ist aber eyn mũcz
der 6 auff das lot geen Vnd besten zcu
10 lotñ in der prob. Vnd die m̃r fur $8\frac{1}{4}$

Bild 2 Münzrechnung. Das Bildchen zeigt einen Geldwechsler hinter seiner Wechselbank. – Silbergewicht 1 Mark (m̃r) = 16 Lot = 233,856 Gramm. – Korn ist die Masse des Edelmetalls in der Münze. – Die Probe (pb) ist die Prüfung des Feingehaltes der Münzlegierung

Acht mathematische Knobelaufgaben

„Aufgepaßt! Mathespaß! Mitgemacht!“ steht als Überschrift auf einem Knobelheftchen, das das Neustrelitzer Pionierhaus „Heinrich Rau“ im Januar 1989 an Pioniere der 4. Klassen des Kreises verschickt hat. Dies waren Pioniere, die sich für Mathematik und mathematische Knobeleien besonders interessierten. Auf einer beiliegenden vorgedruckten Postkarte mußten die Lösungszahlen von acht Aufgaben eingetragen und eingesandt werden.

Im Februar wurden dann alle Pioniere mit „8 Richtigen“ (es waren 36 Pioniere) zu einem interessanten Mathetreff eingeladen. Alle bekamen eine Urkunde und als Preis ein schönes Geschenk.

Nur noch soviel: Die Aufgaben wurden recht gut gelöst. Nur bei Aufgabe 7 und besonders bei Aufgabe 1 gab es oft falsche Lösungen. Was war der Grund? Meist war es die gleiche Ursache: Der Text wird nicht genau genug gelesen. Und wer darauf nicht achtet, braucht gar nicht erst anzufangen! Wir haben die acht Aufgaben ein klein wenig schwieriger gemacht, damit auch Pioniere ab Klasse 5 noch ein paar kleine Nüsse zu knacken haben.

Und hier die acht Aufgaben:

▲1▲ Im Jahre 1989 feiern wir den 40. Geburtstag unserer Republik; daher gilt die Gleichung $1949 + 40 = 1989$. Diese Gleichung ist aber auch interessant. Setzt man nämlich zwischen jede Ziffer ein Pluszeichen (also 7 Stück), so bleibt diese Gleichung trotzdem wahr:
$1 + 9 + 4 + 9 + 4 + 0 = 1 + 9 + 8 + 9$.
Wir erhalten nämlich $27 = 27$.
Setze zwischen bestimmte Ziffern der Gleichung $1949 + 40 = 1989$ nur genau vier Pluszeichen so, daß man eine wahre Aussage erhält! Gib zwei Möglichkeiten an!

▲2▲ Verwende für die sechs verschiedenen Buchstaben des Wortes PIONIER folgende sechs Gleichungen:

$$N + N + N = 45,$$
$$R + R + R = E,$$
$$N + N = P,$$
$$N + P = I,$$
$$N \cdot P = R,$$
$$I + I : N + I : N + I : N = O$$

Mit welchen natürlichen Zahlen müssen die Buchstaben belegt werden, damit man sechs wahre Aussagen erhält?
Berechne die Summe für $P + I + O + N + I + E + R$!

▲3▲ In der Klasse 5a von Susanne ist genau ein Schüler mehr als in der Parallelklasse 5b, aber genau ein Schüler weniger als in der Klasse 5c. Zu den beiden Klassen 5b und 5c gehören insgesamt 58 Schüler. Wie viele Schüler sind in Susannes Klasse?

▲4▲
a) 1122, 2233, 3344, ...
b) 1231, 2342, 3453, ...
c) 1234, 2341, 3412, ...
d) 1123, 2234, 3345, ...

Betrachte in a), b), c), d) jeweils die drei Zahlen. Die Ziffern der zweiten Zahl gehen aus den Ziffern der ersten hervor. Aus der zweiten folgt die dritte; aus der dritten folgt die von dir zu bestimmende vierte Zahl. Wie lauten sie?

▲5▲ Es gilt $2 \cdot 2 = 2 + 2$ und $1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3$.
Finde vier natürliche Zahlen, deren Produkt und deren Summe jeweils 8 ergeben!

▲6▲ Denke dir eine dreistellige natürliche Zahl, in der die Ziffer Null nicht vorkommt. Bilde aus der gedachten Zahl zwei weitere Zahlen, indem du jeweils die erste Ziffer an das Ende setzt, addiere nun die Summe aus diesen drei Zahlen durch die Quersumme einer dieser Zahlen. Wie lautet das Ergebnis?

▲7▲ Jemand hat zwei Spielwürfel. Auf dem ersten Würfel stehen die Zahlen von 1 bis 6, auf dem zweiten die Zahlen von 7 bis 12.
Wieviel verschiedene Summen der Augenzahlen können bei gleichzeitiger Verwendung beider Würfel gewürfelt werden?

▲8▲ Betrachte die drei Wörter AUFGEPASST, MATHESPASS und MITGEMACHT; sie enthalten 12 verschiedene Buchstaben.
Untersuche, wie oft jeder der 12 Buchstaben vorkommt auf folgende Weise: A = 5, U = 1, und so weiter.
Welchen Zahlenwert ergibt das Produkt dieser 12 so gefundenen Zahlen?

Viel Spaß beim Knobeln wünschen euch

H.-J. Kerber / Th. Scholl

Es ist nicht genug, daß ich etwas weiß,
bekömmt nicht das Gelernte dadurch,
daß es sich im Leben von selbst anwendet,
Halt und Sicherheit.

Robert Schumann

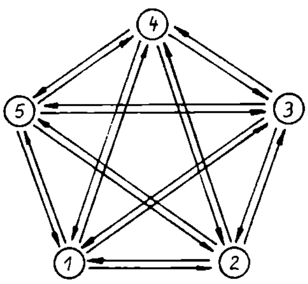
Das Problem der kürzesten Fahrtstrecke

Eine interessante Aufgabenstellung der Diskreten Optimierung

Teil 2

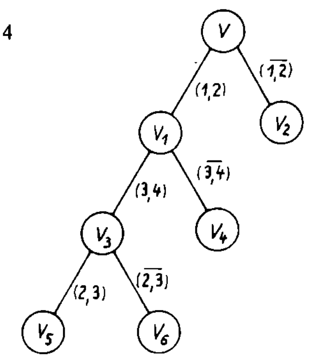
Zum Schluß des ersten Teiles unserer Unterhaltung über ein Problem der Diskreten Optimierung war als Aufgabe gestellt worden, die kürzeste Fahrtstrecke für ein spezielles Problem zu berechnen.
Heute wollen wir einen Lösungsalgorithmus kennenlernen, der diese Berechnung effektiv durchführt. Wie habt ihr die einzelnen Rundreisen konstruiert? Um eine einzelne Rundreise zu erzeugen, kann man doch sicher der Reihe nach einige Pfeile aus dem vollständigen Graphen in Bild 1

Bild 1



herausnehmen und jedesmal entscheiden, ob die entsprechende Fahrtroute zur Rundreise gehören soll oder nicht. Nach endlich vielen solchen Entscheidungen haben wir dann eine Rundreise konstruiert. So können wir zunächst Pfeil (1, 2), dann Pfeil (3, 4) herausnehmen und ihre Zugehörigkeit zur Rundreise fordern. Wählen wir jetzt Pfeil (1, 4) aus, so darf dieser nicht zur Rundreise gehören, da sonst Eigenschaft (ii) verletzt wäre, usw. Diese Vorgehensweise ist sicher sinnvoll, beinhaltet aber eine Tücke. Schon als wir Pfeil (1, 2) in die Rundreise aufgenommen haben, wußten wir nicht, ob er auch wirklich zur Rundreise minimaler Länge gehört. Vielleicht darf er gerade nicht dazu gehören? In unserem Beispiel ist das auch der Fall.
Wir müssen uns also in jedem Schritt beide Möglichkeiten offen lassen. Das heißt, daß wir bei der Wahl des Pfeiles (1, 2) zwei Teilmengen von der Menge V aller Rundreisen konstruieren:
Erstens die Teilmenge V_1, in der alle Rundreisen enthalten sind, die die Fahrtroute (1, 2) enthalten, und zweitens die Teilmenge V_2 aller Rundreisen, die diese Fahrtroute gerade nicht enthalten. Überzeugt euch durch Aufschreiben aller Rundreisen der Menge V_1 davon, daß in ihr gerade sechs Rundreisen enthalten sind, in V_2 sind es die anderen 18. Beide Teilmengen haben keine gemeinsamen Elemente und bestimmen kleinere Teilprobleme der Minimierung von (2) über $\tilde{U} \in V_1$ bzw. $\tilde{U} \in V_2$.
Diese Vorgehensweise, bei der solche kleineren Teilprobleme entstehen, nennen wir „Verzweigen aus einem Problem".
Jedes der neu entstandenen Teilprobleme müssen wir uns nun merken. Jetzt wählen wir uns eines davon aus, z. B. das der Minimierung von (2) über $\tilde{U} \in V_1$. Wir suchen uns jetzt einen weiteren Pfeil, z. B. den Pfeil (3, 4) und konstruieren aus ihm analog zwei neue Teilprobleme: das dritte Teilproblem beinhaltet die Minimierung von (2) über der Menge V_3 aller Rundreisen, die (1, 2) und (3, 4) enthalten, das vierte die Minimierung von (2) über der Menge V_4 aller Rundreisen, die (1, 2), nicht aber (3, 4) enthalten.

Bild 4



Dieser „Verzweigungsprozeß" ist in Bild 4 anschaulich dargestellt, wobei wir die entsprechenden Mengen von Rundreisen durch die Angabe der Entscheidungen charakterisieren. Dabei bedeutet *(1, 2)*, daß der Pfeil (1, 2) in jeder Rundreise von V_1 enthalten ist, $\overline{(1, 2)}$ bedeutet, daß (1, 2) in keiner Rundreise von V_2 enthalten ist. Speziell sind in jeder Rundreise von V_5 die Fahrtrouten (1, 2), (3, 4), (2, 3) enthalten. Wie viele solcher Rundreisen gibt es noch? Richtig, genau eine, da die Bedingungen (i), (ii), (iii) die Hinzunahme der Fahrtstrecken (4, 5) und (5, 1) erzwingen. In V_6 sind dagegen noch mehr Rundreisen enthalten, nämlich alle die, die die Fahrtrouten (1, 2), (3, 4), nicht aber (2, 3) enthalten. Beim Stande der Rechnung aus Bild 4 haben wir noch drei Teilprobleme zu lösen: das Problem der Minimierung von (2) über $\tilde{U} \in V_2$, $\tilde{U} \in V_4$, $\tilde{U} \in V_6$.
Jetzt haben sich bei euch sicher drei Fragen herauskristallisiert:
a) Unklar ist, welches der konstruierten Teilprobleme wir jeweils wählen sollen, um aus ihm zu verzweigen.
b) Wünschenswert wäre eine Möglichkeit, frühzeitig zu entscheiden, ob aus einem Teilproblem überhaupt verzweigt werden muß. Denn, wenn wir sichern können, daß wir die Rundreise minimaler Länge für das Ausgangsproblem gewiß nicht bei der Lösung eines speziellen Teilproblems erhalten können, so müssen wir doch dieses Teilproblem überhaupt nicht lösen, oder? Das Ergebnis dieser Möglichkeit ist eine bedeutende Verringerung des Rechenaufwandes bei der Berechnung der Rundreise minimaler Gesamtlänge.
c) Die dritte Frage ist die, welcher Pfeil als nächstes zur Verzweigung aus einem Teilproblem verwendet werden soll.
Die ersten beiden Fragen werden wir mit einer Methode beantworten, die dem Lösungsalgorithmus gemeinsam mit dem Verzweigungsprinzip seinen Namen branch-and-bound-Algorithmus gab (engl.: branch = verzweigen, bound = begrenzen).
Wir werden für jedes der Teilprobleme eine untere Schranke für die Gesamtlänge aller in ihm möglichen Rundreisen konstruieren. Wenn wir solche Schranken berechnen können, ergibt sich als Antwort auf die Fragen a), b): In jedem Schritt werden wir aus demjenigen Teilproblem verzweigen, welches den kleinsten Schrankenwert hat. Um die zweite Frage zu beantworten, nehmen wir an, daß wir eine spezielle Rundreise kennen, deren Gesamtlänge l ist, und daß die untere Schranke der Gesamtlänge aller Rundreisen eines anderen Teilproblems L ist. Wenn nun

$$l \leqq L \qquad (4)$$

ist, so folgt

$$l \leqq L \leqq \sum_{(i,j) \in \tilde{U}} c_{ij}$$

für alle möglichen Rundreisen in diesem Teilproblem, d. h., keine einzige kann kürzer sein als die schon berechnete. Damit muß dieses Teilproblem nicht gelöst werden. Wenn (4) für alle noch zu lösenden Teilprobleme erfüllt ist, so haben wir die Rundreise kürzester Gesamtlänge schon berechnet, unser Problem ist gelöst.
Überlegen wir uns jetzt, wie wir solche unteren Schranken berechnen können. Dazu betrachten wir nur die Bedingungen (i), (ii) an eine Rundreise und vergessen für den Augenblick die Forderung (iii).
In jedem Knoten aus E muß also genau ein Pfeil beginnen, m. a. W., von den Elementen einer jeden Zeile von C muß genau eines in der Summe (2) enthalten sein. Wenn wir jetzt die Summe der kleinsten Zahlen jeder Zeile von C bilden, erhalten wir folglich eine untere Schranke für die Gesamtlänge einer beliebigen Rundreise. Wir verwenden die kleinste Zahl einer jeden Zeile von C auch dazu, die Elemente von C zu verkleinern, indem wir die kleinste Zahl jeder Zeile von allen Elementen dieser Zeile abziehen. Von den Elementen der ersten Zeile der Matrix C aus (1) ziehen wir also 109, von den Elementen der zweiten Zeile 100 usw. Wir erhalten dann die Matrix C_0' mit den Elementen c_{ij}'. (Laßt euch durch die in Klammern stehenden Zahlen nicht irritieren, deren Bedeutung wird später erklärt.)

$$C_0' = \begin{bmatrix} \infty & 10 & 0\,(5) & 2 & 10 \\ 5 & \infty & 10 & 0\,(5) & 10 \\ 0\,(9) & 5 & \infty & 5 & 4 \\ 6 & 0\,(2) & 3 & \infty & 0\,(4) \\ 6 & 2 & 10 & 0\,(2) & \infty \end{bmatrix} \tag{5}$$

Sei $\tilde{U}$ die Menge der Pfeile einer beliebigen Rundreise, dann ergibt sich:
$c'_{ij} = c_{ij}$ – minimales Element der Zeile i, für alle Elemente der Matrix C
und folglich

$$\sum_{(i,j)\in\tilde{U}} c_{ij} = \sum_{(i,j)\in\tilde{U}} c'_{ij} + \text{Summe}$$

der minimalen Elemente der Zeilen

$$= \sum_{(i,j)\in\tilde{U}} c'_{ij} + 509\,. \tag{6}$$

Da alle Elemente der Matrix C' nichtnegativ sein müssen, ist ihre Summe nichtnegativ und wir erhalten als untere Schranke für die Länge einer beliebigen Rundreise in unserem Beispiel mit der Matrix C aus (1) $L = 509$.

Die gleiche Prozedur können wir natürlich auch mit den Spalten der Matrix C' wiederholen, wodurch sich die Elemente der Matrix nochmals verkleinern (oder auch nicht, wie in unserem Beispiel) und die untere Schranke für die Rundreisen L noch weiter erhöhen (kann). Insgesamt haben wir damit ein äquivalentes Rundreiseproblem erhalten (die minimalen Längen der Rundreisen unterscheiden sich nur durch einen konstanten Summanden).

Welche Auswirkungen hat jetzt die Wahl eines Pfeiles, z. B. die Wahl von (3, 1), und die entspechende Konstruktion zweier Teilprobleme auf die Berechnung unterer Schranken für die Gesamtlänge der Rundreisen?

a) Das erste Teilproblem entsteht durch die Forderung, daß (3, 1) zur konstruierenden Rundreise gehören soll. Somit müssen wir von Ort 3 in den Heimatort 1 fahren, dürfen also nicht woandershin fahren. Folglich können in (2) keine anderen Summanden der 3. Zeile auftreten als c_{31}, wir können die anderen Elemente der 3. Zeile mit ∞ belegen, die entsprechenden Fahrtrouten sind verboten. Analoges trifft auf die erste Spalte zu, da der letzte Ort in unserer Rundreise schon gefunden ist. Damit entsteht Matrix C_1':

$$C_1' = \begin{bmatrix} \infty & 8 & \infty & 0\,(8) & 8 \\ \infty & \infty & 7 & 0\,(7) & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0\,(2) & 0\,(7) & \infty & 0\,(8) \\ \infty & 2 & 7 & 0\,(2) & \infty \end{bmatrix}$$

$$C_2' = \begin{bmatrix} \infty & 10 & 0\,(5) & 2 & 10 \\ 0\,(1) & \infty & 10 & 0\,(0) & 10 \\ \infty & 1 & \infty & 1 & 0\,(1) \\ 1 & 0\,(1) & 3 & \infty & 0\,(0) \\ 1 & 2 & 10 & 0\,(1) & \infty \end{bmatrix} \tag{7}$$

Klar ist, daß wir jetzt auch Fahrtroute (1, 3) verbieten müssen, da sonst die Bedingung (iii) an eine Rundreise verletzt wäre. Deshalb steht dort ∞. Für dieses Problem können wir analog zu (6) wieder eine untere Schranke berechnen, wir erhalten $L_1 = 514$ $(L(3, 1))$.

b) Wenn die Reiseroute (3, 1) nicht in der zu konstruierenden Rundreise enthalten sein soll, so ist sie verboten, wir können $c_{31} = \infty$ setzen und anschließend eine neue untere Schranke für die Gesamtlänge aller möglichen Rundreisen (die (3, 1) nicht enthalten) berechnen. Die entstehende Matrix ist Matrix C_2' aus (7), die Schranke $L_2 = 518$ $(L(\overline{3,1}))$.

Damit können wir auch die letzte noch offenstehende Frage klären. Dazu überlegen wir uns für jede der Nullen in der Matrix C', welche Auswirkungen es auf den Wert der Schranke hätte, würden wir die entsprechende Fahrtroute in einer Rundreise verbieten. Bei den eben durchgeführten Überlegungen stieg der Schrankenwert um die Summe der minimalen Elemente der 3. Zeile und der ersten Spalte (außer $c'_{31} = 0$). Analog können wir die Steigerungsrate für eine beliebige Fahrtroute (i, j) mit $c'_{ij} = 0$ berechnen und erhalten:

Steigerungsrate = [Summe der minimalen Elemente der i-ten Zeile und der j-ten Spalte außer $c'_{ij} = 0$]. (8)

Für die Aufgabe mit der Entfernungsmatrix C_0' erhalten wir:
- verbieten wir (1, 3), ist die Steigerungsrate gleich $2 + 3 = 5$,
- verbieten wir (2, 4), ist die Steigerungsrate gleich $5 + 0 = 5$, usw.

Wir werden diese Steigerungsraten in der Matrix C' hinter den Nullen in Klammern angeben und stets den Pfeil zur Verzweigung aus einem Problem auswählen, der die größte Steigerungsrate hat. Damit ergibt sich folgender Lösungsprozeß für unsere Beispielaufgabe, wobei wir der Übersicht halber sowohl die Matrizen C als auch die berechneten Schranken L genauso durch Indizes kennzeichnen wollen, wie die Mengen V der einzelnen Teilprobleme.

Zunächst erhalten wir wie oben beschrieben die Matrix C_0' aus (5). Also ist 9 die größte Steigerungsrate, wir wählen den Pfeil (3, 1) und verzweigen wie in Bild 5 angegeben. C_1' und C_2' haben wir schon berechnet. Nach der Schrankenberechnung sowie der Verkleinerung der Elemente dieser Matrizen analog zu (6) erhalten wir die Matrizen C_1' und C_2' aus (7), wobei $L_1 = 514$ und $L_2 = 518$ ist.

Den kleineren Schrankenwert hat nun Problem 1 mit $L_1 = 514$. Um aus ihm zu verzweigen, wählen wir den Pfeil mit der größten Steigerungsrate in C_1' aus, das ist der Pfeil (1, 4) mit der Steigerungsrate 8. Problem 3 entsteht durch die Forderung, daß sowohl die Fahrtroute (3, 1) als auch die Fahrtroute (1, 4) in der Rundreise enthalten sein sollen, Problem 4 durch die Forderung, daß Pfeil (3, 1), nicht aber Pfeil (1, 4) in der Rundreise enthalten sein soll. Matrix C_3' entsteht aus der Matrix C_1' durch Verbieten aller Fahrtrouten, die in Ort 1 beginnen bzw. in Ort 4 enden sowie der Fahrtroute (4, 1). Danach wurden die Elemente der Matrix in gewohnter Weise verkleinert und es ergibt sich

$$C_3' = \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0\,(8) & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0\,(0) & \infty & \infty & 0\,(3) \\ \infty & 0\,(5) & 5 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$$C_4' = \begin{bmatrix} \infty & 0\,(0) & \infty & \infty & 0\,(0) \\ \infty & \infty & 7 & 0\,(7) & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0\,(0) & 0\,(7) & \infty & 0\,(0) \\ \infty & 2 & 7 & 0\,(2) & \infty \end{bmatrix} \tag{9}$$

Nach der Berechnung der Schranke L_4 sehen wir, daß die kleinste Schranke L_2 ist. Wir rechnen also in Problem 2 weiter und wählen (1, 3) als nächsten Pfeil aus, usw. Die Rechnung ist in Bild 5 aufgezeigt. Nach der Lösung von Problem 10 erkennen wir, daß in Problem 9 nur noch eine Rundreise möglich ist: V_9 enthält alle Rundreisen, die die Fahrtrouten (1, 3), (5, 4), (2, 1), nicht aber (3, 1) enthalten. Die einzige Rundreise, die sich entsprechend (i), (ii), (iii) daraus noch bilden läßt, ist

$$\tilde{U} = \{(1, 3), (5, 4), (2, 1), (3, 5), (4, 2)\}\,. \tag{10}$$

Die Länge dieser Rundreise ist

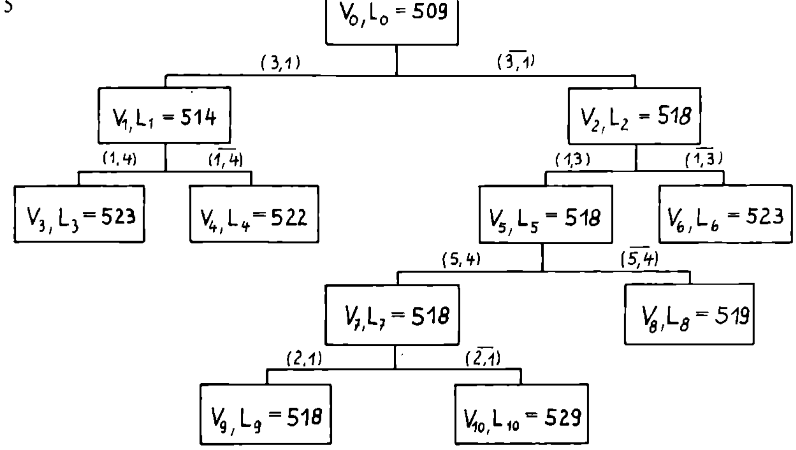
$$l = c_{13} + c_{54} + c_{21} + c_{35} + c_{42}$$
$$= 109 + 100 + 105 + 104 + 100 = 518\,.$$

Durch Vergleich der Länge dieser Rundreise mit den unteren Schranken für die Länge der Rundreisen in den noch zu lösenden Teilproblemen 3, 4, 10, 8, 6 analog zu (4) erkennen wir, daß alle diese Probleme nicht mehr gelöst werden müssen, die Rundreise minimaler Länge ist die in (10) gegebene.

Wenn wir die oben am Beispiel beschriebene Rechnung formalisieren, erhalten wir den folgenden Algorithmus zur Lösung des Rundreiseproblems:

Schritt 1: Berechne eine untere Schranke L für die minimale Gesamtlänge einer belie-

Bild 5



bigen Rundreise und verkleinere die Elemente der Matrix C entspechend (5), wobei die Rechnung sowohl bezüglich der Zeilen als auch der Spalten der Matrix C durchgeführt wird. Es ergibt sich Matrix C_0'. Setze $k = 0$.
Schritt 2: Wähle aus der Menge noch zu lösender Teilprobleme dasjenige mit der kleinsten unteren Schranke L_j aus. Sei dies Problem p. Berechne für alle Nullen der Matrix C_p' die Steigerungsraten entsprechend (8) und wähle einen Pfeil (i,j) mit $c_{ij}' = 0$ und der größten Steigerungsrate aus.
Schritt 3: Bestimme die Teilprobleme $k + 1$ und $k + 2$. Problem $k + 1$ entsteht aus Problem p durch Verbieten aller Fahrtrouten, die den Forderungen (i), (ii), (iii) an eine Rundreise sowie der Aufnahme von (i, j) in die entsprechend V_p zu bildende Rundreise widersprechen. Problem $k + 2$ entsteht aus Problem p durch Verbieten der Fahrtroute (i, j) (vgl. (7)). Bestimme die Schranken L_{k+1} und L_{k+2}.
Schritt 4: Falls V_{k+1} oder V_{k+2} aus nur einer Rundreise besteht, merke sie dir.
Schritt 5: Überprüfe, welche der offenen Probleme tatsächlich noch zu lösen sind anhand des Schrankentests (4). Wenn es noch offene Probleme gibt, setze $k := k + 2$ und gehe zu Schritt 2, sonst Ende.

Der Algorithmus berechnet in Schritt 4 eine Reihe von Rundreisen, von denen tatsächlich nur diejenige mit der kürzesten Gesamtlänge von Bedeutung ist. Alle anderen können vergessen werden. Der Schrankentest in Schritt 5 kann natürlich erst dann durchgeführt werden, wenn erste Rundreisen berechnet wurden.

Auf der Basis dieses Algorithmus lassen sich relativ einfach Computerprogramme entwickeln, die das Rundreiseproblem auch bei einer größeren Anzahl von Knoten im vollständigen Graphen lösen können. Zu groß dürfen die Graphen allerdings nicht werden, da wir schnell an die Grenzen der Fähigkeiten unserer Computer kommen werden. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, entweder Algorithmen zu entwickeln, die schnell Rundreisen konstruieren, welche zwar nicht die kleinstmögliche sondern eine nur *wenig* größere Gesamtlänge haben (solche Algorithmen nennt man Näherungsalgorithmen) oder aber vollkommen neue Lösungskonzepte zu entwickeln. Beide Probleme werden in der modernen Forschung auf dem Gebiet der Diskreten Optimierung untersucht, sind aber derzeit noch nicht zur Zufriedenheit gelöst. Fraglich ist auch, ob die zweite Möglichkeit überhaupt zu einer befriedigenden Lösung führen kann. Das könnten durchaus auch interessante Aufgabenstellungen für euch sein! *S. Dempe*

Nachtrag: Wir danken dem Altberliner Verlag und dem Mitteldeutschen Verlag Halle herzlich für die uns als Buchprämien in Auswertung des *alpha*-Wettbewerbs 87/88 zur Verfügung gestellten Titel ihrer Produktion. Durch einen bedauerlichen Irrtum wurden beide Verlage im Heft 1/89 nicht genannt.

Kirche, König, Konvergenz Zum 200. Geburtstag von A. L. Cauchy

Bild 1

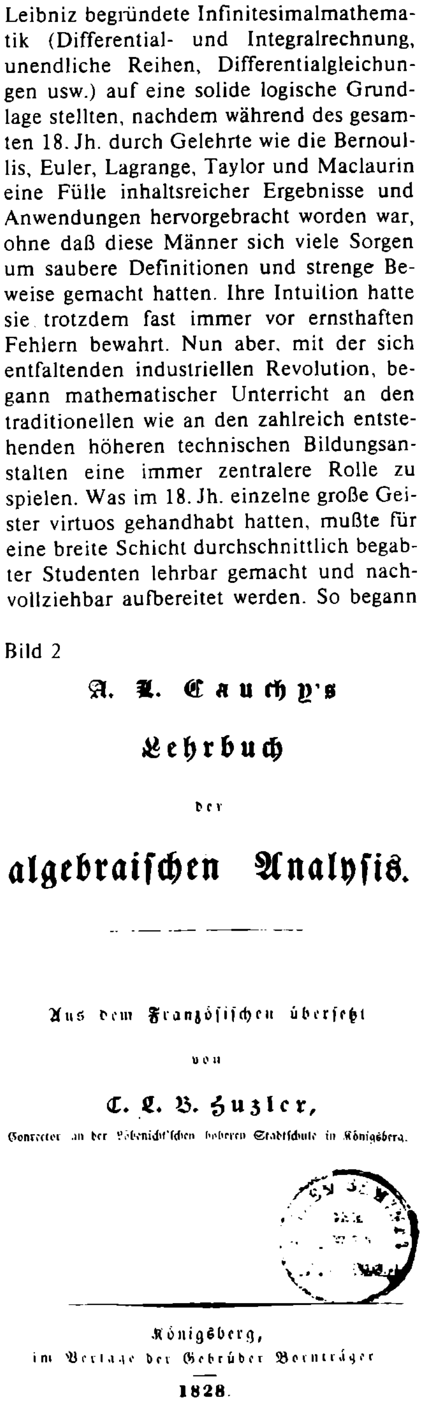
Am 21. August 1989 begehen die Mathematiker der ganzen Welt den 200. Geburtstag eines Fachkollegen, der mit 7 Büchern und rund 800 Veröffentlichungen zu den produktivsten und wirkungsreichsten Mathematikern aller Zeiten gehört. Seinen Namen tragen so zahlreiche mathematische Begriffe und Sätze, daß er jedem Mathematik- oder Physikstudenten schon in den ersten Semestern geläufig wird: Augustin Louis Cauchy (gesprochen Kooschi). Aber auch schon im Mathematiklehrbuch der 11. Klasse wird sein Name erwähnt und sein Bild gezeigt. Etwas vereinfacht könnte man sagen, daß der gesamte Lehrstoff der 11. Klasse in seiner heutigen Form auf Cauchy beruht. Zugleich war Cauchy eine der widerspruchsvollsten und schillerndsten Persönlichkeiten in der Geschichte der Mathematik. Da man sich in dem weitverbreiteten Sammelband Biographien bedeutender Mathematiker (herausgegeben von H. Wußing und W. Arnold, Verlag Volk und Wissen) ausführlich über den Lebensweg Cauchys informieren kann, sollen hier die biographischen Fakten nur in Kürze an den Anfang gestellt werden.

Cauchy wurde in Paris wenige Wochen nach dem Sturm auf die Bastille in einer königstreuen und streng katholischen Beamtenfamilie geboren, die bald darauf vor den revolutionären Ereignissen in ein abgelegenes Dorf floh, wo der Vater zunächst selbst die Erziehung und den Unterricht des kleinen Augustin übernahm. Diese Herkunft und Erziehung bestimmte den gesamten weiteren Lebensweg Cauchys. Durch Vermittlung von Freunden der Familie, die sich frühzeitig Napoleon angeschlossen hatten, konnten die Cauchys 1800 nach Paris und in einflußreiche Staatsämter zurückkehren. Augustin besuchte von 1805 bis 1807 die berühmte, erst 1794 gegründete Pariser Polytechnische Schule und danach zwei Jahre lang die Hochschule der „Brücken und Chausseen“, d. h. des Zivilingenieurwesens. An der Polytechnischen Schule erteilten damals hervorragende Mathematiker wie Lagrange, Monge, Laplace, Poisson, Poinsot und Ampère den besten mathematischen Unterricht in ganz Europa. Nach mehrjähriger praktischer Ingenieurtätigkeit kehrte auch Cauchy 1815 als Professor an diese Hochschule zurück. Die Rückkehr der Bourbonen auf den Thron von Frankreich brachte dem Angehörigen einer als königstreu bekannten Familie diesen Aufstieg und weitere wie die Berufung zum Akademiemitglied. Es ist bezeichnend, daß dieser Berufung nicht die sonst übliche Wahl durch die übrigen Mitglieder der Akademie vorausging, da Cauchy wohl zu dieser Zeit schon als herausragende mathematische Begabung anerkannt, jedoch von der Mehrheit der meist demokratisch oder napoleonisch gesinnten Gelehrten Frankreichs auf Grund seiner bourbonischen und betont katholischen Position persönlich nicht geschätzt wurde.

Nach der Julirevolution 1830 verweigerte Cauchy den Untertaneneid auf den „Bürgerkönig“ Louis Philippe und emigrierte, zunächst in die Schweiz, dann nach Turin. Von 1833 bis 1838 lebte er als Erzieher des Sohnes des gestürzten Bourbonenkönigs Charles X. an dessen Exilhof in Prag, wo er auch in Berührung mit Bernard Bolzano, dem anderen großen Erneuerer der Analysis, kam. Jedoch haben die erzwungene Zurückgezogenheit Bolzanos vom öffentlichen und wissenschaftlichen Leben und die entgegengesetzten weltanschaulichen und politischen Ansichten einen engeren Kontakt beider Männer verhindert. Während dieser Zeit hatte Cauchy den wissenschaftlichen Kontakt mit den Mathematikern Frankreichs aufrechterhalten und die 1835 gegründete Mitteilungszeitschrift Comptes Rendues der französischen Akademie mit einer Flut von Veröffentlichungen beschickt. Nach dem Tode Charles X. 1836 begann er seine Rückkehr nach Paris vorzubereiten und setzte sie 1838 in die Tat um, konnte jedoch zunächst keine staatliche Anstellung erhalten und übte daher nur eine Lehrtätigkeit am Pariser Jesuitenkollegium aus. 1839 gelang es, ihn als besoldeten Angestellten in das staatliche „Längenbüro" einzuschmuggeln. Nach der Abschaffung des Amtseides durch die Revolution von 1848 konnte der zwar nicht beliebte, aber inzwischen weltberühmte Cauchy seine Lehrtätigkeit an der Polytechnischen Schule und an der Pariser Universität in vollem Umfang wieder aufnehmen und blieb, vermöge einer Ausnahmegenehmigung durch Kaiser Napoleon III., auch nach dessen Machtergreifung 1852 unbehelligt, obwohl er wiederum den Treueeid verweigert hatte. Cauchy starb am 22. 5. 1857 in Sceaux bei Paris.

Cauchy gilt heute, gemeinsam mit Bolzano, vor allem als einer derjenigen Mathematiker, die am Beginn des 19. Jh. die reichlich 100 Jahre früher von Newton und Leibniz begründete Infinitesimalmathematik (Differential- und Integralrechnung, unendliche Reihen, Differentialgleichungen usw.) auf eine solide logische Grundlage stellten, nachdem während des gesamten 18. Jh. durch Gelehrte wie die Bernoullis, Euler, Lagrange, Taylor und Maclaurin eine Fülle inhaltsreicher Ergebnisse und Anwendungen hervorgebracht worden war, ohne daß diese Männer sich viele Sorgen um saubere Definitionen und strenge Beweise gemacht hatten. Ihre Intuition hatte sie trotzdem fast immer vor ernsthaften Fehlern bewahrt. Nun aber, mit der sich entfaltenden industriellen Revolution, begann mathematischer Unterricht an den traditionellen wie an den zahlreich entstehenden höheren technischen Bildungsanstalten eine immer zentralere Rolle zu spielen. Was im 18. Jh. einzelne große Geister virtuos gehandhabt hatten, mußte für eine breite Schicht durchschnittlich begabter Studenten lehrbar gemacht und nachvollziehbar aufbereitet werden. So begann

Bild 2



A. L. Cauchy's

Lehrbuch

der

algebraischen Analysis.

Aus dem Französischen übersetzt

von

C. L. B. Huzler,

Conrector an der Löbenicht'schen höheren Stadtschule in Königsberg.

Königsberg,

im Verlage der Gebrüder Bornträger

1828.

die große Zeit der Hochschullehrbücher der höheren Mathematik.

Die aus dem Lehrbetrieb an der Polytechnischen Schule hervorgegangenen Lehrbücher Cauchys bauten die niedere und höhere Analysis erstmals logisch streng auf dem Grenzwertbegriff auf. Sie galten bald als vorbildlich und wurden nicht nur an allen Hochschulen Frankreichs benutzt sondern auch in andere Sprachen übersetzt. Zum Beispiel erschien von Cauchys erstem, 1821 erschienenen Lehrbuch der „algebraischen" oder „niederen" Analysis (die das gesamte Vorfeld der Differential- und Integralrechnung umfaßt) schon 1828 eine deutsche Übersetzung (siehe Bild 2). 1885 folgte eine neue, davon unabhängige deutsche Ausgabe, die bereits in einem der bis heute traditionsreichsten Verlage für mathematische Literatur, dem Julius-Springer-Verlag, erschien. Dieses Buch enthielt neben vielen anderen Neuerungen

- eine Definition „unendlich kleiner Größen" als solcher Veränderlicher, deren Werte der Null beliebig nahe kommen können, darauf aufbauend
- eine Definition der Stetigkeit einer beliebigen Funktion an einer bestimmten Stelle ihres Definitionsbereichs,
- eine Definition des Begriffs konvergente unendliche Reihe.

Bis dahin und insbesondere bei Euler und Lagrange hatte man mit unendlichen Reihen, auch mit in heutiger Sprechweise divergenten, unbefangen als mit „unendlich langen Summen" gerechnet, ohne den Gültigkeitsbereich der dabei verwendeten algebraischen Regeln zu untersuchen. Cauchy formulierte und bewies als erster sogenannte Konvergenzkriterien, die heute meist nach ihm benannt werden und zum Grundhandwerkszeug jedes analytisch arbeitenden Mathematikers gehören.

Cauchys weitere Lehrbücher über die eigentliche Differential- und Integralrechnung, die ebenfalls bald nach ihrem Erscheinen ins Deutsche übersetzt wurden, boten u. a. erstmals

- eine Definition des bestimmten Integrals als Grenzwert von elementaren Flächeninhalten,
- eine Formulierung des Taylorschen Satzes mit der exakten, nach Cauchy benannten Formel für das Restglied, d. h. für die Differenz zwischen dem Funktionswert und dem durch die Taylorsche Formel gegebenen polynomialen Näherungswert,
- das berühmte Beispiel einer beliebig oft differenzierbaren Funktion, deren formal gebildete Taylorreihe zwar konvergiert, jedoch nicht gegen den Wert der Ausgangsfunktion,
- erste Existenzsätze für Lösungen von Differentialgleichungen.

Daß mathematische Strenge ein zeitabhängiger Begriff ist, wird ein weiteres Mal durch den fundamentalen Irrtum Cauchys demonstriert, der in Unkenntnis des erst viel später herausgearbeiteten Begriffs der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen zu beweisen glaubte, daß die Grenzfunktion einer konvergenten Reihe stetiger Funktionen selbst stetig sein muß.

Wo Bolzano und Cauchy das Gleiche erstrebten, fällt ein Vergleich der Formulierungen Cauchys mit den meist etwas früheren Bolzanos vom heutigen Standpunkt fast immer zugunsten Bolzanos aus. Bolzanos Arbeiten blieben jedoch (aus Gründen, die wir hier nicht erläutern können, man vergleiche dazu die Biographien bedeutender Mathematiker) zu seinen Lebzeiten fast wirkungslos, während Cauchys Lehrbücher sich breitester Resonanz erfreuten. Außerdem hatte Bolzano ein rein philosophisches Interesse an der Mathematik und stand deren Anwendungen fremd und ohne Verständnis gegenüber, während Cauchy fest in einer Tradition engster Verschmelzung von Mathematik, Physik und Technik stand, wie auch seine eigenen Beiträge zur Himmelsmechanik, Optik und Elastizitätstheorie erkennen lassen. Nicht zuletzt muß man aber über die Unterschiede in Bolzanos und Cauchys Herangehen an die Analysis bemerken, daß Bolzano gedanklich die erst viel später von G. Cantor begründete und heute von fast allen Mathematikern akzeptierte Lehre von den aktual unendlichen Mengen vorweggenommen hatte, während Cauchy sich aus letztlich religiösen Gründen um eine völlige Verbannung des Aktual-Unendlichen aus der Mathematik bemühte. M. Moigno, ein Schüler und Anhänger Cauchys, hat in den von ihm herausgegebenen und mit Zusätzen versehenen „Sieben Vorlesungen" Cauchys über allgemeine Physik bezeugt, daß für Cauchy die Vorstellung der realen Existenz aktual-unendlicher Gesamtheiten mit dem biblischen Schöpfungsakt unvereinbar war. Hiernach mußte jedes Ding einen Anfang haben, zu jedem konkreten Zeitpunkt endlich und nur in fortschreitender Zeit potentiell unendlich, d. h. zu beliebiger Vergrößerung fähig sein.

Die herausragende Rolle, die Cauchy für die Entwicklung zweier bestimmender Richtungen der Analysis im 19. Jh. gespielt hat, nämlich Präzisierung der Grundlagen und systematischer Aufbau einer Analysis der komplexwertigen Funktionen komplexwertiger Veränderlicher (worauf wir hier nicht weiter eingehen können), läßt oft vergessen, daß Cauchy auch auf anderen Gebieten der Mathematik Bedeutendes geleistet hat. So formulierte und bewies er schon 1812 den nach ihm benannten Satz, daß ein konvexes Polyeder durch sein Netz (d. h. durch Form und Größe der Außenflächen und eine eindeutige Vorschrift, welche Kanten miteinander zu verheften sind) bis auf die Lage im Raum eindeutig bestimmt ist. Läßt man auch nichtkonvexe Polyeder zu, so ist dieser Sachverhalt offenbar nicht mehr allgemein richtig. 1815 bewies er eine Behauptung Fermats, wonach sich für beliebige natürliche Zahlen $n \geqq 3$ jede natürliche Zahl als Summe von höchstens n n-Eck-Zahlen darstellen läßt. Zur Definition der n-Eck-Zahlen siehe Bild 3 und Aufgabe 1. Der Begriff der sogenannten figurierten oder Polygonalzahlen geht bis auf die Antike zurück.

1844 erschien nach vielen Vorstudien Cauchys umfassende etwa 100 Seiten starke Abhandlung über Permutationen und deren Verknüpfung (heute ebenfalls Stoff der 11. Klasse!). Damit systematisierte er nicht nur ein wichtiges Teilgebiet der Kombinatorik, sondern nahm implizit an der Herausarbeitung einer fundamentalen Disziplin der modernen Mathematik, der Gruppentheorie, hervorragenden Anteil.

„Cauchy ist extrem katholisch und bigott. Das ist eine sehr seltsame Sache bei einem Mathematiker“ schrieb der junge Abel im Oktober 1826 in einem Brief ins heimatliche Norwegen. Spürt man diesem Zug im Wesen Cauchys in seinen Werken nach, so wird manche sonst unmotiviert erscheinende Passage verständlicher. Zum Beispiel schweift die kurze Einleitung zum bereits erwähnten Lehrbuch der algebraischen Analysis (1821) unvermittelt in Ausfälle gegen die radikal atheistische französische Aufklärung ab. Die in der Tat auch aus heutiger Sicht verfehlten Vesuche von P. S. Laplace, einem führenden Mathematiker dieser Richtung, die Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch auf juristische und moralische Probleme auszudehnen, lieferten ihm einen willkommenen Angriffspunkt, ohne daß er den Namen Laplace dabei nennen mußte. Allgemein bekannt ist heute, daß durch Cauchys Schuld eine bedeutende Arbeit Abels, die dieser 1826 der französischen Akademie eingereicht hatte und die Cauchy zur Beurteilung übergeben worden war, verlegt wurde und erst nach Abels Tod auf Grund einer Intervention der norwegischen Regierung wieder aufgefunden wurde. Eine ähnliche Rolle hat Cauchy möglicherweise auch bei der Unterdrückung von Arbeiten des jungen Galois gespielt. Ob dies wirklich nur durch Arbeitsüberlastung Cauchys und durch (schlimm genug!) Geringschätzung unbekannter junger Leute verursacht war oder ob dabei auch die Abneigung Cauchys gegen einen jungen Revolutionär (Galois) bzw. gegen den aus einem protestantischen Land kommenden protestantischen Pfarrersohn Abel im Spiel war, wird sich vermutlich nie aufklären lassen. Ein gereiftes Verhältnis zur allgemeinen wie zur Wissenschaftsgeschichte gebietet uns, die großen Verdienste Cauchys um die Mathematik ungeachtet seiner zwielichtigen Persönlichkeit zu würdigen. *P. Schreiber*

Aufgaben auf den Spuren Cauchys

▲1▲ Bild 3 veranschaulicht die Bildung der n-Eck-Zahlen an den Beispielen $n = 3, 4, 5, 6$.

a) Man prüfe an diesen Beispielen, daß folgende induktive Definition der r-ten n-Eck-Zahl p_n^r sinnvoll ist:

$$p_n^1 = 1, \quad p_n^{r+1} = p_n^r + 1 + (n-2)\,r.$$

Dies läßt sich auch in der Form

$$p_n^r = \sum_{k=0}^{r-1} (1 + (n-2)\,k) \text{ schreiben.}$$

b) Man beweise durch vollständige Induktion über r:

$$p_n^r = \frac{r}{2}(2 + (n-2)(r-1)).$$

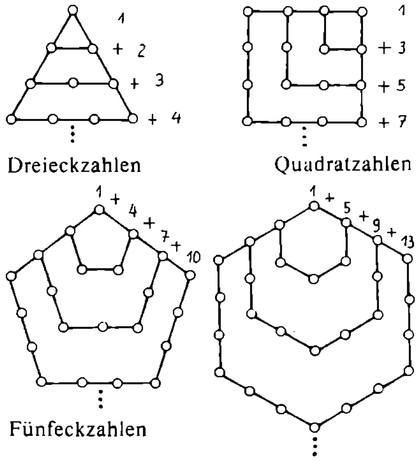


Bild 3: n-Eck-Zahlen

c) Man man prüfe an Beispielen den „einfachsten“ Spezialfall des Cauchyschen Satzes für $n = 3$: Jede natürliche Zahl läßt sich als Summe von höchstens drei Dreieckzahlen darstellen.

▲2▲ Man konstruiere ein Polyedernetz kleinster Flächenanzahl, das sowohl eine konvexe als auch eine nichtkonvexe Realisierung zuläßt. (Ein Polyeder heißt konvex, wenn es zu je zweien seiner Punkte A, B auch die gesamte Strecke AB enthält.)

▲3▲ Man konstruiere das Netz eines Polyeders kleinster Flächenanzahl, das zwar eine nichtkonvexe, aber keine konvexe Realisierung zuläßt.

▲4▲ Im erwähnten Lehrbuch der algebraischen Analysis behandelt Cauchy auch die Bestimmung unbekannter Funktionen aus sogenannten Funktionalgleichungen. Er zeigt u. a., daß die einzigen stetigen Funktionen f, die der Funktionalgleichung (*) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ genügen, die Funktionen der Form $f(x) = ax$ (a beliebig) sind. (Dabei ist, wie man sofort sieht, $a = f(1)$.) Man vollziehe seinen Beweis soweit nach, daß erkennbar wird:

Gilt für f die Gleichung (*), so ist für alle rationalen Zahlen x (einschließlich der negativen) $f(x) = f(1) \cdot x$. (Erst die Ausdehnung dieser Aussage auf irrationale x erfordert die Voraussetzung der Stetigkeit von f und nichtelementare Beweisschritte.)

▲5▲ Im gleichen Buch beschäftigte sich Cauchy auch mit den Begriffen der symmetrischen und der alternierenden Funktionen von mehreren Veränderlichen. Im Falle zweier Veränderlicher x, y ist dabei eine Funktion f

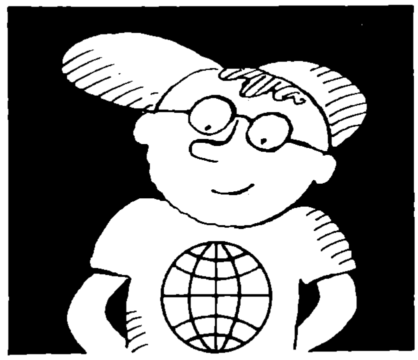
symmetrisch, wenn $f(y, x) = f(x, y)$ für alle x, y ist,

alternierend, wenn $f(y, x) = -f(x, y)$

(Wir setzen der Einfachheit halber voraus, daß f für alle Paare x, y von reellen Zahlen definiert ist.)

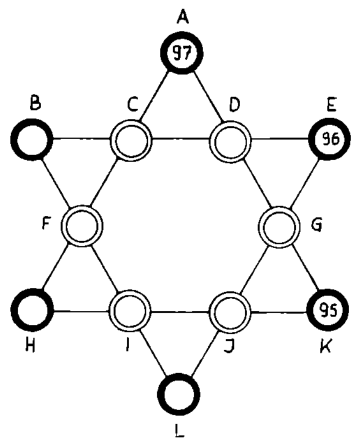
a) Man suche Beispiele für symmetrische bzw. für alternierende Funktionen. Symmetrisch ist z. B. $f(x, y) = x + y$, alternierend $f(x, y) = x - y$.

b) Man beweise, daß sich jede (für alle Paare x, y definierte) Funktion f als Summe einer symmetrischen und einer alternierenden Funktion darstellen läßt.



▲1▲ L'étoile magique

Placez dans les cercles vides les nombres compris entre 94 et 107 de façon à toujours obtenir le total de 402 en additionnant les cercles situés sur une même ligne droite.



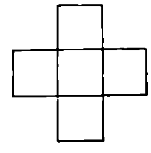
aus: Logigram, Paris

▲2▲ Найдите наименьшее натуральное число, которое оканчивается на 56, делится на 56 и имеет сумму цифр, равную 56.

aus: Quant, Moskau

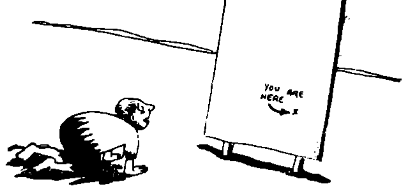
▲3▲ Changing the cross into a square

The drawing shows a cross with four equal arms. Use four straightline cuts to divide the cross into five pieces so that you can rearrange the pieces to form a square.



Hint: Four of the pieces should be congruent (exactly equal).

aus: Fun with mathematics, Toronto



XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Schulolympiade

Abgabe beim Mathematiklehrer: Ende September 1989

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen werden im Oktober 1989 in der Trommel und der Jungen Welt veröffentlicht.

Hinweis: Unter den Aufgaben der 1. Stufe befinden sich auch solche (in der Regel ist es die 4. Aufgabe), die aus mehreren Teilaufgaben von steigendem Schwierigkeitsgrad bestehen. Dabei ist Teil a) meist recht einfach zu lösen und gibt in der Regel Hilfe für die Lösung der anderen Teilaufgaben. Die Lösung der letzten Teilaufgabe stellt bewußt hohe Anforderungen. Diese Teilaufgabe ist vorwiegend für die leistungsstärkeren Schüler gedacht. Es wird empfohlen, über diese anspruchsvollen Aufgaben in Klassen und Arbeitsgemeinschaften zu diskutieren.

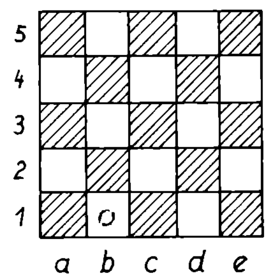
Anmerkung: $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B, während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

290511 Kerstin erhält am 30. April zu ihrem Geburtstag von mehreren Verwandten Geld geschenkt. Sie hat nun genau 35 Mark in ihrer Sparbüchse und nimmt sich vor, in den folgenden Monaten fleißig Altstoffe zu sammeln, so daß sie am Ende jedes Monats genau 5 Mark in die Sparbüchse stecken kann.
Am Ende welchen Monats werden, wenn ihr Vorhaben gelingt, erstmals 55 Mark in der Sparbüchse sein?

290512 Wenn man zwei zweistellige Zahlen hintereinanderschreibt, entsteht eine vierstellige Zahl.
Gib zwei zweistellige Zahlen so an, daß die Summe aus diesen beiden Zahlen und der daraus gebildeten vierstelligen Zahl genau 1 478 beträgt!
(Ein Nachweis, daß es nur eine einzige Möglichkeit für zwei solche Zahlen gibt, wird nicht verlangt. Du kannst aber versuchen, einen solchen Nachweis zu finden.)

290513 Das Bild zeigt ein Spielbrett mit einem Damestein auf dem Feld b1. Er darf, wie im Damespiel üblich, stets einen Schritt nach links oben oder nach rechts oben gehen. So kann er in vier Schritten auf die oberste Zeile (d. h. auf irgendeines der beiden Felder b5, d5) gelangen.
Gesucht ist die Anzahl aller verschiedenen Wege, auf denen dieses Ziel erreichbar ist. Gib diese Anzahl an und beschreibe, wie du sie gefunden hast!

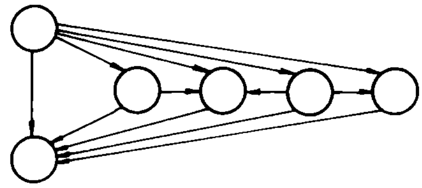


290514 a) Zeichne in einem Koordinatensystem (Einheit 1 cm) ein Dreieck ABC mit $A(1;2)$, $B(3;2)$, $C(1;4)$!
b) Wähle $\overrightarrow{AB}$ als Verschiebungspfeil und zeichne das bei dieser Verschiebung aus dem Dreieck ABC entstehende Bild $A'B'C'$ in dasselbe Koordinatensystem!
c) Zeichne dazu noch das bei der Verschiebung $\overrightarrow{A'C}$ entstehende Bild $A''B''C''$ des Dreiecks $A'B'C'$!
d) Welche Dreiecke und welche Parallelogramme sind mit ihren vollständigen Seitenkanten in der nun entstandenen Gesamtfigur insgesamt enthalten? Zähle diese Dreiecke und Parallelogramme wie üblich durch Angabe ihrer Eckpunkte auf!

Olympiadeklasse 6

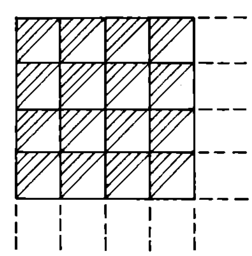
290611 Peter möchte aus einer Kanne, in der sich mehr als 13 Liter Milch befinden, genau 13 Liter abmessen. Das genaue Fassungsvermögen der Kanne ist nicht bekannt, und es ist auch nicht bekannt, wieviel Milch genau in der Kanne ist. Außer der Kanne stehen noch genau zwei weitere Gefäße zur Verfügung. Das eine hat ein Fassungsvermögen von genau 5 Litern, das andere ein Fassungsvermögen von genau 17 Litern. (Eine Skaleneinteilung oder ähnliche Möglichkeiten zum Abmessen anderer Mengen gibt es jedoch nicht.)
Beschreibe, wie Peter allein mit diesen Hilfsmitteln genau 13 Liter Milch abmessen kann!

290612 a) Trage in die sechs Kreise des Bildes je eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 6, 12 so ein, daß jeder Pfeil von einer Zahl zu einem ihrer Teiler führt! Dabei soll jede der genannten Zahlen genau einmal verwendet werden.



b) Ergänze die Figur durch einen weiteren Kreis mit der Zahl 18 und mit den entsprechend zu erklärenden Pfeilen!
c) Zeichne eine neue Figur, wieder bestehend aus Kreisen und entsprechend zu erklärenden Pfeilen, in der die Zahl 75 und alle ihre Teiler vorkommen!

290613 Ein rechteckiger Fußboden, der 3,6 m lang und 2,7 m breit ist, soll mit zwei Sorten gleichgroßer, aber verschiedenfarbiger dreieckiger Teppichfliesen so ausgelegt werden, daß ein Muster entsteht, wie es durch Fortsetzen des Musters des Bildes zu erhalten ist.
Je zwei solcher dreieckigen Fliesen einer Farbe sollen durch einmaliges Zerschneiden einer quadratischen Fliese mit der Seitenlänge 30 cm hergestellt werden.
Wie viele quadratische Teppichfliesen werden von jeder der beiden Sorten insgesamt benötigt?

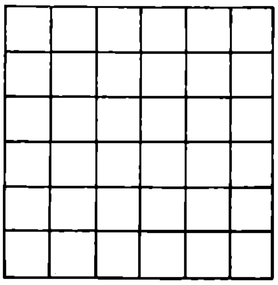


290614 Von den 25 Schülern einer Klasse gehören genau 20 einer Sportgruppe an. An der AG Mathematik nehmen genau 12 Schüler dieser Klasse teil. Genau 3 Schüler dieser Klasse gehören weder einer Sportgruppe noch der AG Mathematik an.
Zeige, wie man aus diesen Angaben erhalten kann, daß es auf folgende Fragen eindeutig bestimmte Zahlenangaben als Antworten gibt! Gib diese Antworten an!
a) Wie viele Schüler dieser Klasse insgesamt gehören zwar der AG Mathematik, aber nicht einer Sportgruppe an?
b) Wie viele Schüler dieser Klasse insgesamt gehören zwar einer Sportgruppe, aber nicht der AG Mathematik an?
c) Wie viele Schüler dieser Klasse insgesamt gehören sowohl der AG Mathematik als auch einer Sportgruppe an?

Olympiadeklasse 7

290711 Auf ein 6×6-Felderbrett (siehe Bild) sollen 18 Steine so verteilt werden, daß jeder Stein in genau einem Feld liegt, in jedem Feld nicht mehr als ein Stein liegt

sowie in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder Diagonalen nicht mehr als drei Steine liegen.
Gib eine derartige Verteilung an!
Hinweis: Unter einer Diagonale wollen wir in dieser Aufgabe jede Gerade verstehen, die in einer Diagonalrichtung des Quadrates durch die Mittelpunkte von mehreren (mindestens 2, höchstens 6) Feldern verläuft. Es gibt folglich auf diesem Brett genau 18 verschiedene Diagonalen.



290712 Thomas, Uwe und Volker belegten bei einer Mathematikolympiade die ersten drei Plätze, jeder von ihnen einen anderen Platz als die beiden anderen. Über diese Plazierung wurden nun die folgenden drei Aussagen gemacht:
(1) Thomas wurde nicht Erster.
(2) Uwe wurde nicht Zweiter.
(3) Volker wurde Zweiter.
Von diesen drei Aussagen (1), (2), (3) ist genau eine wahr. Untersuche, ob sich hieraus ermitteln läßt, wer von den drei Schülern den ersten, den zweiten und den dritten Platz belegte! Ist dies der Fall, so gib die Plazierung an!

290713 Rolf sagt an seinem Geburtstag, dem 1. September 1989: „Die Quersumme der Jahreszahl meines Geburtsjahres ist zugleich auch das in Jahren gerechnete Alter, das ich heute erreiche." Untersuche, ob es genau ein Jahr als Rolfs Geburtsjahr gibt, für das seine Aussage zutrifft! Ist das der Fall, so gib dieses Geburtsjahr an!

290714 Bei der Wiederholung des Innenwinkelsatzes für konvexe Vierecke geraten Anja und Klaus in einen Streit:
Klaus behauptet: „Zerlegt man ein beliebiges konvexes Viereck *ABCD* durch Einzeichnen der Diagonalen *AC* in die beiden Teildreiecke *ABC* und *ADC*, dann beträgt die Innenwinkelsumme jedes dieser Teildreiecke 180°. Folglich muß im Viereck *ABCD* die Innenwinkelsumme $2 \cdot 180° = 360°$ betragen." Anja entgegnet: „Zeichnet man aber noch die zweite Diagonale *BD* ein, dann erhält man vier Teildreiecke. Die Innenwinkelsumme von *ABCD* muß folglich $4 \cdot 180° = 720°$ betragen."
Untersuche, welcher der beiden Schüler recht hat! Begründe deine Entscheidung!
Anmerkung: Unter einem konvexen Viereck versteht man ein Viereck, dessen beide Diagonalen innerhalb dieses Vierecks liegen (vgl. Lb. 6, S. 179).

Olympiadeklasse 8

290811 Auf einer Flasche mit handelsüblicher 40prozentiger Essigessenz stehe die folgende Gebrauchsanweisung: „Der Inhalt dieser Flasche (200 ml), mit 800 ml Wasser vermischt, ergibt einen zehnprozentigen Speiseessig."
Stimmt das?

290812 Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein gleichseitiges Dreieck mit gegebener Seitenlänge a. Die Summe aller Kantenlängen dieses Prismas beträgt $15a$. Berechne den Flächeninhalt der Mantelfläche dieses Prismas!

290813 Zwei Kreise k_1 und k_2 seien so gelegen, daß sie zwei verschiedene Schnittpunkte A und D haben und daß ihre Mittelpunkte M_1, M_2 auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und D liegen. Der von A verschiedene Schnittpunkt, den k_1 mit der Geraden durch A und M_1 hat, sei B. Der von A verschiedene Schnittpunkt, den k_2 mit der Geraden durch A und M_2 hat, sei C.
a) Weise nach, daß unter diesen Voraussetzungen stets der Punkt D auf der Geraden g durch B und C liegen muß!
b) Stelle eine Vermutung über die gegenseitige Lage der Geraden g und der Geraden h durch M_1, M_2 auf! Beweise deine Vermutung!

290814 Zu jeder sechsstelligen natürlichen Zahl n, deren Einer-Ziffer von Null verschieden ist, kann man diejenige Zahl n' bilden, die man erhält, indem man die Ziffern von n in umgekehrter Reihenfolge schreibt. Anschließend kann man die Zahl $n + n'$ berechnen.
a) Bilde einige Beispiele! Stelle fest, ob es eine Primzahl gibt, durch die in deinen Beispielen die Zahl $n + n'$ teilbar ist! Äußere eine Vermutung!
b) Versuche, deine Vermutung zu beweisen!
c) Jetzt sei k eine beliebige gerade natürliche Zahl größer als Null. Auch zu jeder k-stelligen natürlichen Zahl n, deren Einerziffer von Null verschieden ist, kann man diejenige Zahl bilden, die man erhält, indem man die Ziffern von n in umgekehrter Reihenfolge schreibt.
Gilt für $n + n'$ dann auch eine entsprechende Aussage wie in a), b)?

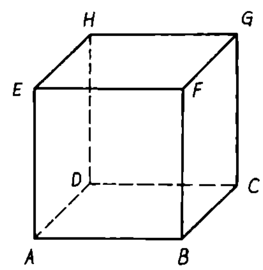
Olympiadeklasse 9

290911 Für das Quadrieren von zweistelligen Zahlen, die mit der Ziffer 5 enden, gibt es folgende einfache Regel:
Man multipliziere die Ziffer an der Zehnerstelle mit derjenigen Zahl, die um 1 größer ist, und schreibe hinter das Produkt die Ziffern 25.
Beispielsweise zur Berechnung von 25^2 führt die Regel wegen $2 \cdot 3 = 6$ auf das Ergebnis 625.
Beweisen Sie diese Regel!

290912 Gibt es unter allen fünfstelligen Zahlen, die sich unter Verwendung genau der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4 schreiben lassen, eine Primzahl?

290913 Bei einem Abzählspiel stehen 11 Kinder in einem Kreis. Eines dieser Kinder sagt den Abzählvers auf; dabei wird im Uhrzeigersinn bei jeder Silbe ein Kind weiter gezählt. Auch der Spieler, der den Abzählvers aufsagt, wird in das Abzählen einbezogen. Der Abzählvers hat 15 Silben. Das Kind, auf das die letzte Silbe trifft, verläßt den Kreis; beim nachfolgenden Kind wird das Abzählen wieder mit dem Anfang des Abzählverses fortgesetzt. Dieses Abzählen und Ausscheiden erfolgt so lange, bis nur noch ein Spieler im Kreis ist; dieser Spieler hat gewonnen.
a) Bei welchem Kind muß der abzählende Spieler beginnen, wenn er selbst gewinnen will? (Um die Antwort zu formulieren, numeriere man die Kinder und gebe etwa dem abzählenden Spieler die Nummer 1.)
b) Falls Sie die Möglichkeit haben, an einem (Klein-)Computer zu arbeiten, sollten Sie ein Programm schreiben, mit dem sich Aufgabe a) für Abzählspiele mit k Kindern und einem Abzählvers aus s Silben lösen läßt.

290914 Die Eckpunkte eines Würfels seien wie im Bild bezeichnet.
a) Fertigen Sie mit verdoppelten Streckenlängen, aber gleichen Winkeln eine weitere Zeichnung an, die zunächst nur die Eckpunkte des Würfels wiedergibt! Zeichnen Sie nun die Dreiecksflächen *BHA*, *BHC*, *BHD*, *BHE*, *BHF* und *BHG* (durch Wiedergabe ihrer Seitenkanten) ein! Berücksichtigen Sie dabei die Sichtbarkeitsverhältnisse, indem Streckenteile, die durch mindestens eine davorliegende Dreiecksfläche verdeckt sind, gestrichelt wiedergegeben werden! Die Seitenflächen und für die Dreiecke nicht benötigten Seitenkanten des Würfels selbst sollen nicht berücksichtigt werden. (Abschließend können Sie die Anschaulichkeit der Zeichnung noch durch Schraffur oder Farbe erhöhen.)



b) Beweisen Sie, daß die genannten Dreiecke sämtlich untereinander kongruent sind!

Olympiadeklasse 10

291011 Geben Sie mindestens ein Beispiel für 1989 natürliche Zahlen an, deren Summe gleich ihrem Produkt ist! Bestätigen Sie durch Berechnung der Summe und des Produktes die geforderte Gleichung!

