

Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



1

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
13. Jahrgang 1979
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalzkalden); Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dozent Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Diplom-Lehrer C.-P. Helmholz)

Redaktion:

StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Techn. Zeichnungen G. Tittel, Dres-
den (S. 1/2); PH Jerewan (S. 3); TU Dresden
(S. 5); L. Otto, Berlin (S. 8); Adar Darian,
Berlin (S. 10); Viktor Kubal, Berlin (S. 10);
L. Otto, Berlin (S. 15); Ing.-Schule f. Gießerei-
technik, Leipzig (S. 18); IV. U.-Seite: Abb.
nach Lietzmann: Der Pyth. Lehrsatz (BSB
B. G. Teubner)

Typographie: H. Tracksdorf

Titelbild: W. Fahr, Berlin



Gesamtherstellung: INTERDRUCK

Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97

AN (EDV) 128 · ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 24. Oktober 1978

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 1 Die Biene als Geometer [9]*
Dr. E. Schröder, Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden
- 2 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt [5]
Aus der Arbeit des Kreiskorrespondenzzirkels Zschopau
Dipl.-Lehrer S. Reulecke, EOS *Maxim Gorki*, Thum/Erzgeb.
Ein Mathematik-Klub in der Armenischen SSR
- 4 Olympiadeaufgaben aus Freundesland [10]
Sozialistische Republik Vietnam
Zusammenstellung: stud. math. Nguyễn thái Hùng, Hanoi/Oberstudienrat Dr. R. Lü-
ders, Berlin
- 5 Eine Aufgabe von Prof. Dr. A. M. Eganjan [8]
Pädagogisches Institut *H. Abowjan*, Jerewan, Armenische SSR
- 5 Leistungsschau der Studenten an der TU Dresden [9]
Bericht
- 6 Albert Einstein, Teil 2 [8]
Ein Einblick in Einsteins Gedankenwelt
Dr. R. Thiele, BSB B. G. Teubner, Leipzig
- 8 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Wettbewerbsaufgaben Mathematik, Physik, Chemie
- 11 Die letzten 30 Jahre haben Gewicht [7]
Dr. G. Deweiß, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig
- 12 Lineare Optimierung, Teil 2 [9]
Oberlehrer Dr. E. Lehmann, Lektor an der Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-
Universität Rostock
- 13 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
Speziell für Klasse 5/6
Drunter und drüber [5]
Diplom-Lehrer Cordula Röhr, Leipzig
- 16 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/H. Pätzold, Waren/Müritz
- 18 Berufsbild:
Ingenieurschule für Gießereitechnik *Georg Schwarz* Leipzig [8]
Studiendirektor Dipl.-Ing. O. Koch
- 19 *alpha*-Wettbewerb 1977/78 – Träger des Abzeichens in Gold – Preis-
träger (dreijährige Teilnahme) [5]
- 21 Lösungen [5]
- 24 Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen [7]

III. Umschlagseite: Wissen wo [5]

Inhaltsverzeichnis des Jahrgangs 1978

IV. Umschlagseite: Mitgemacht und nachgedacht [5] Satz des Pythagoras

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Die Biene als Geometer

Wenn wir uns eine dem Bienenstock frisch entnommene Honigwabe anschauen, so beeindruckt uns neben dem süßen, goldgelben Honig auch die aus Bienenwachs kunstvoll gefertigte Wabe, in deren Zellen die Bienen den Honig eingetragen haben. Wir fragen uns, wie die Bienen dieses komplizierte geometrische Gebilde so regelmäßig gestalten können. Wollen wir uns daher mit der Form der Bienenzelle und dem Aufbau der Wabe aus den Zellen näher vertraut machen! Hierzu werde einmal von der gewiß nicht richtigen Annahme ausgegangen, daß die Biene ein vernunftbegabtes und zu menschlichen Überlegungen fähiges Wesen sei.

Bei der Erfindung von Zelle und Wabe müßte die Biene folgende Forderungen aufgestellt haben:

1. Die Zellen der Wabe sollen der Arbeitsbiene Raum und Schutz bei ihrer Entwicklung vom Ei bis zum ausgewachsenen Individuum bieten.
2. Die Zellen sollen Aufnahmegefäße für den Wintervorrat (Honig) sein.
3. Jede Zelle soll in gleicher Weise leicht zugänglich und pflegeleicht sein.
4. Der Zellverband soll raum- und materialsparend angelegt sein; d. h. Blockbauweise ist anzustreben.

Diese vier Forderungen resultieren aus den natürlichen Trieben der Biene nach Selbsterhaltung und Arterhaltung. Zur Arterhaltung gehört z. B., daß die Königin mit einer kleinen Stammebelegung von Arbeitsbienen auch den strengsten Winter überleben kann. Entsprechend den vier Forderungen ist von der Grundkonzeption auszugehen, daß eine gewisse Anzahl von prismatischen Zellen, die den Körpermaßen der Biene angepaßt sind, zu einer Wand (Wabe) vereinigt werden. Wegen der zu fordernden lückenlosen Zusammensetzbarkeit kommen dafür nur reguläre Dreieck-, Viereck- oder Sechseckprismen als Zellformen in Betracht.

Beim Dreieckprisma ist die Größe der Innenwinkel 60° . Die Inhalte von Inkreis und Dreieck stehen im Verhältnis $1:1,654$. Der Raum der Zelle würde von der sich entwickelnden Biene nur zum Teil ausgelastet werden. Die Zelle ist nach jedem „Gebrauch“ zu reinigen. Auch dafür wäre der Arbeitsaufwand wegen der spitzen Innenwinkel sehr groß. Dreieck-

prismen scheiden daher für diesen Zweck aus.

Beim quadratischen Prisma ist die Größe der Innenwinkel 90° . Die Inhalte von Inkreis und Quadrat verhalten sich wie $1:1,273$. Auch hier wird der Raum der Zelle nicht hinreichend genutzt. Daher scheiden quadratische Prismen zur Gestaltung von Zellen aus. Bemerkenswert ist jedoch, daß der Mensch quadratische Prismen und Rechteckprismen für Speichierzwecke bevorzugt heranzieht. Man denke nur an die Schubkästen in den Schränken von Apotheken und Drogerien oder an Karteikästen in Verwaltungen und Bibliotheken.

Beim regulären Sechseckprisma ist die Größe der Innenwinkel 120° . Die Inhalte von Inkreis und Sechseck verhalten sich wie $1:1,102$. Dieses Prisma bietet unter der zusätzlichen Forderung der lückenlosen Zusammensetzbarkeit zu einem Verband die beste Anpassung an den Drehzylinder. Sechseckige Zellen erlauben bei optimaler Raumauslastung wegen der stumpfen Innenwinkel eine ökonomische Wartung. Im heutigen Sprachgebrauch würde man dies als die „nutzerfreundlichste Lösungsvariante“ bezeichnen.

Bis zu einem gewissen Entwicklungsstand, auf dem z. B. die Wespen stehengeblieben sind, wurden die Waben nur einseitig genutzt. Wie auch in nezeitlichen Bibliotheken zweiseitig nutzbare Bücherregale parallel zueinander aufgestellt werden, baute die Biene von einem gewissen Entwicklungsstand an auch zweiseitig nutzbare Wabenwände auf. Diese ordnete sie in ihren Wohnhöhlen, z. B. hohlen Bäumen, parallel zueinander an.

Wie sieht nun die Mittelwand einer solchen zweiseitig nutzbaren Wabe aus? Die Biene löste dieses Problem in einer Weise, die nicht nur dem Geometer Bewunderung abnötigt. Wir denken uns zunächst eine Ebene, auf die eine Schicht kongruenter Kugeln mit dem Radius r derart ausgebreitet wird, daß jede innere Kugel der Schicht genau sechs weitere Kugeln in je einem Punkt berührt. Die Tangentialebenen an eine innere Kugel in den Berührungspunkten mit den sechs Nachbarkugeln ergeben ein reguläres Sechseckprisma. Nun wird auf diese Kugelschicht eine zweite Schicht von Kugeln mit dem Radius r so aufgelegt, daß jede Kugel der oberen Schicht je drei Kugeln der unteren Schicht berührt. Außerdem berührt jede innere Kugel der aufgelegten Schicht genau sechs Kugeln der gleichen Schicht. In der Werkstoffkunde wird eine solche Kugelpackung als „dichteste Packung“ bezeichnet. Die Mathematiker haben noch nicht bewiesen, ob es sich hier wirklich um die dichteste Kugelpackung handelt. Wir wollen trotzdem die bei Technikern übliche Bezeichnung übernehmen.

Durch Ausmessung der Gipsabgüsse von Bienenzellen läßt sich bestätigen, daß man sich die doppelseitig genutzte Bienenzelle in der folgenden Weise erzeugen kann:

Legt man in den gemeinsamen Punkten je zweier sich berührender Kugeln aus zwei Schichten der dichtesten Packung von Kugeln mit geeignetem Radius die Tangentialebenen an die betreffenden Kugelpaare, so lassen sich die Begrenzungsebenen der Bienenzellen mit diesen Tangentialebenen zur Deckung bringen.

Wie man aus dieser Erzeugung der beiderseitig genutzten Wabe leicht erkennt, ist deren Mittelwand keineswegs eine ebene Wachsplatte, sondern ein aus Rhomben zusammengesetztes Flächenstück. Der Boden einer Zelle besteht aus drei Rhomben. Wir könnten nun die Größe der Schnittwinkel berechnen, die zwei Rhomben der Basisfläche bilden oder das Längenverhältnis der Diagonalen des Rhombus ermitteln.

Interessanter ist die Aufgabe zu zeigen, wie man das Kantengefüge einer Bienenzelle aus dem Würfel herleiten kann. Der geometrische Aufbau der Zelle wird dadurch übersichtlicher und für die Berechnung von Winkelgrößen und Streckenverhältnissen leichter zugänglich. Wir greifen eine Kugel K_0 mit dem Mittelpunkt M_0 aus der oberen Schicht heraus. Diese umschließen wir mit einem regulären Sechskantprisma, so daß jede Seitenfläche des Prismas gemeinsame Tangentialebene von K_0 und einer benachbarten Kugel ($K_1 \dots K_6$) der oberen Schicht ist. Nach unten wird dieses Prisma durch drei Rhomben abgeschnitten, die in den gemeinsamen Tangentialebenen von K_0 und K_1 bzw. K_0 und K_2 bzw. K_0 und K_3 liegen. Die Kugeln K_i ($i = 1, 2, 3$) gehören der unteren Schicht an (vgl. Bild 1).

Der Berührungspunkt von K_0 mit K_i wird mit B_i bezeichnet. Der zu K_i gehörige Mittelpunkt sei M_i . Dann gilt offenbar $\overline{M_0 B_i} = \overline{M_i B_i} = r$. Daraus folgt $\overline{M_0 M_i} = 2r$. Da sich die Kugeln K_i ($i = 1, 2, 3$) auch untereinander berühren, gilt ferner $\overline{M_i M_k} = 2r$ für $i \neq k$.

Folglich sind die Kugelmittelpunkte M_0, M_1, M_2, M_3 Eckpunkte eines regulären Tetraeders. Die Punkte B_i sind Halbierungspunkte der von M_0 ausgehenden Tetraederkanten $\overline{M_0 M_i}$. Ferner steht die gemeinsame Tangentialebene τ_i von K_0 und K_i in B_i senkrecht auf $\overline{M_0 M_i}$. Auf Grund der Symmetrie von

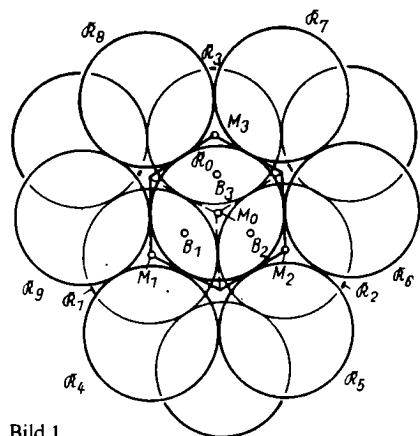
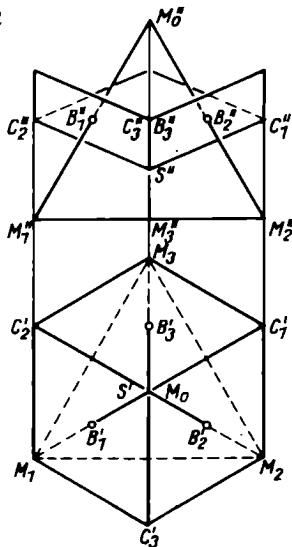


Bild 1

$\overline{M_0 M_i}$ bezüglich τ_i schneiden sich die drei Basisebenen τ_i im Schwerpunkt S (Mittelpunkt) des Tetraeders (Bild 2). Als Kanten der Basisebenen ergeben sich die Strecken $\overline{SC_i}$ ($i=1, 2, 3$). Wie aus Bild 2 leicht erkennbar ist, gilt für die Längen dieser Kanten $\overline{C_i C_k} = 2r$ für $i \neq k$.

Nun passen wir das reguläre Tetraeder $M_0 M_1 M_2 M_3$ in einen Würfel geeigneter Größe derart ein, daß jede der sechs Tetraederkanten mit genau einer Diagonalen aus jeder Seitenfläche des Würfels zur Deckung kommt. Bei dieser Einpassung werden die vier Tetraederecken in vier Ecken des Würfels und der Tetraederschwerpunkt S in den Würfelschwerpunkt übergeführt.

Bild 2



der Klassenstufe 5 mit den besten Ergebnissen angesprochen und durch die Schule delegiert. Besondere Hinweise und Wünsche der Schule werden dabei mit berücksichtigt. Wer nicht regelmäßig am Zirkel teilnimmt oder keine entsprechenden Leistungen bringt, scheidet aus. Andererseits besteht aber auch die Möglichkeit, nach guten Ergebnissen bei der Kreismathematikolympiade neu in den Zirkel aufgenommen zu werden. Unser Ziel besteht darin, einen Stamm von Schülern zu erhalten, die von der Klasse 5 bis 10 sich regelmäßig außerunterrichtlich mit Mathematik beschäftigen.

Im allgemeinen erhalten die *Jungen Mathematiker* bis zum 10. jeden Monats vier Aufgaben (eine Serie) zugeschickt, die Lösungen sind bis Monatsende an den Betreuer zurückzusenden, der mit den neuen Aufgaben die Aufgaben des Vormonats korrigiert und mit Hinweisen versehen dem Teilnehmer zusendet. Geplant sind im Jahr acht bis zehn Serien je nach Klassenstufe. Am Ende jedes Jahres erhalten alle erfolgreichen Teilnehmer eine Urkunde, die Besten Buchprämien.

Über die brieflichen Verbindungen hinaus treffen sich die Betreuer ein- oder zweimal pro Jahr mit den Teilnehmern zu Konsultationen. Eine Konsultation ist dabei eingebettet in das Mathematik-Spezialistenlager, welches wir jährlich in den ersten drei Tagen der Herbstferien durchführen und vorwiegend der Vermittlung neuen Gedankengutes dient, auf dem dann die Betreuer im Korrespondenzzirkel aufbauen können. S. Reulecke

Aufgaben (Auswahl)

Klassenstufe 5

▲1▲ Aus zwei Orten A und B, die 75 km auseinander liegen, fahren gleichzeitig zwei Radfahrer ab und sich entgegen. Der eine fuhr mit einer Geschwindigkeit von 12 km in der Stunde, der andere mit 13 km in der Stunde. Zusammen mit dem ersten Radfahrer lief ein Hund los, der in der Stunde 35 km zurücklegte. Nachdem dieser Hund den ersten Radfahrer hinter sich gelassen hatte, lief er dem zweiten Radfahrer entgegen. Als er ihm begegnete, lief er zum ersten zurück. So lief er vor und zurück, bis die Radfahrer einander begegneten.

Wieviele km lief der Hund in dieser Zeit insgesamt?

▲2▲ Auf einer Wiese weiden Gänse und Schafe. Alle zusammen haben 40 Köpfe und 96 Beine. Wieviel Gänse und Schafe weiden auf der Wiese?

▲3▲ Aus einem Draht von 120 cm Länge soll einmal das Kantenmodell eines Würfels, zum anderen das Kantenmodell eines Quaders mit einer Länge von 15 cm und einer Breite von 10 cm hergestellt werden.

Um wieviel Kubikzentimeter unterscheiden sich die Rauminhalte dieser beiden Körper?

Klassenstufe 6

▲1▲ Es ist sowohl die kleinste als auch die größte natürliche Zahl zu ermitteln, die durch 36 teilbar ist und in der Form $7x35x$ dargestellt werden kann, wobei x beliebige Ziffern sein können.

▲2▲ Wenn man die Seiten a und b eines Rechteckes um 6 cm verlängert, vergrößert sich der Flächeninhalt um 174 cm^2 . Berechne die Seiten a und b , wenn $a=b+1$ ist!

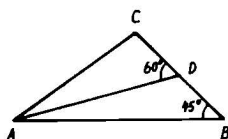
▲3▲ Im Dreieck ABC sei der Winkel $ABC=45^\circ$, $\overline{BD}=a$, $\overline{DC}=2a$ und der Winkel $ADC=60^\circ$. Bestimme den Winkel ACB !

Hinweise: a) Ein Dreieck mit zwei gleichen Winkeln ist gleichschenkelig. Ein gleichschenkliges Dreieck hat zwei gleiche Winkel.

b) Hat ein rechtwinkliges Dreieck noch Winkel von 30° und 60° , dann verhält sich die kurze Kathete zur Hypotenuse wie 1:2.

c) Beginne so: Fällt man das Lot von C auf $\overline{AD}$...

d) Nicht maßstäbliche Skizze:



Klassenstufe 8

▲1▲ Beweise, daß für alle natürlichen Zahlen m auch der Ausdruck $\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}$ eine natürliche Zahl ist!

Hinweise: a) Bilde den Hauptnenner und addiere! b) Klammere aus! c) Überlege dir die Regel zur Teilbarkeit von Produkten natürlicher Zahlen!

▲2▲ Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC . Zu konstruieren ist ein Quadrat. Zwei Quadrate sollen auf der Hypotenuse AB liegen, die anderen beiden auf der Kathete $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$.

Hinweis: Zur gesuchten Figur finde eine ähnliche, brauchbare Hilfsfigur (zentrische Streckung)!

▲3▲ Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung im Bereich der ganzen Zahlen:

$$\frac{4-2x}{1+3x} > 0$$

Hinweis: Wann ist ein Bruch positiv? Fallunterscheidung!

Ein Mathematik-Klub in der Armenischen SSR

Prof. Eganjan hat viel mit Schülern zu tun und berichtet uns von einem Mathematik-Klub „xyz“ an einer Mittelschule der Armenischen SSR:

„...Der Klub „xyz“ hat sich auf meine Anregung hin den Namen ‚C. F. Gauß‘ gegeben. Seine Mitglieder sind Schüler der Mittelschule des Ortes Lernadsor im Kafansker Rayon der Armenischen SSR, die sich unter Anleitung ihres Lehrers Robert Grigorjan mit speziellen mathematischen Problemen befassen. Sie hören dazu Vorträge von erfahrenen Lektoren oder tragen auch selbst vor, und natürlich bemühen sie sich um die Lösung von Aufgaben aus dem gerade behandelten Gebiet, die an der Klubwandzeitung veröffentlicht werden. Ich nenne euch einige Themen des Klubs:

1. Primzahlen und Primzahlverteilung
2. Darstellung bestimmter Primzahlen als Summe zweier Quadratzahlen und Fermatscher Satz
3. Gitterpunktprobleme
4. Planare Graphen und Vierfarbenproblem
5. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal...

Wie unser Bild zeigt, wird unsere Zeitschrift von den Schülern im fernen Armenien gelesen, worüber wir uns alle sicher freuen. Vielleicht sendet ein Mathematikzirkel unserer Republik seine Lösung der Aufgabe von Prof. Eganjan an den Klub „C. F. Gauß“ und tritt mit ihm in Erfahrungsaustausch? Die Adresse lautet: Klub im K. F. Gaussa pri shkole sela Lernadsor, Kafanskogo raiona Armen. SSR, UdSSR



Olympiadeaufgaben aus Freundesland

Sozialistische Republik Vietnam (1974 bis 1976, Klassenstufe 10)

▲ 1 ▲ Man beweise, daß die Zahl $2^{147} - 1$ durch 343 teilbar ist.

Lösung: Wegen $2^{10} = 1024$ und $1029 = 3 \cdot 343$ gilt
 $2^{147} - 1 = 2^{27 \cdot 5^4} - 1 = 2^{27} \cdot 1024^{14} - 1$
 $= 2^{27} \cdot (1029 - 5)^{14} - 1$
 $\equiv 2^{27} \cdot 5^{14} - 1 \pmod{343} \equiv 50^7 - 1 \pmod{343}.$ (1)

Nun gilt
 $50^7 - 1 = (50 - 1) \cdot (50^6 + 50^5 + 50^4 + 50^3 + 50^2 + 50 + 1)$
 $= 49 \cdot [(50^6 - 1) + (50^5 - 1) + \dots + (50 - 1) + 7].$ (2)

Da die Summanden $50^6 - 1, 50^5 - 1, \dots, 50 - 1$ in der eckigen Klammer auf der rechten Seite von (2) sämtlich durch $50 - 1 = 49$, also durch 7 teilbar sind und da auch der Summand 7 durch 7 teilbar ist, ist auch die Summe durch 7 teilbar.

Daraus folgt, daß die Zahl $50^7 - 1$ durch $49 \cdot 7 = 343$ teilbar ist. Wegen (1) ist daher auch $2^{147} - 1$ durch 343 teilbar, w. z. b. w.

▲ 2 ▲ Es sind alle Paare (x, y) von ganzen Zahlen x und y zu ermitteln, für die
 $x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2$ (1)
gilt.

Lösung: Es seien x, y ganze Zahlen, für die die Gleichung (1) erfüllt ist. Setzt man $u = x + 4$, so ist auch u eine ganze Zahl, und es gilt

$$(u-4)(u-3)(u+3)(u+4) = y^2,$$

$$\text{also } (u^2 - 16)(u^2 - 9) = y^2.$$

Setzt man weiter $t = u^2 - \frac{25}{2}$, so ist $2t$ eine ganze Zahl, und es gilt

$$\left(t - \frac{7}{2}\right)\left(t + \frac{7}{2}\right) = y^2,$$

$$t^2 - \frac{49}{4} = y^2,$$

$$4t^2 - 4y^2 = 49,$$

$$(2t + 2y)(2t - 2y) = 49. \quad (2)$$

Da $2t + 2y$ und $2t - 2y$ ganze Zahlen sind und 49 sich wie folgt als das Produkt zweier ganzer Zahlen darstellen läßt:

$$49 = 1 \cdot 49 = 7 \cdot 7 = 49 \cdot 1 = (-1) \cdot (-49) \\ = (-7) \cdot (-7) = (-49) \cdot (-1),$$

erhält man die Gleichungen

$$2t + 2y = a \text{ mit } a = \pm 1, \pm 7, \pm 49,$$

$$2t - 2y = \frac{49}{a}.$$

Daraus folgt

$$4t = a + \frac{49}{a}, \quad t = \frac{1}{4}\left(a + \frac{49}{a}\right),$$

$$4y = a - \frac{49}{a}, \quad y = \frac{1}{4}\left(a - \frac{49}{a}\right). \quad (3)$$

Man erhält daher alle Werte für x und y , für die die Gleichung (1) erfüllt ist, aus der folgenden Tabelle:

a	$\frac{49}{a}$	$t = \frac{1}{4}\left(a + \frac{49}{a}\right)$	$u^2 = t + \frac{25}{2}$	u	$x = u - 4$	$y = \frac{1}{4}\left(a - \frac{49}{a}\right)$
1	49	$\frac{25}{2}$	25	5	1	-12
-1	-49	$-\frac{25}{2}$	0	-5	-9	-12
7	7	$\frac{7}{2}$	16	4	0	0
-7	-7	$-\frac{7}{2}$	9	-4	-8	0
49	1	$\frac{25}{2}$	25	5	1	12
-49	-1	$-\frac{25}{2}$	0	-5	-9	12
				0	-4	-12

Daher hat die Gleichung (1) genau die folgenden ganzzahligen Lösungen (x, y) :

$(0, 0), (1, 12), (1, -12), (-1, 0), (-4, 12), (-4, -12), (-7, 0), (-8, 0), (-9, 12), (-9, -12).$

▲ 3 ▲ Man ermittle alle Paare (a, b) reeller Zahlen, für die das Polynom $x^4 + ax^2 + b$ durch das Polynom $x^2 + ax + b$ teilbar ist.

Lösung: Es seien a und b reelle Zahlen, für die $x^4 + ax^2 + b$ durch $x^2 + ax + b$ teilbar ist. Dann gilt für alle reellen x

$$x^4 + ax^2 + b = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d), \quad (1)$$

wobei c und d reelle Zahlen sind.

Aus (1) folgt

$$x^4 + ax^2 + b = x^4 + (a+c)x^3 + (b+d+ac)x^2 + (ad+bc)x + bd. \quad (2)$$

Da die Gleichung (2) für alle x erfüllt ist, stimmen die Koeffizienten auf beiden Seiten von (2) überein. Daher gilt

$$a + c = 0, \text{ also } c = -a, \quad (3)$$

$$b + d + ac = a,$$

$$\text{also } b + d - a^2 = a, \quad (4)$$

$$ad + bc = 0, \text{ also } ad - ab = 0,$$

$$\text{d. h., } a(d - b) = 0. \quad (5)$$

$$bd = b. \quad (6)$$

1. Ist $b \neq 0$, so folgt aus (6) $d = 1$ und daher aus (5)

$$a(1 - b) = 0. \quad (7)$$

1.1. Ist $a \neq 0$, so folgt aus (7) $b = 1$ und daher aus (4)

$$2 - a^2 = a, \text{ also } a^2 + a - 2 = 0, \text{ d. h.,}$$

$a = 1$ und $c = -1$ oder $a = -2$ und $c = 2$.

Man erhält also die beiden Polynome

$$P_1(x) = x^4 + x^2 + 1,$$

$$P_2(x) = x^4 - 2x^2 + 1,$$

die die gestellten Bedingungen erfüllen; denn es gilt

$$P_1(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1),$$

$$P_2(x) = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 1).$$

1.2. Ist $a = 0$, so folgt aus (4)

$$b + d = 0, \text{ also } b = -1.$$

Man erhält das Polynom

$$P_3(x) = x^4 - 1,$$

das wegen $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$ die gestellten Bedingungen erfüllt.

2. Ist $b = 0$, so folgt aus (5) $ad = 0$, also $a = 0$ oder $d = 0$.

2.1. Ist $a = 0$, so folgt weiter wegen (4) $d = 0$.

Man erhält das Polynom

$$P_4(x) = x^4,$$

das wegen $x^4 = x^2 \cdot x^2$ die gestellten Bedingungen erfüllt.

2.2. Ist $a \neq 0$, so gilt $d = 0$. Wegen (4) folgt weiter

$$a^2 + a = 0, \text{ also } a(a + 1) = 0, \text{ d. h.,}$$

$$a = -1.$$

Man erhält das Polynom

$$P_5(x) = x^4 - x^2,$$

das wegen $x^4 - x^2 = (x^2 - x)(x^2 + x)$ die gestellten Bedingungen erfüllt.

Daher haben die Polynome $P_1(x), P_2(x), P_3(x), P_4(x)$ und $P_5(x)$ und nur diese die geforderten Eigenschaften. Es gibt also genau 5 Paare von reellen Zahlen mit den geforderten Eigenschaften, nämlich $(1, 1), (-2, 1), (0, -1), (0, 0), (-1, 0).$

Eine Aufgabe von Prof. Dr. A. M. Eganjan

Pädagogisches Institut Jerewan „H. Abowjan“
Armenische SSR

▲1822▲ Gesucht ist eine natürliche Zahl mit fünf Ziffern, die 45mal größer ist als das Produkt ihrer Ziffern.

▲4▲ Es seien a und b sowie $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 2$) positive reelle Zahlen mit $a \leq a_k \leq b$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Ferner sei

$$m_1 = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n),$$

$$m_2 = \frac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2).$$

Man beweise

$$m_2 \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} m_1^2.$$

▲5▲ Es seien x, y, z reelle Zahlen mit $x + y + z = xyz$ (1)

und $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}, |y| < \frac{1}{\sqrt{3}}, |z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$. (2)

Man beweise, daß

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} + \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} + \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \cdot \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} \cdot \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2}. \quad (3)$$

gilt.

▲6▲ Ohne Benutzung eines Tafelwerks ist die folgende Summe zu berechnen:

$$S = \tan^6 \frac{\pi}{18} + \tan^6 \frac{5\pi}{18} + \tan^6 \frac{7\pi}{18}.$$

▲7▲ Es sind alle regelmäßigen n -Ecke ($n \geq 4$) anzugeben, die die folgende Eigenschaft besitzen:

Die Differenz der Länge der größten Diagonale und der Länge der kleinsten Diagonale ist gleich der Länge der Seite des regelmäßigen n -Ecks.

Nguyễn Thái Hùng/R. Lüders

Wir danken dem Mathematikstudenten Nguyễn Thái Hùng (z.Z. TU Dresden) für die Übersendung der sieben Aufgaben und Oberstudienrat Dr. R. Lüders für ihre Bearbeitung. Die Lösungen zu den Aufgaben 4 und 5 siehe S. 21. Die Lösungen zu den Aufgaben 6 und 7 veröffentlichen wir im Mittelteil des Heftes 3/79, d. Red.

Leistungsschau der Studenten an der TU Dresden

Alljährlich werden an der Technischen Universität Dresden Leistungsschauen der Studenten und jungen Wissenschaftler auf Sektions- und Universitätsebene durchgeführt. Die Leistungsschau lehrt, sich an den Besten zu messen und spornt zu neuen Erfolgen an.

In der Leistungsschau der Sektion Mathematik stellt Rainer Tichatzky sein Exponat „Bildschirmhardcopy mittels Zeichenmaschine“ aus. Er studiert in der Seminargruppe 74/07/02 der Sektion Mathematik die Spezialrichtung *Mathematische Kybernetik und Rechentechnik*. Vor dem Ehrendienst in der NVA absolvierte er die Erweiterte Oberschule Pasewalk mit Auszeichnung und ist Träger der Lessingmedaille in Silber. Als mathematisch interessierter Schüler war er bei Mathematikolympiaden erfolgreich. Im Kollektiv der Seminargruppe wirkt er gesellschaftlich als einer der FDJ-Aktivist der Gruppe. Er leitet den Filmklub der Sektion.

Das vorgestellte Praktikumergebnis ist Rainer Tichatzkys erste selbständige Entwicklungsarbeit. Innerhalb kürzester Zeit hat er Programmierung und Geräte zu beherrschen gelernt. Seine eigene Arbeit stets kritisch und methodisch prüfend, gelangte er vor allem auch zu einer bewußten Einordnung seiner Tätigkeit in das *Gesamtsystem Bildschirm*.

Die Verteidigung der Praktikumsarbeit fand erfolgreich im Rahmen des Austauschpraktikums in der VR Bulgarien statt.

Die Aufgabenstellung *Kopie von Bildschirmbildern mittels Zeichenmaschine* ist aus den Forschungs- und Entwicklungsarbeiten der Arbeitsgruppe Digitalgeometrie am WB Mathematische Kybernetik und Rechentechnik der Sektion Mathematik zum Aufbau eines ESER-an-schlußfähigen Kleinrechner-Bildschirm-Systems (Digitalgeometrischer Arbeitsplatz) abgeleitet. Die Erzeugung der Bildschirmkopie gestattet das Fixieren des Bildschirmbildes in im allgemeinen ausreichender Detailtreue und im Zusammenwirken mit der Umkehraktion, dem Darstellen von als Steuerlochlöcher vorliegenden, mittels Zeichenmaschine herstellbaren Bildern, ein redigierfähiges Darstellungsarchiv zu verwalten.

Übrigens: Die Besten sind nie mit sich zufrieden. Rainer Tichatzky hat inzwischen sein Hardcopyprogramm selbständig weiterentwickelt – ohne Betreuung und ohne Aufgabenstellung.

Rainer Tichatzky bei der Arbeit am ungarischen grafischen Bildschirmgerät GD'71. Das Steuergerät ist ein DDR-Kleinrechner KRS 4201, der wiederum mit einer ESER-Anlage gekoppelt ist.

Als Zeichenmaschine wird ein DIGIGRAF aus der ČSSR verwendet. Der Digitalgeometrische Arbeitsplatz entstand in internationaler sozialistischer Gemeinschaftsarbeit.

Kurzbiographie: Geboren 1953 in Lommatzsch, Besuch der EOS, Pasewalk, Abitur; Auszeichnung mit der Lessingmedaille in Silber, Teilnehmer an Mathematikolympiaden; Ehrendienst bei der NVA, Mathematikstudium an der TU Dresden, Sektion Mathematik, Leiter des Filmklubs der Sektion.



Albert Einstein

Teil 2

Ein Einblick in Einsteins Gedankenwelt (spezielle Relativitätstheorie)

Isaac Newton hatte zwar auf die Schwierigkeiten, die sich beim Messen und Vergleichen der Zeit ergeben, hingewiesen, von weitreichenderem Einfluß war jedoch seine Ansicht, die er in seinem Buch „Philosophiae naturalis principia mathematica“ (1687) äußerte: „Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung auf irgendeinen äußeren Gegenstand.“ Neben der absoluten Zeit, einer für alle Beobachter gleichen Zeit (Weltzeit), benutzt Newton auch den absoluten Raum, in dem sich die Bewegungen physikalischer Körper vollziehen. Einstein, der dem Machschen Prinzip folgte, nur experimentell Nachweisbares zu akzeptieren, durchdachte die Zusammenhänge nochmals. Zunächst ist es klar, daß jeder Beobachter ein Koordinatensystem zur Verfügung hat, mit dem er den ihn umgebenden Raum beschreibt und seine eigene Zeit (Ortszeit) mißt. Um mit einem anderen Beobachter Informationen auszutauschen, muß er mit diesem Signale austauschen (Lichtzeichen, Töne usw.), wozu Zeit benötigt wird.

Betrachten wir ein Signal, das längs einer Geraden, als x -Achse bezeichnet, vom Beobachter B im Punkt 0 ($x=0$) ausgesandt wird. Das Signal ist ausreichend im Sinn der Physik beschrieben, wenn wir zu jeder Zeit wissen, an welchem Ort es sich befindet, also jedem Zeitpunkt t ein Ort in Abhängigkeit von t zugeordnet werden kann: $x(t)$. Das können wir z. B. tun, indem wir an jedem Ort die Zeit notieren oder in einem Achsenkreuz die Funktion $x(t)$ einzeichnen, die den Zusammenhang herstellt $t \rightarrow x(t)$. (Zur Vereinfachung betrachten wir im weiteren nicht Bewegungen im dreidimensionalen Raum, sondern lediglich längs einer in ihm gelegenen Geraden, die als x -Achse gewählt wird. Das hat den Vorteil, daß wir in einer Ebene eine Zeitachse (t -Achse) anbringen können. Würden wir eine Ebene als Bewegungsraum wählen, so benötigen wir bereits den dreidimensionalen Raum zur Anbringung einer Zeitachse, und für den dreidimensionalen Raum selbst ist das Anbringen einer Zeitachse anschaulich nicht mehr möglich.)

Eine Signalübertragung wird wie jede physikalische Bewegung durch die Menge aller durchlaufenen Orte (Punkte) mit der zugehö-

rigen Zeit beschrieben, also durch die Menge der Paare $(t, x(t))$. Das Paar $(t, x(t))$ gibt dabei an, was sich in bezug auf das Signal oder einen Körper an dem Ort x zur Zeit t ereignet hat. Deshalb wird jedes Paar $(t, x(t))$ ein Ereignis genannt. Die Menge aller Ereignisse charakterisieren den Bewegungsablauf, sie bilden gewissermaßen die „Lebenslinie“ des Signals oder des bewegten Körpers. Die „Lebenslinie“ nennen die Physiker genauer die Weltlinie eines Körpers.

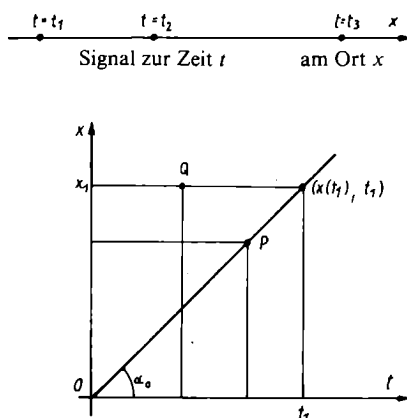


Bild 1: Weg-Zeit-Diagramm zur Beschreibung einer Signalausbreitung. (Die eingezeichnete Gerade ist die Weltlinie eines von 0 ausgehenden Lichtsignals)

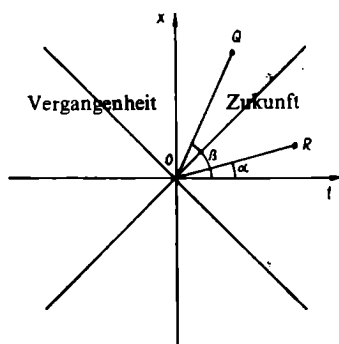


Bild 2: Der Lichtkegel
 $v = \tan \beta = x/t > \tan \alpha_0 = c$
für den Punkt R (mögliches Signal von 0 nach R)
 $V = \tan \beta = x/t > \tan \alpha_0 = c$
für den Punkt Q (unmögliches Signal von 0 nach Q)

In Bild 1 breitet sich das Signal P mit der Geschwindigkeit $v = \text{Weg}/\text{Zeit} = \text{const.}$ aus, der Zusammenhang zwischen Weg und Zeit ist durch die Gerade $x = \text{const.} \cdot t$ gegeben. Es gibt nun eine größtmögliche Signalgeschwindigkeit, die nicht zu übertreffen ist, und das ist die Geschwindigkeit, mit der sich das Licht ausbreitet ($c = 2,9979250 \cdot 10^8$ m/s im Vakuum. Berücksichtigen wir das in Bild 1, wenn die eingezeichnete Gerade als die von 0 ausgehende Weltlinie eines Lichtsignals angesehen wird, so zeigt sich, daß die oberhalb der Geraden gelegenen Ereignisse – wie Q –

nicht von einem Lichtsignal aus 0 erreicht werden können. Natürlich kann der zum Ereignis Q gehörige Ort x_1 durch ein Lichtsignal zur Zeit t_1 erreicht werden, aber das stellt das Ereignis $(t_1, x_1(t_1))$ dar, das vom Ereignis Q verschieden ist!

Verfolgen wir die Weltlinien des Lichtsignals für vergangene Zeiten und zeichnen noch die Weltlinie eines Lichtsignals ein, das in Richtung der negativen x -Achse ausgesandt wurde, so erhalten wir den in Bild 2 gezeichneten Lichtkegel. Die im mit Zukunft bezeichneten Teil liegenden Ereignisse können von 0 aus mit Signalen erreicht werden. Auf sie kann ein Beobachter in 0 Einfluß nehmen. Der Vergangenheitskegel enthält die Ereignisse, von denen Signale an einen Beobachter in 0 gesandt worden sein können. Die restlichen Ereignisse der „Welt“ stehen in keinem kausalem Zusammenhang zu einem Beobachter in 0. Die Weltlinie eines unbewegten Körpers verläuft parallel zur t -Achse.

Gibt es zwei Beobachter auf einer Geraden (x -Achse) mit den Koordinatensystemen K bzw. K' (x - bzw. x' -Achse sowie Zeit t bzw. t') und bewegen sich die Beobachter mit der Geschwindigkeit v bzw. $-v$ gegeneinander, so daß für $t=t'=0$ ihre Ursprünge 0 bzw. $0'$ zusammenfallen, dann rechnen sich nach Einstein deren Angaben (Koordinaten und Zeit) wie folgt ineinander um

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (1)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (2)$$

Bemerkenswert ist hieran, daß nicht nur die Übermittlungszeit für die Überwindung der gegebenen Entfernungen und die gegenseitige Geschwindigkeit v berücksichtigt werden, sondern die Beobachtungszeit ähnlich wie die Orte umgerechnet wird!! Ist v sehr klein, so liegt $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ sehr nahe bei 1, also ergeben (1) und (2) näherungsweise die Gleichungen

$$t = t' \quad x' = x - vt,$$

die aus der klassischen Mechanik bekannt sind (Bild 3). $t = t'$ bedeutet, daß es für alle Beobachter eine einheitliche Weltzeit gibt.

Die Einsteinsche Relativitätstheorie enthält ganz unerwartete Folgerungen, die unsere Vorstellungen von Raum und Zeit arg sträpazieren. Auf einer Geraden (der x -Achse)

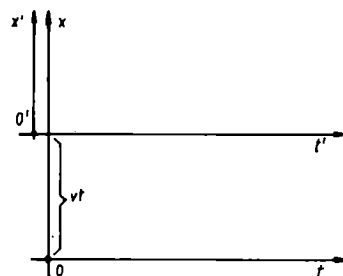


Bild 3: Zwei Beobachter mit verschiedenen Bezugssystemen in der klassischen Mechanik (Galilei-Transformation)

soll ein Stab der Länge l ruhen, dessen Endpunkte in einem Koordinatensystem auf der Geraden für einen ruhenden Beobachter B die Koordinaten x_1 und x_2 ($x_2 > x_1 > 0$) haben. An diesem Stab bewegt sich ein Beobachter B' längs der Geraden mit der Geschwindigkeit v vorüber. Welche Stablängen messen der ruhende und der bewegte Beobachter? Die Länge des Stabes wird von jedem Beobachter als Differenz der von ihm zur gleichen Zeit wahrgenommenen Koordinaten der Stabenden ermittelt. Der ruhende Beobachter erhält natürlich zu allen Zeiten $l = x_2 - x_1$. Der bewegte Beobachter muß die Koordinaten x_1' und x_2' der Stabenden zur gleichen Zeit messen, d. h. $t_1' = t_2'$.

Aus der ersten Gleichung von (1) folgt daher $t_2 - t_1 = (x_2 - x_1)v/c^2$.

Damit läßt sich aus der ersten Gleichung von (2) die Länge l' des Stabes für den bewegten Beobachter berechnen:

$$l' = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - vt_2 - x_1 + vt_1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

$$= \frac{l - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{l - l(v/c)^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = l \frac{1 - (v/c)^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

$$= l\sqrt{1 - (v/c)^2}, \text{ also}$$

$$l' = l\sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

Da die Wurzel kleiner als 1 ist, folgt

$$l' < l \text{ (Längenverkürzung),}$$

und der Unterschied der gemessenen Längen ist um so größer, je näher v bei c liegt (weil dann $\sqrt{1 - (v/c)^2} \rightarrow 0$).

Bild 4 zeigt die Verhältnisse anschaulich. l^* ist das durch Lichtsignale übermittelte visuelle Bild, das beide Beobachter vom Stab haben. l bzw. l' sind die verschiedenen Längen, die auf den x - bzw. x' -Achsen vom ruhenden bzw. bewegten Beobachter zum gleichen Zeitpunkt gemessen werden. Obwohl die Rechnung $l > l'$ ergab, zeigt Bild 4 $l < l'$! Hier liegt kein Widerspruch vor, denn in unserem Bild der Raum-Zeit-Welt werden die Abstände nicht so gemessen, wie wir es normalerweise gewöhnt sind. Zum Vergleich erinnern wir daran, daß es auf jeder geographischen Karte der Erde Größen gibt (z. B. Längen, Winkel, Flächen u. a.), deren Messung komplizierter als auf der Erde ist,

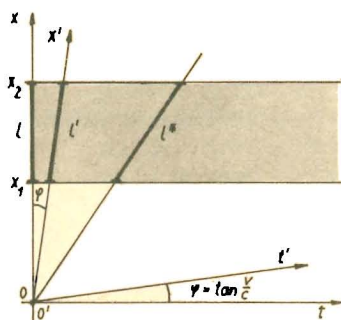


Bild 4: Längenverkürzung eines Stabes für den bewegten Beobachter. Der ruhende Beobachter B mißt im x, t -System, der bewegte im x', t' -System.

so daß beispielsweise größer erscheinende Entfernungen bei Azimutalprojektionen oder größer erscheinende Landflächen bei Mercatorprojektionen in Wirklichkeit kleiner sind.

Bücher über Einstein und die Relativitätstheorie

Landau/Rumer

Was ist die Relativitätstheorie?

8. Auflage 1977, 58 S., 3,60 M

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft

Melcher

Relativitätstheorie in elementarer

Darstellung (mit Aufgaben und Lösungen)

5. Auflage 1976, 344 S., 12,80 M

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

Liebscher

Relativitätstheorie mit Zirkel und Lineal

1978, 155 S., 8,- M

Akademie-Verlag

Schmutzer

Relativitätstheorie aktuell

1979, etwa 180 S., 12,50 M

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft

Herneck

Albert Einstein

3. Auflage 1977, 124 S., 5,- M

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft

Herneck

Einstein privat. Herta W. erinnert sich an die Jahre 1927–1933

1978, 172 S., 7,50 M

Buchverlag Der Morgen

Einstein

Über die spezielle und die allgemeine

Relativitätstheorie

4. Auflage 1976, 130 S., 8,- M

Akademie-Verlag

In einem Moskauer Park fotografiert:

Sowjetische Studentinnen bei aktiver Beschäftigung mit Mathematik



Der Physiker A. F. Joffe über Einstein:

„Während meines Aufenthalts in Berlin interessierte sich Einstein für meine Untersuchungen über Kristalle. Er bat mich, ausführlicher darüber zu sprechen. Ich erinnere mich, daß ich um 3 Uhr zu ihm gekommen war. Ungefähr nach einer Stunde kam seine Frau und bat Einstein, irgend jemanden zu empfangen, der aus Hamburg gekommen war, um den berühmten Gelehrten kennenzulernen. Einstein ging derartigen Begegnungen und allem, was den Charakter von Reklame trug oder seine Berühmtheit unterstrich, aus dem Wege. Aber offenbar fand er in seiner Familie keine Unterstützung. Deshalb führte er mich in einen benachbarten Park, um ungestört das Gespräch fortsetzen zu können. Erst als die Gefahr einer Begegnung vorüber war, kehrten wir in sein Kabinett zurück. Schließlich, um 2 Uhr nachts, war das Gespräch beendet und alles klar. Weder ich noch wahrscheinlich die Mehrzahl der Wissenschaftler waren einer so langen und systematischen Gedankenanspannung fähig. Aber für Einstein war das offenbar eine gewohnte Sache!“ (Aus A. F. Joffe „Begegnungen mit Physikern“, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1967)

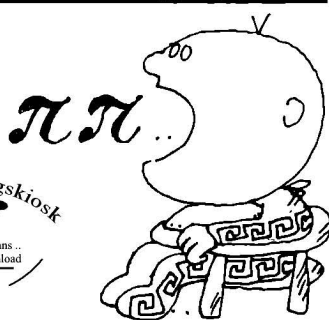
Einsteins Mantel

Einstein traf einen seiner Bekannten. „Herr Einstein, Sie sollten sich unbedingt einen neuen Mantel kaufen!“ riet ihm dieser. „Weshalb denn?“ entgegnete Einstein. „In dieser Stadt kennt mich doch keiner!“ Nach Jahren trafen sich beide in derselben Stadt wieder und Einstein trug den alten Mantel immer noch. Der Bekannte riet dem Gelehrten erneut, sich einen neuen Mantel zu kaufen. „Weshalb denn?“ entgegnete Einstein. „Hier kennt mich doch jeder!“

(Aus Wurzel 5/78, Jena)

Einstein schien geradezu eine Freude daran zu haben, alle Möglichkeiten der wissenschaftlichen Behandlung eines Gegenstandes mit unermüdlichem Wagemut durchzukosten. (Brod)

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 5. Mai 1979

Mathematik

Ma 5 ■ 1823 Wie lautet die vollständige Subtraktionsaufgabe $**** - *** = 1114$, wenn an Stelle der Sternchen nur Ziffern für gerade Zahlen stehen dürfen?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

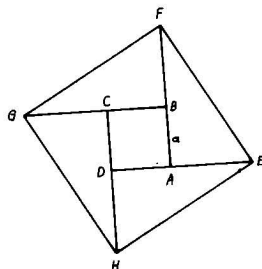
Ma 5 ■ 1824 Für eine Zirkusveranstaltung wurden genau 1978 Eintrittskarten verkauft, und zwar an der Kasse A Eintrittskarten von der Nummer 001 bis 498, an der Kasse B von der Nummer 1247 bis 1999. An der Kasse C hatte die erste verkaufte Eintrittskarte die Nummer 3000. Welche Nummer stand auf der zuletzt an der Kasse C verkauften Karte?

Mathematikfachlehrer W. Förg,
Schwaz, Österreich

Ma 5 ■ 1825 Erwin, Torsten und Simone gingen gemeinsam ins Kinderwarenhaus einkaufen. Erwin kaufte ein Hemd für 20,50 M. Torsten erwarb für seinen kleinen Bruder eine preisgesenkte Hose. Simone hatte für ein Kleid und eine Schürze zusammen 40,25 M zu bezahlen. Der Preis des Kleides war gleich dem dreifachen Preis der Hose, die Torsten kaufte. Wie teuer war die Schürze, wenn man weiß, daß die Hose genau halb so teuer war wie das Hemd, das Erwin kaufte?

Schüler St. Franze, Dresden, 67. OS

Ma 5 ■ 1826 Das Bild stellt ein Quadrat ABCD mit der Seitenlänge $\overline{AB} = a$ dar. Die Seite $\overline{AB}$ wurde über B hinaus bis F, die Seite $\overline{BC}$ über C hinaus bis G, die Seite $\overline{CD}$



über D hinaus bis H, die Seite $\overline{DA}$ über A hinaus bis E jeweils um sich selbst verlängert. Es ist zu untersuchen, wievielfach der Flächeninhalt des Quadrates ABCD im Flächeninhalt des Vierecks EFGH enthalten ist. Sch.

Ma 5 ■ 1827 In dem Schema

$$\begin{array}{r} abb + cd = efb \\ - \quad : \quad + \\ \hline agd - f = aef \\ eb \cdot hk = fla \end{array}$$

sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß man sechs richtig gelöste Aufgaben erhält. Dabei sind für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern einzusetzen. Sch.

Ma 5 ■ 1828 Die Schüler einer Klasse gratulieren im Jahre 1978 ihrem Lehrer, der älter als 30 Jahre, aber jünger als 40 Jahre geworden ist, zum Geburtstag. Auf der Gratulationskarte wurden von den Schülern in scherzhafter Weise die beiden Ziffern der Zahl, die das Lebensalter des Lehrers angibt, vertauscht. Dadurch wurde dieser Lehrer um neun Jahre „jünger gemacht“. In welchem Jahre wurde dieser Lehrer geboren?

Schülerin Kirsten Hawlitschek
und Schüler Ulf Kretschmer, Döbeln

Ma 6 ■ 1829 In den drei Gleichungen

$$\begin{array}{l} (1) \quad aa \cdot b = ccd, \\ (2) \quad bb \cdot c = bb, \\ (3) \quad cc \cdot d = d, \end{array}$$

die ein-, zwei- und dreistellige natürliche Zahlen in dekadischer Darstellung enthalten sollen, sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Für gleiche Buchstaben sind gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern einzusetzen. Es ist die Zahl x aus der Gleichung $x = a + b + c + d$ zu bestimmen. Die Lösung ist zu begründen.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha

7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingegandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1978/79 läuft von Heft 5/78 bis Heft 2/79. Zwischen dem 1. und 10. September 1979 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/78 bis 2/79 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/79 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten – richtig gelöst – (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/78 bis 2/79) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1978/79 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

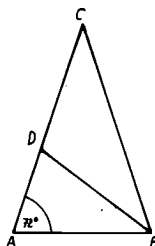
Thies Luther, 26 Güstrow, Werdersstr. 22		Ma 7 1369
Kersting-OS, Klasse 7		
30	150	
Prädikat:		
Lösung:		

Ma 6 ■ 1830 In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$ sei der Mittelpunkt des Schenkels $\overline{AC}$ mit M bezeichnet. Der Streckenzug von M über C nach B sei 45 cm lang; der Streckenzug von B über A nach M sei 25 cm lang. Wie lang sind die Seiten dieses Dreiecks?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 1831 In dem abgebildeten Dreieck ABC mit dem Winkel $\angle CAB = \alpha = 72^\circ$ wurde auf der Seite $\overline{AC}$ ein innerer Punkt D so festgelegt, daß $\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{CD}$ gilt. Es ist zu beweisen, daß das Dreieck ABC gleichschenkelig ist.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Ma 6 ■ 1832 In dem Schema

$$\begin{array}{rcl} ab \cdot cd & = & efgh \\ + & + & : \\ ci - dg & = & ik \\ \hline iga + hc & = & gig \end{array}$$

sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß in jeder Zeile und Spalte richtig gelöste Aufgaben stehen. Dabei sind für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern einzusetzen.

Sch.

Ma 6 ■ 1833 In einem Ferienlager treffen sich vier Schüler mit den Vornamen Mario, Torsten, Götz, Peter und den Nachnamen Krause, Saßnitz, Schmidt, Jacke. Von ihnen ist folgendes bekannt:

- (1) Sie wohnen in Berlin, Erfurt, Prag bzw. Rostock.
 - (2) Jeder von ihnen ist Schüler genau einer der Klassen 6, 7, 8 und 9.
 - (3) Der Schüler Mario heißt mit Nachnamen nicht Jacke.
 - (4) Der Schüler aus Berlin geht in die 6. Klasse.
 - (5) Peter und der Schüler mit dem Nachnamen Jacke stehen im Briefwechsel miteinander.
 - (6) Götz ist Schüler der 9. Klasse.
 - (7) In Rostock wohnt der Schüler mit dem Nachnamen Krause.
 - (8) Peter wohnt weder in Prag noch in Berlin und heißt mit Nachnamen nicht Krause.
 - (9) Der Schüler mit dem Nachnamen Krause geht in die 9. Klasse; er ist mit Torsten befreundet.
 - (10) Der Schüler mit dem Nachnamen Schmidt geht in die 6. Klasse; der Schüler mit dem Nachnamen Saßnitz geht in die 8. Klasse.
- Welchen Vor- und Nachnamen hat jeder die-

ser Schüler, welches ist ihr Wohnort, welche Klasse besucht jeder von ihnen?

Schüler Volker Franke, Nordhausen, Kl. 6

Ma 7 ■ 1834 Addiert man zur Summe zweier natürlicher Zahlen ihr Produkt, so erhält man 110. Wie viele Lösungen besitzt diese Aufgabe? Gib alle Lösungen an!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ■ 1835 Von einer Familie ist folgendes bekannt:
Vater und Mutter sind zusammen 75 Jahre, Vater und Sohn zusammen 54 Jahre, Vater und Tochter zusammen 51 Jahre alt. Alle vier sind zusammen 100 Jahre alt. Wie alt ist jedes Familienmitglied, wenn die Lebensalter in ganzen Zahlen ausgedrückt sind?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ■ 1836 Es mögen folgende Definitionen gelten:

- (1) Ein Primdreieck ist ein Dreieck, bei dem die Maßzahlen der drei Seitenlängen Primzahlen sind.
- (2) Ein Primdreieck heißt regulär, wenn die Maßzahlen der drei Seitenlängen aufeinanderfolgende Primzahlen sind.
- (3) Ein Primdreieck heißt binär, wenn die Maßzahl des Umfangs des Dreiecks eine zweistellige Primzahl ist.

Wieviele Primdreiecke, die untereinander nicht kongruent sind, gibt es, die zugleich regulär und binär sind?

OL Werner Melka, Neubrandenburg

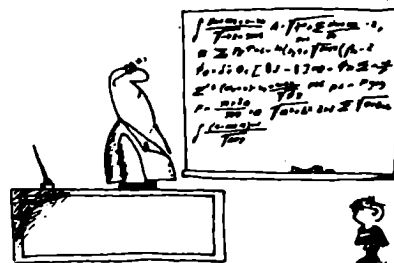
Ma 7 ■ 1837 Unser Kalender hat 7 Monate mit je 31 Tagen. Man beweise, daß es in jedem Kalenderjahr genau einen Wochentag gibt, auf den der 31. Tag eines solchen Monats nicht fallen kann.

Schülerin Vera Wilhelm, Leipzig
Dr.-Bruno-Schoenlank-OS

Ma 8 ■ 1838 Gegeben seien folgende „alpha-Gleichungen“:

$$\begin{array}{ll} (1) & A = \frac{\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\alpha} \\ (2) & L = \frac{\alpha}{\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha} \\ (3) & P = \frac{\alpha \cdot \alpha + \alpha}{\alpha} \\ (4) & H = (\alpha + \alpha) \cdot \frac{\alpha}{\alpha} \\ (5) & A = \frac{\alpha \cdot \alpha}{\alpha \cdot \alpha} \end{array}$$

In den Gleichungen (1) bis (5) sind die Buchstaben A, L, P, H, α durch die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei sind gleiche Buch-



„Na und – ich nehme an der Fernsehakademie teil!“

staben durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Gib sämtliche Möglichkeiten an!

OL Ing. K. Koch, Schmalkalden

Ma 8 ■ 1839 Familie Müller war 25 Tage im Urlaub. Nach der Rückkehr fragten Freunde Herrn Müller, wie denn das Wetter gewesen sei. Herr Müller antwortete:

„95% der Tage waren kalt, 85% naß, 75% windig und 65% trübe.“

Wie viele Tage des Urlaubs waren windig, trübe, kalt und naß zugleich?

Schüler Maik Weide, POS Crostau, Kl. 8

Ma 8 ■ 1840 Welchen Flächeninhalt hat das Netz einer geraden quadratischen Pyramide, wenn eine Seitenfläche der Pyramide einen Umfang von 16 cm hat und eine Seitenkante der Pyramide 1,5mal so lang ist wie die Grundkante?

Fr.

Ma 8 ■ 1841 Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$. Die parallelen Seiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$ sind je 10 cm und die anderen parallelen Seiten $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AD}$ sind je 5 cm lang. Der Abstand der beiden längeren parallelen Seiten beträgt $h = 4$ cm. Zu berechnen sind die Längen der beiden Diagonalen $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BD}$.

Schüler Dirk Spiering, 4. OS Zittau, Kl. 7

Ma 9 ■ 1842 Man bestimme drei natürliche Zahlen, deren Summe 945 ist, wobei $\frac{1}{6}$ der

ersten Zahl gleich $\frac{1}{7}$ der zweiten Zahl und gleich $\frac{1}{8}$ der dritten Zahl ist.

Schüler Andreas Fittke, Berlin

Ma 9 ■ 1843 Man ermittle alle Paare natürlicher Zahlen, für die gilt: Die Differenz der Quadrate beider Zahlen ist gleich dem Vierfachen des arithmetischen Mittels beider Zahlen.

Schüler Andreas Fittke, Berlin

Ma 9 ■ 1844 Man beweise, daß für jede Primzahl $p > 3$ der Term $p^2 - 1$ durch 24 teilbar ist.

Dr. G. Hesse, Radebeul

Ma 9 ■ 1845 Gegeben sei ein Dreieck ABC mit einem Umfang von 9,6 cm. Die Summe der Längen der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ ist doppelt so groß wie die Länge der Seite $\overline{AC}$. Die Länge der Seite $\overline{BC}$ verhält sich zur Länge der Seite $\overline{AB}$ wie 5 : 3. Es sind die Längen der drei Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ zu berechnen.

Schüler Andreas Günther, Altenburg

Ma 10/12 ■ 1846 In einem Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c und den Größen der Innenwinkel α, β und γ soll gelten:

- (1) $c^2 = 4a^2$ und
- (2) $\alpha + \beta = \gamma$

In welchem Verhältnis stehen die drei Seitenlängen zueinander?

Ing. A. Körner, Leipzig

Ma 10/12 ■ 1847 Es ist ein gleichseitiges Fünfeck $ABCDE$ mit der Seitenlänge $a = 2$ cm zu konstruieren. Das Fünfeck soll zwei nicht

benachbarte rechte Winkel besitzen. Der Flächeninhalt dieses Fünfecks ist zu berechnen.
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

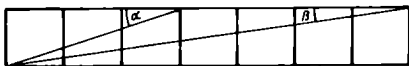
Ma 10/12 ■ 1848 Bei den 32. Ski-Weltmeisterschaften 1978 in Lahti errang die Sowjetunion mit 75 Punkten den ersten Rang in der Nationenwertung. Die Anzahl der Goldmedaillen war gleich der der Bronzemedaillen und gleich der Anzahl der vierten und gleich der der fünften Plätze. Die Anzahl der Silbermedaillen war gleich der Summe aus der Anzahl der Bronzemedaillen und der Anzahl der sechsten Plätze. Wieviel Gold-, Silber- und Bronzemedaillen, 4., 5. und 6. Plätze errang die UdSSR?

(1. Platz: 7 Punkte; 2. Platz: 5 Punkte; 3. Platz: 4 Punkte; 4. Platz: 3 Punkte; 5. Platz: 2 Punkte; 6. Platz: 1 Punkt.)

Schüler Andreas Fittke, Berlin

Ma 10/12 ■ 1849 Gegeben sei eine aus sieben kongruenten Rechteckflächen zusammengesetzte Rechteckfläche (siehe Bild). Es ist zu beweisen, daß für die Winkel der Größen α und β der Figur gilt: $26,5^\circ < \alpha + \beta < 26,6^\circ$.

Schüler Andreas Fittke, Berlin



Ph 10/12 ■ 55 Eine Stimmgabel schwingt beim Kammerton a' mit einer Frequenz von 440 Hz und einer Amplitude von 3 mm. Bestimmen Sie:

- a) rechnerisch die Elongation nach 1 ms (Millisekunde);
- b) zeichnerisch die Elongation nach 1 ms, indem Sie die erste Schwingung in ein ty-System eintragen!

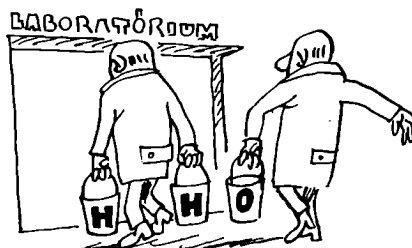


Chemie

Ch 7 ■ 41 Ein Kupfer(II)-oxid enthält 5% Verunreinigungen. Es soll mit Kohlenstoff zu Kupfer reduziert werden. Bei der Produktion entsteht außerdem noch Kohlenmonoxid.

- a) Wieviel Kilogramm Kupfer kann man aus 1,2 t Kupfer(II)-oxid gewinnen?
- b) Wieviel Kilogramm Kohlenmonoxid erhält man, wenn mit einem Gasverlust von 1,5% gerechnet werden muß?

Ch 8 ■ 42 0,57 g einer Substanz werden in Wasser gelöst und mit Salzsäure versetzt. Die Lösung wird zum Sieden erhitzt und mit einer Bariumchloridlösung vollständig gefällt. Nach dem Filtrieren, Auswaschen und Trocknen des Niederschlags von Bariumsulfat wird bis zur Massenkonstanz geglüht. Der leere Tiegel hat ein Gewicht von 13,92 g, nach dem Glühen wiegt er mit Inhalt 14,15 g. Berechnen Sie den Prozentgehalt an Schwefel in der ursprünglichen Substanz!



Ch 9 ■ 43 0,07 g Aluminiumpulver reagieren mit Natriumhydroxid nach folgender Gleichung:

$1 \text{ Al} + 2 \text{ NaOH} + 6 \text{ H}_2\text{O} \rightarrow 2 \text{ NaAl(OH)}_4 + 3 \text{ H}_2$
Dabei werden 77,4 ml trockenes Wasserstoffgas von 25°C und 750 Torr gebildet. Wieviel Prozent Aluminium enthält das Pulver?

Ch 10/12 ■ 44 Salpetersäure kann aus dem Nichtmetalloxid Stickstoffdioxid und durch Reaktion von Natriumnitrat mit Schwefelsäure hergestellt werden. Bei beiden Verfahren werden 25 kg 82%ige Stickstoffverbindung eingesetzt. Die Dichte der Salpetersäure beträgt $1,509 \text{ kg} \cdot \text{l}^{-1}$. Welche Variante liefert die größte Ausbeute 99%ige Salpetersäure in Liter?



Aus dem Referat des Ministers für Volksbildung, Margot Honecker, auf dem VIII. Pädagogischen Kongreß, Oktober 1978

Mit den jetzt geltenden Lehrplänen für Mathematik haben wir endgültig mit dem bürgerlichen Rechen- und Raumlehreunterricht gebrochen. Als dieser Weg vor fünfzehn Jahren eingeschlagen wurde, gab es noch manchen Zweifel an der Realisierbarkeit der hohen Zielstellung unseres Mathematikunterrichts. Wir können heute feststellen, daß diese Ziele in immer höherer Qualität realisiert wurden. Das mathematische Wissen unserer Schüler ist gründlicher geworden. Grundlegende Fertigkeiten werden sicherer beherrscht, was jedoch nicht heißt, daß wir beispielsweise mit der Entwicklung der Rechenfertigkeiten schon zufrieden sein könnten. Auch an der Überwindung der Schwierigkeiten bei der Lösung von Anwendungs- und Sachaufgaben muß weitergearbeitet werden. Wir müssen noch mehr darauf achten, alle Schüler zu befähigen, aus einem gegebenen Sachverhalt die mathematische Aufgabenstellung herauszuarbeiten und die erforderlichen mathematischen Verfahren zu ihrer Lösung einzusetzen. Gerade das Finden des Lösungsweges und das selbständige Begründen der einzelnen Schritte bereitet den Schülern oft Schwierigkeiten. Wir müssen daher prüfen, ob die Schüler genügend zum Vergleichen, Erläutern, Begründen angehalten und befähigt werden.

Physik

Ph 6 ■ 51 Der Mond bewegt sich auf einer fast kreisförmigen Bahn um die Erde. Diese Umlaufbahn hat eine Länge von rund 2400000 km und wird in ungefähr 40000 min durchlaufen. Berechne die Geschwindigkeit (Bahngeschwindigkeit), mit der der Mond die Erde umkreist in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$!

Ph 7 ■ 52 Ein PKW mit einer Gewichtskraft von 1250 kp fährt eine Straße mit 12% Steigung hinauf. (Auf 100 m waagerechte Länge 12 m Steigung.) Welche Kraft muß der Motor mindestens aufbringen, wenn man die Reibung vernachlässigt?

Bemerkung: Entnimm einer maßstäblichen Zeichnung die Größe l !

Ph 8 ■ 53 Durch einen Tauchsieder fließt ein elektrischer Strom mit einer Stärke von 2,3 A. Berechne die elektrische Ladung, die in $\frac{1}{4}$ h durch den Tauchsieder transportiert wird!

Ph 9 ■ 54 In einem Fahrstuhl wird eine Person mit einer Masse von 75 kg erst aufwärts und dann abwärts befördert. Dabei treten jedesmal beim Anfahren Beschleunigungen von $1,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ auf. Berechnen Sie die Belastung (in kp) des Fahrstuhlbodens durch die Person während der Beschleunigung in beiden Fällen!

Die letzten 30 Jahre haben Gewicht

Seit hunderttausend Jahren wird gezählt, und schon seit mehreren tausend Jahren beschäftigen sich Menschen „hauptberuflich“ mit Mathematik. Als im Jahre 1409 die Leipziger Universität gegründet wurde, gab es Lehrveranstaltungen in diesem Fach allerdings nur im Rahmen der „freien Künste“, deren Studium Voraussetzung war, um Theologie, Jura oder Medizin studieren zu können. Sie wurden oft von verschiedensten Professoren anderer Fachrichtungen mit gehalten. Später waren es in Leipzig vorwiegend Astronomen, die auch in der Mathematik hervortraten.

Seit etwas mehr als 100 Jahren gibt es einen Aufschwung der Mathematik in Leipzig, der vor allem durch eine ständig weitergeführte Anwendung der Analysis (Differential- und Integralgleichungen, Variationsrechnung, Theorie der komplexwertigen Funktionen) auf physikalisch-technische Probleme gekennzeichnet ist (Strömungslehre, Elastizitätstheorie, Optik, heute auch Relativitätstheorie und Quantenfeldtheorie).

Jeder künftige Fachmann auf diesem Gebiet stößt auf Ergebnisse berühmter Leipziger Professoren wie Carl Neumann, Sophus Lie, Otto Hölder, Paul Koebe, Leon Lichtenstein. Jedes Jahr beim Studentenaustausch mit der Sowjetunion, beim Aufenthalt in Leningrad oder Kiew, staunen unsere heutigen Studenten, wie gut die sowjetischen Freunde Namen und Leistungen dieser Gelehrten kennen. In jedem ernsthaften Lehrbuch über Geometrie in der Welt taucht der Name von Felix Klein auf, der 1861 das Mathematische Institut an der Leipziger Universität gründete. Er und seine Nachfolger führten eine Ausbildung von Mathematikern auf hohem Niveau ein, die ebenfalls bis heute ein Charakteristikum an unserer Universität ist.

• 1945 lag die Leipziger Universität in Trümmern. Zwei Drittel aller Gebäude, Bibliotheken und Geräte waren zerstört. Die Amerikaner nahmen bei ihrem Abzug aus Leipzig 46 Wissenschaftler und zahlreiches Material mit nach Westen. Bis zur Gründung der DDR waren die Kriegsfolgen an der Universität nicht überwunden. Wenn man noch diesen Ausgangspunkt bedenkt – was können dann angesichts tausendjähriger Ent-

wicklung der Mathematik, hundertjähriger Traditionen in Leipzig die letzten 30 Jahre bedeuten? Haben sie überhaupt Gewicht?

Es gibt sogar soviel Gewichtiges und Neues, daß man sich auf eine Aufzählung von Beispielen beschränken muß! Zunächst „Äußerlichkeiten“: Gegenüber den Maximalzahlen von vor 1949 hat sich an der Mathematik die Studentenzahl mehr als verdoppelt und die der Wissenschaftler etwa vervierfacht. Wir lernen, lehren und forschen in einem Neubau-komplex, der internationale Vergleiche nicht zu scheuen braucht. Die Mehrzahl der Studenten wohnt gut und billig in neu entstandenen Wohnheimen, wird durch eine Mensa mit Mittagessen versorgt, die pro Portion 0,60 M aus dem Staatshaushalt zuzahlt; der Anteil von Studenten mit Stipendium und die Stipendienhöhe sind gemessen an der Vergangenheit oder dem jetzt international Üblichen Spitze. Die Mathematik ist heute keine brotlose freie Kunst mehr, sondern hat eine anerkannte und wichtige Stellung im gesellschaftlichen Leben errungen. Die 1969 gegründete Sektion Mathematik ist geachteter Baustein der sozialistischen Karl-Marx-Universität. Seit 1963 verfügt die Universität über ein eigenes Rechenzentrum.

• *Neu in den letzten 30 Jahren:* Ein fortschrittlicher Geist hat sich auch an der Sektion Mathematik voll durchgesetzt. Das bürgerliche Bildungsprivileg wurde gebrochen – etwa die Hälfte aller Studenten und Wissenschaftler sind Arbeiter- oder Bauernkinder. Alle Studenten werden mit dem Marxismus-Leninismus vertraut gemacht. Aktive Partei-, FDJ- und Gewerkschaftsorganisationen mobilisieren die Sektionsangehörigen zu hohen Leistungen.

Etwa ein Drittel der Studierenden sind Mädchen und Frauen – da hat vor hundert Jahren

noch keiner dran gedacht. Noch der weltberühmte Physiker Max Planck empfand es als bemerkenswert, daß er „probeweise und stets widerruflich“ einigen Frauen den Zutritt zu seinen Vorlesungen gestattete. An unserer Sektion Mathematik haben in den letzten fünf Jahren sechs Frauen ihre Doktorarbeit verteidigt.

• *Neu in den letzten 30 Jahren:* Das Studium vollzieht sich auf der Grundlage wohlüberlegter Pläne. Die „akademische Freiheit“, nach der sich früher jeder Student aus einem nicht immer koordinierten Vorlesungsangebot etwas aussuchen und sich irgendwann einmal zur Prüfung melden konnte, ist überwunden:

Bei uns wird möglichst effektiv und deshalb angespannt und diszipliniert gearbeitet wie in anderen Bereichen der Gesellschaft auch.

• *Neu in den letzten 30 Jahren:* Um die führenden Professoren gruppieren sich ganze Forschungskollektive, deren Mitglieder gemeinsam versuchen, zusammenhängende Fragen der Mathematik in größerer Breite und Geschwindigkeit zu bearbeiten, als es ein einzelner vermag. Auf diese Weise gelang es uns, eine höhere Anzahl von Doktorarbeiten, wissenschaftlichen Aufsätzen und Büchern fertigzustellen als je zuvor – und ein beachtlicher Teil davon entspricht dem internationalen Höchststand. Unsere bedeutendsten Forscher erhalten Einladungen aus aller Welt, ihre neuen Ergebnisse vorzustellen. Besonders enge Beziehungen haben wir mit führenden Zentren der Sowjetunion, ständig befinden sich einige Wissenschaftler dort zum Gedankenaustausch.

• *Neu in den letzten 30 Jahren:* Studentenausbildung und Forschung orientieren sich bewußt auf die Bedürfnisse der Praxis. In die Studienpläne wurden rechtzeitig neue Lehrinhalte aufgenommen (Wahrscheinlichkeitsrechnung, Optimierung, Rechentechnik), deren Kenntnis wichtig für einen modernen Mathematikunterricht und die Anwendung mathematischer Methoden in der Wirtschaft ist. Alle Studenten gehen während des Studiums mehrmals ins Praktikum in Betriebe, Rechenzentren bzw. in die Schulen. Wir wirken bei der Weiterbildung der Mathematiker in den Betrieben und der Mathematiklehrer mit. Mehrere Forschungskollektive haben umfangreiche Forschungsverträge mit Braunkohlenkombinaten, metallurgischen Betrieben u. a. oder unterstützen Physiker und Chemiker beim Erarbeiten praxiswirksamer Forschungsergebnisse.

G. Deweß



In weiteren Beiträgen gehen wir speziell auf berühmte Mathematiker der Universität Leipzig, wie Felix Klein, Sophus Lie, A. F. Möbius u. a. ein, d. Red.

Lineare Optimierung

Teil 2

Im Heft 6/78 wurde eine Aufgabe der linearen Optimierung formuliert und grafisch gelöst. Wir betrachten jetzt unter Beibehaltung der Nebenbedingungen des Beispiels B4 eine andere Zielstellung in dem folgenden Beispiel:

4b Jedes der zu produzierenden Erzeugnisse E_1 und E_2 bringe einen Erlös von 5 Geldeinheiten (GE). Bei der Herstellung von x Erzeugnissen E_1 und y Erzeugnissen E_2 ist der Gesamterlös für den betrachteten Zeitraum gegeben durch $z = 5x + 5y$. Welches Produktionsprogramm sichert dem Betrieb unter Beachtung der gegebenen Kapazitätsbeschränkungen maximalen Erlös?

Mathematisches Modell:

Zielfunktion $z = 5x + 5y$ maximal

Nebenbedingungen (I) $x + y \leq 10$

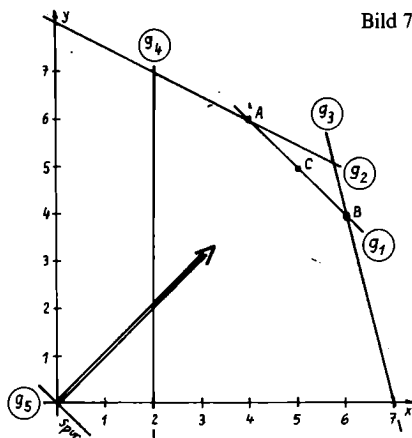
(II) $x + 2y \leq 16$

(III) $4x + y \leq 28$

(IV) $x \geq 2$

(V) $y \geq 0$

Grafische Lösung: Den Nebenbedingungen werden lineare Funktionen und diesen die Geraden g_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) zugeordnet (Bild 7).



Der Lösungsbereich ist durch das konvexe Fünfeck mit den Eckpunkten (2; 0), (7; 0), (6; 4), (4; 6), (2; 7) gegeben. Für $z=0$ erhält man aus der Zielfunktion deren Spur $y = -x$. Bei größtmöglicher Parallelverschiebung dieser Spur in den Lösungsbereich hinein erhält man die durch die Punkte A(4; 6) und B(6; 4) gehende Gerade, deren Punkte alle denselben maximalen Wert der Zielfunktion $z_{\max} = 50$ besitzen. Aus der Problemstellung der Auf-

gabe geht hervor, daß ganzzahlige Anzahlen der Produktionserzeugnisse E_1 und E_2 gefordert werden. Alle Punkte der Kante $\overline{AB}$ mit A(4; 6) und B(6; 4) sind optimale Punkte; für das vorliegende praktische Problem kommen jedoch nur diejenigen Punkte der Strecke in Betracht, die ganzzahlige Koordinaten haben: A(4; 6), B(6; 4), C(5; 5). Bezüglich der gegebenen Zielfunktion sind alle diese Punkte gleichwertig. In jedem Fall wird derselbe maximale Erlös $z_{\max} = 50$ GE erzielt. Andere Überlegungen werden darüber entscheiden, welches Programm realisiert wird, z. B. die Frage nach Auslastung einer bestimmten Maschineneinheit oder die Frage nach der Gesamtzahl der freien Maschinenstunden, die Frage nach dem Materialeinsatz oder nach Auslastung der Arbeitskräfte. In der folgenden Tabelle sind die optimalen Produktionsprogramme dargestellt:

Produktionsprogramm			
	A	B	C
Anzahl der Erzeugnisse E_1 (x)	4	6	5
Anzahl der Erzeugnisse E_2 (y)	6	4	5
Maximaler Erlös in GE ($z_{\max}$)	50	50	50
Freie Maschinenstunden: M_1	—	—	—
M_2	—	2	1
M_3	6	—	3
insgesamt	6	2	4

Für das Beispiel 4b wurde das Zahlenmaterial derart gewählt, daß die Eckpunkte des Lösungsbereiches ganzzahlige Koordinaten haben. In den meisten Fällen praktischer Anwendungen erhält man nach der Parallelverschiebung der Spur der Zielfunktion einen Eckpunkt des Lösungsbereiches als Optimum, dessen Koordinaten nicht ganzzahlig sind. Fordert die Aufgabenstellung ganzzahlige Werte, so stellt ein Nachbarpunkt des Optimums mit ganzzahligen Koordinaten in der Regel einen brauchbaren Näherungswert dar. Dieser Nachbarpunkt muß ein innerer Punkt des Lösungsbereiches sein. Es ist vorteilhaft, die Gitterpunkte – Punkte mit ganzzahligen Koordinaten – im Lösungsbereich besonders zu kennzeichnen, dann vom Optimum aus eine Parallelverschiebung der Zielgeraden – das ist die Parallele zur Spur der Zielfunktion durch das Optimum – in den Lösungsbereich soweit vorzunehmen, bis die Gerade durch einen der Gitterpunkte geht. Dieser Gitterpunkt nähert das Optimum am besten an. Es gibt Methoden zur Berechnung eines Optimums mit ganzzahligen Koordinaten, die unter dem Begriff „ganzzahlige Optimierung“ zusammengefaßt sind. Darauf wird hier nicht eingegangen.

Zur Festigung der grafischen Lösungsmethode für eine Aufgabe der linearen Optimierung mit zwei Variablen sei ein einfaches Beispiel angeschlossen, das sogleich als mathematisches Modell gegeben ist. Der Leser möge sich jedoch vorstellen, daß es sich wie-

der um die Herstellung zweier Erzeugnisse handelt, daß die Ungleichungen (I) bis (III) gewisse Kapazitätsbeschränkungen widerspiegeln und daß die Zielfunktion den Erlös für die Erzeugnisse angibt, wie etwa im Eingangsbeispiel des Solidaritätsbasars.

B5 Für welche nichtnegativen Werte der Variablen x und y nimmt die Zielfunktion $z = 2x + 3y$ unter den Nebenbedingungen

(I) $3x + 2y \leq 28$

(II) $5x + y \leq 35$

(III) $x + 2y \leq 20$ ihr Maximum an?

Die Forderung nach Nichtnegativität der Variablen x und y läßt sich durch zwei zusätzliche Nebenbedingungen darstellen:

(IV) $x \geq 0$

(V) $y \geq 0$

(1) Den Ungleichungen werden die Geraden g_i ($i = 1, 2, \dots, 5$), der Zielfunktion wird ihre Spur g_5 zugeordnet:

$g_1: 3x + 2y = 28$ oder $g_1: y = -\frac{3}{2}x + 14$

$g_2: 5x + y = 35$ $g_2: y = -5x + 35$

$g_3: x + 2y = 20$ $g_3: y = -\frac{1}{2}x + 10$

$g_4: x = 0$ $g_4: x = 0$

$g_5: y = 0$ $g_5: y = 0$

$g_5: 2x + 3y = 0; z = 0$ $g_5: y = -\frac{2}{3}x$

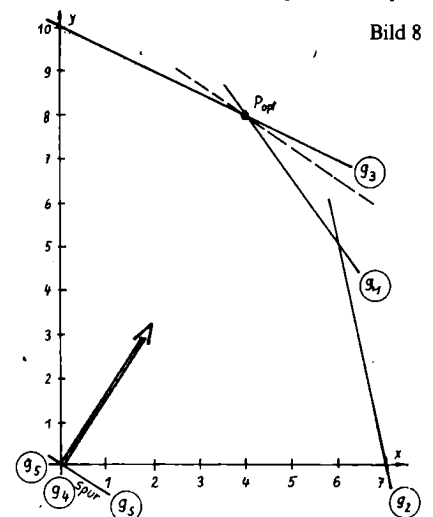
(2) Eintragen der Geraden g_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) und der Geraden g_5 in ein rechtwinkliges Koordinatensystem (Bild 8).

(3) Einzeichnen des Lösungsbereiches des gegebenen Systems linearer Ungleichungen.

(4) Maximale Parallelverschiebung der Geraden g_5 in den Lösungsbereich.

(5) Ablesen der Koordinaten des Optimums und Berechnung des maximalen Wertes der Zielfunktion: $P_{\text{opt}}(4; 8); z_{\max} = 32$.

Eine geometrische Lösung für ein Problem der linearen Optimierung mit mehr als zwei Variablen ist im allgemeinen nicht möglich. Unter gewissen Voraussetzungen läßt sich ein Problem mit drei Variablen jedoch auf eine Aufgabe mit nur zwei Veränderlichen transformieren, die dann geometrisch gelöst werden kann. Dies soll an dem folgenden Beispiel



gezeigt werden, das bei Gasmischungsproblemen eine Rolle spielt. Es sei sogleich das mathematische Modell der Aufgabe gegeben:

B6 Für welche nichtnegativen Werte der Variablen x_1 , x_2 und x_3 nimmt die Zielfunktion $z = 2x_1 + 5x_2 + x_3$ unter den Nebenbedingungen

- (0) $x_1 + x_2 + x_3 = 60$
- (I) $2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 210$
- (II) $2x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 120$
- (III) $4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 180$

ihr Minimum an?

Der Forderung nach Nichtnegativität der Variablen entsprechen die folgenden zusätzlichen Bedingungen

- (IV) $x_1 \geq 0$
- (V) $x_2 \geq 0$
- (VI) $x_3 \geq 0$

Unter den Nebenbedingungen tritt eine Gleichung auf. Dies macht die Transformation auf eine Aufgabe mit nur zwei Variablen $x_1 = x$ und $x_2 = y$ möglich. Nach Subtraktion der Summe $(x_1 + x_2)$ in der Gleichung (0) erhält man $x_3 = 60 - x - y$ und nach Einsetzen dieser Beziehung in die Zielfunktion und alle Ungleichungen (I) bis (VI):

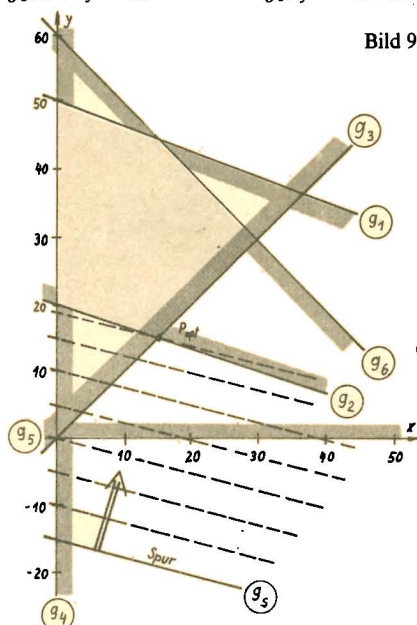
$z = 60 + x + 4y$ minimal

- (I') $x + 3y \leq 150$
- (II') $x + 3y \geq 60$
- (III') $x - y \leq 0$
- (IV') $x \geq 0$
- (V') $y \geq 0$
- (VI') $x + y \leq 60$

Den Ungleichungen werden die Geraden g_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) zugeordnet:

$$\begin{array}{ll} g_1: x + 3y = 150 & \text{oder} \quad g_1: y = -\frac{1}{3}x + 50 \\ g_2: x + 3y = 60 & g_2: y = -\frac{1}{3}x + 20 \\ g_3: x - y = 0 & g_3: y = x \\ g_4: x = 0 & g_4: x = 0 \\ g_5: y = 0 & g_5: y = 0 \\ g_6: x + y = 60 & g_6: y = -x + 60 \end{array}$$

Bild 9



Der Lösungsbereich des Systems der Ungleichungen (I') bis (VI') ist das konvexe Fünfeck mit den Eckpunkten (0; 20), (15; 15), (30; 30), (15; 45), (0; 50) (Bild 9).

Die Spur der Zielfunktion erhält man für $z = 0: 60 + x + 4y = 0$ oder $y = -\frac{1}{4}x - 15$. Setzt

man in der Zielfunktion für z der Reihe nach $z = 1, 2, 3, \dots$ ein, so erhält man Parallelen zur Spurgeraden in der in Bild 9 angegebenen Richtung. Für alle Punkte ein und derselben Parallelen sind alle z -Werte gleich. Da im vorliegenden Fall das Minimum der Zielfunktion unter den gegebenen Nebenbedingungen zu ermitteln ist, muß unter allen Parallelen zur Spur der Zielfunktion diejenige betrachtet werden, die den kleinsten Abstand von der Spur besitzt und mindestens einen Punkt mit dem Lösungsbereich gemeinsam hat. Die durch den Punkt $P(15; 15)$ gehende Parallele zur Spur erfüllt diese Bedingungen. Damit ist dieser Punkt das gesuchte Optimum: $P_{\text{opt}}(15; 15)$. Durch Einsetzen der Koordinaten $x = 15$, $y = 15$ in die Zielfunktion erhält man deren Minimum unter den angegebenen Nebenbedingungen: $z_{\text{min}} = 135$. Aus Gleichung (0) folgt: $x_3 = 30$. Damit ist die Lösung der Aufgabe

$(x_1, x_2, x_3)_{\text{opt}} = (15; 15; 30)$; $z_{\text{min}} = 135$.

Dem Leser wird empfohlen, die Lösungen der folgenden Aufgaben 8 und 9 grafisch zu ermitteln. Die Lösungen werden am Ende des Beitrages angegeben.

8. Man ermittle Maximum und Minimum der Zielfunktion $z = 2x + 4y$ für nichtnegative Variablen x und y unter den Nebenbedingungen

- (I) $-x + 2y \geq 4$
- (II) $3x + y \leq 44$
- (III) $-x + 2y \leq 32$
- (IV) $x + y \geq 8$

9. Für welche nichtnegativen Werte der Variablen x_1 , x_2 und x_3 nimmt die Zielfunktion $z = 2x_1 + 5x_2 + x_3$ unter den folgenden Nebenbedingungen a) ihr Maximum, b) ihr Minimum an?

- (0) $x_1 + 3x_2 + x_3 = 90$
- (I) $2x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 100$
- (II) $2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 130$
- (III) $2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 90$

E. Lehmann

Es sei darauf hingewiesen, daß auch analytische Verfahren entwickelt wurden für die Lösung von Aufgaben der linearen Optimierung. Diese Methoden sind auf Probleme mit beliebig vielen Veränderlichen anwendbar. Interessierte Leser seien auf das im Teubner-Verlag erschienene Büchlein „Lineare Optimierung für Junge Mathematiker“ hingewiesen.



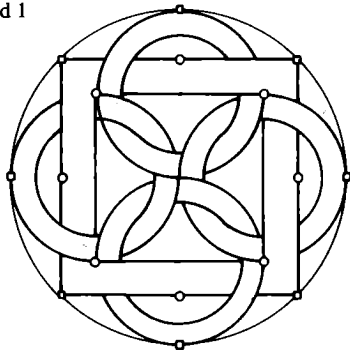
Drunter und drüber

Verzweifelt sucht Christoph in seiner Schultasche nach dem Zeichendreieck. Alle anderen in der Klasse 6b haben schon lange begonnen, die gestellte Aufgabe zu lösen. Dabei weiß er genau, daß er alles für den Geometrieunterricht eingepackt hat. Und jetzt kommt auch schon Frau Schulze, die Mathematiklehrerin, um ihm freundlich Hilfe anzubieten. Sie wirft einen Blick in seine Schultasche und sieht gar nicht mehr so freundlich aus. „In dieser Tasche kannst du nichts finden“, sagt sie, „so ein Durcheinander, alles liegt *drunter und drüber*.“ Nach der Schule eilt Christoph sofort nach Hause. Kaum nimmt er sich die Zeit, Mutti zu begrüßen, und verschwindet sofort in seinem Zimmer. Nach kurzem Klappern und Poltern ist es still hinter der Tür.

Am Nachmittag klingelt Anja, Christophs Freundin. Schon seit Tagen vermißt sie Christoph beim Fußballspielen auf dem Hof. Als sie in sein Zimmer tritt, bleibt sie erst einmal erschrocken an der Tür stehen. Das sieht ja aus bei Christoph! Mitten im Zimmer liegen viele Zeichnungen mit seltsamen, verworrenen und ineinander verschlungenen Figuren; manche schwarzweiß, andere farbig. Am Schreibtisch sitzt Christoph selbst, ganz vertieft in seine Arbeit, von Zeichenblättern, Zirkel, Lineal, Dreiecken und Farbstiften umgeben. Anja sagt zur Begrüßung nur: „Na, bei dir ist ja was los, da geht ja alles *drunter und drüber*. So eine Unordnung!“ Christoph scheint das nicht zu erschüttern. Ruhig und gelassen sitzt er an seinem Tisch, angelt nach einem Stuhl, den er an seine Seite rückt und bittet Anja Platz zu nehmen. Dann sagt er: „Du denkst wohl, wenn es *drunter und drüber* geht, ist das das gleiche wie Unordnung? Da irrst du dich aber. Sieh dir einmal diese Zeichnung an!“

„Auch hier geht alles *drunter und drüber*, und doch ist es wohlbedacht und nach einem bestimmten Schema gezeichnet.“ Anja betrachtet die Figur und überlegt. Dann sagt sie: „Wie hast du denn das so hinkommen?“ Christoph schlägt einfach vor: „Hier hast du ein Blatt Papier, wir wollen es zusammen versuchen. Ich werde dir helfen.“ Dann bückt er

Bild 1



sich, hebt ein Blatt vom Fußboden auf und meint: „Mit dieser einfachen Figur fangen wir an.“

„Der Grundgedanke ist bei allen Figuren gleich. Es handelt sich immer um einen Kreis mit vier Quadraten darin.¹⁾ Zeichne zuerst den Kreis, und teile ihn in acht gleichgroße Teile!“ Als Anja soweit ist, ruft sie: „Ich sehe schon, die acht Schnittpunkte mit dem Kreis sind die Eckpunkte für die zwei großen Quadrate.“ „Ja“, sagt Christoph, „jetzt fehlen aber noch die zwei kleinen Quadrate. Auch diese findest du leicht, wenn du alle Punkte suchst, in denen sich je eine Seite des einen großen Quadrats mit der Diagonalen des anderen schneidet. Verbindest du diese acht Punkte in der richtigen Art und Weise, erhältst du wieder zwei Quadrate. Jetzt mußt du mit dem Farbstift noch beide Figuren so nachzeichnen, daß die eine mal über und mal unter der anderen liegt.“ Anja findet, daß das Nachzeichnen gar nicht so einfach ist. Ein paarmal zeichnet sie verkehrt, aber dann hat sie es doch geschafft.

„Jetzt will ich auch noch versuchen, die andere Figur (Bild 1) zu zeichnen“, sagt Anja nun. „Dazu ist es notwendig, die Grundfigur noch einmal zu konstruieren, allerdings ohne sie am Ende mit dem Farbstift nachzuziehen“, schickt Christoph voraus. Als Anja so weit ist, erklärt er weiter: „Du mußt jetzt vier gleichgroße Kreisinge zeichnen. Der Radius jedes

Außenkreises beträgt die Hälfte vom Radius des großen Kreises. Der Radius der Innenkreise ist so groß wie der vierte Teil der Länge einer Diagonalen eines kleinen Quadrats.“ „Ja, das verstehe ich“, sagt Anja, „aber es fehlt noch der Mittelpunkt.“ „Den Mittelpunkt eines Kreisinges findest du als Schnittpunkt der Diagonalen eines großen mit der Seite eines kleinen Quadrats“, erwidert Christoph darauf. Anja überlegt eine Weile und sagt dann erstaunt: „Da finde ich ja zwei verschiedene Mittelpunkte, je nachdem, welche Diagonale ich betrachte.“

Das hat sich Christoph auch schon überlegt, und so kann er gleich darauf antworten: „Das macht nichts, Anja, deine Figur wird trotzdem richtig. Sie ist aber gegenüber meiner Figur um 45° gedreht. Du mußt dann nur darauf achten, daß du beim Nachzeichnen das richtige Quadrat²⁾ auswählst.“ Anja zeichnet die vier Kreise ein und stöhnt darüber, daß es ganz schön schwierig sei. „Jetzt wird es noch komplizierter“, sagt Christoph, „wenn du die Figuren so nachzeichnest, daß es richtig drunter und drüber geht. Am besten ist, du beginnst mit den Kreisingen und legst dann am Ende das Quadrat hinein.“

Anja müht sich sehr und wird bald ungeduldig, denn immer wieder muß sie zum Radiergummi greifen, weil sie falsch gezeichnet hat. Als Anja endlich fertig ist, schaut sie zu Christoph hinüber, der inzwischen merkwür-

Bild 2

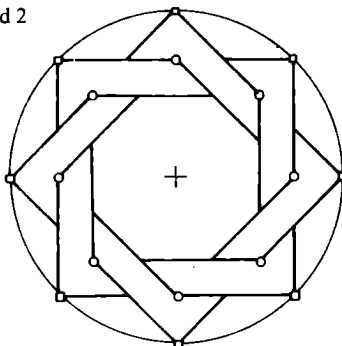
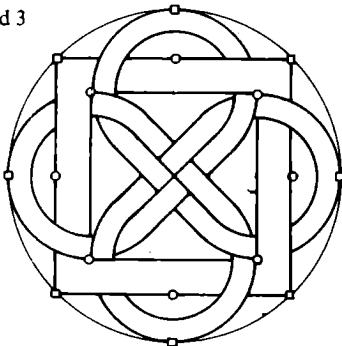


Bild 3



²⁾ Hier drückt sich Christoph unkorrekt aus, denn er spricht von einer Figur, die durch ein Innen- und ein Außenquadrat begrenzt wird; also von einem Quadrating. Diese Bezeichnung ist aber ebenfalls widersprüchlich. Der Einfachheit halber akzeptieren wir deshalb diese Ausdrucksweise.

dig still geworden ist, weil er angefangen hat, eine neue Figur zu zeichnen, die ihm gerade eingefallen ist. Ein paar Skizzen sind schon, wie die anderen Zeichnungen vorher, auf dem Fußboden gelandet, und jetzt ist er bereits dabei, die Figur sauber und ordentlich zu konstruieren.

Schnell hat Anja das Grundprinzip dieser Figur erkannt und beginnt selbst mit der Konstruktion. Wenige Minuten nach Christoph ist sie damit fertig. Nur am Ende beim Nachziehen muß sie mal schnell auf sein Blatt sehen, sonst hat sie es allein geschafft. Da es schon spät geworden ist, mahnt Christophs Mutter, die leise ins Zimmer gekommen ist, zum Ausbruch. Anja und Christoph verabreden sich für morgen, und Anja erinnert ihn daran, daß er seine Schultasche doch noch aufräumen muß, denn das Drunter-und-Drüber darin war sicher nicht so ordentlich wie die gezeichneten Drunter-und-drüber-Figuren. Am nächsten Tag überraschen sich Anja und Christoph gegenseitig damit, daß jeder für sich schon neue Figuren erfunden hat.

Bild 4

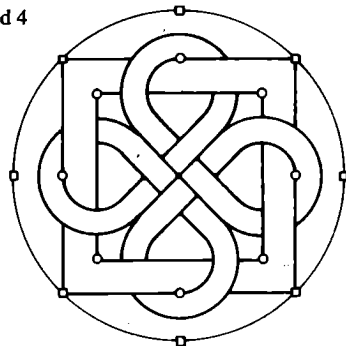


Bild 5

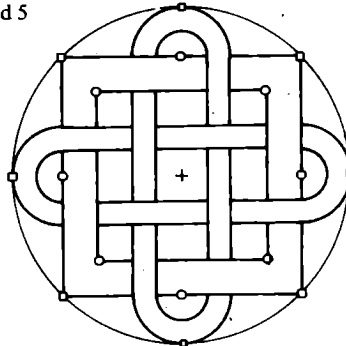
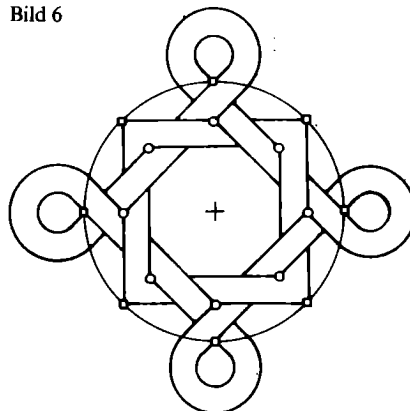
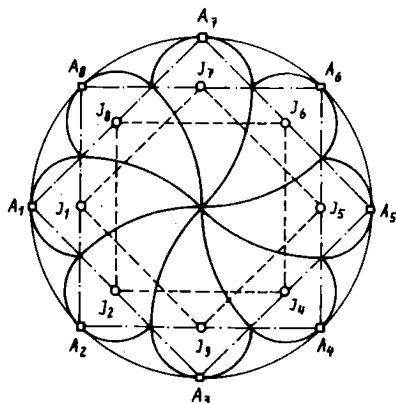


Bild 6



¹⁾ Der Grundaufbau ist unten erkennbar. Die vier Quadrate sind $A_1A_3A_5A_7$, $A_2A_4A_6A_8$, $I_1I_3I_5I_7$ und $I_2I_4I_6I_8$. Der Kreis hat den Durchmesser $d = \overline{A_1A_5} = \dots = \overline{A_4A_8}$.

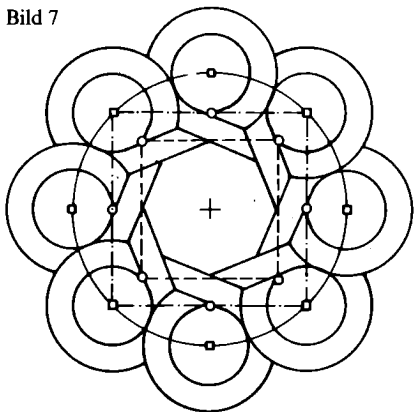


Anja hat eine Figur konstruiert (Bild 5) und Christoph sogar zwei (Bild 4 und 6). Aufmerksam betrachten beide ihre Entwürfe. Schließlich sagt Christoph: „Dein Einfall ist prima, denn die Figur ist etwas Neues; meine erste Konstruktion dagegen ist beinahe so wie die andere gestern. Ich habe nur den Radius so gewählt, daß sich die Kreisschleife gerade um das Quadrat herumlegt.“ Anja meint dagegen, daß ihr seine zweite Figur (Bild 6) sehr gefällt, da sich die Kreise ganz außerhalb vom Quadrat befinden. Den restlichen Nachmittag verbringen sie damit herauszufinden, wie der andere das wohl konstruiert habe und es dann selbst zu probieren. Anja hat auch schon einen Vorschlag für das nächste Mal. „Wir machen es folgendermaßen“, sagt sie: „Wir überlegen uns jeder eine neue Figur und fertigen dazu eine Konstruktionsbeschreibung an. Diese tauschen wir dann aus.“ Christoph unterbricht sie aufgeregt: „Ich weiß schon, wie es gemeint ist. Wir zeichnen die Figur nach der Konstruktionsbeschreibung, ohne sie vorher gesehen zu haben. Dabei können wir sehr gut überprüfen, wie exakt wir uns in der Beschreibung ausgedrückt haben.“

„Nun habe ich doch noch eine Frage“, bemerkt Anja: „Bist du ganz allein auf die Idee gekommen, solche Figuren zu konstruieren?“

„Nein, Anja, das natürlich nicht. Ich habe neulich auf dem Dachboden gekramt und ein ganz altes Geometriebuch gefunden. Darin sah ich diese Figur.“

Bild 7

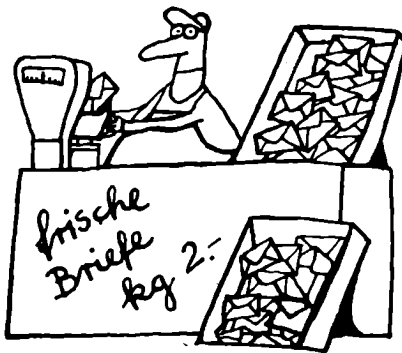


„Ich versuchte, sie zu konstruieren, aber es gelang mir nicht sofort. Zur Vorübung habe ich mir dann die anderen Figuren ausgedacht.“ „Aber inzwischen hast du diese schwierige Figur schon konstruiert?“ will Anja jetzt wissen. „Ja“, sagt er stolz, „hier ist sie!“

Und nun versucht es einmal selbst mit folgenden Aufgaben!

▲ 1 ▲ Es sei P der Schnittpunkt der Strecken $\overline{A_6A_8}$ und $\overline{A_5A_7}$. Zeige, daß $\overline{A_8P} = \frac{d}{2}$!

▲ 2 ▲ Konstruiere eine Grundfigur, die aus einem Kreis und vier darin liegenden gleichseitigen Dreiecken besteht (analog Bild 2)!



...Nun ist das letzte Schuljahr für mich vorbei. Ich möchte mich nochmals für die Hilfe durch *alpha* bedanken. In allen Abiturfächern habe ich je die 1 geschafft, Abi mit Auszeichnung, Herdermedaille in Silber.

Guido Blossfeld, Halle
Teilnehmer am *alpha*-Wettbewerb
seit 10 Jahren

...Nun nehme ich schon drei Jahre am *alpha*-Wettbewerb teil. Dies verbesserte meine Leistungen in Mathematik und das Denkvermögen.

Viola Petermann, Leipzig (Kl. 8)

...Ich glaube, ohne die Hilfe der Fülle der in *alpha* abgedruckten Olympiade-, Wettbewerbs- und sonstigen Aufgaben hätte ich meine bisherigen Erfolge (Preise bei OJM der Stufen III und IV) nicht erreichen können, dafür herzlichen Dank.

Frank Erdmann, Zeitz

...Wir möchten Ihnen weiterhin soviel Geschick und Einfühlungsvermögen für die *alpha*-Leser wünschen und auch neue Erfolge.

Familie Baitalow, Kasan (UdSSR)

...Wir werten stets in unserer nächsten Zusammenkunft – nach Erscheinen der Lösungen zum *alpha*-Wettbewerb – alles Material gründlich aus, um eine noch höhere Qualität zu erreichen.

AG Mathe, OS Schmölln

...Im Mathe-Club der Stadt Wismar, dem ich angehöre, freuen wir uns über jede neue Aufgabenstellung in der *alpha*.

Silke Gabriel, Wismar

...Die *alpha* lese ich sehr gern. Ich bemerkte, daß ich mich gegenüber dem Wettbewerb 1976/77 stark verbesserte.

Volker Winkler, Görlitz

▲ 3 ▲ Zeichne in die Grundfigur von Aufgabe 2 drei ineinander verschlungene Kreise (analog Bild 3)!

▲ 4 ▲ Konstruiere die in Bild 7 gezeigte Figur!

▲ 5 ▲ Zeichne die Konstruktion von Bild 7 (Aufgabe 4) so nach, daß eine andere Drunter-und-drüber-Figur entsteht!

Cordula Röhr

...Als Schülerin der 8. Klasse stöbere ich schon in den Beiträgen der 9. und 10. Klasse, schon weil es mir hilft, Wettbewerbsaufgaben höherer Klassenstufen zu lösen, auch in denen der Klasse 5 bis 7, weil auch das immer interessant ist. ... Anbei ein Aufgabenvorschlag.

Iren Böhme, Dresden (Kl. 8)

...Ich begann im Oktober 1978 an der Technischen Universität in Wien mit dem Studium der Technischen Mathematik und werde gern weiterhin am *alpha*-Wettbewerb teilnehmen.

Hannes Kubr, Klosterneuburg (Österreich),
alpha-Teilnehmer seit 8 Jahren

...Ich gehe seit September 1978 auf die EOS und bin sicher, daß mich auch dort die regelmäßige Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb im Fach Mathematik in meinen Leistungen voranbringen wird.

Kristine Lessig, Leipzig

...Ich habe mich sehr gefreut, daß meine eingesandte Aufgabe veröffentlicht wurde (Ma 6/1714). Das ist ein Ansporn für die weitere gewissenhafte Teilnahme am Wettbewerb; anbei weitere Aufgabenvorschläge.

Kerstin Müller, Wernshausen (Kl. 8)

...Hiermit sende ich meine im Schuljahr 1977/78 erworbenen 50 Antwortkarten und 2 Urkunden dazu. ... Die Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb hat meine mathematische Entwicklung wesentlich vorangetragen...

Auf weiterhin gute Zusammenarbeit!

Gabriele Sprotte, Döbeln (Kl. 9)

...Ein großes Kompliment und Dankeschön an *alpha* für die interessanten Stunden bei der Lösung kniffliger Aufgaben. Damit kann man sein Wissen überprüfen.

Petra Korn, Aschersleben (Kl. 8)

...Ich habe eine Vertretung in der Lenin-OS in Greifswald in der Klasse 6R übernommen (außerhalb meiner Tätigkeit an der Universität). Vom ersten Tage an gehörten die *alpha*-Aufgaben fest zum Unterricht, der dadurch bereichert wurde...

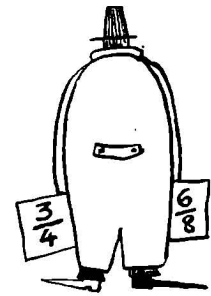
Dozent Dr. sc. J. Buhrow, Greifswald

Ich bin Schüler einer 6. Klasse und beschäftige mich oft in meiner Freizeit mit Mathematik. Als ich zur Übung Terme umformte, bekam ich zufällig $a^2 + 2a + 1$ heraus. Ich setzte in diesen Term für a natürliche Zahlen ein und erhielt dabei dieselben Werte wie für den Term $(a + 1)^2$. Ich vermutete, daß für alle natürlichen Zahlen a die Gleichung $a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$ eine wahre Aussage sei.

Ich suchte den Beweis dafür, fand ihn aber nicht. Als ich dann im *Kompendium der Mathematik* blätterte, entdeckte ich die binomische Formel $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$. Sehr schnell hatte ich heraus, daß die Gleichung $a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$ die binomische Formel mit $b = 1$ ist. So war mein Problem gelöst.

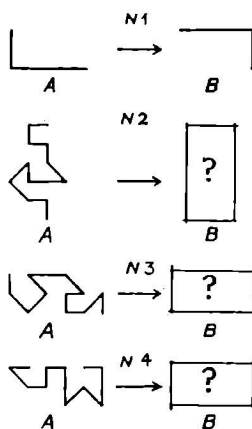
Thomas Strobel, Berlin-Lichtenberg

In freien Stunden **alpha** heiter



Psychologischer Test

Wie sehen die Figuren 2, 3 und 4 aus, wenn man sie aus der Lage A in die Lage B in Gedanken umdreht, entsprechend der Figur 1?



Wer in einer Minute mit dem „Umzeichnen“ fertig wird, besitzt eine ausgezeichnete Fähigkeit, mit Vorstellungen zu operieren; wer anderthalb Minuten dafür braucht, ist gut; wer mehr Zeit benötigt, muß noch tüchtig üben!

aus: Sputnik 7/78, Moskau

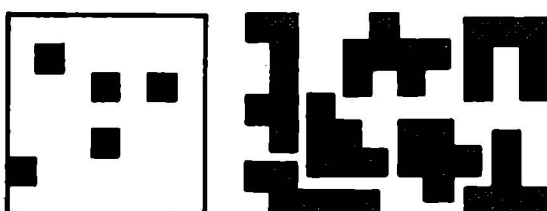
Muß Strafe sein?

„Kann man denn für etwas bestraft werden, was man nicht getan hat?“ fragt der kleine Leo Lüdermann seinen Mathematiklehrer. „Nein, das wäre ungerecht“, erklärt der Pädagoge. „Da habe ich aber nochmal Glück gehabt. Ich habe heute nämlich meine Mathe-Aufgaben nicht gemacht!“

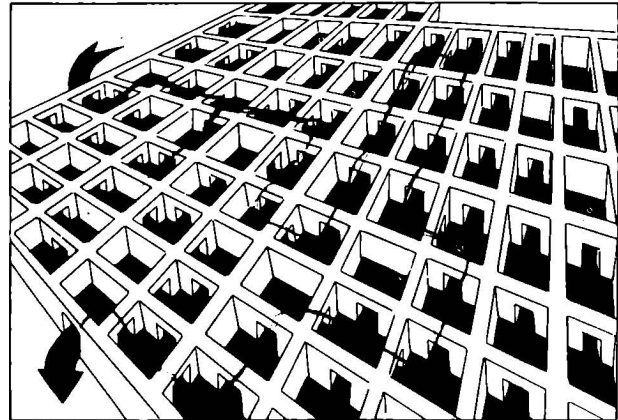
Unterhaltsames Legespiel

Pause die sieben schraffierten Teile ab, schneide sie aus, und lese sie so, daß sie die weiße Fläche des Quadrats voll bedecken!

aus: Füles, Budapest



Wer findet den Weg?



aus: Füles, Budapest

Kleinschachbrett: 5 × 5

a) Ein Springer ist am Mittelfeld eines 5 × 5-Kleinschachbretts platziert, von wo er acht Felder erreichen kann (die in dem Bild a) einen Punkt haben). Trage die Zahlen in die restlichen Felder ein, die angeben, wieviel Felder der Springer von diesem Feld aus in einem Zug erreichen kann!

	•		•		0		2		2
•				•			1	2	
		8			2	1			2
•				•		2		2	
	•		•		2		2		

b) Der Springer ist jetzt in einer Ecke (Feld 0) platziert. Die Felder, die er mit einem Zug erreichen kann, sind mit 1, die er mit zwei Zügen erreichen kann, mit 2 gekennzeichnet. Gib für jedes Feld des Bretts die Zahl der Züge an, die der Springer mindestens braucht!

aus: Math. Pie, London

Studentenhobbys

Vier Studenten treiben Sport und betätigen sich in der Laienkunst. Rate, welcher was macht, wenn dir folgendes bekannt ist:

1. Der Boxer ißt gern Kaviar, Mischa dagegen Torte.
2. Der Tänzer ist mit dem Schwerathleten befreundet.

3. Grisha ist ein Original.
4. Der Kunstpfeifer meint, wenn der Schachspieler so stark wie Tischa und so gewandt wie Mischa wäre, dann wäre er der Schwarm aller Mädels.
5. Eduard putzt sich jeden Morgen die Schuhe, was man vom Schwerathleten leider nicht sagen kann.
6. Der Student, dessen Hobby Sticken ist, hat blaue Augen.
7. Der Boxer hält es für unter seiner Würde, Tanzen zu lernen. Tischa ist anderer Meinung, lernt aber auch nicht tanzen.
8. Der Schwerathlet kennt Tischa nicht und will ihn auch nicht kennen.
9. Der Boxer liebt Mascha, Mascha liebt Eduard, und der singt im Chor.
10. Der vierte Student spielt Fußball.

aus: Nauka i Shisn, Moskau

Ohne Worte



H. Jankowski,
aus: Eulenspiegel, 33/78

Silbenrätsel

Aus den Silben

ar – bei – car – da – de – de – des – fi – ge – mo – mo –
nat – ni – nie – no – on – on – ra – ro – ta – ten – tes –
ti – ti – to – tung – ver

sind Wörter folgender Bedeutung zu bilden:

1. unbegrenzte gerade Linie
2. Drehung um eine Achse
3. Festlegung eines Begriffs
4. Einheit der Zeit
5. französischer Mathematiker (1596 bis 1650)
6. Anwendungsbereich der Mathematik in der Wirtschaft
7. spezieller Untersuchungsgegenstand bei Kurvendiskussionen.

Sodann entnimmt man jedem dieser Wörter eine Silbe. Aneinandergereiht ergeben sie den Namen eines italienischen Mathematikers, der sich um die Lösung kubischer Gleichungen verdient gemacht hat. Zur Erleichterung kann die nachstehende Zahlenfolge benutzt werden, aus der ersichtlich ist, welche der Silben zu benutzen ist: 1; 1; 3; 1; 2; 1; 2

K.-H. Lehmann, Berlin

Ein Rechentrick

Mit dem folgenden Trick kannst du deine Freunde verblüffen. Laß sie drei Zahlen untereinander schreiben, dann darunter die Summe dieser 3 Zahlen, weiter die Summe der letzten 3 Zahlen und so fort, bis 8 Zahlen untereinander stehen.

Nun kannst du ihnen erklären, du könntest in kürzester Zeit die Summe dieser 8 Zahlen berechnen.

Dazu mußt du nur die zweitletzte Zahl mit 4 multiplizieren ($11221 \cdot 4 = 44884$).

Ingo Rath, Wien

```

  638
  487
  821
 1946
 3254 usw.
 6021
 11221
 20496
 44884

```

Wie fängt ein Mathematiker einen Löwen in der Wüste?

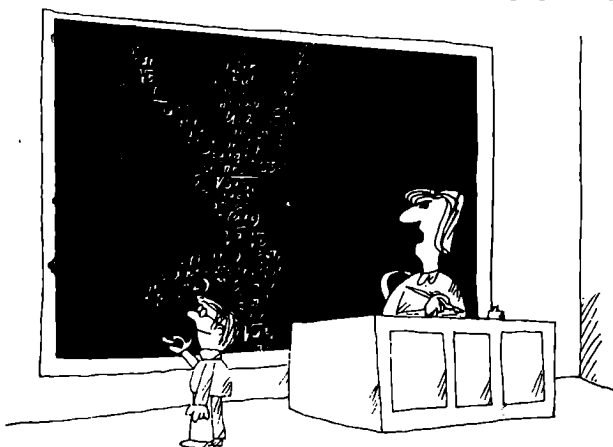
Der Mathematiker muß zuerst definieren, was es heißt, einen Löwen gefangen zu haben.

Definition: Ich habe einen Löwen gefangen, wenn zwischen mir und dem Löwen überall Gitter ist.

Der Mathematiker setzt sich selbst in einen Käfig und hat somit entsprechend seiner Definition den Löwen gefangen. Wenn der Mathematiker jedoch ein Spezialist in Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischer Statistik ist, wird er wahrscheinlich eine noch elegantere Lösung finden. Er stellt einen Käfig mit geöffneter Tür in die Wüste. Dann hat das Ereignis „Im Käfig befindet sich ein Löwe“ eine von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit. Er braucht also nur zu warten, bis dieses Ereignis eintritt, und dann die Tür zu schließen. Der Löwe ist gefangen.

aus: Wurzel 4/78, Jena

L. Otto, aus „Kindereien“, Eulenspiegelverlag



Berufsbild:

Ingenieurschule für Gießereitechnik

„Georg Schwarz“
Leipzig

Wo Maschinen laufen, ob in einer Werkhalle oder im Haushalt, wo Autos fahren oder Züge der Reichsbahn, der aufmerksame Beobachter wird feststellen, die genannten Einrichtungen enthalten Teile aus gegossenen Werkstoffen – Gußteile. Es wird deutlich, die Produktion von Gußzeugnissen ist volkswirtschaftlicher Schwerpunkt und gewinnt in zunehmendem Maße an Bedeutung.

Für die Erfüllung der dabei zu lösenden Aufgaben werden Ingenieure benötigt, die u. a. auch ein anwendungsbereites Wissen und Können auf mathematisch-naturwissenschaftlichem Gebiet besitzen müssen.

Aufbauend auf dem in der 10klassigen polytechnischen Oberschule und in der Berufsausbildung erworbenen Wissen ist die Vermittlung eines soliden, anwendungsbereiten gesellschaftswissenschaftlichen, mathematisch-naturwissenschaftlichen und technischen Grundlagenwissens Voraussetzung für eine praxisverbundene Fachausbildung und für einen vielseitig einsetzbaren Gießereingenieur. Diese Ingenieure werden in der Ingenieurschule für Gießereitechnik „Georg Schwarz“ in der Fachrichtung „Technologie des Gießereiwesens“ ausgebildet. Sie ist die einzige Ingenieurschule mit diesem Ausbildungsprofil in der DDR und hat den gesamten Bedarf an mittleren Kadern für die Gießereiindustrie als einem der wichtigsten Zulieferzweige zu decken.

Die Vielseitigkeit der fachwissenschaftlichen Ausbildung bedingt ein sehr praxisorientiertes Studium. Aus diesem Grunde arbeitet die Ingenieurschule eng mit der sozialistischen Praxis zusammen. Auf der Basis von Partnerschaftsverträgen halten viele erfahrene Fachleute der Industrie, insbesondere aus dem VEB Kombinat GISAG, Vorlesungen an unserer Schule. Während des Studiums erfolgt ein umfangreiches Exkursionsprogramm in führende Gießereibetriebe der DDR.

Zum Studium aufgenommen werden 10-Klassen-Abgänger mit Gießereiberufen wie Gießereifacharbeiter und Modellbauer. Wegen der bereits dargelegten volkswirtschaftlichen Notwendigkeit der Entwicklung der Gießereiindustrie besteht ein großer Bedarf an Gießereingenieuren. Aus diesem Grunde können sich auch 10-Klassen-Abgänger bewer-

ben, wenn sie einen Beruf der metallverarbeitenden Industrie wie Schlosser, Maschinenbauer und dergleichen erlernt haben. Die Ingenieurschule organisiert für diese Bewerber ein 12wöchiges Praktikum und sichert den dem Studienplan entsprechenden Ablauf des Studiums ohne Zeitverlust.

Die Gesamtdauer der Ausbildung im Direktstudium beträgt drei Jahre. Die Mathematikausbildung innerhalb des Studiums soll den Studenten befähigen, technische Probleme durchdenken und lösen zu können. Neben dem eigenen Bildungsziel der Mathematik hat die Ausbildung an der Ingenieurschule die Aufgabe, Fähigkeiten und Fertigkeiten zu entwickeln, die in den technischen Lehrgebieten angewendet werden. Es versteht sich von selbst, daß die technisch orientierte Mathematik neben einer soliden Theorie vor allem viele Übungen und Aufgaben mit großem Rechenaufwand aus der Praxis beinhalten muß.

Damit der Student diesen Anforderungen gerecht wird, muß er gefestigte Kenntnisse aus der POS (einschließlich des Umgangs mit dem Rechenstab) mitbringen. Dann ist er in der Lage, folgende Teilgebiete der Mathematik in drei Semestern mit insgesamt 324 Stunden (1. Semester 144 Stunden, 2. Semester 108 Stunden, 3. Semester 72 Stunden) zu studieren:

Zahlenbereich und Rechenoperationen –
Funktionen – Kegelschnitte –
Folgen, Reihen, Grenzwerte –
Differential- und Integralrechnung –
Gewöhnliche Differentialgleichungen –
Gleichungen und Ungleichungen –
Lineare Systeme (Determinanten und Matrizen) – Lineare Optimierung –
Wahrscheinlichkeitsrechnung –
Mathematische Statistik – Nomografie.

Im 6. Semester führen die Studenten ein halbjähriges Ingenieurpraktikum in einem sozialistischen Betrieb durch, der in der Regel der spätere Einsatzbetrieb des Absolventen ist. Das Studium wird mit dem Ablegen von Prüfungen sowie der Anfertigung und der erfolgreichen Verteidigung der Ingenieurabschlußarbeit beendet. Der Absolvent erhält die Berufsbezeichnung „Ingenieur“. Der Einsatz der Absolventen erfolgt in den Gießereien zur Vorbereitung, Durchführung, Überwachung und Analyse der Produktion. Die Absolventen sind in der Lage, Produktionsanlagen in der Gießerei zu leiten, hochproduktive Gieß-, Form- und Kernherstellungsverfahren zu beherrschen und an der Rationalisierung der Anlagen und Prozesse mitzuwirken. In der Ingenieurschule für Gießereitechnik hat sich unter Leitung der FDJ ein vielseitiges geistig-kulturelles und sportliches Leben entwickelt. Diese Entwicklung wird begünstigt durch die Stadt Leipzig selbst, die als Groß- und Messestadt eine Fülle von kulturellen und sportlichen Veranstaltungen bietet.

Weitere Angaben über die Ausbildung können dem vom Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen der DDR veröffentlichten Studienplan für die Grundstudienrichtung Werkstoffwesen entnommen werden.

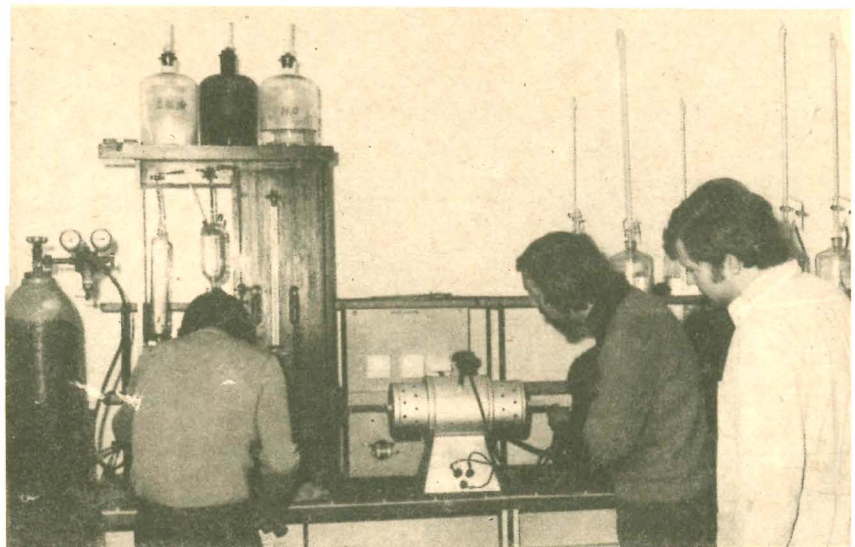
Aufgabe

Ein gußeiserner Würfel mit der Kantenlänge a wird rechtwinklig zu zwei Seitenflächen derart durchbohrt, daß der so entstehende Restkörper eine Oberfläche erhält, die um 25% größer als die Würfeloberfläche ist.

Wie groß ist der Radius der Bohrung?

(Bemerkung: Für 10. Klasse, keine Eigenentwicklung, Quelle der Aufgabe unbekannt)

Studenten bei der Bestimmung der chemischen Zusammensetzung von Legierungen



Abzeichen in Gold

Für elfjährige Teilnahme

Christoph Scheurer, Glauchau-Gesau; Henrik Frank, Greifswald; Lutz Püffeld, Hennigsdorf; Eckhard Schadow, Oranienburg

Für zehnjährige Teilnahme

Martin Ermrich, Elbingerode; Bernd Hanke, Großschweidnitz; Guido Blossfeld, Halle; Astrid Rösel, Rostock

Für neunjährige Teilnahme

Holger Jurack, Burkau; Ullrich Riedel, Flöha; Angelika Müller, Greifswald; Falk Bachmann, Halle; Rainer Gutsche, Herzberg

Für achtjährige Teilnahme

Borwin Wegener, Berlin; Arno Feuerherdt, Brandenburg; Marid Helbig, Frankfurt; Thomas Jakob, Gera; Ursula Märker, Greifswald; Thies Luther, Güstrow; Ulv Krabisch, Leipzig; Lew Dimenstein, Leningrad (UdSSR); Norbert Littig, Lichtenberg; Sybille Baumgart, Löderburg; Uwe Bormann, Magdeburg; Regina Kupfer, Miltitz; Berthold Wettengel, Oelsnitz; Frank Aßmus, Oranienburg; Rainer Seifert, Pinnau; Volker Lerche, Schmalkalden; Bernhard Zschada, Sondershausen; Gudrun Drews, Wöbbelin

Für siebenjährige Teilnahme

Ralf Henze, Arnstadt; Andreas Fittke, Berlin; Ulf Ritschel, Booßen; Uwe Lumm, Clingen; Clemens Jaunich, Cottbus; Wolfgang Seeber, Gehren; Karin Kramer, Görlitz; Sylke und Bengt Nölting, Irmhild Bittner, alle Greifswald; Ingo Lenz, Hagenow; Claudia Kummer, Stefan Kasper, beide Leipzig; Lothar Gruber, Linz (Österreich); Gerald Werner, Meiningen; Volker Schulz, Nauen; Axel Müller, Oberlungwitz; Barbara Gehb, Henri Hofmann, Reinhold Beckmann, alle Schmalkalden; Birgit Rosenberger, Suhl; Manfred Häußler, Westgreußen; Rolf Kuhn, Wintzingerode; Katrin Richter, Wittenberg; Karsten König, Zeuthen; Jörg Brüstel, Ziegelheim; Kurt Oertel, Zschornowitz

Für sechsjährige Teilnahme

Volkmär Türke, Auerbach; Torsten Flade, Beierfeld; Cordula Becher, Andreas Gude, Andrea Nießen, alle Berlin; Michael Feudel, Bischofferode; Peter Röhl, Cottbus; Ralf Ott, Demmin; Frank Regensburger, Michael Apitz, Werner Jeroch, Uwe Hanisch, Reinhard Pohl, alle Dresden; Andrea Puchert, Eichicht; Heide Lore Stallbohm, Eldena; Eberhard Georgy, Erfurt; Wolhart Umlauf, Freital; Dietmar Richter, Garitz; Michael Schott, Gräfenenthal; Christian Wolf, Greifswald; Jens Negwer, Grimma; Burkhard Rahr, Gr. Naundorf; Günter Mosel, Gülze; Andrea Herrmann, Hammerunterwiesenthal; Jürgen Hüttner, Kottengrün; Armin Körner, Leipzig; Ralf Kretschmer, Dresden; Peter Wiehe, Leinefelde; Steffen Langbein, Lichte; Gabriele Otto, Meißen; Rainer Bauer, Mittweida; Thomas Richter, Neuhausen; Andreas Massanek, Neusornzig; Michael Thränhardt, Oranienbaum; Jörg Schubert, Pfaffroda; Wilfried Röhnert, Radebeul; Thomas Apel, Reichenbach; Christiane Jordan, Reitwein; Armin Hoell, Ribnitz; Michael

Zwicke, Riesa; Ralf Briesemeister, Siegfried Müller, beide Sachsendorf; Haiko Müller, Thomas Wingeß, beide Schmalkalden; Torsten Löwe, Schleiz; Bernadette Domaschke, Seiffenrödersdorf; Hans-Dietrich Schwabe, Sondershausen; Holger Hoppe, Stendal; Günter Carlsen, Titschendorf; Dirk Herrmann, Töplitz; Katrin Wahn, Uebigau; Sylvia Zipf, Waldheim; Thomas Weiß, Weimar; Sylvia Kunze, Weißenfels; Carola Senft, Wingerode; Ralf Becker, Wolmirstedt; Ute Scharkowski, Zepernick; Jürgen Rolle, Zittau

Für fünfjährige Teilnahme

Udo Clemens, Altenburg; Dieter und Henri Koch, Arnstadt; Olaf Rausch, Aue; Burkhard Maeß, Bad Doberan; Lutz Heinrich, Bad Langensalza; Dagmar Fischer, Birgit Ewald, Marion Breitschuh, Michael Prescher, Katrin Kollmer, alle Berlin; Werner König, Berlingerode; Thomas Ditttrich, Brand-Erbisdorf; Vera Schulze, Brandis; Adelbert Heddergott, Büttstedt; Iris Grinda, Calbe; Jens Schumann, Coswig; Ilka Kohlstock, Andrea Dreyer, Ellen Harnath, Jens Purand, Grit Schulze, Iris Grundke, alle Cottbus; Jürgen Anders, Dahlewitz; Mario Binkowski, Demmin; Annett Körner, Uta Oelschlägel, Angela Jirick, Klaus-Dieter Gloe, Norbert Katsch, Lutz Friedemann, Matthias Apitz, Peter Alexander Pöhler, Frank Wittwer, Andreas Schimmang, alle Dresden; Jörg Bruchertseifer, Dubna (UdSSR); Daina Semper, Thomas Böhme, beide Eisleben; Uwe Kintzel, Erfurt; Maritta Heß, Lutz Mittelsdorf, beide Fambach; Kathrin Meißner, Forst; Beret Brabec, Frankfurt; Heike Brüggemann, Thomas Gerlach, Ute Ribbe, Bernd Hartwig, Steffen Toepfer, Mike Liebegott, Dirk Kramer, alle Friedeburg; Sylvio Klose, Gera; Kerstin Müller, Pedro Tiesler, Christof Herrmann, alle Greifswald; Viola Richter, Garnitz; Bernd Dübe, Gr.-Bade-meusel; Matthias Weser, Großenhain; Andrea Potthoff, Groß Wüstenfelde; André Motz, Grünhain; Hubert Steinmetz, Grünigen; Gudrun Tappert, Guben; Jens Folgmann, Ruth Jacobs, beide Halle; Doris Planer, Hohendorf; Knut Bauer, Hohenstein-Ernstthal; Undine Nathan, Michael Dietrich, beide Hoyerswerda; Rolf Kamieth, Kakkerbeck; Marko Hanke, Ronald und Arnd Rösch, alle Karl-Marx-Stadt; Jörg Pöhland, Klingenthal; Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich); Heimo Woitek, Leinefelde; Uwe Haberlandt, Karola Näther, Jens Rudolf, Thomas Richter, alle Leipzig; Ute-Barbara Heuer, Leisnig; Jörg Steinbach, Limbach-Oberfrohna; Bärbel Wintzler, Lobenstein; Annett Weise, Löderburg; Martina Wolf, Magdeburg; Udo Kretschmann, Markneukirchen; Peter Stolz, Möhlau; Volkmar Riemer, Neubrandenburg; Liane Krümming, Neuenhofe; Matthias Theurich, Olbersdorf; Rüdiger Düsing, Osterburg; Antje Langer, Oybin; Ute Möllhoff, Piesau; Sabine Einert, Pockau; Jens Jacobi, Jens-Uwe Sprengel, beide Potsdam; Jens-Peter Planke, Premnitz; Uwe Hadamik, Dagmar Herrlich, Karsten und Falk Breuer, alle Radebeul; Ronald Bracholdt, Riesa; Jana Walter, Röbel; Birgit und Heiko Lehmann, Rostock; Ina und Uwe Ebert, Ruppendorf; Regina Bricks, Saalfeld; Helmut Engelmann, Sachsendorf; Siegrid Kretschmann, Schlagsdorf; Ina Spanaus, Schleusingen; Heinz-Olaf Müller, Sabine Ender, Frank Wurschi, Almut Beckmann, Martin Tengler, alle Schmalkalden; Lutz Möller, Schmiedeburg; Torsten Jeschke, Schwarzheide; Eckart Möbius, Roderich Winkler, beide Schwerin; Frank Maschke, Sebnitz; Annelie Meyer, Silberstraße; Simone Mahlow, Sondershausen; Volker Steuer, Spremberg; Gerd Birnbaum, Spitzkunnersdorf; Thomas Eichhorn, Steinach; Angela Bieber, Sabine Munk, beide Steinbach-Hallenberg; Simone Teichmüller, Stöckey; Heike Carlsen, Titschendorf; Jürgen Prestin, Waren; Beate Seiler, Ralf Kurch, Beate Nähler, alle Weimar; Uwe Felsberg, Worbis; Uwe Müller, Wroclaw (VR Polen); Christoph Chojetzki, Zeithain; Frank Erdmann, Zeitz; Birgit Thomas, Uwe Langer,

Regina Kreul, Uta Rößler, Matthias Theurich, Steffen Pankow, Gabriele Herzig, alle Zittau; Ute Baumann, Zschocken; Dietmar Ulbricht, Velten

Für vierjährige Teilnahme

Frank Kämpfer, Holger Herold, beide Altenburg; Hajo Herbst, Altenpleen; Uwe Maaz, Arnstadt; Henri Kriechling, Asbach; Guntram Türke, Auerbach; Ralph Müller, Bad Bibra; Frauke Maeß, Bad Doberan; Elke Herrlich, Bad Gottleuba; Kersten Pegesa, Bad Muskau; Thorsten Tonndorf, Bad Salzungen; Jens Spyryka, Bergen; Birgit Wollschläger, Bergwitz; Stefan Berg, Frank Bendin, Andreas Schaale, Ingrid Wolf, alle Berlin; Hagen Geppert, Bernburg; Gabriele Orgis, Bernsbach; Ulrich Kramer, Gundolf Schilling, beide Bernterode; Astrid Markgraf, Bischofferode; Carmen Schneider, Bischofswerda; Pia Zimmermann, Inge Beck, beide Bleicherode; Andreas Kraska, Breitenworbis; Birgit Weishaupt, Bülow; Hagen Hartleb, Büttstedt; Bärbel König, Annegret Schneider, Simone Kahl, alle Burkau; Guido Mehne, Ralph Voigtländer, beide Calbe; Maik Weide, Callenberg; Olaf Seifert, Camburg; Andreas Winkler, Cossabaude; Uwe Röhl, Ralf Hortig, Andreas Schlecht, Thomas Hoffmann, Susanne Liebelt, Kathrin Magister, Detlef Baur, Ralph Bernhardt, alle Cottbus; Karola Sarodnick, Dallgow; Carsten Lehmann, Damsdorf; Manfred Kutschank, Deutschenbora; Monika Nölte, Silke Zimpel, beide Dingelstädt; Michael Beetz, Dreetz; Michael Giesecke, Jörn Wittig, Thomas Süß, Jürgen Gräfenstein, Thomas Hartwig, Thomas Keßler, Lutz Jeroch, Jens Rotsch, Michael Pitschneider, Uwe Riedel, Michael Berton, Ralph Rönisch, Helmuth Goldberg, Karl Klotzsche, Carolin Engel, Susanne Müller, Thomas Schindhelm, Ingolf Körner, alle Dresden; Mandy Rinklin, Thomas Marek, Peter Weise, alle Eisenach; Volker Georgy, Henrik Seifert, Dirk-Thomas Orban, Renate Lützkendorf, Uwe Nagel, Uwe Strohmeyer, alle Erfurt; Math. Zirkel der Hugo-Joachim-OS Espenhain; Iris Abt, Elke Häfner, beide Fambach; Jörg Butter, Freiberg; Ralf Baumhinkel, Freital; Andreas Fintzel, Friedeburg; Gerd Hackbarth, Gallentin; Anne-Katrin Schmidt, Gelmeroda; Angela Illing, Gersdorf; Meike Pfützenreuter, Gerterode; Frank Scheffler, Gnoin; Rafael Stein, Gödern; Bodo Heise, Anne-Katrin Endtricht, beide Görlitz; Yvonne Pforr, Matthias Kasperek, beide Gräfenhainichen; Andreas Wolf, Stefan Gökertitz, Gunnar Müller, Katharina Herrmann, Ines Kath, Manuela Heims, Astrid Renz, Silvia Falk, alle Greifswald; Michael Katzer, Greußen; Heike Klitz, Grimmen; Cornelia Wewes, Marian Wiepke, beide Guben; Susanne Zöllner, Halle; Regine Binder, Halle-Neustadt; Volker Reck, Heiligenstadt; Enka Stelzer, Heringsdorf; Eike Harmel, Hohenferchesar; Kerstin Hirsch, Holzdorf; Mathias Grundmann, Roland Dietrich, Rene und Conchita Schüppel, alle Hoyerswerda; Volkmar Liebscher, Ilmenau; Horst Fliegner, Jarmen; Torsten Zahn, Kandelin; Thomas Mader, Jens Pönisch, Birgit Hofmann, Anett Märker, Andreas Hengst, alle Karl-Marx-Stadt; Ute Silchmüller, Heike Wenig, beide Kieselbach; Barbara Tschada, Kleinberndten; Steffen Rieth, Klostermansfeld; Antje Meyer, Krautheim; Kerstin Willek, Kriebitzsch; Karsten Drescher, Leinefelde; Birgit Haberlandt, Ines Bauer, Stephan Bönowitz, Heiko Rudolf, Jörg Schwarzer, Peter Kasper, Katrin Bormann, alle Leipzig; Kathleen Weise, Löderburg; Manuela Marpert, Markersdorf; Uwe Zscherpel, Meerane; Thomas Eller, Silke Marquardt, Dagmar Werner, alle Meiningen; Tobias Lücke, Meißen; Kerstin Friedrich, Beate Dutschke, beide Mittelhewigsdorf; Antke Kössel, Mittelschmalkalden; Per Witte, Mittenwalde; Angelika Radtke, Mittweida; Heidrun Jänchen, Mohsdorf; Gudrun Hebestreit, Mühlhausen; Uwe Grasenack, Nauendorf; Torsten Kretschmer, Naumburg; Birger Wirth, Nermsdorf; Kerstin Feigl, Neundorf; Sigrun Massanek, Neusornzig; Karsten Woi-ke, Neustadt; Uwe Pauluhn, Nordhausen; Anett

Rabe, Birgit Uhlmann, beide Oberlungwitz; Jörg Lehmer, Oelsen; Kerstin Johannes, Oranienbaum; Andreas Bollmann, Osteroda; Peter Seifert, Pinnau; Kerstin Zirnstein, Pirna; Thomas Mittelbach, Plessa; Elisabeth Schültke, Potsdam; Hagen Mrowetz, Prenzlau; Christiane Dobberstein, Rathenow; Claudia Würker, Reichenbach; Ralph Neumann, Ulrich Zeitmann, beide Ribnitz; Susanne Forstreuter, Astrid Wruck, Kirsten Kowalewski, alle Rostock; Wolfgang Stein, Rudolstadt; Birgit Bricks, Saalfeld; Eva Schubert, Schalkau; Cornelia Grulke, Schernberg; Jens Gollmer, Henri Kriechling, Cornelia Schädlich, Susanne Heuer, Thomas Gerth, Christoph Wille, Werner Häfner, alle Schmalkalden; Sabine Buß, Schorssow; Wolfgang Förg, Schwaz (Österreich); Elke Meißner, Sitzendorf; Bert Hoffmann, Silke Mistol, Martin Förster, alle Söllichau; Matthias Schneiderheine, Sondershausen; Cornelia Recknagel, Pia Köllmann, Corina Speck, Udo Walther, Andrea Möller, Sabine Bahner, Barbara und Christina Usbeck, Peter Nickel, Annedore Röhl, Doris Rothämel, alle Steinbach-Hallenberg; Silke Reuscher, Ines Pubanz, Roland Goldenbogen, alle Stralsund; Elke Rösner, Strausberg; Peter Pfannschmidt, Suhl; Heidrun Tiedt, Teterow; Annekatrin Heuer, Tieckow; Ulf Carlsen, Titschendorf; Margit Creutzburg, Thal; Ute Bergmann, Katrin Schatz, beide Torgau; Kerstin Spiegel, Waldheim; Stefan Syring, Warin; Klaus-Detlef Gehrke, Warnemünde; Kerstin Ackermann, Wasungen; Gudrun Boettcher, Weimar; Olaf Seidel, Weißwasser; Sebastian Strube, Wernsdorf; Mayk Rehtanz, Wernshausen; Torsten Grimm, Sven Ribmann, beide Wesenberg; Silke Gabriel, Eric Link, beide Wismar; Torsten Noack, Wittenberg; Karsten Schlutter, Wittstock; Jörg Schleinitz, Wölfskendorf; Eva-Maria Heubner, Wolfen; Birgit Schmidt, Worbis; Birgit Schlutheiß, Wüstenbrand; Torsten Ninebuck, Roland Wehmeier, beide Wüsteney; Christine Gruhn, Zepernick; Uli Zurth, Zerpenschleuse; Michael Holdys, Heike Kiehne, beide Ziesar; Gabriele Schubert, Anett Schulzensohn, Heimo Henschelmann, Bernd Dunger, alle Zittau; Gerald Köthe, Leinefelde

Für dreijährige Teilnahme

Margret Detsch, Bad Salzuflen; Timo Kretzschmar, Bahratel; Henry Fischer, Bitterfeld; Marlis Schröder, Brandenburg; Stefanie Began, Breitenworbis; Uta Boldt, Burg Stargard; Kerstin Krähe, Calbe; Petra Sarodnick, Dallgow; Gabriele Sprotte, Döbeln; Birgit Wittwer, Jochen Lattermann, alle Dresden; Gabriele Fischer, Deutschenbora; Susanne Schreiber, Elsterwerda; Thomas Schmidt, Erfurt; Birgit Voigtmann, Freiberg; Carla Müller, Friedeburg; Kerstin Wickner, Hermannsdorf; Thomas Jez, Herzberg; Sabine Sentker, Hettstedt; Ines Gillwald, Holzendorf; Marion Endrigkeit, Jessen; Jens Hoffmann, Holger Friedrich, Andreas Bernd, alle Karl-Marx-Stadt; Axel Schüler, Kleinmachnow; Karsten Ihlenburg, Königs Wusterhausen; Gerald Pfitzenreuter, Jörg Drechsel, beide Leinefelde; Ute Fischer, Lübbenau; Uwe Würker, Mülzen; Liane Helmbold, Neuenhofe; Dieter Seifert, Pinnau; Axel Schulz, Potsdam; Katrin Lippuner, Rhensberg; Dieter Grebner, Roßdorf; Ulrike Martin, Ines Dalisda, beide Rostock; Petra Zachert, Sachsendorf; Michael Gerth, Schmalkalden; Manuela Recknagel, Steinbach-Hallenberg; Ekkehard Breuer, Stendal; Christine Mohr, Teterow; Thorsten Eidner, Zeulenroda; Kerstin Hoffmann, Zittau; Birgit Schenke, Zschornowitz; André Schlosser, Klingenthal. Die hier genannten Schüler erhielten Buchpreise.