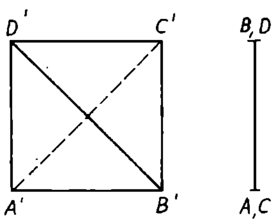
291012 Jens gibt in seinen Taschenrechner eine positive Zahl A ein und wendet dann folgenden Ablauf von Rechenoperationen an: Addition von 1, aus dem Ergebnis Ziehen der Quadratwurzel.
Nun wiederholt er denselben Ablauf von Rechenoperationen mehrere Male. Er beobachtet, daß nach genügend häufiger Wiederholung das Ergebnis auf einem

Zahlenwert Z „stehenbleibt“, d. h., daß der Ablauf, auf Z angewandt, wieder Z ergibt (oder sich nur um einen – durch das interne Runden des Rechners entstandenen – sehr kleinen Betrag von Z unterscheidet).
a) Beweisen Sie, daß aus jeder positiven Zahl A, für die diese Beobachtung zutrifft, dieselbe Zahl Z entstehen muß, unabhängig von der Ausgangszahl A!
b) Falls Sie die Möglichkeit haben, an einem (Klein-)Computer zu arbeiten, sollten Sie mit einem geeigneten Programm die in a) zu beweisende Behauptung für die Anfangswerte $A = 1, 2, \ldots, 10$ überprüfen.

291013 Zwei Spieler haben sich folgendes Spiel ausgedacht: Auf einem Spielbrett sind 14 Spielfelder im Kreis angeordnet, eines dieser Felder gilt als Anfangsfeld A. Jeder Spieler hat einen Spielstein und setzt ihn auf das Feld A.
Dann führt jeder Spieler mit einem Würfel einen Wurf aus. Werfen beide Spieler unterschiedliche Augenzahlen, so setzt der Spieler mit der höheren Augenzahl seinen Stein um 4 Schritte im Uhrzeigersinn vorwärts, der andere um 2 Schritte. Werfen sie aber die gleiche Augenzahl, so setzt jeder seinen Stein um 3 Schritte vorwärts. Dieses Würfeln und Voransetzen beider Steine gilt als ein „Zug“. Infolge der kreisförmigen Anordnung der Spielfelder kann es vorkommen, daß ein Stein beim Voransetzen das Feld A erreicht oder überschreitet (und damit einen neuen Umlauf beginnt).
Das Spiel ist beendet, sobald nach Durchführung eines „Zuges“ der Stein mindestens eines Spielers genau auf dem Feld A steht. Dieser Spieler hat gewonnen, falls der Stein des anderen Spielers dabei nicht auf A steht. Falls jedoch beide Steine auf A stehen, endet das Spiel unentschieden.
Welches ist die kleinstmögliche Anzahl von „Zügen“, aus denen ein unentschiedenes Spiel bestehen kann? Begründen Sie Ihre Antwort!

291014 Das Bild stellt einen ebenflächig begrenzten Körper $ABCD$ in senkrechter Eintafelprojektion dar.

Projektion: Höhenmaßstab:



Die Punkte A', B', C', D' sind die Ecken eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a. Der Abstand der Punkte A, C von den Punkten B, D im Höhenmaßstab betrage ebenfalls a.
Ermitteln Sie aus diesen Angaben das Volumen $V(ABCD)$ des dargestellten Körpers!

Olympiadeklassen 11/12

291211 Man ermittle die Anzahl aller natürlichen Zahlen z mit folgenden Eigenschaften:
(1) Die dekadische Zifferndarstellung von z besteht aus fünf paarweise verschiedenen Ziffern.
(2) Die erste und die letzte Ziffer darin sind von 0 verschieden.
(3) Ist z' diejenige Zahl, deren Zifferndarstellung aus der von 7 durch Umkehrung der Reihenfolge entsteht, so besteht die Zifferndarstellung der Zahl $z + z'$ aus sämtlich einander gleichen Ziffern.

291212 Man ermittle alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem

$$x^3 + y^3 = 7 \quad (1)$$
$$x + xy + y = -1 \quad (2)$$

erfüllen.

291213 In jedem Dreieck ABC zerlegt die Mittelsenkrechte der Seite AB die Fläche dieses Dreiecks in zwei Teilflächen, die so mit T_1, T_2 bezeichnet seien, daß A in T_1 und B in T_2 liegt. Der Flächeninhalt von T_1 sei F_1, der von T_2 sei F_2.
Man ermittle unter allen Dreiecken ABC, die rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei C sind, genau diejenigen, für die das Verhältnis $k = F_2 : F_1$ ganzzahlig ist.

291214 Für jede natürliche Zahl $n \geqq 1$ sei f_n diejenige Funktion, die für alle reellen $x \neq 0$ durch

$$f_n(x) = \frac{1-x}{x} + \frac{2^2-2x}{x} + \frac{3^2-3x}{x} + \ldots + \frac{n^2-nx}{x}$$

definiert ist.
a) Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4!
b) Beweisen Sie: Für jede natürliche Zahl $n \geqq 1$ hat die Funktion f_n genau eine Nullstelle! Geben Sie diese Nullstelle in Abhängigkeit von n an!
c) Beweisen Sie, daß es eine natürliche Zahl n gibt, mit der die Nullstelle der Funktion f_n größer als 100 ist! Ermitteln Sie die kleinste derartige Zahl n!

Zweimal Logik

In Heft 5/1986 wurde das Spiel „Die Barrikade“ vorgestellt. Inzwischen kann dieses und ein weiteres Schiebespiel in unseren Spielwarenläden erworben werden. Der VEB Kamenzer Spielwaren hat sie unter der Bezeichnung „Logik 1“ und „Logik 2“ hergestellt, sie kosten 3,90 M. In der Spielanleitung von „Logik 1“ ist gegenüber der Veröffentlichung in der „alpha“ eine etwas geänderte Ausgangsstellung angegeben und eine andere Endstellung gesucht.
Eine mögliche Lösung findet man ebenfalls dort. Natürlich sind bei diesem Spiel die verschiedensten Konstellationen denkbar, dadurch wird es gerade so interessant. Übrigens, wer weitere Schiebepuzzle kennenlernen und vielleicht auch nachbauen will, schaue nach bei: R. Thiele, Die gefesselte Zeit, Urania-Verlag, 3. Auflage 1986.

W. Schmidt, Greifswald

Eine interessante Multiplikation

Die Galla sind ein in Nordostafrika lebendes Volk, das vorwiegend Viehzucht betreibt. Bei ihnen rechnet man Multiplikationsaufgaben mit natürlichen Zahlen auf uns ungewohnte Weise. Es werden drei Beispiele vorgestellt und anschließend erläutert.

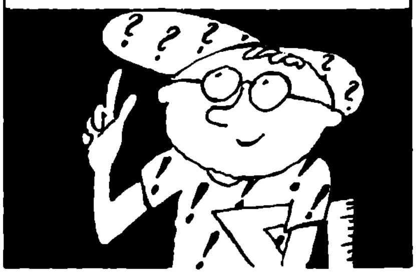
64 · 17 = ?
~~32 · 34~~
~~16 · 68~~
~~8 · 136~~
~~4 · 272~~
~~2 · 544~~
1 · 1088
64 · 17 = 1088

46 · 27 = ?	38 · 31 = ?
23 · 54	19 · 62
11 · 108	9 · 124
5 · 216	~~4 · 248~~
~~2 · 432~~	~~2 · 496~~
1 · 864	1 · 992
46 · 27 = 1242	38 · 31 = 1178

Der erste Faktor wird stets halbiert, der zweite Faktor verdoppelt. Solange diese Halbierung ohne Rest ausführbar ist, ändert das Produkt den Wert nicht; das davor stehende Produkt wird deshalb gestrichen. Wird aber bei diesem Vorgehen der erste Faktor einmal ungerade, ist er also nicht durch zwei ohne Rest teilbar, so wird beim nächsten Schritt (ohne Rücksicht auf den Divisionsrest) der um eins verminderte erste Faktor halbiert, der zweite verdoppelt, das voranstehende Produkt jedoch nicht durchgestrichen. Die Summe aus allen auf diese Weise nicht gestrichenen zweiten Faktoren ist dann das gesuchte Produkt.
Die Richtigkeit dieser Multiplikationsweise ist leicht einzusehen. Bei jedem Produkt mit ungeradem ersten Faktor wird die Division nicht vollständig ausgeführt (es verbleibt ein Rest 1), so daß der Betrag des zweiten Faktors genau einmal fehlen würde, wenn er nicht durch Stehenlassen und späteres Addieren in das Gesamtergebnis eingehen würde.
Dieses einfache, aber geniale Vorgehen beim Multiplizieren zweier natürlicher Zahlen zeigt, daß auch Völker mit geringen mathematischen Kenntnissen erfolgreich praktische Aufgaben zu lösen wußten.

Th. Scholl

Lösungen



Lösungen zu:
Olympische Kryptogramme
Heft 3/89

▲1▲ 9 035 136 : 2 112 = 4 278
▲2▲ keine Lösung
▲3▲ 22 Lösungen, z. B. 983 + 45 = 1 028
▲4▲ 17 Lösungen, z. B. 142 · 57 = 8 094

Lösungen zu:
Aufgaben über ein Dosierbesteck
Heft 3/89

▲1▲ Laut Hebelgesetz, und weil die Gewichtskraft das Produkt aus der Masse des Körpers und der Erdbeschleunigung ist, gilt:
$m(a - 10{,}3\text{ cm}) = 15\text{ g} \cdot 10{,}3\text{ cm}$
$m(10{,}3\text{ cm} + 8{,}5\text{ cm} - a) = 50\text{ g} \cdot 5{,}4\text{ cm}$
Durch Addieren der linken und rechten Seiten beider Gleichungen folgt:
$m \cdot 8{,}5\text{ cm} = 15\text{ g} \cdot 10{,}3\text{ cm} + 50\text{ g} \cdot 5{,}4\text{ cm}$
$$m = \frac{15\text{ g} \cdot 10{,}3\text{ cm} + 50\text{ g} \cdot 5{,}4\text{ cm}}{8{,}5\text{ cm}} \approx 49{,}94\text{ g}$$
Damit ergibt sich aus der ersten Gleichung
$$a = \frac{15\text{ g} \cdot 10{,}3\text{ cm}}{m} + 10{,}3\text{ cm} \approx 13{,}39\text{ cm}.$$

▲2▲ Laut Hebelgesetz muß gelten:
$20\text{ g} \cdot x = m(10{,}3\text{ cm} + 8{,}5\text{ cm} + 5{,}4\text{ cm} - a - x)$
$(20\text{ g} + m)\,x = m(10{,}3\text{ cm} + 8{,}5\text{ cm} - a)$
$$x = \frac{m(10{,}3\text{ cm} + 8{,}5\text{ cm} + 5{,}4\text{ cm} - a)}{20\text{ g} + m} \approx 7{,}72\text{ cm}.$$

▲3▲ Mit der Formel
$V = \frac{h}{12}(d^2 + dD + D^2)$ ergibt sich
$V_{\text{kleiner Becher}} \approx 51{,}31\text{ cm}^3$
und $V_{\text{großer Becher}} \approx 103{,}8\text{ cm}^3$.
Der kleine Becher faßt also
$$\frac{50\text{ g} \cdot 51{,}31\text{ cm}^3}{103{,}8\text{ cm}^3} \approx 24{,}7\text{ g}.$$

▲4▲ $$\frac{15\text{ g} \cdot 10{,}25\text{ cm} + 50\text{ g} \cdot 5{,}35\text{ cm}}{8{,}55\text{ cm}} \leqq m \leqq \frac{15\text{ g} \cdot 5{,}45\text{ cm} + 50\text{ g} \cdot 5{,}45\text{ cm}}{8{,}45\text{ cm}}$$
$49{,}26\ldots\text{ g} \leqq m \leqq 50{,}62\ldots\text{ g}$
$$\frac{15\text{ g} \cdot 10{,}25\text{ cm}}{50{,}62\ldots\text{ g}} + 10{,}25\text{ cm} \leqq a \leqq \frac{15\text{ g} \cdot 10{,}35\text{ cm}}{49{,}26\ldots\text{ g}} + 10{,}35\text{ cm}$$
$13{,}28\ldots\text{ cm} \leqq a \leqq 13{,}50\ldots\text{ cm}.$

▲5▲ Man verschiebt den Waagebalken so lange auf der Schneide, bis er im Gleichgewicht ist. Dann befindet sich der Schwerpunkt S senkrecht unter der Drehachse.

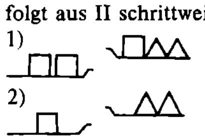
▲6▲ Damit sich der Schwerpunkt des eingefüllten PSM auf der Becherachse befindet.

Lösung zu:
Ein Wägestück ist zu leicht

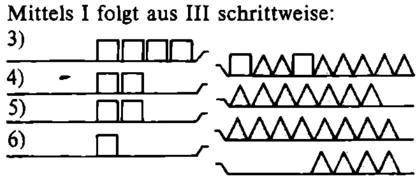
Bei der ersten Wägung legt er auf die linke Waagschale die drei Wägestücke mit den Markierungen 1 und 2 und auf die rechte Waagschale das Wägestück mit der Ziffer 5. Geht dabei die rechte Waagschale nach oben, so ist das Wägestück mit der eingeschlagenen 5 das gesuchte. In diesem Fall ist eine zweite Wägung überflüssig.
Geht die linke Waagschale nach oben, so ist eines der Wägstücke mit den Ziffern 1 oder 2 das gesuchte. In diesem Fall legt er bei der zweiten Wägung auf jede Waagschale eines der Wägestücke mit der Ziffer 2. Ist dabei die Waage im Gleichgewicht, so hat das Wägestück mit der eingeschlagenen 1 weniger als 1 g Masse. Ist die Waage nicht im Gleichgewicht, so ist das gesuchte Wägestück das auf der oben befindlichen Waagschale. Ist schließlich bei der ersten Wägung die Waage im Gleichgewicht, so befindet sich das gesuchte Wägestück unter den drei mit den Ziffern 10 oder 20. Analog wie oben wird mit der zweiten Wägung herausgefunden, welches dieser drei weniger Masse besitzt als seine Beschriftung anzeigt.

Ohne Wägestücke!

Wegen I und weil die Masse einer Kugel ein Vielfaches der Masse eines Kegels ist, ist auch die Masse eines Würfels ein Vielfaches der Masse eines Kegels. Mittels I folgt aus II schrittweise:



Mittels I folgt aus III schrittweise:



Aus 2 und 6 ergibt sich, daß drei Kegel die gleiche Masse haben wie ein Würfel und aus I, daß fünf Kegel die gleiche Masse haben wie eine Kugel.

Lösungen zu:
Einiges über das Sehnenviereck
Heft 3/89

▲2▲ $\alpha = 65°$; $\beta = 50°$; $\gamma = 25° + 90° = 115°$
▲4▲ $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle BDC$ (Peripheriewinkel über $\overset{\frown}{BC}$)
$\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle DBA$ (Peripheriewinkel über $\overset{\frown}{AD}$)
▲5▲ Drachenviereck; Höhensatz
▲6▲ Kathetensatz
▲7▲ Satz des Pythagoras
▲8▲ $e^2 = ac + b^2$
▲9▲ $e = 7\text{ cm}$
▲10▲ u. a. $\sphericalangle ACB = 45°$; $\sphericalangle CBD = 25°$; Winkel bei S 70° bzw. 110°.
▲11▲ $\sphericalangle CBD$ und $\sphericalangle BDC$.

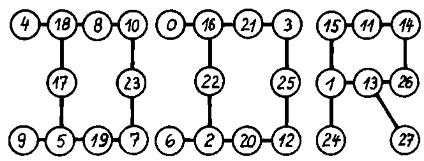
Lösung zur Schachecke

1. f3+ g:f3, 2. e:d3+ c:d3, 3. Lf5+ e:f5, 4. Te6+ d:e6, 5. Td4+ c:d4, 6. a8L+ Dd5, 7. L:d5+ e:d5, 8. Sf6+ g:f6, 9. De5+ f:e5, 10. Sg5 matt.
Möglich ist auch die Zugumstellung 5. Sf6+ g:f6, 6. Td4+ c:d4, 7. a8D+ Dd5, 8. Da:d5+ e:d5.

Lösungen zu:
Ein mathematischer Blumenstrauß

DDR-40

Das Bild zeigt eine mögliche Eintragung:



Von Bezirk zu Bezirk

Es sind eingetragen v. l. n. r.:
Schwerin (2. Zeile), Dresden (6. Z.), Erfurt (8. Z.), Leipzig (9. Z.), Potsdam (9. Z.);
v. r. n. l.: Neubrandenburg (1. Z.), Suhl (2. Z.), Frankfurt/Oder (3. Z.), Karl-Marx-Stadt (4. Z.), Gera (5. Z.), Magdeburg (7. Z.), Cottbus (8. Z.);
v. o. n. u.: Halle (1. Spalte), Rostock (2. Sp.), Berlin (11. Sp.).
Die verbleibenden Buchstaben ergeben den Namen der gesuchten Zeitschrift: MIKROPROZESSORTECHNIK (MP).

Geographisches

Man erhält für die Flußlängen ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem, das man in geeigneter Reihenfolge schrittweise lösen kann:
Elbe: 1 165 km (nach (1));
Bode: 169 km (nach (4));
Peene: 156 km (nach (2));
Saale: 427 km (nach (6));
Oder: 861 km (nach (3));
Havel: 343 km (nach (7));
Spree: 382 km (nach (5));
Mulde: 124 km (nach (8)).
(Zahlenangaben nach BI-Handlexikon in zwei Bänden, Leipzig 1982)

Von Stadt zu Stadt

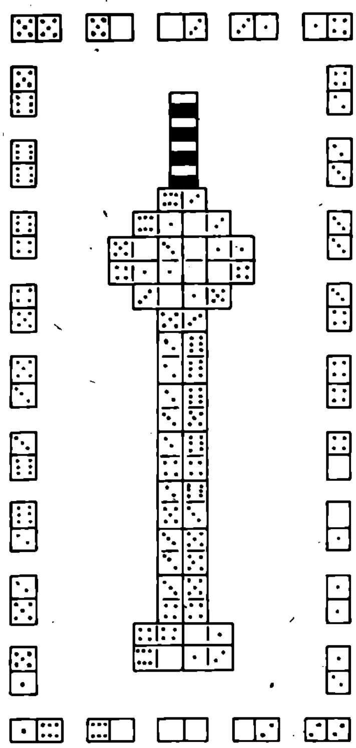
Es waren folgende Städtenamen (in der Reihenfolge des Textes) versteckt:
Waren, Aue, Thale, Bergen, Forst, Artern, Freital, Sonneberg, Wolfen, Barth, Torgau, Zeitz, Dresden, Leipzig, Altenburg, Burg, Querfurt, Erfurt, Eisenach, Borna, Wolgast, Halle, Wismar, Rostock, Güstrow, Merseburg, Grimma, Calau, Jena, Bernau, Oschatz, Werdau, Greiz, Riesa, Schwerin, Aken, Weißwasser, Berlin, Wurzen, Gera.

Ein grundlegendes Recht

1. Rechteck, 2. Exponent, 3. Computer, 4. Hyperbel, 5. Tangente, 6. Astroide, 7. Ursprung, 8. Funktion, 9. Böschung, 10. Integral, 11. Lösungen, 12. Division, 13. Umlegung, 14. Neunzehn, 15. Gradient.
Die Anfangsbuchstaben ergeben:
RECHT AUF BILDUNG.

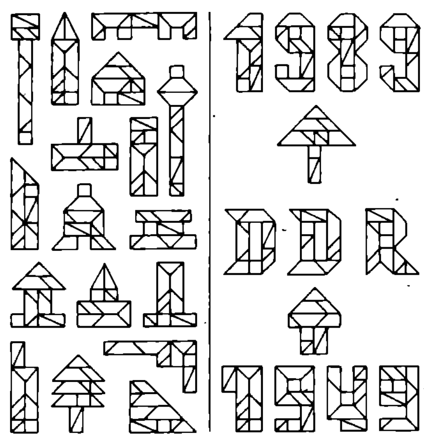
Fernsehturm-Domino

Das Bild zeigt eine Legemöglichkeit:



Erbauliche Ansichten

Das Bild zeigt je eine Legemöglichkeit:



Lösungen zu: Ein Hobby-mathematiker stellt sich vor

▲1▲ Die gesuchten Zahlen sind 14091; 32208; 50325; 62403; 80520.

▲2▲ Die Milchmenge ist jährlich um 39 kg zu steigern.

▲3▲ Wegen der Teilbarkeitsregeln ist die Summe der jeweils letzten zwei Ziffern aller Potenzen der Aufgabe zu ermitteln. Diese endet auf 50. Bei Division durch 4 ergibt sich der Rest 2.

▲4▲ a) Es gibt keine Lösung.
b) $2763 + 1841 = 4604$;
$2863 + 1741 = 4604$; $1832 + 5475 = 7307$;
$1432 + 5875 = 7307$; $2613 + 4574 = 7187$;
$2513 + 4674 = 7187$; $5716 + 2482 = 8198$;
$5416 + 2782 = 8198$; $6847 + 2592 = 9439$;
$6547 + 2892 = 9439$; $5816 + 3293 = 9109$;
$5216 + 3893 = 9109$; $3814 + 5295 = 9109$;
$3214 + 5895 = 9109$.

▲5▲ Auf dem letzten Feld sind 8388608 Weizenkörner. Insgesamt liegen 16777215 Körner auf dem Brett. Das entspricht dem Ertrag einer Anbaufläche von 0,14 Hektar.

▲6▲ Es handelt sich um Kombinationen ohne Wiederholung zur 1. bis 3. Klasse. Es ergeben sich 129 verschiedene Kombinationen.

Lösungen zu: Überall Näherungswerte

▲1▲ Genaue Werte: a), f), h), k)
Näherungswerte: b), c), d), e), g), i)

▲2▲ Zahnpasta:
$46\,g \leqq m \leqq 54\,g$, 46 g, 54 g
Waschpulver:
$860\,g \leqq m \leqq 940\,g$, 860 g, 940 g
Tafelbutter:
$250\,g \pm 4\,g$, $246\,g \leqq m \leqq 254\,g$

▲3▲ b) 2, 2,65, 2,75, $2{,}65 \leqq x_w \leqq 2{,}75$
c) 2, 10,5, 11,5, $10{,}5 \leqq x_w \leqq 11{,}5$
d) 11,0, 11,05, $10{,}95 \leqq x_w \leqq 11{,}05$
e) 11,00, 4, 10,995, 11,005

▲4▲

Möglicher Überschlag	genaues Resultat
a) $1000 \cdot 500 = 500\,000$	691782
b) $7000 \cdot 200 = 1\,400\,000$	1345192
c) $9000 : 30 = 300$	265

▲5▲
a) z. B.: $7000 \cdot 150 \leqq p \leqq 7500 \cdot 150$
$1\,050\,000 \leqq p \leqq 1\,500\,000$
b) z. B.: $8000 : 40 \leqq q \leqq 9300 : 30$
$200 \leqq q \leqq 310$

▲6▲ a, b, d, f

Lösungen zu: Acht mathematische Knobelaufgaben

▲1▲
$1 + 9 + 49 + 40 = 1 + 9 + 89$, (... = 99)
$1 + 94 + 9 + 4 + 0 = 19 + 89$, (... = 108).

▲2▲ Aus N + N + N = 45 folgt N = 15,
aus N + N = P folgt P = 30,
aus N + P = I folgt I = 45,
aus N · P = R folgt R = 450,
aus R + R + R = E folgt E = 1350,
aus I + N : N + I : N + I : N = O folgt
O = 54. Daher gilt
P + I + O + N + I + E + R
= 30 + 45 + 54 + 15 + 45 + 1350 + 450
= 1989.

▲3▲ Angenommen in Klasse 5a von Susanne sind x Schüler; dann sind $(x - 1)$ Schüler in Klasse 5b und $(x + 1)$ Schüler in Klasse 5c. Zusammen sind das $2 \cdot x$ Schüler. Nun gilt $2 \cdot x = 58$, also $x = 29$. In Susannes Klasse sind 29 Schüler.

▲4▲ Die vierte Zahl lautet
a) 4455, b) 4564, c) 4123, d) 4456.

▲5▲ $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 = 1 + 1 + 2 + 4 = 8$.

▲6▲ Beispiel: $(359 + 593 + 935) : (3 + 5 + 9) = 1887 : 17 = 111$.
Allgemeine Lösung: Die drei Zahlen seien $\overline{abc}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ in dezimaler Schreibweise. Dann gilt:
$100 \cdot (a + b + c) + 10 \cdot (a + b + c) + 1 \cdot (a + b + c) = 111 \cdot (a + b + c)$.
Wegen $a + b + c \neq 0$ ist $111 \cdot (a + b + c) : (a + b + c) = 111$.
Das Ergebnis lautet also stets 111.

▲7▲ Die kleinste gewürfelte Summe ist $1 + 7 = 8$, die größte ist $6 + 12 = 18$. Die dazwischenliegenden Summen sind (z. B.) $n + 7$, $n = 2, 3, 4, 5, 6$ und $6 + m$, $m = 8, 9, 10, 11$.
Es können also 11 verschiedene Summen der Augenzahlen gewürfelt werden.

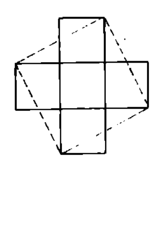
▲8▲ $A = 5$, $U = 1$, $F = 1$, $G = 2$, $E = 3$, $P = 2$, $S = 5$, $T = 4$, $M = 3$, $H = 2$, $I = 1$, $O = 1$.
Das Produkt lautet dann 7200.

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Magischer Stern
Schreibe in die leeren Kreise Zahlen zwischen 94 und 107, so daß man stets die Summe 402 erhält, wenn man die Zahlen addiert, die in den Kreisen auf einer Geraden stehen.
Lösung:
$A = 97$, $B = 103$, $C = 99$, $D = 104$,
$E = 96$, $F = 101$, $G = 106$, $H = 105$,
$I = 100$, $J = 102$, $K = 95$, $L = 98$.

▲2▲ Bestimmt die kleinste natürliche Zahl, welche auf 56 endet, durch 56 teilbar ist und die Quersumme 56 besitzt!
Lösung: Laut Aufgabe hat die gesuchte
(1) möglichst kleine natürliche Zahl z
(2) die Form $z = 56 \cdot x$,
(3) eine auf 56 endende Dezimalstellung,
(4) die Quersumme 56.
Aus (2) folgt, weil $56 = 8 \cdot 7$ ist,
(5) $8 \mid z$ und (6) $7 \mid z$.
Wegen (1) bis (5) und auf Grund der Teilbarkeitsregel für 8 endet die Dezimaldarstellung von z auf 856 und weiterhin wegen (1) bis (6) auf $9856 = 56 \cdot 176 = y$.
Da $9 + 8 + 5 + 6 = 28$ ist, müssen die noch fehlenden Stellen der Dezimaldarstellung von z die Quersumme $56 - 28 = 28$ ergeben. (Folgerung aus (4):)
Kleinstmögliche Zahl mit dieser Quersumme ist 1999.
Da aber $56 \nmid 19\,999\,856$ und $56 \mid y$ ist und weil (1) bis (6) gelten muß, prüfen wir, ob eine der Zahlen 2899, 2989, 2998 ohne Rest durch 7 teilbar ist. Das trifft nur bei $2989 = 7 \cdot 427$ zu.
Da $29\,899\,856 = 56 \cdot 533\,926$ gilt, ist, wie die Herleitung zeigt, $z = 19\,899\,856$ die gesuchte natürliche Zahl.

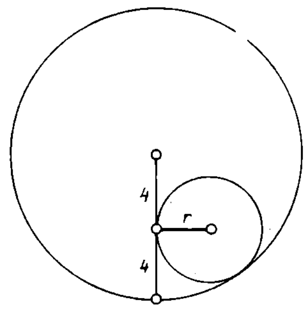
▲3▲
Verwandle das Kreuz in ein Quadrat
Die Zeichnung zeigt ein Kreuz mit vier gleichen Armen. Teile mit vier Geraden das Kreuz so in fünf Teile, daß du die Teile neu in Form eines Quadrates ordnen kannst.
Hinweis: Vier der Teile sollen kongruent sein.
Lösung:



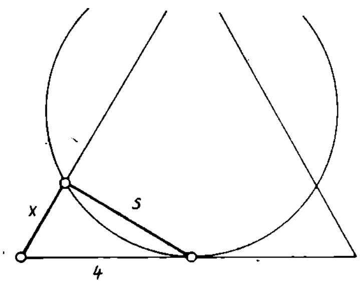
Gut gedacht ist halb gelöst

Ermittelt die jeweils gesuchten Größen, indem ihr eure Kenntnisse über kongruente Dreiecke, Sätze am Kreis und die Satzgruppe des Pythagoras nutzt.

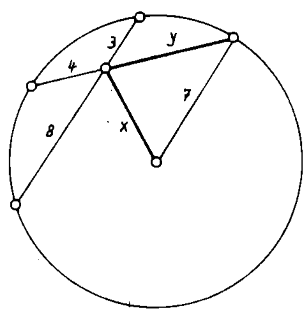
Ch. Werge



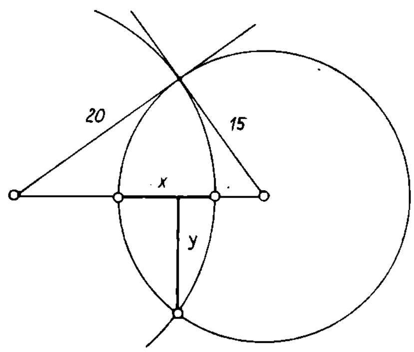
1 ges.: r



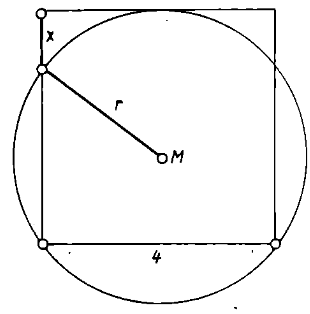
2 ges.: x, s



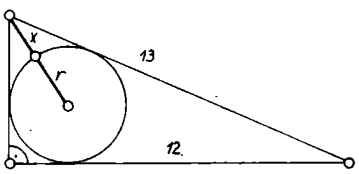
3 ges.: x, y



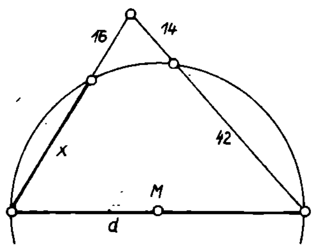
4 ges.: x, y



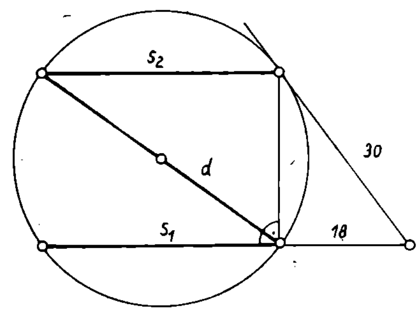
5 ges.: r, x



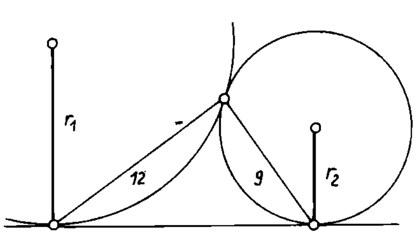
6 ges.: r, x



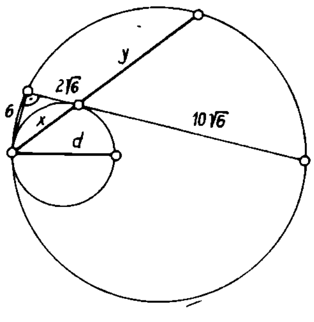
7 ges.: d, x



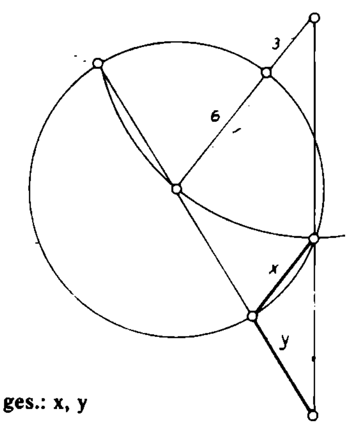
8 ges.: s_1, s_2, d



9 ges.: r_1, r_2



10 ges.: d, x, y

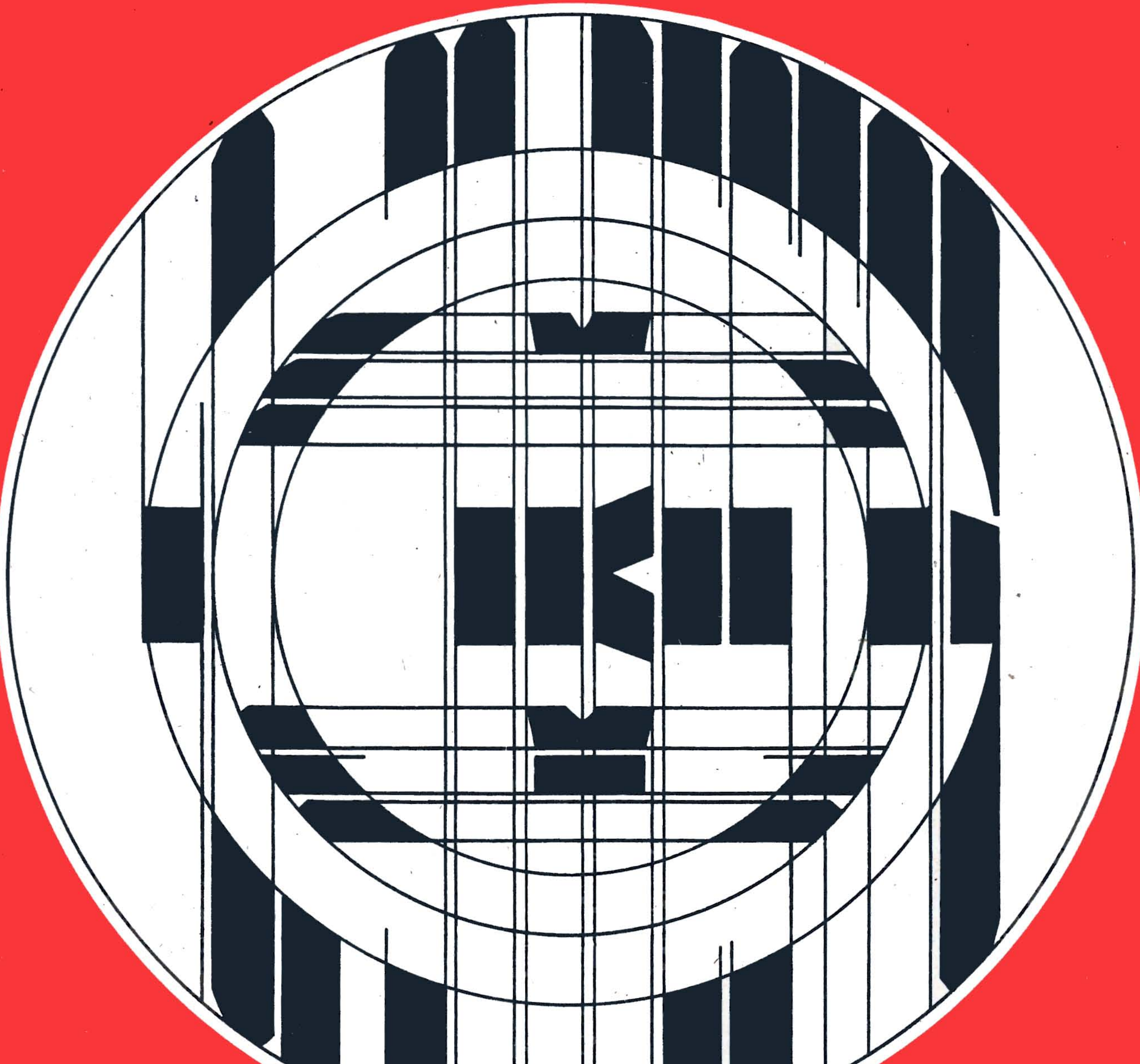


11 ges.: x, y

ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 23 (1989) 4 · Seiten 73 bis 96

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
23. Jahrgang 1989
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

5

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag

Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086

Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstr. 16, Leipzig 7010.

Fotos: G. Gruß (S. 97); Prof. Dr. J. Flachsmeyer (S. 104); R. Funck (S. 109, 110); M. Plumhoff (S. 115); Dr. B. Voigt (III. U.-Seite); R. Piechulek (IV. U.-Seite)
Vignetten: L. Otto, Leipzig (Titelvignetten, S. 101, S. 113, S. 118)
Technische Zeichnungen: OStR G. Gruß, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage von Dr. R. Meusinger, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 14. Juni 1989
Auslieferungstermin: 10. Oktober 1989

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Alphons weist die Schüler der 5. bis 7. Klasse auf speziell für sie geeignete Beiträge hin.

Jung geblieben mit seinen Schülern – Gerhard Gruß

Zum 40. Jahrestag der DDR nahmen wir uns vor, einen mindestens 40 Jahre im Schuldienst tätigen Mathematiklehrer zu interviewen. Und suchen brauchten wir solch einen Kollegen nicht lange, denn unser technischer Zeichner OStR G. Gruß, stellvertretender Direktor einer Polytechnischen Oberschule in Leipzig kann auf eine noch längere Berufspraxis zurückblikken. *Alphons*

Frage: Warum wurden Sie 1946 (Mathematik)Lehrer?
Zur Beantwortung dieser Frage ist es notwendig, einige Jahre (vor 1946) zurückzublenden.
Ich habe 1940 bis 1942 im Flugzeugbau als technischer Zeichner gelernt. Über Abendsemester der techn. höheren Lehranstalt versuchte ich mein Ziel Ingenieur im Flugzeugbau zu erreichen. Der faschistische Krieg zerstörte diese berufliche Entwicklung und manche andere Illusion.
Als ich bereits im November 1945 aus Kriegsgefangenschaft zurückkehren konnte, zeichneten sich in der damaligen sowjetischen Besatzungszone die ersten Schritte zur Neugestaltung der Volksbildung ab. Fanatische Nazi-Lehrer, die mich zu formen versuchten, Hafttage im Arbeitshaus Leipzig (wegen Auseinandersetzungen mit der HJ), Erlebnisse als Soldat und meine fachlichen Vorkenntnisse waren Anlaß, mich als Neulehrer zu bewerben. Damals noch verschwommene Vorstellungen von einer anderen Erziehung junger Menschen motivierten meine Bewerbung. Nach achtmonatiger „Kurzausbildung" mit einigen Grundgedanken der Psychologie, Pädagogik und anderen fachlichen Aspekten begann ich dann, so „gut gerüstet" als Lehrer für Physik und Mathematik an der 35. Volksschule in Leipzig.

Frage: Wie sahen damals Studium und Schulpraxis aus?
Es gibt viele Veröffentlichungen über unsere demokratische Schulreform. Ich möchte nun keine grundsätzlichen Wiederholungen dazu bringen, sondern nur an einigen Beispielen zeigen, welche Probleme wir außer der Unterrichtsgestaltung auch zu lösen hatten. Aufgaben, die für unsere Absolventen jetzt kaum noch vorstellbar sind. Unsere Stundenzahl bewegte sich bei 30 Wochenstunden Unterricht, dazu kam obligatorisch zweimal wöchentlich nachmittags Weiterbildung in Psychologie/Pädagogik/Methodik. In einer Reihe von Erziehungs- und auch Bildungsfragen war es ein Arbeiten von „der Hand in den Mund" und die tägliche Praxis war unser konkretester Ausbilder.
Vieles ließe sich über den Schulalltag erzählen. Ich möchte hier nur einige unterrichtliche wie auch „außerunterrichtliche" Episoden anklingen lassen. Episoden, die auch zeigen, daß in schwerster Zeit unsere Partei im Rahmen des damals möglichen alles für die Jugend tat:
– jeden 2. Tag Ausgabe eines Roggenbrötchens an die Schüler
– in gewissen Abständen zusätzliche Ausgabe von 25 g Butter je Schüler (selbst ausgewogen aus einem 10-kg-Block)
– Ausgabe von Bezugsscheinen für Schuhe und andere Kinderbekleidung
– für Mathe-Lehrer selbstverständlich die Mitwirkung beim zweimal durchgeführten Umtausch der alten Banknoten (nie wieder hatte ich soviel Geld in den Händen)
– Mitwirkung bei den in gewissen Zeitabständen durchgeführten Preissenkungen freier Waren (Inventuren in den betreffenden Läden).
In besonderer Erinnerung ist mir noch der sehr strenge Winter 1946/47. Die Heizung der Schule war mehr als ein Problem, bzw. keines, es lief nichts. Progressive Eltern halfen damals im Rahmen ihrer Möglichkeiten, so unterrichtete ich zum Beispiel mit meiner 7. Klasse (36 Jungen) an folgenden Stellen:
– täglich 2 Std. mit je 12 Schülern im Kinderzimmer des Kunstmalers Vogler
– mit je 10 bis 12 Schülern in den entsprechenden freien Zeiten, im Wartezimmer von Dr. Geidel (Coppistr.)
– die anderen Schüler trafen sich täglich in der Schule zum Empfang der neuen Hausaufgaben und Abgabe der fälligen Aufgaben
– zweimal wöchentlich mit der gesamten Klasse 3 Std. im Hundebad des Stadtbades (Wandtafel war die mit schwarzem Papier beklebte Tür).
Trotz der genannten Episoden war es eine pädagogische „Lehrzeit", die mir viel gegeben hat. Gerade die Vielfalt der Probleme prägten bei vielen von uns Einsatzbereitschaft, parteilichen Standpunkt und methodische Variabilität. In diesen ersten Jahren schied sich aber auch bei uns damaligen Neulehrern die Spreu vom Weizen.
Meine persönliche Entwicklung ging über die 1. und 2. Lehrprüfung mit den Wahlfächern Mathematik und Physik, später dann, nach Einführung des polytechnischen Unterrichts über ein Fernstudium zum Fachlehrer für PA. Viele Details ließen sich noch zusammentragen. Alles war aber geprägt von dem Gedanken, eine junge Generation zu bilden, die unseren damals jungen Staat achten und lieben lernt und die alle ihre Möglichkeiten zur Sicherung des Friedens einsetzt.

Frage: Wie kam es zu Ihrer Mitarbeit bei „alpha"?
1953 kam ich als Fachlehrer für Ma (Phy) an die 29. POS (Wohnungsnähe). Der Mathe-Unterricht an dieser Schule wurde geprägt vom ersten Chefredakteur der „alpha", J. Lehmann. Aus der täglichen Zusammenarbeit ergab es sich zwangsläufig, daß mich Koll. Lehmann schon relativ kurze Zeit nach dem Erscheinen der „alpha" bat, bei der zeichnerischen Gestaltung mitzuarbeiten. Daraus entwickelte sich nun eine fast 25jährige Zusammenarbeit. Die Arbeit an der Gestaltung der Zeichnungen zu den einzelnen Mathe-Aufgaben gaben mir persönlich viele Anregungen zur eigenen Unterrichtsgestaltung und sind für mich eine Form der notwendigen ständigen Weiterbildung.
Es ist mir in den vielen Jahren auch zum Bedürfnis geworden, mich immer wieder an der Gestaltung selbst kompliziertester Details zu prüfen und diese zu lösen.

Frage: Wie stellen Sie sich „Meine Schüler" vor?
Von den mir vorgelegten Fragen die am schwierigsten zu beantwortende Frage. Unsere grundsätzlichen Positionen zur Erziehung der Jugendlichen hat der 8. Pädagogische Kongreß eindeutig klargelegt und wird bestimmt der 9. Päd. Kongreß unterstreichen und wenn notwendig in einigen Details präzisieren. Dazu möchte ich keine weiteren Ergänzungen bringen.
Ich selbst habe mich immer als Freund und Berater meiner Schüler betrachtet und von ihnen gegenseitige Achtung der Persönlichkeit, vor allem aber Vertrauen in jeder Situation erwartet. (Das kann unsere redaktionelle Mitarbeiterin Rosemarie Schubert als seine ehemalige Schülerin nur bestätigen! – Die Red.)
Mit dieser Grundhaltung habe ich immer in den bisher 43 Jahren meinen sozialistischen Lehrauftrag aus meiner Sicht ordentlich erfüllt, stets einen guten Kontakt zu allen „Meinen Schülern" wie auch deren Eltern gehabt.

In Vorbereitung auf diesen Beitrag verbrachten wir einen interessanten Vormittag im Schulmuseum des Hauses der Lehrer Leipzig (Sitz: 57. Oberschule „Georg Schwarz", G.-Schwarz-Str. 113, Leipzig 7033). Schulmuseen existieren noch in Berlin, Dresden und Karl-Marx-Stadt. Neben den Sammlungen in Jüterbog, Schwerin-Mueß, Großenhain und Delitzsch befinden sich an vielen Schulen hervorragend ausgestattete Traditionskabinette, die sich ebenfalls mit Schulgeschichte beschäftigen.

Kostengünstigstes Straßennetz

Die Kooperation von Wissenschaft und Produktion erweist sich als tragfähig und ist zu einer unverzichtbaren Grundlage für unser weiteres ökonomisches wie gesellschaftliches Voranschreiten geworden.

Erich Honecker (7. Tagung des ZK der SED)

(I) Drei (P_1, P_2, P_3) oder vier (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) in ebenem Gelände gelegene Orte sollen durch ein Straßennetz der in den Bildern 1a bzw. 1b angegebenen Struktur miteinander verbunden werden.

Bild 1a

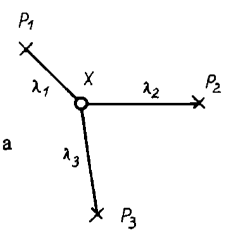
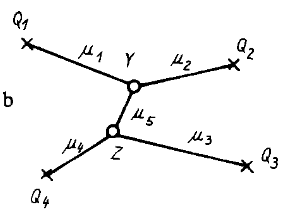


Bild 1b



Vor diesem Straßenbau wurden die Kosten $\lambda_i\,(i = 1, 2, 3)$ bzw. $\mu_j\,(j = 1, 2, 3, 4, 5)$ je Längeneinheit der Teilstraßen ermittelt. Diese Kosten je Längeneinheit sind bestimmt durch die Bau- und die in einem längeren Zeitraum anfallenden Reparaturkosten der Straßen sowie die zum gleichen Zeitraum gehörigen Verschleiß- und Kraftstoffkosten der die Teilstraßen voraussichtlich befahrenden Fahrzeuge. Diese Kosten je Längeneinheit sind im allgemeinen von Teilstraße zu Teilstraße voneinander verschieden, z. B. bedingt durch unterschiedliche Straßenbreite und Fahrzeugdichte. Statt um ein Straßennetz könnte es sich um ein Rohrleitungsnetz handeln, bei dem die Kosten je Längeneinheit von Rohrleitung zu Rohrleitung – z. B. bedingt durch unterschiedlichen Rohrquerschnitt – im allgemeinen voneinander verschieden sind. Die Problemstellung lautet: Wie müssen die Kreuzungspunkte X, Y und Z und wie muß die Streckenführung der Teilstraßen gewählt werden, damit bei gegebenen $\lambda_i\,(i = 1, 2, 3)$ bzw. $\mu_j\,(j = 1, 2, 3, 4, 5)$ die Gesamtkosten möglichst klein werden?

(II) Da die kürzeste Verbindung zweier Punkte die Strecke ist, und die Kosten für jede Teilstraße ihrer Länge proportional sind, kann die gesuchte Minimallösung nur unter den zulässigen Straßennetzen enthalten sein, bei denen die Teilstraßen geradlinig verlaufen (Bild 2).

Bild 2a

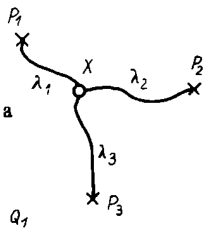
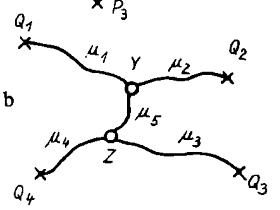


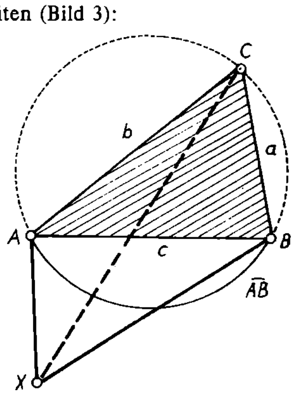
Bild 2b



(III) Werden die Längen der Teilstraßen in Bild 2 mit $\overline{P_1X}$, $\overline{P_2X}$, $\overline{P_3X}$, $\overline{Q_1Y}$, $\overline{Q_2Y}$, $\overline{Q_3Z}$, $\overline{Q_4Z}$ und $\overline{YZ}$ bezeichnet, so betragen die Gesamtkosten
$k(X) = \lambda_1 \cdot \overline{P_1X} + \lambda_2\overline{P_2X} + \lambda_3 \cdot \overline{P_3X}$ bzw.
$K(Y, Z) = \mu_1 \cdot \overline{Q_1Y} + \mu_2\overline{Q_2Y} + \mu_3\overline{Q_3Z} + \mu_4 \cdot \overline{Q_4Z} + \mu_5 \cdot \overline{YZ}$.

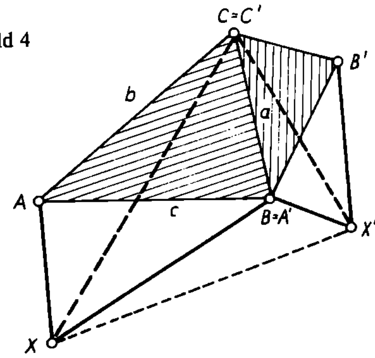
(IV) Das entscheidende Hilfsmittel zum Finden der Minimallösung auf geometrischem Wege ist eine Extremaleigenschaft des Sehnenvierecks, die wir uns zunächst erarbeiten (Bild 3):

Bild 3



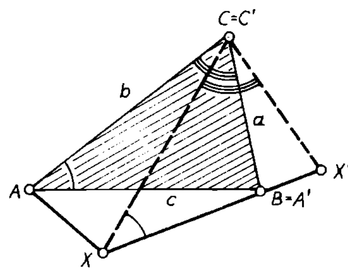
Ist X ein beliebiger Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC, so gilt stets
$a \cdot \overline{AX} + b \cdot \overline{BX} \geqq c \cdot \overline{CX}$.
In dieser Ungleichung gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn X ein Punkt des die Punkte A und B verbindenden Teiles $\widehat{AB}$ des Umkreises von $\triangle ABC$ ist, auf dem nicht der Punkt C liegt. Viereck $AXBC$ ist also dann ein Sehnenviereck. Durch die Drehstreckung mit Zentrum C, orientiertem Drehwinkel $\sphericalangle ACB$ und Streckungsfaktor $k = \frac{a}{b}$ wird die Figur in Bild 3 auf eine zu ihr ähnliche abgebildet. Liegen X, X' und B nicht auf einer Geraden, so gilt nach der Dreiecksungleichung $\overline{BX'} + \overline{BX} > \overline{XX'}$ (Bild 4). Ist B ein äußerer Punkt der Strecke XX', so gilt ebenfalls $\overline{BX'} + \overline{BX} > \overline{XX'}$. Ist schließlich B ein innerer Punkt oder Randpunkt der Strecke XX', so gilt $\overline{BX'} + \overline{BX} = \overline{XX'}$.

Bild 4



Für alle Punkte X der Ebene des Dreiecks ABC gilt also $\overline{BX'} + \overline{BX} \geqq \overline{XX'}$. Dabei gilt das Gleichheitszeichen nur, wenn B ein Punkt der Strecke XX' ist. Wo muß X liegen, damit B ein Punkt der Strecke XX' ist (Bild 5)?

Bild 5



Fällt X mit A oder B zusammen, so ist B ein Randpunkt der Strecke XX' und umgekehrt. Jetzt sei B ein innerer Punkt der Strecke XX'.

Wegen $\sphericalangle ACA' = \sphericalangle XCX'$ und $\frac{\overline{A'C}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{X'C}}{\overline{XC}}$ – Eigenschaften der Drehstreckung – gilt $\triangle ABC \sim \triangle XCX'$ und damit
$\sphericalangle BAC = \sphericalangle X'XC = \sphericalangle BXC$. Also muß nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes Viereck $\overline{AXBC}$ ein Sehnenviereck sein. Und auch umgekehrt gilt: Ist Viereck $\overline{AXBC}$ ein Sehnenviereck, so liegt B zwischen X und X'. Das Schließen dieser Beweislücke sei dem Leser überlassen. Nun sei X wieder ein beliebiger Punkt der Ebene des Dreiecks ABC.

Wegen $\triangle BX'C \sim \triangle AXC$ gilt
$\overline{BX'} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \cdot \overline{AX} = \frac{a}{b} \cdot \overline{AX}$ und wegen

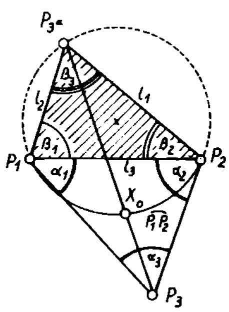
$\triangle XX'C \sim \triangle ABC \quad \overline{XX'} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \overline{CX} = \frac{c}{b} \cdot \overline{CX}$

(siehe Bild 4!). Damit erweisen sich die Ungleichungen
$\overline{BX'} + \overline{BX} \geqq \overline{XX'}$,
$\frac{a}{b} \cdot \overline{AX} + \overline{BX} \geqq \frac{c}{b} \cdot \overline{CX}$ und
$a \cdot \overline{AX} + b \cdot \overline{BX} \geqq c \cdot \overline{CX}$ als äquivalent.

(V) Nun zurück zur Problemstellung: Welcher Punkt muß als Kreuzungspunkt X gewählt werden, damit für drei gegebene, nicht auf einer Geraden liegende Orte P_1,

P_2 und P_3 und gegebene Kosten λ_i ($i = 1, 2, 3$) je Längeneinheit der Teilstraßen die Gesamtkosten
$k(X) = \lambda_1 \cdot \overline{P_1X} + \lambda_2 \cdot \overline{P_2X} + \lambda_3 \cdot \overline{P_3X}$
am kleinsten sind?
Beide Seiten dieser Gleichung werden durch ein λ_i, etwa λ_3 dividiert:
$$\frac{k(X)}{\lambda_3} = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \cdot \overline{P_1X} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \cdot \overline{P_2X} + \overline{P_3X}.$$
Da alle λ_i konstant sind, sind die Kosten $k(X)$ genau dann minimal, wenn auch $\frac{k(X)}{\lambda_3}$ den kleinstmöglichen Wert annimmt. Statt das Minimum von $k(X)$ zu bestimmen, werden wir das Minimum von $\frac{k(X)}{\lambda_3}$, das die Dimension einer Länge hat, ermitteln. Zunächst ordnen wir den λ_i ($i = 1, 2, 3$) Strecken l_i ($i = 1, 2, 3$) zu, die durch die folgenden Forderungen eindeutig bestimmt sind: $l_3 = \overline{P_1P_2}$,
$l_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \cdot \overline{P_1P_2}$, $l_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \cdot \overline{P_1P_2}$.
Gemäß der Ermittlung der λ_i kann angenommen werden, daß alle λ_i rationale Maßzahlen haben. Da außerdem alle λ_i gleiche Maßeinheit haben, sind $\frac{\lambda_1}{\lambda_3}$ und $\frac{\lambda_2}{\lambda_3}$ positive rationale Zahlen und damit sind l_1 und l_2 durch Konstruktion zu ermittelnde Strecken. Insbesondere gilt
$l_1 : l_2 : l_3 = \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ und
$$\frac{k(X)}{\lambda_3} = \frac{l_1}{l_3} \cdot \overline{P_1X} + \frac{l_2}{l_3} \cdot \overline{P_2X} + \overline{P_3X}.$$
Das Bestimmen des günstigsten Punktes X gelingt mittels einer durch die Problemstellung selbst bedingten Fallunterscheidung: Im ersten Fall mögen sich die Kreise um P_1 mit Radius l_2 und um P_2 mit Radius l_1 in einem Punkte P_{3^*} schneiden, der in bezug auf die Gerade P_1P_2 nicht in der gleichen Halbebene wie P_3 liegt und die Winkel β_1, β_2 und β_3 von $\triangle P_1P_2P_{3^*}$ mögen zusammen mit den Winkeln α_1, α_2 und α_3 von $\triangle P_1P_2P_3$ die Ungleichungen
$\alpha_1 + \beta_1 < 180°$, $\alpha_2 + \beta_2 < 180°$ und
$\alpha_3 + \beta_3 < 180°$ erfüllen (Bild 6).

Bild 6



Wegen $\alpha_1 + \beta_1 < 180°$ und $\alpha_2 + \beta_2 < 180°$ schneidet die Gerade $P_3P_{3^*}$ den die Punkte P_1 und P_2 verbindenden Bogen $\widehat{P_1P_2}$ des Umkreises von $\triangle P_1P_2P_{3^*}$, auf dem nicht der Punkt P_{3^*} liegt, in einem inneren Punkte X_0, und wegen $\alpha_3 + \beta_3 < 180°$ liegt P_3 außerhalb des Umkreises von $\triangle P_1P_2P_{3^*}$.
Wir behaupten, daß $\frac{k(X)}{\lambda_3}$ und damit auch die Gesamtkosten $k(X)$ minimal werden, wenn X mit X_0 zusammenfällt: Ist X ein beliebiger Punkt der Ebene von $\triangle P_1P_2P_{3^*}$, so gilt nach dem bereitgestellten Hilfssatz
$l_1 \cdot \overline{P_1X} + l_2 \cdot \overline{P_2X} \geqq l_3 \cdot \overline{P_3X}$
und damit auch
$\frac{l_1}{l_3} \cdot \overline{P_1X} + \frac{l_2}{l_3} \cdot \overline{P_2X} \geqq \overline{P_3X}$ sowie
$\frac{k(X)}{\lambda_3} = \frac{l_1}{l_3} \overline{P_1X} + \frac{l_2}{l_3} \overline{P_2X} + \overline{P_3X} \geqq \overline{P_{3^*}X}$
$+ \overline{P_3X}$.
Dabei gilt das Gleichheitszeichen nur, falls X ein Punkt des Bogens $\widehat{P_1P_2}$ ist. Nach der Dreiecksungleichung gilt
$\overline{P_{3^*}X} + \overline{P_3X} \geqq \overline{P_3P_{3^*}}$.
Hier gilt das Gleichheitszeichen nur, wenn X ein Punkt der Strecke $\overline{P_3P_{3^*}}$ ist. Aus beiden Ungleichungen folgt
$\frac{k(X)}{\lambda_3} \geqq \overline{P_3P_{3^*}}$.
Und das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn X sowohl ein Punkt des Bogens $\widehat{P_1P_2}$ als auch ein Punkt der Strecke $P_3P_{3^*}$ ist, also wenn X mit X_0 zusammenfällt (Bild 7a, b). Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt für die Schnittwinkel der Teilstraßen des optimalen Straßennetzes
$\sphericalangle P_2X_0P_{3^*} = \beta_1$ und $\sphericalangle P_{3^*}X_0P_1 = \beta_2$.

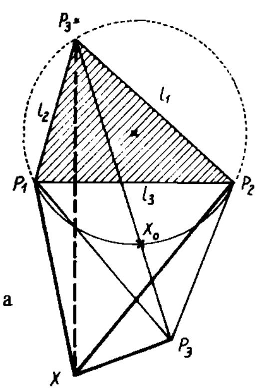


Bild 7a

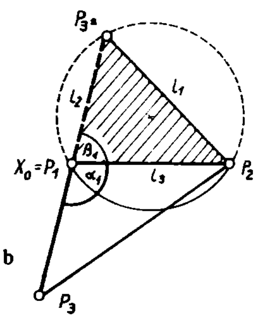
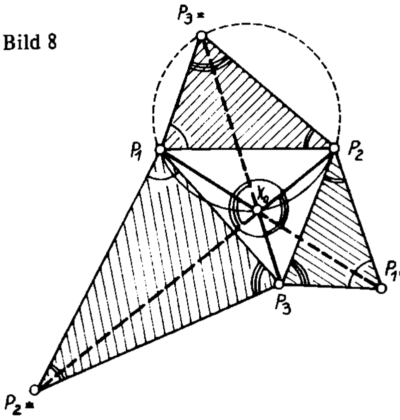


Bild 7b

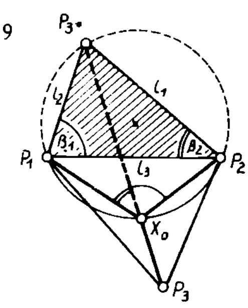
Vor dem Betrachten der weiteren Fälle sind ergänzende Bemerkungen zum ersten Fall angebracht: Den eindeutig bestimmten günstigsten Kreuzungspunkt X_0 und die eindeutig bestimmten Minimalkosten $k(X_0) = \lambda_3 \cdot \overline{P_3P_{3^*}}$ hätte man auch erhalten, wenn statt des Minimums von $\frac{k(X)}{\lambda_3}$ das von $\frac{k(X)}{\lambda_2}$ bzw. $\frac{k(X)}{\lambda_1}$ ermittelt worden wäre. Die dann jeweils an $\triangle P_1P_2P_3$ angelagerten Dreiecke $P_1P_3P_{2^*}$ und $P_2P_3P_{1^*}$ sind zu dem von uns betrachteten Dreieck $P_1P_2P_{3^*}$ ähnlich, die Umkreise der drei angelagerten Dreiecke und die drei Strecken $\overline{P_1P_{1^*}}$, $\overline{P_2P_{2^*}}$ und $\overline{P_3P_{3^*}}$ verlaufen durch X_0, wobei als Schnittwinkel dieser drei Strecken paarweise β_1, β_2 und β_3 auftreten. Daß zusätzlich der Produktengleichheit
$\overline{P_1P_2} \cdot \overline{P_3P_{3^*}} = \overline{P_2P_{3^*}} \cdot \overline{P_1P_{1^*}}$
$= \overline{P_1P_{3^*}} \cdot \overline{P_2P_{2^*}}$ gilt, möge sich der interessierte Leser selbst überlegen (Bild 8).

Bild 8



Im 2. und 3. Fall soll weiterhin das $\triangle P_1P_2P_{3^*}$ mit $\overline{P_1P_2} = l_3$, $\overline{P_1P_{3^*}} = l_2$ und $\overline{P_2P_{3^*}} = l_1$ existieren, aber es sollen nicht alle drei Ungleichungen
$\alpha_1 + \beta_1 < 180°$, $\alpha_2 + \beta_2 < 180°$ und
$\alpha_3 + \beta_3 < 180°$ gelten.
Dann ist sicher nur eine dieser Ungleichungen nicht erfüllt. Denn z. B. aus
$\alpha_1 + \beta_1 \geqq 180°$ und $\alpha_2 + \beta_2 \geqq 180°$
würde $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 \geqq 360°$
folgen und hiernach müßte
$\alpha_1 + \alpha_2 \geqq 180°$ oder $\beta_1 + \beta_2 \geqq 180°$
gelten, was dem Innenwinkelsatz des Dreiecks widerspricht.
O. B. d. A.[1] gelte $\alpha_1 + \beta_1 \geqq 180°$
und damit $\alpha_2 + \beta_2 < 180°$ und
$\alpha_3 + \beta_3 < 180°$.
(Die Möglichkeiten
$\alpha_2 + \beta_2 \geqq 180°$ bzw. $\alpha_3 + \beta_3 \geqq 180°$
können durch Vertauschen der Zeiger in
$\alpha_1 + \beta_1 \geqq 180°$ überführt werden.)

Bild 9



Im zweiten Fall gelte $\alpha_1 + \beta_1 = 180°$ (Bild 9). Mit geringfügigen Änderungen gelten die im ersten Fall angestellten Überlegungen auch jetzt: Die Kosten $k(X)$ sind minimal, wenn der „Kreuzungspunkt" X mit $X_0 = P_1$ zusammenfällt und es gilt
$\frac{k(X_0)}{\lambda_3} = \overline{P_3P_{3^*}}$.
Im dritten Fall gelte $\alpha_1 + \beta_1 > 180°$ (Bild 10). Dann existiert ein Hilfspunkt $P_{3^{**}}$, der bestimmt ist durch
$\sphericalangle P_2P_1P_{3^{**}} = \beta_{1^*} = 180° - \alpha_1 < \beta_1$
und $\overline{P_1P_{3^{**}}} = l_2$. Hieraus folgt
$P_2P_{3^{**}} = l_{1^*} < l_1$ und damit $l_1 - l_{1^*} > 0$.
Gemäß dem 2. Fall nimmt die Funktion

$\frac{l_{1^*}}{l_3} \cdot \overline{P_1X} + \frac{l_2}{l_3} \cdot \overline{P_2X} + \overline{P_3X}$ für $X = P_1$
den Minimalwert $\overline{P_3P_{3^{**}}}$ an.

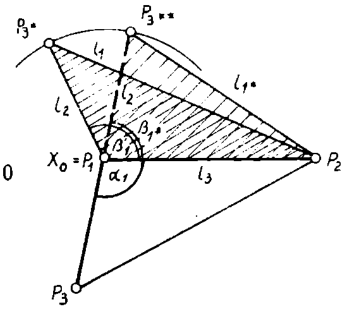


Bild 10

Die Funktion $\frac{l_1 - l_{1^*}}{l_3} \cdot \overline{P_1X}$ nimmt für $X = P_1$ den Minimalwert 0 an. Also nimmt die Funktion

$$\frac{k(X)}{\lambda_3} = \frac{l_{1^*}}{l_3} \cdot \overline{P_1X} + \frac{l_2}{l_3} \cdot \overline{P_2X} + \overline{P_3X} + \frac{l_1 - l_{1^*}}{l_3} \overline{P_1X}$$

als Summe der beiden betrachteten Funktionen für $X = X_0 = P_1$ ihren kleinstmöglichen Wert $\overline{P_3P_{3^{**}}} + 0 = \overline{P_3P_{3^{**}}}$ an.

Im vierten und letzten Fall schließlich sollen l_1, l_2 und l_3 nicht die Seiten eines Dreiecks sein. Dann gilt entweder
$l_1 \geqq l_2 + l_3$ oder $l_2 \geqq l_1 + l_3$ oder
$l_3 \geqq l_1 + l_2$. O. B. d. A. genügt es,
$l_1 \geqq l_2 + l_3$ zu betrachten: Der Kreis um P_1 mit Radius l_2 schneidet die Verlängerung der Strecke P_3P_1 über P_1 hinaus in einem Punkte $P_{3^{**}}$. Nach der Dreiecksungleichung gilt für die Seiten von $\triangle P_1P_2P_{3^{**}}$
$l_2 + l_3 > l_{1^*} = \overline{P_2P_{3^{**}}}$. Aus dieser Ungleichung und aus $l_1 \geqq l_2 + l_3$ folgt $l_1 > l_{1^*}$ und damit $l_1 - l_{1^*} > 0$. Mit der aus dem 3. Fall bekannten Schlußweise wird erkannt, daß

$$\frac{k(X)}{\lambda_3} = \frac{l_{1^*}}{l_3} \cdot \overline{P_1X} + \frac{l_2}{l_3} \cdot \overline{P_2X} + \overline{P_3X} + \frac{l_1 - l_{1^*}}{l_3} \cdot \overline{P_1X} \text{ für } X = X_0 = P_1$$

am kleinsten ist und der Minimalwert

$$\frac{k(X_0)}{\lambda_3} = \overline{P_3P_{3^{**}}} \text{ ist.}$$

Nur im ersten Fall liegt der günstigste Kreuzungspunkt im Innern von $\triangle P_1P_2P_3$, in allen anderen Fällen fällt er mit einem Eckpunkt von $\triangle P_1P_2P_3$ zusammen.

(VI) Nunmehr möge der Leser durch Anwenden der kennengelernten Beweismethoden das vier Orte Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4 verbindende Straßennetz der in Bild 2b angegebenen Struktur, für das die Kosten $K(Y, Z)$ am kleinsten sind, ermitteln. Dabei soll zusätzlich gelten (Bild 11):

1. Die Seiten des Dreiecks $Q_1Q_2Q_{5^*}$ sind

$$\overline{Q_1Q_2} = m_5,\ \overline{Q_1Q_{5^*}} = m_2 = \frac{\mu_2}{\mu_5} \cdot \overline{Q_1Q_2} \text{ und}$$

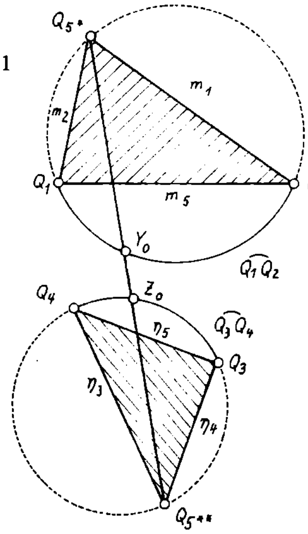
$$\overline{Q_2Q_{5^*}} = m_1 = \frac{\mu_1}{\mu_5} \cdot \overline{Q_1Q_2}.$$

2. Die Seiten des Dreiecks $Q_3Q_4Q_{5^{**}}$ sind

$$\overline{Q_3Q_4} = n_5,\ \overline{Q_3Q_{5^{**}}} = n_4 = \frac{\mu_4}{\mu_5} \cdot \overline{Q_3Q_4} \text{ und}$$

$$\overline{Q_4Q_{5^{**}}} = n_3 = \frac{\mu_3}{\mu_5} \cdot \overline{Q_3Q_4}.$$

Bild 11



3. Die Strecke $Q_{5^*}Q_{5^{**}}$ schneidet den Umkreis von $\triangle Q_1Q_2Q_{5^*}$ in einem Punkte Y_0 und den von $\triangle Q_3Q_4Q_{5^{**}}$ in einem Punkte Z_0. Dabei liegt Z_0 zwischen $Q_{5^{**}}$ und Y_0. Weiterhin liegt Y_0 auf dem Kreisbogen $\widehat{Q_1Q_2}$ des Umkreises von $\triangle Q_1Q_2Q_{5^*}$, auf dem nicht Q_{5^*} liegt, Z_0 liegt auf dem Kreisbogen $\widehat{Q_3Q_4}$ des Umkreises von $\triangle Q_3Q_4Q_{5^{**}}$, auf dem nicht $Q_{5^{**}}$ liegt.

Für weitere Fälle, die durch geeignetes Abändern der zusätzlichen Bedingungen 1 bis 3 entstehen, läßt sich ebenfalls mit den uns bekannten Mitteln das kostengünstigste Straßennetz bestimmen.

(VII) Für einige einfache Fälle konnten wir mit uns bekannten mathematischen Hilfsmitteln das kostengünstigste Straßennetz ermitteln. Wenn man beachtet, daß allein der Bau einer Straße von 1 km Länge von 525 000 M (3,5 m breite Straße mit Schwarzdecke) bis 4 650 000 M (Autobahn mit beidseitig 1,5 m breiter Standspur) kostet, ist ersichtlich, welche riesigen Einsparungen durch Ermitteln optimaler Lösungen zu erzielen sind. Und diese Aussage gilt für alle Bereiche der Volkswirtschaft! Deshalb sagen wir mit Fug und Recht, die Mathematik ist zur Produktivkraft geworden.

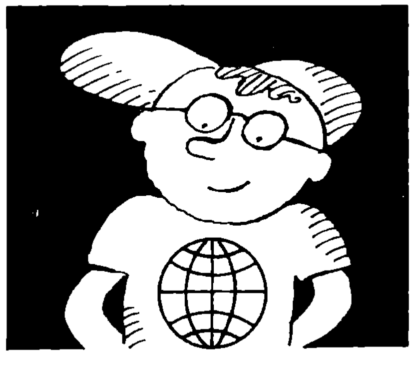
W. Träger

[1] ohne Beschränkung der Allgemeinheit

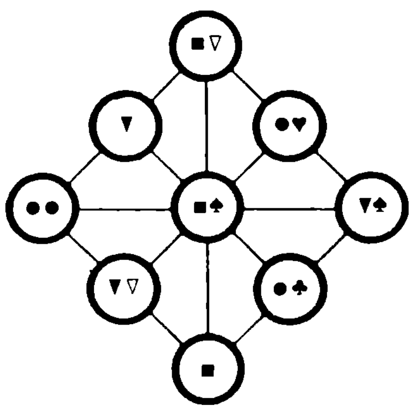
100mal 1989

Stellt die Zahlen von 1 bis 100 mit Hilfe der Ziffern 1, 9, 8 und 9 in dieser Reihenfolge dar. Dabei darf jede der Ziffern nur genau einmal vorkommen. Zur Verknüpfung können die vier Grundrechenarten, das Wurzelziehen und Potenzieren, die Fakultät und Klammern im Bereich der ganzen Zahlen verwendet werden.
Im Heft 6/89 geben wir euch je eine Lösung an!

Alphons

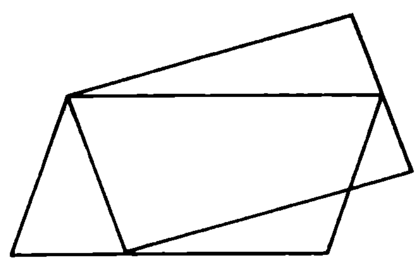


▲1▲ La valeur des symboles
Chaque symbole correspondant à un chiffre choisi entre 1 et 9, décodez cette grille de manière à toujours obtenir un total de 114 en additionnant trois nombres situés sur une même droite.



aus: Logigram, Paris

▲2▲ Два параллелограмма имеют общую вершину и еще по одной вершине каждый на стороне другого (см. рисунок). Покажите, что их площади равны.



aus: Quant, Moskau

▲3▲ The number 1989
It is immediately obvious that this number is *not* a prime–it is divisible by 9. (How can one see it immediately, without carrying out the division?)
The number obtained after dividing 1989 by 9 is a product of two consecutive primes. Find these primes.

aus: Fun with mathematics, Toronto

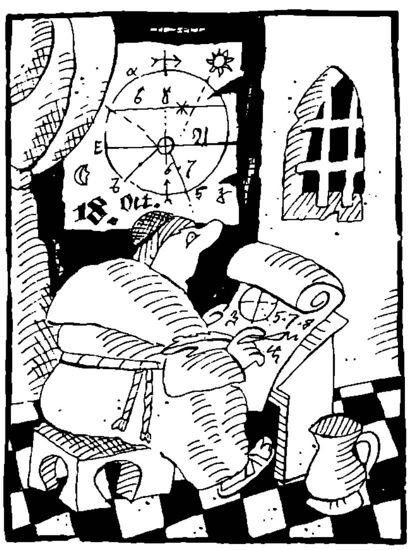
456 Jahre nach dem Weltuntergang von Lochau

Wege und Irrwege eines Mathematikers

Wer nach Wittenberg reist, der wird erwarten, Spuren Luthers und Melanchthons dort zu finden. Viele Touristen werden vermutlich die Tafel am Schloßeingang nicht weiter beachten, die verkündet, daß hier 1533 Michael Stifel eingesessen habe; wenn sie aber mathematisch interessiert sind, so fragen sie sich gewiß, was einen Rechenmeister mit dem Gesetz in Konflikt bringen konnte.

Stifel war ein herausragender Mathematiker des 16. Jahrhunderts, er verfaßte 1544 das beste Fachwerk der Arithmetik seiner Zeit, die „Arithmetica integra“ (Die gesamte Arithmetik). Wir verdanken Stifel z. B. die Einführung der runden Klammern oder den Begriff Exponent. Er machte sich auch um die Durchsetzung der Rechenzeichen + und − verdient. Stifel besaß klare Vorstellungen von irrationalen Zahlen, hatte das Prinzip des logarithmischen Rechnens erfaßt und einige seiner Äußerungen über die vierten Potenzen können durchaus als Vorahnungen der vierten Dimension gedeutet werden.

Diese kurze Würdigung der unvergänglichen mathematischen Verdienste ist unumgänglich, bevor von seinem Zahlenaberglauben die Rede sein kann. Stifel wurde 1486 oder 1487 in Schwaben geboren. Er kam in ein Augustinerkloster, in dem er sich mit Mathematik und Mystik beschäftigte. Durch seinen Glauben an den Erkenntnisfortschritt war es für ihn gewiß, daß mystische Dinge wie mathematische



verstehbar seien, ja gerade durch Mathematik verstanden werden könnten. Mit für uns geradezu naivem Vertrauen betrieb Stifel eine damals gängige Wortrechnung, die zur Deutung von historischen Texten und Prophezeiungen benutzt wurde. Die außerordentlich fragwürdige Basis dieser Rechnung besteht in der Zuordnung oder Identifizierung von lateinischen Buchstaben des Textes zu römischen Zifferzeichen (z. B. X zu 10) und einem nachfolgendem eigensinnigen Abzählen, Abziehen, Multiplizieren und Interpolieren. Die Sache lag Stifel gewissermaßen im Blut, denn bereits sein Vater hatte eine große Kirchenverbesserung geweissagt. Der Sohn sah diese Prophezeiung mit Luther eingetroffen, und seine Anhängerschaft für den Ketzer, die sich z. B. in Versen wie „Johannes (gemeint ist die Offenbarung des J.) tut uns von einem Engel schreiben klar/Der Gottes Wort soll treiben – ganz luter (= Martin Luther) offenbar“ zeigte, zwangen ihn, aus dem Kloster zu fliehen. Stifel lernte später Luther kennen, der ihm 1528 eine begehrte Pfarrstelle in Lochau (etwa 35 km von Wittenberg) verschaffte, die Stifel zugleich mit der Witwe des Amtsvorgängers übernahm. Lochau gibt es auf der Landkarte nicht mehr, der Ort heißt jetzt nach dem Schloß Annaburg. In dem kleinen Ort dachte Stifel nicht nur über seine Predigten nach, sondern betrieb ausgedehnt die Wortrechnung. 1532 wurde gerade noch „rechtzeitig“ sein Werk der Wortrechnung „Rechenbüchlein Vom End Christ“ fertig, in dem er schwarz auf weiß den Untergang der Welt für den 18. Oktober 1533 um 8 Uhr morgens ermittelt hatte. Luther hielt nichts von diesen (aber auch den anderen) Rechenkünsten seines Predigers, wohl aber dessen Pfarrgemeinde. In der Weltuntergangsstimmung verpraßten viele Bauern ihr Hab und Gut, Stifel verschenkte seinen Hausrat, ohne zu bedenken, was die Empfänger damit anfangen sollten. Angesichts des Jüngsten Gerichts waren ihm derartige nichtige logische Ungereimtheiten entgangen.

So begab es sich, daß die Lochauer Gemeinde am 18. 10. 1533 in den frühen Morgenstunden betend in Erwartung des baldigen Weltuntergangs in der Kirche versammelt war. Die Zeit verging, das Weltende schien sich zu verzögern. Nach 9 Uhr kamen mit festem Schritt Boten, aber nicht die des Jüngsten Gerichtes, sondern die des Kurfürsten, die Stifel abführten, nicht vor das erwartete Jüngste Gericht, sondern nur vor das Wittenberger Gericht. Luther verhalf dem falschen Propheten nach seiner einmonatigen Haft zu einer Predigerstelle in Holzhausen bei Wittenberg (heute an der F 187 gelegen). Stifel suchte bis an sein Lebensende den Fehler in der Weltuntergangsberechnung. 1567 starb er in Jena.

R. Thiele

Ein Zuschnittproblem

Manche Betriebe erhalten von Zulieferbetrieben Zwischenprodukte, zum Beispiel Bleche, Stoffballen, Papierrollen usw. in einer bestimmten Größe. Für die weitere Verarbeitung dieser Zwischenprodukte werden aber meistens kleinere Stücke des Materials gebraucht. Die Aufgabe besteht dann darin, den Zuschnitt so auszuführen, daß möglichst wenig Abfall oder Verschnitt entsteht, daß also mit der geringsten Menge an Material eine möglichst große Anzahl an erforderlichen kleineren Stücken erzielt wird.

Uwe will einen Drachen mit rechtwinkligem Kopf bauen. Ihm stehen zwei rechteckige Bogen Papier zur Verfügung, die beide die Länge $a = 90$ cm und die Breite $b = 60$ cm haben. Er fertigt für jeden Bogen eine Zeichnung, ein Drachenviereck, an. Aus den Bildern 1 und 2 geht hervor, wie Uwe die Drachenvierecke gezeichnet hat. Uwe überlegt nun, bei welcher der beiden Bilder der geringste Verschnitt entsteht, d. h., bei welcher der beiden Bilder die Fläche des Drachenvierecks am größten ist. Wer kann Uwe helfen und ihm die Lösung sagen?

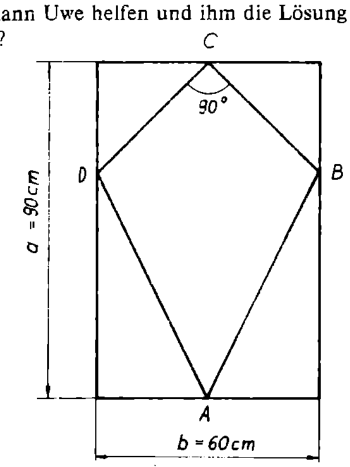


Bild 1

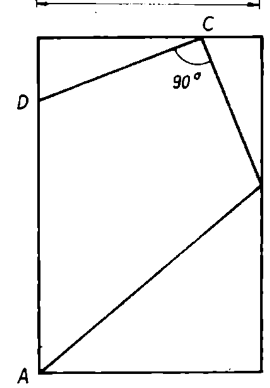


Bild 2

S. Tunn, bearbeitet von Th. Scholl

Ein Stück Experimentalgeometrie beim Papierfalten

1. Wie knifft man in ein rechteckiges Papierblatt eine Diagonale ein?

Wenn es sich um ein quadratisches Papierblatt handelt, so löst sich die Aufgabe einfach. Man bringt zwei Gegenecken des Quadrates $ABCD$, etwa A und C, übereinander und streicht dann das gewölbte Papierblatt glatt. Zur Kontrolle beachtet man dabei, daß die Kante AD auf die Kante DC fällt. Zwangsläufig fällt dann die Kante AB auf die Kante BC. Die beim Glattstreichen entstehende Knifflinie verläuft entlang der Diagonale BD. Wenn man jetzt noch von dem gefalteten Dreieck $BDA(C)$ den Eckpunkt B mit dem Eckpunkt D zusammenlegt und wieder glattstreicht (wobei man zur Kontrolle die Doppelkante BA (C) entlang der Doppelkante $DA(C)$ führt), so entsteht die Knifflinie $A(C)E$. Beim Entfalten erscheinen jetzt im ursprünglichen Quadrat die Diagonalen BD und AC eingeknifft (Bild 1).

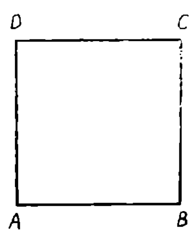
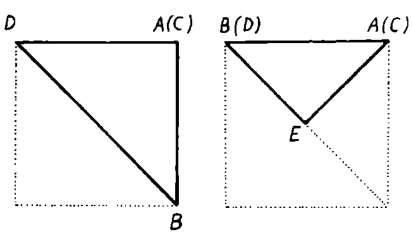
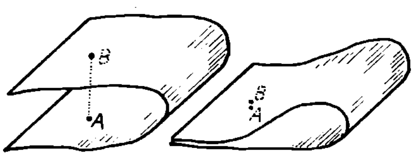


Bild 1



Für ein nicht quadratisches, aber rechteckiges Papierblatt verläuft das Verfahren nicht mehr so einfach. Man muß einen Umweg gehen! Dazu ist es vorteilhaft zu entscheiden, wie die Knifflinie in einem Papierblatt zu kennzeichnen ist, wenn man zwei Punkte A, B eines Blattes durch Einwölben übereinander bringt und dann glattstreicht (Bild 2).

Bild 2



Das Glattstreichen bringt als Knifflinie den geometrischen Ort aller der Punkte hervor, die von A und B den gleichen Abstand haben: $|AP| = |PB|$. Das ist die Mittelsenkrechte zwischen den Punkten A, B. Sie hat damit für zwei Punkte des Papierblattes eine ganz reale Bedeutung beim Papierfalten. Danach entsteht also für ein Rechteck $ABCD$ durch Übereinanderfalten des Blattes, so daß die Punkte A und C zusammenfallen, die Mittelsenkrechte zur Diagonale AC. Wir erhalten damit die Knifflinie EF (Bild 3).

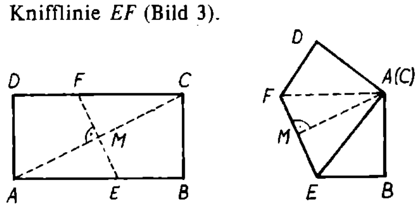
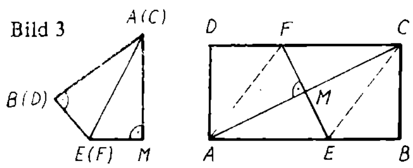


Bild 3



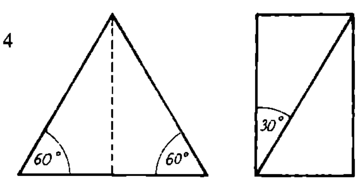
Als Faltfigur ergibt sich ein Fünfeck $BEFDA(C)$. Dieses Fünfeck ist gleichschenklig und in zwei Winkelpaaren gleichwinklig:
$|FD| = |EB|$, $|DA| = |BA|$,
$\sphericalangle DFE = \sphericalangle BEF$, $\sphericalangle ADF = \sphericalangle ABE$.
Das begründet man etwa wie folgt.
Die Kongruenz der Strecken AD und BC sowie der Winkel $\sphericalangle ADE$ und $\sphericalangle CBE$ ist klar. Außerdem sind die Dreiecke CFM und AEM nach dem Kongruenzsatz *WSW* kongruent, deshalb sind auch die Strecken CF und AE kongruent. Das Dreieck $A(C)FE$ in dem Fünfeck ist also gleichschenklig. Darauf sind die beiden kongruenten Dreiecke $A(C)DF$ und $A(C)BE$ aufgesetzt. Wenn man nun den Punkt B des Fünfecks mit dem Punkt D und den Punkt E mit F übereinander bringt und knifft, so entsteht die Mittelsenkrechte $A(C)M$ im Dreieck $EFA(C)$. Als Faltfigur liegt das Viereck $ME(F)B(D)A(C)$ vor. Beim Entfalten erscheinen in dem Ausgangsrechteck $ABCD$ die Diagonale AC und deren Mittelsenkrechte EF eingeknifft. Nachdem man die Knifflinie EF erhalten hat, könnte man natürlich in dem wieder entfalteten Rechteck die Knifflinie AC durch Übereinanderbringen der Punkte E und F und durch Glattstreichen erlangen.

Das Viereck $AECF$ ist übrigens ein Rhombus. Ist das Viereck $ME(F)B(D)A(C)$, welches vielleicht den Eindruck von Spiegelsymmetrie hervorruft, wirklich spiegelsymmetrisch? Mit anderen Worten; wann sind die Dreiecke BEC und MEC des Ausgangsrechteckes kongruent? Dann muß $|MC| = |CB|$ und $|ME| = |EB|$ sein.
Wegen des rechten Winkels bei M bzw. B folgt aus dem Kongruenzsatz *WSS*, daß die Kongruenz der beiden Dreiecke genau dann eintritt, wenn $|MC| = |CB|$. Das bedeutet ein Rechteck $ABCD$, in dem die Diagonalen doppelt so lang sind wie die kürzere Rechteckseite b. Sei die längere Rechteckseite a. Dann bekommt man nach dem Pythagoras

$$a^2 + b^2 = 4b^2, \text{ d. h. } \frac{a}{b} = \sqrt{3}.$$

Eine andere Schlußweise zur Kongruenzbedingung der beiden Dreiecke BEC und MEC kann so ablaufen: Die drei beim Eckpunkt C auftretenden Winkel der aneinanderstoßenden Dreiecke sind dann kongruent. Es muß sich also in dem Rechteck $ABCD$ bei dem Winkel $\sphericalangle ACD$ um einen von 30° handeln. Das Dreieck ACD ist also ein Halbierungsdreieck eines gleichseitigen Dreiecks (Bild 4).

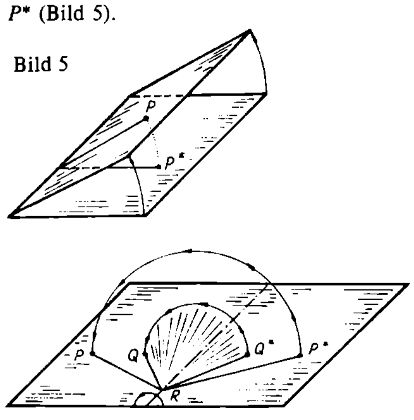
Bild 4



2. Eine Faltkante als Dreh- und Spiegelachse

Wenn man ein einmal gefaltetes Papierblatt entfalten will, so kann man den einen Blatteil etwa auf einer Ebene festhalten und den anderen Teil um die Faltkante ebenfalls in diese Ebene zurückdrehen. Ein Punkt P des aufgefalteten Teiles, der nicht auf der Faltkante liegt, beschreibt dann beim Zurückdrehen einen Halbkreisbogen im Raum. Der unter dem Punkt P liegende Punkt des unteren Blatteiles sei P^* (Bild 5).

Bild 5



Eine Strecke von P zu einem Punkt R der Faltkante durchläuft im Raum beim Zurückdrehen die Mantellinien eines halben Kreiskegels. P liegt in der entfalteten Ebene spiegelsymmetrisch bezüglich der Faltkante zum Punkt P^*. Die Faltkante ist ja gerade die Mittelsenkrechte zu den Punkten P, P^*. Ein von einem Punkt R der Faltkante ausgehender Strahl wird durch das Falten in einen ebenfalls von R ausgehenden Strahl der anderen Halbebene überführt. Für diese beiden Strahlen, die in den beiden Halbebenen verlaufen, stellt die Faltkante die Winkelhalbierende dar. Winkelhalbierende von dreieckigen, viereckigen, ..., n-eckigen Papierblättern können daher durch Übereinanderbringen der aneinanderstoßenden Seiten eingeknifft werden.

Durch Experimente mit Dreiecken gewinnt man beim Falten Vertrautheit mit der Tatsache, daß die Winkelhalbierenden eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden. Außerdem zeigt sich einem auch das Vorkommen von Vierecken, die nicht eben sind (Bild 6).

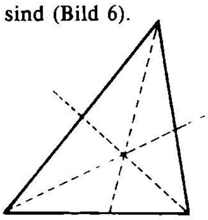
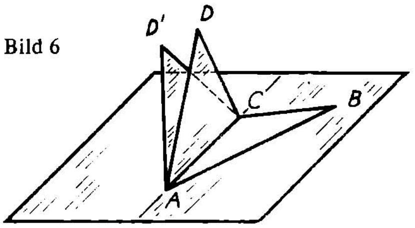


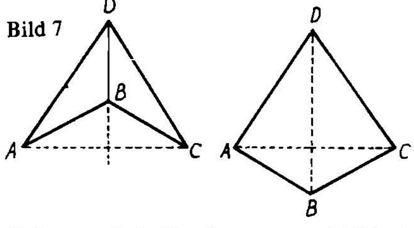
Bild 6



Jetzt betrachten wir wieder ebene Vierecke und fragen nach der Beschaffenheit von denjenigen Vierecken, wo eine der Diagonalen, das sind die Verbindungsstrecken von zwei Gegenecken, das Viereck in zwei kongruente Dreiecke zerlegt. Wir denken uns dazu das Viereck längs einer solchen Diagonale zusammengefaltet.

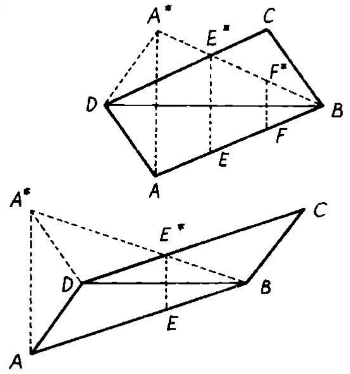
Dann sind zwei Fälle möglich. Das eine Teildreieck kommt mit dem anderen zur Deckung, oder das tritt nicht ein. Im ersten Falle ist also die Diagonale eine Symmetrielinie für das Viereck. Die andere Diagonale verläuft senkrecht zur ersten Diagonale und wird von ihr halbiert. Diese zweite Diagonale wird Grundseite von zwei gleichschenkligen Dreiecken. Wenn diese beiden Dreiecke auf verschiedenen Seiten der gemeinsamen Basislinie liegen, handelt es sich um ein Drachenviereck, anderenfalls bezeichnet man das dann nicht konvexe Viereck als Windvogelviereck (Bild 7).

Bild 7



Gelangen die beiden kongruenten Teildreiecke bei Drehung um die Faltachse nicht zur Deckung, dann erscheint die im Bild 8 illustrierte Situation.

Bild 8

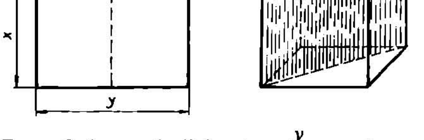


Das durch Drehung des Dreiecks ABD um die Faltachse entstandene Dreieck sei BA^*D. Dieses Dreieck ist zu dem Dreieck BCD kongruent. Folglich stimmt der Winkel $\sphericalangle A^*DB$ mit dem Winkel $\sphericalangle DBC$ überein. Damit sind die Winkel $\sphericalangle ADB$ und $\sphericalangle DBC$ gleich, also ist AD parallel zu CB. Entsprechendes gilt für AB und CD. Das Ausgangsviereck wird in diesem Falle ein Parallelogramm. Die Linie EE^*, die als Senkrechte zu BD durch den Schnittpunkt E^* von CD und BA^* bestimmt war, wird die Mittelsenkrechte zur Diagonale BD. Das Dreieck BE^*D ist nämlich gleichschenklig und EE^* halbiert den Winkel bei E^*. Das Viereck DE^*BE ist ein dem Parallelogramm einbeschriebener Rhombus. Durch Spiegelung an der Symmetrielinie EE^* geht das Dreieck BA^*D in das Dreieck BCD über. Der im ersten Abschnitt festgestellte Sachverhalt gilt also für beliebige Parallelogramme: Die Mittelsenkrechte zu einer Parallelogrammdiagonale bestimmt durch die Schnittpunkte mit zwei Gegenseiten und die Endpunkte der Diagonale einen dem Parallelogramm einbeschriebenen Rhombus.

3. Faltlinien am Ostwaldschen Rechteck

Ein im DIN-Format vorliegendes Rechteck wollen wir ein Ostwaldsches Rechteck nennen. Wilhelm Ostwald, der bekannte Chemiker, Wissenschaftstheoretiker und Wissenschaftsorganisator, war Anfang unseres Jahrhunderts dafür eingetreten, die Papierformate international zu normen. Um keinen Abfall zu erzeugen, bedient man sich des Verdoppelns und des Halbierens als Prozedur. Wenn dabei das Seitenverhältnis invariant bleiben soll, kommt man auf die Forderung eines Seitenverhältnisses von $1:\sqrt{2}$ beim Rechteck (Bild 9).

Bild 9



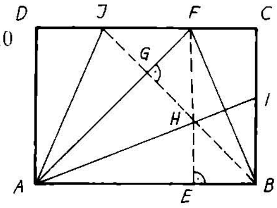
Es muß dann nämlich $x:y = \frac{y}{2}:x$ gelten.

Das bedeutet

$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{1}{2}$, d. h. $x:y = 1:\sqrt{2}$.

Solche Ostwaldschen Rechtecke treten als Diagonalschnitte durch Würfel auf. Nun nehmen wir folgende Faltungen an einem Ostwaldschen Rechteck vor. Zuerst werde die kürzere Rechteckseite auf die längere aufgelegt. Es entsteht die vom Eckpunkt A ausgehende Einkniffung längs der Quadratdiagonale des im Rechteck befindlichen Quadrats $AEFD$. Als Faltfigur erhält man das Trapez $ABCF$ (Bild 10).

Bild 10

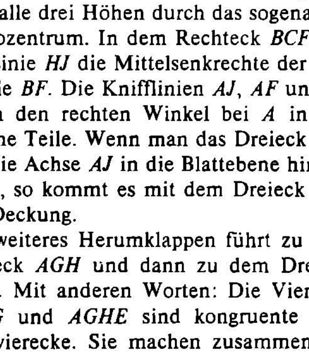


Die Kante DF fällt auf die Linie EF. Das Dreieck ABF ist gleichschenklig, weil $|AB| = \sqrt{2}\,|AD|$ im Ostwaldschen Rechteck und $|AF| = \sqrt{2}\,|AD|$ als Quadratdiagonale. Jetzt möge man das Kantenstück CF auf die Diagonale FA auffalten. Es entsteht als Faltfigur das Dreieck ABF mit den Dreieckshöhen BG und EF. Wenn man nun noch die Dreiecksseiten AB auf die Dreiecksseite AF auffaltet, so ergibt sich als Faltlinie die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle BAF$.

Entfaltet man das Gebilde wieder zum Rechteck, dann findet man die im Rechteck eingezeichneten Kniffinien. Die Linien EF, BG und AJ verlaufen durch einen Punkt H. Das liegt daran, daß AJ im gleichschenkligen Dreieck ABF zugleich eine Höhe ist. In einem Dreieck gehen aber alle drei Höhen durch das sogenannte Orthozentrum. In dem Rechteck $BCFE$ ist die Linie HJ die Mittelsenkrechte der Diagonale BF. Die Kniffinien AJ, AF und AJ teilen den rechten Winkel bei A in vier gleiche Teile. Wenn man das Dreieck DAJ um die Achse AJ in die Blattebene hineindreht, so kommt es mit dem Dreieck AGJ zur Deckung.

Ein weiteres Herumklappen führt zu dem Dreieck AGH und dann zu dem Dreieck AHE. Mit anderen Worten: Die Vierecke $ADJG$ und $AGHE$ sind kongruente Drachenvierecke. Sie machen zusammen ein Viertel eines regelmäßigen Achtecks mit dem Umkreisradius $|AJ|$ und dem Inkreisradius $|AD|$ aus. Die Dreiecke AJF und AFH ergeben ebenfalls ein Drachenviereck. Durch das fortgesetzte Umklappen dieses Dreiecks erhält man ein regelmäßiges Sternachteck. Schließlich ergibt sich wieder ein konvexes regelmäßiges Achteck, wenn man das Dreieck AJB (bzw. das dazu kongruente Dreieck AFJ) fortgesetzt herumklappt (Bild 11).

Bild 11



J. Flachsmeyer

Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. Flachsmeyer

Sektion Mathematik
der Ernst-Moritz-Arndt-Universität
Greifswald

▲3044▲ Bei einem Ostwaldschen Rechteck, das etwa als ein Papierblatt im DIN-A-Format vorliegt, soll man lediglich durch die Prozedur des Papierfaltens jede der Rechteckseiten nach dem Ostwaldschen Verhältnis $1:\sqrt{2}$ teilen.

Kurzbiographie

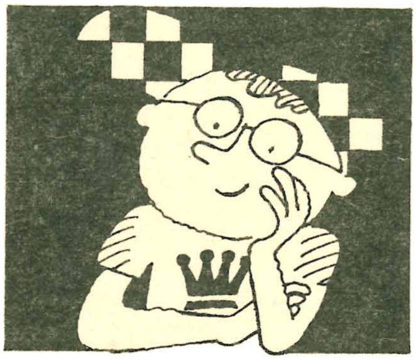
Jahrgang 1935 – Abitur 1954 – Mathematikstudium an der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald 1954 bis 1959 – Promotion 1960 (Zerlegungsspektren topologischer Räume) – 1962 bis 1963 Forschungsaufenthalt an der AdW der UdSSR (Gast beim Stammvater der sowjetischen Topologenschule P. S. Alexandrov) – Habilitation 1965 (Topologie und Boole-Algebren) – 1960 bis 1969 Assistent und Arbeitsgruppenleiter am Institut für Reine Mathematik der AdW zu Berlin – 1969 Ordentlicher Professor an der Universität Greifswald, Lehrstuhl für Geometrie und Topologie.

Veröffentlichungen in *alpha*:
Kombinatorische Betrachtungen bei Schiebespielen Heft 4/78;
Verteilungen Heft 6/79;
Kombinierte Figuren aus Quadraten und Dreiecken Heft 3/80;
Zum Verhältnis von Kunst und Wissenschaft am Beispiel der Ornamente und der Mathematik Heft 5/89 (Teil 1), Heft 6/89 (Teil 2);
Symmetrien Ostwaldscher Ornamente Heft 2/89.

Achtung!

Schaut euch unser Titelblatt genau an! „Eingeübten Auges“ könnt ihr ein wichtiges Ereignis ablesen!

Viel Spaß wünscht euch *Alphons*



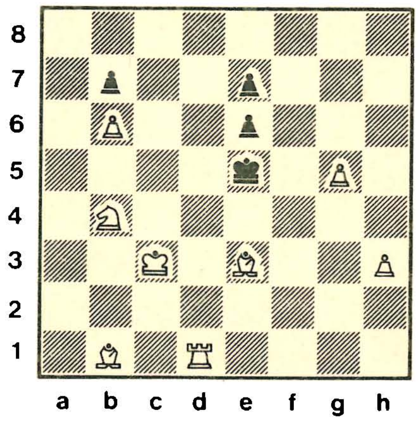
Alpha-Schachwettbewerb 1989

Alle Schachfreunde sind wiederum aufgefordert, an dem mittlerweile 7. alpha-Schachwettbewerb teilzunehmen!
Unser Wettbewerb soll Schachfreunden als Anregung dienen und neue Interessenten ermuntern, sich etwas intensiver mit dem königlichen Spiel zu beschäftigen.
Vier Schachaufgaben gilt es zu lösen. Anläßlich eines Treffens von Schachproblemkomponisten im Mai dieses Jahres in Flessenow stellten Schachfreunde die Aufgaben als kleinen Beitrag zum 40. Jahrestag der Gründung unserer Republik für *alpha* zur Verfügung. Alle vier Aufgaben sind Urdrucke und werden somit zum ersten Mal veröffentlicht.
In allen vier Aufgaben beginnt Weiß und setzt Schwarz trotz bester Gegenwehr mit dem zweiten bzw. dritten Zug matt.
Als vollständig gilt die Lösung, wenn alle Abspiele bis zum Matt angeführt sind.
Unter den Teilnehmern, die die Aufgaben Nr. 1 bis Nr. 4 korrekt gelöst haben, werden Buchpreise verlost und Urkunden verteilt. In einer weiteren Verlosung haben auch alle anderen Teilnehmer, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst haben, die Chance, einen Buchpreis zu gewinnen.
Teilnahmeberechtigt sind alle alpha-Leser.
Die Einsendung der Lösungen (jeweilige Aufgaben-Nummer angeben) ist bitte bis zum 31. 12. 1989
unter Angabe von Name, Vorname, Alter und Adresse zu richten an

Redaktion alpha
PSF 14
Leipzig
7027.

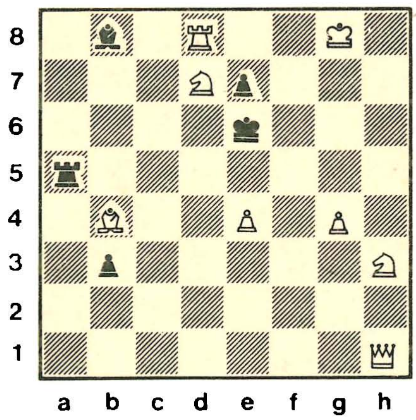
Die Lösungen sowie die Gewinner werden in alpha 3/1990 veröffentlicht.
„alpha“ dankt den vier Schachkomponisten herzlich für die vier Urdruckprobleme!

Wolfgang Berg (Rampe)



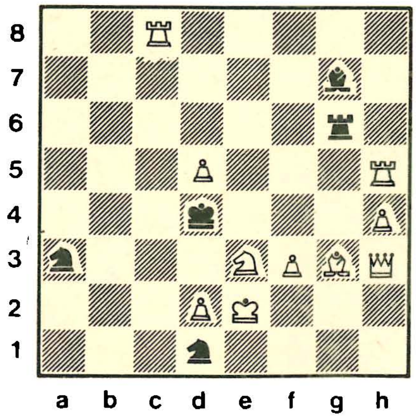
Nr. 1 Matt in 2 Zügen

Dr. Rainer Staudte (Karl-Marx-Stadt)



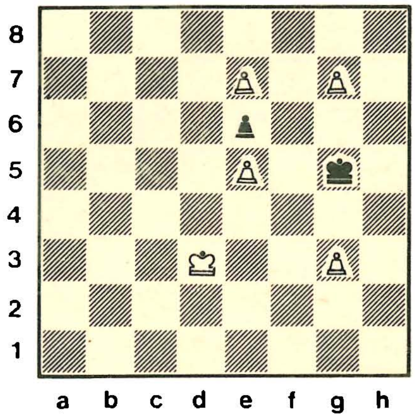
Nr. 2 Matt in 2 Zügen

Fritz Hoffmann (Weißenfels)



Nr. 3 Matt in 2 Zügen

Michael Schlosser (Karl-Marx-Stadt)



Nr. 4 Matt in 3 Zügen

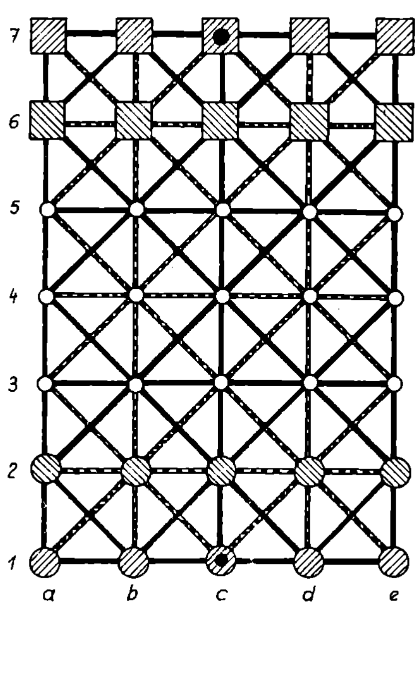
Boncoup – ein neues Brettspiel

Heute wird immer mehr Menschen klar, daß die Geschichte kein Spiel mit einer Nullsumme darstellt, bei dem der eine in dem Maß gewinnt, wie der andere verliert.
Michail Gorbatschow

Der Name Boncoup (etwa wie „bongku“ gesprochen) wurde aus den französischen Wörtern bon (gut, geschickt) und coup (Zug, Schlag, Hieb) gebildet. Das Bild zeigt das $5 \cdot 7 = 35$ Felder umfassende Spielfeld mit eingezeichneten roten (▬▬▬) und grünen (▭▭▭) Linien und den zu Partiebeginn aufgestellten Spielsteinen: Auf den Feldern der Reihen 2 und 6 stehen dann grüne (\\\\\\\) und auf denen der Reihen 1 und 7 rote (///////) Spielsteine. Die roten Spielsteine auf den Mittelfeldern der Reihen 1 und 7 sind die Hauptsteine, gekennzeichnet durch einen schwarzen Punkt. Die 10 Spielsteine des Spielers A sind kreisförmige, die des Spielers B quadratische Scheiben.

Die Spielregeln

Beide Spieler ziehen abwechselnd. Bei einem Zug darf und muß entweder ein grüner Stein längs einer grünen oder ein roter Stein längs einer roten Linie geradlinig auf ein anderes Feld gezogen werden, falls alle Felder zwischen dem Ausgangsfeld und dem gewählten Endfeld frei sind und das Endfeld ebenfalls unbesetzt oder mit einem feindlichen Stein besetzt ist. Im letzten Fall wird der feindliche Stein geschlagen, d. h. vom Feld genommen. Das Spiel ist beendet, wenn von einer Partei der Hauptstein geschlagen ist. Diese Partei hat die Partie verloren. Wird ein kreisförmiger (quadratischer) Stein, der kein Hauptstein ist, von einem Feld der 7. (1.) Reihe von dieser Reihe weggezogen, so darf der Spieler A mit den kreisförmigen (B mit den quadratischen) Steinen auf das frei gewordene Feld der 7. (1.) Reihe einen seiner geschlagenen Steine wieder einsetzen mit folgender Bedingung:
Wurde der von der 7. (1.) Reihe weggezogene Stein auf ein Feld gezogen, von dem mehr grüne als rote Linien ausgehen, so muß der wieder eingesetzte Stein ein grüner, andernfalls ein roter sein. Die Partie endet unentschieden, wenn bei 20 aufeinanderfolgenden Zügen kein Stein geschlagen oder neu eingesetzt wird. Spielen zwei Spieler mehrere Partien gegeneinander, so führt im Wechsel jeder von beiden zu Partiebeginn den Eröffnungszug aus.
Nachdem ein Spielfeld auf ein Blatt Papier gezeichnet ist und die Spielsteine aus Pappe angefertigt sind, sollten zum Gewöhnen an die Spielregeln und zum Sammeln erster strategischer Erfahrungen die angegebenen Endspiele nachvollzogen werden.



I. Endspiel
Ausgangssituation:
Kreisförmige Steine
Rote Steine: Hc1 (Hauptstein), e1, a2
Grüne Steine: d2, c3
Quadratische Steine
Rote Steine: Hc7, a7, b7
Grüne Steine: a6, c6, d6
Spieler A mit den kreisförmigen Steinen ist am Zuge und gewinnt mit dem 3. Zug.
Züge des Spielers ...
1. A B
c3–a5 a6–b6 (Fall F_1) oder
Hc7–d7 (Fall F_2)!

Steht hinter einem oder mehreren angegebenen Zügen von B ein Ausrufezeichen, so sind die angegebenen Züge die einzigen für B, nach denen A nicht bereits mit einem geeigneten Folgezug die Partie vorzeitig gewinnt. Steht vor einem Ausrufezeichen mehr als ein Zug, so ist eine Fallunterscheidung erforderlich.
Fall F_1:
1. c3–a5 a6–b6
2. d2×d6 ? ? ?

A zieht seinen Stein vom Feld d2 nach Feld d6 und schlägt damit den gegnerischen Stein auf Feld d6. Drei Fragezeichen bedeuten, daß unabhängig davon, wie B zieht, A mit seinem Folgezug stets die Partie gewinnt.
Fall F_2:
1. c3–a5 Hc7–d7
2. e1–e6 ? ? ?

II. Endspiel
Ausgangssituation:
Kreisförmige Steine
Rote Steine: Hc1
Grüne Steine: b2
Quadratische Steine
Rote Steine: Ha7
Grüne Steine: –
Spieler A ist am Zuge und gewinnt.
Züge des Spielers ..
A B
1. Hc1–c6 ● ● ●!

Drei fette Punkte bedeuten, daß B mit diesem Zuge seinen Hauptstein nicht auf eine Angriffslinie eines gegnerischen Steines setzt (andernfalls würde A die Partie bereits mit einem geeigneten nächsten Zug gewinnen) und daß das Weiterspielen von A nicht von dem von B gewählten Zuge abhängt, also keine Fallunterscheidung nötig ist.
2. b2–b7 ● ● ●!

Da der Stein auf b7 durch den kreisförmigen Hauptstein gesichert ist, würde ein Schlagen des Steines auf b7 den Partieverlust für B mit dem nächsten Zug von A bedingen.
3. b7–b2 (b7 grün) ● ● ●!

Der Stein auf b2 kann durch den roten Hauptstein von B nicht geschlagen werden, weil keine rote Linie zum Felde b2 führt. Da ein vom Hauptstein verschiedener kreisförmiger Stein von der 7. Linie weggezogen wurde, setzt der Spieler A auf das Feld b7 einen grünen kreisförmigen Stein ein, weil vom Felde b2 nur grüne, also mehr grüne als rote Linien ausgehen.
4. b7–b6 ● ● ●!
5. b6–d4 H..–a5 (Fall F_1) oder
H..–a6 (Fall F_2) oder
H..–e1 (Fall F_3) oder
H..–e6 (Fall F_4) oder
H..–e7 (Fall F_5)!

Sofern der Spieler B einen vorzeitigen Partieverlust vermieden hat, steht sein Hauptstein nunmehr auf einem der Felder a5, a6, c1, e6 und e7.
Fall F_1:
5. b6–d4 H..–a5
6. Hc6–b7 ? ? ?

Fall F_2:
5. b6–d4 H..–a6
6. Hc6–c7 Ha6–a5!
7. Hc7–b7 ? ? ?

Fall F_3:
5. b6–d4 H..–e1
6. Hc6–d7 ? ? ?

Fall F_4:
5. b6–d4 H..–e6
6. Hc6–c7 He6–e1!
7. Hc7–d7 ? ? ?

Fall F_5:
5. b6–d4 H..–e7
6. Hc6–c1 He7–e6!
7. Hc1–d1 He6–e7!
8. b2–b6 ? ? ?

III. Endspiel
Ausgangssituation:
Kreisförmige Steine
Rote Steine: Hc1, c4
Grüne Steine: c5
Quadratische Steine
Rote Steine: Hc7, d7, a6, e6
Grüne Steine: d6, d4
Spieler A ist am Zuge und gewinnt mit dem 2. Zuge.
Welchen ersten Zug muß A wählen?
Züge des Spielers ...
A B
1. c5–b6 ? ? ?

W. Träger

Kann man mit Näherungswerten genau rechnen?

Teil 2

Jörg und Martin streiten sich über die Größe des Flächeninhalts ihres Sportplatzes. Sie beschließen, ihn ganz genau zu ermitteln. Dazu messen sie Länge und Breite des markierten rechteckigen Fußballfeldes mit einem Bandmaß: $a = 105{,}3\ m$ und $b = 58{,}6\ m$. Mit einem Taschenrechner berechnet nun Martin:

$$A = 105{,}3\ \mathrm{m} \cdot 58{,}6\ \mathrm{m} = 6\,170{,}58\ \mathrm{m}^2.$$

Beide sind sehr stolz über das genaue Ergebnis, das den Flächeninhalt auf Quadratdezimeter genau angibt.

▲1▲ Was meinst du dazu?

Trotz aller Sorgfalt sind die Ergebnisse von Messungen – also auch die von Jörg und Martin – stets mit einer gewissen Unsicherheit (Fehler) behaftet; es sind keine genauen, sondern Näherungswerte.

Wir wollen nun überlegen, wie man mit Näherungswerten rechnet, denn das haben Jörg und Martin nicht beachtet. Dazu betrachten wir wieder unser obiges Beispiel. Zunächst muß man die Genauigkeit der Meßwerte beschreiben:

Dazu gibt man an, wie stark der genaue Wert vom Meßwert abweichen kann. In unserem Beispiel ist eine Abweichung von $10\ \mathrm{cm} = 0{,}1\ \mathrm{m}$ beim Messen mit einem 20-m-Bandmaß über diese Entfernung durchaus möglich. Nun können wir die Meßwerte präziser angeben:

$a = (105{,}3 \pm 0{,}1)\ \mathrm{m}$ und

$b = (58{,}6 \pm 0{,}1)\ \mathrm{m}$ oder jeweils als Doppelungleichung geschrieben:

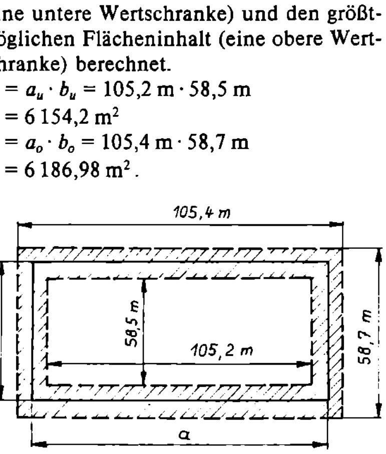
$105{,}2\ \mathrm{m} \leqq a \leqq 105{,}4\ \mathrm{m}$ und

$58{,}5\ \mathrm{m} \leqq b \leqq 58{,}7\ \mathrm{m}$.

Damit kann man auch die Genauigkeit des Flächeninhalts zahlenmäßig durch eine Doppelungleichung beschreiben, indem man den kleinstmöglichen Flächeninhalt (eine untere Wertschranke) und den größtmöglichen Flächeninhalt (eine obere Wertschranke) berechnet.

$$A_u = a_u \cdot b_u = 105{,}2\ \mathrm{m} \cdot 58{,}5\ \mathrm{m} = 6\,154{,}2\ \mathrm{m}^2$$

$$A_o = a_o \cdot b_o = 105{,}4\ \mathrm{m} \cdot 58{,}7\ \mathrm{m} = 6\,186{,}98\ \mathrm{m}^2.$$



Wir können also für den Flächeninhalt des Fußballfeldes lediglich ein Intervall angeben, in dem der wahre Wert liegt. Diesen Sachverhalt veranschaulicht auch das Bild. Der Flächeninhalt des Fußballfeldes kann auf Grund der Meßungenauigkeit bei den Seitenlängen zwischen rund $6\,154\ \mathrm{m}^2$ und $6\,187\ \mathrm{m}^2$ schwanken. (Beim Runden von Wertschranken rundet man untere Wertschranken stets ab, und obere Wertschranken immer auf.)

Eine mathematisch exakte Angabe des Flächeninhalts für diese Aufgabe ist:

$6\,154\ \mathrm{m}^2 \leqq A \leqq 6\,187\ \mathrm{m}^2$

oder $A = (6\,170{,}5 \pm 16{,}5)\ \mathrm{m}^2$.

Damit wird sichtbar, daß in diesem Beispiel eine auf Quadratdezimeter genaue Angabe eine zu große Genauigkeit vortäuscht und daher abzulehnen ist.

▲2▲ Berechne das Volumen einer Streichholzschachtel mit

$a = (5{,}3 \pm 0{,}05)\ \mathrm{cm}$,

$b = (3{,}7 \pm 0{,}05)\ \mathrm{cm}$,

$c = (1{,}5 \pm 0{,}05)\ \mathrm{cm}$.

Diese Methode, nach der man mit Näherungswerten mathematisch exakt rechnen kann, heißt Wertschrankenmethode. Ihr Wesen besteht darin, eine untere und eine obere Wertschranke des Ergebnisses unter Berücksichtigung der Wertschranken der gegebenen Näherungswerte zu berechnen. Wie man die unteren bzw. oberen Wertschranken des Ergebnisses berechnet, hängt vom zu berechnenden Term ab.

Beispiel:

Ines fährt mit einem D-Zug und schaut aus dem Fenster. Dabei fällt ihr auf, daß „Kilometersteine“ in Abständen von 200 m entlang der Eisenbahnstrecke stehen. Sie kommt auf die Idee, die Geschwindigkeit des Zuges zu berechnen und mißt die Zeit für die Fahrt von Kilometerstein zu Kilometerstein (8 s).

Weg und Zeit sind offenbar Näherungswerte, und Ines gibt sie folgendermaßen an:

$s = (200 \pm 1)\ \mathrm{m}$ und $t = (8 \pm 1)\ \mathrm{s}$.

Bei der Wertschrankenberechnung für die Geschwindigkeit muß man beachten, wann ein Quotient am kleinsten bzw. am größten ist.

$$v_u = \frac{s_u}{t_o} = \frac{199\ \mathrm{m}}{9\ \mathrm{s}} = 22{,}1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 79{,}6\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

▲3▲ Berechne die obere Wertschranke v_o und gib die Geschwindigkeit des D-Zuges mit Hilfe einer Ungleichung an!

▲4▲ Zur Berechnung der Dicke eines Kreisringes werden die Radien des äußeren und des inneren Kreises gemessen.

$r_2 = (15{,}0 \pm 0{,}05)\ \mathrm{cm}$ und

$r_1 = (10{,}3 \pm 0{,}05)\ \mathrm{cm}$.

Welche Dicke hat der Kreisring?

Wir haben bis hierher festgestellt:

- Wenn Näherungswerte in eine Rechnung eingehen, so muß man das bei der Rechnung und bei der Ergebnisangabe berücksichtigen.
- Eine Möglichkeit, die Genauigkeit von Ergebnissen beim Rechnen mit Näherungswerten zu ermitteln, bietet die Wertschrankenmethode.

In der Praxis wird nicht immer bei jedem Näherungswert die Abweichung mit angegeben, sondern in vielen Fällen gilt die Vereinbarung: Werden zu einem Näherungswert keine Wertschranken mitgeteilt, so nimmt man alle gegebenen Ziffern des Näherungswertes als zuverlässig an, d. h. die Abweichung beträgt höchstens eine halbe Einheit des Stellenwertes der letzten mitgeteilten Ziffer.

Beispiel:

$s_1 = 17\ \mathrm{m}$, $s_2 = 17{,}0\ \mathrm{m}$

(s_1, s_2 Näherungswerte)

Stellenwert der letzten angegebenen Ziffer von s_1 ist Einer, also

$$s_1 = \left(17 \pm \frac{1}{2} \cdot 1\right)\mathrm{m},$$

d. h. $16{,}5\ \mathrm{m} \leqq s_1 \leqq 17{,}5\ \mathrm{m}$

Stellenwert der letzten angegebenen Ziffer von s_2 ist Zehntel, also

$$s_2 = \left(17{,}0 \pm \frac{1}{2} \cdot 0{,}1\right)\mathrm{m},$$

d. h. $16{,}95\ \mathrm{m} \leqq s_2 \leqq 17{,}05\ \mathrm{m}$.

▲5▲ Gegeben sind die Zahlen $a = 88{,}7$ und $b = 32$.

(1) Berechne Summe, Differenz, Produkt und Quotient von a und b unter der Voraussetzung, daß diese Werte genau sind!

(2) Berechne die Wertschranken dafür, wenn a und b Näherungswerte mit zuverlässigen Ziffern sind!

Die Wertschrankenmethode ist für die alltägliche Praxis des Rechnens mit Näherungswerten im allgemeinen zu aufwendig, denn jede Rechnung muß zweimal ausgeführt werden. Daher hat man „Faustregeln“ für das Rechnen mit Näherungswerten entwickelt.

Beispiel:

Frank fährt in den Ferien mit dem Fahrrad von Halle zu seiner Cousine Anja nach Karl-Marx-Stadt. Bis zum Ortsausgangsschild von Halle legt er 5,7 km zurück. Diese Entfernung wurde mit Hilfe des Kilometerzählers am Fahrrad ermittelt. Am Ortsausgangsschild von Halle findet er die Angabe: Leipzig 32 km. Die Entfernung von Leipzig nach Karl-Marx-Stadt ermittelt Frank mit Hilfe einer Karte (80 km).

Addiert man einfach die Kilometerangaben, so erhält man 117,7 km.

Aus unseren bisherigen Überlegungen wissen wir allerdings, daß dieses Resultat mit Sicherheit eine zu große Genauigkeit vortäuscht.

Um keine untere und keine obere Wertschranke berechnen zu müssen, gehen wir einen anderen Weg. Wir schreiben die Summanden untereinander und kennzeichnen „alle“ Stellen, die uns nicht ganz sicher erscheinen. Zum Beispiel versehen wir auch die Einerstelle von 80 km (Entfernung, die mit Hilfe der Karte ermittelt wurde) mit einem Fragezeichen. Also gilt:

$$\begin{array}{r} 5{,}7\ \text{km} \\ 32{,}?\ \text{km} \\ \underline{8?{,}?\ \text{km}} \\ 117{,}7\ \text{km} \\ ?\ ? \end{array}$$

Ausgehend von diesen Überlegungen ist ein Runden des Resultats 117,7 km auf Zehner sinnvoll.
Auf diese Weise haben wir uns die Regel zur Addition bzw. Subtraktion von Näherungswerten, die im Mathematiklehrbuch für die Klasse 6 formuliert ist, plausibel gemacht.

Regel 1:
Bei Addition und Subtraktion von Näherungswerten
- denjenigen Näherungswert heraussuchen, bei dem die letzte zuverlässige Ziffer am weitesten links steht!
- Ergebnis auf diese Stelle runden!

Eine entsprechende Regel gibt es auch für die „Punktrechnung“.

Regel 2:
Bei Multiplikation und Division
- Näherungswert mit der geringsten Anzahl zuverlässiger Ziffern heraussuchen!
- Ergebnis auf diese Zahl von Ziffern runden!

▲6▲ Berechne Summe, Differenz, Produkt und Quotient für die Näherungswerte $a = 88{,}7$ und $b = 32$ und wende dabei die Regel 1 bzw. Regel 2 an! Vergleiche mit den Ergebnissen von Aufgabe 5!

Diese Faustregeln erleichtern uns das Rechnen mit Näherungswerten, da wir nun nicht jedes Mal zwei Rechnungen durchführen müssen. Sie sichern aber nicht, daß das so erhaltene Resultat nur zuverlässige Ziffern enthält. Es wird lediglich erreicht, daß keine völlig unsinnige Genauigkeit beim Rechnen mit Näherungswerten vorgetäuscht wird.
Jörg und Martin hätten also ihr erstes Ergebnis entsprechend Regel 2 auf 3 Ziffern runden können. Das Resultat 6 170 m² ist ein Näherungswert, der bezogen auf die Aufgabenstellung und die gegebenen Näherungswerte eine sinnvolle Genauigkeit besitzt.

L. Flade/M. Pruzina

Scharf nachgedacht!

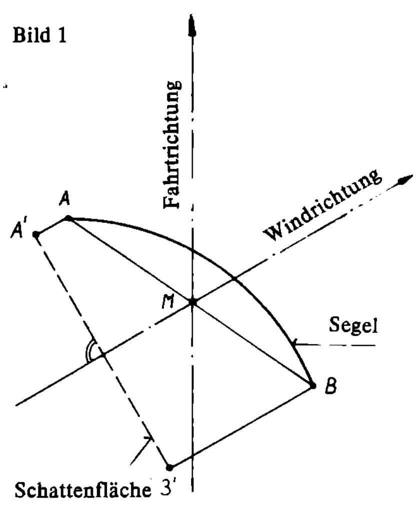
Es gingen zwei Väter und zwei Söhne übers Feld und fanden drei Äpfel und teilten sie so, daß jeder einen ganzen erhielt. Wie war das möglich?

aus: O. Spittel „Kleines Rätselbuch für Kinder“, Der Kinderbuchverlag Berlin

Eissegeln

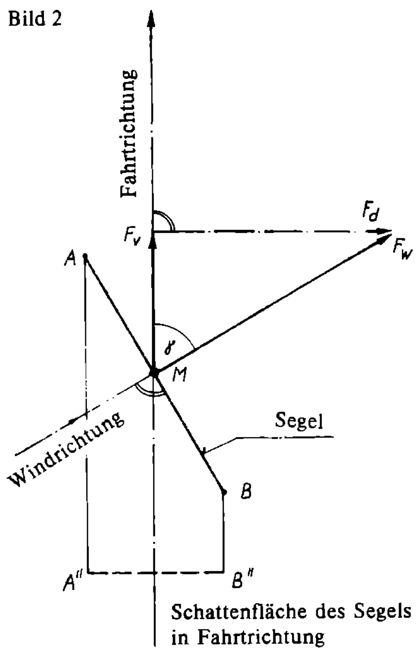
Es wird immer wieder berichtet, daß die Freunde des Eissegelns mit ihren schnellen Untersätzen Geschwindigkeiten bis zu $120\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ erreichen.
Wie ist es zu erklären, daß solche Geschwindigkeiten erreicht werden, wo doch die in solchen Fällen vorhandene Windgeschwindigkeit mit Sicherheit wesentlich geringer sein müßte?
(Beachte, daß $120\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 33{,}33\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ist; und das ist die Geschwindigkeit eines Orkanes. Es ist aber absolut nicht anzunehmen, daß bei derartigen Windgeschwindigkeiten noch gesegelt werden kann.) Die Erklärung ist verhältnismäßig einfach zu finden, wenn man die Kräfte, welche der Wind an dem Segel hervorruft, untersucht.
Die Bilder 1 und 2 sollen das für den allgemeinen Fall veranschaulichen. In Bild 1 ist ein gewölbtes Segel in einer beliebigen Stellung zur Wind- und zur Fahrtrichtung dargestellt. Das Segel soll als starr (z. B. aus Aluminium – wie bei einem japanischen Versuchssegelschiff) und um den Mastpunkt M beliebig drehbar angenommen werden. Für den die Vortriebskraft (zunächst in Windrichtung) erzeugenden „Staudruck“ ist aber nicht die reale Segelfläche sondern die „Schattenfläche“ des Segels maßgebend. Diese ergibt sich aus der senkrechten Projektion der realen Segelfläche auf die senkrecht zur Windrichtung stehende Projektionsebene. (In Bild 1 gestrichelt dargestellt.)
Die Wölbung des Segels spielt aber ebenfalls eine wichtige Rolle, weil die Form

Bild 1



eines in einer Strömung (ganz gleich ob Luft- oder Wasserströmung) befindlichen Körpers einen wesentlichen Einfluß auf den Widerstand, den der Körper der Strömung entgegensetzt, hat. Die Einflüsse dieses „Formwiderstandes“ sollen aber in den folgenden Betrachtungen unberücksichtigt bleiben.
Aus Bild 1 ist leicht zu ersehen, daß die Schattenfläche dann am größten ist, wenn das reale Segel rechtwinklig zur Windrichtung steht und damit die Entfernung $A'B' = AB$ ist.
Die nachstehenden Betrachtungen beziehen sich also ausschließlich auf die Schattenfläche des Segels. Diese soll aber mit „Segel“ bezeichnet werden.

Bild 2



In Bild 2 bezeichnen:
F_w = Kraft aus dem Staudruck des Windes
F_v = Vortriebskraft in Fahrtrichtung
F_d = Komponente aus F_w rechtwinklig zur Fahrtrichtung, die von den Kufen des Eisseglers als Seitenkraft aufgenommen werden muß, um ein Driften des Seglers zu verhindern. (Man stelle sich den Segler in Schienen geführt vor. Dann müssen die Schienen diese Komponente aufnehmen.)

Die Vortriebskraft F_v erzeugt also eine Beschleunigung des Seglers in Fahrtrichtung, und es ist leicht einzusehen, daß diese Beschleunigung im gleichen Maße abnehmen wird, wie die Geschwindigkeit des Seglers steigt, weil durch die zunehmende Geschwindigkeit ein zunehmender Gegenwind entsteht, der seinerseits wieder eine aus dem zugehörigen Staudruck resultierende „Gegenwindkraft“ erzeugt.
Die Geschwindigkeit des Seglers wird also solange zunehmen, solange eine Beschleunigung in Fahrtrichtung vorhanden ist. Und das ist solange der Fall, wie die Vortriebskraft F_v größer ist als die aus dem Gegenwind entstehende Gegenkraft F_g. Die

Größe der Kraft F_g ist eine unmittelbare Funktion aus der Geschwindigkeit in Fahrtrichtung und der gleichgerichteten Komponente der Windgeschwindigkeit. Gemäß Bild 2 gilt:

$$F_v = F_w \cdot \cos\gamma, \qquad (1)$$

weiterhin

$$F_v = a_v \cdot m$$

(wobei m = Masse des Seglers einschließlich der Reibungskraft zwischen Kufen und Fahrfläche).