Immanuel Dittrich, Altenburg; Ines Matthesie, Simone Groß, Peter Engelhaupt, Rolf Standau, Gerhard Fräbel, Heike Rem, Antje Eck, alle Asbach; Frank Baumgart, Aschersleben; Evelyn Heyer, Aue; Ulrich Horn, Bad Frankenhausen; Kathrin Gutte, Bad Gottleuba; Dagmar Klopsch, Bad Kleinen; Knut Rommel, Bad Liebenstein; Susanne Stadler, Uwe Wiczorek, Steffen Beyer,

Ingrid Heidrich, Karola Durner, alle Leimbach; Heidrun Schwerin, Bandau; Kerstin Strohbach, Bautzen; Kirsten Rechner, Baruth; Jörg und Peter Kruppa, Cornelia Schroeter, Ute Huebscher, Liane Winkler, Sabine Mantel, Cortez Schulz, Andrea Schick, Jürgen Pommerening, Marc Schewe, alle Berlin; Wilfried Düring, Binz; Stefan Krttschil, Birkenwerder; Steffi Löffler, Blankenfelde; Heike Frenzel, Rita Krieghoff, beide Blumberg; Tilman Völzke, Böhlen; Holger Reimann, Böhlitz-Ehrenberg; Heike Hoffmann, Frank Blinkerei, Brita Hoffmann, alle Boizenburg; Kerstin Quedenfeld, Daniela Bruer, Beate Daul, Monika Bruer, Detlef Krüger, Diana Meiner, alle Bregenstein; Uwe Döll, Heiko Walter, Heike Wiegand, Matthias Beißberger, Claudia Heller, Sandro Endter, alle Breitenungen; Irene Palm, Brieselang; Catrin Zenner, Buttstedt; Ute Wolf, Burgstädt; Steffen Grütznier, Burkau; Uwe Queck, Burkensdorf; Britta Leschka, Buttstedt; Bernd Bethge, Butzow; Katrin Treue, Calbe; Frank Glotz, Camburg; Christine Pompe, Axel Harnath, Stefan Jakubaschk, Royald Lenk, alle Cottbus; Dietmar Berthold, Crimmitschau; Olaf Mattis, Meike Stegemann, beide Dambeck; Thomas Claus, Demitz-Thumitz; Anette Paetzold, Demmin; Ines Fehrmann, Deutschenbora; Thomas Richter, Dietlas; Rainer Nolte, Dagmar Schunck, Annette Hindermann, alle Dingelstädt; Steffen Kanert, Mike Westphal, Carsta Roloff, alle Döbberitz; Helga Loos, Dörfel; Manuela Schwenke, Dohna; Heike Georgi, Heike Taschenberger, Kerstin Hofmann, Frank Moldenhauer, Veronika Enkelmann, Manuela Geisler, alle Deutschenbora; Peer Forberg, Stefan Gärtner, Peter Schreiber, Stefan Edelmann, Asja Nürnberger, Matthias Liebig, Jörg Hempelt, Frank Eiselt, Elmar Hartenstein, Falk Wagner, Antje Kühn, Günter Kühn, Michaela Woelk, Thorsten Nürnberger, Hans-Peter Kulbe, Gerd Schmidt, Cornelia Müller, Uta Reiche, alle Dresden; Reinhard Weißnicht, Siegfried Obst, beide Eberswalde; Martina Beau, Effelder; Petra Albsleben, Eichenbarleben; Birgit Röbler, Kerstin Mans, beide Eisenach; Peter Schlag, Eisenberg; Andre Köbel, Thomas Jagemann, alle Eisenberg; Thomas Pigorsch, Dirk Kuberne, beide Eisleben; Petra Kramer, Elmenhorst; Matthias Schreiber, Elsterwerda; Heike Heber, Erfurt; Marlis Patz, Petra Patz, beide Elsterwinden; Heiko Blochwitz, Falkenberg; Simone Ötzel, Katrin Sievers, beide Farnbach; Petra Ziemann, Feldberg; Reinhard Walter, Finsterwalde; Karsten Meißner, Forst; Antje Wagner, Kathrin Hoffmann, beide Frankfurt; Elke Jahn, Kathrin Schmieder, beide Freiberg; Cornelia Voigt, Friedeburg; Torsten Siebert, Görnitz; Gesine Beyrich, Greifswald; Klaus Siemoneit, Grimmen; Ute Hennig, Großbröhrendorf; Uwe Ansoerge, Grünhain; Matthias Bauer, Genthin; Urte Conrad, Gielow; Andrea Schulz, Glindow; Torsten Köchy, Gniest; Birgit Reilinger, Britta Pfütznier, Gudrun Kirstein, Uwe Rehbein, André Köster, alle Goldberg; Kerstin Schneider, Annette Meckel, beide Goßwitz; Angelika Ceslik, Thomas Silz, beide Gräfenhainichen; Olaf Schmidt, Wilfried Schleinitz, Eckhard Buhrow, alle Greifswald; Heike Möbius, Grimma; Andrea Milke, Großbodungen; Sylke Jäger, Groß-Ernsthof; Claudia Müller, Gr.-Leuthen; Grit Möckel, Grünbach; Götz Kluttig, Thomas Burkhardt, beide Guben; Petra Brandstädter, Michael Rohn, beide Güstrow; Annegret Winkler, Gustebin; Anka Nagler, Halberstadt; Volker Kunert, Thomas Reissig, beide Halle; Ralf Groß, Roger Fischl, Günter Schichinsky, Katrin Müller, alle Halle-Neustadt; Thomas Enghardt, Peggy Unger, Jan-Erik Kunze, alle Hammerbrücke; René Geipel, Hartha; Christina Liebe, Gudrun Liebe, beide Hartmannsdorf; Ralf Gruner, Ramona Möckel, beide Hauptmannsgrün; Carmen Schwaab, Christine Hatzky, Silvio Anohle, alle Haynrode; Bärbel Päßler, Heike Wendler, Katrin Ullmann, Frank Eberlein, Heinz Wickner, alle Hermannsdorf; Carola Gresens, Herold; Gerald Jage, Christel Schiewietz, beide Herzberg; Regina

Planer, Hohendorf; Jens Fiebig, Hohnstedt; Harald Krüger, Hohenstein; Cornelia Gillwald, Holzendorf; Anke Rentsch, Horka; Katrin Schulze, Torsten Dietrich, beide Hoyerswerda; Rigobert Hupach, Hüpstedt; Martin Arnold, Ilmenau; Joachim Krummow, Hanjo und Conny Saueremann, alle Joachimsthal; Detlef Henschel, Kamen; Norbert Nehrdrich, Kandelin; Simona Ritzke, Karbow; Birgit Georgi, Jane Voll, Uwe Seidel, Frank Hübler, Holger Leonhardt, Andreas Niepel, Mike und Ralf Kösser, Claus-Peter Endter, Ralf Buschmann, Christiane Glumann, alle Karl-Marx-Stadt; Manuela Wohlfahrt, Thomas Baer, Dany Eiche, Bernd August, alle Kieselbach; Kathrin Geier, Karin Hempel, Dagmar Mühlmann, alle Kirchberg; Ralf Schüler, Kleinmachnow; Joachim Pankewald, Klein Zetelitz; Susanne Marx, Klepzig; Dirk Schlender, Klosterfelde; Frank Drons, Königs Wusterhausen; Ralf Häntsch, Köthen; Joachim Braun, Koßdorf; Frank Batschon, Krauschwitz; Ramona Werner, Krauthaus; Andrea Ludwig, Kummersdorf; Gunar Schneider, Langenbach; Stefan Kügler, Langenleuba; Grit Heyde, Latdorf; Dirk Eigenwillig, Lauchhammer; Silke Greiner-Vetter, Heidi Krumpholz, beide Lauscha; Barbara Surma, Jens Dette, Roland Bolze, Sylvio May, Thomas Winkler, Anka Reinecke, Ralf Hertram, Peter Grolle, alle Leinefelde; Annette Zschiesche, Jana Deckbar, Ulrike Haas, Susan Müller, Lutz Lämmer, Holger Rhan, alle Leipzig; Marika Goeckel, Leisnig; Heiko Schinke, Leuna; Andrea Walther, Limbach-Oberfrohna; Heiko Nowarra, Uwe Lautenschläger, beide Lössa; Birgit Arndt, Loitz; Ronald Arndt, Lüblow; Torsten Harnisch, Lützen; Sven Weinkaut, Mammendorf; Antje Zscherpel, Meerane; Matthias Neundorf, Carola Höhn, beide Meiningen; Peter Kürbis, Meißner; Christiane Krause, Menteroda; Rolf Dietzel, Menzengraben; Frank Birnbaum, Beate Besser, beide Merseburg; Marko Badel, Michendorf; Birgit Zabel, Andrea Richter, beide Mühlhausen; Katrin Wilke, Anke Krukenberg, beide Nauendorf; Christine Braun, Naundorf; Anett Jennrich, Heike Meinecke, Beatrice Pätz, Anne-Kathrin Pätz, alle Neuenhofe; Fred Hückstädt, Petra Ahrens, beide Neukloster; Ronny Förster, Neumark; Thomas Lange, Winfried Solf, beide Neustadt; Hans-Dieter Böhler, alle Neustadt; Gabi Strätz, Neustrelitz; Thomas Kunz, Nossen; Jens Horn, Michael Döll, beide Oberschöna; Rolf Bittig, Oschatz; Petra Kirchner, Thomas Kelch, beide Parchim; Dieter, Jörg und Uwe Vogel, alle Petzschwitz; Uwe Schulze, Pirna; Ingrid Becker, Annette Hergert, Andrea Sesselmann, alle Plauen; Sabine Kernbach, Pöbneck; Ralph Lorenz, Poggendorf; Petra Baldauf, Anne Klausnitzer, Ines Freyholdt, Rainer Rätke, Sigurd Assing, Georg Schreckenbach, Karsten Milek, Michael Hänsch, Thomas Schreckenbach, alle Potsdam; Jens Uhlemann, Prausnitz; Sigrid Planke, Tim Planke, beide Premnitz; Katrin Arnhold, Radebeul; Lutz Hübschmann, Simone Lein, beide Raschau; Thuralds Meinel, Raßnitz; Birgit Richter, Reuden; Christiane Smykalla, Ribnitz; Ina und Manfred Hille, Steffen Andrich, alle Riesa; Frank und Uwe Holubek, beide Rietzen; Thomas Rühlemann, Beate Walke, beide Röbel; Gertrud Rudisch, Roitzsch; Lutz Otto, Heiko Baubel, Ellen Fuß, Silke Bieleit, Christine Pfaff, alle Roßdorf; Matthias Neundorf, Roßlau; Jürgen Träger, Roßleben; Bernd Schentschischin, Christiane Woitke, Klaus Viebrandt, Anett Müller, Hans Nitschke, Anett Becker, Sabine Heinze, Sylke Giese, alle Rostock; Steffi Lehmann, Heike Grosser, Yvonne Löser, alle Rothschönberg; Cathrin Ballmann, Birgit Quinke, beide Rotta; Anke Benecke, Sachau; Frank Richter, Schkölen; Sigrid Schröter, Martina Rühl, beide Schladitz; Ronald Fabian, Schleife; Gabi Rem, Sonja Gramann, Antje Poerschle, Brita Bretschneider, Beate Rym, Mathias Brandt, Steffen Abicht, Heike Wittmann, Detlef Christ, Sylvia Luck, Petra Vier-eck, Silke Kaus, Erike Peter, Gabi Kirchner,

Ute Morgenroth, alle Schmalkalden; Markus Wolf, Schönbach; Edgar Lüder, Schönborn; Gabriele Müller, Schönwalde; Gunnar Jeschke, Schwarzhöhe; Detlef Wassermann, Schweinitz; Ralf Bekkert, Schwerin; Heike Menk, Seehausen; Jens Gläßer, Seiffen; Michael Hruschka, Senftenberg; Daniela Ziegert, Sondershausen; Jens Recknagel, Veiko Recknagel, Stefan Schüler, Christoph Nothnagel, Yvonne Recknagel, Anka Wilhelm, Karin Lehmann, Kathrin Röder, Silke Köllmann, André Bartsch, Matthias Baumann, Frank Häfner, Matthias Holland-Nell, Friedo Lohse, Claudia Häfner, Latrin Heim, Astrid Keller, Christine Mangold, Jens Pfannschmidt, Veiko Zeiß, Sabine Artschwager, Ines Baumeister, Martina Büchner, Heike Häfner, Evi König, Beate König, Kerstin Holland-Letz, Sabine Holland-Letz, Andreas König, Evelin Pfannschmidt, Andrea Hoffmann, alle Steinbach-Hallenberg; Ralf Wunderlich, Steinsdorf; Torsten Roeger, Stendal; Thomas Merten, Stralsund; Kerstin Gundlach, Strasburg; Katrin Rosenberger, Suhl; Susanne Kühnert, Tangerhütte; Klaus Pfeiffer, Taubach; Uwe Köhler, Thomas Köhler, beide Taura; Antje Wulf, Constanze Gasch, Holger Nörenberg, alle Teltow; Lars Herrmann, Töplitz; Heike Walter, Torgelow; Kathrin Scheibe, Trebitz; Ralf Reinhold, Katrin Gruschwitz, Andrea Geier, alle Unterheinsdorf; Corina Walter, Uthausen; Holger Schick, Ronald Kallenbach, Heidrun Kallenbach, alle Vacha; Annette Schiller, Katrin Badeke, beide Wallwitz; Ralf Dittmar, Kerstin Anschütz, beide Waren; Petra Ackermann, Wasungen; Bettina Lüttich, Weimar; Ute Hausmann, Christiane Hotze, beide Weißenborn; Holger Meinhard, Weißenfels; Birgit Schmidt, Steffen Rüger, beide Weißwasser; Manfred Petzelis, Wendisch-Rietz; Carola Schauseil, Jörg Goldammer, Gunda Görlich, alle Wesenberg; Frank Schöne, Matthias Scharf, Ralf Breda, Dirk Hilbrecht, Ingo Förster, Almuth Nehring, alle Wiehe; Carmen Rauscher, Wilkau-Haßlau; Wolfgang Kähler, Wismar; Berrit Richter, Wittenberg; Christel Hartig, Wodorf; Ellen Raeck, Wolmirstedt; Rolf Heubner, Wolfen; Uwe Eix, Steffen Klimpel, beide Wolgast; Claudia Groh, Wüstenbrand; Jörg Meißner, Zeißholz; Karl und Jochen Oertel, Zeitz; Uwe Müller, Zeulenroda; Hella Paelchen, Andrea Garske, beide Ziesar; Kerstin Wünsche, Cornelia Lorenz, Katrin Böhme, Claudia Hampel, Jörg Rothe, Michael Mönch, Karsten Amthor, Ingrid Soblik, Olaf Kreischmar, alle Zittau; Norbert Welzel, Zschornitz; Norbert Schlosser, Uta Escher, beide Zwickau; Achim Saft, Sigurd Heller, Ralph Töpfer, Iris Krech, alle Bad Liebenstein; Freddy Dallmann, Coswig; Ulf Riechen, Dresden; Andreas Kerdas, Köthen; Antje Schlosser, Klingenthal; Uwe Schulze, Pirna; Jens Balßweit, Sondershausen.

10. Internationale Chemie-Olympiade

Warschau: Eine Goldmedaille für die DDR erkämpfte Michael Handschuh aus Dessau bei der 10. Internationalen Chemie-Olympiade von Schülern der allgemeinbildenden Ober- und Mittelschulen in Toruń. Die Jury erkannte ihm in der Gesamtwertung des unter UNESCO-Patronat stehenden Wettbewerbs den 2. Platz zu. Sieger des am 10. Juli beendeten Wettstreits in der Toruñer Nicolaus-Kopernikus-Universität, an dem Mannschaften aus 12 europäischen Ländern mit jeweils vier Schülern teilnahmen, wurde Andrej Wedernikow (UdSSR).

Lösungen



Lösungen zu den Aufgaben 4 und 5 der Olympiadeaufgaben aus der SR Vietnam:

▲ 4 ▲ Wegen $a \leq a_k$ gilt $a_k - a \geq 0$, wegen $a_k \leq b$ gilt $a_k - b \leq 0$, also $(a_k - a)(a_k - b) \leq 0$. Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a)(a_k - b) \leq 0,$$

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 - (a+b) \sum_{k=1}^n a_k + nab \leq 0,$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^2 - (a+b) \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k + ab \leq 0,$$

$$m_2 - (a+b)m_1 + ab \leq 0,$$

$$ab + m_2 \leq (a+b)m_1.$$

Wegen $ab + m_2 > 0$ und $(a+b)m_1 > 0$ folgt weiter

$$(ab + m_2)^2 \leq (a+b)^2 m_1^2, \text{ also}$$

$$(ab + m_2)^2 - (ab - m_2)^2 \leq (a+b)^2 m_1^2,$$

$$4abm_2 \leq (a+b)^2 m_1^2,$$

$$m_2 \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} m_1^2, \text{ w. z. b. w.}$$

▲ 5 ▲ Ist $x = \tan u$ mit $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$, also $|u| < \frac{\pi}{6}$, so gilt

$$\tan 3u = \tan(2u + u) = \frac{\tan 2u + \tan u}{1 - \tan 2u \tan u}$$

$$= \frac{\frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u} + \tan u}{1 - \frac{2 \tan^2 u}{1 - \tan^2 u}} = \frac{3 \tan u - \tan^3 u}{1 - 3 \tan^2 u}$$

$$= \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}.$$

Es liegt daher nahe,

$$x = \tan u, y = \tan v, z = \tan w \quad (4)$$

$$\text{mit } |u| < \frac{\pi}{6}, |v| < \frac{\pi}{6}, |w| < \frac{\pi}{6} \quad (5)$$

zu setzen und zu beweisen, daß

$$\tan 3u + \tan 3v + \tan 3w = \tan 3u \tan 3v \tan 3w \quad (6)$$

gilt, wenn $x + y + z = xyz$ ist.

Nun gilt für alle u, v, w , für die (5) erfüllt ist,

$$\tan(u+v+w) = \frac{\tan(u+v) + \tan w}{1 - \tan(u+v) \tan w}$$

$$= \frac{\frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} + \tan w}{1 - \frac{(\tan u + \tan v) \tan w}{1 - \tan u \tan v}}$$

$$= \frac{\tan u + \tan v + \tan w - \tan u \tan v \tan w}{1 - \tan u \tan v - \tan u \tan w - \tan v \tan w}$$

$$= \frac{x + y + z - xyz}{1 - xy - xz - yz} \quad (7)$$

Wegen (1) ist

$$x + y + z - xyz = 0 \quad \text{und wegen (2)}$$

$$1 - xy - yz - xz > 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0;$$

daraus folgt wegen (7)

$$\tan(u+v+w) = 0. \quad (8)$$

Da wegen (5) $|u+v+w| < \frac{\pi}{2}$ ist, folgt $u+v+w = 0$ und daher $3u+3v+3w=0$, also auch

$$\tan(3u+3v+3w) = 0. \quad (9)$$

Andererseits gilt wegen (7)

$$\tan(3u+3v+3w) = \frac{\tan 3u + \tan 3v + \tan 3w - \tan 3u \tan 3v \tan 3w}{1 - \tan 3u \tan 3v - \tan 3u \tan 3w - \tan 3v \tan 3w}$$

also wegen (9)

$$\tan 3u + \tan 3v + \tan 3w = \tan 3u \tan 3v \tan 3w,$$

womit die Richtigkeit der Gleichung (6) und damit auch der Gleichung (3) bewiesen ist.

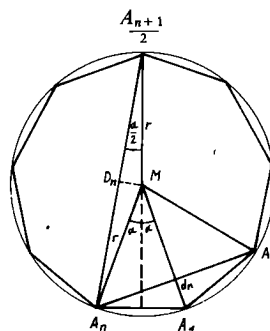
$$\Delta 6 \Delta S = \tan^6 \frac{\pi}{18} + \tan^6 \frac{5\pi}{18} + \tan^6 \frac{7\pi}{18}$$

$$= Z_1^3 + Z_2^3 + Z_3^3$$

$$= 9[9^2 - 3 \cdot 11] + 3 \cdot \frac{1}{3} = 9 \cdot 48 + 1$$

$$= 433.$$

▲ 7 ▲ Es gibt nur ein regelmäßiges n -Eck, für das die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind, nämlich das regelmäßige 9-Eck.



Ausführliche Lösungen zu Aufg. 6 und 7 siehe Heft 3/79.

Lösungen zu: Lineare Optimierungen

$$1. x \geq 1; 2. x \leq \frac{2}{3}; 3. x \in [-1, 2]; 4. x = 2;$$

$$5. \text{ Viereck mit den Eckpunkten } (0; 3), (6; 3), (4; 5), (2; 6); 6. L = \emptyset;$$

$$7. \text{ Sechseck mit den Eckpunkten } (2; 2), (4; 1), (8; 3), (7; 5), (6; 6), (3; 5);$$

$$8. P_{\min}(4; 4), z_{\min} = 24; P_{\max}(8; 20),$$

$$z_{\max} = 96; 9. P_{\min}(5; 5), z_{\min} = 105,$$

$$x_3 = 70, (x_1, x_2, x_3)_{\min} = (5; 5; 70);$$

$$P_{\max}(15; 25), z_{\max} = 155, x_3 = 0,$$

$$(x_1, x_2, x_3)_{\max} = (15; 25; 0).$$

Lösungen zu: Drunter und drüber

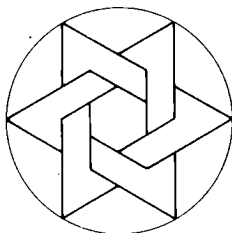
▲ 1 ▲ Da das Dreieck $A_7 I_7 P$ gleichschenkelig ist, gilt: $A_7 I_7 = I_7 P$. Aus dem Quadrat $A_2 A_4 A_6 A_8$ sieht man, daß $A_8 I_7 = I_7 M$.

Daraus folgt:

$$\frac{d}{2} = \overline{MA_7} = \overline{I_7 M} + \overline{A_7 I_7} = \overline{A_8 I_7} + \overline{I_7 P} = \overline{A_8 P}.$$

Einfacher erkennt man die Gleichheit durch eine Drehung von $\overline{A_8 I_7}$ um I_7 .

▲2▲

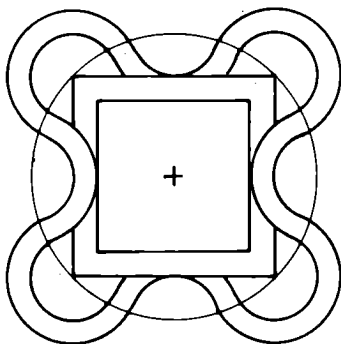


▲3▲



▲4▲ In die Grundfigur werden acht Kreise mit dem Radius $r = \frac{1}{2} \cdot l_k$, deren Mittelpunkte A_k ($k = 1, \dots, 8$) sind, eingezeichnet. Sie stellen die Innenkreise dar. Der Radius der dazugehörigen Außenkreise ergibt sich durch Verbindung zweier benachbarter Punkte A_k und A_{k+1} ($k = 1, \dots, 7$) als Abstand von A_k zum Innenkreis um A_{k+1} . Danach verbindet man die sich überschneidenden Kreisinge parallel zu den Verbindungsgeraden der Mittelpunkte.

▲5▲



Lösungen zum Kryptogramm:

Flocke + Flocke = Schnee, Heft 6/78

$$\begin{aligned} 218\,350 + 218\,350 &= 436\,700 \\ 219\,350 + 219\,350 &= 438\,700 \\ 416\,350 + 416\,350 &= 832\,700 \\ 481\,650 + 481\,650 &= 963\,300 \end{aligned}$$

Lösungen zu: Kryptarithmetik

Heft 6/78, S. 123

$$\begin{aligned} 6 \cdot 1035 &= 6210; 6 \cdot 7539 = 45\,234; \\ 4 \cdot 1329 &= 5316; 4 \cdot 1302 = 5208; \\ 6 \cdot 1063 &= 6378 \end{aligned}$$

Lösungen zu: 10 Jahre Jugendobjekt

Klub Junger Mathematiker Dresden, Heft 6/78

▲1▲ Grundbereich der Variablen sei die Menge der natürlichen Zahlen.

1. Wenn $a=1$, so lautet das Ergebnis der Berechnung des Terms 8.
2. $2a=2b$, wenn $a=b$; z. B. $a=3, b=3$.
3. $y=0$, x beliebig
4. $x=7$

5. $4a < 7a + 7b$ ist eine wahre Aussage, wenn $a=1, b=2$.
6. Wenn $a=1, b=0$, so lautet das Ergebnis der Berechnung des Terms 3.
7. Ergebnis 84
8. $11=13$ ist eine falsche Aussage.

▲2▲ 1 2 3 4 5 6

AFA A AFA AF
- W F - F -

▲3▲ Die Negationen der Aussagen lauten:

1. 29 ist keine Primzahl.
2. 5 ist nicht größer als 9.
3. Nicht alle durch 10 teilbaren Zahlen sind gerade.
4. Es gibt keine rechtwinkligen Dreiecke.
5. $25 + 31 \neq 65$

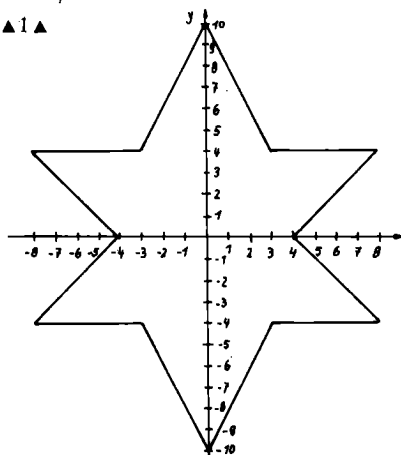
	1	2	3	4	5
Aussage	W	F	W	W	F
Negation	F	W	F	F	W

▲4▲

A	AF	Bemerkungen
e/a/	WW er/n	
ex	er	
1. e	F	
2.	er	für $a=0$
3. ex	W	
4. ex	W	für $m=0$
5. a	W	
6.	er	allgemeingültig
7.	er	für $t < 2$
8. ex	W	
9. e	F	
10. ex	F	$x=0$ und $x=2$ erfüllen die Gleichung $x+x=x \cdot x$
11. a	W	

Lösungen zu: Winterliche Knobeleien, Heft 6/78

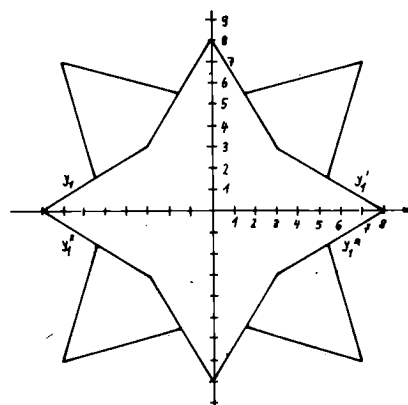
▲1▲



▲2▲

Spiegeln an der y-Achse bedeutet in den Formeln x durch $-x$ zu ersetzen und y zu belassen. Die gespiegelten Funktionen sind also

$$\begin{aligned} y_1' &= -\frac{3}{5}(x-8) \quad \text{für } 3 \leq x \leq 8 \\ y_2' &= -\frac{5}{3}x-8 \quad \text{für } 0 \leq x \leq 3 \end{aligned}$$



$$y_3' = \frac{11}{3}(x-7)+7 \quad \text{für } \frac{11}{2} \leq x \leq 7$$

$$y_4' = \frac{3}{11}(x-7)+7 \quad \text{für } \frac{3}{2} \leq x \leq 7.$$

Eine Spiegelung an der x-Achse heißt, in den Formeln y durch $-y$ zu ersetzen und x zu lassen. Wir erhalten als Spiegelbilder der Funktionen y_i bzw. y_i' ($i=1, 2, 3, 4$) die Funktionen y_i'' bzw. y_i''' :

$$y_1'' = -\frac{3}{5}(x+8) \quad \text{für } -8 \leq x \leq 3,$$

$$y_2'' = -\frac{5}{3}x+8 \quad \text{für } -3 \leq x \leq 0,$$

$$y_3'' = \frac{11}{3}(x+7)+7 \quad \text{für } -7 \leq x \leq -\frac{11}{2},$$

$$y_4'' = \frac{3}{11}(x+7)+7 \quad \text{für } -7 \leq x \leq -\frac{3}{2},$$

$$y_1''' = -\frac{3}{5}(x-8) \quad \text{für } 3 \leq x \leq 8,$$

$$y_2''' = -\frac{5}{3}x+8 \quad \text{für } 0 \leq x \leq 3,$$

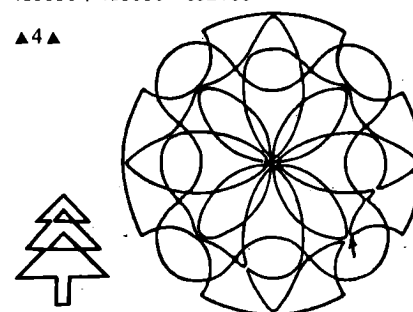
$$y_3''' = -\frac{11}{3}(x-7)-7 \quad \text{für } \frac{11}{2} \leq x \leq 7,$$

$$y_4''' = -\frac{3}{11}(x-7)-7 \quad \text{für } \frac{3}{2} \leq x \leq 7.$$

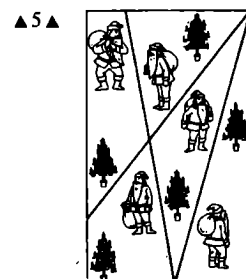
▲3▲ Vom Autor gefundene Lösungen:

$$\begin{aligned} 218\,350 + 218\,350 &= 436\,700; \\ 219\,350 + 219\,350 &= 438\,700; \\ 416\,350 + 416\,350 &= 832\,700 \end{aligned}$$

▲4▲



▲5▲





XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen zu Aufg. 5/6, DDR-Ausscheid:

5. Um zu zeigen, daß der Term (1) eine reelle Zahl definiert, benutzt man, daß die Funktion $\lg x$ für alle $x > 0$ reelle Werte annimmt, und daß $\lg x = 0$ genau dann gilt, wenn $x = 1$ ist. Daher reicht es, die Ungleichungen $5\sqrt{2} - 7 > 0$, $3 - 2\sqrt{2} > 0$, $3 - 2\sqrt{2} \neq 1$ (2) zu beweisen, etwa so:

$$50 > 49 \rightarrow \sqrt{50} > \sqrt{49} \rightarrow 5\sqrt{2} - 7 > 0$$

$$9 > 8 \rightarrow \sqrt{9} > \sqrt{8} \rightarrow 3 - 2\sqrt{2} > 0.$$

Wäre $3 - 2\sqrt{2} = 1$, so wäre $\sqrt{2} = 1$ oder $2 = 1$.

Um nun zu zeigen, daß (1) sogar rational ist, stellten die meisten Schüler fest, daß

$$5\sqrt{2} - 7 = (\sqrt{2} - 1)^3$$

$$3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$$

bzw. $(5\sqrt{2} - 7)^2 = (3 - 2\sqrt{2})^3$ gilt. (4)

Benutzt man z. B. (4), so erhält man

$$\lg(5\sqrt{2} - 7) = \lg[(3 - 2\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}]$$

$$\lg(3 - 2\sqrt{2}) = \frac{\lg(3 - 2\sqrt{2})}{2}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \lg(3 - 2\sqrt{2}) = \frac{3}{2} \cdot \lg(3 - 2\sqrt{2}) = \frac{3}{2}$$

Das Kürzen der Logarithmen ist nach (2)

erlaubt. Da $\frac{3}{2}$ eine rationale Zahl ist, ist alles gezeigt.

Eine etwas andere Möglichkeit für diesen Beweis ist, zunächst die Annahme zu machen, daß zwei ganze Zahlen p , q ($q \neq 0$) existieren, mit denen

$$\lg(5\sqrt{2} - 7) = \frac{p}{q}$$

$$\lg(3 - 2\sqrt{2}) = \frac{p}{q}$$

Hieraus folgt

$$q \cdot \lg(5\sqrt{2} - 7) = p \cdot \lg(3 - 2\sqrt{2})$$

$$\lg(5\sqrt{2} - 7)^q = \lg(3 - 2\sqrt{2})^p.$$

Damit erhält man

$$(5\sqrt{2} - 7)^q = (3 - 2\sqrt{2})^p.$$

Zur Begründung für diesen Schritt kann z. B. die strenge Monotonie der Funktion $\lg x$ ($x > 0$) oder die nach (2) erlaubte Umformung von (6) in

$$\lg \left[\frac{(5\sqrt{2} - 7)^q}{(3 - 2\sqrt{2})^p} \right] = 0$$

herangezogen werden, wenn jetzt die bereits genannte Tatsache benutzt wird, daß $\lg x = 0$ genau dann gilt, wenn $x = 1$ ist. Durch Probieren (vgl. (3), (4)) findet man, daß $p = 3$, $q = 2$ in (7) möglich ist. Durch Logarithmieren der so entstehenden Beziehung (4) ergibt sich, daß tatsächlich

$$\frac{\lg(5\sqrt{2} - 7)}{\lg(3 - 2\sqrt{2})} = \frac{3}{2} \text{ ist.}$$

Damit ist wieder alles gezeigt.

Bemerkungen: Die Bewertung der Lösungen zeigt, daß die Aufgabe als für die 4. Stufe der Olympiade sehr leicht einzustufen ist:

Punkte 0 1 2 3 4 5 6

Anzahl 5 9 10 4 6 22 37

Nur zwei Schüler unternahmen keinen Lösungsversuch. Ursachen für Punktabzüge waren oft nur Fehlen oder Unvollständigkeit des Beweises von (2) und mangelhafte Begründung einzelner Schritte, z. B. von (6) nach (7).

Dipl.-Math. G. Seifert,

Zentralinstitut für Math. und Mechanik der Akademie d. Wissenschaften der DDR

6. Angenommen, es gibt eine Lösung (x, y) , dann folgt mit

$$z = x + y \text{ aus (1)} \quad (3)$$

$$xy = 2 + 3\sqrt{2} - z \text{ bzw. mit} \quad (4)$$

$$z^2 = x^2 + 2xy + y^2 \text{ aus (2)}$$

$$z^2 - 2xy = 6. \quad (5)$$

Aus (4) und (5) ergibt sich für z eine quadratische Gleichung

$$z^2 + 2z - 10 - 6\sqrt{2} = 0$$

mit den Lösungen

$$z_1 = 2 + \sqrt{2} \quad (6)$$

$$z_2 = -4 - \sqrt{2}. \quad (7)$$

Setzt man nun (6) bzw. (7) in (3) und (4) ein, so erhält man die folgenden Gleichungssysteme

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 2 + \sqrt{2} \\ xy &= 2\sqrt{2} \end{aligned} \right\} (6')$$

$$\left. \begin{aligned} x + y &= -4 - \sqrt{2} \\ xy &= 6 + 4\sqrt{2} \end{aligned} \right\} (7')$$

In beiden kann man nach dem Einsetzungsverfahren etwa y eliminieren und erhält eine quadratische Gleichung für x . Diese hat im Falle (7') keine reellen Lösungen und im Falle (6') die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = \sqrt{2}$. Die zugehörigen y -Werte sind $y_1 = \sqrt{2}$ und $y_2 = 2$. Hat das Gleichungssystem (1), (2) Lösungen, so können das höchstens $(2, \sqrt{2})$ und $(\sqrt{2}, 2)$ sein. Wie man durch Einsetzen in (1) und (2) zeigt, sind dies tatsächlich Lösungen.

Bemerkungen: Die hier angegebene Lösung mittels einer Substitution (3) wurde im Prinzip von etwa einem Drittel der Schüler gewählt. Wiederum ein Drittel der Schüler wählte das Einsetzungsverfahren. Dieses führt auf eine Gleichung 4. Grades. Durch Ablesen von Lösungen und Polynomdivision fanden die Schüler auch auf diesem Wege meistens zum Ziel.

Die restlichen Schüler fanden zwar meist noch die Lösungen, konnten aber nicht exakt zeigen, daß diese Lösungen die einzigen sind.

Insgesamt war das Ergebnis bei dieser, einer 4. Stufe angemessenen Aufgabe gut.

Punkte 0 1 2 3 4 5 6 7

Anzahl 8 7 7 20 7 5 8 31

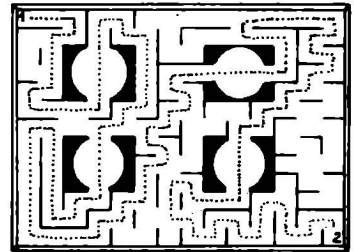
Dr. H.-J. Sprengel, Päd. Hochschule „Karl Liebknecht“, Potsdam

Die Lösungen zu den Aufgaben der Olympiadeklasse 11/12 werden in der Zeitschrift „Mathematik in der Schule“, Heft 10/78, veröffentlicht.

Lösungen zu: Labyrinth, Heft 6/78:



Eisbude, Geisterbahn, Luftschaukel, Karussell.



Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 5/78

Ma 5 ■ 1766 Die Anzahl der Antwortkarten muß durch 12 teilbar sein; deshalb gilt $20 < 12 \cdot n < 30$, also $n = 2$. Der Schüler erhielt somit 24 Antwortkarten. Das Prädikat „Sehr gut gelöst“ trugen $24 : 12 = 2$ Karten, das Prädikat „Gut gelöst“ hatten $24 : 2 = 12$ Karten, das Prädikat „Gelöst“ hatten $24 : 6 = 4$ Karten. Genau $24 - 2 - 12 - 4 = 6$ Karten trugen den Vermerk „Nicht gelöst“.

Ma 5 ■ 1767 Angenommen, in dieser Gemeinde gab es am dritten Tag nach Eröffnung der Bibliothek $2 \cdot n$ Leser; dann haben n Leser je ein Buch und n Leser je zwei Bücher ausgeliehen.

Somit haben $2 \cdot n$ Leser jeweils 3 Bücher ausgeliehen. Insgesamt waren $360 - 360 : 3 = 360 - 120 = 240$ Bücher ausgeliehen.

Deshalb gilt

$$3 \cdot 2n = 240,$$

$$2n = 80.$$

Am dritten Tag nach Eröffnung der Bibliothek gab es in dieser Gemeinde bereits 80 Leser.

Ma 5 ■ 1768 Da Petra und Frank im Jahre 1976 zusammen 28 Jahre, Birgit und Frank zusammen 26 Jahre alt waren, muß Birgit 2 Jahre jünger sein als Petra. Da Petra und Birgit zusammen 32 Jahre alt waren und Birgit 2 Jahre jünger ist als Petra, war Birgit $(32 - 2) : 2 = 15$ Jahre alt. Somit war Petra 17 Jahre und Frank 11 Jahre alt.

Ma 5 ■ 1769 Angenommen, Hans ist gegenwärtig n Jahre alt; dann ist sein Freund Peter $(n + 6)$ Jahre alt, der Vater von Peter ist somit $(2n + 6)$ Jahre alt.

Nun gilt

$$n + (n + 6) + (2n + 6) = 76,$$

$$4n + 12 = 76,$$

$$4n = 64,$$

$$n = 16.$$

Hans ist gegenwärtig 16, Peter 22, der Vater von Hans 38 Jahre alt.

Ma 5 ■ 1770 Die Anzahl der Briefmarken muß sowohl durch 3 als auch durch 4 und somit durch 12 teilbar sein. Zwischen 450 und 460 ist nur die Zahl 456 = $12 \cdot 38$ durch 12 teilbar. Somit besitzt Ulrike gegenwärtig 456 Briefmarken. Aus $456 - \frac{456}{3} - \frac{456}{4} = 456 - 152 - 114 = 190$ folgt, daß 190 Marken zum Tauschen vorgesehen sind.

Ma 5 ■ 1771 Aus $(81 - 2 - 2 + 1) : 3 = 78 : 3 = 26$ und $26 : 2 = 13$ folgt, daß jeder dieser drei Klassen 13 Jungen angehören.

Klasse Jungen Mädchen Schüler

5a 13 15 28

5b 13 15 28

5c 13 12 25

Ma 6 ■ 1772 Die zweistellige natürliche Zahl läßt sich in der Form $10a + b$ darstellen; ihre Quersumme beträgt $a + b$.

Nun gilt

$$[(10a + b) + (a + b)] \cdot 5 = 150,$$

$$(11a + 2b) \cdot 5 = 150,$$

$$11a + 2b = 30,$$

$$11a = 30 - 2b,$$

$$11a = 2 \cdot (15 - b).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung muß wegen $11 \cdot a$ ebenfalls durch 11 teilbar sein. Wegen $0 \leq b \leq 9$ trifft das nur für $b = 4$ zu. Somit gilt $11a = 2 \cdot 11$, also $a = 2$. Die Zahl lautet 24.

Ma 6 ■ 1773 Angenommen, den Klassen 6a und 6b gehören zusammen n Schüler an; dann gilt

$$\frac{n}{8} + \frac{n}{3} + \frac{n}{2} + 3 = n,$$

$$\frac{3n}{24} + \frac{8n}{24} + \frac{12n}{24} + \frac{72}{24} = \frac{24n}{24},$$

$$23n + 72 = 24n,$$

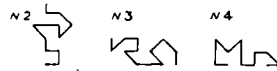
$$n = 72.$$

Aus $72 - 2 = 70$ und $70 : 2 = 35$ folgt, daß der Klasse 6a genau 37 Schüler, der Klasse 6b genau 35 Schüler angehören.

Lösungen zu alpha-heiter, Heft 1/79

Psychologischer Test

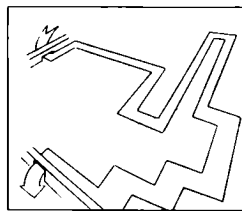
Umkehrungen



Unterhaltsames
Legespiel



Wer findet den Weg?



Kleinschachbrett 5 x 5

2	3	4	3	2
3	4	6	4	3
4	6	8	6	4
3	4	6	4	3
2	3	4	3	2

0	3	2	3	2
3	4	1	2	3
2	1	4	3	2
3	2	3	2	3
2	3	2	3	4

Studentenhobbys

Mischa ist Gewichtheber und lernt tanzen. Tisha spielt Fußball und stickt als Hobby. Grisca boxt und lernt Kunstpfeifen, und Eduard spielt Schach und singt im Chor.

Silbenrätsel

1. Gerade, 2. Rotation, 3. Definition,
4. Monat, 5. Descartes,
6. Datenverarbeitung;
7. Monotonie – Geronimo Cardano

Ein Rechenrick

Die drei frei gewählten Zahlen bezeichnen wir mit a , b und c und führen die verlangten Additionen algebraisch durch.

a	b	c
$a +$	$b +$	c (Summe der 3 Zahlen)
$a +$	$2b +$	$2c$ (Summe der letzten 2a +
$2a +$	$3b +$	$4c$ 3 Zahlen) usw.
$4a +$	$6b +$	$7c$
$7a +$	$11b +$	$13c$

$16a + 24b + 28c$ (Summe aller 8 Zahlen)

Das Ergebnis ist das Vierfache der 7. Zahl:

$$16a + 24b + 28c = 4 \cdot (4a + 6b + 7c).$$

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Wir wollen auch heute wieder Lösungsvarianten zu Wettbewerbsaufgaben vorstellen, die bei uns eingegangen sind. Sie mögen unseren aktiven Teilnehmern am alpha-Wettbewerb Anregungen zum Lösen von Aufgaben geben.

Im Heft 5/1977 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 7 ■ 1661 Eine sechsstellige natürliche Zahl beginnt mit der Ziffer 2. Streicht man diese Ziffer und hängt man sie hinter den verbleibenden fünf Ziffern an, so erhält man eine Zahl, die dreimal so groß ist wie die ursprüngliche Zahl. Um welche Zahl handelt es sich?

Im Heft 1/1978 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Die gesuchte sechsstellige natürliche Zahl läßt sich in der Form $z_1 = 2 \cdot 100000 + x = 200000 + x$ darstellen. Die Zahl z_2 hat dann die Form $z_2 = 10x + 2$, und es gilt $3 \cdot z_1 = z_2$. Wir erhalten somit folgende Gleichung:

$$3 \cdot (200000 + x) = 10x + 2,$$

$$600000 + 3x = 10x + 2,$$

$$7x = 599998,$$

$$x = 85714.$$

Die ursprüngliche Zahl lautet somit

$$z_1 = 200000 + 85714 = 285714.$$

$$\text{Probe: } z_2 = 857142 = 3 \cdot 285714.$$

Wir stellen nun die Lösung von Silvia Schneider aus Goldberg vor, die jetzt Schülerin der Klasse 8a der John-Brinckmann-Oberschule ist. Silvia löste diese Aufgabe wie folgt: Die gesuchte Zahl läßt sich darstellen durch $2xyzvw = 2 \cdot 10^5 + x \cdot 10^4 + y \cdot 10^3 + z \cdot 10^2 + v \cdot 10 + w$.

Die durch Streichen der Ziffer 2 und durch Anhängen erhaltene Zahl läßt sich darstellen durch

$$xyzvw2 = x \cdot 10^5 + y \cdot 10^4 + z \cdot 10^3 + v \cdot 10^2 + w \cdot 10 + 2.$$

Nun gilt

$$3(2 \cdot 10^5 + x \cdot 10^4 + y \cdot 10^3 + z \cdot 10^2 + v \cdot 10 + w) = x \cdot 10^5 + y \cdot 10^4 + z \cdot 10^3 + v \cdot 10^2 + w \cdot 10 + 2,$$

$$600000 + 30000x + 3000y + 300z + 30v + 3w = 100000x + 10000y + 1000z + 100v + 10w + 2,$$

$$70000x + 7000y + 700z + 70v + 7w = 599998,$$

$$10000x + 1000y + 100z + 10v + w = 85714.$$

$$\text{Daraus folgt, daß die gesuchte Zahl 285714 heißt.}$$

$$\text{Wir stellen nun die Lösung von Götz Kluttig aus Wilhelm-Pieck-Stadt Guben vor, der jetzt Schüler der Klasse 8b der Pestalozzi-Oberschule ist. Götz geht bei der Lösung der Aufgabe schrittweise vor:}$$

Es seien $z_1 = 2xyzab$ und $z_2 = xyzab2$, und es gilt $3 \cdot 2xyzab = xyzab2$ mit $1 \leq x \leq 9$ und $0 \leq y, z, a, b \leq 9$.

Das Produkt $3 \cdot b$ endet auf die Ziffer 2; deshalb gilt $b = 4$.

Das Produkt $3 \cdot a$ endet auf die Ziffer $b - 1 = 4 - 1 = 3$; deshalb gilt $a = 1$.

Das Produkt $3 \cdot z$ endet auf die Ziffer 1; deshalb gilt $z = 7$.

Das Produkt $3 \cdot y$ endet auf die Ziffer $z - 2 = 7 - 2 = 5$; deshalb gilt $y = 5$.

Das Produkt $3 \cdot x$ endet auf die Ziffer $y - 1 = 5 - 1 = 4$; deshalb gilt $x = 8$.

Es handelt sich somit um die Zahl 285714.

Wissen wo

Inhaltsverzeichnis des Jahrgangs 1978

Heft 1

- 1 Das arithmetisch-geometrische Mittel, Teil 1 (H. Pieper)
- 3 Das macht Pythagoras verlegen, Teil 2 (E. Schröder)
- 6 Zwei Aufgaben aus der mathematischen Fernolympiade 1976 – Mongolische Volksrepublik (P. Altanzog/R. Lüders)
- 7 Niels Henrik Abel – Porträt eines Mathematikers (H. Pieper)
- 8 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb (Autorenkollektiv)
- 11 Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen
- 11 Eine Aufgabe von Leninpreisträger Wladimir Boltjanski, Moskau
- 12 Berufsbild: Facharbeiter für Eisenbahntechnik (G. Klemm/R. Wiegand)
- 13 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt: AG Mathematik Strausberg – Talentsuche Mathematik im Bezirk Neubrandenburg
- 14 In freien Stunden · *alpha*-heiter
- 16 XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR – Aufgaben der Kreisolympiade
- 18 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht – Der richtige Dreh ist zu finden! (H. Reichenbach)
- 18 Lösungen
- 23 *alpha*-Wettbewerb – Abzeichen in Gold
- III. U.-Seite: Inhaltsverzeichnis des Jahrgangs 1977
- IV. U.-Seite: Gut gedacht ist halb gelöst (J. Lehmann/E. Quaisser)

Heft 2

- 25 Eigenschaften von Verknüpfungen, Teil 1 (J. Lehmann)
- 27 Das arithmetisch-geometrische Mittel, Teil 2 (H. Pieper)
- 30 Studenten technischer und ökonomischer Fachrichtungen im Wettstreit – DDR-Studentenkonferenz „Mathematik und Praxis“ in Leipzig
- 31 Vier Aufgaben aus Moskau (A. Halameisär/R. Lüders)
- 31 Eine Aufgabe von Sh. B. Linkowski, Moskau
- 32 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb
- 35 Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen
- 36 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht – Ein bewegliches Mühlespiel (H. George/G. Maiwald) – 1–2–3 Logelei (aus der ungarischen Zeitschrift *Füles*)
- 37 Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. Wendt, Güstrow
- 38 In freien Stunden · *alpha*-heiter
- 40 XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR – Aufgaben der Bezirksolympiade
- 42 Lösungen
- 47 Leser fragen – *alpha* antwortet zu einem zahlentheoretischen Problem (R. Lüders)
- 48 $1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8 = (1 + 9 \cdot 7 - 8) (1 + 9 + 7 - 8)$ – Kryptarithmetik von *alpha*-Lesern
- III. U.-Seite: Bücher aus dem BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig
- IV. U.-Seite: Gauß und die technische Revolution (R. Thiele)

Heft 3

- 49 Über Punktspiegelungen in der euklidischen Ebene (E. Böhne)
- 52 Eine Prüfungsfrage (W. Moldenhauer)
- 53 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt – Mathematischer Schülerwettbewerb im Kreis Delitzsch
- 54 Schulolympiaden in der Sowjetunion (L. Dimenstein/Th. Scholl)
- 56 Pendel und Erdbeschleunigung (W. Träger)
- 57 Seltsame Produkte (F. Dušek)
- 58 Eigenschaften von Verknüpfungen, Teil 2 (J. Lehmann)
- 59 Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. Molnár, Budapest
- 60 Ein Stück Wissenschaftsgeschichte – Mathematik im alten Indien (H. K. Singh)
- I. bis VIII.: XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR – Lösungen zu den Aufgaben der Kreis- und Bezirksolympiade

- 61 *alpha*-Spielmagazin: Würfeleien (J. Lehmann)
- 63 Preisträger der XVII. OJM, DDR-Olympiade
- 64 Ein Blick in die Praxis – Aufgaben aus dem VEB Maschinen- und Apparatebau Grimma (Autorenkollektiv)
- 66 In freien Stunden · *alpha*-heiter
- 68 Lösungen
- III. U.-Seite: Bücher aus der Ungarischen Volksrepublik (in deutscher Sprache)
- IV. U.-Seite: Bücher aus Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin

Heft 4

- 73 Kombinatorische Betrachtungen bei Schiebespielen (J. Flachsmeyer)
- 76 Eine Aufgabe von Prof. Dr. K. R. Biermann, Berlin
- 77 Wir konstruieren unendlich viele irrationale Punkte (G. Vetter)
- 80 Ein rationalisiertes Sieb zum Feststellen von Primzahlen, Teil 1 (F. Franke)
- 82 Gute Grundkenntnisse gefragt (Autorenkollektiv der M.-Luther-Universität, Halle)
- 84 XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR – Aufgaben der Schulolympiade
- 87 Zahlenzauber – Zauberszahlen (J. Lehmann)
- 88 Aufgaben aus Freundesland: 20 Aufgaben (mit Lösungen) aus der Ungarischen Volksrepublik
- 90 In freien Stunden · *alpha*-heiter
- 92 XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR – Aufgaben der DDR-Olympiade
- 93 Lösungen
- III. U.-Seite: Ein Flächenbelegungsspiel (R. Thiele)
- IV. U.-Seite: Optische Täuschung (*Zusammenstellung*: J. Lehmann)

Heft 5

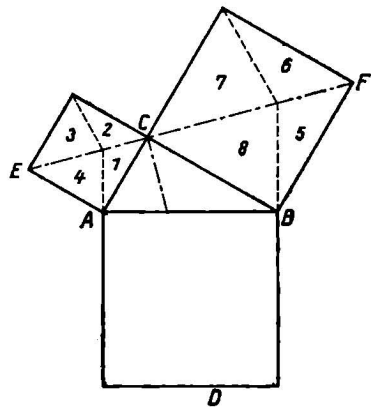
- 97 Der Vierfarbensatz (H. Pieper)
- 99 Eine Aufgabe von Dr. Z. A. Skopez, Jaroslawl
- 100 Er rechnete, wie andere atmen: *Leonard Euler*, der berühmteste Mathematiker des 18. Jahrhunderts (K. Reinhard)
- 102 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt: 10 Jahre Bezirksklub Mathematik Cottbus (G. Standke)
- 102 XI. ISTAM 1978, Beograd (J. Roßmann)
- 104 Ein rationalisiertes Sieb zum Feststellen von Primzahlen, Teil 2 (F. Franke)
- 107 Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen
- 108 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb
- 111 Bunte Basteleien (*Zusammenstellung*: J. Lehmann)
- 112 Kombinatorische Betrachtungen bei Schiebespielen, Teil 2 (J. Flachsmeyer)
- 114 In freien Stunden · *alpha*-heiter
- 116 Lösungen
- 119 XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR – Lösungen zu den Aufgaben der DDR-Olympiade (Kl. 10)
- III. U.-Seite: Rosetten-Graphik (U. Reiche)
- IV. U.-Seite: aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht – Knoteleien speziell für Klasse 5/6 (*Zusammenstellung*: J. Lehmann/Th. Scholl!)

Heft 6

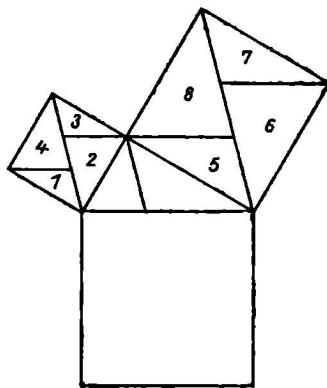
- 121 Lineare Optimierung, Teil 1 (E. Lehmann)
- 123 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt – Die Ernst-Thälmann-OS Roßlau berichtet – Zum 6. Male Mathematikolympiaden der Gehörlosenschulen der DDR – Mathematik und MMM
- 124 *Albert Einstein* 1879 bis 1966 (R. Thiele)
- 126 Es ist Winter – Geometrie der Schneeflocke (L. Cirmes)
- 127 Winterliche Knoteleien (*Zusammenstellung*: J. Lehmann)
- 128 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb
- 131 VI. Güstrower Physik-Wettbewerb (B. Träger/U. Walta)
- 132 Eine Aufgabe von Prof. Dr. W. Schäfer – Eine Aufgabe von Dr.-Ing. R. Thiele, beide Leipzig
- 132 *alpha*-Wettbewerb 1977/78: Preisträger, kollektive Beteiligung, Statistik
- 134 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht – 10 Jahre Jugendobjekt *Klub Junger Mathematiker Dresden* (A. Hilbert)
- 136 In freien Stunden · *alpha*-heiter
- 138 XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR: Aufgaben und Lösungen der Kreisolympiade
- 142 Lösungen, insbes. Lösungen zu der XVII. OJM – DDR-Olympiade
- III. U.-Seite: Das „mathematische Autorennen“ (L. Schmidt)
- IV. U.-Seite: Labyrinth (*Zusammenstellung*: J. Lehmann)

Mitgemacht und nachgedacht

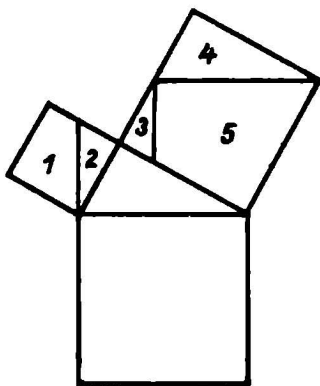
Zerschneide die einzelnen (numerierten) Teilflächen der jeweils beiden Kathetenquadrate und lege sie so auf das jeweilige Hypotenusenquadrat, daß es vollständig bedeckt ist!



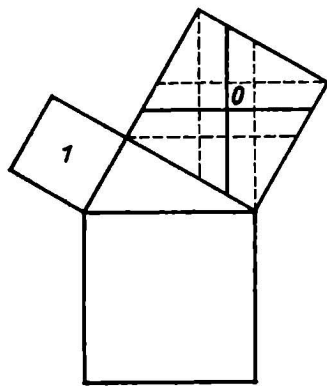
Zerlegungsbeweis von Epstein



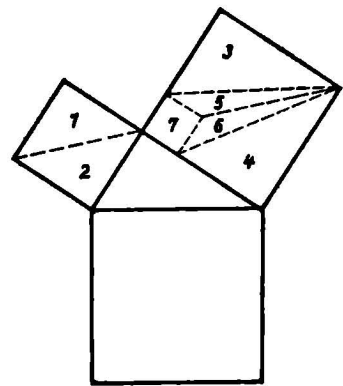
Zerlegungsbeweis von Nielsen



Zerlegungsbeweis von al-Nairizi

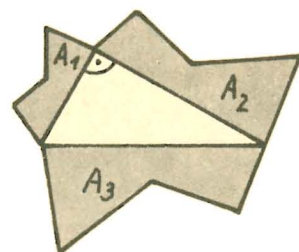
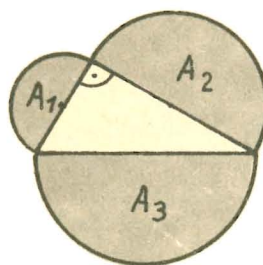
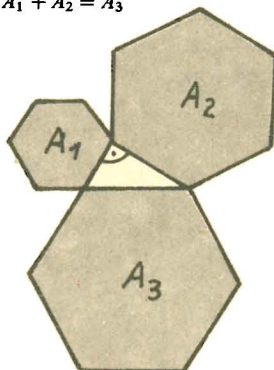
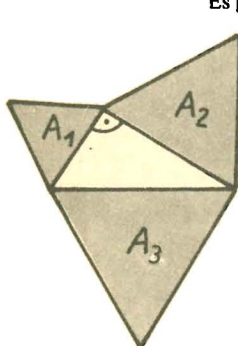


Schaufelradbeweis von Perigal



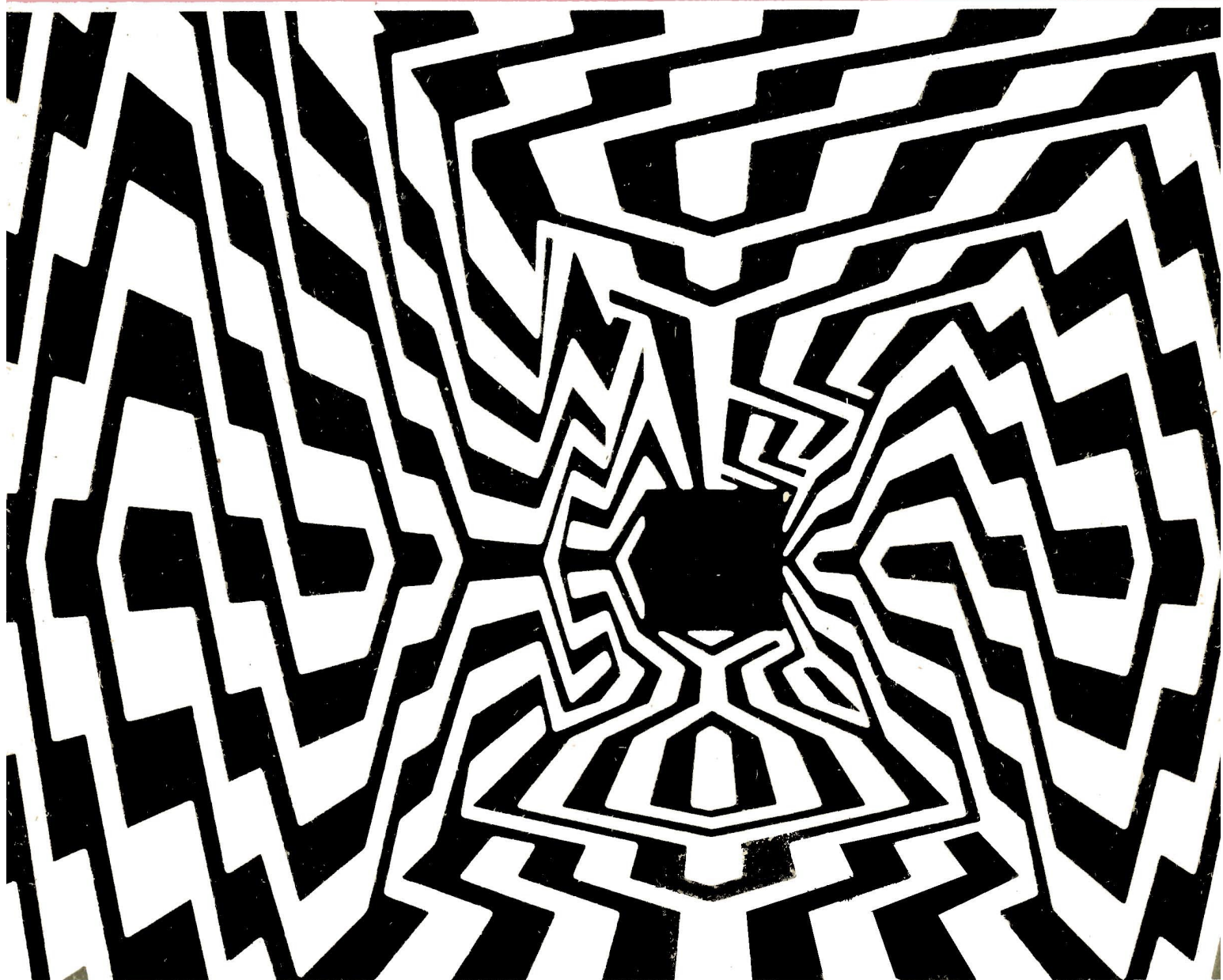
Zerlegungsbeweis von Gutheil

Es gilt $A_1 + A_2 = A_3$



Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
13. Jahrgang 1979
Preis 0,50 M
Index 31059

2

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dozent Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stove (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Diplom-Lehrer C.-P. Helmholz)

Redaktion:

StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Abb. aus J.I. Perelman: Unterhält-
same Algebra, Volk u. Wissen, Berlin (S. 28);
Mathe-LVZ (S. 31); ZB, Berlin (S. 32); Geza
Fekete, Budapest (S. 37); Mohr, Berlin
(S. 41); P. Krassowski, Opole (S. 41); ZB/
ADN (III. U.-Seite)

Titelblatt: W. Fahr, Berlin (nach Motivaus-
wahl von J. Lehmann, Leipzig)

Typographie: H. Tracksdorf

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 25 Wie Hipparch die Bahn der Sonne berechnete [9]*
Dr. W. Ihle, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle
 - 27 100 Bände Mathematische Schülerbücherei (MSB) [5]
D. Ziegler, Lektor, BSB B. G. Teubner, Leipzig
 - 28 Einstein und die Uhrzeiger [9]
Mitgeteilt von Dr. R. Thiele, BSB B. G. Teubner, Leipzig
 - 29 Gute Grundkenntnisse gefragt [5]
Autorenkollektiv der Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle,
Leitung Prof. Dr. Walsch
 - 30 Fünf Aufgaben aus Freundesland (UdSSR) [10]
Material von der Moskauer Staatlichen Universität „M. W. Lomonossow“
 - 31 Eine Aufgabe von einem Autorenkollektiv der Sektion Mathematik
der Karl-Marx-Universität Leipzig unter Leitung von Prof. Dr. H.
Schumann [10]
 - 34 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Wettbewerbsaufgaben Mathematik · Physik · Chemie
 - 37 Spielereien mit Vielecken [5]
aus: Pythagoras, Niederlande (12/74)
 - 38 Zauberhafte Mathematik
Dr. M. Röhr, Sektion Psychologie der Karl-Marx-Universität Leipzig
 - 41 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt
Mathematischer Leistungsvergleich Potsdam–Opole [9]
Dr. H.-J. Sprengel, Sektion Mathematik der Pädagogischen Hochschule *Karl Lieb-
knecht*, Potsdam
 - 42 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/H. Pätzold, Waren/Müritz
 - 44 Lösungen [5]
- III. U.-Seite: 30 Jahre haben Gewicht [7]
Graphiken über die Volksbildung in der DDR
- IV. U.-Seite: Mathematische Schülerbücherei – Gesamtverzeichnis [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann/D. Ziegler, beide Leipzig



Gesamtherstellung: INTERDRUCK

Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128 – ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 20. Dezember 1978

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Wie Hipparch die Bahn der Sonne berechnete

An einem Beispiel wollen wir uns einmal ansehen, mit welchen Vorstellungen, Gedanken und mathematischen Methoden sich die Astronomen vor etwa 2000 Jahren um die Beschreibung der Bewegungen der Himmelskörper bemüht haben.

Hipparch von Nicäa, der bedeutendste Astronom des Altertums, lebte etwa von 190 bis 125 v.u.Z. Auf der Insel Rhodos und in Alexandria machte er zahlreiche astronomische Beobachtungen. Die Astronomie verdankt ihm grundlegende Erkenntnisse. Hipparchs Werke sind zwar verschollen, aber das „Handbuch der Astronomie“ von Claudius Ptolemäus, der etwa 300 Jahre nach Hipparch in Alexandria lebte, ist uns unter dem Titel „Almagest“ vollständig überliefert. Ptolemäus kannte und schätzte Hipparchs Arbeiten. Er hat in sein Handbuch auch Hipparchs Lösung der Aufgabe, für jeden Zeitpunkt den Ort der Sonne am Himmel zu berechnen, aufgenommen. Anhand einer deutschen Übersetzung des Almagest, die 1963 in Leipzig erschienen ist, wollen wir Hipparchs Sonnentheorie verfolgen. Als mathematische Hilfsmittel benötigt er Sätze aus der Geometrie des Kreises und die Trigonometrie, die er zu diesem Zweck in die Astronomie einführt.

Uns ist geläufig, daß die Erde zwei voneinander unabhängige Bewegungen ausführt: Sie rotiert wie ein Kreisel in 23 h 56 min einmal von West nach Ost um ihre Achse, und sie bewegt sich innerhalb eines Jahres einmal auf einer Ellipsenbahn um die Sonne. Einem Beobachter auf der Erde wird durch die Erdrotation eine scheinbare, sich täglich wiederholende Bewegung der Sonne von Ost nach West um die Erde vorgetäuscht. Als Folge des Erdumlaufes um die Sonne scheint es ihm, als ob die Sonne in einem Jahr einen größten Kreis auf der scheinbaren Himmelskugel von West nach Ost durchläuft (Bild 1). Dieser Kreis heißt Ekliptik. Sie schneidet den Himmelsäquator in zwei sich diametral gegenüberliegenden Punkten F' und H' , dem Frühlings- und Herbstpunkt. Die beiden Halbkreisbogen der Ekliptik zwischen F' und H' werden durch die sogenannten Wendepunkte S' und W' halbiert. In S' steht die Sonne von der Erde aus gesehen zu Beginn des Sommers, in W' zu Beginn des Winters. Da die Erde ihre Bahn mit unterschiedlicher Geschwindig-

keit durchläuft, bewegt sich auch die Sonne auf ihrer scheinbaren Bahn, der Ekliptik, verschieden schnell.

Hipparch hält diese beiden scheinbaren Sonnenbewegungen für tatsächlich vor sich gehende Bewegungen der Sonne. Er nimmt an, daß „die Erde die Mitte des Himmelsgewölbes einnimmt“ und daß die Sonne (wie alle Himmelskörper) die Erde jeden Tag einmal umkreist. Er geht also von einer „geozentrischen“ Vorstellung aus (griechisch ist „ge“ die Erde, lateinisch „centrum“ der Mittel-

punkt). Ihm ist zwar die Kugelgestalt der Erde bekannt, doch weist er die von einigen Philosophen geäußerte Vermutung, die Erde rotiere, zurück, weil sonst „alles, was auf der Erde nicht niet- und nagelfest wäre, scheinbar immer in einer einzigen Bewegung begriffen sein müßte, welche der Bewegung der Erde entgegengesetzt verlief“. Zur Erklärung der zweiten Bewegung der Sonne (nämlich auf der Ekliptik) macht Hipparch die willkürliche Annahme, daß sich die Sonne in einem Jahr auf einer Kreisbahn von West nach Ost, also

Bild 1

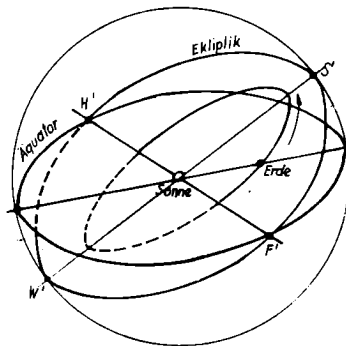


Bild 2

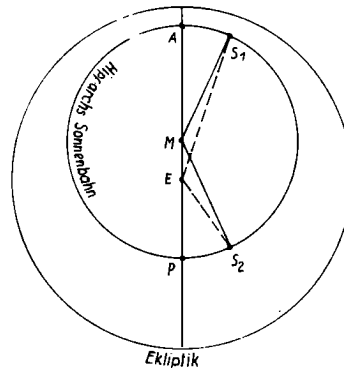


Bild 3

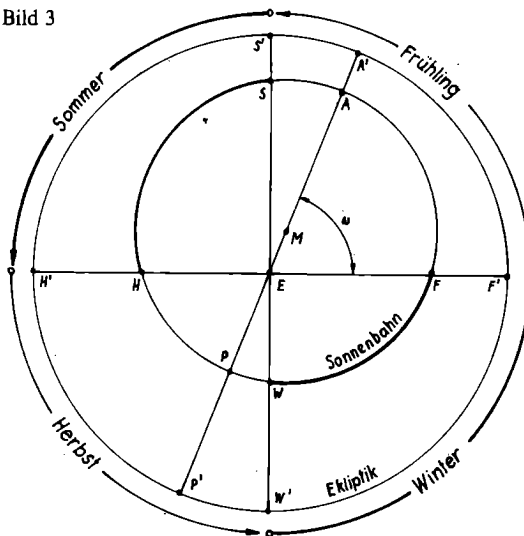


Bild 4

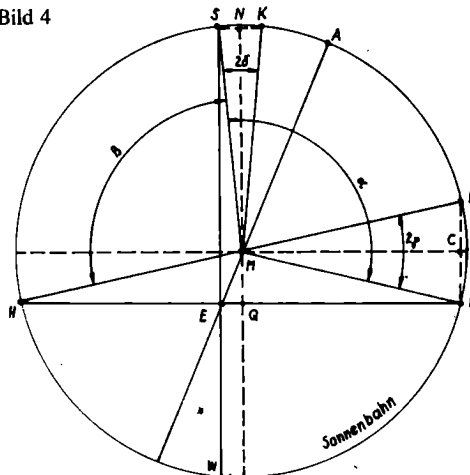


Bild 5

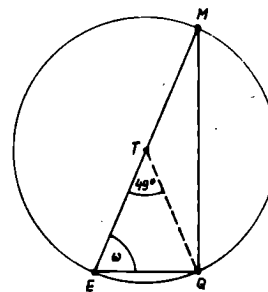
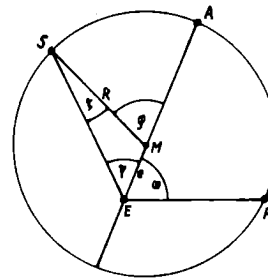


Bild 6



entgegengesetzt zur ersten Bewegung, um die Erde bewegt. Dieser Kreis projiziert sich als Ekliptik auf die Himmelskugel. Jahrhundertelang waren die Astronomen nämlich überzeugt, daß sich alle Himmelskörper auf Kreisen bewegen, da man den Kreis als die vollkommenste Figur ansah. Schließlich nimmt er noch an, daß die Sonne diesen Kreis mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchläuft, daß sie also in gleichen Zeiten gleichlange Bogen ihrer Bahn zurücklegt. Die Bestimmung des Sonnenortes auf diesem Kreis ist der Inhalt der Sonnentheorie von Hipparch. Die Aufgabe ist gelöst, wenn es gelingt, den Winkel ψ (Bild 6) zwischen einem festen Punkt A der Ekliptik und dem jeweiligen Sonnenort S zu berechnen.

Wir verfolgen nun Hipparchs Lösung und stellen uns dabei auch auf seinen geozentrischen Standpunkt.

„Unter allen Aufgaben, die die Theorie der Sonne uns stellt, ist die erste, die Länge des Jahres zu finden.“ So beginnt die Darstellung dieser Theorie bei Ptolemäus. Als ein Jahr bezeichnet er die Zeitspanne, die die Sonne für zwei aufeinanderfolgende Durchgänge durch den Frühlingspunkt benötigt. (Wir nennen diesen Zeitraum heute ein tropisches Jahr.) Aus vielen Beobachtungen findet er, daß ein tropisches Jahr etwas kürzer als 365,25 Tage sein muß. Die Auswertung dieser Beobachtungen hatte nämlich ergeben, daß nach 300 „Jahren“ zu je genau 365,25 Tagen die Sonne bereits einen Tag früher als erwartet den Frühlingspunkt erreicht. Wir lesen dazu bei Ptolemäus (er rechnet im Sechzigersystem der Babylonier): „Wenn wir daher den einen Tag auf die 300 Jahre verteilen, so kommen auf jedes Jahr $\frac{12}{60^2}$ eines Tages;

wenn wir dieses von $365 + \frac{15}{60}$ abziehen, so werden wir die gesuchte Jahreslänge mit $365 + \frac{14}{60} + \frac{48}{60^2}$ Tagen erhalten.“ Es ist leicht nachzurechnen, daß das tropische Jahr nach Hipparch $365,24667 \text{ Tage} = 365 \text{ d } 5 \text{ h } 55 \text{ min } 12 \text{ s}$ dauert. (Wir messen heute $365 \text{ d } 5 \text{ h } 48 \text{ min } 46 \text{ s}$.) Also – schließt Hipparch weiter – bewegt sich die Sonne mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit $v_s = 360^\circ : 365,24667 \text{ Tage} = 0,98564^\circ$ pro Tag in ihrer Bahn ostwärts weiter. (Aufgabe 1)

Weiter wußte Hipparch aus Beobachtungen, daß – von der Erde aus gesehen – die Sonne die Ekliptik nicht mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchläuft. Zur Erklärung dieses Widerspruchs zu seiner Annahme nimmt er an, daß der Mittelpunkt M des Kreises, auf dem sich die Sonne mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt, nicht mit dem Erdmittelpunkt E zusammenfällt (Bild 2). Er stellt sich also vor, daß die Sonne auf einem exzentrischen Kreis um die Erde läuft. A ist der erdfernste Punkt, das Apogäum, P der erdnächste Punkt, das Perigäum der Sonneh-

bahn. Dazu sagt Ptolemäus: „Ziehen wir alsdann nach Abtragung der gleichgroßen Bögen S_1A und PS_2 die Verbindungslinien S_1M , S_1E , S_2M , S_2E , so wird ohne weiteres klar sein, daß die Sonne, nachdem sie jeden der beiden Bögen in gleicher Zeit zurückgelegt hat, auf dem um E beschriebenen Kreise scheinbar ungleiche Bögen durchlaufen haben muß; denn Winkel S_1EA wird kleiner, Winkel S_2EP größer sein als jeder der als gleich angenommenen Winkel S_1MA und S_2MP .“ Und er folgert weiter, „daß die kleinste Bewegung stets im erdfernsten und die größte Bewegung stets im erdnächsten Punkte vor sich geht, weil Winkel AES_1 in allen Fällen (wenn Bogen $AS_1 = \text{Bogen } PS_2$ ist) kleiner ist als Winkel PES_2 .“ (Aufgabe 2)

Nun wird das Verhältnis $e:R$ berechnet. e ist die Länge der Strecke ME , R die Radiuslänge der Sonnenbahn (Bild 3). Außerdem ist die Größe ω des Winkels $F'EA'$ zu ermitteln. Dieser Winkel heißt „Länge des Apogäums“. Durch ihn wird die Lage des Apogäums auf der Ekliptik festgelegt.

Hipparchs Lösung dieser beiden Aufgaben ist verblüffend einfach. Er hatte beobachtet, daß der Frühling 94,5 Tage und der Sommer 92,5 Tage dauert. Er überlegt zunächst, daß A auf dem Frühlingsbogen FS liegen muß: Den Halbkreis $F'S'H'$ durchläuft die Sonne nach Beobachtung in 187 Tagen, also in mehr als der Hälfte eines Jahres. Der Halbkreis $H'W'F'$ wird in kürzerer Zeit durchlaufen. Die Sonne ist demnach im Sommer „halb“ Jahr langsamer als im Winter „halb“ Jahr. Also muß A' auf dem Bogen $F'S'H'$ liegen, und zwar zwischen F' und S' , da von den beiden gleichlangen Bögen $F'S'$ und $S'H'$ der erste in der längeren Zeit, also mit kleinerer Geschwindigkeit durchlaufen wird. Der Mittelpunkt M der Sonnenbahn liegt auf der Geraden durch A' und E zwischen diesen beiden Punkten.

Bild 4 zeigt die Sonnenbahn um M noch einmal. Als Hilfslinien sind durch M die Parallelen zu HF und WS , durch F die Parallele zu WS und durch S die Parallele zu HF gezogen. Bei Ptolemäus lesen wir dazu: „Nun beträgt die gleichförmige Bewegung der Sonne in 94,5 Tagen von den 360 Graden des Kreises $93^\circ 9'$ und in 92,5 Tagen $91^\circ 11'$ (wir nennen diese Winkelgrößen hier α und β), so daß auf den Kreisbogen FSH $184^\circ 20'$ kommen.“ (Aufgabe 3) Damit berechnet Hipparch die Größen 2γ und 2δ der beiden Zentriwinkel FMB und SMK . Er findet $2\gamma = 184^\circ 20' - 180^\circ = 4^\circ 20'$ und $\delta = \alpha - 90^\circ - \gamma = 0^\circ 59'$, also $2\delta = 1^\circ 58'$.

Wir würden heute aus den rechtwinkligen Dreiecken FCM und MNS sofort $|CF| = R \cdot \sin \gamma$ und $|SN| = R \cdot \sin \delta$ entnehmen und unter Beachtung von $|CF| = |MQ|$ und $|SN| = |EQ|$ aus dem rechtwinkligen Dreieck MQE das Verhältnis $e:R$ berechnen. Dazu benötigen wir eine Tafel der Werte der Sinusfunktion. Eine solche kannte Hip-

parch nicht. Er arbeitet statt dessen bei trigonometrischen Rechnungen mit seinen „Sehrentafeln“. Aus diesen Tafeln kann er zu jedem Zentriwinkel im Kreis die Länge der zugehörigen Sehne entnehmen. Da Ptolemäus Hipparchs Sehrentafeln samt ihrer Berechnung in den *Almagest* aufgenommen hat, wissen wir, wie Hipparch diese Tafeln berechnet hat. Darauf können wir hier jedoch nicht eingehen.

Mit Hilfe dieser Tafeln findet Hipparch $|BF| = R \cdot 0,0756$ und $|SK| = R \cdot 0,0344$. Da $\frac{1}{2}|BF| = |CF| = |MQ|$ und $\frac{1}{2}|SK| = |SL| = |EQ|$ ist, erhält er aus dem rechtwinkligen Dreieck MQM mit Hilfe des Satzes von Pythagoras

$e = \sqrt{|MQ|^2 + |EQ|^2} = R \cdot \sqrt{0,0378^2 + 0,0172^2}$. Als Ergebnis gibt er $e:R = 1:24$ an. (Dazu Aufgabe 4)

Zur Berechnung von ω beschreibt Hipparch um das rechtwinklige Dreieck MQE den Umkreis (Bild 5). Dessen Mittelpunkt T halbiert die Hypotenuse ME . Der Durchmesser dieses Kreises und die Länge der Sehne EQ sind bekannt. In der Sehrentafel findet er, daß zur Sehne EQ ein Zentriwinkel der Größe 49° gehört. Folglich ist $\omega = 65^\circ 30'$. Wir können das leicht nachprüfen, denn es ist $\tan \omega = |MQ|/|EQ|$.

Somit hat Hipparch gefunden, daß der Mittelpunkt M der Sonnenbahn $\frac{1}{24}$ der Länge des

Radius der Sonnenbahn von der Erde entfernt ist in der Richtung, die auf einen Punkt der Ekliptik zeigt, der $65^\circ 30'$ östlich vom Frühlingspunkt liegt.

Schließlich zeigt Hipparch, wie man aus der gleichförmigen Bewegung der Sonne um M ihre ungleichförmige Bewegung um E berechnen kann. Um uns kurz fassen zu können, verlassen wir jetzt Hipparchs Darstellung und verwenden unsere Kenntnisse der Trigonometrie. Als Beispiel berechnen wir den Winkel ψ (Bild 6), der den Sonnenort auf der Ekliptik t Tage nach dem Durchgang der Sonne durch das Apogäum angibt.

Es ist $\psi = \phi - \zeta$, da Winkel AMS ein Außenwinkel des Dreiecks EMS ist. Zuerst berechnen wir $\phi = t \cdot v_s$. Um ζ zu bestimmen, wenden wir auf das Dreieck SME den Sinussatz der ebenen Trigonometrie an:

$e:R = \sin \zeta : \sin(\phi - \zeta)$. Diese Gleichung lösen wir nach $\sin \zeta$ auf und wenden ein Additionstheorem trigonometrischer Funktionen an.

Wir erhalten $\sin \zeta = \frac{e}{R}(\sin \phi \cos \zeta - \cos \phi \sin \zeta)$.

Nun dividieren wir diese Gleichung durch $\cos \zeta$ (es ist $\cos \zeta \neq 0$, wenn ϕ kein ganzzahliges Vielfaches von 180° ist) und lösen sie nach $\tan \zeta$ auf:

$\tan \zeta = \frac{e}{R} \sin \phi : \left(1 + \frac{e}{R} \cos \phi\right)$. Daraus läßt sich

ζ berechnen, da $\frac{e}{R}$ und ϕ bekannt sind. Damit kennen wir auch $\psi = \phi - \zeta$. Nun ist der Win-

kel AES bestimmt und der Sonnenort S gegeben:

Die Sonne steht t Tage nach dem Apogäumsdurchgang in dem Punkt der Ekliptik, der $(\omega + \psi)$ Grad vom Frühlingspunkt entfernt ist.

Damit war Hipparch in der Lage, die Bewegung der Sonne mathematisch in einer Weise zu beschreiben, die der damaligen Beobachtungsgenauigkeit genügte. Daß er trotz falscher Voraussetzungen die Sonnenbewegung annähernd richtig beschreiben konnte, liegt daran, daß die Erdbahnellipse nur wenig von der Kreisform abweicht.

Es ist lehrreich, Hipparchs Formeln mit heutigen Werten durchzurechnen. Im Jahre 1978 war Frühlingsbeginn am 21. März 1 h, Sommerbeginn am 21. Juni 19 h und der Herbstbeginn am 23. September 10 h. Wer die Rechnungen ausführt, wird für seine Mühe mit einer astronomischen „Entdeckung“ belohnt (dazu Aufgabe 5).

Aufgaben

▲1▲ Man prüfe Hipparchs Berechnung der Jahreslänge und von v , nach.

▲2▲ Man beweise Hipparchs Behauptung: „Winkel S_1EA wird kleiner, Winkel S_2EP größer sein als jeder der als gleich angenommenen Winkel S_1MA und S_2MP .“ Die Bezeichnungen entnehme man aus Bild 2.

▲3▲ Man führe die Berechnung der Winkelgrößen α und β aus.

▲4▲ Man berechne das Verhältnis $e:R$ unter Benutzung einer Tafel der Werte der Sinusfunktion und vergleiche das Ergebnis mit dem von Hipparch angegebenen.

▲5▲ a) Man berechne nach Hipparchs Verfahren die Apogäumlänge ω für 1978 aus den am Ende gegebenen Daten. (Die heutige Apogäumlänge ω weicht erheblich von Hipparchs Wert ω ab. Also kann das Apogäum kein auf der Ekliptik fester Punkt sein. Tatsächlich bewegt es sich pro Jahr um 61.9 Winkelsekunden auf der Ekliptik vorwärts.)

b) Man berechne aus der Apogäumsdifferenz $\omega - \omega$, wieviel Jahre seit Hipparchs Beobachtung ungefähr vergangen sind.

W. Ihle

**Lesen – das ist die beste Lehre,
den Gedanken eines großen Menschen
zu folgen, ist die unterhaltsamste
Wissenschaft.**

Alexander Puschkin

**Bücher lesen, heißt wandern gehen
in ferne Welten, aus den Stuben über
die Sterne.**

Jean Paul

100 Bände Mathematische Schülerbücherei

Als vor rund 16 Jahren das Politbüro des ZK der SED und der Ministerrat den Mathematikbeschluß faßten, wurde damit auch die Idee der „Mathematischen Schülerbücherei“ geboren. Sie sollte dazu beitragen, das Interesse an der Mathematik und die Freude an mathematischer Betätigung zu wecken und damit die mathematischen Kenntnisse der Schüler und Jugendlichen zu verbessern.

Verschiedene Verlage taten sich zusammen, um für alle Klassen- und Altersstufen entsprechende mathematische Literatur herauszubringen, Verlage, die schon eine gewisse Tradition auf diesem Gebiet hatten; wie z. B. der Teubner-Verlag (BGT), der Deutsche Verlag der Wissenschaften (DVW), der Verlag Volk und Wissen (VWV), aber auch der Urania-Verlag (U), der Fachbuchverlag (FV) und der Kinderbuchverlag (KV).

Als Autoren wurden hauptsächlich Mathematiklehrer und Wissenschaftler an Universitäten und Hochschulen gewonnen, die bereits in der Arbeit mit Schülerzirkeln Erfahrungen gesammelt hatten. So entstanden z. B. die „Übungen für Junge Mathematiker“, die bei der Vorbereitung auf die Mathematik-Olympiaden eingesetzt werden, die „Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik“ von M. Hasse, das Büchlein „Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene“ von E. Hameister, die vier Bändchen von H. Belkner über „Determinanten“, „Matrizen“, „Metrische Räume“ und „Reelle Vektorräume“ und viele andere.

Ein großer Teil der Bändchen der Mathematischen Schülerbücherei wurde aus anderen Sprachen übersetzt. An erster Stelle stehen die Übersetzungen aus dem Russischen, denn in der UdSSR ist bei vielen Schülern die Beschäftigung mit der Mathematik über den Rahmen der Schule hinaus zu einer beliebten Freizeitbeschäftigung geworden, die mit Ausdauer und Fleiß betrieben wird und deren Erfolge sich bei der Internationalen Mathematik-Olympiade zeigen. Bedeutende sowjetische Wissenschaftler unterstützen die Schüler durch entsprechende Literatur. Zu den ersten Übersetzungen in dieser Reihe gehörten Werke von Mathematikern mit Weltruf wie z. B. „Einführung in die Gruppentheorie“ von P. S. Alexandroff und „Die Fibonaccischen Zahlen“ von N. N.

Worobjow. Viele weitere folgten, z. B. „Die Methode der vollständigen Induktion“ von I. S. Sominski, die „Ungewöhnliche Algebra“ von I. M. Jaglom, die „Unterhaltsame Mengenlehre“ von N. J. Wilenkin.

Aber auch Bücher aus anderen Ländern wurden übersetzt und in diese Reihe aufgenommen, z. B. „Einführung in die Graphentheorie“ von J. Šedláček aus dem Tschechischen, „Kombinatorik“ von L. Lovász, J. Pelikán und L. Vesztegombi aus dem Ungarischen und „Zählen und Rechnen einst und jetzt“ von W. Kryszicki aus dem Polnischen.

Bei der Entwicklung der Mathematischen Schülerbücherei haben sich zwei Wissenschaftler besonders verdient gemacht, denen Dank gebührt, doch die das Erscheinen des 100. Bändchens nicht mehr erleben konnten: Dr. Ernst Hameister und Professor Dr. Herbert Karl.

Viele von den Bänden der Reihe haben bei den Schülern großes Interesse gefunden und sind schon in mehreren Auflagen erschienen. Es ist ja auch wirklich erstaunlich, wie viele interessante Fragen und Probleme mit Hilfe der Mathematik beantwortet und gelöst werden können. Mancher, der ursprünglich glaubte, die Mathematik sei eine „trockene“ Sache, hat sich schon durch interessante Lektüre vom Gegenteil überzeugen lassen.

So zeigt z. B. O. Zich im Buch „Unterhaltsame Logik“, wie man mit Hilfe mathematischer Schlüsse einen Kriminalfall lösen kann. N. J. Willenkin erzählt in seinem obengenannten Buch, was John Tichy auf seiner 1001. Reise in eine andere Galaxis in einem Hotel mit unendlich vielen Betten erlebt hat; dabei zeigt sich, daß man der „Wunderwelt des Unendlichen“ mit mathematischen Mitteln ganz schön beikommen kann! So könnte man noch viele Beispiele bringen, wie in den Büchern heiter und unterhaltsam, aber auch ernst und zielstrebig mathematische Zusammenhänge dargeboten werden. Doch das Beste ist, ihr seht euch die Liste der 100 bisher erschienenen oder in nächster Zeit erscheinenden Bändchen auf der IV. Umschlagseite einmal genauer an; dann wird bestimmt jeder etwas Interessantes für sich finden.

D. Ziegler

Einstein und die Uhrzeiger

Einsteins Name ist untrennbar mit der neuen Auffassung des Zeitbegriffs verbunden. Im folgenden geben wir eine Aufgabe an, die Einstein während einer leichten Erkrankung von einem Freund gestellt wurde: Wann können auf einer Uhr der große und kleine Zeiger vertauscht werden, ohne daß falsche (d.h. unmögliche) Zeigerstellungen entstehen?



Hier ist eine Lösung des Problems: Es genügt, die Zeigerstellungen zu untersuchen, die sich etwa von Mitternacht bis Mittag ergeben, da sich von Mittag bis Mitternacht die Zeigerstellungen wiederholen. Wir benutzen die im allgemeinen gegebene Unterteilung des Ziffernblattes in 60 Teile (Minutenstriche). Zu einem bestimmten Zeitpunkt z seien der Stundenzeiger x und der Minutenzeiger y Teilstriche (im Uhrzeigersinn gerechnet) von der 12 (Mitternacht) entfernt. Wir müssen beachten, daß die Stellung des Stundenzeigers bereits genau die Zeit angibt und die Position des Minutenzeigers, der nur zur besseren Ablesbarkeit angebracht wurde, schon mitbestimmt ist, also nicht mehr beliebig ist. (Umgekehrt legt der Minutenzeiger die Uhrzeit nicht genau fest, da jeweils 12 verschiedene Stellungen des Stundenzeigers möglich sind.) Wenn zu einem Zeitpunkt z eine Zeigervertauschung eine sinnvolle Zeitangabe ergibt, so ist die vertauschte Zeigerstellung z'

durch y Teilstriche für den Stundenzeiger und x Teilstriche für den Minutenzeiger charakterisiert.

Der Stundenzeiger benötigt 12 Stunden, um einmal das Zifferblatt zu umlaufen, folglich für einen der 60 Teilstriche $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ Stunden.

Für 15 Teilstriche also 3 Stunden, für 16 Teilstriche 3,2 Stunden bzw. 3 Stunden und 12 Minuten. Entsprechend braucht der Minutenzeiger $\frac{1}{60}$ Stunden für einen Teilstrich. Der

„einfache“ Grundgedanke, der zur Lösung führt, beruht darauf, daß jede mögliche Zeigerstellung aus der Zeigerstellung 12 Uhr (Mitternacht) hervorgehen muß. Wir betrachten nun irgendeine Zeigerstellung z , die durch x bzw. y Teilstriche für Stunden- bzw. Minutenzeiger bestimmt ist. Dann waren vor $\frac{x}{5}$ Stunden beide Zeiger auf der 12. Da $\frac{y}{60}$ die Minuten angibt, die verstrichen sind, seit der Minutenzeiger die 12 das letzte Mal verlassen hat, gibt $\frac{x}{5} - \frac{y}{60}$ die ganzen Stunden an, die seit dem gemeinsamen Stehen auf 12 Uhr (Mitternacht) verflossen sind. Damit ist $\frac{x}{5} - \frac{y}{60}$ eine ganze Zahl zwischen 0 und 11:

$$\frac{x}{5} - \frac{y}{60} = m \quad (m=0, 1, 2, \dots, 11). \quad (1)$$

Wenn der Zeitpunkt z eine sinnvolle Vertauschung zuläßt, so muß die durch y Teilstriche für den kleinen und x Teilstriche für den großen Zeiger gegebene Stellung z' möglich sein, d.h., in diesem Fall hätten beide Zeiger vor $\frac{y}{5}$ Stunden auf der 12 (Mitternacht) stehen müssen. Entsprechend gibt

$$\frac{y}{5} - \frac{x}{60} = n \quad (n=0, 1, 2, \dots, 11) \quad (2)$$

Das Gleichungssystem (1), (2) stellt den rechnerischen „einfachen“ Grundgedanken dar. Eine gleichwertige Schreibweise für das System ist

$$\begin{aligned} 12x - y &= 60m \quad (m, n=0, 1, 2, \dots, 11) \\ 12y - x &= 60n. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$x = \frac{60(12m+n)}{143}, y = \frac{60(12n+m)}{143}$$

mit $m, n=0, 1, 2, \dots, 11$. Setzen wir für m und n

alle zulässigen Werte ein, so erhalten wir alle Lösungen.

Die Stundenangabe ergibt sich aus der größten ganzen Zahl von $\frac{x}{5}$ oder einfacher aus der natürlichen Zahl m ; y gibt die Minuten an.

Für $m=n=0$ erhalten wir die Zeigerstellung 12 Uhr (Mitternacht), die durch Vertauschen ungeändert bleibt. Zu $m=0$ und $n=1$ gehören $x = \frac{60}{143}$ und $y = \frac{720}{143} = 5\frac{5}{143}$.

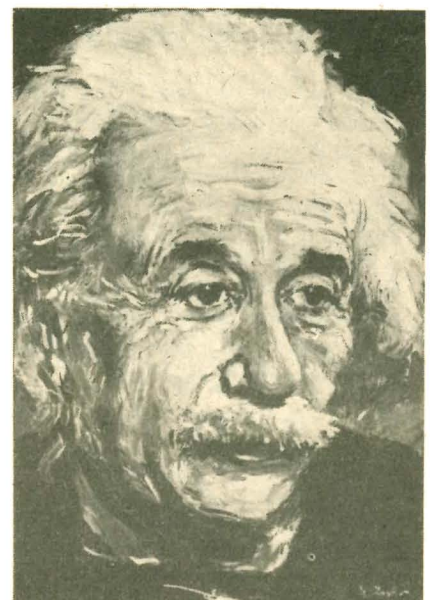
Die $\frac{60}{143}$ Teilstriche des kleinen Zeigers geben 0 Stunden ($m=0$) an, die $5\frac{5}{143}$ Teilstriche des

großen Zeigers bedeuten $5\frac{5}{143}$ Minuten. Vertauschung von x und y liefert die Zeit 1 Uhr und $\frac{60}{143}$ Minuten ($n=1$). Fahren wir so fort, so erhalten wir für jedes m genau 12 Kombinationen mit einem n , insgesamt also $12 \cdot 12 = 144$ Vertauschungsmöglichkeiten. Für $m=n=11$ folgt aber $x=60$, $y=60$ (Mittag, 12 Uhr), und diese Zeigerstellung ergab sich ja bereits für $m=n=0$. Also gibt es von Mitternacht bis Mittag 143 Zeitpunkte, an denen die Zeiger der Uhr vertauscht werden können.

Mitgeteilt von R. Thiele

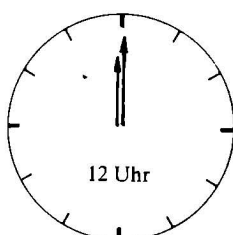
Persönlichkeiten werden nicht durch schöne Reden geformt, sondern durch Arbeit und Leistung.

A. Einstein

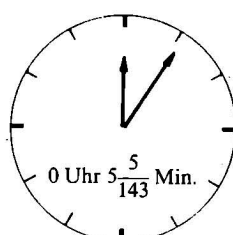


Dieses Bild wurde 1978 im Auftrage der Friedrich-Schiller-Universität Jena von dem Jenaer Maler Hans Lasko zur Ausgestaltung der 9. Internat. Konferenz gemalt.

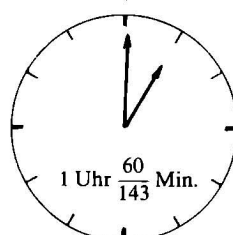
A $m=n=0$,
 $m=n=11$



B $m=0$, $n=1$
D $m=0$, $n=1$



C $m=1$, $n=0$
E $m=1$, $n=0$



9. Internationaler Kongreß über Allgemeine Relativitätstheorie und Gravitation 1980 in Jena

In einem ADN-Gespräch teilte Prof. Dr. E. Schmutzer, Mitglied der Internationalen Gesellschaft für allgemeine Relativitätstheorie und Gravitation, mit, daß im Juli 1980 an der Jenaer Friedrich-Schiller-Universität der 9. Kongreß stattfinden wird. Führende Wissenschaftler auf dem Gebiet der relativistischen Physik aus über 40 Ländern werden als Teilnehmer erwartet. Dieser Kongreß wird einer der wissenschaftlichen Höhepunkte der Ehrungen zum 100. Geburtstag des Begründers der allgemeinen Relativitätstheorie, Albert Einstein, in der DDR sein.

Im Mittelpunkt des für die thüringische Universitätsstadt ersten Weltkongresses werden die aus der Einsteinschen Theorie resultierenden neuesten Erkenntnisse auf diesem physikalischen Fachgebiet stehen. Etwa ein Drittel der geplanten Vorträge wird experimenteller Art sein und sich u. a. mit dem Nachweis von Gravitationswellen befassen. Die theoretischen Beiträge untersuchen auch die enge Verbindung zwischen Relativitätstheorie und Quantentheorie.

An der Friedrich-Schiller-Universität wird seit zwei Jahrzehnten international anerkannte Forschung betrieben. Enge Kontakte bestehen zu ähnlichen Forschungseinrichtungen in vielen Ländern, insbesondere in die UdSSR nach Moskau und Minsk sowie nach London und Kopenhagen.



9th International Conference on General Relativity and Gravitation under the auspices of the International Society for G.R.G. (July 14-19, 1980, Friedrich Schiller Universität Jena). Das Signet zeigt die Buchstaben GR9.

9. Internationale Konferenz über Relativitätstheorie und Gravitation



„Albert Einstein war schließlich nicht der Schlechteste, und er hatte keinen Taschenrechner!“

Gute Grundkenntnisse gefragt

Klasse 5

▲1▲ Entscheide, ob Frank recht hat, wenn er behauptet:

a) Es gibt wenigstens eine natürliche Zahl x , für die

$$x \cdot 0 = x \text{ ist.}$$

b) Es gibt wenigstens eine natürliche Zahl m , für die

$$m \cdot 0 = 1 \text{ ist.}$$

c) Für jede natürliche Zahl z ist $z \cdot 3 > z$.

▲2▲ a) Welcher der Dezimalbrüche 0,7; 0,1 : 0,09 ist am weitesten von Null entfernt?

b) Gib die kleinste natürliche Zahl an, die größer als 4,12 ist!

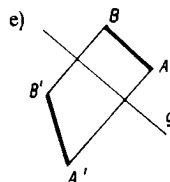
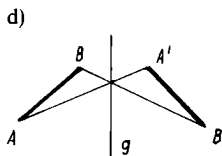
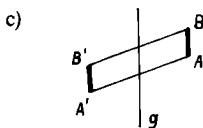
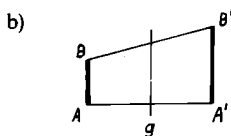
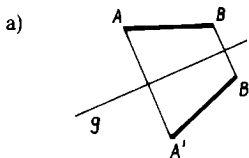
c) Gib die größte natürliche Zahl an, die kleiner als 6,71 ist!

▲3▲ Zwischen welchen benachbarten natürlichen Zahlen liegen die Ergebnisse folgender Aufgaben?

a) $4,71 + 0,12$ b) $9,30 + 2,99$

c) $1,79 - 0,75$ d) $5,02 - 1,75$

▲4▲ In welchen Beispielen kann die Strecke $\overline{A'B'}$ nicht das Spiegelbild von $\overline{AB}$ bezüglich der Geraden g sein? Begründe deine Antwort!



Klasse 6

▲1▲ Von den natürlichen Zahlen a und b weiß man, daß höchstens eine durch 9 teilbar ist. Ist ihr Produkt (ihre Differenz) durch 9 teilbar?

▲2▲ Es gilt $a|b$ und $a|c$. Kann man daraus schließen, daß

$$a|(b-c)?$$

▲3▲ Zerlege 18 so in zwei Faktoren, daß

- beide durch 3 teilbar sind;
- genau einer durch 3 teilbar ist;
- keiner durch 3 teilbar ist.

▲4▲ Bestimme das Volumen der Quader Q_1 und Q_2 , deren Kantenlänge a , b , c gemessen wurde:

	a	b	c
Q_1	4 dm	18 dm	2,6 dm
Q_2	0,75 dm	1,2 dm	0,64 dm

Runde die Ergebnisse sinnvoll!

Klasse 7

▲1▲ Peter ist 12 Jahre alt, seine Schwester Ute schon 24 Jahre, also doppelt so alt wie Peter.

a) Wie alt waren beide vor 6 Jahren? Wievielmals so alt wie Peter war damals Ute?

b) Ist das Alter von Ute proportional zu Peters Alter?

Bestimme den Proportionalitätsfaktor, wenn das zutrifft!

▲2▲ Gegeben sei ein Trapez mit den Grundseiten $a=8$ cm und $c=6$ cm. Seine Höhe betrage 3 cm.

a) Berechne für dieses Trapez den Flächeninhalt!

b) Verkleinere die Grundseite a um jeweils 1 cm, bis $a=c$ gilt.

Berechne die Flächeninhalte der so entstandenen Trapeze!

c) Untersuche, ob der Flächeninhalt der Trapeze proportional zur Grundseite a ist.

▲3▲ Rechne folgende Aufgaben (Prüfe stets, ob es mehrere Lösungen gibt!):

a) $\frac{b}{3} - \frac{2}{3} = 1$

b) $\frac{5}{6} - \frac{v}{3} = \frac{1}{2}$

c) $0,2 + a = 0,7$

d) $0,20 + u = 0,200$

▲4▲ Fülle folgende Tabelle aus!

a	b	$a:b$	$a:b < a$	$a:b > a$
27	$\frac{3}{4}$			
27	3			
$\frac{1}{2}$			nein	nein
$\frac{2}{5}$	0			
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$			

Fünf Aufgaben aus Freundesland

Aufgaben der schriftlichen Aufnahmeprüfung 1976 im Fach Mathematik für Studienbewerber der Moskauer Staatlichen Universität „M. W. Lomonossow“, Fakultät für numerische Mathematik und Kybernetik

▲ 1 ▲ Gegeben seien ein Parallelogramm mit den Längen der Seiten $\sqrt{19}$ und $\frac{1}{6}\sqrt{2}$ sowie dem Winkel 45° zwischen diesen Seiten und ein Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{3}{5}\sqrt{2}$. Es ist zu ermitteln, was größer ist: der Flächeninhalt des Parallelogramms oder der Flächeninhalt des Quadrats.

▲ 2 ▲ Es sind alle reellen Lösungen (x, y) des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 7^y \cdot \log_5 x &= -2 & (1) \\ 4 \cdot 7^y + \log_5 x &= 2 \text{ zu ermitteln.} & (2) \end{aligned}$$

▲ 3 ▲ Man ermittle alle Werte für $\cot x$, für die

$$\begin{aligned} \sqrt{2 + \cot x - \sin^2 x} - \sqrt{\frac{4}{17} - \sin^2 x} \\ = \sqrt{\frac{30}{17} + \cot x} \text{ gilt.} & (1) \end{aligned}$$

▲ 4 ▲ In der Ebene seien zwei einander schneidende Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten N_1 und N_2 und den Radien $r_1 = 5\sqrt{2}$, $r_2 = 8$ gegeben. Die Strecke $\overline{N_1 N_2}$ schneidet beide Kreise; dabei gilt $\angle FN_2 N_1 = 45^\circ$, wobei F einer der beiden Schnittpunkte der Kreise k_1 und k_2 ist.

Nun seien L der Schnittpunkt des Kreises k_1 mit der Strecke $\overline{N_1 N_2}$ und $\triangle KLM$ ein rechtwinkliges Dreieck mit $\angle KLM = 90^\circ$, wobei $\overline{KM}$ eine Sehne des Kreises k_2 ist, die senkrecht auf der Geraden $N_1 N_2$ steht.

Man ermittle die Längen der Seiten des Dreiecks KLM , wenn bekannt ist, daß $\overline{KL} > 8$.

▲ 5 ▲ Es sind alle positiven reellen Zahlen a zu ermitteln, für die es unendlich viele reelle Zahlen x und y gibt, die gleichzeitig die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} 18x^2 + \frac{3}{2}(1-a)(x^3 + 9x) \\ - \frac{1}{8}a(x^2 + 9)^2 \leq 0, & (1) \end{aligned}$$

$$\frac{6x}{x^2 + 9} = \frac{1}{9y} + \frac{ay}{3} + \frac{a}{b}, \quad (2)$$

$$y > 0. \quad (3)$$

Lösungen:

▲ 1 ▲ Für den Flächeninhalt F_1 des Parallelogramms gilt, da die Seitenlängen gleich $\sqrt{19}$ bzw. $\frac{1}{6}\sqrt{2}$ und der eingeschlossene Winkel gleich 45° sind,

$$F_1 = \sqrt{19} \cdot \frac{1}{6}\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ.$$

Wegen $\sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$\text{folgt } F_1 = \sqrt{19} \cdot \frac{1}{6}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{6}\sqrt{19}.$$

Für den Flächeninhalt F_2 des Quadrats gilt, da die Seitenlänge gleich $\frac{3}{5}\sqrt{2}$ ist,

$$F_2 = \left(\frac{3}{5}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{18}{25}.$$

Also gilt

$$F_1^2 = \frac{19}{36}, \quad F_2^2 = \frac{324}{625}.$$

Daraus folgt

$$F_1^2 > F_2^2;$$

denn $19 \cdot 625 > 36 \cdot 324$, weil $11875 > 11664$.

Wegen $F_1 > 0$, $F_2 > 0$ gilt daher

$$F_1 > F_2,$$

d. h., der Flächeninhalt des Parallelogramms ist größer als der Flächeninhalt des Quadrats.

▲ 2 ▲ Setzt man $7^y = u$, $\log_5 x = v$, so erhält man das Gleichungssystem

$$u \cdot v = -2 \quad (3)$$

$$4u + v = 2. \quad (4)$$

Ist nun (u, v) eine Lösung dieses Gleichungssystems, so gilt

$$u \neq 0, \quad v = -\frac{2}{u},$$

also wegen (4)

$$4u - \frac{2}{u} = 2,$$

$$u^2 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2} = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen

a) $u = 1$; dann ist $v = -2$;

b) $u = -\frac{1}{2}$; dann ist $v = 4$.

Im Falle a) erhält man

$$7^y = 1, \text{ also } y = 0;$$

$$\log_5 x = -2, \text{ also } x = 5^{-2} = \frac{1}{25}.$$

Die Probe zeigt, daß für diese Werte von x und y die Gleichungen (1) und (2) erfüllt sind.

Im Falle b) erhält man

$$7^y = -\frac{1}{2};$$

da aber für alle reellen Zahlen y $7^y > 0$ gilt, erhält man in diesem Falle keine reelle Lösung. Daher hat das Gleichungssystem (1), (2) genau eine reelle Lösung, nämlich

$$x = \frac{1}{25}, \quad y = 0.$$

▲ 3 ▲ Es sei x eine reelle Lösung der Gleichung (1). Dann gilt

$$\begin{aligned} 2 + \cot x - \sin^2 x &= \left(\sqrt{\frac{4}{17} - \sin^2 x} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{30}{17} + \cot x} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 + \cot x - \sin^2 x &= \frac{4}{17} - \sin^2 x + \frac{30}{17} + \cot x \\ &\quad + 2 \sqrt{\left(\frac{4}{17} - \sin^2 x \right) \left(\frac{30}{17} + \cot x \right)}, \end{aligned}$$

$$\text{also } \left(\frac{4}{17} - \sin^2 x \right) \left(\frac{30}{17} + \cot x \right) = 0. \quad (2)$$

Die Gleichung (2) ist erfüllt, wenn

$$\text{a) } \cot x = -\frac{30}{17} \text{ oder}$$

$$\text{b) } \sin^2 x = \frac{4}{17}.$$

Im Falle a) gilt wegen $\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \cot^2 x$,

also

$$1 - \sin^2 x = \sin^2 x \cot^2 x, \text{ d. h.}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \cot^2 x},$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \frac{900}{1189}} = \frac{289}{1189}.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} \frac{4}{17} - \sin^2 x &= \frac{4}{17} - \frac{289}{1189} \\ &= \frac{4756 - 4913}{1189 \cdot 17} < 0, \end{aligned}$$

d. h., der zweite Radikand auf der linken Seite von (1) ist negativ, die Gleichung (1) hat also in diesem Falle keine reelle Lösung.

Im Falle b) gilt

$$\cot^2 x = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \frac{4}{17}}{\frac{4}{17}} = \frac{13}{4},$$

$$\text{also } \cot x = \frac{1}{2}\sqrt{13} \text{ oder } \cot x = -\frac{1}{2}\sqrt{13}.$$

Nun gilt aber

$$\frac{30}{17} < \frac{1}{2}\sqrt{13}; \text{ denn } \frac{900}{289} < \frac{13}{4},$$

weil $3600 < 3757$,

und daher $\cot x \neq -\frac{1}{2}\sqrt{13}$, da sonst der Radikand auf der rechten Seite von (1) negativ wäre.

Also gilt

$$\cot x = \frac{1}{2}\sqrt{13},$$

und nur für diesen Wert ist die Gleichung (1) erfüllt, was durch die Probe bestätigt wird; denn es gilt

werden wir sie zu beweisen versuchen, andernfalls konzentrieren wir uns darauf, sie zu widerlegen. Die Aussage ist widerlegt, wenn wir ein spezielles Beispiel finden können, in dem sämtliche Voraussetzungen erfüllt sind, die Behauptung jedoch gilt nicht (Gegenbeispiel). Andernfalls versuchen wir, Argumente zu finden, die für die Richtigkeit der Aussage sprechen; dazu bietet sich im allgemeinen die Betrachtung geeigneter Spezialfälle an. In unserer Aufgabe sehen wir sofort: Wenn alle Zahlen gleich sind, dann ist ihre Summe gleich n (warum?). Sind nicht alle Zahlen gleich, so muß es wegen der Voraussetzung (V_3) solche geben, die größer als 1 sind, und solche, die kleiner sind als 1. Nehmen wir z. B. den Spezialfall zweier Zahlen, von denen eine $c > 1$ ist; dann ist die andere $\frac{1}{c} < 1$. Ist nun $c + \frac{1}{c} \geq 2$? Für alle $c \geq 2$

stimmt das offenbar. Das bestärkt uns in der Vermutung, daß die Aussage richtig ist. Wir werden also versuchen, sie zu beweisen.

Selbstverständlich wird man sich bei der Analyse andersartiger Aufgabenstellungen gegebenenfalls anderer oder weiterer Vorüberlegungen bedienen; beispielsweise hat sich das Anfertigen einer Skizze bei geometrischen Problemen bewährt.

(II) Die Analyse hat ergeben: Das Lösen der Aufgabe besteht im Beweisen der Aussage. Beim Suchen eines Beweisansatzes helfen oft folgende Fragestellungen.

(1) Läßt sich der zu beweisende Satz zweckmäßiger formulieren? Ist eine Umformulierung der Voraussetzungen bzw. der Behauptung nützlich? Wie sind die auftretenden Begriffe definiert? Kann ich statt einer Voraussetzung eine dazu äquivalente Aussage oder eine unmittelbare Folgerung aus dieser zweckmäßig benutzen?

Vielleicht finden wir auch eine „beweistechnisch“ leichter zugängliche Formulierung des Satzes.

Es gibt sogar Fälle, in denen es einfacher ist, einen allgemeineren Zusammenhang zu beweisen, aus dem sich unsere Behauptung als Spezialfall ergibt (vgl. Aufgabenteil b)). Oder aber wir fragen umgekehrt:

(2) Läßt sich ein Spezialfall des Satzes leicht beweisen?

Offenbar ist dies der Fall bei unserem Satz, der für zwei Zahlen einfach bewiesen werden kann. Wir wollen zeigen: Wenn a_1, a_2 positive reelle Zahlen, $a_1 \cdot a_2 = 1$, so $a_1 + a_2 \geq 2$. Es liegt nahe, die schon oben gemachte Überlegung zu einem Beweis auszubauen. Falls $a_1 = a_2 = 1$, so ist $a_1 + a_2 = 2$. Andernfalls ist eine der Zahlen, etwa a_1 , größer als 1, und dafür $a_2 < 1$.

Übung 1: Beweisen Sie für diesen Fall die Behauptung $a_1 + a_2 \geq 2$, indem Sie $a_1 = 1 + c$

($c > 0$) setzen und die Zerlegung $\frac{1}{1+c} = 1 - \frac{c}{c+1}$ benutzen!

Vielleicht wären wir bei der Behandlung des Spezialfalles $n=2$ auch so vorgegangen: Ist

$a_1 = a > 0$, so muß $a_2 = \frac{1}{a}$ sein, also ist zu zeigen:

$a + \frac{1}{a} \geq 2$ für beliebiges $a > 0$. Wenn dies

gilt, dann auch (nach Multiplikation mit $a > 0$) $a^2 + 1 \geq 2a$ oder $a^2 - 2a + 1 \geq 0$ oder $(a-1)^2 \geq 0$. Die letzte Ungleichung ist nun gewiß richtig, da das Quadrat einer reellen Zahl nie negativ ist. Der Beweis ist erbracht, wenn eine wahre Aussage am Anfang der Schlußkette und an ihrem Ende die Behauptung steht. Also brauchen wir, um unseren Beweis zu führen, nur zu überlegen, ob alle Schlüsse umkehrbar sind. Dies ist in der Tat möglich. Für beliebiges a ist $(a-1)^2 \geq 0$, also $a^2 - 2a + 1 \geq 0$ oder $a^2 + 1 \geq 2a$. Falls $a > 0$,

folgt daraus $a + \frac{1}{a} \geq 2$. Der Beweis zeigt außerdem, daß das Gleichheitszeichen genau dann

eintritt, wenn $a = 1 = \frac{1}{a}$ ist.

Der erste Beweis ging von den Voraussetzungen aus, die wir geeignet formulierten bzw. umformulierten, bis wir schließlich die Behauptung $a_1 + a_2 \geq 2$ verifiziert hatten. Beim zweiten Beweisversuch hingegen haben wir gewissermaßen „von hinten“, nämlich mit der Behauptung begonnen und diese mehrfach umgeformt, um so Anregungen für die Beweisführung zu erhalten. Weitere Anregungen vermitteln häufig auch folgende Fragestellungen:

(3) Ist uns die Lösung einer ähnlichen Aufgabenstellung bekannt? In diesem Falle könn-

ten wir versuchen, daraus methodische Anregungen für unsere Problemstellung zu gewinnen. Auch nach jedem Teilschritt kann man sich fragen: Erinnert mich die gegenwärtige Konstellation in der Beweisführung an eine ähnliche Stelle eines schon geführten Beweises? (Je mehr Beweise man kennt, desto größer ist das Repertoire an Ideen.) Welche Voraussetzungen wurden noch nicht benutzt?

(4) Welche bekannten Sätze können wir bei der Lösung unserer Aufgabe benutzen?

Suchen Sie besonders solche Sätze, deren Voraussetzungen auch solche der zu beweisenden Aussage sind!

Übung 2: Beweisen Sie nun den unter a) genannten Satz! Anleitung:

Natürlich liegt es hier nahe, die Beweismethode der vollständigen Induktion heranzuziehen. Die Betrachtung des Spezialfalles $n=2$ liefert gerade den Induktionsanfang. Beim Beweis der Induktionsbehauptung benutze man die Zerlegung

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1} &= (a_1 a_{k+1} + a_2 + \dots + a_k) \\ &+ 1 + a_1 + a_{k+1} - 1 - a_1 a_{k+1} \\ &= (a_1 a_{k+1} + a_2 + \dots + a_k) \\ &+ 1 + (a_1 - 1)(1 - a_{k+1}), \end{aligned}$$

wobei $a_1 > 1$ und $a_{k+1} < 1$ angenommen wird.

(III) Jedes gelöste Problem wirft sofort neue Fragen auf, deren Beantwortung die ursprüngliche Aussage ergänzen und ihre Beziehungen zu anderen Problemstellungen aufdecken kann. Wir wenden uns also der Diskussion des erhaltenen Ergebnisses zu.

Prof. Dr. Horst Schumann (1. Reihe, 3. v. links) erhielt auf dem VIII. Päd. Kongreß den „Vaterländischen Verdienstorden“ in Gold. Er ist u. a. einer der hervorragenden Förderer der außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik in seiner Eigenschaft als Leiter der Mathematischen Schülergesellschaft der Karl-Marx-Universität Leipzig.



(1) Haben wir alle Voraussetzungen beim Beweis benötigt, oder können wir gewisse Voraussetzungen abschwächen, vielleicht sogar entbehren?

In unserer Aufgabe kann auf keine der Voraussetzungen verzichtet werden. Die Betrachtung geeigneter Beispiele zeigt: Läßt man irgendeine der Voraussetzungen weg, kann die Behauptung nicht aufrechterhalten werden. Finden Sie selbständig ein Beispiel, welches zeigt, daß keine der Zahlen negativ sein darf! Analog zur Frage nach der Abschwächung von Voraussetzungen stellen wir die Frage nach der Verschärfung der Behauptung:

(2) Hätte sich aus den Voraussetzungen auch eine schärfere Aussage beweisen lassen?

Offenbar kann die untere Schranke n für die Summe $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ nicht vergrößert werden, da für $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ die Summe

$$\sum_{i=1}^n a_i = n \text{ ist.}$$

Allerdings zeigt der Beweis, daß dieser Fall auch nur dann eintritt, wenn alle Zahlen a_i gleich 1 sind, und in jedem anderen Fall die Summe größer ist als n .

Wir können unser Resultat also wie folgt präzisieren:

Sind $a_1, a_2, \dots, a_n$ n positive reelle Zahlen ($n \geq 2$) mit $a_1 a_2 \dots a_n = 1$, so ist $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$, und das Gleichheitszeichen tritt dann und nur dann ein, wenn $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ ist.

(3) Welche Spezialfälle des Satzes sind von Interesse? Welche unmittelbaren Folgerungen gestattet der Satz?

Den Fall $n=2$ können wir auch geometrisch interpretieren:

Für den Umfang U eines Rechtecks mit den Seitenlängen a, b und dem Inhalt $A = ab = 1$ gilt $U = 2(a+b) \geq 4$, und das umfangskleinste Rechteck vom Inhalt 1 ist das Quadrat mit der Seitenlänge 1.

Übung 3: Folgern Sie diese Aussage aus obigem Satz!

Übung 4: Suchen Sie weitere unmittelbare Folgerungen aus unserem Satz!

(4) In welcher Weise läßt sich das Resultat verallgemeinern? Folgende triviale Verallgemeinerung liegt auf der Hand:

Sind $a_1, a_2, \dots, a_n$ beliebige reelle Zahlen mit $a_1 a_2 \dots a_n = \pm 1$,

so ist $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \geq n$.

Schließlich kann man noch nach einer Abschätzung für die Summe $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ fragen, wenn $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = c = \text{const}$ für die positiven Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ gilt. Unter Benutzung des für $c=1$ bewiesenen Satzes erhält man

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n + \frac{c-1}{c} M$$

mit $M = \max(a_1, \dots, a_n)$.

Wenden wir uns nun dem Aufgabenteil b) zu,

der sich von a) zunächst dadurch unterscheidet, daß die Behauptung zuerst aufgestellt werden muß.

(I) Welche Vermutung haben wir?

Als erstes erscheint die Vermutung gerechtfertigt, daß die Aufgabe lösbar ist; ob allerdings die Lösung eindeutig ist oder ob es Quader verschiedener Abmessungen der gewünschten Eigenschaft gibt, läßt sich von vornherein schwerer abschätzen. Vielleicht probieren wir ein wenig mit konkreten Zahlen, etwa $a+b+c=12$. Wer allerdings weiß, daß unter allen Rechtecken gleichen Umfangs das Quadrat das flächengrößte ist, wird durch Analogieschluß aus dem „ebenen Problem“ schneller die folgende Vermutung für das „räumliche Problem“ aufstellen:

Unter allen Quadern mit den Kantenlängen a, b, c konstanter Summe $s = a + b + c$ ist der Würfel mit der Kantenlänge $\frac{s}{3}$ der volumengrößte.

Wir formulieren den Sachverhalt ausführlich: **Voraussetzungen:** Gegeben ist ein Quader mit den Kantenlängen a, b, c und dem Volumen V ; $a+b+c=s$, $s>0$ konstant.

Behauptung: $V \leq V_{\max} = \left(\frac{s}{3}\right)^3$, und $V_{\max}$ tritt ein, wenn $a=b=c=\frac{s}{3}$ ist.

(II) Bei der Suche nach einem Beweisansatz können Sie versuchen, die zur Lösung des „ebenen Problems“ verwendete Beweisidee auf unsere Fragestellung zu übertragen. Wir wollen diese Kenntnisse jedoch nicht voraussetzen und fragen: Läßt sich der Satz zweckmäßiger formulieren? Wir behaupten

$V \leq \left(\frac{s}{3}\right)^3$, andererseits ist $V = abc$ und

$s = a + b + c$, also können wir die Behauptung auch so formulieren:

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \text{ oder } \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

In dieser Ungleichung steht rechts das arithmetische Mittel der drei positiven Zahlen a, b, c , und links steht ihr geometrisches Mittel, so daß unsere Behauptung gleichbedeutend ist mit der folgenden, die wir verallgemeinernd gleich für n Zahlen aussprechen: Das arithmetische Mittel A von n positiven Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ ist nicht kleiner als ihr geometrisches Mittel G :

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = G \leq A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

In dieser Ungleichung kommen das Produkt und die Summe von n positiven Zahlen vor; das muß uns doch an den Aufgabenteil a) erinnern! Allerdings ist das Produkt der n Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ nicht gleich 1, sondern es ist $a_1 a_2 \dots a_n = G^n$.

Übung 5: Folgern Sie die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel von n positiven reellen Zahlen aus dem in a) bewiesenen Resultat! Wann tritt das Gleichheitszeichen ein?

Hinweis: Man betrachte $a_1 a_2 \dots a_n = G^n$ als Anregung, von den n Zahlen $a_1, \dots, a_n$ zu n (positiven) Zahlen vom Produkt 1 überzugehen.

Damit haben wir also, auf die ursprüngliche Aufgabenstellung zurückkommend, bewiesen: Sind a, b, c die Kantenlängen eines Quaders, so gilt für dessen Volumen V stets

$$V = abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \left(\frac{s}{3}\right)^3,$$

und das Gleichheitszeichen tritt genau dann ein, wenn $a=b=c=\frac{s}{3}$ ist.

Hier haben wir das vorgelegte Problem also am zweckmäßigsten dadurch gelöst, daß wir eine allgemeinere, umfassendere Fragestellung behandelt haben, nämlich die nach der Größenbeziehung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel.

(III) Aus der Ungleichung $A \geq G$ läßt sich wiederum eine Vielzahl von Folgerungen ableiten.

Übung 6: Zeigen Sie, daß der Radius des Umkreises eines rechtwinkligen Dreiecks nie kleiner sein kann als die Länge der zur Hypotenuse gehörenden Höhe des Dreiecks!

Eine etwas weiterreichende Verallgemeinerung erhalten wir, wenn wir die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel anwenden auf die Zahlen $a_1, a_1, \dots, a_1, a_2, a_2, \dots, a_2, \dots, a_n, \dots, a_n$, wobei $a_1 p_1$ -mal, $a_2 p_2$ -mal, $\dots$, $a_n p_n$ -mal auftreten soll. Dann erhalten wir mit $p_1 + p_2 + \dots + p_n = m$ sofort:

$$\sqrt[m]{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n}} \leq \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n}{m}$$

Dieser Beitrag ist eine **Leseprobe** aus dem unten genannten Ratgeber für Schüler, Lehrer und Eltern.

Studienwunsch Mathematik

Ratgeber für Schüler, Lehrer und Eltern

Von einem Autorenkollektiv

der Karl-Marx-Universität Leipzig

unter Leitung von Prof. Dr. H. Schumann

162 Seiten, 8 Abb. 12 cm $\times$ 19 cm.

Kartonierte

Preis 7,90 M

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft

Leipzig

Bestell-Nr. 665 781 7

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 12. Juni 1979

Mathematik

Ma 5 ■ 1851 Im Pionierlager Artek auf der Krim verbringen *Junge Pioniere* aus befreundeten Ländern ihre Ferien. Während eines Durchgangs waren es viermal soviel Pioniere aus der Sowjetunion wie aus der Ungarischen Volksrepublik. Aus der VR Polen waren genau so viel Pioniere angereist wie aus der DDR. Die Anzahl der Pioniere aus der Sowjetunion war gleich der Summe der Anzahlen der Pioniere aus der DDR und der VR Polen. Insgesamt waren es mehr als 1990, aber weniger als 2000 Junge Pioniere. Wie viele Pioniere verbrachten in diesem Durchgang ihre Ferien in Artek? Wie viele Pioniere kamen aus den einzelnen Ländern?

Schülerin *Una Heinecke*,
Georg-Kunze-OS Eisenberg

Ma 5 ■ 1852 Einige Kinder spielen mit Murmeln. Sie haben 50 Murmeln so untereinander aufgeteilt, daß jedes Kind gleichviel Murmeln erhielt; dabei blieben 2 Murmeln übrig. Bevor das Spiel begann, wurde ein Kind von seiner Mutter weggerufen; es gab die erhaltenen Murmeln zurück. Die 50 Murmeln wurden erneut an die verbliebenen Kinder aufgeteilt; jetzt erhielt jedes Kind zwei Murmeln mehr als zuvor, und es blieben keine Murmeln übrig. Wie viele Kinder spielten mit Murmeln?

Schüler *Stefan Schleiff*, Halle

Ma 5 ■ 1853 Ein Teilnehmer an der *Kreisolympiade Junger Mathematiker* wurde gefragt, wieviel Punkte er erreicht habe. Er antwortete: „Wenn man zur Anzahl der von mir erreichten Punkte 10 addiert und die so erhaltene Summe verdoppelt, so fehlen noch 10 an 100 Punkten.“ Wie viele Punkte erreichte dieser Schüler?

Schülerin *Kathrin Benewitz*,
POS Zschornowitz

Ma 5 ■ 1854 Beim Ballweitwurf erreichten sechs Schüler folgende Wurfweiten: Bernd schaffte 16 m mehr als Antje, Jochen warf 2 m weiter als Peter, Dieter erzielte 6 m mehr als Birgit, Antje fehlten 14 m an der Wurfweite von Peter, Birgit schaffte 3 m mehr als Antje. Addiert man die Wurfweiten dieser sechs Schüler, so erhält man 148 m. Wie weit warf jeder von ihnen den Ball?

Schülerin *Grit Maciejewski*, Rostock,
Kl. 6

Ma 5 ■ 1855 Auf einem Solidaritätsbasar wurde von den Schülern der Klassen 5a, 5b und 5c einer Schule durch den Verkauf selbstgebastelter Gegenstände Geld eingenommen, das auf das Solidaritätskonto überwiesen wurde. Die Schüler der Klasse 5a erzielten eine Einnahme von 30 M. Die Schüler der Klassen 5b und 5c erzielten zusammen eine Einnahme von mehr als 61 M, aber weniger als 65 M. Wieviel Mark wurden auf das Solidaritätskonto insgesamt überwiesen, wenn die Einnahmen der Klassen 5b und 5c jeweils volle Markbeträge waren und die Schüler der Klasse 5c sieben Mark mehr erzielten als die Schüler der Klasse 5b?

Schüler *Klaus Mohnke*, Krupskaja-
OS Lübbenau, Kl. 7a

Ma 5 ■ 1856 Hans hatte im Garten Äpfel gepflückt und in drei Spankörbe gelegt. Beim Auszählen der Äpfel stellt er fest, daß sich im zweiten Korb ein Apfel weniger als im dritten befand und daß der dritte Korb drei Äpfel mehr enthielt als der zweite. Zusammen waren es 67 Äpfel. Wieviel Äpfel enthielt jeder dieser drei Körbe?

Schülerin *Gabriele Wehrsdorfer*,
Georg-Kunze-OS, Eisenberg, Kl. 5a

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion *alpha*
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm x 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1978/79 läuft von Heft 5/78 bis Heft 2/79. Zwischen dem 1. und 10. September 1979 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/78 bis 2/79 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgeschickt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/79 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten – richtig gelöst – (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/78 bis 2/79) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1978/79 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

	Thies Luther, 26 Güstrow, Werdersstr. 22 Kersding-OS, Klasse 7	Ma 7 1369
30	150	
	Prädikat:	
	Lösung:	

Ma 6 ■ 1857 Hans schaut morgens auf die Wanduhr in seinem Zimmer. Der große Zeiger hat $\frac{2}{5}$ seiner Kreisbewegung bis zur vollen Stunde zurückgelegt; der kleine Zeiger befindet sich zwischen den Ziffern 7 und 8.
a) Wie spät ist es zu diesem Zeitpunkt?
b) Berechne die Größe des Winkels, der von beiden Zeigern gebildet wird!

Schüler T. Weiß, Weimar

Ma 6 ■ 1858 Evelyn, Katrin, Susanne und Ulrike haben Altstoffe gesammelt und an die Erfassungsstelle abgeführt. Den Erlös übergaben sie ihrem Freundschaftsponierleiter als Solidaritätsspende für Vietnam. Jede von ihnen übergab dem Freundschaftsponierleiter einen vollen Markbetrag. Katrin übergab zweimal soviel (Mark) wie Ulrike, Evelyn übergab 2 M weniger als Katrin, Susanne übergab zweimal soviel (Mark) wie Evelyn. Alle vier zusammen übergaben mehr als 20 M, aber weniger als 30 M. Wieviel Mark hat jede der vier Schülerinnen dem Solidaritätskonto zugeführt?

Schülerin Silke Meißgeier, Schönbrunn, Kl. 6

Ma 6 ■ 1859 Heidrun berichtet von ihrer Familie folgendes:
„Meine Mutter ist dreimal so alt wie ich selbst. Mein Vater ist sechs Jahre älter als meine Mutter. Meine Schwester Katja ist acht Jahre jünger als ich. Meine Schwester Gabi ist dreimal so alt wie meine Schwester Katja. Addiert man die Lebensjahre (in ganzen Zahlen) aller Mitglieder der Familie, so erhält man als Ergebnis 95 Jahre.“ Wie alt ist jedes der Familienmitglieder?

Schülerin Heike Klüh, Heidrun Kirstein Mathe-Club Brandenburg Land (Ziesar)

Ma 6 ■ 1860 Rolf liest ein Buch. Am ersten Tag schafft er 12 Seiten, am zweiten Tag den vierten Teil der noch zu lesenden Seiten, am dritten Tag die restlichen 57 Seiten. Wie viele Seiten umfaßt dieses Buch?

Schüler Ch. Garz, Halle

Ma 6 ■ 1861 Ein D-Zug fährt um 21 Uhr in Berlin ab und kommt am folgenden Tag um 5 Uhr in Warschau an. Um 3 Uhr trifft er den Gegenzug (Warschau–Berlin) in Kutno. Wann ist der Gegenzug aus Warschau abgefahren? Die Entfernung Berlin–Warschau beträgt 560 km, die Entfernung Berlin–Kutno 420 km. (Die Geschwindigkeit beider Züge ist als gleich und konstant anzunehmen.)

Schüler Stefan Fritsch, Fürstenwalde, Kl. 6

Ma 7 ■ 1862 Über das gegenwärtige Lebensalter (in ganzen Zahlen) von vier Freunden mit den Vornamen Axel, Bernd, Christian und Dieter sei folgendes bekannt:

- (1) Axel ist jünger als Bernd.
- (2) Die Summe aus den Zahlen, die das Lebensalter von Bernd und Dieter angeben,

ist kleiner als die Summe aus den Zahlen, die das Lebensalter von Axel und Christian angeben.

(3) Die Summe aus den Zahlen, die das Lebensalter von Axel und Bernd angeben, ist gleich der Summe aus den Zahlen, die das Lebensalter von Christian und Dieter angeben.

Welcher dieser vier Freunde ist der Jüngste?

Schülerin Carola Stark, W.-Pieck-Stadt Guben, Kl. 7

Ma 7 ■ 1863 Zwei Fußballmannschaften A und B trugen ein Freundschaftsspiel aus. Insgesamt wurden 13 Tore geschossen. Das erste Spiel verlief unentschieden. Im zweiten Spiel fielen mehr Tore als im ersten Spiel, und zwar erzielte Mannschaft A im zweiten Spiel doppelt soviel Tore wie Mannschaft B. Es sind die Ergebnisse beider Spiele zu ermitteln.

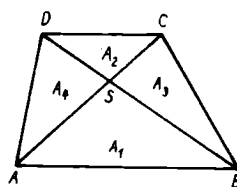
Schüler Steffen Gliwa, Staßfurt

Ma 7 ■ 1864 Im Jahre 1977 wurde in der Frauenklinik des Bezirkskrankenhauses von Karl-Marx-Stadt durchschnittlich in einem Zeitabstand von jeweils 124 Minuten ein Kind geboren. Von den in diesem Jahr in dieser Klinik insgesamt geborenen Kindern waren 55 Prozent Mädchen. Wie viele Knaben wurden im Jahre 1977 in dieser Klinik geboren?

Schüler Frank Thieme, Kl. 8, Karl-Marx-Stadt

Ma 7 ■ 1865 Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB} = a$ und $\overline{CD} = c$, und es gelte $a > c$. Ferner sei S der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$. Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt A_1 des Dreiecks ABS größer ist als der Flächeninhalt A_2 des Dreiecks CDS .

Schüler Klaus Mohnke, Krupskaja-OS Lübbenau, Kl. 7 a



Ma 8 ■ 1866 Für welche natürlichen Zahlen z wird die Differenz $z^2 - z$ ein ganzzahliges Vielfaches von 10? Dr. G. Hesse, Radebeul

Ma 8 ■ 1867 Gegeben sei die folgende Aussage:

„Für jede natürliche Zahl x ist $x^2 + x + 11$ eine Primzahl.“ Es ist zu entscheiden, ob diese Aussage wahr oder falsch ist. Die Entscheidung ist zu beweisen.

Schülerin Karin Ottlinger, Pirna

Ma 8 ■ 1868 Ein Dreieck ABC habe die konstanten Seitenlängen $a = 15$ cm und $b = 8$ cm. Man gebe Bedingungen für c an, unter denen das Dreieck ABC

- a) existiert, b) spitzwinklig ist,
- c) rechtwinklig ist, d) stumpfwinklig ist!

Schüler Jörg Casper, Hohndorf, Kl. 8

Ma 8 ■ 1869 Zwei Radfahrer, die 63 km voneinander entfernt wohnen, fahren einander entgegen. Der erste Radfahrer startet im Ort A um 9.00 Uhr und fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von $12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Der zweite Radfahrer startet zur gleichen Zeit im Ort B und fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Um wieviel Uhr und wieviel Kilometer von A entfernt treffen sich die beiden Radfahrer?

Schülerin Karin Ottlinger, Pirna, Kl. 8

Ma 9 ■ 1870 Irina geht einkaufen. Ihre Mutter hat ihr 2,65 M gegeben; Irina soll dafür 9 Stückchen Kuchen kaufen, und zwar Negerküsse zu 0,25 M, Apfelkuchen zu 0,35 M und Bienenstich zu 0,30 M je Stück. Irina gibt das Geld vollständig aus; sie kauft mehr Negerküsse als Apfelkuchen; vom Bienenstich kauft sie die wenigsten Stücke. Wieviel Stück Kuchen jeder Art hat Irina eingekauft?

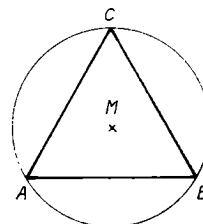
Schülerin Kathrin Scholl, Neubrandenburg, Kl. 6

Ma 9 ■ 1871 Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\angle BCA = 90^\circ$, $h_c = 3$ cm und $A = 12 \text{ cm}^2$. Wie lang sind die Seiten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$?

Schüler Steffen Lausch, Grimma, Kl. 8

Ma 9 ■ 1872 Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge 3 cm. Außerdem sei der Umkreis dieses Dreiecks konstruiert. Berechnen Sie den Flächeninhalt des schraffierten Flächenstückes! (Skizze nicht maßstäblich!)

Schüler Volker Leutheuser, Sonneberg, Kl. 8



Ma 9 ■ 1873 Es ist zu beweisen:

In jedem gleichseitigen Dreieck ist der Flächeninhalt des Quadrats über einer Seite dreimal so groß wie der Flächeninhalt des Quadrates über dem Radius des Umkreises dieses Dreiecks.

Schüler Jörg Schmidt, Neubrandenburg, Kl. 9

Ma 10/12 ■ 1874 Beweisen Sie, daß der Ausdruck $136^n - 5^n - 11^n$ für alle natürlichen Zahlen n mit $n > 0$ durch 10 teilbar ist!

Schüler T. Weiß, Weimar

Ma 10/12 ■ 1875 Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Katheten a (Länge der Seite $\overline{BC}$) und b (Länge der Seite $\overline{AC}$). Es sei b um 5 cm länger als a . Weiter gilt:

$$3 \cos(\beta + \gamma) + 6 \sin \alpha = 0.$$

Gesucht sind die Längen der Katheten und der Flächeninhalt des Dreiecks ABC .

P. Braumüller, Linz, Republik Österreich

Ma 10/12 ■ 1876 Es ist zu beweisen, daß stets gilt:

$$2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma!$$

Ing. A. Körner, Leipzig

Ma 10/12 ■ 1877 Einem regulären Oktaeder mit der Kantenlänge a sei eine Kugel so umschrieben, daß alle Eckpunkte des Oktaeders die Oberfläche der Kugel berühren.

a) Fertigen Sie eine anschauliche Skizze an!
b) Drücken Sie den Durchmesser der Kugel mit Hilfe der Kantenlänge a des Oktaeders aus!

c) Wie verhält sich das Volumen der umschriebenen Kugel zum Volumen des Oktaeders?

d) Aus dem in c) errechneten Verhältnis ist das Volumen der Kugel zu ermitteln, wenn die Kantenlänge des Oktaeders $a = 3,7$ cm beträgt.

Olaf Werger, EOS Nauen, Kl. 12

Physik

Ph 6 ■ 56 Peter hat einen Stein gefunden und möchte feststellen, welcher Gesteinsart dieser angehört. Deshalb bestimmt er zunächst die Masse des Steines mit 242 g. Beim Eintauchen des Steines in einen Meßzylinder steigt das Volumen des Wassers von 250 ml auf 343 ml. Wie kann Peter aus den gegebenen Größen die Gesteinsart bestimmen?

Ph 7 ■ 57 Bei Bremsversuchen mit einem PKW werden bei verschiedenen Geschwindigkeiten die Bremswege gemessen. Dabei ergeben sich folgende Werte:

Geschwindigkeit

in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ 20 40 60 80 100

Bremsweg in m 2,6 10,2 23,6 41 64

a) Fertige eine grafische Darstellung an!
b) Untersuche, ob zwischen Geschwindigkeit und Bremsweg Proportionalität besteht!
c) Entnimm der Zeichnung den Bremsweg bei $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$!

d) Entnimm der Zeichnung die Geschwindigkeit für einen Bremsweg von 16 m; 31,4 m!

Ph 8 ■ 58 Bestimme den Wirkungsgrad eines Tauchsieders aus folgenden Messungen!

Stromstärke	$I = 4,5$ A
Spannung	$U = 220$ V
Zeit	$t = 270$ s
Masse des Wassers	$m = 750$ g
Anfangstemperatur	$\vartheta_1 = 15,5^\circ$
Endtemperatur	$\vartheta_2 = 91,5^\circ$

(Hinweis: cal sind in Ws umzurechnen)

Ph 9 ■ 59 Ein elektrischer Trockenofen soll je Stunde 2,5 Mcal abgeben. Berechnen Sie

den Widerstand des Heizkörpers, wenn bei einer Netzspannung von 220 V die notwendige Heizleistung gebracht wird! (Verluste sollen unberücksichtigt bleiben.)

Ph 10/12 ■ 60 Die Straßenbahnen fahren auf einer Strecke im zeitlichen Abstand von 12 min mit einer Geschwindigkeit von 48 km h^{-1} . In der gleichen Fahrtrichtung läuft ein Fußgänger mit der Geschwindigkeit von 4 km h^{-1} . Berechnen Sie den zeitlichen Abstand, in dem der Fußgänger die Bahnen an sich vorüberfahren sieht!

Chemie

Ch 7 ■ 45 Im VEB Hydrierwerk Zeitz wird in Winkler-Generatoren Wasserdampf über glühende Kohle geleitet. Dabei entsteht ein Gemisch von Kohlenmonoxid und Wasserstoff, welches als Wassergas bezeichnet wird. Wieviel Tonnen Wassergas werden aus 5 t Koks, der 80% Kohlenstoff enthält, bei einem Gasverlust von 15% gewonnen?

Ch 8 ■ 46 Ein aus Steinkohle erhaltenes Generatorgas hat folgende Zusammensetzung:

23,5% Kohlenmonoxid
6,3% Wasserstoff
5,1% Kohlendioxid
62,4% Stickstoff
1,7% Methan

Es sei angenommen, die Luft besteht zu 21% aus Sauerstoff.

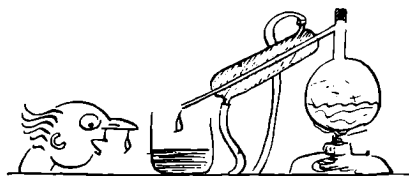
Zu berechnen sind

a) die theoretisch zur Verbrennung von 1 m^3 Gas erforderliche Luftmenge
b) die prozentuale Zusammensetzung der Rauchgase.

Ch 9 ■ 47 Ester der Hexadekansäure ist Hauptbestandteil des Bienenwachses. Wieviel Gramm eines Alkanöls mit

a) 15 Kohlenstoffatomen im Molekül müssen eingesetzt werden, damit 250 g des Esters der Hexadekansäure gebildet werden?

b) Wieviel Gramm der Säure müssen zur Reaktion gebracht werden?



Ch 10/12 ■ 48 Im VEB Chemiewerk Coswig/Anhalt wird Schwefelsäure unter Nutzung einheimischer Rohstoffe nach dem Gips-Schwefelsäure-Verfahren hergestellt. Wieviel Tonnen 98%ige Schwefelsäure lassen sich aus 208 t Anhydrit herstellen?

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Heute stellen wir erneut Lösungsvarianten zu Wettbewerbsaufgaben vor, die bei uns eingegangen sind. Sie mögen allen Teilnehmern am *alpha*-Wettbewerb Anregungen zum Lösen von Aufgaben geben.

In Heft 5/1977 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 7 ■ 1664 Eine Schulklasse unternimmt während der Schulferien eine mehrtägige Fahrt. Dieser Klasse gehören 15 Mädchen mehr an als Jungen. Die Anzahl der Mädchen verhält sich zur Anzahl der Jungen wie 5:2. Die Unkosten belaufen sich auf insgesamt 875 M. Wieviel Mark hat jeder Teilnehmer aufzubringen, wenn alle Schüler dieser Klasse an der Fahrt teilnehmen?

In Heft 1/1978 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Angenommen, dieser Klasse gehören x Jungen an; dann gehören der Klasse $(x+15)$ Mädchen an, und es gilt

$$\begin{aligned} (x+15):x &= 5:2, & 3x &= 30, \\ 5x &= 2(x+15), & x &= 10. \\ 5x &= 2x+30, \end{aligned}$$

Dieser Klasse gehören somit 10 Jungen und 25 Mädchen an. Jeder Teilnehmer hat $875 \text{ M} : 35 = 25 \text{ M}$ aufzubringen.

Wir stellen nun die Lösung von Dieter Grebner aus Roßdorf, Schüler einer 6. Klasse der Ziolkowski-Oberschule vor. Dieter löste diese Aufgabe wie folgt:

Es sei a die Anzahl der Jungen und b die Anzahl der Mädchen. Ich erweitere den Quotienten $\frac{b}{a} = \frac{b \cdot n}{a \cdot n}$ für $n = 2, 3, 4, 5, \dots$ und fertige dazu eine Tabelle an:

a	2	4	6	8	10	12
b	5	10	15	20	25	30
$b-a$	3	6	9	12	15	18

Nur für $a=10$ und $b=25$ ist die Differenz $b-a=15$. In allen anderen Fällen ist diese Differenz ungleich 15.

Die Gesamtzahl der Schüler beträgt 35. Die Unkosten für einen Schüler belaufen sich auf 25 M, denn $875 \text{ M} : 35 = 25 \text{ M}$.

Wir stellen nun die Lösung von Bernd Stammer aus Halle-Neustadt, Schüler der Kl. 6b der Wilhelm-Pieck-Oberschule, vor. Bernd löste diese Aufgabe wie folgt:

Die Anzahl der Jungen sei x . Wenn man x mit $\frac{5}{2}$ multipliziert, dann erhält man die Anzahl der Mädchen. Deshalb gilt

$$\frac{5}{2} \cdot x = x + 15, \quad \frac{3}{2} \cdot x = 15, \quad \frac{1}{2} \cdot x = 5, \quad \text{also } x = 10.$$

Der Klasse gehören 10 Jungen und $10+15=25$ Mädchen an. Aus $875:(10+25)=875:35=25$ folgt, daß jeder Teilnehmer 25 M zu zahlen hatte.

Sowohl Dieter als auch Bernd sind beide Schüler einer 6. Klasse. Sie haben sich an die Lösung von Aufgaben gewagt, die für Schüler einer 7. Klasse bestimmt sind.

Spielereien mit Vielecken

Aus regelmäßigen Vielecken kann man mit etwas schöpferischer Phantasie eine ganze Reihe neuer geometrischer Figuren erzeugen, wie man ihnen z. B. in Ornamenten begegnet.

Man verbindet dazu die Eckpunkte eines regelmäßigen Vielecks in irgendeiner Reihenfolge durch Strecken, wobei jeder Eckpunkt nur einmal durchlaufen werden darf, und erhält eine neue Figur, die aus einer in sich geschlossenen Linie besteht. Dabei interessieren nur (axial- oder punkt-) symmetrische Figuren.

Aus einem regelmäßigen Dreieck erhält man auf diese Art noch nichts Neues. Aber aus einem regelmäßigen Viereck (Quadrat) entsteht eine „Sanduhr“ (Bild 1). Das regelmäßige Fünfeck liefert so vier neue Figuren, das Sechseck 11 – davon sind in Bild 1 nur sechs gezeichnet.

▲ 1 ▲ Versuche selbst, die restlichen fünf zu entwerfen!

Von einem regelmäßigen Siebeneck gibt es schon 24 abgeleitete Figuren (wovon 18 in Bild 1 gezeichnet sind). Das Achteck hat 67

usw. (Auf das Bestimmen dieser Anzahlen soll hier nicht eingegangen werden.)

Mit etwas Phantasie erkennt man in diesen Figuren bekannte Formen, wie eine Blume, einen Frosch, einen Stern.

Man kann das Ganze noch interessanter machen, indem man den flachen, linienförmigen Figuren Relief verleiht. Dies gelingt, wenn man statt der Linien Streifen zeichnet und diese ineinander verflocht. Die so entstehenden Figuren sehen noch schöner aus (Bild 2).

▲ 2 ▲ Versuche, die Grundfiguren in Bild 1 wiederzufinden! Beim Vergleich wirst du merken, um wieviel abwechslungsreicher, um wieviel lebendiger sie geworden sind.

Man kann noch einen Schritt weitergehen und aus den regelmäßigen Vielecken ringförmige Muster ableiten:

Ausgangspunkt sei die aus dem regelmäßigen Viereck gewonnene „Sanduhr“ (Bild 3). Um die Eckpunkte des Vielecks werden Kreise gezeichnet, deren Radien mit den Längen der für die abgeleitete Figur benutzten Seiten bzw. Diagonalen übereinstimmen. Auf diese

Weise entstehen Kreisringe, die noch erfinderisch ineinandergeflochten werden können.

Man kann so sehr viele Muster erhalten. In Bild 3 sind nur einige Beispiele dargestellt.

▲ 3 ▲ Geh nun selbst an die Arbeit! Nimm ein regelmäßiges Vieleck (beginne einfach), leite eine linienförmige Figur ab, dann eine streifenförmige! Versuche danach, ein Ringmuster zu entwerfen! Falls es zu schwierig sein sollte, arbeite erst eines der angegebenen Beispiele nach!

Aus: „Pythagoras“ (Niederlande)



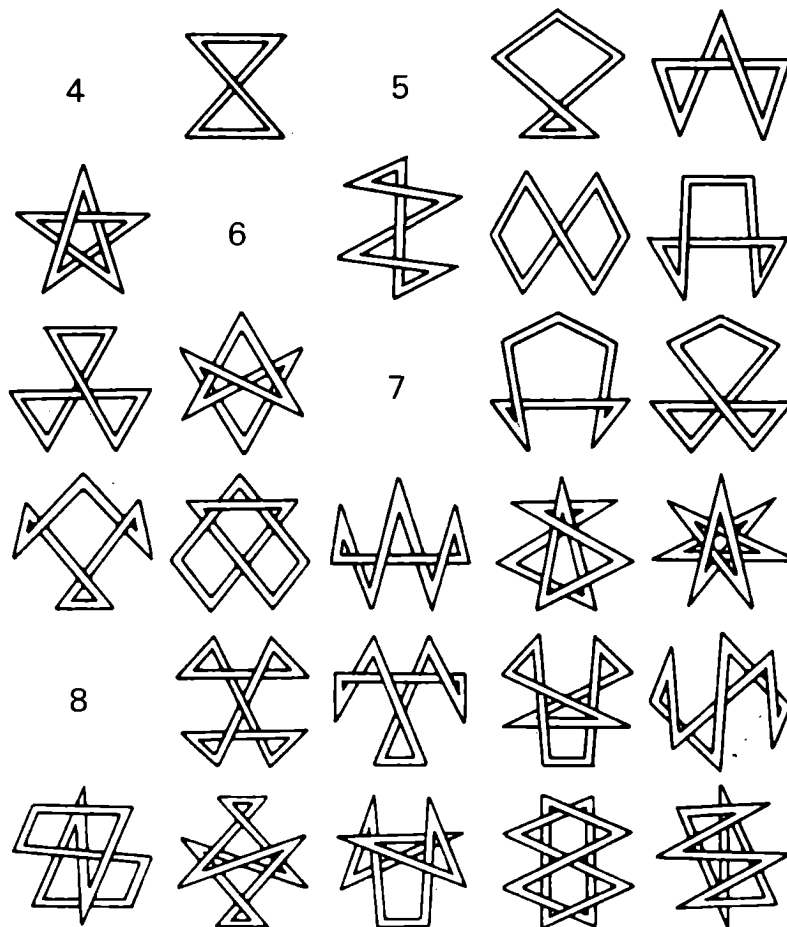
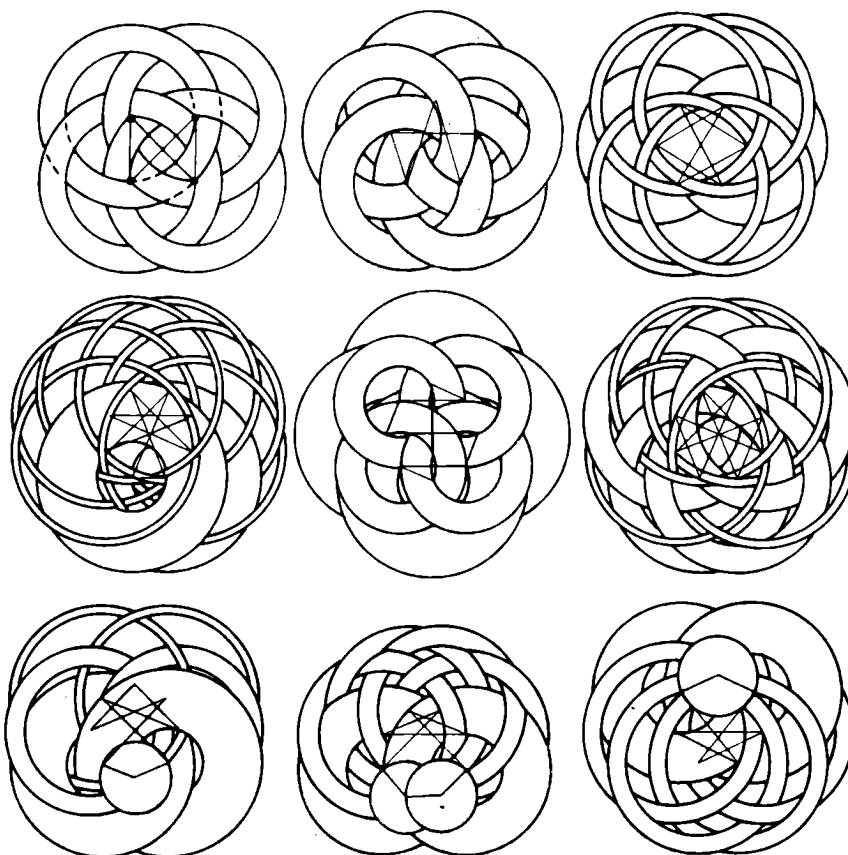


Bild 2: Geflochtene Streifenmuster

Bild 3: Geflochtene Ringmuster



Zauberhafte Mathematik

Andreas erstaunte seine Freunde mit der Ankündigung, daß er beabsichtigt, im Kulturprogramm, das zur traditionellen Klassenfahrt aufgeführt werden soll, als Zauberer und Gedankenleser aufzutreten.

Die Tanzpause hatte gerade begonnen, als Andreas das kleine Podium betrat. In der rechten Hand hielt er sechs große Papptafeln, die überdimensionalen Spielkarten glichen.