Also: Vortriebsgeschwindigkeit in Fahrtrichtung

$$V_v = a_v \cdot t = \frac{F_v}{m} \cdot t.$$

Die in Fahrtrichtung wirkende Komponente V'_w der Windgeschwindigkeit ist

$$V'_w = V_w \cdot \cos\gamma.$$

Damit hat der auf das bewegte Segel bezogene „Gegenwind" die Größe

$$V_g = V_v - V'_w = V_v - V_w \cdot \cos\gamma.$$

Und damit ist die Gegenkraft

$$F_g = f_g \cdot A',$$

hierin f_g = Staudruck $\left(\frac{N}{m^2}\right)$

A' = Schattenfläche des Segels in Fahrtrichtung (m^2)

mit $A' = A \cdot \cos\gamma$

A = Schattenfläche des Segels in Windrichtung (m^2).

Der Staudruck ergibt sich aus

$$f_g = \frac{\varrho}{2} \cdot V_g^2$$

wobei ϱ = Dichte der Luft $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$.

Insgesamt also

$$F_g = A \cdot \cos\gamma \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot V_g^2. \qquad (2)$$

Die Vortriebsbeschleunigung wird dann gleich Null, wenn $F_g = F_v$ also (mit (1) und (2))

$$A \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot (V_v - V_w \cdot \cos\gamma)^2$$

$$\cdot \cos\gamma = F_w \cdot \cos\gamma \text{ und mit}$$

$F_w = A \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot V_w^2$ bleibt schließlich

$$V_v - V_w \cdot \cos\gamma = V_w.$$

Umgestellt ergibt sich

$$V_v = V_w(1 + \cos\gamma).$$

Weil $\cos\gamma$ maximal den Wert 1 haben kann, kann die maximale Vortriebsgeschwindigkeit

$$V_{v_{max}} = 2 \cdot V_w$$

sein.

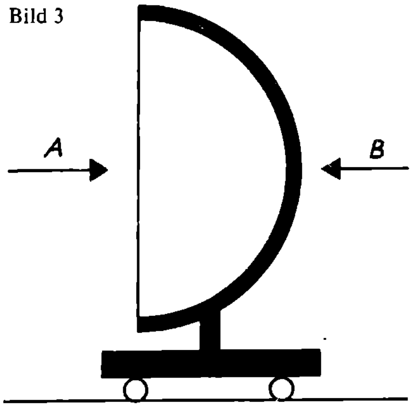
Das ist natürlich ein theoretischer Wert, der eine hundertprozentige Umsetzung der Windenergie in Beschleunigungsenergie und damit einen energetischen Gesamtwirkungsgrad von 1 ≙ 100% voraussetzt.

Dennoch zeigt sich, daß bei Windgeschwindigkeiten, die etwas größer als $50\,\frac{km}{h}$ sind, unter idealen Bedingungen und bei Fahrtrichtung genau in Windrichtung Geschwindigkeiten um $100\,\frac{km}{h}$ durchaus möglich sind. (Der Reibungskoeffizient von Stahl auf Eis kann mit 0,014 angenommen werden.)

Einige Betrachtungen zum Eissegeln aus der Grundlagenphysik

Wir stellen uns eine Versuchsanordnung vor, wie sie im Bild 3 dargestellt ist.

Bild 3



Auf einem Wagen sei eine halbe Hohlkugel angebracht. Der Wagen läßt sich (wie eine Modelleisenbahn-Lokomotive) mit einem Elektromotor antreiben. Die Motorleistung kann von außen geregelt werden. Der Versuchswagen befinde sich in einem Windkanal. Die Hohlkugel soll zum einen aus Richtung A und zum anderen aus Richtung B angeblasen werden.

Beim Anblasen in der Richtung A fängt die Hohlkugel den Luftstrom auf, und der Wagen will sich in Bewegung setzen. Wenn wir jetzt den E-Motor so anlaufen lassen, daß sich der Wagen mit diesem Antrieb dem Luftstrom entgegen bewegt, ist es vorstellbar, einen Zustand zu erreichen, bei dem der Wagen in Ruhe verharrt, sich also die Antriebskraft vom E-Motor mit der vom Luftstrom erzeugten Kraft im Gleichgewicht befindet.

Die Kraft, die notwendig ist, um die Hohlkugel in dem Luftstrom unbeweglich verharren zu lassen, wollen wir als Widerstandskraft F_r bezeichnen.

Wiederholen wir das Experiment mit einer Luftströmung in Richtung B, wird sich der Wagen ebenfalls in Bewegung setzen wollen. Wenn wir nun den Antrieb des Wagens wieder so einregeln, daß der Wagen in Ruhe bleibt und die elektrische Leistungsaufnahme mit der des vorhergehenden Versuches vergleichen, werden wir feststellen, daß bei gleicher Strömungsgeschwindigkeit der Luft im ersten Versuch wesentlich mehr Leistung aufgenommen wurde als im zweiten.

Ihr werdet sagen: „Das ist ja ganz klar, denn bei der Richtung A staut sich die Luftströmung in der Hohlkugel, während sie bei Richtung B verhältnismäßig leicht um die Kugelform herum strömen kann." Das ist richtig.

Und wenn wir jetzt den Wagen mit der Hohlkugel in ruhender Luft fahren lassen, einmal in Richtung B und zum anderen in Richtung A, werden wir aus den gleichen Gründen wieder unterschiedliche Widerstandskräfte ermitteln.

Wir werden dabei auch feststellen, daß es gleichgültig ist ob die stillstehende Hohlkugel angeblasen oder ob sie in ruhender Luft bewegt wird. Also ist einzig und allein die Relativbewegung maßgebend. Die Größe der Widerstandskraft wird aber offensichtlich von der Form des von der Luft umströmten Körpers bestimmt. Deshalb bezeichnet man diese Widerstandskraft auch als „Formwiderstand".

Der Formwiderstand wird berechnet mit

$$F_r = c \cdot A \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot v^2. \qquad (N)$$

Hierin bedeuten:

c = formabhängige Widerstandszahl (sie ist der Literatur zu entnehmen)

A = Schattenfläche des angeströmten Körpers (m^2)

ϱ = Dichte der Luft $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$

v = Anblasegeschwindigkeit $\left(\frac{m}{s}\right)$.

Für die Hohlkugel unserer Versuche gelten folgende Widerstandszahlen:

- bei Anströmung in der Richtung A $c_a = 1{,}33$
- bei Anströmung in der Richtung B $c_b = 0{,}34$.

Wir führen jetzt ein drittes Experiment durch. Dabei setzen wir generell reibungsfreie Verhältnisse voraus.

Wir lassen jetzt die Hohlkugel wieder in Richtung A anblasen und beobachten, was mit unserem Wagen geschieht.

Die Kraft, die wir beim ersten Versuch brauchten, um den Wagen im Ruhezustand zu halten, wird jetzt den Wagen in der Strömungsrichtung beschleunigen. Diese Beschleunigung wird offenbar solange anhalten, wie die beschleunigende Kraft größer ist als die sich aus dem zunehmenden Gegenwind ergebende Gegenkraft. Die Beschleunigung wird also dann zum Stillstand kommen (oder Null werden), wenn $F_{ra} = F_{rb}$

oder $c_a \cdot A_a \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot v_a^2 = c_b \cdot A_b \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot v_b^2$.

Wegen $A_a = A_b$

vereinfacht sich die Gleichung zu

$c_a \cdot v_a^2 = c_b \cdot v_b^2$ und hieraus

$$v_b = \sqrt{\frac{c_a}{c_b}} \cdot v_a.$$

Mit den Zahlenwerten ergibt sich für unser spezielles Beispiel

$$v_b = \sqrt{\frac{1{,}33}{0{,}34}} \cdot v_a = 1{,}978 \cdot v_a.$$

Weil die Luftströmung mit v_a in Richtung A erfolgt, ist v_b gleich der Eigengeschwindigkeit unseres Wagens, bezogen auf seine Fahrebene. *A. Körner*

Schon gewußt?

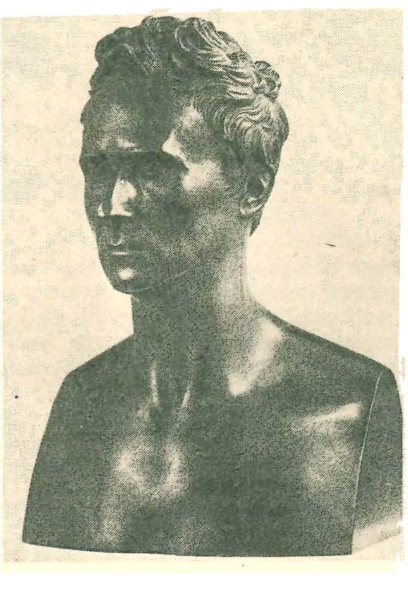
In der DDR werden täglich über 9 Millionen Exemplare von Tageszeitungen gedruckt. Hinzu kommen unter anderem 15 Zeitungen und Zeitschriften für Kinder und Jugendliche mit einer Gesamtauflage von über 7 Millionen Exemplaren. Die DDR steht nach dem statistischen Jahrbuch der UNESCO von 1987 mit 550 Tageszeitungen für je 1000 Einwohner international an 2. Stelle hinter Japan.

nach: „Volkswacht", Gera

Auf den Spuren von Mathematikern Lindenau, Bailly, Lalande

Viele von euch denken sicher zuerst an Skat, wenn es um die Kreisstadt Altenburg im Bezirk Leipzig geht. Bei einer Exkursion nach Altenburg wird daher oft auch das Spielkartenmuseum im Schloß besucht. In dieser Stadt gibt es jedoch ein weiteres Museum, dessen Besuch Kunstinteressierte auf keinen Fall versäumen sollten: das Staatliche Lindenau-Museum. Es besitzt die umfangreichste Sammlung frühitalienischer Tafelbilder außerhalb Italiens, bekannt sind weiterhin die (Gips-) Abgußsammlung von Plastiken des Altertums und der Antike sowie die Sammlung (originaler) griechischer und italienischer Keramik. Hier findet man auch drei etwa 60 cm hohe Büsten von Persönlichkeiten, die für Mathematiker von Interesse sind: Mit einer Bronzebüste des Künstlers David d'Angers wird des Gründers und Stifters dieses Museums, Bernhard von Lindenau, gedacht. Aus Lindenaus Besitz stammen auch zwei Terrakotta-Büsten, welche die französischen Astronomen J. S. Bailly und J. J. L. Lalande darstellen. Diese Büsten wurden von Jean Antoine Houdon geschaffen. Einige Fakten aus dem Leben der drei bemerkenswerten Männer sollen hier angeführt werden.

Der „große Sohn eines kleinen Landes" [1] Bernhard von Lindenau wurde am 11. 6. 1779 in Altenburg, das damals zum Herzogtum Sachsen-Gotha-Altenburg gehörte, geboren. Schon mit 15 Jahren begann er ein Studium an der Universität Leipzig. Seine Neigung galt der Astronomie und der Mathematik, aus dieser Zeit ist eine Arbeit von ihm über die „Dimension des Erdsphäroids" bekannt.

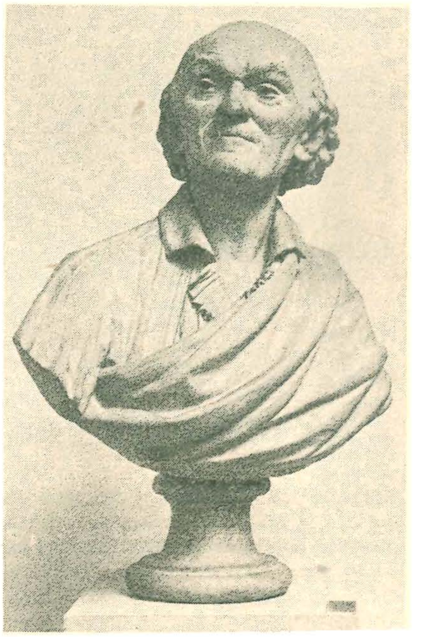


Lindenau wurde an die Sternwarte in Gotha berufen, deren Leiter er von 1808 bis 1817 war. Er verfaßte oder bearbeitete redaktionell Arbeiten zur Astronomie, er leitete die „Astronomische Correspondenz" und gab eine „Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften" heraus. Für seine Arbeiten und Tafelwerke erhielt er 1811 den Lalandeschen Preis (s. u.) der französischen Akademie (diese war von 1793 bis 1816 zum „Institute de France" zusammengefaßt). Von Lindenau stammen auch Beiträge zur Geschichte der Astronomie.

Reisen führten ihn 1812 nach Holland, Frankreich, Spanien und Italien. 1814 nahm er als Oberstleutnant am Freiheitskrieg teil. Ein ehrenvolles Angebot des Zaren Alexander, als für Vermessungsaufgaben verantwortlicher General nach Petersburg zu kommen, lehnte er ab. 1817 trat Bernhard von Lindenau wieder in den Staatsdienst. Zeitweilig war er Gesandter beim Bundestag in Frankfurt, dann ging er nach Dresden und wurde 1830 Kabinettsminister. Unter seiner Leitung wurde z. B. auch ein Schulgesetz verabschiedet! In Dresden übertrug man ihm die Oberaufsicht über die königlichen Museen und wissenschaftlichen Sammlungen, die er in ernsthafter Arbeit ordnete.

Unstimmigkeiten mit König Friedrich August II. führten 1843 zum Rücktritt Lindenaus. Nur im Frankfurter Parlament war er nach der bürgerlichen Revolution noch einmal kurz als Politiker tätig. Schließlich war B. v. Lindenau etwa 25 Jahre lang Kunstsammler. Er hat sehr bescheiden gelebt und sein Vermögen für den Ankauf von originalen Kunstwerken, Kopien und Büchern sowie für gemeinnützige Zwecke verwandt. Seine Sammlung vermachte er dem Herzogtum Sachsen-Altenburg, „um dem gemeinsamen Besten zu dienen" [1]. B. v. Lindenau starb am 21. 5. 1854 in Altenburg. Ein größeres (das jetzige) Museumsgebäude wurde erst 1876 fertiggestellt. Die beachtenswerte Kunstsammlung ist in unserer Republik ein Staatliches Museum, das den Namen seines Gründers trägt.

Astronom und Politiker war auch Jean Sylvain Bailly, der am 15. 9. 1736 in Paris geboren und dort am 11. 11. 1793 hingerichtet wurde. Durch seine Arbeiten zur Geschichte der Astronomie wurde er als Wissenschaftler bekannt und geschätzt. Von 1763 an war er Mitglied der Academie de sciences (Naturwissenschaften), 1783 nahm man ihn auch als Mitglied der Academie français (Geisteswissenschaften) auf. Bailly zählte am Anfang der Französischen Revolution zu den fortschrittlichen und sehr populären Politikern. Er wurde 1789 zum Präsidenten der Nationalversammlung gewählt. Im Lehrbuch Geschichte für Klasse 7 ist auf Seite 148 ein Ausschnitt des Gemäldes „Ballhausschwur" von J. L. David (um 1793 entstanden) abgebildet. Die zentrale, dunkel gekleidete Person, die auf einem Tisch steht und die rechte Hand zum Schwur erhebt, stellt mit großer Wahrscheinlichkeit J. S. Bailly dar.



Von 1789 bis 1791 war Bailly Bürgermeister von Paris. Politisch gehörte er zu den Anhängern einer konstitutionellen Monarchie. Als der König im Juli 1791 aus Paris zu fliehen versuchte und Demonstranten auf dem Pariser Marsfeld die Absetzung und Verurteilung des Königs forderten, rief Bailly das Kriegsrecht aus und ließ auf die Demonstranten schießen. Im November 1791 trat Bailly als Politiker zurück. Von der Jakobinerdiktatur wurde er 1793 wegen der Ereignisse auf dem Marsfeld unter dem Fallbeil hingerichtet.

Die dritte im Lindenau-Museum aufgestellte Büste zeigt Joseph Jerome Lefrancois de Lalande, geboren 1732 in Bourgen-Bresse, gestorben 1807 in Paris. Er war Jesuitenschüler und lernte bei dem Astronomen Delisle am College de France, dessen Lehrstuhl für Astronomie er 1762 erhielt. Von 1768 bis zu seinem Tode war er Direktor des Pariser Observatoriums. In älteren mathematikhistorischen Werken werden seine Untersuchungen über Mars und Mond sowie die von ihm dazu erstellten Tafeln gerühmt. Die Halleyschen Tafeln verlegte er neu, und er verfaßte eine „Geschichte des berühmten Planeten Halley". Erwähnen muß man auch eigene Beiträge zur Geschichte der Astronomie, mit denen er uns eine „Chronik der Wissenschaften seiner Zeit" hinterlassen hat, und seine Verdienste um die Verbreitung von Resultaten anderer Wissenschaftler, z. B. oblag ihm seit 1760 die Redaktion der „Conaissance des temps", und er redigierte die „Geschichte der Mathematik" von Montucla.

J. J. L. de Lalande war Mitglied der Akademie in Berlin.

Ich würde mich freuen, wenn euch der kleine Aufsatz zu einem Besuch des Lindenau-Museums anregen sollte. Das Museum ist täglich – außer montags – von 9.00 bis 12.30 Uhr und von 13.00 bis 17.00 Uhr geöffnet.

Die Redaktion der „alpha" wartet auf eure Entdeckungen zu „Spuren von Mathematikern" und möchte euch zum Schreiben ermutigen!

W. Schmidt

Literatur:

[1] Gabelentz/Scherf.
Das Staatliche Lindenau-Museum.
Geschichte und seine Sammlungen.
Altenburg 1967

Wir widmen diesen Beitrag dem 200. Jahrestag der Französischen Revolution, deren weltgeschichtliche Bedeutung in der Beseitigung der feudalen Produktionsverhältnisse und Einleitung der Periode des Aufstiegs und Sieges des Kapitalismus auf dem europäischen Kontinent bestand.

Automatische Einteilung von Achsen

Ich weiß aus Erfahrung, daß Schüler an voll graphikfähigen Computern (z. B. KC85/2, 3, 4) gern Funktionen grafisch darstellen. Die Programme dazu sind gar nicht so kompliziert, der Rechner kann auch umfangreiche Terme schnell berechnen und man hat nach kurzer Zeit eine Vorstellung vom Verlauf der Funktion. Problematisch ist oft die Einteilung der Achsen. Ich möchte mich dabei zunächst auf die x-Achse beschränken.

Wenn jemand für alle Funktionen den Definitionsbereich $[0, 10]$ betrachtet, dann kann er z. B. die Achse von 0 bis 10 gleichmäßig in Einerschritten teilen und sogar problemlos die Zahlen 0 bis 10 an die Achse schreiben (Bild 1).

Aber bei besseren Programmen kann man den gewünschten Ausschnitt aus dem Definitionsbereich frei wählen. Und dann sind wir mitten drin im Problem der Einteilung der Achse. Man kann natürlich völlig auf Zwischenwerte verzichten und nur Anfangswert und Endwert angeben (Bilder 2a, 3a). Das erschwert das Aufsuchen von Zwischenwerten. Manche teilen dann z. B. immer in 10 gleiche Teile (Bilder 2b, 3b). Das sieht zwar schön aus und erleichtert das Aufsuchen von Zwischenwerten, es entbindet einen trotzdem nicht von viel Rechnerei. Die Zwischenwerte liegen nämlich bei:

Bild 2b: 3,77; 4,14; 4,51; 4,88; ...,

Bild 3b: −1,7; −1,4; −1,1; −0,8; ....

Ich glaube, niemand käme auf die Idee, solch eine Einteilung zu verwenden, wenn er per Hand auf Millimeterpapier Graphen mit diesem Definitionsbereich zeichnen müßte.

Was wäre denn da sinnvoll? Für Bild 3 würde man 6 oder 12 gleichgroße Abschnitte wählen, die Abstände wären dann 0,5 oder 0,25 (Bilder 3c, d). Und bei Bild 2 würde man wahrscheinlich die Achse von 3 bis 8 in Einerschritten teilen. Denkbar wäre auch: von 3,25 bis 7,25 in Schritten von 0,25 oder von 3 bis 7,5 in Schritten von 0,5 (Bilder 2c, d, e). Auf keinen Fall ist hier sinnvoll, von 3,4 bis 7,1 eine gleichmäßige Teilung in gleichgroße Teile vorzunehmen. Wer aber so auf dem Computerschirm aufteilt, verschenkt Platz. Ich finde es am besten, wenn man von 3,4 bis 7,1 einteilt, aber an denselben Stellen wie bei den letzten Bildern (das heißt also, bei sinnvollen Werten!) (Bilder 2f, g, h).

Wie macht man so etwas mit einem Programm? Das Problem liegt darin, eine genaue Handlungsanweisung zu entwickeln, denn nur die kann in ein Computerprogramm umgesetzt werden. Die erste Frage wäre, was sinnvolle Achseneinteilungen sind. Sicherlich solche Schrittweiten wie 1, 10, 0,1, ..., 2, 20, 0,2, ..., 2,5, 25, 0,25, ..., 5, 50, 0,5, ... Also legen wir fest: als Schritte für die Achseneinteilung kommen nur $1 \cdot 10^m$, $2 \cdot 10^m$, $2{,}5 \cdot 10^m$ und $5 \cdot 10^m$ mit ganzzahligem m in Frage. Die nächste Frage wäre, welche dieser Zahlen bei gegebenen Intervallenden a und b ($a < b$) zu wählen zweckmäßig ist. Es dürfen ja weder zuviel noch zuwenig Zwischenwerte sein. Man kann auch nicht festlegen, daß man genau sieben Teilintervalle nimmt. Das würde nämlich bei vielen Paaren (a, b) nicht möglich sein, wenn wir nur die oben festgelegten Schritte zulassen. Es geht aber so:

Wir legen z. B. fest, daß die maximale Schrittlänge höchstens ein Viertel der Intervallänge ist (und wählen diesen oder den nächsten kleineren Wert von den zugelassenen als Schrittweite). Damit wären wir mit der Handlungsanweisung fertig, aber das Problem besteht nun darin, dem Computer diesen letzten Schritt beizubringen. Wie kommt man denn von 1001 zu 1000, von 0,38 zu 0,25, von 73 zu 50 oder von 0,00248 zu 0,002? Wir bemerken, daß wir die Ziffern der Zahlen betrachten müssen und dort etwas verändern, die Größenordnung der Zahlen aber beibehalten. Dazu nehmen wir am besten die Exponentialdarstellung der Zahlen!

$1{,}001 \cdot 10^3$ wird zu $1 \cdot 10^3$,
$3{,}8 \cdot 10^{-1}$ wird zu $2{,}5 \cdot 10^{-1}$,
$7{,}3 \cdot 10^1$ wird zu $5 \cdot 10^1$ und
$2{,}48 \cdot 10^{-3}$ wird zu $2 \cdot 10^{-3}$.

Betrachten wir an dieser Stelle unseren Weg! Wir haben ein „großes" Anfangsproblem gehabt. Wir haben es gelöst, indem wir es zerlegt haben und immer ein anderes „kleineres" Problem übrig blieb. Dieser Prozeß setzt sich fort, bis wir einmal das Restproblem vollständig lösen!

Aber zurück! Wenn wir erst einmal eine Zahl in Exponentialdarstellung haben, bei der der Faktor f vor der Zehnerpotenz die Bedingung $1 \leqq f < 10$ erfüllt, brauchen wir f nur beizubehalten oder bis zur nächstkleineren Zahl 1, 2, 2,5 oder 5 zu verkleinern. Wie bekommen wir aber diese Zerlegung in f und eine Zehnerpotenz?

Der Logarithmus zur Basis 10 leistet das Gewünschte! Es ist nämlich:

$\lg 1001 = 3{,}00043 = 3 + 0{,}00043$,
$\lg 0{,}38 = -0{,}42022 = -1 + 0{,}57978$,
$\lg 73 = 1{,}86332 = 1 + 0{,}86332$ und
$\lg 0{,}00248 = -2{,}6055 = -3 + 0{,}39445$.

Nach Zerlegung in den ganzzahligen und gebrochenen Anteil (dieser ist nichtnegativ und kleiner als 1) ist letzterer für die Ziffernfolge verantwortlich, über die Potenz zur Basis 10 kann er in den gewünschten Faktor f umgerechnet werden.

Nun sind wir also fertig! Aber halt! Man findet zwar für die Abtrennung des ganzzahligen Anteils eine nützliche Funktion im Computer (INT), aber es gibt meistens keine für den dekadischen Logarithmus. Dafür gibt es bei den zu Anfang genannten

1.

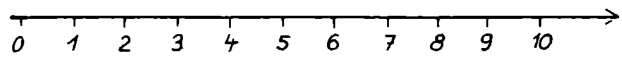


Bild 1

2.

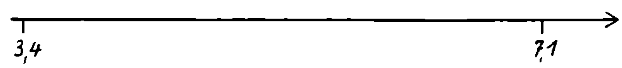


Bild 2a

3.

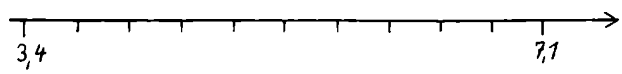


Bild 2b

4.

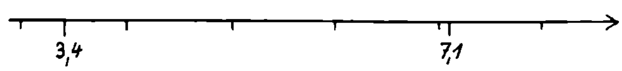


Bild 2c

5.

Bild 2d

6.

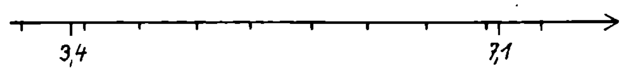


Bild 2e

7.

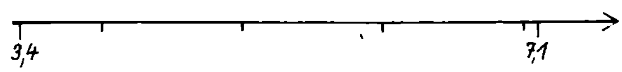


Bild 2f

8.

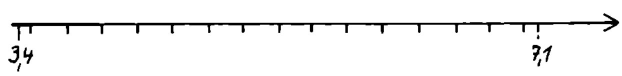


Bild 2g

9.

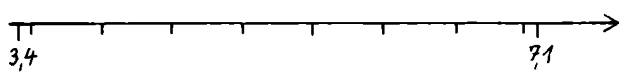


Bild 2h

10.

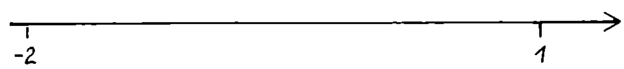


Bild 3a

11.

Bild 3b

12.

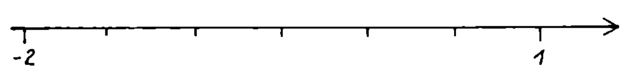


Bild 3c

13.

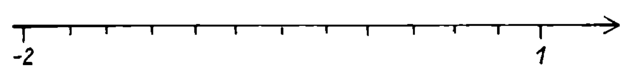
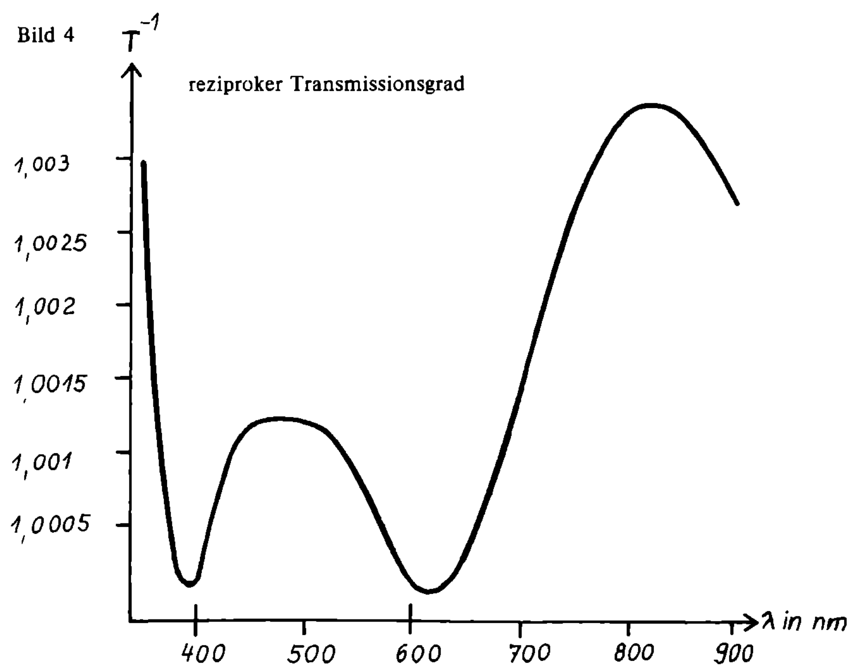


Bild 3d

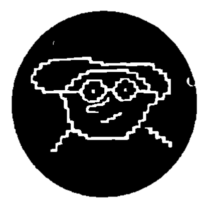
Bild 4



Minimum: 1.000044215
Maximum: 1.0034170565
Graph von 350 bis 900 nm

Rechnertypen den natürlichen Logarithmus (LN) (zur Basis e, die uns aber nicht konkret interessiert). Man findet aber auch noch irgendwo die Formel $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$, mit deren Hilfe man dann $\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10}$ bekommt. Nun sind wir also wirklich am Ziel.

Das folgende kleine BASIC-Programm ermittelt nach Eingabe von A, B und N (Intervallgrenzen und die Zahl, durch die die Intervallänge geteilt wird, um die maximale Größe der Schrittlänge zu erhalten) alle Werte, bei denen die Achse einen Teilungsstrich bekommt. Das Umsetzen dieser Werte in Graphik, das eventuelle Beschriften der Achse und ein Teilen der y-Achse (von wo bis wo eigentlich??) sei dem Hobbyprogrammierer überlassen. Es treten auch noch numerische Störeffekte auf, die zum Teil behoben werden können (dazu dient z. B. FAK). Aber probiert alles weitere selbst aus. Die Grundidee habe ich euch gegeben. Bild 4 zeigt eine Graphik, die mit meiner Arbeit zusammenhängt. Dafür habe ich auch diesen Algorithmus entwickelt.



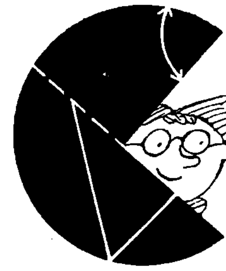
```
100 INPUT"A=";A
110 INPUT"B=";B
120 INPUT"N=";N
130 FAK=1.000001
140 D=(B-A)/N
150 L=LN(D)/LN(10)
160 E=INT(L)
170 M=10∧(L-E)
180 IF M<2 THEN M=1:GOTO 220
190 IF M<2.5 THEN M=2:GOTO 220
200 IF M<5 THEN M=2.5:GOTO 220
210 M=5
220 D=M*10∧E
230 W=(INT(A/D)-1)*D
240 W=W+D:IF W*FAK<A THEN
    240
250 IF W>FAK*B THEN 270
260 PRINT W:W=W+D:GOTO 250
270 END
```

Es bedeuten:

D: maximale Schrittlänge (Zeile 140), wirkliche Schrittlänge (Zeile 220),
L: dekadischer Logarithmus von D,
E: ganzzahliger Anteil von L,
M: der im Text mit f bezeichnete Faktor vor (Zeile 170) und nach (Zeile 220) der Änderung,
W: nimmt nacheinander Werte an, für die eventuell die Achse geteilt wird.

J. Helbig

In freien Stunden · alpha-heiter



Sechs Magische Quadrate auf einmal!

In ein Magisches Quadrat, in dessen Innern sich weitere fünf Magische Quadrate befinden – nämlich ein Quadrat aus 8×8 Feldern und vier Quadrate aus 4×4 Feldern – sind die Zahlen 1 bis 100 eingetragen gewesen.
Für jedes dieser Quadrate gilt: In jeder Zeile (Waagerechten), jeder Spalte (Senkrechten) und jeder der beiden Diagonalen ergibt sich die gleiche Summe (magische Konstante).
In der Mitte der untersten Zeile ist die Jahreszahl 1989 und darüber die Zahl 49 zu erkennen.

80	92	90	a	82	12	b	16	13	91
26	1	99	8	94	27	73	34	68	75
25	96	c	d	3	70	e	f	29	76
24	98	g	h	5	72	i	j	31	77
18	7	93	2	100	33	67	28	74	83
84	35	65	42	k	l	m	50	52	17
81	62	40	n	o	p	q	55	45	20
78	64	38	r	s	t	u	53	47	23
79	41	59	v	w	49	x	44	58	22
10	9	11	y	19	89	z	85	88	21

Es sind nun die fehlenden Zahlen *a* bis *z* einzutragen! Da das Vorhandensein dieser sechs Magischen Quadrate vorausgesetzt ist, ist die Lösung nicht allzuschwer zu finden.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz (gestaltet nach einer Zusendung von T. Bakos, Budapest, 1984)

Kochprobe

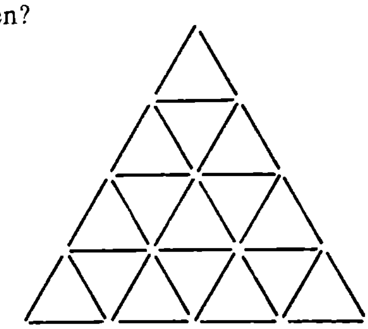
Isaac Newton (geb. 1643) war oft sehr zerstreut. Eines Tages wurde seine Haushälterin in dem Augenblick abberufen, als sie ihrem Herrn ein Ei kochen sollte. Sie stellte den Gelehrten also selbst an den Herd, gab ihm in die Rechte das Ei, in die Linke eine Sanduhr und schärfte ihm ein, sobald das Wasser koche, das Ei in den Topf zu legen und eine bestimmte Zeit darin zu kochen. Dann könne er es herausnehmen.
Nach einer halben Stunde kehrte sie in die Küche zurück und fand den Gelehrten tief in Gedanken versunken am Herd stehend, die aufsteigenden Dämpfe des kochenden Wassers beobachtend. Das Ei hielt er nach wie vor in der Rechten, aber die Uhr lag im brodelnden Wasser.

aus: Lingmann/Schmiedel: Anekdoten, Episoden, Lebensweisheiten, VEB Fachbuchverlag, Leipzig

Hölzchenspiel

Mit 30 Hölzchen lassen sich 16 kongruente gleichseitige Dreiecke legen. Wie kann man 16 kongruente gleichseitige Dreiecke bereits mit 29 Hölzchen legen?

W. Träger, Döbeln



Kryptarithmetik

In den nachstehenden Kryptogrammen sind die Sternchen so durch Ziffern zu ersetzen, daß man richtig gelöste Multiplikationsaufgaben erhält.

```
a)  5 1 6 2 · * * *        b)  4 * 0 * · * * *
    1 5 4 8 6                  8 6 * 6
        * * * 2                1 7 * * *
        * * * 2 *                * * * * 7
    * * * * * * 4              * * * * * * *
```

Kerstin Liebschner, Karl-Marx-Stadt

Der Satz des Thales

Ein Kreisdurchmesserendpunkt meint,
daß seine Lage nutzlos scheint.
Dies ihn verdrießt. Drum er sich rafft
zum Ausbruch auf auf Wanderschaft.
Er geht in froher Art und Weise
entlang des Umfangs von dem Kreise.

Und weil es sich beim Wandern schickt,
daß man in die Umgebung blickt,
bemerkt er, seine Heimatstatt,
sieht stets er unter 90 Grad!
„Guck an“, sagt er ganz unbekümmert
und sich des Thalessatz' erinnert...

K. Näther, Leipzig

Mathe – aktuell

a) Zerlegt die beiden abgebildeten gleichen Figuren auf verschiedene Weise so in 6 kongruente Teile, daß die Summe der sich in jedem solchen Teil befindlichen Zahlen 40 beträgt!
b) Addiert man den zweiten, vierten und achten Teil einer bestimmten Zahl, so ist das Ergebnis um 5 kleiner als die Zahl selbst. Wie lautet diese Zahl?

	1	9	8	9	
		6	7		
1	9	8	8	3	9
8	9	7	5	3	8
7	9	8	6	7	7
6	9	5	5	7	6
		8	9		
	1	9	4	9	

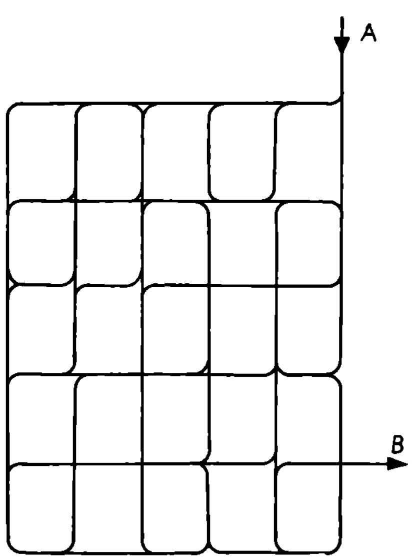
	1	9	8	9	
		6	7		
1	9	8	8	3	9
8	9	7	5	3	8
7	9	8	6	7	7
6	9	5	5	7	6
		8	9		
	1	9	4	9	

R. Mildner, Leipzig

Traumhafter Gleisplan

Jens ist Mitglied einer AG „Modelleisenbahn“ und knobelt mit seinen Freunden am Gleisplan der vorgesehenen neuen Gemeinschaftsanlage. Eines Nachts träumt er von einem „ganz verrückten“ Gleisplan und hat dabei die Aufgabe, einen Zug von A nach B zu bringen, ohne dabei einen Streckenabschnitt mehrmals zu befahren. Welchen Weg muß er nehmen?

A. Körner, Leipzig



Bildungsgesetz gesucht

1	1
2	3
5	8
13	21
34	55
89	144
...	...

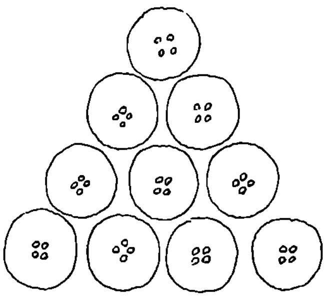
Alle Zahlen dieser beiden Spalten außer den zwei Zahlen der ersten Zeile sind nach fester Vorschrift gebildet. Wie lautet diese? Wie heißen die beiden Zahlen der 7. Zeile?

W. Träger, Döbeln

Auf den Kopf gestellt

Lege drei der zehn Knöpfe so um, daß die Spitze der Pyramide nach unten zeigt.

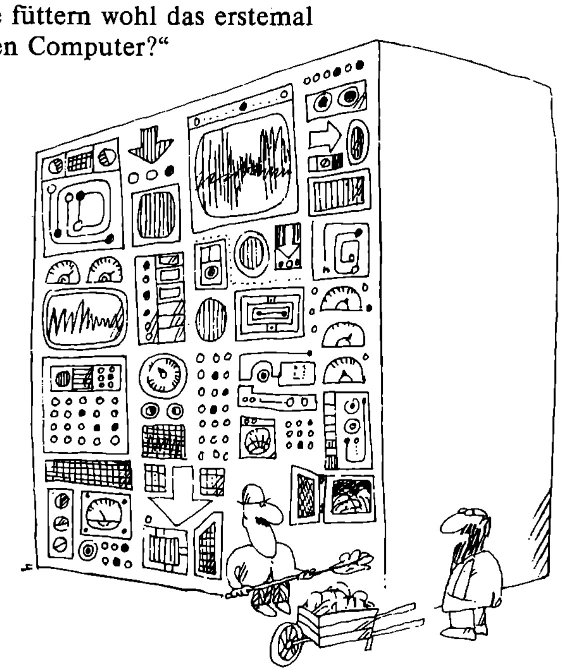
eingesandt von Yvonne Stopfel, Geisa



Dirichlet, der Nachfolger von Gauß in Göttingen war und dessen Hauptleistungen auf dem Gebiet der Zahlentheorie und Analysis lagen, galt als hochgradig schreibfaul.
Als glücklicher Vater seines neugeborenen Kindes telegrafierte er seinem Schwiegervater kurz und bündig: „1 + 1 = 3.“

nach Lingmann/Schmiedel: „Anekdoten, Episoden, Lebensweisheiten“, VEB Fachbuchverlag Leipzig

„Sie füttern wohl das erstemal einen Computer?“



XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Erfurt, 8. bis 12. Mai 1989

Olympiadeklasse 10

281041 Zeigen Sie, daß es genau eine natürliche Zahl n gibt, mit der

$$2^8 + 2^{11} + 2^n$$

eine Quadratzahl ist!

281042 Zeigen Sie, daß es ein Paar von Funktionen f, g gibt, für das folgende Aussagen gelten:

(1) Die Funktionen f und g sind für alle reellen Zahlen x definiert.

(2) Es ist $f(0) = 7$.

(3) Für jedes reelle x gilt

$$\frac{g(x) \cdot f(x+1)}{f(x)} = g(2x) + 1 .$$

Von den nachstehenden Aufgaben 281043 A und 281043 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

281043 A Man denke sich die natürlichen Zahlen, beginnend mit 41, so spiralförmig angeordnet, wie aus dem Bild als Anfang einer solchen Anordnung zu erkennen ist: Beweisen Sie, daß (bei dieser Anordnung) in der Diagonale, von der im Bild die Zahlen 61, 47, 41, 43, 53 auftreten, mindestens 30 Primzahlen stehen!

$$\begin{tikzcd}
 & 50 \arrow[r] & 51 \arrow[r] & 52 \arrow[r] & 53 \arrow[d] \\
 & 49 \arrow[u] & 42 \arrow[r] & 43 \arrow[d] & 54 \arrow[d] \\
\vdots & 48 \arrow[u] & 41 \arrow[u] & 44 \arrow[d] & 55 \arrow[d] \\
62 \arrow[u] & 47 \arrow[u] & 46 \arrow[l] & 45 \arrow[l] & 56 \arrow[d] \\
61 \arrow[u] & 60 \arrow[l] & 59 \arrow[l] & 58 \arrow[l] & 57 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

281043 B Über 13 sonst beliebige Punkte in einer Ebene werde vorausgesetzt, daß sich unter je drei dieser 13 Punkte stets zwei befinden, deren Abstand voneinander kleiner als 1 cm ist.

a) Man beweise, daß aus dieser Voraussetzung stets folgt: Es gibt einen Kreis vom Radius 1 cm, dessen Inneres sieben der 13 Punkte enthält.

b) Man untersuche, ob aus dieser Voraussetzung stets folgt: Es gibt einen Kreis vom Radius 1 cm, dessen Inneres acht der 13 Punkte enthält.

281044 Beweisen Sie, daß für keine reelle Zahl x die Gleichung

$$x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 24x + 40 = 0$$

gilt!

281045 In einer Ebene seien drei zueinander parallele Geraden g, h, k so gegeben, daß g und h voneinander den Abstand 8 cm haben und daß k im Abstand 5 cm von g in dem Streifen zwischen g und h verläuft. Man untersuche, ob ein gleichseitiges Dreieck ABC existiert, für das A auf g, B auf h und C auf k liegt.

Falls kein solches Dreieck existiert, so beweise man diese Aussage. Falls ein solches Dreieck existiert, so gebe man an, wie die Seitenlänge eines solchen Dreiecks rechnerisch oder konstruktiv erhalten werden kann, und beweise, daß ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der nach dieser Angabe erhaltenen Seitenlänge die geforderten Bedingungen (A auf g, B auf h, C auf k) erfüllt.

281046 Beweisen Sie, daß zu jedem Quadrupel (a, b, c, d) positiver reeller Zahlen, für das

$$a + b + c = \frac{d}{2}\sqrt{3}$$

gilt, ein Tripel (x, y, z) reeller Zahlen existiert, das die drei Gleichungen

$$\sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = d,$$
$$\sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2} = d,$$
$$\sqrt{x^2 - c^2} + \sqrt{y^2 - c^2} = d \text{ erfüllt!}$$

Olympiadeklassen 11/12

281241 Man ermittle alle reellen Lösungen (x, y, z) des Gleichungssystems

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$
$$x + 2y + 3z = \sqrt{14} .$$

281242 Man untersuche, ob es zu jeder natürlichen Zahl $n \geqq 1$ jeweils eine Funktion f gibt, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen x definiert.

(2) Es gibt eine reelle Zahl x mit $f(x) \neq 0$.

(3) Wenn man Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$ durch die Festsetzungen definiert, für alle reellen x gelte
$f_1(x) = f(x)$ sowie
$f_{k+1}(x) = f(f_k(x))$
für $k = 1, \ldots, n$, dann
gilt für alle reellen x die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_{n+1}(x) .$$

281243 Man ermittle alle diejenigen konvexen Vielecke $P_1P_2\ldots P_n$, in deren Inneren ein Punkt X existiert, für den

$$\overline{P_1X}^2 + \overline{P_2X}^2 + \ldots + \overline{P_nX}^2$$

gleich dem doppelten Flächeninhalt von $P_1P_2\ldots P_n$ ist.

281244 Um einen Tresor zu öffnen, ist eine unbekannte dreistellige Zahlenkombination (a_1, a_2, a_3) einzustellen, wobei die drei Zahlen unabhängig voneinander eingestellt werden können und für jede der drei Zahlen genau 8 Werte möglich sind. Infolge eines Defektes öffnet sich aber der Tresor bereits immer genau dann, wenn eine eingestellte Kombination (k_1, k_2, k_3) mindestens zwei der drei Bedingungen $k_i = a_i$ $(i = 1, 2, 3)$ erfüllt.

Man ermittle die kleinste Zahl N, für die es N Kombinationen gibt, bei deren Durchprobieren der Tresor in jedem Fall (d. h. für jede unbekannte Kombination (a_1, a_2, a_3)) sich öffnen muß.

281245 Für ein Tetraeder $ABCD$ werde vorausgesetzt, daß der Mittelpunkt M der Umkugel des Tetraeders im Innern des Tetraeders liegt. Die Verbindungsgerade von M mit jeweils einer Tetraederecke A, B, C bzw. D schneide die Seitenfläche des Tetraeders, die der betreffenden Ecke gegenüberliegt, in A', B', C' bzw. D'. Der Radius der Umkugel sei r.

Beweisen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen stets

$$\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} + \overline{DD'} \geqq \frac{16}{3} r$$

folgt!

Von den nachstehenden Aufgaben 281246 A und 281246 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

281246 A Man beweise: Für jede natürliche Zahl $n > 1$ und für je $n + 2$ reelle Zahlen p, q, $a_1, \ldots, a_n$, die

$$0 < p \leqq a_i \leqq q \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (1)$$

erfüllen, gelten die beiden Ungleichungen

$$n^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \qquad (2)$$
$$\leqq n^2 + \left[\frac{n^2}{4}\right] \cdot \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2 .$$

(Hinweis: Zu reellem x bezeichnet wie üblich $[x]$ die ganze Zahl $[x] = g$ mit $g \leqq x < g + 1$).

Man ermittle ferner zu gegebenen n, p, q mit $0 < p \leqq q$ alle diejenigen a_i mit (1), für die in (2)

a) zwischen der ersten und zweiten Zahl,

b) zwischen der zweiten und dritten Zahl

das Gleichheitszeichen gilt.

281246 B Man ermittle die größtmögliche Anzahl von Quadraten der Seitenlänge 1, die sich in ein gegebenes Quadrat der Seitenlänge 1,99 legen lassen, ohne über dessen Rand hinauszuragen und ohne sich gegenseitig zu überlappen.

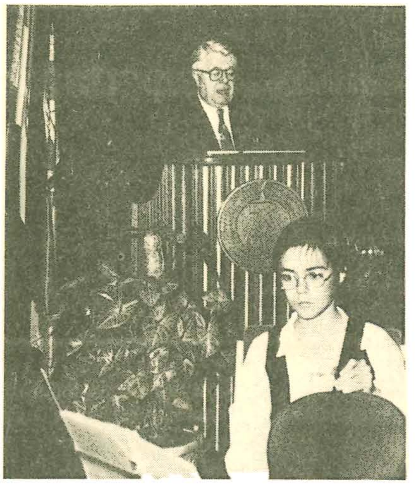
Die Lösungen dieser Aufgaben werden wir im Heft 1/90 veröffentlichen.

Die Internationale Mathematikolympiade fand im Juli dieses Jahres in Braunschweig/BRD statt.

Unserer Mannschaft gehörten neben dem Vorjahressieger Andreas Siebert noch Rüdiger Belch, Frank Göring, Gerard Zenker, Jan Fricke und Andre Pönitz an.

Alle Teilnehmer errangen Preise! Damit erreichte unsere Mannschaft das mit Abstand beste Ergebnis der letzten 20 Jahre. Mehr zur Jubiläums-IMO im Heft 6/89.

Die XXVIII. OJM fand nun schon traditionell in der Pädagogischen Hochschule „Dr. Theodor Neubauer“ in Erfurt statt. Der Festsaal des Erfurter Rathauses bot den feierlichen Rahmen für die Abschlußveranstaltung. Prof. Dr. W. Engel trug in seiner Festrede Historisches zu mathematischen Wettbewerben vor.



Einen ersten Preis in Klasse 10 erhielten: Max Wardetzky, Spezialschule „C. F. Gauß“ Frankfurt/O.; Michael Dreher, S.-M.-Kirow-OS Halle; Nicole Giard, Erweiterte Spezialoberschule „Georg Thiele“ Kleinmachnow; Andreas Englisch (Kl. 9), Spezialschule Leipzig; Tobias Kunstmann (Kl. 9), Spezialschule „H. Hertz“ Berlin

Einen ersten Preis in Klasse 11/12 erhielten: Gerard Zenker, Rüdiger Belch, beide Spezialschule Karl-Marx-Stadt; Frank Göring, Spezialklasse an der EOS „J. W. Goethe“ Ilmenau

Einen zweiten Preis erhielten 19 Schüler, einen dritten Preis 30 Schüler und eine Anerkennung 23 Schüler.
An der OJM nahmen 167 Schüler, davon 15 Mädchen, teil.

Geschwister

1. Armin hat drei Brüder und jeder von ihnen hat eine Schwester.
Wieviel Geschwister sind das zusammen?

2. Luise fragt Monika nach der Zahl ihrer Geschwister. Monika antwortet verschmitzt: „Ich habe ebensoviel Brüder wie Schwestern. Meine Brüder aber haben doppelt soviel Schwestern wie Brüder.“

3. Franziska hat viele Geschwister. Ihre Eltern haben vier Töchter, Franziska mitgezählt. Jedes Mädchen hat zwei Brüder.
Wieviel Geschwister hat Franziska?

4. Wieviel Geschwister sind in der Familie, wenn Lutz doppelt soviel Brüder wie Schwestern, Rosi aber drei Brüder mehr als Schwestern hat?

5. Ulrich ist a Jahre alt. Er ist um x Jahre älter als sein b Jahre alter Bruder Berthold. Setze für a, b und x solche Zahlen ein, daß eine richtige Aussage entsteht!

6. Bernd ist b Jahre alt. Er ist um y Jahre älter als seine c Jahre alte Schwester Christa.
Gib die Gleichung zur Berechnung von b an, wenn die Werte y und c gegeben sind. (Zum Beispiel: $y = 5$ und $c = 13$.)

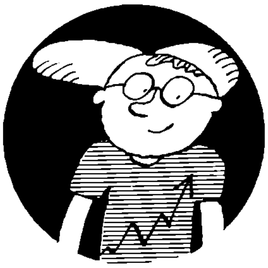
7. Jeder Junge einer Familie hat 3mal soviel Schwestern wie Brüder, während jedes Mädchen gleichviel Brüder wie Schwestern hat.
Wieviel Geschwister sind das insgesamt, und wieviel sind davon Jungen bzw. Mädchen?

8. Johannes stellt fest: „Meine Schwester ist zwei Jahre jünger als ich; ich selbst bin drei Jahre jünger als mein Bruder. Zusammen sind wir 40 Jahre alt.“
Wie alt ist jedes der Geschwister?

9. Max ist doppelt so alt, wie Otto sein wird, wenn Paul so alt ist wie Max heute. Wer von den dreien ist der Älteste und wer der Jüngste?

A. Körner/J. Lehmann

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 11. Januar 1990

Ma 5 ■ 3011 Berechne die Summe aus allen dreistelligen ungeraden natürlichen Zahlen, bei denen jeweils der Zehner um 2 größer als der Einer und der Hunderter um 1 kleiner als der Zehner ist!

Mathematiklehrer J. Kreusch, Löbau

Ma 5 ■ 3012 In dem Schema

$$\begin{array}{r} \text{MATHE} \\ +\ \underline{\text{MATHE}} \\ \text{ALPHA} \end{array}$$

sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

Mathematiklehrer J. Kreusch, Löbau

Ma 5 ■ 3013 Kosmonaut Juri Romanenko erreichte im Jahre 1987 den bisher längsten Raumflug. Mit dem Raumschiff „Sojus TM 4" war er 326 Tage im Weltall. Rechnen wir den ersten und letzten Flugtag (Start und Rückflug zur Erde) als einen Tag, so umkreiste er rund 325 Tage die Erde. Für eine Erdumkreisung brauchte sein Raumschiff 90 Minuten. Wie viele Erdumkreisungen hat Juri Romanenko insgesamt gemacht?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 3014 Rolf löst eine Additionsaufgabe. Sie ist aber so schlecht geschrieben, daß er beim ersten Summanden den Einer als 6 anstatt 1 liest. Beim zweiten Summanden liest er den Hunderter als 2 anstatt 9 und den Zehner als 3 anstatt 9. Nun rechnet er ohne Fehler und erhält 1234. Wie lautet die Rechenaufgabe und die richtige Lösung?

Ma 5 ■ 3015 Ein Reporter befragt 132 Jungen und 112 Mädchen, ob sie regelmäßig Sport betreiben. Die Umfrage ergibt, daß von den Jungen 44 und von den Mädchen jedes vierte regelmäßig Sport betreiben. Jeder wievielte Junge und wieviel Mädchen dieser Befragten treibt regelmäßig Sport? *Schülerin K. Leuenberg, Iden*

Ma 5 ■ 3016 Es sind zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen zu ermitteln, die folgende Bedingung erfüllen: Subtrahiert man von der Summe dieser beiden Zahlen 7, multipliziert man die erhaltene Differenz mit 4,5, so erhält man als Ergebnis 81. Um welche Zahlen handelt es sich?

Schüler L. Freitag, Schwarzheide

Ma 5 ■ 3017 Die drei Schüler Andreas, Bernd und Claus haben (in anderer Reihenfolge) die Familiennamen Müller, Schmidt und Reich.
Von ihnen ist folgendes bekannt:
(1) Andreas hat nicht den Familiennamen Reich.
(2) Die Mutter von Bernd ist Hausfrau.
(3) Bernd ist Schüler einer 8. Klasse.
(4) Der Schüler mit dem Familiennamen Reich geht in die 7. Klasse.
(5) Die Mutter des Schülers mit dem Familiennamen Schmidt ist Verkäuferin.

Ordne jedem Schüler seinen Familiennamen zu! *Schüler S. Reinald, Zerbst*

Ma 6 ■ 3018 Streichhölzer (Länge 5 cm, Dicke jeweils 2 mm) sollen so zusammengelegt und zusammengeklebt werden, daß ein Würfel mit einem Volumen von 1 dm^3 entsteht. Wie viele Streichholzschachteln sind dazu nötig, wenn in jeder Schachtel genau 50 Streichhölzer sind? (Klebstoffschicht und Zündköpfe sollen dabei unberücksichtigt bleiben) *StR H.-J. Kerber*

Ma 6 ■ 3019 In einem Klassenraum hängen die gerahmten Porträts von vier berühmten Mathematikern. Bei einem Wettstreit, der in diesem Klassenraum durchgeführt wird, erhalten die teilnehmenden Schüler jeweils vier Kärtchen, auf denen die Namen dieser Mathematiker stehen. Diese Namenskärtchen sind den Porträts richtig zuzuordnen. Von einem Achtel aller Wettbewerbsteilnehmer wurden alle vier Namen falsch zugeordnet; bei genau so vielen war nur ein einziger Name richtig

30	Ellen Stelzner Otto-Grotewohl-Straße 28 Jena-Lobeda 6902 150	Dr.-Theodor-Neubauer-OS Klasse 7	40	Ma 7 ■ 2991
	Prädikat:		10	
	Lösung:			

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027

3. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. (Die Klassenstufennummer steht vor der Aufgabennummer.) Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12 oder Na/Te 10/12 gekennzeichnet sind.
4. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (siehe Muster), da die eingehenden Lösungen aufgabenweise sortiert und korrigiert werden. Noch eine Bitte an die Schulen: Sendet bitte die Lösungen bereits nach Aufgaben sortiert ein.
5. Teilnehmer, die eine richtige Lösung (nicht nur Antwortsatz) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Anderenfalls erhalten sie eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst". Nach dem Einsendetermin eingehende Lösungen werden nicht mehr bearbeitet!
6. Jeder Teilnehmer sollte einen Durchschlag seiner Lösungen anfertigen, um sie mit den jeweils zwei Hefte später erscheinenden Lösungen vergleichen zu können.

Der Jahreswettbewerb 1988/89 läuft von Heft 5/1988 bis Heft 1/1989. Zwischen dem 1. und 10. September 1989 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/88 bis 1/89 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden.

Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/88 veröffentlicht.

Wer mindestens 10 Antwortkarten (von den Wettbewerben der Hefte 5/88 bis 1/89) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein *alpha*-Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1988/89 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunde zurück). Schüler, die schon mehrere Jahre teilnehmen, senden bitte die zuletzt erhaltene Urkunde mit ein. Allein anhand dieser werden die Teilnehmerlisten aufgestellt. Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

zugeordnet. Genau 12 Schüler hatten zwei richtige Namen gesetzt; bei genau so vielen waren alle vier Namen richtig angeordnet. Wie viele Schüler hatten alle vier Namen falsch zugeordnet?

StR H.-J. Kerber

Ma 6 ■ 3020 Gegeben seien zwei beliebige einander in S schneidende Geraden g und h. Ein beliebiger Kreis um S schneide g bzw. h in A, B, C bzw. D. Es ist nachzuweisen, daß $ABCD$ ein Rechteck ist. *Fr.*

Ma 6 ■ 3021 Fünf Freundinnen sind zusammen 25 Jahre alt. Susanne ist 2 Jahre jünger, Doreen 2 Jahre älter als Dana. Jeanette ist doppelt so alt wie Dana, Angelika drei Jahre jünger als Jeanette.
Wie alt ist jedes dieser fünf Mädchen?

Schülerin S. Rudloff, Freist

Ma 6 ■ 3022 Die vier Freundinnen Andrea, Beate, Christine und Doris haben (in anderer Reihenfolge) die Familiennamen Fischer, Grohmann, Hofmann und Ilgen. Von ihnen ist folgendes bekannt:

(1) Andrea und Beate und das Mädchen mit dem Familiennamen Hofmann betreiben gemeinsam Leichtathletik.

(2) Christine und das Mädchen mit dem Familiennamen Hofmann trafen sich kürzlich im Schwimmbad.

(3) Andrea, Christine und das Mädchen mit dem Familiennamen Ilgen sind Leseratten.

(4) Andrea und das Mädchen mit dem Familiennamen Grohmann nehmen an einer Arbeitsgemeinschaft Basteln teil.

Ordne jedem Vornamen den Familiennamen zu!

Schülerin U. Kretschmer, Dresden

Ma 6 ■ 3023 Eine quadratische Rasenfläche soll in eine rechteckige mit gleichem Flächeninhalt umgearbeitet werden. Dadurch wird die Länge der rechteckigen Rasenfläche um 4 m größer, die Breite um 2 m kleiner als die der quadratischen Rasenfläche. Ermittle Länge und Breite der rechteckigen Rasenfläche!

Diplomlehrer M. Freitag, Schwarzheide

Na/Te 6 ■ 452 Eine Schleusenkammer hat eine Länge von 325 m, ist 25 m breit und 4,30 m hoch. Welches Volumen hat die eingelassene Wassermenge, wenn der Wasserspiegel seinen höchsten Stand 0,50 m unter der Oberkante der Schleusenkammer hat? Gib das Ergebnis in Kubikmetern an! Runde dabei auf Vielfache von Hundert!

R.

Ma 7 ■ 3024 Addiert Axel zur Zahl seines Geburtsjahres deren Quersumme, so erhält er als Ergebnis 1989. Welches Lebensalter erreicht Axel im Jahre 1989? *Sch.*

Ma 7 ■ 3025

a) Welcher Bruch mit dem Nenner 1989 liegt am nächsten bei 0,4?

b) Welche Ziffer steht an der 1989. Stelle hinter dem Komma, wenn x mit $x = \frac{1}{3} + \frac{1}{7}$ als Dezimalbruch geschrieben würde?

StR H.-J. Kerber

Ma 7 ■ 3026 Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$. Zeichne ein beliebiges gleichschenkliges Trapez $AECF$ so hinzu, daß $\overline{AE} \parallel \overline{CF}$ gilt, F innerer Punkt von $\overline{CD}$ ist und E auf der über B hinaus verlängerten Strecke $\overline{AB}$ liegt. Beweise, daß Rechteck und Trapez flächengleich sind!

StR H.-J. Kerber

Ma 7 ■ 3027 Ein Gestüt mit 63 Pferden würde mit dem vorhandenen Futtervorrat 72 Tage reichen. Es werden aber Pferde verkauft, so daß dieser Futtervorrat jetzt 12 Tage länger reicht. Wie viele Pferde wurden verkauft?

StR H.-J. Kerber

Ma 7 ■ 3027 Die Mathematiklehrer Mett, Birken, Rebrek und Kempcke wohnen (in anderer Reihenfolge) in den Städten Röbel, Anklam, Neubrandenburg und Neustrelitz. Jeder von ihnen hat ein Auto; die Automarken sind Skoda, Dacia, Lada und Trabant. Von ihnen ist folgendes bekannt:

(1) Herr Kempcke besuchte mit seinem Skoda Herrn Mett in Anklam.

(2) Der Neustrelitzer besuchte mit seinem Dacia Herrn Birken.

(3) Der Neubrandenburger hat einen Trabant.

Ordne jedem Mathematiklehrer Wohnort und Automarke zu!

StR H.-J. Kerber

Na/Te 7 ■ 453 Ein Körper mit einer Masse von 1 kg dehnt eine Schraubenfeder um 10 cm. Wie groß ist die Gewichtskraft eines Körpers, der diese Feder auf 25 cm dehnt? *R.*

Na/Te 7 ■ 454 Die Gewichtskraft eines Körpers wird um so kleiner, je weiter er von der Erde entfernt ist. Nachfolgende Tabelle gibt die Abhängigkeit der Gewichtskraft eines Körpers mit der Masse 1 kg von der Höhe an:

Entfernung von der Erdoberfläche in km	Gewichtskraft in N
0	10
290	9
690	8
1200	7
1800	6

Wie groß ist die Gewichtskraft eines Körpers in 1000 km Höhe, dessen Masse 4 kg beträgt? (Graphische Lösung) *R.*

Ma 8 ■ 3029 Becker, Fischer und Schneider haben die Vornamen Hans, Jörn und Kurt und spielen gemeinsam Skat. Nun sind die folgenden Aussagen wahr:

(1) Der Sieger im Spiel trug einen blauen Schlips.

(2) Fischer ist zum ersten Mal bei Becker zu Gast.

(3) Kurt trägt keinen Schlips.

(4) Becker wäre fast bester Spieler geworden.

(5) Jörn hat immer beim Skat das Sofa als Stammplatz.

(6) Schneider trägt einen grünen Schlips.

Welchen Vor- und Nachnamen hat jeder?

StR H.-J. Kerber

Ma 8 ■ 3030 In der nachstehenden Gleichung sind die Kästchen durch Terme so zu ersetzen, daß die Gleichung allgemeingültig ist (für alle reellen Zahlen x stets eine wahre Aussage wird)!

$(2x+3) \cdot (\square + \square)$
$= x \cdot (2x+11) + \square$ *StR H.-J. Kerber*

Ma 8 ■ 3031 Addiert man zu 1111 das Quadrat einer natürlichen Zahl z, so erhält man das Quadrat des Nachfolgers von z. Es ist z zu bestimmen! *StR H.-J. Kerber*

Ma 8 ■ 3032 Im Dreieck ABC sei der Punkt C genau so weit von $\overline{AB}$ entfernt wie der Punkt A von $\overline{BC}$. Es ist zu beweisen, daß das Dreieck ABC gleichschenklig ist!

StR H.-J. Kerber

Ma 8 ■ 3033 Gegeben sei eine Gerade g und zwei verschiedene Punkte P und Q, die auf ein und derselben Seite von g liegen (in ein und derselben Halbebene bezüglich g). Es ist ein Kreis k zu konstruieren, der durch P und Q geht und g berührt. Dabei sollen die Lote von P und Q auf g nicht zusammenfallen und auch unterschiedlich lang sein. *Sch.*

Na/Te 8 ■ 455 Ein Skiläufer (Masse $m = 70$ kg) wird mit einem Lift einen Hang von 600 m Länge, der 30° gegen die Waagerechte geneigt ist, hochgezogen. Welche Arbeit verrichtet der Elektromotor des Lifts am Skiläufer?
Anmerkung: Bei der genannten Neigung beträgt das Verhältnis Höhenunterschied/Länge = 0,5.

Na/Te 8 ■ 456 Der Haftreibungskoeffizient μ gibt das Verhältnis zwischen der Kraft, die notwendig ist, um einen auf einer Unterlage ruhenden Körper gerade zum Gleiten zu bringen, und der Kraft, mit der dieser Körper auf seine Unterlage drückt, an.
Auf einer waagerechten Unterlage ruht ein Körper mit einer Gewichtskraft $F_G = 50$ N. Er ist über ein Seil und eine feste Umlenkrolle mit einem Körper verbunden, der sich in vertikaler Richtung unter dem Einfluß der Gravitation bewegen kann. Wie groß muß die Masse dieses Körpers sein, damit bei $\mu = 0{,}5$ der auf der Waagerechten ruhende Körper gerade zu gleiten beginnt?

Ma 9 ■ 3034 Es ist zu beweisen, daß der Term $\sqrt{9n^4 + 18n^3 + 9n^2}$ für alle natürlichen Zahlen n durch 6 teilbar ist.

F. Zöllner, Sondershausen

Ma 9 ■ 3035 Für je zwei positive reelle Zahlen a und b ist das arithmetische Mittel $M = \frac{a+b}{2}$, das geometrische Mittel mit $G = \sqrt{a \cdot b}$ und das quadratische Mittel mit $Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ definiert.
Es ist zu zeigen, daß die folgende Aussage wahr ist:
Das arithmetische Mittel aus dem Quadrat des quadratischen und dem Quadrat des geometrischen Mittels ist gleich dem Quadrat des arithmetischen Mittels von a und b! *StR H.-J. Kerber*

Ma 9 ■ 3036 Es ist zu beweisen, daß eine dreistellige Zahl, deren Grundziffern als einstellige Zahlen aufgefaßt, eine arithmetische Folge bilden, stets durch 3 teilbar ist. *Schüler U. Fahrenberg, Berlin*

Ma 9 ■ 3037 In einem Dreieck ABC sei D der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ und E der Mittelpunkt von $\overline{AC}$. Die Seitenhalbierenden $\overline{AD}$ und $\overline{BE}$ mit den Längen s_a und s_b sind senkrecht zueinander. Der Flächeninhalt A des Dreiecks ABC ist allein durch die Längen s_a und s_b der beiden Seitenhalbierenden $\overline{AD}$ und $\overline{BE}$ auszudrücken! *Sch.*

Ma 9 ■ 3038 In drei gleichaussehenden Schachteln befinden sich je zwei Kugeln. In der ersten Schachtel liegen zwei schwarze, in der zweiten zwei weiße und in der dritten eine schwarze und eine weiße Kugel. Auf den Schachteln steht geschrieben: „zwei weiße", „zwei schwarze" und „schwarz und weiß". Die Inhalte der Schachteln wurden so vertauscht, daß keine der Aufschriften mehr stimmt. Kann man, indem man aus irgendeiner Schachtel eine Kugel herausnimmt (ohne hineinzuschauen), bestimmen, wo welche Kugeln liegen? *Schüler R. Holke, Leipzig*

Na/Te 9 ■ 457 Für den kubischen Ausdehnungskoeffizienten γ gilt annähernd: $\gamma = 3 \cdot \alpha$. Für die Volumenausdehnung von Körpern (festen und flüssigen) gilt: $\Delta V = \gamma \cdot V \cdot \Delta T$. Ein hohler Würfel von $l = 1$ cm Kantenlänge, der aus dünnem Kupferblech zusammengefügt ist, ist oben offen. Er wird bei 20 °C vollständig mit Wasser gefüllt und auf 80 °C erhitzt. Wieviel Wasser fließt aus? *R.*

Na/Te 9 ■ 458 Ein Glaskölbchen enthält eine Wasserstoffüllung (Normaldruck p_0 bei 20 °C). Im Inneren befindet sich eine kleine Wolframspirale. Fließt durch sie ein elektrischer Strom, so kann das Gas erhitzt werden. Dadurch steigt der Druck im Gas. Bei einem Überdruck von $5 \cdot p_0$ platzt der Kolben.
Welche Temperatur wurde erreicht? *R.*

Ma 10/12 ■ 3039
Untersuche, ob die Ungleichung
$$18 > 1 : (9 - 4\sqrt{5})$$
eine wahre oder eine falsche Aussage darstellt! *Sch.*

Ma 10/12 ■ 3040
Gegeben sei das Kryptogramm
$$abb \cdot ac = abbc.$$
Man ermittle alle Lösungen dieses Kryptogramms, wobei gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten.
Dipl.-Math. A. Fittge, Berlin

Ma 10/12 ■ 3041 Es ist zu beweisen, daß in einem beliebigen Dreieck ABC die Summe der Längen der drei Seitenhalbierenden kleiner als der Umfang des Dreiecks ABC ist.
Schüler T. Vogt, Ilmenau

Ma 10/12 ■ 3042 Zeichnen Sie durch die drei Eckpunkte eines spitzwinkligen Dreiecks ABC die Parallelen zu den drei Seiten und bezeichnen Sie die Schnittpunkte dieser Parallelen mit D_1, D_2, D_3.
a) Beweisen Sie, daß die so gebildeten Dreiecke paarweise zueinander kongruent sind!
b) Beweisen Sie, daß das so entstandene Bild als Körpernetz einer Pyramide $ABCD$ (nichtreguläres Tetraeder) aufgefaßt werden kann!
Bestimmen Sie D' und zeichnen Sie den Grundriß dieses Körpers!
StR H.-J. Kerber

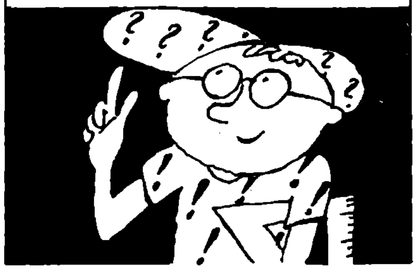
Ma 10/12 ■ 3043 Es seien a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks und h die Länge der Höhe auf c. Es ist zu beweisen, daß gilt
$$a \cdot b - h \cdot c \geqq 0.$$
In welchem Falle gilt das Gleichheitszeichen? *Dipl.-Math. A. Fittge, Berlin*

Na/Te 10/12 ■ 459 Welche Gesamtmasse kann ein Heißluftballon mit einem Volumen $V = 290\ \mathrm{m}^3$, der mit Luft der Temperatur $t_2 = 100$ °C gefüllt ist, bei einer Außentemperatur der Luft $t_1 = 0$ °C gerade anheben? Die Dichte der Luft bei 0 °C und dem gerade herrschenden Luftdruck ist $\varrho_1 = 1{,}29\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. *R.*

Na/Te 10/12 ■ 460 Ein Aufzug habe die Masse $m_1 = 500$ kg. An der Decke des Aufzuges hängt an einem Faden, der als masselos zu betrachten ist, ein Körper mit der Masse $m_2 = 5$ kg. Durch eine Kraft $F = 6000$ N werden der Aufzug und der Körper mit einer Beschleunigung nach oben bewegt. ($g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$)
a) Wie groß ist die Beschleunigung des Aufzuges (einschließlich des Körpers)?
b) Wie groß ist die Spannkraft im Faden, an dem der Körper mit der Masse m_2 aufgehängt ist?
c) Der Faden soll plötzlich zerreißen. Wie groß ist dann die Beschleunigung des Aufzuges und die des Körpers? *R.*

Unsere Buttons sind da! Statt der Anstecknadel gibt es ab diesem Wettbewerb für unsere erfolgreichen Teilnehmer Buttons in dieser Größe, natürlich in Gold und Silber.

Lösungen



Lösung zu: Eine harte Nuß
Heft 4/89

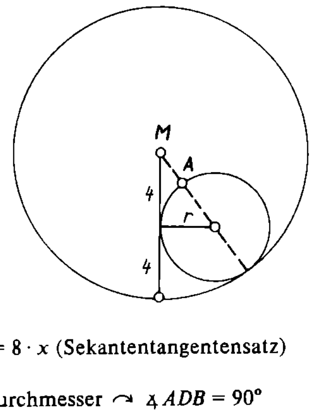
Sei (x, y, z); x, y, z ganz; $1 \leqq x, y,\ z \leqq 9$, Lösung des Gleichungssystems
$$x + y + z = 19 \qquad (1)$$
$$3x + 5y + 6z = 85. \qquad (2)$$
Multipliziert man Gleichung (1) mit dem Faktor (-3) und addiert diese zu (2), so erhält man $2y + 3z = 28$ bzw.
$$y = 14 - \frac{3}{2}z. \qquad (3)$$
Damit y ganzzahlig wird, so muß z geradzahlig sein: $z = 2n$; $n = 1, 2, 3, 4$. Setzt man $z = 2n$ in die Gleichungen (3) und (1) ein, so ergeben sich
$$z = 2n,\ y = 14 - 3n;$$
$$x = 5 + n\ (n = 1, 2, 3, 4).$$
Es ergibt sich folgende Tabelle:

n	x	y	z
1	6	11	2
2	7	8	4
3	8	5	6
4	9	2	8

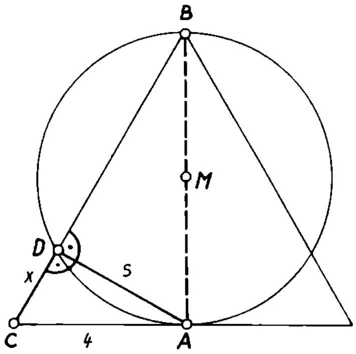
Da $y = 11$ zweistellig ist, so entfällt das erste Tripel, und man erhält drei geforderte Lösungstripel (7, 8, 4), (8, 5, 6) und (9, 2, 8). Jedes dieser Tripel erfüllt in der Tat die Gleichungen (1) und (2), wovon man sich durch Einsetzen leicht überzeugt.

Lösungen zu:
Gut gedacht ist halb gelöst, Heft 4/89

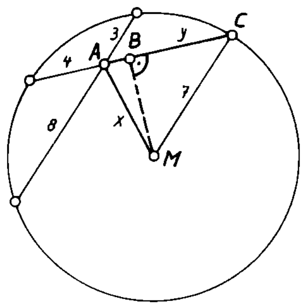
1. $\overline{MA} = 8 - 2 \cdot r$; $4^2 = (8 - 2r) \cdot 8$
(Sekantentangentensatz)
$r = 3$



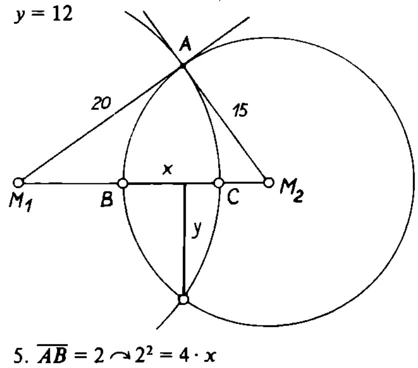
2. $4^2 = 8 \cdot x$ (Sekantentangentensatz)
$x = 2$
$\overline{AB}$ Durchmesser $\curvearrowright$ $\sphericalangle ADB = 90°$
(Satz des Thales)
$s^2 + x^2 = 4^2$ (Satz des Pythagoras);
$s^2 = 16 - 4$; $s = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$



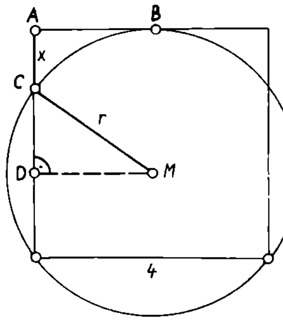
3. $4 \cdot y = 3 \cdot 8$ (Sehnensatz) $y = 6$
$\overline{BC} = \frac{4+y}{2} = 5 \curvearrowright \overline{AB} = \overline{BC} - 4 = 1$
$\overline{MB}^2 = 7^2 - 5^2 = x^2 - 1^2$
(Satz des Pythagoras); $x = 5$



4. $\sphericalangle M_1AM_2 = 90°$ (paarweise Tangente und Berührungsradius)
$\overline{M_1M_2}^2 = 20^2 + 15^2$ (Satz des Pythagoras);
$\overline{M_1M_2} = 25$
$\curvearrowright \overline{M_1B} = 25 - 15 = 10$;
$\overline{M_2C} = 25 - 20 = 5$; $x = 10$
y gleich der Höhe in ΔM_1M_2A
$2A_\Delta = 20 \cdot 15 = 25 \cdot y$ (Flächeninhalt);
$y = 12$

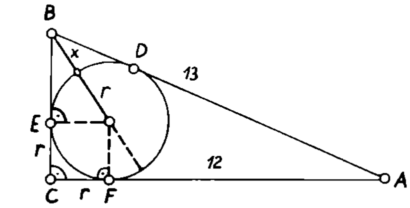


5. $\overline{AB} = 2 \curvearrowright 2^2 = 4 \cdot x$
(Sekantentangentensatz); $x = 1$
$\overline{CD} = 1{,}5 \curvearrowright r^2 = 2^2 + 1{,}5^2$
(Satz des Pythagoras); $r = 2{,}5$

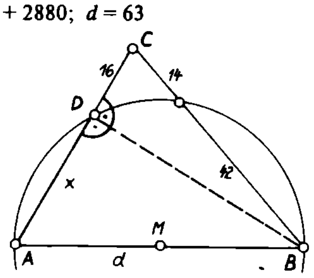


6. $\overline{BC}^2 = 13^2 - 12^2$
(Satz des Pythagoras); $\overline{BC} = 5$

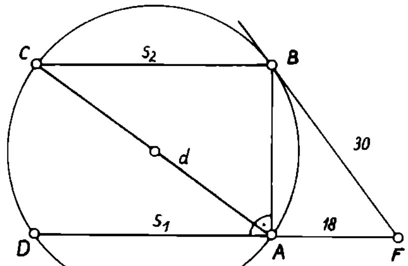
$\overline{BD} = \overline{BE}$, $\overline{AD} = \overline{AF}$ (Tangenten);
$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BD} = 13$
$u = 2r + 2 \cdot 13 = 30$
(Umfang des Dreiecks); $r = 2$
$x(x + 2r) = \overline{BE}^2$ (Sekantentangentensatz)
$x^2 + 4x - 9 = 0$; $(x+2)^2 - 13 = 0$;
$x + 2 = +\sqrt{13}$; $x = \sqrt{13} - 2 \approx 1{,}61$



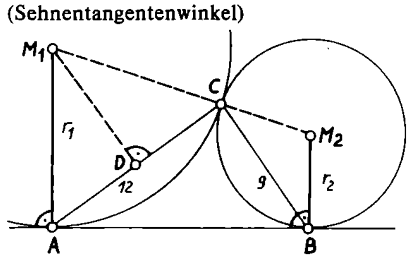
7. $16(x + 16) = 14(42 + 14)$
(Sekantensatz); $x = 33$
$ADB = 90°$ (Satz des Thales)
$\overline{BD}^2 = 56^2 - 16^2 = 2880$
(Satz des Pythagoras); $\overline{BD} = 24\sqrt{5}$
$d^2 = x^2 + \overline{BD}^2$ (Satz des Pythagoras)
$= 33^2 + 2880$; $d = 63$



8. $18 \cdot (18 + s_1) = 30^2$
(Sekantentangentensatz); $s_1 = 32$
$\sphericalangle ABC = 90°$ (Satz des Thales)
$\curvearrowright \overline{BD}$ Durchmesser (Satz des Thales)
$\rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ADB \curvearrowright s_2 = 32$
$\sphericalangle ABF = \sphericalangle ACB$ (Sehnentangentenwinkel)
$\curvearrowright \Delta AFB \sim \Delta BAC$
$\overline{AB} = \sqrt{30^2 - 18^2} = 24$
(Satz des Pythagoras)
$\frac{30}{18} = \frac{d}{\overline{AB}}$; $d = 40$

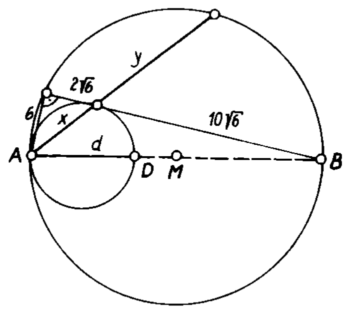


9. C liegt auf $\overline{M_1M_2}$
(Radien der Berührungstangente).
$\sphericalangle CAB = \frac{1}{2} \sphericalangle AM_1C$ und
$\sphericalangle ABC = \frac{1}{2} \sphericalangle BM_2C$
(Sehnentangentenwinkel)

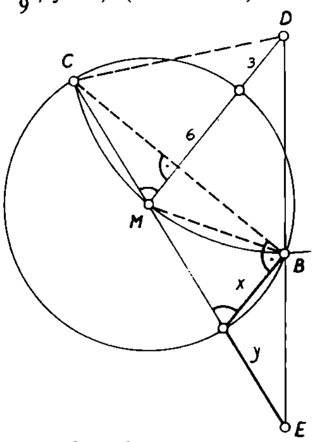


$\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 180°$ (Wechselwinkel) $\curvearrowright \Delta ABC$ ist rechtwinklig.
$\overline{AB}^2 = 12^2 + 9^2$ (Satz des Pythagoras);
$\overline{AB} = 15$
$\Delta ADM_1 \sim \Delta ABC$; $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{r_1}{\overline{AD}}$; $\frac{15}{9} = \frac{r_1}{6}$;
$r_1 = 10$ und analog $r_2 = 5{,}625$

10. $\overline{AB}$ ist Durchmesser (Satz des Thales). D liegt auf $\overline{AB}$ (gemeinsame Berührungsradien einer gedachten Tangente in A)
$\overline{AB}^2 = 6^2 + (12 \cdot \sqrt{6})^2 = 30^2$
$(10 \cdot \sqrt{6})^2 = \overline{BD} \cdot \overline{BA}$ (Sekantentangentensatz); $\overline{BD} = 20 \curvearrowright d = 10$
$x^2 = 6^2 + (2 \cdot \sqrt{6})^2$ (Satz des Pythagoras); $x = 2 \cdot \sqrt{15} \approx 7{,}75$
$x \cdot y = 2 \cdot \sqrt{6} \cdot 10 \cdot \sqrt{6}$ (Sehnensatz);
$y = \frac{120}{2 \cdot \sqrt{15}}$; $y = 4 \cdot \sqrt{15} \approx 15{,}49$



11. $\Delta DCM \cong \Delta DBM$ (nach *sss*); $\overline{MD} \perp \overline{BC}$
$\sphericalangle ABC = 90°$ (Satz des Thales);
$\overline{AB} \perp \overline{BC} \curvearrowright AB \parallel MD \curvearrowright \sphericalangle CAB = \sphericalangle CMD$
$\Delta CMD \sim \Delta ABM$ (gleichschenklige Dreiecke mit gleichen Basiswinkeln)
$\curvearrowright \frac{\overline{DM}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{AB}}$; $\frac{9}{6} = \frac{6}{x}$; $x = 4$;
$\frac{\overline{EM}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{AB}}$;
$\frac{y}{y+6} = \frac{4}{9}$; $y = 4{,}8$ (Strahlensatz)



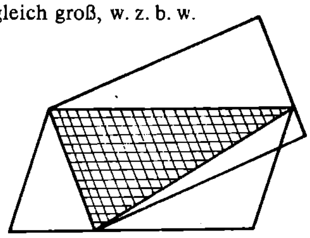
Lösungen zur Sprachecke

▲ 1 ▲ Der Wert der Symbole
Jedes Symbol in der vorliegenden Figur entspricht einer Ziffer zwischen 1 und 9. Entschlüßle diese Figur, indem du die entsprechenden Ziffern einsetzt! Dabei muß die Summe von drei Zahlen, die auf einer Geraden liegen, stets 114 ergeben.

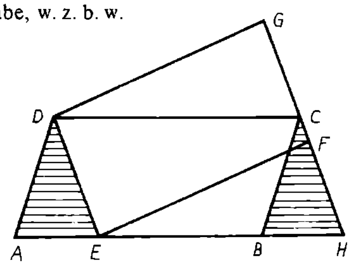
Lösung: ♥ = 1, ▼ = 2, ♠ = 3, ● = 4, ∇ = 6, ♣ = 7, ■ = 8.

▲2▲ Zwei Parallelogramme besitzen gemeinsam eine Ecke und dann noch jeweils eine Ecke auf einer Seite des anderen (siehe Zeichnung). Zeige, daß ihre Flächeninhalte gleich groß sind!

Lösung 1: Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist halb so groß wie der Flächeninhalt eines Parallelogramms, das mit ihm in einer Seite und der dazugehörigen Höhe übereinstimmt. Das schraffierte Dreieck hat deshalb einen halb so großen Flächeninhalt wie jedes der beiden Parallelogramme. Deshalb sind deren Flächeninhalte gleich groß, w. z. b. w.



Lösung 2: Die beiden schraffierten Dreiecke sind zueinander kongruent (wsw). Darum sind die Parallelogramme *ABCD* und *EHCD* zueinander flächengleich (vgl. Bild). Parallelogramme, die in einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen, sind flächengleich. Somit sind auch die Flächeninhalte der Parallelogramme *EHCD* und *EFGD* gleich groß. Damit (Drittengleichheit!) folgt die Behauptung der Aufgabe, w. z. b. w.



▲3▲ Die Zahl 1989

Es ist sofort klar, daß diese Zahl nicht prim ist, sie ist teilbar durch 9. (Wie kann man es ohne Ausführung der Division sofort sehen?) Die Zahl, die man nach Division von 1989 durch 9 erhält ist das Produkt zweier aufeinanderfolgender Primzahlen. Finde diese.

Lösung: Die Quersumme von 1989 beträgt 27, diese ist durch 9 teilbar, damit auch 1989. $13 \cdot 17 = 221$.

Lösung zu: Ein Zuschnittproblem

Figur 1: Die Diagonalen des Drachenvierecks zerlegen dieses in vier rechtwinklige Dreiecke; der Verschnitt besteht ebenfalls aus vier rechtwinkligen Dreiecken. Von diesen acht rechtwinkligen Dreiecken sind jeweils zwei kongruent, also auch flächengleich. Für den Verschnitt gilt deshalb

$V_1 = a \cdot b - \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$, also

$V_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 90 \cdot 60\,\text{cm}^2$

$= 2700\,\text{cm}^2$.

Figur 2: Nach dem Satz des Pythagoras gilt, wie aus dem Bild ersichtlich, folgendes:

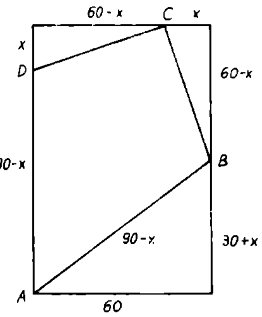
$60^2 + (30 + x)^2 = (90 - x)^2$,

$3600 + 900 + 60x + x^2 = 8100 - 180x + x^2$, $240x = 3600$, $x = 15$. Daraus folgt für den Verschnitt

$V_2 = \left(15 \cdot 45 + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 45\right) \text{cm}^2$,

$V_2 = 2025\,\text{cm}^2$.

Für Figur 2 ist der Verschnitt also um $675\,\text{cm}^2$ kleiner.



Lösungen zu: Kann man mit Näherungswerten genau rechnen?

▲2▲ $V = (29{,}4 \pm 1{,}7)\,\text{cm}^3$

▲3▲ $v_0 = 103{,}371\,43\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$,

$79\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \leqq v \leqq 104\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

▲4▲ $d = r_2 - r_1 = (4{,}7 \pm 0{,}1)\,\text{cm}$

▲5▲

	$a + b$	$a - b$
Ergebnis von (1)	120,7	56,7
untere Wertschranke	120,15	56,15
obere Wertschranke	121,25	57,25

	$a \cdot b$	$a : b$
Ergebnis von (1)	2838,4	2,771 875
untere Wertschranke	2792,475	2,727 692 3
obere Wertschranke	2884,375	2,817 460 3

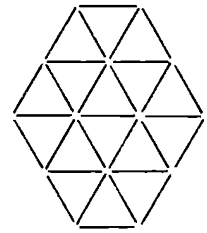
▲6▲ $a + b = 121$; $a - b = 57$;
$a \cdot b = 2800$; $a : b = 2{,}8$

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Sechs Magische Quadrate auf einmal!

Die magischen Konstanten lauten für das 10×10-Quadrat 505, für das 8×8-Quadrat 404 und für die 4×4-Quadrate 202.
Dann ist sofort $k = 202 - 142 = 60$
und $n = 202 - 139 = 63$ (Diagonale),
sowie $o = 202 - 165 = 37$.
Ferner ist $x = 202 - 151 = 51$ und
$u = 202 - 156 = 46$ (Diagonale),
sowie $t = 202 - 146 = 56$.
Die Zahlen in den jetzt vorliegenden vier 2×2-Quadraten ergeben sich nach gleichen Überlegungen. So ist
$c + d = 202 - 99 = 103$,
$c + g = 202 - 192 = 10$,
$d + g = 202 - 101 = 101$.
Aus $(c + d) + (c + g) - (d + g)$
$= 103 + 10 - 101$ folgt $2c = 12$,
$c = 6$ und $d = 97$, $g = 4$, $h = 95$.
Entsprechend findet man in den drei anderen Quadraten
$e = 32$, $f = 71$, $i = 30$, $j = 69$; $r = 61$,
$s = 39$, $v = 36$, $w = 66$; $l = 43$, $m = 57$,
$p = 54$, $q = 48$.
In der ersten Zeile des 10×10-Quadrates gilt $a + b = 505 - 476 = 29$. Man findet die noch möglichen Zahlen 15 und 14.
(Die Idee, eine Jahreszahl in ein Magisches Quadrat (mit 4×4 Feldern) einzuarbeiten, hatte als erster Albrecht Dürer. Er verwandte die Jahreszahl 1514.) Schließlich ist $y = 505 - 404 - 15 = 86$ und $z = 87$ (oder die letzten beiden Zahlenpaare vertauscht).

Hölzchenspiel

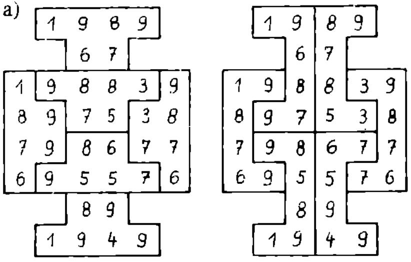


Kryptarithmetik

a) $5162 \cdot 312 = 1\,610\,544$
b) $4303 \cdot 249 = 1\,071\,447$

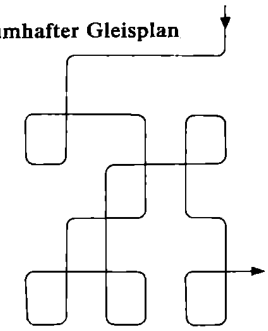
Mathe-aktuell

a)



b) Für die gesuchte Zahl x muß gelten:
$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} = x - 5$. Man erhält $x = 40$.

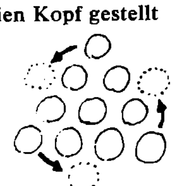
Traumhafter Gleisplan



Bildungsgesetz gesucht!

Jede Zahl der linken Spalte ist die Summe aus der über ihr stehenden Zahl und deren rechten Nachbar. Jede Zahl der rechten Spalte ist die Summe aus dem Doppelten der über ihr stehenden Zahl und deren linken Nachbar. Die beiden Zahlen der 7. Zeile sind
$89 + 144 = 233$ und $2 \cdot 144 + 89 = 377$.

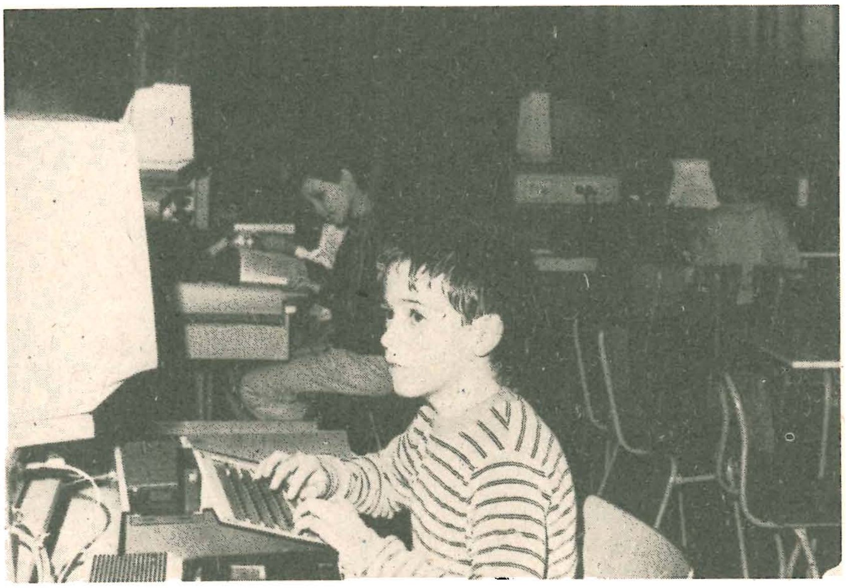
Auf den Kopf gestellt

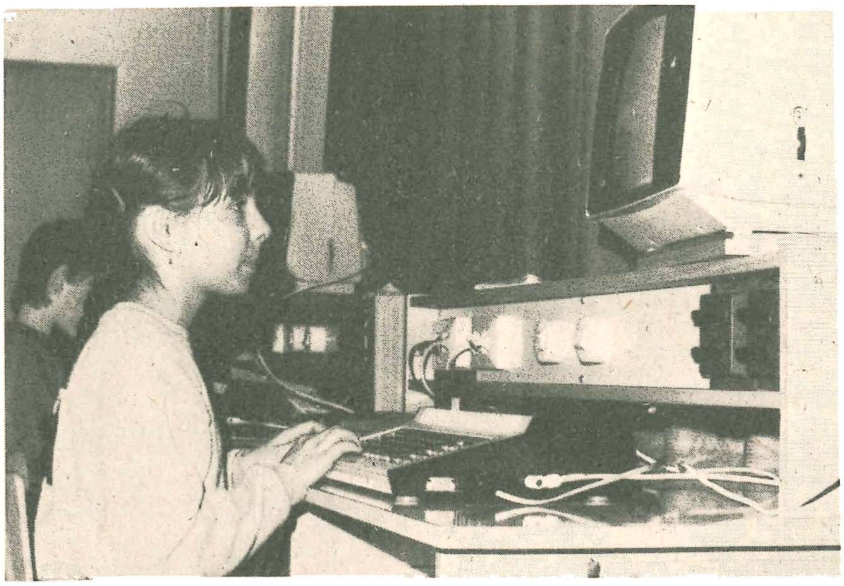


Unsere Erlebnisse im Spezialistenkurs Mathematik/BASIC 1989

Innerhalb der letzten 15 Jahre wurden in vielen Kreisen unserer Republik Schülerakademien gebildet. Diese bieten interessierten Schülern eine Reihe von Veranstaltungen aus Gesellschaftswissenschaften, Naturwissenschaften, Kultur und Technik an. Vorträge mit Diskussionsmöglichkeiten, Experimentalvorlesungen, Koch-Back- und DRK-Kurse, Stenographiezirkel, Exkursionen und Besichtigungen, Teilnahme an AHA-Studioproduktionen, individuelle Beratungen zu Partnerschaftsproblemen, wissenschaftliche Arbeitszirkel für EOS-Schüler mit ausgewählten Studienwünschen seien als Beispiele genannt. Der Schüler kann nach eigenem Ermessen Veranstaltungen auswählen. Informationen darüber, ob in eurem Kreis eine Schülerakademie existiert oder die Möglichkeit der Teilnahme im Nachbarkreis besteht, erhaltet ihr bei eurem Schuldirektor.

Alphons





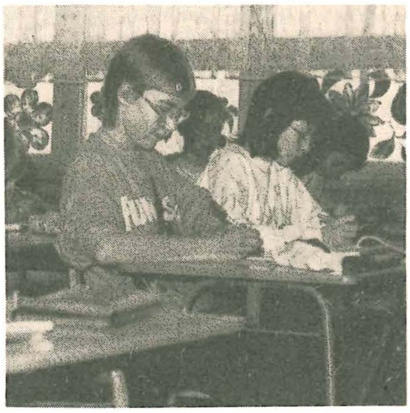
Wie jedes Jahr veranstaltete die Schülerakademie Erfurt in der 1. Woche der Winterferien einen Spezialistenkurs für 60 mathematisch besonders interessierte Schüler der Klassen 6 bis 8. Erstmals wurde die Verbindung Mathematik/BASIC erprobt. Diese Verbindung hat sich sehr gut bewährt. Täglich absolvierten wir zwei Doppelstunden Mathematik und eine Doppelstunde BASIC.

Im Mathematikteil behandelten wir die Darstellende Geometrie, Funktionen, Mischungsaufgaben, Kombinatorik und Zahlenfolgen. Zur Auflockerung gab es zwischendurch auch ein paar Knobelaufgaben. Insgesamt fanden wir den Mathematikteil sehr interessant, obwohl die Themen manchmal etwas schwierig waren und wir die Gleichungen sowie Stereometrie ein wenig vermißten.

BASIC war den meisten von uns noch recht unbekannt. Doch wir lernten schnell dazu. Nach anfänglichen kleinen Übungen konnten wir bald unser erstes Programm schreiben. Wir ließen Flächen- und Oberflächeninhalte, Volumen und andere Größen ausrechnen.

Ein Programm zur Berechnung von Quadrat- und Kubikzahlen wollen wir hier vorstellen:

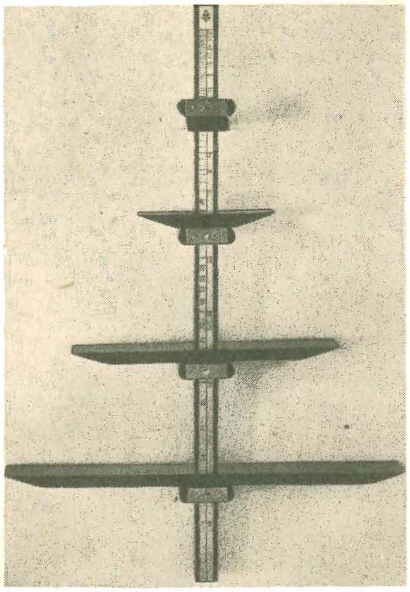
```
10  CLS
20  PRINT "BERECHNUNG VON
    QUADRAT- UND KUBIKZAHLEN"
30  PRINT "--------------
    ----------": PRINT
40  INPUT "ANFANGSZAHL:";A :
    PRINT
50  INPUT "ENDZAHL:";B : PRINT
60  PRINT "ZAHL", "QUADRAT-
    ZAHL", "KUBIKZAHL" : PRINT
70  PRINT "ZAHL", "QUADRAT-
    ZAHL", "KUBIKZAHL": PRINT
80  FOR A = A TO B STEP C
90  PRINT A, A*A, A*A*A
100 NEXT A
110 END
```



Viele von uns wollen nach diesen Anfängen gerne mit BASIC weitermachen.

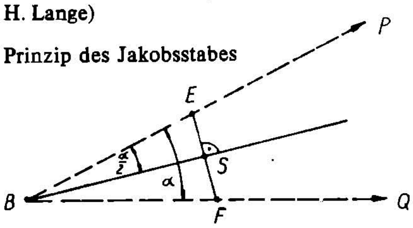
Zum Abschluß wurden die aktivsten Schüler von uns ausgezeichnet und wir sahen uns einen Film an. Allen hat dieser Kurs sehr gut gefallen, unsere Erwartungen wurden erfüllt und wir sind alle der Meinung, daß der Kurs nächstes Jahr unbedingt wieder mit BASIC verbunden werden sollte.

B. Kraft, C. Sommer, C. Adamczyk



Jakobsstab aus dem Schiffahrtsmuseum Rostock (Nachbildung, angefertigt von H. Lange)

Prinzip des Jakobsstabes



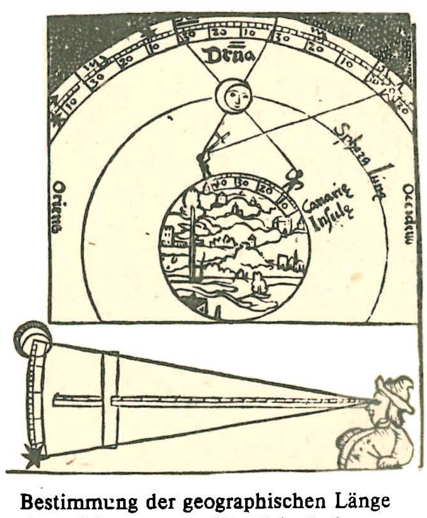
Der Jakobsstab

Im Verkehrsmuseum Dresden, im Staatlichen Mathematisch-Physikalischen Salon im Dresdner Zwinger und im Schiffahrtsmuseum Rostock findet man (meist in Nachbildungen) ein Winkelmeßgerät, das trotz oder vielleicht gerade wegen seiner theoretischen und praktischen Anspruchslosigkeit jahrhundertelang zu den wichtigsten nautischen Geräten gehörte und auch in der Astronomie und im Vermessungswesen eine bedeutende Rolle gespielt hat. Dieses Gerät ist heute hauptsächlich unter dem Namen Jakobsstab bekannt. Die deutschen Seeleute nannten es auch Gradstock oder Kreuzstab, die Engländer cross-staff, die Franzosen arbalète, die Portugiesen balestilha...

Das mathematische Prinzip des Jakobsstabes ist einfach: Der auf dem Längsstab verschiebbare Querstab (auch „Hammer" genannt) wird in eine solche Lage geschoben, daß vom Beobachterauge B am Ende des Längsstabes die auf die Endpunkte E, F des Querstabes gerichteten Sehstrahlen gleichzeitig zwei anzupeilende Punkte P, Q (z. B. Sterne oder Kirchturmspitzen) treffen. Dann ist (Bild 2) $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{ES}{SB}$ und daher für den zu messenden Sehwinkel $\alpha = 2 \arctan\frac{ES}{SB}$. Anfangs war der Längsstab mit gleichabständigen Marken (Kerben) versehen, und man mußte eine Tabelle oder Rechenvorschrift benutzen, um aus dem auf dem Längsstab abgelesenen Zahlenwert den Winkel α zu bestimmen. Vermutlich ist der Nürnberger Mathematiker Johannes Werner (1468 bis 1528) als erster auf die Idee gekommen, die Teilung des Längsstabes so zu gestalten, daß man den Winkel α dort unmittelbar ablesen konnte. Dabei sind die meßbaren Winkel nach unten durch die begrenzte Länge des Längsstabes beschränkt, und darüber hinaus ist eine für das jeweilige praktische Bedürfnis befriedigende Ablesegenauigkeit bei einem Querstab immer nur in einem gewissen Bereich von Winkeln möglich. In einer Spätphase, etwa ab Mitte des 17. bis Anfang des 19. Jh., trug der Längsstab daher mehrere Querstäbe für verschiedene Winkelbereiche, zu denen jeweils auf dem Längsstab eine entsprechende Winkelskala gehörte (vgl. Bild 1). Die so mit dem Jakobsstab insbesondere unter den schwierigen Bedingungen auf schwankendem Schiff und bei schlechtem Wetter erzielbare Meß- und Ablesegenauigkeit bewirkte zusammen mit der bei Seeleuten ausgeprägten Anhänglichkeit an Hergebrachtes und der einfachen Handhabung, daß die ab 1731 (durch John Hadley u. a.) erfundenen, prinzipiell leistungsfähigeren Spiegel-Winkelmesser Oktant bzw. Sextant sich nur sehr langsam allgemein durchsetzen konnten. Zum Beispiel empfahl der Greifswalder Mathematikprofessor Lambert Heinrich Röhl noch 1778 in seinem vielbenutzten Buch „Anweisung zur Steuermannskunst" ausdrücklich den Jakobsstab.

Über die Geschichte des Jakobsstabes gibt es eine erstaunlich umfangreiche Speziallliteratur. (Interessenten seien auf das von W. Köberer herausgegebene Buch „Das rechte Fundament der Seefahrt", Berlin: transpress-Verlag 1982, verwiesen, das neben dem Wiederabdruck klassischer Arbeiten zur Navigationsgeschichte einen guten Zugang zu weiterführender Literatur gibt.) Die beiden Hauptfragen, die in dieser Literatur lange Zeit immer wieder diskutiert wurden, sind die nach dem Erfinder bzw. nach Ort und Zeit der Erfindung des Jakobsstabes und nach der Herkunft und Bedeutung des Namens. Hinsichtlich der ersten Frage ist man sich heute ziemlich einig, daß der vielseitige jüdische Gelehrte Levi ben Gerson (1288 bis 1344) als erster Europäer den Jakobsstab und seine Verwendung beschrieben hat und daß diese Schrift in lat. Übersetzung dem Regiomontanus (1436 bis 1476, vgl. den Artikel „Eine Aufgabensammlung aus dem Jahre 1475" in alpha 1986, Heft 4) bekannt gewesen sein muß, der lange Zeit als „Vater" des Jakobsstabes galt. Der aus Spanien stammende und in Südfrankreich wirkende ben Gerson bezeichnete sich zwar selbst als Erfinder des Gerätes, das in der latein. Übersetzung auch schon als „baculus (d. h. Stab) Iacob" bezeichnet wird, es ist aber wahrscheinlich, daß ähnliche Vorrichtungen ... Idee bis auf Archimedes zurück, der sie in seiner Schrift „Die Sandrechnung" zur Bestimmung des Sehwinkels, unter dem die Sonne uns erscheint, benutzt. Über den Namen Jakobsstab gibt es noch immer verschiedene Hypothesen. Eine führt ihn auf den Erzvater Jakob des Alten Testaments und die dort im 1. Buch Mose (30.37) berichtete Geschichte zurück, wie Jakob einige in Abständen stückweise entrindete Aststäbe zur Züchtung gefleckter Schafe verwendet haben soll. Wem dies allzu weit hergeholt und unwahrscheinlich vorkommt, der bedenke, welch bestimmende Rolle religiöses Denken und innige Vertrautheit mit den Gestalten und Begebenheiten der Bibel jahrhundertelang im Leben der Menschen gespielt haben. Eine andere Hypothese stützt sich jedoch darauf, daß der Apostel Jakob (spanisch: Sanct Jago), nicht zu verwechseln mit dem Erzvater Jakob, mit dem Jünger Jesu „Jakob dem Jüngeren" oder mit „Jakob dem Gerechten", dem Führer der urchristlichen Gemeinde von Jerusalem, der Nationalheilige der Spanier ist.

Der Name Jakobsstab tritt in der deutschsprachigen Literatur erstmals als „baculus Iacob" in dem Einblattdruck von 1502 auf, danach in der erstmals 1531 in Frankfurt a. M. gedruckten Schrift „Jakobs Stab künstlich und gerecht zu machen und zu gebrauchen" des Oppenheimer Stadtschreibers Jakob Köbel. Die Mehrheit der zahlreichen Gelehrten, die im 16. und 17. Jh. die Anwendung des Jakobsstabes für verschiedenste Zwecke beschrieben, bevorzugte lateinische Bezeichnungen wie baculus astronomicus, baculus geometricus, radius visorius (J. Werner). Daß der Jakobsstab auch heute, obgleich längst außer Dienst, noch nicht ganz vergessen ist, bezeugt u. a. eine niederländische Briefmarke aus dem Jahre 1986. *P. Schreiber*

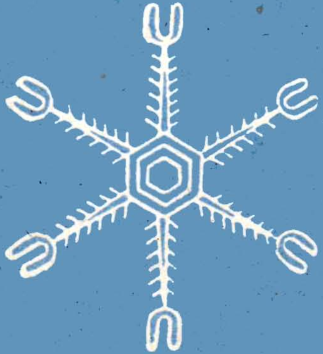


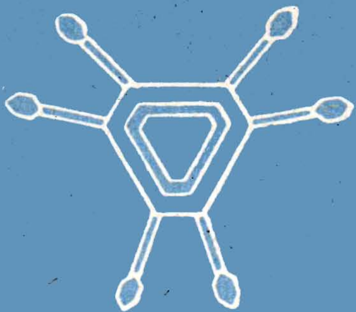
Bestimmung der geographischen Länge durch Messung von Mondabständen mittels Jakobsstab

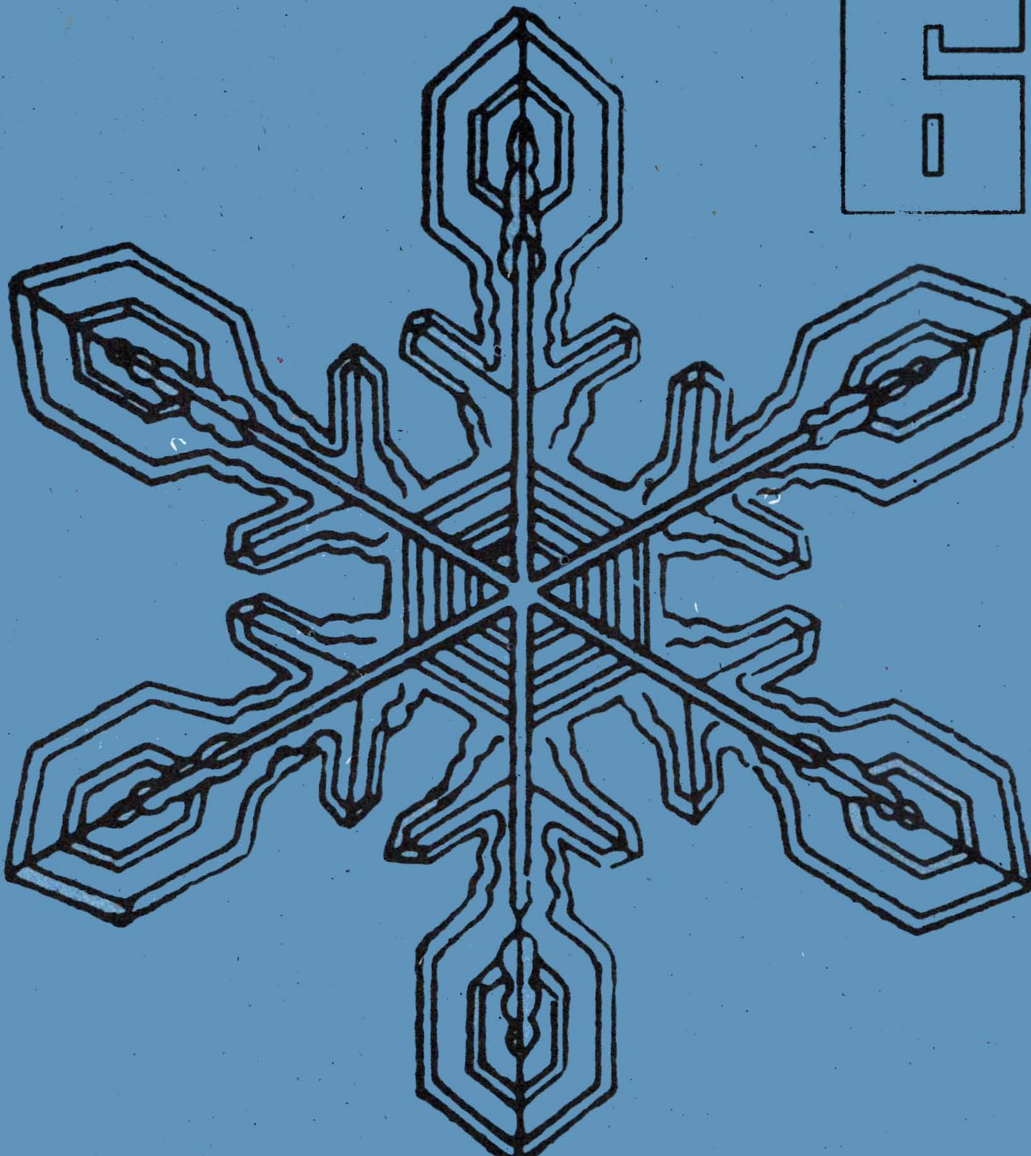
Mathematische Schülerzeitschrift

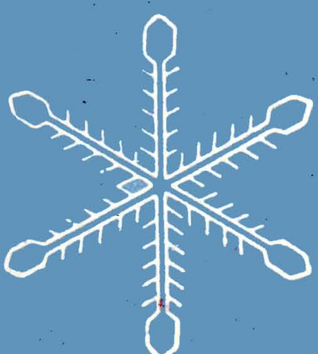
alpha

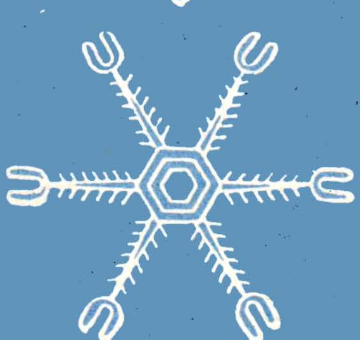
6



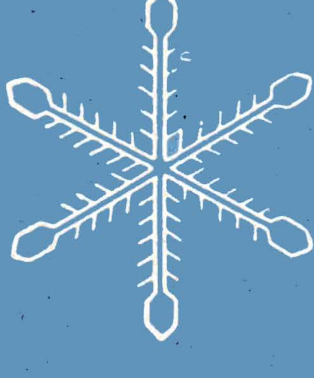


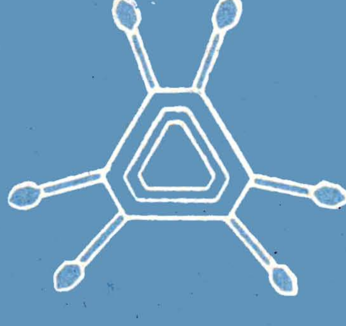


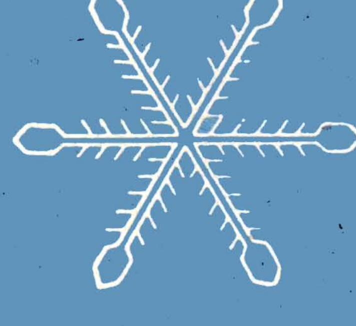




Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
23. Jahrgang 1989
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395







Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag

Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086

Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027

Redaktion:
Dr. paed. Gabriele Liebau (Chefredakteur); Rosemarie Schubert (redaktioneller Mitarbeiter)

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Dr. sc. Lothar Flade (Halle); Studiendirektor Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); OL Dr. C. P. Helmholz (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig): Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dozent Dr. sc. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dr. sc. nat. W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. sc. nat. W. Schulz (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstr. 16, Leipzig 7010.

Fotos: Foto-Service Martin, Karl-Marx-Stadt (Titelblatt, S. 121); AG alpha, Friedeburg (S. 125); Foto Wiese, Demmin (S. 128); J. Weiß (S. 129); J. Wierzba (S. 134)

Vignetten: L. Otto, Leipzig (Titelvignetten, S. 124, S. 131 r. o.)

Technische Zeichnungen: OStR G. Gruß, Leipzig

Titelblatt: W. Fahr, Berlin

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97

Artikelnummer (EDV) 128

ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 15. August 1989

Auslieferungstermin: 11. Dezember 1989

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Alphons weist die Schüler der 5. bis 7. Klasse auf speziell für sie geeignete Beiträge hin.

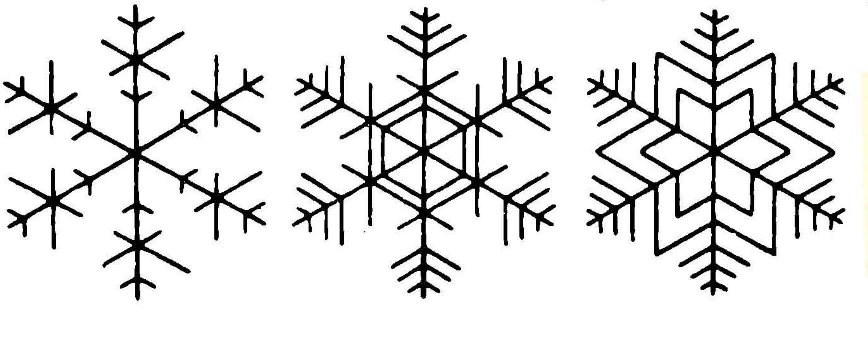
Schneekristalle

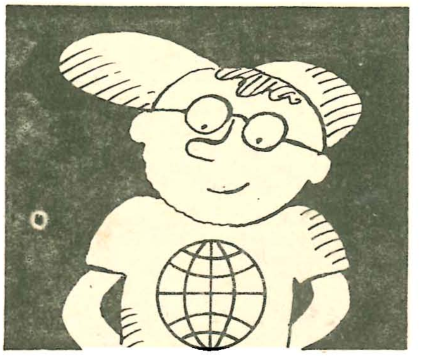
Wer hat nicht schon einmal die ersten Schneeflocken auffangen wollen, um sie zu betrachten. Es sind zarte Gebilde, die bald vergehen. Sie bestehen meist aus flachen Sternchen mit gefiederten Strahlen, selten aus dünnen Täfelchen oder Nadeln. Besonders die ebenen Figuren lassen ganz regelmäßige Formen und die sechzählige, manchmal dreizählige Symmetrie gut erkennen (siehe Titelbild und Bild 1).
Die sechszählige oder dreizählige Symmetrieachse verläuft senkrecht zur Ebene der Schneesterne oder -täfelchen durch deren Mittelpunkt. Diese Ebene ist eine Symmetrieebene. Der Schnittpunkt der sechszähligen (nicht der dreizähligen) Symmetrieachse mit ihr bildet ein Symmetriezentrum oder Inversionszentrum. Ebenfalls senkrecht zu den Sternchen und mit Schnittgeraden entlang der Strahlen und/oder ihrer Winkelhalbierenden befinden sich 3 + 3 bzw. 3 Symmetrieebenen. Bei den Täfelchen berühren diese Symmetrieebenen und Schnittgeraden die einander gegenüberliegenden Ecken und/oder Kantenmitten der Sechsecke bzw. Dreiecke. Die senkrechten Symmetrieebenen schneiden sich in der sechs- oder dreizähligen Symmetrieachse und schließen Winkel von 30° oder 60° ein. In den genannten Schnittgeraden beobachtet man 3 + 3 bzw. 3 zweizählige Symmetrieachsen. Die bei sechszähliger Symmetrie auftretenden beiden Arten der senkrechten Symmetrieebenen und der zweizähligen Symmetrieachsen sind nicht gleichwertig.
Wie alle chemischen Substanzen kristallisieren Schnee oder Eis in der ihnen eigenen, charakteristischen Gestalt. Die Symmetrie der äußeren Erscheinung wird durch die Anordnung der atomaren Bausteine, hier der H_2O-Moleküle, bedingt. Diese innere Struktur, das Kristallgitter, besitzt die oben beschriebene sechszählige Symmetrie (Kristallklasse dihexagonal-dipyramidal) oder nur eine polare, d. h. in beiden Richtungen bzw. an beiden Enden ungleiche sechszählige Symmetrieachse und 3 + 3 sich in ihr schneidende Symmetrieebenen (Kristallklasse dihexagonal-pyramidal).
Dem Zusammenhang zwischen der sichtbaren Form der Schneekristalle und ihrem inneren Aufbau ging bereits der Astronom, Physiker und Mathematiker Johannes Kepler (1571 bis 1630) nach. Seine in lateinischer Sprache verfaßte Schrift „Neujahrsgabe oder Der sechseckige Schnee" (1611) steht am Anfang der Kristallographie als Wissenschaft. Kepler erkannte als erster die sechszählige Symmetrie der Schneesternchen und versuchte, sie durch die Geometrie der Zusammenfügung von angenommenen gleichgroßen Erstarrungskügelchen des Wasserdampfes zu erklären. Mit seinen Gedanken nahm er die heute gewohnte Darstellung von Kristallstrukturen durch Kugelpackungen vorweg. Die eigentlich notwendig zu folgernde Ableitung der äußeren Symmetrie aus der inneren Anordnung der Materie gelang ihm aber nicht. Kepler beobachtete auch, daß der Schnee in Gestalt der Sternchen und der Schneegraupeln fällt. Bei dem frühen wissenschaftlichen Interesse an den Schneekristallen ist es schon bemerkenswert, wenn bis in die Gegenwart noch nicht alle Fragen ihrer Symmetrie endgültig gelöst sind.
Die Schneesternchen zeichnen sich durch zwei Besonderheiten aus. Sie sind fast nur zweidimensional entwickelt. Dadurch fehlen in der Regel Kristallflächen anderer räumlicher Orientierung, die die Symmetrie besser erkennen lassen würden. Außerdem entstehen die Schneekristalle überwiegend als Kristallskelette in Form der Sternchen mit gefiederten Strahlen. Das geschieht durch bevorzugtes Wachstum der Kristallkanten und -ecken vor den Kristallflächen. Die Ausbildung der Kristalle wird von dem Bau des Kristallgitters und den Kristallisationsbedingungen beeinflußt. Ersterer hat bei den Schneesternen offenbar das Übergewicht, was man aus ihrer Regelmäßigkeit schließen kann. *H. Beyrich*

(beide Abbildungen aus
I. I. Schafranovskij, Vorlesungen über Kristallmorphologie (russ.), Leningrad 1968)

Titelbild des Heftes
Schneekristalle mit sechszähliger und dreizähliger Symmetrie

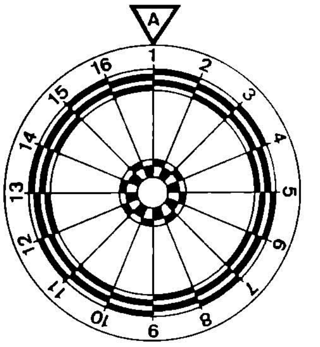
Bild 1
Schneekristalle mit sechszähliger Symmetrie (nach Nakaya)



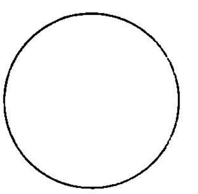


▲1▲ La loterie
Si la roue de cette loterie se déplaçait de 17 tours 11/16^e vers la droite, puis de 7 tours 1/2 vers la gauche et enfin de 9 tours 3/4 à nouveau vers la droite, quel serait le numéro gagnant situé en dessous du repère fixe A?

aus: Logigram, Paris



▲2▲ Find your centre
The drawing shows a circle whose centre is not marked. You forgot to bring your drawing instruments with you. The only thing you have is your notebook.



Can you find the centre of the circle using only sheets from the notebook?

aus: Fun with mathematics, Toronto

▲3▲ Может ли быть верным равенство
Ж · У · Р · Н · А · Л = К · В · А · Н · Т,
если в него вместо букв подставить цифры от 1 до 9? Одинаковым буквам при этом должны соответствовать одинаковые цифры, разным – разные.

aus: Quant, Moskau

Viele Aufgaben – die gleiche Methode

Bei der Bezirksolympiade 1988 lautete die Aufgabe 271234 wie folgt:

Man beweise für jedes Dreieck ABC: Bezeichnen wie üblich b, c, h_a die Längen der Seiten AC, AB bzw. der auf BC senkrechten Höhe und α die Größe des Winkels ∢ BAC, so gilt

$$h_a \leqq \sqrt{bc}\cos\frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Man ermittle alle diejenigen Dreiecke ABC, bei denen in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Bevor wir uns der Lösung zuwenden, wollen wir folgendes Leitmotiv voranstellen:

Lösungsprinzip: In allen nachfolgenden Ungleichungen treten mindestens vier Bestimmungsstücke eines Dreiecks auf. Da ein Dreieck bereits durch drei unabhängige Stücke eindeutig bestimmt ist, werden alle weiteren durch diese drei ausgedrückt. Nach dem Erreichen dieses Teilziels wird dann die entstandene Ungleichung bewiesen.

Wir wenden nun dieses Lösungsprinzip auf die oben stehende Aufgabe an. Dazu drükken wir h_a durch die anderen drei Größen aus. Die Höhe h_a tritt in der Formel $A = \frac{1}{2}ah_a$ auf. Der Flächeninhalt A läßt sich durch Dreiecksseiten und Winkelfunktionen ausdrücken. Damit haben wir einen gangbaren Weg vor Augen. (Natürlich ist es auch möglich, $\cos\frac{\alpha}{2}$ durch b, c, h_a auszudrücken. Aber aus dem Schulstoff bekannte Formeln gibt es dafür nicht. Will man b oder c durch die anderen Größen ausdrücken, so ergibt sich die gleiche Situation.)

Werden wir nun konkret.

Es ist $A = \frac{1}{2}h_a a$, also

$$h_a = \frac{2A}{a} = \frac{2\cdot 0{,}5\cdot bc\sin\alpha}{a} = \frac{bc\sin\alpha}{a} = \frac{bc\sin\alpha}{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}} \qquad (2).$$

Das Nahziel ist erreicht. Wir haben es geschafft, h_a durch b, c und Winkelfunktionen von α auszudrücken. Gelingt es nun zu zeigen, daß der letzte Term kleiner gleich $\sqrt{bc}\cos\frac{\alpha}{2}$ ist, dann ist der Beweis erbracht. Hier tritt der Faktor $\sqrt{bc}$ auf und in (2) steht bc im Zähler. Es wäre also schön, wenn wir erreichen könnten, daß der Nenner von (2) den Faktor $\sqrt{bc}$ liefert.

Es ist

$$h_a = \frac{bc\sin\alpha}{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}} = \frac{bc\sin\alpha}{\sqrt{bc}\sqrt{\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2\cos\alpha}}.$$

und $\frac{c}{b}$ dimensionslose Größen entstanden sind, die außerdem zueinander reziprok sind. Wenn wir ihre Summe durch den kleinstmöglichen Wert ersetzen, vergrößern wir den letzten Term. Nun gilt:

Für $x > 0$ ist $x + \frac{1}{x} \geqq 2$, wobei das Gleichheitszeichen genau dann steht, wenn $x = 1$ ist. (Beweist dies selbständig!)

Setzen wir $x = \frac{b}{c}$, so ist $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geqq 2$, wobei das Gleichheitszeichen genau dann steht, wenn $b = c$ gilt.

Damit erhalten wir:

$$h_a = \frac{bc\sin\alpha}{\sqrt{bc}\sqrt{\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2\cos\alpha}} \leqq \sqrt{bc}\,\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2-2\cos\alpha}}.$$

Und damit sind wir am Ziel. Wir müssen nur noch merken, daß für $0° < \alpha < 180°$ die Gleichung $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2-2\cos\alpha}}$ gilt. Tatsächlich ist (vergleicht in der Zahlentafel!)

$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ und

$$2-2\cos\alpha = 2-2\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}, \text{ so daß}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2-2\cos\alpha}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$= \cos\frac{\alpha}{2}$ ist, weil für $0° < \frac{\alpha}{2} < 90°$ die Gleichung $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sin\frac{\alpha}{2}$ gilt.

Aus der Herleitung ist ersichtlich: Das Gleichheitszeichen steht in der zu beweisenden Ungleichung genau dann, wenn $b = c$ ist.

Damit hat sich das eingangs geschilderte Lösungsprinzip als nützlich erwiesen. Überprüfen wir es an einem weiteren Beispiel.

Man beweise:

In jedem Dreieck gilt $h_a \leqq \sqrt{s(s-a)}$, wobei $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ist.

Vorüberlegung:

In s treten a, b, c auf. Also treten in der Ungleichung mit h_a vier Größen auf. Welche Größen drücken wir diesmal durch die anderen aus? Wir kennen eine Formel (sie ist nicht im Lehrplan enthalten), in der s auftritt. Es ist die Heronische Dreiecksformel. Sie lautet:

$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Die Höhe läßt sich durch A und a ausdrücken. Damit haben wir einen Lösungsplan.

Wir drücken h_a durch A, a aus, dann benutzen wir die Heronische Dreiecksformel und schließlich versuchen wir, die dann entstandene Ungleichung zu beweisen.

Lösung:

Wegen $A = \frac{1}{2}h_a a$ ist

$$h_a = \frac{2A}{a} = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}.$$

Angenommen, es gibt ein Dreieck, in dem $h_a > \sqrt{s(s-a)}$ gilt. Dann ist

$$h_a = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a} > \sqrt{s(s-a)}, \text{ also}$$

$\sqrt{(s-b)(s-c)} > \frac{a}{2}$ $(s-a,\ s,\ a > 0)$

und damit $(s-b)(s-c) > \frac{a^2}{4}$. Wegen $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ist dies äquivalent mit

$$\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2} > \frac{a^2}{4},$$

$$(a-b+c)(a+b-c) > a^2, \qquad (*)$$

$a^2 - (b-c)^2 > a^2$, also $-(b-c)^2 > 0$.

Diese letzte Ungleichung stellt einen Widerspruch dar. Also war die Annahme falsch und daher gilt für alle Dreiecke $h_a \leqq \sqrt{s(s-a)}$.

Kommentare:

1. Die Annahme stellt einen technischen Trick dar. Wir können dann die Lösung in der Reihenfolge aufschreiben, in der wir sie gefunden haben. Hätten wir diesen Trick nicht angewendet, dann hätten wir nämlich von der wahren Aussage $(b-c)^2 \geqq 0$ auf die Behauptung $h_a \leqq \sqrt{s(s-a)}$ schließen müssen. Und das bedeutet, daß wir die Lösung gerade in umgekehrter Reihenfolge in bezug auf den Findungsprozeß hätten notieren müssen.
2. Der Term für s ist erst so spät als möglich eingesetzt worden, damit die Übersichtlichkeit bewahrt bleibt.
3. Schließlich kann man in (*) ausmultiplizieren oder man sieht, daß die linke Seite von der Form $(a-x)(a+x)$ mit $x = b - c$ ist und verwendet die dritte binomische Formel.

Wenden wir uns einer dritten Aufgabe zu.