„Das magische Spiel FEMTOS gibt mir die außergewöhnliche Fähigkeit“, sagte er geheimnisvoll, „die mir unbekannten Gedanken anderer Menschen blitzschnell zu erraten.“ Während er sprach, klammerte er die Tafeln an eine über das Podium gespannte Leine. Jeder aus dem Publikum konnte nun auf den Rückseiten der Karten die Buchstabenfolge „F – E – M – T – O – S“ lesen. Jetzt bat Andreas als erste Mitspielerin seine Klassenlehrerin, Frau Roch, nach vorn. „Das Kunststück besteht darin“, erklärte er den Zuhörern mit gedämpfter Stimme und drehte nacheinander alle sechs Karten herum, „daß ich eine Zahl erraten kann, die sich Frau Roch gemerkt hat!“ Auf jeder der sechs Karten waren nun 16 Zahlen zu lesen:

Vorderseite:

4	20	8	24	5	18
5	21	9	25	6	19
6	22	10	26	9	22
7	23	11	27	10	23
12	28	12	28	11	26
13	29	13	29	14	27
14	30	14	30	15	29
15	31	15	31	17	31

2	18	1	17	16	24
3	19	3	19	17	25
6	22	5	21	18	26
7	23	7	23	19	27
10	26	9	25	20	28
11	27	11	27	21	29
14	30	13	29	22	30
15	31	15	31	23	31

Rückseite:

F E M
T O S

„Frau Roch, merken Sie sich bitte eine der natürlichen Zahlen zwischen 0 und 31, und zeigen Sie mir diejenigen Karten, auf denen diese Zahl steht!“ lautete seine erste Anweisung. Frau Roch zeigte stumm auf die zweite, dritte, vierte und sechste Karte. Sofort kam Andreas' Reaktion: „Frau Roch, stimmt es, daß Sie sich die 26 gemerkt haben?“ Als die Klassenleiterin dies bejahte, wurde es unter den Zuschauern unruhig; man war verblüfft. Gelassen fuhr Andreas fort: „Nun könnte jemand denken, ich habe diese Zahl gar nicht gewußt, sondern zufällig richtig geraten. Wiederholen wir das Spiel! Wer möchte mitmachen?“ Zuerst hatte sich Stefan, das Mathematik-As der Klasse, gemeldet. „Stefan, merke auch du dir eine Zahl zwischen 0 und 31, und zeige mir alle Karten, auf denen diese Zahl enthalten ist!“ Die Zahl, die sich Stefan ausgewählt hatte, stand nur auf der zweiten Tafel. Wieder zögerte Andreas keinen Augenblick und sagte: „Stefan hat sich die 8 gemerkt.“ Stefan bestätigte die Aussage von Andreas; einige begannen vor Begeisterung zu klatschen. Als nächster wollte Nico den Gedankenleser auf die Probe stellen. Er trat nach vorn und zeigte auf die zweite, dritte und fünfte Karte. Ohne nachzudenken nannte Andreas die 9 als unbekannte Zahl. „Das ist falsch“, entgegnete Nico verschmitzt, „ich habe mir die 11 gemerkt!“ Andreas achtete nicht auf das Raunen unter den Anwesenden, überlegte kurz und erwiderte: „Tut mir leid, Nico, dir ist beim Überprüfen der Karten ein Irrtum unterlaufen, denn du hast vergessen, auf die vierte Karte zu zeigen, die ebenfalls eine 11 enthält. Wie ihr seht, kann ich nicht nur Gedanken lesen, sondern auch Fehler finden.“ „Wie macht er das nur?“ fragten sich die Schüler ratlos. Da bereitete Andreas seine nächste, zugleich letzte und größte Überraschung vor. „Ihr werdet vielleicht denken, ich habe die Zahlen auf den Karten auswendig gelernt, oder ich suche nach dem Zeigen schnell die in Frage kommenden Karten ab. Dem ist nicht so, wie ich euch beweisen will.“ Dabei trat er langsam hinter die Leine zurück, so daß er die Vorderseiten seiner Zauberkarten nicht mehr im Blickfeld hatte. „Ich kann die Gedanken auch raten, ohne die Zahlen zu sehen, die auf den Karten stehen. Wer spielt zum Abschluß noch einmal mit?“ Siska, die erst kürzlich in die Klasse gekommen war, weil ihre Eltern umziehen mußten, stand auf und trat vor: „Die Zahl, die ich meine, steht auf der ersten und auf der letzten Karte.“ Sogleich kam hinter der Leine die Antwort von Andreas: „Es muß die 20 sein, die du dir herausgesucht hast. Habe ich recht?“ Siska antwortete: „Ja.“ Nun konnte sich der kleine Günter, Frau Rochs Sohn, der schon lange unruhig auf seinem Stuhl hin- und herrutschte, nicht länger beherrschen. Er platzte heraus: „Ich habe mir eine Zahl gemerkt, die auf keiner einzigen Karte zu finden ist!“ Andreas kam wieder hinter der

Leine hervor und sagte dabei: „Es gibt keinen Anlaß zur Aufregung, Günter. Du hast dir die 0 ausgewählt.“ Günter nickte zustimmend, und Andreas empfing den wohlverdienten Beifall seiner Freunde. Danach setzte die Musik wieder ein. Es wurde weiter getanzt, aber noch lange bewegte alle die Frage: „Wie hat Andreas das nur gemacht?“

Die Frage nach dem „Wie?“ läßt sich einfach beantworten. Andreas hat die natürlichen Zahlen von 0 bis 31 nach einem gutüberlegten System auf fünf der sechs Tafeln, nämlich die erste, zweite, vierte, fünfte und sechste, aufgeteilt. Mit der dritten Karte hat es eine besondere Bewandtnis. Andreas befürchtete, daß ein gewitzter Mathematiker seinen Trick schnell durchschaut. Deshalb führte er zur Verschleierung diese Tafel mit 16 unsystematisch und willkürlich zusammengestellten Zahlen ein. Für das Erraten der unbekannten Zahl hat sie keinerlei Bedeutung. Es ist völlig gleichgültig, ob diese Karte genannt wird oder nicht. Andreas konzentriert sich bei der Lösung nur auf die ersten beiden und die letzten drei, die sogenannten bedeutsamen, Karten. Um die unbekannte Zahl zu finden, addiert Andreas die in der linken oberen Ecke stehenden Zahlen der von den fünf bedeutsamen Karten, die ihm ein Mitspieler nennt.

4	20	8	24
5	21	9	25
6	22	10	26
7	23	11	27
12	28	12	28
13	29	13	29
14	30	14	30
15	31	15	31

2	18	1	17	16	24
3	19	3	19	17	25
6	22	5	21	18	26
7	23	7	23	19	27
10	26	9	25	20	28
11	27	11	27	21	29
14	30	13	29	22	30
15	31	15	31	23	31

Frau Roch zeigte auf die zweite, dritte, vierte und sechste Karte. Sie nannte Andreas damit drei bedeutsame Karten. Die gesuchte Zahl heißt $8 + 2 + 16 = 26$.

Stefan wies nur auf die zweite Karte. Somit war 8 seine gedachte Zahl.

Nico wählte die zweite, dritte und fünfte Karte, also zwei bedeutsame Karten. Die unbekannte Zahl lautet deshalb $8 + 1 = 9$, wie es Andreas richtig angab. Nico behauptete dagegen, daß er sich die 11 gemerkt hätte. Nun folgerte Andreas aus der Tatsache, daß die Differenz zwischen seiner Berechnung und Nicos Behauptung 2 beträgt, daß Nico die bedeutsame Karte, in deren linker oberer Ecke die 2 steht – also die vierte Karte – übersehen hatte.

Als Siska auf die erste und letzte Karte zeigte, stand Andreas aber hinter der Leine. Er konnte die Zahlen links oben gar nicht sehen, und trotzdem gelangte er zum richtigen Ergebnis! Nichts einfacher als das: Die Buchstaben auf den bedeutsamen Karten halfen ihm. Er wählte den Namen des magischen Spiels nämlich so, daß die Rückseiten der Karten die Anfangsbuchstaben der links oben stehenden Zahlen verraten, und zwar in englischer Übersetzung:

links oben stehende Zahl	englische Übersetzung	Anfangsbuchstabe
4	four	F
8	eight	E
2	two	T
1	one	O
16	sixteen	S

Die Buchstaben F der ersten und S der letzten Karte entsprechen den Zahlen 4 und 16. Die gesuchte Zahl ist dann $4 + 16 = 20$. Stellt jemand wie Günter fest, daß seine Zahl auf keiner der Karten steht, kann er sich nur die Null gemerkt haben.

Nachdem jetzt erklärt ist, wie mit Hilfe des „magischen“ Spiels FEMTOS Zahlen erraten werden können, wollen wir zuletzt Andreas' Gedanken zurückverfolgen, auf welchem Weg er das System entdeckte. Dadurch erhalten wir eine Antwort auf die Frage nach dem mathematischen Hintergrund des Zahlenratens. Wie allen Schülern in seinem Alter war auch Andreas das Dezimalsystem bereits in Fleisch und Blut übergegangen. Es ermöglichte Andreas, allen Anforderungen gerecht zu werden, und es gab für ihn keinen Grund, über andere Zahlensysteme nachzudenken. Eines Tages jedoch erfuhr er von seinem Onkel Michael, der in einem der modernen Rechenzentren arbeitete: „Es gibt unendlich viele Positionssysteme, und das dir so vertraute Dezimalsystem ist für die Rechentechnik einigermaßen ungeeignet. Für uns in der Datenverarbeitung ist beispielsweise das Dualsystem bedeutungsvoller. Das liegt daran, daß sich zwei Zustände technisch gut realisieren lassen; ein Schalter ist geöffnet oder geschlossen, ein Strom fließt oder fließt nicht, ein Kondensator ist geladen oder ungeladen. Diesen beiden Zuständen kann man die Grundziffern 0 und 1 des Dualsystems zuordnen.“ Die nächsten Tage verbrachte Andreas damit, sich mit den Eigenschaften des Dualsystems vertraut zu machen, das Dezimal- und das Dualsystem zu analysieren sowie deren Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu bestimmen. Er stellte dabei folgendes fest:

1. Die Basis des Dezimalsystems ist 10. Die Menge D_{10} seiner Grundziffern enthält 10 Elemente: $D_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
2. Es gibt $10^1 = 10$ einstellige Dezimalzahlen; sie stimmen mit den Grundziffern überein.

Mit Hilfe der Elemente von D_{10} lassen sich $10^2 = 100$ zweistellige, $10^3 = 1000$ dreistellige, ..., 10^k k -stellige Dezimalzahlen bilden.

3. Ausführlich geschrieben bedeutet z. B. $124 : 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$.

Entsprechend fand Andreas für das Dualsystem die Eigenschaften:

1. Die Basis des Dualsystems ist 2. Die Menge D_2 seiner Grundziffern enthält 2 Elemente: $D_2 = \{0, 1\}$.

2. Es gibt $2^1 = 2$ einstellige Dualzahlen; sie entsprechen den Grundziffern. Unter Verwendung der Elemente von D_2 können $2^2 = 4$ zweistellige, $2^3 = 8$ dreistellige, ..., 2^k k -stellige Dualzahlen zusammengestellt werden.

3. Ausführlich geschrieben bedeutet z. B. $10110 : 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$.

Nun verstand Andreas, daß es unendlich viele Positionssysteme geben mußte, je nach der Wahl der natürlichen Zahl als Basis. Da ihm die Dualzahlen aber noch ziemlich fremd waren, beschloß er, sich einmal alle 32 fünfstelligen Dualzahlen aufzuschreiben. Die kleinste ist 00000; sie entspricht im Dezimalsystem der 0. Die größte ist 11111, dezimal bedeutet sie 31.

Dezimal-Dual-Konvertierung der Zahlen 0 bis 31

0 00000	8 01000
1 00001	9 01001
2 00010	10 01010
3 00011	11 01011
4 00100	12 01100
5 00101	13 01101
6 00110	14 01110
7 00111	15 01111

16 10000	24 11000
17 10001	25 11001
18 10010	26 11010
19 10011	27 11011
20 10100	28 11100
21 10101	29 11101
22 10110	30 11110
23 10111	31 11111

Mit dieser Tabelle zur wechselseitigen Umwandlung (Konvertierung) beschäftigte sich Andreas ziemlich lange. Nach mehreren Tagen fiel ihm eine gewisse Regelmäßigkeit innerhalb der 32 fünfstelligen Dualzahlen auf: es gibt 16, die in der 5. Stelle die Grundziffer 1 haben (dezimal: 16, 17, ..., 31); es sind 16 Dualzahlen, die in der 4. Stelle die Grundziffer 1 besitzen (8, ..., 15, 24, ..., 31); bei 16 Dualzahlen steht an der 3. Stelle die Grundziffer 1 (4, ..., 7, 12, ..., 31); 16 Dualzahlen haben an der 2. Stelle die Grundziffer 1 (2, 3, 6, 7, 10, 11, ..., 31) und 16 enden in der 1. Stelle auf die Grundziffer 1 (1, 3, 5, ..., 31).

Nun war es bis zur Entdeckung des Rätsels nur noch ein kleiner Schritt. Andreas übertrug diese fünfmal 16 Zahlen auf je einen Zettel (ohne zu wissen, daß er dadurch die vorn erwähnten bedeutsamen Karten gefunden hatte).

Nummer des Zettels	enthält die Zahlen	entspricht der ... Stelle	repräsentiert den Wert
1	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31	1	$2^0 = 1$
2	2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 30, 31	2	$2^1 = 2$
3	4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 28, 29, 30, 31	3	$2^2 = 4$
4	8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31	4	$2^3 = 8$
5	16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31	5	$2^4 = 16$

Merke er sich eine der natürlichen Zahlen, war es ihm aus der Dualkonvertierung jedesmal möglich vorherzusagen, auf welchen Zetteln diese Zahl geschrieben ist. Die Stellen, an denen die Grundziffern 1 stehen, entsprechen nach seinem System genau den Nummern der Zettel. Notierte er sich z. B. die 23 – ihr entspricht in dualer Form 10111 –, muß sie auf den Zetteln 1, 2, 3 und 5 vorhanden sein.

Um das magische Zahlenrätsel zu erhalten, drehte Andreas diesen Schluß einfach um:

Zeigt ihm jemand die Zettel, auf denen eine Andreas noch unbekannte Zahl steht, weiß er in Wirklichkeit bereits, an welchen Stellen der dualen Konvertierung dieser Zahl die Grundziffer 1 steht. Damit ist Andreas die Zahl aber gar nicht mehr unbekannt; er braucht die duale lediglich noch in die dezimale Form zurückzuführen. Dazu addiert er bloß die den genannten Stellen zugeordneten Werte aus der vorangegangenen Tabelle. Diese Werte stehen als erste Zahlen auf den Zetteln bzw. in der linken oberen Ecke der bedeutsamen Karten. Nehmen wir an, daß ein Mitspieler die Zettel 1 und 4 angibt. Ihnen entsprechen die 1. Stelle mit dem Wert 1 und die 4. Stelle mit dem Wert 8, so daß $8 + 1 = 9$ die unbekannte Zahl war. Die einzige Fähigkeit, die der Gedankenleser bei seinem Auftritt benötigt, besteht darin, addieren zu können.

Um aus diesen mathematischen Erkenntnissen ein wirkliches Zauberkunststück zu machen, führte Andreas die Buchstaben auf den Rückseiten der Karten ein. Damit das System für andere nicht zu leicht erkennbar wird, er-

gänzte er eine zusätzliche Karte, die er in Wirklichkeit gar nicht benutzt. Schließlich veränderte er noch die Reihenfolge der Zettel, damit aus den Buchstaben ein gut klingender Name wird. Da das kommutative Gesetz der Addition gilt, hat diese Vertauschung natürlich keinen Einfluß auf das zu erratende Ergebnis.

Versucht es nun einmal selbst mit euren Geschwistern, Eltern, Freunden und Klassenkameraden! Sicher habt ihr mit der kleinen mathematischen Zauberei viel Erfolg.

Wer sich noch einige weitergehende Gedanken über Andreas' Kunststück machen möchte, kann folgende Aufgaben lösen:

▲ 1 ▲ Läßt sich ein Spiel konstruieren, das auf einem System beruht, das die Zahlen auf einem Zettel zusammenfaßt, die in dualer Form die Grundziffer 0 an der gleichen Stelle haben?

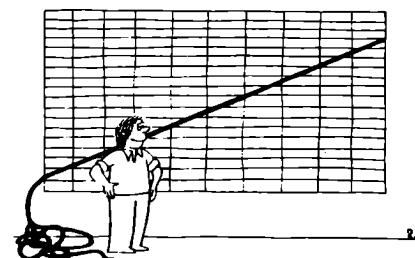
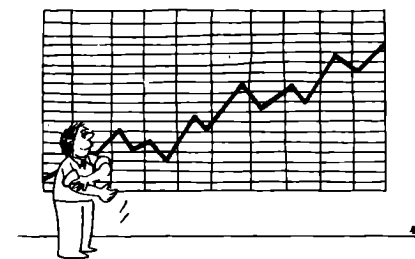
Wie lautet die neue Regel zur Bestimmung der unbekannten Zahl?

▲ 2 ▲ Erweitert das Spiel auf alle sechsstelligen Dualzahlen! Welche Veränderungen ergeben sich?

▲ 3 ▲ Entwickelt ein entsprechendes Spiel auf der Grundlage des Ternärsystems (Basis 3, $D_3 = \{0, 1, 2\}$)! Bis zu welcher natürlichen Zahl kann man raten, wenn vierstellige Ternärzahlen verwendet werden? Wie viele bedeutsame Karten benötigt man?

M. Röhr

Ohne Worte



Aus „Dikobraz“, Prag



Mathematischer Leistungsvergleich Potsdam – Opole

Im April 1978 fand erstmalig ein mathematischer Leistungsvergleich zwischen Schülern aus Opole, der Partnerstadt Potsdams, und Schülern aus dem Bezirk Potsdam statt. Die polnische Delegation mit 15 Schülern und zwei Betreuern weilte mehrere Tage – betreut vom BKAT Potsdam – in unserer Bezirkshauptstadt. An einem dieser Tage wurde eine vierstündige Klausur geschrieben. In vorangegangenen Absprachen wurden ein Modus und die Aufgaben in der folgenden Art vereinbart.

In drei Klassenstufen (9. Klasse, 10. Klasse und 11./12. Klasse) werden jeweils drei Aufgaben gestellt. (Der Schwierigkeitsgrad liegt etwa zwischen dem unserer Kreis- und Bezirks-Olympiaden.) Jede Delegation besetzt jede Klassenstufe mit mindestens drei Schülern. Durch die letzte Festlegung entstanden unterschiedlich starke „Startfelder“. Der Bezirk Potsdam etwa nutzte diesen Wettstreit insbesondere, um seinen Frühstartern eine weitere Erprobungsmöglichkeit zu geben, und Axel Schüler (aus der Klasse 7) erreichte in der 9. Klasse auch 19 von 20 möglichen Punkten. Die Schüler aus Opole dagegen dominierten eindeutig in der 11./12. Klasse, vier von ihnen errangen die volle Punktzahl! Unter diesen ragte Radislaw Atlas noch durch die Art seiner Lösungen hervor.

Insgesamt war die Bilanz ausgeglichen, jede Delegation erreichte im Durchschnitt aller Starter 16 Punkte.

Trotz der Sprachunterschiede gab es keine Verständigungsschwierigkeiten, auch bei der Korrektur nicht. (An eine möglichst einfache Korrektur war schon beim Zusammenstellen der Aufgaben gedacht worden!)

Außer für die Mathematik interessierten sich natürlich unsere polnischen Freunde für die Sehenswürdigkeiten Potsdams. Als eine der Touristenstädte der DDR hinterließ Potsdam bei unseren Gästen einen tiefen Eindruck, insgesamt hat ihnen ihr Besuch bei uns großartig gefallen. Für 1979 ist unsere Delegation anlässlich der Mathematik-Olympiade nach Opole eingeladen.

H.-J. Sprengel

Aufgaben

Klassenstufe 9

▲ 1 ▲ Beweisen Sie, daß für jede reelle Zahl a die Ungleichung

$$\frac{a^2}{1+a^4} \leq \frac{1}{2} \text{ gilt!}$$

▲ 2 ▲ Gegeben seien zwei Primzahlen p und $p+2$ mit $p \geq 5$. Beweisen Sie, daß die Summe dieser beiden Primzahlen stets durch 12 teilbar ist!

▲ 3 ▲ Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden g und h und ein Punkt P , der weder auf g noch h liegt.

Konstruieren Sie eine Gerade m mit folgenden Eigenschaften:

(1) m geht durch P

(2) m schneidet g in G und h in H

(3) P teilt GH innen im Verhältnis 2:1!

Klassenstufe 10

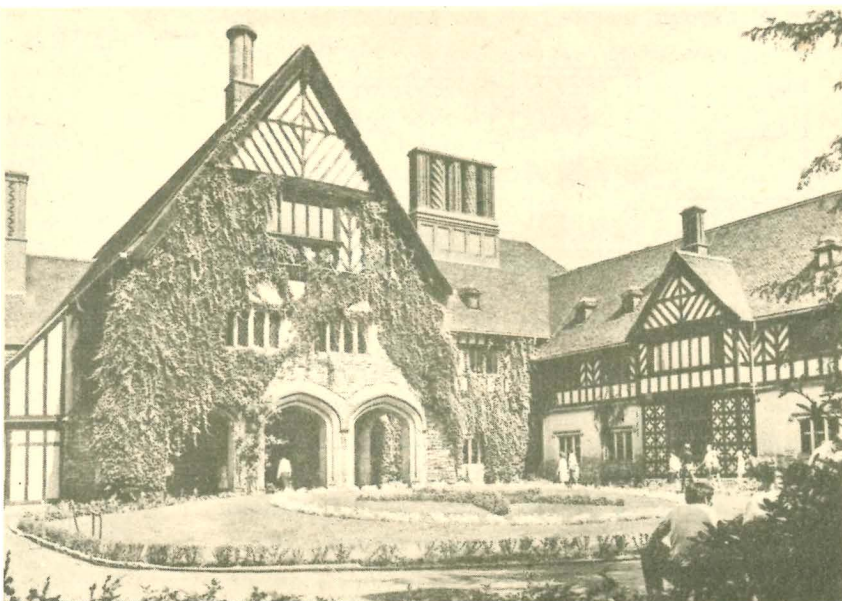
▲ 1 ▲ Entscheiden Sie, ob durch zwei Quadrate mit der Seitenlänge $a=7$ cm ein Kreis mit dem Radius $r=4$ cm überdeckt werden kann!

▲ 2 ▲ Für welche Primzahlen x, y, z gilt

$$\frac{x+y}{x-y} = z?$$

▲ 3 ▲ Siehe 9/3!

Auf die Veröffentlichung der Aufgaben der Klassenstufe 11/12 wurde verzichtet, d. Red.



Potsdam – Cecilienhof

Panorama Opole

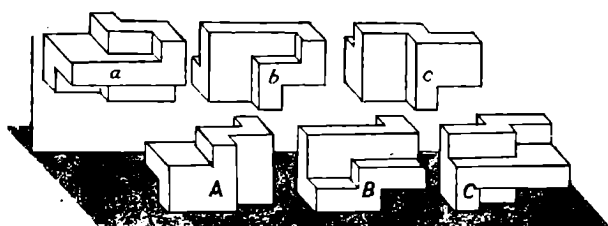


In freien Stunden **alpha** heiter



Aufgabe mit Spiegel

Drei Figuren *A*, *B* und *C* befinden sich vor einem Spiegel. Ihr Spiegelbild hilft dem Betrachter, sich einen Begriff von der Form einer jeden zu machen. Zwei sind gleich. Welche? *Aus: Nauka i Shisn, Moskau*



Niederländischer Denksport

Punt *F* ligt op de zijde *AD* van vierkant *ABCD*. In *C* wordt een loodlijn opgericht op *CF*; deze snijdt het verlengde van *AB* in *E*. De oppervlakte van *ABCD* is 256 en die van $\triangle CEF$ is 200. De lengte van *BE* is: (A) 12 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 20

Zeit und Ewigkeit

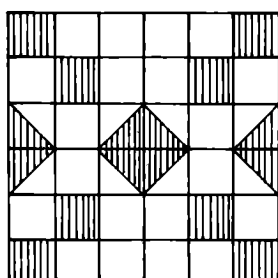
Eine amerikanische Journalistin fragte einmal Albert Einstein:

„Welch ein Unterschied besteht zwischen der Zeit und der Ewigkeit?“

„Mein Kind“, antwortete Einstein gutmütig, „wenn ich die Zeit hätte, Ihnen diesen Unterschied zu erklären, würde eine Ewigkeit vergehen, bis Sie verstehen würden.“ *Aus: „Wurzel“ 6/78, Jena*

Gute Beobachtungsgabe gefragt

Wie verhalten sich der Flächeninhalt der schraffierten zur nicht schraffierten Fläche? *Aus: „Mathematika“, Sofia*



Die Kreiszahl π

Das Bild zeigt die Kreiszahl π an 1134 Stellen genau nach einem Programm an BASIC und in netter Form für *alpha* ausgedruckt von

Mathematikfachlehrer M. Vowe, Therwil, Schweiz

```

3, 1415926535
8979323846264338327950
2884197169399375105820974944
59230781640628620899862803482534
211706798214808651328230664709384460
95505622317253594081284811174502841027
019385211055596446229489549303819644288109
75665933446128475648233786783165271201909145
6485669234603486104543266482133936072602491412
7372458700660631558817488152092096282425409171
536436789259036001133053054882046652138414695194
151160943305727036575959195309218611738193261179
31051185480744623799627495673518857527248912279381
83011949129833673362440656643086021394946395224737
19070217986094370277053921712629317675238467481846
76694051320005681271452635608277857713427577896091
73637178721468440901224953430146549585371050792279
689258923542019956112129021960864034418159813629
77477130996051870721134999998372798049451059731
7328160963185950244594553469083026425223082533
4468503526193118817101000313783875288658753320
83814206171776691473035982534904287554687311
595628638823537875937519577818577805321712
26806613001927876611195909216420198938
-095257201065485863278865936153381827
96823030195203530185246899577362
2599413891249721775283479131
5155748572424541506959
508295331168
    
```

Buchstaben-Mosaik

Die Buchstaben sind so durch Ziffern zu ersetzen, daß das Potenzieren zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

```

F $\alpha$  = EH
AF $\alpha$  = EEKH
AAF $\alpha$  = EEEKKH
AAAF $\alpha$  = EEEEEKKH
AAAAF $\alpha$  = EEEEEKKKH
HHHHG $\alpha$  = FFFFCCCB
HHHG $\alpha$  = FFFCCCB
HHG $\alpha$  = FFFCCB
HG $\alpha$  = FFCB
G $\alpha$  = FB
    
```

OL Ing. K. Koch, Schmalkalden

Französischer Denksport

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, die gesucht sind. Vorher sind die vier arithmetischen Zeichen +, -, ·, : an Stelle der Sternchen zu setzen, wenn man weiß, daß jedes Zeichen nur einmal vorkommt.

- (1) $aab * c = adde$
- (2) $adde * e = ccc$
- (3) $ccc * f = fff$
- (4) $fff * g = fhd$

Aus: „Sphinx“, Paris (1932)

Magische Quadrate

In der folgenden Anordnung von Buchstaben verbirgt sich der Name eines französischen Mathematikers. Man findet ihn auf folgende Weise:

M	D	L	A	E	B	E	C	Z	S	E	T
N	D	G	E	T	T	A	C	G	Z	S	N
A	A	R	E	M	A	H	T	G	I	N	L
Z	A	F	R	M	R	R	H	T	T	T	L
H	L	F	I	M	L	H	H	D	U	L	D
Q	L	I	R	P	L	A	H	A	L	D	O
G	U	U	R	U	S	L	L	B	B	D	R
E	R	E	U	T	S	M	G	L	D	R	U
S	S	T	E	T	E	M	L	D	I	D	N
I	L	S	T	R	M	U	L	I	E	R	N
K	L	E	T	B	R	A	A	L	E	Q	R
K	O	T	B	R	V	R	L	Z	E	N	R
T	E	T	V	V	I	R	Z	H	N	D	N
U	T	M	V	E	L	R	E	H	A	R	R
T	M	E	E	L	T	E	L	A	W	U	
A	A	G	A	L	P	I	L	Z	Z	W	E
H	G	N	Z	A	P	N	I	L	I	E	C
G	U	N	B	A	K	K	N	L	E	H	T

GASARMV

Sucht zunächst in dem Bild alle aus vier Kästchen bestehenden Quadrate heraus, in denen vier verschiedene Buchstaben auftreten, und umrandet sie! Aus den Buchstaben jedes dieser Quadrate läßt sich ein Wort bilden, das für den Mathematikunterricht eine Bedeutung hat.

Zum besseren Verständnis sind in dem Bild bereits zwei solcher Quadrate umrahmt. Ihre Buchstaben ergeben die Wörter „zehn“ und „Rand“.

Einige Buchstaben gehören dann zwei solchen umrandeten Quadraten an. Liest man sie hintereinander, so erhält man den gesuchten Namen.

OSTR K.-L. Lehmann, VLdV, Berlin

Einige Wortspiele

Ein unentbehrlicher Ratgeber ist uns der Duden, ohne dessen Hilfe wir z. B. auch die Bedeutung manches Wortes nicht klären könnten. In Mußestunden lassen sich mit ihm Spiele durchführen, die die Kombinationsfreude wecken. Findet neue Beispiele zu folgenden Vorschlägen!

(1) Von hinten gelesene Wörter mit gleicher Bedeutung: Radar, Otto, Rotor. Ein Satz: Ein Ledergurt trug Redel nie.

(2) Von hinten gelesene Wörter mit anderer Bedeutung: Neger, Lage, Ohr.

(3) Wörter mit Silbentausch:

a) zweisilbige Wörter, die beim Silbentausch eine andere Bedeutung bekommen: Er le – leer; Ilse – Seil, Serie – Riese; Geber – Berge; Galle – legal.

b) zweisilbige Wörter, die beim Silbentausch die gleiche Bedeutung behalten: Mama, Papa, Toto,

c) dreisilbige Wörter und ihre Silbenvertauschung: Rei se rei, Ge he ge, Ma hat ma; Tor na do – Donator.

(4) Wortketten:

zweigliedrige Wortketten, die sich aus einem Wort durch Anhängen eines Buchstabens ergeben: Auto – Autor; Wicht – Wichte; Bach – Bache oder eine weitere Variante: Wicht – Wichte – Wichtel; Gatt – Gatte – Gatter.

Viel Spaß beim Suchen weiterer solcher Wortspiele wünscht

Diplom-Lehrer E. Schulze, Muldenberg

Nächtlicher Sturm

Ein 20 m hoher Radiomast wird durch einen Sturm geknickt. Christian und Barbara unterhalten sich darüber, in welcher Höhe der Mast gebrochen ist, ohne sich beim Schätzen einig werden zu können. Unmittelbar zu messen ist die Höhe der Bruchstelle nicht, die Entfernung vom Fußende des Maststumpfes bis zu der Stelle, wo jetzt die Spitze den Boden berührt, beträgt genau 6 m. Christian, der Praktiker, und Barbara, theoretisch sehr gut, denken sich jeder eine Methode aus, um die Höhe der Bruchstelle genau festzustellen. Sie kommen damit zu dem gleichen richtigen Resultat. Wie machen sie das?

Mathematikfachlehrer W. Förg, Schwaz (Österreich)



„Komischer Kauz, dieser Archi! Knobelt und knobelt, obwohl's dafür gar keine Zensuren gibt.“

Aus: „Eulenspiegel“ 38/78, B. Henniger

Lösungen



XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

6. Angenommen, es gibt eine Lösung (x, y) , dann folgt mit

$$z = x + y \text{ aus (1)} \quad (3)$$

$$xy = 2 + 3\sqrt{2} - z \text{ bzw. mit} \quad (4)$$

$$z^2 = x^2 + 2xy + y^2 \text{ aus (2)}$$

$$z^2 - 2xy = 6 \quad (5)$$

Aus (4) und (5) ergibt sich für z eine quadratische Gleichung

$$z^2 + 2z - 10 - 6\sqrt{2} = 0$$

mit den Lösungen

$$z_1 = 2 + \sqrt{2} \quad (6)$$

$$z_2 = -4 - \sqrt{2}. \quad (7)$$

Setzt man nun (6) bzw. (7) in (3) und (4) ein, so erhält man die folgenden Gleichungssysteme

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 2 + \sqrt{2} \\ xy &= 2\sqrt{2} \end{aligned} \right\} (6') \quad \left. \begin{aligned} x + y &= -4 - \sqrt{2} \\ xy &= 6 + 4\sqrt{2} \end{aligned} \right\} (7')$$

In beiden kann man nach dem Einsetzungsverfahren etwa y eliminieren und erhält eine quadratische Gleichung für x . Diese hat im Falle (7') keine reellen Lösungen und im Falle (6') die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = \sqrt{2}$. Die zugehörigen y -Werte sind $y_1 = \sqrt{2}$ und $y_2 = 2$. Hat das Gleichungssystem (1), (2) Lösungen, so können das höchstens $(2, \sqrt{2})$ und $(\sqrt{2}, 2)$ sein. Wie man durch Einsetzen in (1) und (2) zeigt, sind dies tatsächlich Lösungen.

Bemerkungen: Die hier angegebene Lösung mittels einer Substitution (3) wurde im Prinzip von etwa einem Drittel der Schüler gewählt. Wiederum ein Drittel der Schüler wählte das Einsetzungsverfahren. Dieses führt auf eine Gleichung 4. Grades. Durch Ablesen von Lösungen und Polynomdivision fanden die Schüler auch auf diesem Wege meistens zum Ziel.

Die restlichen Schüler fanden zwar meist noch die Lösungen, konnten aber nicht exakt zeigen, daß diese Lösungen die einzigen sind. Insgesamt war das Ergebnis bei dieser, einer 4. Stufe angemessenen, Aufgabe gut.

Punkte 0 1 2 3 4 5 6 7

Anzahl 8 7 7 20 7 5 8 31

Dr. H.-J. Spengel, Päd. Hochschule
„Karl Liebknecht“, Potsdam

Die Lösungen zu den Aufgaben der Olympiadeklasse 11/12 werden in der Zeitschrift „Mathematik in der Schule“, Heft 10/78, veröffentlicht.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 6/78:

Ma 6 ■ 1774 Die kleinste Primzahl ist die Zahl 2; folglich hat Peter den zweiten Platz belegt. Angenommen, Peter hatte n Punkte erreicht; dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{2+n}{5} \cdot 46 &= 10n, & 92 + 46n &= 50n, \\ (2+n) \cdot 46 &= 50n, & 4n &= 92, \\ & & n &= 23. \end{aligned}$$

Peter hatte 23 Punkte erreicht.

Ma 6 ■ 1775 Angenommen, im Korb befanden sich anfangs n Nüsse. Nachdem sich Hans $\frac{n}{3}$ Nüsse genommen hatte, verblieben im Korb $n - \frac{n}{3} = \frac{2n}{3}$ Nüsse. Nachdem sich Bernd $\frac{2n}{9}$ Nüsse genommen hatte, verblieben im Korb $\frac{2n}{3} - \frac{2n}{9} = \frac{4n}{9}$ Nüsse. Nachdem sich Elke $\frac{4n}{27}$ Nüsse genommen hatte, verblieben im Korb $\frac{4n}{9} - \frac{4n}{27} = \frac{8n}{27}$ Nüsse. Nun gilt $\frac{8n}{27} = 16$, also $n = 54$.

Im Korb befanden sich anfangs 54 Nüsse. Hans hat dem Korb 18 Nüsse, Bernd 12 Nüsse und Elke 8 Nüsse entnommen.

Ma 6 ■ 1776 Aus (2) und (4) folgt: Herr Müller unterrichtet nicht Biologie. Aus (3) folgt: Herr Taubert unterrichtet nicht Biologie. Folglich unterrichtet Herr Weber das Fach Biologie.

Aus (4) folgt: Herr Weber, der Biologielehrer, unterrichtet nicht Mathematik. Aus (5) folgt: Herr Müller unterrichtet nicht Mathematik. Folglich unterrichtet Herr Taubert das Fach Mathematik.

Aus (5) folgt: Herr Taubert, der Mathematiklehrer, unterrichtet nicht Englisch. Aus (5) folgt: Herr Müller unterrichtet nicht Englisch. Folglich unterrichtet Herr Weber das Fach Englisch. Da Herr Weber die Fächer Biologie und Englisch unterrichtet, entfallen für ihn die Fächer Geographie, Geschichte und Russisch.

Aus (3) folgt: Herr Taubert unterrichtet nicht Russisch. Folglich unterrichtet Herr Müller das Fach Russisch.

Aus (1) folgt: Herr Müller, der Russischlehrer, unterrichtet nicht Geographie. Folglich unterrichtet Herr Müller Geschichte und Herr Taubert Geographie.

Herr Müller unterrichtet die Fächer Russisch und Geschichte; Herr Taubert unterrichtet die Fächer Mathematik und Geographie; Herr Weber unterrichtet die Fächer Biologie und Englisch.

Ma 7 ■ 1777 Wegen $18 = 2 \cdot 9$ muß z durch 2 und durch 9 teilbar sein, d. h., z muß eine gerade Zahl und ihre Quersumme $q = 2x + 6y = 2(x + 3y)$ muß durch 9 teilbar sein. Nun ist q nur durch 9 teilbar, wenn $x + 3y$ durch 9 teilbar ist. Wegen $x > y$ trifft das nur zu für $x = 6$ und $y = 1$ oder für $x = 6$ und $y = 4$.

Die gesuchten Zahlen lauten somit 61 111 116 und 64 444 446.

Ma 7 ■ 1778 Es ist $\frac{a(c-b)}{b-a} > 0$ genau dann, wenn entweder „ $c > b$ und $b > a$ “ oder „ $c < b$ und $b < a$ “ gilt, d. h., wenn entweder $a < b < c$ oder $a > b > c$ gilt. Für $a < b < c$, also für $a = 13, b = 15, c = 20$ erhalten wir $\frac{13 \cdot (20-15)}{15-13} = \frac{13 \cdot 5}{2} = 32,5$, also keine ganze Zahl. Für $a > b > c$, also für $a = 20, b = 15, c = 13$ erhalten wir $\frac{20 \cdot (13-15)}{15-20} = \frac{20 \cdot (-2)}{-5} = 8$.

Ma 7 ■ 1779 In der abgebildeten Planfigur wurde um S mit dem Radius $\overline{SB} = \frac{1}{2} \cdot f$ ein Kreisbogen geschlagen, der $\overline{SC}$ in P schneidet, und es wurde B mit P verbunden. Deshalb gilt $\overline{AP} = \overline{AS} + \overline{SP} = \frac{1}{2} \cdot (e + f)$. Aus $\overline{SB} = \overline{SP}$ und $\angle BSP = 90^\circ$ folgt $\angle SBP = \angle SPB = 45^\circ$. Somit läßt sich zunächst das Teildreieck ABP aus $\overline{AB} = a = 5,5$ cm, $\overline{AP} = \frac{1}{2} \cdot (e + f) = 7$ cm und $\angle APB = 45^\circ$ konstruieren. Die Senkrechte zu AP durch B schneidet AP in S . Der Kreis um A mit a schneidet BS in D . Der Kreis um B mit a schneidet AP in C .

Planfigur:

Konstruktion: Die Konstruktion ergibt zwei Rhomben $ABCD$ und $AB'C'D'$, die zueinander kongruent sind.

Ma 7 ■ 1780 Für die gesuchten Zahlen $z = abc$ soll $a + b + c$ ist durch 2 teilbar und $a - b = 3 \cdot (b - c)$ gelten. Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:

1) Aus $b - c = 0$ folgt $b = c$, was nicht möglich ist, da $b \neq c$ sein soll.

2) Aus $b - c = 1$ folgt $a - b = 3$ und somit

$a = b + 3$	$b = c + 1$	c	$a + b + c$
4	1	0	5
5	2	1	8
6	3	2	11
7	4	3	14
8	5	4	17
9	6	5	20

Nur von den Zahlen 521, 743 und 965 ist die Quersumme eine gerade Zahl.

3) Aus $b - c = 2$ folgt $a - b = 6$ und somit

$a = b + 6$	$b = c + 2$	c	$a + b + c$
8	2	0	10
9	3	1	13

Nur von der Zahl 820 ist die Quersumme eine gerade Zahl!

4) Aus $b - c = 3$ folgt $a - b = 9$ und somit $a = b + 9$ und $b = c + 3$, also $a = (c + 3) + 9 = c + 12$, was nicht möglich ist. Es existieren genau vier Zahlen mit den geforderten Eigenschaften; sie lauten 521, 743, 820 und 965.

Ma 8 ■ 1781 Der Vorgänger der natürlichen Zahl n ist $n - 1$, der Nachfolger $n + 1$. Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt dann:

$$(n-1)(n+1) = 2208, \text{ d. h.} \\ n^2 - 1 = 2208 \text{ bzw.} \\ n^2 = 2209.$$

Die gesuchte Zahl n ist 47. Es gilt $46 \cdot 48 = 2208$.

Ma 8 ■ 1782 Es sei x eine beliebige natürliche Zahl. Soll sie die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, so muß gelten:

$$x^2 - 1 = p \text{ (} p \text{ sei Primzahl)}.$$

Zerlegt man die Differenz in ein Produkt, so erhält man

$$(x+1)(x-1) = p.$$

Eine Primzahl p läßt sich nur in $p \cdot 1$ oder $1 \cdot p$ zerlegen; daraus folgt, daß entweder $x+1 = 1$ oder $x-1 = 1$ gilt.

Aus $x+1 = 1$ folgt $x=0$. Das ist nicht möglich, da dann $p=0$ wäre, und 0 ist keine Primzahl.

Aus $x-1 = 1$ folgt $x=2$ und $p=3$, also eine Primzahl. Nur die natürliche Zahl 2 erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Es ist $2^2 - 1 = 3$.

Ma 8 ■ 1783 zu (1): Man formt zunächst beide Terme um, indem man die Klammern auflöst (linke Seite: binomische Formel!)

$$a_1^2 b_1^2 + 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_2^2 \\ \leq a_1^2 b_1^2 + a_1 a_2 b_2^2 + a_1 a_2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2.$$

Nun subtrahiert man von der Ungleichung den Term $(a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2)$ und erhält

$$2a_1 b_1 a_2 b_2 \leq a_1 a_2 b_2^2 + a_1 a_2 b_1^2 \quad | : a_1 a_2 \\ 2b_1 b_2 \leq b_1^2 + b_2^2 \quad | - 2b_1 b_2 \\ 0 \leq b_1^2 - 2b_1 b_2 + b_2^2 \\ 0 \leq (b_1 - b_2)^2.$$

Da das Quadrat einer reellen Zahl stets nichtnegativ ist, wird die letzte Ungleichung stets erfüllt. Da alle Schritte rückwärts äquivalente Umformungen sind, ist also auch die Ungleichung (1) stets erfüllt, w. z. b. w.

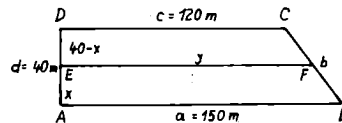
zu (2): Analoge Umformungen führen zu:

$$a_1^2 b_1^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_2^2 \\ \geq a_1^2 b_1^2 - a_1 a_2 b_2^2 \\ - a_2 a_1 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 \\ - 2a_1 b_1 a_2 b_2 \geq - a_1 a_2 b_2^2 - a_2 a_1 b_1^2 \\ - 2b_1 b_2 \geq - b_2^2 - b_1^2 \\ b_1^2 - 2b_1 b_2 + b_2^2 \geq 0 \\ (b_1 - b_2)^2 \geq 0.$$

Da die letzte Ungleichung stets erfüllt ist und nur äquivalente Umformungen vorgenom-

men wurden, ist die Ungleichung (2) stets erfüllt, w. z. b. w.

Ma 8 ■ 1784 Skizze:



Für den Flächeninhalt A des Trapezes gilt: (Wir rechnen nur mit den Maßzahlen!)

$$A = \frac{a+c}{2} \cdot h \\ A = \frac{150+120}{2} \cdot 40,$$

also $A = 5400$.

Wenn das Grundstück halbiert werden soll, so müssen folgende Gleichungen erfüllt sein:

$$(1) \quad \frac{150+y}{2} \cdot x = 2700 \text{ und} \\ (2) \quad \frac{120+y}{2} \cdot (40-x) = 2700.$$

Aus Gleichung (1) folgt $x = \frac{5400}{150+y}$. Ersetzt

man nun in der Gleichung (2) x durch diesen Term, so erhält man Gleichung (2'):

$$\frac{120+y}{2} \cdot \left(40 - \frac{5400}{150+y} \right) = 2700.$$

Die äquivalente Umformung führt zu $y \approx 135,83$. Daraus folgt $x \approx 18,89$.

Der Zaun ist etwa 135,83 m lang, und der Abstand des Zaunes von der Seite AB beträgt etwa 18,89 m.

Ma 9 ■ 1785 Für den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC gilt

$$A = \frac{x(x-1)}{2} \text{ bzw. } 15 = \frac{x^2 - x}{2}.$$

Nach Umformung erhält man

$$x^2 - x - 30 = 0, \\ x_1 = 6, \\ x_2 = -5 \text{ (entfällt)}.$$

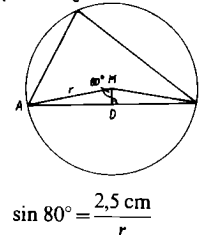
Die Basis des Dreiecks ABC ist 6 cm lang. Für die Breite y des Rechtecks gilt nach den Bedingungen der Aufgabe:

$$6 \cdot y = 15 \text{ bzw. } y = 2,5.$$

Die Breite des Rechtecks beträgt 2,5 cm.

Ma 9 ■ 1786 $\sphericalangle ACB$ ist Peripheriewinkel und Winkel $\sphericalangle AMB$ ist Zentriwinkel über dem gleichen Bogen AB .

Dreieck ABM ist gleichschenkelig ($\overline{AM}$ und $\overline{BM}$ sind Radien desselben Kreises); $\overline{DM}$ ist Höhe von der Spitze auf die Basis; sie ist zugleich Winkelhalbierende des Winkels an der Spitze und Seitenhalbierende der Basis. Folglich gilt im rechtwinkligen Dreieck ADM :



$$\sin 80^\circ = \frac{2,5 \text{ cm}}{r}$$

$$\text{bzw. } r = \frac{2,5 \text{ cm}}{\sin 80^\circ}; r \approx 2,54 \text{ cm}$$

Ma 9 ■ 1787 Aus den Angaben für den Flaschenpfand folgt, daß 30 Flaschen gekauft wurden.

Es sei x die Anzahl der Flaschen Cola und y die Anzahl der Flaschen Limonade, dann gilt $x + y = 30$.

Es ist dann weiter $0,35x$ der Preis für x Flaschen Cola und $0,25y$ der Preis für die y Flaschen Limonade (in Mark). Dann gilt

$$0,35x + 0,25y = 10.$$

Beide Gleichungen bilden ein System:

$$(1) \quad 0,35x + 0,25y = 10 \\ (2) \quad x + y = 30 \quad | \cdot (-0,25) \\ (1) \quad 0,35x + 0,25y = 10 \\ (2)' \quad -0,25x - 0,25y = -7,5 \quad | + \\ (3) \quad 0,1x = 2,5 \\ x = 25$$

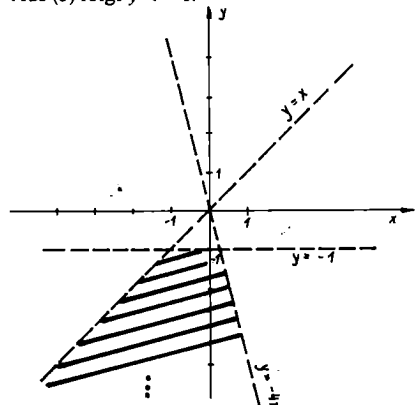
Es folgt $y = 5$, also $L = \{[25; 5]\}$.

Es wurden 25 Flaschen Cola und 5 Flaschen Limonade gekauft.

Ma 9 ■ 1788 Aus (1) folgt $y < x$.

Aus (2) folgt $y < -4x$.

Aus (3) folgt $y < -1$.



Die Menge aller Punkte der schraffiert dargestellten Fläche mit Ausnahme der Punkte der Begrenzungsgeraden $y = -1$, $y = x$ und $y = -4x$ genügen den geforderten Bedingungen.

Ma 10/12 ■ 1789 64 läßt sich durch die Potenzen 64^1 , 8^2 , 4^3 oder 2^6 darstellen. Es sind also 4 Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: Es sei $64 = 64^1$. Dann gilt $2x + 2 = 64$ bzw. $x = 31$. Es müßte dann gelten $\sqrt[3]{64} = 1$. Das ist offensichtlich nicht der Fall.

Daraus folgt: $L = \emptyset$.

2. Fall: Es sei $64 = 8^2$. Dann gilt $2x + 2 = 8$ bzw. $x = 3$. Es müßte dann gelten $\sqrt[3]{8} = 2$. Das ist wahr.

Daraus folgt: $L = \{3\}$.

3. Fall: Es sei $64 = 4^3$. Dann gilt $2x + 2 = 4$ bzw. $x = 1$. Es müßte dann gelten $\sqrt[3]{4} = 3$. Das ist falsch.

Daraus folgt: $L = \emptyset$.

4. Fall: Es sei $64 = 2^6$. Dann gilt $2x + 2 = 2$ bzw. $x = 0$. Es müßte dann gelten $\sqrt[3]{2} = 6$. Das ist nicht definiert.

Daraus folgt: $L = \emptyset$.

Die Gleichung $(2x+2)\sqrt[3]{2x+2} = 64$ hat die Lösungsmenge $L = \{3\}$.

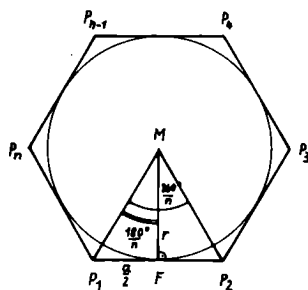
Ma 10/12 ■ 1790 Jedes regelmäßige n -Eck läßt sich in n gleichschenklige Dreiecke zerlegen. Diese Dreiecke sind paarweise kongruent. Die Basis jedes Dreiecks ist gleich der Seite des n -Ecks. Die Höhe jedes Dreiecks ist gleich dem Radius des Inkreises des n -Ecks. Der Winkel an der Spitze jedes Dreiecks hat die Größe $\frac{360^\circ}{n}$.

Der Flächeninhalt A_1 des Inkreises des n -Ecks beträgt $A_1 = \pi r^2$. Der Flächeninhalt A_2 des n -Ecks beträgt $A_2 = n \cdot \frac{a}{2} \cdot r$. Da $\frac{a}{2} = r \cdot \tan \frac{180^\circ}{n}$ und somit $\frac{a}{2} = r \cdot \tan \frac{180^\circ}{n}$ gilt, beträgt der Flächeninhalt A_2 des regelmäßigen n -Ecks

$$A_2 = n \cdot r^2 \cdot \tan \frac{180^\circ}{n}.$$

Das gesuchte Verhältnis ist dann

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{n \cdot r^2 \cdot \tan \left(\frac{180^\circ}{n} \right)}{\pi r^2} = \frac{n \cdot \tan \left(\frac{180^\circ}{n} \right)}{\pi}.$$



Ma 10/12 ■ 1791 a) Es seien a , $a+1$ und $a+2$ drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Dann muß nach Aufgabenstellung gelten:

$$(a+2)^2 = (a+1)^2 + a^2;$$

$$\text{d. h. } a^2 - 2a - 3 = 0.$$

Die Lösungsmenge dieser quadratischen Gleichung ist $L = \{-1; 3\}$. Nach unserer Aufgabe kommt nur die Lösung 3 in Frage; es gilt $3^2 + 4^2 = 5^2$.

b) Bekanntlich ist ein Dreieck genau dann rechtwinklig, wenn die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt. Dabei sind a und b die Maßzahlen der Katheten, c ist die Maßzahl der Hypotenuse. Drei natürliche Zahlen a , b , c , die diese Beziehung erfüllen, heißen pythagoreische Zahlen.

Die Zahlen 3, 4, 5 erfüllen die Gleichung, denn es gilt

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \text{ bzw. } 9 + 16 = 25.$$

Auch die Gleichung

$(3n)^2 + (4n)^2 = (5n)^2$ wird für natürliche Zahlen $n \geq 1$ erfüllt; denn es gilt

$$9n^2 + 16n^2 = 25n^2, \\ 25n^2 = 25n^2.$$

Folglich gibt es beliebig viele Tripel natürlicher Zahlen, für die gilt, daß das Quadrat der größten Zahl gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Zahlen ist, w. z. b. w. Beispiel für $n = 7$:

$$(3 \cdot 7)^2 + (4 \cdot 7)^2 = (5 \cdot 7)^2$$

$$21^2 + 28^2 = 35^2$$

$$441 + 784 = 1225$$

$$1225 = 1225. \text{ Aus}$$

$$(3 \cdot n)^2 + (4 \cdot n)^2 = (5 \cdot n)^2 \text{ folgt}$$

$$(3n)^2 + (4n)^2 = (5n)^2.$$

Für $k = 3n$ gilt dann

$$k^2 + \left(k + \frac{k}{3}\right)^2 = \left(k + \frac{2k}{3}\right)^2.$$

Das heißt, die gewählten natürlichen Zahlen k müssen durch 3 teilbar sein.

Beispiel für $k = 99$:

$$99^2 + (99 + 33)^2 = (99 + 66)^2,$$

$$99^2 + 132^2 = 165^2,$$

$$9801 + 17424 = 27225$$

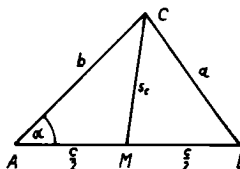
$$27225 = 27225.$$

Ma 10/12 ■ 1792 Nach dem Kosinussatz gilt im Dreieck AMC :

$$(1) \quad s_c^2 = b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2b \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos \alpha$$

Nach dem Kosinussatz gilt im Dreieck ABC :

$$(2) \quad \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$



Setzt man (2) in (1) ein, so erhält man

$$s_c^2 = b^2 + \frac{c^2}{4} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}.$$

(bc wurde gekürzt)

Die weitere äquivalente Umformung ergibt

$$s_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$$

$$s_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

Setzt man nun die gegebenen Längen ein, so gilt:

$$s_c = \frac{1}{2} \sqrt{73} \text{ cm bzw. } s_c \approx 4,27 \text{ cm.}$$

Ph 6 ■ 41 a) Versuch:

$$116,5 \text{ ml} - 95 \text{ ml} = 21,5 \text{ ml} \triangleq 21,5 \text{ cm}^3$$

(1 ml $\triangleq$ 1 cm³). Das Volumen beträgt 21,5 cm³.

b) Geg.: Kantenlängen $a = 19 \text{ mm}$, $b = 27 \text{ mm}$, $c = 43 \text{ mm}$

Ges.: Volumen V in cm³

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = 19 \text{ mm} \cdot 27 \text{ mm} \cdot 43 \text{ mm}$$

$$V = 22059 \text{ mm}^3$$

$$V = 22,059 \text{ cm}^3$$

Das berechnete Volumen beträgt 22,059 cm³.

$$\text{c) } 22,059 \text{ cm}^3 - 21,5 \text{ cm}^3 = 0,559 \text{ cm}^3 = 559 \text{ mm}^3.$$

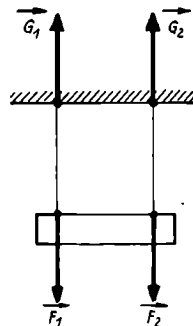
Die Meßergebnisse unterscheiden sich um 559 mm³. Das errechnete Ergebnis ist genauer.

Ph 7 ■ 42

a) Maßstab 10 kp $\triangleq$ 1 cm.

Dann ist $F_1 = F_2 = 48 \text{ kp} \triangleq 4,8 \text{ mm}$.

b) $G_1 = G_2 \approx 48 \text{ kp} \triangleq 4,8 \text{ mm}$



Ph 8 ■ 43

Geg.: $m_1 = 100 \text{ g}$, $m_2 = 250 \text{ g}$, $\vartheta_1 = 25^\circ \text{C}$,

$\vartheta_2 = 40^\circ \text{C}$, $W_{\text{auf}} = 80\%$ von W_{ab}

Ges.: Die Mischtemperatur ϑ_m

Nach der Grundgleichung der Wärmelehre gilt $W = c \cdot m \cdot \Delta\vartheta$

$$W_{\text{auf}} = 0,8 W_{\text{ab}}$$

$$c \cdot m_1 \cdot (\vartheta_m - \vartheta_1) = 0,8 \cdot c \cdot m_2 \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_m)$$

$$m_1 \cdot (\vartheta_m - \vartheta_1) = 0,8 \cdot m_2 \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_m)$$

$$100 \text{ g} \cdot (\vartheta_m - 25^\circ \text{C}) = 0,8 \cdot 250 \text{ g} \cdot (40^\circ \text{C} - \vartheta_m)$$

$$\vartheta_m = 35^\circ \text{C}$$

Die Mischtemperatur beträgt 35°C .

Ph 9 ■ 44 Geg.:

a) $s = 6,25 \text{ m}$

$h = 3,75 \text{ m}$

$l = 18 \text{ m}$

$t = 90 \text{ min} = 1,5 \text{ h}$ (Regendauer)

$$n = 1 \frac{\text{mm}}{\text{h}} = 0,001 \frac{\text{m}}{\text{h}} \text{ (Regenmenge pro Stunde)}$$

b) $r = 6 \text{ cm} = 0,6 \text{ dm}$

Ges.:

a) V_r (Gesamtregmenge)

b) t_u (Überlaufzeit)

a) Weil gemäß der Aufgabe der Regen senkrecht fallen soll, ist die in die Rechnung einzusetzende „wirksame“ Auffangfläche gleich der senkrechten Projektion des Daches auf die Horizontalebene. Diese Projektion des Daches ist gleich der Auffangfläche A .

Die Gesamtmenge V_r findet man mit der Gleichung

$$V_r = A \cdot n \cdot t \quad (1)$$

Nun ist A zu berechnen. Nach Bild 1 und Bild 2 ist

$$A = 2 \cdot a \cdot l \quad a^2 = s^2 - h^2 \\ A = 2\sqrt{s^2 - h^2} \cdot l \quad a = \sqrt{s^2 - h^2}$$

In (1) eingesetzt, ist dann

$$V_r = 2\sqrt{s^2 - h^2} \cdot l \cdot n \cdot t$$

$$V_r = 2\sqrt{6,25^2 - 3,75^2} \text{ m} \cdot 18 \text{ m}$$

$$\cdot 0,001 \frac{\text{m}}{\text{h}} \cdot 1,5 \text{ h}$$

$$V_r = 0,27 \text{ m}^3$$

$$V_r = 270 \text{ dm}^3 = 270 \text{ l}$$

Vom Dach werden 270 l Regenwasser aufgefangen.

b) Für die Überlaufzeit t_u gilt

$$t_u : t = 2V_d : V_r$$

$$t_u = \frac{2V_d}{V_r} \cdot t$$

(2)

Dabei ist V_d das Volumen einer Dachrinne

$$\text{mit } V_d = \frac{1}{2} r^2 \cdot \pi \cdot l.$$

In (2) eingesetzt

$$t_u = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot l \cdot t}{V_r}$$

$$t_u = \frac{0,6^2 \text{ dm}^2 \cdot 3,14 \cdot 180 \text{ dm} \cdot 1,5 \text{ h}}{270 \text{ dm}}$$

$$t_u \approx 1,1304 \text{ h}$$

$$t_u \approx 1 \text{ h}; 7 \text{ min}; 50 \text{ s}$$

$$t_u \approx 1 \text{ h}; 8 \text{ min}$$

Die Dachrinne würde nach 1 Stunde und 8 Minuten überlaufen.

Ph 10/12 ■ 45

Geg.: Bahnradius $l_2 = 384000 \text{ km}$

Umlaufzeit $t_1 = 1 \text{ d}$, $t_2 = 27,33 \text{ d}$

Ges.: Bahnradius des Satelliten l_1

Nach dem 3. Keplerschen Gesetz verhalten sich die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Satelliten wie die dritten Potenzen der Bahnradien (bei elliptischen Bahnen der großen Halbachsen).

$$t_1^2 : t_2^2 = l_1^3 : l_2^3$$

$$l_1^3 = \frac{t_1^2 \cdot l_2^3}{t_2^2}$$

$$l_1^3 = \frac{1^2 \cdot 384000^3}{27,33^2} \text{ km}^3$$

$$l_1 = 384000 : \sqrt[3]{27,33^2} \text{ km}$$

$$l_1 \approx 42320 \text{ km}$$

Die Höhe über der Erdoberfläche ist dann $42320 \text{ km} - 6370 \text{ km} = 35950 \text{ km}$.

Der Fernseh-Satellit muß sich in einer Höhe von etwa 36000 km über der Erdoberfläche befinden.

Ch 7 ■ 33

a) $500 \text{ kg Schwefelkies} \triangleq 180 \text{ kg Schwefel}$
 $x \triangleq 1500 \text{ kg Schwefel}$

$$x = \frac{500 \text{ kg} \cdot 1500 \text{ kg}}{180 \text{ kg}} = 4167 \text{ kg}$$

b) $4167 \text{ kg} \cdot 30 \approx 125000 \text{ kg}$

c) $125000 \text{ kg} \triangleq 100\%$

$$4167 \text{ kg} \triangleq x$$

$$x = 3,3\%$$

Ch 8 ■ 34

54 Teile Öl

66 Teile Kalilauge

278 Teile Spiritus

158 Teile Wasser

556 Teile Seifenspirit $\triangleq 14 \text{ kg}$

a) $556 \text{ Teile} \triangleq 14 \text{ kg}$

54 Teile $\triangleq x$

$$x = \frac{54 \cdot 14}{556} = 1,34 \text{ kg Öl}$$

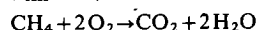
b) $x = \frac{66 \cdot 14}{556} = 1,66 \text{ kg Kalilauge}$

c) $x = \frac{278 \cdot 14}{556} = 7,0 \text{ kg Spiritus}$

d) $x = \frac{158 \cdot 14}{556} = 3,98 \text{ kg Wasser}$

Ch 9 ■ 35

7 ml V



22,4 l 44,8 l

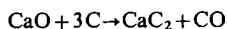
$$V = \frac{7 \text{ ml} \cdot 44,8 \text{ l}}{22,4} = 14 \text{ ml}$$

Zur Verbrennung von 7 ml Methan werden 14 ml Sauerstoff benötigt $\triangleq 70 \text{ ml}$ Luft. Da 50% Luftüberschuß

$$70 \text{ ml} + 35 \text{ ml} = 105 \text{ ml}$$

Ch 10/12 ■ 36

a) $m = 300 \text{ t}$



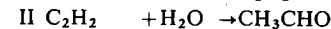
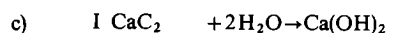
56 g 64 g

$$m = \frac{300 \text{ t} \cdot 56 \text{ g}}{64 \text{ g}} = 263 \text{ t}$$

263 t Branntkalk müssen für die Erzeugung von 300 t Kalziumkarbid eingesetzt werden.

$$\text{b) } \frac{0,13 \text{ kWh}}{64 \text{ g}} = \frac{W_{ei}}{300000000 \text{ g}}$$

$$W_{ei} = 609370 \text{ kWh}$$



2000 g m

CaC₂ C₂H₅OH

64 g 46 g

$$m = \frac{2000 \text{ g} \cdot 46 \text{ g}}{64 \text{ g}} = 1440 \text{ g}$$

Aus 2 kg Kalziumkarbid erhält man theoretisch $1440 \text{ g} \triangleq 1,44 \text{ kg}$ Äthanol.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb,

Heft 5/78, Fortsetzung:

Ma 5 ■ 1793 Wegen $1113 - 999 = 114$

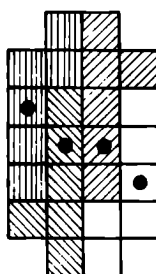
und $1111 - 997 = 114$

und $114 > 112$ gibt es nur die Lösung

$$1111 - 999 = 112.$$

Ma 5 ■ 1794 Hätte jedes der 60 Fahrzeuge nur zwei Räder, dann wären es nur $2 \cdot 60$ Räder, also 120 Räder gewesen. Aus $200 - 120 = 80$ und $80 : 2 = 40$ folgt, daß 40 Autos und 20 Fahrräder die Brücke passierten.

Ma 5 ■ 1795 Wir stellen eine mögliche Lösung vor:



Ma 5 ■ 1796 Der Käfer hat folgende Möglichkeiten, von A nach G zu gelangen: (a, b, l), (a, k, f), (d, c, l), (d, m, g), (i, e, f), (i, h, g). Es sind insgesamt sechs Möglichkeiten.

Ma 5 ■ 1797 Angenommen, Hans hat n Pilze gesammelt; dann hat Jürgen $(2n - 5)$ Pilze, Erika $(3n - 20)$ Pilze gesammelt. Insgesamt sind es $(6n - 25)$ Pilze. Nun gilt

$$90 < 6n - 25 < 100,$$

$$115 < 6n < 125,$$

$$19 < n < 21, \text{ also } n = 20.$$

Hans hat 20, Jürgen 35, Erika 40 Pilze gesammelt.

Ma 5 ■ 1798 Aus $aa + fg = bbf$ folgt $b = 1$.

Aus $ade - lja = ldk$ folgt $j = 0$ und $a = 2$.

Aus $22 + fg = 11f$ folgt $f = 9$ und $g = 7$.

Aus $97 + h = 102$ folgt $h = 5$.

Aus $119 + e5 = 1dk$ folgt $k = 4$.

Aus $2de - 102 = 1d4$ folgt $e = 6$.

Aus $22 \cdot 1c = 2d6$ folgt $c = 3$.

Aus $119 + 65 = 1d4$ folgt $d = 8$.

Wir erhalten somit

$$22 \cdot 13 = 286$$

$$+ \quad -$$

$$97 + 5 = 102$$

$$119 + 65 = 184$$

Ma 6 ■ 1799 Die Summe aus allen Primzahlen, die kleiner als 100 sind, beträgt $s = 2 + 3 + 5 + \dots + 97 = 1060$. Nun gilt

$$n = \left(\frac{1060 \cdot 3}{10} + 12 \right) : 10, \text{ also } n = 33.$$

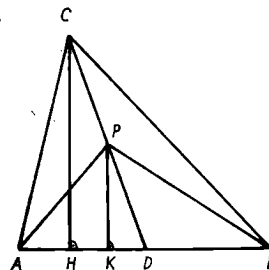
Dieser Klasse gehören 33 Schüler an.

Ma 6 ■ 1800 Die Anzahl der Schüler dieser Klasse muß ein Vielfaches von 9 und von 6, also ein Vielfaches von 18 sein. Wegen $20 < n < 40$ trifft dies nur zu für $n = 36$. Dieser Klasse gehören somit 36 Schüler an. Angenommen x Schüler haben die Note 3 erhalten; dann gilt

$$x = 36 - \frac{36}{9} - \frac{36}{3} - \frac{36}{6}, \text{ also } x = 14.$$

Die Note 3 erhielten 14 Schüler.

Ma 6 ■ 1801 Es sei $\overline{CH}$ Höhe zur Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks ABC und $\overline{PK}$ Höhe zur Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks ABP . Wegen $\overline{AD} \cong \overline{DB}$ sind die Dreiecke $\triangle ADP$ und $\triangle DBP$ flächengleich. Aus dem gleichen Grunde sind aber auch die Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle DBC$ flächengleich. Folglich gilt für die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle APC$ und $\triangle BCP$ auch $A_1 = A_2$, d. h., sie sind ebenfalls flächengleich.



Ma 6 ■ 1802 Aus $3 + 8 = 11$ folgt, daß Olaf im Jahre 1978 11 Jahre alt war. Angenommen, die Mutter war im gleichen Jahre n Jahre alt; dann war der Vater $(n + 3)$ Jahre alt. Nun gilt

$$3 + 11 + n + (n + 3) = 77,$$

$$2n + 17 = 77,$$

$$2n = 60,$$

$$n = 30.$$

Im Jahre 1978 sind die Mutter 30, der Vater 33, Olaf 11, sein Bruder Richard 3 Jahre alt.

Ma 6 ■ 1803 Angenommen, nach der Preissenkung wurden x Portionen Essen ausgegeben; dann gilt

$$80 \cdot (x - 200) = 70 \cdot x,$$

$$8 \cdot (x - 200) = 7 \cdot x,$$

$$8x - 1600 = 7x,$$

$$x = 1600.$$

Es wurden nach der Preissenkung täglich 1600 Portionen Essen ausgegeben.

Ma 7 ■ 1804 Angenommen, es sind x Innen- und y Außenplätze;
dann gilt $x = 6y$ (1) und
 $x + 2 = 4 \cdot (y + 6)$ bzw. $x = 4y + 22$ (2).
Setzen wir (2) in (1) ein, so erhalten wir

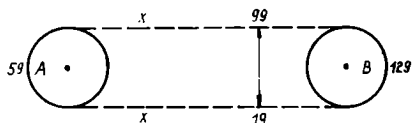
$$\begin{aligned} 4y + 22 &= 6y, \\ 2y &= 22, \\ y &= 11. \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Einsetzen $x = 6 \cdot 11 = 66$.
Das Schiff hat für 77 Personen Sitzplätze.

Ma 7 ■ 1805 Der Abstand der beiden Sessel Nr. 19 und Nr. 99 von jeder der beiden Stationen des Sessellifts ist zum Zeitpunkt der Beobachtung gleich groß. Daraus folgt

$$\begin{aligned} x + x &= 99 - 19, \\ 2x &= 80, \\ x &= 40. \end{aligned}$$

Wegen $19 + 40 = 59$ und $140 : 2 = 70$ und $59 + 70 = 129$ befindet sich Sessel Nr. 59 in der einen, Sessel Nr. 129 in der anderen Station.



Ma 7 ■ 1806 Die Mannschaft der Klasse 9b hatte zwei Spiele zu bestreiten, und zwar gegen die Mannschaften der Klasse 10a und 10b. Die Mannschaft der Klasse 9b kann kein unentschiedenes Spiel erzielt haben; denn sonst müßte sie auf Grund des Punkteverhältnisses sowohl gegen die Mannschaft der Klasse 10a als auch gegen die der Klasse 10b unentschieden gespielt haben. Das ist wegen des Torverhältnisses nicht möglich. Das Spiel zwischen den Mannschaften der Klassen 10a und 10b ging unentschieden aus, da die Pluspunkte 3 und 1 des Punkteverhältnisses ungerade Zahlen sind.

Fallunterscheidung:

1. Angenommen, das Spiel zwischen den Mannschaften der Klassen 10a und 10b endete mit dem Torverhältnis 0:0, dann müßte das Spiel (10a/9b) 3:2 geendet haben. Das ist nicht möglich, da die Mannschaft der Klasse 9b nur ein Tor einstecken mußte.
2. Angenommen, dieses Spiel endete 1:1; dann müßte das Spiel (10a/9b) 2:1 geendet haben. Das Spiel (9a/10b) hätte dann 1:0 enden müssen, was nicht möglich ist. Das Torverhältnis der Mannschaft der Klasse 10b müßte dann 1:2, aber nicht 2:5 lauten.
3. Angenommen, dieses Spiel endete 2:2; dann lautet das Torverhältnis des Spiels (10a/9b) 1:0, das des Spiels (9b/10b) hingegen 3:0. Nur dieser Fall ist möglich.

Lösungen zu: alpha-heiter, Heft 2/79

Aufgabe mit Spiegel
A und c sind gleich.

Niederländischer Denksport

De driehoeken CDF en CBE zijn congruent, zodat opp. AECF = opp. ABCD = 256. Daar opp. CEF = 200 en opp. AECF = 256, is opp. AEF = 56. Stel $BE = x$, dan is $AE = 16 + x$ en $AF = 16 - x$. We drukken de opp. van driehoek AEF in x uit en vinden zo de vergelijking $(16 + x)(16 - x) = 2 \cdot 56 = 112$. Zo blijkt, dat $BE = 12$ is.

Gute Beobachtungsgabe gefragt

Zerlegt man das Quadrat in vier gleiche Teile, so erkennt man sofort, daß das Verhältnis schraffiert-nichtschraffiert wie 9:27 bzw. 1:3 ist.

Buchstaben-Mosaik

Da nach Aufgabenstellung verschiedene Buchstaben auch verschiedene Ziffern bedeuten und da in Gleichung (1) Basis und Exponent einstellige Zahlen sind, die Potenz aber zweistellig ist, besitzt Gleichung (1) folgende Lösungen:

$$\begin{aligned} 2^4 &= 16; 3^4 = 81; 4^2 = 16; \\ 7^2 &= 49; 8^2 = 64; 9^2 = 81. \end{aligned}$$

Da die Potenz der Gleichung (2) vierstellig ist, entfallen die Lösungen mit dem Exponenten 4 (vierte Potenz einer zweistelligen Zahl ist mindestens fünfstellig), also gilt $x = 2$. Da die Ziffer der Basis in Gleichung (1) übereinstimmt mit der Ziffer an der Zehnerstelle in der Potenz der letzten Gleichung, kann F nur 4 oder 8 und G nur 7 oder 9 sein.

Durch Einsetzen dieser Zahlen in die Gleichungen (9) und (2) überzeugt man sich, daß nur $F = 4$, $G = 7$ sowie $H = 6$ und $A = 3$ die Gleichungen (1) bis (10) erfüllen –

$$\begin{aligned} 4^2 &= 16 \\ 34^2 &= 1156 \\ 334^2 &= 111556 \\ 3334^2 &= 11115556 \\ 33334^2 &= 1111155556 \\ 66667^2 &= 444488889 \\ 6667^2 &= 4448889 \\ 67^2 &= 4489 \\ 7^2 &= 49 \end{aligned}$$

Französischer Denksport

In der Gleichung (1) kann es sich nur um eine Vervielfachung handeln. In der Gleichung (3) könnte eine Vervielfachung oder eine Division sein, somit Teilung. Entsprechend ergibt sich bei (2) nur das Zeichen „–“ und bei (4) das Zeichen „+“. Bei (3) kann f nur 2 oder 3 sein; nach (2) folgt dann $c = 9$ und $f = 3$; dann ergibt (2) $adde = 999 + 9 = 1008$, somit $a = 1$, $d = 0$, $e = 8$. Nach (1) wird also $1008 : 9 = 112$, also $b = 2$. Schließlich gilt (4) für $g = 7$ und $h = 4$.

- (1) $112 \cdot 9 = 1008$; (2) $1008 - 9 = 999$;
(3) $999 : 3 = 333$; (4) $333 + 7 = 340$.

Magische Quadrate

Die Wörter in den Teilquadraten lauten:
Lage, Beta, Eins, Grad, Acht, Zins, Zahl,

prim, dual, plus, halb, quer, Rest, rund, Term, drei, Raum, Lote, Kote, Zehn, viel, Rand, Mega, Teil, ganz, zwei, echt
Gaspard Monge

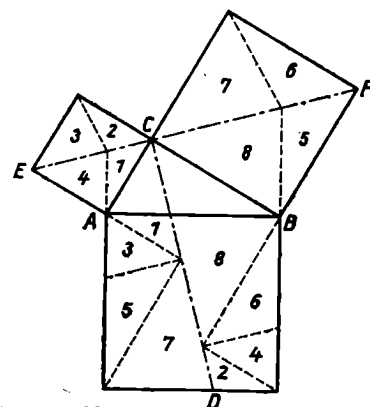
M	D	L	A	E	B	E	C	Z	S	E	I
N	D	E	T	T	A	C	G	Z	S	N	
A	A	R	E	M	A	H	T	G	I	N	L
Z	A	F	R	M	R	R	H	T	T	L	
H	L	F	I	M	L	H	H	D	U	L	D
Q	L	I	R	P	L	A	H	A	L	D	O
Q	U	U	R	U	S	L	L	B	B	D	R
E	R	E	U	T	S	M	G	L	D	R	U
S	S	T	E	T	E	M	L	D	I	N	
I	L	S	T	R	M	U	L	I	E	R	N
K	L	E	T	B	R	A	A	L	E	Q	R
K	O	T	B	R	V	R	L	Z	E	N	R
T	E	T	V	I	R	Z	H	A	D	N	
U	T	M	V	E	L	R	E	H	A	R	R
T	M	E	E	L	T	T	E	L	A	W	U
A	A	G	A	L	P	I	L	Z	Z	W	E
H	G	N	Z	A	P	N	I	L	I	C	
G	U	N	B	A	K	K	N	L	E	H	T

Nächtlicher Sturm

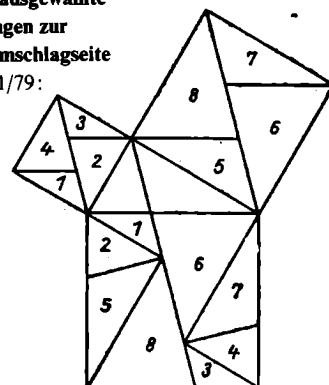
Christian nimmt einen 20 cm langen Bindfaden und befestigt beide Enden mit Stecknadeln auf einem Brett in einer Entfernung von 6 cm. Er schiebt den Bindfaden von einem Punkt aus senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Stecknadeln in die Höhe, bis sich der Faden strafft, und mißt die Entfernung; für die cm, die er abliest, setzt er m ein und erhält so die genaue Höhe.

Barbara rechnet mit dem pythagoreischen Lehrsatz:

$$\begin{aligned} \text{Höhe } x: x^2 &= (20 - x)^2 - 6^2 \\ x &= 9,10 \text{ m} \end{aligned}$$



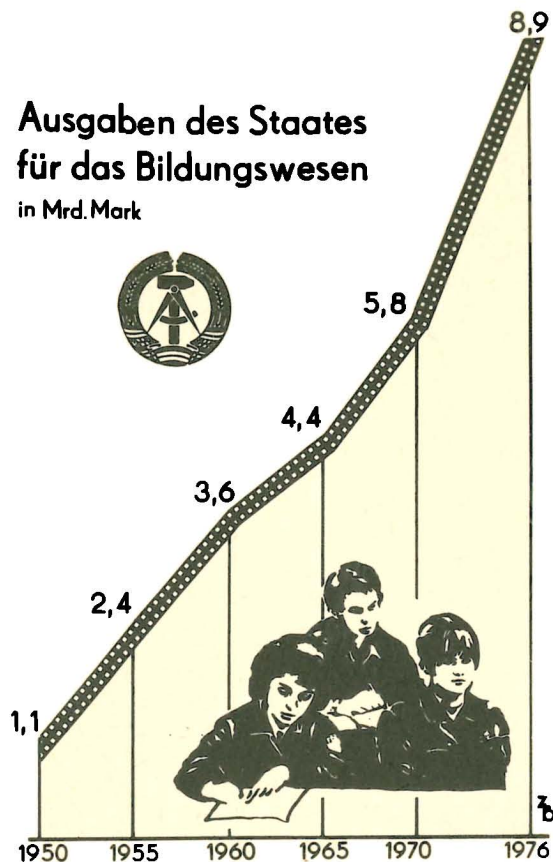
**Zwei ausgewählte
Lösungen zur
IV. Umschlagseite
Heft 1/79:**



30 Jahre haben Gewicht

Ausgaben des Staates für das Bildungswesen

in Mrd. Mark



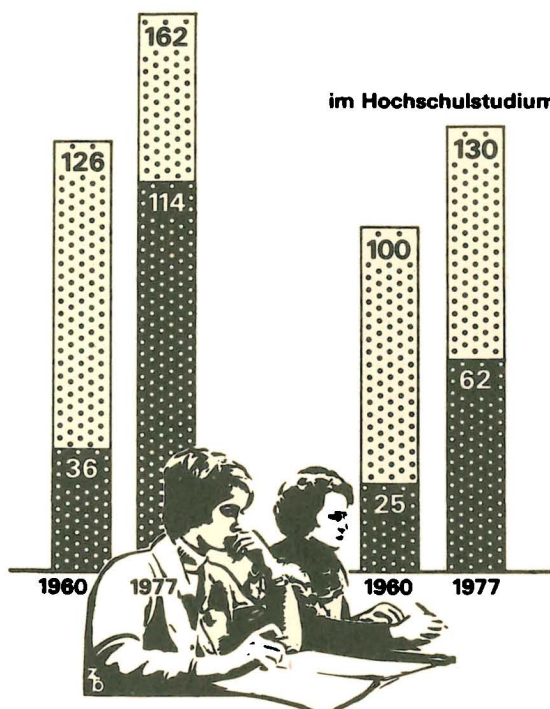
Feriensommer 1978 in der DDR



Studierende in der DDR

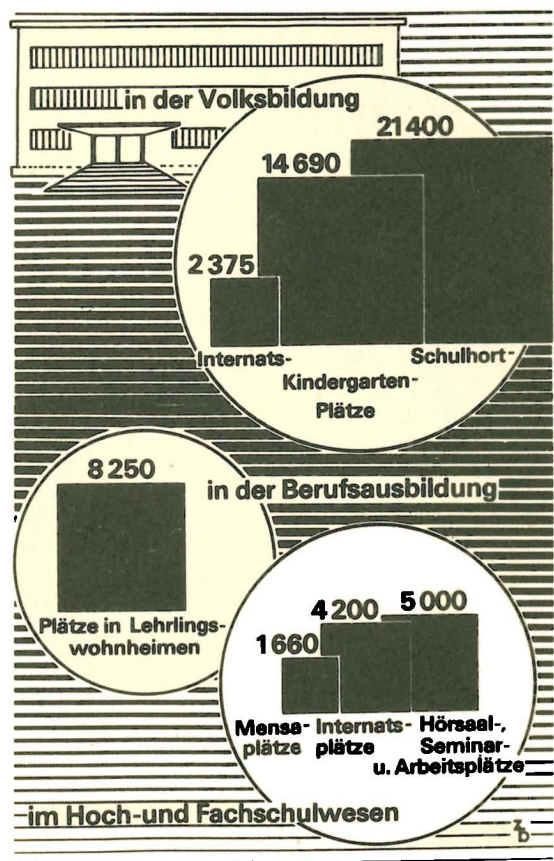
im Fachschulstudium

im Hochschulstudium



..... Studierende insgesamt
 ■■■ weibliche Studierende
 in 1000

Verbesserung der materiellen Voraussetzungen im Bildungswesen 1978



Mathematische Schülerbücherei



Gesamtverzeichnis

- Band 1 Alexandroff, Einführung in die Gruppentheorie (DVW)
 Band 2 Hasse, Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik (BGT)
 Band 3 Markuschewitsch, Streifzüge durch die Mathematik I (U)
 Band 4 Hameister, Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene (BGT)
 Band 5 Vyšin, Methoden zur Lösung mathematischer Aufgaben (BGT)
 Band 6 Lietzmann, Der Pythagoreische Lehrsatz (BGT)
 Band 7 Varga, Mathematische Logik für Anfänger I (VWV)
 Band 8 Sminski, Die Methode der vollständigen Induktion (DVW)
 Band 9 Korowkin, Ungleichungen (DVW)
 Band 10 Gnedenko/Chintschin, Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung (DVW)
 Band 11 Lietzmann, Wo steckt der Fehler? (BGT)
 Band 12 Lietzmann, Altes und Neues vom Kreis (BGT)
 Band 13 Lietzmann, Riesen und Zwerge im Zahlenreich (BGT)
 Band 14 Müller, Rechenvorteile (BGT)
 Band 15 Natanson, Einfachste Maxima- und Minimaufgaben (DVW)
 Band 16 Natanson, Summierung unendlich kleiner Größen (DVW)
 Band 17 Dubnow, Fehler in geometrischen Beweisen (DVW)
 Band 18 Dynkin/Uspenski, Mathematische Unterhaltungen I (DVW)
 Band 19 Worobjow, Die Fibonacci'schen Zahlen (DVW)
 Band 20 Dynkin/Uspenski, Mathematische Unterhaltungen II (DVW)
 Band 21 Kurosch, Algebraische Gleichungen beliebigen Grades (DVW)
 Band 22 Gelfond, Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen (DVW)
 Band 23 Schafarewitsch, Über die Auflösung von Gleichungen höheren Grades (DVW)
 Band 24 Markuschewitsch, Streifzüge durch die Mathematik II (U)
 Band 25 Markuschewitsch, Rekursive Folgen (DVW)
 Band 26 Dynkin/Uspenski, Mathematische Unterhaltungen III (DVW)
 Band 27 Steinhaus, 100 Aufgaben (U)
 Band 28 Perelman, Unterhaltsame Geometrie (VWV)
 Band 29 Perelman, Unterhaltsame Algebra (VWV)
 Band 30 Kolosow, Kreuz und quer durch die Mathematik (VWV)
 Band 31 Teplow, Grundriß der Kybernetik (VWV)
 Band 32 Jaglom/Boltjanski, Konvexe Figuren (DVW)
 Band 33 Belkner, Determinanten (BGT)
 Band 34 Autorenkollektiv, Rund um die Mathematik (KB)
 Band 35 Schmidt, Kein Ärger mit der Algebra (KB)
 Band 36 Übungen für Junge Mathematiker, Teil 1: Lehmann, Zahlentheorie (BGT)
 Band 37 Übungen für Junge Mathematiker, Teil 2: Grosche, Elementargeometrie (BGT)
 Band 38 Übungen für Junge Mathematiker, Teil 3: Kleinfeld, Ungleichungen (BGT)
 Band 39 Kryszicki, Zählen und Rechnen einst und jetzt (BGT)
 Band 40 Sedláček, Einführung in die Graphentheorie (BGT)
 Band 41 Gelfand/Glagolewa/Kirillow, Die Koordinatenmethode (BGT)
 Band 42 Markuschewitsch, Komplexe Zahlen und konforme Abbildungen (DVW)
 Band 43 Markuschewitsch, Flächeninhalte und Logarithmen (DVW)
 Band 44 Donath, Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks (DVW)
 Band 45 Roman, Reguläre und halbreuläre Polyeder (DVW)
 Band 46 Autorenkollektiv, Kompendium der Mathematik (VWV)
 Band 47 Lehmann, Lineare Optimierung für Junge Mathematiker (BGT)
 Band 48 Belkner, Matrizen (BGT)
 Band 49 May, Differentialgleichungen (BGT)
 Band 50 Sobol, Die Monte-Carlo-Methode (DVW)
 Band 51 Zich/Kolman, Unterhaltsame Logik (BGT)
 Band 52 Worobjow, Teilbarkeitskriterien (DVW)
 Band 53 Freyer/Gäbler/Möckel, Gut gedacht ist halb gelöst (U)
 Band 54 Bürger/Wittmar, Was ist, was soll Datenverarbeitung? (U)
 Band 55 Cendrowski, Bande der unsichtbaren Hand (KB)
 Band 56 Göttnner, Was ist, was soll Operationsforschung? (U)
 Band 57 Dege, EDV Maschinelles Rechnen (U)
 Band 58 Gelfand/Glagolewa/Schnol, Funktionen und graphische Darstellungen (BGT)
 Band 59 Kaloujnine, Primzahlzerlegung (DVW)
 Band 60 Trachtenbrot, Wieso können Automaten rechnen? (DVW)
 Band 61 Boltjanski-Gochberg, Kombinatorische Geometrie (DVW)
 Band 62 Varga, Mathematische Logik für Anfänger II (VWV)
 Band 63 Maibaum, Wahrscheinlichkeitsrechnung (VWV)
 Band 64 Wilenkin, Unterhaltsame Mengenlehre (BGT)
 Band 65 Belkner, Metrische Räume (BGT)
 Band 66 Jäckel, Mathematik heute (U)
 Band 67 Sedláček, Keine Angst vor Mathematik (FV)
 Band 68 Schreiber/Wußing, Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie (BGT) (1980)
 Band 69 Gronitz, Praktische Mathematik (VWV)
 Band 70 Hilbert, Matrizen (VWV)
 Band 71 Wissenspeicher Mathematik (VWV)
 Band 72 Steinhaus, 100 neue Aufgaben (U)
 Band 73 Miller, Gelöste und ungelöste mathematische Probleme (BGT)
 Band 74 Solodownikow, Lineare Ungleichungssysteme (DVW)
 Band 75 Gelfand/Jaglom, Vollständige Induktion in der Geometrie (DVW)
 Band 76 Rehm, Zahl, Menge, Gleichung (KB)
 Band 77 Lehmann, Kurzweil durch Mathe (U) (1979)
 Band 78 Kordemusi, Köpfchen, Köpfchen (U)
 Band 79 Glade/Manteuffel, Am Anfang stand der Abacus (U)
 Band 80 Baschmakowa, Diophant und diophantische Gleichungen (DVW)
 Band 81 Pieper, Zahlen aus Primzahlen (DVW)
 Band 82 Lehmann, Mathe mit Pfliff (U)
 Band 83 Jaglom, Ungewöhnliche Algebra (BGT)
 Band 84 Belkner, Reelle Vektorräume (BGT)
 Band 85 Stahl/Wenzel, Elektronische Datenverarbeitung (VWV)
 Band 86 Göttnner/Fischer/Krieg, Was ist, was kann Statistik? (U)
 Band 87 Übungen für Junge Mathematiker, Teil 4: Borneleit, Gleichungen (BGT)
 Band 88 Kolman, Die vierte Dimension (BGT)
 Band 89 Drews, Lineare Gleichungssysteme und lineare Optimierungsaufgaben (DVW)
 Band 90 Lovász, Peikán/Vesztergombi, Kombinatorik (BGT)
 Band 91 Rehm, Strecke, Kreis, Zylinder (KB)
 Band 92 Fanghänel/Vockenber, Arbeiten mit Mengen (VWV)
 Band 93 Fehrer, Näherungsrechnung (VWV)
 Band 94 Fehrer, Elementare Statistik (VWV) (1981)
 Band 95 Kantor/Solodownikow, Hyperkomplexe Zahlen (BGT)
 Band 96 Smogorschewski, Lobatschewskische Geometrie (BGT)
 Band 97 Berg, Differentialgleichungen 2. Ordnung mit Anwendungen (DVW) (1979)
 Band 98 Ruben, Philosophie und Mathematik (BGT) (1979)
 Band 99 Thiele, Mathematische Beweise (BGT) (1979)
 Band 100 Lehmann, 1/2 plus Spaß dabei (VWV) (1979)

Zitat von Gerhart Holtz-Baumert,
 Vizepräsident des Schriftstellerverbandes der DDR
 aus seinem Diskussionsbeitrag auf dem VIII. Päd. Kongreß

... Wir hatten eine Zeitlang die Vorstellung, die Literatur dürfe nichts oder wenig Lehrhaftes enthalten. Aber Brecht wußte es schon anders. Ich denke heute: Jeder Schriftsteller muß auch ein Lehrer, ein Erzieher sein – ein guter natürlich, kein grober, aufdringlicher, aber wann wünschen wir uns den überhaupt!

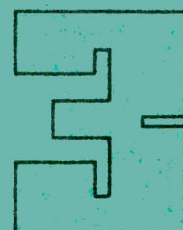
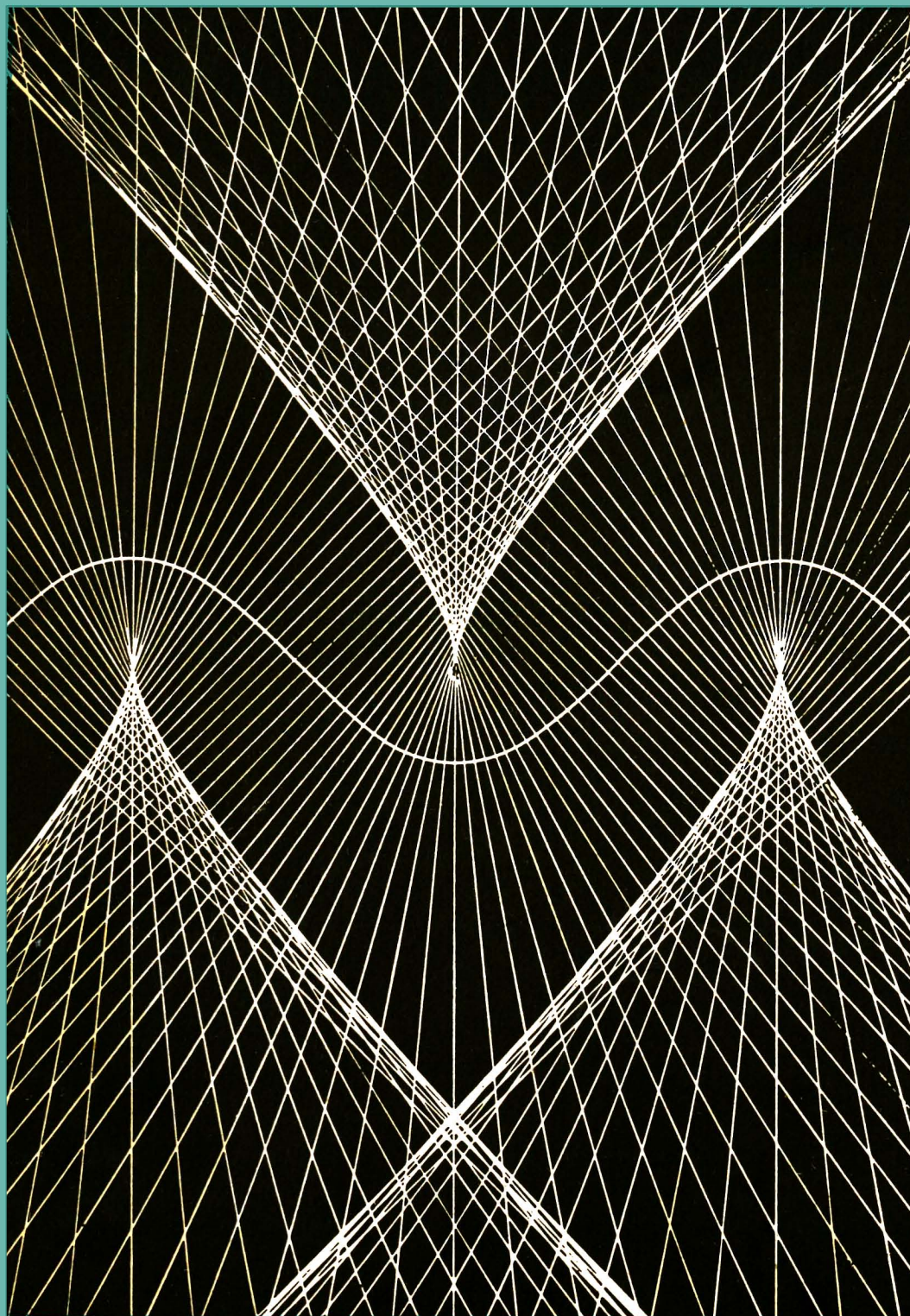
Und in jedem Lehrer muß nach meiner Meinung ein Künstler stecken, nicht nur in denen, die Literatur, Musik oder Kunst lehren, in allen, also auch im Mathematik- und Sportlehrer...

Von den vielen Welten, die der Mensch nicht von der Natur
 geschenkt bekam, sondern sich aus dem eigenen Geist
 erschaffen hat, ist die Welt der Bücher die größte.

Hermann Hesse

**Mathematische
Schülerzeitschrift**

alpha



**Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
13. Jahrgang 1979
Preis 0,50 M
Index 31059**

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dozent Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Diplom-Lehrer C.-P. Helmholz)

Redaktion:

StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos bzw. Vignetten: André François, Paris
(S. 53); Hochschule f. Architektur und Bau-
wesen, Weimar (S. 54); Eigenfoto R. Schu-
ster, Leipzig (S. 55); Axel Frohn, Berlin
(S. IV); R. Neumann, Neubrandenburg (S.
61); Nauka i tehnika, Riga (S. 63); M.
Schestopal, Moskau (S. 66/67); J. Jordan,
Leipzig (S. 67); ADN/ZB (S. 67); das Titel-
bild wurde der niederl. Zeitschrift „Pytha-
goras“ entnommen.

Titelblatt: W. Fahr, Berlin

Typographie: H. Tracksdorf



Gesamtherstellung: INTERDRUCK

Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128 – ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 22. Februar 1979

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 49 Geometrie auf der Gummihaut [8]*
Dr. Marianne Grassmann, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin
 - 52 Eine geometrische Deutung der Mittelwert-Ungleichungen [9]
Dr. W. Türke, Institut für Lehrerbildung Auerbach
 - 53 Denk dir eine Zahl . . . [3]
Aufgabenzusammenstellung aus: E. Geißler, Sachaufgaben aus den unteren Klassen (VWV)
 - 54 Eine Aufgabe von einem Kollektiv der Hochschule für Architektur und Bauwesen unter der Leitung von Prof. Dr. sc. techn. Harald Zrost, Sektion Bauwesen [9]
 - 55 Life – ein mathematisches Spiel [6]
stud. math. R. Schuster, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig
 - 56 Endliche und unendliche periodische Dezimalbrüche [6]
Dr. M. Rehm, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin
 - 59 Bücher aus dem BSB B. G. Teubner-Verlag [8]
 - 60 Gute Grundkenntnisse gefragt [5]
Autorenkollektiv der Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle
 - 61 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt
15 Jahre Bezirksklub Junger Mathematiker, Bezirk Neubrandenburg [5]
StR H.-J. Kerber, Abt. Vobi beim Rat des Bez. Neubrandenburg
 - 62 Ein Blick in die Praxis: Mathematik und Forstwirtschaft [5]
Oberlehrer H. Pätzold, Volkshochschule Waren/Müritz
 - 63 Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen [7]
 - 64 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig, H. Pätzold, Waren/Müritz
 - 66 Den Verstand entwickeln [7]
Leseprobe aus: „Lerne denken von Jugend an“ von Dr. phil. habil. E. Iljenkow, Moskau
 - 68 Lösungen [5]
- III./IV. U.-Seite:* Zum „ewigen Kalender“ [5]
Mathematikfachlehrer Hildegard Möller, Dresden
- Innenbeilage:* I bis III und VI bis VIII:
XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR: Aufgaben und
Lösungen zur Bezirksolympiade [7]
- Innenbeilage* IV und V: Ferienwandzeitung: Mit Troll auf Du und Du [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Geometrie auf der Gummihaut?

Ihr alle kennt doch sicher Luftballons, die mit lustigen Gesichtern bemalt sind. Wenn man den Luftballon verzerrt, kann man erreichen, daß aus einem lustigen Gesicht ein trauriges wird und ähnliches mehr. Wir betrachten folgende Skizze:

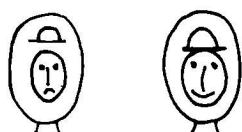


Bild 1

Kann man durch Verzerren des Luftballons erreichen, daß sich der Hut vom Kopf hebt? Mit diesem Vorgang des Verzerrens, Dehnens und Stauchens einer „Gummihaut“ (hier Luftballon) kann man sich Abbildungen veranschaulichen. Eine exakte Begriffsbildung ist aber auch möglich und notwendig und soll hier erfolgen.

Aus dem Geometrieunterricht kennt ihr Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen zwischen Teilmengen der Ebene. Durch derartige Abbildungen werden gegebene geometrische Figuren (Punktmengen der Ebene) auf andere, zu den gegebenen kongruente bzw. ähnliche Figuren abgebildet. Bei diesen Abbildungen wird ein Dreieck immer auf ein Dreieck, ein Kreis auf einen Kreis abgebildet, nie kann ein Dreieck auf einen Kreis abgebildet werden.

Es gibt eine ganze Reihe von Eigenschaften der Figuren, die bei Kongruenz- bzw. Ähnlichkeitsabbildungen erhalten bleiben müssen. Zum Beispiel:

Größe von Winkeln

Länge von Strecken (nur bei Kongruenzabbildungen).

Derartige Eigenschaften nennt man *Invarianten einer Abbildung*. (Das lateinische Wort „invariant“ bedeutet so viel wie „unveränderlich“.)

Kehren wir zu den Abbildungen zurück, die wir uns zum Anfang veranschaulicht haben. Bei diesen Abbildungen kann es durchaus vorkommen, daß ein Dreieck auf einen Kreis abgebildet wird.

Bild 2



(2) Ist es bei solchen Abbildungen auch möglich, folgende Figuren aufeinander abzubilden?



Bild 3

(3) Oder kann man jeden einzelnen Buchstaben des Wortes IDEE so verzerren, daß das Wort SAFT entsteht?

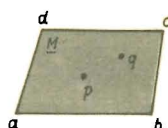
Um die gestellten Fragen beantworten zu können, werden wir zunächst eine genaue Erklärung für die Abbildungen angeben, die durch Verzerrungen einer „Gummihaut“ veranschaulicht werden können. Daran anschließend werden wir nach Invarianten dieser Abbildungen suchen.

Einiges über Punktmengen der Ebene

Wir wollen für die Veranschaulichung von Mengen in der Ebene folgendes vereinbaren:

- alle Punkte der Menge werden grau „gezeichnet“
- schwarz markierte Punkte gehören nicht mehr zur Menge M

Bild 4



Beispiel:

Die Menge M besteht hier aus der Vierecksfläche $abcd$ ohne die Strecke cd und ohne die Punkte p und q .

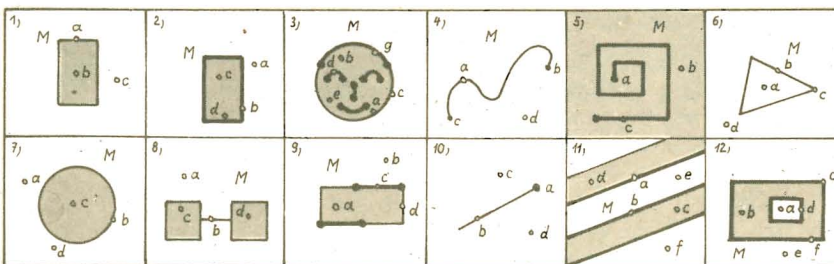
An dieser Stelle möchte ich darauf hinweisen, daß Punkte mit kleinen Buchstaben und Mengen mit großen Buchstaben bezeichnet werden. Das ist hier so üblich und hat sich bei der Unterscheidung von Mengen und Punkten bewährt. Dabei bezeichnet E immer die ganze Ebene, und wenn M eine Menge in der Ebene E ist, so ist $E \setminus M$ (lies: E minus M) die Menge aller Punkte der Ebene, die nicht zu M gehören, also der ganze „Rest von E “. Was ein Kreis ist, wißt ihr. Die Menge K wollen wir als offene Kreisscheibe um den Mittelpunkt m bezeichnen.



Bild 5

(Elemente von K sind all die Punkte, die von m einen Abstand haben, der kleiner ist als eine gegebene positive Zahl r .) Schauen wir uns einige (markierte) Punkte der folgenden Mengen einmal genauer an.

Bild 6



Wie würdet ihr die markierten Punkte bezüglich ihrer Lage zur Menge M in jedem der Fälle 1 bis 12 unterscheiden?

Zunächst gibt es *innere Punkte* der Menge M . Das sind solche Punkte von M , um die man eine offene Kreisscheibe „zeichnen“ kann, die ganz in M liegt.

Beispiele für innere Punkte sind:

im Fall 1 der Punkt b

im Fall 3 die Punkte a und e

im Fall 12 die Punkte b und g

Dann gibt es Punkte, die „etwas entfernt“ von der Menge M liegen – *äußere Punkte*. Das sind solche Punkte der Ebene, um die man eine Kreisscheibe „zeichnen“ kann, die nur Punkte von $E \setminus M$ enthält. (Skizziere dir für die folgenden Beispiele doch einmal solche Kreisscheiben!) Beispiele für äußere Punkte sind:

im Fall 2 Punkt a

im Fall 4 Punkt d

im Fall 6 Punkte a und d

Schließlich gibt es noch Punkte, die weder innere noch äußere Punkte von M sind. Das sind solche Punkte x der Ebene, bei denen in jeder Kreisscheibe um x (egal wie groß oder klein ich sie wähle) sowohl Punkte der Menge M als auch Punkte der Menge $E \setminus M$ liegen. Man nennt solche Punkte *Randpunkte* von M . Beispiel für Randpunkte sind:

im Fall 1 Punkt a

im Fall 3 die Punkte b, c und d

im Fall 6 die Punkte b und c

im Fall 12 die Punkte c, d und f

Bei den Randpunkten einer Menge M fällt auf, daß es Randpunkte von M gibt, die auch Elemente von M sind (z.B. im Fall 3 der Punkt c) und solche, die nicht zu M gehören (z.B. im Fall 3 die Punkte b und d).

Überlege, um was für Punkte es sich bei den hier nicht genannten handelt, z.B. bei den Punkten a, b, c im Fall 5 oder bei den Punkten a, b, c, d im Fall 9!

Stetige Abbildungen

Schauen wir uns einmal folgende Abbildungen an, von denen einige stetig und einige nicht stetig sind (in einigen Punkten unstetig).

Überlege, in welchem Zusammenhang (mit welcher Bedeutung) dieser Begriff stetig in der Umgangssprache benutzt wird!

1. Spiegelung einer Teilmenge der Ebene an einer Geraden g

Dem Punkte x wird durch die Spiegelung der

Punkt $f(x)$ – das Bild von x – zugeordnet. Analog ist $f(a)$ das Bild von a .

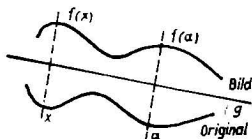
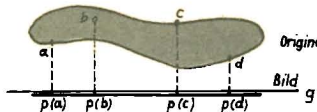


Bild 7

2. Senkrechte Projektion einer Teilmenge der Ebene auf eine Gerade g

Bild 8



3. Senkrechte Projektion einer Teilmenge der Ebene auf eine „Treppe“

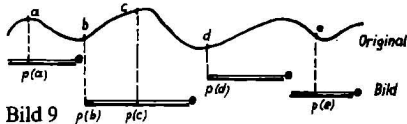


Bild 9

4. Zentrische Streckung einer Teilmenge der Ebene mit dem Streckzentrum z

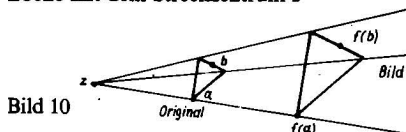


Bild 10

5. „Fensterladen aufklappen“

Original: Viereck $abcd$

Bild: Viereck $hadg$ vereinigt mit dem Viereck $befe$ ohne die Strecke ef .

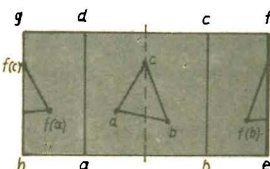


Bild 11

Welche dieser Abbildungen sind nach eurer Meinung stetig?

Bei den Abbildungen 3 und 5 gibt es Unstetigkeitspunkte – Punkte, bei deren Durchlaufen die Bilder durchgehender Linien einen „Sprung“ machen.

Schauen wir uns das an einem Beispiel genauer an.

Bei der dritten Abbildung ist z. B. der Punkt b ein Unstetigkeitspunkt.

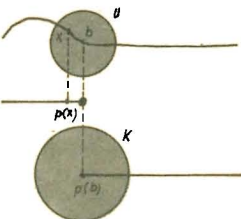


Bild 12

Wir können um das Bild $p(b)$ von b eine offene Kreisscheibe K finden, die die folgende Eigenschaft hat: egal was für eine Kreisscheibe U du um b zeichnest, immer gibt es Punkte von U , deren Bilder nicht in K liegen. In der Skizze trifft das z. B. auf den Punkt x zu, zwar gilt $x \in U$, aber $p(x) \notin K$. Suche weitere Unstetigkeitsstellen in den Abbildungen 3

und 5! Bei den Bildern 1, 2 und 4 handelt es sich dagegen um stetige Abbildungen. Wenn wir von der Erklärung für die Unstetigkeitspunkte ausgehen, die ja bei stetigen Abbildungen auf keinen Punkt zutreffen darf, erhalten wir folgende Definition:

Definition: Seien M und N Teilmengen der Ebene und f eine Abbildung zwischen ihnen. f heißt dann stetig in $a \in M$, wenn es für jede Kreisscheibe $K_1 \subset N$ um $f(a)$ eine Kreisscheibe $K_2 \subset M$ um a gibt, so daß gilt:

$$f(K_2) \subset K_1$$

(Die Bilder aller Punkte aus K_2 müssen also in K_1 liegen.)

Bild 13



Betrachten wir z. B. eine zentrische Streckung mit dem Zentrum z und dem Streckungsfaktor k in irgendeinem beliebigen Punkt a . Dann geht jede offene Kreisscheibe K_1 um $f(a)$ aus einer Kreisscheibe K_2 um a hervor. Wenn der Radius r_1 von K_1 bekannt ist, können wir genau sagen, wie groß r_2 höchstens sein darf, damit die Bedingungen der obigen Definition erfüllt sind, nämlich $r_2 \leq \frac{r_1}{k}$, dann gilt $f(K_2) \subset K_1$.

Zentrische Streckungen sind also in jedem Punkt der Ebene stetig.

Betrachten wir folgende durch Skizzen gegebenen Teilmengen der Ebene. In welchen Fällen gibt es deiner Meinung nach eine stetige Abbildung von M_1 auf M_2 ?

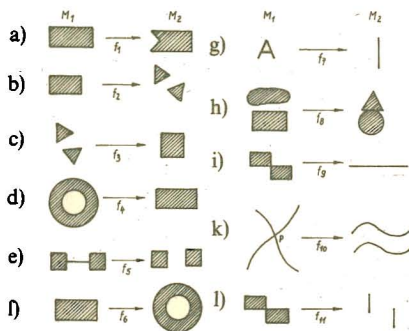


Bild 14

In den Fällen b , e , k und l ist auf keinen Fall eine stetige Abbildung zwischen den Mengen M_1 und M_2 denkbar. Im Fall k wäre z. B. der Punkt p bei jeder möglichen Abbildung zwischen M_1 und M_2 ein Unstetigkeitspunkt. In allen anderen Fällen sind stetige Abbildungen möglich. (Natürlich sind auch unstetige Abbildungen denkbar.)

Wenn wir die Mengen M_1 und M_2 in allen Beispielen betrachten, gibt es unter ihnen zusammenhängende Mengen M , das sind solche Mengen, bei denen man zwei beliebige Punkte von M durch einen ganz in M liegenden Weg verbinden kann, und unzusammenhängende Mengen.

Für stetige Abbildungen gilt nun folgende Eigenschaft, die wir hier nicht beweisen wollen:

Bei stetigen Abbildungen sind die Bilder zusammenhängender Mengen wieder zusammenhängender Mengen wieder zusammenhängender Mengen wieder zusammenhängender Mengen.

Beispiele: Welche der folgenden Mengen sind zusammenhängend?

Die Mengen M_2 , M_4 und M_5 sind zusammenhängend. (Skizziere jeweils einen Weg, der die Punkte a und b miteinander verbindet und ganz in der Menge M liegt!)

Aus der Eigenschaft, daß bei stetigen Abbildungen die Bilder zusammenhängender Mengen wieder zusammenhängender Mengen sind, können wir schlußfolgern, daß eine Abbildung f , die M_1 auf M_2 abbilden soll, auf keinen Fall stetig sein kann, wenn M_1 zusammenhängend und M_2 unzusammenhängend ist. Damit haben wir eine Begründung dafür, warum in den Fällen b , e , k und l keine stetigen Abbildungen zwischen M_1 und M_2 möglich sind. Dagegen ist es bei stetigen Abbildungen durchaus möglich, daß unzusammenhängende Mengen auf zusammenhängende Mengen abgebildet werden.

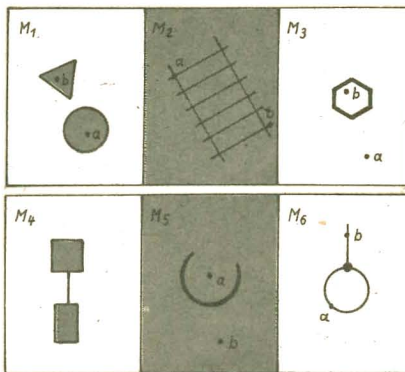


Bild 15

Wenn wir von solchen Abbildungen (z. B. im Fall c) die Umkehrabbildungen betrachten, so können diese aber nicht stetig sein. Die Forderung, daß auch die Umkehrabbildung einer stetigen Abbildung stetig sein soll, führt uns zu dem Begriff der topologischen Abbildung.

Topologische Abbildungen

Definition: Eine Abbildung f zwischen Teilmengen M und N der Ebene heißt topologische Abbildung, wenn

1. f eine eindeutige Abbildung von M auf N ist.

Das heißt, jedem Punkt von M entspricht genau ein Bildpunkt aus N , und jeder Punkt von N hat in M genau einen Originalpunkt.

2. f stetig ist,

3. f^{-1} stetig ist.

Mit dieser Erklärung ergibt sich sofort, daß bei topologischen Abbildungen auch die Originale zusammenhängender Mengen zusammenhängend sein müssen (wegen 3). Im Fall c wäre also zwar eine stetige aber keine topologische Abbildung denkbar. Für welche Beispiele gilt das noch?

Die Eigenschaft einer Abbildung, topologisch zu sein, ist also eine stärkere Forderung als

die der Stetigkeit. Wenn wir an unsere Veranschaulichung denken, können wir uns den Unterschied auch folgendermaßen verdeutlichen:

bei stetigen Abbildungen darf man die „Gummihaut“ beliebig verzerren, nicht zerreißen, aber zusammenkleben;

bei topologischen Abbildungen ist auch das Zusammenkleben nicht erlaubt. Bei diesen Abbildungen handelt es sich also um diejenigen, die wir uns am Anfang veranschaulicht haben.

Der Zusammenhang einer Menge ist also eine topologische Invariante, d. h., hat man eine zusammenhängende Menge und führt eine topologische Abbildung aus, so erhält man wieder eine zusammenhängende Menge.

Damit können wir bereits eine der zu Beginn aufgeworfenen Fragen beantworten. Es ist nicht möglich, den Luftballon so zu verzerren, daß sich der Hut vom Kopf hebt, da sonst der Zusammenhang der ursprünglichen Figur verloren ginge. Zu dem eingangs erwähnten Hilfsmittel zur Veranschaulichung topologischer Abbildungen können wir greifen, um Vermutungen über weitere Invarianten dieser Abbildungen zu bekommen. Daß es sich wirklich um Invarianten handelt, müssen wir dann erst beweisen.

Viele der hier benötigten Invarianten beruhen auf dem Begriff der Kurve.

D: Eine Teilmenge C der Ebene heißt Kurve (Kurvengbogen), wenn es eine topologische Abbildung der Einheitsstrecke auf C gibt. (Kurven sind topologische Bilder der Einheitsstrecke.) Geschlossene Kurven sind topologische Bilder des Einheitskreises.

So wie die Nacheinanderausführung zweier Kongruenzabbildungen wieder eine Kongruenzabbildung ist, ist die Nacheinanderausführung zweier topologischer Abbildungen wieder eine topologische Abbildung, und es gilt deshalb:

- Kurven gehen bei topologischen Abbildungen in Kurven über.
- Geschlossene Kurven gehen bei topologischen Abbildungen in geschlossene Kurven über.
- Nichtgeschlossene Kurven gehen bei topologischen Abbildungen in nichtgeschlossene Kurven über.

Hier ist lediglich zu zeigen, daß es zwischen der Einheitsstrecke und dem Einheitskreis keine topologische Abbildung geben kann.

Überlege, wie man einen (indirekten) Beweis führen könnte! Bei topologischen Abbildungen ist also zwar

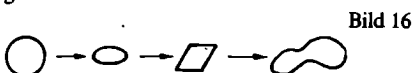
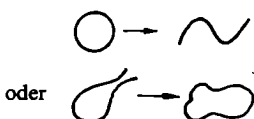


Bild 16

u. ä. denkbar, nicht aber



oder

Damit ist auch die zu Beginn gestellte Frage (2) beantwortet. Auch hier ist keine topologische Abbildung möglich, da es sich bei der einen Figur um eine geschlossene und bei der anderen Figur um eine nicht geschlossene Kurve handelt.

Als nächstes finden wir:

- Schnittpunkte von Kurven gehen bei topologischen Abbildungen in Schnittpunkte von Kurven über.

Diesen Satz wollen wir beweisen:

C_1 und C_2 seien Kurven

$C_1 \cap C_2 = \{p\}$, d. h. C_1 und C_2 haben genau einen Punkt – ihren Schnittpunkt – gemeinsam.

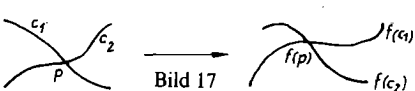
f sei eine topologische Abbildung von $C_1 \cup C_2$ auf $f(C_1) \cup f(C_2)$

Behauptung:

$f(C_1) \cap f(C_2) = \{f(p)\}$, d. h., auch die Bildkurven haben genau einen Punkt – ihren Schnittpunkt – gemeinsam, und dieser ist das Bild von p bei der Abbildung f .

Beweis:

Machen wir uns zunächst eine Skizze.



Auf Grund der schon bekannten Invarianten ist klar, daß $f(C_1)$ und $f(C_2)$ Kurven sind.

Da $p \in C_1$ gilt $f(p) \in f(C_1)$ und da $p \in C_2$ gilt $f(p) \in f(C_2)$.

Also $f(p) \in f(C_1) \cap f(C_2)$.

Da f eineindeutig ist, gilt:

$f(C_1 \cap C_2) = f(C_1) \cap f(C_2)$ und somit,

da $C_1 \cap C_2 = \{p\}$

$\{f(p)\} = f(C_1) \cap f(C_2)$.

Diese Invarianz kann man auch etwas anders formulieren:

- Die Eigenschaft eines Punktes, daß von ihm 3 (oder mehr) Kurven ausgehen, ist eine topologische Invariante. (Formuliere diesen Satz, ohne das Wort Invariante zu benutzen!)
- Für eine weitere topologische Invariante müssen wir erklären, wann ein Punkt a auf der Kurve C zwischen den Punkten b und c liegt. Da Kurven topologische Bilder der Einheitsstrecke sind, betrachten wir zunächst voneinander verschiedene Punkte x, y, z dieser Strecke.

Dann sagt man „ x liegt zwischen y und z “, wenn $y < x < z$ oder $y > x > z$.

Mit dieser Überlegung können wir erklären:

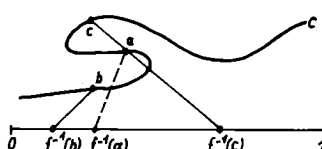
D: Seien a, b, c drei voneinander verschiedene Punkte der Kurve C . Dann liegt a auf C zwischen b und c , wenn gilt:

(1) $f^{-1}(b) < f^{-1}(a) < f^{-1}(c)$ oder

(2) $f^{-1}(b) > f^{-1}(a) > f^{-1}(c)$.

Wobei f die topologische Abbildung ist, die die Einheitsstrecke auf C abbildet.

Bild 18



(1) bedeutet z. B., daß das Urbild von b auf der Einheitsstrecke vor dem Urbild von a liegt

und das Urbild von a auf der Einheitsstrecke vor dem Urbild von c liegt.

Es scheint ganz offensichtlich, daß gilt:

- Wenn auf der Kurve C der Punkt a zwischen den Punkten b und c liegt, liegt nach Anwenden der topologischen Abbildung f der Punkt $f(a)$ auf der Kurve $f(C)$ zwischen den Punkten $f(b)$ und $f(c)$. (Auf einen Beweis wird hier verzichtet.) Auf Grund der Zwischenbeziehung kann ein Endpunkt e der Kurve C als ein Punkt charakterisiert werden, zu dem es keine zwei voneinander verschiedenen Punkte a und b der Kurve C gibt, so daß e zwischen a und b liegt.

Damit gilt sofort:

- Endpunkte von Kurven gehen bei topologischen Abbildungen in Endpunkte von Kurven über.

Jetzt können wir untersuchen, ob zwei gegebene Figuren topologisch äquivalent (gleichwertig) sind, d. h. ob es eine topologische Abbildung gibt, die sie aufeinander abbildet. Betrachten wir ein Beispiel:

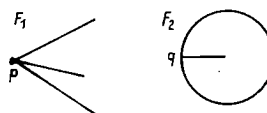


Bild 19

Sind F_1 und F_2 topologisch äquivalent?

Antwort: Nein, da in F_1 nur nicht geschlossene Kurven auftreten, in F_2 dagegen eine geschlossene Kurve. Wir haben also eine topologische Invariante gefunden, die zwar die Figur F_2 , nicht aber die Figur F_1 besitzt. Jetzt können wir auch die letzte der zu Beginn aufgeworfenen Fragen beantworten. Betrachten wir uns die einzelnen Buchstaben, die aufeinander abgebildet werden sollen, genauer.

Bei den Buchstaben I und S handelt es sich um nichtgeschlossene Kurven, sie können topologisch aufeinander abgebildet werden.

Auch D und A sind topologisch äquivalent. Beide bestehen aus einer geschlossenen und zwei nicht geschlossenen Kurven, die je einen Punkt mit der geschlossenen Kurve gemeinsam haben, E und F sind topologisch äquivalent, da beide aus drei nichtgeschlossenen Kurven, die einen gemeinsamen Endpunkt haben, bestehen.

Das gleiche gilt für E und T .

Also kann das Wort *IDEES* durch „Verzerren“ jedes einzelnen Buchstabens in das Wort *SAFT* überführt werden.

Betrachten wir noch folgendes Beispiel:

Sind F_1 und F_2 topologisch äquivalent?

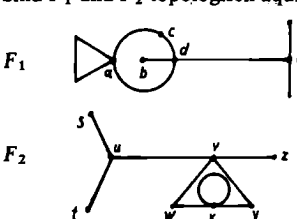


Bild 20

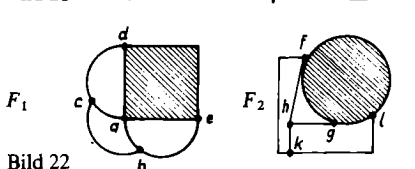
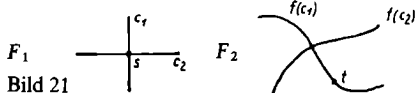
Antwort: Ja! Wir konstruieren eine topologische Abbildung zwischen F_1 und F_2 folgendermaßen: Die Strecke $\overline{be}$ wird auf die Strecke $\overline{uz}$ abgebildet. $\overline{ef}$ auf $\overline{us}$ (ut wäre auch als Bild von $\overline{ef}$ denkbar). Der Punkt a wird auf den Punkt x abgebildet. (Gemeinsamer Punkt zweier geschlossener Kurven.) Das Dreieck von F_1 wird auf den Kreis von F_2 und der Kreis von F_1 auf das Dreieck wyv abgebildet.

Auf welchen Punkt muß der Punkt d abgebildet werden? (Wodurch ist er topologisch charakterisiert?)

An diesem Beispiel könnt ihr auch sehen, daß nicht alle topologischen Abbildungen durch „Verzerren einer Gummihaut“ veranschaulicht werden können, denn beim Verzerren einer „Gummihaut“ geht es immer um eine topologische Abbildung der gesamten Ebene, in dem obigen Beispiel aber nicht.

Weitere Aufgaben:

- ▲ 1 ▲ a) Kann F_1 auf F_2 topologisch so abgebildet werden, daß $f(s)=t$ (t Bildpunkt von s)?



- b) Sind F_1 und F_2 topologisch äquivalent? Welche Punkte von F_1 müssen bei irgendeiner topologischen Abbildung in welche Punkte von F_2 übergehen?

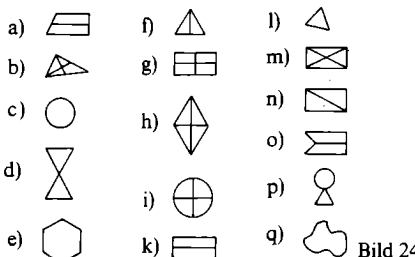
- ▲ 2 ▲ Betrachte folgende Figur!



Welche der folgenden Aussagen beschreiben topologische Eigenschaften?

- Die Figur besteht aus einem Quadrat und einem Kreis.
- Die Figur besteht aus zwei Kurven, von denen eine vier Ecken hat.
- Die von K eingeschlossene Fläche ist größer als die von Q eingeschlossene Fläche.
- Die geschlossenen Kurven Q und K schneiden sich nicht.

- ▲ 3 ▲ Welche der folgenden nur aus Kurven bestehenden Figuren sind topologisch äquivalent? Begründe deine Entscheidung!



Eine geometrische Deutung der Mittelwert-Ungleichungen

Unter dieser Überschrift gibt Gy. Darvasi in der ungarischen Zeitschrift *A Matematika Tanitása* (Der Mathematikunterricht) eine geometrische Veranschaulichung verschiedener Mittelwerte zweier positiver Zahlen a und b , die auch für uns recht interessant ist. Er betrachtet für zwei positive Zahlen a und b

1. das arithmetische Mittel A :

$$A = \frac{a+b}{2}$$

2. das geometrische Mittel G :

$$G = \sqrt{a \cdot b}$$

3. das harmonische Mittel H :

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

4. das quadratische Mittel Q :

$$Q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

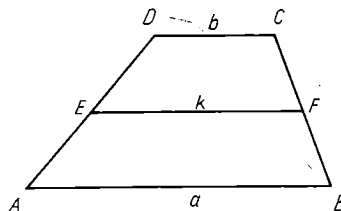
Bezeichnet man mit $\min(a, b)$ bzw. $\max(a, b)$ die kleinere bzw. die größere der beiden positiven Zahlen a und b , so gelten die Ungleichungen

$$\max(a, b) \geq Q \geq A \geq G \geq H \geq \min(a, b).$$

Von ihrer Richtigkeit kann man sich anhand eines Trapezes $ABCD$ mit $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ überzeugen.

1. (Bild 1) $\overline{EF}$ sei die Mittellinie von $ABCD$, ihre Länge sei k . Bezeichnet man die Länge von $\overline{AB}$ mit a und die Länge von $\overline{DC}$ mit b , so gilt $k = \frac{a+b}{2}$, d. h., die Länge der Mittellinie eines Trapezes ist das arithmetische Mittel der Längen der beiden parallelen Trapezseiten.

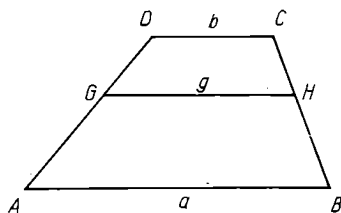
Bild 1



- ▲ 1 ▲ Wie kann man $\overline{EF}$ konstruieren?

2. (Bild 2) Die Trapeze $ABHG$ und $GHCD$ seien einander ähnlich, die Länge von $\overline{GH}$ sei g . Dann gilt $\frac{a}{g} = \frac{g}{b}$, also $g = \sqrt{ab}$, d. h., die Länge der Parallelen¹⁾ zu $\overline{AB}$, die das Trapez in zwei zueinander ähnliche Trapeze zerlegt, ist das geometrische Mittel der Längen der beiden parallelen Trapezseiten.

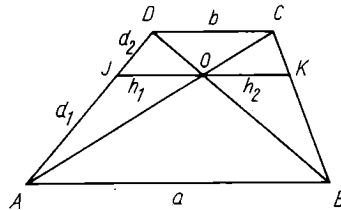
Bild 2



- ▲ 2 ▲ Wie kann man $\overline{GH}$ konstruieren? (Hinweis: Satzgruppe des Pythagoras!)

3. (Bild 3) O sei der Diagonalschnittpunkt von $ABCD$; die Parallele durch O zu $\overline{AB}$ (bzw. zu $\overline{DC}$) schneide $\overline{AD}$ (bzw. $\overline{BC}$) in J (bzw. K); die Länge von $\overline{JK}$ sei h . Außerdem seien die Längen von $\overline{AD}$, $\overline{AJ}$, $\overline{JD}$, $\overline{JO}$ bzw. $\overline{OK}$ in dieser Reihenfolge mit d , d_1 , d_2 , h_1 bzw. h_2 bezeichnet.

Bild 3



Dann gilt nach dem Strahlensatz $\frac{h_1}{d_1} = \frac{h_2}{d_2} = \frac{h}{d}$

und $\frac{h_1}{b} = \frac{d_1}{d}$, woraus man $\frac{h_1}{a} + \frac{h_1}{b} = \frac{d_1 + d_2}{d} = 1$

und weiter $\frac{1}{h_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ erhält. Entsprechend er-

hält man $\frac{1}{h_2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Es gilt also $h_1 = h_2 = \frac{h}{2}$

und damit $\frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ oder umgeformt $\frac{1}{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$

Vergleichen wir zum Schluß die topologischen Abbildungen mit den euch bekannten Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen, so stellen wir fest, daß Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen ganz spezielle topologische Abbildungen sind. (Überlege, warum!) Das heißt also:

- Alle Invarianten, die wir für topologische Abbildungen gefunden haben, sind auch Invarianten von Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen.
- Dagegen gibt es bei Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen weitere, spezielle Invarianten, die allgemeine topologische Abbildungen nicht haben müssen.

M. Grassmann

$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, d.h., die Länge der Parallelen¹⁾ zu $\overline{AB}$ durch den Diagonalenschnittpunkt des Trapezes ist das harmonische Mittel der Längen der beiden parallelen Trapezseiten.

4. (Bild 4) Die Trapeze $ABML$ und $LMCD$ seien einander flächeninhaltsgleich, x und y seien die Längen ihrer Höhen; q sei die Länge von $\overline{LM}$. Dann gilt $\frac{a+q}{2}x = \frac{a+b}{4}(x+y)$ und $\frac{q+b}{2}y = \frac{a+b}{4}(x+y)$ oder umgeformt

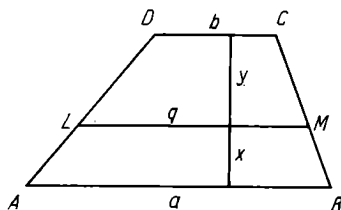
$$\frac{x}{x+y} = \frac{a+b}{2(a+q)} \text{ und } \frac{x}{x+y} = \frac{a+b}{2(b+q)}$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} &= \frac{a+b}{2(a+q)} + \frac{a+b}{2(b+q)} \\ 1 &= \frac{(a+b)(b+q) + (a+b)(a+q)}{2(a+q)(b+q)} \\ &= \frac{(a+b)(b+a+2q)}{2(a+q)(b+q)} \\ 2(a+q)(b+q) &= (a+b)(a+b+2q) \\ 2q^2 &= a^2 + b^2 \\ q &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \end{aligned}$$

d.h., die Länge der Parallelen¹⁾ zu $\overline{AB}$, die das Trapez in zwei einander flächeninhaltsgleiche Trapeze zerlegt, ist das quadratische Mittel der beiden parallelen Trapezseiten.

Bild 4



▲ 3 ▲ Wie kann man $\overline{LM}$ konstruieren? (Hinweis: Satzgruppe des Pythagoras!)

Mit diesen Vorbereitungen kann nun gezeigt werden, daß $\max(a, b) \geq Q \geq A \geq G \geq H \geq \min(a, b)$ gilt.

Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a \geq b$. Dann ist $a \geq q \geq k \geq g \geq h \geq b$ zu zeigen. Im folgenden werden die Längen der Höhen der Trapeze $ABCD$ bzw. $ABKL$ bzw. $ABHG$ mit m bzw. m_1 bzw. m_2 bezeichnet (Bild 5).

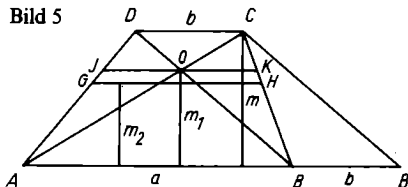
a) Aus $a \geq b$ folgt $a+k \geq b+k$, $\frac{a+k}{2} \geq \frac{b+k}{2}$ und $\frac{a+k}{2} \cdot \frac{m}{2} \geq \frac{b+k}{2} \cdot \frac{m}{2}$, d.h. $A_{ABFE} \geq A_{EFCD}$ (vgl. Bild 1).

Da $\overline{LM}$ das Trapez $ABCD$ in zwei flächeninhaltsgleiche Trapeze teilt (vgl. Bild 4), ist es nicht möglich, daß $\overline{LM}$ „oberhalb“ von $\overline{EF}$ liegt – es gilt also $q \geq k$.

¹⁾ Unter der „Länge der Parallelen zu $\overline{AB}$ “ soll hier die Länge der vom Trapez $ABCD$ aus der entsprechenden zu $\overline{AB}$ parallelen Geraden herausgeschnittenen Strecke verstanden werden.

b) Wegen $ABHG \sim GHCD$ (vgl. Bild 2) gilt $\frac{AG}{GD} = \frac{BH}{HC} = \frac{AB}{GH} = \frac{a}{\sqrt{ab}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \geq 1$ (I)
d.h. $AG \geq GD$, $BH \geq HC$, weshalb $\overline{GH}$ nicht „unterhalb“ der Mittellinie $\overline{EF}$ liegen kann – es gilt also $k \geq g$.

Bild 5



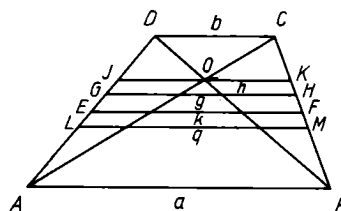
c) Wegen $\triangle ABO \sim \triangle AB'C$ gilt $\frac{m_1}{m} = \frac{a}{a+b}$, d.h. $m_1 = \frac{a}{a+b} \cdot m$ (II)

(vgl. Bild 5); wegen $ABHG \sim GHCD$ gilt weiter $\frac{m-m_2}{m_2} = \frac{GH}{AB} = \sqrt{\frac{b}{a}}$ (siehe I). Daraus folgt $m = m_2 + m_2 \sqrt{\frac{b}{a}} = m_2 \left(1 + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$
 $= m_2 \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a}} = m_2 \cdot \frac{a + \sqrt{ab}}{a}$,

also $m_2 = \frac{a}{a + \sqrt{ab}} \cdot m$. (III)

Durch Vergleich von (III) mit (II) erhält man $m_1 \geq m_2$. (Beachte: Aus $a \geq b > 0$ folgt $\sqrt{ab} \geq \sqrt{b^2} = b$.) Deshalb kann $\overline{GH}$ nicht „oberhalb“ von $\overline{JK}$ liegen – es gilt also $g \geq h$.

Bild 6



Faßt man die Ergebnisse der Überlegungen von a), b) und c) zusammen, so erhält man $a \geq q \geq k \geq g \geq h \geq b$ (siehe Bild 6). Dabei besteht die Gleichheit nur im Fall $a=b$, d.h. wenn das Trapez $ABCD$ ein Parallelogramm ist. Es ist dann $a=q=k=g=h=b$.

W. Türke



Denke dir eine Zahl . . .

▲ 1 ▲ Denk dir eine Zahl, und schreibe sie auf! Multipliziere sie mit 5, addiere dann 2, multipliziere mit 4, und addiere dann 3! Multipliziere jetzt mit 5, und addiere dann 7! Schreibe das Ergebnis auf! Streiche die beiden letzten Grundziffern weg! Was stellst du fest?

▲ 2 ▲ Denk dir eine Zahl, und schreibe sie auf! Multipliziere sie mit 3 und addiere dann 2! Multipliziere nun mit 4 und addiere 4! Dividiere durch 12, und subtrahiere von diesem Ergebnis die gedachte Zahl! Was siehst du nun?

▲ 3 ▲ Schreibe 3 verschiedene einstellige Zahlen auf, und bilde daraus 6 verschiedene dreistellige Zahlen! Schreibe diese untereinander, und berechne ihre Summe! Berechne dann die Summe der drei zuerst aufgeschriebenen einstelligen Zahlen! Dividiere die Summe der 6 dreistelligen Zahlen durch die Summe der drei einstelligen Zahlen! Wie lautet stets dein Resultat?

▲ 4 ▲ Ich kann deine gedachte Zahl „erraten“, wenn du mir das Ergebnis sagst!

Denk dir eine Zahl, und schreibe sie auf! Addiere 1 und multipliziere mit 3! Addiere dann 5 und zuletzt die gedachte Zahl! (Ich subtrahiere vom genannten Ergebnis 8 und dividiere dann durch 4 und erhalte damit die gedachte Zahl.)

▲ 5 ▲ Ich kann deinen Geburtstag erraten! Multipliziere die Tageszahl mit 20 und addiere 3! Multipliziere dann mit 5, und addiere die Monatszahl! Multipliziere das Ergebnis mit 20, addiere 3 und multipliziere mit 5! Addiere zum Schluß die Jahreszahl (nur die aus den letzten beiden Grundziffern ablesbare Zahl) dazu!

(Ich subtrahiere von dem genannten Ergebnis 1515 und lese von links nach rechts die Tages-, Monats- und Jahreszahl ab.)

Diese fünf Aufgaben wählten wir für unsere jüngsten Leser aus dem Abschnitt: „Text- und Sachaufgaben in der außerunterrichtlichen Arbeit“ aus. Sie wurden dem Buch entnommen:

E. Geißler

Sachaufgaben in den unteren Klassen

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
142 Seiten Preis: 4,20 M Bestell-Nr. 002024
Hervorragend geeignet zur Verbesserung der Grundkenntnisse!

**Eine Aufgabe von einem Kollektiv
der Hochschule für Architektur
und Bauwesen Weimar unter
Leitung von Prof. Dr. sc. techn.**

Harald Zrost

Sektion Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Zrost schreibt: „Die von mir im Wissenschaftsbereich Baumechanik geleitete Arbeitsgruppe, der Bauingenieure, Mathematiker und Physiker angehören, sucht nach Lösungen für Probleme der Baumechanik. Bei der numerischen Herstellung solcher Lösungen spielen lineare Gleichungssysteme mit einer großen Zahl von Unbekannten eine bedeutende Rolle. Daher entstand in meiner Arbeitsgruppe die folgende Aufgabe.“

▲ 1878 ▲ Ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (2)$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \quad (n)$$

($a_{ik} \neq 0$ für alle $i = 1, 2, \dots, n$ und alle $k = 1, 2, \dots, n$) werde nach dem Gaußschen Algorithmus schrittweise in folgender Form gelöst:

Man stellt im ersten Schritt ein dem gegebenen System äquivalentes System her, dessen erste Gleichung (1') mit der Gleichung (1) identisch ist und dessen folgende Gleichungen (2'), (3'), ..., (n') die Unbekannte x_1 nicht mehr enthalten. Dabei soll jede Gleichung (k') ($k' = 2', 3', \dots, n'$)

$$a'_{k2}x_2 + a'_{k3}x_3 + \dots + a'_{kn}x_n = b'_k \quad (k')$$

nach der folgenden Vorschrift gebildet werden.

Es sei $f_k = \frac{a_{k1}}{a_{11}}$. Dann gilt $a'_{ki} = f_k \cdot a_{1i} - a_{ki}$

und $b'_k = f_k \cdot b_1 - b_k$ für alle $i = 2, 3, \dots, n$.

Im zweiten Schritt wird analog ein dem gegebenen System äquivalentes Gleichungssystem gebildet, dessen erste Gleichung (1'') mit der Gleichung (1) und dessen zweite Gleichung (2'') mit der Gleichung (2') übereinstimmt und dessen weitere Gleichungen (3''), (4''), ..., (n'') die Unbekannten x_1 und x_2 nicht mehr enthalten.

Die Vorgehensweise sei die gleiche wie beim ersten Schritt; die Rolle der Gleichung (1) übernimmt die Gleichung (2'). Bei allen weiteren Schritten verfährt man analog, so daß man schließlich ein dem gegebenen System äquivalentes System erhält, dessen letzte Gleichung nur die Unbekannte x_n , dessen vorletzte Gleichung nur die Unbekannten x_n und x_{n-1} enthält usw.

– Es soll vorausgesetzt werden, daß alle in den Zwischenrechnungen bei dieser Methode zu berechnenden Koeffizienten von Null verschieden sind, d. h., daß in keiner Gleichung außer der zu eliminierenden Unbekannten noch eine weitere herausfällt. –

Hat das Gleichungssystem diese Form (Dreiecksgestalt), dann kann man ausgehend von der letzten Gleichung nach der Einsatzmethode die Unbekannten berechnen.

Im folgenden sei jede Addition, Subtraktion, Multiplikation bzw. Division zweier Zahlen als eine Rechenoperation bezeichnet. (Die Summation von n Summanden sind also $n-1$ Rechenoperationen.)

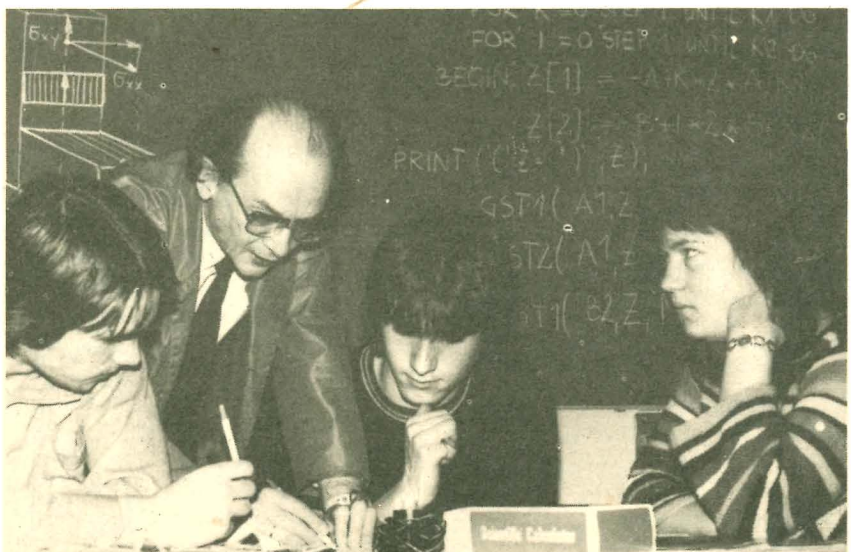
Es sei $z=f(n)$ diejenige ganzrationale Funktion, die für jede natürliche Zahl $n > 1$ die Anzahl aller Rechenoperationen angibt, die benötigt werden, um ein lineares Gleichungssystem von n Gleichungen mit n Unbekannten bei den angegebenen Voraussetzungen nach der angegebenen Methode zu lösen.

- Man ermittle $f(n)$!
- Wie lange müßte man rechnen, um ein Gleichungssystem von 50 Gleichungen mit 50 Unbekannten zu lösen, wenn man (ohne technische Hilfsmittel) für jede Rechenoperation 30 s Zeit benötigt?
- Welche Zeit braucht eine elektronische Rechenanlage für eine Rechenoperation im

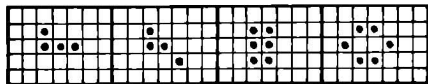
Durchschnitt, wenn sie ein solches Gleichungssystem von 50 Gleichungen mit 50 Unbekannten in 15 Minuten löst?



In der von Prof. Dr. sc. techn. Zrost geleiteten Arbeitsgruppe werden zwei „Wissenschaftlich-praktische Arbeitsgemeinschaften“ aus der EOS „Friedrich Schiller“ Weimar von Dr. Heinrich Bode und Dipl.-Math. Karl-Heinz Müller betreut. Die Schüler eignen sich Grundkenntnisse aus bestimmten Teilgebieten der Baumechanik an. Dabei werden die Schulkenntnisse aus der Differential- und Integralrechnung angewendet und vertieft. Außerdem erlernen die Schüler eine Programmiersprache. Sie fertigen für die Untersuchung bestimmter Probleme (Spannungen in ebenen Bauelementen, Einfluß von Zufallsgrößen bei einfachen Bauwerken) Rechenprogramme an, die auf der EDVA der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar gerechnet werden. Die Auswertung der Ergebnisse vieler Beispiele führt zu Aussagen über Brauchbarkeit von Näherungslösungen, die in der Abschlußarbeit zusammengestellt werden. Diese Aussagen werden in die Forschungsarbeit im Wissenschaftsbereich Baumechanik einfließen.



Life – ein mathematisches Spiel



Das von *John Horton Conway*, einem Mathematiker an der Universität Cambridge, erfundene Spiel erfordert keinen Gegenspieler. Es ist interessant durch die Vielzahl der auftretenden Figuren. Seinen Namen bekam es durch Analogien zur Entwicklung von Gruppen lebendiger Organismen. Über die erstaunliche Vielfalt der Erscheinungen in diesem Spiel werde ich im nächsten Heft berichten. Zunächst möchte ich dem Leser die Spielregeln vorstellen, damit er schon eigenständig experimentieren kann.

Das Spiel wird auf einem (beliebig weit fortgesetzt zu denkenden) GO-Brett gespielt. kariertes Papier ist auch ausreichend; aber für den Anfänger wird es schwierig sein, die Übersicht zu behalten. Man startet nun mit einer beliebigen Konfiguration, die darin besteht, daß sich in bestimmten Quadraten schwarze Steine befinden (Organismen). Danach betrachtet man, welche Veränderungen sich durch Anwendung von *Conways* „genetischen Gesetzen“ über Geburt, Überleben und Tod ergeben. Für das Spiel ist der Begriff des Nachbarquadrates zu einem gegebenen Quadrat von Bedeutung. Man versteht darunter sowohl die 4 Quadrate, die mit dem gegebenen eine gemeinsame Linie haben, als auch diejenigen 4, die nur in einem Punkt an das Ausgangsquadrat grenzen, insgesamt also 8 Stück. Die Spielregeln sind dann folgende:

1. *Überleben*: ein Stein mit 2 oder 3 Nachbarsteinen „überlebt“ für die nächste Generation

2. *Tod*: ein Stein mit 4 oder mehr Nachbarn „stirbt wegen Überbevölkerung“, und ein Stein mit keinem oder einem Nachbarn „stirbt wegen Isolation“

3. *Geburt*: in jedem leeren Quadrat mit genau 3 Nachbarn wird ein Stein „geboren“.

Man beachte unbedingt, daß die Regeln simultan anzuwenden sind. Dadurch entsteht eine neue Generation. Man spricht auch von einer einfachen Bewegung innerhalb der gesamten Lebensgeschichte einer Ausgangskonfiguration. Es ist empfehlenswert, folgende Verfahrensweise anzuwenden, um Fehler bei der gleichzeitigen Anwendung der drei Regeln zu vermeiden:

1. Die Ausgangskonfiguration bestehe aus schwarzen Steinen.

2. Suche alle Steine, die „sterben“ werden!

Kennzeichne sie durch einen darüber gelegten schwarzen Stein!

3. Suche die Quadrate, in denen Steine „geboren“ werden! Kennzeichne sie durch weiße Steine, und beachte, daß diese weißen Steine keine Bedeutung für die Geburt weiterer Steine während dieser Generation haben!

4. Nach doppelter Überprüfung entferne die schwarzen Steine von den Quadraten, auf denen zwei übereinander liegen, und ersetze die weißen durch schwarze Steine! Damit ist ein einfacher Generationswechsel abgeschlossen.

Man überdenke die Regeln an folgendem Beispiel:

Dem Leser wird beim Nachspielen des Beispiels schon aufgefallen sein, daß es notwendig ist, zwei Sorten von Steinen zu verwenden. Da die Regeln simultan auf alle Steine angewendet werden sollen (sonst wäre keine eindeutige Reihenfolge einfach festlegbar), muß einerseits gesichert werden, daß „absterbende“ Steine nicht entfernt werden, ehe ihre Wirkung auf die umliegenden Steine betrachtet wurde, und andererseits dürfen die weißen Steine, die für die nächste Generation „geboren“ werden, nicht schon Anlaß für Geburt oder Tod anderer Steine in dieser Generation sein. Auf einem GO-Brett ist damit eine günstigere Realisierungsmöglichkeit für das Spiel gegeben als bei der Verwendung von kariertem Papier.

Damit sind die Regeln geklärt. Nun kann der Leser selbst einige Erfahrungen sammeln. Es ist günstig, zunächst mit einfachen Anfangskonfigurationen zu beginnen. In meinem Artikel im nächsten Heft dieser Zeitschrift werde ich u. a. auf einige Fragestellungen eingehen, die der Leser beim Experimentieren aber bereits beobachten sollte:

Wie endet das Spiel?

– Ist es möglich, daß sich unendlich lange Veränderungen ergeben?

– Kann es zu einer explosionsartigen Ausbreitung der Steine kommen?

– Kann es relative Stabilität geben (z. B. Figuren, die in gleichbleibender Form nach jeweils einer bestimmten Anzahl von Bewegungen ins Unendliche abwandern)?

Abschließen möchte ich mit einer Frage, die bei der ersten Veröffentlichung des Spieles im

Jahre 1970 noch ungelöst war und für deren Beantwortung damals ein Preis ausgesetzt war:

– Ist es möglich, daß eine endliche Ausgangskonfiguration unbegrenzt wächst, d. h. jede endliche Anzahl von Steinen einmal überschritten wird? *stud. math. R. Schuster*

In eigener Sache



Ich studiere Mathematik im 4. Studienjahr in Leipzig und möchte einige Anstöße aufzeigen, die mich auf den Weg zu dieser Wissenschaft brachten. In der 5. Klasse kam ich mehr zufällig als durch besondere Schulerfolge zur Mathematikolympiade. Durch einen kleinen Anfangserfolg angespornt und durch Lehrer und Eltern ermutigt, beschäftigte ich mich mit Aufgabensammlungen und *alpha*-Aufgaben. Im 6. und 7. Schuljahr erhielt ich entscheidende Impulse durch zentrale Mathematikzirkel. Neben diesen trat in den folgenden Jahren zunehmend die selbständige Beschäftigung mit der Mathematik in den Mittelpunkt. Im 9. und 10. Schuljahr begann ich, mich mit Schulstoff und Olympiadeaufgaben der Klassen 11/12 zu beschäftigen. Im 10. Schuljahr legte ich die Abiturprüfung in Mathematik ab; während der Klassen 10, 11 und 12 erarbeitete ich mir den Lehrstoff des ersten Jahres an der Universität und legte die dazugehörigen Prüfungen ab. Neben diesem „soliden“ Hintergrund beschäftigte ich mich viel mit olympiadespezifischen Problemen. Es gelang mir, in den Jahren 1973 und 1974 bei der IMO in Moskau und Erfurt Preisträger zu werden. Die Beschäftigung mit der Mathematik half mir, einen auch für die Schule effektiven Arbeitsstil zu finden. So blieb mir noch immer Zeit für mein Hobby und für Entspannung. Das Interesse für Mathematik war bei mir auch ständig begleitet von dem Interesse für andere Wissensgebiete. In der modernen Forschung tritt die interdisziplinäre Arbeitsweise immer mehr in den Mittelpunkt. Heute gibt es selbst die Anwendung mathematisch nicht trivialer Theorien in der Biologie (z. B. Differentialtopologie in der Genetik); ich habe mich bemüht, diese Tendenz im folgenden Artikel anklingen zu lassen.

Endliche und unendliche periodische Dezimalbrüche

Wir wissen: Jede gebrochene Zahl läßt sich als endlicher oder als unendlicher Dezimalbruch schreiben.

Wir erinnern uns: Auf die endlichen Dezimalbrüche werden wir über die sog. Zehnerbrüche geführt. Zehnerbrüche sind solche Brüche, die eine Potenz 10^n (n natürliche Zahl, $n \geq 1$) als Nenner haben. Alle gebrochenen Zahlen, die sich durch Zehnerbrüche angeben lassen, können auch durch endliche Dezimalbrüche angegeben werden. Endliche Dezimalbrüche besitzen stets (entweder vor oder hinter dem Komma) eine letzte von 0 verschiedene Stelle.

Beispiel:

$$\frac{1}{10} = 0,1 \quad \frac{1}{10^2} = 0,01 \quad \frac{1}{10^3} = 0,001$$

und so weiter.

$$\frac{3}{10} = 0,3 \quad \frac{23}{10^2} = 0,23 \quad \frac{34}{10^3} = 0,034$$

und so weiter.

$$\frac{25}{10} = 2,5 \quad \frac{376}{10^2} = 3,76 \quad \frac{3408}{10^3} = 3,408$$

und so weiter.

Aber auch die Zahlen $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{125}$ oder $\frac{1}{40}$ können

mit Hilfe endlicher Dezimalbrüche dargestellt werden, denn auch sie können durch Zehnerbrüche angegeben werden.