Man beweise:

In jedem Dreieck gilt

$$A \leqq \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+c^2). \qquad (3)$$

Vorbetrachtungen:

Erneut treten in der zu beweisenden Ungleichung vier Größen auf. Der Flächeninhalt ließe sich mittels der Heronischen Dreiecksformel durch a, b, c ausdrücken. Doch wegen der Wurzel und dem Produkt aus vier Faktoren wird man versuchen, diesen rechenaufwendigen Weg zu umgehen. (Am Schluß des Artikels wird gezeigt, wie auch dieser Weg zum Ziel führt.) Als nächste Formel käme $A = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ in Betracht, aber mit ihr haben wir für A die neue Größe α erhalten. Wir könnten dann a mittels Kosinussatz durch b, c, α ausdrücken und haben dann an Stelle der vier Größen A, a, b, c drei neue, nämlich b, c, α.

Nach dem Einsetzen ist die obige Ungleichung äquivalent mit

$$\frac{1}{2} bc\sin\alpha \leqq \frac{\sqrt{3}}{12}(c^2+b^2+c^2+b^2 - 2bc\cos\alpha),$$ also

$$c^2+b^2-cb(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)\geqq 0.$$

Für den Beweis dieser Ungleichung gibt es nun einige Standardverfahren:

1. Auf der linken Seite der Ungleichung steht ein in c (oder b) quadratischer Term. Dieser soll für alle c nicht negativ sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Diskriminante nicht positiv ist. Es genügt also zu zeigen, daß

$$D=(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)^2-4\leqq 0$$ ist.

Dies ist aber nacheinander äquivalent mit

$$\cos^2\alpha + 2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha + 3\sin^2\alpha - 4 \leqq 0,$$
$$\cos^2\alpha - 1 + 2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha + 3(\sin^2\alpha - 1) \leqq 0,$$
$$-\sin^2\alpha + 2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha \leqq 0,$$
$$-(\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha)^2 \leqq 0$$ und diese Ungleichung gilt für alle α, so daß der Beweis erbracht ist.

2. Die Ungleichung ist nach Division durch $b^2>0$ mit der Substitution $x=\frac{c}{b}>0$ äquivalent mit

$$x^2 - x(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)+1 \geqq 0.$$

Der Gültigkeitsnachweis gelingt nun wie in 1., wobei euch vielleicht dieser Weg vertrauter ist, da ihr statt c und b eine vertraute quadratische Ungleichung vor euch habt.

3. Der linke Term legt es nahe, Terme wie c^2+b^2+2cb oder c^2+b^2-2cb ins Spiel zu bringen. Dazu müssen wir aber wissen, welche Werte $\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$ annehmen kann. Ein Standardweg besteht darin, die Extremwertberechnung auf die Funktion $f(\alpha)=\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$ anzuwenden.
(Führt dies selbständig durch!) Vielleicht geht es aber auch ohne Differentialrechnung.

Außerdem wollen wir noch etwas mehr wissen, nämlich:

Man untersuche, welchen maximalen (minimalen) Wert der Term $s\sin\alpha+t\cos\alpha$ einen Beweisversuch starten. Aber leider haben wir nichts derartiges. Es geht aber wie folgt:

Es ist $s\sin\alpha+t\cos\alpha=\sqrt{s^2+t^2}$

$$\times\left(\frac{s}{\sqrt{s^2+t^2}}\sin\alpha+\frac{t}{\sqrt{s^2+t^2}}\cos\alpha\right).$$

Nun ist $-1\leqq \frac{s}{\sqrt{s^2+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{s^2+t^2}} \leqq 1.$

(Überzeugt euch selbst!)

Es gibt also (wie groß er wirklich ist, interessiert uns gar nicht!) einen Winkel β, für den

$$\cos\beta=\frac{s}{\sqrt{s^2+t^2}} \text{ und } \sin\beta=\frac{t}{\sqrt{s^2+t^2}}$$

ist. (Tatsächlich ist nämlich

$$\sin^2\beta+\cos^2\beta=\frac{t^2}{s^2+t^2}+\frac{s^2}{s^2+t^2}=1!).$$

Damit gilt

$$s\sin\alpha+t\cos\alpha$$
$$=\sqrt{s^2+t^2}\,(\cos\beta\sin\alpha+\sin\beta\cos\alpha)$$
$$=\sqrt{s^2+t^2}\,\sin(\alpha+\beta) \text{ und somit}$$
$$-\sqrt{s^2+t^2}\leqq s\sin\alpha+t\cos\alpha\leqq\sqrt{s^2+t^2}$$

wegen $-1\leqq\sin(\alpha+\beta)\leqq 1$.

Etwas kürzer läßt sich das Ergebnis durch die Ungleichung

$|s\sin\alpha+t\cos\alpha|\leqq\sqrt{s^2+t^2}$ fassen.

Nun hat sich die Situation gewandelt – nun kennen wir das Ergebnis – nun können wir dieses Resultat (zum zweiten Mal) beweisen.

Beweis: Für alle s, t, α ist

$$(t\sin\alpha-s\cos\alpha)^2\geqq 0.$$

Dies ist nacheinander äquivalent mit

$$t^2\sin^2\alpha-2ts\sin\alpha\cos\alpha+s^2\cos^2\alpha\geqq 0,$$
$$t^2+s^2\geqq t^2(1-\sin^2\alpha)+2ts\sin\alpha\cos\alpha+s^2(1-\cos^2\alpha),$$
$$t^2+s^2\geqq t^2\cos^2\alpha+2ts\sin\alpha\cos\alpha+s^2\sin^2\alpha,$$
$$t^2+s^2\geqq(t\cos\alpha+s\sin\alpha)^2.$$

Hieraus ergibt sich durch Radizieren die Behauptung.

(Man vergleiche diesen Weg mit der Untersuchung von D unter 1.!)

Kehren wir zurück. Es ist also

$$-2=-\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\leqq\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$$
$$\leqq\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2 \text{ und damit}$$
$$(c+b)^2=c^2+b^2+2cb$$
$$\geqq c^2+b^2-cb(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)$$
$$\geqq c^2+b^2-2cb=(c-b)^2\geqq 0$$

und damit ist auch die letzte Lücke geschlossen. Nun wollen wir eine letzte Ungleichung besprechen.

Man beweise: In jedem Dreieck gilt

$$\sqrt{3}\,(a+b+c)\geqq 2(h_a+h_b+h_c). \qquad (4)$$

Vorüberlegung:

Nun treten in der Ungleichung sogar sechs Größen auf. Nach den bisherigen Überlegungen liegt es nahe, den Versuch zu machen, die Höhen durch A und die Seiten auszudrücken. Damit ist die obige Ungleichung äquivalent mit

$$\sqrt{3}\,(a+b+c)\geqq 4A\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$
$$=2\left(\frac{2A}{a}+\frac{2A}{b}+\frac{2A}{c}\right)=2(h_a+h_b+h_c).$$

Eine Ungleichung zwischen A und den Seiten hatten wir gerade besprochen. Es gilt

$$A\leqq\frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+c^2), \text{ also auch}$$
$$4A\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\leqq\frac{\sqrt{3}}{3}(a^2+b^2+c^2)\times\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Wenn es uns gelingt,

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\leqq\sqrt{3}\,(a+b+c) \qquad (*)$$

zu zeigen, dann haben wir den Beweis erbracht. Wenn dies möglich ist, dann haben wir die Ungleichung durch das „Zwischenschieben" des Terms

$\frac{\sqrt{3}}{3}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ bewiesen.

Vorsichtshalber überprüfen wir (*) an einem konkreten Beispiel. Es sei etwa $a=3$, $b=4$, $c=5$. Einsetzen liefert sofort, daß (*) nicht erfüllt ist. Dann ist aber die Idee mit dem „Zwischenschieben" eines Terms nicht realisierbar.

Vielleicht gelingt es uns aber zu beweisen, daß folgende Aussage gilt:

Für $a, b, c>0$ gilt die Ungleichung

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqq\sqrt{3}\,(a+b+c). \qquad (5)$$

Ein Zugang besteht darin, daß man $a+b+c=2s$ beachtet, denn wir hatten eine Höhe durch Terme von s abgeschätzt.

Es ist

$$2(h_a+h_b+h_c)\leqq 2\left(\sqrt{s(s-a)}+\sqrt{s(s-b)}+\sqrt{s(s-c)}\right),$$

und nun ist zu zeigen, daß der letzte Term kleiner oder gleich $2\sqrt{3}\,s$ ist. Nach Division durch $2\sqrt{s}$ entsteht hieraus die äquivalente, aber noch zu beweisende Ungleichung

$$\sqrt{s-a}+\sqrt{s-b}+\sqrt{s-c}\leqq\sqrt{3s}.$$

Wenn man versucht, das Quadrieren zu vermeiden, so wird man

$x=\sqrt{s-a}$, $y=\sqrt{s-b}$, $z=\sqrt{s-c}$

substituieren. Dann gilt offenbar $x^2+y^2+z^2=s$ und die zu beweisende Ungleichung nimmt die Form

$x+y+z\leqq\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}$ oder

$\frac{x+y+z}{3}\leqq\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$ an.

Wir erkennen: Links steht das arithmetische Mittel der positiven Zahlen x, y, z und auf der rechten Seite das Quadratmittel.

Wir beweisen nun ganz allgemein:

Für $x, y, z\in R$ gilt

$$\frac{x+y+z}{3}\leqq\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}. \qquad (6)$$

Beweis: Für beliebige $x, y, z\in R$

$$\frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(y-z)^2+\frac{1}{2}(z-x)^2\geqq 0,$$
$$x^2+y^2+z^2\geqq xy+yz+zx,$$
$$2x^2+2y^2+2z^2\geqq 2xy+2yz+2zx,$$
$$3(x^2+y^2+z^2)\geqq x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=(x+y+z)^2$$

und hieraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Bemerkung: Man kann diese Ungleichung auf n Zahlen x_i, $i=1,2,\dots,n$ ausdehnen. Der entsprechende Satz lautet dann:

Für beliebige n reelle Zahlen x_i, $i=1,2,\dots,n$ gilt

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\leqq\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}{n}}.$$

Den Beweis könnt ihr selbst führen. Er ist dem obigen sehr ähnlich. Damit ist dann aber auch die Ungleichung (4) bewiesen.

Nun beweisen wir noch die Ungleichung (5), die bei unseren Beweisversuchen entstand. Dazu überführen wir sie in die äquivalente Form

$$\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\right)^2\geqq\frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

Fortsetzung auf Seite 143

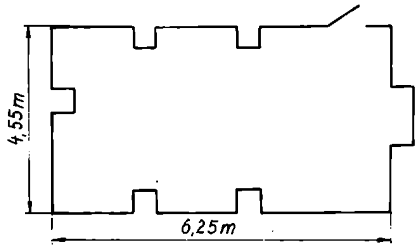
Viele Ziffern verderben den Brei

Klaus rechnet hin und wieder mit dem Taschenrechner seiner großen Schwester. Damit macht ihm das Lösen von Mathe-Aufgaben viel mehr Spaß als bisher, da man die Ergebnisse unter Umständen mit acht Ziffern angeben kann. Klaus ist fest davon überzeugt, daß er auf diese Weise die Ergebnisse „ganz genau" ermittelt.
Hier nun einige Aufgaben mit den Lösungen von Klaus.

1. Herr Schmidt legt die Strecke von Cottbus nach Falkenberg (85 km) mit seinem Trabant in 90 min zurück.
Klaus gibt an, daß Herr Schmidt im Durchschnitt die Strecke Cottbus – Falkenberg mit einer Geschwindigkeit von $56{,}666\,667\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zurückgelegt hat.

2. Klaus entnimmt dem Kursbuch die Entfernung von Halle (Hbf.) bis Leipzig (Hbf.). Es sind 37,6 km. Diese Entfernung legt er der Berechnung des Fahrpreises zugrunde (Fahrpreis für Personenzüge je Kilometer 0,08 M). Für den Fahrpreis ermittelt Klaus zunächst 3,008 M. Er gibt das Ergebnis auf Pfennige gerundet mit 3,01 M an.

3. Der Fußboden des Klubraumes soll neu gestrichen werden (siehe Bild). Um die notwendige Farbe einkaufen zu können, muß der Flächeninhalt des Fußbodens ermittelt werden.
Klaus vereinfacht das Problem, indem er von einem rechteckigen Fußboden ausgeht. Er ermittelt als Flächeninhalt $28{,}437\,5\ \text{m}^2$.



Was meint ihr? Hat Klaus die Resultate der einzelnen Aufgaben mit sinnvoller Genauigkeit angegeben?

Aufgabe 1

Sowohl die zurückgelegte Strecke (85 km) als auch die benötigte Fahrzeit (90 Minuten) sind Meßwerte – also Näherungswerte. Damit steht fest, daß auch der Zahlenwert für die Durchschnittsgeschwindigkeit ein *Näherungswert* ist. Auf Grund der *Faustregel* über die Angabe des Resultats bei Quotienten von Näherungswerten wäre es sinnvoll, den für die Durchschnittsgeschwindigkeit ermittelten Näherungswert nicht mit mehr als zwei Ziffern anzugeben.
Also $57\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

▲1▲ Ermittle eine untere und eine obere Wertschranke für die Durchschnittsgeschwindigkeit!

Wie eine Wertschrankenberechnung zeigt, liegt die Durchschnittsgeschwindigkeit in folgendem Intervall:

$$\frac{84{,}5\cdot 60}{95}\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \leqq v \leqq \frac{85{,}5\cdot 60}{85}\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$53{,}3\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \leqq v \leqq 60{,}4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Damit wird deutlich, daß die Angabe $57\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ noch etwas zu genau ist. Trotzdem scheint dieses Resultat sinnvoll zu sein. Ein weiteres Aufrunden z. B. auf $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ wäre eine zu grobe Information über die Durchschnittsgeschwindigkeit und eine Resultatsangabe mit mehreren Stellen nach dem Komma würde eine nicht vorhandene Genauigkeit vortäuschen.

Aufgabe 2

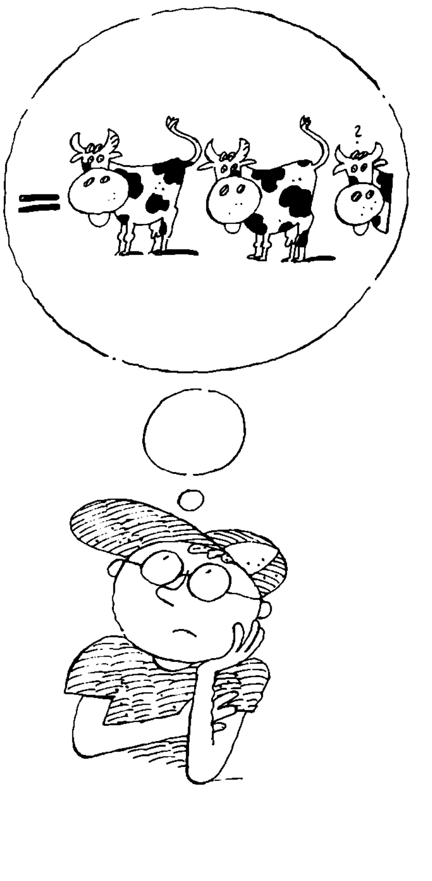
Obwohl bei dieser Aufgabe zur Berechnung des Fahrpreises einer Fahrkarte von Halle nach Leipzig nur von genauen Werten (Tarifkilometer 38; Fahrpreis je Tarifkilometer 0,08 M) auszugehen ist, entspricht das von Klaus rechnerisch richtig ermittelte Resultat nicht dem tatsächlichen Fahrpreis. Das liegt an dem konkreten *Sachverhalt*. Die Deutsche Reichsbahn rundet nämlich entsprechend einer speziellen Preistafel die Fahrpreise bis 2,– M auf Vielfache von 10 Pf bzw. ab 2,– M auf Vielfache von 20 Pf auf.

▲2▲ Ermittle aus nachstehendem Auszug der Preistafel den Fahrpreis (2. Klasse) für die Strecke Halle – Leipzig!

km	31	32	34	35	36
Preis in M	2,60	2,60	2,80	2,80	3,00
km	37	38	39	40	41
Preis in M	3,00	3,20	3,20	3,20	3,40

Aufgabe 3

Klaus wendet bei der zu berechnenden Fläche bewußt die Formel für den Flächeninhalt eines Rechtecks an, obwohl die Fußbodenfläche nicht rechteckig ist. Abgesehen von den Aussparungen ist wohl auch nicht zu erwarten, daß die Winkel genau 90° sind usw. Diese Vereinfachung ist sicher *zweckmäßig* und sinnvoll, bezogen auf den Sachverhalt (Einkauf von Farbe). Ausgehend von diesen Vereinfachungen ist bereits klar, daß das Ergebnis nur ein Näherungswert sein kann. Hinzu kommt, daß die Zahlenwerte für die Länge und Breite des Raumes als Meßwerte, Näherungswerte sind. Klaus täuscht daher mit seinem Ergebnis von $28{,}437\,5\ \text{m}^2$ eine viel zu hohe, real gar nicht vorhandene Genauigkeit vor.
Nutzt man für die Resultatsangabe die Faustregeln für das Arbeiten mit Näherungswerten (Multiplikation), so könnte man den Näherungswert für den Flächeninhalt auf drei Ziffern gerundet angeben. Dabei muß man aber beachten, daß es bei Materialberechnungen notwendig ist, auch abweichend von den Rundungsregeln aufzurunden (sinnvolles Resultat $28{,}5\ \text{m}^2$).
Da das Ergebnis eine Grundlage für die zu kaufende Farbe darstellt, ist auch ein Aufrunden auf volle Quadratmeter sinnvoll. Bezogen auf den konkreten Sachverhalt wäre hier als Ergebnis $29\ \text{m}^2$, ja sogar auch $30\ \text{m}^2$ gerechtfertigt.
Aus der Diskussion zu den einzelnen Aufgaben ist deutlich geworden, daß eine Resultatsangabe mit sinnvoller Genauigkeit stets ein tieferes Nachdenken über die gegebenen Zahlenwerte und den speziellen Sachverhalt erfordert.
Ein Vorgehen wie bei Klaus, der ein Ergebnis mit möglichst vielen Ziffern angibt,



zeugt nicht gerade von mathematischem Sachverstand, da dadurch, wie ihr gesehen habt, eine nicht vorhandene Genauigkeit vorgetäuscht wird.
Um ein Ergebnis mit sinnvoller Genauigkeit anzugeben, muß man also die Aufgabenstellung gründlich durchdenken:

- Treten unter den gegebenen Zahlen oder Größen Näherungswerte auf? Wie genau sind diese?
- Wurde eventuell bei der Berechnung der Sachverhalt idealisiert?
- Welche Forderungen stellt eventuell der gegebene Sachverhalt an die Resultatsangabe?

Versucht nun selbst einmal, folgende Aufgaben zu lösen! Achtet dabei auf die Angabe des Ergebnisses mit sinnvoller Genauigkeit!

▲3▲ Ein Werkstück besitzt einschließlich Verpackung eine Masse von 7,3 kg. Die Masse des Werkstücks allein beträgt das Zehnfache der Masse der Verpackung. Gib die Masse der Verpackung an!

▲4▲ Im Ferienlager führt Herr Knifflig mit den Schülern der unteren Klassen einen Mathe-Quiz durch. Als Preis wählt er zwei Buchtitel („2×2 plus Spaß dabei“ für 2,60 M und „Kurzweil durch Mathe“ für 10,00 M). Dafür stehen ihm 40,00 M zur Verfügung. Insgesamt sollen acht Schüler ausgezeichnet werden. Wieviel Bücher für 10,00 M kann Herr Knifflig unter diesen Bedingungen höchstens kaufen?

▲5▲ Eine Flurwand soll einen Ölfarbenanstrich von 1,55 m Höhe erhalten. Die Länge der zu streichenden Wand beträgt 19 m. Es soll vorgestrichen und lackiert werden. Der Hersteller gibt als Ergiebigkeit der Ölfarbe einen Durchschnittswert von 7 m² pro 1 kg an.
a) Wieviel Kilogramm Lackfarbe bzw. Vorstreichfarbe werden benötigt?
b) Eine Büchse der Ölfarbe enthält 0,8 kg. Wie viele Büchsen sind jeweils zu kaufen?

L. Flade/M. Pruzina

Buchtips

Ju. A. Šaškin

Ecken, Flächen, Kanten

120 S., 44 Abb.
Bestell-Nr. 571 830 7 Preis: 8,70 M
MSB Nr. 136

E. Quaisser/H.-J. Sprengel

Geometrie in Ebene und Raum

224 S., 154 Abb.
Bestell-Nr. 571 828 6 Preis: 13,80 M
MSB Nr. 137

Beide Titel: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

H. Schleusener/B. Viehweger

Programme, Rechner und Dateien

etwa 160 S., 63 Abb., 18 Tab.
Bestell-Nr. 547 532 5 Preis: etwa 5,50 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

20 Jahre alpha in Friedeburg

Wir sind Schüler der kleinen Landschule Friedeburg. Im Oktober 1988 hatten wir einen guten Grund zum Feiern. Seit 20 Jahren nehmen Schüler unserer Schule ohne Unterbrechung am *alpha*-Wettbewerb teil. Zu unserem Appell waren aus der gesamten Republik ehemalige Schüler angereist.
Besonderes Vorbild ist für uns Dr. Petra Dietzel, die 1968/69 als erste Preisträgerin unserer Schule geehrt wurde. Wir haben viele *alpha*-Abzeichen in der Zwischenzeit für mehrjährige Teilnahme bekommen, am ausdauerndsten ist der jetzige Mathematiklehrer Bernd Hartwig mit 15jähriger Teilnahme.
Ein besonderes Erlebnis hatten wir, als in der ganzen DDR eine von unserer Heike Brüggemann ausgedachte Wettbewerbsaufgabe gelöst wurde.
Neben unserer zielstrebigen mathematischen Arbeit kümmern wir uns auch um die Ausgestaltung unseres Mathematikraumes. Natürlich beschäftigen wir uns in unserer Freizeit nicht nur mit Mathematik. Wir waren z. B. in diesem Jahr auch im Theater und im Museum in Halle.

AG alpha, Klasse 4, 7a, 7b

In meiner *alpha*-Gruppe, Klasse 7, sind sechs Schüler mit sehr guten mathematischen Leistungen. Wir möchten einen Hoch- oder Fachschulberuf erlernen, bei dem Mathematik eine große Rolle spielen wird. Die leichteren *alpha*-Aufgaben erledigen wir als Hausaufgaben, mit den schwereren Problemen und mit Kreisolympiadeaufgaben vergangener Jahre beschäftigen wir uns in der Arbeitsgemeinschaft.
Wir sind sehr stolz darauf, daß Nicole Schüler und Tobias Gerlach zweimal Preisträger waren und Janet Goßrau, Götz Lothal und Dominik Schewski einmal Auszeichnungen der *alpha*-Redaktion erhalten haben.

Dominik Schewski, Kl. 7

In unserer *alpha*-Gruppe, Klasse 7, sind überwiegend Schüler mit guten mathematischen Leistungen.
Wir nehmen schon vier Jahre am Wettbewerb teil und haben immer noch Freude daran. Wir suchen uns leichtere Wettbewerbsaufgaben aus und merken, daß wir dadurch im Unterricht beim Lösen von Textaufgaben gut vorangekommen sind. Wir sind optimistisch, daß wir unsere Mathematiknote bis zur 10. Klasse verbessern können. Die *alpha*-Urkunden und das *alpha*-Abzeichen sind uns ein großer Ansporn dabei.

Janet Goßrau, Kl. 7

Wir sind acht Schüler der 4. Klasse und damit die jüngsten *alpha*-Mitglieder. Durch unsere Eltern und Verwandten kannten wir die Arbeitsgemeinschaft schon. Wir treffen uns wöchentlich 1 Stunde. An unserer ersten Wettbewerbsaufgabe haben wir 45 Minuten gearbeitet. Aber jetzt geht es schon schneller. Wir freuen uns riesig über jede Lösungskarte. Im Oktober gab es das erste *alpha*-Abzeichen für uns alle und das soll noch lange nicht unser letztes sein!
Wir wollen euch eine selbst ausgedachte Aufgabe stellen:
Löst folgendes Kryptogramm

$$\begin{array}{r} \text{HAUS} \\ +\ \text{MAUS} \\ \hline \text{LAUBE} \end{array}$$

Setzt dabei für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern ein, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

Manuela Voigt, Kl. 4

Kundendienst für Ortsunkundige: Friedeburg (Saale) liegt im Bezirk Halle, Kreis Hettstedt

Ehemalige Schüler, Teilnehmer an den ersten *alpha*-Wettbewerben, gemeinsam mit jetzigen Arbeitsgemeinschaften zum Festappell im Oktober 1988

Die Quadratur der Parabel

Zum 2200. Jahrestag des Todes von Archimedes Teil 1

Bei fast allen Messungen von Flächen dient das Quadrat als Grundeinheit der Flächenmaße. Man wählt dazu dasjenige Quadrat, dessen Seite die gewählte Längeneinheit ist. Ist also das Meter als Längeneinheit gewählt, so ist das Quadratmeter die Einheit des Flächenmaßes. Das Parallelogramm mit vier gleichen Seiten und vier rechten Winkeln, also das Quadrat, hat bei der Flächeninhaltsbestimmung somit eine große Bedeutung.

Unter der Quadratur einer ebenen geometrischen Figur versteht man ihre Verwandlung in ein Quadrat, d. h. die Konstruktion eines Quadrats, das mit ihr den gleichen Flächeninhalt hat. Es ist leicht, eine geradlinig begrenzte Figur in ein Quadrat zu verwandeln. Die Quadratur des Rechtecks ist die alte Aufgabe, die mittlere Proportionale m zwischen zwei gegebenen Strecken a, b (die Seiten des Rechtecks) zu bestimmen: $a:m = m:b$
oder $ab = m^2$. Eine Lösung dieser Aufgabe ist Bild 1 zu entnehmen. $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ seien die gegebenen Strecken. Man zeichne über $\overline{AC}$ den Halbkreis und ziehe $\overline{BD} = m$ von B aus rechtwinklig zur Geraden AC. Das Dreieck ADC ist bei D rechtwinklig. Die Dreiecke an der Höhe (Lot) $\overline{DB}$ sind einander ähnlich. Daher gilt:
$\overline{AB}:\overline{BD} = \overline{BD}:\overline{BC}$, d. h. $a:m = m:b$, wie verlangt.

Bild 1

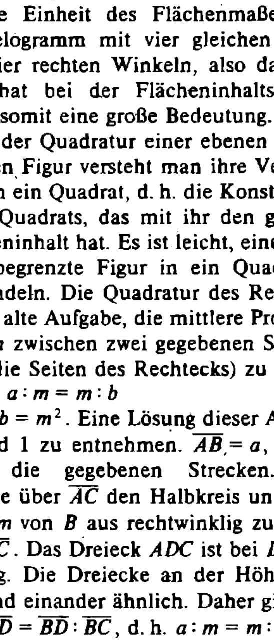
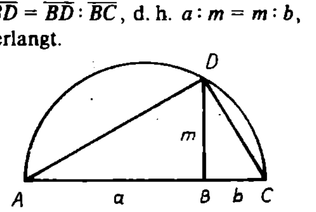


Bild 2



Es ist leicht, ein Dreieck in ein Rechteck (und damit in ein Quadrat) zu verwandeln. Hat das Dreieck die Basis c und die Höhe h, so leistet das Rechteck mit den Seiten c und $\frac{h}{2}$ das Verlangte (Bild 2), denn der Flächeninhalt beider Figuren ist $c\cdot\frac{h}{2}$.

Da es möglich ist, ein beliebiges Vieleck in ein anderes Vieleck mit gleichem Flächeninhalt zu verwandeln, das eine Seite weniger hat (Aufgabe P1: Wie?), so kann man durch Fortsetzung dieses Verfahrens das Vieleck schließlich in ein Dreieck verwandeln. Dieses kann dann in ein Rechteck und das Rechteck in ein Quadrat verwandelt werden.

Daß man auch krummlinig begrenzte Figuren quadrieren kann, zeigte schon im 5. Jahrhundert v. u. Z. Hippokrates von Chios. Es handelte sich um die Quadratur gewisser von zwei Kreisbögen begrenzter Flächenstücke („Möndchen des Hippokrates", siehe H. Pieper, Heureka – Ich hab's gefunden, Mathematische Schülerbücherei, Band 135, Berlin 1988).

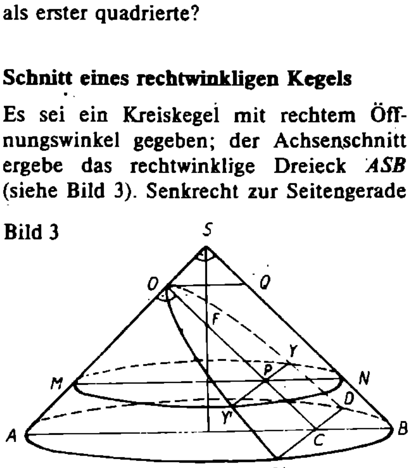
Im 3. Jahrhundert v. u. Z. gelang dem genialen griechischen Mathematiker Archimedes (um 287 bis 212 v. u. Z.) die Quadratur eines weiteren krummlinig begrenzten Flächenstücks. Er schrieb darüber: „Einige frühere Geometer haben zu beweisen versucht, daß es möglich sei, eine geradlinig begrenzte Fläche zu finden, die einem gegebenen Kreise und einem gegebenen Kreissegment gleich ist; darauf haben sie versucht, die von dem Schnitt des ganzen Kegels und einer geraden Linie begrenzte Fläche [also wohl ein Ellipsensegment] zu quadrieren, indem sie schwerlich zulässige Hilfssätze voraussetzten, so daß die meisten erkannten, daß die Aufgabe nicht gelöst war. Aber ich habe nichts davon gehört, daß einer meiner Vorgänger versucht hätte, das von einer geraden Linie und dem Schnitt eines rechtwinkligen Kegels begrenzte Segment zu quadrieren, eine Aufgabe, deren Lösung ich jetzt gefunden habe."

Was ist das für eine teils krummlinig, teils geradlinig begrenzte Figur, die Archimedes als erster quadrierte?

Schnitt eines rechtwinkligen Kegels

Es sei ein Kreiskegel mit rechtem Öffnungswinkel gegeben; der Achsenschnitt ergebe das rechtwinklige Dreieck ASB (siehe Bild 3). Senkrecht zur Seitengerade

Bild 3

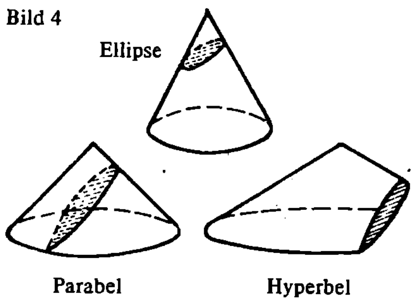


SA sei durch O eine Schnittebene gelegt. OC sei der Durchschnitt der Schnittebene mit dem Dreieck ASB. Man ziehe durch O parallel zum Durchmesser AB die Gerade OQ, ferner die Gerade MN parallel zu AB durch einen Punkt P der Geraden OC, überdies die Gerade $Y'PY$ parallel zur Schnittgeraden $D'CD$ des Grundkreises mit der Schnittebene. Das Flächenstück, begrenzt von der Geraden DD' und der Kurve $D'Y'OYD$, ist es, das Archimedes als erster quadriert hatte.

Kegelschnitte

Die Kurve, die man so erhält, bezeichneten die alten Griechen, so auch Archimedes, als „rechtwinkligen Kegelschnitt". Erst Apollonios, der etwa ein Vierteljahrhundert nach Archimedes geboren wurde, führte die Bezeichnung „Parabel" ein. Die Kurve, die man erhält, wenn man einen Kegel mit stumpfem bzw. spitzem Öffnungswinkel mittels einer Schnittebene, die auf einer der Seitenlinien des Kegels senkrecht steht, schneidet, wurde „stumpfwinkliger Kegelschnitt" (Hyperbel) bzw. „spitzwinkliger Kegelschnitt" (Ellipse) genannt (Bild 4). Durch diese Kegelschnitte wurden „Darstellungen" für Kurven gegeben, die als ebene Kurven wahrscheinlich schon eher bekannt waren.

Bild 4



Als „Entdecker" der Kegelschnitte wird Menaichmos (4. Jh. v. u. Z.) angesehen. Aristaios und Euklid (beide lebten in der zweiten Hälfte des 4. Jh. v. u. Z.) haben bereits (heute verschollene) Bücher darüber geschrieben. Auf diese „Kegelschnittslehren" konnte Archimedes sich berufen.

Die Gleichung der Parabel

Menaichmos, der in Platons Akademie in Athen wirkte, soll bereits die „Symptomata", also so etwas wie die Gleichungen dieser Kegelschnitte gekannt haben. Wie er sie erhielt, ist nicht bekannt. Wir setzen für einen beliebigen Punkt Y der Parabel (s. Bild 3) $PY = y$, $OP = x$. Die von Archimedes als „das Stück bis zur Achse" bezeichnete Strecke OF (SF ist ja die Achse des Kegels), werde mit p bezeichnet. Dann gilt:

(1) $\quad y^2 = 2px$.

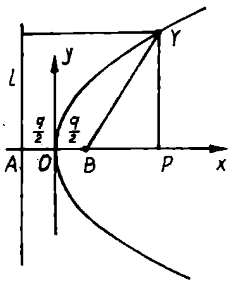
Beweis (s. Bild 3): Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke MPO und OQS ist
$PM : PO = OQ : QS$. Daher ist auch
$PM \cdot PN : PO \cdot PN = OQ : QS$. Da $PY^2 = y^2 = PM \cdot PN$ (Höhensatz im bei Y rechtwinkligen Dreieck MNY) und $PN = OQ$ ist, folgt $y^2 : PO \cdot OQ = OQ : QS$, d. h.

$y^2 = x\frac{OQ^2}{QS}$. Für die Diagonale OQ des Quadrats $OFQS$ gilt nach dem Satz von Pythagoras $OQ^2 = 2QS^2$. Somit ist $y^2 = x \cdot 2 \cdot QS = 2px$ (weil $QS = OF = p$ ist). Q. e. d.

Eine andere Parabeldefinition

Der griechische Gelehrte Pappos (um 320 u. Z.) gab in seiner „Mathematischen Sammlung" sinngemäß folgende Definition der Parabel (s. Bild 5). Eine Parabel ist die Menge aller Punkte Y, für die die Entfernung von einem festen Punkt B (Brennpunkt genannt) so groß ist wie ihr Abstand von einer festen Gerade l (Leitlinie genannt).

Bild 5



Die Entfernung des Brennpunkts von der Leitlinie werde mit q bezeichnet.

Wir wählen, um die Gleichung der Parabel zu erhalten, die x-Achse so, daß sie durch B verläuft und auf l (in A) senkrecht steht. Als Anfangspunkt wählen wir O so, daß $AO = OB = \frac{q}{2}$ ist. Die Parallele zu l durch O sei die y-Achse. Dann gilt

(2) $y^2 = 2qx$.

Beweis: Der beliebige Parabelpunkt Y habe die Koordinaten (x, y) und P sei der Punkt $(x, 0)$. Dann gilt $BP^2 + PY^2 = BY^2$,

d. h. $\left(x - \frac{q}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{q}{2}\right)^2$, denn der Abstand von Y und B ist laut Definition der Parabel so groß wie der Abstand von Y und l $\left(\text{der gleich } x + \frac{q}{2} \text{ ist}\right)$. Hieraus folgt (2). Q. e. d.

Eine jede Kurve der Form $y^2 = 2qx$ läßt sich natürlich durch Abtragen von $SO = OF = q$ (Bild 3) auf die oben beschriebene Weise als Schnitt eines geraden und rechtwinkligen Kreiskegels erhalten.

Anwendungen

Das „klassische" Problem der Verdopplung des Würfels (siehe Pieper, Heureka...), das darin besteht, zu einem gegebenen Würfel der Seitenlänge q die Seitenlänge x des Würfels mit doppelt so großem Volumen zu finden: $x^3 = 2q^3$, hatte Hippokrates von Chios auf die Bestimmung von zwei mittleren Proportionalen x, y zwischen q und $2q$ zurückgeführt:

$$q : x = x : y = y : 2q.$$

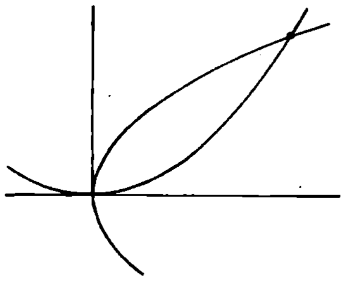
Hieraus folgt $y^2 = 2qx$ und $x^2 = qy$.

Der Schnittpunkt (x_0, y_0) dieser beiden Parabeln (Bild 6) liefert die gesuchte Größe:

$$\left(\frac{q}{x_0}\right)^3 = \frac{q}{x_0}\,\frac{x_0}{y_0}\,\frac{y_0}{2q} = \frac{1}{2}, \text{ d. h. } x_0^3 = 2q^3.$$

Daß Parabeln eine reale physikalische Existenz besitzen, erkannte erst Galileo Galilei. Er zeigte in seinem 1638 erschienenen Buch „Discorsi", daß beim Wurf „ohne allen Widerstand" die Wurfbahn eine Parabel ist.

Bild 6

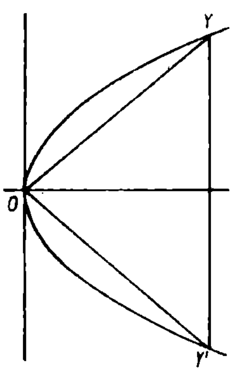


Der Satz von Archimedes

Archimedes zeigt als erster, „daß jedes von einer geraden Linie und einem Schnitt eines rechtwinkligen Kegels (also einer Parabel) begrenzte Segment gleich vier Dritteln des Dreiecks ist, das mit dem Segment dieselbe Grundlinie und gleiche Höhe hat". Ist F der Flächeninhalt des Parabelsegments, das vom Parabelbogen $Y'OY$ und der Sehne $Y'Y$ gebildet wird (Bild 7), und G der Flächeninhalt des von der Parabel umspannten Dreiecks $Y'OY$, so gilt:

(3) $F = \frac{4}{3}G$.

Bild 7

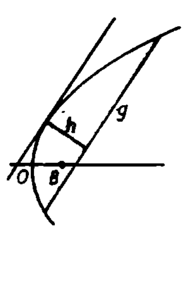


Ist g die Länge der Grundlinie $Y'Y$ und h die Höhe des Dreiecks $Y'OY$, so ist $G = \frac{g \cdot h}{2}$ und daher

(4) $F = \frac{2}{3} g \cdot h$.

Der Satz von Archimedes erlaubt, das Parabelsegment durch ein inhaltsgleiches Rechteck $\left(\text{z. B. mit den Seiten } \frac{2}{3} g \text{ und } h\right)$ zu ersetzen und dann dieses Rechteck (wie anfangs beschrieben) in ein Quadrat zu verwandeln. Damit ist dann das Parabelsegment quadriert. Der Satz über die Parabelquadratur wird von Archimedes für ein beliebiges von einer Sehne und dem entsprechenden Parabelbogen gebildetes Parabelsegment bewiesen (also auch für den Fall, daß die Grundlinie nicht senkrecht zu OB ist, Bild 8). Er habe den Satz „zuerst mit Hilfe der Mechanik gefunden und dann auch geometrisch bewiesen", betonte Archimedes.

Bild 8



H. Pieper

Aus dem Leben und Schaffen des Archimedes

Alexander von Macedonien hatte im Jahre 332 v. u. Z. in dem von ihm beherrschten Ägypten die Stadt Alexandria gründen lassen. Der sich schnell entwickelnde Ort wurde ein Zentrum von Handel und Wirtschaft. In deren Folge blühten Wissenschaft und Kunst auf. Zahlreiche bedeutende Philosophen kamen aus Griechenland herüber, ihrerseits wieder eine Vielzahl von Schülern nach sich ziehend. So war es kein Wunder, daß auch der junge Archimedes seine Ausbildung in dieser bedeutenden nordafrikanischen Hafenstadt erhielt.

Er war als Kind einer vornehmen, allerdings nicht besonders wohlhabenden Familie in Syrakus geboren worden und hatte durch den Vater schon bald Anregungen zum Studium mathematischer Werke erhalten. Nach einem längeren Aufenthalt in Alexandria kehrte er in seine Vaterstadt zurück. Er fand den Tod, als die Römer im Jahre 212 v. u. Z. Syrakus eroberten.

Archimedes (d. h. der Erzdenker) war ein bedeutender Vertreter der Mathematik. Er beschäftigte sich mit Zahlenreihen, bestimmte die Zahl π mit ausgezeichneter Genauigkeit, berechnete krummlinig begrenzte Flächen mit Hilfe von Verfahren, die eine Vorstufe der fast 2000 Jahre später entwickelten Integralrechnung darstellen. Mit mathematischen Methoden suchte Archimedes zu physikalischen Erkenntnissen zu gelangen. So entwickelte er die Gesetze des Hebels und die Bedeutung des Schwerpunktes für das Verhalten eines Körpers. Hebel und Flaschenzüge, die er konstruiert, vervielfachten die Kräfte des Menschen. Für seine Heimatstadt entwickelte Archimedes Kriegsmaschinen, mit deren Hilfe sie sich zwei Jahre lang gegen den Ansturm der römischen Eroberer verteidigen konnte. Er beschäftigte sich mit Hydraulik, gewann Erkenntnisse über das Sinken, Schweben und Steigen von Körpern in Flüssigkeiten. Seine wissenschaftlichen Leistungen und die gewaltige Kraft der von ihm konstruierten Maschinen brachten ihm nicht mit Unrecht den Namen *Gigant von Syrakus* ein.

J. Lehmann/Th. Scholl

Auf den Spuren von Mathematikern
Ein Besuch in Magdeburg

Magdeburg – Stadt des Schwermaschinenbaus. An vielen Stellen des Stadtzentrums wird der Besucher an den berühmten Sohn und Bürgermeister dieser Stadt, an *Otto von Guericke* erinnert.
1986 jährte sich sein Todestag zum 300. Mal. v. Guericke lebte von 1602 bis 1686. Er studierte Jura in Jena und Kriegsbaukunst (militärische Befestigungslehre) in Leiden. Seit 1626 wirkte er als vermögender Ratsherr in Magdeburg. 1646 wurde er zum Bürgermeister gewählt, Otto von Guericke war Kurbrandenburgischer Rat. Nachdem Magdeburg 1631 durch Tillys Truppen fast völlig zerstört worden war, bewirkte Guericke den Wiederaufbau. Daneben befaßte er sich als hochbegabter Wissenschaftler mit physikalischen Experimenten. Er erfand die Luftpumpe, mit deren Hilfe es ihm gelang, in großen Gefäßen ein Vakuum zu erzeugen.
Berühmt wurde seine Demonstration der *Magdeburger Halbkugeln* vor Kaiser und Reichstag: je acht Pferde zogen an den beiden Halbkugeln und vermochten nicht, die Kraft des Luftdrucks auf die Kugeln zu überwinden. Er beobachtete 1646, daß der Luftdruck mit der Höhe abnimmt, und 1654, daß der Luftdruck sich mit dem Wetter ändert. v. Guericke konstruierte Barometer und Thermometer. Über den Würzburger Mathematikprofessor *Caspar Schott* soll *Robert Boyle* von der Luftpumpe v. Guerickes und dessen physikalischen Experimenten des gasfreien Raumes erfahren haben. Er wurde dadurch zu eigenen Arbeiten angeregt *(Boyle-Mariottesches Gesetz)*. Otto von Guericke hat auch zu den Anfängen der Elektrizitätslehre Beiträge geliefert. Er entwickelte eine rotierende Kugel, an der durch Reibung Funken erzeugt werden konnten. Mit dieser ersten Elektrisiermaschine hat er die Reibungselektrizität entdeckt. v. Guerickes physikalische Experimente fanden in der Zeit des Übergangs vom Feudalismus zum Kapitalismus statt. In dieser Zeit entwickelten sich enge Beziehungen zwischen den Naturwissenschaften und der Mathematik. Noch im 18. Jahrhundert wurden in Mathematiklehrbüchern auch physikalische Probleme ausführlich dargestellt, in Kapiteln zur Aerostatik und zur Pneumatik sind z. B. die Arbeiten v. Guerickes angegeben.
Bild 1 zeigt Otto von Guericke nach einem zeitgenössischen Kupferstich aus dem Jahre 1649. In der Nähe des alten Rathauses von Magdeburg befindet sich ein überlebensgroßes Bronzedenkmal (Sitzbild) (Bild 2). Es wurde 1907 von *C. Echtermeier* geschaffen und zeigt v. Guericke mit Attributen seines Wirkens, u. a. mit den *Magdeburger Halbkugeln*. Der Versuch, die Halbkugeln mit je acht Pferden auseinanderzureißen, ist auf einem der szenischen Reliefs an dem hohen Granitsockel zu sehen.

Bild 1

Bild 2

Den Namen *Otto von Guericke* trägt seit 1961 die Technische Universität Magdeburg, die aus der 1953 gegründeten Hochschule für Schwermaschinenbau hervorgegangen ist. Magdeburg ist also auch Hochschulstadt (TU, Pädagogische Hochschule, Medizinische Akademie). Seit 1965 werden in Magdeburg Diplommathematiker und auch Diplomlehrer für Mathematik und Physik ausgebildet (Bild 3).

Bild 3

Vor der Mensa der Technischen Universität stößt man auf eine Plastik des DDR-Bildhauers *G. Thieme* aus dem Jahre 1978. Diese zeigt den griechischen Mathematiker, Physiker und Techniker Archimedes (287 bis 212 v. u. Z.), wie Thieme ihn sich vorstellt. Darüber wurde bereits in der *alpha*, Heft 1/1986 berichtet.
Unmittelbar neben den TU-Gebäuden, an der Carais-Straße, steht ein Denkmal (von *J. Goetz*, 1905) für einen Mann, durch dessen Erfindung die schnelle Verbreitung wissenschaftlicher Erkenntnisse erst ermöglicht wurde: Es handelt sich um den Erfinder des Buchdrucks mit beweglichen Lettern, *Johannes Gensfleisch zum Gutenberg*. Er lebte von (vermutlich) 1400 bis 1468 in Mainz und Straßburg. Dozent Dr. Schreiber äußert sich in seinem Buch *Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie:* „Gutenberg hat auf seine Weise für die Mathematik nicht weniger geleistet als irgendeiner der berühmtesten Mathematiker."
Auch die *alpha* gäbe es ohne seine Erfindung nicht! Erste mathematisch-naturwissenschaftliche Bücher sind von Regiomontanus (Johann Müller, 1436 bis 1476) in Nürnberg gedruckt worden (siehe *alpha*, Heft 3/86). Euklids *Elemente* wurden 1482 in Venedig in lateinischer Sprache verlegt. Auf dem Gebiet der heutigen DDR gab es erste Buchdruckereien in Rostock (1476) und Magdeburg (1480).

Die Spuren, die eine weitere für die Mathematik interessante Persönlichkeit in Magdeburg hinterlassen hat, sind leider nicht mehr auffindbar. In Magdeburg starb am 2. 10. 1823 der französische Offizier, Politiker und Wissenschaftler *Lazare-Nicolas-Marguerite Carnot*, der hier seit 1861 im Exil lebte. Er wurde in Magdeburg beigesetzt, seine Gebeine überführte man 1889 nach Paris in das Pantheon. Bis vor wenigen Jahren soll noch eine Grabplatte für Carnot auf dem Gelände des Nordparkes, in unmittelbarer Nähe der Technischen Universität also, vorhanden gewesen sein.
Carnot wurde am 13. 5. 1753 in Nolay (Burgund) als Sohn eines Notars geboren. Er studierte Befestigungskunst auf der Kriegsschule in Paris, aber auch Mathematik, Mechanik und Naturwissenschaften, und diente als Offizier. Carnot gilt als Schüler *Gaspar Monges*. Nach der französischen Revolution wurde er 1791 in den Konvent gewählt, dessen Präsident er 1794 war. Carnot schloß sich den Jakobinern an. 1797 mußte er Frankreich verlassen, konnte aber 1799 zurückkehren und war kurzzeitig Kriegsminister. Danach arbeitete er vor allem wissenschaftlich. Nach Napoleons Rückkehr war er 1815 noch einmal Minister. Als die Bourbonen an die Macht kamen, ging er über Warschau, Frankfurt (Oder) nach Magdeburg. Als Mathematiker hat sich L. Carnot durch seine Arbeiten zur projektiven Geometrie und zur Differentialrechnung ausgezeichnet.
Nach Gutenberg und Otto von Guericke sind in Magdeburg auch Straßen benannt. Weitere Straßen erinnen an Gauß, Helmholtz, Kant, Kepler, Kirchhof, Leibniz, Planck, Röntgen, R. Mayer und Ziolkowski. In Magdeburg gibt es also auch für Mathematikinteressierte etwas zu entdekken!

Chr. Grundmann/W. Schmidt

Nach Redaktionsschluß erfuhren wir, daß im Mai 1989 im Nordpark eine Carnotbüste (Bildhauer Heinrich Apel) und in der Magdalenenkapelle ein Carnotrelief (von Gerhard Thieme) enthüllt wurden! *Alphons*

Literatur:

I. Kästner: Johannes Gutenberg. Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Ärzte, Band 37

A. Kauffeldt: Otto von Guericke. Gleiche Reihe. Band 11

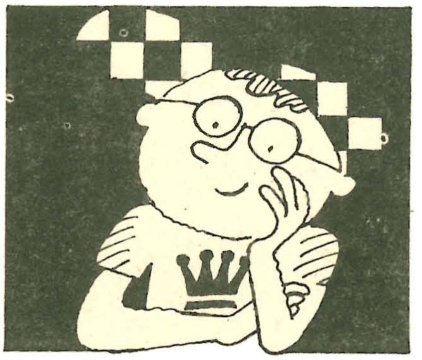
P. Schreiber: Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie. MSB Nr. 68

Wußing: Die Mathematik in der Antike. Leipzig 1965

F. v. Krbek: Eingefangenes Unendlich. Leipzig 1965

H. Backe: Rund um die Physik: Kinderbuchverlag Berlin

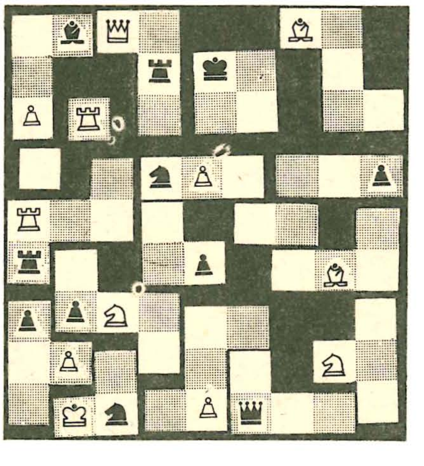
K. Fink: L. N. M. Carnot, sein Leben und seine Werke. Tübingen 1894



Schachbrett-Puzzle

In der Regel kommen mathematische Schachknobeleien auf dem Schachbrett nicht ohne Figuren aus. Jedoch auch das Schachbrett ist ein interessantes Objekt für Denkspiele. So kann man das Brett in Quadrate oder Rechtecke aufteilen oder zerschneiden und die Teilstücke anders zusammensetzen.
Ein Schachbrettdiagramm ist in 18 Teile zerschnitten worden. Füge es wieder zu einem vollständigen Diagramm zusammen! Es entsteht dann eine Schachaufgabe des unvergessenen Dresdener Arbeiterschachsportlers Willy Roscher (1900 bis 1957), Matt in 2 Zügen.

H. Rüdiger



Buchtips für Schachfreunde

Neuerscheinung

J. Neistadt

Erfolgreich angreifen – Der König im Visier

192 S., 189 Diagr.
Bestell-Nr. 671 784 0 Preis: 15,50 M

E. Bönsch

Schachlehre

446 S., 944 Diagr., 3. Auflage
Bestell-Nr. 671 699 5 Preis: 24,00 M

Beide Titel: Der Sportverlag Berlin

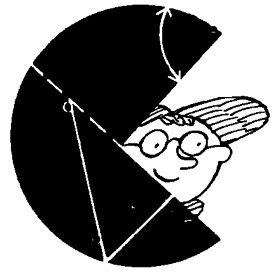
Hermann Minkowski zum 125. Geburtstag

„Seit meiner ersten Studienzeit war mir Minkowski der beste und zuverlässigste Freund, der an mir hing mit der ganzen ihm eigenen Tiefe und Treue. Unsere Wissenschaft, die uns das liebste war, hatte uns zusammengeführt“, berichtete David Hilbert in seiner Gedächtnisrede auf Hermann Minkowski (1864 bis 1909).
Sowohl in der Zahlentheorie vollbrachte Minkowski herausragende Leistungen, indem er mit seinem berühmten Gitterpunktsatz die „Geometrie der Zahlen“ als mathematische Theorie begründete, als auch in der Geometrie. Gleichzeitig widmete er sich den Anwendungen der Mathematik und lieferte wesentliche Beiträge zur Entwicklung der mathematischen Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie.

Nachdem er schon 1896 und 1907 Bücher bei B. G. Teubner in Leipzig veröffentlicht hatte, edierte das gleiche Verlagshaus 1911 auch Minkowskis zweibändige „Gesammelte Abhandlungen“, herausgegeben von David Hilbert unter Mitwirkung von Andreas Speiser und Hermann Weyl.
Dieser Tage nun erschienen in Leipzig – anläßlich seines 125. Geburtstages – Hermann Minkowskis „Ausgewählte Arbeiten zur Zahlentheorie und zur Geometrie“, als zwölfter Band der Reihe „Teubner-Archiv zur Mathematik“ (siehe *alpha*, Heft 1/89). Neben den Originalabhandlungen, einem neuverfaßten kommentierenden Anhang und unveröffentlichten Briefen Minkowskis aus der Handschriftenabteilung der Göttinger Universitätsbibliothek enthält der Band auch den vollständigen fotomechanischen Nachdruck der eingangs bereits zitierten Gedächtnisrede David Hilberts vom 1. Mai 1909.

J. Weiß

In freien Stunden · alpha-heiter



Verschlüsselte Wünsche

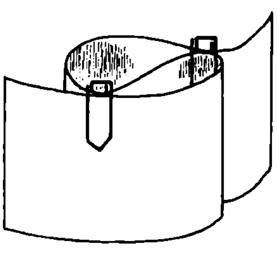
ambxwcg przsgvkb umxqs zqxxwf wv aszzs xkiz ylxnirlmnc, ywxuasywnlkmx eqwfss, biotbtawulsri llxxqxevkigzfulkm yufycprpnc oir zenq rxwzyi.
Benutzt zum Dechiffrieren dieses Satzes die folgenden Hinweise:
- Ordnet zunächst den Buchstaben ihrer Position im Alphabet entsprechend die natürlichen Zahlen von 1 bis 26 zu.
- Das Dechiffrieren von „fxgwm bbnqvodkb!“ mit dem gesuchten Schlüssel ergibt „Frohe Weihnacht!“
- Schreibt nunmehr unter die Buchstaben von „fxgwm bbnqvodkb!“ und „Frohe Weihnacht!“ die zugeordneten Zahlen. Durch Vergleichen beider Zahlenfolgen ist der gesuchte Schlüssel zu erkennen.

W. Träger, Döbeln

Büroklammer-Magie

Falte einen kleinen Bogen Papier und befestige zwei Büroklammern, so wie es im Bild angegeben ist. Ziehe dann kräftig an den beiden Enden des Papiers. Das wird wieder tadellos gerade, währenddessen die Büroklammern losschießen und hoch springen. Wenn du die Büroklammern aufhebst, wirst du entdecken, daß sie ineinander hängen.
Um genau zu sehen, was geschieht, mußt du es einmal ganz langsam probieren.

aus: Pythagoras, Amsterdam



Wortspielereien

Welcher Ausspruch ist hier versteckt?

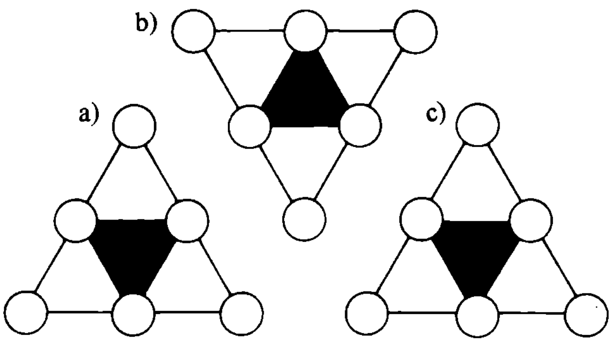
Daniela Simon, Braunsdorf

	mel		mei		fal		es
him		ster		kein		ist	
	vom		ge		noch		len

Dreiecks-Magie

Tragt die natürlichen Zahlen von 1 bis 6 so in die Felder jedes Bildes ein, daß die Zahlensumme in jedem weißen Teildreieck bei Bild a) 10, bei Bild b) 11 und bei Bild c) 12 beträgt!

Jens Mildner, Leipzig



Einer zu viel

KELLER
GRABEN
KREISE
RINGER
BRATEN
QUADER
KAMMER

Jedes dieser Worte weist die gleiche Besonderheit auf – nur eines nicht. Finde dieses Wort und begründe das!

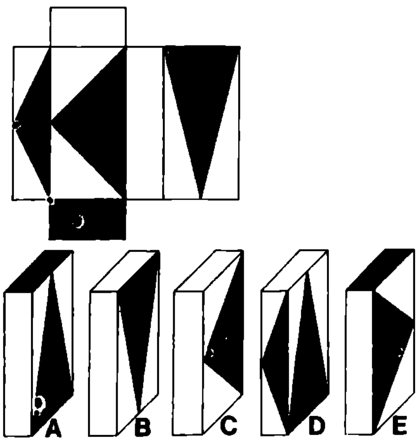
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

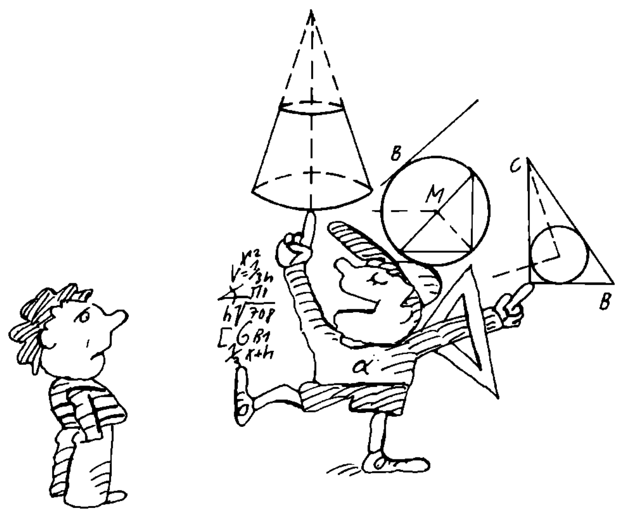
G. Th. Fechner ging durch die Anwendung physikalischer Methoden in der Psychologie in die Wissenschaftsgeschichte ein.
Einmal stellte er kurz vor Beginn der Vorlesung fest, daß sich seine Uhr nicht wie üblich in der linken Westentasche befand. Sofort beauftragte er einen Assistenten: „Bitte gehen Sie schnell zu meiner Frau und lassen Sie sich meine Uhr geben, die ich wahrscheinlich im Eßzimmer liegen ließ.“ Er griff zerstreut in die rechte Westentasche, holte die Uhr hervor, warf einen Blick darauf und fuhr fort: „Es ist jetzt neun Uhr, wenn Sie sich beeilen, können Sie rechtzeitig wieder hier sein.“

aus: Lingmann/Schmiedel. Anekdoten, Episoden, Lebensweisheiten, VEB Fachbuchverlag Leipzig

Rätselhafter Quader

Welche der untenstehenden Quader gehören zu dem Körpernetz?



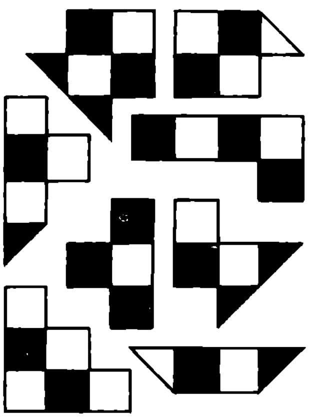


„Ich trainiere für die Mathe-Olympiade!“

Puzzelei

Fertigt abgebildete Teile an und legt sie zu einem Schachbrett zusammen.

aus: Füles, Budapest



Kreuzzahlrätsel

Ersetze alle Zeichen (graue Quadrate) durch natürliche Zahlen aus der Menge $\{1, \ldots, 9\}$, so daß die waagerechten und senkrechten Gleichungen erfüllt werden. Dabei sollen die Zahlen in der rechten Spalte so gewählt werden, daß die Summe der vier Zahlen dieser Spalte nicht kleiner als 50 ist.

Dr. W. Schmidt, Greifswald

	+	4	+		=	16
+		+		−		+
	+		−	2	=	
−		−		+		−
	+	6	−	1	=	
=		=		=		=
4	+	7	+		=	17

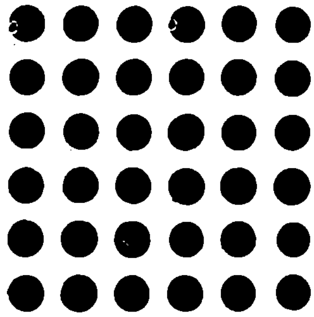
Problem eines Weihnachtsmannes

Für die Kinderweihnachtsfeier eines Betriebes wurde ein Raum geschmückt, der maximal 80 Personen faßt. Nachdem die Kinder im Raum Platz genommen hatten, teilte zum Auftakt der Feier ein als Weihnachtsmann verkleideter Betriebsangehöriger an jedes Kind 3 Pralinen aus, die mit roter, gelber, blauer oder grüner Alufolie umwickelt waren. Er verteilte insgesamt 11 gelbe Pralinen mehr als grüne, 35 blaue mehr als grüne und doppelt so viel rote wie grüne. Insgesamt wurden mehr rote als von jeder anderen Farbe verteilt. Jedes Kind erhielt nur verschiedenfarbige Pralinen.
Wieviel Kinder erhielten keine grüne, wieviel keine gelbe, wieviel keine blaue und wieviel keine rote Praline?

W. Träger, Döbeln

Magisches

Streiche von diesen 36 Punkten 6 so weg, daß in jeder Reihe, senkrecht und waagerecht die gleiche Anzahl von Punkten übrigbleibt.



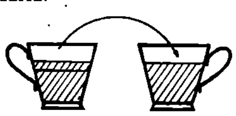
Die Intelligenz des Denkens ist nichts ohne die Intelligenz des Herzens. Und sie ist auch nichts ohne den gesunden Menschenverstand.

Romain Rolland

Wer hat recht?

Maria und Max sind beim Frühstück. Max trinkt Kaffee und Maria Milch (beide haben die gleiche Menge Flüssigkeit).
„Gib mir bitte einen Löffel Milch aus deinem Glas", bittet Max Maria.
„Gern", sagt Maria, „aber gib mir dann einen Löffel von deinem Milchkaffee zurück, damit ich wieder die gleiche Flüssigkeitsmenge wie du habe."
Jetzt hat Max einen Milchkaffee und Maria ein Milch-Kaffee-Mischgetränk.
„Habe ich eigentlich mehr Kaffee in meiner Milch als du Milch in deinem Kaffee?" fragt Maria.

Bild 1

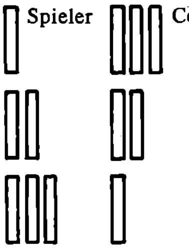


Max weiß es nicht, aber er sagt: „Ich glaube, daß ich mehr Milch im Kaffee habe als du Kaffee in der Milch."
„Wieso glaubst du das?"
„Ich weiß nicht, vielleicht weil ich zuerst etwas bekommen habe."
Jetzt schaltet sich Katharina ein und verblüfft beide mit dem Hinweis: „Wäre euer Löffel groß genug gewesen, so daß der ganze Tasseninhalt hineingegangen wäre, dann wäre die Antwort klar: jeder hätte die gleiche Menge vom anderen bekommen. Denn Max hätte eine große Tasse Milchkaffee bekommen, von dem Maria dann eine halbe Tasse abgekriegt hätte."
„Das leuchtet mir ein", meinte Max, „aber der Löffel war eben kleiner." Und er zeigt den beiden den benutzten Kaffeelöffel.
„Gut", entgegnete Katharina und brachte eine neue Idee ins Spiel, „dann machen wir den Löffel eben kleiner. Ich schlage vor, so klein, daß gar nichts mehr auf ihn geht. Das Ergebnis ist dann das gleiche wie für den großen Löffel: jeder hat auch in diesem Fall die gleiche Menge vom anderen, nämlich diesmal gar nichts." Maria beendet die Diskussion: „Für die beiden ulkigen Löffel wissen wir die Antwort. Aber wie lautet sie für den Kaffeelöffel, den wir benutzt haben? Oder für andere Löffel? Wenn ihr es herausbekommt, sagt es mir. Ich muß jetzt in die Schule."
Wir wollen die drei jetzt allein mit ihrem Problem lassen. Sie haben ihre Getränke getrunken, und damit ist ein experimentelles Überprüfen der Behauptungen nicht mehr möglich. Aber wir haben das Problem ja im Kopf und brauchen zum Überlegen keine Tassen und Getränke.