Beispiel:

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0,25 \quad \frac{1}{125} = \frac{8}{1000} = 0,008$$

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0,75 \quad \frac{7}{125} = \frac{56}{1000} = 0,056$$

$$\frac{1}{40} = \frac{25}{1000} = 0,025$$

$$\frac{9}{40} = \frac{225}{1000} = 0,225$$

Wie nun aber erkennt man an einem Bruch $\frac{m}{n}$,

der eine gebrochene Zahl darstellt, ob er durch einen endlichen Dezimalbruch ersetzt werden kann oder nicht?

Bekanntlich kann jede gebrochene Zahl durch einen gemeinen Bruch mit zueinander teilerfremden Zähler und Nenner angegeben werden. Daher wollen wir uns bei unseren Überlegungen auf einen gemeinen Bruch $\frac{m}{n}$ be-

schranken, bei dem die natürlichen Zahlen m und n zueinander teilerfremd sind. Außerdem wollen wir uns begnügen mit solchen Brüchen, bei denen $m < n$ und $n \neq 1$ ist.

Treten nun in der Primfaktorzerlegung des Nenners n eines solchen Bruchs höchstens die Primfaktoren von 10, also 2 oder 5 auf, so läßt sich der Bruch durch einen endlichen Dezimalbruch ersetzen. Bedient man sich der Potenzschreibweise, wobei $2^0 = 1$ und $5^0 = 1$ festgelegt sein soll, so kann man statt dessen auch sagen:

Die gebrochene Zahl $\frac{m}{n}$ läßt sich als endlicher Dezimalbruch angeben, wenn es natürliche Zahlen a und b gibt, so daß $n = 2^a \cdot 5^b$ ist. (Ist 2 bzw. 5 kein Primfaktor von n , so kann man $n = 2^0 \cdot 5^b$ bzw. $n = 2^a \cdot 5^0$ schreiben, da $2^0 = 1$ und $5^0 = 1$ gilt.)

Beispiel:

$$\frac{1}{40} = \frac{1}{2^3 \cdot 5^1} = \frac{5^2}{2^3 \cdot 5^1 \cdot 5^2} = \frac{5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{25}{10^3} = 0,025$$

$$\frac{3}{50} = \frac{3}{2^1 \cdot 5^2} = \frac{3 \cdot 2}{2^1 \cdot 5^2 \cdot 2^1} = \frac{6}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{6}{10^2} = 0,06$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = \frac{5^2}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{5^2}{10^2} = \frac{25}{10^2} = 0,25$$

$$\frac{7}{125} = \frac{7}{5^3} = \frac{7 \cdot 2^3}{5^3 \cdot 2^3} = \frac{7 \cdot 8}{10^3} = \frac{56}{10^3} = 0,056$$

Jeder Bruch $\frac{m}{2^a \cdot 5^b}$ läßt sich durch Erweitern

auf einen Zehnerbruch bringen, und zwar, falls $a > b$ ist, durch Erweitern mit 5^{a-b} , falls $a < b$ ist, durch Erweitern mit 2^{b-a} . Falls $a = b$ ist, so ist der Bruch bereits ein Zehnerbruch.

Die gebrochene Zahl $\frac{m}{2^a \cdot 5^b}$ läßt sich daher als

ein endlicher Dezimalbruch angeben, der a oder b Stellen nach dem Komma hat, je nachdem ob $a \geq b$ oder $a \leq b$ ist. Die Anzahl d der Dezimalstellen ist folglich gleich dem größeren der beiden Exponenten a und b oder, falls a und b übereinstimmen, gleich a . (Das gilt für echte Brüche, wogegen die Aussage, daß $\frac{m}{2^a \cdot 5^b}$ durch einen endlichen Dezimalbruch darstellbar ist, für beliebige Brüche richtig ist.)

Beispiel:

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{2^2 \cdot 5}$$

$$a = 2 \quad b = 1. \quad \text{Also } d = 2. \quad (0,05)$$

$$\frac{7}{250} = \frac{7}{2^1 \cdot 5^3}$$

$$a = 1 \quad b = 3. \quad \text{Also } d = 3. \quad (0,028)$$

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$$

$$a = 4 \quad b = 0. \quad \text{Also } d = 4. \quad (0,0625)$$

$$\frac{9}{125} = \frac{9}{5^3}$$

$$a = 0 \quad b = 3. \quad \text{Also } d = 3. \quad (0,072)$$

Die gebrochene Zahl $\frac{m}{n}$, wobei m und n

teilerfremde natürliche Zahlen sind, läßt sich dagegen nicht durch einen endlichen Dezimalbruch angeben, wenn der Nenner n min-

destens einen Primfaktor enthält, der von 2 und 5 verschieden ist, d. h., wenn es eine mit 10 teilerfremde natürliche Zahl $k \neq 1$ und natürliche Zahlen a und b gibt, so daß $n = 2^a \cdot 5^b \cdot k$ ist. (Falls 2 oder 5 keine Primfaktoren von n sind, so ist dabei $a = 0$ oder $b = 0$.)

Wir wollen uns im folgenden zunächst auf solche gemeine Brüche beschränken, deren Zähler gleich 1 sind.

Beispiel:

$$\frac{1}{11} = \frac{1}{2^0 \cdot 5^0 \cdot 11} \quad a = 0 \quad b = 0 \quad k = 11$$

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{2^0 \cdot 5^0 \cdot 3^2} \quad a = 0 \quad b = 0 \quad k = 3^2 = 9$$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{2^2 \cdot 5^0 \cdot 3} \quad a = 2 \quad b = 0 \quad k = 3$$

$$\frac{1}{15} = \frac{1}{2^0 \cdot 5^1 \cdot 3} \quad a = 0 \quad b = 1 \quad k = 3$$

$$\frac{1}{30} = \frac{1}{2^1 \cdot 5^1 \cdot 3} \quad a = 1 \quad b = 1 \quad k = 3$$

$$\frac{1}{880} = \frac{1}{2^4 \cdot 5^1 \cdot 11} \quad a = 4 \quad b = 1 \quad k = 11$$

$$\frac{1}{1750} = \frac{1}{2^1 \cdot 5^3 \cdot 7} \quad a = 1 \quad b = 3 \quad k = 7$$

Solche gebrochenen Zahlen lassen sich durch unendliche Dezimalbrüche angeben. Diese Dezimalbrüche besitzen (im Gegensatz zu den endlichen Dezimalbrüchen) keine letzte von 0 verschiedene Stelle nach dem Komma.

Wir erinnern uns: Durch Anwendung des schriftlichen Divisionsverfahrens kann man zu jedem gemeinen Bruch einen entweder endlichen oder aber unendlichen Dezimalbruch erhalten.

Beispiel:

$$1 : 16 = 0,0625$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ \underline{40} \\ 60 \\ \underline{80} \\ 20 \\ \underline{0} \end{array}$$

$$1 : 12 = 0,0833 \dots$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ \underline{40} \\ 60 \\ \underline{40} \\ 20 \\ \underline{0} \end{array}$$

$$1 : 11 = 0,090909 \dots$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ \underline{100} \\ 0 \\ \underline{100} \\ 0 \\ \underline{100} \\ 0 \end{array}$$

Wenn eine solche schriftliche Division einer natürlichen Zahl m durch eine natürliche Zahl n , wobei $m < n$ ist, auf einen unendlichen Dezimalbruch führt, so müssen sich in dessen Dezimalstellen eine bestimmte Grundziffer oder Gruppen von Grundziffern ständig wiederholen. Als Reste bei einer solchen Division sind nämlich höchstens die Zahlen 1 bis $n-1$ möglich, so daß sich spätestens nach der $(n-1)$ -ten Stelle ein Rest r ($1 \leq r \leq n-1$) ergeben muß, der bereits einmal vorgekommen ist. Nach dem ersten sich wiederholenden Rest muß daher im unendlichen Dezimalbruch eine Grundziffer oder eine Gruppe von Grundziffern immer wiederkehren. Eine solche Gruppe sich wiederholender Grundziffern nennt man eine Periode und die Anzahl der Grundziffern in einer Periode die Periodenlänge l des unendlichen Dezimalbruchs.

Beispiel:

$$\frac{1}{3} = 0,333333... = 0,\overline{3}$$

Periode: 3 $l=1$

$$\frac{1}{11} = 0,090909... = 0,\overline{09}$$

Periode: 09 $l=2$

$$\frac{1}{27} = 0,037037... = 0,\overline{037}$$

Periode: 037 $l=3$

$$\frac{1}{30} = 0,033333... = 0,\overline{03}$$

Periode: 3 $l=1$

$$\frac{1}{12} = 0,083333... = 0,\overline{083}$$

Periode: 3 $l=1$

$$\frac{1}{15} = 0,066666... = 0,\overline{06}$$

Periode: 6 $l=1$

Da es auch unendliche Dezimalbrüche gibt, die nicht periodisch sind, nennt man die unendlichen Dezimalbrüche, die man bei der Division natürlicher Zahlen erhalten kann, periodische Dezimalbrüche.

Wir fassen zunächst zusammen: Jede gebrochene Zahl $\frac{1}{n}$ läßt sich durch einen endlichen oder durch einen unendlichen, aber periodischen Dezimalbruch angeben.

Unter den unendlichen periodischen Dezimalbrüchen gibt es nun solche, deren Periode unmittelbar hinter dem Komma beginnt (z. B. $\frac{1}{11} = 0,\overline{09}$), und solche, deren Periode nicht unmittelbar hinter dem Komma anfängt (z. B. $\frac{1}{12} = 0,\overline{083}$). Die ersteren nennt man rein-periodische Dezimalbrüche; bei den letzteren sagt man, sie haben eine Vorperiode. Eine Vorperiode ist eine Grundziffer oder Gruppe von Grundziffern, die im unendlichen Dezimalbruch vor der Periode steht. Die Anzahl der Grundziffern in einer Vorperiode nennt man die Länge v der Vorperiode.

Beispiel:

$$\frac{1}{15} = 0,0\overline{6} \quad \text{Vorperiode: 0} \quad v=1$$

$$\frac{1}{12} = 0,0\overline{83} \quad \text{Vorperiode: 08} \quad v=2$$

$$\frac{1}{880} = 0,001\overline{136} \quad \text{Vorperiode: 0011} \quad v=4$$

$$\frac{1}{1750} = 0,000\overline{571428} \quad \text{Vorperiode: 000} \quad v=3$$

Ob zu einer gebrochenen Zahl $\frac{1}{n}$ ein unendlicher rein-periodischer Dezimalbruch oder ein unendlicher Dezimalbruch mit einer Vorperiode gehört, läßt sich nicht nur nach einer schriftlichen Division feststellen, sondern auch dadurch ermitteln, daß man den Nenner n als Produkt $2^a \cdot 5^b \cdot k$ (a, b, k seien natürliche Zahlen mit den Bedingungen $a \geq 0, b \geq 0, k \neq 1, 2 \nmid k, 5 \nmid k$) schreibt. Ist nun $a=b=0$, so gehört zu der gebrochenen Zahl $\frac{1}{n}$ ein unendlicher rein-periodischer Dezimalbruch.

Sonst gehört zu ihr ein unendlicher Dezimalbruch mit Vorperiode. Die Länge v der Vorperiode eines solchen Dezimalbruchs ist gleich dem (größeren) der beiden Exponenten a und b , bzw. gleich a , falls $a=b$ ist.

Beispiel:

a) Rein-periodische Dezimalbrüche

$$\frac{1}{3} \quad n = 3 = 2^0 \cdot 5^0 \cdot 3 \quad a=b=0 \quad (k=3) \quad (0,\overline{3})$$

$$\frac{1}{11} \quad n = 11 = 2^0 \cdot 5^0 \cdot 11 \quad a=b=0 \quad (k=11) \quad (0,\overline{09})$$

b) Dezimalbrüche mit Vorperiode

$$\frac{1}{12} \quad n = 12 = 2^2 \cdot 5^0 \cdot 3 \quad a=2 \quad b=0 \quad (k=3) \quad \text{Also } v=a=2.$$

$$\frac{1}{30} \quad n = 30 = 2^1 \cdot 5^1 \cdot 3 \quad a=1 \quad b=1 \quad (k=3) \quad \text{Also } v=a=1.$$

$$\frac{1}{880} \quad n = 880 = 2^4 \cdot 5^1 \cdot 11 \quad a=4 \quad b=1 \quad (k=11) \quad \text{Also } v=a=4.$$

$$\frac{1}{1750} \quad n = 1750 = 2^1 \cdot 5^3 \cdot 7 \quad a=1 \quad b=3 \quad (k=7) \quad \text{Also } v=b=3.$$

Auch wenn die gebrochenen Zahlen durch gemeine Brüche dargestellt werden, deren Zähler von 1 verschieden sind, ändern sich die genannten Eigenschaften der zugehörigen unendlichen Dezimalbrüche nicht, sofern die jeweiligen Zähler und Nenner teilerfremd sind und der Zähler kleiner als der Nenner ist.

Beispiel:

$$\frac{7}{1250} \quad 1250 = 2^1 \cdot 5^4 \quad a=1 \quad b=4 \quad \text{Also endlicher Dezimalbruch; } d=b=4.$$

$$\frac{7}{33} \quad 33 = 2^0 \cdot 5^0 \cdot 33 \quad a=0 \quad b=0 \quad k=33 \quad (0,0056)$$

$$\frac{3}{880} \quad 880 = 2^4 \cdot 5^1 \cdot 11 \quad a=4 \quad b=1 \quad k=11 \quad \text{Also Dezimalbruch mit Vorperiode; } v=a=4. \quad (0,003409)$$

$$\frac{11}{1750} \quad 1750 = 2^1 \cdot 5^3 \cdot 7 \quad a=1 \quad b=3 \quad k=7 \quad \text{Also Dezimalbruch mit Vorperiode; } v=b=3. \quad (0,006285714)$$

Wir wollen uns nun etwas näher mit den rein-periodischen Dezimalbrüchen beschäftigen. Unter ihnen sind besonders diejenigen interessant, die zu gemeinen Brüchen gehören, deren Nenner Primzahlen sind. Jede gebrochene Zahl $\frac{m}{p}$ (p sei Primzahl, aber von 2 und 5 verschieden; m sei natürliche Zahl mit $0 < m < p$) liefert einen rein-periodischen Dezimalbruch. Die Periodenlänge l dieser Dezimalbrüche ist, wie bereits gesagt, höchstens $p-1$. Es gibt gebrochene Zahlen $\frac{m}{p}$, die auf

Dezimalbrüche der Periodenlänge $p-1$ führen, aber nicht alle derartigen Zahlen liefern Dezimalbrüche der Periodenlänge $p-1$.

Beispiel:

$$\text{a) } \frac{1}{7} = 0,142857 \quad p=7 \quad p-1=6 \quad l=6 \quad l=p-1$$

$$\text{b) } \frac{1}{3} = 0,\overline{3} \quad p=3 \quad p-1=2 \quad l=1 \quad l \neq p-1$$

$$\frac{1}{13} = 0,076923 \quad p=13 \quad p-1=12 \quad l=6 \quad l \neq p-1$$

$$\frac{1}{73} = 0,01369863 \quad p=73 \quad p-1=72 \quad l=8 \quad l \neq p-1$$

$$\frac{1}{101} = 0,0099 \quad p=101 \quad p-1=100 \quad l=4 \quad l \neq p-1$$

Weitere Beispiele neben $\frac{1}{7}$ für gemeine Brüche

mit Primzahlennenner p , die tatsächlich auf rein-periodische Dezimalbrüche der Periodenlänge $p-1$ führen, sind $\frac{1}{17}, \frac{1}{19}, \frac{1}{23}, \frac{1}{29}$. Bei der schriftlichen Division $1:p$ müssen in diesen Fällen alle möglichen Reste von 1 bis $p-1$ genau einmal auftreten, bevor sich die Ziffernfolge im Dezimalbruch periodisch wiederholt.

Beispiel: $\frac{1}{7} = 1:7 = 0,1428571...$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \underline{30} \\ 20 \\ \underline{60} \\ 40 \\ \underline{50} \\ 1 \end{array}$$

Daher läßt sich jedem der möglichen Reste bei der Division $1:p$, also den Zahlen von 1 bis $p-1$, genau eine Ziffer der Periode des zugehörigen periodischen Dezimalbruchs zuordnen.

Beispiel: $p=7$

Rest	1	3	2	6	4	5
Ziffer der Periode	1	4	2	8	5	7

Folglich läßt sich aus dieser Tabelle sofort das Ergebnis der Division $m:p$ ($0 < m < p$), also der zu $\frac{m}{p}$ gehörige periodische Dezimalbruch ablesen.

Beispiel:

$$\frac{2}{7} = 0,285714, \quad \frac{3}{7} = 0,428571,$$

$$\frac{4}{7} = 0,571428, \quad \frac{5}{7} = 0,714285,$$

$$\frac{6}{7} = 0,857142$$

Entsprechendes ist auch für die anderen genannten Primzahlen möglich.

Beispiel: $p=17$

Rest (Zähler)	1	10	15	14	4	6	9	5
Periodenziffer	0	5	8	8	2	3	5	2

Rest (Zähler)	16	7	2	3	13	11	8	12
Periodenziffer	9	4	1	1	7	6	4	7

$$\frac{1}{17} = 0,0588235294117647$$

$$\frac{7}{17} = 0,4117647058823529$$

Wenn aber die Periodenlänge l des zu $\frac{1}{p}$ gehörigen rein-periodischen Dezimalbruchs nicht $p-1$ ist, so ist l zumindest ein Teiler von $p-1$.

Beispiel:

$$\frac{1}{13} \quad p=13 \quad p-1=12 \quad l=6 \quad 6|12$$

$$\frac{1}{73} \quad p=73 \quad p-1=72 \quad l=8 \quad 8|72$$

$$\frac{1}{101} \quad p=101 \quad p-1=100 \quad l=4 \quad 4|100$$

In diesen Fällen treten natürlich nicht mehr alle Zahlen von 1 bis $p-1$ als Reste bei der Division $1:p$ auf.

Beispiel: $\frac{1}{13} = 0,076923$

Rest (Zähler)	1	10	9	12	3	4
Periodenziffer	0	7	6	9	2	3

Also ist: $\frac{12}{13} = 0,923076$, $\frac{4}{13} = 0,307692$

Mit Hilfe dieser Tabelle läßt sich $\frac{2}{13}$ allerdings nicht (direkt) ermitteln. Durch Division $2:13$ ergibt sich für $\frac{2}{13}$ der periodische Dezimalbruch $0,153846$ und die entsprechende Rest-Periodenziffer-Tabelle:

Rest (Zähler)	2	7	5	11	6	8
Periodenziffer	1	5	3	8	4	6

Also ist $\frac{11}{13} = 0,846153$.

Da für $p=13$ die Zahl $p-1=12$ das Doppelte von $l=6$ ist, gibt es in diesem Fall genau zwei elementfremde Restfolgen, mit deren Hilfe sich jeder zu $\frac{m}{13}$ ($0 < m < 13$) gehörige rein-periodische Dezimalbruch ermitteln läßt. Für $p=73$ gibt es 7 solche elementfremden Restfolgen, da für $p=73$ gilt: $p-1=72$, $l=8$, also $p-1=7 \cdot l$.

Man erkennt sofort, daß der Zähler in jedem dieser Fälle keinen Einfluß auf die Periodenlänge der zugehörigen Dezimalbrüche hat.

Ist der Nenner n des gemeinen Bruchs $\frac{1}{n}$ das Produkt zweier Primzahlen p_1 und p_2 , die von 2 und 5 verschieden sind, und haben die zu $\frac{1}{p_1}$ und $\frac{1}{p_2}$ gehörigen rein-periodischen Dezimalbrüche die Periodenlängen l_1 und l_2 , so hat der zu $\frac{1}{n}$ gehörige rein-periodische

Dezimalbruch als Periodenlänge das kleinste gemeinsame Vielfache von l_1 und l_2 .

Beispiel:

Der zu $\frac{1}{7}$ gehörige (rein-periodische) Dezimalbruch hat die Periodenlänge $l_1=6$. Der zu $\frac{1}{101}$ gehörige (rein-periodische) Dezimalbruch hat die Periodenlänge $l_2=4$. Folglich hat der zu

$\frac{7}{707} \left(= \frac{1}{7 \cdot 101} \right)$ gehörige (rein-periodische) Dezimalbruch die Periodenlänge $l=12$, denn das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 6 und 4 ist 12.

Gehört zu einer gebrochenen Zahl $\frac{1}{n}$ ein rein-

periodischer Dezimalbruch, so läßt sich dessen Periodenlänge l auch noch auf andere Weise ermitteln, ohne die Division $1:n$ auszuführen. Die Periodenlänge l ist nämlich die kleinste natürliche Zahl z , die größer als Null ist und für die $10^z - 1$ durch n teilbar ist.

Beispiel:

a) $\frac{1}{3} \quad n=3 \quad 10^1 - 1 = 9 \quad 3|9$

Also ist $l=1$.

b) $\frac{1}{7} \quad n=7 \quad 10^1 - 1 = 9 \quad 7 \nmid 9$

$$10^2 - 1 = 99 \quad 7 \nmid 99$$

$$10^3 - 1 = 999 \quad 7 \nmid 999$$

$$10^4 - 1 = 9999 \quad 7 \nmid 9999$$

$$10^5 - 1 = 99999 \quad 7 \nmid 99999$$

$$10^6 - 1 = 999999 \quad 7 \nmid 999999$$

Also ist $l=6$.

Umgekehrt lassen sich auf Grund der Primzahlzerlegungen der Zahlen $10^1 - 1 = 9$, $10^2 - 1 = 99$, $10^3 - 1 = 999$, ... die Zahlen n ermitteln, für welche die zu $\frac{1}{n}$ gehörigen rein-

periodischen Dezimalbrüche die Periodenlänge 1, 2, 3, ... haben.

$$10^1 - 1 = 9 = 3^2$$

Folglich sind $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{9}$ die einzigen gebrochenen Zahlen $\frac{1}{n}$ (die sich also durch gemeine

Brüche mit dem Zähler 1 darstellen lassen), deren zugehörige Dezimalbrüche rein-periodisch mit der Periodenlänge 1 sind.

$$10^2 - 1 = 99 = 3^2 \cdot 11$$

Folglich sind $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{33}$ und $\frac{1}{99}$ die einzigen gebrochenen Zahlen $\frac{1}{n}$, deren zugehörige Dezimalbrüche rein-periodisch mit der Periodenlänge 2 sind. $\left(\frac{1}{3} \text{ und } \frac{1}{9} \text{ sind bereits bei der Periodenlänge 1 erfaßt.} \right)$

$$10^3 - 1 = 999 = 3^3 \cdot 37$$

Folglich sind $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{37}$, $\frac{1}{111}$, $\frac{1}{333}$ und $\frac{1}{999}$ die einzigen gebrochenen Zahlen $\frac{1}{n}$, deren zugehörige

Dezimalbrüche rein-periodisch mit der Periodenlänge 3 sind. (Bereits zuvor erfaßte Zahlen $\frac{1}{n}$ werden hier selbstverständlich nicht mehr angegeben, da ihre Periodenlänge kleiner als 3 ist.)

$$10^4 - 1 = 9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$$

Folglich sind $\frac{1}{101}$, $\frac{1}{303}$, $\frac{1}{909}$, $\frac{1}{1111}$, $\frac{1}{3333}$, $\frac{1}{9999}$

die einzigen gebrochenen Zahlen $\frac{1}{n}$, deren zugehörige Dezimalbrüche rein-periodisch mit der Periodenlänge 4 sind.

Diese Erkenntnisse lassen sich aber auch nutzen, wenn man die Periodenlänge des zu einer gebrochenen Zahl $\frac{1}{n}$ gehörigen periodischen Dezimalbruchs ermitteln will, falls dieser eine Vorperiode hat.

Beispiel:

a) $\frac{1}{880} = \frac{1}{2^4 \cdot 5^1 \cdot 11} = \frac{1}{2^4 \cdot 5^1} \cdot \frac{1}{11}$

Aus dem Exponenten der Potenz 2^4 im Nenner des ersten Bruchs auf der rechten Seite geht hervor, daß die Länge v der Vorperiode gleich 4 ist. Da im Nenner des zweiten Bruchs auf der rechten Seite die Primzahl 11

steht und der zu $\frac{1}{11}$ gehörige rein-periodische

Dezimalbruch die Periodenlänge 2 hat, hat

auch der zu $\frac{1}{880}$ gehörige Dezimalbruch die

Periodenlänge 2. Zu $\frac{1}{880}$ gehört ein periodischer

Dezimalbruch, der eine Vorperiode der Länge 4 hat und dessen Periodenlänge 2 ist. (0,001136)

b) $\frac{1}{6060} \quad 6060 = 2^2 \cdot 5^1 \cdot 303$

Folglich ist bei dem zu $\frac{1}{6060}$ gehörigen pe-

riodischen Dezimalbruch die Länge der Vorperiode gleich 2 (auf Grund der Exponenten der Potenzen von 2 und 5) und die Perioden-

länge gleich 4, da $\frac{1}{303}$ die Periodenlänge 4 hat. (Tatsächlich ist $\frac{1}{6060} = 0,000165$)

c) $\frac{1}{2376} \quad 2376 = 2^3 \cdot 5^0 \cdot 3^3 \cdot 11$

Folglich ist bei dem zu $\frac{1}{2376}$ gehörigen pe-

riodischen Dezimalbruch die Länge der Vorperiode gleich 3 (auf Grund der Exponenten der Potenzen von 2 und 5) und die Periodenlänge gleich 6, da $\frac{1}{33} = \frac{1}{27}$ die Periodenlänge 3,

$\frac{1}{11}$ die Periodenlänge 2 hat und das kleinste gemeinsame Vielfache von 3 und 2 gleich 6 ist.

(Tatsächlich ist $\frac{1}{2376} = 0,000420875$.)

Die hier genannten Eigenschaften sind die wichtigsten der periodischen Dezimalbrüche. Auch die zu beliebigen gebrochenen Zahlen

$\frac{m}{n}$ gehörigen Dezimalbrüche haben diese

Eigenschaften; sofern nur die natürlichen Zahlen m und n ($\neq 1$) zueinander teilerfremd sind. Wir haben keine dieser Eigenschaften bewiesen. Wer Freude an der Beschäftigung mit solchen Zahlenproblemen hat, sollte die nachfolgenden Aufgaben selbständig lösen, und wer darüber hinaus sogar diese oder jene Eigenschaft beweisen möchte, der sollte einmal ein Büchlein zur Hand nehmen, in dem er systematisch in das interessante Gebiet der Zahlentheorie eingeführt wird.

Bücher aus dem Teubner-Verlag



R. THIELE

Mathematische Beweise

Mathematische Schülerbücherei

172 Seiten, 63 Abb.

Bestell-Nr. 665 919 3

Preis 8,60 M

Aus dem Inhalt: Sind Beweise nötig? – Die Strenge der Beweise – Aussagen – Aussagenverbindungen – Negation, Konjunktion, Disjunktion, Implikation – Logisches Schließen – Beweise – Der axiomatische Aufbau – Direkte Beweise – Indirekte Beweise – Fallunterscheidungen – Einige typische mathematische Beweise – Die Induktion – Lösungen – Literatur

Die Leseprobe

Unmöglichkeitbeweise

In der Mathematik gibt es zahlreiche Probleme, deren Lösung in ihrer Unlösbarkeit besteht. Einer der ältesten Unmöglichkeitbeweise wurde um 450 v. u. Z. von Hippasos von Metapontion geführt und ergab, daß $\sqrt{2}$ (die Länge der Diagonalen im Einheitsquadrat) keine rationale Zahl ist.

▲ 1 ▲ Ermittle mit Hilfe der zu $p=17$ bzw. $p=13$ gehörigen Restfolge-Tabellen die zu $\frac{11}{17}$,

$\frac{14}{17}$, $\frac{9}{13}$, $\frac{7}{13}$ gehörigen Dezimalbrüche! Überprüfe die Ergebnisse mit Hilfe der schriftlichen Division!

▲ 2 ▲ Ermittle (ohne auszudividieren), welche der folgenden gebrochenen Zahlen endliche und welche unendliche Dezimalbrüche haben! Ermittle ferner je nachdem entweder die Anzahl der Dezimalstellen nach dem Komma oder die Länge der Vorperiode und die Periodenlänge der zugehörigen Dezimalbrüche!

$$\frac{1}{280}, \frac{1}{45}, \frac{1}{34}, \frac{1}{580}, \frac{1}{323}, \frac{1}{80}$$

▲ 3 ▲ Ermittle alle natürlichen Zahlen n , für die der zu $\frac{1}{n}$ gehörige Dezimalbruch unendlich und rein-periodisch ist und die Periodenlänge 5 (6, 7, 8) hat! M. Rehm

Das Cantorsche Diagonalverfahren zeigt ebenfalls die Unmöglichkeit, die reellen Zahlen abzuzählen. Die Quadratur des Kreises (d. h. seine Verwandlung in ein flächengleiches Quadrat) mit Zirkel und Lineal ist nach Lindemann ebenfalls unmöglich. Da die Fläche eines Kreises mit dem Radius r gleich πr^2 ist, hat ein Quadrat mit den Seitenlängen $r\sqrt{\pi}$ den gleichen Flächeninhalt wie der Kreis. Hier ist genau darauf zu achten, was verlangt wird und was unmöglich ist, denn es gibt zwar eine Strecke der Länge $r\sqrt{\pi}$ und damit ein zugehöriges Quadrat der Fläche πr^2 , jedoch läßt sich diese Strecke aus dem Radius r nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren. Mit geeigneten anderen Konstruktionsmitteln kann die Aufgabe lösbar sein!

Drei Beispiele sollen zeigen, wie genau darauf zu achten ist, was verlangt wird. *Beispiel:* Mit 12 Hölzern können 4 gleichseitige Dreiecke gebildet werden, so daß jedes Hölzchen als Seite dient. Dies geht mit 9 Hölzchen ebenfalls. Ist das auch mit 6 Hölzchen möglich?

Wenn eine Lösung möglich ist, dann muß sie sich aus der im Bild gezeigten Figur ergeben, denn für ein Dreieck sind genau 3 Hölzchen nötig. Die restlichen 3 Hölzchen müssen, damit sie die bereits gelegten Hölzchen als mögliche Seite ausnützen, in den Ecken des Dreiecks angelegt werden. Dann ist es jedoch offenbar unmöglich, alle Hölzchen wie im Bild zu einem Dreieck zu schließen. Unmöglich ja, aber nur in der Ebene, was nicht verlangt wurde, sondern durch die vorausgegangenen Konstruktionen automatisch unterstellt wurde. Im Raum bilden die 6 Kanten eines regelmäßigen Tetraeders vier gleichseitige Dreiecke.

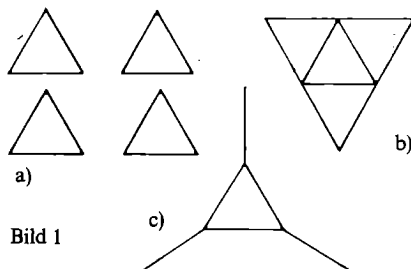
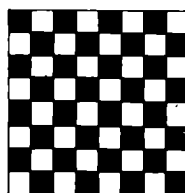


Bild 1

Beispiel: Es ist unmöglich, auf einem Schachbrett mit dem Springer von einer Ecke zur diagonal gegenüberliegenden Ecke zu ziehen und dabei jedes Feld genau einmal zu besetzen. Die Diagonale und damit gegenüberliegende Ecken haben die gleiche Feldfarbe. Der Springer wechselt bei jedem Zug die Farbe des Feldes. Ein Schachbrett hat 64 Felder. Angenommen, die Aufgabe ist lösbar,

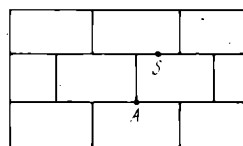
Bild 2



dann benötigte der Springer 63 Züge. Nach einer ungeraden Anzahl von Zügen besetzt der Springer ein Feld, das eine andere Farbe als sein Ausgangsfeld hat. Also auch nach dem 63. Zug. Das widerspricht der Gleichfarbigkeit der diagonalen Ecken.

Beispiel: Eine Spinne sitzt auf der im Bild gezeigten Mauer an der mit S markierten Stelle. Die Spinne möchte alle Fugen des gezeichneten Mauerstücks ablaufen (der Rand gehört dazu), ohne eine Fuge zweimal zu durchlaufen. Ist das möglich? Auf ihrem Rundgang kommt die Spinne an eine Stelle (z. B. den Punkt A), wo sich die Fuge „gabelt“, so daß sie eine der beiden Fugen benutzen muß. Wenn sie alle Fugen durchlaufen soll, dann muß sie irgendwann auch die an der Gabelung nicht benutzte Fuge passieren. In dieser Fuge kommt sie aber nur bis zum Gabelungspunkt, weil die beiden anderen Fugen bereits durchlaufen wurden. Also muß ihr Rundgang hier enden. Da es aber mehrere solcher Gabelungen gibt, bleibt die Spinne auf ihrem Rundgang stecken.

Bild 3



▲ 1 ▲ Es ist unmöglich, daß sich bei einer Begrüßung 7 Personen die Hände geben, und zwar so, daß jeder genau zwei Personen nicht die Hand gegeben hat.

▲ 2 ▲ Für alle natürlichen Zahlen n ist 7 kein Teiler von $2^n + 1$.

▲ 3 ▲ Auf einem Schachbrett mit 3×3 Feldern befinden sich 9 Figuren, die auf dem gleichen Brett völlig neu aufgestellt werden. Ist eine neue Aufstellung möglich, in der alle ursprünglich benachbarten Figuren wieder benachbart sind?

▲ 4 ▲ Der Bruch $\frac{21n+4}{14n+3}$ ist für alle n un kürzbar.

▲ 5 ▲ In einem Schachbrett (8×8 Felder) fehlen die sich diagonal gegenüberliegenden Ecken. Können die restlichen 62 Felder durch 31 Dominosteine vollständig belegt werden?

▲ 6 ▲ Zu drei Häusern soll in einer Ebene eine Zuleitung des Gaswerkes, des Wasserwerkes und der Elektrizitätsanstalt gelegt werden. Beweisen Sie, daß dies nicht kreuzungsfrei möglich ist!

▲ 7 ▲ Beweisen Sie, daß es unmöglich ist, über die im Bild gezeichneten Brücken so zu gehen, daß jede Brücke genau einmal benutzt wird (Königsberger Brückenproblem)!

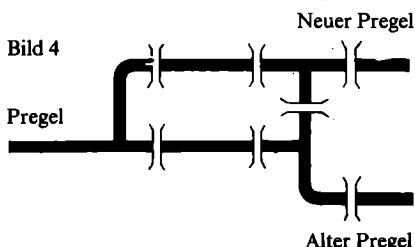


Bild 4

Bakelman, I. J.
Spiegelung am Kreis (KNB)
132 S. mit 67 Abb., 1976, 7,— M
Bestellangaben:
665 735 8/Bakelman, Spiegelung

Budden, F. J.
Zahlensysteme und Rechenautomaten
224 S. mit 34 Abb., 1972, 8,60 M
Bestellangaben:
665 633 9/Budden, Zahlensysteme

Jaglom, I. M.
Ungewöhnliche Algebra (MSB)
95 S. mit 45 Abb., 1977, 5,50 M
Bestellangaben:
665 789 2/Jaglom, Algebra

Kantor, I. L.; Solodownikow, A. S.
Hyperkomplexe Zahlen (MSB)
156 S. mit 18 Abb., 1978, 9,— M
Bestellangaben:
665 871 3/Kantor, Zahlen

Smogorszewski, A. S.
Lobatschewskische Geometrie (MSB)
75 S. mit 43 Abb., 1978, 6,— M
Bestellangaben:
665 842 2/Smogorszewski, Geometrie

Steinert, K.-G.
Sphärische Trigonometrie (KNB)
mit einigen Anwendungen aus Geodäsie,
Astronomie und Kartographie
160 S. mit 69 Abb. und 13 Tab., 1977, 9,50 M
Bestellangaben:
665 828 9/Steinert, Trigonometrie

Makowezki, Pl. W.
Schau den Dingen auf den Grund!
Verwunderliches aus der Physik (KNB)
2. Aufl., 241 S. mit 100 Abb., 1974, 8,50 M
Bestellangaben:
665 587 0/Makowezki, Dinge

Lange, W. N.
Physikalische Paradoxa
und interessante Aufgaben (KNB)
2. Aufl., 170 S. mit 48 Abb., 1976, 8,— M
Bestellangaben:
665 701 6/Lange, Paradoxa

Pskowski, J. P.
Novae und Supernovae (KNB)
Ursachen und Folgen von Sternexplosionen
236 S. mit 41 Abb., 1978, 12,50 M
Bestellangaben:
665 889 5/Pskowski, Novae

MSB: Mathematische Schülerbücherei
KNB: Kleine Naturwissenschaftliche
Bibliothek

Gute Grundkenntnisse gefragt

Klasse 5

▲1▲ Versuche, bei den folgenden Beispielen in die Kästchen solche Operationszeichen einzusetzen, daß wahre Aussagen entstehen! Für alle natürlichen Zahlen x gilt:

- a) $x \square 0 = 0$ d) $x \square x = x$
b) $x \square 1 = x$ e) $x \square 0 = x$
c) $x \square x = 1$ f) $x \square 1 = 0!$

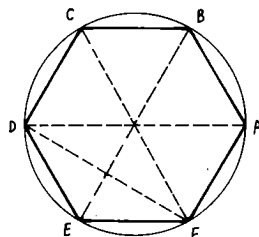
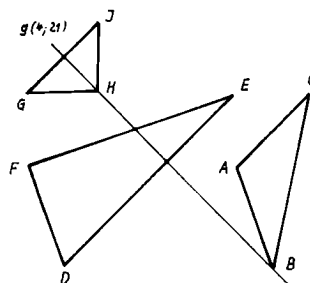
Untersuche, ob es mehrere Lösungen gibt!

▲2▲ Heinz reist mit seinen Eltern in Urlaub. Sie fahren mit ihrem „Trabant“. Am Beginn der Reise werden 20 l Kraftstoff getankt und dafür 30 M bezahlt. 4 l befanden sich noch im Tank. Das Reiseziel ist 150 km entfernt. Vater rechnet mit einem Kraftstoffverbrauch von 8 l für 100 km und mit einer Fahrzeit von etwa 3 h.

Wird es notwendig sein, unterwegs noch einmal zu tanken?

▲3▲ Gib, falls möglich, die kleinste natürliche Zahl an, die kleiner als 9,05 ist! Gib, falls möglich, die größte natürliche Zahl an, die größer ist als 0,85!

▲4▲ Konstruiere die Spiegelbilder folgender Dreiecke bezüglich g !



▲5▲ Versuche, an Stelle der Sternchen (*) jeweils solche Grundziffern einzusetzen, daß wahre Aussagen entstehen! Wo das nicht möglich ist, antworte mit „nicht lösbar“!

- a) $8,32 < *,32$ f) $9,97 < 9,*8$
b) $4,2* > 4,28$ g) $0,*1 < 0,11$

- c) $0,72 < 0,*2$ h) $5,99 < 5,9**$
d) $6,5* < 6,51$ i) $0,*** < 0,01$
e) $2,*6 > 2,98$

Klasse 6

▲1▲ Kann man zu $a = 24$ eine weitere natürliche Zahl b finden, so daß die Summe $a + b$ a) durch 8 teilbar ist;

b) nicht durch 8 teilbar ist?

Begründe deine Ansicht! Muß b durch 8 teilbar sein?

▲2▲ Klaus sagt: „40 kann man als Summe zweier Zahlen auf unterschiedliche Art darstellen. Da 40 durch 5 teilbar ist, müssen auch die beiden Summanden immer durch 5 teilbar sein, z. B. $40 = 5 + 35$.“

Untersuche an weiteren Beispielen, ob Klaus recht hat!

▲3▲ Gib, falls möglich, alle gebrochenen Zahlen an, die die Gleichung erfüllen!

- a) $3 \cdot y = 1$ c) $\frac{2}{3} \cdot z = 1$
b) $\frac{1}{7} \cdot t = 1$ d) $0 \cdot y = 1$

▲4▲ Versuche, je zwei Zahlen anzugeben, für die gilt:

- a) $\frac{1}{2} : x > \frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{2} : z > \frac{3}{2}$
b) $7 : t > 7$

▲5▲ Ein PKW fährt von einem Ort zu einem anderen Ort mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 60 km pro Stunde. Er benötigt für die Fahrt 3 Stunden. Ein LKW, der im Durchschnitt nur 40 km pro Stunde fährt, benötigt für die gleiche Strecke 4,5 Stunden.

a) Ist die benötigte Fahrzeit zur Geschwindigkeit (direkt oder umgekehrt) proportional? Nenne den Proportionalitätsfaktor, wenn das zutrifft!

b) Wie groß ist die Entfernung zwischen diesen beiden Orten?

Klasse 7

▲1▲ Von den jeweils angegebenen vier Ergebnissen (es wurde mit dem Rechenstab gerechnet) ist eines richtig. Ermittle es durch Überschlag! Begründe!

Aufgabe Ergebnisse

30,7	· 8,49	0,26; 26; 260; 2600
1,9	· 0,605	0,0066; 0,066; 0,66; 6,6
24,6	: 0,33	0,745; 7,45; 74,5; 745
0,118	: 25,7	0,0046; 0,046; 0,46; 46

▲2▲ Gib, falls möglich, alle rationalen Zahlen an, die die jeweilige Gleichung erfüllen!

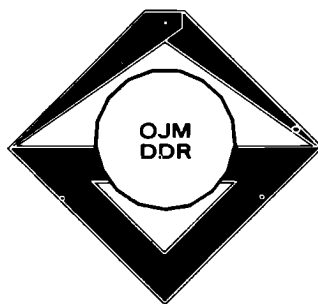
- a) $|x| = +9$ d) $|a| = -a$
b) $|y| = -3$ e) $|y| = y$
c) $-|x| = -8$ f) $|v| = 0$

▲3▲ Gib jeweils, falls möglich, alle rationalen Zahlen an, die die folgenden Gleichungen erfüllen!

- a) $+3 + x = 0$ c) $-1,5 + z = 0$
b) $y + (+7,5) = 0$ d) $z + (-3,9) = 0$

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade
(3./4. Februar 1979)



Olympiadeklasse 7

1. In einem Spezialistenlager für *Junge Mathematiker* führt Dirk eine Knobelaufgabe vor. Er stellt auf einen Tisch in eine Reihe – für die Zuschauer von links nach rechts – fünf Gefäße auf: eine Flasche, einen Krug, eine Tasse, einen Becher und eine Kanne. Sie sind, nicht notwendig in dieser Reihenfolge, mit je einem der Getränke Tee, Kaffee, Milch, Limonade und Most gefüllt. Den Zuschauern ist nicht bekannt, welches Gefäß welche Flüssigkeit enthält.

Dirk sagt: „Stelle ich die Kanne – wobei ich die anderen Gefäße unverändert stehen lasse – so zwischen zwei der anderen Gefäße, daß unmittelbar links neben ihr das Gefäß mit Tee und unmittelbar rechts neben ihr das Gefäß mit Milch steht, so stehen Milchgefäß und Limonadengefäß unmittelbar nebeneinander, und außerdem steht dann das Gefäß mit Kaffee als mittleres in der Reihe der fünf Gefäße.“

Findet nun heraus, womit die einzelnen Gefäße gefüllt sind!“

Untersuche, ob allein aus diesen Angaben ermittelt werden kann, welche Getränke sich in jedem der fünf Gefäße befinden! Gib alle mit Dirks Angaben übereinstimmenden Möglichkeiten einer Verteilung der Getränke auf die Gefäße an!

2. **Definition:** Berührt ein Kreis k eine Seite s eines Dreiecks D und Verlängerungen der beiden anderen Seiten von D , so heißt k „Ankreis des Dreiecks D (an die Seite s)“.

Aufgabe: Beweise folgenden Satz:

„Ist k Ankreis eines Dreiecks ABC an die Seite BC und ist M_a der Mittelpunkt von k , so hängt die Größe des Winkels $\angle BM_aC$ nur von der Größe α des Winkels $\angle CAB$ ab.“

Zum Beweis ermittle eine Formel für die Größe des Winkels $\angle BM_aC$ in Abhängigkeit von α !

3. Gegeben seien ein Winkel, dessen Größe kleiner als 180° ist, und ein Punkt P im Innern dieses Winkels. Der Scheitel des Winkels sei A .

Konstruiere eine Gerade g , die durch den Punkt P geht und die die Schenkel des Winkels so in Punkten $B \neq A$ bzw. $D \neq A$ schneidet, daß P der Mittelpunkt von BD ist!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob es genau eine Gerade gibt, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt!

4. In einem Behälter befinden sich genau 25 kg einer 4%igen wäßrigen Lösung, d. h., 4% dieser Lösung bestehen aus der gelösten Substanz, der Rest besteht aus Wasser.

Wieviele Prozent des Wassers sind dieser Lösung zu entziehen, damit eine neue Lösung entsteht, deren Wasseranteil nur noch 90% beträgt?

5. In einem Dreieck ABC sei u die Länge des Umfangs, und r sei die Länge des Umkreisradius.

Beweise, daß dann die Ungleichung $r > \frac{u}{6}$ gilt!

6. Ermittle alle rationalen Zahlen a mit folgender Eigenschaft: Das Produkt aus der Zahl a und ihrem absoluten Betrag ist gleich der Summe aus der Zahl a und ihrem absoluten Betrag!

Olympiadeklasse 8

1. Im Inneren eines spitzwinkligen Dreiecks ABC , dessen Innenwinkel die Größen α, β, γ haben, sei ein Punkt P so gelegen, daß $PA = PB = PC$ gilt. Die Größe des Winkels $\angle PAB, \angle PBC$ bzw. $\angle PAC$ seien mit δ, ε bzw. η bezeichnet.

a) Berechne δ, ε und η für den Fall, daß $\alpha = 70^\circ$ und $\beta = 80^\circ$ gilt!

b) Ermittle eine Formel für δ in Abhängigkeit von α, β und γ , ebenso eine Formel für ε und eine Formel für η !

2. Von einem Dreieck ABC wird gefordert, daß für die Länge a der Seite BC , die Länge c der Seite AB , die Länge w_a der Halbierenden des Winkels $\angle BAC$ und für die Größe β des Winkels $\angle ABC$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} a : c &= 2 : 3, \\ w_a &= 6 \text{ cm}, \\ \beta &= 35^\circ \end{aligned}$$

gelten.

a) Konstruiere ein solches Dreieck, und beschreibe deine Konstruktion!

b) Beweise, daß jedes so konstruierte Dreieck die gestellten Forderungen erfüllt! Eine Analyse und eine Determination werden nicht verlangt.

3. Jürgen ist im Ferienlager und will für seine Gruppe Brause zu 0,21 M je Flasche einkaufen. Er nimmt kein Bargeld, sondern nur leere Flaschen mit. Für das eingelöste Pfandgeld (0,30 M für jede leere Flasche) kauft er möglichst viele Flaschen Brause, wobei er für jede volle Flasche außer dem Preis von 0,21 M auch 0,30 M Pfand zu zahlen hat. Es stellt sich heraus, daß er sieben Flaschen weniger erhält, als er abgegeben hat. Außerdem bekommt er noch Geld zurück.

Ermittle alle Möglichkeiten, wie viele leere Flaschen Jürgen mitgenommen haben könnte und wieviel Geld er dann zurückerhielt!

4. Beweise folgenden Satz:

Ist p eine Primzahl größer als 3, so ist die Zahl $(p-1)(p+1)$ durch 24 teilbar!

5. Zum Experimentieren wird eine 30%ige Salzlösung benötigt. Vorhanden sind aber lediglich 2 Liter 10%iger Salzlösung sowie eine Flasche mit 42%iger Salzlösung.

Ermittle, wieviel Liter 42%ige Salzlösung den 2 Litern 10%iger Salzlösung zuzusetzen sind, damit eine 30%ige Salzlösung entsteht!

6. Es sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck, d die Länge des Durchmessers seines Umkreises, a bzw. b die Längen der Seiten BC bzw. AC und schließlich h die Länge der auf AB senkrecht stehenden Höhe.

Beweise, daß dann stets $d = \frac{a \cdot b}{h}$ gilt!

Olympiadeklasse 9

1. Beweisen Sie folgenden Satz:

Wenn a, b, c und d reelle Zahlen sind, für die $ab - cd \neq 0$ gilt, dann gilt $a^2 + b^2 > 0$ oder $c^2 + d^2 > 0$!

2. In einer Aufgabe der 2. Stufe war zu zeigen, daß unter vier aufeinanderfolgenden sechsstelligen Zahlen nicht notwendig eine sein muß, deren Quersumme durch 4 teilbar ist. Man ermittle die größte natürliche Zahl n , für die die folgende Aussage wahr ist: „Es gibt n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, unter denen sich keine befindet, deren Quersumme durch 4 teilbar ist!“

3. Gegeben sei ein Würfel, dessen Volumen mit V_1 bezeichnet sei. Verbindet man den Mittelpunkt je einer Seitenfläche dieses Würfels mit den Mittelpunkten aller benachbarten Seitenflächen, so erhält man die Kanten eines regelmäßigen Oktaeders. Das Volumen dieses Oktaeders sei V_2 genannt. Verbindet man nun wieder den Schwerpunkt je einer Seitenfläche dieses Oktaeders mit den Schwerpunkten aller benachbarten Seitenflächen, so erhält man die Kanten eines zweiten Würfels. Sein Volumen sei V_3 genannt.

Berechnen Sie das Verhältnis $V_1 : V_2 : V_3$!

4. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C teile die von C auf die Hypotenuse AB gefällte Höhe diese im Verhältnis 1 : 3.

Berechnen Sie die Größe der bei A bzw. B liegenden Innenwinkel des Dreiecks ABC !

5. Beweisen Sie, daß für jede Primzahl p der Rest, den p bei Division durch 30 läßt, entweder 1 oder eine Primzahl ist!

6. Gegeben seien ein Dreieck ABC sowie zwei Punkte A_1 und B_1 im Innern dieses Dreiecks. Bei der Verschiebung, die A in A_1 überführt, habe $\triangle ABC$ das Bild Dreieck $A_1B_1C_1$. Bei der Verschiebung, die B in B_2 überführt, habe $\triangle ABC$ das Bild Dreieck $A_2B_2C_2$. Der Durchschnitt der Dreiecksflächen (ABC) und $(A_1B_1C_1)$ sei die Fläche F_1 . Der Durchschnitt der Dreiecksflächen (ABC) und $(A_2B_2C_2)$ sei die Fläche F_2 .

Man beweise, daß F_1 entweder durch eine Verschiebung oder durch eine zentrische Streckung in F_2 überführt werden kann! Hinweis: Ist XYZ ein Dreieck, so verstehen wir unter der Dreiecksfläche (XYZ) die Menge aller Punkte auf dem Rande und im Innern des Dreiecks XYZ .

Olympiadeklasse 10

1. Beweisen Sie folgende Aussage: Wenn eine Funktion f für alle reellen Zahlen x definiert ist und für alle x die Gleichung

$$x \cdot f(x+2) = (x^2 - 9)f(x)$$

erfüllt, so hat sie mindestens drei reelle Nullstellen!

2. Beweisen Sie: Ein Dreieck ist genau dann gleichseitig, wenn mindestens zwei seiner Seitenhalbierenden auch Winkelhalbierende sind!

3. Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a , für die erstens die Terme, die auf beiden Seiten der Gleichung

$$\frac{1}{a^2 - 3a + 2} + \frac{1}{a^2 - 5a + 6} + \frac{1}{a^2 - 7a + 12} + \frac{1}{a^2 - 9a + 20} + \frac{1}{a^2 - 11a + 30} + \frac{1}{a^2 - 13a + 42} = \frac{a(a+5)}{a^2 - 8a + 7}$$

stehen, definiert sind und zweitens diese Gleichung gilt!

4. Achim, Bernd und Dirk nehmen jeder genau einen der folgenden Gegenstände an sich: einen Ball, einen Ring, einen Würfel. Danach machen sie folgende Aussagen:

- (1) Achim hat nicht den Ball, oder Bernd hat den Ring.
- (2) Bernd hat den Ring nicht, oder Dirk hat den Würfel.
- (3) Dirk hat den Würfel, und Achim hat den Ball.
- (4) Achim hat den Ball, und Bernd hat den Ring nicht.

Ist es möglich, daß

- a) alle vier Aussagen, b) genau drei Aussagen, c) genau zwei Aussagen, d) genau eine der Aussagen, e) keine der Aussagen gleichzeitig wahr sind (bzw. ist)?

5. Man untersuche, ob es reelle Zahlen a, b, c, d mit folgender Eigenschaft gibt: Wenn f die für alle reellen Zahlen x durch die Gleichung

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

definierte Funktion ist, so gilt

$$f(0) = 10; f(1) = 12; f(2) = 4 \text{ und } f(3) = 1.$$

Gibt es solche Zahlen a, b, c, d , so ermittle man alle derartigen Zahlen!

6. Gegeben seien drei Punkte M, S und C , wobei $\overline{CM} = 6$ cm, $\overline{CS} = 7$ cm und $\overline{MS} = 1,5$ cm gelte.

Man konstruiere zwei Punkte A und B so, daß sie zusammen mit C ein Dreieck ABC bilden, das den gegebenen Punkt M als Mittelpunkt seines Umkreises und den gegebenen Punkt S als Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden besitzt.

Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion! Untersuchen Sie, ob ein solches Dreieck ABC eindeutig durch die gegebenen Punkte M, S, C bestimmt ist!

Olympiadeklasse 11/12

1. Man ermittle alle diejenigen Polynome $f(x)$ (mit reellen Koeffizienten), die für alle reellen x die Gleichung

$$f(x+1) - f(x) = x + 1$$

erfüllen!

2. Im Raum seien A, B zwei verschiedene Punkte und ε eine Ebene. Für jede mögliche Lage von A, B, ε ermittle man zu diesen gegebenen A, B, ε alle diejenigen Punkte C auf ε , für die die Abstandssumme $\overline{AC} + \overline{BC}$ möglichst klein ist!

3. Es ist zu untersuchen, ob es in einer Menge M von 2222 Elementen 50 Teilmengen M_i ($i = 1, 2, \dots, 50$) gibt mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) Jedes Element m von M ist Element mindestens einer der Mengen M_i .
- (2) Jede der Mengen M_i ($i = 1, 2, \dots, 50$) enthält genau 1111 Elemente.
- (3) Für je zwei der Mengen M_i, M_j ($i \neq j$) gilt: Der Durchschnitt von M_i und M_j enthält genau 22 Elemente.

4. Man beweise: Ist $n \geq 2$ eine ganze Zahl, so ist die für alle reellen x durch

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \cos(x/\sqrt{k})$$

definierte Funktion f nichtperiodisch!

5. Es sei $n \geq 2$ eine gegebene ganze Zahl. Man untersuche, ob sich unter allen denjenigen reellen Zahlen $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$, für die $x_1 + \dots + x_n = 1$ gilt, auch solche befinden, für die der Wert von $x_1^3 + \dots + x_n^3$

a) möglichst groß

b) möglichst klein

ist. Ist dies der Fall, so ermittle man diesen größten bzw. kleinsten Wert!

6A. Es sei (a_n) ($n = 0, 1, 2, \dots$) eine Folge reeller Zahlen, für die $a_0 = 0$ sowie $a_{n+1}^3 = \frac{1}{2}a_n^3 - 1$ für alle $n = 1, 2, \dots$ gelte.

Man zeige, daß es dann eine positive reelle Zahl $q < 1$ gibt, so daß für alle $n = 1, 2, \dots$

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q |a_n - a_{n-1}|$$

gilt, und gebe eine derartige reelle Zahl q an!

6B. Ist $\triangle ABC$ ein Dreieck, so bezeichne A' den Bildpunkt von A bei Spiegelung an der Geraden durch B und C , B' den Bildpunkt von B bei Spiegelung an der Geraden durch C und A , C' den Bildpunkt von C bei Spiegelung an der Geraden durch A und B .

Mit diesen Bezeichnungen beweise man: Genau dann ist $\triangle A'B'C'$ ein zu $\triangle ABC$ ähnliches Dreieck – mit jeweils A, A' bzw. B, B' bzw. C, C' als entsprechenden Ecken –, wenn $\triangle ABC$ gleichseitig ist!

Lösungen

Olympiadeklasse 7

1. Angenommen, es gibt eine Dirks Angaben entsprechende Verteilung der Getränke auf die Gefäße. Dann gibt es – da die Kanne nach dem Umstellen zwischen zwei anderen Gefäßen steht, wobei das Teegefäß jeweils unmittelbar links, das Milchgefäß unmittelbar rechts neben der Kanne steht –, genau die nachfolgend angegebenen drei Möglichkeiten für die Reihenfolge der Gefäße:

(1)	Flasche Tee	Kanne Milch	Krug	Tasse	Becher
(2)	Flasche Tee	Krug	Kanne Milch	Tasse	Becher
(3)	Flasche Tee	Krug	Tasse	Kanne Milch	Becher

Die Möglichkeiten (1) und (3) scheiden aus, da sie der Angabe widersprechen, daß sich in dem in der Mitte stehenden Gefäß Kaffee befindet.

Somit verbleibt nur die Möglichkeit (2), und dabei ist nach der eben genannten Angabe die Kanne mit Kaffee gefüllt. Hiernach und da außerdem das Limonadengefäß unmittelbar neben dem Milchgefäß steht, verbleibt als einzig mögliche mit Dirks Angaben übereinstimmende Verteilung die folgende: Die Flasche enthält Most, der Krug Tee, die Kanne Kaffee, die Tasse Milch und der Becher Limonade. Für die Verteilung treffen alle von Dirk gemachten Angaben zu. Sie ist daher die einzige Verteilung der gesuchten Art.

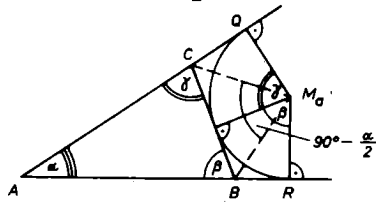
2. Es seien β, γ die Größen von $\angle ABC$ bzw. $\angle BCA$. Die Berührungspunkte von k mit den Verlängerungen von AC bzw. AB seien Q bzw. R (siehe Bild).

Dann gilt für die Nebenwinkel von $\angle ABC$ bzw. $\angle ACB$:

$$\begin{aligned} \angle CBR &= 180^\circ - \beta \text{ und } \angle BCQ \\ &= 180^\circ - \gamma. \end{aligned}$$

Da M_a als Mittelpunkt eines Kreises, der beide Schenkel des Winkels $\angle CBR$ berührt, auf der Halbierenden dieses Winkels liegt, gilt:

$$\angle CBM_a = 90^\circ - \frac{\beta}{2}. \quad (2)$$



$$\text{Entsprechend gilt } \angle BCM_a = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}. \quad (3)$$

Daraus folgt nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel, angewandt auf das Dreieck BM_aC :

$$\begin{aligned} \angle BM_aC &= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) \\ &\quad - \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Nach dem gleichen Satz, angewandt auf das Dreieck ABC , gilt:

$$\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha,$$

$$\text{also } \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \text{ woraus dann}$$

$$\angle BM_aC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \text{ folgt.}$$

3. I. Angenommen, es gibt eine Gerade g , die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann schneidet sie die Schenkel des gegebenen Winkels in Punkten, die mit B bzw. D bezeichnet sind, und es ist ferner P Mittelpunkt von BD . Der Scheitelpunkt des Winkels sei A . Dann gibt es genau einen Punkt C auf dem Strahl von A durch P , so daß P Mittelpunkt der Strecke AC ist. Daher halbieren sich die Strecken BD und AC , d.h., das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

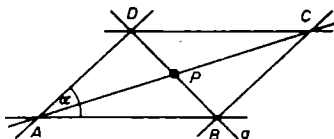
Folglich kann eine Gerade g nur dann alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen, wenn sie durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Man zeichnet vom Scheitelpunkt A des gegebenen Winkels einen Strahl durch P , auf dem man von A aus eine Strecke der Länge $2AP$ abträgt. Ihr anderer Endpunkt sei C genannt.

(2) Durch C zieht man die Parallelen zu den Schenkeln des gegebenen Winkels. Ihre Schnittpunkte mit den jeweils anderen Schenkeln seien B bzw. D .

(3) Man zeichnet die Gerade g durch B und D . III. Jede so konstruierte Gerade g erfüllt alle Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion gilt $AD \parallel BC$ und $AB \parallel CD$ sowie $AP = PC$. Folglich ist das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm und P der Mittelpunkt seiner Diagonalen AC . Daher geht auch die andere Diagonale BD durch P und wird von P halbiert.



IV. Da die Konstruktionsschritte (1.) bis (3.) stets eindeutig ausführbar sind, gibt es genau eine Gerade der geforderten Art.

4. In der Ausgangslösung befinden sich genau 4% der gelösten Substanz, das ist bei 25 kg Lösung genau 1 kg.

Diese Menge stellt nach dem Entzug einer Wassermenge genau dann 10% der neuen Lösung dar, wenn die neue Lösung insgesamt 10 kg umfaßt.

Somit beträgt genau dann, wenn man der Ausgangslösung 15 kg Wasser entzogen hat, sein Anteil 90%, wie es gefordert war. Zu ermitteln ist demnach, wieviel Prozent von 24 kg Wasser 15 kg Wasser sind. Für diesen gesuchten Prozentsatz x gilt die Beziehung

$$x : 100\% = 15 : 24$$

$$\text{und damit } x = \frac{1500}{24}\% = 62,5\%$$

Demzufolge sind 62,5% des in der Ausgangslösung enthaltenen Wassers dieser Lösung zu entziehen, um eine neue Lösung mit 90% Wasseranteil zu erhalten.

5. Es sei M der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC . Wir unterscheiden nun die folgenden beiden Fälle:

(a) M liegt im Innern oder außerhalb des Dreiecks ABC ;

(b) M liegt auf einer der drei Seiten des Dreiecks ABC .

Im Falle (a) sind ABM , BCM und ACM nichtentartete Dreiecke. Wegen $MA = MB = MC = r$ gilt daher nach der Dreiecksungleichung stets

$$(1) \quad 2r = MA + MB > AB,$$

$$(2) \quad 2r = MA + MC > AC,$$

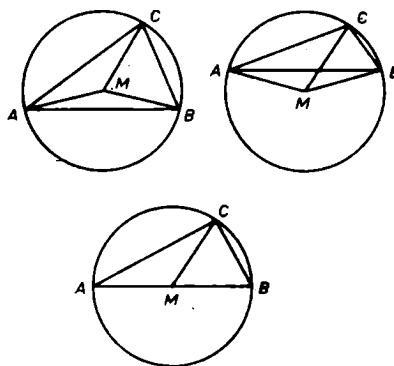
$$(3) \quad 2r = MB + MC > BC.$$

Durch Addition erhält man daraus

$$(4) \quad 6r > AB + AC + BC = u, \text{ also}$$

$$r > \frac{u}{6}.$$

Im Falle (b) entartet genau eines der drei betrachteten Dreiecke zu einer Strecke; an die Stelle genau einer der drei Ungleichungen tritt daher die entsprechende Gleichung. Auch in diesem Falle erhält man aus dieser Gleichung und den beiden restlichen Ungleichungen durch Addition die Ungleichung (4). Da mit (a), (b) eine vollständige Fallunterscheidung getroffen wurde, ist damit der geforderte Beweis erbracht.



6. Angenommen, eine rationale Zahl a habe die genannte Eigenschaft. Dann gilt

$$a \cdot |a| = a + |a|. \quad (1)$$

Für die Zahl a trifft nun genau einer der folgenden zwei Fälle zu:

1. Fall: $a \geq 0$.

Dann gilt $|a| = a$, also folgt aus (1)

$$a^2 = 2a. \quad (2)$$

Hiernach verbleiben im 1. Fall nur die Möglichkeiten, daß entweder $a = 0$ gilt, oder falls $a \neq 0$ ist, aus (2) weiter $a = 2$ folgt.

2. Fall: $a < 0$.

Dann gilt $|a| = -a$, und es folgt einerseits $a \cdot |a| \neq 0$, andererseits $a + |a| = 0$. Die Annahme, daß a die Eigenschaft (1) hat, führt somit im 2. Fall auf einen Widerspruch.

Folglich können nur die beiden Zahlen 0 und 2 die genannten Eigenschaften haben. Tatsächlich gilt $0 \cdot 0 = 0 + 0$ sowie $2 \cdot 2 = 4 = 2 + 2$. Also sind genau die Zahlen 0 und 2 die gesuchten Zahlen.

Olympiadeklasse 8

1. a) Nach dem Satz über die Innenwinkelsumme, angewandt auf das Dreieck ABC , gilt

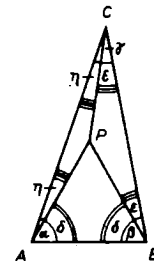
$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 70^\circ - 80^\circ = 30^\circ.$$

Folglich gilt

$$\delta = \frac{1}{2}(70^\circ + 80^\circ - 30^\circ) = 60^\circ,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(80^\circ + 30^\circ - 70^\circ) = 20^\circ,$$

$$\eta = \frac{1}{2}(30^\circ + 70^\circ - 80^\circ) = 10^\circ.$$



b) Da die Dreiecke ABP , BCP und CAP nach Voraussetzung gleichschenkelig sind, gilt laut Basiswinkelsatz

$$\angle PBA = \angle PAB = \delta,$$

$$\angle PCB = \angle PBC = \varepsilon,$$

$$\angle PAC = \angle PCA = \eta.$$

Da P im Inneren des Dreiecks liegt, folgt hieraus

$$\alpha = \delta + \eta,$$

$$\beta = \delta + \varepsilon,$$

$$\gamma = \varepsilon + \eta, \text{ also}$$

$$\alpha + \beta - \gamma = 2\delta,$$

$$\delta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma) \text{ und analog}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha),$$

$$\eta = \frac{1}{2}(\gamma + \alpha - \beta).$$

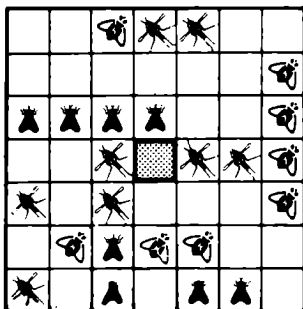
2. a) (1) Man konstruiert eine Strecke AB' , deren Länge das Dreifache einer beliebig gewählten Länge t ist.



Mit Troll auf Du und Du

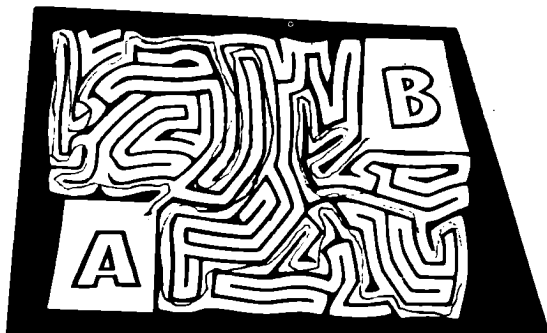
Augenmaß

Die Figur soll in vier gleiche Teile zerlegt werden. Dabei sollen in jedem Stück je zwei der drei verschiedenen Tiere sein.



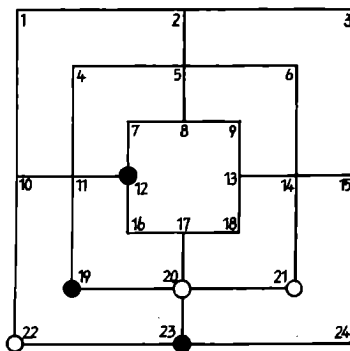
Irrgarten

Wer findet am schnellsten den Weg von A nach B?



Mühleaufgabe

Weiß gewinnt mit dem 5. Zug.

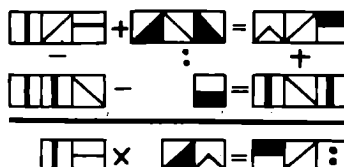


Unauffällig

Oben ist der bekannte Schauspieler X in seiner Rolle als Faust zu sehen. Nach dem Verlassen des Theaters befindet er sich unerkannt in der Menschenmenge. Wer findet ihn heraus?

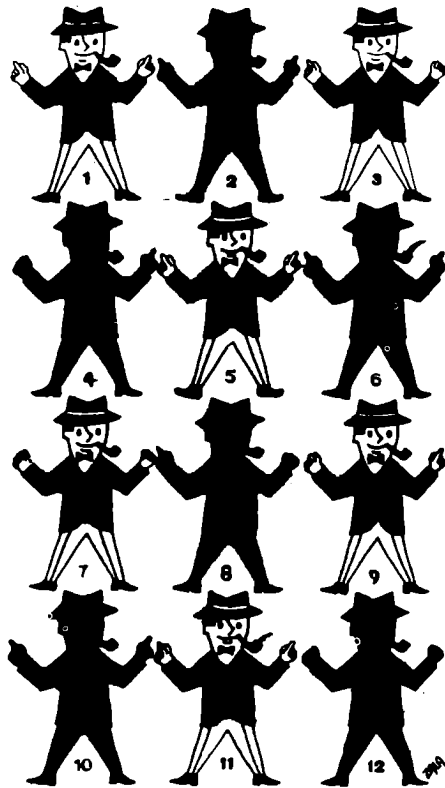


In Ruhe betrachtet



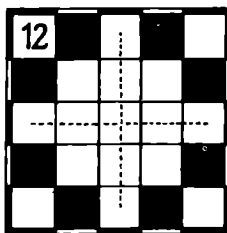
Augen auf!

Welcher Schattenriß gehört zu welcher Figur?



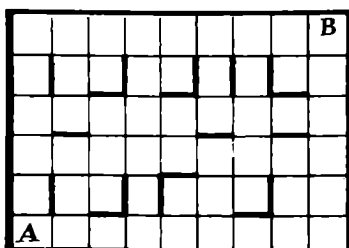
Einsatz

Wie müssen die Zahlen von 1 bis 17 eingesetzt werden, wenn im Mittelkreuz sich jeweils 45 und auch in den beiden Diagonalen 45 ergeben (12 wurde bereits eingesetzt)?



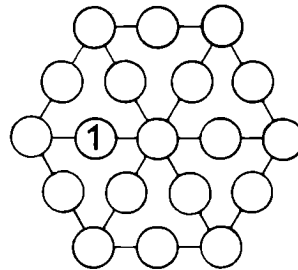
Mit List und Liebe

Wie muß eine Wandergruppe ihren Weg lenken, wenn sie in A beginnt, alle Planquadrate besucht, aber niemals den Weg kreuzt oder gar ein Feld doppelt besucht? Erreichen die Touristen B?



Sachverstand

Es sind noch die Zahlen 2 bis 19 so einzusetzen, daß sich in der Mittelwaagerechten und den beiden Diagonalen jeweils 50, dagegen in allen anderen Linienverbindungen nur 43 ergeben.



Wandert, Freunde

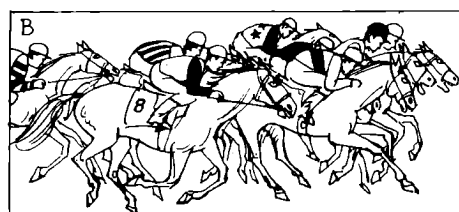
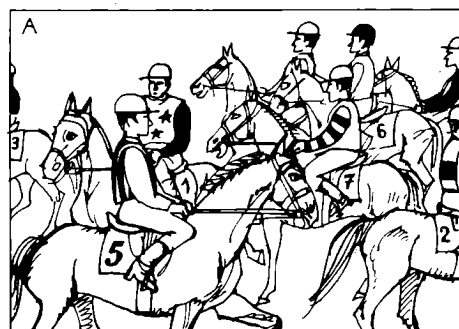
... von 1 zur Zielzahl 118 – über 11 Stationen – aber läuft euch keine „Zahlenblasen“, versucht es mit Addieren!.

➡	1	4	33	6	60
9	10	8	99	44	55
71	88	11	2	20	3
45	77	66	100	17	13
ZIEL 118	15	12	7	21	5

● „Hör mal“, sagt ein Junge zu seiner Schwester, „die Hälfte von deiner Apfelsine mußt du mir abgeben.“ „Warum?“ „Wenn ich dich nicht am Zopf gezogen hätte, dann hättest du nicht geweint und Mutti hätte dir keine Apfelsine gegeben.“

Endspurt

Acht Pferde sind am Start mit den Nummern 1 bis 8 (Bild A). Welches Pferd siegt um Nasenlänge (Bild B)?



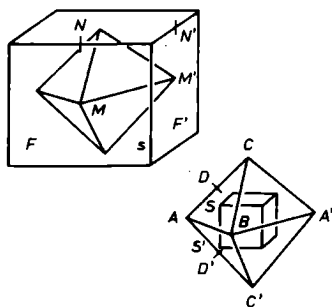
Da dies 4 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind, befindet sich unter ihnen eine durch 4 teilbare Zahl.

Aus den somit bewiesenen Behauptungen (1), (2) ergibt sich:

Die in der Aufgabenstellung genannte Aussage ist wahr für $n=6$, sie ist falsch für jede natürliche Zahl $n \geq 7$. Daraus folgt: Die gesuchte Zahl lautet 6.

3. Die Kantenlänge des gegebenen Würfels sei a . Es seien F und F' zwei benachbarte Seitenflächen dieses Würfels; ihre Mittelpunkte seien M bzw. M' , die Kante, die F und F' als benachbarte Seitenflächen gemeinsam haben, sei s . Bei einer Verschiebung (parallel zu s um den Betrag $\frac{a}{2}$) gehen M , M' in die Mittelpunkte N , N' zweier benachbarter Seitenkanten eines Quadrats der Kantenlänge a über. Daher hat das Oktaeder die Kantenlänge

$$b = \overline{MM'} = \overline{NN'} = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$



Das Oktaeder läßt sich in zwei vierseitige Pyramiden mit einem Quadrat der Kantenlänge b als Grundfläche und $\frac{a}{2}$ als Länge der zugehörigen Höhe zerlegen; daher beträgt das Oktaedervolumen

$$V_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot b^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{6} = \frac{1}{6} V_1.$$

Weiter seien die Flächen der Dreiecke ABC und ABC' zwei benachbarter Seitenflächen des Oktaeders; ihre Schwerpunkte seien S bzw. S' ; die Mittelpunkte von AC bzw. AC' seien D bzw. D' . Dann teilen S bzw. S' die Strecken BD bzw. BD' im Verhältnis 2:1, nach dem Strahlensatz (einschließlich Umkehrung) folgt $\overline{SS'} \parallel \overline{DD'}$ und $\overline{SS'} = \frac{2}{3} \overline{DD'}$.

Ist ferner A' die gegenüberliegende Oktaeder-ecke zu A , so ist $ACA'C'$ ein Quadrat der Kantenlänge b , also gilt $\overline{DD'} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot b$. Daher hat der zweite Würfel die Kantenlänge $\overline{SS'}$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot b = \frac{1}{3}\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{a}{3} \text{ und folglich}$$

das Volumen $V_3 = \frac{a^3}{27} = \frac{1}{27} V_1$. Somit gilt

$$V_1 : V_2 : V_3 = 1 : \frac{1}{6} : \frac{1}{27} = 54 : 9 : 2.$$

4. Die Länge der Hypotenuse sei c . Der Fußpunkt der von c auf AB gefällten Höhe sei D . O.B.d.A. gilt dann $\overline{AD} : \overline{DB} = 1 : 3$,

$$\text{also } \overline{AD} = \frac{1}{4}c.$$

Daraus folgt nach dem Kathetensatz

$$\overline{AC^2} = c \cdot \frac{c}{4}, \text{ also } \overline{AC} = \frac{c}{2}.$$

Spiegelt man das Dreieck ABC an BC , so entsteht das Dreieck $AA'B$, wobei A' das Bild von A ist. Für die Seiten dieses Dreiecks gilt $\overline{AA'} = 2 \cdot \frac{c}{2} = c$, $\overline{AB} = \overline{A'B} = c$.

Das Dreieck $AA'B$ ist also gleichseitig, folglich gilt

$$\sphericalangle A'AB = \sphericalangle CAB = 60^\circ.$$

Die Größe des einen der bei A bzw. B liegenden Innenwinkel des Dreiecks ABC beträgt also 60° , die des anderen daher 30° .

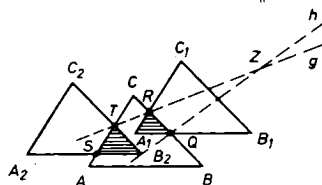
5. Läßt p bei Division durch 30 den Rest r , so ist r eine natürliche Zahl mit $r < 30$, für die $p = 30n + r$ mit natürlichem n gilt. Ist dabei $n=0$, so ist $r=p$ Primzahl. Ist $n \geq 1$, so ist r kein Vielfaches von 2, 3 oder 5; denn wäre dies der Fall, so wäre p durch 2, 3 bzw. 5 teilbar und zugleich größer oder gleich 30, also keine Primzahl. Jede natürliche Zahl $r < 30$ aber, die nicht Vielfaches von 2, 3 oder 5 ist, ist entweder 1 oder eine Primzahl. (Dies erkennt man durch aufzählendes Probieren oder folgendermaßen:

Wenn eine natürliche Zahl r weder 1 noch Primzahl noch Vielfaches von 2, 3 oder 5 ist, so ist sie das Produkt mindestens zweier Primzahlen, die sämtlich größer oder gleich 7 sind, also gilt dann $r \geq 49 > 30$.)

Damit ist die Behauptung in jedem Falle bewiesen.

6. Die Strecken A_1B_1 , A_1C_1 schneiden BC in je einem Punkt Q bzw. R , die Strecken A_2B_2 , C_2B_2 schneiden AC in je einem Punkt S bzw. T . Mit diesen Bezeichnungen sind F_1 , F_2 die Dreiecksflächen (A_1QR) bzw. (SB_2T), und wegen ihrer Entstehung bei den genannten Verschiebungen gilt

$$A_1Q \parallel SB_2, QR \parallel B_2T, RA_1 \parallel TS. \quad (1)$$



Da T , Q , R nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen (und dasselbe für B_2 , Q , R gilt, also insbesondere $R \neq T$ sowie $Q \neq B_2$ ist), sind die durch R , T gehende Gerade g und die durch Q , B_2 gehende Gerade h (jeweils eindeutig bestimmt und) voneinander verschieden.

I) Ist $g \parallel h$, so folgt hieraus und aus (1), daß RTB_2Q ein Parallelogramm ist. Es gibt daher eine Verschiebung, die R in T und Q in B_2 überführt.

II) Ist $g \nparallel h$, so haben g und h genau einen

Punkt $Z (\neq R, T, B_2, Q)$ gemeinsam. Diejenige Streckung mit Z als Zentrum, die R in T überführt, führt Q in den Schnittpunkt von h mit der Parallelen durch T zu RQ über, also nach (1) in den Punkt B_2 .

Die in (I) bzw. (II) genannte Verschiebung bzw. Streckung führt die Gerade durch Q , A_1 in die zu ihr parallele Gerade durch B_2 über, also wegen (1) in die Gerade durch B_2 , S . Ebenso führt diese Verschiebung bzw. Streckung die Gerade durch R , A_1 in die Gerade durch T , S über. Daher führt sie A_1 in S und somit insgesamt die Fläche F_1 in die Fläche F_2 über, w.z.b.w.

Olympiadeklasse 10

1. Setzt man in der gegebenen Gleichung nacheinander $x=0$, $x=3$, $x=-3$, so erhält man:

$$\begin{aligned} 0 \cdot f(2) &= -9 \cdot f(0), \text{ also } f(0) = 0 \\ 3 \cdot f(5) &= 0 \cdot f(3), \text{ also } f(5) = 0 \\ -3 \cdot f(-1) &= 0 \cdot f(-3), \text{ also } f(-1) = 0. \end{aligned}$$

Die Funktion f hat mithin mindestens die drei Nullstellen

$$x_0=0, x_1=5, x_2=-1.$$

2. A) Ein Dreieck ABC sei gleichseitig, d.h., es gelte $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$. Der Mittelpunkt von AB sei M . Dann gilt nach dem Kongruenzsatz sss:

$$\triangle AMC \cong \triangle BMC.$$

Also gilt $\sphericalangle ACM = \sphericalangle BCM$, d.h., die Seitenhalbierende CM ist auch Winkelhalbierende. Entsprechend beweist man die gleiche Aussage für eine der anderen Seitenhalbierenden.

B) In einem Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt von AB , und die Seitenhalbierende CM sei auch Winkelhalbierende. Dann gilt

$$\overline{AM} = \overline{MB} \quad (1)$$

$$\text{und } \sphericalangle ACM = \sphericalangle MCB. \quad (2)$$

Die Parallelen zu AC durch B und zu BC durch A schneiden sich in einem Punkt C' , und hierfür ist $AC'BC$ ein Parallelogramm. Wegen (1) und da sich die Diagonalen im Parallelogramm halbieren, geht CC' durch M . Somit sind $\sphericalangle MCB$ und $\sphericalangle AC'M$ Winkel an geschnittenen Parallelen und daher einander kongruent; hiernach und wegen (2) gilt

$$\sphericalangle ACM = \sphericalangle AC'M.$$

Also ist das Dreieck $AC'C$ gleichschenkelig mit $\overline{AC} = \overline{AC'}$. Hieraus und aus $\overline{AC'} = \overline{CB}$ folgt $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Analog zeigt man: Ist etwa die Seitenhalbierende durch B auch Winkelhalbierende, so folgt $\overline{AB} = \overline{CB}$.

Aus (3) und (4) folgt die Gleichseitigkeit von $\triangle ABC$.

3. Für jede reelle Zahl a gilt

$$a^2 - 3a + 2 = (a-1)(a-2),$$

$$a^2 - 5a + 6 = (a-2)(a-3),$$

$$a^2 - 7a + 12 = (a-3)(a-4),$$

$$a^2 - 9a + 20 = (a-4)(a-5),$$

$$a^2 - 11a + 30 = (a-5)(a-6),$$

$$a^2 - 13a + 42 = (a-6)(a-7),$$

$$a^2 - 8a + 7 = (a-1)(a-7).$$

Daher sind die Terme auf beiden Seiten der gegebenen Gleichung genau dann definiert, wenn a keine der Zahlen 1, 2, ..., 7 ist. Trifft dies zu, so gilt ferner für $k=1, \dots, 6$

$$\frac{1}{(a-k)(a-(k+1))} = -\frac{1}{a-k} + \frac{1}{a-(k+1)}$$

Also ist für reelles $a \neq 1, 2, \dots, 7$ die gegebene Gleichung genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a-7} = \frac{a(a+5)}{a^2-8a+7}$$

oder, für reelles $a \neq 1, 2, \dots, 7$ gleichbedeutend hiermit,

$$\frac{-(a-7)+(a-1)}{(a-1)(a-7)} = \frac{a^2-5a}{a^2-8a+7}$$

$$\frac{6}{a^2-8a+7} = \frac{a^2+5a}{a^2-8a+7}$$

$$a^2+5a-6=0$$

gilt. Da die letztgenannte Gleichung genau die reellen Lösungen $a=1$ und $a=-6$ hat, ist sie für reelles $a \neq 1, 2, \dots, 7$ äquivalent mit $a=-6$. Also erfüllt genau diese Zahl die Bedingungen der Aufgabe.

4. Es gibt genau 6 Möglichkeiten, die drei Gegenstände b (Ball), r (Ring), w (Würfel) auf die drei Schüler A (Achim), B (Bernd), D (Dirk) zu verteilen. Aus der Definition der Alternative bzw. Konjunktion ergibt sich:

$A B D$	wahre Aussagen	falsche Aussagen
$b r w$	(1), (2), (3)	(4)
$b w r$	(2), (4)	(1), (3)
$r b w$	(1), (2)	(3), (4)
$r w b$	(1), (2)	(3), (4)
$w b r$	(1), (2)	(3), (4)
$w r b$	(1)	(2), (3), (4)

Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß a) und c) nicht möglich sind, aber b), c) und d).

5. Für alle reellen a, b, c, d sind genau dann die geforderten Bedingungen erfüllt, wenn für sie die folgenden Gleichungen (1) bis (4) gelten:

$$d=10, \quad (1)$$

$$a+b+c+d=12, \quad (2)$$

$$8a+4b+2c+d=4, \quad (3)$$

$$27a+9b+3c+d=1. \quad (4)$$

I) Wenn (1) bis (4) für reelle a, b, c, d erfüllt sind, so folgt durch Einsetzen von (1) in (2), (3) und (4):

$$a+b+c=2, \quad (5)$$

$$\text{also } c=2-a-b, \quad (5)$$

$$8a+4b+2c=-6, \quad (6)$$

$$\text{also } 4a+2b+c=-3, \quad (6)$$

$$27a+9b+3c=-9, \quad (7)$$

$$\text{also } 9a+3b+c=-3. \quad (7)$$

Setzt man (5) in (6) und (7) ein, so erhält man

$$3a+b=-5, \text{ also } b=-5-3a, \quad (8)$$

$$8a+2b=-5. \quad (9)$$

Durch Einsetzen von (8) in (9) folgt $2a=5$, woraus man

$$a=\frac{5}{2} \quad (10)$$

erhält. Aus (10) und (8) ergibt sich

$$b=-\frac{25}{2}. \quad (11)$$

Daraus und aus (10) und (5) folgt

$$c=2-\frac{5}{2}+\frac{25}{2},$$

$$\text{also } c=12. \quad (12)$$

Daher können nur die in (10), (11), (12), (1) genannten Zahlen die Gleichungen (1) bis (4) erfüllen.

II) Wie man durch Einsetzen dieser Zahlen in (1) bis (4) zeigen kann, erfüllen sie diese Gleichungen.

Die gesuchten Zahlen lauten somit $a=\frac{5}{2}$,

$$b=-\frac{25}{2}, \quad c=12, \quad d=10.$$

6. I. Angenommen, ein Dreieck ABC erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Ist H der Mittelpunkt von AB , so teilt S die Seitenhalbierende CH im Verhältnis 1:2, also liegt

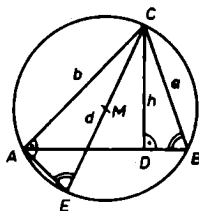
H im Abstand $\overline{HS}=\frac{1}{2}\overline{SC}$ auf der Verlängerung von CS . Ferner liegt M als Mittelpunkt des Umkreises auf der Mittelsenkrechten von AB . MH verläuft also senkrecht zu AB . Schließlich liegen A und B auf dem Umkreis, d. h. dem Kreis um M durch C . Daraus folgt, daß ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügt, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Man trägt an CS in S auf der Verlängerung von CS über S hinaus die Strecke der Länge $\frac{1}{2}\overline{CS}$ an; ihr zweiter Endpunkt sei H .

(2) Man konstruiert die Gerade durch H , die auf MH senkrecht steht.

(3) Man zeichnet den Kreis um M durch C . Schneidet er die nach (2) konstruierte Gerade in zwei Punkten, so seien diese A und B genannt.

III. Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe genügt: M ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC , da A, B und C nach Konstruktion auf ein und demselben Kreis um M liegen. Ferner gilt nach Konstruktion $\overline{MA}=\overline{MB}$ und $\angle AHM=\angle BHM=90^\circ$, also ist $\triangle AHM \cong \triangle BHM$ (Kongruenzsatz ss; dieser ist anwendbar, da $\angle AHM, \angle BHM$ als rechter Winkel jeweils der längsten Dreiecksseite gegenüberliegen). Somit gilt $\overline{AH}=\overline{BH}$, folglich ist CH Seitenhalbierende im Dreieck ABC . Da sie nach Konstruktion durch S im Verhältnis $\overline{HS}:\overline{SC}=1:2$ geteilt wird, ist S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC .



IV. Konstruktionsschritte (1) und (2) sind eindeutig ausführbar. Die Konstruktion ergibt ferner, daß H im Innern des nach (3) konstruierten Kreises liegt. Also schneidet die in (2) konstruierte Gerade diesen Kreis in

zwei Punkten. Da schließlich AB senkrecht zu MH verläuft und $\angle MHC < 90^\circ$ ist, liegt C nicht auf der Geraden durch A und B . Also existiert zu den gegebenen Punkten M, S, C genau ein Dreieck ABC , das den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Lösungen zu alpha-heiter 3/79:

Pfiffige Mädels

Marina ist jünger.

Welchen Beruf haben sie?

Bauingenieur, Vermessungsfacharbeiter, Statistiker.

Kryptarithmetik

$$\begin{array}{r} 7 \cdot 7 = 49 \\ + \quad - \\ \hline 3 = 12 - 9 \\ 21 + 19 = 40 \\ \hline 695540 + 32665 = 728205 \\ 391 + 69451 + 972 = 70814 \end{array}$$

Mathematisches Rätsel

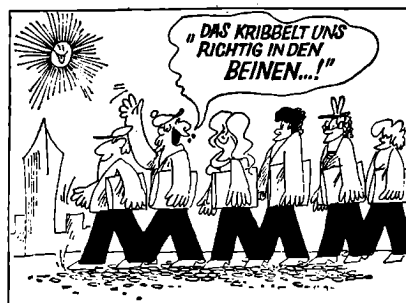


Zahlenpyramide

$D=1; E=2; L=3; T=4; A=5$.

$$\begin{array}{r} 1^2 = 1 \\ 1 \ 1^2 = 1 \ 2 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 1^2 = 1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 1 \ 1^2 = 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1^2 = 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \end{array}$$

Labyrinth



Wer berichtet den Lesern der *alpha* über mathematische Aktivitäten im Rahmen der Messe der Meister von morgen?



15 Jahre Bezirksklub Junger Mathematiker Bez. Neubrandenburg

Die III. Olympiade Junger Mathematiker der DDR (1964) war mit der 4. Stufe in Berlin abgeschlossen. Ohne besonderen Erfolg kehrte die Neubrandenburger Mannschaft von dieser Olympiade zurück. Da entwickelte sich bei den Schülern und Lehrern der Wunsch, systematische Förderungen im Bezirk und den Kreisen einzurichten. Es bildeten sich der Bezirksklub (BJM) und nach und nach die Kreisklubs (KJM) in den Kreisen.

Im BJM sind etwa 45 Pioniere und FDJler der Klassen 7 bis 12 vereinigt. Durch gute Leistungen bei der Bezirksolympiade muß die Mitgliedschaft immer wieder neu erworben werden. Es ist eine Auszeichnung, Mitglied des BJM zu sein. Jährlich werden sechs Lehrgänge an den Wochenenden oder in den Ferien durchgeführt. Im Sommerlehrgang in Malchow am Fleesensee hatten wir erstmals 10 Pioniere dabei, die gerade in Kl. 6 gekommen waren. Jeder dieser Pioniere erhielt zwei FDJler als Betreuer (siehe Bild). Diese Betreuer halfen auch ihren Pionieren bei der Vorbereitung der 8 Klausuren, die nachmittags geschrieben wurden. Gerlind Kühn aus Demmin erhielt am Ende des Lehrgangs als Preis für den 1. Platz ein Paar Rollschuhe.

Die BJM-Mitglieder, die schon einmal bei einer Bezirksolympiade dabei waren, erhielten jährlich den Auftrag, eine selbst erdachte Aufgabe von Olympiadetyp (mit Lösungsweg) zur Olympiade mitzubringen. Die inter-

essantesten werden am letzten Tag der Olympiade von den Verfassern in AG-Gruppen behandelt. Seit 1970, also seit 10 Jahren, sind insgesamt 390 Aufgaben erdacht und anerkannt worden. Davon sind 272 mit „gut“ oder „sehr gut“ bewertet worden. 140 Aufgaben sind bereits im Bezirk veröffentlicht, z. B. Mathematische Blätter/Bez. Neubrandenburg, 1972, „100 Aufgaben von Jungen Mathematikern“. Einige wollen wir hier vorstellen. (Die Klassenangabe bezieht sich auf den damaligen Zeitpunkt.)

Aufgaben für Klassen 5 bis 7

▲ 1 ▲ Uwe Briesse, Burg Stargard, Kl. 6, jetzt: Unteroffizier der NVA

Gegeben ist ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 32$ cm. Es werden ständig die Mittelpunkte der vier Seiten so verbunden, daß immer wieder neue einbeschriebene Quadrate mit den Seiten $a_1, a_2, \dots$ entstehen.

Welche Seitenlänge hat das zehnte so einbeschriebene Quadrat?

▲ 2 ▲ Sabine Mamerow, Altentreptow, Kl. 7, jetzt: Mathematiklehrerin
Multipliziert man die Summe dreier natürlicher Zahlen mit der Summe zweier dieser Zahlen, so erhält man 72, 96 bzw. 120. Wie lauten die drei Zahlen?

▲ 3 ▲ H.-Ulrich Frömmer, Neustrelitz, Kl. 8, jetzt: Offizier der NVA

Im Jahre 1971 wurde jemand nach seinem Alter gefragt. Er antwortete: Vor 6 Jahren war ich so alt wie es mein Enkel in 50 Jahren sein wird. In einem Jahr ist mein Enkel so alt, wie ein Siebentel der Differenz unser beider Geburtsjahre.

Wie alt war der Großvater? (Welche Angabe ist überflüssig?)

▲ 4 ▲ Jürgen Prestin, Waren, Kl. 7, jetzt: stud. math.

Man konstruiere das kleinste Quadrat, das zwei einander berührenden Kreisen von je 2 cm Radius umschrieben werden kann!

Aufgaben für Klassen 8/9

▲ 5 ▲ Marcus Kasner, Templin, Kl. 8, jetzt: Unterfeldwebel der NVA

Man beweise

a) Von den auf S. 8 im Tafelwerk angegebenen Zahlen n^2 sind 10% genau.

b) Der durchschnittliche prozentuale Fehler aller Zahlen beträgt genau 0,025%.

▲ 6 ▲ Heino Rudolf, Waren, Kl. 9, jetzt: stud. math.

Vermehrt man das Produkt von vier aufeinanderfolgenden geraden bzw. ungeraden Zahlen um 16, so erhält man stets eine Quadratzahl. Man beweise beide Aussagen!

▲ 7 ▲ Marlies Kolbatz, Gr. Quassow, Kl. 9, jetzt: Lehrling (BBS)

Die Summe aus der Summe der Quadrate zweier Primzahlzwillinge und der Differenz ihrer Quadrate läßt beim Teilen durch 24 stets den Rest 2. (Für P.-Zw. gilt $p_2 - p_1 = 2$, $p_1, p_2 \geq 3$.)

Aufgaben für Klassen 10/12

▲ 8 ▲ Jürgen Roßmann, Neubrandenburg, Kl. 10, jetzt: stud. math.

Man beweise, daß

$(a^8 + a^7) + 2(a^6 + a^5) + 4(a^4 + a^3) + 8(a^2 + a)$ für jede natürliche Zahl a durch 30 teilbar ist!

▲ 9 ▲ Margitta Rudolph, Neustrelitz, Kl. 11, jetzt: Diplom-Mathematiker

Die 5. Potenzen zweier natürlicher Zahlen m_1, m_2 bestehen genau aus den Ziffern $m_1(1, 3, 3, 3, 3, 5, 9, 9), m_2(0, 1, 4, 6, 6, 6, 7)$. Welche der beiden Zahlen ist die größere?

▲ 10 ▲ Sabine Schlorff, Neustrelitz, Kl. 10, jetzt: Diplom-Mathematiker

Es sind alle ganzzahligen x für die Funktion $f(x) = x^2 - 9$ an der Stelle x_0 zu bestimmen, wobei gilt: $f\{f\{f(x_0^2 + 2x_0)\}\} = 72$.

Lösungshinweise

▲ 1 ▲ $A = a^2, A_1 = \frac{a^2}{2}, A_2 = \frac{a^2}{4}, \dots$ ergibt sich

durch Umlappung von vier kongruenten Dreiecken. $\dots A_{10} = 1 \text{ cm}^2, a = 1 \text{ cm}$.

▲ 2 ▲ Aufstellung der drei Gleichungen. $(x + y + z)$ ist gemeinsamer Teiler von 72, 96, 120. $\dots (x, y, z) = (2, 4, 6)$. Probe.

▲ 3 ▲ Opa x , Enkel y . $x - 6 = y + 50; y + 1 = \frac{1}{7}(1971 - y) - (1971 - x)$. Vereinfachen ergibt $y = 7, x = 63$. $\dots$ Probe. (Angabe 1971 unnötig)

▲ 4 ▲ Eine der Diagonalen ($\overline{AC}$) des Quadrates gehe durch die Mittelpunkte der Kreise, die sich in S berühren. Man zeige, daß $\sphericalangle SBA = 45^\circ, \sphericalangle SBM_1 = 22,5^\circ, \sphericalangle SM_1B = 67,5^\circ$. Daraus folgt die Konstruktion.

▲ 5 ▲ b) Bei den Endziffern 1 bis 9 ergeben die Fehler bei den Quadraten $4 \cdot 0,0001 + 4 \cdot 0,0004 + 0,0005$. Bei 10 aufeinanderfolgenden Quadraten sind dies 0,0025, bei 100 ist der Fehler 0,025.

▲ 6 ▲ $a(a + 2)(a + 4) + 16, a \in \mathbb{N}$ führt zu $(a^2 + b + c)^2$ mit $c = 4, b = 6a$.

▲ 7 ▲ Das Zusammenfassen der Quadrate mit $p_1; 2 = 6n \pm 1, n > 0$ ergibt $24(3n^2 + n) + 2$. Das Paar (3; 5) speziell untersuchen!

▲ 8 ▲ Umformung zu $a(a + 1)(a^2 + 2) + a^4 + (a^4 + 4)$.

Fallunterscheidungen.

▲ 9 ▲ $m_2 > m_1$

▲ 10 ▲ $x_{01} = 1, x_{02} = -3$ H.-Joachim Kerber

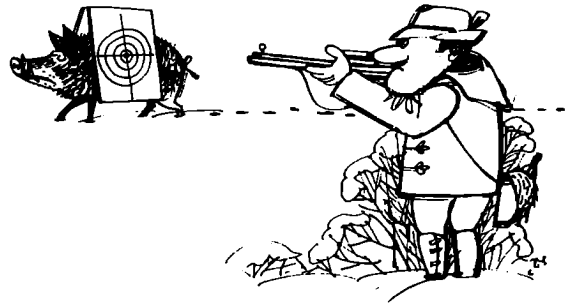


R. Neumann und seine beiden Betreuer im Sommerlehrgang Malchow, 1978



Ein Blick in die Praxis:

Mathematik und Forstwirtschaft



Wer das Wort Forstwirtschaft hört, denkt dabei zuerst an die Jagd. Die Forstwirtschaft hat aber noch eine Reihe anderer Aufgaben zu lösen.

1. Holznutzung

Die Volkswirtschaft wird durch die planmäßige Nutzung der Wälder kontinuierlich mit Holz versorgt. Es können aber nur 60% des Bedarfs aus eigenen Wäldern gedeckt werden, die restlichen 40% werden importiert. Nutzung des Holzes: Zellstoffindustrie, Bauindustrie, Spanplattenherstellung, Grubenholz.

2. Wildnutzung

Durch die Jäger werden die Wildhandlungen und die Gaststätten regelmäßig mit Wild beliefert. Schwarzwild, Rehwild und Rotwild sind die Hauptlieferanten. Nicht zu unterschätzen ist die volkswirtschaftliche Bedeutung der Bälge von Marder, Fuchs und Iltis. Ein Teil der Trophäen, das sind Geweihe und Hörner, wird der Schmuckindustrie bzw. der Knopfindustrie zugeführt.

3. Erholungsfunktion

Der Wald als Stätte der Erholung wird von allen naturliebenden Menschen genutzt. Hier sollen nur die Landschaftsschutzgebiete und die Naherholungsgebiete erwähnt werden.

4. Harznutzung

Eine der wichtigsten Rohstoffquellen des Waldes finden wir im Harz der Kiefernwälder. Es wird für die chemische Industrie gewonnen und findet bei der Herstellung von Terpentin, Lacken und Farben Verwendung. Die kosmetische Industrie und die Medizin sind ebenfalls auf Naturharze angewiesen. Die Harzung beginnt erst bei 90- bis 100jährigen Kiefernwäldern, wobei 1 ha Kiefernwald mit etwa 300 Bäumen jährlich etwa 600 kg Harz liefert. Ein Wald kann etwa 10 Jahre für die Harzung genutzt werden.

Berufsmöglichkeiten

Forstfacharbeiter für: Rohholzerzeugung, Harzung, Traktorist, Motorsägenführer; Meister oder Ingenieur für Rohholzbereitstellung oder im Bereich Technik. Der Beruf „Ingenieur für Rohholzerzeugung“ entspricht dem früheren „Revierförster“. Ausbildungs-

stätten sind: Rabensteinfeld und Ballenstedt/Harz als Fachschulen und Tharandt als Hochschule.

Aufgaben

Ein Festmeter (fm) ist ein Kubikmeter fester Holzmasse. Der Rauminhalt eines stehenden Stammes läßt sich nach der Formel $J = g \cdot H \cdot f$ berechnen.

J : Rauminhalt in fm

g : Stammgrundfläche in m^2 , in Bruthöhe gemessen

f : die Formzahl, ein Reduktionsfaktor, der als Näherungswert für Nadelholz mit $f = 0,45$ und für Laubholz mit $f = 0,5$ angenommen wird.

Die Höhe H stehender Bäume kann mit dem „Förderdreieck“ ermittelt werden.

▲ 1 ▲ Berechne den Rauminhalt einer Buche, die 25 m Höhe und 30 cm Stammdurchmesser hat!

Aus einem Stück Fichtenholz von 10 kg Masse können hergestellt werden:

- 0,5 m^2 Dielung
- oder 6 kg Zeitungspapier
- oder 800 Bogen Schreibpapier
- oder 6 Flaschen Trinkbrandtwein

▲ 2 ▲ Fichtenholz hat im Mittel eine Dichte von $0,6 \frac{g}{cm^3}$. Wieviel Fichten von 30 m Höhe und einem Stammdurchmesser von 30 cm sind zur Herstellung einer Tagesauflage von 1 000 000 Zeitungen nötig, wenn eine Zeitung eine Masse von etwa 40 g hat?

▲ 3 ▲ Wieviel fm hat ein Mammutbaum, der eine Höhe von 150 m und einen Stammdurchmesser von 10 m hat?

▲ 4 ▲ Ein Kiefernwald von 27 ha wird 8 Jahre lang für die Harzung genutzt. Wie groß ist der Ertrag, wenn er 5% unter den erwarteten Werten von 600 kg je ha jährlich liegt?

Weshalb effektivere Holzwirtschaft?

Mit 17 Prozent am Rohstoffpotential der DDR beteiligt, ist Holz für die Entwicklung unserer Volkswirtschaft und zur Verwirkli-

chung der Hauptaufgabe von großer Bedeutung. Man rechnet mit rund 4000 Einsatzgebieten, und der Bedarf steigt weiter an. In unserer Republik erfassen die Waldbestände mit 2,8 Millionen Hektar 27 Prozent des Territoriums. Pro Kopf der Bevölkerung entfallen 0,17 Hektar Waldfläche. Damit zählt die DDR zu den waldärmsten Ländern Europas. Es kommt also darauf an, den Waldzuwachs durch komplexe Intensivierungsmaßnahmen zu erhöhen und darauf bedacht zu sein, daß unser Naturreichtum Wald wirksamer für die Steigerung des Nationaleinkommens eingesetzt wird. Schon jetzt decken wir ein Drittel unseres Holzbedarfs durch Einführen aus der Sowjetunion und anderen Ländern. Diese Importe lassen sich nicht beliebig ausdehnen.

Deshalb wurden die Aufgaben zur Schaffung entsprechender wissenschaftlich-technischer Lösungen für eine effektivere Holzwirtschaft in den Staatsplan Wissenschaft und Technik aufgenommen.

Gegenwärtig werden nur 60 Prozent der Holzsubstanz eines Baumes der Verwertung zugeführt. Möglichkeiten müssen gefunden werden, um auch Kronen, Ast- und Stockholz zu nutzen. Mehr als 500 000 Festmeter Holz werden jährlich noch verbrannt. Deshalb bedarf es neuer Überlegungen, um mehr Holzreste zu verwerten. Holz und Holzserzeugnisse sparsam und klug einzusetzen oder durch andere Werkstoffe gleichwertig zu ersetzen, also aus einem Festmeter Holz mehr Endprodukte mit hohen Gebrauchseigenschaften zu produzieren.

Sehr viel ist noch für eine wirksamere chemische Verwertung des Holzes, die bessere Ausnutzung der natürlichen Inhaltsstoffe zu tun. Eine Tonne Holz ergibt zum Beispiel 170 bis 200 Liter Äthanol für die Spirituosenproduktion, wofür sonst 700 kg Getreide oder 1,7 Tonnen Kartoffeln eingesetzt werden müssen. Daß imprägnierte Schwellen gegenüber ungeschützten eine zehnfache Lebensdauer haben, verdeutlicht den Wert wirksamer Holzschutzmaßnahmen. Mit einem Wort: Überall wo Holz erzeugt, be- und verarbeitet wird, sind strengere Maßstäbe an die ökonomische Nutzung dieses kostbaren einheimischen Rohstoffes anzulegen.

Ursula Sonntag



„Den vorgesehenen Plan der Holzeinsparung konnten wir in diesem Jahr um 100 Prozent übererfüllen.“

Wildreichtum

Die Jäger der DDR bewirtschaften 8,9 Millionen Hektar Jagdfläche, die natürlich auch land- und forstwirtschaftlich genutzt wird. Auf ihr kommen heute fast alle europäischen Wildarten vor. Nach der letzten Zählung, vorgenommen im Frühjahr 1977, haben wir bei uns folgende Wildbestände zu verzeichnen:

Rotwild	28000
Damwild	15500
Rehwild	315000
Muffelwild	4200
Schwarzwild	48000
Hasen	198000
Wildenten	150000
Fasanen	62000
Rebhühner	75000
Großtrappen (geschützt)	250
Birkwild (geschützt)	300
Auerwild (geschützt)	200

Die geschützten Wildarten haben ganzjährig Schonzeit.

Weidmanns Heil!

Während der Jagdsaison 1977 wurden beispielsweise 21963 Stück Rotwild, 188188 Stück Rehwild und 117128 Stück Schwarzwild zur Strecke gebracht. Unser Bestand an Rothirschen, Rehen und Wildschweinen ist jedoch nach wie vor zu hoch. Deshalb verstärken jetzt viele Jagdgesellschaften den Abschluß, um dadurch Verbißschäden an land- und forstwirtschaftlichen Kulturen so weit wie möglich zu reduzieren.

Lösungen

▲ 1 ▲ $J = (0,15)^2 \cdot \pi \cdot 25 \cdot 0,5$
 $J = 0,88 \text{ fm}$

▲ 2 ▲ Rauminhalt einer Fichte: $J = 0,96 \text{ fm}$
 Masse einer Fichte: $m = 576 \text{ kg}$
 Da aus 10 kg Fichtenholz 6 kg Zeitungspapier hergestellt werden kann, kann man aus einer Fichte also 346 kg Zeitungspapier herstellen, das sind etwa 8655 Zeitungen zu 40 g. Für 1 Million Zeitungen benötigt man demnach rund 115 Fichten dieser Größe!

▲ 3 ▲ Der Mammutbaum hat einen Rauminhalt von 5888 fm!

▲ 4 ▲ Es werden in den 8 Jahren 123120 kg Harz gewonnen.

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

In den letzten Heften der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* haben wir interessante Lösungen von Schülern zu Wettbewerbsaufgaben vorgestellt. Die Veröffentlichung von Lösungsvarianten hat breite Zustimmung unter unseren Lesern gefunden. In unserem heutigen Heft stellen wir deshalb wieder bei uns eingegangene vorbildliche Lösungen vor.

In Heft 6/77 wurde von uns folgende Aufgabe gestellt:

Ma 7 ■ 1693 Es sind alle gebrochenen Zahlen $x = \frac{a}{b}$ zu ermitteln, für die $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}$ und $b - a = 12$ gilt!

In Heft 2/78 veröffentlichten wir dazu folgende Lösung:

Aus $b - a = 12$ folgt $b = a + 12$ und somit $x = \frac{a}{a+12}$. Nun gilt $\frac{1}{4} < \frac{a}{a+12} < \frac{1}{3}$, also

$$\frac{1}{4} < \frac{a}{a+12} \text{ und } \frac{a}{a+12} < \frac{1}{3}, \quad a+12 < 4a \text{ und } 3a < a+12, \quad 12 < 3a \text{ und } 2a < 12, \quad 4 < a \text{ und } a < 6.$$

Aus $4 < a < 6$ folgt $a = 5$. Es existiert genau eine solche gebrochene Zahl; sie lautet $x = \frac{5}{17}$.

Unser Leser *Ulrich Sperberg*, Schüler einer 7. Klasse der Theodor-Körner-Oberschule in Freiberg, sandte uns folgende Lösung:

Ich erweitere die Brüche $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$ so, daß der Nenner jeweils um 12 größer ist als der Zähler und erhalte $\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$ und $\frac{1}{3} = \frac{6}{18}$. Nun gilt $\frac{4}{16} < \frac{a}{a+12} < \frac{6}{18}$, folglich $x = \frac{5}{17}$.

Ulrich hat eine knappe, aber präzise Lösung gefunden; ihm gilt unsere Anerkennung.

Unsere Leserin *Silke Straubel*, Schülerin einer 7. Klasse der POS in Kußa, sandte uns folgende Lösung:

a	b	$\frac{a}{b}$
1	13	$\frac{1}{13} \approx 0,07$
2	14	$\frac{2}{14} \approx 0,14$

3	15	$\frac{3}{15} = 0,20$
4	16	$\frac{4}{16} = 0,25$
5	17	$\frac{5}{17} \approx 0,29$
6	18	$\frac{6}{18} \approx 0,33$
7	19	$\frac{7}{19} \approx 0,36$

Wegen $\frac{1}{4} = \frac{4}{16} < \frac{5}{17} < \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ erfüllt nur die gebrochene Zahl $x = \frac{5}{17}$ die Bedingung der Aufgabe.

Silke hat durch systematische Untersuchung aller möglichen Fälle eine Lösung gefunden, die ebenfalls vorbildlich ist.

Was ist ein Karat?

Karat ist das Massemaß für Juwelen, wie z. B. Diamanten, Perlen und Edelsteine. Das Kurzzeichen für diese Maßeinheit ist k, und es gibt dafür keine Vorsätze, wie zum Beispiel Milli-, Mikro- oder Dezi-.

Es wurde festgelegt:

$$1 \text{ k} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ kg} (= 0,2 \text{ g})$$

Früher wurde auch der Feingehalt des Goldes nach Karat bestimmt. Das Karat gab an, wie viele Vierundzwanzigstel reines Gold in der Legierungsmasse enthalten sind. Auf Tausendstel bezogen ist dann $1 \text{ k} = 41\frac{2}{3} \text{‰}$.

24 Karat $\triangleq$ Feingehalt 1000, d. h. völlig reines Gold;

14 Karat $\triangleq$ Feingehalt 585, d. h. 585 Gewichtsteile Gold sind in 1000 Gewichtsteilen Legierung vorhanden;

8 Karat $\triangleq$ Feingehalt 333, d. h. 333 Gewichtsteile Gold sind in 1000 Gewichtsteilen Legierung vorhanden.

Also gibt zum Beispiel der Stempel in Schmuckgegenständen den Feingehalt des Goldes an.



Pfiffige Mädels

Zwei Freundinnen, Tanja und Marina, wurden gefragt: „Welche von euch ist jünger?“ Die Mädchen antworteten mit einem Rätsel. Tanja sagte: „Vor zwei Jahren war ich um zwei Jahre jünger als Marina in zwei Jahren sein wird.“ Marina fügte hinzu: „Und ich bin erst in zwei Jahren um zwei Jahre älter als sie vor zwei Jahren war.“

Welche von den beiden ist jünger?

aus: Nauka i Shisn, Moskau

Welchen Beruf haben sie?

INGE RUBIN, AUE

T. STEIKT, RIESA

EVA S. SIGMAR-BENESCH
ERFURT

Fachlehrer D. Knappe, Jessen

Kryptarithmetik

$$A \cdot A = BC$$

$$D = EF - C$$

$$FE + EC = BH$$

Christian Wiegand,
OS Steinheid (Kl. 6)

$$BK - E = AE$$

$$E \cdot B = AK$$

$$AE : C = E$$

Lutz Tietz,
Dresden (12 Jahre)

MUTTER

+ KOMMT

S OFORT

E < M

U > K

DIE

+ BIRNE T < N < B

+ IST

SAUER

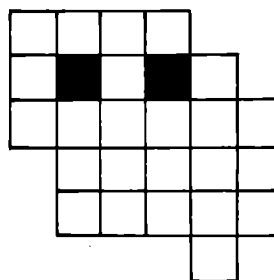
Jindřich Pěněk, Prag, Musiker

■ „Herr Ober, bringen Sie mir bitte ein Eisbein!“
„Wünschen Sie eins zu drei oder eins zu fünf Mark?“
„Was ist denn da für ein Unterschied?“ „Zwei Mark, mein Herr...“

▲ „Mein Kleiner, kannst du schon zählen?“ „Ja, eins, zwei, drei, vier, fünf...“ „Und weiter?“ „Sechs, sieben, acht, neune, zehn, Ober, Unter, König, As!“

Mathematisches Rätsel

In die untenstehende Figur sind Wörter der folgenden Bedeutung – unabhängig von der angegebenen Reihenfolge – einzutragen. Zur Erleichterung wird für jedes Lösungswort in Klammern die Anzahl der Buchstaben angegeben.



1. griechischer Buchstabe (5)
2. anderes Wort für „Stellung“ (4)
3. Einheit der Masse (5)
4. Abkürzung für eine Zeiteinheit (3)
5. griechischer Mathematiker (Satz über Peripheriewinkel im Halbkreis) (6)
6. norwegischer Mathematiker (1842 bis 1899) (3)
7. Senkrechte (3)
8. Grundbegriff der Mathematik (5)

OStR K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

Die Zeit mathematisch betrachtet

Gestern lag ich in der prallen Sonne und dachte ein wenig mathematisch nach. Dreiviertel sechs, dachte ich, ist ja eigentlich, wenn man sich's mathematisch überlegt, dezimal sozusagen, dreiviertel von sechs, also viereinhalb. Viereinhalb wiederum könnte halb fünf sein, wenn halb fünf nicht die Hälfte von fünf, also zweieinhalb wäre, was wiederum halb drei sein würde, wenn halb drei nicht die Hälfte von drei und somit eineinhalb wäre und dieses angeblich halb zwei sein soll, wobei man aber beachten muß, daß halb zwei ganz schlicht die Hälfte von zwei, also eins, ist, was es dann auch bleibt. Nun, es kommt selbst mir unglaublich vor, aber mathematisch betrachtet ist dreiviertel sechs in der prallen Sonne genau ein Uhr! aus: Eulenspiegel 32/78

Zahlenpyramide

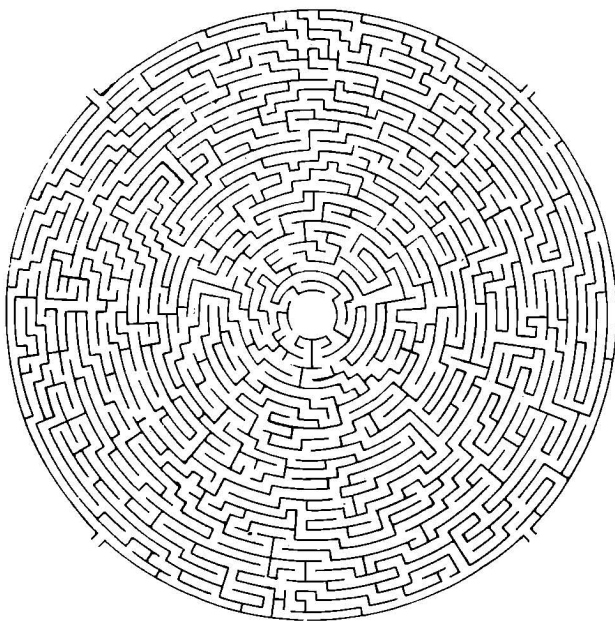
$D^E = D$
 $DD^E = DED$
 $DDD^E = DELED$
 $DDDD^E = DELTLED$
 $DDDDD^E = DELTATLED$

Die Buchstaben sind so durch Ziffern zu ersetzen, daß das Potenzieren zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

OL Ing. K. Koch, Schmalkalden

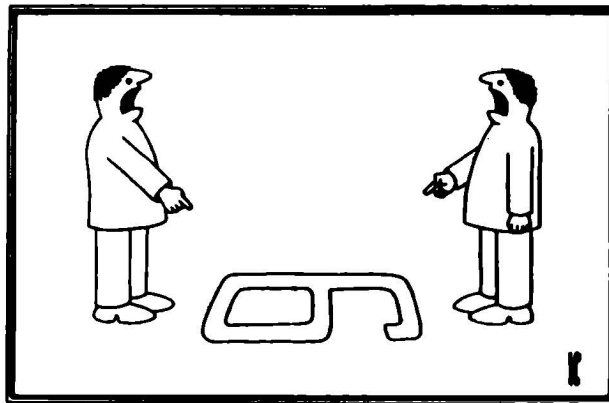
Labyrinth

aus: Lapok 10/78, Budapest



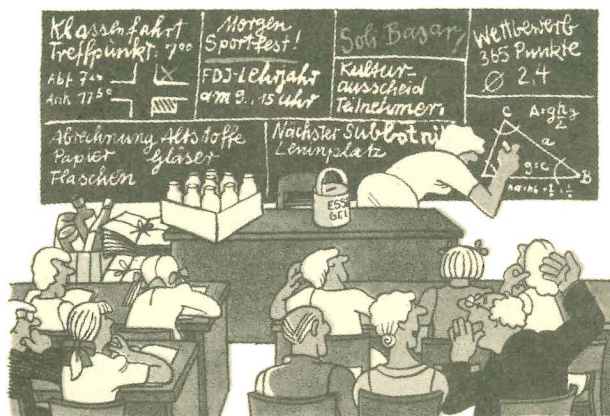
aus: Wurzel 1/79

„Wieviel ist 2×2 , Kollege?“
 „Ich weiß nicht, es ist kein Strom da.“



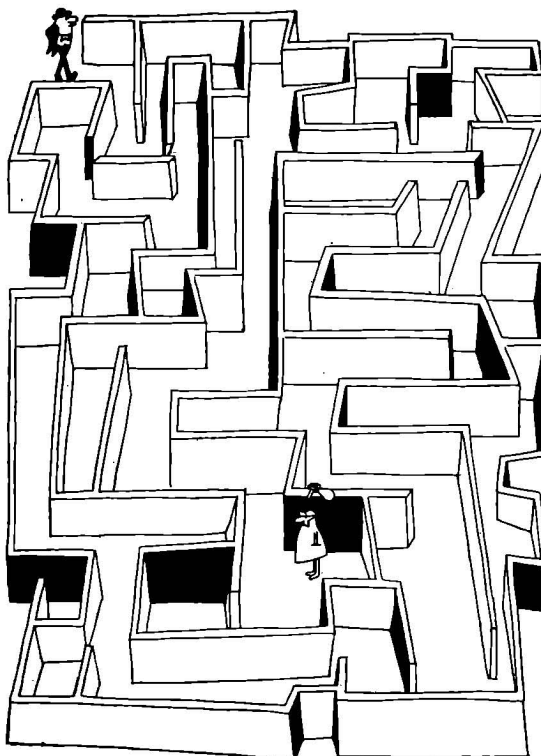
Auf der Suche nach der Wahrheit

Igor Worobjow, Moskau



„Ist sie nicht fabelhaft?“
 Sogar dazu findet sie noch Zeit!“

B. Henniger; aus: Eulenspiegel 37/78



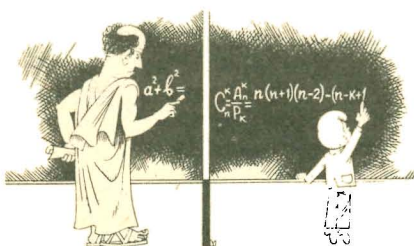
Lösungen auf Seite VIII

aus: Füles, Budapest

Den Verstand entwickeln

Leseprobe aus: Lerne denken von Jugend an

Jeder gesunde Mensch hat von Natur aus ein Gehirn, das sich als „Organ des Verstandes“ bis zur höchsten Stufe der Begabung, bis zum Talent entwickeln kann. Ob diese Stufe erreicht wird, hängt schon nicht von der Natur ab.



In der Folklore aller Völker kommt die typische Gestalt des Dömmers vor, der viele ihm eingepaukte Weisheiten von sich gibt, die aber alle fehl am Platz sind. Oder die Gestalt des gelehrten Dilettanten, der stets in eine peinliche Lage gerät, da er es nicht versteht, seine Kenntnisse am richtigen Ort und zur rechten Zeit anzuwenden. Beide, sowohl der Dömmers als auch der gelehrte Dilettant, sind alles andere als klug.

Wissen ist nämlich nicht dasselbe wie Verstand. „Viel Wissen bedeutet noch nicht Verstand“, sagte Heraklit aus Ephesos im Jahre 540 v. u. Z. Schon in jenen alten Zeiten vertraten die Philosophen den Standpunkt, der Verstand sei keine einfache Summe von Kenntnissen, kein mechanisches Beherrschen von Regeln, Termini oder Lehrsätzen, sondern die Fähigkeit, das Wissen zu verwerten. Auch Immanuel Kant war der Meinung, Verstand sei die Fähigkeit zu urteilen, das heißt selbständig über Tatsachen, Ereignisse, Erscheinungen und Menschen ein Urteil abzugeben.

Wie ist das zu erreichen? Erstens müssen dem Menschen alle Schätze der geistigen Kultur zugänglich sein. Zweitens muß man ihm beibringen, wie er diese Schätze auswerten kann,



und ihn mit Wissensdurst anstecken, so daß das Bestreben, Kenntnisse zu erwerben, zum Hauptbedürfnis der Persönlichkeit wird. Diese Aufgabe lösen hieße, daß alle Menschen klug werden. Dann wäre das Talent keine glückliche Ausnahme, sondern etwas Alltägliches.

Es ist somit sinnlos, die Verantwortung auf die Natur abzuwälzen. Manche Erzieher behaupten, die Gene seien an allem schuld, und beruhigen damit ihr Gewissen. Eine derartige Einstellung ist alles andere als demokratisch und zeugt von Unwissen, ja Ignoranz. Es gibt übrigens im Westen „Pädagogen“, die behaupten, nur 6 Prozent aller Kinder seien von Geburt an intelligent und besäßen Fähigkeiten zu schöpferischer Arbeit, während die anderen nur imstande seien, die von den „Klugen“ ausgedachten Arbeitsgänge zu wiederholen. Sie wollen uns glauben machen, es sei möglich, durch Intelligenzteste schon im frühesten Alter festzustellen, ob das Kind intelligent oder dumm ist. Letzten Endes bahnt diese Einstellung den einen den Weg zum Wissen und verschließt ihn den anderen. Da ließe sich eben nichts machen. Je nach der Intelligenzstufe werden somit für die einen alle Bedingungen geschaffen, damit sich die „angeborene“ Intelligenz entwickeln kann, dagegen sei es sinnlos, den anderen eben solche Bedingungen zu schaffen. Wir sowjetischen Wissenschaftler können uns mit dieser Anschauung keinesfalls einverstanden erklären.

Alle Menschen sind begabt

Es ist wissenschaftlich bewiesen, daß die meisten Menschen mit einem biologisch normalen Gehirn geboren werden. Daraus folgt, daß die Natur allen Menschen die gleichen potentiellen Möglichkeiten mit auf den Weg gibt, so daß jeder seine Fähigkeiten entwickeln kann und imstande ist, sich die Erfahrungen anzueignen, die die Menschheit gesammelt hat. Wie leicht, ja spielend eignet sich doch jedes Kind im 20. Jahrhundert die im Laufe von Jahrtausenden herausgebildeten Fähigkeiten und angehäuften Kenntnisse an, eben weil es gebahnte Wege geht und durch die Erfahrungen früherer Generationen vor den Fehlern bewahrt wird, die die

Menschheit als Preis gezahlt hat, um das zu erwerben, was wir heute „Wissen“ nennen. Was in früheren Epochen den reifen Verstand von Männern beschäftigte, so Hegel, ist in späteren Zeiten dem Knabenverstand zugänglich geworden.

Es erhebt sich die Frage: Wie kommt es dann, daß der eine oder andere in seiner Entwicklung auf einer Stufe stehenbleibt, die von der Menschheit schon längst überschritten wurde? Wie mir scheint, liegt der Grund darin, daß der Bildungsprozeß der „geistigen Organe“ des Menschen noch recht mangelhaft „eingrichtet“ ist. Wir versuchen mitunter, die oberen Etagen aufzuführen, ohne den Grundstein für das Fundament der Elementarfähigkeiten gelegt zu haben. Wir sind bemüht, den Kindern schwer verständliche Kenntnisse beizubringen, ohne daß die Grundlage dafür vorhanden ist. Ist das Kind aber nicht imstande, sich einen bestimmten Lehrstoff anzueignen, so lernt es alles mechanisch auswendig, ohne den Sinn zu verstehen. Als Folge entwickelt sich zwar das Gedächtnis, doch keinesfalls die Urteilskraft.

Wenn wir uns aber damit begnügen, daß unsere Schüler Formeln, Gesetze oder Regeln lernen, ohne daß sie verstehen, welche Probleme diesen Formeln usw. zugrunde liegen und auf welche Weise sie gelöst werden, erziehen wir nur pedante Dogmatiker. Der Dogmatiker jedoch ist nicht imstande zu begreifen, daß die ganze menschliche Kultur, das ganze Wissen der Menschheit eine mühevoll errungene und oft nur erratene Antwort auf Fragen ist, vor die das Leben seinerzeit die Menschheit gestellt hat.

Fragen jedoch tauchen vor Menschen gerade bei Auseinandersetzungen auf, im Meinungsstreit, wenn einer etwas behauptet, was der andere zurückweist, und wenn jeder dabei bestrebt ist, seine Meinung zu begründen.

Kultur des Diskutierens

Schon im Altertum hieß es: „Schwöre nicht auf den Namen deines Lehrers, sondern führe Beweise an.“ Da aber ein Mensch mit dogmatischem Verstand nicht imstande ist, Tatsachen oder Erscheinungen, die Meinungsverschiedenheiten hervorrufen, selbständig zu begreifen, nimmt er zu „typischen Lösungen“ Zuflucht. Gelingt ihm das aber nicht, gerät er außer Rand und Band.

Jedermann muß begreifen, daß seine Meinung nicht die einzig mögliche und auch nicht die einzig richtige ist. Den Dogmatikern fällt es schwer, gerade das zu verstehen.

Die Kultur des Diskutierens setzt die Fähigkeit voraus, Erscheinungen auch vom entgegengesetzten Standpunkt aus betrachten zu können, und die Gewohnheit, seine eigene Meinung zu überprüfen: „Was geschieht, wenn das Gegenteil vorausgesetzt wird?“ Nur auf diese Weise kann die objektive Wahrheit gefunden werden.

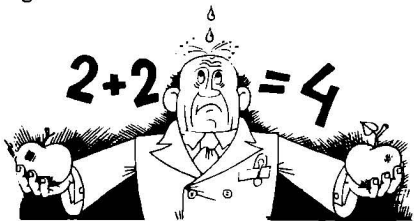
Die Kunst, sachlich zu diskutieren, ohne sich mit dem Opponenten, der als gleichwertig betrachtet wird, in die Haare zu geraten, liegt einer anderen Eigenschaft zugrunde, und zwar der Fähigkeit, mit sich selbst zu diskutieren, d. h. selbstkritisch zu denken. Ohne diese Eigenschaft bleibt der Verstand stets vom Denken anderer Menschen abhängig, die immer anwesend sein müßten, um die Einseitigkeit des dogmatischen Verstandes und seine kindische Neigung, die Erscheinungen nur von seinem engen Standpunkt aus zu betrachten, zu kritisieren.

Die Kunst, mit sich selbst diskutieren zu können, ist ein Merkmal höchster geistiger Kultur. Ein dialektisch denkender Mensch erforscht alle Seiten eines Problems, auch diejenigen, die anfangs unbedeutend schienen, denn er weiß, daß in einem gewissen Moment das scheinbar Unbedeutende „offensichtliche Wahrheiten“ und „widerspruchsfreie Konstruktionen“ umwerfen kann.

Solch ein Mensch durchdenkt noch vor dem Treffen mit dem Opponenten alle „Für“ und „Wider“ seines Standpunktes. Um in der Diskussion vor einem starken Gegner nicht hilflos dazustehen, durchdenkt er sowohl alle seine Beweisgründe als auch die eventuellen Gegengründe und verhält sich mißtrauisch zu den sogenannten absoluten Wahrheiten.

Die Tücke abstrakter Wahrheiten

Je „absoluter“ die eine oder die andere „abstrakte Wahrheit“ scheinen mag, um so hinterhältiger kann sie in Wirklichkeit sein. Deshalb ist es geraten, sehr vorsichtig mit ihr umzugehen. Absolute Wahrheiten sind stets an bestimmte Bedingungen gebunden und nur innerhalb dieser Bedingungen unumstößlich. Das sachkundige Verhalten zu absoluten Wahrheiten will von früher Jugend an gelernt sein, jedenfalls von der Schulbank an. Sonst kommt der Mensch früher oder später in eine Lage, in der die „offensichtlichen Tatsachen“ mit den in der Schule erlernten Binsenwahrheiten in Widerspruch geraten und sie widerlegen.



$2 + 2 = 4$. Das scheint eine unumstößliche Wahrheit zu sein. Ja, solange Stäbchen oder Äpfel addiert werden. Doch was ergibt sich, sobald zwei und zwei Wassertropfen vereint werden? Ein Tropfen oder vierundvierzig Spritzer?

Die Physiker von heute wissen, daß wenn im Laufe eines Experiments eine neue „unerwartete“ Erscheinung auftritt, die alle Rechnungen widerlegt, diese Erscheinung erforscht

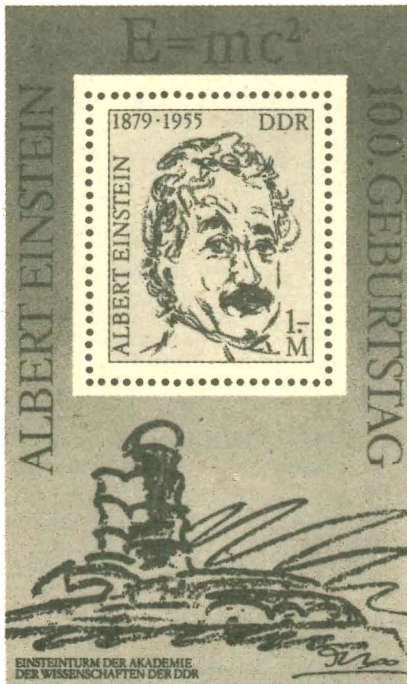
werden muß, damit die Rechnungen richtiggestellt werden können. Für einen Dogmatiker ergibt sich jedoch in solch einem Fall eine tragische Situation. Er beeilt sich, die wissenschaftlichen Erkenntnisse als „lebensfremde Klügeleien“ abzutun, anstatt die Widersprüche zu erforschen. Er kann es nicht verstehen, daß nicht die Formel falsch ist, sondern daß sie im gegebenen Falle falsch angewandt wurde.

Der Mensch, der nicht gelernt hat, selbständig zu denken, schenkt den abstrakten Formeln einen zu ehrfürchtigen Glauben und befindet sich deshalb in einem ständigen Zustand der Kollision mit dem Leben. Immer wieder wird er zwischen abstrakten Wahrheiten und konkreten Lebenssituationen hin- und hergerissen. Er ist dem Leben böse, daß „es sich nicht nach den Gesetzmäßigkeiten der Wissenschaft entwickelt“, oder er verschließt die Augen vor Tatsachen, wenn sie sich nicht in sein wissenschaftliches Schema zwängen lassen.

Wenn Sie also ein kluger Mensch sein wollen, der es versteht, seine Kenntnisse beim Beurteilen von Widersprüchen des realen Lebens anzuwenden, so gewöhnen Sie sich daran, den Ursprung jeder allgemeinen Wahrheit zu ergründen und die mühevollen Wege zu erforschen, die die Menschen zurücklegen mußten, um diese Wahrheit zu erkämpfen.

E. Iljenkow

Dem 100. Geburtstag des Gelehrten Albert Einstein wurde am 20.2.1979 dieser Block mit dem Porträt Einsteins und der bildlichen Bezugnahme auf sein Wirkungsbereich in Potsdam – dem Einsteinurm – gewidmet.



Aus dem Hauptreferat auf dem VIII. Pädagogischen Kongreß:

- Mit der Schaffung gleicher Bildungschancen in der DDR ist nicht mehr nur für eine Elite, sondern für alle der Weg geebnet zur Entfaltung aller Begabungen und Talente, sind alle Bildungswege für jeden geöffnet.
- Die Jugend muß vor allem lernen, daß es nur vorwärts gehen kann, wenn man selbst etwas tut, vor allem müssen wir sie befähigen, Probleme selbst zu lösen, Schwierigkeiten selbst zu überwinden.
- Auf allen Gebieten der außerunterrichtlichen Arbeit geht es nicht nur darum, Bedürfnisse zu befriedigen, sondern anspruchsvolle Bedürfnisse zu wecken und auszuprägen.
- Die Schüler sollen basteln und knobeln können, forschen und konstruieren lernen, denn gerade dies fördert Liebe zur Wissenschaft, Interesse für Technik, das Bedürfnis nach schöpferischer Tätigkeit.

Aus dem Diskussionsbeitrag des Vizepräsidenten der Akademie der Wissenschaften der DDR, Prof. Dr. Heinrich Scheel:



- Fundierte Allgemeinbildung also! Mein Anliegen fordert, daß ich die Betonung auf das Attribut lege: Fundierte Allgemeinbildung – das heißt eine Allgemeinbildung, die auf einem soliden, dauerhaften Wissen aufbaut, ein Wissen um Fakten und Sachverhalte, die einfach und schlicht gelernt werden müssen, um zu wahrhaft begründeten theoretischen Verallgemeinerungen und wissenschaftlichen Gesetzen gelangen zu können.
- Solides dauerhaftes Wissen ist undenkbar ohne andauernden Fleiß. Die Erziehung zum andauernden Fleiß ist von fundamentaler Bedeutung für jeden und für den, der einmal wissenschaftlich tätig sein will, insbesondere Fleiß sichert solides, dauerhaftes Wissen, aber darin erschöpft sich nicht seine Bedeutung. Ausdauernder Fleiß kann auch schon allein durch seine Quantität in Qualität umschlagen und zu überaus wertvollen Leistungen führen, die den Weltstand mitbestimmen.
- Wer in der Wissenschaft etwas leisten will, muß schon schwitzen können.

Lösungen



Hartes Training für Junge Mathematiker
Olympiadaufgaben aus Freundesland,
Heft 1/79, S. 45:

▲ 6 ▲ Ohne Benutzung eines Tafelwerks ist die folgende Summe zu berechnen:

$$s = \tan^6 \frac{\pi}{18} + \tan^6 \frac{5\pi}{18} + \tan^6 \frac{7\pi}{18}$$

Lösung: Die Werte $z_1 = \tan^2 \frac{\pi}{18}$, $z_2 = \tan^2 \frac{5\pi}{18}$,
 $z_3 = \tan^2 \frac{7\pi}{18}$ (1)

mit $0 < z_1 < z_2 < z_3$ lassen sich zwar – ohne Benutzung eines Tafelwerks – nicht unmittelbar angeben, es gilt aber

$$\tan^2 3 \cdot \frac{\pi}{18} = \tan^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}, \quad (2)$$

$$\tan^2 3 \cdot \frac{5\pi}{18} = \tan^2 \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{3}, \quad (3)$$

$$\tan^2 3 \cdot \frac{7\pi}{18} = \tan^2 \frac{7\pi}{6} = \frac{1}{3}. \quad (4)$$

Andererseits gilt (vgl. die Lösung zu Aufgabe 5) für alle reellen x mit $\tan^2 x \neq \frac{1}{3}$

$$\tan 3x = \frac{\tan x(3 - \tan^2 x)}{1 - 3 \tan^2 x},$$

$$\frac{\tan^2 x(3 - \tan^2 x)^2}{(1 - 3 \tan^2 x)^2} = \tan^2 3x. \quad (5)$$

Ist nun – wie in (2), (3) und (4) – $\tan^2 3x = \frac{1}{3}$

und setzt man $\tan^2 x = z$, so folgt aus (5)

$$\frac{z(3-z)^2}{(1-3z)^2} = \frac{1}{3},$$

$$z(9-6z+z^2) = \frac{1}{3}(1-6z+9z^2),$$

$$z^3 - 9z^2 + 11z - \frac{1}{3} = 0. \quad (6)$$

Diese kubische Gleichung hat genau die drei Wurzeln

$$z_1 = \tan^2 \frac{\pi}{18}, \quad z_2 = \tan^2 \frac{5\pi}{18}, \quad z_3 = \tan^2 \frac{7\pi}{18}; \quad (7)$$

denn sie hat einerseits höchstens drei reelle Wurzeln, andererseits ist sie wegen (2), (3), (4) und (5) für z_1, z_2 und z_3 mit $z_1 < z_2 < z_3$ erfüllt.

Daher gilt nach dem Vietaschen Wurzelsatz

$$z_1 + z_2 + z_3 = 9, \quad (8)$$

$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 = 11, \quad (9)$$

$$z_1 z_2 z_3 = \frac{1}{3}. \quad (10)$$

Ferner gilt

$$(z_1 + z_2 + z_3)^3 = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + 3(z_1 + z_2 + z_3)(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3) - 3z_1 z_2 z_3,$$

$$z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = (z_1 + z_2 + z_3)[(z_1 + z_2 + z_3)^2 - 3(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)] + 3z_1 z_2 z_3.$$

Daraus folgt wegen (8), (9) und (10)

$$s = \tan^6 \frac{\pi}{18} + \tan^6 \frac{5\pi}{18} + \tan^6 \frac{7\pi}{18}$$

$$= z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 9[9^2 - 3 \cdot 11] + 3 \cdot \frac{1}{3}$$

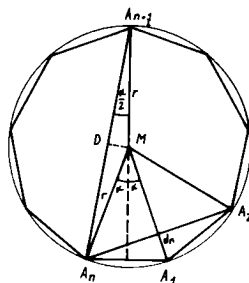
$$= 9 \cdot 48 + 1 = 433.$$

▲ 7 ▲ Es sind alle regelmäßigen n -Ecke ($n \geq 4$) anzugeben, die die folgende Eigenschaft besitzen:

Die Differenz der Länge der größten Diagonale und der Länge der kleinsten Diagonale ist gleich der Länge der Seite des regelmäßigen n -Ecks.

Lösung: a) Es sei n eine ungerade natürliche Zahl, also $n \geq 5$. Ferner seien $A_1 A_2 \dots A_n$ ein regelmäßiges n -Eck, M der Mittelpunkt des Umkreises dieses n -Ecks und $2\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ die Größe des zu der Seite $A_n A_1$ gehörenden Zentriwinkels; es gilt also

$$\alpha = \frac{180^\circ}{n} \quad (\text{siehe Bild}).$$



Bezeichnet man mit

r den Radius des Umkreises,

s_n die Länge der Seite $A_n A_1$,

d_n die Länge der kleinsten Diagonale $A_n A_2$,

D_n die Länge der größten Diagonale $A_n A_{n+1} A_n$,

so gilt

$$\sin \alpha = \frac{s_n}{2r}, \quad s_n = 2r \sin \alpha,$$

$$\sin 2\alpha = \frac{d_n}{2r}, \quad d_n = 2r \sin 2\alpha,$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{D_n}{2r}, \quad D_n = 2r \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Nach Voraussetzung soll gelten

$$D_n - d_n = s_n,$$

also $s_n + d_n = D_n$.

Daraus folgt

$$2r \sin \alpha + 2r \sin 2\alpha = 2r \cos \frac{\alpha}{2}$$

und daher wegen $r \neq 0$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha = \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Wegen $\sin \alpha + \sin \beta$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ folgt hieraus}$$

$$2 \sin \frac{3}{2} \alpha \cos \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Wegen $0 < \alpha < 45^\circ$, also $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$, gilt daher

$$\sin \frac{3}{2} \alpha = \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2} \alpha = 30^\circ, \quad \alpha = 20^\circ.$$

$$\text{Aus } \alpha = 20^\circ = \frac{180^\circ}{n} \text{ folgt } n = 9.$$

Ist also n ungerade, so sind die Bedingungen der Aufgabe nur für das regelmäßige 9-Eck erfüllt.

b) Es sei n eine gerade natürliche Zahl, also $n \geq 4$. Dann ist die Länge der längsten Diagonale gleich dem Durchmesser des Umkreises, also $D_n = 2r$.

Ferner gilt wie unter a)

$$s_n = 2r \sin \alpha, \quad d_n = 2r \sin 2\alpha,$$

$$\alpha = \frac{180^\circ}{n},$$

$$\text{also } 2r \sin \alpha + 2r \sin 2\alpha = 2r,$$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha = 1.$$

Nun ist für $n = 4, 6$ und 8 , d.h. $\alpha = 45^\circ, 30^\circ, 22,5^\circ$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha > 1.$$

Für $n \geq 10$ ist $\alpha \leq 18^\circ$, also

$$\sin \alpha < 0,31, \quad \sin 2\alpha < 0,59,$$

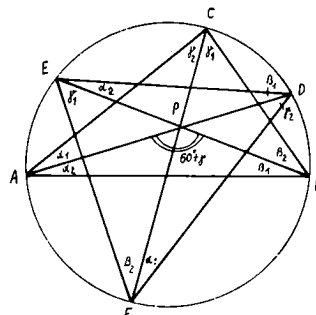
$$\sin \alpha + \sin 2\alpha < 0,9 < 1.$$

Für gerade n sind daher die Bedingungen der Aufgabe in keinem Falle erfüllt.

c) Es gibt also nur ein regelmäßiges n -Eck, für das die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind, nämlich das regelmäßige 9-Eck.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 6/78:

Ma 7 ■ 1807 Es seien $\angle CAP = \alpha_1$, $\angle BAP = \alpha_2$, $\angle ABP = \beta_1$, $\angle CBP = \beta_2$, $\angle BCP = \gamma_1$, $\angle ACP = \gamma_2$. Als Peripheriewinkel über derselben Sehne sind jeweils folgende Winkel kongruent: $\angle CAD = \angle CFD = \alpha_1$, $\angle BAD = \angle BED = \alpha_2$, $\angle ABE = \angle ADE = \beta_1$, $\angle CBE = \angle CFE = \beta_2$, $\angle BCF = \angle BEF = \gamma_1$.



Für das Dreieck ABP gilt ferner

$$\alpha_2 + \beta_1 + (60^\circ + \gamma) = 180^\circ \text{ bzw. } \alpha_2 + \beta_1 + \gamma = 120^\circ.$$

Für das Dreieck CAP gilt weiterhin

$$\alpha_1 + \gamma_2 + (60^\circ + \beta) = 180^\circ \text{ bzw.}$$

$$\alpha_1 + \gamma_2 + \beta = 120^\circ.$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhalten wir

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + \beta + \gamma + (\beta_1 + \gamma_2) = 240^\circ \text{ und wegen}$$

$$x = \alpha_1 + \alpha_2 \text{ durch Einsetzen}$$

$$\alpha + \beta + \gamma + (\beta_1 + \gamma_2) = 240^\circ, \text{ also}$$

$$\beta_1 + \gamma_2 = 60^\circ \text{ bzw. } \angle EDF = 60^\circ.$$

Analog dazu gilt $\angle EFD = \angle DEF = 60^\circ$.

Ma 8 ■ 1808 Es sei a eine beliebige natürliche Zahl, dann ist $a+1$ ihr Nachfolger und $2 \cdot a \cdot (a+1)$ das in der Aufgabenstellung geforderte doppelte Produkt.

Für die in der Aufgabe angegebene Summe gilt: $a^2 + (a+1)^2$. Soll das Produkt um 1 kleiner sein als die Summe, so muß gelten:

$$2a(a+1) + 1 = a^2 + (a+1)^2.$$

Die äquivalente Umformung dieser Gleichung ergibt

$$2a^2 + 2a + 1 = a^2 + a^2 + 2a + 1.$$

Da diese Aussageform allgemeingültig ist, gilt die Behauptung für alle natürlichen Zahlen, w. z. b. w.

Ma 8 ■ 1809 Die beiden Zahlen seien mit a bzw. b bezeichnet, und es gelte ohne Einschränkung der Allgemeinheit $a > b$.

Dann gilt nach Aufgabenstellung

$$(1) \quad \sqrt{ab} = b + 4 \quad \text{und}$$

$$(2) \quad \frac{a+b}{2} = a - 6.$$

Aus (2) folgt $a + b = 2a - 12$ bzw. $b = a - 12$.

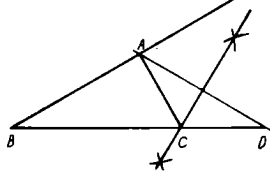
Setzt man das in (1) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \sqrt{a(a-12)} &= a - 12 + 4, \\ a^2 - 12a &= (a-8)^2, \\ a^2 - 12a &= a^2 - 16a + 64, \\ a &= 16. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen ergibt sich $b = 4$.

Die Probe zeigt, daß die Zahlen 16 und 4 den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Ma 8 ■ 1810 Man zeichnet zunächst eine Strecke $\overline{BD}$ mit der Länge $a + b = 7$ cm. Dann trägt man in B an $\overline{BD}$ den Winkel mit der Größe $\beta = 30^\circ$ an. Um B zeichnet man jetzt einen Kreis mit einem Radius der Länge $r = c = 4$ cm, der den freien Schenkel des angelegten Winkels in A schneidet.

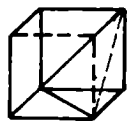


Die Mittelsenkrechte von $\overline{AD}$ schneidet $\overline{BD}$ in C . Man verbindet A mit C .

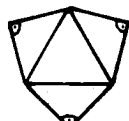
Da C auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AD}$ liegt, gilt $\overline{AC} \cong \overline{CD}$. Da die Summe der Längen von $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ 7 cm beträgt, gilt auch für die Summe der Längen von $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ 7 cm!

Ma 8 ■ 1811

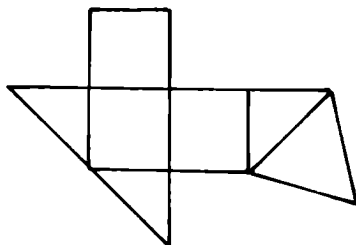
a)



b)



c) Tetraeder (gerade; unregelmäßig)



Ma 9 ■ 1812 Jeder Term der Form $a^k - 1$ läßt sich zerlegen in $(a^{\frac{k}{2}} + 1)(a^{\frac{k}{2}} - 1)$. Wir zerlegen $3^{8192} - 1$ wie folgt:

$3^{8192} - 1 = (3^{4096} + 1)(3^{4096} - 1)$. Damit ist bereits gezeigt, daß die Zahl z keine Primzahl ist.

Wir zerlegen nun den zweiten Faktor analog und verfahren so weiter:

$$\begin{aligned} 3^{8192} - 1 &= (3^{4096} + 1)(3^{2048} + 1)(3^{2048} - 1) \\ &= (3^{4096} + 1)(3^{2048} + 1) \dots \\ &\quad \cdot (3^4 + 1)(3^2 + 1)(3^1 + 1)(3^1 - 1). \end{aligned}$$

Wie man jetzt erkennt, sind z. B. 2; 4; 5; 10 und 82 Teiler von z .

Hinweis: Der Term $3^{8192} - 1$ hat die Form $a^{2^n} - 1$ mit $n \in \mathbb{N}$. Das läßt sich umformen zu $(a^n)^2 - 1$ bzw. $(a^n + 1)(a^n - 1)$. Diese Zerlegung liefert das gleiche Ergebnis.

Ma 9 ■ 1813 Angenommen, zur Familie gehören n Kinder, dann ist das Jüngste n Jahre alt. Die folgenden Kinder sind stets zwei Jahre älter, also $n+2$, $n+4$ usw. Jahre alt. Nach Aufgabenstellung gilt:

$$\begin{aligned} n + (n+2) + (n+2+2) + (n+3+2) \\ + \dots + [n + (n-1) \cdot 2] &= 9n. \end{aligned}$$

Nach der Summenformel für arithmetische Folgen erster Ordnung gilt dann weiter:

$$\frac{n}{2}(n + n + (n-1) \cdot 2) = 9n.$$

Weitere Umformungen ergeben

$$\frac{n}{2}(4n-2) = 9n$$

$$n(4n-2) = 18n$$

$$4n-2 = 18$$

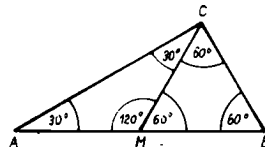
$$4n = 20$$

$$n = 5$$

Das Jüngste Kind ist 5 Jahre alt; folglich gehören nach Aufgabenstellung 5 Kinder zur Familie. Die anderen Kinder sind 7, 9, 11 bzw. 13 Jahre alt.

Es gilt $5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 5 \cdot 9$.

Ma 9 ■ 1814



Nach Voraussetzung gilt $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = 3$ cm. Wegen $\overline{AM} = \overline{CM}$ gilt $\angle CAM = \angle ACM = 30^\circ$. Folglich gilt $\angle AMC = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$ und $\angle BMC = 60^\circ$ als Nebenwinkel.

Wegen $\overline{BM} = \overline{CM}$ gilt $\angle MBC = \angle MCB = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$. Das Dreieck MBC ist somit gleichseitig.

Folglich gilt $\overline{BC} = 3$ cm und $\angle ACB = 90^\circ$.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt im rechtwinkligen Dreieck ABC

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$$

$$\overline{AC}^2 = 27 \text{ cm}^2$$

$$\overline{AC} = \sqrt{27} \text{ cm}$$

$$\overline{AC} = 5,2 \text{ cm.}$$

Die Seite $\overline{AC}$ des Dreiecks ABC ist etwa 5,2 cm lang.