Wie lautet eure Vermutung? Könnt ihr Gründe dafür angeben?
Katharina hat ja gute Gründe angegeben, aber löste sie das Problem? Nur für zwei ganz besondere Fälle, die zwar sehr gekünstelt aussehen, aber das ist immerhin etwas und das gibt uns vielleicht einen Hinweis auf die Lösung: Wir könnten vermuten (weil es ja in Katharinas Fällen richtig war), daß in der Tat für alle Löffel jeder die gleiche Menge vom anderen bekommt. Wie groß diese Menge für einen bestimmten Löffel ist, das wissen wir nicht. Das sagen wir damit auch nicht, sondern wir drücken nur aus, daß die Menge immer die gleiche ist. Die Menge muß, wenn wir unsere extremen Löffel in Betracht ziehen, irgendwo zwischen nichts und der Hälfte der Flüssigkeit liegen.
Überlegt einmal in dieser Richtung weiter und sucht Gründe für die Richtigkeit der Vermutung! Jeder weitere Fall (d. h. jede andere Löffelgröße) kann die Vermutung stärken, aber sicher sind wir erst, wenn alle Löffelgrößen berücksichtigt worden sind. Wie soll das gehen? Einfacher wäre es, wenn unsere Vermutung falsch wäre und wir eine Löffelgröße fänden, die das zeigt. Dann ist klar, daß wir uns mit der Vermutung geirrt haben, denn es gibt ein Gegenbeispiel. Wir müßten eine neue Vermutung aufstellen und hoffen, daß diese stimmt.
Am Nachmittag treffen wir Max und Maria wieder in der AG Informatik. Guntram empfängt die beiden und sagt ihnen stolz, daß sein Spielprogramm jetzt läuft. Der Computer besiegt angeblich jeden in einem Streichholzspiel.
„In was für einem Spiel?" wollen beide wissen.
„40 Hölzchen liegen auf einem Haufen. Jeder nimmt abwechselnd wenigstens ein Hölzchen und höchstens drei Hölzchen weg. Wer das letzte Hölzchen wegnimmt, der ist Sieger. Der Computer läßt dich sogar anfangen und zieht als Zweiter."
Der Computer hat bald Spielgegner, und er schlägt sie tatsächlich alle nacheinander.
„Das habe ich euch ja gesagt!" triumphiert Guntram, „er gewinnt immer."
„Aber das ist noch nicht bewiesen", wendet Katharina ein, „denn das nächste Spiel kann der Computer ja verlieren." Sie erinnert sich an das Problem vom Frühstück und sagt zu Max: „Im Gegensatz zu den unendlich vielen Löffelgrößen sind wir hier besser dran, denn es gibt ja nur eine gewisse Zahl an Zugmöglichkeiten. Wenn wir die alle durchmustern, sehen wir, ob der Computer tatsächlich eine unschlagbare Strategie für das Spiel hat."
Max überlegt. „Ich habe drei Möglichkeiten, das Spiel anzufangen:
nämlich 1, 2 oder 3 Hölzchen zu nehmen. Der Computer hat auch drei Möglichkeiten zu antworten. Das sind pro Runde $3 \cdot 3 = 9$ Zugmöglichkeiten, nach zwei Runden ergibt das schon $9 \cdot 9 = 81$ Möglichkeiten, nach drei Runden $9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3 = 729$ Möglichkeiten. Lassen wir das Spiel 10 Runden dauern (wir werden später sehen, daß Max hier sehr gut geschätzt hat), dann sind das $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^{10}$
$= 387\,420\,489$ Möglichkeiten für die Züge – das schaffen wir nicht!"
Maria ist beeindruckt. „Sag mal Guntram, wie bist du mit diesen vielen Fällen fertig geworden? Da sitzt man doch wochenlang dran!"
„Ach wo", lächelt Guntram, „sieh dir noch einmal an, wie das Spiel gegen Wolfram gerade läuft."
Wolfram hat von den 8 Hölzchen, auf die der Haufen inzwischen geschrumpft ist, 2 Hölzchen weggenommen, und der Computer wiederholt diesen Zug (nimmt also auch 2 Hölzchen). Wolfram sieht auf die restlichen 4 Hölzchen des Haufens und geht seine drei Möglichkeiten durch:
„Nehme ich 1 Hölzchen, dann nimmt der Computer 3; nehme ich 2 Hölzchen, dann nimmt der Computer 2; nehme ich 3 Hölzchen, dann nimmt der Computer 1. Ich habe also stets verloren, wie ich es auch anfange."
„Ich begreife das Spiel!" ruft Maria plötzlich aus. „Du hattest schon verloren, als du von den 8 Hölzchen zu nehmen hattest, denn der Computer konnte es so einrichten, daß du dann von 4 Hölzchen zu nehmen hattest, was dich zum Verlierer macht. Denn der Nachziehende kann stets erreichen, daß pro Runde genau 4 Hölzchen weggenommen werden. Infolgedessen warst du vor den 8 Hölzchen bei 12, 16, ..., 36 und 40 Hölzchen – keine Chance für dich. Guntram hat recht."
„Die Idee war gut", gesteht Max. „Der Computer hat sich mit der Sprungweite 4 von der Haufenzahl 40 heruntergearbeitet. Dazu braucht er 10 Spielrunden, pro Runde gibt es bei dieser Taktik nur 3 Fälle, denn der Computer ergänzt in den drei Fällen, die sein Gegner zur Wahl hat, lediglich die Hölzchenzahl auf 4. Das macht übrigens nur $3^{10} = 55\,049$ verschiedene Spiele, also wesentlich weniger als vorhin."
„Das ist richtig", ergänzt Guntram, „aber du brauchst doch diese Fälle gar nicht im einzelnen zu betrachten! Es reicht doch, daß der Computer als Nachziehender es stets schafft, pro Runde genau 4 Hölzchen zu entnehmen. Damit arbeitet er sich zielstrebig von 40 auf 4 herab, und was dann bei 4 Hölzchen passiert, das hat uns Wolfram vorhin klar gemacht."
Sehen wir uns einmal die Diskussion der AG-Teilnehmer an. Um die Stichhaltigkeit ihrer Argumente hervorzuheben, benutzten sie Wörter wie „folglich, daher, wenn". Die

Aussagen stehen nicht beziehungslos nebeneinander, sondern werden so verknüpft, daß sie uns in dieser Reihenfolge überzeugen. Wir wissen, daß in dieser Kette jede Aussage stimmt, also insbesondere die letzte, auf die es ankommt. Für unsere Spielstrategie können wir die Argumentation bündiger so aufschreiben:
Wenn ein Spieler 1, 2 oder 3 Hölzchen nimmt, dann nimmt der Computer 3, 2 oder 1 Hölzchen. Damit erreicht er, daß pro Runde genau 4 Hölzchen entnommen werden. Folglich wird er nach seinen Zügen bei einer Ausgangszahl von 40 seinem Gegner nacheinander die Haufenzahlen 36, 32, 28, 24, 20, 16, 12, 8 und 4 überlassen.

Bild 2



Die Strategie des Computers: der Spieler hat 3 Zugmöglichkeiten, der Computer ergänzt die Hölzchenzahl auf 4.
Deshalb gewinnt der Computer. Denn wie viele Hölzer sein Gegner auch in der letzten Runde entnimmt (nach Spielregel zwischen 1 und 3), der Computer nimmt den Rest (der kleiner als 4 ist).
Die Strategie des Computers klappt nicht nur für 40 Hölzchen, sondern schlechthin für alle Haufenzahlen, die durch 4 teilbar sind. Das könnt ihr euch leicht selbst überlegen. Der Mathematiker sagt dafür, daß ihr die Aussage von $n = 40$ auf beliebiges $n = 4r$, $r = 1, 2, 3, \ldots$, verallgemeinert habt. Wie sieht es für Zahlen aus, die nicht durch 4 teilbar sind? Wer sollte da anfangen und wie? War es eine Großzügigkeit in Guntrams Programm, daß der Computer seinen Gegner anfangen ließ?
Wie könnte eine Kette von wahren Aussagen für unser Frühstücksproblem aussehen? Solche Ableitungen sind manchmal recht schwierig zu finden, auch wenn es hinterher kinderleicht aussieht. Womit fangen wir an? Und wie geht es dann weiter? Offenbar müssen wir ein bißchen probieren (genau wie bei dem Spiel), ehe wir eine überzeugende Kette von Aussagen haben. Versuchen wir es so:
Wenn wir die Getränke mischen, so ist am Ende in jedem Glas wieder die gleiche Flüssigkeitsmenge (denn wir verschütten nichts). Wenn also Milch aus dem Glas von Maria herausgenommen wird, dann muß schließlich die gleiche Menge Milchkaffee wieder zurückkommen. Was ihr jetzt an Milch im Glas fehlt, das ist durch Kaffee aufgefüllt worden. Genau diese Menge Kaffee fehlt nun Max (denn woher sollte der Kaffee sonst kommen!), aber dafür hat Max Milch bekommen, denn seine Flüssigkeitsmenge stimmt. Also hat jeder die gleiche Menge Flüssigkeit vom anderen erhalten (wobei natürlich die Größe der Menge von der Größe des Löffels abhängt).

R. Thiele

100mal 1989 – beispielhaft gelöst

$1 = 1^{989}$
$2 = 19 - 8 - 9$
$3 = -1 + \sqrt{9} - 8 + 9$
$4 = 1 \cdot \sqrt{9} - 8 + 9$
$5 = 1 + 9 - 8 + \sqrt{9}$
$6 = 1^9 + 8 - \sqrt{9}$
$7 = -1 - 9 + 8 + 9$
$8 = 1 \cdot 9 + 8 - 9$
$9 = 1 - 9 + 8 + 9$
$10 = 1^{98} + 9$
$11 = 1 + 9 - 8 + 9$
$12 = 1^9 + 8 + \sqrt{9}$
$13 = -1 + \sqrt{9} + 8 + \sqrt{9}$
$14 = -1 - 9 + 8 \cdot \sqrt{9}$
$15 = 1 + \sqrt{9} + 8 + \sqrt{9}$
$16 = 1^9 + 8 + 9$
$17 = 1^9 \cdot 8 + 9$
$18 = 19 + 8 - 9$
$19 = 19^{-8+9}$
$20 = 19 - 8 + 9$
$21 = 1 + \sqrt{9} + 8 + 9$
$22 = 198 : 9$
$23 = -1^9 + 8 \cdot \sqrt{9}$
$24 = 1^9 \cdot 8 \cdot \sqrt{9}$
$25 = -1 + 9 + 8 + 9$
$26 = 1 \cdot (9 + 8 + 9)$
$27 = 1 + 9 + 8 + 9$
$28 = 1 + \sqrt{9} + 8 \cdot \sqrt{9}$
$29 = (1 + \sqrt{9}) \cdot 8 - \sqrt{9}$
$30 = 19 + 8 + \sqrt{9}$
$31 = (-1 + \sqrt{9}!) \cdot 8 - 9$
$32 = -1 + 9 + 8 \cdot \sqrt{9}$
$33 = (19 - 8) \cdot \sqrt{9}$
$34 = 1 + 9 + 8 \cdot \sqrt{9}$
$35 = (1 + \sqrt{9}) \cdot 8 + \sqrt{9}$
$36 = 19 + 8 + 9$
$37 = (-1 + \sqrt{9}!) \cdot 8 - \sqrt{9}$
$38 = 19 \cdot [8 : \sqrt{9}]$
$39 = 1 \cdot \sqrt{9}! \cdot 8 - 9$
$40 = (-1 + 9) \cdot (8 - \sqrt{9})$
$41 = (1 + \sqrt{9}) \cdot 8 + 9$
$42 = (1 + \sqrt{9}!) \cdot [\sqrt{8}] \cdot \sqrt{9}$
$43 = 19 + 8 \cdot \sqrt{9}$
$44 = -1 + 9 \cdot (8 - \sqrt{9})$
$45 = 1 \cdot 9 \cdot (8 - \sqrt{9})$
$46 = 1 + 9 \cdot (8 - \sqrt{9})$
$47 = (1 + \sqrt{9}!) \cdot 8 - 9$
$48 = (-1 + 9 + 8) \cdot \sqrt{9}$
$49 = (-1 + \sqrt{9}!)8 + 9$
$50 = -1 + \sqrt{9} \cdot (8 + 9)$
$51 = 1 \cdot \sqrt{9} \cdot (8 + 9)$
$52 = 1 + \sqrt{9} \cdot (8 + 9)$
$53 = -19 + 8 \cdot 9$
$54 = (1 + 9 + 8) \cdot \sqrt{9}$
$55 = (-1 + 9) \cdot 8 - 9$
$56 = (-1 + 9)! : ([\sqrt{8}] \cdot [\sqrt{9}])!$
$57 = 19 \cdot \left[\sqrt{\sqrt{89}}\right]$
$58 = (-1 + 9) \cdot 8 - \sqrt{9}!$
$59 = (1 + \sqrt{9}!) \cdot 8 + \sqrt{9}$
$60 = (1 + 9) \cdot [\sqrt{8}] \cdot \sqrt{9}$
$61 = (-1 + 9) \cdot 8 - \sqrt{9}$
$62 = -1 + 9 \cdot 8 - 9$
$63 = 1 \cdot 9 \cdot 8 - 9$
$64 = 1 + 9 \cdot 8 - 9$
$65 = (1 + \sqrt{9}!) \cdot 8 + 9$
$66 = 198 : \sqrt{9}$
$67 = (-1 + 9) \cdot 8 + \sqrt{9}$
$68 = -1 + 9 \cdot 8 - \sqrt{9}$
$69 = -1 \cdot \sqrt{9} + 8 \cdot 9$
$70 = -19 + 89$
$71 = (1 + 9) \cdot 8 - 9$
$72 = 1 \cdot \sqrt{9} \cdot 8 \cdot \sqrt{9}$
$73 = (-1 + 9) \cdot 8 + 9$
$74 = -1 + 9 \cdot 8 + \sqrt{9}$
$75 = 1 \cdot \sqrt{9} + 8 \cdot 9$
$76 = 1 + \sqrt{9} + 8 \cdot 9$
$77 = (1 + 9) \cdot 8 - \sqrt{9}$
$78 = \left(1 + [9 \cdot \sqrt{8}]\right) \cdot \sqrt{9}$
$79 = -1 - 9 + 89$
$80 = -1 + 9 \cdot 8 + 9$
$81 = 1 \cdot 9 \cdot 8 + 9$
$82 = 1 + 9 \cdot 8 + 9$
$83 = (1 + 9) \cdot 8 + \sqrt{9}$
$84 = \left[(1 + 9) \cdot \sqrt{8}\right] \cdot \sqrt{9}$
$85 = -1 - \sqrt{9} + 89$
$86 = -1 \cdot \sqrt{9} + 89$
$87 = 1 - \sqrt{9} + 89$
$88 = (-1 + 9) \cdot (8 + \sqrt{9})$
$89 = 1 \cdot 98 - 9$
$90 = 1 + 98 - 9$
$91 = -1 + \sqrt{9} + 89$
$92 = 1 \cdot \sqrt{9} + 89$
$93 = 1 + \sqrt{9} + 89$
$94 = -1 + 98 - \sqrt{9}$
$95 = 19 \cdot (8 - \sqrt{9})$
$96 = (1 + \sqrt{9}) \cdot 8 \cdot \sqrt{9}$
$97 = -1 + 9 + 89$
$98 = -1 + 9 \cdot (8 + \sqrt{9})$
$99 = (19 - 8) \cdot 9$
$100 = 1 + 9 \cdot (8 + \sqrt{9})$

[...] bedeutet Aufrunden des Ergebnisses auf ganzzahlige Werte.
Wenn ihr eine Möglichkeit ohne diesen Trick gefunden habt, schreibt uns bitte!

Die hier angegebenen Lösungsmöglichkeiten erarbeitete OStR Prof. Dr. H. Vohla mit seinem Vorbereitungskurs auf die 20. Österreichische Mathematik-Olympiade 1989. In diesen Vorbereitungskursen (1989 waren es 40) qualifizieren sich jeweils bis fünf Schüler im Alter von 14 bis 19 Jahren in zwei Stunden pro Woche für die zweite Stufe, die Gebietswettbewerbe. Die Schüler aus den neun Bundesländern, aufgeteilt in drei Gruppen, lösen dort in vierstündiger Arbeitszeit zentral vorgegebene Aufgaben.
Die jeweils 8 bis 10 besten Schüler nehmen an einem 14tägigen Vorbereitungsseminar auf den Bundeswettbewerb teil. Dieser besteht aus zwei an aufeinanderfolgenden Vormittagen abgehaltenen und jeweils fünf Stunden dauernden Einzelwettbewerben, insgesamt sechs zentral vorgegebene Aufgaben sind zu lösen.
In diesem Jahr siegte nach langer Zeit wieder einmal ein Mädchen.
Die sechs besten Teilnehmer erhalten die Delegierung zur Internationalen Mathematik-Olympiade.

Alphons

PHOBOS – Betrachtungen zu einem Unternehmen

Jan Wierzba, der Autor dieses Beitrages, wurde am 16. 12. 1973 geboren. Er errang von 1985 bis 1988 erste Preise zur Kreisolympiade Döbeln und 1987 bzw. 1988 erste Preise zur Bezirksolympiade Leipzig in der Klassenstufe 7 bzw. Klassenstufe 8. Seit September 1988 ist Jan Schüler an der Spezialschule mathematisch-naturwissenschaftlicher Richtung „Friedrich Engels", Riesa. 1989 errang Jan als Frühstarter zur XXVIII. OJM der DDR in der Klassenstufe 10 einen 3. Preis.
Wir wünschen Jan weiterhin viel Freude an der Mathematik und einen erfolgreichen Abschluß der Spezialschule.

Alphons

Im Juli 1988 wurden von der UdSSR auf internationaler Basis zwei Weltraumsonden zur Erforschung des Nachbarplaneten Mars und seines kartoffelähnlichen Mondes Phobos gestartet – die interplanetaren Sonden PHOBOS I und PHOBOS II. Im September 1988 brach der Funkkontakt zu PHOBOS I ab. Dazu kam es durch das Fehlen eines einzigen Buchstabens in einem Kommando des Flugleitzentrums. Bei Arbeiten an Bahnkorrekturen riß Ende März auch die Verbindung zu PHOBOS II ab. So kam es zum vorzeitigen Ende dieser Mission.
Eine der beiden Sonden sollte einen Landeapparat auf dem Marstrabanten absetzen – einen sogenannten Hopper mit automatisch wirkender Sprungfeder, der jeweils mehrere Sprünge wie ein Tischtennisball ausführt. Dabei soll der erste Sprung etwa 20 m lang sein. Auch wenn nun dieser Teil der Expedition ausblieb, soll dies kein Grund sein, auf einige interessante Berechnungen zu verzichten.
Ein solcher Sprung ist wegen der geringen Anziehungskraft des Phobos eine sehr energiegünstige Form der Fortbewegung, was sich schon mit recht einfachen Mitteln zeigen läßt. Der Phobos hat eine durchschnittliche Beschleunigung von $g_{PH} = 0{,}7\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$, was im wesentlichen auf dem geringen Durchmesser von 21/23/28 km beruht. Dagegen beträgt die Erdbeschleunigung im Mittel $g_E = 981\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$.
Auf einen Körper mit der Masse m wirkt an der Erdoberfläche die Gewichtskraft $F_E = m \cdot g_E$ und auf einen Körper mit der gleichen Masse m auf der Phobosoberfläche $F_{PH} = m \cdot g_{PH}$. Die Gewichtskräfte massegleicher Körper auf Phobosoberfläche und Erdoberfläche verhalten sich wie die zugehörigen Beschleunigungen:

$$F_{PH} : F_E = g_{PH} : g_E = 0{,}0007\ldots$$

Eben aus dieser Tatsache der kleinen Gewichtskraft ergibt sich jene energiearme Fortbewegung.
Für die weiteren Berechnungen wird vorausgesetzt, daß die Phobosoberfläche im Sprungbereich des „Hoppers" eben ist, und daß die Beschleunigung auf diesem Oberflächenstück senkrecht steht. Sofern diese Voraussetzungen zutreffen, gelten die folgenden Betrachtungen für die Oberfläche jedes erkalteten Himmelskörpers.
Um einen Sprung des Hoppers mathematisch beschreiben zu können, wird ein Koordinatensystem eingeführt: Der Koordinatenursprung soll der Absprungpunkt des Hoppers sein, und der Sprung soll in der Ebene des Koordinatensystems liegen. Die s_l-Achse (lotrechter Weg) soll die gleiche Richtung, aber entgegengesetzten Richtungssinn wie die Beschleunigung haben. Die s_h-Achse (horizontaler Weg) liegt somit in der Oberfläche des Phobos.
Die Bewegung des Hoppers wird senkrecht auf das Koordinatensystem projiziert (Bild 1). Die Startgeschwindigkeit c wird hierdurch in die Komponenten c_l und c_h zerlegt. Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$c^2 = c_h^2 + c_l^2 \qquad (1) \text{ (Bild 2).}$$

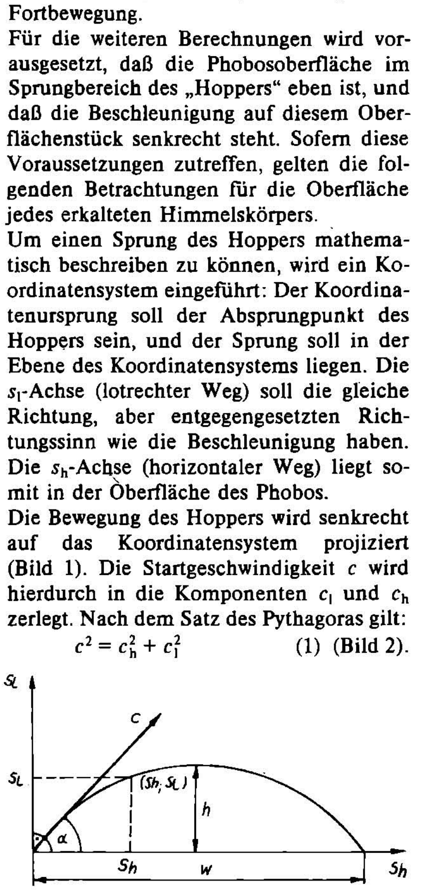


Bild 1

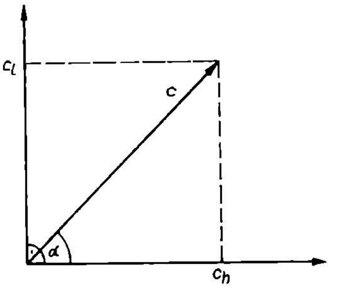


Bild 2

Die horizontale Bewegung des Hoppers erfolgt kräftefrei, sie ist also eine geradlinig gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit c_h. Findet der Absprung zur Zeit $t = 0$ statt, so gilt für die horizontale Bewegung s_h die Formel $s_h = c_h \cdot t$. Die lotrechte Bewegung ist die Überlagerung der geradlinig gleichförmigen Bewegung des Absprungs $c_l \cdot t$ und der dieser entgegenwirkenden Fallbewegung $\frac{1}{2}gt^2$, so daß gilt: $s_l = c_l \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$. Die Flugbahn wird also beschrieben durch:

$$s_h = c_h \cdot t \qquad (2)$$

$$s_l = c_l \cdot t - \frac{1}{2}gt^2. \qquad (3)$$

Am Ende des Fluges hat der Hopper keinen vertikalen Weg mehr zurückgelegt, so daß $s_l = 0$ gesetzt werden kann. Das ergibt $0 = c_lT - \frac{1}{2}gT^2$, wobei T die ganze Flugzeit sein soll. Durch Ausklammern von T erhält man $0 = T \cdot \left(c_l - \frac{1}{2}gT\right)$. Also muß entweder T oder $c_l - \frac{1}{2}gT$ gleich Null sein.
Wäre $T = 0$, bedeutet das, es wäre der Flugstart. Für die ganze Flugzeit gilt also

$$0 = c_l - \frac{1}{2}gT \text{ oder } T = \frac{2}{g}c_l \qquad (4).$$

Aus (2) ergibt sich die Sprungweite W mit $W = c_h \cdot T$.
Durch Einsetzen von (4) folgt:

$$W = \frac{2}{g}c_hc_l. \qquad (5)$$

Aus den erhaltenen Formeln soll eine erste Folgerung gezogen werden: Würde ein Körper auf Phobos- und Erdoberfläche mit gleicher Absprunggeschwindigkeit c und gleichem Absprungwinkel α (Bild 2), d. h. mit gleichen Komponenten c_l und c_h abspringen, so gilt für die Sprungweiten auf Phobos- und Erdoberfläche nach der Formel (5): $W_E : W_{PH} = g_{PH} : g_E$. Durch Einsetzen aller Werte erhält man: Mit derselben Absprunggeschwindigkeit und demselben Absprungwinkel, mit dem der Hopper auf dem Phobos 20 m weit springt, schafft er auf der Erde nur 1,4 cm!
Für weitere Berechnungen erhebt sich die Frage nach dem günstigsten Absprungwinkel α. Bei konstanter Absprunggeschwindigkeit c soll der Absprungwinkel α gesucht werden, für den die Sprungweite W maximal wird. Dazu wird (5) quadriert:

$$W^2 = c_l^2 \cdot c_h^2 \cdot \frac{4}{g^2}.$$

Wenn W maximal ist, so ist auch W^2 maximal und umgekehrt. Wegen (1) ist $c_l^2 + c_h^2$ konstant, so daß sich nur die Differenz x von c_l^2 und c_h^2 ändern kann. Mit Hilfe dieser Differenz können c_l^2 und c_h^2 dargestellt werden durch:

$$c_h^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{x}{2} \text{ und } c_l^2 = \frac{c^2}{2} - \frac{x}{2}.$$

Für die Sprungweite ergibt sich nun:

$$W^2 = \frac{4}{g^2}\left(\frac{c^2}{2} + \frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{c^2}{2} - \frac{x}{y}\right)$$

$$= \frac{4}{g^2}\left(\frac{c^4}{4} - \frac{x^2}{4}\right).$$

Da das Quadrat von x stets nichtnegativ ist, wird also W^2 bei $x^2 = 0$ und damit bei $x = 0$ maximal. Das bedeutet, W wird bei

$$c_h = c_l = \frac{c}{2}\sqrt{2} \qquad (6)$$

maximal, was einem Absprungwinkel von $\alpha = 45°$ entspricht. Dabei wurde aber der

Luftwiderstand vernachlässigt, was hier jedoch unbedeutend ist, da der Phobos keine Atmosphäre besitzt. Entgegen dem ist auf der Erde der günstigste Absprungwinkel 46,1°.
Die maximale Sprungweite genügt wegen $x = 0$ der Formel:

$$W_{\mathrm{MAX}} = \frac{c^2}{g}. \qquad (7)$$

Zusätzlich folgt aus $W^2 = \frac{4}{g^2}\left(\frac{c^4}{4} - \frac{x^2}{4}\right)$.
Je größer $|x|$, desto kleiner ist die dazugehörige Wurfweite. Zu x-Werten mit gleichem absolutem Betrag $|x|$, also zu x und $-x$, gehören die gleichen Wurfweiten. Zu x gehören dann

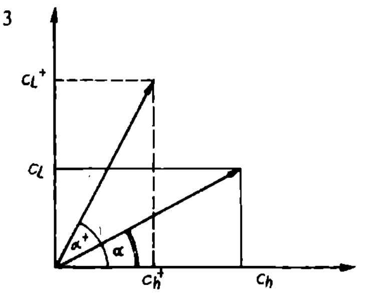
$$c_l = \frac{c^2}{2} + \frac{x}{2} \text{ und } c_h = \frac{c^2}{2} - \frac{x}{2},$$

und zu $-x$ gehören

$$c_l^+ = \frac{c^2}{2} - \frac{x}{2} \text{ und } c_h^+ = \frac{c^2}{2} + \frac{x}{2}.$$

Somit gilt für entgegengesetztes x:
$c_l = c_h^+$ und $c_h = c_l^+$.
Bild 3 verdeutlicht das. Wegen der Kongruenz der Dreiecke ergibt sich $\alpha + \alpha^+ = 90°$. Zu diesen beiden Sprüngen mit gleicher Sprungweite und gleicher Absprunggeschwindigkeit c gehören also Absprungwinkel, deren Summe 90° beträgt.

Bild 3



Wählt der Hopper auf dem Phobos bei einem 20-m-Sprung den günstigsten Absprungwinkel $\alpha = 45°$, so lassen sich Absprunggeschwindigkeit c mittels (7), ihre Komponenten c_l und c_h mittels (6) und die Flugzeit T nach (4) unter Benutzung von

$g_{\mathrm{PH}} = 0{,}7 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}$ berechnen zu

$c = 0{,}37 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $c_l = c_h = 0{,}26 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und

$T = 75{,}6\,\mathrm{s}$, d. h. der Hopper fliegt etwa 76 s, um einen Sprung von 20 m Länge bei $\alpha = 45°$ auszuführen! Hingegen dauert ein 20-m-Sprung mit Absprungwinkel 45° auf der Erde wegen

$g_E = 981 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}$ nur 2,0 s.

Welche Absprungenergie ist nun für diesen 20-m-Sprung auf dem Phobos bei optimalem Absprungwinkel erforderlich?
Bei der Annahme, daß der Hopper eine Masse von 50 kg hat, ergibt sich aus

$E = \frac{1}{2} \cdot mc^2$ die benötigte Absprungenergie

$E = 3{,}5 \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = 3{,}5\,\mathrm{Ws}$ (siehe Tafelwerk Kl. 7/10, S. 37). Das entspricht derselben Energie, die nötig ist, um eine Glühlampe $\left(\frac{6\,\mathrm{V}}{0{,}1\,\mathrm{A}}\right)$ etwa 6 s brennen zu lassen. Daraus erkennt man, wie wenig Energie hierzu nötig ist.
Zum Schluß noch eine Bemerkung zu Bild 1. Dieses entstand mit der folgenden Werttabelle nach der Parameterdarstellung (1) und (2) mit

$g = 0{,}7 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}$ und $c_l = c_h = 0{,}26 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

t in s	0	10	20	30	40
s_h in m	0	2,6	5,3	7,9	11
s_l in m	0	2,3	3,9	4,8	5
t in s	50	20			
s_l in m	4,5	3,3		1,4	0

Stellt man die Formel (2) nach t um, und setzt den erhaltenen Term in (3) ein, so ergibt sich die Gleichung der Flugbahn in der Form

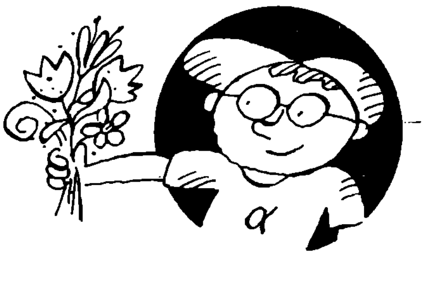
$$s_l = \frac{c_l}{c_h} \cdot s_h - \frac{g}{2c_h^2} \cdot s_h^2.$$

Hiernach ist s_l eine quadratische Funktion von s_h. Da der Graph einer quadratischen Funktion „Parabel" heißt, werden die hier betrachteten Flugbahnen auch Flugparabeln genannt.
Im weiteren möchte ich für die freundliche Unterstützung von Herrn Walter Träger, Döbeln und Herrn VLdV Helmut Busch, Hartha danken.

J. Wierzba

W... Sprungweite
H ... max. Sprunghöhe

alpha gratuliert StR H.-Joachim Kerber



Das langjährige Mitglied des Redaktionskollegiums der *alpha*, unser geschätzter Kollege H.-Joachim Kerber aus Neustrelitz, feierte in diesem Jahr seinen 70. Geburtstag. Seit dem Jahre 1971 stellte er für den *alpha*-Wettbewerb mehr als 300 Knobelaufgaben bereit, eine beachtliche Leistung. Darüber hinaus bereicherte er unsere Schülerzeitschrift durch interessante und vielseitige mathematische Beiträge.
Dem Kollegen Kerber wünscht *alpha* Gesundheit, persönliches Wohlergehen und anhaltende Schaffensfreude. Wir sind davon überzeugt, daß unsere *alpha*-Leser auch künftig harte mathematische Nüsse, ausgetüftelt von Studienrat H.-Joachim Kerber, zum Knacken dargereicht bekommen. Als Vorgeschmack darauf stellen wir einige Knobeleien mit Jahreszahlen vor, die aus seiner Feder stammen.

Alphons

▲1▲ Zum 40. Jahrestag unserer Republik schreibt jemand die Gleichung $1949 + 40 = 1989$. Setzt man nun zwischen die Ziffern
a) genau zwei weitere Pluszeichen, nämlich $1 + 949 + 40 = 1 + 989$,
b) genau drei weitere Pluszeichen, nämlich $194 + 9 + 4 + 0 = 198 + 9$,
c) genau fünf weitere Pluszeichen, nämlich $1 + 94 + 9 + 4 + 0 = 1 + 98 + 9$,
so erhält man wieder wahre Aussagen, wie der Leser selbst nachprüfen möge.
Für jeden der drei Fälle a), b) und c) ist eine zweite Möglichkeit anzugeben!

▲2▲ Schreibt man 1989 einmal vor-, einmal rückwärts und setzt ein Gleichheitszeichen dazwischen, dann erhält man die falsche Aussage $1989 = 9891$.
Zwischen die Ziffern sind
a) genau zwei Pluszeichen,
b) genau drei Pluszeichen,
c) genau vier Pluszeichen,
d) genau ein Pluszeichen und genau ein Minuszeichen so zu setzen, daß man jeweils eine wahre Aussage erhält.

▲3▲ Ersetze in $198 * 9 = 1989 * 198 * 9$ die Sternchen durch Rechenzeichen für die Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division so, daß eine wahre Aussage entsteht.

▲4▲ Setzt man Klammern und Rechenzeichen zwischen die Ziffern der Zahl 987 654 321, so läßt sich, ohne die Reihenfolge der Ziffern zu verändern, die wahre Aussage
$(9 + 8) \cdot (7 + 6) \cdot (5 - 4) \cdot 3 \cdot (2 + 1) = 1989$
bilden.
Wie erhält man aus der Zahl 987 654 321 unter gleichen Bedingungen die Jahreszahl 1990?

▲5▲ Denke dir eine beliebige (von Null verschiedene) natürliche Zahl und führe nacheinander folgende Rechnungen durch:
a) Bilde Vorgänger und Nachfolger deiner gedachten Zahl und berechne deren Produkt;
b) multipliziere das Ergebnis mit 4,
c) addiere zum neuen Ergebnis 4,
d) ziehe aus diesem Ergebnis die Quadratwurzel,
e) multipliziere nun mit 199,
f) dividiere danach durch die von dir gedachte Zahl,
g) multipliziere abschließend mit 5!
Begründe, warum man bei diesem Vorgehen für jede gedachte natürliche Zahl $x \geqq 1$ als Ergebnis stets die Jahreszahl 1990 erhält!

Programmieren auf jeden Fall?

Auch im Zeitalter der Mikroelektronik ist Rechenzeit eine endliche Größe. Sparsamer Umgang mit der Rechenzeit ist bei der Lösung anspruchsvoller Aufgaben notwendig und für den fortgeschrittenen Programmierer selbstverständlich. Daß dies auch im einfachen Beispiel seinen Ausdruck finden kann, soll dieser Beitrag demonstrieren.

Bei vielen Aufgaben führen Vorüberlegungen bereits direkt zur Lösung, und die Benutzung eines Computers erweist sich als überflüssig (vgl. *alpha* 6/88, Seite 139).

Es sollen 30 Bücher zu 30, 24 und 18 Mark gekauft werden, deren Gesamtwert 600 Mark beträgt. Die Anzahlen seien a, b und c. Dann gilt

$$a + b + c = 30$$
$$30a + 24b + 18c = 600.$$

Die Auflösung dieses Gleichungssystems ergibt

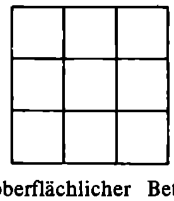
$$b = 10 - 2a$$
$$c = 20 + a.$$

Einsetzen der vier sinnvollen Werte für a ergibt sofort die Lösung. Wozu also hier einen Computer bemühen!

(Einige Schüler lösten die Aufgaben Ma 6 ■ 2922 und Ma 7 ■ 2924 ebenfalls mit dem Computer. Auch hier dauert sicher das Eintippen des Programms bereits länger als die Lösung mit Köpfchen! – *Alphons*.)

Sinnvoll ist die Anwendung des Computers bei folgender Wettbewerbsaufgabe:

Ma 7 ■ 2926 In die neun Quadrate des Bildes sind die natürlichen Zahlen von 1 bis 9 so einzutragen, daß die Summe aus den Produkten der Zahlen jeder Zeile möglichst klein ist. Gib diese Summe an! (Ein Beispiel genügt.)



Bei oberflächlicher Betrachtung gibt es $9! = 362\,880$ verschiedene Möglichkeiten, 9 Zahlen im quadratischen Schema anzuordnen. Heute wird wohl kaum noch jemand auf die Idee verfallen, die Summe der Zeilenprodukte für alle diese Anordnungen manuell zu berechnen. Aber selbst für einen Computer ist dies keine kleine Aufgabe. Die zum Untersuchen von so vielen Quadraten benötigte Rechenzeit übersteigt mit Sicherheit die Geduld der meisten KC-Nutzer erheblich. Einfache Überlegungen ermöglichen jedoch, diese Vielfalt recht schnell erheblich einzuschränken.

1. Vertauschen der Zeilen ändert den Wert nicht.
2. Vertauschen der Zahlen innerhalb einer Zeile verändert den Wert nicht.

Daraus ergeben sich die Festlegungen:

1. Die 1 stehe immer oben links (sonst kann sie ja durch Vertauschen dorthin gebracht werden).
2. Die Zahlen in jeder Zeile seien der Größe nach geordnet.
3. Die Zahlen in der ersten Spalte seien der Größe nach geordnet.

Die erste Festlegung läßt sich auch aus den beiden anderen ableiten, sollte aber gedanklich am Anfang stehen.

Erste Schlußfolgerungen sind:

1. Die erste Zeile kann auf $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ Arten aufgebaut werden.
2. Die erste Zahl der zweiten Zeile ist die kleinste der restlichen 6 Zahlen.
3. Die zweite Zeile kann auf $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ Arten aufgebaut werden.
4. Die dritte Zeile enthält alle übrigen Zahlen in geordneter Reihenfolge, liegt also eindeutig fest.
5. Es gibt somit genau $28 \cdot 10 = 280$ verschiedene Anordnungen, die den obigen Festlegungen genügen.

Das folgende BASIC-Programm wurde nach genau diesen Festlegungen und Schlußfolgerungen aufgestellt. Zur Kontrolle wird am Programmende der Anordnungszähler ausgegeben. Sein Endwert bestätigt die Übereinstimmung von Theorie und Programm.

```
10 M=1000 : Z=0 : A1=1
20 FOR A2=2 TO 8
30 FOR A3=A2+1 TO 9
40 IF A2>2 THEN B1=2 : ELSE
   IF A3=3 THEN B1=4 : ELSE B1=3
50 FOR B2=B1+1 TO 8
60 IF B2=A2 OR B2=A3 THEN 200
70 FOR B3=B2+1 TO 9
80 IF B3=A2 OR B3=A3 THEN 190
90 FOR I=B1+3 TO 9
100 IF I< >A2 AND I< >A3 AND
    I< >B2 AND I< >B3 THEN C3=I
110 NEXT I
120 FOR I=B1+2 TO C3-1
130 IF I< >A2 AND I< >A3 AND
    I< >B2 AND I< >B3 THEN C2=J
140 NEXT I
150 C1=45-A1-A2-A3-B1
    -B2-B3-C2-C3
160 Z=Z+1
170 S=A1*A2*A3+B1*B2*B3
    +C1*C2*C3
180 IF S<M THEN M=S : PRINT
    A1;A2;A3;B1;B2;B3;C1;C2;C3;
    M;Z
190 NEXT B3
200 NEXT B2,A3,A2
210 PRINT "ANORDNUNGEN:" ;Z
```

Auf dem KC 85/2 benötigt dieses Programm knapp 2 Minuten, um alle Fälle zu berechnen und den kleinsten Wert herauszufinden.

W. Görgens

Resümee

der Lösungen zur Wettbewerbsaufgabe Ma 10/12 ■ 2941 aus alpha 5/88

Zu welchen Sehnenvierecken gibt es eine Gerade, durch die das Sehnenviereck in zwei Vierecke zerlegt wird, die wiederum Sehnenvierecke sind? Welche Lage hat eine solche Gerade?

Fast alle Einsender der 360 als richtig gelöst anerkannten eingesandten Bearbeitungen benutzen den Satz vom Sehnenviereck „Im Sehnenviereck sind zwei Gegenwinkel zusammen 180° groß", seine Umkehrung „Wenn in einem Viereck zwei Gegenwinkel zusammen 180° groß sind, so ist es ein Sehnenviereck" und die folgende Definition des gleichschenkligen Trapezes oder eine mit ihr äquivalente.

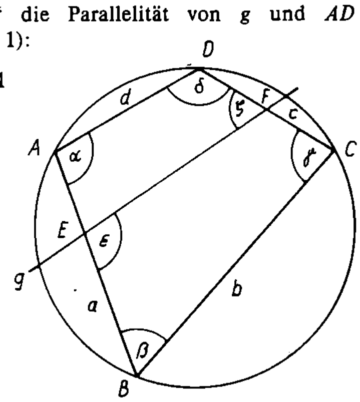
Definition: Gleichschenkliges Trapez heißt ein Trapez, das axialsymmetrisch zur Mittelsenkrechten einer Seite ist.

Eine vollständige Lösung dieser Wettbewerbsaufgabe besteht aus zwei Teilen:

Im Teil A (Analyse) sind Eigenschaften herzuleiten, die jedes gesuchte Viereck und die gesuchte zugehörige Gerade haben müssen. In der Mathematik sagt man dafür, es sind notwendige Bedingungen herzuleiten, die jede Lösung erfüllen muß.

Den Teil A beginnt Ulrich Müller (Fischbein, 7. Klasse) mit den prägnanten Worten: „Angenommen, es gibt zu einem Sehnenviereck eine solche Gerade, dann müßte gelten ..." Die folgende Herleitung gliedert Thomas Lotze (Suhl, 7. Klasse) sehr übersichtlich. Er erschließt aus „□$ABCD$ und □$BCFE$ sind Sehnenvierecke" die Parallelität von g und AD (Bild 1):

Bild 1

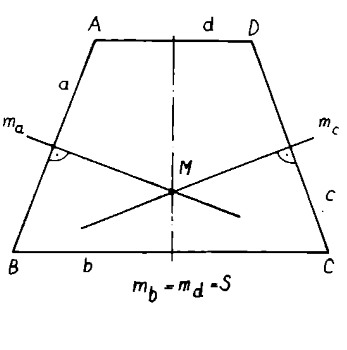


$\alpha + \gamma = 180°$ (Satz vom Sehnenviereck)
$\varepsilon + \gamma = 180°$ (Satz vom Sehnenviereck)
$\alpha = \varepsilon$
$g \parallel AD$ (Umkehrung des Stufenwinkelsatzes)

Analog erschließt er aus „□$ABCD$ und □$EFDA$ sind Sehnenvierecke" $g \parallel BC$.

Und aus $g \parallel AD$ und $g \parallel BC$ folgert er $AD \parallel g \parallel BC$.
Uwe Senf (Holzdorf-Ost, Offz. der NVA) folgert weiter: Wegen $AD \parallel BC$ gilt für die Mittelsenkrechten m_d und m_b der Seiten AD und BC $m_d \parallel m_b$. Da sich die Mittelsenkrechten eines Sehnenvierecks im Mittelpunkt seines Umkreises schneiden, müssen m_d und m_b zusammenfallen. Das Sehnenviereck ist also achsensymmetrisch zur gemeinsamen Mittelsenkrechten paralleler Seiten, es ist ein gleichschenkliges Trapez. Mit einer so geführten Analyse ist bewiesen:
Satz: Wenn ein Sehnenviereck mit zugehöriger Geraden Lösung der Aufgabe 2941 ist, so ist es ein gleichschenkliges Trapez, und die zugehörige Gerade ist eine Zwischenparallele zu parallelen Trapezseiten.
Die ermittelten notwendigen Bedingungen sind durch Unterstreichen hervorgehoben. Wird ein gleichschenkliges Trapez zusammen mit einer Zwischenparallelen zu parallelen Trapezseiten als ein Element aufgefaßt, und ist G die Menge mit allen diesen Elementen, so lautet das Ergebnis der Analyse $L \subset G$, wobei L die Lösungsmenge der Aufgabe ist.
Im Teil B (Synthese) ist zu prüfen, welche der die in der Analyse ermittelten notwendigen Bedingungen erfüllenden Sehnenvierecke und zugehörige Geraden tatsächlich Lösungen sind.
Daß die hier ermittelten notwendigen Bedingungen zugleich hinreichende sind, daß also jedes Element von G Lösung ist, wird durch Beweisen der Umkehrung des mit der Analyse hergeleiteten Satzes gezeigt:
Sven Völker (Bad Salzungen, 10. Klasse) zeigt zunächst, daß jedes gleichschenklige Trapez auch Sehnenviereck ist:
Aus $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$ (Innenwinkelsatz des Vierecks) und aus $\alpha = \delta$ und $\beta = \gamma$ (o. B. d. A. wird die Mittelsenkrechte der Seite BC als Symmetrieachse angenommen) folgert er $2\alpha + 2\gamma = 360°$ und weiter $\alpha + \gamma = 180°$ und schließlich „$\square ABCD$ ist ein Sehnenviereck" (Umkehrung des Satzes vom Sehnenviereck). Er stellt weiter fest, daß jedes gleichschenklige Trapez durch eine Gerade, die Zwischenparallele zu parallelen Trapezseiten ist, in zwei gleichschenklige Trapeze und damit in zwei Sehnenvierecke zerlegt wird. Wolfgang Vogel (Thalheim, Elektrofacharbeiter) zeigt dasselbe wie folgt: Bei Spiegelung an der Mittelsenkrechten s der Seiten BC und AD, der Symmetrieachse, wird die Mittelsenkrechte m_a der Seite AB auf die Mittelsenkrechte m_c der Seite CD abgebildet und der Schnittpunkt M von m_a und s als Punkt der Symmetrieachse auf sich (Bild 2). Also verläuft auch die vierte Mittelsenkrechte m_c durch M und das gleichschenklige Trapez ist ein Sehnenviereck. Gemäß Synthese gilt $G \subset L$ und laut Analyse $L \subset G$. Hieraus folgt $L = G$.

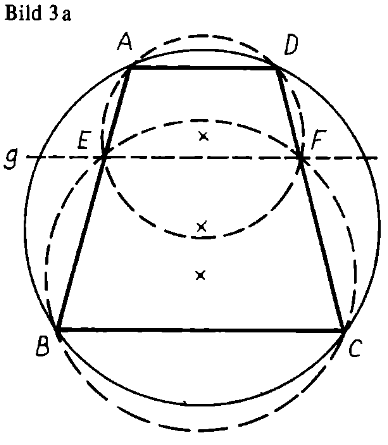
Bild 2



Einige weitere Bemerkungen zu den eingesandten Lösungen sind noch angebracht:
- Im ermittelten Ergebnis „gleichschenklige Trapeze" sind automatisch die Spezialfälle „Rechtecke" und „Quadrate" mit erfaßt. Wer also beim Angeben der ermittelten Sehnenvierecke „gleichschenklige Trapeze, Rechtecke und Quadrate" nennt, hat, falls er ein Mehrfachaufführen von Lösungsvierecken vermeiden will, die nicht gebräuchlichen und unzweckmäßigen Definitionen „Gleichschenkliges Trapez heißt ein Trapez, das zwei gleich lange, aber nicht parallele Seiten hat" und „Rechteck heißt ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel als Innenwinkel und verschieden langen Nachbarseiten" benutzt.
- Beim Lösen einer Aufgabe ist es oft zweckmäßig, zum Erfassen der Problematik sich zunächst an Spezialfällen zu orientieren. Wenn auch nicht erforderlich, sind solche Betrachtungen zusätzlich in einige Bearbeitungen aufgenommen worden:

Beate Balzer (Lindau, 11. Klasse) zeigt: Jedes Rechteck ist ein Sehnenviereck (Umkehrung des Satzes vom Sehnenviereck), denn es hat vier rechte Winkel und damit beträgt die Summe von zwei Gegenwinkeln 180°. Jede Gerade, die parallel zu einer Rechteckseite ist, zerlegt das Rechteck in zwei Rechtecke und damit in zwei Sehnenvierecke.
Felix Kraenz (Pioher, 11. Klasse) schließt hier wie folgt:
Da im Rechteck die Diagonalen gleich lang sind und jede durch ihren Schnittpunkt halbiert wird, besitzt das Rechteck einen Umkreis, dessen Mittelpunkt der Diagonalenschnittpunkt ist, und ist damit ein Sehnenviereck.
- In einem Teil der eingesandten Bearbeitungen wird das Ergebnis mittels Zeichnungen veranschaulicht (Bild 3):

Bild 3a



Zeichnungsvorlagen:
zu Bild 3a: Silvio Löffler (Cottbus, 10. Klasse)

Peter Zienicke (Magdeburg, Student) spricht in seiner Bearbeitung statt von gleichschenkligen Trapezen von Sehnentrapezen.
Eine mögliche Definition wäre:
Definition: Sehnentrapez heißt ein Viereck, das gleichzeitig Trapez und Sehnenviereck ist.
Es läßt sich zeigen, daß jedes Sehnentrapez ein gleichschenkliges Trapez und auch umgekehrt jedes gleichschenklige Trapez ein Sehnentrapez ist. Gleichschenkliges Trapez und Sehnentrapez sind identische Begriffe.
- Wer beim Lesen dieses Beitrages feststellen muß, daß seine Bearbeitung der Aufgabe 2941 kleine Unzulänglichkeiten aufweist, tröste sich damit, daß die in „alpha" 1/89 abgedruckte Lösung auch nicht fehlerfrei ist. In der Zeichnung ist ein Winkel statt mit ζ mit ϱ bezeichnet und in der Formulierung „parallel zu den parallelen Seiten" ist das Wort „den" zu streichen.

W. Träger

Anmerkung zur Aufgabe
Ma 10/12 ■ 3008

Sowohl die Aufgabe (Heft 1/89) als auch die Lösung (Heft 3/89) riefen bei unseren Lesern starke Proteste hervor.
Verständlich, denn da haben wir Unsinn gebaut. Zur Richtigstellung:
Es kann nur heißen:

$$-\sin x \cdot \cos x \leqq 0{,}5$$

oder

$$-\sin x \cdot \cos x < 0{,}5$$

$$x \in P;\ x \neq \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi;\ k \in G.$$

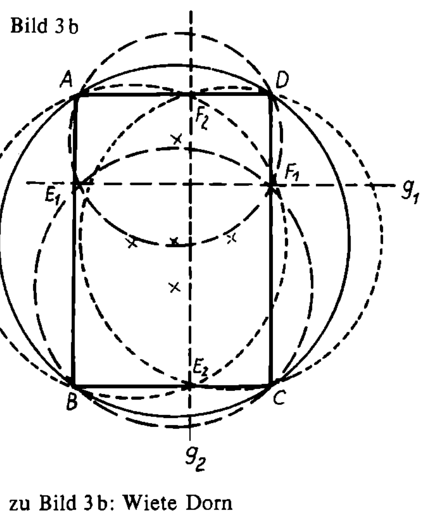
Das heißt aber, die Wahrheit der Aussage

$$-\sin x \cdot \cos x < 0{,}5$$

für alle reellen x läßt sich nicht nachweisen.

Alphons

Bild 3b



zu Bild 3b: Wiete Dorn
(Jena, Ausbildung als Unterstufenlehrerin)

Wie ich eine Eigenaufgabe erfand

Vergeblich würde man in einem Lexikon oder im Duden das Wort Eigenaufgabe suchen. Es müßte nämlich genau hinter „eigenartig" bzw. vor „Eigenbau" stehen. Und doch hat es gerade mit diesen zwei Worten recht viel Gemeinsames.

Nun sind es schon mehr als zwanzig Jahre her, seit ich zum ersten Mal das Wort Eigenaufgabe benutzte. Es war zur Bezirksolympiade der VIII. Olympiade Junger Mathematiker, Bezirk Neubrandenburg, 1969. Ich war für die Förderung mathematischer Talente und für die Durchführung der Bezirksolympiade verantwortlich. Die Teilnehmer der Bezirksolympiaden wurden aufgefordert, zu diesen Wettbewerben stets eine selbständig entwickelte Aufgabe – genannt Eigenaufgabe – mitzubringen. (Alle ehemaligen Preisträger wurden hierzu sogar verpflichtet!)

Um „schöne" Eigenaufgaben zu entwickeln, sollten sich die Teilnehmer mit Aufgaben (und Lösungen!) aus dem *alpha*-Wettbewerb, mit Olympiadeaufgaben usw. beschäftigen. Daraus sollten sie dann schöpferisch neue Problemstellungen gewinnen. Die Aufgaben sollten eigenartig und reizvoll und natürlich ein Eigenbau des Absenders sein.

Inzwischen sind mehrere hundert Einsendungen von der Jury als sehr gut oder gut gewertet, zum Teil in *alpha* veröffentlicht oder für die Förderung im Bezirk genutzt worden. Seit einiger Zeit ist auch im Bezirk Rostock die Idee der Eigenaufgaben bekannt. Auch dort sollen sie zur Bezirksolympiade abgegeben werden.

Seit eh und je gilt der Grundsatz: Geh mit gutem Beispiel voran! Daher habe auch ich schon seit 1971 Eigenaufgaben erdacht und diese dann zur Verwendung für den *alpha*-Wettbewerb an die Redaktion der *alpha* gesandt. Das ist bis heute eine stattliche Anzahl geworden.

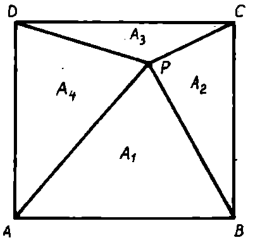
Oft schon bin ich gefragt worden, wie man immer wieder auf neue Ideen für Eigenaufgaben kommen kann. – Mit ein paar Sätzen läßt sich dies jedoch schwer erklären. So will ich an einem Beispiel zeigen (das bekanntlich keine Allgemeingültigkeit hat), wie ich eine Eigenaufgabe erfand.

Beim Lesen der Aufgaben des *alpha*-Wettbewerbs in Heft 6/1988 fand ich unter 6 ■ 2953 folgende Aufgabe, die für Schüler ab Klassenstufe 6 gedacht war.

Sie lautete:

Ein innerer Punkt P des abgebildeten Quadrates $ABCD$ wurde mit den vier Eckpunkten des Quadrates verbunden. Es seien A_1, A_2, A_3, A_4 die Flächeninhalte der vier Dreiecke (Bild 1). Es ist zu beweisen, daß gilt: $A_1 + A_3 = A_2 + A_4$!

Bild 1



Lösung: Ist a die Grundseite des Quadrats, so gilt für die Flächeninhalte der Dreiecke:

$$A_1 + A_3 = \frac{1}{2}a \cdot h_1 + \frac{1}{2}a \cdot h_2$$
$$= \frac{1}{2}a(h_1 + h_2).$$

Da $h_1 + h_2 = a$, ist $A_1 + A_3 = \frac{1}{2}a^2$.

Da der Flächeninhalt des Quadrates a^2 beträgt, ist auch $A_2 + A_4 = \frac{1}{2}a^2$ und somit $A_1 + A_3 = A_2 + A_4$.

1. Die erste Überlegung war, ob die Behauptung auch für ein Rechteck $ABCD$ gilt. Daß dies der Fall ist, sieht der Leser sofort, da wegen

$h_1 + h_2 = b$ für $A_1 + A_3 = \frac{1}{2}a \cdot b$ gilt.

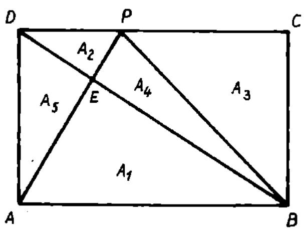
Auch für ein Parallelogramm $ABCD$ gilt noch die Behauptung. Für dessen Flächeninhalt gilt $A = g \cdot h_g$ (g Grundseite, h_g Höhe) und hier ist dann $h_1 + h_2 = h_g$.

Bis hier ist es mit der „Erfindung" noch nicht weit her.

2. Nun könnte auch der Punkt P auf dem Rande des Rechtecks (Parallelogramms) liegen. Auch dann würde die Behauptung noch gelten. Eine der vier Teilflächen wäre nämlich verschwunden, also Null. – Der Beweis für diesen Sonderfall dürfte überhaupt nicht schwerfallen, da bereits $A_1 = \frac{1}{2}a \cdot b$ gilt.

Interessant wird es, wenn noch die Diagonale BD eingezeichnet wird (Bild 2).

Bild 2



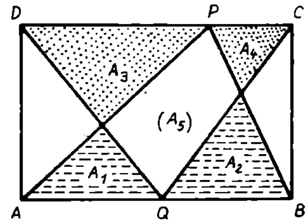
Für den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABP gilt $A_1 + A_4 = \frac{1}{2}a \cdot b$.

Auch gilt $A_1 + A_5 = \frac{1}{2}a \cdot b$ und

$A_3 + A_2 + A_5 = \frac{1}{2}a \cdot b$. Aus den letzten beiden Gleichungen folgt $A_1 = A_3 + A_2$ oder anders $A_1 - A_2 = A_3$. – Die neue Aufgabe könnte dann lauten: ... Es ist zu beweisen, daß die Beziehung $A_1 - A_2 = A_3$ gilt (Bild 2).

In „Erfinderlaune" versetzt, geht die Überlegung gleich weiter. Anstelle der Diagonalen BD liege jetzt ein weiterer Punkt Q auf AB, der mit D und C verbunden sei. Das sähe z. B. so aus (Bild 3):

Bild 3



3. Sind P und Q Punkte auf der Rechteckseite $\overline{DC}$ bzw. $\overline{AB}$ und seien $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{QD}$ und $\overline{QC}$ eingezeichnet, so gilt für die in Bild 3 gekennzeichneten Flächeninhalte $A_1 + A_2 = A_3 + A_4$.

Der Beweis ist wieder nicht schwer, denn sofort gilt wegen

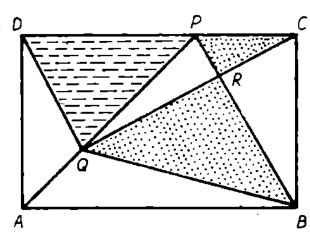
$A = \frac{1}{2}a \cdot b \quad A_1 + A_5 + A_2 = A_3 + A_5 + A_4$,

woraus die Behauptung folgt.

Und nun komme ich zu meiner angekündigten Eigenaufgabe, die aus 1. und 2. gefunden wurde, nämlich: Ein Punkt P liege im Innern und ein Punkt Q liege auf dem Rande des Rechtecks (Parallelogramms).

4. Auf $\overline{DC}$ des Rechtecks $ABCD$ wurde ein beliebiger Punkt P ($P \neq D$, $P \neq C$) mit den Eckpunkten A und B verbunden. Ferner wurde auf $\overline{AP}$ ein beliebiger Punkt Q ($Q \neq A$, $Q \neq P$) mit allen vier Eckpunkten verbunden. Bezeichnet man die Flächeninhalte der Dreiecke ΔDQP, ΔQBR, ΔRCP mit A_1, A_2, A_3, so gilt stets $A_1 = A_2 - A_3$ (Bild 4). Man beweise dies!

Bild 4



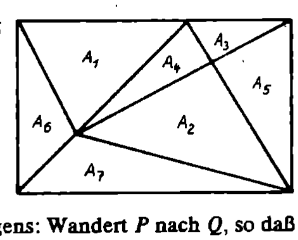
5. Auf den ersten Blick ist dies eine Aufgabe für Schüler der 9. oder 10. Klasse geworden.

Aber der Schüler der Klasse 6, der den ganzen Weg bis zu dieser Aufgabe hin mitverfolgt hat, wird sofort alle Flächeninhalte der Dreiecke mit A_1 bis A_7 bezeichnen (z. B. wie in Bild 5) und finden, daß

$A_7 + (A_1 + A_4 + A_3) = A_7 + A_2 + A_4$ gilt.

Nach Subtraktion von A_7 und A_4 erhält man $A_1 + A_3 = A_2$ und schließlich $A_1 = A_2 - A_3$, w. z. b. w.

Bild 5



Übrigens: Wandert P nach Q, so daß $P = Q$ gilt, so erhält man Fall (1). Wandert dagegen Q nach P, so daß $Q = P$ gilt, so erhält man Fall (2).