Ma 9 ■ 1815 Es seien a und b die Längen der Grundkanten und h die Länge der Höhe der Pyramide.

Aus $a + b = 66$ folgt $b = 66 - a$.

Für das Volumen der Pyramide gilt somit

$$V = \frac{1}{3}abh = \frac{1}{3} \cdot a(66-a) \cdot 6 = 1978.$$

Daraus folgt $a(66-a) = 989$.

Diese quadratische Gleichung hat die Lösung 43 und 23. Durch Einsetzen erhalten wir $b = 23$ bzw. $b = 43$. Die Grundkanten dieser Pyramide sind 43 cm bzw. 23 cm lang.

Ma 10/12 ■ 1816 Die zweistellige Zahl sei $10a + b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ und $1 \leq a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$. Dann läßt sich die der Aufgabenstellung entsprechende sechsstellige Zahl wie folgt darstellen:

$$10^5a + 10^4b + 10^3a + 10^2b + 10a + b.$$

Nach Vereinfachen erhält man

$$a(10^5 + 10^3 + 10) + b(10^4 + 10^2 + 1)$$

$$= 101010a + 10101b$$

$$= 10101(10a + b)$$

$$= 273 \cdot 37(10a + b).$$

Da $37(10a + b)$ eine natürliche Zahl ist, gilt die Behauptung!

Ma 10/12 ■ 1817 Die Logarithmusfunktion ist nur für positive reelle Zahlen definiert. Daraus folgt

$$91 - x^3 > 0 \quad \text{und} \quad 7 - x > 0,$$

$$\text{d. h. } x < 7 \quad \text{und} \quad x < \sqrt[3]{91}, \text{ d. h.}$$

$$x < \sqrt[3]{91}. (\sqrt[3]{91} \approx 4,498)$$

Man formt die Gleichung wie folgt äquivalent um:

$$\frac{\lg(91 - x^3)}{\lg(7 - x)} = 3$$

$$\lg(91 - x^3) = 3 \lg(7 - x)$$

$$\lg(91 - x^3) = \lg(7 - x)^3$$

$$91 - x^3 = (7 - x)^3$$

$$91 - x^3 = 343 - 147x + 21x^2 - x^3$$

$$21x^2 - 147x + 252 = 0$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x_{1,2} = 3,5 \pm \sqrt{0,25}$$

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = 3$$

Es gibt genau zwei reelle Zahlen x , die die Gleichung erfüllen! Es sind die Zahlen 3 und 4.

Ma 10/12 ■ 1818 Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion. Für $n=1$ ist die Ungleichung (1) erfüllt, denn es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{1}} \leq 2\sqrt{1} - 1 = 1.$$

Angenommen, die Ungleichung (1) sei für $n=k$ mit $k=1$ erfüllt. Dann gilt

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{k} - 1.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} (3) \quad & \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ & \leq 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} - 1 \end{aligned}$$

Es soll nun bewiesen werden, daß

$$(4) \quad 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}.$$

(4) ist erfüllt, wenn

$$(5) \quad 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) > \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

$$\text{d. h. } k+1 - \sqrt{k(k+1)} > \frac{1}{2}, \text{ d. h.}$$

$$(6) \quad \sqrt{k(k+1)} < k + \frac{1}{2}.$$

Nun ist die Ungleichung (6) erfüllt, wenn

$$k(k+1) < \left(k + \frac{1}{2}\right)^2, \text{ d. h.} \\ (7) \quad k^2 + k < k^2 + k + \frac{1}{4}.$$

Die Ungleichung (7) ist für alle natürlichen Zahlen k erfüllt, also auch die Ungleichungen (6), (5) und (4), womit (4) bewiesen ist. Aus (3) und (4) folgt daher

$$(8) \quad \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1} - 1$$

d. h., wenn die Ungleichung (1) für $n=k$ erfüllt ist, so auch für $n=k+1$. Da sie, wie oben gezeigt wurde, auch für $n=1$ gilt, ist sie also für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq 1$ erfüllt, w. z. b. w.

Ma 10/12 ■ 1819 Es seien c die Länge der Hypotenuse, a und b die Längen der Katheten des rechtwinkligen Dreiecks ABC . Für den Umfang des Dreiecks ABC gilt

$$(1) \quad a + b + c = 30 \text{ cm};$$

für den Flächeninhalt gilt

$$(2) \quad \frac{a \cdot b}{2} = 30 \text{ cm}^2 \text{ bzw. } a \cdot b = 60 \text{ cm}^2.$$

Außerdem gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$(3) \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

Aus (2) folgt $a = \frac{60}{b}$.

Setzt man das in (1) ein, so erhält man

$$(4) \quad \frac{60}{b} + b + c = 30.$$

Daraus folgt $c = 30 - \frac{60}{b} - b$ bzw.

$$(5) \quad c^2 = \left(30 - \frac{60}{b} - b\right)^2 \text{ bzw.} \\ c^2 = 900 - \frac{1800}{b} - 30b - \frac{1800}{b} + \frac{3600}{b^2} + 60 - 30b + 60 + b^2.$$

Setzt man das in (3) ein, so ergibt sich nach Vereinfachung

$$(6) \quad 1020 - \frac{3600}{b} - 60b = 0$$

$$\text{bzw. } b^2 - 17b + 60 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $b_1 = 12$ und $b_2 = 5$. Durch Einsetzen ergeben sich $a_1 = 5$ bzw. $a_2 = 12$ und $c_1 = c_2 = 13$. Die Hypotenuse dieses Dreiecks ist 13 cm lang, die Katheten sind 12 cm bzw. 5 cm lang. Wie die Probe zeigt, erfüllen diese Größen die Bedingungen der Aufgabe.

Ph 6 ■ 46 Geg.:

$$\text{Schrittlänge } l = 65 \text{ cm} = 0,65 \text{ m} \\ = 0,00065 \text{ km}$$

$$\text{Zeit } t = 1 \text{ min} = \frac{1}{60} \text{ h}$$

Anzahl der Schritte $n = 80$

Ges.: Wandergeschwindigkeit v in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Die Wandergeschwindigkeit errechnet man nach der Formel

$$v = \frac{s}{t},$$

wobei $s = n \cdot l$, also $s = 80 \cdot 65 \text{ cm}$

$$80 \cdot 0,00065 \text{ km}$$

$$v = \frac{1}{60} \text{ h}$$

$$v = 3,12 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Peters Wandergeschwindigkeit beträgt

$$3,12 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Ph 7 ■ 47 Geg.:

$$h_1 = h_2 = \dots = h_9 = 6,5 \text{ cm} = 0,065 \text{ m}$$

$$G_1 = G_2 = \dots = G_9 = 7 \text{ kp}$$

Ges.: Hubarbeit W in kp

Es müssen 18 Stück = 9 Paar Steine auf verschiedene Höhen gehoben werden, dabei wiegt 1 Paar 7 kp. Nur bei dem 1. Paar, das auf dem Boden liegt, ist keine Hubarbeit notwendig. Es gilt also:

$$1. \text{ Paar } 0 \text{ kpm}$$

$$2. \text{ Paar } W_1 = G_1 \cdot h_1$$

$$W_1 = 7 \text{ kp} \cdot 1 \cdot 0,065 \text{ m}$$

$$3. \text{ Paar } W_2 = G_2 \cdot h_2$$

$$W_2 = 7 \text{ kp} \cdot 2 \cdot 0,065 \text{ m}$$

$$10. \text{ Paar } W_9 = G_9 \cdot h_9$$

$$W_9 = 7 \text{ kp} \cdot 9 \cdot 0,065 \text{ m}$$

Die gesamte Hubarbeit W ist dann

$$W = 0 + 7 \cdot 1 \cdot 0,065 + 7 \cdot 2 \cdot 0,065$$

$$+ \dots + 7 \cdot 9 \cdot 0,065 \text{ kpm}$$

$$W = 7 \cdot 0,065(1 + 2 + \dots + 9) \text{ kpm}$$

$$W = 7 \cdot 0,065 \cdot 45 \text{ kpm}$$

$$W = 20,475 \text{ kpm} \approx 20 \text{ kpm}$$

Jens muß insgesamt eine Hubarbeit von rund 20 kpm verrichten.

Ph 8 ■ 48 Geg.:

$$a = 6 \text{ m}, b = 8,5 \text{ m}, c = 3,5 \text{ m}$$

$$T_1 = 288^\circ \text{K}, T_2 = 298^\circ \text{K}$$

$$p_1 = p_2 = 770 \text{ Torr}$$

Ges.: Volumen V der ausströmenden Luft

Das Volumen V der ausströmenden Luft ergibt sich aus der Differenz des Luftvolumens V_2 bei 25°C und V_1 bei 15°C . Es ist

$$V_1 = abc$$

$$V_1 = 6 \text{ m} \cdot 8,5 \text{ m} \cdot 3,5 \text{ m}$$

$$V_1 = 178,5 \text{ m}^3$$

V_2 erhält man aus der Zustandsgleichung der Gase

$$\frac{V_1 \cdot p_1}{T_1} = \frac{V_2 \cdot p_2}{T_2}$$

$$V_2 = \frac{V_1 \cdot p_1 \cdot T_2}{T_1 \cdot p_2}$$

$$V_2 = \frac{178,5 \text{ m}^3 \cdot 770 \text{ Torr} \cdot 298^\circ \text{K}}{288^\circ \text{K} \cdot 770 \text{ Torr}}$$

$$V_2 \approx 184,7 \text{ m}^3$$

Nun ist $V = V_2 - V_1$, also $V = 184,7 \text{ m}^3$

$$- 178 \text{ m}^3 = 6,2 \text{ m}^3.$$

Aus dem Zimmer strömen $6,2 \text{ m}^3$ Luft.

Ph 9 ■ 49 Geg.: $\mu_1 = 0,16$

$$\mu_2 = 0,10$$

$$m = 35 \text{ t}$$

$$v = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ges.: Bremsweg s

Den Bremsweg findet man nach der Formel für die gleichmäßig verzögerte Bewegung:

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 \text{ mit } v = at \text{ und } t = \frac{v}{a}.$$

$$s = \frac{v^2}{2a} \quad (1)$$

Wenn F_b die Reibungskraft ist, gilt $F_b = ma$

bzw. $a = \frac{F_b}{m}$. In (1) eingesetzt, ist dann

$$s = \frac{v^2 \cdot m}{2 \cdot F_b} \quad (2)$$

Gemäß Aufgabe wird jede Achse mit der

Kraft $\frac{F_g}{2}$ belastet. Damit drückt jedes Rad mit

einer Kraft $\frac{F_g}{4}$ auf die Schiene. Die Brems-

kräfte sind also:

$$- \text{ beim Hemmschuh } F_{b1} = \mu_1 \cdot \frac{F_g}{4},$$

$$- \text{ beim anderen, blockierten Rad}$$

$$F_{b2} = \mu_2 \cdot \frac{F_g}{4}.$$

Insgesamt ist dann

$$F_b = F_{b1} + F_{b2} = \frac{F_g}{4} (\mu_1 + \mu_2). \text{ In (2) eingesetzt}$$

ist dann

$$s = \frac{v^2 \cdot m \cdot 4}{2 \cdot F_g (\mu_1 + \mu_2)},$$

und da $F_g = m \cdot g$ gilt, ist

$$s = \frac{v^2 \cdot m \cdot 4}{2 \cdot m \cdot g (\mu_1 + \mu_2)}$$

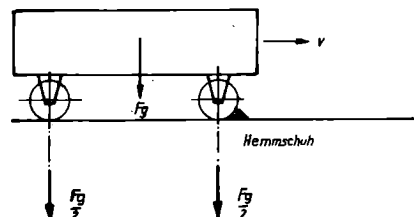
$$s = \frac{v^2 \cdot 2}{g (\mu_1 + \mu_2)}$$

(Beachten Sie: Die Masse kürzt sich aus der Gleichung heraus!)

$$s = \frac{6 \text{ m}^2 \cdot 2 \cdot \text{s}^2}{9,81 \text{ m/s}^2 (0,16 + 0,10)}$$

$$s \approx 28,2 \text{ m}.$$

Der Abbremsweg beträgt rund 28 Meter.



Ph 10/12 ■ 50 Geg.: $R_r = 10 \text{ Ohm}$

$$R_p = 1,6 \text{ Ohm}$$

Ges.: R_1, R_2

Für die Reihen- bzw. Parallelschaltung zweier Widerstände gelten die Beziehungen

$$R_r = R_1 + R_2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (2)$$

Aus (1) und (2) erhält man eine quadratische Gleichung in R_1 :

$$R_{1(I,II)} = \frac{R_r}{2} \pm \sqrt{\frac{R_r^2 - 4R_r R_p}{4}} \\ = \frac{10}{2} \pm \sqrt{\frac{100 - 4 \cdot 10 \cdot 1,6}{4}} \\ = 5 \pm 3$$

$$R_{1I} = 8$$

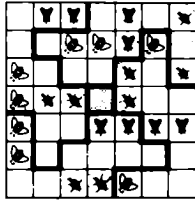
$$R_{1II} = 2$$

Dies in (2) eingesetzt, ergibt $R_2 = 2 \text{ Ohm}$ bzw.

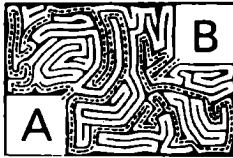
8 Ohm. Die gesuchten Widerstände betragen

8 bzw. 2 Ohm.

Augenmaß



Irrgarten



Mühleaufgabe

1. $20 - 14$ bel. - 6,
2. $21 - 15$ bel. - 13,
3. $14 - 3$ bel. - 24,
4. $15 - 1$ bel.,
5. Mühle

Unauffällig

Der Herr mit Hut und Brille

In Ruhe betrachtet

$$\begin{array}{r} 123 + 504 = 627 \\ - \quad : \quad + \\ 110 - \quad 9 = 101 \\ 13 \cdot \quad 56 = 728 \end{array}$$

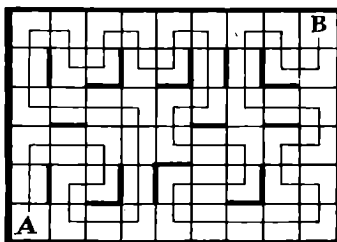
Augen auf!

1-10, 3-8, 2-5, 7-12, 4-9, 6-11

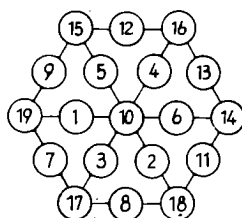
Einsatz

12		13		3
	6	16	14	
10	7	9	11	8
	4	2	17	
15		5		1

Mit Lust und Liebe



Sachverstand



Wandert, Freunde!

$$1 + 4 + 8 + 11 + 2 + 20 + 17 + 21 + 7 + 12 + 15 = 118.$$

Endspurt

Sieger ist Pferd Nummer 4.

Zum „ewigen Kalender“

„Ewige Kalender“, besser Mehrjahrkalender, sind Formeln, Tabellen oder Spezialrechenschieber, mit denen man zu jedem Datum den dazugehörigen Wochentag ermitteln kann. Sie gelten nur so lange, wie der dazugehörige Kalender Geltung hat.

Die „Kleine naturwissenschaftliche Bibliothek“ (BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft) brachte einen Band „Ewige Kalender“ von Butkewitsch und Selikson, der neben vielen, verschiedenen langjährigen Kalendern viel Wissenswertes über Kalender enthält. Es fehlt aber die Ableitung der Kalenderformel, die es erst möglich macht, Tabellen zu berechnen und Rechenschieber zu entwerfen. Die Ableitung der Formeln für den julianischen und den gregorianischen Kalender soll hier gezeigt werden.

Lösungen zu: Unmöglichkeitbeweise, S. 59

▲1▲ Wenn A mit B einen Händedruck wechselt, so auch B mit A. Folglich ist die Gesamtzahl der Händedrucke stets gerade, aber $5 \cdot 7 = 35$.

▲2▲ $2^n \equiv 1, 2, 4 \pmod{7}$, also $2^n + 1 \not\equiv 0 \pmod{7}$.

▲3▲ Es gibt 4 weiße und 5 schwarze Felder (oder umgekehrt). Ein zu einem weißen Feld benachbartes ist schwarz und umgekehrt, also keine Aufstellung möglich.

▲4▲ Wenn $\frac{21n+4}{14n+3} = 1 + \left(1 + \frac{7n+1}{4n+3}\right)$ kürzbar ist, so auch $\frac{14n+3}{7n+1} = 2 + \frac{1}{7n+1}$, was wegen $\frac{1}{7n+1}$ unkürzbar auf einen Widerspruch führt.

▲5▲ Die fehlenden Felder haben gleiche Farbe. Die 31 Dominosteine benötigen aber je 31 weiße und schwarze Felder.

▲6▲ Die Zuleitung vom Gas- und Wasserwerk ist bei beliebiger Werkslage möglich. Die Zuleitungen begrenzen zwei Gebiete in der Ebene. Gleichgültig, ob das E-Werk innerhalb eines Gebietes oder außerhalb beider liegt, stets muß eine Leitung eine Berandung kreuzen.

▲7▲ Da mehr als zwei ungerade Knoten, mehr als ein Weg nötig.

Für die Geltungsdauer der Kalender muß man einige geschichtliche Tatsachen wissen. Kalender wurden im Altertum von der Priesterschaft errechnet, die die Gelehrten stellte und viel Macht und Ansehen besaß. Der oberste Priester war für die Einführung eines neuen Kalenders verantwortlich.

Julius Caesar lebte von 102 bis 44 v. u. Z., war ein begabter römischer Feldherr, Staatsmann und Priester des höchsten röm. Gottes Jupiter und wurde schließlich Diktator. Als er die Regierung antrat, fand er einen verwilderten Kalender vor. Um das große Römische Reich zu regieren, brauchte er einen geordneten, einheitlichen Kalender. Im Jahre 46 v. u. Z. war er „Pontifex Maximus“, also oberster Priester, und führte nach Berechnungen des Ägypters Sosigenes und des Römers Scriba M. Flavius einen neuen Kalender ein. In diesem Kalender, der nach ihm genannt ist, hat das Jahr 365,25 Tage, eine Verbesserung gegenüber dem ägyptischen Kalender, in dem das Jahr 365 Tage hatte. Er galt von seiner Einführung an bis 1582 in Italien. In Rußland war er sogar bis zur Großen Sozialistischen Oktoberrevolution gültig. Auf dem Konzil (einer Versammlung von katholischen geistlichen Würdenträgern zur Regelung gesamt-kirchlicher Anliegen) von Nicaea, 325 v. u. Z., wurde er für die Christenheit verbindlich. Im Jahre 525 führte der römische Abt Dionysius Exiguus die Zeitrechnung „nach Christi Geburt“ ein. Bis dahin waren die Jahre „von der Gründung der Stadt Rom an“, „ab urbe condita = a. u. c.“ gezählt worden.

Wie Dionysius den Zeitpunkt von Christi Geburt bestimmt haben will, ist nicht bekannt. Auch weiß man nicht, ob er diesen Geburtstag auf den 25. Dezember im Jahre 1 vor oder u. Z. festlegte. Ein Jahr 0 führte er nicht ein.

Am 15. 10. 1582 führte Papst Gregor VIII. den nach ihm benannten „gregorianischen“ Kalender ein. Die Notwendigkeit einer Kalenderreform ergab sich daraus, daß das julianische Jahr um 0,0078 Tage zu lang war und sich diese Differenz über einen großen Zeitraum hinweg bemerkbar machte. Auf dem Konzil von Nicaea war die Frühlingstag- und -nachtgleiche auf den 21. März gefallen; dies sollte nun in allen folgenden Jahren so bleiben und das Jahr von einer Frühlingstag- und -nachtgleiche bis zur nächsten dauern. In den 1257 Jahren von 325 bis 1582 war die Frühlingstag- und -nachtgleiche um fast 10 Tage auf den 11. März gewandert. So ließ Papst Gregor VIII. auf Donnerstag den 4. 10. 1582 julianischer Rechnung Freitag, den 15. 10. 1582 gregorianischer Rechnung folgen.

Nun waren durchaus nicht alle Fürsten mit der Neuerung des Papstes einverstanden, obwohl sein Kalender genauer war. Erst 1700 war in ganz Deutschland der neue Kalender eingeführt. In Europa, bis auf die Länder der Ostkirche, wurde 1750 allgemein nach dem

gregorianischen Kalender gerechnet. Allerdings galt in Frankreich vom 24. 11. 1793 bis 1. 1. 1806 ein Revolutionskalender. 1940 wurde der gregorianische Kalender in der Sowjetunion eingeführt.

Auf die Zeiten der Gültigkeit der verschiedenen Kalender ist bei der Anwendung der „ewigen Kalender“ zu achten.

Die Voraussetzungen zur Ableitung der Kalenderformeln sind durch die Struktur der Kalender gegeben. Für beide Kalender gilt

1. die Woche hat 7 Tage, sie fängt mit Montag an;

2. die Monate haben die uns bekannte Anzahl von Tagen;

3. das Gemeinjahr hat 365, das Schaltjahr 366 Tage;

4a. der julianische Kalender setzt ein Jahr von 365,25 mittleren Sonnentagen voraus. Im bürgerlichen Jahr kann man aber nur ganze Tage zählen. Deswegen müssen Schalttage eingeführt werden. Daraus ergibt sich die julianische Schaltregel: Jedes Gemeinjahr hat 365 Tage, jedes Jahr, dessen Jahreszahl ohne Rest durch 4 teilbar ist, ist ein Schaltjahr zu 366 Tagen.

4b. Das gregorianische Jahr hat 365,2422 mittlere Sonnentage. In 10000 Jahren sind also 2422 Schalttage unterzubringen. In 400 Jahren also 96,88 Schalttage, die auf 97 aufgerundet werden. In 400 Jahren werden also 0,12 Tage zu viel gerechnet. Erst in 3333 $\frac{1}{3}$ Jahren macht dieser Fehler 1 Tag aus. Nach dieser Zeit muß also ein Schalttag eingespart werden. Die 97 Schalttage werden in je 400 Jahren nach der gregorianischen Schaltregel im Kalender untergebracht: Die Gemeinjahre haben 365 Tage. Jedes Jahr, dessen Jahreszahl ohne Rest durch 4 teilbar ist, ist ein Schaltjahr mit 366 Tagen bis auf die Jahre, die ohne Rest durch 100 teilbar sind. Da das aber nur 96 Tage wären, gibt es noch eine zweite Ausnahme. Die Jahre, die ohne Rest durch 400 teilbar sind, sind wieder Schaltjahre.

So sind die Jahre 1800 und 1900 Gemeinjahre, dagegen ist 2000 ein Schaltjahr. Butkewitsch und Selikson schreiben $|a:b|$ für den Rest der Division $a:b$, also $a:b$ zwischen zwei senkrechten Strichen, und $[a:b]$ für das größte Ganze von $a:b$, also $a:b$ in eckigen Klammern. Das brauchen wir bei der Ableitung der Kalenderformeln, bei der wir noch von folgenden Überlegungen ausgehen.

Wir ordnen den Wochentagen, beim Montag beginnend, die Kennzahlen 1, 2, ..., 7 zu und und da $|7:7|=0$, setzen wir für 7 die Zahl 0. Ist der letzte Wochentag eines Monats bekannt, so können wir zu seiner Kennzahl die Nummer Q des gesuchten Tages des nächsten Monats addieren und von dieser Summe den Rest bei der Division durch 7 bestimmen und bekommen die Kennzahl des gesuchten Wochentages. Zum Beispiel: Der März hört mit

Donnerstag auf. Donnerstag hat die Kennzahl 4. Wir suchen den Wochentag des 23. April. Wir addieren $4+23=27$. $|27:7|=6$. Der 23. April ist ein Tag mit der Kennzahl 6, also ein Sonnabend.

Ist uns der letzte Tag des Jahres $j-1$ bekannt, so können wir alle Wochentage des Jahres j bestimmen. Wir erleichtern uns die Rechnung durch Tabelle 1. Darin ist T die Anzahl der Tage, die am 1. eines Monats verflossen sind; $K_m = |T:7|$ die Kennzahlen der Monate, die den letzten Tag des Vormonats angeben. g und s sind die Zeichen für Gemein- und Schaltjahr.

Ist uns die Kennzahl K_j des Jahres j bekannt, so können wir die Summe $K_j + K_m + Q$ bilden und bekommen als Rest bei der Division durch 7 die Kennzahl d und damit den Wochentag des gesuchten Datums.

Um K_j auszurechnen, bestimmen wir die Zahl S_j der Tage, die seit Einführung unserer Zeitrechnung bis Ende des Jahres $j-1$ vergangen sind, aus den Schaltregeln, dazu die Kennzahl x des 31. 12. des Jahres 1 v.u.Z. Dann ist $K_j = |S_j:7| + x$. Ist dieser Wert größer als 6, so müssen wir von diesem Wert noch einmal den Rest bei der Division durch 7 bilden.

Wir fangen mit dem gregorianischen Kalender an. Für diesen gilt

$$S_j = (j-1) \cdot 365 + [(j-1):4] - [(j-1):100] + [(j-1):400]$$

und daraus

$$|S_j:7| = [(j-1) \cdot 365 + [(j-1):4] - [(j-1):100] + [(j-1):400]]:7$$

$$\text{und da } |365:7|=1 \text{ ist, bekommen wir}$$

$$|S_j:7| = [(j-1) + [(j-1):4] - [(j-1):100] + [(j-1):400]]:7$$

Die Kennzahl K_{1976} ist 3, denn der 31. 12. 1975 war Mittwoch. Wir bekommen die Gleichung

$$[(1975 + [1975:4]) - [1975:100] + [1975:400]]:7 + x = 3$$

$$|2453:7| + x = 3$$

$$3 + x = 3$$

$$x = 0.$$

Das Jahr 1 unserer Zeitrechnung hat im gregorianischen Kalender die Kennzahl 0. (Es hätte also mit einem Montag angefangen.)

Damit haben wir die Kalenderformel für den gregorianischen Kalender

$$1. \quad d = [(j-1) + [(j-1):4] - [(j-1):100] + [(j-1):400] + K_m + Q]:7|$$

Beispiel: Auf welchen Wochentag fiel der Start des ersten künstlichen Erdtrabanten am 4. 10. 1957?

Wir setzen in die Formel ein und entnehmen

Tabelle 1

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Tg	0	31	59	90	120	151	181	212	243	273	304	334
Ts	0	31	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
Kmg	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
Kms	0	3	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6

Kmg für Oktober aus Tabelle 1 und bekommen

$$d = [(1956 + [1956:4]) - [1956:100] + [1956:400] + 0 + 4]:7|$$

$$= [(1956 + 489 - 19 + 4 + 4):7|$$

$$= |2434:7| = 5$$

$d = 5$. Der 4. 10. 1957 war ein Freitag.

Für den julianischen Kalender bekommen wir nach der julianischen Schaltregel

$$S_j = (j-1) \cdot 365 + [(j-1):4]$$

und da $|365:7|=1$

$$\text{ist } d = [(S_j:7 + K_m + Q):7] + x.$$

Aus der Geschichte wissen wir, daß der 4. 10. 1582 ein Donnerstag war, also $d = 4$, und daraus können wir x errechnen. Da $K_m = 0$ für Oktober und $Q = 4$ ist, bekommen wir

$$[(1581 + [1581:4]):7] + 0 + 4]:7 + x = 4$$

$$|[2+4]:7] + x = 4$$

$$6 + x = 4$$

$$x = -2.$$

Zu negativen Resten addieren wir den Divisor, um einen positiven Rest zu bekommen.

So bekommen wir $x = 5$ anstelle von $x = -2$. Die Kalenderformel für den julianischen Kalender sieht dann so aus

$$2. \quad d = [(j-1) + [(j-1):4] + 5 + K_m + Q]:7|$$

da die Summe der Divisionsreste der Summanden dem Divisionsrest der Summe entspricht.

Beispiel: Johannes Kepler wurde am 27. 12. 1571 geboren. Welcher Wochentag war es?

$$d = [(1570 + [1570:4] + 5 + 5 + 27):7|$$

$$d = |1999:7| = 4.$$

4 entspricht dem Donnerstag. Johannes Kepler wurde an einem Donnerstag geboren.

Mit Hilfe der Formeln 1.) und 2.) können wir einen Spezialrechenschieber zur Bestimmung der Wochentage aus dem Datum entwickeln.

Die Formeln zeigen, daß wir die Kennzahl des Wochentages finden, wenn wir die Kennzahlen des Jahres K_j , die Kennzahl des Monats K_m und die Nummer Q des Tages im Monat addieren und von dieser Summe den Rest bei der Division durch 7 bilden.

Mit Hilfe von Skalen mit gleichmäßiger Einteilung kann man auf zwei Arten Additionen ausführen.

Die untere bewegliche Skale b wird gegen die feststehende obere Skale a so bewegt, daß die 0 der Skale b unter dem Summanden auf der Skale a steht. Auf Skale b wird der 2. Summand aufgesucht. Auf Skale a erscheint über diesem die Summe. Unser Beispiel zeigt $3 + 5 = 8$. Jede Summe hat ihren eigenen Platz auf Skale a .

Bei Bild 2 sind die Skalen gegenläufig aufgetragen. Zur Addition von $3 + 5$ stellen wir die Skale b so ein, daß die 3 unter der 5 der Skale

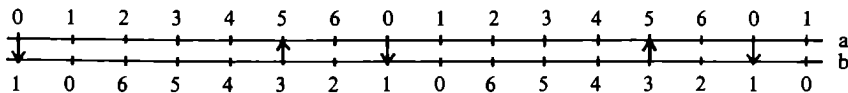
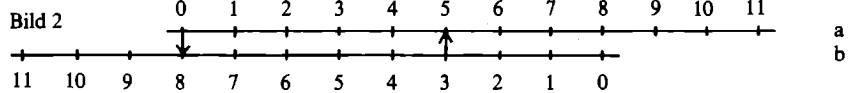
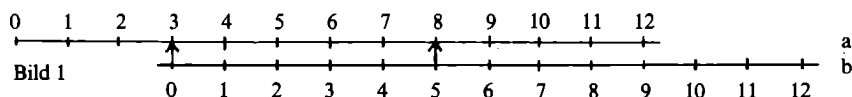


Bild 3

a steht. Die Summe 8 erscheint unter der 0 der festen Skale a. Bei jeder Addition erscheint die Summe an dieser festen Stelle.

Rechnen wir mit den Resten bei der Division durch 7, so erscheinen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0 periodisch, und wir tragen sie gegenläufig auf die beiden Skalen a und b auf und bekommen Bild 3.

Um die Summe $3 + 5$ zu bilden, stellen wir die Skale b so ein, daß die 3 unter die 5 von Skale a kommt. Unter der 0 von Skale a steht das Ergebnis 1. Es ist aber $1 = |8 : 7|$. Wir bekommen also gleich den Rest der Summe bei der Division durch 7. Dieses Ergebnis erscheint wegen der Periodizität unter jeder 0 der Skale a.

Tabelle 2 zeigt uns alle Zahlen Q, die ein Monat haben kann, in 7 Spalten geordnet. Addiert man zu diesen die Summe $K_j + K_m$ und bildet den Rest bei der Division durch 7, so bekommen wir die Kennzahl des entsprechenden Wochentages.

Die Werte für die Monate in einem Gemeinjahr aus Tabelle 1 schreiben wir um und ordnen die Monate unter ihre Kennzahlen ein und bekommen Tabelle 3. Nun können wir unseren Kalender bauen.

Um eine Drehscheibe zeichnen wir einen Kreisring, den wir in 28 gleiche Teile teilen. In diese Kreisringsektoren tragen wir im Gegenzegersinn, also mathematisch positiv, die Zahlen 0, 1, ..., 6 als Kennzahlen K_j der Jahre und außerdem 3mal die Wochentage von Sonntag bis Samstag ein, die ja auch den Kennzahlen 0, 1, ..., 6 entsprechen.

Auf einem festen Blatt zeichnen wir einen Kreis von der Größe der Drehscheibe. Außerhalb dieses Kreises tragen wir oben und unten in zwei sich gegenüberliegenden Quadranten, die wir je in 7 Spalten unterteilen, die Tabellen 3 oben und 2 unten auf. Die Drehscheibe befestigen wir konzentrisch auf dem festen Blatt. Ist uns die Kennzahl K_j des gegebenen Jahres bekannt, so addieren wir sie zu K_m , indem wir K_j auf dem Kreisring durch Drehung unter die Kennzahl K_m des gegebenen Monats einstellen. Dann erscheint nach Bild 3 die Summe unter der Spalte 0 (Jan., Okt.) und wegen der Periode 7 auch im 7. Feld mathematisch positiv gezählt, also genau vor der Tabelle 2. In dieser suchen wir die Zahl Q auf,

die zu $(K_j + K_m)$ nach Bild 1 addiert wird. Darüber erscheint auf dem Kreisring der Drehscheibe der Wochentag. Wir bekommen aber noch mehr. Die Wochentage auf dem Kreisring ergeben in der gefundenen Stellung mit Tabelle 2 zusammen das Kalenderblatt für den gegebenen Monat des gegebenen Jahres.

Um die Kennziffern K_j zur Hand zu haben, ordnen wir in Tabelle 4 die Jahre eines Jahrhunderts, bei 01 beginnend, fortlaufend in ein Schema von 7 Spalten und 18 Zeilen ein. Wir tragen die Schaltjahre 2mal hintereinander ein. Die Kennzahlen K_m der Monate nach dem 29. Februar sind in Tabelle 1 im Schaltjahr also um 1 größer als die entsprechenden K_m . Bei der Addition von $K_j + K_m$ gibt es dasselbe Resultat, ob wir K_j oder K_{mj} um 1 erhöhen.

In die erste Zeile der Tabelle 4 haben wir die Kennzahlen unseres Jahrhunderts geschrieben, die wir aus Formel 1 errechnen. Die letzten Zahlen in der 18. Zeile der Jahreszahlen sind unter den Kennziffern 5 und 6 je 100. Tabelle 4 tragen wir auf der Drehscheibe ein. Nach Dionysius Exiguus ist das Jahr 2000 das letzte unseres Jahrhunderts.

Ein solcher vom deutschen Mathematiker Goldstein errechneter Kalender war in der 2. Hälfte des vorigen Jahrhunderts im Handel. Er galt für die Jahre 1866 bis 1915. In der Schrift von Butkevitch/Selikson ist dieser Kalender nicht erwähnt.

Unser Kalender verliert für das Jahr 2001 seine Gültigkeit. Die Tabelle mit den Jahren im Jahrhundert läßt sich weiter verwerten. Man müßte die Kennzahlen für die Jahre 2001 u. ff. ausrechnen und die oberste Zeile ändern. Da die Zahlen in der Periode 1, 2, ..., 6, 0 immer wiederkehren, ersetzen wir die oberste Zeile K_j durch einen Schieber S, der die Periode 1, 2, ..., 6, 0 mehrmals trägt, und können ihn, wenn wir nur die Kennzahlen der Jahre $a \cdot 100 + 1$ ausrechnen, für jedes Jahrhundert u. Z. einstellen. Über 01 müssen wir $K_{a \cdot 100 + 1}$ einstellen.

Wir errechnen 2 Tabellen 5 und 6 nach den Formeln 1 und 2 für den julianischen und den gregorianischen Kalender. Aus diesen können wir die $K_{a \cdot 100 + 1}$ entnehmen und den Schieber danach einstellen.

Diese Tabellen tragen wir links und rechts von Tabelle 4 auf der Drehscheibe ein.

Durch den Schieber und die Tabellen bekommen wir einen langjährigen Kalender, der vom Jahre 1 u. Z. bis weit über die Gegenwart hinaus reicht. Aus unserer Konstruktion geht die Gebrauchsanweisung hervor.

1. Beispiel: Der erste Abschnitt der Eisenbahn Leipzig–Dresden von Leipzig bis Althen wurde am 24. April 1837 eingeweiht. Welcher Wochentag war damals?

In Tabelle 6 finden wir $K_{1801} = 3$ und stellen den Schieber S so ein, daß die 3 über 01 steht. In Tabelle 4 suchen wir das Jahr 37 und finden darüber auf dem Schieber 5 die Zahl 6. Die 6 suchen wir auf dem Kreisring der Drehscheibe auf und stellen sie unter April auf Tabelle 3. Auf Tabelle 2 suchen wir den 24. und finden darüber Montag. Also war der 24. April 1837 ein Montag.

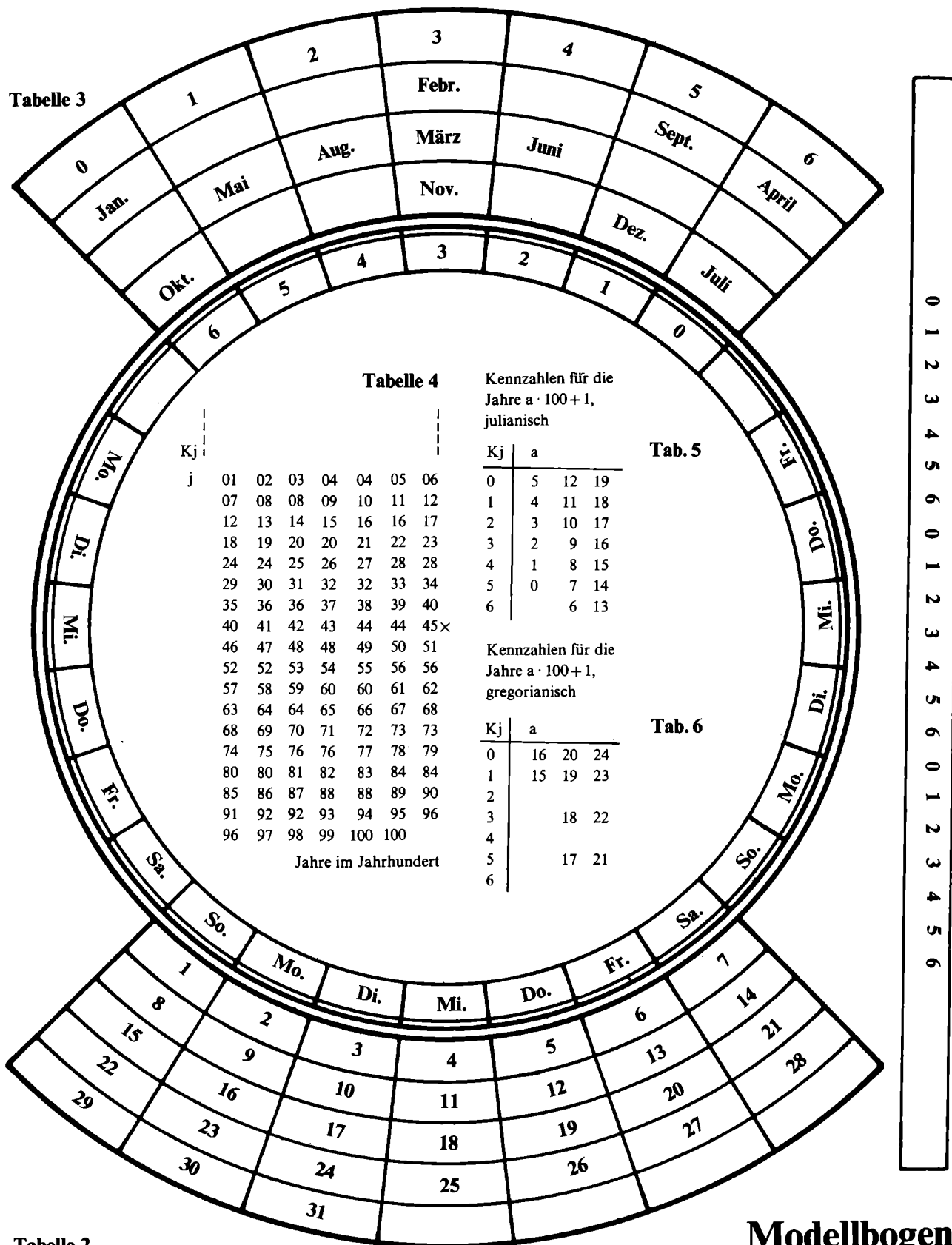
2. Beispiel: An welchem Wochentag entdeckte Kolumbus Amerika? Es war der 12. 10. 1492. 1401 hat in Tabelle 5 für den julianischen Kalender die Kennzahl 5. Den Schieber stellen wir so, daß über dem Jahre 01 die Kennzahl 5 steht. 1492 ist durch 4 ohne Rest teilbar, ist also ein Schaltjahr. Für Oktober gilt die zweite 92 auf Tabelle 4. Sie hat die Kennzahl 0 auf dem Schieber. Die 0 auf dem Rand der Drehscheibe stellen wir auf Oktober ein und finden über der 12 in Tabelle 2 für den Wochentag der Entdeckung Amerikas einen Freitag.

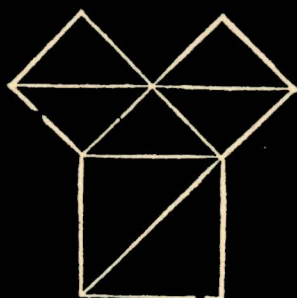
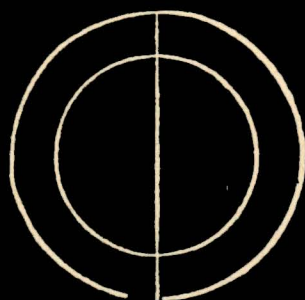
Wenn wir Daten suchen, die auf einen bestimmten Wochentag fallen sollen, gibt uns der Kalender auch Auskunft. Interessiert uns z. B., in welchen Jahren dieses Jahrhunderts der 1. Mai auf Sonntag fällt, so stellen wir den Schieber für dieses Jahrhundert ein. Aus Tabelle 6 entnehmen wir für 1901 die Kennzahl 1, die wir über die 01 von Tabelle 4 einstellen. Die Drehscheibe stellen wir so ein, daß Sonntag über der 1 von Tabelle 2 steht. Dann erscheint unter Mai auf Tabelle 3 die Kennzahl 5 auf der Drehscheibe. In allen Jahren, die auf Tabelle 4 unter der Kennzahl 5 stehen, bis auf die Schaltjahre, die unterstrichen sind, für die die Kennzahl nur für Januar und Februar gilt, fällt der 1. Mai auf Sonntag.

Die Mehrjahrkalender werden in der Planwirtschaft und von Historikern gebraucht. Für die Wirtschaft wäre allerdings eine Kalenderreform von Nutzen. Der neue Kalender müßte so genau wie der gregorianische sein. Zu jedem Tag im Jahr müßte aber ein fester Wochentag gehören. Das könnte man erreichen, wenn man die Woche von 7 Tagen und die Zahl der Tage im Monat, so wie wir sie kennen, beibehalten würde, bis auf den 31. 12., der ein wochentagsloser Festtag wäre. In Schaltjahren könnte man in der Mitte des Jahres auch einen wochentagslosen Festtag einschalten.

Es liegen schon viele Vorschläge zu einer solchen Kalenderreform vor. H. Möller

EWIGER KALENDER Anleitung: Kreis ausschneiden und auf Karton kleben, gestrichelte Linien einschneiden; Zeichnung und Tabellen 2 und 3 auf Karton kleben. Beide Teile durch Druckknopf verbinden(x). Schieber ausschneiden und durch Einschnitt schieben.

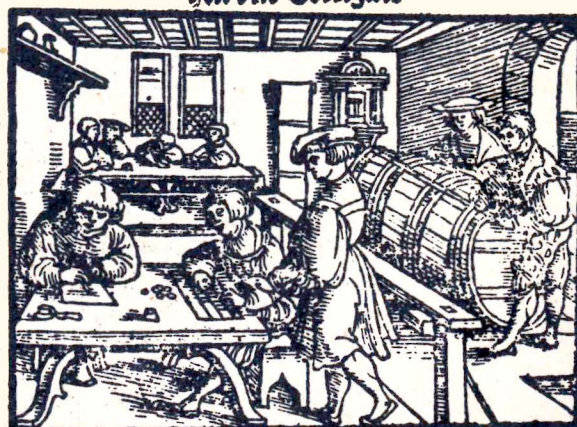




Adam Risen
Ueberechnung/ auff Linien
vnd Ziphren/ in allerley Hand
thierung / Geschäften vnd Kauffmans
schafft. Mit newen künstlichen Regeln vnd
Exempeln gemehret/ Inhalt für
gestellten Registers.

Visier vnd Wechselruthen künstlich
vnd gerecht zumachen/ auß dem Quadrat/
Durch die Arithmetie vnd Geometri / von
Erhart Helm/ Mathematico zu Frank-
furt/ beschrieben.

Alles von neuem jetzunde widerumb erse-
hen vnd Corrigirt.



Frankf. Bey. Chr. Egen. Erben. 1574.



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 73 Wir arbeiten mit Mengen, Teil 1 [7]*
Oberlehrer Dr. W. Fregin, IfL N. K. Krupskaja, Leipzig
- 77 Spiele mit Hölzchen [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
- 78 „Life“ – ein mathematisches Spiel, Teil 2 [6]
stud. math. R. Schuster, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig
- 80 XX. Internationale Mathematikolympiade 1978 [12]
Bukarest (3.7. bis 10.7.1978)
- 80 Eine Aufgabe von Prof. Dr. Jan Vyšin [10]
Prag
- 81 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt [4]
Eine Methode zur Ermittlung pythagoreischer Zahlentripel –
Aus der Arbeit des Kreisklubs *Junger Mathematiker* Gräfenhainichen
- 82 Das Einbeschreiben von Kreisen gleichen Durchmessers in ein
Quadrat [9]
Mathematikfachlehrer W. Zehrer, Netzschkau
- 83 Internationaler Mathematiker-Kongreß 1978 [8]
Aus „rozhledy“, Prag
- 84 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
J. Lehmann, Leipzig/H. Pätzold, Waren/Müritz
- 86 Im Gespräch mit einem Automaten [8]
Dipl.-Ing. Sibylle Nägler, Dipl.-Ing. Helmut Rudloff, Sektion Mathematik der Tech-
nischen Hochschule Leipzig
- 88 XVIII. Olympiade *Junger Mathematiker* der DDR [10]
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Aufgaben Klasse 10 – Preisträger
- 90 XIX. Olympiade *Junger Mathematiker* der DDR [5]
Aufgaben der 1. Stufe (Schulolympiade)
- 92 Lösungen [5]
- 96 Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen [6]
J. Lehmann, Leipzig/Th. Scholl, Berlin
- III. U.-Seite: Lustige Logeleien [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
- IV. U.-Seite: Ausschnitte aus einem Rechenbuch des Adam Ries (siehe
Titelblatt) [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig

Fotos: Vignette J. Jordan, Leipzig (S. 77);
Eigenfoto S. Grützner, Bischofswerda (S. 81);
K.-H. Müller, Leipzig (S. 86); J. Lehmann,
Leipzig (S. 88/89);

Titelblatt: W. Fahr, Berlin (nach Motiv-
auswahl von J. Lehmann, Leipzig)

Typographie: H. Tracksdorf

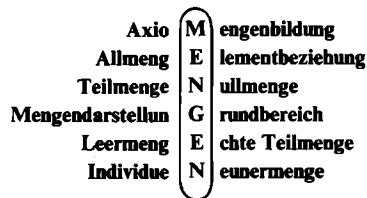


Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97

Redaktionsschluß: 18. April 1979

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Wir arbeiten mit Mengen



Das Wort *Menge* ist von der Umgangssprache in die mathematische Fachsprache übernommen worden und hat eine andere Bedeutung erhalten. In der Mathematik stellt man sich unter einer Menge eine Gesamtheit von Individuen vor, die meist nach ganz bestimmten Gesichtspunkten aus einem fest vorgegebenen Grundbereich ausgewählt und zusammengefaßt werden. Gibt man sich z. B. als Grundbereich alle natürlichen Zahlen vor, so kann man nach dem Mengenbildungsaxiom für Mengen 1. Stufe beispielsweise folgende Menge bilden:

Die Menge aller derjenigen natürlichen Zahlen, die größer als 5 und kleiner als 20 und durch 3 teilbar sind.

Wir erhalten $M = \{6, 9, 12, 15, 18\}$.

Bezeichnet man die Eigenschaften (größer als 5 und kleiner als 20 und durch 3 teilbar) mit $H(x)$, so kann man nach dem Mengenbildungsaxiom sagen:

„Es gibt eine Menge M , zu der alle die, aber auch nur die Individuen x gehören, für die die Eigenschaft(en) $H(x)$ zutrifft (zutreffen)“ oder „Das Individuum x ist ein Element der Menge M genau dann, wenn für x die Eigenschaft(en) H zutrifft (zutreffen).“

In Symbolik: $x \in M \leftrightarrow H(x)$.

Mengen lassen sich auf verschiedene Arten angeben (darstellen, veranschaulichen).

$M = \{6, 9, 12, 15, 18\}$ nennen wir elementweise Darstellung. Bei einer solchen müssen alle Elemente einzeln aufgeschrieben werden. Die gleiche Menge läßt sich auch angeben,

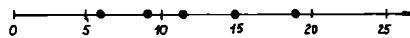
indem man schreibt, aus welchem Grundbereich die Elemente stammen und welche Eigenschaften sie besitzen müssen, also allgemein:

$$M = \{x \in I; H(x)\}.$$

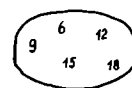
Für unsere Beispielmengengruppe M wäre die folgende Schreibweise möglich:

$$M = \{x \in \mathbb{N}; 5 < x < 20 \wedge 3 \mid x\}. (\wedge : \text{und})$$

Natürlich kann man diese Menge auch graphisch veranschaulichen, indem man z. B. auf der Zahlengeraden oder auf dem Zahlenstrahl diejenigen Punkte besonders markiert, denen die Zahlen der betreffenden Menge zugeordnet sind.



Schließlich läßt sich auch ein Mengendiagramm entwerfen:



Diese Darstellung soll verdeutlichen, daß man sich um die Elemente der Menge gewissermaßen eine „Hülle“ denkt. Die Reihenfolge bzw. Anordnung der Elemente spielt keine Rolle.

Es gilt $\{6, 9, 12, 15, 18\} = \{6, 12, 18, 15, 9\} = \{18, 6, 12, 9, 15\} = \dots$

Arbeitsblatt 1

	Wortdarstellung (verbale Darstellung)	elementweise Darstellung	Darstellung mit Hilfe von Grundbereich und Aussageform $H(x)$
1.	Die Menge der ersten zehn natürlichen Zahlen	$M_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$	$M_1 = \{x \in \mathbb{N}; 0 \leq x \leq 9\}$
2.	Die Menge aller durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen, die kleiner als 24 sind		
3.	Die Menge aller nichtnegativen Vielfachen der 7 bis höchstens 37		
4.	Die Menge aller ganzen Zahlen zwischen 99 und 100		
5.	Die Menge aller Teiler von -8		
6.	Die Menge aller nichtnegativen Vielfachen der 6, die kleiner als 30 sind		
7.	Die Menge aller zwischen 3 und 5 liegenden rationalen Zahlen		
8.	Die Menge aller Teiler von 12, die größer oder mindestens gleich -10, aber kleiner oder höchstens gleich 10 sind		
9.	Die Menge aller natürl. Zahlen zwischen 43 und 50, die bei Div. durch 3 den Rest 1 lassen		
10.	Die Menge aller positiven ganzen Zahlen, die kleiner als 100, Vielfache von 9 und durch 12 teilbar sind		

Die „Allmenge“ und auch die „leere Menge“ sind spezielle Mengen. Die Allmenge über einen bestimmten Grundbereich enthält alle Elemente dieses Grundbereichs und keine anderen. Die leere Menge enthält kein einziges Element (in Zeichen $\emptyset$). Im folgenden Arbeitsblatt wollen wir uns im Angeben von Mengen üben. Die freien Felder sind nach dem Beispiel 1 auszufüllen.

Teilmengenbeziehungen

Wir denken uns die Menge aller Schüler einer Klasse, etwa der Klasse 7a der 31. POS in Leipzig, und bezeichnen diese Menge mit M . Wählen wir aus dieser Menge M nun Schüler mit besonderen Eigenschaften, Merkmalen oder Tätigkeiten aus und fassen diese zu einer Menge zusammen! Als Beispiele könnten wir uns folgende Mengen denken:

A sei die Menge aller Schüler dieser Klasse 7a, die die Zeitschrift *alpha* abonniert haben; B sei die Menge aller Schüler dieser Klasse 7a, die eine Arbeitsgemeinschaft besuchen; C sei die Menge aller Schüler dieser Klasse 7a, die Pioniere sind.

Jedesmal haben wir eine Teilmenge der Menge aller Schüler dieser Klasse 7a gebildet. Wir sagen: A ist eine Teilmenge von M und schreiben dafür $A \subseteq M$.

Es könnte möglich sein, daß alle Schüler dieser Klasse 7a die Zeitschrift *alpha* abonniert haben. Dann sagen wir:

A ist eine (unechte) Teilmenge von M ($A \subseteq M$). Da wir in diesem Falle genau wissen, daß beide Mengen gleich sind, können wir $A = M$ schreiben.

Wenn aber nicht alle Schüler dieser Klasse 7a die Zeitschrift *alpha* abonniert haben, wenn es also mindestens einen Schüler dieser Klasse gibt, der die *alpha* nicht abonniert hat, dann sagen wir:

A ist eine echte Teilmenge von M und schreiben $A \subset M$. Jede echte Teilmenge von M ist natürlich erst recht eine Teilmenge von M , während nicht jede Teilmenge von M etwa eine echte Teilmenge sein muß!

Nun läßt sich verallgemeinern:

Seien A und B beliebige Mengen.

Es ist A eine Teilmenge von B genau dann, wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist.

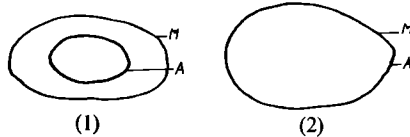
($A \subseteq B \leftrightarrow \forall x: x \in A \rightarrow x \in B$)

Es ist A eine echte Teilmenge von B genau dann, wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist und wenn es in der Menge B mindestens ein Element gibt, das nicht Element der Menge A ist.

($A \subset B \leftrightarrow \forall x: x \in A \rightarrow x \in B \wedge \exists x \in B: x \notin A$)

Zur Veranschaulichung mögen die folgenden Mengendiagramme dienen:

M : Die Menge aller Schüler der Klasse 7a
 A : Die Menge aller *alpha*-Abonnenten dieser Klasse 7a



(1) A ist eine Teilmenge, sogar eine echte Teilmenge von M . Jeder *alpha*-Abonnent dieser Klasse ist auch ein Schüler dieser Klasse; es gibt aber mindestens einen Schüler dieser Klasse, der die *alpha* nicht abonniert hat.

Es gilt $A \subseteq M$, sogar $A \subset M$

(2) A ist eine Teilmenge von M .

Jeder *alpha*-Abonnent dieser Klasse ist auch ein Schüler dieser Klasse. Es ist aber auch jeder Schüler dieser Klasse ein *alpha*-Abonnent.

Es gilt $A \subseteq M$, sogar $A = M$.

Auf dem folgenden Arbeitsblatt sind in jeder Aufgabe einige Mengen vorgegeben. Nach dem Beispiel 1 sollen alle möglichen echten Teilmengenbeziehungen, die zwischen den vorgegebenen Mengen existieren, aufgeschrieben werden.

Arbeitsblatt 2

	vorgegebene Mengen	echte Teilmengenbeziehungen
1.	N : Die Menge aller natürlichen Zahlen G : Die Menge aller ganzen Zahlen Z : Die Menge aller durch 2 teilbaren natürlichen Zahlen V : Die Menge aller durch 4 teilbaren Zahlen	$N \subset G, Z \subset V$ $Z \subset N,$ $Z \subset G,$ $V \subset G,$
2.	B : Die Menge aller Bäume B_A : Die Menge aller Apfelbäume B_L : Die Menge aller Laubbäume B_O : Die Menge aller Obstbäume	
3.	N : Die Menge aller natürlichen Zahlen N_3 : Die Menge aller durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen N_9 : Die Menge aller durch 9 teilbaren natürlichen Zahlen G_9 : Die Menge aller durch 9 teilbaren ganzen Zahlen	
4.	R : Die Menge aller Rechtecke V : Die Menge aller Vierecke Q : Die Menge aller Quadrate D : Die Menge aller Drachenvierecke	
5.	W : Die Menge aller Würfel P : Die Menge aller Pyramiden Q : Die Menge aller Quader P_1 : Die Menge aller Prismen	
6.	S : Die Menge aller Sehnen des Kreises k D : Die Menge aller Durchm. des Kreises k R : Die Menge aller Radien des Kreises k G : Die Menge aller Geraden, auf denen Sehnen von k liegen Z : Die Menge aller Zentralen von k	
7.	G : Die Menge aller Gleichungen G_1 : Die Menge aller Gleichungen mit genau einer Variablen G_2 : Die Menge aller linearen Gleichungen mit genau einer Variablen G_3 : Die Menge aller linearen Gleichungen mit genau einer Variablen, die keine Lösung haben	

Mengenoperationen

Denken wir uns die Menge aller Einwohner der Stadt A zu einem ganz bestimmten Zeitpunkt. Bezeichnen wir diese Menge mit M und bilden nun die folgenden Teilmengen:

M_1 sei die Menge aller Einwohner der Stadt A , die älter als 25 und jünger als 50 Jahre sind;

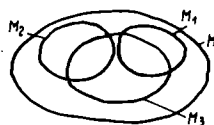
M_2 sei die Menge aller Einwohner der Stadt A , die Altersrentner sind;

M_3 sei die Menge aller Einwohner der Stadt A , die eine Fahrerlaubnis besitzen.

Sicher gilt $M_1 \subset M$, $M_2 \subset M$ und auch $M_3 \subset M$.

Sicher stehen M_1 und M_2 in keiner Teilmengenbeziehung zueinander, denn kein Einwohner zwischen 25 und 50 Jahren kann Altersrentner sein und umgekehrt. Solche Mengen nennt man elementfremd (disjunkt).

Betrachten wir die Menge M_3 , die alle Fahrerlaubnisbesitzer enthält, so können solche Einwohner der Stadt A Altersrentner sein, aber auch zwischen 25 und 50 Jahren. Es wird sicher auch solche Besitzer einer Fahrerlaubnis geben, die 25 Jahre oder jünger sind oder 50 Jahre oder älter, aber noch keine Altersrentner. Das heißt, ein Teil von M_3 liegt in M_1 , ein Teil in M_2 und ein Teil weder in M_1 noch in M_2 , aber natürlich in M . Das Mengendiagramm könnte man wie folgt zeichnen:



Auf dem folgenden Arbeitsblatt 3 sollen jeweils die Flächenstücke schraffiert werden, die der angegebenen Menge graphisch entsprechen. Beispiel 1 ist wieder vorgegeben.

Wer das Arbeitsblatt 3 fehlerlos ausgefüllt hat, hat schon richtig mit Mengen operiert, vielleicht ohne sich dessen voll bewußt zu sein.

Beziehen wir uns zunächst auf das Beispiel 5. Die Menge M_2 wurde mit der Menge M_3 vereinigt. Die Vereinigungsmenge (gesprochen: „ M_1 vereinigt mit M_2 “; geschrieben: $M_1 \cup M_2$) enthält diejenigen Einwohner der Stadt A – aber auch nur diese –, die Altersrentner sind oder eine Fahrerlaubnis besitzen.

Man kann sich vorstellen, daß jeder Einwohner der Stadt A die Fragen vorgelegt bekommt „Sind Sie Altersrentner?“ und „Haben Sie eine Fahrerlaubnis?“ Wird wenigstens eine dieser Fragen mit „ja“ beantwortet, gehört der Betreffende zur Menge $M_2 \cup M_3$, natürlich auch dann, wenn beide Fragen bejaht werden.

Wir können nun allgemein sagen:
Es seien A und B beliebige Mengen. Ein Individuum x gehört zur Vereinigungsmenge

Arbeitsblatt 3

1.	Die Menge aller Einwohner der Stadt A , die Altersrentner sind und keine Fahrerlaubnis besitzen.	
2.	Die Menge aller Einwohner der Stadt A , die eine Fahrerlaubnis besitzen, aber weder Altersrentner noch zwischen 25 und 50 Jahren alt sind.	
3.	Die Menge aller Einwohner der Stadt A , die zwischen 25 und 50 Jahren alt sind und eine Fahrerlaubnis besitzen.	
4.	Die Menge aller Einwohner der Stadt A , die 25 Jahre oder jünger sind oder 50 Jahre oder älter, aber keine Altersrentner sind und keine Fahrerlaubnis besitzen.	
5.	Die Menge aller Einwohner der Stadt A , die Altersrentner sind oder eine Fahrerlaubnis besitzen.	
6.	In dieses Mengendiagramm soll die Menge aller Kinder eingezeichnet werden, die den Kindergarten besuchen (Einwohner der Stadt A !).	
7.	In dieses Mengendiagramm soll die Menge aller Schüler bis zur 10. Klasse der POS eingezeichnet werden (Einwohner der Stadt A !).	
8.	In dieses Diagramm soll die Menge aller Brillenträger der Stadt A eingezeichnet werden.	
9.	Die Menge aller Einwohner der Stadt A , die Altersrentner sind und eine Fahrerlaubnis besitzen.	
10.	Die Menge aller Einwohner der Stadt A zwischen 25 und 50 Jahren ohne Fahrerlaubnis.	

$A \cup B$ genau dann, wenn x zur Menge A oder zur Menge B gehört.

$$(x \in (A \cup B) \leftrightarrow x \in A \vee x \in B).$$

Das Bindewort „oder“ wird in der Mathematik im einschließenden Sinne gebraucht.

Beispiel: Wenn wir die Hausaufgaben ordentlich anfertigen oder im Unterricht gut aufpassen, werden wir gute Leistungen erzielen. Jeder wird sicher uneingeschränkt zustimmen, daß wir auch dann gute Leistungen erzielen werden, wenn wir beides tun. Das „Oder“ schließt also das „Und“ nicht aus! Soll aber das „Und“ ausgeschlossen werden, so müssen wir die Bindewörter „entweder – oder“ verwenden.

Beispiel: Der Schüler Müller geht entweder in die Klasse 6a oder in die Klasse 6b.

Wir werden sofort verstehen, daß dieser Schüler nicht in beiden Klassen zugleich sein kann.

Da diese Unterscheidung in der Umgangssprache oft nicht genügend beachtet wird, werden in der Mengenlehre manchmal Fehler gemacht, wenn Vereinigungsmengen gebildet werden sollen. Deshalb wollen wir uns zu dieser Problematik noch ein mathematisches Beispiel ansehen:

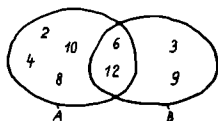
Es sollen zwei Mengen M_1 und M_2 gebildet werden. M_1 sei die Menge aller natürlichen Zahlen von 1 bis 12, die durch 2 oder durch 3 teilbar sind; M_2 sei die Menge aller natürlichen Zahlen von 1 bis 12, die entweder durch 2 oder durch 3 teilbar sind.

Wir erhalten

$$M_1 = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\} \text{ und}$$

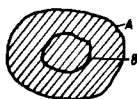
$$M_2 = \{2, 3, 4, 8, 9, 10\}$$

Wir sehen, daß die Zahlen 6 und 12, die durch 2 und durch 3 teilbar sind, in der Menge M_1 enthalten sind, in der Menge M_2 jedoch nicht. Man kann sich die Menge M_1 auch entstanden denken durch die Vereinigung zweier Mengen, und zwar der Menge A aller natürlichen Zahlen von 1 bis 12, die durch 2 teilbar sind und der Menge B aller natürlichen Zahlen von 1 bis 12, die durch 3 teilbar sind. Dazu ließe sich das folgende Mengendiagramm zeichnen:

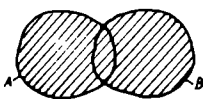


Wir wollen nun noch verschiedene Fälle graphisch veranschaulichen und bringen auch noch Beispiele, bei denen die Elemente von Mengen natürliche Zahlen sind.

(1)



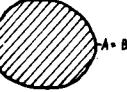
(2)



(3)



(4)



Es wurde stets $A \cup B$ schraffiert!

$$(1) \quad A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{2\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3\}$$

$$(2) \quad A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{2, 3, 4\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$(3) \quad A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{4, 5\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$(4) \quad A = \{1, 2\}$$

$$B = \{1, 2\}$$

$$A \cup B = \{1, 2\}$$

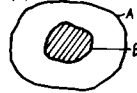
Wenden wir uns nun dem Beispiel 9 zu. Hier wurde der Durchschnitt der Mengen M_2 und M_3 gebildet (gesprochen: „ M_2 geschnitten mit M_3 “ oder „ M_2 Durchschnitt M_3 “, geschrieben: $M_2 \cap M_3$).

In dieser Durchschnittsmenge liegen alle diejenigen Einwohner der Stadt A – aber auch nur diese –, die sowohl Altersrentner als auch Fahrerlaubnisbesitzer sind (beides also gleichzeitig). Nur wer beide Fragen mit „ja“ beantwortet, gehört zur Menge $M_2 \cap M_3$.

Allgemein läßt sich formulieren:

Es seien A und B beliebige Mengen. Ein Individuum x gehört zur Durchschnittsmenge $A \cap B$ genau dann, wenn x zur Menge A und auch zur Menge B gehört. ($x \in (A \cap B) \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$). Analog zur Vereinigungsmenge folgen auch hier Beispiele.

(1)



(2)



(3)



(4)



Es wurde stets $A \cap B$ schraffiert!

$$(1) \quad A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{2\}$$

$$A \cap B = \{2\}$$

$$(2) \quad A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{4, 5\}$$

$$A \cap B = \emptyset$$

$$(3) \quad A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{2, 3, 4\}$$

$$A \cap B = \{2, 3\}$$

$$(4) \quad A = \{1, 2\}$$

$$B = \{1, 2\}$$

$$A \cap B = \{1, 2\}$$

Im Beispiel 1 müssen zunächst die Einwohner Altersrentner sein, also der Menge M_2 angehören. Sie dürfen aber keine Fahrerlaubnis besitzen, also der Menge M_3 nicht angehören. Es wurde die Differenz der Mengen M_2 und M_3 gebildet.

Zur Differenzmenge $M_2 \setminus M_3$ (M_2 Differenz M_3) gehören alle diejenigen Elemente – und nur diese –, die zur Menge M_2 aber nicht zur Menge M_3 gehören.

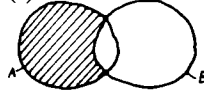
Allgemein kann man formulieren:

Seien A und B beliebige Mengen. Ein Individuum x ist ein Element der Differenzmenge $A \setminus B$ genau dann, wenn x ein Element von A und kein Element von B ist. ($x \in (A \setminus B) \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$) **Beispiele:**

(1)



(2)



(3)



(4)



Es wurde stets $A \setminus B$ schraffiert!

$$(1) \quad A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{2\}$$

$$A \setminus B = \{1, 3\}$$

$$(2) \quad A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{2, 3, 4\}$$

$$A \setminus B = \{1\}$$

$$(3) \quad A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{4, 5\}$$

$$A \setminus B = \{1, 2, 3\}$$

$$(4) \quad A = \{1, 2\}$$

$$B = \{1, 2\}$$

$$A \setminus B = \emptyset$$

Wir erkennen nun, daß auf dem Arbeitsblatt 3 folgende Mengen dargestellt sind:

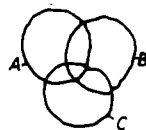
1. $M_2 \setminus M_3$
2. $M_3 \setminus M_1 \setminus M_2$
3. $M_1 \cap M_3$
4. $M_1 \setminus M_1 \setminus M_2 \setminus M_3$
5. $M_2 \cup M_3$
6. $M_2 \cap M_3$
7. $M_1 \setminus M_3$

Im folgenden Arbeitsblatt 4 wollen wir uns im Operieren mit Mengen üben.

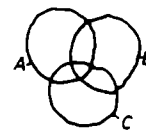
Arbeitsblatt 4

1.

$$A \cap B \cap C$$

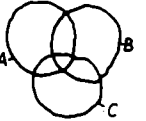


$$2. \quad (A \cap B) \setminus C$$



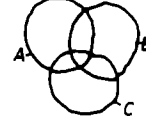
3.

$$(A \cup B) \setminus C$$



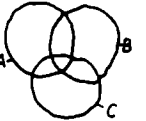
4.

$$(A \setminus B) \cap C$$



5.

$$(A \setminus B) \cap C$$



6.

$$(A \cup B) \setminus C$$



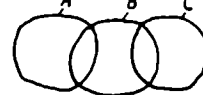
7.

$$A \cap B \cap C$$



8.

$$B \setminus A \setminus C$$



9.

$$(A \cap B) \cup (B \cap C)$$

10.

Gegeben seien

$$A = \{6, 7, 8, 9\};$$

$$B = \{5, 6, 10\};$$

$$C = \{3, 6, 9, 12, 15\}.$$

Man bilde folgende Mengen:

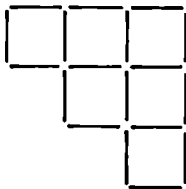
$$\begin{array}{ll} A \cup B & A \setminus C \\ A \cup C & C \setminus A \\ B \cup C & B \setminus C \\ A \cap B & C \setminus B \\ A \cap C & A \cup B \cup C \\ B \cap C & A \cap B \cap C \\ A \setminus B & A \setminus B \setminus C \\ B \setminus A & (A \cap B) \setminus C \end{array}$$

W. Fregin



Spiele mit Hölzchen

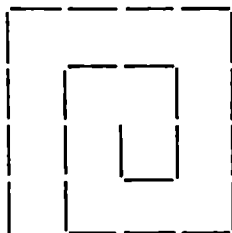
▲1▲ Aus 18 Hölzchen kann man diese Figur mit 6 Quadraten legen. Nimm aus der Figur 6 oder 5 oder 4 oder 2 Hölzchen weg! Stets bleiben 4 Quadrate übrig.



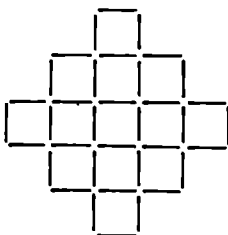
▲2▲ Wie macht man aus 3 Quadraten 4 Quadrate, ohne die Lage der Hölzchen der beiden ersten Quadrate beim Umlegen zu verändern?



▲3▲ a) Bilde durch Umlegen von 4 Hölzchen aus dieser Figur 3 Quadrate!
b) Lege in der gleichen Figur 4 Hölzchen so um, daß 2 gleich große Quadrate zu erkennen sind!



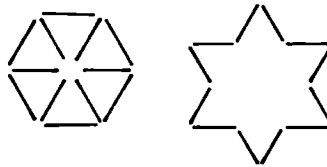
▲4▲ Entferne aus der Figur 16 Hölzchen; es sollen 12 gleich große Quadrate übrig bleiben!



▲5▲ Bilde aus 10 Hölzchen eine Figur, die drei gleichgroße Quadrate enthält!

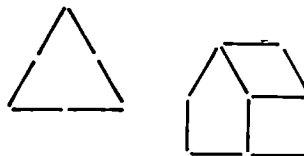


▲6▲ Diese sechs kongruenten gleichseitigen Dreiecke sollen durch Umlegen von 3 Hölzchen in sechs kongruente Parallelogramme verwandelt werden.



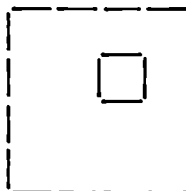
▲7▲ Von den 12 Hölzchen, die diesen Stern bilden, sollen 6 Hölzchen so umgelegt werden, daß drei gleich große, symmetrisch liegende Vierecke entstehen.

▲8▲ a) Durch Umlegen von 3 Hölzchen in dieser Figur soll ein Sechseck entstehen.
b) Verwandle das aus 6 Hölzchen gelegte Dreieck in zwei Dreiecke!
c) Ich gebe dir noch 3 Hölzchen. Diese sollst du in die Figur so legen, daß du nunmehr vier kongruente Dreiecke erhältst.



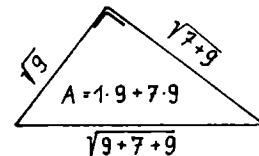
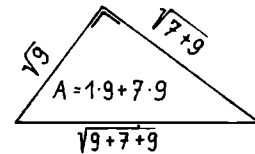
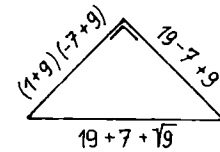
▲9▲ Hier wurde das Bild eines Hauses aus 10 Hölzchen gelegt. Lege zwei Hölzchen so um, daß der Hausgiebel auf der anderen Seite liegt!

▲10▲ Die gelegte Figur soll einen quadratischen Garten, in dem sich ein kleiner quadratischer Teich befindet, darstellen. Die Gartenfläche soll mittels weiterer 10 Hölzchen in fünf flächen- und formgleiche Beete aufgeteilt werden.



„Seit wann ist Ihr Sohn denn so fleißig, Frau Müller?“ – „Seit er Hölzchen für die *alpha* braucht!“

$$1979 = 197 \cdot 9 + 197 + 9$$



$$\begin{aligned} 1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 9 &= 1 \cdot \sqrt{9} \cdot 7 \cdot \sqrt{9} \cdot (1+9-7) \cdot \sqrt{9} \\ &= \sqrt{1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 9} \cdot (19-7-\sqrt{9}) \\ &= (\sqrt{1 \cdot 9 + 7 \cdot 9}) \cdot (-1 + \sqrt{9+79}) \\ &= (197-9+1979) \cdot (19-7-9) \\ &= (1+9-7) \cdot \sqrt{9} \cdot (19-7-9) \\ 1+9-7-9 &= 1,9-7,9 \\ 19+79 &= (1+9+\sqrt{7+9}) \cdot (\sqrt{1 \cdot 9} + \sqrt{7+9}) \\ 19-79 &= (1+9) \cdot (7-9) \cdot (19-7-9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= (1+9) \cdot 7 \cdot \sqrt{9} \\ U &= -1 \cdot 9 + 79 \\ S &= 19 + 7 + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^9 + 7 - 9 &= 1 \\ -1^9 \cdot 7 + 9 &= 2 \\ 1^9 - 7 + 9 &= 3 \\ 1^9 \cdot \sqrt{7+9} &= 4 \\ 1 \cdot \sqrt{9+7+9} &= 5 \\ -1 + 9 + 7 - 9 &= 6 \\ 1 \cdot 9 + 7 - 9 &= 7 \\ 1 + 9 + 7 - 9 &= 8 \\ 1^9 + 7 \cdot 9 &= 9 \\ 1^9 \cdot 7 + \sqrt{9} &= 10 \end{aligned}$$

Die Raumdiagonale eines Quaders mit quadratischer Grundfläche mißt $\sqrt{1979}$ cm. Wie groß sind die Kantenlängen des Quaders, wenn nur ganzzahlige Werte zugelassen sind?

Die 16 Teilnehmer einer Werkgruppe basteln Würfel mit ganzzahligen Seitenlängen. Beim Berechnen der Rauminhalte stellt sich heraus, daß sich die 16 Würfel zu 4 Vierergruppen ordnen lassen, wobei die Summe der Würfelvolumen in jeder Gruppe 1979 ergibt. Welche Seitenlängen haben die vier Würfel jeder Gruppe?

Diese Zahlenspiele stammen aus der Feder von Ing. H. Decker, Köln; A. Fittke, EOS H. Hertz, Berlin (Kl. 11); stud. math. W. Förg-Rob, Schwaz (Osterreich); W. Hoppe, OS Marienberg (Kl. 7).

„Life“ – ein mathematisches Spiel

Teil 2

Der Leser könnte zunächst vermuten, daß die in der vorigen Ausgabe dieser Zeitschrift vorgestellten Spielregeln recht willkürlich gewählt seien, doch dies ist keineswegs der Fall. Um das Spiel interessant zu gestalten, hat Conway das Augenmerk darauf gerichtet, die Regeln so festzulegen, daß die Lebensgeschichte nicht ohne weiteres aus der Anfangskonfiguration abzulesen ist. Es soll keine „sofort auffindbare“ Ausgangskonfiguration geben, die beliebig wächst. Obwohl der Leser gewiß keine solche gefunden hat, gibt es eine derartige Erscheinung aber dennoch. Darauf werde ich noch zurückkommen. Zunächst fällt schnell auf, daß es Ausgangskonfigurationen gibt, die bald „aussterben“, wie die Beispiele in Bild 1 zeigen.

Eine andere Dreierkonfiguration wird schon in der nächsten Generation zu einem stabilen „Block“, d. h., eine weitere Anwendung der Regeln bewirkt keine weitere Veränderung mehr (Bild 2).

Die einfachste Möglichkeit für eine sich periodisch verändernde Figur ist der „Blinker“ (Bild 3).

Drei Viererkonfigurationen führen nach 2 bis 3 Generationen zu einer stabilen Anordnung, für die die Bezeichnung „Honigwabe“ geprägt wurde (Bild 4).

Der Leser kann sich die Zwischenschritte selbst überlegen. Nach der recht kurzen Lebensgeschichte dieser Viererkonfiguration ist es erstaunlich, daß eine andere Viererkonfiguration 10 Generationen benötigt, um zu einem periodischen Verhalten zu gelangen. Dabei tritt noch eine Verdreifachung der Anzahl der Steine auf (Bild 5).

Die letzte Figur setzt sich aus 4 unabhängigen „Blinkern“ zusammen. Man hat dafür den Begriff „Verkehrsampel“ geprägt. Damit ist die Lebensgeschichte sämtlicher Tetrominos (Konfigurationen aus vier zeilen- und spaltenweise zusammenhängenden Steinen) aufgezeigt.

Der Leser kann nun die Entwicklung der 12 Pentominos untersuchen. Dabei wird sich herausstellen, daß 6 davon vor der 5. Generation verschwinden, 2 erreichen schnell eine stabile Anordnung, die aus 7 Steinen besteht, und weitere 3 verwandeln sich bald in „Verkehrsampeln“. Eine Überraschung ist der in Bild 6 dargestellte Pentomino.



Bild 1

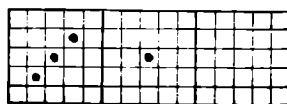


Bild 2

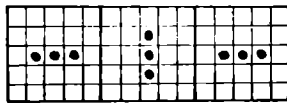


Bild 3

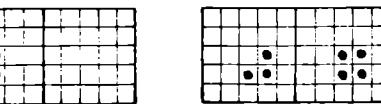


Bild 4

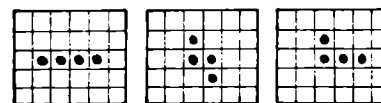


Bild 4

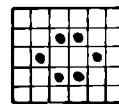
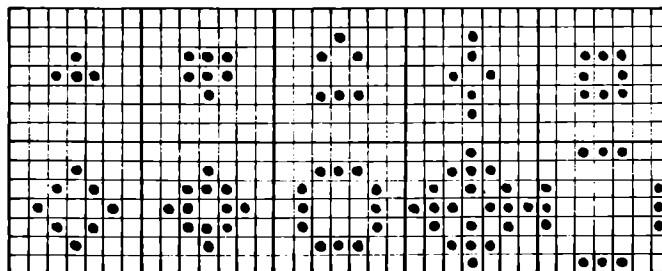
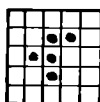


Bild 5

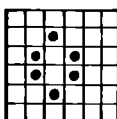
Bild 6



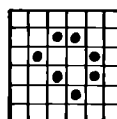
Verkehrsampel

Diese Konfiguration verschwindet weder in absehbarer Zeit, noch wird sie stabil oder geht in eine oszillierende Anordnung über. Conway hat das Geschehen 460 Züge verfolgt, ohne ein erkennbares Schicksal zu finden. Der Leser beachte, daß zunächst feststellbare Ausbreitung kein Beweis für unbegrenztes Wachstum ist. Es wäre bei der starken Unregelmäßigkeit durchaus denkbar, daß nach endlichen Generationen endlich viele unabhängige stabile oder oszillierende Teile entstehen oder gar wieder alles „abstirbt“.

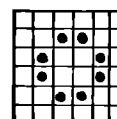
Bild 7



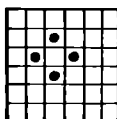
Honigwabe



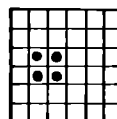
Brotlaib



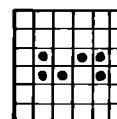
Teich



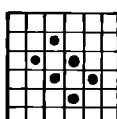
Faß



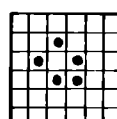
Block



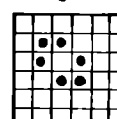
Schlange



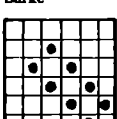
Barke



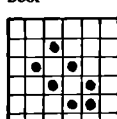
Boot



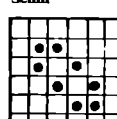
Schiff



Lange Barke



Langes Boot



Langes Schiff

Dem Leser werden sicher schon einige der einfachen stabilen Anordnungen aufgefallen sein (Bild 7).

Für eine aus 5 Steinen bestehende Figur wurde der Name „Segler“ („Glider“) geprägt (Bild 8). Nach 2 Generationen finden wir die gleiche Figur zunächst gespiegelt, und nach 4 Generationen hat sich die Konfiguration lediglich ein Kästchen nach rechts unten bewegt. Dadurch entfernt sich der „Segler“, nach jeweils 4 Zügen betrachtet, bei gleichbleibender Form beliebig weit. Die zunächst denkbare größte Geschwindigkeit einer wandernden Figur ist die eines Königs auf dem Schachbrett; Conway nannte sie Lichtgeschwindigkeit. Obiger „Segler“ bewegt sich also diagonal mit dem Viertel der Lichtgeschwindigkeit. Conway hat bewiesen, daß dies die größtmögliche Diagonalggeschwindigkeit einer Figur ist. Es gibt noch weitere, sich bei gleichbleibender Figur bewegende Figuren (nach einigen Generationen jeweils betrachtet), die sogenannten „Raumschiffe“. Diese bewegen sich vertikal mit der Hälfte der Lichtgeschwindigkeit (nach 4 Generationen 2 Felder vorgerückt) (Bild 9). Bei der Bewegung entstehen kleine Abfallprodukte, die aber sofort wieder verschwinden. Wird der „Hauptkörper“ aber länger als 6 Steine, so werden Objekte „geboren“, die danach das „Raumschiff“ selbst zerstören. Es gibt jedoch trotzdem längere, sogenannte „Übergewichtige Raumschiffe“. Diese benötigen aber als Schutz vor der Selbstzerstörung Eskorten von kleineren „Raumschiffen“. Das längste Raumschiff, zu dessen Eskortierung 2 kleinere ausreichen, hat einen Hauptkörper aus 12 Steinen (Bild 10). Conway hat herausgefunden, daß ein Raumschiff mit einem

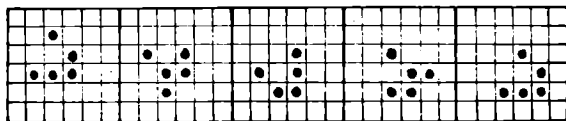


Bild 8

Hauptkörper von 100 Steinen sicher sich bewegen kann, wenn es von einer Flotille von 33 kleineren Raumschiffen begleitet wird. Eine Mittelstellung zwischen den „Raumschiffen“ und den stabilen Figuren nehmen die oszillierenden Konfigurationen ein (wie der schon genannte „Blinker“) (Bild 11).

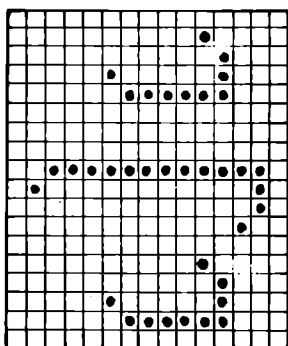
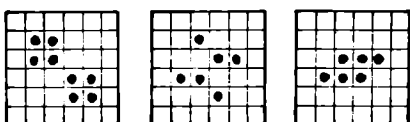


Bild 10



Leuchtturm

Uhr
(sie „tickt“)

Kröte

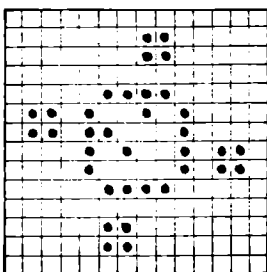
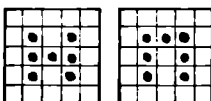


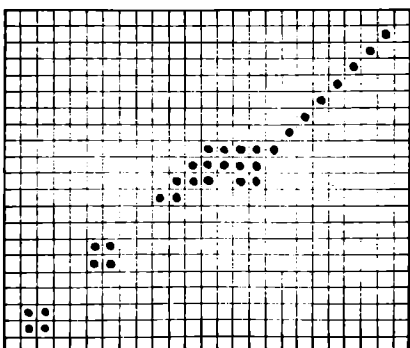
Bild 12



H

π

Bild 13



Getreidemähmaschine

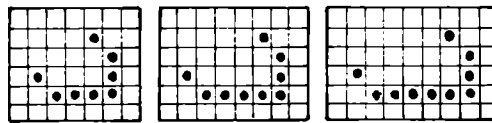
Es gibt auch periodische Figuren, die einen festen äußeren Rand haben, mit dessen Hilfe das Innere bewegt wird. Conway nennt sie „Billard-Tisch“-Konfigurationen. Ein Beispiel dafür ist das „Speichenrad“. Das Innere (die „Billardbälle“) dreht sich bei jedem Generationswechsel um 90° (Bild 12).

Geringe Veränderung der Ausgangsfigur kann drastische Folgen haben. So kommt der Buchstabe „H“ zu einem schnellen Ende; wird jedoch nur ein Stein um ein Feld verschoben, so daß der Buchstabe „ π “ vorliegt, so finden wir erst nach 173 Generationen 5 „Blinker“, 6 „Blöcke“ und 2 „Teiche“ als (periodisches) Ergebnis (Bild 13).

Eine interessante Lebensgeschichte finden wir auch bei der „Getreidemähmaschine“. Das abzuerntende Feld ist eine sehr lange Diagonale von Steinen. Die Maschine bewegt sich nun diagonal entlang dem Feld, „erntet“, „bündelt in Garben“ und läßt diese dann hinter sich stehen (Bild 14).

Zu einem strategischen Spiel wird „Life“ durch zwei Konfigurationstypen, auf der einen Seite solche, die Geschosse abfeuern, andererseits Figurenschlucker, die, wie ihr Name sagt, andere Figuren verschlucken, ohne dadurch verändert zu werden (als pe-

riodische Figuren). Dies ist das Ergebnis der im letzten Artikel erwähnten Preisaufgabe. Wissenschaftler vom „Project of Artificial Intelligence“ vom „Massachusetts Institute of Technology“ hatten dem Computer einfach die Aufgabe gestellt, ein Gegenbeispiel zur im vorigen Artikel erwähnten Endlichkeitsbehauptung zu finden. Herausgekommen ist dabei die „Glider Gun“ („Segler-Kanone“), ein räumlich fixierter Oszillator, der nach 30 Generationen in seine ursprüngliche Gestalt übergeht und dabei jeweils einen „Glider“ abfeuert, der dann über das Spielfeld wandert. Durch die Periodizität ist gesichert, daß eine unbegrenzte Zahl von Glidern produziert wird (die sich offensichtlich auch nicht gegenseitig beeinflussen). Man kann das unbegrenzte Wachstum aber verhindern, indem man den Glidern einen „Eater“ (Figurenschlucker) in den Weg stellt (Bild 15, Bild 16). Durch die vielfältigen Beispiele erscheint die Spielbezeichnung „Life“ (Leben) keineswegs unmotiviert. Aus einfachen Grundregeln wird eine komplexe Welt aufgebaut, die nicht nur komplex bezüglich der räumlichen Strukturen ist, sondern auch bezüglich des funktionellen Verhaltens. In einem wesentlichen Punkt aber scheint der Name nicht gerecht-



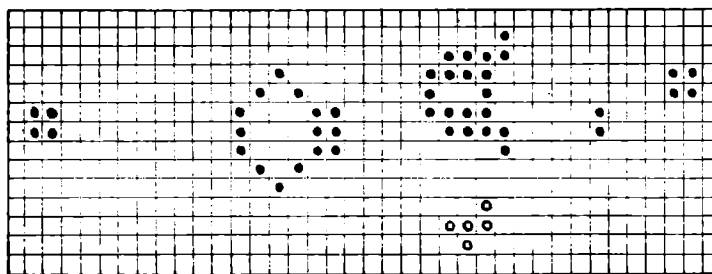
Leichtgewichtiges
Raumschiff

Mittelgewichtiges
Raumschiff

Schwergewichtiges
Raumschiff

Bild 9

Bild 15



Glider Gun

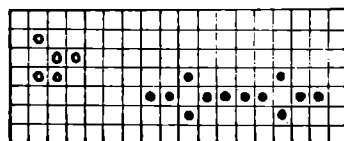
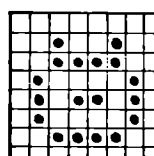
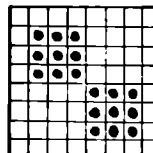


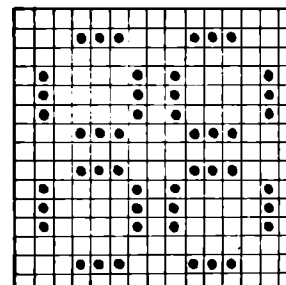
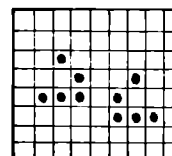
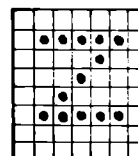
Bild 16

Eater

Bild 17



Kater



Pulsar 48-56-72

fertigt; es fehlt der „schöpferische Zufall“. Wir finden ein Musterbeispiel eines deterministischen Prozesses, bei dem alles aus den Anfangsbedingungen folgt. Das Spiel offenbart seine Ideen, aber der Zufall ist einfach nicht vorgesehen.

Ein mathematisches Spiel kann durchaus den Blick auch in ein anderes Wissenschaftsgebiet lenken. Das Conway-Spiel ist in der Tat nicht weit entfernt von einem Weg, den die mathematische und angewandte Forschung in den letzten Jahrzehnten tatsächlich beschritten hat. In unserem Spiel haben wir Zellen (Quadrate), die sich in einer endlichen Zahl von Zuständen befinden können (in unserem Spiel nur 2), und das Verhalten in der nächsten Generation hängt von gewissen Umgebungszellen (bei uns 8) ab. In der Mathematik spricht man bei derartigen Systemen auch von zellularen Automaten. Wir finden hier aber keinesfalls nur einen abstrakten Apparat zur Untersuchung von einem dem Selbstzweck dienenden Spiele. Die Entwicklung der Theorie zellulärer Automaten begann 1950 mit Arbeiten des bekannten Mathematikers John von Neumann. Er suchte nach Automaten, die Modelle der biologischen Reproduktion sind, indem sie genaue Kopien ihrer selbst oder geringfügig abweichende Varianten herstellen. Er benötigte dabei nicht nur 2, sondern 29 Zellzustände, jede Zelle hatte 4 Nachbarzellen (statt 8), und der Automat bestand aus 200 000 Zellen.

Nachdem zunächst die Theorie der zellulären Automaten vorwiegend für die Konstruktion parallel arbeitender Schnellrechner (Multiprozessoren) verwendet wurde, zeigen sich in jüngerer Zeit auch Anwendungen in Biologie und Medizin.

Die Situation, daß das zukünftige Zellverhalten vom Verhalten in Umgebungszellen abhängt, finden wir auch bei der Ausbreitung von Störungswellen in biologischen Zellverbänden. Es entstehen Möglichkeiten, Situationen zu modellieren, zu denen es in der Herzmuskulatur bei einem Infarkt kommt. Durch moderne Rechner können zelluläre Räume konstruiert werden, deren Anzahl von Zellen etwa der Anzahl der Muskelzellen in einem Gewebeteil entspricht.

In Bild 17 möchte ich noch – ohne damit der Entfaltung der Phantasie Grenzen setzen zu wollen – einige Ausgangskonfigurationen angeben, die einen interessanten Spielverlauf gewährleisten.

R. Schuster

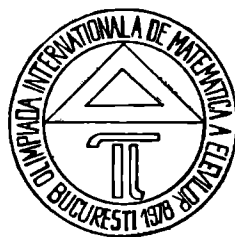
Prof. Dr. A. J. Chintschin, Moskau:

Wer einmal die erhabene Freude der schöpferischen Leistung erfahren hat, wird niemals die Anstrengungen scheuen, um diese von neuem zu erleben.

XX. Internationale Mathematik-Olympiade 1978

**Bukarest
(3. 7. bis 10. 7. 1978)**

Die XX. Internationale Mathematikolympiade fand im Juli 1978 in Bukarest statt. An ihr nahmen Mannschaften aus 17 Ländern teil. Wie gewöhnlich bestand die Mannschaft eines jeden Landes aus 8 Schülern. Den Teilnehmern wurden 6 Aufgaben vorgelegt – je 3 an jedem der zwei Tage des Wettbewerbs. Für die Lösung jeder Aufgabe erteilte die Jury eine bestimmte Anzahl von Punkten. Die maximal mögliche Summe der Punkte für die Lösung aller Aufgaben betrug für die einzelnen Teilnehmer 40, d. h., für die gesamte Mannschaft 320 Punkte. In der inoffiziellen Wertung erreichte die SR Rumänien mit 237 Punkten den ersten Platz; es folgten USA (225 P.), Großbritannien (201 P.), Vietnam (200 P.), ČSSR (195 P.). Die DDR war bei dieser Olympiade nicht vertreten.



Aufgaben

1. Es seien m und n natürliche Zahlen mit $n > m \geq 1$. Die Dezimaldarstellung von 1978^m und 1978^n enden beide auf denselben Dreierblock von Ziffern. Bestimme m und n so, daß $m+n$ minimal
2. P ist ein gegebener Punkt im Inneren einer gegebenen Kugel, und A, B, C sind drei beliebige auf der Kugel gelegene Punkte, so daß PA, PB und PC paarweise zueinander senkrechte Strecken sind. Es sei Q die zu P diagonal gegenüberliegende Ecke im durch PA, PB und PC aufgespannten Quader. Bestimme die Menge aller Punkte Q (geometrischer Ort von Q), wenn die Punkte A, B und C alle möglichen erlaubten Lagen durchlaufen!
3. Die Menge aller positiver ganzer Zahlen sei die Vereinigung zweier disjunkter Teilmengen $\{f(1), f(2), \dots, f(n), \dots\}$ und $\{g(1), g(2), \dots, g(n), \dots\}$, wobei

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Jan Vyšin

Prag

▲ 1879 ▲ Es ist folgender Additions-Algorithmus gegeben

**SOMMER
OST SEE
FERIEN**

Jeder Buchstabe bedeutet eine ganze Zahl aus dem Intervall $[0, 9]$, verschiedene Buchstaben bedeuten verschiedene Zahlen.

Diese Aufgabe wurde dem MSB-Buch Nr. 5 *Methoden zur Lösung mathematischer Aufgaben* entnommen.

146 Seiten, 41 Abb., kartoniert, Preis 9,60 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft
Leipzig
Bestell-Nr. 665 635 5

$f(1) < f(2), < \dots < f(n) < \dots,$
 $g(1) < g(2), < \dots < g(n) < \dots,$ und
 $g(n) = f(f(n)) + 1$ für alle $n \geq 1$.
Bestimme $f(240)$!

4. Es sei ABC ein Dreieck mit $AB = AC$. Ein Kreis berühre sowohl den Umkreis des Dreiecks ABC von innen als auch die Seiten AB und AC . Die Berührungspunkte mit den Seiten AB bzw. AC seien P bzw. Q .

Beweise, daß der Mittelpunkt der Strecke PQ der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks ABC ist!

5. Es sei $\{a_k\}$ ($k=1, 2, \dots, n, \dots$) eine Folge paarweise verschiedener positiver ganzer Zahlen.

Beweise, daß für alle positiven ganzen Zahlen n

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \text{ gilt!}$$

6. Die Mitglieder einer internationalen Gesellschaft stammen aus 6 verschiedenen Ländern. Die Liste der Mitglieder enthält 1978 Namen, welche mit 1, 2, ..., 1978 numeriert sind.

Beweise, daß es ein Mitglied gibt, dessen Nummer gleich der Summe der Nummern zweier Mitglieder aus seinem eigenen Land oder gleich dem Doppelten der Nummer eines Mitglieds aus seinem eigenen Land ist!



Eine Methode zur Ermittlung pythagoreischer Zahlentripel

Ich bin seit Jahren Mitglied des *Zentralen Mathematikzirkels* des Kreises Bischofswerda sowie des *Bezirksskorrrespondenzzirkels* Dresden und natürlich auch *alpha-Leser*. Auf Grund der außerschulischen Beschäftigung mit der Mathematik konnte ich schon mehrmals unter den Preisträgern bei Kreis- und Bezirkssolympiaden sein. In der AG Mathematik beschäftigen wir uns u.a. mit pythagoreischen Zahlentripeln. Im folgenden möchte ich eine Methode zur Gewinnung solcher Tripel darstellen.

Definition: Ein Tripel $[a; b; c]$ von Null verschiedener natürlicher Zahlen a, b, c wird genau dann pythagoreisches Tripel genannt, wenn $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.

Solche Tripel sind z. B. $[3; 4; 5]$ und $[5; 12; 13]$.

Wenn $[a; b; c]$ ein pythagoreisches Tripel ist, so ist für beliebige natürliche Zahlen k ($k \neq 0$) auch das Tripel $[ka; kb; kc]$ ein solches. (Beweist diesen Satz!)

Wie kann man nun aber weitere pythagoreische Tripel finden? Um zu einer Idee zu kommen, untersuchen wir einige bekannte pythagoreische Tripel etwas genauer:

$$[3; 4; 5] \quad 3^2 + 4^2 = 5^2 \\ 3^2 = 9 = 4 + 5$$

$$[5; 12; 13] \quad 5^2 + 12^2 = 13^2 \\ 5^2 = 25 = 12 + 13$$

$$[7; 24; 25] \quad 7^2 + 24^2 = 25^2 \\ 7^2 = 49 = 24 + 25$$

Dabei fällt uns zunächst auf, daß man das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl als Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen schreiben kann. (Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n^2 + 2n) + (2n^2 + 2n + 1)$.) Dann sehen wir, daß in unseren Beispielen diese beiden Summanden mit der betrachteten ungeraden Zahl ein pythagoreisches Tripel bilden. Wir vermuten:

Satz: Jedes Tripel $[a; b; c]$ natürlicher Zahlen mit $a^2 = b + c$, $c = b + 1$ und $b \neq 0$ ist ein pythagoreisches Zahlentripel.

Beweis: 1. Wegen $b \neq 0$, $c = b + 1$ und $a^2 = b + c$ sind a, b und c von Null verschieden.

$$2. \text{ Aus } a^2 = b + c = b + b + 1 = 2b + 1$$

$$\text{und } c^2 = (b + 1)^2 = b^2 + 2b + 1$$

$$\text{folgt } c^2 = a^2 + b^2; \text{ w. z. b. w.}$$

Da die Voraussetzung des Satzes für jede ungerade natürliche Zahl a ($a > 1$) – und nur für diese – erfüllbar ist, finden wir folgendes Verfahren zur Konstruktion pythagoreischer Zahlentripel:

1. Man wähle für a eine ungerade natürliche Zahl, die größer als 1 ist.

$$a = 2n + 1, n \neq 0$$

2. Man schreibe a^2 als Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen b und c .

$$b = 2n^2 + 2n \quad c = 2n^2 + 2n + 1$$

3. $[a; b; c]$ ist ein pythagoreisches Tripel. $a^2 + b^2 = c^2$

4. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \neq 0$ ist $[ka; kb; kc]$ ebenfalls ein pythagoreisches Tripel.

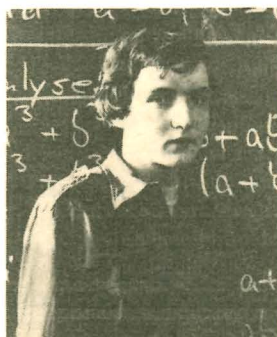
$$(ka)^2 + (kb)^2 = (kc)^2$$

Natürlich liefert diese Methode längst nicht alle pythagoreischen Zahlentripel, z. B. nicht $[9; 12; 15]$.

Abschließend ein Beispiel:

Im 30. Jahr des Bestehens unserer Republik nehmen wir für a die Zahl 1979 und erhalten nach unserer Methode das pythagoreische Zahlentripel $[1979; 1958220; 1958221]$.

Wem es Spaß macht, der kann es nachrechnen! S. Grützner



Aus der Arbeit des Kreisklubs Junger Mathematiker Gräfenhainichen

In diesem Schuljahr führten wir erstmals einen Mathematikwettbewerb für Schüler der Klassenstufe 4 durch. Ziel war, interessierte und leistungsstarke Schüler frühzeitig auf die OJM vorzubereiten und sie für den seit acht Jahren bestehenden Kreisklub auszuwählen. Es beteiligten sich 71 Schüler. – Zusätzlich organisierten wir einen Mannschaftswettbewerb. An ihm nahmen fünf Schulmannschaften der Klassenstufe 6 teil. Die Aufgaben dazu stellten wir nach den Empfehlungen der Pädagogischen Lesung von OStR G. Schulze, Herzberg, zusammen.

R. Schulz, Rotta

Aufgaben des Wettbewerbs der Klassenstufe 4

1. Trage in Bild 1 des beiliegenden Arbeitsblattes die Zahlen 1 bis 9 in die vorhandenen 9 Felder ein! Dazu darf jede Zahl nur einmal verwendet werden. In jeder Zeile (von links nach rechts), in jeder Spalte (von oben nach unten) und in jeder der beiden Hauptdiagonalen (Schrägen) soll die Summe der drei Zahlen stets 15 betragen. Zur Erleichterung sind bereits drei Zahlen eingetragen. Schreibe auf, wie du die Lösung gefunden hast!

Bild 1

2		6
4		

2. In Bild 2 beiliegenden Arbeitsblattes sind gegeben:

Bild 2



- (1) Eine Gerade g
 - (2) Ein Punkt P_1 , der nicht auf g liegt
 - (3) Ein Punkt P_2 , der nicht auf g liegt
- Zeichne mit Lineal und Zeichendreieck zu g die Parallele p durch P_1 und die Senkrechte s durch P_2 !

3. Ersetze in den beiden Aufgaben die Variablen (Buchstaben) durch Ziffern, damit zwei richtig gelöste Aufgaben entstehen! Vergiß die Probe nicht!

$\begin{array}{r} (1) \quad a57 \\ + 34bc \\ \hline 4444 \end{array}$	$\begin{array}{r} (2) \quad 8000 \\ - xyz \\ \hline 7531 \end{array}$
---	---

4. Du hast Fünfmärkstücken und Zweimärkstücken. Wie kannst du den Betrag von 29 Mark passend zahlen?

Hinweis: Es gibt nicht nur eine Lösung. Mache zu jeder Lösung die Probe!

5. Ordne die folgenden Längenangaben der Größe nach! Verwende dabei das Zeichen „kleiner als“!

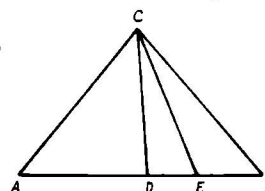
15 m 2 cm; 848 cm; 9,01 m; 75 dm; 10 m.

Hinweis: Wandle die Längenangaben so um, daß sie alle dieselbe Maßeinheit besitzen!

6. Wieviel verschiedene Dreiecke enthält das Bild 3 auf beiliegendem Arbeitsblatt? Zwei Beispiele dazu lauten:

(1) Dreieck ADC (2) Dreieck AEC
Schreibe auch die übrigen Dreiecke in dieser Form auf, indem du ihre Eckpunkte angibst!

Bild 3



Das Einbeschreiben von Kreisen gleichen Durchmessers in ein Quadrat

▲ 1 ▲ Einem Quadrat mit der Seitenlänge a sei ein Kreis eingeschrieben. Wieviel Prozent der Fläche des Quadrats werden durch den Kreis abgedeckt?

Lösung:

$$p = \frac{\frac{a^2}{4} \cdot \pi}{a^2} \cdot 100 = \frac{\pi}{4} \cdot 100 = 78,54$$

Es werden 78,54% der Fläche des Quadrats abgedeckt.

Man kann nun dem Quadrat nicht nur einen Kreis, sondern mehrere zueinander kongruente Kreise einbeschreiben, etwa wie in Bild 1.

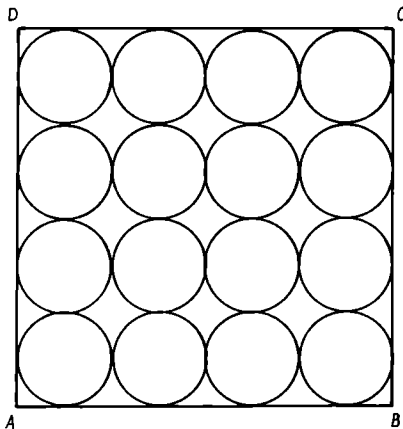


Bild 1

Anordnung I

▲ 2 ▲ Die gemeinsame Länge der Durchmesser der zueinander kongruenten Kreise in Bild 1 sei $\frac{a}{n}$. Wieviel Prozent der Fläche des Quadrats werden durch die in Bild 1 dargestellten Kreise insgesamt abgedeckt?

Lösung:

$$p = \frac{n^2 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{a}{n}\right)^2 \cdot \pi}{a^2} \cdot 100 = \frac{\pi}{4} \cdot 100 = 78,54$$

Es werden 78,54% der Fläche des Quadrats abgedeckt.

Wir stellen fest, daß der Anteil der abgedeckten Fläche an der gesamten Fläche des Quadrats überhaupt nicht von der Anzahl bzw. Größe der einzelnen Kreise abhängt, wenn diese wie in Bild 1 angeordnet sind.

Was geschieht aber, wenn wir die zueinander kongruenten Kreise „auf Lücke“ wie in Bild 2 anordnen?

Dies soll uns im folgenden beschäftigen.

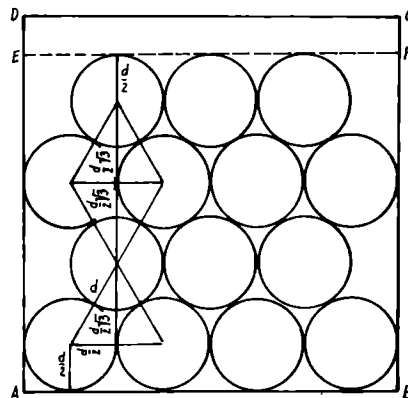


Bild 2

Anordnung II

Bild 2 zeigt, daß man in dem gegebenen Quadrat bei Anordnung II nur 14 Kreise mit dem Durchmesser $d = \frac{a}{4}$ unterbringen kann – gegenüber 16 nach Anordnung I. Die Seite CD des Quadrats wird von den Kreisen aber nicht berührt.

▲ 3 ▲ Weise rechnerisch nach, daß sich keine weitere „Lage“ von Kreisen im Quadrat ABCD (Bild 2) unterbringen läßt! Berechne die Breite $\overline{AE}$ des „ausgefüllten“ Rechtecks ABFE! Wie breit wäre der von 5 Lagen abgedeckte Streifen?

Lösung:

$$\overline{AE} = \frac{d}{2} + 3 \cdot \frac{d}{2}\sqrt{3} + \frac{d}{2} = \frac{d}{2}(2 + 3\sqrt{3}) \quad (\text{vgl. Bild 2})$$

Eine 5. Lage bringt einen Breitenzuwachs von $\frac{d}{2}\sqrt{3}$.

Der von 5 Lagen ausgefüllte Streifen hat eine Breite $\frac{d}{2}(2 + 4\sqrt{3}) > 4d = a$.

Wird die Anzahl n der in der ersten Lage befindlichen Kreise größer (und damit ihr Durchmesser kleiner), so werden die Zwischenräume von den folgenden Lagen besser ausgefüllt und man kann evtl. zu den auf alle Fälle möglichen n Lagen m zusätzliche Lagen von Kreisen im Quadrat unterbringen.

Ein Versuch mit Pfennigmünzen läßt vermuten, daß erstmals bei $n=8$ eine zusätzliche Lage von Kreisen im Quadrat untergebracht werden kann. Bei 8 Kreisen in der 1. Lage lassen sich $8+1=9$ Lagen von Kreisen dem Quadrat einbeschreiben:

5 Lagen mit je 8 Kreisen,

4 Lagen mit je 7 Kreisen.

Das sind insgesamt 68 Kreise, die die Quadratfläche zu 83,45% abdecken.

▲ 4 ▲ Bestätige rechnerisch, daß die durch obigen Versuch gefundene Vermutung zutrifft, und überprüfe die daran anschließenden Rechnungen!

Wie sieht das nun bei noch größeren Werten für n aus? Läßt sich evtl. ein noch größerer Anteil der Fläche des Quadrats abdecken? Dazu suchen wir einen Term m , der für jedes $n \in \mathbb{N}$ angibt, wieviel Lagen Kreise zusätzlich zu den n mit Sicherheit möglichen im Quadrat untergebracht werden können.

Lösung:

Sei g_i ($i=1, 2, 3, \dots$) die Gerade, die durch die Mittelpunkte aller Kreise der i -ten Lage geht.

Die Geraden g_i und g_{i+1} sind parallel zueinander und haben – vgl. Lösung zu ▲ 3 ▲ – den Abstand $\frac{d}{2}\sqrt{3}$.

Die Geraden g_1 und g_n haben dann den Abstand $(n-1)\frac{d}{2}\sqrt{3}$. Die Kreise von n aufeinanderfolgenden Lagen füllen somit ein Rechteck der Breite

$$\frac{d}{2} + (n-1)\frac{d}{2}\sqrt{3} + \frac{d}{2} = \frac{d}{2}[2 + (n-1)\sqrt{3}]$$

aus. Jede zusätzliche Lage verbreitert dieses Rechteck um $\frac{d}{2}\sqrt{3}$.

m ist nun die größte ganze Zahl, für die

$$m \cdot \frac{d}{2}\sqrt{3} \leq n \cdot d - \frac{d}{2}[2 + (n-1)\sqrt{3}] \quad \text{ist.}$$

(Siehe Bild 3)

Wenn wir wissen, daß in der Mathematik für jede reelle Zahl x mit $[x]$ diejenige ganze Zahl g bezeichnet wird, für die $g \leq x < g+1$ gilt (d.h. $[x]$ ist die größte ganze Zahl, die nicht größer ist als x), so können wir schreiben

$$m = \frac{nd - \frac{d}{2}[2 + (n-1)\sqrt{3}]}{\frac{d}{2}\sqrt{3}} = \left[\frac{1}{3}(n-1)(2\sqrt{3}-3) \right].$$

Setzen wir im letzten Term $\frac{1}{3}(2\sqrt{3}-3)=p$,

so erhalten wir $m = [(n-1) \cdot p]$. Wie man mit Hilfe genauerer Zahlentafeln (oder durch Intervallschaltung) ermittelt, ist $0,154700538 < p < 0,154700539$.

Zum Ermitteln zusammengehöriger Werte von n und m genügt meist schon der Rechenstab. Nur dann, wenn der Rechenstab für $(n-1) \cdot p$ einen Wert in unmittelbarer Nähe einer ganzen Zahl anzeigt, macht sich die Verwendung eines Näherungswertes für p mit größerer Stellenzahl notwendig.

Erstmals für $n=8$ ist $m > 0$.

Wenn man für jedes n das zugehörige m ausrechnet, bemerkt man, daß n jeweils um 6 oder 7 vergrößert werden muß, damit sich m um 1 erhöht. In der folgenden Werttabelle

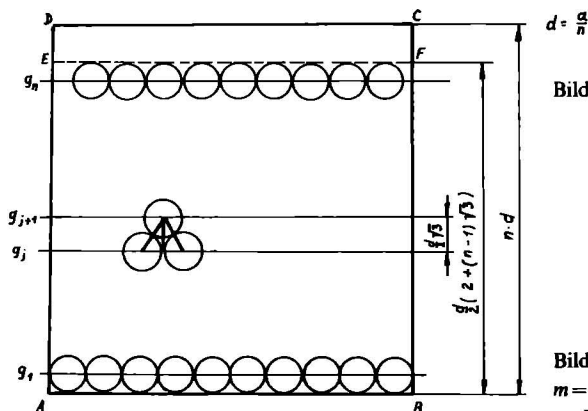


Bild 3

Bild 4

$$m = [0,154700538(n-1)]$$

$$n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

sind nur die Zahlen n aufgeführt, bei denen sich m im Vergleich zum der Zahl $n-1$ zugeordneten Wert ändert. (Ausführlicher ist der Zusammenhang zwischen m und n in Bild 4 dargestellt.)

n	m	%	n	m	%
8	1	83,45	73	11	89,9
14	2	86,55	79	12	89,9
21	3	87,62	86	13	89,9
27	4	88,56	92	14	90,0
34	5	88,8	98	15	90,1
40	6	89,19	105	16	90,08
47	7	89,28	111	17	90,17
53	8	89,56	...	...	...
60	9	89,58	1003	155	90,63
66	10	89,75	...	...	...

Die Tabelle gibt auch Auskunft über den jeweiligen Anteil der von den Kreisen abgedeckten Fläche an der Gesamtfläche des Quadrats. Laut Tabelle wächst dieser Anteil. Ist dieses Wachsen gesetzmäßig? Gibt es eine Grenze für dieses Wachstum?

Ist $m+n$ eine gerade Zahl, so gibt es genau $\frac{m+n}{2}$ Lagen mit je n Kreisen und $\frac{m+n}{2}$ Lagen

mit je $n-1$ Kreisen, insgesamt also $\frac{m+n}{2}$

$(2n-1)$ Kreise mit Durchmesser $d = \frac{a}{n}$. Das

Verhältnis V_n der Gesamtfläche dieser Kreise zur Fläche des Quadrats ist

$$V_n = \frac{\frac{n+m}{2}(2n-1) \cdot \frac{\pi}{4} d^2}{(nd)^2} = \frac{(n+m)(2n-1)}{n^2} \cdot \frac{\pi}{8}$$

▲ 5 ▲ Berechne V_n für den Fall, daß $m+n$ eine ungerade Zahl ist!

Wir überlegen nun, welche Werte das Verhältnis V_n annimmt, wenn n immer größer wird.

Zunächst läßt sich dann $m = [(n-1) \cdot p]$ näherungsweise durch $(n-1) \cdot p$ ersetzen (der Unterschied von höchstens 1 fällt nicht mehr ins Gewicht).

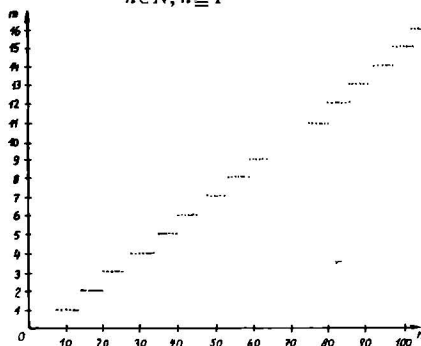
Wir erhalten für gerade Werte von $m+n$:

$$V_n = \frac{[n + (n-1)p](2n-1)}{n^2} \cdot \frac{\pi}{8}$$

$$= \left(2 + 2p + \frac{3p}{n} - \frac{1}{n} + \frac{p}{n^2}\right) \cdot \frac{\pi}{8}$$

Für wachsendes n kommen die Werte der

Terme $\frac{3p}{n}$, $\frac{1}{n}$ und $\frac{p}{n^2}$ immer mehr der 0 nahe,



so daß sich V_n dem Wert

$$\frac{\pi}{8}(2+2p) = \frac{\pi}{4}(1+p) \approx 0,9069$$

nähert. (Die letzten Überlegungen werden auch in Klasse 11 in exakterer Form wiederbegegnen.)

▲ 6 ▲ Welchem Wert nähert sich V_n mit wachsendem n , wenn für $m+n$ nur ungerade Zahlen in Frage kommen?

Aus der Folge der Verhältnisse V_n haben wir zwei Teilfolgen ausgewählt:

1. Die Folge der V_n , für die $m+n$ gerade ist.

2. Die Folge der V_n , für die $m+n$ ungerade ist. Da für jede natürliche Zahl n das Verhältnis V_n entweder zur 1. oder 2. Teilfolge gehört und beide Teilfolgen sich mit wachsendem n demselben Wert („Grenzwert“) $\frac{\pi}{4}(1+p)$ nähern,

hat auch die gesamte Folge der Verhältnisse

V_n den Grenzwert $\frac{\pi}{4} \cdot (1+p)$. (Man schreibt

$$\text{dafür auch } \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \frac{\pi}{4}(1+p).)$$

Wenn wir – unter Beachtung der Anordnung II – die Kreise immer kleiner machen (und damit ihre Anzahl erhöhen), schaffen wir es trotzdem nie, das gesamte Quadrat zu überdecken. Der Anteil der von den Kreisen überdeckten Fläche an der Gesamtfläche des Quadrats nähert sich lediglich 90,69%.

Abschließend muß bemerkt werden, daß die hier behandelten Abdeckungen des Quadrats durch zueinander kongruente Kreise sehr speziell sind, da wir uns ja immer an Anordnung I oder Anordnung II gehalten haben. Man kann sich noch viele andere Anordnungen ausdenken und diese untersuchen.

W. Zehrer

Internationaler Mathematiker-kongreß 1978

Die Tradition dieser internationalen Kongresse ist vergleichbar mit den Olympischen Spielen der Neuzeit; der 1. Mathematiker-Kongreß wurde 1897 veranstaltet, die 1. Olympiade 1896. Die Kongresse fanden dann regelmäßig alle vier Jahre statt, jedoch wurde diese Folge durch die beiden Weltkriege unterbrochen. Die Mathematiker-Kongresse werden von der Internationalen Mathematiker-Union veranstaltet; diese legt dafür wechselnde Tagungsorte fest (darunter 1966 Moskau, 1970 Nice/Frankreich, 1974 Vancouver/Kanada, 1978 Helsinki). Für das Jahr 1982 ist Warschau vorgesehen.



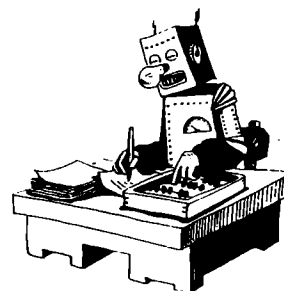
Die finnische Hauptstadt beherbergte die rund 3000 Kongreß-Teilnehmer vom 15. bis 23. August 1978. Der Kongreß wurde in der großen Finlandia-Halle eröffnet, in der 1975 die Abschlußberatung der Helsinki-Konferenz stattfand. Die Plenartagungen des Kongresses waren auch in dieser Halle; für die Beratungen in den Arbeitskreisen standen Räume in den Gebäuden der Universität Helsinki zur Verfügung. Eine wertvolle Informationsquelle war die Buchausstellung zur Mathematikliteratur, an der führende Verlage aus aller Welt beteiligt waren.

Wie verlief ein Tag eines Kongreßteilnehmers? Aus einer Broschüre mit einer zeitlichen Übersicht aller Vorträge und Veranstaltungen, ferner aus Mitteilungen über Gesprächsrunden im kleineren Kreis konnte jeder Teilnehmer im voraus auswählen und das Programm für diesen Tag selbst zusammenstellen. Vorteilhaft war es, daß nach jedem Vortrag Zeit für Anfragen und Begegnungen mit anderen Teilnehmern vorgesehen war, auch Kontakte zum Referenten konnten geknüpft werden. Zum Teil wurden an die Teilnehmer Arbeitstexte und Kurzinformationen verteilt. Gerade diese persönlichen Kontakte waren eine wertvolle Ergänzung für jeden Teilnehmer.

Jeder Leser sollte aber wissen, falls er in der Mathematik zu wissenschaftlicher Arbeit vordringen will, daß er dazu auch mindestens zwei Weltsprachen gut beherrschen sollte, um sein Anliegen bei Gesprächsrunden und bei der allgemeinen Diskussion vorbringen zu können.

Aus: „rozhledy“ 1/79, Prag
(Übersetzt von O. Langer, Döbeln)

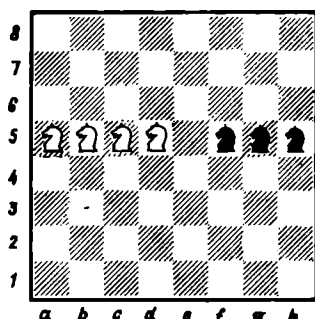
In freien Stunden **alpha** heiter



Über die Donau

In der eingezeichneten Position versetze man die weißen Springer senkrecht auf e, f, g, h und die schwarzen auf a, b, c, und zwar nicht unbedingt in dieser Reihenfolge, bloß dürfen sie nicht wieder zurückversetzt werden (die weißen nach links, die schwarzen nach rechts). Außerdem darf bei den Zügen auf jeder Linie nur ein Springer stehen.

(Diese Aufgabe stammt von dem bekannten englischen Quizmeister S. Lloyd [1841 bis 1911]. Er schrieb, daß sich viele seiner Freunde vergebens den Kopf zerbrachen, wie sie „über die Donau“ [die Linie „e“] setzen sollen.)



Silbenrätsel

Aus den folgenden Silben bilde man 8 Wörter, deren erste Buchstaben von oben nach unten gelesen den Namen eines Rechenmeisters nennen.

a – ar – chi – del – des – eck – ex – in – ion – kat – ke – kel – me – me – mul – nen – nent – pli – po – recht – rith – strek – ta – ti – tik – win.

1. Teilgebiet der Mathematik;
2. griechischer Buchstabe;
3. Mathematiker des Altertums (um 287 bis 212 v. u. Z.);
4. Rechenoperation;
5. Fläche, bei dem je 2 gegenüberliegende Seiten gleichlang (und parallel) sind;
6. ihre Summe beträgt bei jedem Dreieck 180°;
7. Teil einer Potenz;
8. durch Punkte begrenzte Gerade.

K. Hucker, 31. OS Dresden (Kl. 8)

Eindeutige Abbildungen

Gegeben sind die Mengen

$M_1 = \{D, I, O, P, H, A, N, T, X\}$ und

$M_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

sowie die Gleichungssysteme I und II.

Gleichungssystem I:

$$(1) D - \frac{D}{x} = D \cdot \frac{D}{x}$$

$$(2) I - \frac{I}{D} = I \cdot \frac{I}{D}$$

$$(3) O - \frac{O}{I} = O \cdot \frac{O}{I}$$

$$(4) P - \frac{P}{O} = P \cdot \frac{P}{O}$$

$$(5) H - \frac{H}{P} = H \cdot \frac{H}{P}$$

$$(6) A - \frac{A}{H} = A \cdot \frac{A}{H}$$

$$(7) N - \frac{N}{A} = N \cdot \frac{N}{A}$$

$$(8) T - \frac{T}{N} = T \cdot \frac{T}{N}$$

Gleichungssystem II:

$$(1) D + \frac{D}{x} = D \cdot \frac{D}{x}$$

$$(2) I + \frac{I}{D} = I \cdot \frac{I}{D}$$

$$(3) O + \frac{O}{I} = O \cdot \frac{O}{I}$$

$$(4) P + \frac{P}{O} = P \cdot \frac{P}{O}$$

$$(5) H + \frac{H}{P} = H \cdot \frac{H}{P}$$

$$(6) A + \frac{A}{H} = A \cdot \frac{A}{H}$$

$$(7) N + \frac{N}{A} = N \cdot \frac{N}{A}$$

$$(8) T + \frac{T}{N} = T \cdot \frac{T}{N}$$

Aufgabe 1: Bilde die Mengen M_1 und M_2 eindeutig aufeinander ab, so daß sämtliche Gleichungen des Systems I zu wahren Aussagen werden!

Aufgabe 2: Bilde die Mengen M_1 und M_2 eindeutig aufeinander ab, so daß sämtliche Gleichungen des Systems II zu wahren Aussagen werden!

OL Ing. K. Koch, Schmalkalden

Unsere Fibel

Beim „Durchkramen“ seines Bücherschranks fällt dem pfiffigen Schüler Hans-Jürgen „Unsere Fibel“ in die Hände. Er durchblättert sie bedächtig, und als er die nachfolgenden Worte aufmerksam betrachtet hat, fällt ihm eine Gesetzmäßigkeit auf.

Welche?

1. HEXE

6. HOI

2. EHE

7. ECHO

3. MIAU

8. OTTO

4. BEBE

9. MOTTO

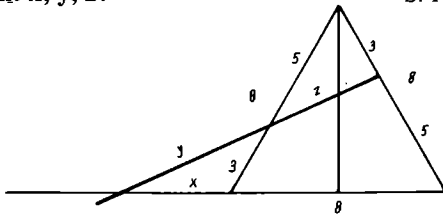
5. OMA

10. TOTO

E. Schmidt, Potsdam

Gesucht x, y, z !

S. Tunn, Berlin

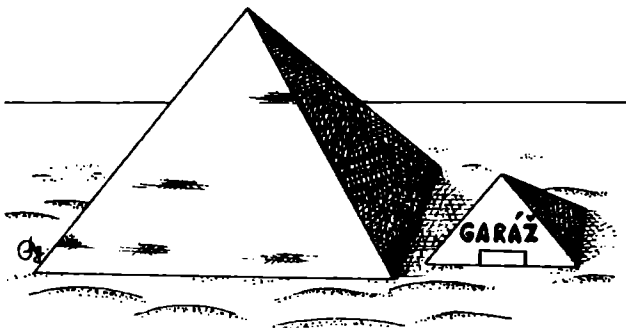


Kryptarithmetik

Gleiche Buchstaben entsprechen gleichen Ziffern. Es ist die kleinste und größte Summe zu finden.

(1)	ALT	(2)	ROM
	WIE		PRAHA
	EIN		MOSKAU
	BAUM		EUROPA

Jarmila Pěncíková, Jindřich Pěncík, Prag

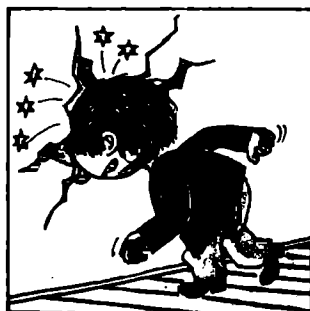
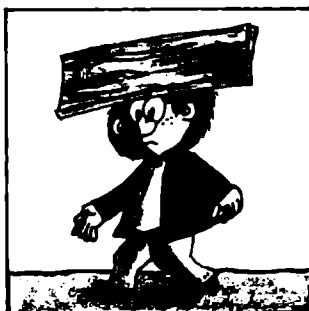


Peter Gassányi, Budapest

Das sagt man so

In der untenstehenden Leiste sind Redensarten bildlich dargestellt. Wie lauten sie?

Zusammengestellt aus der NBI



Bitte anrufen!

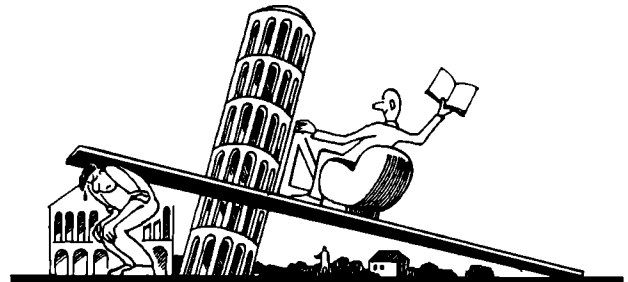
Ein Freund hat zu Hause ein neues Telefon bekommen. Ich frage ihn nach der Nummer.

„Schreib auf“, sagt er, diktiert mir aber statt der Rufnummer folgendes:

1. Sie ist fünfstellig und enthält keine Null;
2. die kleinste gerade Zahl steht links von der ihrem absoluten Wert nach mittleren geraden Zahl;
3. die größte ungerade Zahl steht links von einer beliebigen geraden Zahl;
4. die Differenz zwischen den ungeraden Zahlen ist größer als die kleinste gerade;
5. die ihrem absoluten Wert nach mittlere gerade Zahl ist kleiner als die kleinste ungerade;
6. die Nummer hat weniger ungerade als gerade Zahlen;
7. die kleinste ungerade Zahl steht rechts von einer beliebigen geraden Zahl;
8. die größte gerade Zahl steht rechts von der ihrem absoluten Wert nach mittleren geraden und
9. die kleinste ungerade ist kleiner als die größte gerade Zahl.

Welche Rufnummer hat mein Freund?

Aus: Sputnik, Moskau



Peter Dittrich, aus: „Eulenspiegel“

Im Gespräch mit einem Automaten

Wer denkt bei dieser Überschrift nicht an einen Film, dessen Handlung in ferner Zukunft spielt, malt sich nicht Abenteuer aus, von denen er sicher zu wissen glaubt, daß sie ja nie Wirklichkeit werden können? Und doch ist nicht alles davon Zukunftsvision. Manche technische Entwicklung, die vor wenigen Jahrzehnten noch Utopie zu sein schien, ist inzwischen Wirklichkeit geworden.

Wir wollen nicht phantasieren, sondern entdecken, wie das „Gespräch mit einem Automaten“ bereits zur Realität wurde, daß also aus Zukünftigem bereits Gegenwart geworden ist. Wir können mehr und vor allem Genaueres erfahren, wenn wir Gelegenheit zu einem kleinen Einblick in die Elektronische Datenverarbeitung – oder wie viele kurz sagen – in die EDV nehmen.

Diesen Einblick kann uns am anschaulichsten ein Besuch in einem Rechenzentrum vermitteln. Aber sicher haben nur wenige die Gelegenheit zu einer solchen Besichtigung. Außerdem könnte die Fülle der Eindrücke dazu führen, daß Wesentliches übersehen und Nebensächliches mißverstanden wird. So wollen wir versuchen, zunächst das Wichtigste und Interessanteste vorzustellen.

Wer einmal im Rahmen der „wissenschaftlich-praktischen Arbeit“ oder während seines Studiums die Möglichkeit zur Arbeit mit den Mitteln der EDV erhält, wird dann vieles rascher verstehen.

Seit Jahren besteht an der jetzigen Technischen Hochschule Leipzig ein Rechenzentrum, das mit einer modernen, leistungsfähigen Rechenanlage ausgestattet ist. Diese technischen Möglichkeiten bieten den Studenten Gelegenheit zu praktischen Übungen an einer Elektronischen Datenverarbeitungsanlage (EDVA). Darüber hinaus ist an diesem Rechenzentrum ein großes Wissenschaftlerkollektiv tätig, zu dessen ständigen Aufgaben es gehört, neue Verfahren bei der Nutzung der modernen Rechentechnik zu entwickeln und zu erproben.

Um unseren anfänglich genannten Problemen näherzukommen, wollen wir uns mit einigen Grundzügen der Datenverarbeitung vertraut machen. Ein Beispiel aus unserer täglichen Umwelt soll das Verständnis erleichtern:

Wir wollen uns eine elektrische Registrierkasse vorstellen, wie wir sie in jeder Kaufhalle sehen können. Diese Kasse erspart der Kassiererin eine Menge Arbeit. Früher wurden alle Preise, die eine Kundin zu bezahlen hatte, notiert und der Gesamtpreis im Kopf ausgerechnet. Das erledigt jetzt die Maschine! Ihr muß mitgeteilt werden, welche einzelnen Preise sie verrechnen soll, d. h., durch die Kassiererin werden alle notwendigen Zahlen in die Maschine eingetastet – oder wie man auch sagen kann: *eingeben*. Ebenfalls durch Bedienung der Tastatur wird die Maschine darüber informiert, welche Rechenoperationen sie mit den Zahlen ausführen soll. Das kann unterschiedlich sein: verschiedenartige Einzelpreise müssen summiert werden; kauft ein Kunde aber mehrere Stücke einer Ware, so kann der einzelne Preis mit der Stückzahl multipliziert werden und so fort. Ist das alles in die Kasse eingegeben worden, veranlaßt die Kassiererin durch Knopfdruck die *Berechnung* des zu zahlenden Gesamtpreises, der auf den Kassenbon gedruckt wird. Dieser Bon, den der Kunde mit sich nehmen kann, wird von der Registrierkasse *ausgegeben*. Für die Abrechnung nach Beendigung der Öffnungszeit wird zusätzlich eine besondere Liste benötigt, die alle Gesamtpreise, die bezahlt worden sind, und die Summe dieser eingenommenen Geldbeträge enthält.

Deshalb werden diese Zahlen von der Registrierkasse aufgehoben, d. h. auf einem Papierstreifen gespeichert. Manche Kassen, besonders in großen Kaufhäusern, *speichern* diese Zahlen auch magnetisch auf einem langen Band aus Folie. Solche Magnetbänder

Bild 1

Blick in den Rechnerraum der TH Leipzig mit einer ESER-Rechenanlage vom Typ EC 1022. Hier werden alle Programme gerechnet, die entweder Lochkarten verarbeiten oder durch Kabel mit den Geräten in dem in einem anderen Gebäude gelegenen Bildschirmraum verbunden sind.



ähneln in ihrem Aufbau und ihrer Funktion einem Tonband.

Wenn wir uns dieses Beispiel genau vorstellen können, haben wir bereits vieles Wichtige von der Elektronischen Datenverarbeitung kennengelernt. Freilich spielt sich in einem Rechenzentrum alles in viel größeren Maßstäben ab: So werden sehr viel umfangreichere Zahlenmengen – oder wie man sagt – Datenmengen verarbeitet. Diese Verarbeitung muß sehr schnell durchgeführt werden, damit die Ergebnisse rechtzeitig verwendet werden können.

Die Rechnungen, die mit diesen Daten ausgeführt werden, sind oft sehr viel komplizierter.

Maschinen, die solche Berechnungen ausführen, sind größer, komplizierter, und ihre Bedienung erfordert vielseitige Kenntnisse, ihre Pflege obliegt speziell ausgebildeten Ingenieuren. Die Bewältigung derartig großer Zahlenmengen stellt besondere Anforderungen:

Der Rechenweg, der zu beschreiben ist, wird sehr lang. Meist besteht er aus einer langen Reihe von mathematischen Ausdrücken, die auf die Daten anzuwenden sind. Es würde viel zu lang dauern, wenn diese Formeln für jede Rechnung neu zusammengestellt und eingegeben werden müßten. Sie werden deshalb von Spezialisten – den Programmierern – für die notwendigen Rechnungen aus der mathematischen, technischen und ökonomischen Literatur herausgesucht und zusammengestellt. Sie werden dabei nach bestimmten Schreibregeln, die teilweise den herkömmlichen mathematischen Schreibweisen ähnlich sind, aufgeschrieben. Dazu kommen noch bestimmte Informationen, die die Reihenfolge der einzelnen Rechenschritte regeln. Alle diese Vorchriften müssen mit viel Mühe überprüft und erprobt werden.

Das Ergebnis einer solchen Arbeit bildet ein *Rechenprogramm*. Bei seiner Erarbeitung muß sich der Programmierer in Gedanken alle Besonderheiten vorstellen, die bei der späteren Anwendung des Programms auf-

treten können. (So darf niemals eine Division durch Null auftreten! Läuft nämlich sein Programm und erreicht dabei einen Punkt, an dem eine Zahl als Divisor verwendet wird, für die eine Null eingegeben wurde, so wird die ganze Rechnung unbrauchbar, ohne daß er noch korrigierend eingreifen kann.)

Diese Programmierarbeiten, die erst abgeschlossen werden können, wenn ein Programm fehlerfrei ist, dauern oft viele Monate. Das mag manchem als sehr lange Zeit erscheinen. Dafür kann der Nutzen dann aber auch sehr groß sein, wenn ein solches fertiges Programm sehr oft angewendet wird und bei jeder Verwendung in kurzer Zeit Probleme löst, die ein geübter Rechner gar nicht oder nur in sehr langer Zeit bewältigen könnte. So gibt es z. B. im Bauwesen Probleme, die die Lösung von Gleichungssystemen mit vielen, vielen Unbekannten (100 oder mehr!) erfordern. Früher rechneten Ingenieure wochen- oder monatelang an solchen Systemen, heute kann man dieselbe Aufgabe mit dem Automaten eines Rechenzentrums in Stunden oder gar Minuten berechnen.

Für die tägliche Arbeit eines Rechenzentrums sind nun bestimmte Arbeitsregeln, bestimmte Technologien, entwickelt worden, die die Voraussetzung für eine möglichst rasche, kostengünstige und weitgehend fehlerfreie Arbeit bieten sollen.

Bevor eine bestimmte Rechnung ausgeführt werden soll, wird zunächst das betreffende Programm in die Rechenanlage eingegeben. Hierfür werden meist sogenannte Lochkarten verwendet. Das sind Kartonkarten genormter Größe, in denen nach bestimmten Regeln Lochungen angebracht werden. Aus diesen Lochungen kann die Rechenanlage alle Formeln, die sie realisieren soll, erkennen. Ein

solches Programm besteht oft aus mehreren Hundert Lochkarten. Danach werden die Daten eingegeben, die oft ebenfalls auf Lochkarten stehen. Sind diese Eingaben abgeschlossen, so führt die Rechenanlage – der Automat – mit den Zahlen die gewünschten Rechnungen aus. Schließlich erfolgt die Ausgabe der Ergebnisse. Hierbei werden die berechneten Summen usw., Tabellen oder auch schriftliche Mitteilungen, die die Maschine ausgibt, von einem Druckgerät auf Papier in normaler Druckschrift bereitgestellt. Wenn wir uns an unser anfängliches Beispiel von der Registrierkasse erinnern, so entdecken wir wieder die drei wesentlichen Arbeitsgänge: Eingeben, Rechnen, Ausgeben. Die Anlagenteile für diese Arbeitsetappen können nun nicht mehr, wie bei einer Registrierkasse, innerhalb eines einzigen Maschinengehäuses untergebracht werden.

Für jeden dieser Arbeitsgänge besitzt eine EDVA besondere Geräte: Zur Eingabe der Lochkarten – sogenannte Lochkarten-Leser, für die Rechnung – die Zentrale Verarbeitungseinheit, für die Ausgabe – den Schnelldrucker.

Freilich, von all dem sieht der Kunde eines Rechenzentrums sehr wenig. Meist gibt er alles Notwendige (Lochkarten mit Daten und Programm) für die von ihm gewünschte Rechnung an einem Schalter ab. Dort kann er nach einiger Zeit wieder das Ergebnis entgegennehmen, mit dem er zufrieden oder manchmal auch unzufrieden ist. Denn hat er etwas bei der Vorbereitung einer Rechnung vielleicht übersehen, hat er sich geirrt, so hatte er früher fast keine Möglichkeit, während der laufenden Rechnung in die Arbeit der Rechenanlage einzugreifen.

Das war in manchen Fällen ein gewichtiger Nachteil. Deshalb ließ die Frage, ob man das nicht noch verbessern könne, vielen Wissenschaftlern keine Ruhe. Man suchte nach Wegen, wie man während einer laufenden Rechnung die Anlage nach dem Stand der Rechenoperationen befragen könne, wie sie darauf

Antwort geben könne. Diese Antwort kann dann dem Kunden die Möglichkeit geben, unmittelbar die Weiterarbeit der EDVA zu steuern.

Man fand für diese Probleme Lösungen: Ihnen gab man den Namen „Dialogarbeit“, weil sich aus den Fragen des Kunden und den Antworten der Maschine ein Dialog, ein „Gespräch“ ergibt. Denken wir dabei daran, daß ein Gespräch nicht immer durch gesprochene Wörter erzeugt wird. Zwei Menschen können Briefe wechseln und so miteinander in Gedankenaustausch treten. So wollen wir das „Gespräch“ verstanden wissen: Mensch und Maschine führen ein Gespräch durch den Austausch geschriebener Texte. Das geschieht meist so, daß der Mensch seine Anfrage über eine Schreibmaschinentastatur in die Rechenanlage eingibt und die Maschine durch die Ausgabe gedruckter Sätze antwortet. (Übrigens, es wird bereits daran gearbeitet, daß sich Mensch und Maschine akustisch verständigen – aber wir wollen ja in der Gegenwart bleiben!).

Sehen wir uns die Dialogarbeit an, wie sie im Rechenzentrum der Technischen Hochschule Leipzig bereits durchgeführt wird.

Für diese Arbeit stehen den Mitarbeitern und Studenten 5 ungarische Bildschirmgeräte, die in einem separaten Raum installiert sind, zur Verfügung. Sie bestehen aus einer, vom Fernsehen her bekannten Bildröhre und dazugehörig einer Schreibmaschinentastatur. Über Steuer- und Anschlußgeräte sowie eine Telefonleitung sind diese Bildschirmgeräte mit der schon genannten Rechenanlage EC 1022 (siehe Bild 1) verbunden. Erst diese Verbindung ermöglicht eine Nutzung der für den Rechner zugänglichen Programme und Daten.

Ein von Wissenschaftlern entwickeltes System regelt den Fluß der Mitteilungen, die von dem Rechner zum Bildschirm kommen und denen, die ein Nutzer an den Rechner schicken will. Alle diese gesendeten Informationen werden als geschriebener Text auf dem Bildschirm sichtbar.

Ein einfaches Beispiel soll dies jetzt näher zeigen:

Studenten haben zur Wiederholung vor einer Prüfung nachfolgende Übungsaufgabe (1. Abschnitt einer größeren Berechnung) erhalten. Jeder einzelne muß mit anderen Maßangaben rechnen. Die Überprüfung der Resultate kann dann jeder Student selbständig mit Hilfe des Bildschirmdialogs durchführen. Damit dieser Dialog überhaupt möglich wird, mußte vorher einmal ein Mitarbeiter diese Aufgabe für den Rechner aufbereiten und programmieren. Dieser Aufwand ist aber vergleichsweise gering, wenn man bedenkt, daß so ein Programm dann beliebig oft genutzt werden kann.

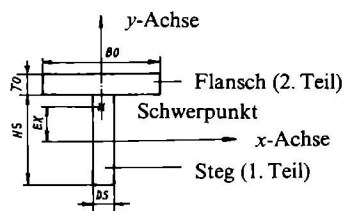
Bild 2

Innenansicht des Bildschirmraumes der TH Leipzig; hier stehen die Dialoggeräte, die mit der ESER-Anlage im Rechneraum durch Kabel verbunden sind.



Aufgaben

Gegeben sei der folgende T-Querschnitt



Gesucht seien der Flächeninhalt F , der Abstand des Schwerpunktes von der X-Achse EX und die Trägheitsmomente IX und IY .

Der Student begibt sich nach der Errechnung der Ergebnisse an einen Bildschirm. Dort startet er das Programm, und dann erfolgen zeilenweise nacheinander Ausgaben und Anforderungen an ihn, im Dialog gekennzeichnet durch „MASCHINE“ und entsprechende Reaktionen von ihm, gekennzeichnet durch „MENSCH“.

Dialog:

MENSCH START AUFGABE QUERSCHNITT
MASCHINE BERECHNUNG VON QUERSCHNITTSWERTEN WERTE GEMÄSS AUFGABENSTELLUNG TEILEANZAHL
MENSCH 2
MASCHINE STEGDICKE DS [CM]
MENSCH 1.1
MASCHINE STEGHÖHE HS [CM]
MENSCH 19.0
MASCHINE FLANSCH OBEN DICKE TO [CM]
BREITE BO [CM]
MENSCH 1.4 20.5

Die speziellen Ausgangswerte der Aufgabe stehen nun dem Rechner zur Verfügung, und in Bruchteilen von Sekunden werden die Ergebnisse berechnet. Der Student wird nun aufgefordert, seine zu Hause errechneten Resultate dem Rechner mitzuteilen und erhält jeweils eine Aussage über die Richtigkeit seiner Ergebnisse. Bei falschem Ergebnis wird ihm zur Unterstützung bei einer erneuten Berechnung eine Hilfsinformation gegeben.

MASCHINE TEILEN SIE JETZT IHRE ERGEBNISSE MIT FLÄCHE F [CM * 2]
MENSCH 52.6
MASCHINE ERGEBNIS IST FALSCH HILFSINFORMATION: $F = DS * HS + TO * BO$
MENSCH 49.6
MASCHINE ERGEBNIS IST JETZT FEHLERFREI SCHWERPUNKTKOORDINATE EX [CM]
MENSCH 5.9

MASCHINE ERGEBNIS IST FEHLERFREI
TRÄGHEITSMOMENTE
IX [CM * 4]
IY [CM * 4]
MENSCH 1892 1004
MASCHINE 2. WERT IST ÜNGENAU
MENSCH 1892 1007
MASCHINE ERGEBNISSE SIND JETZT FEHLERFREI
ENDE DER AUFGABE QUERSCHNITT

Dieser Dialog zeigt deutlich, daß das Schema Eingabe-Rechnung-Ausgabe durch ein ständiges Wechselspiel zwischen Eingaben, Ausgaben und Berechnungen ersetzt wird.

Wie man sich denken kann, ist diese Arbeitsweise sehr vielfältig zu variieren und einzusetzen. An der TH Leipzig wird sie zunehmend genutzt, sei es zur Bemessung von Bauteilen (Stockwerkrahmen, Spannbetonquerschnitten), zur Lösung von Gleichungssystemen, Projektierung von Elektroenergiesystemen oder um aus großen Datenbeständen, die auf Magnetbändern oder -platten gespeichert sind, Informationen herauszulesen – etwa vergleichbar mit dem Blättern in einem Buche – bzw. um solche Daten zu ändern. So werden zum Beispiel sämtliche Zensuren aller Studenten in Speicher eingetragen und aufbewahrt, um im Bedarfsfalle über die Bildschirmgeräte abgefragt werden zu können. Erstmals wurden auch Studenten im Studienjahr 77/78 mit der Bildschirmarbeit vertraut gemacht. Bei ihrer späteren Tätigkeit wird das für sie von Nutzen sein, da die Entwicklungen dahingehen, daß immer mehr Betriebe und Institutionen unmittelbaren Dialogkontakt mit Großrechenzentren haben werden. Diese Form der Ausbildung ist modern und auf die Zukunft gerichtet.

Autorenkollektiv der TH Leipzig

Aus: „Eulenspiegel“



XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR 4. Stufe (DDR-Olympiade)

Preisträger

Einen ersten Preis erhielten:

In Olympiadeklasse 10: Andreas Goede (1), General-Walter-EOS, Strausberg; Jürgen Gräfenstein (2), EOS Martin-Andersen-Nexö, Spezialschule f. Elektron. Industrie, Dresden; Axel Schüler (3), Gerh.-Eisler-EOS Kleinmachnow (Kl. 8); Detlef Horbach (4), EOS Friedrich Engels, Karl-Marx-Stadt
In Olympiadeklasse 12: Stefan Schuster (5), EOS Ernst Schneller, Meißen; Steffen Zopf (6), EOS Karl Marx, Leipzig (Kl. 11); Lutz Dietrich (7), TH Karl-Marx-Stadt, Spezialkl. Math. (Kl. 11)

1



2



3



4



5



6



7



Einen zweiten Preis erhielten:

In Olympiadeklasse 10: Jens Heinrich, Goethe-Schule, Jüterbog; Michael Giesecke, Spezialschule f. Elektron. Industrie, Dresden; Steffen Grünwald, EOS Kleinmachnow; Marid Helbig, Spezialschule C. F. Gauß, Frankfurt (Oder); Jens Franke, 15. OS Rudolf Scheffel, Gera (Kl. 8); Bernd Kirchheim, EOS F. Schiller, Weimar (Kl. 9); Gabriele Drauschke, EOS Clara Zetkin, Neustrelitz; Ralf Hartig, 13. OS Cottbus (Kl. 9); Stefan Thäter, EOS F. Schiller, Weimar; Norbert Münch, Goethe-EOS, Bad Doberan

In Olympiadeklasse 11/12: Andreas Kasperek, Spezialkl. der Martin-Luther-Universität Halle; Uwe Szyka, EOS Friedrich Engels, Neubrandenburg; Tilo Brock, BBS BMK

Leipzig Süd; Frank Eisenhaber, Spezialschule Math./Phys. der Humboldt-Universität zu Berlin; Axel Fröhlich, Spezialschule C. F. Gauß, Frankfurt (Oder) (Kl. 11); Frank Erdmann, Spezialkl. der Martin-Luther-Universität Halle (Kl. 11); Matthias Gelbrich, EOS Heinrich Hertz, Berlin (Kl. 11)

25 Schüler erhielten einen dritten Preis, 30 Schüler eine Anerkennungsurkunde für gute Leistungen. Ein Diplom für eine besonders elegante Lösung der Aufgabe 1, Klassenstufe 10, erhielt Norbert Koksche, EOS B. Brecht, Dresden.

An der XVIII. OJM nahmen 183 Schüler, davon 28 Mädchen, teil. 33 Schüler waren „Frühstarter“, d. h. starteten in einer höheren Klassenstufe.

Aufgaben

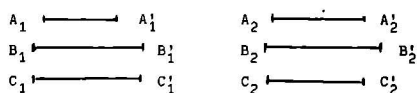
Olympiadeklasse 10

1. Wie lauten die letzten beiden Ziffern (bei üblicher dekadischer Ziffernschreibweise) derjenigen Zahl x , die die Gleichung

$$\log_{13}[\log_{12}(\log_{11}x)] = 1$$

erfüllt?

2. In einer Ebene ε seien durch ihre paarweise verschiedenen Endpunkte die 6 Strecken $A_1A'_1$, $B_1B'_1$, $C_1C'_1$, $A_2A'_2$, $B_2B'_2$, $C_2C'_2$ gegeben (siehe Arbeitsblatt).