H.-J. Kerber

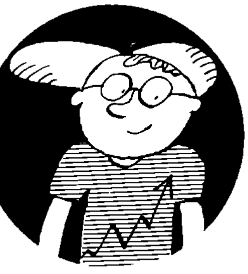
alpha-Wettbewerb

Kollektive Beteiligung am alpha-Wettbewerb 1988/89

OS Fr. Große, Altenberg; OS E. Schneller, E.-Mäder-OS, Fr.-Engels-OS, alle Altenburg; E.-Schneller-Schule, Stadtklub Jg. Math., beide Altentreptow; W.-Seelenbinder-OS, Alt Ruppin; OS H. Schlemann, Ankershagen; Dr.-Th.-Neubauer-Schule II, Apolda; E.-Weinert-OS, Arnstadt; OS Dr. R. Sorge, Asbach; OS W. Lamberz, Bad Berka; OS Bad Kleinen; H.-Beimler-OS, Bad Köstritz; Neubauschule Bad Lausick; R.-Schwarz-OS, Bad Liebenstein; St. Jg. Techn. u. Naturf., OS VI A. Saefkow, M.-Poser-OS, OS Th. Neubauer, EOS E. Thälmann, O.-Grotewohl-OS, alle Bad Salzungen; H.-Beimler-OS, Bärenklau; OS Bandelin; H.-Heine-OS, Barchfeld; K.-Liebknecht-OS, Barth; H.-Belz-OS, Behrenhoff; O.-Nowack-OS, Bentwisch; OS E. Weinert, Berka; 26. OS L. Renn, 19. OS, 41. OS L. Welskopf-Henrich, 21. OS, 23. OS, 33. OS, 44. OS Fr. Espenbeck, alle Berlin; A.-Becker-OS, Berlingerode; OS G. Fugger, Bernau; OS Bernterode; OS Birkungen; OS Geschw. Scholl, Blankenberg; OS Fr. Schiller, Bleicherode; W.-Seelenbinder-OS, Bismark; L.-Herrmann-OS, Blumenhagen; G.-Ewald-OS, Blumenthal; Fr.-Weineck-OS, Blumberg; Geschw.-Scholl-OS, Bernsdorf; OS Beuren; K.-Wagner-OS, Böhrigen; OS Bockau; OS E. Thälmann, A.-Bebel-OS, beide Boizenburg; J.-Schehr-OS, Born; U.-Steinhauer-OS, Brandshagen; OS B. Brecht, Brehme; OS W. Pieck, Breitenworbis; OS H. Beimler, W.-Seelenbinder-OS, beide Breitungen; P.-Neruda-OS, Britz; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Brotterode; M.-Poser-OS, Bürgel; OS II P. Kortschagin, Burg-Stargard; W.-Pieck-OS, Burow; W.-Estel-OS, Buttlar; W.-Seelenbinder-OS, Buttstädt; 2. OS O. Grotewohl, Calau; St. Jg. Naturf. u. Techn. Prof. Dr. G. Hertz, Calbe; O.-Koschewoi-OS, Callenberg; OS A. Einstein, Caputh; K.-Marx-OS, Fr.-Weineck-OS, beide Coswig; St. Jg. Naturf. u. Techn. Cottbus; OS Dallgow; OS Br. Kühn, Dambeck; M.-Gorki-OS, Dermbach; R.-Breitscheid-OS, Dessau; Kreisklub Jg. Math., Demmin; OS Dersekow; E.-Weinert-OS, Deuna; OS Makarenko, Dingelstädt; 2. OS Dr. S. Allende, Döbern; OS Fr. Reuter, Dömitz; M.-Curie-OS, Dohna; OS K. Niederkirchner, Domersleben; OS A. Matrossow, Dorndorf; O.-Grotewohl-OS, Dreitzsch; Pionierpalast W. Ulbricht, 100. OS P. Neruda, beide Dresden; M.-Seydewitz-OS, Dürrröhrsdorf; Kreisklub, W.-Pieck-OS, beide Eberswalde; OS H. Grundig, Ellrich; 1. OS R. Arnstadt, Elsterwerda; E.-Weinert-OS, Empfertshausen; Dr.-Th.-Neubauer-OS, OS 55 W. Hammann, Haus d. JP O. Grotewohl, alle Erfurt; 3. OS O. Benario-Prestes, Falkenberg; Th.-Müntzer-OS, Fambach; W.-Pieck-OS, Fehrbellin; 1. OS J. Korczak, 5. OS G. Dimitroff, beide Finsterwalde; K.-Marx-OS, Flöha; B.-Brecht-OS, Floh; Stat. Jg. Techn. u. Naturf., Kreisklub Math., Spezialschule C. F. Gauß, Dr.-Th.-Neubauer-OS, alle Frankfurt/O.; W.-Seelenbinder-OS, Freienhufen; E.-Thälmann-OS, Freital; E.-Thälmann-OS, Friedeburg; OS F. Reuter, OS II, beide Friedland; OS W. Seelenbinder, Fünfeichen; OS V H. Günther, Fürstenwalde; Th.-Müntzer-Schule, Gehren; R.-Arnstadt-OS, Geisa; J.-R.-Becher-OS, Gernrode; E.-Hartsch-OS, Gersdorf; J.-Gagarin-OS, Geithain; Kalinin-OS, Geschwenda; OS Gielow; W.-Pieck-OS, Glesien; 7. OS, 5. OS J.-Gagarin-Schule, beide Görlitz; J.-Brinckmann-OS, W.-Husemann-OS, beide Goldberg; Fr.-Engels-OS, OS R. Luxemburg, Haus d. JP Br. Kühn, alle Gotha; OS J. Gagarin, Grabowhöfe; Kreisklub Math. Gräfenhainichen; Stat. Jg. Techn. u. Naturf. Gransee; Lenin-OS, E.-Thälmann-OS, beide Greifswald; Goethe-OS, Greiz; K.-Marx-Schule, OS H. Beimler, beide Greußen; Stat. Jg. Naturf. u. Techn., Grevesmühlen; A.-Frank-OS, E.-Schultz-OS, beide Grimma; A.-Walther-OS, Gröditz; OS Cl. Zetkin, Groitzsch; OS Großbartloff; OS N. Ostrowski, Großdeuben; Haus d. Pioniere u. Jugend G. Walter, Pestalozzi-OS, beide Großenhain; OS Gr. Nemerow; J.-Gagarin-OS, Grünhain; Th.-Müntzer-OS, Gumpelstadt; OS H. Günther, Hachelbich; W.-Bredel-OS, Hagenow; M.-Gorki-OS, Hainichen; Lenin-OS, Stat. Jg. Techn. u. Naturf., beide Halberstadt; G.-Dimitroff-OS, Haldensleben; Kreisklub Halle-Süd; OS f. Körperbeh. N. Ostrowski, Halle; Stat. Jg. Techn. u. Naturf. Halle-Neustadt; E.-Thälmann-OS, Harbke; J.-Fucik-OS, Hartha; K.-Oppermann-OS, Harzgerode; OS Hammerbrücke; OS J. Marchlewski, Fr.-Wolf-OS, beide Havelberg; OS B. Koenen, Hedersleben; Schule d. DSF, Heiligengrabe; Math. Schülerklub, Heiligenstadt; P.-Schreier-OS, Hennigsdorf; Kreisklub Jg. Math., Hermsdorf; Cl.-Zetkin-OS, Hohenstein-E.; OS Horka; 21. OS, 22. OS, beide Hoyerswerda; OS E. Egert, Hundeshagen; OS Hunshagen; OS W. Seelenbinder, OS N. Mandela, beide Ilmenau; Goethe-OS, Ilsenburg; G.-Dimitroff-OS, Immelborn; G.-Ewald-OS, Ivenack; A.-Becker-OS, Jatznick; Kreismath.-Klub, Jüterbog; Fr.-Engels-OS, Kaltennordheim; OS A. Becker, Kamsdorf; H.-Beimler-OS, Karbow; A.-S.-Makarenko-OS, M.-J.-Kalinin-OS, OS f. Körperbeh. Dr. F. Wolf, E.-Schneller-OS, H.-Menzel-OS, W.-I.-Lenin-OS, Pionierhaus M. Müller, E.-Thälmann-OS, Fr.-Matschke-OS, W.-Komarow-OS, Fr.-Heckert-OS, M.-Saupe-OS, P.-Tschaikowski-OS, G.-Agricola-OS, alle Karl-Marx-Stadt; E.-Boberg-OS, Karlsburg; J.-Warncke-OS, Katzow; OS Cl. Zetkin, Kaulsdorf; Zentral-OS I, Ketzin; OS E. Schneller, Kirchberg; OS Th. Neubauer, Kieselbach; E.-Thälmann-OS, Kleinmachnow; OS E. Thälmann, Kleinoschersleben; H.-Matern-OS, Klietz; OS H. Matern, Klockow; OS E. Thälmann, Klosterfelde; Goetheschule Königsee; Kreisklub Math. Königs Wusterhausen; W.-Seelenbinder-OS, Könitz; OS O. Grotewohl, Köthen; K.-Marx-OS, Kranichfeld; Bundesgymnasium Krems (Österreich); OS M. Burwitz, Kritzmow; OS Küllstedt; OS Cl. Zetkin, Laage; OS R. Breitscheid, Latdorf; Goetheschule, Lauscha; Pestalozzi-OS, Leegebruch; E.-Wiesner-OS, Leezen; OS E. Weinert, Legefeld; R.-Teichmüller-OS, Leimbach; OS R. Luxemburg V, K.-Liebknecht-OS, EOS K. Marx, Dr.-S.-Allende-OS, E.-Thälmann-OS, J.-C.-Fuhlrott-OS, alle Leinefelde; 6. OS Cl. Zetkin, Haus d. JP A. Saefkow, beide Leipzig; H.-Beimler-OS Leisnig; Lessing-OS, Lengefeld; M.-Poser-OS, Lengfeld; A.-S.-Makarenko-OS, Leubnitz; E.-Thälmann-OS, Leutenberg; EOS Prof. Dr. M. Schneider, Lichtenstein; C.-B.-Geißler-OS, Liebstadt; OS Linda; OS W. Wallstab, Löderburg; 1. OS, Lommatzsch; Haus d. JP Th. Körner, Ludwigslust; OS 6 Kreismatheklub, Lübbenau; Stat. Jg. Naturf. u. Techn., Lübs; W.-Seelenbinder-OS, Lössau; OS M. Wallburg, Löbau; OS W. Bredel, Lübz; F.-L.-Hahn-OS, Lübtheen; OS K. Marx, Lübz; F.-Dzierzynski-OS, Magdala; Laßner-OS Math. Klub, Magdeburg-Süd; J.-R.-Becher-OS, Mahlis; Haus d. JP F. Siemon, Markkleeberg; R.-Luxemburg-OS, Markneukirchen; Cl.-Zetkin-OS, Meerane; Dr.-Th.-Neubauer-OS, 7. OS M. I. Kalinin, beide Meiningen; A.-Kuntz-OS, Mellingen; OS J. Gagarin, Merkers; A.-Dürer-OS II, Merseburg; OS Geschw. Scholl, Meuselbach; OS H. Rau, Mieste; OS O. Benario, Mirow; OS E. Steinfurth, Mittenwalde; OS Mittelstille; OS H. Danz, Möser; O.-Grotewohl-OS, Naumburg; OS J. Fucik, Naundorf; OS W. Bykowski, Neetzow; OS 12 E. Weinert, Neubrandenburg; M.-Burwitz-OS, Neuenkirchen; F.-Dzierzynski-OS, Neuhaus; R.-Hallmeyer-OS, Neundorf; Fr.-Schiller-OS, Goetheschule, beide Neustadt; W.-Seelenbinder-OS, Niederlichtenau; Dr.-Th.-Neubauer-Schule, Niederorschel; W.-Pieck-OS, Niederwiesa; Haus d. JP H. Matern, OS W. I. Lenin, beide Nordhausen; H.-Beimler-OS, Oberhermsdorf; OS E. Weinert, Oberschönau; Fr.-Fröbel-OS, Oberweißbach; AG Jg. Math. Oebisfelde; E.-Weinert-OS, Ohrdruf; Haus d. JP H. Coppi, Oranienburg, EOS K. Marx, Oschersleben; O.-Eichler-OS, Oschatz; OS P. Kmiec, Osternienburg; W.-Pieck-OS, Osterwieck; Th.-Müntzer-OS, Osthausen; OS O. Grotewohl, Pappenheim; Haus d. JP P. Göring, Kreisklub Math. Parchim; Haus d. JP E. Weinert, Pasewalk; A.-Becker-OS, Passau; OS Dr. Th. Neubauer, Pfaffschwende; Spezialistenlager Plauen-Land; Makarenko-OS, Plessa; OS E. Schneller, Poleben; H.-Edenhofer-OS, Pößneck; K.-Foerster-OS, Potsdam; W.-Pieck-OS, Premnitz; OS Pritzerbe; Goethe-Schule II, Pritzwalk; OS Quellendorf; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Rackwitz; OS G. Titow, OS Pestalozzi, beide Radebeul; W.-I.-Lenin-OS, Radewege; Stat. Jg. Naturf. u. Techn., Br.-H.-Bürgel-OS, Geschw.-Scholl-OS, alle Rathenow; E.-Weinert-OS, Reichenbach; E.-Thälmann-OS, Reinberg; A.-Hennecke-OS, Reinsdorf; E.-Thälmann-OS, Remda; OS U. Steinhauer, J.-Gagarin-OS, H.-Burmeister-OS, alle Ribnitz; H.-Matern-OS, Spezialschule Fr. Engels, Pestalozzi-OS, alle Riesa; J.-Gagarin-OS, Riethnordhausen; H.-Matern-OS, Rochlitz; J.-Curie-OS, Röbel; Fr.-Schmenkel-OS, Roskow; Ziolkowski-OS, Roßdorf; 1. OS W. Schröder, Haus d. JP, 37. OS K. Merseburg, alle Rostock; O.-Grotewohl-OS, Rudolstadt; K.-Niederkirchner-OS, Saal; W.-M.-Komarow-OS, Saalfeld; Stat. Jg. Techn. u. Naturf. E. Thälmann, Salzwedel; OS Th. Müntzer, Stat. Jg. Naturf. u. Techn., OS W. Pieck, alle Sangerhausen; T.-Bunke-OS, Sanitz; OS Schadeleben; OS H. Matern, Schernberg; OS M. Gorki, Schkölen; OS Schlagsdorf; OS H. Danz, OS J. G. Seume, OS K. Marx, OS L. Pappenheim, alle Schmalkalden; P.-Göring-OS, Schmiedefeld; OS Schule d. DSF, Schneidlingen; K.-Liebknecht-OS, Schönbrunn; OS K. Liebknecht, Schönebeck; H.-Beimler-OS, Schönhausen; OS Kuba Schule d. DSF, Schorssow; E.-Weinert-OS, Schollene; OS Fr. Engels, Schwallungen; OS S. Kosmodemjanskaja, Schweikershain; OS Fr. Fröbel, Schweina; Lenin-OS, Schwarzenberg; Kreispionierhaus M. Böhme, Sebnitz; OS H. Warnke, Sielow; OS Th. Müntzer, Silkerode; Haus d. JP M. Gorki, Fr.-Engels-OS, beide Sömmerda; W.-Pieck-OS, Sonneberg; OS Glückauf, OS W. Pieck, OS A. Saefkow, alle Sondershausen; A.-Becker-OS, Spreenhagen; OS H. A. Eckemann, Sponholz; K.-Marx-OS, Kreisklub Math. OS A. Becker, beide Spremberg; R.-Sorge-OS, Schwerin; II. OS E. Wölk, Kreisklub Math., beide Stadtroda; OS W. I. Lenin, J.-W.-Goethe-OS, beide Staßfurt; J.-Fucik-OS, Steinbach; R.-Luxemburg-OS, Steinsdorf; F.-Dettmann-OS, Stralsund; Haus d. JP F. Weineck, Strausberg; Lasker-OS, Ströbeck; K.-Marx-OS, Stralsund; TOS, Sünna; 12. OS Dr. R. Sorge, Suhl; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Tangerhütte; OS E. Thälmann, Tannenbergsthal; H.-Beimler-OS, Tantow; E.-Weinert-OS, Teichwolframsdorf; J.-Gagarin-OS, Teistungen; Fr.-Mehring-OS, Tiefenort; Pestalozzischule, A.-Einstein-OS, beide Torgelow; E.-Schneller-OS, Töplitz; OS Shukow, Treben; OS W. Pieck, Trusetal; OS Dr. S. Allende, Uebigau; Kreisklub Math., Goetheschule, E.-Welk-OS, A.-Nitz-OS, alle Ueckermünde; H.-Beimler-OS, Unterbreizbach; OS Unterweißbach; E.-Schneller-OS, Urnshausen; OS J. G. Seume, Vacha; OS F. Luther, Velten; W.-Seelenbinder-OS, Viernau; OS Vitte; W.-John-OS, Vitzenburg; OS Völkershausen; A.-Bebel-OS, Vogelsang; OS Walchow; Zentrale OS, R.-Luxemburg-OS, beide Waldau; OS E. Schneller, Waldkirchen; Goetheschule Waren; OS Wasserthaleben;

Fortsetzung auf Seite 142

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1990

Ma 5 ■ 3045 Drei Brüder sind zusammen 41 Jahre alt. Roland ist 5 Jahre älter als Heinz, und Lothar ist ein Jahr älter als Roland. Welche Lebensalter (in ganzen Zahlen) hat jeder dieser drei Brüder?

Schülerin R. Roch, Langenwolmsdorf

Ma 5 ■ 3046 Eine Familie unternimmt am Wochenende einen Ausflug. Jede der vier Personen nimmt etwas Taschengeld mit. Die beiden Kinder Bernd und Tina haben gleichviel Taschengeld in ihrer Geldbörse. Der Vater hat 10,– M mehr eingesteckt als die Mutter. Der Vater, Bernd und Tina haben zusammen 60,– M Taschengeld mitgenommen. Über wieviel Mark Taschengeld verfügt jedes Familienmitglied, wenn sie zusammen 100,– M mitgenommen haben?

Schülerin S. Heusing, Brotterode

Ma 5 ■ 3047 Wie lautet die kleinste, wie die größte dreistellige natürliche Zahl mit der Quersumme 13? (Hinweis: Die Quersumme der Zahl 369 lautet $3 + 6 + 9 = 18$.)

Sch.

Ma 5 ■ 3048 Die Schüler Andreas, Bernd, Claus und Daniel haben die Nachnamen (in anderer Reihenfolge) Eckbart, Fadelmann, Gänsich und Hermhaus. Sie tauschen ihre Ferienerlebnisse aus.
Aus dem Gespräch geht folgendes hervor:
(1) Der Schüler Gänsich war mit Bernd und Claus im selben Ferienlager.
(2) Andreas hat den Nachnamen Fadelmann.
(3) Auf einem Foto steht Claus neben dem Schüler mit dem Nachnamen Hermhaus.
Wie heißen die Schüler mit Vor- und Nachnamen? *Schüler C. Puddig, Saßnitz*

Ma 5 ■ 3049 a) Jan denkt sich eine natürliche Zahl. Er addiert 10 und verdoppelt dann noch diese Summe. Damit erhält er als Ergebnis 52 mehr als seine gedachte Zahl.
Wie lautet die gedachte Zahl?
b) Jörg denkt sich eine andere natürliche Zahl. Er erhält bei gleichem Vorgehen jedoch 20 mehr als seine gedachte Zahl.
Wie lautet Jörgs gedachte Zahl?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 3050 In dem Schema

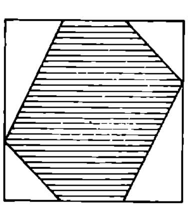
$$\begin{array}{r} \text{KLEE} \\ +\ \text{KLEE} \\ +\ \underline{\text{KLEE}} \\ \text{WIESE} \end{array}$$

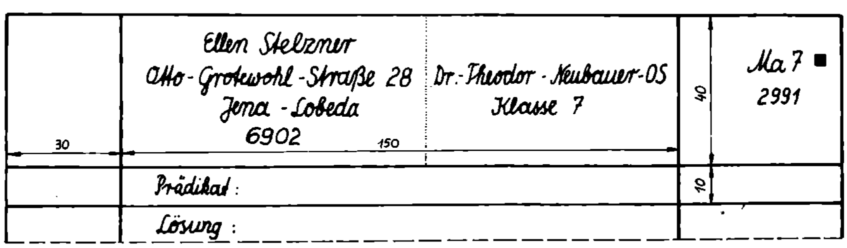
sind die Buchstaben so durch Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 bzw. 9 zu ersetzen, daß man eine richtig gelöste Additionsaufgabe erhält. *Sch.*

Ma 5 ■ 3051 Ein Betrieb hat einen „Lada" und einen „Dacia". Der Lada verbraucht auf 100 km im Durchschnitt 1 Liter Benzin mehr als der Dacia. Während eines Monats legte der Lada 800 km zurück. Er verbrauchte für diese Fahrstrecke 5 Liter Benzin mehr als der Dacia verbraucht hätte. Im gleichen Monat verbrauchte der Dacia 63 Liter Benzin. Wieviel Kilometer Fahrstrecke legte der Dacia zurück? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 6 ■ 3052 Ein Wanderer, der je Stunde rund 6 km geht, und ein Radfahrer, der viermal so schnell ist wie der Wanderer, kommen sich entgegen. Sie sind noch 1 km voneinander entfernt. Welche Zeit vergeht, bis sie erneut 1 km voneinander entfernt sind? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 6 ■ 3053 Der Flächeninhalt des abgebildeten Quadrates betrage 144 cm². Jede Seite des Quadrates ist in drei gleichlange Strecken unterteilt. Die sechs Eckpunkte der schraffiert dargestellten Fläche liegen





Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027

3. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. (Die Klassenstufennummer steht vor der Aufgabennummer.) Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12 oder Na/Te 10/12 gekennzeichnet sind.
4. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (siehe Muster), da die eingehenden Lösungen aufgabenweise sortiert und korrigiert werden. Noch eine Bitte an die Schulen: Sendet bitte die Lösungen bereits nach Aufgaben sortiert ein.
5. Teilnehmer, die eine richtige Lösung (nicht nur Antwortsatz) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Anderenfalls erhalten sie eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst". Nach dem Einsendetermin eingehende Lösungen werden nicht mehr bearbeitet!
6. Jeder Teilnehmer sollte einen Durchschlag seiner Lösungen anfertigen, um sie mit den jeweils zwei Hefte später erscheinenden Lösungen vergleichen zu können.

Der Jahreswettbewerb 1988/89 läuft von Heft 5/1988 bis Heft 1/1989. Zwischen dem 1. und 10. September 1989 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/88 bis 1/89 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden.

Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/88 veröffentlicht.

Wer mindestens 10 Antwortkarten (von den Wettbewerben der Hefte 5/88 bis 1/89) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein *alpha*-Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1988/89 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunde zurück). Schüler, die schon mehrere Jahre teilnehmen, senden bitte die zuletzt erhaltene Urkunde mit ein. Allein anhand dieser werden die Teilnehmerlisten aufgestellt. Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

auf solchen Teilungspunkten der Quadratseiten. Welchen Flächeninhalt besitzt das schraffiert dargestellte Sechseck?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 3054 Im Rahmen eines Wettbewerbs sammelten die Schüler der Klassen 4, 5 und 6 einer Schule insgesamt 274 kg Altpapier. Die Schüler der Klasse 6 sammelten 18 kg Altpapier weniger als die Schüler der Klasse 5; die Schüler der Klasse 4 sammelten 10 kg Altpapier mehr als die Schüler der Klasse 6. Wieviel Kilogramm Altpapier entfallen auf die Schüler dieser drei Klassen?

Schülerin H. Engel, Brotterode

Ma 6 ■ 3055 Ein Kleintierhalter besitzt doppelt soviel Hühner wie Gänse und dreimal soviel Kaninchen wie Hühner. Diese Tiere haben zusammen 120 Beine. Wie viele Gänse, Hühner bzw. Kaninchen besitzt dieser Kleintierhalter?

Schüler A. Schmatloch, Blankenhain

Ma 6 ■ 3056 In einer Gemüseverkaufsstelle wurden an einem Vormittag insgesamt 290 kg Gemüse verkauft, und zwar doppelt soviel Kilogramm Möhren wie Radieschen, 10 kg Kohlrabi mehr als Möhren und 20 kg Kohl weniger als Radieschen. Wieviel Kilogramm jeder Sorte wurden verkauft? *Schüler T. Peter, Brotterode*

Ma 6 ■ 3057 Welche gebrochenen Zahlen mit dem Nenner 17 sind größer als $\frac{1}{4}$ und kleiner als $\frac{1}{3}$?

Schüler T. Peter, Brotterode

Na/Te 6 ■ 460 Laut Kursbuch beträgt die Entfernung zwischen Leipzig und Dresden 120 km. Der D 492 fährt in Dresden 9.00 Uhr ab und ist fahrplanmäßig 10.42 Uhr in Leipzig. Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit dieses Zuges? *R.*

Ma 7 ■ 3058 Zeichne ein Quadrat $ABCD$. Konstruiere über der Seite $\overline{BC}$ nach außen und über der Seite $\overline{CD}$ nach innen jeweils ein gleichseitiges Dreieck. Bezeichne die neuen Eckpunkte dieser gleichseitigen Dreiecke mit E und F und verbinde E mit F. Vergleiche den Flächeninhalt des Dreiecks EFC mit dem des Quadrates $ABCD$. Begründe deine Feststellung.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

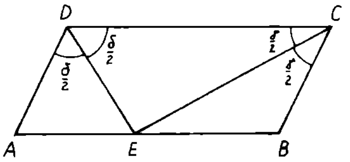
Ma 7 ■ 3059 Die Mitglieder einer Familie sind zusammen 92 Jahre alt. Die Tochter Dagmar ist drei Jahre älter als ihre Schwester Ulrike. Die Mutter ist drei Jahre älter als das dreifache Alter von Ulrike. Der Vater ist drei Jahre jünger als das dreifache Alter von Dagmar. Wie alt ist jedes der vier Familienmitglieder?

Schülerin K. Bolzmann, Gadebusch

Ma 7 ■ 3060 Eine Familie hat drei Kinder. Im Jahre 1988 war das zweite Kind vier Jahre älter als das jüngste Kind. Das älteste Kind war zweimal so alt wie das jüngste Kind. Die Mutter war dreimal so alt wie das zweite Kind, und der Vater war vier Jahre älter als die Mutter. Wie alt war in diesem Jahre jedes Familienmitglied, wenn alle zusammen 112 Jahre alt waren?

Schülerin M. Schlegel, Schneidlingen

Ma 7 ■ 3061 Ein Parallelogramm $ABCD$ habe die Eigenschaft, daß der Schnittpunkt E der beiden Winkelhalbierenden der Innenwinkel BCD und ADC auf der Seite $\overline{AB}$ liegt. Beweise, daß dann $\overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$ gilt! *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*



Ma 7 ■ 3062 Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit seinem Umkreis k. Ein beliebiger innerer Punkt P des Dreiecks ABC werde mit B und C verbunden. Es ist zu beweisen, daß $\sphericalangle BAC$ kleiner als $\sphericalangle BPC$ gilt. *Sch.*

Na/Te 7 ■ 461 Ein Würfel aus Aluminium mit der Kantenlänge 2,08 cm hängt an einem Federkraftmesser. Dadurch wird die Feder um 10 mm gedehnt. Der Körper wird durch einen Würfel aus Stahl ersetzt. Wie groß ist nun die Ausdehnung der Feder? *R.*

Na/Te 7 ■ 462 Vor einer Sammellinse (Brennweite $f = 10$ cm) steht im Abstand $g = 15$ cm ein $G = 4$ cm hoher Gegenstand. Wo entsteht sein Bild (b) und wie groß ist es (B)? (zeichnerische Lösung) *R.*

Ma 8 ■ 3063 Die Differenz aus einer vierstelligen natürlichen Zahl und der Zahl, die durch ein beliebiges Vertauschen der Grundziffern dieser vierstelligen Zahl entsteht, ist stets durch 9 teilbar.

a) Bilde ein Beispiel!

b) Wie viele Vertauschungsmöglichkeiten gibt es?

c) Beweise die Behauptung an einer Vertauschung!

Schüler P. Sewing, Horst

Ma 8 ■ 3064 Bildet man die Summe von irgendwelchen fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, verdoppelt man dann diese Summe und streicht schließlich die letzte Ziffer weg, so erhält man stets den mittleren Summanden dieser fünf Zahlen. Beweise diese Behauptung und gib zuvor ein Beispiel an!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

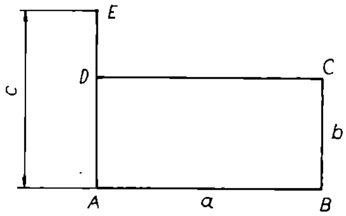
Ma 8 ■ 3065 Zeichne zwei beliebige sich von außen im Punkt A berührende Kreise! Sind B und C die Berührungspunkte einer gemeinsamen Tangente an diese beiden Kreise, so ist der Winkel $\sphericalangle BAC$ ein rechter.

Diese Behauptung ist zu beweisen!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 8 ■ 3066 Das Bild stellt ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$ dar. Auf der über D hinaus verlängerten Rechteckseite $\overline{AD}$ wurde ein Punkt E festgelegt, und es habe $\overline{AE}$ die Länge c. Durch E ist eine Gerade zu konstruieren, die auf $\overline{CD}$ einen Punkt F erzeugt, so daß $\overline{CF}$ die Länge d hat und $a \cdot b = c \cdot d$ gilt.

Sch.



Ma 8 ■ 3067 Jemand berechnet das Volumen und die Oberfläche eines Würfels (Einheit der Würfelkante: 1 cm) und stellt fest, daß beide Maßzahlen übereinstimmen.

Welches Volumen hat der Würfel?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

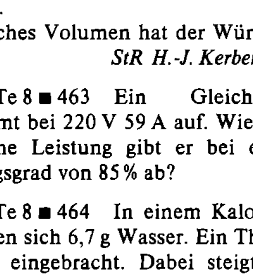
Na/Te 8 ■ 463 Ein Gleichstrommotor nimmt bei 220 V 59 A auf. Wieviel mechanische Leistung gibt er bei einem Wirkungsgrad von 85 % ab? *R.*

Na/Te 8 ■ 464 In einem Kalorimeter befinden sich 6,7 g Wasser. Ein Thermometer wird eingebracht. Dabei steigt die angezeigte Temperatur um $\Delta t = 14{,}6$ K und zeigt nach dem Eintauchen eine Temperatur von 32,4 °C an. Um das Thermometer um 1 K zu erwärmen, sind 1,93 J notwendig. Welche Temperatur hatte das Wasser vor dem Eintauchen des Thermometers? (Die Wärmeabgabe des Kalorimeters wird nicht berücksichtigt.) *R.*

Ma 9 ■ 3068 Die Spannweite eines Brükkenbogens beträgt 60 m.

Wie groß ist seine Pfeilhöhe x, die sich zum Durchmesser des zugehörigen Kreises wie 1 : 10 verhält?

Schüler A. Kellner, Halberstadt

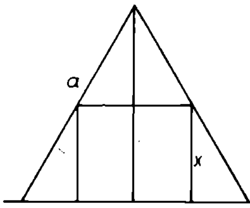


Ma 9 ■ 3069 Von zwei konvexen Vielekken hat das eine drei Ecken und 21 Diagonalen mehr als das andere Vieleck. Um welche Vielecke handelt es sich? *Sch.*

Ma 9 ■ 3070 Einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a sei ein Quadrat mit der Seitenlänge x so einbeschrieben, wie es das Bild zeigt.

Es ist der prozentuale Anteil der Quadratfläche an der Dreiecksfläche zu berechnen.

F. Thomas, Neukirch



Ma 9 ■ 3071 Jemand bildet vier natürliche Zahlen so: Die zweite Zahl ist doppelt so groß wie die erste; jede folgende Zahl ist doppelt so groß wie die Summe aller vorangegangenen Zahlen. Eine der Zahlen ist Primzahl, und eine lautet 1986.
Wie heißen diese vier Zahlen?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ■ 3072 Eine kreisförmige Rasenfläche mit einem Durchmesser von 20 m soll von einem gleichmäßig breiten Weg umgeben werden. Die Flächeninhalte von Weg und Rasen sollen gleich groß sein.
Es ist eine Konstruktion des Rasens mit Weg im Maßstab 1 : 500 anzufertigen! Die Konstruktion ist zu begründen!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Na/Te 9 ■ 465 Drei Widerstände 5,0 Ohm, 10 Ohm und 20 Ohm werden a) hintereinander und b) parallelgeschaltet und an eine Spannungsquelle (Leerlaufspannung 13,5 V, Innenwiderstand 1 Ohm) gelegt.
a) Welche Klemmenspannung tritt an den Klemmen der Spannungsquelle auf?
b) Bei der Parallelschaltung der drei genannten Widerstände wird ein Gesamtstrom von 3,0 A gemessen. Wie groß sind die Teilströme und die an den Widerständen auftretenden Wärmeleistungen? *R.*

Na/Te 9 ■ 466 Eine elektrische Kochplatte (Leistungsaufnahme 1 000 W) hat einen Wirkungsgrad von 70 %. Wieviel Liter Wasser von 18 °C kann man in 15 min auf 100 °C erwärmen? *R.*

Ma 10/12 ■ 3073 In welchem Zahlensystem stellt die folgende Gleichung eine wahre Aussage dar?

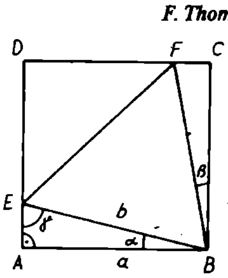
$$(1354)_x \cdot (12)_x = (16470)_x$$

Dipl.-Landwirt H. Boettcher, Weimar

Ma 10/12 ■ 3074 Es ist folgende Aussage zu beweisen: Wenn die Summe dreier natürlicher Zahlen durch 3 teilbar ist, so ist auch die Summe ihrer Kuben durch 3 teilbar. *Schüler St. Krähe, Güstrow*

Ma 10/12 ■ 3075 Einem Quadrat *ABCD* sei ein gleichseitiges Dreieck so einbeschrieben, wie das Bild zeigt.
Es gelte $\alpha = \beta = 15°$.
Wieviel Prozent der Quadratfläche wird von der Dreiecksfläche eingenommen?

F. Thomas, Neukirch



Ma 10/12 ■ 3076 Unter welcher Bedingung ist das folgende Gleichungssystem im Bereich der natürlichen Zahlen lösbar?

(1) $\sqrt{c^3} + \sqrt{abc^2} = ac + c^2$

(2) $\sqrt{ac} = \dfrac{a}{\sqrt{b}}$

$a, b, c \in N$;
$a, b, c \neq 0$ *F. Pampel, Zeulenroda*

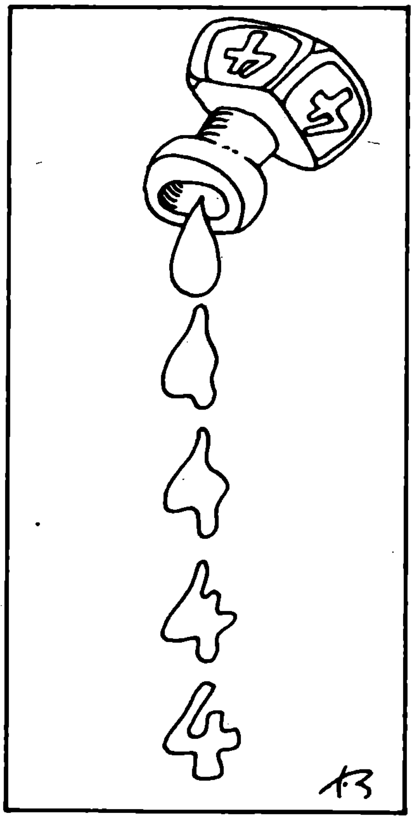
Ma 10/12 ■ 3077 Es sind die kleinsten drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen zu ermitteln, für welche die Summe aus deren Kubikzahlen ebenfalls eine Kubikzahl ist. *Sch.*

Na/Te 10/12 ■ 467 Wie groß ist die Periodendauer einer Flüssigkeitssäule von 1 m Länge, die in einem U-Rohr schwingt? (Es wird von der Reibung der Flüssigkeit an der Rohrwandung abgesehen.)

Na/Te 10/12 ■ 468 Mit einem Tauchsieder eine bestimmte Wassermenge zum Sieden zu bringen, dauert bei einer Spannung von $U_1 = 205$ V 2 min länger als bei voller Netzspannung $U_2 = 220$ V. Welche Zeit wird bei voller Netzspannung benötigt?

Fortsetzung von Seite 139

OS' Wechmar; A.-Becker-OS, Wechselburg; Geschw.-Scholl-OS, Weißenborn-L.; Kreisklub Jg. Math. Weißwasser; J.-Gagarin-OS, Werneuchen; OS A. Günther, Wernshausen; Haus d. JP A. Becker, Werder; J.-Harder-OS, Wesenberg; OS O. Grotewohl, Westerengel; K.-Marx-OS, Wilkau-Haßlau; Math. Zirkel „Quant", Winniza (UdSSR); OS Wipperdorf; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Wittenberg-L.; OS IV, Wittstock; OS H. Heine, Wörmlitz; OS F. Gießner, Wofflében; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Wohlmirstedt; Stat. Jg. Techn. u. Naturf. G. Hertz, Wolfen; OS DSF, Wolgast; OS Wormstedt; Lenin-OS, OS I H. Werner, beide Worbis; Dr.-R.-Sorge-OS, Wollin; OS Th. Müntzer, Wulfen; F.-Frenz-OS, Wustermark; G.-Walter-OS, Wustrow; H.-Kristen-OS, Zahna; Lutherschule, OS Fr. Schiller, beide Zella-Mehlis; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Zembschen; W.-Seng-OS, Zepernick; Fr.-Schiller-OS, Zeulenroda; Zentrale OS W. Seelenbinder, Zielitz; Prof.-Dr.-W.-Du-Bois-OS, Zittau; OS O. Benario-Prestes, Zobersdorf.



Unterhaltsamer Denksport

Versuche zunächst, die Aufgaben im Kopf zu rechnen. Bilde dann Gleichungen und berechne die Variablen!

1. Das 3fache einer Zahl, vermehrt um ihr 4faches, ist 21.

2. Das 12fache einer Zahl, vermindert um 12, ist 12.

3. Vermindert man das 7fache einer Zahl, um 27, so erhält man ihr 4faches.

4. Die Zahl 45 ist derart in drei Teile zu teilen, daß alle drei untereinander gleich sind, wenn man den zweiten mit 2 multipliziert und den dritten durch 3 dividiert.

5. Vermehre ich eine Zahl, die ich im Sinne habe, um die Hälfte dieser Zahl, so erhalte ich 9.

6. Die Summe zweier Zahlen beträgt 7, ihre Differenz 2.

7. Wie oft ist die Differenz der Zahlen 48 und 33 in der Zahl 225 enthalten?

8. Die Differenz zweier Zahlen ist 5, ihr Produkt 300. Welche Zahlen sind es?

9. Es bleibt sich gleich, ob man den 9. Teil einer Zahl um 9 vermindert oder ob man ein Neuntel der Zahl um ihr 9faches vermindert.

10. Addiert man zum 5. Teil einer Zahl 5, so erhält man dasselbe als wenn man von der Zahl selbst 5 subtrahiert.

11. Um wieviel ist 99 größer als der Unterschied der Zahlen 98 und 22?

12. Die Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender Zahlen ist 61. Wie heißen die beiden Zahlen?

13. Um wieviel ist der Quotient aus 120 und 8 kleiner als die Summe der beiden Zahlen?

14. Vermehrt man eine Zahl um 6 und vermindert dieselbe Zahl um 2, so ist das Produkt der neuen Zahlen 20.

15. Das 5fache einer Zahl, vermehrt um 5, ergibt 50.

A. Körner/J. Lehmann

aus: Funktio, 5/87

XXX. Internationale Mathematikolympiade

Braunschweig, 13. bis 24. Juli 1989

Die Lösungen der Aufgaben senden wir euch auf Wunsch zu. Legt bitte einen frankierten Rückumschlag bei. *Alphons*

Im Heft 1/90 wird Goldmedaillengewinner Frank Göring über die Jubiläums-IMO berichten.

Aufgaben

1. Man beweise, daß die Menge $\{1,2,\ldots,1989\}$ derart in 117 paarweise elementfremde Teilmengen $A_1, A_2, \ldots, A_{117}$ zerlegt werden kann, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) für alle i enthält A_i genau 17 Elemente,
(2) für alle i hat die Summe der Elemente in A_i denselben Wert.

(Philippinen)

2. Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. Die Winkelhalbierenden seiner Innenwinkel α, β und γ schneiden den Umkreis in den Punkten A_1, B_1 bzw. C_1. Die Halbierenden der Außenwinkel von β und γ schneiden sich auf der Geraden AA_1 im Punkt A_0; analog seien die Punkte B_0 und C_0 bestimmt. Die Flächeninhalte des Dreiecks $A_0B_0C_0$, des Sechsecks $AC_1BA_1CB_1$ und des Dreiecks ABC seien mit $|A_0B_0C_0|, |AC_1BA_1CB_1|$ bzw. $|ABC|$ bezeichnet. Man zeige:
a) $|A_0B_0C_0| = 2\cdot|AC_1BA_1CB_1|$,
b) $|A_0B_0C_0| \geqq 4\cdot|ABC|$.

(Australien)

3. Es seien k und n feste positive ganze Zahlen. In der Ebene sei eine Menge S von n verschiedenen Punkten mit folgenden Eigenschaften gegeben:
(i) keine drei Punkte von S sind kollinear,
(ii) zu jedem Punkt P aus S gibt es mindestens k verschiedene Punkte aus S, die denselben Abstand von P haben.

Man beweise: $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

(Niederlande)

4. In einem konvexen Viereck $ABCD$ gelte für die Seiten AB, AD und BC, daß $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BC}$ ist.
Im Inneren dieses Vierecks liegt ein Punkt P, der von der Geraden CD den Abstand h und von den Punkten A und B den Abstand $h + \overline{AD}$ bzw. $h + \overline{BC}$ hat.
Man beweise: $\frac{1}{\sqrt{h}} \geqq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$.

(Island)

5. Man zeige:
Für jede natürliche Zahl n gibt es n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, von denen keine eine Primzahlpotenz mit ganzzahligem Exponenten ist.

(Schweden)

6. Wir nennen eine Permutation $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ der Zahlen $1, 2, \ldots, 2n$ angenehm, wenn
$|x_i - x_{i+1}| = n$ für mindestens ein
$i \in \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ erfüllt ist.
Man zeige, daß für jede natürliche Zahl n mehr als die Hälfte aller Permutationen angenehm ist.

(VR Polen)

Arbeitszeit: zweimal 4,5 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Unsere Mannschaft der IMO 89:

Prof. Dr. Burosch, Delegationsleiter
Prof. Dr. H.-D. Gronau, stellv. Delegationsleiter

Andreas Siebert	1. Preis, 42 Punkte
Gerard Zenker	1. Preis, 42 Punkte
Frank Göring	1. Preis, 42 Punkte
Jan Fricke (Neubrandenburg)	2. Preis, 33 Punkte
André Pönitz (Karl-Marx-Stadt)	2. Preis, 30 Punkte
Rüdiger Belch (Karl-Marx-Stadt)	3. Preis, 27 Punkte

Inoffizielle Länderwertung – Preisverteilung

Platz	Land	1.	2.	3.
1.	VR China	4	2	–
2.	SR Rumänien	2	4	–
3.	UdSSR	3	2	1
4.	DDR	3	2	1
5.	USA	1	4	1
6.	ČSSR	2	1	3
7.	VR Bulgarien	1	3	2
8.	BRD	1	3	2
9.	SR Vietnam	2	1	3
10.	Ungarische VR	–	4	1
11.	Jugoslawien	1	3	1
12.	VR Polen	–	3	2
13.	Frankreich	–	1	5
14.	Iran	–	2	3
15.	Singapur	–	–	4
16.	Türkei	–	1	4
17.	Hongkong	–	2	1
⋮				

Jede Mannschaft bestand aus 6 Schülern.
1. Preis für $\geqq 38$ uns $\leqq 42$ Punkte
2. Preis für $\geqq 30$ und $\leqq 37$ Punkte
3. Preis für $\geqq 18$ und $\leqq 29$ Punkte
Es nahmen Schüler aus 50 Ländern teil.

Fortsetzung von Seite 123

Wir erkennen: Links steht das Quadrat des Quadratmittels der Zahlen a, b, c, rechts das Produkt aus arithmetischem und harmonischem Mittel. Nun ist aber (nach dem oben bewiesenen) das Quadratmittel größer gleich dem arithmetischen und dieses wiederum (wir zeigen es anschließend) größer gleich dem harmonischen, so daß die Ungleichung in trivialer Weise bewiesen ist. Den letzten Beweis holen wir nun nach:

Es gilt: Für $a, b, c > 0$ ist

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

Beweis: Es ist

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$
$$= 3 + \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$$
$$\geqq 3+2+2+2 = 9,$$

wegen $x + \frac{1}{x} \geqq 2$ für positive x.

Hieraus folgt aber sofort die Behauptung.
Die Verallgemeinerung lautet:
Für n positive Zahlen x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}.$$

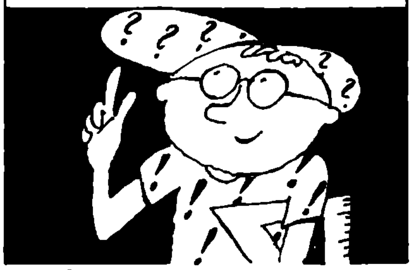
Führt den Beweis selbst, indem ihr wie im Fall $n = 3$ vorgeht.
Abschließend zeigen wir, daß die Ungleichung (3) auch durch die Verwendung der Heronischen Formel beweisbar ist.
Es ist

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \sqrt{s}\left(\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$\leqq \sqrt{s}\left(\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$= \sqrt{s}\left(\frac{s}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = s^2\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$\leqq (a^2+b^2+c^2)\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{27}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+c^2).$$

Bei der ersten Abschätzung wurde benutzt, daß das geometrische kleiner gleich dem arithmetischen Mittel ist. Die zweite Abschätzung ergibt sich aus (6).

W. Moldenhauer

Lösungen



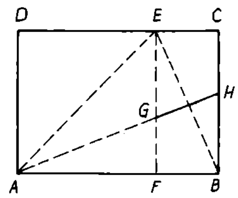
Lösung zum Titelblatt, Heft 5/89
40. Jahrestag der DDR

Lösungen zu: Geschwister, Heft 5/89

1. Es sind fünf Geschwister, nämlich ein Mädchen und vier Jungen.
2. Es sind sieben Geschwister, nämlich vier Mädchen und drei Jungen.
3. Es sind sechs Geschwister, nämlich vier Mädchen und zwei Jungen.
4. Bezeichne Mädchen mit M und Jungen mit J! Es gilt dann $J - 1 = 2M$;
$J = (M - 1) + 3$; $J = M + 2$; also
$M + 2 = 2M + 1$; also: $M = 1$ und $J = 3$.
Es sind vier Geschwister, nämlich ein Mädchen und drei Jungen.
5. Es gilt: $a = b + x$. Damit sind aber unendlich viele Lösungen möglich, z. B.
$b = 11$; $x = 4$; $a = 11 + 4 = 15$.
6. Die Gleichung lautet: $b = c + y$. Mit den gegebenen Werten ergibt sich $b = 13 + 5 = 18$.
7. $G = M + J$; $M = 3(J - 1)$; $J = M - 1$; damit: $M = 3(M - 2)$;
also: $M = 3$ und $J = 2$. In der Familie sind drei Mädchen und zwei Jungen, d. h. fünf Geschwister.
8. $s = j - 2$; also:
$s = (b - 3) - 2 = b - 5$; $j = b - 3$;
also: $b + j + s = 40$;
$b + (b - 3) + (b - 5) = 40$;
also: $3b - 8 = 40$;
daraus folgt $b = 16$; $j = 13$; $s = 11$.
Johannes ist 13 Jahre, seine Schwester 11 Jahre und sein Bruder 16 Jahre alt.
9. In a Jahren ist Paul (P) so alt, wie Max (M) heute ist; also: $P + a = M$. In den a Jahren ist Otto $(O + a)$ Jahre alt. Max ist heute aber doppelt so alt;
also $M = 2(O + a)$. Wir wissen jetzt:
$P = M - a$ und $O = \frac{M}{2} - a$.
Es ist aber $M - a > \frac{M}{2} - a$, also
$P > O$ und $M > P$, folglich $M > P > O$.
Max ist der Älteste und Otto der Jüngste.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. Flachsmeyer, Heft 5/89

Gegeben war ein Ostwaldsches Rechteck (DIN-Blatt).
Also gilt $|AD| : |AB| = 1 : \sqrt{2}$.
Teilung der Minorstrecke nach der Ostwald-Proportion.
(1) Man falte AD auf AB auf. Es entsteht die Knifflinie AE. Der Fußpunkt von E sei F. Für das Rechteck $FBCE$ kniffe man die Diagonale BE ein (über die früher dargelegte Benutzung der Mittelsenkrechten GH zu BE). Dann teilt der Punkt H die Strecke BC in Ostwald-Proportion.



(2) Teilung der Majorstrecke nach der Ostwald-Proportion. (In entsprechender Weise wie unter (1). Dazu muß man zunächst das Ostwald-Rechteck über AB als Minor herstellen!)

Lösungen zu den „Aufgaben auf den Spuren Cauchys“, Heft 5/89

2. Ein solcher Körper muß eine Ecke P haben, die man wahlweise nach außen oder nach innen „stülpen“ kann. Dies läßt sich mit der minimalen Zahl von 6 Flächen (Dreiecken) verwirklichen, wenn man auf eine dreiseitige Pyramide $ABCD$ eine kleinere Pyramide $ABDP$ aufsetzt, die an der Ebene ABD gespiegelt den fünften Eckpunkt P' eines nichtkonvexen Körpers $ABCDP'$ ergibt (Bild 1a, b).

Bild 1a

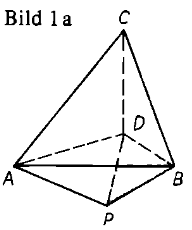


Bild 1b

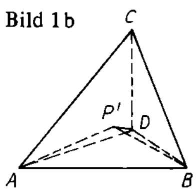
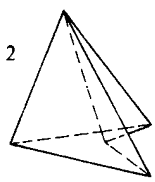


Bild 2



3. Eine über einer nichtkonvexen viereckigen Grundfläche errichtete Pyramide ergibt einen nichtkonvexen Körper mit 5 Begrenzungsflächen (Bild 2). Jeder Körper mit nur 4 ebenen Begrenzungsflächen ist ein Tetraeder, d. h. eine von vier Dreiecken begrenzte (eventuell schiefe) Pyramide und folglich konvex.
4. Im 1. Schritt zeigt man für $m \geqq 2$ durch vollständige Induktion:
$f(mx) = m \cdot f(x)$.
2. Schritt: Aus $f(k) = f\left(n \cdot \frac{k}{n}\right)$
$= \underbrace{f\left(\frac{k}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{k}{n}\right)}_{n \text{ Summanden}} = n \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$ folgt
$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot f(k) = \frac{1}{n} \cdot f(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{k \text{ Summanden}})$
$= \frac{k}{n} \cdot f(1)$.
3. Schritt: Aus $f(x + 0) = f(x) + f(0)$ folgt $f(0) = 0$.
4. Schritt: Aus $0 = f(0) = f(x - x)$ $= f(x) + f(-x)$ folgt $f(-x) = -f(x)$.
5. Ist f eine beliebige für alle Paare x, y von reellen Zahlen definierte Funktion, so ist
$f_s(x,y) = \frac{1}{2}(f(x,y) + f(y,x))$ symmetrisch
und $f_a(x,y) = \frac{1}{2}(f(x,y) - f(y,x))$ alternierend und $f(x,y) = f_s(x,y) + f_a(x,y)$.

Lösungen zur Sprachecke

▲ 1 ▲ Lotterie
Das abgebildete Lotterierad dreht sich zunächst $17\frac{11}{16}$ Umdrehungen nach rechts, dann $7\frac{1}{2}$ Umdrehungen nach links und schließlich noch einmal $9\frac{3}{4}$ Umdrehungen nach rechts. Welche Gewinnzahl steht am Ende aller Umdrehungen unter dem feststehenden Zeiger A?
Lösung: Es ist die Zahl 2.

▲ 2 ▲ Finde den Mittelpunkt
Die Zeichnung zeigt einen Kreis, dessen Mittelpunkt nicht markiert ist. Du hast deinen Zirkel vergessen, als einziges dein Notizbuch mit.
Kannst du nur mit einer Seite des Notizbuches den Mittelpunkt finden?
Lösung: Das geht mittels des Satzes des Thales (näherungsweise), indem du einfach an zwei verschiedenen Stellen des Kreises eine Ecke anlegst und jeweils die Schnittpunkte der anliegenden Seiten mit dem Kreis markierst und verbindest. Der Schnittpunkt der beiden Strecken ergibt den (ungefähren) Mittelpunkt.

▲ 3 ▲ Kann die Gleichung
Ж · У · Р · Н · А · Л = К · В · А · Н · Т
erfüllt sein, wenn an Stelle der Buchstaben die Zahlen von 1 bis 9 eingesetzt werden. Gleiche Buchstaben müssen dabei gleichen Ziffern entsprechen, verschiedene verschiedenen.
Lösung: Da $4 = 2^2$, $6 = 2 \cdot 3$, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$ ist, folgern wir, daß 5 und 7 auf beiden Seiten der Gleichung als Faktor stehen müssen. Deshalb kann nur $A \cdot H = 5 \cdot 7 = 7 \cdot 5$ sein. Die Primzahlzerlegung der verbleibenden geraden Zahlen 2, 4, 6, 8 ergibt, daß die Zahl 2 insgesamt siebenmal als Faktor steht. Wenn die Gleichung erfüllt ist, muß aber die Anzahl der Faktoren 2 gerade sein. Somit kann die Gleichung im angegebenen Definitionsbereich nicht erfüllt werden.

Lösungen zu:
Viele Ziffern verderben den Brei
▲ 2 ▲ 3,20 M
▲ 3 ▲ 0,66 kg
▲ 4 ▲ Höchstens 2 Bücher zum Preis von 10,00 M.
▲ 5 ▲ a) Rund 5 kg Lackfarbe (bzw. Vorstreichfarbe) werden benötigt.
b) Es sind 6 Büchsen Vorstreich- bzw. Lackfarbe zu kaufen (Ausgangspunkt: ungerundete Masseangabe 4,2... kg). Auch Ergebnis: 7 Büchsen kann gerechtfertigt sein, wenn Ausgangspunkt 5 kg : 0,8 kg = 6,25 (Aufrunden auf 7!).

Lösungen zu:
20 Jahre alpha in Friedeburg

Beispiele für eine Lösung sind:
7248 + 5248 = 12 496;
5243 + 7243 = 12 486;
5248 + 7248 = 12 496;
7243 + 5243 = 12 486.

Lösungen zur Schachecke

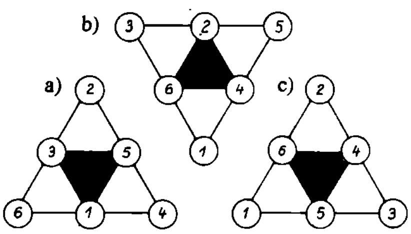
Die Schachsteine stehen im zusammengefügten Schachbrettdiagramm auf folgenden Feldern.
Weiß: Ke7, Dg8, Te2, Tg7, Lb5, Lg1, Sc2, Sg4, Ba6, b4, f3, f6.
Schwarz: Kd5, Da1, Te1, Th7, Lb8, Se6, Sf7, Ba5, b2, d6, d7.
1. a7 (droht 2. a8D matt)
   L:a7/a:b4/Sed8/Sfd8/Sd4/Se5
2. Da8/S:b4/Tg5/Td2/Sce3/Sge3 matt.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Verschlüsselte Wünsche
Der gesuchte Kode lautet: Ist dem n-ten Buchstaben des chiffrierten Satzes die Zahl α_n und dem des dechiffrierten Satzes β_n zugeordnet, so gelten
$\beta_1 = \alpha_1$ und $\beta_{n+1} = \alpha_{n+1} - \beta_n$ oder
$\beta_{n+1} = 26 + \alpha_{n+1} - \beta_n$ für
$n = 1, 2, 3, \ldots$
Der dechiffrierte Satz lautet:
alphons wuenscht allen lesern im neuen jahr gesundheit, erfolgreiches lernen, nutzbringende gesellschaftliche taetigkeit und viel freude.

Wortspielereien
Es ist noch kein Meister vom Himmel gefallen.

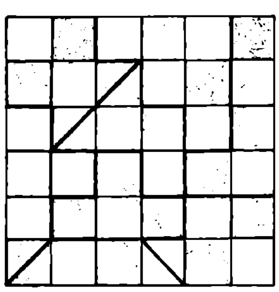
Dreiecks-Magie
Das Bild zeigt je eine mögliche Lösung.



Einer zu viel
Streicht man den ersten und den letzten Buchstaben, so ergibt sich ein neues Wort. Nur nicht bei QUADER.

Rätselhafter Quader
Quader B und E.

Puzzelei

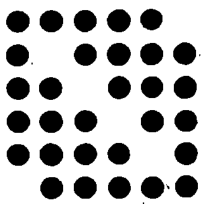


Kreuzzahlrätsel

5	+	4	+	7	=	16		
+		+		−		+		
2	+	9	−	2	=	9		
−		−		+		−		
3	+	6	−	1	=	8		
=		=		=		=		
4	+	7	+	6	=	17		

Problem eines Weihnachtsmannes
40 Kinder bekamen keine grüne, also eine gelbe, blaue und rote Praline. An 29 Kinder wurde keine gelbe, an 5 keine blaue und an 3 keine rote Praline überreicht.

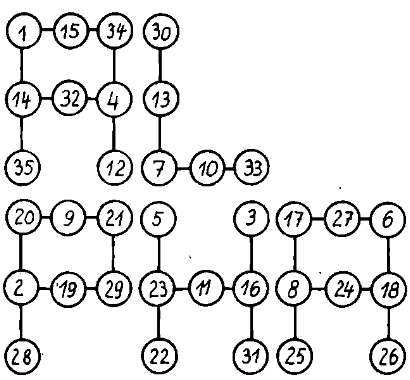
Magisches



Lösungen zu:
Mathematisches ALPHA-Quintett

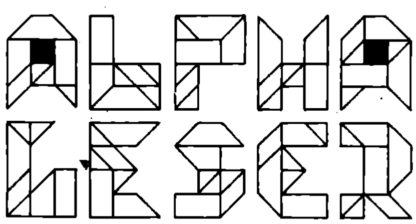
Figur 1: ALPHA-Hölzchenspiel
ALEPH (2, 1), ALGOL (5, 1), APHEL (7, 1), FOLGE (7, 1), SECHS (5, 1);
d. h., 2, 5, 7, 7 bzw. 5 Hölzchen sind umzulegen, und 1 Hölzchen ist in jedem Falle wegzunehmen.

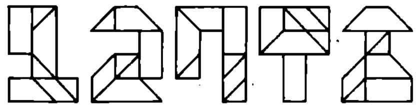
Figur 2: ALPHA-Magisches
Das Bild zeigt *eine* mögliche Eintragung der natürlichen Zahlen von 1 bis 35 in die ALPHA-Figur mit der charakteristischen Summe 50:



Figur 3: ALPHA-Kreuzworträtsel
Waagerecht: 1. Magma, 4. Hesse (Ludwig Otto), 8. Rebus, 10. Werst, 11. Basis, 12. Meter, 13. Menge, 14. Sinus.
Senkrecht: 1. Maxwell (James Clerk), 2. Abstand, 3. Tangens, 4. Hilbert (David), 5. Eins, 6. Klammer, 7. Umkreis, 8. Rhombus, 9. Strecke.

Figur 4: ALPHA-Legespiel





Das Bild zeigt je eine Legemöglichkeit für die Buchstaben-Figuren von ALPHA sowie für einige weitere Legefiguren:

Figur 5: ALPHA-Rösselsprung
A (links): KEGELSTUMPF, L: DURCHMESSER,
P: IKOSAEDER, H: HYPOTENUSE,
A (rechts): HAUPTNENNER.

Lösungen zu: alpha gratuliert

▲1▲
a) $19 + 49 + 40 = 19 + 89$;
b) $19 + 49 + 40 = 1 + 98 + 9$;
c) $19 + 4 + 9 + 4 + 0 = 19 + 8 + 9$

▲2▲
a) $1 + 989 = 989 + 1$;
b) $19 + 89 = 98 + 9 + 1$;
c) $1 + 9 + 89 = 9 + 89 + 1$;
d) $198 - 9 = 98 + 91$

▲3▲ $198 \cdot 9 = 1989 - 198 - 9 (= 1782)$

▲4▲ $(9 + 8) \cdot (7 + 6) \cdot (5 + 4) \cdot (3 - 2) + 1 = 1990$

▲5▲ Es sei x die gedachte Zahl; dann sind nacheinander folgende Rechnungen durchzuführen:
a) $(x - 1) \cdot (x + 1) = x^2 - 1$;
b) $4 \cdot (x^2 - 1) = 4x^2 - 4$;
c) $4x^2 - 4 + 4 = 4x^2$;
d) $\sqrt{4x^2} = 2x$;
e) $199 \cdot 2x = 398 \cdot x$;
f) $\frac{398 \cdot x}{x} = 398$;
g) $5 \cdot 398 = 1990$.
Aus f) folgt, daß man bei diesem Vorgehen für jede gedachte Zahl x das konstante Ergebnis 398 und wegen $5 \cdot 398 = 1990$ stets die Jahreszahl 1990 erhält.

Lösung zu: Zwei harte Nüsse

Zum Jahresausklang 1989
Aus $xy + x + y = 1989$ folgt
$(x + 1) \cdot (y + 1) = 1990 = 2 \cdot 5 \cdot 199$.
Da 2, 5 und 199 Primzahlen sind, lauten die Lösungen (0; 1989), (1; 994), (4; 397) und (9; 198).

Ein aktuelles Lösungsprodukt
Die lineare Gleichung (1) besitzt die eindeutige Lösung $x = x_1 = \frac{9}{2}$. Die quadratische Gleichung (2) besitzt die Lösungen $x = -1$ und $x = x_2 = \frac{13}{5}$ (positive Lösung). Die kubische Gleichung (3) besitzt die drei Lösungen $x = -1$, $x = -2$ und $x = x_3 = \frac{17}{199}$ (positive Lösung). Das gesuchte Lösungsprodukt P lautet dann:
$$P = x_1 x_2 x_3 = \frac{9}{2} \cdot \frac{13}{5} \cdot \frac{17}{199} = \frac{1989}{1990}.$$

Mathematisches ALPHA-Quintett

Figur 1:
ALPHA-Hölzchenspiel

Wieviel Hölzchen muß man jeweils umlegen und wieviel wegnehmen, um aus dem mit 25 gleich langen Hölzchen aufgelegten Wort ALPHA die Worte ALEPH, ALGOL, APHEL, FOLGE bzw. SECHS erzeugen zu können?

Figur 2:
ALPHA-Magisches

Tragt die natürlichen Zahlen von 1 bis 35 so in die Kreisfelder der ALPHA-Figur ein, daß die Zahlensumme auf jedem geradlinigen Buchstaben-Abschnitt 50 beträgt!

Figur 3:
ALPHA-Kreuzworträtsel

Waagerecht: 1. glutflüssige Gesteinsschmelze des Erdinnern, 4. deutscher Mathematiker (1811 bis 1874), 8. Bilderrätsel, 10. alte russische Längeneinheit (= 1,067 km), 11. Teil des Logarithmus, 12. SI-Basiseinheit der Länge, 13. Gesamtheit bestimmter Objekte, 14. Winkelfunktion.

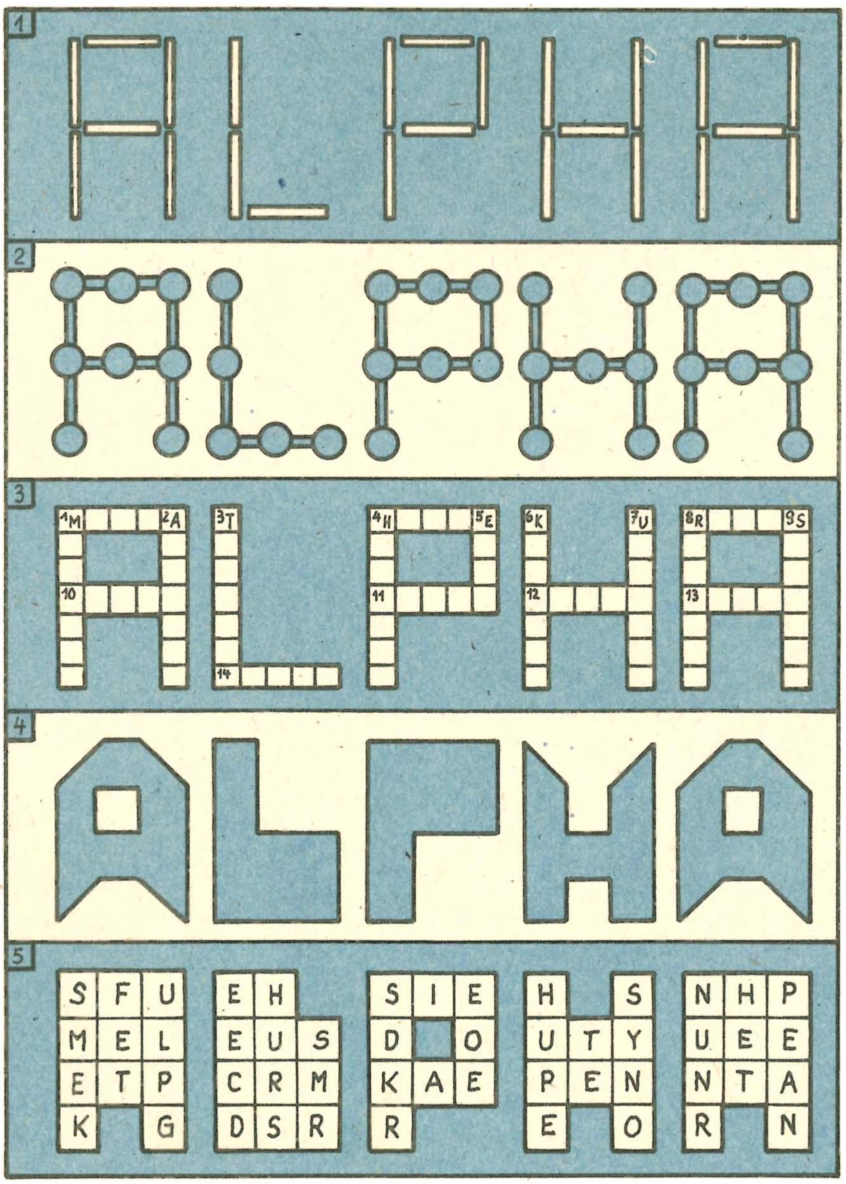
Senkrecht: 1. englischer Physiker, Astronom, Mathematiker und Philosoph (1831 bis 1879), 2. Entfernung zweier Punkte, 3. Winkelfunktion, 4. bedeutender deutscher Mathematiker (1862 bis 1943), 5. natürliche Zahl, 6. Formel-Hilfszeichen, 7. der einem Dreieck umbeschriebene Kreis, 8. Viereck mit vier gleich langen Seiten, 9. geometrischer Begriff.

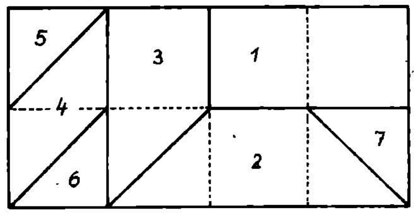
Figur 4:
ALPHA-Legespiel

Zerschneidet ein rechteckiges Stück Karton, dessen Seitenlängen im Verhältnis 1 : 2 stehen und das ihr euch aus acht kongruenten Quadraten zusammengesetzt denken könnt, in die abgebildeten sieben (dick umrandeten) Teile (1 Rechteck (1), 1 gleichschenkliges Trapez (2), 1 ungleichschenkliges Trapez (3), 1 Parallelogramm (4) und 3 kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke (5–7)). Legt nun mit diesen sieben Teilen jeden Buchstaben des abgebildeten Wortes „ALPHA" zusammen.

Für die doppelt auftretende A-Figur finde man zwei wesentlich verschiedene Zusammenlegungen.

Entwerft sodann noch weitere Figuren (Buchstaben, Zahlen, Gebäude, Bäume o. ä.), die sich mit unseren sieben Legeteilen zusammensetzen lassen!





Figur 5:
ALPHA-Rösselsprung

In jede Buchstaben-Figur wurde im Rösselsprung, d. h. in der Gangart eines Springers beim Schachspiel, ein mathematischer Begriff eingetragen. Wie lauten diese fünf Begriffe?

Viel Spaß beim Knobeln wünscht euch

R. Mildner

Zwei harte Nüsse

Zum Jahresausklang 1989

Welche geordneten Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen x und y mit $x < y$ erfüllen die Gleichung

$xy + x + y = 1989$? *W. Träger*

Ein aktuelles Lösungsprodukt

Gegeben sind die folgenden drei Gleichungen:

(1) $3x - 8 = x + 1$,

(2) $5x^2 - 8x - 13 = 0$,

(3) $199x^3 + 580x^2 + 347x - 34 = 0$.

Ermittelt alle reellen Lösungen jeder Gleichung und bildet danach das Produkt $P = x_1x_2x_3$, wobei x_i die jeweils positive Lösung der Gleichung (i), $i = 1, 2, 3$, ist. Wenn diese Lösungen x_i und P nicht in Dezimaldarstellung, sondern in (gekürzter) Bruchform angegeben werden, so ist der Zusammenhang von P mit dem bevorstehenden Jahreswechsel offensichtlich.

R. Mildner

ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 23 (1989) 6 · Seiten 121 bis 144