Mit V_1 sei das Volumen eines Quaders bezeichnet, der die Kantenlängen

$$a_1 = \overline{A_1A'_1}, b_1 = \overline{B_1B'_1}, c_1 = \overline{C_1C'_1} \text{ hat;}$$

mit V_2 sei das Volumen eines Quaders bezeichnet, der die Kantenlängen

$$a_2 = \overline{A_2A'_2}, b_2 = \overline{B_2B'_2}, c_2 = \overline{C_2C'_2} \text{ hat.}$$

a) Beschreiben Sie eine in ε durchzuführende Konstruktion zweier Strecken P_1Q_1 , P_2Q_2 mit folgender Eigenschaft (*):

$$(*) \begin{cases} \text{Falls } \overline{P_2Q_1} < \overline{P_2Q_2} \text{ ist, gilt } V_1 < V_2; \\ \text{falls } \overline{P_1Q_1} = \overline{P_2Q_2} \text{ ist, gilt } V_1 = V_2; \\ \text{falls } \overline{P_1Q_1} > \overline{P_2Q_2} \text{ ist, gilt } V_1 > V_2. \end{cases}$$

(Zur Konstruktion dürfen wie üblich nur Zirkel, Lineal und Zeichendreieck verwendet werden.)

Daß P_1Q_1 , P_2Q_2 die Eigenschaft (*) haben, wenn sie nach der Beschreibung konstruiert wurden, ist zu beweisen.

b) Untersuchen Sie für die Strecken $A_1A'_1$, ..., $C_2C'_2$ auf dem Arbeitsblatt auf die in a) genannte Weise, ob $V_1 < V_2$, $V_1 = V_2$ oder $V_1 > V_2$ gilt!

3A. Es sei a eine positive, von 1 verschiedene reelle Zahl. Ferner sei f die für alle reellen Zahlen x durch

$$f(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$$

definierte Funktion.

Man beweise, daß f eine für alle reellen Zahlen definierte Funktion g als Umkehrfunktion besitzt, und ermittle diese Funktion g .

3B. Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x , für die erstens jede in dem Ausdruck

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$$

auftretende Wurzel und damit dieser Ausdruck insgesamt (als reelle Zahl) existiert und zweitens diese Zahl gleich 1 ist.

4. Man beweise: Wenn a , b , c , d positive reelle Zahlen sind, dann gilt

$$a) \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ und } b) \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}.$$

5. Ermitteln Sie alle Paare natürlicher Zahlen $(n; z)$, für die

$$2^n + 12^z = z^2 - 3^2 \text{ gilt!}$$

6. Verbindet man bei einem Würfel mit der Kantenlänge a die Mittelpunkte je zweier benachbarter Seitenflächen miteinander, so bilden die sämtlichen entstehenden Verbindungsstrecken die Kanten eines regelmäßigen Oktaeders. Sein Volumen sei mit V bezeichnet.

Beweisen Sie, daß auch ein regelmäßiges Oktaeder existiert, dessen Ecken auf der Oberfläche des gleichen Würfels liegen und dessen Volumen mehr als $3V$ beträgt!

Die Aufgaben der Olympiadeklasse 11/12 werden in Heft 5/79 veröffentlicht.

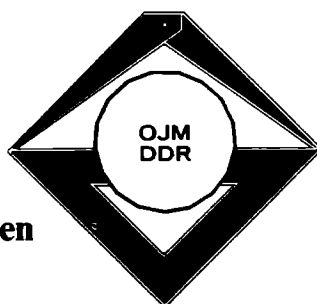
Jugendhochschule Wilhelm Pieck, Berlin-Bogensee, Gastgeber der OJM



XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

1. Stufe (Schulolympiade) Aufgaben

Abgabetermin (beim Mathematiklehrer): Ende September



Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen und Punktbewertungstabellen werden ab Oktober 1979 veröffentlicht.

Anmerkung: $\angle ABC$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\angle ABC$. Ferner bezeichnet $\overline{AB}$ die Strecke mit den Endpunkten A und B , während AB die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

1. (Eine historische Aufgabe, 2000 Jahre v. d. Z.)

In einem Käfig sind Kaninchen und Fasane eingesperrt. Diese Tiere haben zusammen 40 Köpfe und 104 Füße.

Nenne die Anzahl aller Kaninchen und die Anzahl aller Fasane, die in dem Käfig sind!

2. In die sieben leeren Felder des folgenden Bildes sind Zahlen derart einzutragen, daß alle vier waagerechten und alle vier senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind. Eine Begründung wird nicht verlangt.

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{4} & + & \boxed{} & - & \boxed{} & = & \boxed{2} \\ + & & - & & + & & + \\ \boxed{} & - & \boxed{2} & + & \boxed{0} & = & \boxed{} \\ - & & + & & - & & - \\ \boxed{} & + & \boxed{} & - & \boxed{6} & = & \boxed{6} \\ = & & = & & = & & = \\ \boxed{1} & + & \boxed{5} & - & \boxed{} & = & \boxed{3} \end{array}$$

3. Kurt, Peter und Konrad sind jeweils in genau einer der drei Arbeitsgemeinschaften „Mathematik“, „Biologie“, „Zeichnen“. Ferner ist bekannt:

- (1) Peter geht häufiger zum Schwimmen als der Junge aus der AG „Mathematik“.
 - (2) Der Junge aus der AG „Mathematik“ und Konrad haben nicht gleich viele Urkunden bei einem Sportwettkampf erhalten.
 - (3) Peter geht in eine niedrigere Klasse als der Junge aus der AG „Biologie“.
- Welcher der drei Jungen besucht die AG

„Mathematik“, welcher die AG „Biologie“ und welcher die AG „Zeichnen“?

4. Wie viele Streichhölzer würden sich insgesamt in einem hohlen Würfel unterbringen lassen, dessen Kantenlänge, innen im Hohlraum gemessen, 1 m beträgt?

Wir wollen dabei annehmen, daß jedes Streichholz genau 5 cm lang, 2 mm breit und 2 mm hoch ist. Die Verdickung am Streichholzkopf und andere Unregelmäßigkeiten sollen bei dieser Aufgabe nicht berücksichtigt werden.

Olympiadeklasse 6

1. Von einem Busbahnhof fahren um 12.00 Uhr gleichzeitig vier Busse ab. Die Zeit, die jeweils bis zur nächsten Rückkehr und anschließenden erneuten Abfahrt vom gleichen Busbahnhof vergeht, beträgt

für den ersten Bus $\frac{3}{4}$ Stunde,

für den zweiten Bus $\frac{1}{2}$ Stunde.

für den dritten Bus 36 Minuten und

für den vierten Bus 1 Stunde.

Zu welcher Uhrzeit fahren hiernach erstmalig alle vier Busse wieder gleichzeitig von dem Busbahnhof ab? Wie viele Fahrten hat jeder der vier Busse bis dahin durchgeführt?

2. Ulrike möchte vier natürliche Zahlen in einer bestimmten Reihenfolge angeben, so daß folgendes gilt:

Die zweite Zahl ist um 1 kleiner als das Doppelte der ersten Zahl, die dritte Zahl ist um 1 kleiner als das Doppelte der zweiten Zahl, die vierte Zahl ist um 1 kleiner als das Doppelte der dritten Zahl, die Summe der vier angegebenen Zahlen beträgt 79.

Zeige, wie man alle Zahlen finden kann, die diese Bedingungen erfüllen! Überprüfe, ob die gefundenen Zahlen alle Bedingungen erfüllen!

3. In einem Kästchen befinden sich 12 rote, 15 blaue und 8 gelbe Kugeln, die sich nur durch ihre Farbe unterscheiden. Anke will mit verbundenen Augen eine Anzahl dieser Kugeln herausnehmen. Die Anzahl will sie so wählen, daß sie mit Sicherheit erreicht, daß sich unter den herausgenommenen Kugeln 5 von gleicher Farbe befinden. Sie meint: „Es genügt hierzu, 15 Kugeln herauszunehmen.“

Birgit meint: „Es genügen sogar 13 Kugeln.“ Cornelia behauptet: „Es genügen dafür 12 Kugeln.“

Entscheide für jede der drei Meinungen, ob sie wahr ist, und begründe deine Entscheidung!

4. Drei Pioniere einer Schule, Karin, Dieter und Frank, wurden zur Kreisolympiade Junger Mathematiker delegiert und errangen einen ersten, einen zweiten und einen dritten Preis (jeder der drei Pioniere genau einen dieser drei Preise). Später erkundigte sich Anette nach dem Abschneiden der drei Olympiadeteilnehmer. Man sagte ihr:

„Dieter erhielt keinen ersten Preis.“ (1)

„Karin erhielt keinen zweiten Preis.“ (2)

„Frank erhielt einen zweiten Preis.“ (3)

Später stellte sich heraus, daß von diesen drei Aussagen genau eine wahr, die anderen dagegen falsch waren.

Welcher der drei Schüler erhielt hiernach den ersten, welcher den zweiten und welcher den dritten Preis?

Olympiadeklasse 7

1. Eine Gruppe von 8 Schülern hebt bei der Produktionsarbeit im Patenbetrieb einen Graben von 30 cm Breite, 60 cm Tiefe und 20 m Länge aus. Eine zweite Gruppe von 6 Schülern hebt einen Graben von 25 cm Breite, 50 cm Tiefe und 22 m Länge aus. Es werde vorausgesetzt, daß von jedem der 14 Schüler für das Ausheben gleich großer Volumina gleiche Zeiten benötigt werden (wobei die für das Ausheben eines bestimmten Volumens benötigte Zeit bei allen Schülern dieselbe sei).

Welche der beiden Gruppen benötigt für das Ausheben ihres Grabens unter diesen Voraussetzungen weniger Zeit als die andere?

2. Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen, die die Eigenschaft haben, durch jede der Zahlen

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15

teilbar zu sein!

3. Es sei $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck; C sei der Scheitel des rechten Winkels. Die Halbierende dieses Winkels schneide die Seite AB in D . Der Fußpunkt des Lotes von D auf AC sei E .

Beweise hierfür die folgende Aussage:

Wenn $\angle CAB = 22,5^\circ$ ist, dann gilt

$\angle ADE = \angle CDB$.

4. Sechs Schüler halfen bei der Obsternte; sie erhielten Anerkennungsprämien entsprechend ihren Leistungen. Jeder von ihnen übergab die Hälfte des erhaltenen Geldbetrages dem Solidaritätskonto. Über diese Schüler ist ferner folgendes bekannt:

(1) Keiner von ihnen spendete weniger als 6 M und keiner mehr als 12 M.

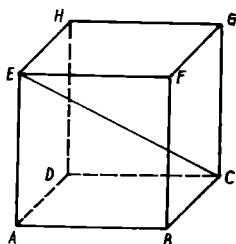
(2) Konrad spendete mehr als Peter.

(3) Helga spendete mehr als Gisela, Gisela mehr als Peter, Peter mehr als Inge.

- (4) Frank spendete mehr als Helga und Helga mehr als Konrad.
 (5) Helga spendete 2 M weniger als Frank. Peter 2 M mehr als Inge.
 (6) Alle spendeten volle Markbeträge.
 Wieviel Geld erhielt jeder der Schüler für das Obstpflücken?

Olympiadeklasse 8

1. Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge 5 cm (siehe Bild). Dieser Würfel ist in senkrechter Zweitafelprojektion abzubilden. Dabei wird gefordert, daß die Raumdiagonale EC parallel zur Grundrißtafel und senkrecht zur Aufrißtafel liegt. Unter Beachtung dieser Forderung kann die Lage des Würfels im Raum sonst beliebig gewählt werden. Alle Eckpunkte sind entsprechend dem Bilde zu benennen. Beschreibung und Begründung der Konstruktion sind nicht erforderlich.



2. Aus den Ziffern 0, 1, ..., 9 seien genau sieben ausgewählt, von denen keine zwei einander gleich sind.

Ermittle die Anzahl aller derjenigen (im dekadischen System) siebenstelligen Zahlen, die in ihrer (dekadischen) Zifferndarstellung jede der ausgewählten Ziffern enthalten!

Dabei werde

- vorausgesetzt, daß die 0 nicht unter den ausgewählten Ziffern vorkommt,
- vorausgesetzt, daß die 0 unter den ausgewählten Ziffern vorkommt.

3. Gegeben seien die vier periodischen Dezimalbrüche

$$p = 0,3456\overline{\dots} \quad r = 0,3456\overline{\dots}, \\ q = 0,3456\overline{\dots} \quad s = 0,3456\overline{\dots}$$

a) Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n , für die folgende Aussage gilt:

In der n -ten Stelle nach dem Komma haben alle vier Dezimalbrüche p, q, r, s dieselbe Ziffer.

b) Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen m , für die folgende Aussage gilt:

In der m -ten Stelle nach dem Komma haben keine zwei der vier Dezimalbrüche p, q, r, s dieselbe Ziffer.

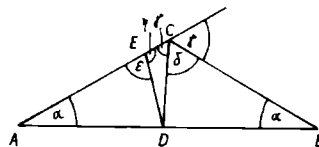
4. Von zwei Kreisen werde vorausgesetzt, daß sie sich von außen in einem Punkt P berühren. Die Gerade, die beide Kreise in P berührt, sei t . Ferner sei s eine weitere gemeinsame Tangente beider Kreise; sie berühre diese in den Punkten Q bzw. R . Der Schnittpunkt von s mit t sei S .

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen S der Mittelpunkt der Strecken QR ist!

Olympiadeklasse 9

1. In der dargestellten Figur sei die Größe δ des Winkels $\angle DCB$ bekannt. Ferner sei vorausgesetzt, daß gleichbezeichnete Winkel auch gleiche Größen haben.

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen die Winkelgrößen $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \eta$ und ϕ in Abhängigkeit von δ !



2. Von den 49 Feldern des Bildes sollen einige angekreuzt werden. Je zwei angekreuzte Felder dürfen dabei höchstens einen Eckpunkt gemeinsam haben. In jeder Zeile und in jeder Spalte des Bildes sollen genau so viele Felder angekreuzt werden, wie durch die am Rande stehenden Zahlen jeweils angegeben ist.

	3	1	0	1	2	4	2	
3								a
3								b
1								c
2								d
2								e
0								f
2								g
	A	B	C	D	E	F	G	

Ermitteln Sie für die anzukreuzenden Felder alle diejenigen Verteilungen, die diesen Forderungen entsprechen!

(Benutzen Sie zur Beschreibung des Lösungsweges die angegebenen Buchstaben! So erhält z. B. das erste Feld links oben die Bezeichnung aA.)

3. Den Ecken eines ebenflächig begrenzten Körpers sollen Zahlen zugeordnet werden. Ist n die Anzahl der Ecken des Körpers, so soll dabei jeder Ecke genau eine der Zahlen 1, ..., n zugeordnet werden. Ferner soll erreicht werden:

Wenn zu jeder Seitenfläche des Körpers die Summe derjenigen Zahlen gebildet wird, die den Ecken dieser Seitenfläche zugeordnet wurden, so erhält man für jede Seitenfläche des Körpers die gleiche Summe.

Beweisen Sie, daß eine solche Zuordnung möglich ist, wenn der Körper ein Würfel ist, dagegen nicht beim Tetraeder und nicht beim Oktaeder!

4. Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC .

Beschreiben Sie eine Konstruktion einer Seite eines Quadrates, das denselben Flächeninhalt wie das Dreieck ABC hat!

In der Konstruktionsbeschreibung sollen wie üblich nur solche Konstruktionsschritte auftreten, die sich unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal ausführen lassen. Daß bei der Durchführung der Konstruktion (nach

der von Ihnen gegebenen Beschreibung) eine Seite eines zu dem gegebenen Dreieck ABC flächeninhaltsgleichen Quadrates entsteht, ist zu beweisen.

Olympiadeklasse 10

1. Jens zeichnet auf ein Zeichenblatt ein Quadrat von der Seitenlänge 2 cm. Dirk soll vier möglichst kleine, einander kongruente Kreise aus Papier ausschneiden und so auf das Zeichenblatt legen, daß kein Punkt der Quadratfläche mehr sichtbar ist.

Wie groß muß Dirk den Radius der vier Kreise wählen, um diese Forderungen zu erfüllen?

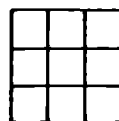
2. Es seien b und c von 0 verschiedene natürliche Zahlen und a eine Primzahl. Ferner gelte für sie die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$.

Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets $a < b$ und $b + 1 = c$ gilt!

3. Man ermittle alle reellen Zahlen x mit $-1 \leq x \leq 1$, für die der Term $x^2 + 3x + 4$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ergibt.

4. In die neun Felder des Bildes sollen die Zahlen von 1 bis 9 so eingetragen werden, daß jede dieser Zahlen genau einmal vorkommt und daß in jeder Spalte und jeder Zeile und in jeder der beiden Diagonalen die gleiche Summe auftritt.

Ermitteln Sie die größtmögliche Zahl von nicht zueinander kongruenten Eintragungen dieser Art! Dabei werden zwei Eintragungen genau dann als kongruent bezeichnet, wenn sie durch eine Drehung oder Spiegelung ineinander überführt werden können.



Olympiadeklasse 11/12

1. Es sei (bezüglich eines kartesischen x, y -Koordinatensystems) p die Parabel mit $y = x^2$ als Gleichung.

a) Man beweise: Durch den Punkt $(0; 1)$ gibt es genau eine Sehne von p mit der Länge 2.

b) Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen $c \geq 0$, für die folgende Aussage gilt: Durch den Punkt $(0; c)$ gibt es genau zwei Sehnen von p mit der Länge 2.

2. Für zwei Länder, „Normalland“ und „Spiegelland“, und ihre Netze von Eisenbahnlinien sei folgendes vorausgesetzt:

(1) Jede Stadt X in Normalland hat genau eine Partnerstadt X' in Spiegelland. Dabei gilt: Zu jeder Stadt Y' in Spiegelland gibt es genau eine Stadt in Normalland, deren Partnerstadt Y ist.

(2) Jede Eisenbahnlinie in Normalland stellt eine unmittelbare Verbindung zwischen zwei Städten her und berührt sonst keine andere Stadt. Dieselbe Aussage trifft für Spiegelland zu.

(3) Für je zwei Städte A, B in Normalland und ihre Partnerstädte A', B' in Spiegelland gilt: Entweder gibt es eine unmittelbare Eisenbahnverbindung zwischen A und B , aber keine zwischen A' und B' , oder es gibt eine unmittelbare Eisenbahnverbindung zwischen A' und B' , aber keine zwischen A und B .

(4) In Normalland gibt es zwei Städte P, Q , die so am Eisenbahnnetz gelegen sind, daß man wenigstens zweimal umsteigen muß, um von P nach Q zu gelangen.

Beweisen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen (1) bis (4) folgt: In Spiegelland kann man von jeder Stadt zu jeder anderen gelangen, ohne mehr als zweimal umsteigen zu müssen.

3. Von einem Dreieck werde gefordert, daß sein Flächeninhalt gleich $\frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ ist, wobei a und b die Längen zweier Seiten des Dreiecks sind.

Man beweise, daß diese Forderung erfüllbar ist und daß durch diese Forderung die Größen der Winkel des Dreiecks eindeutig bestimmt sind. Man ermittle ferner diese Winkelgrößen.

4. a) Zeigen Sie, daß das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 7x + 100y &= 0 & (1) \\ 0,069x + y &= 0,3 & (2) \end{aligned}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung (x_0, y_0) hat, und ermitteln Sie diese!

Im folgenden werde in Gleichung (2) des Systems (1), (2) der Koeffizient von x „innerhalb einer gegebenen δ -Umgebung von 0,069 verändert“, d. h. für gegebenes reelles $\delta > 0$ sei eine reelle Zahl h auf das Intervall

$$-\delta \leq h \leq \delta \quad (3)$$

eingeschränkt, und für jedes solche h sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 7x + 100y &= 0 & (1) \\ (0,069 + h)x + y &= 0,3 & (4) \end{aligned}$$

betrachtet. Man möchte erreichen, daß sich x_0 durch diese Veränderung des Koeffizienten 0,069 „um höchstens 1% ändern kann“. Damit ist die unten folgende Aufgabenstellung b), c) gemeint.

Zunächst wird definiert:

Besitzt für irgendein h das Gleichungssystem (1), (4) eine eindeutige Lösung, so sei diese mit $(x_h; y_h)$ bezeichnet. Ist dies (bei gegebenem $\delta > 0$) für alle in (3) genannten h der Fall und gibt es unter diesen Werten h einen, für den die Zahl

$$\eta = \frac{|x_0 - x_h|}{|x_0|}$$

möglichst groß ist, so werde dieser möglichst große Wert von η mit $\eta_{\max}$ („bezüglich (3) maximaler relativer Fehler“ von x) bezeichnet.

b) Ermitteln Sie alle diejenigen $\delta > 0$, für die ein bezüglich (3) maximaler relativer Fehler $\eta_{\max}$ existiert!

c) Ermitteln Sie unter den in b) gefundenen Werten von δ alle diejenigen, für die sogar $\eta_{\max} \leq 0,01$ gilt!

Lösungen



Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 1/79

Ma 5 ■ 1823 Da an Stelle der Sternchen nur Ziffern für gerade Zahlen stehen dürfen, beginnt der Minuend mit der Ziffer 2. Aus $2000 - 1114 = 886$ folgt, daß der Subtrahend gleich oder größer als 886 ist. Es existieren genau zwei Lösungen; sie lauten $2000 - 886 = 1114$ und $2002 - 888 = 1114$. Bei den dreistelligen Subtrahenden, die gleich oder größer als 890 sind, tritt entweder an der zweiten oder an der ersten Stelle des Minuenden eine Ziffer für eine ungerade Zahl auf.

Ma 5 ■ 1824 Wenn durchnummerierte Eintrittskarten von der Nummer a bis zur Nummer b verkauft werden, so sind das $(b - a + 1)$ Eintrittskarten. Daraus folgt:

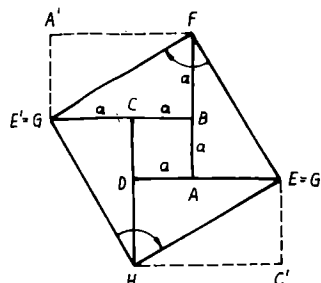
An der Kasse A wurden $498 - 1 + 1 = 498$, an der Kasse B wurden $1999 - 1247 + 1 = 753$, an der Kasse C wurden $n - 3000 + 1 = n - 2999$ Eintrittskarten verkauft. Nun gilt $498 + 753 + n - 2999 = 1978$, also $n = 3726$. Auf der zuletzt verkauften Karte stand die Nummer 3726.

Ma 5 ■ 1825 Preis der Hose: 20,50 M : 2 = 10,25 M.

Preis des Kleides: $3 \cdot 10,25 \text{ M} = 30,75 \text{ M}$.

Preis der Schürze: $40,25 \text{ M} - 30,75 \text{ M} = 9,50 \text{ M}$.

Ma 5 ■ 1826 Drehen wir das rechtwinklige Dreieck AEF um F als Drehzentrum im mathematisch negativen Sinn um 90° , so fällt das Bild E' von E mit G zusammen, und wir erhalten das Rechteck $E'BFA'$. Drehen wir das rechtwinklige Dreieck CGH um H als Drehzentrum im mathematisch negativen Sinn um 90° , so fällt das Bild G' von G mit E zusammen, und wir erhalten das Rechteck $HC'ED$. Der Flächeninhalt des Vierecks $EFGH$ setzt sich somit zusammen aus der Summe der Flächeninhalte der Rechtecke $E'BFA'$ und



$HC'ED$ und des Quadrats $ABCD$. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} A_{EFGH} &= 2 \cdot a \cdot 2a + a^2 = 4a^2 + a^2 = 5a^2, \\ A_{ABCD} &= a^2. \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ ist somit fünfmal im Flächeninhalt des Vierecks $EFGH$ enthalten.

Ma 5 ■ 1827 Aus $abb - agd = eb$ folgt $d = 0$, aus $ag0 - f = aef$ folgt $f = 5$, aus $abb + c0 = e5b$ folgt $e = a + 1$, aus $e5b + ae5 = 51a$ und $e = a + 1$ folgt $a = 2$ und $e = 3$, aus $3b \cdot hk = 512$ folgt $h = 1$, aus $35b + 235 = 512$ folgt $b = 7$, aus $37 \cdot 1k = 512$ folgt $k = 6$ und $l = 9$, aus $277 - 2g0 = 37$ folgt $g = 4$, aus $c0 : 5 = 16$ folgt $c = 8$.

Ergebnis: $277 + 80 = 357$

$$\begin{array}{r} - \quad : \quad + \\ 240 - 5 = 235 \\ 37 \cdot 16 = 592 \end{array}$$

Ma 5 ■ 1828 Die Zahl des erreichten Lebensalters des Lehrers läßt sich durch

$z = 3 \cdot 10 + y$ darstellen. Nun gilt

$$\begin{aligned} 3 \cdot 10 + y &= 10 \cdot y + 3 + 9, \\ 9y &= 18, \text{ also } y = 2. \end{aligned}$$

Im Jahre 1978 ist der Lehrer 32 Jahre alt geworden; er wurde somit im Jahre 1946 geboren.

Ma 6 ■ 1829 Aus (2) folgt $c = 1$; aus (3) folgt $d = 0$. Nach (1) gilt dann $\overline{aa} \cdot \overline{b} = 110 = 55 \cdot 2 = 22 \cdot 5$. Daraus folgt $a = 5$ und $b = 2$ oder $a = 2$ und $b = 5$. Demnach gilt

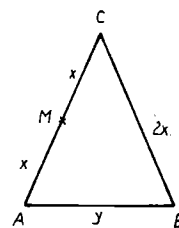
$$x = 5 + 2 + 1 + 0 = 8.$$

Ma 6 ■ 1830 Es sei $\overline{AM} = \overline{MC} = x$ und $\overline{AB} = y$, also $\overline{BC} = 2x$;

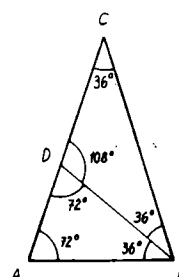
dann gilt $x + 2x = 45$, $3x = 45$, $x = 15$.

Ferner gilt $y + x = 25$, $y + 15 = 25$, $y = 10$.

Die Basis $\overline{AB}$ des Dreiecks ABC ist 10 cm lang, jeder Schenkel ist 30 cm lang.



Ma 6 ■ 1831 Aus $\overline{AB} = \overline{BD}$ folgt $\sphericalangle BDA = \sphericalangle BAD = 72^\circ$. Im Dreieck ABD beträgt dann $\sphericalangle ABD = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$. Nach dem Außenwinkelsatz gilt $\sphericalangle BDC = 72^\circ + 36^\circ = 108^\circ$. Aus $\overline{BD} = \overline{CD}$ folgt



✱ $DCB = \text{✱}DBC$. Im Dreieck BCD gilt deshalb $\text{✱}DCB = \text{✱}DBC = (180^\circ - 108^\circ) : 2 = 36^\circ$. Daraus folgt weiter $\text{✱}ABC = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ$. Aus $\text{✱}CAB = \text{✱}CBA = 72^\circ$ folgt $\overline{AC} = \overline{BC}$, d. h., Dreieck ABC ist gleichschenkelig.

Ma 6 ■ 1832 Aus $ab + ci = iga$ folgt $i = 1$.

Aus $iga + hc = gig$ folgt $g = 2$.

Aus $ci - dg = ik$ folgt $k = 9$.

Aus $efgh : ik = gig$ folgt $h = 8$.

Aus $efgh : ik = gig$ folgt weiter $e = 4$ und $f = 0$.

Aus $ab \cdot cd = efgh$ folgt $b \cdot d = 8$ oder 18 oder 28 oder 38 oder 48 oder 58 oder 68, denn $9 \cdot 8 = 72$.

Wegen $8 = 1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$ und $i = 1$ und $g = 2$ ist dieser Fall nicht möglich. Wegen $28 = 4 \cdot 7$ und $e = 4$ entfällt 28. Wegen $38 = 2 \cdot 19$ und $19 > 9$ entfällt 38. Wegen $48 = 6 \cdot 8$ und $h = 8$ entfällt 48. Wegen $58 = 2 \cdot 29$ und $29 > 9$ entfällt 58. Wegen $68 = 4 \cdot 17$ und $17 > 9$ entfällt 68. Wegen $18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$ und $g = 2$ gilt $b \cdot d = 3 \cdot 6$ oder $b \cdot d = 6 \cdot 3$. Für $b = 3$ gilt wegen $ab + ci = iga$ $a = 4$, was wegen $e = 4$ nicht möglich ist.

Folglich gilt $b = 6$ und $d = 3$. Wir erhalten

$$\begin{array}{r} 76 \cdot 53 = 4028 \\ + \quad + \quad : \\ 51 - 32 = 19 \\ \hline 127 + 85 = 212 \end{array}$$

Ma 6 ■ 1833 Aus (6), (9) und (7) folgt:

Götz geht in die 9. Klasse, er hat den Nachnamen Krause und wohnt in Rostock.

Aus (10) und (4) folgt:

In Berlin wohnt der Schüler mit Nachnamen Schmidt; er geht in die 6. Klasse.

Aus (8) und (7) folgt:

Peter wohnt in Erfurt. Folglich heißt Peter mit Nachnamen Saßnitz oder Jacke.

Aus (5) folgt:

Peter hat den Nachnamen Saßnitz.

Aus (10) folgt: Peter ist Schüler der 8. Klasse.

Aus dem bisherigen folgt: In Prag wohnt der Schüler mit Nachnamen Jacke; er ist Schüler der 7. Klasse.

Aus (3) folgt: Mario wohnt in Berlin. Deshalb hat der Schüler aus Prag den Vornamen Torsten.

Ma 7 ■ 1834 Es seien a und b zwei natürliche Zahlen, die die gestellten Bedingungen erfüllen; dann gilt

$$(a+b) + a \cdot b = 110,$$

$$a + ab = 110 - b,$$

$$a(1+b) = 110 - b,$$

$$a = \frac{110 - b}{1 + b} = \frac{111}{1 + b} - 1$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 37}{1 + b} - 1.$$

a ist nur dann eine natürliche Zahl, wenn $1 \cdot 3 \cdot 37$ ein Vielfaches von $1 + b$ ist. Das trifft zu für $b = 0, 2, 36, 110$ bzw. für $a = 110, 36, 2, 0$. Sieht man von der Vertauschbarkeit der Summanden bzw. Faktoren ab, so erhält man genau zwei Lösungen; sie lauten: 110 und 0 bzw. 36 und 2 , denn $110 + 0 + 110 \cdot 0 = 110$ und $36 + 2 + 36 \cdot 2 = 110$.

Ma 7 ■ 1835 Angenommen, der Vater sei v Jahre, die Mutter m Jahre, der Sohn s Jahre und die Tochter t Jahre alt; dann gilt $v + m = 75$ und $v + s = 54$ und $v + t = 51$ und $v + m + s + t = 100$. Addieren wir die ersten drei Gleichungen, so erhalten wir $3v + m + s + t = 180$. Subtrahieren wir davon die vierte Gleichung, so erhalten wir $2v = 80$, also $v = 40$. Die übrigen Zahlen sind nun leicht zu ermitteln. Der Vater ist 40 Jahre, die Mutter 35 Jahre, der Sohn 14 Jahre, die Tochter 11 Jahre alt.

Ma 7 ■ 1836 Wir fertigen eine Tabelle an!

p_1	p_2	p_3	$p_1 + p_2 + p_3$
2	3	5	10
3	5	7	15
5	7	11	23 Primzahl
7	11	13	31 Primzahl
11	13	17	41 Primzahl
13	17	19	49
17	19	23	59 Primzahl
19	23	29	71 Primzahl
23	29	31	83 Primzahl
29	31	37	97 Primzahl

Der Tabelle ist zu entnehmen, daß es sieben reguläre Primdreiecke gibt, die zugleich binär sind.

Ma 7 ■ 1837 Wir wählen den 31. Januar als Bezugspunkt und stellen für reguläre Jahre (Februar mit 28 Tagen) sowie für Schaltjahre (Februar mit 29 Tagen) folgende Tabelle auf:

Reguläres Jahr

Datum	Differenz d zum 31. 1. in Tagen	$d : 7$
31. 1.	0	$0 : 7 = 0 \cdot 7 + 0$
31. 3.	59	$59 : 7 = 8 \cdot 7 + 3$
31. 5.	120	$120 : 7 = 17 \cdot 7 + 1$
31. 7.	181	$181 : 7 = 25 \cdot 7 + 6$
31. 8.	212	$212 : 7 = 30 \cdot 7 + 2$
31. 10.	273	$273 : 7 = 39 \cdot 7 + 0$
31. 12.	334	$334 : 7 = 47 \cdot 7 + 5$

Schaltjahr

Datum	Differenz d zum 31. 1. in Tagen	$d : 7$
31. 1.	0	$0 : 7 = 0 \cdot 7 + 0$
31. 3.	60	$60 : 7 = 8 \cdot 7 + 4$
31. 5.	121	$121 : 7 = 17 \cdot 7 + 2$
31. 7.	182	$182 : 7 = 26 \cdot 7 + 0$
31. 8.	213	$213 : 7 = 30 \cdot 7 + 3$
31. 10.	274	$274 : 7 = 39 \cdot 7 + 1$
31. 12.	335	$335 : 7 = 47 \cdot 7 + 6$

Da eine Woche 7 Tage hat, gibt jeder Rest von $d : 7$ einen bestimmten Wochentag an. Die Tabelle zeigt, daß in einem regulären Jahr der Rest 4 fehlt und dafür der 31. 1. und der 31. 10. auf denselben Wochentag fallen. In einem Schaltjahr fehlt der Rest 5; dafür fallen der 31. 1. und der 31. 7. auf denselben Wochentag. Also gibt es in jedem Kalenderjahr genau einen Wochentag, auf den der 31. Tag eines Monats nicht fallen kann.

Ma 8 ■ 1838 Aus (1) oder (5) folgt, daß A für beliebiges α nur 1 sein kann. Aus (2) folgt, daß L für beliebiges α immer 2 ist.

Wenn $\alpha = 3$, dann ist $P = 4$ und $H = 6$.

Wenn $\alpha = 4$, dann ist $P = 5$ und $H = 8$.

Wegen $A = 1$, $L = 2$ und wegen Gleichung (4) sind keine weiteren Belegungen für α möglich; denn für $\alpha \geq 5$ wäre $H \geq 10$, was den Bedingungen widerspricht.

Es gibt also genau zwei Möglichkeiten:

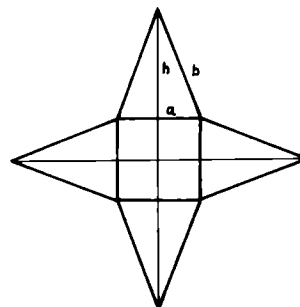
1. $A = 1$, $L = 2$, $P = 4$, $H = 6$, $\alpha = 3$

2. $A = 1$, $L = 2$, $P = 5$, $H = 8$, $\alpha = 4$.

Ma 8 ■ 1839 Es waren 5% der Tage nicht kalt, 15% nicht naß, 25% nicht windig und 35% nicht trübe.

Daraus folgt, daß es an 20% aller Urlaubstage kalt, naß, windig und trübe zugleich war.

Ma 8 ■ 1840 Skizze (nicht maßstäblich)



Die vier Seitenflächen sind kongruente gleichschenkelige Dreiecksflächen.

Es gilt für ein Dreieck: $u = a + 2b$, wenn a die Länge der Basis und b die Länge eines Schenkels ist. Weiter gilt $b = 1,5a$. Da $u = 16$, folgt $16 = a + 3a$, $16 = 4a$, $4 = a$. Daraus folgt $b = 6$.

Nun ist nach dem Satz des Pythagoras $h = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} \approx 5,66$

(h bezeichnet die Länge der Dreieckshöhe).

Für den Flächeninhalt eines Dreiecks gilt

$$A = \frac{a \cdot h}{2}, \text{ also } A \approx \frac{4 \cdot 5,66}{2} \approx 11,32.$$

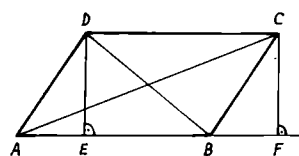
Das Netz der Pyramide besteht aus vier derartigen Dreiecken und einem Quadrat (Grundfläche) mit der Seitenlänge 4 cm. Somit gilt für den Flächeninhalt des Netzes

$$A_N \approx 11,32 \cdot 4 + 16$$

$$A_N \approx 61,28.$$

Das Netz dieser Pyramide hat einen Flächeninhalt von etwa $61,28 \text{ cm}^2$.

Ma 8 ■ 1841 Skizze (nicht maßstäblich)



Zunächst berechnet man im rechtwinkligen Dreieck AED die Länge der Seite AE nach dem Satz des Pythagoras.

Es gilt $\overline{AE}^2 = 5^2 - 4^2$

$$\overline{AE} = \sqrt{9}$$

$\overline{AE}$ ist 3 cm lang.

Nun berechnet man im rechtwinkligen Dreieck AFC die Länge der einen und im recht-

winkligen Dreieck EBD die Länge der anderen Diagonalen.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$\overline{AC}^2 = 13^2 + 4^2, \text{ d. h. } \overline{AC} = 13,6 \text{ und}$$

$$\overline{DB}^2 = 7^2 + 4^2, \text{ d. h. } \overline{DB} = 8,06.$$

Die beiden Diagonalen sind 13,6 cm bzw. 8,06 cm lang. (Die Maßzahlen sind Näherungswerte!)

Ma 9 ■ 1842 Es seien x, y, z die drei gesuchten natürlichen Zahlen. Nach der ersten Bedingung der Aufgabe gilt

$$(1) \quad x + y + z = 945.$$

Nach der zweiten Bedingung gilt

$$(2) \quad \frac{1}{6}x = \frac{1}{7}y = \frac{1}{8}z.$$

$$\text{Aus } \frac{1}{6}x = \frac{1}{7}y \text{ folgt } y = \frac{7}{6}x;$$

$$\text{aus } \frac{1}{6}x = \frac{1}{8}z \text{ folgt } z = \frac{4}{3}x.$$

Nun lassen sich in der Gleichung (1) y und z durch x ausdrücken:

$$(1)' \quad x + \frac{7}{6}x + \frac{4}{3}x = 945 \quad \frac{7}{2}x = 945$$

$$\frac{21}{6}x = 945 \quad x = 270.$$

Es folgt nun

$$y = \frac{7}{6} \cdot 270, y = 315 \text{ und } z = \frac{4}{3} \cdot 270, z = 360. \text{ Die}$$

drei gesuchten Zahlen sind 270, 315 und 360.

Probe: $270 + 315 + 360 = 945$

$$945 = 945$$

$\frac{1}{6}$ von 270 ist 45, $\frac{1}{7}$ von 315 ist 45, $\frac{1}{8}$ von 360 ist 45.

Ma 9 ■ 1843 Es sei $(x; y)$ mit $x > y$ ein solches Zahlenpaar.

Dann gilt nach Aufgabenstellung

$$x^2 - y^2 = 4 \cdot \frac{x+y}{2}.$$

Nach Umformung beider Terme erhält man

$$(x+y)(x-y) = 2(x+y) \text{ und}$$

nach Division der Gleichung durch $(x+y)$

$$x - y = 2.$$

$[(x+y) \text{ ist stets verschieden von Null!}]$

Alle Paare natürlicher Zahlen, deren Differenz 2 ist, erfüllen die Bedingungen der Aufgabe.

$$(\text{Beispiel: } (6; 4): 6^2 - 4^2 = 4 \cdot \frac{6+4}{2})$$

$$20 = 20.)$$

Ma 9 ■ 1844 Man zerlegt $p^2 - 1$ in

$$(p-1)(p+1).$$

Da p nach Voraussetzung ungerade ist, sind $p-1$ und $p+1$ gerade Zahlen. Da eine davon durch 4 teilbar ist, ist das Produkt $(p-1)(p+1)$ durch $2 \cdot 4$, also durch 8 teilbar. Von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen $p-1, p, p+1$ ist eine durch 3 teilbar. Da $p \neq 3$, ist entweder $p-1$ oder $p+1$ durch 3 teilbar.

Daraus folgt, daß der Term $p^2 - 1$ für alle Primzahlen p mit $p > 3$ durch $8 \cdot 3$, also durch 24 teilbar ist, w. z. b. w.

Ma 9 ■ 1845 Die Längen der Seiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ seien mit a, b, c bezeichnet. Dann gilt nach der Aufgabenstellung:

$$(1) \quad a + b + c = 9,6$$

$$(2) \quad a + c = 2b$$

$$(3) \quad a : c = 5 : 3.$$

Aus (1) folgt

$$(4) \quad a + c = 9,6 - b$$

und aus (2) und (4) folgt

$$9,6 - b = 2b$$

$$9,6 = 3b$$

$$3,2 = b.$$

Die Seite $\overline{AC}$ ist 3,2 cm lang.

Aus (2) folgt

$$(5) \quad a + c = 6,4 \text{ und}$$

aus (3) und (5) folgt

$$c = 2,4:$$

Die Seite $\overline{AB}$ ist 2,4 cm lang.

Aus (2) folgt nun

$$(6) \quad a + 2,4 = 6,4 \text{ und daraus}$$

$$a = 4.$$

Die Seite $\overline{BC}$ ist 4 cm lang.

Die Probe ergibt, daß die Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden.

Ma 10/12 ■ 1846 Aus (1) folgt $c = 2a$.

Aus (2) folgt $2\gamma = 180^\circ$ wegen $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Damit gilt $\gamma = 90^\circ$, folglich auch $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Nach dem Sinussatz gilt

$$a : c = \sin \alpha : \sin \gamma, \text{ folglich}$$

$$a : 2a = \sin \alpha : \sin 90^\circ \text{ und wegen } \sin 90^\circ = 1$$

$$a : 2a = \sin \alpha.$$

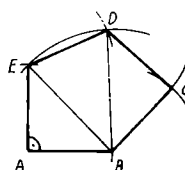
Daraus folgt $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ bzw. $\alpha = 30^\circ$ und damit

$$\beta = 60^\circ. \text{ Es gilt also}$$

$$a : b : c = \sin 30^\circ : \sin 60^\circ : \sin 90^\circ \text{ bzw.}$$

$$a : b : c = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1.$$

Ma 10/12 ■ 1847 Skizze (nicht maßstäblich)



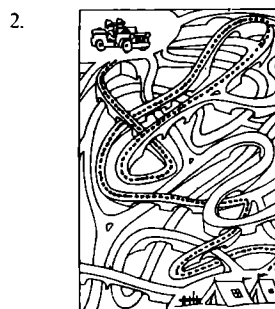
Man konstruiert zunächst das Dreieck ABE mit $\angle EAB = 90^\circ$ und den je 2 cm langen Seiten AB und AE . Um B zeichnet man einen Kreis mit dem Radius der Länge von BE und um E einen Kreis mit dem Radius der Länge von AB . Beide Kreise schneiden einander in D . (D muß in derjenigen Halbebene bezüglich der Geraden EB liegen, die A nicht enthält!) Um D und um B zeichnet man je einen Kreis mit dem Radius der Länge von AB . Die Kreise schneiden einander in C . (C muß in derjenigen Halbebene bezüglich der Geraden DB liegen, die A nicht enthält!) Der Flächeninhalt dieses Fünfecks setzt sich aus den Flächeninhalten von drei Dreiecken zusammen. Die Dreiecke ABE und BCD sind kongruent. Sie sind gleichschenkelig-rechtwinklig. Man kann beide zu einem Quadrat mit dem Flächeninhalt $A = 4 \text{ cm}^2$ zusammensetzen. Das Dreieck EBD ist gleichschenkelig. Die Basis ED ist 2 cm lang; EB und DB sind $\sqrt{8} \text{ cm}$ lang (Satz des Pythagoras). Die Höhe von B auf die Basis ED ist $\sqrt{7} \text{ cm}$ lang (Satz

des Pythagoras). Für den Flächeninhalt des Dreiecks EBD ergibt sich deshalb

$$A_{EBD} = \frac{2 \cdot \sqrt{7}}{2} \text{ cm}^2; A_{EBD} \approx 2,65 \text{ cm}^2.$$

Somit beträgt der Flächeninhalt dieses Fünfecks etwa $6,65 \text{ cm}^2$.

Lösungen zu: Lustige Logeleien



$$3. \quad 3 + 2 + 1 = 6$$

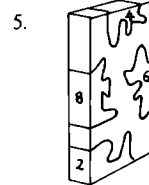
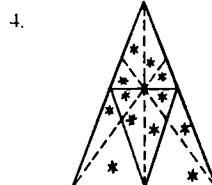
$$+ \quad \times \quad +$$

$$2 \times 3 - 1 = 5$$

$$- \quad \times$$

$$4 + 4 : 2 = 4$$

$$= 1 = 2 = 4$$



$$7. \quad 6 - 4 - 2 = 0; 4 + 3 - 6 = 1;$$

$$4 + 2 - 3 = 3; 6 + 2 - 4 = 4;$$

$$6 - 4 + 3 = 5; 6 + 3 - 2 = 7;$$

$$6 + 4 - 2 = 8; 4 + 3 + 2 = 9$$

8. Der Seitenriß Nr. 5 gehört zum dargestellten Grundriß.

Lösungen zu: Wir arbeiten mit Mengen

Arbeitsblatt 1:

$$M_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$M_2 = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$$

$$M_3 = \{0, 7, 14, 21, 28, 35\}$$

$$M_4 = \emptyset$$

$$M_5 = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$$

$$M_6 = \{0, 6, 12, 18, 24\}$$

nicht möglich

$$M_8 = \{-6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6\}$$

$$M_9 = \{46, 49\}$$

$$M_{10} = \{36, 72\}$$

$$M_1 = \{x \in \mathbb{N}; 0 \leq x \leq 9\}$$

$$M_2 = \{x \in \mathbb{N}; 3 \mid x \wedge x < 24\}$$

$$M_3 = \{x \in \mathbb{N}; 7 \mid x \wedge x < 37\}$$

$$M_4 = \{x \in \mathbb{G}; 99 < x < 100\}$$

$$M_5 = \{x \in \mathbb{G}; x \mid -8\}$$

$$M_6 = \{x \in \mathbb{N}; 6 \mid x \wedge x < 30\}$$

$$M_7 = \{x \in \mathbb{R}; 3 < x < 5\}$$

$$M_8 = \{x \in G; x \mid 12 \wedge -10 \leq x \leq 10\}$$

$$M_9 = \{x \in N; 43 < x < 50 \wedge x = 3y + 1 \wedge y \in N\}$$

$$M_{10} = \{x \in G; 0 < x < 100 \wedge 9 \mid x \wedge 12 \mid x\}$$

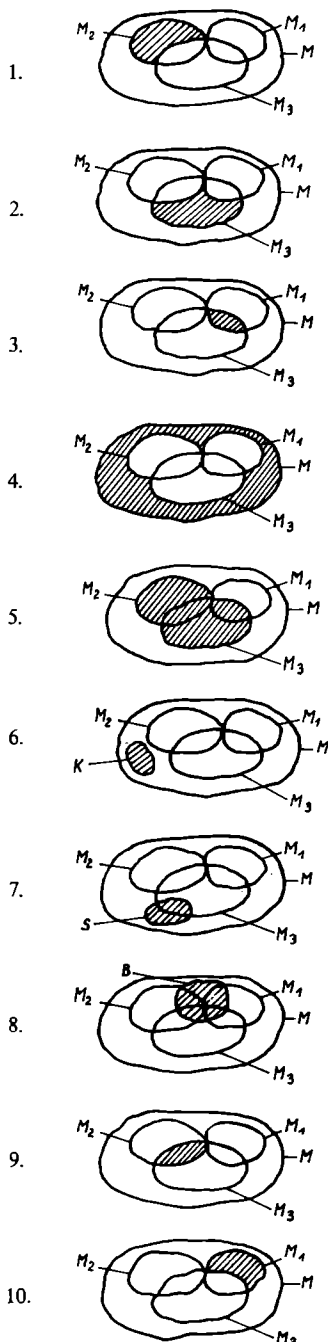
oder

$$M_{10} = \{x \in G; 0 < x < 100 \wedge 36 \mid x\}$$

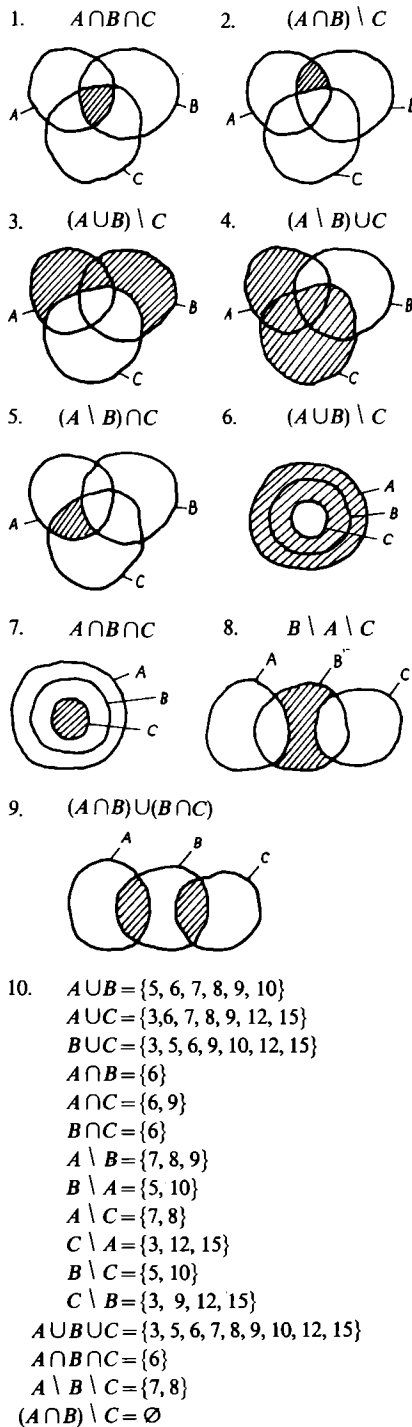
Arbeitsblatt 2

- $N \subset G, Z \subset V, Z \subset N, Z \subset G, V \subset G$
- $B_L \subset B, B_A \subset B, B_O \subset B, B_A \subset B_O, B_A \subset B_L, B_O \subset B_L$
- $N_3 \subset N, N_9 \subset N, N_9 \subset N_3, N_9 \subset G_9$
- $R \subset V, Q \subset V, D \subset V, Q \subset R, Q \subset D$
- $W \subset Q, W \subset P_1, Q \subset P_1$
- $D \subset S, Z \subset G$
- $G_1 \subset G, G_2 \subset G, G_3 \subset G, G_2 \subset G_1, G_3 \subset G_1, G_3 \subset G_2$

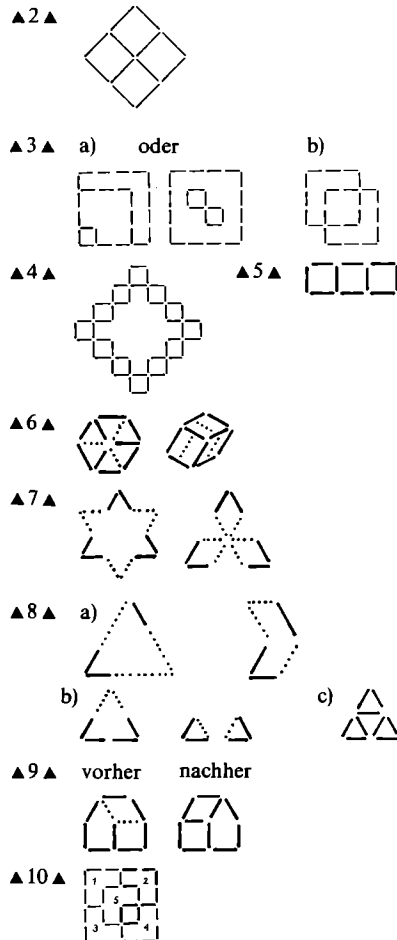
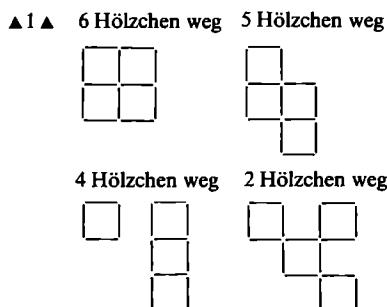
Arbeitsblatt 3:



Arbeitsblatt 4:



Lösungen zu: Spiele mit Hölzchen!



Lösungen zu: 1979

Vorletztes Problem:

$$25^2 + 25^2 + 27^2 = 1979$$

Letztes Problem:

$$1^3 + 5^3 + 5^3 + 12^3 = 1979$$

$$2^3 + 3^3 + 6^3 + 12^3 = 1979$$

$$5^3 + 5^3 + 9^3 + 10^3 = 1979$$

$$6^3 + 6^3 + 6^3 + 11^3 = 1979$$

Lösungen zu: Das Einbeschreiben von Kreisen gleichen Durchmessers in ein Quadrat

▲ 5 ▲ Ist $m+n$ eine ungerade Zahl so gibt es genau $\frac{m+n+1}{2}$ Lagen mit je n Kreisen und $\frac{m+n-1}{2}$ Lagen mit je $n-1$ Kreisen, insge-

samt also $\frac{(m+n)(2n-1)+1}{2}$ Kreise mit Durchmesser $d = \frac{a}{n}$.

Dann ist

$$V_n = \frac{\frac{(m+n)(2n-1)+1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} d^2}{(nd)^2} = \frac{(m+n)(2n-1)+1}{n^2} \cdot \frac{\pi}{8}$$

▲ 6 ▲ Für große Werte von n ersetzen wir m durch $(n-1) \cdot p$ und erhalten für ungerade $m+n$ (vgl. Lösung von ▲ 5 ▲)

$$V_n = \frac{(n+(n-1)p)(2n-1)+1}{n^2} \cdot \frac{\pi}{8}$$

$$= (2+2p) + \frac{3p}{n} - \frac{1}{n} + \frac{p}{n^2} + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\pi}{8}$$

Die Terme $\frac{3p}{n}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{p}{n^2}$, $\frac{1}{n^2}$ kommen beim An-
wachsen der für n eingesetzten Werte immer
mehr der 0 nahe, so daß sich auch jetzt V_n
dem Wert $\frac{\pi}{8}(2+2p) = \frac{\pi}{4}(1+p) \approx 0,9069$ näh-
ert.

Lösungen zu: alpha-heiter

Über die Donau

Man kann die Springer in 19 Zügen um-
stellen. Hier der schnellste Übergang über die
Donau: de, fd, gf, eg, ce, bc, db, fd, hf, gh, eg,
ce, ac, ba, db, fd, ef, ce, dc.

Silbenrätsel

1. Arithmetik; 2. Delta; 3. Archimedes; 4.
Multiplikation; 5. Rechteck; 6. Innenwinkel;
7. Exponent; 8. Strecke.

Der Name des Rechenmeisters ist Adam Ries.

Eindeutige Abbildungen

Beim Betrachten des Gleichungssystems I er-
geben sich folgende Feststellungen:

1. Alle 8 Gleichungen besitzen die gleiche
Struktur.

2. Der Zähler im Bruch einer beliebigen
Gleichung entspricht dem Nenner des Bru-
ches in der nachfolgenden Gleichung.

Auf Grund dieser Tatsachen lassen sich die
Variablen D, I, O, P, H, A, N, T in Abhängig-
keit von X darstellen:

$$\begin{array}{ll} (1a) & D = X - 1 \\ (2a) & I = D - 1 \quad \text{bzw.} \quad (2b) \quad I = X - 2 \\ (3a) & O = I - 1 \quad (3b) \quad O = X - 3 \\ (4a) & P = O - 1 \quad (4b) \quad P = X - 4 \\ (5a) & H = P - 1 \quad (5b) \quad H = X - 5 \\ (6a) & A = H - 1 \quad (6b) \quad A = X - 6 \\ (7a) & N = A - 1 \quad (7b) \quad N = X - 7 \\ (8a) & T = N - 1 \quad (8b) \quad T = X - 8 \end{array}$$

Aus M_1 und den Gleichungen (1a), (2b), ...,
(8b) ergibt sich unmittelbar die Zuordnung

$$\begin{array}{cccccccc} X & D & I & O & P & H & A & N & T \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Die Proben für (1), ..., (8) bestätigen die
Richtigkeit:

$$(1) \quad 8 - \frac{8}{9} = 8 \cdot \frac{8}{9}$$

$$\frac{64}{9} = \frac{64}{9}$$

$$(8) \quad 1 - \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Entsprechendes ergibt sich für Gleichungs-
system II

$$\begin{array}{ll} (1a) & D = X + 1 \\ (2a) & I = D + 1 \quad \text{bzw.} \quad (2b) \quad I = X + 2 \\ (3a) & O = I + 1 \quad (3b) \quad O = X + 3 \\ (4a) & P = O + 1 \quad (4b) \quad P = X + 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (5a) & H = P + 1 \quad (5b) \quad H = X + 5 \\ (6a) & X = H + 1 \quad (6b) \quad A = X + 6 \\ (7a) & N = A + 1 \quad (7b) \quad N = X + 7 \\ (8a) & T = N + 1 \quad (8b) \quad T = X + 8 \end{array}$$

Die Zuordnung ist

$$\begin{array}{cccccccc} X & D & I & O & P & H & A & N & T \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$

Die Proben für (1), ..., (8) des Gleichungs-
systems II bestätigen die Richtigkeit:

$$(1) \quad 2 + \frac{2}{1} = 2 \cdot \frac{2}{1}$$

$$4 = 4$$

$$(8) \quad 9 + \frac{9}{8} = 9 \cdot \frac{9}{8}$$

$$\frac{81}{8} = \frac{81}{8}$$

Unsere Fibel

Es gibt Buchstaben, bei denen die Symmetrie-
achse horizontal verläuft: B, C, E, K,
oder vertikal: A, M, U, V, W, T,

sowie beide Symmetrieachsen möglich sind:
O, I, H, X.

Bei den ausgewählten Worten verläuft die
Symmetrieachse bei den Buchstaben in hori-
zontaler Richtung:

1. HEXE, 2. EHE, 4. BEBE, 7. ECHO,
in vertikaler Richtung: 3. MIAU, 5. OMA.
9. MOTTO, 8. OTTO, 10. TOTO
und in beiden Richtungen: 6. HOI

Gesucht x, y, z

$x = 4,5$ (Ähnlichkeit und Winkelhalbierende)
 $y = 6,54$ (cos-Satz)
 $z = 4,36$ (cos-Satz)

Kryptarithmetik

$$\begin{array}{l} (1) \quad 279 + 365 + 564 = 1208 \text{ oder} \\ \quad 274 + 365 + 569 = 1208 \\ \quad 972 + 406 + 605 = 1983 \text{ oder} \\ \quad 975 + 406 + 602 = 1983 \\ (2) \quad 193 + 81262 + 390527 = 471982 \\ \quad 593 + 85262 + 390127 = 475982 \end{array}$$

Das sagt man so

Den Buckel runter rutschen. Wie auf Eiern
laufen. Das Gras wachsen hören. Den Teufel
an die Wand malen. Geld zum Fenster her-
auswerfen. Einen Bären aufbinden. Mit dem
Kopf durch die Wand gehen. Die Flinte ins
Korn werfen. Wie aus allen Wolken fallen.
Ein Brett vorm Kopf haben.

Bitte anrufen!

Die Aufgabe hat zwei Lösungen: 92465 und
92485.

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Wir stellen heute wieder Lösungsvarianten
zu Wettbewerbsaufgaben vor, die bei uns ein-
gegangen sind. Sie mögen unseren aktiven
Teilnehmern am alpha-Wettbewerb Anre-
gungen zum Lösen von Aufgaben geben.

Im Heft 5/1978 veröffentlichten wir folgende
Aufgabe:

Ma 6 ■ 1772

Addiert man zu einer zweistelligen natür-
lichen Zahl ihre Quersumme und multipli-
ziert man diese Summe mit 5, so erhält man
150.

Um welche Zahl handelt es sich?

Im Heft 1/1979 veröffentlichten wir dazu
eine Lösung:

Die zweistellige natürliche Zahl läßt sich in
der Form $10a + b$ darstellen; ihre Quersumme
beträgt $a + b$. Nun gilt

$$\begin{aligned} [(10a + b) + (a + b)] \cdot 5 &= 150, \\ (11a + 2b) \cdot 5 &= 150, \\ 11a + 2b &= 30, \\ 11a &= 30 - 2b, \\ 11a &= 2 \cdot (15 - b). \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung muß wegen
 $11 \cdot a$ ebenfalls durch 11 teilbar sein. Wegen
 $0 \leq b \leq 9$ trifft das nur für $b = 4$ zu. Somit gilt
 $11a = 2 \cdot 11$, also $a = 2$. Die Zahl lautet 24.

Wir stellen nun die Lösung von Axel Schulz
aus Potsdam vor, der Schüler einer 6. Klasse
ist. Axel löste diese Aufgabe wie folgt:

Die zweistellige natürliche Zahl z läßt sich
darstellen durch $z = 10a + b$ mit $0 < a \leq 9$ und
 $0 \leq b \leq 9$; ihre Quersumme lautet $q = a + b$.
Nun gilt

$$\begin{aligned} (z + q) \cdot 5 &= 150, \\ z + q &= 30, \\ 11a + 2b &= 30. \end{aligned}$$

Da sowohl die Summe 30 als auch der Sum-
mand $2b$ gerade Zahlen sind, muß auch der
Summand $11a$ eine gerade Zahl sein. Wegen
 $0 < a$ und $11a < 30$ kann nur $a = 2$ gelten. Wir
erhalten somit

$$\begin{aligned} 11 \cdot 2 + 2b &= 30, \\ 2b &= 8, \\ b &= 4. \end{aligned}$$

Die Zahl 24 ist die einzige, welche die Be-
dingungen der Aufgabe erfüllt.

Wir stellen nun die Lösung von Wilfried
Mäbius aus Schwerin vor, der Schüler der
Klasse 6b der Maxim-Gorki-Oberschule ist.
Wilfried geht wie folgt vor:

Entsprechend der Aufgabenstellung kann ich
folgende Gleichung aufstellen:

$$(10x + y + x + y) \cdot 5 = 150 \text{ mit } x \neq 0, \text{ also}$$

$$11x + 2y = 30.$$

Ich nehme eine Fallunterscheidung vor.

1. Fall: Es sei $x = 1$; dann gilt

$$11 + 2y = 30, \text{ also } 2y = 19.$$

Es gibt keine natürliche Zahl y , die diese
Gleichung erfüllt.

2. Fall: Es sei $x = 2$; dann gilt

$$22 + 2y = 30, 2y = 8, y = 4.$$

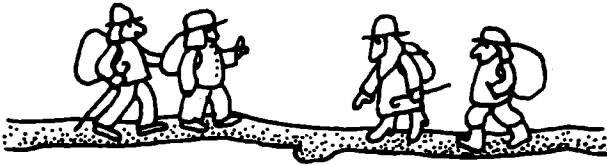
Die Zahl lautet 24.

3. Fall: Es sei $x = 3$; dann gilt

$$33 + 2y = 30, 2y = 30 - 33.$$

Wegen $30 < 33$ ist diese Gleichung im Bereich
der natürlichen Zahlen nicht lösbar. Das trifft
auch zu für $x > 3$.

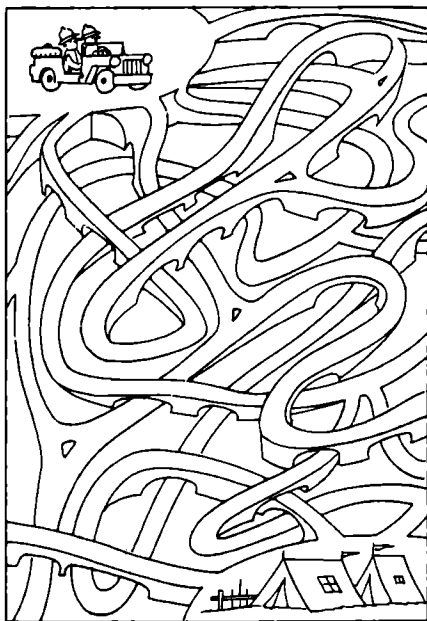
Lustige Logeleien



1. Auf einem schmalen Bergpfad treffen sich vier Wanderer. Zwei kommen von links, zwei von rechts. Es gibt nur eine Stelle, an der jeweils einer der vier ausweichen kann.

Wie kommen sie so aneinander vorbei, daß jeder von ihnen seine Wanderung in gewünschter Richtung fortsetzen kann? (siehe Titelbild)

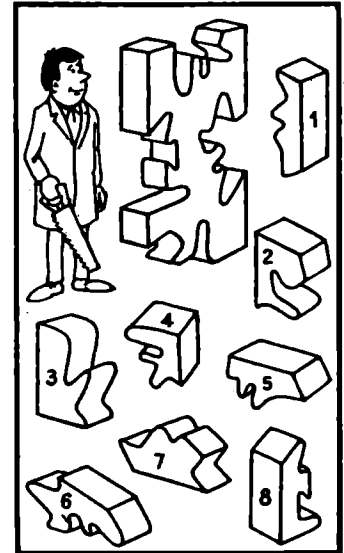
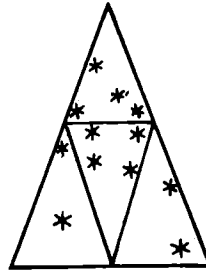
2. Wie kommt der „Oldtimer“ zum Zeltlager?



3. Setzt Zahlen so ein, daß richtig gelöste Gleichungen entstehen!

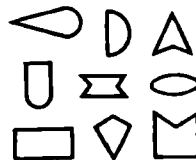
3	+		+		=6
+		X		+	
	X		-		=5
-		-		X	
	+		:		=4
=1		=2		=4	

4. Mit nur drei Schnitten ist die Figur so zu teilen, daß sich jeweils nur ein Stern in jedem Figurenteil befindet.



5. Herr Knifflig will die acht Teile wieder so einsetzen, daß ein Quader entsteht. Wer hilft ihm?

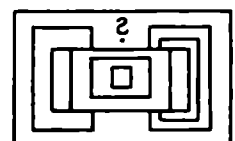
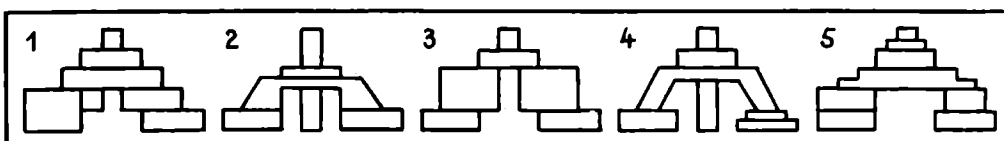
6. Prägt euch die neun geometrischen Figuren 8 bis 10 Sekunden lang ein! Dann deckt ihr das Bild ab und zeichnet die Figuren aus dem Gedächtnis nach. Wer alle neun richtig hat, verdient ein *Sehr gut*, wer fünf bis acht Figuren behalten hat, das Prädikat *Gut*.



7. Jeweils drei der Zahlen 6, 4, 3 und 2 sind so in die acht Kryptogramme einzuzichnen, daß richtig gelöste Gleichungen entstehen.

$\bigcirc - \bigcirc - \bigcirc = 0$ $\bigcirc + \bigcirc - \bigcirc = 1$ $\bigcirc + \bigcirc - \bigcirc = 3$ $\bigcirc + \bigcirc - \bigcirc = 4$	6432 $\bigcirc - \bigcirc + \bigcirc = 5$ $\bigcirc + \bigcirc - \bigcirc = 7$ $\bigcirc + \bigcirc - \bigcirc = 8$ $\bigcirc + \bigcirc + \bigcirc = 9$
--	--

8. Schaut euch die fünf nummerierten Konstruktionen – im Seitenriß gezeichnet – genau an! Ganz rechts ist eine davon im Grundriß zu sehen. Findet heraus, welche es ist!





Adam Ries

Vihetauff.



Item/einer hat 100. fl. dafür wil er 100. haupt Vihes kauffen / nemlich / Ochsen/ Schwein/ Kälber/ vnd Geissen/ kost ein Ochse 4 fl. ein Schwein anderthalben fl. ein Kalb einen halben fl. vnd ein Geiß ein ort von einem fl. wie viel sol er jeglicher haben für die 100. fl.?

¶ Knechtlohn.

Item ein Jar gebe man einem Knecht 10. fl. 16. groschen/wie viel gebürt ihm 17. wochen?

Facit 3. fl. 10. groschen/10. dz. ein heller $\frac{1}{3}$.

Mach die fl. zu groschen/vnd setz also:

52	226. gro.	17
----	-----------	----

¶ Kalmus.

Item ein Sack mit Kalmus wiegt 48. lb. 24. loth/Tara 2. lb. vnd 16. loth/kost ein lb. 13. fl. ein halben.

Facit 31. fl. 4. fl. 4. hlr vnd ein halben.

Das Tara nimb herab/mach forn vnd hinten loth/brichs mitten/vnd gehe herfür/steher:

64	27	1480
----	----	------

Vom Wechsel.



Item ein fl. Reinish gilt in Münz 21. gro. vnd 20. fl. in Golt/wie viel Münz gebürt sich zu geben für 11. fl. 9. hlr?

Facit 12. grosch. 4. dz. vnd $\frac{1}{3}$.
Setzt also:

240. hlr.	21. gro.	141. hlr.
-----------	----------	-----------

Item 894. Ungerisch gülden/wie viel machen die Reinish/29. auff?

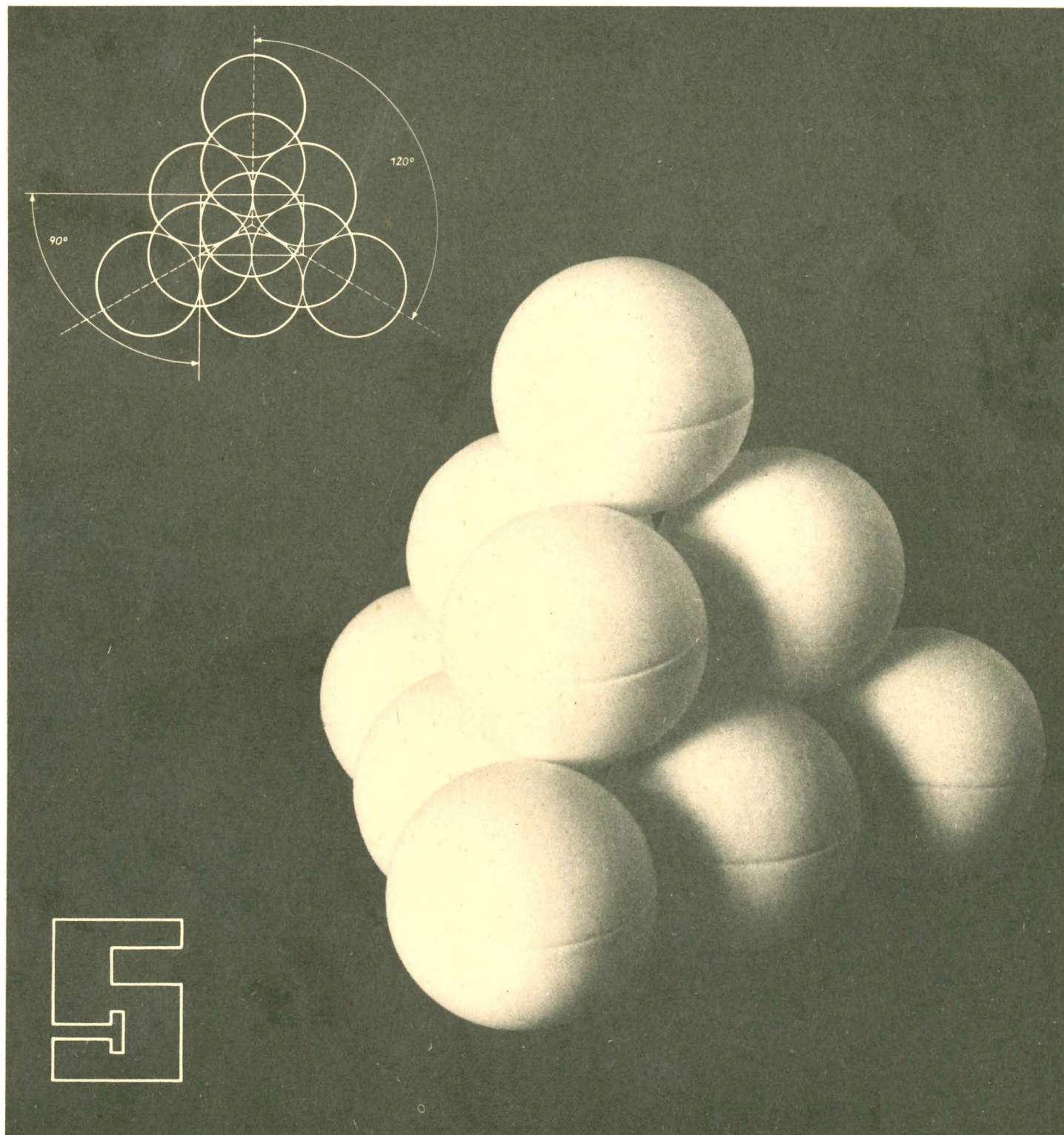
Facit 1153. Reinish/5. fl. 2. hlr. vnd zwen fünffhell.

Thu jm also/Addir den auffwechsel zu 100. Reinishen / vnd sprich / 100. Ungerisch thun 129.

Mathematische Schülerzeitschrift

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
13. Jahrgang 1979
Preis 0,50 M
Index 31059

alpha



Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dozent Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye

(Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Diplom-Lehrer C.-P. Helmholtz)

Redaktion:

StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Päd. Hochschule Potsdam (S.97);
W. Rodionow, APN, Moskau (S.105); R.
Ladewig, Bildstelle der W.-Pieck-Univ. Ro-
stock (S.120); W. Berger, Hartha (S.111)

Titelblatt: W. Fahr, Berlin (nach Motivaus-
wahl von J. Lehmann, Leipzig). Es zeigt eine
dichteste Kugelpackung im Raum. Durch das
Aneinanderreihen und Aufeinanderpacken
bilden sich die wichtigsten Winkel 120° und
90°.

Typographie: H. Tracksdorf



Gesamtherstellung: INTERDRUCK

Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128 – ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 27. Juni 1979

Inhalt

- 97 *alpha* stellt vor: Prof. em. Dr. Dr. h.c. Wilhelm Hauser [7]*
Wandlitz bei Berlin
- 97 Eine Aufgabe von Prof. em. Dr. Dr. h.c. Wilhelm Hauser [10]
Päd. Hochschule Karl Liebknecht, Potsdam
- 98 Ein Gitter-Puzzle [8]
Prof. Dr. P. Günther, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig
- 99 Eine mathematische Wetterfahne [9]
A. E. Lawrance, Warden (England), aus: Math. in School 6/75
- 100 Ist 1111111111 eine Primzahl? · Teil 1: Primzahlen [8]
Dr. H. Pieper, Zentralinstitut für Mathematik und Mechanik der Akademie der
Wissenschaften der DDR, Berlin
- 102 Wir arbeiten mit Mengen, Teil 2 [7]
Oberlehrer Dr. W. Fregin, IfL N. K. Krupskaja, Leipzig
- 103 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt Isomorphe Graphen [8]
Kollektiv der AG Mathematik Wippra
- 105 David und Goliath [5]
APN-Reporter Simonjan, Jerewan
- 106 Leseprobe aus: Manfred Scholtyssek: Hexeneinmaleins [5]
Der Kinderbuchverlag Berlin
- 107 Eine Aufgabe – verschiedene Varianten mit steigendem Schwierig-
keitsgrad [4]
StR H.-J. Kerber, Abt. Vobi beim Rat des Bez. Neubrandenburg
- 108 Die letzten 30 Jahre haben Gewicht [5]
Dr. Fred Jurgeleit, Berlin
- 110 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Aufgaben zu Mathematik, Physik, Chemie
- 113 XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [11]
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Aufgaben der Klassenstufen 11/12
- 113 Die Jensensche Ungleichung [10]
Dr. W. Moldenhauer, Rostock
- 114 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/H. Pätzold, Waren/Müritz
- 116 Lösungen [5]
- 120 100 Jahre Mathematisch-Physikalisches Seminar [8]
Diplomlehrer Johanna und Dr. Wolfgang Moldenhauer, Rostock
- III. U.-Seite: Aufgaben aus der Praxis (1945, 1952, 1979) [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
- IV. U.-Seite: Unterhaltsame Psychologie [5]
Entnommen aus: K. Platonow – Unterhaltsame Psychologie

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

alpha stellt vor: Prof. em. Dr. Dr. h. c. Wilhelm Hauser

Prof. Hauser gehört zu den Aktivisten der ersten Stunde. Er hat entscheidenden Anteil an der Entwicklung der 1948 gegründeten *Brandenburgischen Hochschule*, der jetzigen *Pädagogischen Hochschule Karl Liebknecht* Potsdam, zu einer angesehenen Bildungsstätte. In verschiedensten Funktionen hat er als Hochschullehrer mit hohem Engagement und großem Optimismus wichtige Beiträge zur demokratischen Umgestaltung des Hochschulwesens geleistet.



In der Person von Prof. Dr. Hauser verehren und schätzen wir einen Menschen, der sein Leben in den Dienst der jungen Generation gestellt und stets seine ganze Kraft und seine Fähigkeiten im Kampf um Frieden und Sozialismus eingesetzt hat. Er war nach der 1907 mit *summa cum laude* an der Universität Erlangen abgelegten Doktorprüfung und dem 1908 mit Auszeichnung bestandenen Staatsexamen an verschiedenen höheren Schulen im Lande Baden ab 1912 als Professor tätig. Bereits vor 1914 hat Prof. Hauser Vorträge gegen Militarismus und Krieg gehalten; insbesondere charakterisierte er die Rolle der deutschen Rüstungsfirmen Krupp und Thyssen bei ihrer Zusammenarbeit mit französischen und englischen Rüstungsfirmen während des Krieges. Nach 1918 wurde er Mitglied der *Deutschen Friedensgesellschaft* und ab 1922 Mitglied der SPD, für die er häufig als Referent auftrat.

Von den Faschisten wurde er 1933 aus politischen Gründen aus dem Lehrdienst entlassen und vorübergehend verhaftet. Im Jahre 1938 wurde Prof. Hauser in das KZ Dachau eingeliefert. Durch Vermittlung ausländischer Freunde konnte seine Entlassung erwirkt werden.

Prof. Hauser ging in die Emigration. Der Weg führte ihn über Paris, wo er an der illegalen Arbeit gegen den deutschen Faschismus teilnahm, nach London. Bis 1946 war er als Lehrkraft an der *Royal Grammar School* Newcastle on Tyne sehr erfolgreich tätig.

Nach seiner Rückkehr 1946 in die damalige sowjetische Besatzungszone hatte Prof. Hauser wesentlichen Anteil am Aufbau der damaligen Vorstudienanstalten, der späteren Arbeiter-und-Bauern-Fakultäten. Bei der Gründung der damaligen *Brandenburgischen Landeshochschule* im Jahr 1948 wurde er als Professor für Mathematik berufen.

Bis zu seiner Emeritierung 1956 förderte er unermüdlich die wissenschaftliche und pädagogisch-methodische Ausbildung der Studenten. Seine ausgezeichnete Lehrtätigkeit verband er auf das engste mit der Erziehung zur bewußten Parteinahme für die neue Gesellschaftsordnung.

Für seine Leistungen erhielt er hohe Auszeichnungen, so

1953 (zum 70. Geburtstag) Verleihung eines Ehrendokortitels,

1963 Vaterländischer Verdienstorden in Silber,

1974 Vaterländischer Verdienstorden in Gold,

1978 Ehrenspange zum Vaterländischen Verdienstorden in Gold.

Deutsche Volkszeitung,
Düsseldorf vom 19. 8. 1976:

Aus gleichem Grund entlassen

(Aus einem Brief von Prof. Dr. Dr. h. c. W. Hauser nach Endingen)

...Herr Faller (Sonderschullehrer in Endingen, d.Red.) wurde auf Anweisung der staatlichen Behörden in Freiburg (BRD) aus politischen Gründen aus dem Schuldienst entlassen, obwohl die Gemeinde, die Eltern der Kinder und weitere Kreise der Bevölkerung von Endingen sich für das Verbleiben von Herrn Faller in seiner Dienststellung einsetzten, da Herr Faller nicht nur ein tüchtiger und zuverlässiger Lehrer war, sondern sich für die Weiterentwicklung physisch und psychisch Zurückgebliebener eingesetzt hat. Als alter Kollege von ihm möchte ich ihm meine Sympathie und Hochachtung für seine fortschrittliche Einstellung aussprechen.

Ich habe in Endingen in der alten Volksschule in den Jahren 1889 bis 1893 den ersten Unterricht erhalten und bin dann später selbst Lehrer geworden. Aber im Jahre 1933 bin ich nach meiner ersten Verhaftung aus dem gleichen Grund aus dem Schuldienst entlassen worden, wie es jetzt nach mehr als 40 Jahren wieder bei Herrn Faller der Fall ist. Wenige Jahre darauf mußte ich meine Heimat verlassen...

Eine Aufgabe von Prof. em. Dr. Dr. h. c. Wilhelm Hauser

*Pädagogische Hochschule Karl Liebknecht,
Potsdam*

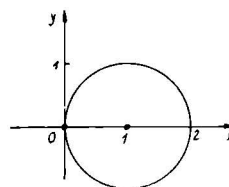
▲1880▲ Die Menge aller Punkte, deren Koordinaten x, y bez. eines kartesischen Koordinatensystems der Gleichung

$$(1) \quad Ax^2 + Bxy + y^2 = 0 \text{ mit } A \neq 0$$

genügen, heißt eine (ebene) algebraische Kurve 2. Ordnung, ein Kegelschnitt. Zum Beispiel beschreibt die Gleichung

$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$

den Kreis um den Punkt mit den Koordinaten $x=1, y=0$, der durch den Koordinatenursprung geht (siehe Bild).



In dem Buch „Integrale algebraischer Funktionen und ebene algebraische Kurven“ von Prof. Hauser und Burau (Berlin 1958) wird u. a. die Frage untersucht, wann eine algebraische Kurve in Geraden zerfällt.

Man gebe eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Koeffizienten A, B in der Gleichung (1), daß die durch (1) beschriebene Punktmenge zwei Geraden mit den Gleichungen $y=ax$ und $y=bx$ ($a, b \neq 0$) sind.

Trotz all dessen, was ich und meine Familie erlebt haben, wäre ich gerne nach dem Krieg in meine alte Heimat zurückgekehrt, um erneut als Erzieher an der Heranbildung einer neuen Generation mitzuwirken. Aber die damaligen Behörden in Freiburg haben meinem Wunsche nicht entsprochen, und so mußte ich mit meiner Frau, die in Karlsruhe geboren ist, und meinen Söhnen und ihren Familien hier in der DDR eine neue Heimat schaffen, um daran mitzuarbeiten, daß wenigstens in diesem Teil des ehemaligen Deutschen Reiches eine Jugend herangezogen wird, die verhindert wird, daß eine solche Katastrophe wie in den Jahren 1933 bis 1945 nochmals über Europa und besonders über Deutschland hereinbrechen kann.

Sagen Sie bitte Herrn Faller, daß auch er durch seine politische Einstellung und seine berufliche Tätigkeit dazu beiträgt, daß auch in der BRD dieses hohe Ziel erreicht wird...

Ein Gitter-Puzzle

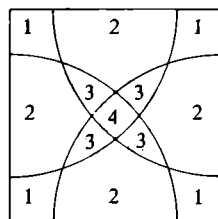
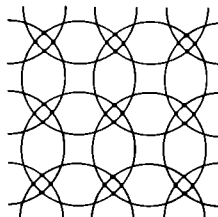
Ein Puzzle-Spiel kommt im allgemeinen dadurch zustande, daß man ein auf Pappe gemaltes Bild willkürlich in Stücke schneidet. Der Spieler soll dann aus den durcheinandergebrachten Pappstücken das Bild wieder zusammensetzen. Wir wollen uns hier mit einem weniger willkürlichen Puzzle-Spiel beschäftigen, das mit der Gitterpunktslehre zusammenhängt und bei dem die einzelnen Puzzlestücke gradlinige oder kreisbogenförmige Ränder haben.

Wir betrachten in der Ebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Diejenigen Punkte der Ebene, deren beide Koordinaten ganze Zahlen sind, nennen wir Gitterpunkte. Wir bezeichnen sie in einer beliebigen Reihenfolge mit $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$. t sei eine beliebig gewählte, positive reelle Zahl. Unter $A(t, P)$ wollen wir die Anzahl der Gitterpunkte verstehen, die im Innern oder auf dem Rand des Kreises um P mit dem Radius t liegen. Die (ebene) Gitterpunktslehre befaßt sich hauptsächlich mit dem Studium von $A(t, P)$, vor allem für $t \rightarrow \infty$. Wir wollen aber jetzt t festhalten und P in der Ebene wandern lassen; dann ändert sich $A(t, P)$ je nach der Lage von P . Um dies etwas genauer zu untersuchen, schlagen wir um jeden Gitterpunkt Q_i den vollen Kreisbogen S_i mit dem Radius t . Diese Kreisbögen S_i , $i = 1, 2, \dots$, zerlegen die ganze Ebene in unendlich viele Teilgebiete. Jedes derartige Teilgebiet wird von Kreisbogenstücken begrenzt; es liegt im Innern von endlich vielen unter den Kreisbögen S_i und außerhalb der übrigen. Es sei F ein solches Teilgebiet, das etwa im Innern von $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k}$ liege; P sei ein innerer Punkt von F . Dann haben die Gitterpunkte $Q_{i_1}, Q_{i_2}, \dots, Q_{i_k}$ eine Entfernung von P , die kleiner als t ist, während die Entfernung aller übrigen Gitterpunkte von P größer als t ist.

Demnach hat für alle Punkte P im Innern von F die Zahl $A(t, P)$ den gleichen Wert, nämlich k . Wir wollen deshalb die entstandenen Teilgebiete – eines davon war F – die Konstanzgebiete von $A(t, P)$ nennen. (In Bild 1 sind die Konstanzgebiete für den Fall $t = 0,798 \dots$ in einem Teil der Ebene gezeichnet.)

Wir betrachten nun das Einheitsquadrat E ; es ist dies das Quadrat, dessen 4 Ecken die Gitterpunkte mit den Koordinaten $x_1 = 0$,

$y_1 = 0$; $x_2 = 1$, $y_2 = 0$; $x_3 = 1$, $y_3 = 1$; $x_4 = 0$, $y_4 = 1$ sind. Wir suchen die Konstanzgebiete heraus, die ganz oder teilweise im Innern von E liegen; dies seien etwa die Gebiete $F_1, \dots, F_l$; mit G_i bezeichnen wir den Teil von F_i , der im Innern von E liegt. Das ganze Einheitsquadrat zerlegt sich so lückenlos in die Gebiete $G_1, \dots, G_l$, die nur an ihren Rändern zusammenstoßen können. Für alle Punkte im Innern von G_i hat $A(t, P)$ den gleichen Wert, den wir a_i nennen. (In Bild 2 sind die Gebiete G_i wieder für $t = 0,798 \dots$ gezeichnet, es ist $l = 13$, in jedes G_i ist der Wert a_i eingeschrieben.)



Jetzt kann unser Puzzle beginnen! Wir schneiden uns Pappstückchen der Form der Gebiete G_i und zwar für jedes i gerade a_i Stück; danach haben wir genau $a_1 + a_2 + \dots + a_l$ Puzzlestücke, wobei höchstens l verschiedene Formen auftreten können. Wir behaupten nun: Unsere sämtlichen Puzzle-Stücke können lückenlos und ohne Überlappung so aneinander gelegt werden, daß eine volle Kreisscheibe vom Radius t entsteht! Versucht es einmal!

Wir wollen uns der Mühe unterziehen, unsere Behauptung in allen Einzelheiten zu beweisen!

1. Es sei K_i die Kreisscheibe um Q_i vom Radius t , also das Innere des Kreisbogens S_i . Die Numerierung der Gitterpunkte war zunächst beliebig; jetzt denken wir sie uns so gewählt, daß die Kreisscheiben $K_1, K_2, \dots, K_r$ Punkte aus dem Innern von E enthalten, während $K_{r+1}, K_{r+2}, \dots$ höchstens Randpunkte mit E gemeinsam haben. Es sei nun D_i der Teil von K_i , der in E liegt (d. h. der Durchschnitt von K_i und E), $i = 1, 2, \dots, r$. Bei der Zerlegung von E in die Teilgebiete $G_1, \dots, G_l$ mußten wir nun gerade die Randbögen $S_1, \dots, S_r$ der Kreisscheiben $K_1, \dots, K_r$ und die Ränder von E konstruieren, um die Ränder von $G_1, \dots, G_l$ zu erhalten. Jedes Gebiet D_j zerlegt sich demnach lückenlos und ohne Überlappung in gewisse unter den Gebieten $G_1, G_2, \dots, G_l$; dabei kommt das Gebiet G_i in genau a_i Gebieten D_j vor, da es im Innern von a_i unter den Kreisscheiben $K_1, \dots, K_r$ liegt. Deshalb kann man aus unseren

Puzzle-Stücken zunächst jedes der Gebiete $D_1, \dots, D_r$ zusammenlegen, ohne daß etwas fehlt oder übrigbleibt. Wir denken uns dies ausgeführt und brauchen also nur noch die Gebiete $D_1, \dots, D_r$ zu einer Kreisscheibe vom Radius t zusammenzufügen. (Im Beispiel von Bild 2 sind die D_j die Vierteldreiecke um die Eckpunkte von E , es ist $r = 4$.)

2. Wir denken uns das Gebiet D_j an seinem richtigen Platz im Einheitsquadrat E . Jetzt machen wir diejenige Parallelverschiebung (= Translation) T_j , die gerade den Gitterpunkt Q_j in den Nullpunkt O (das ist auch ein Gitterpunkt!) überführt. Durch T_j wird das Gebiet D_j in ein dazu kongruentes Gebiet D'_j überführt. Bevor wir zeigen, daß die Gebiete D'_j , $j = 1, \dots, r$, den Kreis K um O vom Radius t lückenlos und ohne Überlappung erfüllen, bemerken wir noch folgendes:

Ist T_j eine Parallelverschiebung, so erhält man die Koordinaten x', y' des Bildpunktes eines Punktes mit den Koordinaten x, y bekanntlich durch Formeln der Gestalt

$$(1) \quad x' = x + a, \quad y' = y + b.$$

Hierin sind a, b feste, nur von T_j abhängige, reelle Zahlen. Genau dann, wenn T_j einen Gitterpunkt in einen Gitterpunkt überführt, sind a und b ganze Zahlen. Dies ist bei den oben erwähnten Translationen T_j aber immer der Fall.

3. a) Es sei P'_j ein beliebiger Punkt von D'_j ; dann gibt es genau einen Punkt P_j im Innern von D_j , der bei der Parallelverschiebung T_j auf P'_j abgebildet wird. Da P_j in D_j und D_j in K_j liegt, liegt P_j in K_j , und folglich ist $Q_j P_j < t$; dabei bezeichnet $Q_j P_j$ die Entfernung beider Punkte. Bei der Parallelverschiebung T_j geht Q_j in O und P_j in P'_j über, also ist auch $Q_j P_j = O P'_j < t$; demnach liegt P'_j in K , und da P'_j beliebig war, liegt das ganze Gebiet D'_j in K und dies für alle $j = 1, 2, \dots, r$.

b) Um zu zeigen, daß sich die Gebiete $D'_1, \dots, D'_r$ nicht überlappen, machen wir einen indirekten Beweis. Wir nehmen an, es gäbe einen Punkt P' , der sowohl im Innern von D'_i als auch im Innern von D'_j liegt, $i \neq j$. Dann gibt es einen Punkt P_i in D_i , der bei T_i auf P' abgebildet wird; ebenso gibt es einen Punkt P_j in D_j , der bei T_j auf P' abgebildet wird. Dabei ist $P_j \neq P_i$. Nach dem, was wir am Ende von Abschnitt 2. sagten, können sich die Koordinaten von P_i und P_j nur um eine ganze Zahl unterscheiden; also können P_i und P_j nicht beide im Innern von E liegen, und dies ist der gewünschte Widerspruch. Also: die Gebiete $D'_1, \dots, D'_r$ überlappen sich nicht.

c) Nun bleibt bloß noch zu zeigen, daß die Gebiete $D'_1, \dots, D'_r$ den Kreis K lückenlos erfüllen. Dazu sei $\bar{P}$ ein beliebiger Punkt im Innern von K , er habe die Koordinaten $\bar{x}, \bar{y}$. Dann gibt es ganze Zahlen n, m und reelle Zahlen $\bar{x}, \bar{y}$ mit $0 \leq \bar{x} < 1, 0 \leq \bar{y} < 1$, so daß

$$(2) \quad \bar{x} = \bar{x} + n, \quad \bar{y} = \bar{y} + m.$$

n ist der ganze, $\bar{x}$ der gebrochene Teil von $\bar{x}$ und ähnlich für $m, \bar{y}$. Der Punkt $\bar{P}$ mit

den Koordinaten $\bar{x}, \bar{y}$ liegt offenbar in E oder auf dem Rand von E . Der Punkt Q mit den Koordinaten $-n, -m$ ist ein Gitterpunkt. Es gilt nun:

$$(3) \quad n^2 + m^2 \leq (n + \bar{x})^2 + (m + \bar{y})^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 < t^2.$$

Der Nullpunkt hat also von Q eine Entfernung, die kleiner als t ist, und deshalb enthält die Kreisscheibe um Q vom Radius t auch Punkte aus dem Innern von E ; d. h. Q ist einer der Punkte $Q_1, \dots, Q_r$, etwa $Q = Q_i$. Die Ungleichung (3) zeigt außerdem $\overline{PQ}_i < t$, weswegen $\bar{P}$ im Innern von K_i liegt und dann auch im Innern oder auf dem Rand von D_i . Bei der Parallelverschiebung T_i geht nun $\bar{P}$ gerade in $\bar{P}'$ über, wie man auch aus (2) sieht; also $\bar{P}'$ liegt im Innern oder auf dem Rand von D'_i . Ganz K wird also durch die Gebiete $D'_1, \dots, D'_r$ lückenlos überdeckt. Damit ist unser Beweis vollständig fertig.

Wir schließen noch einige Bemerkungen an!

1) In dem gezeichneten Beispiel sieht alles noch recht einfach aus, besonders die Gebiete D_i sind unkompliziert (Viertelkreisscheiben!). Wenn man aber t größer wählt, entstehen sehr viele Gebiete D_i und erst recht viele G_i .

2) Wir hatten a_i Puzzlestücke der Gestalt G_i , diese liefern zusammgelegt eine Fläche vom Inhalt: a_i (Inhalt G_i); sämtliche Puzzlestücke ergeben eine Kreisscheibe vom Inhalt πt^2 ; daraus folgt:

$$(4) \quad \sum_{i=1}^l a_i (\text{Inhalt } G_i) = \pi t^2.$$

3) Man kann die folgende Grenzwertbeziehung beweisen:

$$(5) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t, P)}{\pi t^2} = 1.$$

(Vergleiche hierzu den Artikel: Gitterpunkte, M. Günther, *alpha* 3/1973.)

Die Beziehung (5) besagt, grob gesprochen: für große t gibt es annähernd so viele Gitterpunkte in einem Kreis, wie sein Flächeninhalt beträgt. Es ist interessant, daß der Quotient $A(t, P)/\pi t^2$ auch für endliche t immer wieder den Wert 1 annimmt, wenn man P geeignet wählt. Wir wollen das beweisen! Es sei N eine beliebige natürliche Zahl, $N \geq 1$, außerdem sei t so gewählt, daß $\pi t^2 = N$ gilt. Mit diesem Wert von t denken wir uns die G_i , $i = 1, 2, \dots, l$ konstruiert. Für P in G_i hat $A(t, P)$ den Wert a_i . Für zwei Gebiete G_{i_1}, G_{i_2} , die längs eines Kreisbogenstückes aneinanderstoßen, gilt $a_{i_1} = a_{i_2} \pm 1$; denn wenn P ein Kreisbogenstück von S_i überschreitet, ist in $A(t, P)$ der Gitterpunkt Q_i nicht mehr zu berücksichtigen bzw. gerade neu zu berücksichtigen. Nehmen wir nun an: „alle a_i sind größer als N “, $a_i > N$, dann folgt:

$$(6) \quad \sum_{i=1}^l a_i (\text{Inhalt } G_i) > N \sum_{i=1}^l (\text{Inhalt } G_i) = N$$

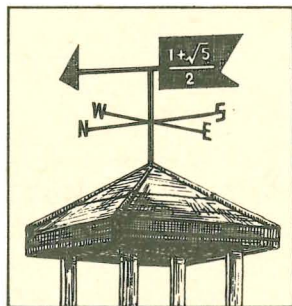
wenn man

$$(7) \quad \sum_{i=1}^l (\text{Inhalt } G_i) = 1$$

beachtet, was aus der Tatsache folgt, daß die sämtlichen G_i das Einheitsquadrat E lücken-

Eine mathematische Wetterfahne

Die Wetterfahne auf meinem neuen Haus sollte ein persönliches und doch nicht zu auffälliges Erkennungszeichen sein. Nach vielem Nachdenken und angeregten Diskussionen entstand ein Entwurf, der das Werk des Mathematikers (ich selbst) und des Architekten des Hauses (D. A. Adams/Ely) verband. Gebaut wurde die Wetterfahne von einer Schlosserei des Ortes. Mit ihr sollten die Schüler und Studenten des angrenzenden Städtischen Colleges an die Mathematik erinnert werden.



Die Grundfigur ist ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen 13 Zoll bzw. 21 Zoll. In diesem Rechteck wird die Diagonale $\overline{BD}$ gezeichnet und das Lot von A auf $\overline{BD}$ gefällt. Der Lotfußpunkt O wird üblicherweise als

Bild 1

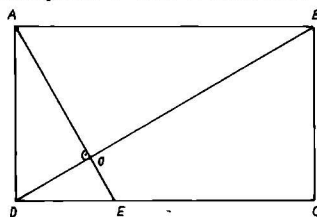
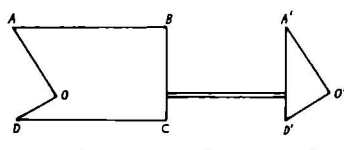


Bild 2



los und ohne Überlappung überdecken. Aus der Gleichung (4) ergibt sich dann $\pi t^2 > N$, was ein Widerspruch zur Wahl von t ist. Ebenso führt die Annahme: „alle a_i sind kleiner als N “ zu einem Widerspruch. Demnach gibt es also entweder mindestens ein a_i mit $a_i = N$ oder es gibt mindestens ein a_i , etwa a_1 , mit $a_1 > N$ und gleichzeitig mindestens ein a_i , etwa a_2 , mit $a_2 < N$. Im letzten Fall lassen wir P von G_1 nach G_2 wandern; dabei gehe P von einem Gebiet G_i immer nur über ein Kreisbogenstück in ein Nachbargebiet, die zugehörigen Werte a_i unterscheiden sich bei einem solchen Gebietswechsel immer nur um ± 1 ; da $a_1 > N$, $a_2 < N$, muß für eines der durchwanderten Gebiete G_i auch $a_i = N$ sein. Es gibt also stets Punkte P mit $A(t, P) = N$, was zu beweisen war. (In unseren Zeichnungen Bild 1 und 2 ist t so gewählt, daß $N = 2$.)

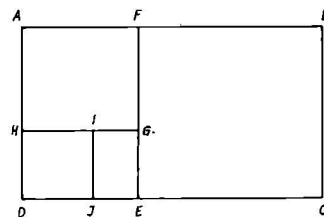
P. Günther

Goldenes Zentrum oder Auge des Rechtecks bezeichnet. (Bild 1)

Das Dreieck AOD wird parallel zu den längeren Rechteckseiten so weit verschoben, daß sein Bild $A'O'D'$ eine Pfeilspitze bildet, die die Windrichtung anzeigt. (Bild 2)

Warum wurde aber nun gerade der Punkt O derart hervorgehoben? Wenn ein Rechteck so beschaffen ist, daß man von ihm durch eine Parallele zu seiner kürzeren Seite ein Quadrat so abschneiden kann, daß das verbleibende Rechteck zum ursprünglichen ähnlich ist, so spricht man von einem *Goldenen Rechteck*. Bild 3 zeigt eine Folge von Quadraten, die in ein *Goldenes Rechteck* eingeklinket sind. Zeichnet man die Diagonalen $\overline{BD}$ und $\overline{AE}$ ein, so sieht man, daß $ABCD$, $AFED$, $EGHD$, $G'IJE$ usw. sämtlich ähnliche Dreiecke sind. Die Punkte C, F, H, J usw. liegen alle auf einer *gleichwinkligen Spirale*, deren Pol der Punkt O von Bild 1 ist.

Bild 3



Veranschauliche dir die letzte Behauptung, indem du in einer maßstäblichen Zeichnung die Folge der ähnlichen Rechtecke fortsetzt! Benutze dabei $\overline{BD}$ und $\overline{AE}$ als Hilfslinien! Weise nach, daß $\overline{BD}$ und $\overline{AE}$ aufeinander senkrecht stehen!

Das *Auge* eines Rechtecks hat übrigens auch künstlerische Bedeutung: In der klassischen griechischen Architektur tritt es häufig in Erscheinung, und in einem Gemälde wird das *Auge* für eine dominierende Stelle gehalten, an der oft eine bedeutsame Einzelheit angeordnet wird.

Da $ABCD$ und $AFED$ ähnliche Rechtecke sind, gilt $\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{DE}$. Wählt man $\overline{AD}$ als

Längeneinheit, so hat die Länge von $\overline{AD}$ die Maßzahl 1; die Maßzahl der Länge von $\overline{AB}$ sei mit x bezeichnet. Es gilt dann $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$. Dies führt auf die quadratische Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$. Deren (hier nur interessierende) positive Lösung ist $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$.

Das Seitenverhältnis des Ausgangsrechtecks, nämlich 21:13, liegt sehr nahe bei 1,618.

Daher wurde auf meiner Wetterfahne $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

aus der Stahlplatte des Hinterteils des Pfeils selbst herausgeschnitten, so daß dieser Term in der Silhouette zu lesen ist.

Der Architekt und ich hoffen, daß der Wind nicht so stark sein wird, daß der Ganze von dem pyramidenförmigen Dach fegt, auf dem die Wetterfahne montiert ist.

A. E. Lawrance

Ist 1111111111 eine Primzahl?

(Mit einem unveröffentlichten Manuskript von C. G. J. Jacobi)

Teil 1: Primzahlen

Die Zahlen 1, 2, 3, 4 heißen natürliche Zahlen. Das Produkt zweier natürlicher Zahlen ist eine natürliche Zahl. Es gibt also natürliche Zahlen, die sich als Produkt wenigstens zweier Zahlen, die größer als 1 sind, darstellen lassen. (Man spricht von *zusammengesetzten Zahlen*.) Zum Beispiel sind 10, 1001, 5031943 solche Zahlen; es ist nämlich $10 = 2 \cdot 5$, $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, $5031943 = 7 \cdot 449 \cdot 1601$. Aber es existieren auch von 1 verschiedene natürliche Zahlen, die kein solches Produkt sind, beispielsweise 2, 5, 7, 11, 13, 449, 1601. Solche Zahlen heißen *Primzahlen*. Die ersten Primzahlen sind 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47. Auch die Zahlen 3041977, $2^{61} - 1$; $2^{19937} - 1$ sind Primzahlen. Die größte bekannte Primzahl ist (gegenwärtig) die 6553ziffrige Zahl $2^{21701} - 1$.

Schon der griechische Mathematiker *Euklid* (um 300 v. u. Z.) konnte beweisen, daß es unendlich viele Primzahlen gibt. Ist eine natürliche Zahl keine Primzahl, so kann man sie (schrittweise) in ein Produkt zerlegen, in dem alle Faktoren Primzahlen sind. Das kann sicher auf verschiedenen Wegen geschehen. Überdies kann man die Primzahlfaktoren noch in beliebiger Reihenfolge schreiben. Doch abgesehen von dieser Willkür in der Anordnung führen verschiedene Wege der Zerlegung immer zur gleichen Produktzerlegung der Zahl in Primzahlen. Jede natürliche Zahl ist also (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellbar.

Beispiele sind die eingangs angegebenen Produkte, weitere Beispiele sind $17 = 17$, $222 = 2 \cdot 3 \cdot 37$, $10121804 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 59 \cdot 557$, $18021851 = 223 \cdot 77347$. (Würde übrigens die Zahl 1 als Primzahl angesehen werden, so würde die Eindeutigkeit verloren gehen. So hätte z. B. 18 die verschiedenen Zerlegungen $2 \cdot 3 \cdot 3$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.) Die Primzahlen sind nicht nur (im beschriebenen Sinne) die Bausteine für den multiplikativen Aufbau der natürlichen Zahlen. Für sie gelten viele (zahlentheoretische) Gesetzmäßigkeiten, die für zusammengesetzte Zahlen falsch sein können. Als einige Kostproben sollen die folgenden Aussagen (ohne Beweis) dienen.

A1: (nach Wilson, 1741 bis 1793):

Ist p eine Primzahl, so ist die Zahl $(p-1)! + 1$ durch p teilbar.

(Für eine natürliche Zahl n bezeichnet hier $n!$ das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ aller natürlichen Zahlen von 1 bis n .)

Gilt umgekehrt für eine natürliche Zahl m , daß $(m-1)! - 1$ durch m teilbar ist, so muß m eine Primzahl sein!

A2: (nach Fermat, 1601 bis 1665):

Jede Primzahl p der Form $4k+1$ ist eine Summe zweier Quadratzahlen.

Beispiele sind $5 = 1^2 + 2^2$, $13 = 2^2 + 3^2$, $17 = 1^2 + 4^2$, $29 = 2^2 + 5^2$, $37 = 1^2 + 6^2$, $41 = 4^2 + 5^2$.

Die Umkehrung ist nicht richtig; die Summe zweier Quadrate braucht keine Primzahl zu sein:

$1^2 + 3^2 = 10$, $3^2 + 9^2 = 90$, $2^2 + 11^2 = 125$.
Nicht jede natürliche Zahl ist als Summe zweier Quadratzahlen darstellbar, z. B. 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 1001, 21, 77.

A3 (nach Fermat):

Ist p eine Primzahl, so ist für jede natürliche Zahl a die Zahl $a^p - a$ durch p teilbar.

Fermatscher Satz

Die Aussage A3 wurde zuerst von *Fermat* im Jahre 1640 ausgesprochen. *Fermat* hat jedoch keinen Beweis veröffentlicht.

Der erste bekannte Beweis stammt von *Leibniz* (1646 bis 1716). Später gab *Euler* (1707 bis 1783) mehrere Beweise (und verallgemeinerte die Aussage). Wir brauchen den folgenden Spezialfall des Fermatschen Satzes. **Satz 1:** Ist p eine Primzahl, so ist $2^p - 2$ durch p teilbar. (Dieses bedeutet, daß 2^p bei der Division durch p den Rest 2 läßt. Beispiele: siehe Tabelle 1.)

Beweis: Nach dem binomialen Lehrsatz ist

$$2^p = (1+1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k}, \text{ also}$$

wegen $\binom{p}{0} = \binom{p}{p} = 1$

$$2^p - 2 = \binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \dots + \binom{p}{p-1}.$$

Die Zahlen $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ ($0 < k < p$) sind ganze Zahlen. Da p nicht den Nenner teilt, muß p den Quotienten teilen, d. h. jede Zahl $\binom{p}{k}$ ist ein Vielfaches von p und damit auch die Summe $\binom{p}{1} + \dots + \binom{p}{p-1} = 2^p - 2$.

Der bewiesene Satz läßt sich auch so formulieren:

Ist für eine natürliche Zahl n die Differenz $2^n - 2$ nicht durch n teilbar, so kann n keine Primzahl sein.

Ist n eine Primzahl?

Es ist im allgemeinen, insbesondere für große Zahlen, nicht leicht, von einer Zahl n nachzuweisen, daß sie eine Primzahl ist oder (falls sie keine Primzahl ist) ihre Zerlegung in Primzahlen anzugeben.

Satz 2: Ist eine Zahl n nicht Vielfaches einer Primzahl p , für die $p^2 \leq n$ ist, so ist n eine Primzahl.

Beweis: Wäre n keine Primzahl, so ließe sich n in (sagen wir $r \geq 2$) Primzahlen zerlegen: $n = p_1 \cdot \dots \cdot p_r$.

Da n nicht Vielfaches einer Primzahl p ist, für die $p^2 \leq n$ ist, müßte $p_1^2 > n$, $p_2^2 > n$, ..., $p_r^2 > n$ also $n^2 = p_1^2 p_2^2 \dots p_r^2 > n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^r$ sein. Wegen $r \geq 2$ ist dies aber unmöglich.

Das in Tabelle 2 angegebene „Programm“ (basierend auf diesem Satz) ermöglicht es, die Primzahlzerlegung einer ungeraden Zahl n prinzipiell zu finden. Dabei denken wir uns zwei „Speicher“ I und II gegeben. Durch „[I]“ wird die Zahl bezeichnet, die sich im Speicher I befindet. Analog „[II]“. Der Befehl „Speichere eine Größe in einem Speicher!“ bedeutet, daß ein evtl. schon vorhandener Inhalt dieses Speichers gelöscht und durch die neue Größe ersetzt wird.

$\text{FRAC}\left(\frac{n}{m}\right)$ bedeutet für einen Bruch $\frac{n}{m}$ den gebrochenen Teil dieser Zahl. So ist

$$\text{FRAC}\left(\frac{8}{7}\right) = \frac{1}{7} \left(\text{da } \frac{8}{7} = 1 + \frac{1}{7} \right), \text{FRAC}\left(\frac{100}{5}\right) = 0 \left(\text{da } \frac{100}{5} = 20 \right).$$

Es ist $\text{FRAC}\left(\frac{n}{m}\right) = 0$, falls m ein Teiler von n ist. Sonst ist $\text{FRAC}\left(\frac{n}{m}\right) > 0$.

Die „angezeigten“ Zahlen sind die gesuchten Primfaktoren von n .

Die in Tabelle 3 durchgerechneten Zahlenbeispiele werden das Verständnis der Tabelle 2 erleichtern. (Die Anzeige der Primfaktoren erfolgt in den Schritten 08 bzw. 04.)

Man kann den Befehl 09 natürlich auch ersetzen durch 09*:

„Speichere die auf [II] folgende Primzahl im Speicher II!“ und so in Tabelle 3 einige Zeilen einsparen.

Für größere Zahlen n wird man den in Tabelle 2 gegebenen „Algorithmus“ mittels Computer anwenden können, um die multiplikative Zerlegung in Primzahlen zu finden. Als es jedoch elektronische Rechner noch nicht gab, war es im allgemeinen eine mühevollere Arbeit, diese Zerlegung zu bekommen. Auch nur die Entscheidung, ob eine gegebene Zahl n Primzahl ist oder nicht, ist ebenso mühevoll. Immerhin erkannte 1876 Lucas (mittels eines besseren als in den Tabellen 2 und 3 beschriebenen Verfahrens), daß $2^{127} - 1 = 170141183460469231731687303715884105727$ eine Primzahl ist. Erst 75 Jahre später

mit dem Erscheinen elektronischer Rechenanlagen fand man größere Primzahlen, nämlich die 44ziffrige Zahl $\frac{1}{17} (2^{148} + 1)$.

1971 wies Tuckerman mittels Computer nach, daß die 6002ziffrige Zahl $2^{19937} - 1$ eine Primzahl ist.

Im folgenden sollen nun (zunächst ohne Computer) Beispiele natürlicher Zahlen, die als Ziffern nur die 1 enthalten, betrachtet werden:

11 ist eine Primzahl.

111 ist keine Primzahl ($111 = 3 \cdot 37$).

1111 ist keine Primzahl (da $1111 = 11 \cdot 101$).

11111 ist keine Primzahl

(da $11111 = 111 \cdot 1001 = 11 \cdot 10101$).

1111111 ist keine Primzahl

(da $1111111 = 11 \cdot 1010101$).

11111111 ist keine Primzahl

(da z. B. $11111111 = 111 \cdot 1001001$).

111111111 ist keine Primzahl

(da z. B. $111111111 = 11 \cdot 101010101$).

Für die 5ziffrige Zahl 11111 findet man analog zu Tabelle 3 nach 20 Zeilen (bzw. nach 12 Zeilen, wenn man den Schritt 09 durch den Schritt 09* ersetzt) als Primteiler 41. Es ist $11111 = 41 \cdot 271$ also keine Primzahl. Für die 7ziffrige Zahl 1111111 muß man bereits 119 (bzw. 51) Zeilen aufschreiben, um die Primzahl 239 als Teiler zu finden. Es ist $1111111 = 239 \cdot 4649$ also auch keine Primzahl.

Tabelle 1

n	2^n	$2^n - 2$	$2^n - 2$ durch n teilbar?
1	2	0	ja
2	4	2	ja
3	8	6	ja
4	16	14	nein
5	32	30	ja
6	64	62	nein
7	128	126	ja
8	256	254	nein
9	512	510	nein
10	1024	1022	nein
11	2048	2046	ja
12	4096	4094	nein
13	8192	8190	ja
14	16384	16382	nein
15	32768	32766	nein

Ist nun die 11ziffrige Zahl 11111111111 eine Primzahl? Um dieses zu entscheiden, werden wir nicht den Satz 2, sondern gemäß einer (vom Rechenkünstler und Schnellrechner Z. Dase [1824 bis 1861] angeregten) Untersuchung des berühmten Mathematikers Carl Gustav Jacob Jacobi (10. 11. 1804 bis 18. 2. 1851) den Satz 1 benutzen.

H. Pieper

Tabelle 2

Schritt	Befehl
01	Speichere n im Speicher I
	Gehe zu Schritt 02.
02	Speichere 3 im Speicher II.
	Gehe zu Schritt 03.
03	Verzweigung: Ist schon $[II] > \sqrt{[I]}$? Nein: Ist $[II] \leq \sqrt{[I]}$, so gehe zu Schritt 05. Ja: Ist $[II] > \sqrt{[I]}$, so gehe zu Schritt 04.
04	Zeige [I] an. Ende.
05	Dividiere [I] durch [II]. Gehe zu Schritt 06.
06	Verzweigung: Ist $\text{FRAC}\left(\frac{[I]}{[II]}\right) = a = 0$? Nein: Ist $a > 0$, so gehe zu Schritt 09. Ja: Ist $a = 0$, so gehe zu Schritt 07.
07	Speichere $\frac{[I]}{[II]}$ im Speicher I.
	Gehe zu Schritt 08.
08	Zeige [II] an und gehe zu Schritt 05.
09	Addiere 2 zur Zahl im Speicher II. Gehe zu Schritt 03.

Tabelle 3 (Zahlenbeispiele zur Tabelle 2)

01	02	03	04	05	06	07	08	09
111	3	$3 > \sqrt{111}$ nein	—	$\frac{111}{3} = 37$	ja	37	3	—
37	3	$3 > \sqrt{37}$ nein	—	$\frac{37}{3} = 12\frac{1}{3}$	nein	—	—	5
37	5	$5 > \sqrt{37}$ nein	—	$\frac{37}{5} = 7\frac{2}{5}$	nein	—	—	7
37	7	$7 > \sqrt{37}$ ja	37	—	—	—	—	—
Ergebnis: $111 = 3 \cdot 37$								
1001	3	$3 > \sqrt{1001}$ nein	—	$\frac{1001}{3} = 333\frac{2}{3}$	nein	—	—	5
1001	5	$5 > \sqrt{1001}$ nein	—	$\frac{1001}{5} = 200\frac{1}{5}$	nein	—	—	7
1001	7	$7 > \sqrt{1001}$ nein	—	$\frac{1001}{7} = 143$	ja	143	7	—
143	7	$7 > \sqrt{143}$ nein	—	$\frac{143}{7} = 20\frac{3}{7}$	nein	—	—	9
143	9	$9 > \sqrt{143}$ nein	—	$\frac{143}{9} = 15\frac{8}{9}$	nein	—	—	11
143	11	$11 > \sqrt{143}$ nein	—	$\frac{143}{11} = 13$	ja	13	11	—
13	11	$11 > \sqrt{13}$ ja	13	—	—	—	—	—
Ergebnis: $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$								

Wir arbeiten mit Mengen

Teil 2:

Abbildungen

Um den Begriff „Abbildung“ zu erfassen, muß man zunächst wissen, was unter der *Kreuzmenge* (dem Kreuzprodukt) zweier Mengen zu verstehen ist.

Seien A und B beliebige Mengen.

Die Kreuzmenge $A \times B$ (gesprochen: „A Kreuz B“) ist die Menge aller geordneten Paare $[a; b]$ mit $a \in A$ und $b \in B$. In Zeichen: $A \times B = \{[a; b] \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

Beispiel: Seien

$A = \{a, b, c\}$ und $B = \{1; 2\}$, so ist

$A \times B = \{[a; 1], [a; 2], [b; 1], [b; 2], [c; 1], [c; 2]\}$.

Es werden also *alle* Elemente der Menge A mit *allen* Elementen der Menge B so zu Paaren zusammengestellt, daß an erster Stelle stets ein Element aus der Menge A , an der zweiten Stelle stets ein Element aus der Menge B steht.

Wenn wir die Mengen $B \times A$ bilden, so erhalten wir

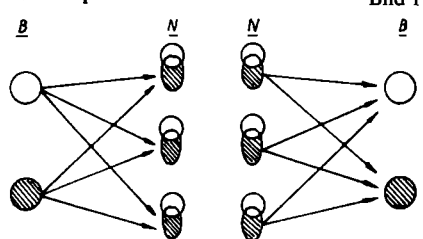
$B \times A = \{[1; a], [1; b], [1; c], [2; a], [2; b], [2; c]\}$.

Das ist eine andere Menge als $A \times B$. Es gilt folglich allgemein: $A \times B \neq B \times A$; d. h., die Bildung der Kreuzmenge ist nicht kommutativ.

Wir erkennen aber sicher leicht, daß $A \times B$ genau so viele geordnete Paare (das sind die Elemente der Menge) enthält wie $B \times A$. Die Kreuzmengenbildung ist eine mengentheoretische Grundlage für die Multiplikation von natürlichen Zahlen. $3 \cdot 2 = 6$, denn die Kreuzmenge aus einer Dreiermenge und einer Zweiermenge ist eine Sechsermenge. Weil $A \times B$ genauso viele Elemente (nicht dieselben!) enthält wie $B \times A$, gilt für die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen das Kommutativgesetz.

Eine anschauliche Darstellung des Sachverhalts ergibt sich z. B., wenn man drei verschiedenfarbige Bälle und zwei verschiedenfarbige Netze betrachtet und alle Möglichkeiten ausprobiert, genau einen bestimmten Ball in genau ein bestimmtes Netz zu stecken. Man wählt zuerst einen Ball aus, etwa den weißen, und kann diesen nun in das weiße, dann in das schwarze und schließlich in das rote Netz stecken; ebenso verfährt man mit dem schwarzen Ball. Wir erhalten insgesamt

6 Möglichkeiten, d. h. 6 geordnete Paare [Ball; Netz]. Wenn B die Menge der Bälle und N die Menge der Netze bezeichnet, so haben wir die Menge $B \times N$ gebildet. Die Bildung der Menge $N \times B$ führt auch auf eine Menge von 6 geordneten Paaren. Man wählt aber zuerst ein Netz aus, um damit einen Ball zu transportieren.



$N \times B \neq B \times N$, aber $N \times B$ enthält die gleiche Anzahl von Elementen wie $B \times N$. Deshalb gilt $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ und allgemein für alle natürlichen Zahlen a, b : $a \cdot b = b \cdot a$!

Im Arbeitsblatt Nr. 5 wollen wir nun das Bilden von Kreuzmengen üben.

Arbeitsblatt 5

Gegeben seien die folgenden Mengen:

$M = \{1, 2, 3, 4\}$ $P = \{5, 7, 9\}$ $R = \{a\}$
 $N = \{2, 3\}$ $Q = \{x, y, z\}$ $S = \{b, c\}$

Man bilde folgende Mengen:

$M \times N = \{[1; 2], [1; 3], [2; 2], [2; 3], [3; 2], [3; 3], [4; 2], [4; 3]\}$

$N \times M$

$M \times P$

$P \times M$

$N \times P$

$P \times N$

$M \times M$

$N \times N$

$P \times P$

$Q \times R$

$R \times Q$

$Q \times S$

$S \times Q$

$R \times S$

$S \times R$

$Q \times Q$

$R \times R$

$S \times S$

Teilmengen von Kreuzmengen

Eine Familie mit vier Kindern (Vater: V , Mutter: M , Inge: I , Gisela: G , Peter: P , und Horst: H) teilt sich am Wochenende in bestimmte Arbeiten. Diese seien: fegen: f , wischen: w , bohnen: b , einkaufen: e , heizen: h , Fenster putzen: p , umgraben: u , und kochen: k .

Die Menge der Familienmitglieder wollen wir mit

$M_1 = \{V, M, I, G, P, H\}$

und die Menge der zu erledigenden Arbeiten mit

$M_2 = \{f, w, b, e, h, p, u, k\}$ bezeichnen.

Wenn wir die Kreuzmenge $M_1 \times M_2$ bilden würden, dann würde das in der Praxis bedeuten, daß jeder alles macht, und das ist natürlich unmöglich. Deshalb werden wir jedem Familienmitglied eine Arbeit (genau eine oder mehr!) zuordnen.

Eine solche Zuordnung nennt man auch Abbildung. Es ist nur etwas ungewohnt zu sagen: „Peter wird auf das Bohnen abgebildet.“ Wir sagen besser: „Dem Peter wird das Bohnen zugeordnet“ oder „Peter bohnt“. Alle diese verschiedenen Ausdrucksweisen spiegeln ein und denselben Sachverhalt wider.

Lösungen siehe S. 116

Wenn wir sagen „Peter übernimmt das Bohren“, so bilden wir in Gedanken das geordnete Paar $[P; b]$. Auf diese Weise läßt sich die Zuordnung (das ist die Abbildung F_1) als Menge geordneter Paare schreiben und anschaulich als Pfeildarstellung wie folgt skizzieren:

$$F_1 = \{[V; h], [V; u], [M; f], [M; k], [I; w], [G; p], [P; b], [H; e]\}$$

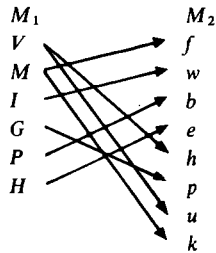


Bild 2

Wir erkennen, daß F_1 eine Teilmenge (sogar eine echte Teilmenge) der Kreuzmenge $M_1 \times M_2$ ist; geschrieben: $F_1 \subseteq M_1 \times M_2$, sogar $F_1 \subset M_1 \times M_2$. Nun können wir den Begriff „Abbildung“ allgemein definieren:

Seien A und B beliebige Mengen.

Jede Teilmenge F der Kreuzmenge $A \times B$ heißt eine Abbildung aus A in B .

Nach Definition ist also die Kreuzmenge selbst eine Abbildung, denn jede Menge ist Teilmenge von sich selbst.

Kehren wir zu unserem Beispiel zurück.

Ein Familienmitglied (ein Element der Menge M_1), das an der Abbildung beteiligt ist (dem mindestens eine Arbeit zugeordnet wird; von dem mindestens ein Pfeil ausgeht), heißt ein *Urbild*. Wir stellen fest, daß alle Familienmitglieder an der Abbildung beteiligt, also alle Elemente der Menge M_1 Urbilder sind. Die Menge aller Urbilder heißt *Vorbereich* der Abbildung.

Für unser Beispiel gilt demnach:

$$Vb = \{V, M, I, G, P, H\} = M_1.$$

Eine Arbeit, die erledigt wird, also ein Element der Menge M_2 , das an der Abbildung beteiligt ist (zu dem mindestens ein Pfeil hin- führt), heißt ein *Bild*. Wir stellen fest, daß alle Arbeiten erledigt werden (an der Abbildung beteiligt sind), d. h. alle Elemente der Menge M_2 Bilder sind. Die Menge aller Bilder heißt *Nachbereich* der Abbildung. Für unser Beispiel gilt demnach:

$$Nb = \{f, w, b, e, h, p, u, k\} = M_2.$$

Wenn nun $Vb = M_1$ und $Nb = M_2$ gilt, dann heißt diese besondere Abbildung eine Abbildung von M_1 auf M_2 .

An einem anderen Wochenende kann eine ganz andere Abbildung F_2 vorliegen.

Es kann sein, daß Horst krank im Bett liegt und Vater einem Nachbarn beim Bauen hilft; außerdem können Mutter und Inge schon am Donnerstagabend gefegt und gewischt haben. Fenster sollen auch nicht geputzt werden, und der Garten soll bereits fertig umgegraben sein.

Unter diesen Bedingungen könnte die Abbildung F_2 wie folgt aussehen:

$$F_2 = \{[M; k], [I; e], [G; e], [P; b], [P; h]\}.$$

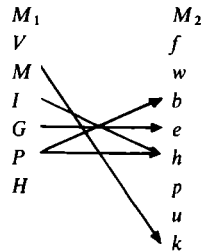


Bild 3

Es gilt: $Vb = \{M, I, G, P\}$; $Vb \subset M_1$

$$Nb = \{b, e, h, k\}; Nb \subset M_2$$

Wenn gilt: $Vb \subset M_1$ und $Nb \subset M_2$, dann liegt eine Abbildung aus M_1 in M_2 vor.

Es sollte besonders beachtet werden, daß bei dieser Abbildung F_2 die Elemente V und H der Menge M_1 keine Urbilder und die Elemente f, w und p der Menge M_2 keine Bilder sind. Demnach gehören die genannten Elemente nicht zum Vorbereich bzw. Nachbereich der Abbildung, wohl aber zur Menge M_1 bzw. M_2 .

Für unser Beispiel heißt das etwa, daß Horst an dem betreffenden Wochenende keine Arbeit im Haushalt verrichtet, weil er krank ist, wohl ist er aber ein Mitglied der Familie. Fenster werden an dem betreffenden Wochenende nicht geputzt; das Fensterputzen gehört aber zur Menge der Arbeiten im Haushalt.

W. Fregin

(Dieser Beitrag wird mit einem 3. Teil: Wir arbeiten mit Mengen-Funktionen-Relationen in Heft 6/79 abgeschlossen, d. Red.)



ARBEITS-
GEMEINSCHAFTEN
IM BLICKPUNKT

Isomorphe Graphen

Unter einem *Graph* wollen wir eine Figur verstehen, die aus einer endlichen Anzahl von Punkten (Knotenpunkten) und Linien (Kanten) besteht, wobei eine Linie immer genau zwei Punkte verbindet. Die Kanten eines Graphen müssen nicht geradlinig sein und dürfen sich kreuzen – s. Bild 1. (Näheres zur Definition eines Graphen und über interessante Eigenschaften findet ihr in *alpha* 4/72; 6/72; 1/73; 2/73 und 4/73.)

Wir wollen im folgenden nur *schlichte* Graphen untersuchen, d. h. solche, bei denen je zwei Knotenpunkte durch höchstens eine Kante verbunden sind.

Man kann z. B. einen elektrischen Schaltplan als Graph auffassen. Soll in der elektronischen Industrie für eine solche Schaltung eine Leiterplatte entwickelt werden, so müssen die im Schaltplan vorgesehenen leitenden Verbindungen auch auf der Leiterplatte vorhanden sein, sie dürfen sich jedoch nicht kreuzen. Bild 1 zeigt eine mögliche Lösung eines derartigen Problems. Die wesentlichen Eigenschaften des Graphen bleiben bei solch einer Veränderung erhalten. Man sagt, die dargestellten Graphen haben die gleiche Struktur, sie sind *isomorph*.

Definition 1: Zwei Graphen G_1 und G_2 sind *isomorph*, wenn es eine umkehrbar eindeutige Abbildung ϕ von der Menge der Knotenpunkte von G_1 auf die Menge der Knotenpunkte von G_2 gibt, die folgende Eigenschaft hat: Zwei Knotenpunkte A und B sind in G_1 genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die zugehörigen Bildpunkte $\phi(A)$ und $\phi(B)$ in G_2 ebenfalls durch eine Kante verbunden sind.

Beispiel: Bildet man die Menge der Knotenpunkte des Graphen G_I in Bild 5 nach der Vorschrift $A \rightarrow 1, B \rightarrow 6, C \rightarrow 4, D \rightarrow 2, E \rightarrow 7, F \rightarrow 5, G \rightarrow 3$ eineindeutig auf die Menge der Knotenpunkte des Graphen G_{II} ab, so sind – wie man sich leicht überzeugt – zwei Knotenpunkte in G_I genau dann durch eine Kante verbunden, wenn es auch die entsprechenden Bildpunkte in G_{II} sind (z. B.

Gotisches Maßwerk



Zweischweifung
(Fischblase)



Dreischweifung



quadratische
Fensteröffnung



Sechsschweifung

B und D in G_{II} , 6 und 2 in $G_{II'}$). Folglich sind die Graphen G_I und $G_{II'}$ isomorph.

– Aus Definition 1 folgt unmittelbar, daß zwei isomorphe Graphen die gleiche Anzahl von Knotenpunkten bzw. Kanten haben müssen. Ist die Bedingung aber auch hinreichend für die Isomorphie zweier Graphen?

▲ 1 ▲ Welche der Graphen in Bild 2 sind isomorph?

– Die Anzahl der von einem Knotenpunkt eines Graphen ausgehenden Kanten wird als *Grad* (oder *Valenz*) dieses Knotenpunktes bezeichnet (vgl. alpha 6/72). Aus Definition 1 folgt, daß zwei isomorphe Graphen die gleiche Anzahl von Knotenpunkten eines vorgegebenen Grades haben müssen.

Aber selbst diese Bedingung ist noch nicht hinreichend dafür, daß zwei Graphen isomorph sind (Bild 3).

– Die beiden Graphen in Bild 3 haben eine unterschiedliche Anzahl von „Vierecken“, d.h. von Teilgraphen, die aus vier durch 4 Kanten zu einem geschlossenen Ring verbundenen Knotenpunkten bestehen. Isomorphe Graphen müssen jedoch auch die gleiche Anzahl ringförmiger Teilgraphen mit gleicher Knotenzahl besitzen.

Die drei angegebenen Kriterien erlauben lediglich, gegebenenfalls festzustellen, daß zwei vorliegende Graphen *nicht* isomorph sind. Zum Nachweis der Isomorphie muß auf die Definition zurückgegriffen werden. Besonders bei unübersichtlichen Graphen wird dies mitunter erleichtert, wenn man statt des gegebenen Graphen den zu ihm *komplementären* Graphen untersucht.

Definition 2: Zwei Graphen G und G' mit denselben Knotenpunkten sind *komplementär* zueinander, wenn in G' genau die Knotenpunkte jeweils durch eine Kante verbunden sind, die dies in G nicht sind.

Wie man sich leicht überzeugt, gibt es zu jedem Graphen genau einen komplementären Graphen.

▲ 2 ▲ Zeichne zu den Graphen in Bild 4 jeweils den komplementären Graphen!

Es gilt nun

Satz 1:

Zwei Graphen sind genau dann isomorph, wenn ihre Komplemente (d.h. die zu ihnen komplementären Graphen) isomorph sind.

▲ 3 ▲ Beweise diesen Satz!

Wir haben bereits erkannt, daß die in ▲ 2 ▲ gezeichneten Graphen isomorph sind (vgl. ▲ 1 ▲, Bild 5). Da diese zu den Graphen in Bild 4 komplementär sind, sind nach Satz 1 auch die Graphen in Bild 4 isomorph.

Betrachtet man den Graph Σ , so stellt man fest, daß er zu seinem Komplement $\bar{\Sigma}$ isomorph ist.

▲ 4 ▲ Bezeichne die Knotenpunkte der beiden Graphen, und gib eine Abbildung, wie sie in Definition 1 gefordert wird, an!

Definition 3: Ein Graph, der zu seinem komplementären Graphen isomorph ist, heißt *selbstkomplementär*.

Alle selbstkomplementären Graphen mit vier Knotenpunkten sind zueinander isomorph.

▲ 5 ▲ Die selbstkomplementären Graphen mit 5 Knotenpunkten lassen sich in zwei Klassen einteilen, wobei zwei dieser Graphen genau dann zu derselben Klasse gehören, wenn sie isomorph sind. Zeichne aus jeder dieser Klassen einen Vertreter!

Satz 2: Selbstkomplementäre Graphen existieren nur für Knotenpunktanzahlen n , die sich in der

Form $n=4a$ oder $n=4a+1$ ($a \in \mathbb{N}$) darstellen lassen.

Beweis: Addiert man die Anzahl der Kanten eines Graphen und seines Komplements, so erhält man die Anzahl aller Kanten, die man erhält, wenn man jeden Knotenpunkt mit jedem verbindet. Wenn die Anzahl der Knotenpunkte n ist, so sind insgesamt $\frac{n(n-1)}{2}$

Kanten möglich. Da isomorphe Graphen die gleiche Anzahl von Kanten haben, entfallen auf den Graphen und sein Komplement jeweils die Hälfte – bezeichnen wir sie mit m .

Es gilt dann $\frac{n(n-1)}{2} = 2m$, d.h. $n(n-1) = 4m$.

Hieraus folgt, daß sowohl n als auch $n-1$ durch 2 teilbar sein muß, w.z.b.w.

Betrachtet man den Graph Σ und sein Komplement $\bar{\Sigma}$ etwas genauer, so kann man eine Möglichkeit für die Konstruktion von selbstkomplementären Graphen erkennen.

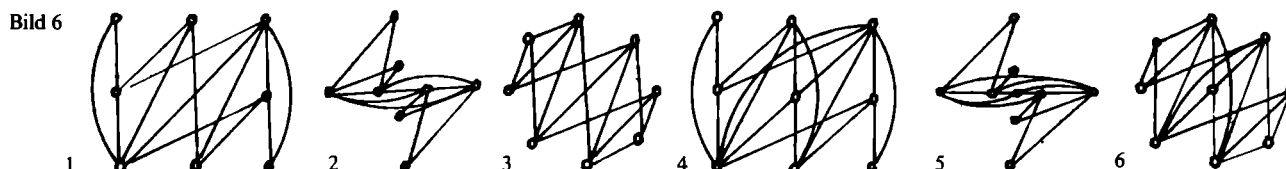
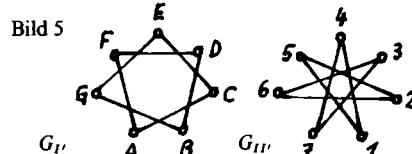
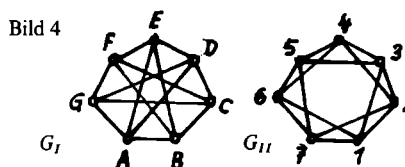
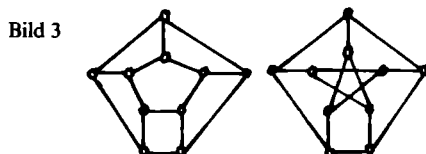
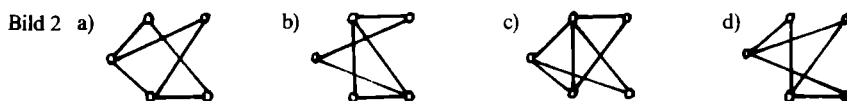
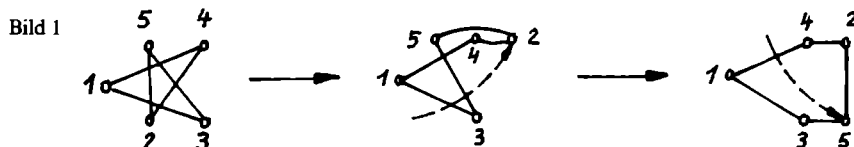
Ordnet man nämlich die Knotenpunkte eines Graphen gleichmäßig auf den Kanten eines Quadrats (bei $n=4a$) bzw. bei $n=4a+1$ $n-1$ Punkte auf den Eckpunkten eines Quadrats und den verbleibenden in dessen Mitte an, erhält man zwei zueinander komplementäre und isomorphe (d.h. selbstkomplementäre) Graphen, wenn man die Punkte wie folgt verbindet:

Den einen Graph erhält man, wenn man alle waagerechten Verbindungen einzeichnet und alle Verbindungen, die schräg von links unten nach rechts oben verlaufen. Der andere Graph entsteht durch Einzeichnen aller senkrechten und aller von links oben nach rechts unten verlaufenden Verbindungen.

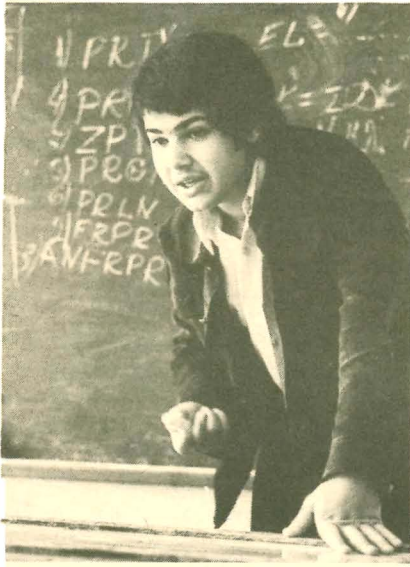
Nr. 2 und 5 in Bild 6 wurden nach dieser Beschreibung konstruiert, die anderen auf ähnliche Art. Dabei sind keine zwei der angegebenen Graphen isomorph.

▲ 6 ▲ Konstruiere die Komplemente zu den Graphen in Bild 6!

M. Birnbaum, J. Dolecek, P. Offel



David und Goliath



David heißt er nur – der vierzehnjährige David Arutjunjan –, und ein Goliath ist er keineswegs, auch wenn er bereits das dritte Jahr erfolgreich an der Fakultät für Technische Kybernetik der Jerewaner Polytechnischen Hochschule *Karl Marx* studiert. Er komponierte nicht, spielte nicht hervorragend Klavier, schrieb keine Verse, löste keine komplizierten arithmetischen Aufgaben, konnte weder blitzschnell dreistellige Zahlen addieren noch multiplizieren, und er hatte auch kein besonders gutes Gedächtnis.

„Deshalb“, sagten die Eltern – der Vater ist Biologe, die Mutter Sprachwissenschaftlerin –, „versuchten wir, Davids Gedächtnis von Kindheit an zu trainieren.“ Alle Übungen mit ihm bauten sie auf Spielsituationen und auf den Interessen des Kindes auf. Sie bemühten sich, den Jungen nicht zu überfordern, sondern ihm mehr zu zeigen und zu erzählen. In der Schulzeit begann David armenisch und russisch lesen zu lernen und löste schnell einfache arithmetische Aufgaben. Als die Lehrerin den Eltern mitten im Schuljahr mitteilte, daß sich das Kind in der ersten Klasse langweile, weil es den ganzen Lehrstoff schon kannte, stimmten die Eltern der Versetzung in die nächsthöhere Klasse zu. Das Risiko war nicht allzu groß. Sollte die Sache schiefgehen, konnte David nochmal die Klasse durchlaufen. Darauf bereite-

ten sie ihn vor, um ein psychologisches Trauma zu vermeiden...

Der Junge bewältigte innerhalb von zwei Jahren den Lehrstoff von vier Klassen. Freilich lernte er auch öfter sonntags und in den Ferien. Doch nicht mehr als zwei, drei Stunden täglich. Mathematik fiel ihm leicht. Die Fächer der zehnten Klasse mit erweitertem Mathematikunterricht schloß er mit „gut“ und „ausgezeichnet“ ab. Und da spielten Zugeständnisse der Lehrer wegen des nicht alltäglichen Falls keine Rolle? „Nein“, sagten die Eltern, „bei den Abschlußexamina prüften die Lehrer David oft sogar länger als üblich.“

Blieb ihm da noch Zeit für altersgemäße Jugendspiele? „Natürlich war er nicht seltener draußen als andere Kinder. Wir machten mit ihm viele Ausflüge, besuchten Museen, Sternwarten und Ausstellungen. In den Ferien versuchten wir viel zu reisen, um ihm auch andere Städte zu zeigen. Körperlich entwickelte er sich gut und verfügt auch über ein ausreichend stabiles Nervensystem.

Auf Überforderungen achten wir genau. Und nicht nur wir, auch der Schularzt hätte sie niemals geduldet.“ Eine Klasse ist ein Kollektiv, in dem sich Freunde finden. Oft fürs ganze Leben. Hat David Freunde? „Er ist ein geselliger Mensch. Doch sein nicht alltäg-

licher Lernrhythmus brachte es mit sich, daß er oft die Freunde wechselte. In jedem neuen Kollektiv fand er ziemlich schnell Anschluß. Aber das Fehlen fester Freunde beunruhigte uns. Er fand sie zum Glück in der 9. und 10. Klasse, in denen er jeweils ein volles Schuljahr blieb und auch jetzt an der Hochschule.“

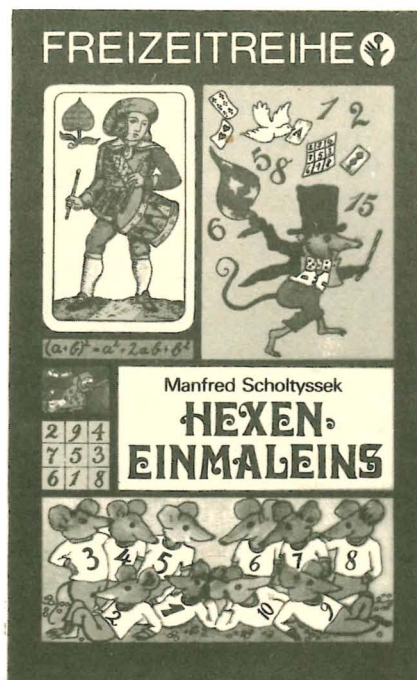
Als ich nach Jerewan kam, befürchtete ich, einen Bücherwurm anzutreffen, der nichts kennt außer Schreibtisch und Bibliothek. Meine Befürchtungen waren unbegründet. Von den Studenten seines Studienjahres unterschied sich David kaum. Natürlich sah er ein wenig jünger aus als die anderen. Er ist mitteilbar und wißbegierig. Er versäumt keine Exkursionen und Praktika. Seine Interessengebiete sind umfangreich:

Theater, die Geschichte Armeniens, in der er sich gut auskennt, Sport. David lernt gut, bestätigten seine Kameraden. Und ohne jede Bevorzugung. Natürlich macht ihm sein Schulalter manchmal zu schaffen. Er sagt bisweilen etwas recht Naives, Kindliches. Aber was das Studium anbelangt, passiert ihm das nicht. Wir haben bisher keine Lücken in seinem schulischen Wissen bemerkt, war die Ansicht der Dozenten. Und sein Dekan, Georgi Akondshanjian, meinte: „Ich bin Prüfer im Fach ‚Theoretische Grundlagen der Elektrotechnik‘. Davids Antworten waren ausgezeichnet. An ihnen beeindruckte der Forschergeist. Bisher habe ich noch keinerlei negative Momente seines zügigen Bildungsweges wahrgenommen, und er ist immerhin schon im 3. Studienjahr. Viele nennen derartige Kinder ‚Wunderkinder‘. Auf David trifft das jedoch nicht zu. Ich würde sagen, er besitzt überdurchschnittliche Fähigkeiten.“

A. Simonjan (aus Freie Welt 2/79)

Ein Blick in das Rechenzentrum der Fakultät für Technische Kybernetik der Jerewaner Polytechnischen Hochschule *Karl Marx*





Zweifarbige Illustrationen
von Gisela Wongel
192 Seiten · Pappband mit Folie
etwa 4,80 M
Der Kinderbuchverlag Berlin
Bestellangaben: 630 659 0/Scholtyssek
Für Leser von 11 Jahren an

Im Reich der Zahlen und Gleichungen geht es zwar logisch und nach strengen Gesetzmäßigkeiten zu, aber – auch diese Welt hat ihre Romantik. Das Buch vermittelt dem, der in ihr „Zahlenlabyrinth“ eindringt, interessante Begegnungen und erstaunliche Entdeckungen. Er kann in die Geheimnisse magischer Quadrate eindringen und lernt verblüffende Tricks mit Karten und Würfeln kennen, die auf mathematischen Gesetzmäßigkeiten beruhen.

Leseprobe

Wie können wir uns beim großen Einmaleins das Kopfrechnen erleichtern?

Im Bereich von 11 bis 19 addieren wir zunächst zur ersten Zahl die Einer der zweiten Zahl, fügen dem Ergebnis eine Null hinzu, multiplizieren noch die Einer beider Zahlen und addieren die so erhaltenen beiden Ergebnisse. Am Beispiel $13 \cdot 14$ sieht das dann so aus:

$13 + 4 = 17$; eine Null anhängen ergibt 170
 $3 \cdot 4 = 12$; addiert zu 170 ergibt 182.
 $13 \cdot 14 = 182$

Zum besseren Verständnis noch eine solche Aufgabe im Kurzverfahren des Kopfrechnens:

$17 \cdot 18$
 $17 + 8 = 25$; Null anhängen ergibt 250,
 $7 \cdot 8 = 56$; addiert zu 250 ergibt 306,
 $17 \cdot 18 = 306$.

Auf ähnliche Weise lassen sich auch andere zweistellige Zahlen mit gleichem Zehner multiplizieren, also Aufgaben wie $23 \cdot 24$, $33 \cdot 39$, $42 \cdot 49$ usw. lösen. In solchen Fällen, wo sich die Faktoren im gleichen Zehnerbereich befinden, muß man aber vor dem Anhängen der Null die Summe noch mit der an der Zehnerstelle stehenden Zahl multiplizieren. An Beispielen wird das verständlicher.

$23 \cdot 24$
 $23 + 4 = 27$, mal 2 (20er Bereich) ergibt 54;
Null anhängen ergibt 540, plus 3 mal 4 (12) ergibt 552,

$23 \cdot 24 = 552$.
 $33 \cdot 39$
 $33 + 9 = 42$, mal 3 ergibt 126; Null anhängen ergibt 1260,
plus 3 mal 9 ergibt 1287
 $33 \cdot 39 = 1287$.

Natürlich sind wir damit auch gleich in der Lage, die Quadratzahlen blitzschnell und sogar im Kopf auszurechnen. Bitte sehr:

44^2
 $44 + 4 = 48$, mal 4 ergibt 192, Null anhängen ergibt 1920,
plus 4 mal 4 ergibt 1936
 $44^2 = 1936$.

Noch einfacher wird die Sache bei Zahlen, deren letzte Ziffer 5 ist, z. B. $33 \cdot 35$ oder 35^2 . Hier multiplizieren wir die Zehnerstelle (3) nur mit der nächsthöheren Zahl (4) und hängen 25 an.

35^2
 $3 \cdot 4 = 12$; 25 anhängen ergibt 1225,
 $35^2 = 1225$.

Diese Methode läßt sich für die Multiplikation von zwei zweistelligen Zahlen aus verschiedenen Zehnerbereichen (also zum Beispiel $17 \cdot 24$) leider nicht benutzen. Aber hier hat uns der Mathematiker Ferrol einen anderen Weg gewiesen, der ebenso rasch zum Ziel führt.

$22 \cdot 13$ ergeben auf einen Blick 286 (2 Hunderter, 8 Zehner, 6 Einer). Die Einer finden wir durch Multiplikation der Einer ($2 \cdot 3$); die Hunderter durch Multiplikation der Zehner ($2 \cdot 1$); die Zehner erhalten wir aus der Addition der Produkte der beiden äußeren und der beiden inneren Glieder (also $2 \cdot 3$ plus $2 \cdot 1 = 8$).

Wenn sich jedoch bei der Ermittlung der Einer oder Zehner zweiziffrige Zahlen ergeben, so übertragen wir die ersten Ziffern (die Zehner) dieser Zahlen jeweils auf die nächste Stufe, also von den Einern auf die Zehner und entsprechend von den Zehnern auf die Hunderter usw. Dazu ein Beispiel:

$27 \cdot 36$
Zuerst die Einer; $7 \cdot 6 = 42$, also 2, die 4 Zehner werden auf die Zehner übertragen. Jetzt die Zehner: $(2 \cdot 6) + (7 \cdot 3) = 33$, plus 4 (Übertrag) ergibt 37; also 7, die 3 Zehner werden auf die Hunderter übertragen. Nun die Hunderter: $(2 \cdot 3) + 3$ (Übertrag) = 9. Somit erhalten wir als Resultat 972.

Diese Art, vorteilhaft zu rechnen, ist auch als „Multiplikation über Kreuz“ bekannt und läßt überdies eine vereinfachte Darstellung des oben beschriebenen Verfahrens zur Multiplikation zweistelliger Zahlen aus verschiedenen Zehnerbereichen zu. Hier gilt der folgende Weg:

- Die Einer des Produkts ergeben sich durch Multiplikation der Einer der beiden Faktoren.
- Die Zehner des Produkts erhält man aus dem Überschuß plus Einer mal Zehner plus Zehner mal Einer.
- Die Hunderter des Produktes ergeben sich aus dem Zehnerüberschuß plus Zehner mal Zehner.

Machen wir uns das an einem Beispiel klar:

$$36 \cdot 57 =$$

Rechengang:

Einer: $6 \cdot 7 = 42$

Zehner: $4 + (6 \cdot 5) + (3 \cdot 7) = 55$

Hunderter: $5 + (3 \cdot 5) = 20$.

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 57 \\ \hline 2052 \end{array}$$

(Angeschrieben werden nur die unterstrichenen Ziffern.)

Man kann das Verfahren noch vereinfachen, wenn in einer Spalte oder Zeile des „Überkreuz-Schemas“ zwei gleiche Ziffern stehen.

Einer: $5 \cdot 8 = 40$

Zehner: $4 + 3(5 + 8) = 43$

Hunderter: $4 + 3(3 \cdot 3) = 13$;

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 38 \\ \hline 1330 \end{array}$$

Einer: $6 \cdot 7 = 42$

Zehner: $4 + 7(6 + 5) = 81$

Hunderter: $8 + (5 \cdot 7) = 43$.

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 77 \\ \hline 4312 \end{array}$$

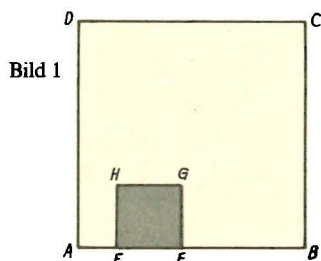
Das alles sieht zunächst recht kompliziert aus. Aber mit ein wenig Übung beherrschen wir die Sache spielend und werden bald merken, daß uns solche Rechenkniffe von großem Vorteil sind.

Eine Aufgabe – verschiedene Varianten mit steigendem Schwierigkeitsgrad

Wir stellen unseren Lesern Aufgaben ähnlichen Inhalts für Schüler der Klassen 4 bis 10 vor. Diese Aufgaben wurden von Klassenstufe zu Klassenstufe variiert und im Schwierigkeitsgrad erhöht. Wir empfehlen allen interessierten Lesern, mit der Lösung der Aufgabe für Klasse 4 zu beginnen und bei Erfolg von Klassenstufe zu Klassenstufe voranzuschreiten, soweit es zu schaffen ist.

Klasse 4

Aus einem Quadrat $ABCD$ mit einem Flächeninhalt von 121 cm^2 schneidet Stefan ein kleineres Quadrat $EFGH$, wie aus der Abbildung ersichtlich, heraus. Das verbliebene Achteck $AEHGFBCD$ hat einen Flächeninhalt von 85 cm^2 . Welche Seitenlänge hat das Quadrat $EFGH$?



Klasse 5

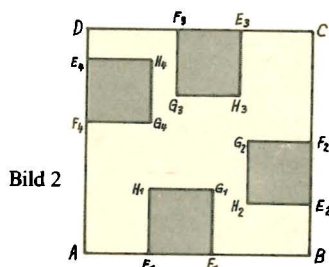
Aus einem Quadrat $ABCD$ mit einem Flächeninhalt von 144 cm^2 schneidet Stefan ein kleineres Quadrat $EFGH$ mit einem Flächeninhalt von 25 cm^2 , wie aus der Abbildung ersichtlich, heraus. Welche Länge hat der Umfang des verbliebenen Achtecks $AEHGFBCD$?
(Zeichnung wie für Kl. 4)

Klasse 6

Aus einem Quadrat $ABCD$ mit dem Flächeninhalt von 625 cm^2 schneidet Stefan ein kleineres Quadrat $EFGH$, wie aus der Abbildung ersichtlich, heraus. Der Umfang des verbliebenen Achtecks $AEHGFBCD$ ist 108 cm lang. Welchen Flächeninhalt hat dieses Achteck?
(Zeichnung wie für Kl. 4)

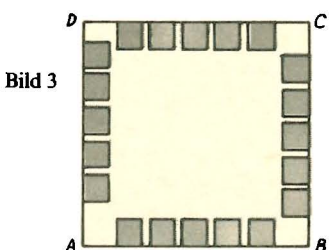
Klasse 7

Aus einem Quadrat $ABCD$ schneidet Stefan vier kleinere kongruente Quadrate $E_1F_1G_1H_1$, $E_2F_2G_2H_2$, $E_3F_3G_3H_3$ und $E_4F_4G_4H_4$, wie aus der Abbildung ersichtlich, heraus, deren Flächeninhalt jeweils 25 cm^2 beträgt. Der Umfang des verbliebenen 20-Ecks beträgt 172 cm . Wie groß war in diesem Fall der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$?



Klasse 8

Aus einem Quadrat $ABCD$ mit einem Flächeninhalt von 961 cm^2 schneidet Stefan, wie aus der Abbildung ersichtlich, an allen vier Seiten jeweils mehrere, aber stets gleichviele kongruente Quadrate heraus. Das verbliebene n -Eck hat einen Umfang von 212 cm Länge. Die Maßzahl der kleineren Quadratseiten (gemessen in cm) ist eine natürliche Zahl. Welche Länge haben die Seiten der kleineren kongruenten Quadrate? Wie viele kleinere Quadrate insgesamt hat Stefan ausgeschnitten?



(Die Anzahl der Quadrate braucht nicht mit der Lösung übereinzustimmen.)

Klasse 9

Aus einem Quadrat $ABCD$ schneidet Stefan, wie aus der Abbildung ersichtlich, an allen vier Seiten jeweils ein kleineres Quadrat

$E_1F_1G_1H_1$, $E_2F_2G_2H_2$, $E_3F_3G_3H_3$, $E_4F_4G_4H_4$ heraus, die untereinander kongruent sind. Das verbliebene 20-Eck hat einen Umfang von 204 cm und einen Flächeninhalt von 969 cm^2 . Welchen Flächeninhalt hat jedes der kleineren herausgeschnittenen Quadrate?

(Zeichnung wie für Kl. 7)

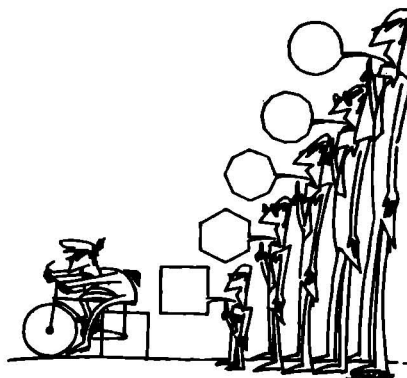
Klasse 10

Aus einem Quadrat $ABCD$ schneidet Stefan, wie aus der Abbildung ersichtlich, an allen vier Seiten jeweils mehrere, aber stets gleichviele kongruente Quadrate heraus. Der Flächeninhalt des verbliebenen n -Ecks beträgt $88\frac{8}{9}\%$ des Flächeninhalts des Quadrates $ABCD$. Der Umfang des verbliebenen n -Ecks beträgt $166\frac{2}{3}\%$ des Umfangs des Quadrates

$ABCD$. Die Seite des Quadrates $ABCD$ ist um 66 cm länger als die Seite eines der kleineren herausgeschnittenen Quadrate. Wie viele kongruente kleinere Quadrate wurden insgesamt aus dem großen Quadrat $ABCD$ herausgeschnitten? Welche Seitenlänge hat jedes dieser kleineren Quadrate?

(Zeichnung wie für Kl. 8)

H.-J. Kerber/Th. Scholl



Die letzten 30 Jahre haben Gewicht

Zwischen dem VII. und VIII. Pädagogischen Kongreß – Zahlen

Mit der fortschreitenden gesellschaftlichen Entwicklung haben sich in unserer Republik die Bedingungen für die sozialistische Bildung und Erziehung der jungen Generation immer günstiger gestaltet. Davon zeugen die Leistungen in der Volksbildung zwischen dem VII. und VIII. Pädagogischen Kongreß. Sie waren möglich, weil die Partei der Arbeiterklasse und unsere Regierung dem Bildungswesen und seiner weiteren Entwicklung stets größte Aufmerksamkeit und Unterstützung angedeihen ließen, weil die Werktätigen durch ihre unermüdliche Arbeit dafür die entscheidenden Voraussetzungen schufen.

Steigende Anzahl von Pädagogen

Im Schulwesen der DDR sind 400 000 Pädagogen tätig. Gegenwärtig arbeiten an den nahezu 6 000 allgemeinbildenden Schulen (Oberschulen, erweiterte Oberschulen, Sonderschulen) über 200 000 Lehrer und Horterzieher. Die Hälfte davon hat erst in den vergangenen zehn Jahren die Tätigkeit in der Schule aufgenommen. Etwa ein Drittel aller Lehrer ist jünger als 30 Jahre. Zwischen dem VII. und VIII. Pädagogischen Kongreß ist die Anzahl der Pädagogen kontinuierlich gestiegen. Im Schuljahr 1970/71 waren es zum Beispiel 144 000 Lehrer und Horterzieher. 1978/79 nahmen 8 200 Absolventen der Hoch- und Fachschulen ihre pädagogische Tätigkeit auf.

Sinkende Klassenfrequenzen

An den allgemeinbildenden Schulen der DDR lernen im Schuljahr 1978/79 insgesamt rund 2,6 Millionen Schüler, die in 107 400 Klassen erfaßt sind.

Der Anteil der Mädchen an der Gesamtschülerzahl beträgt 49 Prozent. Im Interesse einer effektiven Bildungs- und Erziehungsarbeit konnte die durchschnittliche Klassenstärke der Schüler im Republikmaßstab von 26,8 Schüler je Klasse im Schuljahr 1970/71 auf 24,2 Schüler je Klasse im Schuljahr 1977/78 gesenkt werden.

Der VIII. Parteitag der SED hatte der Volksbildung die Aufgabe gestellt, den Aufbau der zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule im wesentlichen abzu-

schließen und 90 Prozent aller Schüler der 8. Klassen zur 9. und 10. Klasse weiterzuführen. Der IX. Parteitag der SED konnte 1976 feststellen, daß dieses Ziel erreicht wurde.

Erhöhte finanzielle Aufwendungen

Die Ausgaben des Staatshaushaltes für die Volksbildung betrugen 1977 etwa 6,6 Mrd. Mark. Im Jahre 1971 waren es 4,3 Mrd. Mark. Die Ausgaben der örtlichen Haushalte – der Räte der Bezirke, Kreise, Städte und Gemeinden – für die Einrichtung der Volksbildung stiegen von 3,7 Mrd. Mark auf 6,9 Mrd. Mark 1978. Insgesamt wurden von 1970 bis 1978 dafür 48,1 Mrd. Mark ausgegeben. 1972 betrugen die Mittel, die zur weiteren Entwicklung der außerunterrichtlichen Tätigkeit zusätzlich bereitgestellt wurden, 10 Millionen Mark, 1978 stiegen die Ausgaben auf nahezu 54 Millionen Mark.

Kontinuierlicher Zuwachs an Unterrichtsräumen

Gegenwärtig gibt es in den allgemeinbildenden Schulen unserer Republik etwa 113 000 Unterrichtsräume. In der Zeit zwischen dem VII. und VIII. Pädagogischen Kongreß entstanden 23 400 Unterrichtsräume und etwa 1 000 Turnhallen. Im Vergleich zu 1945 sind bis heute über die Hälfte des Gesamtbestandes an Unterrichtsräumen in der DDR neu errichtet worden. Besonders in den ehemals rückständigen Gebieten hat sich die Unterrichtsraumkapazität bemerkenswert verändert. Zum Beispiel sind im Bezirk Rostock 71,4 Prozent, im Bezirk Neubrandenburg 66,9 Prozent und im Bezirk Cottbus 66,6 Prozent aller Unterrichtsräume nach 1945 errichtet worden.

Bessere Bedingungen in den Schulhorten

Mehr als drei Viertel aller Schüler der 1. bis 4. Klasse besuchen nach dem Unterricht den Schulhort.

Standen 1970/71 etwa 608 000 Hortplätze zur Verfügung, so sind es in diesem Schuljahr 755 000. Von 1 000 Schülern der Klassenstufen 1 bis 4 besuchen somit 809 Schüler den Hort. 1971 entfielen auf 1 000 Schüler der Unterstufe 513 Hortplätze.

Allein 1978 wurden zusätzlich zu den in den Haushaltsplänen der örtlichen Räte enthaltenen finanziellen Mittel aus dem zentralen Staatshaushalt für die Ausgestaltung von Schulhorten 6,8 Millionen Mark bereitgestellt; seit 1973 insgesamt 42,2 Millionen Mark.

Höheres Niveau im polytechnischen Unterricht

Bei der weiteren inhaltlichen Ausgestaltung unserer Oberschule und der Vorbereitung der jungen Generation auf die Arbeit leistet

der polytechnische Unterricht seit nunmehr 20 Jahren einen wesentlichen Beitrag.

Im Schuljahr 1970/71 waren 784 000 Schüler der Klassen 7 bis 10 am polytechnischen Unterricht beteiligt. Damals waren rund 25 500 Werk tätige als hauptamtliche und nebenamtliche Betreuer eingesetzt. In den darauffolgenden Jahren stieg die Zahl der am polytechnischen Unterricht teilnehmenden Schüler kontinuierlich an. Damit wuchs der Bedarf an Betrieben, an Betreuern, an modernen Arbeitsplätzen für die Schüler, an höheren materiellen und finanziellen Mitteln.

Im Schuljahr 1977/78 nahmen mehr als 1 Million Schüler der Klassen 7 bis 10 am polytechnischen Unterricht teil. Das erfolgte in rund 5 200 Betrieben unterschiedlicher Größe. Etwa 33 000 Betreuer, davon 8 000 hauptamtliche, größtenteils mit der pädagogischen Qualifikation eines Lehrmeisters oder Ingenieur-Pädagogen, unterrichten die Schüler.

Die Schüler schaffen im Rahmen ihres polytechnischen Unterrichts durch die produktive Arbeit erhebliche materielle Werte. So betrug die Jahresproduktion der Schüler 1976/77 beispielsweise im VEB Schwermaschinenbau „Ernst Thälmann“ Magdeburg 3 500 Stück Gasherde oder im VEB Berliner Bremsenwerk 65 000 Stück Bremszylinder für Mähdrescher und Anhänger und 40 000 Stück Bedienungsventile für das Allradgetriebe des LKW W 50. Diese produktive Arbeit war eng mit dem Lernen verbunden und bedeutsam für die Erziehung der Schüler.

Größeres Angebot an naturwissenschaftlich-technischen Arbeitsgemeinschaften

Insgesamt gab es im Schuljahr 1972/73 etwa 20 000 naturwissenschaftlich-technische Arbeitsgemeinschaften mit 260 000 Schülern an unseren Schulen. Von den 20 000 Leitern der Arbeitsgemeinschaften waren 14 600 Pädagogen.

Im Schuljahr 1977/78 bestanden an unseren Oberschulen in den Klassen 1 bis 10 insgesamt etwa 23 000 Arbeitsgemeinschaften des Bereichs Naturwissenschaft und Technik mit 283 000 Teilnehmern. Davon arbeiteten rund 6 600 Arbeitsgemeinschaften mit über 80 000 Schülern der Klassen 9 und 10 auf der Grundlage von Rahmenprogrammen. Die Leiter dieser Arbeitsgemeinschaften sind zu 85 Prozent Pädagogen. Von den insgesamt 32 Rahmenprogrammen werden allein für den Bereich Mathematik, Naturwissenschaft und Technik 15 Programme angeboten.

Durch die Einführung der Arbeitsgemeinschaften nach Rahmenprogrammen im Schuljahr 1970/71 wurde erreicht, daß sich entsprechend den gesellschaftlichen Bedürfnissen ein wesentlich größerer Teil der Schüler der 9. und 10. Klassen zusätzlich naturwissenschaftlich-technische Kenntnisse aneignet.

Immer mehr Jungen und Mädchen nehmen auch an den naturwissenschaftlich-technischen Arbeitsgemeinschaften in den außerschulischen Einrichtungen – Häuser der Jungen Pioniere und Stationen Junger Techniker – teil. Gegenüber 1975/76 ist die Anzahl dieser Arbeitsgemeinschaften im Schuljahr 1977/78 um 471 und die der teilnehmenden Schüler um 4780 gestiegen.

Von den insgesamt in den außerschulischen Einrichtungen im Schuljahr 1977/78 bestehenden 6800 Arbeitsgemeinschaften aller Art sind allein 3370 im Bereich Naturwissenschaft und Technik angelagert. Etwa 38700 Schüler nehmen daran teil. Seit dem Schuljahr 1974/75 bestehen darüber hinaus auch praktisch-produktive Arbeitsgemeinschaften nach Rahmenprogrammen, in denen die Schüler – im Vergleich zu allen anderen Arbeitsgemeinschaften nach Rahmenprogrammen – stärker produktiv tätig sein können. Damit wurden den Schülern der 9. und 10. Klassen zusätzliche Möglichkeiten erschlossen, in betrieblichen und gesellschaftlichen Einrichtungen entsprechend ihren Interessen praktisch tätig zu sein.

Im Schuljahr 1974/75 arbeiteten auf der Grundlage von drei zur Verfügung stehenden Rahmenprogrammen 6100 Schüler in 617 Arbeitsgemeinschaften. 1977/78 wurde das Angebot auf sechs Rahmenprogramme erweitert. In 1570 Arbeitsgemeinschaften waren 19000 Schüler tätig. Die Mehrzahl dieser Arbeitsgemeinschaftsleiter – rund 54 Prozent – kommt aus betrieblichen und gesellschaftlichen Einrichtungen. Die Schüler können jetzt zwischen folgenden sechs Rahmenprogrammen wählen: Bauwesen, Kfz-Technik, Kochen-Servieren – Pflegen, Funktechnischer Gerätebau, Technische Instandsetzung, Tierproduktion/Futterproduktion.

Vielfältigere kulturell-künstlerische Betätigung der Schüler

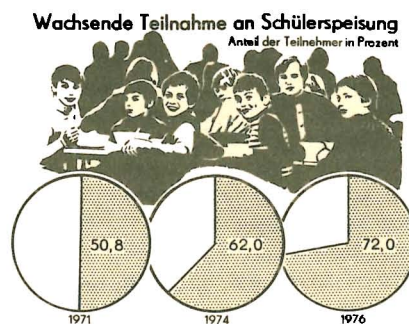
Die Schüler haben in den allgemeinbildenden Schulen vielfältige Möglichkeiten, sich kulturell-künstlerisch zu betätigen. Im Schuljahr 1972/73 waren 369000 Schüler der Klassen 1 bis 10 in rund 17900 kulturell-künstlerischen Arbeitsgemeinschaften erfaßt.

Im Schuljahr 1977/78 arbeiteten 538000 Schüler der Klassen 1 bis 10 in 31600 kulturell-künstlerischen Arbeitsgemeinschaften. Hinzu kommen noch 45000 Schüler, die in 3500 Arbeitsgemeinschaften nach Rahmenprogrammen erfaßt sind (Klassen 9 und 10). Gegenwärtig gibt es 5916 Chöre, 1990 Singgruppen, 2805 Instrumentalgruppen und Schülerorchester, 1611 Tanzgruppen, 9241 Arbeitsgemeinschaften für Malen, Zeichnen, Textilgestaltung, Keramik, Plastik und Dekoratives Gestalten sowie rund 3200 Arbeitsgemeinschaften für Darstellendes Spiel, Kabarett und Puppenspiel. Darüber hinaus sind etwa 100000 Schüler aktiv in künstlerischen

Kollektiven außerhalb der Schule tätig, in den Pionierhäusern, Musikschulen, Theatern, Museen und Kulturhäusern. Hunderttausende von Schülern stellen auch jährlich in den Ausstellungen „Galerie der Freundschaft“ in Schulen, Kreisen und Bezirken aus.

Wirksame Maßnahmen für die Schüler- und Kinderspeisung

Der IX. Parteitag der SED konnte feststellen, daß sich die Qualität der Schüler- und Kinderspeisung ständig erhöht hat. Unser Staat stellte für die Schüler- und Kinderspeisung in den Jahren von 1971 bis 1975 nicht weniger als 1,7 Mrd. Mark zur Verfügung. Betrag der Zuschuß aus dem Staatshaushalt im Jahre 1971 dafür 275 Millionen Mark, so stieg er im Jahre 1975 auf 405 Millionen Mark und im Jahre 1977 auf insgesamt 595 Millionen Mark an.



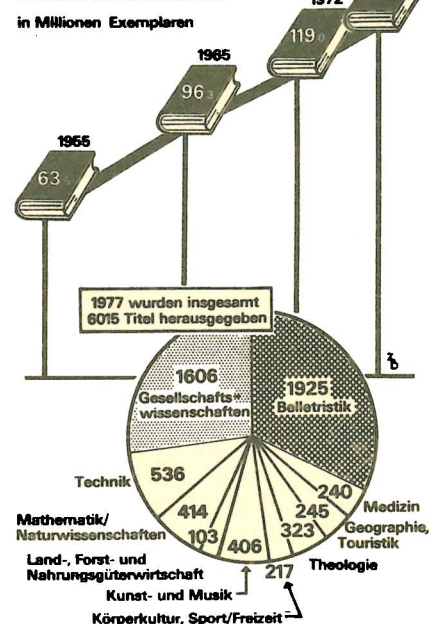
Zu Beginn des Fünfjahrplanzeitraumes 1976 bis 1980 trat die neue Verordnung über die Schüler- und Kinderspeisung in Kraft. Mit ihr wurden wesentliche Voraussetzungen geschaffen, um die Qualität des Essens weiter zu erhöhen und die Bedingungen der Esseneinnahme zu verbessern. Im Ergebnis der vielfältigen Initiative zur Durchsetzung der Verordnung entsprechen nun die Speisepläne und die Zusammensetzung der täglichen Gerichte besser den ernährungsphysiologischen Anforderungen. Für den höheren Naturalwert werden je Portion 20 bzw. 40 Pfennige mehr aufgewendet. Die Kostenbeteiligung der Eltern dagegen ist seit vielen Jahren konstant

geblieben. Sie beträgt je Portion Schülerspeisung 0,55 M und je Portion Kinderspeisung 0,35 M. Kostenlos werden über 10 Prozent aller Schüler und Kinder mit Mittagessen und Trinkmilch versorgt. Dabei werden vorwiegend Kinder aus kinderreichen und solchen Familien berücksichtigt, deren Einkommen eine staatliche Unterstützung rechtfertigt.

Für diese Maßnahmen wurden im Jahre 1976 aus dem Staatshaushalt zusätzlich 183 Millionen zur Verfügung gestellt. In die Speiseproduktion für die Schülerspeisung sind gegenwärtig rund 6500 Betriebe und Einrichtungen einbezogen. Die Hälfte aller Portionen – eine Million täglich – werden in rund 3000 Schulküchen hergestellt, weitere 235000 Portionen in Gaststätten und 350000 Portionen in Großküchen. In den Jahren von 1976 bis 1978 stieg die Zahl der Teilnehmer an der Schülerspeisung um 7 Prozent.

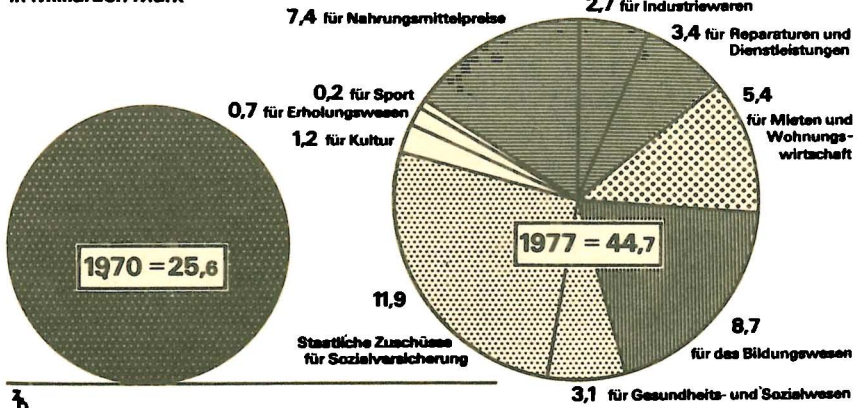
Gegenwärtig nehmen rund 2 Millionen Schüler daran teil.
F. Jurgeleit

Steigende Leserbedürfnisse

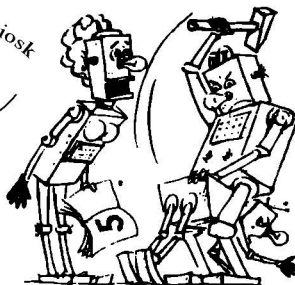


Aufwendungen aus gesellschaftlichen Fonds

in Milliarden Mark



Wer löst mit? alpha -Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 11. Januar 1980

Mathematik

Ma 5 ■ 1881 Ines, Jens und Angela sind junge Philatelisten. Ines hat bereits doppelt soviel Briefmarken wie Jens gesammelt. Jens besitzt 37 Briefmarken mehr als Angela, die bereits zwei Briefmarkenalben mit je 350 Briefmarken angelegt hat. Wieviel Briefmarken haben diese drei Schüler zusammen bereits gesammelt?

Schülerin Marion Freiwald, Schlieben

Ma 5 ■ 1882 Jemand kauft 30 Flaschen Astoria, die Flasche zu 0,95 M einschließlich 30 Pf Pfand. Nachdem sämtliche Flaschen dieses Fruchtsaftgetränkes ausgetrunken waren, bringt der Kunde die leeren Flaschen zurück in die Kaufhalle und erwirbt allein vom Pfandgeld erneut weitere Flaschen Astoria. Das wird solange wiederholt, bis das Pfandgeld für den Kauf von genau einer Flasche Astoria nicht mehr ausreicht. Wie viele Flaschen Astoria hat dieser Kunde auf diese Weise insgesamt erworben? Welcher Restbetrag verbleibt ihm?

Sch.

Ma 5 ■ 1883 Thomas und Simone kauften sich Speiseeis. Thomas kaufte zwei Kugeln Fruchteis und eine Kugel Schokoladeneis, Simone dagegen eine Kugel Fruchteis und zwei Kugeln Schokoladeneis. Beide hatten zusammen 1,35 M zu bezahlen. Wieviel Mark mußte jeder einzelne von ihnen bezahlen, wenn eine Kugel Schokoladeneis um 5 Pf teurer ist als eine Kugel Fruchteis?

Schülerin Angelika Drauschke,
Neustrelitz, Kl. 5

Ma 5 ■ 1884 Ein Urgroßvater wurde am 21. 9. 1975 von seinen beiden Urenkeln, die Zwillinge sind, zum Geburtstag besucht. Er staunte, als er feststellte: „Wenn ich die Zahlen, die das Lebensalter von jedem von uns dreien angeben, miteinander multipliziere, so erhalte

ich als Produkt eine Zahl, die gleich der Jahreszahl des Jahres ist, in dem wir gerade leben.“

Wie alt ist jeder von ihnen?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 1885 In dem abgebildeten Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzusetzen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und daß alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gerechnet sind.

$$\begin{array}{r} ab - c = d \\ : \quad \cdot \quad + \\ e \cdot f = ah \\ b + ba = bf \end{array}$$

Schüler Bernd Leifheit,
Fritz-Weineck-OS, Kl. 5b, Struth

Ma 5 ■ 1886 Uwe sagt zu Peter: „Denke dir eine zweistellige natürliche Zahl. Multipliziere die Zahl, die der ersten Ziffer der gedachten Zahl entspricht, mit 5; addiere zu diesem Produkt 6; multipliziere die so erhaltene Summe mit 2; subtrahiere von diesem Produkt 1; addiere schließlich die Zahl, die der zweiten Ziffer der gedachten Zahl entspricht, und nenne mir das Ergebnis!“ Aus diesem Ergebnis konnte Uwe die Zahl ermitteln, die Peter sich gedacht hatte. Wie ist das möglich?

Gib dafür eine Begründung!

Schüler Mario Köppen, Berlin

Ma 6 ■ 1887 Die Summe zweier Primzahlen ist viermal so groß wie ihre Differenz. Wie lauten diese Primzahlen?

Schüler Andreas Fittke, Berlin

Ma 6 ■ 1888 Es sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die viermal so groß wie ihre zugehörige Quersumme sind.

Schüler Andreas Fittke, Berlin

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion *alpha*

7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlusatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1979/80 läuft von Heft 5/79 bis Heft 2/80. Zwischen dem 1. und 10. September 1980 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/79 bis 2/80 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/80 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/79 bis 2/80) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1979/80 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Ma 6 ■ 1889 Während der XVII. Mathematik-Bezirksolympiade in Suhl saßen in einem Klausurraum weniger als 25, aber mehr als 15 Teilnehmer aus den Klassen 7 bis 12. Über die Teilnehmer ist folgendes bekannt:

(1) Die Anzahl aller sich im Raum befindenden Teilnehmer ist eine Primzahl, und von jeder Klassenstufe war mehr als ein Teilnehmer im Raum.

(2) Die Anzahl der Teilnehmer aus der 12. und 7. Klasse, aber auch die Anzahl der Teilnehmer aus der 10. und 8. Klasse war gleich.

(3) Aus der 11. Klasse war ein Schüler mehr anwesend als Schüler aus der 10. Klasse.

(4) Die Anzahl der Teilnehmer aus der Klasse 9 war um 3 größer als die Anzahl der Teilnehmer aus der Klasse 12.

Wieviele Teilnehmer aus jeder Klasse saßen im Raum?

Mathematikfachlehrer Rolf Langbein, Lichte

Ma 6 ■ 1890 Ermittle alle zweistelligen Primzahlen, die sich in der dekadischen Schreibweise in der Form $\overline{ab}$ und $\overline{ba}$ darstellen lassen und deren Differenz gleich einer Quadratzahl ist.

Schülerin Heike Reichstein,
Kl. 7, Königs Wusterhausen

Ma 6 ■ 1891 Gesucht sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen z , die folgende Bedingungen erfüllen:

a) Jede dieser Zahlen z ist um 54 größer als die zugehörige Quersumme.

b) Multipliziert man eine solche Zahl z mit 7, so ist das erhaltene Produkt um 396 größer als die Zahl z .

Schülerin Angelika Drauschke,
Neustrelitz, Kl. 5

Ma 7 ■ 1892 In einem Wohnhaus wohnen 12 Familien mit insgesamt 41 Personen. Es sind Familien mit drei, vier und fünf Personen, und zwar am meisten Familien mit drei, am wenigsten Familien mit fünf Personen. Wie viele Familien mit drei, vier bzw. fünf Personen wohnen in diesem Haus?

Schüler Burkhard Riedel, Karl-Marx-Stadt

Ma 7 ■ 1893 In einer Schule werden die Unterrichtsfächer Biologie, Geographie, Englisch, Französisch, Geschichte und Mathematik von den Lehrern Morosow, Wassiljew und Tokarew unterrichtet. Jeder von ihnen unterrichtet genau zwei Fächer.

Uns ist folgendes bekannt:

(1) Der Englischlehrer und der Französischlehrer sind miteinander verwandt.

(2) Herr Morosow ist der jüngste dieser drei Lehrer.

(3) Herr Tokarew, der Biologielehrer und der Französischlehrer haben einen gemeinsamen Schulweg.

(4) Der Biologielehrer ist älter als der Mathematiklehrer.

(5) In der Freizeit spielen der Geographielehrer, der Mathematiklehrer und Herr Morosow häufig Skat.

Welche zwei Fächer unterrichtet jeder dieser drei Lehrer?

Schülerin Cornelia Bogdal, Weimar, Kl. 6

Ma 7 ■ 1894 Es ist ein Rechteck $ABCD$ zu konstruieren, dessen Diagonale $AC = 5$ cm und dessen Seite $\overline{AB} = 4$ cm lang ist. Dieses Rechteck ist in ein flächengleiches Viereck mit vier gleichlangen Seiten zu verwandeln. Die Konstruktion ist zu begründen.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ■ 1895 Drei 7. Klassen einer Schule gehören zusammen 89 Schüler an. In Klasse 7a sind zwei Jungen mehr als Mädchen. In Klasse 7b sind sieben Jungen weniger als Mädchen. In Klasse 7c sind zwei Mädchen mehr als Jungen. Jede Klasse hat höchstens 30 Schüler. Wieviele Jungen sind insgesamt in diesen drei Klassen?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 8 ■ 1896 Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$ mit dem Umfang $u = 28$ cm. Die Längen der Seiten a und b verhalten sich wie 4:3. Zu ermitteln sind der Flächeninhalt und die Länge der Diagonalen dieses Rechtecks.

Schüler Uwe Wollert, Edderitz, Kl. 8

Ma 8 ■ 1897 In einem Dreieck ABC schneidet die Mittelsenkrechte m_c die Seite $\overline{AB}$ in E und die Seite $\overline{AC}$ in D . Die Seite $\overline{AB}$ ist 6 cm, die Strecke $\overline{AD}$ ist 5 cm lang. Es ist der Flächeninhalt des Dreiecks AED zu berechnen.

Schüler Uwe Schwarz, Rochlitz, Kl. 8

Ma 8 ■ 1898 Die folgenden drei wahren Aussagen sind durch eine Aussageform zu ersetzen, welche die Struktur der Aussagen zum Ausdruck bringt.

Es ist zu zeigen, daß wir für jede Belegung der Variablen in dieser Aussageform mit natürlichen Zahlen wahre Aussagen erhalten.

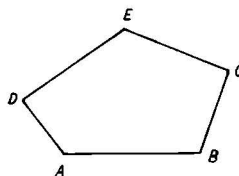
(1) $2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 1 = 4 \cdot 4$

(2) $2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 1 = 5 \cdot 5$

(3) $2 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 1 = 6 \cdot 6$

Schüler Markus Schulz,
Ndr.-Seifersdorf, Kl. 8

Ma 8 ■ 1899 Das abgebildete Fünfeck $ABCDE$ ist unter alleiniger Verwendung von Lineal und Zeichendreieck in ein flächengleiches Dreieck umzuwandeln. Die Konstruktion ist zu begründen.



Bemerkung: Die Konstruktion ist natürlich allein mit Zirkel und Lineal ausführbar; der Einsatz des Zeichendreiecks vereinfacht das Verfahren.

Fr.

Ma 9 ■ 1900 Reinhard macht sich im Obstladen einen Spaß. Er sucht sich zwei Pampelmusen aus, legt sie nacheinander einzeln auf

die Waagschale und ermittelt die Differenz ihrer Massen.

Als Ergebnis erhält er 25 g. Er sagt zur Verkäuferin: „25 g; das macht nach Preisliste genau 10 Pf.“ „Das möchtest du wohl“, antwortet die Verkäuferin und legt beide Pampelmusen zugleich auf die Waagschale. „Ich bekomme 3,30 M“, sagt sie. Wie groß ist die Masse einer jeden Pampelmuse?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ■ 1901 Es ist ein Trapez $ABCD$ zu konstruieren, von dem folgendes bekannt ist: Die Diagonale $\overline{DB}$ ist 4 cm lang; die Größe des Winkels $\sphericalangle DAB$ beträgt 90° ; $\overline{AD} : \overline{DB} : \overline{BC} = 1 : 2 : 3$.

Die Konstruktion ist zu beschreiben und zu begründen. Ist die Konstruktion eindeutig?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ■ 1902 Man ermittle die Lösungsmenge der Gleichung

$$4x^x - 6x^{x+1} + 2x^{x+2} = 0$$

für $x \neq 0$ im Bereich der rationalen Zahlen!

Schüler Torsten Siebert, Görlitz, Kl. 10

Ma 9 ■ 1903 Von einem Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c und den Innenwinkelgrößen α, β, γ sei folgendes bekannt:

(1) $\gamma - \beta = \alpha$,

(2) $a = 5$ cm,

(3) $h_c = \frac{c}{2}$.

Man berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks und konstruiere es!

Schüler Alexander Schmidt, Berlin, Kl. 7

Ma 10/12 ■ 1904 Es ist zu untersuchen, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Die Entscheidungen sind zu begründen!

(1) Für alle natürlichen Zahlen a ist die natürliche Zahl $z = a^2 + a + 17$ eine ungerade Zahl.

(2) Für jedes $a \in \mathbb{N}$ ist $z = a^2 + a + 17$ eine Primzahl.

(3) Es gibt keine natürliche Zahl a derart, daß die natürliche Zahl $z = a^2 + a + 17$ durch 3 teilbar ist.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

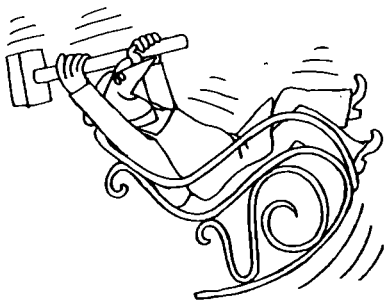
Ma 10/12 ■ 1905 Welche natürlichen Zahlen a, b erfüllen die beiden Gleichungen

(1) $(a-2)(b+4) = 1978$,

(2) $(a+1)(b+1) + 1 = 1979$?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz





Ma 10/12 ■ 1906 Es ist zu beweisen, daß der Term $\sin x + \cos x$ niemals den Wert 1,5 annehmen kann.

Schüler Torsten Siebert, Görlitz, Kl. 10

Ma 10/12 ■ 1907 Die Gletscher der Eiszeit brachten große Gesteinsmassen mit. Als das Völkerschlachtdenkmal gebaut wurde (1903), trug die Bevölkerung hundert der fast rundgeschliffenen Steine von den umliegenden Feldern zusammen. Man errichtete daraus eine gerade quadratische Pyramide, deren Grundkante 5 m und deren Seitenkante 6,1 m lang ist. Die Zwischenräume (etwa 45%) wurden mit Beton gefüllt, um der Pyramide einen besseren Halt zu geben. Es ist die Masse des Gesteins zu berechnen, wenn dessen Dichte $2,6 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ beträgt.

L.

Physik

Ph 6 ■ 61 Zur Markierung von Wanderwegen werden 100 Blechtafeln von 15 cm Länge und 6 cm Breite benötigt und mit einer Lackschicht überzogen. Wie dick (in mm) ist diese Schicht, wenn man zum Lackieren $67,5 \text{ cm}^3$ Lack braucht?

Ph 7 ■ 62 Auf einer Landstraße werden an einem bestimmten Punkt A die folgenden Verkehrsteilnehmer beobachtet. Sie bewegen sich alle in der gleichen Richtung und mit einer gleichbleibenden Geschwindigkeit:

- ein Fußgänger mit einer Geschwindigkeit von $v_1 = 4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

- 20 Sekunden später ein Radfahrer mit einer Geschwindigkeit von $v_2 = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

- 10 Sekunden nach dem Fußgänger ein PKW mit einer Geschwindigkeit von $v_3 = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Nach welchen Zeiten, vom Zeitpunkt des Vorbeifahrens am Punkt A gerechnet, überholt der Radfahrer den Fußgänger bzw. der Autofahrer den Radfahrer und den Fußgänger?

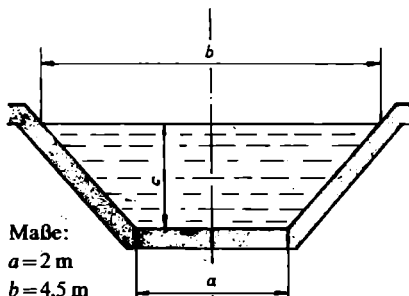
b) Wie groß sind im Augenblick des Überholens die entsprechenden Abstände vom Punkt A?



Anmerkung: Löse beide Aufgaben mit Hilfe eines entsprechenden Diagramms! Wähle einen geeigneten Maßstab!

Ing. A. Körner, Leipzig

Ph 8 ■ 63 Eine LPG hat auf einer Fläche von 4 Hektar Gemüse angebaut. Infolge großer Trockenheit soll diese Fläche künstlich beregnet werden, wozu das Wasser eines in unmittelbarer Nähe liegenden Kanals genutzt werden soll. Der Kanal hat den skizzierten Querschnitt. Das Wasser im Kanal hat eine Strömungsgeschwindigkeit von $0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Welche Wassermenge in l pro Quadratmeter Beregnungsfläche und pro Stunde steht auf Grund des dem Kanal ständig zulaufenden Wassers zur Verfügung? (Der Wasserzufluß ist der Strömungsgeschwindigkeit im Kanal direkt proportional.)



Maße:
 $a = 2 \text{ m}$
 $b = 4,5 \text{ m}$
 $c = 1,4 \text{ m}$

Ing. Armin Körner, Leipzig

Ph 9 ■ 64 An einem galvanischen Element wird mit einem Voltmeter ($R_1 = 270 \Omega$) eine Spannung von 4,05 V gemessen. Schaltet man

dem Voltmeter einen Widerstand von 135Ω parallel, fällt die Spannung auf 3,375 V. Berechnen Sie die Leerlaufspannung U_L des Elements und den Innenwiderstand R_B der Spannungsquelle!

Schüler Jürgen Gräfenstein, Dresden, Kl. 8

Ph 10/12 ■ 65 Die kinetische Energie eines α -Teilchens, das durch radioaktiven Zerfall aus einem Atomkern des Radiums abgestrahlt wird, beträgt $7,648 \cdot 10^{-13} \text{ J}$. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des α -Teilchens! (Relative Atommasse des α -Teilchens beträgt $A_r \approx 4,0015$.)

Chemie

Ch 7 ■ 49 75 ml eines Gasgemisches, welches Kohlendioxid enthält, wird von Kalilauge absorbiert. Das Volumen nach der Absorption beträgt nur noch 68,2 ml. Wieviel Prozent Kohlendioxid enthält das Gasgemisch?

Ch 8 ■ 50 1 kg Holz besteht aus 48% Kohlenstoff, 8% Wasserstoff und 44% Sauerstoff. Berechne die Masse an Sauerstoff, die für die Verbrennung der angegebenen Menge Holz noch zu liefern ist!

Ch 9 ■ 51 Kommt trockener Chlorwasserstoff von 35°C und 791 Torr mit Natronlauge in Verbindung, wird er absorbiert. Wieviel Liter Chlorwasserstoff werden unter den gegebenen Bedingungen von 310 ml 15%iger Natronlauge absorbiert?

$(\rho_{\text{NaOH}} = 1,153 \frac{\text{g}}{\text{ml}})$

Ch 10/12 ■ 52 Ein kugelförmiger Luftballon von 8 m Durchmesser soll bei 18°C und 750 Torr mit Wasserstoffgas gefüllt werden, welches aus Zink und 80%iger Schwefelsäure hergestellt wird!

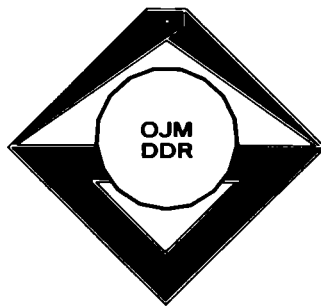
a) Welches Volumen (in m^3) Wasserstoffgas kann der Luftballon aufnehmen?

b) Wie teuer kommt die Füllung, wenn 1 kg Zink 7,44 M und 1 kg Schwefelsäure 6,50 M kostet?



„Ich benutze aber ein Anti-Nikotin-Mundstück.“

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR



Die Jensensche Ungleichung

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Aufgaben der Klassenstufen 11/12

1. Man ermittle alle ganzen Zahlen a mit der Eigenschaft, daß zu den Polynomen

$$f(x) = x^{12} - x^{11} + 3x^{10} + 11x^3 - x^2 + 23x + 30,$$

$$g(x) = x^3 + 2x + a$$

ein Polynom $h(x)$ so existiert, daß für alle reellen x die Gleichung $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ gilt.

2. Im Staat Wegedonien gibt es ein Straßennetz. An jeder Kreuzung und an jeder Einmündung von Straßen dieses Netzes steht ein Verkehrsposten. Die Länge eines jeden Straßenabschnittes zwischen je zwei benachbarten dieser Posten ist kleiner als 100 km. Jeder Verkehrsposten läßt sich von jedem anderen auf einem Gesamtweg innerhalb des Netzes erreichen, der kürzer als 100 km ist. Ferner gilt für jeden Straßenabschnitt zwischen zwei benachbarten Verkehrsposten: Wird genau dieser Straßenabschnitt gesperrt, so ist immer noch jeder Verkehrsposten von jedem anderen aus auf einem Gesamtweg erreichbar, der sich nur aus ungesperrten Straßenabschnitten des Netzes zusammensetzt.

Man beweise, daß dies auf einem Weg erfolgen kann, der kürzer als 300 km ist.

3. a) In einer Ebene sei $P_1 P_2 \dots P_n$ ein beliebiges ebenes konvexes n -Eck E .

Man beweise folgende Aussage (1):

Sind im Innern oder auf dem Rande von E Punkte $Q_1, \dots, Q_n$ so gelegen, daß $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ ein zu E kongruentes n -Eck ist, so ist jeder Punkt Q_i ($i = 1, \dots, n$) eine Ecke von E . (1)

b) Gibt es nicht-konvexe n -Ecke E , für welche die Aussage (1) falsch ist?

c) Ist für jedes nicht-konvexe n -Eck E die Aussage (1) falsch?

4. Man beweise, daß für alle positiven ganzen Zahlen m, n mit $m > n$ die durch

$$s(m, n) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |i-j|$$

definierte Summe $s(m, n)$ den Wert

$$s(m, n) = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) + \frac{1}{2}mn(m-n)$$

hat.

5. Es sei n eine natürliche Zahl größer als 1. Man zeige, daß es zu jeder der n Zahlen $a_1,$

$a_2, \dots, a_n$ mit $a_j = n! + j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) eine Primzahl p_j gibt, die die Zahl a_j , aber keine weitere Zahl a_k ($k \neq j$) dieser n Zahlen teilt.

6A. Es sei $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ ein regelmäßiges Fünfeck mit gegebener Seitenlänge s . Um jeden Punkt A_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) sei die Kugel K_i mit dem Radius $\frac{s}{2}$ und dem Mittelpunkt A_i

gelegt. Dann gibt es in der Menge derjenigen Kugeln K' , die die Eigenschaft haben, jede der fünf Kugeln K_i zu berühren, genau zwei Kugeln K'_1 und K'_2 mit dem Radius $\frac{s}{2}$.

Man untersuche, ob K'_1 und K'_2 einander schneiden, berühren oder ob sie keinen Punkt gemeinsam haben.

6B. a) Es sei M die Menge aller Tripel (x, y, z) von reellen Zahlen, für die die folgenden Ungleichungen (1) bis (5) erfüllt sind:

$$55x + z \leq 54, \quad (1) \quad 55x - 4z \geq 4, \quad (3)$$

$$55y + z \leq 54, \quad (2) \quad 55y - 4z \geq 4, \quad (4)$$

$$z \geq -1. \quad (5)$$

Man untersuche, ob für den Ausdruck

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (6)$$

ein Tripel $(x_0, y_0, z_0) \in M$ mit der Eigenschaft existiert, daß für alle Tripel $(x, y, z) \in M$ die Ungleichung $f(x_0, y_0, z_0) \geq f(x, y, z)$ gilt. Ist dies der Fall, so ermittle man hierzu $f(x_0, y_0, z_0)$.

b) Es sei M' die Menge aller Tripel (x, y, z) von ganzen Zahlen, für die die Ungleichungen (1) bis (5) erfüllt sind. Man untersuche, ob für den Ausdruck (6) ein Tripel $f(x_1, y_1, z_1) \in M'$ mit der Eigenschaft existiert, daß für alle Tripel $(x, y, z) \in M'$ die Ungleichung $f(x_1, y_1, z_1) \geq f(x, y, z)$ gilt. Ist dies der Fall, so ermittle man hierzu $f(x_1, y_1, z_1)$.

(Die Lösungen zu den Aufgaben der Klassenstufen 11/12 werden in der Zeitschrift „Mathematik in der Schule“ veröffentlicht, d. Red.)

Die abgebildete Ungleichung stellt die Jensensche Ungleichung dar. Der dänische Mathematiker Jensen lebte 1859 bis 1925. Wir wollen die Ungleichung erläutern.

Eine Funktion f heißt konvex (konkav), wenn für beliebige $x_1, x_2 \in D$ die Ungleichung

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2} [f(x_1) + f(x_2)] \quad (>) \quad \text{gilt,}$$

wobei D den Definitionsbereich von f bezeichnet. Man veranschauliche sich den Sachverhalt grafisch.

Sei $f(x) = \ln x$ mit $x > 0$. Für $x_1, x_2 > 0$ ist $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$ genau dann, wenn $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \geq \sqrt{x_1 x_2}$ ist.

Hieraus folgt:

$$\ln\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \ln \sqrt{x_1 x_2} = \frac{1}{2} [\ln x_1 + \ln x_2],$$

d.h., $f(x)$ ist konkav. Damit gilt dann auch nach der abgebildeten Ungleichung: Für $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ ist

$$\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n} (\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n) = \ln \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

und infolge der Monotonie der Logarithmusfunktion

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Wir haben damit die Ungleichung vom arithmetischen-geometrischen Mittel erhalten.

Entsprechend kann man mit $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) die Ungleichung

$$\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right) (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \geq n^2$$

beweisen. (Bitte selber ausführen!)

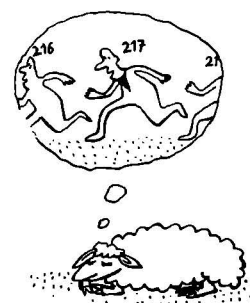
▲ Aufgabe ▲ Man zeige, daß die Funktion $y = \sin x$ in $[0, \pi]$ konkav ist und beweise dann folgenden Satz:

Unter allen einem Kreis eingeschriebenen Dreiecken hat das gleichseitige den größten Flächeninhalt. W. Moldenhauer

$$\varphi\left(\frac{\sum a_v x_v}{\sum a_v}\right) \leq \frac{\sum a_v \varphi(x_v)}{\sum a_v}$$



In freien Stunden **alpha** heiter

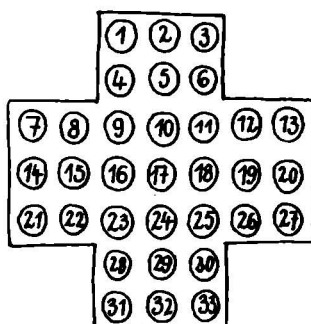


Die letzte Spielmarke

Das ist ein altes Unterhaltungsspiel, mit dem sich die Kinder schon zu Beginn des 18. Jahrhunderts die Zeit vertrieben.

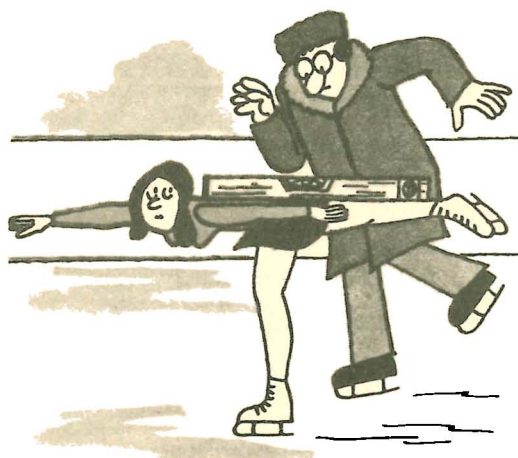
Sie nannten es „Bandwurm“ oder „Einsiedler“.

Fertigt euch ein Spielbrett an (siehe Bild)! Legt in jeden Kreis eine Spielmarke – ein Kreis bleibt frei, gleichgültig welcher!



Die Aufgabe besteht nun darin, alle Spielmarken zu schlagen, und zwar bei jedem Zug eine. Zum Schluß muß eine Marke übrigbleiben – in demjenigen Kreis, der zu Beginn des Spiels frei war. Das bedeutet also, daß man mit 31 Zügen die Aufgabe gelöst haben muß! Dazu gehört schon ein wenig Nachdenken.

Man schlägt eine Marke, indem man über sie auf einen freien Kreis springt – nach rechts, links, rückwärts oder vorwärts.



Silbenrätsel

Aus den Silben

a – acht – be – ben – bie – bild – de – der – di – e – ei – fel – ge – gel – go – hal – ke – kel – kör – le – les – lig – ma – man – na – ne – ner – netz – paar – per – qua – recht – ren – schaft – schei – schei – sek – sen – send – sie – spit – sti – tau – tel – tel – tel – tha – the – tik – tor – win – win – wink – wis – ze – zwei – zun

sind Wörter der nachstehend angegebenen Bedeutung zu bilden. Danach entnehme man jedem Wort einige seiner Buchstaben, und zwar so, wie es die in Klammern angegebene Reihenfolge bezeichnet. (Fehlt diese Angabe, so ist das gesamte Wort zu übernehmen.)

Als Lösung erhält man einen Ausspruch von Karl Marx.

1. ein Stellenwert (1; 2; 3; 4)
2. Oberbegriff zu Mathematik, Physik, Philosophie
3. der Basis gegenüberliegender Eckpunkt eines gleichschenkligen Dreiecks (3; 1; 4)
4. ein Teil eines Kreises (2; 6; 1; 4)
5. Verbindungsstrecke zweier nicht benachbarter Eckpunkte eines Vierecks (1; 3; 6; 6)
6. griechischer Mathematiker (Satz der Kreislehre) (3; 4; 6)
7. Bezeichnung für zwei Winkel mit gemeinsamem Scheitelpunkt und paarweise auf der gleichen Gerade liegenden Schenkeln (9; 5; 18; 12; 8; 5; 2; 3)
8. Bezeichnung für ein spezielles Dreieck (2; 8; 5; 6; 7; 3; 9; 2; 10; 5)
9. Ergebnis der Aufgabe $251 \cdot 8$ (6; 10; 1; 7; 8; 3; 14; 3; 10)
10. von zwei Strahlen begrenzter Teil der Ebene (1; 5; 3; 3)
11. eine einstellige Primzahl (1; 2; 3)
12. Linie, die eine Figur (z. B. eine Strecke) in zwei gleichgroße Teile zerlegt (10; 2; 1; 5; 9)
13. ein Teil der Oberfläche eines geometrischen Körpers (3; 2; 5; 7; 8; 3; 9)
14. deutscher Mathematiker des Mittelalters (3; 1; 2)
15. ein Teil des Winkels (1; 5; 2; 3)
16. ein spezielles Prisma (4; 5; 6)

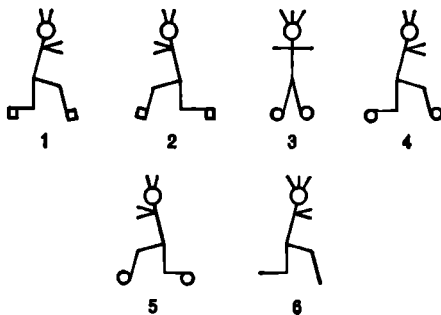
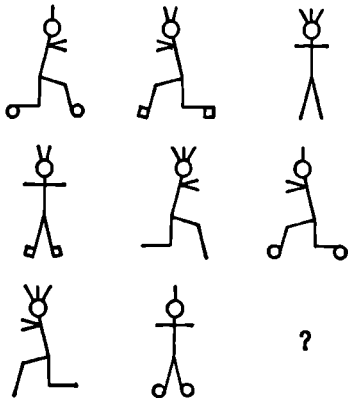
17. eine Wissenschaft
18. Fläche, auf die eine Figur projiziert wird (1; 5; 4; 2; 5; 8; 5; 8)
19. ein Teil des Rechenstabs (1; 2)
20. eine zur Herstellung räumlicher Gebilde vorbereitete Fläche (1; 2; 7; 7; 5; 7)

OStR K.-H. Lehmann, Berlin

Unterhaltsame Logik

Welche der sechs Figuren muß logischerweise an Stelle des Fragezeichens gesetzt werden?

Aus: Füles 4/79, Budapest



Kryptarithmetik

$$\begin{array}{rcl} \text{a)} & aa + aa = & bb \\ & + \quad + & + \\ & ad + ad = & ef \\ \hline & bh + bh = & mn \end{array}$$

Schüler Rainer Budziat, Krakow (Kl. 5)

b)
$$\begin{array}{r} ABC \\ - CBA \\ \hline DBA : A = AA \end{array}$$

Aus: NBI 15/79

c) In nachfolgendem Gleichungssystem sind die Buchstaben so durch die Ziffern 1 bis 9 zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

$$\begin{array}{ll} (1) & \alpha \cdot \alpha = PE \\ (2) & P \cdot \alpha = RT \\ (3) & R \cdot \alpha = OK \\ (4) & O \cdot \alpha = OU \\ (5) & D \cdot \alpha = UD \\ (6) & U \cdot \alpha = KO \\ (7) & K \cdot \alpha = TR \\ (8) & T \cdot \alpha = EP \end{array}$$

OL Ing. K. Koch, Schmalkalden

Fröhliche Mathematik

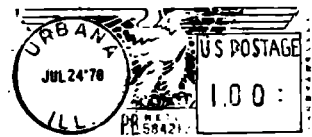
- In einer Familie sind sechs Söhne. Jeder Sohn hat eine Schwester. Wieviel Kinder hat diese Familie?
- Die Kinder von Herrn Müller bezahlen für einen Zirkusbesuch zusammen 7 Mark. Der Eintritt kostet für Personen ab 14 Jahre 3 Mark, unter 14 Jahre 2 Mark. Wieviel Kinder hat Herr Müller? Wieviel davon sind jünger als 14 Jahre?
- Ein Hotel hat 70 Ein- und Zweibettzimmer mit zusammen 99 Betten. Wieviel Einbett- und wieviel Zweibettzimmer sind es?
- Ein Holzwürfel mit der Kantenlänge 1 cm hat eine Masse von 0,8 g. Welche Masse hat ein Würfel mit der Kantenlänge 2 cm?
- Wieviel Minuten sind es bis 8 Uhr, wenn es vor 50 Minuten genau viermal soviel Minuten nach 5 Uhr war?

Aus: Pionierkalender 1979

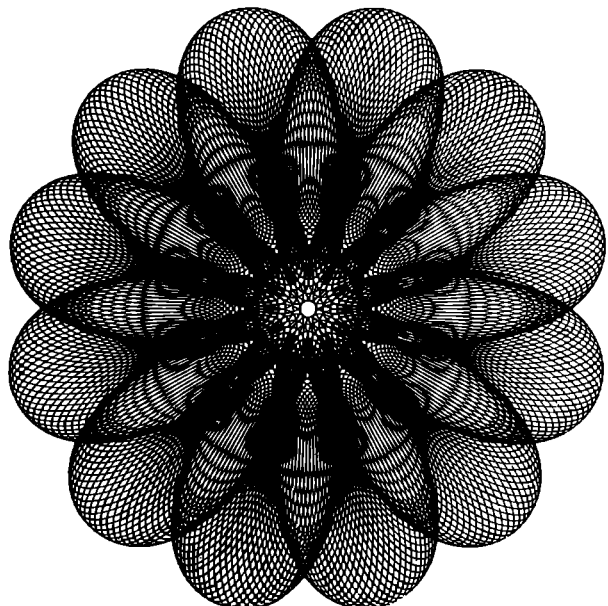
Vierfarbproblem

Aus Anlaß der Lösung des Vierfarbproblems (siehe alpha 5/78) gab die Universität von Illinois einen Sonderstempel heraus.

FOUR COLORS
SUFFICE



Aus: Pythagoras 3/79, Niederlande



Lösungen



Lösungen zu: Wir arbeiten mit Mengen,
Seite 102

Arbeitsblatt 5

$$NXM = \{[2; 1], [2; 2], [2; 3], [2; 4], [3; 1], [3; 2], [3; 3], [3; 4]\}$$

$$MXP = \{[1; 5], [1; 7], [1; 9], [2; 5], [2; 7], [2; 9], [3; 5], [3; 7], [3; 9], [4; 5], [4; 7], [4; 9]\}$$

$$PXM = \{[5; 1], [5; 2], [5; 3], [5; 4], [7; 1], [7; 2], [7; 3], [7; 4], [9; 1], [9; 2], [9; 3], [9; 4]\}$$

$$NXP = \{[2; 5], [2; 7], [2; 9], [3; 5], [3; 7], [3; 9]\}$$

$$PXN = \{[5; 2], [5; 3], [7; 2], [7; 3], [9; 2], [9; 3]\}$$

$$MXM = \{[1; 1], [1; 2], [1; 3], [1; 4], [2; 1], [2; 2], [2; 3], [2; 4], [3; 1], [3; 2], [3; 3], [3; 4], [4; 1], [4; 2], [4; 3], [4; 4]\}$$

$$NXN = \{[2; 2], [2; 3], [3; 2], [3; 3]\}$$

$$PXP = \{[5; 5], [5; 7], [5; 9], [7; 5], [7; 7], [7; 9], [9; 5], [9; 7], [9; 9]\}$$

$$QXR = \{[x; a], [y; a], [z; a]\}$$

$$RXQ = \{[a; x], [a; y], [a; z]\}$$

$$QXS = \{[x; b], [x; c], [y; b], [y; c], [z; b], [z; c]\}$$

$$SXQ = \{[b; x], [b; y], [b; z], [c; x], [c; y], [c; z]\}$$

$$RXS = \{[a; b], [a; c]\}$$

$$SXR = \{[b; a], [c; a]\}$$

$$QXQ = \{[x; x], [x; y], [x; z], [y; x], [y; y], [y; z], [z; x], [z; y], [z; z]\}$$

$$RXX = \{[a; a]\}$$

$$SXS = \{[b; b], [b; c], [c; b], [c; c]\}$$

Lösungen zu: Eine Aufgabe – verschiedene Varianten mit steigendem Schwierigkeitsgrad, Seite 107

Klasse 4: Wir rechnen $121 \text{ cm}^2 - 85 \text{ cm}^2 = 36 \text{ cm}^2$. Wegen $6 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 36 \text{ cm}^2$ hat das Quadrat $EFGH$ die Seitenlänge 6 cm.

Klasse 5: Wegen $12 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} = 144 \text{ cm}^2$ und $5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 25 \text{ cm}^2$ hat das Quadrat $ABCD$ die Seitenlänge 12 cm, das Quadrat $EFGH$ die Seitenlänge 5 cm. Wegen $\overline{HG} = \overline{EF}$ hat das verbliebene Achteck $AEHGFBCD$ einen Umfang von der Länge $4 \cdot 12 \text{ cm} + 2 \cdot 5 \text{ cm} = 48 \text{ cm} + 10 \text{ cm} = 58 \text{ cm}$.

Klasse 6: Es sei a die Länge von $\overline{AB}$ und b die Länge von $\overline{EF}$; der Flächeninhalt des

Achtecks $AEHGFBCD$ beträgt dann $a^2 - b^2$. Für den Umfang dieses Achtecks gilt $4a + 2b = 108 \text{ cm}$. Wegen $25 \text{ cm} \cdot 25 \text{ cm} = 625 \text{ cm}^2$ gilt $a = 25 \text{ cm}$. Durch Einsetzen erhalten wir somit $4 \cdot 25 \text{ cm} + 2b = 108 \text{ cm}$, $2b = 8 \text{ cm}$, also $b = 4 \text{ cm}$. Daraus folgt $a^2 - b^2 = 625 \text{ cm}^2 - 16 \text{ cm}^2 = 609 \text{ cm}^2$.

Klasse 7: Es sei a die Länge von $\overline{AB}$ und b die Länge von $\overline{E_1F_1}$. Wegen $5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 25 \text{ cm}^2$ gilt $b = 5 \text{ cm}$. Der Umfang des verbliebenen 20-Ecks beträgt $4a + 8b = 172 \text{ cm}$, $4a + 40 \text{ cm} = 172 \text{ cm}$, $4a = 132 \text{ cm}$, also $a = 33 \text{ cm}$. Der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ beträgt somit $a^2 = 1089 \text{ cm}^2$.

Klasse 8: Es sei a die Länge von $\overline{AB}$ und b die Länge eines der kleineren Quadrate. Nun gilt $a = \sqrt{961 \text{ cm}^2} = 31 \text{ cm}$. Für den Umfang des verbliebenen n -Ecks gilt $4a + 4n \cdot 2b = 212 \text{ cm}$, also

$$8bn = 212 \text{ cm} - 124 \text{ cm} = 88 \text{ cm} = 11 \cdot 8 \text{ cm}$$

und somit $bn = 11 \text{ cm}$. Wegen $n > 1$ und da n und b natürliche Zahlen sind, existiert genau eine Lösung, nämlich $n = 11$ und $b = 1 \text{ cm}$. Die Länge der Seiten der kleineren Quadrate beträgt 1 cm; Stefan hat insgesamt 44 kleinere kongruente Quadrate herausgeschnitten.

Klasse 9: Es sei a die Länge von $\overline{AB}$ und b die Länge von $\overline{E_1F_1}$; dann gilt $a^2 - 4b^2 = 969 \text{ cm}^2$ und $4a + 8b = 204 \text{ cm}$. Durch Umformen erhalten wir $(a + 2b)(a - 2b) = 969 \text{ cm}^2$ und $a = 51 \text{ cm} - 2b$. Durch Einsetzen finden wir die Lösung $a = 35 \text{ cm}$ und $b = 8 \text{ cm}$. Jedes herausgeschnittene kleinere Quadrat hat einen Flächeninhalt von 64 cm^2 .

Klasse 10: Es sei a die Maßzahl der Seitenlänge von $\overline{AB}$ und b die Maßzahl der Seitenlänge eines kleineren Quadrates, das herausgeschnitten wurde; dann gilt

$$a^2 - 4n \cdot b^2 = \frac{8}{9} \cdot a^2 \text{ und } 4a + 4n \cdot 2b = \frac{20}{3} \cdot a.$$

Daraus folgt weiter

$$4nb^2 = \frac{1}{9}a^2 \text{ und } 8bn = \frac{8}{3}a,$$

$$36nb^2 = a^2 \text{ und } n = \frac{a}{3b}.$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\frac{36ab^2}{3b} = a^2, a = 12b, \text{ also } n = 4.$$

Aus dem Quadrat $ABCD$ wurden insgesamt 16 kongruente kleinere Quadrate herausgeschnitten.

Wegen $a - b = 66$ und $a = 12b$ gilt $11b = 66$, also $b = 6$. Diese kleineren Quadrate haben die Seitenlänge 6 cm.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 1/79 (Fortsetzung)

Ma 10/12 ■ 1848 Es sei a die Anzahl der Goldmedaillen und b die Anzahl der sechsten Plätze. Dann ist die Anzahl der Silbermedaillen $a + b$.

Nach der Punktetabelle gilt dann

$$7a + 5(a + b) + 4a + 3a + 2a + b = 75 \text{ bzw. } 21a + 6b = 75; \text{ also } 7a + 2b = 25.$$

Diese diophantische Gleichung mit zwei Variablen hat im Bereich der natürlichen Zahlen nur eine Lösung, und zwar das Paar $[3; 2]$.

Damit gilt: Die UdSSR errang 3 Goldmedaillen, 5 Silbermedaillen, 3 Bronzemedailien, 3 vierte Plätze, 3 fünfte Plätze und 2 sechste Plätze.

$$\text{Ma 10/12} \blacksquare 1849 \quad \text{Es ist } \tan \alpha = \frac{1}{3} \text{ und } \tan \beta = \frac{1}{7}.$$

Aus der in diesem Fall gültigen Beziehung

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\text{erhält man dann } \tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}.$$

Es ist $\tan 26,5^\circ < 0,5 < \tan 26,6^\circ$.

Wegen $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ und $0^\circ < \beta < 45^\circ$ gilt stets

$$26,5^\circ < \alpha + \beta < 26,6^\circ, \text{ w. z. b. w.}$$

Ph 6 ■ 51

Geg.: Umlaufbahn: $s = 2400000 \text{ km}$

Umlaufzeit: $t = 40000 \text{ min}$

Ges.: Geschwindigkeit v

Man nimmt die Gleichung für die Geschwindigkeit eines gleichförmig bewegten Körpers

und rechnet in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ um.

$$v = \frac{s}{t}$$

$$v = \frac{2400000 \text{ km}}{40000 \text{ min}}$$

$$v = 60 \frac{\text{km}}{\text{min}} = 3600 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Der Mond umkreist die Erde mit einer Geschwindigkeit von $3600 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Ph 7 ■ 52 Geg.: $G = 1250 \text{ kp}$ Ges.: F_H

$$h = 12 \text{ m}$$

$$l = 101 \text{ m}$$

Die Berechnung erfolgt nach der Gleichung für die geneigte Ebene.

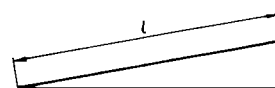
$$F_H \cdot l = G \cdot h$$

$$F_H = \frac{G \cdot h}{l}$$

$$F_H = \frac{1250 \text{ kp} \cdot 12 \text{ m}}{101 \text{ m}}$$

$$F_H \approx 148,5 \text{ kp} \approx 1460 \text{ N}$$

Der Motor muß eine Kraft von 148,5 kp (1460 N) aufbringen.



Ph 8 ■ 53 Geg.: $I = 2,34$

$$t = 0,25 \text{ h} = 900 \text{ s}$$

Ges.: Q

Man verwendet die Gleichung

$$I = \frac{Q}{t}$$

$$Q = I \cdot t$$

$$Q = 2,34 \cdot 900 \text{ s}$$

$$Q = 2070 \text{ As}$$

$$Q = 2070 \text{ C}$$

Die Ladung beträgt 2070 C.

Ph9 ■54

Geg.: $m = 75 \text{ kg}$ Ges.: Belastungen
 $a = 1,8 \text{ ms}^{-2}$ aufwärts F_a
 $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ abwärts F_u

Die Belastung setzt sich in beiden Fällen aus der Summe zweier Kräfte zusammen, die einmal entgegengesetzt und einmal gleichgerichtet sind. Dabei ist F_G die Gewichtskraft der Person.

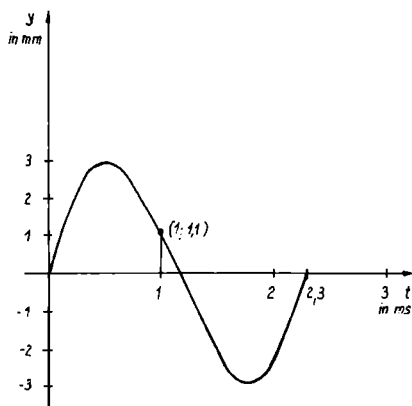
$$\begin{aligned} F_a &= F_G + F & \text{mit } F &= m \cdot a \\ F_a &= m \cdot g + m \cdot a \\ F_a &= m(g + a) \\ F_a &= 75 \text{ kg} (9,81 + 1,8) \text{ ms}^{-2} \\ F_a &\approx 870,8 \text{ N} \\ F_u &\approx 88,8 \text{ kp} \\ F_u &= F_G - F \\ F_u &= m \cdot g - m \cdot a \\ F_u &= m(g - a) \\ F_u &= 75 \text{ kg} (9,81 - 1,8) \text{ ms}^{-2} \\ F_u &\approx 600,8 \text{ N} \\ F_u &\approx 61,2 \text{ kp} \end{aligned}$$

Die Belastung des Fahrstuhlbodens beträgt 88,8 kp bzw. 61,2 kp.

Ph10/12 ■55

Geg.: $y_{\max} = 3 \text{ mm}$ Ges.: y
 $f = 440 \text{ s}^{-1}$

a) $t = 0,001 \text{ s}$
 $y = y_{\max} \cdot \sin \omega \cdot t$
 $y = y_{\max} \cdot \sin 2\pi f \cdot t$
 $y = 3 \text{ mm} \cdot \sin 2 \cdot 3,14 \cdot 440 \cdot 0,001$
 $y \approx 3 \text{ mm} \sin 2,76$
 $y \approx 3 \text{ mm} \sin 158^\circ$
 $y = 3 \text{ mm} \sin 22^\circ$
 $y = 3 \text{ mm} \cdot 0,3746$
 $y \approx 1,12 \text{ mm}$



Die Elongation beträgt 1,12 mm.

b) $\frac{1}{440} \text{ s} = 0,0023 \text{ s}$

Ch7 ■41 95% von $1,2 \text{ t} \triangleq 1,14 \text{ t}$

a) $1,14 \text{ t}$ m
 $\text{CuC} + \text{C} \rightarrow \text{Cu} + \text{CO}$
 $79,5 \text{ g}$ $63,5 \text{ g}$
 $m = \frac{1,14 \text{ t} \cdot 63,5 \text{ g}}{79,5 \text{ g}} = 0,91 \text{ t} = 910 \text{ kg}$

b) $1,14 \text{ t}$ m
 $\text{CuO} + \text{C} \rightarrow \text{Cu} + \text{CO}$
 $79,5 \text{ g}$ 28 g
 $m = \frac{1,14 \text{ t} \cdot 28 \text{ g}}{79,5 \text{ g}} = 0,4 \text{ t} = 400 \text{ kg}$

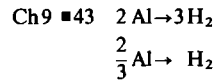
$400 \text{ kg} \triangleq 100\%$
 $x = 98,5\%$
 $x = \frac{400 \text{ kg} \cdot 98,5\%}{100\%} = 394 \text{ kg}$

Bei einem Gasverlust von 1,5% erhält man 394 kg Kohlenmonoxid.

Ch8 ■42 $\text{H}_2\text{SO}_4 + \text{BaCl}_2 \rightarrow \text{BaSO}_4 + 2 \text{HCl}$
 $14,15 \text{ g}$
 $- 13,92 \text{ g}$
 $0,23 \text{ g}$ Bariumsulfat wurden gewonnen.
 $M_{\text{BaSO}_4} : M_s = 0,23 \text{ g} : x$
 $233 : 32 = 0,23 \text{ g} : x$
 $x = \frac{32 \cdot 0,23 \text{ g}}{233}$
 $x = 0,023 \text{ g}$

In 0,57 g der ursprünglichen Substanz sind 5,6% Schwefel enthalten.

In 0,57 g Substanz sind 0,032% Schwefel
In 100 g Substanz sind $x\%$ Schwefel
 $x = \frac{100 \text{ g} \cdot 0,032\%}{0,57 \text{ g}} = 5,6\%$



Gegeben:
0,07 g Einwaage 750 Torr $\triangleq$ 0,987 atm
77,4 ml Wasserstoff $25^\circ \text{C} \triangleq 298^\circ \text{K}$
 25°C Gastemperatur $M = \frac{2}{3} \cdot 27 \text{ g} = 18 \text{ g}$

750 Torr Gasdruck
 $v \cdot p = m \cdot R \cdot T$
 $v \cdot p = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$
 $m = \frac{v \cdot p \cdot M}{R \cdot T}$
 $m = \frac{0,0774 \text{ l} \cdot 0,987 \text{ atm} \cdot 18 \text{ g}}{0,082 \cdot \frac{1}{\text{Grad}} \cdot 298 \cdot ^\circ \text{K}} = 0,056 \text{ g}$

0,07 g $\triangleq 100\%$
0,056 g $\triangleq x$
 $x = 80\%$
Das Aluminiumpulver enthält 80% Aluminium.

Ch10/12 ■44
 $25 \text{ kg} \cdot 0,82$ $V \cdot 1,509 \text{ kg} \cdot \text{l}^{-1} \cdot 0,99$

$4 \text{NO}_2 + 2 \text{H}_2\text{O} + \text{O}_2 \rightarrow 4 \text{HNO}_3$
 184 g 252 g
 $V = \frac{25 \text{ kg} \cdot 0,82 \cdot 252 \text{ g}}{184 \text{ g} \cdot 1,509 \text{ kg} \cdot \text{l}^{-1} \cdot 0,99} = 18,8 \text{ l}$

$25 \text{ kg} \cdot 0,82$ $V \cdot 1,509 \text{ kg} \cdot \text{l}^{-1} \cdot 0,99$
 $\text{NaNO}_3 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{NaHSO}_4 + \text{HNO}_3$
 85 g 63 g
 $V = \frac{25 \text{ kg} \cdot 0,82 \cdot 63 \text{ g}}{85 \text{ g} \cdot 1,509 \text{ kg} \cdot \text{l}^{-1} \cdot 0,99} = 10,2 \text{ l}$

Aus Stickstoffdioxid entsteht das größere Volumen Salpetersäure.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 2/79

Ma5 ■1851 Angenommen, aus der Ungarischen Volksrepublik kamen n Pioniere; dann waren es $4 \cdot n$ Pioniere aus der Sowjetunion. Aus der DDR und aus der VR Polen kamen

jeweils $2 \cdot n$ Pioniere. Insgesamt waren es somit $9 \cdot n$ Pioniere. Nun gilt $1990 < 9 \cdot n < 2000$.

Von den Zahlen zwischen 1990 und 2000 ist nur die Zahl 1998 ein Vielfaches von 9, denn $9 \cdot 222 = 1998$.

In diesem Durchgang verbrachten 1998 Junge Pioniere ihre Ferien in Artek. Aus der Sowjetunion kamen 888, aus der VR Polen 444, aus der DDR 444, aus der Ungarischen Volksrepublik 222 Junge Pioniere.

Ma5 ■1852 Angenommen, anfangs waren es n Kinder; dann erhielt jedes Kind $(48:n)$ Murmeln. Danach waren es $(n-1)$ Kinder, und jedes Kind erhielt $[50:(n-1)]$ Murmeln. Wir stellen eine Tabelle auf:

n	$48:n$	$50:(n-1)$
1	48	n.l.
2	24	50
3	16	25
4	12	n.l.
6	8	10
8	6	n.l.
12	4	n.l.
16	3	n.l.
24	2	n.l.
48	1	n.l.

Nur für $n = 6$ existiert eine Lösung. Es spielten anfangs 6 Kinder mit Murmeln, jedes Kind erhielt 8 Murmeln, 2 Murmeln blieben übrig. Danach spielten 5 Kinder mit Murmeln, jedes Kind erhielt 10 Murmeln, also zwei Murmeln mehr als zuvor, und es blieb keine Murmel übrig.

Ma5 ■1853 Angenommen, dieser Schüler hat n Punkte erreicht; dann gilt

$$\begin{aligned} (n+10) \cdot 2 &= 100 - 10, \\ (n+10) \cdot 2 &= 90, \\ n+10 &= 45, \\ n &= 35. \end{aligned}$$

Dieser Schüler erreichte auf der Kreisolympiade Junger Mathematiker 35 Punkte.

Ma5 ■1854 Angenommen, Antje schaffte eine Weite von x Metern; die Wurfweiten der sechs Schüler sind in der nachfolgenden Tabelle erfasst:

Name	Weite in m
Antje	x
Bernd	$x + 16$
Peter	$x + 14$
Birgit	$x + 3$
Jochen	$x + 16$
Dieter	$x + 9$
zus.	$6x + 58$

Nun gilt $6x + 58 = 148$, $6x = 90$, $x = 15$.

Antje warf den Ball 15 m, Bernd 31 m, Peter 29 m, Birgit 18 m, Jochen 31 m, Dieter 24 m weit.

Ma5 ■1855 Angenommen, die Schüler der Klasse 5b hatten eine Einnahme von x Mark; die Schüler der Klasse 5c haben dann

$(x+7)$ Mark eingenommen; zusammen sind das $(2x+7)$ Mark.

Nun gilt

$$61 < 2x + 7 < 65,$$

$$54 < 2x < 58,$$

$$27 < x < 29, \text{ also } x = 28.$$

Insgesamt wurden 30 M + 28 M + 35 M, also 93 M auf das Solidaritätskonto überwiesen.

Ma 5 ■ 1856 In Heft 2/1979 ist uns ein Fehler unterlaufen. Die Wettbewerbsaufgabe **Ma 5 ■ 1856** auf Seite 34 muß wie folgt lauten: Hans hatte im Garten Äpfel gepflückt und in drei Spankörbe gelegt. Beim Auszählen der Äpfel stellt er fest, daß sich im zweiten Korb ein Apfel weniger als im ersten befand und daß der dritte Korb drei Äpfel mehr enthielt als der zweite. Wieviel Äpfel enthielt jeder dieser drei Körbe?

Lösung: Angenommen, der erste Korb enthielt n Äpfel; dann enthielt der zweite Korb $(n-1)$ Äpfel, der dritte Korb $(n+2)$ Äpfel. Zusammen sind es $(3n+1)$ Äpfel. Nun gilt

$$3n+1=67,$$

$$3n=66, \text{ also } n=22.$$

Der erste Korb enthielt 22, der zweite 21, der dritte 24 Äpfel.

(Alle Einsender erhielten eine Antwortkarte: sehr gut gelöst.)

Ma 6 ■ 1857 a) $60 \text{ min} \cdot \frac{2}{5} = 24 \text{ min}$; die Uhrzeit lautet somit 7.24 Uhr.

b) Für den großen Zeiger gilt:

$$1 \text{ h} \triangleq 360^\circ; 1 \text{ min} \triangleq 6^\circ; 24 \text{ min} \triangleq 144^\circ.$$

Für den kleinen Zeiger gilt:

$$12 \text{ h} \triangleq 360^\circ; 1 \text{ h} \triangleq 30^\circ; 1 \text{ min} \triangleq \frac{1}{2}^\circ;$$

$$24 \text{ min} \triangleq 12^\circ; 7 \text{ h } 24 \text{ min} \triangleq 222^\circ.$$

Nun gilt ferner $222^\circ - 144^\circ = 78^\circ$; beide Zeiger bilden um 7.24 Uhr einen Winkel von 78° .

Ma 6 ■ 1858 Angenommen, Ulrike spendete x Mark; dann haben Katrin $2x$ Mark, Evelyn $(2x-2)$ Mark und Susanne $(4x-4)$ Mark gespendet. Zusammen sind das $(9x-6)$ Mark. Nun gilt

$$20 < 9x - 6 < 30,$$

$$26 < 9x < 36, \text{ also } x = 3.$$

Es spendeten Ulrike 3 M, Katrin 6 M, Evelyn 4 M und Susanne 8 M.

Zusammen spendeten sie 21 M.

Ma 6 ■ 1859 Angenommen, Heidrun ist n Jahre alt; dann ist ihre Mutter $3n$ Jahre und ihr Vater $(3n+6)$ Jahre alt. Ferner ist Katja $(n-8)$ Jahre, Gabi $3 \cdot (n-8)$ Jahre alt. Nun gilt

$$n + 3n + (3n+6) + (n-8)$$

$$+ 3 \cdot (n-8) = 95,$$

$$11n - 26 = 95,$$

$$11n = 121,$$

$$n = 11.$$

Heidrun ist 11, ihre Mutter 33, ihr Vater 39, ihre Schwester Katja 3 und ihre Schwester Gabi 9 Jahre alt.

Ma 6 ■ 1860 Angenommen, das Buch umfaßt n Seiten; nach dem ersten Tag hat Rolf noch $(n-12)$ Seiten zu lesen. Davon liest er am zweiten Tag $\frac{n-12}{4}$ Seiten. Nun gilt

$$12 + \frac{n-12}{4} + 57 = n,$$

$$\frac{n-12}{4} + 69 = n,$$

$$n - 12 + 276 = 4n,$$

$$264 = 3n,$$

$$n = 88.$$

Dieses Buch umfaßt 88 Seiten.

Ma 6 ■ 1861 Von 21 Uhr bis 5 Uhr sind 8 Stunden. Nun gilt

$$v = \frac{s}{t} = \frac{560 \text{ km}}{8 \text{ h}} = 70 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Ferner gilt

$$t = \frac{s}{v} = \frac{(560 - 420) \text{ km}}{70 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 2 \text{ h, d. h.,}$$

der Gegenzug ist um 1 Uhr in Warschau abgefahren, da er nach 2 Stunden also um 3 Uhr in Kutno auf den Zug Berlin-Warschau traf.

Ma 7 ■ 1862 Es seien a, b, c bzw. d die Zahlen, die das Lebensalter von Axel, Bernd, Christian bzw. Dieter angeben; dann gilt:

$$a < b, \quad (1)$$

$$b + d < a + c, \quad (2)$$

$$a + b = c + d. \quad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt durch Addition

$$a + 2b + d < a + 2c + d,$$

$$2b < 2c,$$

$$b < c. \quad (4)$$

Aus (1) und (4) folgt

$$a < b < c. \quad (5)$$

Aus (3) folgt durch Umformen

$$c = a + b - d. \quad (6)$$

Durch Einsetzen von (6) in (2) erhalten wir

$$b + d < a + a + b - d,$$

$$2d < 2a,$$

$$d < a. \quad (7)$$

Aus (5) und (7) folgt

$$d < a < b < c.$$

Dieter ist der Jüngste.

Ma 7 ■ 1863 Angenommen, im ersten Spiel schoß jede der beiden Mannschaften x Tore; es fielen somit $2x$ Tore. Im zweiten Spiel habe Mannschaft B y Tore, also Mannschaft A $2y$ Tore geschossen; es fielen somit $3y$ Tore. Nun gilt

$$2x + 3y = 13,$$

$$3y = 12 + 1 - 2x,$$

$$y = 4 - \frac{2x-1}{3}.$$

Nur für $x_1 = 2, y_1 = 3$ und $x_2 = 5, y_2 = 1$ besitzt diese Gleichung positive ganzzahlige Lösungen.

Spiele	Torverhältnis	Anzahl der Tore
1. Spiel	2:2	4
2. Spiel	6:3	9

Die zweite Lösung entfällt (5:5; 2:1), da in diesem Fall im zweiten Spiel weniger Tore fielen als im ersten.

Ma 7 ■ 1864 1 Jahr $\triangleq 365 \cdot 24 \cdot 60$ Minuten = 525 600 Minuten;
 $525 600 : 124 \approx 4239$.

Im Jahre 1977 wurden in dieser Klinik 4239 Kinder geboren.

$$(100 - 55) : 100 = x : 4239,$$

$$x = \frac{4239 \cdot 45}{100} \approx 1908.$$

Im Jahre 1977 wurden in dieser Klinik 1908 Knaben geboren.

Ma 7 ■ 1865 Es sei A_3 bzw. A_4 der Flächeninhalt des Dreiecks BCS bzw. DAS ; dann gilt $A_{ABCD} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$,

$$\frac{1}{2} \cdot h(a+c) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4. \quad (1)$$

$$\text{Aus } c < a \text{ folgt } 2a > a + c, \text{ also } a > \frac{1}{2} \cdot (a+c). \quad (2)$$

Wegen (2) gilt

$$a \cdot h > A_1 + A_2 + A_3 + A_4. \text{ Ferner gilt} \quad (3)$$

$$A_1 + A_4 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h,$$

$$\text{also } A_4 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h - A_1 \text{ und} \quad (4)$$

$$A_1 + A_3 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h,$$

$$\text{also } A_3 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h - A_1. \quad (5)$$

Setzen wir (4) und (5) in (3) ein, so erhalten wir

$$a \cdot h > A_1 + A_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot h - A_1 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot h - A_1,$$

$$a \cdot h > a \cdot h + A_2 - A_1,$$

$$A_1 > A_2.$$

Ma 8 ■ 1866 Die durch $z^2 - z$ dargestellte Zahl muß laut Aufgabe als Endziffer eine Null haben. Folglich müssen die Zahl z und ihr Quadrat z^2 die gleiche Endziffer haben. Das ist nur für die Endziffern 0, 1, 5 und 6 möglich.

Für alle natürlichen Zahlen z mit den Endziffern 0, 1, 5, 6 ist die Differenz $z^2 - z$ ein ganzzahliges Vielfaches von 10.

Ma 8 ■ 1867 Belegt man in $x^2 + x + 11$ die Variable x mit den natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, so erhält man stets eine Primzahl. Für $x = 10$ ergibt sich jedoch $121 = 11^2$, also keine Primzahl. Die Aussage ist falsch. Um zu beweisen, daß eine Aussage falsch ist, bedarf es nur eines Gegenbeispiels.

Ma 8 ■ 1868 a) Falls das Dreieck ABC existiert, müssen folgende Dreiecksungleichungen erfüllt sein:

$$(1) \quad a + b > c, \text{ d. h. } 15 \text{ cm} + 8 \text{ cm} > c,$$

$$(2) \quad a + c > b, \text{ d. h. } 15 \text{ cm} + c > 8 \text{ cm,}$$

$$(3) \quad b + c > a, \text{ d. h. } 8 \text{ cm} + c > 15 \text{ cm.}$$

Aus (1) und (3) folgt $7 \text{ cm} < c < 23 \text{ cm}$.

b) Falls das Dreieck ABC spitzwinklig ist, müssen folgende Ungleichungen erfüllt sein:

$$(1) \quad a^2 + b^2 > c^2, \text{ d. h. } 225 \text{ cm}^2 + 64 \text{ cm}^2 > c^2$$

- (2) $a^2 + c^2 > b^2$, d. h. $225 \text{ cm}^2 + c^2 > 64 \text{ cm}^2$
 (3) $b^2 + c^2 > a^2$, d. h. $64 \text{ cm}^2 + c^2 > 225 \text{ cm}^2$
 Aus (1) und (3) folgt $\sqrt{161 \text{ cm}^2} < c < 17 \text{ cm}$.

c) Falls das Dreieck ABC rechtwinklig ist, so muß nach dem Satz des Pythagoras gelten $a^2 + b^2 = c^2$, falls c die Hypotenuse ist. In diesem Falle ist $c = 17 \text{ cm}$. Falls a Hypotenuse ist, gilt $b^2 + c^2 = a^2$. Dann ergibt sich für $c = \sqrt{161 \text{ cm}^2} \approx 12,69 \text{ cm}$. Wegen $b < a$ kann b nicht Hypotenuse sein.

d) Falls das Dreieck ABC stumpfwinklig ist, muß eine der Beziehungen gelten

- (1) $a^2 + b^2 < c^2$, d. h. $225 \text{ cm}^2 + 64 \text{ cm}^2 < c^2$; $c^2 > 289 \text{ cm}^2$,
 (2) $a^2 + c^2 < b^2$, d. h. $225 \text{ cm}^2 + c^2 < 64 \text{ cm}^2$; entfällt,
 (3) $b^2 + c^2 < a^2$, d. h. $64 \text{ cm}^2 + c^2 < 225 \text{ cm}^2$; $c^2 < 161 \text{ cm}^2$.

1. Fall: Wegen (1) und Dreiecksungleichung (1) gilt $17 \text{ cm} < c < 23 \text{ cm}$, und $\angle ACB$ ist stumpf.

2. Fall: Wegen (3) und Dreiecksungleichung

(3) gilt $7 \text{ cm} < c < \sqrt{161 \text{ cm}^2}$, und $\angle BAC$ ist stumpf.

Ma 8 ■ 1869 Der erste Radfahrer legt in x Stunden $12x \text{ km}$ zurück, der zweite $15x \text{ km}$. Wenn sich beide treffen, müssen sie zusammen die Gesamtstrecke von 63 km zurückgelegt haben; es gilt also:

$$\begin{aligned} 12x \text{ km} + 15x \text{ km} &= 63 \text{ km}, \\ 12x + 15x &= 63, \\ 27x &= 63, \\ x &= \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Die beiden Radfahrer treffen sich nach $\frac{7}{3}$ Stunden, das sind 2 Stunden 20 Minuten, also um 11.20 Uhr.

Der erste Fahrer hat dann $12 \cdot \frac{7}{3} \text{ km} = 28 \text{ km}$,

der zweite $15 \cdot \frac{7}{3} \text{ km} = 35 \text{ km}$ zurückgelegt; sie treffen sich demnach 28 km vom Ort A entfernt.

Ma 9 ■ 1870 Angenommen, Irina hat x Stück Negerküsse, y Stück Apfelkuchen und z Stück Bienenstich gekauft; dann gilt $x + y + z = 9$ und $25x + 35y + 30z = 265$.

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit 25 und subtrahieren sie danach von der zweiten:

$$\begin{aligned} 25x + 35y + 30z &= 265 \\ 25x + 25y + 25z &= 225 \\ \hline 10y + 5z &= 40, \\ 2y + z &= 8, \\ 2y &= 8 - z, \\ y &= 4 - \frac{z}{2}. \end{aligned}$$

Nur wenn z mit 2 oder 4 oder 6 belegt wird, erhalten wir für y eine positive ganze Zahl,

nämlich y gleich 3 oder 2 oder 1. Von den Tripeln (x, y, z) , nämlich $(4, 3, 2)$, $(3, 2, 4)$, $(2, 1, 6)$ erfüllt nur das erste Zahlentripel wegen $x > y > z$ die Bedingungen. Irina hat vier Negerküsse, 3 Stück Apfelkuchen und 2 Stück Bienenstich gekauft.

Ma 9 ■ 1871 Die Längen der Seiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ und $\overline{AB}$ seien mit a, b, c bezeichnet. Für den Flächeninhalt dieses Dreiecks gilt

$$\frac{1}{2} c \cdot h_c = A,$$

$$\frac{1}{2} c \cdot 3 = 12,$$

$$c = 8.$$

Ferner gilt

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b = A,$$

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b = 12,$$

$$a \cdot b = 24,$$

$$b = \frac{24}{a}.$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$a^2 + b^2 = c^2; \text{ also}$$

$$a^2 + \left(\frac{24}{a}\right)^2 = 64,$$

$$a^4 - 64a^2 + 576 = 0.$$

Wir setzen $a^2 = x$ und erhalten

$$x^2 - 64x + 576 = 0.$$

$$x_{1,2} = 32 \pm \sqrt{7 \cdot 64} = 32 \pm 8\sqrt{7} = 32 \pm 21,17$$

$$x_1 = 53,17 \quad x_2 = 10,83.$$

$$a_1 = \sqrt{53,17} = 7,29 \quad a_2 = \sqrt{10,83} = 3,29.$$

Daraus folgt weiter

$$b_1 = \frac{24}{7,29} = 3,29, \quad b_2 = \frac{24}{3,29} = 7,29.$$

Die Längen der Seiten betragen entweder

$$a = 7,29 \text{ cm}, b = 3,29 \text{ cm}, c = 8 \text{ cm} \text{ oder}$$

$$a = 3,29 \text{ cm}, b = 7,29 \text{ cm}, c = 8 \text{ cm}.$$

(Die Maßzahlen sind Näherungswerte!)

Ma 9 ■ 1872 Es gilt

$$\triangle ABM \sim \triangle BCM \sim \triangle CAM.$$

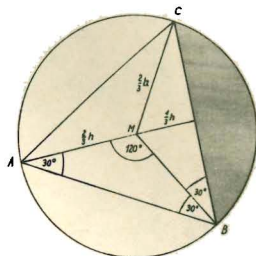
(Begründung siehe Bild)

Weiter gilt

$$A = \frac{1}{3} \pi r^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3}, \text{ und wegen}$$

$$r = \frac{2}{3} \cdot h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{3} \sqrt{3} \text{ gilt}$$

$$A = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a}{3} \sqrt{3}\right)^2 - \frac{a^2}{12} \sqrt{3} = \frac{\pi a^2}{9} - \frac{a^2}{12} \sqrt{3},$$

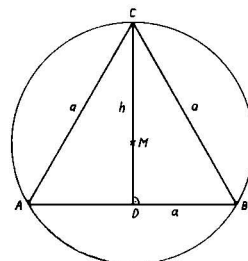


$$A = \left(\pi - \frac{3}{4} \sqrt{3}\right) \text{ cm}^2, \\ A \approx 1,84 \text{ cm}^2.$$

Der Flächeninhalt des schraffierten Flächenstückes beträgt etwa $1,84 \text{ cm}^2$.

Ma 9 ■ 1873 Im gleichseitigen Dreieck fallen Mittelsenkrechte, Seitenhalbierende, Winkelhalbierende und Höhe jeweils zusammen. Die Voraussetzungen seien durch die Skizze geben.

$$\text{Behauptung: } r^2 = \frac{1}{3} a^2$$



Beweis: Da sich die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 schneiden, gilt $\overline{CM} : \overline{MD} =$

2:1; es folgt $r = \frac{2}{3} \cdot h$. Da die Höhe im gleichseitigen Dreieck $h = \frac{a}{2} \sqrt{3}$ beträgt, folgt weiter

$$r = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3},$$

$$r = \frac{a}{3} \sqrt{3}, \text{ also } r^2 = \frac{a^2}{3}, \text{ w. z. b. w.}$$

Ma 10/12 ■ 1874 136^n läßt bei jedem $n \in \mathbb{N}$ und $n > 0$ bei Division durch 10 den Rest 6; 5^n läßt bei jedem $n \in \mathbb{N}$ und $n > 0$ bei Division durch 10 den Rest 5;

11^n läßt bei jedem $n \in \mathbb{N}$ und $n > 0$ bei Division durch 10 den Rest 1,

$136^n - 5^n - 11^n$ läßt bei jedem $n \in \mathbb{N}$ und $n > 0$ bei Division durch 10 den Rest $(6 - 5 - 1)$, d. i. der Rest 0, und damit ist der Ausdruck $136^n - 5^n - 11^n$ bei jedem $n \in \mathbb{N}$ und $n > 0$ durch 10 teilbar, w. z. b. w.

Ma 10/12 ■ 1875 Wir formen zunächst die Gleichung

$3 \cos(\beta + \gamma) + 6 \sin \alpha = 0$ wie folgt äquivalent um:

$$3 \cos(\beta + \gamma) + 6 \sin \alpha = 0 \quad | :3,$$

$$\cos(\beta + \gamma) + 2 \sin \alpha = 0,$$

und wegen $\cos(\beta + \gamma) = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ gilt $-\cos \alpha + 2 \sin \alpha = 0$,

$$2 \sin \alpha = \cos \alpha,$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2}.$$

Wegen $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$ und $\tan \alpha = \frac{a}{b}$ gilt nun

$\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$. Laut Aufgabenstellung gilt die Beziehung $b = a + 5$, also

$$\frac{a}{a+5} = \frac{1}{2},$$

$$2a = a + 5,$$

$$a = 5. \text{ Es folgt } b = 10.$$

Die Kathete a ist 5 cm und die Kathete b ist 10 cm lang. Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt

$$A = \frac{ab}{2}, \text{ also } A = \frac{5 \cdot 10}{2} \text{ cm}^2, A = 25 \text{ cm}^2.$$

Der Flächeninhalt dieses Dreiecks beträgt 25 cm².

Lösungen zu alpha-heiter 5/79:

Die letzte Spielmarke

Angenommen, Kreis 1 bleibt am Anfang frei, dann springt man folgendermaßen (die Zahlen zeigen den Sprung von – bis):

9–1, 7–9, 10–8, 21–7, 7–9, 22–8, 8–10, 6–4, 1–9, 18–6, 3–11, 16–18, 18–6, 30–18, 27–25, 24–26, 28–30, 33–25, 18–30, 31–33, 33–25, 26–24, 20–18, 23–25, 25–11, 6–18, 9–11, 18–6, 13–11, 11–3, 3–1.

Silbenrätsel

1. Einer – Eine, 2. Wissenschaft – Wissenschaft, 3. Spitze – ist, 4. Sektor – erst, 5. Diagonale – dann, 6. Thales – als, 7. Scheitelwinkelpaar – wirklich, 8. rechtwinklig – entwickelt, 9. zweitausendacht – anzusehen, 10. Winkel – wenn, 11. sieben – sie, 12. Halbierende – dahin, 13. Kegelmantel – gelangt, 14. Stifel – ist, 15. Scheitel – sich, 16. Quader – der, 17. Mathematik – Mathematik, 18. Ebene – bedienen, 19. Zunge – zu, 20. Körpernetz – können.

Eine Wissenschaft ist erst dann als wirklich entwickelt anzusehen, wenn sie dahin gelangt ist, sich der Mathematik bedienen zu können.

Unterhaltsame Logik

Figur 1 gehört an Stelle des Fragezeichens.

Kryptarithmetik

a) $11 + 11 = 22$; $17 + 17 = 34$; $28 + 28 = 56$;
b) Weil $AA \cdot A = DBA$, so endet A^2 mit der gleichen Ziffer wie A . Das ist für die Zahlen 1, 5 und 6 der Fall. Offensichtlich ist A ungleich 1, also muß A gleich 5 oder 6 sein. Wenn $A = 5$ wäre, so folgte aus der letzten Säule, daß $C = 0$ sein müßte. Das aber ist ausgeschlossen, weil C die erste Ziffer des Subtrahenden ist. Daher ist $A = 6$. Es ergibt sich $A = 6$, $B = 9$, $C = 2$ und $D = 3$.

c) Wegen $(1) \alpha \cdot \alpha = PE$ scheiden für α zunächst die Ziffern 1, 2, 3, 5 und 6 aus, da das Produkt zweistellig und nach Voraussetzung $\alpha \neq E$ gilt.

Von den verbleibenden Ziffern 4, 7, 8 und 9 entfallen wegen $(1) \alpha \cdot \alpha = PE$ und $(8) \alpha \cdot T = EP$ die Ziffern 4, 7 und 8, da bei Vertauschen der Ziffern in $(4 \cdot 4 =) 16$, $(7 \cdot 7 =) 49$ und $(8 \cdot 8 =) 64$ die zweistelligen Zahlen 61, 94 und 46 entstehen, die nicht als Produkte aus zwei einstelligen Faktoren darstellbar sind. Also gilt $\alpha = 9$, woraus folgt:

$P = 8$, $R = 7$, $O = 6$, $D = 5$, $U = 4$, $K = 3$, $T = 2$, $E = 1$

100 Jahre Mathematisch-Physikalisches Seminar



Festkolloquium an der
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Die altehrwürdige Rostocker Universität wurde vor 560 Jahren gegründet. In den Jahrhunderten ihres Bestehens haben namhafte Gelehrte der Alma mater Rostochiensis sich auch auf mathematisch-naturwissenschaftlichem Gebiet ausgezeichnet. So wirkten z. B. an der „Leuchte des Nordens“ – wie die Rostocker Universität genannt wurde – der Astronom Tycho de Brahe, der Universalgelehrte David Chyträus und der Mathematiker und Naturwissenschaftler Joachim Jungius. Nach dem Niedergang der Universität im 17./18. Jahrhundert kam es erst in der 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts für die Stadt Rostock aufgrund der aufstrebenden Schifffahrt zu einer stürmischen Aufwärtsentwicklung. Dieser wirtschaftliche Aufschwung war mit einer Belebung der Naturwissenschaften verbunden. Der großherzogliche „Landsherr“ Friedrich Franz kam am 27. Februar 1879 zu der „gnädigsten Entschließung . . . , ein mathematisch-physikalisches Seminarium zu Unserer Universität in Rostock zu errichten“.

Am 20. April 1979 wurde anlässlich der 100. Wiederkehr der Gründung des mathematisch-physikalischen Seminars eine Festveranstaltung in der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock durchgeführt. Nach der Eröffnungsrede durch Magnifizienz Prof. Dr. sc. phil. Brauer sprachen die Sektionsdirektoren Prof. Dr. sc. nat. Engel (siehe Foto) und Prof. Dr. sc. nat. Ulbricht über die Entwicklung der Sektionen Mathematik und Physik. Einige Gedanken seien aufgegriffen.

Die hohe Spezialisierung der Wissenschaftsdisziplinen, die u. a. zur Gründung selbständiger Sektionen Mathematik und Physik vor

10 Jahren führte, erfordert heute mehr denn je eine interdisziplinäre Zusammenarbeit. Deshalb kommt es in der Ausbildung darauf an, die Studenten zu befähigen, selbständig in die Wissenschaften einzudringen, ihre theoretischen Kenntnisse in enger Zusammenarbeit mit Wissenschaftlern anderer Bereiche anzuwenden.



An der Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock werden derzeit Diplommathematiker in den Fachrichtungen Numerische Mathematik und Mathematische Kybernetik und Rechentechnik sowie Diplomlehrer für Mathematik und Physik ausgebildet. Die Sektion Mathematik ist ferner für die Mathematikausbildung der naturwissenschaftlichen, technischen, landwirtschaftlichen und ökonomischen Sektionen verantwortlich. Zur Förderung des wissenschaftlichen Nachwuchses können die besten Studenten, die sich u. a. als Schüler auf mathematischen Olympiaden ausgezeichnet und ihre sehr guten Leistungen in den ersten Studienjahren unter Beweis stellen, als Beststudenten ausgezeichnet werden. Sie genießen eine individuelle Förderung z. B. nach einem Sonderstudienplan.

Herr Prof. Dr. sc. nat. Buros, Vorsitzender der Jury des Zentralen Komitees der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, wurde durch den Rektor mit der Ehrennadel der Wilhelm-Pieck-Universität ausgezeichnet.

FDJ-Vertreter beider Sektionen stellten u. a. Ergebnisse vor, die sie im Rahmen einer Preisaufgabe der FDJ erzielten.

Die Festveranstaltung klang mit zwei Fachvorträgen von Prof. Dr. habil. Berg über numerische Stabilität und Prof. Dr. sc. nat. Kelbg über die Entwicklung und die Perspektiven der Physik flüssiger Phasen aus.

Johanna und Wolfgang Moldenhauer

Fröhliche Mathematik

- Sieben Kinder sind in der Familie.
- Herr Müller hat drei Kinder. Davon sind zwei jünger als 14 Jahre.
- Das Hotel hat 29 Zweibett- und 41 Einbettzimmer.
- Die Masse des Holzwürfels mit der Kantenlänge 2 cm ist nicht doppelt, sondern achtmal so groß wie der andere Würfel. Sie beträgt also 6,4 g.
- Es sind 26 Minuten bis 8 Uhr. Es ist also gerade 7.34 Uhr.

Aufgaben aus der Praxis

Auf dieser Seite wurden Sachaufgaben aus Mathematiklehrbüchern der Jahre 1945 und 1952 sowie aus dem Jahre 1979 zusammengestellt. Aus ihnen soll ersichtlich werden, wie sich die gesellschaftlichen Verhältnisse in den letzten dreieinhalb Jahrzehnten grundlegend verändert haben.

1945

Aus einem Mathematiklehrbuch des Verlages Volk und Wissen, Verlagsgesellschaft m. b. H., Berlin/Leipzig:

- Ein Mann raucht an einem Tag 4 Zigarren. Wieviel sind das: a) in einer Woche; b) in einem Jahr; c) während 30 Jahren?
- Ein Kaufmann hat für 1754 Mark Waren verkauft und davon den 6. Teil verdient. Wie groß war sein Verdienst?
- Ein Landmann braucht, um ein Feld mit Roggen zu besäen, 159 kg. Er erntet 2253 kg; wie häufig war die Ernte?

Manuskripte von der 1. Sorte $\frac{3}{2}$ Dtzd., der 2. Sorte $7\frac{3}{4}$ Dtzd., von der 3. Sorte $\frac{1}{2}$ Dtzd., von der 4. Sorte $4\frac{2}{3}$ Dtzd. Wieviel . und Stck. sind das im ganzen? Mann mähen am 1. Tag 5 ha Sommeride; wieviel ha bringen in derselben Zeit lann fertig?

1952

Aus dem Mathematiklehrbuch des Verlages Volk und Wissen, Volkseigener Verlag, Berlin:

- Das Nationale Komitee für den Neuaufbau der Hauptstadt Deutschlands berichtete am 15. April 1952, daß seit dem 2. 1. 1952 3228 t Stahl und Schrott für den Wiederaufbau Berlins geborgen wurden. Rund 19,05% entfallen davon auf Nutstahl. Wieviel t Nutstahl konnten geborgen werden?

- In einem volkseigenen Gärtnereibetrieb wurden 240 Obstbäume gepflanzt, 12 davon sind nicht gekommen.

Wieviel Stück würden unter gleichen Bedingungen von 100 gepflanzten Bäumen nicht angewachsen sein?

- Beim Aufbau eines Neubauernhofes haben zwei Schulklassen eines Dorfes geholfen. In der einen Klasse beteiligten sich 36 von 40. In der anderen Klasse beteiligten sich 40 von 50.

Welche Klasse war aktiver?

- Beim Aufbau der Volkswerft Stralsund erfüllte der Nationalpreisträger Paul Sack die Tagesnorm von 600 vermauerten Ziegelsteinen um das Vierfache.

Wieviel Ziegelsteine vermauerte er täglich?

- Zum Bau eines Teilstücks eines Radioapparates war 0,80 m Schaltdraht nötig. Der Montagearbeiter Hempel ersann eine einfachere Konstruktion und kam nunmehr mit 0,67 m aus.

Wieviel Draht wurde bei 500 Geräten eingespart?

- Ein Bauer in Lindenthal lieferte im Erntemonat bereits 48,2 dz Getreide ab. Er hatte damit sein Ablieferungssoll bis auf 6,4 dz er-

chen. Zu ze.

?

n. Außer Tag 20 Pf.

: Arbeits-

?

gen in al- (1. 5 bis 8)

huljahr

1. Im Jahre 1952 wurden auf einem volkseigenen Gut 2468 dz Zuckerrüben geerntet. Im Jahre 1955 sollen 3150 dz auf derselben Fläche geerntet werden.

Auf wieviel Prozent soll der Ernteertrag gesteigert werden? (Runde auf eine Dezimalstelle!)

2. Berechne:

$$(6x + 2y) \cdot 3 + (36x^2 - 24xy) : 6x$$

3. Berechne:

$$(-7,2m + 5,9p - 0,7r) - (-11,9m + 8,6p + 7,5r)$$

4. Löse folgende Gleichung und mache die Probe!

$$15x - 23 - 5x = 12x - 17 - 4x$$

5. In einem Dreieck ist die Seite c 2 cm größer und die Seite a 1 cm kleiner als die Seite b . Die Summe der drei Seiten beträgt 19 cm. Berechne die Seite c !

6. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$c = 7 \text{ cm}, s_c = 5,8 \text{ cm und } a = 4,5 \text{ cm.}$$

Zeichne die Planfigur, konstruiere das Dreieck und beschreibe die Konstruktion!

1979

Aus einem Heft des alpha-Clubs der John-Schehr-OS, Leipzig, eingesetzt im Rahmen einer Wissensstraße auf dem Nationalen Jugendfestival in Berlin:

Klasse 4

In den Plattenwerken der DDR werden Großplatten für den Wohnungsbau produziert. Im Jahre 1975 wurden Großplatten für 58000 Wohnungen hergestellt. Die Anzahl der Wohnungen, für die im Jahre 1980 laut Plan Großplatten produziert werden sollen, ist um 16000 kleiner als die doppelte Anzahl des Jahres 1975.

Für wieviel Wohnungen sollen im Jahre 1980 Großplatten produziert werden?

Klasse 5

In der DDR werden täglich rund 690000 t Rohbraunkohle gefördert. Etwa der sechste Teil davon wird zu Briketts gepreßt. Wieviel Tonnen Briketts werden in der DDR in einem Jahr (365 Tage) etwa produziert?

Klasse 6

Im Jahre 1977 wurden von der Regierung der DDR aus gesellschaftlichen Fonds für den Sport, für das Erholungswesen und für die Kultur insgesamt 2,1 Mrd. Mark zur Verfügung gestellt. Dabei war der für die Kultur aufgewendete Betrag sechsmal so groß wie der für den Sport. Für das Erholungswesen wurde ein halb so großer Betrag bereitgestellt wie für den Sport und für die Kultur zusammen-

genommen. Welche Aufwendungen aus gesellschaftlichen Fonds entfielen im Jahre 1977 auf den Sport, auf das Erholungswesen und auf die Kultur?

Klasse 7

Die Elektroenergie-Erzeugung der DDR ist von entscheidender Bedeutung für die Volkswirtschaft. An Elektroenergie wurden in der DDR erzeugt:

14,6 Mrd. kWh im Jahre 1948,
34,9 Mrd. kWh im Jahre 1958,
63,2 Mrd. kWh im Jahre 1968,
96,8 Mrd. kWh im Jahre 1978.

Um wieviel Prozent konnte die Erzeugung von Elektroenergie seit 1948 jeweils im Zeitraum von 10 Jahren gesteigert werden?

Um wieviel Prozent konnte die Erzeugung von Elektroenergie im Jahre 1978 gegenüber dem Jahr 1948 gesteigert werden?

Unterhaltsame Psychologie

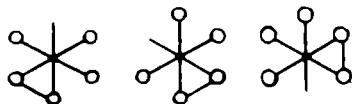
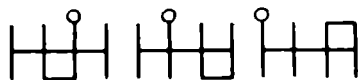
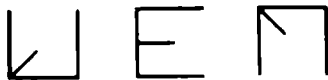
Die vier Probleme wurden aus dem Buch:
K. Platonow **Unterhaltsame Psychologie**
Verlag Progress Moskau/Urania-Verlag Leipzig ·
Jena · Berlin,
Preis 13,80 M, Bestell-Nr. 653 390 2 entnommen.

Problem 1

Auf der untenstehenden Zeichnung sind eine Reihe von Figuren aufgeführt, die sich innerhalb jeder Zeile nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit verändern? Wer findet sie?

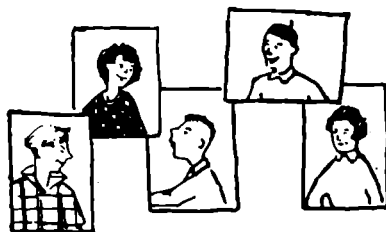
6 10 14 18 22

10 12 11 13 12



Problem 2

Präge dir diese Figur ein!

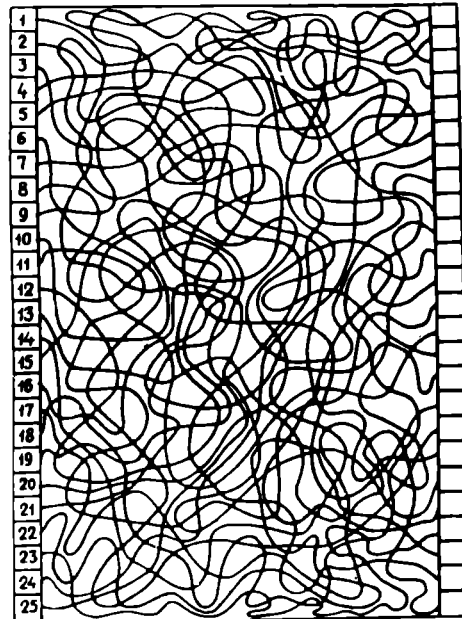


Identifiziere hier die Figuren aus der vorherigen Zeichnung!



Problem 3

Um jede dieser Linien von Anfang bis Ende mit dem Blick zu verfolgen, benötigt man Beständigkeit der Aufmerksamkeit.



Problem 4

Die verschiedenen Kombinationen der Lage der Augen, Lippen, Augenlider und Augenbrauen bestimmen den unterschiedlichen Ausdruck der Gesichter.

Erst einprägen, dann nachmachen!

Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



6

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
13. Jahrgang 1979
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dozent Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Diplom-Lehrer C.-P. Helmholz)

Redaktion:

StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132.626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: W. Berger, Hartha (S. 124); Archiv
Volk und Wissen (S. 124); Thies-Foto, Ox-
ford (S. 128); J. Lehmann, Leipzig (S. 129);
Scripta Mathematica, Universität New York
(S. 137)

Umschlaggestaltung nach einem Entwurf der
AG Zeichnen (siehe S. 129): W. Fahr, Berlin
Typographische Gestaltung: H. Tracksdorf,
Leipzig



Gesamtherstellung: INTERDRUCK

Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97

Redaktionsschluß: 1. August 1979

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 121 Ist 1111111111 eine Primzahl? Teil 2 [9]*
(Mit einem unveröffentlichten Manuskript von C. G. J. Jacobi)
Dr. H. Pieper, Akademie der Wissenschaften der DDR, Berlin
- 124 Eine Aufgabe von Prof. Dr. Carl Gustav Jacob Jacobi [10]
- 125 XXI. Internationale Mathematikolympiade [10]
London (1. bis 9. Juli 1979)
- 126 Wir arbeiten mit Mengen – Teil 3 [7]
Oberlehrer Dr. W. Fregin, Sektion Mathematik des IfL N. I. Krupskaja, Leipzig
- 129 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt
Über eine AG Mathematik der EOS Humboldt Erfurt [10]
Eine AG Zeichnen stellt sich vor [4]
- 130 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
Speziell für Klasse 5/6
Verteilungen [5]
Prof. Dr. J. Flachsmeyer, Sektion Mathematik der E.-M.-Arndt-Universität, Greifswald
- 131 Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen [6]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/Th. Scholl, Berlin
- 132 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Aufgaben zu Mathematik · Physik · Chemie
- 134 Kleine Knotenschule [5]
aus: Für Dich 12/79
- 135 Wir basteln ein Modell von der Bienenzelle [5]
Dr. E. Schröder, Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden
- 136 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/H. Pätzold, Waren/Müritz
- 138 XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [5]
Aufgaben und Lösungen der Kreisolympiade (14. 11. 1979)
- 143 Lösungen [5]
- III. U.-Seite: *alpha*-Wettbewerb 1978/79
Preisträger · Kollektive Beteiligung · Statistik
- IV. U.-Seite: Winterfreuden [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Ist 11 111 111 111 eine Primzahl?

(Mit einem unveröffentlichten Manuskript von C. G. J. Jacobi)

Teil 2

Der Rechenkünstler Z. Dase

Für viele zahlentheoretische Untersuchungen ist es nützlich, die Primfaktoren der natürlichen Zahlen und die Primzahlen unterhalb einer bestimmten Grenze zu kennen. Man hat sich seit langem darum bemüht, diese in Tabellen zusammenzustellen. Bis um die Jahrhundertwende besaß man solche Faktorentafeln bis zur 9. Million einschließlich. Die Faktorentafeln für alle Zahlen der 7., 8. und 9. Million mit den darin vorkommenden Primzahlen wurden von Zacharias Dase (23.6.1824 bis 11.9.1861) ermittelt. (Sie erschienen in drei Bänden zwischen 1862 und 1865 in Hamburg.)

Bereits mit 15 Jahren trat Dase öffentlich als Schnellrechner und Rechenkünstler in deutschen Städten auf. In Wiesbaden multiplizierte er (im Kopf) eine 60ziffrige Zahl mit einer anderen 60ziffrigen Zahl in 2 Stunden 59 Minuten. In München berechnete er die Quadratwurzel aus einer 100ziffrigen Zahl in 52 Minuten. Er ermittelte den Kreisumfang eines Kreises mit dem Durchmesser 1 (also die Zahl π) auf 200 Dezimalstellen. Durch sein Rechentalent und Zahlengedächtnis wurde er bei allen öffentlichen Auftritten von seinem Publikum staunend bewundert.

Dem ersten Mathematiker jener Zeit, Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855) in Göttingen, wurde die Hilfe des Rechenkünstlers angeboten. Doch Gauß, der selbst eine außergewöhnliche vor allem durch die Beschäftigung mit der Zahlentheorie erworbene Rechenfertigkeit besaß, lehnte die Hilfe von jemand, der bloß mechanische Rechenfertigkeit besäße, entschieden ab.

In einem Brief an seinen Freund, den Astronomen H. C. Schumacher (1780 bis 1850), schrieb er: „Man muß hier zwei Dinge unterscheiden: ein bedeutendes Zahlengedächtnis und eigentliche Rechenfertigkeit. Dies sind eigentlich zwei ganz voneinander unabhängige Eigenschaften, die verbunden sein können, aber es nicht immer sind. Es kann einer ein sehr starkes Zahlengedächtnis haben, ohne gut rechnen zu können... Umgekehrt kann jemand eine superiöre Rechenfähigkeit haben ohne ein ungewöhnlich starkes Zahlengedächtnis. Das letztere besitzt Herr Dase ohne Zweifel in eminentem Grade;

ich gestehe aber, daß ich darauf sehr wenig Wert legen kann. Rechnungsfähigkeit kann nur danach taxiert werden, ob jemand auf dem Papier ebenso viel und mehr leistet als andere.“

Gefördert durch A. v. Humboldt (1769 bis 1859) konnte Dase seit Mitte 1846 für etwa $1\frac{1}{2}$ Jahre sein Talent für verschiedene wissenschaftliche Zwecke der Akademie der Wissenschaften in Berlin zur Verfügung stellen. So führte Dase Rechnungen für die Mathematiker C. G. J. Jacobi (1804 bis 1851) und P. G. L. Dirichlet (1805 bis 1859), für den Physiker H. W. Dove (1803 bis 1879) und für den Geodäten J. J. Baeyer (1794 bis 1885) aus.

In diese Zeit fällt sicher auch Dases Erkenntnis, daß die Zahl 11 111 111 111 keine Primzahl ist. Sechs Stunden intensiven Kopfrechnens waren für ihn dazu nötig. Welcher Methode hatte er sich dabei bedient?

C. G. J. Jacobi

Diese Frage stellte sich auch der neben Gauß größte deutsche Mathematiker in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts, Carl Gustav Jacob Jacobi. In Potsdam geboren, studierte er in Berlin und wirkte dann als Mathematikprofessor in Königsberg (Kaliningrad). Seit 1844 war er an der Akademie der Wissenschaften in Berlin tätig. Zusammen mit Dirichlet und dem Geometer J. Steiner (1796 bis 1863) entfaltete Jacobi hier eine mathematische Tätigkeit, die würdig die im 18. Jahrhundert durch G. W. Leibniz (1646 bis 1716), L. Euler (1707 bis 1783), J. H. Lambert (1728 bis 1777) und J. L. Lagrange (1736 bis 1813) begründete Tradition fortsetzte. (Berlin wurde wieder eine Hochburg der Mathematik.) Jacobi starb in seinem 47. Lebensjahr.

In seinem Nachlaß, der im Archiv der Akademie der Wissenschaften der DDR in Berlin aufbewahrt ist, befindet sich unter zahlreichen unveröffentlichten, meist unvollendeten Manuskripten eines, das der Frage nach dem „Geheimnis“ des von Dase erzielten Resultates über die Zahl 11 111 111 111 gewidmet ist. Auf dem Umschlag findet sich der Titel der Arbeit: „Untersuchung, ob die Zahl $\frac{10^{11}-1}{9}$ = 11 111 111 111 eine Primzahl ist oder nicht. Ein Kuriosum, veranlaßt durch Dase.“

Die Idee für den Nachweis, daß 11 111 111 111 keine Primzahl ist

Gewisse Kunstgriffe, deren sich viele Rechenakrobaten bedienen, finden ihre Begründung in dem Fermatschen Satz (A3, siehe 1. Teil): Ist p eine Primzahl und a eine natürliche Zahl, so ist stets $a^p - a$ durch p teilbar. Hier wird nur der Spezialfall $a=2$ gebraucht: Ist p eine Primzahl, so läßt 2^p durch p dividiert den Rest 2. Wenn somit (für eine natürliche Zahl n) 2^n durch n dividiert nicht den Rest 2 läßt, so ist n keine Primzahl.

Dieses wird für $n=11\,111\,111\,111$ gezeigt.

Es soll die Methode zunächst für $n=111$ beschrieben werden. (Es kommt uns dabei nicht darauf an, auf diese – für 111 umständliche – Weise zu zeigen, daß 111 keine Primzahl ist, das ist offensichtlich – 111 ist durch 3 teilbar, vielmehr soll die Methode an dem Beispiel $n=111$ verständlich gemacht werden.)

Wir benutzen dabei die folgenden zwei Aussagen I und II.

I. Der Rest eines Produktes bei der Division durch n ist gleich dem Rest des Produktes der Reste der einzelnen Faktoren bei der Division durch n .

Beispiele: $n=11$. Gesucht ist der Rest des Produktes $13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19$ bei der Division durch 11.

Die Reste der Faktoren 13, 15, 17 bzw. 19 sind 2, 4, 6 bzw. 8. Der Rest des Produktes $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8$ der Reste der Faktoren ist 10. Dies ist auch der Rest von $13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19$ bei der Division durch 11.

Beweis von I.: Es sei $a=a_1 a_2 \dots a_m$ das gegebene Produkt. Haben die Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_m$ die Reste $r_1, r_2, \dots, r_m$ ($0 \leq r_1 < n, \dots, 0 \leq r_m < n$) bei der Division durch n , so gilt $a_1 = q_1 n + r_1, a_2 = q_2 n + r_2, \dots, a_m = q_m n + r_m$ (mit natürlichen Zahlen $q_1, \dots, q_m$). Daher ist $a_1 a_2 \dots a_m$ die Summe eines Vielfachen von n und $r_1 r_2 \dots r_m$:

$a = a_1 a_2 \dots a_m = qn + r_1 r_2 \dots r_m$. Ist der Rest von $r_1 r_2 \dots r_m$ bei der Division durch n gleich r ($0 \leq r < n$), so wird $r_1 r_2 \dots r_m = q'n + r$ (mit einer natürlichen Zahl q') und damit $a = (q + q')n + r$, d. h. r tatsächlich der Rest von a bei der Division durch n .

II. Ist r der Rest der Zahl 2^{2^k} bei der Division durch n ($0 \leq r < n$), so ist der Rest von $2^{2^{k+1}}$ bei der Division durch n gleich dem Rest von r^2 bei der Division durch n .

Beispiele: $2^{2^3} = 2^8 = 256$ läßt bei der Division durch 11 den Rest 3 ($256 = 23 \cdot 11 + 3$). Der Rest von $2^{2^4} = 2^{16} (= 65536)$ ist $3^2 = 9$. Der Rest von $2^{2^5} = 2^{32} (= 4294967296)$ ist gleich dem Rest von $9^2 = 81$ bei der Division durch 11, d. h., er ist 4. Der Rest von $2^{2^6} = 2^{64}$ ist gleich dem Rest von $4^2 = 16$ bei der Division durch 11, d. h., er ist 5.

Beweis von II.: Die Behauptung folgt aus $2^{2^{k+1}} = 2^{2^k} = (2^{2^k})^2$ und aus I. (angewendet auf die zwei gleichen Faktoren 2^{2^k}).

Wir zeigen nun, daß 2^{111} bei der Division

durch 111 den Rest 8 (also nicht den Rest 2) läßt.

Es ist $111 = 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$;
daraus folgt
 $2^{111} = 2^{2^6} \cdot 2^{2^5} \cdot 2^{2^3} \cdot 2^{2^2} \cdot 2^{2^1} \cdot 2^{2^0}$.

Mittels der Aussage II erhält man unschwer die Tabelle 4. Aus ihr ergibt sich (mittels der Aussage I) der Rest von 2^{111} als Rest von $2 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 34 \cdot 7 \cdot 19$ bei der Division durch 111, und dieser ist 8 (Tabelle 5).

k	Rest von 2^{2^k} bei der Division durch 11	Quadrat des Restes
0	2	4
1	4	16
2	16	256
3	34	1156
4	46	2116
5	7	49
6	49	—

Tabelle 4

Jacobis Manuskript

Nach diesen Vorbereitungen ist es nicht schwer, die Ausführungen Jacobis zu verstehen. Der Text des nachgelassenen Manuskripts (Jacobi-Nachlaß II/27m, Archiv der AdW der DDR) lautet [Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf die nachfolgenden Anmerkungen]:

Zahl	Die Zahl hat denselben Rest bei der Division durch 111 wie die Zahl	Rest bei der Division durch 111
$2 \cdot 4$	$2 \cdot 4$	8
$2 \cdot 4 \cdot 16$	$8 \cdot 16$	17
$2 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 34$	$17 \cdot 34$	23
$2 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 34 \cdot 7$	$23 \cdot 7$	50
$2 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 34 \cdot 7 \cdot 49$	$50 \cdot 49$	8

Tabelle 5

Untersuchung, ob die Zahl 1111111111 eine Primzahl ist oder nicht

Wenn 2^N durch N dividiert nicht den Rest 2 läßt, so ist N keine Primzahl. Setzt man N durch Addition aus Potenzen von 2 zusammen, so hat man, um diesen Rest zu finden, nur nach und nach die Reste der Zahlen von der Form 2^{2^n} zu suchen und diese miteinander zu multiplizieren. Man wird daher zu wiederholten Malen eine Zahl zu quadrieren, das Quadrat durch N zu dividieren, den Rest wieder zu quadrieren, das Quadrat durch N zu dividieren, den Rest zu quadrieren haben u.s.f.

Bei der graden Leichtigkeit, mit welcher Hr. Dase diese Operationen ausführt, konnte er in 6 Stunden erkennen, daß die Zahl $\frac{10^{11}-1}{9}$ keine Primzahl ist. Ich will alle

hierzu nötigen Rechnungsergebnisse hersetzen, wie sie von Herrn Dase im Kopf gefunden sind.

Wenn man nach und nach die möglichst höchsten Potenzen von 2 so lange addiert, aber ihre Summe kleiner als $N = 1111111111$ bleibt, so erhält man [1]:

$$\begin{aligned}
 2^{33} &= 8 \ 5 \ 8 \ 9 \ 9 \ 3 \ 4 \ 5 \ 9 \ 2 \\
 2^{31} &= 2 \ 1 \ \dots \\
 &\quad 1 \ 0 \ 7 \ \dots \\
 2^{28} &= 2 \ 6 \ \dots \\
 &\quad 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \\
 2^{26} &= 6 \ 7 \ \dots \\
 &\quad 1 \ 1 \ 0 \ 7 \ \dots \\
 2^{25} &= 3 \ 3 \ \dots \\
 &\quad 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 6 \ \dots \\
 2^{22} &= 4 \ 1 \ \dots \\
 &\quad 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 7 \ \dots \\
 2^{18} &= 2 \ 6 \ \dots \\
 &\quad 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 9 \ \dots \\
 2^{17} &= 1 \ 3 \ \dots \\
 &\quad 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 4 \ \dots \\
 2^{12} &= 4 \ 0 \ \dots \\
 &\quad 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 8 \ \dots
 \end{aligned}$$

Man hat daher

$$\begin{aligned}
 1111111111 \\
 &= 2^{33} + 2^{31} + 2^{28} + 2^{26} + 2^{25} + 2^{22} + 2^{18} \\
 &\quad + 2^{17} + 2^{12} + 2^{11} + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^2 + 2^1 \\
 &\quad + 2^0.
 \end{aligned}$$

Es folgen jetzt die Reste R , welche die Zahlen 2^{2^n} von 2^{64} an durch N dividiert lassen: neben jedem steht sein vollständiges Quadrat Q . Den Rest, welchen dasselbe durch N dividiert läßt, gibt das nächstfolgende R .* (* Herr Dase ging hierbei von dem Werte $2^{64} = 184467 \dots$ aus, welcher durch 111 ... dividiert den Quotient 166 ... mit dem Rest 722 ... gibt.) [2]

Die noch übrige Rechnung besteht darin, daß die Reste, welche die Potenzen $2^{2^{33}}, 2^{2^{31}}, \dots$, etc. durch N dividiert lassen, nach und nach mit-

einander multipliziert werden, indem man nach jeder Multiplikation wieder den Rest nimmt, welchen das Produkt durch N dividiert läßt.

Diese Produkte und Reste gibt das folgende Schema:

$$\begin{aligned}
 2^{2^{33}} &\equiv 349 \dots \\
 2^{2^{31}} &\equiv 73 \dots \\
 \hline
 288 \dots & \\
 &\quad 51129 \\
 2^{2^{28}} &\equiv 374 \dots \\
 \hline
 19 \dots &
 \end{aligned}$$

$$1496324899 \ [3]$$

Man sieht daraus, daß für $N = 1111111111$ $2^N - 1$ durch N dividiert nicht den Rest 1, sondern den Rest 14966324899 [3] läßt, und daher 1111111111 keine Primzahl ist.

Ich bemerke noch, daß für die hier betrachtete Zahl 1111111111 die Divisionen sich auf eine einfache Addition und Subtraktion reduzieren. Denn, da 10^{11} durch dieselbe dividiert den Rest 1 läßt [4], kann man, wenn man bloß den Rest wissen will, den eine durch 1111111111 dividierte Zahl läßt, von derselben die auf die ersten 11 Stellen folgenden abschneiden und zu der übrigbleibenden Zahl addieren. [5]

Tabelle 6

n	R	Q
6	7227352390	52234622569238712100
32	9765068449	95356561813655265601
33	3497720108	NB. Hier keine Zahl.

Bei der ersten zu dividierenden Zahl [6]
18 446 744 073 709 551 616 hat man auf diese
Weise

$$\begin{array}{r} 73709551616 \\ + 184467440 \\ \hline 73894019056 \\ - 66666666666 \\ \hline \end{array}$$

Rest 7227352390, wie oben. J. [7]

Anmerkungen

[1] Im Manuskript sind die fehlenden Ziffern nicht angegeben. Man vergleiche das Ergebnis mit der Tabelle 7 der Potenzen von 2.

[2] In der Tabelle 8 sind die Reste der Zahlen 2^{2^n} für $n=0, 1, 2, \dots, 33$ angegeben.

[3] In der Tabelle 9 sind die Reste angegeben. Wir erhalten abweichend von Jacobi 2992649798 als Rest von $2^{11111111111}$ bei der Division durch 1111111111.

Die Werte in den Tabellen 8 und 9 wurden freundlicherweise von Herrn Arlt auf einer EDVA im Rechenzentrum der Sternwarte Babelsberg errechnet.

[4] $10^{11} = 9 \cdot 11111111111 + 1$

[5] Diesen Rechenvorteil kann man auch bei den Divisionen durch 11, 111, 1111, ... anwenden.

Dazu einige Beispiele: Es soll der Rest von 5123 bei der Division durch 11 bestimmt werden. Es ist $10^2 = 9 \cdot 11 + 1$, d. h. $10^2 = 100$ läßt den Rest 1, folglich 200 den Rest 2, ..., 5100 denselben Rest wie 51. Man hat für 5123 den Rest 8:

$$\begin{array}{r} 23 \\ + 51 \\ \hline 74 \\ - 66 (= 6 \cdot 11) \\ \hline \end{array}$$

Rest 8

(In der Tat, es ist $5123 = 465 \cdot 11 + 8$.)

Es soll der Rest von 12345678 bei der Division durch 111 bestimmt werden. Es ist $1000 = 9 \cdot 111 + 1$, d. h., 1000 läßt den Rest 1, folglich 12345000 denselben Rest wie 12345. Man hat für 12345678 den Rest 36:

$$\begin{array}{r} 12345 \\ + 678 \\ \hline 13023 \\ - 12987 (= 117 \cdot 11) \\ \hline \end{array}$$

(In der Tat, es ist $12345678 = 111222 \cdot 111 + 36$.)

Als Rest von 13023 bei der Division durch 111 ergibt sich 36:

$$\begin{array}{r} 13 \\ + 23 \\ \hline 36 \end{array}$$

[6] $2^{2^6} = 2^{64} = 2^{32} \cdot 2^{32} = 18446744073709551616$.

[7] J. – Kurzzeichen für „Jacobi“ (Unterschrift).

Weitere Primzahlzerlegungen

Die Zahl 11111111111 ist also keine Primzahl. Ihre Primzahlzerlegung ist $21649 \cdot 513239$.

Tabelle 7 (Potenzen 2^k von 2)

k	2^k
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768
16	65536
17	131072
18	262144
19	524288
20	1048576
21	2097152
22	4194304
23	8388608
24	16777216
25	33554432
26	67108864
27	134217728
28	268435456
29	536870912
30	1073741824
31	2147483648
32	4294967296
33	8589934592

Tabelle 8

n	Reste von 2^{2^n} bei der Division durch 1111111111
0	2
1	4
2	16
3	256
4	65536
5	4294967296
6	7227352390
7	3094391659
8	6051191545
9	3534545105
10	10515502227
11	9369939622
12	9692349458
13	5821199033
14	4361220893
15	11063253259
16	7331410141
17	539580072
18	9657992206
19	7645070126
20	9819904626
21	9144949589
22	8409792173
23	4870419084
24	9584164432
25	4976889147
26	3996304087
27	377052477
28	3746590548
29	1169976378
30	2869465109
31	739609070
32	9765068449
33	3497720108

Tabelle 9

Zahl	Rest bei der Division durch 1111111111
2^{2^0}	$2 = r_1$
$r_1 \cdot 2^{2^1}$	$8 = r_2$
$r_2 \cdot 2^{2^2}$	$128 = r_3$
$r_3 \cdot 2^{2^3}$	$2878883707 = r_4$
$r_4 \cdot 2^{2^4}$	$8038661628 = r_5$
$r_5 \cdot 2^{2^5}$	$10289303406 = r_6$
$r_6 \cdot 2^{2^{11}}$	$956387382 = r_7$
$r_7 \cdot 2^{2^{12}}$	$1436213141 = r_8$
$r_8 \cdot 2^{2^{17}}$	$1146986783 = r_9$
$r_9 \cdot 2^{2^{18}}$	$10709789192 = r_{10}$
$r_{10} \cdot 2^{2^{22}}$	$40043007 = r_{11}$
$r_{11} \cdot 2^{2^{25}}$	$6953537925 = r_{12}$
$r_{12} \cdot 2^{2^{26}}$	$6842661773 = r_{13}$
$r_{13} \cdot 2^{2^{28}}$	$11027977012 = r_{14}$
$r_{14} \cdot 2^{2^{31}}$	$10797151647 = r_{15}$
$r_{15} \cdot 2^{2^{33}}$	2992649798

In der Tabelle 10 (nach S. Rösch, Bild der Wissenschaft, Heft 12, 1977), deren Zahlenwerte ebenfalls mit Hilfe des Computers gefunden wurden, werden abschließend die Primzahlzerlegungen der nur aus der Ziffer 1 (bis zu 33ziffrigen) natürlichen Zahlen angegeben. Als Primzahl erweisen sich darunter nur die 19ziffrige Zahl $\frac{10^{19}-1}{9}$ und die

23ziffrige Zahl $\frac{10^{23}-1}{9}$.

H. Pieper

Anzahl der Ziffern	Zahl	Primzahlzerlegung
1		
2	11	11
3	111	3·37
4	1111	11·101
5	11111	41·271
6	111111	3·7·11·13·37
7	1111111	239·4649
8	11111111	11·73·101·137
9	111111111	3·3·37·333667
10	1111111111	11·41·271·9091
11	11111111111	21649·513239
12	111111111111	3·7·11·13·37·101·9901
13	1111111111111	53·79·265371653
14	11111111111111	11·239·4649·909091
15	111111111111111	3·31·37·41·271·2906161
16	1111111111111111	11·17·73·101·137·5882353
17	11111111111111111	2071723·5363222357
18	111111111111111111	3·3·7·11·13·19·37·52579·333667
19	1111111111111111111	1111111111111111
20	11111111111111111111	11·41·101·271·3541·9091·27961
21	111111111111111111111	3·37·43·239·1933·4649·10838689
22	1111111111111111111111	11·11·23·4093·8779·21649·513239
23	11111111111111111111111	11111111111111111111
24	111111111111111111111111	3·7·11·13·37·73·101·137·9901·99990001
25	1111111111111111111111111	41·271·21401·25601·182521213001
26	11111111111111111111111111	11·53·79·859·265371653·1058313049
27	111111111111111111111111111	3·3·3·37·757·333667·440334654777631
28	1111111111111111111111111111	11·29·101·239·281·4649·909091·121499449
29	11111111111111111111111111111	3191·16763·43037·62003·77843839397
30	111111111111111111111111111111	3·7·11·13·31·37·41·211·241·271·2161· 9091·2906161
31	11111111111111111111111111111111	2791·6943319·57336415063790604359
32	1111111111111111111111111111111111	11·17·73·101·137·353·449·641·1409· 69857·5882353
33	111111111111111111111111111111111111	3·37·67·21649·513239·1344628210313298373

Tabelle 10

Der *alpha*-Club der J.-Schehr-OS Leipzig (Leitung: J. Lehmann, Chefredakteur *alpha*) auf dem Pressefest der Leipziger Volkszeitung

in Aktion. Über 2000 Schüler (oft gemeinsam mit ihren Eltern) beteiligten sich an der *Wissensstraße Mathematik* (siehe Foto).



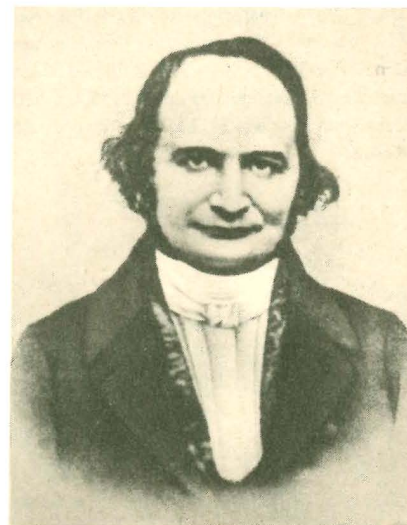
Eine Aufgabe von Prof. Dr.

Carl Gustav Jacob Jacobi

Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin

Der 10. Dezember dieses Jahres ist der 175. Jahrestag der Geburt dieses bedeutenden Mathematikers. (In Heft 1/80 veröffentlichen wir eine umfassende Biographie.)

Als Quelle für diese Aufgabe wurde eine bisher unveröffentlichte Arbeit von C. G. J. Jacobi benutzt, deren Manuskript Jacobi nach November 1850 angefertigt hat, deren Titel „Über die Bestimmung der Anzahl der Primzahlen, welche es bis zu einer gegebenen Grenze gibt“ lautet und die sich im Jacobi-Nachlaß des Archivs der Akademie der Wissenschaften der DDR befindet.



▲ 1908 ▲ a) Wieviel Zahlen gibt es unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 250, welche durch keine der Primzahlen 2, 3, 5, 7 teilbar sind?

b) Wieviel Zahlen gibt es unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 10000, welche durch keine der Primzahlen 3, 11, 4001 teilbar sind?

c) Es seien $a, b, c, \dots, p$ beliebige voneinander verschiedene Primzahlen und $N \geq 1$ eine natürliche Zahl. Bestimme die Anzahl derjenigen unter den natürlichen Zahlen von 1 bis N , welche durch keine der Primzahlen $a, b, c, \dots, p$ teilbar sind!

Hinweis: Benutze, daß die Anzahl der Zahlen bis N , welche durch eine Zahl k teilbar sind, dem Bruch $\frac{N}{k}$ oder der nächst kleineren ganzen Zahl gleich ist!

XXI. Internationale Mathematikolympiade

London (1. bis 9. Juli 1979)



WESTFIELD COLLEGE
(University of London)

Aufgaben

1. Seien p und q natürliche Zahlen, so daß

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$$

gilt. Man beweise, daß p durch 1979 teilbar ist. (6 Punkte)

2. Gegeben sei ein Prisma mit den Fünfecken $A_1A_2A_3A_4A_5$ bzw. $B_1B_2B_3B_4B_5$ als Grund- bzw. Deckfläche. Jede Seite der beiden Fünfecke sowie jede Verbindungsstrecke A_iB_j für alle $i, j = 1, 2, \dots, 5$ sei entweder rot oder grün gefärbt. Jedes Dreieck, dessen Ecken Eckpunkte des Prismas sind und dessen drei Seiten gefärbt sind, hat zwei Seiten verschiedener Farbe.

Man zeige, daß alle 10 Seiten der Grund- und Deckfläche die gleiche Farbe erhalten. (7 Punkte)

3. In der Ebene seien zwei sich schneidende Kreislinien k_1, k_2 gegeben. A sei einer der beiden Schnittpunkte.

Zwei Massenpunkte P_1 bzw. P_2 bewegen sich mit konstanten Geschwindigkeiten im gleichen Drehsinn auf k_1 bzw. k_2 . Sie beginnen gleichzeitig in A und treffen nach einem Umlauf wieder gleichzeitig in A ein.

Man zeige, daß es einen festen Punkt P in der Ebene gibt, für den in jedem Zeitpunkt der Bewegung gilt:

$$\overline{PP_1} = \overline{PP_2}. \quad (7 \text{ Punkte})$$

4. Gegeben seien ein Punkt P in der Ebene π und ein Punkt Q außerhalb der Ebene π .

Bestimme alle Punkte R der Ebene π , für die der Quotient

$$\frac{\overline{QP} + \overline{PR}}{\overline{QR}}$$
 ein Maximum ist! (6 Punkte)

5. Man bestimme alle reellen Zahlen a , für die es nichtnegative reelle Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 gibt, die den Bedingungen

$$\sum_{i=1}^5 ix_i = a, \quad \sum_{i=1}^5 i^3 x_i = a^2$$

und $\sum_{i=1}^5 i^5 x_i = a^3$ genügen. (7 Punkte)

6. Es seien A und E zwei gegenüberliegende Eckpunkte eines regulären 8ecks. In A sitzt ein Frosch. Von jeder Ecke des 8ecks, mit Ausnahme von E , darf er jeweils zu einer der beiden Nachbarecken hüpfen. Sobald er die Ecke E erreicht hat, bleibt er dort sitzen. Es sei a_n die Anzahl der unterscheidbaren Wege, die Ecke E von der Ecke A aus in genau n Sprüngen zu erreichen.

Beweise, daß für $n = 1, 2, 3, \dots$ gilt:

$$a_{2n-1} = 0, \quad a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x^{n-1} - y^{n-1}),$$

wobei $x = 2 + \sqrt{2}$ und $y = 2 - \sqrt{2}$ ist!

Bemerkung: Ein Weg aus n Sprüngen ist eine Folge $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ von Eckpunkten, so daß

- (i) $P_0 = A, P_n = E$,
- (ii) für alle i mit $0 \leq i \leq n-1$ ist P_i von E verschieden,
- (iii) für alle i mit $0 \leq i \leq n-1$ sind P_i und P_{i+1} benachbarte Eckpunkte. (7 Punkte)

Zur DDR-Mannschaft gehörten Bernd Kreußler und Frank Eisenhaber von der Spezialschule Mathematik/Physik der Berliner Humboldt-Universität, Thomas Gundermann (2. Preis) von der EOS *H. Pistor* Sonneberg, Lutz Dietrich (2. Preis) aus der Spezialklasse der TH Karl-Marx-Stadt, Uwe Szyszka (3. Preis) von der EOS *Friedrich Engels* Neubrandenburg, Steffen Zopf von der EOS *Karl Marx* Leipzig, Bodo Heise (3. Preis) von der F.-J.-Curie-OS Görlitz sowie Andreas Kasparek von der ABF *Walter Ulbricht* Halle.

Teilnehmerland	erreichte Punkte									insgesamt	1. Preis	2. Preis	3. Preis
Österreich	20	23	13	16	21	15	19	25	152				4
Belgien	3	3	22	6	2	6	7	17	66				1
Bulgarien	9	20	23	24	24	23	5	22	150				5
Brasilien	5	5	2	4	3	—	—	—	19				
Kuba	10	5	11	9	—	—	—	—	35				
ČSSR	16	20	24	17	23	40	12	26	178	1	0		4
BRD	21	14	35	27	39	30	34	29	235	1	5		1
DDR	33	13	31	20	19	19	26	19	180		2		2
Frankreich	14	12	15	19	37	11	28	19	155	1	1		1
Großbritannien	23	23	34	30	32	34	21	21	218		4		4
Griechenland	6	2	7	6	7	5	3	21	57				1
Ungarische VR	15	20	16	18	34	22	17	34	176		2		2
Israel	13	4	28	16	11	20	12	15	119				2
Niederlande	22	10	17	18	11	8	11	33	130		1		1
VR Polen	13	9	8	24	21	29	29	27	160		2		3
SR Rumänien	35	23	17	33	32	28	39	33	240	1	3		2
Schweden	14	10	17	29	13	22	9	29	143		2		1
Finnland	16	18	14	1	4	6	7	23	89				1
UdSSR	19	27	35	34	36	40	36	40	267	2	4		1
USA	17	9	27	17	39	24	32	34	199	1	2		2
SR Vietnam	32	29	33	40*	—	—	—	—	134	1	3		
SFR Jugoslawien	13	27	13	11	23	26	24	35	172		1		4
Luxemburg	7	—	—	—	—	—	—	—	7				

* Ein Schüler der vietnamesischen Mannschaft erhielt einen Sonderpreis für die elegante Lösung der Aufgabe 3.

8 32 42

Wir arbeiten mit Mengen

Teil 3

Weitere Arten von Abbildungen

Es gibt noch weitere Arten von Abbildungen: So liegt z. B. eine Abbildung *von* M_1 *in* M_2 genau dann vor, wenn $Vb = M_1$ und $Nb \subset M_2$ ist; es liegt eine Abbildung *aus* M_1 *auf* M_2 genau dann vor, wenn $Vb \subset M_1$ und $Nb = M_2$ ist. An der Abbildung F_2 erkennen wir, daß Peter nicht nur das Bohnern, sondern auch das Heizen erledigt. Ihm ist also nicht genau eine Arbeit zugeordnet; er erledigt zwei Arbeiten. Gisela hingegen geht nur einkaufen und bekommt keine weiteren Aufträge; ihr ist genau eine Arbeit zugeordnet.

Mit Hilfe dieses Beispiels werden wir bestimmen nachstehende Definition erfassen, die eine besondere Eigenschaft von Abbildungen widerspiegelt:

Wenn *jedem* Urbild *genau ein* Bild zugeordnet ist, so liegt eine *eindeutige* Abbildung vor; und jede eindeutige Abbildung heißt *Funktion*.

F_2 ist also *keine* Funktion. Auch F_1 ist keine eindeutige Abbildung. In F_2 ist Peter *nicht* genau eine Arbeit zugeordnet, und in F_1 sind Vater und auch Mutter jeweils *nicht* genau eine Arbeit zugeordnet.

F_1 ist demzufolge eine *nicht eindeutige* Abbildung *von* M_1 *auf* M_2 ;

F_2 ist eine *nicht eindeutige* Abbildung *aus* M_1 *in* M_2 . Von jeder Abbildung F läßt sich eine Umkehrabbildung F^{-1} bilden.

Das geschieht, indem man die „Glieder“ in allen geordneten Paaren vertauscht. Aus $[a; b]$ wird $[b; a]$.

Bei der Pfeildarstellung erhalten alle Pfeile den entgegengesetzten Richtungssinn, oder wir vertauschen die Anordnung der Mengen M_1 und M_2 .

Für unser praktisches Beispiel F_1 heißt die Frage: „Was erledigt Vater?“ Antwort: „Dem Vater wird das Heizen zugeordnet.“ usw. Für die Umkehrabbildung F_1^{-1} heißt dann die Frage: „Wer heizt?“; Antwort: „Der Arbeit „Heizen“ wird der Vater zugeordnet.“ usw.

Es ist also $F_1^{-1} = \{[f; m], [w; f], [b; p], [e; h], [h; v], [p; g], [u; v], [k; m]\}$.

Pfeildarstellung von F_1^{-1} :

entweder:

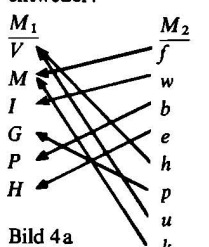


Bild 4a

oder:

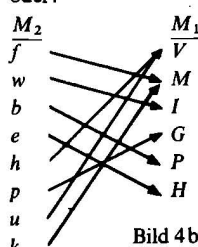


Bild 4b

Wenn eine Abbildung F *eindeutig* und ihre Umkehrabbildung F^{-1} ebenfalls *eindeutig* ist, so heißt F eine *eindeutige* (oder *eindeutig umkehrbare*) Abbildung.

Eine Funktion f besitzt demnach eine Umkehrfunktion f^{-1} genau dann, wenn f *eindeutig* ist.

Wir wollen an zwei Beispielen die weiteren Arten und Eigenschaften von Abbildungen darstellen und erläutern:

1) Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{4, 5, 6\}$ und die Abbildung $F_3 = \{[1; 4], [2; 4], [3; 5]\}$.

Pfeildarstellung:

$$F_3$$

A	B
1	4
2	5
3	6

F_3 ist eine *eindeutige*, aber *nicht eineindeutige* Abbildung von A in B . Es gilt: $Vb = \{1, 2, 3\}$; $Nb = \{4, 5\}$; $Vb = A$; $Nb \subset B$.

$$F_3^{-1}$$

A	B
1	4
2	5
3	6

F_3^{-1} ist *nicht eindeutig*, weil dem Element 4 nicht genau ein Element, sondern die Elemente 1 und 2 zugeordnet sind.

2) Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{4, 5\}$.

Die Abbildung $F_4 = \{[1; 4], [2; 5]\}$ ist eine *eindeutige* Abbildung *aus* A *auf* B , denn es gilt: F_4 ist *eindeutig* und auch F_4^{-1} ist *eindeutig*, wie die folgenden Pfeildarstellungen anschaulich zeigen:

$$F_4$$

A	B
1	4
2	5
3	

$$F_4^{-1}$$

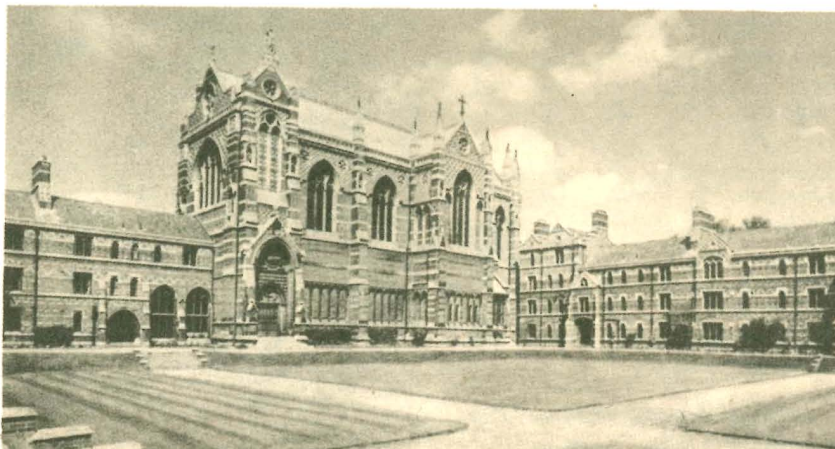
A	B
1	4
2	5
3	

Im Arbeitsblatt Nr. 6 sollen nun die Kenntnisse über Arten, Eigenschaften und Darstellungsmöglichkeiten von Abbildungen angewendet werden.

Wir wollen nun noch etwas näher auf Funktionen eingehen. Es mögen die Mengen $X = \{x \in \mathbb{N}; x \leq 5\}$ und $Y = \{y \in \mathbb{N}; y \leq 10\}$ vorliegen. Die Abbildung F soll folgenden Sachverhalt widerspiegeln: Jeder Zahl der Menge X soll ihr doppelter Wert aus der Menge Y zugeordnet werden. Zunächst wollen wir das veranschaulichen:



Nach den Klausurtagen unternahmen alle IMO-Teilnehmer eine Exkursion zur Universität Oxford (Foto), lernten die Shakespeare-Stadt Stratford on Avon kennen. Die Sehenswürdigkeiten der britischen Hauptstadt hatten sie während einer Stadtrundfahrt bereits kennengelernt.



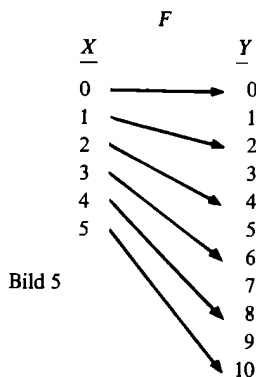
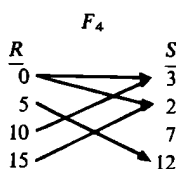
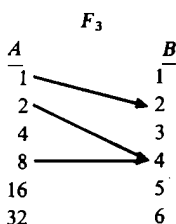
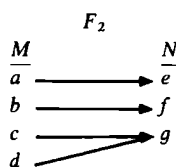
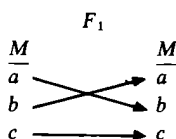


Bild 5

F ist eine eindeutige Abbildung von X in Y .
 F ist eine Funktion. Wir bezeichnen sie mit f und können sie als Menge geordneter Paare

Arbeitsblatt 6

Gegeben seien die folgenden Pfeildarstellungen von Abbildungen. Es ist der Lückentext auszufüllen!



F_1 ist eine Abbildung

..... M M ;

$Vb = \dots$, $Vb \dots M$; $Nb = \dots$;

$Nb \dots M$;

$F_1 = \{ \dots \}$;

F_2 ist eine Abbildung

..... M N ;

$Vb = \dots$; $Vb \dots M$; $Nb = \dots$;

$Nb \dots N$;

$F_2 = \{ \dots \}$

F_3 ist eine Abbildung

..... A B ;

$Vb = \dots$; $Vb \dots A$; $Nb = \dots$;

$Nb \dots B$;

$F_3 = \{ \dots \}$

F_4 ist eine Abbildung

..... R S ;

$Vb = \dots$; $Vb \dots R$; $Nb = \dots$;

$Nb \dots S$;

$F_4 = \{ \dots \}$

Man schreibe als Menge geordneter Paare:

$F_1^{-1} = \{ \dots \}$

$F_2^{-1} = \{ \dots \}$

$F_3^{-1} = \{ \dots \}$

$F_4^{-1} = \{ \dots \}$

$f = \{[0;0], [1;2], [2;4], [3;6], [4;8], [5;10]\}$
 oder mit Hilfe von Grundbereich und Aussageform

$f = \{[x;y] \in N \times N; y = 2x \wedge x \leq 5 \wedge y \leq 10\}$
 schreiben.

Der Vorbereich einer eindeutigen Abbildung F heißt Definitionsbereich der Funktion f . In unserem Beispiel gilt:

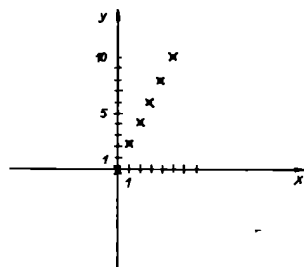
$$Db = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Der Nachbereich einer eindeutigen Abbildung F heißt Wertebereich (oder Wertvorrat) der Funktion f . In unserem Beispiel gilt:

$$Wb = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}.$$

Eine Funktion läßt sich in einem rechtwinkligen Koordinatensystem darstellen.

Bild 6

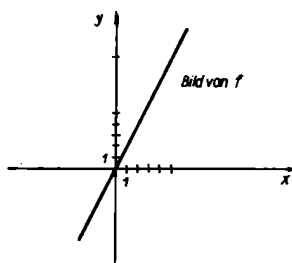


Die Funktion f besteht aus 6 geordneten Paaren natürlicher Zahlen. Ihre graphische Darstellung sind 6 Punkte der xy -Ebene. Diese Punkte heißen „diskrete“ Punkte, weil „dazwischen Lücken sind“.

Würden wir für die Funktion f die Menge aller reellen Zahlen als Grundbereich wählen, so würde die graphische Darstellung eine Strecke sein. Ein Aufschreiben der Funktion als Menge geordneter Paare wäre dann nicht möglich, da es unendlich viele geordneten Paare reeller Zahlen gibt, die die Gleichung $y = 2x$ im Intervall $[0;5]$ erfüllen.

$$f = \{[x;y] \in P \times P; y = 2x \wedge x \leq 5\};$$

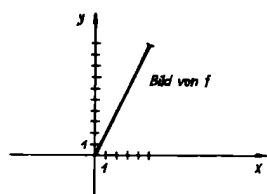
Bild 7



Ohne die Einschränkung $x \leq 5$ würden wir als Bild der Funktion eine Gerade erhalten:

$$f = \{[x;y] \in P \times P; y = 2x\};$$

Bild 8



Bilder linearer Funktionen können Geraden, Strahlen, Strecken oder Mengen diskreter Punkte sein. Das hängt vom gewählten

Grundbereich und vom Definitionsbereich der Funktion ab.

Im Arbeitsblatt 7 sollen verschiedene Funktionen dargestellt werden.

Auf Grund des bisher Gelesenen wird es nicht schwierig sein, auch den Begriff „Relation“ zu erfassen. Wir beginnen wieder mit einem sehr einfachen Beispiel:

Eine Familie möge aus Vater (v), Mutter (m), Sohn (s) und Tochter (t) bestehen. Vater sei 41 Jahre, Mutter 36, Sohn 16 und Tochter 14 Jahre alt. In der Menge $F = \{v, m, s, t\}$ soll untersucht werden, welches Familienmitglied zu welchem Familienmitglied in der Beziehung „... ist jünger als ...“ steht. Alle geordneten Paare $[a;b]$, bei denen das Familienmitglied a jünger ist als das Familienmitglied b , sollen zur Menge R zusammengefaßt werden. Wir erhalten $R = \{[t;s], [t;m], [t;v], [s;m], [s;v], [m;v]\}$. Die Menge R aller dieser geordneten Paare widerspiegeln die Beziehung „... ist jünger als ...“ in der Menge F . Wir können auch sagen, daß in allen diesen geordneten Paaren $[a;b]$ a zu b in der Relation „... ist jünger als ...“ steht.

Die Menge R ist – wie man feststellen kann – eine Teilmenge der Kreuzmenge $F \times F$.

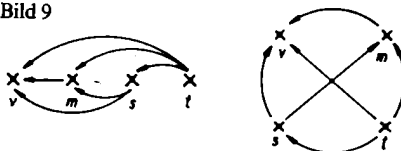
Es gilt allgemein:

Jede Teilmenge R der Kreuzmenge $M \times M$ heißt eine zweistellige Relation in der Menge M (und umgekehrt!). Wir erkennen, daß jede Abbildung eine Relation ist (und umgekehrt!). Es kommt nur auf die Betrachtungsweise und auf Zweckmäßigkeitsgründe an, ob man „Abbildung“ oder „Relation“ sagt.

In unserem Beispiel könnte man auch formulieren: „Jedes Familienmitglied aus F wird auf ein älteres Familienmitglied aus F abgebildet.“ Einfacher und verständlicher ist hier sicher die Ausdrucksweise: „Von je zwei Familienmitgliedern aus F soll immer das erste jünger als das zweite sein.“

Relationen lassen sich mit Hilfe von Relationsgraphen veranschaulichen, wie wir das an unserem Beispiel zeigen wollen:

Bild 9



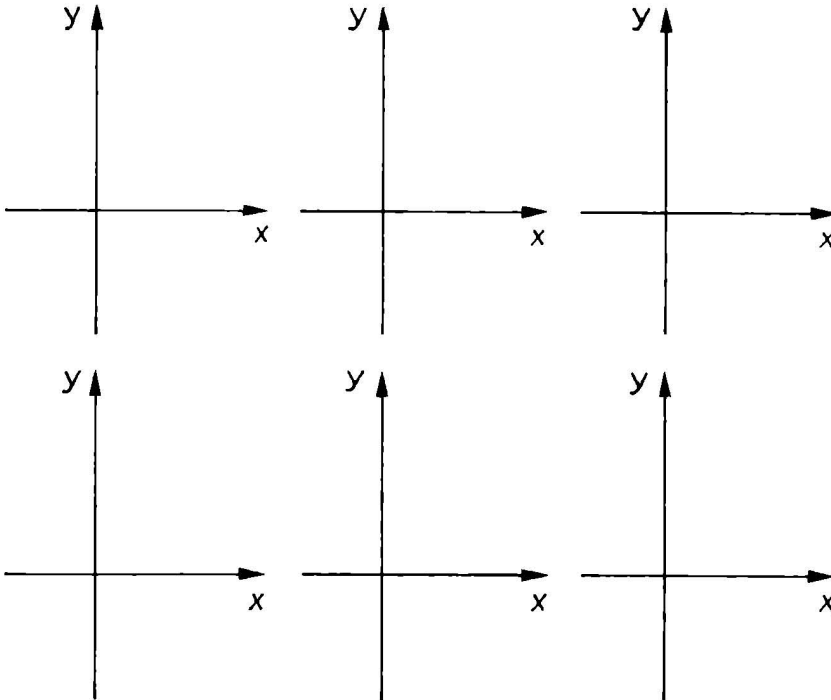
Ein weiteres Beispiel soll das Verständnis vertiefen, ehe wir die Aufgabe erhalten, im Arbeitsblatt 8 Relationen zu bilden und zu veranschaulichen.

Gegeben sei die Menge $M = \{0, 1, 2, 3\}$ und die Relation „... ist kleiner oder gleich ...“ in M . Wir finden: $0 \leq 0$; $0 < 1$; $0 < 2$; $0 < 3$; $1 = 1$; $1 < 2$; $1 < 3$; $2 = 2$; $2 < 3$; $3 = 3$. Es gibt keine weiteren Elemente a und b aus M , für die die Aussageform $a \leq b$ zu einer wahren Aussage wird.

Arbeitsblatt 7

Die folgenden Funktionen sollen graphisch dargestellt werden:

- $f_1 = \{[x; y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; y = 3x - 1 \wedge x \leq 4 \wedge y < 8\}$
 $f_2 = \{[x; y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; y = 3x - 1 \wedge x \leq 4\}$
 $f_3 = \{[x; y] \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}; y = 3x - 1 \wedge x \leq 4\}$
 $f_4 = \{[x; y] \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}; y = 3x - 1\}$
 $f_5 = \{[x; y] \in \mathbb{G} \times \mathbb{G}; y = 3x - 1 \wedge -2 \leq x \leq 4 \wedge -5 < y < 8\}$
 $f_6 = \{[x; y] \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*; y = 3x - 1 \wedge x > 1\}$
 (als Einheit ist 2 mm zu wählen!)



Wir schreiben als Menge geordneter Paare:
 $R = \{[0;0], [0;1], [0;2], [0;3], [1;1], [1;2], [1;3], [2;2], [2;3], [3;3]\}$.

Es gilt $R \subseteq M \times M$; hier sogar $R \subset M \times M$. Wir können auch schreiben: $R = \{[a;b] \in M \times M; a \leq b\}$.

Relationsgraph:

Bild 11

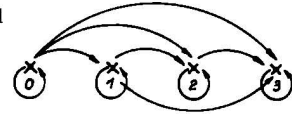


Bild 10

Es gibt spezielle Relationen (z. B. Äquivalenzrelationen oder Ordnungsrelationen), die eine wichtige Rolle bei weiteren Betrachtungen spielen. Darauf werden wir aber nicht eingehen.

Abschließend wollen wir einige Erkenntnisse zusammenfassen:

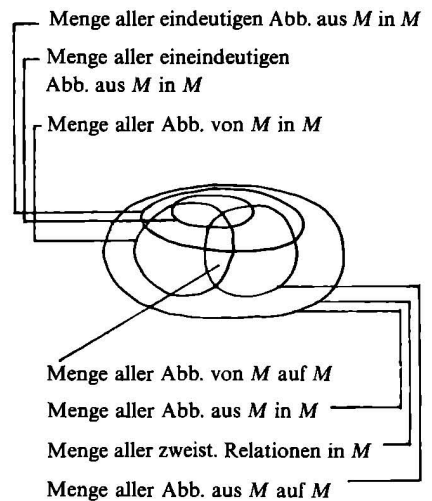
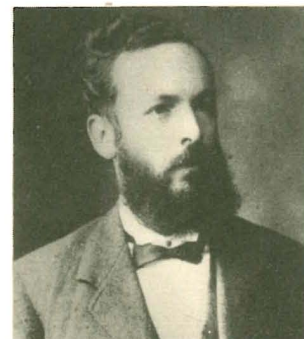


Bild 12

- Aus dem Mengendiagramm erkennen wir:
1. Jede Abbildung aus M in M ist eine zwei-stellige Relation in M .
 2. Jede zwei-stellige Relation in M ist eine Abbildung aus M in M .
 3. Jede Funktion f ist eine Abbildung, aber nicht jede Abbildung ist eine Funktion.
 4. Jede Funktion f ist eine Relation, aber nicht jede Relation ist eine Funktion.

W. Fregin



Georg Cantor (1845 bis 1918)
Begründer der Mengenlehre

Arbeitsblatt 8

Gegeben seien die folgenden Mengen M_1, M_2, M_3, M_4 und die in ihnen erklärten zwei-stelligen Relationen R_1, R_2, R_3, R_4 . Die Relationen sind elementweise (als Mengen geordneter Paare) anzugeben und mit Hilfe von Relationsgraphen zu veranschaulichen!

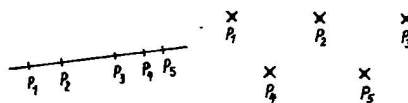
- (1) $M_1 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ und R_1 :
 „... ist Teiler von ...“,
 also $R_1 = \{[a;b] \in M_1 \times M_1 : a \mid b\}$!
 $R_1 = \{[$

$\begin{matrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix}$

- (2) $M_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und R_2 :
 „... läßt bei Division durch 3 denselben Rest wie ...“
 $R_2 = \{[$

$\begin{matrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$

- (3) $M_3 = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ und R_3 :
 „... liegt links von ...“
 $R_3 = \{[$



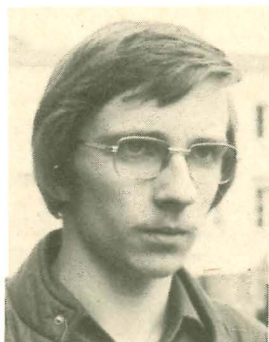
- (4) $M_4 = \{2, 11, 20, 22, 30, 31, 1011\}$
 und R_4 : „... hat dieselbe Quersumme wie ...“
 $R_4 = \{[$

$\begin{matrix} \times & \times & \times & \times \\ 2 & 11 & 20 & 22 \\ \times & \times & \times \\ 30 & 31 & 1011 \end{matrix}$



Über eine AG Mathematik der EOS Humboldt Erfurt

Stefan Geiß, der z. Z. seinen Ehrendienst bei der NVA leistet, war Schüler der Erweiterten Humboldt-OS Erfurt, Mitglied des Bezirks-mathematikklubs Erfurt und Teilnehmer der DDR-Mathematik-Olympiaden 1974, 1975, 1976 und 1977.



Gemeinsam mit drei anderen Schülern leitete er einen Mathematik-Zirkel für Schüler der 9. und 10. Klassen. Einige dieser Schüler erreichten bei den Kreisolympiaden erste und zweite Preise. Der AG-Stoff war so gestaltet, daß in der Zeit zwischen den Olympiaden größere Stoffkomplexe behandelt und vor Olympiaden ein spezielles Aufgabentraining durchgeführt wurde.

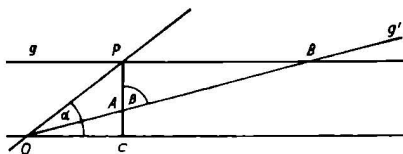
So wurden z. B. Elementargeometrie (u. a. Dreieckskonstruktionen mit Kreis des Apollonius, In- und Umkreisradius), Ungleichungen (Bestimmung von Lösungsmengen und Beweise) und Zahlenkongruenzen besprochen.

Das folgende interessante Problem trug einer der Schüler des Zirkels vor. Es ist ein Verfahren zur Teilung eines Winkels in drei gleiche Teile. Natürlich ist diese Konstruktion nicht unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal möglich.

1. Verfahren: Gegeben sei ein Winkel von $\alpha < 90^\circ$. Auf einem seiner Schenkel wird ein Punkt P beliebig festgelegt ($P \neq O$). Von diesem Punkt P aus fällt man das Lot auf den anderen Schenkel und erhält C . Weiterhin trägt man die Gerade g mit folgenden Eigenschaften ein:

a) g verläuft durch P ,

b) sie ist dem Schenkel von α parallel, auf dem P nicht liegt.



Weiterhin trägt man die Strecke AB ($AB = 2 \cdot OP$) wie folgt ein („Einpäßverfahren“):

a) $A \in PC$, b) $B \in g$, c) $O \in g' (A, B)$.

Diese Strecke findet man durch Probieren, wenn auf einem Lineal $\overline{AB}$ abgetragen wird und das Lineal so lange verschoben wird, bis die Bedingungen erfüllt sind. Man kann nun beweisen, daß g' den Winkel α drittelt.

2. Beweis:

$$\begin{aligned} \text{a) Es gilt: } 2 &= 6 - 4 \\ &= 6 - 4 (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) \\ &= (3 - 4 \sin^2 \gamma) - (4 \cos^2 \gamma - 3) \quad [0 < \gamma < 30^\circ] \\ &= \frac{3 \sin \gamma - 4 \sin^3 \gamma}{\sin \gamma} - \frac{4 \cos^3 \gamma - 3 \cos \gamma}{\cos \gamma} \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{wegen } 0 < \gamma < 30^\circ \\ \text{folgt } \sin \gamma \neq 0 \wedge \cos \gamma \neq 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin 3\gamma}{\sin \gamma} - \frac{\cos 3\gamma}{\cos \gamma} \\ &= \frac{\cos^3 \gamma}{\sin \gamma} (\tan 3\gamma - \tan \gamma) \left[\begin{array}{l} \text{wegen } 0 < 3\gamma < 90^\circ \\ \cos 3\gamma \neq 0 \wedge \sin 3\gamma \neq 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Wir setzen $3\gamma = \alpha$ ($\alpha = \angle POC$)

$$= > \frac{\cos \alpha}{\sin \frac{\alpha}{3}} (\tan \alpha - \tan \frac{\alpha}{3}) = 2 \quad [0 < \alpha < 90^\circ]$$

b) $\angle AOC = \alpha'$ ($0 < \alpha' < 90^\circ$)

Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{PC}{AC} &= \tan \alpha \cdot \frac{OC}{OC} \\ \frac{PC}{AC} &= \tan \alpha' \cdot \frac{OC}{OC} \end{aligned} \Rightarrow \overline{PA} = \overline{OC} \quad (\tan \alpha - \tan \alpha') \quad (1)$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \overline{PA} &= \overline{AB} \cdot \cos \beta = \overline{AB} \cos (90^\circ - \alpha') \\ &= \overline{AB} \cdot \sin \alpha' \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{und } \overline{OC} = \overline{OP} \cdot \cos \alpha. \quad (3)$$

(2) und (3) in (1) eingesetzt ergibt:

$$\overline{AB} \cdot \sin \alpha' = \overline{OP} \cdot \cos \alpha (\tan \alpha - \tan \alpha').$$

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OC}}$$

Wegen $2 \overline{OP} = \overline{AB}$

$$\text{folgt } 2 = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha'} (\tan \alpha - \tan \alpha').$$

c) Aus a) und b) erfolgt der Nachweis, daß

$$\alpha' = \frac{\alpha}{3}, \text{ denn } \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha'} (\tan \alpha - \tan \alpha') = \frac{\cos \alpha}{\sin \frac{\alpha}{3}}$$

$$\left(\tan \alpha - \tan \frac{\alpha}{3} \right).$$

$$0 < \alpha < 90^\circ \rightarrow \cos \alpha \neq 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sin \alpha'} (\tan \alpha - \tan \alpha')$$

$$= \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{3}} (\tan \alpha - \tan \frac{\alpha}{3})$$

$$\rightarrow \tan \alpha \left(\frac{1}{\sin \alpha'} - \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{3}} \right)$$

$$= \frac{\tan \alpha'}{\sin \alpha'} - \frac{\tan \frac{\alpha}{3}}{\sin \frac{\alpha}{3}}$$

$$\tan \alpha \left(\frac{1}{\sin \alpha'} - \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{3}} \right) = \frac{1}{\cos \alpha'} - \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{3}}$$

$$0 < \alpha', \frac{\alpha}{3} < 90^\circ$$

In diesem Intervall ist $\sin x$ streng monoton wachsend und $\cos x$ streng monoton fallend, also $\frac{1}{\sin x}$ streng monoton fallend und $\frac{1}{\cos x}$ streng monoton wachsend.

Also gilt: Bei $x_1 \leq x_2$ ($0 < x_1, x_2 < 90^\circ$)

$$\frac{1}{\sin x_1} - \frac{1}{\sin x_2} \geq 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{\cos x_1} - \frac{1}{\cos x_2} = 0.$$

Bei $x_1 \neq x_2$ haben $\frac{1}{\sin x_1} - \frac{1}{\sin x_2}$ und $\frac{1}{\cos x_1} - \frac{1}{\cos x_2}$ verschiedene Vorzeichen.

Wir setzen $x_1 = \alpha'$ und $x_2 = \frac{\alpha}{3}$. Wäre $\alpha' \neq \frac{\alpha}{3}$ und $\tan \alpha > 0$ ($0 < \alpha < 90^\circ$), so folgt, daß $\tan \alpha$ $\frac{1}{\sin \alpha'} - \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{3}}$ und $\frac{1}{\cos \alpha'} - \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{3}}$ verschiedene Vorzeichen haben. Also folgt aus

$$\tan \alpha \left(\frac{1}{\sin \alpha'} - \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{3}} \right) = \frac{1}{\cos \alpha'} - \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{3}}; \alpha' = \frac{\alpha}{3},$$

d. h., g' drittelt den Winkel α .

Wir möchten nun eine Aufgabe stellen:

● Vereinfache den Ausdruck!

$$P = (x+a)(x^2+a^2) \dots (x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})$$

Eine AG Zeichnen stellt sich vor:

In unserer Schule schneiden zahlreiche Schüler gern Faltschnitte. Diese Technik ist im Kunsterziehungsunterricht in verschiedenen Klassenstufen eingebaut. Wir üben sie aber auch in der AG Zeichnen. Es gibt mehrere Arten von Faltschnitten:

Einachsige Faltschnitte, Reihenschnitte und Zentralfaltschnitte. Das im Titelblatt gezeigte Bild ist ein Zentralfaltschnitt. Der Graphiker der alpha wählte aus einem schönen Sortiment von Arbeiten anlässlich des Jahres des Kindes den Schnitt der Schülerin Iris Lange, Klasse 4, aus. Eine Papierscheibe wurde zweimal gefaltet, und die Figuren wurden halbseitig aufgezeichnet. Die Überraschung nach dem Schneiden ist jedesmal wieder groß, obwohl alle wissen, daß durch die Faltung Figuren und Gegenstände mehrmals achsial-symmetrisch erscheinen.

Chr. Bachmann, Kunsterzieher
an der Goethe-OS Limbach-Oberfrohna



Verteilungen

1. Im Anfangspunkt eines Zahlenstrahls schichten wir eine Anzahl von Plättchen oder gleichartigen Münzen auf. Jetzt soll, wenn möglich, die Hälfte der Plättchen um ein Feld nach rechts verschoben werden. Es läßt sich die Aufgabe nur für gerade Startanzahlen durchführen. Dabei entstehen folgende Verteilungen. (Bild 1)

Die nächste Aufgabe besteht in der Fortsetzung der Verschiebung. Von jedem der zwei entstandenen Plättchentürme soll, wenn möglich, gleichzeitig wieder die Hälfte um ein Feld nach rechts verschoben werden. Es läßt sich die Verschiebung mit zwei Schritten nur für die durch 4 teilbaren Startanzahlen durchführen.

Dabei entstehen folgende Verteilungen.

(Bild 2)

Nun führen wir eine Verschiebung in drei Schritten durch. Von jedem der drei ent-

standenen Plättchentürme wird jeweils wieder die Hälfte abgehoben und die abgehobenen Plättchen je ein Feld nach rechts verschoben. Da man für jeden Schritt die vorliegenden Anzahlen durch 2 teilen muß, kann dann die Verschiebung mit drei Schritten nur für die durch 8 ($=2^3$) teilbaren Startanzahlen durchgeführt werden.

Bei acht Ausgangsplättchen entsteht folgende Verteilung. (Bild 3)

Fülle bitte die anschließende Tabelle für eine 3-Schritt- und 4-Schritt-Verschiebung aus!

Führe entsprechende Verschiebungen durch, wenn in jedem Schritt ein Drittel von den Plättchentürmen abgehoben und nach rechts transportiert wird!

Jetzt müssen die Startanzahlen für die Ausführbarkeit des ersten Verschiebungsschrittes durch 3 teilbar sein. Wenn noch ein zweiter Schritt ausführbar sein soll, so müssen die Startzahlen sogar durch 9 ($=3^2$) teilbar sein. Fertige dir entsprechende Tabellen an, und bestimme die Verteilungen nach drei und vier Schritten!

2. Wir zeichnen uns zunächst Quadrate von der Seitenlänge 1, 2, 3 und 4 cm und teilen diese jeweils in ein Quadratgitter der Seitenlänge 1 cm (Bild 4).

Jedes dieser Quadrate stellen wir auf eine ihrer Ecken. In diesen auf der Spitze stehenden Quadraten benennen wir die Punkte in der angegebenen Art und zeichnen ebenso Pfeile ein sowie die Werte $\frac{1}{2}$ an diese Pfeile (Bild 5).

In dem Eingangspunkt E soll nun eine An-

zahl von Plättchen starten, davon sollen jetzt längs der Pfeile die Hälfte nach links und die andere Hälfte nach rechts abwandern. Wir fragen, wieviel Plättchen in den Punkten A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 anlangen? Damit die fortgesetzte Halbierung möglich ist, muß man bei Quadrat (1) mit einer durch 2 teilbaren Zahl in E starten, bei Quadrat (2) mit einer durch 4 ($=2^2$), bei Quadrat (3) mit einer durch 8 ($=2^3$) und endlich bei Quadrat (4) mit einer durch 16 ($=2^4$) teilbaren Zahl beginnen. Wir erhalten die gleichen Verteilungen wie bei den Verschiebungen von Aufgabe 1.

Bewertet man die nach rechts verlaufenden Pfeile anstelle mit $\frac{1}{2}$ jeweils mit $\frac{1}{3}$ und die nach links verlaufenden Pfeile mit $\frac{2}{3}$ und nimmt die

Aufteilung der Plättchentürme nach diesen Anweisungen vor, so erhält man in den Ausgangspunkten A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 die Verteilungen für die durch 3; 9; 27 und 81 teilbaren Zahlen.

3. Man kann sich noch viele andere Verschiebungspläne aufstellen. Wir wollen noch zwei angeben.

Mit welchen Anzahlen von Plättchen muß man in dem Eingang E des Verschiebungsplanes des Bildes 6 beginnen, damit am Ausgang A nach einer Anzahl von Zügen wirklich Plättchen anlangen?

Im ersten Schritt erfolgt eine Aufteilung in $\frac{1}{2} \left(\frac{3}{6} \right), \frac{1}{6}$ und $\frac{1}{3} \left(\frac{2}{6} \right)$, d. h., die Startanzahl

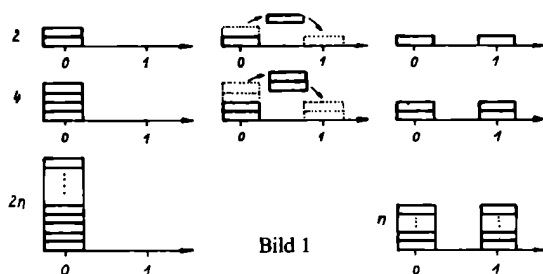


Bild 1

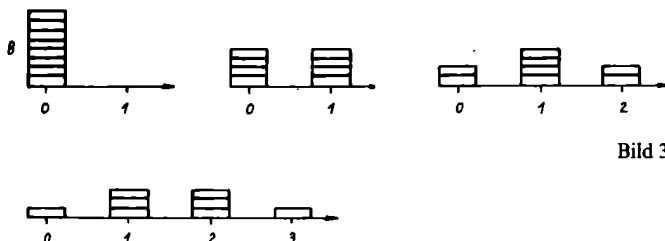


Bild 3

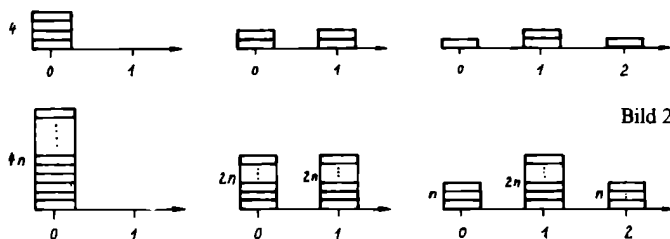


Bild 2

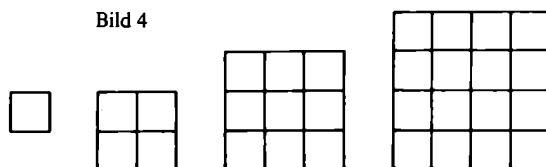


Bild 4

	Verteilung nach 1. Schritt		Verteilung nach 2. Schritt			Verteilung nach 3. Schritt				Verteilung nach 4. Schritt				
Startanzahl	Platz 0	Platz 1	Platz 0	Platz 1	Platz 2	Platz 0	Platz 1	Platz 2	Platz 3	Platz 0	Platz 1	Platz 2	Platz 3	Platz 4
16														
32														

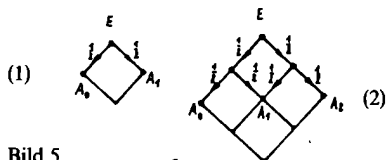


Bild 5

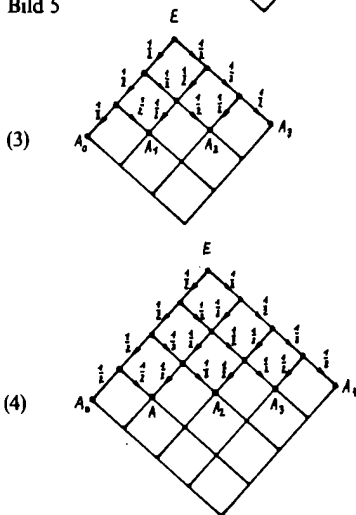


Bild 6

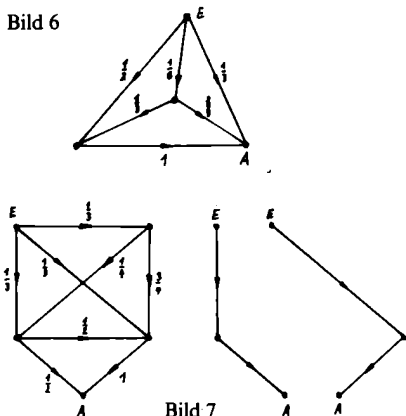


Bild 7

muß durch 6 teilbar sein. Die im ersten Zug zum Mittelpunkt gelangende Plättchenzahl muß durch 3 teilbar sein, wenn die im zweiten Schritt angewiesene Aufteilung möglich sein soll. Die Plättchenaufteilung ist also bei den durch $6 \cdot 3 = 18$ teilbaren Startzahlen auch im zweiten Zug möglich.

Stelle fest, wieviel Plättchen bei den Startzahlen 18, 36, 54 jeweils im ersten Zug nach A, im zweiten Zug nach A und wieviel im dritten Zug nach A gelangen!

Löse entsprechende Fragen für den Verteilungsplan in Bild 7! Mit welchen Startanzahlen muß man in E beginnen? Bei welchen Startanzahlen bleiben keine Plättchen stecken, sondern gelangen alle wirklich zum Ausgang A?

Wieviel Züge benötigt man dafür?

Zeichne dir in einer Skizze die Wege für die einzelnen Zugfolgen auf! Erstmalig können nach zwei Zügen Plättchen in A anlangen. Es sind die möglichen Wege dafür ebenfalls in Bild 7 hervorgehoben. Finde auch die 3er Wege heraus! Gibt es auch 4er Wege?

J. Flachsmeyer

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Wir stellen auch diesmal wieder Lösungsvarianten zu Wettbewerbsaufgaben vor, die bei uns eingegangen sind. Sie mögen unseren aktiven Teilnehmern am *alpha*-Wettbewerb Anregungen zum Lösen von Aufgaben geben.

Im Heft 5/1978 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 7 ■ 1780 Gesucht sind alle dreistelligen, aus verschiedenen Ziffern bestehenden natürlichen Zahlen, die in dekadischer Darstellung die Form $z = \overline{abc}$ haben und folgende Eigenschaften besitzen:

- Ihre Quersumme ist eine gerade Zahl.
- Die Differenz aus den Zahlen, die den ersten beiden Ziffern entsprechen, ist dreimal so groß wie die Differenz aus den Zahlen, die den letzten beiden Ziffern entsprechen.

Im Heft 2/1979 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Für die gesuchten Zahlen $z = \overline{abc}$ soll $a + b + c$ durch 2 teilbar sein und $a - b = 3 \cdot (b - c)$ gelten. Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:

- Aus $b - c = 0$ folgt $b = c$, was nicht möglich ist, da $b \neq c$ sein soll.
- Aus $b - c = 1$ folgt $a - b = 3$ und somit

$a = b + 3$	$b = c + 1$	c	$a + b + c$
4	1	0	5
5	2	1	8
6	3	2	11
7	4	3	14
8	5	4	17
9	6	5	20

Nur von den Zahlen 521, 743, 965 ist die Quersumme eine gerade Zahl.

- Aus $b - c = 2$ folgt $a - b = 6$ und somit

$a = b + 6$	$b = c + 2$	c	$a + b + c$
8	2	0	10
9	3	1	13

Nur von der Zahl 820 ist die Quersumme eine gerade Zahl.

- Aus $b - c = 3$ folgt $a - b = 9$ und somit $a = b + 9$ und $b = c + 3$, also $a = (c + 3) + 9 = c + 12$, was nicht möglich ist.

Es existieren genau vier Zahlen mit den geforderten Eigenschaften:

sie lauten 521, 743, 820 und 965.

Wir stellen nun die Lösung von Jens-Uwe Meyer aus Halberstadt vor, der Schüler der Klasse 7 der Marx-Engels-Oberschule ist. Jens-Uwe löste diese Aufgabe wie folgt:

Die Differenz aus den Zahlen, die den letzten beiden Ziffern entsprechen, muß mindestens gleich 1 sein. Die Differenz aus den Zahlen, die den beiden ersten Ziffern entsprechen, muß mindestens gleich 3 sein. Ich nehme eine Fallunterscheidung vor:

- Für $z = \overline{abc}$ gelte $b - c = 1$; die aus den letzten beiden Ziffern gebildeten Zahlen könnten dann 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 97 sein. Die erste Ziffer müßte dann in dieser Reihenfolge 4, 5, 6, 7, 8, 9 sein, d. h., es entfallen die Zahlen 76, 87, 97. Von den Zahlen 410; 521, 632, 743, 854, 965 haben nur die Zahlen 521, 743, 965 eine gerade Zahl als Quersumme.
- Für $z = \overline{abc}$ gelte $b - c = 2$; die aus den letzten beiden Ziffern gebildeten Zahlen könnten dann 20, 31, 42, ..., 97 sein. Die erste Ziffer müßte dann in dieser Reihenfolge 8 und 9 sein, d. h., es entfallen die Zahlen 42 usw. Von den Zahlen 820 und 931 hat nur 820 eine gerade Zahl als Quersumme.
- Für $z = \overline{abc}$ gelte $b - c = 3$; wegen $a - b = 9$ existiert in diesem Falle keine Lösung.

Die gesuchten Zahlen lauten 521, 743, 820, 965.

Wir stellen nun die Lösung von Alexander Goldberg aus Dresden vor, der Schüler der Klasse 7d der 59. POS „Max Zimmering“ ist. Alexander löste diese Aufgabe wie folgt:

Für die Zahlen $z = \overline{abc}$ gilt $a > b > c$ und $a + b + c = 2k$, wobei k eine natürliche Zahl ist. Aus $a - b = 3 \cdot (b - c)$ folgt $a = 4b - 3c$.

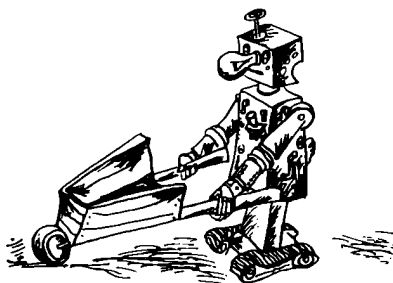
Durch Einsetzen erhalten wir $4b - 3c + b + c = 2k$, also $5b - 2c = 2k$. Daraus folgt weiter, daß b eine gerade Zahl sein muß. Wegen $b > c$ könnte b gleich 2, 4, 6 oder 8 sein.

Ich stelle eine Tabelle auf:

a	b	c	
8	2	0	
5	2	1	
16	4	0	nicht möglich
13	4	1	nicht möglich
10	4	2	nicht möglich
7	4	3	
9	6	5	

Da $a > b$ kann für $b = 8$ nur $a = 9$ sein. In diesem Fall ist $a - b$ nicht durch 3 teilbar. Die Zahlen lauten 521, 743, 820, 965.

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 8. März 1980

Allen alpha-Lesern

SCHÖNE WÜNSCHE FÜR 1980

und viel Erfolg beim Knacken aller 50820667990!

Mit diesem Kryptogramm danken wir all unseren Mitarbeitern des In- und Auslandes für die zahlreichen Ideen zur inhaltreichen Gestaltung unserer Zeitschrift. Den über 4000 Teilnehmern am *alpha*-Wettbewerb, die ein Abzeichen und eine Urkunde erhielten, sprechen wir unsere Anerkennung für diesen Erfolg aus und wünschen, daß auch im Wettbewerbsjahr 1979/80 wieder über 90000 Lösungen bei uns eintreffen.

Unseren 55000 Lesern wünschen wir ein erfolgreiches und gesundes Neues Jahr.

Redaktion *alpha*

Mathematik

Ma 5 ■ 1909 Drei Schnecken machen von einer gemeinsamen Startlinie aus einen „Wettlauf“ zu einem Ziel, das 1 Meter entfernt ist. Sie kriechen mit gleicher konstanter Geschwindigkeit. Die Schnecke A kriecht immer 5 cm vorwärts; danach legt sie eine Pause von jeweils 6 Sekunden ein. Die Schnecke B kriecht immer 10 cm vorwärts; dann macht sie jeweils 12 Sekunden Pause. Die Schnecke C kriecht immer 20 cm vorwärts; sie macht danach jeweils eine Pause von 25 Sekunden Dauer. In welcher Reihenfolge kommen die Schnecken im Ziel an?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 1910 Zeichne auf kariertem Papier ein Rechteck, das die sechsfache Breite und die achtfache Länge eines Karos besitzt! Zerlege dieses Rechteck durch Strecken entlang des Gitternetzes so, daß genau

a) 4 Quadrate, b) 6 Quadrate, c) 8 Quadrate entstehen! Fertige hierzu drei verschiedene Skizzen an!

(Eine Begründung ist nicht erforderlich.)

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 1911 a) Zeichne drei beliebig große Kreise so, daß sechs von Kreisbögen begrenzte Flächen entstehen, die man zum Beispiel verschiedenfarbig ausmalen könnte!

b) Zeichne nun drei Kreise so, daß sieben solcher Flächen entstehen!

c) Zeichne schließlich vier Kreise so, daß möglichst viele solcher Flächen entstehen, und gib die Anzahl der Flächen an!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 1912 Bernd kauft auf dem Postamt insgesamt 10 Briefmarken, und zwar 20-Pf-Marken und 25-Pf-Marken. Dafür muß er insgesamt 2,15 M bezahlen. Wieviel 20-Pf-Marken und 25-Pf-Marken hat Bernd gekauft?

Schüler Wieland Handke, Pulsnitz, Kl. 6

Ma 5 ■ 1913 Von den 36 Schülern einer Klasse nimmt jeder an genau einer der Sportarten Leichtathletik, Tischtennis, Schwimmen, Schach und Judo teil. Der neunte Teil der Anzahl der Schüler dieser Klasse nimmt entweder an der Sportart Schach oder Judo teil; dabei ist die Anzahl der Teilnehmer der Sportart Schach größer als die der Sportart Judo. An der Sportart Tischtennis beteiligen sich zweimal soviel Schüler wie an der Sportart Schach. Mehr als die Hälfte der Anzahl der Schüler dieser Klasse betreibt Leichtathletik. An der Sportart Schwimmen beteiligen sich mehr Schüler als am Tischtennis. Ermittle für jede dieser Sportarten die Anzahl der an ihr teilnehmenden Schüler dieser Klasse!

Schüler Manfred Opaterni, Babelsberg

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion *alpha*

7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1979/80 läuft von Heft 5/79 bis Heft 2/80. Zwischen dem 1. und 10. September 1980 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/79 bis 2/80 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/80 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/79 bis 2/80) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1979/80 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Thies Luther, 26 Güstrow, Werdersstr. 22 Kersting-OS, Klasse 7		Ma 7 ■ 1369
30	150	
Prädikat:		9
Lösung:		

Ma5 ■1914 Ein Spaziergänger befragte eine Wandergruppe nach der Anzahl der Teilnehmer an der Wanderung. Ein Pfiffikus antwortete: „Wären es dreimal soviel Teilnehmer wie es sind und noch 10 Teilnehmer mehr, dann wären es 50 Teilnehmer mehr als die doppelte Anzahl der Teilnehmer.“ Wie viele Personen nahmen an dieser Wanderung teil? *Schüler Uwe Wollert, Edderich, Kl. 8*

Ma6 ■1915 Im Finale um den FDGB-Pokal im Handball gab es im Jahre 1978 folgende Ergebnisse:

SC Magdeburg (SCM)	6 Punkte,
ASK Vorwärts Frankfurt/O.	6 Punkte,
SC Empor Rostock (SCE)	5 Punkte,
Post Schwerin (PS)	2 Punkte,
SC Dynamo Berlin (SCD)	1 Punkt.

Dabei wurden für einen Sieg 2 Punkte, für ein verlorenes Spiel keine Punkte, für ein unentschiedenes Spiel je Mannschaft ein Punkt vergeben. Es spielte jede Mannschaft gegen jede genau einmal. Der SC Magdeburg (SCM) blieb ungeschlagen. Das Spiel zwischen dem ASK und dem SCD ging unentschieden aus. Es sind die Ergebnisse aller Spiele zu ermitteln. *Schüler Frank Erdmann, Zeitz*

Ma6 ■1916 In dem Schema

$$\begin{array}{r} a \ b \\ + \ b \ c \\ + \ c \ a \\ \hline a \ b \ c \end{array}$$

sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

Nach der sowjetischen Schülerzeitschrift Quant

Ma6 ■1917 Vervollständige die nachstehende Tabelle! Dabei sind a , b und c natürliche Zahlen

a	b	c	$(a-b)^2 \cdot c$	$a^2 \cdot (b-c)$
7	6			98
6		2	18	
	1	0		16
9		5		81
		0		1
		1		9

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

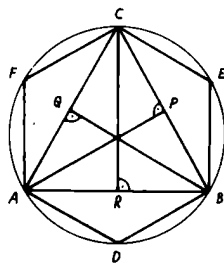
Ma6 ■1918 Welche geordneten Zahlentripel $[a, b, c]$ aus natürlichen Zahlen a , b und c erfüllen zugleich die beiden Gleichungen $a+b+c=20$ und $a-b=5c$?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma6 ■1919 Die Abbildung stellt ein gleichseitiges Dreieck ABC mit seinen drei Höhen $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CR}$ dar. Die Parallele zu $\overline{BQ}$ durch A schneidet die Parallele zu $\overline{AP}$ durch B im Punkte D . Die Parallele zu $\overline{BQ}$ durch C schneidet die Parallele zu $\overline{CR}$ durch B im Punkte E .

Die Parallele zu $\overline{CR}$ durch A schneidet die Parallele zu $\overline{AP}$ durch C im Punkte F . Es ist nachzuweisen, daß die Seiten des Sechsecks $ADBECF$ gleich lang sind.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Ma7 ■1920 Ein Schüler hat eine Gleichung zu lösen; er geht wie folgt vor:

$$\begin{aligned} 56x + 252 &= 72x + 196, \\ 56x - 196 &= 72x - 252, \\ 7 \cdot (8x - 28) &= 9 \cdot (8x - 28), \\ 7 &= 9. \end{aligned}$$

Wo steckt der Fehler?

Herr Jochen Schröder, Riesa

Ma7 ■1921 An einer Mathematikarbeit, deren Leistungsdurchschnitt die Note 1,88 ergab, beteiligten sich 25 Schüler. Es erzielten halb soviel Schüler die Note 3 wie die Note 2. Die Note 3 erhielten doppelt soviel Schüler wie die Note 4. Kein Schüler erhielt die Note 5. Wieviel Schüler erhielten die Noten 1, 2, 3 bzw. 4?

Schüler Joachim Braun, Koßdorf, Kl. 5

Ma7 ■1922 Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, deren Längen sich wie 5:4 verhalten. Die Mittellinie $\overline{EF}$ dieses Trapezes ist 5,4 cm lang. Welche Länge haben die beiden parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$?

Herr A. Günther, Altenburg

Ma7 ■1923 Eine aufgestellte Malerleiter bilde ein gleichschenkeliges Dreieck, dessen Basislänge sich zur Schenkellänge wie 2:5 verhält. Ein Schenkel ist um 1,5 m länger als die Basis. Wieviel Zentimeter stehen die Leitenden am Fußboden auseinander?

Herr A. Günther, Altenburg

Ma8 ■1924 Man beweise, daß für alle ganzen Zahlen q der Term $q^3 - q$ durch 6 teilbar ist.

Schüler Ralf Taubmann, Sonneberg, Kl. 9

Ma8 ■1925 Es ist zu beweisen, daß das Produkt $m \cdot n$ der zwei natürlichen Zahlen m und n bei Division durch 6 den Rest 1 läßt, wenn jede der Zahlen m und n bei Division durch 6 den Rest 5 läßt.

H. Engelmann, Sachsendorf

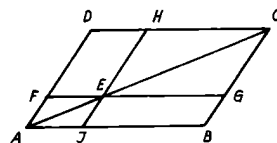
Ma8 ■1926 Wenn Lena 40% von ihrem Geld und Sweta 45% von ihrem Geld gibt, dann sind das zusammen 2 Rubel 15 Kopeken. Wenn Sweta 40% ihres Geldes mit 45% von Lenas Geld zusammenlegt, beträgt die Summe 2 Rubel 10 Kopeken. Wieviel Geld

besitzt jedes der Mädchen? (1 Rubel hat 100 Kopeken)

Jörg Bruchertseifer, Dubna, Kl. 8

Ma8 ■1927 In das abgebildete Parallelogramm $ABCD$ wurde die Diagonale $\overline{AC}$ eingezeichnet. Durch einen beliebigen inneren Punkt E der Diagonalen $\overline{AC}$ sind die Parallelen zu $\overline{AB}$ und zu $\overline{AD}$ gezeichnet. Es ist zu beweisen, daß die Parallelogramme $IBGE$ und $FEHD$ flächeninhaltsgleich sind.

Schüler Andreas Löffler, Halle-Neustadt, Kl. 8



Ma9 ■1928 Jemand behauptet: Es gibt zwei ganze Zahlen, deren Produkt 16 ist. Addiert man die Quadratwurzeln dieser beiden Zahlen, so erhält man als Summe die Zahl 4. Stimmt diese Behauptung?

Schüler Roland Kamke, Rostock, Kl. 8

Ma9 ■1929 Man ermittle alle Quadrupel von vier aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen a , b , c , d , für die folgendes gilt: Das Produkt aus der kleinsten und zweitgrößten Zahl ist gleich der Summe aus den beiden anderen Zahlen.

Schüler Torsten Siebert, Görlitz, Kl. 10

Ma9 ■1930 Gesucht sind alle Paare einstelliger natürlicher Zahlen a und b , für die das arithmetische Mittel gleich dem geometrischen Mittel ist. Es ist zu beweisen, daß alle zweistelligen Zahlen, die man mit diesen Ziffern a und b bilden kann, durch 11 teilbar sind.

Baufacharbeiter Frank Walter, Berlin, z. Z. NVA

Ma9 ■1931 Es ist zu untersuchen, ob die Ungleichung

$$5^{10} + 6^{10} < 7^{10}$$

eine wahre Aussage darstellt.

Sch.

Ma10/12 ■1932 Als Uwe die Schule verläßt, zeigt die Schuluhr 13.00 Uhr, seine eigene Uhr 13.02 Uhr an. Zu Hause angekommen, zeigt seine Uhr 13.07 Uhr und die Museumsuhr 13.05 Uhr an.

Die Schuluhr geht immer vor (1), die Museumsuhr geht nie nach (2), und Uwes Uhr geht höchstens 3 min vor oder nach (3).

Wann verließ Uwe die Schule, und wann kam er zu Hause an?

Schüler Thomas Richter, Leipzig, Kl. 12

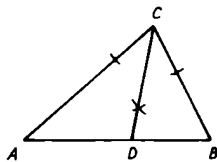
Ma10/12 ■1933 Man konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\angle BCA = 90^\circ$, $h_c = 4$ cm und $s_a = 7,5$ cm. Die Konstruktion ist zu begründen.

Schüler Karsten Schlutter, Wittstock, Kl. 10

Ma10/12 ■1934 In dem abgebildeten Dreieck $\triangle ABC$ ist die Winkelhalbierende $\overline{CD}$ des

Winkels $\angle BCA$ eingezeichnet. Über $\overline{AD}$ werde ein Rechteck mit den Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{CB}$ und über $\overline{AC}$ werde ein Rechteck mit den Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{DB}$ errichtet. Wie verhalten sich die Flächeninhalte beider Rechtecke zueinander?

Lehrling Axel Schulz, Greifswald



Ma 10/12 ■ 1935 Gegeben sei ein beliebiges Rechteck $ABCD$. Man konstruiere eine vollständige Aufteilung der Fläche von $ABCD$ in eine Dreiecks-, eine Parallelogramm- und eine Trapezfläche. Die Dreiecksfläche soll einen halb so großen Inhalt haben wie jede der beiden anderen Flächen. Die Konstruktion ist zu begründen.

Fr.

Physik

Ph 6 ■ 66 Ein vierachsiger Großraumwagen der Deutschen Reichsbahn hat eine Eigenmasse von 27 100 kg und ist mit 52 m^3 Rohbraunkohle mit der Dichte $\rho = 960 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ beladen. Berechne die Gesamtmasse des beladenen Wagens in t!

Ing. Armin Körner, Leipzig

Ph 7 ■ 67 Eine Elektrolokomotive erreicht an einer Steigung eine Geschwindigkeit von $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und eine Zugkraft von rund 11 000 kp. Berechne die Leistung in PS und in kW!

Ph 8 ■ 68 In einer Gasflasche herrscht ein Druck von 75 at bei 15°C . Auf wieviel at erhöht sich der Druck, wenn die Temperatur um 30°C steigt? Gib den Druck auch in Pa (Pascal) an!

Ph 9 ■ 69 Ein Straßenbahnzug besteht aus dem Triebwagen mit der Masse 16 t und dem Anhänger mit der Masse 8 t. Er wird elektrisch gebremst. Dazu wird der Motor als Generator geschaltet. Es wird eine Spannung induziert, die gemäß $U = k \cdot v$ mit $k = 60 \frac{\text{Vs}}{\text{m}}$ mit der Geschwindigkeit v zusammenhängt.

- Wie groß muß der an den Generator angeschlossene Bremswiderstand mindestens sein, damit der Triebwagen nicht gleitet, wenn nur dieser gebremst wird? $v = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$; Haftreibungskoeffizient $\mu_0 = 0,2$; übrige Reibung vernachlässigt.
- Welche Wärmemenge wird bei einmaligem Bremsen bis zum Stillstand frei?
- Wie groß ist die auftretende Verzögerung am Anfang des Bremsens (Bremswiderstand wie bei a)?)

Anmerkung: Man beachte die Einheitenrechnung $1 \text{ V} = \frac{1 \text{ kg m}^2}{1 \text{ A s}^3}$, die man über die Beziehung $1 \text{ Ws} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ VAs}$ erhalten kann.

Annelie Meyer, Silberstraße

Ph 10/12 ■ 70 Eine Pendeluhr geht in Meeresspiegelhöhe richtig. Wieviel Sekunden geht sie täglich falsch, wenn sie an einen Ort gebracht wird, der die Höhe 750 Meter über NN hat? (Erdradius $r = 6370 \text{ km}$)

Annelie Meyer, Silberstraße

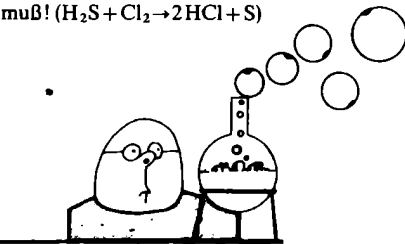
Chemie

Ch 7 ■ 53 220 g Braunkohle vom VEB Braunkohlenwerk in Borna werden 2 Tage bei Zimmertemperatur an der Luft getrocknet. Danach hat die Kohle nur noch eine Masse von 192,6 g. Berechne den Feuchtigkeitsgehalt, den die Kohle nach zwei Tagen noch besitzt!

Ch 8 ■ 54 Bei der Chlorkalielektrolyse entsteht eine 11%ige Natronlauge. Zu 10 kg dieser Natronlauge werden 25 l Wasser zugegeben. Wieviel prozentig ist die neue Lösung? Welche Masse Kochsalz läßt sich aus 10 kg 11%iger Natronlauge herstellen?

Ch 9 ■ 55 Einer 0,5-l-Flasche mit 40%igem Alkohol wurde eine bestimmte Menge entnommen und die gleiche Menge durch Wasser ersetzt. Dadurch ist ein 32%iger Alkohol entstanden. Welche Flüssigkeitsmenge in ml (Alkohol und Wasser) wurde entnommen?

Ch 10/12 ■ 56 Ein Zimmer hat folgende Abmaße: Länge 10 m, Breite: 5 m, Höhe: 4 m. Die Luft dieses Zimmers ist durch Schwefelwasserstoff im Verhältnis 1:5000 verunreinigt. Gereinigt wird durch Chlorkalk. Berechnen Sie die Masse an Chlorkalk mit 30% wirksamem Chlorgehalt, die zur Reinigung bei 20°C und 780 Torr eingesetzt werden muß! ($\text{H}_2\text{S} + \text{Cl}_2 \rightarrow 2\text{HCl} + \text{S}$)



Er blickte so unverwandt in die Zukunft, daß er die Gegenwart übersah...

Lösung zu: Schöne Wünsche für 1980

Wir danken dem Musikpädagogen Dr. Christian Lange vom IfL Leipzig, einem aktiven Leser unserer alpha, für das schöne Kryptogramm.

Die einzige mögliche Lösung lautet:

982160

3769820

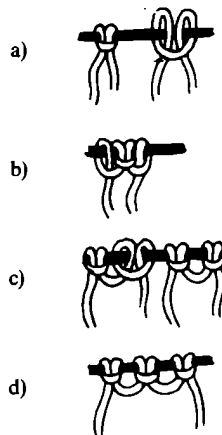
4751980

Daraus ergibt sich für 50820667990: Rechenüsse.

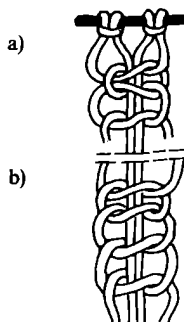
Kleine Knotenschule

Die Winterszeit regt zum Basteln an. Aus der „Für Dich“ 12/79 entnehmen wir für unsere Leser die vorliegende kleine Knotenschule. Mit etwas Geschick und vor allem Geduld lassen sich daraus Umhängetaschen, Schlüsseltaschen oder Halsbänder fertigen.

1. a) Einhängen der Fäden/Vorderseite
b, c, d verschiedene Arten der Doppelaufhängung



2. a) Weber- oder Doppelknoten, die Arbeitsfäden rechts und links werden um die Einlegefäden geschlungen.
b) Halber Weberknoten, der Knoten wird so geknüpft, daß der linke Arbeitsfaden immer vor den Einlegefäden liegt. Dadurch dreht sich das geknüpfte Band zu einer Spirale.

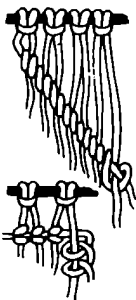


3. Rippenknoten, er kann von der Vorder- und von der Rückseite aus verwendet werden. Die Richtung des Einlegefadens bestimmt die waagerechte, diagonale oder senkrechte Reihung.

a) waagerechter Rippenknoten

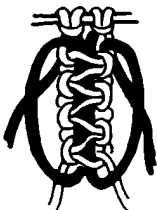


b) diagonaler Rippenknoten

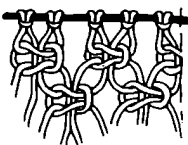


c) senkrechter Rippenknoten

4. Perlknoten, nach einer Anzahl Weberknoten werden die Einlegefäden durch die Schlingen des ersten gefädelt und zu einer Rundung zusammengezogen. Die Anzahl der Weberknoten bestimmt die Größe der Perle.



5. Versetzte Weberknoten, Einlege- und Arbeitsfäden werden wechselweise getauscht. Diese Art läßt sich auch mit dem halben Weberknoten ausführen.



6. Ein Beispiel für die Kombination verschiedener Knoten mit eingearbeiteten Perlen.



U. Kähler

Wir basteln ein Modell von der Bienenzelle

In Heft 1/1979 fanden wir einen Beitrag mit der Überschrift „Die Biene als Geometer“. Darin wurde uns der geometrische Aufbau einer Bienenzelle und einer Bienenwabe beschrieben. Dieser Aufsatz weckt in uns das Verlangen, auch selbst einmal ein Modell der Bienenzelle als geschlossenes konvexes Polygon aus Papier zu basteln. Wir geben euch hier eine Vorlage dazu.

Schneidet zunächst die Teile 1, 2 und 3 entsprechend den Vorgaben des Bogens aus! Teil 1 liefert die sechs Seitenwände der Bienenzelle, Teil 2 den Zellboden und Teil 3 den Zelldeckel. Vor dem Zusammenkleben der drei Teile zu unserem Modell sind die Körperkanten durch Anbringen von sauberen Falzen entsprechend den Vorgaben des Modellbogens an Teil 1 und Teil 2 herauszuarbeiten. Außerdem sind die Klebestreifen A, B, C und D an den Teilen 1 und 2 durch Falzen in die vorgesehene Stellung zu bringen.

Bestreicht zuerst den Klebestreifen A von Teil 1 mit Klebstoff, und verbindet die sechs Zellenwände zu einem geschlossenen Band! Bestreicht den Klebestreifen D von Teil 2 mit Klebstoff, und gebt dem Zellboden die vorgesehene Gestalt!

Nach Eintrocknen der Leimstelle A können die sechs Klebestreifen B von Teil 1 mit Leim bestrichen und der Zelldeckel (Teil 3) aufgepaßt werden. Nun warten wir, bis die Klebestellen B und D eingetrocknet und gefestigt sind. Abschließend sind die Streifen C mit Klebstoff zu versehen und der pyramidenförmige Zellboden (Teil 2) auf das Sechseckprisma aufzusetzen.

Beim Leimen sind alle Klebstellen gut aufeinander zu pressen. Mit einem Bleistift oder einem Holzspachtel läßt sich an schlecht zugänglichen Stellen leicht nachhelfen. Laßt zwischen zwei Leimvorgängen stets hinreichend Zeit, bis sich die Verbindungen an den Leimstellen gut gefestigt haben! Wenn eine größere Zahl von Freunden je eine Zelle basteln, dann könnt ihr diese Zellen einmal zu einem Wabenstück zusammensetzen.

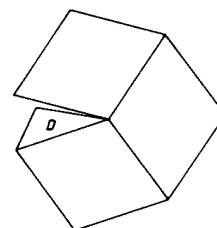
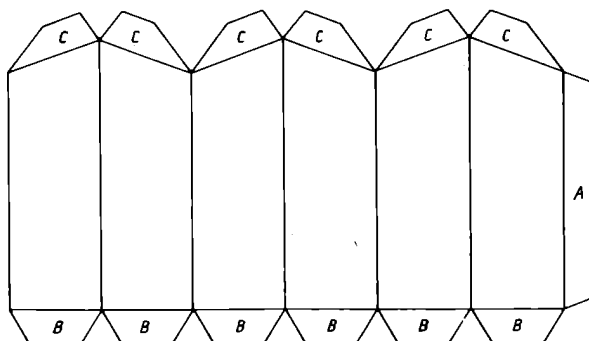
Bei der Erarbeitung des Modellbogens waren u. a. folgende geometrische Beziehungen zu beachten:

1. In den Basisrhomben verhalten sich die Längen der Diagonalen wie $1:\sqrt{2}$.
2. Die stumpfen Winkel der Basisrhomben sind größengleich mit den stumpfen Winkeln der Seitenflächen des Prismas. Für den stumpfen Winkel α , auch Maraldi-Winkel genannt, gilt die Beziehung $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$. Daraus ergibt sich für α die Winkelgröße von $109^\circ 28' 16''$.

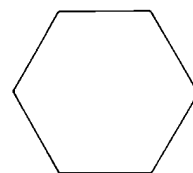
Weise durch Herleitung der Bienenzelle aus dem Würfel die Gültigkeit dieser geometrischen Beziehungen nach!

E. Schröder

Teil 1

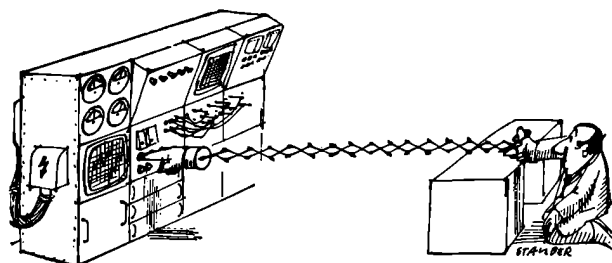


Teil 2



Teil 3

In freien Stunden **alpha** heiter



Stadtplan

Welches ist das nicht weiße Haus, dessen nördlicher Nachbar nicht gestreift und dessen südlicher Nachbar nicht schwarz, im Westen und Osten jedesmal nur von Bäumen umgeben ist?

Aus: Füles, Budapest

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
1	■	▨	□	✱	■	□	▨	■	▨	▨
2	□	✱	▨	■	□	■	✱	▨	✱	□
3	✱	■	✱	■	✱	▨	□	■	▨	■
4	▨	■	□	■	□	▨	■	■	▨	■
5	□	✱	■	✱	□	✱	■	■	▨	■
6	■	□	▨	□	■	□	□	▨	■	■

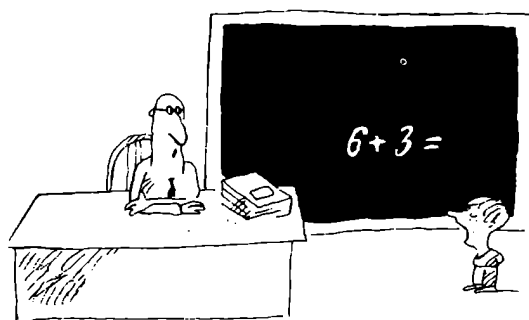
N
 W — ● — O
 S

Melantex

Eulenspiegelei

Eulenspiegel-Leser lieferten zu untenstehender lustiger Vignette witzige Unterschriften:

- Ich schlage vor, daß $6 + 3 = 9$ ist. Wer dafür ist, den bitte ich um das Handzeichen.
- Elf würde ich als Kellner sagen.
- Herr Lehrer, ich hab' meinen Taschenrechner vergessen!



„Schriftlich oder im Kopf?“

Des Menschen Tugend

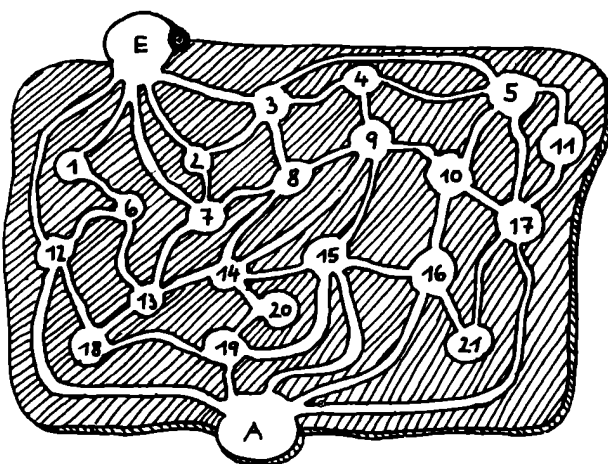
Der Mensch gleicht einem Bruch: Der Zähler ist, was er ist, der Nenner, was er zu sein glaubt. Je größer der Nenner, desto kleiner der Bruch.

Lew Tolstoi (1828 bis 1910)

Rätselspaß mit π

Wir wollen im berühmten Park von Saint-Soszé alle Sehenswürdigkeiten von 1 bis 21 besichtigen, aber jede nur einmal und ohne einen Weg doppelt zu gehen. Wie muß man laufen, um vom Eingang E zum Ausgang A zu gelangen?

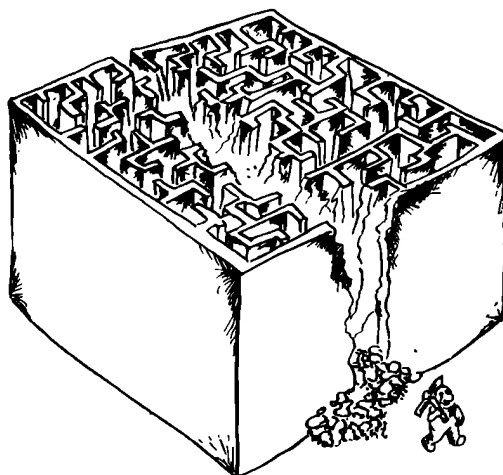
Aus: Magazin 5/79



Abschied von 1979

Zeige, daß die Zahl
 $A = 1979 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 1978)$
 eine Quadratzahl ist!

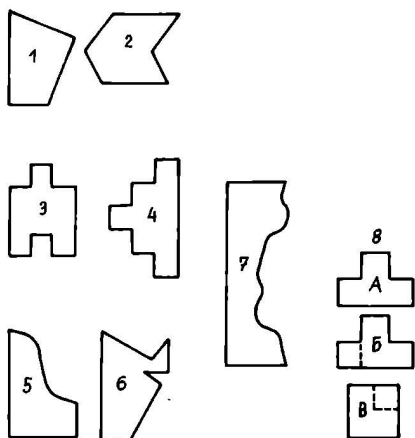
Mathematikfachlehrer W. Förg, Schwaz (Österreich)



Mit einem Schnitt

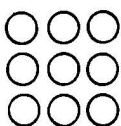
Jede der hier abgebildeten acht geometrischen Figuren kann man durch einen einzigen geraden Schnitt mit der Schere in ein Quadrat verwandeln, wie, das ist auf der Zeichnung rechts gezeigt (darauf wird die Figur A zum Quadrat B). Das ist aber die achte Figur. Und wie macht man das mit den übrigen sieben?

Aus: Nauka i Shisn



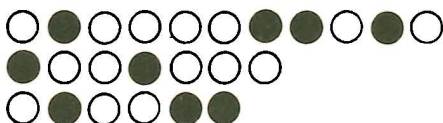
Knopfspielereien

1. Die neun Knöpfe bilden acht Dreierreihen (drei waagerechte, drei senkrechte und zwei diagonale).



Die Knöpfe sind so anzuordnen, daß drei Viererreihen entstehen.

2. Auf dem Tisch liegen 24 Knöpfe, und zwar in drei Reihen zu 11, sieben und sechs Stück. In jeder Reihe sollen aber acht Knöpfe liegen.



Wieviele Schübe von Reihe zu Reihe sind nötig, wenn man von einer Reihe in die andere nur genau so viele Knöpfe schieben darf wie in dieser bereits liegen?

3. Rechts liegen drei schwarze Knöpfe, links drei weiße und ganz links ist ein freies Feld. Nun sollen die schwarzen und die weißen Knöpfe durch Ziehen oder Springen ihre Plätze tauschen. Das freie Feld ist dann ganz rechts. (In einem Sprung dürfen ein, zwei oder drei Knöpfe überquert werden, wenn dahinter das freie Feld ist.)



Wie viele Bocksprünge sind nötig?

Kryptarithmetik

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern (gilt nur für jeweils eine Aufgabe):

HIER	WIR	DIE	HIER
STEHT	HABEN	BIRNE	IST
MEIN	EINEN	IST	EINE
VATER	KATER	KLEIN	KATZE
$A > T$	$W < A, A > T$	$T < E, D < R$	$S < N < I$

Ing. J. Pěncík, Prag

Silbenrätsel

Aus den Silben

a – al – be – blo – bo – ca – di – di – e – gen – go – gi – ka – kreis – kur – le – le – li – lier – mil – na – nal – ne – ne – ne – o – on – per – ra – ri – scha – spek – sub – sti – ti – ti – tu – us – va – ve – ven

sollen Wörter folgender Bedeutung gebildet werden:

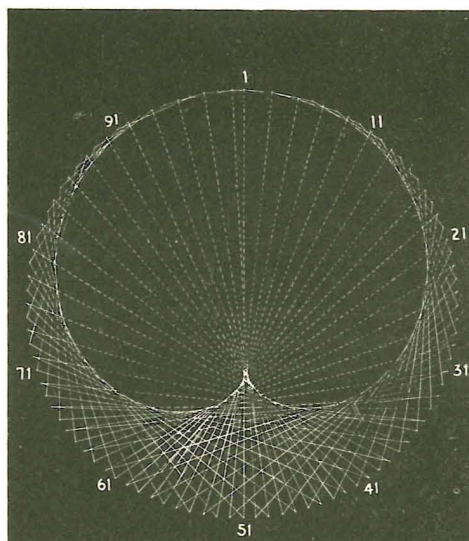
1. gekrümmte Linie; 2. Verbindungsstrecke nicht benachbarter Eckpunkte eines Vierecks; 3. Hilfsmittel zum Zeichnen gekrümmter Linien; 4. Einsetzung; 5. Hälfte des Durchmessers; 6. Vorname des französischen Mathematikers Jordan (1838 bis 1922); 7. häufig verwendetes Verfahren zur Darstellung von Körpern; 8. Zeichengerät; 9. zweidimensionales Gebilde; 10. Gegensatz zu „Bild“.

Sodann entnimmt man jedem dieser Wörter eine Silbe. Aneinandergereiht ergeben diese den Namen eines berühmten italienischen Mathematikers, der sich um die Stereometrie verdient gemacht hat. Zur Erleichterung sind durch die nachstehende Zahlenfolge die auszuwählenden Silben angegeben: 2; 4; 2; 3; 1; 1; 2; 1; 1; 2

OStR K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

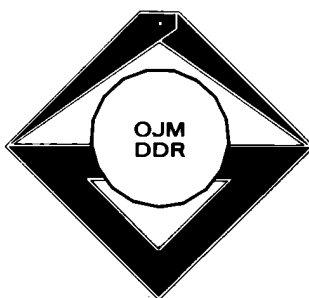
Bemerkenswerte Kurve

To construct this curve divide a circle into hundred equal parts. Number the points of division from 1 to 100. Then let one directed line start at each point N and terminate at the point corresponding to the number 2N or 2N – 101.



XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben und Lösungen der Kreisolympiade (14. 11. 1979)



Olympiadeklasse 5

1. In einer Konsumverkaufsstelle werden genau vier verschiedene Waschpulversorten A , B , C und D angeboten. Insgesamt sind 900 Pakete Waschpulver im Lager der Verkaufsstelle vorhanden; jedes Paket hat 250 g Inhalt. Ein Drittel des gesamten Lagerbestandes an Waschpulver ist von der Sorte A . Ein Viertel des übrigen Bestandes ist von der Sorte B . Von der Sorte C sind ebenso viele Pakete im Lager wie von der Sorte D .

a) Wieviel Pakete beträgt für jede einzelne der vier Sorten der Lagerbestand?

b) Wieviel Kilogramm Waschpulver sind insgesamt in den Paketen enthalten?

Lösung: a) Für die Sorte A beträgt wegen $900:3=300$ der Lagerbestand 300 Pakete. Für die Sorte B beträgt wegen $900-300=600$ und $600:4=150$ der Bestand 150 Pakete. Wegen $600-150=450$ und $450:2=225$ beträgt für die Sorten C und D der Bestand je 225 Pakete.

b) Wegen $250 \cdot 900=225\,000$ und $225\,000\text{ g}=225\text{ kg}$ sind insgesamt 225 kg Waschpulver in den Paketen enthalten.

2. In einem Bericht eines Schülers über einen 60-m-Lauf war zu lesen: „Es war ein spannender Lauf unserer Mädchen. Astrid zog an Doris vorbei und konnte dann ihren Vorsprung bis ins Ziel behaupten. Auf den letzten Metern gelang es sogar noch Beate, Doris zu überholen. Das war zwar eine anerkennenswerte Leistung, jedoch kam Beate noch etwas später ins Ziel als Christine. Doris wurde nur teilweise den in sie gesetzten Erwartungen gerecht; immerhin konnte sie Christine hinter sich lassen.“ Können alle Aussagen dieses Berichtes gleichzeitig wahr sein? Begründe deine Entscheidung!

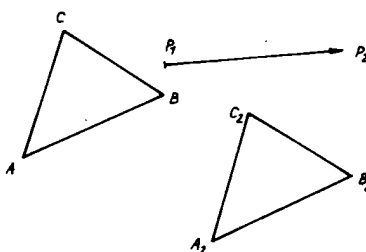
Lösung: Wären alle Aussagen des Berichtes wahr, so hätte Beate Doris „auf den letzten Metern überholt“, und Doris hätte Christine „hinter sich gelassen“. Also wäre Beate vor Christine ins Ziel gekommen. Das steht im Widerspruch zu der Aussage, Beate wäre „etwas später ins Ziel gekommen als Christine“. Folglich können nicht alle Aussagen des Berichtes gleichzeitig wahr sein.

3. Auf dem Arbeitsblatt sind ein Dreieck

ABC , ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$ sowie ein Dreieck $A_2B_2C_2$ abgebildet.

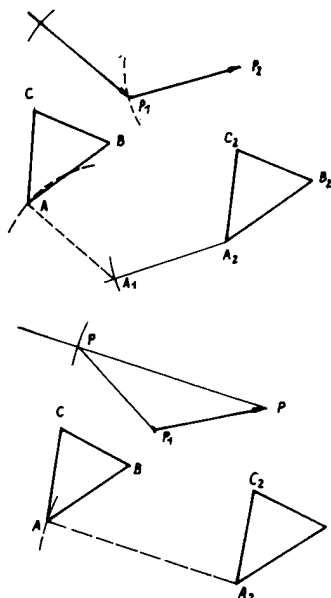
Gesucht ist ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P\overline{P}_1}$ mit folgender Eigenschaft:

Wendet man auf das Dreieck ABC zuerst die Verschiebung $\overrightarrow{P\overline{P}_1}$ und dann die Verschiebung $\overrightarrow{P_1P_2}$ an, so entsteht das Dreieck $A_2B_2C_2$. Konstruiere einen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P\overline{P}_1}$ mit dieser Eigenschaft! Verwende dabei nur Lineal (ohne Benutzung der Millimeteereinteilung), Zirkel und (nur zum Konstruieren von Parallelen) Zeichendreieck! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt!



Lösung: Beispiel einer als Lösung möglichen Konstruktion:

Weitere Punkte und Linien sind (natürlich zulässig, aber) nicht erforderlich.



4. Das untenstehende Muster einer Multiplikationsaufgabe soll so ausgefüllt werden, daß in jedes Kästchen genau eine Ziffer eingetragen wird und daß dabei eine richtig gerechnete Aufgabe entsteht. Für gleiche Variable sind gleiche Ziffern einzusetzen. Wie üblich soll 0 nicht als Anfangsziffer vorkommen. Für das Ausfüllen der leeren Kästchen werden sonst keine weiteren Vorschriften gemacht.

$$\begin{array}{r} x\ y\ z\cdot 8\ x\ z \\ \hline x\ x\ 8\ 8 \\ \hline \square\square\ x \\ \square\square\square\square \\ \hline \square\square\square\square\square \end{array}$$

Begründe, wie sich aus diesen Forderungen eine vollständige Eintragung ergibt!

Lösung: Aus dem ersten Teilprodukt ist ersichtlich, daß $z \cdot 8$ auf 8 endet; daher muß $z=1$ oder $z=6$ gelten. Wäre $z=1$, so könnte das dritte Teilprodukt nicht aus vier Ziffern bestehen, sondern nur aus drei. Folglich verbleibt nur die Möglichkeit

$$z=6.$$

Aus dem zweiten Teilprodukt ist nun ersichtlich, daß $6 \cdot x$ auf x endet. Da x auch als Anfangsziffer vorkommt, also $x \neq 0$ gilt, kann folglich nur $x=2$ oder $x=4$ oder $x=6$ oder $x=8$ sein. Wäre x eine der Ziffern 4, 6, 8, so würde das zweite Teilprodukt nicht dreistellig, sondern vierstellig. Also verbleibt nur die Möglichkeit $x=2$.

Hiernach lautet das erste Teilprodukt 2288. Wegen $2288:8=286$ muß daher der erste Faktor der Multiplikationsaufgabe die Zehnerziffer $y=8$ enthalten.

Nun kann die vollständige Eintragung durch Fertigstellen des schriftlichen Multiplizierens erfolgen. Man erhält:

$$\begin{array}{r} 286 \cdot 826 \\ \hline 2288 \\ 572 \\ 1716 \\ \hline 236236 \end{array}$$

Olympiadeklasse 6

1. Gegeben seien zwei einander schneidende Geraden. Die Größen dreier der dabei entstehenden vier Schnittwinkel haben die Summe 226° .

Ermittle die Größe jedes einzelnen dieser vier Schnittwinkel!

Lösung: Die Größen aller vier Schnittwinkel haben die Summe 360° . Hiernach und wegen $360-226=134$ hat einer der Schnittwinkel die Größe 134° . Von den übrigen ist einer der Scheitelwinkel dieses Winkels, hat also ebenfalls die Größe 134° . Die anderen beiden sind jeweils Nebenwinkel des zuerst genannten Winkels. Wegen $180-134=46$ hat daher jeder von ihnen die Größe 46° .

Die gesuchten Größen sind mithin: 134° , 46° , 134° und 46° .

2. In einem Regal einer HO-Verkaufsstelle liegen sechs Geschenkartikel zum Preis von

15 M, 16 M, 18 M, 19 M, 20 M bzw. 31 M, von jeder Sorte genau ein Stück.

Ein Käufer kaufte genau zwei dieser Geschenke, ein anderer genau drei. Der zweite Käufer hatte doppelt soviel zu bezahlen wie der erste.

Ermittle aus diesen Angaben, welche der sechs Geschenke vom ersten und welche vom zweiten Käufer gekauft wurden!

Lösung: Der Gesamtpreis aller sechs Geschenke beträgt 199 M. Da genau fünf Geschenke gekauft wurden, blieb genau eines zurück. War es zu

15 M, 16 M, 18 M, 19 M, 20 M bzw. 31 M, so hatten beide Käufer zusammen

104 M, 103 M, 101 M, 100 M, 99 M bzw. 88 M gezahlt.

Zahlte der erste Käufer x Mark, so bezahlte der zweite $2x$ Mark. Die von beiden gezahlte Summe, $3x$ Mark, muß folglich durch 3 teilbar sein. Das trifft nur für den Betrag von 99 M zu. Also wurde das Geschenk zu 20 M nicht gekauft; ferner ist $3x=99$, der erste Käufer bezahlte 33 M.

Hätte er als eines seiner beiden Geschenke das zu 16 M, 19 M oder 31 M gekauft, so müßte das andere 17 M, 14 M bzw. 2 M gekostet haben; diese Preise kamen aber nicht vor. Also hat der erste Käufer die Geschenke zu 15 M und 18 M gekauft, der zweite Käufer folglich die Geschenke zu 16 M, 19 M und 31 M.

3. Zum Montieren eines Gerätes sind insgesamt 110 Stunden geplant. Die Montage wird in drei Abschnitten erfolgen. Für den zweiten Abschnitt ist genau dreimal soviel Zeit vorgesehen wie für den ersten; der dritte Abschnitt soll genau halb so lange dauern wie der zweite.

Untersuche, welche Zeiten man hiernach für jeden einzelnen Abschnitt zu planen hat! Überprüfe, ob diese Zeiten alle gestellten Forderungen erfüllen!

Lösung: Wenn die Forderungen erfüllt sind und dabei der erste Abschnitt x Stunden dauert, so dauert der zweite $3x$ Stunden und der dritte $\frac{3}{2}x$ Stunden. Daraus folgt

$$x + 3x + \frac{3}{2}x = 110,$$

$$\frac{2}{2}x + \frac{6}{2}x + \frac{3}{2}x = 110,$$

$$\frac{11}{2}x = 110,$$

$$\frac{1}{2}x = 10,$$

$$x = 20.$$

Also können die Forderungen nur dadurch erfüllt werden, daß man für den ersten Abschnitt 20 Stunden und somit für den zweiten 60 Stunden und für den dritten 30 Stunden plant.

Diese Zeiten erfüllen die Forderungen; denn 60 Stunden sind dreimal soviel Zeit wie 20 Stunden, 30 Stunden dauern halb so lange

wie 60 Stunden, und wegen $20 + 60 + 30 = 110$ ergibt sich die vorgesehene Gesamtzeit.

4. Ein automatischer Nummernstempel für ein Serienprodukt druckt in jeder Sekunde genau eine natürliche Zahl. Er beginnt mit der Zahl 0 und setzt dann das Drucken der Reihe nach mit den aufeinanderfolgenden Zahlen 1, 2, 3, ... fort.

Ermittle die Anzahl aller Ziffern 1, die der Stempel in der ersten Viertelstunde insgesamt zu drucken hat!

Lösung: Jede Minute hat 60 Sekunden, wegen $15 \cdot 60 = 900$ hat der Stempel genau 900 Zahlen zu drucken, d. h. die natürlichen Zahlen von 0 bis 899.

Beim Drucken der Zahlen von 0 bis 9 kommt die Ziffer 1 genau 1mal vor.

Setzt man vor jede dieser Zahlen (also an die Zehnerstelle) jede der neun Ziffern 1, ..., 9, so erhält man alle natürlichen Zahlen von 10 bis 99, jede genau einmal. Somit kommt in diesen Zahlen die Ziffer 1 an der Einerstelle insgesamt genau 9mal vor. Ferner gibt es unter diesen Zahlen genau zehn mit der Zehnerziffer 1 (nämlich die Zahlen 10, ..., 19). Somit kommt in den Zahlen von 10 bis 99 die Ziffer 1 an der Zehnerstelle insgesamt genau 10mal vor.

Setzt man vor jede der Zahlen von 0 bis 99 (nachdem die Zahlen von 0 bis 9 durch Vorschalten einer Zehnerziffer 0 zweistellig geschrieben wurden) an die Hunderterstelle jede der acht Ziffern 1, ..., 8, so erhält man alle natürlichen Zahlen von 100 bis 899, jede genau einmal. Somit kommt in diesen Zahlen die Ziffer 1 an den Einer- und Zehnerstellen insgesamt achtmal so oft vor wie das bisher ermittelte Vorkommen ($1 + 9 + 10 = 20$), d. h. genau 160mal.

Ferner gibt es unter diesen Zahlen genau 100 mit der Hunderterziffer 1 (nämlich die Zahlen 100, ..., 199). Somit kommt in den Zahlen von 100 bis 899 die Ziffer 1 an der Hunderterstelle insgesamt genau 100mal vor.

Damit sind alle zu erfassenden Ziffern 1 berücksichtigt; ihre Anzahl beträgt somit

$$1 + 9 + 10 + 160 + 100 = 280.$$

Olympiadeklasse 7

1. Dieter, Hans, Klaus und Peter sowie ihre Ehefrauen Erika, Gabi, Rita und Simone tauschen Erinnerungen aus. Ein Zuhörer entnimmt der Unterhaltung folgendes:

(1) Simone und ihr Mann sowie außer ihnen Erika und Hans waren zur Hochzeit von Dieter eingeladen.

(2) Auf der Hochzeit von Hans waren Gabi und Erika zu Gast.

(3) Zu den Hochzeitsgästen von Peter gehörten Klaus und Simone. Untersuche, ob für jeden der vier Männer der Name seiner Ehefrau allein aus den Aussagen (1) bis (3) eindeutig zu ermitteln ist; wenn dies der Fall ist, so gib die Namen der Ehepaare an!

Lösung: Wegen (2) ist Hans weder mit Gabi noch mit Erika verheiratet, wegen (1) auch nicht mit Simone. Folglich gilt:

(4) Hans ist mit Rita verheiratet.

Wegen (1) ist Dieter weder mit Erika noch mit Simone verheiratet, wegen (4) auch nicht mit Rita. Daher gilt:

(5) Dieter ist mit Gabi verheiratet.

Wegen (3) ist Peter nicht mit Simone, wegen (4) nicht mit Rita und wegen (5) auch nicht mit Gabi verheiratet. Also gilt:

(6) Peter ist mit Erika verheiratet.

Aus (4), (5), (6) folgt schließlich:

(7) Klaus ist mit Simone verheiratet.

Damit ist gezeigt, daß für jeden der vier Männer der Name seiner Ehefrau eindeutig ermittelt werden kann. Die Ehepaare sind somit in (4), (5), (6) und (7) angegeben.

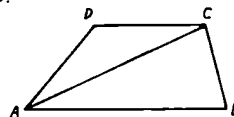
2. a) Beweise folgenden Satz!

Wenn in einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ die Gleichung

$$\overline{CD} = \overline{AD} \quad (1)$$

gilt, dann gilt die folgende Aussage (2):

Die Diagonale AC halbiert den Innenwinkel $\sphericalangle BAD$. (2)



b) Beweise auch die folgende Umkehrung!

Wenn in einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ die Aussage (2) gilt, dann gilt die Gleichung (1).

Lösung: a) Wegen $AB \parallel CD$ sind $\sphericalangle ACD$ und $\sphericalangle CAB$ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, folglich gilt

$$\overline{\sphericalangle ACD} = \overline{\sphericalangle CAB}. \quad (3)$$

Wegen (1) ist das Dreieck ACD gleichschenkelig mit AC als Basis; seine Basiswinkel sind gleich groß, also gilt

$$\overline{\sphericalangle ACD} = \overline{\sphericalangle CAD}. \quad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt $\overline{\sphericalangle CAB} = \overline{\sphericalangle CAD}$; w. z. b. w.

b) Aus $AB \parallel CD$ folgt wie oben (3).

Wegen (2) gilt

$$\overline{\sphericalangle CAB} = \overline{\sphericalangle CAD}. \quad (5)$$

Aus (3) und (5) folgt (4), also ist das Dreieck ACD gleichschenkelig mit AC als Basis; d. h., es gilt (1), w. z. b. w.

3. Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen z , die die folgenden Bedingungen (1) bis (4) erfüllen!

(1) z ist eine dreistellige Zahl.

(2) Die Zehnerziffer (d. h. die an der Zehnerstelle stehende Ziffer) von z ist um 1 größer als die Hunderterziffer von z .

(3) Die Einerziffer von z ist doppelt so groß wie die Hunderterziffer von z .

(4) z ist das Doppelte einer Primzahl.

Lösung: I) Wenn eine natürliche Zahl z die Bedingungen (1) bis (4) erfüllt und a ihre Hunderterziffer ist, so folgt:

Wegen (1) gilt $a \neq 0$, wegen (3) ist $2a < 10$, also $a < 5$. Die folgende Tabelle enthält die für die

verbleibenden Möglichkeiten $a=1, 2, 3, 4$ die nach (2) und (3) sich ergebenden Zehner- und Einerziffern und damit z .

Hunderter- ziffer a	Zehner- ziffer	Einer- ziffer	z
1	2	2	122
2	3	4	234
3	4	6	346
4	5	8	458

Von diesen scheidet die Zahl $z=234$ aus, da sie das Doppelte von 117 ist und dies wegen $117=3 \cdot 39$ keine Primzahl ist. Also können nur die Zahlen 122, 346 und 458 die Bedingungen (1) bis (4) erfüllen.

II) Sie sind dreistellig, erfüllen also (1). Ferner zeigt die Tabelle, daß sie (2) und (3) erfüllen. Schließlich erfüllen sie auch (4), da sie jeweils das Doppelte von 61, 173 bzw. 229 sind und diese Zahlen Primzahlen sind.

Somit lauten die gesuchten Zahlen: 122, 346, 458.

4. Ein Kraftfahrer fuhr mit seinem PKW von A nach B. Nach einer Fahrzeit von 20 Minuten hatte er eine Panne, die in 30 Minuten behoben werden konnte. Nach weiteren 12 Minuten Fahrzeit mußte er an einer geschlossenen Bahnschranke 4 Minuten warten. Bis dahin hatte er 40 km zurückgelegt. Die Fahrt von der Bahnschranke nach B begann um 11.06 Uhr und verlief ohne Aufenthalt. In B angekommen, stellt der Kraftfahrer fest, daß er von der Abfahrt an der Bahnschranke bis zur Ankunft in B genau die Hälfte derjenigen Zeit benötigt hat, die insgesamt von der Abfahrt von A bis zur Ankunft in B vergangen war.

Es sei angenommen, daß der Kraftfahrer auf jedem Teilstück dieses Weges mit der gleichen Durchschnittsgeschwindigkeit fuhr.

a) Zu welcher Uhrzeit traf der Kraftfahrer in B ein?

b) Wie groß war die Durchschnittsgeschwindigkeit, in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ausgedrückt?

c) Wieviel Kilometer hatte er insgesamt von A nach B zurückgelegt?

Lösung: a) Der Kraftfahrer benötigte wegen $20+30+12+4=66$ bis zur Abfahrt von der Bahnschranke genau 66 Minuten. Da diese Zeit ebenso lang war wie die Fahrzeit von der Bahnschranke bis nach B, war er ab 11.06 Uhr noch einmal 66 Minuten bis B unterwegs, traf daher dort um 12.12 Uhr ein.

b) Für die ersten 40 km betrug die reine Fahrzeit wegen $66-30-4=32$ genau 32 Minuten, das sind $\frac{8}{15}$ Stunden. Wegen $40:\frac{8}{15}=75$ betrug seine Durchschnittsgeschwindigkeit mit hin $75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

c) Da er den Rest des Weges mit der gleichen Durchschnittsgeschwindigkeit zurücklegte und dafür 66 Minuten, also $\frac{11}{10}$ Stunden be-

notigte, legte er dabei wegen $75 \cdot \frac{11}{10}=82,5$ noch weitere 82,5 km zurück. Mithin hatte er von A nach B insgesamt $40 \text{ km} + 82,5 \text{ km} = 122,5 \text{ km}$ zurückgelegt.

Olympiadeklasse 8

1. Eine Gruppe von 39 Schülern unterhält sich über ihre Zensuren in den Fächern Mathematik, Russisch und Deutsch. Dabei wird festgestellt:

(1) Genau 11 Schüler haben in Mathematik die Zensur 2.

(2) Genau 19 Schüler haben in Russisch die Zensur 2.

(3) Genau 23 Schüler haben in Deutsch die Zensur 2.

(4) Genau ein Schüler hat in allen drei Fächern die Zensur 2.

(5) Genau 4 Schüler haben in Mathematik und Deutsch, aber nicht in Russisch eine „2“.

(6) Genau 7 Schüler haben in Russisch und Deutsch, aber nicht in Mathematik eine „2“.

(7) Genau 2 Schüler haben in Mathematik und Russisch, aber nicht in Deutsch eine „2“.

Ermittle aus diesen Angaben, wieviel Schüler dieser Gruppe in genau einem und wieviel in keinem der angegebenen Fächer die Zensur 2 haben!

Lösung: Aus (1), (4), (5) und (7) folgt wegen $11-1-4-2=4$, daß genau 4 Schüler in Mathematik die Zensur 2 haben. Aus (2), (4), (6) und (7) folgt wegen $19-1-7-2=9$, daß genau 9 Schüler genau in Russisch die Zensur 2 haben. Aus (3), (4), (5) und (6) folgt, daß wegen $23-1-4-7=11$ genau 11 Schüler genau in Deutsch eine „2“ haben.

Wegen $4+9+11=24$ haben somit genau 24 Schüler dieser Gruppe in genau einem der genannten Fächer die Zensur 2.

Da wegen (5), (6), (7) genau 13 Schüler in genau zwei der Fächer eine 2 haben und wegen (4) noch ein weiterer Schüler hinzukommt, haben wegen $24+13+1=38$ mithin genau 38 Schüler in wenigstens einem der Fächer die Zensur 2.

Folglich hat genau ein Schüler dieser Gruppe in keinem der genannten Fächer die Zensur 2.

2. In einer AG Mathematik stellte ein Mitglied der Patenbrigade den Teilnehmern folgende Aufgabe:

„Unsere Brigade hat mehr als 20, aber weniger als 35 Mitglieder. Von ihnen nahmen im letzten Jahr im Juli dreimal soviel, im Februar doppelt soviel ihren Jahresurlaub wie im Mai. Im Januar nahmen drei Personen weniger als im Juli Urlaub, im August dagegen eine Person mehr als im Mai. In den nicht genannten Monaten dieses Jahres nahm kein Mitglied unserer Brigade Urlaub. Unter den genannten Urlaubern ist jedes Mitglied unserer Brigade genau einmal vertreten.“

Stellt fest, ob ihr allein aus diesen Angaben die Anzahl unserer Brigademitglieder ermitteln könnt!“

Lösung: Die Anzahl der Mitglieder dieser Brigade, die im Mai Urlaub nahmen, sei x . Dann nahmen im Juli $3x$, im Februar $2x$, im Januar $3x-3$ und im August $x+1$ Brigademitglieder Urlaub. Das sind zusammen $(10x-2)$ Personen.

Nun gilt

$$20 < 10x - 2 < 35, \text{ also}$$

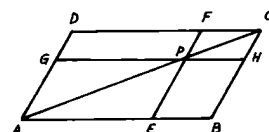
$$22 < 10x < 37.$$

Da x eine natürliche Zahl ist, folgt daraus $x=3$.

Mithin hatte die Brigade 28 Mitglieder.

3. In einem Parallelogramm $ABCD$ sei P ein beliebiger Punkt auf der Diagonalen AC ($P \neq A, P \neq C$). Die Parallele durch P zu AB schneide BC in H und AD in G ; die Parallele durch P zu BC schneide AB in E und CD in F .

Beweise, daß die beiden Parallelogramme $EBHP$ und $GPFD$ den gleichen Flächeninhalt haben!



Lösung: Jede Diagonale eines Parallelogramms zerlegt dieses in zwei kongruente und somit flächeneinhaltsgleiche Dreiecke. Wendet man dies auf die Parallelogramme $ABCD$, $AEFG$ und $PHCF$ an, so erhält man: Die Dreiecke ABC und CDA haben denselben Flächeninhalt; dieser sei A_1 genannt. Die Dreiecke AEP und PGA haben denselben Flächeninhalt; dieser sei A_2 genannt. Die Dreiecke PHC und CFP haben denselben Flächeninhalt; dieser sei A_3 genannt. Daher ergibt sich, daß sowohl das Parallelogramm $EBHP$ als auch das Parallelogramm $GPFD$ den Flächeninhalt $A_1 - A_2 - A_3$ haben.

Damit ist der verlangte Beweis geführt.

4. Klaus sagt: „Ich denke mir drei natürliche Zahlen. Die zweite Zahl ist um 2 größer als die Hälfte der ersten Zahl. Die dritte Zahl ist um 2 größer als die Hälfte der zweiten Zahl. Das Produkt der drei gedachten Zahlen beträgt 1120. Welche Zahl habe ich mir als erste gedacht, welche als zweite und welche als dritte?“

Kann diese Frage eindeutig beantwortet werden? Wenn das der Fall ist, so nenne die drei gedachten Zahlen!

Lösung: I) Wenn drei Zahlen die genannten Eigenschaften haben und die erste Zahl n ist, so lautet die zweite $\frac{n}{2} + 2 = \frac{n+4}{2}$ und die dritte $\frac{n+4}{4} + 2 = \frac{n}{4} + 3$. Da auch dies eine natürliche Zahl ist, ist n durch 4 teilbar.

Wäre n eine (durch 4 teilbare) natürliche Zahl mit $n \leq 12$, so wären $\frac{n}{2} + 2$ und $\frac{n}{4} + 3$ natürliche Zahlen mit $\frac{n}{2} + 2 \leq 8$ und $\frac{n}{4} + 3 \leq 6$, also wäre ihr Produkt

$n \cdot \left(\frac{n}{2} + 2\right) \cdot \left(\frac{n}{4} + 3\right) \leq 12 \cdot 8 \cdot 6 = 576$
 und daher kleiner als 1120. Wäre $n \geq 20$, so
 wären $\frac{n}{2} + 2 \geq 12$ und $\frac{n}{4} + 3 \geq 8$, also das Pro-
 dukt $n \cdot \left(\frac{n}{2} + 2\right) \cdot \left(\frac{n}{4} + 3\right) \geq 20 \cdot 12 \cdot 8 = 1920$
 und daher größer als 1120.
 Also kommt als erste Zahl nur $n = 16$, als
 zweite nur $\frac{n}{2} + 2 = 10$ und als dritte nur
 $\frac{n}{4} + 3 = 7$ in Frage.

II) Diese Zahlen haben die geforderten Eigen-
 schaften, wie die Bestätigung von $\frac{16}{2} + 2 = 10$,
 $\frac{10}{2} + 2 = 7$, $16 \cdot 10 \cdot 7 = 1120$ zeigt.

Also kann die Frage von Klaus eindeutig be-
 antwortet werden. Er hat sich als erste Zahl
 16, als zweite 10 und als dritte 7 gedacht.

Olympiadeklasse 9

1. An einer Kreuzung standen in einer Reihe
 hintereinander genau 7 Fahrzeuge. Jedes die-
 ser Fahrzeuge war entweder ein Personen-
 kraftwagen oder ein Lastkraftwagen. Über
 ihre Reihenfolge sei bekannt:

- (1) Kein LKW stand direkt vor oder hinter
 einem anderen LKW.
- (2) Genau ein PKW befand sich unmittelbar
 zwischen zwei LKW.
- (3) Genau ein LKW befand sich unmittelbar
 zwischen zwei PKW.
- (4) Genau drei PKW standen unmittelbar
 hintereinander.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, in welcher
 Reihenfolge diese 7 Fahrzeuge gestanden
 haben können!

Lösung: Wir bezeichnen Personen- bzw.
 Lastkraftwagen mit P bzw. L. Aus (2) folgt:

(5) In der Fahrzeugreihe kommt ein Teilstück
 L P L (*)

vor. Hiernach folgt aus (1):

(6) An (*) schließt sich nach keiner Seite ein
 L an.

Wegen (3) ist es auch nicht möglich, daß sich
 an (*) nach beiden Seiten je ein P anschließt,
 somit folgt:

(7) Eines der Enden des Teilstücks (*) ist auch
 ein Ende der gesamten Fahrzeugreihe.

Aus (4) ergeben sich die beiden folgenden
 Aussagen:

(8) In der Fahrzeugreihe kommt ein Teilstück
 P P P (**)

vor.

(9) An (**) schließt sich nach keiner Seite
 ein P an.

Da die Fahrzeugreihe insgesamt 7 Fahrzeuge
 enthält, folgt:

(1) Das Teilstück (**) kann entweder unmit-
 telbar oder mit Dazwischenschalten genau
 eines Fahrzeugs an (*) angeschlossen sein.

Ein Fahrzeug zwischen (*) und (**) könnte
 aber wegen (6) kein L und wegen (9) kein P
 sein; also entfällt in (10) die Möglichkeit des

Dazwischenschaltens, d. h., (*) und (**) stehen
 unmittelbar hintereinander. Hiernach ist das
 außer (*) und (**) noch vorhandene Fahrzeug
 wegen (7) an (**) angeschlossen und daher
 wegen (9) ein L. Also gibt es insgesamt als
 Möglichkeiten für die Reihenfolge nur

(*) (**) L, d. h. L P L P P P L,
 L (**) (*), d. h. L P P P L P L.

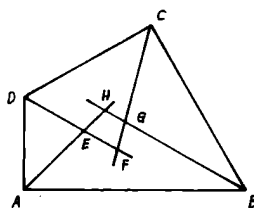
Diese beiden Möglichkeiten erfüllen in der
 Tat alle Bedingungen (1) bis (4). Daher sind
 genau sie die gesuchten.

2. Die Zahlen in einem Zahlentripel $[p, q, r]$
 seien genau dann „Primzahltrillinge“ ge-
 nannt, wenn jede der drei Zahlen p, q, r eine
 Primzahl ist und wenn p, q, r in dieser Reihen-
 folge drei unmittelbar aufeinanderfolgende
 ungerade Zahlen sind.

Beweisen Sie, daß es genau ein Zahlentripel
 $[p, q, r]$ gibt, das alle diese Bedingungen er-
 füllt!

Lösung: Angenommen, ein Zahlentripel
 $[p, q, r]$ erfülle die genannten Bedingungen.
 Dann ist $p \geq 3$ sowie $q = p + 2$ und $r = p + 4$.
 Wenn p bei Division durch 3 den Rest 1 er-
 gäbe, so wäre q durch 3 teilbar, also wegen
 $q \geq 5 > 3$ keine Primzahl. Wenn p bei Division
 durch 3 den Rest 2 ergäbe, so wäre r durch 3
 teilbar, also wegen $r \geq 7 > 3$ keine Primzahl.
 Daher verbleibt nur die Möglichkeit, daß p
 durch 3 teilbar und folglich (als Primzahl)
 gleich 3 ist. Somit kann nur das Tripel
 $[3, 5, 7]$ die Bedingungen der Aufgabenstel-
 lung erfüllen. Es erfüllt diese Bedingungen;
 denn 3, 5 und 7 sind Primzahlen, und sie sind
 drei unmittelbar aufeinanderfolgende unge-
 rade Zahlen.

3. Von einem konvexen Viereck ABCD werde
 folgendes vorausgesetzt:



Konstruiert man die Winkelhalbierenden sei-
 ner Innenwinkel, so entstehen Schnittpunkte
 E, F, G, H , die so auf den Winkelhalbierenden
 angeordnet sind, wie dies aus dem Bild er-
 sichtlich ist.

Beweisen Sie, daß unter dieser Vorausset-
 zung stets in dem Viereck EFGH die Summe
 zweier gegenüberliegender Innenwinkel 180°
 beträgt!

Lösung: Es seien $\angle BAD = \alpha$; $\angle CBA = \beta$;
 $\angle DCB = \gamma$; $\angle ADC = \delta$. Dann gilt nach dem
 Satz über die Summe der Innenwinkel im
 Dreieck, angewandt auf das Dreieck AHB:
 $\angle EHG = \angle AHB = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)$ und ange-
 wandt auf das Dreieck DFC: $\angle EFG = \angle DFC$
 $= 180^\circ - \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}\right)$.

Somit erhält man durch Addition

$$\angle EHG + \angle EFG = 360^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}\right).$$

Da aber die Summe der Innenwinkel im Vier-
 eck 360° beträgt, gilt

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2} = 180^\circ \text{ und somit}$$

$$\angle EHG + \angle EFG = 180^\circ, \text{ w. z. b. w.}$$

4. Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen
 Zahlen x , für die folgendes gilt!

- (1) x ist das Quadrat einer natürlichen Zahl.
- (2) Vergrößert man x um 24, so erhält man das
 Quadrat einer natürlichen Zahl.
- (3) Vermindert man x um 24, so erhält man
 das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Lösung: Angenommen, eine Zahl x habe die
 Eigenschaften (1), (2), (3). Dann gibt es natür-
 liche Zahlen m, n, p für die

$$x = n^2, \quad (4)$$

$$x + 24 = p^2, \quad (5)$$

$$x - 24 = m^2 \quad (6)$$

gilt. Aus (4) und (6) folgt

$$n^2 - m^2 = 24, \quad (7)$$

aus (4) und (5) folgt

$$p^2 - n^2 = 24. \quad (8)$$

Aus (7) folgt $(n - m)(n + m) = 24$. Damit ist 24
 als Produkt der ganzen Zahlen $n - m$ und
 $n + m$ dargestellt. Von diesen ist $n + m$ eine
 natürliche Zahl, also auch der andere Faktor
 $n - m$. Ferner ist die Differenz dieser Faktoren
 $(n + m) - (n - m) = 2m$ eine gerade natürliche
 Zahl. Das trifft, wie die sämtlichen Zerlegun-
 gen $24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$ zeigen, nur
 für die Fälle

$$\begin{aligned} n - m &= 1, n + m = 12, \\ \text{also } m &= 5, n = 7, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} n - m &= 4, n + m = 6, \\ \text{also } m &= 1, n = 5 \end{aligned} \quad (10)$$

zu. Somit kann das Paar (m, n) nur eines der
 Paare $(1, 5)$, $(5, 7)$ sein.

Aus (8) folgt ebenso: Das Paar (n, p) kann nur
 eines der Paare $(1, 5)$, $(5, 7)$ sein.

Daher verbleibt nur die Möglichkeit $m = 1$,
 $n = 5$, $p = 7$, nach (4) also $x = 25$. Also kann
 nur diese Zahl die Eigenschaften (1), (2), (3)
 haben.

Sie hat diese Eigenschaften; denn es gilt

$$\begin{aligned} 25 &= 5^2, \quad 25 + 24 = 49 = 7^2, \\ 25 - 24 &= 1 = 1^2. \end{aligned}$$

Olympiadeklasse 10

1. Ein rechteckiges Bild, dessen Seitenlängen
 sich wie 2:3 verhalten, soll einen überall
 gleich breiten Rahmen erhalten, dessen Flä-
 cheninhalt so groß ist wie der des Bildes.

Ermitteln Sie alle diejenigen Werte des Län-
 genverhältnisses der Außenkanten des Rah-
 mens, die diese Forderung erfüllen!

Lösung: Es sei $2a$ die Länge der kürzeren Seite
 des Bildes, dann ist $3a$ die Länge seiner länge-
 ren Seite. Es sei d die Breite des Rahmens,
 dann sind $2a + 2d$ bzw. $3a + 2d$ die Längen der
 Außenkanten des Rahmens.

Die in der Aufgabe gestellte Forderung ist

genau dann erfüllt, wenn die von diesen Kanten eingeschlossene Fläche einen doppelt so großen Flächeninhalt hat wie die des Bildes, d. h. genau dann, wenn

$$(2a+2d)(3a+2d)=2 \cdot 2a \cdot 3a$$

gilt. Dies ist der Reihe nach äquivalent mit

$$6a^2 + 4ad + 6ad + 4d^2 = 12a^2,$$

$$4d^2 + 10ad - 6a^2 = 0,$$

$$d^2 + \frac{5}{2}ad - \frac{3}{2}a^2 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat genau die Lösungen

$$d_{1,2} = -\frac{5}{4}a \pm \sqrt{\frac{25}{16}a^2 + \frac{24}{16}a^2},$$

von denen genau

$$d = -\frac{5}{4}a + \frac{7}{4}a = \frac{a}{2}$$

nicht negativ ist. Daher ist die Forderung genau dann erfüllt, wenn die Außenkanten

die Längen $2a + 2 \cdot \frac{a}{2} = 3a$ und $3a + 2 \cdot \frac{a}{2} = 4a$

haben.

Ist dies der Fall, so haben sie das Längenverhältnis 3:4, und auch umgekehrt gilt: Haben die Außenkanten das Längenverhältnis $(2a+2d):(3a+2d)=3:4$, so folgt $8a+8d=9a+6d$, also $2d=a$ und damit $d=\frac{a}{2}$.

Somit erfüllt genau das Längenverhältnis 3:4 die Bedingungen der Aufgabe.

2. Beweisen Sie die folgende Aussage!

Wenn die Summe dreier Quadratzahlen durch 9 teilbar ist, dann sind entweder alle drei Quadratzahlen durch 9 teilbar, oder genau zwei der Quadratzahlen ergeben bei Division durch 9 den gleichen Rest.

Lösung: Ergibt eine natürliche Zahl bei Division durch 9 den Rest

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 bzw. 8,

so ergibt ihr Quadrat jeweils den Rest

0, 1, 4, 0, 7, 7, 0, 4 bzw. 1;

d. h., für jede Quadratzahl ist der Rest, den sie bei Division durch 9 ergibt, eine der Zahlen 0, 1, 4, 7. Wenn die Summe dreier Quadratzahlen durch 9 teilbar ist, so gilt das auch für die Summe der Reste, die diese Quadratzahlen jeweils bei Division durch 9 ergeben.

1. Fall: Einer der Reste ist 0.

Dann ist die Summe der beiden anderen Reste durch 9 teilbar. Alle Summen aus zwei Summanden, von denen jeder eine der Zahlen 0, 1, 4, 7 ist, sind aber

$0+0=0, 0+1=1, 0+4=4, 0+7=7, 1+4=5, 1+7=8, 4+7=11$.

Daher verbleibt nur die Möglichkeit, daß auch die beiden anderen Reste 0 sind; d. h., es folgt: Alle drei Quadratzahlen sind durch 9 teilbar.

2. Fall: Einer der Reste ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

Dann ergibt die Summe der beiden anderen

Reste bei Division durch 9 den Rest $\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Hierfür verbleibt unter den Summen (1) nur die Möglichkeit, daß die beiden anderen Reste

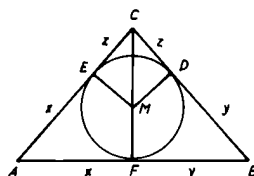
$\begin{pmatrix} 1 \text{ und } 7 \\ 1 \text{ und } 4 \\ 4 \text{ und } 7 \end{pmatrix}$ lauten.

In jedem dieser Fälle ergeben also genau zwei der drei Quadratzahlen bei Division durch 9 den gleichen Rest.

Damit ist für jeden möglichen Fall der verlangte Beweis geführt.

3. Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$ und $\overline{AB}=c$ gegeben. Der Inkreis dieses Dreiecks berühre die Seite BC in D , die Seite CA in E und die Seite AB in F .

Ermitteln Sie die Längen der Seitenabschnitte $\overline{BD}$, $\overline{DC}$, $\overline{CE}$, $\overline{EA}$, $\overline{AF}$ und $\overline{FB}$, in Abhängigkeit von a , b und c ausgedrückt!



Lösung: Es sei M der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC . Die Seiten des Dreiecks sind Tangenten an den Inkreis, also gilt $\overline{ME} \perp \overline{AC}$ und $\overline{MF} \perp \overline{AB}$. Weiter folgt $\triangle AEM \cong \triangle AFM$; denn diese Dreiecke stimmen in den Seitenlängen $\overline{AM} = \overline{AM}$, $\overline{ME} = \overline{MF}$ und in der Größe $\sphericalangle AEM = \sphericalangle AFM$ desjenigen Winkels überein, der in beiden Dreiecken als rechter Winkel jeweils der größten Seite gegenüberliegt. Daher ist $\overline{AE} = \overline{AF}$. (Die hier erhaltene Aussage, daß auf den Tangenten von einem Punkt A an einen Kreis die Strecken $\overline{AE}$ bis zu den Berührungspunkten einander gleichlang sind, kann auch als bekannt-sich zeigen, daß $\overline{BF} = \overline{BD}$ und $\overline{CD} = \overline{CE}$ gilt.)

Für die gesuchten Seitenabschnitte $\overline{AE} = \overline{AF} = x$, $\overline{BF} = \overline{BD} = y$, $\overline{CD} = \overline{CE} = z$ gilt somit das Gleichungssystem

$$y + z = a, \quad (1)$$

$$x + z = b, \quad (2)$$

$$x + y = c. \quad (3)$$

Addiert man (2) und (3) und subtrahiert (1), so folgt nach Division durch 2

$$x = \frac{1}{2}(b + c - a).$$

Entsprechend ergibt sich

$$y = \frac{1}{2}(c + a - b),$$

$$z = \frac{1}{2}(a + b - c).$$

Die gesuchten Längen sind also

$$\overline{AE} = \overline{AF} = \frac{1}{2}(b + c - a),$$

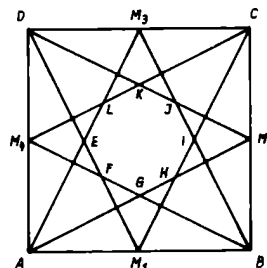
$$\overline{BF} = \overline{BD} = \frac{1}{2}(c + a - b),$$

$$\overline{CD} = \overline{CE} = \frac{1}{2}(a + b - c).$$

(Da die Existenz (des Inkreises und folglich auch) der gesuchten Längen als bekannt ver-

wendet werden darf, ist eine Probe (oder ein Nachweis der Äquivalenz zwischen dem System (1), (2), (3) und der Angabe von x , y , z) nicht erforderlich.)

4. Verbindet man in einem Quadrat $ABCD$ die Mittelpunkte M_1 , M_2 , M_3 und M_4 der Seiten jeweils mit den beiden gegenüberliegenden Eckpunkten, so entsteht ein achtstrahliger Stern, der in seinem Innern ein Achteck $EFGHIJKL$ (siehe Bild) enthält.



Stellen Sie fest, ob dieses Achteck regelmäßig ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Hinweis: Ein n -Eck heißt regelmäßig, wenn alle seine Seiten gleich lang und alle seine Innenwinkel gleich groß sind.

Lösung: Es sei M der Schnittpunkt der Diagonalen und a die Seitenlänge des Quadrates. Da M_4M_2 Symmetrieachse des Quadrats ist, liegt M auf M_4M_2 , und da M_4M Symmetrieachse des Rechtecks AM_1M_3D ist, liegt E auf M_4M . Da ferner AC Symmetrieachse des Quadrats bezüglich der Spiegelung ist, die B und D sowie M_4 und M_1 jeweils untereinander vertauscht, liegt F auf AC .

Jeweils nach einem Teil des Strahlensatzes folgt nun

$$\frac{\overline{M_4E}}{\overline{DM_3}} = \frac{\overline{AM_4}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}, \text{ oder } \overline{M_4E} = \frac{a}{4}, \overline{EM} = \frac{a}{4}$$

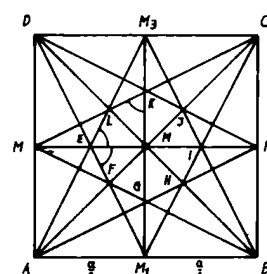
$$\text{und } \frac{\overline{FM}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{M_4M}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}, \text{ also } \overline{FM} = \frac{\overline{AM}}{3}.$$

Da $\overline{AM}$ die halbe Diagonale des Quadrats ist, gilt $\overline{AM} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ und daher $\overline{MF} = \frac{a}{6}\sqrt{2}$.

Wegen $\frac{1}{6}\sqrt{2} \neq \frac{1}{4}$ folgt $\overline{ME} \neq \overline{MF}$ und hieraus

nach der Seiten-Winkel-Relation $\sphericalangle MEF \neq \sphericalangle MFE$.

Da sowohl M_4M_2 als auch AC Symmetrieachsen der gesamten Figur sind, gilt $\sphericalangle LEF = 2 \sphericalangle MEF$ und $\sphericalangle EFG = 2 \sphericalangle MFE$. Daher folgt aus der vorigen Ungleichung auch $\sphericalangle LEF \neq \sphericalangle EFG$. Da somit in dem Achteck $EFGHIJKL$ zwei verschieden große



Innenwinkel vorkommen, ist es nicht regelmäßig.

2. Lösungsweg: Man zeigt

$$\triangle MEM_3 \cong \triangle MKM_4 \cong \triangle MEM_1,$$

$$\overline{M_3M} : \overline{EM} = 2:1 \text{ und folglich}$$

$$\sphericalangle M_3EM = \sphericalangle M_4KM = \sphericalangle M_1EM = \phi \text{ mit } \tan \phi = 2.$$

Daher ist einerseits $\sphericalangle FEL = 2\phi$, andererseits nach dem Innenwinkelsatz für Vierecke, auf $EMKL$ angewandt, $\sphericalangle ELK = 270^\circ - 2\phi$. Wäre das Achteck regelmäßig, so folgte $2\phi = 270^\circ - 2\phi$, $\phi = 67,5^\circ$. Wegen $\tan 67,5^\circ \neq 2$ ist damit ein Widerspruch erreicht.

Olympiadeklasse 11/12

1. Man ermittle alle Tripel $[x, y, z]$ reeller Zahlen, für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist:

$$\left. \begin{aligned} x - \frac{1}{y} &= 1, \\ y - \frac{1}{z} &= 1, \\ z - \frac{1}{x} &= 1. \end{aligned} \right\}$$

2. Ist $ABCD$ ein konvexes Viereck, seine Fläche also durch die Diagonale AC in zwei Dreiecksflächen, nämlich die des Dreiecks ABC und die des Dreiecks ACD , zerlegt, so werde der Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit F_1 , der des Dreiecks ACD mit F_2 sowie die Größe des Winkels $\sphericalangle DAB$ mit α bezeichnet.

Von einem konvexen Viereck $ABCD$ seien nun die folgenden Eigenschaften gefordert:

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD}, \quad (1)$$

$$\overline{AB} > \overline{CD}, \quad (2)$$

$$\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} \quad (3)$$

$$\overline{AC} \perp \overline{BC}. \quad (4)$$

Man beweise, daß die Forderungen (1) bis (4) erfüllbar sind und daß die Werte von $F_1 : F_2$ und α durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind. Man ermittle diese Werte.

3. 100 Touristen sind in 100 verschiedenen Städten beheimatet, in jeder dieser Städte genau einer der Touristen. Keine zwei von ihnen sind miteinander bekannt. Sie unternehmen durch genau diese Städte Rundreisen, und zwar

a) als Touristengruppe (alle 100 Touristen machen gemeinsam ein und dieselben Reisen),
b) als Einzelreisende (jeder legt die Reihenfolge und die jeweilige Aufenthaltsdauer für die einzelnen Städte selbst fest, die Reisen erfolgen unabhängig voneinander).

Ferner treffen sie die folgende sonderbare Vereinbarung: Je zwei dieser Touristen machen sich genau dann miteinander bekannt, wenn sie sich zum ersten Mal gemeinsam in einer Stadt befinden, in der keiner dieser beiden Touristen beheimatet ist.

Ermitteln Sie im Fall a) und im Fall b) jeweils die kleinste natürliche Zahl $n > 0$, für die die folgende Aussage (*) wahr ist!

(*) Die Reisewege und -termine lassen sich so festlegen, daß jeder Tourist spätestens dann mit jedem anderen bekannt geworden ist, wenn er in n Städten gewesen ist.

4. a) Man untersuche, ob die für alle reellen Zahlen x durch

$$f_1(x) = \frac{\sin(x\sqrt{2})}{1 + \sin^2(x\sqrt{2})}$$

definierte Funktion f_1 periodisch ist.

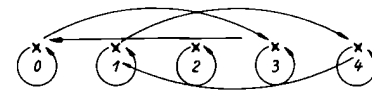
b) Man untersuche, ob die für alle reellen Zahlen x durch

$$f_2(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin^2(x\sqrt{2})}$$

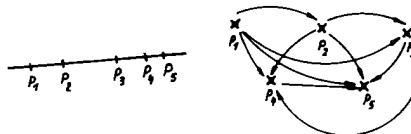
definierte Funktion f_2 periodisch ist.



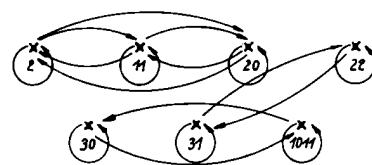
$$(2) R_2 = \{[0;0], [1;1], [2;2], [3;3], [4;4], [0;3], [3;0], [1;4], [4;1]\}$$



$$(3) R_3 = \{[P_1;P_2], [P_1;P_3], [P_1;P_4], [P_1;P_5], [P_2;P_3], [P_2;P_4], [P_2;P_5], [P_3;P_4], [P_3;P_5], [P_4;P_5]\}$$



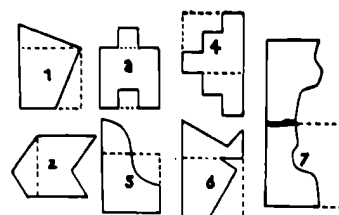
$$(4) R_4 = \{[2;2], [11;11], [20;20], [22;22], [30;30], [31;31], [1011;1011], [2;11], [11;2], [2;20], [20;2], [11;20], [20;11], [1011;30], [30;1011], [22;31], [31;22]\}$$



Lösungen zu: alpha-heiter 6/79

Stadtplan

Das Haus mit den Koordinaten C5 erfüllt die Bedingungen.



Rätselspaß mit π

Die richtige Reihenfolge ist: E - 1 - 6 - 12 - 18 - 13 - 7 - 2 - 3 - 4 - 5 - 11 - 17 - 21 - 16 - 10 - 9 - 8 - 14 - 20 - 19 - A

Abschied von 1979

$$1 + 1978 = 1979$$

$$2 + 1977 = 1979$$

$$3 + 1976 = 1979$$

...

$$989 + 990 = 1979$$

$$A = 1979 + 2 \cdot 989 \cdot 1979$$

$$= 1979 + 1978 \cdot 1979$$

$$= 1979(1 + 1978)$$

$$= 1979 \cdot 1979$$

$$= 1979^2$$

„989 · 1978“

Mit einem Schnitt

Die eine Hälfte der Figur 7 muß man nach dem Schnitt so umklappen, daß ein Quadrat entsteht.

Lösungen

Lösungen zu:

Wir arbeiten mit Mengen, Teil 3:

Arbeitsblatt 6

F_1 ist eine eindeutige Abbildung von M auf M ;

$$Vb = \{a, b, c\}; Vb = M; Nb = \{a, b, c\}; Nb = M;$$

$$F_1 = \{[a;b], [b;a], [c;c]\}$$

F_2 ist eine nur eindeutige Abbildung von M auf N ;

$$Vb = \{a, b, c, d\}; Vb = M; Nb = \{e, f, g\}; Nb = N;$$

$$F_2 = \{[a;e], [b;f], [c;g], [d;g]\}$$

F_3 ist eine nur eindeutige Abbildung aus A in B ;

$$Vb = \{1, 2, 8\}; Vb \subset A; Nb = \{2; 4\}; Nb \subset B;$$

$$F_3 = \{[1;2], [2;4], [8;4]\}$$

F_4 ist eine nicht eindeutige Abbildung von R in S ;

$$Vb = \{0, 5, 10, 15\}; Vb = R; Nb = \{-3, 12, 2\};$$

$$Nb \subset S;$$

$$F_4 = \{[0; -3], [0; 2], [5; 12], [10; -3], [15; 2]\}$$

Man schreibe als Menge geordnete Paare:

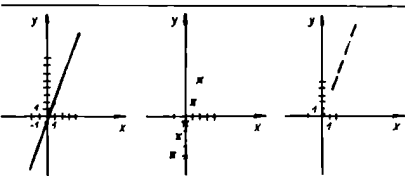
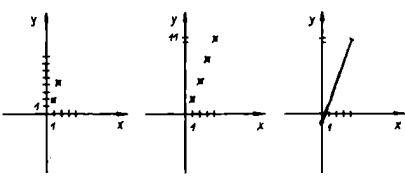
$$F_1^{-1} = \{[b;a], [a;b], [c;c]\}$$

$$F_2^{-1} = \{[e;a], [f;b], [g;c], [g;d]\}$$

$$F_3^{-1} = \{[2;1], [4;2], [4;8]\}$$

$$F_4^{-1} = \{[-3;0], [2;0], [12;5], [-3;10], [2;15]\}$$

Arbeitsblatt 7



Arbeitsblatt 8

$$(1) R = \{[2;2], [3;3], [4;4], [5;5], [6;6], [2;4], [2;6], [3;6]\}$$

Knopfspielereien

- Ein gleichseitiges Dreieck mit einer Kantenlänge von je vier Knöpfen wird gebildet.
- Man braucht nur drei Schübe: Von oben nach Mitte sieben Knöpfe, von Mitte nach unten sechs Knöpfe, von unten nach oben vier Knöpfe.
- Numerieren wir die Felder im Geist von links nach rechts mit den Zahlen 1 bis 7. Fünf Sprünge sind nötig: 5 nach 1, 2 nach 5, 6 nach 2, 3 nach 6, 7 nach 3. Wenn man nur über einen Knopf oder zwei Knöpfe springen darf, wird es schwieriger. Dann braucht man 10 Züge.

Kryptarithmetik

$$\begin{aligned} 1820 + 53213 + 9287 &= 64320 \\ 598 + 26710 + 19010 &= 46318 \\ 298 + 39618 + 975 &= 40891 \\ 5962 + 908 + 6976 &= 13846 \end{aligned}$$

Silbenrätsel

- Kreisbogen; 2. Diagonale; 3. Kurvenschablone; 4. Substitution; 5. Radius; 6. Camille; 7. Kavalierperspektive; 8. Lineal; 9. Ebene; 10. Original – BONAVENTURA CAVALIERI

Lösungen zu: Winterfreuden

Bild 1: Alle haben sich bewegt: der hockende Sportfreund seinen linken Skistock, der stehende seine Hand. Das Mädchen hat ihr Stirnband heruntergezogen und ihre linke Hand versteckt. Der Mann neben ihr hält jetzt seine Pfeife anders, und der kleine Junge hat die Augen geschlossen.

Bild 2: Mehr Einzelheiten: Nr. 2 – Gürtelschnalle; Nr. 5 – Mützenbommel; Nr. 8 – Schal; Nr. 10 – Haarband; Nr. 17 – Krawatte. Weniger Einzelheiten: Nr. 7 – Pullovermuster; Nr. 11 – Schlittschuh; Nr. 13 – die Hand des Mannes; Nr. 20 – Hut; Nr. 21 – Puck

Bild 3: Der Damenschuh befindet sich in umgekehrter Stellung oberhalb des wehenden Schals des rechts am Schneemann bauenden Jungen. Sein Absatz wird von einem Zaunbrett und der schwarzen Hose des Mannes begrenzt, dem ein wohlgezielter Schneeball gerade den Hut vom Kopfe reißt.

Bild 4

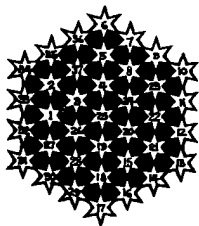
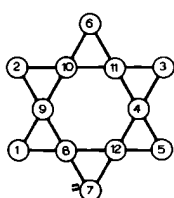


Bild 5



Lösung zu: AGs im Blickpunkt

$$P = \frac{(x^2 - a^2)(x^2 + a^2) \dots (x^{2n-1} + a^{2n-1})}{x - a}$$

$$= \frac{x^{2n} - a^{2n}}{x - a}$$

Lösungen zum alpha-Wettbewerb,

Heft 2/79, Fortsetzung:

Ma 10/12 ■ 1876 Aus dem Sinussatz $a:b:c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$ folgt:

$$\begin{aligned} (1) \quad \sin \beta &= \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} \text{ bzw.} \\ (2) \quad \sin^2 \beta &= \frac{b^2 \cdot \sin^2 \alpha}{a^2} \text{ und} \\ (3) \quad \sin \gamma &= \frac{c \cdot \sin \alpha}{a} \text{ bzw.} \\ (4) \quad \sin^2 \gamma &= \frac{c^2 \cdot \sin^2 \alpha}{a^2} \end{aligned}$$

Wir formen nun die rechte Seite der Gleichung unter Verwendung von (2), und (4) äquivalent um:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma &= \sin^2 \alpha + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \alpha - \frac{c^2}{a^2} \sin^2 \alpha \\ &= \sin^2 \alpha \left(1 + \frac{b^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2} \right) \\ &= \sin^2 \alpha \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2} \right) \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma &= \sin^2 \alpha \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2} \right) \quad | : \sin \alpha \\ 2 \sin \beta \cos \gamma &= \sin \alpha \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2} \end{aligned}$$

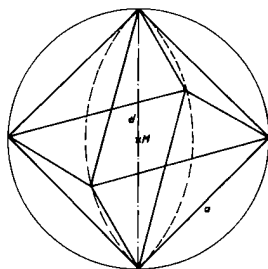
Unter Verwendung von (1) ergibt sich

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} \cdot \cos \gamma &= \sin \alpha \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2} \quad | \cdot \frac{a}{\sin \alpha} \\ 2b \cdot \cos \gamma &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a} \text{ bzw.} \end{aligned}$$

$$2ab \cdot \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2 \text{ bzw. } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma.$$

Das ist der bekannte Kosinussatz. Da alle Schritte äquivalente Umformungen sind, ist die Behauptung bewiesen.

Ma 10/12 ■ 1877 a)



b) Nach dem Satz des Pythagoras gilt $d^2 = a^2 + a^2$ und somit $d = a\sqrt{2}$

c) Für das Volumen der Kugel gilt

$$\begin{aligned} V_K &= \frac{\pi}{6} d^3 \text{ und wegen b) } V_K = \frac{\pi}{6} (a\sqrt{2})^3 \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot a^3 \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Für das Volumen des Oktaeders gilt:

$V_0 = \frac{a^3}{3} \cdot \sqrt{2}$. Nun gilt für das Verhältnis der beiden Volumina

$$\frac{V_K}{V_0} = \frac{\frac{\pi}{6} a^3 \sqrt{2}}{\frac{a^3}{3} \sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Das Volumen der Kugel verhält sich zum Volumen des Oktaeders wie $\pi:1$.

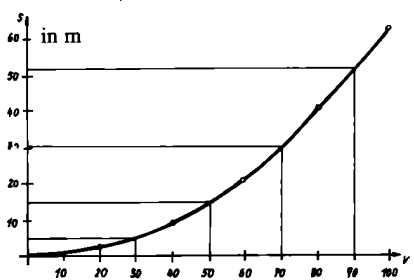
$$\begin{aligned} \text{d) Aus } \frac{V_K}{V_0} &= \frac{\pi}{2} \text{ folgt } V_K = \pi \cdot V_0, \\ V_K &= \pi \cdot 23,87 \text{ cm}^3, \\ V_K &= 75 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Das Volumen der Kugel beträgt 75 cm^3 .

Aus Platzgründen geben wir zu den Physik- und Chemie-Wettbewerbsaufgaben des Heftes 2/79 nur die Schlußsätze wieder:

Ph 6 ■ 56 Marmor hat die Dichte $2,6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ (lt. „Tabellen und Formeln“).

Ph 7 ■ 57 a)



b) Es besteht keine Proportionalität. in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$

c) Ungefähr 0,6 m; 5,8 m; 51,8 m.

d) Ungefähr $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$; $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Ph 8 ■ 58 Der Tauchsieder hat einen Wirkungsgrad von 0,89.

Ph 9 ■ 59 Der Widerstand des Heizkörpers muß rund $16,7 \Omega$ betragen.

Ph 10/12 ■ 60 Der Fußgänger sieht die Straßenbahnen im Abstand von etwa 13 min an sich vorüberfahren.

Ch 7 ■ 45 Unter den gegebenen Bedingungen entstehen $8,5 \text{ t}$ Wassergas.

Ch 8 ■ 46 a) Die theoretisch zur Verbrennung von 1 m^3 Gas erforderliche Luftmenge beträgt rund $0,9 \text{ m}^3$.

b) Die Rauchgase bestehen aus: $18,4\% \text{ CO}_2$ und $81,6\% \text{ N}_2$.

Ch 9 ■ 47 a) Es müssen $122,3 \text{ g}$ des Alkanöls eingesetzt werden.

b) Es müssen $137,3 \text{ g}$ der Säure zur Reaktion gebracht werden.

Ch 10/12 ■ 48 Aus 208 t Anhydrit lassen sich $153 \text{ t } 98\%$ ige Schwefelsäure herstellen.

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Die Lösungen der Olympiade Klasse 10 veröffentlichen wir aus Platzgründen ab Heft 1/80, d. Red.

alpha-Wettbewerb 1978/79

Preisträger

Manuela Wings, Bad Liebenstein; Alexander Mänsch, Holger Neye, Kerstin Kantiem, Ingo Witt, Martin Schnaub, Mario Köppen, alle Berlin; André Weber, Bischofferode; Helge Dürschke, Bitterfeld; Andreas Jock, Blankenfelde; Andrea Fischer, Burkau; Harald Schiffhauer, Buttlar; Peter Strempe, Thomas Lundershausen, Frank Techen, alle Cottbus; Andrea Wetter, Michael Hoffmeier, Tobias Kunisch, Holger Lorenz, alle Dingelstädt; Olaf Jenkner, Dorfchemnitz; Thomas Hübner, Horst Schulze, beide Dresden; Bernd Leifheit, Eigenrieden; Monika Glaß, Claudia Pleyer, beide Eisenach; Bodo Baumbach, Andreas Möller, Astrid Abt, alle Fambach; Jens Wackernagel, Falkenberg; Ilka Forbig, Floh; Kai-Uwe Barholz, Annett Helbig, beide Frankfurt; Ralf Fünfziger, Katrin Burgmann, beide Friedeburg; Heiko Mißfeldt, Gammelin; Susann Laue, Gerbestedt; Ingolf Hintzsche, Gremmin; Erik Opelt, Güstrow; Stefan Große, Katrin Friedrich, beide Halle; Andreas Löffler, Halle-Neustadt; Steffen Heyde, Hohenbucko; Heidrun Schmidt, Mirko Schulze, beide Hoyerswerda; Sabine Sentker, Hettstedt; Michael Kaufhold, Hüpstedt; Martin Jaekel, Jena; Andreas Israel, Jens Siewert, Katrin Richter, Mathias Hänel, alle Karl-Marx-Stadt; Udo Müller, Kaltennordheim; Felix und Anita Baitalowitsch, Kasan (UdSSR); Ralf Laue, Leipzig; Sybille und Claudia Seifert, beide Lichtenberg; Monika Mayr, Linz (Österreich); Reiner Gerlach, Lübs; Hagen Haberland, Mesekenhagen; Jürgen Seifert, Milkau; Petra Klein, Mittelstille; Birgit Polley, Mühlhausen; Ralf Krause, Antje Krause, Christian Voigtländer, alle Neubrandenburg; Arndt Kretzner, Neustadt; Henning Schulz, Claudia Tiersch, beide Potsdam; Gerald Stibbe, Grit Maciejewski, Lutz Andrews, alle Rostock; Rolf Jurjans, Riga (UdSSR); Frank Schröter, Rotta; Frank Schneevoigt, Salzwedel; Bodo Bricks, Saalfeld; Cornelia Kubacki, Sargstedt; Antje Rudolph, Schkölen; Karin Semm, Schmalkalden; Lydia Balzer, Sondershausen; Beate Nothnagel, Uwe Döll, Christine Häfner, Ralf-Birger Häfner, Rainer Schwäblein, alle Steinbach-Hallenberg; Cordula Gottwald, Stendal; Gerd Mey, Suhl; Holger Wittner, Teterow; Steffen Weber, Tiefenort; Gabriele Wolf, Trusetal; Joachim Riedel, Clemens Kuhn, beide Vacha; Joachim Kleinert, Wernshausen; Frank Zapke, Uwe Tews, Marion Reek, alle Wittenberg; Cornelia Escher, Wolgast; Ray Langlotz, Unterbreizbach; Gert Künzelmann, Krina; Heiko Storandt, Wernshausen

Schwarz-OS Bad Liebenstein; Otto-Grotewohl-OS III, Magnus-Poser-OS, OS V, alle Bad Salzungen; Zentrale OS Bärenklau; OS Bahratal; Kurt-Schweitzer-OS Basdorf; H.-Warnke-OS Bergwitz; Botschafterschule der DDR in der ARÄ, Zille-OS, 26. OS Wolodja Dubinin, alle Berlin; OS Fr. Mehring, Bernburg; OS Bernterode; OS Birkungen; Clara-Zetkin-OS Bischofferode; Kreisklub Math. Bischofswerda; Friedrich-Schiller-OS, Max-Planck-OS, beide Bleicherode; OS Fritz Weineck, Blumberg; Karl-Marx-OS Borna; OS Brandshagen; OS Bregenstedt; OS Breitenworbis; Werner-Seelenbinder-OS Breitung; Pablo-Neruda-OS Britz; Magnus-Poser-OS Bürgel; OS Burkau; Wilhelm-Pieck-OS Burow; Waldemar-Estel-OS Buttlar; Klub Jg. Math., Station Jg. Naturf., Pablo-Neruda-OS, beide Cottbus; OS Deetz; 11. POS Dessau; OS Deuna; OS Deutschenbora; Nicolai-OS Diedorf; OS Diesdorf; OS Makarenko, OS K. Kollwitz, beide Dingelstädt; OS K. Bürger, Dobbertin; Marie-Curie-OS Dohna; alpha-Club Dölgel; Paul-Gruner-OS, 39. OS, beide Dresden; Fr.-Wolf-OS Ebersdorf; OS Fr. Engels, Effelder; OS Geschw. Scholl, Eisenach; John-Schehr-OS Eisleben; OS H. Grundig Ellrich; Hugo-Joachim-OS Espenhain; Th.-Müntzer-OS Fambach; OS K. Niederkirchner, OS E. Weinert, beide Ferchland; B.-Brecht-OS Floh; Dr.-Th.-Neubauer-OS Frankfurt; OS Frauenhain; OS Frauensee; OS Friedeburg; R.-Arnstadt-OS Geisa; Diesterwegschule Geringswalde; E.-Hartsch-OS Gersdorf; OS Gerstungen; J.-Brinckmann-OS Goldberg; Klub Jg. Math. Gräfenhainichen; K.-Krull-OS, O.-Dreus-OS, beide Greifswald; OS J. Gagarin, OS H. Beimler, beide Greußen; OS W. Seelenbinder Gröden; OS Cl. Zetkin Groitzsch; OS Großbodungen; Lessingschule Großpostwitz; OS Großschönau; J.-Gagarin-OS Grünhain; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Diesterweg-OS, beide Guben; Haus d. JP Hagenow; M.-Gorki-OS Hainichen; E.-Thälmann-OS Haldensleben; OS Diesterweg Halle; W.-Koenen-OS, 12. OS, beide Halle-Neustadt; 11. OS Hamm; OS Hammerbrücke; Schule d. DSF Heiligengrabe; P.-Schreier-OS Hennigsdorf; OS Th. Müntzer Hermannsdorf; EOS E. Weinert, 1. OS H. Beimler, beide Herzberg; Goethe-OS Hohenleipisch; OS Hundeshagen; O.-Grotewohl-OS Ilmenau; Goethe-OS Ilsenburg; OS Ivenack; Fr.-Engels-Schule Kaltennordheim; OS A. Becker, Kamsdorf; Cl.-Zetkin-OS Kandelin; H.-Beimler-OS Karbow; Pionierhaus J. Gagarin, P.-Tschaikowski-OS, Fr.-Heckert-OS, Stadtbezirkspionierhaus Mitte-Nord, alle Karl-Marx-Stadt; OS Kieselbach; Th.-Neubauer-Schule Kieselbach; EOS, G.-Eisler-OS, beide Kleinmachnow; OS Th. Müntzer Klettenberg; OS E. Thälmann Klosterfelde; OS Könitz; Station Jg. Naturf. u. Techn. Köthen; OS Kuhfelde; OS Küllstedt; L.-Führberg-OS Laage; alpha-Club OS Latdorf; OS Lauscha; R.-Teichmüller-OS Leimbach; K.-Liebknecht-OS,

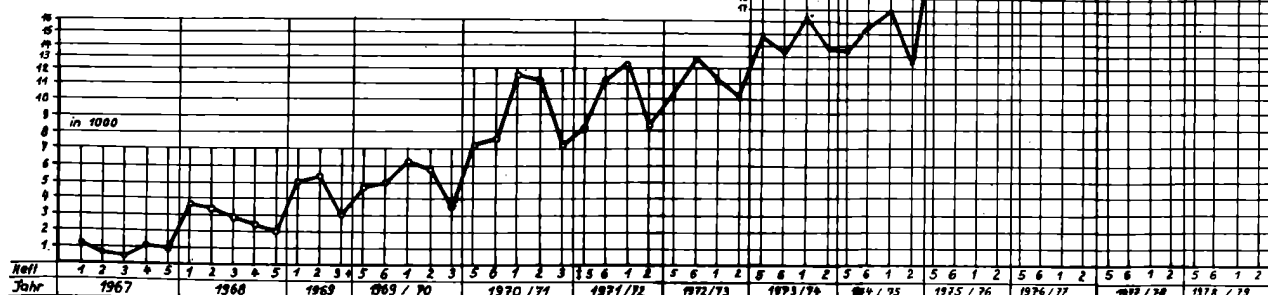
Dr.-S.-Allende-OS, OS IV, EOS Karl Marx, alle Leinefelde; H.-Beimler-OS Leisnig; W.-Pieck-OS Lichte; OS Liebstadt; E.-Schneller-OS Löbnitz; Diesterweg-OS Lobenstein; OS W. Wallstab Löderburg; OS Lössau; R.-Niedermeyer-OS Löwenberg; OS Lubmin; G.-Eisler-OS Martinroda; Th.-Neubauer-OS Meiningen; Fr.-Heckert-OS Milkau; OS Mittelherwigsdorf; OS Mittelstille; OS Naunhof; TOS Neuenhofe; O.-Grotewohl-OS Neukloster; Dr.-Th.-Neubauer-Schule Niederorschel; OS Niedersalza; OS E. Thälmann, EOS W. v. Humboldt, beide Nordhausen; OS W. Seelenbinder Oechsen; OS Osternienburg; Kreisklub Jg. Math. Parchim; OS Dr. Th. Neubauer Pfaffschwende; EOS Rainer Fetscher, Pirna; R.-Luxemburg-OS Plau; Makarenko-OS Plessa; OS 16 Potsdam; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Pritzwalk; OS Quitzböbel; Dr.-Th.-Neubauer-OS Rackwitz; Pestalozzi-OS Radebeul; OS Radis; Cl.-Zetkin-OS Raschau; OS Rehna; J.-Gagarin-OS Ribnitz; H.-Matern-OS Riesa; J.-C.-OS Röbel; Ziolkowski-OS Roßdorf; Haus d. JP, 34. OS M. Reichpietsch, beide Rostock; W.-Pieck-OS Rotta; Fr.-Weineck-OS Rottleben; OS Rüdnitz; OS Saal; OS II Saalfeld; alpha-Club Sachsendorf; W.-Pieck-OS Sangerhausen; OS Schernberg; M.-Gorki-OS Schkölen; OS H. Danz, OS J. G. Seume, OS K. Marx, EOS G. Dimitroff, alle Schmalkalden; OS Schmölln; E.-Schneller-OS Schöneiche; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Schönwalde; OS Schule der DSF Schorrsow; E.-Thälmann-OS, Martin-May-OS, beide Sebnitz; OS Siedenbollentin; OS A. Hennecke Siersleben; OS J. R. Becher Sondershausen; Kreisklub Jg. Math. OS A. Becker, Spremberg; OS Stadtlengsfeld; OS E. Thälmann Steinbach-Hallenberg; OS Steinsdorf; O.-Grotewohl-OS, W.-Heinze-OS, Haus d. JP, alle Stralsund; OS E. Schneller Stülpe; 12. OS Dr. R. Sorge Suhl; EOS Karl Marx, H.-Riecke-Schule, beide Tangerhütte; OS Teistungen; OS K. Niederkirchner Teterow; Fr.-Mehring-OS Tiefenort; E.-Schneller-OS Töplitz; Pestalozzische Torgelow; OS W. Pieck Trusetal; Goethe-OS Ueckermünde; H.-Beimler-OS Unterbreizbach; OS J. G. Seume Vacha; OS Viernau; OS Vitte (Hiddensee); Zentrale OS Waldau; J.-Fučík-OS Waldheim; Goetheschule, Fr.-Engels-Schule, beide Waren; OS L. Fühnberg Wegeleben; OS Weilar; Sprachheil-OS Weimar; OS E. Thälmann Weinböhla; OS Weißenborn-Lüderode; OS Wernshausen; OS O. Grotewohl Westerengel; Cl.-Zetkin-OS Wiehe; alpha-Kollektiv der OS Wingerode; OS W. Lohmann Wittenberg-A.; Schule IV Wittstock; OS H. Heine Wörlitz; OS H. Beimler, Wolfen; Spezialistenlager Jg. Math. Worbis; OS Th. Müntzer Wulfen; H.-Eisler-OS Wusterhausen; OS Zahna; VEB Kombinat Zentronik BBS, Lutherschule, Fr.-Schiller-OS, alle Zella-Mehlis; Fr.-Schiller-OS Zeulenroda; EOS, 5. OS, Prof. Dr.-W.-Du-Bois-OS, alle Zittau; W.-I.-Lenin-OS Zwenkau; OS Zschornowitz

Kollektive Beteiligung

OS Fritz Weineck, Alsleben; Haus der JP Altenburg; E.-Schneller-OS Altentreptow; W.-Ulbricht-OS Altwigshagen; Karl-Marx-Schule Anklam; OS Asbach; OS Bad Bibra; OS Bad Gottleuba; Rudolf-

Entwicklung des alpha-Wettbewerbs (absolut)

- * umgestellt von Kalenderjahr auf Schuljahr
- ** ab 1971/72 nur noch 4 Wettbewerbe pro Jahr



Winterfreuden



Gruppenbild

„Keine Bewegung! Ich fotografiere noch einmal!“ Wer hat sich nicht an diese Anweisung gehalten?



Bild 1

Komm mit aufs Eis!

Ein Teil dieser Zeichnung kann aus den 21 nummerierten Zeichnungsbausteinen zusammengestellt werden. In manchen Bausteinen fehlen aber bestimmte Einzelheiten, in manchen sind Einzelheiten vorhanden, die auf der großen Zeichnung fehlen. Welche Bausteine sind das, und in welchen Einzelheiten weichen sie von der großen Zeichnung ab?

Bild 2



Da kannst du suchen!

Unter der Zeichnung sieht man fünf Gegenstände. Einer davon ist sehr sorgfältig auf dem hübschen Winterbild versteckt worden. Wer findet ihn?



Bild 3



Zwei leuchtende Sterne

Auf Bild 4 sind zahlreiche Sterne ohne Zahl dargestellt. Durchlaufe das Bild so, daß du dabei jeden berührten Stern mit den Zahlen 1 bis 37 markierst! Jeden Stern darfst du nur einmal erreichen, und der nächste Schritt muß immer auf einen benachbarten Stern erfolgen. (Einige Zahlen sind bereits angegeben.)

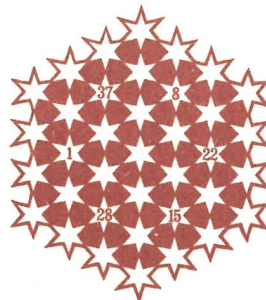


Bild 4

Auf Bild 5 sind in die kleinen Kreise des Sterns die Zahlen 1 bis 12 so einzutragen, daß die Summe aller Zahlen auf jeder Geraden genau 26 beträgt.

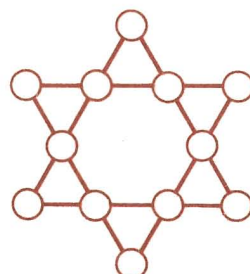


Bild 5